



**UNIVERSIDAD MICHOCANA DE
SAN NICOLÁS DE HIDALGO**

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO-MATEMÁTICAS

Mat. Luis Manuel Rivera Gutiérrez

**La Enseñanza del Cálculo y los
Infinitésimos**

T E S I S

que para obtener el grado de:

MAESTRA EN CIENCIAS EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

PRESENTA:

Diana Itzel Sepúlveda Jáuregui

DIRECTOR DE TESIS:

Dr. José Ismael Arcos Quezada

Morelia, Michoacán, Octubre de 2012.

Agradecimientos

Tengo la oportunidad de agradecer a todas las personas que contribuyeron a que fuera posible la elaboración del trabajo que hoy presento.

Al Dr. José Ismael Arcos Quezada por haber sido mi guía a lo largo del desarrollo de este trabajo de tesis.

A mis padres y hermanos por el apoyo que me brindaron, en particular a mi padre por sus acertadas opiniones sobre la problemática que aborda este trabajo.

A mi esposo Raúl, por impulsarme en todo momento a cumplir mis metas. A mis hijos.

A mis profesores Dr. Armando Sepúlveda López, Dr. Jesús Roberto García Pérez, Dr. José Gerardo Tinoco Ruiz y Dr. Francisco Domínguez Mota, por sus contribuciones a la mejora de este trabajo.

Contenido

Prefacio	vii
Capítulo 1.....	1
Planteamiento del Problema	1
1.1 Problema de investigación	1
1.2 Objetivos de la investigación	2
1.3 Preguntas de investigación	2
Capítulo 2.....	5
Distintos Cálculos: los orígenes.....	5
2.1 Las cantidades infinitamente pequeñas. Aceptarlas o no	6
2.2 El problema de las cuadraturas	7
2.2.1 Cuadratura con infinitésimos.....	7
Los infinitésimos y el Cálculo de áreas.....	8
2.2.2 Cuadratura con exhaustión.....	10
El rigor en la matemática griega y el método de Eudoxo	11
El Método de exhaustión antes de Arquímedes.....	12
El Método de Arquímedes.....	16
Capítulo 3.....	18
El Cálculo original.....	18
3.1 El Cálculo infinitesimal en sus orígenes: Leibniz y Newton	19
3.1.1 Introducción: ¿Por qué 2000 años?	20
3.1.2 Los conceptos del Cálculo en Newton.....	21
<i>Introducción al tratado de la cuadratura de las curvas.</i>	23
<i>Sobre la cuadratura de las curvas.</i>	25
3.1.3 El Cálculo Infinitesimal en Leibniz y sus seguidores.	26
Análisis de los infinitamente pequeños para el estudio de las líneas curvas.....	26
El Cálculo infinitesimal de Bezout	33
3.2 La búsqueda del rigor y el Análisis de Cauchy	39
Capítulo 4.....	41
El Cálculo en la escuela.....	41

4.1 La diferencial en los textos de Cálculo en el siglo XIX.....	41
4.1.1 Eliminación de los infinitesimales del Cálculo	41
4.1.2 El Análisis de Cauchy y los nuevos conceptos básicos.....	42
4.1.3 La diferencial en los textos de Cálculo del siglo XIX.....	47
4.2 Los textos del siglo XX.....	52
4.2.1 Observaciones sobre la estructura general de los textos.	53
4.2.2. Derivada y diferencial.....	57
4.2.3 Cuadratura e integral en los textos actuales	66
La integral definida formalmente	66
4.3 Entrevista a profesores de Cálculo de una Facultad de Ingeniería.....	78
4.3.1 Entrevista general	79
4.3.2 Entrevista semi estructurada basada en problemas relacionados con el concepto de límite.	81
Capítulo 5.....	85
Conclusiones y reflexiones finales	85
Anexos.....	89
A.1 Los infinitésimos y el postulado de Arquímedes en el estudio de las paralelas....	89
A.2 Cuadratura de la parábola.....	92
Bibliografía.....	99

Prefacio

En el presente trabajo se tiene interés por hacer un análisis sobre las dificultades que surgen al estudiar algunos de los conceptos del Cálculo, principalmente, en estudiantes de ingeniería aunque algunas situaciones similares también están presentes en estudiantes de las escuelas de ciencias, debido a que dicha materia aparece como parte importante del currículum en ambas carreras. Particularmente interesan las dificultades relacionadas con el uso de cantidades infinitamente pequeñas. Esta situación provoca que los profesores interesados en los resultados de los cursos que imparten, busquen distintas formas de enseñar los contenidos curriculares, que propicien en los estudiantes el aprendizaje de los conceptos del Cálculo. Necesariamente, este análisis nos conduce a revisar algunos aspectos de los inicios del Cálculo y su evolución hasta nuestros días.

El Cálculo es la rama de las matemáticas que ha sido relacionada con el estudio de los procesos y fenómenos de cambio, identificadas como *matemáticas del cambio*. De finales del siglo XVI y a lo largo del siglo XVII su aplicación se ha dejado sentir en las más diversas áreas del conocimiento, convirtiéndose en una herramienta fundamental para resolver distintos tipos de problemas, pues posee un poder unificador de acercamientos geométricos, aritméticos y algebraicos. Esto no significa, de ninguna manera, que el Cálculo deba ser visto sólo como un “instrumento de carácter técnico”, pues involucra una serie de ideas y conceptos que han mantenido ocupada la mente de distinguidos matemáticos durante siglos. Estas ideas están relacionadas con velocidad, razón de cambio, variación, acumulación, área, volumen, tangente a una curva, entre otros.

Sin embargo, a pesar de la potencia de los métodos y procedimientos para resolver problemas, existen diferentes concepciones que se derivan de las posturas iniciales de sus precursores; uno estático de Leibniz (1647-1716) y otro dinámico de Newton (1642-1727). Por un lado, tenemos la posición inicial de Leibniz quien estudia los procesos de cambio mediante el análisis de las funciones, cuya notación ha permanecido a lo largo del tiempo y cuyos métodos, con perspectivas geométricas, se caracterizan por la sencillez para arribar a las soluciones; a este acercamiento se le conoce como el enfoque *infinitesimalista*. Por otro lado, tenemos la posición de Newton que estudia los procesos de cambio a partir, precisamente, del análisis en movimiento de las cosas; a este acercamiento se le llama el enfoque de las fluxiones. En consecuencia, de las concepciones de los inventores del Cálculo se obtienen dos interpretaciones distintas, pero compatibles, de la misma rama de las matemáticas.

Cabe señalar que en el recuento histórico del surgimiento del Cálculo, es inevitable encontrarse con la disputa generada en aquella época respecto a la autoría de esta nueva rama de las matemáticas, no llevada a cabo precisamente por los involucrados en la disputa, Leibniz y Newton, sino por los compañeros cercanos a ellos, la cual ha continuado por más de trescientos años.

Como consecuencia de estas concepciones, en matemáticas se tienen, y en general en filosofía de las ciencias, dos interpretaciones de lo que es “el infinito actual” y “el infinito potencial”, posturas que serán analizadas en el desarrollo de este trabajo tomando como base argumentos que fueron esgrimidos por los antiguos griegos; en particular por Arquímedes de Siracusa, matemático, físico, ingeniero y astrónomo griego que vivió de 287 a 212 antes de Cristo (a. C.).

Este es un paso obligado para analizar el origen de los infinitésimos, pues fue Arquímedes uno de los primeros en utilizar ideas infinitesimalistas para calcular áreas de polígonos y secciones curvas, así como para calcular volúmenes de cuerpos con superficies curvas. Es posible que Arquímedes haya recurrido a las nociones de infinito actual e infinito potencial en sus trabajos, por ejemplo en la cuadratura y la cubatura (volumen) de figuras. Además, el postulado que lleva su nombre, *Postulado de Arquímedes*, abre el camino para las investigaciones geométricas desarrolladas a partir del Siglo XVII (d. C.) sobre el *Postulado de las paralelas*, planteado por Euclides alrededor del año 300 a C. en su obra maestra, *Los Elementos*.

El análisis de las consecuencias de la aplicación de estos enfoques en la enseñanza del Cálculo y de sus efectos en el aprendizaje de los estudiantes, es una tarea pendiente en el campo de la educación matemática; lo cierto es que la forma en la que actualmente se enseña está parcialmente permeada con tintes de formalismo, cuyo enfoque se deriva de los trabajos desarrollados por Abel, Cauchy y Weierstrass en el siglo XIX, y generalmente presenta serias dificultades de aprendizaje para la mayoría de los estudiantes de ingeniería y de matemáticas, las cuales, al parecer, también están presentes en algunos profesores y personas que hacen uso del Cálculo en su trabajo profesional. A este acercamiento le llamaremos enfoque *formal*.

Una hipótesis que está presente en el desarrollo de este trabajo, es que la falta de comprensión de las nociones básicas del Cálculo, por una buena cantidad de estudiantes y profesores, convierte a las clases en agotadoras sesiones escolares donde el esfuerzo de los estudiantes se concentra en aprender, únicamente, las recetas que le permitirán dar respuesta a cierta clase de cuestiones, con la esperanza de que éstas sean la base de las evaluaciones del curso. Para ello, quizá, también contribuye el complicado lenguaje utilizado para abordar el estudio formal del Cálculo, mismo que ha sido clasificado por la corriente dominante impuesta a partir de los trabajos de Cauchy como “el lenguaje verdadero” y, sin embargo, este acercamiento puede representar obstáculos insuperables para la mayoría de los estudiantes que se inician en el estudio de esta área. Entonces, es posible que un enfoque rigorista resulte poco didáctico en las aulas.

Así, el análisis documental que desarrollamos en el presente trabajo permite observar cómo, algunos de los libros de texto más utilizados en el estudio del Cálculo en las escuelas de ingeniería, presentan algunos de los conflictos que hemos expuesto; por un lado, desarrollan el tema en el lenguaje formal y “verdadero” y, por el otro, simplifican la explicación en forma adecuada mediante aspectos intuitivos e “informales”, bajo la expectativa de que los estudiantes ya cuentan con las bases para entender ese acercamiento; aproximándose, éste último, a lo descrito por Leibniz.

Contenido de los capítulos

La estructura que se ha seguido en este trabajo es la siguiente:

En el **Capítulo 1**, se plantean el problema de investigación que se desea abordar, los objetivos de la investigación y las preguntas que permitirán el análisis del problema. En el **Capítulo 2**, se describe una revisión histórica de los elementos que dieron pie al surgimiento del Cálculo. En el **Capítulo 3**, se muestra el nacimiento del Cálculo como una rama de las matemáticas con sus respectivos creadores y su presencia en la enseñanza, desde siglo XVII hasta el siglo XIX. En el **Capítulo 4**, se muestra el análisis de algunos de los textos de Cálculo más usados en las escuelas de ingeniería como *Cálculo con geometría analítica* de Leithold, *Cálculo trascendentes tempranas* de Stewart; así como uno de los textos formales usado en las escuelas de ciencias como lo es *Cálculo* de Spivak. Finalmente, en el **Capítulo 5**, se presentan de manera detallada las conclusiones obtenidas en este trabajo, así como recomendaciones para trabajos futuros.

Capítulo 1

Planteamiento del Problema

Regularmente, los cursos de Cálculo que se ofrecen en una facultad de ciencias, son de carácter completamente distinto a los cursos que se ofrecen en las escuelas de ingeniería, donde se privilegian los acercamientos intuitivos e infinitesimalistas para favorecer la resolución de problemas de aplicación; en tanto que, en las escuelas de ciencias se combinan los acercamientos intuitivos y formales de las propiedades de los números (“el análisis”) para desarrollar el discurso de las matemáticas del cambio. Esto representa un salto cualitativamente diferente en cuanto a los resultados de los procesos de formación entre estudiantes de una u otra carrera.

Esto conduce a que haya diferencias en los acercamientos de los cursos de Cálculo que se ofrecen, quizás esto motive la presencia de concepciones que afirman la existencia de más de un Cálculo, lo cual corresponde más bien al enfoque con el cual se enseña y no a las raíces del Cálculo; por ejemplo, en los cursos de Cálculo de la ingeniería resulta necesario el uso de las cantidades infinitamente pequeñas o infinitamente grandes, que son consecuentes con los acercamientos intuitivos para obtener, rápidamente, resultados que son aceptados como verdaderos.

1.1 Problema de investigación

En el estudio y desarrollo de los temas del Cálculo en cuanto a la aplicación de sus técnicas típicas, necesariamente se está ligado a alguna de las dos concepciones, antes mencionadas, sobre lo que es el Cálculo escolar; sin embargo, puede ser que los estudiantes e incluso algunos profesores no sean conscientes de ello debido, quizás, al desconocimiento de la existencia de éstas. En esto puede influir, por un lado, que los libros de texto no manifiestan explícitamente la concepción en la que se están basando para desarrollar cierto tema y, por el otro, que suele ser un tema del que regularmente se evade su discusión. Cabe señalar que los infinitesimales fueron intencionalmente desechados de la enseñanza (Arcos, 2009). Así, una

tarea pendiente en la educación matemática es poner en claro cuál de las dos concepciones se está utilizando en determinado tema, en los libros de texto que son utilizados en las escuelas de ingeniería.

Esto es, el análisis de los libros de texto usados en las escuelas de ingeniería nos permitirá observar la (o las) tendencia(s) de determinado autor al utilizar alguna de las concepciones, incluso puede ser que encontremos una mezcla de ellas; aquí lo interesante sería advertir las consecuencias que ello tiene en cuanto al uso de recursos para resolver problemas y en el aprendizaje de los conceptos matemáticos. La importancia de esto radica en la forma en que los estudiantes realizan sus acercamientos para resolver problemas de Cálculo y la manera en que utilizan los conceptos y procedimientos, sin duda, generan las concepciones que los estudiantes tienen acerca de lo que es el Cálculo y más tarde esto se pondrá de manifiesto en el desarrollo del ejercicio profesional.

Así, el problema de investigación que se abordará en este trabajo es:

¿Cómo se manifiestan los enfoques sobre el Cálculo en algunos de los libros de texto de ingeniería más usuales y cómo influyen éstos en la manera de utilizar los conceptos y procedimientos en la resolución de problemas?

Es necesario basar la enseñanza del Cálculo en las escuelas de ingeniería en la resolución de problemas, puesto que ésta es una de las competencias matemáticas que el ingeniero debe tener en su actividad profesional.

1.2 Objetivos de la investigación

El objetivo principal de esta investigación es:

Analizar ventajas y desventajas en el aprendizaje del Cálculo a partir de la manera en que se presenta el concepto de diferencial en contraste con la presentación infinitesimalista, considerando que en el contexto usado en los textos para ingenierías aparece más el de Cauchy.

1.3 Preguntas de investigación

¿Es pertinente definir y utilizar las cantidades infinitamente pequeñas en los cursos de Cálculo?

La historia de diferentes ramas de las matemáticas muestra ejemplos en los que las cantidades infinitamente pequeñas se utilizaron para resolver problemas; una revisión de los libros de texto utilizados en los cursos de Cálculo nos permitirá ver cómo se incorporan y

cómo se hace uso de estas cantidades. En los hechos, en los cursos de Cálculo de nivel medio superior y de escuelas de ingeniería, a la hora de calcular límites para obtener derivadas se hace uso de estas ideas al despreciar cantidades infinitamente pequeñas e infinitamente grandes; lo cual, muestra la pertinencia del uso de infinitésimos.

¿Si el concepto central de un primer curso de Cálculo se desplaza del límite a la diferencial, qué se gana y qué se pierde, desde el punto de vista de la enseñanza?

Esta pregunta nos permite ubicarnos en la situación hipotética de lo que ocurriría si los conceptos centrales y asociados con el Cálculo, se basan en la noción de diferencial y no en la de límite. Habría que ver en qué sentido y qué tan riguroso se manejan ambas nociones en los libros de texto comúnmente utilizados en las escuelas de ingeniería, principalmente.

¿Qué tan riguroso debe ser el Cálculo en las escuelas de ingeniería?

La experiencia indica que el estudio riguroso no sólo del Cálculo sino de la mayoría de las ramas de las matemáticas, implica altos índices de deserción y reprobación en las escuelas de ingeniería (también en bachillerato y en escuelas de ciencias). Aquí lo importante es averiguar si el acercamiento intuitivo, no riguroso, permite un buen nivel en el entendimiento de los conceptos de Cálculo y su posterior uso en la resolución de problemas.

Capítulo 2

Distintos Cálculos: los orígenes

A continuación se hace una revisión de la literatura relacionada con algunas ideas del Cálculo, sobre todo los asociados a los números infinitamente pequeños o cantidades infinitesimales. Se inicia con un apartado sobre el desarrollo de los conceptos en el Cálculo, para lo cual se hace necesario repasar aspectos históricos de los griegos, en particular de Arquímedes de Siracusa (287-212 a. C.), quien mostró haber comprendido a fondo *Los elementos* de Euclides de Alejandría (325-265 a. C.) y de haber hecho nuevas aportaciones en el contexto del Cálculo, algunas de ellas se adelantaron, claramente, 20 siglos a su época.

Además, en este contexto, se abordan algunos de los trabajos incipientes sobre las cantidades infinitesimales que parecen más importantes para el desarrollo de esta investigación. Finalmente, se concluye esta revisión de literatura con una mirada a algunos de los problemas que dieron origen al Cálculo.

Desde sus inicios, el hombre ha buscado la manera de comprender los fenómenos presentes en la naturaleza. Uno de los primeros problemas que se plantearon los antiguos egipcios y babilonios fue el de la medición; efectivamente, sus necesidades más inmediatas estaban relacionadas con este problema y requería procedimientos y técnicas que le permitieran diferenciar las figuras y cuerpos con base en sus medidas, gestándose así, poco a poco, el establecimiento de la noción de medición y el concepto de medida. Conviene recordar que el conocimiento geométrico del hombre fue evolucionando de un nivel inicial básico, cuyo propósito principal era resolver los problemas más inmediatos, algunos de ellos asociados a su propia subsistencia, a un nivel formal en el que se incorporan métodos y procedimientos para la justificación de las afirmaciones (Eves, 1969). En efecto, se han encontrado evidencias de aproximaciones a diferentes números importantes y fórmulas para calcular áreas de figuras y volúmenes de ciertos objetos, algunas de ellas incorrectas con distinto grado de corrección o aproximación.

Un concepto fundamental que siempre ha estado presente en torno a la medición, es el concepto de infinito. Los griegos fueron los primeros en abordarlo; en los diferentes discursos que elaboraron alrededor del cálculo de áreas de ciertas regiones y volúmenes de algunos cuerpos aparece este concepto; en la cuadratura por un lado, y cubatura por el otro.

Es aquí donde tiene sus orígenes el Cálculo, pues una parte central de su estudio es medir áreas de regiones, regulares o irregulares, como el círculo, sector parabólico, polígonos regulares, así como el cálculo de volúmenes de la esfera, del cono cilíndrico, del elipsoide de revolución, entre otros. De hecho, el Cálculo es la rama de las matemáticas que viene a salvar gran parte de las dificultades enfrentadas por los griegos. Cabe señalar que los griegos se hicieron especialistas en aritmética y geometría, obteniendo resultados sorprendentes, pero es la sistematización del conocimiento matemático desarrollado hasta su época una de sus más grandes contribuciones; a partir de entonces, el modelo ideado por Euclides ha sido la base para organizar y comunicar el discurso matemático.

Con el tiempo, ya en la llamada época moderna, aparecen los “dos tipos de Cálculo”, el llamado Cálculo infinitesimal cuyo sustento son las cantidades infinitamente pequeñas e infinitamente grandes, formuladas inicialmente por Leibniz (1647-1716); y el Cálculo que se fundamenta a partir de la formalización del concepto de límite, planteada por Cauchy (1789-1857). De hecho, los infinitésimos son la fuente de casi todas las críticas que se hacen al “primer tipo de Cálculo”. Sin embargo, cabe mencionar que estas ideas han sido controversiales desde los griegos hasta nuestros días.

2.1 Las cantidades infinitamente pequeñas.

Aceptarlas o no

En la historia de las matemáticas, a partir de los griegos, existen evidencias sobre el uso de los infinitésimos (cantidades infinitamente pequeñas e infinitamente grandes) los cuales contribuyeron al desarrollo de diferentes áreas de las matemáticas y no es de extrañarse que también estuvieran presentes en la enseñanza. Así lo refieren, por ejemplo, Los Elementos de Euclides, fuente principal sobre el conocimiento matemático en su época, en el que se hace uso de la noción de estas cantidades; también aparecen en el trabajo desarrollado por Arquímedes para el cálculo de áreas y volúmenes; además, los inventores del cálculo, Leibniz y Newton (1642-1727), estaban relacionados, en mayor o menor medida, con la enseñanza de las ciencias, en particular, con esta nueva rama de las matemáticas identificada como las matemáticas del cambio.

Actualmente, en las escuelas de nivel bachillerato la enseñanza del Cálculo está cargada de procedimientos algorítmicos y, en los hechos, quizá de una manera no consciente por parte del profesor, al uso de los infinitésimos, tanto en las cuestiones operativas como en las explicaciones sobre los significados. En las escuelas de ingeniería, aunque se muestran tintes de formalismos, la enseñanza se basa en concepciones que se apegan al acercamiento infinitesimalista, otra vez, quizá no consciente por parte del profesor: cuántas veces no hemos

escuchado decir a los estudiantes de este nivel de estudios “si el incremento es .1, a la cuarta potencia ya no es nada”; o bien, “si esa cantidad ya es grande, a la potencia enésima es infinito”.

Si esta es una práctica habitual en la enseñanza de las matemáticas, valdría la pena reflexionar, por parte de profesores y educadores matemáticos, sobre la conveniencia o no de aceptar los infinitésimos tal y como fueron utilizados por Leibniz. La experiencia indica que, en los hechos, los infinitésimos están presentes en la práctica escolar y en el cúmulo de conocimientos que deben tener los profesionistas que hacen uso del Cálculo.

2.2 El problema de las cuadraturas

Es nuestro interés mostrar los diferentes enfoques que se han dado alrededor del problema de las cuadraturas buscando evidenciar las facilidades o dificultades que se pueden presentar al aceptar o no las cantidades infinitesimales, advirtiendo claramente que ésta es una de las cuestiones que ha motivado este trabajo de tesis.

2.2.1 Cuadratura con infinitésimos

Supongamos que se admite como sabido el valor del área de un cuadrado, de un rectángulo, y, por lo tanto, de un triángulo. A partir de ello podemos decir, como lo hacían los griegos, que cuadrar una figura dada es encontrar el lado de un cuadro cuya área sea la misma que la de la figura. Surgen así dos cuestiones: la primera es cómo se llega a establecer la cuadratura; y la segunda, cómo se prueba (rigurosamente) que la relación de cuadratura es correcta.

La aceptación o negación de las cantidades infinitamente pequeñas resultó ser un asunto crucial de las cuadraturas en la Grecia antigua hasta el surgimiento del Cálculo infinitesimal, a fines del siglo XVII. Así, de acuerdo con González (1992), Aristóteles (384-322 a. C.) indicaba que, para obtener la cuadratura del círculo, Antifón de Atenas (480-411 a. C.) partía de un polígono regular, por ejemplo, un triángulo o un cuadrado, inscrito en él. Sobre cada lado del polígono construía un triángulo isósceles, obteniendo un polígono regular del doble de lados, y repetía la operación continuamente.

Al respecto, Aristóteles exponía críticamente que: “Antifón piensa que de esta manera el área [del círculo] podría ser cuadrada, ya que después de un número de veces [de realizar la operación de duplicar los lados del polígono] tendremos un polígono inscrito en el círculo, cuyos lados debido a su pequeñez coincidirán con la circunferencia del círculo. Y puesto que para cada polígono podemos encontrar un cuadrado equivalente, [...], estamos en disposición de conseguir un cuadrado igual al círculo” (González, 1992, citado en Arcos 2007, p. 2).

Por otra parte Eudemo de Rodas (alrededor del 350 a. C.), discípulo de Aristóteles, aducía que Antifón infringía el principio de que «*las magnitudes son divisibles sin límite*». Siendo el área del círculo «*divisible sin límite*», el proceso descrito por Antifón nunca

alcanzará a toda el área, por tanto, los lados del polígono inscrito se acercan «*en potencia*» a la circunferencia, pero nunca ocuparán «*en acto*» la posición de la misma (*Ibid.*, p. 2).

Así pues, podemos afirmar que, en buena medida, la discusión sobre lo infinitesimal se centraba (y se sigue centrando) en torno a aceptar, o no, que *llegaba* un momento en el que se podía afirmar que se tenía una situación distinta a la que se tiene en *condiciones normales*. En el caso del círculo y los polígonos inscritos en un círculo, por ejemplo, el asunto es aceptar, o no, que dada su *infinita pequeñez*, el arco de cada sector circular puede ser considerado, *exactamente* (o bien, con un error infinitamente pequeño) como un segmento rectilíneo.

Siguiendo la argumentación de Antifón, tendríamos que, si se acepta que llega el momento en el que los segmentos circulares son triángulos (Figura 2.1), cada uno de estos tendría una altura igual al radio del círculo y una base infinitamente pequeña, de longitud ds .

Si todos estos triángulos se dibujan con cada base a continuación de la del anterior (como desenrollando el círculo) y con el tercer vértice en el mismo punto (que podría ser el centro del círculo), se obtendría un triángulo con base igual al perímetro del círculo y altura igual al radio del mismo, lo que resultaría ser, más tarde, una de las proposiciones de Arquímedes en *La cuadratura del círculo*.

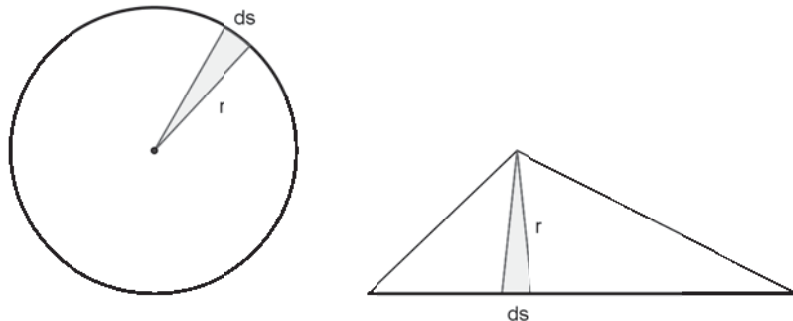


Figura. 2.1. Ilustración utilizada para calcular el área del círculo.

De lo anterior, aceptar o no las cantidades infinitamente pequeñas lleva necesariamente a dos visiones del cálculo; la decisión de considerar una, otra, o ambas visiones, debería depender del propósito de su uso. Es claro que para un estudiante con un nivel de entendimiento inicial, este tipo de acercamiento contribuye a la comprensión de la cuadratura del círculo.

Los infinitésimos y el Cálculo de áreas

El máximo exponente de la matemática de la Época de oro de los griegos es, sin duda, Arquímedes de Siracusa quien demostró haber estudiado y comprendido a fondo *Los*

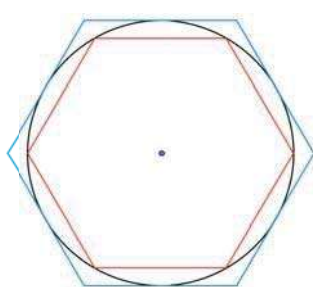
Elementos de Euclides y en no pocos temas de interés, contenidos de esta obra, hizo nuevas aportaciones.

Efectivamente, por ejemplo, con base en el Método de exhaustión de Eudoxo de Cnido (390-337 a. C.) contenido en el Libro V de *Los Elementos*, mediante la utilización de aproximaciones sucesivas, por dentro y por fuera, pudo calcular áreas de: sectores parabólicos, circunferencias, elipses; y volúmenes de: esferas, elipsoides de revolución, entre otros. En casi todos estos cálculos está involucrado el número π que, a su vez, se obtiene de aplicar el método para calcular el área (o el perímetro) de la circunferencia. La aproximación utilizada por Arquímedes fue:

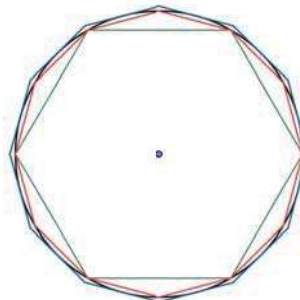
$$\frac{223}{71} < \pi < \frac{22}{7}.$$

El Método de Eudoxo se utiliza para calcular áreas y volúmenes de figuras o sólidos desconocidos, y consiste en irse aproximando al valor de interés mediante el Cálculo de figuras o cuerpos que “van encerrando”, por dentro y por fuera, a la figura o cuerpo de la que se desea conocer su área o volumen. Por ejemplo, para calcular el área de la circunferencia podríamos tener una secuencia de polígonos regulares inscritos y exscritos a ella; y si se puede calcular el área de cada uno de esos polígonos, entonces el área de la circunferencia está entre el área de esos polígonos. La Figura 2.3 muestra un hexágono regular como polígono inicial y luego un dodecágono; si en cada paso se aumenta al doble el número de lados, de los polígonos inscrito y exscrito, tanto las longitudes de sus lados como la diferencia entre ellos se van haciendo cada vez más y más pequeña y, a su vez, el número de lados aumenta. Esto significa que cuando el número de lados sea “grande”, la diferencia entre el perímetro o el área de los polígonos, inscrito y exscrito, será un número “pequeño”. Un proceso que consideraba sólo los polígonos inscritos, ya había sido utilizado por Antifón, quien fue contemporáneo de Sócrates (470-399 a. C.).

Como el área de los triángulos que originan los lados de los polígonos inscrito y exscrito con el centro de la circunferencia, puede calcularse; entonces es posible obtener una aproximación cada vez mayor al área de la circunferencia.



Hexágono inscrito y exscrito



Dodecágono inscrito y exscrito

Figura 2.2. Ilustración del Método de exhaustión de Eudoxo para aproximar π .

En los polígonos regulares, al trazar los radios a cada vértice se obtienen n triángulos isósceles, en cada uno de los cuales si se dibuja la bisectriz del ángulo central, ésta coincidirá con la altura, formándose triángulos rectángulos cuyos lados miden r (la hipotenusa), $\frac{b}{2}$ (donde b es el lado del polígono) y la altura a (apotema); si llamamos P_n al perímetro del mismo, entonces el área del polígono regular inscrito de n lados será:

$$A_i = n \left(\frac{b \times a}{2} \right) = \frac{1}{2} (n \times b) a = \frac{P_n \times a}{2}$$

que corresponde a la tradicional fórmula para calcular el área de un polígono regular.

Si α es el ángulo cuyo vértice es el centro de la circunferencia circunscrita al polígono, $\alpha = \frac{\pi}{n}$; entonces

$$A_i = \frac{1}{2} (n \times b) a = \frac{1}{2} (n \times b) \frac{b}{2} \cot \frac{\pi}{n} = \frac{1}{4} n \times b^2 \cot \frac{\pi}{n}$$

Si ahora suponemos que el lado del polígono siempre mide $b = 2$, tendremos

$$A_i = n \times \cot \frac{\pi}{n}$$

En el caso del polígono excrito, prolongamos los radios hasta intersectar la tangente trazada en el punto medio de cada arco determinado por el lado del polígono inscrito, formándose n triángulos isósceles cuya altura ahora es r . Si llamamos c al lado del polígono excrito, entonces su área puede calcularse así:

$$A_e = n \left(\frac{c \times r}{2} \right) = (n \times r) \frac{c}{2} = (n \times r) r \tan \frac{\pi}{n} = n \times r^2 \tan \frac{\pi}{n}$$

La Tabla 2.1 contiene aproximaciones al número π mediante cálculos de áreas de polígonos regulares inscritos y excritos, de n lados, utilizando las fórmulas anteriores. Como puede observarse, la secuencia de números tiende a π , “por abajo y por arriba”; quedando el área de los inscritos en función del lado b y la de los excritos en función de r .

n	6	12	18	36
Polígono inscrito	2.598076	3	3.078181	3.125667
Polígono excrito	3.464101	3.215390	3.173885	3.149591
Tabla 2.1. Aproximación al número π mediante el Método de Eudoxo.				

2.2.2 Cuadratura con exhaustión

Enfrentamos ahora el problema de las cuadraturas pero con base al rigor en la demostración, razón por la cual es necesario pasar por Eudoxo de Cnido y Arquímedes de Siracusa quienes

incursionaron en esta cuestión dando origen a una matemática formal para analizar y resolver problemas.

En particular el trabajo de Arquímedes es, en extremo, importante para el desarrollo de la matemática, no sólo porque implica un conocimiento profundo de lo contenido en *Los Elementos* de Euclides, ya que en varios temas hace nuevas aportaciones, sino porque inaugura el estudio de temas y procedimientos inexplorados hasta entonces, como la cuadratura y la cubatura de figuras curvas, que implican conceptos completamente nuevos para su época y que, aún hoy en día, son bien valorados en el estudio de temas de Cálculo y de Análisis matemático, como el Postulado que lleva su nombre. No es de extrañarse que se comente que Arquímedes se adelantó casi 20 siglos a su época.

El rigor en la matemática griega y el método de Eudoxo

Además del descubrimiento de los inconmensurables, otro elemento que causó gran inquietud entre los matemáticos griegos lo fueron las paradojas de Zenón de Elea (s. V a. C.). Situaciones como la señalada por la paradoja de Aquiles y la tortuga, cuyo planteamiento conduce a la conclusión de que Aquiles nunca alcanza a una tortuga en una carrera, a condición de que se le diera una ventaja inicial a la tortuga; es decir, sin importar qué tanto más rápido corriera Aquiles o qué tan pequeña fuese la ventaja inicial, la conjetura sobre que Aquiles no alcanzaría a la tortuga, resultaba prácticamente inexplicable, y cuando se daba alguna explicación, ésta no resultaba suficientemente satisfactoria para todos. Así pues, los matemáticos griegos se vieron obligados a buscar caminos a través de los cuales no se confrontaran con ideas infinitesimalistas o números irracionales:

*La tempestad provocada por el descubrimiento pitagórico de los irracionales y la inquietud que introdujeron en el mundo griego las paradojas de Zenón precipitó una profunda crisis en la Matemática provocando el «horror al infinito», que caracteriza casi toda la Matemática griega, y que paraliza parcialmente su imaginación creadora, que pasa a segundo plano, a la sombra del supremo rigor lógico impuesto por la escuela platónica, cuyo exponente más representativo es Euclides con su enciclopédica obra *Los Elementos*. La crisis trajo consigo un refinamiento geométrico. Como reacción al lenguaje ingenuo de los pitagóricos, mezcla de brillantes ideas matemáticas, actitudes místicas y aforismos religiosos, se impone el severo rigor de *Los Elementos*, que establece un férreo paradigma de exposición y demostración en Matemáticas, una especie de norma académica de obligado respeto para todo matemático.*

Para conjurar la crisis había que soslayar el concepto infinitesimalista de número irracional. Eudoxo de Cnido (390-337 a. C.), de la escuela platónica, resolvió de forma brillante la antinomia radical entre finito e infinito. Introduciendo el concepto de «tan pequeño como se quiera», equivalente a nuestro proceso de «paso al límite», encuentra, con su teoría de magnitudes, una escapatoria mediante un recurso genial: una definición, un axioma y un método. Como lo inexpresable era la razón de dos

cantidades inconmensurables, Eudoxo elimina la dificultad definiendo no la razón misma, sino la igualdad de razones... (González, pp. 25-26)

El método de exhaución surge, entonces, como una manera de afrontar los problemas que dos milenios después serían resueltos mediante técnicas infinitesimalistas y, posteriormente, mediante el concepto de límite. Sin embargo, el precio a pagar por eludir al infinito no les resultó nada despreciable; el nuevo método resultaba sumamente engorroso, ya que, para probar la igualdad, se recurría a una doble reducción al absurdo, debiendo establecer un conjunto de desigualdades para cada uno de los casos (mayor que o menor que), y eso ocurría sin el recurso de la maquinaria simbólica con la que contamos actualmente. Por si eso fuera poco, el método no servía para nada si no se conocía el resultado de antemano, es decir, no propiciaba la obtención de nuevos resultados. En este sentido, González (1992) nos dice:

Habiéndose convertido el infinito en tabú, por el misterio que lo envolvía, es reprimido o se le camufla a través del «axioma de continuidad», el «principio de Eudoxo» y el «método de exhaución» [...]. El método de exhaución confiere el argumento matemático un rigor lógico impecable, transformando en rigurosos los argumentos infinitesimales simplemente plausibles de sus antecesores, pero tiene algunas serias servidumbres. En primer lugar, suele resultar bastante engorroso el establecimiento de las desigualdades básicas que se necesitan para iniciar la doble reducción al absurdo, lo que hace bastante oneroso el seguimiento de una demostración realizada por exhaución, pero quizá lo más grave sea que este método obliga a conocer previamente el resultado a demostrar, es decir, carece de valor heurístico... (Ibid. p. 28)

Las observaciones realizadas por González deberían resultar preocupantes para quienes nos dedicamos a la educación matemática, refiriéndonos a las implicaciones que un método como éste, de rigor, pueda tener en la enseñanza de los conceptos del Cálculo en las escuelas de ingeniería. Más aún, si lo que se pretende es formar personas con habilidades para resolver problemas “con ingenio”. ¿Hasta dónde se consigue el desarrollo de ese ingenio si se limita el valor heurístico?

Más adelante podremos observar ambas cuestiones en el trabajo de Arquímedes, el uso del método de exhaución y el cómo obtenía nuevos resultados. Ahora vamos a comentar algunas cosas sobre los trabajos de Arquímedes de Siracusa (287-212 a. C.).

El Método de exhaución antes de Arquímedes

Los resultados relativos a la cuadratura y la cubatura de figuras curvas a los que llegó Arquímedes en *Sobre la esfera y el cilindro*, así como en los otros libros antes mencionados, actualmente son obtenidos mediante el cálculo integral siguiendo un procedimiento en el que, al tiempo que se llega al resultado, se prueba su veracidad. Arquímedes, en cambio, utilizaba el Método de exhaución de Eudoxo para probar la proposición, pero ésta tenía que conocerse

de antemano. A continuación vamos a estudiar la manera en la que el método de exhaustión era utilizado, primeramente, en *Los elementos* de Euclides y después por Arquímedes.

Recordemos que en el primer libro de *Sobre la esfera y el cilindro*, Arquímedes enuncia cinco suposiciones o postulados, el quinto de los cuales dice:

Dadas dos magnitudes desiguales, la mayor excede a la menor en una cantidad tal que cuando se añade a si misma (repetidas veces) puede exceder cualquier magnitud previamente asignada de la misma clase.

Ahora bien, podemos observar que este axioma está relacionado con la definición 4 del libro V de *Los Elementos*:

Dícese que dos magnitudes tienen razón entre sí, cuando cada una de ellas puede ser multiplicada en modo de superar a la otra. (Euclides, 1992, vol. 2, 160)

En la versión de *Los Elementos de Euclides* publicados por Heiberg se incluye una nota al respecto de esta definición, en la que se indica:

*Esta definición enuncia veladamente, bajo una forma diversa, el conocido **Postulado de Arquímedes**: Dadas dos magnitudes desiguales, existe siempre un múltiplo de la menor que supera a la mayor. (Euclides, 1992, vol. 2, p. 238)*

Así pues, utilizando simbología actual, el Postulado de Arquímedes nos dice lo siguiente:

Sean a y b dos magnitudes (números reales) cualesquiera, tales que $a < b$, entonces, existe un número natural n , tal que $an > b$.

Por otra parte, la proposición X.1 de *Los Elementos*, debida muy probablemente a Eudoxo, señala que:

Dadas dos magnitudes desiguales, si de la mayor se resta una magnitud mayor que su mitad y de lo que queda otra magnitud mayor que su mitad y se repite continuamente este proceso, quedará una magnitud menor que la menor de las magnitudes dadas. (Euclides, 1925, vol. 3, p. 14)

Esta proposición suele llamársele *Principio de Eudoxo* y es fundamental en el Método de exhaustión. Utilizando simbología moderna, puede enunciarse como sigue:

Sean M_0 y ε dos magnitudes dadas, y $M_1, M_2, M_3, \dots$, una sucesión tal que $M_1 < \frac{1}{2}M_0$, $M_2 < \frac{1}{2}M_1$, $M_3 < \frac{1}{2}M_2$, etc., entonces $M_n < \varepsilon$ para algún n .

Vamos a considerar ahora dos proposiciones en las que se aplica el método de exhaustión para su demostración. La primera de estas proposiciones afirma que la diferencia entre las áreas de un círculo y de un polígono inscrito en el mismo, puede hacerse tan pequeña como se quiera

al considerar el número suficientemente grande de lados, lo que, en términos infinitesimalistas, o, de acuerdo con Antifón de Atenas, equivale a decir que la circunferencia es un polígono con un número infinito de lados. Así pues, tenemos la siguiente proposición:

Dados un círculo C y una cantidad ε , existe un polígono $\wp$, inscrito en C , tal que

$$a(C) - a(\wp) < \varepsilon$$

Prueba: llamemos $as(EF)$ al área de la región interior al círculo encerrada por la cuerda y el arco definidos por los puntos E y F (véase la Figura 2.2), y sea P_0 el cuadrado inscrito en el círculo ($EHGF$ en la figura). Ahora se definen los polígonos $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n, \dots$ como aquellos que tienen, respectivamente, $8, 16, 32, \dots, 2^{n+2}$ lados, y M_n como la diferencia entre las áreas del círculo y del polígono P_n ; es decir, $M_n = a(C) - a(P_n)$. La figura muestra el sector correspondiente a un polígono de 2^{n+2} lados.

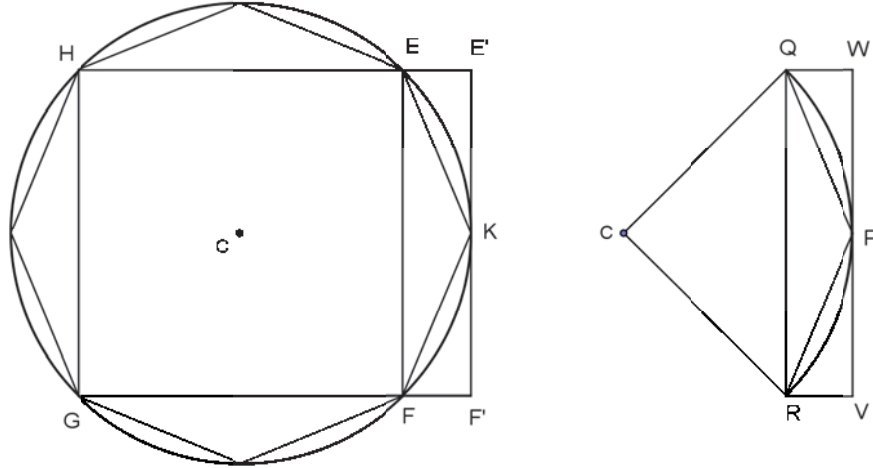


Figura 2.3. Ilustración inicial. Circunferencia: polígono con número infinito de lados.

Ahora, siendo E y F dos puntos de la circunferencia, denotemos por $as(EF)$ el área del sector EF , es decir, de la región comprendida entre el arco EF y la cuerda EF . Tendremos entonces:

$$M_0 = a(C) - a(P_0) = 4 as(EF)$$

y

$$M_1 = a(C) - a(P_1) = 8 as(EK)$$

De manera que,

$$M_0 - M_1 = a(P_1) - a(P_0) = 4 \Delta EFK$$

pero

$$4 \Delta EFK = 2 a(EFF'E') > 2 as(EF) = \frac{1}{2} M_0$$

Así que,

$$M_0 - M_1 > \frac{1}{2} M_0$$

O bien:

$$M_1 < \frac{1}{2} M_0$$

Vamos ahora a generalizar este resultado, a cualquier etapa del procedimiento. Para ello supongamos que Q y R son dos vértices consecutivos del polígono P_n (Figura 2.2), y P el vértice de P_{n+1} , situado entre Q y R , entonces:

$$\begin{aligned} M_n &= a(C) - a(P_n) = n as(QR), \\ M_{n+1} &= a(C) - a(P_{n+1}) = 2n as(QP), \\ M_n - M_{n+1} &= A(P_{n+1}) - A(P_n) = n \Delta QRP, \\ &= \frac{n}{2} a(QRWV) > \frac{n}{2} as(QR) = \frac{1}{2} M_n \end{aligned}$$

Es decir,

$$M_n - M_{n+1} > \frac{1}{2} M_n, \quad M_{n+1} < \frac{1}{2} M_n$$

de esta manera,

$$a(C) - a(P_{n+1}) = M_{n+1} < \frac{1}{2} M_n < \frac{1}{2^2} M_{n-1} < \dots < \frac{1}{2^n} M_1 < \frac{1}{2^{n+1}} M_0,$$

esto es,

$$a(C) - a(P_{n+1}) < \frac{1}{2^{n+1}} M_0$$

Podemos decir, entonces, que la diferencia entre las áreas del círculo y el polígono P_{n+1} puede hacerse menor que cualquier cantidad ε dada, haciendo n suficientemente grande.

Con base en este resultado, y recurriendo a la *reducción al absurdo*, vamos a probar ahora la proposición XII.2 de *Los Elementos*, que dice:

Los círculos son, entre sí, como los cuadrados de sus diámetros.

Es decir, siendo C_1 y C_2 círculos con radios r_1 y r_2 , respectivamente, debe probarse que:

$$\frac{a(C_1)}{a(C_2)} = \frac{(2r_1)^2}{(2r_2)^2} = \frac{r_1^2}{r_2^2}$$

Prueba: Sean $A_1 = a(C_1)$ y $A_2 = a(C_2)$, entonces una y sólo una de las tres siguientes proposiciones es verdadera:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{r_1^2}{r_2^2} \quad (1a)$$

$$\frac{A_1}{A_2} < \frac{r_1^2}{r_2^2}, \text{ o} \quad (1b)$$

$$\frac{A_1}{A_2} > \frac{r_1^2}{r_2^2} \quad (1c)$$

Supóngase primeramente que (1b) es verdadera, así que $A_2 > r_2^2 A_1 / r_1^2$. Sea S tal que $S = r_2^2 A_1 / r_1^2$ entonces $A_2 - S$ es una cantidad positiva; llamemos ε a tal cantidad, por lo tanto, tendremos que $A_2 - S = \varepsilon > 0$.

Por la proposición anterior, sabemos que existe un polígono P_2 , inscrito en C_2 tal que $A_2 - a(P_2) < \varepsilon = A_2 - S$, por lo tanto $a(P_2) > S$.

Ahora, si P_1 es el polígono semejante a P_2 , inscrito en C_1 tendremos que:

$$\frac{a(P_1)}{a(P_2)} = \frac{r_1^2}{r_2^2} = \frac{A_1}{S}$$

Así pues:

$$\frac{S}{a(P_2)} = \frac{A_1}{a(P_1)} = \frac{a(C_1)}{a(P_1)} > 1$$

De donde $a(P_2) < S$ con lo que se obtiene una contradicción.

Procediendo de la misma manera, pero partiendo de la proposición (1c), también se llegará a una contradicción, de manera que la opción válida es la restante, es decir:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{r_1^2}{r_2^2}$$

El Método de Arquímedes

Las ideas infinitesimalistas se gestaron muchos siglos antes de que las publicaran Leibniz y Newton en el siglo XVII. Efectivamente, la carta descubierta en 1906 por Heiberg, en los archivos de una iglesia de Constantinopla, revela que Arquímedes se anticipó a su época en por lo menos 19 siglos, en el sentido de obtener resultados que pudieron ser justificados por el Cálculo diferencial e integral. Esta carta, denominada *El Método*, estaba dirigida a Erastótenes, Bibliotecario de la Universidad de Alejandría y consultor de la mayoría de los

científicos de esa época, en la que le comunicaba un método que permitía anticipar algunos resultados geométricos bajo la convicción de que una vez que se ha anticipado algún conocimiento sobre las cuestiones, es más fácil suministrar una demostración que hacerlo sin conocimiento previo; de esta manera, pudo obtener algunos de sus resultados favoritos: el volumen de una esfera y la cuadratura de la parábola. En la carta (Babini, 1978, año, p. 34) se lee:

Yo mismo, algunas de las que descubrí primero por una vía mecánica, las demostré geométricamente, ya que la investigación hecha por este método no implica verdadera demostración. Pero es más fácil, una vez adquirido por este método un conocimiento de los problemas, dar luego la demostración, que buscarla sin ningún conocimiento previo.

El Método de Arquímedes consiste en extender la Ley de la palanca, una de las cinco máquinas simples de la mecánica, al equilibrio de figuras geométricas. Implícitamente, Arquímedes asociaba la propiedad física de “peso” al área o volumen de ciertas figuras geométricas, considerándolas como de “densidad uniforme”. Así, si ya conocía ciertos resultados sobre otras figuras geométricas, la Ley de la palanca le permitiría establecer una relación entre ellas y, en consecuencia, conocer nuevos resultados. Con este método pudo obtener: la cuadratura de la parábola; el volumen (o cubatura) de una esfera; el volumen del paraboloides de revolución; el volumen de un elipsoide de revolución; el centro de gravedad de un casquete esférico; entre otros.

Los resultados que utilizaba Arquímedes se derivan de la Geometría euclídea, como congruencia y semejanza de triángulos, áreas del rectángulo, del paralelogramo y del trapecio, Teorema de Pitágoras, centros de gravedad del triángulo, etc., y de resultados que él acababa de obtener como la cuadratura del círculo, en la que utilizó la aproximación de π con el Método de Eudoxo, el volumen de un cilindro y de un cono. Esto demuestra que Arquímedes no sólo dominaba el conocimiento matemático sistematizado por Euclides, sino que realizó nuevas aportaciones.

En esta sección, en todos y cada uno de los problemas anteriores están presentes nociones equivalentes a las ideas infinitesimistas planteadas por Leibniz. Destaca, sobre todo, la asombrosa sencillez de los planteamientos de Arquímedes para resolver los problemas que se ha trazado, los cuales a su vez contienen dificultades relacionadas con la abstracción y el trabajo operativo de las relaciones que se van obteniendo. Quizás, este sea uno de los elementos que contribuyen a las dificultades señaladas por los estudiantes en el estudio del Cálculo, tanto en el acercamiento infinitesimalista como formal.

Capítulo 3

El Cálculo original

La derivada y la integral de una función son los conceptos fundamentales de los cuales el Cálculo toma su aroma particular; todos los temas previos que se estudian antes (funciones, números reales, geometría analítica, continuidad) son en realidad una preparación para las brillantes ideas y procedimientos poderosos que habrán de venir con el Cálculo infinitesimal. Muchos aquilatan su valor no sólo por las ideas matemáticas involucradas sino por su conexión con los fenómenos físicos.

Por su importancia y aplicabilidad que se pronosticaba, habría que dotar de una notación adecuada a esta nueva rama del conocimiento; Leibniz llegó al símbolo $\frac{df(x)}{dx}$ para denotar una expresión en la que la d no pueden simplificarse y no representa un cociente entre $df(x)$ y dx . Al respecto, Spivak (1992) comenta:

Leibniz llegó a este símbolo a través de su noción intuitiva de la derivada, que él consideraba no como el límite de los cocientes $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, sino como el “valor” de este cociente cuando h es un número “infinitamente pequeño”. Esta cantidad infinitamente pequeña fue designada por dx y la correspondiente diferencia infinitamente pequeña $f(x+h) - f(x)$ por $df(x)$.

Pero la derivada no despliega toda su fuerza hasta que se alía con la integral, la cual se refiere al concepto intuitivo de área, pero su presentación requiere de una preparación cuidadosa. En la definición de la integral también aparece el concepto de diferencial, al considerar la suma de “elementos diferenciales de área”. Ambos conceptos se relacionan íntimamente en el Teorema fundamental del Cálculo.

En este capítulo desarrollaremos un breve análisis sobre los trabajos de los creadores del Cálculo, Newton y Leibniz, así como de sus seguidores; sus distintos, aunque similares, enfoques, y la potencia para la resolución de problemas que trajo consigo ésta teoría.

3.1 El Cálculo infinitesimal en sus orígenes: Leibniz y Newton

Leibniz y Newton fueron los inventores del Cálculo, cada uno desarrolló sus ideas por separado, las cuales confluyeron en la conformación de esta nueva rama de las matemáticas. Su trabajo fue extraordinario por la creación de la nueva teoría con sus conceptos involucrados y por la poderosa herramienta que resultó ser para resolver una gran cantidad de problemas de diversa índole, tanto de su época (siglo XVII) como de tiempos pasados de la época los griegos, hasta problemas actuales vigentes en nuestros días; a su vez, dio pie al surgimiento del Análisis matemático, entre otras teorías. Así, el surgimiento del Cálculo tuvo un impacto tan grande en el desarrollo de la matemática, la educación matemática y la ciencia en general, equiparable a la trascendencia de la *Teoría general de la relatividad* de Albert Einstein (1879-1955).

Leibniz estudiaba las funciones y curvas asociadas a los fenómenos de cambio de manera estática y buscaba establecer un lenguaje universal para este nuevo cuerpo de conocimientos; en tanto que Newton concebía a las curvas desde un punto de vista cinemático, como la trayectoria de un punto material móvil. Sin embargo, es necesario comentar que la invención del Cálculo no es creación únicamente de estos dos científicos, sino la culminación de muchas ideas que desde la época de oro de los griegos (S. VII-S. II a. C.) circulaban en la comunidad científica.

En el siglo XVII se conocían y manipulaban los procedimientos y herramientas utilizados por los griegos, pero ciertos problemas no podían resolverse con ellas; algunos de estos problemas tuvieron solución, 2000 años después, con la aparición de la geometría con coordenadas, conocida como la geometría analítica, establecida por René Descartes (1596-1650).

Debido a lo novedoso de las ideas y al tenso ambiente académico que se vivía en esa época, Newton no publicó sus trabajos por miedo a las críticas, sólo los divulgaba entre sus alumnos y conocidos. Dentro de los trabajos que desarrolló se encuentra el concepto de *fluxiones*, las cuales hoy en día se conocen como *derivadas*.

Dada una curva $f(x, y) = 0$ con x e y funciones que dependen del tiempo t , las fluxiones son las componentes de la velocidad según las direcciones de los ejes, $\dot{x}$ e $\dot{y}$. Para Newton todas las funciones eran continuas, ya que se trataba de las trayectorias de movimientos continuos.

Cuando Leibniz intentó dar a conocer sus trabajos, fue acusado de plagio y tampoco los publicó.

3.1.1 Introducción: ¿Por qué 2000 años?

Los trabajos desarrollados por Arquímedes y sus grandes contribuciones a las matemáticas merecen toda nuestra admiración, sin embargo, es innegable la complejidad que representa entender sus trabajos y, más aún, tratar de imitarlo para resolver problemas. Al respecto, l'Hôpital en su Prefacio de *Análisis de los infinitamente pequeños para el estudio de las líneas curvas* expresa:

Lo que tenemos de los antiguos sobre estas materias, principalmente de Arquímedes, es indudablemente digno de admiración. Pero además de que sólo trataron unas pocas curvas y de que las trataron ligeramente, casi en todos lados se refieren a proposiciones particulares y sin orden, que no permiten percibir ningún método regular y coherente.

[...] no es sorprendente que los antiguos no hayan avanzado más lejos; pero sí es muy sorprendente que grandes hombres –y sin duda hombres tan grandes como los antiguos– hayan permanecido tanto tiempo sin avanzar más y que, por una admiración casi supersticiosa por sus obras, se hayan contentado con leerlas y comentarlas, sin permitirse otra utilización de su genio que la que se necesitaba para comprenderlos. (l'Hospital, 1696, pp. 16, 17)

Al preguntarnos ¿qué es lo que se pretende en una escuela de ingeniería al incluir en la currícula el estudio del Cálculo? Más de alguna respuesta nos conducirá a que el estudiante conozca y aprenda a manipular las ideas del Cálculo para resolver problemas de su área. Esto nos impulsa a buscar la manera en que se debe enseñar para que haya un aprendizaje efectivo de los conceptos y los pueda poner en práctica. Esto, por mi experiencia en la docencia, difícilmente se logra con acercamientos formales que lejos de llevar al estudiante a la comprensión, lo dejan con una total admiración hacia el profesor y una frustración por su incapacidad de comprensión de lo que su profesor hace. Hecho que no se diferencia de lo que l'Hôpital cita en su prefacio sobre el tiempo en que la mente de grandes matemáticos dedicaron a la comprensión, a veces no lograda, de los trabajos de Arquímedes, sin siquiera poder utilizarla para resolver otros problemas por lo complicado de sus métodos.

Si bien es cierto, no podemos dejar de lado las justificaciones formales de las bases de la matemática; pero si lo que se busca es generar un aprendizaje en los estudiantes, será necesario acercarnos con un lenguaje con el que se sienta cómodo, tal vez con ideas intuitivas sobre el concepto a tratar y, posteriormente, llegar a lo formal cuando sea posible. Incluso, podría ganarse mucho con los acercamientos intuitivos que muestran una misma idea pero más fácil de aceptar. Sobre esto l'Hôpital dice:

Las poligonales inscritas o circunscritas a las curvas, que por la multiplicación infinita de sus lados se confunden finalmente con ellas, han sido siempre tomadas como las curvas mismas. Pero hasta ahí se avanzó: fue a partir del descubrimiento de este análisis que aquí se trata que se advirtió el alcance y la fecundidad de esta idea. (Ibid. p. 16)

Desde luego, no se trata de simplificar las formas de tratamiento de algún concepto para su enseñanza, sin que lo enseñado deje de estar en el compendio de lo que son las matemáticas, sino de acercar al estudiante con ideas intuitivas, con un cierto grado de precisión, para la comprensión de un concepto matemático. Muestra de las enormes ganancias que se tuvieron al trabajar y aceptar ideas intuitivas como las propuestas por Leibniz para su Cálculo, son la solución de una gran cantidad de problemas que hasta antes de él no fue posible resolver y los muchos otros que se fueron planteando con base a las deducciones que se iban generando.

Desde este momento es posible comenzar a dar respuestas sobre una de las preguntas de investigación, ¿qué se gana y que se pierde, desde el punto de vista de la enseñanza, al usar acercamientos intuitivos o bien, formales? l'Hôpital hace mención de ello exhibiendo los más de 20 siglos en los que el avance de las matemáticas se había estancado “*Tal era el estado de las matemáticas hasta que llegó Descartes, quien se atrevió a no sólo imitar a los antiguos sino a pensar por sí mismo*”. Cabe mencionar que esto fue posible gracias al trabajo de otros afamados matemáticos como Fibonacci, Vieta, Cardano, por ejemplo. No hay duda que este tipo de inquietudes son las que debemos generar en nuestros estudiantes, ¡que lleguen a pensar por sí mismos!

3.1.2 Los conceptos del Cálculo en Newton

El científico D.¹ Isaac Newton, reconocido por sus innumerables aportaciones a la física, también dejó su huella en el área de las matemáticas al proponer una nueva teoría para el estudio de las curvas que hoy es llamada Cálculo; es autor del libro *Principia* en el cual expone sus trabajos sobre el estudio del movimiento de los cuerpos con su mecánica y sus estudios sobre las líneas curvas. Precisamente el *Tratado de la cuadratura de las curvas* es la tercera de las cinco partes de las que consta el Apéndice de los *Principia*, titulado *Análisis por las series, las fluxiones y las diferencias de las cantidades con la enumeración de las líneas del tercer orden*, el cual, según Megale, está escrito en forma clara y elegante y arreglado para instruir aun a aquellos que no dominasen perfectamente ese método. Es en este análisis donde Newton aclara cuestiones sobre la resolución de ecuaciones por series infinitas.

Dicho tratado se conoció a través de la mensajería que mantenían Newton, Barrow (1630-1677), profesor de Newton, Collins (1626-1683), David Gregorio (16 -), Jacobo Gregorio (1638-1675), entre otros. Comunicados que revelan el ingenio del joven Newton y sus innovaciones. Justamente una carta de Collins a David Gregorio refiere lo anticipado que estaba Newton a otros científicos de su época como Nicolás Mercator quien publicó una obra sobre la llamada Logaritmotecnia en 1668:

¹ La letra D es usada en los textos latinos anteponiéndolo a los nombres propios cuya significación es Dominus, término que podemos traducir como Señor.

La susodicha doctrina de las series infinitas fue hallada por Newton 2 años antes que fuera editada la Logaritmotecnia de Mercator, y que fue aplicada de manera general a todas las figuras. (Megale, 1723, p. 12)

En ella, Mercator dio a conocer la división reiterada indefinida de $\frac{1}{1+x}$, con la que deduce el desarrollo de $\log(1+x)$ utilizando una técnica basada en los indivisibles de Cavalieri.

Existe evidencia de que Newton desde 1665, dedujo la Cuadratura del Círculo, de la Hipérbola, y de algunas curvas por series infinitas basándose en la Aritmética de los infinitos de Wallis (1616-1703), mediante la interpolación de las series. Más adelante, en 1666, Newton describe un método general por divisiones y extracciones de raíces. Posteriormente se publica un pequeño tratado titulado *Método Diferencial* el cual se apoya en el problema de trazar una curva del género parabólico por algunos puntos dados. Contiene la doctrina para describir las curvas dadas por diferencias de diferencias ordenadas:

La Geometría de Newton está argumentada por las Razones Primeras y Últimas y fortalecida por las demostraciones apodícticas de los Antiguos, por lo cual fue elogiada esta obra pues no se apoyaba en la hipótesis algo dura de las cantidades infinitamente pequeñas o indivisibles, cuya tendencia a desvanecerse impide que las consideremos como cantidades. (Megale, 1723, p.14)

Newton, al mismo tiempo que Leibniz aunque por un camino distinto, descubrió el Cálculo infinitesimal exponiéndolo con dos enfoques diferentes: el “Cálculo de las fluxiones” y “el Cálculo de las primeras y últimas razones”. Se dice que privilegió al segundo enfoque en sus escritos por temor a ser criticado por los matemáticos de su época al presentar una teoría tan revolucionaria como el Cálculo de las fluxiones. Fue así como Newton (1723, p. 16), en su segundo enfoque, exponía:

...por razones últimas de las cantidades evanescentes, ha de entenderse la relación de las cantidades, no antes ni después de hacerse nulas, sino la relación con la cual se anulan. Igualmente, la primera razón debe entenderse la relación con la cual nacen...

Como evidencia de la cautela en el uso de estas ideas, Newton basa su teoría de la mecánica en el Cálculo de las primeras y últimas razones. Estos hechos muestran las dificultades a las que se han enfrentado y, seguramente, se seguirán enfrentando quienes expongan ideas nuevas en cualquier ámbito, ya que el hombre, por naturaleza, es un ser de costumbres que difícilmente acepta un cambio inmediato en sus concepciones. Seguramente Leibniz sintió el mismo temor que Newton al dar a conocer su teoría, aunque Leibniz se llevó las críticas pues no tuvo la misma moderación y precaución que Newton al exponerla.

Ahora, resulta natural preguntarnos cuál es la diferencia entre la concepción de Newton y la concepción de Leibniz sobre su Cálculo. Ante tal cuestionamiento podemos decir que la principal diferencia radica en el propio tratamiento de las líneas curvas; para Newton “la líneas son descritas, no mediante la adición de partes, sino por movimiento continuo de

puntos; las superficies por movimiento de líneas; los sólidos por movimiento de superficies; etc.” Para Leibniz es, la adición de partes, el argumento geométrico.

Así para Newton, “las cantidades engendradas en tiempos iguales varían más o menos, según la mayor o menor velocidad con la cual cada una de ellas crece”; siendo la “velocidad de crecimiento” lo que llamó “fluxión” y “fluyentes” a las cantidades descritas por movimiento continuo. Por otro lado, no está de más mencionar que Newton realizó sus investigaciones basándose en el método inductivo de Galileo, no en el deductivo descrito por Descartes. Su mayor contribución a la metodología científica fue restringir el terreno de la investigación a lo observable y a lo verificable, rechazando lo hipotético (sinónimo de metafísico) que no es derivable de los fenómenos. Veamos pues un extracto de su tratado, que por ser uno de los creadores del Cálculo, expongo su teoría detalladamente (Newton, edición facsimilar de 1723, pp. 19-54):

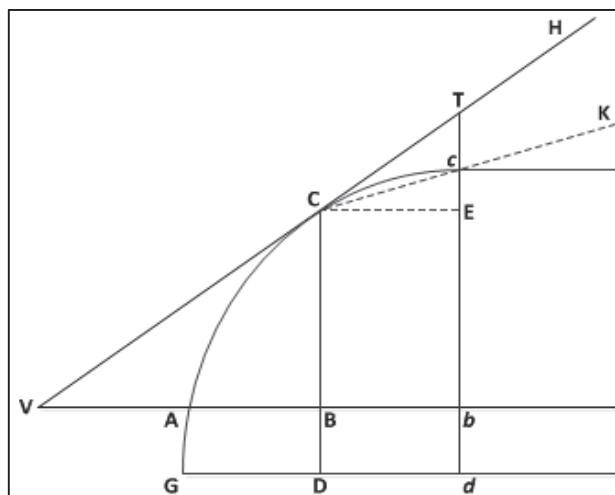
Introducción al tratado de la cuadratura de las curvas.

[...] Considero aquí las cantidades matemáticas no como consistentes de partes muy pequeñas, sino como descritas con movimiento continuo. Las líneas son descritas y se generan describiendo, no por adición de partes, sino por el movimiento de las líneas, los sólidos por el movimiento de las superficies, los ángulos por la rotación de los lados, los tiempos por el flujo continuo, y así en las demás cosas.

Considerando, por tanto, que las cantidades que crecen en tiempos iguales y que creciendo son engendradas, según la mayor o menor velocidad con la cual crecen y son engendradas, llegan a ser mayores o menores; buscaba yo un método para determinar las cantidades por las velocidades de los movimientos o de los incrementos con los cuales son generadas; y llamando “fluxiones” a estas velocidades de los movimientos o de los incrementos y llamando “fluyentes” a las cantidades engendradas, acerté a encontrar, en los años 1665 y 1666, un método del cual me he servido en la Cuadratura de las Curvas.

Las fluxiones son, lo más cercano posible, como aumentos producidos en iguales partículas muy pequeñas de tiempo, y, para hablar con exactitud, están en la primera razón de los argumentos nacientes; por otra parte, pueden ser colocadas por cualquiera línea a ellas proporcional.

Como si las áreas ABC , $ABDG$ fuesen descritas mediante la



progresión de las ordenadas BC , BD sobre la base AB con movimiento uniforme, las fluxiones de estas áreas estarán entre sí como las ordenadas que describen BC y BD , y por las ordenadas aquéllas pueden ser descritas, por el hecho de que aquellas ordenadas son como aumentos nacientes de áreas. Córrase la ordenada BC de su lugar BC a un nuevo lugar bc . Complétese el paralelogramo $BCEb$ y trácese la recta VTH , que toque la curva en C y, habiéndose producido los mismos bc y BA , (la) encuentre en T y V : y los aumentos engendrados en la abscisa AB de la ordenada BC y de la línea curva ACc , serán Bb , y Ec , y Cc ; y en la razón primera de estos aumentos nacientes son los lados del triángulo CET , y por esto las fluxiones de las mismas AB , BC y AC son como los lados CE , ET y CT del triángulo CET y pueden ser descritas por medio de aquellos lados, o, lo que es lo mismo, por los lados del triángulo semejante VBC .

Al mismo lugar tiende si se suman las fluxiones en la última razón de las partes evanescentes... (Megale, p. 20)

Newton comienza a describir su método con las ideas básicas de fluxión y fluyente. Así, en el siguiente ejemplo muestra la argumentación para hallar la fluxión de x^2 :

Fluye una cantidad x uniformemente y hay que encontrar la fluxión de la cantidad x^2 . En el tiempo en que la cantidad x fluyendo llega a ser $x + o$, la cantidad x^2 llegará a ser $x + o|n$, esto es, por el método de las series infinitas, $x^n + nox^{n-1} + \frac{nn-n}{2}oox^{n-2} + \text{etc.}$ Y los aumentos o y $no x^{n-1} + \frac{nn-n}{2}oox^{n-2} + \text{etc.}$ son recíprocamente como 1 y $nx^{n-1} + \frac{nn-n}{2}ox^{n-1} + \text{etc.}$ Desvanézcase en seguida aquellos aumentos, y la razón última de ellos será 1 a nx^{n-1} : y por ello la fluxión de la cantidad x es la fluxión de la cantidad x^n como 1 a nx^{n-1} . (Ibid., p. 22)

Con este tipo de argumentos, dice, es posible encontrar las fluxiones de las líneas, rectas o curvas, de las superficies, de los ángulos y de otras cantidades. Pero actuando con forme al rigor de una matemática exacta, advierte los hechos ante cantidades infinitamente pequeños:

Establecer el análisis en cantidades finitas nacientes o evanescentes, es conforme a la geometría de los Antiguos: y he querido mostrar que en el método de las fluxiones no es preciso introducir en geometría figuras infinitamente pequeñas. Sin embargo, puede ser llevado a cabo el análisis en cualesquiera figuras sean finitas o infinitamente pequeñas, que son representadas semejantes a las figuras evanescentes, como también en las figuras que por los métodos de los indivisibles suelen ser tenidas por infinitamente pequeñas; sólo que hay que proceder con cautela. (Ibid., p. 22)

Cabe señalar que previo a abordar algunos problemas sobre la cuadratura de las curvas, expresa cierto simbolismo para llamar a las variables involucradas en los problemas. Para las cantidades fluyentes o defluyentes designa las letras z, y, x, v , tal cual lo hacemos hoy en día; para las fluxiones o velocidades de crecimiento designa $\dot{z}, \dot{y}, \dot{x}, \dot{v}$. Para las fluxiones segundas

de las propias designa $\ddot{z}, \ddot{y}, \ddot{x}, \ddot{v}$, y así sucesivamente². En seguida, se describen dos problemas sobre la cuadratura de las curvas y algunos teoremas.

Sobre la cuadratura de las curvas.

Proposición I – Problema. I. Dada una ecuación que envuelve cualquier número de cantidades fluyentes, encontrar las fluxiones.

Solución

Multiplíquese cada término de la ecuación por el índice de la dignidad de la cantidad y del fluyente de ésta que envuelve, y en cada una de las multiplicaciones múdese el lado de la dignidad en su fluxión, y el agregado de todos los factores bajo los propios signos será la nueva ecuación.

Explicación

Sean a, b, c, d , etc., cantidades determinadas e inmutables, y propóngase cualquiera ecuación que envuelva las cantidades fluyentes z, y, x , etc., como $x^3 - xy^2 + a^2z - b^3 = 0$. Multiplíquense en primer lugar los términos por los índices de las dignidades x , y en cada una de las multiplicaciones escríbase $\dot{x}$ en lugar del lado de la dignidad, o sea x de una sola dimensión y la suma de los factores será $3\dot{x}x^2 - \dot{x}y^2$. Hágase lo mismo en y y se obtendrá $-2xy\dot{y}$. Hágase lo mismo en z y se obtendrá $a^2\dot{z}$. Igúalese la suma de los factores a nada y se tendrá la ecuación $3\dot{x}x^2 - \dot{x}y^2 - 2xy\dot{y} + a^2\dot{z} = 0$. Digo que con esta ecuación se define la razón de las fluxiones.

Demostración

En efecto, considérese o una cantidad muy pequeña y sean $o\dot{z}, o\dot{y}, o\dot{x}$ movimientos (momentos) de las cantidades z, y, x , es decir, incrementos momentáneos sincrónicos. Y si las cantidades fluyentes son y, z , y x , éstas, aumentadas después del movimiento del tiempo con sus incrementos $o\dot{z}, o\dot{y}, o\dot{x}$, llegan a ser $z + o\dot{z}$, $y + o\dot{y}$, $x + o\dot{x}$, que, escritas en la primera ecuación en lugar de z, y , y x , dan la ecuación $x^3 + 3x^2o\dot{x} + 3xo^2\dot{x}\dot{x} + o^3\dot{x}^3 - xy^2 - o\dot{x}y^2 - 2xo\dot{y}y - 2\dot{x}o^2\dot{y}y - xo^2\dot{y}\dot{y} - \dot{x}o^3\dot{y}\dot{y} + a^2z + a^2o\dot{z} - b^3 = 0$.

Quítese la ecuación de antes, y el residuo de dividir por o será $3x\dot{x}^2 + 3\dot{x}x\dot{o}x + \dot{x}^3o^2 - \dot{x}y^2 - 2x\dot{y}y - 2\dot{x}o\dot{y}y - xo\dot{y}\dot{y} - \dot{x}o^2\dot{y}\dot{y} + a^2\dot{z} = 0$. Disminúyase la cantidad o al infinito y, omitiéndose los términos evanescentes, quedará $3x\dot{x}^2 - \dot{x}y^2 - 2x\dot{y}y + a^2\dot{z} = 0$ Q.E.D. (Ibid., pp. 23, 24)

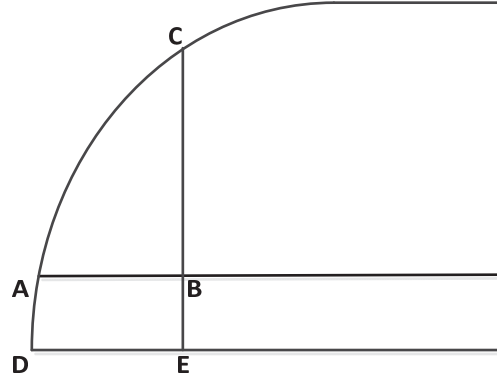
Posteriormente, Newton hace una explicación más completa donde exhibe otros ejemplos para la búsqueda de sus fluxiones de cantidades.

² También utilizó primas en lugar de puntos para las primeras, segundas, etc. fluxiones de z, y, x, v , esto es, $\dot{z}, \dot{y}, \dot{x}, \dot{v}$; etc.

Proposición II – Problema II.

Encontrar las curvas que pueden cuadrarse.

Sea por encontrar la figura ABC , BC la (línea) rectángula aplicada ordenadamente y AB la abscisa. Prolónguese CB hasta E como se produce $BE = 1$, y complétese el paralelogramo $ABED$, y las fluxiones de las áreas ABC , $ABED$ serán como BC y BE . Tómese, por lo tanto, cualquiera ecuación con la cual pueda ser definida la relación de las áreas, y de allí será dada la relación de las ordenadas BC y BE por Prop. I. Q.E.I.



Los ejemplos de esta cosa se tendrán en las dos proposiciones siguientes.

Proposición III – Teorema I. Si se escribe z en lugar de la abscisa AB y del área AE o sea $AB \times 1$ indistintamente, y si se escribe R en lugar de $e + fz^n + gz^{2n} + hz^{3n} + \text{etc.}$: el área de la curva $z^\theta R^\lambda$, será BC aplicada ordenadamente igual

$$\theta_e + \theta \times fz^n + \theta \times gz^{2n} + \theta \times hz^{3n} + \text{etc.} \times z^{\theta-1} R^{\lambda-1} + \lambda n + 2\lambda n + 3\lambda n$$

Proposición IV – Teorema II. Si la abscisa AB de la curva se hace z , y si en lugar de $e + fz^n + gz^{2n} + \text{etc.}$, se escribe R , y si en lugar de $k + lz^n + mz^{2n} + \text{etc.}$ se escribe S ; entonces, el área de la curva se hace $z^\theta R^\lambda S^\mu$: la aplicada ordenadamente BC será igual.

3.1.3 El Cálculo Infinitesimal en Leibniz y sus seguidores.

Análisis de los infinitamente pequeños para el estudio de las líneas curvas

A continuación se presenta un extracto y análisis del libro *Análisis de los infinitamente pequeños para el estudio de las líneas curvas*, cuyo autor es Guillaume Francois Antoine de l'Hôpital (1661-1704), conocido como el Marqués de l'Hôpital, toma como base la teoría planteada y desarrollada por el alemán Gottfried Wilhelm Leibniz sobre el Cálculo, cuyos trabajos fueron estudiados y ampliados por los hermanos Jacques Bernoulli (1654-1705) y Jean Bernoulli (1667-1748).

En un esfuerzo conjunto de Leibniz y los Bernoulli, para el año 1700 tenían construido casi por completo lo que conocemos como Cálculo diferencial e integral elemental. Fue precisamente Jean Bernoulli, el intermediario entre este Cálculo diferencial y el Marqués de

l'Hôpital, quien se lo dio a conocer y lo instruyó sobre el uso de las reglas de este método para resolver una gran diversidad de problemas, tales como el radio de curvatura de una curva dada, problema que l'Hôpital podía resolver con maestría pero tras un extenso trabajo. Bernoulli le mostró la eficiencia del nuevo método resolviendo el mismo problema, no sólo para una sino, generalizado para todo tipo de curvas. L'Hôpital quedó sumamente interesado y se dedicó a aprender tal teoría. De hecho, l'Hôpital contribuyó en gran medida a la evolución de la misma publicando esta obra científica, que es una introducción a la geometría de los infinitamente pequeños, con un extraordinario sentido didáctico. Esta es una de las más grandes acciones realizadas por l'Hôpital hacia la difusión del conocimiento, a pesar de la existencia de comentarios por usar el poder y el dinero para manipular y apropiarse de trabajos.

Al mencionar que la obra de l'Hôpital tiene un carácter pedagógico, se debe a la aparente claridad del texto, acompañando definiciones, teoremas y problemas, de un sentido geométrico que guía al lector para situarlo en el punto que l'Hôpital deseaba explicar. Cabe señalar que él, aunque no es autor de la teoría y publicó a su nombre gran parte de las ideas desarrolladas por Jean Bernoulli, hizo algunas contribuciones a la misma dentro de las cuales está el resultado más importante que lleva su nombre y por el cual es reconocido, la llamada *regla de l'Hôpital*. Dicha regla, en términos del lenguaje matemático que utilizamos en la actualidad, dice:

Supóngase que f y g están definidas y son diferenciables en (a, b) , y que $g'(x)$ es diferente de cero para toda x que está en (a, b) donde $-\infty \leq a < b \leq +\infty$. Supóngase que $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$. Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ y $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ entonces $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = A$. (l'Hospital, 1998, pp. 7 y 8)

Pese a todas las acusaciones de plagio que también recibió l'Hôpital, su posición social y económica que tenía como Marqués y la situación ya conocida entre los Bernoulli y él, le permitieron reconocer en su texto el trabajo realizado por Leibniz y los Bernoulli, creadores de la teoría, diciendo:

Por lo demás, reconozco estar en deuda con los trabajos luminarios de los señores Bernoulli, sobre todo con los del joven quien actualmente es profesor en Groningen. Me he servido sin cumplidos de sus descubrimientos y de los del señor Leibniz. Es por ello que consiento que ellos reivindiquen todo lo que gusten; yo me conformo con lo que tengan a bien dejarme. (Ibid., p. 21)

Este texto, junto con la teoría planteada por Leibniz desde 1684, fue fuertemente criticada en ese tiempo en la *Académie des Sciences* de París, discusión que ha prevalecido incluso hasta nuestros días, en torno a la validez de los métodos infinitesimalistas y las bases sobre las cuales se erige este nuevo Cálculo.

En el presente trabajo no pretendemos inclinarnos a favor o en contra de la validez de dichos métodos, pero sí mostrar la sencillez que emerge al usar este enfoque en la enseñanza

Sección I: Donde se dan las reglas de este Cálculo.

Definición. La parte pequeña en la que una cantidad variable aumenta o disminuye continuamente es llamada la diferencia.³

Tracemos $MR \parallel AC$, las cuerdas AM y Am , el arco $\widehat{MS}$ del círculo con centro en A y radio AM . Entonces, Pp será la diferencia de AP que etiquetaremos como dx , Rm la diferencia de PM como dy , Sm la diferencia de AM como dz , Mm la diferencia de $\widehat{AM}$ como du , triángulo MAM la diferencia del segmento de curva AM como dt , y $MPpm$ la diferencia de la región comprendida por $\widehat{AMP}$ como ds ⁴. De donde $AP = x$, $PM = y$, $AM = z$, $\widehat{AM} = u$, espacio mixtilíneo $AMm = t$, y espacio mixtilíneo $\widehat{AMP} = s$.

⁴ La letra d denotará diferencia.

Corolario. ...las cantidades constantes no tienen diferencia. Su diferencia es cero (nula); es decir, no varían⁵. (l'Hospital, pp. 28, 29)

Dado que nos interesa conocer y aprender a manipular el análisis de l'Hôpital, es necesario tener presentes los siguientes requerimientos:

- I. Una cantidad permanece siendo la misma si no incrementa o disminuye más que por otra cantidad infinitamente menor que ella. Es decir, $d(v + c) = dv$ con $v = f(x)$ y c una constante.
- II. Considerar una línea curva como una poligonal, es decir, el ensamblaje de una infinidad de líneas rectas. Tal es el caso de la región mSM considerado como un triángulo rectilíneo.

Es importante señalar que en lo sucesivo, l'Hôpital usará las primeras letras del alfabeto $a, b, c, \dots$ como cantidades constantes, y a las últimas $\dots, x, y, z$ como cantidades variables. Esto es, tendremos expresiones como $x + dx, y + dy, z + dz, a + da = a, b + db = b, \dots$.

Problema (Proposición I): Tomar la diferencia de varias cantidades sumadas juntas o sustraídas unas de otras. (Ibid., p. 30)

Sea $a + x + y - z$, su variación $a + x + dx + y + dy - z - dz$. Entonces, la diferencia será la variación menos las cantidades iniciales.

$$d(a + x + y - z) = a + x + dx + y + dy - z - dz - a - x - y + z = dx + dy - dz$$

tal cual se expresa en la actualidad.

Orientando este resultado, citado en el texto de l'Hôpital, hacia el punto que nos interesa abordar sobre la enseñanza del Cálculo, podemos mencionar que en el enfoque infinitesimalista la forma en que se deducen las reglas con que se manejan las diferenciales⁶ es muy sencilla, si aceptamos las dos definiciones y requerimientos para manipular el método. Incluso podemos aventurarnos a decir que estos puntos que debemos aceptar para el análisis de los infinitamente pequeños, resultan lógicos al hablar de las diferencias, pues nuestro sentido común junto con la descripción geométrica de la situación nos conducen a ellas.

En el sentido pedagógico; es decir, lo que ocurre con nuestros estudiantes en el salón de clases al enseñar estos conceptos, es donde debemos cuestionarnos qué es más importante, una claridad en la explicación de los mismos o un rigor que fundamente los conceptos, aunque se corra el riesgo de perder lo intuitivo. Al respecto, consideramos que en matemáticas no es bien visto tener que aceptar una afirmación sin que sea demostrada previamente, lo que la caracteriza como una ciencia exacta; sin embargo, el mismo Euclides lo hizo y para trabajar con su geometría era necesario aceptar los cinco postulados, de los

⁵ Una diferencia es un cambio en la dirección de la curva.

⁶ Término que utilizamos comúnmente en los textos actuales.

cuales los primeros cuatro eran evidentes, pero no el quinto, el Postulado de las paralelas, causando grandes debates entre los científicos desde aquella época hasta siglo XIX. Continuemos nuestro análisis del texto de l'Hôpital, con el siguiente problema.

Problema (Proposición II): Tomar la diferencia de un producto de varias cantidades multiplicadas entre sí. (*Ibid.* p. 31)

Consideremos el producto xy , su variación $x + dx$ e $y + dy$. Así, el producto de la variación $(x + dx)(y + dy)$ es $xy + xdy + ydx + dxdy$.

Entonces, la diferencia será

$$d(xy) = xy + xdy + ydx + dxdy - xy = xdy + ydx$$

Se ha anulado el término $dxdy$ puesto que, en palabras de l'Hôpital: (*Ibid.* p. 31).

Es fácil ver que este problema se puede generalizar para un producto de n cantidades; para tres:

$$d(xyz) = yzdx + xzdy + xydz$$

$$d(xyzv) = yzvdx + xzvdv + xyvdz + xyzdv$$

Obsérvese, la deducción que resulta bastante lógica.

Problema (Proposición III): Tomar la diferencia de una fracción cualquiera. (*Ibid.* p. 32)

Consideremos la fracción $\frac{x}{y} = z \Rightarrow x = yz$. Como las dos cantidades x y el producto yz son iguales, sus incrementos también serán iguales entre si. Entonces, $dx = ydz + zdy \Rightarrow dz = \frac{dx - zdy}{y}$; pero $z = \frac{x}{y}$, por lo que la diferencia de $\frac{x}{y}$ es $dz = \frac{ydx - xdy}{y^2}$.

$$\text{Así, } d\left(\frac{a}{x}\right) = -\frac{adx}{x^2} \text{ y } d\left(\frac{x}{a+x}\right) = \frac{(a+x)dx - xd(a+x)}{(a+x)^2}.$$

Problema (Proposición IV): Tomar la diferencia de una potencia cualquiera perfecta o imperfecta, de una cantidad variable. (*Ibid.* p. 33)

n es considerada como una cantidad perfecta si $n \in \mathbb{Z}$; mientras que si $n \in \mathbb{Q} - \mathbb{Z}$, entonces se llama cantidad imperfecta.

Para n perfecta x^n , obtengamos su diferencia:

puesto que $x^2 = xx$, su diferencia $d(x^2) = d(xx) = 2xdx$;

luego, $x^3 = xx^2$, su diferencia $d(x^2) = d(xx^2) = xdx^2 + x^2dx = 3x^2dx$.

De aquí que:

$$d(x^n) = nx^{n-1}dx.$$

Además,

$$\text{si } n = -m, d(x^{-m}) = d\left(\frac{1}{x^m}\right) = d\left(\frac{x^m}{x^{2m}}\right) = -mx^{-m-1}.$$

Para n imperfecta, tendremos

$$n = \frac{p}{q}: d\left(x^{p/q}\right) = \frac{p}{q}x^{p/q-1} = \frac{p}{q}x^{p-q/q}dx = \frac{p}{q}\sqrt[q]{x^{p-q}}dx.$$

Observación: Si ocurre que x crece pero y y z decrecen, entonces será necesario tomar $x + dx$, $y - dy$, $z - dz$, de tal forma que $d(xyz) = yzdx - xydz - xzdy$.

Sección II. Uso del Cálculo de las diferencias para encontrar las tangentes de todos los tipos de curvas.

Definición. Si se prolonga uno de los pequeños lados Mm de la poligonal que compone a la línea curva (Figura 3.2), este pequeño lado, así prolongado, será llamado la tangente de la curva en el punto M o m .

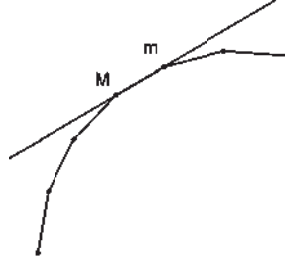


Figura 3.2. Tangente en el punto M o m .

Problema (Proposición I): Sea AM una curva tal que $AP = x$ (abscisa), $PM = y$ (ordenada), $Pp = dx = MR$, y $Rm = dy$. (Ibid. p. 41, 42)

De los triángulos semejantes (Figura 3.3) mRM y MRT se tiene que

$$\frac{mR}{RM} = \frac{MP}{PT} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y}{PT} \Rightarrow PT = \frac{ydx}{dy},$$

Donde PT es la subtangente a través de la cual podemos encontrar la tangente MT .

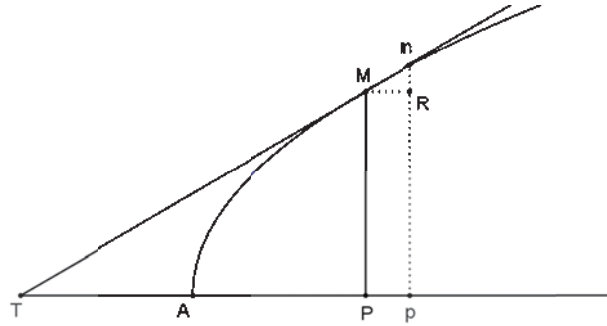


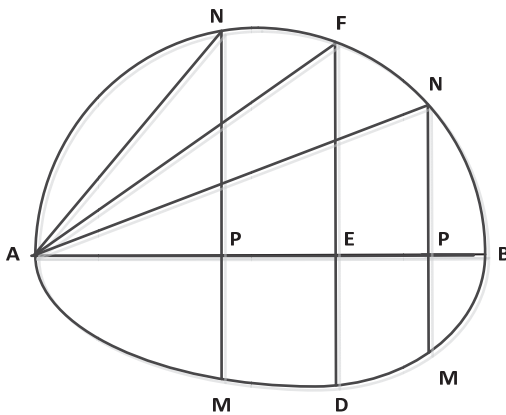
Figura 3.3. Obtención de la subtangente en un punto de una curva.

Sección III. Uso del Cálculo de las diferencias para encontrar las ordenadas mayores y las menores, a lo que se reducen los problemas De Máximos y Mínimos.

En esta sección el Marqués de l'Hôpital muestra lo que en su prefacio cita, la facilidad para enfrentar y resolver problemas complejos al aceptar las cantidades infinitesimales. Describe 13 problemas con detalle y acompaña sus explicaciones con su situación geométrica, lo que permite que una mejor comprensión de la solución de tales problemas. Como ejemplo, citaremos la siguiente cuestión:

Entre todos los conos que pueden ser inscritos en una esfera, determinar aquél que tiene la mayor superficie convexa. La solución para el problema descrita por l'Hôpital es:

El problema se reduce a determinar sobre el diámetro AB , del semicírculo AFB el punto E (figura 2.16), de modo que habiendo trazado la perpendicular EF y el segmento AF , el rectángulo $AF \times FE$ sea el mayor de todos los $AN \times NP$ análogos. Pues si se concibe que el semicírculo AFB hace una revolución completa en torno del diámetro AB , es claro que describirá una esfera, y que todos los triángulos rectángulos AEF y APN describirán unos conos inscritos en estas esferas cuyas superficies convexas, descritas por las cuerdas AF y AN , serán entre sí como los rectángulos $AF \times FE$ y $AN \times NP$.



Sea entonces la incógnita $AE = x$ y $AB = a$, que está dado. Se tendrá, por la propiedad del círculo

$$AF = \sqrt{ax}, \quad EF = \sqrt{ax - x^2},$$

y por lo tanto,

$$AF \times FE = \sqrt{a^2x^2 - ax^3}$$

que debe ser un máximo. Es por eso que se concebirá una línea curva **MDM** tal que la relación de la ordenada $PM = y$ a la abscisa $AP = x$ esté expresada por la ecuación

$$\frac{\sqrt{a^2x^2 - ax^3}}{a} = y,$$

y se buscará el punto **E** de modo que la ordenada **ED** sea mayor que todas las **PM** análogas. Se tendrá entonces, al tomar la diferencia,

$$\frac{2axd - 3x^2dx}{2\sqrt{a^2x^2 - ax^3}} = 0,$$

de donde se obtiene $AE = x = \frac{2}{3}a$. (Ibid., pp. 100, 101)

Otro de los seguidores de las ideas de Leibniz es Etienne Bezout quien, así como el Marqués de l'Hôpital, se maravilló con este Cálculo y editó un libro para enseñar el Cálculo infinitesimal con la finalidad de que el lector aprendiera resolver problemas. Este hecho es comparable con lo que se pretende en una escuela de ingeniería. Veamos entonces su trabajo.

El Cálculo infinitesimal de Bezout

Etienne Bezout (1730-1783), fue un matemático francés autor de la Teoría General de las Ecuaciones Algebraicas, quien escribió su *Curso de Matemáticas* para la comprensión y aplicación de la mecánica racional, también llamada analítica, en la Escuela Politécnica de París. Dicho curso fue precedido por una corta exposición sobre los *Principios del Cálculo Infinitesimal*, la cual era una introducción necesaria para quienes se adentraban a las ciencias físico-matemáticas, siendo éste, una continuación de su *Tratado de Álgebra*. Es de nuestro interés, analizar el enfoque que Bezout expresa en sus escritos respecto a los infinitésimos en el Cálculo, por lo que, esbozaremos su texto *Cálculo Infinitesimal*.

Cálculo Infinitesimal

Primera parte. Principios del Cálculo Infinitesimal

Las nociones preliminares del texto muestran al estudiante cómo descender desde las cantidades hasta sus elementos, así como regresar desde los elementos de las cantidades hasta estas mismas, siendo lo primero el Cálculo diferencial y lo segundo el Cálculo integral. Para ello, el autor previene al lector definiendo lo que se entiende por cantidades

infinitamente pequeñas o infinitas, puesto que al hablar sobre las cantidades respecto a sus elementos, se está hablando de sus crecimientos infinitamente pequeños.

Citaremos textualmente los puntos §4 y §5 de los Principios del Cálculo Diferencial, pues expresan las bases del Cálculo infinitesimal.

§4. Decimos que una cantidad es infinita o infinitamente pequeña frente a otra, cuando no es posible asignar cantidad alguna tan grande o tan pequeña para expresar la razón entre ellas; es decir, el número de veces que contiene una a la otra. [...]. Por ejemplo, si x es infinita frente a a , aunque por ello sea imposible determinar su razón, esto no impide que ya no pueda imaginarse una tercera cantidad que sea frente a x lo que ésta es respecto a a ; es decir, que sea el cuarto término de una proporción, cuyos tres primeros términos serían $a:x :: x:y$. Éste cuarto término, que es $\frac{x^2}{a}$, será infinitamente más grande que x , puesto que contiene a x tantas veces como se supone que x contiene a a . [...]. Se denominan a estas cantidades infinitas, o infinitamente pequeñas de órdenes diferentes. (Bezout, p. 10)

En general, el producto de dos cantidades infinitas, o infinitamente pequeñas, del primer orden es infinitamente más grande o infinitamente más pequeño que cada uno de sus factores. En efecto, $xy:y :: x:1$ [...]. Un razonamiento semejante permite ver un producto o una potencia.

Observemos bien esta diferencia en la comparación de los infinitos o de los infinitamente pequeños, entre ellos o frente a cantidades respecto a las cuales son infinitos o infinitamente pequeños, relativamente. Si x es infinito frente a a , nada puede medir su razón; empero, bajo la misma hipótesis, la razón de x a x , multiplicada o dividida por o entre cualquier número finito que se quiera, será una razón finita; así, x infinito o infinitamente pequeño es incompatible frente a a , supuesto éste número finito; sin embargo, no lo es frente a ax , ya que x es a $ax :: 1:a$. (Bezout, 1999, pp.11)

En este punto se aclara la idea de un concepto base del enfoque infinitesimalista del Cálculo.

§5. Para expresar mediante el Cálculo que una cantidad x es infinita en comparación de otra a o, ..., para expresar que a es infinitamente pequeña frente a x , es menester, en la expresión algebraica que relacione a estas cantidades, eliminara todas las potencias de x inferiores a la más elevada y, por lo tanto, también a los términos sin x . Por ejemplo, si en

$$\frac{3x + a}{5x + b}$$

se supone que x es infinito frente a a y b se suprimirán a y b y se tendrá $\frac{3x}{5x}$ ó $\frac{3}{5}$ como valor de $\frac{3x+a}{5x+b}$, cuando x es infinito. En efecto, $\frac{3x+a}{5x+b}$ equivale a $\frac{3+a/x}{5+b/x}$ [...] que deberá reducirse a $\frac{3}{5}$. (Ibid., p. 11, 12)

Mientras más se avanza en la lectura de este texto, nos encontramos con un lenguaje confuso, muy probablemente por la redacción, en español al menos, justificando situaciones como $x^2 + ax + b = x^2$ si x es infinita (infinitamente grande), así como $x^2 + ax = ax$ si x es infinitamente pequeña; buscando que el lector no tenga temor en realizar estas comparaciones al omitir cantidades infinitesimales. Bezout lo dice así:

[...] por el contrario, no es sino por estas omisiones que se expresa lo que se desea expresar. Ahora bien, si al suponer que x es infinito no se eliminaran los términos que acabamos de señalar, no se respondería a lo que se demanda. (Ibid., p.12)

Para justificar las afirmaciones anteriores, Bezout hace demostraciones, por así llamarlas, como la siguiente:

Imagina la sucesión $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots$, es decir la sucesión $\frac{x}{x+1}$ que se aproxima sin cesar a la unidad...

En términos actuales referiríamos la cuestión al límite de la sucesión, esto es, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x+1} = 1$.

[...] para obtener el último término de la sucesión hay que suponer x infinito, es decir, $x + 1 = x$ entonces $\frac{x}{x+1} = \frac{x}{x}$; ... la omisión del término $+1$, lejos de alterar la conclusión es, al contrario, la que la da como debe ser. (Ibid., p.13)

Además, describe en textos largos acciones matemáticas que bien podrían compactarse para hacer menos cansada la lectura. Lo curioso es que se trata de un texto para alumnos de la Escuela Politécnica de París para el curso de mecánica, y hasta el momento, no ha sido sencillo de leer, lo cual repercute en el objetivo de ser un texto didáctico. Sin embargo, busca a toda costa, aunque no con suma precisión, aclarar la idea de cantidades infinitas o infinitamente pequeñas.

Elementos del Cálculo Diferencial

Una vez que se ha aclarado la manipulación de las cantidades infinitamente grandes, o bien, infinitamente pequeñas, Bezout enuncia los elementos del cálculo diferencial. Así, considerando una cantidad variable que crece por grados infinitamente pequeños, define la diferencial:

§6. *La diferencia del valor de una cantidad en un instante cualquiera y el valor de esta misma cantidad en el instante inmediatamente siguiente, es el incremento*

(decremento) que recibe esta cantidad: a esto es a lo que se le llama diferencial de esta cantidad. (Ibid., p.14)

Respecto a la notación, dx o dy representan las diferenciales de x o y , cantidades simples; mientras que $d(x^2)$ o $d(\sqrt{x^2 - a^2})$ representan las diferenciales de x^2 o $\sqrt{x^2 - a^2}$, cantidades compuestas. Además, usa las últimas letras del alfabeto t, u, v, x, y, z para representar cantidades variables y las primeras letras a, b, c, e para representar constantes.

Los siguientes ejemplos muestran el uso de las reglas para el cálculo de diferenciales de cantidades variables que en palabras de Bezout sería: “no hay otra cosa que hacer sino afectar cada variable con la característica d ”.

§8. $d(x + y - z) = dx + dy - dz$. [...] En efecto, como x se hizo $x + dx$, y se hizo $y + dy$ y z se hizo $z + dz$, entonces, la cantidad propuesta $x + y - z$ se convirtió en $x + dx + y + dy - z - dz$, y al formar la diferencia de esos dos estados se tendrá $x + dx + y + dy - z - dz - x - y + z$; es decir, $d(x + y - z) = dx + dy - dz$. (Ibid., p. 14)

Cuando nos preguntamos ¿cuál es la diferencial de una constante, por ejemplo b ?, Bezout responde de una manera indiscutible: $d(b) = 0$ pues siendo b una constante, no tiene incrementos, y por lo tanto no tiene diferencial.

§9. Para diferenciar un producto como $d(xy)$ habrá que seguir la regla siguiente: Diferencie sucesivamente respecto a cada variable, como si todo el resto fuera multiplicador constante. Así $d(xy) = xdy + ydx$.

Justificación: [...] como x se hizo $x + dx$ e y se hizo $y + dy$ entonces $(x + dx)(y + dy) = xy + xdy + ydx + dxdy$; la diferencia de los dos estados es $xy + xdy + ydx + dxdy - xy = xdy + ydx + dxdy$, pero $dxdy$ se habrá de omitir porque dx y dy son cantidades infinitamente pequeñas. Entonces, finalmente $d(xy) = xdy + ydx$. (Ibid., pp. 15, 16)

Es notable, como lo fue en los trabajos de Leibniz plasmados en el libro de l'Hopital, la facilidad con la que se puede obtener la diferencial de un producto, así como la comprensión de su justificación, que me atrevo a considerar que resultaría evidente también para un estudiante en su iniciación al Cálculo. De la misma manera se verán las reglas de diferenciación restantes. Observemos la diferencial de la potencia de una cantidad variable:

§10. Si la cantidad propuesta es una potencia de una cantidad variable siga esta regla: multiplique por el exponente, disminuya a este exponente en una unidad y multiplique por la diferencial de la variable. Así, $d(x^m) = mx^{m-1}dx$. (Ibid., p.16)

Justificación: como x se transforma en $x + dx$ entonces x^m se hace $(x + dx)^m$, esto es

$$x^m + mx^{m-1}dx + m \cdot \frac{m-1}{2} x^{m-2}dx^2 + etc.$$

Dado que $m \cdot \frac{m-1}{2} x^{m-2} dx^2$ es infinitamente pequeño de segundo orden y los que le suceden son aún de órdenes inferiores, la serie se reduce $x^m + mx^{m-1}dx$; por lo tanto, la diferencia de los dos estados $x^m + mx^{m-1}dx - x^m$ es $d(x^m) = mx^{m-1}dx$ para cualquier exponente m .

Se puede observar en estos tres ejemplos que las reglas son relativamente sencillos para diferenciar cantidades y, en la práctica, el procedimiento es muy similar al que realizamos hoy en día obteniendo los mismos resultados. La problemática radica en la justificación de esas omisiones, en sí, en la manipulación de las cantidades infinitesimales que Bezout intenta aclarar al lector desde un inicio; tales explicaciones pueden parecer carentes de precisión, sin embargo, resuelve con exactitud éstos y muchos más problemas.

De la misma manera, expresa la diferencial de un cociente mostrando varios ejemplos, así como la diferencial de funciones trascendentes; tal es el caso de la diferencial de $\text{sen } z$.

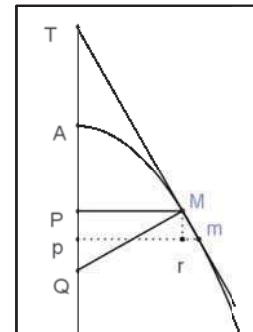
§21. [...] para calcular $d(\text{sen } z)$ hay que imaginarse que el ángulo z se hace $z + dz$ y $\text{sen}(z + dz) - \text{sen } z = d(\text{sen } z)$. Como $\text{sen}(z + dz) = \text{sen } z \cos dz + \text{sen } dz \cos z$ y suponiendo el radio = 1, el seno de un arco infinitamente pequeño dz es ese mismo arco y su coseno no difiere del radio, se tendrá pues $\text{sen } dz = dz$ y $\cos dz = 1$, y por lo tanto, $\text{sen}(z + dz) = \text{sen } z + dz \cos z$. Entonces,

$$\text{sen}(z + dz) - \text{sen } z = d(\text{sen } z) = dz \cos z. (\text{Ibid.}, p.22)$$

Nuevamente se considera, como lo hacía Leibniz, que para un ángulo infinitamente pequeño, el arco se convierte en recto, obteniendo un resultado veraz.

Respecto a las aplicaciones de esta serie de reglas que conforman la herramienta llamada cálculo diferencial, a la manera de Bezout, podemos mencionar la siguiente.

§28. Para trazar una tangente a una línea curva cualquiera AM (figura 1) se concibe esta línea curva como un polígono de una infinidad de lados infinitamente pequeños: la prolongación MT de uno de esos lados (Mn) es la tangente, que se determina, para cada punto M , calculando el valor de la subtangente PT ; o de la parte de la línea sobre la cual se cuentan las abscisas, comprendida entre la ordenada PM y el punto de encuentro T de esta tangente. (Ibid., p.29)



De la figura, Bezout destaca que $\Delta Mrm \sim \Delta TPM$ de donde $rm : rM :: PM : PT$, y, si llamamos $AP = x$ y $PM = y$ se tiene que $Pp = rM = dx$ y que $rm = dy$. Entonces $dy : dx :: y : PT$, es decir, $PT = \frac{y dx}{dy}$, la subtangente de cualquier curva.

Similarmente, $\Delta Mrm \sim \Delta MPQ$ de donde $dx:dy :: y:PQ$, así $PQ = \frac{ydy}{dx}$, la subnormal de cualquier curva. Vemos la aplicación en la elipse cuya ecuación sea $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(ax - x^2)$ como lo describe Bezout.

[...] Diferencio esta ecuación, $2ydy = \frac{bb}{aa}(adx - 2xdx)$, extraigo $\frac{dx}{dy} = \frac{2aay}{abb-2bbx}$. Al sustituir $\frac{ydx}{dy}$, tendré $\frac{ydx}{dy} = \frac{2aay^2}{abb-2bbx}$; y finalmente introduciendo $yy = \frac{bb}{aa}(ax - xx)$ y reduciendo obtendré

$$\frac{ydx}{dy} = PT = \frac{2(ax-xx)}{a-2x} = \frac{ax-xx}{\frac{1}{2}a-x}. \text{ (Ibid., p. 30)}$$

Con esto, Bezout confirma cómo la omisión de las cantidades infinitamente pequeñas de segundo orden, frente a las de primer orden, permite obtener el mismo resultado que en la aplicación del Álgebra a la Geometría, métodos por los cuales se conocía ya este resultado. Pero es esta cuestión la que da lugar nuevamente a la polémica sobre la aceptación de éste cálculo como un método matemático riguroso para los científicos de aquella época y de la actual.

Con estas mismas reglas del Cálculo Diferencial se da solución a una gran cantidad de problemas como el anterior, así como problemas de máximos y mínimos dentro de los cuáles podemos mencionar el siguiente: Entre todos los paralelepípedos con la misma superficie y misma altura, ¿cuál es el que tiene la mayor capacidad?

§53. Denotemos h la altura y S la superficie del paralelepípedo, x y y los dos lados del rectángulo que le sirve de base... Así, la superficie total S tiene por expresión $2hx + 2hy + 2xy = c$. La capacidad es simplemente hxy . Para que ésta sea la mayor de todas las que tengan la misma superficie, es necesario que se tenga $hxdy + hdyx = 0$, que es $xdy + ydx = 0$.

Pero la ecuación $2hx + 2hy + 2xy = cc$, que expresa que la superficie de todos estos paralelepípedos es constante, da $2hdx + 2hdy + 2xdy + 2ydx = 0$... (Ibid., p. 55)

Bezout sustituye $dx = -\frac{xdy}{y}$ en la ecuación anterior concluyendo que $y = x$, ya que $-\frac{2hxdy}{y} + 2hdy + 2xdy - \frac{2xydy}{y} = 0 \Rightarrow 2hdy = \frac{2hxdy}{y} \Rightarrow y = x$. Con lo cual, la S la superficie total se expresa como $2hx + 2hx + 2x^2 = c^2$ reduciéndose a $2x^2 + 4hx - c^2 = 0$. Resolviendo esta última ecuación obtiene que la solución es $x = -h + \sqrt{h^2 + \frac{1}{2}c^2}$ sin considerar la raíz negativa por no resolver el problema.

Éste es un ejemplo de la sencillez del método para la resolución de problemas de aplicación, problemas que están presentes en el quehacer del Ingeniero y, por ende, son problemas que se estudian a profundidad en las escuelas de Ingeniería.

De todo lo citado en este capítulo, es indiscutible la efectividad del uso de los infinitésimos en el Cálculo que emplearon Leibniz, Bezout y l'Hôpital. Incluso Newton, con cautela en la definición de las cantidades evanescentes, resuelve muy similarmente problemas.

3.2 La búsqueda del rigor y el Análisis de Cauchy

A lo largo de este capítulo, se han mencionado las cuestiones que generaron la problemática sobre si el Cálculo que presentaba Leibniz y sus seguidores, l'Hôpital o Bezout, entre otros, conforman una herramienta que tenga las “virtudes” necesarias para que sea merecedora de estar incorporada en el compendio de las Matemáticas, en donde se sustentan el rigor y la justificación de tales herramientas.

Lo anterior no puede negarse, pero, ¿acaso un estudiante de ingeniería que afirma que $2 + 0.000001 = 2$ no está haciendo matemáticas? Si ésta es una práctica común que permite resolver problemas de su área y que, además, no entra en conflicto con el estudiante sobre su veracidad, por qué tratar de desechar esta idea y reemplazarla por otra que goza del “privilegio” del rigor, lo cual puede llevarlo a la confusión y, por qué no, a limitar su ingenio para abordar y resolver problemas.

Es indudable que la necesidad de justificar los resultados matemáticos y el rigor lógico, motivaron el desarrollo de la matemática; particularmente, la matemática pura. Una matemática abstracta que es útil para el robustecimiento del conocimiento y la evolución de esta ciencia, obteniéndose cada vez más nuevos resultados, pero alejada de aplicaciones prácticas para resolver problemas en la matemática misma y en otras ciencias.

Es decir, si bien es cierto que el rigor y la lógica permitieron el desarrollo de la matemática, también es cierto que esto motivó un menosprecio de las ideas intuitivas y geométricas que originaron el Cálculo, como lo impusieron Cauchy y Weierstrass.

No olvidemos que el Análisis Matemático es la continuación del estudio de los conceptos del Cálculo, centrándose fundamentalmente en las propiedades de los números. Dos conceptos son primordiales en el estudio de estas dos ramas de las matemáticas, el de función y el de número; sobre éstos descansa el rigor establecido por Cauchy.

Capítulo 4

El Cálculo en la escuela

4.1 La diferencial en los textos de Cálculo en el siglo XIX

4.1.1 Eliminación de los infinitesimales del Cálculo

Como hemos visto en los capítulos anteriores, con la propuesta de Lagrange (1736-1813) y bajo el supuesto de que las versiones existentes carecían del rigor necesario para la época, comenzaron a explorarse propuestas del cálculo en las que no se recurriera, entre otras ideas, a las cantidades infinitamente pequeñas, las fluxiones, las cantidades evanescentes. Y fue precisamente la propuesta de Lagrange la que marcó el camino hacia la presentación del Cálculo que se conserva hasta nuestros días, aunque con algunas precisiones:

El camino trazado por Lagrange ejerció una gran influencia en el desarrollo de la teoría de funciones en una variable y propició la fundamentación definitiva del cálculo, lograda por los analistas del XIX, con Gauss, Cauchy y Weierstrass a la cabeza. (Pardo, 2003)

Podemos decir entonces que, a partir del siglo XIX, los infinitesimales fueron desechados del quehacer de los matemáticos. Sin embargo, en los libros de texto, y por lo tanto en las aulas, la situación no se presentó de la misma manera.

En efecto, en los textos de cálculo el proceso para la eliminación de los infinitesimales ocurrió muy lentamente, tomándose alrededor de un siglo, hasta iniciado el siglo XX. Por otra parte, en los textos a las ciencias básicas y de la ingeniería, los infinitesimales han seguido utilizándose, incluso hasta nuestros días. Ahora bien, si fue Lagrange el precursor, fue Cauchy quien consiguió construir una propuesta que cumpliera las necesidades de rigor que se esperaban:

Cauchy dio la primera fundamentación rigurosa razonablemente exitosa para el cálculo. Comenzando con una precisa definición de límite, él propuso la teoría correspondiente a la convergencia, la continuidad, la derivada y la integral del siglo XIX. (Grabiner, 1981)

En la primera parte de este último capítulo, vamos a estudiar un poco la propuesta de Cauchy, y en la segunda veremos los efectos que, sobre la enseñanza del cálculo, ha tenido la decisión de adoptar la propuesta de Cauchy como la “única correcta”.

4.1.2 El Análisis de Cauchy y los nuevos conceptos básicos

En la tercera década del siglo XIX, Cauchy escribió su *Curso de Análisis*, en el que, como podremos observar, el cálculo adquiere un aspecto sumamente distinto al de sus orígenes y muy próximo al que se presenta actualmente en los libros de texto.

Vamos a analizar algunos de los principales conceptos que encontramos en el *Análisis* de Cauchy, para lo cual nos hemos basado en la versión en castellano del *Curso de Análisis*, editada por la UNAM, que contiene los capítulos I, II, IV, V, VI, X y XI del *Análisis algebraico* (1821), así como las lecciones 3, 4, 6, 7, 12, 15, 19, 21, 22, 23, 26, 27, 32, 36, 37, 38, y 40, de las Lecciones sobre cálculo infinitesimal (1823). La traducción del francés y notas de esta edición son de Carlos Álvarez y la introducción de Jean D’hombres. En la versión consultada no se cuenta expresamente con la definición de límite, sin embargo, Sánchez y Valdés (2004) opinan que:

Cauchy definió el límite de una variable: ...cuando los valores atribuidos sucesivamente a una misma variable se aproximan indefinidamente a un valor fijo, de manera que terminan por diferir de él tan poco como se quiera, este último se llama límite de los otros.

Podemos afirmar, entonces, que a esta definición sólo le falta el simbolismo propio de la matemática actual. Con este concepto Cauchy pudo hacer una propuesta en la que no se recurriera a los infinitamente pequeños, al menos como cantidades fijas. Sin embargo, y debido probablemente a que el término estaba muy arraigado entre los matemáticos de la época, Cauchy propone la siguiente definición:

Decimos que una cantidad variable deviene infinitamente pequeña cuando su valor numérico decrece indefinidamente de manera a converger al límite cero.

Con respecto a esto, Carlos Álvarez hace el siguiente comentario al pie de página:

Se puede ver a partir de esta definición, cuando Cauchy habla de una cantidad infinitamente pequeña se refiere esencialmente a una cantidad variable cuyo límite es cero. No creemos que a partir de esta definición, ni de la caracterización que dará a las cantidades infinitamente pequeñas de diversos órdenes, ni tampoco de los

teoremas que demostrará en este primer apartado, sea posible asegurar que Cauchy sustenta su Análisis Algebraico sobre un continuo no standard, en el cual hay infinitésimos al estilo de Leibniz y menos de A. Robinson.

No podemos estar en desacuerdo con Álvarez, sobre todo si tomamos en cuenta que la eliminación de los infinitamente pequeños (como cantidades fijas) era uno de los principales propósitos de Cauchy.

Añadiendo esta definición a la de límite, Cauchy se encuentra, ahora sí, en posición de establecer los conceptos del cálculo diferencial e integral. Así, para la *continuidad* de una función en un intervalo, nos dice:

Sea $f(x)$ una función de la variable x , y supongamos que, para cada valor de x intermedio entre dos límites dados, esta función admite constantemente un valor único y finito. Si a partir de un valor de x comprendido entre esos límites, se atribuye a la variable x un incremento infinitamente pequeño α , la función misma recibirá como incremento la diferencia

$$f(x + \alpha) - f(x)$$

que dependerá al mismo tiempo de la nueva variable α y del valor de x . Dado esto, la función $f(x)$ será, entre los dos límites asignados a la variable x , una función continua de esta variable si, para cada valor de x intermedio entre estos límites, el valor numérico de la diferencia

$$f(x + \alpha) - f(x)$$

decrece indefinidamente con el de α . En otras palabras, la función $f(x)$ permanecerá continua respecto de x entre los límites dados si, entre esos límites, un incremento infinitamente pequeño de la variable produce siempre un incremento infinitamente pequeño de la función.

Cabe señalar que aunque los infinitamente pequeños no nos sirven para un estudio adecuado de las funciones del tipo de la de Dirichlet, dada su discontinuidad en todas partes, este tipo de funciones poco comunes en problemas físicos no son de interés en la ingeniería. Recordemos que el escenario en el que se planteó el uso de los infinitesimales fue precisamente en búsqueda de soluciones para los problemas a los que se enfrentaban en esa época, tal es el caso de problemas de mecánica.

Para la derivada, y partiendo de la suposición de que la función es continua en un intervalo, encontramos lo siguiente:

Cuando la función $y = f(x)$ permanece continua, entre dos límites dados de la variable x y si se asigna a esta variable un valor comprendido entre esos dos límites, un incremento infinitamente pequeño atribuido a la variable produce un incremento

infinitamente pequeño de la función. En consecuencia, si se hace $\Delta x = i$, los dos términos de la razón de las diferencias

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + i) - f(x)}{i} \quad (1)$$

serán cantidades infinitamente pequeñas. Pero mientras que estos dos términos se aproximan indefinidamente y de manera simultánea al límite cero, la razón misma podrá converger a un límite, ya sea positivo o negativo. Este límite, cuando existe, tiene un valor determinado para cada valor particular de x . (...) Para indicar esta dependencia se da a la nueva función el nombre de función derivada, y se redesigna, con ayuda de un apóstrofe, mediante la notación

$$y' \quad \text{ó} \quad f'(x)$$

Para la diferencial, y suponiendo, como es de esperar, que el incremento de la variable es una cantidad finita, encontramos lo siguiente:

Sean como siempre $y = f(x)$ una función de la variable independiente x , i una cantidad infinitamente pequeña, y h una cantidad finita. Si se hace $i = \alpha h$, α será también una cantidad infinitamente pequeña y se tendrá la identidad

$$\frac{f(x + i) - f(x)}{i} = \frac{f(x + \alpha h) - f(x)}{\alpha h},$$

de donde se concluirá

$$\frac{f(x + \alpha h) - f(x)}{\alpha} = \frac{f(x + i) - f(x)}{i} h \quad (2)$$

Cuando la variable α se aproxima indefinidamente a cero y la cantidad h permanece constante, el primer miembro de la ecuación (2) converge hacia un límite que es llamado la diferencial de la función $y = f(x)$. Se indicará esta diferencial por la característica d , (...) así que $df(x) = hf'(x)$.

Así pues, a partir de entonces tenemos que la diferencial se define después de la derivada, lo que equivaldría, en Mecánica, a definir primero la velocidad (o rapidez) de una partícula y luego el desplazamiento como el producto de la velocidad por el tiempo empleado por la partícula en conseguir dicho desplazamiento.

En un texto posterior titulado *Ejercicios de Análisis y de Físico Matemática* (1844), Cauchy comienza como lo hicieron antes L'Hôpital, Euler o Lagrange, con una reseña histórica, exponiendo los logros obtenidos con las versiones anteriores del cálculo, así como las dificultades o deficiencias de las mismas.

En dicha obra, y después de señalar las deficiencias de las versiones de Leibniz, Newton o Lagrange, Cauchy indica cómo concebir *correctamente* la diferencial:

Se pueden eliminar las dificultades que acabamos de señalar, cuando se considera una función derivada como el límite de la razón entre los crecimientos infinitamente pequeños y simultáneos de la función dada y de la variable de la que depende. Adoptando esa definición se podrá, como algunos autores, denominar diferencial de la variable independiente al crecimiento de esa variable, y diferencial de la función dada al producto de la función derivada por la diferencial de la variable.

Enseguida, en los *Ejercicios*, Cauchy recurre a la definición anterior, y a un simbolismo más cercano al actual, para decirnos que:

Dicho lo anterior, sea s una variable distinta de la variable primitiva t . En virtud de las definiciones adoptadas, la razón entre las diferenciales

$$ds, dt,$$

será el límite de la razón entre los incrementos infinitamente pequeños

$$\Delta s, \Delta t$$

Se tendrá entonces,

$$\frac{ds}{dt} = \lim \frac{\Delta s}{\Delta t} \quad (3)$$

Regresando al *Curso de Análisis*, tenemos que, para definir la integral definida, Cauchy comienza por definir una partición de un intervalo $[x_0, X]$:

Supongamos que la función $y = f(x)$ es continua respecto a la variable x entre dos límites finitos $x = x_0$, $x = X$. Supongamos también que se designan por $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ nuevos valores de x interpuestos entre esos límites y que vayan creciendo o decreciendo desde el primer límite hasta el segundo. Será posible servirse de esos valores para dividir a la diferencia $X - x_0$ en los elementos

$$x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \dots, X - x_{n-1} \quad (4)$$

que serán todos del mismo signo.

Enseguida define la suma “izquierda”, es decir, la suma de los productos $f(x_k)\Delta x_k = f(x_k)(x_{k+1} - x_k)$:

...Consideremos ahora que cada elemento se multiplica por el valor $f(x)$ que corresponde al origen de ese mismo elemento; a saber, el elemento $x_1 - x_0$ por $f(x_0)$, el elemento $x_2 - x_1$ por $f(x_1)$..., en fin, el elemento $X - x_{n-1}$ por $f(x_{n-1})$; y sea

$$S = (x_1 - x_0)f(x_0) + (x_2 - x_1)f(x_1) + \dots + (X - x_{n-1})f(x_{n-1}) \quad (5)$$

la suma de los productos así obtenidos. La cantidad S claramente dependerá: tanto del número n de elementos en los que se haya dividido la diferencia $X - x_0$; como de los valores de los elementos y , en consecuencia, del modo de división adoptado.

Después observa que, si el número de subintervalos es muy grande, y la longitud de cada uno de ellos es pequeña, el valor de S tenderá a ser el mismo.

...Es importante observar que si los valores numéricos de los elementos devienen muy pequeños y el número n muy grande, el modo de división sólo tendrá una influencia insensible sobre el valor de S .

Finalmente, una vez que prueba que la suma tiene un límite, da la definición de integral definida:

...Luego, cuando los elementos de la diferencia $X - x_0$ devienen infinitamente pequeños, el modo de división tiene sobre el valor de S tan sólo una influencia insensible; y si se hacen decrecer indefinidamente los valores numéricos de esos elementos, al aumentar su número, el valor de S terminará por ser sensiblemente constante o, en otras palabras, terminará por alcanzar un cierto límite que dependerá únicamente de la forma de la función $f(x)$ y de los valores extremos x_0 y X de la variable x .

Este límite es lo que llamamos una integral definida.

Resulta importante indicar que la búsqueda del rigor trajo aparejada la descontextualización del cálculo, debido a que los conceptos utilizados en las versiones anteriores a Cauchy, particularmente las de Leibniz y Newton, surgieron asociados con una determinada problemática. En el caso de los infinitesimales, estos fueron utilizados, originalmente, para el estudio de la geometría de las curvas; mientras que las fluxiones sirvieron a Newton para explicar el movimiento y el cambio.

Tal situación es claramente expuesta por Jean D'Hombres en el prólogo de la edición en español del Curso de Análisis:

En el Análisis Algebraico Cauchy no hace ninguna referencia a la física matemática, a pesar de que él mismo la cultivó con mucho talento, y no parece interesarse en el conocimiento del mundo sensible ni en las aplicaciones de la ciencia matemática; a pesar de que el texto aparece en una época de mucha actividad, en la que Francia intentó recuperarse de su retraso frente a la Inglaterra de la revolución industrial y, sobre todo, a pesar de que el texto se dirige a los alumnos de una escuela encargada de formar a los cuadros técnicos del Estado y, en menor medida, a los de la industria. Si bien no es el primer texto de matemáticas puras, la obra de Cauchy es tal vez la primera, en análisis, que por sus objetivos, no intenta ninguna justificación ajena a las relaciones intrínsecamente matemáticas. Muy sintomática es también la diferencia con manuales como los de Bezout, sus cursos de matemáticas para el uso

de la artillería o para el uso de los guardias de la marina, redactados cincuenta años antes, pero editados en la época de Cauchy y en los cuales muchas páginas evocan las aplicaciones, libros en los cuales el cálculo diferencial mismo no se presenta sino como preliminar a la mecánica y sólo para su utilización práctica.

Así pues, como lo indica D'hombres, el acercamiento de Cauchy no presupone el interés por resolver determinados problemas, ya sea de carácter geométrico o físico, no aborda ningún problema de este tipo; sus objetivos son totalmente distintos a los de L'Hôpital. Y a diferencia de Lagrange, quien a pesar de haber hecho una presentación de los conceptos de su teoría de manera descontextualizada, dedicaba, sin embargo, el resto de su obra a las aplicaciones a la geometría y a la mecánica, Cauchy no mostraba ningún interés en aplicación alguna.

4.1.3 La diferencial en los textos de Cálculo del siglo XIX

Una vez que las cantidades infinitamente pequeñas fueron desechadas, lo mismo tuvo que ocurrir con todos los conceptos que se definían con base en las mismas. Así pues, la diferencial, que en el cálculo leibniziano era un incremento infinitesimal de una variable, dejó de usarse como tal y tuvo que adquirir un nuevo significado.

Resulta interesante, entonces, observar cómo es que la diferencial se presentaba en los textos de Cálculo, durante el primer siglo posterior a la publicación del *Análisis* de Cauchy. Para ello tomaremos textos con diferentes preferencias en cuanto a la versión del cálculo a la que recurrían.

Comenzaremos con dos textos de los que podríamos señalar como cercanos a la versión de Lagrange, el texto francés de Lacroix, de mediados del siglo XIX, y el mexicano de Díaz Covarrubias, de fines del siglo XIX.

Luego veremos un texto estadounidense, de Johnson, publicado a finales del siglo XIX, cuyo autor manifiesta su preferencia por el cálculo newtoniano, y terminaremos con otro texto estadounidense de Bowser, de finales del siglo XIX, en el que se utiliza la versión leibniziana del cálculo.

Tenemos pues que Lacroix indicaba:

...tomaré como ejemplo la función $u = ax^3$. Poniendo $x + h$ en el lugar de x y restando la cantidad ax^3 del resultado, se ha obtenido, en la expresión

$$u' - u = 3a^2x + 3ax^2 + ah^3,$$

... el primer término $3a^2xh$ de esta diferencia, que no es sino una porción de la misma, se llama diferencial, y se le designa por du ... (Lacroix, 1937, p. 5)

Por otra parte, la lectura del símbolo $\frac{dy}{dx}$ como “diferencial de y dividida por la diferencial de x ” es claramente leibniziana pero sólo en cuanto a la notación, ya que más adelante Díaz Covarrubias nos indica que:

La palabra diferencial, tomada como diminutivo de la voz diferencia, representaba en el sistema de cálculo infinitesimal establecido por Leibnitz, un incremento muy pequeño de la variable correspondiente, o infinitamente pequeño, según la expresión de aquel ilustre geómetra. Aunque por conveniencia y por sujetarme a la costumbre he conservado las mismas notaciones, su significado no envuelve en mi sistema idea alguna de determinada magnitud, pues dy y dx pueden ser tan grandes o tan pequeñas como se quiera, con tal que guarden entre sí la relación $\frac{dy}{dx} = \cot T$. (Díaz Covarrubias, 1890, p. 29)

En cuanto al texto de Johnson, éste se dice partidario de la concepción newtoniana de las (últimas) razones y del método funcional de la derivada, pero más, del de los límites. Respecto del concepto de diferencial, al igual que Díaz Covarrubias, elude las cantidades infinitesimales, pero, en lugar de la recta tangente, recurre al movimiento rectilíneo:

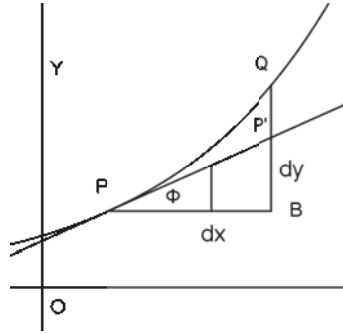
La medida de la razón de cambio en un instante dado es tomada como la misma que aquella que la variable velocidad representa; es el incremento que habría recibido en la unidad de tiempo, si la razón hubiese permanecido constante durante el intervalo completo.

El incremento que habría recibido x en un intervalo determinado de tiempo, bajo la hipótesis mencionada, es llamado diferencial. Tal incremento hipotético es denotado por dx ; mientras que el intervalo de tiempo al que corresponde, denotado por dt , es llamado diferencial de tiempo...

De aquí se sigue que $\frac{dy}{dx}$ será la medida de la razón de cambio de x , no importa cuál sea el valor de dt . (Johnson, 1904, pp. 17-18)

Por otra parte, a partir de lo mencionado en los párrafos antes reproducidos, y suponiendo que el estudiante tiene una concepción de la recta tangente, a través del movimiento, el autor explica la relación entre las diferenciales (dx y dy), en términos de la dirección de la curva:

Considérese la curva de la figura, que es la gráfica de la función $y = f(x)$. Ya que hemos asumido que la razón de cambio de x es constante, la razón de y es variable. Cuando el punto llega a una posición particular P , supongamos que y adquiere, a partir de ahí, un valor constante.



El punto en movimiento tendría que describir, entonces, la línea recta PP' y la dirección constante que de esta línea exhibe la dirección del punto móvil en la curva, en el instante en el que pasa por P .

Esta línea que pasa por un punto dado de la recta y que tiene la dirección de la curva en tal punto es llamada recta tangente a la curva en ese punto, que es llamado punto de contacto. (Johnson, 1904, p. 27)

En el caso de Bowser, quien se manifiesta partidario de la versión leibniziana del cálculo, en el capítulo III, que dedica al “método de los límites”, se hace una presentación de los conceptos de límite y derivada de una manera parecida a la de los textos actuales, pero de ninguna manera define el límite con “épsilon y delta”.

Podemos decir, entonces, que este autor opina que aún el “método de los límites”, con todo su rigor, puede coexistir con otros en el mismo libro. Ahora bien, en cuanto a las cantidades infinitesimales y la diferencial, nos dice que:

Una *cantidad infinita*, o un *infinito*, es una cantidad que es mayor que cualquier cantidad asignable. Un *infinitesimal* es una cantidad que es menor que cualquier cantidad asignable...

Si suponemos que una variable, como x , experimenta un cambio, tal cambio es llamado un *incremento*; el incremento de x es usualmente denotado por Δx , que se lee “diferencia x ”, o “delta x ”, donde Δ es tomada como una abreviación de la palabra *diferencia*...

Cuando el *incremento* o *diferencia* se supone *infinitamente pequeña*, o *infinitesimal*, es llamada una *diferencial*, y es representada por dx , que se lee “diferencial x ”, donde d es una abreviación de la palabra *diferencial*... (Bowser, 1928, p. 7, 15)

Observamos entonces dos cosas, la primera, que la definición para la diferencial coincide con la dada en la época de Leibniz (con más de dos siglos de diferencia) y la segunda, que el autor define un infinitesimal como una cantidad que, siendo positiva, es decir, mayor que cero, es menor que cualquier número real.

Al parecer, este es uno de los últimos autores que se atrevieron a utilizar los infinitesimales (como cantidades fijas) en un texto de cálculo. Podemos afirmar entonces que,

a pesar de que el *Análisis* de Cauchy fue publicado en los años 20 del siglo XIX, tardó más de un siglo para que fuese utilizado en las aulas.

En el prefacio de los libros del siglo XIX podemos observar un poco las razones de ello. Por ejemplo Browser, en el prefacio de su texto de cálculo dice lo siguiente:

El presente trabajo sobre Cálculo Diferencial e Integral está diseñado como un libro de texto para bachillerato y escuelas científicas. El propósito ha sido el de exhibir la materia de una manera concisa y simple aunque consistente con el rigor de la demostración, para hacerlo tan atractivo al principiante como la naturaleza del Cálculo lo permita...

He adoptado el método de los infinitesimales, habiendo aprendido de la experiencia que los principios fundamentales de la materia resultan ser más inteligibles a los principiantes con el método de los infinitesimales que con el de los límites, además de que, en las aplicaciones prácticas del Cálculo, las investigaciones son realizadas totalmente por el método de los infinitesimales. Sin embargo, un conocimiento más profundo de la materia requiere que el estudiante esté familiarizado con ambos métodos, razón por la cual el capítulo III está dedicado exclusivamente al método de los límites...

Así pues, este autor considera que los distintos métodos son complementarios entre sí, y que la versión leibniziana es la más apropiada para la modelación y la enseñanza.

Por otra parte, aproximadamente medio siglo antes, un autor francés, Boucharlat, había manifestado la misma inquietud de tomar elementos de cada una de las tres propuestas; la de los infinitesimales de Leibniz, la de los límites de Newton, y la algebraica de Lagrange, con la finalidad de conformar un contenido más accesible a los estudiantes:

El método de los infinitamente pequeños, no es sino un medio expedito de encontrar los diferenciales de diversas funciones, él grava sus diferenciales en nuestra memoria mediante figuras geométricas reducidas al último grado de simplicidad, y que hablan más a la imaginación que las ideas abstractas; en fin, este método deviene indispensable en las partes altas de la mecánica y la astronomía, en donde, sin él, la resolución de los problemas tendrían una extrema dificultad...

Si el método de los límites complementa al de los infinitamente pequeños, rectificando aquello poco que este último podía tener defectuoso, el método de Lagrange complementa a su vez al de los límites, haciendo depender los coeficientes diferenciales de la pura Álgebra. Se puede entonces considerar entonces a estos tres métodos como formando uno solo... (Boucharlat, 1858, pp. vi-vii del prefacio)

Podemos reconocer, entonces, que para algunos de los autores de libros para la enseñanza del cálculo, en el siglo XIX, resultaba sumamente importante el aspecto didáctico. Se pretendía tomar los elementos positivos de cada versión para conseguir un texto que resultara más

accesible para quienes se iniciaban en el estudio de esta ciencia, y, al mismo tiempo, tratar de corregir las deficiencias que, desde el punto de vista del rigor, pudiera tener alguna de ellas.

4.2 Los textos del siglo XX

Ahora vamos a examinar las consecuencias que, en relación con la enseñanza y el aprendizaje del cálculo, han ocurrido a partir de la instalación en las aulas de la presentación del cálculo con base en el moderno concepto de límite.

Sin duda, las concepciones en las que se basa una teoría y sus efectos en la formación académica de los estudiantes dependen, en buena medida, de los libros de texto utilizados para desarrollar el curso en el que se trata esta teoría; los cuales, a su vez, fueron elaborados por personas que se basaron en las fuentes originales o, si es el caso, en las fuentes que creyeron lo más cercanos a las originales. Es decir, en nuestro caso los libros de texto utilizados en los cursos de Cálculo en las escuelas de ingeniería y las publicaciones originales, conforman la fuente principal para abordar y desarrollar nuestro problema de investigación.

Así, lo que haremos enseguida será recurrir a los libros de texto utilizados en las escuelas de ingeniería para ver cuál de los acercamientos se están utilizando. Además, para estudiar el nivel en que los profesores manejan estas concepciones, se aplicará un cuestionario a profesores que imparten la materia de Cálculo en la facultad de ingeniería eléctrica.

Considerando que en la mayoría de las ingenierías de la UMSNH se tienen como textos base, en la bibliografía de sus programas, libros cuya estructura y tratamiento no difieren mucho entre ellos; se optó por analizar sólo algunos de ellos, los cuales se enlistan a continuación:

EL CÁLCULO con geometría analítica, de Louis Leithold. Editorial Harla, 1984, 4ª edición.

Cálculo. Trascendentes Tempranas, de James Steward. Thomson Editores, 1997, 3ª edición.

Cálculo de varias variables de William McCallum (*et al.*).

Cálculo con Geometría Analítica, de Dennis Zill. Iberoamericana, México, 1987.

Cálculo y Geometría Analítica, de Larson, Ronald E. y Hostetler, Robert P. McGraw Hill, 3a. Edición. México, 1989.

Cálculo con Geometría Analítica, de Earl W. Swokowski. Iberoamérica. México, 1989

A continuación realizamos una revisión y análisis de algunos de estos. El primero es el **Leithold**, que, por su lenguaje y presentación, lo identificamos en un extremo como árido y,

sin embargo, se usa para impartir los cursos. El segundo que analizamos es el **Stewart** que, sin duda, es uno de los más socorridos en estas escuelas, por tener cualidades en su escritura y desarrollo que lo hacen más amigable a los estudiantes; su estructura y tratamiento de los temas es muy similar a varios otros que existen en el mercado.

Concluimos esta revisión con dos libros: el tercero que corresponde a un texto menos conocido, de Cálculo en varias variables de **McCallum** (*et al.*) y lo identificamos como el texto más pensado y teorizado para la enseñanza y el aprendizaje del Cálculo, por la incorporación de reflexiones que pretenden establecer un diálogo con los estudiantes, así como de elementos de resolución de problemas, mediante el planteamiento de problemas planteados en contexto. Finalmente, analizamos el **Spivak**, libro utilizado en las escuelas de ciencias de aspectos formales y rigurosos, que se caracteriza por abordar los temas de Cálculo con mayor profundidad conceptual y busca las explicaciones en la estructura de los números; es decir, en el análisis.

4.2.1 Observaciones sobre la estructura general de los textos.

En cuanto al texto de Leithold, podemos observar, a primera vista, que en cualquier sección o tema, el lenguaje es un tanto rígido desde el principio. Su apariencia es poco amigable para un joven que se inicia en el mundo del Cálculo y por lo tanto poco motivante; a pesar de ello, suele ser un texto socorrido por parte de los profesores de Cálculo de algunas escuelas de nivel superior, como Ingeniería Eléctrica e Ingeniería Mecánica de la Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo.

La estructura general del texto en el desarrollo de un tema es:

Definición

Teorema y demostración del mismo

Algunos ejemplos

Listas de ejercicios, en su mayoría rutinarios.

Los problemas resueltos, parte del texto en el que la mayoría de los estudiantes se enfocan, pretenden ser ejemplos ilustrativos para resolver las listas de ejercicios propuestos, pero ninguno de ellos se sale de la abstracción y del planteamiento artificial; no se muestra, por ejemplo, la utilidad directa con problemas reales de la ingeniería y/o de la vida cotidiana.

Incluso, algunos de los ejemplos llamados “ilustrativos” son presentados sin ilustraciones a través de una gráfica, esperando, tal vez, que el lector imagine lo que está sucediendo en el planteamiento y en la resolución del problema. Por supuesto, eso no ayuda a que el estudiante entienda y aprenda los conceptos; al final, el resultado del estudio de esta sección, y también quizás de la instrucción, es que el estudiante vea que el sentido de esto no sea más que tener que aprender un conjunto de reglas que hay que aplicar para obtener un resultado.

Esto forma parte de una de las características del sistema de creencias, identificados por Schoenfeld (1992), de los estudiantes en cuanto al papel que habrán de jugar en el proceso de enseñanza aprendizaje.

Ejemplos de definiciones

El tratamiento de las definiciones así como teoremas citados en el texto, se hace a través de un lenguaje formal.

Integral de línea: Se define rigurosamente con sumas de Riemann (1826-1866) introduciendo funciones de dos variables. Se conecta con el trabajo realizado por una fuerza $F(f(t), g(t))$, a lo largo de una curva C .

Integrales múltiples: En todos los casos, se emplean particiones en las regiones para determinar sumas que definen por ejemplo, el área o el volumen de dicha región. En las gráficas se marca el elemento i -ésimo de una particiones y no aparecen d 's para indicar las diferenciales. Una vez que se ha trabajado formalmente, los ejercicios dejan de resolverse a través de tales particiones y, sin decirlo, se hace uso implícito de las cantidades infinitamente pequeñas.

Notación y significado

La notación es típica de los textos formales, aparecen ε (epsilon's), Δ (deltas), Σ (sigmas), bolas o discos, etc.

Δ significa una partición donde los elementos consecutivos están a una distancia que tiende cero, es decir, tan próximos como uno quiera.

Σ significa la suma de los pedacitos de la partición.

¿Qué problemática se puede abordar?

¿Es necesario dedicar mucho tiempo a la rigurosidad de los conceptos si, cuando los estudiantes de ingeniería aplican el Cálculo, lo hacen sin dicha rigurosidad?

¿Qué tan conveniente es ilustrar muchos ejemplos rutinarios y pocos, o tal vez ninguno, que se conecte con un problema real?

¿Para enseñar Cálculo, es necesario un lenguaje impersonal, demasiado estructurado y sistematizado?

Por otro lado, el libro evita en lo posible, usar una notación leibniziana para la derivada y cuando es necesario cambiar de D 's a $\frac{dy}{dx}$, hace todo un discurso definiendo y demostrando por qué podemos hacer $\Delta x = dx$ y $\Delta y = dy$.

Ahora bien, en cuanto al texto de Stewart observamos, desde sus primeras páginas, que el autor del texto intenta comunicarse con el estudiante a través de ejemplos e ilustraciones que van apareciendo en el desarrollo del discurso. Esto hace que el texto sea menos frío e impersonal que el anterior. Además, también hace uso de un espacio en una columna a la izquierda de la página para enfatizar las ideas centrales sobre el tema que se está desarrollando, y procura un lenguaje más familiar al estudiante, claro, en la medida de lo posible.

La estructura general del libro es al estilo de la de Leithold, con definiciones, teoremas y demostraciones formales; sin embargo, emplea una mayor cantidad de ejemplos acompañados de gráficas que sirvan al estudiante para comprender lo que se está haciendo.

Ahora bien, aunque inicialmente plantea que tratará ejemplos con comportamientos del mundo real, durante el recorrido del libro nos damos cuenta que pocos son los de este tipo; en su mayoría son abstractos, pero los ilustra bien con gráficas.

Definiciones

Aunque reconoce el trabajar con ideas del Cálculo infinitesimal, no se desprende de la formalidad de las sumas de Riemann para definir la integral, así como de tomar particiones en regiones con elementos consecutivos tan próximos como uno quiera.

Notación y significado

Cuando denota la derivada de una función, escribe de una manera graciosa la notación introducida por Leibniz. Dice:

$\frac{d}{dx}$ se llama operador de diferenciación. El símbolo $\frac{dy}{dx}$... no se debe considerar como una razón (por lo pronto), sólo como sinónimo de $f'(x)$. No obstante, es muy útil y sugerente... (p. 118)

Notación típica de textos formales: P (partición), ε (epsilon's), Δ (deltas), Σ (sigmas).

¿Qué problemática se puede abordar?

En este libro como en el anterior, ¿por qué decirle al estudiante que después de todo lo estudiado con formalidad, existen modos más simples que resuelven los problemas de esta área, evitando lo que conllevan las sumas de Riemann?

En cuanto al texto de McCallum, resulta interesante su lectura, debido a que la presentación y el tratamiento de los conceptos difieren del esquema típico que envuelve a la mayoría de los textos de Cálculo. En su presentación se menciona que el libro se hizo con “con un enfoque moderno”; se basa en resolución de problemas.

A lo largo de sus páginas, el lenguaje utilizado busca acercarse con sencillez al estudiante a través de ideas intuitivas y, como adelantándose a la pregunta común “y qué sentido tiene

el que aprenda esta teoría”, introduce los temas proponiendo un problema en un contexto real, cuyos elementos constitutivos se pueden visualizar en la naturaleza, en la industria, en la mecánica, en la vida cotidiana, etc. Esto, resulta atractivo e invita a meterse en el problema para darle solución; la intensidad es que implícitamente se aprendan los conceptos y se utilicen las reglas sin el tedio acostumbrado. Además, varias de las subsecciones de cada tema, responde a cuestiones como: qué significa; cómo identifico una situación en la que lo pueda usar; cómo funciona; qué es lo que hace exactamente; entre otras.

En las listas de ejercicios y problemas propuestos, pocos son del tipo rutinario en los que se deben aprender y ejercitar reglas y procedimientos; otros son problemas interesantes en un contexto real donde se aplicará las reglas ejercitadas anteriormente.

Notación y significado

En el tema de coordenadas polares dice:

¿Qué es dA ? $\Delta A \approx r\Delta\theta\Delta r$ cuando al hacer la partición o subdivisión de la región, $\Delta\theta$ y Δr son pequeñas (tienden a cero), el rectángulo curvo se parece al rectángulo poligonal. Entonces, puedes considerar que $dA = rd\theta dr$.

De igual manera procede con las integrales de línea y las múltiples. Con ello, se está adoptando una posición infinitesimalista, aunque esto no se hace explícito.

Definiciones

Una vez que comienza un tema abordando un problema que podemos ubicar como “no rutinario”, se conduce a las definiciones formales de los conceptos con ejemplos intermedios que dan pie al entendimiento y construcción de los mismos.

Ya que se ha llegado al acuerdo de que los ΔA (incrementos de área) se pueden ver como dA (diferenciales de área), se define la integral de línea y de flujo en forma leibniziana, como algo práctico, simple y útil.

¿Qué problemática se puede abordar?

¿Cuáles son las ventajas de involucrar a los estudiantes en un problema del mundo real, que hasta se pudiera experimentar, para comprender los conceptos del Cálculo?

Finalmente, en cuanto al texto de Spivak, podemos decir que se trata de un libro que comúnmente se utiliza, como referencia o como texto, en los cursos de Cálculo de una variable en las escuelas de ciencias. Aunque es un libro formal y riguroso, la mayoría de los capítulos inician con acercamientos intuitivos para arribar a los conceptos, definiciones y teoremas, lo cual va acompañado de dibujos y gráficas. Frecuentemente, en la sección de problemas de un determinado capítulo, plantea problemas que requerirán de la aplicación de conceptos, definiciones o procedimientos que se verán en uno posterior. Su estudio requiere de cierta formación matemática y no es extraño que profesores de matemáticas y estudiantes

de ciencias tengan serias dificultades para entender su contenido y resolver los problemas planteados.

No es un libro en el que se planteen problemas “de contexto real”, sino que su intención es, principalmente, buscar las explicaciones en la matemática misma, mediante las propiedades estrictas de los números; es decir, con base en el Análisis matemático. Regularmente, en el desarrollo de un tema, recurre a problemas no triviales en los que va haciendo notar la necesidad de usar las ideas intuitivas y de contar con herramientas poderosas para resolver los problemas de Cálculo; posteriormente, en la sección de problemas propuestos aparecen problemas de diferente grado de dificultad, identificando los muy elaborados con uno o dos asteriscos.

A partir del Capítulo 3 el autor intenta mantener un diálogo con el lector mediante algunas reflexiones, anotaciones, notas históricas; y a pesar de ser suficientemente formal tanto en su lenguaje, estructura y tratamiento de los temas, no duda en utilizar la intuición para guiar al estudiante y en hacer notar cuando se han utilizado ideas infinitesimalistas.

Así, este libro establece formalmente: i) el concepto de límite con épsilon y deltas, trabaja con ellos otros teoremas y problemas, algunos de los cuales no son triviales; ii) la integral a través de los conceptos de supremo e ínfimo y su equivalente en teoremas donde aparecen épsilon y deltas, trabaja los teoremas y problemas con estos elementos, pero hace notar la equivalencia de los rectángulos inferiores y superiores generados por una partición P con los elementos diferenciales de área. Es decir, para Spivak el tratamiento que le da al Cálculo es la formalización de las ideas intuitivas que aporta el acercamiento infinitesimalista.

4.2.2. Derivada y diferencial

Comencemos con el texto de Leithold, en el que, respecto a la derivada se indica lo siguiente:

La derivada de la función f , denotada por f' , es tal que su valor en cualquier número x en el dominio de f , está dado por

$$f'(x_1) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

si el límite existe.

Respecto de la derivada como pendiente de la recta tangente se dice:

(...) la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $y = f(x)$ en el punto $(x_1, f(x_1))$ es la derivada de $f'(x_1)$. $f'(x) = D_x f(x)$. (p. 180)

Y, finalmente, respecto de la diferencial, el autor indica:

Si la función f está definida por $y = f(x)$, entonces la diferencial de y que se representa por dy , está dada por

$$dy = f'(x)\Delta x$$

donde x está en el dominio de f' y Δx constituye un incremento arbitrario de x . (pp. 342-343)

Aclarando enseguida que:

Para llegar a una definición adecuada para dx , que sea compatible con la definición de dy , consideraremos la función identidad $f(x) = x$. Entonces, $f'(x) = 1$ y $y = x$; así, $dy = 1 \cdot \Delta x = \Delta x$. Como $y = x$, queremos que dx sea igual a dy para esta función particular, es decir, que para esta función $dx = \Delta x$.

Y obtenemos que

$$dy = f'(x)dx \quad (6)$$

Al dividir entre dx ambos miembros de esta expresión, tenemos que

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) \quad \text{si } dx \neq 0 \quad (7)$$

La ecuación (7) expresa la derivada como el cociente de dos diferenciales. La notación $\frac{dy}{dx}$ suele designar la derivada de y con respecto a x , simbolismo que hasta ahora hemos evitado. (pp. 343-344)

[...] si $y = f(x)$, entonces $f'(x)$ es el cociente de las dos diferenciales dy y dx , aunque x pueda no ser una variable independiente. (p. 349)

Entonces hace algunas precisiones sobre la notación leibniziana:

Leibniz fue quien primero empleó la notación $\frac{dy}{dx}$ para la derivada de y respecto de x ... Probablemente consideró a dx y dy como pequeños cambios en las variables x y y , y que la derivada de y con respecto a x era el cociente de dy y dx cuando dy y dx se hacen muy pequeños. Leibniz no conoció el concepto de límite tal como lo conocemos ahora.

Tenemos el símbolo $\frac{d^2y}{dx^2}$ para la segunda derivada de y con respecto a x , la cual corresponde a la notación $\frac{dy}{dx}$ de Leibniz para la primera derivada de y con respecto a x . Sin embargo, no debemos ver $\frac{d^2y}{dx^2}$ como un cociente, porque en esta obra no consideraremos la diferencial de una diferencial. (p. 350)

Una vez que se ha definido la derivada de una función, como el límite de un cociente, se busca definir el concepto de diferencial. Evidentemente resulta problemática la notación, por

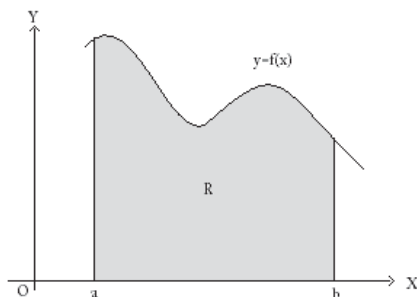
ello, antes de la diferencial, Leithold expresa la derivada en términos de los incrementos en las variables x e y ; pero se ve forzado a comparar tales incrementos Δx y Δy con las diferenciales dx y dy , al punto de construir una demostración para poder decir que son iguales, es decir, el incremento y la diferencial resultan ser lo mismo. Observemos nuevamente la demostración:

$f(x) = x$. Entonces, $f'(x) = 1$ y $y = x$; así, $dy = 1 \cdot \Delta x = \Delta x$. Como $y = x$, queremos que dx sea igual a dy para esta función particular, es decir, que para esta función $dx = \Delta x$.

Evidentemente, en ningún momento justifica por qué $dx = \Delta x$. Ahora, si la justificación intenta darse al expresar “queremos que dx sea igual a dy ”, entonces no son necesarias las premisas iniciales ya que no influyen ni convencen sobre la veracidad de la argumentación. De alguna manera, parece no ser tan clara esta acción; tal vez por ello Leithold cita más adelante que ha evitado el uso de la simbología $\frac{dy}{dx}$ para denotar a la derivada de una función.

Posteriormente se trabaja en el texto con ecuaciones diferenciales, las cuales se definen como ecuaciones que contienen derivadas o bien diferenciales, esto es, $\frac{dy}{dx} = f(x)$, que a la hora de expresarla con diferenciales, simplemente se habla de reescribirla en esos términos. Es decir, basta cambiar la forma de escribirlo, $dy = f(x)dx$, evitando mencionar que $\frac{dy}{dx}$ se puede ver como un cociente donde dx puede pasar al otro lado de la ecuación.

Continuando con la secuencia de contenidos analizados por este texto de Cálculo, un tema a tratar es el de la integral, para lo cual previamente define este concepto con la idea de operación inversa de la derivada o diferencial, es decir, la antidiferenciación; indicando que el símbolo para esta operación es $\int$. Dedicar algunas páginas para realizar algunas integrales pensando en la antiderivación y así, determinar las fórmulas de integración conocidas. Este enfoque se interrumpe para conducir al estudiante al conocimiento y manejo de las sumas, con la finalidad de tratar a la integral como el área de una región, dejando un espacio en el texto para dicho objetivo. Así, sin más preámbulo, comienza a hablar de la medida del área de una región poligonal conocida ya por un estudiante de ingeniería, para plantearle la problemática de calcular el área de una región no poligonal como se ve en la siguiente gráfica:



Dice:

Queremos asignar un número A a la medida del área R y empleamos un proceso similar al que usamos en la definición del área de un círculo: El área de un círculo se define como el límite de las áreas de los polígonos regulares inscritos, cuando el número de lados aumenta de manera ilimitada...

En estas ideas está implícito lo expresado por Arquímedes, que el área de un círculo se puede aproximar acotándolo por medio de regiones poligonales aumentando el número de lados hasta que la diferencia entre las áreas, del círculo y el polígono, sea infinitamente pequeña.

Volviendo al texto y al problema planteado de calcular el área de la región mostrada en la gráfica, procede de manera análoga al círculo, basándose en rectángulos que delimitarán la región, haciendo una partición en el intervalo $[a, b]$ tan pequeña como se quiera, de tal manera que la suma de las áreas de los rectángulos sea igual al área de la región R , es decir,

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x$$

Ecuación cuyo significado es:

...para cualquier $\varepsilon > 0$ existe un número $N > 0$ tal que $|\sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x - A| < \varepsilon$ siempre que $n > N$, y n es un entero positivo. (p. 399)

Cabe señalar que el usar un lenguaje y notación como el citado en las líneas anteriores, involucra una matemática formal con ideas sumamente abstractas y que de manera natural, un estudiante podría rechazar dada la gran cantidad de conceptos que deben conocerse para comprender esta definición de integración, sabiendo de antemano que éste será con seguridad, su primer contacto con un lenguaje de este tipo puesto que recientemente ha salido del bachillerato.

En este punto, si interpretamos el enunciado en términos del lenguaje de un estudiante recién egresado del bachillerato, tal interpretación no distaría de la forma en que trataba Leibniz estos conceptos. En otras palabras, parece no ser adecuado un primer acercamiento a la integración a través de ese lenguaje tan formal. Causa confusión, no es comprensible y será por muchos ignorado.

De esto está consciente Leithold y aunque pasa algunas páginas utilizando sumas de Riemann para resolver unos cuantos problemas, especificando además la integral definida, finalmente comenta que resulta engorroso continuar de esta forma en el área de la integración, así que busca establecer un método más simple para abordar muchos más problemas. En sus propias palabras dice:

Evaluar una integral definida a partir de la definición, calculando el límite de una suma, como lo hicimos en la sección ..., es bastante tedioso y frecuentemente casi imposible. Para establecer un método mucho más simple, primero necesitamos desarrollar algunas propiedades de la integral indefinida. (p. 414)

Continúa demostrando teoremas relacionados con las sumas de Riemann hasta que llega al Teorema Fundamental del Cálculo:

Sea la función f continua en el intervalo cerrado $[a, b]$, y sea g una función tal que $g'(x) = f(x)$ para toda x en $[a, b]$. Entonces, $\int_a^b f(t)dt = g(b) - g(a)$.

Es aquí donde muestra, en la solución varios ejercicios, la simplicidad del uso de este teorema sin lo “tedioso” del uso del límite de una suma.

Si reflexionamos un poco, no dudáramos en suponer que muchos estudiantes dejarán de lado todo lo dicho en las secciones dedicadas a llegar a este método simple a través de las sumas de Riemann, con el lenguaje formal de ε 's y Δ 's; podríamos suponer incluso que algunos ni siquiera lo leerán al observar un lenguaje ajeno a ellos y por lo tanto inentendible; resultando esto en mera práctica y comprensión de las formas “simples” para resolver problemas que involucren calcular una integral.

Más adelante empieza a tratar aplicaciones de la integral dentro de las cuales se encuentran: área de una región en un plano; volumen de un sólido de revolución; volumen de un sólido que tiene secciones planas paralelas conocidas; trabajo (mecánico); longitud de arco de una curva plana.

Respecto a la Aplicación de la integral

Área de una región en un plano

En secciones previas se ha definido que:

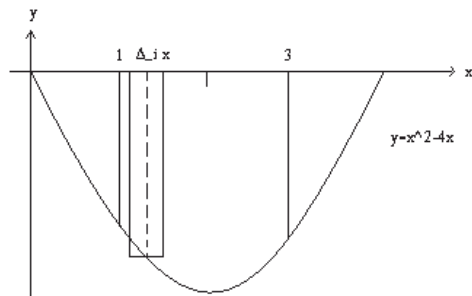
[...] f continua en $[a, b]$ y $f(x) \geq 0$ para toda x en $[a, b]$. Sea R la región acotada por la curva $y = f(x)$, el eje x y las rectas $x = a$ y $x = b$. Entonces la medida del área de la región R está dada por

$$A = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta_i x = \int_a^b f(x) dx$$

Esta definición se ilustra con algunos ejemplos (pp. 410-411) usando las sumas de Riemann, pero como se ha convenido en que tal proceso es “tedioso”, tanto en el Cálculo del área de una región plana como en todas las demás aplicaciones de la integral definida, se evita el trabajo con las sumas y se aplican directamente las reglas de integración, aunque al inicio de cada ejemplo se aborda el problema con el enfoque de la sumas, dejándolo a medio camino y resolviéndolo finalmente de manera práctica.

Ejemplo:

Determinar el área de la región limitada por la curva $y = x^2 - 4x$, el eje x y las rectas $x = 1$ y $x = 3$.



Tomamos una partición del intervalo $[1,3]$; la anchura el i -ésimo rectángulo es $\Delta_i x$. Como $x^2 - 4x < 0$ en $[1,3]$, la altura del i -ésimo rectángulo es $-(\xi_i^2 - 4\xi) = 4\xi - \xi_i^2$. Por lo tanto, la suma de las medidas de las áreas de n rectángulos está dada por

$$\sum_{i=1}^n (4\xi - \xi_i^2) \Delta_i x$$

La medida del área está dada por el límite de esta suma cuando $\|\Delta\|$ se aproxima a 0; así, si A es el área de la región, tenemos que (p. 459)

$$A = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n (4\xi - \xi_i^2) \Delta_i x = \int_1^3 (4x - x^2) dx = 2x^2 - \frac{1}{3}x^3 = \frac{22}{3}$$

Podemos darnos cuenta con este ejemplo que si bien se busca resolverlo de manera práctica, el lenguaje formal sigue presente.

De forma semejante, los ejemplos mostrados para los contenidos de la aplicación de la integral, comienzan a resolverse aparentemente de manera formal pero no se aplican los conceptos exactamente de esa manera sino con lo que Leithold ha llamado “el método simple”

Posteriormente el texto introduce al estudiante a los contenidos de Diferenciación de Funciones Inversas, Logarítmicas y Exponenciales; así como de Funciones Trigonométricas e Hiperbólicas. Dando lugar después a las Técnicas de Integración.

Stewart

De la misma forma que Leithold, Stewart define primeramente la derivada como el límite de un cociente, haciendo referencia a las diferentes notaciones que éste concepto tiene según el autor del texto, por ejemplo D y $\frac{d}{dx}$, que son denominan operadores de diferenciación, siendo la última de estas notaciones introducida por Leibniz. Explícitamente Stewart dice:

La derivada de una función f en un número a , representada por $f'(a)$, es

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{\Delta x}$$

en caso de existir ese límite. $h = x - a$.

Si existe $f'(a)$, entonces una ecuación de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $(a, f(a))$ es la siguiente (p. 113):

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

[...] Considerando $y = f(x)$, hay otras notaciones alternativas comunes de la derivada:

$$f'(x) = y' = \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} f(x) = Df(x) = D_x f(x)$$

Los símbolos D y $\frac{d}{dx}$ se denominan operadores de diferenciación...

El símbolo $\frac{d}{dx}$ fue introducido por Leibniz y no se puede considerar como una razón (por lo pronto); sólo es un sinónimo de $f'(x)$. No obstante, es una notación muy útil y sugerente... (p. 118)

Hemos empleado la notación de Leibniz, $\frac{dy}{dx}$, para representar la derivada de y con respecto a x , pero hemos considerado que es una sola entidad y no una razón. En esta sección asignaremos significados distintos a las cantidades dy y dx , de tal suerte que su razón sea igual a la derivada.

Definición. Sea $y = f(x)$...

$$dy = f'(x)dx$$

... si $dx \neq 0$, podemos dividir ambos lados de la ecuación, en la definición, entre dx para obtener

$$\frac{dy}{dx} = f'(x)$$

Ya hemos visto ecuaciones semejantes, pero ahora podemos interpretar, genuinamente, el lado izquierdo como una razón entre diferenciales. (p. 174)

Es aquí, donde previene al lector en tener cuidado con la notación de Leibniz pues no se puede considerar como una razón (por lo pronto), es decir, al menos no en esta parte del texto, sino como un sinónimo de $f'(x)$. Se nota entonces, al igual que con Leithold, la problemática que surge al tratar los conceptos de derivada y de diferencial; razón por la que intentan justificar por qué posteriormente sí se podrá ver la expresión $\frac{dy}{dx}$ como una razón.

Recuerdo cuando era estudiante y mis profesores hacían hincapié en la situación descrita anteriormente que, de la misma forma que los dos textos citados, no justifican con exactitud la razón; probablemente uno se queda confundido ante ello pero lo asimilamos pues es algo dicho por el profesor.

Continuando la lectura del Cálculo Multivariable de Stewart, es claro que la representación $\frac{dy}{dx}$ se usa como otra forma de denotar a $f'(x)$, siendo $y = f(x)$, donde $\frac{d}{dx}$ toma el papel del caracter ' (prima); esto es, $\frac{d}{dx}$ es simplemente otro símbolo para representar a la derivada. En los siguientes párrafos se muestran partes del texto donde se desarrollan algunos conceptos a través de incrementos en las variables y posteriormente se reescriben con la notación de Leibniz:

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ [...] Si se usa la notación de Leibniz, escribimos el proceso en la forma $\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$. (p. xvii)

[...] Si situamos $x = f(t)$ y $y = f(t)$ en la ecuación $y = F(x)$, llegamos a $g(t) = F(f(t))$, lo cual, si g , F , y f son diferenciables, la regla de la cadena establece que $g'(t) = F'(f(t))f'(t) = F'(x)f'(t)$

Si $f'(t) \neq 0$, podemos despejar $F'(x)$:

$$F'(x) = \frac{g'(t)}{f'(t)} \quad (1)$$

Con la notación de Leibniz podemos reformular la ecuación (1) en una expresión que se recuerda con facilidad:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} \quad \text{si} \quad \frac{dx}{dt} \neq 0. \quad (p. 649)$$

Longitud de arco y área de una superficie.

$$L = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt \quad (2)$$

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sqrt{[f'(t_i^*)]^2 + [g'(t_i^{**})]^2} \Delta t \quad (3)$$

[...] La suma de la ecuación (3) no es exactamente una suma de Riemann, porque en general $t_i^* \neq t_i^{**}$, sin embargo, cuando f' y g' son continuas, es posible demostrar que en la ecuación (3) se puede considerar que t_i^* y t_i^{**} son iguales; es decir, que

$$L = \int_a^b \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2} dt$$

Así, con la notación de Leibniz llegamos a un resultado que tiene la misma forma que la ecuación (2).

$$L = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt. \quad (p. 657)$$

Sobre áreas y longitudes en coordenadas polares, Stewart cita:

Sea R la región limitada por la curva cuya ecuación polar es $r = f(\theta)$ y los rayos $\theta = a$ y $\theta = b$, donde f es una función positiva y continua, y $0 < b - a \leq 2\pi$. Dividimos el intervalo $[a, b]$ en subintervalos con extremos $\theta_0, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$ y la misma longitud $\Delta\theta$. Los rayos $\theta = \theta_i$ dividen entonces R en regiones más pequeñas con ángulo central $\Delta\theta = \theta_i - \theta_{i-1}$. Si elegimos θ_i^* en el i -ésimo subintervalo $[\theta_{i-1}, \theta_i]$, entonces el área ΔA_i de la región i -ésima se aproxima por el sector circular con ángulo central $\Delta\theta$ y radio $f(\theta_i^*)$.

Así,

$$\Delta A_i \approx \frac{1}{2} [f(\theta_i^*)]^2 \Delta\theta$$

una aproximación al área total, A , de R es

$$A \approx \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} [f(\theta_i^*)]^2 \Delta\theta \quad (2)$$

La aproximación de la ecuación (2) mejora cuando $n \rightarrow \infty$. Ya que las sumas de esta ecuación son sumas de Riemann de la función $g(\theta) = \frac{1}{2} [f(\theta)]^2$, resulta

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} [f(\theta_i^*)]^2 \Delta\theta = \int_a^b \frac{1}{2} [f(\theta)]^2 d\theta$$

Entonces se puede esperar, y de hecho demostrar, que la fórmula para calcular el área de la región R expresada en ecuaciones polares, es

$$A = \int_a^b \frac{1}{2} [f(\theta)]^2 d\theta. \quad (p. 671)$$

Cuando se trabaja en el Cálculo de áreas de regiones en coordenadas polares, el texto explica por qué el área está determinada por $A = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} [f(\theta_i^*)]^2 \Delta\theta = \int_a^b \frac{1}{2} [f(\theta)]^2 d\theta$, considerando sectores circulares muy pequeños, tanto, que los $\Delta\theta$ se parecen a los $d\theta$ (p. 671). Esto, tiene similitud con lo que pensaba Leibniz, incluso desde los griegos, “al final el arco deja de ser curvo y el sector circular se confunde con un triángulo, es decir con sus lados rectos” Condición que evidentemente simplifica la resolución del problema.

Precisamente en la situación descrita en el párrafo anterior, es donde se discute la idoneidad de la enseñanza de dichos conceptos de acuerdo al enfoque y lenguaje empleados para tal efecto. Puntualmente, es posible afirmar que lo sencillo no deja de ser elegante y a veces, mucho más comprensible. Así, el trabajo con infinitesimales permite inquirir y desmenuzar con claridad áreas de regiones en coordenadas polares.

Es claro que las ideas del Cálculo que tenía Leibniz y el Cálculo que surgió después de él, eran las mismas pero con diferentes formas de tratar los conceptos. El primero catalogado de poco riguroso, y el segundo de formal y riguroso. En el caso de la derivada, Leibniz concibe un cociente de diferencias mientras que el Cálculo actual lo acepta como un límite de diferencias cada vez más pequeñas.

Reflexionando sobre lo anterior, podemos deducir que ambos Cálculos hablan sobre aproximaciones, y el Cálculo actual termina aceptando, aunque no expresamente, que el arco en el límite, es decir con extremos infinitamente próximos, se confunde con una recta, $\Delta x \approx dx$ por $\Delta x = dx$.

La cuestión que nos interesa es: ¿cuál de los dos enfoques del Cálculo es más conveniente para enseñarlo? Más aún, ¿cuál de todos los enfoques que han surgido sobre el Cálculo es ideal para que un estudiante de ingeniería aprenda Cálculo y lo use eficazmente en su área?

Similarmente al texto de Leithold, Stewart dedica un espacio en su libro para instruir al estudiante en el manejo de las sumas a fin de llegar a definir el concepto de integral a través de ellas.

4.2.3 Cuadratura e integral en los textos actuales

A continuación desarrollamos el Cálculo visto formalmente, basándonos principalmente en el orden establecido por Spivak (1992), en el tema de la integral; ya que en el desarrollo formal de la derivada, este texto se basa exclusivamente en el acercamiento con épsilon (ϵ) – delta (δ).

La integral definida formalmente

La necesidad de contar con una herramienta que permitiera calcular áreas y volúmenes de cualesquier figura o cuerpo geométrico fue un anhelo largamente acariciado, el cual pudo concretarse cuando apareció la integral, convirtiéndose en una herramienta poderosa cuando se alía con la derivada a través del Teorema fundamental del Cálculo infinitesimal; efectivamente, aunque los griegos habían resuelto prácticamente el Cálculo de áreas y volúmenes de polígonos, prismas, conos, secciones cónicas, esferas y algunos otros sólidos de revolución, estaba lejos de entenderse, por ejemplo, cómo obtener el lado de un cuadrado cuya área sea igual a la de un círculo de radio 1, cómo rellenar un cuadrado de lado 1 mediante cortes de un círculo de radio $\frac{1}{\sqrt{\pi}}$, o cómo hacerlo para una arcada de seno.

Las dificultades implicadas en esta empresa, requirieron del ingenio de los más grandes matemáticos del siglo XVII y XVIII, quienes desarrollaron una teoría poderosa cargada de nociones, conceptos y algoritmos, que hoy en día aparecen en buena parte del currículo universitario. Así, el propósito era establecer una teoría que permitiera, de igual manera, cuadrar el círculo o una arcada de seno; o bien, calcular el volumen de un elipsoide o del sólido que genera una parábola semicúbica cuando gira alrededor de su eje, etc.

Por estas razones y para hacer ver las conexiones existentes entre los dos acercamientos al Cálculo, es necesario recorrer un camino por los senderos teóricos intuitivos y formales. La incorporación de un sistema de coordenadas cartesianas fue un elemento que contribuyó enormemente a la unificación de criterios para atacar problemas variados. Para ello conviene aclarar que, inicialmente, se consideran regiones limitadas por la gráfica de una función $f(x) > 0$, el eje x , y las rectas verticales correspondientes a $x = a$; $x = b$. La distinción de la región limitada por una graficas de funciones que están por debajo del eje x se hará con un signo menos. Siempre se considerará que $a < b$, con a y b en $\mathbf{R}$, y los intervalos $[a, b]$ o (a, b) .

Definición. Una partición de $[a, b]$ se define como una colección finita de puntos t_i , de los cuales uno es a y otro es b (conviene que $t_0 = a$ y $t_n = b$).

Si P representa dicha partición, $P = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ y, sin pérdida de generalidad, se puede suponer que los puntos t_i están igualmente espaciados a lo largo de $[a, b]$, de manera que $t_i - t_{i-1} = \frac{b-a}{n}$.

Así, si queremos calcular el área bajo la gráfica de la función $f(x) > 0$, el eje de la x , y las rectas verticales $x = a$ y $x = b$ (Figura 4.3.1), podemos obtener aproximaciones “por abajo” y “por arriba” mediante la suma de las áreas de rectángulos inferiores y superiores, cada uno de los cuales tendrá como base, precisamente, $t_i - t_{i-1}$ y altura el valor mínimo y valor máximo que alcance $f(x)$ en cada uno de los subintervalos.

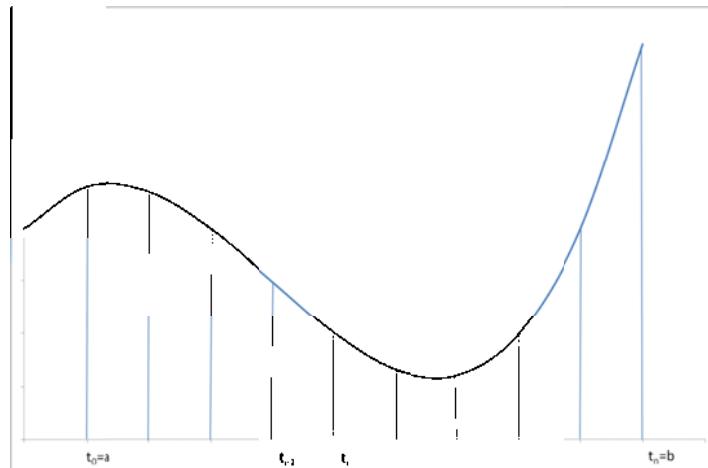


Figura 4.4.1. Gráfica de $y = f(x)$ y una partición P_n .

La suma de las áreas de los rectángulos por abajo recibe el nombre de “suma inferior” y suele denotarse por $L(f, P)$, por la inicial de Lower (inferior) en inglés, que indica la suma de las áreas de los rectángulos inferiores correspondiente a la gráfica de la función $f(x)$, dada la partición P . Entonces, si m_i indica el valor mínimo de la función f en cada sub intervalo $[t_{i-1}, t_i]$, tenemos:

$$L(f, P) = \sum_{i=1}^n m_i(t_i - t_{i-1})$$

Mientras que la suma de las áreas de los rectángulos por arriba recibe el nombre de “suma superior” y suele denotarse por $U(f, P)$, por la inicial de Upper (superior) en inglés, que indica la suma de las áreas de los rectángulos superiores correspondiente a la gráfica de la función $f(x)$, dada la partición P . Entonces, si M_i indica el valor máximo de la función f en cada sub intervalo $[t_{i-1}, t_i]$, tenemos:

$$U(f, P) = \sum_{i=1}^n M_i(t_i - t_{i-1})$$

La existencia de los valores mínimo y máximo, m_i y M_i , se asegura si $f(x)$ es continua, lo cual implica que $f(x)$ está acotada en $[a, b]$. En el caso de que la función tenga algún tipo de discontinuidad como por ejemplo función con discontinuidad removible en algunos puntos, función escalonada, función definida por tramos o discontinua en un infinidad de puntos, es necesario sustituir los valores de m_i y M_i por el infimo (Inf) y supremo (Sup) de un conjunto; de esta manera se asegura la posibilidad de calcular el área de los rectángulos inferiores y superiores. La Figura 4.3.2 muestra las marcas para el caso de las sumas inferiores.

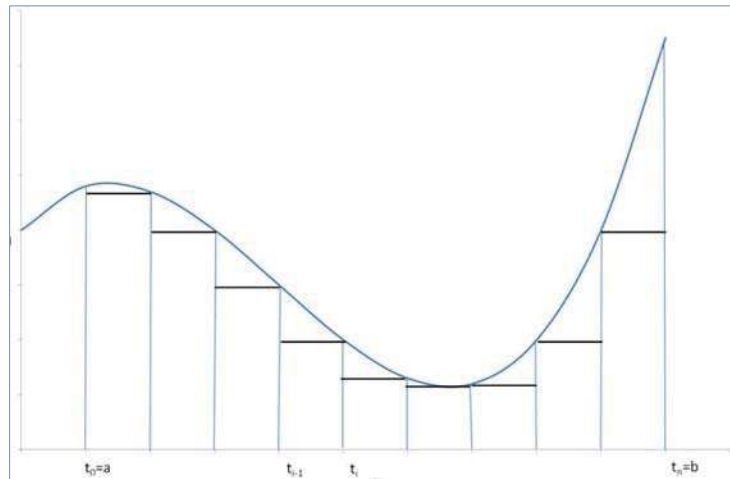


Figura 4.4.2. Obtención de las sumas inferiores para la función $f(x)$.

Por lo pronto, si denotamos por $R(f, a, b)$ el área de la región limitada por la gráfica de $f(x)$, el eje x y las rectas verticales correspondientes a $x = a$; $x = b$, parece natural establecer que:

$$L(f, P) = \sum_{i=1}^n m_i(t_i - t_{i-1}) \leq R(f, a, b) \leq \sum_{i=1}^n M_i(t_i - t_{i-1}) = U(f, P)$$

También parece claro que si la partición P es más fina; es decir, si P contiene un mayor número de puntos, la suma de las áreas de los rectángulos inferiores y superiores será cada vez más próximas al área de la región $R(f, a, b)$. Esto es, si P_n es una partición que contiene n puntos más que P , podemos suponer que existe una sucesión de particiones tales que P_1 contiene un punto más que P , P_2 contiene un punto más que P_1 , P_3 contiene un punto más que P_2 , y que P_n contiene un punto más que P_{n-1} ; y se puede demostrar fácilmente que

$$L(f, P) \leq L(f, P_1) \leq \dots \leq L(f, P_n) \leq R(f, a, b) \leq U(f, P_n) \leq \dots \leq U(f, P_1) \leq U(f, P)$$

Así, de la colección de particiones tomamos el Sup de las sumas inferiores ($\text{Sup}\{L(f, P)\}$) y el Inf de las sumas superiores ($\text{Inf}\{U(f, P)\}$) y si n crece, muy bien puede suceder que estos números sean iguales a $R(f, a, b)$; es decir:

$$\text{Sup}\{L(f, P)\} = R(f, a, b) = \text{Inf}\{U(f, P)\},$$

de esta manera, surge la definición de integral:

Definición. Una función acotada $f(x)$ es integrable sobre $[a, b]$ si:

$$\text{Sup}\{L(f, P) | P \text{ es una partición de } [a, b]\} = \text{Inf}\{U(f, P) | P \text{ es una partición de } [a, b]\}$$

Este número recibe el nombre de integral de $f(x)$ sobre $[a, b]$ y se denota por

$$\int_a^b f(x) dx$$

y también recibe el nombre de área de la región $R(f, a, b)$, cuando $f(x) \geq 0$ para todo x de $[a, b]$.

Obsérvese cómo en la notación utilizada para designar a la integral, ya se reflejan las ideas iniciales del acercamiento infinitesimalista; el símbolo $\int$ es una abreviación de la suma de elementos rectangulares de área infinitamente pequeña, cuyos lados son $f(x)$ y dx , desde $x = a$ hasta $x = b$ (a y b se llaman límites inferior y superior de integración). Históricamente se dice que, precisamente, esa fue la intención Leibniz al elegir dicha notación para designar a la integral.

Sin embargo en esta definición, aunque formal y precisa, el hecho de que se utilicen ínfimos y supremos de conjuntos acarrea sus dificultades, por lo que es necesario establecer un teorema que haga más manejable la integrabilidad de una función y es por ello que se recurre a la noción de límite, que se basa en la posibilidad de hacer tan pequeña como se quiera la diferencia entre las sumas superiores e inferiores; es decir:

Teorema. Si $f(x)$ es una función acotada en $[a, b]$, entonces $f(x)$ es integrable sobre $[a, b]$ si y solo si para todo $\varepsilon > 0$ existe una partición P de $[a, b]$ tal que

$$U(f, P) - L(f, P) < \varepsilon$$

Demostración. Supongamos primero que $f(x)$ es integrable, entonces por la definición de integral tenemos que

$$\text{Sup}\{L(f, P)\} = \text{Inf}\{U(f, P)\}$$

lo cual significa que para todo $\varepsilon > 0$ existen particiones P_1 y P_2 tales que

$$U(f, P_2) - L(f, P_1) < \varepsilon$$

Pero si P es la partición conformada por los puntos de P_1 y P_2 , entonces se debe cumplir:

$$U(f, P) \leq U(f, P_2) \text{ y } L(f, P) \geq L(f, P_1)$$

haciendo la resta obtenemos

$$U(f, P) - L(f, P) = U(f, P_2) - L(f, P_1) < \varepsilon.$$

Ahora supongamos que para cualquier $\varepsilon > 0$ existe una partición P tal que

$$U(f, P) - L(f, P) < \varepsilon$$

Por las definiciones de ínfimo y supremo, siempre se cumple que:

$$\text{Inf}\{U(f, P')\} \leq U(f, P) \text{ y } \text{Sup}\{L(f, P')\} \geq L(f, P),$$

entonces

$$\text{Inf}\{U(f, P')\} - \text{Sup}\{L(f, P')\} \leq U(f, P) - L(f, P) < \varepsilon$$

como esto es para todo $\varepsilon > 0$, se sigue que:

$$\text{Sup}\{L(f, P)\} = \text{Inf}\{U(f, P)\},$$

lo cual implica que $f(x)$ es integrable.

Así, si podemos obtener la diferencia de las sumas superiores e inferiores en términos de n , el número de puntos de la partición P , y es posible obtener $\varepsilon > 0$ en función de n ,

estaremos probando la integrabilidad de $f(x)$ e, implícitamente, se estará utilizando la noción de límite.

Lo que nos dice este teorema es que $f(x)$ es integrable si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} L(f, P) = \lim_{n \rightarrow \infty} U(f, P)$$

y además:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} L(f, P) = \lim_{n \rightarrow \infty} U(f, P) = \int_a^b f(x) dx$$

Sin embargo, la obtención de integrales de la mayoría de las funciones, por la definición o usando el teorema, acarrea dificultades que evidencian la falta de la poderosa herramienta que proporciona el Teorema Fundamental del Cálculo (TFC). Para apreciar estas dificultades, a continuación mostramos el desarrollo completo de la obtención de una integral para dos funciones.

Obtención de la integral usando el teorema

1. Demostrar que $\int_0^b x^p dx = \frac{b^{p+1}}{p+1}$, donde p es un número natural y b un real mayor que 0.

Aunque este problema puede iniciarse a partir del caso general mostrando, por inducción completa sobre p , que la sumatoria siguiente, converge a $\frac{1}{p+1}$,

$$\sum_{k=1}^n \frac{k^p}{n^{p+1}} \rightarrow \frac{1}{p+1}$$

Eligiendo n suficientemente grande; conviene ver el desarrollo de la integral para los primeros valores naturales de p , lo cual nos proporciona la pauta para, después, realizar la inducción. Es decir, conviene primero hallar las integrales:

$$\int_0^b x dx; \int_0^b x^2 dx; \int_0^b x^3 dx; \int_0^b x^4 dx; \text{ etc.}$$

Aquí desarrollamos la primera y la tercera integral y se presentan los resultados de la segunda y cuarta.

Para la primera: como $f(x) = x$, si $P = \{t_0, t_1, \dots, t_i, \dots, t_n\}$ es una partición de $[0, b]$ con puntos igualmente espaciados, entonces $P = \left\{0, \frac{b}{n}, \dots, \frac{ib}{n}, \dots, b\right\}$; además,

$$m_i = f(t_{i-1}) = t_{i-1} = \frac{(i-1)b}{n}; \text{ y } M_i = f(t_i) = t_i = \frac{ib}{n}$$

entonces

$$L(f, P) = \sum_{i=1}^n t_{i-1}(t_i - t_{i-1}) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{(i-1)b}{n} \right) \frac{b}{n} = \left(\sum_{i=1}^n (i-1) \right) \frac{b^2}{n^2} = \left(\frac{(n-1)n}{2} \right) \frac{b^2}{n^2}$$

de donde

$$L(f, P) = \left(1 - \frac{1}{n} \right) \frac{b^2}{2}.$$

Ahora calculemos las sumas superiores:

$$U(f, P) = \sum_{i=1}^n t_i(t_i - t_{i-1}) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{(i)b}{n} \right) \frac{b}{n} = \left(\sum_{i=1}^n (i) \right) \frac{b^2}{n^2} = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right) \frac{b^2}{n^2}$$

de donde

$$U(f, P) = \left(1 + \frac{1}{n} \right) \frac{b^2}{2}.$$

Por lo tanto, si queremos que la diferencia de las sumas superiores e inferiores sea menor que cualquier $\varepsilon > 0$, obtenemos una expresión que permite obtener la n en función de ε :

$$U(f, P) - L(f, P) = \left(\frac{2}{n} \right) \frac{b^2}{2} = \frac{b^2}{n} < \varepsilon.$$

Así, basta con elegir $n > \frac{b^2}{\varepsilon}$ para asegurar que la diferencia $U(f, P) - L(f, P)$ puede hacerse tan pequeña como se quiera, a partir de cualquier ε previamente establecido. Obsérvese que si se calcula el límite de cada una de las sumas cuando n crece, obtenemos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} L(f, P) = \lim_{n \rightarrow \infty} U(f, P) = \frac{b^2}{2}$$

de ahí que:

$$\int_0^b x dx = \frac{b^2}{2}.$$

Gráficamente, esto representa el área del triángulo rectángulo isósceles formado por la recta $y = x$, de altura y base b . Si en lugar de haber tomado b consideramos un $a > 0$, hubiésemos obtenido $\int_0^a x dx = \frac{a^2}{2}$; por lo que la integral de a a b , con $a < b$, que representa el área del trapecio limitado por el eje x y las rectas $y = x$; $x = a$; $x = b$:

$$\int_a^b x dx = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}.$$

De manera similar se puede probar que

$$\int_a^b x^2 dx = \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3}.$$

Ahora obtengamos la integral de la función $g(x) = x^3$, desde $x = 0$ a $x = b$.

Si $P = \{t_0, t_1, \dots, t_i, \dots, t_n\}$ es una partición de $[0, b]$ entonces $P = \left\{0, \frac{b}{n}, \dots, \frac{ib}{n}, \dots, b\right\}$, como $g(x)$ es una función continua y creciente,

$$m_i = g(t_{i-1}) = \frac{(i-1)^3 b^3}{n^3} \text{ y } M_i = g(t_i) = \frac{(i)^3 b^3}{n^3}$$

así que

$$L(f, P) = \sum_{i=1}^n m_i(t_i - t_{i-1}) = \sum_{i=1}^n \frac{(i-1)^3 b^3}{n^3} \cdot \frac{b}{n} = \left(\frac{(n-1)n}{2}\right)^2 \cdot \frac{b^4}{n^4} = \left(1 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}\right) \cdot \frac{b^4}{4}$$

$$U(f, P) = \sum_{i=1}^n M_i(t_i - t_{i-1}) = \sum_{i=1}^n \frac{(i)^3 b^3}{n^3} \cdot \frac{b}{n} = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 \cdot \frac{b^4}{n^4} = \left(1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}\right) \cdot \frac{b^4}{4}$$

Nótese que si calculamos los límites de estas sumas

$$\lim_{n \rightarrow \infty} L(f, P) = \lim_{n \rightarrow \infty} U(f, P) = \frac{b^4}{4}.$$

Finalmente, queremos que para todo $\varepsilon > 0$ se cumpla:

$$U(f, P) - L(f, P) = \frac{4}{n} \cdot \frac{b^4}{4} < \varepsilon$$

por lo tanto, basta con elegir $n > \frac{b^4}{\varepsilon}$ para que se cumpla la desigualdad, por lo que podemos concluir que para a y b mayores que 0 , con $a < b$,

$$\int_a^b x^3 dx = \frac{b^4}{4} - \frac{a^4}{4}.$$

De esta manera pueden obtenerse integrales de este tipo; sin embargo, para la generalización requeriremos probar que la sumatoria

$$\sum_{k=1}^n \frac{k^p}{n^{p+1}}$$

puede acercarse tanto como se quiera a $\frac{1}{p+1}$, siempre que n sea suficientemente grande. Probemos esto por inducción completa sobre p .

i) Veamos que la afirmación se cumple para $p = 1$:

$$\sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} = \frac{n(n+1)}{2n^2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} \rightarrow \frac{1}{2}$$

ii) Supongamos ahora que la afirmación se cumple para toda $j < p$; es decir,

$$\sum_{k=1}^n \frac{k^j}{n^{j+1}} \rightarrow \frac{1}{p+1}$$

iii) Verifiquemos si se cumple para p . El desarrollo de las siguientes diferencias nos proporcionan la manera de obtener la sumatoria:

$$k^{p+1} - (k-1)^{p+1} = (p+1)k^p + (\text{términos de } k \text{ con potencias menores que } p)$$

$$(k-1)^{p+1} - (k-2)^{p+1} = (p+1)(k-1)^p + (\text{términos de } k \text{ con pot. menores que } p)$$

$$3^{p+1} - 2^{p+1} = (p+1)3^p + (\text{términos de } k \text{ con pot. menores que } p)$$

$$2^{p+1} - 1^{p+1} = (p+1)2^p + (\text{términos de } k \text{ con pot. menores que } p)$$

$$1^{p+1} = (p+1)1^p + (\text{términos de } k \text{ con pot. menores que } p)$$

Sumando esta cadena de igualdades, obtenemos:

$$n^{p+1} = (p+1) \sum_{k=1}^n k^p + (\text{términos de } n \text{ con potencias menores que } p)$$

Por lo tanto:

$$\sum_{k=1}^n \frac{k^p}{n^{p+1}} = \frac{1}{p+1} - \frac{(\text{términos de } n \text{ con potencias menores que } p)}{(p+1)n^{p+1}}$$

Aquí, implícitamente se aplica la hipótesis de inducción y es claro que cuando n crece, la expresión $\frac{(\text{términos de } n \text{ con potencias menores que } p)}{(p+1)n^{p+1}} \rightarrow 0$; así que:

$$\sum_{k=1}^n \frac{k^p}{n^{p+1}} \rightarrow \frac{1}{p+1}.$$

Ahora sí, estamos en posibilidades de hacer la generalización para las sumas inferiores y superiores de $[0, b]$. Recordemos que en el desarrollo de éstas en los casos de las funciones que eran iguales a x , x^2 , x^3 , aparecían los factores $\frac{b^2}{n^2}$, $\frac{b^3}{n^3}$, $\frac{b^4}{n^3}$, respectivamente, debido a las expresiones de las que se obtienen $m_i = f(t_{i-1})$ y $M_i = f(t_i)$; puesto que $t_{i-1} = \frac{(i-1)b}{n}$ y $t_i = \frac{ib}{n}$, y al evaluar la función $f(x) = x^p$ se obtiene, en cada caso, el factor $\frac{b^p}{n^p}$.

De esta manera, podemos obtener $\int_0^b x^p dx$; calculemos las sumas inferiores y superiores, utilizando la generalización obtenida:

$$\begin{aligned}
 L(f, P) &= \sum_{i=1}^n m_i(t_i - t_{i-1}) \\
 &= \sum_{i=1}^n f(t_{i-1})(t_i - t_{i-1}) \\
 &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{(i-1)b}{n} \right)^n (t_i - t_{i-1}) = \frac{b^{p+1}}{n^{p+1}} \sum_{k=0}^{n-1} k^p \rightarrow \frac{b^{p+1}}{n^{p+1}} \frac{n^{p+1}}{p+1} = \frac{b^{p+1}}{p+1} \\
 U(f, P) &= \sum_{i=1}^n M_i(t_i - t_{i-1}) \\
 &= \sum_{i=1}^n f(t_i)(t_i - t_{i-1}) \\
 &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{ib}{n} \right)^n (t_i - t_{i-1}) = \frac{b^{p+1}}{n^{p+1}} \sum_{k=1}^n k^p \rightarrow \frac{b^{p+1}}{n^{p+1}} \frac{n^{p+1}}{p+1} = \frac{b^{p+1}}{p+1}
 \end{aligned}$$

De ahí que:

$$\int_0^b x^p dx = \frac{b^{p+1}}{p+1},$$

en consecuencia:

$$\int_a^b x^p dx = \frac{b^{p+1}}{p+1} - \frac{a^{p+1}}{p+1}.$$

Pasemos a otro ejemplo.

2. Dada la siguiente función, determinar si es integrable y, en su caso, calcular la integral:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \text{ es irracional, con } 0 < x < 1 \\ \frac{1}{q}, & \text{si } x = \frac{p}{q} \text{ fracción irreducible, con } 0 < x < 1 \end{cases}$$

Para la gráfica de esta función, no tenemos otra opción más que ilustrar algunos casos de puntos e imaginarnos que esa apariencia se mantendrá. Por ejemplo:

el valor máximo de la función es $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$;

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{3}; f\left(\frac{1}{4}\right) = f\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{1}{4}; f\left(\frac{1}{5}\right) = f\left(\frac{2}{5}\right) = f\left(\frac{3}{5}\right) = f\left(\frac{4}{5}\right) = \frac{1}{5};$$

$$f\left(\frac{1}{6}\right) = f\left(\frac{5}{6}\right) = \frac{1}{6}; f\left(\frac{1}{7}\right) = f\left(\frac{2}{7}\right) = f\left(\frac{3}{7}\right) = f\left(\frac{4}{7}\right) = f\left(\frac{5}{7}\right) = f\left(\frac{6}{7}\right) = \frac{1}{7};$$

así, las imágenes de las fracciones irreducibles van disminuyendo de valor y si el denominador es un número primo q , habrá $q - 1$ puntos cuya imagen es $\frac{1}{q}$; es decir:

$$f\left(\frac{1}{q}\right) = f\left(\frac{2}{q}\right) = \dots = f\left(\frac{q-2}{q}\right) = f\left(\frac{q-1}{q}\right) = \frac{1}{q};$$

esto significa que cuando el denominador crece, la imagen de la función estará cada vez más cerca de 0.

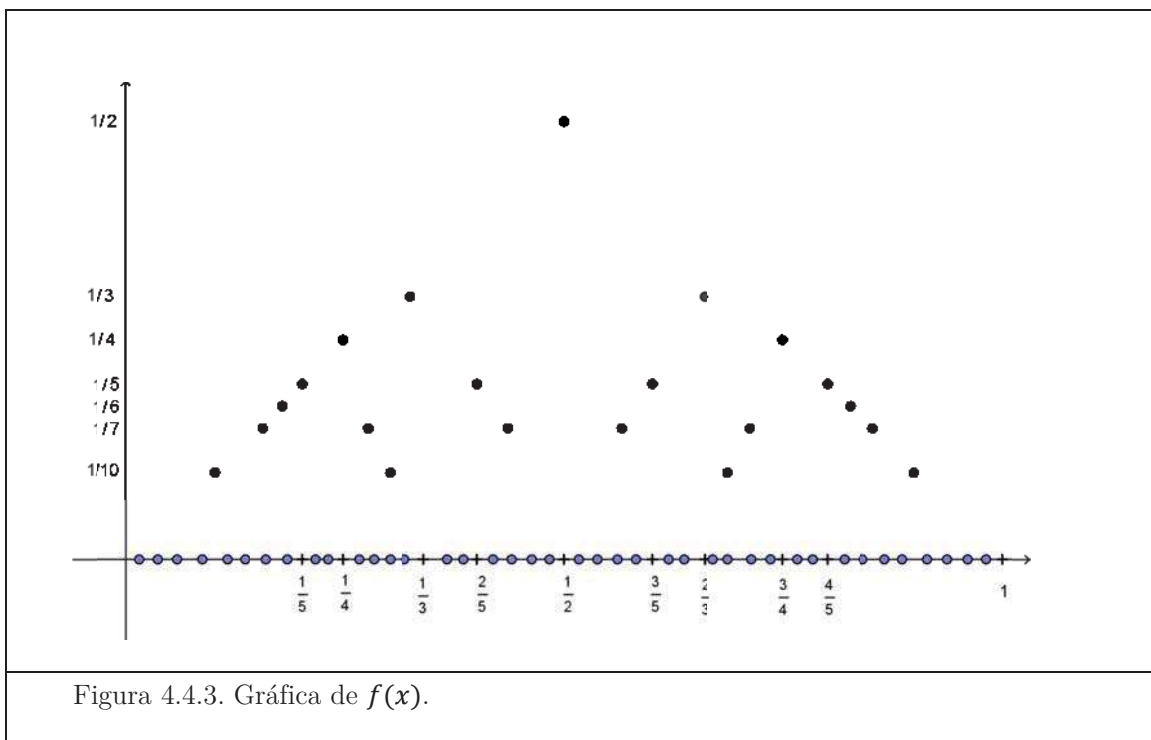


Figura 4.4.3. Gráfica de $f(x)$.

Puede demostrarse que, efectivamente, si a es cualquier número entre 0 y 1, el límite de la función, cuando x tiende a a , es 0; o sea

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0.$$

Tenemos que ver que para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $0 < |x - a| < \delta$, para toda $x \neq a$, entonces $|f(x) - 0| < \varepsilon$. (aquí $x = \frac{p}{q}$ y $f(x) = \frac{1}{q}$)

Propongamos $\varepsilon \geq \frac{1}{n}$, para n suficientemente grande; entonces dada la definición de f , los números para los que puede no ser cierta la desigualdad $|f(x) - 0| < \varepsilon$, son los números que se enlistan a continuación:

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \dots, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{n-1}{n}$$

Si a es irracional, entonces alguno de los números de la lista será el más próximo a a y entonces, ciertamente, se cumplirá para éste que $\left| \frac{p}{q} - a \right| < \delta$; donde δ será la distancia mínima.

En cambio, si a es racional, a será uno de los números de la lista, entonces pueden considerarse sólo los valores de $\left| \frac{p}{q} - a \right|$ para los cuales $\frac{p}{q} \neq a$; y tomar la δ como distancia mínima.

Así, con esta descripción de δ se cumplirá que siendo x distinto de los números de la lista, si $0 < \left| \frac{p}{q} - a \right| < \delta$, entonces se cumple que $\left| f\left(\frac{p}{q}\right) - 0 \right| < \varepsilon$, para el $\varepsilon > 0$ previamente dado. De ahí que, efectivamente,

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0.$$

Sin embargo, a pesar de que el límite existe en cualquier punto a , la función no es continua en todos los puntos de la lista, pues

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq f(a).$$

Ahora bien, para cualquier partición $P = \{t_0 = 0, t_1, \dots, t_{i-1}, t_i, \dots, t_n = 1\}$ en cada sub intervalo $[t_{i-1}, t_i]$ habrá tanto números racionales como irracionales; así que

$$M_i = \frac{1}{q} \text{ y } m_i = 0;$$

por lo tanto,

$$U(f, P) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{q} (t_i - t_{i-1}) = \frac{1}{q}; \text{ y}$$

$$L(f, P) = \sum_{i=1}^n 0(t_i - t_{i-1}) = 0,$$

es decir:

$$U(f, P) - L(f, P) = \frac{1}{q} < \varepsilon; \text{ por lo que basta con que } q > \frac{1}{\varepsilon}.$$

De ahí que la función f es integrable. Aquí se ha usado implícitamente la propiedad de densidad de los conjuntos de números $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{I}$.

4.3 Entrevista a profesores de Cálculo de una Facultad de Ingeniería

Con el propósito de indagar sobre el tipo de concepciones que tienen los profesores en cuanto al concepto de límite que, sin duda, están presentes a la hora de impartir sus clases de Cálculo, entrevistamos a cuatro profesores de matemáticas de una Facultad de Ingeniería, los cuales se dedican a la docencia en matemáticas como su actividad principal. Los profesores elegidos para la entrevista tienen distinta formación y antecedentes académicos, como se detalla a continuación:

Profesor A: tiene estudios de ingeniería, dedicado a la docencia desde hace 5 años; actualmente estudió una maestría en ciencias administrativas.

Profesor P: tiene licenciatura en físico matemáticas y maestría en física; su actividad principal ha sido la docencia por más de 25 años.

Profesor B: tiene estudios de ingeniería, dedicado a la docencia desde hace 10 años; actualmente estudia doctorado en pedagogía.

Profesor J: estudió ingeniería y se ha dedicado a la docencia en diferentes facultades de ingeniería desde hace más de 25 años.

En el campo de la educación matemática, la entrevista ha sido una herramienta importante para desarrollar investigaciones de corte cualitativo, sobre todo cuando se trata de entender la estructura y funcionamiento del pensamiento en cuanto a concepciones que tienen los sujetos. Cannell y Kahn (Citados por Cohen y Manion, 1990) definen la entrevista de investigación como: un diálogo iniciado por el investigador con el propósito específico de obtener información relevante para la investigación y enfocado por él sobre el contenido especificado por los objetivos de la investigación de descripción, de predicción o de explicación sistemáticos

Una de las ventajas de la entrevista, como medio para llevar a cabo una investigación, es que permite una mayor profundidad que otros métodos de recolección de datos, cuando se trata de entender cómo funciona el pensamiento de las personas con relación a situaciones específicas. Las concepciones son estructuras internas del pensamiento del sujeto, por lo tanto la entrevista es una herramienta primordial para indagar cómo afloran dichas concepciones a la hora de enseñar los temas de Cálculo.

En la literatura pueden distinguirse diferentes tipos de entrevistas. Cohen y Manion (1990) identifican cuatro tipos básicos de entrevistas: estructuradas y no estructuradas, dirigidas y no dirigidas; sin embargo, pueden establecerse casos intermedios entre estas dos caracterizaciones y, por ejemplo, se puede también hablar de la entrevista semi estructurada. En esta categoría se ubican las entrevistas estructuradas basadas en tareas de Goldin (2000), las cuales empleamos para entrevistar a los profesores, ya que

...posibilitan enfocar la atención de la investigación más directamente en los procesos del sujeto en las tareas matemáticas dirigidas, más que en las respuestas correctas o incorrectas que producen. De manera que, es más posible ahondar en aspectos de mayor profundidad que por otros medios específicos –aspectos tales como cogniciones complejas asociadas con aprender matemáticas, mecanismos de exploración matemática y resolución de problemas... (p. 520)

En nuestro caso, la entrevista es breve semi estructurada, con preguntas base sobre lo que piensan los profesores acerca de lo que es el Cálculo y el papel que juega la noción de límite en el desarrollo del curso para, posteriormente, iniciar un diálogo libre sobre el contexto de la misma. El propósito de la entrevista es ahondar en la identificación y caracterización de rasgos relevantes de las concepciones relacionadas con el concepto de límite y la manera en que se utiliza, infinitesimalista o formalista, en el estudio de los temas de derivada e integral. Específicamente, nos interesa:

- Identificar concepciones de los profesores sobre el concepto de límite y nociones relacionadas con el mismo.
- Indagar sobre la manera en que enseñan el tema de límites los subsecuentes temas de cálculo, y sobre las dificultades que manifiestan para su enseñanza.
- Ubicar a los profesores de acuerdo a la distinción infinitesimalista/formalista y estimar la influencia de su formación y los libros de texto utilizados.

4.3.1 Entrevista general

La entrevista se aplicó durante el mes de Septiembre de 2010 a los cuatro profesores invitados, quienes participaron voluntariamente, y giró en torno al guión que se presenta enseguida.

1. Para usted, ¿qué es el Cálculo?
2. ¿Qué nivel de relevancia le asigna usted al concepto de límite en los cursos de Cálculo que imparte y cómo lo aborda?
3. ¿Conoce lo que son los infinitésimos y la ideas infinitesimalistas?
4. ¿En qué conceptos se basa usted para enseñar la derivada y la integral?
5. ¿En qué textos o materiales se basa para impartir su curso de Cálculo y qué tipo de problemas aborda en clase y cuáles deja de tarea?

Una vez concluidas las entrevistas, podemos clasificar las respuestas a cada una de las preguntas, de la siguiente manera:

Pregunta 1. Para usted, ¿qué es el Cálculo?

La mayoría de los profesores coinciden en que el Cálculo es una herramienta matemática poderosa, que permite resolver problemas de diversa índole, asociados a los fenómenos de cambio; en particular en problemas de aplicación en la ingeniería. Se nota que los profesores P y J han interiorizado ideas acerca del cálculo que les permiten afirmar que el Cálculo es una rama muy importante de las matemáticas, útil no sólo para resolver problemas de la ingeniería sino para avanzar en la matemática misma.

Pregunta 2. ¿Qué nivel de relevancia le asigna usted al concepto de límite en los cursos de Cálculo que imparte y cómo lo aborda?

Para los profesores A y B, el nivel de relevancia y tiempo que le dedican al concepto de límite, va de acuerdo a lo marcado en el programa, buscando que el estudiante domine solamente las cuestiones operativas de los límites. Los profesores P y J, dan especial importancia a la comprensión del concepto de límite, recurriendo a las ideas geométricas e intuitivas que motivaron el establecimiento de este concepto, de manera más marcada el Profesor P, para enseguida introducir la noción de derivada. Posteriormente; se centran en las cuestiones operativas.

Pregunta 3. ¿Conoce lo que son los infinitésimos y la ideas infinitesimalistas?

El Profesor A no tiene claro lo que es una idea infinitesimalista. El Profesor B, identifica qué es un infinitésimo pero no su relación con el desarrollo del Cálculo, con el concepto de límite, ni el de derivada, pero sí lo ha aplicado a problemas de física. Los profesores P y J sí conocen lo que es un infinitésimo y su relación con la derivada. Para ellos es indistinto el mezclar verbalmente las ideas de infinitésimo y de límite; no abordan de manera profunda el manejo de los infinitésimos. Cabe mencionar que el concepto de límite lo abordan a través de ideas intuitivas y geométricas sin que se llegue a la formalidad del uso de los epsilons y deltas. Para ellos este es el acercamiento al límite que debe darse en las escuelas de ingeniería.

Pregunta 4. ¿En qué conceptos se basa usted para enseñar la derivada y la integral?

El Profesor P se enfoca en la idea de límite para enseñar el concepto de derivada y la integral como “operación” inversa de la derivada. Menciona un poco las sumas de Riemman en la integral. El Profesor J, también se basa en la idea de límite, busca introducir la derivada y la integral a través de problemas. Los profesores A y B se basan, principalmente, en las reglas de derivación e integración. Es decir, su acercamiento al cálculo es puramente operativo.

Pregunta 5. ¿En qué textos o materiales se basa para impartir su curso de Cálculo y qué tipo de problemas aborda en clase y cuáles deja de tarea?

Todos los profesores coinciden en que los textos propuestos por el programa de la materia de Cálculo, el Stewart y el Larson, son adecuados para desarrollar el curso en esta escuela de

Ingeniería. El profesor P además utiliza notas que producto de su experiencia ha ido desarrollando en los cursos.

4.3.2 Entrevista semi estructurada basada en problemas relacionados con el concepto de límite.

Con base en las respuestas de los profesores a la entrevista anterior, se aplicó otra entrevista como la siguiente:

Problemas tipo de interés para la investigación.

1. $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{2 - \sqrt{x-3}}{x^2 - 49}$
2. Se está inflando un globo esférico. Calcula la rapidez de aumento del área superficial en función del radio r cuando r es 2ft.
3. En una oficina de correos solo se admiten paquetes con forma de paralelepípedo rectangular, tales que la anchura sea igual a la altura; además, la suma de ancho, alto y largo debe ser de 72 cm. Hallar las dimensiones del paralelepípedo para que el volumen sea máximo.
4. Calcular aproximadamente: a) $\text{sen } 41^\circ$, b) $\sqrt{26}$.

Preguntas de la entrevista.

1. ¿Cómo justifica ante sus estudiantes el uso de la regla de la derivada de un producto?
2. ¿En un curso de cálculo diferencial, discute problemas como los enlistados?
3. ¿Cómo enseña usted el cálculo de la diferencial de $\text{sen } x$, o de $\sqrt{x}$?
4. Exprese lo que es un infinitésimo o una cantidad infinitesimal.
5. Exprese distintos problemas en los que este involucrada la derivada.
6. ¿Qué es la derivada? ¿Cómo introduce este tema en su clase de cálculo diferencial?
7. ¿Cómo introduce el concepto de límite en su clase?
8. ¿Durante su curso, en algún momento introduce aspectos formales del concepto de límite o de la derivada? Es decir, ¿expone ideas relacionadas con épsilon (ϵ) – delta (δ)?

9. ¿En caso de ver aspectos formales del límite en su curso, le es útil para otras partes del curso?

Respuestas de los profesores.

Las respuestas de los profesores siguieron siendo consistentes con las anteriores.

Pregunta 1. Los profesores A y B responden que la exhiben como una regla de derivación sin mayor justificación mostrando varios ejemplos a sus estudiantes. Los profesores P y J manifiestan que se esfuerzan por justificar dicha regla, a través de la noción de límite.

Pregunta 2. Los cuatro profesores concuerdan en mostrar en sus clases problemas como los citados en la entrevista, comentando incluso que son del tipo de problemas elegidos para la evaluación del tema de la derivada y la diferencial en su curso.

Pregunta 3. Los profesores P y J destacan la cuestión intuitiva de la diferencial desde que la definen, para enfatizar su uso en problemas de aplicación como el cálculo aproximado de funciones, dentro de las cuales están $\sin x$ y $\sqrt{x}$. Los profesores A y B se centran únicamente en las reglas de diferenciación como análogas a las de derivación sin abordar este tipo de problemas.

Pregunta 4. Profesor A no sabe qué es. B manifiesta que lo ha sabido de ellos y lo describe como algo pequeño. P y J los justifican como una idea intuitiva del concepto de límite.

Pregunta 5. Profesor A menciona problemas sobre tangente, velocidad y gráfica de una función. Profesor B cita los mismos problemas que A expresando de manera general problemas de máximos y mínimos. Profesores P y J describieron problemas de tangentes, velocidad, variación, razón de cambio, optimización, uso de la regla de L'Hopital.

Pregunta 6. Profesores A y B dicen que es una fórmula que hay que seguir y tiene la representación geométrica de la recta tangente a una curva. Los profesores P y J describen la derivada como el límite del cociente de Newton, aunque lo hace con mayor profundidad el profesor P; intentan que sus estudiantes aprendan la derivada tanto en sus reglas operativas como en la interpretación geométrica.

Pregunta 7. P y J lo introducen con la idea de acercamiento potencialmente alcanzable; es decir qué le sucede a $f(x)$ cuando x se acerca a un punto particular, y lo explican gráficamente involucrando límites laterales e intentan conectar con la continuidad de una función. Tanto A y B se enfocan directamente en la operatividad de los límites, aunque B se esfuerza por explicar la cuestión geométrica.

Pregunta 8. Ninguno de los profesores define los conceptos de esta materia con ese tipo de lenguaje. Los profesores A y B indicaron que desconocen el significado de épsilon (ϵ) – delta

(δ), aunque el profesor B menciona haberlo visto alguna vez. El profesor P es el único que, en ciertas ocasiones, da explicaciones con argumentos relacionado con $\epsilon - \delta$.

Pregunta 9. Ninguno de los profesores da aspectos formales en su curso por lo que respondieron que en ningún otro tema les era útil.

Como puede apreciarse, estrictamente hablando, el panorama respecto al uso tanto de ideas infinitesimalistas como de ideas formales del concepto de límite, no es alentador; existe una especie de vaguedad en la enseñanza respecto a estos acercamiento, no hay claridad respecto al significado de ellos.

Capítulo 5

Conclusiones y reflexiones finales

Las virtudes en la estructura y el tratamiento de algunos textos que hemos resaltado en la sección 4.2, tienen la intención de sus autores el facilitar el aprendizaje de los conceptos del Cálculo por parte de los estudiantes; sin embargo, la experiencia indica que este propósito se cumple en forma muy escasa. Sin duda, una de las principales razones de esto, es que el Cálculo es el área de las matemáticas que se encarga del estudio de los procesos de cambio, cuyo estudio implica cierto conocimiento y dominio de una cantidad importante de prerrequisitos, cuyos contenidos corresponden a diferentes áreas de las matemáticas: aritmética, álgebra, geometría euclidea y geometría analítica; además de una serie de procesos mentales y habilidades que se van a fomentar durante los cursos de Cálculo pero que, se supone, los estudiantes han ido adquiriendo a lo largo de su educación básica, como medición, comparación, estimación.

Regularmente esta carga de prerrequisitos resulta excesiva, y a la vez infranqueable, para una buena cantidad de los estudiantes de ingeniería, originando los altos índices de deserción y reprobación; pero es justo reconocer que esta situación puede no deberse precisamente a falta de dominio del Cálculo en sí, sino a falta de dominio de todo lo que el Cálculo implica: ¿quién no ha aprendido o fortalecido su conocimiento sobre las fracciones algebraicas cuando estudia uno de los métodos de integración?, ¿quién no ha incrementado su entendimiento de las funciones cuando aplica las técnicas del Cálculo en problemas de optimización?, ¿quién no ha aprendido a conjeturar respecto a la tendencia de una sucesión numérica con un acercamiento gráfico, sin necesidad de un tratamiento formal y riguroso?

Así, en relación a nuestra primera pregunta de investigación, relacionada con **la pertinencia de definir y utilizar las cantidades infinitamente pequeñas en los cursos de Cálculo de las escuelas de ingeniería**; nos parece, a la luz de los aspectos históricos desarrollados y de la revisión documental hecha en este trabajo, que es factible el uso de las cantidades infinitamente pequeñas, para el logro de los objetivos planteados en las escuelas de ingeniería; sin embargo, no se conoce mucho este acercamiento y hacen falta

investigaciones al respecto. Puede ser que esto sea una consecuencia de la implantación del concepto formal del límite hecho por Cauchy en el siglo XVIII. El papel del profesor es muy importante para evitar confusiones de los estudiantes debido a “errores didácticos” en su presentación que, a nuestro juicio, se cometen en algunos textos como el Leithold, al denominar “métodos simples” a los asociados con el enfoque infinitesimal y “métodos formales” a los asociados con el concepto de límite.

De hecho, todos los textos incluyen como parte principal de los contenidos el tema de límites, pero ninguno lo aborda con suficiente formalidad excepto, claro está, el Spivak. En los demás textos con el nombre de límite se resuelven los problemas usando la intuición y las ideas infinitesimalistas, pues cuando, por ejemplo, estamos calculando un límite decimos, “después de cierto valor de n esta cantidad es demasiado pequeña como para tomarla en cuenta, así que...” Entonces, ¿qué es lo que pasa? Al respecto Arcos *et al.* (1997) argumenta la necesidad de aceptar las cantidades infinitamente pequeñas como tales, y abordar los cursos de Cálculo, desde el bachillerato, con toda la fuerza que proporcionan los infinitésimos a la resolución de los problemas, en el que el respaldo desarrollado en el curso sea precisamente el aspecto problemático y no el lógico; a fin de cuentas así fue como empezó todo, con Arquímedes, Leibniz y Newton.

Respecto a nuestra segunda pregunta de investigación, **lo que se gana o se pierde, desde el punto de vista de la enseñanza, con desplazar el concepto de límite al de diferencial**, nos parece que ello depende de los propósitos que se tengan, derivados de un acercamiento intuitivo o formal. Para las escuelas de ingeniería y el nivel de profundidad con que se estudia el Cálculo, el acercamiento intuitivo, no riguroso, aporta beneficios en el entendimiento de los estudiantes y, a su vez, capacita a aquellos que quieran profundizar en aspectos formales. En el sentido opuesto, difícilmente ocurre algo así, pues el tratamiento formal y riguroso representa una barrera infranqueable para muchos estudiantes, no sólo para estudiar Cálculo, sino para continuar y terminar una carrera profesional.

En cuanto a la tercera pregunta, relacionada con **qué tan riguroso debe ser un curso de Cálculo en las escuelas de ingeniería**, comentamos que, no nada más en Cálculo, sino en cualquier otra rama de las matemáticas o de alguna de las ciencias exactas, la rigurosidad de su estudio, y por tanto de su enseñanza, depende de los propósitos que se persigan. En las escuelas de ingeniería, en las que se tiene como propósito principal que **los estudiantes apliquen el Cálculo para resolver problemas relacionados con su área, a los cuales se enfrentará en el ejercicio de su profesión**, creemos que el acercamiento no riguroso, basado en la intuición geométrica proporciona los elementos necesarios para lograr dicho objetivo; sin embargo, como ya vimos, la mayoría de los textos toman al concepto de límite como aspecto dominante, pero lo manejan de manera informal e intuitiva, incluyendo argumentos de carácter infinitesimalista.

Resulta curioso que casi en todos estos textos que hemos enlistado, en el índice aparece un apartado para ver el tema de límites, que es abordado de la manera que hemos descrito, pero ciertamente sólo destinan unas pocas páginas al tratamiento riguroso con $\varepsilon - \delta$; los

teoremas que dan fundamento a esta visión del Cálculo no se tocan, salvo en el Spivak que, como ya mencionamos, es un libro para escuelas de ciencias.

De esta manera, advertimos la coexistencia de los dos tipos de Cálculo que hemos descrito en el Capítulo I, la conveniencia de utilizar uno u otro, depende de los propósitos que se persigan: si se trata de entender y resolver problemas propios de la ingeniería y de visualizar la potencia que proporciona el acercamiento intuitivo, a través de las cantidades infinitamente pequeñas, identificadas con la diferencias, el acercamiento de los infinitésimos es efectivo y suficiente. Si lo que se trata, además de resolver problemas, es de entender los fundamentos del Cálculo con base en las propiedades estrictas de los números, no queda otra que utilizar el acercamiento formal y riguroso.

Finalmente comentamos que, por un lado, se ofrece un curso con un acercamiento formal y riguroso, sustentado en el concepto de límite, no se toma en cuenta si los estudiantes están o no preparados para entenderlo, porque su propósito no es ese, su propósito principal es la formalidad rigurosa que caracteriza a la matemáticas y buscar las explicaciones de sus afirmaciones dentro de la matemática misma; desde el punto de vista didáctico este no es un acercamiento recomendable. Claro que quien haya logrado estudiar y entender los conceptos con esta visión, tiene cierta sensibilidad y no es arrogante, está preparado para entender y desarrollar las ideas del Cálculo derivadas de la aceptación de la diferencial como la designación de un número infinitamente pequeño.

Por otro lado, como hicimos ver en el desarrollo de los problemas de carácter histórico, las cantidades infinitamente pequeñas surgieron por la necesidad de resolver problemas de diversa índole y de buscar explicaciones a cierto tipo de fenómenos; es decir, desde el punto de vista didáctico, este es un acercamiento más que recomendable. De hecho, este es el acercamiento con el que se inició la invención de esta nueva rama de las matemáticas denominada Cálculo, encargada de estudiar y dar explicaciones a los fenómenos de variación, correspondiéndole a Leibniz y Newton su establecimiento y sistematización; y remarcamos, como decía el gran matemático Carlos Imaz, “ahí empezó todo”. Nótese, por ejemplo, que incluso los textos formales y rigurosos de Cálculo, como el Spivak, llevan en su nombre el “apellido” de infinitesimal.

En el campo de la Educación matemática, ya existen propuestas didácticas y metodológicas que se sustentan en la visión y acercamiento de los infinitésimos, como las cantidades infinitamente pequeñas que son representadas por la diferencial. En este sentido, Arcos (2010) propone enseñar el curso de Cálculo diferencial en el bachillerato, con base en el esquema de la Figura 5.1; en lugar del enfoque que se ha seguido desde hace bastantes años que se ilustra en la Figura 5.2.

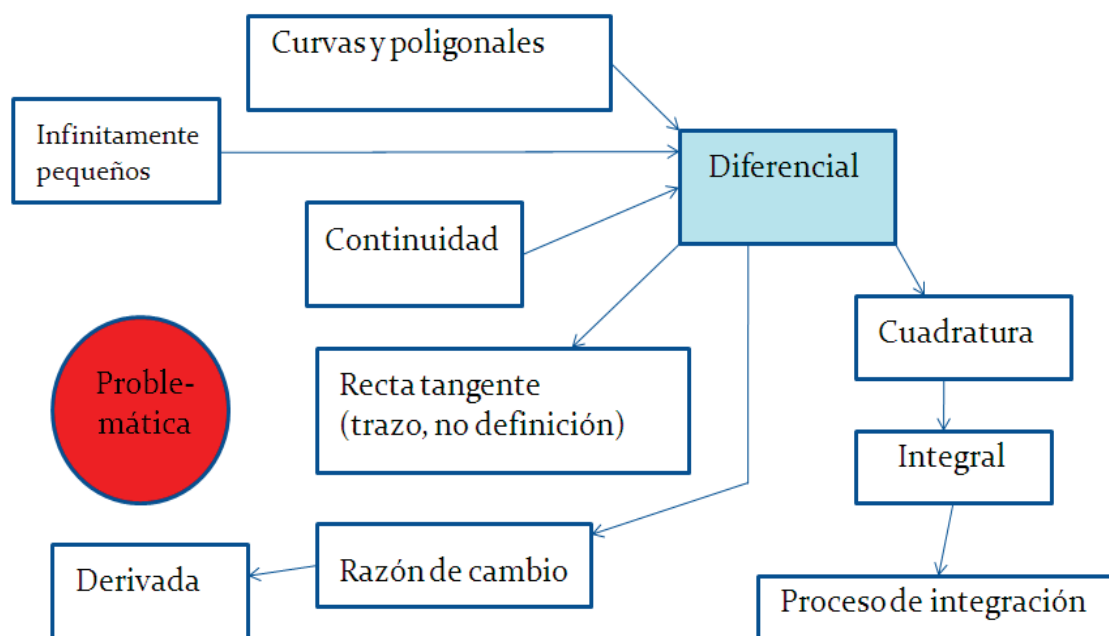


Figura 5.1. Enseñanza del Cálculo basado en el enfoque problemático.

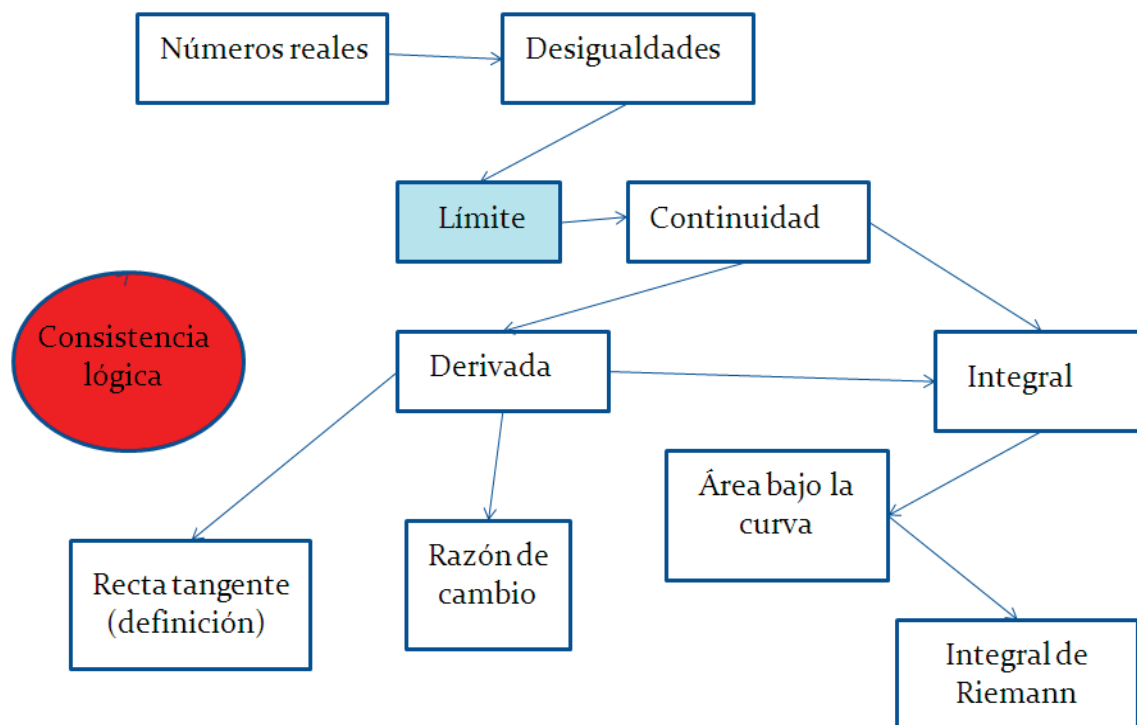


Figura 5.2. Enseñanza del Cálculo basada en el concepto de límite.

Anexos

A.1 Los infinitésimos y el postulado de Arquímedes en el estudio de las paralelas

Las ideas infinitesimalistas también estuvieron presentes en el estudio de las paralelas; una de las discusiones que mayor productividad matemática trajo consigo, desde la antigüedad hasta la época moderna, fue la relacionada con el *V Postulado* de Euclides, el cual fue cuestionado por su “no evidencia” para aceptarlo sin demostración. Uno de los intentos por demostrarlo como teorema, consiste en hacer ver que el Teorema de la suma de ángulos interiores de un triángulo implica dicho postulado, para ello se requiere del siguiente lema, en cuya prueba se utiliza el Postulado de Arquímedes.

Dicho postulado expresa la sencilla idea geométrica de que dado un segmento de determinada longitud, digamos α , siempre existe un número natural k tal que multiplicado por una unidad preestablecida β , el segmento de longitud $k \cdot \beta$ es mayor que el segmento de longitud α (Figura A.1.1); escribámoslo nuevamente:

Postulado de Arquímedes: Dados dos números α y β , arbitrarios, siempre existe un entero positivo k tal que $k \cdot \beta > \alpha$.

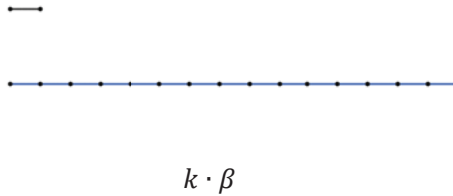


Figura A.1.1 Postulado de Arquímedes.

Lema. Dada la recta l y un punto P que no pertenece a ella, es posible trazar una recta que pase por P y que forme con l un ángulo menor que cualquier ángulo $\varepsilon > 0$, dado de antemano (Figura A.1.2).

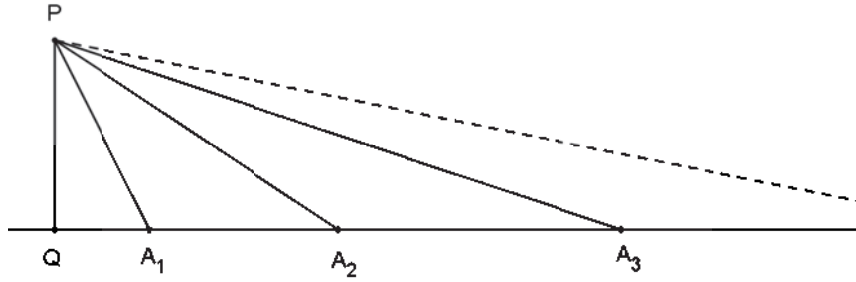


Figura A.1.2. El ángulo agudo PA_nQ del enésimo triángulo es menor que $\varepsilon > 0$.

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$ el ángulo dado y consideremos el ángulo π .

Desde P trazamos la perpendicular a l en Q y sobre l localizamos A_1 tal que $PQ = QA_1$; enseguida, dibujamos PA_1 . Entonces el ΔPQA_1 es isósceles con $\angle QPA_1 = \angle PA_1Q$; y como estos ángulos son complementarios,

$$\angle PA_1Q = \frac{1}{2} \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2^2}$$

Ahora localizamos A_2 en l tal que $PA_1 = A_1A_2$; nuevamente el ΔPA_1A_2 es isósceles con $\angle A_1PA_2 = \angle PA_2A_1$ y como el $\angle PA_1Q$ es exterior de este triángulo, entonces $\angle PA_1Q = 2\angle PA_1A_2$; por lo tanto,

$$\angle PA_2A_1 = \frac{\angle PA_1Q}{2} = \frac{\pi}{2^3}$$

De igual manera, procedemos para construir el, ΔPA_3A_2 del que obtendremos,

$$\angle PA_3A_2 = \frac{\angle PA_2A_1}{2} = \frac{\pi}{2^4}$$

Así, después de n triángulos construidos, llegamos al triángulo isósceles ΔPA_nA_{n-1} y obtenemos,

$$\angle PA_nA_{n-1} = \frac{\angle PA_{n-1}A_{n-2}}{2} = \frac{\pi}{2^{n+1}}$$

Como ε y π son números dados, por el Postulado de Arquímedes existe un número natural k tal que $k \cdot \varepsilon > \pi$. Si hacemos $k = 2^{n+1}$, $\Rightarrow 2^{n+1} \cdot \varepsilon > \pi$; por lo tanto $\frac{\pi}{2^{n+1}} < \varepsilon$. De ahí que,

$$\angle PA_nA_{n-1} = \frac{\pi}{2^{n+1}} < \varepsilon \quad (*)$$

es decir, fue posible obtener un ángulo menor que cualquier otro ángulo dado por pequeño que este fuera, lo cual queríamos probar.

Con este resultado y la incorporación de un nuevo postulado, conocido como *Axioma de Pash*, que establece lo siguiente: “si una recta pasa por el vértice de un triángulo en su plano, corta al lado opuesto”, se prueba el **Teorema**: Si la suma de los ángulos interiores de un triángulo cualquiera ΔABC es 180° , entonces se cumple el Postulado de las paralelas. Aunque en esa época ya se había demostrado este Teorema y su recíproco, Legendre (1752-1833) prosiguió con las investigaciones e intentó demostrar que la suma de ángulos interiores de un triángulo, podía deducirse de los primeros cuatro postulados (lo que origina la llamada Geometría neutra); sin embargo, en su argumentación cometió un error lógico conocido como “petición de principio”, pues implícitamente utilizó el Postulado V.

Desde luego, los diversos intentos fallidos por demostrar el *Postulado de las paralelas* como un teorema de la Geometría absoluta, desde la época de Proclo (siglo V d.C.) hasta la época moderna (más de 22 siglos), no significa que las personas que lo intentaron no tuvieran una formación matemática suficiente o que les faltara signos de inteligencia; reflejan simplemente que dicho postulado es en realidad independiente de los otros cuatro postulados de Euclides. A dicha conclusión llegó en 1835 el matemático ruso Nikolai Ivánovich Lobachevski (1792-1856) en su obra “Nuevos principios de la geometría”:

Es bien conocido que hasta la fecha la teoría de las paralelas ha permanecido incompleta. Los esfuerzos infructuosos realizados desde tiempos de Euclides y a lo largo de un periodo de más de dos mil años, me han llevado a la convicción de que los conceptos involucrados en esta investigación no contienen la verdad de lo que se desea probar ... convencido de la verdad de mi conjetura ... escribí mis argumentos en 1826. (Citado por Kagán, 1986, p.)

Es claro que con la frase “los conceptos involucrados en esta investigación no contienen la verdad de lo que se desea probar”, Lobachevski se refiere a que el Postulado de las paralelas no puede deducirse a partir de la Geometría neutra, que es la geometría que se desarrolla sin recurrir a este postulado; neutra porque no se afirma nada acerca de la existencia de una, más de una o ninguna paralela a una recta dada en un punto externo.

Para construir una nueva geometría, Lobachevski recurre a una de las formas de negar el *V Postulado*, y establece el:

Postulado de Lovachevski: *Por un punto que no pertenece a una recta dada, pueden trazarse al menos dos rectas paralelas a ella.*

La relación (*) derivada de la aplicación del *Postulado de Arquímedes*, proporciona una métrica para trazar por un punto en una paralela euclideana a una recta dada, otra recta que forme un ángulo menor que cualquier ángulo dado de antemano, por pequeño que este sea. En suma, esta es una aplicación de las ideas infinitesimalistas a este trascendente tema de geometría.

A.2 Cuadratura de la parábola

La parábola se conoce desde tiempos de Menecmo (375-325 a C.), quien la trabajó como una de las figuras planas que se obtienen del cono. Posteriormente, Apolonio (262-290 a C.) complementó y sistematizó el estudio de las cónicas; lo que hoy sabemos de ellas, prácticamente se conocía desde entonces, salvo por la incorporación de los sistemas de coordenadas.

Para cuadrar la parábola; es decir, para encontrar el lado de un cuadrado cuya área sea igual a la de un sector parabólico, Arquímedes utiliza la “propiedad de la parábola”: la razón entre las distancias de dos puntos de la parábola al eje de la misma, es proporcional al cuadrado de la razón de los segmentos determinados por los pies de las perpendiculares de los puntos de la parábola al vértice de la misma.

Aquí aplicaremos el Método de Arquímedes a la parábola cuya ecuación es $y = x^2$ en un sistema coordenado cartesiano; posteriormente, se presenta la demostración con argumentos euclidianos. Es importante comentar que, en este caso, el equilibrio se hará con rectángulos delgadísimos que tienden a segmentos de un sector parabólico y de un triángulo; estos rectángulos corresponden a lo posteriormente llamó cantidades infinitesimales, cuya área es ydx . La Figura A.2.1 muestra el segmento parabólico AOB que contiene al ΔAOB .

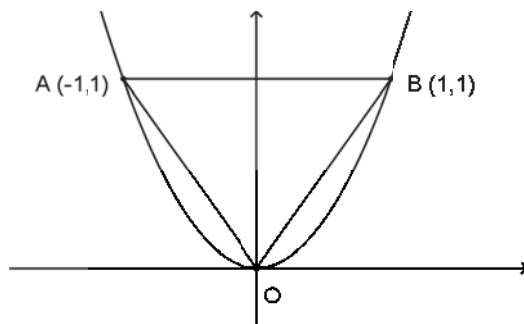


Figura A.2.1. Segmento parabólico por “cuadrar”.

Por B se traza una paralela al eje y (eje de la parábola) que determina los puntos K con la semirrecta $\overrightarrow{AO}$ y C con la tangente a la parábola en A (ver Figura A.2.2); de esta manera, se ha formado el ΔABC . La idea es equilibrar el sector parabólico AOB con el ΔACB . Para ello, realicemos cortes paralelos al eje y para formar rectángulos delgadísimos del mismo ancho, unos correspondientes al sector parabólico y otros al triángulo. Es claro que si aumentamos el número de cortes, los rectángulos tienden a ser segmentos que corresponden a lo que Leibniz llamó elementos diferenciales de área. Nuestra palanca será la semirrecta que contiene la mediana AK y K el punto de apoyo; llamemos G al centro de gravedad del ΔACB .

Así, consideremos el corte vertical a la distancia s del punto O , señalado en la Figura A.2.2, y equilibremos el segmento “parabólico” DE con el segmento “triangular” DH , aplicando el razonamiento de Arquímedes: si dejamos el segmento DH donde está, ¿a qué distancia, del otro lado de K , debemos colocar el segmento DE sobre $\overrightarrow{AK}$ para que haya

equilibrio? Calculemos los segmentos considerando que, como ya se dijo, la parábola está en un sistema coordenado cartesiano:

$$DE = 1 - s^2; \quad FK = OK - OF = \sqrt{2}(1 - s); \quad DH = 2(1 + s)$$

Entonces, si llamamos d a la distancia a la que se debe colocar DE , tenemos,

$$DH \cdot FK = DE \cdot d$$

$$\therefore d = \frac{2(1 + s)\sqrt{2}(1 - s)}{1 - s^2}$$

De ahí que,

$$d = 2\sqrt{2}.$$

Como esta cantidad es independiente de s (un corte arbitrario), d va a tener el mismo valor para cualquier corte; por lo tanto, si sumamos todos los cortes tendremos la suma de los delgadísimos rectángulos, la relación se cumplirá para las figuras completas en su conjunto (acercamiento infinitesimalista que corresponde a sumar elementos diferenciales de área).

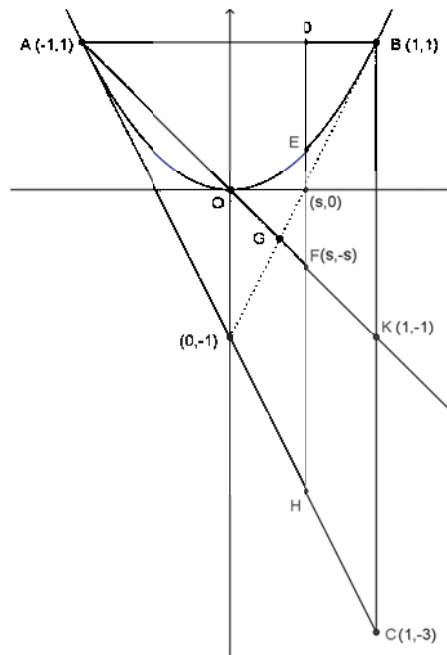


Figura A.2.2. Equilibrio de segmentos usando la Ley de la palanca.

Aplicando el Método de Arquímedes al sector parabólico AOB y al ΔACB , con $\overline{AK}$ como palanca y K punto de apoyo; ya sabemos que si dejamos el ΔACB donde está, el eje del sector parabólico AOB debe colocarse del otro lado de K a la distancia $d = 2\sqrt{2}$ para que exista equilibrio. El brazo de palanca correspondiente al triángulo es GK , mismo que puede obtenerse a partir de $AK = 2\sqrt{2}$; pues $GK = \frac{2\sqrt{2}}{3}$; entonces,

$$\text{Área}(\Delta ACB) \cdot GK = \text{Área}(\text{sector parabólico}) \cdot d$$

$$\text{Área}(\text{sector parabólico}) = \frac{\text{Área}(\Delta ACB) \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{\frac{1}{2}(2)(4)}{3} = \frac{4}{3}$$

Expresando este resultado en términos del ΔAOB , cuya área vale 1, obtenemos:

$$\text{Área}(\text{sector parabólico}) = \frac{4}{3} \text{Área}(\Delta AOB)$$

Posteriormente a la aplicación de su método, Arquímedes procedía a realizar la demostración geométrica con base en su convicción: “una vez que hemos anticipado algún conocimiento sobre las cuestiones, es más fácil suministrar una demostración que hacerlo sin conocimiento previo”. Para esta demostración se ocupa la definición de diámetro de un sector parabólico: “es una recta paralela al eje de la parábola que para por el punto medio del segmento que determina el sector”; y el siguiente teorema:

si se tiene un sistema de cuerdas paralelas en un sector parabólico, el lugar geométrico de los puntos medios de esas cuerdas forman una recta paralela al eje de la parábola, llamado diámetro; y una recta paralela al eje de la parábola que pase por el punto medio de una cuerda constituye un diámetro.

Igual que antes, consideremos el sector parabólico AOB de la Figura A.2.1, con las cuerdas AO y OB ; sean J y J' los puntos medios de estas cuerdas y JN , $J'N'$ los diámetros correspondientes, que determinan los puntos I e I' en la parábola (Figura A.2.3). Ahora se trazan las cuerdas AI , IO , OI' e $I'B$; enseguida se consideran triángulos AIO y $BI'O$ y se hará ver que la suma de las áreas de estos triángulos es una cuarta parte del área del ΔAOB . Por la simetría basta con que se analice el ΔAIO . Por ser JN paralelo a OP , tenemos que $\Delta AJN \sim \Delta AOP$ con razón de semejanza $\frac{1}{2}$; en términos de áreas es (obsérvese que $\Delta AJN \cong \Delta JOM$),

$$\text{Área}(\Delta AJN) = \frac{1}{4} \text{Área}(\Delta AOP)$$

Por los puntos I y J tracemos perpendiculares al eje OP , formando el rectángulo $IJML$; si en el punto H (intersección de AO con IL) trazamos una paralela a IJ , determinamos el punto K y luego trazamos el segmento KL , tendremos un conjunto de triángulos congruentes de los que concluimos que $\Delta IJH \cong \Delta LOH$; es decir, $IJ = OL = LM$, por lo tanto $IJ = \frac{1}{2}JN$. De ahí que los triángulos AIO (constituido por ΔAIJ y ΔOIJ de igual área) y AJN tengan la misma área; o sea,

$$\text{Área}(\Delta AIO) = \text{Área}(\Delta AJN).$$

Como lo mismo ocurre con $\Delta BI'O$ y $\Delta BJ'N'$, una primera aproximación al área del sector parabólico es considerar el área del ΔAOB y agregarle las áreas de los triángulos AIO y $BI'O$; es decir,

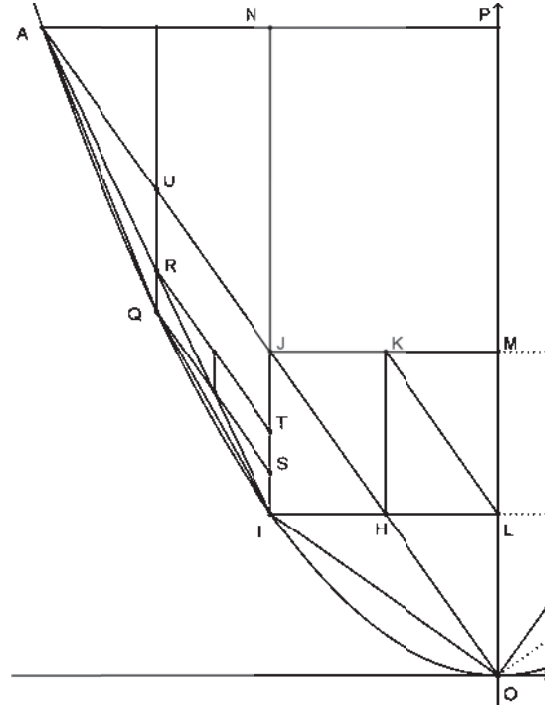


Figura A.2.4. Continuación de los trazos para “cuadrar” la parábola.

De esta manera, aplicando el Método de exhaustión de Eudoxo se llega a,

$$\begin{aligned}
 \text{Área}(\text{sector parabólico } AOB) &= \text{Área}(\triangle AOB) + \frac{1}{4} \text{Área}(\triangle AOB) + \frac{1}{4^2} \text{Área}(\triangle AOB) + \cdots + \frac{1}{4^n} \text{Área}(\triangle AOB) \\
 &= \text{Área}(\triangle AOB) \left[1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \cdots + \frac{1}{4^n} \right]
 \end{aligned}$$

el último factor corresponde a una serie geométrica con razón $\frac{1}{4}$, la cual converge a,

$$\left[1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \cdots + \frac{1}{4^n} + \cdots \right] \rightarrow \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4}{3}$$

Entonces,

$$\text{Área}(\text{sector parabólico } AOB) = \frac{4}{3} \text{Área}(\triangle AOB)$$

De hecho, la Figura A.2.4 corresponde a un caso general; pero si quisiéramos iniciar con un sector parabólico general como el que se muestra en la Figura A.2.5, se deben realizar los trazos indicados y la argumentación es exactamente la misma.

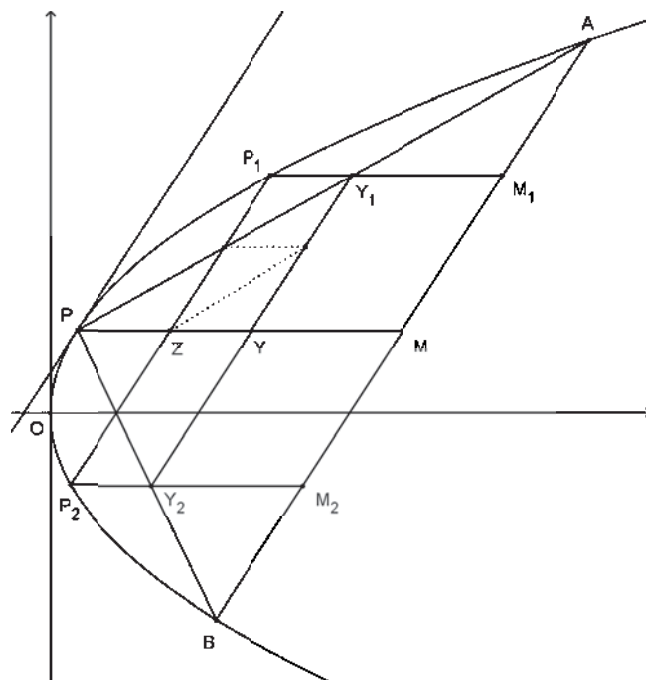


Figura A.2.5. Trazos del caso general para “cuadrar” la parábola.

Concluimos esta sección con la exhibición de dicha figura en la que puede advertirse un hecho importante, derivado de la definición de parábola y de diámetro: para el sector parabólico APB , la tangente en el punto P es paralela a AB . Así, con los trazos indicados concluimos que:

$$\text{Área}(\text{sector parabólico } APB) = \frac{4}{3} \text{Área}(\triangle APB)$$

Bibliografía

- [1] Arcos, Q. I., Guerrero, M. L., Sepúlveda, L. A., García, P. R. (2007). *Desarrollo Conceptual del Cálculo*. Editorial Kali, Toluca, México.
- [2] Arcos, Q. I. (2009). *Cálculo Infinitesimal para el Bachillerato*. Editorial Kali, Toluca, México.
- [3] Babini, J. (1978). *El Método, Arquímedes*. Balsal Editores, Morelia, México.
- [4] Bezout, E. (1999). *Cálculo Infinitesimal*. 1ª Edición. Editorial Limusa, Noriega Editores. México.
- [5] Cohen, L. y Manion, L. (1990). *Métodos de Investigación Educativa*. Editorial La Muralla, Madrid. Traducción de *Research Methods in Education* (3a ed.). Reoutledge.
- [6] Cortés, J. y Hit, F. (2005). *Reflexiones sobre el Aprendizaje del Cálculo y su Enseñanza*. Morevallado Editores, México.
- [7] Euclid. (1956). *The thirteen books of The Elements*. Translated from the text of Heiberg, with introduction and commentary by Sir Thomas L. Heath. Dover Publications, Inc. New York.
- [8] Eves, H. (1969). *Estudio de las Geometrías*. Editorial UTHEA: D. F., México.
- [9] Goldin, G. (2000). A Scientific Perspective on Structured, Task-Based Interviews in Mathematics Education Research. En A. E. Kelly y R. A. Lesh (Eds) *Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.
- [10] Larson, R. E., Hostetler, R. P. (1989). *Cálculo y Geometría Analítica*. Editorial Mc Graw Hill, 3a. Edición. México.
- [11] Leithold, L. (1984). *EL CÁLCULO con Geometría Analítica*. 4ª edición. Editorial Harla.

- [12] Marqués de l'Hospital. *Análisis de los infinitamente pequeños para el estudio de las líneas curvas*. Primera edición en español, MATHEMA Servicios Editoriales de la Facultad de Ciencias, UNAM. México, 1998.
- [13] Newton, I. *Tratado de la Cuadratura de las Curvas*, Edición facsimilar de 1723. Traducción de Angelo Altieri Megale. 2ª edición en español. TextosUAP.
- [14] Schoenfeld, A. (1992). Learning to think mathematically: Problem Solving, Metacognition and sense making in mathematics. En D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research in Mathematics Teaching and Learning* (pp. 334-370). New York: Macmillan Publishing Co.
- [15] Spivak, M. (1992). *Calculus. Cálculo Infinitesimal*. 2ª Edición, Editorial Reverté, S.A. México.
- [16] Stewart, J. (1997). *Cálculo Trascendentes Tempranas*. 3ª edición. International Thomson Editores.
- [17] Stewart, James (2002). *Cálculo Multivariable*. 4ª edición. Editorial Thomson Learning.