UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN NICOLÁS DE HIDALGO

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

Mat. Luis Manuel Gutiérrez

MAESTRÍA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

“Actividades que promueven el aprendizaje de nociones asociadas al concepto de Límite en estudiantes de bachillerato”

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE

MAESTRA EN CIENCIAS EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

PRESENTA

ELIZABETH VIRRUETA MÁRQUEZ

ASESOR

DR. ARMANDO SEPÚLVEDA LÓPEZ

MORELIA, MICHOACÁN, DICIEMBRE DE 2012.

Agradecimientos

A mi familia; a mi madre por su amor y apoyo incondicional, a mi padre por su ejemplo de constancia y dedicación, a mi hermano por creer en su hermana mayor.

A mi esposo; por su amor, por estar a mi lado en las buenas y las malas, y por todas esas preguntas que me sirvieron de guía.

Mi más sincero agradecimiento a mis profesores; por la importante labor que realizan y compartir conmigo su sabiduría.

Toda mi gratitud a mi asesor; por aceptar trabajar conmigo, por su enorme paciencia, sus sabios consejos y motivarme a concluir este proyecto.

Agradezco a mis revisores; que aceptaron leer mi trabajo, gracias por sus valiosas observaciones.

Estoy en deuda con las personas que, de una u otra forma, me apoyaron con los obstáculos que se presentaron. Gracias Chayito por acogerme en tu hogar; gracias Lupita, ya que sin esa gestión no habría logrado completar esta meta.

Índice

Capítulo 1

Planteamiento del problema de investigación

Introducción

El presente trabajo de investigación es de carácter cualitativo; se documentan cuatro actividades que fueron diseñadas para ser aplicadas a un grupo de estudiantes de bachillerato, con el propósito de analizar su desarrollo e identificar cuáles de ellas, y a través de qué experiencias, favorecen la comprensión de nociones asociadas al concepto de límite en cursos previos al Cálculo. Estas actividades fueron aplicadas en sesiones de 2 horas, fuera del horario de clases. Para la selección de los participantes no se tomó ninguna consideración especial en cuanto a sus habilidades, el único requisito es que se encontraran cursando asignaturas previas al Cálculo, por lo que se invitó a todos los alumnos del CECyTEM, Plantel Tzintzuntzan, que desearan y pudieran asistir a las sesiones sabatinas.

El Cálculo es la rama de las matemáticas encargada de estudiar los fenómenos de cambio; fenómenos que ocurren en la naturaleza y en la vida cotidiana, como el movimiento de objetos, la carestía de alimentos, los intereses bancarios, el llenado de una alberca, etc. Todo parece indicar que el Cálculo tiene sus antecedentes desde el momento en que el hombre entiende los conceptos de magnitud y número; aprende a medir y advierte que existe una particular relación entre ciertas magnitudes; por ejemplo en la circunferencia, o en los fenómenos de variación, que seguirá estudiando de manera incansable hasta nuestros días.

Hablar de la historia del Cálculo es hablar de la historia de la humanidad, ya que en esta rama de las matemáticas se cristalizaron conceptos, métodos y procedimientos que la humanidad estuvo tratando de dominar desde tiempos muy remotos para comprender fenómenos de variación, de acumulación; para calcular áreas y volúmenes, entre otras cosas.

Sin embargo, a pesar de que el Cálculo se ha desarrollado a la par de la humanidad, existen conceptos que a los estudiantes les resultan particularmente difíciles y que, en no pocas ocasiones, nunca llegan a comprender; entre ellos, el más común es el concepto de límite.

El límite de una función es uno de los conceptos más importantes de las matemáticas en general y del Cálculo en particular; su importancia se debe a que representa la piedra angular con base en la cual establecen los conceptos, métodos y procedimientos para estudiar los fenómenos citados, además de que varios números se definen como límites.

De forma intuitiva podemos decir que una función tiene límite L en un punto x_0 si en todo punto, cada vez más próximo a x_0 la función toma un valor cada vez más próximo a L. Sin embargo, formalmente se define como: L es el límite de la función f(x), cuando x se aproxima a p, sí y sólo sí para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que para todo número real x que cumpla con $0 < |x - p| < \delta$, tenemos que $|f(x) - L| < \varepsilon$; lo cual se ilustra en la figura 1.1.

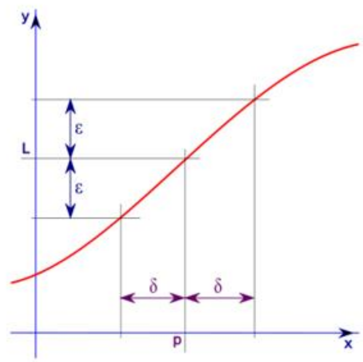


Figura 1.1.- Interpretación geométrica del límite.

Durante muchos años ha quedado claro que esta definición formal de límite, conocida como "epsilon-delta", no es accesible para la mayoría de la gente; incluso, los estudiantes de ciencias deben hacer un esfuerzo por entenderla y manejarla en el cálculo de límites de determinadas funciones. Es importante entender que el concepto de límite funciona como una herramienta matemática que permite conocer el comportamiento de una función alrededor de un punto sin, necesariamente, conocer el comportamiento de la misma en ese punto. Con la intención de ofrecer una manera alternativa de abordar los temas relacionados con las matemáticas del cambio, Arcos (2008) utiliza la noción de esquema de los infinitesimales: considera la función $y=f(x)$, y le interesa saber qué pasa con el valor de $f(x)$, conforme x toma valores cada vez más próximos a un cierto número real a. Si la respuesta es que el valor de $f(x)$ se aproxima a L, entonces diremos que el límite de la función f, cuando x tiende a a, es L; es decir, el límite de una función f en a es L, si para α infinitesimal se tiene que: $f(a+\alpha)= L+ \beta$; con β infinitesimal.

Debido a las dificultades que, a menudo, se presentan cuando se abordan estos conceptos; importantes matemáticos del área del Cálculo, como Ian Stewart y David Tall, por mencionar algunos, se han preocupado por el modo de abordar estas definiciones formales. Concluyen que debe hacerse considerando el contexto del alumno; de maneras más sutiles y "sensibles", ya que están convencidos que no resulta favorable aplicar todo el rigor matemático en etapas tempranas de instrucción. Aunado a esto, Tall (2010) afirma que no es necesario llegar a la adultez para iniciar con el tratamiento de estos contenidos y que con el debido cuidado se pueden ofrecer buenas bases al instruir en estos temas a niños pequeños.

Con base en esta recomendación, consideramos necesario proponer actividades para promover el aprendizaje del concepto de límite y analizar si contribuyen con asentar las nociones necesarias para el futuro entendimiento de este importante concepto.

Ahora bien, desde hace algunos años se han venido realizando cambios en los planes y programas de estudio por parte de las autoridades educativas. Cambios que han modificado severamente el currículum escolar de matemáticas del bachillerato; particularmente en los semestres 4º, 5º y 6º, que es donde habitualmente se estudia el Cálculo, al grado de juntar en un solo semestre los contenidos de Cálculo diferencial e integral, o como están actualmente: Cálculo diferencial, Probabilidad y Estadística, Cálculo integral. Esto refleja la existencia de autoridades educativas improvisadas con bajo nivel de entendimiento y poca sensibilidad respecto a lo que es el Cálculo y las dificultades para su aprendizaje, ya que lo anterior repercute negativamente en el salón de clases, debido a la complejidad de los temas y al escaso tiempo asignado para cubrir ambos cursos, o al olvido a causa de la falta de continuidad en los contenidos.

Justificación

Un problema latente en nuestro sistema educativo es el manejo privilegiado que se da a los algoritmos en la enseñanza de las matemáticas, los cuales se usan de forma indiscriminada, alejados de aplicaciones y sin importar el contexto; esto provoca que la mayoría de los estudiantes no logren dar sentido y significado a los conceptos básicos implicados en la resolución de los problemas.

Un concepto es una unidad cognitiva de significado formada por objetos, eventos, situaciones o propiedades que poseen atributos comunes y que se designan mediante algún signo o símbolo, generalmente una palabra (Finkel, 2010).

Los conceptos se construyen y se encuentran en un continuo proceso; es decir, no se forman para permanecer fijos, sino que van cambiando y desarrollándose en la medida que surgen y se estudian en nuevos contextos. Para su formación se requiere de cierto número de experiencias que tengan algo en común, es por eso que para entender el proceso de construcción de conceptos es necesario analizar lo que los alumnos hacen, o dejan de hacer, ante las tareas en las que interviene dicho concepto y las razones por las que su pensamiento matemático opera de esa manera.

El concepto matemático de límite es una noción particularmente difícil, Cornu (1983) menciona que, didácticamente es muy importante la distinción entre la definición y el concepto en sí mismo. Además, se debe prestar atención a las concepciones espontáneas que se puedan tener de dicho concepto, ya que éstas no desaparecen cuando los estudiantes pasan a una nueva lección matemática.

Para Cornu (1994, p.154) los problemas que se presentan con la noción de aproximación al límite, son:

- La aproximación (eventualmente estática y lejana).
- La aproximación sin alcanzarlo.
- La aproximación justo alcanzándolo.
- El tratar de parecerse a…. (sin variación, como "este azul tiende a violeta").
- La confusión generada porque al final los términos siempre toman el mismo valor.

Robert (1982) ha estudiado diferentes modelos con los cuales los estudiantes pueden alcanzar la noción de límite de una secuencia y al igual que Cornu, notó que a pesar de contar con la definición formal, los estudiantes continúan evocando concepciones previas. Además, Robert identifica varios modelos que surgen de la enseñanza formal:

Monótono.- Como secuencias que convergen aproximándose al límite.

Dinámico.- "U_n que tiende a lim", "U_n que se aproxima a lim", la distancia de U_n a lim se hace cada vez menor, valores que se aproximan a un número cada vez más y más cerca.

Estático.- "Los U_n que están en un intervalo cerca de lim".

Mixto.- Es la combinación de los tres modelos.

Por su parte Azcárate *et al*. (1996), basándose a los trabajos de Cornu y Sierpinska, manifiesta que la enorme dificultad de la enseñanza del concepto de límite se debe a su riqueza y complejidad; además que los aspectos cognitivos implicados en este concepto no se pueden generar a partir de la definición matemática.

Es evidente que los temas relacionados con el Cálculo resultan muy complejos para los estudiantes de bachillerato; en especial la comprensión de los conceptos. Muchas veces pueden ser capaces de memorizar definiciones y mecanizar la resolución de ejercicios para aprobar sus evaluaciones, pero rara vez comprenden lo que están haciendo y las aplicaciones reales que tiene ese conocimiento; quizá sea por eso que no solamente no valoran la conveniencia de aprender Cálculo, sino que además lo consideran inútil para su formación.

Cuando surgieron las ideas incipientes del Cálculo, inventado en el siglo XVIII por Newton y Leibnitz, éstas evolucionaron a la par con ideas geométricas; con la existencia y desarrollo de un lenguaje algebraico cada vez más eficiente, el razonamiento geométrico fue siendo reemplazado por técnicas analíticas más poderosas, pero menos intuitivas y alejadas de las ideas que motivaron su establecimiento; de tal manera que durante años se le ha venido dando mayor importancia al uso de fórmulas y procedimientos mecanizados.

Ante los resultados en el aprendizaje del Cálculo, es necesario retomar el enfoque geométrico que permitió la construcción de esta rama de las matemáticas y problematizar su enseñanza; es decir, incorporar la resolución de problemas en la práctica docente de quienes imparten esta materia; además de tomar como base libros de texto que adopten esta línea. Al respecto están surgiendo nuevas formas de abordar los conceptos referentes a las matemáticas del cambio; particularmente con Tall (2010), Stewart (1998), Arcos (2008), entre otros.

Además, Arcos *et al*. (2007, p. 369) recomiendan ofrecer a los alumnos de bachillerato y escuelas de ingeniería, un Cálculo que recupere las cualidades didácticas del Cálculo leibniziano; un Cálculo basado en cantidades infinitamente pequeñas e infinitamente grandes, que permita una mejor comprensión de los conceptos básicos de la materia.

Problema de investigación

La experiencia indica que los resultados en el aprendizaje de las matemáticas en general, y de las nociones asociadas al Cálculo en particular, no son buenas; por ello, proponemos desarrollar este trabajo de investigación, con estudiantes que han llevado y otros que no han llevado el curso de Cálculo en el bachillerato, el siguiente problema de investigación:

¿QUÉ TIPO DE ACTIVIDADES Y EXPERIENCIAS FAVORECEN LA COMPRENSIÓN DEL CONCEPTO DE LÍMITE EN ESTUDIANTES DE BACHILLERATO?

Se tendrá cuidado que las actividades propuestas, además de incorporar los conceptos de interés, tengan estrecha relación con los conocimientos previos del alumno; que sean variadas en cuanto a la resolución de problemas, uso de la tecnología; que animen a los alumnos a experimentar y que involucren otras áreas del conocimiento. Todo ello con el fin de promover la creatividad, el descubrimiento, la comunicación de resultados, así como la formación y argumentación de conjeturas.

Metas

Diseñar y analizar cuatro actividades que resulten novedosas y faciliten la asimilación intuitiva del concepto de límite en el nivel medio superior. Estas cuatro actividades serán presentadas tanto a alumnos que no hayan llevado el curso de Cálculo, como alumnos que ya lo han tomado; la intención es averiguar en los primeros, de qué manera influyen estas actividades en la construcción de conceptos y, en los segundos, para saber cómo influyen los mismos en personas que ya han estado expuestas a dichos conocimientos.

Objetivos

1. Analizar las dificultades que presentan los alumnos al enfrentarse a situaciones problemáticas que involucran el concepto de límite.
2. Identificar los procesos matemáticos desarrollados por los estudiantes de bachillerato que logran la comprensión de este concepto.
3. Para de esta forma Averiguar de qué manera contribuyen las actividades propuestas en la formación inicial de estos conceptos.

Preguntas de investigación

1. ¿Qué características deben tener las actividades propuestas, para que los estudiantes expresen lo que saben y estén dispuestos a investigar lo que desconocen?
2. ¿Qué procesos matemáticos desarrollan los estudiantes cuando se enfrentan a problemas que involucran el concepto de límite?
3. En sus intentos por resolver los problemas ¿utilizan alguna herramienta heurística?
4. ¿Las actividades propuestas contribuyeron para que los alumnos logren la comprensión intuitiva del concepto de límite?

Capítulo 2

Marco Teórico o Revisión de Literatura

Lesh *et al*. (2000) asegura que, para aprender más sobre la naturaleza de cómo se desarrolla el pensamiento del estudiante debemos centrarnos en analizar las producciones, que son generadas durante el desarrollo de las tareas, así como los pasos intermedios de solución, ya que revelan información significativa acerca de sus maneras de pensar y sobre los procesos que contribuyeron a esos resultados. Cuando una serie de juicios de maneras de pensar son externados, probados y refinados repetidamente, estas actividades frecuentemente proporcionan entendimientos que van más allá de la documentación compacta de un aprendizaje.

Explicar el razonamiento que usaron los estudiantes para llegar a la solución de un problema requiere de un profundo análisis sobre sus actitudes, procedimientos y argumentos utilizados en su forma de actuar; por ello no es recomendable utilizar problemas planteados en los libros de texto, ya que frecuentemente su objetivo es producir breves respuestas a situaciones planteadas por personas con expectativas distintas a las nuestras. Proponemos actividades o tareas que permitan a los estudiantes revelar sus ideas iniciales para que después, mediante su interacción con la tarea, se presente un proceso de evolución en el entendimiento. Estas tareas deben estar planteadas en contextos familiares, que sean generativas y contribuyan a fomentar habilidades de los estudiantes para expresarse y hacer generalizaciones, a partir de sus entendimientos y conjeturas iniciales. Además, el método de implementación de las mismas debe promover el aprendizaje a través de la revisión y procesos de refinamiento de sus maneras de pensar, originando múltiples ciclos de interpretación.

Al interactuar con su ambiente el sujeto construye modelos mentales o internos y al compartir esos modelos, exteriorizándolos a sus compañeros y al profesor, se construyen modelos externos.

Durante los intentos por resolver una actividad, los estudiantes a menudo hacen modificaciones significativas en sus formas de pensamiento. Esas modificaciones de los sistemas conceptuales que los estudiantes desarrollan, involucran constructos que proveen los fundamentos para algunas de las ideas más poderosas en las matemáticas elementales. Es decir, se generan ciclos de entendimiento que evolucionan a través de sus interpretaciones iniciales, intermedias y finales de la tarea y con estas interpretaciones se puede percibir el nivel de matematización que los estudiantes están logrando.

Modelo SOLO y sus ciclos locales

Después de analizar diversos modelos de desarrollo cognitivo, como los propuestos por Piaget, Bruner y los van Hiele; Tall y Pegg (2010) proponen un modelo llamado SOLO (por sus siglas en inglés Structure of Observed Learning Outcome -Estructura del aprendizaje observado). Dicho modelo intenta resolver la polémica causada por las etapas de Piaget, ya que no todos los niños de la misma edad presentan el mismo nivel de desarrollo y para hacer su clasificación, se basa en las respuestas que se observan en los estudiantes cuando se enfrentan un problema.

El modelo consta de cinco niveles:

1. **Sensorial** (después de nacido).- Son las habilidades que nos permiten reaccionar a situaciones físicas; tienen que ver directamente con los sentidos e involucran la realización de tareas deportivas, por ejemplo.
2. **Icónico** (hasta los 2 años).- Los individuos internalizan acciones por medio de imágenes. En este nivel el joven desarrolla palabras e imágenes para referirse a objetos o eventos. Para el adulto este modo le permite apreciar la música y el arte; así como tener acceso a un conocimiento de carácter intuitivo.
3. **Simbólico concreto** (hasta los 6 o 7 años).- Los alumnos usan un sistema de símbolos que son escritos en un lenguaje numérico. Este es el modo más común utilizado en la primaria y secundaria.
4. **Formal** (hasta los 15 o 16 años).- Una persona puede considerar conceptos más abstractos; es descrito en términos de principios y teorías.
5. **Post-formal** (posiblemente alrededor de los 22 años).- El sujeto está habilitado para cuestionarse o modificar la estructura fundamental de teorías o disciplinas.

Como se muestra en la Tabla 2.1, de los cinco niveles que se proponen en el modelo, cuatro de ellos coinciden con los propuestos por Piaget y/o Bruner. El otro es un estado intermedio entre el nivel de Deducción y de Rigor, propuesto por los van Hiele.

Tabla 2.1. Comparación de los modelos

Estados de Piaget	**Niveles de Van Hiele**	**Modelo SOLO**	**Modelo Bruner**
Sensorial	Reconocimiento	Sensorial	Enactivo
Preoperacional	Análisis	Icónico	Icónico
Operaciones concretas	Ordenamiento	Simbólico concreto	Simbólico
Operaciones formales		Formal	
	Deducción		
		Post-formal	
	Rigor		

Los ciclos locales de desarrollo conceptual relacionan un área específica, en la cual los intentos de aprendizaje son formados por la información disponible y las conexiones son hechas usando todas las estructuras cognitivas disponibles en ese momento. Cada teoría tiene su propia interpretación de los ciclos en el aprendizaje de conceptos específicos, que relacionan claramente al concepto en cuestión. Sugieren que hay tres diferentes caminos para construir un concepto matemático: cuando el propósito es la percepción de los objetos y sus propiedades, como ocurre en geometría. Para acciones con objetos que están simbolizados y los símbolos, así como sus propiedades, son construidas en un esquema de actividades operacionales, como en la aritmética y álgebra. Cuando el objetivo son las mismas propiedades que conducen a teorías axiomáticas formales.

Las tres formas de construcción de un concepto están contempladas donde el estudiante se enfrente a situaciones moderadamente complejas, hacer conexiones y construir relaciones que producen concepciones más sofisticadas. Estas nociones de desarrollo conducen a ciclos implícitos de construcción de conocimiento.

Estos mismos ciclos son contemplados en el modelo SOLO, para incluir los resultados del aprendizaje observado de respuestas individuales a preguntas sobre problemas en un amplio rango de contextos. El marco teórico SOLO puede ser considerado bajo la amplia descripción de los modelos neo-piagetanos, que intentan cubrir las inadecuaciones observadas en el modelo de Piaget, donde se observa al niño operando en diferentes niveles, con diversas tareas, supuestamente en el mismo nivel. El modelo tiene similitudes con teóricos como Case, Fischer y Halford.

SOLO, enfoca más su atención en las respuestas de los estudiantes, que en sus niveles de pensamiento o estados de desarrollo. Esto representa la principal diferencia entre SOLO y el trabajo de Piaget; pues el objetivo de SOLO es describir la estructura de una respuesta, no clasificar estados de desarrollo cognitivo de un individuo. Una fortaleza de SOLO es que provee un marco de trabajo para habilitar una interpretación consistente de la estructura y la calidad de respuestas de un amplio número de estudiantes, a través de una variedad de ambientes de aprendizaje en un número de temas y áreas tópicas.

SOLO sugiere un recurrente ciclo de tres niveles. En el primero se refiere a un nivel de respuesta Uniestructural (U) y se enfoca en el problema o domino, pero usa solamente una única pieza de datos relevantes. El segundo nivel lleva por nombre nivel de respuesta Mutiestructural (M) y se enfoca en dos o más piezas de datos que son usados sin ninguna relación percibida entre ellos; es decir, no hay conexión entre las diferentes piezas de información. El tercer nivel es el de respuesta Relacional (R), se enfoca en todos los datos disponibles, como si cada uno de ellos fuera una pieza que forma un mosaico total de relaciones, para dar toda una estructura coherente. Estos tres niveles suelen llamarse ciclos de aprendizaje UMR y pueden operar en diferentes niveles como lo muestra la Figura 2.1.

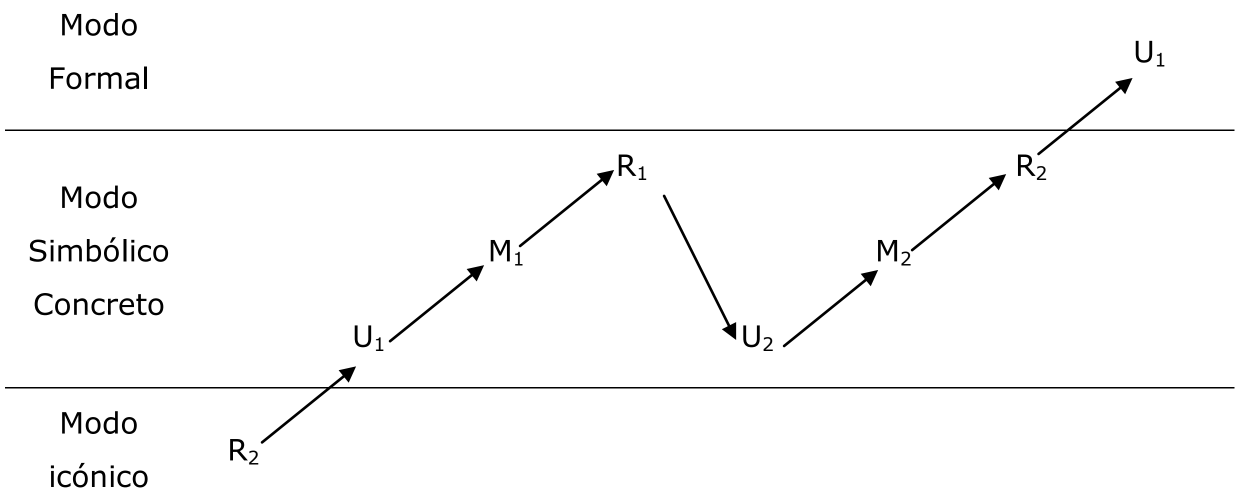


Figura 2.1.- Niveles asociados con los modos simbólicos concretos.

En la ilustración se pueden ver dos ciclos UMR en el modo simbólico concreto, donde el nivel Relacional de respuesta involucra un nuevo nivel Uniestructural de respuesta en el siguiente ciclo dentro de un mismo modo. Esta observación reenfoca la teoría de pequeños ciclos de formación de conceptos dentro de diferentes modos.

Usando este descubrimiento, respuestas más sofisticadas se convierten en respuestas relacionales, que pueden ser un nuevo nivel Uniestructural, representando un primer nivel de un ciclo UMR más sofisticado. Este nuevo ciclo puede ocurrir como un ciclo adicional de crecimiento dentro del mismo modo. Alternamente esto puede representar un nuevo ciclo en un modo adquirido más tarde.

El modo icónico es concerniente con el simbolismo del mundo, a través del lenguaje oral. Es asociado con la imaginación de objetos y el pensamiento, en este modo puede ser descrito como intuitivo o relacionado con juicios basados en la percepción.

Para el modo simbólico concreto, el aspecto concreto relaciona la necesidad de interpretar en este modo, que está basado en las cosas que ocurren en el mundo real. El aspecto simbólico relaciona, hasta donde una persona piensa a través del uso y la manipulación de sistemas simbólicos: como el lenguaje escrito, sistemas numéricos y notación musical. Este modo puede estar disponible para estudiantes desde los 5 o 6 años. Las imágenes de palabras que dominan el pensamiento en el modo icónico, ahora involucran conceptos relacionados con el mundo real. Los símbolos (representando objetos o conceptos) pueden ser manipulados de acuerdo a las reglas coherentes, sin recurrir directamente a lo que ellos representan.

Así, la inmersión a este modo resulta en la habilidad para proveer descripciones simbólicas de las experiencias del mundo que son comunicables y entendibles por otras personas.

En el modo simbólico concreto, en el caso del concepto de número, el estatus de número cambia desde ser un adjetivo hasta ser un sustantivo, en un contexto libre y generalizable. Un nivel de respuesta Uniestructural en el primer ciclo concierne a la habilidad para usar una operación y responder problemas escritos simples; tales como 2+5, sin hacer referencia a un contexto, pero realizando un adecuado procedimiento aritmético. Un nivel de respuesta Multiestructural debería de contemplar una pareja de operaciones involucrando conocimientos numéricos que pueden ser acarreados en contexto. El nivel final, en este primer ciclo, culmina cuando el estudiante puede generar respuestas numéricas y preguntarse qué significan.

El segundo ciclo en el modo simbólico concreto, para el concepto de número, es ver los números operados e ir más allá de aquello con lo que los estudiantes tienen experiencia directa. En el nivel Uniestructural las operaciones solas pueden ser transformadas en números largos. Varias de estas operaciones son automatizadas, reduciendo la demanda en mecanización. El nivel de respuesta Multiestructural considera que los estudiantes sean capaces de llevar a cabo series de cálculos.

Finalmente el nivel de respuesta Relacional, en este segundo ciclo, considera un resumen del sistema numérico. Es evidente que los estudiantes toman tareas aritméticas no secuenciales y son hábiles para ofrecer generalizaciones basadas en experiencias aritméticas familiares. El asunto es que la respuesta está ligada al mundo real y no son incluidas consideraciones de alternativas posibles, condiciones o limitaciones. En el modelo SOLO, estas consideraciones únicamente son aparentes cuando el nivel de respuesta entra al siguiente modo de funcionamiento, referenciado como el modo Formal.

Postura de David Tall

Por más de 35 años, Tall (2010) se ha preocupado por analizar y buscar salidas a la problemática de la enseñanza y el aprendizaje del Cálculo. Asegura que las ideas propias de esta rama de las matemáticas, como variación, continuidad, pendiente, etc., deben seguir una ruta de enseñanza cercana a la forma natural en que la gente piensa.

Tall (*Ibid*.) clasifica la evolución del pensamiento matemático en tres etapas:

- La primera es el crecimiento natural[1] de las ideas.
- La segunda etapa son las acciones que nos ayudan a transformar esas ideas en manipulación simbólica y cómputo.
- Una última y más profunda, en la que logramos formular definiciones lógicas y el desarrollo de demostraciones formales.

Hace una reflexión sobre el origen del Cálculo y su evolución, a través de miles de años. En base a eso, plantea la necesidad de abordar ciertos conceptos matemáticos desde una perspectiva más sutil y apegada a la evolución natural de las ideas del hombre a lo largo de la historia. Su postura es que el docente no esté tan preocupado por proporcionar todo el rigor en conceptos tan complejos como límite y pendiente; sino mejor enfocarse en que los alumnos comprendan su concepto, del cual ya tienen nociones que aunque carecen de formalidad, son bastante claras y apegadas a su contexto. Por ejemplo, todos los que hemos subido escaleras podemos comparar sus pendientes y elegir la que nos represente menor esfuerzo, con el argumento: "está menos empinada"; con esto nos damos cuenta que entendemos el funcionamiento de una pendiente, aunque no tenemos la definición formal.

Como matemático coincide en la importancia del rigor y las demostraciones formales, pero también se da cuenta como educador que ese "rigor" en etapas tempranas no ayuda a fortalecer el concepto. En base a esto Tall busca una "aproximación sensible al Cálculo" que

[1] Natural se refiere a: se aplica a la cualidad que es propia y característica de una cosa, se aplica al hecho que es predecible, lógico o razonable que ocurre normalmente.

permita abordarlo a partir de las ideas intuitivas y no desde el punto de vista de un experto.

Tall (*Ibid.*) basa su investigación en el trabajo de Merlin Donald, "*A Mind So Rare",* página: http://ishkbooks.com/mind_rare.pdf, que clasifica la conciencia humana en 3 niveles:

- Nivel-1 de sensibilización, asociado con la corteza sensorial; son ideas básicas y primitivas que ocurren en lapsos de alrededor de 1/40 de segundo. Por ejemplo, cuando sin ver a la persona que está hablando reconocemos su voz y le asociamos su rostro, o cuando llegamos a un lugar y por el aroma que alcanzamos a percibir identificamos lo que han cocinado.
- Nivel-2 de sensibilización, que se desarrolla en la corteza secundaria; es el dominio de la memoria a corto plazo y el control. La comprensión de términos cortos que se asimilan en 2 o 3 segundos. Aquí, las aves y los mamíferos tienen un sentido del tiempo, pueden centrarse tanto en una percepción inmediata y algo que está fuera de la vista pero no fuera ya de la mente. Por ejemplo; cuando vamos manejando tenemos nuestra mirada fija en la carretera, sin embargo si deseamos realizar un cambio de velocidad no necesitamos ver la palanca de velocidades para ubicar su posición, pues aunque esta se encuentra fuera de nuestra vista no está fuera de nuestra mente.
- Nivel-3 de sensibilización, desarrollado en la corteza superior. La comprensión de términos complejos, que involucran el uso de: símbolos, lenguajes, dibujos y que por consecuencia precisan de mayor tiempo.

Para Tall (2010), la idea sensible de continuidad o límite involucra una comprensión de términos cortos; sin embargo, un concepto más formal únicamente es logrado en el 3er. Nivel.

Esa idea sensible de continuidad está basada en la idea de dibujar una curva con un lápiz sin despegar la mano del papel. En el primer nivel, nuestra imagen mental sería un dibujo sin huecos; es decir, una línea con un inicio y un final. En el segundo nivel podemos imaginar nuestro dedo recorriendo dicha curva. Es aquí donde Tall centra el aspecto medular de su investigación: ¿Cómo transformar estas ideas en pensamiento formal?

Tratando de dar respuesta propone hacer uso de la tecnología y visualizar en una pantalla de computadora una gráfica, de manera que la gráfica sea visiblemente "plana", al mantener la misma escala vertical y aumentar la escala horizontal. Es decir, acercar tanto la imagen hasta visualizar los pixeles y que éstos reflejen una sola línea; de esta forma podemos asegurar que la gráfica es continua.

Si en esta imagen suponemos un punto medio $(x_0,f(x_0))$ con una altura de un pixel $\pm\varepsilon$, entonces debemos encontrar un valor $\delta>0$ para hacer "plana la gráfica", de manera que siempre que x_0 se encuentre entre $x_0+\delta$ y $x_0-\delta$ entonces $f(x_0)$ estará entre $f(x_0)-\varepsilon$ y $f(x_0)+\varepsilon$. Con este sencillo acercamiento hemos llegado a la definición formal de límite; sin embargo, aunque sea válido, carece de la formalidad y rigor necesario en el pensamiento formal. Pero son precisamente este tipo de ideas lo que desea fomentar Tall en los estudiantes que empiezan a acercarse al Cálculo.

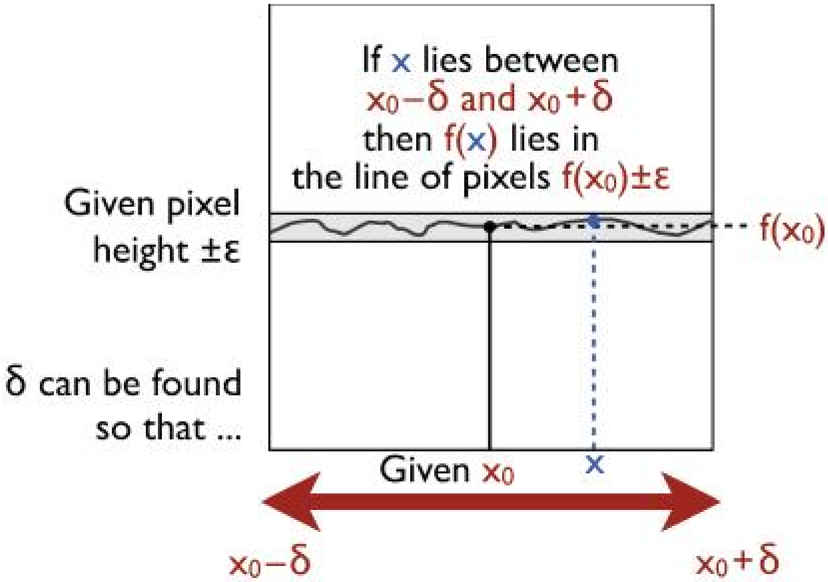


Figura 2.2.- Interpretación geométrica de David Tall.

La aproximación sensible al Cálculo de Tall se basará en ideas percibidas, que corresponden a los niveles 1 y 2 (Donald) para tratar de entender la teoría matemática ubicada en el nivel 3. El éxito depende del dominio, tanto de los conceptos como de la manipulación de los símbolos que surgen de las operaciones. A esto Tall denomina simbolismo proceptual; es decir, que para lograr ubicar el pensamiento en el nivel 3 debemos tener un dominio aceptable de los procedimientos, pero con el suficiente entendimiento del concepto para que esa manipulación no quede en lo mecánico, sino que por el contrario tenga significado. Tall genera con esto un nuevo concepto: "procept" y sucede cuando usamos de manera flexible un símbolo, como un concepto y/o un proceso.

Capítulo 3

Metodología

El presente trabajo es de carácter cualitativo; en él se propone el diseño de cuatro actividades, para ser presentadas a un grupo de estudiantes de bachillerato que estén llevando cursos previos al Cálculo, con la intención de brindarles un acercamiento al concepto de límite, para posteriormente analizar sus participaciones y averiguar de qué manera estas actividades contribuyeron a la formación inicial de dicho concepto.

Siguiendo las sugerencias de Lesh (2000) y Santos (1997) en cuanto al diseño de actividades, se buscó que éstas fueran atractivas para los estudiantes; que involucren contenidos fundamentales del currículum y que sea posible recuperar los procesos utilizados en sus intentos de solución.

Dichas actividades llevan por nombre:

1. ***"Los saltos de Yaya"***, que es una adaptación de la famosa paradoja de Zenón, "Aquiles y la tortuga"; en esta actividad se reemplaza a Aquiles con una rana y a la tortuga con un estanque que, a diferencia de la paradoja original, el estanque estará inmóvil. Con esta actividad se pretende familiarizar a los alumnos con la idea de aproximarse tanto como uno desee; que determinen la expresión algebraica que indica la distancia que le falta a Yaya por saltar y que estimen el límite de esa distancia cuando el número de saltos es infinito.

2. La segunda actividad fue llamada ***"Reparto de Pizza"***. En ella se sigue la recomendación que Ian Stewart (1998, p. 201) hace para abordar los fenómenos exponenciales, doblando varias veces por la mitad una hoja de papel, con la intención de averiguar ¿cuántas veces será posible realizar esta operación? Se trata básicamente de la actividad anterior, con la diferencia que la actividad es más concreta, porque se les entrega una pizza de papel que deberá ser dividida según las mismas instrucciones. Además de obtener la expresión que indica la porción que le corresponde a cada invitado, los alumnos intentarán construir la serie numérica que corresponde a la suma de los pedazos repartidos. También se les solicitará que construyan la expresión de la porción que le corresponde al invitado que llegue en el lugar "n", y que determinen el límite de la serie cuando el número de invitados es infinito.

3. La tercera actividad se llama ***"El problema de la recta tangente"***; está basada en un ejercicio del libro "Cálculo I" del autor Ron Larson. En ella se les pide a los alumnos que calculen la pendiente de una recta secante sobre una curva, por medio de dos puntos conocidos, posteriormente un punto que llamaremos "P", permanecerá fijo mientras que el otro se irá acercando cada vez más a "P". Se continuará con el cálculo de las nuevas pendientes, con intención de que los estudiantes se percaten de los cambios en los valores obtenidos y puedan relacionarlos, para estimar la pendiente de la recta tangente en el punto "P". Finalmente se desea introducir la simbología necesaria para construir la definición de derivada a partir de su interpretación geométrica.

4. La última actividad lleva por nombre ***"La tarea de Jorge"*** y está desarrollada en el software de geometría dinámica: Geogebra; con

ella se intentará que los alumnos estimen el área bajo una curva, mediante la suma de áreas rectangulares que cada vez se vuelven más delgadas y cubren una mayor porción del área a calcular; con esto buscamos abordar el concepto de integral mediante la idea de los infinitesimales.

Fase de diseño:

Estas actividades antes de ser aplicadas fueron analizadas por dos docentes, con el propósito de enriquecerlas, detectar incoherencias y deficiencias, posteriormente fueron piloteadas con 3 alumnos ajenos al grupo de investigación con la intención de averiguar si resultaban comprensibles o necesitaban ajustes. Una vez que fueron ajustadas se procedió a la aplicación de las mismas al grupo de investigación.

En cuanto a los componentes de las actividades, cada una inicia con una descripción que explica grosso modo en qué consiste la tarea; posteriormente encontramos los conocimientos previos, que describen las experiencias que los muchachos necesitan tener para poder abordar de manera exitosa la actividad. Las condiciones para su empleo; indica el tiempo estimado para la realización de la tarea, la forma de trabajo (individual o por equipos) y, en caso de necesitar materiales de apoyo en este apartado se indica cuales son. Por último los indicadores de desempeño; son ideas esenciales para resolver el problema y nos darán la pauta para saber en qué medida la actividad fue realizada correctamente.

Fase de aplicación:

Para la aplicación de las actividades se invitó a los alumnos de segundo semestre de la especialidad de informática del Colegio de Estudios Científicos y Tecnológicos del Estado de Michoacán, plantel 19 ubicado en Tzintzuntzan, ya que cumplían con la característica de no haber tenido contacto con los temas que se querían abordar. Estos alumnos solamente habían llevado la materia de Álgebra y se encontraban cursando la materia de Geometría y Trigonometría. Las actividades fueron aplicadas los días sábados y acudieron a ellas los alumnos que así lo decidieron.

Cabe señalar que, previo a las actividades que están documentadas en este proyecto, fueron aplicadas otras actividades al mismo grupo de investigación, con la intención de: familiarizar al alumno a la forma de trabajo, que la presencia de la videocámara no fuera un obstáculo para llevar a cabo la tarea y situaciones de ese tipo.

Las actividades fueron resueltas en sesiones promedio de dos horas para cada una, para ello se adoptó la forma de trabajo propuesta por Sepúlveda y Santos (2006), que consta de cinco pasos:

1. **Introducción de la actividad.-** En ella el profesor y los alumnos leen la actividad y realizan preguntas referentes al contenido de la misma, con esto se asegura que la actividad sea comprendida por todos los estudiantes antes de iniciar con sus intentos de solución.
2. **Trabajo en equipos.-** Después de la introducción se da un lapso de aproximadamente una hora para que los muchachos discutan la actividad y lleguen a una solución. La formación de los equipos se realiza intentando combinar a los estudiantes con la intención de homogenizar los equipos en cuanto a las características de sus integrantes. Los equipos de trabajo están formados por tres

personas con la intención de favorecer la discusión que podría no generarse trabajando en parejas; de esta manera el tercer estudiante es un mediador en la discusión y de cierta manera garantiza que se llegue a un acuerdo.

3. **Exposición de los equipos formados.-** Una vez terminado el trabajo en equipo; cada uno de ellos nombra un representante que, será la persona responsable de exponer la solución a la que han llegado con sus compañeros ante toda la clase. Durante este momento se tiene la oportunidad de hacer preguntas al equipo.
4. **Discusión colectiva.-** El profesor promueve la discusión colectiva y anima a los alumnos a analizar la validez de los argumentos de cada equipo.
5. **Trabajo individual.-** Una vez terminada la discusión; los muchachos tienen la oportunidad de volver a la actividad para resolverla de manera individual, algunos de ellos se apropian de ideas presentadas en la discusión colectiva y otros permanecen con sus ideas iniciales.

Fase de análisis:

Los elementos de información en esta fase son los reportes escritos que resolvieron los estudiantes, tanto de forma individual como cuando trabajaron en equipos; así como las video grabaciones que incluyen las etapas de: introducción a la actividad, trabajo en equipos, exposición de los equipos y discusión colectiva.

A continuación, presentamos las actividades que hemos diseñado, y/o reformulado, con las recomendaciones de Balanced Assessment Package for the Mathematics Curriculum, (1999, 2000). Proyecto dirigido por Shoenfeld, en donde sugiere que el diseño debe ir acompañado de: Descripción de la tarea; Conocimientos previos; Condiciones para su empleo; Indicadores de desempeño.

Según Lesh (2000), las descripciones y explicaciones que construyen los estudiantes mientras están trabajando, nos revelan cómo están interpretando las situaciones matemáticas que encuentran por descubrimiento y también revelan cómo estas situaciones empiezan a ser matematizadas e interpretadas. Matematizar involucra hacer una descripción simbólica de una situación significativa.

Actividad 1.- Los saltos de Yaya

DESCRIPCION DE LA TAREA

Esta tarea está basada en la paradoja de Aquiles y la tortuga, en ella los estudiantes deben mover la posición de un objeto y expresar algebraicamente la posición del mismo.

CONOCIMIENTOS PREVIOS

Se espera que el estudiante tenga conocimientos sobre el entendimiento y manejo de expresiones algebraicas y la manipulación de fracciones.

CONDICIONES PARA SU EMPLEO

Organización: Los estudiantes trabajarán en equipos de tres, presentarán sus resultados por equipo, discutirán colectivamente y después de un momento de reflexión resolverán la actividad de manera individual.

Materiales: regla graduada y calculadora.

Tiempo estimado: 2 horas.

INDICADORES DE DESEMPEÑO

- Indicar la posición de cada salto en la recta.
- Expresar la distancia por recorrer de manera algebraica como $(1/2)^n$
- Estimar el límite de la función cuando "n" tiende a infinito.

NOMBRE (S): ____ **FECHA:** __________

____

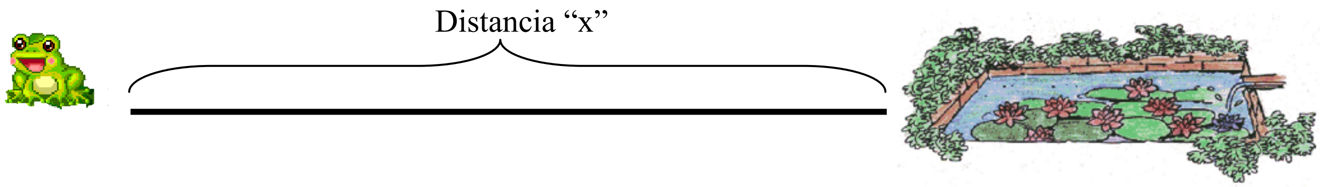
____

INDICACIONES: Analiza la situación que se te plantea y responde a las preguntas, es muy importante que escribas todas las operaciones que se requieran aunque las realices mentalmente o con calculadora, así como los razonamientos que emplees al responder lo que se te pide. Si requieres hojas adicionales utilízalas y no olvides anexarlas al final.

Actividad: Los saltos de Yaya

Yaya es una ranita que vive feliz en un estanque; a ella le gusta contar la cantidad de saltos que necesita hacer para llegar a los objetos que la rodean. Un día, cansada de contar siempre de la misma forma, decide modificar su forma de avanzar y dice: “Ahora cada salto que daré será justo la mitad de la distancia que necesito recorrer para llegar a mi destino”.

Observa el dibujo y ayuda a contar los saltos de Yaya.



y desea llegar al estanque y con el primer salto recorre la mitad de la distancia que inicialmente la separaba de el.

1. Con el primer salto, ¿Cuál fue la distancia que recorrió Yaya?
2. ¿Qué distancia le falta recorrer para llegar al estanque?
3. Recuerda que en cada nuevo brinco recorre la mitad de la distancia que le falta. Yaya da el 2do. Salto ¿qué distancia lleva recorrida entre el 1ero. Y 2do. Salto? ¿Cuánto le falta por recorrer?

4. Dibuja los brincos de Yaya y llena la tabla según la distancia que le falta por recorrer con cada salto

No. de salto	1	2	3	4	5	6	7			
Distancia por saltar	½	1/4								
Expresión	(½)	$(1/2)^2$								

5. Observa la tabla, después de 5 saltos, ¿Cuánto le falta a Yaya para llegar a su destino? Exprésalo de manera algebraica

6. Si Yaya diera “n” saltos, ¿qué distancia le falta por recorrer?

7. ¿Qué cantidad de saltos necesita Yaya para llegar a su destino? Argumenta tu respuesta.

8. ¿Qué sucede con la distancia que le falta recorrer a Yaya a medida que aumenta el número de saltos?

Actividad 2.- Reparto de pizza

DESCRIPCION DE LA TAREA

En esta tarea los estudiantes deben hacer el reparto de una pizza, siguiendo una regla matemática, enseguida se les solicitará que expresen dicha regla de manera algebraica y que interpreten el límite de ella cuando el número de porciones crece.

CONOCIMIENTOS PREVIOS

Se espera que el estudiante tenga conocimientos sobre el manejo y entendimiento de expresiones algebraicas y la manipulación de fracciones.

CONDICIONES PARA SU EMPLEO

Organización: Los estudiantes trabajarán en equipos de tres, presentarán sus resultados por equipo, discutirán colectivamente y depués de un momento de reflexión resolverán la actividad de manera individual.

Materiales: tijeras y calculadora.

Tiempo estimado: 2 horas.

INDICADORES DE DESEMPEÑO

- Realizar las divisiones de la pizza correctamente.
- Expresar la porción repartida de manera algebraica como $(1/2)^n$
- Estimar el límite de la función cuando n tiende a infinito.

NOMBRE (S): ____ **FECHA:** __________

____

____

INDICACIONES: Analiza la situación que se te plantea y responde a las preguntas, es muy importante que escribas todas las operaciones que se requieran aunque las realices mentalmente o con calculadora, así como los razonamientos que emplees al responder lo que se te pide. Si requieres hojas adicionales utilízalas y no olvides anexarlas al final.

Actividad: Reparto de pizza

Mónica va a hacer una fiesta y tiene una pizza que desea compartir con sus invitados, no sabe la cantidad de invitados que van a llegar, pero sabe que todos llegarán solos. Les ha pedido que sean puntuales, pues para repartir dicha pizza, Mónica ha decidido hacerlo de una manera muy especial:

Partirá la pizza por mitad y dará una de estas porciones al invitado que llegue primero, y el resto de la pizza será repartida por mitad para darle una de esas porciones al segundo invitado, y así sucesivamente con los invitados que sigan llegando.

1. Toma la pizza de papel y divídela de la misma forma que lo haría Mónica

2. ¿Qué porción de la pizza entera le corresponde al primer invitado?

3. ¿Qué porción de la pizza entera le corresponde al segundo niño en llegar?

4. ¿Qué porción de la pizza entera le corresponde al tercer niño en llegar?

5. Completa la siguiente tabla en términos de la pizza entera, indicando la porción que le corresponde a cada niño.

No. de niño	1	2	3	4	5	6	7			n
Porción de pizza										
Expresión de la porción de pizza										

6. ¿Cuánta pizza le toca al niño que llega en el lugar número 20?

7. Si tú fueras invitado a dicha fiesta, ¿en qué lugares procurarías llegar? Argumenta tu respuesta.

8. ¿Qué sucede con el tamaño de las porciones repartidas a medida que el número de niños aumenta?

9. ¿De qué tamaño será el pedazo de pizza, del niño que llegue en el lugar “n”? Describe esto en forma de expresión algebraica

Ahora, sumemos: con ayuda de la tabla y la expresión a la que llegaste, indicarás la cantidad de pizza que Mónica lleva repartida.

1. ¿Qué cantidad de pizza había repartido Mónica cuando solamente estaba un invitado?

2. ¿Cuánto suman las porciones del niño 1 y del niño 2?

3. Si a la suma anterior agregamos la porción del niño 3, ¿qué cantidad de pizza tenemos?

4. Si continuamos sumando las porciones de pizza que Mónica ha repartido, ¿qué resultado tenemos? Completa la tabla, sabiendo que:

x= lugar en que llegó cada niño.

f(x)= porción de pizza repartida al niño que llega en ese lugar.

s(x)= suma de las cantidades de pizza repartida.

X	f(x)	s(x)	Expresión para f(x)	Expresión para s(x)
1	1/2	½= ½		
2	1/4	1/2 + 1/4= ¾		
3				
4				
5				
N				

5. ¿Qué sucede con el tamaño de la pizza repartida a medida que llegan más y más niños?

6. ¿Puedes generar una expresión que indique la cantidad de pizza repartida cuando habían llegado “n” niños?, ¿cuál es?

7. ¿Cuándo x crece más y más a qué tiende la suma?

Actividad: El problema de la recta tangente

DESCRIPCION DE LA TAREA

En esta actividad se abordará el concepto de derivada partiendo del cálculo de rectas secantes que se aproximan a una tangente.

REQUERIMIENTOS

- Conocimientos sobre coordenadas rectangulares.
- Entendimiento sobre funciones sencillas y evaluación de funciones.
- Entendimiento y manejo de pendiente de una recta.
- Noción de la recta tangente.

INDICADORES DE DESEMPEÑO

- El cálculo de las pendientes.
- El entendimiento de la recta tangente como el límite de rectas secantes.
- La estimación de la recta tangente geométricamente y analíticamente.
- El entendimiento del punto Q como un punto sobre la función que se mueve hacia P.

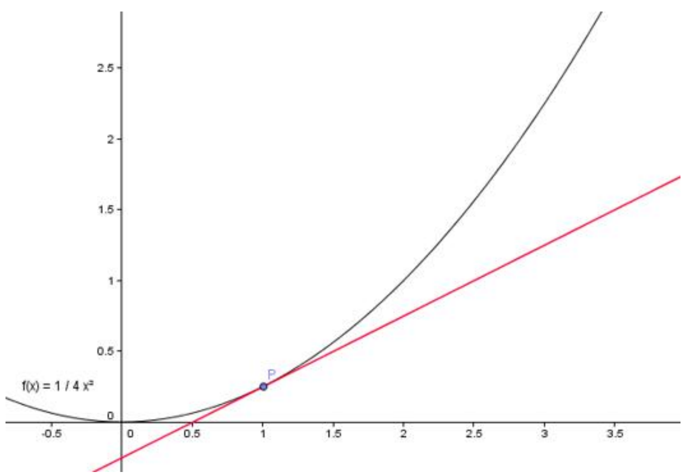
NOMBRE (S): ____ **FECHA:** __________

____

____

INDICACIONES: Analiza la situación que se te plantea y responde a las preguntas, es muy importante que escribas todas las operaciones que se requieran aunque las realices mentalmente o con calculadora, así como los razonamientos que emplees al responder lo que se te pide. Si requieres hojas adicionales utilízalas y no olvides anexarlas al final.

Actividad: El problema de la recta tangente



La gráfica anterior muestra la gráfica de la función $f(x)=\frac{1}{4}x^2$; la línea roja es la recta tangente a esta función en el punto P(1,1/4).

1. Utiliza esta gráfica para dibujar la recta que pasa por los puntos (1,1/4) y (3,9/4). Calcula su pendiente.

2. ¿La pendiente de la recta anterior es mayor o menor a la pendiente de la recta tangente?

3. Ahora dibuja la recta que pasa por (1,1/4) y (2,1) y calcula su pendiente. ¿Este valor es mayor o menor a la pendiente de la recta tangente?

4. Calcula la pendiente de la recta que pasa por los puntos (1,1/4) y (3/2,9/16). ¿Este valor es mayor o menor a la pendiente de la recta tangente?

5. Calcula la pendiente de la recta que pasa por (1,1/4) y (1/2,1/16). ¿Cómo es este valor con respecto a la pendiente de la recta tangente?

6. Con base en los datos obtenidos anteriormente, ¿puedes estimar el valor de la pendiente de la recta tangente a la función en el punto P(1,1/4)? Explica tu razonamiento.

7. ¿Puedes encontrar una manera de mejorar la aproximación de dicha pendiente? Descríbelo.

Vamos a elegir x=1 por facilidad. Evalúen la función en x=1.

Ahora agrega un punto Q sobre la función $f(x) = \frac{1}{4}x^2$ que debe ser distinto al punto P.

Traza una recta paralela al eje “y” en el punto Q y otra recta paralela al eje “x” en el punto P, donde se cruzan estas rectas llama a este punto A y forma un triángulo rectángulo APQ.

La distancia PA la llamaremos “h”, de modo que el punto Q estará definido por $(1+h, f(1+h))$.

8. ¿Qué sucede con el punto Q si cambiamos el valor de “h”?

9. Ayúdate de la siguiente tabla para contestar a las preguntas que se te plantean más adelante

Coordenadas del punto P		Valor de "h"	Coordenadas del punto Q		Pendiente de la recta PQ	Aproximación decimal
X	Y		1+h	f(1+h)		
1	¼	1				
1	¼	1/2				
1	¼	1/4				
1	¼	1/10				
1	¼	1/100				
1	¼					
1	¼					
1	¼					
1	¼					

10. Calcula la pendiente de la recta que une los puntos P(1,1/4) y $Q(1+h, f(1+h))$ para h=1 y h=0.5.

11. ¿Qué relación tienen estos resultados con los que habías obtenido en el punto 3 y 4?

12. ¿Qué valores debe tomar h para que el punto Q esté lo mas cercano posible al punto P?

13. ¿Qué ocurre si el valor de h se hace cada vez más pequeño, es decir si el punto Q se acerca cada vez más al punto P? ¿Cuánto vale la pendiente de la recta que pasa por P y Q?

Actividad: ***La tarea de Jorge***

DESCRIPCION DE LA TAREA

La siguiente actividad tiene como propósito estudiar lo que es una suma de Riemann apoyándose en el uso del software dinámico libre llamado Geogebra.

REQUERIMIENTOS

- Conocimientos sobre coordenadas rectangulares.
- Entendimiento sobre funciones sencillas y evaluación de funciones.
- Conocimientos básicos en el uso del Geogebra.
- Manejo del cálculo de áreas.

INDICADORES DE DESEMPEÑO

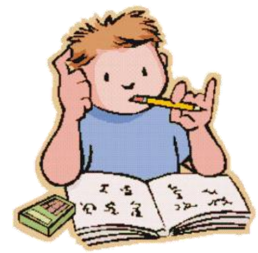
- Establecer una expresión para calcular Δx.
- La estimación del área.

NOMBRE (S): ____ FECHA: __________

____

____

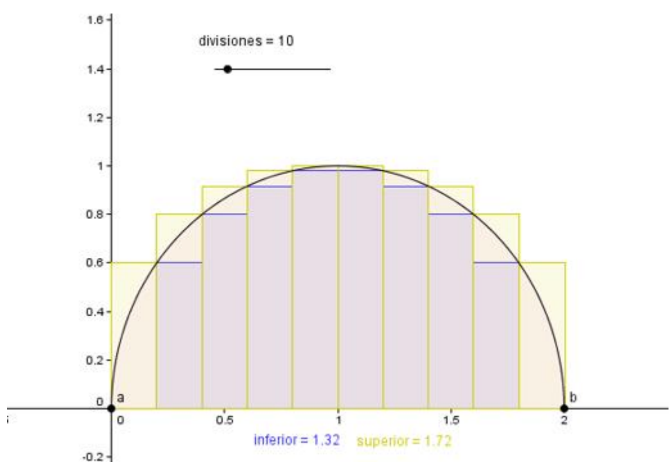
INDICACIONES: Analiza la situación que se te plantea y responde a las preguntas, es muy importante que escribas todas las operaciones que se requieran aunque las realices mentalmente o con calculadora, así como los razonamientos que emplees al responder lo que se te pide. Si requieres hojas adicionales utilízalas y no olvides anexarlas al final.



Actividad: La tarea de Jorge

1. **¿Cuánto mide la mitad del área de un círculo de radio=1?**

Jorge acaba de ingresar a una nueva escuela y, para su suerte, se ha encontrado con un profesor de matemáticas que, extrañamente, le pide calcular dicha área, pero sin usar la fórmula del área del círculo. Le propone usar un software de computadora y calcular esa misma área por medio de suma de rectángulos, ¡ayudemos a Jorge a resolver esta tarea!



La figura muestra la gráfica de la función $f(x) = \sqrt{2x - x^2}$, que corresponde a la mitad superior del círculo unitario.

Observa en el dibujo como se forman rectángulos inscritos en el círculo y también rectángulos circunscritos. A los rectángulos inscritos les llamaremos inferiores y a los circunscritos les llamaremos superiores.

2. Fíjate que los extremos del diámetro están nombrados con las letras “a” y “b”. ¿Cuánto mide el diámetro del círculo?
3. Mueve el punto llamado "divisiones" hasta la posición 5.
4. ¿En cuántas partes es dividido el diámetro del círculo?
5. ¿Cuánto mide la base de cada uno de los rectángulos?
6. Mueve nuevamente el punto divisiones hasta la posición 7, ¿En cuántas partes es dividido el diámetro del círculo?
7. ¿Cuánto mide la base de cada uno de los rectángulos?
8. Vamos a llamar Δx a la base de cada rectángulo. Genera una expresión para determinar la medida de Δx cuando modificamos el número de divisiones.

Desplaza el punto divisiones y detente en el número 10.

9. ¿Cuánto mide Δx en cada uno de esos rectángulos?
10. Evalúa la función $f(x)$ en el valor Δx que acabas de obtener.
11. ¿Qué representa ese valor en la gráfica?
12. ¿Qué relación existe entre la altura del rectángulo y Δx?
13. Si estás en la cuarta división, ¿Cuánto mide la altura del rectángulo inferior? Verifica tu respuesta en la gráfica.
14. Expresa una fórmula para calcular el área de cualquiera de esos rectángulos cuando modificas el número de divisiones.

Ahora vamos a sumar todas las áreas de los rectángulos inferiores y la llamaremos área ***inferior*** y la de los rectángulos superiores la llamaremos área ***superior***.

15. ¿Cuál es el valor del área inferior?
16. ¿Cuál es el valor del área superior?
17. ¿Qué relación tienen estas áreas con el área que calculaste en la pregunta 1?

18. Continúa deslizando el punto “divisiones” para completar la siguiente tabla:

Número de divisiones	Valor de Δx	Área inferior	Área real-Área inferior	Área superior	Área superior-Área real
10					
20					
30					
40					
50					
60					
70					
80					
90					

19. ¿Qué sucede con la base de los rectángulos a medida que aumenta el número de divisiones?
20. ¿Qué ocurre con el área inferior y superior si crece el número de divisiones?
21. ¿Cuántas divisiones necesita hacer Jorge para obtener el área de la mitad de la circunferencia?, argumenta tu respuesta.
22. Expresa el área del semicírculo en términos de la suma de los rectángulos.

Capítulo 4

Análisis de los datos

Referente a la actividad "Los saltos de Yaya":

Revisando el sistema de representaciones para el límite, propuesto por Blázquez (2001), parece ser que la representación que más favorece al acercamiento de la concepción del límite, en esta actividad, fue la representación gráfica. Ya que se observó que cuando hacían referencia en la representación verbal, los chicos pensaban que era un problema de lógica, algo así como una adivinanza o trabalenguas y mencionaban cosas como:

Yaz: *es que ésta es la distancia, entonces lo tenemos que dividir a la… justamente a la mitad.*

Dany: *pero, como esto es casi lógica, ¿no?*

Y según su representación verbal el problema no tenía fin:

Yaz: *sí, de aquí a aquí es el primer salto [señalando con el dedo], ahora esto [señalando la siguiente mitad] lo tenemos que repartir a la mitad.*

Dany: *y a la mitad, y a la mitad, y a la mitad.*

Yaz: *… pero [voltea a ver a Dany], nunca llegaría.*

Dany: *pues es lo que digo, que nunca llegaría porque es, es pura lógica hay que sacar la lógica también.*

Sin embargo, gracias a que algunos de ellos dividieron el dibujo según las indicaciones, lograron percatarse que el límite era alcanzado y podían incluso decir en qué salto llegaba Yaya al estanque, argumentando sus razones.

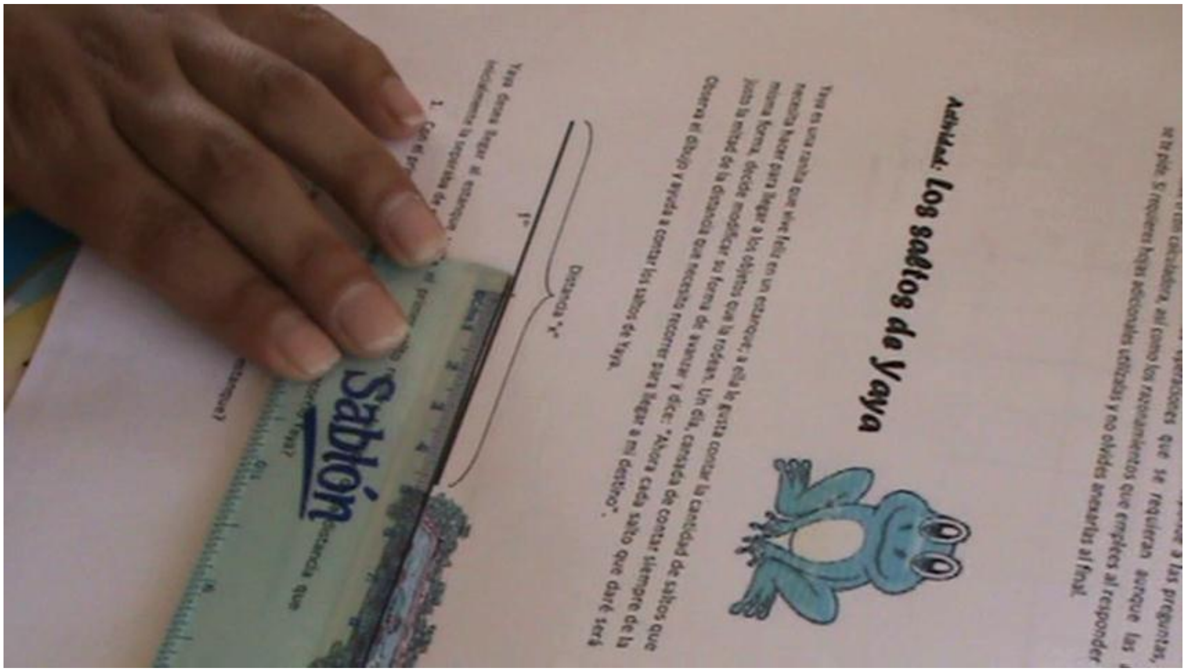


Figura 4.1.- Yaz haciendo la división del segmento.

Yaz: *[continúa haciendo las divisiones en el dibujo] serían dos con dos, sería el tercero.*

Dany: *y un cuarto.*

Yaz: *uno con uno sería el cuarto.*

Dany: *medio con medio.*

Yaz: *cuatro.*

Dany: *y el cinco y el seis.*

Yaz: *no pues tiene que llegar hasta acá mijo, son: uno, dos, tres [contando los brincos].*

Yaz: *[cuenta los brincos que han dado]… seis, siete, siete brincos dio [dice incrédula y mostrando las palmas de las manos], ocho, no mira [vuelve a contar] fueron ocho brincos.*

Al parecer, el fragmento anterior muestra el momento en que ha ocurrido el "insight" en Yazmín, y como menciona Bruner (1973), son las experiencias del propio alumno las que lo llevan a la comprensión. Es por eso que los compañeros que no hicieron la división del segmento no se han percatado que muy pronto llegará un momento en que ya no puedan realizar físicamente las divisiones; Yazmín intenta decirlo:

Yaz: *va a quedar la mitad de la mitad, va a dejar atrás más espacio, más espacio, ¿si me entendiste ya o todavía no?*

Lo curioso es que Daniel observó y ayudó numéricamente a hacer las divisiones; sin embargo, no fue él quien físicamente las realiza y es por eso que, en mi opinión personal, aunque se percata que el espacio cada vez se va reduciendo más y más, insiste en que siempre puede seguir dividiéndose.

Yaz: *es que tienen que llegar, si llega, ¿verdad que si llega? [se dirige a Erandi]*

Erandi: *es que se va reduciendo.*

Yaz: *es que… aja se va reduciendo.*

Dany: *sí pues, de que se va reduciendo, se va reduciendo.*

Yaz: *es que por grande o chico que sea el espacio, llega porque llega.*

Erandi: *ya no hay espacio.*

Yaz: *ya no va haber más espacio donde lo pueda cortar a la mitad, sino que ya simplemente va a llegar. ¿Si entiendes o no?*

Por otro lado pareciera que Erandi pudo aprender de la experiencia de Yazmín, sin embargo después comenta cosas como:

Erandi: *¿si se moviera al 8?*

Pero en el trabajo individual, sus ideas no fueron consistentes con lo que aparenta haber comprendido. Por eso, creo que, para mejorar esta actividad se debe dar la indicación que los alumnos realicen las divisiones que representan los brincos de Yaya con una regla, cuidando de hacerlo de la manera más exacta y de ser posible, que todos los integrantes realicen una división a la vez; esto con la intención que todos tengan la misma experiencia y puedan llegar a la misma conclusión.

Cuando Yazmín pasa a explicar a todos sus compañeros, se enfrenta a ideas que tienen los alumnos en relación a que los problemas se resuelven completando tablas:

Juan C: *pero entonces, en la tabla serían solo ocho cuadritos los que tuviera.*

…

Fidel: *Porque… nosotros nomás nos fuimos por diez… y por la tabla.*

Y cosas más complejas como muestra Fidel:

Fidel: *es que te digo que ahí daría dos saltos iguales, del mismo tamaño, y aquí en la hoja nunca te dice que va a dar dos saltos del mismo tamaño.*

Sin embargo, aunque Yazmín se esfuerza por explicar realizando las divisiones en el piso; con ayuda de marcadores y lápices, que representan la posición de Yaya en cada salto, no logra que visualicen que físicamente es imposible dar un salto más:

Yaz: *pero es que no los está dando de la misma distancia, simplemente que ya no le va a quedar espacio para brincar con las uñas.*

Por otro lado, pareciera que lo que impide que se den cuenta que ya se alcanzó el estanque es que, ellos creen que el problema termina cuando Yaya ya no puede brincar:

Yaz: *se va reduciendo, se va reduciendo hasta que ya no tiene espacio para brincar a la mitad.*

Fidel: *pero también brinca en el agua.*

[risas].

Yaz: *ah pero ya habría llegado al estanque.*

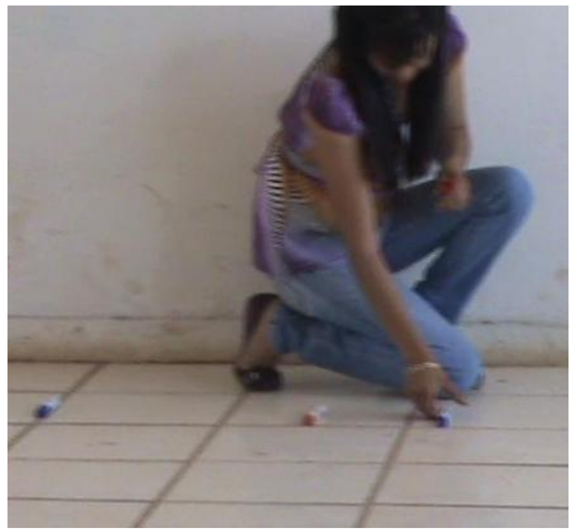



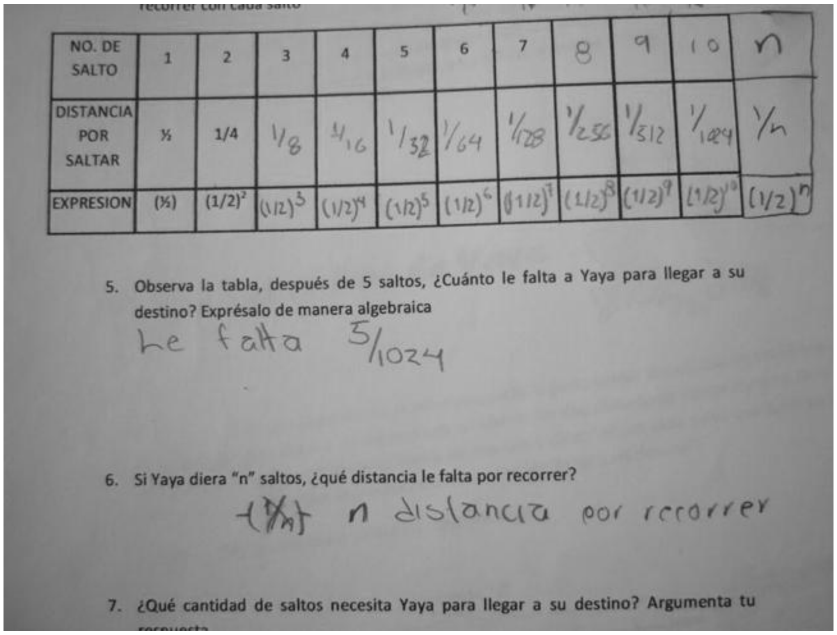
 

Figura 4.2.- Yaz explicando a sus compañeros que Yaya no puede dar siquiera 10 saltos.

Después de algún tiempo de discusión, sobre el lugar a donde llegaría Yaya en el salto mil y el salto “n”, Daniel que decía que Yaya no llegaba en el octavo salto se percató que el límite era alcanzado en el infinito:

Ely: *entonces ¿qué cantidad de saltos necesita dar Yaya para llegar?*
Dany: *[dice muy despacio] yo digo que es infinito.*

En general, no hubo dificultad numérica en los equipos para hacer las divisiones del segmento que representaba la distancia que Yaya tenía que recorrer; también pudieron llenar la tabla sin mayor problema, algunos incluso agregaron una columna para el salto “n” y contestaron correctamente a la expresión en la tabla, sin embargo no lograron contestar a la pregunta 6, como se muestra la Figura 4.3.



recorrer con cada salto

NO. DE SALTO	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	n
DISTANCIA POR SALTAR	½	1/4	1/8	1/16	1/32	1/64	1/128	1/256	1/512	1/1024	1/n
EXPRESION	(½)	$(1/2)^2$	$(1/2)^3$	$(1/2)^4$	$(1/2)^5$	$(1/2)^6$	$(1/2)^7$	$(1/2)^8$	$(1/2)^9$	$(1/2)^{10}$	$(1/2)^n$

5. Observa la tabla, después de 5 saltos, ¿Cuánto le falta a Yaya para llegar a su destino? Exprésalo de manera algebraica

Le falta 5/1024

6. Si Yaya diera "n" saltos, ¿qué distancia le falta por recorrer?

(1/n) n distancia por recorrer

7. ¿Qué cantidad de saltos necesita Yaya para llegar a su destino? Argumenta tu respuesta

Figura 4.3.- Expresión correcta del Equipo de Fidel, que muestra incongruencia en sus respuestas.

Este problema se presentó en todos los equipos al momento de realizar la expresión algebraica para el salto "n". En algunos incluso se nota una apatía o frustración al Álgebra, que no les permite siquiera intentarlo:

Juan C: *¿cuál sería de manera algebraica?, ¿sería aquí? [señalando en la tabla], expresiones. ¿no profa? [risas]*

Juan C: *hay no!!!*

Barby: *bueno hay que dejar esa y pasamos a la otra.*

Daniel pudo llegar a la expresión, sin embargo no estaba lo suficientemente convencido y no pudo convencer a sus compañeros de equipo de que su propuesta era la correcta:

Dany: *no se. [Toma la hoja y escribe (½)^n].*

Yaz: *pero, ¿por qué a la "n"? se supone que estamos sacando…*

Dany: *un medio a la dos, un medio a la tres…*

Por otro lado, algunos lograron percatarse que "n" al ser un número muy grande tiende al infinito:

Dany: *un medio a la "n".*

Yaz: *¿pero cuánto vale "n" para que pueda reducirse a esto? y para que de "n".*

Dany: *pero es que aquí se va, se va, se va.*

Erandi: *"n" es infinito.*

Yaz: *¿"n" es infinito? "n" es cualquier número [risas].*

Sin embargo, Yazmín y muchos de sus compañeros, no identifican que "n" representa el número de saltos y que no lo pueden usar para representar otra variable; entienden que "n" es una variable que puede tomar cualquier valor, sin embargo lo usan de manera indiscriminada para indicar el número de saltos y la distancia que le falta por recorrer.

Ely: *¿qué representa la "n"?*

Mando: *la distancia y el número de saltos.*

Ely: *¿las dos cosas?*

[Armando dice sí con la cabeza].

Fidel: *bueno, representa una cosa en cada pregunta.*

Ely: *¿cosas distintas?*

Barby: *sí.*

Ely: *¿si?, ¿cosas distintas?*

Mando: *porque es una distancia y los saltos.*

Ellos intuyen que "n" es un número grande y por eso mismo, creo que les parece correcto decir que en el salto "n" (número grande) a

Yaya le faltará 1/n distancia por recorrer. Ya que se han percatado que el numerador siempre es uno y el denominador es el doble del denominador anterior, el cual desconocen en el término "n".

El equipo de Bárbara no tuvo mayor problema para encontrar el límite, aunque no estoy completamente segura que lo lograron, ya que al momento de realizar las divisiones contaron nueve brincos:

Juan C: *[empieza a contar con ayuda del dibujo, seguido de Penélope] uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho y de esta mitad, pues ya llegó [ríen todos]. ¿Cuántos saltos dimos?*

[Nueve contestan sus compañeras].

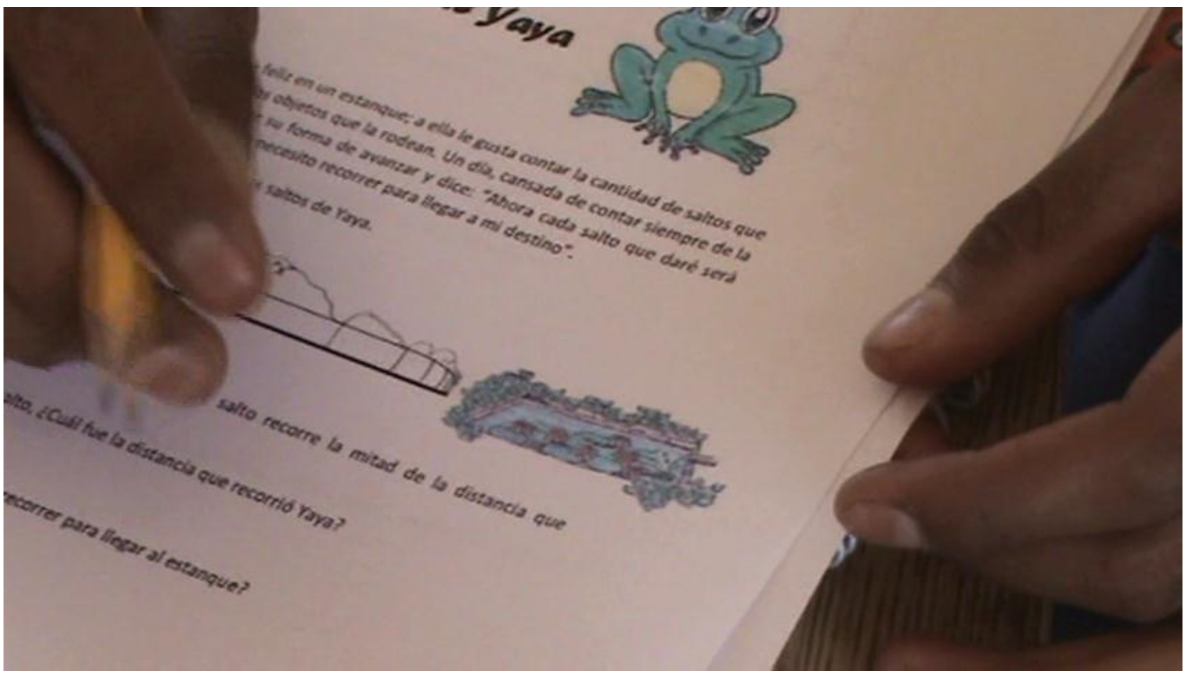


Figura 4.4.- Equipo de Juan C indicando que son 8 saltos los que puede dar Yaya.

Y a pesar de ello, al momento de llenar la tabla lo hicieron hasta completar todos los espacios que se les había puesto, después de eso aseguraban que Yaya había llegado al estanque en el salto número diez.

Sin embargo, cuando Juan C pasó al pizarrón, dijo que Yaya llegaba en el salto número once porque la tabla dibujada en el pizarrón tenía once espacios. Se le cuestionó sobre qué sucedería si la tabla solamente tuviera cinco espacios y contestó que entonces llegaría en cinco saltos.

Juan C: *ahí, pues, faltarían seis saltos.*

Ely: *¿por qué seis y no cinco como habías dicho?*

Juan C: *porque ahí tiene once saltos más, o sea un salto de más. Entonces le hacen falta seis saltos más.*

Ely: *entonces ¿si yo hiciera la tabla hasta el número cinco?*

Juan C: *¿hasta aquí?*

Ely: *aja.*

Juan C: *entonces ya no le faltaría ninguno.*

Esto demuestra la facilidad y preferencia que tienen los muchachos por el llenado de tablas y como tácitamente, creen que la solución al problema termina precisamente con el llenado de la misma.

Incluso cuando Yazmín explicaba con los marcadores y parecía evidente que el espacio era muy pequeño para insertar otro marcador más, Juan C insiste:

Juan C: *diez saltos, si le pones el otro lápiz ahí serían: uno, dos, tres…. Diez saltos.*

Yaz: *pero es que ya otro lápiz no cabe.*

Al parecer, la que tuvo un mejor acercamiento al concepto de límite fue Yazmín; ella en un principio pensó, al igual que varios de sus compañeros, que Yaya no llegaría nunca al estanque y se convenció de lo contrario al hacer las divisiones en el dibujo. Después de eso intentó explicar a sus compañeros con varios ejemplos, su argumento era: "¿cómo va a dar otro salto si ya no tiene espacio para brincar?, o brinca hacia el estanque o se queda en su lugar".

Fidel, en particular, la cuestionó diciendo que nunca se había dicho que Yaya daría los últimos dos saltos del mismo tamaño; sin embargo, el equipo de Fidel al igual que el de Bárbara, también dijo que Yaya llegaría en el salto diez, sin poder explicar la razón.

A la última pregunta todos contestaron que, la distancia que le falta por recorrer a Yaya se va reduciendo a medida que aumenta el número de saltos.

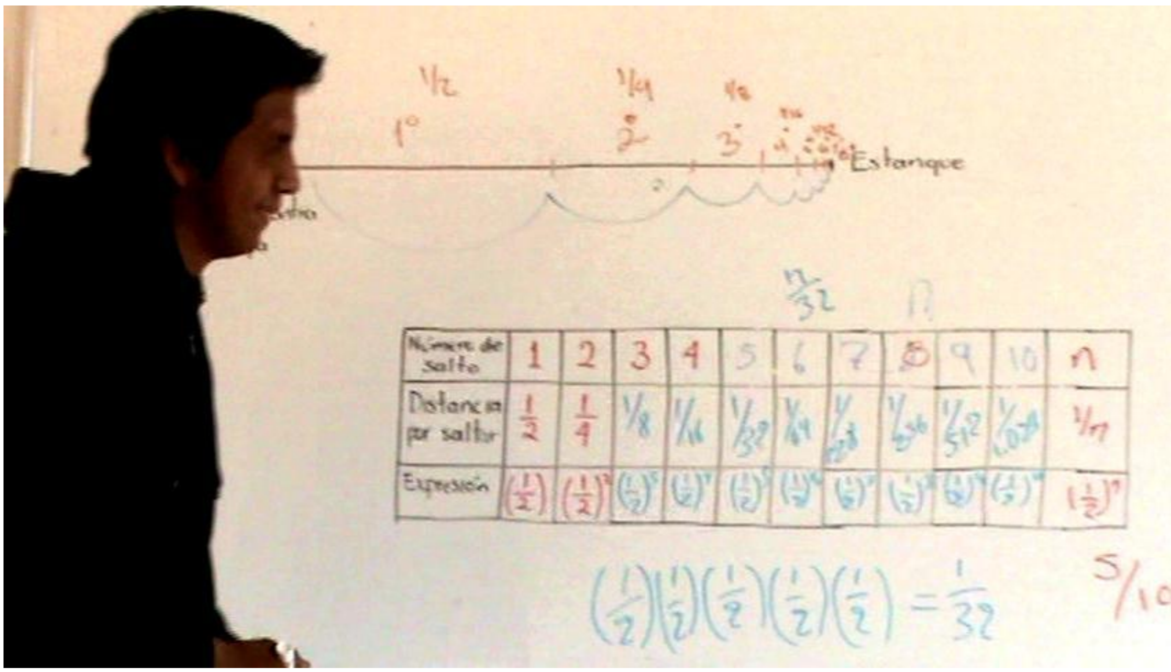
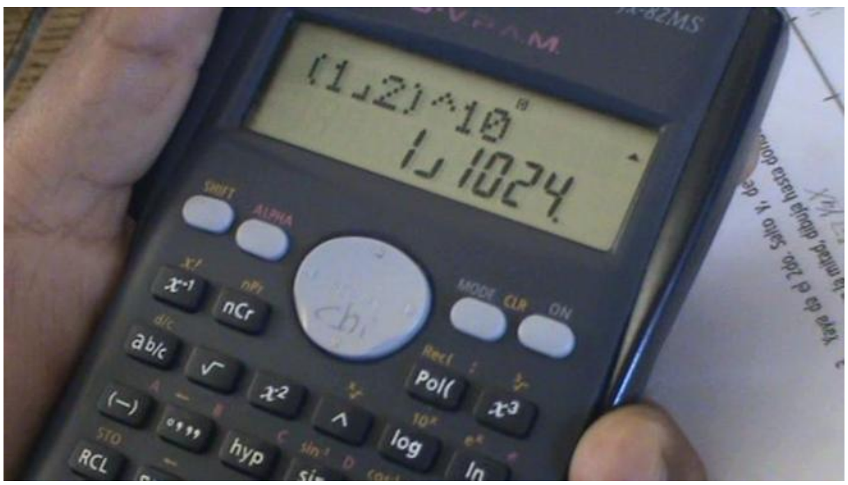


Figura 4.5.- Aportaciones de todos los equipos durante la exposición de resultados.

Referente a la actividad "Los saltos de Yaya" con el grupo control:

Dos equipos lograron llegar a la expresión $(1/2)^n$, aunque fueron tres los que dieron la respuesta correcta; todo parece indicar que uno de los equipos se apropió de las respuestas de otro, ya que en mis recorridos no encontré indicios de trabajo que los condujeran a dicha expresión.

Como era de esperarse, estos estudiantes tienen más experiencia en el manejo de las fracciones y el lenguaje algebraico que en los chicos de 2do. Semestre, y cuentan con más herramientas de apoyo para realizar; por ejemplo, operaciones con fracciones en la calculadora. Sin embargo, la mayoría no son capaces por sí solos de obtener la expresión. Cabe mencionar que dos de los tres equipos que dieron la respuesta correcta se apoyaron fuertemente en las operaciones de fracciones con la calculadora.



4.6.- Equipo de Pancho intentando construir la expresión algebraica.

Sin la ayuda de la calculadora tenían problemas, como:

Ely: *Pregunta chicos, ¿cuánto es un medio al cuadrado?*
Luis M: *¿un medio al cuadrado?*
Pancho: *un entero.*
Luis M: *¿si?*
Ely: *no se, estoy preguntando*
Pancho: *un medio por un medio.*

Ely: *y ¿cuánto es un medio a la cuarta potencia?*

Pancho: *serian…*

Luis M: *saca tu calculadora.*

Pancho: *serian dos enteros.*

…

Caro: *es que, yo aquí le entendí un medio, y un medio al cuadrado sale un cuarto; por eso aquí digo que, un cuarto al cuadrado sale un octavo y así.*

…

Manuel: *sí sabe… es lo que le estaba diciendo, toda la distancia de "x" es un entero y de ese entero saltó la mitad, no sabemos representar el medio, la mitad de lo que llegó.*

Ely: *¿no saben representarla? ¿Por qué?*

Gabriel: *por decir aquí, hicimos un pastelito [risas].*

Manuel: *lo quise representar así, por decir toda, toda "x" es un entero, y con el primer salto llegó a la mitad, pero ahí es donde no.*

Figura 4.7.- Manuel explicando su técnica de "pastelito".

Por ser alumnos de 5to. Semestre, ya manejan la notación científica; al principio dicho manejo les causó confusión, como se muestra en el siguiente diálogo:

Pancho: *es que, si nos vamos pues numéricamente no llega, no creo que llegue a cero. Porque yo pienso que es infinito, porque lo vas dividiendo entre dos, entre dos, y cuando se acaban los positivos te sigue dando negativos, nosotros lo hicimos en la calculadora.*

Ely: *¿cómo te sigue dando negativos?*

Pancho: *por ejemplo, estamos dividiendo esto [señala las columnas de la tabla que en ese momento está agregando Luis M] y siguiendo dividiendo, dividiendo, dividiendo nos sale por diez a la menos tres.*

Sin embargo, esta notación, al final les permitió un mejor manejo numérico y entender que la distancia se reduce cada vez más.

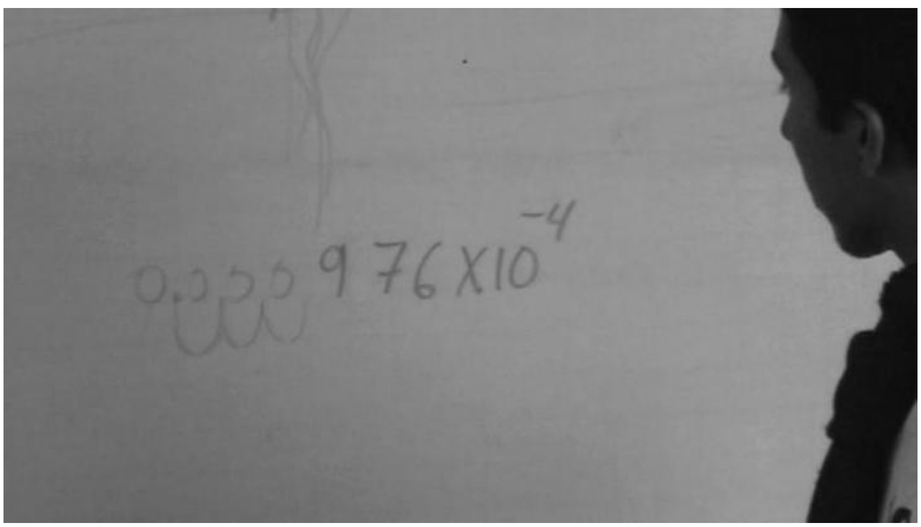


Figura 4.8.- Luis M convirtiendo de notación científica a notación decimal.

Algo muy curioso es que algunos alumnos presentan dificultades con el lenguaje, pues aunque saben lo que quieren decir, lo expresan de distintas formas incorrectas:

Luis M: *la mitad de "n", porque si brinca "n", le faltaría…*

Pancho: *"n" a la un medio, es igual que aquí, si brinca "n", un medio de "n".*

Ely: *¿está multiplicando o qué están haciendo ahí?, ¿es "n" entre dos eso?*

Luis M: *no.*

Pancho: *un medio de "n".*

Luis M: *[dibuja los paréntesis y escribe la "n" más pequeña para que se vea que es un exponente] usted dispense, son paréntesis.*

Pancho: *exponente "n".*

Comentario: al parecer este estudiante está acostumbrado a verbalizar las situaciones de diferentes maneras, ya que frecuentemente durante el desarrollo normal de las clases actúa de esa forma.

A diferencia del grupo experimental, la gran mayoría de los chicos del grupo control se dan cuenta que Yaya va a llegar al estanque, aunque no todos pueden precisar el número de salto, ni las razones de ello.

En el equipo de Gaby comentaban:

Ely: *a ver.*

Itzel: *no ve que dice que recorre la mitad, entonces dice que siempre cada salto va a dar la mitad. Entonces aquí, y ya recorre otra vez la mitad, y otra vez la mitad, y así hasta que llega.*

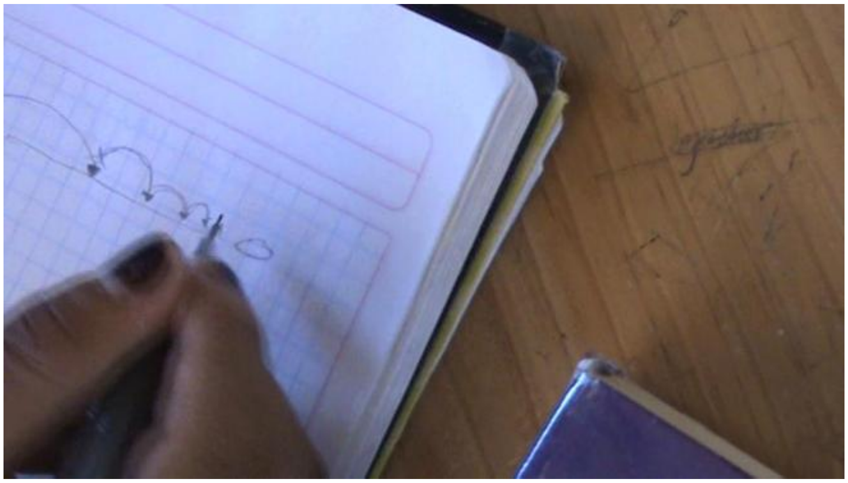


Figura 4.9.- Itzel indicando el momento en que Yaya llega al estanque.

Equipo de Luis M:

Luis M: *se va haciendo más corta, mire porque aquí por decir brincó, y aquí en el siguiente salto se hace más corta [señalando la distancia de los últimos saltos que dibujaron].*

Pancho: *más corta, más corta, más corta hasta que llegue al destino.*

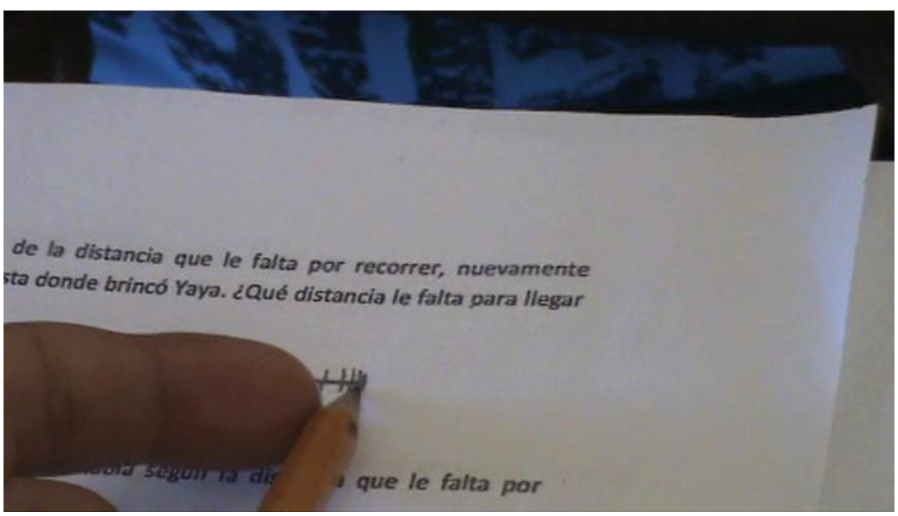


Figura 4.10.- Pancho indicando que la distancia por saltar se hace cada vez más pequeña.

Alex: … para que siempre vaya siendo la mitad y vaya disminuyendo hasta que llegue a donde quiere llegar Yaya.

…

Chely: y cada salto se divide entre dos y así hasta llegar al estaque.

…

Luis M: es que estábamos indecisos en esta pregunta, que era: ¿qué cantidad de saltos necesita Yaya para llegar a su destino?

Ely: ¿por qué estaban indecisos?

Luis M: porque haga de cuenta que yo pensaba que es infinito. Porque por decir si nos ponemos aquí [señalando los brincos en el dibujo], dice que de aquí llegó hasta aquí, y cada vez se va haciendo así, la mitad y la mitad, y la mitad, y la mitad y ya aunque nosotros no podamos hacerlo va a seguir, y seguir, y seguir, se va haciendo cada vez más chiquito.

Fco: se va haciendo cada vez más pequeño.

Pancho: pero va a llegar a un punto donde, por ejemplo… el chiste es que no vamos a llegar exactamente a donde termina, que no va a ser infinito pues porque sí hay una distancia que te marca, que aunque sea la mitad de la mitad, de la mitad sí hay una barda y ya no puedes pasar, porque es hasta el tope donde te dijeron. Ya no puedes sacar más mitades, de aquí ya no te puedes pasar, si llegas aquí, a una mitad, ya no puedes sacar la mitad de esto porque ya para acá ya no es [señalando el otro lado del tope que ellos nombraron].

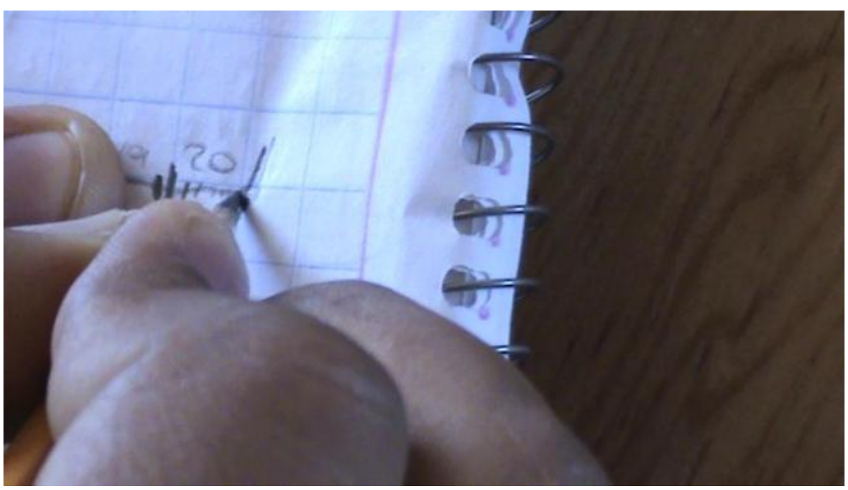


Figura 4.11.- Pancho indicando por medio de una línea el "tope" que finaliza el procedimiento.

Gaby: *aunque no pueda saltar, siempre va a estar una mitad, ¿no?*

Ely: *no se. ¿Por qué dicen que no pueda saltar?*

Gaby: *porque el espacio ya va a ser muy chiquito, [señalando con las manos un espacio] el espacio del salto, pero de todos modos ese espacio chiquito, aunque no pueda saltar, tiene su mitad.*

…

Luis M: *es que mire, un ejemplo, la rana está aquí, y brinca, y brinca, y brinca [simulando que el borrador es la rana brincando], aquí aparentemente ya se ve que llegó al estanque, en el brinco pongámosle diez ya llegó al estanque. Pero si lo pusiéramos como indica la tabla, de aquí todavía puede sacarse la mitad [agrega la columna 11 que había borrado al inicio], que sería [escribe 1/2048] y así sucesivamente y sería infinito porque no… bueno pues a lo mejor sí habría un tope pero ya sería muy largo de encontrar, no podemos sacarlo porque no sabemos como está, ¿si me entendió verdad?*

Pancho: *y aquí ya paramos porque es el final, es el estanque, ya no nos podemos pasar más allá del estanque. Aquí hay un número que podemos dar especificado bien cual es, porque ya estamos llegando al tope.*

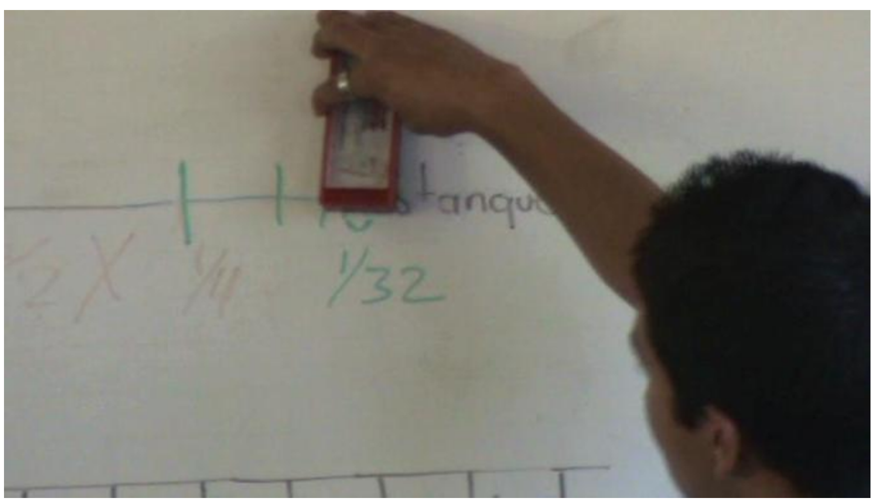


Figura 4.12.- Simulando con un borrador el espacio físico que ocupa Yaya.

Luis M: *dice, la última pregunta dice ¿qué sucede con la distancia que le falta por recorrer a Yaya a medida que aumenta el número de saltos?, ¿qué sucede con la distancia? Pues la distancia se va acortando porque cada salto es la mitad, y la mitad, y la mitad, y la mitad, y la mitad [haciendo movimientos con las manos de manera que se van juntando sus palmas].*

Pancho: *y se va reduciendo el… la mitad pues de la distancia, se va haciendo más chica, chica, chica [moviendo sus manos sobre los saltos dibujados, de manera que sus palmas se van juntando].*

…

Ely: *entonces, dicen que a medida que los saltos aumentan, ¿qué pasa con la distancia?*

Luis M: *se acorta.*

Pancho: *se hace más corta [junta las palmas de las manos].*

Ely: *¿hasta qué punto?*

Luis M: *hasta.*

Pancho: *hasta llegar a tocar el infinito. O sea, todavía puede seguir más, pero como nos están pidiendo hasta que llegue al estanque pues aquí se quedaría, pero si le seguiríamos sería infinito.*

Figura 4.13.- Pancho indicando con sus manos la forma en que se va reduciendo el

espacio por saltar.

Gaby: *¿qué cantidad de saltos necesita Yaya para llegar a su destino?*

Pancho: *argumenta tu respuesta.*

Gaby: *tampoco.*

Ely: *¿no saben?*

Gaby: *pues no se sabe, pero sí va a llegar [risas].*

Gaby: *[ríe] me refiero a que; por ejemplo, aquí [señalando los brincos en el segmento], como dijeron ellos, va a llegar hasta aquí y ya para acá sí hay más números intermedios, pero ya no podría dar los saltos la rana.*

Pancho: *¿por qué?*

Itzel: *porque el espacio es muy pequeño.*

Pancho: *se contradice.*

Ely: *no, no se está contradiciendo. Creo que entiendo lo que está diciendo el equipo, dicen: hay más números intermedios, debería de brincar esos números intermedios.*

Gaby: *debería de brincarlos, pero físicamente no puede.*

Luis M: *sí, ya entendí.*

Gaby: *porque es más grande.*

Ely: *¿si entendieron lo que dice Gaby?*

Todos: *sí.*

Ely: *¿cómo ven?*

Manuel: *la rana ya nomás movería una patilla y ya.*

Ely: *dice: la rana ya nomás movería una patilla y brinca a la mitad.*

Luis M: *las pulgas de la rana.*

Gaby: *no podría, porque es más pequeño de lo que miden sus extremidades.*

Aunque el equipo de Alejandro, que fue el último en compartir sus resultados, menciona que está de acuerdo con la expresión del equipo de Luis Miguel y el equipo de Gabriela, también menciona que el número de saltos va a depender de la distancia que se tenga que saltar, y eso genera discusión entre los compañeros:

Alex: *ouh… sí depende de la distancia, pues si es muy grande le van a faltar muchos saltos, pero si es pequeña le van a faltar menos saltos.*

…

Luis M: *es que por decir si la distancia es grande el primer brinco va a ser bien grande, y si la distancia es pequeña pues va a ser nada más a la mitad [moviendo sus manos para simular distancia grande y brinco grande, distancia pequeña y brinco pequeño]. De hecho casi da lo mismo, lo está dando a la mitad el salto.*

…

Ely: *entonces, ¿quién tiene razón?, si la distancia es muy grande…*

Pau: *es lo mismo.*

Manuel: *prácticamente.*

Ely: *a ver, vean bien lo que dice. Dice Alejandro: si la distancia es grande va a dar muchos saltos, porque la distancia es grande. Si la distancia es pequeñita va a dar poquitos saltos, porque la distancia es pequeña…*

Pancho: *no, porque si la distancia es grande también de ese tamaño va a ser el salto.*

Tari: *pero…*

Alex: *no, no, no, ya me confundieron porque…*

…

Alex: *entonces, si está más chiquitito voy a tener que dar pasitos, unos pasitos tin, tin, tin, tin… pasitos.*

Gaby: *no, si es más chiquitito puedes dar los mismos saltos que en el otro, pero te faltarían los otros brincos [Se refiere a cuando ya no puede brincar la rana], los grandes que puedas y te faltarían otros.*

…

Luis M: *si la distancia es grande o pequeña de todas maneras va a dar muchos saltos. No porque la distancia sea pequeña va a dar poquitos saltos, de cualquier manera que sea la distancia va a dar muchos saltos.*

…

Lalo: *va a dar los mismos saltos pero más pequeños, van a ser los mismos saltos pero solamente va a cambiar [moviendo las manos para simular el tamaño].*

…

Pancho: *sí, por ejemplo sea un metro va a dar los mismos que en treinta centímetros.*

Itzel: *sí.*

Ely: *¿si?, está Itzel participando… me gusta eso [Itzel se sonroja]. ¿Si?*

Pancho: *sí.*

En mi perspectiva, el equipo de Luis Miguel se deja influenciar por la tabla, pues en un inicio mencionaban que Yaya llegaba al estanque en el 9no. Salto, sin embargo al revisar la tabla cambiaron de opinión.

Luis M: *porque por decir, nosotros aquí nos quedamos en uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho, nos quedamos en nueve [señalando los saltos en el dibujo] y ya no podemos sacarle mitad, pero por lo visto sí hay [señalando la tabla] pero ya no le podemos sacar mitad.*

Ely: *¿cómo que por lo visto sí hay?*

Luis M: *porque aquí está en diez [señalando la tabla].*

Comentario: nótese que la referencia física a la tabla, que tiene columna con el número diez "obliga" a Luis Miguel a decir que hay más saltos; es decir si hubiera tenido quince columnas con mayor razón lo obligaría a decir eso; ¿y si tuviera ocho qué hubiera contestado? Cabe mencionar que, al inicio se dibujó en el pizarrón la tabla que aparece en el cuestionario y se agregó una columna extra que fue borrada por el primer equipo en exponer; sin embargo, al exponer Luis Miguel agrega la columna once para indicar que el número siempre se podrá seguir dividiendo.

En sus intentos por descifrar la expresión comentaban:

Fco: *porque aquí vamos de dos en dos, esto es el doble de esto, esto es el doble de esto y esto es el doble de esto, esto es el doble de esto, igual aquí.*

Pancho: *entonces, esto también que sea el doble, entonces un octavo a la cuarta y un dieciseisavo a la octava.*

Luis M: *es que esto está raro porque aquí no cambió el medio.*

Fco: *esto no cambia, lo de un medio, solo cambia la potencia.*

…

Pancho: *aquí es un medio a la cúbica, y luego un medio a la cuarta, y así sucesivamente va ir, luego un medio a la quinta.*

Luis M: *¿hasta la décima potencia?*

Pancho: *sí, si no deja hacer la última. Sí wey, sí sale. [Hace la comprobación en la calculadora].*

Hubo mucha participación de estudiantes que normalmente son reservados y manifiestan dificultades al momento de argumentar sus resultados; por ejemplo Salud, por iniciativa propia se levantó y manifestó su opinión, aunque errónea, frente al pizarrón. Otro chico, de los reservados, al final de la sesión se acercó para felicitarme y decirme que la actividad le había gustado mucho.

Referente a la actividad "Reparto de pizza":

En inicio al igual que en la actividad "Los saltos de Yaya", cuando hicieron uso de la representación verbal creían que si la pizza era repartida de esa forma no se terminaría nunca:

Yaz: *por decir si yo fuera el primer invitado me tocaría la mitad de la pizza, y el que sigue la mitad de la mitad… [Simulando los cortes con la mano].*

Ely: *y el que sigue la mitad de la pizza y así sucesivamente.*

Dany: *nunca se va a acabar [le dice a Yazmín].*

Yaz: *¿hay cómo crees que nunca se va a acabar?*

Nuevamente, Yazmín se da cuenta que, es necesario ir haciendo las divisiones para que sus compañeros se percaten hasta dónde será posible hacer la repartición.

Yaz: *por eso, pero ve partiendo, porque a lo mejor va a llegar un momento en que… imagínate repartir una pizza de verdad así.*

Dany: *[risas].*

Enseguida la propuesta de Yazmín tuvo efecto:

Liz: *ésta es del quinto.*

Yaz: *¿puedes?*

Liz: *sí, y queda para el otro, hay ya no puedo [doblarlo].*

Yaz: *ya nomás así "trata que sea la mitad".*

Liz: *ya no nos va a quedar para los otros.*

Cuando no les fue posible cortar las rebanadas de pizza, en la forma que lo estaban haciendo, pensaron que era posible seguir repartiendo; pero tenían que buscar una estrategia para continuar haciendo los cortes.

Yaz: *¿si se puede partir así? [Me pregunta refiriéndose a cortar la rebanada que queda en forma horizontal].*

Dany: *verdad que sí.*

Ely: *pártela como quieran pero que sea la mitad de la anterior.*

…

Dany: *aquí le cortamos la mitad.*

Yaz: *pero ¿si crees? [Le quita a Dany el pedazo para observarlo].*

Dany: *aquí está mas ancho y acá más delgadito [Señalando los extremos].*

4.14.- Yazmín analizando la propuesta de Dany, sobre realizar las divisiones de diferente forma.

Varios equipos se percatan del límite:

Liz: *y a la "n" le va a tocar nada porque ya llego al final.*

…

Juan C: *el del número veinte [pasándole la hoja a Bárbara que está anotando], ya no le va a tocar nada! [se rie].*

…

Fidel:	*¿cómo es la porción de pizza repartida a medida que llegan más y más niños?... se acaba [risas].*

…

Juan C:	*al primer niño le tocó un medio, al segundo un cuarto, al tercero un octavo, al cuarto un dieciseisavo, al quinto treinta y dosavo, al sexto un sesenta y cuatro, sesenta y cuatro havo, en el séptimo un veintiocho havo, en el octavo un doscientos treinta y seisavos. Hasta ahí lo hicimos porque ya no alcanzo a recortar el otro pedazo de la pizza.*

…

Ely:	*¿Qué sucede con el tamaño de las porciones, con el tamaño que vamos entregando a cada niño, a medida que aumenta el número de niños?*
Juan C:	*se hace más pequeña la porción.*

…

Mando:	*va disminuyendo.*

…

Ely:	*¿qué cantidad le toca entonces si ya se acabó la pizza?*
Juan C:	*el olor.*
Fidel:	*nada.*

4.15.- Juan C sonriendo porque al invitado número veinte ya no le tocaría nada.

Manuel hace referencia que, para seguir haciendo los cortes es necesario contar con otro tipo de herramienta:

Mane: *no tiene la herramienta, a lo mejor con otro material sí, pero no puedes.*

…

Mane: *con un exacto. No tiene herramienta, necesita una herramienta.*

4.16.- Mane indicando que necesita de otra herramienta para poder seguir cortando.

Pero Fidel cree, de forma similar a algunos alumnos del grupo control con la actividad "Los saltos de Yaya", que la cantidad de divisiones depende del área que queramos dividir. Él asegura que el problema se resuelve pidiendo una pizza más grande, sin embargo Yazmín nuevamente se da cuenta que eso es falso:

Fidel: *en ésta no se puede maestra, es que ésta como está muy chiquita obvio que no es lo mismo que pedir una más grandota.*

Ely: *entonces, dices tú: mejor pido una muy grandota, ¿ustedes también creen lo mismo?*

Yaz: *no.*

Fidel: *porque entre más grande, pues se pude dividir todavía más.*

A diferencia de "Los saltos de Yaya", en esta actividad todos los equipos lograron llegar a la expresión algebraica que se solicita en la pregunta: ¿De qué tamaño será el pedazo de pizza, del niño que llegue en el lugar "n"? Describe esto en forma de expresión algebraica:

Juan C: *la de "n" sería* $(½)^n$.

…

Mando: *[señala en el pizarrón* $(½)^n$*].*

Cabe aclarar que, la actividad "Los saltos de Yaya" se aplicó en un fin de semana y solo estuvo presente una parte de los grupos habituales de clase; sin embargo, la actividad causó tanto impacto que el siguiente lunes los alumnos que no habían acudido a la sesión tenían conocimiento sobre ella, discutían y me cuestionaban sobre la posibilidad de que Yaya llegara a su destino. Eso muestra que hubo interacción entre ellos, seguramente fue ahí donde discuten y resuelven la expresión algebraica que anteriormente no pudieron proponer.

Con respecto a la pregunta: ¿Qué sucede con el tamaño de la pizza repartida a medida que llegan más y más niños?

Fidel: *¿a qué tiende la suma?... a que van llegando más niños. Si "x" crece ¿a qué tiende la suma? a que van llegando más niños.*

Kevin: *¿y la cantidad?*

Fidel: *aumenta pues.*

…

Juan C: *cuando "x" crece más y más, ¿a qué tiende la suma? A ser mayor la cantidad.*

…

Juan C: *a que se haga un entero. A que se haga la suma de un medio, un cuarto, un octavo y no sé que más, tiende a que se va completando la pizza y se haga un entero.*

Lo cual demuestra su nivel de entendimiento sobre el límite de la serie. Algo más que nos pudimos percatar es la dificultad que tienen con el manejo de cifras grandes, como saber la porción que le tocará al niño en el lugar número veinte:

Juan C: *sumando, cuando íbamos en el siete ciento cincuenta y seisavos, en el nueve era; y así íbamos sumando esa cantidad la multiplicábamos por dos. En el diez fue dosmil cuarenta y ochoavos.*

Kevin: *hasta el lugar veinte.*

Fidel: *nosotros lo hicimos igual pero nos dio otro resultado.*

…

Mando: *le toca… [escribe en el pizarrón 1/1007616]… le toca un, un millón siete mil seiscientos dieciséisavos.*

Ely: *¿un millón?*

Referente a la actividad "El problema de la recta tangente":

Esta actividad, por la dificultad que presenta, no causó el impacto ni la participación que tuvieron las anteriores. El principal inconveniente fue que los chicos desconocían la simbología sobre funciones y su evaluación, por lo que no lograron resolver correctamente f(1+h); para obtener las coordenadas simplemente igualaron los valores de "x" y "f(x)":

Kevin: *es que, en lugar de poner la "h" le pusimos el valor de uno. Porque Q es uno mas "h", y en vez de poner "h" pusimos uno, que sería dos, entonces la coordenada de Q sería (2,2). [Calcularon la pendiente del punto (2,2) al punto P].*

En la parte de la actividad orientada al trabajo concreto; los equipos coincidieron que la pendiente de la recta tangente debía estar entre los últimos dos valores de las pendientes calculadas. Pero al momento de intentar pasar al siguiente nivel, se confundieron con el lenguaje simbólico y las operaciones:

Goyo: *va a quedar en medio, la pendiente, va a ser intermedia.*

Mando: *porque es..*

Goyo: *está en medio de todo esto.*

Mando: *bueno.*

Goyo: *solo es mayor…*

Mando: *solo es mayor que la de P a U, y menor que la de S, T y R. Entonces pues ya podemos decir que el valor de la pendiente de la tangente es mayor que la pendiente de la tangente de P a U, y es menor que la de P a T, P a S y P a R. Así de fácil y sin sacar tantas pendientes.*

…

Liz: *tres octavos, yo le puse que era menor que la pendiente de la tangente, porque como estaba situado hacia el lado izquierdo, o sea bajó; en vez de ir para arriba, bajó. Yo le puse que era menor porque está hacia el lado contrario de la P, porque como los otros puntos estaban para arriba.*

Erandi: *iban subiendo y ésta iba bajando, porque estaba del lado opuesto.*

Ely: *entonces, tú dijiste que era menor porque estaba al otro lado de la P.*

Liz: *y ya, nada más hasta ahí lo hicimos.*

Los chicos, que ya se encuentran cursando la materia de geometría analítica, tienen experiencia en el cálculo de pendientes de rectas y, se percatan que es necesario conocer dos puntos para realizar el cálculo con el procedimiento que conocen. Sin embargo, a pesar de las limitaciones; Kevin descubrió que podía obtener una buena aproximación a la pendiente de la recta tangente, si colocaba puntos sobre la función cada vez más cercanos a P y calculaba su pendiente.

Kevin: *nosotros le pusimos que no, porque para sacar una pendiente se necesitan dos puntos y aquí nada mas nos está dando solamente un punto.*

Ely: *mm… ese es el razonamiento, dices, no porque necesito dos puntos, ahora dice: ¿puedes encontrar una mejor; una manera de mejorar la aproximación de dicha pendiente?*

Kevin: *pues sí… dando un valor más pequeño a los puntos para que se vayan aproximando al punto P.*

…

Ely: *¿y luego que vas a hacer con esos puntos?*

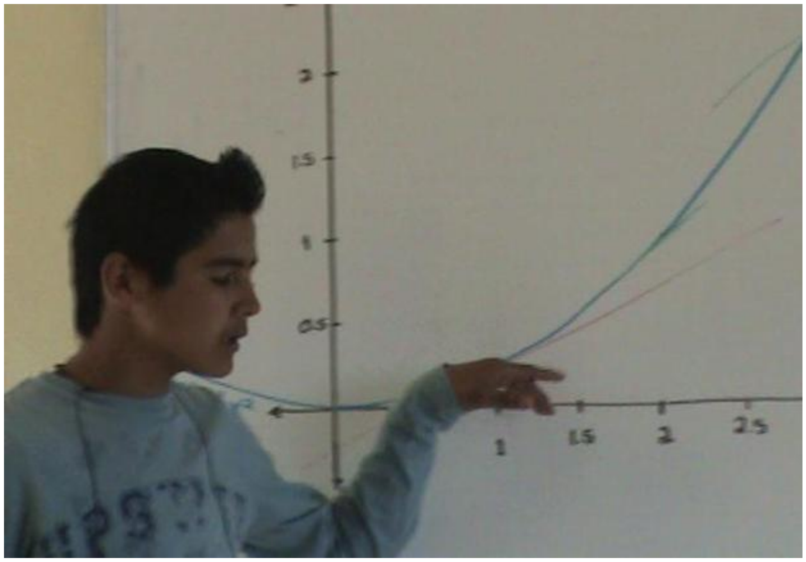
Kevin: *pues sacar la pendiente.*

Ely: *¿de dónde a dónde?*

Kevin: *depende del valor que les demos.*

Ely: *y eso que salga ¿qué va a ser?, ¿esa va a ser la pendiente de la recta roja?*

Kevin: *algo así [sonríe].*



4.17.- Kevin mostrando una mejor aproximación a la pendiente de la recta tangente.

Inicialmente, el equipo de Liz no recordaba la fórmula de la pendiente ni su concepto, estaban confundiéndola con la distancia entre dos puntos. Pudo recordarlo hasta que se les mencionó una frase coloquial que hace referencia a la "aproximación sensible" mencionada por Tall (2010).

Ely: *la fórmula de la pendiente, ¿qué nos indica?*

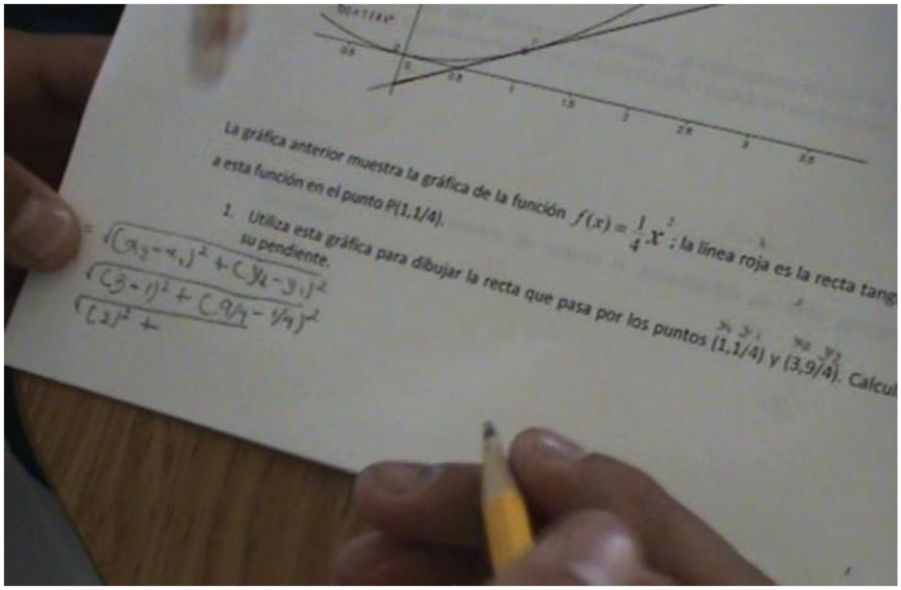
Liz: *cual es la distancia entre los dos puntos, ¿no?*

Ely: *¿si?, ¿eso nos indica la pendiente?*

Liz: *[dice no con la cabeza].*

Ely: *luego decimos: hay esa escalera tiene una pendiente muy grande.*

Liz: *oh la forma como está inclinada, si está parada, es positiva o negativa.*



4.18.- Equipo de Liz confundiendo la pendiente con la distancia entre dos puntos.

Otra dificultad que se presentó en algunos equipos es que; confundían la pregunta que hace referencia al valor de la pendiente de la recta tangente, con el tamaño del segmento de recta dibujada.

Mane: *entonces, ¿cuál es mayor?, ésta es la de la tangente, que pasa de aquí hasta acá, y ésta es la de la pendiente que nosotros calculamos, ¿cuál es mayor? Yo digo que es mayor la de la pendiente, ¿no? Es mayor la de la tangente, el tamaño, pero no sé. Aquí nada más roza en un punto, no, pues no se.*

Ely: *es que les pide la pendiente, no qué tan grande está una línea. Porque está línea, la roja la podemos prolongar más, hasta que salga de la hoja. Igual la que tú calculaste, la podemos prolongar más.*

Fer: *lo que queremos es esto, ¿no? [Señalando el ángulo que hacen ambas rectas].*

…

Liz: *que si la pendiente que hicimos, ¿es mayor o menor que la de la recta tangente?*

Ely: *¿y cómo es?, ¿cómo ven ustedes?*

Liz: *mmm… sí, creo que sí es mayor, pero ésta no termina aquí ¿o si? [Señalando la tangente].*

Ely: *ah no, tampoco la otra. Les preguntan por la pendiente.*

Algunos equipos aseguraban que, no era posible calcular la pendiente de la recta tangente ya que solo se les proporcionaba un punto de dicha recta y para calcular pendientes necesitamos conocer dos puntos.

Kevin: *le pusimos que no se puede.*

Ely: *¿por qué?*

Kevin: *porque… es que, según, para sacar una pendiente se debe de tener dos puntos.*

Ely: *aja.*

Kevin: *para poder, pues, sacar la fórmula, y como nada mas nos está dando un punto, entonces no sabemos el otro punto.*

Para resolverlo, algunos equipos, colocaban puntos sobre la recta, fuera de la función y distintos a P; estimaban su posible coordenada para después calcular la pendiente.

Goyo: *no, sí, este es… sí, sí.*

Mando: *sí, pues serían estos dos puntos [señalando P y el punto donde la recta tangente corta al eje de las "x"].*

Goyo: *sip, sip, sip.*

Ely: *no sé. ¿Y cuánto vale P?*

Mando: *1,1/4.*

Ely: *oh, ¿y cuánto es el otro que dicen ustedes?, señálenlo por favor.*

Goyo: *cero punto cero cinco.*

Ely: *¿y están seguros de que es cero punto cero cinco?*

Mando: *no. Puede ser cero punto seis.*

…

Peny: *nosotros le pusimos que sería encontrar otro punto, para sacar la pendiente de la tangente. Y el resultado sería aproximadamente de dos medios.*

Ely: *¿y dónde pondrían ese punto?*

Mane: *el segundo punto lo pusimos en…*

Ely: *¿dónde lo puedo poner?, ¿Dónde sea?*

Mane: *no, tiene que ser que de tal manera se encuentre coordinado con la tangente que pasa por el punto P.*

Ely: *¿a qué te refieres con coordinado?*

Mane: *que el punto que yo voy a marcar esté prolongado en la tangente, o sea, que de tal manera lo tengo que poner en la línea que es la tangente, no puedo prolongarlo en cualquier lugar, tengo que buscar las coordenadas.*

Esto muestra la forma en que los alumnos intentaron dar solución al problema, pues las herramientas que conocen los limitan.

Referente a la actividad "El problema de la recta tangente" con grupo control:

Al igual que el grupo de investigación, el grupo control mostró muchas dificultades en la resolución de esta actividad y nuevamente el problema del manejo del lenguaje se dejó ver.

Gaby: *[con dificultades para leer (1+h, f(1+h))].,, realiza estas anotaciones en el dibujo… hay no le entendí.*

…

Luis M: *De modo que el punto "Q" está definido por la coordenada.*

Pancho: *¡ah cabron!*

Luis M: *uno más "h"… uno más…*

Pancho: *chale [risas]…*

Luis M: *"h" es uno y medio, son dos y medio, está bien. Uno más "h", dos y medio. ¿la "f" qué es?*

Fco: *función.*

Luis M: *de uno más "h" [tiene dificultades para leer la coordenada (1+h, f(1+h))].*

Nuevamente, se observa un rechazo a las operaciones que implican el manejo de fracciones y una gran dependencia a la calculadora, incluso para resolver cálculos triviales:

Pancho: *vamos a restarle nueve cuartos menos un cuarto en la calculadora.*

…

Pau: *¿la calculadora?, nueve cuartos menos ¿qué?*

Salud: *menos un cuarto.*

Pau: *es igual a dos. Tres menos uno es igual a dos [usando la calculadora]…. Y ya.*

Ca: *es igual a un entero.*

Salud: *dos entre dos es igual a uno.*

Algo más que se puede observar, es la confianza que tienen en el uso de la calculadora para obtener resultados numéricos y pensar que con ello han resuelto el problema en cuestión; muchas de las veces sin comprender la situación que se les plantea y sin valorar si ésta amerita el uso de ese tipo de herramienta. Tal es el caso de Luis M cuando en su equipo están agregando un punto "Q" sobre la función y dibujando el triángulo rectángulo APQ:

Pancho: se supone que el punto debería estar aquí [señalando la recta tangente]… pero también dice que sobre la función y la función es esa.

Luis M: saca la calculadora.

…

Luis M: es lo que no entiendo… ¿no se puede hacer ésta en la calculadora como función? ¿la "f" no sale? [Refiriéndose a si existe una tecla en la calculadora con la letra "f"]... o ¿qué es la función?

Al inicio de la actividad los chicos mostraron problemas en recordar la fórmula de la pendiente de una recta, incluso algunos no distinguían entre la pendiente y la propia recta:

Gaby: ¿la pendiente de la recta anterior es mayor o menor a la pendiente de la recta tangente?... ¿ésta es mayor o menor a la pendiente de ésta?... ¿cuál es la pendiente de ésta?

Chely: pues esta [señalando la recta].

Gaby: no, ésta es la recta… la pendiente de esta [señalando la tangente], sería…

…

Luis M: ¿cómo dijiste que iba? Ya se me olvidó [refiriéndose a la fórmula].

Pancho: "x" son los primeros, uno, un cuarto.

…

Ely: *¿cuál?*

Pau: *y_2 es igual a y_1 menos x_2 menos x_1.*

Ely: *otra vez.*

Pau: *y_2 menos y_1, sobre x_2 menos x_1.*

Ely: *¿esa es la fórmula de qué?*

Pau: *¿de la recta tangente?... ah no de la pendiente.*

…

Ely: *¿cuál es la pendiente?*

Manuel: *la pendiente… pues es ésta ¿no? [Señalando la recta tangente].*

Ely: *¿esa es la pendiente?*

Manuel: *sí.*

Alex: *esa es la recta tangente.*

Al poco tiempo recordaron la fórmula de la pendiente y, cuando se les pidió calcular la pendiente de la recta tangente, se percataron que con el procedimiento anterior era necesario conocer dos puntos de esa recta:

Fco: *el valor de la pendiente de la recta tangente a la función en el punto P.*

Pancho: *¿cuál sería el otro punto de la recta?*

…

Pancho: *¿tenemos que hallar las otras coordenadas, no?... para sacar la pendiente.*

Para resolver esta dificultad intentaron, al igual que el grupo de investigación, colocar otro punto sobre la recta tangente y estimar sus coordenadas con rectas paralelas a los ejes:

Ely: *¿cuál es dos?*

Itzel: *esta [señalando la tangente].*

Ely: *¿la pendiente de la tangente vale 2? ¿Cómo le hicieron para saber eso?*

Gaby: *ehhh sacamos los puntos.*

Chely: *las coordenadas.*

Gaby: *el punto que pasaba por esta [señalando una línea vertical sobre el punto que dibujaron en la curva] y aquí cruza para las otras coordenadas.*

Ely: *¿qué coordenadas tiene ese punto?*

Gaby: *tres coma cinco cuartos.*

Ely: *y ¿cómo le hicieron para estimarlo?*

[silencio]

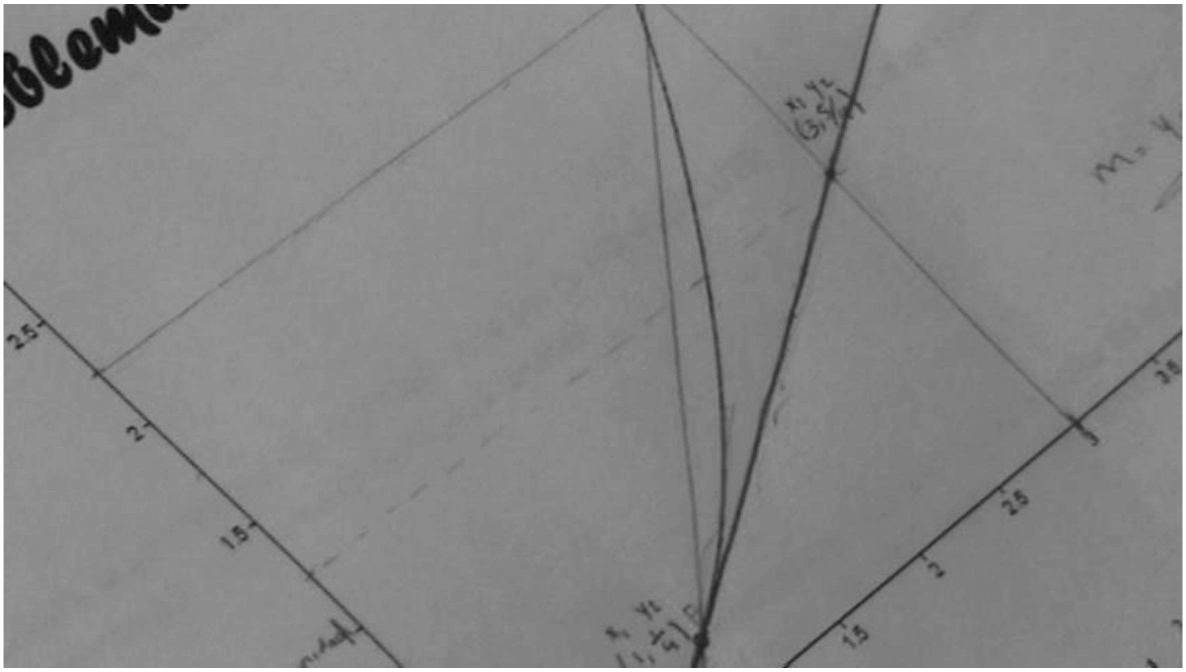
Gaby: *en base a éste que llega hasta aquí podemos sacar esta [señalando la línea vertical que dibujó y otra línea horizontal de manera arbitraria].*

…

Alex: *yo creo que podemos sacar también la pendiente de la recta tangente, supongamos que, si tenemos ya aquí este punto lo único que necesitaríamos es lo demás; tenemos el mismo punto, todos pasan por el mismo punto... yo diría que lo que nos hace falta es el otro resultado, pero como ese resultado no lo tenemos, tenemos que inventárnoslo.*

Gabriel: *[risas] ¿inventarlo wey?*

Alex: *más o menos como dice "largas", hay que poner un puntito aquí para saber por qué punto pasa.*



4.19.- Propuesta de Alex: colocar otro punto sobre la recta para intentar adivinar sus coordenadas.

Aunque todos los chicos ya habían llevado el curso de Cálculo, la mayoría no relacionó la situación planteada con los temas vistos en clase. Gaby, por ejemplo, recuerda la definición de derivada y puede identificar en el contexto del problema que se trata de la pendiente de la recta roja; sin embargo, no alcanza a comprender que ha resuelto el problema. Su equipo, sin saber a ciencia cierta la razón, calcula correctamente la derivada de la función y como no logran dar sentido al resultado creen que su derivada es incorrecta:

Ely: *¿qué hiciste Chely?*

Chely: *¿qué hicimos Gaby?*

Gaby: *dile pues.*

Chely: *sacamos la derivada de esto.*

Ely: *¿de qué?*

Chely: *de "f" de "x", es igual a un cuarto de "x" cuadrada.*

Ely:	*¿y eso para qué?*
Chely:	*para saber más o menos por dónde queda el punto "Q", para poner el punto "Q".*
Itzel:	*a qué distancia del punto "P".*
Ely:	*a ver, explícame porque no entiendo.*
Chely:	*sacamos la derivada de un cuarto de "x" al cuadrado; para saber más o menos a qué distancia queda el punto "Q" del punto "P", a ver más o menos en dónde queda.*
Ely:	*¿qué tiene que ver la derivada de "f" de "x" con, dónde poner el punto?*
Gaby:	*es la pendiente.*
Ely:	*¿mande?*
Gaby:	*¿es la pendiente, no? De la recta tangente, ésta es la recta tangente y ésta es la función. Entonces estamos derivando la pendiente de esto.*
Ely:	*¿están derivando la pendiente o qué están derivando?*
Gaby:	*la recta, la recta, la función.*
Chely:	*la función.*
Ely:	*¿están derivando la recta de la función?*
Gaby:	*¿la recta de la función? Hay no se.*
Ely:	*¿y para qué la derivan?*
Gaby:	*para… ver que tan cerca está de la función, ¿no?*
Ely:	*no se, yo pregunto.*
Gaby:	*supongo que es para eso, pero no estamos seguras.*
Ely:	*porque no les pedía que derivaran.*
Gaby:	*pues no, pero queríamos ver si tenía algo que ver con las derivadas.*
Ely:	*¿qué es la derivada?*
Gaby:	*ya se me olvidó… es la pendiente de esta recta.*
Ely:	*¿es la pendiente de qué?*
Gaby:	*de la recta tangente a esta función.*
Ely:	*a ver, repíteme porque no te escuche.*
Gaby:	*es la pendiente de esta recta [Señalando la recta roja].*

Ely: *¿por qué de esa recta?*

Gaby: *porque sí.*

Chely: *porque es la tangente.*

Gaby: *porque es la tangente de la función.*

Ely: *¿y eso qué?*

Gaby: *ésta es la recta tangente a la función.*

Ely: *ajá.*

Gaby: *y la derivada es la pendiente de esta recta.*

Ely: *ah, entonces ¿qué es lo que quieren hacer con la derivada?*

Gaby: *eh supongo que, no me acuerdo muy bien, es qué tanto se aproxima.*

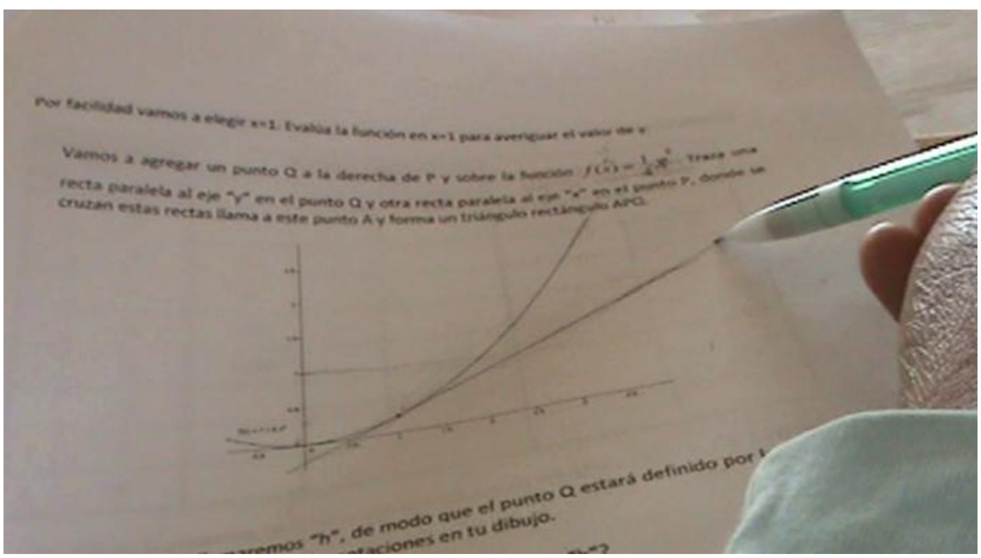
Ely: *ah, y entonces ¿qué resultado les dio?*

Itzel: *un medio de "x".*

Ely: *¿y entonces eso qué significa?*

Itzel: *¿punto cinco, no? Porque "x" vale uno.*

Gaby: *pero, aquí no le dimos valores, no sabemos si está bien la derivada.*



4.20.- Gaby explicando que la derivada de la función, es la pendiente de la recta que señala.

Respecto a las ideas de límite, solo un equipo visualizó que era posible calcular la pendiente de la recta tangente en base a las pendientes que habían calculado:

Manuel: *ya no, ya la regaste mucho, ya no se sabe ni cual es [Refiriéndose a que ya no puede distinguir la recta tangente].*

Gabriel: *cada vez nos vamos acercando a esta [Señalando la tangente].*

Alex: *a la roja. Entonces más grande lo hacemos que, esta recta pasa por… pues dice que es un dieciseisavo, entonces aquí sale así y lo que buscamos un medio.*

Gabriel: *sí, un dieciseisavo es aquí.*

Alex: *más o menos ahí, entonces…*

Gabriel: *por allá va a pasar, más abajo.*

Alex: *entonces ya sería un valor negativo; no un valor negativo, sino que menor que la recta que ya teníamos [Refiriéndose a la pendiente de la recta tangente que acaban de calcular].*

Manuel: *"y ahora saca otro resultado y más abajo" [Haciendo referencia a que supone les pedirían la pendiente de otra recta y ésta será menor a la anterior].*

Alex: *no, ya son todos.*

Manuel: *¿cuál de todas? ¿Ésta?*

Alex: *ésta es la que tenemos que encontrar, y nosotros ya marcamos todas las demás, entonces ya.*

Gabriel: *ya hiciste menor.*

Alex: *…explica tu razonamiento. Nos pregunta que si podemos, dice: ¿puedes estimar el valor de la pendiente? Pues sí podemos estimar un valor de la pendiente porque ya nos acercamos muy, muy, muy pegadamente casi un… es nada, estamos casi muy, muy, muy acercadamente a él. Entonces yo digo que sí podemos estimar el valor de la pendiente porque ya estamos muy cerca con esta recta y con ésta otra, está más o menos en medio de las últimas dos rectas que sacamos… Entonces vamos a decir que el valor más o menos aproximado sí lo podemos estimar, está como entre la mitad de los últimos dos.*

4.21.- Alex indicando que, la pendiente que buscan está entre la pendiente de las rectas más próximas.

Más tarde, en el pizarrón, este mismo equipo explica que intentaron estimar el valor de la pendiente de la recta tangente calculando el promedio de las pendientes que se aproximan a la tangente por la derecha y por la izquierda; sin embargo el resultado que plantean no corresponde al promedio:

Alex: *nos brincamos a la seis, que dice: con base en los datos obtenidos ¿puedes estimar el valor de la pendiente de la recta tangente a la función, en el punto uno coma un cuarto? Explica tu razonamiento.*

Ely: *aja.*

Alex: *nosotros le pusimos que si, que sí podemos decir aproximadamente cuál es el valor, porque tenemos dos rectas muy cercanas a la recta tangente.*

Ely: *¿nos explican eso por favor?*

…

Alex: *entonces vimos, y nos preguntan: ¿si pueden más o menos ver una cantidad acercada a eso?... entonces nosotros dijimos: a lo mejor sí, porque así como decía el problema de Yaya, que si podíamos decir más o menos lo que faltaba. Entonces nosotros también aquí podemos decir más o menos cuánto es la pendiente de la recta tangente, porque tenemos dos rectas que están más aproximadas a la recta tangente. Entonces nosotros lo que hicimos es más o menos ver cuál es la diferencia entre esta y esta [señalando las rectas]. Decimos cuánto es más o menos la diferencia, entonces un compañero decía: hay que sumar los dos y dividirlo y ya sacamos el promedio… Entonces, lo tratamos de hacer de otra forma y, entonces, lo que nos salió más o menos vimos que era ocho cuartos.*

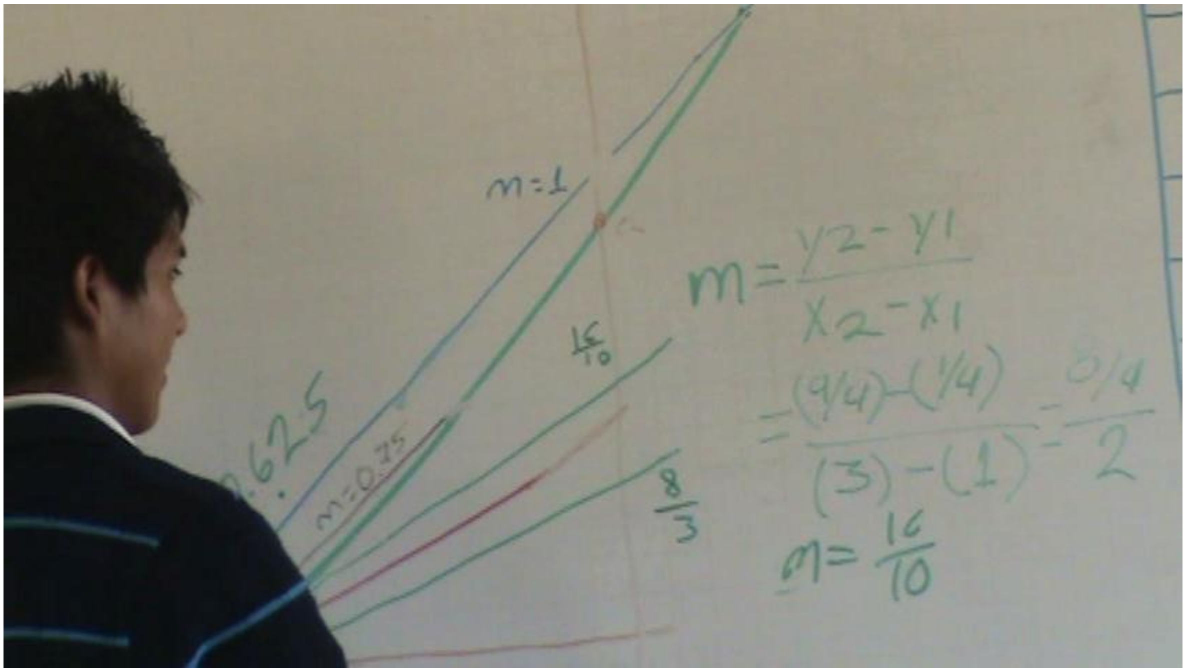
Ely: *ocho cuartos dicen ustedes, nos dices cuánto mide la pendiente de la recta que está arriba y la que está abajo. Las pendientes de las rectas que dices que están en medio.*

Alex: *ésta nosotros dijimos que era de diez dieciseisavos [pero escribe 16/10], y ésta que valía ocho tercios.*

Ely: *¿y concluyeron que la tangente media?*

Alex: *ocho cuartos, porque es la mitad de este y este, es la diferencia que hay a la mitad… nosotros sacamos más o menos que era el valor de la pendiente esa.*

Cabe señalar que los alumnos no explicaron cómo llegaron al resultado de 8/4. Pero por los valores de las rectas secantes que señalan, 8/3 y 16/10, parece indicar que simplificaron 16/10 a 8/5; por lo tanto, las rectas secantes tenían una pendiente de 8/3 y 8/5 respectivamente, de modo que supusieron que la recta tangente estaría entre esos valores, quedando: 8/3, 8/4 y 8/5.



4.22.- Análisis que hace Alex para encontrar el valor de la pendiente de la recta tangente.

Hay evidencia de las heurísticas que usaron al momento de intentar determinar ¿qué sucede con el punto Q si cambia el valor de "h"?:

Luis M: *si cambiamos el valor de "h".*

Pancho: *si lo hacemos más grande o más chico, por ejemplo.*

Luis M: *"h" es igual a uno punto cinco, si lo cambiamos y le ponemos dos punto cinco sería hasta acá y, ya no sería triángulo rectángulo ya quedaría aquí.*

…

Ely: *¿por qué tiene que moverse el punto "Q"?*

Luis M: *¿por qué pues?*

Pancho: *porque también se mueve la distancia ¿no?*

Ely: *¿cuál distancia?*

Pancho: *esta, la "h".*

Luis M: *porque "Q" está definido por las coordenadas de "h", y si se mueve "h" se hace más grande "Q"... yo pienso pues, quién sabe [risas].*

Referente a la actividad "La tarea de Jorge":

Esta actividad ocupó más tiempo del contemplado, en ella los chicos mostraron entusiasmo al ver que la actividad contemplaba el uso de la computadora; sin embargo se presentaron contingencias y dificultades que pudieran influir en un desaliento de la participación de los estudiantes, lo cuál, afortunadamente no ocurrió.

Esta actividad inicialmente fue nombrada "La suma de Riemman"; pero, debido a que los participantes habían leído sobre algunos de los problemas irresueltos de la humanidad, entre ellos la hipótesis de Riemman, se modificó el nombre pensando que éste podría influir en su participación. En el desarrollo de la misma, se observaron algunos errores conceptuales que suponíamos eran dominados por los estudiantes, ya que frecuentemente tienen contacto y están familiarizados con ellos; por ejemplo, en conceptos muy básicos de Geometría:

Para identificar el diámetro del círculo:

Barby: *mueve el punto divisiones hasta la posición cinco, ¿en cuántas partes está dividido el diámetro del círculo?*

Mane: *¿en cuántas partes está dividido el diámetro?...*

Barby: *¿cuál es el diámetro?*

También en el cálculo de áreas hubo confusión, pues intentaban calcular el área del rectángulo con una fórmula errónea:

Liz: *pero ésa es para el triángulo.*

Peny: *¿ah si? ¿Entonces cómo va a ser?*

Liz: *base por altura es para el rectángulo pero, base por altura sobre dos es para el triángulo.*

Referente a nociones de Cálculo, se observa que identifican algunas definiciones y relaciones, pero les cuesta trabajo ligar unos con otros. Lo que indica un débil manejo del concepto de función, como se muestra a continuación; los siguientes comentarios surgieron cuando se les cuestiona sobre la relación que existe de evaluar f(x) en el valor Δx obtenido con cada rectángulo:

Mane: *la base de tres rectángulos.*

Ely: *¿solo eso? ¿se acuerdan qué es "x" y qué es f(x) en una gráfica?*

Mane: *"x" es la variable independiente y f(x) es la variable dependiente.*

Ely: *¿y en la gráfica?*

Mane: *f(x) es "y", y "x" es "x".*

Ely: *¿y ustedes qué sacaron?... [Silencio].*

…

Ely: *ah sí, ¿en la gráfica qué fue f(0.2)?*

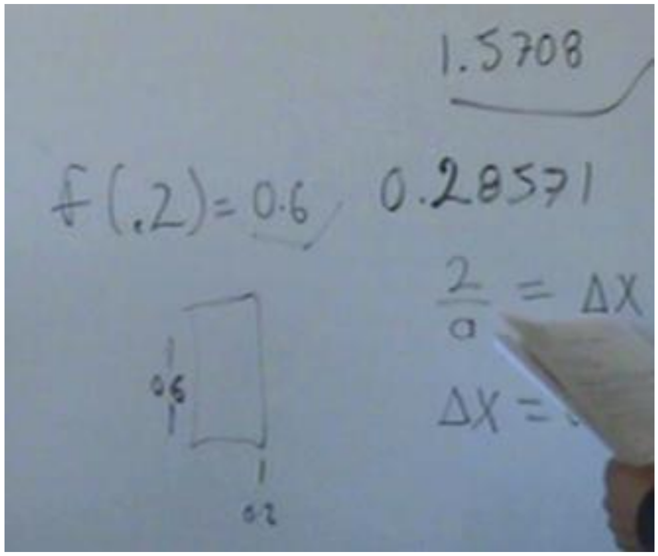
Mane: *¿qué representa?*

Ely: *sí.*

Mane: *lo dejamos así.*

Ely: *¿la base de tres rectángulos?*

Mane: *aja. [Responden nuevamente eso, a pesar que ya habían recordado que f(x)=y, incluso lo habían señalado en la gráfica. Sin embargo, después se percatan que es la altura del primer rectángulo].*



4.23.- Indicando que f(2) es la altura del primer rectángulo.

En otro equipo sucedió algo muy similar:

Ely: *¿qué pasó chicas?…*

Peny: *nos salió esto.*

Ely: *"la base de tres rectángulos", ¿solo eso?*

Peny: *pues da cero punto seis.*

Ely: *una pregunta, ustedes calcularon ¿qué cosa? ¿Esto qué es?*

Peny: *f(x) de cero punto dos.*

Ely: *ah ok, f(x)… ¿se acuerdan qué representa "x" y qué representa f(x)?... [Silencio]… ¿qué cosa es, en una gráfica, "x" y f(x)?*

Liz: *"x"… hay… la variable creo.*

Peny: *la variable independiente.*

Ely: *¿cuál es la variable independiente perdón?*

Peny: *ésta es la variable independiente [señalando el eje de las "x"].*

Ely: *¿quién? ¿Cuál de las dos?*

Peny: *la "x".*

Ely: *¿y la otra?*

Peny: *la función de "x" es la variable dependiente.*

Ely: *sí,"x" es la variable independiente y f(x) es la variable dependiente. ¿Pero en la gráfica?*

Peny: *ah en la gráfica, según ésta es la variable dependiente [señalando el eje de las "y´s"] y ésta la variable independiente [señalando el eje de las "x´s"]… porque la variable independiente va como horizontal y la variable dependiente va como vertical.*

Ely: *¿y ustedes qué calcularon?*

Peny: *la f(x).*

Ely: *¿entonces qué cosa es la f(x)?*

Liz: *la variable dependiente. [Sin embargo tampoco se percatan que f(0.2) es el valor de "y" en x=0.2, y que corresponde a la altura del rectángulo].*

Para responder a las preguntas, referentes la medida de la base de cada rectángulo modificando el número de divisiones, los participantes se apoyaron en el software y colocaron segmentos definidos por puntos en los extremos de las bases de cada rectángulo, para posteriormente solicitar al software la medida de esos segmentos:

Ely: *¿qué hicieron?*

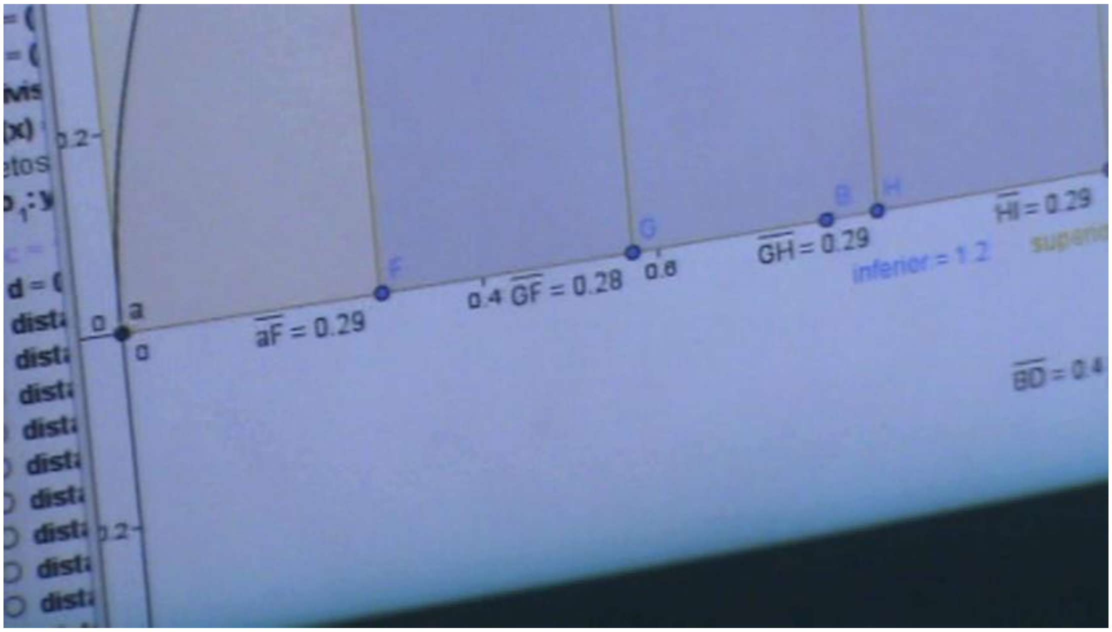
Liz: *pusimos éstas y medimos para las cinco.*

Ely: *ah pusieron un punto en cada división y ¿qué hicieron?*

Liz: *medimos, ¿las borramos o las dejamos?*

Ely: *como gusten, ¿habrá otra manera de saber las distancias en lugar de estarlas midiendo con las herramientas del software?*

Peny: *yo creo que sí.*



4.24.- El primer acercamiento para conocer la base de cada rectángulo fue dibujar y medir cada segmento.

Aquí se observa que estos alumnos son capaces de efectuar algunos procesos metacognitivos (monitoreo y control; Schoenfeld, 1985) y se apoyan en ellos para refutar sus resultados inválidos.

Liz: *no mira, se pasa con 0.01, está mal. [Están respondiendo a la pregunta 5 y suman las bases de todos los rectángulos, para verificar que el total es el diámetro del círculo, pero obtienen 2.01].*

En otro equipo se percatan del mismo error cuando responden a la pregunta 7:

Ely: *¿todos iguales? ¿Y en la de siete todos miden 0.3, todos iguales?*

Barby: *aja.*

Ely: *entonces se supone que si mido, 0.3 más 0.3 más 0.3… ¿cuánto tiene que salir?*

Mane: *2.1.*

Ely: *¿2.1? ¿Por qué 2.1?*

Mane: *porque de seis saldría 1.8… y tiene que salir 2.*

Ely: *¿2 o 2.1?*

Mane: *2.*

Ely: *¿entonces cuánto debería de salir?*

Mane: *me falló ahí. [Se da cuenta que 2.1 no corresponde al diámetro del semicírculo y por lo tanto, las divisiones no pueden medir 0.3 porque exceden el valor del diámetro].*

De inicio, los chicos se mostraron muy confiados y dependientes del software, pero al ver que lo que percibían de la pantalla no satisfacía las condiciones iniciales comenzaron a buscar otras alternativas:

Mane: *[hace un zoom a la imagen] sí, es cierto que nos falta un espacio para llegar al 0.3. [Continúa haciendo zoom].*

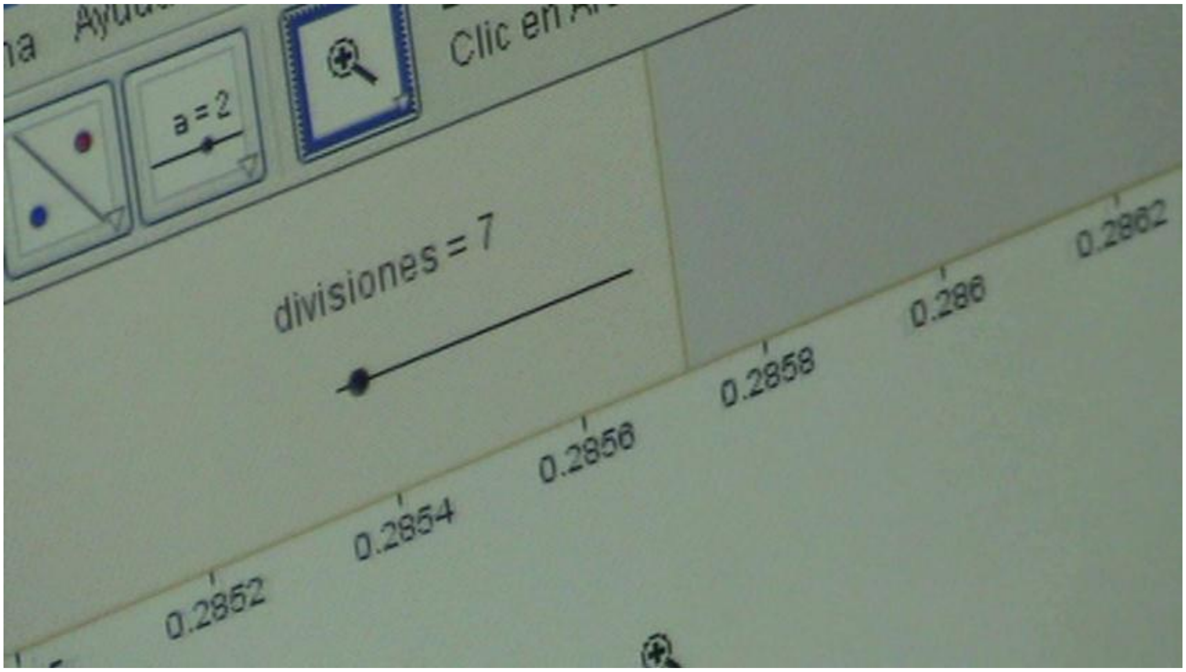
Ely: *¿cuánto es donde está la línea?*

Barby: *es el 0.286.*

Mane: *a ver [continúa haciendo zoom].*

Ely: *¿habrá alguna manera de hacerlo analíticamente? porque ya vimos que la computadora está muy poderosa, pero hacemos mucho zoom y aún así…*

Mane: *aún así no.*



4.25.- Haciendo "zoom" para visualizar el tamaño de cada segmento en siete divisiones.

Para intentar visualizar la solución a siete divisiones, retomaron la respuesta a cinco divisiones que ya habían comprobado era correcta:

Ely: *pues sí, solo con los datos que tienes en la hoja sabiendo que hay cinco divisiones. Con lo que ustedes ya me contestaron, me dijeron: el diámetro mide 2 y me dijeron hay cinco partes, entonces, ¿habrá alguna manera de llegar a este 0.4, pero sin hacerle zoom a la computadora?*

Mane: *[dice no con la cabeza].*

Ely: *¿no hay?*

Barby: *al dividir esto en cinco partes…*

Ely: *a ver repítelo.*

Barby: *al dividir del 0 al 2 dividirlo en 5 y de esos cinco medir la distancia de…*

Ely: *saber cuánto miden, no medir la distancia, porque quedamos que ya no íbamos a usar la computadora.*

Barby: *y sacar cuánto mide, y a lo mejor sale 0.4.*

Ely: *¿habrá una forma de hacerlo?*

Mane: *sí, como dice ella.*

Ely: *¿cómo dice ella?*

Mane: *que dividiéramos el diámetro entre las partes que nos piden y te da el resultado de cuánto mide la base de cada rectángulo.*

Cabe hacer mención que después de eso el equipo de Mane se mostró muy entusiasta y aunque tenían el apoyo del software, que les hacía todos los cálculos, hicieron manualmente la suma de los rectángulos. Para ello, primero calculan la altura de cada rectángulo y después desean calcular las áreas, pero cometen el error de tomar la coordenada de cada división como base, en lugar del valor que previamente habían calculado. Sin embargo, se dan cuenta de su error y corrigen:

Ely: *ah ok, ¿cuál es el primero?*

Mane: *es el de 0.4.*

Ely: *0.4 es…*

Mane: *que sería de aquí a aquí.*

Ely: *¿cuánto mide la base?*

Mane: *la base es 0.4.*

Ely: *¿cuánto mide la base?*

Mane: *nos equivocamos.*

Barby: *es que los hicimos al revés.*

Mane: *no, es que siempre la base vale 0.2 y yo le fui aumentando y no me fijé… entonces… siempre va a valer 2… y es que me quedé con otra cosa que tenía que ver con esto pero ya no… [Cuando dijo 2 él se refería a 0.2 y los demás le entendían].*

Algo que causó conflicto fue el escaso manejo del nuevo lenguaje y simbología que requería el ejercicio, comentarios como el siguiente se escucharon en las mismas personas por más de una ocasión:

Barby: *vamos a llamar… [Risas].*

Mane: *¿cómo dijo que se leía el triángulo de "x"?*

Ely: *delta.*

Mane: *delta de "x".*

Ely: *delta "x".*

…

Mane: *o sea es como "f de x", el delta "x".*

Ely: *no, delta "x", así le vamos a llamar a la base de cada rectángulo, como poner "x", como poner una variable. Para decir que la base va a valer algo, una incógnita, usamos delta "x" como la incógnita, pero no significa f(x).*

Referente al concepto de límite, se obtuvieron comentarios como los siguientes al momento de intentar dar solución al problema:

Mane: *¿qué sucede con la base de los rectángulos a medida que aumenta el número de divisiones? Se va haciendo más chica.*

Barby: *se hace más pequeña la base ¿o qué?*

Mane: *sí, la base.*

Barby: *¿qué ocurre en el área inferior y superior si crece el número de divisiones?... área inferior y área superior [señalando]…. Se hace más grande [risas].*

Mane: *¿qué ocurre?*

Barby: *sí, aquí está el número de divisiones 90, fíjate, si es de 10 es 0.32 y acá sube… bueno, una sube y una baja. En el área inferior sube, aumenta, y en el área superior baja porque de 72 bajó a 52, aja y de aquí de 32 a 55. [Nótese que se refiere a 1.72, 1.52, 1.32 y 1.55, sin embargo sus compañeros le entienden sin mayor problema].*

Mane: *sí.*

Barby: *hay ¿cómo le pongo?*

Mane: *aumenta y baja.*

Barby: *aumenta en el inferior… y en el superior…*

Mane: *disminuye, ahí disminuye.*

En el siguiente comentario se muestra como Mane va construyendo sus ideas a partir de los datos que puede observar en la computadora:

Mane: *1.57 y 1.59… de 90 divisiones… ¿cuántas divisiones necesita Jorge para tener la mitad del área del círculo?*

Ely: *no vamos a sumar el área inferior y el área superior.*

Mane: *no… ya es el área ¿no? ¿90? ¿o me equivoco?*

Ely: *argumenta tu respuesta.*

Barby: *pues 90.*

Mane: *pues, en todo caso serían más de 90.*

Barby: *pero como 92. [Barby se da cuenta que la diferencia es muy pequeña y cree que ya no será necesario agregar tantas divisiones].*

…

Mane: *¿y si hiciéramos 91?... ¿cómo aumentaré si lo sacamos de 90? [Como el software no le permite hacer más divisiones, intenta determinar el crecimiento a partir de los datos conocidos].*

Barby: *o fíjate a cada, ponte en 89 y fíjate cuánto aumenta… es que es lo mismo.*

Ely: *¿cómo, es lo mismo?*

Mane: *o sea que ya cuando empieza a variar es en el 73, 74 y es el del superior, sería el superior 1.6 y ya se subió, acá tendría que bajar y éste también se baja, éste se sube y éste baja… necesitamos que los dos entren más… es más de 91… [Intenta explicar que, en 74 divisiones el área superior vale 1.6 y el área inferior 1.54; es decir, 0.01 de diferencia de las áreas que se obtienen en 90 divisiones. Y luego dice que necesita que los datos converjan más, por lo tanto cree necesarias más de 91 divisiones].*

Mane: *106.*

Barby: *¿106?*

Mane: *sí, 106 para que suba uno más porque mira fíjate, si estoy aquí es 1.6.*

Barby: *aja.*

Mane: *entonces son 16 del 74 al 90… son 16, en dado caso que se los aumentara, me daría ahora sí ¿no?*

Barby: *¿y entonces?*

Mane: *necesitaríamos sacar la operación.*

Barby: *pero sería para punto… no, entonces serían treinta y… 106 más 16, porque serían 57 y apenas llegaríamos a 56 ¿o cómo?*

Mane: *o sea mira fíjate, mira, para que suba uno en superior tengo que bajar 16, ¿si me entiendes? tengo que bajar 16, ¿si te fijas?... Ahí ya bajó y subió uno, estaba en 54 ¿si?, entonces yo bajé 16 para que subiera uno y, entonces, lo que tengo que hacer es sumarle 16 para que baje uno, tengo que sumarle o sea que son 32 ¿verdad? ¿Es lo que tú me decías?*

Barby: *106 más 16.*

Mane: *132.*

Barby: *122.*

Mane: *sí, 122, ¿entonces si estamos de acuerdo ahí?*

Barby: *¿pero, por qué? Tenemos que poner: argumenta tu respuesta.*

Mane: *¿por qué?*

Barby: *pues porque tenemos que bajar 16.*

Mane: *porque para aumentar o bajar una unidad debo de subir 16.*

Ely: *¿16 qué?*

Mane: *16.*

Barby: *divisiones.*

Mane: *que en todo caso serían los rectángulos. [Nótese que en el intento de responder a la pregunta, los chicos han transformado la situación a un problema lineal, sin percatarse que su razonamiento no funciona si continúan bajando las 16 divisiones que establecieron].*

Más tarde, cuando se les pregunta la relación que tienen estas sumas de áreas y el área que calcularon en la pregunta número uno, les cuesta un poco de trabajo darse cuenta que las sumas de áreas tienden al área del semicírculo que calcularon al inicio de la actividad:

Ely: *¿qué relación tienen estas áreas con el área que calculaste en la pregunta uno?*

Mane: *que si el… Nosotros llegamos a la conclusión de que, si el círculo de la pregunta uno estuviera completo, no fuera la mitad del círculo, sería algo parecido a lo de los valores del inferior y del superior, o sea sumándolos me daría casi el mismo círculo.*

Ely: *ah, dices: si sumo las áreas de los rectángulos inferiores y las áreas de los rectángulos superiores, me daría el área del círculo completo.*

Mane: *aja.*

Ely: *¿y qué pasa si no los sumo? ¿Si nada más tomo en cuenta las áreas superiores o las áreas inferiores?*

Mane: *los del área superior… que los dos se aproximan a la de la pregunta uno, pero a la de la mitad, no el completo, ¿si me entiende?*

Ely: *no.*

Mane: *o sea, que en el uno nos piden del resultado nada más de la mitad.*

Ely: *aja.*

Mane: *y que el superior y el inferior están también separados, están separados por alguna razón, entonces se acercan los dos a lo que dé el resultado de aquí [señalando la respuesta de la pregunta uno]. Son aproximados porque aquí serían 1.32 y acá 1.72 [escribe estos resultados dejando el 1.5708 en medio de ellos].*

Ely: *entonces, a ver, dices que: el área superior y el área inferior ¿qué?*

Mane: *se aproximan al área del círculo de la pregunta uno.*

4.26.- Mane explicando cómo el área superior e inferior se aproximan al área del semicírculo.

El equipo de Liz comenta a esta pregunta:

Ely: *¿qué relación tienen estas áreas, con el área que calculaste en la pregunta número uno?... me acaban de decir 1.32 y 1.72 ¿qué relación tienen esos números con lo que calcularon en la pregunta uno?*

Liz: *el 1.32 le falta para llegar al 1.57 y el 1.72 se pasa.*

Lo que da pauta a cuestionarlos para verificar si realmente están visualizando el límite de la función:

Ely: *ok, ¿qué ocurre con el área inferior y superior si crece el número de divisiones?*

Peny: *que los números en el área superior se va disminuyendo y en el área inferior se va elevando.*

Ely: *¿se eleva hasta el número mil o cómo dicen que se va elevando?*

Liz: *por decir en el 90 aumentó uno, aumentó uno más dependiendo de cuanto media la base. Por decir de aquí, de 1.32 aumentó…*

Ely: *dices: si aumento el número de divisiones, o sea si pusiera mil divisiones, como va aumentando el área inferior tal vez me llegue a dos.*

Liz: *aja.*

Ely: *¿si? ¿Puede llegar a dos?... si aumento el número de divisiones, dices: va aumentando el área inferior ¿si?*

Liz: *sí.*

Ely: *entonces, puede ser que si aumento mucho me llegue al número dos.*

Liz: *sí.*

Ely: *¿si? ¿Hasta el dos?, dices: el área superior… ¿qué pasaba?*

Liz: *va disminuyendo.*

Ely: *o sea que si aumento mucho el número de divisiones.*

Liz: *el área superior va disminuyendo.*

Ely: *¿puede ser que llegue a cero?... ¿disminuye, disminuye, disminuye, disminuye hasta que llegue a ser un área cero?*

Liz: *sí, puede ser.*

Ely: *¿qué opina el otro equipo?... ¿si me entendieron a la pregunta?*

Mane: *que a lo mejor se puede pasar y no quedar el cero exacto.*

Ely: *¿o sea un área negativa?*

Peny: *aja.*

Ely: *¿un área negativa?*

Barby: *no puede ser.*

Liz: *porque si nunca… aquí va aumentando y aquí disminuyó.*

Mane: *es que por decir, si ya vamos a llegar a cero y por decir tienes dos y tienes que bajar tres. [Nótese que aquí el alumno continúa con su razonamiento lineal y se descontextualiza de la actividad].*

Ely: *ah pero lo que yo estoy diciendo es lo siguiente, vean. Les pregunto ¿qué ocurre con el área inferior y superior si crece el* *número de divisiones? Y ellas me dicen, y ustedes también me dijeron, ellas me dicen: ah mire, fíjese que el área inferior tenía diez divisiones y tenía 1.32, tenía veinte divisiones y tenía 1.45, cuando llegué a noventa tenía 1.55. Y dicen 1.32 es más pequeño que 1.55 entonces el área va aumentando, y yo les pregunto ¿puede ser que llegue al número 2 o al número 3 o al número 4 o al número 1000 el área inferior?*

Mane: *sí puede llegar, pero va a tener un límite, ya no va a poder… sí va a poder seguir haciéndose grande, pero ya más no va a poder, yo digo que ya saldría otra figura o no sé. [Parece que nuevamente contextualiza los resultados con la actividad].*

Después de mucha discusión, Mane logra darse cuenta que esos valores no pueden aumentar y disminuir de manera aislada:

Mane: *ya no se puede, ya no se puede porque aquí llegamos al punto que cuando yo tomé los 16, las 16 unidades entonces tanto acá iba a cambiar como acá iba a cambiar, entonces aquí a lo mejor aumentó 56 [escribe 1.56] y acá 1.58. Y ya va a llegar a un lugar hasta donde se van a cruzar y van a quedar a tope.*

Ely: *¿cómo a tope?*

Mane: *o sea que uno va a quedar igual que el otro, o sea el que era superior va a quedar igual que el que era inferior y van a quedar del mismo tamaño.*

Ely: *¿y cuál será ese tope?*

Mane: *puede ser el 1.57.*

Ely: *¿por qué el 1.57?*

Mane: *porque… unos van para abajo y otros van para arriba.*

Ely: *pero ¿por qué no en uno, por ejemplo? ¿Por qué dices 1.57 y por qué no 1?*

Mane: *¿por qué 1.57?*

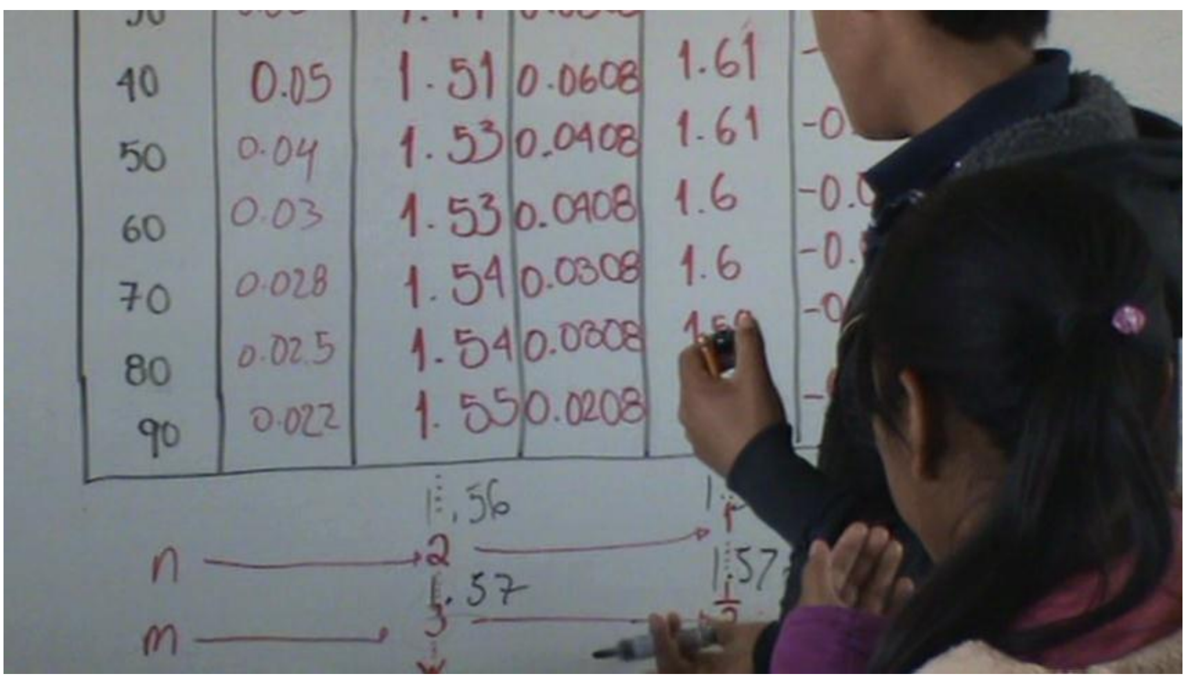
Barby: *¿te basaste en esto o por qué? [Señala el 1.5708 de la respuesta a la primera pregunta].*

Mane: *pues no sé.*

Barby: *¿o por qué?*

Mane: *ah sí, es cierto. Porque éste es el resultado del área del semicírculo que nos pidieron, de la mitad del círculo… sí, por* *decir, sumándolos los dos es el círculo completo, entonces nada más tomando la mitad de los cuadrados que estamos ocupando, para uno solo…*

4.27.- Mane se da cuenta que las sumas inferiores y superiores convergen.



4.28.- Intenta predecir en qué número de divisiones las sumas, inferior y superior, tendrán el mismo valor.

Más tarde, cuando se le pide a Mane que explique su razonamiento, responde:

Mane: *no son resultados que deba de decir así nada más, de decirlos al tanteo, sino debo demostrarlo, pero no sé cómo explicarlo.*

Ely: *ok la última, expresa el área del semicírculo en términos de la suma de los rectángulos.*

Mane: *ese ya no lo alcanzamos a resolver, nada más le pusimos: sumar el área de las 122 divisiones.*

Aquí nos podemos percatar que, los chicos han desarrollado conciencia sobre la importancia que tienen sus argumentos y que éstos deben ser sometidos a un escrutinio para darles validez o refutarlos.

También podemos observar que, el alumno sabe perfectamente cuál es el proceso que debe seguir para obtener el área del semicírculo; sin embargo, para dar respuesta necesita hacer todas las operaciones, pues desconoce que existe una notación para simplificar el proceso que desea señalar.

Análisis global de resultados

Las actividades presentadas, cubrieron las expectativas que se establecieron en las metas de este trabajo; pues, las cuatro fueron aplicadas al grupo de investigación y dos de ellas al grupo control. Además, resultaron novedosas para los alumnos, los invitaron a experimentar y demostrar lo que sabían y, averiguar lo que desconocían.

Se pudo documentar, algunas de las dificultades que presentan los estudiantes al enfrentarse a situaciones problemáticas, que involucran el concepto de límite; observamos que los estudiantes que han llevado el curso, por ser de semestres avanzados, cuentan con herramientas que indudablemente les permiten avanzar más rápido en la resolución de los problemas, por ejemplo:

En sus intentos por construir la expresión, que representa la distancia que le falta por recorrer a Yaya en “n” saltos, el grupo control se apoyó del manejo de fracciones en la calculadora para probar o desechar sus conjeturas. De esta manera llegaron a la expresión buscada; sin embargo, el grupo de investigación no pudo construirla tan fácilmente ya que no se pudo apoyar de esa herramienta.

También, el grupo control se percató fácilmente que, aunque numéricamente es posible seguir dividiendo el valor que representa la distancia por saltar, físicamente es imposible que se realice dicha división; lo dice Pancho al mencionar: “y aquí ya paramos porque es el final, es el estanque, ya no nos podemos pasar más allá del estanque”. Sin embargo, el grupo de investigación logró visualizar esta situación hasta que resolvieron la actividad “Reparto de pizza”. Pero a pesar de ello, algunos como Fidel, se quedaron con la idea que si la pizza fuera más grande, se podría repartir a mayor número de personas. Esta cuestión también surgió en el grupo control y fue aclarada fácilmente por Luis M, que argumenta: “si la distancia es grande, los saltos van a ser grandes, pero si la distancia es pequeña los saltos también serán pequeños”.

En el momento que calculaban la distancia que le falta por recorrer a Yaya en el salto 10; los muchachos del grupo control que conocían la notación científica, pudieron realizar la conversión y percatarse, numéricamente, que la distancia es muy pequeña; a diferencia de los chicos del grupo de investigación, que dejaron expresada esa distancia como una fracción y no contextualizaron que, era imposible dar un salto de la mitad de ese tamaño.

También observamos que ambos grupos, comenten los mismos errores y se dejan influenciar de la misma forma por el llenado de tablas. Por ejemplo, cuando Luis M (grupo control) dice que ellos pudieron dibujar hasta el noveno salto; sin embargo, están convencidos que deben haber más saltos por realizar ya que la tabla tiene diez espacios, y lo dice: “Porque aquí está hasta diez”. O como cuando Juan C (grupo de investigación) le dice a Yaz, que si realmente fueran ocho saltos los que podría dar la rana, la tabla debería tener solo ocho columnas; y que si la tabla tuviera cinco espacios, la rana ya debería haber llegado al estanque en el salto cinco.

Por otro lado, nos percatamos que las formas de abordar el concepto de límite fueron muy similares en ambos grupos:

Cuando Yaz (grupo de investigación) y Luis M (grupo control) mencionan que: Yaya debe llegar al estanque en un número finito de saltos, ya que sus extremidades son mayores del espacio que le falta por brincar; por lo tanto, por muy pequeño que fuera el salto sería inevitable que alcanzara el estanque.

Otro ejemplo es cuando, Kevin (grupo de investigación) y Alex (grupo control), llegan a la conclusión, en la actividad "El problema de la recta tangente", de que la pendiente de la recta tangente, tendría que estar entre las pendientes de las dos últimas rectas secantes y además, para tener una mejor aproximación se deberían tomar rectas formadas por puntos más cercanos al punto P; lo dice de la siguiente forma: "dando un valor más pequeño a los puntos para que se vayan aproximando al punto P".

Incluso esta actividad, "El problema de la recta tangente", que de acuerdo a las opiniones de los participantes fue la que les causó mayor conflicto. Resultó favorecedora para que los alumnos se animaran a expresar lo que saben y a descubrir lo que desconocen; pues un equipo del grupo control, se aventuró a estimar el valor de pendiente de la recta tangente. Ellos mencionaban que, la pendiente de la recta tangente la podrían calcular sacando el promedio de las dos últimas pendientes de las rectas secantes. Sin embargo, cuando dan la respuesta, ésta no coincide con lo que corresponde al promedio; es una muestra más de las dificultades operativas que siguen presentando los alumnos.

En las actividades, además de abordar el límite por medio de sucesiones, también se tuvo la oportunidad de hacerlo a través de series; por ejemplo, en "Reparto de pizza" y "La tarea de Jorge". En ambas los alumnos se dieron cuenta de la tendencia de la serie; la primera, representada por la sumatoria de las porciones de pizza repartida, tiende a uno. Es decir, a completar la pizza entera, como comentan: "tiende a que se va completando la pizza y se haga un entero". En la segunda, también se percatan que la sumatoria de las áreas de los rectángulos, tiende a completar el área del semicírculo. Sin embargo, aunque comprendieron que debían realizar la suma de todos los términos, en ninguna de las dos fueron capaces de construir la expresión que representara dicha serie; seguramente porque desconocen que existe una simbología para representar dicho proceso.

Capítulo 5
Conclusiones

En este trabajo diseñamos cuatro actividades que fueron aplicadas a estudiantes que no habían llevado el curso de Cálculo y, dos de ellas a un grupo de estudiantes que ya habían tomado el curso.

Se puede observar que los alumnos transitan entre los niveles Simbólico concreto y Formal del modelo SOLO (Pegg and Tall, 2010); pasando por los tres ciclos locales: Uniestructural, Multiestructural y Relacional (UMR).

Un ejemplo de esto es cuando Gaby, en la actividad "El problema de la recta tangente", decide calcular la derivada de la función, porque sabe que es la pendiente de la recta tangente. Cuando se le cuestiona, contesta argumentando que el resultado que obtuvo es la pendiente de la recta roja, ya que es la tangente a la función en el punto P; sin embargo, no sabe qué hacer con ese resultado, y dice que solo lo hizo para ver si tiene algo que ver con el problema planteado. Gaby se encuentra en el ciclo Multiestructural del nivel Formal propuesto por Pegg (2010).

Al inicio se plantearon las siguientes preguntas de investigación:

1. ¿Qué características deben tener las actividades propuestas, para que los estudiantes expresen lo que saben y estén dispuestos a investigar lo que desconocen?

2. ¿Qué procesos matemáticos desarrollan los estudiantes cuando se enfrentan a problemas que involucran el concepto de límite?
3. En sus intentos por resolver los problemas ¿utilizan alguna herramienta heurística?
4. ¿Las actividades propuestas contribuyeron para que los alumnos realicen y logren la comprensión del concepto de límite?

A continuación daremos respuesta a ellas de la siguiente manera: enunciaremos cada pregunta y narraremos, de acuerdo a lo observado en el análisis de actividades, el resultado que obtuvimos.

¿Qué características deben tener las actividades propuestas, para que los estudiantes expresen lo que saben y estén dispuestos a investigar lo que desconocen?

Las actividades propuestas en este trabajo, de forma general, fomentaron la participación de los alumnos; se puede observar en algunos de ellos que incluso se volvieron más críticos y reflexivos, ahora cuestionan las soluciones que les ofrecen sus compañeros, si les parece que no tienen suficientes argumentos a su favor, aunque también son capaces de aceptar cuando no tienen la solución del problema, pero no fácilmente se les puede engañar sobre su solución. En algunas de ellas se notó mayor participación que en otras, tal vez por el nivel de complejidad y el tiempo que involucraba su solución. Por ejemplo la actividad "Los saltos de Yaya" fue ampliamente aceptada y causó tal impacto que, incluso los alumnos que no acudieron a la sesión conocían el problema y me cuestionaban sobre la validez de sus argumentos. Esta misma actividad fue presentada al grupo control y al término de ella, los chicos se acercaron para felicitarme y hacerme saber que les había gustado mucho el trabajo que habían realizado ese día.

En cuanto a participación, se observa que personas reservadas, que normalmente no preguntan y mucho menos participan frente al grupo, se animaron a hacerlo incluso cuando no se les estaba solicitando su opinión.

La actividad que causó mayor conflicto en el grupo de investigación fue sin duda “El problema de la recta tangente”, fue una de las actividades más largas y al término de ella los chicos se acercaron para decirme que los había hecho sufrir; sin embargo, por las grabaciones, podemos observar que aunque no lograron resolver toda la actividad, la calidad de la participación no se vio afectada.

Con base en estos resultados y a lo propuesto por David Tall (2010) se puede concluir que, para lograr que los estudiantes expresen lo que saben y estén dispuestos a investigar lo que desconocen, las actividades deben: ser novedosas, resolverlas bajo el esquema de trabajo colaborativo (Hagelgans, 1995), dentro del contexto donde se desarrollan los participantes, que involucren una situación problémica narrada a manera de historia, que esté planeada para que los tiempos de resolución no resulten agobiantes, que involucren el uso de la tecnología, sus conocimientos previos y potenciando las “aproximaciones sensibles”.

En sus intentos por resolver los problemas ¿utilizan alguna herramienta heurística?

En cuanto a las herramientas heurísticas (Shoenfeld, 1985) que utilizan los muchachos, se puede observar que toman casos particulares para tratar de entender la situación; también se repiten constantemente lo que se les cuestiona a manera reflexión, tratando de identificar las partes involucradas en el problema que deben de resolver.

¿Las actividades propuestas contribuyeron para que los alumnos realicen y logren la comprensión del concepto de límite?

Se pudo observar que las actividades propuestas contribuyeron a lograr el concepto de límite en algunos de los participantes y con cierto nivel de abstracción. Se tiene evidencia de una evolución de sus ideas, por ejemplo, en la actividad "Los saltos de Yaya", la mayoría de los chicos tenían una idea equivocada de que la rana nunca llegaría al estanque; sin embargo, este pensamiento se modificó con la actividad "Reparto de pizza", pues pudieron experimentar la misma situación con material concreto y ahora no había duda que, era imposible entregar una porción si el número de invitados seguía aumentando.

Algo más que se puede notar es la evolución de la representación simbólica, pues en la primera actividad solamente un equipo logró construir la expresión que representa los saltos de Yaya, mientras que en la segunda actividad todos los equipos lograron definirla correctamente. Sin embargo aunque lograron superar esa dificultad simbólica, se enfrentaron a un reto mayor: describir por medio de una expresión, la sumatoria de las partes de pizza repartidas, la cuál no fue superada tal vez por la falta de madurez de los muchachos y el desconocimiento de la sintaxis que les permitiría lograrlo.

En ese mismo sentido, se puede observar que en la última actividad "La tarea de Jorge", un alumno logró calcular manualmente la sumatoria de las áreas de los rectángulos y sabía que para expresar el área del semicírculo, debía aumentar el número de rectángulos y hacer la suma de todas ellas; sin embargo, aunque tenía todo muy claro y logró construir su representación verbal, no pudo encontrar la sintaxis que le permitieran representar de forma simbólica lo verbalizado anteriormente. En parte, se puede justificar este hecho comparando el tiempo que tuvo que transcurrir en la historia de la humanidad para lograr el lenguaje del que ahora disponemos.

Por lo tanto podemos concluir que, dada la importancia del concepto de límite en el aprendizaje de las matemáticas, es conveniente promover el acercamiento de los estudiantes a través del mundo sensible, mediante actividades que atraigan su atención para que mediante su interacción, puedan pasar al mundo operatorio y pudieran alcanzar el mundo formal.

ANEXO A

Los saltos de Yaya

Video 234
Equipo de Bárbara:

Juan C: [empieza a contar con ayuda del dibujo, seguido de Penélope] uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho y de esta mitad, pues ya llegó [ríen todos]. ¿cuántos saltos dimos?

[nueve contestan sus compañeras]

Juan C: aquí está, [y comienza a dibujar los saltos en el segmento que ya está dividido, sin embargo cuenta hasta 10, sus compañeras le indican que fueron 9].

Juan C: nueve saltos y llega hasta acá, [indicando el estanque].

Barby: [lee mal la indicación, falta la "y"] Yaya desea llegar al estanque con el primer salto recorre la mitad de la distancia que inicialmente la separaba de el. [sus compañeros no entienden].

Video 235
Equipo de Fidel:

Mando: [lee la primera pregunta] con el primer salto, ¿cuál fue la distancia que recorrió Yaya?.

Fidel: un medio, [sus compañeros dudan y él explica ayudándose con las manos], si se supone que es un entero y con un salto brinca la mitad de esa distancia y la mitad de una distancia es un medio. [ríen].

Video 236:
Equipo de Yazmín:

Yaz: es que esta es la distancia, entonces lo tenemos que dividir a la… justamente a la mitad.

Dany: pero, como esto es casi lógica, no?

Yaz: ten pues gracias [devuelve un lapicero y saca su regla para medir la distancia del dibujo]. Esto sería así: mide nueve punto tres, sería…

Dany: sería tres…

Yaz: cuatro punto…[se toca la frente].

Dany: cuatro punto uno y medio.

Yaz: [dice si con la cabeza y piensa] no! Cuatro punto seisss… y medio, si mira porque de nueve sería cuatro punto cinco y queda una, dos, tres

Dany: mjm.

Yaz: cuatro punto seis y medio.

Dany: cuatro punto seis y medio.

Yaz: cuatro punto seis... Se escucha no sé como. Aquí [dividiendo el dibujo]. Entonces esto es, aquí [escribiendo en el dibujo], este es el primer salto.
Dany: no.
Yaz: si, de aquí a aquí es el primer salto [señalando con el dedo], ahora esto [señalando la siguiente mitad] lo tenemos que repartir a la mitad.
Dany: y a la mitad, y a la mitad, y a la mitad.
Yaz: que serían cuatro punto seis y medio, seis y medio casi siete [ríe y sigue dividiendo], serían dos…
Dany: dos punto tres, si no? Dos punto tres y dos punto tres, serían cuatro punto seis.
Yaz: sería el segundo salto… *pero [voltea a ver a Dany], nunca llegaría.*
Dany: pues es lo que digo, que nunca llegaría porque es, es pura lógica hay que sacar la lógica también.
Yaz: [continúa haciendo las divisiones en el dibujo] serían dos con dos, sería el tercero.
Dany: y un cuarto.
Yaz: uno con uno sería el cuarto.
Dany: medio con medio.
Yaz: cuatro.
Dany: y el cinco y el seis.
Yaz: *no pues tiene que llegar hasta acá mijo*, son: uno, dos, tres [contando los brincos].

Video 237:
Yaz: [cuenta los brincos que han dado]… seis, siete, siete brincos dio [dice incrédula y mostrando las palmas de las manos], *ocho, no mira [vuelve a contar] fueron ocho brincos.*
Dany: pero… no llega exactamente porque nada mas llego a mitad.
Yaz: no, ¿cómo a la mitad?, es que mira, este… [le muestra el dibujo y se queda pensando].
Dany: es que siempre va avanzando la mitad y luego otra vez la mitad, y luego otra vez la mitad, y la mitad, y la mitad, y la mitad, y la mitad [mostrando con el lápiz las primeras divisiones y después moviendo el lápiz en círculos a manera de un ciclo infinito].
[Yazmín ya entendió el problema e intenta explicar a sus compañeros].
Yaz: no es que… [piensa y dice moviendo las manos como señalando el fin la discusión] ya!, haz de cuenta: es como si llegara de aquí a... [señala un punto en el piso y empieza a contar los mosaicos], uno, dos, tres, cuatro, cinco… son diez cuadros desde aquí hasta allá son once, primero va a brincar cinco y medio y de esos cinco y medio que le restan de aquí para allá [señalando] va a brincar la mitad, entonces de esos cinco y medio [pensando] son dos y tantos, si [ascendiendo con la cabeza y viendo a su compañero Erandi que ha estado callado observándolos] dos y tantos y de esos dos que le quedan va a brincar la mitad.
Dany: otra vez la mitad [interrumpiendo].
Yaz: pero siempre va a dejar, como que va a quedar, ¿cómo? [dirigiéndose a un compañero de otro equipo que la está distrayendo], hay cálmate!.
[se vuelve a dirigir a Dany y le explica moviendo las manos] *va a quedar la mitad de la mitad, va a dejar atrás más espacio, más espacio, ¿si me entendiste ya o todavía no?*
Dany: mas o menos.
Erandi: va [mueve la mano sobre el dibujo simulando algunos brincos].

Yaz: ajá, entonces dio ocho brincos [puntualizando con el dedo sobre la hoja]. [continúa leyendo las instrucciones de la hoja] "Yaya desea llegar al estanque y con el primer…"
Equipo de Gregorio:
[están llenado la tabla]
Carlos: quinto [están analizando el quinto salto].
Greg:
Carlos: ¿cuánto le falta para el séptimo?
Greg: pues…
Carlos: [ríe].
Greg: [dice algo que no se le entiende y hace una línea entre el salto 6 y 7] o no?, si, no?
Carlos: ahorita vemos.
Greg: pues si pero esto no me gusta [dice señalando la respuesta que tienen en la pregunta 5].
Carlos: a mí también.
Greg: [dice no con la cabeza].
Carlos: ¿una forma algebraica de poner 192 enteros?
Greg: ¿enteros?
Carlos: [asciende con la cabeza y lo mira a los ojos].
Greg: [vuelve a preguntar] ¿enteros?
Carlos: ¿cómo sería? [mirándolo a los ojos].
Greg: no lo sé.
Carlos: ¿cuántas veces cabe el uno en el 192?, pus 192 veces [y asciende con la mano].
Greg: puede ser.
[ambos ríen y Gregorio piensa mientra ve la hoja].
Carlos: o pon esto mas y esto y ya nada mas pones el resultado [señalando la distancia por saltar en el salto 6 y 7].
Greg: [empieza a borrar].
Ely: no borren nada, tachen pero no lo borren, porfa.
Greg: [vuelve a escribir y tacha].
Ely: gracias.
Equipo de Yazmín:
Yaz: [me pregunta] ¿esto también?
Ely: sí. No vayan a borrar nada eh muchachos, si se equivocan en algo nada más táchenlo pero no lo vayan a borrar.
Yaz: aja.
Ely: si creen que se equivocaron en algo no vayan a borrar.
Min. 3:14; equipo de Bárbara:
Peny: es el quinto, sexto.
Juan C: un 512, [observa la hoja y ríe]i que fracciones!
Barby: era…
Juan C: un medio a la dos, un medio a la… cuatro.
Ely: no vayan a borrar nada eh, de lo que escriban.
Juan c: estamos escribiendo al revés.
Ely: ah si, donde lo escriban no vayan a borrar nada.
Peny: ¿y si lo quitamos y lo ponemos mejor?
Barby: uno por uno: uno, por uno: uno; dos por dos: cuatro, cuatro por dos: ocho.
Juan c: un medio a la tres.
Peny: un medio a la cuatro, un medio a la cinco, un medio a la seis y así sucesivamente.
[Bárbara llena la tabla como le indican sus compañeros].

Barby: ¿aquí qué va?
Peny: uno a la cinco, uno a la seis.
[risas]
Barby: ya también iba a poner un viento [ríe].
Juan c: un medio a la diez.
Juan c: ya. ¿qué dice?
Barby: observa la tabla después de cinco saltos, ¿cuánto le falta a yaya para llegar a su destino? Exprésalo de manera algebraica. [piensa] pues ya nada mas del seis, después del seis.
Juan c: ¿cuál sería de manera algebraica?, ¿sería aquí? [señalando en la tabla], expresiones. ¿no profa?
[risas]
Juan c: hay no!!!
Barby: bueno hay que dejar esa y pasamos a la otra. Si Yaya diera "n" saltos, ¿qué distancia le falta por recorrer?... [piensa] es… eso lo vimos la vez pasada.
Juan c: "n" saltos.
Barby: ¿"n"?, hay eso lo vimos la vez pasada.
Juan c: "n" entre "n".
Ely: en el salto 2, ¿qué distancia le falta por recorrer?
[piensan]
Juan c: ¿en el dos?... Un… un cuarto.
Ely: un cuarto, ¿en el tres?
Peny: un octavo.
Ely: ¿en el cuarto?
Peny: un dieciseisavo.
Ely: en el sex… ¿en el quinto?
Peny: un treinta y dos.
Barby: [se ríe de la expresión] treinta y dos.
Ely: bueno, ¿en "n" saltos?
Juan c: pues "n" saltos.
Ely: ¿eh?
Juan c: "n" saltos.
Ely: en el salto tres, ¿qué distancia le falta por recorrer?
Juan c: un octavo.
Ely: ¿en el cuarto?
Peny: un dieciseisavo.
Ely: ¿en el quinto?
Peny: un treintaidosavo.
Ely: ¿en el salto "n"?
Barby: ¿uno sobre "n"?
Ely: no lo sé.
Juan c: un "n" sobre treinta y dos.
Ely: [piensa] ¿en el salto diez?
Juan c: de… ¿en el salto diez?
Barby: si es que si fuera "n", ¿no sería uno sobre "n"?
Juan c: ¿"n" uno?
Barby: uno sobre "n".
Juan c: ¿no sería aquí un…?
Peny: un cuarto.
Juan c: ¿un uno sobre "n"?, [piensan todos] si es así.
Ely: observen bien su tabla.
Juan c: en el quinto salto dio un treintaidosavo, le hizo falta… un treintaidosavo…

Video 238
Fidel: pues de manera algebraica.
Armando: ¿cómo lo expresamos de manera algebraica?

Pelicula 239
Equipo de Yazmín:
Yaz: pero, ¿cómo sería de manera algebraica?, [me pregunta] ¿cómo sería de manera algebraica?
Ely: traten de usar la expresión.
Dany: mmm creo que mas o menos.
Yaz: [se dirige a Dany] ¿cuál expresión?, seria después de aquí [señalando la tabla], es que si aquí es un… 1/32… entonces le faltaría un… no pues no tengo ni idea. Si Yaya diera n saltos ¿cuánta distancia le faltaría por recorrer?
[risas].
Dany: ½ a la quinta + ½ a la x, igual a… ¿igual a qué?
Yaz: ¿cómo a ver no entendí?
Dany: ½ a la quinta + ½ a la x, sería la expresión para hacer esto.
Yaz: pero es que… [piensa y empieza a escribir] como tu dices es así: ½ a la quinta + ½ a la… hay a ponerle a la n, igual a..
Dany: ¿igual a qué?
Yaz: igual a un entero.
Dany: no.
[ríen y quieren borrar].
Ely: no borren, no borren.
Yaz: chin para que lo puse.
Ely: no, está bien nada mas si no les parece táchenlo.
Yaz: lo… paréntesis no verdad?
Ely: táchenlo si quieren, una raya nada mas para indicar que eso no.
Equipo de Gregorio:
Ely: ¿terminaron?, ¿cuántos saltos necesita Yaya para llegar al estanque?
Greg: "n" saltos.
Ely: ¿qué es n saltos? ¿qué significa n?
Greg: *la infinidad de saltos, muchos saltos.*
Ely: ¿muchos? ¿qué tanto es muchos?
Greg: los que tenga que dar para llegar al estanque.
Ely: y entonces ¿cómo saber cuantos necesita dar?
[piensan]
Juan k: la mitad, de la mitad, de la mitad, de la mitad, de la mitad de la distancia.
Ely: ¿cómo?
Juan k: la mitad, de la mitad, de la mitad, de la mitad de la mitad de la distancia para poder llegar al estanque.
Ely: ¿esa es la cantidad de saltos que necesita dar? Si lo anotaron?
Juan k: no, es que no salimos de acuerdo.
Greg: no. Es que, es que es un cuento de nunca acabar. Porque es la mitad y luego la mitad y luego la mitad. [señalando en el dibujo, pero no está dividido en mitades].
Ely: pero ahí donde estás dibujando, ¿estas dibujando la mitad?
Greg: según yo es si. [dibuja los saltos]
Ely: ¿esa es la mitad?
Greg: bueno calculando.
Juan k: porque esta diciendo cuando empieza yaya su recorrido salta la mitad, después de la mitad salta la mitad de la mitad, después la mitad de la mitad

de la mitad de la distancia que le falta y así sucesivamente hasta llegar al estanque, por eso serían muchas mitades.

Ely: y entonces en qué salto pueden decir que ya llegó?

Juan k: en n.

Ely: ¿por qué?, argumenten nada más.

Mientras, Yazmín está explicando a su equipo:

Yaz: y de aquí, de esta línea tiene que llegar a la mitad, y de esta línea tiene que llegar a la mitad, pero siempre tiene que llegar, porque cuando sea la mitad de nada ya llegó.

[sus compañeros se ríen]

Yaz: es que si llega.

[risas].

Yaz: es que tiene que llegar, es que llega porque llega. Nada más está en decir cuántos saltos necesita para llegar.

Dany: no.

Yaz: que si llega, tiene que llegar, ya te di muchos ejemplos. [y empieza a dividir su carpeta como el ejercicio]. Uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete colores, siete aunque no tengan la misma medida. La mitad de 7 serian 3 y medio… y la mitad de este sería…

Dany: la mitad de aquí.

Yaz: no, porque serían tres y medio, sería mas o menos por aquí, y la mitad de este seria por acá, y la mitad de este sería por aquí, y la mitad sería por aquí.

Dany: aja, y otra mitad, y ahí es donde siguen haciéndose mitades, mitades, mitades.

Yaz: si, sigue haciéndose mitades, pero va a llegar un momento en que supongamos que este es el lugar a donde va a llegar, va a ver un momento en que tiene que llegar porque supongamos llega aquí y la mitad aquí… *es que tienen que llegar, si llega, ¿verdad que si llega? [se dirige a Erandi]*

Erandi: *es que se va reduciendo.*

Yaz: *es que… aja se va reduciendo.*

Dany: *si pues de que se va reduciendo, se va reduciendo.*

Yaz: *es que por grande o chico que sea el espacio, llega porque llega.*

Erandi: *ya no hay espacio.*

Yaz: *ya no va haber mas espacio donde lo pueda cortar a la mitad sino que ya simplemente va a llegar. ¿si entiendes o no?*

Equipo de Gregorio que estaban escuchando:

Greg: va a llegar pero nunca va a llegar.

Juan k: ¿cómo es eso?

Greg: porque siempre salta la mitad de la mitad.

Juan k: pero tiene que llegar

Greg: algún día va a llegar.

Juan k: algún día.

Yaz: como dice Goyo, algún día… no algún día, pero tiene que llegar, porque yo digo que son 8 saltos.

Yaz: es que mira en 7 es aquí y todavía tiene un pedazo, entonces tiene que brincar a la mitad de ese pero llega, yo digo que es al octavo cuando llega cuando menos.

Erandi: *¿si se moviera al 8?*

Yaz: yo digo que es al octavo, al brinco número 8, pero tú fíjate.

Dany: fíjate Erandi.

Yaz: hasta que estemos de acuerdo los 3.

Barby: ¿qué sucede con la distancia que le falta a Yaya por recorrer a medida que aumenta de número de saltos?
Juan C: [pensando dice] que aumenta el número de saltos, ¿qué?, ¿cómo? [vuelve a leer la pregunta y responde]. Aumenta a once.
Peny: a once.
Juan C: a once aumentan los saltos.
Barby: que recorre la mitad de la mitad de la distancia.
Juan C: pero, ¿si es eso?
Barby: pues mira, como dices recorre un medio, un cuarto, un octavo y así hasta llegar a ¿un qué?
Juan C: un mil veinticuatro.

Pelicula 240:
Yaz: "n" vale un medio, por cada de este se le va reduciendo un cuarto [piensa].
Yaz: si un cuarto, no. [risas].
Yaz: "n" siempre va a ser el valor de esto, ¿o no?. ¿Ya terminaron? Hay apúrense.
Yaz: Si Yaya diera "n" saltos, ¿qué distancia le faltaría por recorrer?. Yo digo que sería así: "n"…porque aquí es un medio y le restas… no, no es cierto. ¿en esta? A ver hazlo [le dice a Dany].
Dany: no así como está.
Yaz: No es que… no. ¿y ya?
Dany: pues yo digo.
Yaz: Observa la tabla después del salto cinco. ¿Cuánto le falta a Yaya para llegar a su destino?
Yaz: Es que en ese caso aquí sería nada más un medio, porque aquí como sabes que es un medio a la quinta y es aquí
Dany: *un medio a la "n".*
Yaz: *¿pero cuanto vale "n" para que pueda reducirse a esto? y para que de "n".*
Dany: pero es que aquí se va, se va, se va.
Erandi: *"n" es infinito.*
Yaz: *¿"n" es infinito?. "n" es cualquier número [risas].*

Yaz: ¿qué sucede con la distancia que le falta por recorrer a Yaya a medida que aumenta el número de saltos? Se va reduciendo.
Yaz: es que yo estoy usando la lógica pues.

Pelicula 241:
Dany: pues yo digo que ya la tengo.
Ely: usen la expresión.
Dany: yo ya la tengo.
Ely: tú ya la tienes, pues entonces escríbanla.
Yaz: es que no puede ser un medio a la quinta mas un medio a la "n" porque tiene que haber una expresión, "n" tiene que valer algo.
Ely: ¿tiene que ser una qué?
Yaz: no se, no se que digo.
Ely: ¿una expresión?
Yaz: no.
Ely: ¿por qué no usan la tablita que ya tienen? Esa tablita les puede ayudar a encontrarlo. Lo que queremos es que generalicen, que encuentren la manera de decir cuanta distancia le falta recorrer a Yaya cuando diera "n" saltos.

Yaz: en los ejercicios que nos puso en el salón "n" es esto.
Ely: ¿el número de saltos? Sí, "n" es el número de saltos y es lo que les pregunta, si Yaya diera "n" saltos, entonces ¿Qué distancia le falta por recorrer?
Fidel: "n" distancia.
Dany: "n".
Ely: ¿"n"?
Yaz: ¿un medio a la "n"?
Ely: no se.
Yaz: es que siempre se va reduciendo por mitad, siempre, siempre se va reduciendo por mitad.
Ely: bueno, cinco minutitos eh.
Yaz: ¿y esto?, entonces sería "n"… un medio, un medio, no! Menos un medio ¿Para ti esta bien? [pregunta a Erandi].
Dany: [risas].
Yaz: es que si es "n" menos un medio. Porque si "n" es el número de saltos siempre se va restando la mitad, entonces va a ser "n" menos un medio.
Yaz: y el que no esté de acuerdo que apunte aquí [dirigiéndose a Dany].
Dany: yo ¿qué?
Yaz: es que… ¿tú crees que sea esto?
Dany: no se. [Toma la hoja y escribe $(½)^n$].
Yaz: *pero, ¿por qué a la "n"? se supone que estamos sacando…*
Erandi: si se supone que…
Dany: *un medio a la dos, un medio a la tres…*
Yaz: por eso siempre se va restando un medio, pero es que nada más nos estamos basando en este y en este.
Dany: este menos un medio.
Yaz: mira uno mas un medio seria un medio… ya me hice bolas, ya no está bien.
Dany: te digo.
Yaz: ¿por qué uno?, un entero menos un medio ¿te va a dar un cuarto? Pues no va a dar un medio. Es que ya no se.

Pelicula 242:
Ely: vamos a escuchar lo que nos dicen.
Juan C: nosotros hicimos en el tercer salto… son diez saltos. Tres, cuatro, cinco, seis… diez, son diez saltos. En el primer salto avanza la mitad, en el segundo salto avanza otra mitad de la mitad o sea que es un cuarto. En el tercer salto salta un octavo. En el cuarto salto salta un dieciseisavo. En el quinto salto un treintaidosavo. En el sexto salto un sesenta y cuatro havo. En el séptimo…
Ely: ¿es lo que salta? ¿es lo que va saltando?
Juan C: aja, primero pues salta la mitad de lo que tiene, la mitad de la distancia, de esa mitad que le falta avanza otra mitad que es un cuarto, de esa otra mitad que le falta avanza un octavo, de la otra mitad que le falta avanza un dieciseisavo, y así sucesivamente, entonces en el séptimo salto avanza un… uno ciento veintiocho havo… en el octavo salto un doscientos cincuenta y seis havo, en el noveno salto uno…
Yaz: ¿teníamos que llenar la tabla?
Ely: hasta donde fuera necesario.
Juan C: en el décimo salto salta uno…mil veinticuatro havo… aquí sería del cuarto
Juan C: aquí se expresa un medio a la dos, en el tercer salto se expresa un medio a la tres, en el cuarto un medio a la cuatro, en el quinto salto un medio a la cinco, en el sexto salto un medio a la seis, en el séptimo salto un medio a la

siete, en el octavo un medio a la ocho, en el noveno un medio a la nueve y acá un medio a la diez.

Ely: la pregunta número 3, ¿en el segundo salto qué distancia le falta por recorrer?

Juan C: en el segundo salto le hace falta un cuarto.

Ely: ¿y en el quinto?

Juan C: en el quinto le hace falta un treintaidosavo.

Ely: y ¿cómo lo expresaron ustedes?

Juan C: ¿la cinco? [empieza a escribir] un medio, un medio… por dos cuatro, por dos ocho, por dos diez y seis, por dos treinta y dos.

Ely: ¿así es como ustedes lo expresaron de manera algebraica? La seis, ¿si Yaya diera "n" saltos?

Juan C: pues serían, si estuviera en el quinto salto…

Barby: no, pero es la pregunta seis.

Juan C: entonces si Yaya diera "n" saltos, ¿qué distancia le falta por recorrer?

Ely: aja.

Juan C: si aquí fuera "n" saltos serían "n" medios. Si acá, sería "n" cuartos.

Yaz: ¿Qué no sería un cuarto a la "n"?

Ely: ¿cómo lo expresaste?, escríbelo.

Juan C: en el quinto salto le faltaba un treintaidosavo.

Ely: aja y la número seis.

Juan C: sería un "n" entre treinta y dos.

Ely: ¿lo escribes?, en el número seis, si Yaya diera "n" saltos, por favor.

Juan C: un "n" treintaidosavo.

Ely: eso es si Yaya diera "n" saltos.

Barby: no.

Ely: ¿Qué cantidad de saltos necesita Yaya para llegar a su destino?

Juan C: cinco saltos más.

Ely: ¿cinco saltos más?

Juan C: o sea son cinco, esta en el quinto [señala la tabla], le faltan cinco saltos más.

Ely: cinco saltos más, ¿por qué cinco saltos más?

Juan C: porque son diez saltos los que hace Yaya para llegar a su destino [señalando la tabla].

Ely: Ahí tiene once espacios.

Juan C: son diez [muestra la hoja].

Ely: ahí tiene once espacios [señalando el pizarrón].

Barby: es la medida..

Ely: ¿entonces?

Juan C: sigue brincando los saltos que le faltan.

Ely: ¿entonces qué cantidad de saltos necesita para llegar?

Barby: seis.

Juan C: ahí pues faltarían seis saltos.

Ely: ¿por qué seis y no cinco como habías dicho?

Juan C: porque ahí tiene once saltos más, o sea un salto de más. Entonces le hacen falta seis saltos más.

Ely: entonces ¿si yo hiciera la tabla hasta el número cinco?

Juan C: ¿hasta aquí?

Ely: aja.

Juan C: entonces ya no le faltaría ninguno.

Ely: ¿qué sucede con la distancia que le hace falta por recorrer a Yaya a medida que aumenta el número de saltos?

Juan C: recorre la mitad de la mitad de la distancia, o sea la mitad de la mitad de la mitad de la mitad de la mitad de la distancia [indicando los brincos en el dibujo].
Ely: entonces ¿qué sucede con esa distancia?
Juan C: se va reduciendo.
Ely: un aplauso para el equipo.

Pelicula 243:
Yaz: [empieza por contar los cuadros en el dibujo y dice:] y si lo recorto hasta aquí, es que son veintiuno para que sean veinte.
Ely: no, así.
Yaz: [dividiendo el segmento que representa la distancia que Yaya va a recorrer].
Ely: vamos a ver que hicieron en el equipo de Yazmín, ah Yazmín está marcando los saltos.
Yaz: [realiza las divisiones hasta el octavo salto].
Ely: ¿coincidió tu tabla Yazmín?
Yaz: no, es que nosotros nada más pusimos hasta el octavo salto [marca con distinto color el octavo salto].
Ely: ustedes no llenaron toda la tabla ok, entonces dinos, ¿en el segundo salto que distancia le hace falta para llegar al estanque?
Yaz: un cuarto.
Ely: un cuarto, ¿en el quinto salto?
Yaz: ¿en el quinto?... no. ¿En el cuarto salto cuanto le falta?
Ely: no, en el quinto.
Yaz: pero primero me pregunto en el cuarto.
Ely: no, en el segundo [risas]-
Yaz: en el segundo le hace falta un cuarto si. Y en el quinto le falta un treintaidosavo.
Ely: ¿y de qué manera lo expresaron?
Yaz: es que… [hace señas a sus compañeros de equipo].
Ely: ¿quieres que pase el resto de tu equipo a ayudarte?
Yaz: si mejor.
Ely: ¿alguien quiere pasar a ayudarle del equipo?
[contestan "no", risas].
Ely: ¿no lo expresaron de forma algebraica?
Yaz: no es que la cinco y la seis pues no.
Ely: ¿no hicieron nada en la seis?
Yaz: no, bueno Daniel le puso que faltaban "n" saltos, pero…
Ely: en la seis, si Yaya diera "n" saltos ¿qué distancia le falta por recorrer?
Yaz: "n"
Ely: ¿le falta "n" distancia por recorrer?
Dany: si.
Ely: o sea que en el salto número dos, le faltan dos.
Yaz: es que en el salto dos le faltarían seis.
Ely: ¿seis?
Yaz: pues si [señalando los saltos que dibujo].
Ely: ah seis saltos, no pero pregunta distancia no saltos.
Yaz: ¿cómo?
Ely: si, ¿qué distancia le falta por recorrer?
Yaz: mejor pregúnteme la siete. [risas].
Ely: a ver la siete. ¿qué cantidad de saltos necesita Yaya para llegar a su destino?
Yaz: ocho.

Ely: ¿por qué ocho?
Yaz: es que como se va recortando por mitad por mitad por mitad, al octavo ya como que… ya de la raya quedaría por aquí [señalando el piso], y ¿cómo cortamos a la mitad otra vez? Es que no sé como explicarlo.
Juan C: es que dice que esta en el quinto salto, de distancia es un treintaidosavo, pero dice cuanto le hace falta.
Yaz: estamos en la siete. [risas]. ¿Qué cantidad de saltos necesita Yaya para llegar a su destino? Ocho.
Juan C: aja, ¿qué cantidad? dices que son ocho.
Yaz: desde acá.
Juan C: desde allá, pero esta en el quinto salto.
Fidel: dice después.
Ely: no ya vamos en la siete.
Yaz: ellos están en la cinco.
Juan C: no, estamos en ese pero dice que está en el quinto salto allí. En la seis creo dice que está en el quinto salto y así sigue.
Fidel: ah si es cierto.
Juan C: en la siete dice todavía que está en el quinto salto.
Ely: no.
Yaz: no. Dice ¿qué cantidad de saltos necesita Yaya para llegar a su destino? Desde aquí [señalando el inicio].
Fidel; pero no explica si es del principio o después del primero o del segundo salto.
Yaz: pero tiene que ser desde el principio porque no te está diciendo de qué salto.
Fidel: pero no explica la pregunta.
Yaz: si porque dice ¿qué cantidad de saltos necesita? Es desde acá [señala el inicio] porque si te dijera desde el tercero o cuarto te diría: ¿Qué cantidad de saltos le hacen falta a Yaya desde el brinco número tal?
Dany: si es cierto [risas].
Ely: entonces tú dices que son ocho saltos. Decía Juan Carlos que eran diez, ¿qué opinan de eso equipos?
[silencio].
Ely: decía Juan Carlos son diez… dice: a bueno son once.
Yaz: *es que aquí yo vi que en el número ocho es nada la distancia que le queda [señalando el octavo brinco], entonces al brincar a la mitad pues aunque sea las puntas de no sé que sean ¿patas o no sé qué? [mirando el dibujo] Pues ya llegó.*
Ely: ¿qué opinan equipos?
Juan C: *pero entonces en la tabla serían solo ocho cuadritos los que tuviera.*
Yaz: no, pero es que aquí no te decía que llenaras la tabla.
Fidel: pero tampoco dice que solo son ocho saltos.
Yaz: pero es que son los que YO creo que brincó, ellos creyeron que son diez, YO creo que son ocho.
Fidel: pero dice que a cada salto va brincando la mitad de la distancia.
Yaz: la mitad de la mitad, si aquí mira cuanto tengo del octavo [señalando el espacio que queda por brincar], si brinco nueve ya habría llegado.
Fidel: nunca dice que dos saltos los va a dar de a misma distancia.
Yaz: pues… sí, por eso… es que… ¿cómo les explico?
Ely: explícanos como les estabas explicando a tus compañeros de equipo.
Yaz: ¿con los lápices?
Dany: [risas].

Yaz: *[toma marcadores y empieza a dividir en el piso]* supongamos que aquí esta el estanque [cuenta seis espacios] y aquí está Yaya. La mitad de seis cuadros quedaría aquí y la mitad de esto…
Ely: hay más marcadores en el escritorio.
Yaz: es que no me van a alcanzar.
Ely: en el escritorio hay más marcadores.
Yaz: ahí va la mitad de la mitad, aquí va la otra, aquí va la otra, y aquí va la otra [colocando los marcadores en el lugar del salto], algo así.
Ely: ¿quieres lápices?
Yaz: sí, mejor.
Ely: te presto mi lápiz.
Yaz: *aquí está el estanque, el negro es el estanque. Entonces la mitad de este sería aquí y la mitad de este sería aquí [coloca el lápiz con dificultad], entonces ¿cómo en ese espacio va a alcanzar a dar otros dos brincos si ya llegó?*
Juan Cl: con las uñas.
[risas].
Ely: ¿qué opinan equipos?
Fidel: pero es que ahí ya daría dos saltos iguales.
Yaz: ¿cómo?, a ver otra vez.
Fidel: es *que te digo que ahí daría dos saltos iguales del mismo tamaño y aquí en la hoja nunca te dice que va a dar dos saltos del mismo tamaño.*
Yaz: es que no están del mismo tamaño, porque llegaría… ¿me prestan otro lápiz?
[risas].
Yaz: para llegar al estanque brincaría la mitad que es aquí [introduciendo la punta del lápiz en el espacio que queda y sin querer mueve el marcador que representa el estanque, voltea a ver a sus compañeros], y ya llegó.
Ely: ¿qué distancia le faltaría por recorrer? Por ejemplo ahí le faltaban tres cuadros, ahí cuadro y medio…
Yaz: hay!
[risas].
Yaz: es que allí donde está el segundo lápiz es el salto número siete, entonces el octavo sería la mitad de eso, entonces son nueve saltos los que da.
[voltean a ver a Elizabeth queriendo que les responda].
Ely: no sé, ¿qué opinan equipos?
Yaz: ¿tú cuantos tienes?
Fidel: diez.
Juan C: *diez saltos, si le pones el otro lápiz ahí serían: uno, dos, tres…. Diez saltos.*
Yaz: *pero es que ya otro lápiz no cabe.*
Ely: oye y en diez… ¿por qué diez? [risas], ¿por qué dices ocho no, diez sí?
Juan C: ¿cómo?
Yaz: pues si por qué si no son ocho son diez, tú dices que yo no estoy en lo correcto, ¿por qué dices que tú si?
Fidel: y Yazmín dice que tú tampoco.
Yaz: aja, y ¿por qué?
Juan C: porque…
Fidel: va a decir porque él me está apoyando.
[risas].
Ely: ¿ustedes que dicen Fidel?
Fidel: es que la verdad, los saltos la neta los saltos no se ve cuantos saltos va a dar. *Porque… nosotros nomás nos fuimos por diez… y por la tabla.*

Yaz: ustedes se fueron por llenar la tabla y yo no, yo me fui porque llegara, llegara, a que llegara [puntualiza].
Fidel: es que nosotros también nos fuimos a que a fuerzas tiene que ir la mitad, la mitad y la mitad de la distancia que le falta, y es que nunca te da a entender que los últimos dos saltos los va a dar de la misma distancia.
Yaz: *pero es que no los está dando de la misma distancia, simplemente que ya no le va a quedar espacio para brincar con las uñas.*
[risas].
Yaz: ya llega porque llega.
Ely: ¿ponemos a Fidel a brincar?
[risas]
Ely: dice Yazmín: no estoy diciendo que vaya a dar dos saltos de la misma distancia. Dice Yazmín: ya no alcanza a brincar.
Yaz: es que ya no le alcanza el espacio para brincar la mitad de eso que está ahí [señalando con desesperación el piso], tiene que caer a fuerzas con una uña [risas], o pisó al estanque o se queda atrás.
Ely: ¿Qué opinan equipos?, equipo de Yazmín, ¿qué pasa con la distancia que le falta por recorrer a Yaya a medida que aumenta el número de saltos?
Yaz: *se va reduciendo, se va reduciendo hasta que ya no tiene espacio para brincar a la mitad.*
Fidel: *pero también brinca en el agua.*
[risas].
Yaz: *ah pero ya habría llegado al estanque.*
Ely: entonces ustedes en conclusión dicen: llegó en ocho saltos, ¿razón?
Yaz: porque ya no tenía espacio para brincar.
Ely: porque ya no tenía espacio para brincar, aplauso al equipo.

Video 244 (duración 6:56):
Mando: hicimos lo mismo nada más que en vez de marcar los saltos marcamos: un medio, un cuarto, un octavo, un dieciseisavo…
Yaz: ah sí.
Ely: puedes hacer flechitas si quieres eh. Ok, ¿están de acuerdo con la pregunta número seis?
Mando: y aquí..
Ely: ah perdón.
Mando: y aquí aumentamos "n" [escribiendo en la columna que sobra en la tabla dibujada en el pizarrón].
Ely: ustedes aumentaron una "n"… ahora si, ¿te puedo preguntar?, ¿ustedes agregaron esa columna?
Mando: si.
Ely: ahora si, bueno pues la pregunta uno y dos, ¿están de acuerdo con los demás?, con el primer salto ¿cuál fue la distancia que recorrió Yaya?
Mando: la mitad.
Ely: y ¿Cuánto le falta por brincar?
Mando: la mitad.
Ely: con el segundo salto, ¿qué distancia le falta a Yaya para llegar al estanque?
Mando: un cuarto. [señalando el brinco cuatro].
Ely: ¿dónde fue el segundo salto?
Mando: fue aquí, [observa el dibujo y ahora señala correctamente].
Ely: ok, ¿con el quinto salto?
Mando: ¿aquí?
Ely: ¿y cómo lo expresaron?, ¿cómo expresaron esa distancia?

Fidel: pero la pregunta dice: ¿cuánto le falta por recorrer?, no cuanta distancia recorrió.
Ely: ah perdón, si, si, si. ¿Cuánto le falta para llegar a su destino?, exprésalo de manera algebraica. ¿Cómo lo expresaron?
Fidel: "n" distancia.
Mando: [escribe en el pizarrón 5/1024].
Ely: ¿ahí cuanto es?
Mando: cinco, mil veinticuatroavos.
Ely: ¿eso es lo que le falta en el salto cinco?
Mando: aja.
Fidel: si.
Ely: ¿si?, ¿en el salto cinco?
Fidel: dice después, o sea que ya está en el seis.
Ely: ah mmm… si Yaya diera "n" saltos, ¿Qué distancia le falta por recorrer?
Mando: "n" distancia, porque no se sabe cuanta distancia recorrió.
Ely: pero si dio tres saltos, ¿sabes qué distancia le falta por recorrer?
Mando: ¿si dio tres saltos? Pues… "n" distancia [observa sus hojas y empieza a contar en el pizarrón].
Yaz: le faltaría un octavo.
Mando: le faltaría… [contando las columnas de la tabla].
Ely: en tres saltos, no, en tres saltos, en el salto número tres.
Fidel: por eso, ¿Cuánto le falta, no?
Ely: ¿Cuánto le falta?, distancia, no saltos, distancia.
Yaz: un octavo.
Mando: estoy sacando la distancia.
Ely: ¿si?
Yaz: si, es un octavo.
Ely: ¿qué dices Juan Carlos?, ¿Bárbara?
Yaz: sería un octavo.
Mando: sería…
Juan C: sería un octavo profa.
Yaz: si, porque nada más se reparte.
Mando: sí, sería un octavo de "n" distancia.
Ely: ah y me dices que "n". En el salto número cinco, ¿qué distancia le falta por recorrer?
Mando: este… [señala 5/1024 que escribió en el pizarrón].
Ely: ¿cuánto dijiste en el tres?
Fidel: es que la tres es después, ¿no?
Ely: no, en el salto tres, quiero en el salto tres, cuando acabó de dar el salto tres, ahí. ¿Qué distancia le falta por recorrer?
Mando: un octavo.
Ely: ¿y en salto cinco?, exactamente en el cinco.
Fidel: un treintaidosavo.
Ely: ¿en el salto siete?
Fidel: un ciento veintiocho havo.
Ely: ¿en el salto "n".
[responde Yazmín, Fidel y Armando: "n" distancia].
Ely: ¿"n" distancia?, ¿si?
Fidel: no, "n" saltos.
Yaz: "n".
Ely: estoy preguntando por saltos no distancia, ok, ¿qué cantidad de saltos necesita Yaya para llegar a su destino?
Mando: "n" saltos porque lleva "n" distancia recorrida en "n" saltos.

Ely: ¿por qué?, perdón no te escuché.
Mando: "n" saltos porque lleva "n" distancia recorrida en "n" saltos.
Ely: ah… ¿qué significa "n"?
Fidel: no se sabe, es la distancia… es… un número cualquiera.
Ely: ¿un número cualquiera?, pero ¿para qué estamos usando la "n"?
Mando: es que nosotros para contestar la pregunta siete nos basamos en la pregunta seis, entonces si Yaya diera "n" saltos ¿qué distancia le faltaría por recorrer?
Ely: pero… "n" es una variable que puede ser cualquier número, pero ¿qué representa?, ¿la distancia por saltar?, ¿el número de saltos?, ¿qué día es hoy?
[risas].
Ely: ¿qué representa la "n"?
Mando: la distancia y el número de saltos.
Ely: ¿las dos cosas?
[Armando dice sí con la cabeza].
Fidel: bueno, representa una cosa en cada pregunta.
Ely: una cosa en cada pregunta.
Fidel: pero…
Ely: ¿cosas distintas?
Barby: si.
Ely: ¿si?, ¿cosas distintas?
Mando: porque es una distancia y los saltos.
Ely: ¿qué sucede con la distancia que le hace falta recorrer a Yaya a medida que aumenta el número de saltos?
Mando: va disminuyendo cada vez más, se va haciendo más pequeña.
Ely: se va haciendo más pequeña, entonces… ¿en qué momento se hace cero?
Fidel: en el momento de…
Mando: en el… último salto.
[risas].
Ely: ¿qué opinan equipos?, Gregorio estás muy callado, Juan Carlos también.
Fidel: ¿quién protesta?
Ely: ¿quién protesta o quién dice sí estoy de acuerdo?, ¿nadie? Un aplauso para el equipo.

Pelicula 245 (duración 0:35):
Ely: en el quinto salto nos dice una cosa el equipo de Juan Carlos. El equipo de Yazmín dice: la pregunta número cinco no me pregunten, pero el equipo de Bárbara vean como lo expresan. Y el equipo de Fidel lo expresan de una manera distinta, ¿ya vieron?, vamos a ver qué dice el equipo de Gregorio y Juan Carlos Andrade. ¿Quién pasa?

Pelicula 246 (duración: 12:57):
Ely: Empezamos. ¿ustedes también partieron la distancia?, ¿la dividieron en primer salto y segundo salto?
Greg: pues si, pero [dibuja los brincos].
Ely: para ustedes "n" es ¿qué?
Greg: para no poner toda la tabla, le pusimos.
Ely: ah ya no terminaron de llenar la tabla, ok.
Greg: ¿qué quiere saber?
Ely: quiero saber, ¿con el primer salto cuál fue la distancia que recorrió?
Greg: la mitad.
Ely: ¿Y cuánto le faltaba?

Greg: la mitad.
Ely: con el segundo salto, ¿qué distancia le falta por recorrer?
Greg: la mitad.
[risas].
Yaz: con el segundo.
Greg: la mitad de la mitad.
Ely: en términos generales, ¿qué le falta por recorrer?
Greg: la mitad.
[risas].
Ely: ¿la mitad?
Greg: la mitad, ¿en el segundo?
Ely: en el segundo salto.
Greg: la mitad de la mitad de saltos.
Ely: ¿nos puedes decir eso de manera más concreta?
Greg: [voltea al pizarrón] un cuarto.
Ely: ¿es la mitad de la mitad?
Greg: aja.
Ely: ¿también llenaron la tablita así como esta ahí?
Greg: si
Ely: en el quinto salto, ¿qué distancia le falta por recorrer?
Greg: [observa la tabla]
Ely: aja, en el quinto salto.
Greg: es que aquí, es que no sé, me confundí, nosotros sumamos [señala la tabla a partir del salto seis].
Ely: ¿para qué lo sumaron?
Greg: para encontrar la distancia de este con este.
Ely: ¿sacaron un promedio?
Greg: no, sumamos estos dos.
Ely: ahhh, en el quinto salto ustedes sumaron el seis y el siete.
Greg: aja.
Ely: ¿y esa es la distancia que le falta por recorrer?
Greg: no, porque ya vi que no y estaba mal [escribe en el pizarrón 3/128 y lo tacha y escribe n/2]
Ely: ¿”n” entre dos?, ¿”n” qué es?
Greg: la distancia.
Ely: la distancia entre dos. Si Yaya diera “n” saltos, ¿qué distancia le hace falta por recorrer?
Greg: “n” distancia.
Ely: ¿qué cantidad de saltos necesita Yaya para llegar a su destino?
Greg: “n” saltos.
Ely: ¿“n” saltos?, argumenta tu respuesta.
Greg: porque no se sabe que distancia le falta para llegar a su destino.
Ely: pero en el salto número dos, ¿qué distancia le falta?
Greg: un cuarto.
Ely: ¿y en el salto tres?
Greg: un octavo.
Ely: ¿y en el número cuatro?
Greg: un dieciseisavo.
Ely: ¿y en el número cinco?
Greg: un treintaidosavo.
Ely: ¿y en el número “n”?
Greg: “n” distancia.

Ely: ¿qué sucede con la distancia que le falta recorrer a Yaya a medida que aumenta el número de saltos?
Greg: al principio decía que aumentaba pero iba disminuyendo.
Ely: aja.
Greg: se estaba haciendo más larga y va disminuyendo.
Ely: aja, entonces tú dices que la distancia que le hace falta por recorrer a Yaya a medida que da brincos, ¿es qué?, ¿va qué?
Greg: es que va aumentando pero va…
Ely: ¿qué va aumentando?, ¿la distancia?
Greg: es que se le está haciendo más largo para llegar.
Ely: ¿cómo es eso que se le está haciendo más larga?
Greg: porque nada le cuesta llegar de aquí a aquí, pero no, ella quiere saltar la mitad y la mitad.
Ely: ah dices: ya nada le cuesta saltar hasta ahí, pero ella quiere saltar la mitad y la mitad y la mitad.
Ely: ¿cómo ven equipos?, entonces ¿la distancia cómo se va haciendo?, La distancia no el número de saltos.
Greg: va disminuyendo.
Ely: va disminuyendo, si Yaya diera mil saltos, ¿cómo sería la distancia?
Yaz: tendría que estar…
Juan C: pegado.
Ely: teniendo "n", ¿no que la distancia va disminuyendo?, quiero que me digan ¿cómo sería la distancia? Pensando que Yaya va a brincar un metro al primer salto llegaba a la mitad o sea medio metro, al segundo salto llega a la mitad de la mitad como dijo Gregorio, le falta un cuarto o sea veinticinco centímetros ¿si?, si Yaya diera mil saltos ¿cómo sería la distancia que le hace falta por recorrer?, ¿me lo pueden decir con sus manos?
[silencio].
Ely: tengo un metro, así como hizo Yazmín, la mitad, la mitad, la mitad [moviendo sus manos simulando las mitades].
Yaz: ¿y en ese pedazo va a dar novecientos y tantos saltos?
Ely: en este pedacito, sí va a dar mil saltos, ¿cómo sería la distancia en el salto mil?, ¿me lo pueden decir con sus manos?
Fidel: cero.
Ely: ¿cero?
Yaz: no alcanzaría a llegar ya no tendría lugar para dar los mil saltos.
Ely: ¿cómo ven?
Yaz: es que… no, ¿cómo?, es imposible.
Ely: dicen: es más fácil con una pulga, ¿qué opinas Gregorio?, ¿qué opinas Juan Carlos?
[silencio].
Ely: entonces que cantidad de saltos necesita dar Yaya para llegar, si dicen que en mil la distancia que le falta es cero y hace rato me dijeron: "ningún salto es del mismo tamaño".
Fidel: a pues seguiría dando saltos.
Ely: Y ahorita les dije mil y me dijeron la distancia es cero. ¿me lo puedes expresar con tus manos?
Fidel: así [diciendo no sé con las manos].
Yaz: es que es imposible que de mil saltos en un metro.
[risas].
Dany: [dice muy despacio] yo digo que es infinito.
Ely: ¿entonces?, ¿tú dices que nunca llega?
Dany: si, es que siempre va a ser la mitad y la mitad y la mitad.

Yaz:	pero es que…
Fidel:	nunca llegaría esa rana.
Dany:	van a ser mil saltos, dos mil saltos, los saltos que sean pero nunca va a dar un salto igual que el anterior, así que todo el tiempo va a seguir avanzando en mitades y mitades y mitades pero nunca va a llegar [moviendo el dedo índice en círculos], es lógico.
Yaz:	pero es que tiene que llegar.
Ely:	supongamos que es un metro, ¿me pueden decir cuanto es en decimal como a ustedes les gusta uno entre ocho? Y se lo vamos a agregar aquí abajo. Juan Carlos voy a borrar lo que escribiste aquí, ¿si?
Juan C:	ah seguro.
Ely:	vamos a agregar aquí abajo en decimal [agrega una fila a la tabla para escribir las cantidades]
Ely:	en un medio, ¿en decimal, cuánto le falta para llegar?
Yaz:	punto cinco.
Ely:	en el salto número dos?
Barby:	Punto veinticinco.
Ely:	¿en el salto número tres?
Barby:	punto ciento veinticinco.
Ely:	¿en el salto cuatro cuánto le falta?
Barby:	punto cero seis veinticinco.
Ely:	¿en el salto cinco?
Mando:	cero punto cero tres…
Ely:	cero punto cero…
Barby:	tres ciento veinticinco.
Ely:	¿en el salto seis?
Juan C:	cero punto
Ely:	¿en el siete?
Ely:	¿en el salto ocho?
Ely:	¿en el nueve?
Ely:	¿en el diez?
Yaz:	cero.
Juan C:	cero punto cero, cero, nueve.
Ely:	entonces, en el salto "n", ¿cómo va a ser la distancia?
Barby:	"n".
Ely:	¿todavía "n"? fíjense en el salto diez cómo fue la distancia.
Greg:	pues por eso.
Ely:	"n" es el número de saltos, "n" no es ninguna distancia. Entonces vean en el salto cuatro le falta un dieciseisavo que se puede escribir así también, y si lo expresamos en decimal es punto cero seis.
Ely:	En el salto cinco es un treintaidosavo, que lo podemos escribir como uno entre dos a la cinco y que sería punto cero tres.
Ely:	en el salto seis un sesenta y cuatroavo, punto cero uno en el salto seis. En el salto ocho, punto cero, cero, tres. ¿en el salto "n"?

ANEXO B

Los saltos de Yaya con grupo control

Video 291

Ely: ¿si le entienden?, ahora cada salto que daré será justo la mitad de la distancia que necesito recorrer para llegar a mi destino.
Ely: supongamos que tengo que brincar a donde esta Carolina. ¿Cómo va a ser el primer salto, hasta donde voy a llegar?
Fco: a la mitad de la mitad.
Ely: supongamos que son dos metros. Brinco la mitad. ¿Hasta donde voy a llegar con el siguiente salto?
Todos: al destino.
Ely: ¿al destino?. Fíjense lo que dice, ahora cada salto que daré será justo la mitad de la distancia de lo que le falta para llegar a su destino, cada salto no el primer salto.
Pancho: entonces a la mitad, antes de llegar.
Ely: a donde? Si aquí me quedaba 1 metro.
Pancho: un medio, treinta cm.
Ely: hay quedamos que eran 2 metros.
Pancho: medio metro pues, por eso avanzó un metro y luego avanza medio metro.
Alex: y luego veinticinco.
Pancho: no, luego, luego… quince.
Alex: veinticinco no?, pues es la mitad.
Ely: ¿veinticinco metros?
Todos: no centímetros.
Ely: ah y luego? ¿Si entendieron la actividad?
Todos: si.
Ely: Yaya desea llegar al estanque y con el primer salto recorre la mitad de la distancia que inicialmente la separaba de el. Primer pregunta, ¿con el primer salto cuál fue la distancia que recorrió Yaya?
Pancho: pero necesito saber cuanto mide.
Ely: mide “x”.
Pancho: uhhh.
Paulina: mmm.
Voces: “x”, medio de “x”.
Luis M: media “x”
Manuel: ah ya le estoy entendiendo.
Ely: entonces empiecen la actividad.
Equipo de Alejandro:
Gaspar: la mitad es “x”.
Alex: como es la mitad de x, yo digo pues que vamos a poner aquí, como es la mitad pues.
Gaspar: la mitad es x.
Alex: la mitad de x, podremos poner raíz cuadrada de x que vale ½.
Risas

Equipo de Gaby

Itzel: y de aquí hasta la otra mitad y así hasta que llega a su destino.
Ely: ¿ya contestaron la primera?, ¿qué es esto?
Itzel: es que Gaby no había entendido.
Gaby: es la trayectoria de la rana.
Ely: me explican, ¿qué es esto?
Itzel: de lo que recorre la rana.
Ely: a ver.
Itzel: no ve que dice que recorre la mitad, entonces ya dice que siempre cada salto va a dar la mitad. Entonces aquí y ya recorre otra vez la mitad y otra vez la mitad y así hasta que llega.
Ely: Entonces contesten las preguntas, con el primer salto ¿cuál fue la distancia que recorrió?
Gaby: la mitad.
Itzel: la mitad de x.
Ely: ok, contesten, sin miedo, si quieren contestar con palabras o con símbolos algebraicos, como ustedes quieran.
Gaby: un medio de x. ¿qué distancia le falta por recorrer para llegar al estanque?
Gaby: la mitad de x, no?
Chely: si, pues si.
Gaby: la mitad de la mitad, un cuarto de…x?
Ely: ¿Qué distancia le falta?, ¿con el primer salto a donde llegó?
Itzel: a la mitad.
Ely: ¿y cuanto le falta?
Gaby: la mitad de la mitad.
Chely: aquí es la mitad de x y le falta la otra mitad.
Ely: tienen que convencerse entre las tres eh.

Equipo de Luis M:

Luis M: de aquí a aquí es un octavo, entonces.
Pancho: [me pregunta] ¿vamos a llenar la tabla?
Ely: [sin responder].
Pancho: un treintaidosavo
Luis M: un sesenta y cuatroavo.
Pancho: ciento veintiocho.
Luis M: [Llega a la séptima columna y pregunta] hasta ahí?
Pancho: tienes que completar toda la tabla.
Fco: ¿quieres mi calculadora?
Luis M: no.
Luis M: [termina de completar la tabla y vuelve a preguntar] ¿hasta ahí?
Pancho: y aquí la vamos a expresar en ¿cómo?
Luis M: Expresión. Un medio al cuadrado.
Pancho: sería un medio cúbico.
Fco: no, un medio a la cuarta potencia.
Luis M: seguro.
Fco: porque aquí vamos de dos en dos, esto es el doble de esto, esto es el doble de esto y esto es el doble de esto, esto es el doble de esto, igual aquí.
Pancho: entonces esto también que sea el doble, entonces un octavo a la cuarta y un dieciseisavo a la octava.
Luis M: es que esto está raro porque aquí no cambió el medio.
Fco: esto no cambia, lo que un medio, solo cambia la potencia.
Pancho: bueno, entonces nada más hay que cambiar la potencia.
Luis M: hay que tacharle, sin borrar dijimos.
Pancho: pues táchale y ponle abajo.

Luis M: un medio a la cuarta.
Pancho: a la octava.
Luis M: y así sucesivamente.
Pancho: dieciséis, igual.
Ely: Pregunta chicos, ¿cuánto es un medio al cuadrado?
Luis M: un medio al cuadrado?
Pancho: un entero.
Luis M: ¿si?
Ely: no se, estoy preguntando
Pancho: un medio por un medio.
Ely: y cuanto es un medio a la cuarta potencia?
Pancho: serian…
Luis M: saca tu calculadora.
Pancho: serian dos enteros.
Ely: ¿dos enteros?
Pancho: se supone que…
Ely: se supone que deben sacar una expresión que les dé la distancia por saltar.
Pancho: que al elevarla al cuadrado nos de esto, un octavo.
Ely: pues que al resolver la expresión te de la distancia que tú ya encontraste.
Pancho: pero entonces ¿un medio al cuadrado es un cuarto?
Ely: no se. Por eso pregunté.
Pancho: no es un cuarto. Puedo usar calculadora?
Ely: si, pueden usar calculadora.
Equipo de Alejandro
Alex: yo digo que nos faltarían dos cuartos, para que la ranita llegara al estanque, porque recorrió un medio de x. entonces lo que nos faltaría sería 2/4 de x.
Ely: y puedes expresar dos cuartos de otra manera?
Alex: podemos sacar raíz cuadrada.
Ely: simplificar, me refiero.
Alex: oh simplificar 2/4… ½, más entendible pues.

Video 292
29 seg.

Video 293
Pau: pues vamos nada mas a calcular lo que sale de aquí, de este pedacito y después vamos a volver a sacar la otra mitad, desde aquí no?
Ca: se supone que esta es la mitad.

Video 294
Ca: la maestra dio el salto a la mitad.
Pau: tenemos que sacarle la otra mitad.
Salud: pero yo digo que un cuarto es la mitad de esto.
Ca: por eso. Estamos sacando la mitad del cuarto.
Pau: y es lo que estamos haciendo.
Ely: en el primer salto no?, van en el primer salto. Hasta donde brincó en el primer salto?
Pau: un medio.
Ely: y cuanto le falta para llegar?
Ca: otro medio.
Ely: contéstenlo.
Equipo de Luis
Pancho: es que aquí si sale un dieciseisavo haciéndola de un cuarto al cuadrado.

Video 295:
Equipo de Manuel:
Ely: cómo van?
Manuel: bien, nomás que nos atoramos aquí.
Ely: qué distancia le falta recorrer para llegar al estanque cuando dio el primer salto?
Manuel: pues le faltaba x.
Gabriel: no. Le falta media x todavía.
Ely: por qué no lo escriben?
Manuel: se escribe así?
Ely: a ver, no sé.
Manuel: si sabe… es lo que le estaba diciendo, toda la distancia de x es un entero y de ese entero salto la mitad, no sabemos representar el medio, la mitad de lo que llegó.
Ely: no saben representarla? Por qué?
Gabriel: por decir aquí, hicimos un pastelito (risas).
Manuel: lo quise representar así, por decir toda, toda x es un entero, y con el primer salto llegó a la mitad, pero ahí es donde no.
Ely: y cómo se escribe la mitad?
Manuel: un medio de x.
Ely: entonces por qué no saben escribirla?
Manuel: ya está escrita aquí.
Ely: a bueno.
Manuel: y luego saltó lo que le hace falta.
Ely: no todavía no, apenas lleva el primer salto. Primero contesten la pregunta, ¿qué distancia le falta por recorrer?
Manuel: un medio.
Gabriel: media x
Ely: y luego sigue el segundo salto, que está en la otra hoja.
Gabriel: te dije…

Video 296
Equipo de Luis M
Pancho: entonces otra vez multiplicamos, es un medio a la cuarta.
Fco: ya ponle cuatro.
Pancho: un diesiseisavo.
Luis M: entonces si es así?
Pancho: aquí es un medio a la cúbica, y luego un medio a la cuarta, y así sucesivamente va ir, luego un medio a la quinta.
Luis M: hasta la décima potencia?
Pancho: sí, si no, deja hacer la última. Si wey si sale.
Equipo de Pau:
Ca: o sea que nos adelantamos.
Pau: qué distancia le falta para llegar al estanque?, ahí vamos otra vez, porque nos equivocamos, nosotras nos adelantamos.
Equipo de Gaby:
Ely: es en equipo, por qué cada quién lo resuelve aparte?
Gaby: para ya luego debatir, es que una no le entiende a la otra y así.
Ely: tienen que llegar a un consenso porque van a pasar al pizarrón a explicarles a sus compañeros.

Video 297

Equipo de Paulina

Pau: luego, dibuja hasta donde llegó Yaya. De aquí hasta aquí.
Salud: sería un cuarto.
Pau: pero dice que es el segundo salto, Salud.
Ca: por eso.
Salud: del segundo salto brincó la mitad de lo que le faltaba para llegar al estanque y la mitad de esto sería un cuarto. Ya?
Pau: si. Qué distancia le falta para llegar al estanque?
Salud: un cuarto.
Pau: un octavo Salud!
Salud: no, un cuarto porque la mitad de un cuarto es un octavo.
Pau: si va a dar el otro salto va a llegar a un octavo.
Ely: pero en qué salto van?
Pau: en el tercero.
Ely: ya van en el tercero?
Pau: no. Estamos partiendo del salto que dio en el segundo salto.
Ely: deben de partir de la posición inicial de Yaya.
Pau: si, de aquí es donde dio el primer salto, avanzó la mitad, de aquí va a volver a empezar el segundo salto, que llegó a un cuarto, y de aquí va a volver a partir para el tercer salto.
Ely: qué pregunta están contestando?
Pau: qué distancia le falta para llegar al estanque?
Ely: en qué salto van?
Pau: en el segundo.
Ely: cuál es el segundo?
Pau: es este (señalando el final del segundo salto).
Salud: es este (señalando el inicio del segundo salto).
Salud: parte de aquí y llega hasta aquí (señalando donde inicia y termina el segundo salto). Y es que ahí dice que cuánto le falta para llegar al estanque, y es un cuarto.
Ca: si, si, si es un cuarto. Del primer salto tiene que hacer el segundo que llega al cuarto, cuánto le falta?
Pau: primer salto y aquí es el segundo salto (marcando el número sobre los saltos).
Ca: cuánto falta para llegar al estanque?
Pau: un cuarto.

Equipo de Luis M

Pancho: cuánto le falta a Yaya para llegar a su destino?
Luis M: aquí cómo lo tenemos que expresar?
Ely: a bueno, la expresión que ustedes encontraron es la expresión algebraica.
Luis M: entonces está aquí y le falta todavía esto para llegar.
Pancho: o lo vamos a sumar?
Ely: no sé.
Luis M: si ya entendí. Dice que después de aquí cuánto le falta a Yaya para llegar a su destino?
Fco: otro un medio a la quinta.
Luis M: uno, dos, tres, cuatro, cinco, (contando los brincos en la gráfica y comparando los resultados con la tabla), de aquí para llegar a su destino, si le faltaría otro medio a la quinta.
Pancho: porque está a la mitad.
Luis M: si Yaya diera “n” saltos qué distancia le faltaría por recorrer?

Pancho: y "n" qué es profa?
Ely: "n" es un número.
Pancho: el que queramos?
Luis M: y a cuánto equivale "n"?
Ely: a "n".
Fco: ahí vendría siendo igual que x.
Pancho: o "n" va a ser un "x"
Ely: "n" es el número de saltos.
Luis M: o sea que si nomás diera un salto.
Ely: por ejemplo aquí "n" sería igual a uno, pero yo no estoy pidiendo ese caso, yo estoy pidiendo "n" saltos.
Luis M: la mitad de "n", porque si brinca "n" le faltaría.
Pancho: "n" a la un medio, es igual que aquí si brinca "n", un medio de "n".
Ely: está multiplicando o qué están haciendo ahí?, es "n" entre dos eso?
Luis M: no.
Pancho: un medio de "n".
Luis M: (dibuja los paréntesis y escribe la "n" más pequeña para que se vea que es un exponente) usted dispense son paréntesis.
Pancho: exponente "n".

Ely: en qué se basaron para decir que es un medio a la "n"?
Luis M: porque si brinca "n", se supone que lo que brinca así como lo planteo iba nada más a… (risas), un ejemplo va a brincar nada más la mitad de la distancia, un ejemplo si tiene que recorrer el lápiz va a brincar nada más la mitad y eso es "n" saltos, no es lo mismo que "x", y si brinca "n" le faltaría otro "n" por recorrer, no pues no otro "n" sino la otra mitad que sería igual a "n".
Ely: no les entendí.
Luis M: de primer grado profa, cómo no?
Pancho: porque no creo que haya otra forma de sacar la mitad de "n", cómo sacas la mitad de "n" si no sabes cuánto vale "n".
Luis M: n/2.
Ely: pero "n" son los saltos.
Pancho: por eso y dio uno, o dio cero punto cinco?
Ely: puede dar 0.5 saltos?
Luis M: mire profa haga de cuenta que lo que está diciendo es que cada salto que dé va a ser la mitad de la distancia, supongamos que la distancia es el lápiz, entonces en un salto tiene que llegar a la mitad, o sea que si brinca "n" como es el número de saltos, si brincara "n" sería la mitad, entonces está a la mitad y cuánto le falta por recorrer? La otra mitad.
Pancho: o a otro que este sería "n", el lápiz es "n", cuánto es la mitad del lápiz? Pues sería un medio de "n".
Luis M: que sucede con la distancia que le falta por recorrer a Yaya a medida que aumenta el número de saltos? Se va haciendo más corta.
Pancho: un medio, la mitad más corta.
Luis M: se va dividir entre dos, o cómo le ponemos? (le pregunta a Fco.). Se va haciendo más corta, se va dividiendo entre dos.
Fco: qué sucede con la distancia que le falta por recorrer a Yaya a medida que aumenta el número de saltos?
Luis M: se va haciendo más chiquita, como aquí mira (señalando en el dibujo los saltos marcados), se va haciendo la mitad. ¿cómo le pongo?

Fco: cada salto que da es la mitad de la distancia que tiene.
Ely: pero yo no pregunto por saltos
Luis M: se va haciendo más corta, mire porque aquí por decir brincó, y aquí en el siguiente salto se hace más corta (señalando la distancia de los últimos saltos que dibujaron).
Pancho: más corta, más corta, más corta hasta que llegue al destino
Fco: la distancia se está volviendo más corta
Equipo de Alejandro
Alex: yo pues les decía que aquí como llevamos los cálculos, más o menos, diremos que cada vez que avanza va brincando la mitad. Entonces lo vamos a ir representando como de 100, 50, 25, siempre va disminuyendo la mitad, entonces nosotros para rellenar nuestra tablita cada vez que avance le vamos a ir quitando la mitad, como decir un entero, acá de dimos un medio, y luego si es un medio ya le dimos un cuarto, y la mitad otra vez le sacamos al cuarto para que siempre vaya siendo la mitad y vaya disminuyendo hasta que llegue a donde quiere llegar Yaya. Pues aquí hay que seguirle como rellenando pues, aquí como ya disminuyó: un dieciseisavo, luego vamos a poner un treinta y dozavo, y después le vamos a poner un sesenta y cuatro havo, y después un ciento veintiocho havo.

Video 298
Equipo de Gaby:
Gaby: la mitad de la distancia dividida entre dos.
Chely: ajá, se va dividiendo entre dos. Yo digo pues que así, si Itzel?
Iztel: si.
Chely: y cada salto se divide entre dos y así hasta llegar al estaque.
Gaby: la mitad de la distancia.
Chely: si entendiste?
Gaby: es que si le entiendo pero no sé cómo explicarlo bien.
Chely: yo también.
Ely: van en la dos?
Gaby: aja.
Ely: por qué se han tardado tanto?
Gaby: porque…
Ely: no llegan a una conclusión entre las tres?
Chely: no.
Ely: con el primer salto cuál fue la distancia que recorrió Yaya?
Todas: la mitad.
Ely: pueden señalarme en el dibujo hasta donde brincó?
Gaby: (señala en el dibujo) hasta aquí.
Ely: y cuánto le falta?
Chely: la otra mitad.
Ely: por qué no lo escribían?
Gaby: bueno es que pensamos más allá de lo que nos pedían. (leen la siguiente pregunta y ríen por ser lo que estaban discutiendo).

Video 299
Equipo de Paulina
Pau: pero no tiene estos números.
Ca: pero por qué? se supone que va acá.
Pau: no sé, algo me dice que estamos mal.
Salud: aquí ya sería un medio.
Ca: por qué ahí? Por qué no en el cinco?

Pau: por eso en el cinco Salud, digo tú Chola.
Salud: está diciendo que en el seis.
Pau: no en el seis no.
Salud: si, porque hasta aquí se termina el primer salto (señalando en la tabla del quinto al primer salto).
Ca: por eso, aquí (señalando el quinto salto en la tabla).
Salud: fíjate, dice: observa la tabla después de cinco saltos, que es hasta aquí (señalando el lugar cinco), cuánto le falta a Yaya para llegar a su destino?. Sería todo esto (señalando del lugar uno al cinco en la tabla).
Pau: del seis en adelante, si es cierto.
Salud: de aquí para acá (señalando del quinto lugar de la tabla en adelante).
Pau: de ahí ya sería a partir del otro medio. Hasta aquí terminó de dar sus cinco saltos.
Salud: aquí es el otro medio (señalado los espacios restantes de la tabla).
Ca: no le entendí.
Pau: mira del primer salto a aquí..
Ca: si, si, si, si, si, de aquí (señalando el lugar cinco).
Pau: ya dio sus cinco saltos que estábamos calculando.
Ca: si.

Video 300
Equipo de Carolina:
Caro: un cuarto al cuadrado.
Lalo: un cuarto, si pues, pero un cuarto cuánto es (refiriéndose a su equivalente decimal). Al cuadrado? Sería la mitad del otro
Lalo: entonces qué sería?
Caro: un cuarto al cuadrado.
Lalo: y el segundo?
Ely: quiere decir entonces que un octavo es igual a esto? (señalando el resultado de $(¼)^2$ en la calculadora).
Lalo: (realiza en la calculadora 1/8, lo lee y se queda pensando). No. Es que más bien, cómo se llama? Un octavo sería aquí también (señalando la fila que corresponde a la expresión), y aquí un octavo al cuadrado (señalando debajo de 1/16).
Ely: o sea que si divides un octavo al cuadrado te va a salir uno entre dieciséis?
Lalo: si, no?
Caro: es que yo aquí le entendí un medio, y un medio al cuadrado sale un cuarto, por eso aquí digo que un cuarto al cuadrado sale un octavo y así.
Ely: cómo resolverías un cuarto al cuadrado?
Lalo: cómo que cómo lo resolvería?
Ely: si, por qué dices que un medio al cuadrado sería un cuarto?
Lalo: a porque un medio sería punto cinco (usando la calculadora) al cuadrado es un veinticinco (refiriéndose a 0.25) y un veinticinco es un cuarto.
Ely: entonces si dices que un cuarto al cuadro es igual a un octavo quiere decir que debe salir lo mismo, no?
Lalo: aja.
Ely: ya lo comprobaron?
Lalo: a ver (hace cuentas en la calculadora anotando los resultados para comparar), no o. Es como te digo, va a ser un octavo también aquí y acá va a ser al cuadrado (se refiere al repetir los valores en ambas filas)
Equipo de Luis M
Luis M: quiere ver nuestros dibujos?
Ely: de qué hablan?, infinito?

Luis M: ya ven es infinito, porque la profa luego que escuchó infinito vino.

Pancho: el número si es infinito, pero la distancia no, porque la distancia se termina y aunque sea la mitad de la mitad de la mitad tiene que llegar a un punto de distancia y ya hasta ahí termina, ya no le sigues, pero si es el número lo vas a seguir dividiendo entre dos, entre dos, entre dos y no es infinito, pero en distancia como tiene un punto que es final.

Ely: no te entendí, pero es a ellos a los que tienes que convencer.

Luis M: es que estábamos indecisos en esta pregunta, que era: qué cantidad de saltos necesita Yaya para llegar a su destino?

Ely: por qué estaban indecisos?

Luis M: porque haga de cuenta que yo pensaba que es infinito. Porque por decir si nos ponemos aquí (señalando los brincos en el dibujo), dice que de aquí llegó hasta aquí, y cada vez se va haciendo así, la mitad y la mitad, y la mitad, y la mitad y ya aunque nosotros no podamos hacerlo va a seguir y seguir y seguir, se va haciendo cada vez más chiquito.

Fco: se va haciendo cada vez más pequeño.

Pancho: pero va a llegar a un punto donde, por ejemplo aquí es diez y la mitad dice que salta (dibujando los saltos en otra hoja), que serían cinco, y la mitad de eso serían 2.5, sería aquí y la mitad de eso sería 1.25, sería como por aquí, y luego la mitad de eso sería como por aquí, y así y así (dibujando los saltos cada vez más pegados unos a otros), el chiste es que no vamos a llegar exactamente a donde termina, que no va a ser infinito pues porque sí hay una distancia que te marca, que aunque sea la mitad de la mitad, de la mitad si hay una barda y ya no puedes pasar porque es hasta el tope donde te dijeron. Ya no puedes sacar más mitades, de aquí ya no te puedes pasar, si llegas aquí a una mitad ya no puedes sacar la mitad de esto porque ya para acá ya no es (señalando el otro lado del tope que ellos nombraron).

Ely: y cuántos saltos van a ser?

Pancho: nueve.

Ely: en nueve ya no puedes pasar?

Luis M: aproximadamente.

Pancho: aproximadamente decimos que es nueve.

Luis M: aquí de acuerdo al esquema (risas).

Fco: y a la tabla es nueve.

Luis M: y de acuerdo a la tablita que nosotros hicimos es nueve, y son los que están marcados en la tabla

Ely: cómo están marcados nueve en la tabla?

Luis M: porque por decir aquí nos quedamos en el salto cinco, en el, a la mitad… ah no, sí es en el primero. Dice: cuántos saltos necesitaría Yaya para llegar a su destino? Y brinca uno, y luego otro, y luego otro, y luego otro, y luego otro, así (señalando los saltos en la tabla), son los que brinca los diez, más bien diez.

Ely: por fin? Nueve o diez?

Luis M: diez.

Ely: por qué cambiaste de opinión?

Luis M: porque pensé que ya había dado el primero.

Pancho: porque nosotros no estábamos contando el primero, contábamos a partir de este, o sea este paso no lo contábamos, contábamos nada más de aquí en adelante. Y ya vimos que si tenemos que contar este, serían diez pasos, diez saltos pues.

Ely: pero, por qué no nueve como habían dicho?

Luis M: porque nos habíamos saltado un paso, un brinco.

Ely: en qué se basan para decir que se habían saltado un brinco?

Pancho: porque estábamos contando desde aquí, desde la mitad, serían diez.
Luis M: aproximadamente diez, nueve.
Ely: por qué "aproximadamente"?, por qué no dices "nueve"?.
Luis M: porque por decir nosotros aquí nos quedamos en uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho, nos quedamos en nueve (señalando los saltos en el dibujo) y ya no podemos sacarle mitad pero por lo visto si hay (señalando la tabla) pero ya no le podemos sacar mitad.
Ely: cómo por lo visto si hay?
Luis M: porque aquí está en diez (señalando la tabla).
Ely: y?
Luis M: y si le pongo once? (haciendo una columna más para poner el número once).
Pancho: nuestra línea ya no nos permite poner la otra mitad que podemos hacer (señalando el dibujo), o sea ya no le podemos asegurar si hay otra mitad porque nuestro esquema ya no lo permite, si tuviéramos una computadora pues a lo mejor si alcanzamos a ver si sí.
Ely: pero recuerden que es una rana.
Pancho: por eso.
Ely: apoco la rana va a sacar una computadora?
Pancho: no pues, pero nosotros, nosotros ya no alcanzamos a ver si sí hay otra mitad, por eso es aproximadamente.
Ely: por qué pusiste el once ahí?
Luis M: cuál once?. No, nomás le decía que si hubiera un once se podría sacar la mitad del otro brinco que diera.
Ely: y qué le impide que haya un once?
Pancho: que hasta ahí termina la distancia, el estanque, aquí está el estanque y aquí está la rana, pues hasta aquí termina.

Video 301
Equipo de Gaby
Ely: cómo van muchachas?
Gaby: bien, mas o menos.
Gaby: "n" saltos, es como "x", no?
Ely: en cuál van en la cinco?, en el quinto salto, cuánto le falta a Yaya para llegar a su destino?, dice que se ayuden con la tabla
Gaby: un medio a la cinco?, porque vale lo mismo que esta la otra mitad (señalando en la tabla la distancia que recorrida en el quinto salto).
Ely: que dice equipo?
Gaby: bueno yo pienso eso, no se.
Chely: si porque le falta la otra mitad.
Ely: tú que dices Itzel?
Itzel: pues si que…
Gaby: (risas) qué?
Itzel: que le falta… (señala con el lápiz la distancia del sexto salto).
Ely: a ver que te convenza tu equipo, por qué dicen que un medio a la cinco?, porque a Itzel no la convencen eh.
Gaby: pero es que necesitamos saber cuántos saltos dio, no?
Ely: pues es lo que les preguntan más acá. Cuántos saltos dio para qué hija?
Gaby: para que llegue acá (señalando el final de la distancia).
Chely: al estanque.
Ely: a pues es lo que les pregunta aquí.
Gaby: aunque no pueda saltar siempre va a estar una mitad, no?
Ely: no se. Por qué dicen que no pueda saltar?

Gaby: porque el espacio ya va a ser muy chiquito, (señalando con las manos un espacio) el espacio del salto, pero de todos modos ese espacio chiquito, aunque no pueda saltar, tiene su mitad.
Ely: qué dice equipo?, yo no puedo opinar. Qué dices Chely?
Chely: si es así como dice Gaby.
Ely: si?, por qué?
Chely: porque cada salto que da es la mitad de cada salto, es la mitad de cada salto entre más chiquito este hasta que llegue al estanque.
Ely: entonces va a llegar al estanque?, en qué salto?
Chely: no sabemos.
Ely: las dejo un rato para que terminen?, cinco minutos más.

Video 303
Equipo de Luis M:
Pancho: numéricamente es infinito. (Luis M está contestando la pregunta 7 en la que responden: en 10 saltos la rana llega al estanque y expresándolo numéricamente es infinito).
Ely: se les hace conocido ese tema?
Luis M: el diablo de los números?
Fco: el diablo de los números.
Pancho: que si se te hace conocido?
Luis M: ah.
Pancho: yo algo pero no me acuerdo de cual.
Luis M: ni yo.
Fco: yo ni idea.

Video 306
Equipo de Carolina en el pizarrón:
Caro: Yaya desea llegar al estanque y con el primer salto recorre la mitad (marca en el pizarrón). Dice con el primer salto cuál fue la distancia que recorrió Yaya?
Ely: cuál fue?, lo acaban de decir, no?
Caro: aja, la mitad. Qué distancia le falta recorrer a Yaya para llegar al estanque? Pues la otra mitad.
Ely: ok, la pregunta número tres. Yaya da el segundo salto y de la distancia que le falta por recorrer, nuevamente avanza la mitad, ¿qué distancia le falta para llegar al estanque en el segundo salto?
Lalo: un cuarto.
Caro: un cuarto.
Ely: un cuarto, ahora, ¿llenaron la tabla?
Lalo: si.
Ely: hasta donde llenaron la tabla?
Caro: toda.
Ely: a ver.
Lalo: la explicamos o así?
Ely: la llenan y ahorita vemos.
Lalo: hasta ahí nomás (refiriéndose a que la tabla del pizarrón tiene una columna más que la de las hojas, y borra la columna sobrante).
Lalo: observa la tabla después de 5 saltos, ¿cuánto le falta a Yaya para llegar a su destino? Exprésalo de manera algebraica. Sería un medio, no?
Ely: un medio?
Lalo: aja.
Ely: qué opinan equipos?

Lalo: del salto cinco.
Ely: si?
Salud: ahí le faltaría un cuarto porque ustedes le pusieron, lo fueron partiendo a la mitad, el un medio a la mitad, la mitad de un medio es un cuarto. Del seis al diez sería un cuarto, no un medio.
Lalo: aquí?
Salud: del seis al diez sería un cuarto.
Caro: de aquí a aquí? (señalando del seis al diez en la tabla).
Luis M: por qué?
Salud: porque se supone que tienen que, la mitad de un medio es un cuarto.
Luis M: pero…
Salud: por eso pero… (se levanta y va al pizarrón). De aquí a aquí es un cuarto.
Ely: cuál medio hija?
Salud: este de aquí (señalando del salto seis al diez, la mitad de la tabla).
Ely: cómo un medio?
Fco: es un octavo, no?
Pancho: por qué si es la mitad?
Ely: no, explícanos. Por qué dices que un medio? Por qué es la mitad de diez el cinco?
Salud: si.
Ely: pero recuerda que esos son los saltos y pregunta la distancia.
Salud: (sonríe y se cubre el rostro).
Ely: a ver, inténtalo. Qué está diciendo Salud?
Fer: es que ella se refirió a los saltos de Yaya.
Caro: (señalando el segmento que representa la distancia).
Fer: si, aja.
Pau: ella pensaba que la mitad era del uno al cinco
Ely: ah, y ¿esta bien lo que esta diciendo ella?
Luis M: no.
Ely: por qué?
Manuel: porque los saltos que hay en la mitad, todos del uno al diez son los saltos que dio la otra mitad. Por eso no puede ser que del cinco al diez sea un cuarto.
Lalo: sería un octavo.
Ely: y entonces, ¿cuánto le falta?, ¿un octavo?
Pau: no.
Luis M: por qué un octavo?
Lalo: porque en la pregunta brincó hasta aquí (señalando el primer salto).
Pancho: cuánto es ahí la mitad?
Lalo: un medio.
Pancho: un medio.
Lalo: aja.
Pancho: cuánto le falta?
Lalo: pues otro medio. Por eso pero la tabla está de aquí a aquí (señalando la mitad que le falta por recorrer en el primer salto). Y la mitad que sería cinco sería un cuarto y sería de aquí para acá (señalando del seis al diez en la tabla).
Ely: pero ahí qué salto va?
Lalo: mande?
Ely: ahí en qué salto vas?
Lalo: aquí en el cinco.
Ely: ese es el salto cinco?
Lalo: aja.

Pancho: no.
Manuel: es el salto dos.
Ely: cuánto dicen ustedes?
Lalo: un octavo.
Ely: un octavo, y él dice que el siguiente, que marcó y ya borró, es el salto cinco.
Lalo: aja.
Ely: no lo borres por favor. Es el salto cinco, dices tú. Me puedes dibujar todos los saltos? Por ejemplo el uno, el dos, y así, como si fuera Yaya la que está brincando?

Video 307:
Ely: márcame los saltos, dibuja el primer salto, el segundo salto.
Pancho: todos los saltos que hizo a rana.
Ely: hasta llegar al quinto salto obviamente.
Lalo: sería el segundo (marcando en el pizarrón).
Ely: cuál es el quinto salto?
Lalo: este ya (señalando la quinta división que hizo).
Ely: y ahí es un cuarto lo que le falta por recorrer?
Lalo: no, eso sería un octavo, no?
Ely: un octavo? Por qué un octavo?
Lalo: porque… cómo se llama?... la tabla nos lo registra nada más de aquí, no?, porque empieza de un medio y si lo tomamos como lo de un medio esto (señalando la tabla completa).
Pancho: es la mitad de la tabla.
Lalo: aja. Sería la mitad y sería…
Ely: pero la tabla y la gráfica…
Lalo: ya me confundí.
Ely: ok, pregunta número seis. Si Yaya diera "n" saltos, ¿qué distancia le falta por recorrer?
Lalo: (voltea al pizarrón).
Ely: la contestaron?
Lalo: si.
Ely: cuánto?
Lalo: aquí le pusimos que un cuarto.
Ely: pregunta número siete, ¿qué cantidad de saltos necesita Yaya para llegar a su destino?
Lalo: (voltea al pizarrón y a sus hojas).
Ely: la contestaron?
Lalo: no, hasta ahí nos quedamos.
Ely: a muy bien, aplauso para el equipo.

Video 309:
Equipo de Paulina en el pizarrón
Pau: Yaya desea llegar al estanque y con el primer salto recorre la mitad de la distancia que inicialmente la separaba de el. Con el primer salto, ¿cuál fue la distancia que recorrió Yaya? Es de aquí a acá (señalando en el segmento la mitad), es un medio.
Ely: ok, la número dos.
Ca: ¿qué distancia le faltará recorrer para llegar al estanque? (señalando la mitad restante), es un medio.
Pancho: cuánto?
Pau: el otro medio.

Ely: la pregunta número tres. Yaya da el segundo salto y, de la distancia que le falta por recorrer, nuevamente avanza la mitad, ¿qué distancia le falta para llegar al estanque?
Pau: nosotros le pusimos un cuarto.
Ely: un cuarto?, por qué?
Pau: porque es la (señalando en el pizarrón mientras Carmen hace la siguiente división). Se supone que de donde empezó Yaya a la mitad que dio es un medio, y va a saltar la otra mitad.
Ely: a ok.
Pau: en el segundo salto, que es un cuarto. Y en el cuadro así lo hicimos.
Ely: así lo hicieron.
Pau: pero nos equivocamos, nosotros contamos así como Dany había dicho.
Manuel: pensaban que el cinco era la mitad de la raya.
Ely: ah creían que el cinco era la mitad de la distancia, pero no leyeron?, ahí decía número de saltos.
Pau: si, pero…
Ely: aún así, ok no hay problema, esta bien. La pregunta número seis, si Yaya diera "n" saltos, ¿qué distancia le falta por recorrer?
Pau: no la contestamos.
Ca: ya de ahí ya no.
Ely: muy bien, entonces aplauso al equipo.

Video 311
Equipo de Luis Miguel en el pizarrón
Luis M: dice que en el primer salto recorre la distancia que inicialmente la separaba de el. O sea que con un salto recorre la mitad de la distancia que tiene que recorrer, sería aquí ya donde está marcada. Con el primer salto cuál es la distancia que recorrió Yaya, le pusimos que era ½ de "x" porque le falta la otra mitad de "x".
Ely: ok.
Luis M: luego la segunda pregunta dice ¿qué distancia le falta por recorrer para llegar al estanque? Le falta la otra mitad de "x", otro medio de "x".
Ely: otro medio.
Luis M: luego la pregunta tres dice: Yaya dio el segundo salto y de la distancia que le falta por recorrer, nuevamente avanza la mitad, ¿qué distancia le falta para llegar al estanque?, de aquí avanzó la mitad que seria un cuarto, entonces desde este punto le faltaría un cuarto para llegar al estanque.
Ely: la tabla les quedó igual que a sus compañeras.
Luis M: perfecto a nosotros (risas), luego te dice que completes la tabla y nosotros la hicimos así porque como usted nos dijo una expresión es una expresión y nos tiene que decir el resultado.
Fco: el resultado de lo que tenemos en la línea de medida.
Luis M: un ejemplo como aquí tenemos uno treintidos (refiriéndose a 1/32) y la expresión sería un medio a la quinta potencia, porque con esta expresión podemos sacar el resultado (señalando 1/32).
Ely: cómo?
Pancho: un medio lo elevamos a la quinta potencia y te sale un…
Luis M: un treintaidosavo.
Pancho: por eso nos quedó la tabla así, lo elevamos al cuadrado.
Luis M: (empieza a completar la distancia por saltar en la tabla y agrega la columna 11 que borró al inicio Lalo), y aquí le seguimos.
Fco: ya está bien.
Luis M: (lo borra).

Gaby: si estamos de acuerdo.

Ely: la siguiente pregunta.

Luis M: dice, observa la tabla, después del 5 saltos, ¿cuánto le falta a Yaya para llegar a su destino? Exprésalo de manera algebraica. Después de cinco saltos.

Fco: (escribe en el pizarrón $(½)^5$).

Pancho: un medio a la quinta.

Luis M: o si, porque haga de cuenta que en el quinto salto, o sea que Yaya llega aquí en el primero, segundo, tercero, cuarto y el quinto, aquí es un treintaidosavo, que sería pues eso (señalando (½)5), le faltaría de aquí para llegar hasta acá sería otra vez lo mismo.

Pancho: luego la otra.

Luis M: luego la seis, si Yaya diera "n" saltos, ¿qué distancia le falta por recorrer?.

Pancho: "n" a la un medio.

Luis M: por decir, "n" es… la respuesta es un medio de "n" (y escribe $(½)^n$) porque mire como usted nos dijo "n" saltos es como el número de saltos y si Yaya diera "n" sería como un salto porque no está especificando que salto sería. Entonces por decir en este salto sería hasta aquí (señalando el primero), que es el primer salto y tiene que ser la mitad porque por cada salto que de tiene que avanzar la mitad nada más de la distancia que le falta por recorrer, o sea que "n" saltos sería lo mismo y le faltaría lo mismo otra vez la mitad de "n" y volvemos a lo mismo. Y luego la pregunta número siete, ¿qué cantidad de saltos necesita Yaya para llegar a su destino?, nosotros le pusimos que aproximadamente son diez saltos porque es lo que se puede…

Pancho: ver en la tabla.

Luis M: es por decir lo que se puede ver (señalando los saltos).

Ely: ahí en qué salto van?

Luis M: seis, siete y ocho (dibujando los saltos y ya no puede dibujar el noveno), en la nuestra se pudo re bien. (risas).

Luis M: el chiste es que por decir, si lo vemos así por decir la rana podría llegar por decir… un ejemplo si la rana estuviera por aquí y brinca y brinca y brinca y brinca (simulando que el borrador es la rana brincando), por aquí por el salto número cinco o seis ya se ve que ya llegó al estanque.

Pancho: pero todavía le falta.

Luis M: pero si lo ponemos… este, cómo se llama?... así expresándolo de otra manera, que sería como algebraicamente o numéricamente.

Pancho: ya nada más lo vamos dividiendo entre dos.

Luis M: con números sería infinito, nunca llegaría.

Ely: a ver, otra vez esa parte.

Luis M: es que mire, un ejemplo, la rana está aquí, y brinca y brinca y brinca (simulando que el borrador es la rana brincando), aquí aparentemente ya se ve que llegó al estanque, en el brinco pongámosle diez ya llegó al estanque. Pero si lo pusiéramos como indica la tabla, de aquí todavía puede sacarse la mitad (agrega la columna 11 que había borrado al inicio), que sería (escribe 1/2048) y así sucesivamente y sería infinito porque no… bueno pues a lo mejor si habría un tope pero ya sería muy largo de encontrar, no podemos sacarlo porque no sabemos como está, si me entendió verdad?

Pancho: y aquí ya paramos porque es el final, es el estanque, ya no nos podemos pasar más allá del estanque. Aquí hay un número que podemos dar especificado bien cual es, porque ya estamos llegando al tope.

Ely: cuál es ese número?

Pancho: sería el de… un medio de… un mil veinticuatro havo.

Ely: que corresponde a qué salto?

Pancho: al diez.
Fco: al décimo salto.
Ely: ok, qué opinan equipos?
Luis M: falta una pregunta.
Ely: ah ok, perdón.
Luis M: dice, la última pregunta dice ¿qué sucede con la distancia que le falta por recorrer a Yaya a medida que aumenta el número de saltos?, ¿qué sucede con la distancia? Pues la distancia se va acortando porque cada salto es la mitad y la mitad, y la mitad, y la mitad, y la mitad (haciendo movimientos con las manos de manera que se van juntando sus palmas).
Pancho: y se va reduciendo el… la mitad pues de la distancia, se va haciendo más chica, chica, chica (moviendo sus manos sobre los saltos dibujados, de manera que sus palmas se van juntando).
Ely: pregunta, en algún momento esa distancia será cero?
Luis M: cuando llegue a…
Pancho: cuando llegue a su destino.
Luis M: yo siento que a lo mejor no sería cero.
Pancho: es que si nos vamos pues numéricamente no llega, no creo que llegue a cero porque yo pienso que es infinito, porque lo vas dividiendo entre dos, entre dos, y cuando se acaban los positivos te sigue dando negativos, nosotros lo hicimos en la calculadora.
Ely: cómo te sigue dando negativos?
Pancho: por ejemplo estamos dividiendo esto (señala las columnas de la tabla que en el momento está agregando Luis M) y siguiendo dividiendo, dividiendo, dividiendo nos sale por diez a la menos tres.
Ely: ah el exponente.
Pancho: el exponente.
Ely: pero, si saben usar esa notación?
Pancho: si.
Ely: por ejemplo podrías no ponérmelo como por diez a la menos tres, sino expresarlo sin el por diez a la menos tres?, no en notación científica.
Pancho: en…
Tari: oh si, cero, cero, cero, cero… (mueve los dedos de las manos).
Manuel: no se podría saber en donde termina.
Ely: cómo es Tariakuri?
Tari: así como nos enseñó el profe Bony (risas).
Pancho: va recorriéndose.
Tari: se recorre el punto decimal.
Ely: pero entonces la distancia sería negativa?
Gaby: no.
Pancho: es positiva pues pero…
Alex: nomás se iría recorriendo.
Luis M: el exponente negativo.
Ely: pero, qué significa que el exponente sea negativo?
Lalo: que se recorre el punto decimal hacia la derecha.
Luis M: no, hacia la izquierda.
Pau: a la izquierda.
Ely: pueden poner un ejemplo?
Luis M: un ejemplo si tuviéramos cinco a la décima.
Ely: alguno de los que les salió.
Manuel: cinco por diez a la menos tres.
Fco: puede ser la de diez.

Ely: donde salga notación científica para que me expliquen, porque al principio creí que me decían que salían números negativos.
Fco: hasta aquí podría ser su último salto (haciendo un dibujo que sería una ampliación de los últimos saltos), ya en notación científica sale nueve punto setenta y seis, cincuenta y seis, veinticinco.
Ely: nueve punto… nada más los dos primeros (Luis M está escribiendo el número en el pizarrón). Siete, hasta ahí, por diez a la qué?
Fco: por diez a la menos cuatro.
Ely: bueno, ahora no me la expresen con notación científica sino recórranme el punto como ustedes dicen.
Luis M: se recorre así (empieza a recorrer el punto).
Pau: cero, nueve.
Pancho: uno, dos, tres, cuatro.
Pau: cero, cero, cero, cero.
Luis M: entonces así sería.
Ely: entonces cuál sería la cantidad?
Luis M: sería cero punto cero, cero, cero novecientos setenta y seis.
Ely: y entonces la pregunta es: ¿qué diferencia hay entre eso y cero?
Luis M: por qué cero?
Ely: porque les pregunté, en algún momento va a ser cero? Y me respondieron que no, luego da negativos.
Pancho: por ejemplo cuando lo hacemos con cantidades más grandes nos daba, no?
Luis M: yo decía cero, es que ya nos pasamos del cero aquí.
Pacho: a no, nosotros por lo que decíamos que daba negativo era el exponente.
Ely: si, si.
Gaby: pero ese representa unos ceros.
Ely: mi pregunta es: dicen que no, nunca va a dar cero, me dijeron que no, la distancia nunca va a ser cero.
Luis M: así (señalando la notación científica), ya de otra manera pues quién sabe (risas).
Ely: mi pregunta es entonces, ustedes dicen en el diez da esa cantidad cero punto cero, cero, cero, nueve. La pregunta que yo hago ahora es, bueno y que hay de diferencia entre cero y cero punto, cero, cero, cero, nueve?
Luis M: que es más chico.
Ely: quién es más chico?
Luis M: porque está debajo de cero.
Ely: ese número está debajo de cero?
Pau: si.
Luis M: porque aquí da hasta cero (señalando los primeros ceros del número), y este está más para acá.
Ely: o sea que lo puedo representar?
Luis M: negativo.
Manuel: no.
Ely: está en los números negativos?
Gaby: no.
Lalo: es que está poquito antes del cero, después del cero, antes de llegar del uno, pero no puede ser negativo.
(risas, ruido)
Manuel: que no sería más fácil si supiéramos la distancia que hay de donde brincó hasta donde esta el estanque?
Ely: por qué?
Manuel: pues así se sabría hasta que distancia se acaba de saltar.
Ely: supón que es un metro.

Manuel: no pues así no. (risas).
Ely: ya sabes que es un metro.
Manuel: ya no pues. (risas).
Ely: entonces, dicen que a medida que los saltos aumentan, qué pasa con la distancia?
Luis M: se acorta.
Pancho: se hace más corta (junta las palmas de las manos).
Ely: hasta que punto.
Luis M: hasta
Pancho: hasta llegar a tocar el infinito. O sea todavía puede seguir más pero como nos están pidiendo hasta que llegue al estanque pues aquí se quedaría, pero si le seguiríamos sería infinito.
Ely: qué tiene Luis Miguel? Ya tu cara… no sé qué.
Pau: o sea que lo esta enredando más.
Ely: si?, te estoy enredando?
Luis M: no.
Ely: nada más estoy preguntando.
Luis M: no, yo sí le entendí.
Pancho: nos quiere confundir pero no.
Ely: los quiero confundir?, bueno aplausos por favor para el equipo.

Video 312
Equipo de Gaby:
Gaby: en la primer pregunta pues concordamos con nuestros compañeros
Ely: primera y segunda pregunta está de acuerdo con los demás?
Gaby: aja.
Ely: en la tercera?
Gaby: también.
Ely: como que ahí no hay problema, la tabla, cómo les fue con la tabla?
Gaby: pues también hicimos eso.
Ely: si llegaron a eso?
Gaby: si.
Ely: la pregunta cinco.
Gaby: observa la tabla después del quinto salto, cuánto le falta a Yaya para llegar a su destino?. Exprésalo de manera algebraica.
Ely: y cómo lo expresaron?
Gaby: (sonríe y toma el marcador), según nosotras sería esto entre dos.
Ely: y ese es el quinto salto?. No verdad, ese no es el quinto salto. A ver qué salto expresaron ustedes?
Luis M: el primero.
Ely: el primero?
Gaby: ah entonces si estamos mal.
Ely: la siguiente pregunta.
Gaby: si Yaya diera “n” saltos ¿qué distancia le falta por recorrer?, también concordamos con ellos (señala al equipo de Luis M) que es infinita la distancia porque se va recortando.
Ely: a ver, si Yaya diera “n” saltos ¿qué distancia le falta por recorrer?, ¿qué dijeron ustedes?
Gaby: indefinido.
Ely: por qué?
Gaby: porque no se sabe exactamente cuanta distancia tiene que dar para llegar al estanque, pues como se va dividiendo.
Luis M: la distancia es “n” saltos.

Ely: la distancia es “n” saltos?
Pancho: si, dice que la distancia que brinca “n” y la mitad de “n”, un medio de “n”.
Gaby: lo mismo, no es que les copiemos.
Ely: ellas dicen que indefinido, dices indefinido porque no conoces la distancia o cuál fue la razón?
Gaby: la distancia que le falta.
Ely: aja, dices que es indefinido.
Gaby: si porque se va reduciendo.
Ely: ah ok.
Gaby: cuando se divide entre dos.
Luis M: le explico profa?
Ely: no, espérame esta hablando ella. Ok Gaby, dice Gaby si diera “n” saltos pues no podría decir la distancia porque se va reduciendo, esa es tu respuesta?
Gaby: mjm.
Ely: ok, la siguiente pregunta.
Gaby: qué cantidad de saltos necesita Yaya para llegar a su destino?
Pancho: argumenta tu respuesta.
Gaby: tampoco.
Ely: no saben?
Gaby: pues no se sabe, pero si va a llegar (risas).
Ely: a ver equipos.
Gaby: pero no sé en que número de saltos.
Ely: por qué?
Gaby: porque se va reduciendo.
Pancho: pues por eso.
Ely: se va reduciendo.
Pancho: con la tabla se podía ir haciendo, la mitad de la mitad, de la mitad, de la mitad.
Ely: Pancho.
Gaby: pero no sabemos cuantos saltos.
Ely: y aproximadamente Gaby?, equipo de Gaby?... Dice Gaby: no, exactamente no se porque se va reduciendo, y es lo que también dijo el equipo de Pancho, dijo: la distancia se va reduciendo. Bueno exactamente no saben, pero aproximadamente no me pueden decir?, si sí llega, si no llega.
Pacho: a los cuantos creen que llegue.
Ely: si creen que no llega también díganme: no llega.
Gaby: como al sexto.
Ely: como en el sexto?
Gaby: entre estos (señalando del cuarto al sexto salto).
Ely: por qué entre esos?
Gaby: porque es un poquito más de espacio el que tiene hablando, entonces ya de aquí para acá (señalando después del sexto salto) si hay espacio pero ya no puede dar los saltos.
Ely: por qué no puede dar los saltos?
Gaby: porque son más grandes.
Ely: más grandes?
Itzel: y es más pequeña la distancia.
Gaby: más grandes los saltos que la distancia que debería de saltar.
Ely: a ver, entiendo tu postura, explícanos un poquito más.
Gaby: (ríe) me refiero a que por ejemplo aquí (señalando los brincos en el segmento), como dijeron ellos va a llegar hasta aquí y ya para acá si hay más números intermedios pero ya no podría dar los saltos la rana.

Pancho: por qué?
Itzel: porque el espacio es muy pequeño.
Gaby: si, el que tendría que dividir.
Ely: qué pasaría con la rana?
Gaby: se pasaría.
Ely: se pasaría dice Gaby.
Gaby: bueno no, no se pasaría, llegaría pero no en los saltos que deberían de ser.
Ely: cuántos deberían de ser?
Gaby: no sabemos.
Ely: y entonces?
Pancho: dices que si llegaría pero no en los saltos que deberían de ser, entonces cuáles deberían de ser?
Gaby: los que están aquí, los intermedios chiquitos, esos saltos deberían de ser.
Pancho: cuántos son pues?
Gaby: que no se sabe.
Chely: no se sabe Pancho.
Ely: a ver Gaby.
Pancho: se contradice.
Ely: no, no se está contradiciendo. Creo que entiendo lo que está diciendo el equipo, dicen: hay más números intermedios, debería de brincar esos números intermedios.
Gaby: debería de brincarlos pero físicamente no puede.
Luis M: si ya entendí.
Gaby: porque es más grande.
Ely: si, si entendieron lo que dice Gaby?
Todos: si.
Ely: cómo ven?
Manuel: la rana ya nomás movería una patilla y ya.
Ely: dice: la rana ya nomás movería una patilla y brinca a la mitad.
Luis M: las pulgas de la rana.
Gaby: no podría porque es más pequeño de lo que miden sus extremidades.
Ely: están escuchando lo que dice Gaby?, lo que está queriendo decir desde hace rato nomás que no le llegaban las palabras.
Gaby: ándele.
Ely: dice: si brincara su pie es más grande de lo que se supone que tiene que brincar.
Gaby: aja.
Ely: qué opinan equipos?
Luis M: bien.
Ely: la última pregunta.
Chely: qué sucede con la distancia que le falta recorrer a Yaya a medida que aumenta el número de saltos? Se van haciendo pequeños.
Gaby: se van acortando.
Ely: se van haciendo más pequeños.
Gaby: cada vez se van haciendo más pequeños
Ely: muy bien, aplauso por favor al equipo.

Video 313
Equipo de Alex:
Gaspar: pues nosotros también en las dos preguntas estamos de acuerdo con los equipos.
Tari: ellos y ellos (señalando al equipo de Luis M y al de Gaby).

Alex: y de la tercera pregunta dice: Yaya da el segundo salto y de la distancia que le falta por recorrer, nuevamente brinca la mitad, dibuja a donde brinco Yaya, nosotros le pusimos más o menos hasta aquí (señalando en el segmento el segundo salto). Decía que dibujáramos hasta donde llego y pues llegó hasta ¾. Y luego dice ¿qué distancia le falta para llegar al estanque? Y nosotros le pusimos que le faltaba igual a ¼.

Ely: ok, coinciden con los demás equipos. La tabla la llenaron?

Alex: si.

Ely: igual?

Gaspar: si igualito.

Alex: si porque esta expresión la elevábamos al cuadrado y nos daba lo que acá arriba.

Ely: la pregunta cinco, en el quinto salto qué distancia le falta por recorrer?

Alex: nosotros le pusimos que era un medio a la quinta potencia.

Ely: la siguiente pregunta.

Alex: si Yaya diera "n" saltos, ¿qué distancia le falta por recorrer?, nosotros le pusimos un medio de "n" saltos porque siempre le va a faltar la mitad.

Ely: cómo lo escribieron?

Tari: (escribe en el pizarrón ½ n saltos)

Ely: la siguiente pregunta chicos.

Alex: qué cantidad de saltos necesita Yaya para llegar a su destino? Nosotros le pusimos "n" saltos.

Tari: porque no sabemos.

Alex: porque no se sabe exactamente, yo le puedo decir faltan diez y que tal si a los diez no llega.

Ely: y…

Alex: no se sabe exactamente la cantidad de saltos que faltan.

Ely: de qué va a depender?

Alex: eh…va a depender de la distancia que falte por recorrer.

Ely: si es una distancia pequeña o grande o cómo?

Alex: ouh… sí depende de la distancia pues si es muy grande le van a faltar muchos saltos, pero si es pequeña le van a faltar menos saltos.

Ely: oh. Qué opinan equipos?

Pancho: pues que si se pueden contar los… no exactamente un dato exacto, pero si puede ser aproximado.

Tari: bueno es que un aproximado si, pero…

Pancho: no si, pero ustedes están poniendo "n" saltos, no están dando nada pues, no están dando ni un aproximado, pero si hay un aproximado.

Ely: pero él dice, vean lo que dice, eso no lo había dicho nadie, valórenlo. Dice: si la distancia es pequeña pues va a llegar rápido, si la distancia es grande va a dar más saltos, qué opinan?

Pancho: eso si es verdad, pero ahí nos está dando la distancia, no?

Ely: eso si es verdad?

Todos: si.

Ely: a ver una pregunta entonces.

Luis M: pero de hecho…

Ely: una pregunta entonces (Luis M voltea a verme molesto porque lo interrumpí), quieres hablar?, ok dime.

Luis M: es que por decir si la distancia es grande el primer brinco va a ser bien grande, y si la distancia es pequeña pues va a ser nada más a la mitad (moviendo sus manos para simular distancia grande y brinco grande, distancia pequeña y brinco pequeño). De hecho casi da lo mismo, lo está dando a la mitad el salto.

Ely: a ver, qué opinan?
Todos: si.
Fco: va a brincar la mitad, la mitad, de la mitad, de la mitad.
Luis M: por ejemplo si yo brinco de aquí y voy a llegar a la raya (se levanta para moverse como lo haría Yaya), pues nada más va a brincar de aquí a aquí. Y si yo quiero llegar de aquí hasta acá, pues va a llegar aquí, siempre me voy a ir a la mitad de la mitad, y así (dando brincos).
Ely: qué opinan?
Alex: daría lo mismo.
Ely: entonces, quién tiene razón?, si la distancia es muy grande…
Pau: es lo mismo.
Ely: es lo mismo?
Manuel: prácticamente.
Ely: a ver, vean bien lo que dice. Dice Alejandro: si la distancia es grande va a dar muchos saltos, porque la distancia es grande. Si la distancia es pequeñita va a dar poquitos saltos, porque la distancia es pequeña…
Pancho: no porque si la distancia es grande también de ese tamaño va a ser el salto.
Tari: pero…
Alex: no, no, no, ya me confundieron porque…
Gaby: el dice, bueno yo le entiendo que si la distancia…
Alex: o sea, si doy, si está muy largo el terreno pues voy a dar un saltote.
Luis M: es lo que te estoy diciendo.
Alex: entonces si está mas chiquitito voy a tener que dar pasitos, unos pasitos tin, tin, tin, tin… pasitos.
Gaby: no, si es más chiquitito puedes dar los mismos saltos que en el otro, pero te faltarían los otros brincos (Se refiere a cuando ya no puede brincar la rana), los grandes que puedas y te faltarían otros.
Pancho: se iría reduciendo pues el tamaño.
Pau: puedes la mitad, y la mitad, y la mitad, y la mitad hasta donde dice Gaby.
Ely: entonces, a ver, va a ser lo mismo si la distancia es grande o si la distancia es pequeña?
Luis M: si la distancia es grande o pequeña de todas maneras va a dar muchos saltos, no que la distancia sea pequeña va a dar poquitos saltos, de cualquier manera que sea la distancia va a dar muchos saltos.
Ely: va a dar muchos saltos, o sea, no tiene que ver el tamaño de la distancia?
Luis M: siempre van a ser bien hartos saltos.
Ely: siempre van a ser bien hartos saltos, qué opinan equipos?, Alejandro?
Alex: pues otra vez estoy confundido porque, o sea, si es un pedazo grande pues nada más va a dar un…
Pancho: a ver hazlo en dos metros.
Alex: en dos metros?
Lalo: cuántos saltos daría?
Pancho: cuántos saltos tu crees que daría?
Alex: pues si los dividimos va a dar uno… no(se queda sin saber que decir).
Luis M: mira en dos metros sería, en el primer salto vas a recorrer medio metro.
Tari: un metro.
Luis M: un metro, en el segundo medio metro, al tercero veinticinco centímetros, en el otro doce punto cinco y así sucesivamente, así sucesivamente.
Gaby: ah si.
Luis M: y luego si lo haces con 30, el primero va ser de 15 centímetros, y así, así, así (moviendo sus dedos para simular espacios cada vez más pequeños).
Lalo: va a dar los mismos saltos pero más pequeños, van a ser los mismos saltos pero solamente va a cambiar (moviendo las manos para simular el tamaño).

Luis M: no los mismos, pero de igual manera van a ser muchos.
Ely: dice, bueno, creo que dice Eduardo, tú me corriges Eduardo, dice: la cantidad de saltos van a ser los mismos, nada más que…
Lalo: más pequeños, una distancia más pequeña, más mínima que la otra.
Ely: qué opinan?
Pancho: si, por ejemplo sea un metro va a dar los mismos que en treinta centímetros.
Itzel: si.
Ely: si?, está Itzel participando… me gusta eso (Itzel se sonroja). Si?
Pancho: si.
Ely: la última pregunta.
Alex: dice, qué sucede con la distancia que le falta por recorrer a Yaya a medida que aumenta el número de saltos? Nosotros le pusimos: se hace más pequeña, la distancia y son más pequeños los saltos.
Tari: los saltos pues.
Ely: pero les preguntaron por la distancia.
Alex: con la distancia, se va haciendo más pequeña.

ANEXO C

Reparto de pizza

Video 256:

Ely: [Leyendo las instrucciones], ¿si entendieron cómo la van a repartir?

Barby: es igual como lo de Yaya.

Yaz: por decir si yo fuera el primer invitado me tocaría la mitad de la pizza, y el que sigue la mitad de la mitad… [Simulando los cortes con la mano].

Ely: y el que sigue la mitad de la pizza y así sucesivamente.

Dany: nunca se va a acabar [le dice a Yazmín].

Yaz: ¿hay cómo crees que nunca se va a acabar?

Ely: Entonces empieza con la pregunta número uno, dice: toma la pizza de papel y divídela de la misma forma que lo haría Mónica. La pregunta número dos dice: ¿qué porción de la pizza entera le corresponde al primer invitado?

Todos: la mitad.

Ely: ¿qué porción de la pizza entera le corresponde al segundo niño en llegar?

Todos: un cuarto.

Ely: ah bueno, pues entonces ya pueden empezar la actividad.

En el equipo de Fidel:

Fidel: ¿vamos a cortar la pizza?

Ely: sí, para eso eran las tijeras. Pueden rayar la pizza para indicar qué porción le toca a cada invitado.

Equipo de Juan Carlos:

Peny: y quinientos doce.

Ely: vayan recortando la pizza, la pueden recortar e incluso pueden marcar: este pedazo es para este invitado y este pedazo es para este invitado.

Equipo e Yazmín:

Ely: pueden ir marcando eh, esto es del primer invitado, esto del segundo invitado.

Yaz: ah si, [dirigiéndose a Dany] a ver si aquí ponle del primer invitado.

Yaz: [sigue recortando].

Liz: sería un octavo.

Yaz: un octavo.

Liz: [entrega la porción a Dany para que la marque] en cada operación se va un pedazo de pizza.

Dany: este ya se va.

Liz: este ya se va.

Dany: estos ya se repartieron.

Yaz: ponle pues que es el tercero.

Yaz: [leyendo las instrucciones] completa la siguiente tabla en términos de la forma…

Yaz: [empieza a llenar la tabla] al primer invitado.

Liz: al tercero un octavo, un diesiseisavo, un treinta y cuatroavo.

Liz: un sesenta y cuatroavo.
Yaz: pero, ¿cuántas puedes encontrar de la pizza partiendo?
Liz: por eso pero tienes que repartirla.
Yaz: por eso pero ve partiendo, porque a lo mejor va a llegar un momento en que… imagínate repartir una pizza de verdad así.
Dany: [risas].
Dany: [se adelanta a leer la siguiente pregunta] ¿y al invitado veinte?
Yaz: ¿cómo?
Dany: [le señala la siguiente pregunta en la hoja de actividad]
Yaz: ¿tenemos entonces llegar al número veinte o solo si queremos?
Ely: tienen que contestar la pregunta.
Liz: ahí está otra mitad es del cuarto.
Dany: ¿cuál es el cuarto?
Yaz: ese.
Dany: [lo toma y lo marca] esta mitadcita.
Liz: esta es del quinto.
Yaz: ¿puedes?
Liz: si, y queda para el otro, hay ya no puedo [doblarlo].
Yaz: ya nomás así "trata que sea la mitad".
Liz: ya no nos va a quedar para los otros.
Yaz: es el sexto.
Liz: hay ya no puedo.
Yaz: ya no lo dobles, ya córtalo así.
Liz: ya no se va a poder más.
Yaz: hasta donde se pueda.
Equipo de Armando:
Mando: es como la de Yaya, no?
Ely: ¿no han cortado su pizza?
Goyo: si.
Ely: ¿y la van marcando?
Goyo: si.
Ely: ¿hasta qué parte van?
Mane: hasta la tercera.

Video 257:
Equipo de Armando:
Mane: ¿quiere que la desarrolle hasta el nueve?
Ely: ¿Qué las partas?
Mane: si.
Ely: puedes?
Mane: creo que si.
Equipo de Yazmín:
Dany: [quiere seguir cortando la pizza ahora en forma horizontal]
Liz: ahhhh ¿así?
Yaz: no [negando también con el dedo].
Yaz: ¿si se puede partir así? [me pregunta].
Dany: verdad que si.
Ely: tiene que ser estrictamente la mitad de la anterior.
Liz: ah… no, entonces no.
Ely: pártela como quieran pero que sea la mitad de la anterior.

Liz: ahhhh y yo cortando [señala la forma en que estaba haciendo los cortes].

Dany: aquí le cortamos la mitad.
Yaz: pero si crees [le quita a Dany el pedazo para observarlo].
Dany: aquí está mas ancho y acá más delgadito [señalando los extremos].
Yaz: aja.
Liz: no les va a tocar igual.
Yaz: aja.
Ely: en qué invitado van?
Liz: en el octavo.
[siguen llenando la tabla].
Yaz: órale pues [le dice a Dany para que continúe con los cortes].
Liz: pártela.
Dany: ¿qué?
Yaz: pues pártela.
Dany: [intentado cortar] no se deja.
[risas].
Liz: no se puede.
Yaz: [me pregunta] ¿si se puede?, ¿si cree que se pueda?
Ely: pues ustedes son los que me van a decir.
Yaz: hay Daniel pero estas bien seguro que si?
Liz: no, va a quedar…
[Dany empieza a partir la rebanada como lo venía haciendo Liz].
Yaz: mejor pártela como tu creías.
Liz: y a la "n" le va a tocar nada porque ya llego al final.
Yaz: ¿cómo era Dany en la "n"?
Liz: mira la pizzotota que le va a tocar.
Yaz: hay no manches!
Yaz: ¿cuánta pizza le toco al niño que llegó en el lugar número veinte?
Liz: íbamos en el mil veinticuatro. Once, dos mil cuarenta y ocho.
Yaz: si en el…
Yaz: en el diez cuanto va a tener? Mil veinticuatro.
Liz: mil veinticuatro.
Yaz: cuatro cincuenta y seis? No. Cuatro mil noventa y seis.
Liz: no es más fácil si lo sacamos con calculadora?
[no le prestan atención y siguen haciendo sus cálculos].
Yaz: no porque una mas una dos, y una que llevamos tres.

Video 258:
Juan C: uno más diez.
Barby: ¿ya sabes cuánto es para el invitado veinte?
Juan C: me faltan dos, me faltan dos. Son nueve.
Barby: en el primero le tocaría la mitad de la mitad de la pizza.
Peny: está más fácil. ¿y la seis?
Juan C: Falta uno.
Peny: ¿cuánto?
Juan C: veinte, apúntalo: uno, cuatro, diecinueve, cuatro, tres, cero, cuatro. Un, cuatro millones ciento noventa y cuatro mil trescientos cuatroavos.
[risas].
Barby: ah descíframelo.
Juan C: el del número veinte [pasándole la hoja a Bárbara que está anotando], ya no le va a tocar nada! [se rie].
Peny: una salchicha tal vez.
Peny: veinte, ¿por qué?
Barby: porque es el total de número veinte.

Video 259:
Equipo de Armando:

Mando:	ahora sumemos, con ayuda de la tabla y la expresión a la que llegaste ¿qué cantidad de pizza había repartido Mónica cuando solamente el primer invitado?
Mando:	¿cuánto suman las porciones del niño 1 y niño dos?
Mane:	tres cuartos.
Mando:	si a la suma anterior agregamos la porción del niño tres, ¿cuánta pizza tenemos?
Mane:	suma a tres cuartos a un octavo.
Mando:	¿cómo?
Mane:	pero se me olvidó mi libreta, ahí lo había apuntado.

[Goyo toma la hoja y escribe algo]

Mane:	tres octavos.
Goyo:	¿acá te da desde el principio o particular? (refiriendose a la sucesión y a la serie)
Mane:	no me acuerdo como se hace.

[risas]

Video 260:

Fer:	[leyendo las instrucciones] Completa la tabla…
Fidel:	¿qué, qué, qué?

[Fer le entrega la hoja a Fidel para que lea y Kevin observa]

Fidel:	oh ya le entendí, [escribe]. Eso era, ¿qué? ¿ciento cuarenta y cuatro?.
Fer:	si.

[Fidel sigue calculando].

Fidel:	un diesiseisavo a la siete octavos.

[siguen calculando Fidel y Kevin].

Fidel:	quince dieciseisavos.
Fidel:	dieciséis por siete

Video 261:

Yaz:	en forma de expresión algebraica.

[risas].

Yaz:	ahora con ayuda de la tabla y la expresión algebraica a la que llegaste. ¿Qué cantidad de pizza había repartido Mónica cuando había llegado solo un invitado?
Liz:	ah pues la mitad! Nada más está uno.
Yaz:	le pongo la mitad o un medio?
Liz:	la mitad.
Yaz:	¿qué cantidad de pizza había repartido Mónica cuando solo había llegado un invitado?, ¿la mitad o un medio?
Liz:	pues la mitad es igual que un medio, es lo mismo.
Yaz:	¿cuánto suman las porciones del niño uno y del niño dos?
Yaz:	son… tres cuartos.
Liz:	no será así?
Yaz:	Mira un medio más un cuarto son tres cuartos.

[risas]

Yaz:	si a la suma anterior agregamos la porción del tercer niño, ¿qué cantidad de pizza tenemos?
Liz:	un cuarto y…

Yaz: un octavo sería…
Liz: ¿acá por qué le pusiste tres cuartos?
Yaz: mira…
Liz: ahhh ya le entendí.
Yaz: un medio más un cuarto es igual a… tres cuartos.
Liz: es la que este se multiplica por este y luego tienes que sacar?… oh ya le entendí.
Yaz: sería [está calculando].
Yaz: siete octavos serían.
Liz: uno, dos, tres, cuatro…
Yaz: serían siete octavos.
[Daniel está verificando con la calculadora]
Liz: un entero?
Yaz: es que mira, si un medio tiene dos cuartos y un entero tiene dos medios, de un medio serían dos cuartos, el otro medio dos cuartos, el otro medio tiene dos cuartos… hay son siete octavos hombre!
Liz: ponle siete octavos que yo no te estoy diciendo nada.

Video 262:
Barby: ¿cuánto sale un octavo, no?
Juan C: ¿cuánto Penélope?, ¿cuánto voy a sumar?
[toma la calculadora y empieza a hacer la cuenta]
Peny: un medio mas un cuarto mas un octavo mas un diesiseisavo mas un treintaidosavo.
Juan C: ya?
Peny: ya, ah mas un sesenta y cuatroavo.
Juan C: no, me sale un error.
Juan C: un medio mas un cuarto mas un octavo mas un diesiseisavo mas un sesenta y cuatroavo.
Juan C: sesenta y tres sobre sesenta y cuatro, sesenta y tres sesenta y cuatroavos.
Barby: pero es entre treintaidos.
Peny: ah si?, ponle primero ¿sesenta y qué?
Barby: es un medio mas un cuarto mas un octavo mas un diesiseisavo mas un treintaidosavo.
Juan C: ¿mas un treintaidosavo?
Barby: aja.
[Juan Carlos vuelve a hacer todo el cálculo].
Barby: quítale el menos, hay le hubieras quitado.
Juan C: ¿cuál?, ¿cómo es que era?, ¿sesenta y tresavo?
[Bárbara le entrega la hoja de trabajo a Juan Carlos y empieza a acomodar los pedazos de pizza que se deben sumar].
Juan C: que no se vayan las letras [le dice a Penélope que toma la calculadora]. Sesenta y tres…
Peny: dice, esto. [muestra el resultado de la calculadora].
Juan C: un…
Barby: invitado seis… aquí no eran ocho?
Ely: ¿esas son sus porciones? Y ¿en qué lugar preferirían llegar?
[risas].
Peny: yo en el séptimo.
Ely: [le pregunta a Penélope] ¿en qué lugar preferirías llegar tú?
Peny: yo en el séptimo lugar
Ely: ¿en el séptimo lugar?, ¿qué porción te tocaría?

Peny: [muestra el pedazo de pizza].
Ely: ese pedacito te tocaría, ¿te gustaría comerte ese pedacito?
Peny: si, pues no como tanto.
Barby: yo en el primero [se ríe y muestra la porción que le tocaría].
Ely: ¿y tú?
Juan C: yo en el segundo siquiera.
Ely: y tú en el séptimo, ¿te gusta la pizza?
Peny: si
Ely: y quieres llegar en el séptimo?
Peny: porque no quiero ser tragona.

Video 263:
Mando: pero no le has puesto nombres.
Ely: [revisa las hojas de trabajo] aquí, aquí traten de usar la expresión que ya tienen acá.
Mando: cómo?
Mane: era lo que yo les decía.
[risas]
Ely: pero no lo borren, mejor les doy si quieren otra hoja.
Goyo: mejor lo ponemos acá adelantito.
Ely: ajá, si ocupan otra hoja igual me dicen.
Goyo: les dije que pusieran.
Mane: cállate.
Mando: ¿qué voy a poner aquí?
Mane: aquí le pones una rebanada que también es igual o decimos que es igual a esto.

Video 264:
Fer: hay que ponerle aquí.
Fidel: ¿cómo es la porción de pizza repartida a medida que llegan más y más niños?... se acaba [risas].
Fer: te tocan las boronas wey.
Fidel: les toca lamer la caja.
Fer: al último le toca tirar la caja.
Kevin: ¿qué cantidad de pizza repartida había cuando habían llegado "n" niños?
Fidel: [lee algo que no se le entiende].
Fidel: a disminuir.. si wey, cuando "x" crece… ¿a qué tiende la suma?... a que van llegando más niños. Si "x" crece a qué tiende la suma, a que van llegando más niños.
Kevin: ¿y la cantidad?
Fidel: aumenta pues.

Video 265:
Ely: lo que están pidiendo es encontrar como una especie de fórmula para dar la porción de la pizza…
Yaz: si, como que de "n", por decir.
Ely: ¿ésta no sería una formula?
Yaz: si pues pero es que... es que no sé cómo explicarles
Ely: ¿no te convence?
Yaz: no.
Ely: bueno, entonces ustedes explíquenle, yo no le puedo explicar.
Liz: explícale Dany. Mira es que aquí, que no ves el ejemplo que nos puso la maestra en el salón, que para sustituir esto que no pusiéramos todo así,

	todo igual, hubiéramos puesto que un medio a cuanto mas equivaliera un cuarto; por decir un medio a la potencia dos.
Yaz:	si, pero no te acuerdas que… es que si, si esta bien. pero… siento que falta algo.
Liz:	bueno yo así me la aprendí.
Dany:	si, así está bien.
Liz:	[Eli escribe] y ya!, toma contéstale pues [entrega la hoja a Yazmí].
Yaz:	me prestas el lápiz?
Liz:	entonces yo hago esta?
Yaz:	pero hago todo hasta acá o nada más lo dejo aquí.
Liz:	déjalo ahí, ya con eso nomás lo demuestras.

Video 266:
[20 seg.]

Video 267:

Juan C:	en el otro es ciento diecinueve o ciento diez?
Peny:	aquí está el número.
Barby:	ciento diecinueve.
Juan C:	uno "n" a la "n"?, si, no?
Barby:	es lo mismo nomás ponle a la…
Juan C:	sin ponerle elevado a esa?

Video 268:

Kevin:	para octavos es a la cuarta?

[risas]

Video 269:

Juan C:	se van qué?
Peny:	se va sumando la porción de la pizza.
Juan C:	¿puedes generar una expresión que indique la cantidad de pizza repartida cuando habían llegado "n" niños?
Peny:	qué dice?
Juan C:	¿puedes generar una expresión que indique la cantidad de pizza repartida cuando habían llegado "n" niños?
Juan C:	cuando "x" crece más y más a qué tiende la suma? A ser mayor la cantidad.

Video 270:
[Intentan sumar la pizza repartida con ayuda de los recortes que hicieron].

Liz:	así y luego el cuatro.
Yaz:	es que ya se porque me equivoqué.
Liz:	por qué te equivocaste?
Yaz:	la borraste?
Dany:	[risas].
Liz:	como tú me dijiste.
Yaz:	ponle hasta el pedazo cuatro, no lo dobles.
Yaz:	tres, cuatro.
Yaz:	aquí van dos.
Liz:	dos.
Yaz:	cuatro, seis.
Liz:	por qué seis?
Yaz:	porque está partido a la mitad mira.

Yaz: entonces aquí van a salir dos de este y como en este salen dos entonces serían cuatro. Entonces serían dos, cuatro, seis…
Liz: seis.
Yaz: a ver espérame.
Yaz: doce, trece, catorce, quince; quince treinta y seisavos.
Liz: ya vez.
[Liz escribe en la hoja].
Yaz: a ver préstame el otro.

Video 271:
Ely:
Kevin:
Fidel: pero es que como la segunda.

Video 275:
Ely: al primer invitado?
Juan C: al primer invitado le corresponde un medio de pizza.
Ely: qué porción de la pizza entera le corresponde al segundo niño en llegar?
Juan C: un cuarto de pizza.
Ely: y al tercero?
Juan C: un octavo de pizza.
Ely: llenaron la tabla?
Juan C: llenar la tabla?, si. [se pone a llenar la tabla].
Juan C: al primer niño le tocó un medio, al segundo un cuarto, al tercero un octavo, al cuarto un dieciseisavo, al quinto treinta y dosavo, al sexto un sesenta y cuatro, sesenta y cuatro havo, en el séptimo un veintiocho havo, en el octavo un doscientos sincienta y seisavos. Hasta ahí lo hicimos porque ya no alcanzó a recortar el otro pedazo de la pizza.
Ely: hasta ahí lo hicieron por qué?
Juan C: porque ya no alcanzó a poder recortar el otro cachito de la hoja.
Ely: ya no alcanzaron a recortar la pizza.
Juan C: si se puede pues pero ya no bien.
Ely: ok.
Juan C: acá sería [escribe 1/n].
Ely: y la expresión?
Juan C: la expresión de la porción de pizza? [completa la tabla].
Ely: entonces ustedes no llenaron la tabla completa, pero si llenaron la expresión. Y la expresión?
Juan C: así sería?
Ely: y la de "n"?
Juan C: la de "n" sería (½)n
Ely: ok, cuanta pizza le toca al niño que llega en el lugar número veinte?
Juan C: en el número veinte le toca, cuatro millones ciento noventa y cuatro mil ciento cuatroavos.
Ely: oigan, equipos y eso en términos de la pizza cuanto sería?
Yaz: una borona.
Juan C: casi nada.
Fidel: una boronilla.
Ely: una boronilla, si tú fueras invitado a esa fiesta en qué lugar te gustaría llegar? Argumenta tu respuesta.
Juan C: en el primero y en el segundo.
Ely: por qué?

Juan C: porque en el primero me tocaría la mitad y en el otro un cuarto y ya los que faltan ya casi nada, ya mejor no voy.
Ely: ya mejor no voy. Si sabes que ya llegaron treinta niños, tú irías?
Juan C: ya pa que..
Ely: hasta que número te convendría llegar?
Juan C: todavía, máximo en el tercero. Porque ya del cuarto en adelante ya casi nada.
Ely: o seas que si sabes que ya van tres niños que llegaron tú dices: mejor me aguanto para otra fiesta?
Ely: Qué sucede con el tamaño de las porciones, con el tamaño que vamos entregado a cada niño, a medida que aumenta el número de niños?
Juan C: se hace más pequeña la porción.
Ely: se hace más pequeña la porción. De qué tamaño será el pedazo de pizza del niño que llegue en el lugar "n"?
Juan C: sería eso, no?[señala el pizarrón $(½)^n$]
Ely: ahora, en términos de la pizza, pensando en la pizza porque ya lo dijeron con números, qué cantidad sería?, pensando que "n" es un número muy grande.

Juan C: pues ya si fuera en ese lugar [señala el resultado del niño del lugar veinte], ya sería casi nada.
Ely: a qué número se acerca?
Goyo: cómo a qué número se acerca?
Ely: casi nada qué número es?
Juan C: un, uno… [dice el resultado que obtuvo en el número veinte].
Ely: si lo conviertes a decimal?

Video 276:
[Juan Carlos está llenando con detalle s(x) en la tabla del pizarrón].
Ely: si ponlas ahí abajo.
Juan C: y eso da la cantidad de siete octavos.
Juan C: [está escribiendo la expresión f(x)] cómo es?
Juan C: quién sabe como es [borra el exponente que había puesto].
Barby: es que ahí ya.
Ely: y la expresión para f(x)?
Juan C: así.
Ely: ok, qué sucede con el tamaño de la pizza repartida a medida que van llegando más y más niños?
Juan C: se va… cuál es?, la cinco?
Ely: si.
Juan C: se va sumando la porción de la pizza.
Ely: y cuándo llegó el segundo niño?
Juan C: un cuarto.
Barby: se va aumentando.
Juan C: se va sumando.
Ely: entonces qué sucede con el tamaño?
Juan C: se va haciendo más grande.
Ely: ok, puedes generar una expresión que indique la cantidad de pizza repartida cuando habían llegado "n" niños, es decir, esa suma?, puedes generar una sola fórmula donde nos digas, cuál es?
[risas].
Ely: si la contestaron?
Barby: no.

Ely: no, ok. Cuando “x”, recuerden que “x” es el número en el que llegó el niño, cuando “x” crece más y más, a qué tiende la suma?
Juan C: a que se haga un entero, a que se haga la suma de un medio, un cuarto, un octavo y no sé que más, tiende a que se va completando la pizza y se haga un entero.
Ely: qué opinan equipos?
Goyo: de qué?
Ely: de lo que está diciendo, bueno un aplauso para Juan Carlos y el equipo.

Video 277:
Ely: a ver, pueden repetir la pregunta?
Fidel: de qué cómo le hizo para saber lo que le tocaba al niño del lugar veinte?
Ely: que cómo encontraste el resultado?
Juan C: sumando, cuando íbamos en el siete ciento cincuenta y seisavos, en el nueve era; y así íbamos sumando esa cantidad la multiplicábamos por dos. En el diez fue dosmil cuarenta y ochoavos.
Kevin: hasta el lugar veinte.
Fidel: nosotros lo hicimos igual pero nos dio otro resultado.
Ely: quieres pasar?
Fidel: no, ya.
Ely: quién más pasa?

Video 278:
Ely: si algo tienen distinto lo borran y lo vuelven a escribir, si no lo tienen distinto dejen lo que ya está para que no tengan que borrar y volver a escribir.
[se levantan para escribir sus respuestas].

Video 279:
Ely: ok, vamos a escuchar al equipo de Gregorio.
Ely: qué porción de pizza le toca al primer invitado?
Mando: la mitad.
Ely: y al segundo?
Mando: la mitad de la mitad, es un cuarto.
Ely: y al tercero?
Mando: la mitad de la mitad de la mitad, o sea un octavo.
Ely: un octavo, ok. La tablita la tienen igual que el equipo de Juan Carlos?
Mando: si, le agregamos más.
Ely: le agregaron… ah ustedes si llenaron el nueve y el diez, verdad?
Mando: aja.
Ely: ¿cuánta pizza le toca al niño que llega en el lugar número veinte?
Mando: le toca… [escribe en el pizarrón 1/1007616]… le toca un, un millón siete mil seiscientos dieciséisavos.
Ely: un millón?
Mando: aja.
Ely: ¿Es lo que tenían ustedes?
Fidel: No.
Ely: tampoco?, ¿cómo sacaron ese resultado?, no es lo que nos dijo Juan Carlos.
Mando: lo sumamos y lo sumamos y lo sumamos y lo sumamos [haciendo ciclos con la mano].
Ely: cómo lo sumaron?, ¿qué fueron sumando?
Mando: este… las…

Goyo: empezamos a sumar…
Mando: empezamos a sumar estas, treinta y dos más sesenta y cuatro…
Ely: pero a ver, en el nueve tenían cuatrocientos noventa y dos.
Mando: aja.
Ely: y en el diez tuvieron cuatrocientos ochenta y cuatro?
Mando: es nueve.
Ely: ¿es el nueve en cuatrocientos noventa y dosavos?
Mando: cuatrocientos noventa y dosavos.
Ely: a ver, dijiste que lo fueron calculando cómo?
Goyo: está mal.
Fidel: está mal.
Mane: ahí está mal.
Fidel: ahí eran quinientos doce, no?
Mando: ya vez te estoy diciendo.
Ely: ok, total ahí se equivocaron; ok, pregunta siete.
[risas de los compañeros].
Mane: de eso se trata, no?
Ely: si, de eso se trata.
Ely: si tú fueras invitado a dicha fiesta, en qué lugares procurarías llegar?
Mando: en los dos primeros.
Ely: en el tercero ya no?
Mando: no, pues ya casi no me tocaría pizza.
Ely: a partir de qué lugar, así como dijo Juan Carlos, si yo sé que ya llegaron tantos niños yo mejor ya no voy.
Mando: si yo sé que ya llegaron diez niños ya mejor no voy.
Juan C: cómo va a saber que ya llegaron diez niños?
Ely: bueno supongamos que alguien le avisa.
Mando: supongamos que se me hizo tarde.
Ely: decía Juan Carlos, si yo sé que ya llegaron tres niños ya mejor no voy. Tú dices, si ya se que llegaron nueve niños y yo voy a ser el décimo ya no voy. Así? Por qué?
Mando: porque ya me va a tocar un pedacito así de pizza [mostrando con los dedos].
Ely: porque ya me va a tocar un pedacito así de pizza.
Juan C: ni pa chuparse los dedos.
Ely: ni pa chuparse los dedos. Ok.
[risas de Juan Carlos].
Ely: ¿qué sucede con el tamaño de las porciones a medida que el número de invitados aumenta?
Mando: va disminuyendo.
Ely: de qué tamaño será el pedazo de pizza del niño que llegue en el lugar “n”?
Mando: de “n”… de “n” tamaño. [ríe].
Ely: de “n” tamaño?, qué es “n” tamaño?
Mando: pues no, no se sabe.
Ely: supongamos que “n” fuera diez, de qué tamaño sería la pizza?
Yaz: qué?
Ely: que “n”, “n” es el lugar del niño, si “n” fuera diez, o sea si fuéramos en el décimo niño, qué cantidad de pizza le tocaría?
Juan C: le tocaría… [voltea a ver su tabla y no contesta].
Goyo: [señala la tabla en el lugar 10].
Fidel: mil veinticuatro.
Ely: mil veinticuatro pizzas?

Mando:	no, un mil veinticuatroavos.
Ely:	un mil veinticuatroavo, y si "n" fuera cien?
Mando:	si "n" fuera cien?
Ely:	le tocaría un pedazo más grande o más chico?
Todos:	más chico.
Ely:	entonces, si "n" fuera un número muy, muy grande, digamos un número grande para invitados un millón. Le tocaría un pedazo más grande o más chico?
Todos:	más chico.
Yaz:	pues ya le tocaría recoger, no?
[risas].	
Ely:	llegaron a la expresión algebraica?
Mando:	si.
Ely:	si?, cuál es?
Ely:	ya le tocaría recoger dice Yazmín.
Fidel:	le tocaría lamer la caja.
Ely:	lamer la caja.
Mando:	[escribe en el pizarrón $(½)^n$].
Ely:	eso es? es la expresión verdad.
Mando:	[asciende con la cabeza].
Ely:	Fíjense chavos que cuando se trata de números me lo contestan, fíjense como la cantidad de pizza que le tocaría al niño en el lugar "n" me dicen que es eso. Y ya hablando de realmente la pizza me dicen que le tocaría recoger, qué significa eso?
Fidel:	pues que ya se acabó la pizza.
Ely:	qué cantidad le toca entonces si ya se acabó la pizza?
Juan C:	el olor.
Fidel:	nada.
Ely:	dicen, nada.
Fidel:	pero de a fuerza le tendría que tocar un cachito, no?
Ely:	te gustaría llegar en el lugar "n"?
Fidel:	no.
Ely:	te va a tocar un cachito.
[ríen].	
Fidel:	no.
Ely:	ok, ahora vamos a ver la siguiente parte. Dice, ahora sumemos, con ayuda de la tabla y la expresión a la que llegaste indicarás la cantidad que Mónica lleva repartida. ¿Qué cantidad de pizza había repartido Mónica cuando solamente tenía un invitado?
Mando:	un medio.
Ely:	cuánto suman las porciones del niño uno y del niño dos.
Mando:	tres cuartos.
Ely:	y si a la suma anterior le agregamos la porción del niño tres?
Mando:	este, cinco octavos.
Ely:	cinco octavos?
Yaz:	no.
Ely:	ok, llenaron la tabla?, vi que borraron algunas cosas.
Mando:	casi todo.
Ely:	casi todo?
Mando:	la lleno?
Ely:	si.

Ely: entonces qué Fidel?, si sabes que ya llegaron veinte niños estaría bien que llegaras en el lugar veinte, no?
Fidel: pues todavía.
Ely: y si fueran cuarenta?
Fidel: ya no.
Ely: ya no…
Fidel: llegaría nada mas al chesco.
[risas].
Ely: llegaría nomás al chesco… pero Fidel, tú dijiste que la rana podía brincar.
Mando: tú dijiste [lo señala].
Yaz: por qué la pizza ya?, por qué la pizza ya no se puede repartir?
Fidel: si se puede repartir, nomás que estoy diciendo que yo nomás iría al chesco.
Ely: si se puede repartir?
Fidel: si maestra.
Ely: si se puede repartir?
Fidel: si, pues se supone que a fuerzas se tiene que ir mochando a la mitad y la mitad y la mitad.
Ely: ok, quiero ver que corten su pizza hasta el invitado veinte.
Juan C: [risas] ahí está ya!... uhhh!
Ely: entonces si sí se puede quiero que corten su pizza hasta el invitado veinte.
Fidel: unas tijeras que tengan filo, no maestra?
Ely: ah claro que sí, [le da unas tijeras], listo!
Ely: entonces qué Yazmín?
Yaz: cómo?
Ely: llegó o no llegó la rana?
Yaz: si llegó pobre rana no se la va a pasar saltando toda su vida.
Fidel: pero todo el día si.
Yaz: pero tenia que llegar.
Ely: qué dicen?, si se acuerdan de la rana?
Fidel: se cansó y mejor se regresó.
[risas].
Ely: se regresó?
Yaz: si llegó.
Ely: dice, se cansó y mejor se regresó… si ya llevaba ocho saltos, le conviene regresarse?
Goyo: se regresó caminando.
Fidel: se regresa caminando dice Kevin.
Ely: ya no se regresa brincando.
[risas].
Ely: En lo que el equipo de Gregorio sigue escribiendo, el otro equipo está dividiendo porque dicen, sí se puede seguir repartiendo la pizza.
Fidel: abuelita!
Ely: ahí están las tijeras
Fidel: las quiero para las partes más chiquitas.
Ely: qué pasó?
Mane: no tiene la herramienta, a lo mejor con otro material si, pero no puedes.
Ely: cómo, cómo, cómo?
Mane: no se puede así.
Dany: con un exacto.
Mane: con un exacto. No tiene herramienta, necesita una herramienta.

Ely: cómo que herramienta necesita?, como un exacto?
Mane: con un exacto.
Ely: con el exacto hasta qué cantidad podría dividir?, cuántas mitades podría sacar?
Juan C: pues también, no?
Yaz: yo digo que hasta el once.
Mane: como unas quince.
Ely: como unas quince?, pero yo le estoy pidiendo en el lugar veinte porque el dice que sí se puede dividir la pizza.
Fidel: es que está muy mini.
Ely: dice, yo no llego en el lugar veinte, pero de que se puede dividir, se puede dividir.
Juan C: pero de que pueda quién sabe.
Ely: qué te diría el niño que llega en el lugar veinte y que tú le entregues el pedazo de pizza que le toca?
Fidel: por qué tanta?
Ely: si tú fueras el niño que llega en el lugar veinte y yo fuera Mónica, qué me dirías?
Fidel: pa eso me invitaste?
[risas de Yazmín].
Ely: pero tú dices que sí le va a tocar pizza.
Fidel: pero yo nada más iba al refresco.
Ely: qué dices tú Fernando?, estás muy callado, a ti si te gustaría llegar en el lugar veinte?
Fer: no sé. No le entiendo.
Fidel: es que dice que no le gusta la pizza.
Ely: tú si llegarías en el lugar veinte?
Dany: ah pues Elizabeth también verdad.
Ely: a ti tampoco te gusta. Y a ti Kevin?
Kevin: qué?
Ely: te gusta o no te gusta la pizza?
Kevin: quien sabe?
Ely: quién sabe?, mas o menos?, entonces tú si puedes llegar en el lugar veinte?
Kevin: ahhhh
Fidel: a lamer la pizza.
Ely: la pregunta es, si están diciendo que en el lugar veinte ya no vale la pena llegar, entonces, si la rana diera veinte saltos, valdría la pena que diera otro salto más?
Yaz: no… o si?
Fidel: si.
Ely: entonces tú puedes llegar en el lugar veintiuno.
Fidel: porque ya está mas allá que pa acá.
[risas].
Fidel: apoco no?, ya va llegando, ya.
Yaz: pero nunca va a llegar según ustedes, porque siempre va ir saltando por mitad y mitad.
Fidel: le toca morderse las uñas para brincar.
Ely: dices tú, sí, si valdría la pena que brincara porque está más para allá que para acá, ¿qué tanto le faltaría para llegar?
Mando: ya acabé.
Ely: ok, vamos a ver entonces.
Juan C: estás mal.

Ely: la tabla, dice que en el lugar tres serían cinco octavos, la suma.
Juan C: no está sumando un cuarto.
Ely: la suma serían cinco octavos, como que ahí hay algo que no está bien.
Juan C: le falta un cuarto.
Liz: le falta sumar un cuarto.
Ely: le faltó sumar un cuarto.
[Liz está explicándole a su equipo].
Yaz: ah si.
Ely: equipo de Gregorio, qué fue lo que hicieron?
Mando: es que nada más sumamos un medio más esto [señalando 1/16 de la tabla].
Ely: y qué se les pedía?
Mando: que sumara las cantidades de la pizza repartida.
Ely: lo que había llevado el niño uno, el niño dos y el niño tres. Ok, vamos con la pregunta número cinco, qué sucede con el tamaño de la pizza repartida, es decir, con la suma de las pizzas a medida que llegan más y más niños?
Mando: se va complementando el entero de la pizza.
Ely: se va complementando el entero de la pizza. Puedes generar una expresión que indique la cantidad de la pizza repartida cuando habían llegado "n" niños?
Mando: [señala en el pizarrón $(½)^n$].
Ely: pero de lo que vamos sumando.
Mando: eso fue lo que nosotros pusimos.
Ely: Eso es lo que ustedes pusieron. Cuando "x", recuerden que "x" es el lugar en el que llega cada niño, cuando "x" crece más y más, a qué tiende la suma?
Mando: aumentar.
Ely: aumentar, bien aplauso para el equipo.

Video 280:
Ely: eso que es?
Fidel: pues.. si lo corto a la mitad ya es el lugar diez.
Ely: si lo cortas a la mitad es el lugar diez, pudiste dividir en veinte partes?
Fidel: no.
Ely: entonces cómo le vamos a hacer para darle pizza al niño que llegue en el lugar veinte.
Fidel: pedimos la siguiente.
Ely: nada más tenemos una.
Mando: nosotros llegamos hasta el catorce.
Juan C: la siguiente es gratis.
Ely: ustedes llegaron al catorce?
Fidel: es que era miércoles de dos por uno.
[risas].
Ely: a ver Fidel es en serio.
Fidel: a ver.
Ely: tú hace rato dijiste: sí si se puede, de que se puede se puede de aquí hasta el veinte. A qué lugar llegaste?
Fidel: al nueve.
Ely: entonces se puede?
Fidel: en esta no se puede maestra, es que esta como está muy chiquita obvio que no es lo mismo que pedir una más grandota.

Ely: entonces dices tú: mejor pido una muy grandota, ustedes también creen lo mismo?
Yaz: no.
Fidel: porque entre más grande pues se pude dividir todavía más.
Ely: pero siempre vas a dividir a la mitad, estas de acuerdo?
Fidel: aja.
Ely: qué ibas a decir Manuel?
Mane: se puede hasta el veinte.
Ely: se puede hasta el veinte?, nos muestran su…
Mane: porque ya como la tiene Fidel así, ahora la podemos partir a la mitad al revés [moviendo sus manos para señalar el corte].
Mando: horizontalmente.
Fidel: pero para que quede exacta?
Yaz: pero, te das cuenta que de un lado está más ancho que de otro. Cómo vas a saber que la vas a partir exactamente a la mitad?
Fidel: ni modo que uses báscula.
Mane: se puede sacar el área y…
[todos se ríen]
Ely: y cómo le vas a hacer para repartirla?, o sea sí puedes sacar el área y…
Mane: con operaciones.
Ely: y luego para cortar?
Yaz: la vas a medir con regla y compás?
Mane: le voy a dar medidas.
Ely: le vas a dar medidas… nos puedes mostrar su pedacito hasta el lugar veinte.
Goyo: catorce.
Ely: ah llegaron al catorce.
Ely: imagina que llegas en el lugar catorce y te diera eso, una salchicha.
Mando: yo diría ahhh.
Yaz: me la da para llevar?
Ely: teniendo en cuenta que ya no siguieron dividiendo en rebanadas ahora lo hicieron de manera horizontal.
Ely: entonces es el lugar catorce, qué pasa en el lugar veinte?
Yaz: pues ya no quedó nada.
Ely: ya no quedó nada.
Ely: Fidel, qué tienes que decir?
Fidel: que pase el siguiente equipo.
Yaz: ahhhh [risa].
Ely: quién pasa?, quedan dos equipos, quién pasa?
[El equipo de Fidel no quiere pasar y Liz se levanta para exponer los resultados del equipo de Yazmín].
Juan C: Ely eso es todo, un aplauso!
Ely: ok equipo, qué porción de la pizza le corresponde al primer invitado?
Liz: un medio de la pizza.
Ely: y al segundo?
Liz: un cuarto.
Ely: y al tercero?
Liz: un octavo.
Ely: la tabla, la llenaron igual?
Liz: si, pero [borra los resultados del lugar ocho y nueve, escribe 1/512 y 1/1024].
Ely: ok, eso sí está bien muchachos?
Juan C: si.

Ely: eso sí está bien. Cuánta pizza le corresponde al niño que llega en el lugar número veinte?
Liz: [borra lo que había escrito el equipo anterior y escribe 1/1048576].
Liz: nosotros sacamos esto.
Ely: cómo encontraron esa cantidad?
Liz: pues, fui sumando 128 mas 128, lo que salía le sumaba, se sumaba con lo mismo que salía.
Ely: ok, salió eso Fidel?
Fidel: si, eso no es diferente.
Ely: si tú fueras invitado a dicha pizza en qué lugares te gustaría llegar?
Liz: en el primero.
Ely: por qué?
Liz: ah pues me tocaría la mitad, y si llego ya en el segundo o tercero pues ya no.
Juan C: pero cómo sabes que te va a tocar esa rebanada?
Yaz: pero cómo qué?
Juan C: cómo sabes que la señora va a repartir así?
Liz: pues dice que al primero le va a dar la mitad, al segundo la mitad de la mitad, al tercero la mitad de la mitad de la mitad.
Juan C: pero creo que la señora va andar diciendo al primero le va a tocar la mitad, al segundo un cuarto…
Liz: no pero pues…
Kevin: pero ya les dijo.
Ely: pero, ya les dijo, al que vaya llegando le va a tocar la mitad de lo que queda. Entonces dice ella si yo sé que no ha llegado nadie pues soy la primera.
Fidel: y cómo va a saber uno maestra?
Ely: a pues suponiendo que supiéramos que no ha llegado nadie, entonces soy la primera.
Yaz: poniendo…
Ely: a ver Ely, a partir de qué lugar tú dices yo mejor no voy.
Liz: en el…
Yaz: yo en el segundo.
Liz: el cuarto, pues al primero le toca la mitad, al segundo le va a tocar este, al tercero le va a tocar este, ya de ahí para allá ya mejor ni voy.
Ely: ya mejor ni voy, si soy la cuarta ya mejor no voy.
Juan C: ya mejor no voy.
Ely: Fíjense que coincide con lo que dice el equipo de Juan Carlos, si yo sé que ya llegaron tres y voy a ser el cuarto ya mejor no voy. Ok, qué sucede con el tamaño de las porciones repartidas a medida que aumenta el número de niños?
Liz: pues la pizza se va reduciendo.
Ely: se va reduciendo, hasta qué punto?, hasta qué punto se puede reducir?
[Alguien señala lo que recortó Gregorio].
Ely: hasta donde recortó Goyo, no?
Ely: de qué tamaño será el tamaño de pizza del niño que llega en el lugar "n"?
Liz: también le pusimos igual que ellos.
Ely: también le pusieron igual que ellos, muy bien. Ahora sumemos, ya vamos en la segunda parte. Qué cantidad de pizza había repartido Mónica cuando solamente había un invitado?
Liz: la mitad.
Ely: cuánto suman lo del niño uno y del niño dos?

Liz: tres cuartos.
Ely: si a la suma anterior agregamos la porción del niño tres?
Liz: son siete octavos.
Ely: siete octavos, ahí corrijan por favor la tabla.
Juan C: el tercer niño.
Yaz: donde está el cinco.
Juan C: ándale, y en todo.
Liz: todo está mal.
Ely: en todo está mal.
Ely: ok, llena la tabla por favor.
Ely: podemos pensar en los pedazos como que son los saltos de Yaya no?, se acuerdan de Yaya?
Juan C: si.
Ely: se están acordando de Yaya.
Juan C: aja.
Ely: en lo que ella llena la tabla yo voy a poner aquí la distancia de lo que iba a saltar Yaya y, ahora sí vamos a poner número par como quería Yazmín.
Ely: [dibuja el estanque y la distancia que va a recorrer Yaya].
Ely: pasas a dividirlo?, como lo hiciste la otra vez.
Yaz: es más fácil en el piso.
Ely: es más fácil en el piso?
[Yazmín no puede destapar el marcador y sus compañeros ríen].
Yaz: cállense.
Ely: no la molesten.
Yaz: [realiza las divisiones].
Ely: ponle por favor cuántos saltos diste.
Yaz: [marca hasta el seis y ya no tiene espacio suficiente para escribir] es que no me cabe, es que queda otro pero no me cabe.
Mando: ponle una flechita.
Ely: si, ponle una flechita.
Juan C: con el lápiz.
Mando: del seis te pasaste al ocho?
Yaz: es el siete, no ves?
Ely: huy cuanta agresividad, vienen muy agresivos hoy, les hicieron mal las vacaciones, ya no hay que irnos de vacaciones.
Yaz: uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho.
Ely: tú decías Yaya llega en ocho brincos, no?
[Yazmín regresa a su lugar].
Ely: ahí hay más marcadores Ely, usa los rojos, los rojos pintan muy bien.
Mando: no se desplazo por Francia.
Liz: nosotros así lo tenemos.
Ely: ok, gracias Ely. Dice ahora, qué sucede con el tamaño de la pizza repartida, es decir con lo que vamos sumando, a medida que llegan más y más niños?
Liz: le pusimos que se va reduciendo cada vez más.
Ely: puedes generar una expresión que indique la cantidad de la pizza repartida cuando habían llegado "n" niños?, cuál es?
Liz: [señala lo que habían puesto sus compañeros: $(½)^n$].
Ely: esa. Cuándo "x" crece más y más a qué tiende la suma?
Liz: pues a que se va haciendo el entero.
Ely: a que se completa el entero. Gracias equipo.

Video 281:

Fidel: de todos modos se sabe que este se va multiplicando por dos para que de, y así sucesivamente.
Ely: pero, por qué no lo llenaron?
Fidel: llenamos todo esto pero solo pues estos dos que estaban en blanco esos si no.
Ely: el nueve y el diez, también estaban en blanco… la tablita llega hasta el siete.
Fidel: aja, este tampoco.
Ely: este tampoco lo pusieron, ustedes llegaron hasta el siete y luego pusieron la “n”, y la “n” si coincide?
Fidel: si.
Ely: también la expresión para la esta “x”?
Ely: las dos expresiones?, la f(x) y la s(x)?
Fidel: si, las dos.
Ely: si?, las dos coinciden?, están igualitas?
Fidel: si.
Ely: ok, entonces empezamos a preguntar. Qué porción de la pizza entera le toca al primer invitado?
Fidel: esa qué pregunta es?
Ely: la uno, la uno de la hoja uno.
Fidel: la mitad, un medio.
Ely: que porción de la pizza entera le corresponde al segundo niño en llegar?
Fidel: un cuarto.
Ely: al tercero?
Fidel: un octavo.

Ely: cuánta pizza le toca al niño que llega en el lugar número veinte?
Fidel: eso.
Ely: eso, sí coincidió. Si tú fueras invitado a dicha fiesta, en qué lugares preferirías llegar?
Fidel: en los primeros cinco.
Ely: en los primeros cinco, por qué?
Fidel: porque todavía hasta el quinto pues se supone que la pizza está más grande, todavía te alcanza a tocar un buen pedazo.
Ely: y en el sexto?
Fidel: pues ya como que sería menos, no convendría ir a no sé donde por casi nada.
Ely: porque la pizza sería casi qué?
Fidel: pues casi nada.
Ely: casi nada, qué número es nada?
Fidel: “n”.
Ely: no.
Fidel: ahhh casi nada o sea…
Ely: si digo, díganme un número que exprese nada.
Mane: cero punto cero, cero, cero, cero…
Ely: un número que exprese nada, nada, absolutamente nada.
Dany: cero.
Ely: Cero, o sea que si tú llegaras en el lugar seis te tocaría casi qué?
Mane: cero.
Fidel: casi… Menos.
Ely: casi qué?, dijiste casi nada, casi nada.
Fidel: [se queda pensando].

Ely: entonces, si llegaras en el lugar seis te tocaría casi qué?
Fidel: [silencio] entonces me equivoqué, porque tiene que partirse más pedazos y casi nada es que ahí se acabaría la pizza.
Ely: entonces tú puedes llegar en el lugar seis porque sí te toca pizza.
Fidel: aja, pero ya no me convendría porque me tocaría un pedacito más pequeño.
Ely: te tocaría casi qué?
Fidel: no, un pedacito más pequeño.
Ely: si, pero si llegaras en el lugar seis te tocaría casi qué?
Fidel: casi…
Ely: hace rato lo dijiste.
Fidel: eso al cuadrado.
Ely: si, pero eso qué es?
Fidel: pues una porción de la pizza.
Ely: pero hace rato dijiste casi nada.
Fidel: por eso le digo que corrijo.
Ely: ahhh corriges. Entonces puedes llegar en el lugar seis?
Fidel: mmm… no. Porque o sea ya sería un pedacito y…
Ely: pero te tocaría pizza, estás comiendo.
Yaz: y te la van a regalar.
Fidel: pero no me alcanzaría para llenarme, porque ya sería una porción más pequeña.
Ely: aja, una porción más pequeña y si llegaras en el lugar ocho?
Fidel: tampoco porque sería todavía más pequeña.
Ely: sería casi qué?
Fidel: no, digo sería más pequeña.
Ely: más pequeña, ok. Entonces dices, en el lugar ocho definitivamente no llego, si?
Fidel: aja.
Ely: ahora vean los saltos de la rana.
Fidel: [se tapa la cara], ups, esos qué?
Ely: en el lugar ocho.
Yaz: no lo puse bien porque se tapaba todo pero está a la mitad.
Ely: fíjate que lo que estás diciendo de la pizza corresponden a los brincos de la rana.
Ely: fíjate, tú dices yo podría llegar en el lugar cinco porque me tocaría un buen pedazo, este es el dos, tres, cuatro, cinco.

Ely: entonces la pregunta es, llega o no llega la rana?
Fidel: [ve el pizarrón], si llega.
Ely: en qué número según tú?
Fidel: en… bueno ahí si estoy de acuerdo con Yazmín, ahí sería muy poquita la diferencia que tendría que saltar, pero…
Yaz: ahhh pero pártela a la mitad.
Goyo: [se ríe].
Ely: entonces?, en qué número?
Fidel: el tamaño si cuanta porque se divide entre dos, ya sería una parte muy pequeña y pues obvio que… [hace un movimiento simulando un salto con la mano].
Ely: qué sucede con lo que tienen ustedes en sus números y lo que sucede en la realidad, que sería esa la realidad.
Fidel: [pone cara de no entender].

Ely:	a sea, tú sacaste números y dijiste sí miren todavía falta, y qué pasa ahí?
Fidel:	no le entiendo.
Ely:	no, a ver ibas a decir algo?
Juan C:	lo que pasa es que los números se hacen más grandes, grandes los números y la pizza ya se va, ya no alcanza.
Yaz:	no entiendo.
Juan C:	no?
Ely:	mande?, Daniel ibas a decir algo?
Dany:	es que viendo, en la realidad no es necesario brincar, pero viéndolo en los números no llega.
Ely:	dice Daniel, en la realidad no es necesario ya volver a brincar, así es?
Dany:	aja.
Ely:	pero sí puedo calcular con números.
Juan C:	aja.
Dany:	aja.
Juan C:	estoy de acuerdo con eso.
Ely:	estas de acuerdo con eso?
Fidel:	pero como en la pizza, ahí cómo?
Juan C:	en la pizza sería lo mismo
Yaz:	en tu imaginación tienes los números, en la realidad no se puede.
Juan C:	pues claro.
Ely:	bueno continuamos, dice… de qué tamaño sería el pedazo de pizza del niño que llega en el lugar "n"?
Fidel:	[señala $(½)^n$].
Ely:	eso, ok, ahora vamos con la suma, qué cantidad de pizza había repartido Mónica cuando solo había un invitado?
Fidel:	la mitad.
Ely:	cuánto suman las porciones del niño uno y dos?
Fidel:	tres cuartos de la pizza.
Ely:	y si le agregamos la porción del niño tres?
Fidel:	siete octavos de la pizza.
Ely:	ok, dices que la tabla quedó igualita?
Fidel:	si.
Ely:	qué sucede con el tamaño de la pizza repartida a medida que llegan más y más niños?
Fidel:	va aumentando.
Ely:	dijo Yazmín que va disminuyendo.
Fidel:	no, va aumentando.
Yaz:	qué?
Ely:	el tamaño de la pizza repartida a medida que llegan más y más niños.
Fidel:	porque o sea son más pedazos repartidos, porque reparto este, reparto esto y reparto este y o sea se va haciendo más grande.
Yaz:	pero, a ver a ver, cómo es la pregunta?
Ely:	qué sucede con el tamaño de la pizza repartida a medida que llegan más y más niños?
Yaz:	va disminuyendo porque llegan más niños.
Juan C:	llegan más niños y tienes que repartir.
Fidel:	qué sucede con el tamaño de la pizza "repartida".
Dany:	repartida, no por repartir.
Yaz:	ahhhh, no pues si.
Ely:	puedes generar una expresión que indique la cantidad de pizza repartida cuando habían llegado "n" niños?

Fidel: según yo, Kevin y Figo es… [escribe 1/n en el pizarrón], según nosotros tres.
Ely: ok, cuándo “x” crece más y más, a qué tiende la suma?
Fidel: a que aumenta la cantidad de los niños.
Ely: de los niños?, pero la suma de la pizza, estamos hablando de la pizza.
Fidel: a que aumenta también.
Ely: a qué tiende?, a qué se acerca?
Fidel: a que se acerca…
Juan C: a que hay más.
Ely: a qué número se acerca, cuando decimos tiende es se acerca.
Ely: cuándo llegó un niño que cantidad tenías?, cuándo llego el segundo?, qué cantidad tenías?
Fidel: tres cuartos.
Ely: y en el dibujito, cuánto era?
Fidel: [señala en la pizza del pizarrón].
Ely: cuándo llegó el tercer niño?
Fidel: [señala en la pizza del pizarrón].
Ely: cuándo llegó el cuarto niño?
Fidel: [señala en la pizza del pizarrón].
Ely: a qué se va acercando?
Fidel: al entero.

ANEXO D

El problema de la recta tangente

Video 314
Equipo de Mane:

Mane:	y ahora busco, que sería 3 en el periodo de las "x" coma a ver doce, a cuánto equivale nueve cuartos?, si es igual a dos punto veinticinco?
Peny:	si, dos punto veinticinco.
Mane:	entonces sería 3 en el periodo de las "x" y dos punto cinco en el periodo de las "y", sería hasta acá, más o menos por aquí, y este sería el punto K. y ahora falta graficar la pendiente, préstenme algo para sacar la pendiente, préstame tu lápiz.
Peny:	mi lápiz.
Mane:	(toma el lápiz y lo usa a modo de regla) listo!. Calcula su pendiente, nomás deja me acuerdo de la fórmula para sacar la pendiente, creo que era… se acuerdan?
Peny:	si (busca en la libreta)

Equipo de Kevin:

Kevin:	luego aquí son ocho cuartos, ocho cuartos sobre dos, se hace la ley de la herradura, no? Y uno va arriba o va abajo?
Fidel:	abajo.
Kevin:	así? cuatro por dos, ocho. Va abajo o arriba?
Fidel:	ocho por una, sobre ocho.
Kevin:	es igual a un entero. Después que calculamos la pendiente, qué vamos a hacer?
Ely:	ah pues seguir con la otra pregunta.

(risas)
Equipo de Barby:

Barby:	en esa misma?
Ely:	si.
Mando:	son dos "x", no?
Barby:	no.

Video 315
Equipo de Liz:

Liz:	nueve cuartos.
Ely:	qué hacen chicos?
Liz:	estamos calculando la pendiente. (pero realmente están calculando la distancia entre dos puntos).
Liz:	entonces aquí serían dos al cuadrado
Ely:	esa es la fórmula de la pendiente?
Liz:	no?
Ely:	no sé. Ya saben que yo no digo nada, solo pregunto cosas.
Erandi:	mmmm
Ely:	la fórmula de la pendiente, qué nos indica?

Liz: cuál es la distancia entre los dos puntos, no?
Ely: si?, eso nos indica la pendiente?
Liz: (dice no con la cabeza).
Ely: luego decimos: hay esa escalera tiene una pendiente muy grande.
Liz: oh la forma como está inclinada, si está parada es positiva o negativa?
Ely: no sé. Qué nos indica la pendiente?, la distancia?
Liz: se supone que estos son los puntos, entonces sería este…
Ely: ya los confundí?
Liz: poquito (risas).
Ely: a ver, esta fórmula de qué es?
Erandi: la pendiente, no?
Liz: no, creo la pendiente es igual a h es igual a… creo esta es para calcular la distancia entre dos puntos.
Ely: esa sí es para calcular la distancia entre dos puntos.
Liz: entonces la otra es "h" es igual a la raíz de "x1" menos "y1"… no.
Ely: bueno, ahorita regreso, piénsenle. Porque creo esa es la fórmula para la distancia entre dos puntos, pero nos piden la pendiente.

Equipo de Mane:

Mane: entonces, cuál es mayor?, esta es la de la tangente, que pasa de aquí hasta acá, y esta es la de la pendiente que nosotros calculamos, cuál es mayor?. Yo digo que es mayor la de la pendiente, no?. Es mayor la de la tangente, el tamaño, pero no sé, aquí nada más roza en un punto, no pues no se.
Ely: es que les pide la pendiente, no que tan grande está una línea, porque está línea, la roja la podemos prolongar mas hasta que salga de la hoja, igual la que tú calculaste, la podemos prolongar más.
Fer: lo que queremos es esto, no? (señalando el ángulo que hacen ambas rectas).
Ely: lo que queremos saber es la pendiente, que pendiente es mayor, la roja o la de PQ?
Mane: mjm.
Ely: cuál es mayor?
Mane: la de PQ.
Ely: es mayor? Cómo saben que es mayor?
Mane: por la inclinación.
Ely: qué tiene que ver la inclinación?
Mane: m… en una clase nos había mostrado que la inclinación varía de forma de cuál cuesta más trabajo subirla, o sea y como aquí marca en la hoja, pues esta (señalando la tangente) es menos pesada y esta es más pesada.
Ely: mmm.. por la inclinación?
Mane: aja.
Ely: bueno.

Equipo de Kevin:

Kevin: así (risas). Cuatro tercios, dice, cuál es mayor o menor?
Fidel: mm
Kevin: mayor o menor de qué depende? De que esté más inclinada? O que esté mas…
Ely: al valor de la pendiente.
Fidel: o sea que nos va tocar sacar la pendiente de…
Kevin: de la tangente.
Fidel: hey.
Kevin: un cuarto de "x"… un cuarto. En la última vamos a sacar el valor de la pendiente?
Ely: en la pregunta uno?

Fidel: no.
Kevin: en la… para aquí la tangente.
Ely: pueden calcularla?
Kevin: aja.
Ely: ah pues si pueden calcularla, calcúlenla.
(risas)
Kevin: no, le estoy preguntando.
Ely: ah, no sé. Puedes calcular la pendiente de la recta roja?
Kevin: aquí nos da la pendiente (señalando el punto P).
Fidel: no.
Ely: no, les da el punto P.
Kevin: ah, no es la pendiente?
Ely: no, con qué letra se simboliza la pendiente?... este punto cuál es?
Fidel: de la pregunta tres.
Ely: ah, la de la pregunta uno no la marcaron?
Kevin: todavía no.
Ely: saben que sería bueno?, que le pusieran nombres a los puntos, no? Por ejemplo este sería el punto A, B, o lo que ustedes quieran, para que puedan ir identificando.

Video 316
Equipo de Liz:
Liz: la pendiente de la recta anterior es mayor o menor que la pendiente de la recta tangente?, a ver (voltea la hoja).
Ely: yo creo que tienen que dibujar la línea, no?... qué les preguntó?
Liz: que si la pendiente que hicimos es mayor o menor que la de la recta tangente.
Ely: y cómo es?, cómo ven ustedes?
Liz: mmm… sí, creo si es mayor, pero esta no termina aquí o si? (señalando la tangente).
Ely: ah no, tampoco la otra. Les preguntan por la pendiente.
Liz: dice: la pendiente de la recta anterior es mayor o menor a la pendiente de la recta tangente?. Se supone que esta es la tangente.
Ely: exacto.
Liz: y la pendiente está aquí. (señalando los dos puntos).
Ely: ajá.
Liz: entonces va a ser… la tangente es mayor que la pendiente.
Ely: qué es mayor?
Liz: la recta de la tangente.
Ely: ah pero les preguntan la pendiente.
Liz: la pendiente de la recta anterior, mayor o menor? (vuelve a leer la hoja)… oh entonces la pendiente.
Ely: a ver, qué es la pendiente?, para saber qué me están preguntando.
Erandi: la pendiente no es esto?
Ely: esa sería la recta, y cuál sería la pendiente de esa recta?
Liz: la que acabamos de calcular.
Ely: y eso qué significa?, eso qué es?, qué parte es de la recta?, es la distancia que hay de P al punto? O qué es?
Liz: no es los…
Erandi: es su ecuación de la pendiente?
Ely: es su ecuación de la pendiente?, pero qué nos dice sobre la recta?
Liz: que si la pendiente de la recta es mayor que la pendiente de la tangente?

Ely: no, mi pregunta es: esto dicen ustedes que es el valor de la pendiente de la recta que va de aquí a aquí, verdad?
Liz: si.
Ely: yo les pregunto, ¿y ese valor en dónde lo encuentro en esa recta?, qué representa de esa recta?, ¿es la distancia que hay de aquí a aquí? ¿o qué es?
Liz: si porque es lo que mide de aquí a aquí.
Ely: no lo sé, es la distancia entre este y este punto?
Liz: pues son dieciséis cuartos (observa el dibujo y piensa).
Ely: a ver Erandi, tú que opinas dieciséis cuartos será la distancia que hay de este punto a este?
Liz: no, es el punto medio, no?
Ely: no lo sé, yo estoy preguntando.

Video 317
Equipo de Mando:
Mando: no entendemos la pregunta seis.
Ely: qué dice?
Mando: con base a los datos obtenidos anteriormente, puedes estimar el valor de la pendiente de la recta tangente a la función en el punto P?
Ely: ah si, es que ya calculaste varias pendientes, no?
Mando: aja.
Goyo: pero dice que calculemos la pendiente de la recta (señala la tangente).
Ely: aja de la recta roja.
Mando: ah pues es lo mismo.
Goyo: pues entonces el primer punto es… este es "x".
Mando: es uno coma uno.
Ely: cuál es el primer punto?
Mando 1, ¼.
Goyo: punto cinco cero.
Mando: ah si, punto cinco coma cero.
Goyo: "x" punto cinco.
Mando: si, no?
Ely: no sé.
Goyo: no, si este es… sí, sí.
Mando: si, pues serían estos dos puntos (señalando P y el punto donde la recta tangente corta al eje de las "x").
Goyo: sip, sip, sip.
Ely: no sé. Y cuánto vale P?
Mando: 1,1/4.
Ely: oh, y cuánto es el otro que dicen ustedes?, señálenlo por favor.
Goyo: cero punto cero cinco.
Ely: y están seguros de que es cero punto cero cinco?
Mando: no. Puede ser cero punto seis.
Goyo: puede ser menos. Puede ser menos cero punto (señalando el punto donde la recta tangente corta al eje "y").
Goyo: no, ahí sería punto cinco menos uno, no.
Mando: no, cero coma cero, no.
Goyo: estaría aquí abajo. Cero coma menos uno.
Mando: no porque menos uno mira donde está.

Ely: pero van a hacerlo al tanteo entonces?, digo al tanteo en la gráfica?. No les sirve de nada lo que ya calcularon? Porque dice con base en los datos obtenidos.
Mando: es que ya tengo el valor de todos estos y ya nada mas hay que este…
Goyo: pues sigue siendo menor la pendiente. Mayor?
Mando: no, menor.
Ely: no les serviría si dibujan las rectas que pasan por P?, una era de P a a R, y las otras ya no recuerdo.
Mando: una de P a R, otra de P a S, otra de P a T y otra de P a U.
Ely: no les serviría?, así como para darse cuenta?. Porque si hacen eso no sé si efectivamente ahí sea cero punto cinco coma cero, o coma, no sé si pase por arriba o un poquito por abajo, si realmente sea punto cinco, no sé si sea punto cuarenta y nueve.
Goyo: jeje, está bien.
Mando: tracemos.

Video 318
Equipo de Kevin:
Ely: y esta?
Kevin: ah si es cierto, es mayor…. Con base en los datos obtenidos anteriormente, puedes estimar el valor de la pendiente de la recta tangente a la función en el punto P?. Esa es de retroalimentación?
Ely: no sé.
Kevin: Con base en los datos obtenidos anteriormente, puedes estimar el valor de la pendiente de la recta tangente a la función en el punto P?.
Fidel: ponle que no. Dice que si puedes, pues ponle que no (risas).
Ely: van a decir que no pueden?
Fidel: pues sí, dice puedes?
Kevin: estimar el valor de la pendiente.
Fidel: no puedo, ponle.
Ely: no?, dice estimar no dice calcular.
Fidel: pero dice: puedes?
Ely: ahhh
Fidel: pues no podemos.
Kevin: explica tu razonamiento.
Ely: si le entienden a la pregunta?
Fidel: bueno, al menos yo no.
Ely: ya calcularon pendientes y las dibujaron aquí. Ahí están. Cuál es esa línea?
Kevin: cuál de todas?
Ely: la que pasa por P y dos coma cero.
Kevin: dos coma cero?. Esta?... es la… es el cinco, porque es uno coma un dieciséis havo.
Fidel: ahí es un dieciséis havo.
Kevin: mas o menos.
Ely: cuánto vale la “x”?
Kevin: un medio.
Ely: ahí es un medio?
Kevin: no, aquí es un medio.
Fidel: ahí son tres medios.
Kevin: ah si es cierto, ya la regamos (risas).
Fidel: tú eres el que está graficando.
Kevin: un error…
Ely: no más no lo borren, no se preocupen.

Kevin: ahora si trazamos la que es en verdad.

Video 319
Equipo de Mane:
Peny: cero punto seis.
Mane: ahora ponle un nombre a este punto, no sé ponle…
Peny: S.
Mane: S, y ahora calcula la pendiente, si quieres deja la calculo.
Ely: cómo van?
Peny: más o menos digamos.
Ely: quieren más hojas?
Peny: no profa.

Video 320
Equipo de Mando:
Mando: cero coma un cuarto.
Goyo: este es el segundo.
Barby: P, pero entonces hay que ponerle primero.
Ely: ah usaron colores, y cómo le hicieron para estimar el valor de la pendiente de la recta roja?
Barby: porque no está tocando exactamente en el punto cinco, sino está como en el cuarenta y nueve, cuarenta y ocho.
Ely: oh.
Mando: pero todas pasan en el punto P.
Goyo: sip.
Ely: todas pasan en el punto P, que casualidad, no?
Goyo: va a quedar en medio la pendiente, va a ser intermedia.
Mando: porque es..
Goyo: está en medio de todo esto.
Mando: bueno.
Goyo: solo es mayor…
Mando: solo es mayor que la de P a U, y menor que la de S, T y R. Entonces pues ya podemos decir que el valor de la pendiente de la tangente es mayor que la pendiente de la tangente de P a U, y es menor que la de P a T, P a S y P a R. Así de fácil y sin sacar tantas pendientes.
Goyo: ya.
Barby: la secretaria di.
Goyo: tomó nota?
Barby: pues claro! (risas).

Video 321
Equipo de Kevin:
Ely: qué decidieron? Qué no podían estimarla o que sí?
Kevin: no se puede.
Ely: no? No la pueden estimar?
Kevin: le pusimos que no se puede.
Ely: por qué?
Kevin: porque… es que según para sacar una pendiente se debe de tener dos puntos.
Ely: aja.
Kevin: para poder pues sacar la fórmula y como nada mas nos está dando un punto, entonces no sabemos el otro punto.
Ely: ohhh.

Fidel: por eso.
Ely: y en la siguiente?, qué contestaron en la siete? Puedes encontrar una manera de mejorar la aproximación de dicha pendiente?
Kevin: pues sí, dándole valores menores a los puntos que nos dieron pero con un valor menor.
Ely: y eso cómo para qué?
Kevin: pues para que sea la aproximación a la tangente.
Ely: ahhh… qué opinas tu Fidel?
Fidel: lo mismo que Kevin.
Ely: ahora estás muy callado Fidel.
Fidel: es que no quiero que se vuelva a… (risas).
Ely: no quieres, qué?
Fidel: que se vuelva a aburrir con el no, no, no.

Video 322
Equipo de Mane:

Mane: pero es menos dos, este resultado salió congruente, no sé porque salió congruente… si pusiste bien los puntos Penélope?
Peny: mjm.
Mane: aquí te equivocaste, aquí no era esto.
Peny: oh si.
Mane: por eso sale ese resultado.

Video 323
Equipo de Liz:
Liz: la pendiente de la tangente… dice calcula la pendiente de la recta que pasa por los puntos tres medios, nueve dieciséis havos. Tenemos que poner otro punto aquí… cero punto cero seis, entonces va a ser por aquí.
Ely: ahí es punto cero seis?
Liz: ah no, es por aquí. Porque ahí es punto seis pero es punto cero seis.

Video 324
Equipo de Mando:
Barby: una recta paralela al eje "y" en el punto Q y otra paralela al eje de las "x´s", entonces va a ser así.
Ely: primero pongan el punto, no?
Goyo: donde está el punto Q?
Barby: a la derecha de P sobre la función.
Goyo: f de "x", entonces tenemos que darle un valor a "x" ahorita?
Ely: no, donde ustedes quieran ponerlo.
Barby: a la derecha, aquí.

Video 325
Equipo de Kevin:
Kevin: traza una recta paralela al eje "y" por el punto Q y otra paralela al eje "x", dónde se cruzan estas rectas?

Video 326
Equipo de Mando:
Mando: si ya se formó el triángulo.

Barby: pero…
Goyo: si porque acá esta de a P.
Barby: ah si es verdad.
Goyo: ya.
Mando: la distancia PA la llamaremos "h". De modo que el punto Q está definido por la coordenada (1+h, f(1+h)). Realiza estas anotaciones en el dibujo.
Goyo: entonces ponle, de aquí a acá ponle "h".
Barby: aquí es "h", aquí es…
Mando: el punto Q.
Goyo: sería uno más… eso.
Mando: uno más "h" eso.
Barby: qué sucede con el punto Q si cambiamos el valor de "h"?
Goyo: el punto Q?
Mando: cuánto vale "h"?
Barby: hay es como ahorita que el corazoncito.
Mando: ah bueno, entonces cambiamos el valor de "h" a Q?
Goyo: y de Q a "h".
Ely: qué va a pasar si este valor lo hacemos más grande o más chico?, qué va a pasar con Q?
Goyo: si lo hacemos más chico se va a hacer más grande el punto Q, porque al hacerlo más chiquito esto se tiene que subir.
Barby: como ir subiendo hacia acá.
Goyo: aja.
Ely: recuerden que siempre se debe de seguir formando un triángulo rectángulo.
Mando: pues si, solo que el punto Q va a ir creciendo y viceversa.
Goyo: aja.
Ely: entonces cómo fue?, a ver explíquenme.
Mando: si hacemos más chico el punto "h".
Ely: "h" no es un punto eh.
Mando: ah bueno, la distancia.
Barby: de P a A.
Mando: si lo hacemos más pequeño el punto Q va a ir creciendo.
Goyo: y si lo hacemos más grande…
Barby: este va haciendo más chiquito
Ely: cuál se va a hacer más chiquito?
Barby: el Q.
Ely: Q es un punto.
Goyo: por eso, si se hace más grande la distancia de acá a acá obvio que va a crecer el punto P y este se va a tener que…
Ely: el punto P no se mueve eh.
Mando: mmm, entonces el que se mueve es el A?
Goyo: si pero como deja de…
Mando: porque si se hace más grande hacia acá…
Ely: a dónde quedaría Q?
Goyo: hasta por acá (sobre la curva).
Mando: porque las rectas se pueden prolongar hasta uhh.
Ely: si, las rectas se pueden prolongar hasta uhh, pero no pregunta por rectas, pregunta qué va a pasar con el punto Q?
Goyo: pues va a crecer porque si se pone para acá esto se va a hacer más para acá y Q ya quedaría como por aquí.
Ely: entonces, cómo fue la conclusión?
Barby: se recorre el punto Q.
Mando: si A es más grande, Q es más grande… y si A es más pequeño…

Goyo: si la distancia a A es más grande Q es más grande.
Mando: si la distancia de P a A es más pequeña, Q es más pequeña.

Video 327
Equipo de Kevin:
Ely: qué sucede con el punto Q si cambiamos el valor de "h"?
Kevin: pues no sabemos.
Ely: cuál es "h"?
Fidel: la distancia que hay entre P y A, entre el punto P y el punto A, o sea el segmento.
Ely: qué pasa si cambiamos el valor de "h"? o sea si lo hacemos más grande el valor de "h" o lo hacemos más pequeño?
Fidel: dice: qué pasa con el punto Q?
Ely: aja, qué pasa?
Fidel: o sea no se va a mover, lo único que va a crecer es el segmento de P al punto A, o sea que lo único que va a crecer es el segmento "h" y el punto Q no se va a mover.
Ely: pero acuérdate como calculamos el punto A.
Fidel: cómo Kelvin?, ahora te toca explicar a ti.
Kevin: el punto A?
Ely: si, el punto A no lo pusimos donde se nos dio la gana.
Kevin: pues no, fue donde se cruzaron las rectas… donde nos dice que trazáramos una recta paralela en el eje de las "y´s" por el punto Q.
Ely: mjm.
Kevin: que es este, luego dice que tracemos otra por el eje de las "x´s" pero por el punto P, y donde se crucen esas dos líneas ese va a ser el punto A.
Ely: entonces, no depende A del punto Q?
Kevin: pues algo… pues si porque.
Fidel: si es cierto, también se mueve el punto Q porque se supone que es una paralela en el punto Q para sacar el punto A, o sea si A se abre a fuerzas se tiene que abrir el punto Q.
Kevin: para que puedan seguir así… cómo se dice?... intersecándose.
Ely: entonces, qué pasa?
Fidel: y la montaña se moverá… conforme va cambiando el valor de "h" va cambiando el punto Q de posición.
Ely: si "h" es más grande, qué pasa con el punto Q?
Fidel: cambia de posición.
Ely: a donde se le da la gana?
Fidel: no.
Kevin: conforme va aumentando va…
Fidel: va aumentando en el valor de las "x´s".
Kevin: aja.
Ely: ohh, y qué pasa en el valor de las "y´s"?
Fidel: también (risas)… si porque dice que la paralela tiene que ser en esta… a fuerzas tiene que estar el punto Q sobre esta (señala la función).
Kevin: pero siempre se va cambiando de posición porque tiene que dar un ángulo recto, no?... y a fuerzas por eso tiene que irse…
Ely: tiene qué perdón?
Kevin: tiene que dar un ángulo recto.
Fidel: porque dice que para formar un triángulo rectángulo.
Kevin: por eso cada que cambia el valor de "h" tiene que irse moviendo Q de posición para que siga siendo el mismo ángulo.
Ely: qué pasa si "h" es grande?

Kevin: pues Q se mueve (risas).
Ely: y qué pasa si “h” es pequeña?
Fidel: pues Q se mueve.
Ely: bueno escríbanlo.

Video 328
Equipo Liz:
Liz: entonces según esta es la recta tangente, pero la pendiente, la pendiente es de aquí a aquí, no?

Video 329
Equipo de Mando:
Barby: se sustituye uno más dos, tres.
Goyo: no, se sustituye “h”, por eso aquí “h” viene siendo dos.
Barby: por eso.
Mando: ya pues ya.
(risas)
Goyo: pues es lo mismo, tres medios mas uno.
Mando: cuatro.
Barby: si? (está llenando la tabla).
Mando: vas a ser una buena secretaria.
Barby: la pendiente de la recta P a Q.
Ely: podemos buscar este punto en la gráfica?, es Q.
Goyo: dos, tres?
Ely: si, lo podemos buscar?
Goyo: pues si.
Ely: a ver.
Mando: y vamos a buscar (señala la última fila de la tabla)
(risas).
Ely: a ver, entonces era qué coordenada?
Goyo: dos, tres… hasta acá arriba, por aquí.
Barby: por aquí (dibuja el punto).
Ely: ahí quedaría el punto Q?
Goyo: si.
Ely: y si corresponde a lo que nos habían dicho? Que tiene que estar a la derecha y…
Mando: a la derecha del cuadro?
Goyo: si porque está a la derecha del eje de las “y´s”.
Ely: qué mas?, cuál era el otro requisito?
Mando: decía…
Barby: y pues sigue formándose un triángulo.
Mando: así (silva mientras dibuja con el dedo el triángulo).
Ely: no había ningún otro requisito para poner el punto Q?
Goyo: que pasara por la curva?
Mando: pues si pasa por la curva (y señala la tangente, sin darse cuenta que el punto que han dibujado no está en esa dirección).
Goyo: ya no pasa por la curva.
Mando: ya no pasa por la curva?
Goyo: no toca la curva (señala el punto).
Mando: oh.
Goyo: si, porque los de hace rato sí tocaban la curva… si era ese el requisito? Que tocara la curva?.
Mando: no sé, ustedes fueron los que leyeron.

Video 330
Equipo de Kevin:
Kevin: a si es cierto, a pero había dicho que lo de acá más lo que acá es lo de acá (señalando las coordenadas del punto Q y la pendiente de la recta PQ).
Ely: vamos a buscar este punto, es una coordenada?, la podemos buscar en la gráfica?
Kevin: en cualquier gráfica.
Fidel: nomás se puede encontrar un punto.

Video 331
Equipo de Mando:
Mando: vamos a tener que sacar las pendientes de todas estas?
Ely: pues no sé.
Mando: aquí dice, pendiente de la recta PQ.
Ely: pero, qué dice la instrucción?
Mando: ah que solo nos ayudemos con la tabla para esto.
Goyo: pues necesitamos llenar la tabla.
Mando: a ver, calcula la pendiente de la recta que une los puntos un cuarto para h igual a uno. Entonces esto ya lo hicimos, este resultado ya lo tenemos.
Ely: cuál es la pendiente?
Mando: ahorita la vamos a calcular.

Video 332
02 seg.

Video 333
04 seg.

Video 334
Equipo de Mane:
Ely: esta es la coordenada de "x" y esta es la coordenada de "y"
Mane: vamos a dar valores?
Ely: si, mas acá
Equipo de Liz:
Liz: de modo que el punto Q estará definido como la coordenada uno… mas "h"… coma F de uno mas "h", realiza la anotación en el dibujo.

Video 335
Equipo de Mane:
Mane: me equivoqué

Video 336
Equipo de Liz en el pizarrón:
Ely: (lee las instrucciones).

Video 337
Equipo de Liz en el pizarrón:
25 seg.

Video 338:
Equipo de Liz en el pizarrón
Ely: dices que la pendiente de la primera ¿cuánto te salió?
Liz: treinta y dos treinta y dozavos, o sea que eso sale a uno.

Ely: o sea, la primera recta dices que tiene de pendiente uno, ok y luego?
Liz: nosotros así la dejamos.
Ely: luego, la pregunta número dos?
Liz: la pendiente de la recta anterior es mayor o menor a la pendiente de la recta tangente? Nosotros le pusimos que era mayor… porque yo me equivoqué porque pensé que la tangente valía uno, un cuarto y como treinta y dos treinta y dozavos es un entero, yo le puse que era mayor.
Ely: ah ok, ¿calcularon entonces la pendiente de la línea roja?
Liz: no.
Ely: no?, ah ok. La número tres, dice: ahora dibuja la recta que pasa por (1,1/4) y (2,1), y calcula su pendiente.
Liz: (dibuja el punto).
Ely: y cuánto te salió de esa pendiente?
Liz: tres cuartos.
Ely: y luego te preguntaba, este valor es mayor o menor a la pendiente de la recta tangente.
Liz: le puse también mayor a la pendiente de la tangente.
Ely: cómo supieron que era mayor?
Liz: porque como yo vi, o yo le puse que era un cuarto y como son mas… tiene más de un cuarto tres cuartos.
Ely: y cómo sacaste eso de un cuarto?
Liz: porque yo pensé que la pendiente era f(x) que equivalía a un cuarto.
Ely: ah ya.
Liz: y yo por eso así le puse.
Ely: ok, entonces dices yo dije que era mayor porque tomé en cuenta que la pendiente de la roja era un cuarto, ok. Luego dice: calcula la pendiente de la recta que pasa por los puntos (1,1/4) y (3/2, 9/16)… cuánto salió eso?
Liz: ahí nos salió 5/8.
Ely: si los anotas, porfa, ahí en el pizarrón, también la anterior… ok, y te preguntaba nuevamente lo mismo, no?
Liz: si.
Ely: y qué contestaste?
Liz: no la contesté (risas).
Ely: esa ya no la contestaron, ok, y la cinco? ¿Cuánto salió en la cinco?
Liz: tres octavos, yo le puse que era menor que la pendiente de la tangente porque como estaba situado hacia el lado izquierdo, o sea bajó, en vez de ir para arriba bajó, yo le puse que era menor porque está hacia el lado contrario de la P, porque como los otros puntos estaban para arriba.
Erandi: iban subiendo y esta iba bajando, porque estaba del lado opuesto.
Ely: entonces tú dijiste que era menor porque estaba al otro lado de la P.
Liz: y ya nada más hasta ahí lo hicimos.
Ely: la seis no la contestaron?
Liz: no.
Ely: gracias, un aplauso para el equipo.

Video 339

Equipo de Kevin en el pizarrón:

Kevin: a nosotros nos salió los mismos resultados que le salió al otro equipo y pues nosotros le pusimos en la dos que es mayor la pendiente que la tangente porque nosotros nos guiamos a que está más inclinada, y supuestamente cuando es más inclinada es mayor pendiente. En la tres también es mayor pendiente, en la cuatro igual y en la cinco si nos salió menor porque nos dice que es un medio, es como, es aquí (señala 0.5 en la gráfica) y, un dieciseisavo es mas o menos como por aquí, y pues es menor… cómo se dice?... no lo puedo explicar… menor inclinación que la que nos da en el punto P, que es (1,1/4). Eso sería todo.

Ely: qué opinan equipos? No dibujaron los puntos sobre la gráfica?

Kevin: si.

Ely: no los dibujas?

Kevin: (dibuja los puntos).

Video 340

Equipo de Kevin en el pizarrón:

Ely: la pregunta número seis, dice: con base en los datos obtenidos anteriormente ¿puedes estimar el valor de la pendiente de la recta tangente?

Kevin: nosotros le pusimos que no, porque para sacar una pendiente se necesitan dos puntos y aquí nada mas nos está dando solamente un punto.

Ely: mm… ese es el razonamiento, dices, no porque necesito dos puntos, ahora dice: puedes encontrar una mejor, una manera de mejorar la aproximación de dicha pendiente?

Kevin: pues si… dando un valor más pequeño a los puntos para que se vayan aproximando al punto P.

Ely: y entonces?

Kevin: pues ese es mi razonamiento, dándole valores más pequeños…

Ely: poniendo puntos más cerca de dónde dijiste?

Kevin: del punto P.

Ely: y luego que vas a hacer con esos puntos?

Kevin: pues sacar la pendiente.

Ely: de donde a dónde?

Kevin: depende del valor que les demos.

Ely: y eso que salga que va a ser?, esa va a ser la pendiente de la recta roja?

Kevin: algo así (sonríe).

Ely: algo así… qué opinan equipos?. Dice Kevin, si puedo aproximar la pendiente, si me puedo aproximar a la pendiente de la recta roja si pongo puntos muy cerquita al punto P. ¿qué dicen los demás?

…

Ely: nada?, ok, la siguiente es dibujar el triángulo que les pedían, si lo dibujaron?

Kevin: si.

Ely: me lo dibujan?

Kevin: ahhh… para hacerla…

Video 341

Equipo de Kevin en el pizarrón:

Kevin: nos dice que tracemos una recta en el eje de las “y´s” al lado derecho del punto P, y este es el punto P, y luego nos dice que tracemos otra recta en el eje de las “x´s” por el punto P. Luego nos dice que donde se intersectan es el punto A… nos dice que tienen que formar un triángulo rectángulo… Luego nos dice: qué sucede con el punto Q si cambiamos el valor de “h”? pues cambian sus valores, tanto en el eje “x” como en el eje “y”

Ely: cuál es “h”? ¿la marcas?

Kevin: ah si, es la distancia que hay entre P y A… esa es “h”.

Ely: dice entonces: qué sucede con el punto Q si cambiamos el valor de "h"?, dices cambian sus valores en "x" y en "y". La nueve, ¿cuáles son las coordenadas de Q si "h" es igual a uno?
Kevin: pues nosotros nada más le pusimos que "h"… le pusimos que uno (sonríe).
Ely: me lo escribes?
Kevin: (escribe en el pizarrón Q=(1+1,f(1+1))).
Ely: dice: grafica el punto Q con las coordenadas que obtuviste, ¿lo graficaron?
Kevin: no.
Ely: por qué?
Kevin: porque no le entendimos.
Ely: Fidel, la diez?
Fidel: ahhh.
Ely: se confundieron?
Fidel: aja.
Ely: ok, hicieron algo en la tabla?
Fidel: no, no le entendimos…
Ely: … hicieron esa?
Kevin: si, pero no nos salió.
Ely: la escribes y ahorita vemos porque dices que no les salió?
Kevin: es que en lugar de poner la "h" le pusimos el valor de uno, porque Q es uno mas "h", y en vez de poner "h" pusimos uno, que sería dos, entonces la coordenada de Q sería (2,2). (calcularon la pendiente del punto (2,2) al punto P).
Ely: ok, la siguiente pregunta dice: calcula ahora la pendiente de la recta PQ si "h" es igual a punto cinco.
Kevin: aja.
Ely: esa también la hicieron?
Kevin: aja.
Ely: y cuánto salió?
Kevin: a cinco medios.
Ely: me la escribes, porfa?
Kevin: (calcula en el pizarrón la pendiente de la recta que pasa por (1.5,1.5) y el punto P).
Ely: ok, compara estos resultados con los que habías obtenido en el punto tres y cuatro, en la pregunta tres y cuatro, ¿qué relación encuentras?
Kevin: (sonríe y contesta con duda)… pues que su pendiente va aumentando.
Ely: ok, ¿qué valores debe tomar "h" para que el punto Q esté lo más cercano posible al punto P?
Kevin: once décimos coma un cuarto (11/10,1/4).
Ely: es el valor que debe tomar "h"?
Kevin: supuestamente.
Ely: ok, dice: qué ocurre si el valor de "h" se hace cada vez más pequeño?, es decir, si el punto Q se acerca cada vez mas al punto P?, cuánto vale la pendiente de la recta que pasa por P y Q?
Kevin: no la contestamos.
Ely: ok, un aplauso para el equipo.

Video 342
Equipo de Penélope en el pizarrón:
Ely: qué les salió de la pendiente?
Peny: el punto que hicimos le llamamos Q, que se encuentra en este punto. Después trazamos la recta.

Ely: la puedes dibujar? A ver como te sale, no importa si te sale un poquito chueca.

Peny: nos salió en (marca el punto con la letra C), y la pendiente (escribe 8/8 en el pizarrón).

Ely: ocho octavos, cuánto es eso?

Peny: ocho octavos.

Ely: ocho octavos es cuánto?, mi pregunta es: te salió lo mismo que al equipo de Ely o no?

Peny: no… no sé yo. En la pregunta dos.

Ely: aja, en la pregunta dos.

Peny: dice que la pendiente de la recta es mayor o menor que la pendiente de la recta tangente. Nosotros pusimos que es mayor que la tangente porque está un poquito más (señala la cuesta de la recta).

Ely: la tres?

Peny: la tres dice: dibuja la recta que pasa entre . y dice este valor es mayor o menor…

Ely: la cinco.

Peny: la cinco? Es menor…

Ely: la seis, con base en los resultados obtenidos en las preguntas anteriores ¿puedes estimar el valor de la recta tangente a la función en el punto (1,1/4)?. O sea en el punto P.

Peny: que explique mi razonamiento, nosotros decimos que no porque se necesita de otro punto para obtener el valor de la pendiente como tangente, este, la tangente como pendiente.

Ely: dicen que no, ¿por qué?

Mane: porque hace falta otro punto. Para poder sacar una pendiente se ocupan dos puntos y nada más está un punto.

Ely: ah ok, lo que decía Kevin. La pregunta número siete, ¿puedes encontrar una manera de mejorar la aproximación de dicha pendiente?

Peny: nosotros le pusimos que sería encontrar otro punto para sacar la pendiente de la tangente. Y el resultado sería aproximadamente de dos medios.

Ely: y dónde pondrían ese punto?

Mane: el segundo punto lo pusimos en…

Ely: dónde lo puedo poner? Dónde sea?

Mane: o, tiene que ser que de tal manera se encuentre coordinado con la tangente que pasa por el punto P.

Ely: a qué te refieres con coordinada?

Mane: que el punto que yo voy a marcar esté prolongado en la tangente, o sea que de tal manera lo tengo que poner en la línea que es la tangente, no puedo prolongarlo en cualquier lugar, tengo que buscar las coordenadas.

Ely: pero si no conocemos nada de la tangente mas que el punto P, ¿cómo le haríamos para poner un punto sobre la recta y conocer la coordenada?… está complicado verdad… dices, yo lo haría poniendo un punto sobre la recta, y luego cómo le haces para saber la coordenada?

Mane: me basé con el plano y le dí las coordenadas que yo creí que mas o menos se aproximaba.

ANEXO E

El problema de la recta tangente con grupo control

Video 348
Equipo de Luis M:

Pancho:	¿y de "y_1"?
Fco:	este un cuarto.
Pancho:	¿y de "x_1"?
Faco:	uno.
Pancho:	vamos a restarle nueve cuartos menos un cuarto en la calculadora.
Fco:	ocho cuartos.
Pancho:	entonces ocho cuartos entre dos.

Equipo de Paulina:

Pau:	pero vamos a trabajar lo mismo con fracciones, ya ves que el otro también era un cuarto, ahora vamos a sacar lo del otro punto de tres, como nueve cuartos.
Ely:	grafíquenlo.
Pau:	grafícalo, deja saco una hoja.

Video 349:
Equipo de Alex:

Manuel:	entonces te está dando el primer punto que es este.
Alex:	entonces lo que tienes que buscar es qué pasa con.
Manuel:	por eso que sería el tres.
Alex:	tres.
Manuel:	nueve cuartos… por aquí.
Alex:	entonces ahora lo que tenemos que hacer es sacar la pendiente, aquí ya sabemos más o menos por donde pasa.
Gabriel:	entonces este es x1.
Manuel:	si el punto primero ya te lo dio, es este y lo único que tienes que hacer es…
Alex:	pero falta ver.
Manuel:	pero nada más dibújala y ahorita le ponemos
Manuel:	x_1, y_1, x_2, y_2.

Video 350:

Luis M:	esas son las coordenadas.
Pancho:	esas son las coordenadas, esa es la pendiente de eso y ahora hay que buscar el 2,1 en la gráfica.
Fco:	pero este simplificado sale cuatro sobre dos y como decía pinky ahorita que esto si se simplifica sale uno.
Pancho:	por eso pues, así quedaría ya simplificados los dos, porque si no simplificaríamos el de arriba quedaría 2,2 nada más.
Fco:	¿entonces?
Luis M:	no se.
Pancho:	pues esto ya lo tienes que buscar en la gráfica, no?
Luis M:	utiliza esta gráfica para dibujar la recta que pasa por los puntos,, tenemos que dibujar la recta que pasa por los puntos.

Pancho: por eso, estos puntos nos tienen que dar otra recta.
Fco: calcula su pendiente.

Video 352
Diana: no se, es que se supone ¿no?

Video 353
Pancho: uno un cuarto.
Fco: un cuarto es este.
Pancho: entonces se pasa de aquí a acá [señalando un segmento entre los puntos].
Luis M: así que pasa por los dos, ¿así?... a ver [entrega la hoja a Fco para que dibuje el segmento].
Fco: no tengo pulso.
Luis M: pon el lapicero.

Video 354:
Chely: si simplificamos va a quedar dos entre dos.
Gaby: por eso.
Chely: y ya pues eso sería un entero.
Gaby: ¿la pendiente de la recta anterior es mayor o menor a la pendiente de la recta tangente?... ¿esta es mayor o menor a la pendiente de esta?... ¿cuál es la pendiente de esta?
Chely: pues esta [señalando la recta].
Gaby: no, esta es la recta… la pendiente de esta [señalando la tangente], sería…
Chely: esa, ¿no?
Gaby: no me acuerdo… y_2
Chely: pues es lo mismo.
Itzel: es lo que ya sacamos.
Gaby: pero entonces ¿por qué nos pide que comparemos esto con la otra?

Video 355
Pau: hay que calcular su pendiente.

Video 356:
Fco: cuida tu punto, te fuiste.
Luis M: ¿crees?
Pancho: no borres, táchalo.
Luis M: pero es que si no, no se va a notar [vuelve a dibujar el segmento]… ya compadre.
Fco: ¿ahora qué más decía?
Fco: [lee las instrucciones] calcula su pendiente.
Pancho: a ver dime y_2.
Luis M: y_2 es uno.
Pancho: ¿uno?
Luis M: ¿cómo dijiste que iba? Ya se me olvidó.
Pancho: "x" son los primeros, uno, un cuarto.
Fco: "x" y "y".
Luis M: ahora si entonces es…
Pancho: uno menos un cuarto… tres cuartos.

Video 357:
Caro: entonces ya…
Lalo: calcula su pendiente.

Video 358:

Alex: la pendiente es igual a uno… ahora sí pasamos al segundo ejercicio. ¿La pendiente de la recta anterior es menor o mayor a la pendiente de la recta tangente?

Manuel: [regresa la hoja para ver la gráfica]… mayor.

Alex: no, ponle que no.

Gabriel: ¿por qué si dice mayor o menor?

Alex: ponle… ahí luego, luego dice…. [Después de un silencio vuelve a leer la pregunta]… ponle que no.

Manuel: ¿así nomás?

Alex: sí, así nomás.

Ely: ¿es mayor o es menor?

Alex: es mayor.

Ely: ¿entonces por qué contestan "no"?.

Gabriel: te estoy diciendo.

Ely: ¿por qué dicen que es mayor?

Alex: porque es igual a uno.

Ely: ¿y la otra?

Alex: es igual a…

Ely: ¿y la otra?

Manuel: ¿la otra? Es a menos cero punto cinco, no?

Ely: mmm ¿la pendiente es negativa?

Alex: ¿la primera o la segunda?

Ely: la de la tangente.

Manuel: es positiva.

Ely: ¿la pendiente? ¿La calcularon? ¿Cuánto vale?

Manuel: uno.

Ely: ¿la de la tangente? ¿Sí? ¿Cuál es la tangente, la puedes señalar?

Manuel: la tangente es esta [señalando la secante que acaban de dibujar].

Alex: la tangente es [señala la línea roja].

Manuel: ah si, la recta tangente.

Ely: entonces, ¿cuál pendiente es mayor?

Manuel: la recta tan… la recta esta… no esta sino la otra.

Ely: ¿cuál otra?

Manuel: la curva pues.

Video 259:

Ely: ¿la curva dices?

Manuel: que la pendiente es esta y ésta pasa por los negativos [señalando la tangente donde corta al eje "x"].

Ely: ¿cuál es la pendiente?

Manuel: la pendiente… pues es está ¿no? [Señalando la recta tangente].

Ely: ¿esa es la pendiente?

Manuel: si.

Alex: esa es la recta tangente.

Manuel: díganos pues.

Video 360:

Luis M: un cuarto, tres medios.

Pancho: es menor ¿no?

Video 361:
Ely: ¿cómo saben que es mayor?
Gaby: porque es dos.
Ely: ¿es dos?
Itzel: si.
Ely: ¿cuál es dos?
Itzel: esta [señalando la tangente].
Ely: ¿la pendiente de la tangente vale 2? ¿Cómo le hicieron para saber eso?
Gaby: ehhh sacamos los puntos.
Chely: las coordenadas.
Gaby: el punto que pasaba por esta [señalando una línea vertical sobre el punto que dibujaron en la curva] y aquí cruza para las otras coordenadas.
Ely: ¿qué coordenadas tiene ese punto?
Gaby: tres coma cinco cuartos.
Ely: y ¿cómo le hicieron para estimarlo?
[silencio]

Video 262:
Gaby: en base a este que hasta aquí llega podemos sacar esta [señalando la línea vertical que dibujó y otra línea horizontal de manera arbitraria].

Video 263:
Ely: ¿y la otra pendiente?
Gaby: uno.
Ely: ¿se puede eso? ¿Se puede que las gráficas queden así si una pendiente vale dos y la otra vale uno?... lo que les pregunto es ¿coincide lo que están diciendo con las gráficas?
Gaby: no me acuerdo…. Hay no sé!... es que me acuerdo que en caso de fracciones que bajabas tantos y subías tantos, pero…
Ely: tienes enteros.

Video 364:
Pau: ¿la calculadora?, nueve cuartos menos ¿qué?
Salud: menos un cuarto.
Pau: es igual a dos. Tres menos uno es igual a dos [usando la calculadora]…. Y ya.
Ca: es igual a un entero.
Salud: dos entre dos es igual a uno.
Pau: un entero… ¿es lo que vale la recta esta?
Salud: no.
Pau: la pendiente perdón, la pendiente.
Ca: hay no se.
Pau: porque acá nos preguntan, ¿la pendiente de la recta anterior es mayor o menor que la pendiente de la recta tangente?. Tenemos que sacar también la de la tangente para ver cuál es mayor o menor… de la roja… opina pues chola.
Ca: deja pienso.
Ely: ¿cómo le van a hacer para sacar la pendiente de la recta tangente?
Pau: con la fórmula, ¿no? La fórmula de la recta, digo de la recta tangente.
Ely: ¿cuál?
Pau: y_2 es igual a y_1 menos x_2 menos x_1.
Ely: otra vez.
Pau: y_2 menos y_1 sobre x_2 menos x_1.

Ely: ¿esa es la fórmula de qué?
Pau: ¿de la recta tangente?... ah no de la pendiente.
Ely: ¿y conocen los valores de y_2 y y_1?
Pau: si.
Ely: ¿cuáles son?
Salud: de y_2 es nueve cuartos y de y_1 es un cuarto.

Video 365:
Ely: si pero les preguntan por la recta tangente.

Video 366:
Fco: el valor de la pendiente de la recta tangente a la función en el punto P.
Pancho: ¿cuál sería el otro punto de la recta?
Fco: todos los valores de aquí, ¿si, no, es lo que íbamos haciendo? Desde el punto P.
Pancho: por eso pero quiere que hagamos la ¿qué?
Luis M: estimar el valor de la pendiente de la recta tangente.
Pancho: tenemos que encontrar el otro… no.
Luis M: ¿qué es eso profa, estimar el valor?
Pancho: ¿hallar el valor?
Luis M: ¿ese valor está?
Fco: si, es esto, el uno coma un cuarto.
Pancho: ¿tenemos que hallar las otras coordenadas, no?... para sacar la pendiente.
Ely: ¿dibujaron todas las rectas que les pedí?
Luis M: solo nos pidió dos.
Fco: y las demás las íbamos trazando aquí nada mas para ir checando cómo iban quedando.
Ely: ¿puedo ver la pregunta cinco?
Luis M: dice: calcula la pendiente de la recta que pasa por uno coma un cuarto y un medio coma un dieciseisavo.
Ely: ¿dibujaron esa recta?
Luis M: si, pero no se nota.
Ely: ¿pueden señalarme dónde quedaría?
Luis M: de aquí a aquí.
Ely: ¿cuál?
Luis M: de aquí.
Pancho: está bien chiquita.
Ely: ¿ahí sería un medio coma un dieciseisavo?
Luis M: no, es de aquí a aquí.
Ely: veamos las coordenadas ¿no?
Luis M: dice uno un cuarto.
Ely: ¿cuál es esa?
Luis M: aquí P, y luego te dice un medio coma un dieciseisavo. Entonces sería un medio que sería aquí y un dieciseisavo que sería como por aquí [localizando los puntos].
Pancho: cero punto tres.
Fco: un dieciseisavo es cero punto cero seis [utilizando la calculadora].
Luis M: ¿entonces es aquí profa?
Ely: no se, yo estoy preguntando… ¿ahí quedaría la recta?
Fco: cero punto cero seis quedaría por aquí.
Luis M: ¿cuánto dijo un dieciseisavo?... ah pues sí un dieciseisavo es uno de dieciséis, quedaría como por aquí, sería así más bien.
Ely: entonces por fin ¿cuál sería la recta?

Luis M: esta [trazando la recta correcta].
Ely: ¿la pueden dibujar un poquito más grande?, que salga así como la roja que salió de la curva. O sea proyectarla nada más.
Pancho: más larga.
Ely: entonces la pregunta es, en esa recta que acaban de dibujar ¿cómo es su pendiente con respecto a la recta roja mayor o menor?, porque eso fue lo que les preguntaron de todas las demás.
Pancho: es menor.
Luis M: nosotros pusimos que menor.
Ely: ¿y las demás?
Luis M: también menor.
Ely: ¿todas son menores que la pendiente de la recta roja?
Pancho: son más chicas pues.
Ely: ¿cómo saben eso?
Pancho: porque se va reduciendo el tamaño.
Ely: ¿el tamaño de qué? ¿Les pregunta por la longitud de la recta o les pregunta por la pendiente de la recta?
Pancho: por la pendiente.
Ely: ¿y qué es la pendiente de la recta?
Pancho: ¿qué wey?
Fco: no se… ya la regamos. [risas].
Ely: ¿por qué?
Luis M: ¿aquí está al revés no?
Ely: no borren.
Luis M: ahhh.
Ely: ¿dos coma uno es una coordenada?
Luis M: si.
Ely: ¿la pendiente se da en forma de coordenada como si fuera un punto?
[risas].
Luis M: ¿le pongo paréntesis? … Dígame.

Video 367:
Alex: hay vamos a tener dos rectas aquí.
Gabriel: haz otra gráfica.
Luis M: pero en la misma hoja para que no.
Gabriel: ¿aquí?
Luis M: si.

Video 368:
Alex: x_1, y_1, x_2, y_2… entonces la pendiente es igual a…

Video 369:
[Parece que intentan sacar la derivada].
Ca: ¿es mayor esta?
Salud: si.
Pau: ¿por qué si?
Salud: porque aquí esta nada más de aquí para arriba nada más tiene un cuarto y esta tiene nueve cuartos.
Pau: no le entendí.
Ca: es que esta es uno coma un cuarto que es este y acá dice que es tres coma nueve cuartos.
Salud: es la otra recta.
Ca: por eso es mayor que esta [señalando el punto P].

Salud: este es mayor que este [señalando los dos puntos].
Ca: ¿no?
Salud: es mayor que esta.
Pau: no pues si, porque se supone que esta tiene..
Ca: o sea los números también son más obvios porque uno coma un cuarto y acá tres coma nueve cuartos.
Pau: lo doble… porque ya ves que aquí estábamos sacando la mitad y es cuando dijo Salud da, da, da… entonces ponle Salud.
Ely: ¿pero eso qué es la coordenada o la pendiente?
Ca: ¿cuál?
Ely: eso que ustedes dijeron, lo que acaban de decir.
Salud: ah lo de la recta.
Ely: ¿eso qué? ¿Es la pendiente?
Pau: no, es…
Ca: son los… ¿qué es?
Pau: es la recta… ah pero acá nos está preguntando la pendiente, por eso la pendiente de la recta. Nosotros calculamos, supuestamente, nosotros calculamos sobre la recta de lo de tres coma nueve cuartos y nos salió un entero.
Ely: ¿eso qué es?
Salud: la pendiente de la recta.
Pau: entonces nos está preguntando que si es mayor o menor que la otra recta, esta la tangente.
Ely: ¿y ustedes qué dicen?
Pau: que es mayor.
Ely: ajá, ¿y la razón?
Pau: porque… porque ahí es donde no sabemos porque es mayor. Nosotros decimos porque es lo doble de la otra recta ¿no?
Ely: a bueno pues pongan eso.

Video 370
Carolina escribiendo.

Video 371:
Luis M: paralela al eje "y".

Video 372:
Pancho: si sale así como habíamos dicho.
Luis M: uno punto, ¿y dónde está el punto "Q"?
Fco: es el que vamos a poner.
Luis M: a la derecha de P o sea por acá.
Pancho: porque es sobre la… pendiente.
Luis M: es que aquí dice mira, agrega el punto "Q" a la derecha de "P" y sobre la función.
Fco: la derecha de la tabla es esta [señalando la izquierda].
Pancho: ¿qué?... no, la derecha de "P" es para allá. Ni modo que esta sea la derecha, esta es la izquierda.
Fco: de nosotros.
Pancho: y de la tabla también.
Luis M: hay que hacerla aquí wey. Y sobre la función.
Pancho: por eso sobre esta función, aquí es el punto "Q".
Luis M: luego dice, traza una recta paralela al eje "y" en el punto "Q". o sea que aquí va una, pásame una regla.

Pancho: al eje "y".
Luis M: y una recta paralela al eje "x".
Pancho: por eso, ahí va a ser el triángulo rectángulo.
Luis M: donde se crucen estas rectas llama a este punto "A". Aquí, ¿si es aquí?
Pancho: si.
Luis M: y forme un triángulo rectángulo APQ.
Fco: APQ [señalando los puntos].
Luis M: ¿y luego qué sigue?. A la distancia PA la llamaremos "h"… altura. De modo que el punto "Q" está definido por la coordenada.
Pancho: ah cabron!
Luis M: uno más "h"… uno más…
Pancho: chale [risas]…
Luis M: "h" es uno y medio, son dos y medio está bien, uno más "h" dos y medio. ¿la "f" qué es?
Fco: función.
Luis M: de uno más "h" [tiene dificultades para leer la coordenada (1+h, f(1+h))].
Fco: uno más "h".
Pancho: ¿un qué un centímetro o un qué?
Fco: "h" muda… distancia de PA sería un dos… El punto "Q" está definido por la coordenada.
Luis M: sabes que, el punto "Q" está fuera del triángulo… aquí se acaba el triángulo y está acá, aquí está algo raro [les falta dibujar el segmento PQ].
Fco: si ¿no?.
Pancho: se supone que el punto debería estar aquí [señalando la recta tangente]… pero también dice que sobre la función y la función es esa.
Luis M: saca la calculadora.
Fco: yo no entiendo.
Pancho: ni yo.
Luis M: función de "x" ¿cuál es?
Pancho: pues esa, es esa línea es la función de "x".
Luis M: solo que sea hasta acá arriba, ¿no? ¿no puede quedar así? [dibujando el segmento PQ].
Fco: pues ya quedó así.
Luis M: y luego como quiera eso no dice que lo contestemos, nada más nos esta diciendo que ¿dónde está?. Dice, ¿qué sucede con el punto "Q" si cambiamos el valor de "h"?
Fco: ¿cómo si cambiamos?
Pancho: pero ¿cuánto vale "h"?
Luis M: uno punto cinco yo digo porque es de aquí a aquí.
Fco: la distancia.
Luis M: la distancia de "P" a "A" la llamamos "h", ni modo que el punto "Q" se vaya moviendo con la coordenada [mueve su mano simulando que se desliza el punto "Q"]…. Uno más "h".
Pancho: uno más todo esto ¿no? Para que sea toda la distancia.
Luis M: ¿cómo?
Pancho: o uno más… tres punto cinco ¿no?, mide de aquí a aquí [señalando el segmento PA].
Luis M: uno punto cinco, medio, medio y medio [señalando las coordenadas].
Pancho: más uno, dos punto cinco.
Luis M: es lo que no entiendo… ¿no se puede hacer esta en la calculadora como función? ¿la "f" no sale? [Refiriéndose a si existe una tecla en la calculadora con la letra "f"]... o ¿qué es la función?

Pancho: pues la función, nada más te indica que es una función, dice que ¿qué pasa con este punto si esta distancia se hace más grande o se hace más chica?. Este punto ¿qué es, se queda igual o?
Luis M: se queda diferente.
Pancho: pero diferente que.
Luis M: si cambiamos el valor de "h".
Pancho: si lo hacemos más grande o más chico por ejemplo.
Luis M: "h" es igual a uno punto cinco, si lo cambiamos y le ponemos dos punto cinco sería hasta acá y, ya no sería triángulo rectángulo ya quedaría aquí.
Pancho: ya ahí ponle: cambiaría la formula del triángulo.
Luis M: pero ¿qué sucede con "Q"?
Pancho: se abre más la línea pues, se tendría que abrir hasta acá, se mueve la línea, la línea recta de "Q"… porque ya tendría que ir hasta acá si la "h" se mueve hasta dos punto cinco, ponle, ya la línea sería así [dibujando un triángulo sin mover el punto Q].
Fco: pero el punto "Q" también se tiene que mover.
Luis M: si.
Fco: porque tiene que ser la recta esta.
Pancho: ¿hacia arriba o así?
Fco: tiene que moverse la recta para acá.
Ely: ¿por qué tiene que moverse el punto "Q"?
Luis M: ¿por qué pues?
Pancho: porque también se mueve la distancia ¿no?
Ely: ¿cuál distancia?
Pancho: esta, la "h".
Luis M: porque "Q" está definido por las coordenadas de "h", y si se mueve "h" se hace más grande "Q"… yo pienso pues, quién sabe [risas].

Video 373:
[se alcanza a escuchar a Pancho decir: si se mueve "Q"].

Video 374:
Pancho: es que los dos tienen que moverse igual, bueno no igual pero si se mueve la "h" se tiene que mover la "Q" para que salga el triángulo rectángulo, o un triángulo no importa que sea. Pero si se mueve nada más la "h" no sale nada, o sea ya no te da ninguna figura.
Fco: y como aquí nos está pidiendo un triángulo.
Pancho: se tiene que mover.
Fco: hacia la distancia de "h".
Luis M: pues por eso es la pregunta, ¿qué sucede con el punto "Q" si cambias el valor de "h"?. Pues ya no es un triángulo rectángulo, bueno yo digo. Porque yo digo "Q" se mueve pero, como por decir el "Q" más o menos se saca así la "h", y por decir dice uno más "h", yo creo ha de ser una distancia de "Q" para llegar a "Q", y si cambiamos el valor de "h" pues "Q" también se va a hacer más grande, pero grande.
Pancho: hacia "y".
Luis M: hacia arriba no hacia los lados.
Pancho: recta en el eje "x" en el punto "P".
Luis M: porque mira dice: si "h" es igual a uno ¿cuáles son las coordenadas de "Q"?, hay que ver cómo se saca esto para poder también hacer esto.

Video 375:

Alex: yo creo que podemos sacar también la pendiente de la recta tangente, supongamos que si tenemos ya aquí este punto lo único que necesitaríamos es lo demás, tenemos el mismo punto, todos pasan por el mismo punto. Entonces yo diría que lo que nos falta es tener este punto para más o menos saber. Pero como ya tenemos obtenidos los datos de estas, de las pendientes de las tangentes de las rectas que ya sacamos yo diría que lo que nos hace falta es el otro resultado, pero como ese resultado no lo tenemos, tenemos que inventárnoslo.

Gabriel: [risas] ¿inventarlo wey?

Alex: más o menos como dice "largas", hay que poner un puntito aquí para saber por qué punto pasa. Supongamos que podemos poner este, como el de dos, ese nos daría como el punto… mmm no salía.

Gabriel: ¿con estos datos se tiene que sacar una pendiente?

Ely: ¿mande?

Gabriel: ¿con estos datos se tiene que sacar la pendiente?

Ely: con las pendientes que ya calcularon, dice que en base a lo que ya calcularon si pueden decir cuánto vale.

Alex: ¿más o menos aproximado?

Ely: ajá, estimar es aproximar.

Gabriel: ¿entonces tenemos que sumarlos?

Ely: no se, no se que es lo que tienen que hacer pero…

Alex: [vuelve a leer la pregunta].

Video 376:

Lalo: tres medios, punto nueve.

Video 377:

Alex: entonces de este punto va a pasar por aquí.

Manuel: ya no, ya la regaste mucho, ya no se sabe ni cual es.

Gabriel: cada vez nos vamos acercando a esta.

Alex: a la roja. Entonces más grande lo hacemos que, esta recta pasa por… pues dice que es un dieciseisavo, entonces aquí sale así y lo que buscamos un medio.

Gabriel: si, un dieciseisavo es aquí.

Alex: más o menos ahí, entonces…

Gabriel: por allá va a pasar, más abajo.

Alex: entonces ya sería un valor negativo, no un valor negativo sino que menor que la recta que ya teníamos.

Manuel: y ahora saca otro resultado y más abajo [Suponiendo que les pedirían la pendiente de otra recta].

Alex: no, ya son todos.

Manuel: ¿cuál de todas? ¿Ésta?

Alex: esta es la que tenemos que encontrar, y nosotros ya marcamos todas las demás, entonces ya.

Gabriel: ya hiciste menor.

Alex: …explica tu razonamiento. Nos pregunta que si podemos, dice: ¿puedes estimar el valor de la pendiente? Pues si podemos estimar un valor de la pendiente porque ya nos acercamos muy, muy, muy pegadamente casi un… es nada, estamos casi muy, muy, muy acercadamente a él. Entonces yo digo que si podemos estimar el valor de la pendiente porque ya estamos muy cerca con esta recta y con esta otra, está más o menos en medio de las últimas dos rectas que sacamos, entonces está entre…

Gabriel: pero entonces es menor, este es menor entonces, si ¿no?
Alex: pues yo digo que sí porque, en la de arriba la dibujamos y sí que es menor, porque del otro dice que es un cuarto, nosotros sacamos ocho tercios entonces ya es menor. Entonces vamos a decir que el valor más o menos aproximado si lo podemos estimar está como entre la mitad de los últimos dos.

Video 378:
Luis M: yo digo que así, pero no estoy seguro.

Video 379:
Chely: un medio de "x"
Gaby: sería esto.
Ely: ¿qué hiciste Chely?
Chely: ¿qué hicimos Gaby?
Gaby: dile pues.
Chely: sacamos la derivada de esto.
Ely: ¿de qué?
Chely: de "f" de "x", es igual a un cuarto de "x" cuadrada.
Ely: ¿y eso para qué?
Chely: para saber más o menos por donde queda el punto "Q", para poner el punto "Q".
Itzel: a qué distancia del punto "P".
Ely: a ver explícame porque no entiendo.
Chely: sacamos la derivada de un cuarto de "x" al cuadrado para saber más o menos a qué distancia queda el punto "Q" del punto "P", a ver más o menos en dónde queda.
Ely: ¿qué tiene que ver la derivada de "f" de "x" con dónde poner el punto?
Gaby: es la pendiente.
Ely: ¿mande?
Gaby: ¿es la pendiente no? De la recta tangente, esta es la recta tangente y esta es la función. Entonces estamos derivando la pendiente de esto.
Ely: ¿están derivando la pendiente o qué están derivando?
Gaby: la recta, la recta la función.
Chely: la función.
Ely: ¿están derivando la recta de la función?
Gaby: ¿la recta de la función? Hay no se.
Ely: ¿y para qué la derivan?
Gaby: para… ver que tan cerca está de la función, ¿no?
Ely: no se, yo pregunto.
Gaby: supongo que es para eso, pero no estamos seguras.
Ely: porque no les pedía que derivaran.
Gaby: pues no, pero queríamos ver si tenía algo que ver con las derivadas.
Ely: ¿qué es la derivada?
Gaby: ya se me olvidó… es la pendiente de esta recta.
Ely: ¿es la pendiente de qué?
Gaby: de la recta tangente a esta función.
Ely: a ver repíteme porque no te escuche.
Gaby: es la pendiente de esta recta.
Ely: ¿por qué de esa recta?
Gaby: porque si.
Chely: porque es la tangente.
Gaby: porque es la tangente de la función.

Ely: ¿y eso qué?
Gaby: esta es la recta tangente a la función.
Ely: ajá.
Gaby: y la derivada es la pendiente de esta recta.
Ely: ah, entonces ¿qué es lo que quieren hacer con la derivada?
Gaby: eh supongo que, no me acuerdo muy bien, es qué tanto se aproxima.
Ely: ah, y entonces ¿qué resultado les dio?
Itzel: un medio de "x"
Ely: ¿y entonces eso qué significa?
Itzel: ¿punto cinco, no? Porque "x" vale uno.
Gaby: pero aquí no le dimos valores, no sabemos si está bien la derivada.

Video 380:
Diana: ¿es está?

Video 381:
Pau: yo calculo la pendiente.
Ca: ¿cuál es la cinco?

Video 382:
Gaby: y otra recta paralela al eje "x" en el punto "P"… donde se cruzan estas rectas llama a este punto "A". Forma el triángulo rectángulo APQ.
Chely: ¿y esta es "Q"? acá va a ser "Q".
Gaby: la distancia PA la llamaremos "h".

Video 383:
Gaby: [con dificultades para leer (1+h, f(1+h))].,, realiza estas anotaciones en el dibujo… hay no le entendí.
Chely: ¿cuál?

Video 384:
Alex: y entonces nosotros le pusimos que era mayor, pero ahora que sabemos más o menos cuál es el valor, esta es la recta que acabamos de sacar y era menor no es mayor, entonces nos falló y es menor.
Gabriel: pero entonces lo que habíamos sacado primero era esto.
Alex: no, porque por eso nos estaban dando esto para ver si le sabíamos más o menos, si estaba más o menos ahí y si pasaba la pendiente, entonces acá es donde podemos decirlo y acá estamos calculando y entonces debemos de poner aquí que es menor, porque uno no es mayor que dos, es menor. Entonces nosotros le ponemos que es menor y este pues es igual.
Manuel: si modificaste uno tienes que modificar los demás.
Gabriel: ese ya estaba.
Alex: ocho tercios… porque sí es menor, si este es menor es menos porque este es un entero.

Video 385:
Caro: pues yo digo que si ¿no?
Lalo: ¿cómo?
Caro: dice: en base a los datos obtenidos ¿puedes estimar el valor de la pendiente de la recta tangente a la función en el punto uno coma un cuarto?

Video 386:
[1 seg]

Video 387:
Equipo de Diana en el pizarrón
Rostro: utiliza esta gráfica para dibujar la recta que pasa por los puntos uno coma un cuarto, tres coma nueve cuartos y calcula su pendiente.

Video 388:
Ely: ¿qué salió?
Rostro: un entero.
Ely: ¿qué dicen los demás equipos?
[si dicen todos]
Luis M: ¿qué dice?
Jaq: que calcule la pendiente.
Ely: ok, la siguiente pregunta.
Dian: ¿la pendiente de la recta anterior es mayor o menor que la pendiente de la recta tangente?
Ely: ¿ustedes qué dijeron?
Dian: que es mayor.
Ely: ¿por qué?
Jaq: porque el punto está más arriba.

Video 389:
Equipo de Diana dibujando la recta.

Video 390:
Ely: el punto está más alto, dicen, y es mayor. ¿qué opinan los demás equipos?
Pau: si.
Luis M: no, es menor.
Ely: ¿es menor? ¿por qué es menor?
Pancho: porque se va, es que a cada punto se va…
Luis M: es que a nosotros nos salió diferente, la pendiente nos salió diferente.
Ely: ¿y a los demás equipos qué les salió?
Pau: a nosotros nos salió igual.
Ely: ¿a todos?
Manuel: nos salió diferente.
Ely: ¿no les salió uno?
Manuel: si.
Ely: ¿si salió uno?
Manuel: si pero…
Ely: ¿entonces?... a ver continuamos, ellas dicen que la pendiente que acaban de dibujar, la de la recta azul, es mayor que la pendiente de la recta roja.
Pau: si.
Ely: y la mayoría dice: si. La siguiente pregunta hija por favor.
Jaq: ahora dibuja la recta que pasa por uno coma un cuarto y dos coma uno, y calcula su pendiente. ¿Este valor es mayor o menor que la pendiente de la recta tangente?... ahí en esa nos salió tres cuartos y nosotros pusimos que era mayor.
Ely: ¿por qué?
Jaq: pues porque ahí también el punto está más arriba.
Ely: ¿nos lo dibujan por favor?

Video 391:

Ely: ¿esa es la otra recta verdad?, entonces la pendiente de esa recta, de la recta negra, dicen que es mayor que la pendiente de la recta roja ¿qué opinan los demás equipos?
Pancho: no.
Ely: ¿qué opinan los demás equipos? ¿Paulina?
Pau: si.

Video 393:

Ely: ¿esa es la recta que pasa por dónde? ¿qué punto es ese?
Jaq: uno coma un cuarto y tres medios coma nueve dieciseisavos.
Ely: ¿ahí es nueve dieciseisavos?
Jaq: si.
Ely: ok, ¿cómo es la pendiente de esa recta con respecto a la roja?
Dian: mayor.
Ely: ustedes dicen que mayor, ok la siguiente.

Video 394:

Equipo de Luis Miguel en el pizarrón:
Luis M: uno punto ciento sesenta y seis, uno punto seis pues.
Manuel: ¿por qué?
Ely: ¿nos explican cómo lo hicieron para ver?
Luis M: nosotros lo hicimos así, es que no nos acordábamos bien de la fórmula… y esto es igual a… [escribe en el pizarrón].
Ely: ¿y luego?
Luis M: y ya nos salió [anota en el pizarrón 1.1666]
Pancho: nada más es nueve cuartos menos un cuarto.
Ely: ¿cuánto es?
Pancho: sale a… ocho cuartos.
Ely: ¿lo anotan por favor?... ¿cómo van equipos? ¿van bien? ¿van igual que ustedes?
Manuel: no.
Pau: que ellos no.
Ely: ¿no? ¿Dónde varían?
Gaby: se simplifica y sale uno.
Ely: ¿qué más? Continúen.
Pancho: ya, tres menos uno a dos. Y luego ya simplificado eso, ocho cuartos que es dos.
Ely: ajá, ¿y luego?
Pancho: y dos entre dos a uno.
Ely: ¿y entonces? [risas]
Manuel: es que ahí era la ley de la herradura ¿no?
Ely: ¿y entonces qué pasó?
Luis M: es que nosotros habíamos pensado que si le sacaba mitad a este no le podía sacar mitad a este [señalando 8/4 y 2].
Pacho: o sea que si le sacábamos mitad al de arriba también teníamos que sacarle mitad al de abajo.
Gaby: hay pues sí.
Ely: pues sí.
Manuel: pues sí.
Gaby: ocho cuartos es dos, dos medios es uno.
Alex: es que se aplica la ley de la herradura ahí.

Pancho: ocho cuartos quedaría dos entre dos, pero todavía no le sacaba la mitad al dos.
Ely: ¿ocho cuartos quedaría dos entre dos?
Pancho: no, ocho cuartos son dos y fuera…
Gaby: cuatro medios.
Manuel: quedarían cuatro medios sobre uno.
Ely: a ver, ¿qué pasó ahí?
Luis M: pequeño error técnico.
Ely: ah ok, ¿entonces ustedes fueron los que se equivocaron ahí?
Luis M: si pues.
Ely: ok, no hay problema, no hay problema. ¿Qué más? ¿cómo dijeron que eran las pendientes?
Luis M: contestamos ocho maestra pero va a estar mal porque nosotros lo hicimos diferente.
Pancho: ¿están mal?
Luis M: unas van a estar bien porque las hicimos diferente…
Ely: ok entonces la primer pendiente es uno ¿verdad?, ya parece como que todos quedaron de acuerdo, ¿y la segunda pendiente que les piden? ¿cuánto les dio?
Luis M: la segunda pendiente, la pregunta tres ¿no?
Ely: ajá.
Luis M: [escribe tres cuartos entre uno en el pizarrón].
Ely: hay ¿qué es eso?
Luis M: pues tres cuartos entre uno.
Ely: ¿y cuánto es eso?
Fco: cero punto setenta y cinco.
Ely: ¿y en decimal?, digo ¿en fracción?
Luis M: sería tres cuartos.
Ely: ah ok, ¿entonces la segunda pendiente cuánto les salió?
Luis M: tres cuartos.
Ely: anótenle por favor… ¿los demás coinciden?
Gaby: si.
Ely: bueno ahora la pregunta número dos, Luis, la pregunta número dos decía que si la pendiente de la recta…
Gaby: que vale uno.
Ely: que vale uno.
Luis M: nosotros le pusimos que es menor.
Ely: ¿por qué?
Luis M: pues porque es más chica, cero punto setenta y cinco es menor que cero punto ciento sesenta y seis que teníamos, y de todas maneras como es uno pues sigue siendo menor.
Ely: ¿pero con qué pendiente estás comparando?
Luis M: con la anterior, porque nos dice: la recta anterior es mayor o menor que la pendiente de la recta tangente. No se yo ya me confundí, explícales.
Ely: ¿cuál es la recta tangente?
Pancho: la roja.
Ely: ¿entonces cuál es la pendiente a la que se están refiriendo? ¿la roja y cuál otra más?
Gaby: la que vale uno.
Ely: ¿a cuál? ¿está dibujada? ¿las dibujaron?
Luis M: es la misma.
Ely: son las mismas, ¿entonces podemos comparar con las que ya tienen ahí?. Las que dibujó Jaqueline, la primera que dibujó la hizo con color verde.

Pacho: no, azul.
Ely: ah azul, ¿la que pasa por nueve medios? ¿tres coma nueve medios? ¿nueve cuartos?
Pancho: si, nueve cuartos.
Ely: ok, la pregunta que les hago a ustedes es, esa recta que dicen es azul, ¿su pendiente es mayor o menor que la pendiente de la tangente?
Luis M: su pendiente es menor.
Ely: su pendiente es menor, ¿por qué?
Luis M: su pendiente es cero punto setenta y cinco.
Fco: y la otra es uno.
Ely: ¿cuál es la recta que tiene de pendiente uno, me la señalan?
Pancho: la roja.
Ely: ¿la roja?
Pau: no, es la azul.
Fco: la azul.
Gaby: la azul es la que tiene de pendiente uno.
Luis M: [señala la roja].
Fco: esa es la recta tangente.
Pancho: esta es la que salió de uno, ¿no?
Alex: no, la roja no sabemos el valor.
Pau: es la azul.
Luis M: es la azul, a ver espérese.
Gaby: ¿Qué no es la negra?
[risas].
Luis M: es la azul.

Video 395:
Ely: a ver, ya nos marcaron ahí todas las rectas con todas sus pendientes ¿si coinciden muchachos?
Gaby: ahhh.
Ely: ellos los pusieron en decimal pero ustedes tal vez lo sacaron en fracción.
Pau: nosotros también.
Ely: ah no hay problema, punto setenta y cinco son tres cuartos ¿no?
Luis M: si.
Ely: ¿y punto seiscientos veinticinco?
Luis M: pues quién sabe.
Pau: son cinco dieciseisavos.
Ely: cinco dieciseisavos dicen por acá ¿si?
Pau: si.
Ely: ah y a ver, la última pendiente, la de la recta negra, me dejas ver Luis… menos punto trescientos setenta y cinco.
Pancho: ajá.
Ely: ¿si?. Menos punto trescientos setenta y cinco, ¿cuánto les salió a los demás?
Pau: nos salió tres octavos.
Ely: tres octavos, positivo, ¿a ustedes Gaby?
Gaby: tres dieciseisavos.
Ely: tres dieciseisavos, positivo… ¿tres o seis Gaby?
Gaby: tres octavos.
Ely: tres octavos, ¿a ti también?
Pau: [si con la cabeza].
Ely: ¿y a ustedes chicos?
Caro: once dieciseisavos.

Ely: once dieciseisavos, ¿al equipo de Luis cuánto les salió?... me llama la atención que a estos equipos les salió un valor positivo y al equipo de Luis Miguel [volteo a ver el pizarrón y ya borraron el signo]… hay que tramposos.
Luis M: ¿qué?
Ely: ahí había un signo negativo.
Manuel: si es cierto ya se lo quitaron. [risas]
Luis M: no es que a nosotros sí nos salió negativo, pero…
Manuel: pónganselo pues.
Luis M: Pancho se lo borró.
Ely: que tramposítos, aquí tengo la evidencia.
Manuel: rápido borran.
Ely: a ustedes sí les salió negativo, ahora revisemos la gráfica, pregunta ¿por qué?
Luis M: ¿cuál gráfica?
Ely: las gráficas, ¿recuerdan cómo saber si el valor de una pendiente es positiva o negativa?
Pancho: tiene que estar de este lado [coloca la mano simulando una recta con pendiente negativa].
Manuel: tiene que pasar abajo.
Pancho: o sea cuando va así.
Ely: ¿cómo cuando va así?
Pancho: cuando cruza el eje de las "y´s".
Ely: ¿es negativa cuando cruza el eje de las "y´s"?
Manuel: si.
Ely: hay ¿apoco si?
Pancho: cuando están las y´s negativas pues, el cuadrante uno, dos, tres, cuatro.

Video 396:
Ely: de la recta azul, la primera, ¿es mayor o menor que la pendiente de la tangente?
Pancho: menor.
Ely: ¿por qué menor?
Pancho: porque es más chica.
Luis M: más chica que uno.
Ely: la pendiente de la recta azul, ¿cuánto vale la pendiente de la recta azul?
Pau: uno.
Ely: ¿es mayor o menor que la pendiente de la recta tangente?
Pancho: pero pues, esta es la recta tangente ¿no? [Señalando la recta roja].
Ely: si.
Pancho: no sabemos el valor.
Ely: ¿y entonces cómo dicen que es menor?
Luis M: es que nosotros estábamos haciendo otras cosas acá profa [risas].
Pancho: es que nos confundimos la neta.
Ely: ¿qué dicen los demás equipos?
Gaby: sí es menor.
Ely: dice Gaby: sí es menor, y dice por acá Daniel: es mayor.
Luis M: pues es que mire la neta en sí el punto llega como hasta por aquí… más amplia y no toca.
Ely: pero les pregunta por la pendiente.
Pancho: no la longitud.
Luis M: ¿qué estoy diciendo?... que no sabemos cual es la pendiente.
[risas].

Video 397:
Luis M: dice: ¿qué sucede con el punto Q si cambiamos el valor de h?
Pancho: que el triángulo…
Luis M: nosotros le pusimos que el triángulo cambia porque le están dando a Q un…
Pancho: es un triángulo rectángulo el que se forma pero va cambiando el punto Q.
Luis M: se tiene que hacer una raya de aquí… es esta.
Pancho: y luego la de "x" y "y".
Luis M: y luego una paralela al eje "y".
Ely: por el punto Q, ¿dónde quedó el punto Q?

Video 398:
Pancho: dice que pasa por la función que es esta y aquí se suponían, bueno así lo planteamos nosotros, que aquí queda el punto Q.
Ely: ¿sobre la recta?
Pancho: sobre la recta, sobre la función pues.
Ely: ¿cuál es la función?
Fco: la recta verde, la línea verde.
Ely: la línea verde, ahí hay una pequeña confusión.
Pancho: aquí.
Ely: pues márquenlo.

Video 399:
Ely: ¿qué pasa con Q cuando cambia el valor de h?
Luis M: cambia el triángulo, así le pusimos nosotros.
Pancho: se hace más… cambia el triángulo, en unas ocasiones ya no queda triángulo rectángulo, ya queda de otra manera.
Ely: ok, ¿qué más contestaron muchachos?
Luis M la que dice: si h es igual a uno ¿cuáles son las coordenadas del punto?. Nosotros le pusimos que son dos coma dos [señala el punto].
Ely: ¿y Q quedó sobre la función?
Pancho: no.
Luis M: pues si pasa por la función [dibujando una recta con su mano].
Ely: el punto Q.
Pancho: no.
Ely: ¿es lo que contestaron?
Luis M: parte de ese.
Ely: ¿de la tabla? ¿la quieren completar?

Video 400:
Ely: ¿si, qué contestaron?
Luis M: calcule la pendiente de la recta que pasa por los puntos P(1,1/4) y Q(1+h, f(1+h)) para h=1, entonces la respuesta de la doce sería esta, y la de la trece sería esta… y la de la quince, a ver espéreme, en la pregunta quince dice ¿qué valores debe tomar h para que el punto Q esté lo más cercano posible al punto P… nosotros pusimos que cero punto veinticinco, un cuarto pues.
Ely: bueno, un aplauso para este equipo.

Video 401:
Manuel: la mayoría.
Ely: ¿las pendientes coincidieron?
Manuel: bueno, en dos coincidimos.

Alex: la primera sí.
Ely: en la primera sí, ¿y en las demás?
Alex: en la de tres cuartos también, en la otra ya no la de cuatro.
Ely: ¿la de punto seiscientos veinticinco?
Alex: nos salió dieciséis décimos.

Video 402:
Ely: dice así: la pendiente de la recta anterior, o sea la que calcularon con pendiente uno ¿verdad?
Manuel: si.
Ely: ¿es mayor o menor a la pendiente de la recta tangente?
Manuel: nosotros le pusimos menor.
Ely: ¿por qué menor?
Manuel: porque nosotros lo convertimos así en uno punto seis, lo teníamos así en fracción y…
Ely: ¿cuál es la recta que tiene esa pendiente?
Manuel: pues es esta azul.
Ely: ok, ¿qué más?
Alex: la pregunta número tres dice ahora dibuja una recta que pasa por el punto uno coma un cuarto y dos coma uno y calcula su pendiente.
Manuel: ¿es esta verdad?
Alex: la negra.
Ely: ¿y qué les preguntaban de esa?
Alex: ¿este valor es mayor o menor a la pendiente de la recta tangente?
Ely: ¿y qué dijeron?
Alex: que es menor.
…
Alex: nos brincamos a la seis que dice: con base en los datos obtenidos ¿puedes estimar el valor de la pendiente de la recta tangente a la función en el punto uno coma un cuarto?. Explica tu razonamiento.
Ely: aja.
Alex: nosotros le pusimos que si, que si podemos decir aproximadamente cuál es el valor porque tenemos dos rectas muy cercanas a la recta tangente.
Ely: ¿nos explican eso por favor?
Manuel: ahora explícalo [risas].
Ely: así como lo estaban explicando en su equipo. Dicen ustedes, sí, sí podemos estimar porque tenemos dos rectas muy cercanas a la pendiente de la recta tangente.
Alex: es que nosotros sacamos…
Ely: explícanos Alex.
Alex: nosotros sacamos las coordenadas de un medio y le sacamos de un dieciseisavo.

Video 403:
Alex: entonces lo que nosotros vimos y pusimos mucha atención [risas].
Ely: ¿ajá?
Alex: entonces vimos, y nos preguntan: ¿si pueden más o menos ver una cantidad acercada a eso?... entonces nosotros dijimos a lo mejor sí porque así como decía el problema de Yaya, que si podíamos decir más o menos lo que faltaba. Entonces nosotros también aquí podemos decir más o menos cuánto es la pendiente de la recta tangente porque tenemos dos rectas que están más aproximadas a la recta tangente. Entonces nosotros lo que hicimos es más o menos ver cuál es la diferencia entre esta y esta

[señalando las rectas]. Decimos cuánto es más o menos la diferencia, entonces un compañero decía hay que sumar los dos y dividirlo y ya sacamos el promedio. Pero no, si dividimos cuánta diferencia hay del uno al diez nosotros vimos que hay diez pero del uno al diez vamos a decir que es cinco… pero si sumas el uno más el once, no, el uno más el diez te sale once y si lo divides entre dos da cinco punto cinco, entonces vimos que esa no es la mitad que nosotros decíamos que era cinco. Entonces lo tratamos de hacer de otra forma y entonces lo que nos salió más o menos vimos que era ocho cuartos.

Ely: ocho cuartos dicen ustedes, nos dices cuánto mide la pendiente de la recta que está arriba y la que está abajo. Las pendientes de las rectas que dices que están en medio.

Alex: esta nosotros dijimos que era de diez dieciseisavos [pero escribe 16/10], y esta que valía ocho tercios.

Ely: ¿y concluyeron que la tangente media?

Alex: ocho cuartos, porque es la mitad de este y este, es la diferencia que hay a la mitad… nosotros sacamos más o menos que era el valor de la pendiente esa.

Ely: ¿qué opinan equipos?

Itzel: que está bien.

Gaby: yo no le entendí.

Ely: ¿no le entendiste Gaby?

Gaby: si pero no.

Ely: dicen ellos que vieron que una estaba por encima y otra por abajo y dijeron: hay, pues la tangente va a estar como por en medio, ¿eso fue lo que dijeron verdad?. Ok ¿qué más contestaron muchachos?

Alex: no mas hasta ahí contestamos.

Ely: ¿qué opinan los demás equipos?

Pancho: que está bien.

Ely: ¿que está bien?

Pancho: buena participación [empieza a aplaudir].

Ely: aplauso para el equipo.

Video 404:
[6 seg].

Video 405:

Ely: ¿y esa recta, la primera, su pendiente es mayor o menor que la pendiente de la recta tangente?

Gaby: es menor.

Ely: ¿por qué menor?

Gaby: porque la pendiente se supone que es la inclinación, esta es más chica porque ésta está más para arriba [moviendo sus manos].

Ely: ¿más inclinada que quién?

Gaby: está más arriba que esta.

Ely: ¿Qué cuál? ¿cuál es la primera que calcularon?

Gaby: es esta la que vale uno.

Ely: ¿cuál es la que vale uno?

Gaby: la azul y la recta tangente es esta, entonces está más para arriba.

Ely: ¿más para arriba que la azul?

Gaby: ah no, si es cierto es más grande la azul… ya me confundieron con esto [señalando lo que habían escrito sus compañeros].

Ely: lo que ustedes escribieron eso cuéntenos… ¿la pendiente de la recta azul es mayor o menor que la pendiente de la recta tangente?
Gaby: sí es mayor.
Ely: ustedes dijeron que es mayor, ok, la siguiente?

Video 406:
Gaby: nos salió tres octavos la pendiente.
Ely: ¿y entonces ustedes qué concluyen que es mayor o menor que la de la tangente?

Video 407:
Ely: la siguiente.
Gaby: con base en los datos obtenidos anteriormente ¿puedes estimar la pendiente de la recta tangente a la función en el punto P?
Ely: ¿ustedes qué dijeron?
Gaby: que no.
Ely: ¿por qué?
Gaby: porque no sabíamos cómo.

Video 408:
Gaby: ¿puedes mejorar la aproximación a dicha pendiente?
Ely: ¿y qué contestaron?
Chely: que sí.
Gaby: contestamos que sí recorriendo el punto de la recta tangente.
Ely: ¿cuál punto?
Gaby: recorriendo este [señala el punto P].
Ely: ¿a dónde?
Gaby: [señala la recta azul].
Ely: ¿a la recta azul?

Video 409:
Ely: ustedes estaban derivando, ¿le explican a sus compañeros qué estaban intentando hacer? ¿por qué estaban derivando?
Gaby: [voltea a ver a Chely y rien]…. Para sustituir el valor de un cuarto de “x” cuadrada, sería un cuarto de uno al cuadrado y así saber la ubicación del punto Q.
Ely: saber la ubicación de Q, dices tú, ¿qué opinan equipos?
Manuel: estaba bien.
Ely: ¿qué más hicieron chicas?
Gaby: nada más.
Ely: ok aplauso para el equipo.

ANEXO F

La tarea de Jorge

Video 423

Ely: pues le ha hecho esta misma pregunta, pero le ha prohibido estrictamente usar la fórmula del área del círculo. Le propone usar un software de computadora y calcular esa misma área por medio de suma de áreas de rectángulos, ayudemos a Jorge a resolver esta tarea. Luego dice: la figura muestra la gráfica de la función ¿cómo se lee eso?

Peny: efe de equis.

Ely: $f(x)=\sqrt{2x-x^2}$ que corresponde a la mitad superior de un círculo unitario y si se fijan el dibujo que está ahí, es el mismo que ustedes tienen en la pantalla de su computadora porque vamos a necesitar estar haciendo algunas cosas. Luego dice: observa en el dibujo cómo se forman rectángulos inscritos en el círculo y también rectángulos circunscritos, a los rectángulos inscritos les llamaremos inferiores y a los circunscritos les llamaremos superiores. Bueno, primero vamos a ver si ubican cuáles son los inscritos y los circunscritos, en la pantalla de computadora se ven de distintos colores, ¿si ubican los inscritos y los circunscritos? ¿los inferiores y los superiores?

Barby: los inscritos son los morados.

Ely: ¿y los circunscritos?

Barby: son los amarillos.

Ely: ok, superiores e inferiores. Fíjate en los extremos del diámetro, del diámetro del círculo, están nombrados con las letras A y B. ¿ya lo vieron? Chequen en la pantalla. ¿cuánto mide el diámetro del círculo?... mueve el punto llamado divisiones, si se fijan hay algo que se llama deslizador y está por acá arriba, ese punto lo pueden deslizar hacia adelante o hacia atrás y va cambiando el número de divisiones…. Y les pregunta ¿en cuántas partes está dividido el diámetro del círculo? ¿cuánto mide la base de cada rectángulo?…. Luego dice: vamos a llamar delta “x” a la base de cada rectángulo, ahí si necesitan podrían rayar el dibujo, genera una expresión para determinar la medida de delta “x” cuando modificamos el número de divisiones

Video 424:

Equipo de Mane:

Barby: no, el área.

Mane: es pi por radio al cuadrado. Esto es igual a pi por uno al cuadrado, esto es igual…

Barby: a uno.

Mane: a uno, y multiplicar 3.14, ¿15 o 16?, lo dejo en 16 (escribe 3.1416). ¿cuánto mide la mitad del área de ese círculo?... si el radio tiene 1, entonces tenemos que sacar la mitad de lo que vale pi.

Barby: ¿cómo?

Mane: ¿calculadora? (busca la aplicación en la computadora).

Barby: 1.5708.

Mane: ¿cuánto mide la mitad del área del círculo?

Barby: este es el círculo completo (señalando el valor de pi).
Mane: aja, ese es el círculo completo.
Equipo de Peny:
Ely: ¿cuánto les dio?
Peny: 1.7
Liz: 1.57
Ely: ok, entonces continúen con lo que sigue.
Equipo de Mane:
Mane: el valor de pi para que sea más exacto… ¿sabe cómo se pone lo que vale pi en la calculadora?
Ely: en la científica.
Mane: ahí está… ¿si lo dejo así?
Barby: cero siete.
Mane: acá nos salió cero ocho.
Equipo de Peny:
Peny: aquí no.
Ely: ah es que ahí no les preguntaron nada, solo les dice que a Jorge también le preguntaron lo mismo pero su maestro le prohibió hacerlo como ustedes lo hicieron, ustedes usaron la fórmula del área y a él le prohibieron usar eso; a él le dijeron que tenía que usar ese software de computadora y, para resolverlo le plantearon esas preguntas…
Equipo de Mane:
Barby: inferiores y superiores… esos son los inscritos.
Mane: ¿entonces serían los qué? ¿Los inferiores?
Barby: los inferiores, no!
Mane: los inscritos.
Barby: inscritos son esos, inferiores.
Mane: ¿entonces serían inferiores?
Barby: inferiores o inscritos.
Mane: y estos serían…
Barby: serían superiores o circunscritos… Fíjate que los extremos del diámetro están nombrados con las letras A y B, o sea este es A y este B. ¿cuánto mide el diámetro del círculo?
Mane: el radio nos está dando la medida.
Barby: dos.
Barby: mueve el punto divisiones hasta la posición cinco, ¿en cuántas partes está dividido el diámetro del círculo?
Mane: ¿en cuántas partes está dividido el diámetro?...
Barby: ¿cuál es el diámetro?
Mane: este es el diámetro, ¿en cuántas partes está dividido?
Barby: en seis ¿no?
Mane: en cinco.
Barby: ah si, ¿cuánto mide la base de cada uno de los rectángulos?
Mane: 0.4… dice: mueve nuevamente la posición del punto divisiones…
Barby: ahora a siete…. ¿en cuántas partes está dividido el diámetro? En siete… ¿cuánto mide la base de cada uno de los rectángulos?
Mane: 0.3.
Barby: vamos a llamar… (risas)
Mane: ¿cómo dijo que se leía el triángulo de “x”?
Ely: delta.
Mane: delta de “x”.
Ely: delta “x”.
Ely: ¿cómo saben que mide 0.3? ¿cómo saben que no mide 0.29 o 0.28?

Barby: porque está en el centro de dos, está entre 0.2 y 0.4.
Ely: ¿y cómo saben que no está un poquitito más allá de la mitad?... ¿no habrá una manera de…?
Mane: ¿de medirlo?
Ely: pues no sé, de medirlo o de calcularlo.
(Mane pone un punto sobre la intersección de la primera división y el eje "x" para ver sus coordenadas)
Barby: y si ponemos un punto aquí y aquí y luego… (señalando 0.2 y 0.4).
Equipo de Peny:
Liz: ¿cuánto mide la base de cada uno de los rectángulos?
Peny: ¿cuánto da?
Liz: ¿estas las borramos o las dejamos?
Ely: ¿qué hicieron?
Liz: pusimos estas y medimos para las cinco.
Ely: ah pusieron un punto en cada división y qué hicieron?
Liz: medimos, ¿las borramos o las dejamos?
Ely: como gusten, ¿habrá otra manera de saber las distancias en lugar de estarlas midiendo con las herramientas del software?
Peny: yo creo que si.
Ely: porque ¿midieron de una por una?
Peny: si.
Ely: ¿y qué les salió? ¿en todas les salió lo mismo?
Liz: no.
Ely: ¿y cómo se aseguran que sale distinto? Porque si se fijan es muy poquita la diferencia entre una y otra, ¿cómo se aseguran que pusieron el punto exactamente donde era?... ¿habrá una manera analítica de hacerlo?
Equipo de Mane:
Mane: entonces esto es aproximado casi…
Barby: pero ¿y aquí?
Mane: (moviendo el cursor sobre las divisiones para ver las coordenadas que marca el software)… se pasa, ¿qué hago?
Barby: es que no todos miden lo mismo.
Mane: no, no miden lo mismo (busca herramientas dentro en los menús del software).
Mane: distancia entre dos puntos… sería poner un punto y aquí otro (señalando los extremos de las divisiones).
Barby: no, ponlo aquí y aquí (señalando 0.2 y 0.4), y luego…
Mane: pero de este a este nos está dando las medidas.
Barby: si, pero si ponemos un punto aquí y el otro aquí ya nos está dando las medidas y podemos ver… nosotros le pusimos que 0.3… ¿ya me entendiste?... tú lo pones aquí y no sabes si es exactamente o no. (parece que Barby desea verificar el grado de exactitud que logran al poner los puntos sobre una coordenada que conocen previamente, tal vez intenta buscar el punto medio para ver si coincide con la intersección).
Mane: ¿entonces qué hago? Pongo un segmento entre dos puntos.
Barby: por eso ponlo aquí.
Ely: ¿qué pasó? ¿ocupan un zoom?
Ely: en la cinco cuando les pidieron que hicieran cinco divisiones ¿cada rectángulo mide 0.4?
Barby: si.
Ely: ¿todos iguales? ¿y en la de siete todos miden 0.3, todos iguales?
Barby: aja.

Ely: entonces se supone que si mido, 0.3 más 0.3 más 0.3… ¿cuánto tiene que salir?
Mane: 2.1.
Ely: ¿2.1, porqué 2.1?
Mane: porque de seis saldría 1.8… y tiene que salir 2.
Ely: ¿2 o 2.1?
Mane: 2.
Ely: ¿entonces cuánto debería de salir?
Mane: me falló ahí.
…
Mane: entonces cómo le hago para que…?
Ely: ¿habrá alguna manera analítica de hacerlo?... está bien el software, pero ¿habrá alguna manera de calcularlo?... si estás diciendo que todas las divisiones son del mismo tamaño ¿habrá alguna manera de calcular exactamente cuánto mide?... porque sí, si mide 0.3 y son siete partes pues sale 2.1 y como que ya no, tú dijiste ya no es el diámetro.
Mane: entonces…
Ely: el diámetro no va a cambiar eh.
Mane: uno me da una medida y otro me da otra para que…
Ely: a ver haz un zoom.
Mane: (hace el zoom) sí, es cierto que nos falta un espacio para llegar al 0.3. (continúa haciendo zoom).
Ely: ¿cuánto es donde está la línea?
Barby: es el 0.286.
Mane: a ver (continúa haciendo zoom).
Ely: ¿habrá alguna manera de hacerlo analíticamente? porque ya vimos que la computadora está muy poderosa pero hacemos mucho zoom y aún así..
Mane: aún así no.
Ely: no alcanzamos a ver el número exacto… nos ha pasado ¿no?, que luego la calculadora no puede darnos un resultado y ya analizamos y vemos porque la calculadora no nos da el resultado, pero necesitamos hacer un análisis nosotros. ¿Podemos hacer un análisis para saber cuánto es lo que mide?
Barby: pero no vamos a dar exacto.
Ely: a ver, porque no le pones cinco partes y haces el zoom porque parece como…
Mane: nos vamos a regresar porque ya nos equivocamos.
Ely: no, yo no digo que van mal o van bien.
Mane: pero…
Ely: ¿cómo comprobaron que este estaba bien? (refiriéndose al resultado de las cinco divisiones).
Barby: porque… al tanteo.
Mane: este sí lo marca.
Equipo de Peny:
(Están sumando las bases de todos los rectángulos para verificar que el total es el diámetro del círculo y obtienen 2.01).
Liz: no mira se pasa con 0.01, está mal.
Equipo de Mane:
Ely: ustedes comprobaron que esto estaba bien porque dijeron son 0.4 y son cinco partes, me da 2 exactamente. ¿Hay otra manera de hacer ese mismo cálculo para que dé el 0.4?
Mane: ¿con más partes?

Ely: no, me refiero con estos mismos datos. ¿habrá alguna manera de llegar a este resultado con estos mismos datos sin ayuda de esto? (señalando la computadora).
Mane: ¿que el resultado sea el diámetro?
Ely: no, de cuánto mide la base de cada rectángulo.
Mane: cuánto mide la base de cada rectángulo, ¿solo con los datos que tengo en la hoja?
Ely: pues sí, solo con los datos que tienes en la hoja sabiendo que hay cinco divisiones. Con lo que ustedes ya me contestaron, me dijeron: el diámetro mide 2 y me dijeron hay cinco partes, entonces ¿habrá alguna manera de llegar a este 0.4 pero sin hacerle zoom a la computadora?
Mane: (dice no con la cabeza).
Ely: ¿no hay?
Barby: al dividir esto en cinco partes…
Ely: a ver repítelo.
Barby: al dividir del 0 al 2 dividirlo en 5 y de esos cinco medir la distancia de…
Ely: saber cuánto miden, no medir la distancia porque quedamos que ya no íbamos a usar la computadora.
Barby: y sacar cuánto mide y a lo mejor sale 0.4.
Ely: ¿habrá una forma de hacerlo?
Mane: sí, como dice ella.
Ely: ¿cómo dice ella?
Mane: que dividiéramos el diámetro entre las partes que nos piden y te da el resultado de cuánto mide la base de cada rectángulo.
Ely: ¿y da el 0.4?
Mane: si.
Ely: ¿y no se puede hacer lo mismo…?
Mane: (ríe y dice sí con la cabeza). Sí se puede hacer lo mismo, si es cierto. Entonces así sería entre 7… el 2 va a fuera o adentro (intenta hacer la división a mano).
Barby: no es al revés.
Mane: (empieza a hacer la división).
Barby: a dos…
Equipo de Peny:
Liz: y al sumar todo salió 2.1 (refiriéndose a 2.01).
Ely: ¿se pasaba?
Liz: sí, se pasaba.
Ely: ¿y te aseguraste que esos dos puntos los pusiste exactamente donde llega la línea?
Liz: si.
Ely: ¿si te aseguraste? ¿cómo te aseguraste?
Liz: usando el zoom.
Ely: ¿el zoom?
Peny: más y más zoom.
Ely: ¿y que tal que no le hicieron el zoom suficiente?
Equipo de Mane:
Barby: ¿cómo se dice el triángulito?
Ely: delta.
Barby: ah delta de "x".
Mane: generar una expresión para que cuando la resolvamos nos de el resultado el número de partes.

Equipo de Peny:

Ely: ¿entonces de qué otra manera podemos hacerlo para determinar si exactamente está ahí?, porque si te fijas lo que te salió cuando pones el punto es 0.29 y si te fijas el resultado que te da ahí es 0.28 y luego un 5, entonces tal vez ese es el margen de error donde tú estás poniendo el punto. Entonces ¿cómo sabes cuál de las dos cosas está bien? ¿te guías por donde pones los puntos o te guías por el cálculo que tú hiciste?

…

Ely: si te guías por los puntos dices que te sale 2.1 o sea que se pasa del diámetro, por eso dices que te salió mal. Y ¿habrá una manera de comprobar si eso está bien?

Liz: ¿esto?

Ely: aja, porque dices que 0.29 no, se pasa. ¿Habrá una manera de comprobar si eso está bien?

Liz: sería sumando eso, ¿no?... bueno lo que yo estaba haciendo era sumar eso que me salía aquí.

Ely: ¿y cuántas veces tendrías que sumar eso?

Liz: siete veces.

Ely: a ver, ¿habrá otra manera de hacerlo sin tener que sumar siete veces?

Peny: por.

Liz: 0.28 por 7.

Ely: a ver.

Liz: me da 2.

Ely: ¿entonces cuánto mide cada base?

Liz: ¿pues 0.285?

Ely: no sé, eso ya lo deciden ustedes.

Peny: ah!

Ely: entonces ¿cuál método será más correcto? En uno te pasas y en otro ¿te sale exactamente 2?

Liz: si.

Ely: ¿entonces cuál de los dos métodos te conviene usar? ¿dónde están midiendo segmento por segmento o calcularlo?

Liz: calcularlo porque si me voy punto por punto no da exactamente.

Ely: entonces hagan lo que más les convenga.

Equipo de Mane:

Mane: entonces ¿cómo lo podría expresar?

Ely: ¿ah ya van a expresarlo? ¿dices que delta "x" mide 2?

Mane: delta "x".

Barby: no, entonces no sería esto.

Mane: ¿cómo?

Barby: aquí no sería el diámetro porque aquí ya estás dándole un valor a delta "x".

Mane: o sea es como f(x) delta "x".

Ely: no, delta "x" así le vamos a llamar a la base de cada rectángulo, como poner "x", como poner una variable. Para decir que la base va a valer algo, una incógnita usamos delta "x" como la incógnita pero no significa f(x).

Barby: esto si está bien, pero esto no.

Ely: mi pregunta es delta "x" es cuánto mide cada ancho, entonces aquí les pregunto ¿delta "x" vale 2?

Barby: no.

Ely: ¿qué es lo que vale 2?

Barby: el ancho.

Ely: queremos una fórmula.

Barby: entonces sería esta, porque aquí dijiste el número de partes porque puede variar ¿no?
Ely: si, necesitamos que varíe.
Barby: el número de partes dividido entre 2 para que nos de el resultado de cuánto va a medir la base de cada rectángulo.
Mane: entonces…
Ely: no borres, táchale o cualquier cosa pero no borres.
Mane: entonces sería esto, es f(x)… a delta "x".
Barby: aja.
Mane: entonces, número de partes entre 2 es igual a delta "x". Este sería el resultado.
Ely: ¿lo comprobamos?, por ejemplo en la cinco.
Mane: aja.
Ely: dices que el signo de interrogación sería el número de partes, a ver hazlo.
Mane: 5 entre 2.
Ely: tiene que dar el valor de cada rectángulo.
Mane: (escribe 0.4)
Ely: ¿si? ¿cinco medios es 0.4?
Mane: cinco medios… 0.4.
Barby: ah ya se como es (risas).
Mane: cinco medios… cinco medios es igual a 2.5.
Ely: ¿y entonces? Dices que es 0.4.
Equipo de Peny:
(Continúan colocando los puntos sobre las divisiones con ayuda del zoom).
Liz: y si multiplicamos 0.29 no nos va a salir.
Equipo de Mane:
Ely: no le borres.
Mane: (corrige la fórmula y hace la comprobación).
Barby: ya la hiciste.
Ely: se supone que si cambias el número de partes y le pones siete pues debe de dar esto.
Mane: y también si lo hago de la otra forma, más bien si lo compruebo con las siete partes.
Ely: entonces nada más pónmelo en un rectángulo para que yo sepa cuál es la fórmula buena.
Mane: sería esta y esta es la comprobación.
Ely: ¿qué significa el símbolo de interrogación?
Mane: el número de partes, es una variable que puede estar cambiando conforme el número de divisiones, o sea le puedo meter un valor.
Ely: ¿y no sería conveniente poner otra letra? Porque en las fórmulas no ponen símbolos de interrogación.
Barby: (risas) .
Ely: si no, pon nada más qué significa el símbolo.
Equipo de Peny:
Peny: diez.
Liz: esta va a ser la base ¿no? (señalando el diámetro). Vamos a llamar delta "x" a la base de cada rectángulo, genera una expresión que…
Peny: profa venga por favor.
Ely: mande.
Peny: ¿cómo o sea cómo vamos a poner para distinguir eso?
Ely: ¿cómo van a poner delta? Ah no les pide me modifiquen la construcción, dice que vamos a ponerle nombre, vamos a llamar delta "x" a la base de cada rectángulo, o sea ¿cuál es la base de cada rectángulo?

Liz: (inicia señalando una base y después señala el diámetro).
Ely: ¿todo eso?
Liz: no.
Ely: de cada rectángulo.
Liz: (señala la primera base).
Ely: ahí hay una, ¿cuántas bases hay ahí?
Peny: diez.
Ely: de hecho diez, entonces esta se llama delta “x”, esta se llama delta “x”, cada base se llama delta “x”, ¿si? ¿ahora cuál es la duda?, tienen que generar una fórmula para saber cuánto mide cada base… Genera una expresión para saber la medida de delta “x” cuando modificamos el número de divisiones, si se fijan acá les valía una cosa y luego modificaron el número de divisiones y luego valía otra cosa. Bueno, ahora vamos a ponerle nombre a esa base en lugar de escribir base escribimos delta “x” y vamos a generar una expresión para que con el número que ustedes quieran de partes salga exactamente cuánto mide esa base… o sea que si yo digo cinco, me salga el valor correcto; si yo digo siete, me de el resultado correcto; si digo veintiocho, me de el resultado correcto; que me funcione para no importa que número de divisiones yo haga ¿si?
Peny: si.
Equipo de Mane:
Barby: evalúa la función para el valor de delta “x” que acabas de obtener.
(se equivocan al elevar 0.2 al cuadrado y dicen que es 0.4)
Barby: ¿qué representa ese valor en la gráfica? Cero… un punto del diámetro.
Equipo de Peny:
Liz: raíz de dos por 0.2
Peny: (escribe incorrecto).
Liz: no, pero así no…. (escribe correctamente)… ¿traes calculadora?
Equipo de Mane:
Ely: a ver, ¿dos por cero punto dos es cero punto cuatro y cero punto dos al cuadrado es cero punto cuatro?
Barby: ¿nos regala una hoja?
Equipo de Peny:
Liz: cero punto cero cuatro.
Peny: ¿así?
Liz: así está bien, aquí le vas a poner cero punto cero cuatro….

Video 425:
Equipo de Mane:
Mane: la base de tres rectángulos.
Ely: ¿solo eso? ¿se acuerdan qué es “x” y qué es f(x) en una gráfica?
Mane: “x” es la variable independiente y f(x) es la variable dependiente.
Ely: ¿y en la gráfica?
Mane: f(x) es “y” y “x” es “x”.
Ely: ¿y ustedes qué sacaron?
(Silencio).
Equipo e Peny:
Liz: ¿delta “x” es la base del rectángulo no?
Ely: ¿qué pasó chicas?
Peny: nos salió esto.

Ely: ah la base de tres rectángulos, ¿solo eso?
Peny: pues da cero punto seis.
Ely: una pregunta, ustedes calcularon ¿qué cosa? ¿esto qué es?
Peny: f(x) de cero punto dos.
Ely: ah ok, f(x)… ¿se acuerdan qué representa "x" y qué representa f(x)?... (silencio)… ¿qué cosa es en una gráfica "x" y f(x)?
Liz: "x"… hay… la variable creo.
Peny: la variable independiente.
Ely: ¿cuál es la variable independiente perdón?
Peny: esta es la variable independiente (señalando el eje de las "x").
Ely: ¿quién? ¿cuál de las dos?
Peny: la "x".
Ely: ¿y la otra?
Peny: la función de "x" es la variable dependiente.
Ely: si, "x" es la variable independiente y f(x) es la variable dependiente. ¿Pero en la gráfica?
Peny: ah en la gráfica según esta es la variable dependiente (señalando el eje de las "y´s") y esta la variable independiente (señalando el eje de las "x´s")… porque la variable independiente va como horizontal y la variable va como vertical.
Ely: ¿y ustedes qué calcularon?
Peny: la f(x).
Ely: ¿entonces qué cosa es la f(x)?
Liz: la variable dependiente.
Equipo de Mane:
Barby: Pero nada más es de este (señalando que la altura del primer rectángulo inscrito es 0.6) Porque vale 0.6.
Mane: ¿qué relación existe entre los rectángulos y f(x)?
Barby: que miden lo que la altura.
Mane: ¿qué relación existe entre la altura del rectángulo y delta "x"?
Barby: que si delta de "x" vale cero punto seis, pero el primer rectángulo nada más vale cero punto seis, el otro cero punto ocho…
Mane: entonces ¿qué relación existe entre la altura del rectángulo y delta "x"?
…
Barby: es que ya sacamos que delta "x" tiene que ser 0.6, pero ¿la altura qué tiene que ver con la base? Porque el primero va aquí, punto seis.
Mane: que cada cero punto seis, por decir centímetros, ¿se realiza un cuadrado?... fíjate cero punto seis, cero punto seis y sale un cuadrado

Equipo de Peny:
Peny: ¿dependiente?
Ely: bueno, si no se acuerdan, acuérdense de los conjuntos… y los conjuntos se escriben como pares ordenados.
Peny: ya, la "y" es la dependiente.
Ely: ahora, ¿cuál de las dos es f(x)?
Peny: f(x) la "y"… la "x" es "x".
Equipo de Mane:
Barby: en la altura la primera es 0.6
Mane: ¿qué relación existe entre la altura del rectángulo?... que delta de "x" es igual a la altura del rectángulo.

Barby: pero si estás hablando que es igual entonces… no es igual, pues si es 0.6 debe estar acá en 0.6 y está en 0.8… es lo que tú estás diciendo.
Mane: es lo que yo estoy diciendo, si es cierto.
Barby: estás diciendo: delta "x" o sea ésta, 0.6 es igual a la altura del rectángulo y si te vas es 0.8 no 0.6.
Mane: si es cierto.
Ely: ¿perdón? ¿tienen problemas?
Barby: si.
Ely: ¿qué fue entonces f(0.2)?
Mane: f(0.2) es el resultado de evaluar en delta "x".
Ely: ah si, ¿en la gráfica qué fue f(0.2)?
Mane: ¿qué representa?
Ely: si.
Mane: lo dejamos así.
Ely: ¿la base de tres rectángulos?
Mane: aja.
Ely: ¿nada más?, estaban diciendo otra cosa hace rato, yo los escuché.
Mane: de que 0.6 está relacionado con la altura.
Barby: de la delta "x".
Ely: y luego dijeron que no.
Barby: es que el punto seis de que tiene que ver en algo tiene que ver, él puso que f(x) es igual a la altura del rectángulo, pero si nos vamos al delta de "x" y luego nos vamos al punto seis o sea no llega este punto exactamente aquí.
Ely: a ver ¿cómo que no entendí?
Barby: es que…
Ely: a ver, quedamos que delta "x" iba a ser la base eh no me le vayan a cambiar eso ya lo determinamos desde el principio, delta "x" quedamos que iba a ser cuánto mide el ancho ¿si?
Mane: aja.
Ely: ok, me están diciendo que cuando evalúan en 0.2 la función les da 0.6.
Mane: aja.
Ely: y me dicen que 0.6 corresponde tanto a la altura de ese rectángulo como a la base de tres rectángulos, o sea a la coordenada de donde llega la división de tres rectángulos ¿si?
Mane: o sea que cuando vaya a valer cuatro va a valer lo de cuatro punto dos.
Ely: ¿cómo cuatro?
Mane: cuando vaya a valer 0.4 f(x), o sea cambiar "x" por 0.4.
Ely: cambiar a "x" por 0.4, ¿si lo evaluarás?
Mane: aja, que delta fuera 0.4.
Ely: que delta fuera 0.4 ¿o sea que fueran más anchos los rectángulos?
Mane: o alguna forma que conforme… no… iba a decir que conforme fuera haciéndose más grande el delta de "x" iba a aumentar el largo del rectángulo, la altura del rectángulo.
Ely: ah pues sí, eso sale en la gráfica ¿no?... pues sí, entre más nos vamos acercando a la mitad se van haciendo más altos y luego otra vez se hacen más pequeñitos… una cosa son las coordenadas y otra cosa son las delta "x´s".

Equipo de Peny:

Liz: ¿qué relación tienen estas áreas con el área que calculaste en la pregunta uno?
Liz: ¿cuál es el valor del área superior? ¿qué relación tienen éstas áreas con el área que calculaste en la pregunta uno?... en que también está calculando la base ¿no?

Peny: ¿que está calculando la base?... ¿de cada una de esas áreas?
Liz: no se.
Equipo de Mane:
Barby: y raíz de 0.64 sale 0.8
Mane: si es esto.
Barby: ya no pones la raíz.
Mane: a si es cierto, ya no pones la raíz, sería 0.8 ¿a 0.8 o a 8?
Barby: 0.8 porque es 0.64…
Mane: 0.8.
Barby: de 1 va a salir 1.
Mane: ¿entonces sacamos otro valor o ya con esos?, vemos que conforme va avanzando va… si le damos cuatro va a salir más arriba.
Barby: si, y después va a salir 1 en el de 1, y es lo mismo porque va aumentando 2.
Mane: entonces saco otro valor, ahora voy a sacar el de 1.
Barby: ¿ocho o dos?
Mane: (evalúa la función en f(1.6))…. Es igual a 0.8
Barby: se va repitiendo.
Ely: ¿y eso es bueno? Es que me dicen se van repitiendo otra vez los datos ¿y eso es bueno o es malo?
Mane: es bueno.
Ely: ¿por qué?
Mane: porque acá se supone que el f(x) en 0.4 y acá es igual al otro rectángulo y si uno ve la gráfica entonces si saco el f(x) de 1.8 por decir me debe dar también lo mismo porque es lo mismo que en el de 0.4 porque es el mismo rectángulo.
Ely: ah pues entonces… y coincide con la gráfica ¿no?
Mane: coincide con la gráfica.
Ely: entonces supongo que está bien ¿y qué estás notando?
Mane: que voy a llegar a un lugar a donde va a terminar, hasta donde va a llegar ese punto el resultado, o sea que voy a empezar por decir en dos y voy a terminar en uno y luego voy a terminar otra vez en uno, o sea voy a subir y voy a bajar.
Ely: ¿va a subir y va a bajar?
Mane: los resultados.
Ely: ¿de qué?
Mane: de los rectángulos conforme vaya evaluando las funciones.
Ely: ¿de qué cosa de los rectángulos?
Mane: ¿de qué cosa del rectángulo? Sería del delta "x".
Ely: ¿del delta "x"? va a subir y bajar dices.
Mane: aja.
Barby: no, el delta "x" es esto.
Mane: ah si es cierto.
Barby: lo que va a subir y bajar es la altura.
Mane: va a ser la función lo que va a subir y bajar cuando evaluemos el delta "x".
Ely: pero el delta "x" dijeron que era el ancho y que todas valía 0.2 y si te fijas aquí estás evaluando en 0.4 en 1.6… y no has modificado la anchura, siguen siendo diez divisiones.
Mane: aja.
Ely: ¿qué es eso de 1.6 y 0.4?
Mane: es el valor de "x" o sea la anchura (abre los ojos muy grandes)… la anchura de todos los rectángulos pero ya hasta llegando hasta el noveno, hasta el octavo si lo evaluamos en 1.6 llegamos hasta el octavo rectángulo.

Ely: o sea que si le dan este, ¿dónde les va a salir en la gráfica?
Mane: este seis.
Ely: ¿seis?
Barby: 0.6.
Ely: tendría que salir eso porque ustedes dicen que este rectángulo es igual a este rectángulo.
Barby: aja.
Ely: ¿entonces ya pueden contestar la pregunta?

Video 426:
Equipo de Mane:
Ely: ¿hay alguna relación entre este 0.4 y el delta que vale 0.2? ¿hay alguna relación entre este 1.6 y el delta que vale 0.2? porque ya vieron que si siempre evalúan en 0.2 siempre sale 0.6.
Mane: que el delta, que este es el delta de "x", que siempre va a ser la base del rectángulo el 0.2. Entonces al evaluarlo delta de "x" en la función nos da como resultado la altura que es 0.8.
Ely: ¿tú que opinas?
Mane: yo digo que si.
Ely: ¿y tú qué opinas compañera de equipo?
Mane: o sea que nos da el resultado de la altura.

Barby: es que aquí como dijo que salió 0.6 y el más alto de en medio del semicírculo llega a uno porque hasta aquí lo marca mira, luego hasta donde llega es el uno y luego aquí vuelve a bajar, pero no sé como ponerlo… porque el 0.8 ya no va a valer 0.2.
…
Ely: tienen un rectángulo inferior y un rectángulo superior, ¿cuánto mide la altura del rectángulo inferior? Obviamente con cálculos verdad.
Barby: como punto…
Ely: ¿Cómo, cómo, cómo..? si ya encontraron una relación pues compruébenla… si ya dijeron que sí había una relación y me acaban de decir cuál es, se supone que van a calcular y van a comprobar con la gráfica.
Mane: ya no entendí la pregunta… si estás en la cuarta división ¿cuál es la altura del rectángulo inferior…
Barby: esto, la altura… tenemos que hacer lo mismo.
Mane: ¿si?
Equipo de Peny:
Ely: ¿cómo van?
Peny: bien.
Ely: ¿qué es esto?
Peny: es cero punto seis.
Ely: ah, aquí está.
Peny: esa cosa.
Ely: ¿qué vas a hacer?
Peny: sacar el valor de delta "x".
Ely: ¿siguen midiendo?
Peny: nomás esto para…
Liz: ahorita dividimos y..
Ely: ah luego lo comprueban, ah ok. Y ¿si les va saliendo?
Peny: si.

Equipo de Mane:
Ely: ¿ya la tienen?
Barby: es 0.9 ¿u 8?
Ely: ¿0.96 esa es la altura del rectángulo inferior?
Barby: si.
Ely: ¿es cuál?
Barby: es este.
Ely: ¿podemos hacer un zoom?
Barby: creo que va a salir más… presiento.
Ely: ¿cuál es la que buscamos la de esta o de esta?
Barby: (señala).
Ely: esta de aquí… ya me perdí, porque no trazamos una línea que pase por aquí para…
Barby: si.
Ely: una que pase por el 0.9 o 0.95 para ver si…

Video 427:
Equipo de Peny:
Liz: no el dos.
Peny: 0.03.
Equipo de Mane:
Ely: ocupamos una recta que sea paralela a este eje y pase por aquí, o una recta que sea perpendicular a este eje y que pase por aquí.
Equipo de Peny:
Liz: supongamos que sumamos estoy y esto.
Peny: ¿qué sumamos?
Liz: o sea, yo decía que por decir si ponemos 1.32 y 1.72 no nos va a salir a ver ponle, nos sale como tres.
Peny: 1.32 más 1.72 (hace el cálculo con la calculadora).
Liz: no sale, porque sale tres… dice: ¿Cuántas divisiones se necesita hacer Jorge para tener el área de la mitad del círculo?
Peny: noventa.
Liz: noventa divisiones.
Peny: el área del semicírculo en términos de sumas de áreas de rectángulos.
Liz: quien sabe… todos estos, a ver súmalos.
Peny: cero punto…
Liz: 0.6 más 0.4 más 0.03 más 0.028…
Equipo de Mane:
Ely: ¿cuál es la cuarta división?... hasta ahí verdad, hasta ahí es donde les pide y ustedes calcularon.
Mane: o sea que este sube de aquí para acá.
Ely: a ver, este sube de aquí hasta acá dices.
Mane: sube de aquí a los dos o ¿cómo?
Equipo de Peny:
Liz: exprese por medio de una fórmula para calcular el área, que no ves que cuando modificamos este solito se cambia, es lo mismo que tenemos que hacer aquí para cuando esto…
Peny: se cambie.
Liz: para calcular el área de los rectángulos, las bases de los rectángulos.
Ely: ¿qué pasó chicas? ¿en cuál van? Expresa el área del semicírculo en términos de la suma de los rectángulos.
Peny: es que no le entendemos.

Ely: no le entiendes, ¿se acuerdan que sacaron una fórmula para expresar delta "x".
Peny: aja.
Ely: y luego en alguna parte les preguntaba que si podían poner una fórmula para calcular la altura de cada rectángulo o el área, a ver, aquí: Expresa una fórmula para calcular el área de cualquiera de esos rectángulos cuando modificas el número de divisiones y pues si ya calculan el área para todos los rectángulos pues nada más sumamos si ya dijeron que era la suma, pero expresar esa suma como una fórmula.

Video 428:
Equipo de Peny:
Peny: ¿podemos dejar en blanco una pregunta que no entendemos?
Ely: pues si, pero dejaron dos en blanco.
Liz: tres.
Ely: ¿tres? ¿y no pueden intentar contestarlas?
Liz: dice: para generar la expresión, genera una expresión para tener la medida de delta "x" cuando modificamos el número de divisiones.
Ely: si les pide eso y este ¿está muy difícil hacer eso?, si lo hicieron ya calcularon hasta el noventa y les apuesto que si les pido más me calculan más, nomás necesito una fórmula.
Peny: ¿si?
Ely: si, una fórmula para calcular el delta "x" cuando modificamos el número de divisiones.
Peny: la tengo en la punta de la lengua.
Ely: porque acá llenaron la tablita ¿no? Y la llenaron toda.
Liz: ¿ah de lo que hicimos aquí vamos a encontrar una fórmula?
Ely: aja, una fórmula que sirva para todos esos, ustedes siguieron una fórmula, un algoritmo.
Liz: ah ya!
Peny: si.
Ely: ustedes siguieron un procedimiento.
Liz: es esta.
Ely: siempre hicieron el mismo procedimiento, entonces pueden expresar una fórmula.
Peny: hay que revoltijo.
Equipo de Mane:
Barby: siii!
Ely: ¿qué pasó?
Mane: si.
Ely: ¿si qué?
Mane: si coincide.
Ely: ¿si coincidió?
Mane: entonces es el "F".
Ely: ¿y entonces en qué hay que evaluar para obtener la fórmula?
Mane: ¿en qué hay que evaluar? En delta de "x" para que nos de la altura del rectángulo.
Ely: pero hace rato les dio el de arriba, ¿en cuál hay que evaluar?
Mane: hay que evaluar en, este es el cero y cuenta como un valor.
Ely: aja.
Mane: entonces el 2.1 sería otro.
Ely: 0.2.

Mane: 0.2, el 0.4 sería otro, el 0.6 sería el cuarto y es que nosotros estamos tomando en cuenta el cero y por eso nos fuimos hasta acá.
Ely: ok.
Barby: expresa una fórmula para calcular el área de cualquiera de esos rectángulos cuando modificas el número de divisiones.
Mane: cuando modificas el número de divisiones.
Barby: ¿no es lo mismo que la otra?
Mane: que la otra… pero dice expresa para calcular el área de los rectángulos.
Barby: porque acá es la base y aquí es el área.
Ely: porque ya saben cómo calcular la altura ¿no?
Mane: en base a lo que vimos ahorita debemos de saber dar una fórmula.
Ely: aja.
Mane: debemos de saber dar una fórmula, como lo que hicimos allá… entonces, entonces este va a ser el resultado de…
Barby: de "x".
Mane: delta "x".
Barby: hay ya.
Equipo de Peny:
Ely: ¿ya la contestaron?
Liz: pero no lo hicimos de fórmula.
Ely: ¿no lo hicieron de fórmula?
Peny: seguimos la fórmula de la división para obtener el valor de la delta "x" en cada una de las divisiones.
Ely: aja ¿y cómo le hacen?
Peny: le pusimos aquí el ejemplo de 2 entre 10.
Ely: ¿qué es diez?
Liz: la división.
Peny: el número de divisiones.
Ely: ¿y luego qué hicieron?
Liz: el dos lo dividimos entre diez que eran las divisiones.
Peny: la distancia de eso entre el número de divisiones para sacar el valor de la delta "x" de cada rectángulo y así le seguimos.
Ely: ¿y luego dividieron dos entre qué?
Peny: entre veinte.
Ely: ¿qué era el veinte?
Peny: veinte divisiones.
Liz: la división.
Peny: entre todas las divisiones.
Ely: ¿entonces qué es lo que va abajo?
Liz: las divisiones.
Ely: ah y ¿por qué no le ponen incógnitas o letras o algo?, para que no pongan, cuando sea diez no pongan dos entre diez, para cuando sea veinte dos entre veinte.
Liz: mmm si, por decir arriba le ponemos "d" y abajo otra letra porque por ejemplo no siempre el diámetro va a valer 2.
Ely: ah también eso es cierto, ¿lo pueden hacer? No está difícil verdad.
Liz: si ya.
Ely: se espantan cuándo les dicen "expresión".
Liz: entonces aquí por decir en lugar del 2 le vamos a poner una letra para dividirlo entre diez que va a ser la división.
Peny: ¿entonces cómo diez?
Liz: no.
Peny: una "d" ¿o qué?

Liz: le puedo poner la letra que sea.
Ely: si, nada más díganme que significa esa letra.
Peny: "d" de división.
Liz: pero ahí no, acá a un ladito.
Peny: división y ¿éste?... el valor.
Liz: este…
Peny: la distancia.
Liz: pero ya vas a poner dos "d´s" aquí.
Peny: no, "dt" distancia y ya.
Liz: pero aquí ponle la rayita de división.
Ely: ah le están poniendo que significa.
Liz: pero aquí ya te faltó.
Peny: ok, así ya, yo entendiéndole ya, ok ya.
Ely: ¿eso es igual a?
Peny: es igual a cero punto dos.
Liz: el valor de delta "x".
Peny: delta "x".
Ely: ah ok.

Video 429:
Equipo de Peny:
Ely: ¿cómo quedó entonces la fórmula? Perdón que las interrumpa.
Liz: "dt" entre "d", lo que salga es el valor de delta "x".
Ely: ah pues pónganle es igual a qué.
Liz: a ver préstame (escribe la fórmula correcta).
Equipo de Mane:
Mane: ¿16?
Barby: 16.
Mane: 0.16… aquí sería 0.10.
Barby: ¿10?
Mane: es que no sacamos el valor de seis, solo el de ocho y el de ocho es…
Barby: 0.9695.
Mane: entonces pongo el de ocho ahorita ponemos el de seis.
Barby: ya lo pusiste el de ocho.
Mane: me equivoqué.
Barby: pues ya táchale.
Equipo de Peny:
Peny: ¿lado por lado por lado por lado?
Liz: pero fíjate que no todos miden lo mismo, estos no miden igual que estos, entonces va a ser lado por lado.
Peny: ¿lado por lado?
Liz: a ver espérate porque esa es la fórmula con la que sacamos el rectángulo.
Peny: ¿lado por lado?
Liz: supongamos que aquí mide ¿qué?... este 0.4, este lo tienes que multiplicar por el otro que mide de aquí para arriba.
Ely: ¿y de ahí para arriba cómo se llama?
Liz: altura.
Ely: ah.
Peny: base por altura.
Liz: si multiplicamos el cuatro por la altura va a ser ¿qué?
Peny: ocho.
Ely: ¿ocho?
Peny: veintidós.

Liz: porque es rectángulo.
Ely: ¿hay uno que vale cuatro y otro que vale ocho?
Peny: supongamos que…
Ely: ah suposición.
Liz: entonces todo eso tiene que salir porque aquí mide ocho y aquí cuatro, ocho y ocho dieciséis y ocho.
Peny: veinticinco ah no.
Liz: treinta y dos.
Equipo de Mane:
Ely: ¿qué es eso de $f(\Delta x) = \sqrt{2\Delta x - (\Delta x)^2}$
Mane: la fórmula que nos pidió del otro lado, es que la anotamos aquí.

Video 430:
Liz: pero esa es para el triángulo.
Peny: ¿ah si? ¿Entonces cómo va a ser?
Liz: base por altura es para el rectángulo pero base por altura sobre dos es para el triángulo.
Peny: porque el del círculo…

Video 431:
Equipo de Mane:
Mane: es que es lo mismo si se lo dejo o no se lo dejo.
Barby: a bueno, si.
Mane: nos va a salir uno… mira uno.
Barby: y va a salir uno de hecho, hay si mira… dos menos uno, uno.
Mane: raíz de uno.
Barby: (con la calculadora) uno.
Mane: entonces…
Barby: hay!.
Mane: esos son los resultados, ahora lo que tenemos que hacer es sumarlos, mira vamos a sumarlos todos y luego los multiplicamos por dos, porque son de aquí para acá y de aquí para allá.
Barby: es 0.12 más..
Mane: 0.16.
Barby: ¿16?
Mane: ¿esa si la sacamos bien?... ah si es cierto es 0.36, 0.32!
Equipo de Peny:
Ely: ¿ya terminaron chiquillas?
Peny: ya, vamos a estudiar para exponer.

Video 432:
Equipo de Mane:
Mane: dijo que nada más los inferiores.
Barby: ¿sabes en qué estamos mal?
Mane: este no va, este no va nada más.
Barby: pero estos valores ¿qué?
Mane: ¿estas segura de lo que tiene que dar?
Barby: o, ¿maestra esto qué es?
Ely: ¿Dónde dice inferior y superior?
Barby: aja.

Ely: ah pues les dije que era la suma de los rectángulos inferiores, donde dice inferior es la suma de los rectángulos inferiores y donde dice superior es la suma de los rectángulos superiores. ¿qué están haciendo?
Barby: (risas).
Mane: es que nos pasamos hasta hacer todas las multiplicaciones de los rectángulos.
Ely: ¿sacaron el área de cada rectángulo?
Mane: aja.
Ely: ¿superiores o inferiores?
Mane: inferiores.
Ely: a pues entonces debe dar lo mismo que dice ahí.
Barby: no, no nos dio de hecho.
Ely: bueno a lo mejor les da un poquito distinto, alguna décima, una centésima.
Barby: pues ninguna.
Ely: ¿no les serviría hacer una tabla? Así como rectángulo uno, rectángulo dos… tal vez ordenaría sus datos porque veo que tienen muchas hojas, muchos cálculos.
Mane: este es uno y otro.
Ely: ¿ese es el área?. ¿Ah esos son los rectángulos?
Mane: y arriba de cada uno está su área.
Ely: ah ok, ¿cuál es el primero?
Mane: es el de 0.4.
Ely: 0.4 es…
Mane: que sería de aquí a aquí.
Ely: ¿cuánto mide la base?
Mane: la base es 0.4.
Ely: ¿cuánto mide la base?
Mane: nos equivocamos.
Barby: es que los hicimos al revés.
Mane: no, es que siempre la base vale 0.2 y yo le fui aumentando y no me fijé… entonces…
Barby: 0.2 por…
Mane: otra vez lo vamos a multiplicar y ahora sí nos va a salir.
Barby: 0.16… ah ya, lo que hiciste fue aumentarle.
Mane: aja, ir aumentando y no, o sea siempre va a valer 2… y es que me quedé con otra cosa que tenía que ver con esto pero ya no…
Mane: ¿cuánto es del primero?
Barby: 16… 0.16.
Mane: 0.16 y ¿del segundo?
Barby: 0.18392…. 0.1931
Mane: ¿y del último?
Barby: 0.2 por ¿qué?
Mane: por uno.
Barby: 0.2 (risas).
Mane: entonces sería nada más sumar los resultados… está bien, está bien, ahora lo vamos a multiplicar por dos.
Ely: ¿por qué por dos?
Mane: porque nosotros nada más sacamos el área de la mitad y para la otra mitad pues ya tenemos los resultados, entonces nada más lo multiplicamos por dos.
Barby: a ver…
Mane: nos falló.
Ely: ¿por mucho?

Mane: es que le pusimos varios decimales, en algunos le metimos tres y en otros dos.
Barby: en este fueron cinco… sale 1.47 y tiene 1.32… ¿y si le quitamos?
Mane: ¿si le quitamos?, también puede ser…
Barby: o usted se equivocó.
Ely: no, se equivocó la computadora.
Mane: ¿la computadora?
Ely: la suma, me preguntan si es 1.3.
Barby: 1.32.
Ely: pues si es 1.32 y tal vez siga más no sé.
Barby: 1.46.
Ely: ¿les sale más o menos que hace rato?
Mane: nos sale más… de hecho hace rato a mí me salía más… no sé porque nos salió más, tal vez porque acá le metimos más decimales, mira o sea si lo hubiéramos nada más multiplicado por esto.
Barby: ¿0.2 por 91?... 18 hay no!!! Porque es por 0.91.
Mane: 182.
Barby: entonces aquí en lugar de ser 3 es 2… y este lo quitamos.
Mane: pero pues ya no importa porque haz de cuenta ahorita ya habíamos hecho la suma y habíamos quitado esto, ya no es necesario hacerlo porque es lo mismo.
Ely: ¿pero es poquito lo que les sale?... ¿no mezclarían rectángulos interiores y exteriores?
Barby: no.
Ely: entonces puede ser que no tomaron todas las décimas, si redondean pues obvio que les va a salir más grande, si cortan les debe salir más pequeño.
Barby: ¿este cuál es?
Mane: este viene siendo lo de hace rato.
Barby: ah esto es otra cosa… sale lo mismo.
Ely: ¿se pasa de los exteriores?
Mane: no.
Ely: ¿está entre los interiores y exteriores?
Mane: si.
Ely: ah pues está bien.
Mane: ¿pero no nos pedía esto?... ¿qué relación tienen estas áreas con el área que calculaste en la pregunta número uno?
Ely: ¿cuánto les salió en la pregunta uno?
Mane: 1.57.
Barby: 1.5708.
Ely: ¿y cuánto les salió allá según las sumas?
Barby: 3.04.
Ely: hay pero son dos distintas, se tienen que tomar independientes.
Barby: ¿entonces?
Mane: tendría que relacionarla de aquí en medio y tiene que ver por decir el área del círculo entre estos dos, o sea que si compensamos ¿cuánto nos pasamos ahí?... 15, le meto 15 aquí.

Video 433:
Mane: exactamente pero es la mitad del círculo que ellos nos implementaron en que sacáramos pues el área del círculo y o sea que nos da como resultado que si estos cuadrados los pasáramos hacia abajo por decir los morados hacia abajo, si abriéramos las dos partes casi formaríamos el círculo y allá nos dio una sola parte.

Ely:	a bueno es que les pide nada más la mitad.
Mane:	aja, nada más le pide la mitad.
Ely:	bueno anótenlo.

Video 434:
Barby:	que las áreas son…
Mane:	que las áreas.
Barby:	que las áreas son parecidas a las del círculo, a la mitad ¿no?

Video 435:
Barby:	es 0.2.
Mane:	entonces para todas es 0.2.
Barby:	no porque si le mueves a veinte…
Mane:	si ¿no? Se ve.
Ely:	ya habían encontrado una fórmula ¿no?
Mane:	si, a verla.
Barby:	era el valor…
Mane:	no pero esa era cuando te daba, cuando te deba el número de partes, el número de partes y acá es el número de divisiones. Y para el número de divisiones era esta ¿no?
Barby:	¿o esa para qué la habíamos?
Ely:	¿qué les pide?
Barby:	esa es para el área, esa supuestamente nosotros la sacamos para el área de los rectángulos.
Mane:	si es cierto, ¿qué nos pide?
Barby:	porque el área sería.
Mane:	el valor de “x”.

Video 436:
Mane:	luego hasta 30 verdad, 1.49 y 1.64.
Barby:	pero no tenemos el valor de delta de “x”.
Mane:	no pero ahorita lo sacamos.
Barby:	el de 40… bueno el de 50.
Mane:	1.51 y 1.61.
Barby:	¿igual este y este?
Mane:	si es lo mismo, y ya para 60 es 1.54 y 1.6.
Barby:	53 ¿no?
Mane:	53…. 1.54 y 1.6 otra vez… 1.54 y 1.59… 1.55 y 1.59.

Video 437:
(Están terminando de llenar la tabla).
Mane:	¿qué tanto importa si está bien o está mal?
Ely:	lo que importa es cómo lo resuelvan además, quien determina si está bien o mal o ¿a qué te refieres?
Mane:	a eso.

Video 438:
Mane:	¿…los rectángulos a medida que aumenta el número de divisiones? Se va haciendo más chica.
Barby:	se hace más pequeña la base ¿o qué?
Mane:	si la base.
Barby:	¿qué ocurre en el área inferior y superior si crece el número de divisiones?... área inferior y área superior (señalando)…. Se hace más grande (risas).

Mane: ¿qué ocurre?
Barby: si, aquí está el número de divisiones 90, fíjate si es de 10 es 0.32 y acá sube… bueno, una sube y una baja. En el área inferior sube, aumenta, y en el área superior baja porque de 72 bajó a 52, aja y de aquí de 32 a 55.
Mane: si.
Barby: hay ¿cómo le pongo?
Mane: aumenta y baja.
Barby: aumenta en el inferior… y en el superior…
Mane: disminuye, ahí disminuye.
Barby: hay se me fue esa palabra. ¿Cuántas divisiones necesita hacer Jorge para el área de la mitad de la circunferencia?
Mane: ¿cuántas divisiones?... ¿cuántas divisiones?... argumenta tu respuesta.
Barby: entonces tenemos que bajarle… hay no… para obtener el área de la mitad.
Ely: ¿cuánto mide el área de la mitad?
Mane: ¿el área de la mitad? Habíamos dicho que 0.74.
Barby: eso no lo sacamos ¿o si?
Mane: si, fue cuando íbamos a sacar para lo de todo.
Ely: la mitad de la circunferencia no la cuarta parte.
Mane: entonces es… ¿era 1.32 Barby?
Ely: lo que ustedes calcularon obviamente con la fórmula del círculo.
Barby: ¿con la fórmula? ¿de la uno?
Ely: ¿cuánto mide la mitad de un círculo de radio 1?
Barby: 1.5708.
Mane: aja.
Ely: acuérdense que el maestro lo no dejó usar la fórmula que ustedes usaron al principio, quería que lo hiciera con rectángulos, entonces ¿cuántos rectángulos necesita hacer?
Mane: ¿cuántos rectángulos necesita hacer?
Ely: para que le salga el área de la mitad del círculo.
Mane: ¿fue cuánto?
Barby: 1.57.
Mane: ¿para inferior o…?
Barby: no dice aquí.
Ely: el área del círculo.
Barby: ya está bien… (risas).
Mane: ya no se puede (está aumentando el número de divisiones con el software)…. 90.
Barby: de 90 son…
Mane: 1.57 y 1.59… de 90 divisiones… ¿cuántas divisiones necesita Jorge para tener la mitad del área del círculo?
Ely: no vamos a sumar el área inferior y el área superior.
Mane: no… ya es el área ¿no? ¿90? ¿o me equivoco?
Ely: argumenta tu respuesta.
Barby: pues 90.
Mane: pues en todo caso serían más de 90.
Barby: pero como 92.
Mane: ¿cuántas divisiones?... divisiones… ¿pero las divisiones entran nada más en los rectángulos inferiores o también los superiores o superiores e interiores?
Ely: pues contemplas unos o contemplas los otros.
Mane: ah entonces vamos a contemplar los superiores, los superiores ya nos da…. Ah tampoco nos lo da.
Barby: y el inferior son 90 y son 1.56, como 91.
Mane: ¿y si hiciéramos 91?... ¿cómo aumentaré si lo sacamos de 90?

Barby: o fíjate a cada, ponte en 89 y fíjate cuánto aumenta… es que es lo mismo.
Ely: ¿cómo es lo mismo?
Mane: o sea que ya cuando empieza a variar es en el 73, 74 y es el del superior… sería el superior 1.6 y ya se subió, acá tendría que bajar y este también se baja, este se sube y este baja… necesitamos que los dos entren más… es más de 91… 54.
Barby: 54.
Mane: 106.
Barby: ¿106?
Mane: si, 106 para que suba uno más porque mira fíjate si estoy aquí es 1.6.
Barby: aja.
Mane: entonces son 16 del 74 al 90… son 16, en dado caso que se los aumentara me daría ahora sí ¿no?
Barby: ¿y entonces?
Mane: necesitaríamos sacar la operación.
Barby: pero sería para punto… no, entonces serían treinta y… 106 más 16 porque serían 57 y apenas llegaríamos a 56 ¿o cómo?
Mane: o sea mira fíjate, mira para que suba uno en superior tengo que bajar 16, ¿si me entiendes tengo que bajar 16? ¿si te fijas? Ahí ya bajó y subió uno, estaba en 54 ¿si?, entonces yo bajé 16 para que subiera uno y entonces lo que tengo que hacer es sumarle 16 para que baje uno, tengo que sumarle o sea que son 32 ¿verdad? ¿es lo que tú me decías?
Barby: 106 más 16.
Mane: 132.
Barby: 122.
Mane: si 122, ¿entonces si estamos de acuerdo ahí?
Barby: ¿pero por qué? Tenemos que poner, argumenta tu respuesta.
Mane: ¿por qué?
Barby: pues porque tenemos que bajar 16.
Mane: porque para aumentar o bajar una unidad debo de subir 16.
Ely: ¿16 qué?
Mane: 16…
Barby: divisiones.
Mane: que en todo caso serían los rectángulos.

Video 439:
Mane: hay está medio fuerte… expresa el área del semicírculo en términos del área de rectángulos… en términos ¿sería en divisiones?... serían ciento y tantas divisiones.
Barby: entonces… no… no, no sé.
Mane: expresa el área del semicírculo en términos de sumas de rectángulos, suma de rectángulos… pues vamos a hacer lo que hicimos hace ratito ¿no?, en suma de rectángulos, o sea ¿cuántos sumamos hace ratito?... ah es que son muchos.
Barby: son cien… ¿cuántos?... 122.
Ely: si no alcanzan a hacer toda la operación nada más pongan qué es lo que deberían de hacer… porque ya se les acabó el tiempo.
Mane: deberíamos…
Ely: escriban qué es lo que deberían de hacer para que les saliera.
Mane: mmm sumar el área de los 112… 112.
Barby: 122 divisiones.
Mane: ¿y este programa nada más lo instaló para…?
Barby: ya nada más.

Mane: ¿si?
Ely: ok.

Video 440:
12 seg.
Video 441:
28 seg.

Video 442:
Ely: ¿quién lo explica?
Mane: los dos.
Ely: ¿entonces cuánto mide el área de la mitad del círculo de radio uno?
Mane: 1.5708.
Ely: luego, pregunta número 2 ¿cuánto mide el diámetro del círculo?
Mane: 2.
Ely: pregunta número 4 ¿en cuántas partes es dividido el diámetro del círculo cuando se mueven hasta la posición 5?
Mane: en cinco partes.
Ely: pregunta número 5, ¿cuánto mide la base de cada uno de esos rectángulos?
Mane: 0.4.
Ely: mueve nuevamente el punto divisiones hasta la posición siete, ¿en cuántas partes es dividido el diámetro?
Mane: en 7
Ely: ¿cuánto mide la base de cada uno de los rectángulos?
Mane: 0.28, se lo pongo (escribe en el pizarrón 0.28571).
Ely: ¿generaron la expresión?
Mane: si.
Ely: ¿la anotan por favor?
Mane: (buscando en sus anotaciones).
Barby: ¿dónde está?
Mane: ah esa es… es igual a (escribe en el pizarrón $\frac{2}{a} = \Delta x$).
Ely: ok, ¿qué es "a"?
Barby: la variable independiente.
Mane: la variable dependiente, depende de que nos den el número de partes en que se va a dividir la semicircunferencia.
Ely: ah ok, eh la pregunta número 9: desplaza el punto divisiones hasta el número 10 ¿cuánto mide delta "x"?.... si no están de acuerdo en algo ustedes digan eh.
Barby: (buscando en sus anotaciones).
Mane: es este, ¿la 9 verdad?
Ely: aja.
Mane: equivale a 0.2 (escribe en el pizarrón Δx =0.2).
Ely: ¿también las fórmulas, todo les salió igual?
Liz: si.
Ely: ahh las fórmulas no están igual.
Liz: no, las fórmulas no.
Ely: número 10, evalúa la función $f(x) = \sqrt{2x - x^2}$ en el valor delta "x" que acabas de obtener.
Mane: ¿quiere que se la anote o quiere que le de el valor?
Ely: mmm el resultado y si no sale igual a lo que dice Liz y Peny pues ya lo anotas todo.

Mane: (anota f(.2)=0.6).
Ely: ¿les salió lo mismo Liz?
Liz: si.
Ely: hay que exactitud… ¿qué representa ese valor en la gráfica?
Mane: la base de tres rectángulos, pero luego llegamos también a la coincidencia que también era el largo del rectángulo.
Ely: ¿largo? ¿qué es largo?
Mane: la altura.
Ely: ¿de cuál rectángulo?
Mane: del rectángulo que estamos evaluando, del primero.
Ely: ok, ¿qué relación existe entre la altura del rectángulo y delta "x"?
Mane: que al evaluar delta de "x" me arroja como resultado la altura del rectángulo.
Ely: ¿qué opinan ustedes? ¿la contestaron?
Liz: si, no salió así igualito, igualito pero si.
Ely: dice: si estás en la cuarta división ¿cuánto mide la altura del rectángulo inferior?
Mane: el resultado es (escribe en el pizarrón 0.9165).
Ely: ¿les salió lo mismo Peny?
Peny: no.
Ely: ¿verificaron en la gráfica?
Mane: mmm si y está bien.
Ely: ah, y está bien, dice. Expresa una fórmula para calcular el área de cualquiera de esos rectángulos cuando modificas el número de divisiones.
Mane: (escribe en el pizarrón $f(\Delta x) = \sqrt{2(\Delta x) - (\Delta x)^2}$).
Ely: ¿esa es para calcular el área?
Mane: aja.
Ely: ok, ahora vamos a sumar todas las áreas de los rectángulos inferiores y la llamaremos "área inferior" y la de los rectángulos superiores la llamaremos "área superior", ¿cuál es el valor del área inferior?
Mane: es 1.32.
Ely: ¿y del área superior?
Mane: 1.72.
Ely: ¿qué relación tienen estas áreas con el área que calculaste en la pregunta uno?
Mane: que si el, nosotros llegamos a la conclusión de que si el círculo de la pregunta uno estuviera completo, no fuera la mitad del círculo, sería algo parecido a lo de los valores del inferior y del superior o sea sumándolos me daría casi el mismo círculo.
Ely: ah, dices: si sumo las áreas de los rectángulos inferiores y las áreas de los rectángulos superiores me daría el área del círculo completo.
Mane: aja.
Ely: ¿y qué pasa si no los sumo? ¿si nada más tomo en cuenta las áreas superiores o las áreas inferiores?
Mane: los del área superior… que los dos se aproximan a la de la pregunta uno, pero a la de la mitad no el completo, ¿si me entiende?
Ely: no.
Mane: o sea que en el uno nos piden del resultado nada más la mitad.
Ely: aja.
Mane: y que el superior y el inferior están también separados, están separados por alguna razón, entonces se acercan los dos a lo que de el resultado de aquí (señalando la respuesta de la pregunta uno), son aproximados porque aquí

serían 1.32 y acá 1.72 (escribe estos resultados dejando el 1.5708 en medio de ellos).

Ely: entonces a ver, dices que: el área superior y el área inferior ¿qué?

Mane: se aproximan al área del círculo de la pregunta uno.

Ely: ok, luego sigue la tabla.

Video 443:

Ely: ¿por qué no terminaron todas las delta “x”?

Mane: es que nos daba punto decimal y seguía.

Ely: ¿las delta “x”?

Mane: aja.

Ely: ¿y por eso no las pusieron?

Mane: aja, pusimos las que quedaban cerca.

Ely: bueno, ¿qué sucede con la base de los rectángulos a medida que aumenta el número de divisiones?

Mane: se hace más pequeña la base.

Ely: ¿qué ocurre con el área inferior y superior si crece el número de divisiones?

Mane: en el área inferior va aumentando y en el área superior va disminuyendo.

Ely: ¿en el área inferior va aumentando?

Barby: si aquí está, aquí en el área inferior fue de 10 divisiones es 1.32 y de a 90 divisiones es 1.55, entonces va subiendo, va aumentando en el área inferior. Y en el área superior de 10 divisiones es 1.72 y de 90 son 1.59, entonces va bajando.

Ely: oh, ¿cuántas divisiones necesita hacer Jorge para obtener el área de la mitad de la circunferencia? Argumenta tu respuesta.

Mane: 122 divisiones porque nosotros llegamos al resultado de que… de que las divisiones llegaban nada más hasta 90.

Ely: aja.

Mane: y al llegar hasta 90 el resultado de la…

Ely: ¿de los rectángulos?

Mane: aja, creo que era 1.59.

Ely: ¿inferior o superior?

Barby: el inferior 55 y el superior…

Ely: ahí lo tienes en la tabla ¿no?

Mane: aja era el superior, era este, entonces nosotros conforme vimos en la computadora, conforme movíamos el…

Ely: ¿el deslizador?

Mane: el deslizador de divisiones, este, iba bajando y subiendo, entonces nos fijamos cuánto bajó para poder pasar uno, un número para poder aumentar a 60 (señala el 1.59 y el 1.60).

Ely: ah ok.

Mane: este, pasaron 16 movimientos, entonces esos 16 movimientos nosotros los aumentamos dos veces para que fueran 1.57 que era lo que ocupábamos… ¿si?

Ely: a ver, dices que con 16 movimientos se aumentaban…

Mane: se aumentaba uno más y sería 1.58.

Barby: es que tienen que ir relacionados con la respuesta número…

Mane: con las divisiones.

Ely: ah creo que ya entendí. Movieron el deslizador para ver cuando era 1.6 exactamente 1.60.

Mane: o sea que para aumentar o bajar una unidad debo de bajar o hacer hacia adelante 16 divisiones.

Ely: ah ¿dices que si mueves 16 divisiones hacia abajo, si le quitas 16 divisiones el resultado sería 1.60?
Mane: aja.
Ely: dices, si le pongo 16 divisiones da 1.59, si le pongo otras 16 divisiones…
Mane: da 1.58.
Ely: ¿y si le pones otras 16 divisiones tú dices que te daría 1.57?
Mane: aja 1.57.
Ely: ¿entonces a 90 le sumaron…?
Barby: a 90 le sumamos 32.
Ely: ¿y les da?
Mane: 122 divisiones.
Barby: 122.
Ely: ah por eso dicen que en 122 divisiones tendrían el área del…
Mane: el área de la mitad de la circunferencia.
Ely: ok, ¿qué opinan ustedes?
Peny: hayyyy.
Ely: ok la última, expresa el área del semicírculo en términos de la suma de los rectángulos.
Mane: ese ya no lo alcanzamos a resolver, nada más le pusimos: sumar el área de las 122 divisiones.
Ely: bueno pues un aplauso para el equipo… gracias!.

Video 444:
Ely: ¿listas? Ah ustedes están terminando de llenar la tabla.
Peny: pues casi todo igual.
Ely: ¿casi todo igual?... ¿en la pregunta uno les salió lo mismo?
Peny: si, en la uno salió 1.5708.
Ely: ok, ¿la número dos? ¿cuánto mide el diámetro del círculo?
Peny: 2.
Ely: mueve el punto divisiones hasta la posición cinco ¿en cuántas partes es dividido el diámetro?
Peny: en cinco.
Ely: ¿cuánto mide la base de cada uno de esos rectángulos?
Peny: 0.4.
Ely: mueve nuevamente el punto divisiones hasta la posición siete, ¿en cuántas partes es dividido el diámetro del círculo?
Peny: siete.
Ely: ¿cuánto mide la base de cada uno de esos rectángulos?
Peny: 0.28.
Ely: ¿fue lo mismo que dijeron ustedes muchachos?
Mane: 28571.
Ely: ok, vamos a llamar delta "x" a la base de cada rectángulo, genera una expresión… ah ahí me acordé que ustedes le pusieron distinto, a ver ¿nos escriben su expresión?
Peny: si, nosotros le pusimos (escribe en el pizarrón $\frac{DT}{DS} = \Delta x$).
Ely: ¿qué es DT y qué es DS?
Peny: DT es distancia y DS es divisiones.
Ely: ¿cuál distancia?
Liz: no, es el diámetro.
Ely: ok, desplaza el punto divisiones y detente en el número 10, ¿cuánto mide delta "x" en cada uno de sus rectángulos?

Peny:	0.10.
Ely:	evalúa la función $f(x)=\sqrt{2x-x^2}$ en el valor delta "x" que acabas de obtener, ¿cuánto les salió?
Peny:	0.6.
Ely:	lo mismo, ¿qué representa ese valor en la gráfica?
Peny:	nosotros le pusimos que representa la altura de un rectángulo.
Liz:	pero esa misma altura vale la base de tres rectángulos.
Ely:	ah ok, ¿qué relación existe entre la altura del rectángulo y el valor de delta "x"?
Peny:	que la altura del rectángulo mide lo mismo que la delta "x".
Ely:	¿si?... dice: ¿qué relación existe entre la altura del rectángulo y delta "x"?... están en la división 10.
Liz:	que la altura, o sea si mide 0.6 mide lo mismo que la delta "x".
Ely:	¿cuánto media delta "x"?
Liz:	de tres rectángulos mide 0.6.
Ely:	no, delta "x", no tres veces delta "x".
Liz:	2.
Ely:	¿2?
Liz:	0.2.
Ely:	entonces dice: ¿qué relación existe entre la altura del rectángulo y delta "x"?
Peny:	ahí nos equivocamos.
Ely:	¿lo tomaron como tres veces delta "x"?
Peny:	si.
Ely:	ok, si estás en la cuarta división ¿cuánto mide la altura del rectángulo inferior?
Peny:	nosotros le pusimos que 1.87.
Ely:	¿uno punto?
Liz:	es que nosotros lo movimos hasta la cuarta y pusimos lo que tenía, de la superior lo pusimos igual, no sacamos la altura de uno nada más.
Ely:	¿entonces qué sacaron?
Liz:	lo pasamos como estaba en la computadora, igual (se refiere a la suma de las áreas de los rectángulos).
…	
Ely:	expresa una fórmula para calcular el área de cualquiera de esos rectángulos cuando modificas el número de divisiones.
Peny:	esa no la contestamos.
Ely:	¿no la contestaron por qué? ¿ven donde dice fórmula y les da miedo?
Peny:	casi, casi.
Ely:	ahora vamos a sumar todas las áreas de los rectángulos inferiores y las llamaremos área inferior, y de hecho pues ahí aparecía en la computadora, y la de los rectángulos superiores la llamaremos área superior, ¿cuál es el valor del área inferior?
Peny:	1.32.
Ely:	¿cuál es el valor del área superior?
Peny:	1.72.
Ely:	ok, ¿qué relación tienen estas áreas con el área que calculaste en la pregunta número uno?
Peny:	en que calculamos la base de cada una de esas áreas.
Ely:	¿qué relación tienen estas áreas con el área que calculaste en la pregunta número uno?... me acaban de decir 1.32 y 1.72 ¿qué relación tienen esos números con lo que calcularon en la pregunta uno?

Liz: el 1.32 le falta para llegar al 1.57 y el 1.72 se pasa.
Peny: se pasa demasiado de… esa cosa.
Ely: ¿cuál cosa?
Peny: pi o como se llame, bueno pues la mitad de..
Ely: la mitad del círculo… entonces ¿qué relación tienen?... me lo repites por favor Liz ¿qué fue lo que dijeron?
Liz: dice que calculamos cada base.
Ely: ¿esa relación tienen?
Liz: no sé.
Ely: ok, continua deslizando el punto divisiones para completar la siguiente tabla, y veo que ya la terminaron de completar, algunas cosas borraron verdad ¿nos indican que cosas borraron?
Liz: aquí.
Barby: pero ahí ¿por qué les queda 0.0592? (cuando realmente tienen anotada esa cantidad con signo negativo).
Liz: ah si aquí no queda menos ¿verdad?... queda 0.0592.
Barby: pero se supone que tienes que restar el área superior menos el área real… o sea si le hubieras modificado acá si te hubiera quedado pero como no le modificaste entonces está mal, ahorita yo la volví a hacer y se supone que el área real es 1.5708, le resta el 1.64 y queda -0.06.
Liz: ah pero aquí no va 4, va 3.
Peny: iba 3 de hecho, se equivocaron.
Barby: ¿por qué 3?
Liz: mira (va a la computadora y muestra el resultado).
Ely: algo pasó ahí verdad, una pregunta Liz y Peny, vean la delta "x" que calcularon si se fijan que para diez divisiones le pusieron 0.2.
Liz: aja.
Ely: para veinte divisiones dicen que es 0.1, ahora para treinta divisiones dicen que es 0.06 y para cuarenta divisiones dicen que es 0.5.
Liz: ah si ahí nos faltó el cero.
Ely: ¿no hace falta revisar nada más?
Peny: en el cuatro también les falta el cero.
…
Ely: ok, ¿qué sucede con la base de los rectángulos a medida que aumenta el número de divisiones?
Liz: se va disminuyendo la base de los rectángulos.
Ely: ok, ¿qué ocurre con el área inferior y superior si crece el número de divisiones?
Peny: que los números en el área superior se va disminuyendo y en el área inferior se va elevando.
Ely: ¿se eleva hasta el número mil o cómo dicen que se va elevando?
Liz: por decir en el 90 aumentó uno, aumentó uno más dependiendo de cuanto media la base. Por decir de aquí, de 1.32 aumentó…
Ely: dices si aumento el número de divisiones, o sea si pusiera mil divisiones como va aumentando el área inferior tal vez me llegue a dos.
Liz: aja.
Ely: ¿si? ¿puede llegar a dos?... si aumento el número de divisiones dices va aumentando el área inferior ¿si?
Liz: si.
Ely: entonces puede ser que si aumento mucho me llegue al número dos.
Liz: si.
Ely: ¿si? ¿hasta el dos?, dices el área superior ¿qué pasaba?
Liz: va disminuyendo.

Ely: o sea que si aumento mucho el número de divisiones.
Liz: el área superior va disminuyendo.
Ely: ¿puede ser que llegue a cero?... ¿disminuye, disminuye, disminuye, disminuye que llegue a ser un área cero?
Liz: si puede ser.
Ely: ¿qué opina el otro equipo?... ¿si me entendieron a la pregunta?
Mane: que a lo mejor se puede pasar y no quedar el cero exacto.
Ely: ¿o sea un área negativa?
Peny: aja.
Ely: ¿un área negativa?
Barby: no puede ser.
Liz: porque si nunca… aquí va aumentando y aquí disminuyó.
Mane: es que por decir si ya vamos a llegar a cero y por decir tienes dos y tienes que bajar tres.
Ely: ah pero lo que yo estoy diciendo es lo siguiente, vean. Les pregunto ¿qué ocurre con el área inferior y superior si crece el número de divisiones? Y ellas me dicen y ustedes también me dijeron, ellas me dicen: a mire fíjese en el área inferior tenía diez divisiones y tenía 1.32, tenía veinte divisiones y tenía 1.45, cuando llegué a noventa tenía 1.55. Y dicen 1.32 es más pequeño que 1.55 entonces el área va aumentando y yo les pregunto ¿puede ser que llegue al número 2 o al número 3 o al número 4 o al número 1000 el área inferior?
Mane: si puede llegar pero va a tener un límite, ya no va a poder… si va a poder seguir haciéndose grande pero ya más no va a poder, yo digo que ya saldría otra figura o no sé.
Ely: acuérdense que esto tiene una construcción o sea no son números que nada más fuimos poniendo, era del ejercicio. Entonces yo les pregunto, me dicen conforme va aumentando el número de divisiones va aumentando el área inferior y mi pregunta es ¿va a aumentar hasta el número 1000 o se puede pasar de 1000? ¿va a llegar al 2 y luego si sigo aumentando va a llegar al 3 y luego va a llegar al 4?
Mane: (dice no con la cabeza) si se mueve acá también se tiene que mover allá.
Ely: exacto, al moverle aquí también se mueve acá ¿entonces?
Mane: (dice no con la cabeza).
Ely: ¿no? ¿no va a aumentar hasta el 2?
Mane: hasta el 2 a lo mejor si.
Ely: hasta el 2 a lo mejor si, entonces si aquí aumenta hasta el 2 dicen que acá disminuye.
Peny: si.
Ely: ¿hasta qué número disminuye?
Mane: como hasta el uno yo creo, o 1.4.
Ely: ¿aquí podría aumentar hasta el 2 y aquí podría disminuir hasta el 1?
…
Mane: no al 4 ya no.
Ely: ok al 4 ya no. Ahora me dicen: de este lado va disminuyendo, pues disminuir ¿qué sería al 1?... y si sigo aumentando divisiones va a seguir disminuyendo ¿no?
Mane: aja.
Ely: ¿al cero?
Mane: si.
Ely: ¿si?, quedamos que era un área ¿verdad? Área superior, ¿va a disminuir hasta el cero?
Mane: no, va a tener unas cuantas décimas.

Ely: ¿unas cuantas décimas? ¿al cero no? ¿pero aquí si va a llegar al 3?
Mane: aja, ahí si va a llegar.
Ely: aquí sí pero acá no… órale. Me dicen hasta el cero no, ¿hasta el cero qué?
Peny: 0.5.
Mane: es 4.
Ely: se supone que son la misma cantidad de divisiones verdad, digamos si son 100, bueno dijiste que no porque decías que eran 122… no sé que número de divisiones puedan ser, divisiones "n", dices que para divisiones "n" aquí va a llegar al 2 y aquí va a llegar al 1. Y luego dices que para divisiones "m" aquí va a llegar al 3 y aquí al 0.5, si te fijas como que ya no creció lo mismo, bueno ya no creció y disminuyó lo mismo… ¿entonces qué va a pasar? ¿se puede esto? Porque me dijeron que iba creciendo 0.16, por cada 16 que aumentabas iba creciendo 0.1 o iba disminuyendo 0.1.
Mane: es que no sé como decirle porque en una aumenta 3 y en una aumenta 14 y hasta allá abajo ya aumentó a 16.
…
Barby: dice que los inferiores valen 3 y los superiores dice que valen la mitad.
Ely: pero los superiores es desde aquí hasta acá.
Mane: ya no se puede, ya no se puede porque aquí llegamos al punto que cuando yo tomé los 16, las 16 unidades entonces tanto acá iba a cambiar como acá iba a cambiar, entonces aquí a lo mejor aumentó 56 (escribe 1.56) y acá 1.58 y ya va a llegar a un lugar hasta donde se van a cruzar y van a quedar a tope.
Ely: ¿cómo a tope?
Mane: o sea que uno va a quedar igual que el otro, o sea el que era superior va a quedar igual que el que era inferior y van a quedar del mismo tamaño.
Ely: ¿y cuál será ese tope?
Mane: puede ser el 1.57.
Ely: ¿por qué el 1.57?
Mane: porque… unos van para abajo y otros van para arriba.
Ely: pero ¿Por qué no en uno por ejemplo? ¿Por qué dices 1.57 y por qué no 1?
Mane: ¿por que 1.57?
Barby: ¿te basaste en esto o por qué? (señala el 1.5708 de la respuesta a la primer pregunta).
Mane: pues no sé.
Barby: ¿o por qué?
Mane: ah si es cierto. Porque este es el resultado del área del semicírculo que nos pidieron, de la mitad del círculo… sí, por decir sumándolos los dos es el círculo completo, entonces nada más tomando la mitad de los cuadrados que estamos ocupando para uno solo…
Ely: entonces a ver ¿nos explicas ya resumidito?
…
Mane: no son resultados que deba de decir así nada más de decirlos al tanteo sino debo demostrarlo, pero no sé cómo explicarlo. O sea allá me dio la mitad de un círculo y me salió ese resultado y acá con otra cosa muy diferente que fue fuera de esa pregunta ¿no?, o a lo mejor si venía pero ¿cómo va a salir esto?
Ely: ¿qué nos explicaste aquí? Para que escuchen tus compañeras y me digan ellas que opinan.
Mane: a si, que nosotros estábamos trabajando con la mitad del círculo y también en la pregunta uno nos habían pedido la mitad del círculo y entonces los rectángulos como eran superiores e inferiores de primero nos daban resultados que no, ¿cómo diré?, ya nos daban el resultado del círculo

completo pero para poderlo saber necesitábamos llegar a un punto donde los sumáramos como para no hacer tanto enredijo sumar esta cantidad y esta cantidad y obtener el área del círculo, la mitad más la mitad.

Ely: ¿qué opinan?

Mane: conforme a los estos superiores e inferiores.

Barby: es que es lo mismo porque aquí no ocupamos tantas divisiones (señalando el resultado que obtuvieron en el pregunta uno).

Mane: es que aquí con puras divisiones.

Barby: pero sería la conclusión de que es lo mismo allá a esto (señalando la tabla y el 1.5708).

Mane: también se puede por este camino.

Ely: ¿también se puede por este camino? ¿qué opinan?. Dicen los compañeros, a ver si entendí ustedes me dicen, sacar la mitad del área del círculo es eso, pero si hacemos muchas divisiones nos va a salir eso acá ¿eso es lo que están diciendo?

Barby: si.

Ely: ¿y cuántas divisiones necesitan?

Mane: 122.

Ely: porque la siguiente pregunta era esa, ¿y ustedes me contestan?

Liz: 90.

Ely: 90, ellos dicen 122, argumenta tu respuesta ¿por qué dicen que 90?

Liz: no sé.

Ely: ¿y la última pregunta?

Liz: no la contestamos.

Ely: ok aplauso para el equipo.

Referencias

Arcos, Q. J. I. (2008). *Cálculo infinitesimal para estudiantes de ingeniería*, Toluca, Estado de México: Editorial Kali.

Arcos, Q. J. I., Guerrero, M. M. L., Sepúlveda, L. A. y García, P. J. R. (2007). *Desarrollo Conceptual del Cálculo*, Toluca, Estado de México: Editorial Kali.

Azcárate, G. C. y Deulofeu, P. J. (1996). *Funciones y gráficas*, Madrid, España: Editorial Síntesis.

Blázquez, S. y Ortega, T. (2001). *Los sistemas de representación en la enseñanza del límite*, Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, número 3, pp. 219-236.

Cornu, B. (1994). Limits. En: Tall, D. (Eds.) *Advanced Mathematical Thinking*, (pp. 153-166). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publichers.

Courant, R. y Robbins, H. (2006). *¿Qué son las matemáticas?*, México: Fondo de Cultura Económica.

Engler, A., Vrancken, S., Hecklein, H., Müller, D. y Gregorini, M.I. (2007). *Análisis de una propuesta didáctica para la enseñanza de límite finito de variable finita*, Revista Iberoamericana De Educación Matemática, número 11, 113-132.

Finkel, Meir (2010). *La realidad multidimensional del conocimiento.* Disponible en: http://www.e-learningsocial.com/article.php?article_id=417

Hagelgans, N. L., Reyolds, B. E., Schwingendorf, K., Vidakovic, D., Dubinsky, E., Shahin, M., Wimbish Jr. G. J. (Eds.). (1995). *A Practical Guide to Cooperative Learning in Collegiate Mathematics*. Mathematical Association of America. NW, Washington, DC. MAA Notes Number 37.

NCTM (2000). Principles and Standards for School Mathematics. National Council of Teachers of Mathematics. Reston, VA.

Pegg, J., Tall. D. (2010). “The Fundamental Cycle of Concept Construction Underlying Varius Theorical Frameworks”. En: Sriraman B, Enghish L. (Eds.) *Theories of Mathematics Education, Seeking New Frontiers*, (pp. 171-206). Springer en Verlag Berlin Heidelberg

Sepúlveda, A., Santos T.M. (2006). “Desarrollo de episodios de comprensión matemática que exhiben estudiantes de bachillerato en procesos de resolución de problemas”. En *Revista Mexicana de Investigación Educativa*, número 31, pp. 1389-1422, Octubre-Diciembre de 2006.

Stewart, I. (1998). Cambio. En: Steen, L. (Eds.) *La enseñanza agradable de las matemáticas*, (pp. 193- 227). México: Limusa.

Tall, D. (2010). *A sensible approach to the Calculus*. University of Warwick. United Kingdom, de la www.warick.ac.uk/staff/David.Tall