UNIVERSIDAD MICHOACANA DE
SAN NICOLÁS DE HIDALGO

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO-MATEMÁTICAS
Mat. Luis Manuel Rivera Gutiérrez
MAESTRÍA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

EL EMPLEO DE LOS NÚMEROS FRACCIONARIOS DE LOS NIÑOS QUE INGRESAN A SECUNDARIA

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE
MAESTRA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

PRESENTA
MARGARITA LOEZA CÁRDENAS

ASESOR
DR. ÁNGEL HERNÁNDEZ RAMOS

MORELIA, MICHOACÁN, MAYO DE 2013

DEDICATORIAS.

A FERNANDO:

Compañero de mi vida, que siempre ha estado a mi lado brindándome su amor, comprensión y estímulo para la realización de mis metas.

A MIS HIJOS:

Fernando y Ulises, motivo de mi superación y dedicación.

A MIS PADRES:

Ubaldo Loeza Ramírez y Margarita Cárdenas Ledesma, con profundo amor y respeto porque gracias a su ejemplo, esfuerzo y perseverancia me enseñaron el amor hacía la vida.

A MI HERMANO Y HERMANAS:

Arcelia, Maricela, Mariela, Ubaldo, Rosa, Patricia, Rubí y Verónica, por apoyarme y acompañarme en cada proyecto que emprendo.

A MI ASESOR:

Ángel Hernández Ramos, por su ayuda para la realización de este proyecto y por brindarme su amistad.

A MIS MAESTROS:

Armando Sepúlveda López, Roberto García Pérez y María de Lourdes Guerrero Magaña, por su apoyo y por compartir conmigo sus conocimientos.

ÍNDICE.

Presentación:

El presente estudio comprende una exploración de los aprendizajes logrados por los niños que ingresan a secundaria acerca de los números fraccionarios, tomando como referente los *aprendizajes esperados* de los números fraccionarios en 5° y 6° grados de educación Primaria (SEP, 2009). El estudio se realiza con una muestra de estudiantes de nuevo ingreso a la educación Secundaria, a los que se les pidió que resolvieran ejercicios y actividades sobre fracciones, propuestos en los bloques de los programas de estudio para 5º y 6º grados de Primaria (SEP, 2009). Los resultados muestran logros y limitaciones en los aprendizajes sobre el empleo de los números fraccionarios. El estudio se realizó en un momento de transición de la reforma 2009 (RIEB 2009), por lo que los estudiantes de la muestra, iniciaron su educación Primaria, de 1º a 5º grado, con el plan 1993, mientras que el 6º grado lo terminan con el plan 2009.

Justificación

En México, la Secretaria de Educación Pública (SEP), inicia una reforma en el sistema educativo nacional de manera discontinua; Preescolar (2004), Secundaria (2006), Bachillerato (2008) y Primaria (2009). Es hasta el 2012 que se plantea una Reforma Integral de la Educación Básica (RIEB) caracterizada por promover el enfoque llamado ***por competencias*** que evidentemente ha sido incluido influido por un marco globalizador, sobre todo en el aspecto de las evaluaciones.

El inicio de la enseñanza de las fracciones constituye una de las mayores responsabilidades del nivel básico; sin embargo, se reconoce que esta tarea no es simple y exige un esfuerzo del docente por conocer las dificultades que enfrenta el niño y tener un buen dominio de las fracciones y sus operaciones.

Diferentes investigadores han analizado las dificultades que se presentan en el aprendizaje de las fracciones (Kieren, 1976; Behr *et al*; 1992). Centrándose en los diferentes significados que implica el concepto y muestran algunas de las razones sobre las dificultades de su aprendizaje, ya algunos de los resultados de tales investigaciones han sido tomados en cuenta en las reformas curriculares, por ejemplo, las dificultades en la comprensión de los significados de las operaciones de producto y división de fracciones en el nivel Primaria, produce la traslación de tales operaciones al nivel Secundaria; y, a cambio, proporcionar al estudiante un mayor número de experiencias sobre los significados de las fracciones y sus operaciones de suma y resta, a través de la resolución de problemas. Sin embargo, sus diferentes usos y operaciones cuando resuelven problemas, sigue siendo una dificultad no superada por la mayoría de los estudiantes del nivel básico y ello se refleja hasta los niveles de educación medio superior y superior, como ha sido mostrado por estudios locales (Sepúlveda y García, 1994). Por otra parte, en recientes estudios realizados por el Instituto Nacional de Evaluación Educativa (INEE), a través de la prueba ENLACE en su versión 2007-2008, reporta que el 82.4% de los estudiantes de nivel Primaria en México se encuentra en un nivel *insuficiente-elemental*; sólo resuelve problemas donde las tareas se presentan directamente (SEP, 2012; p. 17).

El problema de investigación

Aunque los resultados obtenidos por estudiantes mexicanos, en evaluaciones nacionales e internacionales, son muy bajos, ellos han logrado ciertos aprendizajes sobre los números fraccionarios y sus operaciones, producto de la instrucción en su educación Primaria; que son los que emplean cuando enfrentan situaciones y problemas que los requieren. Así, cuando los estudiantes ingresan a la Secundaria el profesor sólo recibe como sus antecedentes académicos, los datos de un índice bajo de respuestas correctas en su examen de ingreso.

Ahora bien, la reforma de la educación básica en educación Primaria (SEP 2009) considera las competencias matemáticas como elemento central de este proyecto; sin embargo, por lo general los profesores están lejos de ponerlo en práctica en el estado de Michoacán, entre otros, por cuestiones político sindicales.

Ante esta reforma para la educación Primaria, surgen preguntas como las siguientes:

¿Cómo se propone la enseñanza de las fracciones, en la actual reforma (SEP, 2009)?

¿Qué modificaciones se proponen respecto a la reforma anterior (SEP, 1993)?

En ese escenario, se hace un estudio exploratorio de los aprendizajes de los números fraccionarios iniciados en el nivel Primaria, con el siguiente problema de investigación:

¿Los aprendizajes esperados para los números fraccionarios en los programas de estudio del nivel Primaria (SEP, 2009) fueron logrados por los estudiantes que ingresan a la secundaria?

De acuerdo a la revisión curricular de 5º y 6º grados de Primaria, en nuestro estudio emplearemos resolución de problemas como un aspecto común de los dos planes de estudio revisados. En el plan 1993, *resolución de problemas* fue presentado como el "enfoque para la enseñanza de las matemáticas", mientras que en el plan 2009 se hace énfasis enunciando *resolución de problemas* como una de las competencias matemáticas que es importante desarrollar en el nivel básico.

Objetivos

- Realizar un estudio exploratorio sobre los aprendizajes de los números fraccionarios, logrados por los estudiantes que ingresan a Secundaria, cuando resuelven problemas o realizan actividades, tomando como referente los *aprendizajes esperados* de 5° y 6° grados de su educación Primaria.
- Contar con una visión de los aprendizajes y el empleo de los números fraccionarios de los niños que ingresan al nivel secundaria.

Preguntas de investigación

Las preguntas de investigación que guían esta tesis son:

1. ¿Los estudiantes que ingresan a secundaria han logrado los *aprendizajes esperados*, en cuanto a resolver problemas que contemplen el empleo de números fraccionarios, como los que son propuestos en los libros de texto de la SEP de la reforma 2009?

2. ¿De acuerdo a los *aprendizajes esperados* para los números fraccionarios, en Primaria, qué logros se observan en los niños que ingresan a secundaria?

3. ¿De acuerdo a los *aprendizajes esperados* para los números fraccionarios, en Primaria, qué dificultades muestran?

Organización del documento

El documento está organizado de la siguiente manera: en el Capítulo 1 se hace una exposición acerca de las fracciones en la escuela, tomando en cuenta investigaciones realizadas en México y el extranjero. Ante la circunstancia de la transición a la reforma actual (SEP 2009); en el Capítulo 2, realizamos una revisión curricular de los planes 1993 y 2009 de la SEP, para detectar los cambios propuestos para la enseñanza de los números fraccionarios, dando así respuesta a las preguntas: ¿Cómo se propone que se enseñe el tema de las fracciones, en la actual reforma (SEP, 2009)? ¿Qué modificaciones se proponen respecto a la reforma anterior (SEP, 1993)? En el Capítulo 3 mostramos el proceso metodológico para el diseño de nuestros instrumentos de investigación, basándonos en la correspondencia *aprendizaje esperado-actividad propuesta*. En el Capítulo 4, mostramos y comentamos los resultados obtenidos. Finalmente en el Capítulo 5 exponemos un análisis global de los resultados, así como nuestras conclusiones, centradas en las preguntas de investigación planteadas.

CAPITULO 1.

Las fracciones y su enseñanza en la escuela Primaria

Sin duda los números fraccionarios, su enseñanza y aprendizaje toman un lugar relevante para la educación matemática; ya desde hace tiempo, diversos educadores se han dado cuenta de su trascendencia en la formación de los estudiantes. El presente capítulo inicia con la presentación de algunas citas históricas en el desarrollo de la noción de fracción; posteriormente se muestra la manera como se introduce esta noción de manera formal como Número Racional. Así mismo también se hace una exposición acerca de las fracciones; significados y operaciones en la escuela, tomando en cuenta investigaciones realizadas en México y el extranjero.

1.1 Antecedentes

Se considera que los egipcios (1650 A.C.) fueron los primeros en usar las fracciones; aquellas de la forma $\frac{1}{n}$ con $n \in N$, o las que pueden obtenerse como combinación de ellas. Es decir, utilizaron fracciones de la unidad de los tipos $\frac{1}{n}$ y $\frac{k}{n}$, con $k < n$, con $k\ y\ n$ naturales; con ellas conseguían hacer cálculos fraccionarios de todo tipo.

El papiro de Amhes contiene inscripciones que comprueban que resolvían diferentes problemas, tales como la de repartición de panes, el sistema de construcción de las pirámides y las medidas utilizadas para estudiar el planeta tierra.

Por su parte, los babilonios desarrollaron un eficaz sistema de notación fraccionaria que permitió hacer aproximaciones decimales verdaderamente sorprendentes. Esta evolución y simplificación del método fraccionario, permitió el desarrollo de nuevas operaciones que ayudaron a la comunidad matemática, de siglos posteriores, a hacer cálculos de, por ejemplo, raíces cuadradas.

También se sabe que los chinos conocían bien las operaciones con fracciones, a tal grado que hallaban el mínimo común denominador de varias fracciones, utilizando para ello procedimientos de carácter decimal.

Además los griegos mostraron grandes conocimientos sobre las figuras geométricas, las relaciones entre sus elementos que las componen y sus áreas. Para ahondar en el tema de semejanza de triángulos y construcciones geométricas, desarrollaron un completo tratado sobre proporcionalidad, contenido en el libro V de los elementos de Euclides, que bien podría verse actualmente como un tratado avanzado de aritmética.

Básicamente, la fracción surge en dos contextos uno de medida y otro de reparto.

En el siglo VI d.C. fueron los hindúes quienes establecieron la expresión de fracción y las reglas de sus operaciones, pero ellos no escribían la raya horizontal entre ambos números, dicho signo se debe a los árabes.

El nombre de fracción se lo debemos a Juan de Luna, que tradujo al latín en el siglo XII, el libro de aritmética de Al- Juarizmi.

De Luna empleó la palabra “fractio” para traducir la palabra árabe “al – Kasr” que significa quebrar, romper.

¿Qué son los números racionales?

Definición de número racional.

Cualquier número que se puede expresar como razón de dos enteros $\frac{a}{b}$, donde $b \neq 0$, se le llama número racional. El conjunto de los números racionales se simboliza con $\mathbb{Q}$.

(Smith, *et al*; 2001)

Construcción de los números racionales.

- Consideremos las parejas de números enteros (a, b), donde $b \neq 0$. $\frac{a}{b}$ denota a (a,b). A a se le llama numerador y a b se le llama denominador. En general al conjunto de estos números se le denota por $\mathbb{Q}$, de la siguiente forma:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \right\}$$

Definición de suma y multiplicación en $\mathbb{Q}$

- Se define la suma $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$

- Se define la multiplicación $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$

Relaciones de equivalencia y orden en $\mathbb{Q}$

- Se define la equivalencia $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ cuando $ad=bc$

- Los racionales positivos son todos los $\frac{a}{b}$ tales que $ab>0$

- Los racionales negativos son todos los $\frac{a}{b}$ tales que $ab<0$

- Se define el orden $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$ cuando $ad-bc>0$

Notación

- Los números de tipo $\frac{-a}{b}$ y $\frac{a}{-b}$ son denotados por $-\frac{a}{b}$

- Las sumas de tipo $\frac{a}{b} + \frac{-c}{d}$ son denotadas por $\frac{a}{b} - \frac{c}{d}$

- $\frac{a}{b}\left(\frac{c}{d}\right)$ denota a $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d}$

- Todo número $\frac{p}{1}$ se denota simplemente por p.

Propiedades de la suma y multiplicación

La suma en $\mathbb{Q}$ es conmutativa, esto es: $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{c}{d}+\frac{a}{b}$

- La suma en $\mathbb{Q}$ es asociativa, esto es: $\frac{a}{b}+\left(\frac{c}{d}+\frac{p}{q}\right)=\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\right)+\frac{p}{q}=\left(\frac{a}{b}+\frac{p}{q}\right)+\frac{c}{d}$
- La multiplicación en $\mathbb{Q}$ es asociativa, esto es: $\frac{a}{b}\times\left(\frac{c}{d}\times\frac{p}{q}\right)=\left(\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}\right)\times\frac{p}{q}$
- La multiplicación se distribuye en la suma, esto es: $\frac{a}{b}\times\left(\frac{c}{d}+\frac{p}{q}\right)=\left(\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}\right)+\left(\frac{a}{b}\times\frac{p}{q}\right)$

Existencia de neutros e inversos

- Para cualquier número racional: $\frac{a}{b}$se cumple que $\frac{a}{b}+\frac{0}{1}=\frac{a}{b}$
- Entonces $\frac{0}{1}$ es el *neutro aditivo* de los racionales y se le denota por 0.
- Para cualquier número racional: $\frac{a}{b}$ se cumple que $\frac{a}{b}\times\frac{1}{1}=\frac{a}{b}$ entonces $\frac{1}{1}$ es el *neutro multiplicativo* de los racionales y se le denota por 1.
- Cada número racional: $\frac{a}{b}$ tiene un inverso aditivo $\frac{-a}{b}$ tal que $\frac{a}{b}+\frac{-a}{b}=0$
- Cada número racional: $\frac{a}{b}$ con excepción de 0 tiene un inverso multiplicativo $\frac{b}{a}$ tal que $\frac{a}{b}\times\frac{b}{a}=1$

Equivalencias notables en $\mathbb{Q}$

- $\frac{ca}{cb}=\frac{a}{b}, si\ c\neq 0\ y\ b\neq 0$
- $\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{a+b}{c}$
- $\frac{-a}{b}=\frac{a}{-b}=-\frac{a}{b}$
- $\frac{0}{a}=\frac{0}{b}=o, a\neq 0\ y\ b\neq 0$
- $\frac{a}{a}=\frac{b}{b}=1, a\ y\ b\neq 0$

Los números Enteros en $\mathbb{Q}$

- Si *p* es un número entero entonces existe el número $\frac{p}{1}$ que equivale a *p* y mantiene todas sus propiedades de entero. Es decir, se define
- $\mathbb{I}_{\mathbb{Q}}: \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}, \mathbb{I}_{\mathbb{Q}}(p) = \frac{p}{1}$

Fracciones mixtas

Cada número racional $\frac{p}{q}$ se puede expresar de forma única como el producto de $u\left(A\frac{a}{b}\right)$ donde

- A es un entero no negativo, es decir $A \in \mathbb{Z}, A \geq 0$
- $\frac{a}{b}$ es un racional irreducible no negativo menor que uno. Se expresa como $mcd(a, b) = 1, 0 \leq a < b$
- *u* es una unidad. Es decir $u = \pm 1$

Las reglas en esta notación son:

- $A\frac{a}{b}$ se denota $A + \frac{a}{b}$
- $-A\frac{a}{b}$ se denota $-A - \frac{a}{b}$

Los números decimales como una extensión de los racionales:

Sea D aquel conjunto de números racionales de la forma: $\frac{a}{10^n}$, con n ∈ $\mathbb{Z}$. D es por lo tanto un subconjunto de los Racionales.

Cada elemento $\frac{a}{10^n}$, se acostumbra escribir en forma usual, con base 10 y poniendo un punto a *n* lugares del extremo derecho, por ejemplo:

$\frac{637}{10^2}$=6.37, también $\frac{637}{10^3}$=0.637

Lo que equivale a utilizar la notación: 10^{-n}=$\frac{1}{10^n}$=$0.\underbrace{000\cdots0}_{n}1$

El conjunto D es cerrado para la suma y el producto, esto es, para cualesquier par de elementos de D, por ejemplo

$$A. a_1 a_2 \cdots a_n = x$$

$$B. b_1 b_2 \cdots b_n = y$$

$$(x + y) \in D$$

$$(x)(y) \in D$$

Cárdenas, Lluis (1987)

De igual manera a cada número de esta forma le corresponde un punto en la recta numérica.

Esta notación fue una creación como hemos visto atribuible a diversas civilizaciones. Así también su aprendizaje implica a nivel individual ciertas dificultades, algunas de las cuales serán comentadas en el apartado siguiente.

1.2 Las fracciones en la escuela

La enseñanza de las fracciones en la escuela es uno de los quehaceres educativos más difíciles de llevar a cabo por los profesores del nivel básico, en particular en la escuela Primaria. Diversas evaluaciones realizadas en este nivel de estudios, muestran que gran parte de los estudiantes no logran aprender dicho concepto.

Se advierte que uno de los aspectos que influye en esta situación desalentadora, es el hecho de que muchos docentes no dominan el tema y lo enseñan dando mayor importancia a la parte operativa o de cálculo y dejan de lado los significados. Así los números fraccionarios son presentados a los estudiantes como aquellos que tienen algoritmos para operarse (suma y resta primeramente) y como si esto fuera su aspecto principal, sin considerar ejemplos de problemas de reparto, comparación, medición y transformación de medidas, lo cual ayudaría en gran medida a la comprensión de las fracciones.

Además los estudiantes necesitan ciertas ideas de repartición, equivalencia, conservación de área, etc., para que puedan darle un sentido adecuado a la simbología y a las reglas o algoritmos; de otra manera, privilegiar la operatividad trae como consecuencia que verán que un aprendizaje sólo les funciona en el contexto escolar y no como herramienta para abordar situaciones problemáticas.

Tradicionalmente las fracciones se abordan antes de la enseñanza de los números decimales. Las fracciones se enseñan de situaciones concretas, mediante la relación parte todo; mientras que los números decimales se estudian dando mayor importancia a la notación, con la creencia que los estudiantes ya dominan el significado de las fracciones.

Sin embargo, uno de los problemas más relevantes en la comprensión de los números decimales, es la identificación de la parte decimal como una porción o parte de la unidad. Una de las posibles razones que establece Brown (1981) es el uso cotidiano del sistema monetario, donde la parte de la unidad suele leerse como un número entero sin relación con una unidad concreta.

En Dickson *et al*. (1991) se argumenta que no hay razón alguna para que la enseñanza no invierta su orden tradicional y se comience con los decimales, aprovechando herramientas como la calculadora; además de que los niños ya tendrán conocimientos sobre ciertas fracciones.

1.2.1 Sus significados

Una de las áreas en las matemáticas elementales de mayor complejidad es el de las fracciones; ello se refleja por el hecho de que las fracciones se pueden ver con varios significados.

En Toluk y Middleton (2001), comentan cinco formas en las que se pueden pensar las fracciones: *relación parte-todo*, *cociente*, *medida*, *operador* y *razón*, las cuales son útiles para comprender la complejidad del concepto, pero no son categorías excluyentes pues en un solo problema, una fracción podría presentarse como dos o más de los anteriores significados.

Las fracciones describen una *relación parte-todo* cuando una unidad, o totalidad, se descompone en partes iguales y la fracción indica una o varias de estas partes. Este es el significado más elemental de una fracción; los niños aprenden a identificar en una figura —círculo, rectángulo y otras— una parte sombreada correspondiente a una fracción unitaria (un medio, un tercio, un cuarto, etc.), después a reconocer y tomar varias de estas partes.

El significado de las fracciones como *cociente* ocurre cuando se identifican las relaciones entre una situación de división y una fracción como representación de su cociente; de manera simbólica:

El cociente de la división $a \div b$ es igual a la fracción a/b
para toda a, b en los enteros y $b \neq 0$

Este significado se asocia a las situaciones de reparto equitativo (por ejemplo, interpretar a/b como repartir *a* [galletas] entre *b* [niños]); sin embargo, estas situaciones no son suficientes para explicar ese significado. En efecto, el significado abarca otras situaciones y otros esquemas; en especial, cuando se asocia a las situaciones de división entre enteros y después a la división entre racionales.

Toluk y Middleton (2001) hicieron un estudio sobre la construcción del significado de las fracciones como cociente por parte de niños de 5º grado. Con base en sus observaciones, proponen el esquema de la Figura 1.1, en el que se representan conexiones entre significados de las fracciones y divisiones, que culmina en la construcción del significado de una fracción como cociente.

El significado *de cociente como número entero* ocurre cuando los niños piensan que el resultado de una división es un entero, con un posible residuo mayor que cero, así como que una división tiene sentido cuando el *dividendo* es más grande que el *divisor*. El significado de *fracción como un reparto equitativo,* se da al dividir unidades en partes proporcionales. Aunque los niños son capaces de encontrar soluciones a estas situaciones, cuando se les pide que las escriban, no lo hacen en forma de fracción. Al principio, las situaciones que tienen sentido para los niños son aquellas cuyo resultado es menor que la unidad, porque no conciben las situaciones de reparto equitativo como un caso de división, aun cuando sean capaces de encontrar el cociente en términos de fracciones que dividen una unidad.

El significado *de cociente fraccional* ocurre cuando los niños escriben en forma de fracción la solución de problemas de división en contextos de reparto.
El *esquema de división como fracción* se presenta cuando se anticipa el cociente de una situación de división, sin utilizar ningún procedimiento algorítmico; los niños llegan a hacerlo después de que son capaces de simbolizar la solución de situaciones de reparto con una fracción menor que uno. El esquema se resume en un razonamiento como el siguiente: "si cualquier cantidad *a* se divide en *b* grupos iguales, entonces el cociente es a/b".

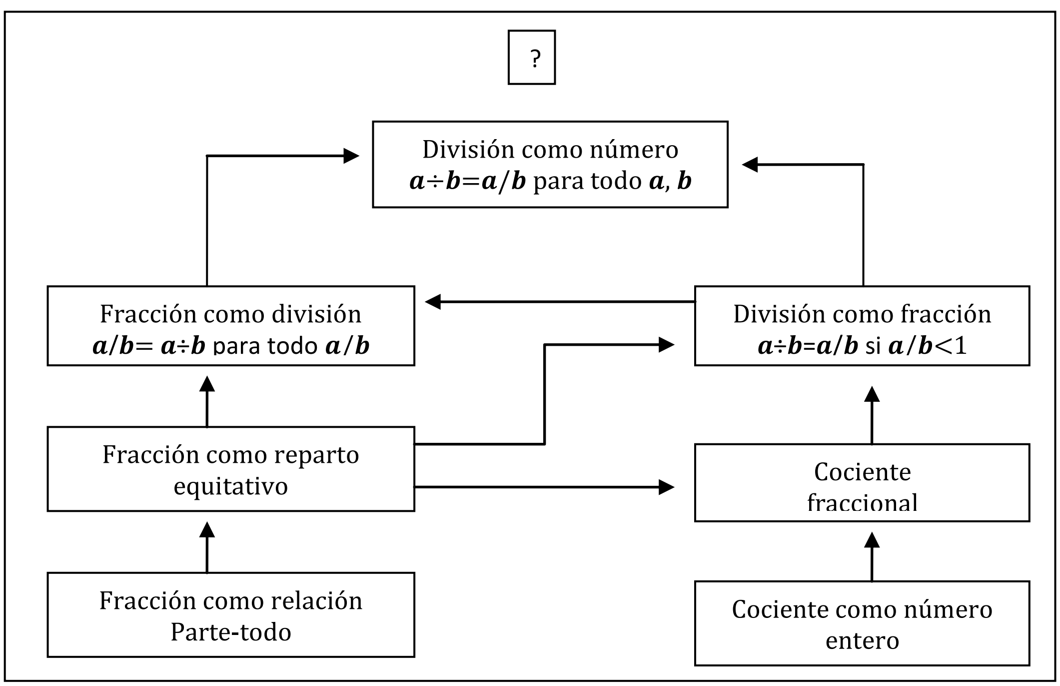


Figura 1.1 Progresión de la construcción del significado de fracción como cociente (Toluk y Middleton, 2001).

Finalmente, el *significado de división como número,* ocurre al concebir una división como fracción y viceversa; esto implica reconocer las divisiones con dividendo mayor que divisor como fracciones impropias y fracciones propias, a manera de divisiones con dividendo menor que el divisor.

La interpretación de las fracciones como *medida* se da cuando se representa el número de unidades y partes de la unidad de una clase (longitud, área, volumen, tiempo, etc.) que cubren o aproximan una cantidad de la misma clase. La coordinación de actividades de medida con el uso de fracciones promueve conexiones entre dos importantes áreas de las matemáticas. En un estudio cuyo objetivo era promover la comprensión de la noción de medida con niños de 5º grado, Lehrer, Jaslow y Curtis (2003) describen una secuencia prototípica para desarrollar la noción de medida de longitud. En un primer paso, se trató de medir algo caminando; es decir, determinar una longitud a partir de cuántos pies del niño cabían; luego se sustituyó el pie por una tira de papel y se midió; en un tercer paso, se hicieron subdivisiones para lograr una mejor aproximación de la medida del objeto; en este paso entró la fracción como una noción necesaria para continuar el proceso. La actividad siguió de manera que se presentaron operaciones con fracciones; por ejemplo, el producto de fracciones sencillas se presentó cuando se habló de: “la mitad de la mitad de la unidad es un cuarto de la unidad”. El contexto de actividades de medida es ideal para la profundización de la noción de fracción.

Las fracciones vistas como *operador* se presentan cuando éstas actúan para modificar un estado o situación. Behr *et al*. (1993) indican que los problemas que usan las fracciones como operador suelen requerir soluciones de varios pasos; para lo cual ofrecen el siguiente ejemplo:

> Muchas marcas de chicles venden su producto en paquetes de 5 piezas por paquete. Juana tiene 8 paquetes. María tiene 3/4 partes de lo que tiene Juana. ¿Cuántos paquetes tiene María? ¿Cuántas piezas tiene María?

> Lo que tiene María se puede ver como una transformación de lo que tiene Juana, indicada por el número 3/4; éste opera sobre los ocho paquetes.

Las fracciones juegan el papel de *razón* cuando funcionan para poner en relación dos cantidades. La comparación de cantidades relativas son características de las fracciones como razón; por ejemplo, Lamon (1993) investigó las estrategias que los niños desarrollan para resolver el siguiente problema, aun antes de estudiar el tema de fracciones.

> Las niñas se reparten tres pizzas y los niños una, ¿quién come más pizza, una niña o un niño?

Lamon comenta el caso de Kuri, uno de los niños, que resolvió el problema diciendo que a las niñas les toca más.

> *Porque los niños reparten una pizza entre tres; si las niñas hicieran lo mismo, si ellas repartieran esta pizza entre tres (marca una pizza y cubre a tres niñas) y esta otra entre tres (marca otra pizza y cubre otras tres niñas) entonces la última niña podría comerse una pizza entera; así que a ellas les toca más* (p. 141).

Además, menciona que el procedimiento espontáneo de Kuri consiste en tomar una de las razones como unidad y ésta le sirve para reinterpretar la otra fracción; de hecho Kuri responde la pregunta: “¿cuántas ‘unidades’ de 3:1 caben en 7:3?”. Muchos ejemplos interesantes de las fracciones como operador y razón, se presentan en situaciones de razonamiento proporcional.

1.2.2 Equivalencia y orden

Dificultades de las nociones de equivalencia y orden.

A nivel manipulativo, resulta más fácil la construcción de fracciones equivalentes a partir de una elemental, que la obtención de la fracción irreducible a partir de otra equivalente dada. Así, por ejemplo, en la fracción 8/12 se “ve” la unidad dividida en doce partes de las que se eligen 8 y no 3 de las que se eligen dos.

Los modelos que se suelen utilizar para introducir la noción de equivalencia, son los de área y conjunto; no está claro cuál de los dos resulta más eficaz. Cabe mencionar que los problemas de ordenación no son exclusivos de las fracciones, ya que también son extensivos a los decimales.

El problema de equivalencia está estrechamente relacionado con el orden, Dickson *et al*. (1991) argumentan que los niños no toman conciencia de que, por su naturaleza numérica, cada fracción ocupa un lugar en la recta y que, por lo tanto, dadas dos fracciones: o son equivalentes (ocupando el mismo lugar) o una ha de ser mayor que la otra. Sólo en casos muy elementales (fracciones unitarias o de igual denominador) son capaces de establecer una relación correcta.

Entre los razonamientos que pueden encontrarse se destacan los siguientes:

a) Comparar por complemento a la unidad (5/8 es 3/8 menor que 1 mientras que 2/3 es 1/3 menor que 1) mediante un uso implícito de la equivalencia (1/3 es 3/9 que es menor que 3/8).
b) Mediante una fracción “intermedia” cuyo numerador y denominador estén, respectivamente, entre los numeradores y denominadores dados López Real (1997) aborda este método para la obtención de una fracción entre dos dadas que no siempre conduce a un resultado correcto.
c) Comparar usando sólo los numeradores o los denominadores.

d) Extender el algoritmo de la equivalencia (producto de medios igual al producto de extremos) a desigualdades:

(a/b<c/d sii ad<bc).

El segundo de los métodos descritos pone de relieve otra dificultad estrechamente relacionada con el orden: encontrar una fracción entre dos dadas.

1.2.3 Operaciones:

Operaciones con fracciones y decimales.

Conviene separar los aspectos computacionales de los referentes al significado de las operaciones. Los primeros suelen ser introducidos sin haber asegurado los segundos y ello suele causar un buen número de problemas escolares, como dice Contreras (2011): “en general no soy partidario de esta opción, salvo en casos en donde se aconseje empezar por los aspectos computacionales y entremezclar ambos, tales como necesidad de aplicaciones inmediatas o problemas de aprendizaje”.

En cuanto al significado de la adición y sustracción de fracciones, es fácil de relacionarlas con la medición; mientras que el producto y cociente, se asimilan mejor en el ámbito de los operadores (SEP, 2009). Hay un debate sobre qué modelos o contextos utilizar para introducir las fracciones en la escuela; si no se adopta la postura de utilizar diversos contextos se corre el riesgo de confundir unas operaciones con otras. En el ámbito de los decimales la adición y sustracción, gracias al soporte que supone la notación decimal como extensión del sistema de numeración utilizado en los números enteros, es fácil de ver a través de los modelos de volumen, área y longitud; sin embargo, para el producto y el cociente no valen las ideas de adición reiterada o reparto (agrupamiento), respectivamente, usados con los números enteros. Así, mientras el producto puede verse como área o como razón, el cociente ha de verse como inverso del producto.

La forma usual de abordar el significado de la suma de fracciones es mediante la representación de área; inicialmente ésta es más fácil que su alternativa a través de la recta numérica. Sin embargo presenta algunas dificultades como: si se usa más de un diagrama, la solución puede referirse a la superficie total; cuando el total supera una unidad entera se pierde el referente de la unidad.

Estos problemas se evitan con el modelo de la recta numérica, que tiene la ventaja de poseer estrechos vínculos con los usuales instrumentos de medida.

Debido a lo anterior algunos autores (Dickson *et al.,* 1991) consideran que si en la educación Primaria, no se encuentran medios significativos para ilustrar las operaciones con fracciones y decimales, la enseñanza de los algoritmos puede significar una pérdida de tiempo, pudiendo sustituirse los procedimientos de cómputo por la calculadora. Contreras (2011) argumenta, incluso, que en ausencia de situaciones ricas en significado, el conocimiento del algoritmo es necesario. Sin embargo, recomienda hacer los cálculos con la calculadora cuanto los alumnos:

Son capaces de hacer una estimación del resultado; y cuando utilizan los algoritmos de forma correcta con fracciones elementales y de uso cotidiano.

Admitir varias representaciones (gráficas o simbólicas) de un mismo valor numérico, suele ser conflictivo para los estudiantes de Primaria, ya que regularmente sólo perciben la equivalencia en situaciones concretas; sin embargo, esto es un aspecto clave para la comparación de fracciones (orden), para convertir fracciones en decimales o porcentajes y para operar con las fracciones.

La capacidad de percibir dos o más fracciones como equivalentes e identificar y reconocer la importancia de la fracción irreducible como representante de ellas, parece estar ligada a las experiencias sobre modelos concretos en un proceso que Post *et al*. (1985) denominan “traslación coordinada de las representaciones”; de lo icónico a lo simbólico y viceversa.

1.3 Las fracciones decimales

Características de los números decimales.

1) Son un subconjunto de los números racionales que tienen al menos una expresión en forma de fracción decimal.

2) Las fracciones decimales son las que se pueden expresar con un numerador entero y un denominador que es potencia de 10; ejemplo $\frac{3}{10}, \frac{2}{1000}$, son fracciones.

3) Este tipo de fracciones pueden representarse utilizando escrituras que llevan punto decimal, dando lugar a las expresiones decimales finitas que, en la escuela, es común que reciban el nombre de decimales.

Una de las dificultades presentes en el tema de los números decimales es que éste no es enlazado con las fracciones, la razón según Ávila (2008) y Contreras (2011), es que los profesores tienen poca información y conocimientos matemáticos y didácticos sobre el tema; además que en Primaria el tema de números decimales se enfoca más a su escritura y a la utilización del punto decimal dejando de lado aspectos conceptuales.

Los decimales son muy utilizados en la vida diaria y hasta se ha llegado a pensar, que en la práctica desplazan a los números fraccionarios, debido a su disponibilidad y su uso en calculadoras y computadoras (Centeno, 1997, p.17).

Hay otro tipo de fracciones que no son decimales (por ejemplo 1/3) que no puede ser expresada mediante una expresión decimal finita, este tipo de fracciones son llamadas expresiones decimales periódicas infinitas (en el caso de 1/3=0.33333…..) y lo común es que en la escuela no se dé la diferencia entre estas expresiones.

En nuestro Sistema Educativo, el estudio de los números decimales se inicia en 4º grado, basándose en el carácter racional de los decimales, manejo de las relaciones de orden y su ubicación en la recta numérica; orienta al descubrimiento de su naturaleza densa y al significado de las operaciones con decimales, etc.

(Ávila, Balbuena, Fuenlabrada y Waldegg, 2000). Se pretende que los decimales sean comprendidos como números distintos de los naturales con sus propiedades que los hacen característicos.

Por ejemplo:

> Las operaciones con punto aparecen luego de trabajarse las fracciones con denominador 10 y 100 sobre la recta numérica (Ávila, Balbuena, Fuenlabrada y Bollás, 1994).
>
> Se trata de equivalencia entre decimos, centésimos, milésimos y la unidad, con apoyo de recursos visuales. (Ávila, Balbuena, Fuenlabrada y Waldegg, 2000).

En la tradición escolar, se trabajaba nada más el uso del punto decimal y su escritura y de esta manera los números pierden su carácter conceptual, como ocurre con las fracciones para introducirse utilizando como modelo el sistema métrico decimal (m, dm, cm y mm), que después se hace corresponder con un problema de reglas de representación.

Con frecuencia se relaciona con la unidad, decimos, centésimos y milésimos. Más tarde se elimina la referencia de las unidades métricas, sin justificación alguna.

Para lograr la comprensión de los decimales, es fundamental poner en relieve su origen racional y sus propiedades, considerando las escrituras con punto sólo como una de las dos formas de representación posibles de dichos números.

Así el problema de la enseñanza y el aprendizaje de los decimales en la escuela primaria se relaciona con:

- Su carácter racional.
- Su doble representación; y

- la necesidad de hacer la ruptura con la lógica de los naturales para comprender los decimales.

Estas cuestiones no son consideradas en el enfoque centrado en las escrituras con punto.

En conclusión los números decimales son un subconjunto de las fracciones y regularmente esto no es tomado en cuenta por los profesores cuando abordan el tema en las aulas, teniendo como consecuencia que los alumnos no logren la vinculación entre los números decimales y las fracciones.

La gama de significados más restrictiva corresponde sin duda a los porcentajes que, aunque estrechamente vinculados a fracciones y decimales, son casi exclusivamente asimilables a la fracción como operador o mediante la comparación de dos cantidades. Cuando su significado está asociado al de operador las dificultades suelen surgir en la identificación del valor sobre el que operar y en que calcular un porcentaje de un valor dado es, en realidad multiplicar una fracción decimal (de denominador 100) por un número (la mayoría de las veces entero). Suele ser también común encontrar dificultades a la hora de saber qué porcentaje se ha aplicado cuando se conocen los valores inicial y final o cuál es el valor inicial, conocidos el porcentaje y el valor final, situaciones muy comunes en la vida cotidiana, una de las maneras en la que se utiliza la matemática, en este caso vinculada a la economía, la tenemos en el uso de los porcentajes, ya que una persona no es capaz de elegir la mejor oferta cuando los productos no tienen envases de la misma capacidad.

CAPÍTULO 2

Revisión curricular de los contenidos de las fracciones en educación Primaria

Presentación

En la última década se han dado una serie de cambios curriculares en los diferentes niveles educativos de nuestro país: en 2004 en el nivel Preescolar; en 2006 la Reforma a la Educación Secundaria (RES); en 2008 la Reforma Integral al Bachillerato (RIB); y en 2009 la Reforma Integral de la Educación Básica (RIEB), incluyendo algunas modificaciones a la educación Preescolar.

En este capítulo se presenta una revisión de los planes y programas de estudio para la educación Primaria, de acuerdo a la Secretaría de Educación Pública, en sus versiones 1993 y 2009, centrando la revisión en el estudio de las fracciones, como antecedente de nuestra investigación.

Este capítulo consta de dos apartados; en el primero exponemos brevemente las intenciones de aprendizaje de los números fraccionarios del nivel Primaria del plan 1993 (SEP, 1993), mientras que en el segundo apartado exponemos dichas intensiones, pero del plan curricular 2009 (SEP, 2009)

2.1 Enfoque y propósitos de las matemáticas en educación Primaria (SEP, 1993)

La orientación que se adopta pone mayor énfasis en la formación de habilidades para la resolución de problemas y el desarrollo del razonamiento matemático, a partir de situaciones prácticas. Se presenta resolución de problemas como el motor del aprendizaje matemático.

De manera más específica, los programas proponen el desarrollo de:

- La capacidad de utilizar las matemáticas como un instrumento para reconocer, plantear y resolver problemas.
- La capacidad de anticipar y verificar resultados.
- La capacidad de comunicar e interpretar información matemática.
- La imaginación espacial.
- La habilidad para estimar resultados de cálculos y mediciones.
- La destreza en el uso de ciertos instrumentos de medición, dibujo y cálculo.
- El pensamiento abstracto a través de distintas formas de razonamiento, entre otras, la sistematización y generalización de procedimientos y estrategias.

Plan y Programas de Estudio 1993. Educación Básica Primaria (p. 8)

2.1.1 La enseñanza de las fracciones en Primaria (SEP, 1993).

Los contenidos de matemáticas fueron organizados en seis ejes:

- Los números, sus relaciones y sus operaciones.
- Geometría.
- Medición.
- Tratamiento de la información.
- Proceso de cambio.
- Predicción y el azar.

En el primer eje *los números, sus relaciones y sus operaciones,* se aborda el estudio de las fracciones, lo cual inicia hasta tercer grado. Su enseñanza comienza, por enfatizar el uso verbal en situaciones familiares como medios cuartos y octavos. Se propone acercar al niño a situaciones que los lleven a dividir uno o más enteros en partes iguales. Así también se propone la enseñanza de las fracciones en los contextos de reparto y medición e iniciar nociones como la equivalencia de fracciones.

En el documento Planes y Programas de Estudio 1993, para la educación Primaria, se presenta un listado de contenidos, de los cuales los correspondientes a números fraccionarios y números decimales son los siguientes:

3° grado

Números fraccionarios

- Introducción de la noción de fracción en casos sencillos (por ejemplo, medios, cuartos y octavos) mediante actividades de reparto y medición de longitudes.
- Comparación de fracciones sencillas representadas con material concreto, para observar la equivalencia entre fracciones.
- Representación convencional de las fracciones.
- Planteamiento y resolución de problemas que impliquen suma de fracciones sencillas, mediante manipulación de material.

4º grado

Números fraccionarios

- Fraccionamiento de longitudes para introducir nuevas fracciones (por ejemplo, tercios, quintos y sextos).
- Diversos recursos para encontrar la equivalencia entre algunas fracciones
- Fracciones con denominador 10, 100 y 1000.
- Comparación de fracciones manteniendo constante el numerador o el denominador.
- Ubicación de fracciones en la recta numérica.
- Planteamiento y resolución de problemas que impliquen suma y resta de fracciones con denominadores iguales.

- Algoritmo convencional de la suma y la resta de fracciones con igual denominador.

Números decimales

- Lectura y escritura de cantidades con punto decimal hasta centésimo, asociado a contextos de dinero y medición.
- Planteamiento y resolución de problemas de suma y resta de números decimales asociados a contextos de dinero y medición.

5º grado

Números fraccionarios

- Fraccionamiento de longitudes para introducir nuevas fracciones (por ejemplo, séptimos y novenos).
- Utilización de diversos recursos para mostrar la equivalencia de algunas fracciones.
- Planteamiento y resolución de problemas con fracciones cuyos denominadores sean 10, 100 y 1000.
- Actividades para introducir las fracciones mixtas.
- Ubicación de fracciones en la recta numérica.
- Planteamiento y resolución de problemas de suma y resta de fracciones con denominadores iguales y diferentes, mediante la equivalencia de fracciones.
- Algoritmo de la suma y de la resta de fracciones utilizando equivalencias.
- Empleo de la fracción como razón y como división, en situaciones sencillas.
- Cálculo de porcentajes mediante diversos procedimientos.

Números decimales

- Lectura y escritura de números decimales, asociados a diversos contextos.
- Comparación y orden en los números decimales.
- Equivalencia entre décimos, centésimos y milésimos.
- Planteamiento y resolución de problemas diversos de suma y resta de números decimales hasta milésimos.
- Planteamiento y resolución de problemas de multiplicación de números decimales.
- Planteamiento y resolución de problemas de división de números naturales con cociente hasta centésimos.
- Planteamiento y resolución de problemas de división de números decimales entre números naturales.
- Uso de la calculadora para resolver problemas.

6º grado

Números fraccionarios

- Ubicación de fracciones en la recta numérica.
- Equivalencia y orden entre las fracciones.
- Planteamiento y resolución de problemas de suma y resta de fracciones mixtas.
- Conversión de fracciones mixtas a impropias y viceversa.
- Simplificación de fracciones.
- Planteamiento y resolución de problemas de suma y resta de fracciones con denominadores distintos mediante el cálculo del denominador común.

Números decimales

- Lectura y escritura de números decimales.
- Ubicación de números decimales en la recta numérica.

- Escritura en forma de fracción de números decimales; escritura decimal de algunas fracciones.
- Planteamiento y resolución de problemas de suma y resta con números decimales hasta milésimos.
- Planteamiento y resolución de problemas de multiplicación de números decimales hasta milésimos.
- Planteamiento y resolución de problemas de división de números decimales entre números naturales.
- Expresión de porcentajes en números decimales.
- Uso de la calculadora para resolver problemas.

Estos contenidos se desarrollan, en los libros de texto a través de cinco bloques por grado escolar. Cada bloque contiene un grupo de actividades, para cada una de las cuales se especifica los contenidos que comprende, como podemos ver en la Figura 2.1, que corresponde al bloque 1 del libro de 4° grado de matemáticas (SEP, 1994) en el cual, por ejemplo, se observa en los renglones 4 y 10 las actividades y los contenidos que corresponde a fracciones.

Bloque 1

1. Camino al mercado	Lectura de croquis y mapas	8
2. El mercado	El kilogramo; tablas de proporcionalidad directa.	10
3. El sorteo	Lectura, escritura y ordenación de números.	12
4. La tienda del pueblo	as fracciones $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}\ y\ \frac{1}{16}$ en situaciones de medición de longitudes.	14
5. La rueda de la fortuna	Problemas de suma y resta.	16
6. En partes iguales sin doblar	Uso de rectas paralelas para dividir un segmento en partes iguales.	18
7. ¿Se puede responder?	Análisis de la información que proporciona una ilustración.	20
8. Águila o sol	Registro de los resultados de un juego de azar.	22
9. Un montón de lentejas	Noción de decenas de millar y estrategias de conteo	24
10. Cuerdas resistentes	Fracciones del metro.	26
11. La huerta de Don Fermín.	Diversos procedimientos para resolver problemas de división.	28
12. Fotografías de la ciudad	Elaboración de planos.	30
13. El circo	Unidades de tiempo.	32
14. El vivero de Don Fermín	La multiplicación mediante arreglos rectangulares.	34
15. Artesanías	Figuras simétricas.	36
16. Las calles de la ciudad	Lectura de planos; paralelas y perpendiculares.	38
17. La camioneta de Don Fermín	Distintos procedimientos para resolver problemas de división	40
18. Hilaza para el contorno	Figuras de igual contorno y diferente área.	42
19. Lección de repaso		44
20. Juegos y actividades		46

Figura 2.1. Bloque 1, Matemáticas. Cuarto grado (SEP 1994)

En la Tabla 2.1, mostramos los temas de los números fraccionarios para educación Primaria, por bloques para 3° y 4° grado, y en la Tabla 2.2 para 5° y 6° grado; los cuales están fuertemente relacionados con el eje de *Medición.*

Tabla 2.1 Bloques de contenidos relacionados con números fraccionarios para 3º y 4º grados de Primaria (SEP, 1993)

TERCER GRADO		CUARTO GRADO	
Bloques	Contenidos	Bloques	Contenidos
I	Uso de las fracciones para expresar medidas de superficie. Uso de las fracciones para expresar medidas de longitud. Fracciones como un conjunto discreto.	I	Las fracciones ½, ¼, 1/8 y 1/16 en situaciones de medición de longitud. Fracciones del metro.
II	Fracciones como resultado de un reparto.	II	Las fracciones en situaciones de partición. Lectura y escritura de números; valor posicional de las cifras. Las fracciones en situaciones de reparto. Comparación de fracciones.
III	Fracciones como medida de capacidad. Fracciones de cantidades discretas y continuas. Uso de la escritura convencional. Fracciones del metro.	III	Problemas de suma y resta. Comparación de fracciones. Fracciones del kilogramo. Fracciones equivalentes.
IV	Fracciones de cantidades continuas y discretas. Noción de equivalencia de fracciones. La fracción como parte de unidad o como parte de que cabe en cierto número de veces. Situaciones de reparto exhaustivo y no exhaustivo. Comparación entre fracciones y con números enteros. Primeras aproximaciones a la suma de fracciones mediante el cálculo mental.	IV	Relación entre decimos, centésimos y milésimos. Procedimientos informales para sumar fracciones.

V	Solución y comparación de escrituras aditivas con fracciones.	V	Operaciones con números naturales, fracciones y decimales. Situaciones de proporcionalidad con fracciones y decimales. Suma y resta con decimales.

Tabla 2.2 Bloques de contenidos, relacionados a números fraccionarios para 5º y 6º grados de primaria (SEP, 1993)

QUINTO GRADO		SEXTO GRADO	
Bloques	Contenidos	Bloques	Contenidos
I	Representación de los números decimales en la recta numérica.	I	
II	Fracciones equivalentes del tipo 1/8, 2/16, 3/5, 6/10. Fracciones con denominador de potencias de diez.	II	Las fracciones: Lectura y escritura equivalencia y orden. Resolución de problemas de fracciones en contexto de reparto. Uso de fracciones mixtas en la medición de longitudes; Resolución de problemas de suma y resta de fracciones mixtas.
III	Comparación de los números decimales de la recta numérica. Suma de números decimales. Unidad en pulgadas. Escalas.	III	Conversión de fracciones impropias a mixtas, comparaciones, problemas de suma y resta mediante su equivalencia. Procedimiento para obtener fracciones equivalentes, simplificación Conversión de fracciones mixtas a impropias y viceversa Resolución de problemas con fracciones en diversos contextos de suma y resta de fracciones con diferente denominador. Resolución de problemas de suma y resta de fracciones mixtas.
IV	Suma de fracciones comparando con una unidad 1m, 1 Kg. Porcentajes. Repartos.		Lectura y escritura, en forma de fracción y viceversa, ordenamiento y comparación. Ubicación en la recta. Resolución de problemas de suma y resta que impliquen dos o más operaciones. Resolución de problemas de tanto por ciento.

V	Proporcionalidad. Porcentajes.		Tanto por ciento y porcentajes. Resolución de problemas de porcentaje. Resolución de problemas de suma y resta de fracciones. Resolución de problemas de multiplicación de decimales y división de decimales mediante uso de calculadora y el cálculo mental, con información insuficiente o con datos irrelevantes.

Como puede apreciarse en las dos tablas, la enseñanza de los números fraccionarios recibe especial atención de 3° a 6° grado de Primaria, distribuyendo los temas en bloques que cubren los diferentes significados de las fracciones.

2.2 Enfoque y propósitos para el aprendizaje de las matemáticas en educación Primaria (SEP, 2009)

Los propósitos explícitos para el estudio de las matemáticas, en los Programas del Plan de Estudios 2009, son los siguientes:

Mediante el estudio de las matemáticas en la educación básica se busca que niños y jóvenes desarrollen:

Una forma de pensamiento que les permita expresar matemáticamente situaciones que se presentan en diversos entornos socioculturales.
Técnicas adecuadas para reconocer, plantear y resolver problemas.
Una actitud positiva hacia el estudio de esta disciplina y de colaboración y crítica, tanto en el ámbito social y cultural en que se desempeñen como en otros diferentes.

Los contenidos que se estudiarán en la Educación Primaria en el plan 2009 se reduce, de seis que tenía el plan 1993, a tres ejes temáticos que ahora coinciden con los de la Secundaria: Sentido numérico y pensamiento algebraico; Forma, espacio y medida; y manejo de la información.

Sentido numérico y pensamiento algebraico alude a los fines más relevantes del estudio de la aritmética y el álgebra.

Encontrar el sentido del lenguaje matemático, ya sea oral o escrito.

La exploración de propiedades aritméticas que en la secundaria podrían ser formuladas y validadas con el algebra.

La puesta en juego de diferentes formas de representar y efectuar cálculos.

Forma, espacio y medida encierra los tres aspectos esenciales alrededor de la geometría y la medición.

Ayudar a entender a los alumnos la diferencia entre los objetos teóricos de la geometría y los que pertenecen al espacio físico real.

Generar condiciones para que los alumnos empiecen a efectuar un trabajo con características deductivas.

Introducir el vocabulario necesario para formular propiedades.

Mediante las actividades que se plantean en el eje Manejo de la información los alumnos tendrán la posibilidad de:

Formular preguntas, recabar, organizar, analizar, interpretar y presentar la información que da respuesta a dichas preguntas.

Utilizar recursos tecnológicos cuando resulten apropiados.

Vincular el estudio de las matemáticas con el de otras asignaturas.

La organización de los contenidos en los libros de texto es por bloques, en cada uno de los cuales se enuncian los conocimientos y habilidades que se espera que los niños logren y cada bloque se ha organizado de manera que los alumnos vayan teniendo acceso gradualmente a contenidos cada vez más complejos y, a la vez, puedan establecer conexiones entre lo que ya saben y lo que están por aprender.

A lo largo de su educación Primaria, como resultado del estudio de las matemáticas se espera que los alumnos:

- Conozcan y sepan usar las propiedades del sistema decimal de numeración para interpretar o expresar cantidades en distintas formas.
- Utilicen de manera flexible el cálculo mental, la estimación de resultados o las operaciones escritas con números naturales, fraccionarios o decimales para resolver problemas aditivos o multiplicativos. En este caso queda fuera de nivel el estudio de la multiplicación y división de números fraccionarios.
- Conozcan las propiedades básicas de triángulos, cuadriláteros, polígonos regulares, prismas y pirámides.
- Usen e interpreten diversos códigos para ubicar lugares.
- Sepan calcular perímetros, áreas o volúmenes en distintos contextos reales y expresar medidas en distintos tipos de unidad.
- Emprendan procesos de búsqueda, organización y análisis de la información que responda a preguntas planteadas por sí mismos o por otros.
- Identifiquen conjunto de cantidades que varíen proporcionalmente y sepan calcular valores faltantes y porcentajes en diferentes contextos.
- Sepan reconocer experimentos aleatorios comunes, sus espacios muestrales y una idea intuitiva de su probabilidad.

Una característica de este plan es la de promover el desarrollo de competencias. Las competencias matemáticas que se pretende desarrollar son:

- Resolver problemas de manera autónoma.
- Valorar procedimientos y resultados.
- Comunicar información matemática.

- Manejar técnicas y recursos tecnológicos.

Describimos de manera específica cada una de estas competencias.

Resolver problemas de manera autónoma. Implica que los alumnos sepan identificar, plantear y resolver diferentes tipos de problemas o situaciones. Por ejemplo, problemas con solución única, otros con varias soluciones o ninguna solución; problemas en los que sobren o falten datos; problemas o situaciones en los que son los alumnos quienes plantean las preguntas. Que puedan probar la eficacia de un procedimiento al cambiar uno o más valores de las variables o el contexto del problema para generalizar procedimientos de resolución. (p. 81)

Además, se precisa que resolver problemas de manera autónoma, implica que los alumnos se hagan cargo del proceso de principio a fin, considerando que el fin no es sólo encontrar un resultado, sino comprobar que es correcto, tanto en el ámbito de los cálculos como en el de la solución real, en caso de que se requiera.(p. 87)

Comunicar información matemática. Comprende la posibilidad de que los alumnos expresen, representen e interpreten información matemática contenida en una situación o en un fenómeno. Requiere que se comprendan y empleen diferentes formas de representar la información cualitativa y cuantitativa relacionada con la situación; se establezcan relaciones entre estas representaciones; se expongan con claridad las ideas matemáticas encontradas; se deduzca la información derivada de las representaciones, y se infieran propiedades, características o tendencias de la situación o del fenómeno representado.

Validar procedimientos y resultados. Consiste en que los alumnos adquieran la confianza suficiente para explicar y justificar los procedimientos y soluciones encontradas, mediante argumentos a su alcance que se orienten hacia el razonamiento deductivo y la demostración formal.

Manejar técnicas eficientemente. Esta competencia se refiere al uso eficiente de procedimientos y formas de representación al efectuar cálculos, con o sin apoyo de calculadora.

Muchas veces el manejo eficiente o deficiente de técnicas establece la diferencia entre quienes resuelven los problemas de manera óptima y quienes alcanzan una solución insuficiente. Esta competencia no se limita al uso mecánico de las operaciones aritméticas, apunta principalmente al desarrollo del significado y uso de los números y de las operaciones, que se manifiesta en la capacidad de elegir adecuadamente la o las operaciones al resolver un problema, en la utilización del cálculo mental y la estimación, en el empleo de procedimientos abreviados o atajos a partir de las operaciones que se requieren en un problema, y en evaluar la pertinencia de los resultados. (p. 82)

2.2.1 Los aprendizajes esperados

Queremos hacer énfasis en este término que debe ser entendido como: *los conocimientos y habilidades que todos los alumnos deben alcanzar como resultado del estudio de cada bloque*. Estos se presentan al principio de cada bloque y constituyen una guía para que el docente alcance metas parciales del curso.

Se valora de la siguiente forma:

> Los aprendizajes esperados […] permiten comprender la relación multidimensional del Mapa Curricular y articulan el sentido del logro educativo como expresiones del crecimiento y desarrollo de la persona, como ente productivo y determinante del sistema social y humano.
>
> (SEP, 2011; p. 42)

2.2.2 Los números fraccionarios en el plan de estudios de educación Primaria (SEP, 2009)

Los aprendizajes esperados para los números fraccionarios se manifiestan en la siguiente declaración:

> Utilicen de manera flexible el cálculo mental, la estimación de resultados o las operaciones escritas con números naturales, fraccionarios o decimales para resolver problemas aditivos o multiplicativos.

Se deja para el nivel Secundaria el estudio de la multiplicación y división de números fraccionarios.

El estudio de los números fraccionarios, al igual que en el plan curricular anterior (SEP, 1993), inicia en 3° grado de Primaria. A continuación se muestra en la tabla 2.3 para 3° y 4° grados, los aprendizajes esperados y los bloques en que se ubican.

Ahora los bloques son presentados en términos de aprendizajes esperados; con la convicción que de esta manera éstos adquieren mayor relevancia.

Tabla 2.3. Aprendizajes esperados para los números fraccionarios en 3º y 4º grados de Primaria del Plan 2009

	TERCERGRADO		CUARTO GRADO
Bloques	Aprendizajes esperados	Bloques	Aprendizajes esperados
I		I	
II		II	Resuelve problemas donde determine que fracción es una parte dada de una magnitud. Resuelve problemas que emplean sumas o restas de fracciones.
III	Resuelve problemas de reparto cuyo resultado sea una fracción de la forma $\frac{m}{2^n}$.	III	Compara fracciones con el mismo denominador o denominador. Calcula mentalmente productos y cocientes de números naturales y de fracciones.

IV	Identifica escrituras equivalentes con fracciones. Identifica la división para resolver problemas de reparto o de agrupamiento.	IV	Resuelve problemas donde aplica fracciones o cantidades enteras o determina que fracción es una parte dada de una cantidad.
V	Identifica y representa gráficamente fracciones. Resuelve problemas sencillos al sumar o restar fracciones.	V	Resuelve problemas que implican multiplicar fracciones por un número natural.

Los aprendizajes esperados para 5º y 6º grados de Primaria

Los aprendizajes esperados, se enuncian por bloque en los planes de Estudio (2009) para cada grado. También en los libros de texto, en el índice de cada libro, cada bloque es encabezados por los aprendizajes esperados. Por ejemplo, la Figura 2.2, muestra el bloque II, del libro de 6° grado del plan 2009.

Bloque II

Figura 2.2 Bloque II, Matemáticas. 6° grado (SEP, 2009).

Centramos nuestra atención en los aprendizajes esperados para 5° y 6° grado, que enunciamos en forma completa de acuerdo con los respectivos libros de texto.

Destacamos en negritas los enunciados relacionados con los números fraccionarios.

Matemáticas 5º grado. Libro de texto.

Bloque I.

Aprendizajes esperados.

- **Resuelve problemas en diversos contextos que implican diferentes significados de las fracciones: reparto y medida.**
- Resuelve problemas de conteo usando procedimientos informales.
- Traza triángulos y cuadriláteros con regla y compás.
- Analiza la relación entre perímetro y área e identifica las medidas para expresar cada uno.
- Construye planos de casas o edificios conocidos.
- Calcula el perímetro de diversos polígonos.
- Elabora, lee e interpreta tablas de frecuencias.

Bloque II.

Aprendizajes esperados.

- Resuelve problemas que implican el uso de múltiplos de números naturales.
- **Resuelve problemas que implican establecer las relaciones entre dividendo, divisor, cociente y residuo.**
- Representa, construye y analiza cuerpos geométricos.
- Resuelve problemas que implican leer e interpretar mapas.
- Resuelve problemas que implican conversiones entre múltiplos y submúltiplos de metro, litro y kilogramo.
- Resuelve problemas que implican la identificación, en casos sencillos de un factor constante de proporcionalidad.
- Utiliza intervalos para organizar información sobre magnitudes continuas.

Bloque III.

Aprendizajes esperados.

- Reconoce relaciones entre las reglas de funcionamiento del sistema de numeración decimal oral y de otros sistemas de numeración
- Resuelve problemas de comparación y orden entre números decimales.
- **Ubica fracciones propias e impropias en la recta numérica a partir de distintas informaciones.**
- **Resuelve problemas que implican sumar o restar fracciones (con denominadores diferentes) y decimales.**
- Identifica trazar las alturas de triángulos.
- Resuelve problemas que implican el uso de la fórmula para calcular el área de paralelogramos, triángulos y trapecios, usando el metro cuadrado y sus múltiplos o submúltiplos y las medidas agrarias.
- Resuelve problemas usando el porcentaje como constante de proporcionalidad.
- Determina el espacio muestral de un experimento aleatorio.

Bloque IV.

Aprendizajes esperados

- Resuelve problemas que implican la búsqueda de divisores de un número.
- **Resuelve problemas que suponen multiplicar números fraccionarios y decimales por números naturales.**
- **Resuelve problemas aditivos con números fraccionarios y decimales que impliquen el uso de recursos de cálculo mental.**
- Define y clasifica prismas y pirámides, y comunica sus características.
- Interpreta y construye gráficas de barras.

Bloque V.

Aprendizajes esperados.

- **Resuelve problemas que implican expresar la razón que guardan dos cantidades por medio de fracciones.**
- Ubica números decimales en la recta numérica a partir de distintas informaciones.
- Resuelve problemas que implican dividir un número natural para obtener un cociente decimal.
- Establece relaciones entre operaciones inversas (multiplicación y división) para encontrar resultados.
- Resuelve problemas que implican establecer relaciones entre unidades y periodos.
- Distingue variaciones proporcionales y no proporcionales en diversas situaciones.
- Resuelve problemas que implican reconocer si el promedio es representativo en un conjunto de datos.

Matemáticas 6º grado. Libro de texto.

Bloque I.

Aprendizajes esperados.

- Utiliza distintos métodos para realizar operaciones con números naturales.
- **Usa fracciones para representar cocientes.**
- Interpreta la información presentada en tablas y gráficos para resolver problemas.
- Traza círculos y circunferencias, al igual que sus elementos para resolver problemas.
- Conoce los nombres de distintas rectas y ángulos.

- Resuelve problemas que impliquen describir rutas o calcular distancias en un mapa o croquis.

Bloque II

Aprendizajes esperados.

- **Lee, escribe y compara números naturales y decimales. Conoce el valor de las cifras en función de su posición.**
- Utiliza las propiedades de la división de números naturales al resolver problemas.
- Aplica el factor constante de proporcionalidad para resolver problemas de valor faltante.
- Resuelven problemas que involucran el uso de las medidas de tendencia central (media, mediana y moda).
- Construye prismas y pirámides, y calcula la superficie lateral y total.

Bloque III.

Aprendizajes esperados.

- **Determina, por estimación, el orden de magnitud de un cociente.**
- **Calcula porcentajes y los identifica en distintas expresiones (n de cada 100, fracción, decimal).**
- Analiza los cambios de escala y sus efectos en la interpretación de gráficos.
- Utiliza el primer cuadrante del plano cartesiano como sistema de referencia para ubicar puntos.
- Resuelve problemas que implican conversiones del Sistema Internacional (SI) y del Sistema Inglés de Medidas.

Bloque IV.

Aprendizajes esperados.

- **Ordena, encuadra, compara y convierte números fraccionarios y decimales.**
- **Divide números fraccionarios o decimales entre números naturales.**
- Resuelve problemas de combinatoria que involucren permutaciones sin repetición.
- Resuelve problemas que involucran comparar razones.
- Traza polígonos regulares inscritos en circunferencias o a través de la medida del ángulo interno del polígono.
- Resuelve problemas que implican calcular volumen de prismas mediante el conteo de unidades cúbicas.
- Resuelve problemas que implican usar la relación entre unidades cúbicas y unidades de capacidad.

Bloque V.

Aprendizajes esperados.

- **Usa el divisor común o el múltiplo común para resolver problemas.**
- Utiliza las propiedades de la proporcionalidad para resolver problemas con diferentes unidades de medida.
- Selecciona el modo adecuado de presentar información mediante diagramas y tablas.
- Compara las probabilidades: teórica y frecuencial de un evento simple.

La tabla 2.4 resume los aprendizajes esperados en los números fraccionarios para 5º y 6º grados, por bloque.

Tabla 2.4. Aprendizajes esperados por bloques, 5º y 6º grados de Primaria. Plan 2009

	QUINTO GRADO		SEXTO GRADO
Bloques	Aprendizajes Esperados	Bloques	Aprendizajes esperados
I	-Resuelve problemas en diversos contextos que implican diferentes significados de fracciones reparto y medida.	I	-Usa fracciones para representar cocientes. -Interpreta la información presentada en tablas y gráficos para resolver problemas.
II	Resuelve problemas que implican establecer las relaciones entre dividendo, divisor, cociente y residuo.	II	-Lee, escribe y compara números naturales y decimales. Conoce el valor de las cifras en función de su posición.
III	-Ubica fracciones propias e impropias en la recta numérica a partir de distintas informaciones. Lo toman como herramienta para solucionar problemas. -Resuelve problemas que implican sumar o restar fracciones (con denominador diferente) y decimales.	III	-Determina por estimación el orden de magnitud de un cociente. -Calcula porcentajes y los identifica en distintas expresiones (n de cada 100, fracción, decimal).
IV	-Resuelve problemas que suponen multiplicar números fraccionarios y decimales por números naturales. -Resuelve problemas aditivos con números fraccionarios y decimales que implique el uso de recursos de cálculo mental.	IV	-Ordena, encuadra, compara y convierte números fraccionarios y decimales. -Divide números fraccionarios o decimales entre números naturales.
V	-Resuelve problemas que implican expresar la razón que guardan dos cantidades por medio de fracciones.	V	-Usa divisor común o el múltiplo para resolver problemas.

2.3. Observaciones:

A partir de 3° grado de Primaria se observa en los dos planes de estudio de la SEP 1993 y 2009, un orden en el que se prioriza la enseñanza de los números fraccionarios.

Los programas de estudio del Plan 2009, no mencionan explícitamente, los significados de la fracción (medición, reparto y razón), como se hace en los programas de estudio del Plan 1993, a pesar de que los libros de texto los siguen considerando en las actividades que proponen.

En el Plan 1993 se sigue una presentación por lista de contenidos; sin embargo, en los libros de texto correspondientes se organizan en bloques. Los listados de contenidos del Plan 1993 son más exhaustivos; por ejemplo, en 6° grado, menciona con relevancia los números mixtos: resolución de problemas, operaciones y conversión de números mixtos a fraccionarios y viceversa; detalles que en Plan 2009 no se especifican.

Por otra parte, en el plan 2009 además de presentar los contenidos por bloques, se enuncian los aprendizajes esperados y se precisan las intenciones educativas, lo cual constituye un aspecto fundamental de la reforma. Se remarca que los bloques no deben considerarse en forma rígida.

De la revisión de los Planes y Programas de Estudio se encuentra que un aspecto común de éstos, es la resolución de problemas, con las siguiente diferencia; mientras en el plan 1993, *resolución de problemas* fue presentado como el "enfoque para la enseñanza de las matemáticas", en el plan 2009 se hace énfasis enunciando *resolución de problemas* como una de las *competencias* matemáticas que es importante desarrollar en el nivel básico.

CAPÍTULO 3.

Metodología

Presentación

A partir de la reforma para la educación Primaria (SEP, 2009), una guía importante para la concreción de las intenciones educativas son los *aprendizajes esperados;* estos enuncian los conocimientos y habilidades que los estudiantes deben alcanzar, al finalizar el estudio de los bloques temáticos contenidos en los programas.

En este estudio realizamos una exploración sobre los aprendizajes logrados por los niños que ingresan a Secundaria, a partir de los *aprendizajes esperados* para los números fraccionarios en 5° y 6° grados de educación Primaria. Para ello hemos elegido actividades y problemas propuestos en los libros de texto para el logro de dichos aprendizajes.

El diseño de los instrumentos está influido por dos aspectos sobre las competencias matemáticas para Secundaria:

> El manejo eficiente de técnicas para llevar a cabo procedimientos y formas de representación al efectuar cálculos con números fraccionarios, en nuestro caso, sin apoyo de la calculadora.
>
> La resolución autónoma de problemas; esto es, que los alumnos sepan identificar, plantear y resolver diferentes tipos de problemas o situaciones que implican fracciones (Ibíd., p. 81).

Por medio de la aplicación de las actividades elegidas se espera que las actividades nos muestren las habilidades de los alumnos sobre el manejo de fracciones; tanto en su representación como en los cálculos.

Las actividades elegidas deben de cubrir aspectos fundamentales de los significados de los números fraccionarios, para la educación Primaria: reparto, medición y razón.

De manera más específica, la elección de actividades fue considerando los *aprendizajes esperados* para los números fraccionarios en la educación Primaria:

- El estudiante emplea procedimientos para hacer operaciones de sumas y restas de fracciones, sin usar calculadora.
- El estudiante resuelve problemas en diversos contextos que implican diferentes significados de las fracciones: reparto y medida.
- El estudiante resuelve problemas que implican sumar o restar fracciones (con denominadores diferentes) y decimales.
- El estudiante resuelve problemas que suponen multiplicar o dividir números fraccionarios y decimales por números naturales.
- El estudiante resuelve problemas que implican expresar la razón que guardan dos cantidades por medio de fracciones.
- El estudiante calcula porcentajes y los identifica en distintas expresiones (n de cada 100, como fracción, como decimal).

3.1 La muestra

Participaron 17 estudiantes de nuevo ingreso al nivel Secundaria del “Instituto George Washington”, ubicado en la ciudad de Morelia e incorporado a la Secretaria de Educación Pública en el Estado de Michoacán. Los estudiantes egresan de Primaria e ingresan a Secundaria en el ciclo escolar 2011-2012. Sus características principales son las siguientes:

Los estudiantes, de ambos sexos, son egresados de escuelas Primarias públicas y privadas; sus edades oscilan entre los 11 y 12 años.

Fueron alumnos regulares durante su educación Primaria, ninguno de ellos reprobó alguno de los años escolares durante sus estudios de educación Primaria.

Debido a que la reciente reforma inicia en septiembre de 2009, estos estudiantes habían cursado de 1º a 5º de Primaria con el plan 1993.

Se eligió la muestra de este instituto por la facilidad de acceso a ellos debido a que quien realiza esta investigación labora en ella.

Las actividades seleccionadas fueron, previamente aplicadas a dos estudiantes ajenos a la muestra, graduarlas y ver si eran interpretadas correctamente se aplicaron al inicio del ciclo escolar 2011-2012; una por día.

3.2 Diseño del cuestionario de investigación.

Las actividades fueron seleccionadas de los libros de texto de 5° y 6° grados de Primaria (SEP, 2009), correspondientes a los aprendizajes esperados relacionados a los números fraccionarios.

3.2.1 Muestra de actividades propuestas en los libros de texto para Los aprendizajes esperados.

Primero analizamos las actividades contenidas en los libros de texto, (Anexo I) de las cuales seleccionamos las que a continuación presentamos y comentamos.

Actividad 1: Operaciones con fracciones

La finalidad es obtener un panorama sobre el manejo de procedimientos para realizar operaciones con fracciones de este grupo de estudiantes, sabiendo de antemano que ellos habían trabajado con los libros de texto correspondientes al plan 1993. Aunque en 6° grado trabajaron con los materiales de la reforma (SEP, 2009), no se puede asegurar que haya sido en forma regular.

Así, esta primera actividad consta de una recopilación de operaciones con fracciones, de los textos de 5º y 6º grados de Primaria, y consta de: suma y resta con fracciones de igual y diferente denominador, así también sumas y restas con números decimales; a la derecha se anota la acción que se espera realicen los estudiantes:

NOMBRE DEL ALUMNO: ____Fecha:_____ ***Realiza las siguientes operaciones anotando tu procedimiento en la hoja.***		
a)	$\frac{4}{6}+\frac{3}{6}+\frac{1}{6}=$	Suma de fracciones con igual denominador.
b)	$1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=$	una resta de un entero con dos fracciones
c)	$\frac{4}{3}+\frac{8}{12}=$	sumar fracciones con diferente denominador y cuando éstos son múltiplos
d)	$\frac{5}{2}+\frac{3}{5}=$	sumar fracciones con diferente denominador sin que sean múltiplos
e)	$0.5+0.05=$	sumar números decimales, los estudiantes deben colocar el punto decimal correctamente
f)	$3.456+5.7803=$	sumar números decimales respetando la colocación del punto decimal.
g)	$\frac{14}{16}+\frac{7}{4}=$	sumar fracciones con diferente denominador y considerar que éstos son múltiplos.
h)	$\frac{5}{2}-\frac{3}{7}=$	resten fracciones con diferente denominador sin que éstos sean múltiplos
i)	$\frac{10}{10}-\frac{1}{5}=$	distingan que la primera fracción es un entero
j)	$4.067-3.99=$	resten números decimales, colocando el punto decimal donde corresponda

Actividad 2: Obtengamos el cociente

La actividad es planteada para que *los estudiantes identifiquen y representen con fracciones, situaciones de reparto*.

El problema seleccionado se encuentra en el bloque I del libro de 6° grado (SEP, 2009, p. 12), al cual le agregamos el inciso d), que consiste en realizar una repartición cuando el numerador es menor que el denominador.

Nombre del alumno ______________________________________

Fecha: ____________________________

Contesta el siguiente problema y anota todas tus operaciones en esta hoja.

La tía Juana compra cada domingo 8 manzanas que reparte de manera equitativa entre los sobrinos que la visitan. El antepenúltimo domingo llegaron 8 sobrinos, el penúltimo domingo la visitaron 5, y el último sólo fueron 4.

a) ¿Qué fracción de manzana le tocó a cada niño el antepenúltimo domingo?

b) ¿Qué fracción el penúltimo?

c) ¿Qué fracción el último?

d) El día de su cumpleaños la visitaron 12 sobrinos ¿qué fracción de manzana le tocó a cada uno de ellos?

Figura 1. Actividad 2

Se pretende que los alumnos realicen la representación mediante fracciones de diferentes situaciones de reparto, característica del concepto de número racional, y contempla cuatro casos:

a) Numerador = Denominador

b) Numerador > Denominador

c) Numerador > Denominador (múltiplos)

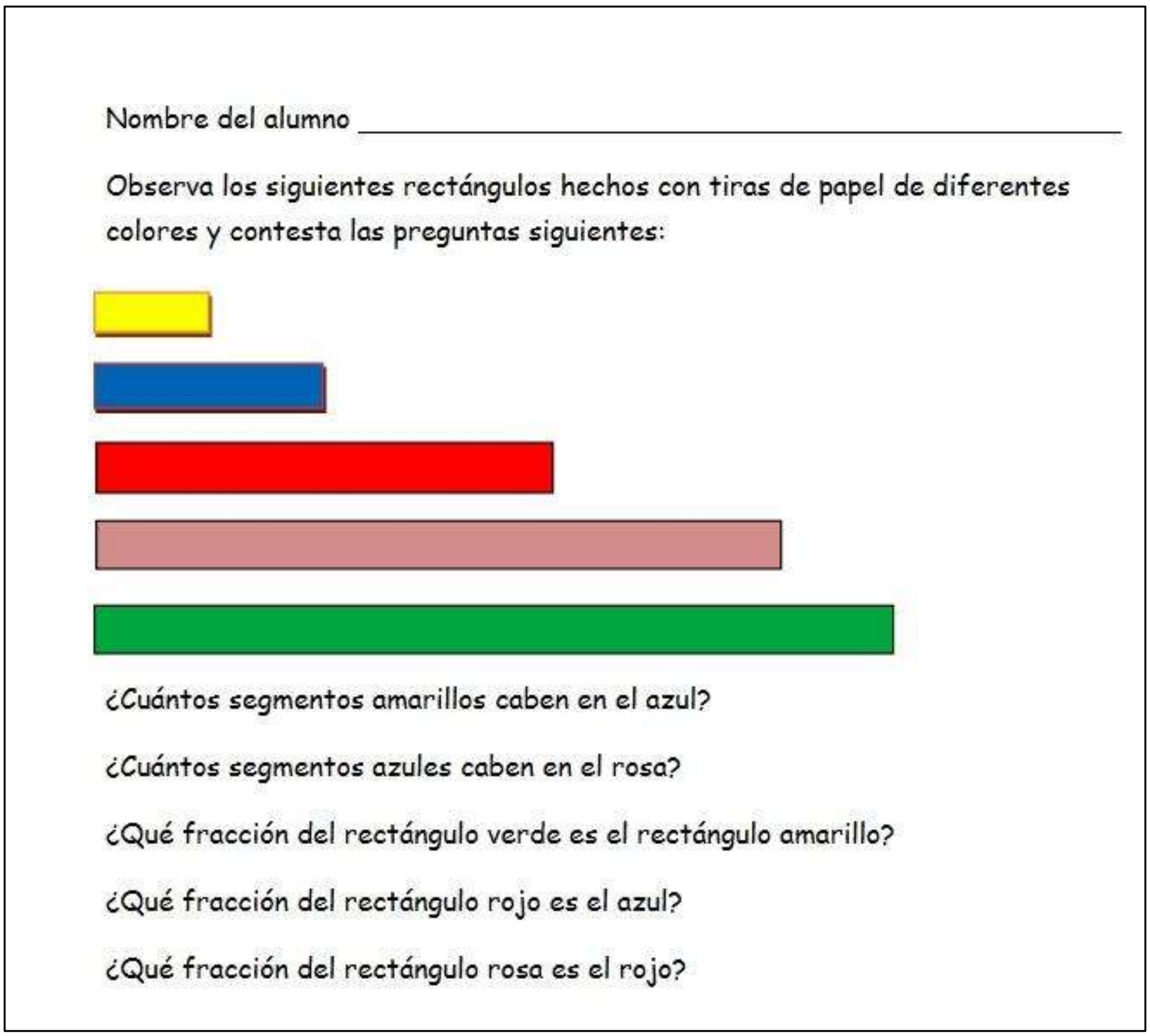
d) Numerador < Denominador

La actividad rediseñada se muestra en la Figura 1.

Actividad 3: Comparando tiras de papel.

En esta actividad se espera *que los alumnos realicen comparaciones* y utilicen las fracciones para representarlas; la actividad se refiere a las comparaciones entre áreas y está propuesta en el libro de texto de 6° grado (SEP, 2009, p. 14), bloque I.

La Figura 2 muestra la actividad y está relacionada con otra de las características del concepto de número racional; la fracción como razón.



Nombre del alumno ___________________________________

Observa los siguientes rectángulos hechos con tiras de papel de diferentes colores y contesta las preguntas siguientes:

¿Cuántos segmentos amarillos caben en el azul?

¿Cuántos segmentos azules caben en el rosa?

¿Qué fracción del rectángulo verde es el rectángulo amarillo?

¿Qué fracción del rectángulo rojo es el azul?

¿Qué fracción del rectángulo rosa es el rojo?

Figura 2. Actividad 3.

Actividad 4 incisos a) y b)

Se espera que los niños usen fracciones y operaciones para resolver problemas. Se plantearon dos problemas que se encuentran en el bloque IV de los libros de 5° y 6° grados, respectivamente.

El primer inciso se encuentra en el libro de 6° grado (p. 124), y lo titulamos: *Repartiendo una fracción de pastel*.

El segundo inciso fue seleccionado del libro de 5° grado (p. 133) y lo titulamos *¿Cuántos kilos de queso vendió?*

Desde 5° grado se enfrenta a los alumnos a situaciones problemáticas de sumas repetidas. Cabe mencionar que en el plan de estudios de Primaria SEP, 2009, no se menciona que la operación de multiplicación sea incluida en este nivel escolar, pero si se proponen actividades donde debe realizarse, como en este caso, sumas repetidas. Tampoco se menciona la división de fracciones, pero se proponen actividades como estas en la cual se divide una fracción por un entero.

Nombre del alumno ____

Fecha: ____

Resuelve los siguientes problemas anotando tus operaciones en esta hoja.

a) Cuándo Raúl y Esperanza llegaron a una fiesta quedaron $\frac{3}{10}$ de pastel, así que se lo dividieron en partes iguales. ¿Qué parte de pastel le tocó a cada uno?

b) Juan vende quesos. El lunes vendió 3 quesos de $\frac{1}{5}$ Kg y 7 quesos de $\frac{1}{4}$ Kg.

¿Cuántos kilogramos de quesos vendió en total?

Figura 3. Problema 4

En el inciso a) divide un número fraccionario entre un número natural, los estudiantes deben ser capaces de repartir una fracción dada de forma equitativa.

En el inciso b) los alumnos deben representar y realizar una suma de fracciones en la primera parte con igual denominador y por último realizar una suma con las fracciones resultantes para dar su respuesta.

Actividad 5: Practicando deportes

Es una actividad del libro de texto de 5° grado de Primaria, relacionada con los bloques III y IV de 5° grado, así como con el bloque V de 6° grado.

Además de haber comprendido el enunciado su resolución requiere realizar operaciones de suma y resta. Tiene estructura de *parte-todo,* en la que algunos estudiantes practican algún deporte y el grupo se considera como un todo.

Nombre del alumno ______________________________________

Fecha: ________________________________

Resuelve los siguientes problemas anotando las operaciones que realices en esta hoja.

a) En un grupo de quinto grado, cada alumno practica sólo uno de tres deportes: $\frac{1}{3}$ del grupo juega futbol, $\frac{1}{2}$ entrena basquetbol y el resto practica natación.

¿Qué fracción del total practica natación?

Figura 5. Actividad 5.

Los alumnos deben representar el problema e implica lo que falta a una fracción para obtener el todo.

Actividad 6: Fracciones en el camino.

Problema seleccionado del bloque I, del libro de texto de 5° grado (SEP, 2009, p. 12).

Actividad que presenta información por medio de un gráfico y una tabla, el estudiante debe interpretar la información y relacionarla con porcentajes y cantidades que provienen de un total.

Se espera que los estudiantes:

-interpreten el significado de la fracción como *parte-todo;*

- interpreten en porcentajes la información, contenida en un *gráfico de pastel*;

- calculen la cantidad que representa un porcentaje de un total; y

- operen con la suma de fracciones.

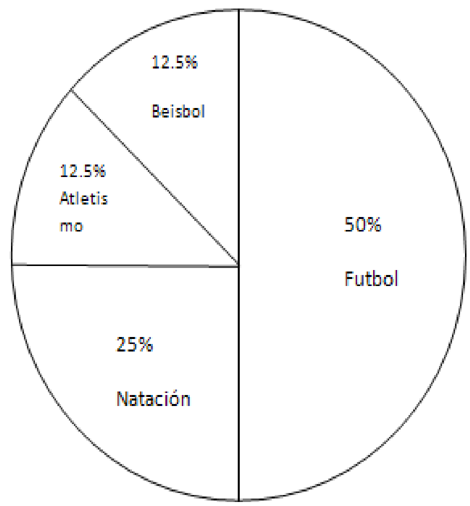
Nombre del alumno ____

Fecha: ___________________________________

La siguiente gráfica muestra la proporción de alumnos de quinto grado que practica diferentes deportes en la escuela Mariano Matamoros.

Completa la siguiente tabla considerando que el grupo está integrado por 32 alumnos.

	Número de alumnos que…	Representación en fracción
Juegan futbol		
Practican Natación		
Juegan Beisbol		
Practican Atletismo		



a) Si juntamos a los que juegan futbol con los que juegan beisbol, ¿qué fracción del total serían?

b) Si juntamos a los que practican natación con los que practican atletismo, ¿qué fracción del total serían?

Figura 6. Actividad 6

Tabla No. 3.1 Relaciones entre actividades y aprendizajes esperados.

Aprendizajes esperados	**Significados de la fracción involucrados**
Actividad 1 *Usar procedimientos para realizar operaciones con fracciones.*	Operaciones.
Actividad 2 *Identificar y representar situaciones de reparto, usando fracciones.*	Uso de la fracción para representar situaciones de reparto.
Actividad 3 *Realizar comparaciones y representarlas con fracciones*.	La fracción como razón.
Actividad 4 *Resolver problemas que involucran la multiplicación, división de números fraccionarios o decimales, por números naturales.*	Repartición, proporción.
Actividad 5 *Resolver problemas que implican sumar o restar fracciones (con diferente denominador)*	Parte-todo.
Actividad 6 Se espera que los estudiantes: -interpretar el significado de la fracción como *parte-todo* -Interpretar la información de porcentajes contenidos en un *gráfico de pastel*. -Calcular la cantidad que representa un porcentaje de un total. -Operar con la suma de fracciones.	Parte-todo.

CAPÍTULO 4

Resultados del estudio

En este capítulo se presentan los resultados obtenidos por los estudiantes referentes en cada una de las actividades, las cuales deben resolverse con lápiz y papel, sin el uso de la calculadora.

Los resultados de la actividad 1 se presentan en dos tablas. En la Tabla 1, nos enfocamos en comentar las respuestas a los reactivos, las características de las respuestas correctas e incorrectas y su relación con las habilidades y así como las deficiencias manifestadas por los estudiantes en lo general. En la tabla 2 se comentan las respuestas, respecto a los logros individuales.

La actividad 1, proporciona información de cada estudiante, respecto a las habilidades para llevar a cabo procedimientos para realizar operaciones con fracciones.

La presentación de los resultados de las actividades 2, 3, 4, 5, y 6, tienen otro formato se cita la actividad con los aprendizajes esperados y en tablas se comenta el trabajo de cada uno de los estudiantes; al final se hacen comentarios generales sobre las dificultades y logros de los estudiantes respecto a los aprendizajes esperados.

Actividad 1.

Consiste de un conjunto de reactivos seleccionados de los libros de texto con la instrucción *“realiza la siguiente operación”,* con fracciones de igual y diferente denominador, así como suma y resta con números decimales.

Esta actividad fue realizada por 16 estudiantes, porque ese día no asistió uno de ellos.

Tabla 4.1 Resultados de la actividad 1. Habilidades de los estudiantes que ingresan a secundaria, para realizar procedimientos operacionales con fracciones.

Reactivo y aciertos	**Caracterización de respuestas correctas de los estudiantes**	**Caracterización de respuestas incorrectas de los estudiantes**
$a)\frac{4}{6}+\frac{3}{6}+\frac{1}{6}=$ 13 respuestas correctas	8 estudiantes expresan el resultado (8/6) sin simplificación, 5 estudiantes lo expresan como número mixto ($1\frac{2}{6}$), además de estos últimos, 3 todavía reducen el resultado a 4/3.	2 estudiantes sumaron el numerador erróneamente 1 estudiante intentó sumar empleando círculos divididos en sextos, pero no pudo concluir.
$b)\ 1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=$ 3 respuestas correctas	1 estudiante lo realiza transformando a fracciones equivalentes. 2 estudiantes realizan la resta de los primeros dos términos, y a sus resultado restan la tercera fracción.	2 estudiantes intentaron convertir las fracciones a equivalentes, pero no lo hacen correctamente. 1 estudiantes sumó las primeras fracciones y luego restó la tercera, pero no lo hace correctamente. 1 estudiante hizo las equivalencias correctamente, pero no concluyó su proceso. 1 estudiante realizó la primera resta correctamente y convirtió a fracción con potencias de diez, pero no paso de manera correcta el denominador en el resultado. 3 estudiantes dieron resultados equivocados, sin mostrar ningún procedimiento. 5 estudiantes no lo intentaron.
$c)\frac{4}{3}+\frac{8}{12}=$ 5 respuestas correctas	5 estudiantes resolvieron convirtiendo a fracciones equivalentes de igual denominador, de los cuales, cuatro expresan el resultado como número mixto.	El error de procedimiento que manifiestan 3 de los estudiantes se puede esquematizar: $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a+c}{b+d}$ El error de uno de los estudiantes se puede esquematizar $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a+d}{b+c}$ 5 estudiantes convierten las fracciones a denominador equivalente pero no modificaron los numeradores. 2 estudiantes no lo intentaron.
$d)\frac{5}{2}+\frac{3}{5}=$ 7 respuestas correctas	7 estudiantes resuelven convirtiendo las fracciones a equivalentes de igual denominador 3 de ellos convierten el resultado a número mixto, 3 lo dejaron como fracción impropia. En un caso el alumno intentó convertir el resultado a número mixto sin lograrlo.	El error de procedimiento que manifiesta uno de los estudiantes se puede esquematizar: $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a+c}{b+d}$. Otro estudiante muestra un error que se puede esquematizar $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a+d}{b+c}$, El error de un estudiante se puede esquematizar $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a+c}{bxd}$ 1 estudiante hizo equivalencias correctas, pero sumo mal los numeradores 1 estudiante convirtió a número mixto la primera fracción, pero no sumo las fracciones restantes correctamente 3 estudiantes dan resultados incorrectos sin mostrar ningún proceso 1 estudiante no lo intentó

$e)\ 0.5 + 0.05 =$ 9 respuestas correctas	9 estudiantes responden correctamente De los cuales 1estudiante convirtió los decimales a fracciones con denominador de potencias de diez	7 estudiantes no colocaron correctamente el punto decimal
$f)\ 3.456 + 5.7803 =$ 8 respuestas correctas	8 estudiantes responden correctamente	1 estudiante realizó la suma de los dígitos, pero no colocó el punto decimal 7 estudiantes colocaron de manera incorrecta el punto decimal
$g)\ \frac{14}{16} + \frac{7}{4} =$ 5 respuestas correctas	2 estudiantes convierten la segunda fracción a fracción equivalente con denominador 16 3 estudiantes multiplicaron los denominadores para convertir las fracciones a equivalentes	El error de procedimiento que manifiestan 3 estudiantes se puede esquematizar: $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a+c}{b+d}$ El error de uno de los estudiantes se puede esquematizar: $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a+d}{b+c}$ 1 estudiante, realizó equivalencias correctas, pero al final no sumó 3 estudiantes hicieron las equivalencias, saben el proceso, su error es operativo. 3 estudiantes no lo intentaron
$h)\ \frac{5}{2} - \frac{3}{7} =$ 7 respuestas correctas	7 estudiantes convierten las fracciones a equivalentes, de igual denominador, al multiplicar los denominadores, ya que estos no son múltiplos, de los cuales 2 estudiantes expresan el resultado a número mixto	El error de procedimiento que manifiestan 3 estudiantes se puede esquematizar: $\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{a-c}{b-d}$ El error de1 estudiante se puede esquematizar $\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{a-d}{b-c}$ 4 estudiantes no lo intentaron 1 estudiante convierte la primera fracción a número mixto, pero no opera correctamente al finalizar
$i)\ \frac{10}{10} - \frac{1}{5} =$ 7 respuestas correctas	3 estudiantes tomaron el mayor denominador, como múltiplo, convirtiendo la segunda fracción en 2/10 4 estudiantes multiplicaron los denominadores para obtener fracciones equivalentes, de igual denominador.	El error de procedimiento que manifiestan 3 estudiantes se puede esquematizar: $\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{a-c}{b-d}$ El error de 1 estudiante se puede esquematizar $\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{a-d}{b-c}$ 5 estudiantes no lo intentaron
$j)\ 4.067 - 3.99 =$ 6 respuestas correctas	6 estudiantes hicieron correctamente la resta	6 estudiantes se equivocan al realizar la resta de los dígitos, pero colocan el punto decimal correctamente 4 estudiantes no lo intentaron

La Tabla 4.2, contiene un resumen de resultados por cada estudiante. Indicamos respuesta correcta con • e incorrecta con x; además agregamos comentarios generales de su trabajo en el cuestionario.

Tabla 4.2. Observaciones a la actividad 1, por estudiante y reactivo.

Nombre	**Reactivos**										**Observaciones**
	a	**b**	**c**	**d**	**e**	**f**	**G**	**h**	**i**	**j**	
Samanta	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	En esta estudiante se observa una actuación eficiente con las fracciones y sus operaciones: emplea equivalencias, números mixtos y lleva los resultados a su forma irreducible.
Noé	•	•	X	•	•	•	•	•	•	•	Usa correctamente las equivalencias, multiplica los denominadores, su error fue al realizar la multiplicación de una de los numeradores en el reactivo c.
Ulises	•	X	•	•	•	•	•	•	•	•	Utiliza equivalencias para sus operaciones multiplicando los denominadores, parece haber olvidado realizar el reactivo b).
Pablo	•	X	•	X	•	•	•	•	•	•	Usa las equivalencias, obtiene el común denominador multiplicando los denominadores, en el reactivo b) hizo bien sus equivalencias, pero al final no concluyó.
Rebeca	•	X	•	•	•	•	X	•	•	X	Usa correctamente las equivalencias, e identifica cuando los denominadores son múltiplos, convierte a número mixto sus resultados y/o los expresa en su forma irreducible. Sus errores en los incisos b) y g) fueron de distracción, por ejemplo, en el b) sumó las dos primeras fracciones en lugar de restar, mientras que en el g) se equivocó al convertir a número mixto. El inciso j) no lo intentó.
Jorge	X	X	•	•	•	•	X	X	•	•	Trabaja con fracciones equivalentes, convierte a número mixto. Sus errores parecen ser de distracción, por ejemplo, en el inciso b) hace lo siguiente: $1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=1-\frac{5}{10}-\frac{1}{3}=\frac{15}{30}-\frac{10}{30}=\frac{5}{10}$, en lugar de hacer la restar $1-\frac{5}{10}$, los suma.
Carlos	•	X	X	X	X	•	•	X	•	X	Utiliza equivalencias, identifica si los numeradores son múltiplos y convierte sus resultados a número mixto. Sin embargo comete varios tipos de errores por ejemplo en el inciso c) en lugar de sumar las fracciones las restó, mientras que en el inciso e) hace lo siguiente: $0.5+0.05=\frac{5}{10}+\frac{5}{100}=\frac{10}{100}$, por otra parte en el inciso j) en lugar de agregar un cero al sustraendo agregó un 9, veamos: $4.067-3.99=4.067-3.999=1.168$

Paola	•	X	X	•	X	•	X	•	X	X	Usa equivalencias sus errores fueron al multiplicar los numeradores, porque obtiene el común denominador, en el caso de los decimales no coloca el punto correctamente
Dalia	•	X	X	X	•	X	X	X	X	•	Recurre a representación de figuras divididas en partes iguales. Muestra errores de procedimiento al sumar fracciones sumando numerador con numerador y denominador con denominador, en el caso de la resta hace lo mismo pero restando.
Denisse	•	X	X	•	X	X	X	X	X	X	Resuelve correctamente los reactivos a) y d). En las operaciones con decimales no coloca correctamente el punto decimal, los incisos b), c), h), i), j), no los intentó resolver.
Karina	•	X	X	X	•	X	X	X	X	X	La suma de fracciones con igual denominador la resolvió en forma correcta, y la suma con decimales sin enteros. en el caso de las sumas y restas de fracciones con diferente denominador, suma o resta, según sea el caso numerador con numerador y denominador con denominador, según el esquema ya comentado: $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a+c}{b+d}$
Antonio	•	X	X	X	X	X	X	X	X	X	Muestra confusión en los procedimientos para las operaciones de suma y resta, por ejemplo en el reactivo c) se observa una confusión con el método de productos cruzados, ya que hizo el siguiente procedimiento: $\frac{4}{3}+\frac{8}{12}=\frac{48}{12}+\frac{24}{12}=\frac{72}{12}=6\frac{0}{12}$.No se observa intento por realizar las actividades de los incisos e), f), g), h), i), j).
Eduardo	•	X	X	X	X	X	X	X	X	X	En la suma de fracciones con igual denominador no tiene problemas. En la suma o resta de fracciones con diferente denominador suma o resta recurre al esquema ya comentado: $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a+c}{b+d}$. En las operaciones con decimales no coloca el punto decimal en el lugar adecuado.
Alejandra	•	X	X	X	X	X	X	X	X	X	En la suma con fracciones de igual denominador no tiene problemas, en el b) deshecho el 1 de la operación, no sabe trabajar con equivalencias, e), f), g), h), i), j) no los intentó.

Brisa	X	X	X	X	•	X	X	X	X	X	Trató de resolver la suma de fracciones con igual denominador haciendo figuras (círculos) dividiéndolas, pero no logro el resultado correcto. Cuando realiza operaciones con fracciones que tienen diferente denominado recurre al siguiente esquema: $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a+d}{b+c}$, hace una "suma cruzada". En las operaciones con números decimales, suma los dígitos pero no coloca el punto decimal en el lugar correcto o lo omite. En lo general se observa una gran confusión en sus procesos.
Stephania	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	No resolvió ninguno de los reactivos, hizo gran cantidad de operaciones, pero no indicó los resultados en las operaciones, se observa el intento de resolver los ejercicios con potencias de 10.

Observaciones.

Tradicionalmente la operatividad con fracciones es un contenido en el que los estudiantes no son competentes; sin embargo, se observa que hay cierto conocimiento de la misma. La mayoría de los estudiantes cuenta con nociones que le permiten construir o reconstruir el procedimiento operatorio. Otra parte de los estudiantes persisten en esquemas operativos erróneos; por ejemplo, al sumar fracciones suman numeradores y los denominadores. En nuestro estudio será importante observar el comportamiento de cada uno de estos estudiantes cuando resuelven problemas que le requerirán habilidades operatorias.

Un alto porcentaje de estudiantes no cuenta con la habilidad para realizar operaciones de suma y resta con tres términos. Solo dos contestan correctamente el inciso correspondiente. Mientras la mayoría responde correctamente a los incisos a), e) y f). El inciso c) sólo fue contestando correctamente por 5 estudiantes.

Cuatro estudiantes tienen arraigado el esquema erróneo para operar suma de fracciones; suman numeradores y denominadores de las fracciones.

Sólo cuatro estudiantes son sobresalientes, obtienen entre 8 y 10 aciertos, otros dos muestran conocer los procedimientos pero cometen errores de distracción, por ejemplo al multiplicar escriben una cantidad diferente.

10 de los 17 estudiantes muestran deficiencias operatorias, sólo tienen entre 0 y 4 aciertos

La suma o resta de fracciones con diferente denominador, son resueltas correctamente por un 40% de los estudiantes.

Las operaciones de suma y resta con números decimales fueron resueltas correctamente por un 47.9% de los estudiantes.

Actividad 2.

Aprendizajes esperados.

Usa fracciones para representar cocientes.

Bloque I del libro de sexto grado de Primaria (SEP, 2009; p. 12).

> La tía Juana compra cada domingo 8 manzanas que reparte de manera equitativa entre los sobrinos que la visitan. El antepenúltimo domingo la visitaron 8 sobrinos, el penúltimo domingo la visitaron 5, y el último sólo fueron 4.

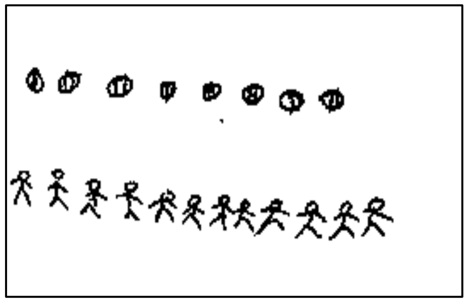
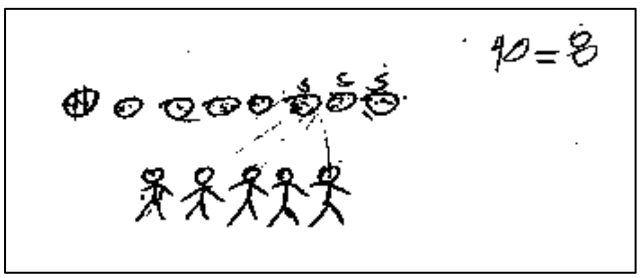
Nuestra actividad seleccionada comprende 4 casos de repartición:

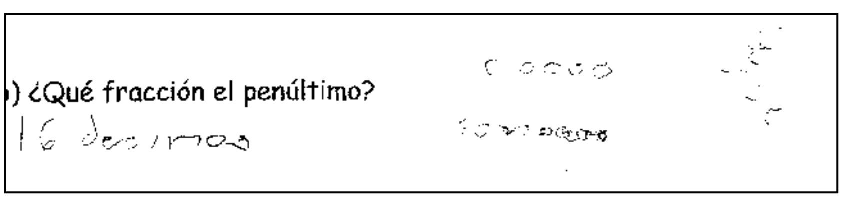
a) Una fracción cuyo numerador es igual que el denominador.
b) Una fracción donde el numerador es mayor que el denominador sin ser múltiplos).
c) Una fracción donde el numerador es mayor que el denominador (son múltiplos).
d) Una fracción donde el numerador es menor que el denominador.

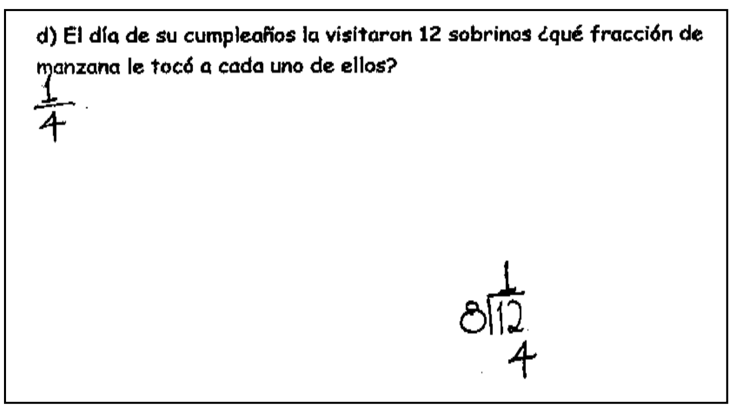
Observaciones por alumno.

En la siguiente tabla 4.3 se presenta en dos columnas nombre y observaciones de las respuestas por alumno.

Tabla 4.3. Observaciones y comentarios a las respuestas por alumno. Actividad 2.

Nombre	Observaciones
Carlos	Responde correctamente a los incisos a) y b). Responde correctamente los incisos b) y d). La justificación de sus respuestas, se observa en una representación pictográfica donde hace la repartición, por ejemplo, en la figura 1 cada manzana es dividida en tres partes.  Figura 1. Carlos reparte 8 manzanas a 12 niños inciso b)  Figura 2. Carlos reparte 8 manzanas a 5 niños Muestra la repartición de 40 partes a 5 niños. Su método de solución es basado en un modelo concreto, no representa formalmente las operaciones.
Samanta	Responde correctamente los cuatro incisos. Modela los problemas mediante las operaciones adecuadas. Se observan habilidades como transformar las fracciones a equivalentes con igual denominador para operar con estas. Sus respuestas y procedimientos son formales. Cubre las intenciones educativas que se han propuesto en primaria, para este aspecto.

Rebeca	Responde correctamente a los incisos a) y c) En el inciso b), que también responde correctamente, representa su respuesta mediante la fracción $\frac{8}{5}$, la cual transforma realizando la operación división, para obtener 1.6, que representa también como $1\frac{6}{10}$. Su respuesta al inciso d) es correcta la representa mediante la fracción $\frac{8}{12}$, la cual transforma mediante una división obteniendo 0.66 y lo representa como $0.\overline{6}$ para indicar que es un resultado periódico. Como se puede ver hace uso de decimales o fracciones para dar sus respuestas. Muestra habilidad para transitar en las diferentes representaciones de fracción.
Paola	Para los casos a) y c) responde correctamente. El inciso b) también da respuesta en forma correcta mediante la fracción $\frac{8}{5}$, para el inciso d) no obtiene el resultado correcto, sólo escribe como respuesta a dicho inciso ½, sin mostrar una justificación.
Karina	Los incisos a) y c) los resuelve correctamente. En el caso de b) sólo escribe la respuesta correcta: $\frac{8}{5}$. Para el inciso d) su respuesta es incorrecta, sólo escribe $\frac{1}{5}$.
Brisa	Responde correctamente los 4 incisos. Para todos los casos usa fracciones para representar sus respuestas. Se muestra competente para representarla repartición de dos números como cociente.
Ulises	Responde correctamente a) y c). Para el inciso b) hace representación de la operación 8 entre 5 obteniendo como resultado 1.6 y lo escribe como 16 décimos, como se muestra en la siguiente figura.  Figura 3. Trabajo de Ulises al inciso b) Mientras que en el inciso d) su respuesta, que es incorrecta, consistió en escribir en forma invertida el cociente.

Jorge	Representa correctamente los resultados enteros a) y c). En el inciso b) su respuesta que es incorrecta fue $1\frac{5}{8}$ Inciso, d) su respuesta incorrecta consistió en representar en forma invertida el resultado.
Alejandra	Representa correctamente los resultados enteros a) y c). En el inciso b) su respuesta incorrecta fue $1\frac{1}{6}$. Para el inciso c) fue de también incorrecta $\frac{1}{5}$.
Denisse	Responde correctamente a) y c). En los incisos b) y d) representa la operación que modela los problemas respectivamente y realiza las operaciones, pero lo que escribe como respuesta es incorrecto (representa el cociente entre el residuo), lo que provienen de una inadecuada interpretación del resultado de la operación.  Figura 4. Trabajo de Denisse al inciso d)

<table>
<tr>
<td>Dalia</td>
<td>
En los incisos a) y c) hace una representación pictográfica, mediante la cual hace la repartición, pero la representación de la respuesta es incorrecta, escribe para el inciso a) $\frac{1}{8}$, de igual manera para el inciso c), escribe $\frac{2}{8}$. Sin embargo precisa: para el inciso escribe a) “uno a cada uno” y para c) “dos a cada sobrino”. Entiende la repartición, pero no la representa correctamente.

b) hace una representación pictográfica de la situación y además representa la operación que modela el problema (8 entre 5), pero no representa de manera formal su resultado. Escribió como resultado 1½ al parecer tiene claro que les toca 1 entero y una parte de otro entero (pareciera una estimación del resultado).

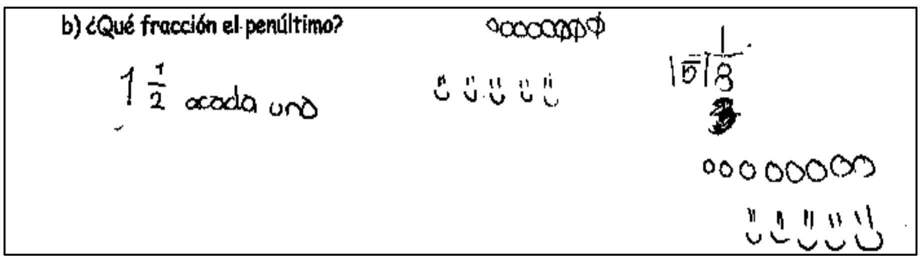


Figura 5. Trabajo de Dalia inciso b)

d) hace una representación pictográfica la cual contiene el resultado correcto (fracciona 6 manzanas por la mitad y dos en sextos), pero no lo escribe. Por otra parte, la representación de la operación con la que modela el problema es incorrecta, ya que invierte las cantidades.

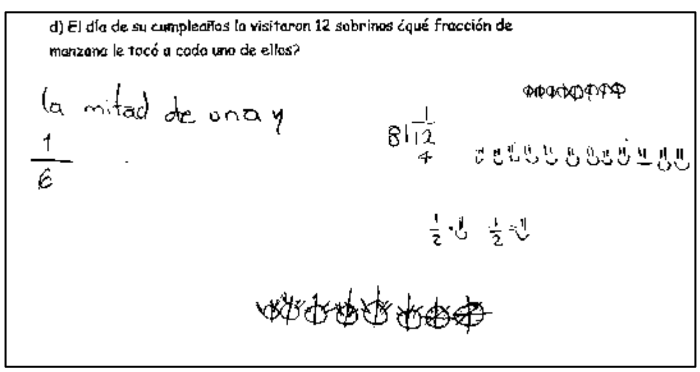


Figura 6. Trabajo de Dalia Inciso d)

La estrategia pictográfica de Dalia para hacer la repartición es correcta, pero no logra hacer la representación formal del problema.
</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr><td>Noé</td><td>Para los casos a) y c) resuelve correctamente.

Para el inciso b) Realiza la operación 8 entre 5 obteniendo como cociente 1.6, pero escribe como respuesta $1\frac{6}{5}$, un resultado incorrecto (al parecer no interpreta en forma correcta el resultado de la operación que realizó o no supo representar el resultado).
De igual manera para el inciso d) su resultado es también incorrecto, pero se observa al margen de la hoja, el modelo expresado mediante la operación 8 entre 12, obteniendo la respuesta $0.\overline{6}$, pero escribe como respuesta $\frac{1}{6}$.

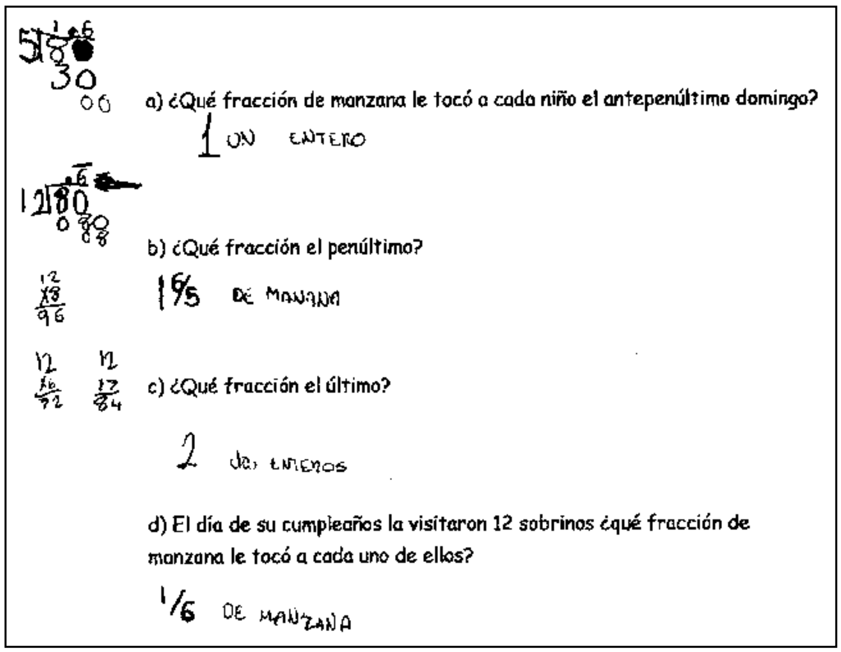
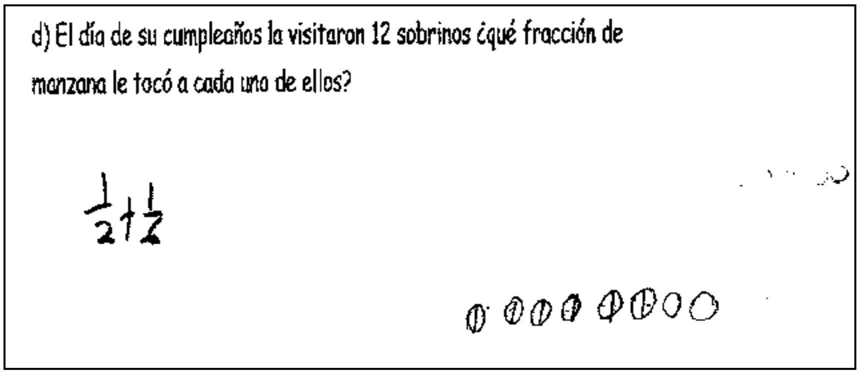


Figura 7. Trabajo de Noé</td></tr>
<tr><td>Stephania</td><td>En casos a) y c) responde correctamente.

Para el inciso b) hace una representación pictográfica en la cual da a entender, que le toca a cada uno un entero y una parte de otro entero. Escribe su respuesta como1 ½.
Mientras para inciso d), representa la división 8 entre 12, y la realiza pero no escribe una interpretación correcta del resultado.</td></tr>
<tr><td>Pablo</td><td>Respuestas correctas en los incisos a) y c).

En los incisos b) y d) representa las operaciones que modelan el problema correctamente (escribe las divisiones respectivamente) y las realiza, pero no escribe una interpretación correcta de sus resultados.</td></tr>
</table>

Aziel	Contesta correctamente los incisos a) y c) En el inciso b), se observa que borró la representación de su modelo (8 entre 5). Escribe como respuesta 1 ½, pareciera estimar que le toca a cada uno un entero y una parte de otro. En su respuesta al inciso d) logra obtener el resultado haciendo la repartición en una representación pictográfica, como se observa en la figura 8.Aziel divide 6 manzanas a la mitad y las 2 manzanas restantes calculan que le toca un sexto a cada niño, opera con representaciones concretas.  Figura 8. Trabajo de Aziel Inciso d)
Eduardo	En el caso del inciso a) contesta correctamente. Para los incisos b), c) y d), al parecer entiende lo que se pide en el enunciado del problema, pero no logra hacer su representación formal de la respuesta, por ejemplo, su respuesta para el inciso b) es “sobran 3”, (reparte 1 manzana a cada niño y le sobran 3), pero escribe el cociente invertido 5/8 . Para el inciso c) también parece invertir el cociente y escribe “sobran 4”.

<table>
<tr>
<td>Antonio</td>
<td>Sus respuestas a los incisos a) y c) son respectivamente 1/8 y 2/8. Pareciera querer decir que les toca 1 de los 8, y 2 de los 8, pero no hace la aclaración como lo hace por ejemplo Dalia.

En su respuesta al inciso b) muestra inseguridad ya que representa dos modelos, 8 entre 5 y 5 entre 8, posteriormente hace una comprobación con multiplicación y elige como respuesta la que le da 8/5.

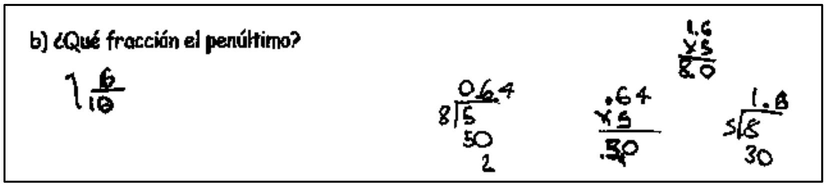


Figura 9.Trabajo de Antonio al inciso b)

En el inciso d) también hace las dos representaciones 12 entre 8 y 8 entre 12, realiza nuevamente la comprobación con las multiplicaciones sólo que en este caso elige la respuesta incorrecta. Pareciera que su criterio de elección es repartir la cantidad mayor a una menor.

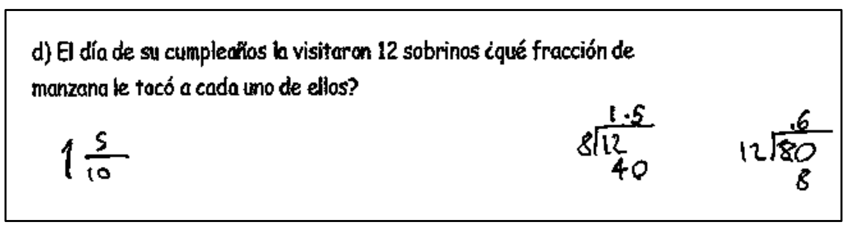


Figura 10. Trabajo de Antonio al inciso b)</td>
</tr>
</table>

Observaciones.

En relación a las respuestas a los cuatro incisos

Para los incisos a) y c) los alumnos no muestran dificultades para hacer la repartición de enteros, si el resultado es entero. Si bien algunos cometen errores al representar el resultado, por ejemplo escriben 1/8, como respuesta cuando lo que están indicando que le toca a cada niño una de las 8 manzanas. Un significado de la fracción como división interfiere con el de proporción. Un ejemplo es el caso de Dalia.

Mientras para situaciones en los que la repartición no es entera, incisos b) y d), encontramos una serie de errores relacionados con la representación formal de la respuesta, pues aunque los alumnos modelan el problema con la operación división, cuando quieren mostrar su respuesta no lo hacen correctamente. Algunos otros recurren aun a métodos pictográficos para hacer la repartición y obtienen la respuesta correcta.

En lo general se observa las siguientes características en las repuestas de los estudiantes:

Representación formal de las respuestas (7 estudiantes simbolizan mediante cociente indicado la repartición y lo conciben como la respuesta). Para estos estudiantes el cociente indicado es su operación y respuesta.

Representación y operación formales (9 estudiantes simbolizan mediante cociente indicado la repartición y lo operan transformado la respuesta a decimal o fracción). Para estos estudiantes una fracción a/b, es una operación que debe realizarse y su resultado es la respuesta.

Representaciones concretas y operación con estas (uso de figuras para representar la situación y usarlas para hacer la repartición mostrando el resultado). Estos estudiantes requieren de concretizar el problema por medio de figuras y hacer la repartición, tal es el caso de Aziel.

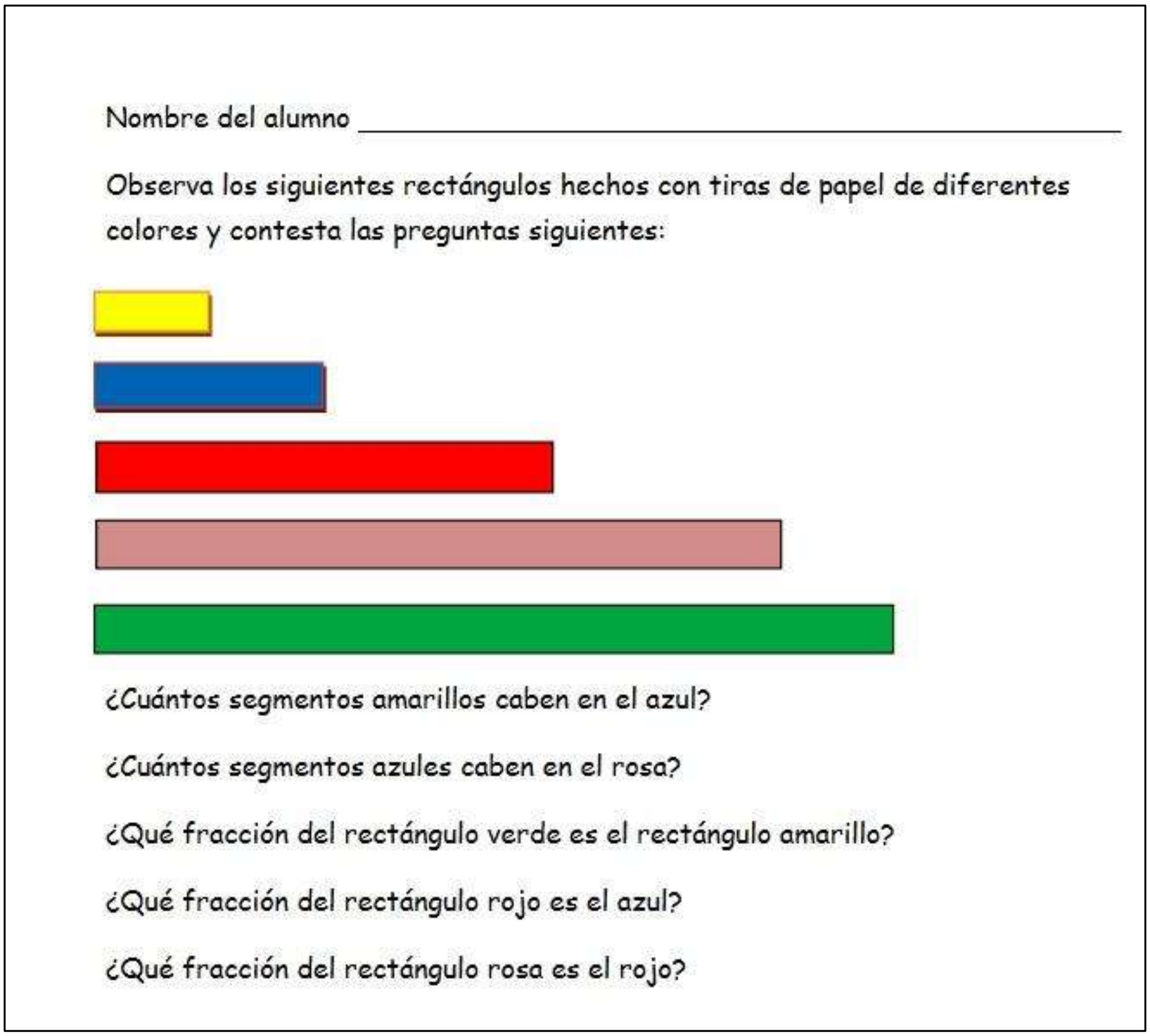
Aun se observa en algunos estudiantes que cuando está en juego la repartición de dos cantidades existe la tendencia a dividir la cantidad mayor entre la menor.

Actividad 3

Aprendizajes esperados

Los estudiantes representan la comparación entre cantidades por medio de un cociente.

La siguiente actividad (Figura 1), está propuesta en el bloque I del libro de sexto grado de educación Primaria (SEP, 2009; p. 14).



Nombre del alumno ______________________________

Observa los siguientes rectángulos hechos con tiras de papel de diferentes colores y contesta las preguntas siguientes:

¿Cuántos segmentos amarillos caben en el azul?

¿Cuántos segmentos azules caben en el rosa?

¿Qué fracción del rectángulo verde es el rectángulo amarillo?

¿Qué fracción del rectángulo rojo es el azul?

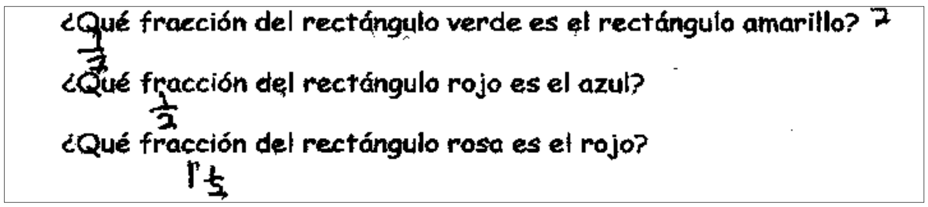
¿Qué fracción del rectángulo rosa es el rojo?

Figura 1. Actividad 3

Esta actividad no representó dificultad a la mayoría de los estudiantes.

Los alumnos no tienen dificultad para representar, por medio de una razón, la comparación entre elementos que representan un área menor a un área mayor,

Para los casos en que se hace una comparación entre áreas mayores con áreas menores los alumnos muestran dificultades para hacer tal representación como razón. Por lo general lo invierten; representan la razón del área más pequeña con la mayor. Por ejemplo, veamos la respuesta de Aziel a la actividad 3, no toma en cuenta el orden:

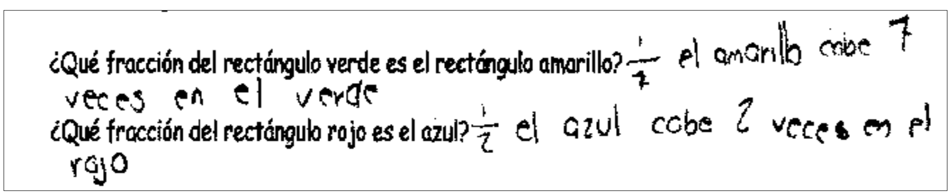

¿Qué fracción del rectángulo verde es el rectángulo amarillo? 7 $\frac{1}{7}$

¿Qué fracción del rectángulo rojo es el azul? $\frac{1}{2}$

¿Qué fracción del rectángulo rosa es el rojo? $1\frac{1}{5}$

Figura 2. Respuesta de Aziel

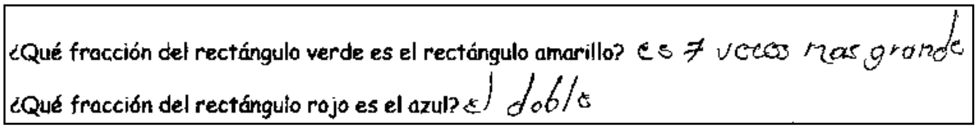
Algunos alumnos hacen aclaraciones cuando dan sus respuestas como Karina que escribe lo siguiente.


¿Qué fracción del rectángulo verde es el rectángulo amarillo? $\frac{1}{7}$ el amarillo cabe 7 veces en el verde

¿Qué fracción del rectángulo rojo es el azul? $\frac{1}{2}$ el azul cabe 2 veces en el rojo

Figura 3.Respuestas de Karina

Sólo 4 alumnos (Carlos, Ulises, Brisa y Rebeca) dan sus respuestas estableciendo la comparación en el orden que se les pregunta, por ejemplo, veamos las respuestas de Ulises:


¿Qué fracción del rectángulo verde es el rectángulo amarillo? es 7 veces mas grande

¿Qué fracción del rectángulo rojo es el azul? el doble

Figura 4 Trabajo de Ulises

Así como la respuesta de Rebeca.

¿Qué fracción del rectángulo rojo es el azul? 7/1

Figura 5 trabajo de Rebeca

Observaciones.

En este tipo de actividades tienden a visualizar las veces que se contiene el objeto más pequeño en el grande. Pero cuando se tiene que hacer una comparación de uno más grande con uno más pequeño, no mantienen el orden, por ejemplo afirman que la fracción que representa la razón del rectángulo verde al amarillo es $\frac{1}{7}$, no dan sentido al orden. Una tendencia inversa a la de repartición donde eligen la cantidad mayor para dividir entre la menor.

Para los estudiantes no representa ninguna diferencia el que les pidan comparar segmentos o rectángulos, ya que realizan la comparación por igual.

Actividad 4

Esta actividad se compone de dos ejercicios cuyos aprendizajes esperados son:

a) Divide un número fraccionario o decimal entre un número natural.

> Cuándo Raúl y Esperanza llegaron a una fiesta quedaron $\frac{3}{10}$ de pastel, así que se le lo dividieron en partes iguales. ¿Qué parte del pastel le tocó a cada uno?

Libro de primaria de sexto grado (SEP, 2009; p. 124) del bloque IV.

b) Aplica la multiplicación de números fraccionarios y decimales por naturales en la resolución de problemas.

> Juan vende quesos. El lunes vendió 3 quesos de $\frac{1}{5}$ de Kg y 7 quesos de $\frac{1}{4}$ de Kg. ¿Cuántos kilogramos de quesos vendió?

Libro de quinto grado de primaria de la (SEP, 2009; p. 133) del bloque IV.

ALUMNO	OBSERVACIONES
Noé	a) Incorrecto b) Hace la suma de 3 quesos de 1/5 de Kg, pero no obtiene la respuesta correcta.
Samantha	a) Respuesta correcta. Convierte 3/10 a una equivalente 6/20, y la reparte entre 2 personas obteniendo 3/20 para cada una. b) Respuesta correcta. Convierte 1/5 kg a su equivalente en gramos 200 y ¼ kg a 250 gramos, hace el producto por 3 y 7 respectivamente, y los suma para obtener el resultado correcto.

<table>
<tr>
<td>Ulises</td>
<td>
a) Respuesta correcta. Representa la fracción en la recta numérica y convierte 3/10 a su equivalencia decimal 0.3, el cual divide entre 2 y obtiene 0.15, y da su respuesta como 15/100.

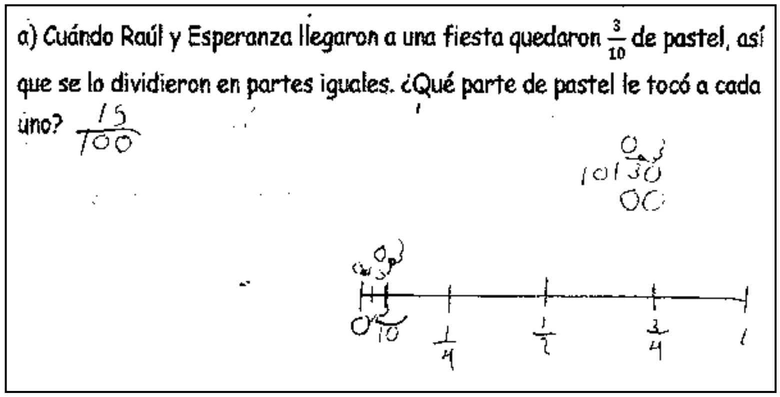

a) Cuándo Raúl y Esperanza llegaron a una fiesta quedaron $\frac{3}{10}$ de pastel, así que se lo dividieron en partes iguales. ¿Qué parte de pastel le tocó a cada uno? $\frac{15}{100}$

Figura 1. Trabajo de Ulises al inciso a)

b) Convierte las fracciones a su representación decimal, las cuales multiplica respectivamente por 3 y 7. Finalmente hace una suma obteniendo el resultado correcto.

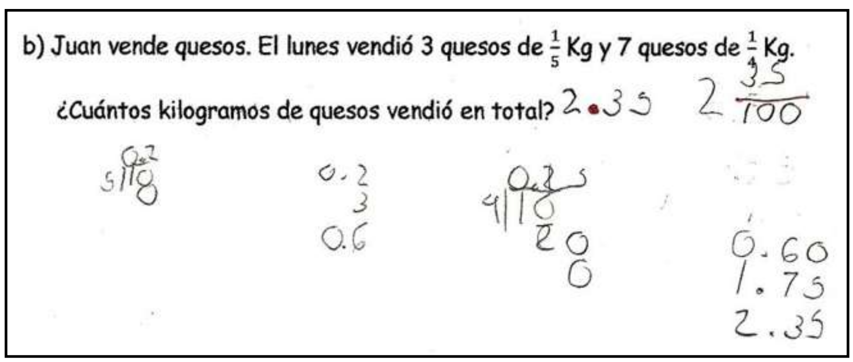
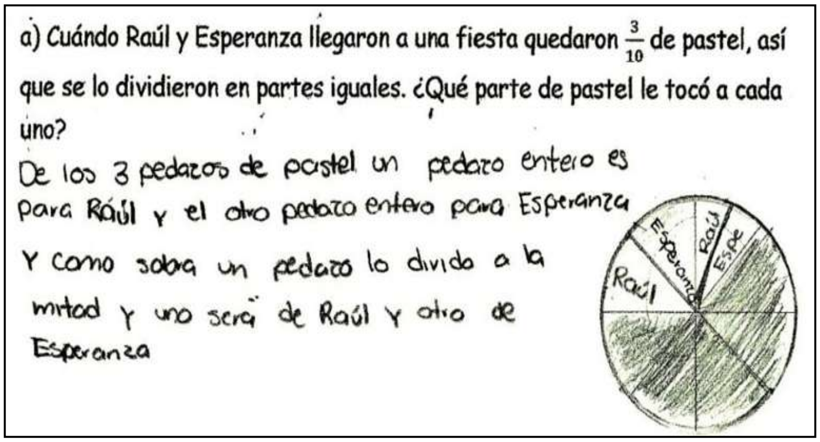

b) Juan vende quesos. El lunes vendió 3 quesos de $\frac{1}{5}$ Kg y 7 quesos de $\frac{1}{4}$ Kg. ¿Cuántos kilogramos de quesos vendió en total? 2.35 $2\frac{35}{100}$

Figura 2. Trabajo de Ulises al inciso b)
</td>
</tr>
<tr>
<td>Karina</td>
<td>
a) Hace una representación pictográfica dividiendo un entero en 10 partes iguales y colorea 3, indica en estas tres partes que a cada persona le toca 1/10 y la mitad de otro, que es correcto, pero no logra dar la respuesta formal.

b) Incorrecto.
</td>
</tr>
</table>

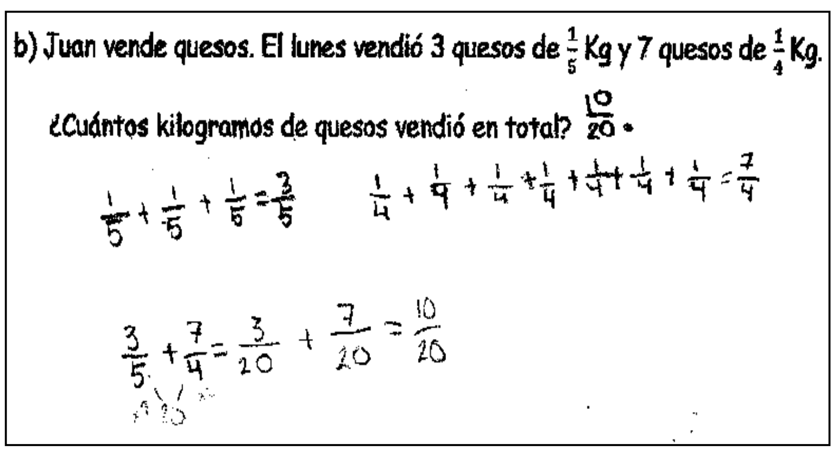
<table>
<tr>
<td>Paola</td>
<td>
a) Al igual que Karina hace una representación pictográfica dividiendo el entero en 10 partes. Toma 3 de ellas y las reparte entre 2, da una descripción de su procedimiento por lo que queda claro que comprende el problema y da una respuesta correcta, aunque no formal.



a) Cuándo Raúl y Esperanza llegaron a una fiesta quedaron $\frac{3}{10}$ de pastel, así que se lo dividieron en partes iguales. ¿Qué parte de pastel le tocó a cada uno?
De los 3 pedazos de pastel un pedazo entero es para Ráúl y el otro pedazo entero para Esperanza Y como sobra un pedazo lo divido a la mitad y uno será de Raúl y otro de Esperanza

Figura 3. Trabajo de Paola al inciso a)

b) hace la suma repetida de las fracciones, obteniendo un subtotal, pero no realiza correctamente la suma de las fracciones obtenidas. Se puede observar que entiende el problema, pero no es eficiente realizando la suma con las fracciones 3/5 con 7/4.



b) Juan vende quesos. El lunes vendió 3 quesos de $\frac{1}{5}$ Kg y 7 quesos de $\frac{1}{4}$ Kg.
¿Cuántos kilogramos de quesos vendió en total? $\frac{10}{20}$
$\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}=\frac{3}{5}$ $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{7}{4}$
$\frac{3}{5}+\frac{7}{4}=\frac{3}{20}+\frac{7}{20}=\frac{10}{20}$
Figura 4. Trabajo de Paola al inciso b)
</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr><td>Rebeca</td><td>a) Entiende el problema y da la respuesta como 1.5 partes, una rebanada y media a cada quien (representa pictográficamente en un modelo del pastel), pero no hace la representación formal de la respuesta.

b) Plantea y resuelve correctamente el problema, como se muestra en la figura siguiente.

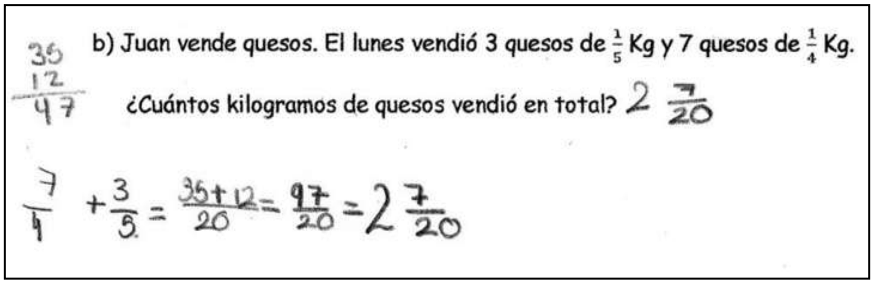


Figura 5. Trabajo de Rebeca al inciso b)</td></tr>
<tr><td>Antonio</td><td>a) Comprende el problema, utiliza la recta numérica para representar un todo dividido en 3 partes, haciendo referencia a ellas da una respuesta correcta, pero no es una respuesta formal.

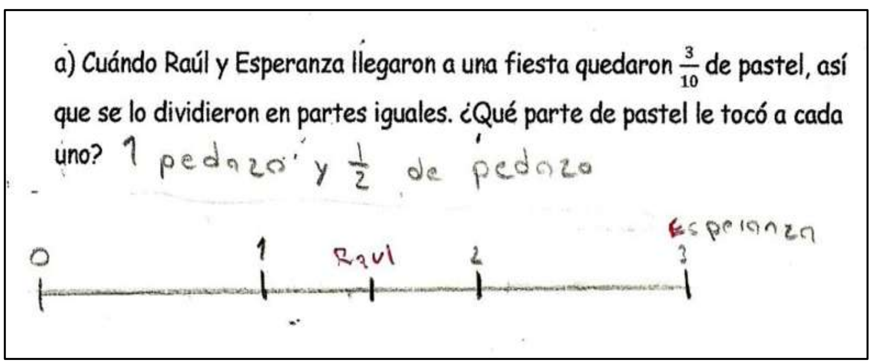


Figura 6. Trabajo de Antonio al inciso a)

b) Hace una equivalencia en gramos y realiza un proceso correcto para resolver el problema, sin embargo no logra el resultado correcta debido a un error cuando multiplica 250x7.</td></tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>Carlos</td>
<td>
a) Hace una representación pictográfica, en la cual establece la equivalencia de 3/10 con 6/20 y así dividir entre 2. Su respuesta es: “les tocaría 3 partes de 6”, lo cual es correcto en relación a la figura que muestra, pero no es una respuesta formal.

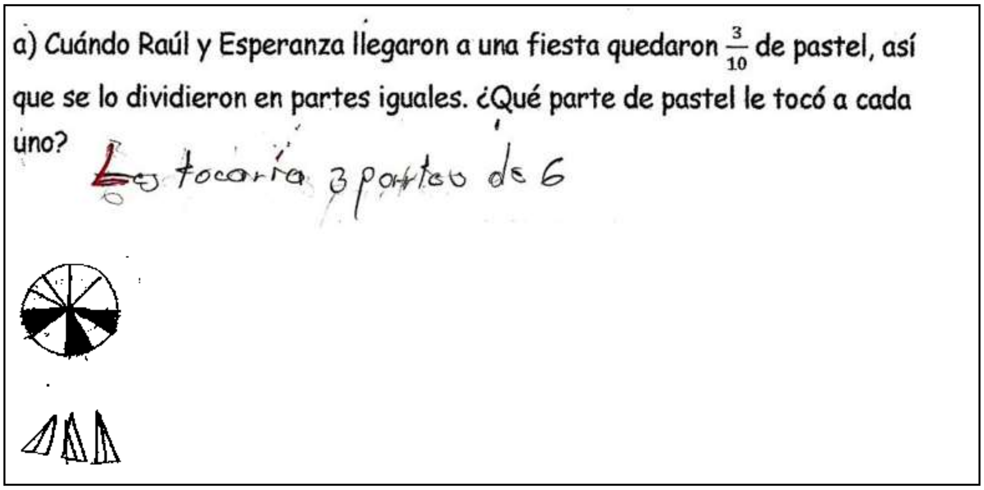


Figura 7. Trabajo de Carlos al inciso a)

b) No interpreta el enunciado ya que representa 3 enteros divididos en 5 partes y 7 enteros divididos en 4.

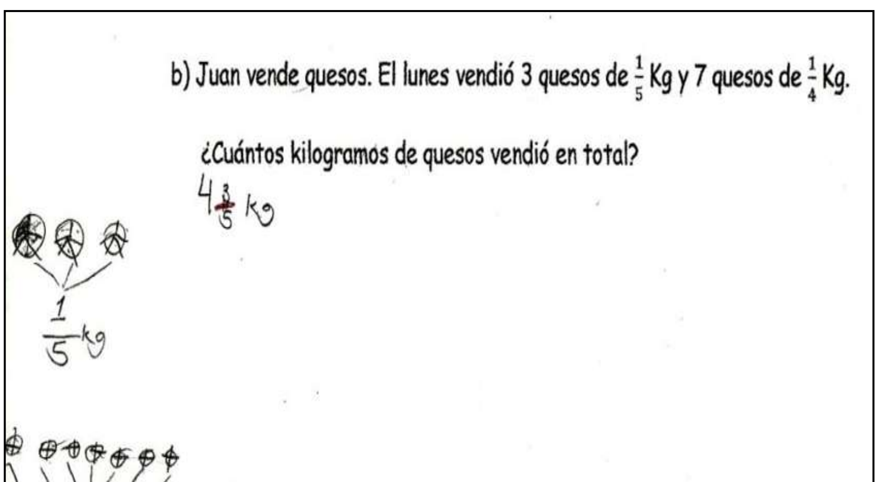


Figura 8. Trabajo de Carlos al inciso b)
</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr><td>Jorge</td><td>a) No logra respuesta, aunque intenta obtener una fracción equivalente a 3/10.

b) Por medio de sumas repetidas obtiene los resultados parciales, después suma las fracciones obtenidas con diferente denominador, su resultado es correcto.

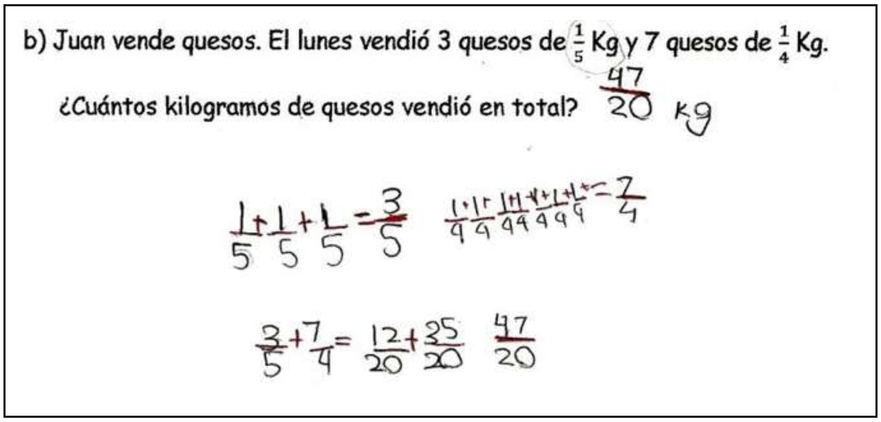


Figura 9. Trabajo de Jorge al inciso b)</td></tr>
<tr><td>Brisa</td><td>a) Da una respuesta correcta, no da argumentos, pero al parecer divide 0.3 entre 2, escribe 0.15 para cada quien.
b) No da respuesta, intenta hacer representaciones en forma de pastel.</td></tr>
<tr><td>Stephania</td><td>a) Hace una representación pictográfica, pero en lugar de repartir 3/10, reparte el complemento 7/10, razón por la que su respuesta es $3\frac{1}{2}$ de pastel, hace una interpretación incorrecta del problema.

b) Realiza correctamente la suma repetida de las fracciones, pero cuando intenta sumar sus resultados no logra hacerlo.

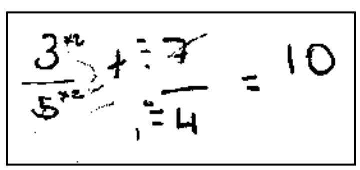
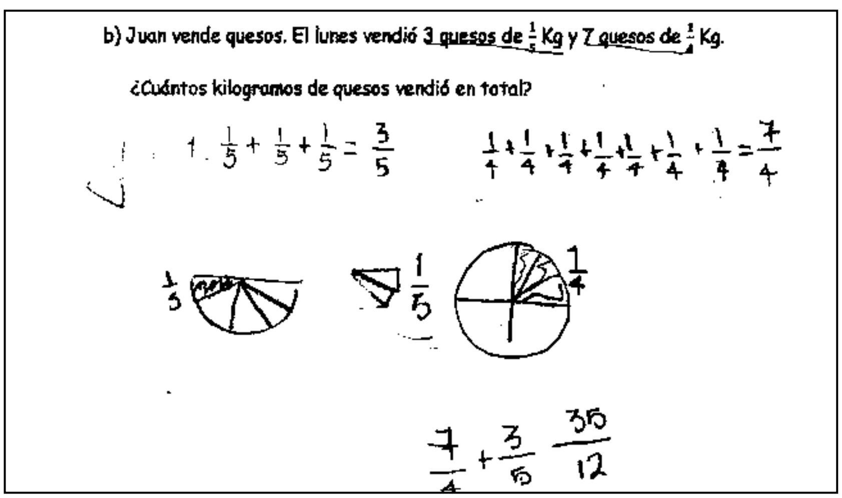
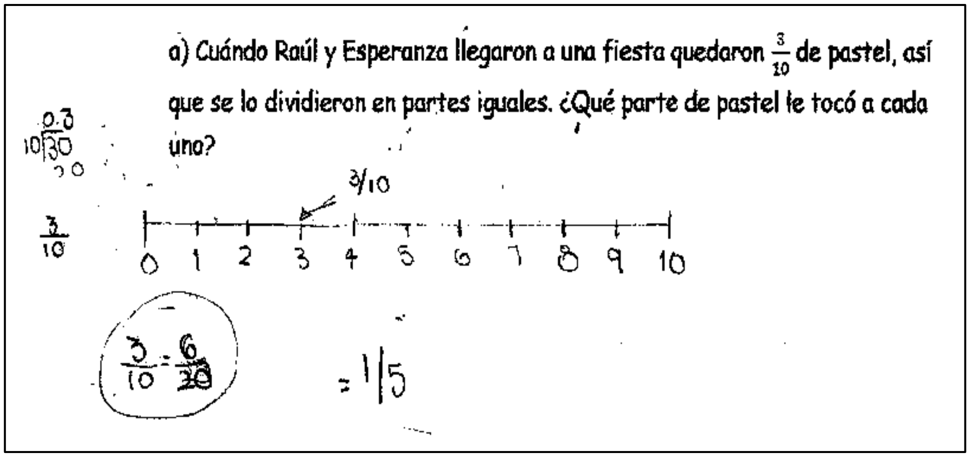


Figura 10. Trabajo de Stephania al inciso b)</td></tr>
<tr><td>Eduardo</td><td>a) Hace una representación pictográfica que le permite dar una respuesta correcta, en relación a la figura empleada (modelo del pastel), aunque no lo representa formalmente.

b) Da una respuesta incorrecta, al parecer no comprende el problema.</td></tr>
</table>

Pablo	a) Hace una representación correcta de 3/10 en la recta numérica, pero no sabe realizar la repartición empleando ese modelo por lo que da una respuesta incorrecta. b) Comprende el problema y hace sus operaciones convirtiendo las fracciones a forma decimal, pero quitando un cero, por ejemplo, ¼ Kg lo escribe como 25 gramos pero al final no agrega el cero al dar su respuesta, por lo que ésta es errónea, da como respuesta 235 Kg cuando la respuesta correcta es 2.35 Kg.
Aziel	a) No presenta respuesta. b) Muestra el intento de sumar las fracciones $\frac{1}{5}+\frac{1}{4}$ sin lograrlo. Al parecer no interpreta los problemas.
Dalia	a) Hace una representación pictográfica que demuestra que comprende el problema, aunque no logra hacer la representación formal de la situación, da una respuesta correcta de acuerdo a la figura empleada (modelo del pastel). b) Hace la suma repetida de las fracciones con igual denominador y representa correctamente el modelo de la situación, pero no realizar la operación correctamente.  Figura 11. Trabajo de Dalia al inciso b)
Alejandra	a) No hay una interpretación del problema, sus intentos son en la recta numérica. b) Hace una interpretación correcta del problema mostrando una representación pictográfica, pero no opera correctamente y da una respuesta incorrecta.

Denisse	a) Ella hace uso de la recta numérica y muestra la equivalencia 3/10= 6/20, pero no divide ésta entre 2 que sería la respuesta correcta.  Figura 12. Trabajo de Denisse al inciso a) b) Trata de obtener el resultado representando las fracciones en la recta numérica sin lograrlo.

Observaciones.

Se observa un entendimiento de los problemas lo que les permite una búsqueda de respuesta por métodos diferentes.

En relación al problema del inciso a), que consiste en un problema de división de una fracción por un entero.

Para resolverlo recurren a las representaciones de la fracción: en la recta numérica, pictográficas y en algunos casos transforman la fracción a su forma decimal y representan su resultado con fracciones cuyo denominador es una potencia de diez.

Algunos de los estudiantes aun no logran prescindir de imágenes concretas, por lo que recurren al modelo del pastel para hacer la representación del problema, no obstante esto los lleva a una respuesta sólo correcta en términos de la misma figura. Lo cual nos obliga a clasificar las respuestas en dos tipos, que llamaremos respuesta correcta formal y respuesta correcta no formal, las cuales ejemplificamos a continuación.

Respuesta correcta formal:

3/10÷ 2= 3/20,   0.3÷2=0.15

Estos estudiantes ya han concebido la división

Respuesta correcta no formal

"*1 pedazo y la mitad de otro*" referida a pedazos de pastel representados, cada uno de los cuales es 1/10.

En la siguiente tabla se presenta una clasificación de las respuestas

Recurso	Tipo de representación	Número de estudiantes que lo intentan	Respuestas correctas
Pictográfico	Modelo del pastel	9	6
	Recta numérica	4	1
Numérico	Fracción	2	1
	Decimal	2	1

En relación al inciso b), que consiste en multiplicación de una fracción por un entero y suma de fracciones con denominadores diferentes.

La mayoría 11 de 17 estudiantes muestran entender el problema ya que lo modelan con las operaciones que deben llevar a cabo, pero sus errores, al dar sus respuestas, consistió en que no llevan a cabo correctamente los procedimientos al realizar las operaciones, sobre todo en situaciones de sumas con diferente denominador.

Quienes resuelven el problema correctamente, lo modelaron mediante las operaciones adecuadas y su correcta operatividad con ellas, otros, mostrando un articulación de habilidades, al hacer el cambio de registro de fracción a fracción decimal y operar en este registro.

Quienes intentaron hacer las representaciones pictográficas no tuvieron éxito, al parecer, debido a que las fracciones eran mayores de la unidad (3 estudiantes).

Actividad 5.

Aprendizajes esperados:

Usa el divisor común o el múltiplo común para resolver problemas.

(SEP, 2009; p. 95)

a) En un grupo de quinto grado, cada alumno practica sólo uno de tres deportes: $\frac{1}{3}$ del grupo juega futbol, $\frac{1}{2}$ entrena basquetbol y el resto practica natación.

¿Qué fracción del total practica natación?

Bloques III y IV de quinto grado y con el bloque V de sexto grado de primaria

<table>
<tr><th>Alumno</th><th>Observaciones</th></tr>
<tr><td>Samantha</td><td>Respuesta correcta.

Suma 1/3 con 1/ 2, para lo cual, convirtió ambas a fracciones equivalentes con igual denominador. Después resta su resultado a la unidad.</td></tr>
<tr><td>Rebeca</td><td>Respuesta correcta.
Sumó las fracciones contenidas en el enunciado del problema y calcula lo que le falta para la unidad, como se observa en la figura 1.

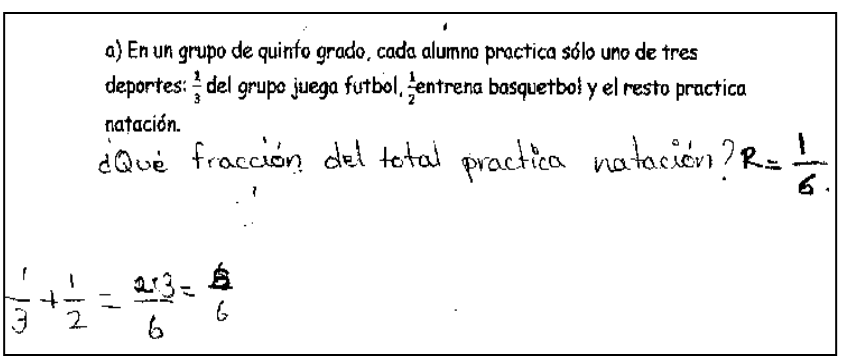

a) En un grupo de quinto grado, cada alumno practica sólo uno de tres deportes: $\frac{1}{3}$ del grupo juega futbol, $\frac{1}{2}$ entrena basquetbol y el resto practica natación.
¿Qué fracción del total practica natación? R= $\frac{1}{6}$.
$\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\frac{2+3}{6}=\frac{5}{6}$

Figura 1. Trabajo de Rebeca</td></tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>Denisse</td>
<td>
Respuesta correcta.
Convierte las fracciones a su forma decimal, realiza su suma y calcula lo que le falta para la unidad, obteniendo un resultado aproximado, debido al redondeo. Se observa su habilidad para pasar de la forma de representación fracción a decimal.

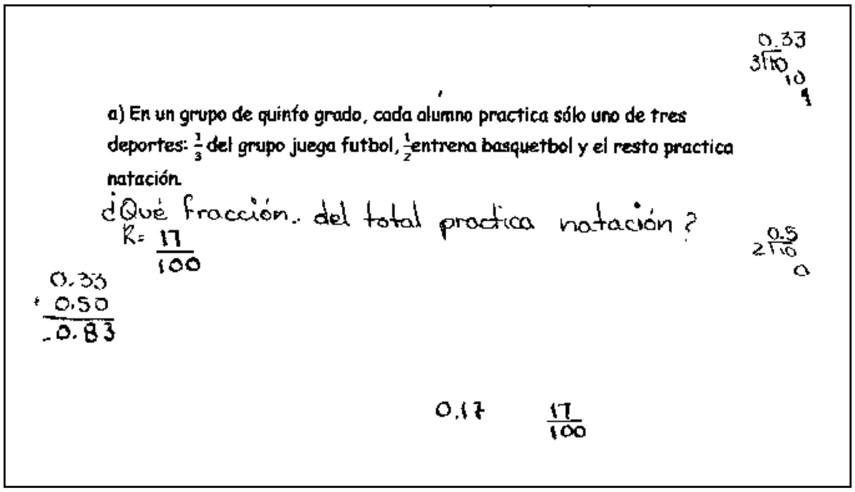


Figura 2. Trabajo de Denisse
</td>
</tr>
<tr>
<td>Carlos,
Alejandra
Paola
Karina
Eduardo</td>
<td>
Respuestas incorrectas.
Muestran como resultado1/5, en algunos trabajos de observa que hacen una representación “parte todo” en la cual estiman que es 1/5 lo que falta para el todo. Como ejemplo veamos en la siguiente figura el trabajo de Alejandra. Representa en un segmento y en un rectángulo una mitad y un tercio, para estimar que lo que falta para la unidad es 1/5. Estas respuestas dejan ver, si bien, su respuesta es errónea si hay un entendimiento del problema.

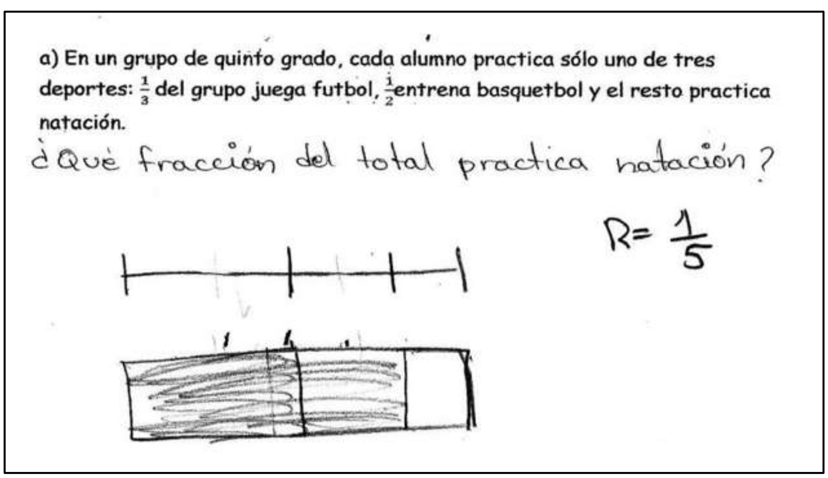
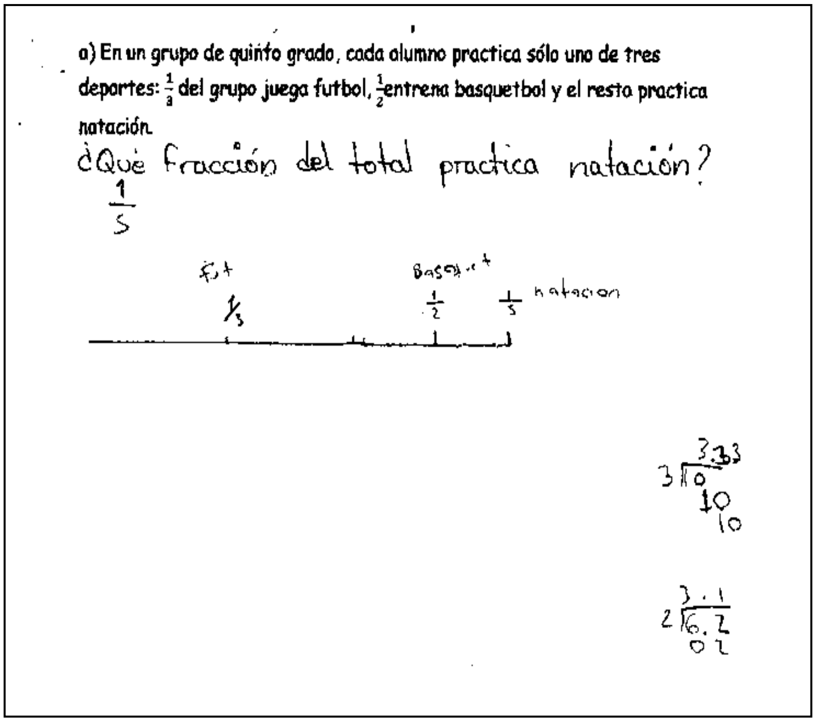
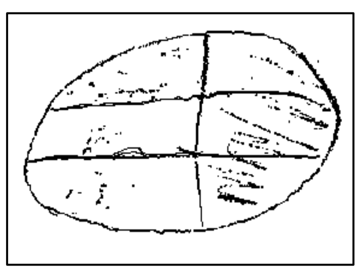


Figura 3. Trabajo de Alejandra
</td>
</tr>
</table>

Antonio	De acuerdo a la figura en que muestra su trabajo, hace la representación de 1/3, ½, y parece estimar que el resto para la unidad es 1/5. Entiende la estructura del problema, pero no logra calcular correctamente.  Figura 5. Trabajo de Antonio
Brisa	Usa un modelo de pastel para representar el problema, se observa el intento por hacer una división, fraccionando en mitad, tercios y sextos, pero no en forma equitativa. Hay una interpretación del problema, pero esta niña no encuentra la forma de operar con su figura para obtener el resultado.  Figura 4. Trabajo de Brisa

<table>
<tr><td>Stephania</td><td>Su respuesta 7/10 proviene de restar 3/10 de la unidad lo que implica que considera que la suma de 1/3 con ½ es 3/10, como se observa en la figura 6.

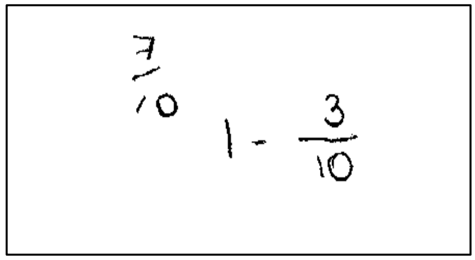


Figura 6. Trabajo de Stephania</td></tr>
<tr><td>Ulises</td><td>Convierte las fracciones a números decimales, pero no hace ninguna otra operación con sus resultados. No interpreta el problema.</td></tr>
<tr><td>Noé, Jorge y Dalia</td><td>En su trabajo suman las cantidades que están en el enunciado del problema, lo cual dan como respuesta. No comprenden el problema, como ejemplo de este proceder veamos el trabajo de Noé.

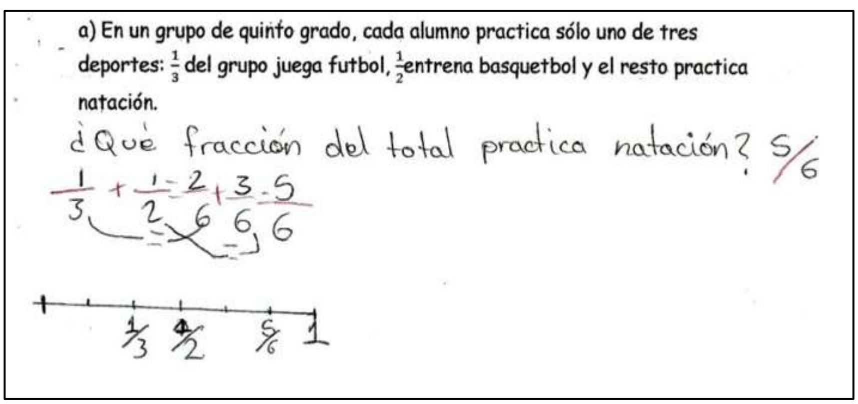


Figura 7. Trabajo de Noé</td></tr>
<tr><td>Pablo</td><td>Multiplica las fracciones contenidas en el enunciado del problema. No hace una correcta interpretación del problema.</td></tr>
<tr><td>Aziel</td><td>Hace una representación pictográfica, que no le sirve para lograr la respuesta correcta.</td></tr>
</table>

Observaciones.

Sólo 3 alumnos, niñas, logran dar su respuesta correctamente, de las cuales 2 realizaron operaciones de suma y resta de fracciones y la otra convirtió las fracciones a números decimales, evidenciando haber logrado los aprendizajes esperados.

La mayoría entendió el problema (11 estudiantes) pero, no realizan correctamente las operaciones, o la representación que eligen para el problema no les favorece para lograr la respuesta. Se encuentran en una etapa en la cual identifican los elementos del problema, pero cometen errores al operar.

Otro grupo de alumnos muestran saber operar números fraccionarios, pero en este caso no comprendieron el enunciado. Sólo operan con las cantidades contenidas en el enunciado del problema, suman $\frac{1}{2}$ con $\frac{1}{3}$ y consideran que es el resultado.

Características de las respuestas

- Estudiantes que muestran haber entendido el problema, pero no obtienen la respuesta correcta debido a una manera inadecuada de operar.
- Estudiantes que suman las fracciones contenidas en el enunciado y dan esto como respuesta, evidenciando no entender el problema.
- Estudiantes que intentan representar el problema en el modelo del pastel o un segmento unitario, sin éxito.

Actividad 6.

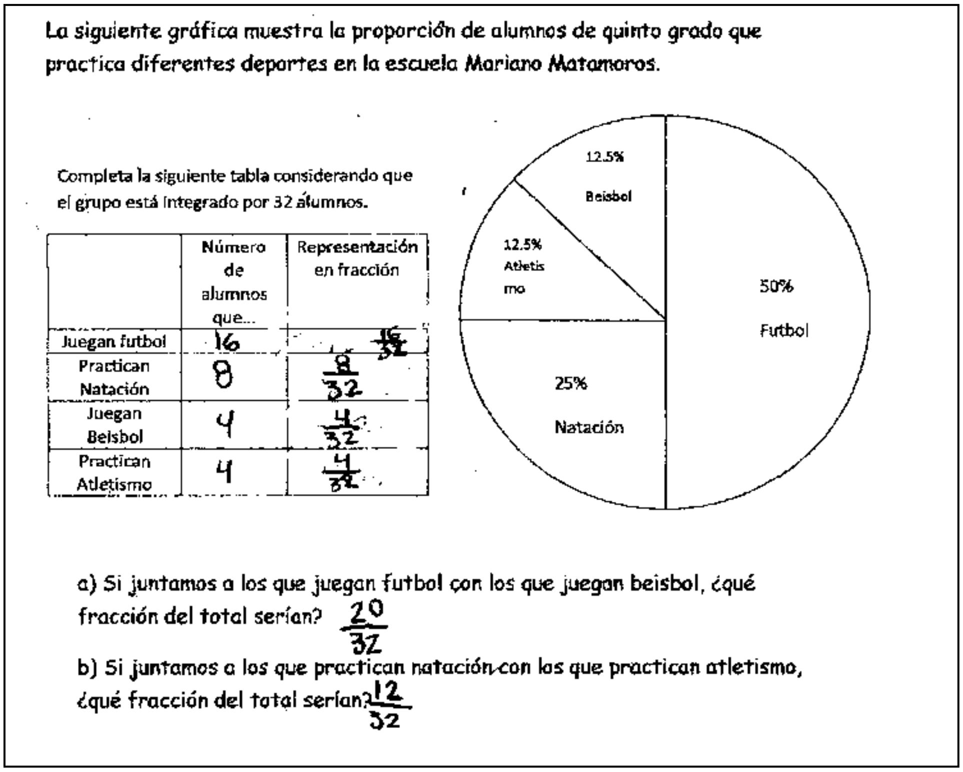
Aprendizajes esperados:

Interpreta la información presentada en tablas y gráficos para resolver problemas. Calcula porcentajes y los identifica en distintas expresiones (n de cada 100, fracción, decimal).

Esta actividad está relacionado con el bloque I del libro de quinto grado, así como con los bloques I y III de sexto grado.

La actividad elegida consta de dos partes; la primera, consiste en el llenado de una tabla a partir del cálculo del número de elementos que corresponde a cada subconjunto, cuando se conoce su porcentaje y el total de elementos, en otra columna de la tabla se pide representar con fracción la cuantificación de cada subconjunto. La segunda parte consta de dos incisos: a) y b) en los cuales se solicita calcular la suma de las fracciones que representan a dos subconjuntos de la tabla.

La mayoría de los estudiantes respondió correctamente esta actividad. En la siguiente figura se muestra como ejemplo, el trabajo de Samantha al resolver la actividad.



La siguiente gráfica muestra la proporción de alumnos de quinto grado que practica diferentes deportes en la escuela Mariano Matamoros.

Completa la siguiente tabla considerando que el grupo está integrado por 32 alumnos.

	Número de alumnos que...	Representación en fracción
Juegan futbol	16	$\frac{16}{32}$
Practican Natación	8	$\frac{8}{32}$
Juegan Beisbol	4	$\frac{4}{32}$
Practican Atletismo	4	$\frac{4}{32}$

a) Si juntamos a los que juegan futbol con los que juegan beisbol, ¿qué fracción del total serían? $\frac{20}{32}$

b) Si juntamos a los que practican natación con los que practican atletismo, ¿qué fracción del total serían? $\frac{12}{32}$

Figura 1. Trabajo de Samantha

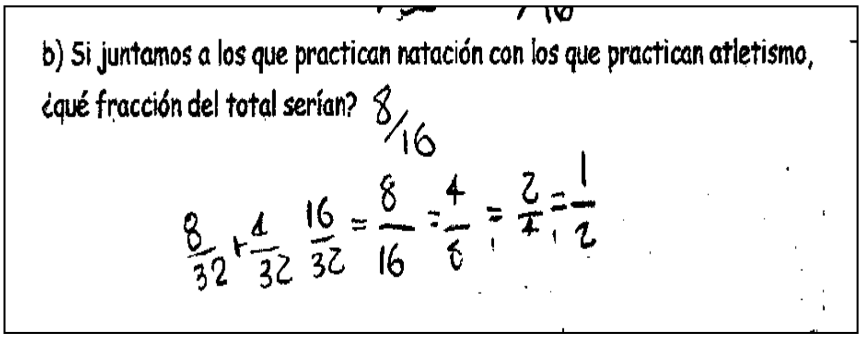
A continuación se muestran algunos de los errores observados:

<table>
<tr><th>Nombre</th><th>Observaciones</th></tr>
<tr><td>Denisse</td><td>En el inciso a), de acuerdo a su respuesta, realiza una suma donde parece haber convertido el 50% de los que juegan Futbol a ½ y el 12.5% de los que juegan beisbol a ¼ .no toman en cuenta el dato del número de alumnos.

a) Si juntamos a los que juegan futbol con los que juegan beisbol, ¿qué fracción del total serían? $24/32 = \frac{1}{2}+\frac{1}{4} = \frac{(4\times1)+(2\times1)}{8} = \frac{6}{8}$

Figura 2. Trabajo de Denisse al inciso a)

Mientras que el inciso b) lo contesta correctamente.</td></tr>
</table>

Noé	En a) contesta correctamente y en el b) da una respuesta incorrecta, sin mostrar procedimiento.
Dalia	En el inciso a) contesta correctamente. En el inciso b), plantea la suma de fracciones correctamente, pero en su respuesta parece se equivocó al sumar los numeradores (8+4=12), mientras que Dalia escribió 16.  Figura 3. Trabajo de Dalia al inciso b)
Pablo y Eduardo	Estos dos estudiantes para el inciso a) muestran el resultado correcto, pero sin escribir ningún proceso. Eduardo en el inciso b) hace lo mismo, también sin mostrar proceso. Pablo en el inciso b) hace una suma con potencias de 10 pero concluye incorrectamente.
Aziel	Él no llena correctamente la tabla a partir del gráfico, razón que no le permite contestar correctamente las situaciones en el inciso a) y b).

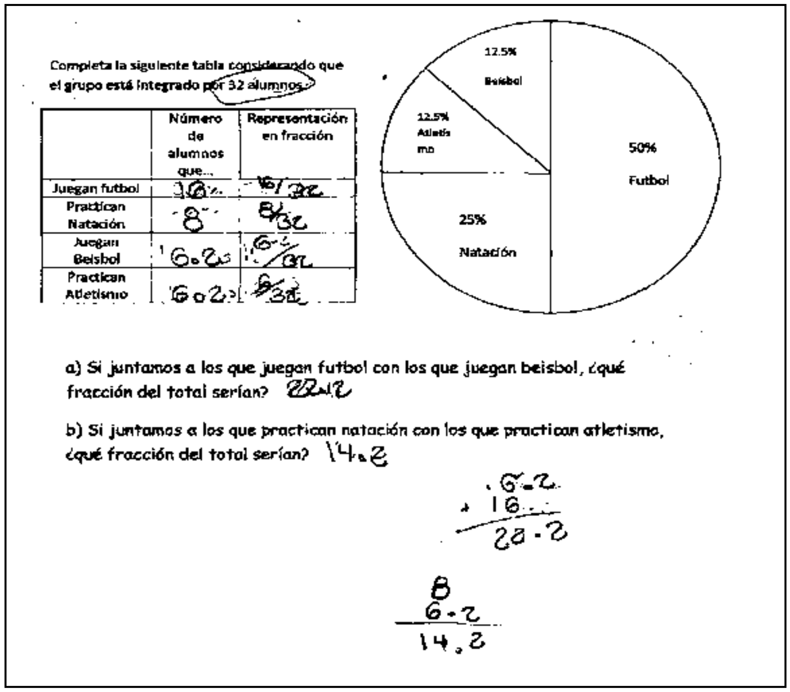
<table>
<tr><td>Stephania</td><td>No completa la tabla de manera correcta, se equivoca en el renglón de Beisbol y Atletismo, razón por la cual sus respuestas a los incisos a) y b) son equivocadas.


Figura 4. Trabajo de Stephania</td></tr>
<tr><td>Jorge</td><td>El tiene muchos errores al llenar la tabla, en el número de alumnos toma los porcentajes del gráfico, pero las representaciones como fracción las convierte correctamente (algunas con potencias de 10).
Al resolver las situaciones del inciso a) y b) no hace las equivalencias correctas.</td></tr>
</table>

Observaciones.

En general los estudiantes fueron capaces de llenar la tabla a partir de un gráfico, pues 14 lo hicieron, de los cuales 9 contestaron también correctamente los incisos a) y b).

Para la mayoría de los estudiantes fue relativamente sencillo hacer llenado de tablas a partir de gráficos, hay una buena correlación con los aprendizajes esperados. La mayoría de los estudiantes pudo transitar en las representaciones, de grafico de pastel en porciento, a tabla y fracción.

CAPÍTULO 5

Análisis Global de los resultados y conclusiones.

5.1 Análisis global de resultados.

A continuación hacemos un análisis de los resultados a partir del cual damos respuesta a las preguntas de investigación, de acuerdo a los aprendizajes esperados para las fracciones. Además sobre las dificultades mostradas.

1. El estudiante emplea procedimientos para hacer operaciones de sumas y restas con fracciones, sin uso de la calculadora.

Si bien, las operaciones de suma y resta de fracciones son contenidos que tradicionalmente son difíciles para los estudiantes, se observa que no hay un desconocimiento de los mismos. La mayoría de los estudiantes cuentan con nociones al respecto, sobre las cuales pueden construir o reconstruir los procedimientos. No obstante, la mayoría mostró dificultades, por lo menos en uno de los reactivos al efectuar la operación solicitada.

El 16.25% persiste en el empleo de esquemas erróneos al realizar operaciones; por ejemplo, al efectuar suma o resta de fracciones, suman o restan sus respectivos numeradores y denominadores. Otro 14.5% muestran conocer el procedimiento, pero cometen errores al realizar operaciones.

Los resultados nos dicen que poco más de una tercera parte de la muestra, realiza sin error las operaciones de suma y resta de dos fracciones con diferente denominador. Un alto porcentaje de estudiantes, 81.25%, no cuenta con la habilidad para realizar operaciones de suma y resta con tres términos.

2. El estudiante resuelve problemas en diversos contextos que implican los significados de reparto y medida de las fracciones. El caso de un problema de reparto que les requiere uso de fracciones para representar cocientes.

Los alumnos no mostraron dificultades para hacer la repartición de enteros, si el resultado es entero.

El 11.76% de los estudiantes comete errores al representar el resultado; por ejemplo, cuando se trata de repartir ocho manzanas entre ocho niños, escriben como respuesta “1/8”; queriendo indicar que a cada niño le toca una de las 8 manzanas. El significado de la fracción como división interfiere con el significado de proporción.

Para situaciones en los que la repartición no es entera, encontramos errores relacionados con la representación formal de la respuesta, pues aunque los alumnos modelan correctamente el problema con la operación división (representan la repartición); finalmente, cuando enuncian su respuesta no lo hacen en forma correcta.

En general, se observaron las siguientes características en las respuestas de los estudiantes:

- Representación formal de las respuestas. 41.17% de los estudiantes simboliza la repartición mediante cociente indicado y lo conciben como la respuesta. Para estos estudiantes el cociente indicado es su operación y respuesta.
- Representación formal y operación. 52.94% de los estudiantes simboliza la repartición mediante cociente indicado y operan para transformar la respuesta a decimal o fracción. Para estos estudiantes la fracción a/b es una operación de división que debe realizarse y su cociente es la respuesta.

- Representaciones concretas y operaciones con éstas. Consiste en el uso de figuras para representar la situación y usarlas para hacer la repartición para mostrar el resultado. Estos estudiantes requieren de concretizar el problema por medio de figuras y hacer la repartición.

Se observa que 23.5% de los estudiantes, cuando está en juego la repartición de dos cantidades, tiene la tendencia a dividir la cantidad mayor entre la menor.

3. El estudiante resuelve problemas que implican expresar la razón que guardan dos cantidades por medio de fracciones.

Los estudiantes usan una razón para representar la relación entre el tamaño de un rectángulo con otro, cuando la dimensión del segundo es múltiplo del primero, pero esto no ocurre cuando es submúltiplo.

Cuando el segundo es submúltiplo del primero invierten el orden en que se les solicita expresar la razón; tienden a visualizar las veces que se contiene el objeto más pequeño en el grande. Por ejemplo, afirman que la fracción que representa la razón de un rectángulo cuya dimensión es 7 veces la dimensión de otro rectángulo, es $\frac{1}{7}$; no dan sentido al orden del enunciado. Es una tendencia inversa a la de repartición, donde eligen la cantidad mayor para dividirla entre la menor.

4. El estudiante resuelve problemas que requiere multiplicar o dividir números fraccionarios y decimales por números naturales.

En el caso de la resolución de un problema contextual de repartición, que implica la división de una fracción por un entero.

La mayoría de los estudiantes muestra un entendimiento del problema que les permite buscar la respuesta por diferentes métodos.

En sus intentos de resolución recurren a diferentes representaciones de la fracción: en la recta numérica; pictográficas; y, en algunos casos, transforman la fracción a su forma decimal y representan el resultado con fracciones cuyo denominador es una potencia de diez.

Algunos de los estudiantes aún no logran prescindir de imágenes concretas, por lo que recurren al modelo del pastel para hacer la representación del problema; 9 de ellos lo intentan, pero sólo a seis les funciona; los otros tres cambian de estrategia, a una forma de representar el problema que los lleva a lograr una respuesta sólo correcta en términos de la misma figura que ellos representan.

Los tipos de respuestas correctas son como las que mostramos a continuación.

Respuesta correcta formal:

3/10÷ 2= 3/20,   0.3÷2=0.15

Los estudiantes que dan este tipo de respuestas ya han concebido la división de fracciones

Respuesta correcta no formal

"*1 pedazo y la mitad de otro*" referida a pedazos de pastel representados, cada uno de los cuales es 1/10

En la tabla No. 5.1 se presenta una clasificación de las formas de representación inicial empleadas y cuántos logran la respuesta correcta.

Recurso	Tipo de representación	Número de estudiantes que lo intentan	Respuestas correcta
Pictográfico	Modelo del pastel	9	6
	Recta numérica	4	1
Numérico	Fracción	2	1
	Decimal	2	1

En la tabla se observa cómo los recursos con los que cuentan los estudiantes les permiten cambiar de estrategia de solución; y a algunos de ellos les funciona. La representación más arraigada es la del modelo del pastel.

El caso de la resolución de un problema que implica la multiplicación de una fracción por un entero y suma de fracciones con denominadores diferentes.

La mayoría de los estudiantes, 64.7%, modelan el problema mediante las operaciones adecuadas, pero se equivocan al realizar las operaciones, sobre todo cuando realizan sumas con diferente denominador.

Sólo el 29.41% resolvieron el problema correctamente; algunos lo modelaron mediante las operaciones adecuadas y no se equivocan en la operatividad, otros transformaron las fracciones a su forma decimal y operaron estos números.

5. El estudiante resuelve problemas que implican sumar o restar fracciones (con denominadores diferentes) y decimales.

Sólo tres niñas resuelven correctamente el problema contextual en el que se conocen dos fracciones de un total y se pide calcular el resto.

El 64.7% de los estudiantes muestran entender el problema, pero no realizan correctamente las operaciones, o eligen una representación del problema que no les favorece para obtener la respuesta correcta. Es decir, identifican los elementos del problema, pero cometen errores al operar. No logran emplear eficazmente sus procedimientos operacionales.

Resumimos en tres categorías las respuestas incorrectas de los estudiantes:

- Muestran haber entendido el problema, pero no obtienen la respuesta correcta debido a que no realizan correctamente las operaciones con las fracciones.
- Muestran haber entendido el problema y lo representan en el modelo del pastel, o en un segmento unitario, pero con una respuesta incorrecta.
- Suman las fracciones contenidas en el enunciado y dan esto como respuesta, lo que evidencia no haber comprendido el problema.

6. El estudiante calcula porcentajes y los identifica en distintas expresiones (n de cada 100, como fracción, o como decimal).

La mayoría de los estudiantes saben interpretar la información porcentual contenida en un gráfico de pastel y calculan las cantidades que corresponden a un porcentaje de un total.

Así mismo, la mayoría de los estudiantes pudo transitar de una representación a otra: de gráfico de pastel a porciento, o en fracción.

En general, los estudiantes fueron capaces de seguir la secuencia solicitada: llenar la tabla a partir de un gráfico de pastel, transformado los porcentajes en cantidades conociendo el total, pues el 82.35% lo hizo correctamente, de los cuales el 52.9% logran expresar en forma de fracción las cantidades.

Para la mayoría de los estudiantes fue relativamente sencillo calcular las cantidades que corresponden a los porcentajes dados en un gráfico; en este caso hay una buena correlación con los aprendizajes esperados.

5.2 Conclusiones

Los resultados indican que los estudiantes de la muestra han tenidos experiencias con las fracciones y su uso, de acuerdo a los aprendizajes esperados, la mayoría cuenta con recursos para realizar operaciones de suma y/o resta, sin contexto, sin embargo, hay estudiantes que todavía muestran esquemas erróneos, provenientes de la memorización de procedimientos.

En cuanto al uso de operaciones para resolver problemas, se observaron casos de estudiantes que habiendo mostrado deficiencias al realizar operaciones de sumas y restas sin contexto, durante el proceso de resolución de problemas lo hacen con éxito. *Resolución de problemas* parece servirles como escenario lógico para integrar y articular las representaciones y significados de las fracciones.

En general no parece haber un alejamiento de los aprendizajes esperados, para los números fraccionarios, pretendidos en los nuevos programas de estudio del plan (2009), por ejemplo al resolver problemas, muestran flexibilidad en el empleo de recursos, así como en el uso de diferentes representaciones de la fracción.

Nuestro estudio fue realizado con estudiantes que habían sido formados con el plan 1993, a lo cual emerge la pregunta ¿qué mejoras se podrán observar en los estudiantes que egresen con el plan 2009 con respecto a las del plan 1993?

Podría ser abordada en un momento en el cual se cuente con generaciones de estudiantes plenamente formados en este plan, en el 2015.

Referencias:

Ávila (2008), *“Transformaciones y costumbres de la matemática escolar”*, México Paidós Educador.

Ávila y otros (1994). Construcción del conocimiento Matemático en la Escuela. Unidad Pedagógica Nacional. México 2002.

Ávila y otros (2000), *“La Reforma realizada. La resolución de problemas como vía de aprendizaje en nuestras escuelas”*, México, SEP.

Batanero y otros (2011) SEP. *Aprendizaje y enseñanza de las Matemáticas escolares. Casos y perspectivas*. Serie: Teoría y práctica curricular de educación básica. México D.F.

Behr y otros (1993), “Rational numbers: Toward a Semantic analysis emphasis on the operator construct” en T. P. Carpenter, E. Fennema y T. A. Romberg (eds.), Rational Numbers. An Integration of Research, Hilldsdale, NJ, Erlbaum, Pp. 13-47.

Cárdenas y otros, (1987) Algebra Superior. Editorial Trillas. México, D. F.

Centeno, Julia (1997). Números Decimales *¿Por qué? ¿Para qué?*, España, Síntesis.

Contreras, (2011), *“Dificultades en la resolución de problemas que involucran fracciones”*, www.uhu.es/luis.contreras/temas docente/temas3.htm (julio 2011).

De León Humberto/Fuenlabrada Irma. *Procedimiento de solución de niños de primaria en problemas de reparto*. Revista Mexicana de investigación Educativa, julio-diciembre, Vol. 1, número 2 Consejo Mexicano de Investigación Educativa México. 1996

Dickson *et al* (1991). El aprendizaje de las Matemáticas. Editorial Labor S. A.

España.

Kieren, T. E. (1976). On the Mathematical, cognitive, and instructional foundations of rational numbers. In R. Lesh (Ed.), Number and Measurement: Papers from a Research Workshop (pp. 101-144). Columbus, OH: ERIC/SMEAC.

Lamon, S. J. (1993), “Ratio and Proportion: Children’s cognitive and metacognitive processes, en T. P. Carpenter, E. Fennema y T. A. Romberg (eds.), Rational Numbers. An Integration of Research, Hilldsdale, NJ, Erlbaum, Pp. 131-156.

Lehrer, Jaslow y Curtis (2003), “Developing understanding of measurement in the elementary grades”, en D. H. Clements y G Bright (eds.), Learning and Teaching Measurement 2003 yearbook Reston, VA, National Council of Teachers of Mathematics, Pp. 100-121.

Post *et al* (1985). Order and equivalence of rational numbers: A cognitive analysis. Journal for Research in Mathematics Education, 16(1), 18-36.

SEP (1993) Matemáticas Quinto grado.

SEP (1993) Matemáticas Sexto grado. Quinta reimpresión (2000). México D.F.

SEP (1993) Matemáticas Tercer grado.

SEP (1993) Plan y Programas de estudio. Educación Primaria

SEP (1994) Matemáticas Cuarto grado. Segunda reimpresión (1997)

SEP (2000) Matemáticas Quinto grado. Primera edición.

SEP (2009) Plan y programas de estudio. Educación Primaria

SEP (2010) *Libro para el docente. Matemáticas. Primaria.* Versión Preliminar. Agosto 2010

SEP (2011) Matemáticas Sexto grado. Segunda edición.

SEP (2011) Plan de estudios 2011. Educación Básica.

Sepúlveda y García (1994). Reporte de investigación. Facultad de Físico Matemáticas UMSNH.

Smith, et al. (2001) Algebra. Editorial Pearson. México D. F.

Toluk y Middleton (2001), “The development of children’s understanding of the quotient: A teaching experiment”, en M Van Heuvel-Panhuizen (ed.), Proceeding of the 25^{th} Annual Metting of the Inter4national Group of Psychology of Mathematics Education, Utrecht, The Netherlands.

ANEXO I.

Se presenta a continuación los aprendizajes esperados de los libros de texto de quinto y sexto de primaria, anotando en negritas los contenidos que involucran fracciones tomando algunas de las actividades relacionadas con el tema de fracciones para después más tarde seleccionar algunas de ellas para su aplicación en el aula.

Libro de texto oficial de 6° grado de matemáticas.

Bloque I.

Aprendizajes esperados.

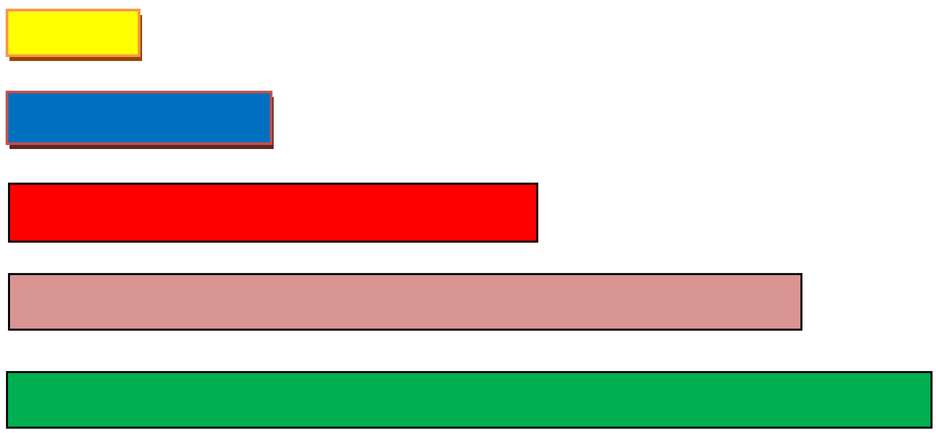
- Utiliza distintos métodos para realizar operaciones con números naturales.
- **Usa fracciones para representar cocientes.**
- Interpreta la información presentada en tablas y gráficos para resolver problemas.
- Traza círculos y circunferencias, al igual que sus elementos para resolver problemas.
- Conoce los nombres de distintas rectas y ángulos.
- Resuelve problemas que impliquen describir rutas o calcular distancias en un mapa o croquis.

Actividades:

La tía Juana compra cada domingo 8 manzanas que reparte de manera equitativa entre los sobrinos que la visitan. El antepenúltimo domingo llegaron 8 sobrinos, el penúltimo domingo la visitaron 5, y el último sólo fueron 4.

- ¿Qué fracción de manzana le tocó a cada niño el antepenúltimo domingo?
- ¿Qué fracción el penúltimo?
- ¿Qué fracción el último?
- Reto:

Ese problema permite que los alumnos hagan una comparación entre dos cantidades, una forma de enriquecer la actividad sería pedirles que construyan rectángulos de esos tamaños.



¿Cuántos segmentos amarillos caben en le azul?

¿Cuántos segmentos azules caben en el rosa?

¿Qué fracción del rectángulo verde es el rectángulo amarillo?

¿Qué fracción del rectángulo rojo es el azul?

¿Qué fracción del rectángulo rosa es el rojo?

Decimales y porcentajes.

Resuelve mentalmente los problemas siguientes, comprueba los resultados usando la calculadora.

La zona de almacenamiento de KuMaloobZaap, en Campeche, tiene una capacidad de 2.2 millones de barriles de petróleo crudo al mes. ¿Cuántos barriles se almacenan al año?

La Secretaría de Educación Pública informa que la Prueba Enlace 2008 en el nivel básico se aplicó a 10697296 alumnos pertenecientes a 121378 planteles de primaria y secundaria, lo que representa una cobertura de aplicación de 99%.

- ¿Qué cantidad corresponde al 1% del total de exámenes aplicados?
- Si la cuarta parte de las escuelas fue de nivel secundaria, ¿cuántas escuelas de este nivel se evaluaron?
- ¿Cuántos planteles corresponden al nivel de educación primaria?

Bloque II

Aprendizajes esperados.

- **Lee, escribe y compara números naturales y decimales. Conoce el valor de las cifras en función de su posición.**
- Utiliza las propiedades de la división de números naturales al resolver problemas.
- Aplica el factor constante de proporcionalidad para resolver problemas de valor faltante.
- Resuelven problemas que involucran el uso de las medidas de tendencia central (media, mediana y moda).
- Construye prismas y pirámides, y calcula la superficie lateral y total.

Actividades:

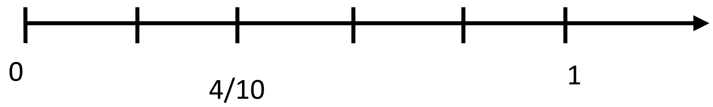
Reúnete con otro compañero y contesten las preguntas:

- En el número 343, ¿cuál es la diferencia entre el valor de un tres y el otro tres?
- Escribe un número mayor a 343 empleando los mismos dígitos. ¿Cuántas centenas tienen el número que escribieron?
- En el número 0.272, ¿qué decimales representa un dos y el otro dos?
- Escriban un número menor a 0.272 empleando los mismos dígitos. ¿Cuántos milésimos tiene el número que escribieron?

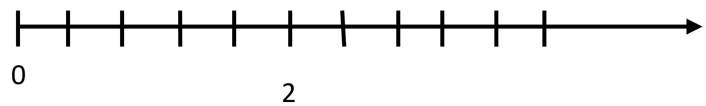
Realiza la siguiente actividad.

- En la recta numérica marca $\frac{3}{5}$

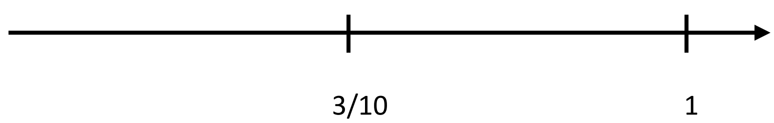
- ¿Cuántos decimos hay en entre cada marca de la recta?
- Marca el punto 0.7

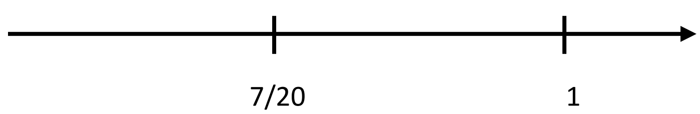


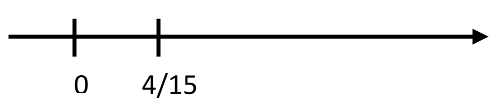
- ¿Qué fracciones están marcadas entre los puntos 0 y 2 en la siguiente recta?



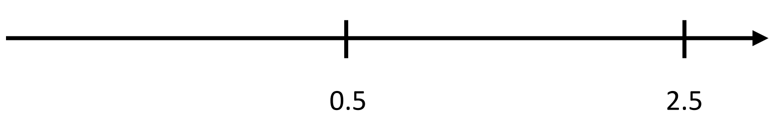
- ¿Cómo divides la recta anterior para localizar la fracción $\frac{4}{5}$?
- ¿En cada una de las siguientes rectas localiza los puntos 0, 1 y $\frac{4}{5}$?

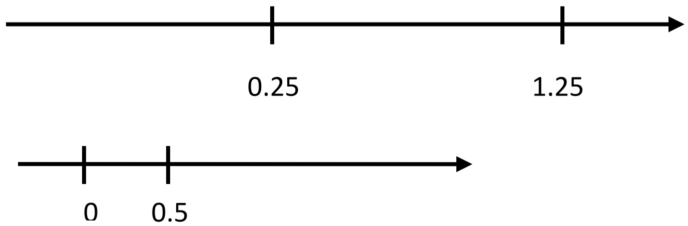






- Localiza los puntos 0, 1 y 0.7 en las rectas siguientes.





Bloque III.

Aprendizajes esperados.

- **Determina, por estimación, el orden de magnitud de un cociente.**
- **Calcula porcentajes y los identifica en distintas expresiones (n de cada 100, fracción, decimal)**
- Analiza los cambios de escala y sus efectos en la interpretación de gráficos.
- Utiliza el primer cuadrante del plano cartesiano como sistema de referencia para ubicar puntos.
- Resuelve problemas que implican conversiones del Sistema Internacional (SI) y del Sistema Inglés de Medidas.

Actividades.

En parejas contesten lo que se pide.

Con este problema los alumnos compararán cantidades fraccionarias con decimales y podrá quedarles más claro las diferencias y semejanzas que existen entre ellos.

- A los alumnos de un grupo de sexto grado se les solicitó que dijeran su estatura, los que la sabían la registraron de la siguiente manera: Daniel, 1.4 m; Alicia, 1 m con 30 cm; Fernando $1\frac{1}{4}$m; Mauricio y Pedro, 1.50 m; Sofía $1\frac{1}{5}$ m.

a) ¿Quién es el más bajo de estatura?

b) ¿Qué alumnos tienen la misma estatura?

c) Teresa no sabe con exactitud su estatura, pero al compararse con sus compañeros se da cuenta de que más alta que Daniel y más baja que Pedro. ¿Cuánto mide aproximadamente?

En equipos, resuelvan los problemas siguientes.

- Juan trabaja como pintor. Le pidieron que pinte 20% de la superficie de una pared en forma de rectángulo con dimensiones de 2.10 m x 3. ¿Cuántos cm^2 debe pintar?
- Con 75% de una cubeta grande de pintura Juan pintó una barda de 30 m de largo y 4 m de altura. ¿Cuántos metros cuadrados más alcanzará a pintar Juan con lo que sobró de pintura?
- En el libro ¿Y el medio ambiente? Problemas de México y el mundo, la Secretaría de Medio Ambiente y recursos Naturales (Semarnat) publicó que en las zonas metropolitanas produjeron el 45% del total de basura que se generó en el año 2006, que equivale a 16.2 millones de toneladas; las ciudades pequeñas generan el 9% y las zonas rurales y semirrurales, 14%. ¿Cuántas toneladas de basura, aproximadamente, se produjeron en las ciudades pequeñas? __________________, ¿cuántas toneladas de basura hubo en las zonas rurales y semirrurales? _______________________

Bloque IV

Aprendizajes esperados.

- **Ordena, encuadra, compara y convierte números fraccionarios y decimales.**
- **Divide números fraccionarios o decimales entre números naturales.**
- Resuelve problemas de combinatoria que involucren permutaciones sin repetición.
- Resuelve problemas que involucran comparar razones.

- Traza polígonos regulares inscritos en circunferencias o a través de la medida del ángulo interno del polígono.
- Resuelve problemas que implican calcular volumen de prismas mediante el conteo de unidades cúbicas.
- Resuelve problemas que implican usar la relación entre unidades cúbicas y unidades de capacidad.

Actividades.

- En parejas, realicen lo que se indica.

Un listón se dividirá en partes iguales. Completen la siguiente tabla y anoten en metros los tamaños resultantes.

Longitud de la pieza (m)	Número de partes iguales en la que se cortará	Tamaño de cada una de las partes
1	2	
2	4	
3	2	
4	4	
5	5	
6	5	
7	5	
8	5	
9	4	
10	5	

- Escribe en notación decimal y fraccionaria las siguientes cantidades:
    - 5 decimos 3 centésimos ___________________________
    - 2 enteros 3 centésimos ____________________________
    - 9 enteros 1 décimo 9 centésimos 5 milésimos _________

Estos problemas nos permitirán observar como los alumnos trabajan en el contexto de partes de un todo.

- Cuándo Raúl y Esperanza llegaron a una fiesta quedaron $\frac{3}{10}$ de pastel, así que se lo dividieron en partes iguales. ¿Qué parte de pastel le tocó a cada uno?
- En una ferretería, $\frac{6}{7}$ de una lata de pintura se vaciaron en 3 recipientes en partes iguales. ¿Qué parte de pintura quedó en cada recipiente?
- Daniel compró un pastel y se comió la octava parte, a sus cinco hermanos les repartió lo que quedaba en partes iguales, ¿qué fracción del pastel le tocó a cada uno de los hermanos?

Bloque V

Aprendizajes esperados.

- **Usa el divisor común o el múltiplo común para resolver problemas.**
- Utiliza las propiedades de la proporcionalidad para resolver problemas con diferentes unidades de medida.
- Selecciona el modo adecuado de presentar información mediante diagramas y tablas.
- Compara las probabilidades: teórica y frecuencial de un evento simple.

Actividades.

- Don Luis tiene un terreno que mide $\frac{1}{2}$ Km de largo, donde sembrará hortalizas. Para saber cuánto comprar de semillas y fertilizantes debe conocer el área de su terreno, ¿cuál es el área del terreno?

Libro de texto oficial de 5° Grado de Matemáticas.

Bloque I

Aprendizajes esperados.

- **Resuelve problemas en diversos contextos que implican diferentes significados de las fracciones: reparto y medida.**
- Resuelve problemas de conteo usando procedimientos informales.
- Traza triángulos y cuadriláteros con regla y compás.
- Analiza la relación entre perímetro y área e identifica las medidas para expresar cada uno.
- Construye planos de casas o edificios conocidos.
- Calcula el perímetro de diversos polígonos.
- Elabora, lee e interpreta tablas de frecuencias.

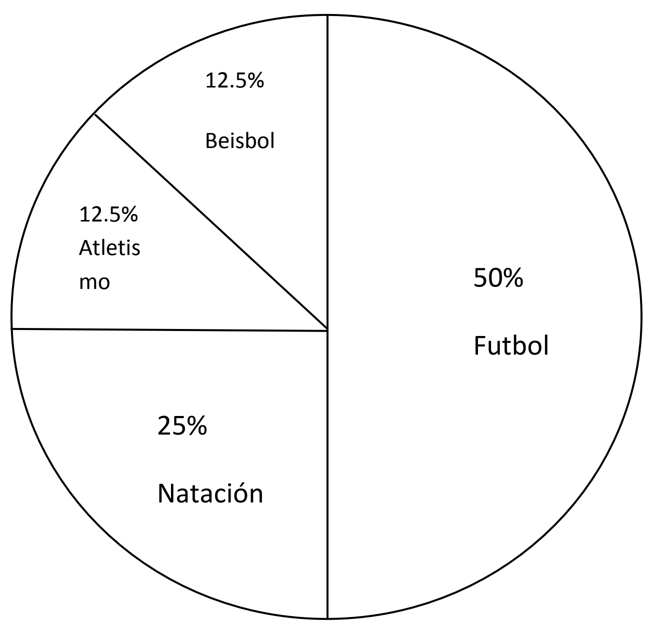
Actividades.

Resuelve problemas usando fracciones en distintos contextos.

La siguiente gráfica muestra la proporción de alumnos de quinto grado que practica diferentes deportes en la escuela Mariano Matamoros.

En equipos, completen la siguiente tabla considerando que el grupo está integrado por 32 alumnos.

	Número de alumnos que…	Representación en fracción
Juegan futbol		
Practican Natación		
Juegan Beisbol		
Practican Atletismo		



- ❖ Si juntamos a los que juegan futbol con los que juegan beisbol, ¿qué fracción del total serían?
- ❖ Si juntamos a los que practican natación con los que practican atletismo, ¿qué fracción del total serían?

Bloque II

Aprendizajes esperados.

- ➢ Resuelve problemas que implican el uso de múltiplos de números naturales.
- ➢ **Resuelve problemas que implican establecer las relaciones entre dividendo, divisor, cociente y residuo.**
- ➢ Representa, construye y analiza cuerpos geométricos.
- ➢ Resuelve problemas que implican leer e interpretar mapas.
- ➢ Resuelve problemas que implican conversiones entre múltiplos y submúltiplos de metro, litro y kilogramo.
- ➢ Resuelve problemas que implican la identificación, en casos sencillos de un factor constante de proporcionalidad.
- ➢ Utiliza intervalos para organizar información sobre magnitudes continuas.

Actividades.

Ubica fracciones en la recta numérica.

- ❖ En equipos, realicen la actividad siguiente.

Este problema es interesante porque les permite trabajar en la recta numérica y establecer relaciones entre las fracciones.

- ❖ En la escuela de Pedro se organizó una carrera de relevos donde participaron equipos de 4 niños. Para realizarla debían marcar en el patio una pista con las distancias y así poder conocer cuánto iba a correr cada participante. La distancia total era de 160 m, el primer relevo estaba a $\frac{1}{4}$ de la distancia entre la salida y la meta, el segundo relevo a $\frac{1}{2}$ de la distancia entre la salida y la meta, y el último a $\frac{6}{8}$ partes de la distancia entre la salida y la meta.

- ❖ Tracen en su cuaderno una recta de 16 cm que represente la pista de carreras, ubiquen la salida en uno de los extremos de la recta y coloquen el 0, y en el otro extremo de la recta la meta y el 160.
- ❖ Dividan la recta en segmentos que les permitan representar los puntos de relevos representados por las fracciones correspondientes.
- ❖ ¿Cuántos centímetros hay entre cada punto de relevo?

En parejas, resuelvan el siguiente problema.

- ❖ Gloria le enseñó a Isaac 135 tarjetas de futbolistas y le contó que esas representaban sólo $\frac{1}{4}$ de lo que tenía en su casa. ¿Cuántas tarjetas tiene Gloria en total?
- ❖ Expliquen el procedimiento que siguieron para determinar el total de las tarjetas de gloria.

Bloque III

Aprendizajes esperados.

- ➢ Reconoce relaciones entre las reglas de funcionamiento del sistema de numeración decimal oral y de otros sistemas de numeración
- ➢ Resuelve problemas de comparación y orden entre números decimales.
- ➢ **Ubica fracciones propias e impropias en la recta numérica a partir de distintas informaciones.**
- ➢ **Resuelve problemas que implican sumar o restar fracciones (con denominadores diferentes) y decimales.**
- ➢ Identifica trazar las alturas de triángulos.
- ➢ Resuelve problemas que implican el uso de la fórmula para calcular el área de paralelogramos, triángulos y trapecios, usando el metro cuadrado y sus múltiplos o submúltiplos y las medidas agrarias.

- Resuelve problemas usando el porcentaje como constante de proporcionalidad.
- Determina el espacio muestral de un experimento aleatorio.

Actividades.

Aplica fracciones equivalentes y compara con fracciones de distinto denominador.

En parejas, realicen las siguientes actividades.

Un problema de repartición (división), el cual se aborda con una tabla que a los alumnos les es más fácil trabajar con ellas.

Ana llevó a la escuela 4 naranjas para repartirlas en partes iguales entre ella y sus 7 amigas.

a) ¿Qué fracción de naranja le tocó a cada una de las amigas de Ana?
b) ¿Qué cantidad le correspondería a Ana y a sus 7 amigas si lleva 8 naranjas para repartir?
c) Al llevar 8 naranjas y repartirlas entre 16 personas, ¿qué fracción de naranja le tocaría a cada una de ellas?
d) ¿Qué cantidad obtendrían si llevara 4 naranjas y las repartiera entre 15 amigos y ella?

Con los datos anteriores, completa la tabla.

Incisos	a	b	C	d
Niños	8			
Naranjas	4			
Naranjas por niño	$\frac{4}{8}$			

- ¿Cómo es la fracción del inciso a) respecto a la del inciso c)? ____________

¿Por qué?

- ¿Cómo es la fracción del inciso a) respecto a la del inciso b)? _________

¿Por qué?

Compara las fracciones y escribe en el espacio el signo <, > 0 =, según sea el caso. Después, acomoda las fracciones en la recta numérica.

a) $\frac{3}{5}\frac{10}{20}$

b) $\frac{2}{3}\frac{3}{4}$

c) $\frac{2}{6}\frac{2}{5}$

d) $\frac{7}{8}\frac{5}{6}$

e) $\frac{1}{3}\frac{3}{9}$

Resuelve problemas que incluyen sumas o restas de fracciones y números decimales.

En parejas, resuelvan los problemas siguientes.

Problemas relacionados con operatividad de sumas y restas.

- Claudia compró $\frac{3}{4}$ kg de uvas y luego $\frac{1}{2}$ kg más. ¿Qué cantidad de uvas compró en total?
- En un grupo de quinto grado, cada alumno practica sólo uno de tres deportes: $\frac{1}{3}$ del grupo juega futbol, $\frac{1}{2}$entrena basquetbol y el resto practica natación.

¿Qué fracción del total del grupo practica natación?

Bloque IV

- Resuelve problemas que implican la búsqueda de divisores de un número.
- **Resuelve problemas que suponen multiplicar números fraccionarios y decimales por números naturales.**
- **Resuelve problemas aditivos con números fraccionarios y decimales que impliquen el uso de recursos de cálculo mental.**
- Define y clasifica prismas y pirámides, y comunica sus características.
- Interpreta y construye gráficas de barras.

Actividades.

Aplica la multiplicación de números fraccionarios y decimales por naturales en la resolución de problemas.

Este grupo de problemas están relacionados con la multiplicación y división, que sólo se da como una introducción en los grados de quinto y sexto de primaria.

- Juan vende quesos. El lunes vendió 3 quesos de $\frac{1}{5}$ Kg y 7 quesos de $\frac{1}{4}$ Kg. ¿Cuántos kilogramos de quesos vendió en total?
- El martes vendió 7 quesos de $\frac{1}{4}$ Kg cada uno. ¿Cuántos kilogramos de queso vendió?
- El jueves vendió 9 quesos de $\frac{1}{2}$ Kg y 9 quesos de $\frac{3}{4}$ Kg. ¿Cuántos kilogramos vendió ese día?
- Con apoyo de tu profesor, verifica tus resultados, ¿cómo se multiplica una fracción por un número natural?

Aplica el cálculo mental con números fraccionarios y decimales.

Resuelve los ejercicios y escribe sobre la línea la respuesta. ¿Entre qué números enteros está…?

- El triple de $\frac{2}{3}$ ___________________________

- El doble de $\frac{15}{6}$ ___________________________
- La mitad de $\frac{7}{6}$ ____________________________
- La suma de $7 + 1.2 + 0.9$ _________________
- La diferencia de $6.08 - 3.98$ _______________
- La suma de $\frac{5}{6} + \frac{13}{10}$ _________________________

Bloque V

Aprendizajes esperados.

- **Resuelve problemas que implican expresar la razón que guardan dos cantidades por medio de fracciones.**
- Ubica números decimales en la recta numérica a partir de distintas informaciones.
- Resuelve problemas que implican dividir un número natural para obtener un cociente decimal.
- Establece relaciones entre operaciones inversas (multiplicación y división) para encontrar resultados.
- Resuelve problemas que implican establecer relaciones entre unidades y periodos.
- Distingue variaciones proporcionales y no proporcionales en diversas situaciones.
- Resuelve problemas que implican reconocer si el promedio es representativo en un conjunto de datos.

Actividades.

Expresa por medio de fracciones la razón que guardan dos cantidades.

Contesten las preguntas y completen la tabla.

El siguiente es un problema en el contexto de razón.

- La paletería que se encuentra enfrente de La Helada ofrece la siguiente promoción.

Paletas pagadas	Paletas de regalo	Razón
15	3	$\frac{3}{15} = \frac{1}{5}$
30		
45		
60		
75		
	18	
	30	
210		
900		
	600	

Por cada 15 paletas que compres te regalamos otras 3

- Representa la promoción con una fracción.
- La fracción de paletas regaladas con respecto a las compradas, ¿es mayor o menor que uno?
- ¿Qué significa que la fracción fuera mayor que 1?
- ¿Qué significa que la fracción fuera mayor que $\frac{1}{5}$?