



UNIVERSIDAD MICHOACANA DE
SAN NICOLÁS DE HIDALGO

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

“MAT. LUIS MANUEL RIVERA GUTIÉRREZ”

**Reconocimiento de patrones y generalización matemática como vía de ingreso al
álgebra escolar. Un estudio usando software educativo con estudiantes de nivel
secundaria**

TESIS QUE PRESENTA

Israel Roberto Serafín Zúñiga

PARA OBTENER EL GRADO DE

Maestro en Ciencias en el

Área de Matemática Educativa

ASESORA: Dra. María de Lourdes Guerrero Magaña

Morelia, Michoacán. Septiembre del 2013.

Índice

Resumen.....	4
1. Introducción.....	5
2. Planteamiento del Problema	8
2.1. Introducción.....	8
2.2. Justificación de la investigación	11
2.3. Planteamiento del problema de Investigación	14
2.4. Objetivos de la investigación	15
2.5. Preguntas de la investigación	16
3. Revisión de literatura.....	16
3.1 Introducción.....	16
3.2. Principios y Estándares para las Matemáticas Escolares.....	17
3.3. El Estudio, la Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas.....	19
3.4. Enseñanza y Aprendizaje con Entendimiento.....	21
3.5. Componentes de la generalización y la justificación en el razonamiento algebraico	23
3.6. Generalización y Abstracción	26
4. Metodología.....	29
4.1. Introducción.....	29
4.2. Actividades	29
4.2.1. Descripción del software y su Propósito	29
4.3. Características de las Actividades	39
4.3.1. Mi Primer Patrón con eXpresser.....	40
4.3.2. Mi Primer Patrón con eXpresser Parte II.....	46
4.3.3. Trabajando con Diferentes Colores.....	48
4.3.4. Trabajando con Fórmulas Numéricas	51
4.3.5. La Vía del Tren.....	54
4.3.6. El Jardín con Rosas	57
4.3.7. El Sendero	60
4.4. Implementación de las Actividades	63
4.5. Método de Análisis de la información.....	63
5. Análisis de la Información y Resultados	63
5.1. Introducción.....	63

5.2. Análisis de la información por Actividades	64
5.2.1. Mi Primer Patrón con Express Parte II	73
5.2.2. Trabajando con Fórmulas Numéricas	76
5.2.3. Trabajando con Números y Colores	79
5.2.4. El Jardín con Rosas	81
5.2.6. El Sendero	94
5.3. Análisis de la Información y resultados recabados para las otras actividades.....	100
6. Conclusiones.....	101
Bibliografía.....	107
Anexo.....	110
Mi Primer Patrón con eXpresser.	110
Mi Primer Patrón con eXpresser Parte II.....	113
La Vía del Tren.....	115
El Jardín de las Rosas.....	118
El Sendero.....	119
Trabajando con diferentes colores	121
Trabajando con Números y Colores.....	124

Resumen

La presente tesis muestra el trabajo realizado para obtener el grado de Maestro en Ciencias de la Educación Matemática bajo la dirección de la Dra. María de Lourdes Guerrero Magaña. La educación ha sido siempre un tema de vital importancia para lograr desarrollo de cualquier país, en este contexto el tema de educación es demasiado amplio e involucra diferentes aspectos, este trabajo de investigación se centra en la educación matemática.

Uno de los aspectos importantes que se discuten hoy en día en la educación matemática incluye una manera alternativa de enseñar, es decir una propuesta diferente al tradicional proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. Dentro de estas propuestas existe una gran variedad de intentos para concretar como debe ser esta nueva alternativa, y cada área de las matemáticas tiene también sus particularidades. En el álgebra es importante que el estudiante sea capaz de comprender ciertos conceptos, aplicar las reglas y generalizar este conocimiento para cualquier situación. Sin embargo la gran mayoría de los estudiantes de cualquier nivel de educación muestra la gran mayoría de las veces una mala experiencia en este sentido, en los casos restantes se logra únicamente un aprendizaje particular y solo algunos de ellos logran llegar a la generalización completa.

Con esta breve introducción comenzaré la descripción del manuscrito, en el primer capítulo se muestran algunos antecedentes de los problemas en la educación matemática, autores que han estudiado y propuesto soluciones para estos problemas, estudiando estos temas a profundidad y en particular se discute sobre una de las propuestas para lograr esta generalización, la cual a través de un software educativo se logra identificar patrones figurativos en los niveles en los que es más importante este tipo de ejercicios y que es en la educación básica (Primaria y secundaria). En el capítulo 2 se presenta el planteamiento del problema, incluyendo primeramente una pequeña introducción y posteriormente la justificación del trabajo, también incluye un estudio detallado de las propuestas de actividades existentes, este capítulo es la base para proponer nuevas actividades para estudiantes de nivel secundaria. La tecnología es hoy en día un factor que está presente en la vida diaria de todos los estudiantes y puede ser explotado de manera positiva para estudiar algunas actividades que permitan consolidar una alternativa en el proceso aprendizaje-enseñanza en el nivel secundaria, este tema está contenido en el capítulo 3 en donde se detalla el análisis de la literatura que se requirió para utilizar el tipo de software para que los estudiantes realicen las actividades. En el capítulo 4 se describe la metodología utilizada para el desarrollo de las actividades propuestas, las cuales son aplicadas y desarrolladas en municipios Michoacán para el aprendizaje del álgebra a temprana edad. En el capítulo 5 se muestra un estudio de las actividades realizadas por los estudiantes, que nos permite obtener la caracterización de los problemas que tienen los alumnos al resolver los problemas que se plantean en los libros de texto. En el último capítulo de la tesis se muestran los resultados, que dan una perspectiva de lo mucho que se puede hacer en la aplicación de las actividades como medio de enseñanza del álgebra.

Palabras clave: Educación Matemática, Álgebra, Educación Secundaria, Patrones, Generalización, Actividades con Software, Enseñanza del álgebra.

1. Introducción

La problemática actual de la educación en el mundo es diversa, para tratar de dar una solución a ésta, se han realizado diferentes estudios en los niveles básicos de la educación matemática escolar. La investigación en educación matemática ha tomado estos resultados y ha propuesto los patrones y generalización como la base del aprendizaje y enseñanza de las matemáticas, en particular en la enseñanza del álgebra. El álgebra se comienza a introducir en el nivel secundaria en México y es justo en este nivel de educación básica en el que se centra este trabajo de investigación.

Uno de los principales problemas que se encuentra en la educación a nivel secundaria y a niveles posteriores plasmados en documentos oficiales como el libro para el Maestro de Matemáticas Nivel Secundaria (Alarcón, J., Bonilla, E., Nava, R., Rojano, T., y Quintero, R., 2005), en Los Principios Estándares para las Matemáticas Escolares (NCTM, 2000) y la Asociación Internacional para la Evaluación del Logro Educativo (IEA, 2010), entre otros, son los problemas que presentan los alumnos para el aprendizaje de las matemáticas. Los estudios en matemática educativa muestran que en la gran mayoría de los estudiantes, estos problemas se deben a que han recibido la enseñanza tradicional, basada en aprender sólo reglas algebraicas y a hacer un conjunto de ejercicios para aprender a manipular los símbolos (Libro para el Maestro de Matemáticas, 2004). Después de haber acabado su educación básica, llega el momento de aplicar el conocimiento a situaciones reales pero esto no es posible, puesto que no se enseñó al estudiante a construir su conocimiento o a pensar en una aplicación real.

La incapacidad de los estudiantes para aplicar el conocimiento o la falta de adquisición de un conocimiento en el peor de los casos, también ha sido analizada de manera ardua por los expertos en matemática educativa (Libro para el Maestro de Matemáticas, 2004), en este contexto existen diferentes propuestas sobre cómo llevar a cabo el proceso de enseñanza y aprendizaje del álgebra. Dentro de estas propuestas está la de introducir el reconocimiento de patrones y la generalización a edades tempranas (Libro para el Maestro de Matemáticas, 2004). Las virtudes del reconocimiento de patrones y la generalización son que el estudiante construye su propio conocimiento logrando inferir comportamientos generales a

partir de ejemplos particulares, que le permitan comprender con mayor facilidad la expresión algebraica general y aplicarla a situaciones reales de manera natural asociando símbolos y operaciones con dichas situaciones.

En la actualidad la tecnología es una herramienta que puede ser explotada desde diferentes puntos de vista. En los estudios de la NCTM (2000) y en el Libro para el Maestro de Matemáticas (2004), proponen actividades donde se involucra algún tipo de software, y actividades de reconocimiento de patrones y generalización para que el álgebra surja de manera natural en el proceso de enseñanza. En Matemática Educativa se han propuesto diferentes aplicaciones tecnológicas como herramientas de aprendizaje (Tecnologías de la Información y de la Comunicación) que permiten al estudiante hacer uso del reconocimiento de patrones. Además de ser atractivas para los alumnos, permiten un estudio detallado de las actividades de cada estudiante en este esfuerzo por comprender y mejorar el proceso de aprendizaje del álgebra. En particular utilizaremos el software eXpresser, que incluye un mecanismo que permite al investigador tener un registro detallado de cada una de las actividades por alumno, tiene además un ambiente visual y sencillo para los estudiantes.

En el presente trabajo de investigación proponemos un estudio de actividades de reconocimiento de patrones y generalización, las cuales son realizadas por niños de primero de secundaria. La implementación de estas actividades se hace usando el software eXpresser y están diseñadas para que los estudiantes trabajen en ellas por dos horas cada una. La aplicación de las actividades diseñadas se realizó en los municipios de Taretan, Uruapan y Morelia del Estado de Michoacán y tuvieron un seguimiento de dos meses.

En la presente tesis se muestra este trabajo de investigación; la estructura del mismo se describe de manera general a continuación:

En el capítulo 2 se presenta el planteamiento del problema, incluyendo primeramente una pequeña introducción y posteriormente la justificación del trabajo. En la sección inmediata se plantea de manera precisa el planteamiento del problema de investigación y en la penúltima y última secciones, se presentan los objetivos y preguntas de investigación respectivamente.

En el capítulo 3 presentaré el análisis detallado de la literatura que se requirió para poder plantear las actividades de la presente investigación, dicho capítulo contiene dos secciones.

El Capítulo 4 versa sobre la metodología que se siguió en la presente investigación. En la primera sección hay una pequeña introducción sobre este capítulo, posteriormente la segunda sección habla sobre las actividades, su descripción, sus objetivos y sus posibles soluciones; en la sección 3 describí la metodología de la implementación, la disposición de equipos, la configuración del aula, la función del investigador y el papel del estudiante; finalmente la cuarta sección muestra la recolección y análisis de los resultados.

En el Capítulo 5 presentaré los resultados y el análisis de la información recabada con las actividades realizadas. La primera sección describe el contenido del capítulo, la sección siguiente contiene el análisis de información de las actividades, finalmente se presenta el análisis global.

En el Capítulo 6 incluyo las conclusiones de los resultados obtenidos de la presente investigación, así como algunas sugerencias para la realización de las actividades.

La bibliografía y los anexos de la presente tesis se encuentran en la parte final del documento.

2. Planteamiento del Problema

2.1. Introducción

Si observamos con detenimiento el desarrollo de la humanidad en toda su existencia podríamos darnos cuenta de que hay una relación intrínseca entre los avances de la humanidad y el avance de las matemáticas. Si nos remontamos por ejemplo a la organización de los clanes nómadas, estos requerían de una organización que a su vez necesitara realizar operaciones matemáticas para ser eficiente. Después de esta etapa, la humanidad paso de ser una sociedad nómada a una sociedad sedentaria, el paso al sedentarismo fue gracias a la observación y conocimiento de eventos periódicos en la agricultura que implicaba tener ciertos conocimientos de matemáticas.

Pensemos en culturas antiguas como los Egipcios, los Griegos, los Árabes, los Mayas, entre otros y una vez más que cada una de estas culturas tenía un amplio conocimiento acerca de las matemáticas. Si queremos pensar en algo más contemporáneo podemos pensar por ejemplo en todos los avances matemáticos que suceden justo a la par de la revolución industrial, si continuamos en esta dirección podríamos relacionar cada evento importante de la humanidad con las matemáticas.

Hoy en día las matemáticas son una herramienta necesaria en casi todos los campos de especialización profesional. En otras palabras, aprender matemáticas en la sociedad actual es una necesidad básica de todos los niños. En este momento, con una sociedad en constante cambio y sobre todo con un desarrollo científico y tecnológico que crece exponencialmente, el estudio de las matemáticas se incluye desde en edades tempranas y posteriores de la educación básica.

Los jóvenes estudiantes cuando llegan a niveles de educación superiores donde deben de ser capaces de resolver problemas reales es que, presentan una incapacidad para lograrlo de manera satisfactoria.

Esta situación y muchas otras en relación con la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas crearon un área de especialización, la Matemática Educativa que tiene por

objeto de estudio justamente este proceso de enseñanza y aprendizaje. La investigación en matemática educativa ha avanzado enormemente pues se ha logrado caracterizar los procesos de aprendizaje y proponer nuevas estrategias para la enseñanza esperando con esto lograr que los estudiantes tengan el conocimiento necesario para aplicarlo a situaciones reales de manera satisfactoria; más aun, que logren construir caminos por sí mismos para obtener más conocimiento en base a sus experiencias personales. Al igual que todas las áreas de especialización, la matemática educativa es un área muy amplia, que estudia diferentes aspectos del proceso de enseñanza aprendizaje. Los resultados de los estudios realizados en educación básica han llevado a un grupo de investigadores (Mulligan & Micheltore, 2009; Warren & Cooper, 2008; Rivera & Becker, 2008a, Rivera, 2007; Billings, Tied & Slater, 2007; Lannin, Barker & Townsend, 2006; Lannin, 2005; Steeler & Johanning, 2004; Stacey & MacGregor, 2001) a fijar su mirada en el problema del aprendizaje y la enseñanza del álgebra.

En este contexto, el álgebra es una herramienta fundamental para cualquiera de los temas que se tratan en los estudios superiores y es de hecho el área de las matemáticas puras con la que los estudiantes tienen el primer contacto con los símbolos. Los resultados indican (Libro para el Maestro, 2004) que la gran mayoría de los estudiantes tienen un desempeño por debajo de lo deseado en el primer contacto con el álgebra, y en un futuro un camino cerrado para muchos de ellos en las matemáticas avanzadas, acompañado de una profunda aversión hacia ellas.

En matemática educativa se nombra siempre al álgebra tradicional, este es el término utilizado por primera vez por James Kaput en 1999 (J. Kaput, 1999), para describir el álgebra que encontramos en la gran mayoría de los salones de clase en la escuela. El álgebra tradicional está basada en la simplificación de expresiones algebraicas, resolución de ecuaciones, memorización de reglas, manipulación de símbolos y resolución de problemas o aplicaciones que en la gran mayoría de los casos son muy artificiales (J. Kaput, 1999). El álgebra tradicional ha enseñado y el estudiante por consiguiente ha aprendido una serie de procedimientos y reglas totalmente desconectadas de otras áreas de las matemáticas y aún más lejanas del mundo real del estudiante.

La nueva propuesta para enseñar el álgebra, es una propuesta en donde ésta sea aprendida o construida con entendimiento (Kaput, 1999). El álgebra es de cierta manera la puerta de entrada al estudio de las matemáticas avanzadas y lograr que el alumno adquiera el conocimiento matemático con entendimiento; esto tendrá como consecuencia la puerta abierta hacia una amplia posibilidad de profesionalización en donde se involucren las matemáticas avanzadas. En otras palabras la nueva enseñanza del álgebra debe educar para lograr tener a un estudiante consiente de la importancia del álgebra, capaz de comprender y construir su propio aprendizaje en matemáticas (J. Kaput, 1999).

Una de las propuestas de esta nueva enseñanza del álgebra es la de introducir el reconocimiento de patrones y la generalización como actividades a desarrollar desde edad temprana, de manera particular en primero de secundaria que es justo antes de que el estudiante tenga su primer encuentro con el álgebra. En este sentido en la presente tesis se plantean actividades de reconocimiento de patrones para jóvenes estudiantes de primero de secundaria.

Para poder plantear dichas actividades es necesario tener la definición de lo que es un patrón.

La generalización algebraica de un patrón se basa en la capacidad de identificar cosas comunes entre los elementos de una secuencia S , estar consiente que estas características se pueden encontrar en todos los términos de S y ser capaz de utilizarlas para obtener una expresión directa de cualquier término de S (Radford, L., 2010).

En otras palabras, la generalización de un patrón se basa en identificar una característica común que generaliza a todos los términos de secuencia y que sirve como una garantía para construir expresiones que permanecen mas allá del campo de lo apreciable.

La generalización de las características comunes de todos los términos es la formación del conocido genus (de lo particular a lo general). La expresión directa que describe estas características comunes de una secuencia requiere la elaboración de una regla. (Radford, L., 2010).

Con esta definición y considerando la importancia de la tecnología hoy en día, decidimos plantear una serie de actividades usando el software eXpresser en grupos de alumnos de primer año de secundaria de diferentes municipios del Estado de Michoacán, para

investigar sobre la pertinencia de las actividades, los resultados obtenidos por los alumnos y las dificultades a las que se enfrentaron en la solución de dichas actividades.

Se propone hacer una caracterización de estas dificultades para apoyar al desarrollo de nuevas actividades que permitan a los estudiantes desarrollar habilidades de generalización y simbolización utilizando de manera adecuada un software educativo.

2.2. Justificación de la investigación

La motivación principal de implementar una propuestas basada en el uso de los patrones los patrones y generalización ha sido que en documentos importantes como El Libro para el Maestro de Secundaria(2005), los Principios y Estándares para las Matemáticas (NCTM, 2000), la Asociación Internacional para la Evaluación del logro Educativo (IEA, 2010),e investigadores como Kaput (1999), Carpenter y Lehrer (1999), Amy B. Ellis (2007), se plantean las necesidades más importantes para el aprendizaje del álgebra a temprana edad. En este sentido algunos expertos de la educación matemática proponen a los patrones como una herramienta útil para satisfacer estas necesidades.

El Libro para el Maestro plantea que se debe enseñar patrones y generalización en los primeros grados de la enseñanza media (Primero de secundaria). Esta propuesta subyace en la premisa de que los patrones son una actividad constructiva y subjetiva que permite que el estudiante coordine las habilidades perceptivas e inferenciales (Rivera, 2009) de tal manera que sea capaz de construir y justificar una estructura algebraica útil y comprensible. Si este tipo de actividades se incluye desde edades tempranas en el estudiante, el conocimiento será construido de manera natural, desde este punto de vista el hecho de que los estudiantes construyan su propio conocimiento ayudaría a que dejen de pensar en las matemáticas como un conjunto de fórmulas y reglas para resolver problemas artificiales y sin sentido, y la vean como una disciplina dinámica y en crecimiento: una creación humana.

Como puede observarse, en las diferentes investigaciones (Mulligan & Micheltmore, 2009; Warren & Cooper, 2008; Rivera & Becker, 2008, Rivera, 2007; Billings, Tied & Slater, 2007; Lannin, Barker & Townsend, 2006; Lannin, 2005; Steeler & Johanning, 2004; Stacey & MacGregor, 2001) las actividades con patrones han sido un recurso para tratar de desarrollar habilidades matemáticas básicas, como la habilidad para generalizar. Algunos

expertos señalan que el álgebra puede ser aprendida y desarrollada en la escuela a través del estudio de patrones con diferentes características (Grupo Arzaquiel, 1900).

Es justamente en este contexto donde el desarrollo de actividades en las que se involucren patrones es un punto fundamental en el proceso de enseñanza aprendizaje del álgebra con entendimiento.

Las actividades con patrones que los educadores deberían enseñar a los estudiantes, deben reunir ciertos requisitos para lograr la meta. En este sentido, además de las nuevas propuestas es muy importante que se apliquen y se estudien diferentes actividades con patrones, ya que los patrones pueden ser una gama tan amplia de actividades que el maestro puede plantear una actividad que no sea constructiva y hacer que el alumno se enfrasque en actividades muy largas y enredosas de las que podrá obtener un mínimo de conocimiento.

La investigación en el diseño de estas actividades es por consiguiente muy importante, ya que se puede contar con una serie de actividades bien estudiadas que permitan al educador y al estudiante crear un ambiente de aprendizaje agradable a la vez que el estudiante logra obtener las habilidades necesarias para lograr una generalización.

Durante mucho tiempo imperó, que la enseñanza de las matemáticas consistía en hacer una vasta cantidad de ejercicios junto con que el maestro mostrara las propiedades del álgebra, para que los alumnos las comprendieran; por ejemplo, simplificar la ecuación que se muestra a continuación:

$$\frac{x[-(3x+4)(x-2)^2]}{-\{-(-x^3)\}} =$$

Simplificar este tipo de problemas era suficiente para que el maestro determinara si el alumno tenía el conocimiento necesario o no. Pero la experiencia ha mostrado que esto no es así, un análisis de dichas experiencias se presentan en el Libro para el Maestro de Matemáticas de Secundaria escrito por Jesús Alarcón Bertolussi (Alarcón, J. et all, 2004), concluyendo que el estudiante tiene únicamente habilidades para manipular símbolos y realizar operaciones algebraicas pero carece de la capacidad de asociar estos símbolos con un problema real. Más aún, en la gran mayoría de los casos los estudiantes simplemente tienen una colección de procedimientos matemáticos y son incapaces de encaminarlos a algún fin; es decir, difícilmente podrán identificar cuál procedimiento seguir incluso para

resolver ejercicios del estilo tradicional. La evaluación que determina si un estudiante ha tenido un aprendizaje significativo no puede reducirse simplemente a la memorización de definiciones y teoremas, ni a la aplicación mecánica de ciertas técnicas y conocimientos.

También, en las pruebas de habilidad matemática, aplicadas a los estudiantes al ingresar al bachillerato o a la licenciatura usualmente por el CENEVAL, se incluye una variedad de este tipo de actividades, con el fin de evaluar sus capacidades matemáticas básicas. Por ejemplo (ver Figura 2.1):

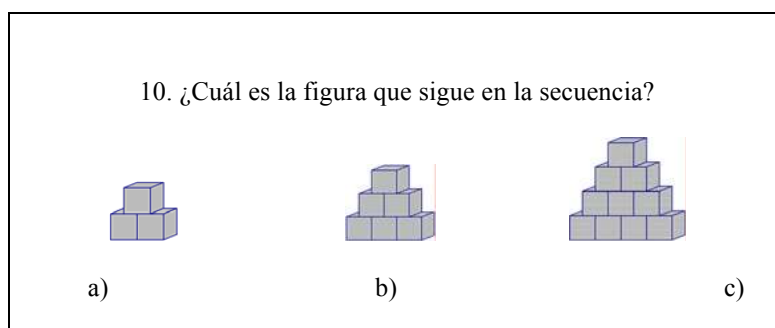


Figura 2.1. Se le pregunta al estudiante ¿Cual es la figura que sigue en la secuencia?

En otras palabras, una forma que se considera adecuada para evaluar o determinar si un estudiante cuenta con las habilidades matemáticas necesarias, es recurriendo a actividades de patrones. En la evaluación los patrones son entonces muy útiles tanto para determinar el grado de aprendizaje de un estudiante así como para proveer al mismo estudiante de habilidades matemáticas.

En la enseñanza, el reconocimiento de patrones es un recurso didáctico para favorecer la simbolización matemática en las primeras etapas del estudio del álgebra y además, es una actividad que favorece el desarrollo de habilidades matemáticas a través de la identificación de elementos fundamentales en una sucesión de objetos o casos, así como su generalización a un conjunto más amplio de casos, con base en evidencia “suficiente”.

Bajo esta perspectiva, el presente trabajo busca identificar aquellos elementos del proceso de reconocimiento de patrones que favorecen el desarrollo de habilidades de generalización. Así mismo, se busca identificar la relación que guardan estos procesos con las diferentes formas en que los estudiantes de secundaria tratan de expresar y justificar sus

resultados, con el fin de establecer un vínculo con los procesos de simbolización en matemáticas.

Para lograr estos objetivos se diseñaron actividades específicas con objetivos bien definidos las cuales se aplicaron a estudiantes de primer año de secundaria para realizar un estudio de los resultados de cada estudiante, esta investigación pretende tener como resultado una serie de recomendaciones para mejorar las actividades y lograr finalmente tener una serie de actividades que cumplan con el propósito general.

2.3. Planteamiento del problema de Investigación

Como aportación a la propuesta de una enseñanza del álgebra con entendimiento, queremos tomar el reconocimiento de patrones y desarrollar actividades para que los alumnos del primer año de secundaria, puedan desarrollar habilidades matemáticas que les facilite, su encuentro con el álgebra y las matemáticas avanzadas. También, atendiendo a la propuesta de incorporar a la tecnología como herramienta de aprendizaje, sugerida en los programas de estudios de la secundaria, decidimos involucrar un software desarrollado precisamente para trabajar con patrones en el aula de secundaria.

El software que se eligió fue eXpresser, la razón de su elección además de ser un software didáctico específico para trabajar con patrones, tiene una ambiente gráfico agradable y atractivo para los estudiantes de secundaria; es un software libre y permite al investigador realizar un monitoreo de las actividades realizadas por el estudiante.

A la par de decidir el software para las actividades se pensó en las actividades con patrones que se podían plantear para adecuarlas al uso de eXpresser. Se propusieron en total 5 actividades las cuales se planeó aplicarlas en diferentes centros educativos que contaran con sala de medios para poder instalar el software. Algunos maestros de nivel secundaria de centros educativos de los municipios Taretan, Uruapan, Zacapu y Morelia del Estado de Michoacán mostraron un interés en participar en este proyecto juntando un total alrededor de 180 estudiantes. El problema de investigación en un principio parecía ser muy amplio razón por la cual se decidió acotar al siguiente:

Caracterizar los procesos de generalización y las dificultades que enfrentan los estudiantes de primer año de secundaria cuando resuelven problemas de reconocimiento de patrones apoyados en el uso de software didáctico.

Una vez que las actividades se diseñaron, para implementarlas se solicitó permiso para la instalación del software en los centros educativos. Todas las actividades fueron filmadas y monitoreadas por los integrantes de la investigación. Para llegar a una solución integral del problema de investigación se debió seguir una metodología para la aplicación de las actividades, así como un análisis de la información recabada; ambas partes se muestran con detalle en los capítulos 4 y 5 del presente trabajo.

2.4. Objetivos de la investigación

El objetivo general del presente trabajo es:

- ***Contar con una caracterización de los procesos de generalización de los estudiantes de primer año de secundaria y de las dificultades que enfrentan cuando resuelven tareas de reconocimiento de patrones usando software didáctico específico.***

De éste se desprenden los siguientes objetivos específicos:

- ***Identificar los recursos matemáticos y las ideas de los estudiantes de primero de secundaria cuando tratan con actividades de reconocimiento de patrones.***
- ***Documentar y analizar los procesos de razonamiento que siguen los alumnos cuando tratan de identificar regularidades y generalizar en tareas de reconocimiento de patrones organizadas por nivel de complejidad.***
- ***Contar con un conjunto de tareas de reconocimiento de patrones bien documentados por contenido y nivel de dificultad propias para estudiantes de primer año de secundaria.***

2.5. Preguntas de la investigación

Las siguientes preguntas han sido planteadas con el fin de guiar el trabajo de investigación:

- ¿Cuáles son los recursos matemáticos que utilizan los estudiantes de primer año de secundaria cuando resuelven actividades de reconocimiento de patrones?
- ¿Cuáles son las formas de comunicar y justificar sus resultados?
- ¿Qué tipo de dificultades (en conocimientos, en procesos, en representaciones, inducciones incompletas, etc.) enfrentan los estudiantes?

3. Revisión de literatura

3.1 Introducción

Kaput (1999) plantea una reforma para el aprendizaje del álgebra y muestra un fuerte argumento para estudiarla detenidamente. Sostiene que la justificación en cualquier forma es una parte significativa del razonamiento algebraico pues induce al hábito de establecer conjeturas y plantear preguntas que permitan obtener una generalización.

Amy B, Ellis (2007) realiza un estudio del proceso de generalización y justificación de algunos estudiantes del séptimo grado de educación elemental que corresponde al primer grado de educación secundaria, señala que la generalización y la justificación se consideran parte fundamental de los componentes del razonamiento algebraico, considera que los estudiantes deben desarrollar ciertas habilidades de generalización a temprana edad, para tener una base sólida en la comprensión del álgebra.

En los Principios y Estándares para las Matemáticas Escolares (NCTM, 2000) se proponen diferentes temas relacionados con los patrones en las diferentes franjas de los grados educativos en los estándares de álgebra. Para los primeros grados, las actividades consisten en clasificar y ordenar objetos por tamaños. También se incluyen actividades de

verbalización en donde el profesor ayuda a identificar una secuencia de colores como rojo, verde, verde, verde, rojo, la cual puede ser infinita. Más adelante, en los grados correspondientes al nivel secundaria, se pide a los alumnos utilizar constantes, variables y expresiones algebraicas para describir patrones.

El Libro para el Maestro de Matemáticas de Secundaria (2004), el Artículo de Amy B Ellis (2007) los Principios y Estándares para las Matemáticas Escolares (NCTM, 2007), son los aspectos que se desarrollarán en el presente capítulo, en el que se hace una somera revisión de varios documentos que nos han servido de base para sustentar el presente trabajo.

3.2. Principios y Estándares para las Matemáticas Escolares

Los Principios y Estándares para las Matemáticas Escolares del NCTM (2000) bajo el rendimiento académico en matemáticas mostrado por los estudiantes estadounidenses, en evaluaciones internacionales, como las realizadas por la Asociación Internacional para la Evaluación del logro Educativo (IEA), desde 1964 produjo una serie reformas a las matemáticas escolares, plasmadas en documentos como los Estándares Curriculares y de Evaluación para las matemáticas Escolares (NCTM, 1989) y, posteriormente los Principios Estándares para las Matemáticas Escolares (NCTM, 2000).

Estos documentos son guía para el diseño del currículo de matemáticas en Estados Unidos incluyen un conjunto de estándares o áreas generales de estudio, consideradas como las más importantes a desarrollar en la enseñanza básica; es decir, desde el K (Preescolar en nuestro sistema educativo) hasta el grado 12 (el nivel bachillerato en nuestro sistema educativo).

EL documento se estructura sobre la base de dos pilares: *principios* y *estándares*. Los principios orientan la acción educativa. Forman parte de las grandes decisiones subyacentes a todo currículo e implican a los ámbitos políticos, sociales y económicos.

Estos son los principios curriculares que propone la NCTM:

Igualdad: La buena educación matemática requiere igualdad, es decir, altas expectativas y una base potente para todos los estudiantes.

Curriculum: Un currículo es más que una colección de actividades: debe ser coherente, centrado en matemáticas importantes, y bien articulado en grados. El énfasis en seleccionar

matemáticas importantes o relevantes para los objetivos marcados. Por ejemplo, dentro del campo numérico, cita la proporcionalidad y las razones; cita las destrezas de razonar y deducir, la capacidad de predicción a través de las matemáticas o incrementar conocimientos en recursión, iteración y comparación de algoritmos.

Enseñanza: La enseñanza efectiva necesita que sea retadora para que las matemáticas sean mejor comprendidas.

Aprendizaje: Los estudiantes deben aprender matemáticas, comprendiéndolas, construyendo activamente nuevo conocimiento desde la experiencia y en conocimiento previo.

Evaluación: La evaluación debería apoyar el aprendizaje de las matemáticas importantes y aprovechar esta información poderosa para ambos, alumnos y profesores.

Tecnología: La tecnología es esencial en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas; influye en las matemáticas que se enseñan y refuerza el aprendizaje de los estudiantes.

Los estándares curriculares tratan de dar respuesta a la pregunta ¿qué contenidos y procesos matemáticos deberían los estudiantes aprender a conocer y a ser capaces de usar cuando avancen en su educación? Se estructuran en estándares de contenido y de proceso.

Los cinco estándares de contenidos se organizan sobre la base de áreas de contenido matemático, y son: Números y Operaciones, Álgebra, Geometría, Medida y Análisis de datos y Probabilidad. Los otros cinco estándares son de procesos y mediante ellos se presentan modos destacados de adquirir y usar el conocimiento: Resolución de Problemas, Razonamiento y Demostración, Comunicación, Conexiones y Representación.

En el álgebra, los símbolos algebraicos y los procedimientos para trabajar con dichos símbolos han sido un gran logro en la historia de las matemáticas y son críticos en el trabajo matemático. La mejor manera de aprender el álgebra es entendiéndola como un conjunto de conceptos y técnicas ligadas con la representación de relaciones cuantitativas y también como un estilo de pensamiento matemático para la formalización de patrones, funciones y generalizaciones. Pese a que muchos adultos piensan que el álgebra es un área de las matemáticas más apropiada para estudiantes de nivel medio y superior, los niños pequeños pueden ser motivados a usar el razonamiento algebraico cuando estudian

números y operaciones; lo mismo que cuando investigan patrones y relaciones entre grupos de números. En el estándar Álgebra, las conexiones del álgebra con los números y situaciones diarias están expandidas en los últimos grados escolares con el propósito de incluir también ideas geométricas.

3.3. El Estudio, la Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas

Por otra parte, el Libro para el Maestro de Secundaria (SEP, 2005) de la Secretaría de Educación Pública en México ha sido preparado para los profesores de matemáticas de Educación Secundaria del país, y lo entrega gratuitamente como un apoyo que busca la consolidación de la calidad de la educación.

En su primera edición en 1994, éste fue concebido como un primer esfuerzo de fortalecimiento del trabajo docente de los profesores de matemáticas de educación secundaria, al que se le han venido sumando otros materiales de apoyo como: Secuencia y Organización de Contenidos (SEP, 2000). Matemáticas. Educación secundaria y el Fichero. Actividades didácticas (SEP, 2000). Matemáticas. Educación Secundaria (SEP, 2000).

A la par de la producción de materiales de apoyo, la Secretaría de Educación Pública revisa regularmente los materiales que entrega a los profesores; para ello toma en cuenta los comentarios de los maestros, las exigencias que se presentan en la sociedad y los avances en el campo de la educación matemática.

Cada una de las ediciones del Libro para el Maestro. Educación básica. Secundaria se enriquece en el capítulo referido al enfoque didáctico para el estudio, la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, propuesto en el Plan y programas de estudio. Educación básica. Secundaria. Con base en la experiencia acumulada se realizaron algunas modificaciones, por ejemplo: se revisó la estructura, se organizaron las actividades y problemas y se actualizaron los datos.

El profesor cuenta con orientaciones concretas respecto al tratamiento de los contenidos matemáticos para cada una de las cinco áreas en que están organizados los temas en los programas de estudio, así como diversas actividades y problemas que en su mayoría fueron diseñados para los alumnos de educación secundaria; no se tratan todos los temas señalados en los programas de estudio, pero sí los que presentan mayores y más frecuentes

dificultades para los alumnos.

Este libro no pretende señalar al profesor lo que debe hacer en cada una de sus clases. El reconocimiento de la experiencia y la creatividad del profesor fue el punto de partida para la preparación de este material. Por esta razón, las propuestas didácticas que se incluyen son abiertas y ofrecen amplias posibilidades de adaptación a las formas de trabajo de cada profesor, a las condiciones en que labora y a las necesidades y dificultades de aprendizaje de los alumnos.

El estudio la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas persigue propósitos esencialmente formativos estos consisten en:

- Desarrollar habilidades.
- Promover actitudes positivas.
- Adquirir conocimientos matemáticos.

Estos propósitos no tienen ningún orden de importancia, sin embargo el avance ó el retroceso de alguno si repercute, de alguna manera al otro.

Como se señala en el plan de estudios vigente, con el estudio de las matemáticas en la educación secundaria se pretende que los estudiantes desarrollen habilidades operatorias, de comunicación y de descubrimiento, para que puedan aprender permanentemente y con independencia, así como resolver problemas matemáticos de diversa índole.

El término de habilidad se referente a que los alumnos desarrollen un conjunto de tipo genético por medio de la experiencia y esto dará lugar a habilidades individuales (Montero, 1999), las habilidades que se buscan son. La habilidad de calcular, de inferir, de comunicar, de medir, de imaginar, de estimar, de generalizar y de deducir.

Promover actitudes positivas se refiere a que los alumnos presenten un interés ante las matemáticas, y para ello se proponen algunas actitudes.

- La colaboración en equipo.
- El respeto al expresar ideas y escuchar la de los demás.

- La perseverancia.
- La autonomía.
- Una sana autoestima.

El adquirir conocimientos matemáticos en el plan de estudios solo tiene el propósito de consolidar el proceso de formación básica a fin de lograr una cultura matemática significativa y funcional. Que los alumnos puedan usarla en diversas actividades que realizan cotidianamente.

En el Libro para el Maestro de Secundaria en el propósito del estudio la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en la educación secundaria se encuentran los materiales manipulables y las nuevas tecnologías, la calculadora favorece a que los estudiantes se centren en los procesos de resolución de un problema, más que en los cálculos mismos; descubran patrones en sucesiones numéricas; verifiquen sus resultados de manera inmediata.

Las computadoras son procesadores de información que posibilitan el uso de diversos programas (software) útiles para el estudio de las matemáticas en la educación secundaria.

3.4. Enseñanza y Aprendizaje con Entendimiento

Para discutir la enseñanza y aprendizaje del álgebra con entendimiento debemos ver cuál es el álgebra que los estudiantes encuentran en el salón de clases. El álgebra escolar tradicional de simplificación de expresiones algebraicas, resolución de ecuaciones y el aprendizaje de las reglas para la manipulación de símbolos, está basado en más de un siglo de trabajo del álgebra escolar.

Bajo el esquema de entendimiento que Carpenter y Lehrer (1999) plantean para la reforma en el salón de clases el álgebra tradicional tiene una falla casi total. En este sentido Kaput (1999), señala que el álgebra escolar tradicional que el alumno recibe y aprende se reduce a un conjunto de problemas y propiedades, desconectados por un lado, de otros conocimientos matemáticos y por otro del mundo real del estudiante.

En el álgebra tradicional la construcción de relaciones y aplicaciones del conocimiento adquirido no es el objetivo principal, pues en este sentido, tal como menciona Kaput, las

aplicaciones resultan muy artificiales. El estudiante que recibe en el salón el álgebra tradicional resuelve problemas de edades de personas y monedas muy alejados de su vida cotidiana, este hecho suprime la oportunidad de reflejar sus experiencias personales y la de compartir sus conocimientos con otros expresando su punto de vista personal. En este contexto el estudiante del álgebra tradicional únicamente aplica relaciones sin ninguna explicación.

Continuando con el análisis de esta situación en los grados más avanzados, el conocimiento que los estudiantes deben tener, en comparación con los primeros grados, es que debe ser capaz de construir relaciones y aplicaciones razonadas, para después ser expresadas en símbolos y dar una respuesta acertada.

Situación que dista mucho de ser solo la habilidad de memorizar procedimientos, pues todas las formas de razonamiento del álgebra como las gráficas, tablas, fórmulas, entre otras, son hoy en día una de las herramientas intelectuales más importantes que ha desarrollado la civilización humana.(Kaput, 1999).

El estudiante debe pasar del álgebra tradicional a enfrentarse a las matemáticas avanzadas, lo que resulta en una experiencia desagradable y un camino cerrado para muchos, pues carecen de la habilidad de construir razonando estas relaciones y aplicaciones. Esta situación hace pensar a una gran cantidad de estudiantes que su educación matemática llegó a su fin sin poder comprender la importancia del álgebra para resolver situaciones de su vida cotidiana.

El cambio que se propone es encontrar maneras en las que las herramientas intelectuales que provee el álgebra estén disponibles para todos los estudiantes. Así mismo, se pretende investigar los ambientes que permitan a los estudiantes aprender con entendimiento.

El punto de partida de la propuesta de Kaput se basa en lo que se conoce acerca del proceso de enseñanza aprendizaje del álgebra y se puede resumir en los siguientes puntos fundamentales:

- Empezar el proceso de aprendizaje de manera temprana (en parte construir de manera informal el conocimiento).

- Integrar el aprendizaje del álgebra con el aprendizaje de otras áreas de las matemáticas (por extensión y aplicación del conocimiento matemático).
- Incluir diferentes formas de pensamiento algebraico (aplicando el conocimiento matemático).
- Construir una lingüística a la que el estudiante recurra de manera natural, así como un poderoso desarrollo cognoscitivo (alentarlos a que al mismo tiempo que reflexionan lo que han aprendido puedan articular lo que saben).
- Fomentar el conocimiento activo (y las construcciones de relaciones interpersonales) lo cual los llevará a comprender el verdadero sentido de hacer y comprender (Kaput, 1999).

Esta propuesta sugiere una ruta más profunda y a largo plazo para la reforma del álgebra donde una actividad fundamental es que los estudiantes generalicen y se expresen mediante un lenguaje cada vez mas formal. La generalización comienza en la aritmética, y casi todas las matemáticas del currículo de la primaria la requieren.

3.5. Componentes de la generalización y la justificación en el razonamiento algebraico

Una investigación minuciosa de las habilidades de generalización y justificación algebraicas de los estudiantes (Kaput, 1999) sugiere que éstos experimentan una gran dificultad para crearlas y utilizarlas adecuadamente. La literatura ha documentado ampliamente (Kaput, 1999; NCTM, 2000; Rojano 2001; Flores 2002) los errores de los estudiantes; sin embargo, se sabe poco acerca de lo que los estudiantes entienden como convincente y general. Por ejemplo Amy B. Ellis (2007) realiza un estudio del proceso de generalización y justificación de algunos estudiantes del séptimo grado de educación elemental, que corresponde al primer grado de educación secundaria en el sistema de educación nacional en México.

La generalización y la justificación se consideran parte fundamental del razonamiento algebraico de acuerdo con lo escrito por diversos autores (Kaput, 1999). Señalan que los estudiantes deben desarrollar ciertas habilidades de generalización a temprana edad, para tener una base sólida en la comprensión del álgebra. En estudios recientes de educación

matemática se ha puesto especial atención en la generalización y la justificación en la que la gran mayoría de los investigadores considera como una actividad intrínseca del pensamiento matemático y más aún, Kaput (1999) plantea que la generalización y la justificación son lo que hace matemático al pensamiento, Kaput (Harel & Tall, 1991), sostiene que la justificación es una parte significativa del razonamiento algebraico pues induce al hábito de establecer conjeturas y plantear preguntas que pueden llevar a una generalización. Otras investigaciones (Curcio, Nimerofsky, Perez & Yaloz, 1997; Petocz & Petocz, 1997; Reid, 2002; Blanton and Kaput, 2012), indican que, establecer un entendimiento de la justificación desde los primeros grados facilita la generalización en la educación secundaria.

Algunos estudios (Knuth & Elliot, 1998) hablan de las dificultades que los estudiantes tienen para generalizar y justificar y de cómo, éstos, aún reconociendo patrones múltiples son incapaces de identificar los que son útiles para una tarea específica. Estos estudios muestran la tendencia de los estudiantes a enfocarse en la recursividad más que en la relación funcional (Chazan, 1993; English & Warren, 1995; Kieran, 1992; Knuth, Slaughter, Choppin & Sutherland, 2002; Lee & Wheeler, 1987). Esta situación resalta el hecho de que reconocer un patrón no siempre garantiza una habilidad para generalizar (Blanton & Kaput, 2002; Pegg & Redden, 1990; Schiliemann et al, 2001; Szombathely & Szarvas, 1998). También se han detectado casos de estudiantes que logran generalizar un patrón y justificar por qué ocurre y sin embargo siguen requiriendo a ejemplos para justificar la validez de su razonamiento.

Como ya se mencionó existe poca información acerca de lo que los estudiantes consideran correcto y general. Un examen más detenido de la conexión que los estudiantes ven entre sus generalizaciones y las justificaciones es importante, porque estas dos componentes están estrechamente relacionadas (Blanton & Kaput, 2002; English & Warren, 1995; Lee, 1996; Lee & Wheeler, 1987; Orton & Orton, 1994; Stacey, 1989). Este punto de vista podría mostrar con claridad cuáles son las herramientas que utilizan los alumnos cuando justifican sus generalizaciones. Si un estudiante generaliza basándose únicamente en conocimientos empíricos no debe sorprendernos que su prueba se base en ejemplos específicos. Por el contrario, si un estudiante que generaliza justificando con relaciones cuantitativas puede expresar un argumento más general en su justificación (Blanton &

Kaput, 2002; Pegg & Redden, 1990; Schliermann et al., 2001; Szombathelyi & Szarvas, 1998).

En otras palabras la generalización y justificación son procesos bidireccionales que permiten enriquecer la intuición del estudiante para alcanzar nuevas generalizaciones. Un estudio de las relaciones que los estudiantes ven entre la generalización y la justificación permite un mejor entendimiento del desarrollo interrelacionado de ambos aspectos.

En este estudio (English & Warren, 1995; Orton & Orton, 1994; Stacey & MacGregor, 1997), se obtiene la clasificación de cuatro mecanismos que permiten describir los cambios de las generalizaciones y justificaciones de los estudiantes. Estos cuatro mecanismos son: Acción-reflexión, Atención, Generalización que promueve la deducción del razonamiento y la Influencia del Razonamiento, la deducción de la Generalización. La forma en la que estos mecanismos se comportan no es jerárquica pues interactúan de una manera compleja para sustentar los más poderosos actos de generalización y justificación a lo largo del tiempo; de manera general estos mecanismos surgen para explicar el fenómeno que identifica el proceso de generalización y justificación como un solo acto en lugar de dos actos distintos y separados.

La naturaleza de la interacción entre generalización y justificación muestra que cada una de estas actividades influencia a la otra de manera cíclica al tiempo en que el razonamiento de los estudiantes evoluciona, lo cual muestra la importancia de desarrollar la interacción inicial entre generalizar y justificar para ampliar las proposiciones y justificaciones que lleven a procesos de generalización más complicados.

Se podría pensar que el uso de patrones crea dificultades considerables a los estudiantes para pasar de una justificación en particular a una generalización (Lannin, 2005); sin embargo, en este estudio se muestra que el punto de vista de una generalización algebraicamente correcta no necesariamente es el más productivo. Los estudiantes involucrados en actividades de generalización que mostraban justificaciones limitadas parcialmente incorrectas e incluso improductivas pudieron en varios intentos crear justificaciones deductivas con mayor facilidad. Este estudio sugiere que los profesores deben considerar seriamente introducir desde los primeros años instrucciones secuenciales tales como los patrones en lugar de esperar que sus estudiantes produzcan una

generalización final antes de pasar a una prueba, de tal manera que el rol de la justificación se puede ver como una manera más efectiva para que el estudiante generalice en lugar de una consecuencia de la generalización.

Aunque los estudiantes entienden más fácilmente los patrones, se recomienda a los profesores intervenir para dirigir la atención de los estudiantes a una relación funcional, de esta manera el rol del profesor es crítico para escoger problemas, plantear preguntas, moderar discusiones, introducir las ideas que promuevan una generalización y justificación más efectiva.

3.6. Generalización y Abstracción

Los términos “generalización” y “abstracción” son usados con diferentes matices de significado por matemáticos y educadores matemáticos, cada representación de ambas con un proceso y el producto de un proceso.

Los autores Harel y Tall (1989) reconocen tres diferentes clases de generalización que dependen de los procesos cognitivos individuales de construcción:

1. Generalización expansiva: ocurre cuando el sujeto expande el rango de la aplicación del existente esquema sin reconstruir el que ya tiene.
2. Generalización reconstructiva. Ocurre cuando el sujeto reconstruye un esquema existente con el fin de ampliar el rango de aplicabilidad.
3. Generalización disyuntiva. Ocurre cuando se mueve de un contexto familiar a otro. El sujeto construye una nueva, disyunción, esquema para hacer frente a un nuevo contexto y sumar esto a su gama de esquemas disponibles.

La generalización expansiva es una generalización en el sentido de que antes los esquemas son incluidos directamente como un caso especial en el caso final del esquema.

La generalización reconstructiva difiere en que el nuevo esquema es cambiado y enriquecido antes de ser incluido en el esquema más general.

La generalización disyuntiva proviene de un observador (cómo un profesor universitario muestra a los estudiantes cómo resolver ecuaciones lineales) para ser un caso exitoso de la generalización. Sin duda permite al individuo hacer frente a una gama más amplia de

ejemplos en matemáticas, pero falla en el proceso cognoscitivo de la generalización en el sentido de que el estudiante es incapaz de ver estos ejemplos como casos especiales de un procedimiento general. La generalización disyuntiva parece ser más una receta para el fracaso de un individuo pues adquiere cada vez más procedimientos aislados, esto implica emplear cada vez más procedimientos para resolver problemas más generales. Es para los estudiantes inexpertos una carga adicional, esta situación puede llegar al colapso del estudiante a largo plazo, por lo tanto, expresar generalizaciones y una reconstrucción son mucho más apropiados para el desarrollo cognoscitivo

El proceso de abstracción ocurre cuando el sujeto enfoca su atención en propiedades específicas de un objeto dado, después considera estas propiedades de manera aisladas para aplicarse en otros objetos. Esto podría hacerse, por ejemplo, para entender la esencia de un determinado fenómeno, y quizás más adelante aplicar la misma teoría en otros casos diferentes a dicho fenómeno.

Dicha aplicación de una teoría abstracta sería el caso de una reconstrucción debido a que la generalización abstracta de propiedades con una reconstrucción a las originales, que ahora se aplicará un amplio dominio. Nótese que una de las reconstrucciones de la generalización ocurre, esto se puede extender a un rango de ejemplos en donde los argumentos aplicados a un simple proceso de expansión de generalización.

Por ejemplo, cuando un grupo de propiedades son extraídas de varios contextos para dar un axioma de un grupo, esto debe ser seguido por la reconstrucción de otras propiedades (como la singularidad de la identidad) y de otras propiedades (como la singularidad de la identidad y de inversas) de los axiomas. Esto lleva a la construcción de un abstracto concepto de grupo que es una generalización reestructiva de varios ejemplos de grupos familiares. Cuando el resumen de la construcción se ha realizado, nuevas solicitudes del concepto abstracto de generalizaciones es extendida de las ideas originales.

El caso de las definiciones formales en matemáticas avanzadas actualmente consiste en dos procesos distintos complementarios. Uno es la abstracción de una propiedad específica de una o más objetos de forma básica de la definición de nuevos objetos matemáticos. Y el orden, es el proceso de construcción de conceptos abstractos a través de la lógica deductiva de definición.

El primero de estos procesos deberá ser llamado de manera formal, abstracción, en la medida en que los resúmenes de forma de los nuevos conceptos a través de la generalización de las propiedades de una o más situaciones específicas; por ejemplo la abstracción de los axiomas de los espacios vectoriales, de los segmentos dirigidos a lo largo de una línea de lo que es común que se observó a este espacio y el espacio de polinomios. Esta formal abstracción histórica tomó algunas generalizaciones, pero ahora el método y el proceso son adoptados para construir la teoría matemática, obviamente todo este trabajo no se ve, pues lo que se presenta a los alumnos es el producto terminado.

4. Metodología

4.1. Introducción

Uno de las principales motivaciones de nuestro trabajo fue los de patrones y la generalización así como implementación y la recopilación de actividades para la enseñanza de los alumnos de primero de secundaria en los municipios de Taretan, Uruapan y Morelia del Estado de Michoacán, las actividades fueron pensadas para implementarlas en equipos de 2 a 3 personas con un software llamado eXpresser, este software será de gran ayuda para la implementación de las actividades por sus características que lo definen, los patrones con los que se trabajará tienen ciertas características muy particulares para que el alumno pueda reforzar las propiedades de distributividad y asociatividad, así como desarrollar la habilidad de generar e identificar la generalización en el mismo software, los patrones que se utilizarán será de tipo figurativo.

4.2. Actividades

4.2.1. Descripción del software y su Propósito

La presencia de la tecnología en el ámbito escolar requiere de cambios en la concepción e implementación del proceso de enseñanza aprendizaje; en particular, la incorporación de las computadoras y software educativo ha provocado la necesidad de que los profesores renueven sus conocimientos y cambien el entorno de trabajo del aula de matemáticas, tanto en términos de la instrucción como de las normas socioculturales explícitas e implícitas en el salón de clase (Libro para el Maestro de Secundaria, 2005).

eXpresser es un micro mundo matemático tecnológico diseñado para favorecer el aprendizaje del Álgebra en la escuela secundaria a través del estudio de patrones figurativos. Así mismo, mediante su uso se puede lograr una mejor colaboración entre los alumnos y el profesor, para desarrollar ambientes de aprendizaje significativos, intuitivos y agradables. Los estudiantes pueden comunicar y discutir sus ideas con sus compañeros y con su profesor, proporcionando a este último una valiosa herramienta para tener un mejor entendimiento del razonamiento e intuiciones de los estudiantes, permitiéndole actuar como un investigador en el aula.

eXpresser es un software educativo libre desarrollado en el London Knowledge Lab, en Inglaterra, cuyo propósito es ayudar a mejorar el desarrollo de las capacidades de generalización de los niños entre 11 y 14 años (Geraniou et al., 2009), proporcionando tanto a los alumnos como al profesor, un entorno de trabajo dinámico interactivo, que ayuda a apreciar el Álgebra como una herramienta poderosa de comunicación, así como dotar de significados a las expresiones algebraicas.

eXpresser incluye objetos de construcción (mosaicos de colores) y un conjunto de acciones a realizar sobre ellos en una interfaz simple y agradable. Los objetos pueden ser relacionados y accionados para formar conjuntos o bloques de construcción como base del diseño de los patrones figurativos. Además, Expresser incluye un entorno numérico y simbólico, con una sintaxis particularmente interesante, que ofrece a los usuarios amplias posibilidades para comunicar sus ideas y experimentar con diferentes tipos de relaciones numéricas y/o simbólicas.

Algunas de las características técnicas más sobresalientes de eXpresser son:

- Es gratuito y de código abierto GNU GPL (General Public License)
- Está disponible en español.
- Ofrece una wiki y foros en donde compartir actividades, comentarios y preguntas/respuestas a los diseñadores.
- Usa la multiplataforma de Java, lo que garantiza su portabilidad a sistemas de Windows, Linux o MacOS X.
- Es una combinación de un sistema de cálculo numérico y un sistema de desarrollo figurativo ya que combina y puede mostrar simultáneamente un patrón en dos sistemas de signos: uno figurativo y un sistema matemático de signos, permitiendo la interacción en ambos.

Desde el punto de vista del aprendizaje, eXpresser presenta principalmente las siguientes características:

- Ofrece un ambiente de trabajo interactivo con tres tipos distintos de sistemas matemáticos de signos como herramientas para expresar las ideas de los estudiantes con respecto a la generalización: uno figurativo, uno numérico y uno simbólico.

- Favorece la construcción de relaciones funcionales lineales para formular algebraicamente las características matemáticas de los patrones lineales, en contraste con la construcción de relaciones recursivas que, usualmente surgen como resultado del estudio de patrones en las actividades de lápiz y papel.
- Favorece el desarrollo de habilidades en los niños para reconocer regularidades en patrones figurativos.
- Apoya de manera determinante el paso de la aritmética al álgebra, proporcionando una vía de acceso al álgebra, visto éste como un lenguaje para expresar las regularidades observadas en un patrón figurativo.
- Muestra de manera inmediata cómo afectan al patrón figurativo, los cambios realizados en una expresión algebraica y viceversa.
- De manera simultánea se cuenta con una visión particular y una visión general del patrón que se está construyendo.
- Da la posibilidad de trabajar con tres clases de objetos simbólicos: constantes, números generalizados y variables, haciendo posible establecer diferencias conceptuales entre estas clases de objetos algebraicos.
- Su editor numérico puede favorecer el desarrollo de competencias numéricas, en los niños, relacionadas con las propiedades de las operaciones básicas de los números enteros (conmutatividad, asociatividad, distributividad, etc.).

La ventana de inicio de Expresser se caracteriza por dos regiones de visualización básicas denominadas “*Mi mundo*” y “*Mundo general*”; así mismo, incluye elementos usuales en el software como: menú, barra de herramientas, carpetas para trabajar de manera simultánea con varios documentos, etcétera (véase la figura 4.1).

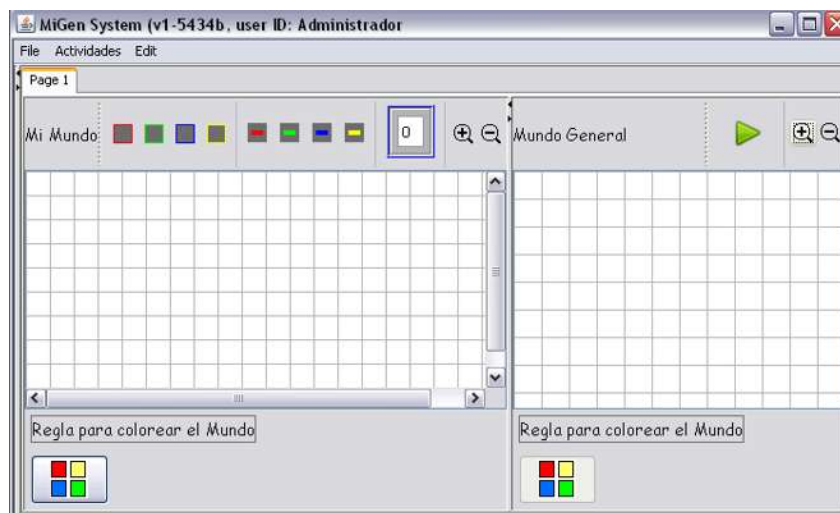


Figura 4.1. El entrono de trabajo de eXpresser

El menú contiene elementos de carácter general, como el manejo de archivos y las opciones comunes de edición.

La barra de herramientas está separada en dos partes: Las opciones que corresponden a la ventana “Mi Mundo” y las propias de la ventana “Mundo General”.

En la primera, se incluyen mosaicos de diferentes colores que se pueden arrastrar hacia la cuadrícula en la ventana “Mi Mundo” para la construcción de los patrones figurativos. Se cuentan con dos tipos de mosaicos: Aquellos que se identifican solamente por su color



, y los que pueden distinguirse de los anteriores por su forma



. En esta misma ventana se encuentra una casilla de entrada de datos numéricos, restringiéndose ésta a números enteros (positivos, negativos y cero).



En la barra de herramientas también se incluyen controles para hacer zoom en las ventanas y poder visualizar las construcciones desde diferentes perspectivas. Así mismo, se cuenta con un botón de animación del patrón en la ventana “Mundo General”, lo que permite visualizar los cambios tanto en la expresión simbólica del patrón como en su representación figurativa.

Como puede observarse en la figura 4.1, el ambiente de trabajo es simple y se cuenta con una base de unas pocas herramientas para facilitar su uso.

Como se mencionó previamente, eXpresser incluye dos regiones o ventanas de visualización: “*Mi mundo*” y “*Mundo general*”, cada una de ellas con fines distintos. Por un lado, la ventana “*Mi Mundo*” corresponde a la región de entrada de datos. En ella se construyen los patrones figurativos y se interactúa con el entorno numérico y simbólico, con el fin de expresar la relación entre el número de bloques de construcción y el número total de mosaicos en el patrón. La meta fundamental es lograr construir una expresión algebraica general que indique el número de mosaicos que se requieren en un patrón, en función del número de repeticiones del bloque de construcción diseñado. Para lograrlo, se plantean actividades parciales que paulatinamente acercan a los estudiantes a la construcción de una expresión algebraica general para dicha relación. Veamos cómo llegar a dicha expresión algebraica mediante un ejemplo específico.

Supongamos que se desea construir un diseño que pueda repetirse tantas veces como se quiera, como el que se muestra en la figura 4.2.

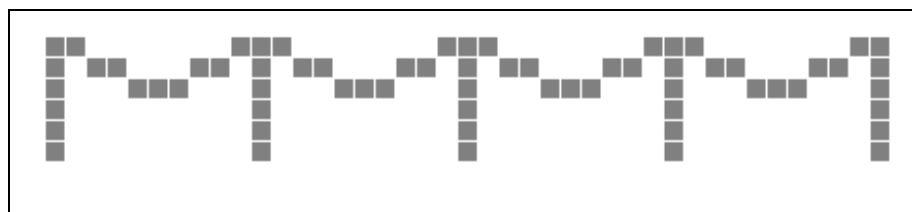


Figura 4.2. Patrón objetivo

Éste puede construirse pensando en diferentes procesos; por ejemplo, se podrían diseñar los siguientes dos bloques de construcción y combinarlos para generar el esquema propuesto (ver figura 4.3):



Figura 4.3. Diseño propuesto

O también se podrían diseñar y combinar los bloques que se muestran en la figura 4.4.

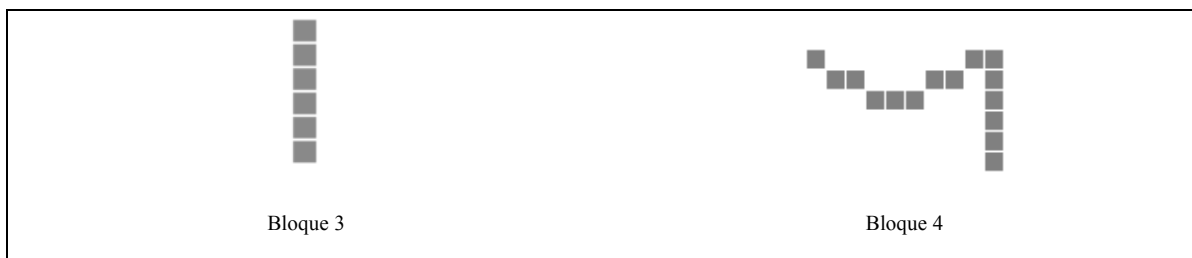
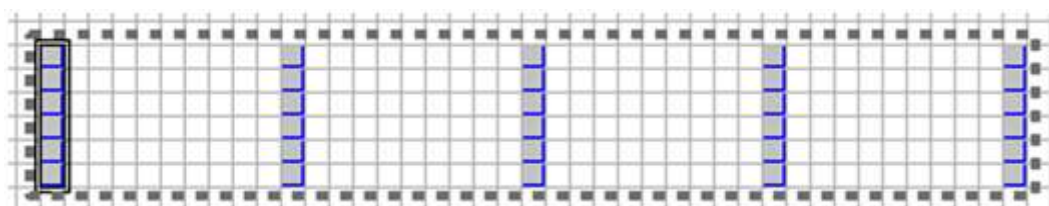


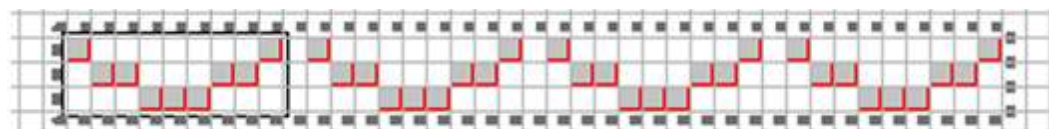
Figura 4.4. Una pareja de bloques posibles

En este último caso, el primer bloque se repetiría una sola vez, al principio de la construcción.

Si usamos los bloques 1 y 2, diferenciándolos por colores (azul y rojo, respectivamente), se tienen entonces dos patrones que combinados dan el diseño deseado (Véase la figura 4.5).



Patrón generado con el bloque 1



Patrón generado con el bloque 2

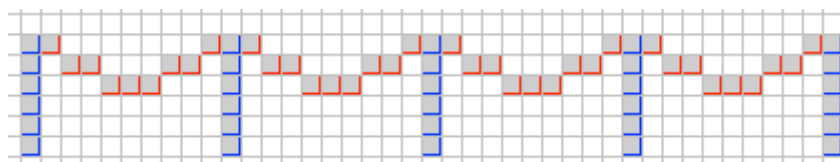


Figura 4.5. Combinación de dos patrones

Estos dos patrones deben estar relacionados para que puedan mantener su estructura original; esto es que para cualquier número de repeticiones, se conserve el diseño: el número de repeticiones del bloque rojo es una unidad menos que el número de repeticiones del bloque azul, relación que puede ser establecida en eXpresser (véase la figura 4.6).

$$\text{Número de veces que se repite el bloque rojo} = \text{Número de veces que se repite el azul} - 1$$

Ésta es la primera relación entre cantidades que se establece en este ejemplo en particular. Se trata de una relación numérica básica; sin embargo, es un paso importante para el diseño del patrón en la representación figurativa del patrón, además de establecer una relación entre ésta y el sistema aritmético (ver figura 4.6).

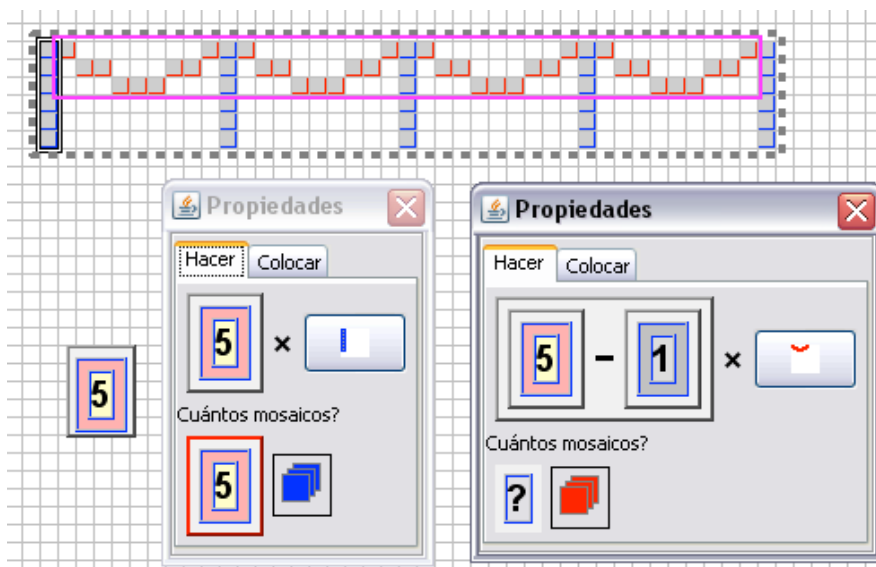


Figura 4.6. Relación entre dos patrones, a través del “número 5”

En esta etapa del trabajo, los mosaicos que conforman la representación figurativa del patrón aparecen en color gris, excepto su contorno azul o rojo. Este hecho revela una situación que se está presentando en la representación numérica: falta indicar el número total de mosaicos rojos y, en el caso de los azules, este número es incorrecto (ver figura 4.7).

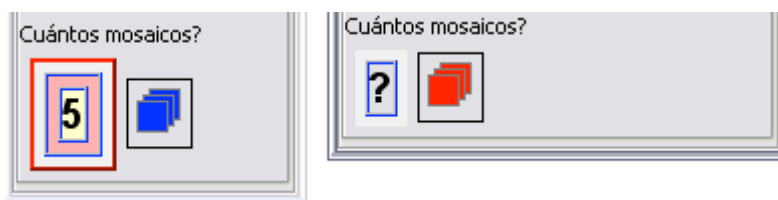


Figura 4.7. Falta incorporar y corregir información numérica

- 1) Los estudiantes pueden optar por contar, uno por uno el total de mosaicos e introducir el resultado en la casilla correspondiente (ver figura 4.8), o idear alguna otra estrategia de conteo; por ejemplo, observando que se tienen cinco bloques de seis mosaicos azules cada uno; esto es 5×6 mosaicos azules (ver figura 4.9).

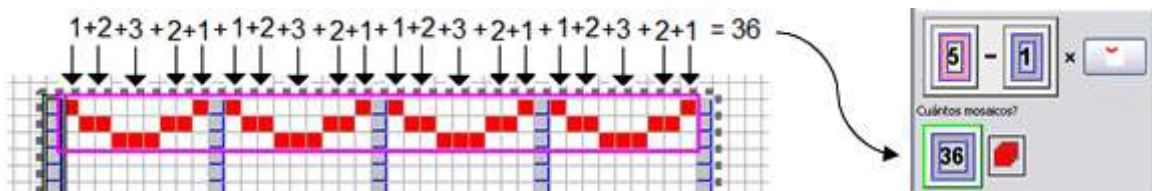


Figura 4.8. Conteo de mosaicos rojos

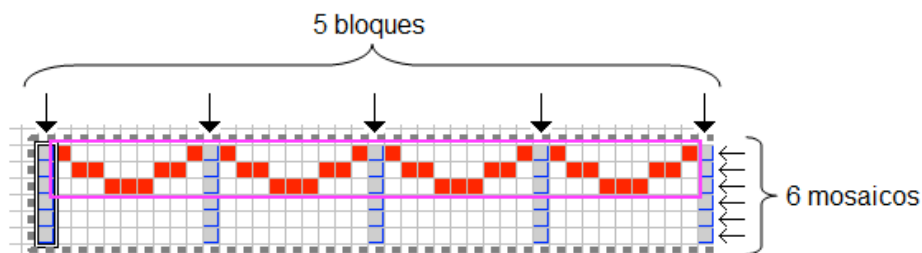


Figura 4.9. Conteo de mosaicos azules

En la representación figurativa, un resultado correcto del conteo de mosaicos se refleja en el color de los mosaicos (ver figura 4.10).

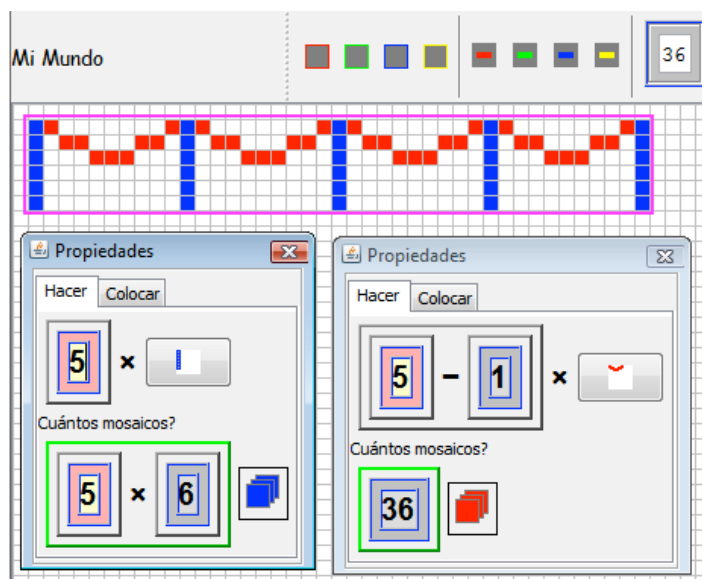


Figura 4.10. Mosaicos coloreados

El establecer una relación de multiplicación entre el número de mosaicos de un bloque y el número total de bloques, es una acción importante para el establecimiento de una regla simbólica válida para cualquier número de repeticiones. Esta regla permite que los mosaicos azules permanezcan siempre coloreados (ver secuencia en la figura 4.11).

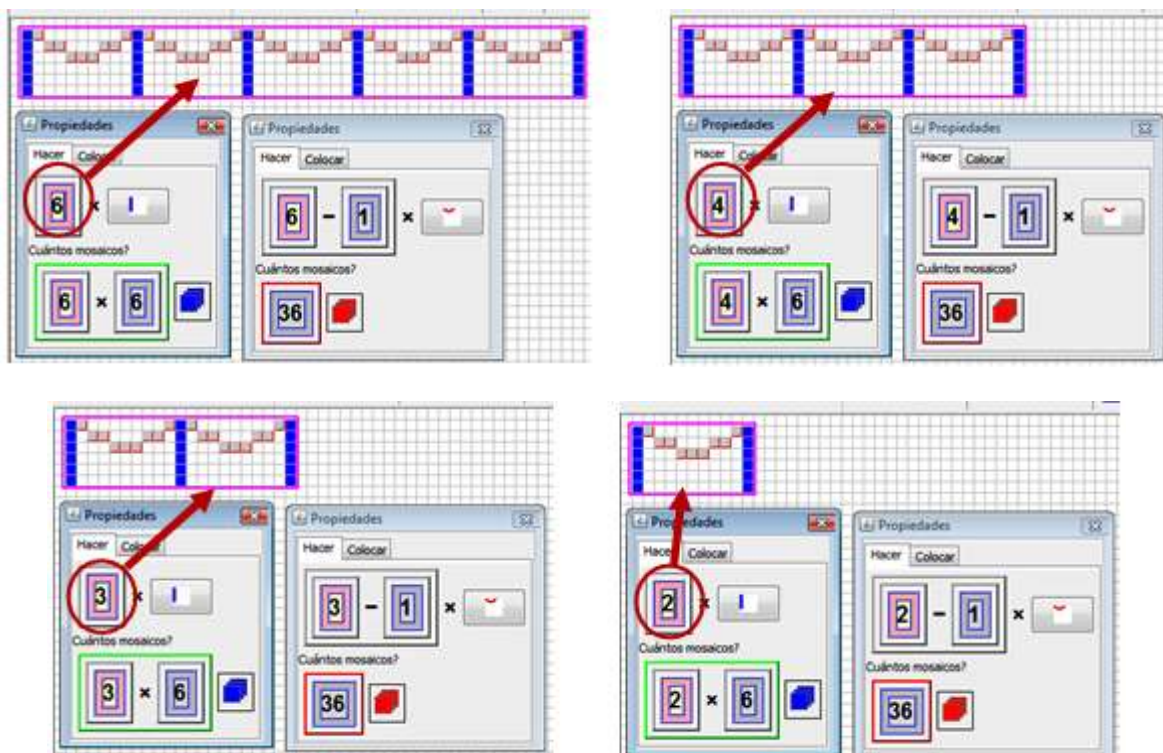


Figura 4.11. Secuencia de cambios en el número de bloques azules. Estos cambios afectan la representación figurativa

Es importante observar (figura 4.10) que el cambio en el número de bloques azules no afecta la coloración de los mosaicos, no obstante los rojos se ven afectados: éstos nuevamente aparecen rellenos de color gris indicando una discrepancia con respecto al número colocado en la casilla “*Cuántos mosaicos?*” (Número 36). Esto hace la diferencia entre trabajar a nivel de casos concretos (como el caso del número 36), al trabajo más general utilizando relaciones numéricas (como el caso de la expresión 5×6 de la figura 8, que cambió a 6×6 , 3×6 y 2×6 en la figura 9).

Si el número 36, correspondiente al número total de mosaicos rojos, se cambia por una fórmula aritmética correcta, se logrará colorear los mosaicos rojos, sin importar el número de repeticiones de los bloque de construcción (ver figura 4.12).

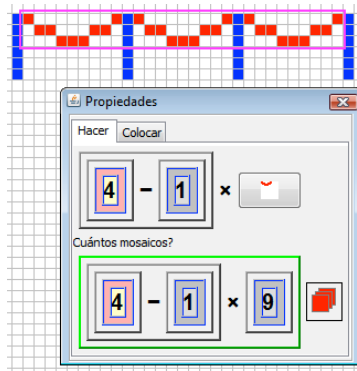


Figura 4.12. Expresión aritmética para colorear los mosaicos rojos

En este caso, la relación $(4 - 1) \times 9$ indica correctamente el número de mosaicos rojos. Así mismo, si se cambia el número de repeticiones (4), se conserva correctamente el número de mosaicos tanto azules como rojos (véase la figura 4.13).

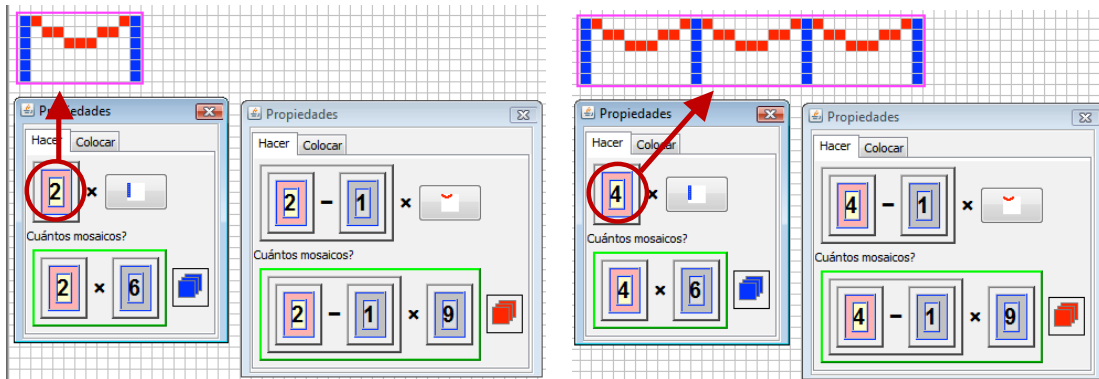


Figura 4.13. Cambio en el número de repeticiones de los bloques.

Continuando con este ejemplo, si el número de repeticiones del bloque es 5, una fórmula numérica para calcular el número total de mosaicos es:

$$\text{Total de mosaicos} = \text{número de mosaicos azules} + \text{número de mosaicos rojos}$$

$$\text{Total de mosaicos} = (5 \times 6) + [(5 - 1) \times 9]$$

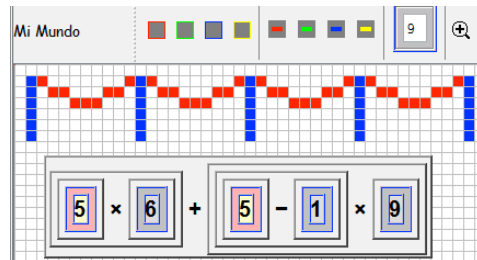


Figura 14. Operación para calcular el número total de mosaicos

En eXpresser es posible construir expresiones simbólicas a partir de las aritméticas asignando “nombres” a las cantidades utilizadas (véase la figura 4.15).

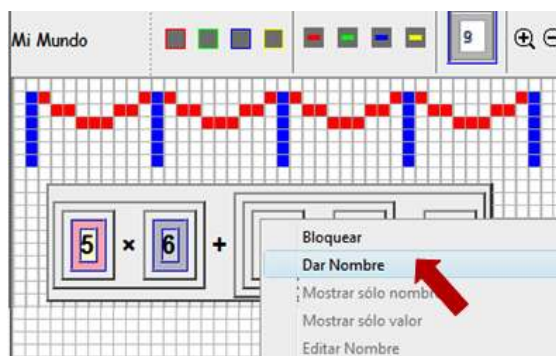


Figura 4.15. Asignar un nombre a una cantidad

Si bien cualquiera de los números colocados en pantalla puede recibir un nombre, es importante la reflexión que los estudiantes puedan hacer con respecto a las cantidades que están manejando. En particular, el número de repeticiones del bloque de construcción es una cantidad que puede actuar como variable para representar algebraicamente el patrón. Igualmente, es importante hacer notar que esta cantidad deberá formar parte de la expresión, primero numérica y luego algebraica, que identifica al total de mosaicos del patrón.

4.3. Características de las Actividades

Las actividades que proponemos tienen un orden de importancia, así como diferentes características, las primeras actividades como son Mi Primer Patrón y Mi Primer Patrón con eXpresser II son de carácter introductorio para que el alumno conozca el programa.

Las actividades que confirman el otro bloque como son: La Vía de Tren, El Jardín con Rosas, El Sendero tienen características diferentes y que pretendemos que desarrollen como:

- El alumno logre identificar expresiones algebraicas a partir de expresiones aritméticas.
- Representar simbólicamente expresiones matemáticas.
- Reconocer la diferencia de una variable de una constante.

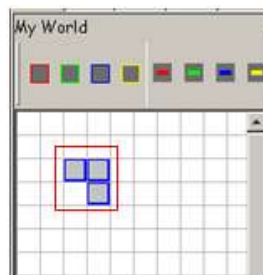
4.3.1. Mi Primer Patrón con eXpresser

Esta primera actividad está dirigida a la exploración y familiarización del software, así como el manejo de las herramientas que ofrece el mismo programa. Se recomienda que se trabaje en equipo.

Con esta actividad aprenderás a usar eXpresser, para construir patrones. El primer paso es construir bloques con los mosaicos utilizando la herramienta de construir un bloque que será la base para el desarrollo de los patrones, observar las dos ventanas que el propio eXpresser muestra y comparar las diferencias entre ellas y proponer al alumno que cree su propio patrón.

Como primer punto se le propone al estudiante que genere un bloque. Se le dan las siguientes instrucciones:

1. Observa la pantalla de eXpresser. Arrastra, con el ratón, un mosaico azul de la ventana “Mi Mundo” (My Word) y colócalo sobre la cuadrícula.
2. Arrastra otro mosaico azul y colócalo a la derecha del anterior; y, arrastra un tercero abajo de este último. Te debe quedar como en la figura siguiente.



Se genera el bloque con los mosaicos propuestos por el alumno para generar el patrón.

3. Agrupa los tres mosaicos arrastrando el ratón para encerrarlos en el rectángulo rojo.
4. Presiona el botón derecho sobre el agrupamiento y selecciona **Make a building block** (Hacer un bloque de construcción). Éste será el elemento base para la construcción del patrón y, le llamaremos simplemente **bloque**.

Ya generado el bloque, el siguiente paso es generar el patrón, que es el número de veces que se va a repetir el bloque, se pide lo siguiente.

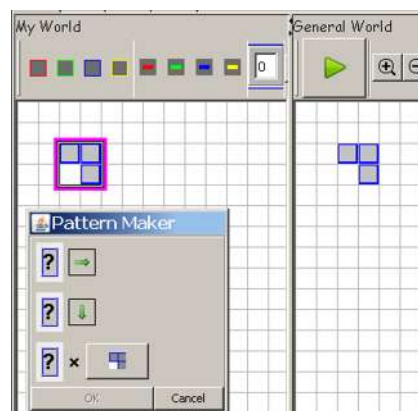
5. Ahora selecciona **Make a pattern** (Construir un patrón) del menú que se despliega al presionar el botón derecho, cuando el ratón está sobre el bloque.

eXpresser tiene dos ventanas mi mundo y el mundo real, las dos ventanas descritas anteriormente, se le pide al estudiante que exprese las diferencias.

- Observa la ventana “Mundo General” (General Word).
- Observa la ventana “Mi Mundo” (My Word).

¿Qué similitudes y diferencias encuentras entre ellas?

Escribe algunas:



Una de las ventajas de tener dos ventanas es, que el estudiante puede ver el desarrollo de su patrón. Saber cual es su ubicación, en donde comienza a formarse. Para esto se le pide al estudiante que realice lo siguiente.

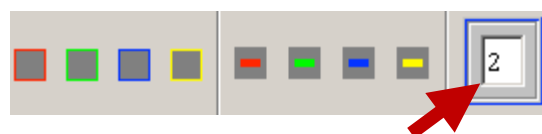
- Observa la ventana Pattern Maker que se obtiene al presionar **Make a pattern** del menú desplegable. En el siguiente ejercicio sustituiremos los signos de interrogación



por números.

Los números que se piden al estudiante es la posición de la ubicación del patrón a desarrollar

- Escribe el número **dos** en la casilla de entrada de números



. Arrástralo hacia el signo  del

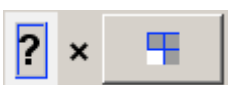


primer renglón. Obtendrás como resultado . Esto le indica a eXpresser: coloca el siguiente **bloque dos** cuadros a la derecha del presente **bloque**.

- ¿Cómo le decimos a eXpresser el número de cuadros hacia abajo en que queremos colocar ese **bloque**?

Realiza este procedimiento en eXpresser para continuar con la construcción del patrón.

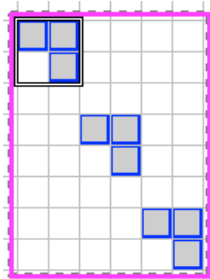
8. En el patrón que construiremos el **bloque** se repetirá 3 veces, entonces debemos

colocar el número **tres** en . Presiona el botón **OK**, cuando hayas terminado de colocar los tres números.

9. ¿Qué número debemos colocar en el segundo renglón de la ventana “Pattern Maker” para construir cada uno de los patrones que se muestran a continuación?

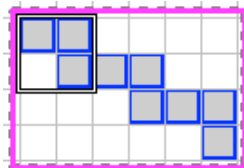
Se le pide al estudiante que coloque los números para la posición del patrón que representa el ejemplo propuesto en las siguientes figuras.

a)



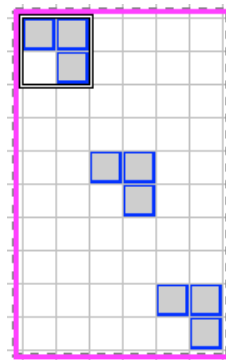
Respuesta:

b)



Respuesta:

c)

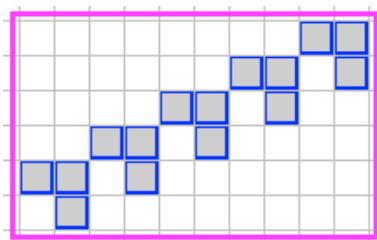


Respuesta:

Proponemos otros ejemplos de diferentes características, para que el alumno al seguir con las actividades, tenga la ubicación exacta de su propio patrón a realizar.

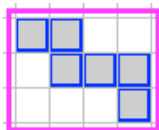
10. ¿Qué números debemos colocar en segundo y el tercer renglón, para construir cada uno de los patrones que se muestran a continuación?

b)



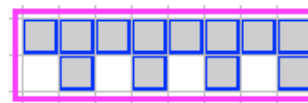
Respuestas:

a)



Respuestas:

c)



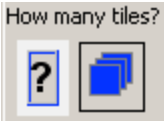
Respuestas:

La certeza de que el estudiante esta realizando los pasos correctos, le da confianza para seguir avanzando en las actividades, en la ventana de propiedades, se puede verificar si los mosaicos se colorean quiere decir que va en dirección correcta (Kaput, 1999).

11. Hagamos que los mosaicos se colorean todos de azul. En la ventana de propiedades

selecciona la carpeta "Hacer" . Podrás observar que

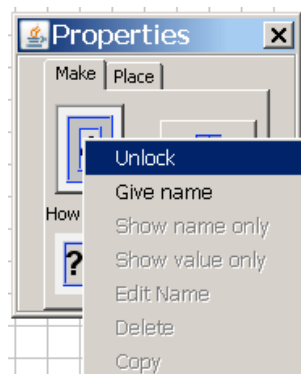
todavía falta sustituir un signo .

- a) Coloca sobre él, el **número total de mosaicos**  que se necesitaron construir el último patrón. También indícalo aquí: _____ Observa qué sucedió en la ventana "Mi Mundo". Si los mosaicos no se colorean, cuenta nuevamente.

- b) Presiona  de la ventana "Mundo General". Observa qué sucede.

El trabajo de que el estudiante entienda que es una variable comienza en liberando el numero.

12. Regresa a la ventana de propiedades de "Mi Mundo" para **liberar el número** de repeticiones del **bloque**. Haz clic con el botón derecho estando sobre el número y selecciona "Desbloquear" (Unlock). Éste se enmarcará en color rosa.



Para una interpretación que ellos puedan ver cual es la función de desbloquear un número eXpresser lo otorga en el botón de la figura mostrada, el efecto que se vera es que cambia de tamaño el propio patrón y a continuación se propone:

13. Ahora presiona nuevamente . Observa qué sucede en el "Mundo General".

Se le pide al estudiante que cree su propio patrón con diferentes características de las que se mostraron al principio del patrón de ejemplo, esto le dará cierta libertad para crear su

propio patrón identificando la posición, el número de mosaicos, el número de bloques y las veces que se va a repetir el patrón, para tener un registro de como va avanzando se le da una tabla de apoyo para que la llene de acuerdo al orden en que se va desarrollando.

14. Construye tu propio patrón usando otro(s) color(es) y reproducélo enseguida. Realiza las acciones necesarias para que los mosaicos queden coloreados en la ventana “Mi mundo”. También las que sean necesarias para que el patrón pueda ser animado en la ventana “Mundo General”.

Bloque	PATRÓN	DATOS		
		Color:		
		Número:		
		 Número:		
		 Número:		
		 Número:		
		 Número:		

La actividad anterior se reconfiguró puesto que su contenido en preguntas era muy extenso y se propuso la siguiente.

MI PRIMER PATRÓN CON EXPRESSER

Con esta actividad aprenderás a usar eXpresser para construir patrones con mosaicos de colores y obtener reglas asociadas con ellos. Puedes también animarlos para que cambien automáticamente.

1. ¿Qué cantidad deben colocar en cada una de las entradas de números para construir cada uno de los patrones que se muestran a continuación? Escríbalos a continuación, en el cuadro de la izquierda.

	¿Qué cambia? ¿Qué no cambia?
---	--

4.3.2. Mi Primer Patrón con eXpresser Parte II

Mi Primer Patrón con eXpresser Parte II, es una actividad que motiva al estudiante a describir de manera cuantitativa el patrón que él mismo creó, es decir, da los valores de cuantos mosaicos, cuantos bloques cuenta su patrón figurativo y lograr expresar los patrones figurativos en expresiones algebraicas usando el concepto de variable.

Para comenzar al estudiante se le pide que construya su propio patrón, al mismo tiempo se le pide la ubicación, el número de repeticiones y cuantos mosaicos tiene en total, cabe mencionar que los alumnos previamente a esta actividad ya habían trabajado con otra actividad.

1. Construyan su propio patrón y reproduzcanlo enseguida.

SOLO USEN MOSAICOS DE COLOR AZUL

BLOQUE DE CONSTRUCCIÓN	PATRÓN	DATOS
		  Número de repeticiones Cuántos mosaicos? 

El alumno tiene que ser capaz de identificar cada una de las partes del patrón como son: mosaico, bloque, y el número de repeticiones que se va a hacer el bloque para obtener el patrón. Las preguntas a continuación tienen diferentes respuestas, puesto que se pretende que cada uno de los estudiantes elabore su propio patrón.

2. ¿Cuántos **bloques de construcción** tiene el patrón?
3. ¿Cuántos mosaicos hay en cada **bloque de construcción**?
4. ¿Cuántos mosaicos hay en el **patrón**?

Para cuando el alumno haya identificado los elementos del su propio patrón, se le pide que obtenga el número de mosaicos en el patrón con un determinado número de bloques.

5. Llenen la siguiente tabla usando el mismo patrón construido en **eXpresser**.

Asegúrense de que el patrón siempre esté coloreado.

Número de bloques	4	6	2	1	8	10
Número total de mosaicos en el patrón						

Al estudiante se le proporciona una regla para obtener el número total de mosaicos en el patrón y algunos números fijos para el número de bloques. Esto es con la finalidad de que el alumno encuentre la relación entre los patrones figurativos y una relación algebraica.

Utilicen la siguiente regla para completar las multiplicaciones de la tabla siguiente. El resultado de ellas debe ser el número total de mosaicos en el patrón.

Total de mosaicos en el patrón = Número de mosaicos en cada bloque × Número de bloques

Número de bloques	4	6	2	1	8	10
Número total de mosaicos en el patrón	$_ \times 4$	$_ \times 6$	$_ \times 2$	$_ \times 1$	$_ \times 8$	$_ \times 10$
Resultado						

Para la siguiente pregunta el estudiante tiene que ser capaz de proporcionar algunos valores para el número de bloques diferentes a los proporcionados, saber cual es el número que se encuentra fijo y cual es el valor que cambia, es decir el concepto de variable.

6. Completa la siguiente tabla usando la misma regla que en el ejercicio anterior. Usa valores diferentes a los que tiene la tabla anterior.

Número de bloques	—	—	—	—	—	—
Número total de mosaicos en el patrón	— × —	— × —	— × —	— × —	— × —	— × —
Resultado						

4.3.3. Trabajando con Diferentes Colores

Esta actividad consta de dos partes, en la primera parte de la actividad veremos cómo construir dos patrones de manera simultanea. En la segunda parte se propondrá al alumno la construcción de su propio patrón. Además de conocer el software para generar patrones, esto permite ver si los resultados son correctos. Esto es posible aplicando las siguientes actividad y comienza de la siguiente manera:

1. Construye un patrón como el que se muestra en la figura, cuyo bloque de construcción está marcado con un cuadrado.

Una de las herramientas que permite eXpresser es el uso de colores, en este caso, los colores no tienen importancia. Esto ayuda a los alumnos a relacionar dos patrones que al principio no tienen nada en común para después enlazarlos.

2. Colorea el patrón en “Mi Mundo”, indicando a eXpresser el número total de mosaicos rojos y azules que son necesarios. Recuerda que si los números son correctos, los mosaicos estarán coloreados completamente de rojo y azul.

Después de generar los dos patrones se tiene que verificar si los valores son correctos. Se plantea lo siguiente:

3. Utiliza eXpresser para llenar la siguiente tabla. En este caso **el patrón debe estar totalmente coloreado** en la ventana “Mi Mundo”. Recuerda que debes **liberar** (Unlook) un número para poder cambiarlo con facilidad.

Número de veces que se repite el bloque	4	6	2	1	8	10
Número total de mosaicos rojos	<u>12</u>	<u>18</u>	<u>6</u>	<u>3</u>	<u>24</u>	<u>30</u>
Número total de mosaicos azules	<u>8</u>	<u>12</u>	<u>4</u>	<u>2</u>	<u>16</u>	<u>20</u>
¿El patrón está coloreado?	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí

Se propone un número de veces que se repite el bloque, para después obtener el número total de mosaicos de cada color.

Se pide que se describa la respuesta. Esto es, si el alumno comprende cual es la expresión matemática para generar el número de bloques podrá obtener los valores que le pide para cualquier número, en particular para un número grande.

4. Si el número de veces que se repite el **bloque** es 273, ¿calcula el número total de mosaicos rojos usando ese número?, Hazlo también para los mosaicos azules. Explica tu respuesta.

eXpresser tiene la herramienta para poder definir la expresión

5. Usa eXpresser para construir una expresión para cada color usando tu respuesta del ejercicio anterior. Recuerda cómo lo hiciste en la actividad anterior.

- a) Comprueba tu resultado, llenando los datos de la siguiente tabla.

Número de veces que se repite el bloque	4	8	6	14	67	51
Número total de	<u>12</u>	<u>24</u>	<u>18</u>	<u>42</u>	<u>201</u>	<u>153</u>

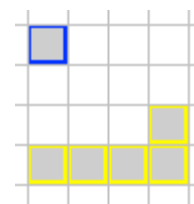
mosaicos rojos						
Número total de mosaicos azules						
¿El patrón está coloreado?						

Si en algún caso tu respuesta es “No”, trata otra construir una nueva regla.

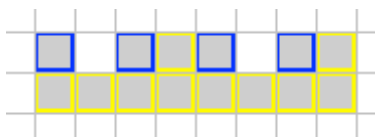
6. Si tus reglas funcionan en la ventana “Mi Mundo”, colócalas en **World Colouring Rule**, eligiendo el color que corresponde a cada una, para colorear también el “Mundo General”.

En esta parte de la actividad se propone que el alumno genere su propio patrón usando la herramienta que proporciona el software.

7. Ahora construye dos patrones utilizando los **bloques** como los de la figura derecha; usa dos colores distintos.



- a) Colócalos de tal forma que, cuando los repitas queden como la figura siguiente:

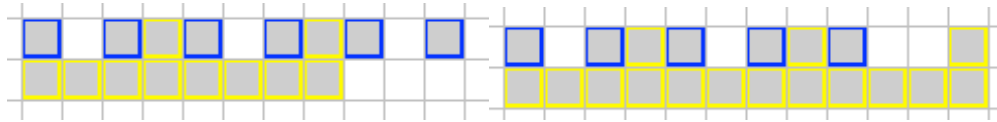


- b) Completa la información de las ventanas de propiedades de cada patrón, para que los mosaicos se coloreen.



- c) Presiona el botón de animación en “Mundo General” y observa el comportamiento de los patrones.

- d) ¿Qué debemos hacer para que siempre haya dos mosaicos azules entre los amarillos del primer renglón? Sin que sucedan casos como los siguientes. Regresa a las ventanas de propiedades de “Mi Mundo” y establece las relaciones que consideres necesarias entre los números de una y otra ventana.



4.3.4. Trabajando con Fórmulas Numéricas

En esta actividad permite al estudiante saber más acerca de la variable y permite que el alumno establezca expresiones simbólicas a partir de expresiones aritméticas, que establezca expresiones algebraicas en el reconocimiento de patrones usando lo siguiente.

1. Escriban y realicen las siguientes operaciones con eXpresser. Utilicen las **opciones del menú** de los números.

	Esto	Les tiene que quedar así
A)	Escriban la operación $5 + 3$ y desbloqueen el 5	
B)	Multipliquen la operación anterior por 7	
C)	Obtengan el resultado (usar la opción Calcular valor)	
D)	Cambien el número 5 por un 2. Observen el resultado	
E)	Copien la operación $2 + 3$ a la cuadrícula	

D)	Cambien el número 2 por un 9. Observen qué pasa con la copia y el resultado	
E)	Usen la opción Dar Nombre del menú para darle al 9 el nombre “z”	

Cuando el estudiante logra manipular los números, eXpresser tiene la función de desbloquear o cambiar el número a variable, esto le da al alumno la posibilidad de entender qué es una variable. Para esta actividad preguntamos lo siguiente para el reconocimiento de las variables.

2. Si el número **z** se cambia por un 6, ¿cuál es el resultado de la operación?____

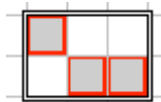
La manipulación de los números le da al alumno una visión de que es una variable y qué es una constante, le pedimos a los alumnos que llenen las siguientes tablas en donde se le pide que identifique cuál es el valor de la variable y cuál es el valor del resultado que a continuación presentamos.

Utilizando la misma expresión numérica anterior: $(9 + 3) \times 7$, obtener los valores que faltan en la tabla siguiente. Observen el ejemplo de la segunda columna.

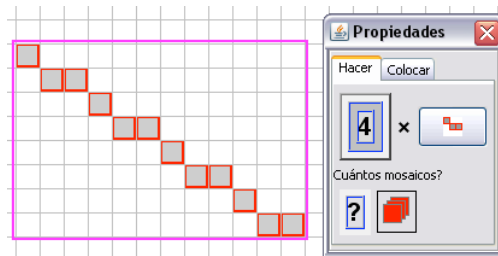
z	9	7		0	-1	-5			
Resultado	84		175				0	-7	70

En este paso el estudiante define una variable, para después darle valores que se le piden, el estudiante tiene que ser capaz de ver cómo cambia el patrón al cambiar el valor de la **z**.

3. **Construyan un patrón** como el de la figura. Observen cuál es el bloque de construcción a reproducir y cuál el patrón resultante.



Bloque de construcción



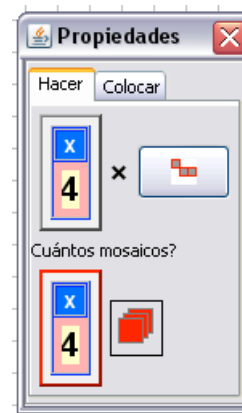
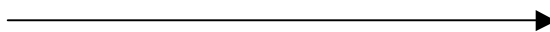
Patrón resultante

El concepto de variable se trabaja durante todo el tiempo de la actividad, el software proporciona los elementos para que el alumno comprenda el concepto desbloqueando los números, asignándole el un nombre a la variable, y proporcionando al estudiante la libertad de explorar cuales son las ventajas de trabajar con las variables, el procedimiento para entender este proceso lo hacemos en las siguiente preguntas.

4. Desbloqueen y nombren con **X** al número de repeticiones del bloque (el número 4 de la figura).



5. Arrastren el número **X** a la casilla que corresponde a "**Cuántos mosaicos?**"



Le damos algunos números para inducirlo que explore el comportamiento de la variable con las siguientes preguntas.

6. Si cambian el valor del número **X** y le ponemos 7, ¿cuántos mosaicos hay en total?
7. Si le ponen 29 al número **X**, ¿cuántos mosaicos hay en total? 87, y si le pusieran 18, ¿cuántos mosaicos en total habría? 54.
8. ¿Por qué cantidad deben multiplicar a **X** para obtener el total de mosaicos? Por 3

Por ultimo se le pide al alumno que compruebe sus resultados, en el recuadro que se presenta por ¿Cuántos mosaicos?

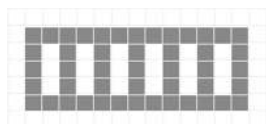
9. Comprueben su resultado en la computadora. Multipliquen el número **X** de la casilla “**Cuántos mosaicos?**” por el número que identificaron en el ejercicio anterior. Si los mosaicos se colorean será correcto, si no, prueben con otros hasta lograr que los mosaicos se colorean. Indiquen el número aquí:

4.3.5. La Vía del Tren

En la actividad La Vía del Tren, se propone que los alumnos construyan su propio patrón utilizando diferentes colores, después de ser generado, al estudiante se le pedirá que explique con sus propias palabras como hizo la construcción, con la finalidad de que el estudiante desarrolle una buena expresión oral (Kaput, 1999), y posteriormente para describir de manera total un patrón.

La primera pregunta es enfocada a desarrollar un lenguaje matemático (Kaput, 1999), por medio de una exposición frente al grupo por parte del alumno exponiendo la construcción de un patrón e identificando los elementos que lo componen

- a. Utilizando eXpresser, construyan un patrón que se asemeje a una vía del tren como el de la figura siguiente. Usen **diferentes colores**, de tal manera que puedan mostrar a sus compañeros cómo construyeron el patrón.



Identificar los bloques que utilizan de manera independientemente es también una tarea importante, puesto que se identifican los patrones que están relacionados en un solo patrón.

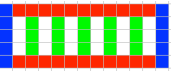
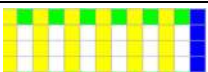
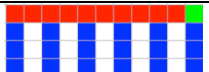
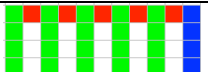
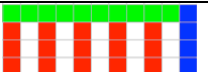
- b. Dibujen enseguida los bloques de construcción que utilizaron para construir el patrón.

eXpresser tiene la característica de que cada construcción puede ser verificada, se le pide al estudiante que vea si los mosaicos están iluminados

- c. Asegúrense que los mosaicos estén rellenos de los colores que eligieron. Dibujen enseguida cómo quedó el patrón, utilicen los colores correspondientes.

Se le pide al alumno que obtenga una representación algebraica después de haber identificado los patrones con colores (ver Figura C1).

Para el reconocimiento de patrones, existen diferentes maneras identificar expresiones algebraicas, así como identificar cuales son los bloques que están relacionados y estas son unas de las formas:

A	B	C	D	E
				
Dos patrones: $5n + 2(n - 1)$	Tres patrones: $3n + (2n - 1) + (2n - 1)$	Tres patrones: $5n + (n - 1) + (n - 1)$	Cinco Patrones: $3n + (2n+1) + (2n+1) + 5 + 5$	Dos Patrones: $7n + 5$
F	G	H	I	J
				
Tres patrones: $5n + 2n + 5$	Tres patrones: $4n + 3(n+1) + 2$	Tres patrones: $6n + n + 5$	Tres Patrones: $4n + 3n + 5$	Dos Patrones: $7n + 12$

FiguraC2.

- d. Obtengan una regla para contar el **número total de mosaicos** que tiene el patrón

Las expresiones que se pueden identificar y obtener una regla son diferentes así como los diferentes colores para representarlo, los bloques que podrían ser usados se presentan en diferentes colores para el reconocimiento de patrones.

Ya habiendo identificado el patrón, se le propone al estudiante, cambiar el número de bloques que ocupo para cada color y así obtener el número de mosaicos que necesita.

e. Completen la siguiente tabla utilizando eXpresser

Para un bloque	1
Número de mosaicos que se necesitan del color 1	
Número de mosaicos que se necesitan del color 2	
Número de mosaicos que se necesitan del color 3	

FiguraC3.

Se le pide al estudiante que obtenga una expresión algebraica para los patrones identificados

f. Representar de manera algebraica cada uno de los patrones identificados es el siguiente paso.

eXpresser permite manejar variable y lo hace permitiendo a la estudiante desbloquear los números, dándole un nombre, mas adelante esto será una expresión algebraica.

g. Dar un nombre al número o números desbloqueados para construir una regla simbólica.

Escríbanla aquí:

Se le pide al estudiante que intercambie algunos valores al número desbloqueado o variable, para obtener el número total de mosaicos llenando las siguientes tablas y haciendo uso de su regla descrita.

h. Usando eXpresser, completen la tabla siguiente.

Valor asignado al número desbloqueado	6	12	1	600	0
---------------------------------------	---	----	---	-----	---

Número total de mosaicos					
--------------------------	--	--	--	--	--

FiguraC4.

- i. Completen la siguiente tabla utilizando su regla escrita en el inciso

Valor asignado al número desbloqueado	6	12	1	600	0
Número total de mosaicos					

FiguraC5.

La siguiente pregunta es dirigida a trabajar en equipo para la discusión y formulación de los argumentos necesarios par justificar su respuesta (Knuth & Elliot, 1998).

- j. Ahora trabajen entre los dos para hacer una discusión sobre la actividad. Escriban enseguida los argumentos que les permitieron darse cuenta de si su regla es correcta o no.

Después de obtener una expresión algebraica utilizando una variable se le pide verificar los resultados en el software eXpresser.

- k. Utilizando la expresión del ejercicio anterior: $(9 + 5) \times 7$, obtener los valores que faltan en la tabla siguiente. Observen el ejemplo de la segunda columna.

Z	9	6	22	0	-1	-5	3	2	7
Resultado	84	63	175	12	14	-14	0	-7	70

FiguraC6.

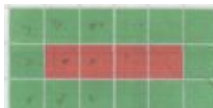
Esta situación resalta el hecho de que reconocer un patrón no siempre garantiza una habilidad para generalizar (Blanton & Kaput, 2002; Pegg & Redden, 1990; Schiliemann et al, 2001; Szombathely & Szarvas, 1998)

4.3.6. El Jardín con Rosas

La propuesta que presentamos en la actividad de El Jardín con Rosas a diferencia de esta con la anterior tiene las siguientes características: Identifica los elementos que contiene el patrón propuesto, lograr que el alumno exprese con palabras sus propias operaciones para definir el patrón, que represente mediante una expresión matemática el patrón propuesto.

Los alumnos en la primera pregunta tienen que identificar el número de bloques de los que se compone el patrón. El proceso de identificar los patrones primero empieza de manera inductiva.

1. Suponga que en la figura siguiente los mosaicos rojos representan rosas rojas y que están rodeadas por un jardín (representado con los mosaicos verdes). Contesta las siguientes preguntas usando este esquema de construcción



FiguraD1

El siguiente paso es que si se cambian los bloques centrales cuantos bloques se utilizarán para los bloques de alrededor.

- a. Si en el centro hay 5 mosaicos rojos. ¿Cuantos mosaicos verdes deberá haber para rodear completamente los mosaicos rojos? 14. Y si hay 8 mosaicos rojos. ¿Cuantos mosaicos verdes debe haber? 22.

Después de tener la base, se pide a los alumnos que llenen una tabla, considerando que el número de bloques ha cambiado. Los resultados que ponemos en tabla son los que se tienen que obtener.

- b. Llena la siguiente tabla en la que el número de mosaicos rojos esta cambiando.

Numero de Mosaicos Rojos	1	2	3	4	5
Número de Mosaicos verdes que se necesitan para el Jardín	<u>8</u>	<u>10</u>	<u>12</u>	<u>14</u>	<u>16</u>

FiguraD2.

Numero de mosaicos rojos.	12	27	48	121	5532
Numero de mosaicos verdes que se necesitan para el jardín.	<u>30</u>	<u>60</u>	<u>102</u>	<u>248</u>	<u>11070</u>

FiguraD3.

Después de haber identificado el número de mosaicos, se pide que describa de manera escrita, esto es con la finalidad de que el alumno tenga un lenguaje más formal y reconozca

la simbología que está utilizando al describir el patrón propuesto (Kaput, 1999). La descripción no es única, la pregunta que se propone es:

- c. Describe con palabras, cómo se puede calcular el número de mosaicos verdes si sabemos cuántos mosaicos rojos hay.

Al llegar a una descripción con palabras, se le pide que represente las operaciones que realizó para llegar a los resultados. Esto nos llevará a cuáles son las herramientas, con las que cuenta, es decir el álgebra que maneja

- d. Describe la(s) operaciones que realizaste para calcular el número de mosaicos verdes en la tabla anterior.

En la pregunta que sigue, se espera que los alumnos identifiquen una relación matemática.

- b) Describe una formula para calcular el número de mosaicos verdes para cualquier número de rojos que se tenga.

Se espera a que los alumnos lleguen a una relación matemática lineal de la siguiente forma

$$2n + 6$$

donde “ n ” representa el número de mosaicos rojos.

Se propone que el alumno dibuje el patrón con un número diferente de mosaicos e identifique los siguientes elementos: el número de mosaicos que se utilizan para su construcción.

- c) Dibuja al reverso de la hoja tres diseños como el de la figura de arriba pero cada uno con un número de mosaicos rojos distintos (indica cuantos son). Indica también el número de mosaicos verdes que se requieren para rodear cada una de las figuras que dibujaste.

Para que el estudiante compruebe sus resultados se le pide que use la expresión algebraica que propuso en el ejercicio anterior

- d) Comprueba tu formula del ejercicio 3, de los mismos resultados (del número de mosaicos verdes) que los obtuviste en cada uno de tus diseños del ejercicio 4.

4.3.7. El Sendero

Esta actividad esta diseñada a la manipulación de las herramientas como es el desbloqueo de los números para convertirlos en variables, a relacionar dos patrones y obtener una expresión que contenga el número de mosaicos que se encuentra en el patrón compuesto.

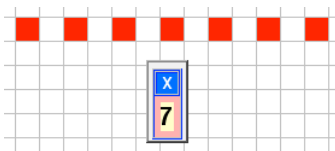
Utilizando eXpresser, construyan un patrón como el que se muestra en la figura siguiente, utilicen mosaicos de **color rojo**.



FiguraE1.

Se le pide al alumno que haga el cambio, del número a la variable que es uno de los pasos más importantes en el estudio de los patrones y la generalización.

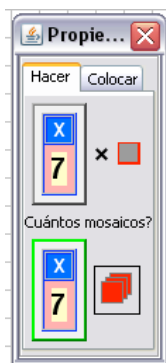
- a) Denle el nombre “X” al número de mosaicos rojos y desbloquéenlo.



FiguraE2.

Después de tener el patrón ubicado, el estudiante tendrá que ser capaz de poder identificar el número que va en el recuadro, para que el mismo patrón sea coloreado en su totalidad, esto permitirá al estudiante ver su avance en el reconocimiento de patrones.

- b) Arrastren el número X a la casilla de “Cuántos mosaicos?”. El patrón deberá quedar coloreado.



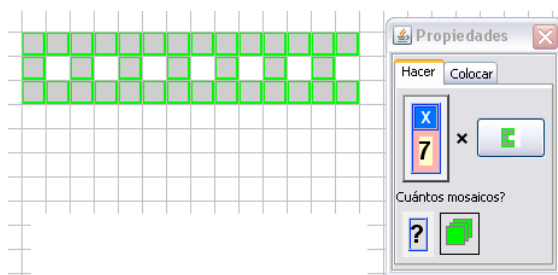
FiguraE3.

Se le pide al estudiante que construya de manera paralela y que forme dos patrones al mismo tiempo para después ser empalmados y construir un solo patrón que lo vamos a llamar un patrón compuesto.

Esta herramienta es de gran utilidad para que el estudiante cree de manera independiente dos patrones que al principio no tienen nada en común, al ser finalizada, el alumno tendrá una generalización. Se le pide que haga lo siguiente:

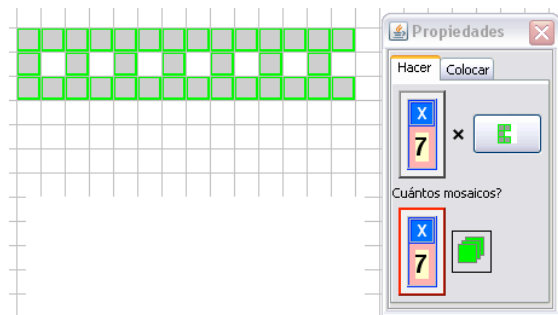
- c) En la misma pantalla, construyan un segundo patrón con mosaicos verdes, que represente un sendero por el que se pueda pasar alrededor de los mosaicos rojos. Usen los siguientes pasos de construcción.

Paso 1. Construir un patrón con el **MISMO NÚMERO X DE REPETICIONES.**



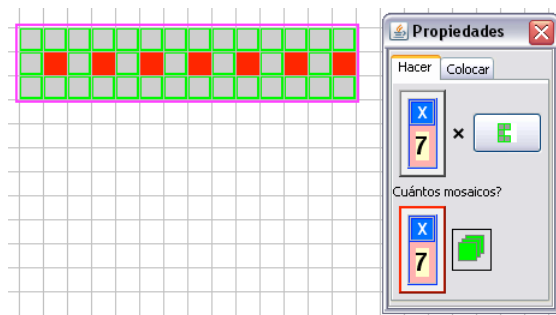
FiguraE4.

Paso 2. Arrastrar el número X a la casilla de “Cuántos mosaicos?”



FiguraE5.

Paso 3. Mover uno de los patrones para que quede sobre el otro y formar el diseño que se quiere.



FiguraE6.

Los dos patrones están ligados y las respuestas están enlazadas con la construcción del patrón compuesto. En otras palabras si uno sabe el número de cada uno de los patrones, solo se tiene que multiplicar. Las respuestas que se tienen que obtener son las siguientes:

- d) Si hay 7 mosaicos rojos, ¿cuántos mosaicos verdes debe haber para rodear completamente a los rojos? 35
- e) Si se tienen 12 mosaicos rojos, ¿cuántos mosaicos verdes deberá haber? 60
- f) ¿Cuál es el número por el que hay que multiplicar al valor de X para obtener el total de mosaicos verdes? 5. Comprueben su resultado en la computadora.

En las siguientes preguntas se le pide identificar una expresión aritmética para representar el número de mosaicos que contiene el patrón compuesto, estos resultados se pueden verificar en el mismo software.

- g) Escriban la fórmula completa para calcular el número de mosaicos verdes.
- h) Llenen la siguiente tabla usando la fórmula del ejercicio anterior.

Número de mosaicos rojos	1	7	11	15	20
Número de mosaicos verdes	<u>5</u>	<u>35</u>	<u>55</u>	<u>75</u>	<u>100</u>

FiguraE7.

Siguiendo con la idea de que identifique en su totalidad el patrón, se le pide que lo describa con palabras, esto es para que el alumno cree de manera natural un lenguaje algebraico y se pueda verificar por si mismo.

- i) Describan con palabras, cómo se puede calcular el número de mosaicos verdes cuando conocemos el número de mosaicos rojos.

4.4. Implementación de las Actividades

Las actividades se aplicaron en las ciudades de Morelia, Uruapan, Taretan y Zacapu de la siguiente manera: Tres Actividades se aplicaron en Morelia a 46 estudiantes, 3 Actividades en Uruapan a 90 estudiantes (dos grupos), 2 Actividades en Taretan a 72 estudiantes y a 10 alumnos de Zacapu, en equipos de 2 y 3 estudiantes por cada actividad en su salón de y con la presencia de sus respectivos profesores.

Todas las actividades fueron monitoreadas y documentadas para ver cual fue la comunicación entre ellos y obtener: estrategias de solución, quienes tenían control de la computadora.

4.5. Método de Análisis de la información

El análisis de las actividades será de manera cualitativa, cuantitativa y exploratoria, buscando los elementos que describen el desarrollo de las actividades por parte de los alumnos; Lo que se busca en nuestra investigación son: las expresiones algebraicas en el uso del lenguaje escrito, el reconocimiento de patrones y la generalización, las ventajas y desventajas que ofrece usar un software, como es el caso de eXpresser, en la implementación del reconocimiento de patrones y generalización.

5. Análisis de la Información y Resultados

5.1. Introducción

En este capítulo se presenta el análisis de la información recabada en la implementación de las actividades a los estudiantes de primer grado de secundaria. También se presentan los resultados más significativos de dicho análisis; los conceptos que fueron importantes para la solución de las actividades así como las ventajas y desventajas que se presentaron en ellas así como el manejo del software. Cabe señalar que la implementación de las actividades se realizó en grupos escolares normales, en las horas de clase de matemáticas

que, dentro del horario programado en la escuela, los estudiantes dedican usualmente al aprendizaje de las matemáticas con tecnología.

5.2. Análisis de la información por Actividades

El análisis que se presenta a continuación ha sido dirigido primeramente por actividad; es decir, se analizan los resultados de las 9 actividades de manera separada. Esto se debe a que el interés de la investigación se centró en la potencialidad que las actividades aportan al aprendizaje del álgebra inicial. Para ello se establece un objetivo informativo, un objetivo formativo y la documentación de la propia actividad en la que se hace un análisis cualitativo de resultados, evidenciando con extractos del trabajo realizado por los estudiantes.

Objetivo Informativo:

El propósito formativo de esta actividad fue familiarizar al estudiante con las características básicas del software, para que sea capaz de manipular adecuadamente las herramientas del mismo

Objetivo Formativo:

Se espera que el alumno aprenda a representar patrones figurativos en el ambiente proporcionado por el software.

Documentación:

Esta actividad fue aplicada a 42 alumnos de primer grado de secundaria en:

Morelia Michoacán el 27 de Octubre del 2010.

Morelia Michoacán el 28 de Octubre del 2010.

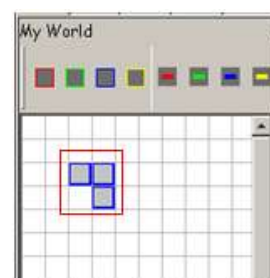
Taretan Michoacán el 28 de Octubre del 2010.

En todos los casos los estudiantes trabajaron en equipos de 2 a 3 alumnos por computadora. Esta forma de trabajo propicio el intercambio de ideas entre ellos, así como una repartición de roles rotativos que permitió a todos los estudiantes interactuar con el software con la computadora y las hojas de trabajo en donde se indicaban las actividades a realizar. Los equipos se mantuvieron estables durante todas las sesiones de aplicación.

La aplicación de estas actividades en varias escuelas en diferentes momentos permitió su mejora paulatina, de acuerdo a las dificultades que mostraron los estudiantes, relativas a su diseño y entendimiento de las preguntas e indicaciones incluidas. Por tal motivo los resultados de la misma han sido clasificados de acuerdo con estas distintas aplicaciones.

La primera propuesta fue aplicada a 14 estudiantes de la escuela_____, agrupados en parejas. Las primeras indicaciones (1-9) guían al estudiante, paso a paso, hacia la manipulación dinámica de los mosaicos y los objetos numéricos con el fin de construir bloques que puedan probar patrones (ver Figura 1Ex).

1. Observa la pantalla de eXpresser. Arrastra, con el ratón, un mosaico azul de la ventana “Mi Mundo” (My Word) y colócalo sobre la cuadrícula.
2. Arrastra otro mosaico azul y colócalo a la derecha del anterior; y, arrastra un tercero abajo de este último. Te debe quedar como en la figura siguiente.
3. Agrupa los tres mosaicos arrastrando el ratón para encerrarlos en el rectángulo rojo.
4. Presiona el botón derecho sobre el agrupamiento y selecciona **Make a building block** (Hacer un bloque de construcción). Éste será el elemento base para la construcción del patrón y, le llamaremos simplemente **bloque**.
5. Ahora selecciona **Make a pattern** (Construir un patrón) del menú que se despliega al presionar el botón derecho, cuando el ratón está sobre el bloque.

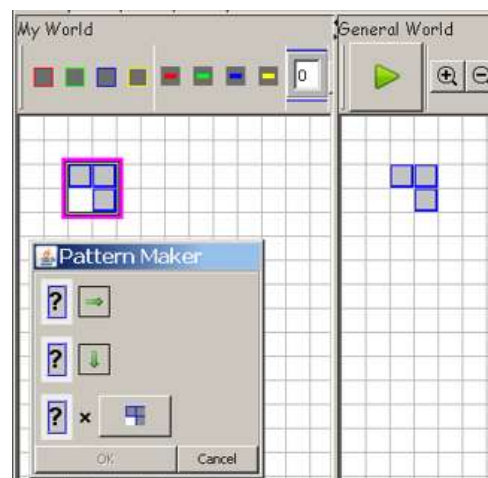


- a. Observa la ventana “Mundo General” (General Word).
- b. Observa la ventana “Mi Mundo” (My Word).

¿Qué similitudes y diferencias encuentras entre ellas?

Escríbelas algunas:

- c. Observa la ventana Pattern Maker que se obtiene al presionar **Make a pattern** del menú desplegable. En el siguiente

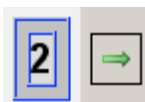


ejercicio sustituiremos los signos de interrogación  por números.

6. Escribe el número **dos** en la casilla de entrada de números



. Arrástralo hacia el signo  del primer renglón.



Obtendrás como resultado . Esto le indica a eXpresser: coloca el siguiente **bloque dos** cuadros a la derecha del presente **bloque**.

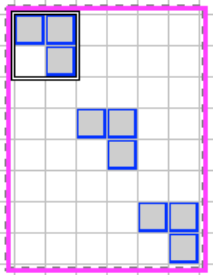
7. ¿Cómo le decimos a eXpresser el número de cuadros hacia abajo en que queremos colocar ese **bloque**?

Realiza este procedimiento en eXpresser para continuar con la construcción del patrón.

8. En el patrón que construiremos el **bloque** se repetirá 3 veces, entonces debemos colocar el número

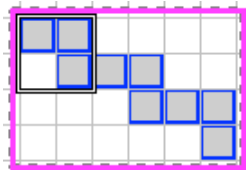
tres en  x . Presiona el botón , cuando hayas terminado de colocar los tres números.

9. ¿Qué número debemos colocar en el segundo renglón de la ventana “Pattern Maker” para construir cada uno de los patrones que se muestran a continuación?



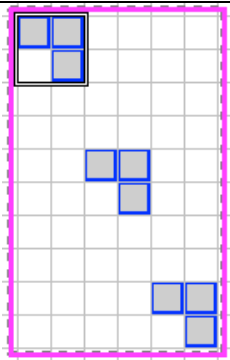
a)

Respuesta:



b)

Respuesta:



c)

Respuesta:

Figura1Ex.

Es hasta la pregunta 9 donde se pide un número que al ser posicionado en una casilla determinada, de como resultado cada uno de tres patrones distintos (ver Figura1Ex).

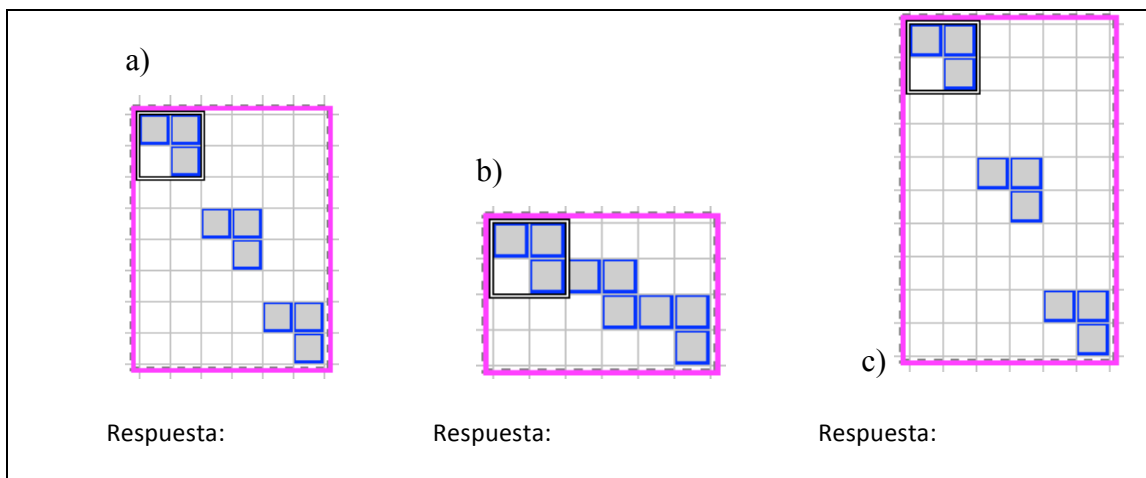
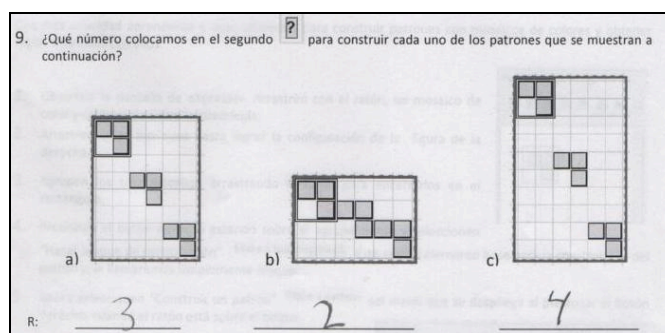


Figura11Ex.

Que su patrón quede como el de la figura que s muestre en su hoja de trabajo. En esta primera parte de la actividad, la mayoría de los estudiantes muestran problemas con el manejo dinámico de los objetos a través de su manipulación con el mouse. Parece ser que muchos no han tenido aun un contacto prolongado con la computadora. Así mismo los estudiantes muestran ciertas dificultades de comprensión de las indicaciones dadas, la falta de respuesta a esta pregunta y la necesidad de ayuda continua de parte del profesor y los investigadores presentes, pone de manifiesto la falta de reflexión de los estudiantes en la consecución de la actividad.

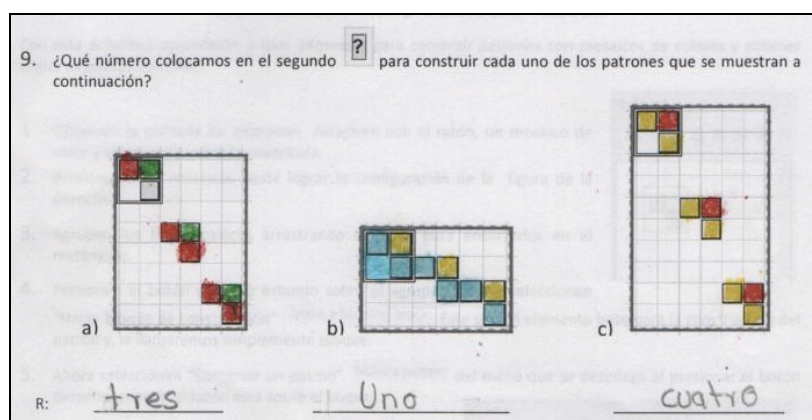
En esta pregunta solamente dos estudiantes no dieron una respuesta; sin embargo la mayoría de las respuestas de los estudiantes son incorrectos (Ver FiguraTaretan06).



FiguraTaretan06.

Las siguientes preguntas tienen el propósito de que el estudiante avance en la construcción del patrón y que tenga una manera de validar la relación entre su construcción figurativa y sus datos numéricos.

En esta sección de la actividad los estudiantes tienen su primer contacto con los números desbloqueados (cantidades generalizadas) que si bien basta solamente seleccionar una opción del menú para hacer este cambio, conceptualmente éste corresponde a un paso intermedio entre la constante y la variable. Se le pide a los estudiantes que realicen este cambio y que observen como se refleja en su patrón. Si el patrón ha sido representado numéricamente de manera adecuada la representación FiguraMorelia1606 cambia de color. Solamente 3 equipos logran hacer que su patrón quede coloreado correctamente (FiguraMorelia1606). A los otros 4 equipos se les da un tiempo para que intenten corregir sus resultados y generen una representación numérica adecuada. En este lapso de tiempo, hay intervención del investigador para apoyar a estos estudiantes. Finalmente solamente un equipo no logra avanzar. Su estructura de base queda “atorada” en la construcción de bloques.



FiguraMorelia1606.

En el inciso 12 se pide a los estudiantes que construyan un patrón, uno propuesto por ellos mismos.

En esta parte de la actividad los estudiantes se vieron muy motivados, lo que permitió que se interesaran por aprender a construir bloques, a través del agrupamiento de mosaicos, y reproducirlos para formar un patrón. Varios equipos construyeron bloques que representan un objeto real como vehículos caras, corazones, etc. (Ver Figura Morelia1606)

12. Construyan su propio patrón y reproducirlo enseguida.

Bloque de construcción	Patrón	Datos	
		Color(es):	
		 	4
		 	3
		 x 	12
		 	12

FiguraMorelia1606

Tres de dichos bloques son configuraciones muy elaboradas (vehículos, corazón) y requirieron muchos mosaicos de diferentes colores. Estos equipos los logran construir un patrón figurativo; sin embargo, no les queda tiempo para la construcción del patrón numérico que los represente. En los tres casos los estudiantes trabajan al inicio por ensayo y error, cambiando los números que posicionan al bloque con relación al patrón, para conseguir que sus bloques no se traslapen en el patrón y no pierdan la configuración inicial. Después de varios intentos, uno de los estudiantes de un equipo se da cuenta que debe contar horizontalmente y verticalmente, el número de mosaicos que abarca el patrón para determinar el corrimiento necesario de los bloques.

Los resultados generales de esta actividad se resumen en esta tabla1606.

Número de la Pregunta.	Bien	Regular	Mal
7	5	0	2
9	6	1	1
12	3	1	1

Tabla1606 Resultados generales de la actividad “Mi Primer Patrón con eXpresser”

Una de las principales dificultades que mostraron los estudiantes en la primera aplicación de la actividad “Mi Primer Patrón con eXpresser” se debió a la poca experiencia en la lectura por parte de los estudiantes.

Estos mostraron deficiencias en la comprensión de los enunciados textuales, para lo cual se llevaron mucho tiempo los 90 minutos de los que se disponía. Por tal motivo, la actividad fue modificada para que la hoja de trabajo respectiva incluyera la menor cantidad de texto

posible. Las instrucciones iniciales se dividieron verbalmente mediante una exposición previa en PowerPoint, Los resultados de la aplicación de la actividad corregida se describe a continuación.

La actividad fue modificada para la siguiente aplicación en la escuela, ya que la original incluía mucho texto a leer y los estudiantes mostraron dificultades para entender las instrucciones planteadas al inicio de la misma. Se decidió entonces reducirla en esta parte y en su lugar, al inicio de la sesión, dar dichas instrucciones de manera verbal, utilizando una exposición de las mismas en el proyector.

Esta modificación inicia con la pregunta acerca de las cantidades que hay que colocar en las casillas numéricas para la construcción de los patrones que se muestra en la hoja de trabajo. Los estudiantes nuevamente muestran algunas dificultades con la elección de dichos números y utilizando una estrategia de ensayo y error con el fin de observar el comportamiento del patrón figurativo conforme cambian dichos valores.

Si bien inician colocando números cualesquiera, rápidamente caen en la cuenta de que números deben colocar para conseguir los patrones pedidos.

Una situación que llama la atención es que los estudiantes construyen 3 patrones independientes para cada uno de los tres casos que se presentan en la hoja de trabajo; si bien podría haber construido los patrones utilizando el mismo bloque de construcción inicial para los tres casos.

MI PRIMER PATRÓN CON EXPRESSER

Con esta actividad aprenderás a usar eXpresser para construir patrones con mosaicos de colores y obtener reglas asociadas con ellos. Puedes también animarlos para que cambien automáticamente.

NOMBRES: MARCO ANTONIO NAVARRETE JÚNIOR Fecha: 6/09/20
GERARDO RAYANAFUT LAR

1. ¿Qué cantidad deben colocar en cada una de las entradas de números para construir cada uno de los patrones que se muestran a continuación? Escríbalos a continuación, en el cuadro de la izquierda.

a)

2

+

3

+

3

x

b)

0

+

2

+

2

x

c)

2

+

2

+

4

x

2. Hagan que los mosaicos se rellenen del color seleccionado. Coloquen en la casilla que corresponde, el número total de mosaicos que conforman todo el patrón en cada uno de los tres casos anteriores. Escriban su respuesta enseguida.

Cuántos mosaicos?

9

Cuántos mosaicos?

6

Cuántos mosaicos?

12

FiguraI0609

Los resultados generales de esta actividad se representan en la TablaII060910.

Número de la Pregunta.	1a	1b	1c	2a	2b	2c
Bien	10	6	10	12	11	11
Mal	2	6	2	0	1	1

TablaII060910 (Resultados de la Actividad Mi Primer Patrón con eXpresser modificada.)

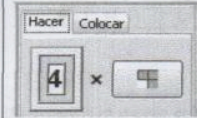
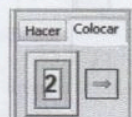
En ésta se puede observar que los resultados de las actividades no son todas correctas

Como ejemplo, mostramos el caso del equipo formado por Marco Antonio y Gerardo. Sus respuestas a la actividad correspondiente a la construcción de patrones son todas correctas, mostrando que logran entender cómo se comporta un patrón figurativo con base en la manipulación numérica que realizan del mismo.

Así mismo, cuando a estos estudiantes se les pide explicar la función que tiene el no, que les permite reproducir el bloque de construcción y generar con el bloque de construcción y generar con él un patrón, (ver FiguraII0609), sus respuestas muestran la confianza que han

logrado tener en la construcción de patrones con eXpresser. Señalar que son ellos quienes tienen la posibilidad de decir a la máquina las veces que se debe de producir un bloque.

3. Desbloqueen los números que se indican en la siguiente tabla, y respondan las preguntas:

	¿Qué cambia? Las veces de la figura ¿Qué no cambia? La figura y los cuadros que van abajo y a la derecha ¿Por qué creen que se den esos cambios? Por que le ponemos las veces que queremos la figura y porque nada más movemos las veces que queremos la figura.
	¿Qué cambia? Las veces que van a la derecha. ¿Qué no cambia? La figura, las veces que se mueve para abajo y las veces en que se multiplica. ¿Por qué creen que se den esos cambios? Por que nada más movemos las veces que va a ir a la derecha.

FiguraII0609(Dominio de los alumnos al usar eXpresser)

Otro caso es el del equipo formado por Hugo y Luis que si bien en la primera parte de la actividad de la actividad muestran haber entendido la función del número de repeticiones del bloque de construcción, no lo hacen el posicionamiento del mismo.(Ver FiguraIII0609) Así mismo su explicación acerca del efecto de este número en el patrón no es claro. Obsérvese que confunde la palabra “contorno” expresándola como “retorno”, indicando que el cambio se obtiene en la forma que se eXpresser utiliza para diferenciar un número “desbloqueado” (número generalizado) y uno “bloqueado” (número constante), otros casos de respuesta a estas preguntas se muestran en la FiguraIII0609.

NOMBRES: Hugo Ivan Torres Rarodriguez Fecha: 5/09/10
Leir Angel Elvica Aguilar Manzanilla 8

1. ¿Qué cantidad deben colocar en cada una de las entradas de números para construir cada uno de los patrones que se muestran a continuación? Escribalos a continuación, en el cuadro de la izquierda.

a)

3

 $\Rightarrow$

2

 $\downarrow$

3

 $\times$

b)

5

 $\Rightarrow$

2

 $\downarrow$

1

 $\times$

c)

9

 $\Rightarrow$

2

 $\downarrow$

4

 $\times$

Cuántos mosaicos?

3

Cuántos mosaicos?

5

Cuántos mosaicos?

9

FiguraIII0609.

5.2.1. Mi Primer Patrón con Express Parte II

Mi Primer Patrón con eXpresser Parte II se construye a partir de mejoras para la primera actividad. Los primeros cambios son en la ubicación del mismo patrón, para partir a una propuesta de patrón creada por los propios junto con su ubicación, tan importante para el manejo del propio software, como para que el alumno genere un orden del mismo patrón en Mi Primer Patrón, esto aunado con un objetivo informativo y un objetivo formativo que son los siguientes:

Objetivo Informativo.

Reconocer los elementos que se requieren para generar el patrón y reconocer de manera algebraica la expresión del patrón.

Objetivo Formativo.

Motivar el aprendizaje de los patrones construyendo su patrón, describiendo cada una de sus componentes, haciendo una descripción algebraica y escrita.

Documentación.

Estas actividades se aplican a 77 alumnos en las escuelas secundarias del primer grado escolar en:

Uruapan Michoacán el 09 de Julio del 2010.

Taretan Michoacán el 13 de Agosto del 2010.

Morelia Michoacán el 11 de Octubre del 2010.

Esta actividad se aplica en grupos de dos a tres integrantes para que los mismos alumnos interactúen con el software y se de el intercambio de ideas entre ellos, conservando a los integrantes durante toda la actividad, aplicándola en su salón de computo ubicada en la misma escuela.

Esta nueva propuesta se aplica en las diferentes escuelas para su análisis y mejora paulatina obteniendo los siguientes resultados para cada actividad ver Tabla.

Numero de Pregunta	Bien	Mal
1	21	17
2	30	19
3	22	18
4	30	19
5	31	18
6	29	19
7	22	34
8	22	25
9	23	23
10	23	23

Tabla 2 Resultados de las Actividades de Mi Primer Patrón con eXpresser Parte II.

En la Pregunta número uno se propone al alumno que construya su propio patrón e identifiquen la posición de su patrón en la hoja de la actividad, mas de la mitad logra hacerlo con éxito esto se debe a que los alumnos ya han trabajado con la ubicación los que no logran hacer bien los cálculos, esto es debido a que no saben la diferencia entre mosaico, bloque y patrón, este tipo de problemas se acarrean para las siguientes tres preguntas.

Las siguientes preguntas de la 2 a la 4 se enfocan a que el alumno identifique cada uno de los elementos de los que se compone el patrón, esta pregunta genera buenos resultados puesto que la mayoría de los estudiantes contesta de manera favorable. Se propone un número fijo de mosaicos para obtener un número total de mosaicos que contiene en la pregunta 5, los resultado son similares para en cada caso, algunos abandonan la actividad por las razones antes mencionadas.

Para expresar el número de mosaicos en una expresión que contenga a “ n ” en la pregunta 7 muy pocos estudiantes lo hacen de manera general y la mayoría lo hacen en particular, para un número en concreto.

Estudiantes que lo expresan de forma general lo hacen de la siguiente forma(Tabla 3):

Estudiantes que lo expresan en forma general	Estudiantes que lo expresan en forma particular
$n \times 6:1$ Actividad 2 Morelia en donde el patrón que propone tiene como base 6 mosaicos	$7 \times 4 = 28$ Actividad 7 Morelia
$n \times \text{número de mosaicos}$ Actividad 3 Morelia en este caso el alumno propone 11.	$5 \times 4 = 20$ Actividad 7 Morelia
Errores.	
No se nota la diferencia entre la base de los mosaicos y el número n con número 30 siendo que su patrón solo tiene 10 mosaicos como base 3×30. Las demás expresiones no tiene sentido como: $\text{igual } n$ Siendo que su base son 4 mosaicos.	

<u>no ay multiplo</u>	Siendo que su base son 12 mosaicos.
<u>8 mosaicos</u>	Siendo que su base son 5 mosaicos.
<u>6x31 = 181</u>	Siendo que su base son 6 mosaicos.

Tabla 3 Resultados de resultados en general y en particular

Estas expresiones muestran la falta de experiencia hacia problemas de interpretación algebraica y uso del lenguaje matemático a lo largo de su educación. Estos problemas se pueden subsanar haciendo trabajo en las aulas en grados anteriores y la propuestas de actividades para el reconocimiento de patrones y generalización, problemas en donde se pueda expresar con palabras los cálculos hechos en problemas diseñados para tal objetivo.

5.2.2. Trabajando con Fórmulas Numéricas

Trabajando con la misma idea de obtener mejoras en las actividades, se propone Trabajando con Formulas Numéricas, esta actividad esta centrada a las propiedades algebraicas de los números enteros y el concepto de variable siguiendo un objetivo informativo y objetivo formativo.

Objetivo Informativo.

Revisar propiedades de asociatividad con los números enteros.

Objetivo Formativo.

Aprenderá en concepto de variable.

Documentación:

La actividad se aplico a alumnos de primer grado de secundaria en:

Taretan Michoacán el 18 de Septiembre del 2010.

Morelia Michoacán el 20 de Septiembre del 2010.

Esta actividad fue aplicada a 66 estudiantes, con dos estudiantes por cada equipo manteniendo fijo al equipo durante la actividad.

Comienza con una introducción a la distributividad de los números enteros, en la pregunta se le pide a los alumnos que desbloqueen un número, esto es que el número sea transformado en una variable, después de hacer la transformación, se les pide que cambien la variable z por un valor en particular y la mayoría de los alumnos lo hacen de manera favorable, en la pregunta siguiente se les pide que llenen una tabla con diferentes valores para la variable z y viceversa, que encuentren un posible z para un resultado dado.

1. Utilizando la expresión del ejercicio anterior: $(9 + 3) \times 7$, obtener los valores que faltan en la tabla siguiente. Observen el ejemplo de la segunda columna.

z	9	6		0	-1	-5			
Resultado	84		175				0	-7	70

Figura 5.2.3 Obtener los valores de z para los cuales da el resultado.

Ver Figura 5.2.3), en esta parte existen algunas observaciones interesantes como el manejo de los signos, el alumno deja en blanco la respuesta o la contesta mal, esto se puede asociar a que no se abordado el tema de los números negativos, o que la expresión encontrada no fue la correcta, también se propone, que encuentren el valor de z del cual produce un resultado en particular, no produce buenos resultados puesto que en algunos casos no es correcto o la presencia del signo no es favorable para el alumno.

Ya teniendo las primeras preguntas para que el alumno tuviera la idea clara de lo que se estaba planteando se le propone que haga un patrón e identifique los mismos elementos antes vistos, hacer un cambio de variable para los diferentes valores de z enfocados en el número de veces que repitiera el patrón, esto produjo los siguientes resultados.

No de Pregunta	2	3	6	7	8	9	10
Bien	12	9	3	8	11	8	11
Mal	9	19	15	10	7	10	7

Tabla 5.2.3 Resultados de la Actividad Trabajando con Formulas Numéricas.

La mayoría de los estudiantes lo hacen correctamente para las demás preguntas.

Esta actividad se modifica y se aplica a 13 estudiantes de la secundaria _____ a 13 y las modificaciones son en la primera parte las instrucciones para que sean más cortas puesto que los alumnos abandonan la actividad por no entender las instrucciones y solo se dan tres instrucciones para la primera parte, esto permitirá que los alumnos avancen más en la actividad (Ver Figura 5.3.31).

1. Escriban la siguiente secuencia de operaciones con eXpresser. Utilicen las **opciones del menú** de los números. Asegúrense que les quede como en la figura de la derecha.
2. Hagan una copia de la operación realizada. Para ello, utilicen la opción "COPIAR" del menú que se activa al hacer clic sobre la operación a copiar. Obtengan el resultado de la operación (Usando la opción Calcular Valor del menú).
3. Desbloqueen y den el nombre de "z" al número 2 de la operación del ejercicio 1.

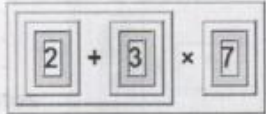
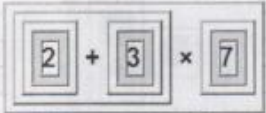
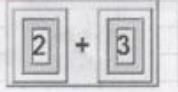




Figura 5.4.31 Instrucciones de la actividad modificada.

Se le plantea que encuentre los algunos resultados proponiendo algún z y viceversa, dado algunos resultados que encuentre los valores de z (ver Figura 5.3.32).

z	9	7		0	-1	-5			
Resultado	84		175				0	-7	70

Figura 5.3.32 Encontrar un valor para z que produce el resultado.

Los resultados son semejantes a la actividad pasada (Ver tabla 5.3.31)

Pregunta	Bien	Regular
5	2	8
9	11	0
10	9	0
11	12	1
12	0	1

Tabla 5.3.31.

Se analizan los resultados que están de manera correcta y los que por alguna razón están mal y los errores siguen siendo en los números negativos.

Los resultados que a continuación se presentan son algunos de los que llenan la mitad de los datos, la causa puede ser que obtienen números negativos y lo otros dejan la mitad de la actividad en blanco.

Z	9	7	22	0	-1	-5			70
Resultado	84	70	175	21	24	64	0	-7	70

Actividad1 7Taretan.

Otro de los resultados mas comunes la presencia del cero, creen que la operación con el cero en la variable z siempre va a salir como resultado cero sin verificar el resultado.

Z	9	7	22	0	-1	-5	0	-98	7
Resultado	84	70	175	21	14	-14	0	-7	70

Actividad2 7Morelia.

5.2.3. Trabajando con Números y Colores

Trabajando con Números y colores es una mejora de la actividad trabajando con Fórmulas Numéricas, contiene instrucciones para el estudiante y actividades a realizar para llegar a su objetivo principal de promover la enseñanza temprana de los patrones y la generalización, se plantean objetivos informativos y objetivos formativos que son los siguientes:

- Objetivo Informativo.

Repasar los conceptos de mosaico, bloque y patrón.

- Objetivo Formativo.

Conocerá el concepto de variable para que después involucre la variable para obtener el número de mosaicos que son utilizados para la generación del patrón.

- Documentación.

Esta actividad se aplica a 87 alumnos del primer grado de secundaria en:

Uruapan Michoacán el 13 de Septiembre del 2010 en la escuela .

Uruapan Michoacán el 13 de Septiembre del 2010 en la escuela .

En la misma dinámica que se ha seguido trabajando se proponen de dos a tres alumnos por equipo para el intercambio de ideas y la propagación de resultados e ideas entre los

alumnos. Estos equipos se mantienen durante toda la sesión, y la actividad se aplica a las escuelas el mismo día para después analizar cada una de ellas.

La actividad se centra en dos preguntas, comenzado con una serie de instrucciones de la distributividad de los números enteros, puestos de tal manera que el estudiante tenga tal propiedad, en el paso 1E los alumnos realizan un cambio de variable con uno de los números se pretende que obtengan algunos valores de z para un posible resultado como se ve en la actividad realizada por Purísima Ana Paola y Viridiana mostrada en la figura.

2. Utilizando la expresión del ejercicio anterior: $(9 + 3) \times 7$, obtener los valores que faltan en la tabla siguiente. Observen el ejemplo de la segunda columna.

z	9	6	22	0	-1	-5	-3	-4	7
Resultado	84	63	175	21	14	-14	0	-7	70

3. Dar un clic en el número que se llama " z " y seleccionen **Mostrar sólo nombre**. Escriban el resultado: 70

Figura(Asignando valores para z y obteniendo resultados).

Los resultados que se presentan en la siguiente tabla son los obtenidos en la actividad en equipos de dos a 3 integrantes.

Número de Pregunta	Bien	Mal
2	6	10
3	0	16

La mayoría de las actividades no fue resuelta de manera satisfactoria y los problemas son debido a que la actividad tiene instrucciones mas largas. Se proponen valores negativos para la variable z para obtener un resultado que puede ser positivo o negativo. Los resultados muestran que no se tiene dominio de los signos (Ver Actividad1 2Uruapan).

z	9	6	22	0	-1	-5	21	-28	7
Resultado	84	63	175	21	14	14	0	-7	70

Actividad1 2Uruapan.

Otro de los resultados es cuando el alumno identifica valor de 0 y piensan que todo es cero y para el otro caso en el que el resultado es cero de resultado lo relacionan con un $z = 0$

como se ve en la Actividad2.

z	9	6	22	0	-1	-5	0	28	7
Resultado	84	63	175	21	14	-14	0	-7	70

Actividad2 Uruapan.

En nuestra experiencia las actividades que contienen instrucciones para el alumno no son efectivas para nuestros propósitos pero si dejan bastante información de cual seria una actividad ideal.

5.2.4. El Jardín con Rosas

El Jardín con Rosas es una conjuga de elementos como instrucciones breves y ejercicios que nos hagan valorar los resultados de los estudiantes para la pronta introducción de patrones y la generalización, se plantea un objetivo informativo y un objetivo formativo para su aplicación, documentando los datos y posteriormente haciendo el análisis de cada una de las actividades las actividades, los objetivos son los siguientes:

Objetivo Informativo.

Familiarizar al alumno con el software eXpresser, aprender los elementos importantes como mosaico, bloque y patrón así como ubicación del mismo patrón.

Objetivo Formativo.

Fomentar el desarrollo de patrones y actividades propias utilizando su creatividad y aprovechando el interés de los alumnos en el uso del software

El alumno identificará los elementos de constituyen los patrones, para después que el mismo alumno genere su propio patrón.

Documentación.

La actividad se aplica a 22 estudiantes de primero de secundaria en:

Uruapan Michoacán el 20 de Septiembre del 2010.

Uruapan Michoacán el 21 de Septiembre del 2010.

La actividad se aplica en la secundaria _____. En cada uno de los casos las actividades se aplica a estudiantes de manera individual por las características de la infraestructura de la propia secundaria. La primera parte de la actividad esta enfocada a que el alumno identifique los elementos del cual se compone el patrón propuesto en la actividad. (Ver Figura 5.2.51).

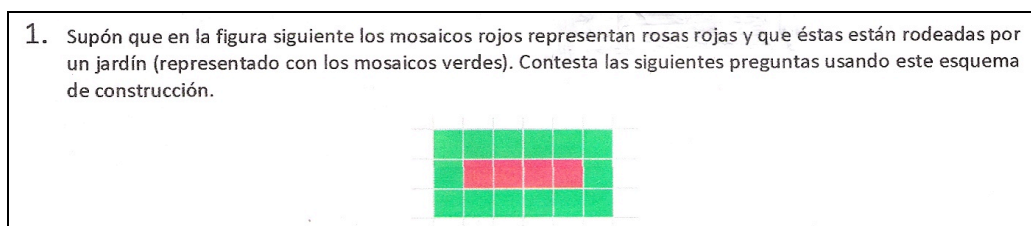


Figura 5.2.51.

Lo siguiente es identificar los cuantos mosaicos contiene el patrón con un número diferente de mosaicos en el centro obteniendo las siguientes respuestas:

Numero de Pregunta.	Bien.	Mal.
1a	8	3
1b	6	5
1c	8	3
2	5	6
3	4	7

Tabla 5.2.51.

La mayoría de los estudiantes logra identificar el número de mosaicos que se encuentran al rededor del centro. Los métodos para dar una respuesta son muy variados, algunos contando mosaico por mosaico(Ver Figura 52), otros usando el número de mosaicos que se encuentran en el centro como referencia.

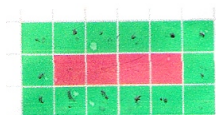
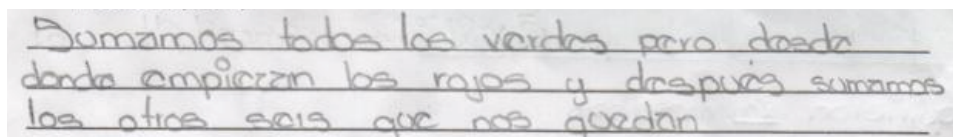


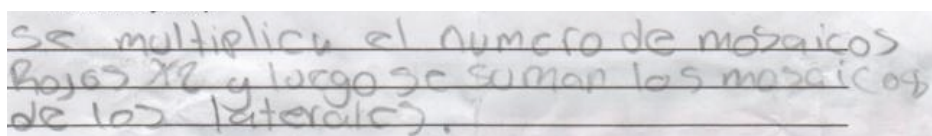
Figura 52 Contando mosaicos.

Siguiendo la misma idea en la pregunta 1b de cambiar el número de mosaicos que se encuentra en el centro, se plantea una tabla usando diferentes valores para z , casi la mayoría de los alumnos lo hace de manera exitosa.

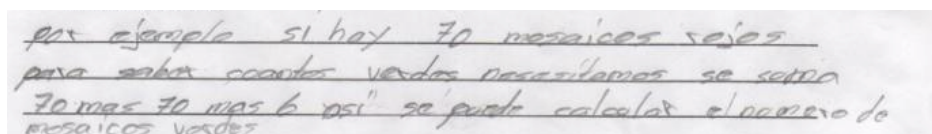
Después de identificar cuantos mosaicos contiene su patrón en la pregunta c, se le pide una descripción con sus propias palabras de como obtiene el número de mosaicos verdes a partir del número de mosaicos rojos, la mayoría de los estudiantes lo hacen de manera correcta y estas son alguna de sus descripciones como lo hace Julissa Pineda (Ver Actividad1 Uruapan).



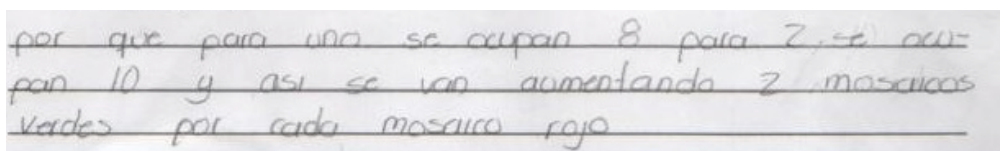
Actividad1 1 Uruapan.



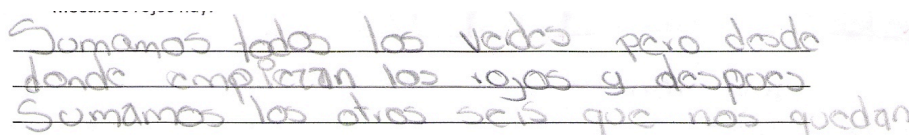
Actividad1 3 Uruapan.



Actividad1 4 Uruapan.



Actividad1 10 Uruapan.



Actividad2 5 Uruapan.

Otra manera de hacerlo fue dando un ejemplo en particular, para un número de mosaicos en el centro. Esto les permitió reafirmar sus operaciones al describir sus mismas operaciones

multiplicando ejemplo: si son 12 mosaicos
rojos y cuanto sera de los mosaicos verdes
si son 12 rojo lo multiplica por 2 medad $24 + 6 = 30$
el resultado es 30

Actividad2 8 Uruapan.

El resultado que a continuación obtiene es a partir de dos números que son propuesto para los mosaicos rojos para después obtener el número total de mosaicos verdes.

Al número de la derecha se le resta el
número de la izquierda y el resultado se x por
2 y se le suma el resultado de la izquierda.

Actividad2 7 Uruapan.

En la pregunta 2 se le pide al estudiante que escriba las operaciones que realiza, estas son las respuestas.

Por ejemplo:

$\begin{array}{r} 12 \\ + 12 \\ \hline 24 \\ + 6 \\ \hline 30 \end{array}$	$\begin{array}{r} 27 \\ + 27 \\ \hline 54 \\ + 6 \\ \hline 60 \end{array}$	$\begin{array}{r} 48 \\ + 48 \\ \hline 96 \\ + 6 \\ \hline 102 \end{array}$	$\begin{array}{r} 121 \\ + 121 \\ \hline 242 \\ + 6 \\ \hline 248 \end{array}$	$\begin{array}{r} 5532 \\ + 5532 \\ \hline 11064 \\ + 6 \\ \hline 11070 \end{array}$
--	--	---	--	--

Actividad1 1Uruapan

$\begin{array}{r} 1 \\ + 1 \\ \hline 2 \\ + 8 \\ \hline 10 \end{array}$	$\begin{array}{r} 12 \\ + 12 \\ \hline 24 \\ + 6 \\ \hline 30 \end{array}$	$\begin{array}{r} 27 \\ + 27 \\ \hline 54 \\ + 6 \\ \hline 60 \end{array}$	$\begin{array}{r} 48 \\ + 48 \\ \hline 96 \\ + 6 \\ \hline 102 \end{array}$	$\begin{array}{r} 121 \\ + 121 \\ \hline 242 \\ + 6 \\ \hline 248 \end{array}$	$\begin{array}{r} 5532 \\ + 5532 \\ \hline 11064 \\ + 6 \\ \hline 11070 \end{array}$
---	--	--	---	--	--

Actividad1 4Uruapan

$\begin{array}{r} 8 \\ + 2 \\ \hline 10 \end{array}$	$\begin{array}{r} 10 \\ + 2 \\ \hline 12 \end{array}$	$\begin{array}{r} 12 \\ + 2 \\ \hline 14 \end{array}$	$\begin{array}{r} 14 \\ + 2 \\ \hline 16 \end{array}$	$\begin{array}{r} 27 \\ + 2 \\ \hline 29 \end{array}$	$\begin{array}{r} 15 \\ + 2 \\ \hline 17 \end{array}$	$\begin{array}{r} 5532 \\ + 5532 \\ \hline 11064 \\ + 6 \\ \hline 11070 \end{array}$	$\begin{array}{r} 5411 \\ + 5411 \\ \hline 10822 \end{array}$
--	---	---	---	---	---	--	---

Actividad1 10Uruapan.

$\begin{array}{r} 12 \\ + 12 \\ \hline 24 \\ + 6 \\ \hline 30 \end{array}$	$\begin{array}{r} 27 \\ + 27 \\ \hline 54 \\ + 6 \\ \hline 60 \end{array}$	$\begin{array}{r} 48 \\ + 48 \\ \hline 96 \\ + 6 \\ \hline 102 \end{array}$	$\begin{array}{r} 121 \\ + 121 \\ \hline 242 \\ + 6 \\ \hline 248 \end{array}$	$\begin{array}{r} 5532 \\ + 5532 \\ \hline 11064 \\ + 6 \\ \hline 11070 \end{array}$
--	--	---	--	--

Actividad2 5Uruapan.

$$\begin{array}{r} 12 \\ - 5 \\ \hline 7 \\ \times 2 \\ \hline 14 \\ + 16 \\ \hline 30 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 27 \\ - 12 \\ \hline 15 \\ \times 2 \\ \hline 30 \\ + 30 \\ \hline 60 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 48 \\ - 27 \\ \hline 21 \\ \times 2 \\ \hline 42 \\ + 60 \\ \hline 102 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 121 \\ - 48 \\ \hline 73 \\ \times 2 \\ \hline 146 \\ + 102 \\ \hline 248 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 5532 \\ - 121 \\ \hline 5411 \\ \times 2 \\ \hline 10822 \\ + 248 \\ \hline 11070 \end{array}$$

Actividad2 7Uruapan.

Las operaciones en su mayoría son una multiplicación por 2 para obtener el número de mosaicos que están en la parte de arriba como la de abajo del centro, después sumar 6 mosaicos que se encuentran en los dos extremos.

En la pregunta 3. Se le pide al alumno que exprese de manera algebraica como calcular el número total de mosaicos verdes, solo 2 de ellos lo hace de manera correcta. Estos son los resultados que se obtienen.

Estos resultados en donde el estudiante elige un número fijo de mosaicos y obtiene el resultado en particular, pero no generaliza.

Por ejemplo: 12, $12 + 12 = 24$ y sumas los 6 de los lados oscuros $24 + 6 = 30$

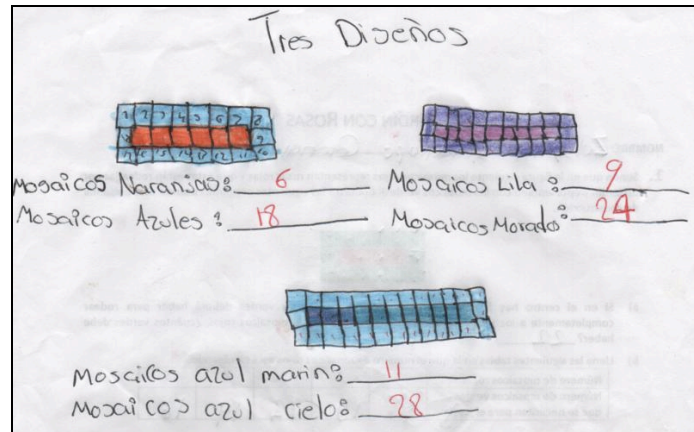
Actividad1 1Uruapan.

Otro de los casos, es un ejemplo que no tiene mas que cuentas y que no especifica que significa cada valor.

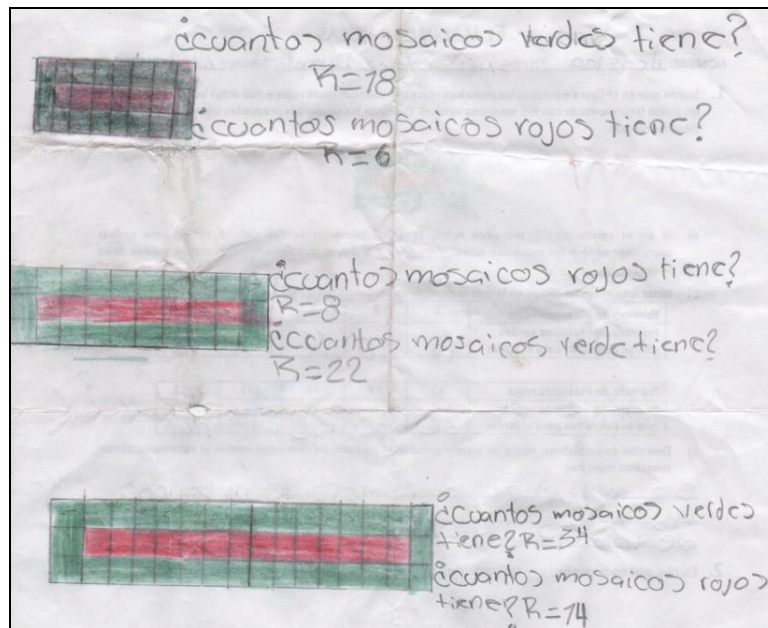
por ejemplo $121 + 121 + 6 = 248$

Actividad1 4Uruapan.

Se le pide a los alumnos que hagan su propio patrón y el número de mosaicos que ocupan de cada color. El diseño que propone Zuleyma y Guadalupe, en donde la descripción es buena puesto que describen el número de bloque utilizan en sus diseños.

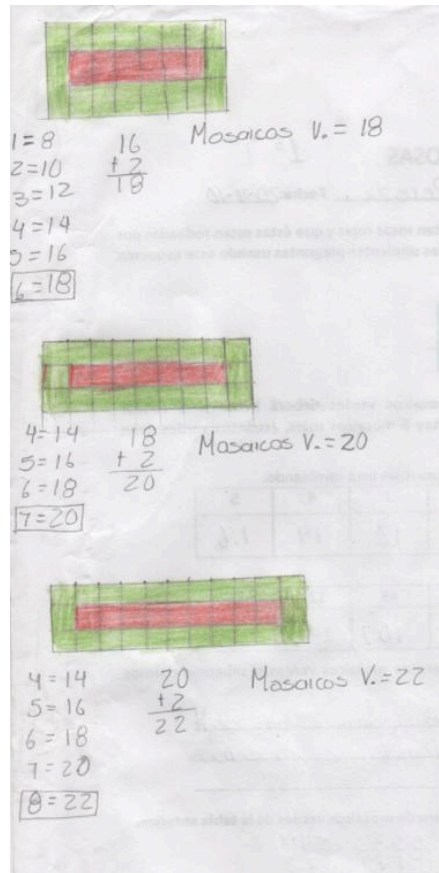


Actividad1 1Uruapan.



Actividad1 3Uruapan.

En la actividad realizada por los alumnos Zaira Karina Saucedo Perez utiliza un método de inducción, comienza con un bloque, para terminar hasta 8 bloques.



Actividad 10 Uruapan.

La propuesta de saber cuales son los elementos del cual conforma el patrón propuesto, describir con sus propias palabras de como van construyendo su propio patrón, así como hacer su propio diseño, permite que el alumno encuentre el sentido de que es un patrón, así como tratar de llegar a una generalización como se muestra en la actividad.

5.2.5. La Vía del Tren

La Vía del Tren se compone de elementos importantes que se han ido acumulando de las actividades anteriores tanto de orden como de importancia en su aplicación para el aprendizaje de los patrones y la generalización, propone objetivos informativos y objetivos formativos para el manejo de variables, en donde el alumno que empieza a tener una relación con las variables patrones y generalización de los objetivos son:

Objetivo Informativo.

Familiarizar al alumno con el software, así como desbloquear los números para observar el comportamiento.

Objetivo Formativo.

El alumno aprenderá a interpretar e identificar a los patrones en forma algebraica como una generalización

Documentación:

Esta actividad fue diseñada en base a los resultados anteriores para su elaboración y dar seguimiento a los procesos de solución. La actividad llamada la Vía del Tren se plantea a 56 alumnos de:

Taretan Michoacán el 17 de Junio del 2010.

Zacapu Michoacán el 18 de Junio del 2010.

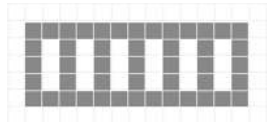
En las escuelas secundarias de Taretan y la escuela Secundaria Técnica No de Zacapu Michoacán.

Se sigue la misma dinámica de aplicación, de 2 a 3 integrantes por equipo para la comunicación de ideas entre si y llegar a una solución, los equipos se mantienen estables a lo largo de la actividad, se documentan los resultados de las actividades y dificultades que tienen los estudiantes al realizarlas.

Las primeras preguntas (A-C) se encaminan a construir un patrón con diferentes colores para cada bloque (Ver figura ViadelTren).

LA VÍA DEL TREN

- A) Utilizando eXpresser, construyan un patrón que se asemeje a una vía del tren como el de la figura siguiente. Usen **diferentes colores**, de tal manera que puedan mostrar a sus compañeros cómo construyeron el patrón.



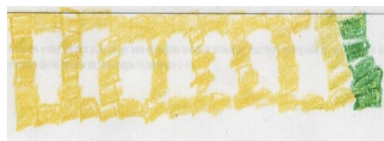
- B) Dibujen enseguida los bloques de construcción que utilizaron para construir el patrón.



- C) Asegúrense que los mosaicos estén rellenos de los colores que eligieron. Dibujen enseguida cómo quedó el patrón, utilicen los colores correspondientes.

Figura ViadelTren.

Esta actividad fue rica en propuestas como por ejemplo los mostrados en la figura Actividad22Zacapu son dos patrones con dos bloques cada uno.



Actividad22Zacapu.

Otros patrones que son excesivos y que los mismos estudiantes después de proponerlo abandona su representación algebraica por tener que interpretar todos los colores o todos los bloques en una representación (Ver figura Actividad33Zacapu).



Actividad33Zacapu.

El siguiente paso es obtener una regla para contar el número de mosaicos que tiene el patrón en el inciso C propuestos por los mismos alumnos y los resultados se que obtienen en general son los siguientes.

Pregunta.	B	C	D
Bien	6	8	5
Mal	3	1	4

Resultados de la Actividad la Vía del Tren.

Se puede ver en los resultados que los que realizan la actividad son una pequeña parte y esto se debe en parte a la presencia de una interpretación algebraica de los patrones que proponen cada uno de los estudiantes para su representación. Como es el caso del grupo conformado por Guadalupe Millán Arellanos y Valeria Magaña García que logran a terminar la actividad y muestran comprensión al detallar cada elemento utilizado para realizar su patrón para después contar el número de mosaicos totales que utiliza (ver ActividadZacapuViadelTren) donde el patrón propuesto es un patrón que consta con pocos elementos y bloques para su construcción.

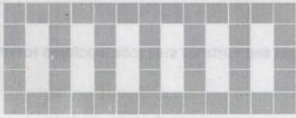
Para describir el número de mosaicos utiliza lo siguiente.

Hace la multiplicación de los cuadros rojos, hace el mismo procedimiento con los cuadros amarillos y suma los resultados de cada uno de ellos para obtener el total de mosaicos utilizados en su patrón.

NOMBRES: Guadalupe Millán Arribas Valeria Magaña García FECHA: _____

LA VÍA DEL TREN

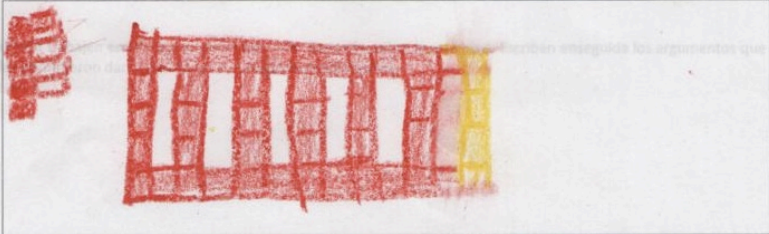
A) Utilizando eXpresser, construyan un patrón que se asemeje a una vía del tren como el de la figura siguiente. Usen **diferentes colores**, de tal manera que puedan mostrar a sus compañeros cómo construyeron el patrón.



B) Dibujen enseguida los **bloques de construcción** que utilizaron para construir el patrón.



C) Asegúrense que los **mosaicos estén rellenos** de los colores que eligieron. Dibujen enseguida cómo quedó el patrón, utilicen los colores correspondientes.



D) Obtengan una regla para contar el **número total de mosaicos** que tiene el patrón.

$6 \times 7 = 42$ ■ y para saber el total de cuadrillos rojo y amarillo se suma
 $5 \times 1 = 5$ ■
 42
 $+ 5$
 47

R= 47 cuadrillos en total

ActividadZacapuViadelTren.

Su representación algebraica es correcta, utilizar la variable “x” para expresar el número de mosaicos que se van a utilizar , después multiplica por 7, que son las veces que se repite el bloque, su representación es la siguiente:

$$x \cdot 7 = x_7$$

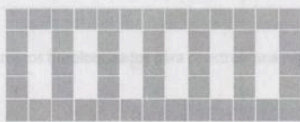
Actividad2 2Zacapu.

Otras actividades realizadas como la de los alumnos Oscar Eduardo Parra y Juan Daniel Mosqueda en donde propone dos bloques para generar la vía del tren pero al identificar el número total del bloques no concuerda con el dibujo realizado(ver Actividad1 1Zacapu).

NOMBRES: Oscar Eduardo Parra Molina Juan Daniel Mosqueda Madrigal FECHA: 18/6/2020

LA VÍA DEL TREN

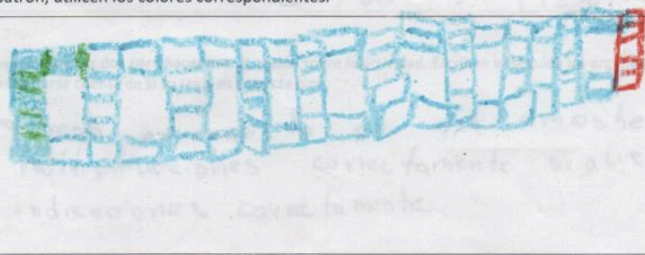
A) Utilizando eXpresser, construyan un patrón que se asemeje a una vía del tren como el de la figura siguiente. Usen **diferentes colores**, de tal manera que puedan mostrar a sus compañeros cómo construyeron el patrón.



B) Dibujen enseguida los **bloques de construcción** que utilizaron para construir el patrón.



C) Asegúrense que **los mosaicos estén rellenos** de los colores que eligieron. Dibujen enseguida cómo quedó el patrón, utilicen los colores correspondientes.



D) Obtengan una regla para contar el **número total de mosaicos** que tiene el patrón.

$9 \times 5 + 1 \times 5 = 50$

Actividad1 1Zacapu.

Sin embargo hace las operaciones correctas para contar el número total de mosaicos con que cuenta su patrón, para escribir los argumentos y asegurar que su regla es correcta argumenta lo siguiente:

El 9 es el valor de las barras azules por el número de veces que la repite pero su bloque no tiene 9 bloques, tiene 7, y la barra roja es la última barra que utiliza para finalizar su patrón (Ver Figura 51).

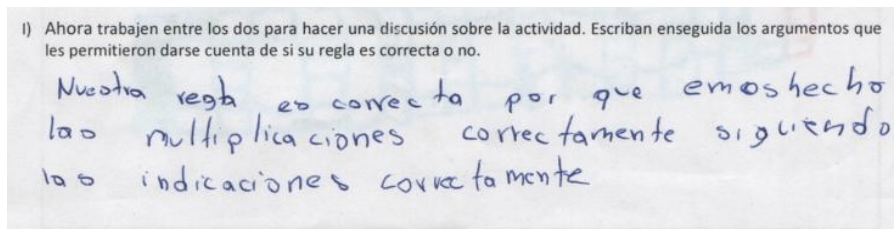
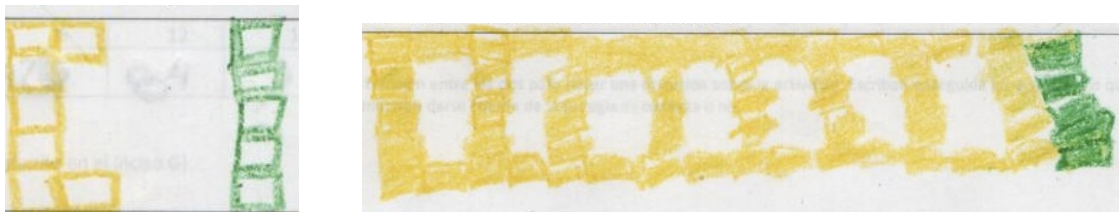


Figura 51 Descripción del argumentos.

Uno de los hechos es que los alumnos al no comprender lo que están haciendo, ponen sus argumentos en manos de la explicación de los maestros sin hacer cuestionamientos a lo aprendido.

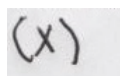
Otro de los errores comunes es el siguiente.

Los alumnos identifican los bloques que van a utilizar en la elaboración del patrón y la construcción es diferente.



Actividad2 3Zacapu

Señalan correctamente la posición, indica correctamente el número de bloques, pero olvida una expresión para el bloque verde y la expresión general que utiliza es la siguiente:



Actividad2 3Zacapu

Estos errores, pueden ser causa de la falta maduración de no hacer generalizaciones por en actividades que se debieron hacer en los primeros grados y/o por falta de conocimiento.

5.2.6. El Sendero

El Sendero es una compilación de mejoras en las actividades anteriores y en base a los resultados que se han obtenido. Se aplican en las mismas escuelas con las que ha estado trabajando, para ver si cumplen con los objetivos de cada actividad, de aprender reconocimiento de patrones y la generalización.

- Objetivo Informativo.

Motivar al alumno a generar su propio patrón .

Objetivo Formativo.

Fomentar al alumno a crear su propio patrón con las herramientas que ofrece el propio sistema para que después haga su propia descripción mediante una fórmula, que describa el número de mosaicos que se utilizaron.

Documentación.

Esta actividad fue aplicada a 79 alumnos del primer grado de secundaria en: Morelia Michoacán el 20 de Septiembre del 2010.

En todos los casos se trabajaron en equipos de 2 a 3 personas por computadora. La forma de trabajar de esta forma permitió el intercambio de ideas, así como la interacción del software y la computadora para realizar la actividad.

Comenzando con una serie de actividades se le pide a los alumnos que defina una variable para la construcción de un primer patrón, para posteriormente definir otro patrón con su respectiva variable, el propósito es enlazar dos patrones de manera paralela y explorar el comportamiento de una variable con respecto a otra Ver Figura 61.

En esta actividad construiremos primero un patrón que servirá de base para la construcción de otro.

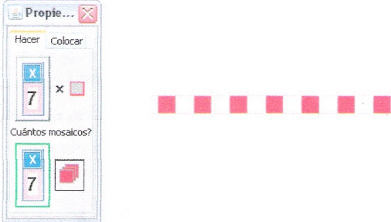
- Utilizando eXpresser, construyan un patrón como el que se muestra en la figura siguiente, utilicen mosaicos de **color rojo**.



- Denle el nombre "X" al número de mosaicos rojos y desbloquéenlo.



- Arrastren el número X a la casilla de "Cuántos mosaicos?". El patrón deberá quedar coloreado.



- En la misma pantalla, construyan un segundo patrón con mosaicos verdes, que represente un sendero por el que se pueda pasar alrededor de los mosaicos rojos. Usen los siguientes pasos de construcción.

Paso 1. Construir un patrón con el **MISMO NÚMERO DE REPETICIONES X**.

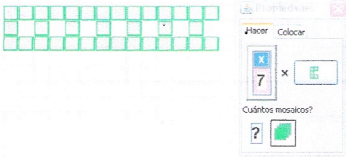


Figura 61. Actividad el Sendero

Se le pide al alumno en la pregunta 5 que interprete el número de mosaicos del segundo patrón con respecto al primer patrón con un número fijo de mosaicos para el primer patrón, las respuestas son las siguientes:

Numero de Pregunta	Bien	Mal
5	28	4
6	22	10
7	17	15
8	8	24
9	22	10
10	17	15

La mayoría logra identificar el número de mosaicos que contiene un patrón en referencia al primer patrón. Se cambia el valor de los mosaicos para el primer patrón, para que el alumno identifique el número de mosaicos con que cuenta el segundo patrón y las respuestas son buenas de igual manera. Esto nos permite ver que los alumnos tienen presente la relación que existe entre los dos patrones y que pueden hacer una relación de ellos.

Lo siguiente es escribir una fórmula completa para calcular el número de mosaicos del segundo patrón. Por supuesto, se obtuvieron pocas expresiones durante las actividades, esto es debido al poco trabajo en las aulas en relación a problemas aplicados en donde tenga que expresar cantidades con variables.

El resultado expresado por Francisco Cesar coloca el número 5 como el número de mosaicos que contiene el segundo patrón y por cada cinco, existen “x” del primer patrón (Ver Figura 1Taretan).

$$x \times 5$$

Figura 1Taretan.

Uno de los resultados que mas utilizan los alumnos es el mostrado por los alumnos Luis Antonio mostrado en la figura siguiente. Expresa de manera particular donde su base es el 5 que es el número de mosaicos verdes para el segundo patrón y el 5 es el número de mosaicos rojos.

$$7 \times 5$$

Actividad1 9Taretan.

Otro caso en el que aclara el porque esta multiplicando por 5 y lo hace de la siguiente manera:

Multiplicando el
 número de los
 mosaicos
 rojos x
 el 5

$$\begin{array}{r} 20 \\ 100 \end{array} \Bigg|$$

Actividad2 4Taretan.

Expresa una relación algebraica que contiene la variable “x” que es correcta, pero no muy clara. Trata de poner la variable en la parte de arriba para mostrar que el valor de 7 en la posición de la “x” es el número que puede variar.

$$\begin{array}{|c|} \hline x \\ \hline 7 \\ \hline \end{array} \times 5$$

Actividad3 1Uruapan.

Teniendo una expresión para obtener el número total de mosaicos verdes (Patrón dos) en relación a los mosaicos rojos, se le pide que la use con un número diferente para los del primer patrón de la pregunta 9, obteniendo buenos resultados, poco mas de la mitad lo hacen de manera correcta (Ver Tabla).

Por último la pregunta va encaminada a que exprese con sus propias palabras, como obtuvo el número de mosaicos verdes cuando se conoce el número de mosaicos rojos y las respuestas que se obtienen son:

multiplicando el número de mosaicos rojos por 5.

Actividad1 8Taretan.

Lo hace para un caso en particular en donde solo tiene cinco mosaicos rojos y así obtiene el número total de mosaicos.

multiplicar 7 x 5 y así nos da el resultado

Actividad1 9Taretan.

Trata de expresar el numero de mosaicos total es con una suma de cincos, que es la base (numero de mosaicos verdes que rodea a uno rojo) y para expresar los verdes pone que depende del número que se tenga.

Sumar $5+5+5$ depende del numero que tengamos

Actividad1 12Taretan.

Reconoce que existe un número fijo, por los que se tiene que multiplicar los mosaicos rojos para obtener el resultado.

multiplicando el numero de los mosaicos rojos por 5

Actividad2 3Uruapan.

Hace una relación entre los mosaicos verdes con los rojos para obtener el resultado pedido.

uno de los mosaicos rojos es como 5 de los mosaicos verdes.

Actividad2 3Uruapan.

Entonces Multiplicando por 5 el numero de bloques rojos (cuadritos)

Actividad2 5Uruapan.

multiplicando $5 \times 6 = 30$

Actividad2 7Uruapan.

Pues se multiplica por 5 el numero de mosaicos Rojos y así obtienes el resultado de mosaicos verdes

Actividad2 10Uruapan.

multiplicando los cuadrillos rojos
por los 5 cuadrillos verdes

Actividad2 11Uruapan.

multiplicando los cuadrillos rojos
por los 5 cuadrillos verdes

Actividad2 12Uruapan.

multiplicar x5 los números de
mosaicos rojos "x"

Actividad3 1Uruapan.

Expresa los números importantes para obtener el total de mosaicos pero no es muy clara la relación.

multiplicando el número de mosaicos rojos
por 5 por que 5 mosaicos tiene el
bloque verde

Actividad3 4Uruapan.

Se calcula multiplicando 5x el número
de cuadrillos rojos y se saca el resultado
x ejemplo $5 \times 7 = 35$ 5 verdes x 7 cuadra
dos rojos = $\boxed{35}$

Actividad3 14Uruapan.

Los resultados por lo general se hacen son para casos en particular, que son los mostrado en las instrucciones para que después ellos por si solos proponga una generalización. Si embargo existen buenas explicaciones que describen el número total de mosaicos del segundo patrón.

5.3. Análisis de la Información y resultados recabados para las otras actividades

Una de las actividades con las que tuvimos éxito fue con El Jardín con Rosas puesto que tiene característica que hace que una actividad tenga los elementos necesarios para obtener la mayor información de los alumnos en base a las actividades que se realizaron como son:

Identificar los elementos principales que definen un patrón, como son:

Número de mosaicos con los que cuenta el bloque.

Número de bloques con los que cuenta el patrón.

Número total de mosaicos con los que cuenta el patrón.

Identificar el número de mosaicos que contiene un patrón en relación con otro patrón.

Describir con sus propias palabras como se obtiene el número total de mosaicos utilizados en el patrón.

Escribir las operaciones que se utilizaron para calcular el número de mosaicos.

Escribir una expresión que describa el número total de mosaicos.

Trabajar con números enteros negativos.

6. Conclusiones

El Álgebra es una de las asignaturas que conforman el conjunto de conocimientos básico de las matemáticas dentro de la currícula del nivel básico. Sus propósitos son múltiples, tanto en el sentido de preparar a los estudiantes para estudiar e ingresar a cursos de matemáticas más avanzados, como para lograr desarrollar en el estudiante capacidades de razonamiento que les permitan un mejor desenvolvimiento en su vida cotidiana.

Es importante entonces que los estudiantes tengan la oportunidad de enfrentarse a actividades que los ayuden en esta tarea; y que a la vez les permitan explorar, descubrir, clasificar y abstraer relaciones matemáticas de manera significativa; aportando a los símbolos un significado generado por la propia actividad del estudiante.

Como se ha mencionado a lo largo del presente trabajo, el NCTM en Estados Unidos, recomienda de manera muy significativa promover una mejor enseñanza en la que los profesores puedan:

- Ayudar a que todos los estudiantes desarrollen capacidad matemática
- Ofrecer experiencias que estimulen la curiosidad de los estudiantes y construyan confianza en la investigación, la solución de problemas y la comunicación
- Entender y utilizar patrones y relaciones, estos constituyen una gran parte de la habilidad o competencia matemática
- Propiciar oportunidades para usar el lenguaje con el fin de comunicar ideas matemáticas
- Ofrecer experiencias en las que los estudiantes puedan explicar, justificar y refinar su propio pensamiento, sin limitarse a repetir lo que dice un libro de texto

Por lo anterior, y tomando en cuenta que la tecnología computacional es una herramienta que atrae de manera natural al estudiante hacia sus diversos usos, además de ser un medio aritmético-simbólico-visual que promueve el aprendizaje basado en la exploración, conjeturación y descubrimiento, consideramos que un trabajo como el que se propone puede ser de gran utilidad para la enseñanza inicial del álgebra escolar.

Por otro lado, la pareja tecnología-hojas de trabajo, proporciona a los estudiantes, profesores e investigadores una herramienta de trabajo útil para los objetivos particulares de cada uno de ellos. Mientras que para el estudiante le ayuda a dirigir el trabajo en el aula hacia los fines plasmados en los objetivos de aprendizaje de la actividad; para los profesores e investigadores ésta es una fuente importante de información para evaluar y valorar el aprendizaje de los estudiantes.

Se describen enseguida los aspectos más sobresalientes del trabajo realizado; en términos de las características principales de las actividades, de los recursos utilizados por los estudiantes, así como de las dificultades que tuvieron que enfrentar.

Características Principales

De manera fundamental consideramos que una de las características de las actividades para que cumplan su propósito, es que sus objetivos sean muy claros y estén bien planteados.

Particularmente, en las actividades de reconocimiento de patrones y generalización utilizadas junto con el software eXpresser, las actividades tienen que tener ciertas características:

- Que permitan que el estudiante identifique cada uno de los elementos que le permiten construir patrones y relaciones como son: mosaico, bloque, patrón y relaciones entre patrones.
- Las hojas de trabajo deben permitir que el estudiante describa con sus propias palabras la actividad de generalización que está desarrollando, para que ésta sea transformada después al lenguaje simbólico en términos aritméticos y algebraicos posteriormente.
- Las hojas de trabajo deben incluir el espacio suficiente para que el estudiante represente en lápiz y papel, el trabajo realizado en el sistema; tanto las representaciones figurales, como las aritméticas y las simbólicas.
- El software permite distinguir claramente entre un número (número bloqueado), un número generalizado (número desbloqueado) y una variable o constante simbólica (nombre asignado a un número). Por esta razón una de las actividades

más importantes a favorecer es la distinción entre estos conceptos y su papel específico en la construcción de un patrón.

Recursos y Herramientas que utilizan los estudiantes para generalizar

En el transcurso de su trabajo, los estudiantes utilizaron una variedad de recursos tanto para construir como para analizar y tratar de simbolizar un patrón.

Uno de los actos sobresalientes que nos permiten inferir un avance en los estudiantes fue el hecho de que al principio, los estudiantes recurren al conteo directo sobre el patrón figurativo para indicar el número total de mosaicos que lo confirman; sin embargo, muy pronto en la consecución de las actividades, la mayoría de los estudiantes son capaces de indicar el total de mosaicos mediante la multiplicación del número de bloques y el número de mosaicos en cada bloque. Dicha expresión numérica les permitió avanzar hacia la simbolización ya que, si bien no todos, varios estudiantes fueron capaces de identificar al número de mosaicos como una constante y al número de bloques como variable, además de identificarlos como elementos relacionados.

Surgieron también diferentes formas de expresión y combinaciones de ellas: formas verbales descriptivas, formas numéricas diferentes, formas semisimbólicas y simbólicas.

Por ejemplo las representaciones de Zaira Karina Saucedo Perez, en la Actividad El Jardín de las Rosas (página 85), que incluye una descripción detallada del procedimiento que sigue por inducción. Ésta sería una de las ideas que se encuentra en casi la mayoría de los estudiantes que logra expresar el comportamiento del patrón.

Como proceso de análisis de los patrones, los estudiantes utilizaron de manera preponderante la suma de términos consecutivos con el fin de comprobar si sus resultados se correspondían con el patrón figurativo diseñado.

Los estudiantes si bien logran identificar la forma general en que se comporta un patrón, es solo en unos pocos casos que logran simbolizarla adecuadamente. La mayoría de los estudiantes indican el total de mosaicos que conforman un patrón mediante un solo número: el que resulta de multiplicar el número de bloques por el número de mosaicos en cada bloque; dicho resultado no les permite avanzar hacia la simbolización del patrón ya que de no es posible, con una sola cifra, indicar una relación entre constantes y

variables, como lo sería expresar explícitamente la multiplicación y no el resultado de la misma. Un ejemplo de ello es el caso que se da el Jardín con Rosas capítulo 5.2.4 (página 82) en la que presenta un caso particular para después hacerlo de manera general.

Podemos observar también un caso en el que los estudiantes llegan a la simbolización, como ocurre en la solución de Humberto Pérez Álvarez, José Antonio Tapia Fabián ante la actividad Mi Primer Patrón con Express Parte II (página 74), quienes hacen uso de la variable “ n ” para representar el número de mosaicos utilizados en el patrón, utilizando la multiplicación como una operación elemental en los cálculos.

De las Actividades

El uso de los colores fue una de las herramientas más importantes para identificar los diferentes elementos de un patrón, puesto que ayuda al alumno a saber identificar los diferentes tipos de bloques con los que está trabajando y poder definir a partir de ellos una expresión simbólica para cada color. Es el caso por ejemplo de Zaira Karina Saucedo Pérez en la Actividad de El Jardín con Rosas (sección 5.2.4) quien relaciona cada uno de los colores con una representación algebraica para después sumar los resultados obtenidos.

Dificultades que enfrentan los estudiantes

Como se ha mencionado, si bien los estudiantes son capaces de generalizar un resultado, la mayoría de ellos no llegaron a simbolizar dichas generalizaciones mediante una fórmula algebraica; se basan en un proceso de análisis de casos particulares para percibir lo general en todos ellos.

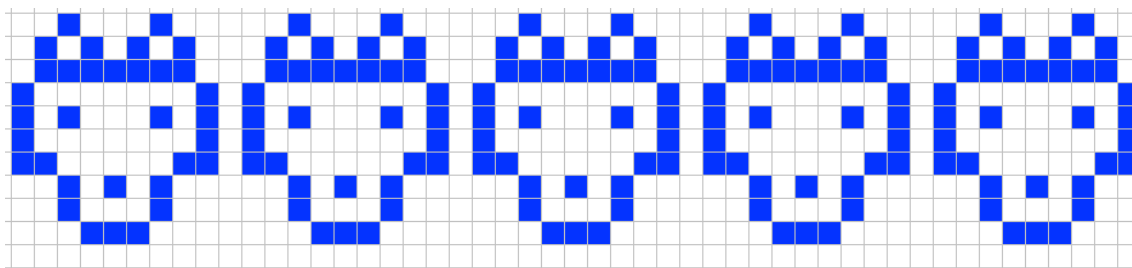
Otra observación es que al principio los estudiantes mostraron dificultades para el manejo del software, ya que éste no es muy intuitivo. Es necesario aprender a manejar muchas de sus funciones con el fin de poder utilizarlo. Sin embargo, una vez que el estudiante conoce el funcionamiento, es capaz de construir sus propios patrones figurativos y de utilizarlos como base de construcción de expresiones simbólicas.

Por último, dentro del conjunto de actividades se propusieron algunas tareas relacionadas con el uso de números negativos pero éstas no tuvieron éxito por la falta de conocimiento de los alumnos, en la mayoría de los casos.

En cuanto al software

El software eXpresser ha sido diseñado expresamente como un paquete computacional educativo que permite el diseño, implementación y análisis de patrones, utilizando representaciones que van desde lo figural hasta lo simbólico, favoreciendo de manera particular la diferenciación entre variables y constantes como una de sus principales potencialidades.

Esta propiedad del software ha permitido poner atención particular al proceso de simbolización e identificar una de sus principales dificultades. En eXpresser, ésta no estriba en otorgar una letra a una cantidad variable; esto es, en la simbolización misma de las relaciones. Es en la determinación de qué cantidad o cantidades son variables y qué cantidades deben ser constantes en un patrón, en lo que reside la mayor dificultad. Esta misma dificultad puede estar sucediendo en las actividades de lápiz y papel que se proponen a los estudiantes cuando se les pide simbolizar patrones figurativos. Por ejemplo, al tratar de representar simbólicamente el patrón producto de la sucesión figurativa siguiente, la mayor dificultad estriba en el cuarto y no en el quinto paso de la siguiente lista de acciones:



Se espera que los estudiantes lleven a cabo algunas de las siguientes actividades:

1. Trabajo concreto y específico: contar todos los cuadritos de manera directa y específica (Total = 165).

2. Trabajo concreto operativo: observar que la figura se repite 5 veces y, por tanto solo es necesario multiplicar los cuadritos que conforman un solo diseño (bloque) por cinco ($\text{Total} = 33 \times 5 = 165$).
3. Trabajo de generalización básica: suponer que el diseño se puede reproducir cuantas veces se quiera, y por tanto, el número total de cuadritos es constante (necesidad de buscar una manera de expresar dicho número: $\text{Total} = 33 \times 5$).
4. Trabajo de generalización en vías de simbolización: Identificar variables y constantes (si se quiere que el diseño original se conserve, el número 33 deberá permanecer constante (número constante = bloqueado) y es entonces el número 5 el que cambiará (número generalizado = desbloqueado)) ($\text{Total} = \underline{33} \times \mathbf{5}$).
5. Trabajo de simbolización: Asignar una letra al número generalizado que ha sido previamente identificado ($\text{Total} = 33 \times n \rightarrow T = 33n$).
6. Trabajo de simbolización: Comprobar que la fórmula funciona para otros casos ($\text{Total} = 33 \times 6$, etc.).

Bibliografía

1. As Lenin 2005.
2. Billings, Tied & Slater, “Algebraic thinking and pictorial growth patterns”; Teaching Children Mathematics, 14 (5) , 302-308 (2007).
3. Blanton & Kaput, 2002; Reid, 2002; Steffe & Izkak, 2002, RAND Mathematics Study Panel, 2002; Steffe & Izsak, 2002, Blanton& -Kapuy, 2000, 2002; Carpenter & Franke, 2001; Carpenter& Levi, 2000 Schiliemann, Carraher & Brizuela, 2001, Coxford et, al. 1998, Kaput 1999, p.137.
4. Blanton & Kaput, 2002; Pegg & Redden, 1990; Schiliemann et al., 2001; Szombathely & Szarvas 1998.
5. Connections between generalizing and justifying. **Ellis JRME** vol 38. 2007.
6. Curcio, Nimerofsky, Perez & Yaloz, 1997; Petocz & Petocz, 1997; Reid, 2002.
7. Chazan, 1993; English & Warren, 1995, Kieran, 1992 Kunth, Slaughter, Choppin & Sutherland, 2002; Lee & Wheeler, 1987.
8. Coe & Ruthven, 1994, Coe & Ruthven, 1994; Koeding, 1998; Kunth et al., 2002; Usiski, 1987.
9. Evaluaciones Internacionales Realizadas por la Asociación Internacional para la Evaluación del Logro Educativo.
10. English & Warren, 1995; Orton & Orton, 1994 Stacey & MacGregor, 1997.
11. Ideas para Aprender Habilidades Matemáticas grupo Arzaquiel.
12. James J Kaput, “Teaching and Learning a New Algebra With Understanding”; *Mathematics Classrooms that Promote Understanding*; Editorial Lawrence Erlbaum Associates, Publishers 1999; pág 133-154.
13. Harel, G and Tall, D (1991) The general, de abstract, and the generic in advance mathematics. For the Learning of Mathematics, 11(1), 38-42.
14. Knuth, E., & Elliott, R. “Characterizing students’ understandings of mathematical proof. *Mathematics Teacher*”, 1998, 714–717.

15. Lannin J., Barker D., Townsend B. "Recursive and explicit rules: how can we built students algebraic understanding". *Journal of Mathematical Behavior*, 25, 299-317 (2006).
16. Lannin J. "Generalization and justification: the challenge of introducing algebraic reasoning trough patterning activities"; *Mathematical Thinking and Learning*, 7 (3) 231-258 (2006).
17. Libro para el Maestro de Matemáticas, Septiembre del 2004, Autores Jesús Alarcón Bortolussi, Elías Bonilla Reus, Rocio Nava Álvarez, Teresa Rojano Cevallos, Ricardo Quintero, Secretaria de Educación Pública.
18. Molligan J. & Micheltmore, "Awareness of pattern and structure in early mathematical development "; *Mathematics Education Research Journal*, **21**(2), 3349 M. (2009).
19. National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*. Resto, Virginia: Autor.
20. National Council of Teacher of Mathematics (NCTM) (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, Virginia: Autor.
21. Rivera F. D., "Visual templates in pattern generalization activity", *Educ. Stud. Math* (2010) **73**: 297-328, Editorial Springer Science 2009.
22. Rivera F. & Becker J. "From patterns to algebra"; *ZDM* 40 (1), Eds (2008a).
23. Rivera F. "Visualizing as a mathematical way of knowing: understanding figural generalization"; *Mathematics Teacher*, 101 (1), 69-75 (2007).
24. Rojano 2001, Flores 2002, Kaput 1999, Schoueld & Arcavi, 1999, Rico y Purg 1993
25. Steeler D. & Johanning D. , "A schematic theory view of problem solving and development of algebraic thinking". *Educational Studies in Mathematics*, 57 65-90 (2004).
26. Stacey K.& MacGregor (2001). Curriculum reform and approaches to algebra. En: R. Sutherlan, T. Rojano, A. Bell & R. Lins (Eds). *Perspectives on school*

- algebra* (141-154). Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
27. Students' proof schemes revisited. **Harel**. Theorems in school ... pp. 61-72
2006.
 28. Thomas P. Carpenter & Richard Lherer, "Teaching and Learning Mathematics
With Understanding", *Mathematics Classrooms that Promote Understanding*;
Editorial Lawrence Erlbaum Associates, Publishers 1999; pág 19-32.
 29. (Ideas y para aprender algebra. Grupo Arzaquiel)
 30. Thompson, 1988.
 31. Warren E. & Cooper T., "Generalizing the pattern rule for visual growth
pattern: action that support 8 years old's thinking"; Educational Studies in
Mathematics; (67) 171-185 (2008).

Anexo

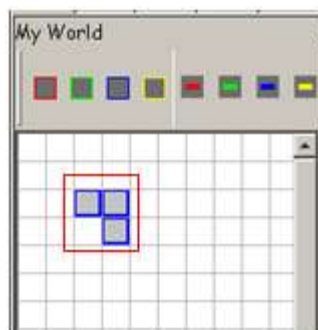
Mi Primer Patrón con eXpresser.

NOMBRES: _____ FECHA: _____

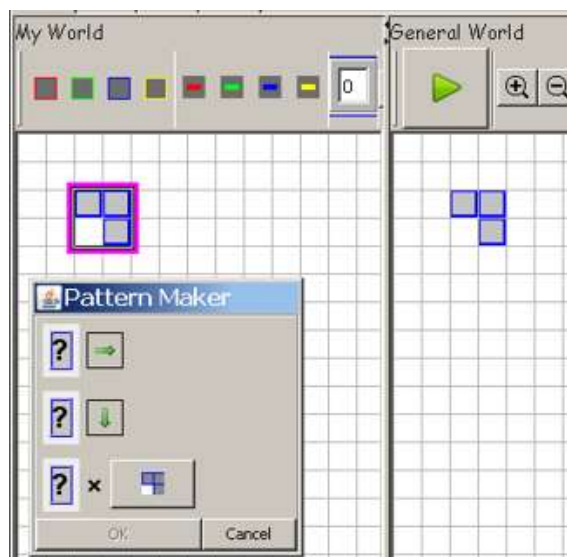
MI PRIMER PATRÓN CON EXPRESSER

Con esta actividad aprenderán a usar eXpresser para construir patrones con mosaicos de colores y obtener reglas asociadas con ellos.

1. Observen la pantalla de eXpresser. Arrastren con el ratón, un mosaico de color y colóquenlo sobre la cuadrícula.
2. Arrastren otros mosaicos hasta lograr la configuración de la figura de la derecha.
3. Agrupen los tres mosaicos arrastrando el ratón para encerrarlos en el rectángulo.
4. Presionen el botón derecho estando sobre el agrupamiento y seleccionen “Hacer bloque de construcción” **Make a building block**. Éste será el elemento base para la construcción del patrón y, le llamaremos simplemente bloque.
5. Ahora seleccionen “Construir un patrón” **Make a pattern** del menú que se despliega al presionar el botón derecho, cuando el ratón está sobre el bloque.



Observen la ventana que se despliega (Pattern Maker).



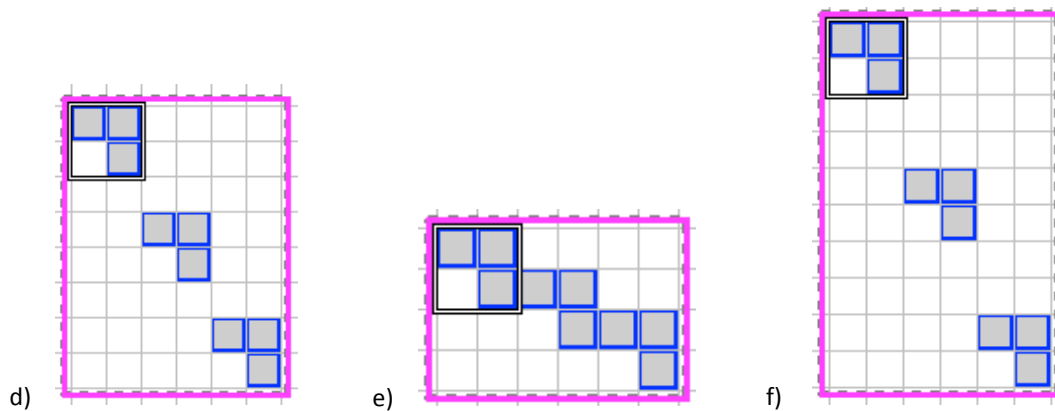
6. Escriban un “2” en la casilla . Arrástenlo

hacia el primer .

7.   quiere decir: coloquen el siguiente bloque dos cuadros a la derecha del presente bloque. ¿Cómo le decimos a eXpresser el número de cuadros hacia abajo que requerimos para colocar el bloque?
-
-

8. El patrón que construiremos se repetirá 3 veces, entonces colocamos un 3 en el tercer . Presionen el botón **ok**, cuando hayan terminado de sustituir todos los  por números.

9. ¿Qué número colocamos en el segundo  para construir cada uno de los patrones que se muestran a continuación?



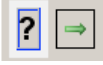
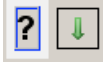
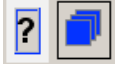
R: _____

10. Ahora hagamos que los mosaicos se rellenen del color elegido. En la ventana de

propiedades seleccionen la carpeta “Hacer” . Coloquen

en , el número total de mosaicos que se necesitaron para hacer el patrón. Observen lo que sucede.

11. Ahora vamos a liberar el número que se encuentra en la casilla del número de repeticiones. Hagan clic con el botón derecho estando sobre el número y seleccionen “Desbloquear” (Unlock).
12. Construyan su propio patrón y reproduzcanlo enseguida.

Bloque de construcción	Patrón	Datos	
		Color(es):	
			
			
			
			

Mi Primer Patrón con eXpresser Parte II.

1. Construyan su propio patrón y reproduzcanlo enseguida.

SOLO USEN MOSAICOS DE COLOR AZUL

BLOQUE DE CONSTRUCCIÓN	PATRÓN	DATOS
		
		
		Número de repeticiones
		Cuántos mosaicos? 

2. ¿Cuántos **bloques de construcción** tiene el patrón?
3. ¿Cuántos mosaicos hay en cada **bloque de construcción**?
4. ¿Cuántos mosaicos hay en el **patrón**?
5. Llenen la siguiente tabla usando el mismo patrón construido en *eXpresser*.
Asegúrense de que el patrón siempre esté coloreado.

Número de bloques	4	6	2	1	8	10
Número total de mosaicos en el patrón						

Utilicen la siguiente regla para completar las multiplicaciones de la tabla siguiente. El resultado de ellas debe ser el número total de mosaicos en el patrón.

Total de mosaicos en el patrón = Número de mosaicos en cada bloque $\times$ Número de bloques

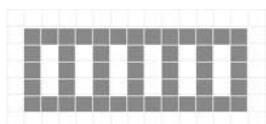
Número de bloques	4	6	2	1	8	10
Número total de mosaicos en el patrón	$_ \times 4$	$_ \times 6$	$_ \times 2$	$_ \times 1$	$_ \times 8$	$_ \times 10$
Resultado						

6. Completa la siguiente tabla usando la misma regla que en el ejercicio anterior. Usa valores diferentes a los que tiene la tabla anterior.

Número de bloques	—	—	—	—	—	—
Número total de mosaicos en el patrón	$_ \times _$	$_ \times _$	$_ \times _$	$_ \times _$	$_ \times _$	$_ \times _$
Resultado						

La Vía del Tren

- D) Utilizando eXpresser, construyan un patrón que se asemeje a una vía del tren como el de la figura siguiente. Usen **diferentes colores**, de tal manera que puedan mostrar a sus compañeros cómo construyeron el patrón.



- E) Dibujen enseguida los bloques de construcción que utilizaron para construir el patrón.



- F) Asegúrense que los mosaicos estén rellenos de los colores que eligieron. Dibujen enseguida cómo quedó el patrón, utilicen los colores correspondientes.



- G) Obtengan una regla para contar el número total de mosaicos que tiene el patrón.

H) Completen la siguiente tabla utilizando eXpresser.

Para un bloque	1
Número de mosaicos que se necesitan del color 1	
Número de mosaicos que se necesitan del color 2	
Número de mosaicos que se necesitan del color 3	

I) Dar un nombre al número o números desbloqueados para construir una regla simbólica. Escribanla aquí:

J) Usando eXpresser, completen la tabla siguiente.

Valor asignado al número desbloqueado	6	12	1	600	0
Número total de mosaicos					

K) Completen la siguiente tabla utilizando su regla escrita en el inciso

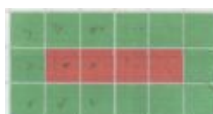
Valor asignado al número desbloqueado	6	12	1	600	0
---------------------------------------	---	----	---	-----	---

Número total de mosaicos					
--------------------------	--	--	--	--	--

L) Ahora trabajen entre los dos para hacer una discusión sobre la actividad. Escriban enseguida los argumentos que les permitieron darse cuenta de si su regla es correcta o no.

El Jardín de las Rosas.

1. Suponga que en la figura siguiente los mosaicos rojos representan rosas rojas y que están rodeadas por un jardín (representado con los mosaicos verdes). Contesta las siguientes preguntas usando este esquema de construcción



- a. Si en el centro hay 5 mosaicos rojos. ¿Cuántos mosaicos verdes deberá haber para rodear completamente los mosaicos rojos? _____. Y si hay 8 mosaicos rojos. ¿Cuántos mosaicos verdes debe haber? _____.
- b. Llena la siguiente tabla en la que el número de mosaicos rojos esta cambiando.

Numero de mosaicos rojos	1	2	3	4	5
Numero de mosaicos verdes que se necesitan para el jardín					

Numero de mosaicos rojos	12	27	48	121	5532
Numero de mosaicos verdes que se necesitan para el jardín					

- c. Describe con palabras, como se puede calcular el número de mosaicos verdes si sabemos cuantos mosaicos rojos hay.

- d. Describe la(s) operaciones que realizaste para calcular el número de mosaicos verdes en la tabla anterior.
- e. Describe una formula para calcular el número de mosaicos verdes para cualquier número de rojos que se tenga.
- f. Dibuja

El Sendero

En esta actividad construiremos primero un patrón que servirá de base para la construcción de otro.

- Utilizando eXpresser, construye un patrón como el que se muestra en la figura siguiente, utiliza mosaicos de **color rojo**.
- Dale el nombre “número de mosaicos rojos” al número correspondiente.
Observa que disco número ha sido desbloqueado.



- Ahora construye un patrón con mosaicos verdes, que represente un sendero por el que se pueda transitar alrededor de los mosaicos rojos. Observa la figura siguiente.



- Asegúrate de que todos los mosaicos rojos queden rodeados de mosaicos verdes, no importando el número de rojos que tengas.
- Asegúrate de que todos los mosaicos estén coloreados en la ventana “Mi Mundo”.

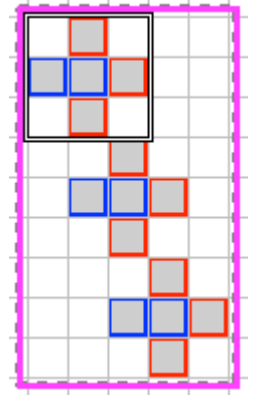
- f) Asegúrate también de que tu patrón pueda ser animado en la ventana “Mundo General”.
- g) Obtén una regla que permita colorear los mosaicos de la ventana “Mundo General”.
- h) Completa la siguiente tabla, utilizando la regla que obtuviste.

Número de mosaicos rojos	1	3	5	7	9
Número de mosaicos verdes					

Trabajando con diferentes colores

En esta actividad veremos cómo construir un patrón con diferentes colores.

1. Construye un patrón como el que se muestra en la figura, cuyo bloque de construcción está marcado con un cuadrado.
2. Colorea el patrón en “Mi Mundo”, indicando a eXpresser el número total de mosaicos rojos y azules que son necesarios. Recuerda que si los números son correctos, los mosaicos estarán coloreados completamente de rojo y azul.
3. Utiliza eXpresser para llenar la siguiente tabla. En este caso **el patrón debe estar totalmente coloreado** en la ventana “Mi Mundo”. Recuerda que debes **liberar** (Unlock) un número para poder cambiarlo con facilidad.



Número de veces que se repite el bloque	4	6	2	1	8	10
Número total de mosaicos rojos						
Número total de mosaicos azules						
¿El patrón está coloreado?	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí

4. Si el número de veces que se repite el **bloque** es 273, ¿calcula el número total de mosaicos rojos usando ese número?, ¿Hazlo también para los mosaicos azules? Explica tu respuesta.

5.

b) Usa eXpresser para construir una expresión para cada color usando tu respuesta del ejercicio anterior. Recuerda cómo lo hiciste en la actividad anterior.

c) Comprueba tu resultado, llenando los datos de la siguiente tabla.

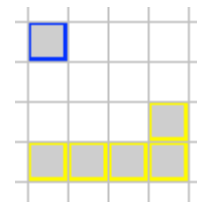
Número de veces que se repite el bloque	4	8	6	14	67	51
Número total de mosaicos rojos						
Número total de mosaicos azules						
¿El patrón está coloreado?						

Si en algún caso tu respuesta es “No”, trata otra construir una nueva regla.

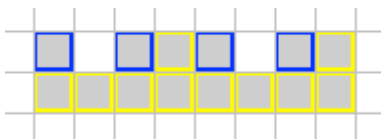
6. Si tus reglas funcionan en la ventana “Mi Mundo”, colócalas en World Colouring Rule, eligiendo el color que corresponde a cada una, para colorear también el “Mundo General”.

7.

- e) Ahora construye dos patrones utilizando los **bloques** como los de la figura derecha; usa dos colores distintos.



- f) Colócalos de tal forma que, cuando los repitas queden como la figura siguiente:

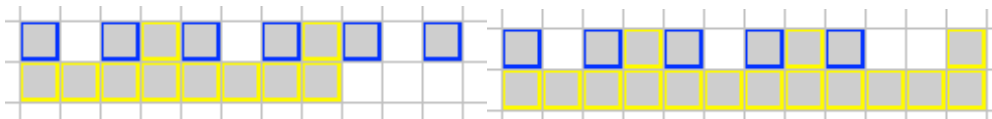


- g) Completa la información de las ventanas de propiedades de cada patrón, para que los mosaicos se coloreen.



- h) Presiona el botón de animación  en “Mundo General” y observa el comportamiento de los patrones.

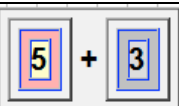
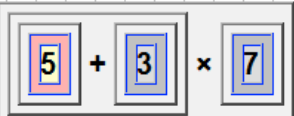
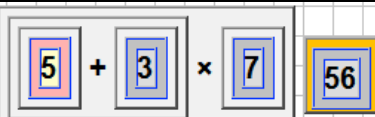
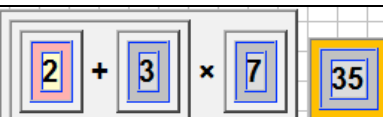
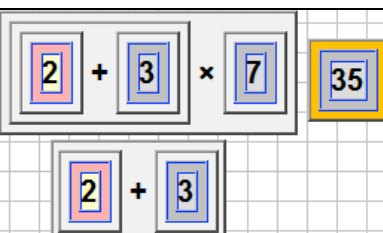
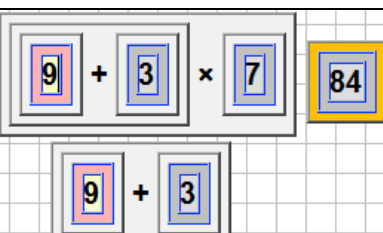
- i) ¿Qué debemos hacer para que siempre haya dos mosaicos azules entre los amarillos del primer renglón? Sin que sucedan casos como los siguientes. Regresa a las ventanas de propiedades de “Mi Mundo” y establece las relaciones que consideres necesarias entre los números de una y otra ventana.



Trabajando con Números y Colores

NOMBRES: _____ Fecha: ____

13. Escriban y realicen las siguientes operaciones con eXpresser. Utilicen las **opciones del menú** de los números.

	Esto	Les tiene que quedar así
A)	Escriban la operación $5 + 3$ y desbloqueen el 5	
B)	Multipliquen la operación anterior por 7	
C)	Obtengan el resultado (usar la opción Calcular valor)	
D)	Cambien el número 5 por un 2. Observen el resultado	
E)	Copien la operación $2 + 3$ a la cuadrícula	
D)	Cambien el número 2 por un 9. Observen qué pasa con la copia y el resultado	

E) Usen la opción **Dar Nombre** del menú para darle al 9 el nombre “z”

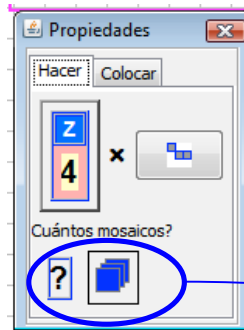
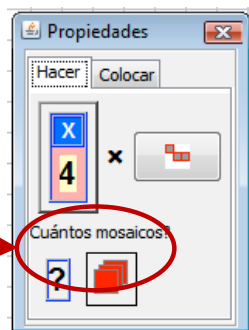
14. Utilizando la expresión del ejercicio anterior: $(9 + 3) \times 7$, obtener los valores que faltan en la tabla siguiente. Observen el ejemplo de la segunda columna.

z	9	6		0	-1	-5			
Resultado	84		175				0	-7	70

15. Dar un clic en el número que se llama “z” y seleccionen **Mostrar sólo nombre**. Escriban el resultado: _____
16. **Construyan DOS** patrones como los que se muestran en la figura. Son iguales excepto por el color (no rojo y otro azul).

17. Nombren con **X** al número de repeticiones del bloque rojo y con **Z** y con al número de repeticiones del bloque azul; después desbloqueen ambos números (como en la figura).

18. Indiquen el número total de mosaicos rojos **usando una fórmula que incluya a X** en el cuadro **Cuántos mosaicos?** Su fórmula será correcta sólo si el patrón se colorea de rojo.



19. Indiquen el número total de mosaicos azules **usando una fórmula que incluya a Z** en el cuadro **Cuántos mosaicos?** Su fórmula será correcta sólo si el patrón se colorea de azul.
20. Prueben sus fórmulas cambiando los valores de **X** y **Z**. Si los patrones siempre quedan coloreados, ¡felicidades!