



UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN NICOLÁS
DE HIDALGO

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS
“MAT. LUIS MANUEL RIVERA GUTIÉRREZ”

MAESTRÍA EN CIENCIAS EN INGENIERÍA FÍSICA

TESIS:

MODELADO DE PROBLEMAS DE AGUAS
SOMERAS EN REGIONES IRREGULARES
UTILIZANDO UN ESQUEMA DE DIFERENCIAS
FINITAS GENERALIZADAS

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:

Maestro en Ciencias en Ingeniería Física

PRESENTA:

Licenciado en Ciencias Físico Matemáticas

Gerardo Tinoco Guerrero

ASESOR:

Doctor en Ciencias Matemáticas

Francisco Javier Domínguez Mota

Agosto 2016 Morelia, Michoacán

A mis padres y mis hermanos,

cuyo apoyo ha sido lo que me ha traído hasta donde estoy.

Si la vida te da limones,

saca el Mezcal y escribe la tesis.

Agradecimientos

Han pasado dos años, bueno quizá un poco más, quizá un poco menos, desde que decidí emprender este viaje, un viaje que ha tenido sus altibajos, más altos que bajos, pero a lo largo de este camino ha habido muchas personas quienes siempre han estado ahí para apoyarme, para darme una mano cuando me caía, para levantarme si yo no quería levantarme, para llevarme a bailar, para animarme y para regañarme; por cada una de esas cosas estoy muy agradecido con muchos.

Primero empezaré agradeciendo a mi asesor el Dr. Francisco Javier Domínguez Mota, quien a lo largo de estos dos años, y varios años antes, me ha apoyado en todo lo que necesito. Para mi ha sido más que un simple asesor, ya que me ha apoyado en muchas cosas más allá de la vida académica, me da gusto poder considerarlo mi amigo (y qué buen amigo es!). Quiero agradecerle sinceramente por todo su apoyo en diferentes partes de mi vida, por siempre ser ese profesor estricto y comprensivo a quien aprecio.

También quiero dar un gran agradecimiento a los doctores Hector Igor Perez y Alberto Mendoza, cuyos comentarios y preguntas a lo largo de estos años me han servido para mejorar.

Por otra parte, quiero dar mi agradecimiento a la maravillosa Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, quien me ha acogido con sus puertas abiertas desde hace ya muchos años. Por todo lo que he aprendido en esta universidad, todo el tiempo que he pasado y todos los buenos momentos que me ha hecho vivir, siempre diré ser Nicolaita de Corazón y, sobre todo, gracias a su gran nivel y capacidad puedo decir: “Creo en mi, soy Nicolaita”.

Un agradecimiento especial al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT) por el apoyo brindado durante mis estudios de maestría.

El mayor agradecimiento que puedo dar es a esas personas que han estado conmigo toda mi vida, que han hecho de todo por ayudarme a llegar a donde estoy, y que nunca han faltado cuando los he necesitado. Esas personas que desde que soy pequeño me han enseñado y educado: Mis padres, **Ma. de Lourdes Guerrero Magaña** y **José Gerardo Tinoco Ruiz**. Esos seres maravillosos que me han dado todo lo que he necesitado y muchas cosas más. Lo escribí en mi tesis de licenciatura, y lo vuelvo a escribir: **Sin ustedes nunca habría podido llegar hasta donde he llegado.**

Otras dos personas que siempre han estado ahí haciéndome enojar, regañándome, consolándome, haciéndome reír y a veces llorar: Mis hermanos Salvador y Luis Manuel. Ustedes siempre me sacan canas, pero gracias a todo lo que hacen (y no hacen) he logrado ser mejor persona, superarme en muchas formas y salir adelante de muchas situaciones. Gracias hermanos!

Existen en mi vida cuatro personas que pueden más que cualquier ejército: Elva Angélica Magaña, Salvador Guerrero, Teresa Ruiz y Narciso Tinoco. En los momentos que más los necesito siempre están ahí, aún cuando algunos tuvieron que partir, siguen estando todo el tiempo conmigo, dándome ánimos y los mejores consejos. Gran parte de mi educación la debo a ustedes, que siempre hicieron lo mejor por educarme, ya sea consintiéndome o regañándome, pero siempre estuvieron ahí. NUNCA seré capaz de pagar todo lo que han hecho por mi.

A demás de mi familia, siempre ha habido personas que han estado ahí de una u otra manera, personas que me han apoyado y buscado en momentos de necesidad, que han estado en mis momentos de alegría, tristeza, triunfo y fracaso, esas personas especiales que han aparecido en mi vida y doy las gracias de poder llamar MIS AMIGOS.

Primero que nada a quien más ha aguantado mis malos genios y malos humores durante el último año, a esa persona que se ganó mi amistad, cariño y confianza a los 20 minutos de haberla conocido: Mi adorada novia Yamile. Siempre has estado ahí sin importar el lugar o la hora, siempre he sabido que puedo contar contigo, y más que saberlo, siempre me lo has demostrado. Te adoro con todo mi corazón!, tu y toda tu familia, en especial tu mamá y tu abuelita, me han demostrado lo maravillosa que puede ser la gente, que no se necesita ser miembro de sangre en una familia para que puedas contar con ellos, y siempre, siempre me han tratado muy bien. Muchas gracias también a ellos!

Audomaro, Ricardo... Mis más grandes y estimados amigos, aquellos que han sufrido de todas mis facetas, desde el bachillerato algunos, desde el Kinder otros, nunca ha habido un momento en que me arrepienta de tenerlos en mi vida, y siempre estaré agradecido de su profunda y sincera amistad. Y sabemos que no importa la distancia o el tiempo, siempre estaremos los unos para los otros.

A quienes siempre me aguantaron, consintieron, regañaron y quisieron, esas personas cuya compañía fue vital para el desarrollo de mi tesis, y que siempre me brindaron su apoyo y cariño en todo momento (incluso cuando me hacían bullying): Ariana, Lety, [[[Lucy]]]... Siempre supieron como animar cualquier día. Muchas gracias niñas!

Y por último, pero no por eso menos importante, como olvidar a todas aquellas personas que me apoyaron en muchas cuestiones personales a lo largo de estos últimos años, mis compañeros y amigos, mi comadre Ceci, Juan Nepomuseno-Pis, Ale Medina, Daniel Salazar (yo no me olvidé de ti), El Brayan, Changuito, entre muchos otros, que si los escribiera a todos necesitaría otras 211 páginas... Entre clases y borracheras, siempre conté con ustedes. Muchísimas gracias.

Resumen

Las ecuaciones de aguas someras nos permiten modelar problemas en la naturaleza relacionados con lagos y estanques, sin embargo, a la fecha existen pocos esquemas para la solución o aproximación de la solución que sean fácilmente aplicables a regiones no rectangulares, y esto es una seria limitación para la mayoría de los métodos.

En los últimos años se han diseñado esquemas basados en diferencias finitas para la aproximación de diferentes Ecuaciones Diferenciales Parciales en regiones planas que cumplan con ser no rectangulares y asimétricas. Un ejemplo de estos trabajos es el trabajo desarrollado en [8], donde se trata la solución de la ecuación de advección en regiones planas irregulares. Para trabajar con este tipo de regiones es necesario contar con mallas que cumplan con ciertas características geométricas deseables: que la distribución de las áreas de las celdas que las forman sea lo más uniforme posible y que los lados de cada celda sean lo más ortogonales posibles o que la variación de las pendientes en las líneas coordenadas no sea grande.

En este trabajo se hace una breve revisión de los métodos de generación numérica de mallas y, además, se hace un repaso de los esquemas diseñados para aproximar la ecuación de advección en regiones planas irregulares; también se muestran algunos estudios de estabilidad y convergencia de los métodos previamente diseñados.

Tras hacer esta revisión, se presenta la deducción de las ecuaciones de aguas someras mostrando todos los pasos necesarios para obtenerlas; posteriormente se muestran esquemas para aproximar la solución de dichas ecuaciones primeramente en regiones rectangulares y, posteriormente, en regiones más irregulares, llegando incluso a un dominio que es aproximación de una región geográfica real.

Palabras Clave: *diferencias finitas, regiones irregulares, ecuaciones de aguas someras, métodos numéricos, Saint Venant.*

Abstract

The Shallow-water equations permit to model different problems in nature related with lakes and ponds, however, to this day there are very few schemes for the solution or approximation that can be easily applied in non-rectangular regions, and this is a serious limitation for the method.

In recent years many finite difference schemes have been designed for the numerical approximation of different Partial Differential Equations in plane regions that accomplish to be non-rectangular and non-symmetrical. An example of these works is the one developed in [8], where the solution of the advection equation in plane irregular regions is obtained. In order to work in this kind of regions it is necessary to have grids with certain desired geometrical characteristics: the distribution of the cell areas, which form the grid, should be as uniform as possible, the sides of every cell must also be as orthogonal as possible, and the variation of the coordinate lines doesn't have abrupt changes.

In this work a brief revision of the numerical grid generation methods is done, and also a review of the schemes designed to approximate advection and diffusion equations in plane irregular regions is done. Moreover, some stability and convergence studies for the previously shown schemes is made.

After this revision, it is presented the deduction of the Shallow-water equations showing all the necessary steps to obtain them, afterwards, the designed schemes to approximate the solution to Shallow-water equations is shown, first in rectangular regions, and after in some irregular regions, even in domains that are approximations to real geographical locations.

Key Words: *finite differences, irregular regions, shallow-water equations, numerical methods, Saint Venant.*

Prefacio

En la literatura podemos encontrar gran variedad de trabajos que hablan y tratan sobre la solución de ecuaciones diferenciales parciales, ya sea de manera exacta por métodos analíticos, o de manera aproximada por medio de métodos numéricos. Sin embargo, no existen soluciones analíticas para todas las ecuaciones diferenciales parciales, y es ahí donde radica la importancia de los métodos numéricos para calcular aproximaciones a la solución.

También existen muchos fenómenos en la naturaleza que se pueden describir y aproximar por medio de ecuaciones diferenciales, tanto parciales como ordinarias. Desafortunadamente, la mayor parte de estos métodos comunes de aproximación están basados en geometrías regulares o muy sencillas, por lo que su aplicación es limitada cuando se trata de regiones más complicadas como las que existen en la naturaleza. Buscando contar con esquemas que modelen los fenómenos para los cuales no se cuenta con una solución analítica de sus ecuaciones diferenciales, se utilizan aproximaciones que sean lo suficientemente cercanas a la realidad; así es como surgen los métodos numéricos.

Se han diseñado muchos métodos diferentes para aproximar la solución de ecuaciones diferenciales parciales, los más usados son los de *diferencias finitas*, *elementos finitos*, *métodos espectrales*, *volúmenes finitos* y *elementos de frontera*. En este trabajo nos centramos únicamente en el primer método mencionado, el de *diferencias finitas*. Dicho método consiste en discretizar el dominio dado en donde se requiere aproximar la solución de cierta ecuación diferencial ordinaria o parcial, reemplazando las derivadas de las ecuaciones por una combinación lineal de los valores de la función en cada uno de los nodos de la malla. Como resultado obtenemos un sistema de ecuaciones algebraicas, que se puede resolver, en lugar de las ecuaciones diferenciales. La solución de este sistema es una aproximación a la solución de la ecuación diferencial original en cada nodo de la malla.

Una de las mayores motivaciones para hacer uso de los métodos de aproximación es

el hecho de que, gracias a los mismos, el problema original se puede convertir en uno que resulta más sencillo de resolver.

En la presente tesis se habla sobre los esquemas de diferencias finitas y se explica el trasfondo detrás de las Diferencias Finitas Generalizadas, utilizadas para aproximar la solución de una ecuación diferencial en regiones que no sean rectangulares. Los esquemas de diferencias finitas son relativamente fáciles de formular debido a que no se necesitan grandes conocimientos de términos matemáticos. El esquema diseñado en este trabajo se utiliza para obtener una aproximación a la solución de las ecuaciones de Aguas Someras en regiones que no cuentan con una frontera con forma regular, sino que ésta es más compleja.

En el primer capítulo se explican de manera básica los conceptos a tratar durante el trabajo, se muestra información sobre las ecuaciones diferenciales, su clasificación y las condiciones iniciales y de frontera de las mismas. Además, se explican brevemente los esquemas clásicos de Diferencias Finitas, mostrando desde su obtención por series de Taylor hasta su uso.

En el capítulo dos se realiza una descripción panorámica de la generación numérica de mallas y se muestran algunos de los métodos de mallado usados en el presente trabajo. También se explican los esquemas de Diferencias Finitas Generalizadas aplicados a las ecuaciones de Advección y Difusión, mostrando algunos de los resultados obtenidos más importantes para el presente trabajo.

En el tercer capítulo se hace un estudio de la consistencia, estabilidad y convergencia de los métodos descritos en el capítulo dos. Se muestran diferentes cotas para contar con esquemas condicional e incondicionalmente estables para las ecuaciones de Advección y Advección-Difusión, pasando por las diferentes versiones explicadas en el capítulo dos, para esquemas tanto explícitos como implícitos.

En el cuarto capítulo se explica el origen de las ecuaciones de Saint-Venant o ecuaciones de aguas someras. Se explica brevemente su deducción y se presentan los términos más importantes para el trabajo, como son la conservación de masa y momento, las escalas que se deben de tomar en cuenta para los problemas y algunas consideraciones a tratar para obtener estas ecuaciones.

Por último en el capítulo cinco se muestran los esquemas obtenidos para la aproxima-

ción de las ecuaciones de aguas someras, dando un repaso de los esquemas de diferencias finitas clásicos, mostrando un esquema funcional para estas ecuaciones y explicando la manera como se obtiene el esquema de Diferencias Finitas Generalizadas propuesto para la aproximación de las ecuaciones de aguas someras.

Índice general

Agradecimientos	6
Resumen	10
Abstract	12
Prefacio	14
1. Introducción	29
1.1. ecuaciones Diferenciales Parciales	29
1.1.1. Clasificación de ecuaciones Diferenciales Parciales	30
1.1.2. Condiciones Iniciales y de Frontera	31
1.2. Diferencias Finitas	32
1.2.1. Diferencias Finitas de Series de Taylor	33
1.2.2. Esquemas de Diferencias Finitas en regiones Rectangulares	35
2. Antecedentes	37
2.1. Generación Numérica de Mallas	37
2.1.1. ¿Qué es Una Malla?	38
2.1.2. Generación Numérica de Mallas Estructuradas	40
2.2. Esquemas de Diferencias Finitas Generalizadas	54
2.2.1. Ecuación de Advección	59
2.2.2. Ecuación de Difusión	68
3. Consistencia, Convergencia y Estabilidad de Esquemas en Diferencias Finitas	73
3.1. Diferencias Finitas Clásicas	73
3.1.1. Consistencia	75

3.1.2.	Estabilidad	78
3.1.3.	Convergencia	78
3.1.4.	Teorema de Equivalencia de Lax	81
3.2.	Estabilidad de los Esquemas Para la Ecuación de Advección	81
3.2.1.	Esquemas Tipo Lax-Wendroff Explícitos	82
3.2.2.	Esquemas Tipo Lax-Wendroff Implícitos	84
3.2.3.	Esquemas Explícitos de Advección Pura	85
3.2.4.	Esquemas Implícitos de Advección Pura	87
3.3.	Estabilidad de los Esquemas Para la Ecuación de Advección-Difusión	89
3.3.1.	Esquemas Para la Ecuación de Advección-Difusión	89
4.	Ecuaciones de Saint-Venant	93
4.1.	Mecánica de Medio Continuo	93
4.1.1.	Hipótesis del Continuo	94
4.1.2.	Equilibrio Hidrostático	94
4.1.3.	Flujo en Fluidos Ideales	95
4.2.	Ecuaciones de Saint-Venant	100
4.2.1.	Ecuaciones de Navier-Stokes y de Reynolds	100
4.2.2.	Condiciones de Frontera en la Superficie y en el Fondo	104
4.2.3.	Escalas	105
4.2.4.	Capa frontera	106
4.3.	Ecuaciones de Aguas Someras en dos Dimensiones	108
5.	Resultados y Conclusiones	113
5.1.	Regiones Rectangulares	113
5.1.1.	Discretización Espacial	114
5.1.2.	Discretización Temporal	115
5.1.3.	Pruebas Numéricas	116
5.2.	Regiones no Rectangulares	121
5.3.	Pruebas Numéricas y Resultados	128
Bibliografía		208

Índice de figuras

1.1. Mallado uniforme en el intervalo $[0, a] \times [0, b]$	36
2.1. Malla uniforme en 1 dimensión.	38
2.2. Malla no uniforme en 1 dimensión.	38
2.3. Malla uniforme en 2 dimensiones.	39
2.4. Malla no uniforme en 2 dimensiones.	39
2.5. Transformación $U_2 \rightarrow \Omega$	40
2.6. Región dada por cuatro ecuaciones paramétricas.	43
2.7. Mallas generadas con TFI para m19 (Izquierda) y CAB (Derecha).	43
2.8. Mallas generadas con TFI para las regiones ENG y HAB.	44
2.9. Formación de los triángulos relevantes.	46
2.10. Triángulo con vértices c, a, b y ángulo Θ	47
2.11. Trayectoria hacia una malla convexa.	51
2.12. Distribución arbitraria de p_0 y sus vecinos.	54
2.13. Esténcil «tipo upwind».	60
2.14. Diferentes esténciles del esquema de 6 puntos.	63
2.15. Método de Líneas.	64
2.16. Región de prueba CAB.	66
2.17. Mallas de 21×21 , 41×41 y 81×81 para la región CAB.	67
2.18. Región de prueba MIC.	69
2.19. Mallas de 21×21 , 41×41 y 81×81 para la región MIC.	70
3.1. Malla uniforme en x y t	74
4.1. Definición del sistema de coordenadas y fronteras.	101
5.1. Malla de QUAD con 21 puntos por lado.	117
5.2. Malla de QUAD con 41 puntos por lado.	117

5.3. Malla de QUAD con 81 puntos por lado.	117
5.4. Malla de QUAD con 121 puntos por lado.	117
5.5. Profundidades para la región QUAD.	118
5.6. Stencil seleccionado de 9 puntos.	127
5.7. Región QUAD.	129
5.8. Región TRAP.	129
5.9. Región ANI.	130
5.10. Región TAT.	130
5.11. Región CAB.	130
5.12. Malla de QUAD con 21 puntos por lado.	130
5.13. Malla de QUAD con 41 puntos por lado.	130
5.14. Malla de QUAD con 81 puntos por lado.	131
5.15. Malla de QUAD con 121 puntos por lado.	131
5.16. Malla de TRAP con 21 puntos por lado.	131
5.17. Malla de TRAP con 41 puntos por lado.	131
5.18. Malla de TRAP con 81 puntos por lado.	132
5.19. Malla de TRAP con 121 puntos por lado.	132
5.20. Malla de ANI con 21 puntos por lado.	132
5.21. Malla de ANI con 41 puntos por lado.	132
5.22. Malla de ANI con 81 puntos por lado.	133
5.23. Malla de ANI con 121 puntos por lado.	133
5.24. Malla de TAT con 21 puntos por lado.	133
5.25. Malla de TAT con 41 puntos por lado.	133
5.26. Malla de TAT con 81 puntos por lado.	134
5.27. Malla de TAT con 121 puntos por lado.	134
5.28. Malla de CAB con 21 puntos por lado.	134
5.29. Malla de CAB con 41 puntos por lado.	134
5.30. Malla de CAB con 81 puntos por lado.	135
5.31. Malla de CAB con 121 puntos por lado.	135
5.32. Región QUAD con 21×21 puntos. Esquema 1.	137
5.33. Región QUAD con 41×41 puntos. Esquema 1.	137
5.34. Región QUAD con 81×81 puntos. Esquema 1.	138
5.35. Región QUAD con 121×121 puntos. Esquema 1.	138
5.36. Región TRAP con 21×21 puntos. Esquema 1.	140
5.37. Región TRAP con 41×41 puntos. Esquema 1.	140

5.38. Región TRAP con 81×81 puntos. Esquema 1.	141
5.39. Región TRAP con 121×121 puntos. Esquema 1.	141
5.40. Región ANI con 21×21 puntos. Esquema 1.	143
5.41. Región ANI con 41×41 puntos. Esquema 1.	143
5.42. Región ANI con 81×81 puntos. Esquema 1.	144
5.43. Región ANI con 121×121 puntos. Esquema 1.	144
5.44. Región TAT con 21×21 puntos. Esquema 1.	146
5.45. Región TAT con 41×41 puntos. Esquema 1.	146
5.46. Región TAT con 81×81 puntos. Esquema 1.	147
5.47. Región TAT con 121×121 puntos. Esquema 1.	147
5.48. Región CAB con 21×21 puntos. Esquema 1.	149
5.49. Región CAB con 41×41 puntos. Esquema 1.	149
5.50. Región CAB con 81×81 puntos. Esquema 1.	150
5.51. Región CAB con 121×121 puntos. Esquema 1.	150
5.52. Región QUAD con 21×21 puntos. Esquema 2.	152
5.53. Región QUAD con 41×41 puntos. Esquema 2.	152
5.54. Región QUAD con 81×81 puntos. Esquema 2.	153
5.55. Región QUAD con 121×121 puntos. Esquema 2.	153
5.56. Región TRAP con 21×21 puntos. Esquema 2.	155
5.57. Región TRAP con 41×41 puntos. Esquema 2.	155
5.58. Región TRAP con 81×81 puntos. Esquema 2.	156
5.59. Región TRAP con 121×121 puntos. Esquema 2.	156
5.60. Región ANI con 21×21 puntos. Esquema 2.	158
5.61. Región ANI con 41×41 puntos. Esquema 2.	158
5.62. Región ANI con 81×81 puntos. Esquema 2.	159
5.63. Región ANI con 121×121 puntos. Esquema 2.	159
5.64. Región TAT con 21×21 puntos. Esquema 2.	161
5.65. Región TAT con 41×41 puntos. Esquema 2.	161
5.66. Región TAT con 81×81 puntos. Esquema 2.	162
5.67. Región TAT con 121×121 puntos. Esquema 2.	162
5.68. Región CAB con 21×21 puntos. Esquema 2.	164
5.69. Región CAB con 41×41 puntos. Esquema 2.	164
5.70. Región CAB con 81×81 puntos. Esquema 2.	165
5.71. Región CAB con 121×121 puntos. Esquema 2.	165
5.72. Región PATZ.	166

5.73. Región UP.	167
5.74. Región MID.	167
5.75. Región DOWN.	167
5.76. Malla de UP con 21 puntos por lado.	167
5.77. Malla de UP con 41 puntos por lado.	167
5.78. Malla de UP con 81 puntos por lado.	168
5.79. Malla de MID con 21 puntos por lado.	168
5.80. Malla de MID con 41 puntos por lado.	168
5.81. Malla de MID con 81 puntos por lado.	169
5.82. Malla de DOWN con 21 puntos por lado.	169
5.83. Malla de DOWN con 41 puntos por lado.	169
5.84. Malla de DOWN con 81 puntos por lado.	170
5.85. Región UP con 21×21 puntos. Esquema 1.	172
5.86. Región UP con 41×41 puntos. Esquema 1.	172
5.87. Región UP con 81×81 puntos. Esquema 1.	173
5.88. Región MID con 21×21 puntos. Esquema 1.	175
5.89. Región MID con 41×41 puntos. Esquema 1.	175
5.90. Región MID con 81×81 puntos. Esquema 1.	176
5.91. Región UP con 21×21 puntos. Esquema 1.	178
5.92. Región UP con 41×41 puntos. Esquema 1.	178
5.93. Región UP con 81×81 puntos. Esquema 1.	179
5.94. Región UP con 21×21 puntos. Esquema 2.	181
5.95. Región UP con 41×41 puntos. Esquema 2.	181
5.96. Región UP con 81×81 puntos. Esquema 2.	182
5.97. Región MID con 21×21 puntos. Esquema 2.	184
5.98. Región MID con 41×41 puntos. Esquema 2.	184
5.99. Región MID con 81×81 puntos. Esquema 2.	185
5.100 Región UP con 21×21 puntos. Esquema 2.	187
5.101 Región UP con 41×41 puntos. Esquema 2.	187
5.102 Región UP con 81×81 puntos. Esquema 2.	188

Índice de tablas

2.1. Errores obtenidos con cada esquema.	66
2.2. Errores obtenidos con cada esquema con diferentes particiones de tiempo. . .	71
2.3. Errores obtenidos con cada esquema con la misma partición de tiempo. . .	71
5.1. Resultados del gasto de masa h en QUAD en diferentes niveles de tiempo. Prueba 1.	119
5.2. Resultados del gasto de momento hu en QUAD en diferentes niveles de tiempo. Prueba 1.	119
5.3. Resultados del gasto de momento hv en QUAD en diferentes niveles de tiempo. Prueba 1.	119
5.4. Resultados del gasto de masa h en QUAD en diferentes niveles de tiempo. Prueba 2.	120
5.5. Resultados del gasto de momento hu en QUAD en diferentes niveles de tiempo. Prueba 2.	120
5.6. Resultados del gasto de momento hv en QUAD en diferentes niveles de tiempo. Prueba 2.	120
5.7. Concordancia en puntos espaciales y temporales.	129
5.8. Resultados del gasto de masa en QUAD. Esquema 1.	136
5.9. Resultados del gasto de momento hu en QUAD. Esquema 1.	136
5.10. Resultados del gasto de momento hv en QUAD. Esquema 1.	136
5.11. Resultados del gasto de masa en TRAP. Esquema 1.	139
5.12. Resultados del gasto de momento hu en TRAP. Esquema 1.	139
5.13. Resultados del gasto de momento hv en TRAP. Esquema 1.	139
5.14. Resultados del gasto de masa en ANI. Esquema 1.	142
5.15. Resultados del gasto de momento hu en ANI. Esquema 1.	142
5.16. Resultados del gasto de momento hv en ANI. Esquema 1.	142

5.17. Resultados del gasto de masa en TAT. Esquema 1.	145
5.18. Resultados del gasto de momento hu en TAT. Esquema 1.	145
5.19. Resultados del gasto de momento hv en TAT. Esquema 1.	145
5.20. Resultados del gasto de masa en CAB. Esquema 1.	148
5.21. Resultados del gasto de momento hu en CAB. Esquema 1.	148
5.22. Resultados del gasto de momento hv en CAB. Esquema 1.	148
5.23. Resultados del gasto de masa en QUAD. Esquema 2.	151
5.24. Resultados del gasto de momento hu en QUAD. Esquema 2.	151
5.25. Resultados del gasto de momento hv en QUAD. Esquema 2.	151
5.26. Resultados del gasto de masa en TRAP. Esquema 2.	154
5.27. Resultados del gasto de momento hu en TRAP. Esquema 2.	154
5.28. Resultados del gasto de momento hv en TRAP. Esquema 2.	154
5.29. Resultados del gasto de masa en ANI. Esquema 2.	157
5.30. Resultados del gasto de momento hu en ANI. Esquema 2.	157
5.31. Resultados del gasto de momento hv en ANI. Esquema 2.	157
5.32. Resultados del gasto de masa en TAT. Esquema 2.	160
5.33. Resultados del gasto de momento hu en TAT. Esquema 2.	160
5.34. Resultados del gasto de momento hv en TAT. Esquema 2.	160
5.35. Resultados del gasto de masa en CAB. Esquema 2.	163
5.36. Resultados del gasto de momento hu en CAB. Esquema 2.	163
5.37. Resultados del gasto de momento hv en CAB. Esquema 2.	163
5.38. Concordancia en puntos espaciales y temporales.	170
5.39. Resultados del gasto de masa en UP. Esquema 1.	171
5.40. Resultados del gasto de momento hu en UP. Esquema 1.	171
5.41. Resultados del gasto de momento hv en UP. Esquema 1.	171
5.42. Resultados del gasto de masa en MID. Esquema 1.	174
5.43. Resultados del gasto de momento hu en MID. Esquema 1.	174
5.44. Resultados del gasto de momento hv en MID. Esquema 1.	174
5.45. Resultados del gasto de masa en DOWN. Esquema 1.	177
5.46. Resultados del gasto de momento hu en DOWN. Esquema 1.	177
5.47. Resultados del gasto de momento hv en DOWN. Esquema 1.	177
5.48. Resultados del gasto de masa en UP. Esquema 2.	180
5.49. Resultados del gasto de momento hu en UP. Esquema 2.	180
5.50. Resultados del gasto de momento hv en UP. Esquema 2.	180
5.51. Resultados del gasto de masa en MID. Esquema 2.	183

5.52. Resultados del gasto de momento hu en MID. Esquema 2.	183
5.53. Resultados del gasto de momento hv en MID. Esquema 2.	183
5.54. Resultados del gasto de masa en DOWN. Esquema 2.	186
5.55. Resultados del gasto de momento hu en DOWN. Esquema 2.	186
5.56. Resultados del gasto de momento hv en DOWN. Esquema 2.	186

Capítulo 1

Introducción

Este capítulo se dedicará a una breve introducción a los esquemas de diferencias finitas, aplicados a regiones regulares en uno y dos dimensiones; esto servirá para que el lector empiece a familiarizarse con los conceptos y la notación que se utilizará a lo largo de todo este trabajo.

1.1. ecuaciones Diferenciales Parciales

Una Ecuación en Derivadas Parciales (EDP) es aquella cuyas incógnitas son funciones de diversas variables, con la peculiaridad de que en dicha ecuación figuran no sólo las propias funciones sino también sus derivadas. La ecuación debe depender de por lo menos dos variables, o bien, debe involucrar una función u de varias variables independientes $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{t}, \dots$, y las derivadas parciales de u con respecto a estas variables. El *orden de la EDP* se define como el mayor orden de las derivadas que están presentes en la ecuación.

Uno de los principales usos de las ecuaciones diferenciales es el modelado o la simulación de fenómenos físicos. Para este trabajo, hablaremos de ecuaciones Diferenciales Parciales lineales de segundo orden, las cuales cumplen con que el mayor exponente de la función u es 1, mientras que la derivada de mayor orden es de orden 2. Una EDP lineal de segundo orden tiene la forma:

$$Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + F = 0 \quad (1.1)$$

en donde A, B, C, D, E y F son coeficientes que pueden depender tanto de x como de y , pero jamás de u .

1.1.1. Clasificación de ecuaciones Diferenciales Parciales

En general, podemos clasificar las ecuaciones dependiendo del tipo de relación que existen entre las derivadas que se involucran. Una de las maneras más fáciles para saber a que clasificación pertenece una EDP consiste en obtener el determinante de una matriz que formaremos con los coeficientes A , B y C [12].

Diremos que una ecuación es *hiperbólica*, cuando se cumpla que

$$Z = \det \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} < 0.$$

Estas ecuaciones modelan el transporte y movimiento de alguna cantidad física, así como son las perturbaciones o el flujo de fluidos. Como un ejemplo que es utilizado ampliamente en la literatura, tenemos la ecuación de onda en una dimensión espacial

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0,$$

la cual modela el comportamiento de una perturbación en un medio continuo. Podemos observar fácilmente que esta ecuación es hiperbólica ya que, en este caso, tenemos que $A = 1$, $B = 0$ y $C = -c^2$; utilizando estos valores podemos formar la matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -c^2 \end{pmatrix},$$

de la cual, calculando su determinante tenemos que

$$Z = \det \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -c^2 \end{vmatrix} = (1)(-c^2) - (0)(0) = -c^2.$$

Entonces, viendo que $Z = -c^2 < 0$, efectivamente es una ecuación *hiperbólica*.

Ahora, una ecuación es *parabólica* si

$$Z = \det \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = 0,$$

este tipo de ecuaciones describen fenómenos que dependen del tiempo y que llevan a un estado de equilibrio. Un buen ejemplo de este tipo de ecuaciones es la que modela el calentamiento de una barra de acero a lo largo de alguno de sus ejes, es decir la ecuación

de difusión en una dimensión espacial

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0,$$

En este caso, los coeficientes son $A = 0$, $B = 0$ y $C = \nu$, entonces, calculamos el determinante

$$Z = \det \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \nu \end{vmatrix} = (0)(\nu) - (0)(0) = 0,$$

lo que nos dice que efectivamente tenemos una ecuación parabólica.

Por último, diremos que es *elíptica* cuando

$$Z = \det \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} > 0.$$

Este tipo de ecuaciones están asociadas con un estado especial del sistema, el cual corresponde a un estado de mínima energía. Por ejemplo la ecuación de Poisson

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = f,$$

que puede ser usada para calcular campos, magnéticos especialmente, es una de las ecuaciones elípticas más utilizadas en la literatura. En esta caso tenemos que $A = 1$, $B = 0$ y $C = 1$, nuevamente, calculamos el determinante de la matriz asociada para obtener

$$Z = \det \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = (1)(1) - (0)(0) > 0,$$

lo que nos comprueba que hablamos de una ecuación elíptica.

1.1.2. Condiciones Iniciales y de Frontera

Cuando trabajamos en la solución de ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO's) podemos recurrir al teorema fundamental de existencia y unicidad, el cual nos garantiza que existe una solución a nuestro problema y que, además, esta solución es única cuando se cumple un conjunto de condiciones dadas; debido a que la solución general de estas ecuaciones viene dada por una familia de funciones parametrizadas constantes, utilizaremos las condiciones de frontera para obtener dicha solución única.

A diferencia de cuando trabajamos con EDO's, al momento de trabajar con EDP's no

contamos con un teorema fundamental con el que podemos garantizar la existencia y unicidad de las soluciones; en su lugar, se han generado diversas teorías que son usadas para cada uno de los tipos de EDP's de manera independiente. Las condiciones que tendremos (o necesitaremos) dependerán del tipo de ecuación con el que estemos trabajando. En el caso de las EDP's parabólicas, donde los problemas que se modelan dependen del tiempo, suelen darse condiciones iniciales y de frontera; esto es, el valor de la función en un primer nivel de tiempo y las condiciones en las fronteras en todos los niveles de tiempo posteriores. Por ejemplo, en el problema en que queremos modelar el calentamiento de una barra de acero, la condición inicial será la distribución inicial de temperaturas a lo largo de la barra, y las condiciones de frontera nos dirán los valores de las temperaturas en cada uno de los extremos de la barra. Por su parte, para las ecuaciones elípticas, donde el tiempo no influye, es acostumbrado dar condiciones de frontera.

Existen, fundamentalmente, tres tipos de condiciones de frontera:

- Condiciones de *Dirichlet*. Son aquellas donde tenemos el valor de la función en la frontera.
- Condiciones de *Neumann*. Éstas nos dan el valor de la derivada de la función en cada punto de la frontera.
- Condiciones de *Robin*. Dichas condiciones son una combinación de las condiciones de frontera de Dirichlet y de Neumann.

1.2. Diferencias Finitas

El método de Diferencias Finitas es uno de los métodos que existen para aproximar la solución de una EDP. La idea principal de este método es reemplazar las derivadas de las ecuaciones diferenciales por combinaciones lineales de los valores de la función. Para explicar el método, primero explicaremos como obtener un esquema en diferencias finitas para una función en una dimensión espacial. Consideremos una función $u(x)$ definida en el intervalo abierto (a, b) , entonces, la derivada de u respecto a x en algún punto del intervalo puede escribirse como

$$\begin{aligned} \frac{du}{dx} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x+h) - u(x)}{h}, \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x+h) - u(x)}{(x+h) - x}. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Teniendo esto en cuenta, podemos obtener «fácilmente» un esquema de diferencias finitas; primero, dividimos el intervalo $[a, b]$, en el cual está definida la función, en n subintervalos del mismo tamaño, creando así **una malla** con $n + 1$ nodos $a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_n = b$. Si n es lo suficientemente grande, podemos aplicar esta malla del dominio a la ecuación (1.2) y obtendremos, para cada nodo interior

$$\frac{du(x_i)}{dx} \approx \frac{u(x_{i+1}) - u(x_i)}{x_{i+1} - x_i}.$$

Ahora, cambiando un poco la notación, diciendo que $u_{i+1} = u(x_{i+1})$ y $u_i = u(x_i)$, podemos escribir la expresión anterior como

$$\frac{du_i}{dx} = \frac{u_{i+1} - u_i}{x_{i+1} - x_i} = \frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta x_i},$$

donde $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$. Esta última es una expresión, basada en diferencias finitas, para aproximar la derivada de la función u en el punto x_i . A esta expresión se le conoce como un método de *diferencias hacia adelante*, debido a que utiliza los valores de u en los puntos actuales y futuros, x_i y x_{i+1} , para calcular la aproximación a la derivada.

1.2.1. Diferencias Finitas de Series de Taylor

Una de las maneras de obtener diferentes esquemas en diferencias finitas es haciendo uso de la *expansión en Serie de Taylor*, la cual nos permite aproximar el valor de una función en un punto dado, utilizando valores de la función y sus derivadas en un punto.

Teorema 1. (Taylor) *Sea $u(x)$ una función continua en el intervalo $[a, b]$, la cual tiene derivadas continuas hasta de orden N sobre (a, b) ; dado un punto x_0 en (a, b) , entonces, para cualquier otro punto x en (a, b) tenemos que*

$$u(x) = u(x_0) + \frac{du(x_0)}{dx}(x - x_0) + \frac{d^2u(x_0)}{dx^2} \frac{(x - x_0)^2}{2!} + \dots + \frac{d^{N-1}u(x_0)}{dx^{N-1}} \frac{(x - x_0)^{N-1}}{(N-1)!} + R^N,$$

en donde

$$R^N = \frac{d^N u(\xi)}{dx^N} \frac{(x - x_0)^N}{(N)!}, \quad \xi \in (a, b),$$

es el residuo [27].

Para los fines que queremos, imaginemos que tenemos una función $u(x)$ que cumple con las hipótesis del teorema de Taylor, entonces podemos expresar su expansión alrededor del

punto x_{i+1} como

$$u_{i+1} = u_i + \frac{du_i}{dx} \Delta x_i + \mathcal{O}(\Delta x_i^2),$$

donde $\mathcal{O}(\Delta x^2)$ es el residuo de orden 2. De aquí, haciendo algunos pasos algebraicos, obtenemos

$$\frac{du_i}{dx} = \frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta x_i} + \mathcal{O}(\Delta x_i^2), \quad (1.3)$$

que, podemos observar, es la expresión en diferencias *hacia adelante* para la aproximación de la derivada de u en el punto x_i .

Notemos que en el proceso anterior decidimos hacer la expansión de $u(x)$ alrededor del punto x_{i+1} , lo que nos hace preguntarnos ¿qué pasaría si decidimos hacer la expansión alrededor de otro punto? Entonces, si nuevamente suponemos que $u(x)$ cumple con las hipótesis del teorema de Taylor, hagamos su expansión en serie de Taylor de alrededor del punto x_{i-1} :

$$u_{i-1} = u_i + \frac{du_i}{dx} (x_{i-1} - x_i) + \dots = u_i + \frac{du_i}{dx} (\Delta x_i) + \mathcal{O}(\Delta x_i^2),$$

en este caso $\Delta x_i = x_{i-1} - x_i$. Siguiendo un proceso similar al anterior, podemos llegar a tener

$$\frac{du_i}{dx} = \frac{u_{i-1} - u_i}{\Delta x_i} + \mathcal{O}(\Delta x_i^2); \quad (1.4)$$

la cual es una expresión en diferencias *hacia atrás* para la aproximación de la derivada de u en el punto x_i .

Ya hemos hablado de las diferencias hacia adelante y las diferencias hacia atrás, ahora debemos mencionar que existe un tercer método común de diferencias. Para obtenerlo, vamos a tomar las expansiones en Taylor, alrededor de los puntos x_{i+1} y x_{i-1} , que obtuvimos anteriormente,

$$\begin{aligned} u_{i+1} &= u_i + \frac{du_i}{dx} (x_{i+1} - x_i) + \mathcal{O}(\Delta x_i^2), \\ u_{i-1} &= u_i + \frac{du_i}{dx} (x_{i-1} - x_i) + \mathcal{O}(\Delta x_i^2), \end{aligned}$$

y vamos a restar la segunda de la primera para obtener

$$u_{i+1} - u_{i-1} = \frac{du_i}{dx} (x_{i+1} - x_{i-1}) + \mathcal{O}(\Delta x_i^3),$$

de donde podemos seguir un proceso parecido a los anteriores y llegar a

$$\frac{du_i}{dx} = \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{x_{i+1} - x_{i-1}} + \mathcal{O}(\Delta x_i^3). \quad (1.5)$$

que es la expresión en diferencias finitas **centradas**.

Como nos encontramos en el caso de una malla uniforme, donde

$$x_{i+1} - x_i = x_i - x_{i-1}$$

las ecuaciones (1.3), (1.4) y (1.5) se reducen a:

$$\frac{du}{dx}(x_i) = \frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x^2), \quad (1.6)$$

$$\frac{du}{dx}(x_i) = \frac{u_{i-1} - u_i}{\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x^2), \quad (1.7)$$

$$\frac{du}{dx}(x_i) = \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x^3), \quad (1.8)$$

y en el último caso se obtiene un grado de aproximación mayor.

1.2.2. Esquemas de Diferencias Finitas en regiones Rectangulares

Así como podemos encontrar esquemas de diferencias finitas en problemas unidimensionales, podemos obtener, por analogía de estos, esquemas para problemas en dos o más dimensiones. En el caso en que nos encontramos en regiones rectangulares necesitamos utilizar derivadas parciales, habida cuenta que éstas implican una derivada en una dirección.

Primero definamos la región en la que trabajaremos. Sea Ω una región rectangular definida en $[0, a] \times [0, b]$, sobre la cual construimos una malla con nodos interiores

$$\begin{aligned} x_i &= a + i\Delta x, \\ y_j &= c + j\Delta y, \end{aligned}$$

como se muestra en (Fig. 1.1), donde Δx y Δy son el tamaño de paso horizontal y vertical respectivamente.

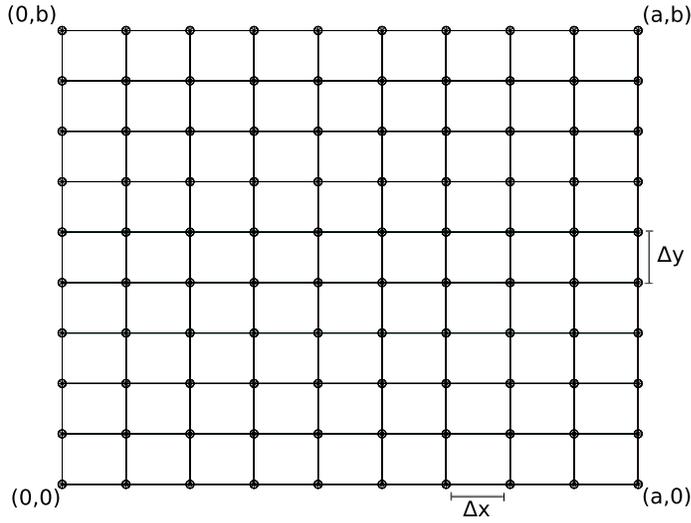


Figura 1.1: Mallado uniforme en el intervalo $[0, a] \times [0, b]$.

Ahora, podemos utilizar un procedimiento muy parecido al que seguimos para llegar a las ecuaciones (1.6 - 1.8) para escribir una expresión en diferencias finitas para cada una de las derivadas parciales

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_{i,j}}{\partial x} &= \frac{u(x_{i+1}, y_i) - u(x_i, y_i)}{\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x), \\ \frac{\partial u_{i,j}}{\partial x} &= \frac{u(x_{i+1}, y_i) - u(x_{i-1}, y_i)}{2\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x^2), \\ \frac{\partial u_{i,j}}{\partial y} &= \frac{u(x_i, y_{i+1}) - u(x_i, y_i)}{\Delta y} + \mathcal{O}(\Delta y), \\ \frac{\partial u_{i,j}}{\partial y} &= \frac{u(x_i, y_{i+1}) - u(x_i, y_{i-1})}{2\Delta y} + \mathcal{O}(\Delta y^2), \end{aligned}$$

en este caso $u_{i,j} = u(x_i, y_j)$ es la evaluación de u en el punto (x_i, y_j) .

Estas expresiones son esquemas de diferencias finitas clásicos para aproximar la solución de alguna ecuación diferencial, por medio del uso de Series de Taylor.

Capítulo 2

Antecedentes

En este capítulo se tratarán un poco más a fondo los conceptos de generación numérica de mallas, y se dará una introducción a los Esquemas de Diferencias Finitas Generalizadas. Se pretende así mostrar al lector el trabajo realizado, hasta el momento, respecto a la generalización de los conceptos clásicos de Diferencias Finitas.

2.1. Generación Numérica de Mallas

Una de las principales limitaciones de los métodos clásicos de diferencias finitas es que no se pueden aplicar directamente a regiones que no sean rectangulares, y no cuenten con una malla regular. Entonces, si queremos aplicar esquemas de diferencias finitas en regiones más generales, necesitamos dos cosas:

- Una discretización apropiada del operador diferencial.
- Nuevas formas de discretizar las regiones, con el fin de contar con mallas que puedan adecuarse a nuestras formas de discretizar el operador.

Desde hace algún tiempo se ha propuesto hacer uso de cambios de variables para transformar un problema sobre una región irregular a un problema sobre el cuadrado unitario. Para poder aplicar este método es necesario construir una función biyectiva que, además, sea *suave* y que vaya de la región original de trabajo al cuadrado unitario; esto es, esencialmente, lo que se le conoce como generación numérica de mallas sobre regiones planas irregulares.

2.1.1. ¿Qué es Una Malla?

Cuando se resuelve numéricamente un problema continuo de modelado, se requiere hacer una discretización sobre el dominio en el que se trabaja, en otras palabras, requerimos hacer una malla que represente el dominio donde se desea modelar el problema. Esto se hace seleccionando un conjunto finito de puntos que reflejen la geometría de la región.

Si nos interesa resolver problemas en una dimensión espacial, entonces podemos generar mallas, para el intervalo $[a, b]$ de interés, de dos tipos: **Mallas Regulares o uniformes** y **Mallas Irregulares o no uniformes**. Las primeras consisten en dividir el intervalo $[a, b]$ en una cantidad n de subintervalos de igual longitud (Fig. 2.1); por otra parte, las mallas irregulares se generarán dividiendo el mismo intervalo en n subintervalos que no tendrán necesariamente la misma longitud (Fig. 2.2). En ambos casos, diremos que el tamaño de la malla es de $n + 1$ puntos por lado.

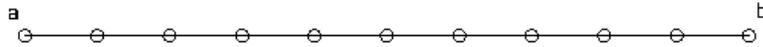


Figura 2.1: Malla uniforme en 1 dimensión.

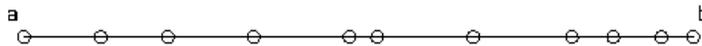


Figura 2.2: Malla no uniforme en 1 dimensión.

Por otro lado, si lo que buscamos es resolver problemas en dos dimensiones espaciales, podemos considerar entonces **dos tipos de regiones**. Las primeras serán dominios simples y rectangulares, $[0, a] \times [0, b]$, en donde se puede hacer fácilmente una malla dividiendo la región en rectángulos regulares más pequeños; esta discretización se puede hacer, al igual que en el caso en 1 dimensión, de una manera uniforme (Fig. 2.3) y de una manera no uniforme (Fig. 2.4).

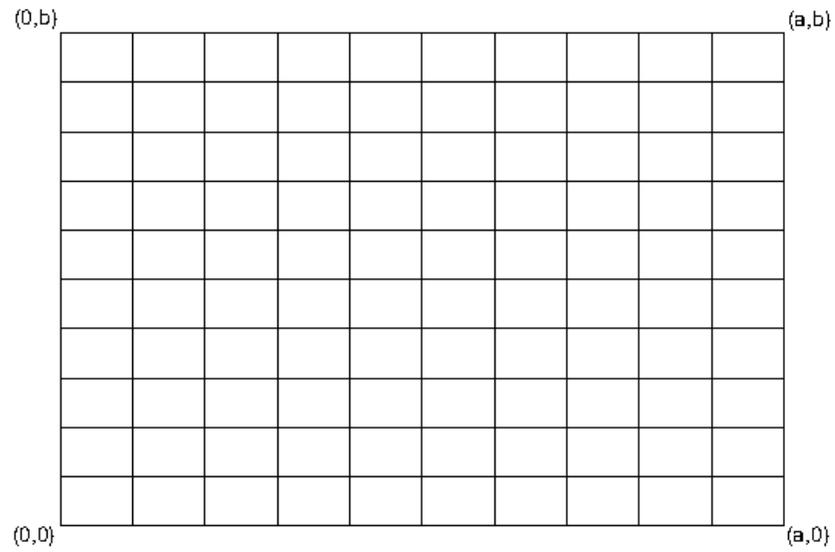


Figura 2.3: Malla uniforme en 2 dimensiones.

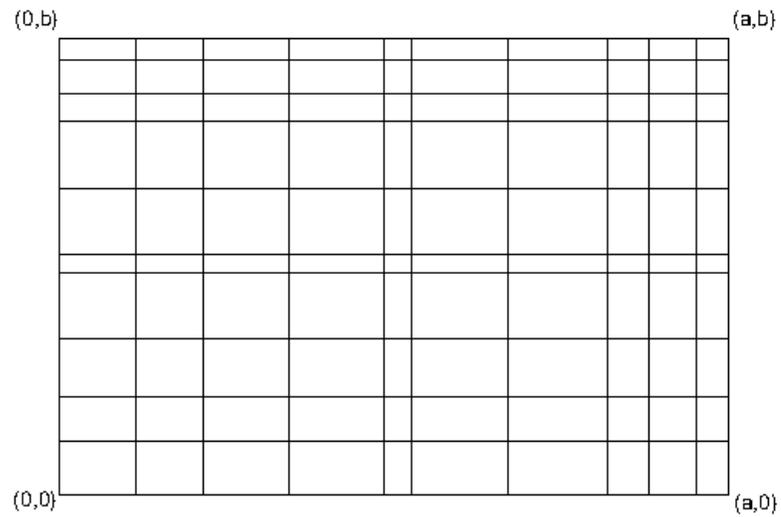


Figura 2.4: Malla no uniforme en 2 dimensiones.

El segundo tipo de dominios son dominios que no cuentan con una geometría regular o sencilla de discretizar como en el caso de mallas sobre dominios rectangulares. A lo largo de este capítulo se hablará de la generación de mallas para dicho tipo de regiones.

2.1.2. Generación Numérica de Mallas Estructuradas

Una malla $\mathbf{x}(\xi, \eta) = (x(\xi, \eta), y(\xi, \eta))^t$ sobre una región $\Omega \in \mathbb{R}^2$ es una función continua $\mathbf{x} : U_2 \rightarrow \Omega$ (Fig. 2.5), donde U_2 es el cuadrado unitario $[0, 1] \times [0, 1]$. Si tomamos una línea coordenada ξ o η constante en U_2 su imagen en Ω será una curva, las cuales son llamadas curvas coordenadas.

Si en U_2 tomamos una cuadrícula, o en otras palabras, un conjunto de líneas coordenadas en ξ y η , la función $\mathbf{x}(\xi, \eta)$ proporcionará un conjunto de curvas coordenadas que formará un cuadrícula distorciónada en Ω , de ahí viene el nombre de malla o red.

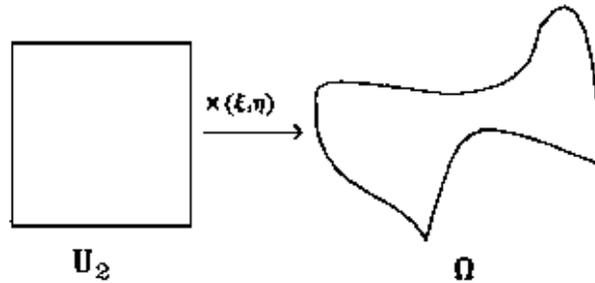


Figura 2.5: Transformación $U_2 \rightarrow \Omega$.

Una cualidad fundamental para resolver ecuaciones diferenciales de la función \mathbf{x} es que cumpla con $\mathbf{x}(\partial U_2) = \partial \Omega$, donde con ∂U_2 nos referimos a la frontera de U_2 , si es así diremos que se ajusta a la frontera o que conforma la misma. Con esto, podemos decir que el problema de generación de mallas se puede expresar como: “Dada una función biyectiva y continua de la frontera de U_2 en la frontera de Ω , extenderla a una función biyectiva y continua de U_2 a Ω ”

De entre todas las posibles mallas que pueden ser generadas para una región Ω , nos interesarán las mallas que cumplan con las siguientes características:

1. Todos los diferentes puntos de U_2 deben de tener como imagen puntos diferentes en

- Ω ; esto quiere decir que se requiere que \mathbf{x} sea 1 a 1.
2. Que \mathbf{x} llene a Ω , es decir, que x sea un mapeo sobre.
 3. Es deseable que la imagen de una curva suave en U_2 sea una curva suave en Ω , esto es, que las funciones $x(\xi, \eta)$ y $y(\xi, \eta)$ tengan derivadas continuas al ser consideradas como funciones de ξ y η separadamente.

Las mallas que cumplen con las primeras 2 características son llamadas «mallas convexas»; éstas son el tipo de mallas que se utilizan en gran cantidad de trabajos sobre solución numérica de ecuaciones diferenciales parciales, debido a que las mallas que no cumplen estas características, llamadas «no convexas» o «dobladadas», no representan una transformación de coordenadas.

La malla que cumple con las 3 características es llamada un difeomorfismo entre U_2 y Ω . Entonces podemos plantear el problema de la generación de mallas como:

Dado un difeomorfismo

$$x : \partial(U_2) \rightarrow \partial\Omega$$

extenderlo a un difeomorfismo

$$x : U_2 \rightarrow \Omega$$

Hasta hace no mucho tiempo, los métodos para generar este tipo de mallas eran básicamente de 2 tipos:

1. Construcción por interpolación algebraica.
2. Solución numérica de ecuaciones diferenciales parciales.

El primer tipo de procedimientos van desde ser muy sencillos, con una simple normalización de las curvas frontera, hasta la interpolación transfinita de las curvas frontera. Por su parte, en los métodos por solución numérica de ecuaciones diferenciales, las ecuaciones pueden ser elípticas, parabólicas o hiperbólicas. Aún cuando cada uno de estos procedimientos tiene sus ventajas, estos se pueden resumir diciendo que la *generación algebraica* es más

rápida, pero las mallas obtenidas por *ecuaciones diferenciales* son más suaves.

El Método de Interpolación Transfinita

Como ya se mencionó, los métodos más simples para generar mallas estructuradas son aquellos que son basados en interpolación algebraica. Estos métodos tienen la ventaja de contar con una fácil implementación y su desempeño es bastante rápido cuando se compara con los métodos variacionales para la generación de mallas. Sin embargo, cuentan con la desventaja de que transmiten la falta de suavidad de la frontera hacia el interior y, para regiones no convexas, frecuentemente no generan mallas convexas; esto es, que forma mapeos que no son 1 a 1. No obstante, debido a su simplicidad, estos métodos pueden ser usados para generar mallas que son tomadas como punto de partida por los métodos variacionales. De la gran cantidad de métodos que se utilizan, el método de la *interpolación transfinita* (o TFI, por sus siglas en inglés) es uno de los más populares y será el único que revisaremos en el presente trabajo. Un estudio más detallado de los diferentes métodos algebraicos puede encontrarse en [6], [9], [10], [11], [24], [25], [26].

Para generar una malla sobre una región Ω ; se requiere la parametrización de las cuatro partes en las cuales la frontera de Ω está dividida y que son imágenes correspondientes a los cuatro segmentos de la frontera de U_2 . Si suponemos que la descripción de la frontera de Ω está dada por cuatro ecuaciones paramétricas

$$\begin{aligned} x_b(\xi), \quad x_t(\xi) \quad 0 < \xi < 1, \\ x_l(\eta), \quad x_r(\eta) \quad 0 < \eta < 1, \end{aligned}$$

donde los subíndices b, r, t, l representan los lados de abajo, derecha, arriba, izquierda (por sus nombres en inglés bottom, right, top, left)(Fig. 2.6). La orientación debe de conservarse y, para que x sea continua, se debe cumplir que en las esquinas correspondientes los mapeos coincidan; eso quiere decir que

$$x_b(0) = x_l(0) \quad x_b(1) = x_r(0) \quad x_r(1) = x_t(1) \quad x_t(0) = x_l(1).$$

La fórmula básica de la interpolación transfinita usa estos cuatro mapeos para generar una malla sobre Ω :

$$\begin{aligned} x(\xi, \eta) = & (1 - \eta)x_b(\xi) + \eta x_t(\xi) + (1 - \xi)x_t(\eta) + \xi x_r(\eta) - [\xi \eta x_t(1) + \\ & \xi(1 - \eta)x_b(1) + \eta(1 - \xi)x_t(0) + (1 - \xi)(1 - \eta)x_b(0)] \end{aligned}$$

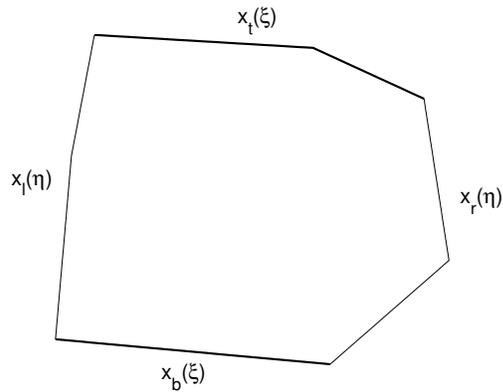


Figura 2.6: Región dada por cuatro ecuaciones paramétricas.

A continuación, se muestran algunas mallas generadas por interpolación transfinita, con 41 puntos por lado, para dos regiones polinomiales llamadas m19 y CAB (Fig. 2.7); y para dos regiones que son aproximaciones a regiones geográficas reales, las cuales denotaremos ENG, por England, y HAB, por Habana (Fig. 2.8). Las primeras dos regiones han sido ampliamente usadas en trabajos anteriores, las otras dos son regiones «difíciles», en el sentido de que no se logra convexidad de las mallas correspondientes cuando se usan métodos clásicos, y debido a esto su uso se limita a la aplicación de nuevos métodos.

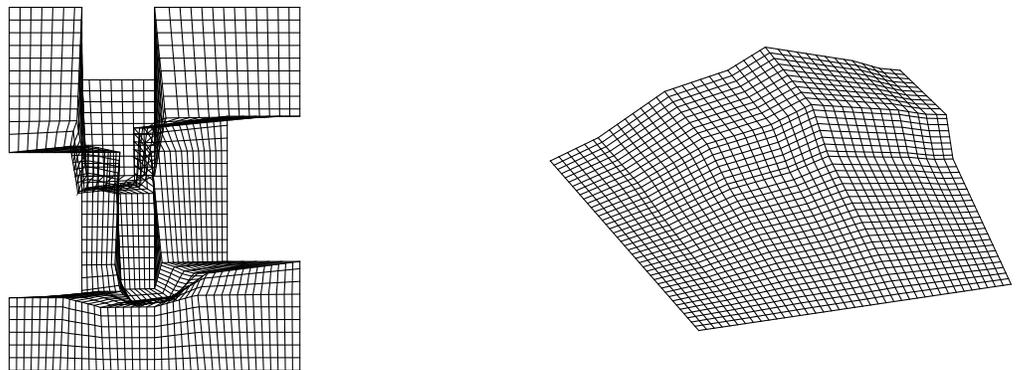


Figura 2.7: Mallas generadas con TFI para m19 (Izquierda) y CAB (Derecha).

Se puede observar fácilmente que la única malla convexa es la de la región CAB, la cual

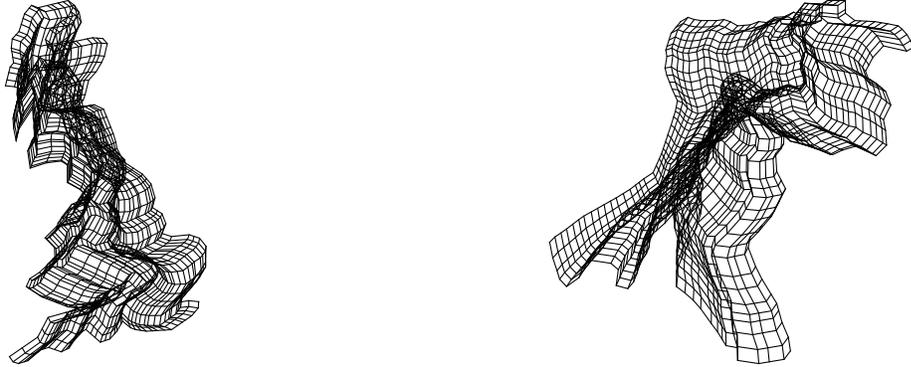


Figura 2.8: Mallas generadas con TFI para las regiones ENG y HAB.

es una región convexa por sí misma.

Generación Variacional Discreta

Los métodos variacionales continuos se realizan resolviendo las ecuaciones de Euler-Lagrange correspondientes al funcional a minimizar. Esta solución se realiza de manera numérica eligiendo una malla sobre el cuadrado unitario; es decir,

$$(\xi_i, \eta_j) \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

y aplicando un esquema de diferencias finitas para obtener aproximaciones $P_{i,j}$ a los valores de $\mathbf{x}(\psi_i, \eta_j)$.

Varios autores (entre ellos Barrera [21], [22], Ivanenko [2], [4] y Castillo [13], [14], [15], [16], [17]) proponen realizar primeramente una discretización del funcional a minimizar, y después resolver el correspondiente problema de optimización multivariada. En otras palabras, el funcional continuo

$$\Phi(\mathbf{x}) = \int_0^1 \int_0^1 L(x_\xi, x_\eta, y_\xi, y_\eta) d\eta d\xi$$

es reemplazado por una función de $m \times n$ variables

$$\{P_{i,j}\} \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

de donde

$$F(P_{1,1}, P_{1,2}, \dots, P_{i,n}, P_{2,1}, P_{2,2}, \dots, P_{2,n}, \dots, P_{m,1}, P_{m,2}, \dots, P_{m,n}) = \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=1}^{n-1} f_{i,j}$$

donde $f_{i,j}$ es una aproximación al valor de L en la celda de $[0, 1] \times [0, 1]$ definida por los puntos

$$(\xi_{i-1}, \eta_{j-1}), (\xi_{i-1}, \eta_j), (\xi_i, \eta_j), (\xi_i, \eta_{j-1}).$$

Los puntos

$$\{P_{1,j}\}, \{P_{m,j}\} \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad \{P_{i,1}\}, \{P_{i,n}\} \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

son los valores correspondientes del mapeo \mathbf{x} en los puntos de la frontera del cuadrado unitario

$$\begin{aligned} \{\xi_1, \eta_j\}, \quad \{\xi_m, \eta_j\}, \quad j = 1, 2, \dots, n, \\ \{\xi_i, \eta_1\}, \quad \{\xi_i, \eta_n\}, \quad i = 1, 2, \dots, m, \end{aligned}$$

que están fijos; y los puntos interiores

$$\{P_{i,j}\} \quad i = 2, \dots, m-1 \quad j = 2, \dots, n-1,$$

que son las imágenes bajo el mapeo buscado, \mathbf{x} , de los puntos del cuadrado unitario

$$\{(\xi_i, \eta_j)\} \quad i = 2, \dots, m-1 \quad j = 2, \dots, n-1,$$

los cuales se calculan de tal forma que hagan mínimo a F .

Esta minimización de F , se realiza partiendo de una malla inicial generalmente generada por TFI. Se usa un método de optimización multivariada de gran escala, por ejemplo *L-BFGS* o *Newton Truncado*. Cabe mencionar que, aunque los métodos discretos clásicos se obtienen a partir de la discretización del funcional continuo correspondiente, se puede pensar en generar directamente funcionales discretos; en otras palabras, proponer una cantidad geométrica que se quiera minimizar sobre cada celda de la malla.

Funcional de Longitud. La forma más simple del funcional discreto de longitud es

$$F_l = \frac{1}{2N\bar{\alpha}} \sum_{q=1}^N l(\Delta_q) = \frac{1}{2N\bar{\alpha}} \sum_{q=1}^N l_q$$

donde $N = 4(m-1)(n-1)$ es el número de triángulos relevantes en la malla (Fig. 2.9), m y n representan el tamaño de la malla y $\bar{\alpha}$ es el doble del área promedio de todos los triángulos. Este funcional es usado debido a los buenos resultados que otorga al ser combinado con otros funcionales que comentaremos más adelante. Una versión más general es propuesta en [21] y [22].

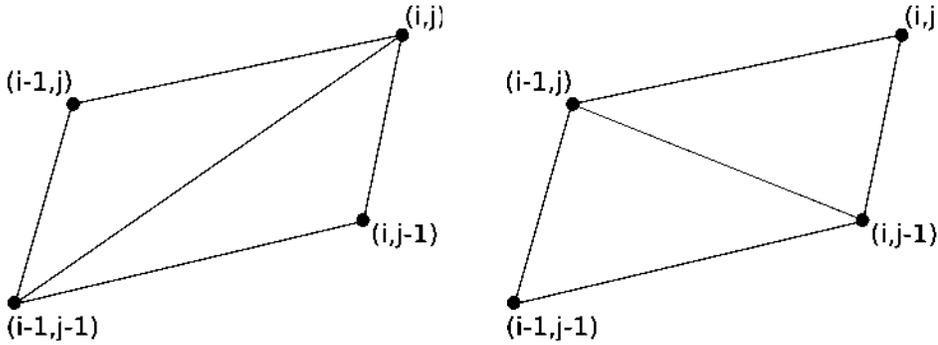


Figura 2.9: Formación de los triángulos relevantes.

F_l es un funcional cuadrático, lo que conlleva a que su optimización sea muy eficiente. También tiene la propiedad de que su hessiana es definida positiva en todas partes [21], lo cual garantiza la existencia de un único mínimo.

Funcional Clásico de Área. De acuerdo a la formulación anterior, el funcional clásico de área, en su versión discreta, es

$$F_{A^2} = \frac{1}{N\bar{\alpha}^2} \sum_{q=1}^N \alpha_q^2.$$

Sean Ω, m, n fijos, este funcional tiene las siguientes propiedades:

1. Si existe una malla G tal que los triángulos de todas las celdas tienen la misma área, entonces G es un punto crítico para el funcional de área.

2. La Matriz Hessiana del funcional de área valuada en G es semipositiva definida.

La demostración de estas propiedades se puede consultar en [21]. Una forma más general de estos resultados se expone en [18]. Las propiedades anteriores garantizan que, en caso de existir una malla ideal para el funcional de área, su minimización conduce a ella; en caso de no existir dicha malla ideal, el mínimo estará en una malla que sea lo más cercana posible a tener triángulos de igual área. La existencia de una malla ideal para este funcional de área depende fuertemente de la frontera de la región y de la distribución de los puntos sobre dicha frontera. Una malla ideal G^* para el funcional de área es aquella en la cual las áreas de todos los triángulos son iguales. El proceso de minimización del funcional F_{A^2} siempre converge.

Funcional de Ortogonalidad. Aunque el uso de la versión discreta del funcional de ortogonalidad no conduce a buenas mallas, cuando se usa de manera aislada, para casi ninguna región, su combinación con otros funcionales sí lo hace. La forma que tiene es

$$F_{\mathcal{O}} = \frac{1}{N\bar{\alpha}^2} \sum_{q=1}^N \mathcal{O}(\Delta_q)^2 = \frac{1}{N\bar{\alpha}^2} \sum_{q=1}^N \mathcal{O}_q^2,$$

donde \mathcal{O}_q^2 es la discretización del integrando en el funcional continuo de ortogonalidad

$$o^2 = \|c - a\|^2 \|b - a\|^2 \cos^2 \theta.$$

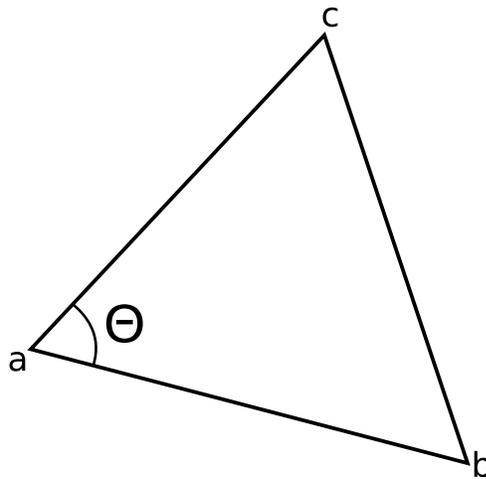


Figura 2.10: Triángulo con vértices c, a, b y ángulo Θ .

Una malla ideal para el funcional de ortogonalidad es aquella en la que las celdas son rectángulos. Utilizando este funcional, no se obtuvo ninguna malla convexa para las regiones de prueba y, además, el número de iteraciones realizado fue alto.

Funcionales Combinados. También en el enfoque discreto, es conveniente usar combinaciones convexas de diferentes funcionales para producir mallas más adecuadas. La forma general de esta combinación es

$$F = \tau_1 F_{A^2} + \tau_2 F_l + (1 - \tau_1 - \tau_2) F_o,$$

donde $0 \leq \tau_1, \tau_2 \leq 1$ y $\tau_1 + \tau_2 \leq 1$. Los funcionales se usan en su forma normalizada.

Funcional de Área-Longitud. Cuando se hace $\tau_1 = \tau$, $\tau_2 = 1 - \tau$ obtenemos la familia de funcionales

$$F = \tau F_{A^2} + (1 - \tau) F_l \quad 0 \leq \tau \leq 1,$$

que, con elecciones adecuadas de τ (usualmente con τ cercano a 1), dan lugar a mallas aceptables para la mayoría de las regiones sencillas. Es cuestión de experiencia, el elegir el valor de τ y lograr buenas mallas en los casos en los que la región es complicada; el uso de los funcionales Área-Longitud en regiones irregulares es complicado, aún para los expertos en generación de mallas.

Funcional Discreto de Área-Ortogonalidad. Al hacer $\tau_2 = 0$, se obtiene la familia conocida como funcionales de Área-Ortogonalidad. La forma de estos funcionales es

$$F_{ao}^{(\tau)} = \tau_1 F_{A^2} + (1 - \tau_1) F_o.$$

Cuando se habla del *Funcional de Área-Ortogonalidad*, sin especificar el valor del parámetro τ , se hace referencia al miembro de esta familia correspondiente al valor $\tau = 0.5$. La forma que toma para un triángulo Δcab es

$$\begin{aligned} F_{ao} &= \frac{1}{2}(\alpha_q^2 + o_q^2) \\ &= \frac{1}{2}(\|c - a\|^2 \|b - a\|^2 \cos^2 \theta + \|c - a\|^2 \|b - a\|^2 \sin^2 \theta) \\ &= \frac{1}{2}(\|c - a\|^2 \|b - a\|^2). \end{aligned}$$

A pesar de ser una combinación de funcionales que no producen mallas suaves, los funcionales de Área-Ortogonalidad dan lugar a mallas relativamente suaves, las áreas de los triángulos tienen poca variación y la cantidad de iteraciones es menor que las del funcional de Área.

Funcionales de Suavidad y Área adaptivos de Tinoco.

El objetivo principal a conseguir en la generación de mallas sobre regiones planas irregulares, es el que la malla sea convexa; una malla que no cumpla con este requisito es completamente inútil para los propósitos que se persiguen. Los métodos revisados hasta ahora no garantizan que el objetivo se logre, en muchos casos, la malla óptima es no convexa. Sería deseable contar con un funcional tal que, el proceso de su minimización conduzca siempre a una malla convexa y contar con resultados que garanticen que eso siempre se logra.

Para precisar la idea de optimización de una malla, considérese Ω una región plana, $m, n \in \mathbb{N}$ y los correspondientes puntos frontera

$$\{P_{1,j}\}_{j=1,\dots,m} \quad \{P_{m,j}\}_{j=1,\dots,n} \quad \{P_{i,1}\}_{i=1,\dots,m} \quad \{P_{i,n}\}_{i=1,\dots,m},$$

también fijos.

En [18] se define, para una malla G sobre Ω , la cantidad

$$\alpha_-(G) = \min_{\Delta \in G} \{\alpha(\Delta)\},$$

la cual es el doble del mínimo de las áreas de los triángulos en la malla. Ahora definimos, para k real, el conjunto

$$D_k = \{G : G \in M \text{ y } \alpha_-(G) > -k\},$$

donde M es el conjunto de mallas definidas sobre Ω . Obviamente si $k < k'$, se da la contención $D_k \subset D_{k'}$ y, además, si

$$k \leq -\bar{\alpha} = -\frac{\text{Area}(\Omega)}{(m-1)(n-1)},$$

entonces $D_k = \emptyset$. Así pues, el conjunto de las k tales que

$$D_k \neq \emptyset,$$

es un conjunto de números reales no vacío y acotado inferiormente. Sea

$$k_- = \inf\{k : D_k \neq \emptyset\},$$

si $k_- < 0$, entonces el conjunto de las mallas convexas sobre Ω , D_0 , es no vacío.

El proceso de optimización de un funcional comienza con una malla G_0 tal que $\alpha_-(G_0) > k_0$, esto es, $G_0 \in D_{k_0}$. Si las mallas producidas en cada paso de esta optimización son consideradas como los puntos de una trayectoria en el conjunto de mallas sobre Ω , se puede parafrasear nuestro objetivo de generación de mallas convexas como el de calcular una trayectoria

$$\Gamma : [-k_0, 0] \rightarrow M,$$

tal que

$$\Gamma(-k_0) = G_0,$$

y

$$\Gamma(0) = G \in D_0,$$

si es que $D_0 \neq \emptyset$ (Fig. 2.11).

En caso de que no exista una malla convexa sobre Ω , sería deseable, de cualquier manera, que el punto final de dicha trayectoria fuese lo más cercano posible a la convexidad, esto es, se desea ser capaz de obtener una malla de D_k con k lo más pequeño posible.

El Funcional de Suavidad Adaptiva. Anteriormente, fue definido el funcional discreto de suavidad como

$$\sum_{q=1}^N \frac{l_q}{\alpha_q}.$$

Una de las metas deseables, es la de obtener funcionales en cuyo proceso de optimización no se requiera de condiciones de arranque muy estrictas y que puedan producir mallas suaves. Supóngase que se tiene una malla no convexa tal que el área de cada triángulo que

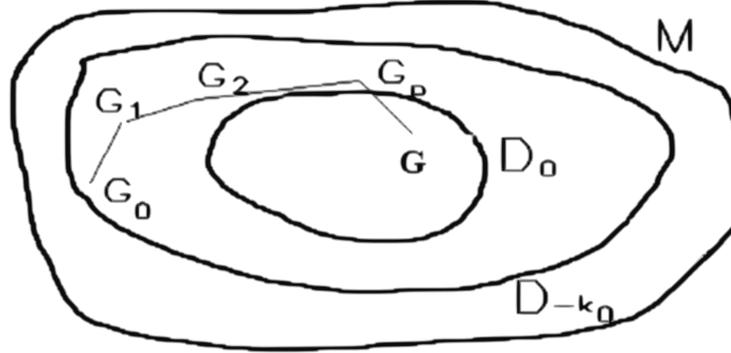


Figura 2.11: Trayectoria hacia una malla convexa.

contribuye al funcional es mayor que $-k/2$. Entonces la función

$$f_k = \frac{l}{k + \alpha}$$

toma valores positivos para cada triángulo en la malla. Esta función da lugar al funcional

$$F_s = \frac{1}{2N} \sum_{q=1}^N \frac{l}{k + \alpha}.$$

Minimizando este funcional, se obtiene una malla que está más cerca de ser convexa que la original. Una adecuada actualización de k produce, en un número finito de pasos, una malla convexa, si existe una [18].

El Funcional de Área Adaptiva. Al hacer una versión discreta del funcional de área continuo explicado en [18], se obtiene el funcional discreto de área para una malla discreta G ,

$$F_{A^{-1}}(G) = \sum_{\Delta \in G} f_{A^{-1}}(\Delta) = \sum_{\Delta \in G} \frac{1}{\alpha(\Delta)},$$

que, usando una numeración adecuada de triángulos, puede ser escrito como

$$F_{A^{-1}}(G) = \sum_{q=1}^N \frac{1}{\alpha_q}.$$

Debemos notar que para que el proceso de optimización de $F_{A^{-1}}$ genere una malla convexa, se necesita que la malla inicial ya lo sea; ésta es una seria limitación para el uso

de este funcional la cual se podrá superar más adelante.

Modificación del Funcional. Motivados por el buen resultado obtenido en [18] al modificar el funcional de suavidad para ampliar su dominio de definición, se considerará el funcional discreto dado por

$$F_{A^{-1},k} = \frac{k + \bar{\alpha}}{N} \sum_{q=1}^N \frac{1}{\alpha_q + k},$$

el cual se puede optimizar si se parte de una malla G , tal que $\alpha_-(G) > -k$, y producirá una malla óptima con la misma propiedad sobre α_- ; de hecho, si \hat{G} es la malla óptima y k se elige adecuadamente, $\alpha_-(\hat{G}) > \alpha_-(G)$.

Combinación de Funcionales. Los últimos dos funcionales explicados nos conducen a mallas óptimas con características muy diferentes. Por un lado, el funcional de suavidad nos proporciona una manera de obtener mallas muy suaves, pero el control de las áreas no es muy eficiente. Por otro lado el funcional de área produce un mejor control del tamaño de las celdas, pero distan mucho de proporcionar mallas óptimas suaves y el número de iteraciones necesarias para llegar al mínimo es muy grande. Al igual que con los funcionales clásicos, se ha visto la conveniencia de combinar diferentes funcionales para tratar de conservar las ventajas de cada uno por separado, y disminuir sus inconvenientes. En este sentido, se presentan las combinaciones que han dado mejores resultados. En cada caso se usarán las formas normalizadas de los diferentes funcionales.

Combinaciones de Área con Longitud. Una manera de suavizar las mallas producidas con los funcionales de Área, es seguir la idea de usarlos en combinación con el funcional de Longitud. Esto conduce también a disminuir los tiempos necesarios para obtener convergencia. El uso del funcional de Área recíproca, además de los inconvenientes comunes a todos los funcionales de Área ya mencionados, tiene la desventaja de que requiere, en muchos casos, que las mallas iniciales reciban un tratamiento con otros funcionales a fin de obtener convergencia. Sin embargo, al combinarlo con el funcional de longitud, este inconveniente se ve superado en los casos estudiados. Esta combinación tiene la forma

$$F_{A^{-1}-l}^{(\tau)} = \tau F_{A^{-1}} + (1 - \tau) F_l, \quad 0 \leq \tau \leq 1.$$

Combinaciones de Suavidad con Área. Una manera de obtener mallas convexas y suaves que tengan una buena distribución del tamaño de las celdas, es combinar el esquema adaptivo de los funcionales de suavidad con algún funcional de área. Esta idea da buenos resultados para las combinaciones con el funcional clásico de área; y se expresa como:

$$F_{S-A}^{(\tau)} = \tau F_k + (1 - \tau) F_{A^2} \quad 0 \leq \tau \leq 1.$$

Funcional Quasi-Armónico de Domínguez

Siguiendo las ideas mostradas hasta el momento, Domínguez-Mota y Barrera-Sánchez posponen en [23] un nuevo funcional quasi-armónico que depende de un parámetro $\omega > 0$, basado en el funcional armónico de Ivanenko [3]

$$H(G) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^4 \frac{\lambda(\Delta_{i,j}^k)}{\alpha(\Delta_{i,j}^k)} = \sum_{q=1}^N \frac{\lambda(\Delta_q)}{\alpha(\Delta_q)},$$

donde m y n son el número horizontal y vertical de puntos de la malla, y k se usa para denotar los 4 triángulos formados por cada celda de la misma. En este caso, N se utiliza para denotar el número total de triángulos de la malla, *i.e.* $N = 4mn$.

La idea principal es reemplazar α^{-1} en el funcional $H(G)$ de Ivanenko por una función capaz de actuar como una barrera continua. Definiendo $f(\Delta q) = \lambda(\Delta q)u_\omega(\alpha)$. Una opción para $u_\omega(\alpha)$ es una función continua, convexa y estrictamente decreciente que tienda a $1/\alpha$ para $\alpha \geq \omega$. Entonces, se considera para un número real positivo ω

$$u_\omega(\alpha) = \begin{cases} \frac{2\omega - \alpha}{\omega^2} & \text{si } \alpha < \omega \\ \frac{1}{\alpha} & \text{si } \alpha \geq \omega \end{cases},$$

y, gracias a esta función, se define el funcional H_ω como

$$H_\omega(G) = \sum_{q=1}^N \lambda(\Delta q)u_\omega(\Delta q).$$

Un estudio más a fondo de este funcional, así como la implementación del mismo, pueden encontrarse en [23].

Una vez que contamos con una manera adecuada de discretizar las regiones donde nos

interesa trabajar, debemos de encontrar una nueva manera de discretizar los operadores de las diferentes ecuaciones diferenciales que nos interesan.

2.2. Esquemas de Diferencias Finitas Generalizadas

En este trabajo nos interesa resolver problemas planteados en dos o más dimensiones espaciales, desgraciadamente, como ya hemos dicho, no se cuentan con esquemas clásicos de diferencias finitas para resolver estos problemas en regiones que no sean rectangulares, aún cuando los problemas de interés general ocurren en regiones que no tienen una geometría regular; es por esto que surge la necesidad de obtener un esquema que pueda adaptarse a este tipo de regiones.

Para plantear el problema, primero recordemos que la forma general que tienen las ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden es

$$Lu = Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu.$$

Queremos aproximar este operador, en algún punto p_0 , utilizando aproximaciones a los valores de u en algunos puntos vecinos, p_1, p_2, \dots, p_k de p_0 (Fig. 2.12), utilizando diferencias finitas.

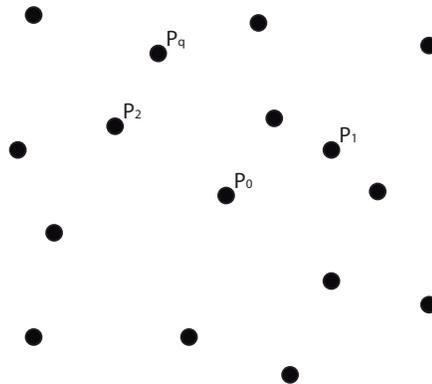


Figura 2.12: Distribución arbitraria de p_0 y sus vecinos.

Podemos escribir entonces un esquema de diferencias finitas como la combinación lineal

$$L_0 = \Gamma_0 u(p_0) + \Gamma_1 u(p_1) + \dots + \Gamma_q u(p_q), \quad (2.1)$$

donde $\Gamma_0, \Gamma_1, \dots, \Gamma_k$ son constantes.

Para poder decir que tenemos un esquema que cumple con que la aproximación se acerque a la solución a medida que los nodos vecinos se aproximan al nodo central p_0 , necesitamos que la condición

$$\sum_{i=0}^q \Gamma_i u(p_i) - [Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu]_{p_0} \rightarrow 0, \quad (2.2)$$

se cumpla. Si utilizamos la aproximación de serie de Taylor de u hasta segundo orden y reagrupando algunos términos, la expresión anterior puede escribirse como

$$\begin{aligned} [Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu]_{p_0} - \sum_{i=0}^q \Gamma_i u(p_i) = \\ \left(F(p_0) - \sum_{i=0}^q \Gamma_i \right) u(p_0) + \left(D(p_0) - \sum_{i=1}^q \Gamma_i \Delta x_i \right) u_x(p_0) + \\ \left(E(p_0) - \sum_{i=1}^q \Gamma_i \Delta y_i \right) u_y(p_0) + \left(A(p_0) - \sum_{i=1}^q \frac{\Gamma_i (\Delta x_i)^2}{2} \right) u_{xx}(p_0) + \\ \left(B(p_0) - \sum_{i=1}^q \Gamma_i \Delta x_i \Delta y_i \right) u_{xy}(p_0) + \left(C(p_0) - \sum_{i=1}^q \frac{\Gamma_i (\Delta y_i)^2}{2} \right) u_{yy}(p_0) + \\ \mathcal{O}(\max\{\Delta x_i, \Delta y_i\})^4 \end{aligned} \quad (2.3)$$

donde Δ_x y Δ_y son las distancias horizontal y vertical respectivamente del nodo central p_0 a cada uno de los nodos vecinos p_i .

Nos interesa entonces, para cumplir con la condición (2.2), que cada uno de los coeficientes entre paréntesis en la expresión (2.3) se anule; en otras palabras queremos que

$$\begin{aligned} F(p_0) - \sum_{i=0}^q \Gamma_i &= 0, \\ D(p_0) - \sum_{i=1}^q \Gamma_i \Delta x_i &= 0, \\ E(p_0) - \sum_{i=1}^q \Gamma_i \Delta y_i &= 0, \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned}
A(p_0) - \sum_{i=1}^q \frac{\Gamma_i (\Delta x_i)^2}{2} &= 0, \\
B(p_0) - \sum_{i=1}^q \Gamma_i \Delta x_i \Delta y_i &= 0, \\
C(p_0) - \sum_{i=1}^q \frac{\Gamma_i (\Delta y_i)^2}{2} &= 0.
\end{aligned}$$

Si logramos esto, entonces la diferencia entre nuestro esquema y el operador quedará acotada por una función $\mathcal{O}(\Delta x_i, \Delta y_i)$, que involucra a las derivadas de orden mayor, y disminuirá conforme los nodos vecinos se acerquen a p_0 [19].

Las condiciones de consistencia anteriores pueden ser escrita, por cuestiones de simplicidad, de manera vectorial, esto nos servirá para identificar los valores que debemos determinar. Entonces, agrupando los términos pertinentes, las condiciones planteadas en (2.5) pueden reescribirse como

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & \Delta x_1 & \dots & \Delta x_q \\ 0 & \Delta y_1 & \dots & \Delta y_q \\ 0 & (\Delta x_1)^2 & \dots & (\Delta x_q)^2 \\ 0 & \Delta x_1 \Delta y_1 & \dots & \Delta x_q \Delta y_q \\ 0 & (\Delta y_1)^2 & \dots & (\Delta y_q)^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Gamma_0 \\ \Gamma_1 \\ \Gamma_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \Gamma_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F(p_0) \\ D(p_0) \\ E(p_0) \\ 2A(p_0) \\ B(p_0) \\ 2C(p_0) \end{pmatrix}. \quad (2.5)$$

Debemos entonces encontrar los coeficientes Γ_i que cumplan con esto. Desafortunadamente este sistema cuenta con 6 ecuaciones y $q + 1$ incógnitas; esto quiere decir que, en general, no será un sistema bien determinado. Una de las primeras cosas que podemos hacer para resolver el problema, es notar que la primera ecuación nos da la condición

$$\Gamma_0 = -\Gamma_1 \dots - \Gamma_q. \quad (2.6)$$

Usando esta condición por separado, podemos tomar las últimas 5 ecuaciones

$$\begin{pmatrix} \Delta x_1 & \dots & \Delta x_q \\ \Delta y_1 & \dots & \Delta y_q \\ (\Delta x_1)^2 & \dots & (\Delta x_q)^2 \\ \Delta x_1 \Delta y_1 & \dots & \Delta x_q \Delta y_q \\ (\Delta y_1)^2 & \dots & (\Delta y_q)^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Gamma_1 \\ \Gamma_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \Gamma_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D(p_0) \\ E(p_0) \\ 2A(p_0) \\ B(p_0) \\ 2C(p_0) \end{pmatrix}, \quad (2.7)$$

para así calcular los valores de Γ_i que nos interesan.

Existen muchas formas de solventar o sobrellevar esta indeterminación, para este trabajo se desarrollaron diferentes métodos:

- Considerar el problema como un problema de álgebra lineal.

Si consideramos el problema de obtener los valores Γ_i como un problema de álgebra lineal numérica, entonces el problema se convierte en resolver el sistema $M\Gamma = \beta$, donde

$$M = \begin{pmatrix} \Delta x_1 & \dots & \Delta x_q \\ \Delta y_1 & \dots & \Delta y_q \\ (\Delta x_1)^2 & \dots & (\Delta x_q)^2 \\ \Delta x_1 \Delta y_1 & \dots & \Delta x_q \Delta y_q \\ (\Delta y_1)^2 & \dots & (\Delta y_q)^2 \end{pmatrix},$$

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \Gamma_1 \\ \Gamma_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \Gamma_q \end{pmatrix},$$

y

$$\beta = \begin{pmatrix} D(p_0) \\ E(p_0) \\ 2A(p_0) \\ B(p_0) \\ 2C(p_0) \end{pmatrix}.$$

Trabajamos en con dos diferentes formas de resolver este sistema:

1. La primera opción es resolver el sistema en un sentido algebraico, por lo que tenemos que resolver el problema

$$\begin{aligned} M^{-1}M\Gamma &= M^{-1}\beta, \\ \Gamma &= M^{-1}\beta, \end{aligned}$$

siendo M^{-1} calculado como

$$M^{-1} = \frac{1}{|A|}(A^*)^T$$

donde A^* es la matriz adjunta de A .

2. La segunda opción es resolver el sistema haciendo uso de la pseudoinversa. Esto es, resolvemos el problema

$$\begin{aligned} Pinv(M)M\Gamma &= Pinv(M)\beta, \\ \Gamma &\approx Pinv(M)\beta, \end{aligned}$$

Este método nos permite evitar los problemas que obtenemos si la matriz M es singular, o está cerca de serlo.

- También podemos resolver el problema si lo consideramos como un problema de optimización. En este caso tenemos el problema de

$$\min \sum_{i=0}^q \Gamma_i$$

sujeto a

$$\begin{pmatrix} \Delta x_1 & \dots & \Delta x_q \\ \Delta y_1 & \dots & \Delta y_q \\ (\Delta x_1)^2 & \dots & (\Delta x_q)^2 \\ \Delta x_1 \Delta y_1 & \dots & \Delta x_q \Delta y_q \\ (\Delta y_1)^2 & \dots & (\Delta y_q)^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Gamma_1 \\ \Gamma_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \Gamma_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D(p_0) \\ E(p_0) \\ 2A(p_0) \\ B(p_0) \\ 2C(p_0) \end{pmatrix}.$$

Con esto conseguimos los valores de todos los coeficientes Γ que necesitamos para definir el esquema (2.1) [7].

A continuación, se describe la manera de aplicar el esquema definido anteriormente a dos ecuaciones diferenciales parciales, las cuales se han utilizado en gran variedad de trabajos.

2.2.1. Ecuación de Advección

La primera ecuación que vamos a tratar es la ecuación de advección. Esta ecuación modela el comportamiento de un material que es transportado, o adveccionado, en un fluido, tal como puede ser la contaminación en un río o lago. Entonces, nuestro problema consistirá en encontrar una forma de aplicar el esquema definido en (2.1) a la ecuación de advección

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} = 0,$$

la cual, por conveniencia, escribimos como

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -a \frac{\partial u}{\partial x} - b \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (2.8)$$

Podemos aplicar la regla de la cadena en la ecuación (2.8), para así obtener

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2ab \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + b^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}. \quad (2.9)$$

Tomando en cuenta el desarrollo en serie de Taylor de u alrededor de $(x, y, t + \Delta t)$

$$u(x, y, t + \Delta t) = u(x, y, t) + \frac{\partial u(x, y, t)}{\partial t} \Delta t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial t^2} (\Delta t)^2 + \dots,$$

y sustituyendo (2.8) y (2.9) en ella [1], obtenemos

$$\begin{aligned} u(x, y, t + \Delta t) &= u(x, y, t) + \\ &\Delta t \left(-a \frac{\partial u}{\partial x} - b \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \\ &\frac{(\Delta t)^2}{2} \left(a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2ab \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + b^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \dots \end{aligned}$$

El esquema definido por (2.7) y (2.6) se puede aplicar al operador

$$-\Delta t \left(a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{(\Delta t)^2}{2} \left(a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2ab \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + b^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right),$$

y los coeficientes $\Gamma_0, \Gamma_1, \dots, \Gamma_q$ que se obtienen definen el esquema modificado de Lax-Wendroff

$$u_0^{k+1} = u_0^k + \sum_{i=0}^q \Gamma_i u_i^k, \quad (2.10)$$

siendo p_0, \dots, p_q los nodos involucrados en el estencil.

Estencil de 4 puntos

Una de las principales ventajas que tiene el esquema (2.16) es que puede ser usado tanto en mallas estructuradas, como en mallas no estructuradas. En nuestro caso, el uso de mallas estructuradas y lógicamente rectangulares, nos permite aprovechar la estructura dada por los índices de la malla $G = \{p_{i,j} \mid 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$.

Una primera idea, que es ampliamente utilizada en la literatura, para elegir un estencil será uno donde utilizamos cada nodo de la malla y 3 de sus nodos vecinos (lógicos), en un nivel de tiempo k para calcular el valor en un tiempo $k+1$. Este tipo de estenciles son comúnmente llamados «tipo Upwind», y son como se muestra en (Fig. 2.13).

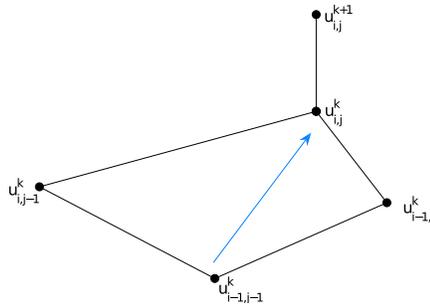


Figura 2.13: Estencil «tipo upwind».

Haciendo uso de este estencil, el esquema (2.16)

$$u_0^{k+1} = u_0^k + \sum_{i=0}^q \Gamma_i u_i^k,$$

toma la forma

$$u_{i,j}^{k+1} = u_{i,j}^k + \Gamma_0 u_{i,j}^k + \Gamma_1 u_{i-1,j}^k + \Gamma_2 u_{i,j-1}^k + \Gamma_3 u_{i-1,j-1}^k, \quad (2.11)$$

donde $u_{i,j}^k$ es la aproximación a u en el punto x_i, y_j de la malla al nivel de tiempo k .

El esquema definido en (2.11) es un esquema modificado de Lax-Wendroff explícito. Siguiendo la misma idea, se puede definir un esquema implícito del mismo tipo. Para hacer esto, tomamos la ecuación (2.16) y le agregamos un parámetro θ para utilizar 2 niveles de tiempo del lado derecho. Con esta elección obtenemos

$$u_0^{k+1} = u_0^k + \theta \left[\sum_{i=0}^q \Gamma_i u_i^k \right] + (1 - \theta) \left[\sum_{i=0}^q \Gamma_i u_i^{k+1} \right].$$

Si utilizamos el mismo tipo de estencil que en el caso explícito, el esquema anterior tendrá la forma

$$\begin{aligned} u_{i,j}^{k+1} &= u_{i,j}^k + \theta \left[\Gamma_0 u_{i,j}^k + \Gamma_1 u_{i-1,j}^k + \Gamma_2 u_{i,j-1}^k + \Gamma_3 u_{i-1,j-1}^k \right] + \\ &(1 - \theta) \left[\Gamma_0 u_{i,j}^{k+1} + \Gamma_1 u_{i-1,j}^{k+1} + \Gamma_2 u_{i,j-1}^{k+1} + \Gamma_3 u_{i-1,j-1}^{k+1} \right], \end{aligned}$$

que, tras algunos pasos algebraicos, y en aras de la simplicidad, puede escribirse como

$$u_{i,j}^{k+1} = \frac{\eta + \beta u_{i-1,j}^{k+1} + \gamma u_{i-1,j-1}^{k+1} + \delta u_{i,j-1}^{k+1}}{\alpha},$$

donde

$$\eta = \lambda [\Gamma_1 u_{i-1,j}^k + \Gamma_2 u_{i-1,j-1}^k + \Gamma_3 u_{i,j-1}^k] + u_{i,j}^k (1 + \lambda \Gamma_0),$$

y, además,

$$\begin{aligned} \alpha &= 1 + (\lambda - 1)\Gamma_0, \\ \beta &= (1 - \lambda)\Gamma_1, \\ \gamma &= (1 - \lambda)\Gamma_2, \\ \delta &= (1 - \lambda)\Gamma_3. \end{aligned}$$

Este esquema es un esquema implícito para aproximar la solución de la ecuación de advección. Este tipo de esquemas suelen llegar a ser *incondicionalmente estables*.

Esténcil de 6 puntos

Otro esquema diseñado para aproximar la solución de la ecuación de advección se logra si, al utilizar nuevamente el esquema (2.16), utilizamos cada nodo de la malla y 5 de sus vecinos en un nivel de tiempo k , para así calcular el valor de u en cada nodo de la malla en un tiempo $k+1$. En este esquema, el esténcil utilizado varía dependiendo de la localización lógica del nodo correspondiente a lo largo de la malla (véase la Fig. 2.14).

En cada caso obtenemos

$$u_{i,j}^{k+1} = u_{i,j}^k + \Gamma_0 u_{i,j}^k + \Gamma_1 u_1^k + \Gamma_2 u_2^k + \Gamma_3 u_3^k + \Gamma_4 u_4^k + \Gamma_5 u_5^k, \quad (2.12)$$

donde los valores de u_i^k son las aproximaciones a u en el tiempo k en los nodos correspondientes a cada esténcil.

Método de Líneas (MOL)

A grandes rasgos, el método de líneas es un método para la aproximación de la solución de ecuaciones diferenciales parciales. Se trata básicamente de convertir el problema de aproximar una ecuación diferencial parcial, por un problema donde se resuelve un sistema acoplado de ecuaciones diferenciales ordinarias. Para hacer esto, primero se hace una discretización de las componentes espaciales de la ecuación, dejando de lado el tiempo. En nuestro caso, en el cual consideramos el problema de obtener una aproximación a la solución de la ecuación de advección

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -a \frac{\partial u}{\partial x} - b \frac{\partial u}{\partial y}.$$

después de hacer la discretización espacial utilizando diferencias finitas generalizadas, tenemos

$$\frac{d}{dt} u_i(t) = \Gamma_0 u_0(t) + \Gamma_1 u_1(t) + \cdots + \Gamma_q u_q(t).$$

Podemos ver esto como un sistema acoplado de ecuaciones diferenciales ordinarias para las variables $u_i(t)$, las cuales varían continuamente en el tiempo a lo largo de las líneas que se muestran en la figura (2.15). Este sistema es comúnmente llamado un método semidiscreto, ya que únicamente se discretiza el espacio, pero no el tiempo.

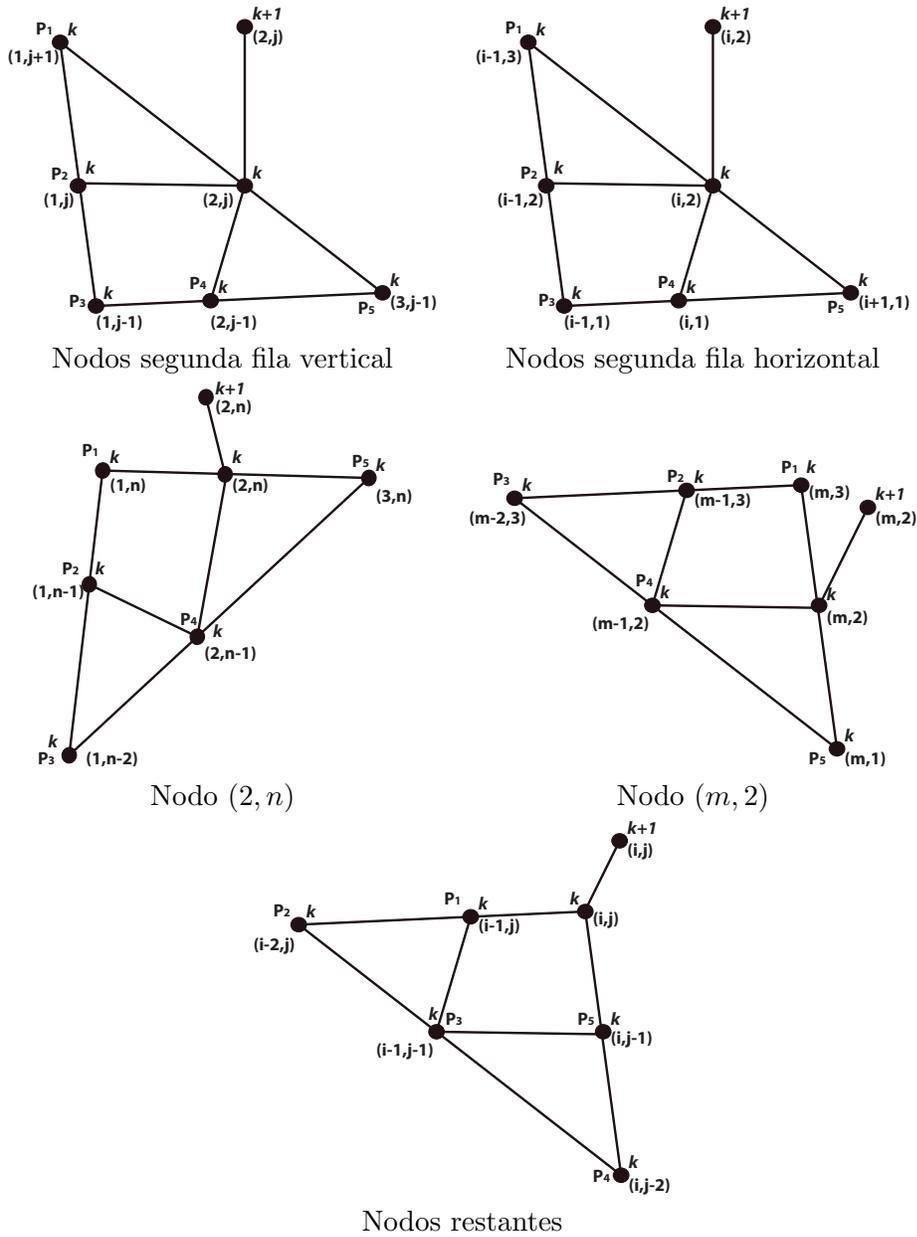


Figura 2.14: Diferentes estenciles del esquema de 6 puntos.

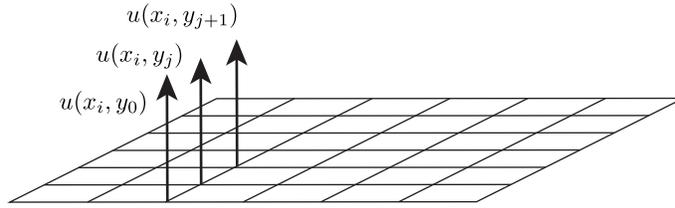


Figura 2.15: Método de Líneas.

El sistema puede ser escrito como

$$U'(t) = AU(t) + g(t),$$

donde la matrix A guarda el valor de las constantes Γ para cada nodo, y $g(t)$ es el vector que incluye las condiciones de frontera.

Una vez que plantemos el sistema de ecuaciones, quedan dos cosas por hacer: elegir el estencil que se va a usar y elegir un método para resolver el sistema de ecuaciones. En tanto a la primera parte, decidimos conservar la idea de los esquemas de tipo Euler, por lo que contamos con un esquema que usa cada nodo central y tres nodos vecinos, al igual que un esquema que utiliza cada nodo central con cinco de sus vecinos. Para la segunda parte, se decidió utilizar un método de Runge-Kutta de orden 2, 3 y 4.

Esquema tipo Crank-Nicolson de 9 puntos

En la literatura, podemos encontrar diversos métodos o esquemas de diferencias para aproximar la solución de las ecuaciones diferenciales parciales. Cuando se habla de esquemas clásicos, en regiones rectangulares, los métodos implícitos de tipo Crank-Nicolson tienen la característica de ser incondicionalmente estables. Buscando contar con estas características en nuestros esquemas, decidimos implementar un esquema de diferencias finitas generalizadas de tipo Crank-Nicolson de 9 puntos.

Si en lugar de tomar cada nodo i, j de la malla, tomamos la solución u en cada nivel de tiempo, podemos escribir la solución como

$$u^{k+1} = u^k + Ku^k + r^k, \quad (2.13)$$

donde K es la matriz que contiene todos los términos Γ y r contiene la información de la

frontera. Como tenemos condiciones de tipo Dirichlet en la frontera, entonces

$$k_{i,i} = 0,$$

$$r_i^k = u_i^{k+1} - u_i^k.$$

La idea de los métodos de tipo Crank-Nicolson es considerar el promedio de dos niveles de tiempo (k y $k+1$) para calcular la aproximación de la solución en algún punto específico de la malla (en el tiempo $k+1$). Esto es, para la expresión en diferencias finitas generalizadas (2.13), tendremos

$$u^{k+1} = u^k + \frac{1}{2} (u^{k+1} + u^k) + r^k, \quad (2.14)$$

de donde u^{k+1} podemos despejar para obtener

$$u^{k+1} = \left(I - \frac{1}{2}K \right)^{-1} \left(I + \frac{1}{2}K \right) u^k + \left(I - \frac{1}{2}K \right)^{-1} r^k, \quad (2.15)$$

que es un sistema que se puede resolver por medio de Álgebra lineal para obtener la nueva aproximación de u en cada tiempo $k+1$.

Pruebas numéricas de los esquemas para la ecuación de advección

Con el único propósito de mostrar el desempeño de los métodos descritos, se presentan algunos resultados obtenidos al resolver el mismo problema con cada uno de ellos. Para ello se seleccionó una región irregular, denotada como CAB (Fig. 2.16), que cumple con ser no rectangular, no simétrica y no periódica. Para esta región se generó una malla con 21×21 puntos, y se refinó para tener 41×41 y 81×81 puntos (Fig. 2.17).

La función

$$\blacksquare u(x, y, t) = 0.2e^{((-x-0.5-0.2t)^2 - (y-0.3-0.2t)^2)/.01},$$

fue seleccionada para las pruebas como las condiciones inicial y de frontera en S_2 , y el intervalo de tiempo $[0, 1]$ se dividió uniformemente en 1000 subintervalos. En un tiempo dado, k , los valores de las normas de los errores cuadráticos son calculados como la función de la malla

$$\|e^k\|_2 = \sqrt{\sum_{i,j} (u_{i,j}^k - U_{i,j}^k)^2 \mathcal{A}_{i,j}},$$

donde $U_{i,j}^k$ y $u_{i,j}^k$ son el valor aproximado y el valor exacto, respectivamente, de la solución

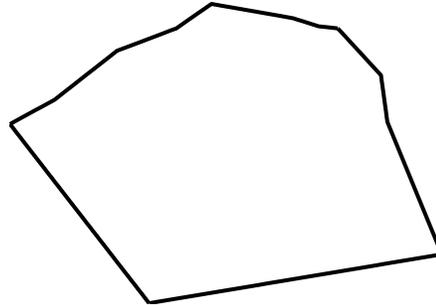


Figura 2.16: Región de prueba CAB.

calculado en el elemento i, j , y $\mathcal{A}_{i,j}$ es el área del polígono definido por $\{P_{i+1,j}, P_{i,j+1}, P_{i-1,j}, P_{i,j-1}\}$.

En la tabla 2.1 se muestra el error máximo obtenido con cada uno de los esquemas, usando cada una de las mallas obtenidas para la región CAB.

Esquema	21×21	41×41	81×81
4 puntos explícito	9.71965E-03	6.43265E-03	3.86305E-03
4 puntos implícito	9.75681E-03	6.49653E-03	3.95678E-03
6 puntos	6.69724E-03	2.59374E-03	7.30314E-04
MOL 4 puntos RK2	9.73680E-03	6.46287E-03	3.90806E-03
MOL 4 puntos RK3	6.73036E-03	2.63781E-03	7.64533E-04
MOL 4 puntos RK4	9.75535E-03	6.49474E-03	3.95477E-03
MOL 6 puntos RK2	6.72789E-03	2.63601E-03	7.61009E-04
MOL 6 puntos RK3	9.75535E-03	6.49474E-03	3.95477E-03
MOL 6 puntos RK4	6.72789E-03	2.63601E-03	7.61009E-04
9 puntos Crank-Nicolson	5.59924E-03	1.50977E-03	4.08816E-04

Tabla 2.1: Errores obtenidos con cada esquema.

Se puede observar claramente que los esquemas con mejor aproximación son los de 6 puntos y el de 9 puntos tipo Crank-Nicolson. Pero, a pesar de esto, todos los esquemas generan buenas aproximaciones a la solución exacta.

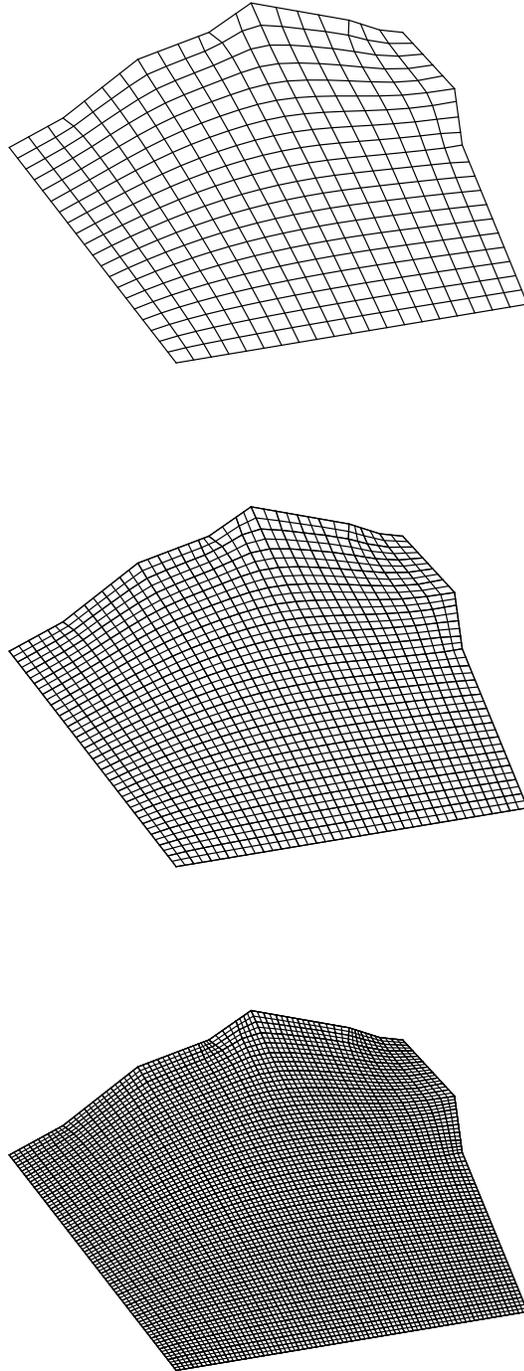


Figura 2.17: Mallas de 21×21 , 41×41 y 81×81 para la región CAB.

2.2.2. Ecuación de Difusión

La segunda ecuación en la que vamos a aplicar el esquema de diferencias finitas generalizadas es la ecuación de difusión, la cual se utiliza para modelar las fluctuaciones de densidad de un material que se encuentra difundiéndose. Puede ser escrita, de manera general, como

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \nabla^2 u.$$

Esta última expresión puede ser escrita como

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right).$$

Ahora, haciendo la expansión en serie de Taylor de u alrededor del punto $(x, y, t + \Delta t)$ obtenemos

$$u(x, y, t + \Delta t) = u(x, y, t) + \frac{\partial u}{\partial t} \Delta t + \dots,$$

donde podemos sustituir para obtener

$$u(x, y, t + \Delta t) = u(x, y, t) + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \Delta t + \dots$$

El esquema definido por (2.7) y (2.6) se puede aplicar ahora al operador

$$\Delta t \left(\nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) + \Delta t \left(\nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right),$$

y los coeficientes $\Gamma_0, \Gamma_1, \dots, \Gamma_q$ que se obtienen definen un esquema para aproximar la solución de la ecuación de difusión

$$u_0^{k+1} = u_0^k + \sum_{i=0}^q \Gamma_i u_i^k. \quad (2.16)$$

Debemos notar que esta ecuación involucra derivadas de segundo orden, lo que nos lleva a tomar esquemas de diferencias finitas centrados en el espacio. Para que este problema este bien determinado, entonces, requeriremos conocer una condición inicial y la condición en toda la frontera de la región.

Para esta ecuación se han diseñado algunos esquemas de diferencias finitas generalizadas que logran buenas aproximaciones a la solución. Debido a que las ideas son las mismas que en el caso de la ecuación de advección, por lo que no hay necesidad de volver a explicar

cada uno de ellos. Los esquemas implementados para la ecuación de difusión son:

1. Método de Líneas.
 - a) Runge-Kutta 2
 - b) Runge-Kutta 3
 - c) Runge-Kutta 4
2. Crank-Nicolson de 9 puntos.

Pruebas numéricas de los esquemas para la ecuación de difusión

Nuevamente, con el fin de mostrar la precisión de nuestros métodos se presentan algunos resultados obtenidos al resolver el mismo problema con cada uno de ellos. Para ello se seleccionó otra región irregular, denotada como MIC (Fig. 2.18), que cumple nuevamente con ser no rectangular, no simétrica y no periódica. Para esta región se generó una malla con 21×21 puntos, y se refinó para tener 41×41 y 81×81 puntos (Fig. 2.19).

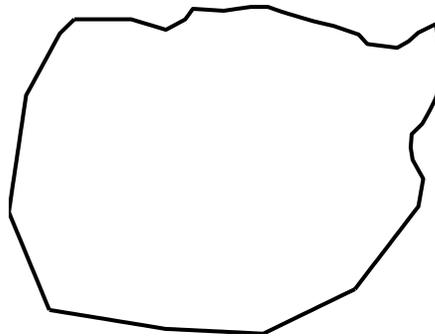


Figura 2.18: Región de prueba MIC.

La función

$$\blacksquare u(x, y, t) = e^{-2\pi^2 \nu t} \cos(\pi x) \cos(\pi y),$$

fue seleccionada para las pruebas como las condiciones inicial y de frontera. En la tabla 2.2 se muestra el error máximo obtenido con cada uno de los esquemas, usando cada una de las mallas obtenidas para la región MIC. El intervalo temporal esta vez fue $[0, 1]$ dividido

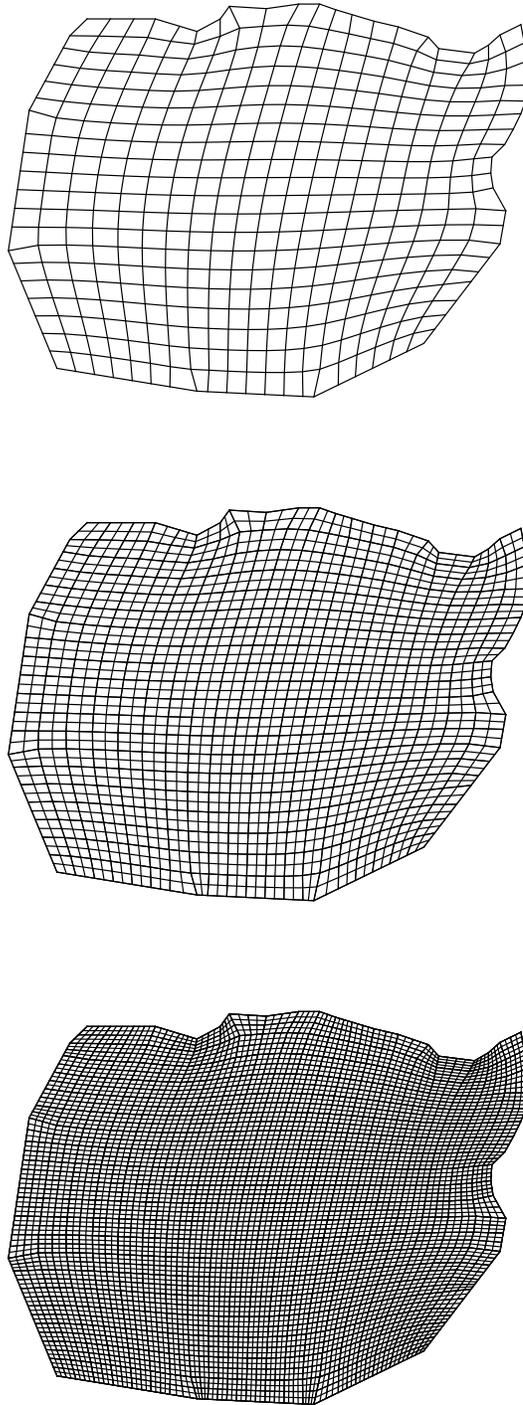


Figura 2.19: Mallas de 21×21 , 41×41 y 81×81 para la región MIC.

en 1000 subintervalos para las mallas de 21×21 puntos, 4000 para las mallas de 41×41 puntos y 15000 para las mallas de 81×81 puntos. Esto para cumplir las condiciones de estabilidad que se explicarán más adelante en este trabajo.

Esquema	21×21	41×41	81×81
MOL Runge-Kutta 2	2.33370E-04	5.90411E-04	1.47989E-04
MOL Runge-Kutta 3	2.62180E-04	6.65041E-04	1.68114E-04
MOL Runge-Kutta 4	2.62183E-04	6.65041E-04	1.68114E-04
Crank-Nicolson	5.70353E-04	1.51176E-03	4.06183E-04

Tabla 2.2: Errores obtenidos con cada esquema con diferentes particiones de tiempo.

Podemos observar que los mejores resultados se obtienen con el esquema basado en el Método de Líneas, usando Runge-Kutta 2 para resolver el sistema de ecuaciones planteado. Una de las mayores limitaciones de este método es que necesita una gran cantidad de pasos en el tiempo, para hacer un Δt suficientemente pequeño, para lograr convergencia cuando se trata de problemas con una discretización fina del espacio. Esta limitante es resuelta con el esquema de Crank-Nicolson. En la tabla 2.3 se muestra el error máximo obtenido al resolver el problema anterior en las mallas de 21×21 , 41×41 y 81×81 puntos, pero ahora dividiendo el intervalo de tiempo $[0, 1]$ únicamente en 400 subintervalos.

Esquema	21×21	41×41	81×81
MOL Runge-Kutta 2	1.92071E-04	INESTABLE	INESTABLE
MOL Runge-Kutta 3	2.62140E-04	INESTABLE	INESTABLE
MOL Runge-Kutta 4	2.62179E-04	2.57686E-01	INESTABLE
Crank-Nicolson	1.11522E-03	1.09373E-03	1.12665E-03

Tabla 2.3: Errores obtenidos con cada esquema con la misma partición de tiempo.

Los resultados muestran que el esquema de tipo Crank-Nicolson logra ser estable en todos los casos y, además, la aproximación lograda con 400 pasos temporales es muy parecida a la lograda con 15000. Este esquema consigue entonces buenos resultados con un bajo costo computacional, el cual es una de los principales intereses de para nuestros esquemas. En el capítulo siguiente, hacemos un estudio más a fondo de la **consistencia**, **convergencia** y **estabilidad** de los esquemas de diferencias finitas.

Capítulo 3

Consistencia, Convergencia y Estabilidad de Esquemas en Diferencias Finitas

3.1. Diferencias Finitas Clásicas

Una parte necesaria de tratar cuando se habla de esquemas para aproximar la solución de diferentes ecuaciones diferenciales parciales, es el estudio de la *estabilidad*, la *consistencia* y la *convergencia* de éstos. Para ello primeramente analizaremos el ejemplo de la ecuación de difusión en $1 + 1D$

$$v_t(x, t) = \nu v_{xx}(x, t), \quad x \in (0, 1), \quad (3.1)$$

$$v(x, 0) = f(x), \quad x \in [0, 1], \quad (3.2)$$

$$v(0, t) = a(t), \quad v(1, t) = b(t), \quad t \geq 0. \quad (3.3)$$

la cual es ampliamente utilizada en la literatura. En este caso a ν se le conoce como la constante de difusividad, y nuestro objetivo será escribir un esquema en diferencias finitas clásicas asociado a dicha ecuación. Un estudio sobre la solución analítica de este problema puede encontrarse en [5].

Debido a que hablamos de diferencias finitas clásicas, necesitamos una discretización uniforme tanto del espacio como del tiempo; para esto haremos una malla rectangular uniforme con pasos espaciales $\Delta x = 1/M$ y pasos de tiempo $\Delta t = 1/T$, donde M y T serán el número de nodos de la discretización (figura 3.1).

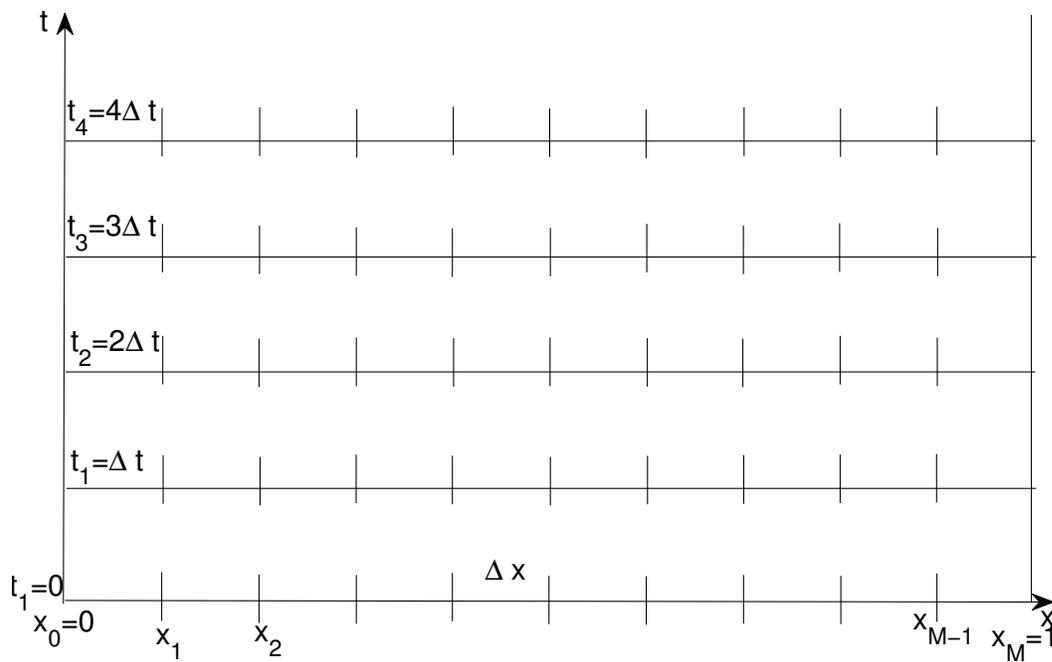


Figura 3.1: Malla uniforme en x y t .

Ahora debemos aproximar la solución de la ecuación (3.1) utilizando alguno de los esquemas de diferencias finitas clásicos con los que contamos. Para hacer la discretización espacial, tomaremos el esquema clásico centrado para la aproximación de la segunda derivada:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(m\Delta x, k\Delta t) = v_{xx} \approx \frac{u_{m+1}^k - 2u_m^k + u_{m-1}^k}{\Delta x^2}, \quad (3.4)$$

mientras que para hacer la discretización temporal haremos uso del esquema clásico de diferencias hacia adelante

$$\frac{\partial v}{\partial t}(m\Delta x, k\Delta t) = v_t \approx \frac{u_m^{k+1} - u_m^k}{\Delta t}. \quad (3.5)$$

Sustituyendo las aproximaciones obtenidas en (3.5), en la ecuación (3.1), obtenemos

$$\frac{u_m^{k+1} - u_m^k}{\Delta t} = \nu \frac{u_{m+1}^k - 2u_m^k + u_{m-1}^k}{\Delta x^2},$$

que, tras despejar u_m^{k+1} , puede ser escrita como

$$u_m^{k+1} = u_m^k + \nu \frac{\Delta t}{\Delta x^2} (u_{m+1}^k - 2u_m^k + u_{m-1}^k). \quad (3.6)$$

La ecuación (3.6) es el esquema en diferencias finitas para la aproximación de la ecuación diferencial parcial original. Ahora, las condiciones iniciales y de frontera están dadas por

$$u_k^0 = f(k\Delta x) \quad k = 0, \dots, M, \quad (3.7)$$

$$u_0^{k+1} = a((k+1)\Delta t) \quad n = 0, \dots, T, \quad (3.8)$$

$$u_M^{k+1} = b((k+1)\Delta t) \quad n = 0, \dots, T. \quad (3.9)$$

Ahora, nuestro objetivo es obtener una buena aproximación a la solución de la ecuación diferencial parcial en $[0, 1] \times [0, 1]$ resolviendo el problema discreto dado por (3.6-3.9). Debemos notar que la calidad de la aproximación dependerá de la elección de los tamaños de pasos espaciales Δx y temporales Δt . A continuación, se hará un breve estudio del cuidado de dicha elección y haremos una revisión de los conceptos de consistencia, estabilidad y convergencia.

3.1.1. Consistencia

Si queremos aproximar una ecuación diferencial parcial por medio de un esquema de diferencias finitas, podemos utilizar la expansión en serie de Taylor alrededor de ciertos

puntos para llegar a expresiones que logren dicha aproximación. En particular, podemos hacer la expansión alrededor de $(m\Delta x, k\Delta t)$, para obtener la expresión

$$v(m\Delta x, (k+1)\Delta t) = v(m\Delta x, k\Delta t) + \frac{\partial v}{\partial t}(m\Delta x, k\Delta t) \frac{\Delta t}{1!} + \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}(m\Delta x, k\Delta t) \frac{\Delta t^2}{2!} + \dots,$$

la cual puede ser reescrita como

$$\frac{v(m\Delta x, (k+1)\Delta t) - v(m\Delta x, k\Delta t)}{\Delta t} = \frac{\partial v}{\partial t}(m\Delta x, k\Delta t) + \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}(m\Delta x, k\Delta t) + \dots,$$

que a su vez, utilizando una manera más general en términos de \mathcal{O} y suponiendo que v es lo suficientemente suave, puede escribirse como

$$\frac{\partial v}{\partial t}(m\Delta x, k\Delta t) = \frac{v(m\Delta x, (k+1)\Delta t) - v(m\Delta x, k\Delta t)}{\Delta t} + \mathcal{O}(\Delta t).$$

Si queremos averiguar el orden del esquema de diferencias que aproxima la segunda derivada, utilizamos la expansión en serie de Taylor

$$\begin{aligned} v((m+1)\Delta x, k\Delta t) &= v(m\Delta x, k\Delta t) + \frac{\partial v}{\partial x}(m\Delta x, k\Delta t) \frac{\Delta x}{1!} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(m\Delta x, k\Delta t) \frac{\Delta x^2}{2!} + \\ &\quad \frac{\partial^3 v}{\partial x^3}(m\Delta x, k\Delta t) \frac{\Delta x^3}{3!} + \mathcal{O}(\Delta x^4), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v((m-1)\Delta x, k\Delta t) &= v(m\Delta x, k\Delta t) - \frac{\partial v}{\partial x}(m\Delta x, k\Delta t) \frac{\Delta x}{1!} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(m\Delta x, k\Delta t) \frac{\Delta x^2}{2!} - \\ &\quad \frac{\partial^3 v}{\partial x^3}(m\Delta x, k\Delta t) \frac{\Delta x^3}{3!} + \mathcal{O}(\Delta x^4). \end{aligned}$$

Sumando estas dos expansiones podemos llegar al esquema que aproxima a la segunda parcial de v respecto de x , denotada como v_{xx} ,

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{v_{m+1}^k - 2v_m^k + v_{m-1}^k}{\Delta x^2} + \mathcal{O}(\Delta x^2). \quad (3.10)$$

Entonces, el problema (3.1) puede escribirse como

$$\begin{aligned} &\frac{\partial v}{\partial t}(m\Delta x, k\Delta t) - \nu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(m\Delta x, k\Delta t) = \\ &\frac{v_m^{k+1} - v_m^k}{\Delta t} - \frac{\nu}{\Delta x^2} (v_{m+1}^k - 2v_m^k + v_{m-1}^k) + \mathcal{O}(\Delta t) + \mathcal{O}(\Delta x^2). \end{aligned} \quad (3.11)$$

Podemos ver que la ecuación (3.11) muestra qué tan bueno es el esquema en diferencias para aproximar a la ecuación original. Debemos resaltar que esto no nos dice directamente cómo la solución del esquema en diferencias se aproxima a la solución de la ecuación diferencial parcial.

Definición. Se dice que el esquema en diferencias $L_m^k u_m^k = G_m^k$ es consistente punto a punto con la ecuación diferencial $LU = F$ si existe alguna $\phi(x, t)$, suave y continua, tal que

$$(L\phi - F)|_m^k - [L_m^k \phi(m\Delta x, k\Delta t) - G_m^k] \rightarrow 0 \quad (3.12)$$

cuando $\Delta x, \Delta t$ y $(m\Delta x, (k+1)\Delta t) \rightarrow 0$

Una vez definida la consistencia punto a punto, podemos ver que el esquema descrito en (3.11) es consistente punto a punto con la ecuación diferencial parcial original.

Podemos elegir ϕ como la solución v de la ecuación diferencial parcial, entonces la expresión en (3.12) la escribimos como

$$L_m^k u_m^k - G_m^k \rightarrow 0 \quad \text{cuando} \quad \Delta x, \Delta t \rightarrow 0.$$

Si denotamos el esquema en diferencias como

$$\mathbf{u}^{k+1} = Q\mathbf{u}^k + \Delta t \mathbf{G}^k \quad (3.13)$$

de donde $\mathbf{u}^k = (\dots, u_{-1}^k, u_0^k, u_1^k, \dots)^T$, $\mathbf{G}^k = (\dots, u_{-1}^k, u_0^k, u_1^k, \dots)^T$ y Q es un operador que actúa en el espacio apropiado, entonces podemos escribir una definición de consistencia más fuerte.

Definición. El esquema (3.13) es consistente con la ecuación diferencial parcial con la norma $\|\cdot\|$, si la solución de la ecuación diferencial parcial v satisface que

$$\mathbf{v}^{k+1} = Q\mathbf{u}^k + \Delta t \mathbf{G}^k + \Delta t \tau^k$$

y

$$\|\tau^k\| \rightarrow 0,$$

cuando $\Delta x, \Delta t \rightarrow 0$, donde \mathbf{u}^k denota el vector cuya k -ésima componente es $v(m\Delta x, k\Delta t)$.

Hay que notar que la diferencia entre la consistencia punto a punto y la consistencia con la norma, es que la consistencia con la norma obliga a todos los componentes del vector τ^k a converger a cero de una manera uniforme.

3.1.2. Estabilidad

Una interpretación intuitiva de la estabilidad es que, si el esquema en diferencias de un problema con condiciones iniciales tiene errores pequeños de entrada, entonces tendremos errores pequeños en la aproximación final.

La estabilidad de un esquema con dos niveles de tiempo se explica en términos de una ecuación de la forma

$$u^{k+1} = Qu^k \quad n \geq 0 \quad (3.14)$$

Definición. Se dice que un esquema de diferencias con la forma (3.14) es estable con respecto a la norma $\|\cdot\|$, si existen constantes positivas Δx , Δt , α y β tales que

$$\|\mathbf{u}^{k+1}\| \leq Ke^{\beta t} \|\mathbf{u}^0\|, \quad (3.15)$$

para $0 \leq t \leq (k+1)\Delta t$, $0 < \Delta x \leq x_0$ y $0 < \Delta t \leq \Delta t_0$.

Hay que notar que, al igual que para la consistencia, la definición de estabilidad está dada en términos de una norma la cual puede variar dependiente del problema. Pero, independientemente de la norma, la solución puede crecer con el tiempo pero no con el número de pasos de tiempo. Es importante hacer ver que existe una gran variedad de definiciones de estabilidad, por ejemplo, una definición común es aquella que no permite un crecimiento exponencial, entonces la desigualdad (3.15) es remplazada por

$$\|\mathbf{u}^{k+1}\| \leq \mathbf{K} \|\mathbf{u}^0\|,$$

aquí el valor de \mathbf{K} es quien dirá si el esquema es consistente o no. Si $0 < \mathbf{K} < 1$, entonces el esquema será *incondicionalmente estable*. Si $\mathbf{K} = 1$ entonces el esquema es *condicionalmente estable* y, por último, si $\mathbf{K} > 1$ el esquema resulta ser *incondicionalmente inestable*.

3.1.3. Convergencia

Los esquemas con los que hemos estado tratando son muy usados, ya que presentan resultados satisfactorios a la hora de aproximar la solución de ciertas ecuaciones diferenciales en diferentes dominios. Esto se debe a que estamos obteniendo la solución del sistema de diferencias que surge de hacer una aproximación a la solución de la ecuación diferencial. Ahora nos interesa garantizar la convergencia de estos esquemas, para poder describir buenos resultados de las aproximaciones generadas. En general, esto no es fácil de conseguir y, en muchas ocasiones, el proceso para conseguirlo llega a ser muy largo y laborioso.

Consideremos la siguiente EDP

$$Lv = F, \quad (3.16)$$

con v y F funciones que están definidas en \mathbb{R} y con condición inicial $v(x, 0) = f(x)$. Supongamos que tenemos una aproximación a la solución, obtenida por medio de algún esquema de diferencias finitas, que llamaremos L_m^k . Para este problema, u_m^n define una malla uniforme con Δx y Δt distancias entre nodos, y satisface la condición inicial $u_m^0 = f(m\Delta x) \in [a, b]$. Denotemos a v como la solución exacta de nuestro problema inicial.

Definición. Un esquema de diferencias $L_m^k u_m^k = G_m^k$ que aproxima a la ecuación diferencial parcial $Lv = F$ es un esquema que converge punto a punto para algún x y t , mientras $(m\Delta x, (k+1)\Delta t)$ converge a $U(x, t)$ y u_m^k converge a $v(x, t)$ cuando $\Delta x, \Delta t$ tienden a cero.

Para ejemplificar mejor esto, retomaremos el problema del ejemplo 1 junto como su esquema en diferencias, el cual reescribiremos como

$$u_m^{k+1} = (1 - 2r)u_m^k + r(u_{m+1}^k + u_{m-1}^k),$$

en donde $r = \nu\Delta t/\Delta x^2$.

Definamos z_m^k como

$$z_m^k = u_m^k - v(m\Delta x, k\Delta t).$$

Si ahora regresamos a la ecuación diferencial parcial original y la escribimos como

$$\begin{aligned} v_t(m\Delta x, k\Delta t) - \nu v_{xx}(m\Delta x, k\Delta t) = \\ \frac{v_m^{k+1} - v_m^k}{\Delta t} - \frac{\nu}{\Delta x^2}(v_{m+1}^k - 2v_m^k + v_{m-1}^k) + \mathcal{O}(\Delta t) + \mathcal{O}(\Delta x^2), \end{aligned} \quad (3.17)$$

y al poner la solución exacta v del lado izquierdo de la ecuación anterior obtenemos que

$$0 = \frac{v_m^{k+1} - v_m^k}{\Delta t} - \frac{\nu}{\Delta x^2}(v_{m+1}^k - 2v_m^k + v_{m-1}^k) + \mathcal{O}(\Delta t) + \mathcal{O}(\Delta x^2),$$

de donde podemos despejar v_m^{k+1} para obtener

$$v_m^{k+1} = (1 - 2r)v_m^k + r(v_{m+1}^k + v_{m-1}^k) + \mathcal{O}(\Delta t^2) + \mathcal{O}(\Delta t\Delta x^2),$$

y finalmente, restando la ecuación anterior de la ecuación (3.17), tendremos que

$$z_m^{k+1} = (1 - 2r)z_m^k + r(z_{m+1}^k + z_{m-1}^k) + \mathcal{O}(\Delta t^2) + \mathcal{O}(\Delta t\Delta x^2). \quad (3.18)$$

Si $0 < r \leq 1/2$, los coeficientes del lado derecho de la ecuación (3.18) son positivos y, además,

$$\begin{aligned} |z_m^{k+1}| &\leq (1 - 2r) |z_m^k| + r(|z_{m+1}^k| + |z_{m-1}^k|) + A(\Delta t^2 + \Delta t \Delta x^2) \\ &\leq Z^k + A(\Delta t^2 + \Delta t \Delta x^2), \end{aligned}$$

donde A es una constante asociada con el término \mathcal{O} y $Z^k = \sup_k \{|z_m^k|\}$. Luego, si tomamos el *sup* sobre k del lado izquierdo, tenemos

$$Z^{k+1} \leq Z^k + A(\Delta t^2 + \Delta t \Delta x^2).$$

Notemos que el supremo del lado derecho de la ecuación anterior incluye los términos Δt y Δx . Aplicando esta condición un número finito de veces llegamos a que

$$\begin{aligned} Z^{k+1} &\leq Z^k + A(\Delta t^2 + \Delta t \Delta x^2) \\ &\leq Z^{k-1} + 2A(\Delta t^2 + \Delta t \Delta x^2) \\ &\vdots \\ &\leq Z^0 + (k+1)A(\Delta t^2 + \Delta t \Delta x^2). \end{aligned}$$

De ahí que, si $Z^0 = 0$, $|u_m^{k+1} - v(m\Delta x, (k+1)\Delta t)| \leq Z^{k+1}$ y $(k+1)\Delta t \rightarrow T$;

$$\begin{aligned} |u_m^{k+1} - v(m\Delta x, (k+1)\Delta t)| &\leq (k+1)\Delta t A(\Delta t + \Delta x^2) \\ &\rightarrow 0 \quad \text{cuando} \quad \Delta t, \Delta x \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Así que para algún x y t , cuando Δt y Δx se aproximan a cero y

$$(m\Delta x, (k+1)\Delta t) \rightarrow (x, t),$$

entonces u_m^k se aproxima a $v(x, t)$. Hay que señalar que el término $k+1$ en la expresión anterior podría ser un problema para nuestra convergencia, por lo que es importante que $(k+1)\Delta t \rightarrow T$. Con esto hemos logrado probar que $Z^k \rightarrow 0$, con $z_m^k = u_m^k - v(m\Delta x, k\Delta t)$.

En general, es muy difícil probar la convergencia punto a punto, y no suele ser tan útil como un tipo de convergencia uniforme; en vez de eso, utilizamos una definición de convergencia en términos de una norma de la diferencia entre la solución exacta y la aproximación obtenida.

Si queremos probar la convergencia en términos de la rapidez con la que la aproximación converge a la solución exacta, debemos definir la *convergencia de orden* (p, q) de la siguiente manera:

Definición. Un esquema de diferencias $L_m^k u_m^k$, que aproxima a la ecuación diferencial parcial $Lu = F$, es un esquema convergente de orden (p, q) si para t , cuando $(k+1)\Delta t \rightarrow T$,

$$\|\mathbf{u}^{k+1} - \mathbf{v}^{k+1}\| = \mathcal{O}(\Delta x^p) + \mathcal{O}(\Delta t^q)$$

cuando $\Delta x, \Delta y \rightarrow 0$, y en este caso, \mathcal{O} dependerá de t .

Con esto, hemos aclarado las definiciones de consistencia, estabilidad y convergencia de los métodos de aproximación numérica. Existe un teorema que relaciona estas tres definiciones, el cual nos ayudará a explicar la convergencia de nuestros métodos más adelante.

3.1.4. Teorema de Equivalencia de Lax

Teorema 2. *Teorema de equivalencia de Lax.* Un método de aproximación en diferencias finitas para la aproximación de un problema de valor inicial es **convergente** si y sólo si es **estable** y **consistente**.

Este teorema nos brindará las pautas para saber si los esquemas que planteamos son convergentes. Tomando en cuenta que nuestros esquemas son consistentes por definición, lo único que necesitamos probar es su estabilidad. Entonces, dicho de otra manera, lo único que requerimos es probar la estabilidad de nuestros esquemas para que quede demostrada su convergencia. A continuación, haremos un breve estudio de los aspectos de estabilidad de los esquemas obtenidos para la ecuaciones de advección y difusión mostrados en el capítulo anterior.

3.2. Estabilidad de los Esquemas Para la Ecuación de Advección

En la literatura existen muchos resultados sobre la estabilidad de los esquemas de la ecuación de advección, pero casi todos se refieren y restringen a regiones rectangulares con mallas uniformes. Entonces, nos dedicaremos a hacer un estudio de tipo Von Neumann para la estabilidad de nuestros esquemas sobre regiones que no sean regulares, debido al tipo de

análisis que se presenta, no tomaremos en cuenta el número de nodos con los que cuenta el esquema, únicamente necesitaremos diferencias entre esquemas explícitos e implícitos.

3.2.1. Esquemas Tipo Lax-Wendroff Explícitos

Para nuestros esquemas tipo Lax-Wendroff explícitos de la ecuación de advección,

$$u(x, y, t + \Delta t) = u(x, y, t) + \Delta t \left(-a \frac{\partial u}{\partial x} - b \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{(\Delta t)^2}{2} \left(a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2ab \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + b^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right),$$

los cuales tienen la forma

$$u_0^{k+1} = u_0^k + \sum_{i=0}^q \Gamma_i u_i^k,$$

podemos expresar el error que se comete en un nodo (x_0, y_0) , en un paso de tiempo k , como la suma de armónicos individuales de la forma

$$\Phi^k(x_0, y_0) = R^k e^{\hat{j}(rx_0 + sy_0)},$$

donde r y s nuevamente son números de onda y \hat{j} representa la unidad imaginaria. Debido a la linealidad de la ecuación, podemos escribir el término del error como

$$R^{k+1} e^{\hat{j}(rx_0 + sy_0)} = R^k e^{\hat{j}(rx_0 + sy_0)} + \sum_{l=0}^q \Gamma_l R^k e^{\hat{j}(r(x_0 + \Delta x_l) + s(y_0 + \Delta y_l))}.$$

En este caso, el factor de amplificación R se puede escribir como

$$\begin{aligned} R &= 1 + \sum_{l=0}^q \Gamma_l e^{\hat{j}[r\Delta x_l + s\Delta y_l]} \\ &= 1 + \sum_{l=0}^q \Gamma_l \cos(r\Delta x_l + s\Delta y_l) + i \sum_{l=0}^q \Gamma_l \sin(r(\Delta x)_l + s\Delta y_l). \end{aligned}$$

Ahora, tomando en cuenta que

$$\cos(r\Delta x_0 + s\Delta y_0) = 1,$$

$$\sin(r\Delta x_0 + s\Delta y_0) = 0,$$

y recordando que nuestra primera condición de consistencia es

$$\Gamma_0 = -\Gamma_1 - \Gamma_2 - \dots - \Gamma_q,$$

podemos escribir el factor de amplificación como

$$R = 1 + \sum_{l=1}^q \Gamma_l [\cos(r\Delta x_l + s\Delta y_l) - 1] + i \sum_{l=1}^q \Gamma_l \sin(r\Delta x_l + s\Delta y_l).$$

Si expandimos en series de Taylor, hasta segundo orden, todos los términos de la suma anterior, obtenemos que

$$\begin{aligned} \cos(r\Delta x_l + s\Delta y_l) - 1 &= -[r\Delta x_l + s\Delta y_l]^2/2! \\ &= -[r^2\Delta x_l^2 + 2rs\Delta x_l\Delta y_l + s^2\Delta y_l^2]/2! \end{aligned}$$

y

$$\sin(r\Delta x_l + s\Delta y_l) = r\Delta x_l + s\Delta y_l + \mathcal{O}(\Delta x^3, \Delta y^3)$$

Ahora, tomando cada suma por separado y haciendo la suma sobre todos los nodos vecinos obtenemos

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^q \Gamma_l [\cos(r\Delta x_l + s\Delta y_l) - 1] &= -\left[\frac{r^2}{2} \sum_{l=1}^q \Gamma_l \Delta x_l^2 + rs \sum_{l=1}^q \Gamma_l \Delta x_l \Delta y_l \right. \\ &\quad \left. + \frac{s^2}{2} \sum_{l=1}^q \Gamma_l \Delta y_l^2 \right] \end{aligned}$$

donde, usando la segunda y tercer condiciones de consistencia, tenemos que

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^q \Gamma_l [\cos(r\Delta x_l + s\Delta y_l) - 1] &= -\left[\frac{r^2}{2} (\Delta t)^2 a^2 + rs (\Delta t)^2 ab + \frac{s^2}{2} (\Delta t)^2 b^2 \right] \\ &= -\frac{(\Delta t)^2}{2} (ar + bs)^2. \end{aligned}$$

Ahora, análogamente tenemos que

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^q \Gamma_l \sin(r\Delta x_l + s\Delta y_l) &= r \sum_{l=1}^q \Gamma_l \Delta x_l + s \sum_{l=1}^q \Gamma_l \Delta y_l \\ &= -ar\Delta t - bs\Delta t \\ &= -(ar + bs)\Delta t. \end{aligned}$$

Sabiendo esyo, podemos decir que el módulo del factor de amplificación esta dado por

$$\begin{aligned} |R|^2 &= \left[1 - \frac{(\Delta t)^2}{2}(ar + bs)^2\right]^2 + (ar + bs)^2(\Delta t)^2 \\ &= 1 + \frac{1}{4}(\Delta t)^4(ar + bs)^4 \\ &= \left[1 + \frac{(\Delta t)^2}{2}(ar + bs)^2\right]^2 - (ar + bs)^2(\Delta t)^2 \end{aligned}$$

y entonces

- $|R| > 1$; el esquema no es estable de manera estricta pero,
- $|R| \leq 1 + C(\Delta t)^2$, como $ar + sb$ esta acotado, existe una estabilidad débil (En el sentido de Von Neumann).

3.2.2. Esquemas Tipo Lax-Wendroff Implícitos

Ahora, para la versión de Lax-Wendroff de la ecuación de advección, vamos a considerar un esquema implícito de tipo θ para la ecuación

$$u(x, y, t + \Delta t) = u(x, y, t) + \Delta t \left(-a \frac{\partial u}{\partial x} - b \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{(\Delta t)^2}{2} \left(a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2ab \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + b^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right),$$

que puede ser escrito como

$$u_0^{(k+1)} = u_0^{(k)} + \theta \sum_{l=0}^q \Gamma_l u_l^{(k)} + (1 - \theta) \sum_{l=0}^q \Gamma_l u_l^{(k+1)}. \quad (3.19)$$

Una vez más, podemos medir el error en el nodo (x, y) de la malla en un nivel de tiempo k como

$$\Phi^{(k)}(x_0, y_0) = R^k e^{\hat{j}(rx_0 + sy_0)},$$

y también

$$R^{k+1} e^{\hat{j}(rx_0 + sy_0)} = R^k e^{\hat{j}(rx_0 + sy_0)} + [\theta + (1 - \theta)R] \sum_{l=0}^q \Gamma_l R^k e^{\hat{j}[r(x_0 + \Delta x_l) + s(y_0 + \Delta y_l)]}.$$

En aras de la simplicidad, denotemos por H a la suma en la última expresión. Si aplicamos las condiciones de consistencia como en el caso de los esquemas explícitos, entonces

tendremos que

$$\begin{aligned} H &= \sum_{l=0}^q \Gamma_l [\cos(r\Delta x_l + s\Delta y_l) + i \sin(r\Delta x_l + s\Delta y_l)] \\ &= -\frac{1}{2}(\Delta t)^2(ar + sb) - i(\Delta t)(ar + sb) \end{aligned}$$

hasta segundo orden. Ahora

$$R = \frac{1 + \theta H}{1 + (\theta - 1)H}$$

y, entonces,

$$|R|^2 = \frac{1 - \theta(\Delta t)^2(ar + sb)^2 + \frac{1}{4}\theta^2(\Delta t)^4(ar + sb)^4 + \theta^2(\Delta t)^2(ar + sb)^2}{1 - (\theta - 1)(\Delta t)^2(ar + sb)^2 + \frac{1}{4}(\theta - 1)^2(\Delta t)^4(ar + sb)^4 + (\theta - 1)^2(\Delta t)^2(ar + sb)^2}.$$

Para obtener estabilidad estricta, necesitamos que $|A| \leq 1$, debemos elegir entonces

$$\theta \leq \frac{8 + (\Delta t)^2(ar + sb)^2}{8 + 2(\Delta t)^2(ar + sb)^2},$$

y, como el lado derecho de esta expresión puede tomar valores en el intervalo $(\frac{1}{2}, 1)$, la condición se cumplirá si elegimos

$$\theta \leq \frac{1}{2}.$$

Con esta elección nuestro esquema resulta ser **incondicionalmente estable**. Particularmente, en el caso $\theta = \frac{1}{2}$ es análogo a un esquema de tipo Crank-Nicolson.

3.2.3. Esquemas Explícitos de Advección Pura

Cuando se habla de esquemas de tipo Lax-Wendroff, al hacer la aproximación en segundo orden de las derivadas se agregan términos difusivos al esquema, esto hace que las aproximaciones necesiten de una discretización más fina del intervalo temporal, pero agrega un poco de “estabilidad?? al método. Si queremos evitar estos términos difusivos, debemos de trabajar con la ecuación de advección pura

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -a \frac{\partial u}{\partial x} - b \frac{\partial u}{\partial y},$$

la cual puede ser escrita, tomando un enfoque de diferencias finitas, como

$$u(x, y, t + \Delta t) \approx u(x, y, t) - \Delta t \left[a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} \right].$$

En este caso, para realizar un análisis de estabilidad, podemos expresar nuevamente el error en un nodo central (x_0, y_0) en algún paso de tiempo k como

$$\Phi^{(k)}(x_0, y_0) = R^k e^{j(r x_0 + s y_0)},$$

y, aprovechando la linealidad de la ecuación de advección, podemos escribir

$$R^{k+1} e^{j(r x_0 + s y_0)} = R^k e^{j(r x_0 + s y_0)} + \sum_{l=0}^q \Gamma_l R^k e^{j(r(x_0 + \Delta x_l) + s(y_0 + \Delta y_l))}.$$

El factor de amplificación R se puede escribir como

$$\begin{aligned} R &= 1 + \sum_{l=0}^q \Gamma_l e^{j[r \Delta x_l + s \Delta y_l]} \\ &= 1 + \sum_{l=0}^q \Gamma_l \cos(r \Delta x_l + s \Delta y_l) + i \sum_{l=0}^q \Gamma_l \sin(r \Delta x_l + s \Delta y_l). \end{aligned}$$

Si consideramos que

$$\cos(r \Delta x_0 + s \Delta y_0) = 1,$$

$$\sin(r \Delta x_0 + s \Delta y_0) = 0,$$

y también la primera condición de consistencia

$$\Gamma_0 = -\Gamma_1 - \Gamma_2 - \dots - \Gamma_q,$$

se obtiene que

$$R = 1 + \sum_{l=1}^q \Gamma_l [\cos(r \Delta x_l + s \Delta y_l) - 1] + i \sum_{l=1}^q \Gamma_l \sin(r \Delta x_l + s \Delta y_l).$$

Ahora, cada término en la suma del lado derecho puede ser expandido en serie de Taylor hasta segundo orden, obteniendo así

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^q \Gamma_l [\cos(r \Delta x_l + s \Delta y_l) - 1] &= -\left[\frac{r^2}{2} \sum_{l=1}^q \Gamma_l \Delta x_l^2 + r s \sum_{l=1}^q \Gamma_l \Delta x_l \Delta y_l \right. \\ &\quad \left. + \frac{s^2}{2} \sum_{l=1}^q \Gamma_l \Delta y_l^2 \right] \\ &= 0 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^q \Gamma_l \sin(r\Delta x_l + s\Delta y_l) &= r \sum_{l=1}^q \Gamma_l \Delta x_l + s \sum_{l=1}^q \Gamma_l \Delta y_l, \\ &= -ar\Delta t - bs\Delta t, \\ &= -(ar + bs)\Delta t, \end{aligned}$$

finalmente, hasta segundo orden, el modulo del factor de amplificación esta dado por

$$\begin{aligned} |R|^2 &= 1 + \Delta t^2(ar + bs)^2, \\ &= (1 + \Delta t(ar + sb))^2 - 2\Delta t(ar + sb); \end{aligned}$$

esto quiere decir

$$|R| \leq 1 + \Delta t(ar + bs).$$

Como en el caso de los esquemas explícitos tipo Lax-Wendroff, tenemos que

- $|R| > 1$; y entonces el esquema no es estable de manera estricta pero,
- $|R| \leq 1 + C\Delta t$, como $ar + sb$ esta acotado, existe una estabilidad débil.

3.2.4. Esquemas Implícitos de Advección Pura

Ahora, consideremos un esquema implícito de tipo θ para la ecuación de advección pura

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -a \frac{\partial u}{\partial x} - b \frac{\partial u}{\partial y},$$

el cual escribiremos como

$$u_0^{(k+1)} = u_0^{(k)} + \theta \sum_{l=0}^q \Gamma_l u_l^{(k)} + (1 - \theta) \sum_{l=0}^q \Gamma_l u_l^{(k+1)}.$$

En este caso, el error de amplificación del error puede ser obtenido de la expresión

$$R^{k+1} e^{\hat{j}(rx_0+sy_0)} = R^k e^{\hat{j}(rx_0+sy_0)} + [\theta + (1 - \theta)R] \sum_{l=0}^q \Gamma_l R^k e^{\hat{j}[r(x_l+\Delta x_l)+s(y_l+\Delta y_l)]}.$$

Entonces, en este caso, el factor de amplificación esta dado por

$$\begin{aligned} R &= 1 + [\theta + (1 - \theta)R] \sum_{l=0}^q \Gamma_l e^{j[r\Delta x_l + s\Delta y_l]} \\ &= 1 + [\theta + (1 - \theta)R] \sum_{l=0}^q \Gamma_l [\cos(r\Delta x_l + s\Delta y_l) + \hat{j} \sin(r\Delta x_l + s\Delta y_l)]. \end{aligned}$$

Si aplicamos las condiciones de consistencia como en el caso del esquema explícito y denotamos por L a la suma en la expresión anterior, tendremos que

$$\begin{aligned} L &= \sum_{l=0}^q \Gamma_l [\cos(r\Delta x_l + s\Delta y_l) + \hat{j} \sin(r\Delta x_l + s\Delta y_l)] \\ &= -\hat{j} \Delta t (ar + sb) \end{aligned}$$

hasta segundo orden.

Ahora, el factor de amplificación puede ser escrito como

$$R = \frac{1 + \theta L}{1 + (\theta - 1)L}$$

y, entonces,

$$|R|^2 = \frac{1 + \theta^2 \Delta t^2 (ar + bs)^2}{1 + (\theta - 1)^2 \Delta t^2 (ar + bs)^2}.$$

Para obtener $|R|^2 \leq 1$, necesitamos que se cumpla

$$\begin{aligned} 1 + \theta^2 \Delta t^2 (ar + bs)^2 &\leq 1 + (\theta - 1)^2 \Delta t^2 (ar + bs)^2, \\ &= 1 + \theta^2 \Delta t^2 (ar + bs)^2 - 2\theta \Delta t^2 (ar + bs)^2 + \Delta t^2 (ar + bs)^2, \end{aligned}$$

de aquí se puede ver que

$$\begin{aligned} 0 &\leq -2\theta \Delta t^2 (ar + bs)^2 + \Delta t^2 (ar + bs)^2, \\ &= -2\theta + 1, \end{aligned}$$

esto quiere decir que debemos elegir

$$\theta \leq \frac{1}{2}.$$

para obtener estabilidad estricta.

3.3. Estabilidad de los Esquemas Para la Ecuación de Advección-Difusión

En las ecuaciones de Saint-Venant, o ecuaciones de aguas someras, aparecen algunos términos de Advección-Difusión, siendo estos una parte esencial de las mismas ecuaciones. También para este tipo de ecuaciones se tiene un esquema para aproximar la solución de las ecuaciones. Siguiendo con la idea planteada en la sección anterior sobre los esquemas de advección, es aconsejable contar con estudios de la estabilidad sobre estos esquemas.

3.3.1. Esquemas Para la Ecuación de Advección-Difusión

Para los esquemas de la ecuación de Advección-Difusión

$$u(x, y, t + \Delta t) = u(x, y, t) + \Delta t \left[a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} \right] + \nu \Delta t \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right],$$

los cuales tienen la forma

$$u_0^{k+1} = u_0^k + \sum_{i=0}^q \Gamma_i u_i^k,$$

al igual que en el caso de la ecuación de advección, podemos expresar el error que se comete en un nodo (x, y) , en un paso de tiempo k , como la suma de armónicos individuales de la forma

$$\Phi^k(x, y) = R^k e^{j(r x + s y)},$$

donde r y s nuevamente son números de onda. Esta vez podemos escribir el término del error como

$$R^{k+1} e^{j(r x + s y)} = R^k e^{j(r x + s y)} + \sum_{l=0}^q \Gamma_l R^k e^{j(r(x + \Delta x_l) + s(y + \Delta y_l))}.$$

En este caso, el factor de amplificación R se puede escribir como

$$\begin{aligned} R &= 1 + \sum_{l=0}^q \Gamma_l e^{j[r \Delta x_l + s \Delta y_l]} \\ &= 1 + \sum_{l=0}^q \Gamma_l \cos(r \Delta x_l + s \Delta y_l) + i \sum_{l=0}^q \Gamma_l \sin(r \Delta x_l + s \Delta y_l). \end{aligned}$$

Si aplicamos las condiciones de consistencia como en el caso del esquema explícito y

denotamos por L a la suma en la expresión anterior, tendremos

$$\begin{aligned} L &= \sum_{l=0}^q \Gamma_l [\cos(r\Delta x_l + s\Delta y_l) + \hat{j} \sin(r\Delta x_l + s\Delta y_l)] \\ &= [-\hat{j}\Delta t(ar + bs) - \nu(r^2 s^2)\Delta t], \end{aligned}$$

hasta segundo orden.

Ahora tenemos que

$$1 + \theta L = 1 - \theta L \nu(r^2 + s^2)\delta t - i\theta(ar + bs)\Delta t,$$

y, entonces

$$|1 + \theta L|^2 = 1 - 2\nu\theta(r^2 + s^2)\Delta t + \nu^2\theta^2(r^2 + s^2)^2\Delta t^2 + \theta^2(ar + bs)^2\Delta t^2,$$

mientras que

$$|1 + (\theta - 1)L|^2 = 1 - 2\nu(\theta - 1)(r^2 + s^2)\Delta t + \nu^2(\theta - 1)^2(r^2 + s^2)^2\Delta t^2 + (\theta - 1)^2(ar + bs)^2\Delta t^2.$$

Si queremos que

$$|R|^2 \leq 1,$$

entonces necesitamos que

$$\begin{aligned} &1 - 2\nu\theta(r^2 + s^2)\Delta t + \nu^2\theta^2(r^2 + s^2)^2\Delta t^2 + (ar + bs)^2\Delta t^2\theta^2 \leq \\ &\leq 1 - 2\nu\theta(r^2 + s^2)\Delta t + \nu^2\theta^2(r^2 + s^2)^2\Delta t^2 + (ar + bs)^2\Delta t^2\theta^2 + 2\nu(r^2 + s^2)\Delta t - 2\theta\nu^2(r^2 + s^2)^2\Delta t^2 + \nu^2(r^2 + s^2)\Delta t^2 - 2\theta(ar + bs)^2\Delta t^2 \end{aligned}$$

esto quiere decir que

$$2\theta [\nu^2(r^2 + s^2)^2\Delta t^2 + (ar + bs)^2\Delta t^2] \leq 2\nu(r^2 + s^2) + \nu^2(r^2 + s^2)^2\Delta t + (ar + bs)^2\Delta t,$$

lo cual se cumple para

$$\begin{aligned} \theta &\leq \frac{1}{2} \frac{\nu(r^2 + s^2) + \nu^2(r^2 + s^2)^2\Delta t + (ar + bs)^2\Delta t}{\nu^2(r^2 + s^2)^2\Delta t + (ar + bs)^2\Delta t} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{\nu(r^2 + s^2)}{r^2(r^2 + s^2)^2\Delta t + (ar + bs)^2\Delta t}. \end{aligned}$$

Ahora, si por simplicidad tomamos $\alpha = (r^2 + s^2)\Delta t$, podemos obtener

$$1 - 2\theta\alpha + \theta^2\alpha^2 \leq 1 + 2(1 - \theta)\alpha + (1 - \theta)^2\alpha^2.$$

De aquí podemos fácilmente llegar a la condición

$$\theta \leq \frac{2 + \alpha}{2\alpha} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{2},$$

con lo que nuevamente tendremos una condición de estabilidad estricta.

Capítulo 4

Ecuaciones de Saint-Venant

En este capítulo estudiaremos la deducción de las ecuaciones de Saint-Venant (también llamadas ecuaciones de aguas someras), iniciando desde la hipótesis del continuo utilizada en la mecánica del medio continuo. Se hará una revisión de las leyes de conservación, ya que, como derivan en las ecuaciones de Navier-Stokes, son la antesala para las ecuaciones de Saint-Venant. Después de esto, se explicará como se obtiene el esquema propuesto para la aproximación numérica en diferencias finitas generalizadas estas ecuaciones.

4.1. Mecánica de Medio Continuo

Una suposición que se hace comúnmente cuando se habla de problemas de transporte de calor, masa o momento es la del continuo, la cual trata todos los fluidos como si fueran continuos, o dicho de otra manera, ignora la granularidad de la materia. Esto con el fin de hacer los problemas más sencillos en algún aspecto.

Supongamos que no queremos utilizar la hipótesis del continuo, entonces debemos de tratar a todos los fluidos como el conjunto de moléculas que los conforman. En principio, conociendo la posición inicial de cada molécula del fluido así como su velocidad inicial, podríamos ser capaces de calcular la posición de todas éstas en un tiempo determinado utilizando las leyes del movimiento de Newton. El problema con este enfoque, es que el número de moléculas en cualquier volumen de fluido que puede ser de interés hace que este cálculo sea muy difícil.

Por ejemplo, en un centímetro cúbico de agua, deberemos de considerar 3.3×10^{22} moléculas, lo que puede hacer que el tiempo de cómputo para calcular una interacción de cada molécula con todas las demás sea de hasta 10 millones de años, en una computadora corriendo a 100 millones de operaciones de punto flotante por segundo (MFOPS). Las

moléculas en un líquido tienen colisiones con otras cada 10^{-12} segundos, entonces, para describir un segundo del comportamiento de éste líquido, necesitaríamos $10^{12} \times 10$ millones de años, que claramente es un tiempo absurdo de espera.

4.1.1. Hipótesis del Continuo

Una descripción detallada, a nivel molecular, no es necesaria para poder predecir el comportamiento macroscópico de cualquier material. Esto es, no es necesario conocer la ubicación precisa de todas las moléculas en un fluido; para la mayoría de las aplicaciones basta con conocer la distribución de masas dadas por el perfil de densidad $\rho(\vec{r})$ de las moléculas en alguna región:

$$\rho(\vec{r}) = \lim_{V \rightarrow 0} \left[\frac{1}{V} \sum_i m_i \right],$$

donde m_i es la masa de la molécula i , la suma se hace sobre todas las moléculas dentro de una superficie A , y V es el volumen. A partir de este punto utilizaremos una suposición conocida como "la hipótesis del continuo" la cual básicamente, dice que el límite mostrado convergirá mucho antes de que las dimensiones del volumen V llegue a un nivel molecular.

De una manera más precisa podemos enunciar la hipótesis del continuo como:

Definición. Hipótesis del continuo. *La región que se va a describir puede ser subdividida en un conjunto de elementos (infinitesimales) de volumen, cada uno de los cuales cumplen simultáneamente que:*

1. *es suficientemente pequeño como para ser considerado uniforme; y*
2. *es suficientemente grande como para contener un número grande de moléculas.*

El problema básico en la mecánica de medio continuo es describir la respuesta de un material a un esfuerzo. Una forma de representar cuantitativamente esta respuesta es conocido como:

Definición. Ecuación Constitutiva. *Modelo que describe como un material responderá ante un esfuerzo.*

4.1.2. Equilibrio Hidrostático

Si el material con que queremos modelar es un fluido en reposo, *i.e* no tiene velocidad ni aceleración, entonces la gravedad y la presión hidrostática serán las únicas fuerzas que

estarán actuando sobre el sistema. Debido a que estamos trabajando con un sistema en equilibrio, las fuerzas deben de estar balanceadas, esto es

$$\sum_i \vec{F}_i = M\vec{a} = 0.$$

En este caso, esto quiere decir que

$$\vec{F}_g + \vec{F}_p = 0, \quad (4.1)$$

$$\vec{F}_g = \int_V \rho \vec{g} dV,$$

$$\vec{F}_p = - \int_A \vec{n} p da = - \int_V \nabla p dV,$$

aquí ρ se usa para representar la densidad del fluido, \vec{g} es la fuerza de gravedad y p representa la presión. Una vez que tenemos esta última expresión, podemos sustituir en la ecuación (4.1) y, combinando las dos integrales de volumen, obtenemos

$$\vec{F}_g + \vec{F}_p = \int_v [\rho \vec{g} - \nabla p] dV = 0.$$

Dado que esta última integral debe de ser siempre cero, sin importar el elemento de volumen que estemos tomando, entonces el integrando debe de ser cero, lo cual puede escribirse como

$$\nabla p = \rho \vec{g}.$$

Esta última expresión se puede interpretar diciendo que la presión aumenta en la dirección de la velocidad de la gravedad, lo que describe correctamente cómo se incrementa la presión con la profundidad del agua.

4.1.3. Flujo en Fluidos Ideales

Hasta este momento, hemos considerado únicamente fluidos que se encuentran en reposo, pero el problema que nos interesa cuenta con movimiento, diversas aceleraciones y fuerzas externas; es por esto que es importante comenzar a hablar sobre fluidos en movimiento. Como un primer intento, hablaremos del flujo en fluidos ideales.

Definición. Fluido ideal. Decimos que un fluido es ideal cuando la deformación de cada elemento del mismo es un proceso adiabático y reversible, esto quiere decir que:

$$\mu = 0 \quad \text{y} \quad k = 0,$$

donde μ es la viscosidad y k es la conductividad térmica.

Generalmente, esto quiere decir que todas las fuerzas viscosas son despreciadas debido a que las fuerzas viscosas representan la existencia de fricción entre los elementos del fluido, y un proceso con fricción es irreversible. También, debido a que el proceso debe de ser adiabático, el coeficiente de conductividad de calor debe de ser igual a cero.

Ecuación de Euler

Si contamos con un fluido que cumple con estas definiciones, y queremos considerar la deformación isentrópica de un fluido para un sistema microscópico arbitrario, entonces debemos de tomar en cuenta la presión, la gravedad y la inercia del sistema cuando se acelera. De la segunda ley de Newton tenemos que

$$M\vec{a} = \sum_i F_i.$$

Si $\vec{r}(t)$ denota la trayectoria de una elemento particular del fluido dentro del sistema, la velocidad de éste se puede expresar como

$$\vec{v} = \frac{D\vec{r}}{Dt},$$

mientras que su aceleración será

$$\vec{a} = \frac{D\vec{v}}{Dt}.$$

Debido a que estamos siguiendo a un punto particular en el sistema, utilizaremos la derivada material. Si multiplicamos la aceleración por la masa del elemento del fluido podemos obtener la inercia

$$(dm)\vec{a} = \rho(dV) \frac{D\vec{v}}{Dt}.$$

Si queremos calcular la inercia total del sistema, debemos repetir este cálculo para cada uno de los elementos del fluido y sumarlos, esto es,

$$M\vec{a} = \int_V \rho \frac{D\vec{v}}{Dt} dV.$$

La segunda ley de Newton nos dice que esto debe de ser igual a la fuerza neta actuando sobre el sistema, de modo que,

$$\int_V \rho \frac{D\vec{v}}{Dt} dV = \vec{F}_p + \vec{F}_g = \int_V \rho \vec{g} dV - \int_A \vec{n} p da = \int_V \rho \vec{g} dV - \int_V \nabla p dV.$$

En la última igualdad hemos utilizad el teorema de la divergencia para convertir de una integral de superficie a una integral de volumen, esto para contar con tres integrales de volumen sobre el mismo domino. Si combinamos estas tres integrales obtenemos

$$\int_V \left[\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} - \rho \vec{g} + \nabla p \right] dV = 0.$$

Ya que esto se debe de cumplir para cualquier volumen V , entonces, el integrando debe de ser siempre cero, lo que nos lleva a obtener

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} = \vec{g} - \frac{1}{\rho} \nabla p, \quad (4.2)$$

que es conocida como la **ecuación de Euler**. Esta ecuación es muy importante ya que, si trabajamos bajo la hipótesis del continuo, nos brinda el mismo numero de ecuaciones que de incógnitas.

Otra relación que conocemos entre las incógnitas es la ecuación de continuidad, la cual viene del balance de la masa

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0. \quad (4.3)$$

Para un fluido incompresible, ρ será siempre constante con respecto tanto del tiempo como de la posición, entonces la ecuación (4.3) se reduce a

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0. \quad (4.4)$$

Ahora, para revisar que efectivamente tentemos tantas ecuaciones como incógnitas hay que hacer notar que las incógnitas en (4.2) y (4.3) son \vec{v} y p , lo cual representa tres componentes escalares de \vec{v} y p , para un total de cuatro incógnitas escalares. Ahora, para la parte de las ecuaciones, revisamos que las ecuaciones de Euler y de Continuidad nos dan 4 ecuaciones diferentes, ya que la ecuación de Euler puede descomponerse en tres ecuaciones escalares. Entonces, efectivamente contamos con el mismo número de ecuaciones que de incógnitas. En general, al conjunto de ecuaciones (4.2) y (4.3) lo llamaremos **Ecuaciones de Euler para el movimiento de fluidos incompresibles**.

Teorema de Kelvin

Un precursor de la teoría del flujo potencial es el *principio de conservación de la circulación*. Para entrar en detalles de este principio, primero necesitamos definir lo que es la velocidad de circulación, la cual se puede expresar como

$$\Gamma \equiv \oint_C \vec{v} \cdot d\vec{r}$$

para cualquier contorno cerrado. Esta integral de contorno está asociada con el momento angular promedio de los elementos del fluido en la superficie. Kelvin demostró que la velocidad de circulación se conserva, esto quiere decir que

$$\frac{d\Gamma}{dt} = 0,$$

para cualquier conjunto de puntos materiales que formen un contorno cerrado en un fluido ideal. Este resultado es llamado **el teorema de Kelvin**.

Flujo irrotacional de un fluido incompresible

Si consideramos un objeto sumergido en un fluido ideal, el cual de otra forma se encontraría estacionario, tendremos que

$$\vec{v}(\vec{r}, t = 0) = \vec{0}.$$

Considerando también, en el fluido, un contorno cerrado que se encuentre lejos de la perturbación causada por el movimiento de sumergir el objeto, la integral de contorno se hará cero dado cuando \vec{v} sea cero, esto es

$$\oint_C \vec{v} \cdot d\vec{r} = 0 \quad \text{en } t = 0,$$

dado que

$$\vec{v} = 0,$$

para cualquier contorno C. Después de un cierto tiempo, el objeto sumergido se mueve dentro de la vecindad de C y provoca que la velocidad \vec{v} sea diferente de cero. A pesar de eso, el teorema de Kelvin nos dice que

$$\oint_C \vec{v} \cdot d\vec{r} = 0,$$

para todo tiempo t , sin importar que $\vec{v} \neq 0$.

Esto debe de cumplirse también para cualquier contorno cerrado en la región, ya que el contorno inicialmente tiene un valor de cero para esta integral. Ahora, usando que

$$\nabla \times \vec{v} = \vec{0},$$

para todo \vec{v} en cualquier tiempo, podemos obtener que

$$\vec{v} = \nabla \phi, \quad (4.5)$$

donde ϕ es la velocidad potencial.

Si sustituimos (4.5) en (4.4), obtendremos una ecuación de Laplace para la velocidad potencial:

$$\nabla^2 \phi = 0.$$

Con esto, en lugar de tener cuatro ecuaciones y cuatro incógnitas, tendremos una única ecuación que puede resolverse para ϕ y $\vec{v} = \nabla \phi$, sin necesidad de acoplar la ecuación de Euler.

Una vez que conocemos el perfil de velocidad \vec{v} , podemos determinar el perfil de presión p de la ecuación de Euler

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} = \vec{g} - \frac{1}{\rho} \nabla p.$$

Ahora, integraremos esta ecuación vectorial para obtener una sola ecuación escalar para el perfil de presión, cada término de ella se podrá expresar como el gradiente de algo. Por ejemplo, sabemos que

$$\vec{g} = -\nabla \phi_g,$$

y de manera similar, si ρ es constante, tenemos que

$$\frac{1}{\rho} \nabla p = \nabla \left(\frac{p}{\rho} \right). \quad (4.6)$$

Para el flujo potencial, el término transiente se convierte en

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \phi) = \nabla \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right), \quad (4.7)$$

y, finalmente, para el término de convección, podemos aplicar

$$\vec{v} \cdot \nabla \vec{v} = \frac{1}{2} \nabla v^2 - \vec{v} \times (\nabla \times \vec{v}),$$

donde $\vec{v} \cdot \vec{v} = v^2$, y $v = |\vec{v}|$.

En nuestro caso, el segundo término desaparece, ya que $\nabla \times \vec{v} = \vec{0}$ para el flujo potencial, y entonces obtendremos

$$\nabla \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + \phi_g + \frac{p}{\rho} \right) = \vec{0},$$

que es llamada la **Ecuación de Bernoulli**. Dicha ecuación implica que

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + \phi_g + \frac{p}{\rho}$$

es constante con respecto de \vec{r} , esto quiere decir que, es espacialmente uniforme pero puede depender del tiempo. Una vez que logramos obtener el perfil de velocidad, ya conocemos tanto ϕ como v , llegamos a que p la única incógnita.

4.2. Ecuaciones de Saint-Venant

Los flujos de aguas someras son una de las tantas formas en las cuales la hidrodinámica se presenta. De hecho, contrario a lo que su nombre sugiere, el fluido que vamos a tratar no necesita ser agua, muchos aspectos del flujo en la atmósfera son descritos de igual manera por las ecuaciones de aguas someras. Lo único que sí necesitamos es que la profundidad (o el espesor) a sea pequeña comparada con la escala horizontal L , desde aquí pueden surgir muchas aplicaciones para estas ecuaciones. Dependiendo de los parámetros que nos interese obtener de estas ecuaciones, podemos llegar a diferentes variaciones de las ecuaciones de aguas someras.

Para poder darnos cuenta de cuándo y dónde es importante un efecto en particular, es necesario una obtención cuidadosa de las ecuaciones.

4.2.1. Ecuaciones de Navier-Stokes y de Reynolds

Las ecuaciones de Navier-Stokes describen los efectos de conservación de masa y de momento. Como ya explicamos antes, nos basaremos en que tratamos con fluidos incompresibles, esto no quiere decir que la densidad sea constante, pero por sí que será independiente de la presión p . Sin embargo, la densidad podrá variar debido a otras razones como la salinidad o la temperatura.

Podemos expresar la conservación del momento como

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u^2) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho uv) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho uw) - \rho f v + \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial t}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho uv) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v^2) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho vw) + \rho f u + \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial t}(\rho w) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho uw) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho vw) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w^2) + \rho g + \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \quad (4.8)$$

En este caso el sistema de coordenadas (x, y, z) cuenta con un z positivo hacia arriba, un campo de velocidades (u, v, w) , donde t es el tiempo, p es la presión, ρ es la densidad, g es la aceleración de la gravedad y $f = 2\Omega \sin \phi$ es el parámetro de Coriolis, el cual indica el efecto de la rotación de la tierra (Ω es la frecuencia angular de giro y ϕ la latitud geográfica). Esto lo podemos observar en la figura (4.1).

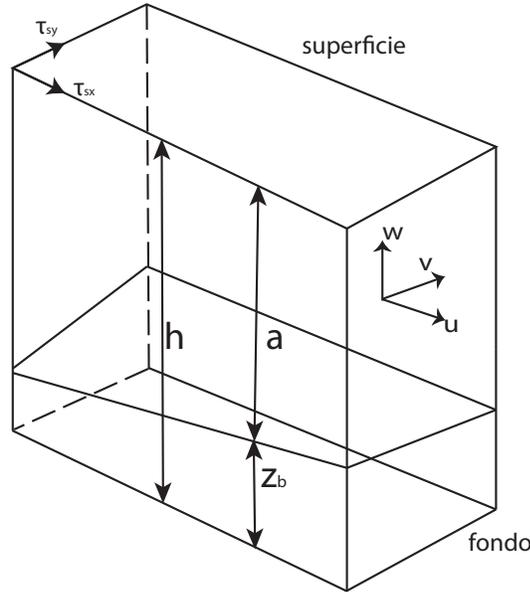


Figura 4.1: Definición del sistema de coordenadas y fronteras.

Los esfuerzos debidos a la viscosidad τ_{ij} se expresan en términos del ritmo de deformación como

$$\frac{\tau_{ij}}{\rho} = v \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad (4.9)$$

donde v es la viscosidad cinética medida en m^2/s . En este caso, x_i sirve para denotar las coordenadas (x, y, z) y u_j denota (u, v, w) con $j = 1, 2, 3$.

Aplicando el principio de conservación de masa a un elemento del fluido, podemos generalizar para llegar a la ecuación de la conservación de la masa

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w) = 0.$$

Aquí, la densidad del agua ρ depende en general de la presión p , la temperatura T y la salinidad S .

Otras ecuaciones muestran la conservación de calor y salinidad (definida como la masa de sal disuelta por unidad de masa de agua). La conservación de masa de sal disuelta nos dice que

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho S) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u S) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v S) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w S) - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(D \frac{\partial \rho S}{\partial x_j} \right) = 0,$$

donde D es el coeficiente de difusión de la sal en el agua. Si combinamos esto con la ecuación total de masa y asumimos que los términos de difusión son pequeños, podemos encontrar la ecuación para la salinidad

$$\frac{\partial S}{\partial t} + u \frac{\partial S}{\partial x} + v \frac{\partial S}{\partial y} + w \frac{\partial S}{\partial z} = 0,$$

la cual dice que la salinidad, en cierto volumen de agua, se mantendrá constante si nos movemos junto con ella. Un enfoque similar se puede aplicar para la temperatura. Se dice que un fluido es incompresible si su densidad no depende de la presión p , nuevamente, esto no dice que la densidad sea constante, sino que únicamente depende de T y S por medio de la ecuación de estado

$$\rho = f(T, S).$$

Entonces, la tasa de cambio en la densidad para un elemento del fluido puede expresarse como

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} + w \frac{\partial \rho}{\partial z} = \frac{\partial \rho}{\partial T} \frac{dT}{dt} + \frac{\partial \rho}{\partial S} \frac{dS}{dt} = 0,$$

donde nuevamente estamos ignorando los efectos de la difusión.

Si combinamos esto con la ecuación de conservación para la masa total, llegaremos a la ecuación de balance de masa (o ecuación de continuidad) para fluidos incompresibles:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (4.10)$$

Hasta ahora hemos trabajado de manera independiente a la forma exacta de la ecuación de estado, la cual es complicada para agua. Lo importante es que, para una variaciones

reales de temperatura y salinidad, sólo habrá pequeñas variaciones en la densidad. Estas variaciones tan pequeñas no tienen consecuencias importantes en los términos de inercia de las primeras ecuaciones de (4.8) ni en los términos de viscosidad, por lo que podemos tomar la densidad como una constante. La única parte donde las variaciones de densidad son importantes es en el término de gravedad de la última ecuación de (4.8) y, en ese caso, tendremos que utilizar la densidad real. Este enfoque, de tomar en cuenta las variaciones de densidad únicamente en los términos de gravedad, se llama *Aproximación de Boussinesq* y es una suposición hecha en casi todo tipo de flujos geofísicos.

Esencialmente, en todas las aplicaciones encontramos flujo turbulento, el cual se compone de movimientos estocásticos o fuerzas eddie con grandes escalas de variación. Aunque generalmente se dice que las ecuaciones de Navier-Stokes describen turbulencias, en nuestra aplicación no son útiles ya que nos interesa únicamente problemas de gran escala. Para aislar estos términos, comúnmente se hace un promedio de las ecuaciones en algún sentido (puede ser en un intervalo de tiempo, en un dominio del espacio o sobre un conjunto de posibles realizaciones estocásticas). Para esto, supondremos que cada variable puede descomponerse en un "promedio" que varía más lentamente y una variación aleatoria cerca de él:

$$u = \bar{u} + u'.$$

Es importante hacer notar que el promedio de un producto no es el producto de los promedios

$$\overline{uv} = \bar{u}\bar{v} + \overline{u'v'},$$

si sustituimos esta separación en todas las variables de las ecuaciones de Navier-Stokes y tomamos el promedio, podemos obtener las ecuaciones que son conocidas como las ecuaciones de Reynolds para el promedio estadístico de un flujo turbulento. Estas ecuaciones tienen la misma forma que las ecuaciones originales de Navier-Stokes, con la diferencia de que aparece un esfuerzo adicional, llamado esfuerzo de Reynolds, que representa el intercambio de momento entre los elementos de fluido en movimiento turbulento. Esto ocurre en la misma manera que los esfuerzos viscosos, entonces, podemos combinar los esfuerzos como

$$\frac{\tau_{ij}}{\rho} = \nu \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) - \overline{u'_i u'_j}. \quad (4.11)$$

Debido a que los esfuerzos de Reynolds son desconocidos, estos tienen que ser expresados en términos del promedio de movimiento para obtener un sistema cerrado de ecuaciones. Este problema de "cierre" es uno de los temas más trabajados en el estudio de turbulencias. Sin embargo, para nuestro propósito es suficiente formular los esfuerzos en (4.11)

de una manera similar a la de (4.9), pero con una viscosidad turbulenta efectiva ν_t .

Un tema similar al de promediar surge cuando se tienen campos de flujo de olas cortas (inducidas por el viento). Si se está interesado en las características de flujo a gran escala es conveniente hacer un promedio sobre muchos periodos pequeños de tiempo pero, nuevamente, resulta que las olas no tienen efecto en el promedio del flujo.

4.2.2. Condiciones de Frontera en la Superficie y en el Fondo

Para conseguir soluciones fijas de las ecuaciones diferenciales hace falta establecer las condiciones de frontera. Para la obtención de las ecuaciones de aguas someras primero usaremos condiciones en la superficie libre del agua y en el fondo sólido.

Las condiciones en la superficie y en el fondo están dadas de dos maneras diferentes. Primeramente, la condición cinemática dice que las partículas de agua no deben de cruzar ninguna de estas dos fronteras. La condición de fondo sólido quiere decir que la componente normal de la velocidad debe desaparecer:

$$u \frac{\partial z_b}{\partial x} + v \frac{\partial z_b}{\partial y} - w = 0 \quad \text{en} \quad z = z_b,$$

donde z_b es el nivel de fondo, medido desde algún punto de referencia horizontal. En la superficie libre las cosas son un poco más complicadas, esto debido a que la superficie puede estar en constante movimiento. En este caso la velocidad normal relativa debe desaparecer,

$$\frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} + v \frac{\partial h}{\partial y} - w = 0 \quad \text{en} \quad z = h,$$

donde h es el nivel de la superficie medida desde algún nivel horizontal de referencia.

En un segundo paso, tenemos condiciones de frontera dinámicas lo cual nos da información sobre las fuerzas que actúan en las fronteras. En el fondo, podemos asumir que el fluido viscoso se pega al fondo, esto es, tenemos condiciones de no deslizamiento

$$u = v = 0.$$

Por su parte, en la superficie libre, la continuidad de los esfuerzos se debe asumir, entonces asumiremos que los esfuerzos en el fluido, en un punto justo debajo de la superficie libre, son los mismos que en el aire justo arriba. Esto quiere decir que la tensión superficial no se toma en cuenta. Entonces, para la presión tendremos que

$$p = P_a,$$

donde P_a es la presión atmosférica. El nivel de presión absoluta no es importante en este caso, así que se puede tomar como cero. Por su parte, las diferencias pueden llegar a ser importantes si nos interesa estudiar el efecto de las variaciones de presión atmosférica en el movimiento del agua. En la superficie del agua en el mar puede actuar un esfuerzo cortante debido a la acción del viento, esto se puede expresar como

$$\tau_{sx} = -\tau_{xx} \frac{\partial h}{\partial x} - \tau_{xy} \frac{\partial h}{\partial y} + \tau_{xz}, \quad \text{en } z = h, \quad (4.12)$$

y, de manera similar, se puede obtener para la dirección y . El vector de esfuerzo del viento del lado izquierdo es conocido debido a que es una fuerza externa. Entonces, si juntamos (4.12) y (4.9) obtenemos una condición de frontera para el campo de velocidades. En el fondo, una relación parecida es lo que define el esfuerzo del fondo, el cual no es conocido y debe de ser uno de los resultados del modelo.

4.2.3. Escalas

Para explicar a qué nos referimos con aguas someras debemos de considerar las escalas típicas para estos problemas. Esto no siempre es fácil debido a que en esto intervienen factores externos (como la topografía de la región o las variaciones en los esfuerzos del aire) e internos (como la longitud de las ondas generadas por el sistema). Las escalas verticales que nos interesan, en la dirección vertical, son:

1. La profundidad del agua a (h es usado para el nivel de la superficie del agua).
2. El espesor δ de las capas de la frontera en el fondo y en la superficie, las cuales son generadas por la viscosidad y por la influencia de la rotación de la tierra. Debido a que estas son determinadas por el flujo, el espesor de las capas frontera es una escala interna. En ríos, lagos y costas, las capas de frontera son comúnmente más gruesas que la profundidad del agua y, debido a esto, toda la capa de agua se encuentra dentro de la capa de frontera. Por otra parte, en aguas profundas como el océano, las capas de la frontera son muy delgadas en comparación con la profundidad del agua y, en estos casos, la profundidad del agua seguirá siendo una escala vertical relevante para el movimiento.
3. Las variaciones del nivel del fondo: profundidad de los cantales y altura de los bancos de arena.
4. La variación del nivel del agua, la cual nuevamente es una escala interna, ya que no esta impuesta directamente por factores externos.

En la dirección horizontal, las escalas que nos interesan son:

1. Las dimensiones físicas de la cuenca a considerar: el ancho del río o la longitud de un lago.
2. Escalas horizontales de la topografía del fondo.
3. La distancia sobre la cual las fuerzas externas varían: variaciones del esfuerzo del viento o de la presión atmosférica.
4. La longitud de onda, la cual es una escala interna determinada por otros factores como la frecuencia de la marea y las dimensiones de la cuenca.

La suposición básica en la teoría de aguas someras es que la escala vertical H es mucho más pequeña que la escala horizontal L . Esto hace que el flujo se encuentre en el caso en que todos los flujos están dentro de la capa de frontera. La parte complicada es decir que tan pequeña debe de ser la proporción H/L , para la teoría de ondas lineales, la cual no involucra las suposiciones comunes de las aguas someras desde el inicio, dice que una onda larga de aguas someras se obtiene cuando la proporción es menor a 0.05. Entonces, consideraremos este como el límite superior para dicha razón.

4.2.4. Capa frontera

Utilizando las escalas explicadas en la sección anterior se pueden, hasta cierto punto, simplificar las ecuaciones. Primero que nada, tomando en cuenta la ecuación de continuidad (4.10), si x, y tienen escalas típicas L , y los componentes horizontales de la velocidad u y v son del orden de U , los dos primeros términos de la ecuación son del orden U/L . Sin embargo no se cancelarán entre ellos, lo cual dice que el tercer término debe de ser del mismo orden, de otra manera no se puede lograr un equilibrio entre los tres términos. Asumiendo que la escala de longitud vertical es la profundidad del agua a , entonces, la componente vertical de la velocidad es del orden de $W = Ua/L$ y, entonces, es menor que la componente horizontal en un factor igual a la escala de longitud.

En una segunda instancia, considerando la ecuación de momento vertical y tomando en cuenta las escalas de longitud y velocidad, se pueden estimar todos los términos con excepción del gradiente de la presión. Debido al escalamiento de w , todos los términos advectivos resultan ser de magnitud comparable. No podemos omitir el término de advección vertical como se suele hacer, pero, como podremos ver más adelante, no será necesario hacerlo. El gradiente de los términos de esfuerzos junto con la formulación hecha de la viscosidad involucra términos de con segundas derivadas, pero tampoco nos debe de preocupar ya

que únicamente las derivadas verticales son importantes en la capa de frontera, debido a que las segundas derivadas en la dirección horizontal son menores por un factor $(a/L)^2$. Comparando todo con el término de la gravedad $g\rho$, tendremos las proporciones:

Aceleración local	Términos advectivos	Grandientes de esfuerzos
$\frac{Ua}{gTL}$	$\frac{U^2a}{gL^2}$	$\frac{vU}{ga^2}$

o bien

$\frac{Fa^2}{L^2}$	$\frac{F^2a^2}{L^2}$	$\frac{F^2}{Re}$
--------------------	----------------------	------------------

donde suponemos que $T = L/(ga)^{1/2}$. Si tomamos en cuenta los valores dimensionales que tenemos, podemos concluir que todos los términos son pequeños en comparación con la aceleración de la gravedad, únicamente el gradiente de la presión permanece para lograr un balance y, entonces, podemos decir que la distribución de la presión hidrostática tiene la forma

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g, \quad (4.13)$$

la cual puede ser considerada la propiedad central en la teoría de aguas someras. Si integramos sobre la superficie del agua, utilizando las condiciones de frontera descritas, obtenemos

$$p = g \int_z^h \rho dz + p_a.$$

Entonces, si la densidad no es constante dependiendo de la profundidad, los gradientes de presión también dependerán de z . Para este trabajo nos enfocaremos en las ecuaciones con promedio en la profundidad, para las cuales las variaciones en la profundidad no pueden ser acomodadas. En este caso, la densidad debe ser considerada como una constante en la profundidad, por lo cual tendremos el caso de

$$p = \rho g(h - z) + p_a. \quad (4.14)$$

De aquí, podemos determinar los gradientes de la presión, como

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \rho g \frac{\partial h}{\partial x} + g(h - z) \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial p_a}{\partial x}, \quad (4.15)$$

y análogamente para los casos en y y z .

Con todo lo que tenemos hasta ahora, las ecuaciones de momento tienen la forma

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(u^2) + \frac{\partial}{\partial y}(uv) + \frac{\partial}{\partial z}(uw) - fv + g \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{g}{\rho_0}(h-z) \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p_a}{\partial x} - \frac{1}{\rho_0} \left[\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \right] = 0, \quad (4.16)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(uv) + \frac{\partial}{\partial y}(v^2) + \frac{\partial}{\partial z}(vw) + fu + g \frac{\partial h}{\partial y} + \frac{g}{\rho_0}(h-z) \frac{\partial \rho}{\partial y} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p_a}{\partial y} - \frac{1}{\rho_0} \left[\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} \right] = 0. \quad (4.17)$$

Si juntamos estas ecuaciones, junto con la ecuación de continuidad (4.10), obtenemos las llamadas “Ecuaciones de aguas someras en tres dimensiones”, las cuales no son muy diferentes a las ecuaciones estándar de la capa frontera. Los esfuerzos en las direcciones x y y pueden ser ignorados, pero para el caso que nos interesa esto no será necesario. Dado que los problemas que nos interesan cuentan, para todos los fines prácticos, con dos dimensiones (debido a la diferencia en escalas), nos interesa trabajar con ecuaciones más sencillas, las ecuaciones en dos dimensiones.

4.3. Ecuaciones de Aguas Someras en dos Dimensiones

Para obtener las ecuaciones de aguas someras en dos dimensiones tenemos que realizar un paso de integración sobre las ecuaciones de momento horizontal, (4.16) y (4.17), y en la ecuación de continuidad (4.10) sobre la profundidad $a = h - z_b$. Empezando por esta última ecuación tenemos que

$$\int_{z_b}^h \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) dz + [w]_{z_b}^h = \frac{\partial}{\partial x}(a\bar{u}) + \frac{\partial}{\partial y}(a\bar{v}) + [w]_{z_b}^h - \frac{\partial h}{\partial x} u_s - \frac{\partial h}{\partial y} v_s + \frac{\partial z_b}{\partial x} u_b - \frac{\partial z_b}{\partial y} v_b = 0,$$

en este caso la barra indica el promedio sobre el valor de la profundidad, s y b son los términos de corrección de la superficie y el fondo obtenidos por la integración y diferenciación con la frontera dependiendo de x y de y . Utilizando las condiciones de frontera descritas en la sección anterior, los términos del fondo se cancelan y los términos de la superficie nos llevan a la tasa de cambio en el nivel de la superficie

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(a\bar{u}) + \frac{\partial}{\partial y}(a\bar{v}) = 0. \quad (4.18)$$

Esto también se podría obtener directamente considerando el balance de masa en la columna vertical de agua.

Una operación similar debe de aplicarse a (4.16) y a (4.17). El proceso para los términos advectivos es exactamente el mismo que el que se acaba de mostrar, y los términos de la superficie y del fondo se cancelan debido a las condiciones de frontera. Sin embargo, se obtienen términos no lineales como

$$\int_{z_b}^h uvdz = a\bar{u}\bar{v} + \int_{z_b}^h (u - \bar{u})(v - \bar{v})dz.$$

A pesar de que la segunda integral es bastante similar a los esfuerzos turbulentos de Reynolds, no se originan por fluctuaciones turbulentas estocásticas, sino debido al desvío del campo de velocidades por el valor del promedio de la profundidad. Ya que esto proviene del término advectivo, es comúnmente llamado “Término de advección diferencial” y describe el intercambio de momento lateral debido a la diferencia de velocidades sobre la profundidad del fluido.

La integración de los términos de presión de y Coriolis es directa. Por otra parte, para los términos de esfuerzo se tiene que, en la dirección x

$$\begin{aligned} \int_{z_b}^h \left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \right) dz &= \frac{\partial}{\partial x} \int_{z_b}^h \tau_{xx} dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{z_b}^h \tau_{xy} dz + \\ &- \left[\tau_{xx} \frac{\partial h}{\partial x} + \tau_{xy} \frac{\partial h}{\partial y} - \tau_{xz} \right]_{z=h} + \left[\tau_{xx} \frac{\partial z_b}{\partial x} + \tau_{xy} \frac{\partial z_b}{\partial y} - \tau_{xz} \right]_{z=z_b}; \end{aligned}$$

y, análogamente, en la dirección y

$$\begin{aligned} \int_{z_b}^h \left(\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} \right) dz &= \frac{\partial}{\partial x} \int_{z_b}^h \tau_{yx} dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{z_b}^h \tau_{yy} dz + \\ &- \left[\tau_{yx} \frac{\partial h}{\partial x} + \tau_{yy} \frac{\partial h}{\partial y} - \tau_{yz} \right]_{z=h} + \left[\tau_{yx} \frac{\partial z_b}{\partial x} + \tau_{yy} \frac{\partial z_b}{\partial y} - \tau_{yz} \right]_{z=z_b}. \end{aligned}$$

Ahora, haciendo la integración sobre la profundidad obtendremos

$$\frac{\partial}{\partial t}(au) + \frac{\partial}{\partial x}(au^2) + \frac{\partial}{\partial y}(auv) - fav + ga \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{ga^2}{2\rho_0} \frac{\partial \rho}{\partial x} - \frac{1}{\rho} \tau_{bx} - \frac{\partial}{\partial x}(aT_{xx}) - \frac{\partial}{\partial y}(aT_{xy}) = F_x, \quad (4.19)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(av) + \frac{\partial}{\partial x}(auv) + \frac{\partial}{\partial y}(av^2) + fau + ga \frac{\partial h}{\partial y} + \frac{ga^2}{2\rho_0} \frac{\partial \rho}{\partial y} - \frac{1}{\rho} \tau_{by} - \frac{\partial}{\partial x}(aT_{xy}) - \frac{\partial}{\partial y}(aT_{yy}) = F_y. \quad (4.20)$$

En estas expresiones T_{ij} representan el esfuerzo lateral, el cual incluye los términos de fricción viscosa, fricción turbulenta y advección diferencial, y se expresa de la siguiente

manera:

$$T_{ij} = \frac{1}{a} \int_{z_b}^h \left[v \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \overline{u'_i u'_j} + (u_i - \overline{u_i})(u_j - \overline{u_j}) \right] dz. \quad (4.21)$$

Las ecuaciones (4.19) y (4.20) junto con (4.18) forman las ecuaciones de aguas someras que son de interés para este trabajo.

Las ecuaciones "estándar" de aguas someras se obtienen omitiendo algunas de las complicaciones y adoptando algunas parametrizaciones en su lugar. Si en las ecuaciones (4.19), (4.20) y (4.18) omitimos los esfuerzos laterales y las fuerzas motrices, y asumimos la expresión más sencilla para el esfuerzo del fondo, entonces podemos obtener

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(au) + \frac{\partial}{\partial y}(av) = 0, \quad (4.22)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(au) + \frac{\partial}{\partial x}(au^2) + \frac{\partial}{\partial y}(auv) - fav + ga \frac{\partial h}{\partial x} c_f u \sqrt{u^2 + v^2} = 0, \quad (4.23)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(av) + \frac{\partial}{\partial x}(auv) + \frac{\partial}{\partial y}(av^2) + fau + ga \frac{\partial h}{\partial y} c_f v \sqrt{u^2 + v^2} = 0, \quad (4.24)$$

las cuales son llamadas **ecuaciones conservativas** para aguas someras, las cuales están escritas lo más parecido posible en forma de un balance de flujos de masa y momento. Este sistema se puede expresar como una sola ecuación vectorial

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{f}_1}{\partial x} + \frac{\partial \vec{f}_2}{\partial y} + \vec{s} = 0$$

donde los flujos y las fuentes están definidos como

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} au \\ av \\ a \end{pmatrix}, \quad \vec{f}_1 = \begin{pmatrix} au^2 + \frac{1}{2}ga^2 \\ auv \\ au \end{pmatrix}, \quad \vec{f}_2 = \begin{pmatrix} auv \\ av^2 + \frac{1}{2}ga^2 \\ av \end{pmatrix},$$

$$\vec{s} = \begin{pmatrix} -fav + c_f u |\vec{v}| + ga \frac{\partial z_b}{\partial x} \\ fau + c_f v |\vec{v}| + ga \frac{\partial z_b}{\partial y} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Para el caso que nos interesa estudiar, debemos de hacer unas algunas diferenciaciones

y cancelaciones en estas expresiones, para obtener

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(au) + \frac{\partial}{\partial y}(av) = 0, \quad (4.25)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - fv + g \frac{\partial h}{\partial x} + c_f \frac{u}{a} \sqrt{u^2 + v^2} = 0, \quad (4.26)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + fu + g \frac{\partial h}{\partial y} + c_f \frac{v}{a} \sqrt{u^2 + v^2} = 0, \quad (4.27)$$

las cuales son llamadas las ecuaciones **diferenciales** o **no conservativas** de aguas someras. Ambas expresiones son equivalentes, pero no lo son cuando se hace la discretización numérica. Al hacer la discretización numérica de las ecuaciones no conservativas, podemos lograr mayor precisión y estabilidad haciendo uso de técnicas explicadas en el siguiente capítulo.

R

Capítulo 5

Resultados y Conclusiones

5.1. Regiones Rectangulares

Una vez obtenidas y explicadas las ecuaciones de aguas someras, procedemos a desarrollar una implementación para aproximar la solución de las mismas por medio de esquemas de diferencias finitas. En esta sección nos enfocaremos en los esquemas para regiones rectangulares, pasando en una sección más adelante a regiones no rectangulares.

Partimos de las ecuaciones de aguas someras no conservativas explicadas en el capítulo anterior

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(au) + \frac{\partial}{\partial y}(av) = 0, \quad (5.1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - fv + g \frac{\partial h}{\partial x} + c_f \frac{u}{a} \sqrt{u^2 + v^2} = 0, \quad (5.2)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + fu + g \frac{\partial h}{\partial y} + c_f \frac{v}{a} \sqrt{u^2 + v^2} = 0, \quad (5.3)$$

las cuales podemos escribir en forma vectorial como

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + A \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} + B \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} + C \vec{v} + s = 0$$

en donde

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ a \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} u & 0 & g \\ 0 & u & 0 \\ a & 0 & u \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} v & 0 & 0 \\ 0 & v & g \\ 0 & a & v \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} c_f |\vec{v}|/a & -f & 0 \\ f & c_f |\vec{v}|/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad s = \begin{pmatrix} g \frac{\partial z_b}{\partial x} \\ g \frac{\partial x_b}{\partial y} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

5.1.1. Discretización Espacial

Aprovechando que conocemos las condiciones de frontera en todo el dominio de la misma, podemos utilizar un esquema de diferencias finitas centradas en el espacio, el cual tiene la forma

$$\frac{\partial A}{\partial x} = \frac{A_{i+1,j} - A_{i-1,j}}{2\Delta x},$$

$$\frac{\partial A}{\partial y} = \frac{A_{i,j+1} - A_{i,j-1}}{2\Delta y},$$

donde los subíndices i, j representan el nodo lógico de la malla. Aplicando estos esquemas a las ecuaciones antes descritas podemos obtener

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{u_{i+1,j}a_{i+1,j} - u_{i-1,j}a_{i-1,j}}{2\Delta x} + \frac{v_{i,j+1}a_{i,j+1} - v_{i,j-1}a_{i,j-1}}{2\Delta y} = 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u_{i,j} \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2\Delta x} + v_{i,j} \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{\Delta y} - f v_{i,j} + g \frac{h_{i+1,j} - h_{i-1,j}}{2\Delta x} + c_f \frac{u_{i,j}}{a_{i,j}} \sqrt{u_{i,j}^2 + v_{i,j}^2} = 0,$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u_{i,j} \frac{v_{i+1,j} - v_{i-1,j}}{2\Delta x} + v_{i,j} \frac{v_{i,j+1} - v_{i,j-1}}{\Delta y} + f u_{i,j} + g \frac{h_{i,j+1} - h_{i,j-1}}{2\Delta y} + c_f \frac{v_{i,j}}{a_{i,j}} \sqrt{u_{i,j}^2 + v_{i,j}^2} = 0,$$

recordando que en estas expansiones aún no se ha trabajado con la discretización en el tiempo.

Buscando lograr una mejor aproximación, se puede introducir un promedio en diferentes puntos espaciales en las expresiones anteriores, si denotamos por

$$M_x A = \frac{A_{i+1,j} + A_{i-1,j}}{2},$$

y

$$M_y A = \frac{A_{i,j+1} + A_{i,j-1}}{2},$$

El error local de truncamiento puede entonces expresarse como

$$M_y \frac{\partial A_{i,j}}{\partial x} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial A_{i,j+1}}{\partial x} + \frac{\partial A_{i,j-1}}{\partial x} \right) = \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{1}{6} \Delta x^2 \frac{\partial^3 A}{\partial x^3} + \frac{1}{2} \Delta y^2 \frac{\partial^3 A}{\partial x \partial y^2} + \dots$$

donde el último término se debe a promediar. Podemos ver entonces que el error local de truncamiento no cambia mucho, pero este promedio puede tener un efecto muy importante en la precisión. Entonces, nuestras ecuaciones ahora tendrán la forma

$$\frac{\partial h_{i,j}}{\partial t} + \frac{u_{i+1,j}M_y a_{i+1,j} - u_{i-1,j}M_y a_{i-1,j}}{2\Delta x} + \frac{v_{i,j+1}M_x a_{i,j+1} - v_{i,j-1}M_x a_{i,j-1}}{2\Delta y} = 0, \quad (5.4)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_{i,j}}{\partial t} + u_{i,j}M_y \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2\Delta x} + v_{i,j}M_x \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{\Delta y} - f v_{i,j} + g \frac{h_{i+1,j} - h_{i-1,j}}{2\Delta x} + \\ + c_f \frac{u_{i,j}}{M_1 a_{i,j}} \sqrt{u_{i,j}^2 + v_{i,j}^2} = 0, \end{aligned} \quad (5.5)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_{i,j}}{\partial t} + u_{i,j}M_y \frac{v_{i+1,j} - v_{i-1,j}}{2\Delta x} + v_{i,j}M_x \frac{v_{i,j+1} - v_{i,j-1}}{\Delta y} + f u_{i,j} + g \frac{h_{i,j+1} - h_{i,j-1}}{2\Delta y} + \\ + c_f \frac{v_{i,j}}{M_1 a_{i,j}} \sqrt{u_{i,j}^2 + v_{i,j}^2} = 0, \end{aligned} \quad (5.6)$$

en este caso se introduce el operador

$$M_1 A = \frac{1}{4} (A_{i+1,j} + A_{i-1,j} + A_{i,j+1} + A_{i,j-1})$$

para lograr una mejor aproximación.

5.1.2. Discretización Temporal

Una vez que contamos con una efectiva discretización espacial, es importante contar también con una discretización temporal adecuada. Debido a que nos interesa predecir el comportamiento de un cuerpo de agua en un momento futuro, es conveniente utilizar un esquema de diferencias finitas hacia adelante en el tiempo, el cual tiene la forma

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \frac{A^{k+1} - A^k}{\Delta t},$$

donde el superíndice k representa el nivel de tiempo.

Utilizando este tipo de esquemas para la discretización en el tiempo, nuestro esquema tendrá ahora la forma

$$\frac{h_{i,j}^{k+1} - h_{i,j}^k}{\Delta t} + \frac{u_{i+1,j}^k M_y a_{i+1,j} - u_{i-1,j}^k M_y a_{i-1,j}}{2\Delta x} + \frac{v_{i,j+1}^k M_x a_{i,j+1} - v_{i,j-1}^k M_x a_{i,j-1}}{2\Delta y} = 0, \quad (5.7)$$

$$\begin{aligned} \frac{u_{i,j}^{k+1} - u_{i,j}^k}{\Delta t} + u_{i,j}^k M_y \frac{u_{i+1,j}^k - u_{i-1,j}^k}{2\Delta x} + v_{i,j}^k M_x \frac{u_{i,j+1}^k - u_{i,j-1}^k}{\Delta y} - f v_{i,j}^k + g \frac{h_{i+1,j}^k - h_{i-1,j}^k}{2\Delta x} + \\ + c_f \frac{u_{i,j}^k}{M_1 a_{i,j}} \sqrt{(u_{i,j}^k)^2 + (v_{i,j}^k)^2} = 0, \end{aligned} \quad (5.8)$$

$$\begin{aligned} \frac{v_{i,j}^{k+1} - v_{i,j}^k}{\Delta t} + u_{i,j}^k M_y \frac{v_{i+1,j}^k - v_{i-1,j}^k}{2\Delta x} + v_{i,j}^k M_x \frac{v_{i,j+1}^k - v_{i,j-1}^k}{\Delta y} + f u_{i,j}^k + g \frac{h_{i,j+1}^k - h_{i,j-1}^k}{2\Delta y} + \\ + c_f \frac{v_{i,j}^k}{M_1 a_{i,j}} \sqrt{(u_{i,j}^k)^2 + (v_{i,j}^k)^2} = 0. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Si en cada una de las ecuaciones anteriores despejamos el término que tiene superíndice $k+1$, podemos obtener un esquema para aproximar cada una de las variables por separado, el cual podemos escribir como

$$h_{i,j}^{k+1} = h_{i,j}^k - \Delta t \left(\frac{u_{i+1,j}^k M_y a_{i+1,j} - u_{i-1,j}^k M_y a_{i-1,j}}{2\Delta x} + \frac{v_{i,j+1}^k M_x a_{i,j+1} - v_{i,j-1}^k M_x a_{i,j-1}}{2\Delta y} \right), \quad (5.10)$$

$$\begin{aligned} u_{i,j}^{k+1} = u_{i,j}^k - \Delta t \left(u_{i,j}^k M_y \frac{u_{i+1,j}^k - u_{i-1,j}^k}{2\Delta x} + v_{i,j}^k M_x \frac{u_{i,j+1}^k - u_{i,j-1}^k}{\Delta y} - f v_{i,j}^k + \right. \\ \left. + g \frac{h_{i+1,j}^k - h_{i-1,j}^k}{2\Delta x} + c_f \frac{u_{i,j}^k}{M_1 a_{i,j}} \sqrt{(u_{i,j}^k)^2 + (v_{i,j}^k)^2} \right), \end{aligned} \quad (5.11)$$

$$\begin{aligned} v_{i,j}^{k+1} = v_{i,j}^k - \Delta t \left(u_{i,j}^k M_y \frac{v_{i+1,j}^k - v_{i-1,j}^k}{2\Delta x} + v_{i,j}^k M_x \frac{v_{i,j+1}^k - v_{i,j-1}^k}{\Delta y} + f u_{i,j}^k + \right. \\ \left. + g \frac{h_{i,j+1}^k - h_{i,j-1}^k}{2\Delta y} + c_f \frac{v_{i,j}^k}{M_1 a_{i,j}} \sqrt{(u_{i,j}^k)^2 + (v_{i,j}^k)^2} \right). \end{aligned} \quad (5.12)$$

Las ecuaciones anteriores describen un esquema para aproximar la solución de las ecuaciones de aguas someras en regiones rectangulares.

5.1.3. Pruebas Numéricas

Para mostrar el funcionamiento del método, se realizaron algunas pruebas numéricas de las cuales únicamente se mostrará un pequeño condensado de los resultados. Debido a que el esquema descrito en esta sección funciona únicamente en regiones rectangulares con espaciados uniformes, se decidió tomar como región de prueba el cuadrado unitario $[0, 1] \times [0, 1]$, que denotaremos como QUAD, el cual se malló de manera regular con mallas

con 21, 41 y 81 puntos por lado. Las mallas generadas para esta región se pueden ver en las figuras (5.1 - 5.4).

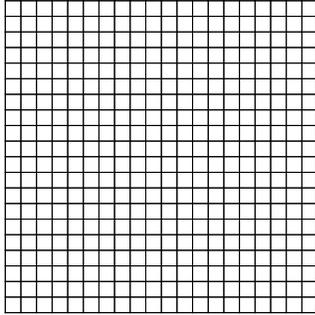


Figura 5.1: Malla de QUAD con 21 puntos por lado.

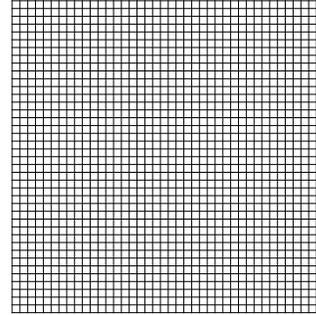


Figura 5.2: Malla de QUAD con 41 puntos por lado.

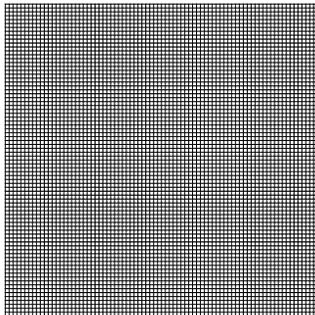


Figura 5.3: Malla de QUAD con 81 puntos por lado.

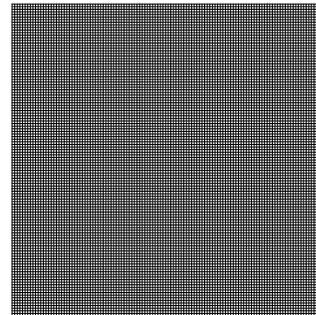


Figura 5.4: Malla de QUAD con 121 puntos por lado.

Como condición inicial de todos los problemas, se utilizó la función

$$f = .002e^{\frac{(-x-.6)^2-(y-.4)^2}{.01}}$$

la cual es un pulso gaussiano con centro en $(.6, .4)$ y altura máxima de $.002$. Las condiciones de frontera, al suponerse orillas del lago, son cero en todos los casos.

En cuanto a los perfiles de profundidad, primeramente se tomó un perfil de fondo plano, donde la profundidad era constante y era igual a $1/100$, para cumplir con las condiciones de las escalas. En pruebas posteriores se utiliza un perfil de profundidades como se muestra en la figura (5.5).

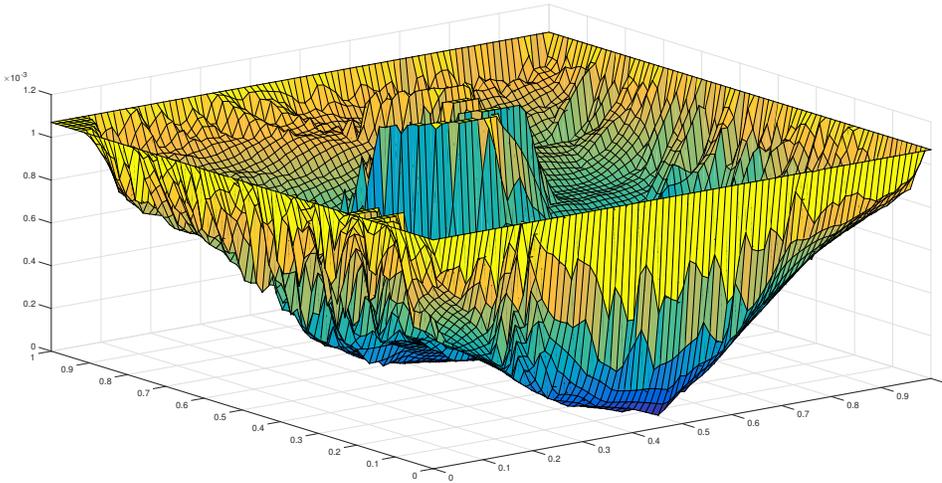


Figura 5.5: Profundidades para la región QUAD.

Para cada una de las pruebas se calcularon los gastos de masa y momento, para así tener una idea de qué tan bien funciona el método. La cantidad de masa se calculó utilizando la integral sobre todo el dominio de h , esto es, calcular

$$\int_{\Omega} \frac{h}{mn} dx dy$$

en diferentes niveles de tiempo.

Por su parte, los gastos de momento fueron calculados utilizando las funciones

$$\int_{\Omega} \frac{hu}{mn} dx dy$$

y

$$\int_{\Omega} \frac{hv}{mn} dx dy$$

En las tablas (5.1), (5.2) y (5.3) se muestran los resultados obtenidos en diferentes niveles de tiempo al calcular cada uno de los gastos en la prueba con fondo plano. Mientras que en las tablas (5.4), (5.5) y (5.6) se muestran los resultados para los mismos gastos en la prueba con fondo variable.

Puntos espaciales	Puntos temporales	$k = 2$	$k = 300$	$k = last$
21×21	600	$5.69903E - 05$	$4.80712E - 05$	$2.56620E - 05$
41×41	800	$5.98042E - 05$	$5.87343E - 05$	$2.70563E - 05$
81×81	1000	$6.12900E - 05$	$6.11803E - 05$	$3.75940E - 05$

Tabla 5.1: Resultados del gasto de masa h en QUAD en diferentes niveles de tiempo. Prueba 1.

Puntos espaciales	Puntos temporales	$k = 2$	$k = 300$	$k = last$
21×21	600	$2.62699E - 08$	$9.98170E - 08$	$1.61687E - 08$
41×41	800	$4.02578E - 08$	$4.37472E - 07$	$6.09672E - 08$
81×81	1000	$6.55037E - 08$	$5.89200E - 08$	$6.59457E - 07$

Tabla 5.2: Resultados del gasto de momento hu en QUAD en diferentes niveles de tiempo. Prueba 1.

Puntos espaciales	Puntos temporales	$k = 2$	$k = 300$	$k = last$
21×21	600	$1.74980E - 14$	$2.99244E - 07$	$3.91476E - 08$
41×41	800	$5.02370E - 15$	$9.42350E - 07$	$2.63599E - 07$
81×81	1000	$3.81230E - 15$	$3.53478E - 06$	$1.01535E - 06$

Tabla 5.3: Resultados del gasto de momento hv en QUAD en diferentes niveles de tiempo. Prueba 1.

Las tablas con resultados nos muestran que en todos los casos tenemos una buena aproximación de las ecuaciones, ya que el modelo logra cuidar bien tanto la conservación de la materia como la de momento. Una de las cuestiones importantes a observar es que cuando tenemos problemas con muchos nodos tanto espaciales como temporales, los errores de redondeo y truncamiento comienzan a ser más notorio. Esto se puede corregir utilizando computadoras con una longitud de palabra mayor. Todos los ejemplos en este trabajo fueron ejecutados en una computadora MacBook Pro bajo el sistema operativo OS X Yosemite, con un Procesador Intel Core i3 a 2.5 GHz y 4 GB de memoria RAM.

Puntos espaciales	Puntos temporales	$k = 2$	$k = 300$	$k = last$
21×21	600	$5.69903E - 05$	$5.60504E - 05$	$3.29988E - 05$
41×41	800	$5.98042E - 05$	$5.94872E - 05$	$3.79748E - 06$
81×81	1000	$6.12900E - 05$	$6.12892E - 05$	$5.97061E - 05$

Tabla 5.4: Resultados del gasto de masa h en QUAD en diferentes niveles de tiempo. Prueba 2.

Puntos espaciales	Puntos temporales	$k = 2$	$k = 300$	$k = last$
21×21	600	$2.62699E - 08$	$2.60329E - 06$	$7.72674E - 07$
41×41	800	$4.02578E - 08$	$3.23817E - 07$	$8.78805E - 07$
81×81	1000	$6.55037E - 08$	$1.46061E - 05$	$1.20971E - 05$

Tabla 5.5: Resultados del gasto de momento hu en QUAD en diferentes niveles de tiempo. Prueba 2.

Puntos espaciales	Puntos temporales	$k = 2$	$k = 300$	$k = last$
21×21	600	$1.74980E - 14$	$4.66716E - 08$	$2.60129E - 07$
41×41	800	$5.0237E - 15$	$1.52277E - 06$	$8.12348E - 07$
81×81	1000	$3.8123E - 15$	$4.25810E - 07$	$4.45697E - 07$

Tabla 5.6: Resultados del gasto de momento hv en QUAD en diferentes niveles de tiempo. Prueba 2.

5.2. Regiones no Rectangulares

Una vez que hemos obtenido esquemas que funcionan para aproximar las ecuaciones que modelan fenómenos de aguas someras en regiones rectangulares, debemos pensar en cómo diseñar un esquema para hacer lo mismo pero en regiones irregulares, tomando la idea presentada en [8], pensemos en que las ecuaciones lineales de segundo orden tienen la forma

$$L\varphi = A\varphi_{xx} + B\varphi_{xy} + C\varphi_{yy} + D\varphi_x + E\varphi_y + F\varphi,$$

Para nuestro caso, debemos ampliar esta definición para adaptarla al tipo de ecuaciones con el que contamos, en nuestro caso tendremos

$$\begin{aligned} Lhuv &= Ah_{xx} + Bh_{xy} + Ch_{yy} + Dh_x + Eh_y + Fh + \\ &+ Gu_{xx} + Hu_{xy} + Iu_{yy} + Ju_x + Ku_y + Lu + \\ &+ Lv_{xx} + Mv_{xy} + Nv_{yy} + Ov_x + Pv_y + Qv. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Afortunadamente, para nuestro problema no deberemos de tomar en cuenta los términos de segundo orden, por lo que nuestra ecuación se reduce a la siguiente expresión

$$Lhuv = Ah_x + Bh_y + Ch + Du_x + Eu_y + Fu + Gv_x + Hv_y + Iv. \quad (5.14)$$

Siguiendo el enfoque de diferencias finitas, para aproximar este operador en el punto p_0 utilizamos aproximaciones de las funciones h , u y v en algunos nodos vecinos p_1, p_2, \dots, p_q de p_0 (ver figura 2.12), lo cual puede escribirse como la combinación lineal

$$L_0 = \Gamma_{10}h(p_0) + \Gamma_{11}h(p_1) + \dots + \Gamma_{1q}h(p_q) + \quad (5.15)$$

$$\Gamma_{20}u(p_0) + \Gamma_{21}u(p_1) + \dots + \Gamma_{2q}u(p_q) + \quad (5.16)$$

$$\Gamma_{30}v(p_0) + \Gamma_{31}v(p_1) + \dots + \Gamma_{3q}v(p_q), \quad (5.17)$$

que se puede reescribir como

$$L_0 = \sum_{i=0}^q [\Gamma_{1i}h(p_i) + \Gamma_{2i}u(p_i) + \Gamma_{3i}v(p_i)]. \quad (5.18)$$

Diremos que un esquema es consistente cuando la aproximación que calculamos se

acerca a la solución a medida que los nodos vecinos se aproximan al nodo central, esto es, necesitamos que se cumpla que

$$Lhuv(p_0) - L_0 \rightarrow 0 \quad (5.19)$$

cuando $p_1, p_2, \dots, p_q \rightarrow p_0$. Que equivale a que se cumple

$$Ah_x + Bh_y + Ch + Du_x + Eu_y + Fu + Gv_x + Hv_y + Iv - \sum_{i=0}^q [\Gamma_{1i}h(p_i) + \Gamma_{2i}u(p_i) + \Gamma_{3i}v(p_i)] \rightarrow 0. \quad (5.20)$$

Usando expansión en serie de Taylor, hasta segundo orden, y reagrupando términos, podemos escribir la ecuación anterior como

$$\begin{aligned} Lhuv(p_0) - L_0 \approx & \left[C(p_0) - \sum_{i=0}^q \Gamma_{1i} \right] h(p_0) + \left[A(p_0) - \sum_{i=1}^q \Gamma_{1i} \Delta x_i \right] h_x(p_0) + \\ & \left[B(p_0) - \sum_{i=1}^q \Gamma_{1i} \Delta y_i \right] h_y(p_0) + \left[F(p_0) - \sum_{i=0}^q \Gamma_{2i} \right] u(p_0) + \\ & \left[D(p_0) - \sum_{i=1}^q \Gamma_{2i} \Delta x_i \right] u_x(p_0) + \left[E(p_0) - \sum_{i=1}^q \Gamma_{2i} \Delta y_i \right] u_y(p_0) + \\ & \left[I(p_0) - \sum_{i=0}^q \Gamma_{3i} \right] v(p_0) + \left[G(p_0) - \sum_{i=1}^q \Gamma_{3i} \Delta x_i \right] v_x(p_0) + \\ & \left[H(p_0) - \sum_{i=1}^q \Gamma_{3i} \Delta y_i \right] v_y(p_0) \end{aligned} \quad (5.21)$$

donde Δx y Δy corresponden a la distancia horizontal y vertical respectivamente del nodo central p_0 a cada uno de los nodos vecinos p_i .

Ahora, para que se cumpla la condición de consistencia (5.19) necesitamos que cada uno de los coeficientes entre paréntesis en (5.21) sea cero, logrando esto, la diferencia entre nuestro esquema y el operador real quedará acotada por una función \mathcal{O} , que involucra a las derivadas de mayor orden y disminuirá conforme los nodos vecinos se acerquen a p_0

[19]. Tomando esto en cuenta, entonces necesitamos que

$$\begin{aligned}
 C(p_0) - \sum_{i=0}^q \Gamma_{1i} &= 0, \\
 A(p_0) - \sum_{i=1}^q \Gamma_{1i} \Delta x_i &= 0, \\
 B(p_0) - \sum_{i=1}^q \Gamma_{1i} \Delta y_i &= 0, \\
 F(p_0) - \sum_{i=0}^q \Gamma_{2i} &= 0, \\
 D(p_0) - \sum_{i=1}^q \Gamma_{2i} \Delta x_i &= 0, \\
 E(p_0) - \sum_{i=1}^q \Gamma_{2i} \Delta y_i &= 0, \\
 I(p_0) - \sum_{i=0}^q \Gamma_{3i} &= 0, \\
 G(p_0) - \sum_{i=1}^q \Gamma_{3i} \Delta x_i &= 0, \\
 H(p_0) - \sum_{i=1}^q \Gamma_{3i} \Delta y_i &= 0.
 \end{aligned}$$

Encontrar los valores de Γ_{1i} , Γ_{2i} y Γ_{3i} que cumplan con esto es análogo a encontrar las que satisfagan el sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & \Delta x_1 & \dots & \Delta x_q \\ 0 & \Delta y_1 & \dots & \Delta y_q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Gamma_{10} & \Gamma_{20} & \Gamma_{30} \\ \Gamma_{11} & \Gamma_{21} & \Gamma_{31} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \Gamma_{1q} & \Gamma_{2q} & \Gamma_{3q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C(p_0) & F(p_0) & I(p_0) \\ A(p_0) & D(p_0) & G(p_0) \\ B(p_0) & E(p_0) & H(p_0) \end{pmatrix}. \quad (5.22)$$

Resolver este problema es equivalente a resolver por separado los tres problemas si-

guiente:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & \Delta x_1 & \dots & \Delta x_q \\ 0 & \Delta y_1 & \dots & \Delta y_q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Gamma_{10} \\ \Gamma_{11} \\ \Gamma_{12} \\ \cdot \\ \cdot \\ \Gamma_{1q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C(p_0) \\ A(p_0) \\ B(p_0) \end{pmatrix}, \quad (5.23)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & \Delta x_1 & \dots & \Delta x_q \\ 0 & \Delta y_1 & \dots & \Delta y_q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Gamma_{20} \\ \Gamma_{21} \\ \Gamma_{22} \\ \cdot \\ \cdot \\ \Gamma_{2q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F(p_0) \\ D(p_0) \\ E(p_0) \end{pmatrix}, \quad (5.24)$$

y

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & \Delta x_1 & \dots & \Delta x_q \\ 0 & \Delta y_1 & \dots & \Delta y_q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Gamma_{30} \\ \Gamma_{31} \\ \Gamma_{32} \\ \cdot \\ \cdot \\ \Gamma_{3q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I(p_0) \\ G(p_0) \\ H(p_0) \end{pmatrix}, \quad (5.25)$$

los cuales, podemos notar que cuentan cada uno, con 3 ecuaciones y $q + 1$ incógnitas; esto quiere decir que en la mayoría de los casos no estarán bien determinados. Una manera de sobrellevar esta indeterminación es resolviendo cada sistema en un sentido de cuadrados mínimos. Para hacer esto de una manera no iterativa, consideramos primeramente las últimas 2 ecuaciones de cada una de ellas obtenemos

$$\begin{pmatrix} \Delta x_1 & \dots & \Delta x_q \\ \Delta y_1 & \dots & \Delta y_q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Gamma_{11} \\ \Gamma_{12} \\ \cdot \\ \cdot \\ \Gamma_{1q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A(p_0) \\ B(p_0) \end{pmatrix}, \quad (5.26)$$

$$\begin{pmatrix} \Delta x_1 & \dots & \Delta x_q \\ \Delta y_1 & \dots & \Delta y_q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Gamma_{21} \\ \Gamma_{22} \\ \cdot \\ \cdot \\ \Gamma_{2q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D(p_0) \\ E(p_0) \end{pmatrix}, \quad (5.27)$$

y

$$\begin{pmatrix} \Delta x_1 & \dots & \Delta x_q \\ \Delta y_1 & \dots & \Delta y_q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Gamma_{31} \\ \Gamma_{32} \\ \cdot \\ \cdot \\ \Gamma_{3q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G(p_0) \\ H(p_0) \end{pmatrix}, \quad (5.28)$$

cuyas ecuaciones normales pueden ser resueltas utilizando cualquier algoritmo de solución de sistemas de ecuaciones lineales, por ejemplo el algoritmo de factorización de Cholesky, para obtener los valores de $\Gamma_{11}, \dots, \Gamma_{1q}, \Gamma_{21}, \dots, \Gamma_{2q}, \Gamma_{31}, \dots, \Gamma_{3q}$.

Después de hacer esto, aún nos falta calcular el valor de Γ_{10}, Γ_{20} y Γ_{30} , pero esto puede hacerse de una manera sencilla tomando en cuenta la primera ecuación de (5.23), (5.24) y (5.25), con lo cual obtenemos que

$$\Gamma_{10} = C(p_0) - \Gamma_{11}\dots - \Gamma_{1q}, \quad (5.29)$$

$$\Gamma_{20} = F(p_0) - \Gamma_{21}\dots - \Gamma_{2q}, \quad (5.30)$$

$$\Gamma_{30} = C(p_0) - \Gamma_{31}\dots - \Gamma_{3q}, \quad (5.31)$$

y con esto obtenemos el conjunto de coeficientes Γ necesarios para definir el esquema (5.18) [7].

Ahora que ya contamos con un esquema para aproximar el tipo de ecuaciones diferenciales parciales que nos interesa, buscamos la forma de aplicarlo a las ecuaciones que modelan problemas de aguas someras

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(au) + \frac{\partial}{\partial y}(av) = 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - fv + g \frac{\partial h}{\partial x} + c_f \frac{u}{a} \sqrt{y^2 + v^2} = 0,$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + fv + g \frac{\partial h}{\partial y} + c_f \frac{v}{a} \sqrt{y^2 + v^2} = 0,$$

las cuales, por conveniencia, escribiremos como

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}(au) - \frac{\partial}{\partial y}(av),$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -u \frac{\partial u}{\partial x} - v \frac{\partial u}{\partial y} + fv - g \frac{\partial h}{\partial x} - c_f \frac{u}{a} \sqrt{y^2 + v^2},$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -u \frac{\partial v}{\partial x} - v \frac{\partial v}{\partial y} - fv - g \frac{\partial h}{\partial y} - c_f \frac{v}{a} \sqrt{y^2 + v^2}.$$

Si aplicamos un esquema de diferencias finitas hacia adelante, en el tiempo, a cada una de las expresiones anteriores, obtendremos

$$\frac{h(x, y, t + \Delta t) - h(x, y, t)}{\Delta t} = -\frac{\partial}{\partial x}(au) - \frac{\partial}{\partial y}(av),$$

$$\frac{u(x, y, t + \Delta t) - u(x, y, t)}{\Delta t} = -u \frac{\partial u}{\partial x} - v \frac{\partial u}{\partial y} + fv - g \frac{\partial h}{\partial x} - c_f \frac{u}{a} \sqrt{y^2 + v^2},$$

$$\frac{v(x, y, t + \Delta t) - v(x, y, t)}{\Delta t} = -u \frac{\partial v}{\partial x} - v \frac{\partial v}{\partial y} - fv - g \frac{\partial h}{\partial y} - c_f \frac{v}{a} \sqrt{y^2 + v^2},$$

de donde podemos fácilmente obtener

$$h(x, y, t + \Delta t) = h(x, y, t) - \Delta t \frac{\partial}{\partial x}(au) - \Delta t \frac{\partial}{\partial y}(av),$$

$$u(x, y, t + \Delta t) = u(x, y, t) - \Delta t u \frac{\partial u}{\partial x} - \Delta t v \frac{\partial u}{\partial y} + \Delta t f v - \Delta t g \frac{\partial h}{\partial x} - \Delta t c_f \frac{u}{a} \sqrt{y^2 + v^2},$$

$$v(x, y, t + \Delta t) = v(x, y, t) - \Delta t u \frac{\partial v}{\partial x} - \Delta t v \frac{\partial v}{\partial y} - \Delta t f v - \Delta t g \frac{\partial h}{\partial y} - \Delta t c_f \frac{v}{a} \sqrt{y^2 + v^2}.$$

Ahora, el esquema definido por (5.18) puede aplicarse a los operadores

$$-\Delta t \frac{\partial}{\partial x}(au) - \Delta t \frac{\partial}{\partial y}(av),$$

$$-\Delta t u \frac{\partial u}{\partial x} - \Delta t v \frac{\partial u}{\partial y} + \Delta t f v - \Delta t g \frac{\partial h}{\partial x} - \Delta t c_f \frac{u}{a} \sqrt{y^2 + v^2},$$

$$-\Delta t u \frac{\partial v}{\partial x} - \Delta t v \frac{\partial v}{\partial y} - \Delta t f v - \Delta t g \frac{\partial h}{\partial y} - \Delta t c_f \frac{v}{a} \sqrt{y^2 + v^2}.$$

los coeficientes Γ que se obtienen definen el esquema

$$\begin{aligned} h_0^{k+1} &= h_0^k + \sum_{i=0}^q \left[\Gamma_{1i} (h_i^k + u_i^k + v_i^k) \right], \\ u_0^{k+1} &= u_0^k + \sum_{i=0}^q \left[\Gamma_{2i} (h_i^k + u_i^k + v_i^k) \right], \\ v_0^{k+1} &= v_0^k + \sum_{i=0}^q \left[\Gamma_{3i} (h_i^k + u_i^k + v_i^k) \right], \end{aligned}$$

Falta elegir entonces el número de nodos vecinos que se tomarán en cuenta; debido a la geometría del problema, podemos tomar en cuenta un esquema centrado de nueve puntos, esto es, tomar un stencil como el mostrado en la figura (5.6).

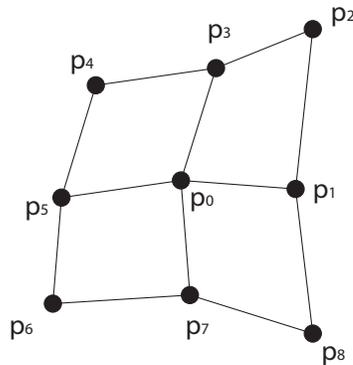


Figura 5.6: Stencil seleccionado de 9 puntos.

Utilizando esta elección de puntos, nuestro esquema tendrá la forma

$$\begin{aligned} h_{ij}^{k+1} &= h_{ij}^k + \sum_{l=0}^8 \left[\Gamma_{1l}(h_l^k + u_l^k + v_l^k) \right], \\ u_{ij}^{k+1} &= u_{ij}^k + \sum_{l=0}^8 \left[\Gamma_{2l}(h_l^k + u_l^k + v_l^k) \right], \\ v_{ij}^{k+1} &= v_{ij}^k + \sum_{l=0}^8 \left[\Gamma_{3l}(h_l^k + u_l^k + v_l^k) \right], \end{aligned}$$

Aquí tomamos h_{ij}^k , u_{ij}^k y v_{ij}^k como la aproximación a h , u y v en el punto i, j de la malla en el nivel de tiempo k . Este esquema es un esquema explícito, el cual utilizaremos para aproximar la solución a nuestro problema.

A continuación se muestran algunos de los resultados obtenidos con este esquema. Desgraciadamente, al no contar con una solución analítica para el problema, no existe manera de calcular el error que se comete en cada caso, sin embargo, tomando en cuenta que estas son ecuaciones conservativas, se deben conservar la masa y el momento, entonces, podemos calcular los gastos que se generan en cada nivel de tiempo para darnos una idea de la efectividad del método.

5.3. Pruebas Numéricas y Resultados

Para las pruebas numéricas se seleccionaron diferentes regiones, que van desde una región rectangular y con mallado uniforme, hasta aproximaciones a regiones geográficas reales. Estas regiones son denotadas por QUAD, TRAP, ANI, TAT y CAB, y pueden observarse en las figuras (5.7 - 5.72). Las condiciones iniciales seleccionadas son nulas para las velocidades u y v , mientras que para la condición inicial de h se utiliza un pulso generado por la función

$$f = (0.002)e^{\left(\frac{(-x-r)^2 - (y-s)^2}{0.01}\right)},$$

donde r y s son números aleatorios entre 0 y 1, con el fin de obtener evitar simetrías en la condición inicial.

De la misma manera, las condiciones de frontera para todas las variables son cero. Para

cada una de las regiones se generaron mallas con 21, 41, 81 y 121 puntos por lado. Las mallas generadas se pueden ver en las figuras (5.12 - 5.31).

El intervalo temporal $[0, 10]$ se dividió uniformemente en diferente cantidad de pasos en el tiempo dependiendo de la cantidad de puntos espaciales de las mallas, en la tabla (5.7) se muestra la concordancia de pasos en el tiempo dependiendo de la cantidad de puntos espaciales.

Puntos espaciales	Pasos en el tiempo
21×21	500
41×41	700
81×81	2000
121×121	4000

Tabla 5.7: Concordancia en puntos espaciales y temporales.

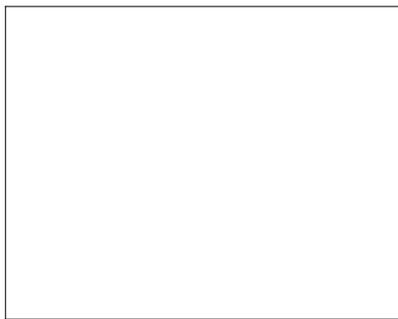


Figura 5.7: Región QUAD.

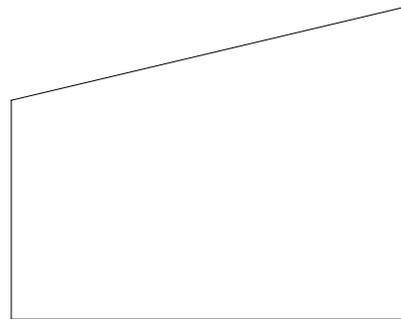


Figura 5.8: Región TRAP.

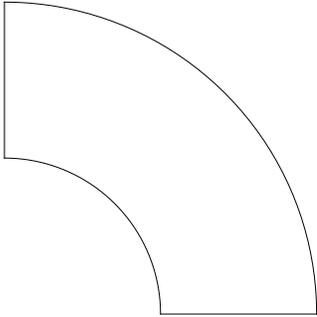


Figura 5.9: Región ANI.

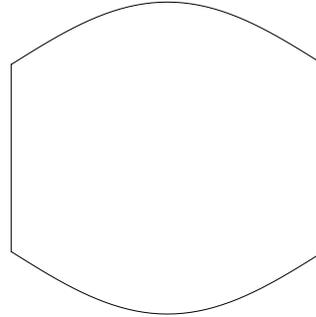


Figura 5.10: Región TAT.

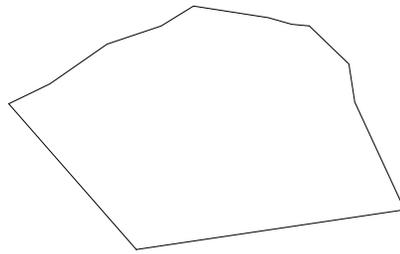


Figura 5.11: Región CAB.

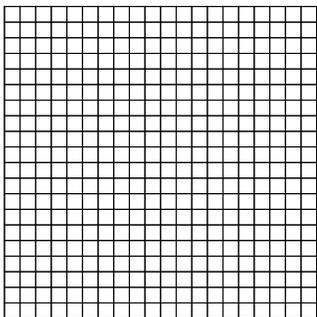


Figura 5.12: Malla de QUAD con 21 puntos por lado.

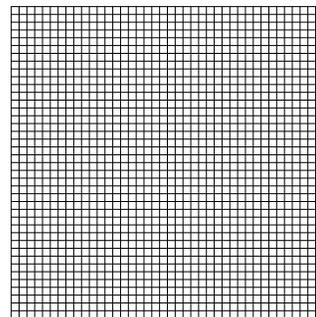


Figura 5.13: Malla de QUAD con 41 puntos por lado.

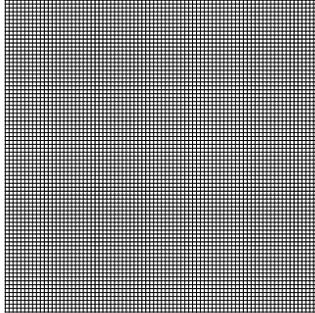


Figura 5.14: Malla de QUAD con 81 puntos por lado.

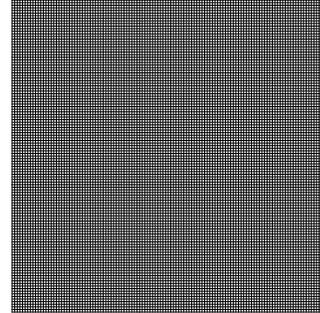


Figura 5.15: Malla de QUAD con 121 puntos por lado.

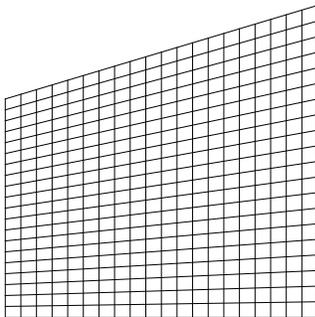


Figura 5.16: Malla de TRAP con 21 puntos por lado.

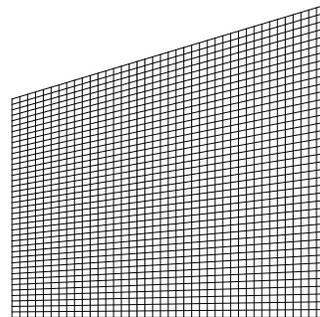


Figura 5.17: Malla de TRAP con 41 puntos por lado.

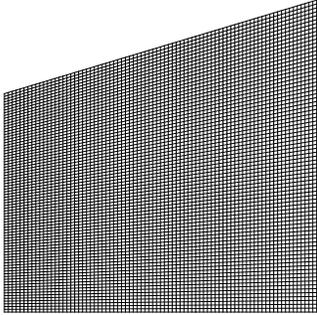


Figura 5.18: Malla de TRAP con 81 puntos por lado.

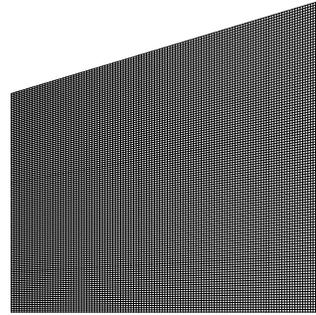


Figura 5.19: Malla de TRAP con 121 puntos por lado.

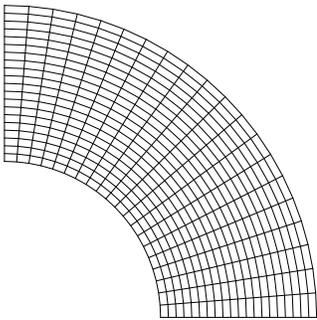


Figura 5.20: Malla de ANI con 21 puntos por lado.

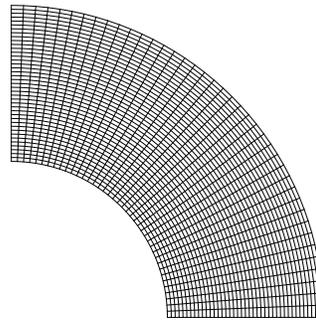


Figura 5.21: Malla de ANI con 41 puntos por lado.

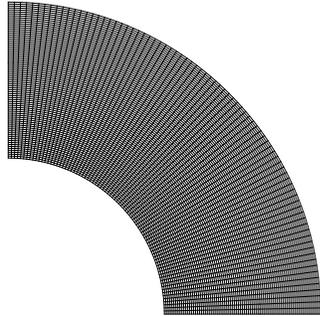


Figura 5.22: Malla de ANI con 81 puntos por lado.

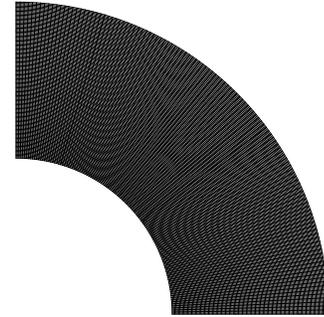


Figura 5.23: Malla de ANI con 121 puntos por lado.

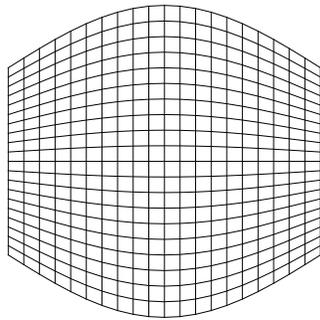


Figura 5.24: Malla de TAT con 21 puntos por lado.

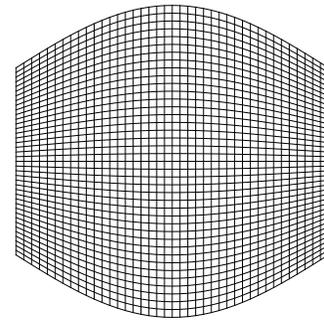


Figura 5.25: Malla de TAT con 41 puntos por lado.

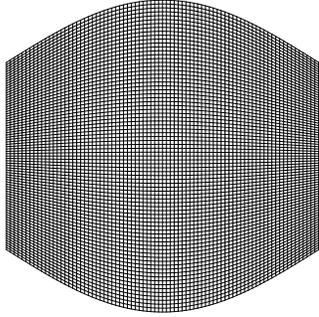


Figura 5.26: Malla de TAT con 81 puntos por lado.

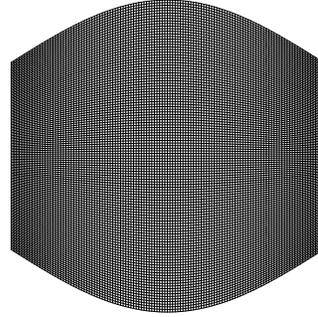


Figura 5.27: Malla de TAT con 121 puntos por lado.

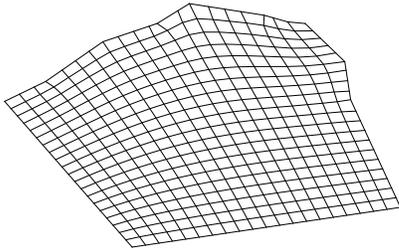


Figura 5.28: Malla de CAB con 21 puntos por lado.

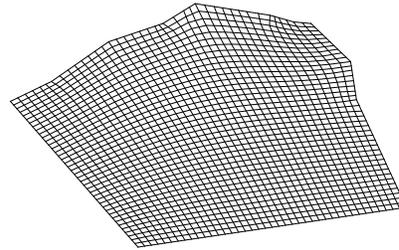


Figura 5.29: Malla de CAB con 41 puntos por lado.

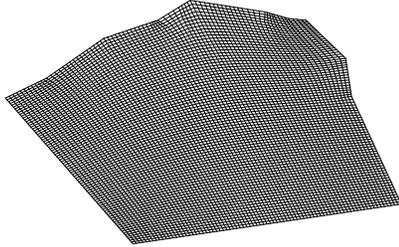


Figura 5.30: Malla de CAB con 81 puntos por lado.

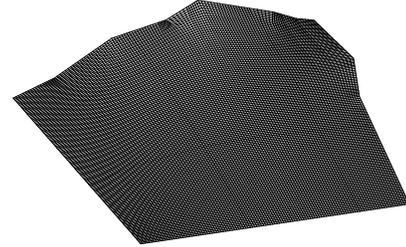


Figura 5.31: Malla de CAB con 121 puntos por lado.

Para cada una de las pruebas realizadas, se calcularon los gastos de masa y momento, para así tener una idea de la eficacia del método. La cantidad de masa se calculó utilizando la integral sobre todo el dominio de h , esto es, se calculó

$$\int_{\Omega} \frac{h}{mn} dx dy$$

en diferentes niveles de tiempo, donde mn es el número total de nodos de la malla.

Por su parte, los gastos de momento fueron calculados como

$$\int_{\Omega} \frac{hu}{mn} dx dy$$

y

$$\int_{\Omega} \frac{hv}{mn} dx dy$$

En las tablas (5.8 - 5.22) se muestran los resultados obtenidos en diferentes niveles de tiempo al calcular cada uno de los gastos. Igualmente, en las figuras (5.32 - 5.51) se muestran las gráficas del comportamiento de los gastos en cada caso. Estos resultados se hicieron con un primer esquema, en el cual, los coeficientes Γ deben de ser calculados en cada nivel de tiempo, produciendo un tiempo de computo muy alto.

Puntos espaciales	$k = 2$	$k = 300$	$k = last$
21×21	$5.69903E - 05$	$1.62663E - 05$	$1.58107E - 05$
41×41	$5.98042E - 05$	$2.53572E - 05$	$1.70243E - 05$
81×81	$6.12900E - 05$	$5.87932E - 05$	$1.96496E - 05$
121×121	$6.17976E - 05$	$6.16266E - 05$	$2.58432E - 05$

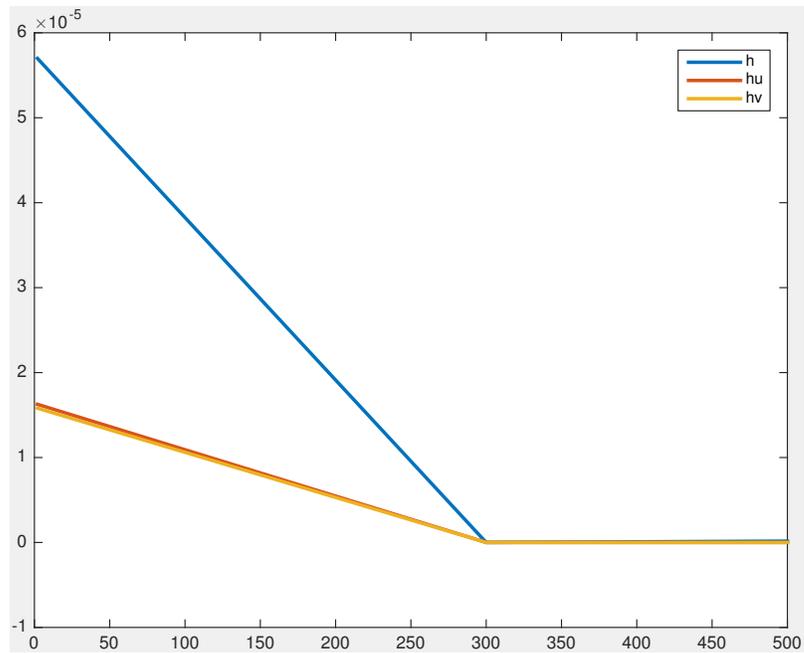
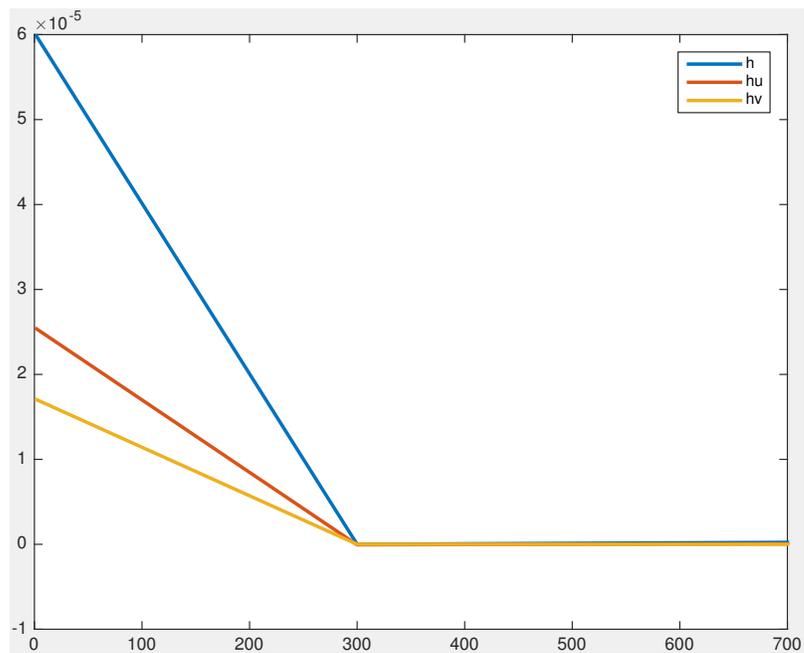
Tabla 5.8: Resultados del gasto de masa en QUAD. Esquema 1.

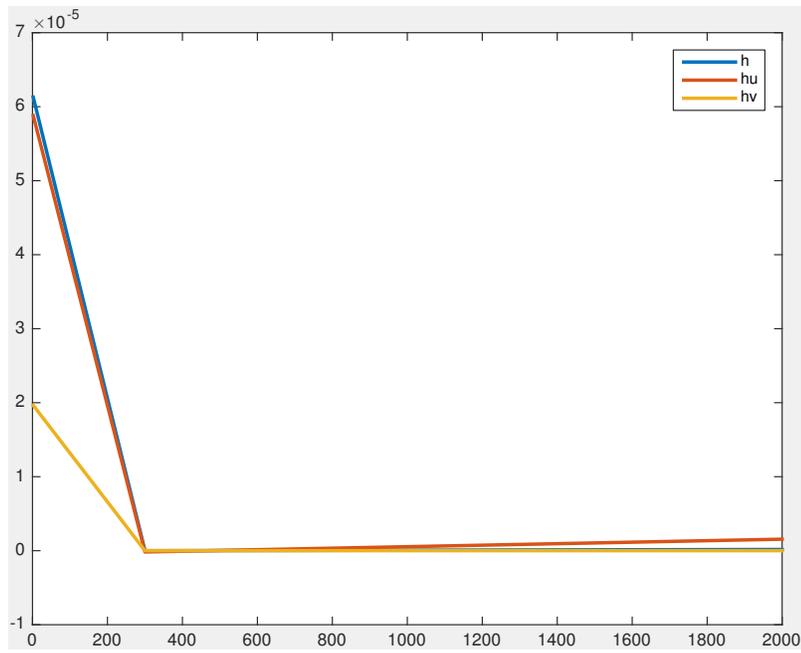
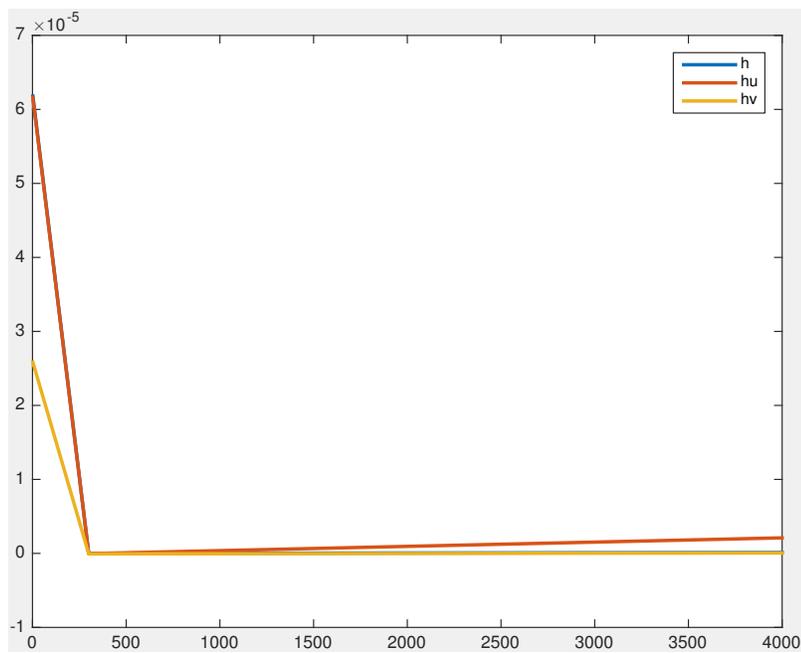
Puntos espaciales	$k = 2$	$k = 300$	$k = last$
21×21	$1.30351E - 13$	$2.98435E - 09$	$1.71666E - 09$
41×41	$3.04909E - 14$	$5.96550E - 08$	$1.88469E - 10$
81×81	$9.67460E - 15$	$1.69844E - 07$	$1.37377E - 09$
121×121	$5.78840E - 15$	$2.76841E - 08$	$6.25957E - 08$

Tabla 5.9: Resultados del gasto de momento hu en QUAD. Esquema 1.

Puntos espaciales	$k = 2$	$k = 300$	$k = last$
21×21	$1.57672E - 07$	$2.84360E - 09$	$4.13642E - 11$
41×41	$2.30086E - 07$	$5.84161E - 08$	$1.04798E - 09$
81×81	$1.63677E - 07$	$1.55602E - 06$	$5.36714E - 09$
121×121	$1.23566E - 07$	$2.10221E - 06$	$5.92573E - 08$

Tabla 5.10: Resultados del gasto de momento hv en QUAD. Esquema 1.

Figura 5.32: Región QUAD con 21×21 puntos. Esquema 1.Figura 5.33: Región QUAD con 41×41 puntos. Esquema 1.

Figura 5.34: Región QUAD con 81×81 puntos. Esquema 1.Figura 5.35: Región QUAD con 121×121 puntos. Esquema 1.

Puntos espaciales	$k = 2$	$k = 300$	$k = last$
21×21	$6.47994E - 05$	$2.07241E - 05$	$2.07927E - 05$
41×41	$6.79989E - 05$	$2.80151E - 05$	$2.22665E - 05$
81×81	$6.96882E - 05$	$6.65399E - 05$	$2.39000E - 05$
121×121	$7.02654E - 05$	$7.01162E - 05$	$2.91622E - 05$

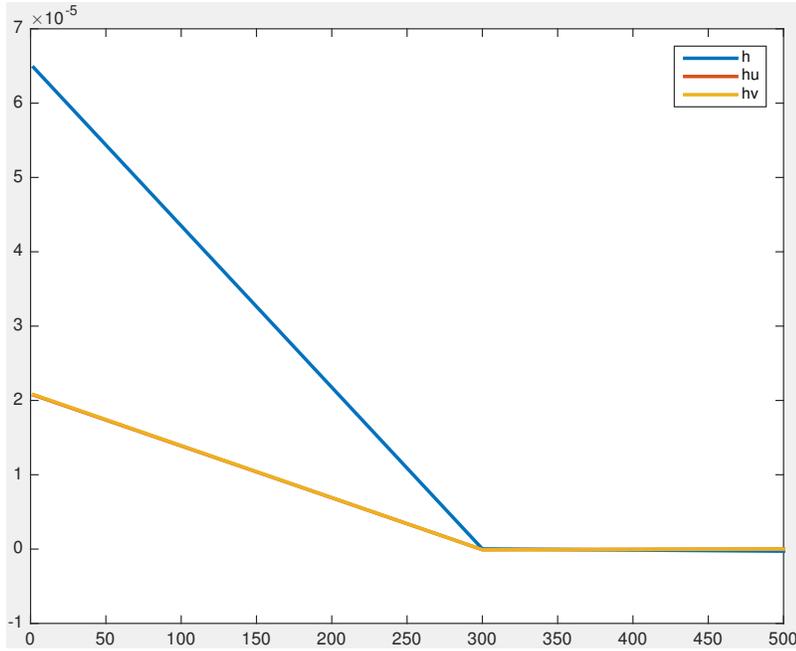
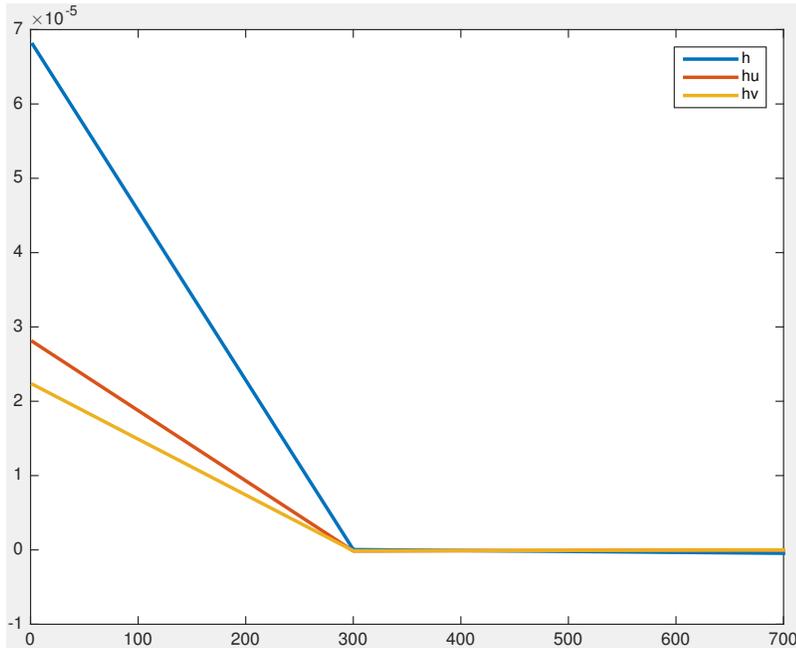
Tabla 5.11: Resultados del gasto de masa en TRAP. Esquema 1.

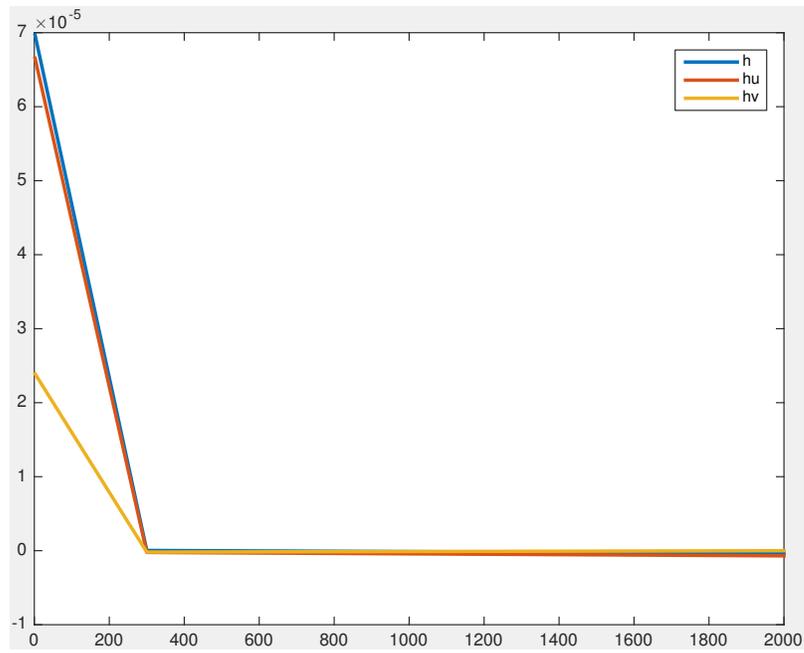
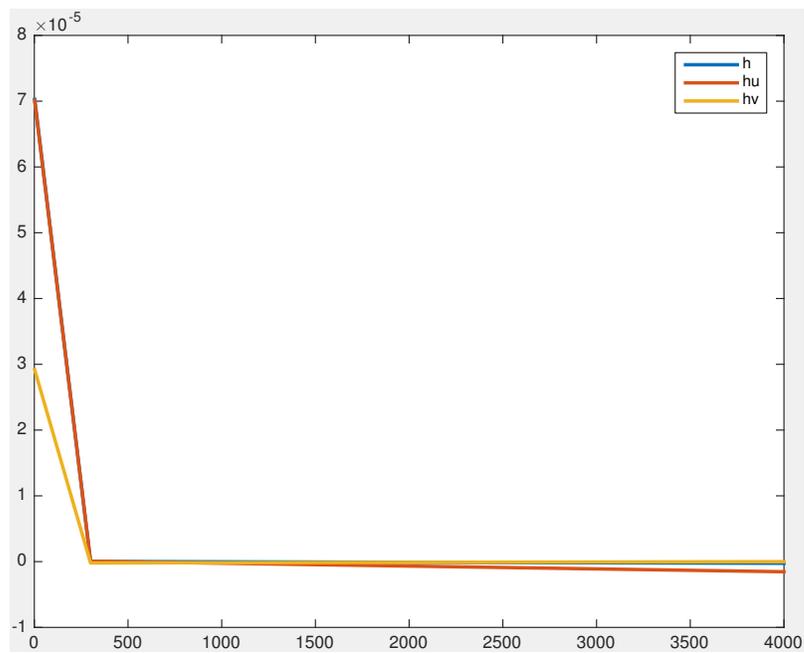
Puntos espaciales	$k = 2$	$k = 300$	$k = last$
21×21	$2.57479E - 08$	$8.03280E - 08$	$9.10285E - 08$
41×41	$4.43346E - 08$	$1.47344E - 07$	$1.17225E - 07$
81×81	$3.28530E - 08$	$2.34133E - 07$	$1.88210E - 07$
121×121	$2.49900E - 08$	$5.46566E - 08$	$2.05402E - 07$

Tabla 5.12: Resultados del gasto de momento hu en TRAP. Esquema 1.

Puntos espaciales	$k = 2$	$k = 300$	$k = last$
21×21	$2.82638E - 07$	$1.23960E - 09$	$3.80831E - 10$
41×41	$4.56071E - 07$	$3.87631E - 10$	$5.33184E - 10$
81×81	$3.32996E - 07$	$6.97880E - 07$	$3.08740E - 10$
121×121	$2.52618E - 07$	$1.53948E - 06$	$4.48636E - 09$

Tabla 5.13: Resultados del gasto de momento hv en TRAP. Esquema 1.

Figura 5.36: Región TRAP con 21×21 puntos. Esquema 1.Figura 5.37: Región TRAP con 41×41 puntos. Esquema 1.

Figura 5.38: Región TRAP con 81×81 puntos. Esquema 1.Figura 5.39: Región TRAP con 121×121 puntos. Esquema 1.

Puntos espaciales	$k = 2$	$k = 300$	$k = last$
21×21	$1.00929E - 04$	$2.12766E - 04$	$4.15764E - 04$
41×41	$1.05957E - 04$	$1.11364E - 04$	$3.21423E - 04$
81×81	$1.08609E - 04$	$9.49507E - 05$	$1.74122E - 04$
121×121	$1.09515E - 04$	$1.06553E - 04$	$1.20047E - 04$

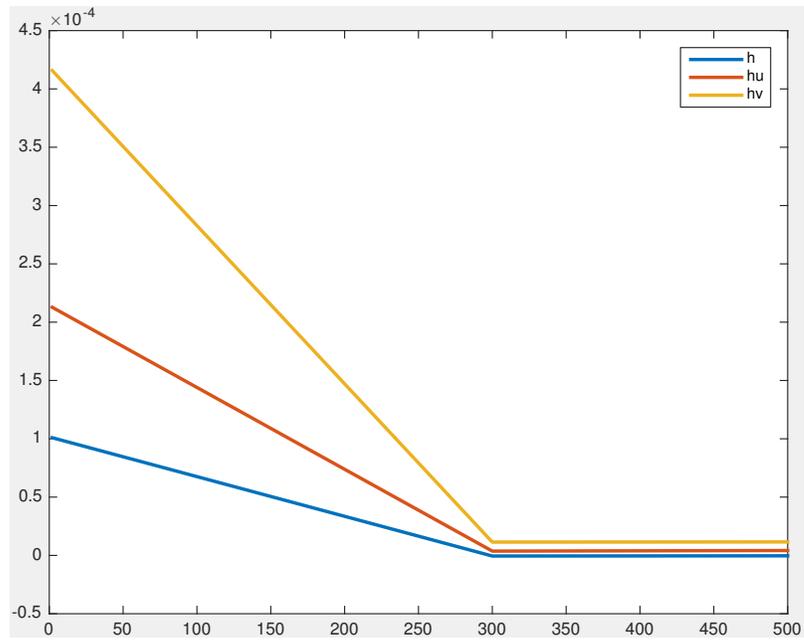
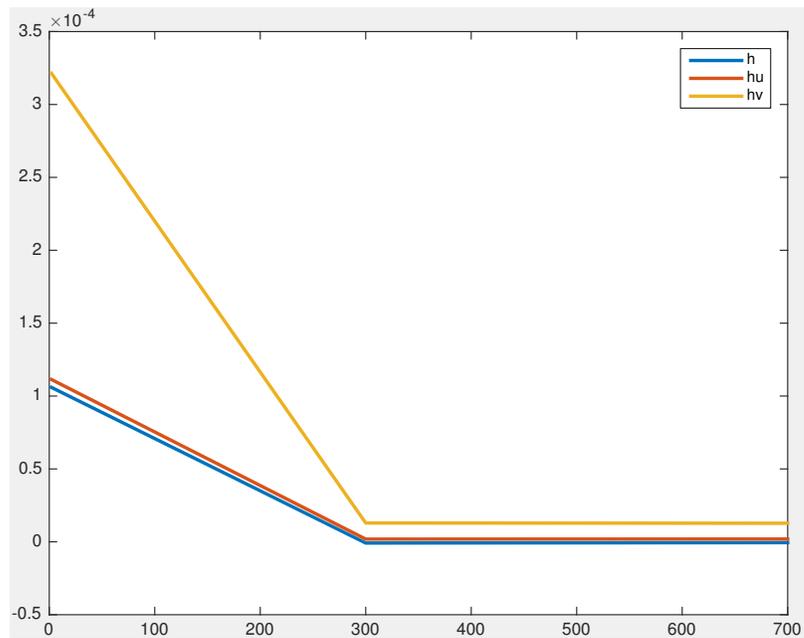
Tabla 5.14: Resultados del gasto de masa en ANI. Esquema 1.

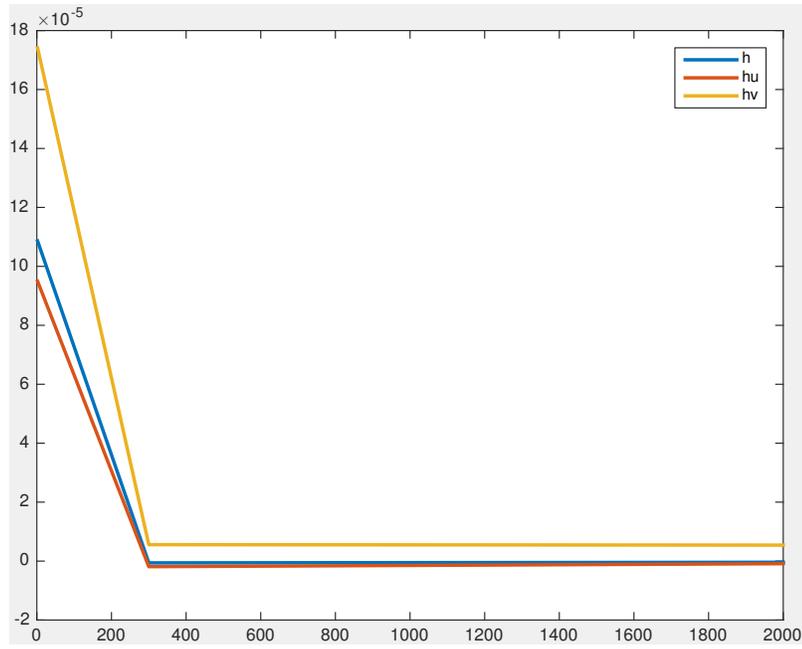
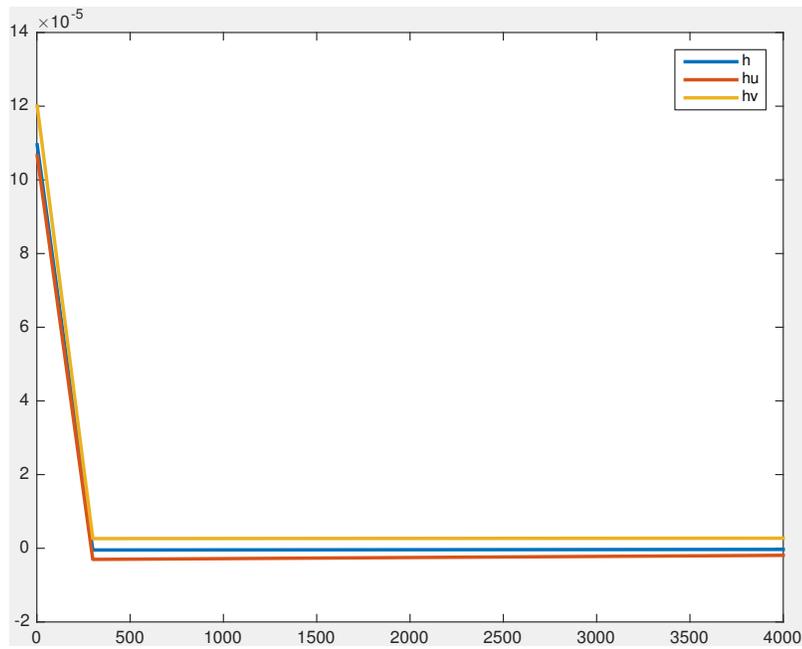
Puntos espaciales	$k = 2$	$k = 300$	$k = last$
21×21	$5.25731E - 08$	$3.68661E - 07$	$1.14244E - 06$
41×41	$8.35222E - 08$	$1.85907E - 07$	$1.29024E - 06$
81×81	$6.07461E - 08$	$1.88836E - 07$	$5.56575E - 07$
121×121	$4.60511E - 08$	$3.01774E - 07$	$2.63384E - 07$

Tabla 5.15: Resultados del gasto de momento hu en ANI. Esquema 1.

Puntos espaciales	$k = 2$	$k = 300$	$k = last$
21×21	$3.50485E - 08$	$4.19630E - 07$	$1.15538E - 06$
41×41	$5.56814E - 08$	$1.91573E - 07$	$1.27300E - 06$
81×81	$4.04974E - 08$	$8.76354E - 08$	$5.41823E - 07$
121×121	$3.07007E - 08$	$1.91222E - 07$	$2.73021E - 06$

Tabla 5.16: Resultados del gasto de momento hv en ANI. Esquema 1.

Figura 5.40: Región ANI con 21×21 puntos. Esquema 1.Figura 5.41: Región ANI con 41×41 puntos. Esquema 1.

Figura 5.42: Región ANI con 81×81 puntos. Esquema 1.Figura 5.43: Región ANI con 121×121 puntos. Esquema 1.

Puntos espaciales	$k = 2$	$k = 300$	$k = last$
21×21	$5.87415E - 05$	$2.63603E - 05$	$3.13258E - 05$
41×41	$6.16419E - 05$	$3.14174E - 05$	$3.19234E - 05$
81×81	$6.31733E - 05$	$6.24144E - 05$	$3.05392E - 05$
121×121	$6.36965E - 05$	$6.42132E - 05$	$3.37984E - 05$

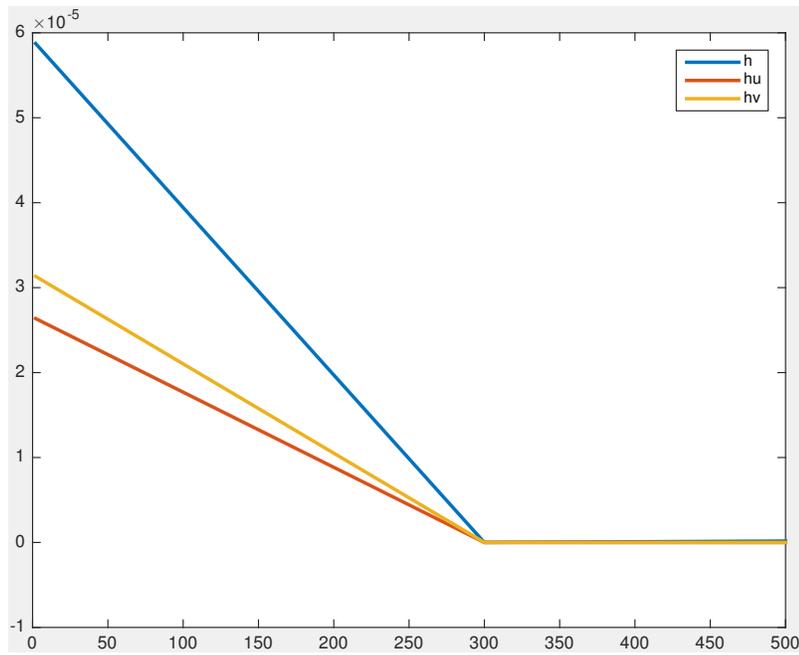
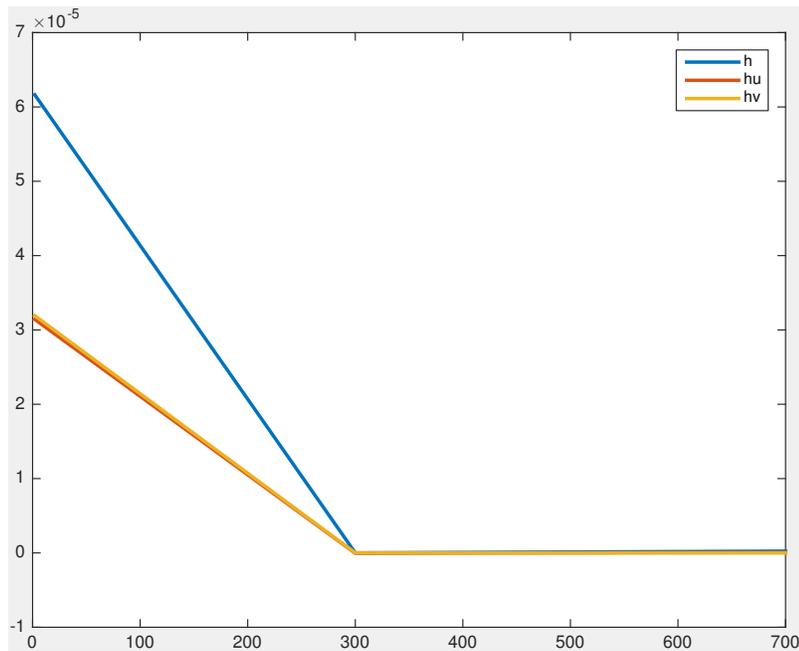
Tabla 5.17: Resultados del gasto de masa en TAT. Esquema 1.

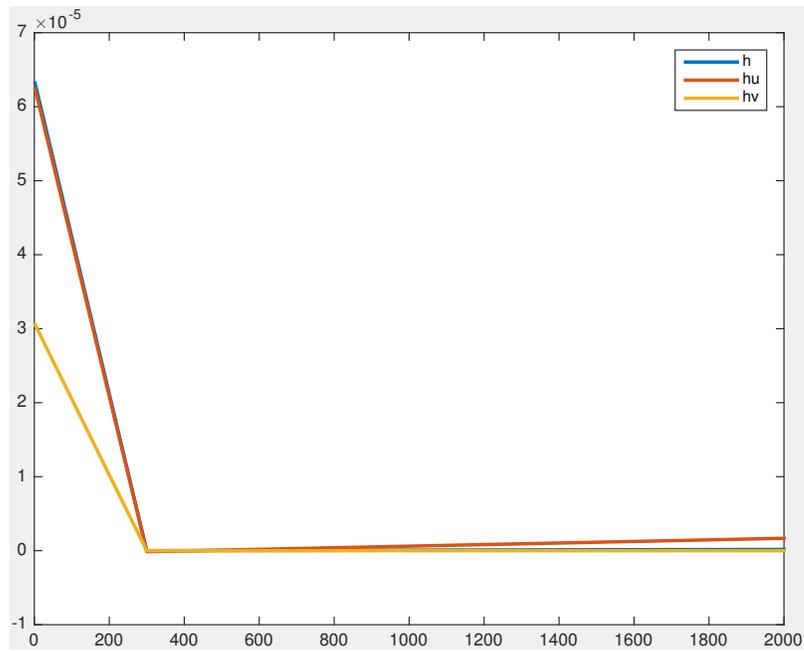
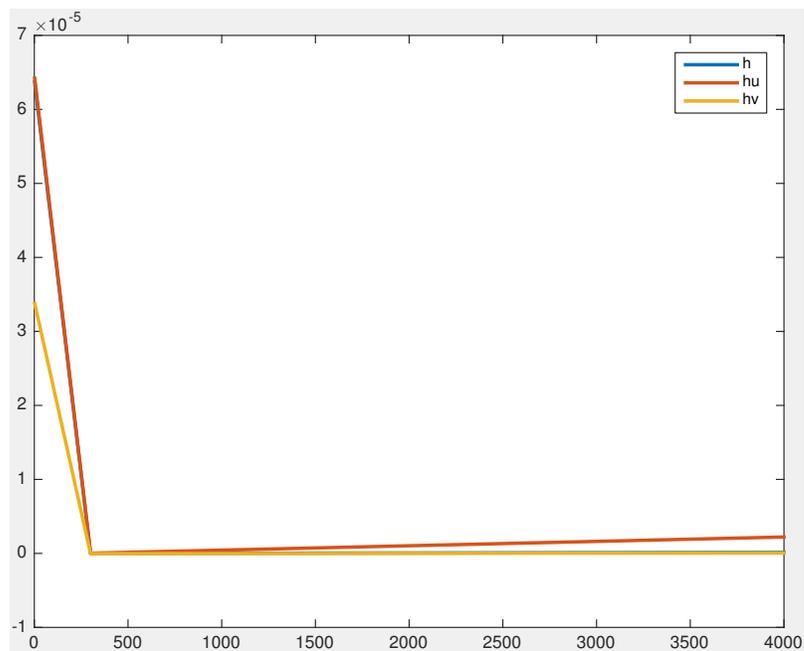
Puntos espaciales	$k = 2$	$k = 300$	$k = last$
21×21	$7.14902E - 10$	$1.33770E - 09$	$9.47646E - 10$
41×41	$2.12440E - 09$	$3.93129E - 08$	$5.50351E - 09$
81×81	$1.71431E - 09$	$1.36726E - 07$	$1.85298E - 09$
121×121	$1.32298E - 09$	$2.78188E - 08$	$3.19080E - 08$

Tabla 5.18: Resultados del gasto de momento hu en TAT. Esquema 1.

Puntos espaciales	$k = 2$	$k = 300$	$k = last$
21×21	$1.62843E - 07$	$3.10108E - 09$	$2.37514E - 09$
41×41	$2.38161E - 07$	$6.23880E - 08$	$2.54281E - 09$
81×81	$1.69523E - 07$	$1.67748E - 06$	$8.35495E - 09$
121×121	$1.27994E - 07$	$2.21639E - 06$	$5.44744E - 08$

Tabla 5.19: Resultados del gasto de momento hv en TAT. Esquema 1.

Figura 5.44: Región TAT con 21×21 puntos. Esquema 1.Figura 5.45: Región TAT con 41×41 puntos. Esquema 1.

Figura 5.46: Región TAT con 81×81 puntos. Esquema 1.Figura 5.47: Región TAT con 121×121 puntos. Esquema 1.

Puntos espaciales	$k = 2$	$k = 300$	$k = last$
21×21	$1.41452E - 04$	$6.03259E - 05$	$7.02938E - 05$
41×41	$1.48447E - 04$	$6.54964E - 05$	$6.89412E - 05$
81×81	$1.52139E - 04$	$1.48681E - 04$	$8.75443E - 05$
121×121	$1.53400E - 04$	$1.53079E - 04$	$1.01457E - 04$

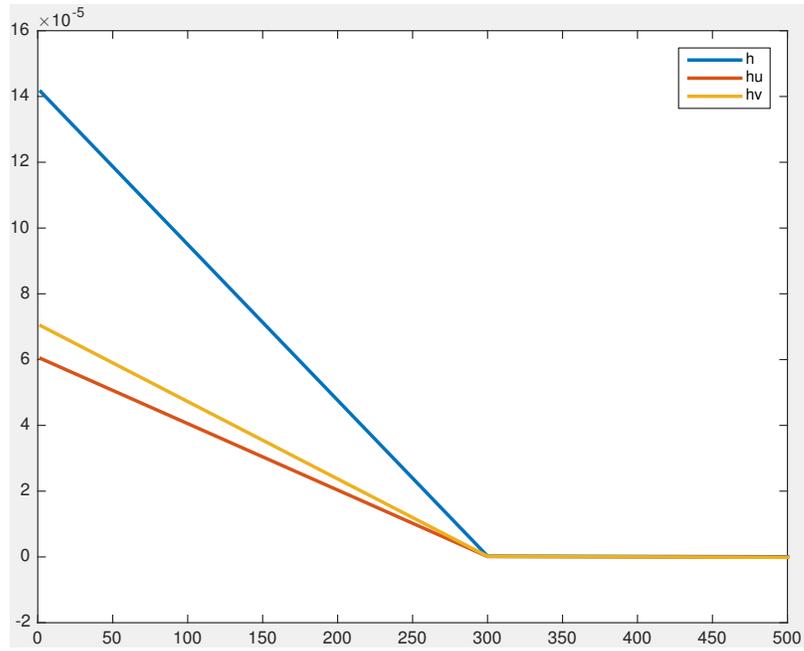
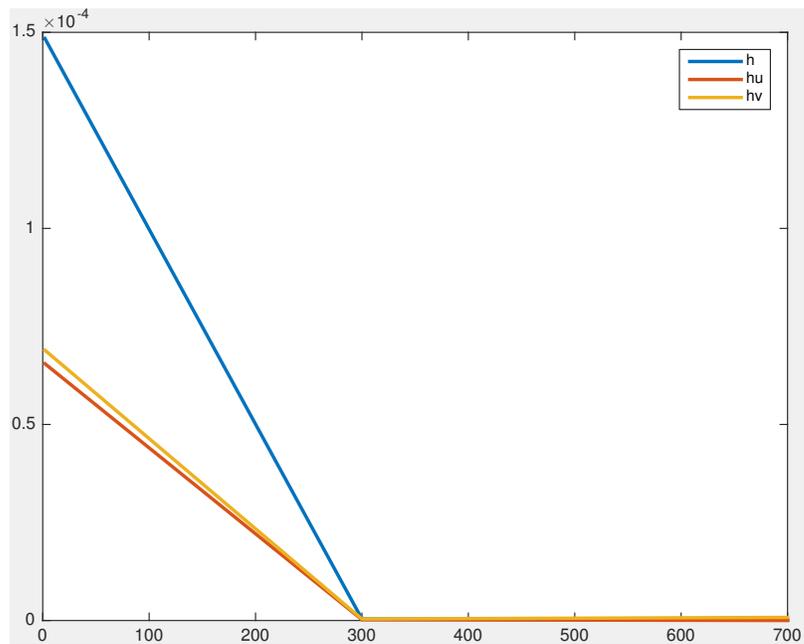
Tabla 5.20: Resultados del gasto de masa en CAB. Esquema 1.

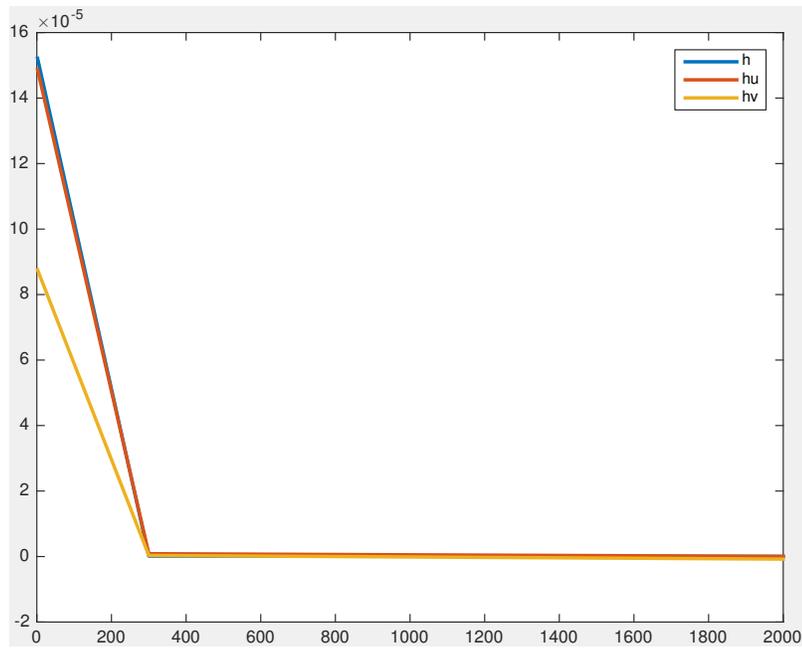
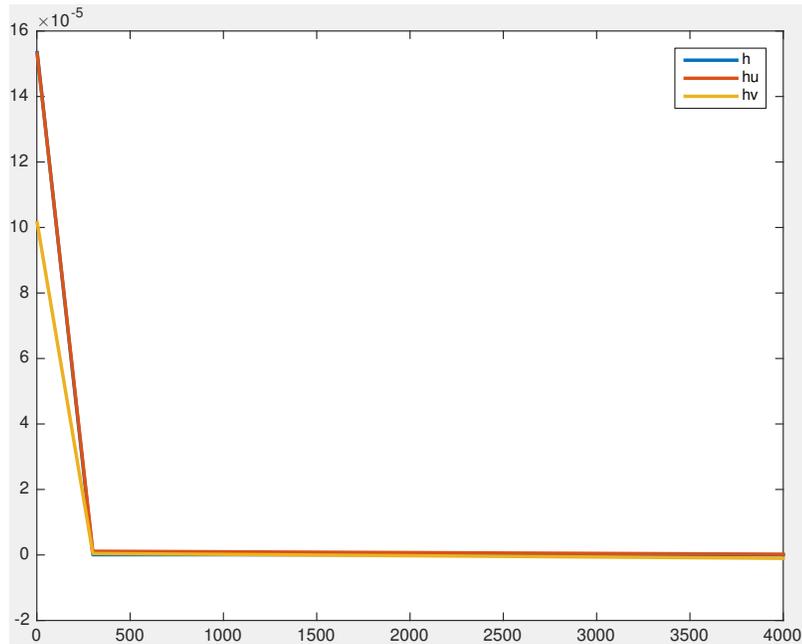
Puntos espaciales	$k = 2$	$k = 300$	$k = last$
21×21	$2.48392E - 07$	$1.31956E - 07$	$2.00416E - 07$
41×41	$3.82652E - 07$	$2.15950E - 07$	$3.89433E - 07$
81×81	$1.38045E - 07$	$8.68662E - 07$	$3.29272E - 07$
121×121	$8.36078E - 08$	$1.13786E - 06$	$4.47713E - 07$

Tabla 5.21: Resultados del gasto de momento hu en CAB. Esquema 1.

Puntos espaciales	$k = 2$	$k = 300$	$k = last$
21×21	$5.98431E - 08$	$1.13992E - 07$	$1.28929E - 07$
41×41	$9.71311E - 08$	$1.09037E - 08$	$7.90697E - 07$
81×81	$3.54842E - 08$	$4.93307E - 08$	$7.84106E - 07$
121×121	$2.15390E - 08$	$2.28791E - 07$	$1.02962E - 06$

Tabla 5.22: Resultados del gasto de momento hv en CAB. Esquema 1.

Figura 5.48: Región CAB con 21×21 puntos. Esquema 1.Figura 5.49: Región CAB con 41×41 puntos. Esquema 1.

Figura 5.50: Región CAB con 81×81 puntos. Esquema 1.Figura 5.51: Región CAB con 121×121 puntos. Esquema 1.

Para las pruebas restantes se utilizó un esquema programado de manera que los coeficientes Γ se calculan una sola vez, y se actualiza su valor después de cada nivel de tiempo, lo cual produce buenas aproximaciones con un tiempo menor al logrado con el esquema de la primera prueba. Dichos resultados se pueden encontrar en las tablas (5.23 - 5.37).

Puntos espaciales	$k = 2$	$k = 300$	$k = last$
21×21	$5.69903E - 05$	$1.62652E - 05$	$1.58125E - 05$
41×41	$5.98042E - 05$	$2.53690E - 05$	$1.70250E - 05$
81×81	$6.12900E - 05$	$5.87954E - 05$	$1.96504E - 05$
121×121	$6.17976E - 05$	$6.16267E - 05$	$2.58452E - 05$

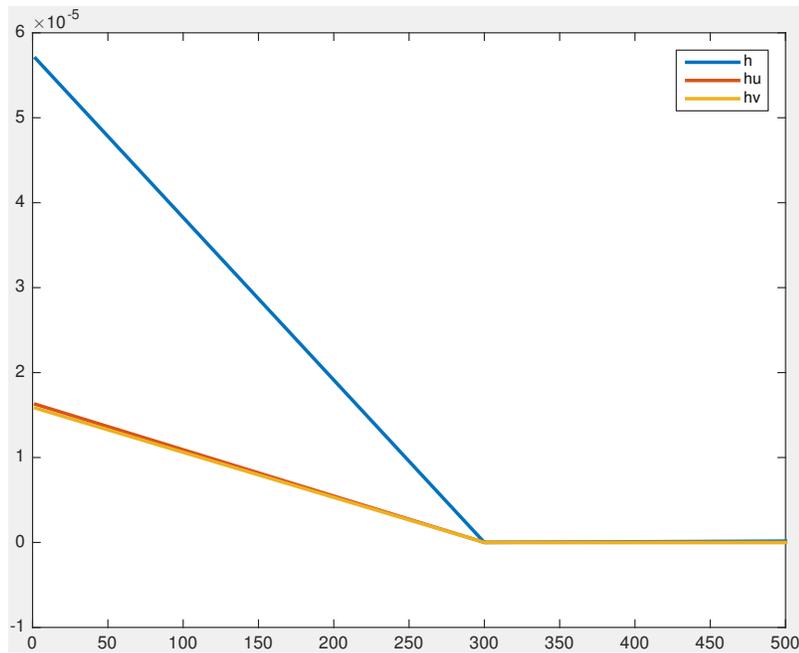
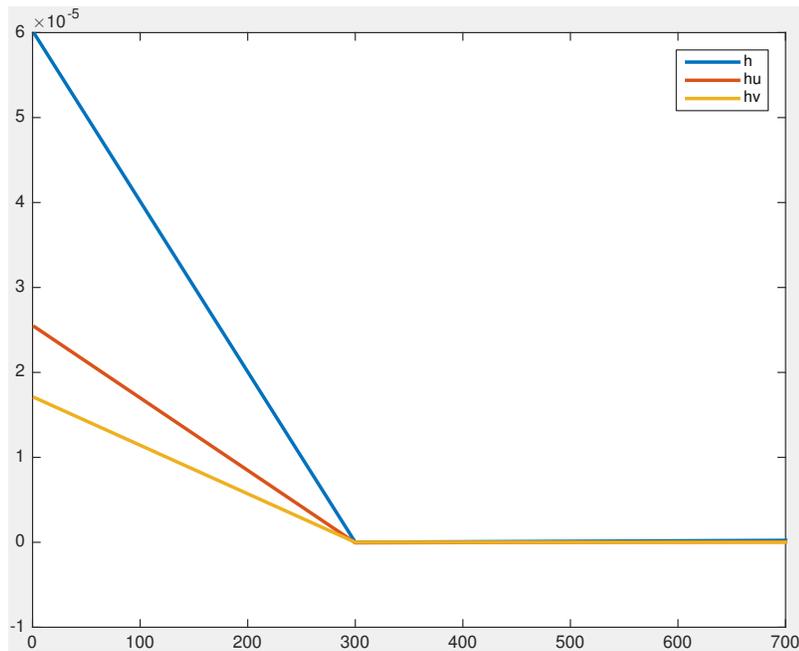
Tabla 5.23: Resultados del gasto de masa en QUAD. Esquema 2.

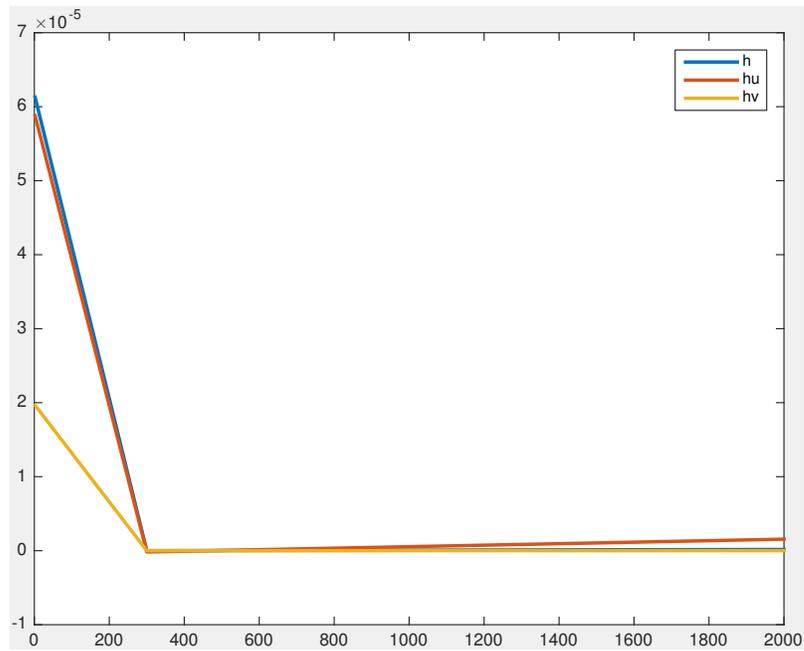
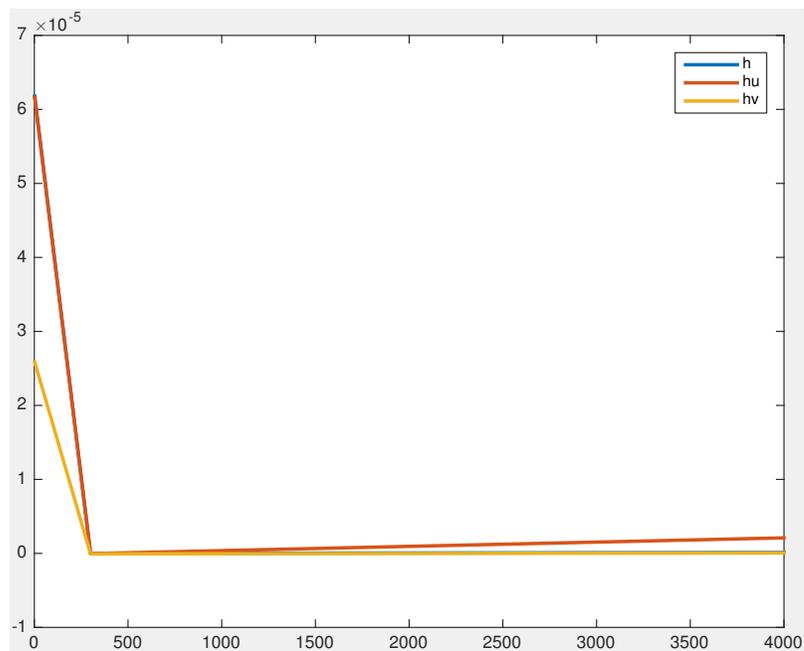
Puntos espaciales	$k = 2$	$k = 300$	$k = last$
21×21	$1.30351E - 13$	$2.99087E - 09$	$1.72136E - 09$
41×41	$3.04909E - 14$	$5.96914E - 08$	$1.63581E - 10$
81×81	$9.67460E - 15$	$1.69758E - 07$	$1.37296E - 09$
121×121	$5.78840E - 15$	$2.76695E - 08$	$6.26006E - 08$

Tabla 5.24: Resultados del gasto de momento hu en QUAD. Esquema 2.

Puntos espaciales	$k = 2$	$k = 300$	$k = last$
21×21	$1.57672E - 07$	$2.82746E - 09$	$4.14349E - 11$
41×41	$2.30086E - 07$	$5.84681E - 08$	$1.06405E - 09$
81×81	$1.63677E - 07$	$1.55596E - 06$	$5.36741E - 09$
121×121	$1.23566E - 07$	$2.10181E - 06$	$5.92642E - 08$

Tabla 5.25: Resultados del gasto de momento hv en QUAD. Esquema 2.

Figura 5.52: Región QUAD con 21×21 puntos. Esquema 2.Figura 5.53: Región QUAD con 41×41 puntos. Esquema 2.

Figura 5.54: Región QUAD con 81×81 puntos. Esquema 2.Figura 5.55: Región QUAD con 121×121 puntos. Esquema 2.

Puntos espaciales	$k = 2$	$k = 300$	$k = last$
21×21	$6.47994E - 05$	$2.07215E - 05$	$2.07929E - 05$
41×41	$6.79989E - 05$	$2.80271E - 05$	$2.22727E - 05$
81×81	$6.96882E - 05$	$6.65427E - 05$	$2.39004E - 05$
121×121	$7.02654E - 05$	$7.01163E - 05$	$2.91642E - 05$

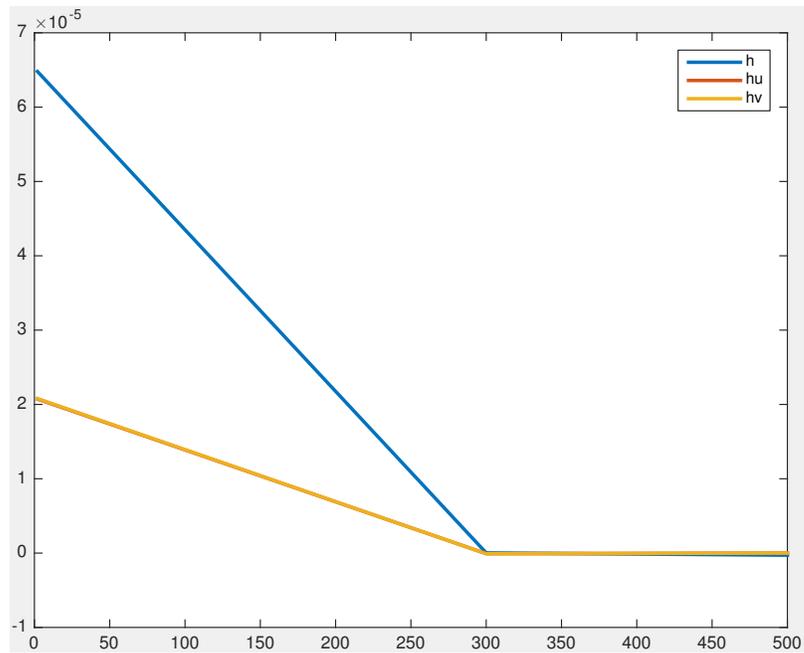
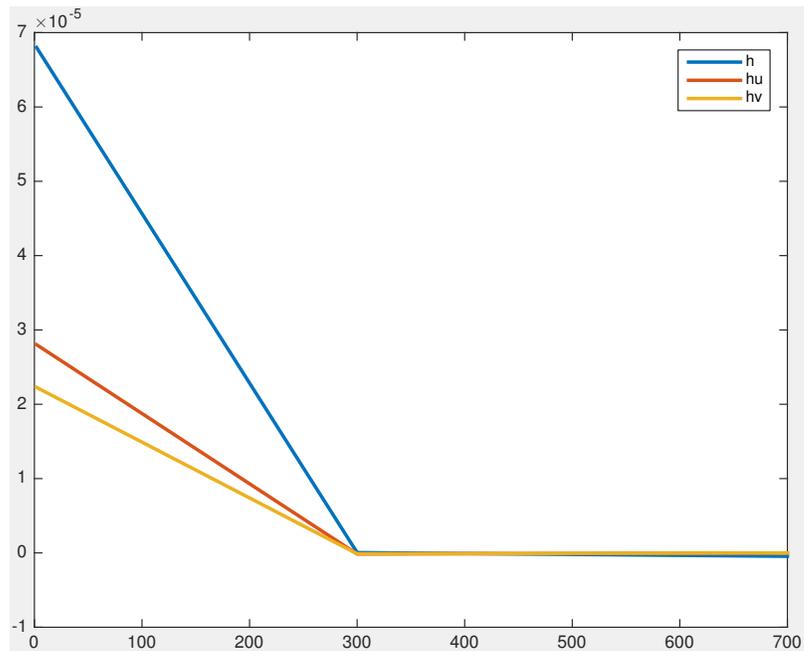
Tabla 5.26: Resultados del gasto de masa en TRAP. Esquema 2.

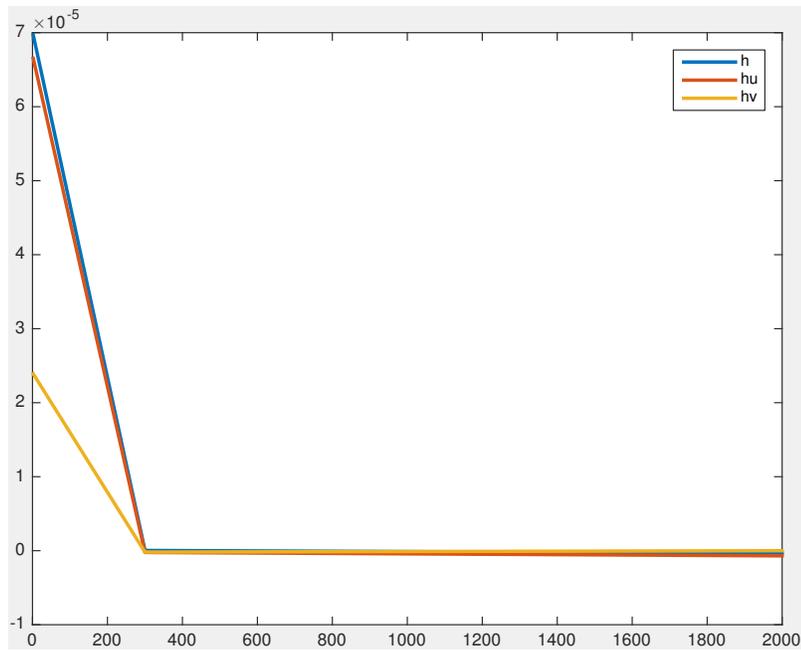
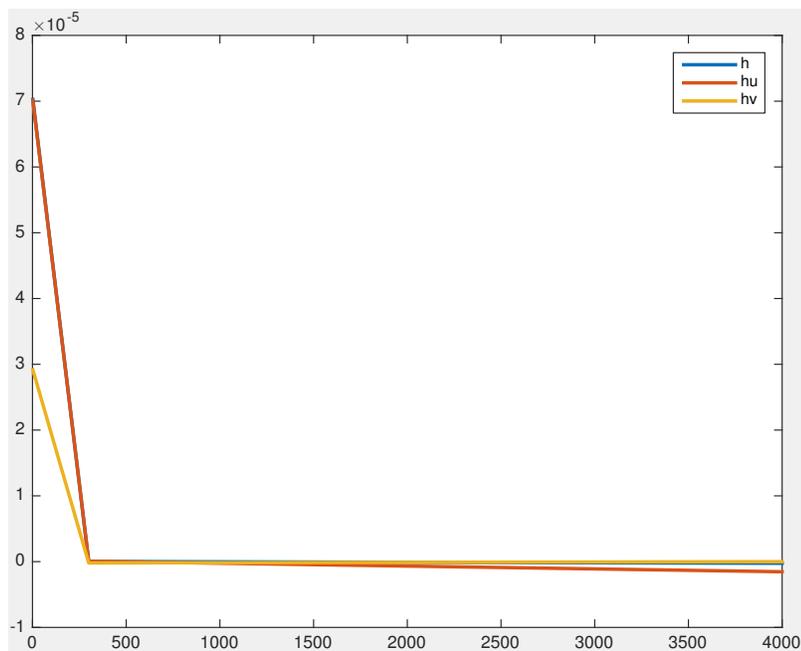
Puntos espaciales	$k = 2$	$k = 300$	$k = last$
21×21	$2.57479E - 08$	$8.03158E - 08$	$9.09979E - 08$
41×41	$4.43346E - 08$	$1.47353E - 07$	$1.17337E - 07$
81×81	$3.28530E - 08$	$2.34006E - 07$	$1.88339E - 07$
121×121	$2.49900E - 08$	$5.46873E - 08$	$2.05391E - 07$

Tabla 5.27: Resultados del gasto de momento hu en TRAP. Esquema 2.

Puntos espaciales	$k = 2$	$k = 300$	$k = last$
21×21	$2.82638E - 07$	$1.24813E - 09$	$3.83395E - 10$
41×41	$4.56071E - 07$	$3.93914E - 09$	$5.24496E - 09$
81×81	$3.32996E - 07$	$6.97944E - 07$	$2.92721E - 09$
121×121	$2.52618E - 07$	$1.53935E - 06$	$4.49892E - 09$

Tabla 5.28: Resultados del gasto de momento hv en TRAP. Esquema 2.

Figura 5.56: Región TRAP con 21×21 puntos. Esquema 2.Figura 5.57: Región TRAP con 41×41 puntos. Esquema 2.

Figura 5.58: Región TRAP con 81×81 puntos. Esquema 2.Figura 5.59: Región TRAP con 121×121 puntos. Esquema 2.

Puntos espaciales	$k = 2$	$k = 300$	$k = last$
21×21	$1.00929E - 04$	$2.12444E - 04$	$4.14922E - 04$
41×41	$1.05957E - 04$	$1.11255E - 04$	$3.21420E - 04$
81×81	$1.08609E - 04$	$9.49590E - 05$	$1.74125E - 04$
121×121	$1.09515E - 04$	$1.06555E - 04$	$1.20058E - 04$

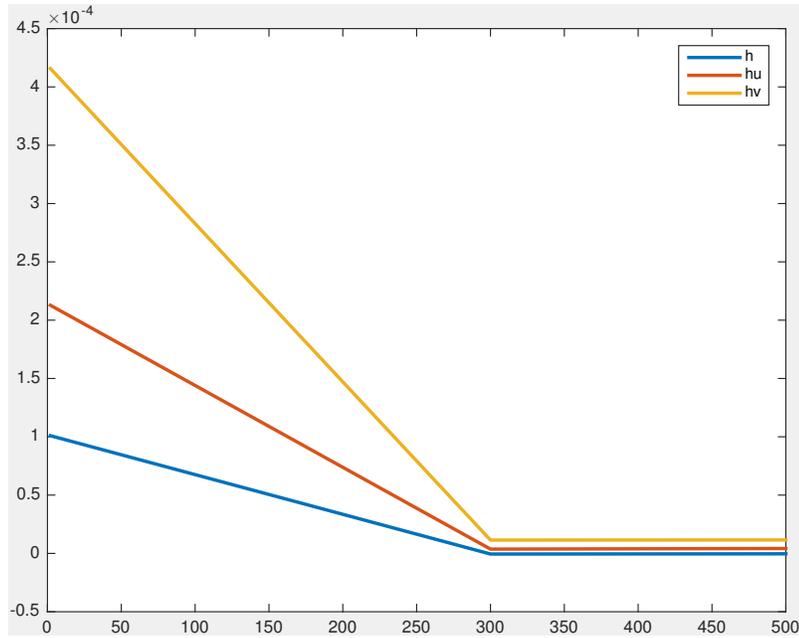
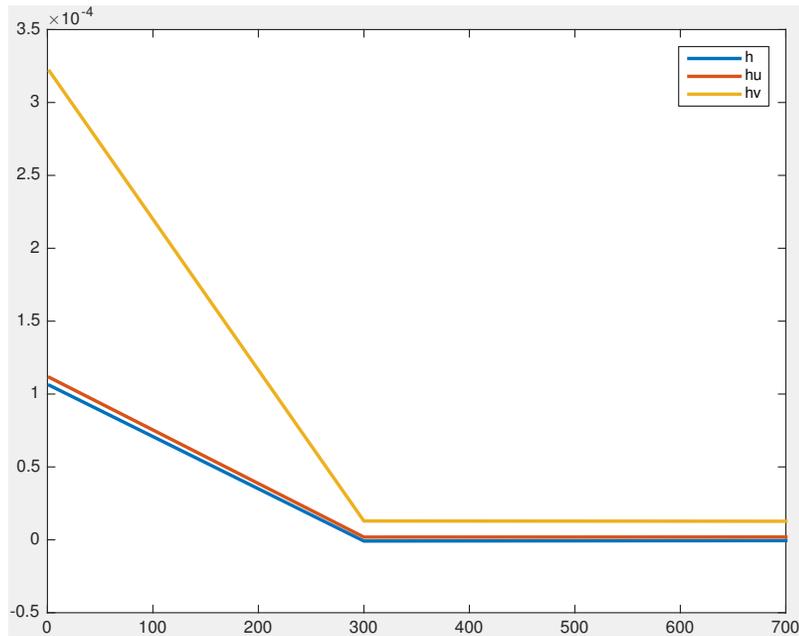
Tabla 5.29: Resultados del gasto de masa en ANI. Esquema 2.

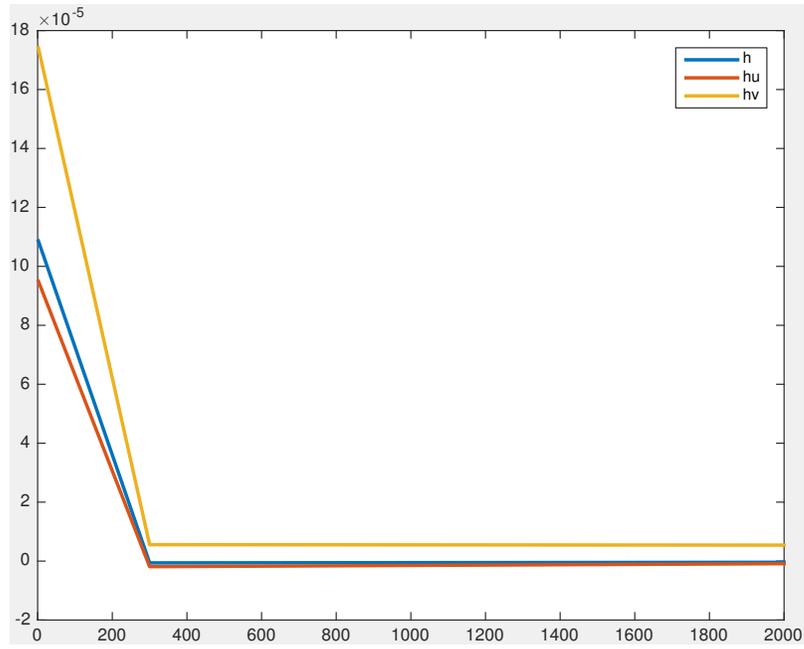
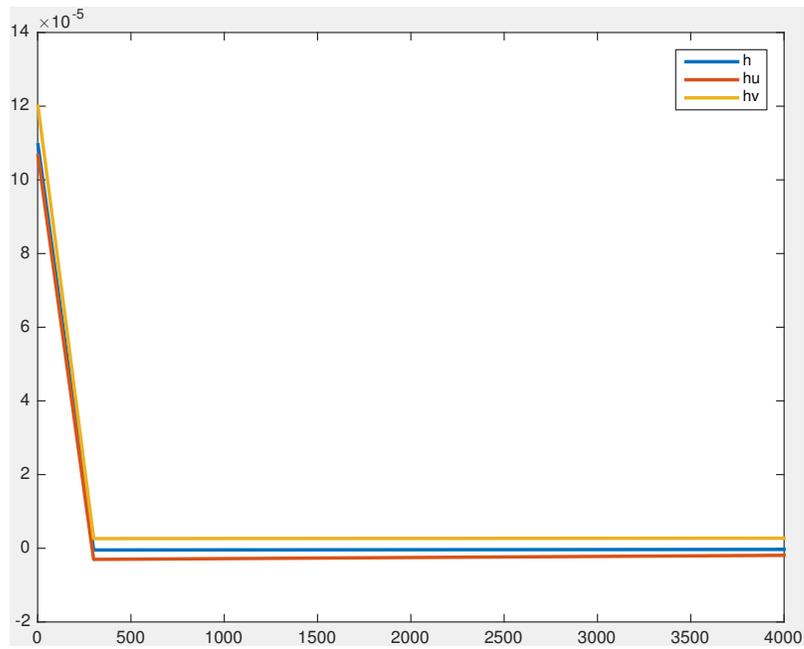
Puntos espaciales	$k = 2$	$k = 300$	$k = last$
21×21	$5.25731E - 07$	$3.67787E - 06$	$1.13780E - 05$
41×41	$8.35222E - 07$	$1.85390E - 06$	$1.28990E - 05$
81×81	$6.07461E - 07$	$1.88841E - 06$	$5.56248E - 06$
121×121	$4.60511E - 07$	$3.01749E - 06$	$2.63280E - 06$

Tabla 5.30: Resultados del gasto de momento hu en ANI. Esquema 2.

Puntos espaciales	$k = 2$	$k = 300$	$k = last$
21×21	$3.50485E - 07$	$4.18629E - 06$	$1.15119E - 05$
41×41	$5.56814E - 07$	$1.91603E - 06$	$1.27350E - 05$
81×81	$4.04974E - 07$	$8.76586E - 07$	$5.42076E - 06$
121×121	$3.07007E - 07$	$1.91211E - 06$	$2.73177E - 06$

Tabla 5.31: Resultados del gasto de momento hv en ANI. Esquema 2.

Figura 5.60: Región ANI con 21×21 puntos. Esquema 2.Figura 5.61: Región ANI con 41×41 puntos. Esquema 2.

Figura 5.62: Región ANI con 81×81 puntos. Esquema 2.Figura 5.63: Región ANI con 121×121 puntos. Esquema 2.

Puntos espaciales	$k = 2$	$k = 300$	$k = last$
21×21	$5.87415E - 05$	$2.63583E - 05$	$3.13206E - 05$
41×41	$6.16419E - 05$	$3.14275E - 05$	$3.19225E - 05$
81×81	$6.31733E - 05$	$6.24163E - 05$	$3.05393E - 05$
121×121	$6.36965E - 05$	$6.42131E - 05$	$3.37990E - 05$

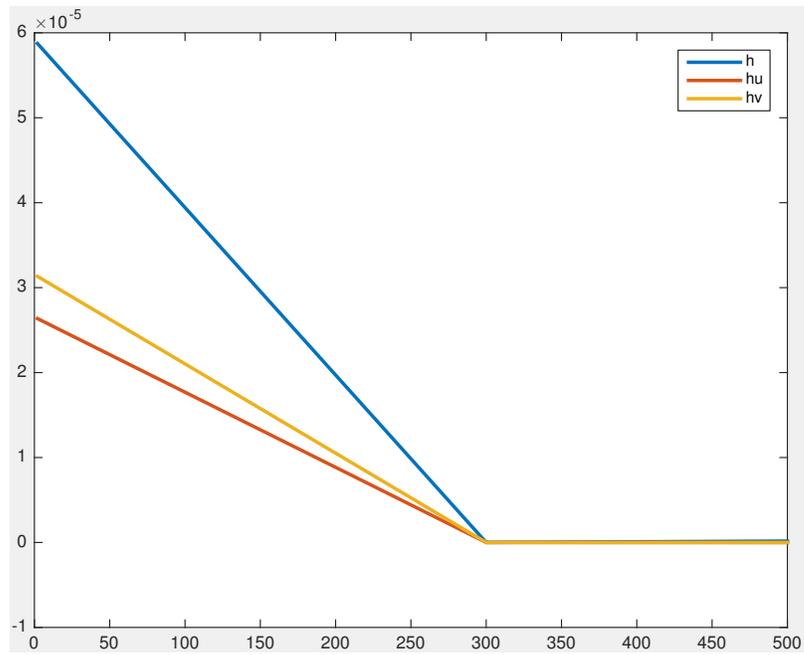
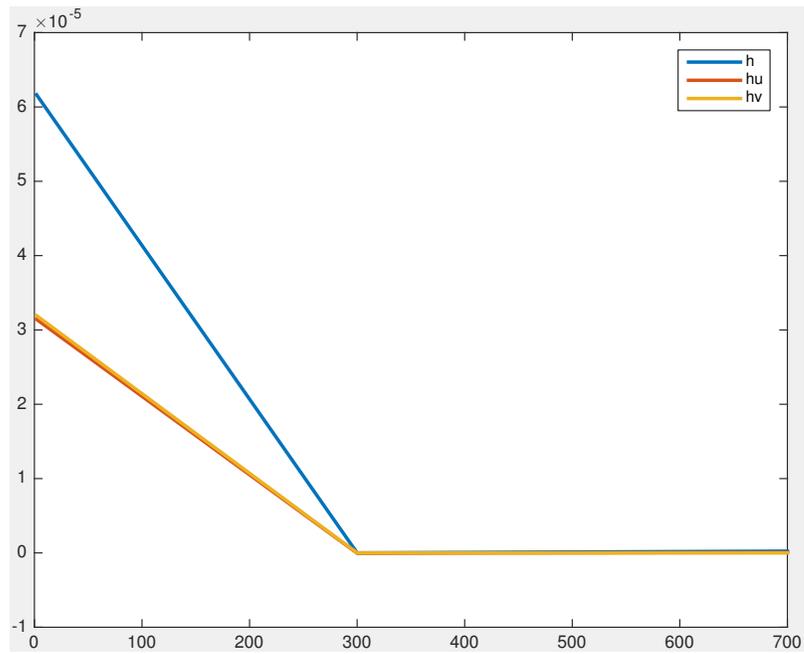
Tabla 5.32: Resultados del gasto de masa en TAT. Esquema 2.

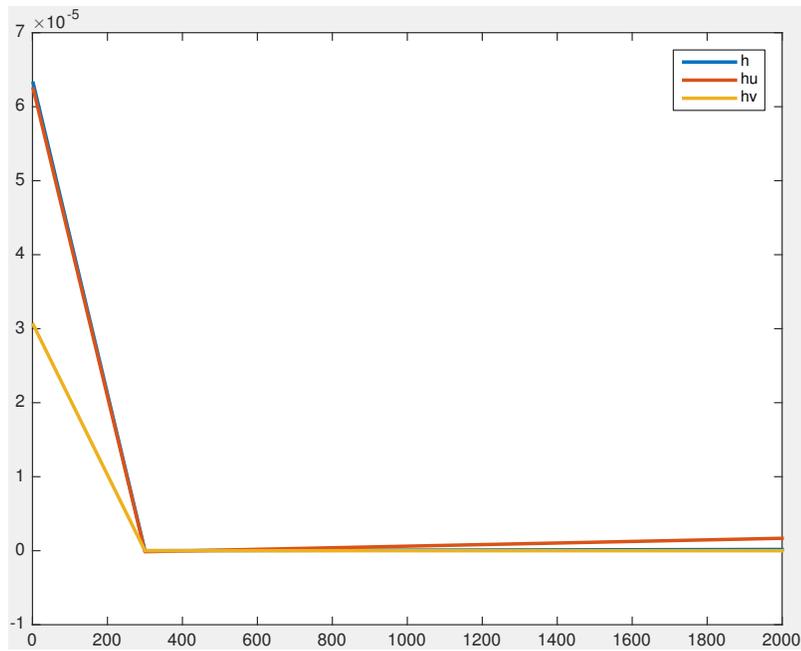
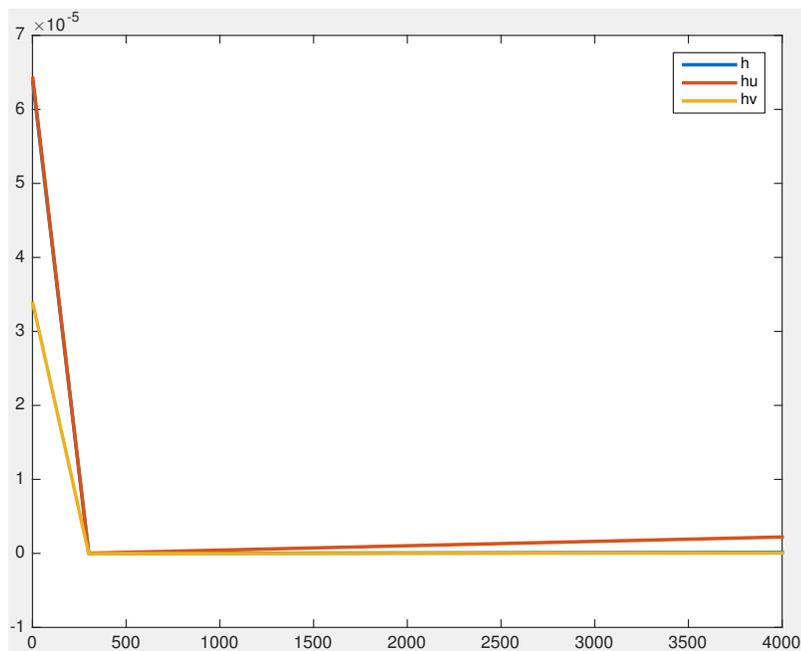
Puntos espaciales	$k = 2$	$k = 300$	$k = last$
21×21	$7.14902E - 10$	$1.32142E - 09$	$9.21829E - 10$
41×41	$2.12440E - 09$	$3.93809E - 08$	$5.47592E - 09$
81×81	$1.71431E - 09$	$1.36643E - 07$	$1.87703E - 09$
121×121	$1.32298E - 09$	$2.78182E - 08$	$3.19647E - 08$

Tabla 5.33: Resultados del gasto de momento hu en TAT. Esquema 2.

Puntos espaciales	$k = 2$	$k = 300$	$k = last$
21×21	$1.62843E - 07$	$3.09408E - 09$	$2.36492E - 09$
41×41	$2.38161E - 07$	$6.24536E - 08$	$2.18054E - 09$
81×81	$1.69523E - 07$	$1.67739E - 06$	$8.39853E - 09$
121×121	$1.27994E - 07$	$2.21596E - 06$	$5.45620E - 08$

Tabla 5.34: Resultados del gasto de momento hv en TAT. Esquema 2.

Figura 5.64: Región TAT con 21×21 puntos. Esquema 2.Figura 5.65: Región TAT con 41×41 puntos. Esquema 2.

Figura 5.66: Región TAT con 81×81 puntos. Esquema 2.Figura 5.67: Región TAT con 121×121 puntos. Esquema 2.

Puntos espaciales	$k = 2$	$k = 300$	$k = last$
21×21	$1.41452E - 04$	$6.03132E - 05$	$7.02719E - 05$
41×41	$1.48447E - 04$	$6.55039E - 05$	$6.90705E - 05$
81×81	$1.52139E - 04$	$1.48683E - 04$	$8.75310E - 05$
121×121	$1.53400E - 04$	$1.53080E - 04$	$1.01453E - 04$

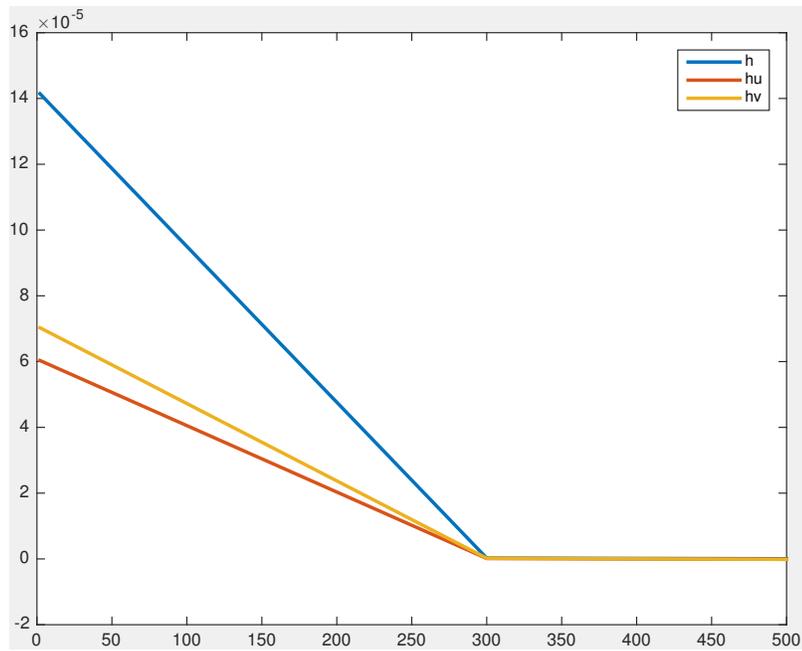
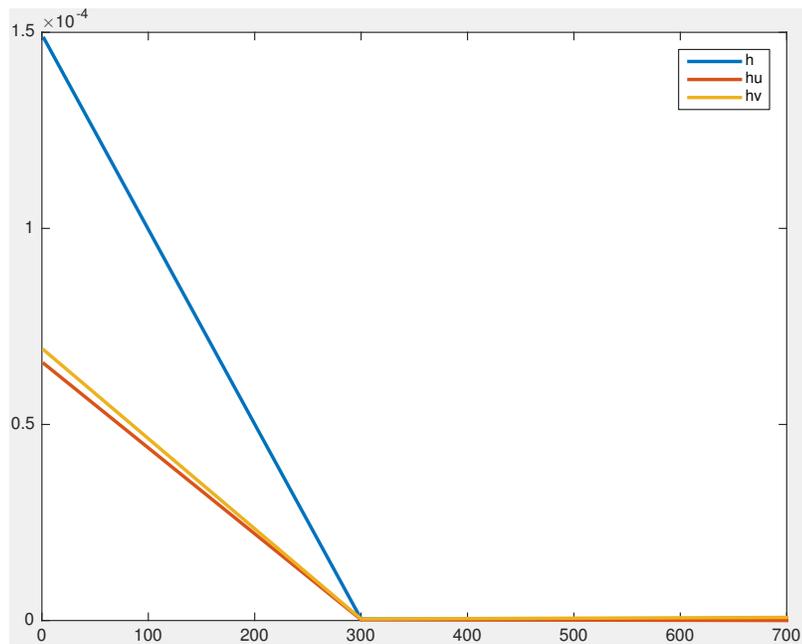
Tabla 5.35: Resultados del gasto de masa en CAB. Esquema 2.

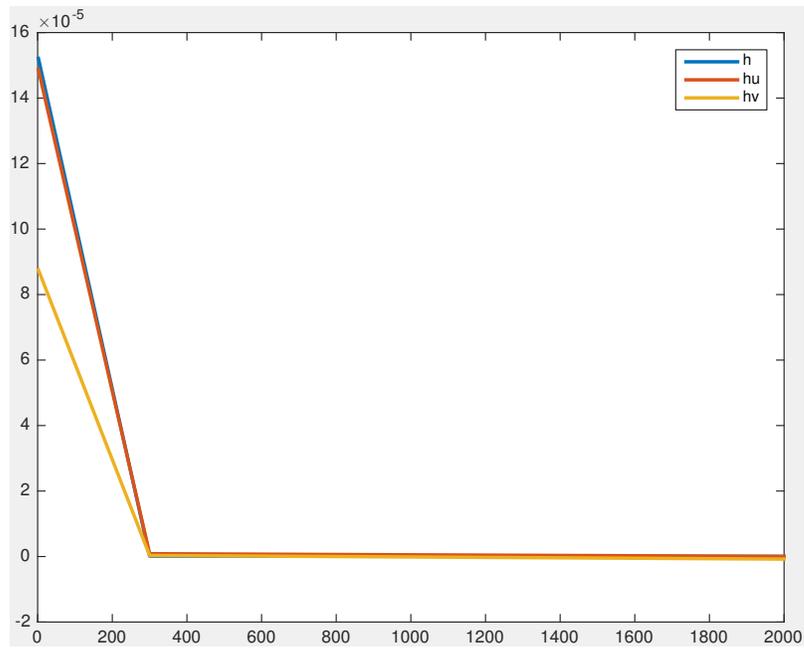
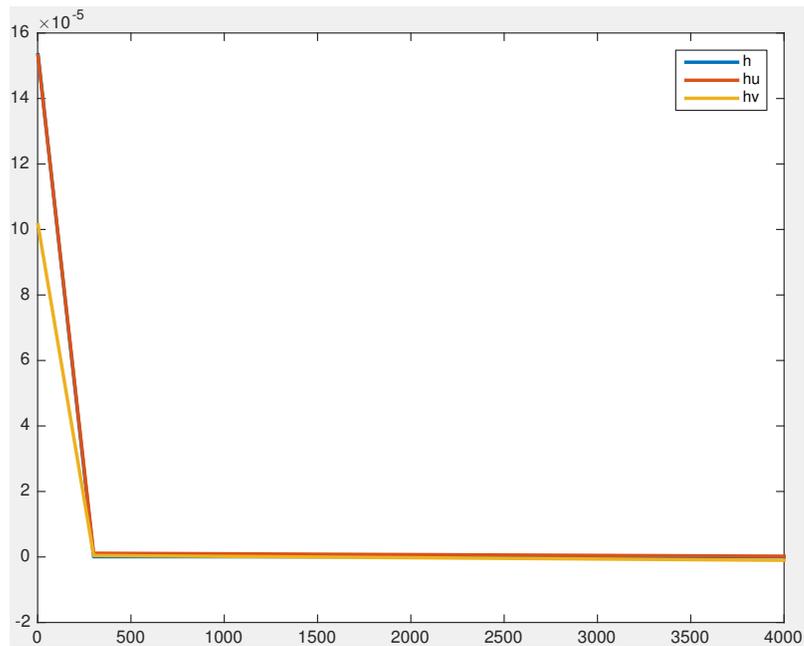
Puntos espaciales	$k = 2$	$k = 300$	$k = last$
21×21	$2.48392E - 07$	$1.32100E - 07$	$2.00420E - 07$
41×41	$3.82652E - 07$	$2.16466E - 07$	$3.89471E - 07$
81×81	$1.38045E - 07$	$8.68555E - 07$	$3.28843E - 07$
121×121	$8.36078E - 08$	$1.13777E - 06$	$4.47370E - 07$

Tabla 5.36: Resultados del gasto de momento hu en CAB. Esquema 2.

Puntos espaciales	$k = 2$	$k = 300$	$k = last$
21×21	$5.98431E - 08$	$1.13890E - 07$	$1.28872E - 07$
41×41	$9.71311E - 08$	$1.23052E - 08$	$7.79997E - 07$
81×81	$3.54842E - 08$	$4.93085E - 08$	$7.83941E - 07$
121×121	$2.15390E - 08$	$2.28778E - 07$	$1.02960E - 06$

Tabla 5.37: Resultados del gasto de momento hv en CAB. Esquema 2.

Figura 5.68: Región CAB con 21×21 puntos. Esquema 2.Figura 5.69: Región CAB con 41×41 puntos. Esquema 2.

Figura 5.70: Región CAB con 81×81 puntos. Esquema 2.Figura 5.71: Región CAB con 121×121 puntos. Esquema 2.

Para el caso que más nos interesa, donde tenemos dominios que son aproximaciones regiones geográficas reales, estudiaremos el caso del lago de Pátzcuaro, como ya se comentó anteriormente. Debido a las características físicas de la región, se decidió dividir la región en tres partes diferentes.

La región original tiene la forma mostrada en la figura (5.72). Esta región se dividió en diferentes subregiones con el propósito de conservar la geometría del lugar, y generar simulaciones donde se puedan reflejar los cambios en el tiempo. Si tomamos la región en una sola pieza, debido a las dimensiones de la región (casi quince kilómetros de largo por 14 metros de profundidad), así como de las características del fenómeno que se quiere modelar (donde una ola o perturbación no llega a ser de más de 30 centímetros), una simulación con la geometría completa no servirá para notar los cambios en los diferentes pasos en el tiempo. La idea es generar varias subregiones donde se pueda modelar el fenómeno, para así obtener una mejor aproximación a la realidad. Las subregiones generadas pueden observarse en las figuras (5.73 - 5.75), y son denotadas por UP, MID, DOWN, refiriéndose a las partes Norte, centro y Sur de la región completa respectivamente.

En este caso se generaron mallas con 21, 41 y 81 puntos por lado para cada una de estas regiones, las cuales podemos observar en las figuras (5.76 - ??).

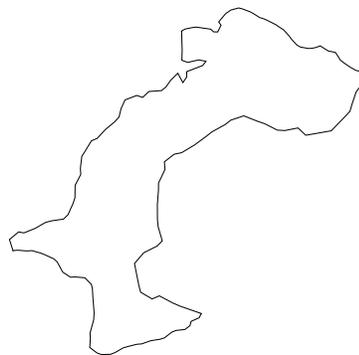


Figura 5.72: Región PATZ.

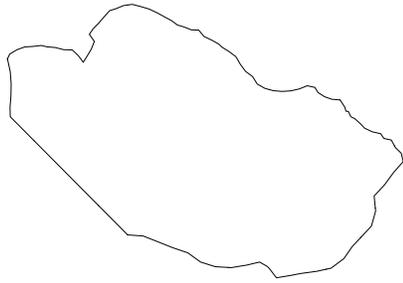


Figura 5.73: Región UP.

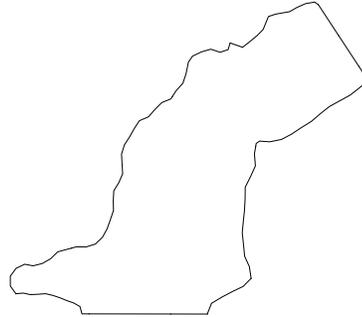


Figura 5.74: Región MID.

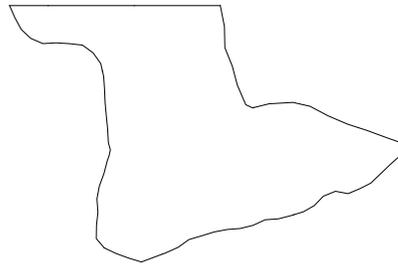


Figura 5.75: Región DOWN.

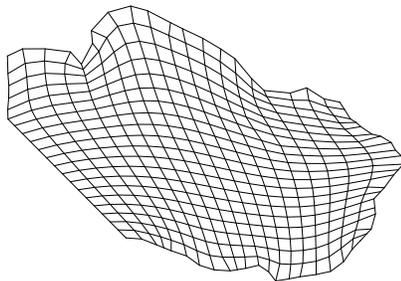


Figura 5.76: Malla de UP con 21 puntos por lado.

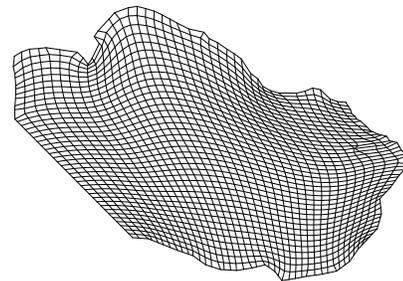


Figura 5.77: Malla de UP con 41 puntos por lado.

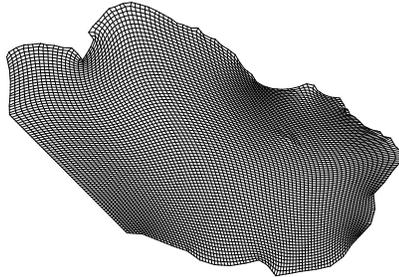


Figura 5.78: Malla de UP con 81 puntos por lado.

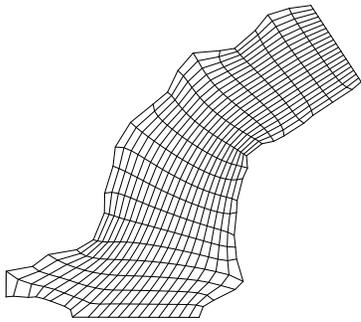


Figura 5.79: Malla de MID con 21 puntos por lado.

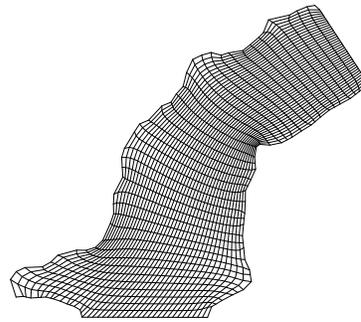


Figura 5.80: Malla de MID con 41 puntos por lado.

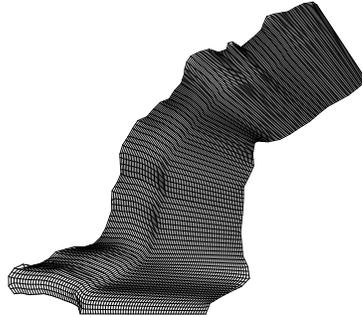


Figura 5.81: Malla de MID con 81 puntos por lado.

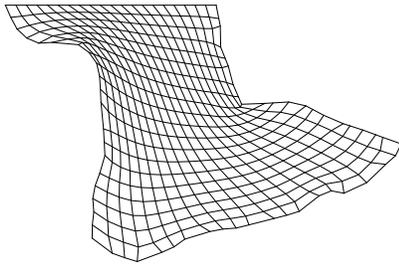


Figura 5.82: Malla de DOWN con 21 puntos por lado.

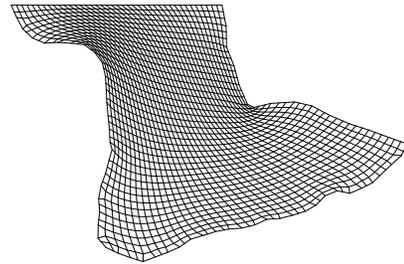


Figura 5.83: Malla de DOWN con 41 puntos por lado.

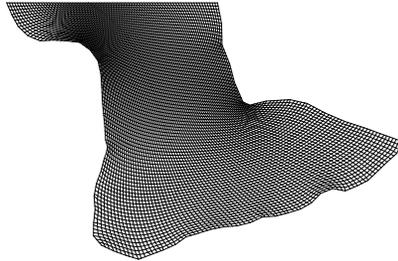


Figura 5.84: Malla de DOWN con 81 puntos por lado.

Para estas pruebas, debido al tamaño de la celda mínima producida en cada una de las regiones, se utilizaron más pasos en el tiempo que en los problemas anteriores. La concordancia de pasos en el tiempo, dependiendo de la cantidad de puntos por lado, se puede ver en la tabla (5.38).

Puntos espaciales	Pasos en el tiempo
21×21	4000
41×41	5000
81×81	10000

Tabla 5.38: Concordancia en puntos espaciales y temporales.

Nuevamente se realizaron pruebas utilizando los dos esquemas descritos anteriormente. Para el primer esquema los resultados de calcular los gastos de masa y momento, lo cual se hizo de la misma forma que en los casos anteriores, se resumen en las tablas (5.39 - 5.47); en las figuras (5.85 - 5.93) se muestra la comparación de los gastos.

Puntos espaciales	$k = 2$	$k = 2000$	$k = last$
21×21	$4.71355E - 04$	$3.42953E - 04$	$4.50097E - 04$
41×41	$4.73659E - 04$	$3.98003E - 04$	$4.16953E - 04$
81×81	$4.79150E - 03$	$4.44498E - 04$	$4.26174E - 04$

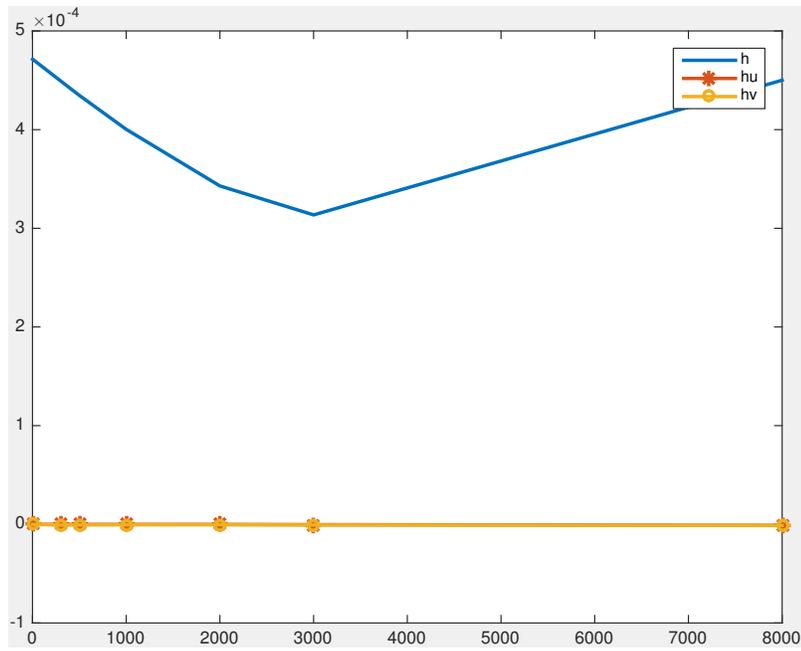
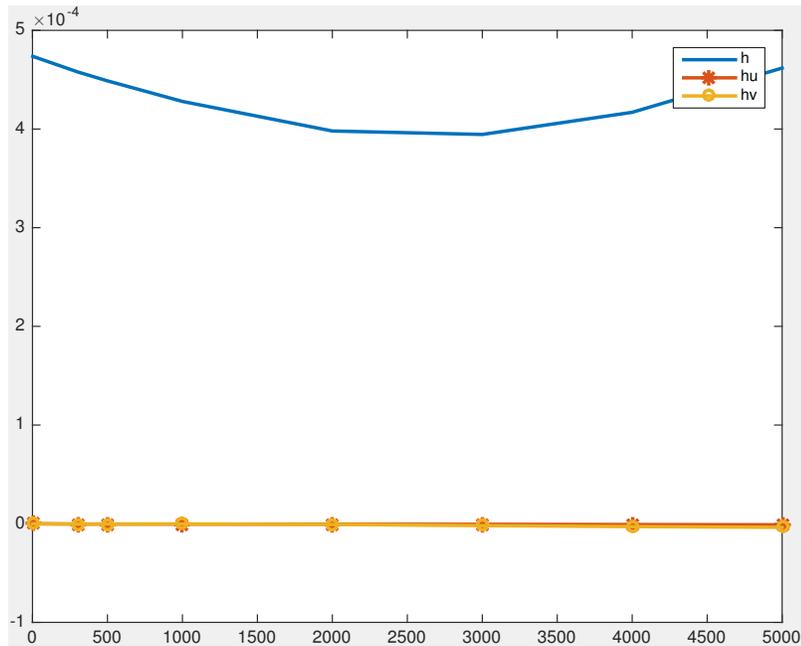
Tabla 5.39: Resultados del gasto de masa en UP. Esquema 1.

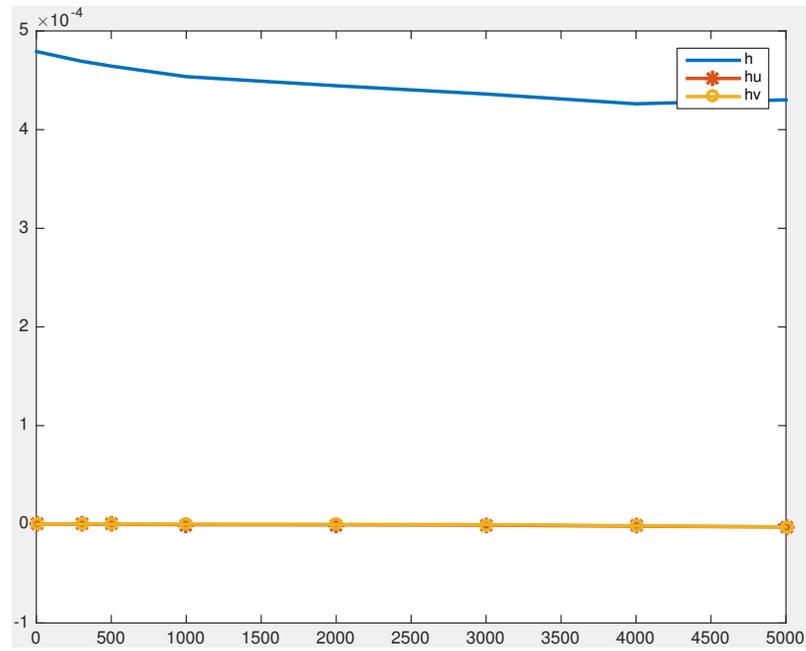
Puntos espaciales	$k = 2$	$k = 2000$	$k = last$
21×21	$1.48897E - 08$	$1.61195E - 07$	$1.10164E - 06$
41×41	$3.28173E - 08$	$5.37026E - 07$	$8.48528E - 07$
81×81	$2.06065E - 08$	$5.72923E - 07$	$1.94686E - 06$

Tabla 5.40: Resultados del gasto de momento hu en UP. Esquema 1.

Puntos espaciales	$k = 2$	$k = 2000$	$k = last$
21×21	$8.71461E - 08$	$4.43251E - 07$	$1.19203E - 06$
41×41	$3.90493E - 08$	$7.88144E - 07$	$2.94355E - 06$
81×81	$1.91577E - 08$	$8.53578E - 08$	$1.52131E - 06$

Tabla 5.41: Resultados del gasto de momento hv en UP. Esquema 1.

Figura 5.85: Región UP con 21×21 puntos. Esquema 1.Figura 5.86: Región UP con 41×41 puntos. Esquema 1.

Figura 5.87: Región UP con 81×81 puntos. Esquema 1.

Puntos espaciales	$k = 2$	$k = 2000$	$k = last$
21×21	$1.98551E - 05$	$1.98025E - 05$	$1.96796E - 05$
41×41	$2.12914E - 05$	$2.12718E - 05$	$2.13336E - 05$
81×81	$1.93573E - 05$	$1.93890E - 05$	$1.92356E - 05$

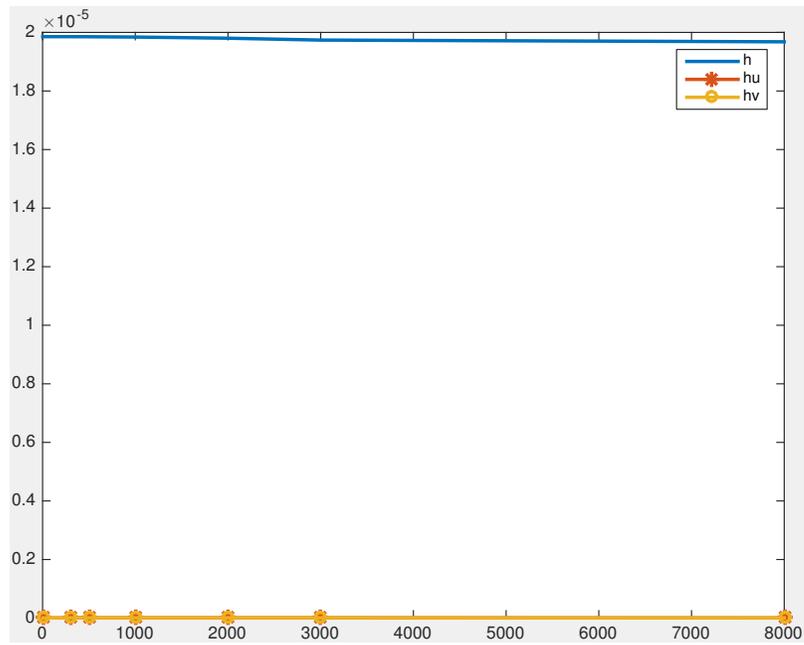
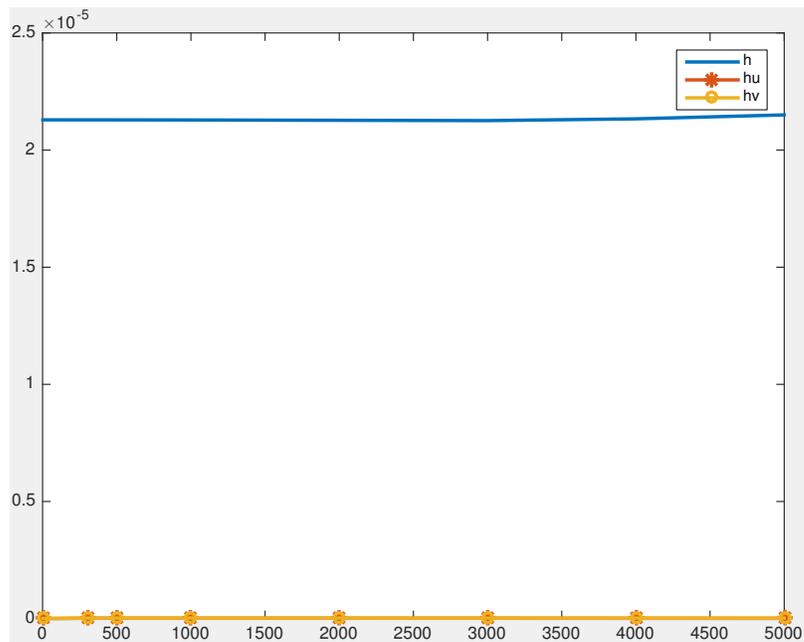
Tabla 5.42: Resultados del gasto de masa en MID. Esquema 1.

Puntos espaciales	$k = 2$	$k = 2000$	$k = last$
21×21	$2.15960E - 09$	$9.46397E - 09$	$5.48423E - 09$
41×41	$4.27357E - 09$	$1.83963E - 08$	$1.53576E - 08$
81×81	$1.03765E - 09$	$5.14752E - 09$	$8.42483E - 09$

Tabla 5.43: Resultados del gasto de momento hu en MID. Esquema 1.

Puntos espaciales	$k = 2$	$k = 2000$	$k = last$
21×21	$2.75139E - 09$	$1.00960E - 08$	$6.79697E - 09$
41×41	$7.08471E - 09$	$2.61921E - 08$	$2.41777E - 08$
81×81	$1.08297E - 09$	$4.54647E - 09$	$6.92056E - 09$

Tabla 5.44: Resultados del gasto de momento hv en MID. Esquema 1.

Figura 5.88: Región MID con 21×21 puntos. Esquema 1.Figura 5.89: Región MID con 41×41 puntos. Esquema 1.

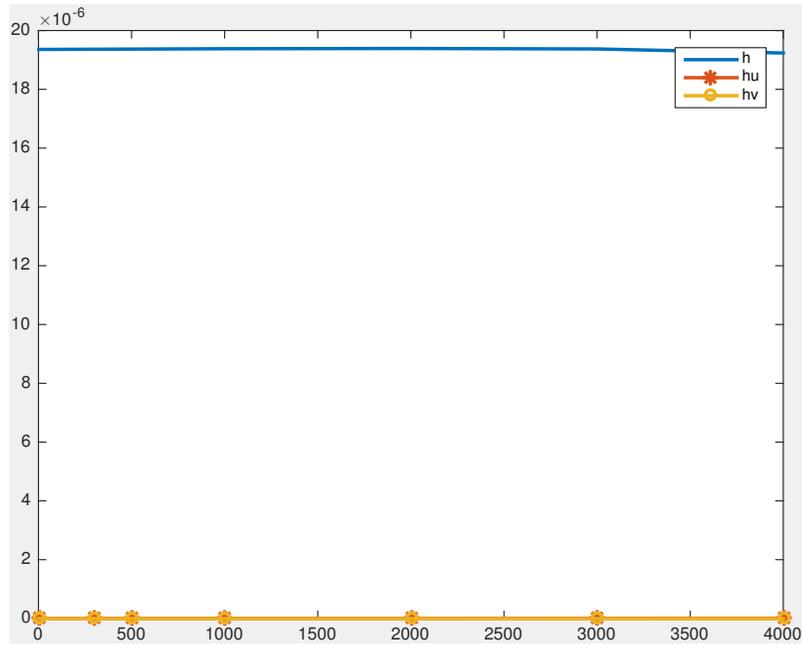


Figura 5.90: Región MID con 81×81 puntos. Esquema 1.

Puntos espaciales	$k = 2$	$k = 2000$	$k = last$
21×21	$1.44048E - 05$	$1.07616E - 05$	$1.92879E - 05$
41×41	$1.56766E - 05$	$1.45860E - 05$	$2.81673E - 05$
81×81	$1.61834E - 05$	$1.53507E - 05$	$1.39201E - 05$

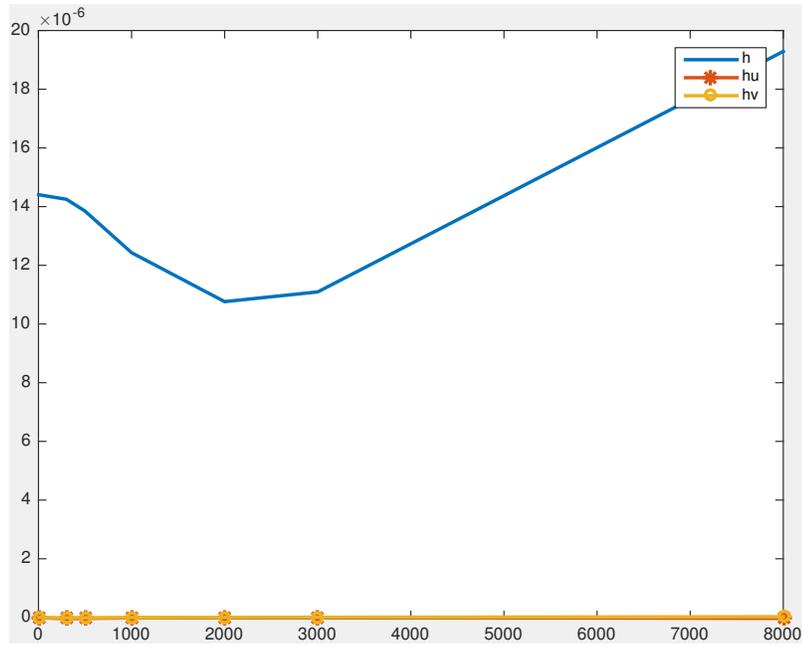
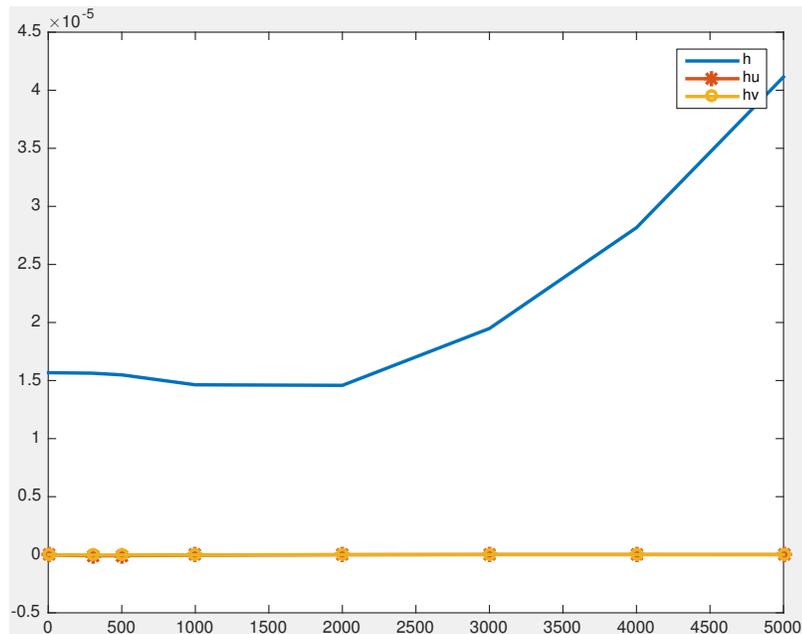
Tabla 5.45: Resultados del gasto de masa en DOWN. Esquema 1.

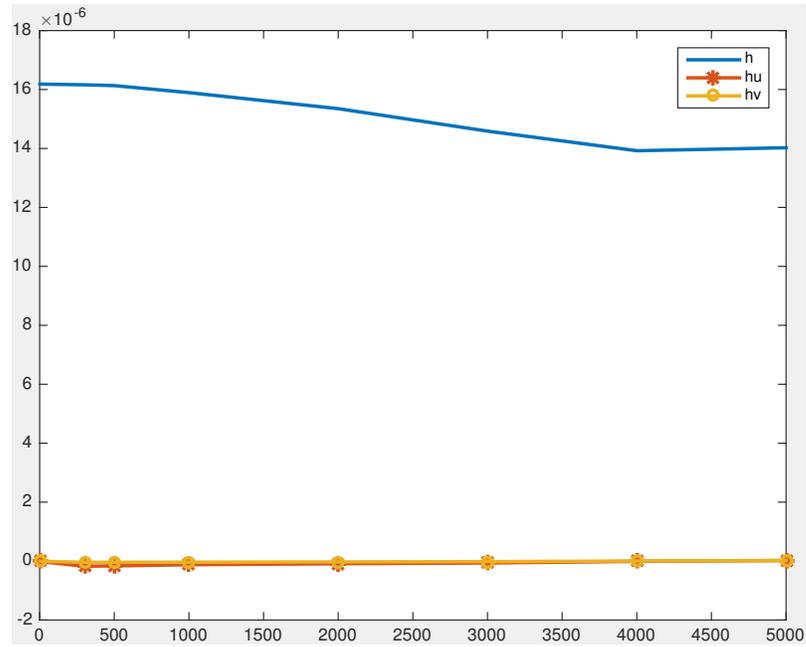
Puntos espaciales	$k = 2$	$k = 2000$	$k = last$
21×21	$4.95329E - 09$	$7.03206E - 10$	$3.07582E - 08$
41×41	$1.08465E - 08$	$2.69366E - 09$	$1.64612E - 08$
81×81	$1.49839E - 08$	$9.00259E - 08$	$9.18646E - 09$

Tabla 5.46: Resultados del gasto de momento hu en DOWN. Esquema 1.

Puntos espaciales	$k = 2$	$k = 2000$	$k = last$
21×21	$1.18021E - 09$	$3.72264E - 09$	$2.58421E - 08$
41×41	$2.45788E - 09$	$9.05765E - 09$	$1.67985E - 08$
81×81	$3.26298E - 09$	$2.77266E - 08$	$4.24079E - 09$

Tabla 5.47: Resultados del gasto de momento hv en DOWN. Esquema 1.

Figura 5.91: Región UP con 21×21 puntos. Esquema 1.Figura 5.92: Región UP con 41×41 puntos. Esquema 1.

Figura 5.93: Región UP con 81×81 puntos. Esquema 1.

Para las pruebas donde se calculan los coeficientes Γ una primera vez y después se actualiza su valor, podemos encontrar los resultados en las tablas (5.48 - 5.56); nuevamente, en las figuras (5.94 - 5.102) se muestran los gastos comparados para cada caso.

Puntos espaciales	$k = 2$	$k = 2000$	$k = last$
21×21	$4.71355E - 04$	$3.42965E - 04$	$4.50032E - 04$
41×41	$4.73659E - 04$	$3.98016E - 04$	$4.16941E - 04$
81×81	$4.79150E - 04$	$4.44500E - 04$	$4.26156E - 04$

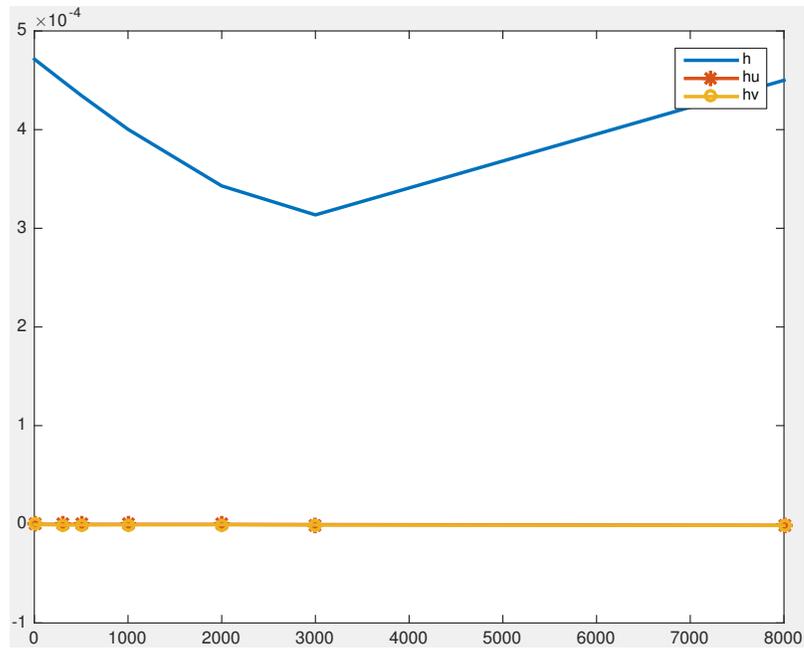
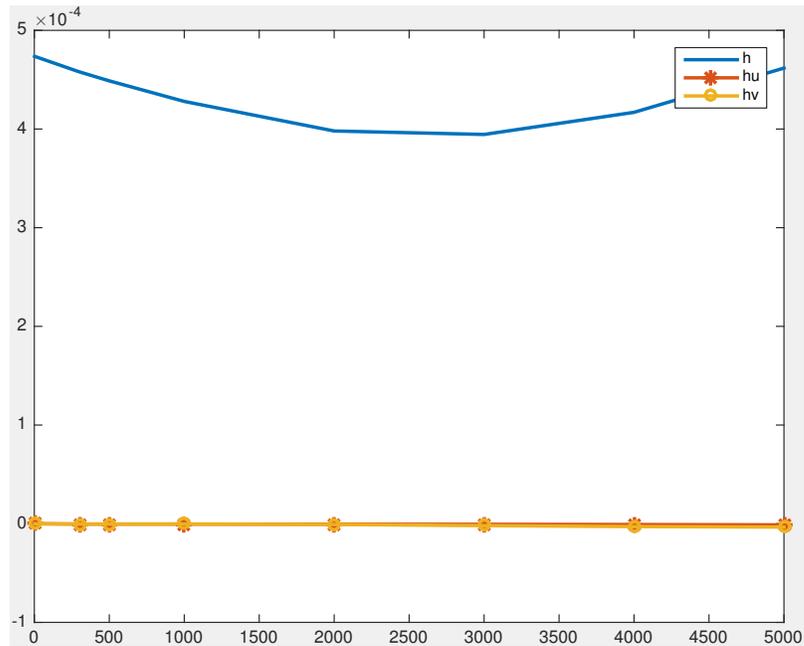
Tabla 5.48: Resultados del gasto de masa en UP. Esquema 2.

Puntos espaciales	$k = 2$	$k = 2000$	$k = last$
21×21	$1.48897E - 08$	$1.61163E - 07$	$1.10089E - 06$
41×41	$3.28173E - 08$	$5.37947E - 07$	$8.50537E - 07$
81×81	$2.06065E - 08$	$5.72798E - 07$	$1.94582E - 06$

Tabla 5.49: Resultados del gasto de momento hu en UP. Esquema 2.

Puntos espaciales	$k = 2$	$k = 2000$	$k = last$
21×21	$8.71461E - 08$	$4.43122E - 07$	$1.19029E - 06$
41×41	$3.90493E - 08$	$7.87776E - 07$	$2.93995E - 06$
81×81	$1.91577E - 08$	$8.44707E - 08$	$1.51725E - 06$

Tabla 5.50: Resultados del gasto de momento hv en UP. Esquema 2.

Figura 5.94: Región UP con 21×21 puntos. Esquema 2.Figura 5.95: Región UP con 41×41 puntos. Esquema 2.

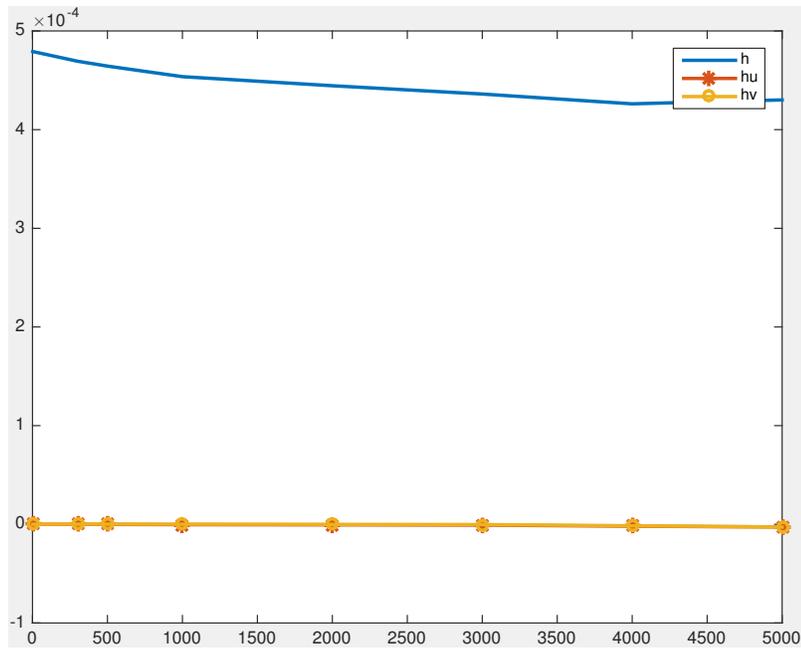


Figura 5.96: Región UP con 81×81 puntos. Esquema 2.

Puntos espaciales	$k = 2$	$k = 2000$	$k = last$
21×21	$198551E - 05$	$198025E - 05$	$196797E - 05$
41×41	$212914E - 05$	$212718E - 05$	$213336E - 05$
81×81	$193573E - 05$	$193890E - 05$	$192356E - 05$

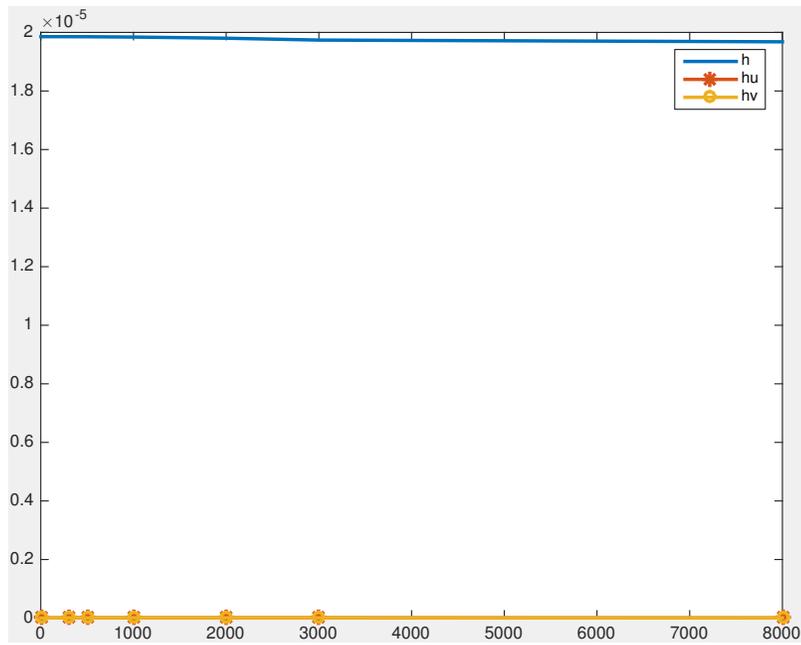
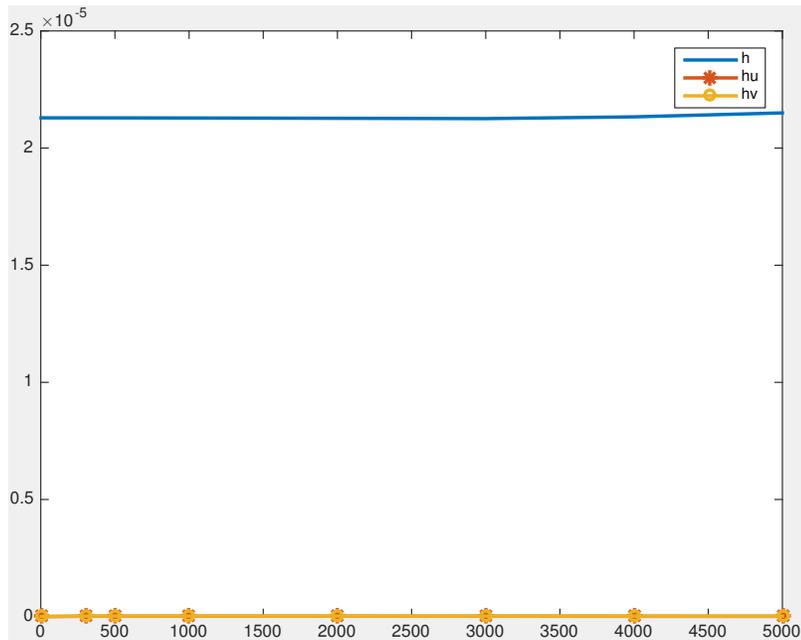
Tabla 5.51: Resultados del gasto de masa en MID. Esquema 2.

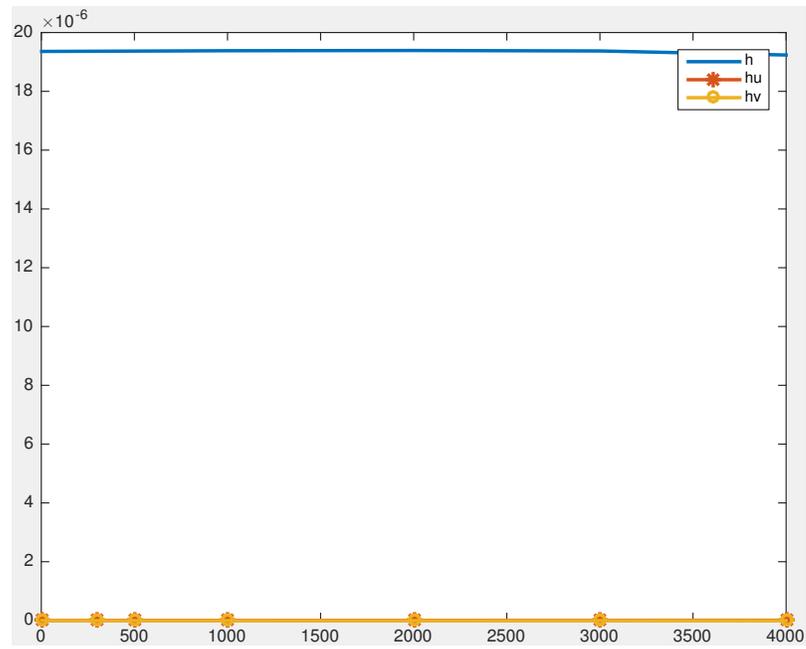
Puntos espaciales	$k = 2$	$k = 2000$	$k = last$
21×21	$215960E - 09$	$946378E - 09$	$548404E - 09$
41×41	$427357E - 09$	$183959E - 08$	$153580E - 08$
81×81	$103765E - 09$	$514752E - 09$	$842483E - 09$

Tabla 5.52: Resultados del gasto de momento hu en MID. Esquema 2.

Puntos espaciales	$k = 2$	$k = 2000$	$k = last$
21×21	$275139E - 09$	$100956E - 08$	$679661E - 09$
41×41	$708471E - 09$	$261911E - 08$	$241757E - 08$
81×81	$108297E - 09$	$454647E - 09$	$692056E - 09$

Tabla 5.53: Resultados del gasto de momento hv en MID. Esquema 2.

Figura 5.97: Región MID con 21×21 puntos. Esquema 2.Figura 5.98: Región MID con 41×41 puntos. Esquema 2.

Figura 5.99: Región MID con 81×81 puntos. Esquema 2.

Puntos espaciales	$k = 2$	$k = 2000$	$k = last$
21×21	$1.44048E - 05$	$1.07616E - 05$	$1.92858E - 05$
41×41	$1.56766E - 05$	$1.45864E - 05$	$2.81624E - 05$
81×81	$1.61834E - 05$	$1.53507E - 05$	$1.39201E - 05$

Tabla 5.54: Resultados del gasto de masa en DOWN. Esquema 2.

Puntos espaciales	$k = 2$	$k = 2000$	$k = last$
21×21	$4.95329E - 09$	$7.07374E - 10$	$3.07500E - 08$
41×41	$1.08465E - 08$	$2.69285E - 09$	$1.64754E - 08$
81×81	$1.49839E - 08$	$9.00259E - 08$	$9.18646E - 08$

Tabla 5.55: Resultados del gasto de momento hu en DOWN. Esquema 2.

Puntos espaciales	$k = 2$	$k = 2000$	$k = last$
21×21	$1.18021E - 09$	$3.72158E - 09$	$2.58231E - 08$
41×41	$2.45788E - 09$	$9.05687E - 09$	$1.67920E - 08$
81×81	$3.26298E - 09$	$2.77266E - 08$	$4.24079E - 09$

Tabla 5.56: Resultados del gasto de momento hv en DOWN. Esquema 2.

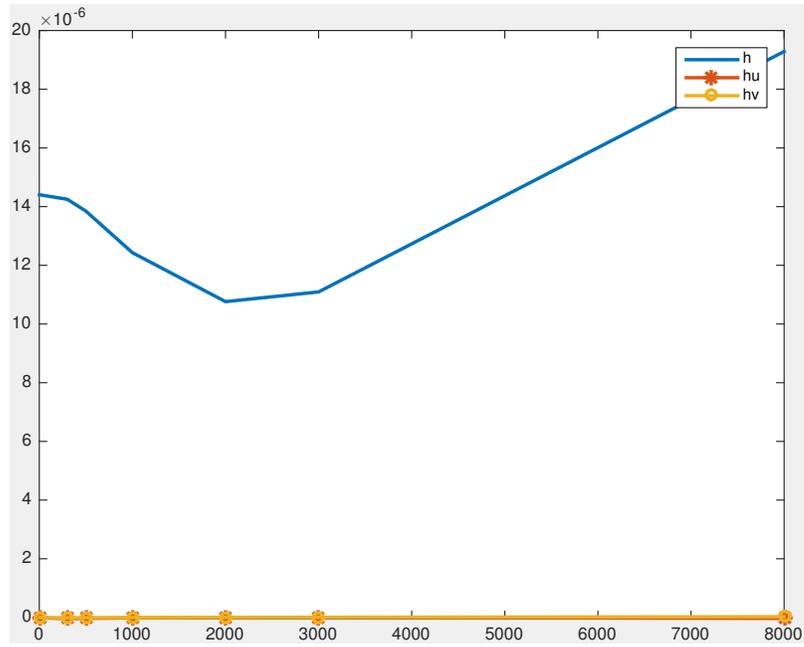


Figura 5.100: Región UP con 21×21 puntos. Esquema 2.

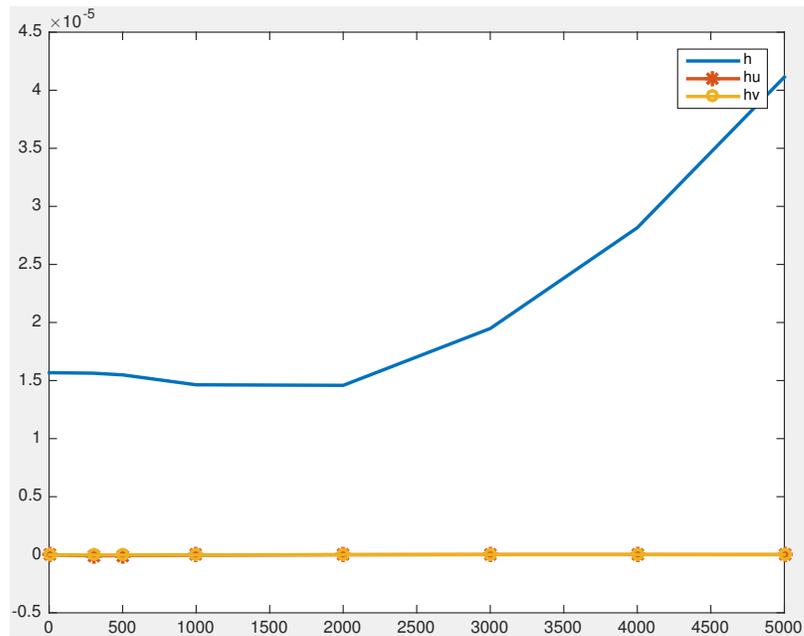


Figura 5.101: Región UP con 41×41 puntos. Esquema 2.

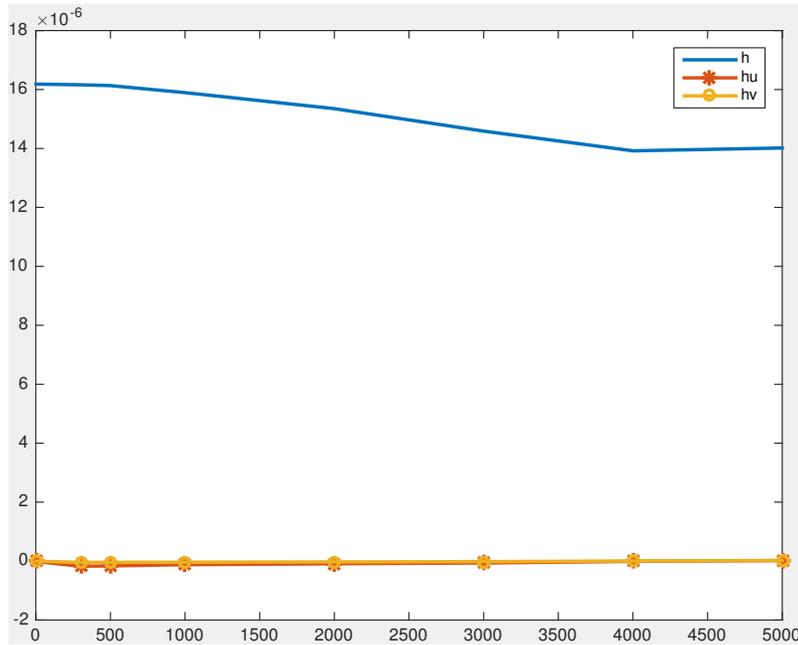


Figura 5.102: Región UP con 81×81 puntos. Esquema 2.

Al igual que en el caso rectangular, podemos darnos cuenta, gracias a los resultados, que el esquema propuesto logra suficiente estabilidad y buenas aproximaciones a las soluciones de las ecuaciones de aguas someras; también es importante recalcar que cuando tenemos problemas muy grandes, además de enfrentarnos a la limitante en memoria de las computadoras estándar, los errores de redondeo y truncamiento comienzan a aparecer y a ser notorios en los resultados, sin embargo, esto no provoca problemas en la estabilidad.

Podemos fácilmente concluir entonces que el esquema propuesto en este trabajo nos brindará buenas aproximaciones a las ecuaciones deseadas, pudiendo así utilizarlo para hacer simulaciones de diferentes problemas en regiones irregulares, lo cual era el propósito principal del presente. Algo que se debe de tener en cuenta, sin embargo, es la capacidad de computo necesaria para ejecutar estos problemas. Afortunadamente, para la mayor parte de las aplicaciones que puede tener este esquema en la vida real, las personas interesadas cuentan con la infraestructura suficiente para ejecutar los códigos de manera rápida y sin problemas.

Todos los esquemas descritos en este trabajo, los cuales se pueden consultar en los apéndices del presente trabajo, fueron programados en MATLAB [20], para lo cual se cuen-

ta con una licencia estándar de estudiante. Otra manera de mejorar el tiempo de computo, así como reducir los errores de truncamiento y redondeo, será programar el código en otros lenguajes de programación de un poco más bajo nivel, *Fortran 97* o *C* por ejemplo. Este es un trabajo que queda para futuro, y para una posible publicación en alguna revista arbitrada.

Apéndice A

Descripción de los programas

Shallow_wata1.m

El primero código que se muestra es el código utilizado para aproximar la solución de las ecuaciones de aguas someras, explicadas en el capítulo (4), en regiones rectangulares, mismo que se encuentra explicado en el capítulo (5) de este trabajo. Se encuentra programado en el lenguaje de programación MATLAB[©] [20].

```
function [h,u,v] = Shallow_wata1(x,y,z,t,fun,c)

% Esta rutina aproxima el valor de la soluci\'}n de las ecuaciones de aguas
% someras en regiones rectangulares utilizando un esquema de diferencias
% finitas adaptado por Gerardo Tinoco Guerrero.
%
% El esquema debe de recibir los par\'}{a}metros
%
%      x, y      :  Matrices con las coordenadas de los puntos de la malla.
%      z         :  Matriz con las profundidades en cada punto de la malla.
%      t         :  Cantidad de pasos en el tiempo para el intervalo (0,10).
%      fun       :  Funci\'}{o}n para la condici\'}{o}n inicial para h.
%      c         :  Se utiliza para elegir el punto inicial del pulso.
%
% Los par\'}{a}metros que obtiene de salida son
%
%      h         :  Matriz con el valor de las alturas en cada punto (x,y).
%      u         :  Matriz con las velocidades horizontales en cada punto.
```

```

%      v      :   Matriz con las velocidades verticales en cada punto.
%
% Las llamadas a la funci\''{o}n se realizan de la forma
%
%      [h,u,v] = Shallow_wata1(x21,y21,z21,1000,@fSHALL,1);
%
%
% Inicializamos las variables y cerramos ventanas abiertas
close all
[m,n] = size(x);
T = linspace(0,2,t);
dt = T(2) - T(1);
dx = x(1,2)-x(1,1);
dy = y(2,1)-y(1,1);
u = zeros(m,n,t);
v = zeros(m,n,t);
h = zeros(m,n,t);

% Agregamos una condici\''{o}n inicial para h
for i = 1:m
    for j = 1:n
        h(i,j,1) = fun([x(i,j),y(i,j)],c);
    end
end

g = 9.81; % Fuerza de gravedad.
f = 4.879*10^(-5); % Aceleraci\''{o}n de Coriolis.
cf = 0.05; % No deslizamiento en el fondo.
a = z; % Profundidades

for k = 2:t
    temp = mod(k,100);
    if temp == 2
        fprintf('Paso: %i \n',k)
    end
end

```

```

for i = 2:m-1
    for j = 2:n-1
        % Primero calculamos el nuevo nivel de tiempo para h
        h(i,j,k) = h(i,j,k-1) - dt*( ...
            ((a(i+1,j+1) + a(i+1,j-1))*u(i+1,j,k-1))/(4*dx) - ...
            ((a(i-1,j+1) + a(i-1,j-1))*u(i-1,j,k-1))/(4*dx) + ...
            ((a(i+1,j+1) + a(i-1,j+1))*v(i,j+1,k-1))/(4*dy) - ...
            ((a(i+1,j-1) + a(i-1,j-1))*v(i,j-1,k-1))/(4*dy));

        % Ahora calculamos el nuevo nivel de tiempo para u
        u(i,j,k) = u(i,j,k-1) - dt*( ...
            u(i,j,k-1)*( ...
                (u(i+1,j+1,k-1) + u(i+1,j-1,k-1))/(4*dx) - ...
                (u(i-1,j+1,k-1) - u(i-1,j-1,k-1))/(4*dx)) + ...
            v(i,j,k-1)*( ...
                (u(i+1,j+1,k-1) + u(i-1,j+1,k-1))/(4*dy) - ...
                (u(i+1,j-1,k-1) - u(i-1,j-1,k-1))/(4*dy)) - ...
            f*v(i,j,k-1) + g*( ...
                h(i+1,j,k-1)/(2*dx) - ...
                h(i-1,j,k-1)/(2*dx)) + ...
            ((cf*u(i,j,k-1))/((a(i+1,j) + a(i-1,j) + a(i,j+1) + a(i,j-1))/4))*sqrt(

        % Por '\{u}ltimo calculamos el nuevo nivel de tiempo para v
        v(i,j,k) = v(i,j,k-1) - dt*( ...
            u(i,j,k-1)*( ...
                (v(i+1,j+1,k-1) + v(i+1,j-1,k-1))/(4*dx) - ...
                (v(i-1,j+1,k-1) - v(i-1,j-1,k-1))/(4*dx)) + ...
            v(i,j,k-1)*( ...
                (v(i+1,j+1,k-1) + v(i-1,j+1,k-1))/(4*dy) - ...
                (v(i+1,j-1,k-1) - v(i-1,j-1,k-1))/(4*dy)) + ...
            f*u(i,j,k-1) + g*( ...
                h(i,j+1,k-1)/(2*dy) - ...
                h(i,j-1,k-1)/(2*dy)) + ...
            ((cf*v(i,j,k-1))/((a(i+1,j) + a(i-1,j) + a(i,j+1) + a(i,j-1))/4))*sqrt(

    end
end

```

```

    end
end
end

```

Shallow_wata5.m

El siguiente código aproxima la solución de las ecuaciones de aguas someras explicadas en el capítulo (4). Es el primer código explicado en el capítulo (5), y es el que logra las mejores aproximaciones, pero tarda mucho tiempo más. Se encuentra programado en el lenguaje de programación MATLAB[®] [20].

```

function [h,u,v] = Shallow_wata5(x,y,z,t,fun,c)

% Esta rutina aproxima el valor de la soluci\''{o}n de las ecuaciones de aguas
% someras en regiones irregulares utilizando un esquema de diferencias
% finitas generalizadas adaptado por Gerardo Tinoco Guerrero.
%
% El esquema debe de recibir los par\''{a}metros
%
%      x, y      :  Matrices con las coordenadas de los puntos de la malla.
%      z         :  Matriz con las profundidades en cada punto de la malla.
%      t         :  Cantidad de pasos en el tiempo para el intervalo (0,10).
%      fun       :  Funci\''{o}n para la condici\''{o}n inicial para h.
%      c         :  Se utiliza para elegir el punto inicial del pulso.
%
% Los par\''{a}metros que obtiene de salida son
%
%      h         :  Matriz con el valor de las alturas en cada punto (x,y).
%      u         :  Matriz con las velocidades horizontales en cada punto.
%      v         :  Matriz con las velocidades verticales en cada punto.
%
% Las llamadas a la funci\''{o}n se realizan de la forma
%
%      [h,u,v] = Shallow_wata5(x21,y21,z21,1000,@fSHALL,1);
%

```

```
% Inicializamos las variables y cerramos ventanas abiertas
close all
tic
[m,n] = size(x);
T = linspace(0,10,t);
dt = T(2) - T(1);
u = zeros(m,n,t);
v = zeros(m,n,t);
h = zeros(m,n,t);
Gammah1 = zeros(m,n,9);
Gammah2 = zeros(m,n,9);
Gammah3 = zeros(m,n,9);
Gammau1 = zeros(m,n,9);
Gammau2 = zeros(m,n,9);
Gammau3 = zeros(m,n,9);
Gammav1 = zeros(m,n,9);
Gammav2 = zeros(m,n,9);
Gammav3 = zeros(m,n,9);

% Agregamos condici\ '{o}n inicial para h
for i = 1:m
for j = 1:n
    h(i,j,1) = fun([x(i,j),y(i,j)],c);
end
end

g = 9.81; % Fuerza de gravedad.
f = 4.879*10(-5); % Aceleraci\ '{o}n de Coriolis.
cf = 0.5; % No deslizamiento en el fondo.
a = z; % Profundidades

for i = 2:m-1
temp = mod(i,100);
if temp == 2
    fprintf('Paso en Gammas: %i \n',i) % Se imprime cada 100 pasos
```

```

end
for j = 2:n-1
    dx = [x(i+1,j)-x(i,j), x(i+1,j+1)-x(i,j), x(i,j+1)-x(i,j), ...
    x(i-1,j+1)-x(i,j), x(i-1,j)-x(i,j), x(i-1,j-1)-x(i,j), ...
    x(i,j-1)-x(i,j),x(i+1,j-1)-x(i,j)];
    dy = [y(i+1,j)-y(i,j), y(i+1,j+1)-y(i,j), y(i,j+1)-y(i,j), ...
    y(i-1,j+1)-y(i,j), y(i-1,j)-y(i,j), y(i-1,j-1)-y(i,j), ...
    y(i,j-1)-y(i,j),y(i+1,j-1)-y(i,j)];
    M = [dx ; dy ; dx.*dx ; dx.*dy ; dy.*dy];

    % Hacemos el cálculo de los Gamma1
    YY = pinv(M)*[0 0 0 0 0]';
    Gammah1(i,j,:) = [-sum(YY);YY];
    YY = pinv(M)*[-dt*(a(i+1,j)+a(i-1,j))/2 0 0 0 0]';
    Gammau1(i,j,:) = [-sum(YY);YY];
    YY = pinv(M)*[0 -dt*(a(i,j+1)+a(i,j-1))/2 0 0 0]';
    Gammav1(i,j,:) = [-sum(YY);YY];
end
end

for k = 2:t
    temp = mod(k,100);
    if temp == 2
        fprintf('Paso: %i \n',k) % Se imprime cada 100 pasos.
    end
    for i = 2:m-1
        for j = 2:n-1

            % Se calculan los valores de las Gammas restantes
            dx = [x(i+1,j)-x(i,j), x(i+1,j+1)-x(i,j), x(i,j+1)-x(i,j), ...
            x(i-1,j+1)-x(i,j), x(i-1,j)-x(i,j), x(i-1,j-1)-x(i,j), ...
            x(i,j-1)-x(i,j),x(i+1,j-1)-x(i,j)];
            dy = [y(i+1,j)-y(i,j), y(i+1,j+1)-y(i,j), y(i,j+1)-y(i,j), ...
            y(i-1,j+1)-y(i,j), y(i-1,j)-y(i,j), y(i-1,j-1)-y(i,j), ...

```

```

y(i,j-1)-y(i,j),y(i+1,j-1)-y(i,j)];
M = [dx ; dy ; dx.*dx ; dx.*dy ; dy.*dy];

% Se hace el cálculo de Gamma2
YY = pinv(M)*[-dt*g 0 0 0 0]';
Gammah2(i,j,:) = [-sum(YY);YY];
YY = pinv(M)*[-dt*u(i,j,k-1) -dt*v(i,j,k-1) 0 0 0]';
Gammau2(i,j,:) = [-sum(YY);YY];
YY = pinv(M)*[0 0 0 0 0]';
Gammav2(i,j,:) = [-sum(YY);YY];

% Se hace el cálculo de Gamma3
YY = pinv(M)*[0 -dt*g 0 0 0]';
Gammah3(i,j,:) = [-sum(YY);YY];
YY = pinv(M)*[0 0 0 0 0]';
Gammau3(i,j,:) = [-sum(YY);YY];
YY = pinv(M)*[-dt*u(i,j,k-1) -dt*v(i,j,k-1) 0 0 0]';
Gammav3(i,j,:) = [-sum(YY);YY];

% Primero calculamos el nuevo nivel de tiempo para h
h(i,j,k) = h(i,j,k-1) + ...
    Gammah1(i,j,1)*h(i,j,k-1) + ...
    Gammah1(i,j,2)*h(i+1,j,k-1) + ...
    Gammah1(i,j,3)*h(i+1,j+1,k-1) + ...
    Gammah1(i,j,4)*h(i,j+1,k-1) + ...
    Gammah1(i,j,5)*h(i-1,j+1,k-1) + ...
    Gammah1(i,j,6)*h(i-1,j,k-1) + ...
    Gammah1(i,j,7)*h(i-1,j-1,k-1) + ...
    Gammah1(i,j,8)*h(i,j-1,k-1) + ...
    Gammah1(i,j,9)*h(i+1,j-1,k-1) + ...
    Gammau1(i,j,1)*u(i,j,k-1) + ...
    Gammau1(i,j,2)*u(i+1,j,k-1) + ...
    Gammau1(i,j,3)*u(i+1,j+1,k-1) + ...
    Gammau1(i,j,4)*u(i,j+1,k-1) + ...
    Gammau1(i,j,5)*u(i-1,j+1,k-1) + ...

```

```

    Gammau1(i,j,6)*u(i-1,j,k-1) + ...
    Gammau1(i,j,7)*u(i-1,j-1,k-1) + ...
    Gammau1(i,j,8)*u(i,j-1,k-1) + ...
    Gammau1(i,j,9)*u(i+1,j-1,k-1) + ...
    Gammav1(i,j,1)*v(i,j,k-1) + ...
    Gammav1(i,j,2)*v(i+1,j,k-1) + ...
    Gammav1(i,j,3)*v(i+1,j+1,k-1) + ...
    Gammav1(i,j,4)*v(i,j+1,k-1) + ...
    Gammav1(i,j,5)*v(i-1,j+1,k-1) + ...
    Gammav1(i,j,6)*v(i-1,j,k-1) + ...
    Gammav1(i,j,7)*v(i-1,j-1,k-1) + ...
    Gammav1(i,j,8)*v(i,j-1,k-1) + ...
    Gammav1(i,j,9)*v(i+1,j-1,k-1);

% Ahora calculamos el nuevo nivel de tiempo para u
u(i,j,k) = u(i,j,k-1) + ...
    Gammah2(i,j,1)*h(i,j,k-1) + ...
    Gammah2(i,j,2)*h(i+1,j,k-1) + ...
    Gammah2(i,j,3)*h(i+1,j+1,k-1) + ...
    Gammah2(i,j,4)*h(i,j+1,k-1) + ...
    Gammah2(i,j,5)*h(i-1,j+1,k-1) + ...
    Gammah2(i,j,6)*h(i-1,j,k-1) + ...
    Gammah2(i,j,7)*h(i-1,j-1,k-1) + ...
    Gammah2(i,j,8)*h(i,j-1,k-1) + ...
    Gammah2(i,j,9)*h(i+1,j-1,k-1) + ...
    Gammau2(i,j,1)*u(i,j,k-1) + ...
    Gammau2(i,j,2)*u(i+1,j,k-1) + ...
    Gammau2(i,j,3)*u(i+1,j+1,k-1) + ...
    Gammau2(i,j,4)*u(i,j+1,k-1) + ...
    Gammau2(i,j,5)*u(i-1,j+1,k-1) + ...
    Gammau2(i,j,6)*u(i-1,j,k-1) + ...
    Gammau2(i,j,7)*u(i-1,j-1,k-1) + ...
    Gammau2(i,j,8)*u(i,j-1,k-1) + ...
    Gammau2(i,j,9)*u(i+1,j-1,k-1) + ...
    Gammav2(i,j,1)*v(i,j,k-1) + ...

```

```

Gammav2(i,j,2)*v(i+1,j,k-1) + ...
Gammav2(i,j,3)*v(i+1,j+1,k-1) + ...
Gammav2(i,j,4)*v(i,j+1,k-1) + ...
Gammav2(i,j,5)*v(i-1,j+1,k-1) + ...
Gammav2(i,j,6)*v(i-1,j,k-1) + ...
Gammav2(i,j,7)*v(i-1,j-1,k-1) + ...
Gammav2(i,j,8)*v(i,j-1,k-1) + ...
Gammav2(i,j,9)*v(i+1,j-1,k-1) - ...
f*v(i,j,k-1) - ...
(cf*u(i,j,k-1)/...
((a(i+1,j) + a(i-1,j) + a(i,j+1) + a(i,j-1))/4))*sqrt(u(i,j,k-1)^2 ...
+ v(i,j,k-1)^2);

% Por \'{u}ltimo calculamos el nuevo nivel de tiempo para v
v(i,j,k) = v(i,j,k-1) + ...
Gammah3(i,j,1)*h(i,j,k-1) + ...
Gammah3(i,j,2)*h(i+1,j,k-1) + ...
Gammah3(i,j,3)*h(i+1,j+1,k-1) + ...
Gammah3(i,j,4)*h(i,j+1,k-1) + ...
Gammah3(i,j,5)*h(i-1,j+1,k-1) + ...
Gammah3(i,j,6)*h(i-1,j,k-1) + ...
Gammah3(i,j,7)*h(i-1,j-1,k-1) + ...
Gammah3(i,j,8)*h(i,j-1,k-1) + ...
Gammah3(i,j,9)*h(i+1,j-1,k-1) + ...
Gammau3(i,j,1)*u(i,j,k-1) + ...
Gammau3(i,j,2)*u(i+1,j,k-1) + ...
Gammau3(i,j,3)*u(i+1,j+1,k-1) + ...
Gammau3(i,j,4)*u(i,j+1,k-1) + ...
Gammau3(i,j,5)*u(i-1,j+1,k-1) + ...
Gammau3(i,j,6)*u(i-1,j,k-1) + ...
Gammau3(i,j,7)*u(i-1,j-1,k-1) + ...
Gammau3(i,j,8)*u(i,j-1,k-1) + ...
Gammau3(i,j,9)*u(i+1,j-1,k-1) + ...
Gammav3(i,j,1)*v(i,j,k-1) + ...
Gammav3(i,j,2)*v(i+1,j,k-1) + ...

```

```

        Gammav3(i,j,3)*v(i+1,j+1,k-1) + ...
        Gammav3(i,j,4)*v(i,j+1,k-1) + ...
        Gammav3(i,j,5)*v(i-1,j+1,k-1) + ...
        Gammav3(i,j,6)*v(i-1,j,k-1) + ...
        Gammav3(i,j,7)*v(i-1,j-1,k-1) + ...
        Gammav3(i,j,8)*v(i,j-1,k-1) + ...
        Gammav3(i,j,9)*v(i+1,j-1,k-1) - ...
        f*u(i,j,k-1) - ...
        (cf*v(i,j,k-1)/...
        ((a(i+1,j) + a(i-1,j) + a(i,j+1) + a(i,j-1))/4))*...
        sqrt(u(i,j,k-1)^2 + v(i,j,k-1)^2);
    end
end
end
time = toc;
fprintf('Tiempo transcurrido en el problema: %f Segundos\n',time)
end

```

El resultado de este programa son tres matrices que representan la aproximación a la solución en cada uno de los puntos del dominio.

Shallow_wata5_2.m

El siguiente código aproxima la solución de las ecuaciones de aguas someras explicadas en el capítulo (4). Es el segundo código explicado en el capítulo (5), y es el que logra buenas aproximaciones en un tiempo considerablemente menor al primero. Se encuentra programado en el lenguaje de programación MATLAB[©] [20].

```

function [h,u,v] = Shallow_wata5_2(x,y,z,t,fun,c)

% Esta rutina aproxima el valor de la soluci\'}{o}n de las ecuaciones de aguas
% someras en regiones irregulares utilizando un esquema de diferencias
% finitas generalizadas adaptado por Gerardo Tinoco Guerrero.
%
% En esta rutina el clculo de los coeficientes Gamma se hace desde un
% principio, para as evitar calcularlos en cada paso de tiempo, y con esto
% se ahorra tiempo de cmputo.

```

```
%
% El esquema debe de recibir los par\ '{a}metros
%
%      x, y      :  Matrices con las coordenadas de los puntos de la malla.
%      z        :  Matriz con las profundidades en cada punto de la malla.
%      t        :  Cantidad de pasos en el tiempo para el intervalo (0,10).
%      fun      :  Funci\ '{o}n para la condici\ '{o}n inicial para h.
%      c        :  Se utiliza para elegir el punto inicial del pulso.
%
% Los par\ '{a}metros que obtiene de salida son
%
%      h        :  Matriz con el valor de las alturas en cada punto (x,y).
%      u        :  Matriz con las velocidades horizontales en cada punto.
%      v        :  Matriz con las velocidades verticales en cada punto.
%
% Las llamadas a la funci\ '{o}n se realizan de la forma
%
%      [h,u,v] = Shallow_wata5_2(x21,y21,z21,1000,@fSHALL,1);
%
%
% Inicializamos las variables y cerramos ventanas abiertas
close all
tic
[m,n] = size(x);
T = linspace(0,10,t);
dt = T(2) - T(1);
u = zeros(m,n,t);
v = zeros(m,n,t);
h = zeros(m,n,t);
Gammah1 = zeros(m,n,9);
Gammah2 = zeros(m,n,9);
Gammah3 = zeros(m,n,9);
Gammau1 = zeros(m,n,9);
Gammau2t = zeros(m,n,9);
Gammau3 = zeros(m,n,9);
```

```

Gammav1 = zeros(m,n,9);
Gammav2 = zeros(m,n,9);
Gammav3t = zeros(m,n,9);
a = 1;
b = 1;

% Agregamos una condicin inicial para h
if c == 3
    while a >= .8 || a <= .2
        a = rand;
    end
    while b >= .8 || b <= .2
        b = rand;
    end
end
for i = 1:m
    for j = 1:n
        h(i,j,1) = fun([x(i,j),y(i,j)],c,a,b);
    end
end

g = 9.81; % Fuerza de gravedad.
f = 4.879*10^(-5); % Aceleraci\{o}n de Coriolis.
cf = 0.5; % No deslizamiento en el fondo.
a = z; % Profundidades

for i = 2:m-1
    temp = mod(i,100);
    if temp == 2
        fprintf('Paso en Gammas: %i \n',i)
    end
    for j = 2:n-1
        dx = [x(i+1,j)-x(i,j), x(i+1,j+1)-x(i,j), x(i,j+1)-x(i,j), ...
            x(i-1,j+1)-x(i,j), x(i-1,j)-x(i,j), x(i-1,j-1)-x(i,j), ...
            x(i,j-1)-x(i,j),x(i+1,j-1)-x(i,j)];
    end
end

```

```

dy = [y(i+1,j)-y(i,j), y(i+1,j+1)-y(i,j), y(i,j+1)-y(i,j), ...
      y(i-1,j+1)-y(i,j), y(i-1,j)-y(i,j), y(i-1,j-1)-y(i,j), ...
      y(i,j-1)-y(i,j),y(i+1,j-1)-y(i,j)];
M = [dx ; dy ; dx.*dx ; dx.*dy ; dy.*dy];
% Hacemos el cálculo de los Gamma1
YY = pinv(M)*[0 0 0 0 0]';
Gammah1(i,j,:) = [-sum(YY);YY];
YY = pinv(M)*[-dt*(a(i+1,j)+a(i-1,j))/2 0 0 0 0]';
Gammau1(i,j,:) = [-sum(YY);YY];
YY = pinv(M)*[0 -dt*(a(i,j+1)+a(i,j-1))/2 0 0 0]';
Gammav1(i,j,:) = [-sum(YY);YY];
% Hacemos el cálculo de los Gamma2
YY = pinv(M)*[-dt*g 0 0 0 0]';
Gammah2(i,j,:) = [-sum(YY);YY];
YY = pinv(M)*[-dt -dt 0 0 0]';
Gammau2t(i,j,:) = [-sum(YY);YY];
YY = pinv(M)*[0 0 0 0 0]';
Gammav2(i,j,:) = [-sum(YY);YY];
% Hacemos el cálculo de los Gamma3
YY = pinv(M)*[0 -dt*g 0 0 0]';
Gammah3(i,j,:) = [-sum(YY);YY];
YY = pinv(M)*[0 0 0 0 0]';
Gammau3(i,j,:) = [-sum(YY);YY];
YY = pinv(M)*[-dt -dt 0 0 0]';
Gammav3t(i,j,:) = [-sum(YY);YY];
end
end

for k = 2:t
    temp = mod(k,100);
    if temp == 2
        fprintf('Paso: %i \n',k)
    end
    for i = 2:m-1

```

```

for j = 2:n-1

% Actualizamos las Gammas para el nuevo nivel de tiempo
Gammau2(i,j,:) = Gammau2t(i,j,:)*u(i,j,k-1)*v(i,j,k-1);
Gammav3(i,j,:) = Gammav3t(i,j,:)*u(i,j,k-1)*v(i,j,k-1);

% Primero calculamos el nuevo nivel de tiempo para h
h(i,j,k) = h(i,j,k-1) + ...
    Gammah1(i,j,1)*h(i,j,k-1) + ...
    Gammah1(i,j,2)*h(i+1,j,k-1) + ...
    Gammah1(i,j,3)*h(i+1,j+1,k-1) + ...
    Gammah1(i,j,4)*h(i,j+1,k-1) + ...
    Gammah1(i,j,5)*h(i-1,j+1,k-1) + ...
    Gammah1(i,j,6)*h(i-1,j,k-1) + ...
    Gammah1(i,j,7)*h(i-1,j-1,k-1) + ...
    Gammah1(i,j,8)*h(i,j-1,k-1) + ...
    Gammah1(i,j,9)*h(i+1,j-1,k-1) + ...
    Gammau1(i,j,1)*u(i,j,k-1) + ...
    Gammau1(i,j,2)*u(i+1,j,k-1) + ...
    Gammau1(i,j,3)*u(i+1,j+1,k-1) + ...
    Gammau1(i,j,4)*u(i,j+1,k-1) + ...
    Gammau1(i,j,5)*u(i-1,j+1,k-1) + ...
    Gammau1(i,j,6)*u(i-1,j,k-1) + ...
    Gammau1(i,j,7)*u(i-1,j-1,k-1) + ...
    Gammau1(i,j,8)*u(i,j-1,k-1) + ...
    Gammau1(i,j,9)*u(i+1,j-1,k-1) + ...
    Gammav1(i,j,1)*v(i,j,k-1) + ...
    Gammav1(i,j,2)*v(i+1,j,k-1) + ...
    Gammav1(i,j,3)*v(i+1,j+1,k-1) + ...
    Gammav1(i,j,4)*v(i,j+1,k-1) + ...
    Gammav1(i,j,5)*v(i-1,j+1,k-1) + ...
    Gammav1(i,j,6)*v(i-1,j,k-1) + ...
    Gammav1(i,j,7)*v(i-1,j-1,k-1) + ...
    Gammav1(i,j,8)*v(i,j-1,k-1) + ...
    Gammav1(i,j,9)*v(i+1,j-1,k-1);

```

% Ahora calculamos el nuevo nivel de tiempo para u

$u(i,j,k) = u(i,j,k-1) + \dots$

$\text{Gammah2}(i,j,1)*h(i,j,k-1) + \dots$

$\text{Gammah2}(i,j,2)*h(i+1,j,k-1) + \dots$

$\text{Gammah2}(i,j,3)*h(i+1,j+1,k-1) + \dots$

$\text{Gammah2}(i,j,4)*h(i,j+1,k-1) + \dots$

$\text{Gammah2}(i,j,5)*h(i-1,j+1,k-1) + \dots$

$\text{Gammah2}(i,j,6)*h(i-1,j,k-1) + \dots$

$\text{Gammah2}(i,j,7)*h(i-1,j-1,k-1) + \dots$

$\text{Gammah2}(i,j,8)*h(i,j-1,k-1) + \dots$

$\text{Gammah2}(i,j,9)*h(i+1,j-1,k-1) + \dots$

$\text{Gammah2}(i,j,10)*u(i,j,k-1) + \dots$

$\text{Gammah2}(i,j,11)*u(i+1,j,k-1) + \dots$

$\text{Gammah2}(i,j,12)*u(i+1,j+1,k-1) + \dots$

$\text{Gammah2}(i,j,13)*u(i,j+1,k-1) + \dots$

$\text{Gammah2}(i,j,14)*u(i-1,j+1,k-1) + \dots$

$\text{Gammah2}(i,j,15)*u(i-1,j,k-1) + \dots$

$\text{Gammah2}(i,j,16)*u(i-1,j-1,k-1) + \dots$

$\text{Gammah2}(i,j,17)*u(i,j-1,k-1) + \dots$

$\text{Gammah2}(i,j,18)*u(i+1,j-1,k-1) + \dots$

$\text{Gammah2}(i,j,19)*v(i,j,k-1) + \dots$

$\text{Gammah2}(i,j,20)*v(i+1,j,k-1) + \dots$

$\text{Gammah2}(i,j,21)*v(i+1,j+1,k-1) + \dots$

$\text{Gammah2}(i,j,22)*v(i,j+1,k-1) + \dots$

$\text{Gammah2}(i,j,23)*v(i-1,j+1,k-1) + \dots$

$\text{Gammah2}(i,j,24)*v(i-1,j,k-1) + \dots$

$\text{Gammah2}(i,j,25)*v(i-1,j-1,k-1) + \dots$

$\text{Gammah2}(i,j,26)*v(i,j-1,k-1) + \dots$

$\text{Gammah2}(i,j,27)*v(i+1,j-1,k-1) - \dots$

$f*v(i,j,k-1) - \dots$

$(cf*u(i,j,k-1))/\dots$

$((a(i+1,j) + a(i-1,j) + a(i,j+1) + a(i,j-1))/4))*\text{sqrt}(u(i,j,k-1)^2 + v($

% Por '\{u\}ltimo calculamos el nuevo nivel de tiempo para v

```

v(i,j,k) = v(i,j,k-1) + ...
    Gammah3(i,j,1)*h(i,j,k-1) + ...
    Gammah3(i,j,2)*h(i+1,j,k-1) + ...
    Gammah3(i,j,3)*h(i+1,j+1,k-1) + ...
    Gammah3(i,j,4)*h(i,j+1,k-1) + ...
    Gammah3(i,j,5)*h(i-1,j+1,k-1) + ...
    Gammah3(i,j,6)*h(i-1,j,k-1) + ...
    Gammah3(i,j,7)*h(i-1,j-1,k-1) + ...
    Gammah3(i,j,8)*h(i,j-1,k-1) + ...
    Gammah3(i,j,9)*h(i+1,j-1,k-1) + ...
    Gammau3(i,j,1)*u(i,j,k-1) + ...
    Gammau3(i,j,2)*u(i+1,j,k-1) + ...
    Gammau3(i,j,3)*u(i+1,j+1,k-1) + ...
    Gammau3(i,j,4)*u(i,j+1,k-1) + ...
    Gammau3(i,j,5)*u(i-1,j+1,k-1) + ...
    Gammau3(i,j,6)*u(i-1,j,k-1) + ...
    Gammau3(i,j,7)*u(i-1,j-1,k-1) + ...
    Gammau3(i,j,8)*u(i,j-1,k-1) + ...
    Gammau3(i,j,9)*u(i+1,j-1,k-1) + ...
    Gammav3(i,j,1)*v(i,j,k-1) + ...
    Gammav3(i,j,2)*v(i+1,j,k-1) + ...
    Gammav3(i,j,3)*v(i+1,j+1,k-1) + ...
    Gammav3(i,j,4)*v(i,j+1,k-1) + ...
    Gammav3(i,j,5)*v(i-1,j+1,k-1) + ...
    Gammav3(i,j,6)*v(i-1,j,k-1) + ...
    Gammav3(i,j,7)*v(i-1,j-1,k-1) + ...
    Gammav3(i,j,8)*v(i,j-1,k-1) + ...
    Gammav3(i,j,9)*v(i+1,j-1,k-1) - ...
    f*u(i,j,k-1) - ...
    (cf*v(i,j,k-1)/...
    ((a(i+1,j) + a(i-1,j) + a(i,j+1) + a(i,j-1))/4))*sqrt(u(i,j,k-1)^2 + v(i,j,k-1)
end
end
end
time = toc;

```

```
fprintf('Tiempo transcurrido en el problema: %f Segundos\n',time)
end
```

El resultado de este programa son tres matrices que representan la aproximación a la solución en cada uno de los puntos del dominio.

Bibliografía

- [1] Iserles A. *A First Course in the Numerical Analysis of Differential Equations*. Cambridge Texts in Applied Mathematics, Cambridge University Press, 2008.
- [2] Ivanenko Sergey Alexandrovich. Generation of non-degenerate meshes. *U.S.S.R. Comput. Maths. Phys.*, 28(5):141–146, 1988.
- [3] Ivanenko Sergey Alexandrovich. Adaptive grids and grids on surfaces. *U.S.S.R. Comput. Maths. Phys.*, 33(9):8.1–8.41, 1993.
- [4] Ivanenko Sergey Alexandrovich y Charakhch'yan Alexander. Curvilinear grids of convex quadrilaterals. *U.S.S.R. Comput. Maths. Phys.*, 28(2):126–133, 1988.
- [5] Boyce William E. y Diprima Richard C. *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*. John Wiley & Sons, Inc, 1965.
- [6] Smith R. E. *Numerical Grid Generation*, cap. Algebraic Grid Generation, págs. 137–170. J. F. Thompson, North Holland, New York, 1982.
- [7] Domínguez-Mota Francisco-Javier, Mendoza-Armenta Sanzon, y Tinoco-Ruiz José-Gerardo. Finite difference schemes satisfying an optimality condition. *MASCOT10 Proceedings*, 2011.
- [8] Tinoco Guerrero Gerardo. *Solución Numérica de la Ecuación de Advección Empleando Mallas Estructuradas Sobre Regiones Planas Irregulares Utilizando Un Esquema De Diferencias Finitas*. Tesis Doctoral, Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, 2014.
- [9] González-Flores Guilmer. *Generación de Mallas en Regiones Planas Irregulares*. Tesis de licenciatura, Universidad Autónoma de Yucatán, Mérida, Yucatán, 1994.

-
- [10] Gordon W. J. y Hall C. A. Construction of curvilinear coordinate systems and applications to mesh generations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 7:461–477, 1973.
- [11] Gordon W. J. y Thiel L. C. *Numerical Grid Generation*, cap. Transfinite Mappings and their Applications to Grid Generation. J. F. Thompson, North Holland, New York, 1982.
- [12] LeVeque Randall J. *Finite Difference Methods for Ordinary and Partial Differential Equations*. SIAM, 2007.
- [13] Castillo-Moreno José. *Numerical Grid Generation in Computational Fluid Dynamics*, cap. Mathematical Aspects of Numerical Grid Generation I. J. Hauser and C. Taylor Eds., Pineridge Press, Swansea, UK, 1986.
- [14] Castillo-Moreno José. *On variational grid generation*. Tesis Doctoral, The University Of New Mexico, Albuquerque, New Mexico, 1987.
- [15] Castillo-Moreno José, Steinber Stanly, y Roache Patrick J. Mathematical aspects of numerical grid generation ii. *J. Comp. and Appl. Math*, 20:127–135, 1987.
- [16] Castillo-Moreno José, Steinber Stanly, y Roache Patrick J. On the folding of numerically generated grids. use of a reference grid. *Comm. Applied Num. Methods*, 4:471–481, 1988.
- [17] Castillo-Moreno José, Steinber Stanly, y Roache Patrick J. Parameter stimation in variational grid generation. *Appl. Math. and Comp.*, 28(2):1–23, 1988.
- [18] Tinoco-Ruiz José-Gerardo. *Funcionales Discretos para la Generación de Mallas Suaves y Convexas Sobre Regiones Planas Irregulares*. Tesis Doctoral, CIMAT, Guanajuato, Guanajuato, 1997.
- [19] Celia M. y Gray W. *Numerical Methods for Differential Equations*. Prentice-Hall, 1992.
- [20] Cleve R. Moler. Matlab: The language of technical computig. 2016. URL <http://www.mathworks.com/products/matlab/>.
- [21] Barrera-Sánchez Pablo, Pérez-Domínguez Angel, y Castellanos-Noda Longina. Curvilinear coordinate system generation over plane irregular regions. *Vínculos Matemáticos*, 133, 1992.

-
- [22] Barrera-Sánchez Pablo, Castellanos-Noda Longina, y Pérez-Domínguez Angel. Métodos variacionales discretos para la generación de mallas. *DGAPA-UNAM*, 1994.
- [23] Barrera-Sánchez Pablo, Castellanos-Noda Longina, Domínguez-Mota Francisco-Javier, González-Flores Guilmer, y Pérez-Domínguez Angel. Adaptive discrete harmonic grid generation. *Mathematics and Computer in Simulations*, 79:1892–1809, 2009.
- [24] Knupp Patrick y Steinber Stanly. *Fundamentals of Grid Generation*. CRC Press. Boca Raton, 1993.
- [25] Eiseman P. R. Coordinate generation with precise controls over mesh properties. *J. Comp. Physucs*, 47(331-351), 1982.
- [26] Saunders B. V. Algebraic grid generation using tensor product b-splines. Nasa contractor report 177968, NASA, NASA Langley Research Center, 1985.
- [27] Rudin Walter. *Principles of Mathematical Analysis*. International Series in Pure and Applied Mathematics, 2 ed^{ón}., 1976.