



**UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN NICOLÁS DE HIDALGO**

**FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS**

“Mat. Luis Manuel Rivera Gutiérrez”

---

**PLASMONES EN SISTEMAS QUE INCLUYEN METAMATERIALES  
DISPERSIVOS**

---

**TESIS**

Para obtener el grado de

**MAESTRO EN CIENCIAS EN INGENIERÍA FÍSICA**

PRESENTA:

**HUGO ENRIQUE ALVA MEDRANO**

ASESOR DE TESIS:

Doctor en Ciencias en Óptica  
**ALBERTO MENDOZA SUÁREZ**

Morelia, Michoacán, Agosto de 2016

## RESUMEN

El estudio de plasmones en superficies de metamateriales es de interés actual desde el punto de vista teórico y aplicado. En esta tesis se estudia numéricamente la presencia de plasmones superficiales en sistemas electromagnéticos formados por cristales fotónicos en guías de ondas, que incluyen capas de metamateriales dispersivos. El modelo para las guías de ondas suponen superficies perfectamente conductoras. La periodicidad requerida para tener un cristal fotónico en la guía de ondas es realizada de varias maneras en esta tesis. Una de estas consiste en asumir superficies conductoras de forma sinusoidal; otra es suponer guías de ondas con superficies planas que envuelven a un arreglo periódico de cilindros conductores. Algunas superficies conductoras se recubren con capas de metamateriales, porque es conocido que en la interfase ente un metamaterial y el vacío aparecen plasmones de superficie (Ruppín, 2004). Muchos de los cálculos numéricos que presentamos fueron hechos para simular guías de ondas de una longitud supuesta infinita (perfectamente periódicos), sin embargo, el caso de un modelo más realista que envuelve guías de ondas con longitudes finitas (periodicidad truncada) también es tratado para cálculos de reflectancia y transmitancia, entre otros. Los métodos numéricos utilizados son métodos basados en ecuaciones integrales (Mendoza-Suárez *et al.*, 2006). Los resultados obtenidos para sistemas perfectamente periódicos permiten concluir que se tiene la presencia de plasmones superficiales, aún cuando la cantidad de metamaterial sea considerablemente menor a la utilizada en estudios anteriores (Mendoza-Suárez y Pérez-Aguilar, 2015), (Pérez-Aguilar y Mendoza-Suárez, 2015). Resulta que la geometría de los sistemas físicos considerados y la presencia de metamateriales son los que determinan la aparición de plasmones de superficie.

**Palabras Clave:** (Cristal fotónico, Guía de ondas, Método integral, Metamaterial, Plasmón superficial).

## ABSTRACT

The study of plasmons in supercicies metamaterial is current interest from the point of view theoretical and applied. This thesis studied numerically the presence of surface plasmons in electromagnetic systems formed by photonic crystals waveguides, including dispersive layers of metamaterials. The model for the waveguides represent supercicies perfectly conductive. The frequency required to have a photonic crystal waveguide is performed in several ways in this thesis. One of these is to assume supercicies sinusoidal conductive; another is to assume waveguides with flat supercicies involving a periodic arrangement of conductive cylinders. Some supercicies conductive layers are coated with metamaterials, because it is known that at the interface between a metamaterial and vacuum appear plasmon supercie (Ruppin, 2004). Many of the

numerical calculations presented here were made to simulate waveguides a (perfectly newspapers) infinite alleged length, however, the case of a more realistic model enveloping waveguides with finite lengths (truncated periodicity) is also treated to calculations reflectance and transmittance, among others. The

numerical methods used are based on integral equations methods (Mendoza-Suarez et al., 2006). The results obtained for perfectly newspapers systems allow to conclude that there is the presence of superciales plasmons, even when the amount of metamaterial is considerably lower than that used in previous studies (Mendoza-Suarez and Perez-Aguilar, 2015), (Pérez-Aguilar and Mendoza-Suarez, 2015). It turns out that the geometry of the considered physical systems and the presence of metamaterials are those that determine the appearance of plasmon supercie.

**Keywords:**(photonic crystal waveguide, integral method, Metamaterial, surface plasmon).

# Dedicatoria

*A quien supo Darle un nuevo sentido a mi Vida...*

# Agradecimientos

*A mis asesor, el Dr. Alberto Mendoza Suárez por su valioso tiempo y su apoyo para la realización de este trabajo.*

*A todos mis maestros, especialmente al Dr. Héctor I. Pérez Aguilar, por toda su ayuda en mi formación como profesionalista.*

*A mi compañera María Claudia Guillén Gallegos por su invaluable ayuda en el proceso de todo este trabajo.*

*A mi madre Irene y a mi padre Humberto por su apoyo incondicional y sus valiosos consejos.*

*A mis hermanos América, Luis Roberto y Bryan Humberto, por su gran cariño.*

*A mi niña Jennifer por haberme enseñado una nueva matiz de la vida*

*A Karina por ser mi inspiración, mi amiga y mi compañera.*

*A todos mis amigos, especialmente a Emmanuel, Rafael, Zoila y Ángel por brindarme apoyo y aliento cuando más lo he necesitado.*

# Contenido

	Página
<b>Resumen</b>	<b>i</b>
<b>Abstract</b>	<b>ii</b>
<b>Dedicatoria</b>	<b>iii</b>
<b>Agradecimientos</b>	<b>iv</b>
<b>Contenido</b>	<b>v</b>
<b>Lista de Figuras</b>	<b>vii</b>
<b>I. INTRODUCCIÓN</b>	<b>1</b>
<b>II. Plasmónica</b>	<b>9</b>
II.1. Nanociencia y nanotecnología . . . . .	10
II.2. Plasmones superficiales . . . . .	20
II.2.1. Sistemas plasmónicos . . . . .	20
<b>III. EL MÉTODO DE LA ECUACIÓN INTEGRAL</b>	<b>26</b>
III.1. Descripción del método integral . . . . .	26
III.1.1. Observaciones preliminares . . . . .	27
III.1.2. Ecuación de onda . . . . .	27
III.1.3. Función de Green para la ecuación de Helmholtz . . . . .	29
III.1.4. Representación integral . . . . .	30
III.1.5. Discretización de las ecuaciones integrales . . . . .	31
III.1.6. Guía de ondas en cristal fotónico con paredes sinusoidales que contienen una capa de metamaterial . . . . .	37
III.1.7. Guía de ondas en cristal fotónico con inclusión de conductor perfecto y metamaterial . . . . .	38
III.1.8. Guía de ondas finita . . . . .	39
<b>IV. RESULTADOS</b>	<b>43</b>
IV.1. Guía de ondas en cristal fotónico con paredes sinusoidales que con- tienen una capa de metamaterial . . . . .	44
IV.1.1. Validación del método numérico . . . . .	44
IV.1.2. Nuevos cálculos . . . . .	48
IV.2. Guía de ondas en cristal fotónico con inclusión de conductor perfecto y metamaterial . . . . .	51

## Contenido (continuación)

	Página
IV.2.1. Validación del método numérico . . . . .	51
IV.2.2. Nuevos cálculos . . . . .	53
IV.3. Guía de ondas finita . . . . .	55
IV.3.1. Validación del método numérico . . . . .	55
IV.3.2. Nuevos cálculos . . . . .	56
<b>V. CONCLUSIONES</b>	<b>59</b>
<b>REFERENCIAS</b>	<b>62</b>

# Lista de Figuras

Figura		Página
1	Ejemplos de CFs en a) 1 dimensión, b) 2 dimensiones, c) 3 dimensiones.	2
2	Las alas de la mariposa Morpho menelaus deben su color azul a una microestructura análoga a CFs dispuestos en una estructura en 3D. . .	3
3	(a) Guía de onda de CF con paredes sinusoidales recubiertas de metamaterial. (b) Guía de onda de CF con inclusión de CP recubierto por una capa de metamaterial. (c) Guía de onda finita con inclusión cilíndrica de metamaterial. . . . .	7
4	Resulta notable el incremento de índole exponencial en el número de publicaciones que contienen la frase "plasmones superficiales", ya sea en el título o en el resumen(basado en los datos proporcionados en <a href="http://www.sciencedirect.com">www.sciencedirect.com</a> ) . . . . .	9
5	Guerrero sobre fondo de azul maya. pintura hecha por Constantino Reyes-Valerio (Wikipedia). . . . .	13
6	La copa de Lycurgus está elaborada con nanopartículas de oro y plata.	14
7	Comparativo de las frecuencias de operación y las dimensiones típicas de los dispositivos basados en las diferentes tecnologías. . . . .	17
8	Guía de onda de CF con paredes sinusoidales recubiertas de metamaterial. . . . .	31
9	Descripción gráfica de una guía de ondas formadas por dos superficies onduladas. . . . .	32
10	Pozo de potencial infinito. . . . .	32
11	Guía de onda de cristal fotónico con inclusión de conductor perfecto recubierto por una capa de metamaterial . . . . .	39
12	Guía de onda finita con inclusión de cilíndrica de metamaterial. . . . .	40
13	Descripción gráfica de una guía de ondas formadas por dos superficies onduladas. . . . .	44
14	Guía de onda de CF con paredes sinusoidales recubiertas de metamaterial. . . . .	44

## Lista de Figuras (continuación)

Figura	Página	
15	.Modos numéricos y analíticos en guía de ondas con $K_n = 0$ , $b = \pi$ , $A = 0.4b$ , $P = 2\pi$ , vacío dentro de las guías y polarización TE. . . . .	45
16	(a) Campo obtenido a partir del sistema simple. (b) Campo obtenido con el sistema con capas. . . . .	46
17	Función dieléctrica y permeabilidad magnética de un metamaterial como una función de la frecuencia.. . . .	47
18	(a) Estructura de bandas obtenida a partir del programa implementado sin capas. (b) Estructura calculada a través del programa que contiene capas. (c) Estructura de bandas obtenida por el grupo de investigación de cristales fotónicos y metamateriales de la universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo (Mendoza-Suárez y Pérez-Aguilar, 2015). . . . .	47
19	(a) $\omega_n$ vs $D(K_n = 0, \omega_n)$ . (b) Campo obtenido a partir del programa sin capas con $K = 0$ , $b = 1.5$ , $A = 0.4b$ , $P = 2\pi$ , $\omega_n = 0.9595$ y polarización TM . . . . .	48
20	(a) Estructura de bandas. (b) $\omega_n$ vs $D(K_n = 0, \omega_n)$ .(c) Celda unitaria con capas. (d) Campo obtenido con $\omega_n = 0.6407$ . . . . .	49
21	(a) Celda unitaria con capas de <i>espesor</i> = $0.25b$ . (b) $\omega_n$ vs $D(K_n = 0, \omega_n)$ .(c) Campo obtenido con $\omega_n = 0.6381$ . (d) Campo obtenido con $\omega_n = 0.6457$ . . . . .	50
22	Guía de onda de cristal fotónico con inclusión de conductor perfecto. .	51
23	(a) Estructura calculada en este trabajo. (b) Estructura encontrada en la literatura (Pérez-Aguilar y Mendoza-Suárez, 2015). Los parámetros utilizados son $b = \pi$ , $P = 2\pi$ y $r = 0.17$ . . . . .	52
24	(a) Celda unitaria obtenida con el programa con capas haciendo cero el radio interior de la inclusión. (b) Campo obtenido con el programa sin capas . (c) Campo obtenido con el programa de capas. . . . .	53
25	a) Celda unitaria para el programa con capas. Se muestra la intensidad del campo obtenido con $K_n = 0$ para (b) $\omega_n = 0.7487$ y (c) $\omega_n = 0.9595$ .	54

## Lista de Figuras (continuación)

Figura		Página
26	(a) Celda unitaria obtenida con el programa con capas, $r = 0.1b$ y radio interior de $0.1r$ haciendo cero el radio interior de la inclusión. (b) Campo cuando se considera conductor perfecto dentro del metamaterial. (c) Campo obtenido cuando se considera vacío dentro de la capa de metamaterial. . . . .	55
27	Guía de onda finita con inclusión de cilíndrica de metamaterial. . . . .	56
28	Sección eficaz de dispersión para un cilindro de conductor perfecto. (a) y (c) obtenidos con un programa desarrollado en este trabajo, (b) y (d) tomados de (Ruppin, 2004). . . . .	57
29	Campo esparcido para una guía de onda finita con inclusiones cilíndricas de metamaterial para $\omega_n = 0.8119$ . . . . .	57
30	Campo esparcido para una guía de onda finita con inclusiones cilíndricas de metamaterial para $\omega_n = 0.7487$ . . . . .	58

# Capítulo I

---

## INTRODUCCIÓN

---

La luz al interactuar con la materia nos muestra una serie de fenómenos cuyo estudio nos permiten desarrollar teorías que nos ayudan a entender su naturaleza. La fabricación de dispositivos electrónicos así como nuevos materiales ha tenido un enorme crecimiento en los últimos 60 años (Ibiza, 2013), con ello se busca desarrollar dispositivos cada vez más eficientes. La ley de Moore, que predice que el número de dispositivos electrónicos en un chip se duplica cada 18 meses, se ha cumplido desde los años 60 (Bravo-Abad, 2006). Actualmente se tienen transistores del orden de 50 nanómetros.

Sin embargo, el principio de este siglo ha sido parteaguas en el planteamiento de la tecnología usada para el desarrollo de nuevos aparatos electrónicos, esto se debe a que la tecnología actual, basada en el silicio, presenta una serie de problemas que han logrado orientar las investigaciones a nuevas tecnologías capaces de lidiar con esta problemática. Uno de los problemas principales es el hecho de que las interconexiones metálicas que transportan información digital dentro de los chips disminuyen su capacidad a medida que los sistemas disminuyen de tamaño (Cadien *et al.*, 2005). Esta limitación se ha hecho más notoria en los últimos dos años.

La tecnología nanofotónica se ha planteado como una seria candidata para resolver

los inconvenientes de la tecnología basada en el silicio. Los investigadores desde hace años han centrado su atención en poder controlar la propagación de ondas electromagnéticas a través de materiales sintetizados con la intención de poder confinar la luz en una cierta región del espacio (Mengens *et al.*, 1999). Entre las principales ventajas ofrecidas por los dispositivos fotónicos frente a los electrónicos pueden destacarse la mayor velocidad de operación, esto se debe a que en este caso los portadores son fotones, frente a electrones en el caso de dispositivos electrónicos.

Dentro de los materiales propuestos para el desarrollo de la nanofotónica tenemos a los Cristales Fotónicos (CFs). Un cristal fotónico es un material estructurado de forma que su función dieléctrica varíe periódicamente en el espacio; es decir, son materiales que poseen una periodicidad supuesta perfecta en su estructura (Kittel, 1996).

Generalmente los CFs son construidos de materiales dieléctricos, sin embargo se han encontrado propiedades ópticas interesantes en CFs metálicos o metal-dieléctrico (Miguez *et al.*, 2002). Los CFs son capaces de localizar la luz y de inhibir la emisión espontánea de una fuente de luz contenida en su interior; además pueden ser de una, dos o tres dimensiones como se muestra en la figura 1.

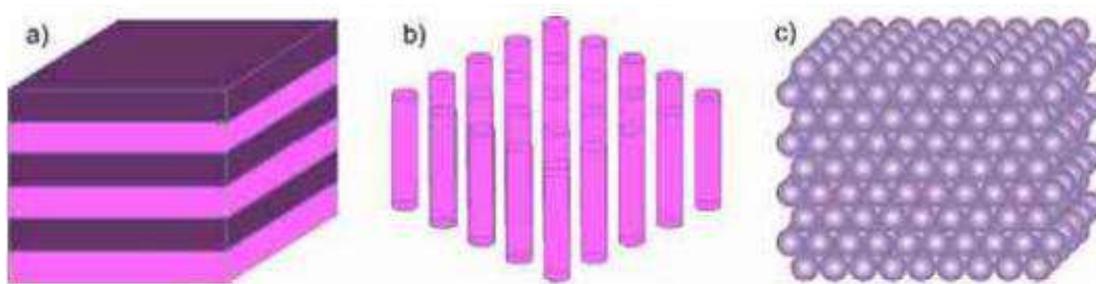


Figura 1. Ejemplos de CFs en a) 1 dimensión, b) 2 dimensiones, c) 3 dimensiones.

Aunque existen manifestaciones naturales de estos materiales, como ciertas estructuras microscópicas que dan lugar a coloraciones en las alas de algunas mariposas como

la mostrada en la figura 2, se trata de materiales relativamente novedosos propuestos para producir localización de la luz.



Figura 2. Las alas de la mariposa *Morpho menelaus* deben su color azul a una microestructura análoga a CFs dispuestos en una estructura en 3D.

Dentro de los cristales fotónicos encontramos los llamados materiales zurdos (LHM) o metamateriales (Veselago, 1968). Su nombre lo deben al hecho de que los vectores de luz  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$  y  $\mathbf{k}$  forman una triada que cumple la regla de la mano izquierda para una onda que se propaga a través de estos materiales. Los LHM son arreglos periódicos de estructuras cuyo tamaño de la celda unitaria es mucho menos que la longitud de onda con la que se trabaja (Podolsky, 2003); estos materiales no se encuentran en la naturaleza, de modo que son fabricados artificialmente.

Los primeros experimentos con LHM fueron realizados en el rango de microondas en el espectro electromagnético; sin embargo ya se ha logrado realizar investigaciones en el espectro del visible e infrarrojo (García-Meca *et al.*, 2007; Shalaev, 2005). Los materiales LHM tienen un índice de refracción negativo  $n$  dentro de un rango del espectro electromagnético; además, sus funciones de permitividad eléctrica  $\varepsilon$  y permeabilidad magnética  $\mu$  son simultáneamente negativas dentro de ese rango del espectro electromagnético. Esta cualidad origina que los fenómenos ópticos conocidos presenten variaciones que pueden ser utilizadas para el desarrollo de nuevas tecnologías.

Por esta razón se ha comenzado a estudiar una gran variedad de sistemas ópticos

que contienen materiales LHM. Entre estos estudios están, por ejemplo, la investigación sobre propiedades de esparcimiento en sistemas cilíndricos largos hechos a partir de medios con materiales LHM (Ruppín, 2004; Kuzmiak y Maradudin, 2002), la refracción negativa (Yuntuan *et al.*, 2006), la transmisión extraordinaria de la luz (Ebbesen *et al.*, 1998), etc. Además, también cabe destacar que las propiedades de transmisión extraordinaria han dado lugar a un buen número de aplicaciones que van desde sensores hasta dispositivos opto-electrónicos.

Aún no hay una definición universal aceptada para los LHMs, para este trabajo tomaremos la definición de Vladimir Shalaev (Shalaev y Cai, 2010) la cual dice:

*“Un Metamaterial es un material estructurado artificialmente, que puede ser periódico o no periódico, que obtiene sus propiedades, no directamente de los materiales que lo constituyen, sino a partir de una unidad de estructura. Un Metamaterial tiene una escala mucho mas pequeña que la longitud de onda de interés y su respuesta electromagnética se expresa en términos de parámetros de los materiales como por ejemplo: la permitividad, la permíabilidad y el índice de refracción”.*

Posiblemente porque la luz es indispensable para nuestra visión y ya que a través de ella, en gran medida conocemos el mundo que nos rodea, es que la hemos estudiado durante siglos. De este hecho han surgido un sin número de conocimientos, los cuales han culminado incluso en aparatos que en muchos casos forman parte también de nuestra vida diaria; aún así, la luz no ha dejado de sorprendernos.

Después de siglos de estudio siguen apareciendo fenómenos que nos permiten crear nuevas teorías y ramas de investigación. Por ejemplo, los metales, además de reflejar la luz, tienen una propiedad óptica menos conocida: bajo ciertas condiciones la luz puede viajar sobre las superficies metálicas sin alejarse de ellas. Ésta es una propiedad muy peculiar, ya que en condiciones normales la luz viaja por las tres dimensiones del espacio

y no se le confina con facilidad; gracias a este tipo de fenómenos han surgido ramas en la física como la “nanofotónica”, la cual es un nuevo campo de investigación surgido en los últimos años como consecuencia del avance de la tecnología para la fabricación de nanoestructuras(Salas Montiel y Blaize, 2015).

Dentro de la “nanofotónica” tenemos a la “plasmónica”, la cual tiene precisamente como estudio principal el confinamiento de los campos electromagnéticos en volúmenes pequeños comparados con la longitud de onda utilizada en el experimento; este fenómeno surge como resultado de la interacción entre los electrones de conducción entre interfaces metal-dieléctrico o en nanoestructuras metálicas(A. Cruz *et al.*, 2015).

Esta luz superficial involucra a los electrones libres presentes en los metales, de modo que, es una onda mucho más complicada que la luz normal; a este tipo de ondas se les llama “ondas plasmónicas”. Más aún, cuando los campos logran confinarse a viajar a través de la interfaz son llamados polaritones de plasmones de superficie (SPP). Los SSP fueron descubiertos por Rufus Ritchie en los años cincuenta del pasado siglo(Ritchie, 1957).

La luz es un maravilloso medio de transporte de información hoy en día, por lo que es de suma importancia poder controlar el transporte de luz a través de regiones del espacio localizadas. El mundo está hoy cubierto de fibras ópticas, que guían señales de luz portadoras de caudalosos flujos de comunicaciones de voz e ingentes volúmenes de datos. Sin embargo, los electrones al moverse por un medio disipan energía en forma de calor; por lo tanto a los SPP se les había tenido siempre como un sumidero de energía y, por consiguiente, como un inconveniente para la utilización de metales en dispositivos ópticos que envíen información en forma de energía de un lugar a otro.

En efecto, tras haber recorrido un SPP sólo una décima de milímetro, más de la mitad de la intensidad de luz que lleva se ha disipado ya en forma de calor; por tanto,

los SPP pueden no ser muy adecuados si pretendemos valernos de ellos para transportar energía a distancias mayores que las décimas de milímetro. Aun así, en ciertas aplicaciones ese margen ya no es tan pequeño. La continua miniaturización de los componentes electrónicos ha creado la necesidad de transportar información a escalas de unas pocas micras (Weeber *et al.*, 2001; Lezec *et al.*, 2002; García-Vidal y Martín-Moreno, 2008).

Esta colosal capacidad ha llevado a profetizar que los dispositivos fotónicos, a través de los cuales se canaliza y manipula la luz visible y otras ondas electromagnéticas, podrían llegar algún día a reemplazar a los circuitos electrónicos de los microprocesadores y de otros componentes informáticos. Científicos en todo el mundo trabajan en la generación de estos SPP (Moreno *et al.*, 2008), pues al poder controlar el paso de luz a través de superficies a nuestra voluntad, también están encontrando alternativas para el transporte de información a grandes distancias, en un futuro que esperemos no sea muy lejano.

En este trabajo se modelan numéricamente sistemas que han sido estudiados con anterioridad por el grupo de cristales fotónicos y metamateriales de la FCFM de la UMSNH en busca de generar SPPs (Mendoza-Suárez y Pérez-Aguilar, 2015; Pérez-Aguilar y Mendoza-Suárez, 2015). Sin embargo, la diferencia radica en la cantidad de material LHM utilizado en nuestros cálculos, el cual es menor que el utilizado en cálculos anteriores; es decir, centramos nuestra atención en la optimización de la cantidad de material LHM utilizado. Cabe destacar que, la optimización se refiere a mostrar que la cantidad de material LHM no juega un papel tan importante como la propia geometría del sistema, sumada a la presencia del material LHM.

Nuestros cálculos se centran en tres sistemas; los tres son básicamente guías de ondas de cristal fotónico (PCWs). El primero se caracteriza por tener paredes sinusoidales

de conductor perfecto y cada una de las paredes contienen una capa de LHM como se muestra en la figura 3(a); en la figura 3(b) se muestra el segundo, el cual es una PCW con superficies planas y con un arreglo periódico de inclusiones cilíndricas suaves formadas por una capa de material LHM, cuya interior puede ser conductor perfecto, dieléctrico o simplemente vacío. Finalmente la figura 3(c) muestra el tercer sistema, una guía de ondas de cristal fotónico finito con paredes rectas e inclusión de LHM.

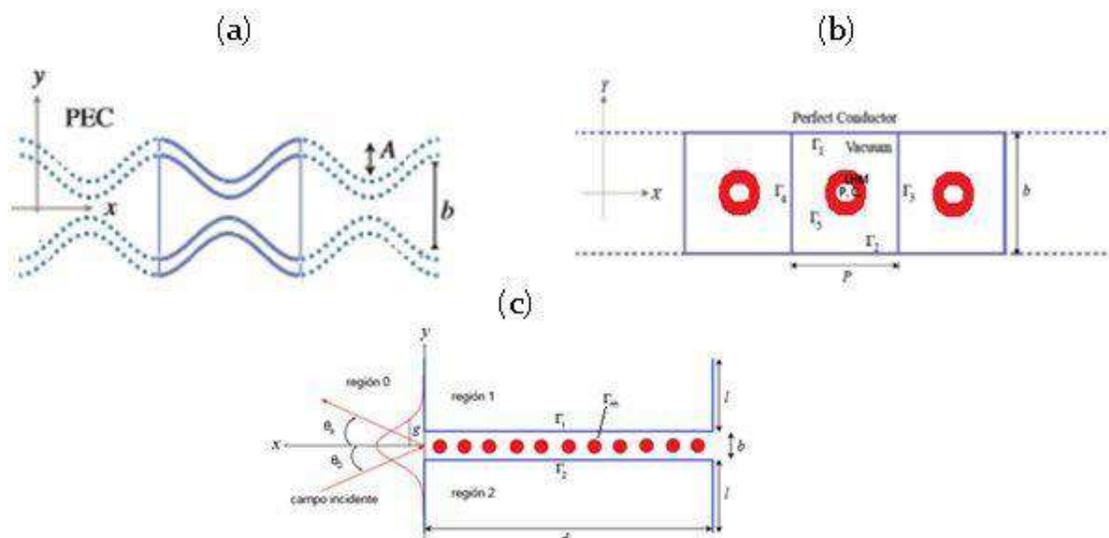


Figura 3. (a) Guía de onda de CF con paredes sinusoidales recubiertas de metamaterial. (b) Guía de onda de CF con inclusión de CP recubierto por una capa de metamaterial. (c) Guía de onda finita con inclusión cilíndrica de metamaterial.

Para poder atacar el problema planteado no sólo es necesario la comprensión teórica del sistema, sino además el dominio de los métodos numéricos utilizados para el cálculo. En nuestro caso, el estudio del comportamiento de la luz a través de las PCWs se basa en métodos desarrollados por el grupo de cristales fotónicos y metamateriales de la FCFM de la UMSNH. En el caso del sistema infinito se obtienen estructuras de bandas, y modos del campo electromagnético; y para el caso finito el campo esparcido, la reflectancia y la transmitancia.

Para nuestro propósito utilizaremos el método numérico conocido como “el método

de la ecuación integral”, el cual se basa en partir de la segunda identidad de Green para resolver la ecuación de Helmholtz asociada (Maradudin *et al.*, 1990; Mendoza-Suárez *et al.*, 2006, 2007; Pérez-Aguilar, 2005).

### **Estructura de la tesis**

El trabajo de tesis se desarrolla de la siguiente manera:

En el capítulo II introduciremos con más detalle el campo de la plasmónica, así como posibles aplicaciones. Con el fin de analizar los sistemas electromagnéticos propuestos en este trabajo, mostraremos la teoría electromagnética básica de medios materiales partiendo del Modelo de Drude para medios metálicos. En el capítulo III se introduce el método numérico empleado para realizar los cálculos que nos permiten analizar los sistemas electromagnéticos seleccionados. El método utilizado es conocido como el Método de la Ecuación Integral (Mendoza-Suárez *et al.*, 2006), el cual hace uso de la segunda identidad de Green para pasar de un sistema de ecuaciones integrales a un sistema de ecuaciones algebraico. En el capítulo IV se presentan los resultados obtenidos al hacer uso del método numérico en los sistemas analizados. Finalmente, en el capítulo V se dan las conclusiones de este trabajo de investigación obtenidas a través de los cálculos del capítulo IV.

## Capítulo II

---

# PLASMÓNICA

---

La Plasmónica ha logrado atraer el interés de investigadores en todo el mundo, lo cual se ha reflejado en el creciente número de estudios relacionados con fenómenos tales como controlar de manera óptima el confinamiento de luz en regiones del espacio mucho menores que su longitud de onda. En la figura 4 se muestra el crecimiento de artículos relacionados con la plasmónica.

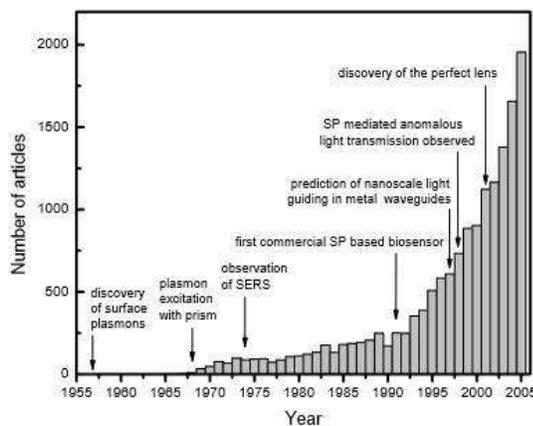


Figura 4. Resulta notable el incremento de índole exponencial en el número de publicaciones que contienen la frase "plasmones superficiales", ya sea en el título o en el resumen(basado en los datos proporcionados en [www.sciencedirect.com](http://www.sciencedirect.com)) .

Para los investigadores es indispensable poder entender la física detrás de estos fenómenos, ya que un control óptimo puede desencadenar el desarrollo de un sinfín

de aplicaciones en varias ramas de la ciencia, que a su vez, pueden consolidar nuevas tecnologías que abarcan desde la medicina hasta las telecomunicaciones. En este capítulo, introduciremos brevemente los fundamentos de la Plasmónica con el objetivo de orientar los conocimientos a los sistemas que analizamos en este trabajo.

## II.1. Nanociencia y nanotecnología

La nanociencia es una rama de investigación que se ocupa del estudio de las propiedades físicas y químicas de materiales con dimensiones inferiores a los 100 nm. En el mundo cotidiano en el que nos desenvolvemos, las distancias típicas entre objetos son las que separan el monitor de una computadora de nuestros ojos: se pueden medir con una cinta métrica.

Todo lo que mida milímetros o kilómetros de nosotros forma parte de nuestro mundo, porque lo abarcamos con la vista y tenemos una imagen de estos objetos. Cuando algo sobrepasa estos tamaños nos cuesta imaginarlo o entenderlo, nos puede resultar difícil comprender las dimensiones de un átomo o la distancia entre la Tierra y el extremo del universo conocido.

En ocasiones, la materia a escala manométrica presenta propiedades que no es posible encontrar en nuestro mundo macroscópico. Estas propiedades pueden ser ópticas, eléctricas o magnéticas, las cuales pueden dar origen a nuevas tecnologías capaces de solucionar problemas en distintas ramas de la ciencia(Santillan, 2013).

En nuestro caso estamos interesados en las propiedades ópticas de este misterioso mundo nanométrico. Buscando un símil sencillo, el fundamento de la tecnología actual se asemeja al trabajo realizado por un escultor, el cual a partir de un bloque de material y a base de cincelar, pulir y modelar, acaba obteniendo un objeto más pequeño con la forma deseada. Puesto que cada vez son necesarias tecnologías de fabricación más

precisas, es importante disponer de tamaños de cincel progresivamente más pequeños. Este planteamiento es conocido como tecnología de fabricación descendente o “top-down” (de arriba hacia abajo), y es la base de la tecnología actual. La ley de Moore, que citábamos previamente, nos habla de este proceso.

La aproximación “nano” es, por tanto, muy diferente de la “top-down”; el planteamiento está basado exactamente en lo contrario: ir de lo pequeño a lo grande, construyendo dispositivos a partir de sus componentes últimos. En este caso, se trata de trabajar no como un escultor, sino como un albañil que construye una pared partiendo de una serie de elementos básicos, los ladrillos. Esta aproximación, que se conoce como “bottom-up ” (de abajo hacia arriba) utiliza para construir los diferentes dispositivos, componentes básicos muy variados tales como: átomos, ácidos nucleicos, proteínas, nanopartículas o nanotubos.

Otra actividad de tipo “ bottom-up ” que nos ha mantenido entretenidos largas horas en la infancia son los juegos de construcción con cientos de piezas de diferentes tamaños y colores con las que construíamos casas, aviones, robots o monstruos.

Cambemos un poco de filosofía e imaginemos que las fichas rojas son oxígeno, las azules son átomos de hidrógeno, las negras carbono, etcétera. Y ahora comencemos a ensamblar una molécula de agua, otra de amoníaco, otra de glucosa. ¿Podríamos hacer algo igual pero en el “nanomundo”?.

El trabajo con objetos tan pequeños entraña una gran dificultad, y de hecho fue algo prácticamente imposible hasta que se desarrollaron los microscopios de campo cercano (SPMs). Estas novedosas herramientas permiten no sólo la visualización, sino también la manipulación de objetos de dimensiones nanométricas de distinta naturaleza. Estos microscopios son tan potentes que con ellos es posible llegar a ver átomos sobre una superficie y moverlos a nuestro antojo.

La necesidad de esta compleja instrumentación implica otra de las características fundamentales que acompañan a la nanociencia y nanotecnología: su interdisciplinariedad. Pero no sólo es la necesidad de combinar expertos en distintas técnicas y áreas del conocimiento lo que origina la interdisciplinariedad de la nanociencia. Se trata también de que al reducir el tamaño de los objetos para estudiarlos, llega un momento en que todos están constituidos por átomos y moléculas. Y así, por ejemplo, para construir un dispositivo biosensor, el biólogo deberá saber física cuántica y el físico conocer de biología; esto si quieren que ese nuevo dispositivo funcione.

Así pues, el desarrollo de esta nueva ciencia requiere no sólo la utilización de técnicas de fabricación, visualización y caracterización muy precisas, sino también una aproximación multidisciplinar que reúna a físicos, químicos, biólogos, tecnólogos y teóricos trabajando juntos y utilizando el mismo lenguaje.

De hecho, para todos ellos los átomos y moléculas son los ladrillos constituyentes de los objetos que estudian, la nanoescala es su punto de encuentro. En una primera impresión, pensar que podemos ser capaces de desarrollar toda la tecnología que nos rodea ensamblando molécula a molécula, partícula a partícula, parece un sueño o una película de ciencia ficción. Pero si lo meditamos un poco, veremos que para comprender cómo se pueden construir dispositivos de orden superior partiendo de sus constituyentes, sólo tenemos que mirar a nuestro alrededor.

La biología lo viene haciendo desde hace casi 4000 millones de años sobre la Tierra. Así, las moléculas que se sintetizaron sobre la superficie de la Tierra se fueron reconociendo, enlazando y autoensamblando para ir formando estructuras de mayor complejidad que les proporcionaban ciertas ventajas para captar energía, evitar su degradación, hacer copias de sí mismas, etcétera.

Existen antecedentes de que el ser humano ha utilizado partículas metálicas para

lograr generar efectos interesantes en objetos decorativos, mucho antes de que los científicos comenzaran a investigar las propiedades ópticas en nanoestructuras metálicas. Como un bello ejemplo es el azul maya, un pigmento azul fabricado por primera vez en el siglo IX por las culturas Maya y Azteca, el cual se puede apreciar en la figura 5.



Figura 5. Guerrero sobre fondo de azul maya. pintura hecha por Constantino Reyes-Valerio (Wikipedia).

Es un compuesto formado por partículas híbridas de material orgánico (índigo, derivado de las hojas del añil) e inorgánico (un filosilicato que se encuentra en algunas arcillas). El resultado es una sustancia extremadamente resistente al paso del tiempo, a las inclemencias climáticas e incluso a la mayor parte de disolventes químicos y ácidos. Los colorantes orgánicos suelen ser bastante poco resistentes y se degradan con facilidad. Sin embargo, en este caso, su unión con un material inorgánico le confiere "protección".

Otro ejemplo interesante es la copa de Lycurgus, la cual se muestra en la figura 6, fue fabricada en torno al siglo IV a. C en Roma. A la luz del día la escena mitológica está representada en tonos verdes y opacos. Cuando se la ilumina desde dentro adquiere tonos rojos y translúcidos. Las responsables de estos cambios de coloración son las nanopartículas de oro y plata con que está elaborada; también en edades antiguas se utilizaba la nanotecnología para la decoración del vidrio de las ventanas de las catedrales. Los diferentes tonos se obtenían calentando y enfriando el vidrio de forma

controlada. Lo que los medievales desconocían es que, mediante ese proceso, lo que se consigue es cambiar el tamaño de los cristales a nivel nanométrico y por tanto su color.



Figura 6. La copa de Lycurgus está elaborada con nanopartículas de oro y plata.

También durante el Medievo, los célebres ceramistas de Manises (Valencia), importaron una fórmula de los musulmanes andaluces con la que conseguían el tan elogiado brillo metálico de sus piezas. Esta receta incluía nanopartículas de plata y cobre.

En ocasiones, los fenómenos obtenidos con la nanotecnología aportaban características más que decorativas a los objetos producidos; con el acero de Damasco se han forjado, desde la Edad Media, las espadas de mayor reputación: duras, resistentes y a la vez capaces de cortar, con su afiladísima hoja, un pelo en caída libre.

Recientes estudios han revelado la existencia de nanotubos de carbono en su composición, producidos por los métodos de forja empleados. Estos nanotubos son unas nanopartículas recientemente descubiertas con unas propiedades de dureza extraordinarias. La diferencia de esta antigua nanotecnología con la actual, es que ahora tenemos las herramientas para ver lo que está ocurriendo en la nanoescala y desarrollar reglas predictivas, lo cual nos permite diseñar los materiales en vez de utilizar el método de prueba y error.

El inicio del pensamiento consciente de los beneficios de los desarrollos nanotecnológicos suele atribuírsele al premio Nobel Richard Feynman, que en 1959 anticipó en una charla titulada: 'Hay mucho espacio al final', las primeras ideas en las que se basa la nanotecnología. "Me gustaría describir un campo", comenzaba Feynman, "en el cual muy poco ha sido hecho hasta el momento; pero en el que, en principio, una gran cantidad de cosas pueden hacerse. Más aún, lo más importante es que podría tener un gran número de aplicaciones técnicas. De lo que quiero hablar es del problema de manipular y controlar objetos a muy pequeña escala. ¿Cuáles serían las propiedades de los materiales si pudiéramos verdaderamente colocarlos como quisiéramos?. No puedo saber exactamente qué pasaría, pero no tengo la menor duda de que si controlásemos la colocación de objetos a una pequeña escala, tendríamos acceso a un amplio rango de propiedades que los materiales pueden presentar y podríamos hacer una gran cantidad de cosas".

Pero aunque R. Feynman tuviera una visión tan sagaz, han hecho falta varias décadas hasta poder desarrollar las herramientas que nos permitieran fabricar, manipular y observar la materia a escala nanométrica. Por ejemplo, hubo que esperar hasta 1981 para que G. Binnig y H. Rohrer inventaran un tipo de microscopio, llamado STM, con el que se ha podido ver y mover átomos por primera vez. En 1986 recibieron el premio Nobel por su descubrimiento.

La fotónica es la ciencia de la generación, control y detección de fotones, de modo que la nanofotónica, la podríamos definir como la fusión de la nanotecnología y la fotónica; esta rama de la ciencia surge de la necesidad de poder entender fenómenos que tienen su aparición, en primera instancia, gracias a innovadoras herramientas tecnológicas.

Sin embargo, esta rama de la nanociencia también trae con ella nuevos desafíos tecnológicos para su total comprensión. En ocasiones estos desafíos motivan el desarrollo

de nuevos dispositivos, y esto permite a los investigadores colarse en un ciclo que tiene como primer finalidad crear conocimiento de esta rama para poder sacar provecho de ella; por ejemplo, se trabaja en el desarrollo de nueva tecnología capaz de atacar el problema de la velocidad de los microprocesadores, la cual ha disminuido considerablemente en los últimos años.

Uno de los inconvenientes que presentan los dispositivos fotónicos para la miniaturización es el límite de difracción, el cual establece que no es posible confinar un haz tridimensional de luz en un volumen cuya sección lateral sea menor que la mitad de la longitud de onda. Actualmente, el tamaño característico de los chips fabricados es del orden de 1000 nm, el cual es el valor de la longitud de onda usado en los circuitos fotónicos actuales.

La introducción de los cristales fotónicos ha logrado aportar algunas soluciones en este aspecto, debido a que un cristal fotónico tiene un tamaño de varias veces la longitud de onda puesto que su periodicidad es del orden de la mitad de la longitud de onda; por ello conviene estudiar la nanofotónica basada en plasmones de superficie (SPs), la cual es conocida como “plasmónica” (Atwater, 2007).

Constituye uno de los caminos más prometedores para poder conseguir la miniaturización de los circuitos fotónicos, ya que combina los dos ingredientes más importantes para el diseño de este tipo de circuitos: la rapidez de operación de la fotónica y la miniaturización de la electrónica.

La figura 7 muestra un diagrama en el que se comparan las frecuencias de operación y los tamaños típicos de los dispositivos basados en las diferentes tecnologías mencionadas hasta ahora.

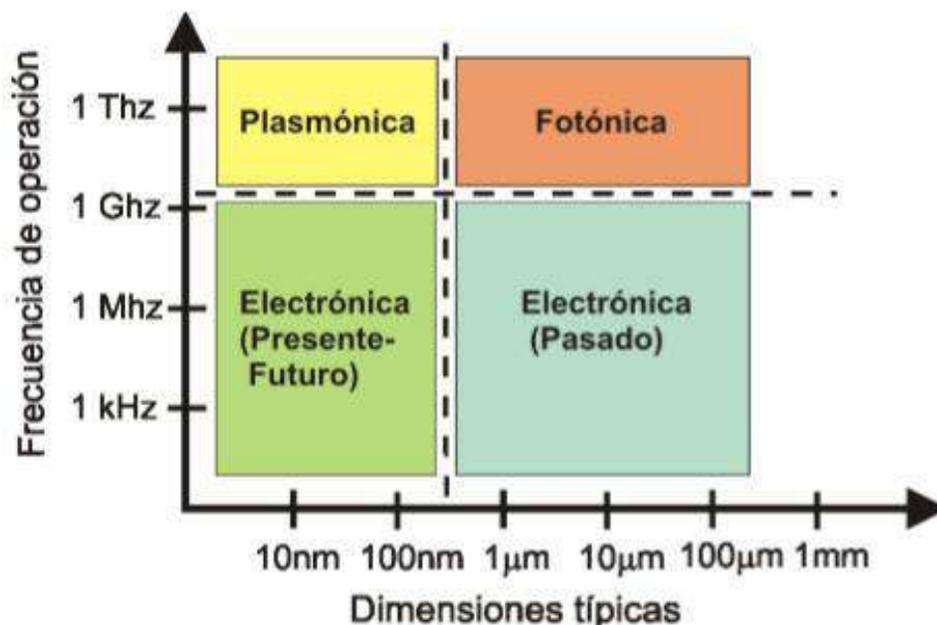


Figura 7. Comparativo de las frecuencias de operación y las dimensiones típicas de los dispositivos basados en las diferentes tecnologías.

En física, la palabra plasma se reserva a una fase fluida de la materia conformada por partículas cargadas y se le conoce como la cuarta fase de la materia. En la naturaleza aparecen plasmas, como por ejemplo, la ionósfera, gases altamente ionizados y metales. Estos últimos contienen un mar de electrones libres y en su interior un fondo de iones metálicos fijos.

De hecho, en la óptica de metales existe el término frecuencia de plasma ( $\omega_p$ ) y es la frecuencia que determina su comportamiento metálico, caracterizado por su alta reflexión para frecuencias mayores que la frecuencia de plasma y su comportamiento no metálico a frecuencias menores que ésta.

La plasmónica es por lo tanto el nombre que se ha dado a un área emergente del desarrollo científico y se basa en la habilidad para controlar el flujo de luz en materiales metálicos utilizando plasmones. Para lograr tal control ha sido necesario fabricar dispositivos metálicos con dimensiones nanométricas y la excitación de los llamados

plasmones de superficie.

La historia de los plasmones se remonta hasta los albores del siglo XX. La primera observación de la excitación del PS fue hecha y reportada por Wood en 1902(Wood, 1902). Estas observaciones consistían en la ausencia de algún color proveniente de una fuente de luz blanca, después de haber incidido sobre una superficie metálica en forma de rejilla de difracción. Esta ausencia de color fue nombrada anomalía de Wood, ya que no se conocía su relación con la excitación de los PS. Estas anomalías se han considerado en todo el siglo XX como uno de los fenómenos más fascinantes de la óptica, y por ello muchos trabajos fueron realizados para profundizar o entender desde el punto de vista teórico y experimental las anomalías de Wood(Rayleigh, 1907a,b; Strong, 1936; Fano, 1936; Hessel y Oliner, 1965; Palmer, 1952; Stewart y Gallaway, 1962).

Aproximadamente al mismo tiempo, en 1904, Maxwell Garnett describe los colores brillantes observados en los vidrios del metal dopado, mediante la reciente teoría de Drude para metales y las propiedades para pequeñas esferas metálicas. En un esfuerzo por mejorar su comprensión, en 1908 Gustav Mie desarrolla su teoría ahora ampliamente utilizada de la dispersión de la luz por partículas esféricas(Mie, 1908).

Unos cincuenta años más tarde, en 1956, David Pines describe teóricamente las pérdidas de energía características que experimentan los electrones rápidos que viajan a través de los metales(Pines, 1956) y atribuye estas pérdidas a oscilaciones colectivas de electrones libres en el metal.

De modo similar al anterior trabajo sobre las oscilaciones de plasma en las descargas de gas, llama a estas oscilaciones " plasmones". En 1957, un estudio publicado por Rufus Ritchie(Ritchie, 1957) sobre las pérdidas de energía de los electrones en películas delgadas, demuestra que los modos de plasmones pueden existir cerca de la superficie de los metales. Este estudio representa la primera descripción teórica de plasmones de

superficie.

Coincidentemente, un año más tarde, John Joseph Hopfield introduce el término 'polariton' para la oscilación acoplada de electrones ligados. En 1968, casi setenta años después de las observaciones originales de Wood, Ritchie y colaboradores describen el comportamiento anómalo de rejillas metálicas en términos de resonancias de plasmones superficiales excitadas sobre las rejillas (Ritchie *et al.*, 1968).

En este punto, las propiedades de los plasmones de superficie son bien conocidas; sin embargo, no se ha hecho la conexión con las propiedades ópticas de nanopartículas metálicas. En 1970, más de sesenta años después del trabajo de Garnett en los colores de los vidrios del metal dopado, Uwe Kreibig y Peter Zacarías realizan un estudio en el que se comparan la respuesta electrónica y óptica de nanopartículas de oro y plata (Kreibig y Zacarias, 1970) y por primera vez, se describen las propiedades ópticas de las nanopartículas de metal en términos de plasmones de superficie.

Como el campo continúa desarrollándose y la importancia del acoplamiento entre los electrones oscilantes y el campo electromagnético es más aparente, Stephen Cunningham y sus colegas introducen el término de plasmones superficiales - polariton (SPP) en 1974 (Cunningham *et al.*, 1974).

Otro descubrimiento importante en el área de la óptica para metales se produce en ese mismo año, cuando Martin Fleischmann y sus colaboradores observan una fuerte dispersión Raman a partir de moléculas de piridina, en el entorno de una superficie rugosa de plata debido a la presencia de plasmones de superficie. Todos estos descubrimientos han sentado las bases para el incremento actual de la nanofotónica de plasmones superficiales.

El desarrollo de computadoras que permitían manejar y procesar grandes cantidades de información permitieron estudiar los SPPs en la década de los 70's; evidentemente

el desarrollo de métodos numéricos no se hizo esperar. Los métodos integrales surgieron a partir de la necesidad de modelar este tipo de sistemas. Estos métodos se basan en resolver la ecuación de onda, partiendo de las ecuaciones de Maxwell y terminando con un sistema de ecuaciones algebraico(Mendoza-Suárez *et al.*, 2006).

## II.2. Plasmones superficiales

El concepto de Plasma permite describir muchas de las propiedades fundamentales del estado sólido; es decir, a través de una analogía de un solo electrón moviéndose en un arreglo periódico de átomos a los que se les asocia una carga negativa. De manera que el plasma es un estado fluido similar al estado gaseoso, pero en el que determinada proporción de sus partículas están cargadas eléctricamente y no poseen equilibrio electromagnético.

El Plasmón no es otra cosa que un cuanto de oscilación del plasma. El Plasmón es la cuasipartícula resultado de la cuantización de las oscilaciones del plasma, de la misma forma que un fotón o un fonón son cuantizaciones de ondas electromagnéticas y mecánicas. De modo que el plasmon se define como el cuanto de energía asociado con ondas propagándose en la materia a través del movimiento colectivo de un gran número de electrones. Esto nos da un idea de por qué un metal se considera como un plasma de alta densidad con un cierto número de electrones móviles.

### II.2.1. Sistemas plasmónicos

La Nanofotónica explora los caminos por los cuales los campos electromagnéticos pueden confinarse en dimensiones menores que la longitud de onda de la radiación incidente. La Plasmónica forma una parte importante de aquella y se basa en los procesos de inte-

racción entre la radiación electromagnética y los electrones de conducción en interfaces metal-dieléctrico.

Las investigaciones de numerosos grupos repartidos por todo el mundo persiguen generar eficientemente estos PS, moverlos por la superficie a nuestra voluntad (creando para ellos los equivalentes a lentes, divisores de haz, guías de onda, transistores y circuitos), y extraer la energía que llevan, probablemente en forma de luz o de señal eléctrica, para poder transportarla a mayores distancias.

En un campo emergente tan activo como la plasmónica, es difícil saber dónde aparecerán las aplicaciones más interesantes. Aquí nos vamos a centrar en las tres áreas de la óptica de metales que hoy en día parecen más prometedoras. A continuación presentaremos algunas de las aplicaciones de los plasmones superficiales.

### **Plasmones superficiales de canal**

En 2005, el grupo dirigido por Sergey Bozhevolnyi de la Universidad de Aalborg (Sergey *et al.*, 2006), consiguió abordar experimentalmente los "plasmones superficiales de canal" y medir sus propiedades. Este tipo de plasmones se presentan dentro de canales en forma de V situados en la superficie de un metal. Pese a su notable grado de confinamiento, su longitud de propagación es comparable a la que corresponde a los plasmones de una superficie plana. En este sistema el ángulo que define la V y la profundidad de ésta son factores importantes para la aparición de plasmones a diferentes alturas de la V.

Se descubrió que con el diseño adecuado del canal es posible que sólo exista modo plasmónico dentro del canal. Esta propiedad es muy importante en los circuitos ópticos, pues si a una longitud de onda hubiese más de un modo, la luz podría saltar de un modo a otro mientras se propaga, de modo que la señal se distorsionaría.

Otra propiedad sorprendente de estos plasmones es la capacidad que tiene de girar en espacios muy reducidos. En los circuitos ópticos tradicionales, por ejemplo los creados con fibras ópticas, para evitar pérdidas por radiación, la variación de la dirección de la luz se ha de hacer sobre distancias de centenares de longitudes de onda, lo que dificulta la miniaturización de los circuitos. Sin embargo, resultados numéricos y experimentales han mostrado que los plasmones superficiales de canal toman una curva de 90 grados en un espacio de tan sólo 2 o 3 longitudes de onda, sin pérdida apreciable de intensidad.

Con estos resultados se han construido los primeros dispositivos ópticos basados en las propiedades de los plasmones de superficie de canal. El primero de ellos es un "divisor de haz Y", en el que un canal se separa en dos, formando una estructura con la forma de la letra Y. Experimentalmente se mostró que la intensidad de plasmones superficiales de canal en la base de la letra se divide en dos, fluyendo cada mitad por cada una de las dos ramas de la bifurcación, sin pérdida significativa de luz en la unión.

También se ha fabricado un interferómetro Mach-Zehnder mediante la unión de dos divisores Y. En este dispositivo se hace interferir la luz consigo misma bifurcándola primero y reuniéndola de nuevo después.

### **Transmisión extraordinaria de la luz**

Un agujero en una pantalla opaca es uno de los elementos ópticos más simples que se pueda imaginar. El proceso del paso de la luz a través de un agujero pequeño ha sido objeto de curiosidad y utilizado tecnológicamente desde la Antigüedad. El primer estudio científico de la transmisión de luz a través de una apertura circular fue llevado a cabo por Francesco María Grimaldi en el siglo XVII. Fue uno de los primeros análisis dentro de la nueva disciplina de la óptica clásica.

No es descabellado pensar que todos tenemos experiencia de cómo se comporta la

luz al pasar por agujeros. Por lo común, se trata de perforaciones mucho mayores que la longitud de onda de la luz; sin embargo, cuando las dimensiones de los agujeros son menores que la longitud de onda de la luz, nuestra intuición falla y aparecen fenómenos de otra naturaleza.

En los años cuarenta, Hans Bethe encontró teóricamente que el porcentaje de luz transmitido por un agujero circular en una lámina metálica era proporcional a la cuarta potencia del cociente de la longitud de onda y el diámetro del agujero. Es decir, si el diámetro del agujero es mucho menor que la longitud de onda, la eficiencia en el proceso de transmisión resultará pequeñísima.

Otro fenómeno interesante en este sistema es que la luz no emerge del agujero como esperaría la intuición. Mientras que en agujeros grandes sale en la misma dirección por la que incidió, en el caso de agujeros con tamaños menores que la longitud de onda la escasa luz que se transmite se reparte por igual en todas las direcciones. Ambas propiedades (baja transmisión y distribución isótropa de la radiación transmitida) constituyen un freno para muchas aplicaciones, que requieren la iluminación intensa de áreas muy pequeñas.

En 1998 se dio un gran avance para la superación de la baja transmisión de la luz cuando el grupo experimental dirigido por Thomas Ebbesen (Ebbesen *et al.*, 1998), descubrió que una colección ordenada de agujeros pequeños perforados en una lámina metálica, dejaba pasar no sólo toda la luz que incidía sobre ellos, sino más de la que correspondería por su área. Es decir, los agujeros recogían también gran parte de la luz que incidía sobre la lámina metálica, que prácticamente se volvía transparente. Este resultado sorprendente, de transmisión extraordinaria de luz ocurría para ciertos valores de la longitud de onda relacionados directamente con el período del conjunto de agujeros. De esta relación se dedujo que el fenómeno de transmisión extraordinaria

se hallaba ligado a la presencia de plasmones superficiales, lo que explicaba por qué el fenómeno sólo aparecía en sistemas metálicos.

La razón de este fenómeno es: la luz, tras entrar en el agujero, va y vuelve repetidamente antes de salir del todo por la otra cara de la lámina. En cada paso, sólo se transmite una pequeña fracción de la luz, pero la suma de muchas pequeñas fracciones puede generar una transmisión muy alta. Debido al comportamiento ondulatorio de la luz esa suma es de cantidades unas veces positivas y otras negativas. Sin embargo, para ciertas relaciones entre las dimensiones de la lámina, los agujeros y la longitud de onda, cada fracción de luz transmitida puede tener el mismo signo, en cuyo caso decimos que hay ‘interferencia constructiva’ entre todos los pasos de ese proceso complejo.

El papel de los plasmones es crucial. Recogen parte de la luz que se perdería y, como corren por la superficie, la llevan a iluminar otros agujeros y a que vuelva a formar parte del proceso de transmisión. De modo que se obtiene cierta invisibilidad en ciertas longitudes de onda para la lámina que contiene los agujeros. Este fenómeno tiene gran relevancia puesto que se podría trabajar en un sistema recubierto con un material invisible para ciertas longitudes de onda; por ejemplo para el rango en el que trabajan ciertos radares.

### **Circuitos plasmónicos**

La aplicación técnica que genera mayor expectativa entre los científicos que hacen investigación sobre los plasmones superficiales son los circuitos ópticos plasmónicos. Ya que los plasmones viajan en una superficie plana a velocidades próximas a las de la luz, entonces los circuitos ópticos miniaturizados serían mucho más rápidos que los circuitos electrónicos ordinarios. Además, presentarían la ventaja adicional de que podrían transportarse señales ópticas, eléctricas o ambas según conviniera, toda vez que

por la superficie de un metal pueden fluir también corrientes eléctricas. Los circuitos plasmónicos serían compatibles con la técnica electrónica disponible, basada en el crecimiento epitaxial de metales y semiconductores.

Sin embargo, para cumplir estas expectativas debemos ser capaces de mejorar la capacidad que hoy se tiene sobre el control de la propagación de los plasmones superficiales. La característica fundamental que permite alterar el movimiento de los plasmones es que, al estar confinados en las superficies metálicas, se ven muy afectados por cualquier modificación de la superficie que encuentren a su paso.

Debido a lo prometedor de esta área, muchos investigadores trabajan en encontrar qué modificaciones son necesarias para poder controlar de manera más óptima el flujo de la energía; más aún, ya ha sido posible desarrollar elementos ópticos que permiten, en cierta forma, el control de algunos plasmones superficiales; por ejemplo, el espejo para plasmones diseñado y construido por el grupo que Joachim Krenn dirige en la Universidad de Graz (Ebbesen *et al.*, 1998).

## Capítulo III

---

# EL MÉTODO DE LA ECUACIÓN INTEGRAL

---

En este capítulo se presenta el método de la ecuación integral, método numérico riguroso que ha permitido el análisis de los sistemas electromagnéticos que sentaron las bases para este trabajo de investigación. Este método nos permitirá calcular las estructuras de bandas y la reflectancia para las guías de onda de cristal fotónico en el caso infinito y finito, respectivamente.

### III.1. Descripción del método integral

El método integral se basa en resolver numéricamente la ecuación de Helmholtz a partir de ecuaciones integrales (Mendoza-Suárez *et al.*, 2006). El método parte del segundo teorema integral de Green, de donde se obtienen ecuaciones integrales acopladas que involucran, como incógnitas el modo del campo y su derivada normal evaluadas en las fronteras de los perfiles generados por interfaces en la celda unitaria para el caso infinito, y el propio sistema para el caso finito. La discretización de las ecuaciones permite pasar de un sistema de ecuaciones integrales a un sistema de ecuaciones algebraico. El hecho de que el método solo involucra los puntos en las interfases del sistema permite

ahorrar recursos computacionales. Una vez calculadas las fuentes se dispone a calcular la estructura de bandas o el campo esparcido, según sea el caso.

### III.1.1. Observaciones preliminares

En nuestro caso consideramos tres sistemas, el primero se compone de una guía de ondas formada por dos superficies perfectamente conductoras, con perfiles ondulados y periódicos en una sola dirección, cada uno de los perfiles contiene una capa de LHM y el medio existente entre ambas superficies es vacío. En la figura 3(a) se muestra la celda unitaria del sistema. El segundo sistema se muestra en la figura 3(b), es una guía de ondas compuesta por dos superficies planas paralelas de material perfectamente conductor con un arreglo periódico de inclusiones cilíndricas huecas de LHM cuya interior puede contener, conductor perfecto o vacío, y finalmente en la figura 3(c) se muestra la el tercer sistema considerado, el cual esta formado por una una guía de onda finita con inclusiones de metamaterial

### III.1.2. Ecuación de onda

Los problemas sobre electromagnetismo

Antes de comenzar con la descripción del método integral vamos a obtener la ecuación de onda con medios sin cargas ni corrientes  $\rho = 0$  y  $\mathbf{J} = 0$ , cuyas propiedades de material dadas por la permitividad eléctrica  $\epsilon(\omega)$  y permeabilidad magnética  $\mu(\omega)$  dependeran de la frecuencia ya que estamos considerando el vacío. Entonces las ecuaciones de Maxwell correspondientes son:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \tag{1}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0, \tag{2}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu(\omega) \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \quad (3)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \varepsilon(\omega) \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (4)$$

Aplicando el operador rotacional sobre la Ec. (3) se tiene,

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla \times \left( -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \right), \quad (5)$$

$$\nabla (\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{H}). \quad (6)$$

Luego, sustituyendo las expresiones dadas por las Ecs. (2) y (4) en la Ec. (6) obtenemos la ecuación de onda asociada al campo eléctrico,

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \varepsilon(\omega) \mu(\omega) \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0. \quad (7)$$

Análogamente, para el campo  $\mathbf{H}$  :

$$\nabla^2 \mathbf{H} - \varepsilon(\omega) \mu(\omega) \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = 0, \quad (8)$$

tal que  $\varepsilon(\omega) \mu(\omega) = 1/(v(\omega))^2$ , donde  $v(\omega)$  corresponde a la velocidad de onda en el medio que depende de la frecuencia  $\omega$ . por otro lado, si considerando que los campos electromagnéticos poseen una dependencia armónica con el tiempo, entonces los podremos expresar a los campos como

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r}) e^{-i\omega t}, \quad (9)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{H}(\mathbf{r}) e^{-i\omega t}, \quad (10)$$

donde  $\omega$  es la frecuencia de la onda electromagnética y  $\mathbf{r} = x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}}$  el vector de posición del punto de observación que es independiente de  $z$ , de modo que las ecuaciones de onda resultantes se pueden expresar en la forma de la ecuación de Helmholtz:

$$\nabla^2 \Psi(\mathbf{r}) + k^2 \Psi(\mathbf{r}) = 0, \quad (11)$$

se ha definido  $k^2 = \varepsilon(\omega)\mu(\omega) \left(\frac{\omega}{c}\right)^2$  como la magnitud del vector de onda y  $\Psi(\mathbf{r})$  representa el campo eléctrico  $E_z$  o el campo magnético  $H_z$ , para polarización TE y TM, respectivamente.

### III.1.3. Función de Green para la ecuación de Helmholtz

Para estudiar los sistemas propuestos, la ecuación de Helmholtz se puede escribir como:

$$\nabla^2 \Psi_j(\mathbf{r}) + k_j^2 \Psi_j(\mathbf{r}) = 0, \quad (12)$$

donde  $j$  indica el  $j$ -ésimo medio, de nuevo  $\mathbf{r} = x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}}$  representa el vector de posición del punto de observación, dado que el índice de refracción en el  $j$ -ésimo medio está dado por  $n_j(\omega) = \pm \sqrt{\varepsilon_j(\omega)\mu_j(\omega)}$ , el signo será tomado negativo para LHM y positivo para un medio dieléctrico, entonces podemos expresar la magnitud del vector de onda en ese medio como  $k_j = n_j(\omega) \left(\frac{\omega}{c}\right)$

Para resolver la ecuación (12) consideremos una función de Green  $G_j(r, r')$  que sea solución a la ecuación

$$\nabla^2 G_j(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + k_j^2 G_j(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 4\pi\delta(\mathbf{r}, \mathbf{r}'), \quad (13)$$

donde  $G_j(r, r')$  físicamente representa un propagador del campo debido a una fuente de luz puntual que emite a la frecuencia  $\omega$  en la posición  $\mathbf{r}'$  y  $\delta(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  es la función delta de Dirac. Una solución de la ecuación (12) está representada por la siguiente función de Green,

$$G_j(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = i\pi H_0^{(1)}(k_j |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|), \quad (14)$$

donde  $H_0^{(1)}(\zeta)$  es la función de Hankel de primera clase y de orden cero y  $\mathbf{r}'$  representa el vector de integración.

### III.1.4. Representación integral

Para encontrar la solución de la ecuación (12) aplicamos el Teorema de Green (Marsden y Tromba, 2004) para las funciones  $\Psi_j(\mathbf{r})$  y  $G_j(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  en el  $j$ -ésimo medio. Para ello multipliquemos la ecuación 11 por  $G_j(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  y la ecuación 12 por  $-\Psi_j(\mathbf{r})$ . Posteriormente sumando las ecuaciones restantes e integrando sobre una superficie cerrada  $S_j$  que a su vez, está limitada por el contorno  $\Gamma_j$ , es posible obtener:

$$\frac{1}{4\pi} \oint_{\Gamma_j} \left[ G_j(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \nabla^2 \Psi_j(\mathbf{r}) - \Psi_j(\mathbf{r}) \nabla^2 G_j(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \right] \cdot \hat{\mathbf{n}} ds = \oint_{S_j} \Psi_j(\mathbf{r}) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') da. \quad (15)$$

en este caso  $ds$  representa la longitud de arco y  $da$  representa el diferencial de área.

Dado que la derivada normal esta definida como  $\frac{\partial \Psi_j(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{n}} = \nabla \Psi_j(\mathbf{r}) \cdot \hat{\mathbf{n}}$  y  $\frac{\partial G_j(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial \mathbf{n}} = \nabla G_j(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \hat{\mathbf{n}}$ , entonces la ecuación (15) se puede expresar como:

$$\frac{1}{4\pi} \oint_{\Gamma_j} \left[ G_j(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial \Psi_j(\mathbf{r})}{\partial n} - \Psi_j(\mathbf{r}) \frac{\partial G_j(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n} \right] ds = \Psi_j(\mathbf{r}') \theta(\mathbf{r}'). \quad (16)$$

Notemos que en la ecuación (16) la integral de superficie se ha representado mediante el producto del campo por la función escalón de Heaviside, definida como  $\theta(\mathbf{r}') = 1$  si  $\mathbf{r}'$  está dentro de la celda unitaria  $S$  y  $\theta(\mathbf{r}') = 0$ , en el caso contrario.

Si consideramos la convención de que  $\mathbf{r}$  representa la posición del observador, que es donde se mide el campo, podemos entonces intercambiar las variables  $\mathbf{r}$  y  $\mathbf{r}'$  en la ecuación (16),

$$\frac{1}{4\pi} \oint_{\Gamma_j} \left[ G_j(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \frac{\partial \Psi_j(\mathbf{r}')}{\partial n'} - \Psi_j(\mathbf{r}') \frac{\partial G_j(\mathbf{r}', \mathbf{r})}{\partial n'} \right] ds = \Psi_j(\mathbf{r}) \theta(\mathbf{r}), \quad (17)$$

ahora  $\mathbf{r}'$  se desplaza sobre los contornos.

Resumiendo, la representacion integral de la ecuación de Helmholtz para el campo  $\Psi_j(\mathbf{r})$  está expresado por la ecuación (17), siendo la función de la ecuación (14) la

funcion de Green en medios homogéneos en la ecuación (17),  $\Gamma_j$  es el contorno cerrado que limita a la superficie  $S_j$ , de este modo la normal involucrada en las derivadas normales que aparecen en la ecuación (16), va hacia afuera del contorno cerrado  $\Gamma_j$ .

### III.1.5. Discretización de las ecuaciones integrales

Con el objetivo de discretizar la ecuación 17, y así poder obtener los cálculos numéricos es necesario considerar concretamente los sistemas que debemos analizar. Comenzaremos el analisis con el sistema cuya celda unitaria se muestra en la figura 8. Sin embargo, a manera de poder mostrar con mayor facilidad la discretización de la ecuación 17 comenzaremos con un sistema que representa menos dificultad para mostrar el método numérico, dicho sistema se muestra en la figura 9, el cual solo tiene una región a analizar a diferencia del sistema de la figura 8, el cual cuenta con tres regiones.

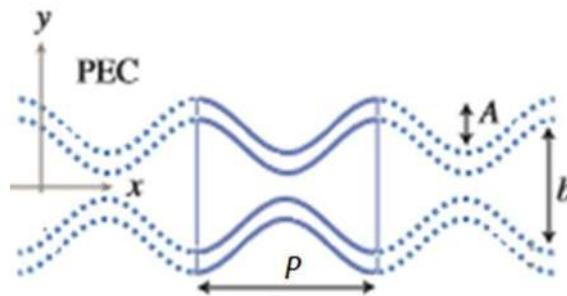


Figura 8. Guía de onda de CF con paredes sinusoidales recubiertas de metamaterial.

Existen varias razones para comenzar el análisis con el sistema de la figura 9, el primero de ellos es que el grupo de investigación de cristales fotónicos y metamateriales de la Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo ya tiene experiencia con este sistema, de modo que será posible comparar nuestros cálculos con los obtenidos con anterioridad por el grupo, permitiendo mostrar el dominio del método numérico, la segunda razón es que el sistema representa menos complejidad en las ecuaciones, de

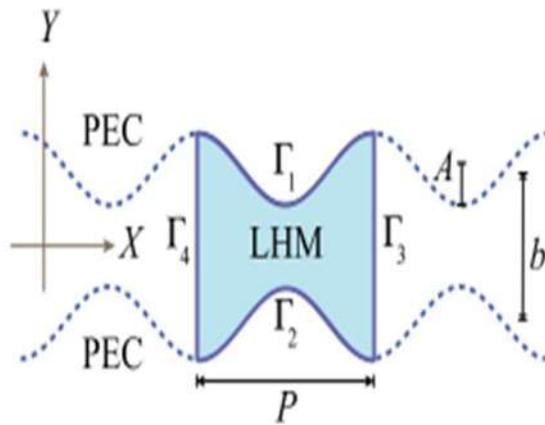


Figura 9. Descripción gráfica de una guía de ondas formada por dos superficies onduladas.

modo que se considera conveniente dominar este sistema antes de comenzar el análisis con el de capas y por último la tercer razón es que, para ciertos parámetros las soluciones del sistema pueden ser comparadas con las soluciones analíticas del problema de física cuántica conocido como el pozo de potencial infinito, la configuración del sistema se muestra en la figura 10.

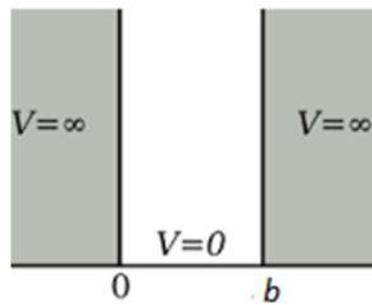


Figura 10. Pozo de potencial infinito.

La geometría de la celda unitaria de la figura 9 puede ser descrita por la representación de puntos a lo largo del contorno  $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3 + \Gamma_4$  con coordenadas  $x(s)$  y  $y(s)$  como funciones paramétricas de la longitud de arco  $s$  y sus respectivas derivadas hasta el segundo orden,  $x'(s)$ ,  $y'(s)$ ,  $x''(s)$  y  $y''(s)$ . Para cada contorno  $\Gamma_j$  corresponde un vector normal  $n_j$  que apunta hacia afuera de la celda unitaria y de la

ecuación 17 vamos a llamar

$$I_G^j(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \oint_{\Gamma_j} G_j(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial \Psi_j(\mathbf{r}')}{\partial \mathbf{n}'} ds', \quad (18)$$

$$I_\Psi^j(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \oint_{\Gamma_j} \Psi_j(\mathbf{r}') \frac{\partial G_j(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial \mathbf{n}'} ds'. \quad (19)$$

Para esolver las ecuaciones 18 y 19 se realiza una discretización en el contorno  $\Gamma$ , para esto dividimos el contorno  $\Gamma_j$  en  $N_j$  pequeños segmentos de longitud  $\Delta s$ , sea  $n = N_1 + N_2 + N_3 + N_4$ . Así las ecuaciones anteriores se pueden expresar como:

$$I_G^j(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \sum_n \int_{s_{n-\Delta s/2}}^{s_{n+\Delta s/2}} G_j(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial \Psi_j(\mathbf{r}')}{\partial \mathbf{n}'} ds', \quad (20)$$

$$I_\Psi^j(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \sum_n \int_{s_{n-\Delta s/2}}^{s_{n+\Delta s/2}} \Psi_j(\mathbf{r}') \frac{\partial G_j(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial \mathbf{n}'} ds'. \quad (21)$$

Si  $\Delta s$  es suficientemente pequeño, tanto como para considerar que el campo  $\Psi_j(\mathbf{r}')$  y su derivada normal  $\frac{\partial \Psi_j(\mathbf{r}')}{\partial \mathbf{n}'}$  sean aproximadamente constantes entre dos puntos consecutivos de la discretización de modo que podamos sacarlos de las integrales. Con esta hipótesis podemos representar las últimas dos integrales como:

$$I_G^j(\mathbf{r}) \approx \frac{1}{4\pi} \sum_n \Phi_n^j \int_{s_{n-\Delta s/2}}^{s_{n+\Delta s/2}} G_j(\mathbf{r}, \mathbf{r}') ds', \quad (22)$$

$$I_\Psi^j(\mathbf{r}) \approx \frac{1}{4\pi} \sum_n \Psi_n^j \int_{s_{n-\Delta s/2}}^{s_{n+\Delta s/2}} \frac{\partial G_j(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial \mathbf{n}'} ds', \quad (23)$$

donde

$$\Phi_n^j = \left. \frac{\partial \Psi_j(\mathbf{r}')}{\partial \mathbf{n}'} \right|_{\mathbf{r}'=\mathbf{r}'_n}, \quad (24)$$

$$\Psi_n^j = \Psi_j(\mathbf{r}') \big|_{\mathbf{r}'=\mathbf{r}'_n}. \quad (25)$$

Podemos definir la integrales involucradas en las ecuaciones 22 y 23 como sigue:

$$L_{ml} = \frac{1}{4\pi} \int_{s_l - \Delta s/2}^{s_l + \Delta s/2} G(\mathbf{r}_m, \mathbf{r}'_l) ds', \quad (26)$$

$$N_{ml} = \frac{1}{4\pi} \int_{s_l - \Delta s/2}^{s_l + \Delta s/2} \frac{\partial G(\mathbf{r}_m, \mathbf{r}'_l)}{\partial n'} ds', \quad (27)$$

donde  $\mathbf{r}_m$  indica el punto de observación y  $\mathbf{r}'_l$  el punto de integración.

Los elementos de matriz están dados por (Mendoza-Suárez y Pérez-Aguilar, 2015):

$$L_{mn} = i \frac{\Delta s}{4} H_0^{(1)} \left( \frac{\omega}{c} R_{mn} \right) (1 - \delta_{mn}) + i \frac{\Delta s}{4} H_0^{(1)} \left( \frac{\omega \Delta s}{c 2e} \right) \delta_{mn}, \quad (28)$$

$$N_{mn} = i \frac{\Delta s \omega}{4 c} H_1^{(1)} (k R_{mn}) \hat{\mathbf{n}}_n \frac{\mathbf{R}_{mn}}{R_{mn}} (1 - \delta_{mn}) + \left( \frac{1}{2} + \frac{\Delta s}{4\pi} \hat{\mathbf{n}}_n \cdot \hat{\mathbf{t}}'_n \right) \delta_{mn}, \quad (29)$$

donde

$$R_{mn} = \sqrt{(x_m - x_n)^2 + (y_m - y_n)^2}, \quad (30)$$

$$\hat{\mathbf{n}}_n \cdot \mathbf{R}_{mn} = -y'(s)(x_m - x_n) + x'(s)(y_m - y_n), \quad (31)$$

$$\hat{\mathbf{n}}_n \cdot \hat{\mathbf{t}}'_n = x'(s)y''(s) - y'(s)x''(s). \quad (32)$$

Haciendo uso de las ecuaciones 26 y 27 podemos reescribir las ecuaciones 22 y 23

como:

$$I_G^j(\mathbf{r}) \approx \frac{1}{4\pi} \sum_n \Phi_n^j \oint_{s_n - \Delta s/2}^{s_n + \Delta s/2} G_j(\mathbf{r}, \mathbf{r}'_l) ds' = \sum_{n=-\infty}^{\infty} L_{mn}^j \Phi_n^j, \quad (33)$$

$$I_\Psi^j(\mathbf{r}) \approx \frac{1}{4\pi} \sum_n \Psi_n^j \oint_{s_n - \Delta s/2}^{s_n + \Delta s/2} \frac{\partial G_j(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial \mathbf{n}'} ds' = \sum_{n=-\infty}^{\infty} N_{mn}^j \Psi_n^j, \quad (34)$$

Aplicando la discretización en la ecuación 17 para el sistema simple o sin capas se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=1}^{N_1} L_{mn(1,1)} \Phi_{n(1,1)} - \sum_{n=1}^{N_1} N_{mn(1,1)} \Psi_{n(1,1)} + \sum_{n=1}^{N_2} L_{mn(1,2)} \Phi_{n(1,2)} - \sum_{n=1}^{N_2} N_{mn(1,2)} \Psi_{n(1,2)} \\
& + \sum_{n=1}^{N_3} L_{mn(1,3)} \Phi_{n(1,3)} - \sum_{n=1}^{N_3} N_{mn(1,3)} \Psi_{n(1,3)} + \sum_{n=1}^{N_4} L_{mn(1,4)} \Phi_{n(1,4)} - \sum_{n=1}^{N_4} N_{mn(1,4)} \Psi_{n(1,4)} = 0,
\end{aligned} \tag{35}$$

donde  $m = 1, 2, \dots, N_1 + N_2 + N_3 + N_4$ , el primer índice entre paréntesis se refiere a la región que en este caso solo es una y el segundo subíndice hace referencia al perfil, recordemos que en este caso consideramos que  $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3 + \Gamma_4$  como se muestra en la figura 9.

Notemos sin embargo que las incógnitas son  $\Psi_n$  y  $\Phi_n$ , de manera que en el sistema se tienen  $2m = 2(N_1 + N_2 + N_3 + N_4)$  incógnitas y  $m$  ecuaciones, es decir la matriz asociada al sistema no es una matriz cuadrada. Sin embargo aun no consideramos las condiciones de frontera. Ya que hemos supuesto que las paredes de la guía son de conductor perfecto, entonces para los perfiles  $\Gamma_1$  y  $\Gamma_2$  se tiene que:

Para polarización TE

$$\Psi_{n(1,1)} = \Psi_{n(1,2)} = 0 \text{ y} \tag{36}$$

Para polarización TM

$$\Phi_{n(1,1)} = \Phi_{n(1,2)} = 0, \tag{37}$$

Es decir el campo o su derivada normal son cero en la superficie de un conductor perfecto para polarización TE o TM, respectivamente. De manera que el sistema resultante ahora tiene  $N_1 + N_2 + 2(N_3 + N_4)$  incógnitas.

Por otro lado, debido a la periodicidad del sistema, la cual se obtiene al considerar el sistema infinito, es posible hacer uso del teorema de Bloch, el cual establece que los

autoestados  $\Psi$  de un electrón vienen dados por el producto de una onda plana y una función periódica  $u(\mathbf{r})$  en  $R$ , donde  $R$  es un vector de traslación en la red:

$$\Psi(\mathbf{r}) = \exp^{-i\mathbf{K}\cdot\mathbf{r}} u(\mathbf{r}), \quad (38)$$

$K$  es el vector de Bloch. Esta última ecuación nos permitirá relacionar las fuentes de los perfiles  $\Gamma_3$  y  $\Gamma_4$  de donde obtenemos las siguientes dos ecuaciones:

$$\Psi_{n(1,4)} = \exp^{-iKP} \Psi_{n(1,3)} \text{ y} \quad (39)$$

$$\Phi_{n(1,4)} = -\exp^{-iKP} \Phi_{n(1,3)}. \quad (40)$$

De manera que finalmente obtenemos un sistema de  $m$  ecuaciones y  $m$  incógnitas. Sustituyendo las ecuaciones (36), (37), (39) y (40) en la ecuación (35) obtenemos;

Para polarización TE

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{N_1} L_{mn(1,1)} \Phi_{n(1,1)} + \sum_{n=1}^{N_2} L_{mn(1,2)} \Phi_{n(1,2)} + \sum_{n=1}^{N_3} [L_{mn(1,3)} - \exp^{-iKP} L_{mn(1,4)}] \Phi_{n(1,3)} \\ - \sum_{n=1}^{N_3} [N_{mn(1,3)} + \exp^{-iKP} N_{mn(1,4)}] \Psi_{n(1,3)} = 0 \end{aligned} \quad (41)$$

y para polarización TM

$$\begin{aligned} -\sum_{n=1}^{N_1} N_{mn(1,1)} \Psi_{n(1,1)} - \sum_{n=1}^{N_2} N_{mn(1,2)} \Psi_{n(1,2)} + \sum_{n=1}^{N_3} [L_{mn(1,3)} - \exp^{-iKP} L_{mn(1,4)}] \Phi_{n(1,3)} \\ - \sum_{n=1}^{N_3} [N_{mn(1,3)} + \exp^{-iKP} N_{mn(1,4)}] \Psi_{n(1,3)} = 0, \end{aligned} \quad (42)$$

con  $m = 1, 2, \dots, N_1 + N_2 + N_3 + N_4$ . El sistema puede ser expresado en términos de un sistema de ecuaciones algebraico y homogéneo de la siguiente forma:

$$M(\omega, \mathbf{K})F(\omega, \mathbf{K}) = 0 \quad (43)$$

donde  $M$  depende tanto de la frecuencia  $\omega$  como del vector de Bloch  $K$  y  $F$  representa las fuentes. Una solución no trivial del sistema puede ser obtenida cuando el determinante del sistema es cero, para determinar las frecuencias que general soluciones no triviales definimos la función:

$$D(\mathbf{K}, \omega) = \ln(|\det(M)|), \quad (44)$$

Numéricamente la función  $D(\mathbf{K}, \omega)$  arrojará la relación de dispersión numérica buscada  $\omega = \omega(\mathbf{K})$  con la cual podemos generar la estructura de bandas.

### III.1.6. Guía de ondas en cristal fotónico con paredes sinusoidales que contienen una capa de metamaterial

El análisis en el sistema con capas mostrado en la figura 8 es análogo, sin embargo como ya se había mencionado en este sistema tenemos tres regiones, de modo que surgen dos nuevas interfaces; una entre la región superior y la región de en medio y la segunda entre la región de en medio y la región inferior, así que se tendrán ecuaciones adicionales que surgen de las condiciones de frontera entre las interfaces en el sistema de capas. A continuación se presentan las ecuaciones adicionales.

$$\Psi_{n(1,2)} = \Psi_{n(2,1)}, \quad \Phi_{n(2,1)} = \frac{-1}{f_{12}} \Phi_{n(1,2)}, \quad (45)$$

$$\Psi_{n(3,1)} = \Psi_{n(2,2)} \quad \text{y} \quad \Phi_{n(3,1)} = \frac{-1}{f_{23}} \Phi_{n(2,2)}, \quad (46)$$

donde  $f_{lm} = \frac{\mu_l}{\mu_m}$  o  $f_{lm} = \frac{\varepsilon_l}{\varepsilon_m}$  para polarización TE o TM, respectivamente,  $\varepsilon_m$  es la permitividad eléctrica y  $\mu_m$  la permeabilidad magnética del medio  $m$ -ésimo.

Consideremos en la figura 8 que la región uno es la superior, la región dos es la de en medio y la región tres es la de abajo, además sea  $Nx$  la cantidad de puntos en los perfiles ondulados y  $Ny_i$  la cantidad de puntos en los perfiles verticales para la región

$i$ -ésima. Con las consideraciones anteriores se llega al siguiente sistema de ecuaciones para el sistema con capas y polarización TM:

Para la región uno,

$$\begin{aligned}
& - \sum_{n=1}^{Nx} N_{mn(1,1)} \Psi_{n(1,1)} + \sum_{n=1}^{Nx} L_{mn(1,2)} \Phi_{n(1,2)} - \sum_{n=1}^{Nx} N_{mn(1,2)} \Psi_{n(1,2)} + \\
& \sum_{n=1}^{Ny_1} [L_{mn(1,3)} - \exp^{-iKP} L_{mn(1,4)}] \Phi_{n(1,3)} - \sum_{n=1}^{Ny_1} [N_{mn(1,3)} + \exp^{-iKP} N_{mn(1,4)}] \Psi_{n(1,3)} = 0,
\end{aligned} \tag{47}$$

para la región dos,

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=1}^{Nx} \frac{L_{mn(2,1)}}{f_{12}} \Phi_{n(1,2)} - \sum_{n=1}^{Nx} N_{mn(2,1)} \Psi_{n(1,2)} + \sum_{n=1}^{Nx} L_{mn(2,2)} \Phi_{n(2,2)} - \sum_{n=1}^{Nx} N_{mn(2,2)} \Psi_{n(2,2)} + \\
& \sum_{n=1}^{Ny_2} [L_{mn(2,3)} - \exp^{-iKP} L_{mn(2,4)}] \Phi_{n(2,3)} - \sum_{n=1}^{Ny_2} [N_{mn(2,3)} + \exp^{-iKP} N_{mn(2,4)}] \Psi_{n(2,3)} = 0,
\end{aligned} \tag{48}$$

para la región tres,

$$\begin{aligned}
& - \sum_{n=1}^{Nx} \frac{L_{mn(3,1)}}{f_{23}} \Phi_{n(2,2)} - \sum_{n=1}^{Nx} N_{mn(3,1)} \Psi_{n(2,2)} - \sum_{n=1}^{Nx} N_{mn(3,2)} \Psi_{n(3,2)} + \\
& \sum_{n=1}^{Ny_3} [L_{mn(3,3)} - \exp^{-iKP} L_{mn(3,4)}] \Phi_{n(3,3)} - \sum_{n=1}^{Ny_3} [N_{mn(3,3)} + \exp^{-iKP} N_{mn(3,4)}] \Psi_{n(3,3)} = 0,
\end{aligned} \tag{49}$$

### III.1.7. Guía de ondas en cristal fotónico con inclusión de conductor perfecto y metamaterial

En la figura 11 se muestra el siguiente sistema a analizar. En este distinguimos dos regiones: consideramos como la región uno a la región que está entre las placas de conductor perfecto y la capa de metamaterial; además la región dos corresponde a la capa de metamaterial.

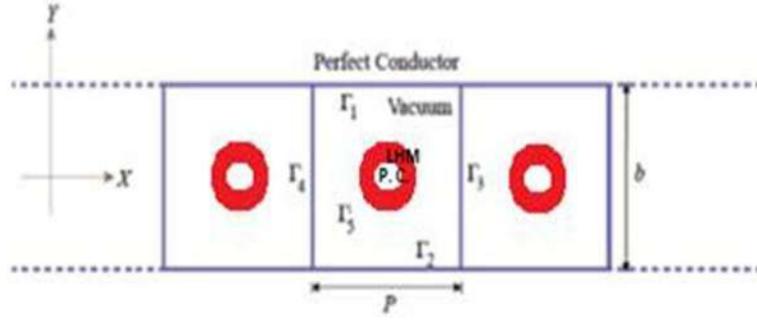


Figura 11. Guía de onda de cristal fotónico con inclusión de conductor perfecto recubierto por una capa de metamaterial

Con un análisis análogo al antes mostrado llegamos al siguiente sistema de ecuaciones para polarización TE:

Para la región uno,

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{N_x} L_{mn(1,1)} \Phi_{n(1,1)} - \sum_{n=1}^{N_x} N_{mn(1,2)} \Psi_{n(1,2)} + \sum_{n=1}^{N_y} [L_{mn(1,3)} - \exp^{-iKP} L_{mn(1,4)}] \Phi_{n(1,3)} \\ & - \sum_{n=1}^{N_y} [N_{mn(1,3)} + \exp^{-iKP} N_{mn(1,4)}] \Psi_{n(1,3)} + \sum_{n=1}^{N_i} L_{mn(1,5)} \Phi_{n(1,5)} - \sum_{n=1}^{N_i} N_{mn(1,5)} \Psi_{n(1,5)} = 0, \end{aligned} \quad (50)$$

Para la región dos,

$$- \sum_{n=1}^{N_i} \frac{L_{mn(2,1)}}{f_{12}} \Phi_{n(1,5)} - \sum_{n=1}^{N_i} N_{mn(1,2)} \Psi_{n(1,5)} + \sum_{n=1}^{N_{ii}} L_{mn(2,2)} \Phi_{n(2,2)} = 0 \quad (51)$$

donde  $N_i$  es el número de puntos en la interfaz metamaterial vacío y  $N_{ii}$  el número de puntos entre la interfaz metamaterial-conductor perfecto.

### III.1.8. Guía de ondas finita

Los métodos creados hasta el momento no solo nos permiten el cálculo de estructuras de bandas, sino que además con ellos podemos calcular el campo correspondiente a

modos electromagnéticos dentro de la celda unitaria. Sin embargo en la realidad los sistemas tienen longitud finita, razón por la que es de suma importancia poder atacar los problemas físicos reales. En este trabajo se implementó un método numérico capaz de calcular el campo esparcido por una guía de onda finita que contiene inclusiones de metamaterial. El sistema está formado por dos placas paralelas y un arreglo periódico de inclusiones cilíndricas que se considera como un sistema de  $M$  cuerpos como se ve en la figura 12 .

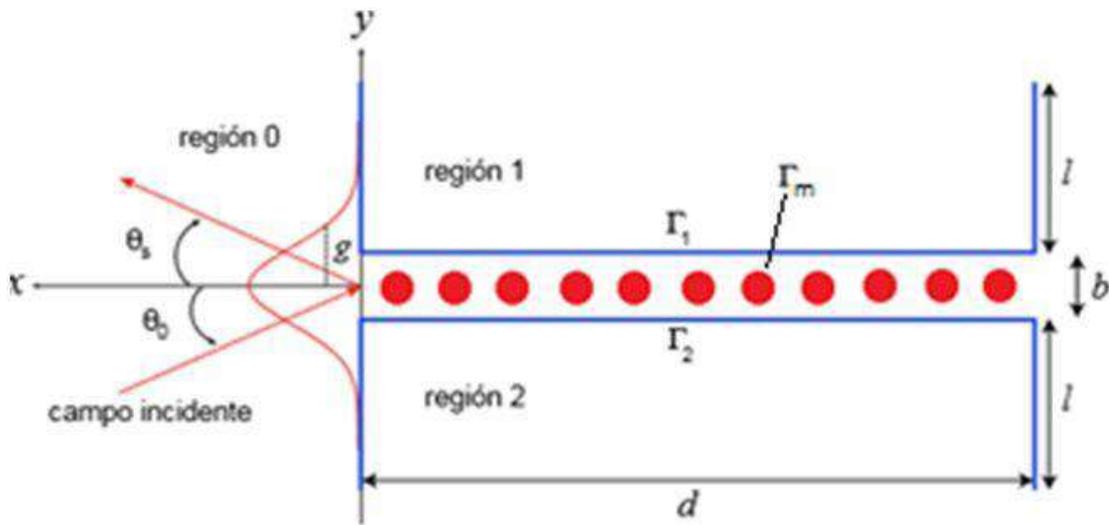


Figura 12. Guía de onda finita con inclusión de cilíndrica de metamaterial.

La región 0 se caracteriza por un índice de refracción  $n_0(\omega) = \sqrt{\varepsilon_0(\omega)}$  y las regiones desde 1 a  $M$  están definidas por las curvas  $C_j$  y se caracterizan por los correspondientes índices de refracción  $n_j(\omega) = \pm\sqrt{\varepsilon_j(\omega)\mu_j(\omega)}$  que involucran las propiedades de los materiales que se dan en términos de la permeabilidad magnética  $\mu_j(\omega)$  y de la permitividad eléctrica  $\varepsilon_j(\omega)$ .

Aplicando la ecuaciones (12), (13) y (17) podemos expresar el campo en la región 0 como:

$$\Psi^{(0)}(\mathbf{r}) = \Psi_{inc}^{(0)}(\mathbf{r}) + \frac{1}{4\pi} \sum_{j=1}^M \int_{\Gamma_j} \left[ G_j(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial \Psi_j(\mathbf{r})}{\partial n} - \Psi_j(\mathbf{r}) \frac{\partial G_j(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n} \right] ds \quad (52)$$

En esta expresión,  $\Psi_{inc}^{(0)}(r)$  representa el campo incidente y la suma de las integrales representa el campo esparcido.

Siguiendo los mismos pasos, para la  $j$ -ésima región, el campo  $\Psi^{(j)}(r)$  puede expresarse como:

$$\Psi^{(j)}(\mathbf{r})\theta_j(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \oint_{\Gamma_j} \left[ G_j(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial \Psi_j(\mathbf{r})}{\partial n} - \Psi_j(\mathbf{r}) \frac{\partial G_j(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n} \right] ds, \quad (53)$$

donde  $\theta_j(\mathbf{r})$  es la función escalón de Heaviside, que es uno para puntos dentro del medio  $j$ -ésimo y cero en otro caso. Las ecuaciones (52) y (53) forman un sistema de ecuaciones con las que se puede obtener el campo total en todas partes.

Para encontrar el campo esparcido usando el segundo término del lado derecho de la ecuación (52), es necesario encontrar una forma de obtener las funciones fuente a partir de las ecuaciones integrales. Para esto, se hace una aproximación del punto de observación en la región 0 a la superficie de la  $j$ -ésima región. Por tanto, se obtienen las siguientes ecuaciones.

$$\Psi^{(0)}(r) = \Psi_{inc}^{(0)}(r) + \frac{1}{4\pi} \sum_{j=1}^M \int_{\Gamma_j} \left[ G_j(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial \Psi_j(\mathbf{r})}{\partial n} - \Psi_j(\mathbf{r}) \frac{\partial G_j(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n} \right] ds \quad (54)$$

$$\Psi^{(j)}(r)\theta_j(r) = \frac{1}{4\pi} \oint_{\Gamma_j} \left[ \frac{1}{f_{oj}} G_j(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial \Psi_j(\mathbf{r})}{\partial n} - \Psi_j(\mathbf{r}) \frac{\partial G_j(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n} \right] \delta_{ij} ds, \quad (55)$$

en este caso  $\delta_{ij}$  es la delta de Kroneker,  $f_{0j} = \frac{\mu_0}{\mu_j}$  o  $f_{lm} = \frac{\varepsilon_j}{\varepsilon_i}$  para polarización TE o TM, respectivamente,  $i = 1, 2, \dots, M$  y  $G_j(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  está dada por la ecuación (14). Nuevamente se hace una discretización sobre la geometría del sistema. En nuestro caso

la paredes de la guía son consideradas de conductor perfecto, de manera que las ecuaciones (54) y (55) logran simplificarse de manera análoga al caso infinito dependiendo la polarización que se desee analizar.

## Capítulo IV

---

# RESULTADOS

---

En este capítulo mostraremos los cálculos obtenidos a través de los programas implementados en este trabajo. Mostraremos el análisis para los tres sistemas por separado, agregando en cada caso los cálculos que validan los métodos implementados. Es de suma importancia poder conocer la confiabilidad de los métodos numéricos, por ello en este trabajo se procedió de la siguiente manera. Primero se comenzó creando métodos numéricos para sistemas más simples que los de interés de tal forma que sea posible verificar los resultados obtenidos con los publicados anteriormente. Una vez hecha esta tarea se generaron los métodos para analizar los sistemas propuestos en este trabajo de investigación.

## IV.1. Guía de ondas en cristal fotónico con paredes sinusoidales que contienen una capa de metamaterial

### IV.1.1. Validación del método numérico

Los primer sistema analizado es el mostrado en la figuras 13 y 14. Como ya se habia mencionado, una de las razones para empezar con estos sistema era para poder hacer una comparación entre resultados analíticos y numéricos.

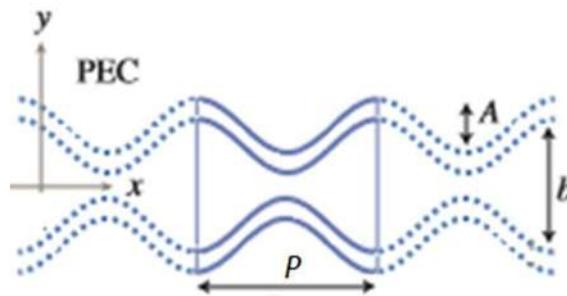


Figura 13. Descripción gráfica de una guía de ondas formada por dos superficies onduladas.

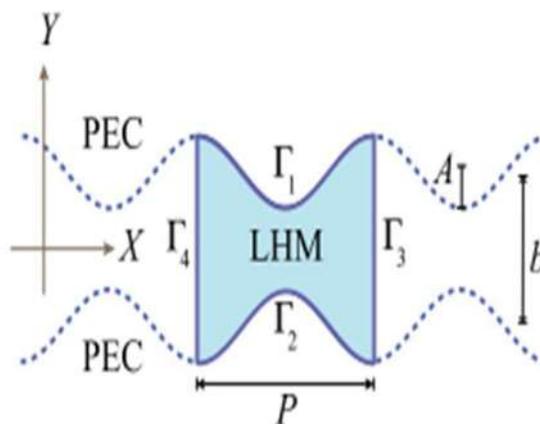


Figura 14. Guía de onda de CF con paredes sinusoidales recubiertas de metamaterial.

Cuando las amplitudes de los perfiles sean ambos cero, se considere vacío dentro

de la guía y polarización TE, entonces los modos que se propagan en el sistema deben coincidir con las soluciones del pozo de potencial infinito. La solución analítica del problema cuántico para la frecuencia normalizada  $\omega_n = \omega_n(K)$  está dada por:

$$\omega_n(K_n) = \sqrt{(K_n + l)^2 + (nP/2b)^2}, \quad (56)$$

donde le frecuencia normalizada está dada por  $\omega_n = \frac{P}{2\pi} \frac{\omega}{c}$ ,  $K_n$  es el vector de Bloch en la primera zona de Brillouin, es decir  $-\frac{\pi}{P} \leq K_n \leq \frac{\pi}{P}$ ,  $l = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$  y  $n = 1, 2, 3, \dots$ . En la figura 15 se muestra el determinante como función de  $\omega_n$  obtenido numéricamente a partir de los programas (a) sin capas y (b) con capas, es decir, en el programa con capas se consideran capas de vacío de grosor igual a  $0.2b$ , el cálculo se realiza para  $K_n = 0$  y se toma el intervalo  $(0, 3)$  para  $\omega_n$ . En la figura 15(c) se muestra una tabla donde se comparan los resultados obtenidos en este cálculo, las tres primeras columnas son para la solución analítica obtenidas a partir de la ecuación (56), la cuarta para el programa sin capas y la última para el programa de capas.

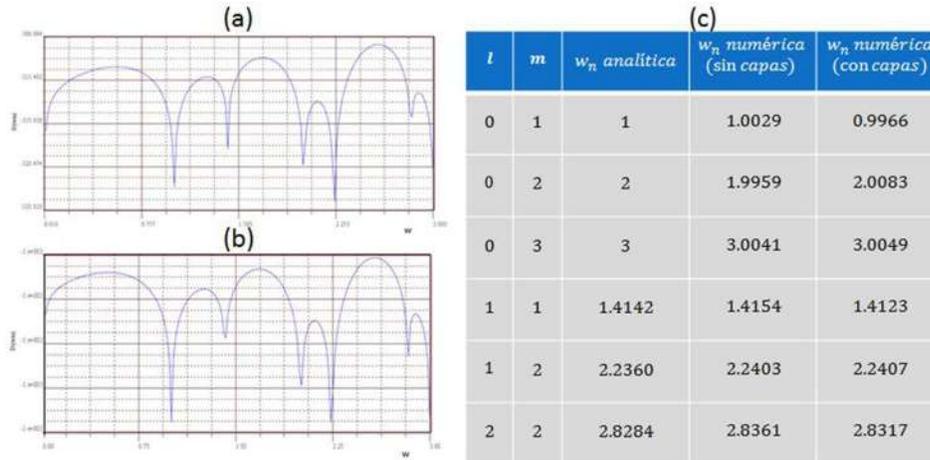


Figura 15. Modos numéricos y analíticos en guía de ondas con  $K_n = 0$ ,  $b = \pi$ ,  $A = 0.4b$ ,  $P = 2\pi$ , vacío dentro de las guías y polarización TE.

Como podemos verificar con los cálculos los programas logran reproducir las soluciones predichas por la solución analítica hasta el orden de media centésima.

Ahora consideremos  $b = \pi$ ,  $A = 0.4b$ ,  $P = 2\pi$ , vacío dentro de las guías, polarización TE, un espesor de la capas de  $0.15b$  para el programa con capas y un desfase de perfiles de  $\frac{\pi}{2}$ . Ambos métodos arrojan como solución no trivial a  $\omega_n = 1.091$  para  $K_n = 0$  y polarización TE. En la figura 16 se muestran los campos asociados a cada programa para estos parámetros, de donde se puede verificar que ambos programas coinciden en los cálculos.

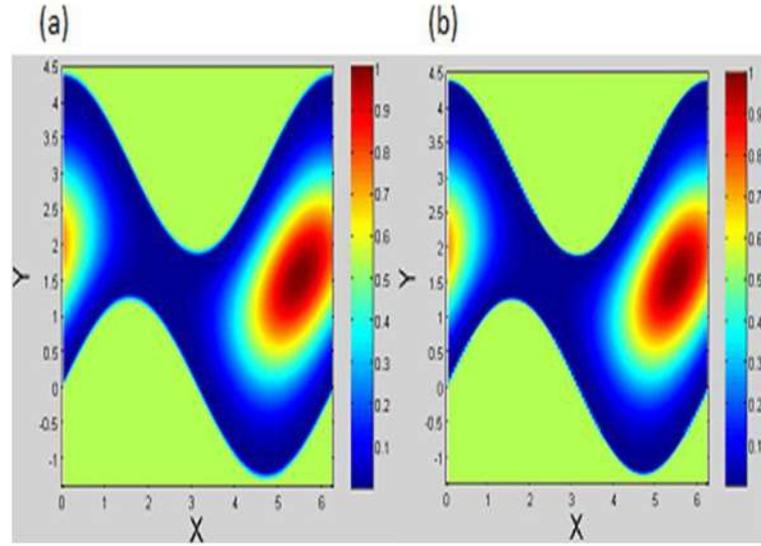


Figura 16. (a) Campo obtenido a partir del sistema simple. (b) Campo obtenido con el sistema con capas.

También se calculó la estructura de bandas del sistema cuando se llena en su totalidad el interior de las guías (con y sin capas), las propiedades ópticas del metamaterial son las siguientes (Pendry *et al.*, 1998) :

$$\varepsilon(\omega_n) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega_n^2}, \quad (57)$$

$$\mu(\omega_n) = 1 - \frac{0.56\omega^2}{\omega_n^2 - \omega_0^2}, \quad (58)$$

Estas funciones son graficadas en la figura 17 con los parámetros  $\omega_p = \frac{10}{2\pi}$  y  $\omega_0 = \frac{4}{2\pi}$ , la región donde el metamaterial tiene un índice de refracción negativo está dada por

$0.6366 < \omega_n < 0.9597$ , parámetros donde el material tiene índice de refracción negativo para el rango de frecuencias normalizadas analizada.

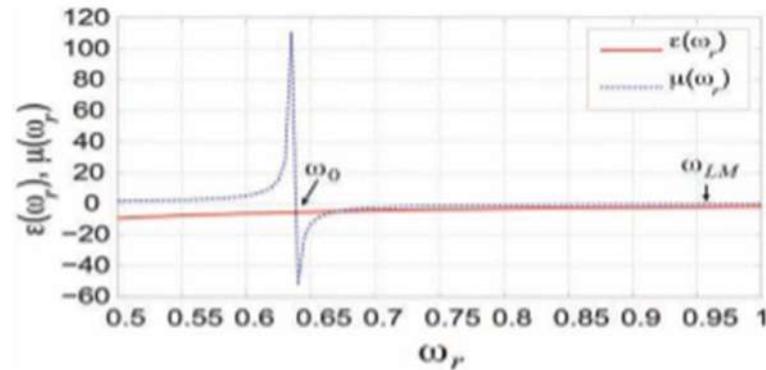


Figura 17. Función dieléctrica y permeabilidad magnética de un metamaterial como una función de la frecuencia..

En la figura 18 se muestran las estructuras de bandas calculadas con  $b = \pi$ ,  $A = 0.4b$ ,  $P = 2\pi$ , polarización TM, un espesor de la capas de  $0.2b$  y ambos sistemas completamente llenos de matamaterial para (a) la guía sin capas, (b) la guía con capas y (c) la obtenida por el grupo de cristales fotónicos y metamateriales de la Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo (Mendoza-Suárez y Pérez-Aguilar, 2015).

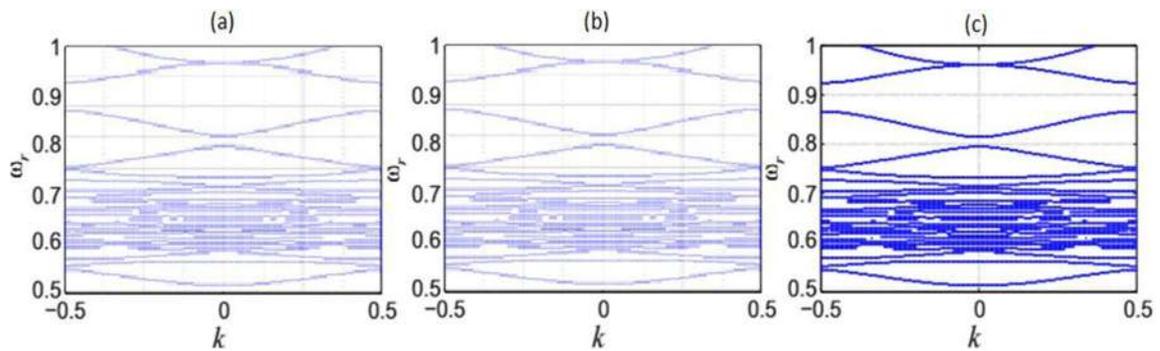


Figura 18. (a) Estructura de bandas obtenida a partir del programa implementado sin capas. (b) Estructura calculada a través del programa que contiene capas. (c) Estructura de bandas obtenida por el grupo de investigación de cristales fotónicos y metamateriales de la universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo (Mendoza-Suárez y Pérez-Aguilar, 2015).

Las estructuras calculadas a partir de los programas implementados están de acuerdo

con la obtenida por el grupo de investigación.

Finalmente en la figura 19(a) se muestra la  $\omega_n$  vs  $D(K_n = 0, \omega_n)$  calculado a partir del sistema sin capas, a partir de estos datos es posible reproducir el plasmón encontrado con anterioridad por el grupo de CFs y metamateriales de la Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas de la UMSNH (Mendoza-Suárez y Pérez-Aguilar, 2015), el cual se muestra en la figura 19(b).

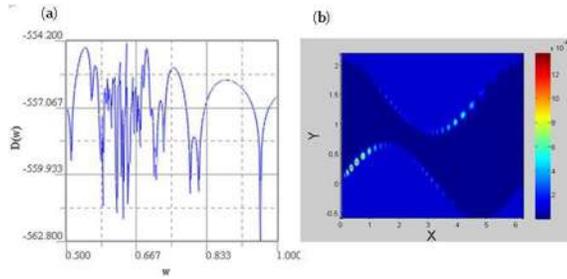


Figura 19. (a)  $\omega_n$  vs  $D(K_n = 0, \omega_n)$ . (b) Campo obtenido a partir del programa sin capas con  $K = 0, b = 1.5, A = 0.4b, P = 2\pi, \omega_n = 0.9595$  y polarización TM

#### IV.1.2. Nuevos cálculos

Una vez validado el método numérico se procedió a realizar cálculos en busca de plasmones de superficie cuando las capas de las paredes son de metamaterial. A continuación se muestran los cálculos.

Consideremos un sistema con los parámetros  $b = 1.5, A = 0.1b, P = 2\pi$ , un desfase de perfiles de  $\frac{\pi}{2}$ , un espesor de capas de  $0.15b$  y polarización TM. En la figura 20(a) se muestra la estructura de bandas para  $0.5 < \omega_n < 1$ , en la figura 20(b) se muestra  $\omega_n$  vs  $D(K_n = 0, \omega_n)$ , de donde encontramos un valor para  $\omega_n$ , dentro del rango  $0.6366 < \omega_n < 0.9597$ , que parece interesante, su posición está dada por  $\omega_n = 0.6407$ , en la figura 20(c) tenemos la celda unitaria del sistema, finalmente en la figura 20(d) se muestra la intensidad del campo correspondiente para esta frecuencia. Este sistema

es de suma importancia, ya que fue posible encontrar una frecuencia en la que la intensidad del campo es mayor entre el conductor y el metamaterial como un modo electromagnético de superficie. Proponemos que este sea un plasmón de superficie.

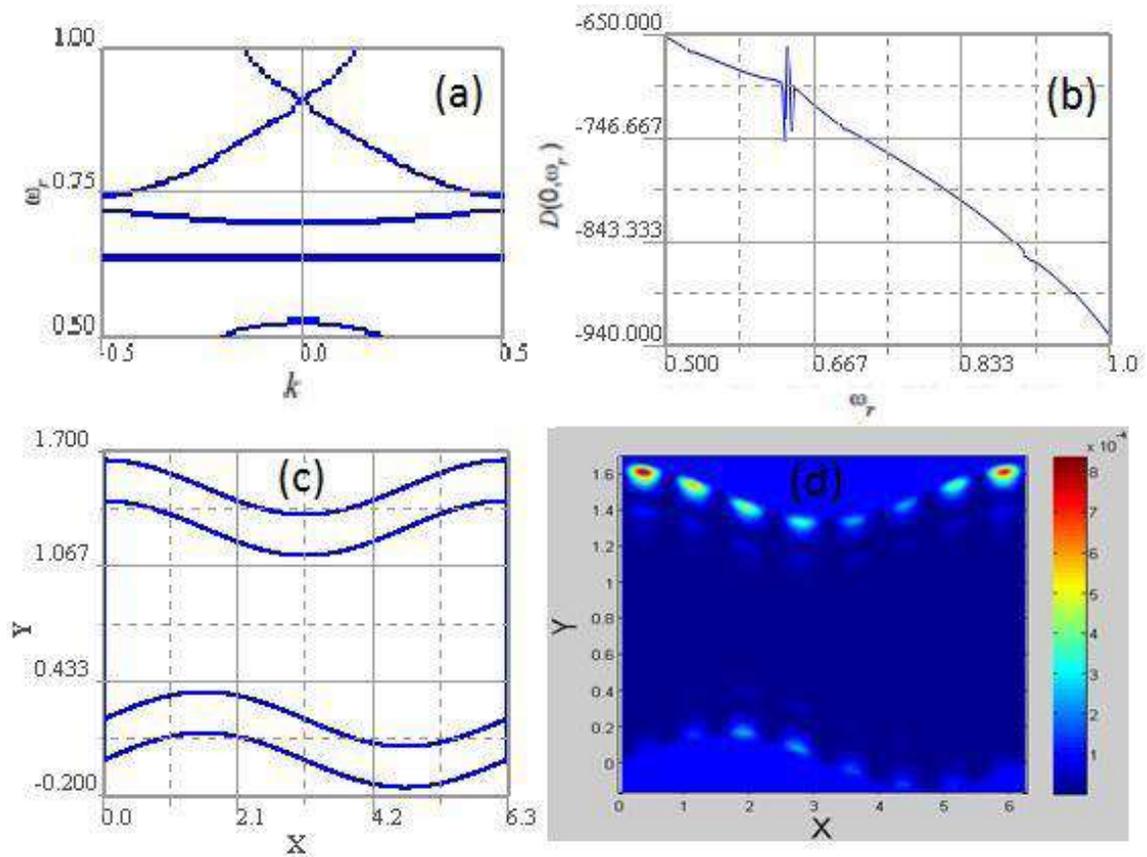


Figura 20. (a) Estructura de bandas. (b)  $\omega_n$  vs  $D(K_n = 0, \omega_n)$ . (c) Celda unitaria con capas. (d) Campo obtenido con  $\omega_n = 0.6407$ .

Consideremos el sistema con  $b = 1.5$ ,  $A = 0.1b$ ,  $P = 2\pi$ , un desfase de perfiles de  $\frac{\pi}{2}$ , un espesor de capas de  $0.25b$  y polarización TM. En la figura 21(a) se muestra la celda unitaria del sistema, en la figura 21(b) se muestra  $\omega_n$  vs  $D(K_n = 0, \omega_n)$ , de donde podemos notar dos valores para  $\omega_n$  dentro del rango  $0.6366 < \omega_n < 0.9597$ , sus posiciones están dadas por  $\omega_n = 0.6381$  y  $\omega_n = 0.6457$ , en las graficas 21(c) y (d) se muestra la intensidad del campo para cada frecuencia, respectivamente. En campo en la figura 21(c) tiene la propiedad de concentrarse en mayor medida en la capa superior

de LHM del sistema, mas aún, aunque el campo está dentro de casi toda la capa, la intensidad es mayor en la interfaz metamaterial-conductor perfecto. En la figura 21(d) el campo se concentra en las interfases de metamaterial-conductor perfecto. Proponemos que los fenómenos de las figuras 21(c) y (d) sean plasmones de superficie.

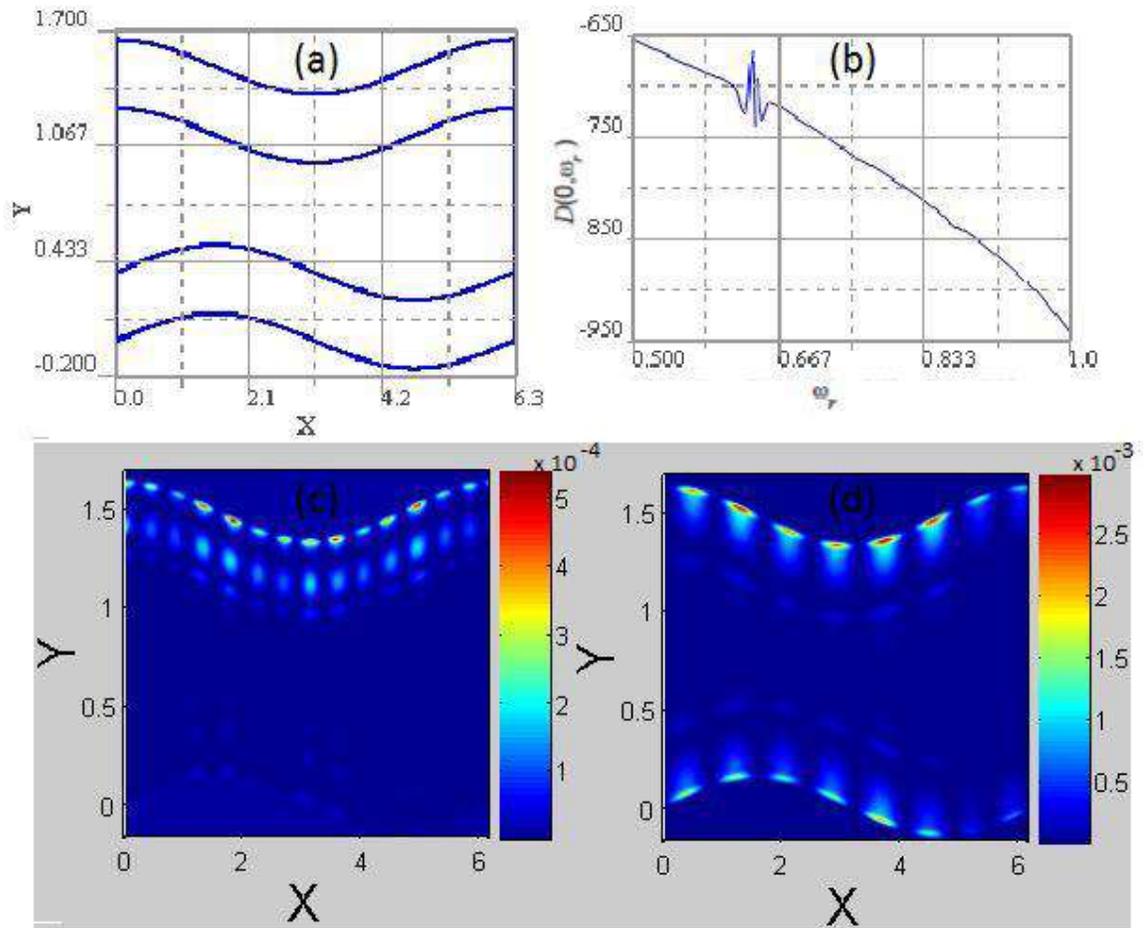


Figura 21. (a) Celda unitaria con capas de  $espesor = 0.25b$ . (b)  $\omega_n$  vs  $D(K_n = 0, \omega_n)$ . (c) Campo obtenido con  $\omega_n = 0.6381$ . (d) Campo obtenido con  $\omega_n = 0.6457$ .

## IV.2. Guía de ondas en cristal fotónico con inclusión de conductor perfecto y metamaterial

### IV.2.1. Validación del método numérico

El siguiente método a verificar es el utilizado para el análisis de la figura 11. Sin embargo el procedimiento utilizado para el análisis de este sistema se basa en comenzar analizando un sistema más simple, a manera de poder comparar resultados obtenidos con los publicados anteriormente. En este caso consideramos primero el sistema mostrado en la figura 22, la diferencia radica en que este sistema tiene inclusiones de conductor perfecto, a diferencia de nuestro sistema de interés mostrado en la figura 11, en el cual la inclusión está formada por un cilindro de conductor perfecto rodeado de metamaterial, lo cual simplifica el sistema de ecuaciones a resolver.

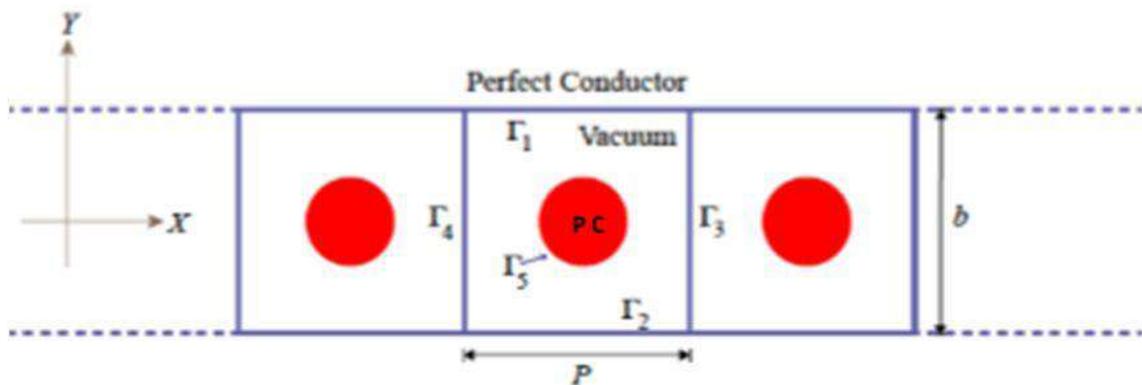


Figura 22. Guía de onda de cristal fotónico con inclusión de conductor perfecto.

En la figura 23 se muestra la estructura de bandas obtenida (a) con el programa implementado en este trabajo y (b) la estructura calculada con anterioridad por el grupo de CFs y metamateriales de la Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas de la UMSNH (Pérez-Aguilar y Mendoza-Suárez, 2015), de donde podemos afirmar que el programa implementado está de acuerdo con los resultados publicados en la literatura.

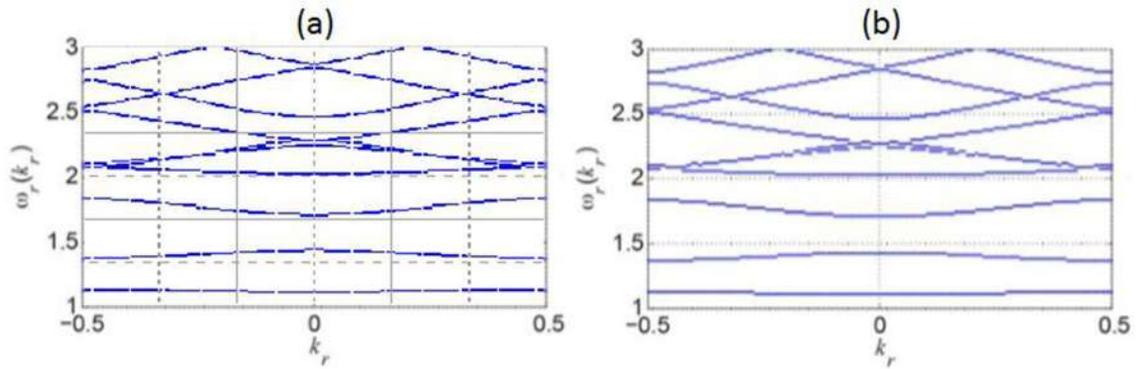


Figura 23. (a) Estructura calculada en este trabajo. (b) Estructura encontrada en la literatura (Pérez-Aguilar y Mendoza-Suárez, 2015). Los parámetros utilizados son  $b = \pi$ ,  $P = 2\pi$  y  $r = 0.17$ .

Ahora se considera un sistema cuya inclusión esté llena de metamaterial. La idea es poder reproducir el plamón obtenido por el grupo de CFs y metamateriales de la Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo (Pérez-Aguilar y Mendoza-Suárez, 2015) con el método implementado, para luego pasar al problema con capas. En la figura 24(a) se muestra la celda unitaria obtenida a través del sistema con inclusión de metamaterial. Sin embargo fue obtenida a través del sistema con capas mostrado en la figura 11 haciendo cero el radio interior donde se encuentra el conductor perfecto. En la figura 24 se muestra el campo obtenido para  $\omega_n = 0.7487$ , con (b) el programa sin capas y (c) el programa con capas, los parámetros utilizados son  $b = 4\pi$ ,  $P = 2\pi$ ,  $r = 0.1b$ ,  $K_n = 0$  y polarización TE.

De este modo fue posible validar no solo el programa con inclusión de metamaterial, sino también el programa que contiene capas.

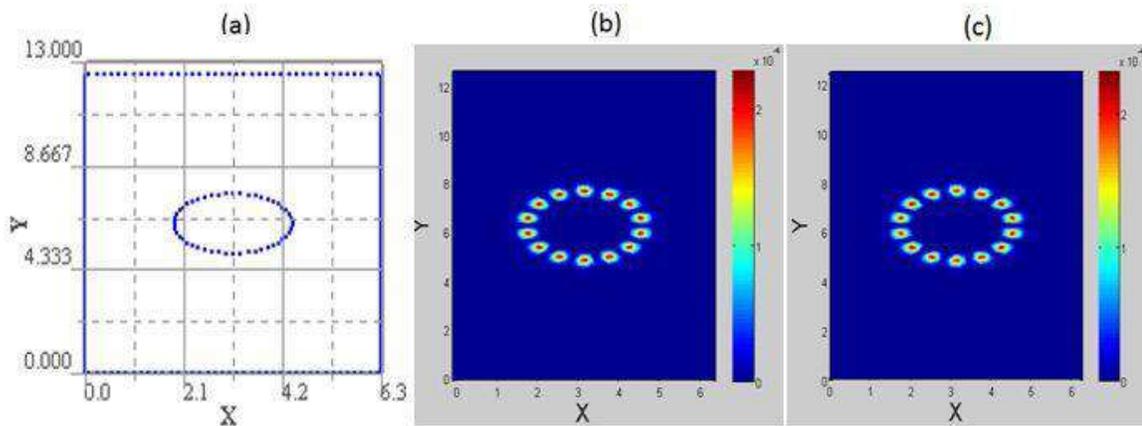


Figura 24. (a) Celda unitaria obtenida con el programa con capas haciendo cero el radio interior de la inclusión. (b) Campo obtenido con el programa sin capas. (c) Campo obtenido con el programa de capas.

## IV.2.2. Nuevos cálculos

Ahora se presentarán los cálculos realizados en el sistema de capas.

Consideremos los siguiente parametros  $b = 4\pi$ ,  $P = 2\pi$ ,  $r = 0.1b$ , radio interior igual a  $0.09b$ ,  $K_n = 0$  y polarización TE. En la figura 25(a) se muestra la celda unitaria del sistema. Como podemos observar la capa de metamaterial es considerablemente menor que el radio interno de la inclusión. Para los parámetros utilizados fue posible obtener los campos mostrados en la figura 25(b) y (c) para  $\omega_n = 0.7487$  y  $\omega_n = 0.9595$ , respectivamente. La frecuencia  $\omega_n = 0.7487$  ya había sido reportada en la literatura como frecuencia de plasmón superficial para sistemas con inclusiones cilíndricas (Ruppin, 2004), sin embargo en la literatura no se encontró información sobre  $\omega_n = 0.9595$  en estos sistemas, por lo que resulta interesante haberla calculado con el método desarrollado en este trabajo.

Se logró implementar un método numérico en el que no se tiene conductor perfecto dentro de la inclusión, es decir se implementó un programa donde la capa de metamaterial está rodeando un material dieléctrico. En la figura 26(a) se muestra la celda unitaria del sistema obtenida con  $b = 4\pi$ ,  $P = 2\pi$ ,  $r = 0.1b$ , radio interior igual a  $0.5r$ ,

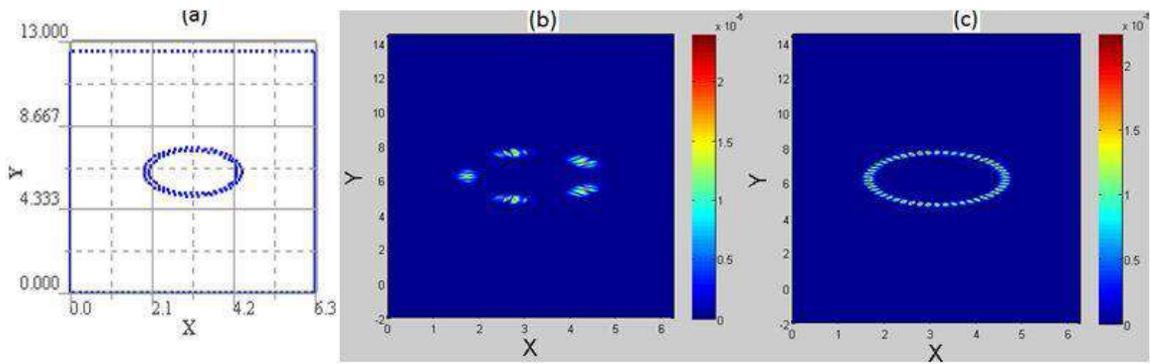


Figura 25. a) Celda unitaria para el programa con capas. Se muestra la intensidad del campo obtenido con  $K_n = 0$  para (b)  $\omega_n = 0.7487$  y (c)  $\omega_n = 0.9595$ .

$K_n = 0$  y polarización TE. Analizamos los dos sistemas: el que tiene conductor perfecto en la inclusión y en el dicho conductor desaparece (considerando vacío), la razón para considerar vacío dentro es tener un sistema que requiera la menor cantidad de materiales en su fabricación, además que era importante conocer la importancia de la presencia de conductor perfecto en la inclusión en el cálculo del plasmón. Nuevamente  $\omega_n = 0.7487$  apareció en los dos sistemas como un modo. En la figura 26(b) se muestra el campo obtenido cuando se considera que la parte interna de la inclusión contiene conductor perfecto, mientras que en (c) se muestra el campo cuando se considera vacío en el interior de la capa de metamaterial.

Este resultado resulta interesante, ya que muestra que el fenómeno del plasmón se puede conseguir con una inclusión hueca de metamaterial, haciendo intrescendente la presencia de conductor perfecto en la inclusión, además si se compara la figura 24(b) con la figura 26 también se puede deducir que al cambiar la cantidad de metamaterial en el sistema no desaparece el fenómeno del plasmón, al menos para los parámetros utilizados.

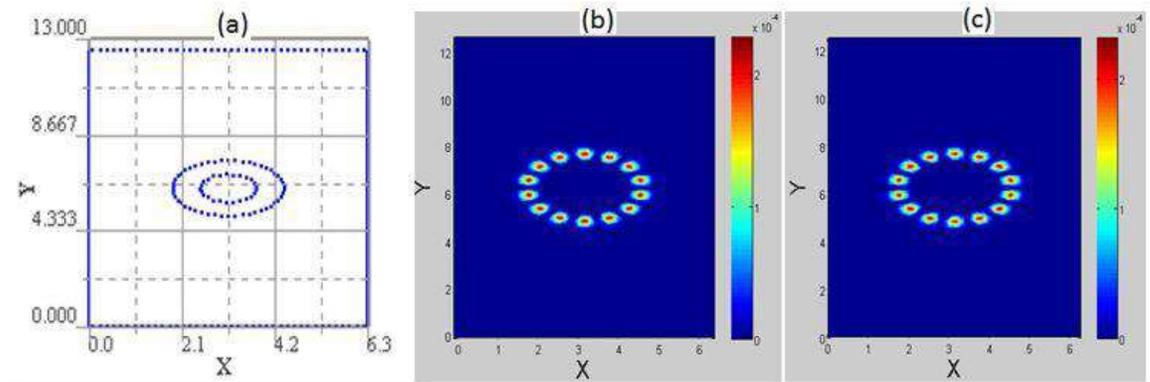


Figura 26. (a) Celda unitaria obtenida con el programa con capas,  $r = 0.1b$  y radio interior de  $0.1r$  haciendo cero el radio interior de la inclusión. (b) Campo cuando se considera conductor perfecto dentro del metamaterial. (c) Campo obtenido cuando se considera vacío dentro de la capa de metamaterial.

## IV.3. Guía de ondas finita

### IV.3.1. Validación del método numérico

En la figura 27 se muestra nuevamente el sistema formado por una guía de onda finita con inclusiones de metamaterial, el trabajo para este sistema era calcular el campo esparcido cuando se incide un haz de luz por uno de los extremos de la guía.

Antes de comenzar con este sistema se calculó la sección eficaz de dispersión generada por un cilindro de conductor perfecto. En la figura 28 se comparan los resultados obtenidos con cálculos encontrados en la literatura para plata (Ruppin, 2004), el radio del cilindro es de 0.3 y la longitud de onda del campo incidente es  $\lambda = 0.658$ . Podemos observar que el método está razonablemente de acuerdo con los cálculos publicados, recordando que la plata es un buen conductor, por lo que el modelo de conductor perfecto es adecuado en este caso.

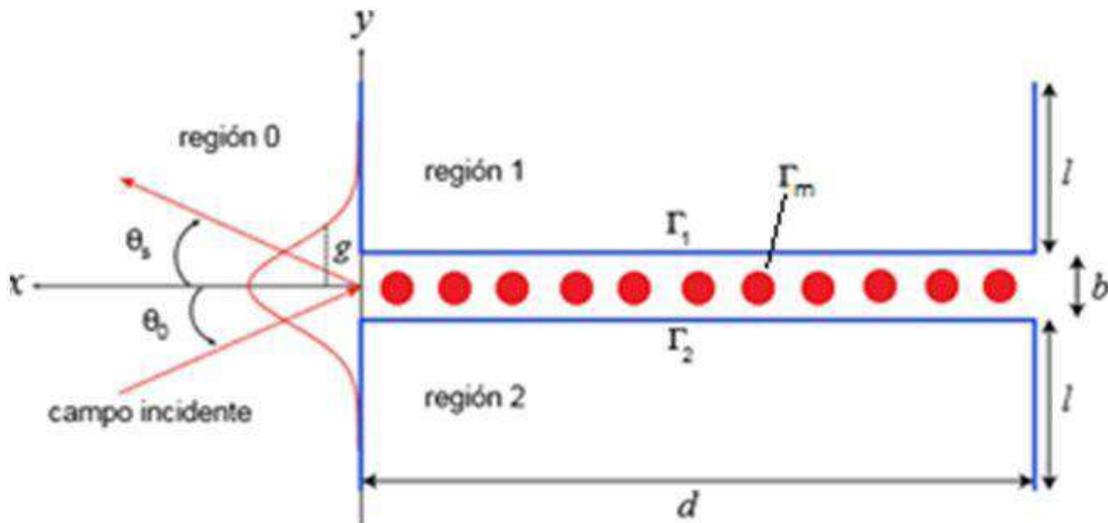


Figura 27. Guía de onda finita con inclusión de cilíndrica de metamaterial.

### IV.3.2. Nuevos cálculos

Una vez que se pudieron obtener los cálculos de la figura 28 se construyó un método que calcula el campo esparcido en el sistema de la figura 27. Consideremos los siguientes parámetros;  $l = 9$ ,  $b = 4\pi$ ,  $r = 0.1b$ ,  $d = 40\pi$  y  $\theta_0 = 0$ , 20 periodos y polarización TE. En la figura 29 se muestra el campo esparcido para  $\omega_n = 0.8119$ .

En la figura 30 se muestra el campo para  $\omega_n = 0.7487$ , los parámetros utilizados son los mismos que los utilizados para la figura 29.

Es interesante el campo mostrado en la figura 30, bajo los parámetros utilizados en este cálculo es posible concentrar el campo en las inclusiones, la importancia de este fenómeno radica en que  $\omega_n = 0.7487$  es la frecuencia en donde se calculó el plasmón para el sistema finito, si bien es cierto que el campo no se concentra en la superficie como en el caso infinito el solo hecho de tener el campo en las inclusiones da indicios de que bajo ciertos parámetros pueda ser posible el cálculo del plasmón en la guía de ondas finita.

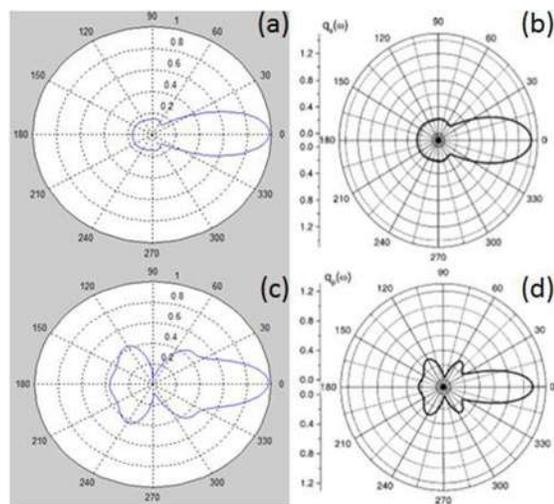


Figura 28. Sección eficaz de dispersión para un cilindro de conductor perfecto. (a) y (c) obtenidos con un programa desarrollado en este trabajo, (b) y (d) tomados de (Ruppin, 2004).

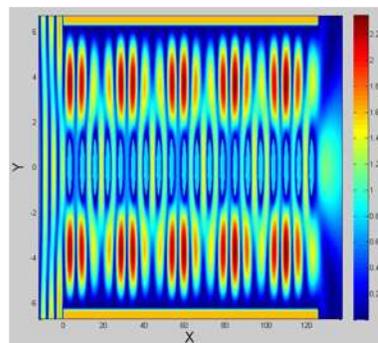


Figura 29. Campo esparcido para una guía de onda finita con inclusiones cilíndricas de metamaterial para  $\omega_n = 0.8119$ .

Queda para un trabajo futuro la búsqueda de plasmones para el caso realista de guías de ondas de longitud finita.

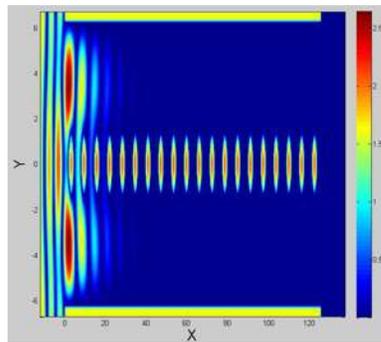


Figura 30. Campo esparcido para una guía de onda finita con inclusiones cilíndricas de metamaterial para  $\omega_n = 0.7487$ .

## Capítulo V

---

### CONCLUSIONES

---

En este capítulo enunciaremos los resultados mas sobresalientes obtenidos en este trabajo de investigación, los cuales fueron obtenidos despues de hacer un análisis teórico-numérico en sistemas electromagnéticos formados por cristales fotónicos en guías de ondas, que incluyen capas de metamateriales dispersivos. Los dos primeros son sistemas considerados perfectamente periodicos y el tercero es un sistema finito. El análisis en los sistemas finitos tenía como objetivo principal el cálculo de plasmones superficiales en sistemas que incluyen capas de metamaterial dispersivo y el cálculo del campo esparcido para la guía de ondas finita.

El método numérico empleado se basa en "el método de la ecuación integral", el cual tiene como objetivo en resolver la ecuación de Helmholtz partiendo de la segunda identidad de Green, este método tiene como ventaja utilizar solo los puntos en las interfaces en lugar de todos los puntos internos a la región de interés, lo cual se ve reflejado en el poder de cómputo necesario para hacer los cálculo.

Para asegurar el dominio del método numérico se comenzo construyendo métodos numéricos para sistemas que no contenian capas de metamaterial, principalmente por que estos sistemas ya estaban reportados en la literatura, de modo que fue posible

comparar los resultados obtenidos con los ya publicados. Fue posible reproducir los resultados para los sistemas sin capas que habían sido obtenidos con anterioridad por el grupo de investigación de CFs y metamateriales de la Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas de la Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo (Mendoza-Suárez y Pérez-Aguilar, 2015), (Pérez-Aguilar y Mendoza-Suárez, 2015), de modo que se puede confirmar el dominio del método numérico.

En los dos sistemas infinitos analizados cuya configuración está caracterizada por contener capas de metamaterial también fue posible calcular plasmones superficiales.

Para el sistema con superficies sinusoidales se presentan varias configuraciones en donde fue posible encontrar plasmones de superficie, incluso se encontró un sistema donde aparecen dos frecuencias cuyo intensidad del campo tiene valores máximos en la interfase metamaterial-conductor perfecto.

En el sistema caracterizado formado por una guía de ondas con inclusión de conductor perfecto recubierta de metamaterial se calculó el plasmón para la frecuencia  $\omega_n = 0.7487$ , la cual coincide con la calculada para el caso de inclusiones de metamaterial (Ruppín, 2004), además se implementó un método en donde había vacío el que el hueco en la capas de metamaterial, nuevamente en este caso fue posible calcular el plasmón a la frecuencia antes mencionada, este resultado es importante pues muestra que la geometría de los sistemas físicos considerados y la presencia de metamateriales son los que determinan la aparición de plasmones de superficie. Así, es secundaria la cantidad de metamaterial incluida en la formación de estos modos de superficie electromagnéticos.

Para el sistema de la guía de ondas finita se logró calcular el campo esparcido cuando se tiene la presencia de metamaterial. Al calcular el campo a la frecuencia donde aparece el plasmón en el caso finito se encontró que el campo se concentra en

las inclusiones, este resultado da pie a la hipótesis que bajo ciertos parametros pueda ser posible calcular el plasmón superficial en la guía de ondas de longitud finita. Queda para un trabajo futuro la búsqueda de plasmones para el caso realista de guías de ondas de longitud finita.

## Referencias

- A. Cruz, D., C. Rodríguez, M., M. López, J., M. Herrera, V., G. Orive, a., y Alberto, H. C. (2015). Nanopartículas metálicas y plasmones de superficie: Una relación profunda. *Avances en Ciencias e Ingeniería*, **03**(02): 67–78.
- Atwater (2007). The promise of plasmonics. *Scientific American*, **58**(20): 39–45.
- Bravo-Abad, J. (2006). Transmision resonante de luz a traves de laminas metalicas nanoestructuradas. *Departamento de Física Teorica de Materia Condensada de la Universidad Autonoma de Madrid, Madrid, España*, **58**(20): 170.
- Cadien, K., Reshotko, M., Block, B. A., Bower, A., Kenche, D., y Davids, P. (2005). Challenger for on-chip optical interconnects. *Proc. SPIE*, **5730**: 133.
- Cunningam, S. L., Maradudin, A. A., y Wallis, R. F. (1974). Effect of a charge layer on the surface-plasmon-polariton dispersion curve. *Phys. Rev. B*, **10**: 3342.
- Ebbesen, T. W., Lezec, H., y H.F., G. (1998). Extraordinary optical transmission through surwavelength hole arrays. *Nature*, **391**: 667–669.
- Fano, U. (1936). The theory of anomalous diffraction gratings and of quasi-stationary waves on metallic surfaces. *J. Opt. Soc. Am.*, **31**: 213–222.
- García-Meca, C., Orduño, R., Salvador, R., Martínez, A., y Martí, J. (2007). Low-loss single-layer metamaterial with negative index of refraction at visible wavelengths. *Opt. Express*, **15**: 9320–9325.
- García-Vidal, F. J. y Martin-Moreno, L. M. (2008). Plasmones superficiales. *Universidad Autónoma de Madrid, Investigación y Ciencia, España*.
- Hessel, A. y Oliner, A. A. (1965). A new theory of wood's anomalies on optical gratings. *Appl. Opt.*, **4**: 1275–1297.
- Ibiza, T. (2013). Estudio numérico de la focalización de ondas evanescentes con una estructura periódica. *Trabajo de grado*, **58**(20): 1–68.
- Kittel, C. (1996). instruction to solid state physicsmengens. *John Wiley and Sons, Inc., Madrid, España, 7ma edición*, página 804.
- Kreibig, u. y Zacarias, P. (1970). Surface plasma resonances in small spherical silver and gold particles. *Z. Physik*, **231**: 128.
- Kuzmiak, V. y Maradudin, A. A. (2002). Scattering properties of a cylinder fabricated from a left-handed material. *Phys. Rev. B.*, **66**: 045116.

- Lezec, H., Degiron, A., Devaux, E., Linke, R., Martin-Moreno, L. M., García-Vidal, F. J., y Ebbesen, T. (2002). Beaming light from a subwavelength aperture. *Science*, **297**(5582).
- Maradudin, A. A., Michel, T. Mcgurn, R. A., y Mendez, E. R. (1990). Enhanced backscattering of light from a random grating. *Ann. Phys. (N. Y.)*, **203**: 255–307.
- Marsden, J. E. y Tromba, A. J. (2004). Cálculo vectorial. *J. Opt. Soc. Am. B*, **5**: 508.
- Mendoza-Suárez, A. y Pérez-Aguilar, H. (2015). Optical response of a photonic crystal waveguide that includes a dispersive left-handed material. *Photonics and Nanostructures – Fundamentals and Applications*, **14**: 93–100.
- Mendoza-Suárez, A., Villa-Villa, F., y Gaspar-Armenta, J. A. (2006). Numerical method based on the solution of integral equations for the calculation of the band structure and reflectance of one- and two dimensional photonic crystals. *J. Opt. Soc. Am. B*, **23**(10): 2249–2256.
- Mendoza-Suárez, A., Villa-Villa, F., y Gaspar-Armenta, J. A. (2007). Band structure of two-dimensional photonic crystals that include dispersive lefthanded materials and dielectrics in the unit cell. *J. Opt. Soc. Am. B*, **24**(12): 3091–3098.
- Mengens, M., Wijnhoven, J., A., L., y Vos, W. L. (1999). Light sources inside photonics crystal. *J. Opt. Soc. Am. B*, (16): 1403–1408.
- Mie, G. (1908). Beitrage zur optik truber medien, speziell kolloidaler metallosungen. *Ann. Phys.*, **25**: 377.
- Miguez, H., Yang, S. M., Tetreault, N., y Ozin, G. A. (2002). Orineted free-standing thee-dimencional silicon inverted colloidal photonic crystal microribers. *Advanced Materials*, **14**: 1805–1808.
- Moreno, E., García-Vidal, F. J., Sergio, G., Martin-Moreno, L., y Sergey, I. B. (2008). Plasmones superficiales. *Universidad Autónoma de Madrid, Investigación y Ciencia, España*.
- Palmer, C. H. (1952). Parallel diffraction grating anomalies. *J. Opt. Soc. Am.*, **42**: 269–276.
- Pendry, J. B., Holden, A. J., Robbins, D. J., y Sterwart, W. J. (1998). Low frequency plasmons in thin-wire structures. *J.Phys.: Condens. Matter.*, **10**: 4785–4809.
- Pérez-Aguilar, H. y Mendoza-Suárez, A. (2015). Numerical study on a photonic crystal waveguide that include a dispersive material. *Mexican Optics and Photonic Meeting*, páginas 9–11.
- Pérez-Aguilar, H. I. (2005). Propagación y esparcimiento de la luz en sistemas geometrías confinantes. *Tesis de Doctorado, CICESE*.

- Pines, G. (1956). Collective energy losses in solids. *Rev. Mod. Phys.*, **28**: 184–198.
- Podolsky (2003). Plasmon modes and negative refraction in metal nanowire composites. *Opt. Express*, **11**: 735–745.
- Rayleigh, L. (1907a). Note on the remarkable case of diffraction spectra described by prof. wood. *Philos. Mag*, **14**: 60–65.
- Rayleigh, L. (1907b). On the dynamical theory of gratings. *Proc. R. Soc. Lond.*, **79**: 399–416.
- Ritchie, R. H. (1957). Plasma losses by fast electrons in thin films. *Physical Review*, **106**: 874.
- Ritchie, R. H., Arakawa, E. T., Cowan, J. J., y Hamm, R. N. (1968). Surface-plasmon resonance effect in grating diffraction. *Phys. Rev.*, **21**: 1530–1532.
- Ruppin, R. (2004). Surface polaritons and extinction properties of a left-handed material cylinder. *J. Phys.: Condens. Matter*, **16**(14): 5991–5998.
- Salas Montiel, R. y Blaize, S. (2015). Dispositivos nanofotónicos: enfocar y concentrar la luz a escalas nanométricas. *Mundo nano*, **8**(15): 10–15.
- Santillan, J. M. (2013). Estudio de las propiedades ópticas de materiales nanoestructurados y aplicaciones. *Tesis de Doctorado, Universidad Nacional de la Plata*.
- Sergey, I. B., Volkov, V. S., Dexaux, E., Lalue, J., y W., E. T. (2006). Channel plasmon subwavelength waveguide components including interferometers and ring resonator. *Nature*, **440**: 508–515.
- Shalaev, V. (2005). Negative index of refraction in optical metamaterials. *Opt. Lett*, **30**: 3356–3358.
- Shalaev, V. y Cai, W. (2010). Optical metamaterial. *Springer, USA*, **28**: 1156–1159.
- Stewart, J. E. y Gallaway, W. S. (1962). Diffraction anomalies in grating spectrophotometers. *Appl. Opt.*, **1**: 421–429.
- Strong, J. (1936). Effect of evaporated films on energy distribution in grating spectra. *Phys. Rev.*, **49**: 291–296.
- Veselago, V. (1968). The electrodynamics of surfaces with simultaneously negative values. *Sov. Phys. Usp.*, **10**(4).
- Weeber, J. C., Kreen, J. R., Dereux, A., Lamprecht, B., Lacroute, Y., y Goudonnet, J. P. (2001). Near-field observation of surface plasmon polariton propagation on thin metal stripes. *Physical Review B*, **64**(045411).
- Wood, R. W. (1902). On a remarkable case of uneven distribution of light in a diffraction grating spectrum. *Philos. Mag.*, **4**: 1156–1159.

Yuntuan, F., Haijin, S., y Tiggen, S. (2006). New evidence of negative refraction in photonic crystal. *Opt. Mater*, **28**: 1156–1159.