



Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo



Facultad de Ciencias Físico Matemáticas. Posgrado en Ciencias en Ingeniería Física

MODELADO COMPACTO

T E S I S

que para obtener el título de:
Maestro en Ciencias en Ingeniería Física

P r e s e n t a :

L.F.M. Esmeralda Pérez López

Asesor:

Dr. Francisco Domínguez Mota.

Co-Asesor:

Dr. Joaquín Estevez Delgado

Morelia Michoacán, Diciembre de 2016

Índice general

1. Introducción	11
1.1. Masa y Radio de la Estrella	14
1.2. Estrellas compactas	15
2. Sistemas Estelares Newtonianos	17
2.1. Estrellas y sus propiedades	17
2.2. Teoría de la Gravitación de Newton	22
2.3. Caso esférico	22
2.3.1. Sistema Isótropico	23
2.3.2. Modelos sencillos de estrellas	24
3. Modelo compacto relativista sin carga	27
3.1. Condiciones físicamente aceptables	29
3.2. La solución sin carga	29
3.3. Variables hidrostáticas	31
3.4. Condiciones en la frontera	32
3.5. Condiciones en el origen	35
3.5.1. Estrella compacta	42
3.5.2. Estabilidad	48
4. Conclusiones	49

Agradecimientos

A Jesucristo por permitirme confiar en el plenamente, de brindarme esta oportunidad de estar en este mundo, de lograr una de mis metas más importantes de mi vida, como lo es el de ser profesionista y ser físico matemática, de continuar creciendo tanto profesionalmente como espiritualmente como persona. Además, doy gracias a Dios por permitirme ser una persona perseverante, con todas las capacidades para hacer las cosas a su imagen y semejanza. Agradezco a mi Jesús por mantenerme sana, también por ayudarme a mantenerme firme y motivada para desarrollar este trabajo.

A mis padres:

Gildardo Pérez Marroquín y Rosalilia López Garcíarojas, a quienes agradezco su amor y mi educación, a mis hermanos: Abel, Eduardo, Tatiana, Liliana, Felipe de Jesús, Ariel, Omar Julio, Netzahualcoyotl, por su apoyo y comprensión y paciencia.

A mi novio y compañero de vida:

Ignacio Mota Cruz por su gran apoyo incondicional quien ha estado conmigo motivandome a salir adelante en este proyecto.

A mis amigos:

Miguel Angel Luna González, Esther Tadeo González, a quienes han estado conmigo motivandome en este proyecto.

A mis asesores de tesis:

al Dr. Joaquín Estevez Delgado a quien admiro y respeto le agradezco por aceptarme para realizar esta tesis bajo su dirección, su apoyo y su confianza en mi trabajo y su capacidad de guiar mis ideas quiero expresar también mi agradecimiento al Dr. Francisco Domínguez Mota por su gran motivación y paciencia, por enriquecer este trabajo, por brindarme esta gran oportunidad de ser asesorada. A mis revisores: Dr. Alberto Mendoza y el Dr. Jorge Isidro Aranda, por su ayuda para mejorar y concluir este trabajo.

Resumen

En este trabajo presentamos un modelo de objetos compactos estáticos y esféricamente simétricos en equilibrio hidrostático, se estudió el caso de objetos electricamente neutros. Este es aplicable para estrellas con razón de compacidad $\frac{GM}{c^2 R} < \frac{4}{9}$ suponemos que el fluido es descrito por materia que presenta presiones anisotrópicas, con una presión radial descrita por una ecuación de estado tipo Chaplyging. La densidad y las presiones son funciones regulares monótonas decrecientes, mientras que las velocidades del sonido son funciones monótonas crecientes positivas y menores que la velocidad de la luz, es decir, satisface todas las condiciones requeridas para que este represente una solución físicamente aceptable. La solución presenta una región de estabilidad cerca del centro y es inestable en la frontera para valores de uno de los parámetros, por completitud de nuestro trabajo aplicamos la solución al caso de la estrella *SMCX-1* que tiene masa $(1.29 \pm 0.05)M_o$ y radio (1.9027 ± 0.073) Km.

Abstract

In this work we present a model of objects compact statics and spherically symmetric in hydrostatic equilibrium, we studied the case of object electrically neutral. This is applicable for stars with reason of compactness $\frac{GM}{c^2 R} < \frac{4}{9}$. We suppose that the fluid is described by subject that presents pressures anisotropic, with a pressures radial described by a equation of state of the kind Chaplygin. The density and the pressures are functions monotones decreasing while that velocity of sound are functions monotones increasing positive and minors what that velocity of that light, that is to say, satisfies all that terms required for to represent a solution physically acceptable. The solution presents a region of stability near from the center and is unstable at the border for speeds of one of the settings for completeness of our work we apply the solution to the case of the stars SMCX-1 that has mass $SMCX - 1$ $(1.29 \pm 0.05)M_\odot$ y radio (1.9027 ± 0.073) Km.

Palabras Claves: Objetos compactos, estrellas, soluciones exactas, ecuaciones de Einstein, fluido anisotrópico

Capítulo 1

Introducción

Uno de los intereses históricos de la humanidad han sido las estrellas en la antigüedad de acuerdo a las culturas estas fueron clasificadas en constelaciones como la osa menor y mayor, casiopea por mencionar algunas, su uso era principalmente empleado para la orientación durante algunos viajes, principalmente porque su posición en el cielo es aparentemente invariante.

El conjunto de estrellas que forman una constelación regularmente no se encuentran ubicadas a la misma distancia, incluso se encuentran a cientos de años luz unas de otras.

A medida que se desarrollando tecnología para observar a las estrellas se logró determinar la ubicación aproximada de algunas de ellas y se pudo determinar la composición de algunas de ellas, a través de las bandas espectrales de los elementos químicos como pueden ser las líneas de balmer de Hidrógeno, las líneas de helio neutro, las de hierro, el doblete H y K del calcio ionizado con $\lambda=39683933 \text{ \AA}$.

Para poder analizar la estructura de las estrellas es de relevancia determinar la distancia a la que se encuentran, por ejemplo para conocer la luminosidad de una estrella se necesita conocer su distancia.

Para astros cercanos resulta sencillo medir su distancia y para la medición de la distancia de astros más distantes se deben utilizar métodos de medición, los cuales no siempre resultan lo suficientemente precisos.

Algunas de las propiedades de sistemas gravitacionales muy compactos se vieron estimuladas en los años 30 después de los trabajos de Chandraseckar en enanas blancas (1931). Landau (1932) y Oppenheimer y Volkoff [1], que demostraron que es posible la existencia de estrellas de neutrones con un radio de tan sólo unos kilómetros.

Previo a estos años la concepción teórica sobre estrellas era basada en la teoría Newtoniana, la descripción con esta teoría tenía algunos problemas como el que la masa y radio de estas podía ser cualquiera.

Con el surgimiento de la teoría de la relatividad general y el desarrollo de la física moderna así como de la física de partículas en particular de la electrodinámica cuántica se ha ido resolviendo algunos de los problemas como el del radio y la masa, actualmente se sabe que la relación masa radio $\frac{GM}{c^2 R}$ es acotada.

Aunque la relación masa radio este acotado no significa que para estos valores posibles se tengan estrellas con la infinidad de valores permitidos de masa y radio, se ha mostrado que existen valores críticos de la masa.

Para una mezcla de electrones y núcleos en la cual en promedio hay dos masas protónicas por electrón Landau [1] encontró que la masa crítica es de $1.5 M_{\odot}$ a grandes rasgos y en general la masa crítica es inversamente proporcional al cuadrado de la masa por partícula obtenida al extender la masa total sobre aquellas partículas que esencialmente determinan la presión del gas de Fermi.

La notación la masa solar $M_{\odot}$ es una unidad de medida utilizada en astronomía y astrofísica para medir comparativamente la masa de las estrellas y otros objetos astronómicos muy masivos, como galaxias.

Es igual a la masa del Sol y equivale a unas 332950 veces la masa de la tierra.

Su símbolo convencional y su valor son: $M_{\odot}\text{kg}$.

Se ha sugerido la posibilidad que en estrellas suficientemente masivas se pueda formar un núcleo de neutrones condensado después de que todas las fuentes nucleares de energía al menos para el material de la estrella se han terminado.

La masa mínima para la cual dicho núcleo sería estable ha sido estimada por Oppenheimer y Server [1] quienes al tomar en cuenta algunos efectos de fuerzas nucleares obtienen una masa de $0.1M_{\odot}$ y radio de 5800km aproximadamente.

Modelos de enanas blancas que se explican a través de efectos gravitacionales considerando la relatividad general fueron desarrollados por Chandrasekar [2], mientras que el concepto de estrella de neutrones y su identificación con objetos conocidos como supernovas, los cuales representan la transición de una estrella ordinaria a una estrella de neutrones fue propuesto por Baade y Zwicky [3].

Modelos adecuados que permitan explicar la naturaleza de las estrellas de neutrones y de los cuásares es un problema abierto que se ha abordado por varias décadas, algunos avances teóricos como los realizados por Ruderman y Canuto sobre modelos estelares más realistas, sugieren que la materia nuclear en rangos de densidad muy altos, $\rho > 10^{15} \frac{g}{cm^3}$, donde las interacciones nucleares deben ser tratadas relativísticamente, puede presentar anisotropía [4, 5], esto significa que la presión radial puede diferir de la presión tangencial.

Aunque mucho tiempo atrás en 1933 ya había sido propuesto una distribución esférica de materia anisótropa y mostrado que localmente para este caso el tensor de energía más general corresponde al caso isotrópico [6].

Esta generalización, más allá de la aproximación del fluido isotrópico, ha sido utilizada en el estudio del equilibrio y colapso de esferas compactas.

La presencia de anisotropía influye en el equilibrio de los modelos y puede modificar los valores del corrimiento al rojo gravitacional así como la razón de compacidad [7, 8].

Se pueden tener soluciones anisótropas con un corrimientos al rojo gravitacionales mayores que 2, que es el valor límite en el caso isotrópico [9].

Aunque el valor del corrimiento al rojo gravitacional no es arbitrario, existe un límite si se imponen condiciones sobre la presión y la densidad, específicamente las condiciones de energía fuerte y dominante [10].

La anisotropía en las presiones ha conducido a la posibilidad de tener modelos de objetos compactos con simetría esférica que pueden ser inestables, ya sea en todo el interior o únicamente en una región, este estudio a sido planteado partiendo del concepto de fractura, el cual implicaba la aparición de distintas fuerzas radiales dentro del sistema [11, 12].

La aparición de las fracturas es causada por la anisotropía local de una distribución de fluido [11] y depende de la forma funcional de la presión con la coordenada radial [12].

Como resultado de los trabajos realizados sobre fracturas se ha probado que la estabilidad hidrostática depende de la diferencia de velocidades radial y tangencial del sonido [12], esto es de suma importancia ya que facilita el análisis y determinación de las regiones de equilibrio hidrostático, consecuencia que será utilizada en el análisis de los modelos que proponemos.

Nuestro interés es la descripción de modelos para objetos compactos, por lo que a continuación describimos estos.

1.1. Masa y Radio de la Estrella

La razón de compacidad de un objeto compacto describe la relación entre la masa y el radio sin considerar la interacción microscópica de la materia. Una estimación de la masa y radio de una estrella compacta a partir de la relatividad general requiere $R > R_s$ donde R es el radio de la estrella y $R_s = 2MG/c^2$ es el radio de Schwarzschild, en el que M es la masa de la estrella $G = 6.672 \times 10^{-39} m^3 kg^{-1} s^{-2}$ es la constante gravitacional y c la velocidad de la luz.

Si consideramos un objeto con una cantidad n de nucleones, su volumen sería proporcional a $\sim r_0^3 n$ por lo que el radio del objeto resultaría $R \sim r_0 n^{\frac{1}{3}}$ y la masa $M \sim mn$, teniendo en cuenta el límite del radio de Schwarzschild $R = \frac{2MG}{c^2}$ se obtiene $n \sim \left(\frac{c^2 r_0}{2mG}\right)^{\frac{3}{2}} \sim 2.6 \times 10^{57}$. Este es el número de nucleones hasta el cual podemos llenar nuestra estrella antes de que llegue a ser inestable.

En otras palabras, el radio de Schwarzschild es proporcional a la masa de la estrella y por lo tanto, se incrementa linealmente con el número de nucleones n mientras que el radio se incrementa con $n^{\frac{1}{3}}$, entonces, para un n menor que el límite $n \sim 2.6 \times 10^{57}$ la estrella es estable, pero colapsa en un agujero negro para un número de nucleones más grandes que este límite.

Podemos poner el valor del límite para n en el radio y masa de la estrella para obtener: $R \sim 7km$, $M \sim 2.3M_{\odot}$ [13]

A continuación en la tabla 1.1 se muestra un esquema donde se describe la masa, radio y razón de compacidad de las estrellas blancas y estrella de neutrones.

Estrellas	Masa	Radio	Razón de compacidad
Enanas blancas	$1.4 M_{\odot}$	5800 km	$u \in (0.09 \text{ a } 0.15)$
Estrella de neutrones	$1.35M_{\odot}$ y $2.1M_{\odot}$	12 km	$u \in (0.15 \text{ y } 0.256)$

Tabla 1.1: Clasificación de la masa, radio y razón de compacidad tanto de estrellas blancas como estrella de neutrones.[2]

1.2. Estrellas compactas

Las estrellas compactas son los segundos objetos más densos en la naturaleza, solo superadas por los agujeros negros. Estos tienen las mismas masas que la masa del sol M aprox $1.4M_{\odot}$, pero de radio aproximadamente 10 km. En otras palabras, la masa del Sol de $1.98 \times 10^{33} \text{g}$, está concentrada en una esfera de radio de 10^5 veces más pequeño que el del Sol, $R_{\odot} = 6.96 \times 10^5 \text{km}$ lo que da una densidad de masa promedio $\rho = 7 \times 10^{14} \text{g/cm}^3$. Esta es algunas veces más grande que la densidad presente en un núcleo pesado que es de $\rho_0 = 2.5 \times 10^{14} \text{g/cm}^3$. La masa y el radio de la estrella están determinados por las ecuaciones de estado de la fase de la materia dentro de la estrella.

En la imagen tradicional de una estrella compacta, la estrella está hecha de materia nuclear rica en neutrones por lo que se le conoce como estrella de neutrones. Este es algunas veces el término utilizado, incluso si uno habla acerca de una estrella que contiene un núcleo de materia de quarks (la cual podrá ser llamada estrella de neutrones exótica).

El término estrella compacta es usado para un objeto con masa y radio caracterizados por una densidad superior a la densidad nuclear, y estas podrían estar hechas de materia nuclear o sus variantes (estrella de neutrones), núcleo de materia quark con un manto envolvente de materia nuclear (estrella híbrida); o exclusivamente de materia quark (estrella quark o estrella extraña). Las estrellas compactas nacen de una supernova. Una explosión espectacular de una estrella gigante o supergigante es debida al colapso gravitacional de su núcleo.

Su descripción interna a nivel local es dada por la interacción local de las partículas como podemos apreciar en el diagrama de fase de QCD (Quantum Chromodynamics) que se muestra en la figura 1.1 que describe las fases de equilibrio en el plano de la temperatura y el potencial químico de quarks o bariones. Observamos que las estrellas compactas en las escalas de este diagrama habitan en la región de densidades intermedias y de pequeñas temperaturas.

- Estas podrían existir en la región donde los quarks están confinados, es decir, en la fase hadrónica. Esto implicaría que son estrellas de neutrones. Por esta razón habitarán en la región desconfinada que las convierte en estrellas quark.
- Estas podrían contener materia con quarks confinados y no confinados porque la estrella actualmente tiene un perfil de densidad en lugar de una densidad homogénea.

En el interior esperamos que la densidad sea mayor que en la superficie. Por lo tanto, es una estrella híbrida con un núcleo de quarks y un manto nuclear.

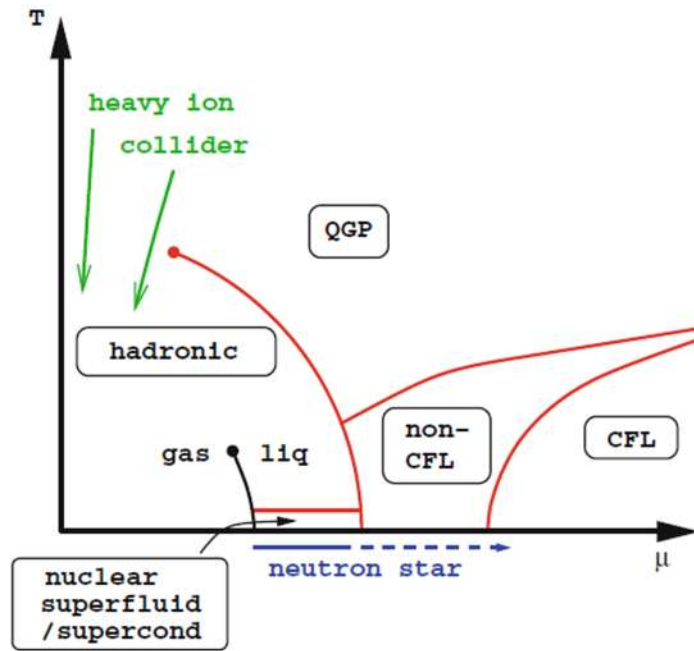


Figura 1.1: se muestra la apreciación del diagrama de fases de materia QCD [13]

Lo que implica que es necesario comprender la teoría que describe la materia fuertemente interactuante llamada QCD o bien de la propuesta de ecuaciones de estado que modelen de una buena forma la interacción, al haber poca información sobre esto resulta útil determinar al menos teóricamente el tipo de ecuaciones de estado que implica la coincidencia de datos observacionales con resultados teóricos que son parte de la propuesta de este trabajo, suponemos una ecuación de estado que describe el interior.

Capítulo 2

Sistemas Estelares Newtonianos

2.1. Estrellas y sus propiedades

Para poder analizar las estrellas los astrónomos requieren de determinar la distancia a la que nos encontramos de ellas, por ejemplo, para conocer la luminosidad de una estrella se necesita conocer su distancia. En principio, el sol es la estrella más cercana, razón por la cuál es la mejor investigada. A los astros más cercanos como los planetas se le puede medir sus distancias en forma directa, a través de cálculos relativamente sencillos.

A medida que las distancias se hacen cada vez más grandes se deben utilizar métodos de medición, los cuales no siempre resultan lo suficientemente precisos. La determinación de paralajes y distancias estelares permitió estimar los brillos intrínsecos de las estrellas. Con el transcurso del tiempo la observación y el estudio cuidadoso de la posición de algunas estrellas, los astrónomos han detectado cierto desplazamiento en las mismas, reflejo de traslación de la tierra alrededor del sol e independiente del movimiento conjunto de la esfera celeste.

Al comparar la ubicación de las estrellas con respecto a sus vecinas mediante un par de fotografías astronómicas tomadas en ese intervalo, digamos como en seis meses se nota cierto cambio en la posición de algunas de ellas, los astrónomos han definido el paralaje de una estrella como un ángulo bajo el cual se ve de la estrella, el radio de la órbita terrestre. Cuando se conoce la distancia de las estrellas se puede determinar su luminosidad intrínseca y calcularla teóricamente.

La espectroscopía se puede usar para averiguar muchas propiedades de las estrellas y galaxias distantes. La determinación de paralajes y distancias estelares permitió estimar los brillos intrínsecos de las estrellas. La clasificación de las estrellas se remonta a finales del siglo XIX cuando se generaliza el estudio de espectros obtenidos con placas fotográficas.

La clasificación que se utiliza actualmente fue elaborada en el observatorio de harvard hacia 1920. Para esta clasificación se utilizan letras que van en orden secuencial de mayor a menor temperatura superficial en el siguiente orden. O-B-A-F-G-K-l-T los últimos dos son recientes y corresponden a enanas y marrones. Para clasificar los espectros se utilizan algunas líneas conspicuas que son fundamentalmente sensibles a la temperatura. Ejemplos de líneas de balmer de Hidrógeno, las líneas de helio neutro, las de hierro, el doblete H y K del calcio ionizado a $\lambda = 3968,3933 \text{ \AA}$. La banda G debida al radical CH, las líneas de TIO.

Las clases espectrales que van de 0 a 9. En la figura 2.1 se bosquejan la clasificación de los espectros estelares que se utiliza para la clasificación se utilizan letras que van de orden secuencial que van de mayor a menor temperatura superficial en el siguiente orden: O-B-A-F-G-K-M-L-T los dos últimos tipos son recientes y corresponden a enanas marrones.

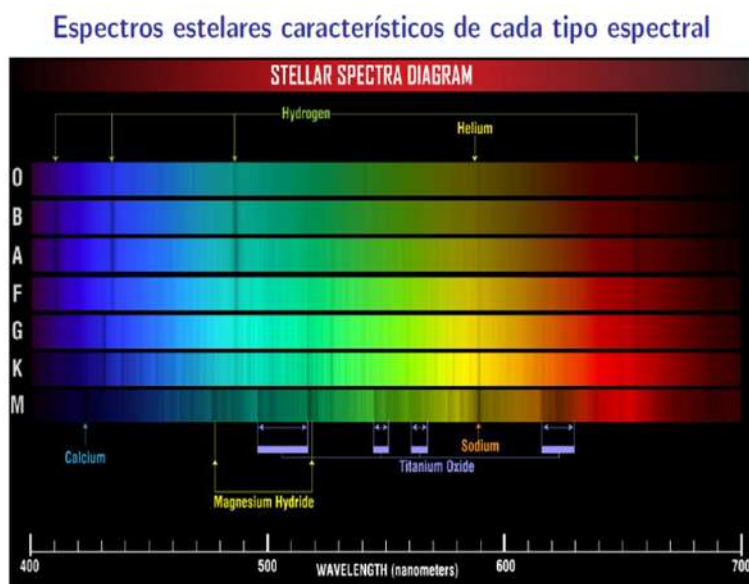


Figura 2.1: se muestra el espectro con letras que van en orden secuencial de mayor a menor temperatura superficial. para clasificar los espectros se utilizan algunas líneas conspicuas que son fundamentalmente sencibles a la temperatura [2]

De acuerdo a la ley de la gravitación universal podemos describir algunas de las propiedades que observamos en el cielo con el telescopio ya que la forma en que se percibe a las estrellas es como puntos de luz, algunas de las propiedades físicas o termodinámicas estelares que se observan de ellas son su tamaño (radio), color, brillo, presión, temperatura, luminosidad. Estas diferencias que hay entre las estrellas se deben al tamaño y a la distancia a la que nos encontramos de ellas o bien a la cantidad de energía que liberan.

Las propiedades que más fácil se pueden medir para un astrónomo son el brillo y la temperatura estelar. Los astrónomos usan como características de las estrellas la longitud de onda a la que emiten, su tamaño y su radio generando de esta forma el diagrama de Hertzsprung-Russell(H-R).

Por medio del diagrama de H-R, permite separar a las estrellas en cuanto a su brillo, temperatura superficial y tamaño. Las estrellas no están distribuidas en el diagrama al azar sino que se encuentran agrupadas en algunas regiones.

La figura 2.2 representa un diagrama H-R en el que se muestran las regiones más importantes. Los distintos grupos en el diagrama H-R no están igualmente poblados de estrellas. La mayoría están a lo largo de la serie principal. Las gigantes rojas forman otro grupo bastante destacado. Hay unas cuantas estrellas brillantes en la parte de arriba del diagrama en la región de las supergigantes y un grupo de enanas blancas muy débiles en la parte inferior. A parte de estos grupos principales hay algunas estrellas dispersas, por otras partes, del diagrama que se distinguen por su tamaño.

Las estrellas de la parte principal se llaman enanas (aunque las de la parte superior de la misma son mayores que las de la parte inferior). Todo lo que este a la derecha y por encima de la serie principal cae dentro de la categoría general de las estrellas gigantes. Una estrella cien veces mayor que la del sol es simplemente una gigante; si es solo diez veces mayor es subgigante. De forma análoga, una estrella que quede por debajo de la serie principal, pero por encima de las enanas blancas se llama subenana.

En el diagrama H-R frecuentemente no es representativo del número real de estrellas de los distintos tipos que hay en el espacio; por ejemplo, las supergigantes son tan brillantes que pueden detectarse muy fácilmente, han sido observadas en un volumen muy grande alrededor de la tierra. Las enanas blancas por el contrario al ser muy débiles son extremadamente difíciles de detectar. Solo han sido detectadas en una región del espacio relativamente cercana a la tierra. La diferencia puede verse fácilmente si comparamos el diagrama H-R para las estrellas que parecen más brillantes en la tierra con el diagrama H-R de las estrellas cercanas.

En la figura 2.2 se muestran incluidas todas las estrellas, gran parte de estas se encuentran situadas en la parte recta del diagrama que es denominada secuencia principal (son aquellas estrellas que presentan pequeños cambios en su equilibrio).

Las estrellas más grandes y masivas son extremadamente brillantes y generan más energía, la cual agotan rápidamente, por lo que las estrellas gigantes vivan poco tiempo, entre estas se encuentran las supergigantes rojas se muestra la secuencia principal en la que se encuentran todas las estrellas.

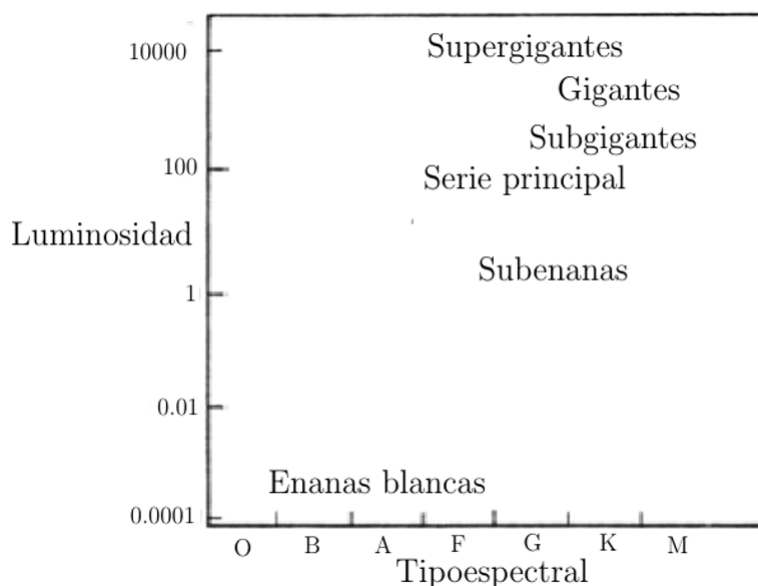


Figura 2.2: en esta figura se muestra la transición de fase donde se observa la secuencia principal de todas las estrellas[2].

Estas estrellas tienen un diámetro cercano a 40 diámetros del sol. Se sabe que las estrellas conocidas como enanas blancas tienen un diámetro de una centésima del diámetro del sol. La razón de compactificación estelar que caracteriza a las estrellas es: $u = \frac{GM}{Rc^2}$ la cantidad anterior es adimensional. En el caso Newtoniano no hay límite para este valor. Pero en el caso relativista con fuente de materia de fluido perfecto $u < \frac{4}{9}$ y también particularmente para estrellas compactas:

- Enanas blancas son estrellas calientes y pequeñas por lo que su luminosidad es muy baja, tienen una masa alrededor de $M_{\odot}$ y un radio de 5000 km con una densidad de $10^6 \frac{gr}{cm^3}$
- Estrellas de neutrones: objeto extremadamente pequeño ($1.35M_{\odot}$) y $2.1M_{\odot}$ con radio de 12 km denso estas tienen una densidad aproximada de $10^{14} \frac{gr}{cm^3}$ [17]
- Estrellas de quarks estrella hipotética con una densidad intermedia entre una estrella de neutrones y la de un agujero negro. Estas estrellas son conocidas como estrellas extrañas, el análisis de estas estrellas ha considerado en algunas investigaciones. Cheng et al sugirieron que estrellas extrañas pueden formarse durante colapso del núcleo de estrellas masivas después de una explosión supernova. Este tipo de estrellas extrañas tienen una densidad altísima de $10^{15} \frac{gr}{cm^3}$

En la figura 2.3 se describen las estrellas en el diagrama H-R en la que las estrellas se encuentran dispersas y que nos muestra la relación entre las luminosidades y la comparación de sus estrellas efectivas.

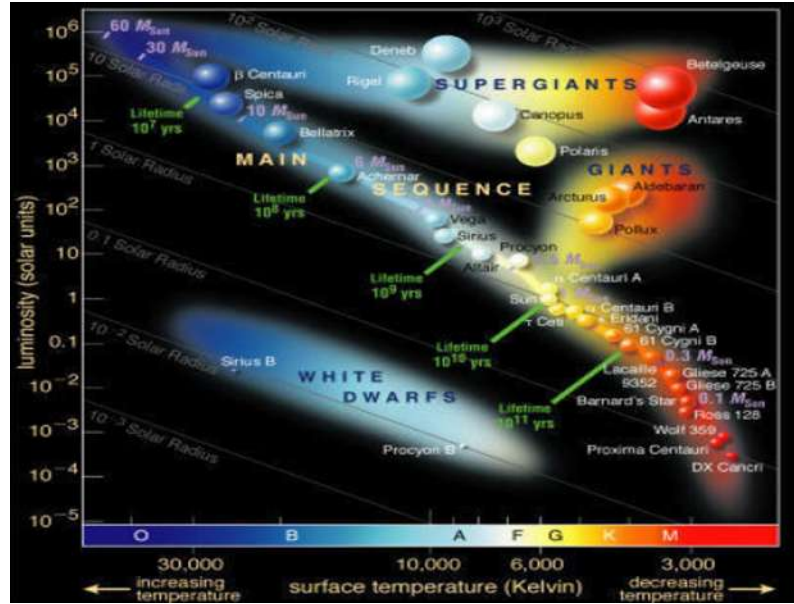


Figura 2.3: que muestra el Diagrama H-R en el que las estrellas se encuentran dispersas y que indica la relación entre las luminosidades de las estrellas en comparación de sus temperaturas efectivas.[2]

Para que se pueda describir un cuerpo es necesario conocer tanto de sus propiedades geométricas como también sus propiedades físicas. Chandrasekar demostró que las estrellas poseen simetría esférica, la cual esta relacionada con un radio finito y volumen bien definido.[2]

Inclusive como función del radio les asociamos las propiedades físicas o termodinámicas, tales como, masa, densidad, presión, temperatura, entropía, coeficiente de viscosidad, potencial gravitacional y funciones relacionadas con el movimiento del fluido.

Para resolver el sistema generado para estas funciones se requiere introducir una ecuación de estado $p = p(\rho)$ y decidir el tipo de fluido a trabajar.

En esta tesis se trabaja con un fluido ideal lo cual implica que las expresiones matemáticas se reducen. Se deben satisfacer las siguientes propiedades para funciones de interés en el caso de estrellas Newtonianas.

- El potencial gravitacional φ se elimina (desaparece) cuando el radio tiende a infinito.
- La presión p es una función monótona decreciente.
- Las variables termodinámicas son acotadas

2.2. Teoría de la Gravitación de Newton

La ley formulada por Newton y que recibe el nombre de ley de la gravitación universal, afirma que la fuerza de atracción que experimentan dos cuerpos dotados de masa es directamente proporcional al producto de sus masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que los separa (ley de la inversa del cuadrado de la distancia). La ley incluye una constante de proporcionalidad (G) que recibe el nombre de constante de la gravitación universal y cuyo valor, determinado mediante experimentos precisos, es de: $G = 6,67384 \times 10^{11} \frac{Nm^2}{kg^2}$. La fuerza gravitacional asociada a este potencial la obtenemos mediante el gradiente del potencial $F = -\nabla\phi$.

La ley de la gravitación universal se escribe:

$$\phi(r) = -M \frac{G}{r} \quad (2.1)$$

que denota el potencial gravitacional generada por una configuración de masa M en la región ubicada a una distancia r con respecto a la masa M y donde G es la constante de gravitación universal y r es el radio.

$$F = -\nabla\phi(r) \quad (2.2)$$

continuación

$$F = -G \frac{Mm}{r^2} \quad (2.3)$$

la ecuación 2.2 puede escribirse en forma integral como:

$$M = \int_0^R 4\pi\rho(r)r^2 dr \quad (2.4)$$

Esta ley contempla una constante de acoplamiento G conocida como constante de Gravitación, decae con el inverso de la distancia y esta relacionada con la masa m de la fuente.

2.3. Caso esférico

Para fluidos perfectos en el caso Newtoniano estático y esféricamente simétrico con el cual se inicia la evolución estelar. Para el caso de los modelos más simples contemplan ecuaciones de estado barotrópicas $p = p(\rho)$. Esta ecuación constituye buenas aproximaciones para ciertas regiones de varios tipos de estrellas.

Ecuaciones politrópicas del estilo $p = K\rho^{1+\frac{1}{n}}$ donde K y n son constantes positivas. La ecuación anterior tiene cabida para las simetrías, esto significa que las ecuaciones son más sencillas de manipularse.

En las siguientes líneas se realiza una descripción de estos sistemas estelares.

2.3.1. Sistema Isótropico

Este caso es cuando las presiones tanto tangenciales como radiales son iguales es decir $p_r = p_t$ se supone que la simetría es esférica.

Las ecuaciones que se tienen para describir un fluido perfecto con ecuación de estado politrópica son las siguientes:

$$\frac{dp}{dr} = -\rho(r)\nabla\phi(r) \quad (2.5)$$

donde $p = p(r)$ es la presión generada por la masa $m(r)$ con densidad $\rho = \rho(r)$

$$\frac{dm(r)}{dr} = 4\pi\rho(r)r^2 \quad (2.6)$$

$$\nabla^2\phi(r) = -4\pi\rho(r)G \quad (2.7)$$

La ecuación (2.6) puede escribirse en forma integral como:

$$M = \int_0^R 4\pi\rho(r)r^2 dr \quad (2.8)$$

La ecuación (2.7) se llama ecuación de Poisson para el campo gravitacional ϕ (2.8) y representa la masa total de la estrella con radio es R. Para construir la solución de las ecuaciones (2.5) y (2.6) utilizamos coordenadas esféricas obtenemos

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(\frac{r^2}{\rho} \frac{dP}{dr} \right) + 4\rho = 0 \quad (2.9)$$

y de la ecuación de estado

$$p = K\rho^{1+\frac{1}{n}} \quad (2.10)$$

reemplazando en (2.9) llegamos a la ecuación

$$\frac{K}{r^2} \left(\frac{1+n}{n} \right) \frac{d}{dr} \left(r^2 \rho^{\frac{1}{n}-1} \frac{d\rho}{dr} \right) + 4\rho = 0 \quad (2.11)$$

se hace un cambio de variable $\rho = \rho_c \theta^n$ $\rho = \rho_c$ con el cual la ecuación (2.11) se convierte en:

$$\frac{K}{r^2} (1+n) \rho_c^{\frac{1}{n}} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\theta}{dr} \right) + 4\rho_c \theta^n = 0 \quad (2.12)$$

se realiza un cambio de variable $r = c_1 \xi$ con

$$c_1 = \sqrt{\frac{(n+1)k\rho_c^{\frac{1}{n}-1}}{4}} = \sqrt{\frac{(n+1)p_c}{4\rho_c^2}} \quad (2.13)$$

de manera que los límites

$$\theta(\xi = 0) = 1 \quad (2.14)$$

$$\frac{d\theta}{d\xi}|_{\xi=0} = 0 \quad (2.15)$$

reemplazando la ecuación (2.12) tenemos

$$\frac{1}{\xi^2} \frac{d}{d\xi} \left(\xi^2 \frac{d\theta}{d\xi} \right) + \theta^n = 0 \quad (2.16)$$

La ecuación anterior es conocida como la ecuación de Emden, la cual solo tiene tres soluciones analíticas, que corresponden a $n = 0$ densidad constante, $n = 1$ y $n = 5$. Para $n = 5$ la solución encontrada es:

$$\theta(\xi) = \frac{1}{[1 + \frac{1}{3}\xi^2]^{\frac{1}{2}}} \quad (2.17)$$

Esta función tiende a 0 solo cuando $\xi \rightarrow \infty$ la cual no representa una condición física aceptable, ya que si hacemos los cambios de variable es equivalente a decir que la presión y la densidad se eliminan con un radio infinito. Realizando los cambios de variable encontramos la solución:

$$\rho = \rho_c \frac{1}{[1 + (\frac{1}{3} \frac{r^2}{c_1^2})]^{\frac{5}{2}}} \quad (2.18)$$

$$\rho = \rho_c \frac{1}{[1 + (\frac{1}{3} \frac{r^2}{c_1^2})]^{\frac{5}{2}}} \quad (2.19)$$

$$p = k \rho_c^{\frac{6}{5}} \frac{1}{[1 + (\frac{1}{3} \frac{r^2}{c_1^2})]^{\frac{5}{2}}} \quad (2.20)$$

$$M = 4\pi \rho_c \sqrt{3} R^3 \left(\frac{c^2}{3c^2 + R^2} \right)^{\frac{3}{2}} \quad (2.21)$$

Existen soluciones numéricas con esta ecuación de estado que nos permite encontrar solución con condiciones físicamente aceptables, es decir, con $P(R) = 0$ para un valor finito de R ($R < \phi$) y la condición de que la presión se anule en la superficie de la estrella es restrictiva para la construcción de soluciones, en la siguiente sección damos un modelo que fue propuesto para la densidad y presiones se anulan en la frontera. La solución es analítica.

2.3.2. Modelos sencillos de estrellas

Consideremos un modelo donde la ρ varía linealmente al interior de la estrella $\rho = \rho_c(1 - \frac{r}{R})$ donde ρ_c es la densidad central, r es el radio, R es el radio total. La ecuación de equilibrio hidroestático implica

$$\frac{dp}{dr} = \frac{-m(r)G}{r^2} \rho_c \left(1 - \frac{r}{R}\right) \quad (2.22)$$

La determinación de la presión se realiza luego de la integración de la ecuación (2.6) al reemplazar la forma de la densidad, esto es:

$$\frac{dm}{dr} = 4\pi r^2 \rho_c \left(1 - \frac{r}{R}\right) = 4\pi r^2 - \frac{4\pi r^3}{R} \rho_c \quad (2.23)$$

integrando resulta

$$m(r) = \frac{4\pi}{3} r^3 \rho_c - \frac{\pi r^4}{R} \rho_c \quad (2.24)$$

así que la masa total de la estrella es:

$$M = m(r) = \frac{4\pi R^3}{3} r^3 \rho_c - \pi R^3 \rho_c = \frac{\pi}{3} R^3 \rho_c \quad (2.25)$$

usando este último resultado para eliminar la densidad central, encontramos

$$\rho_c = \frac{3M}{\pi R^3} \quad (2.26)$$

expresando la función de la masa en términos del radio y masa total

$$m(r) = M \left(\frac{4r^3}{R^3} - \frac{3r^4}{R^4} \right) \quad (2.27)$$

reemplazando en (2.6) y (2.27)

$$\frac{dp}{dr} = \frac{\pi G}{r^2} \rho_c \left(\frac{4}{3} r^3 - \frac{r^4}{R} \right) \left(1 - \frac{r}{R} \right) \left(1 - \frac{r}{R} \right) \quad (2.28)$$

$$= -\pi G \rho_c^2 \left(\frac{4}{3} r - \frac{7}{3} \frac{r^2}{R} + \frac{r^3}{R^2} \right) \quad (2.29)$$

integrando desde 0 a r

$$P = P_c - \frac{5}{36} \pi G \rho_c^2 \left(\frac{2}{3} r^2 - \frac{7r^3}{9R} + \frac{r^4}{4R^2} \right) \quad (2.30)$$

donde P_c es la presión central. En la superficie de la estrella $r = R$ la presión debe anularse: $p_c = P(0)$ $P(R) = P_c - \frac{5}{36} \pi G \rho_c^2 R^2 = 0$ por lo tanto, la presión central es de

$$P_c = \frac{5}{36} \pi G \rho_c^2 R^2 \quad (2.31)$$

o

$$P_c = \frac{5}{36} \pi G \frac{9M^2}{\pi^2 R^6} R^2 = \frac{5}{4\pi} \frac{M^2 G}{R^4} \quad (2.32)$$

La cual nos permite encontrar

$$P(r) = \frac{5\pi}{36} G \rho_c^2 \left(1 - \frac{24}{5} \frac{r^2}{R^2} + \frac{28}{5} \frac{r^3}{R} - \frac{9}{5} \frac{r^4}{R^4} \right) \quad (2.33)$$

para la presión como función del radio.

Este modelo cumple con características deseables de que las funciones densidad y presión sean regulares, además de ser funciones monótonas decrecientes, por otro lado la velocidad del sonido $v_s(r) = \frac{dp}{d\phi} = \frac{\frac{dp}{dr}}{\frac{d\phi}{dr}}$ al igual que este modelo existen otros modelos Newtonianos que resultan tener un comportamiento físicamente aceptables, aunque un inconveniente presente en estos es que no tenemos un valor acotado ni para el radio R estelar ni para la masa total M de la estrella. Esto no ocurre en algunos modelos propuestos en el marco de la relatividad general.

En el siguiente capítulo realizamos el planteamiento de las ecuaciones para un modelo estelar con un fluido sin carga anisotropico considerando la teoría de la relatividad general.

Capítulo 3

Modelo compacto relativista sin carga

Como ya se platicó en la introducción los objetos compactos estelares tales como las estrellas de neutrones estan caracterizados por tener una densidad promedio de $\rho = 7 \times 10^{14} \frac{g}{cm^3}$.

En el capítulo anterior presentamos algunos modelos conocidos utilizando la teoría de gravitación de Newton y mostramos que estos no fueron adecuados para describir modelos de objetos estelares físicamente aceptables, aunque en el caso politrópico existen modelos no analíticos que si son físicamente aceptables y describen de manera adecuada estrellas como las enanas blancas que corresponden a $n = 3$, la integración numérica del modelo se puede realizar por diferentes métodos numéricos y sus resultados coinciden con las observaciones.

Sin embargo, la necesidad de utilizar la teoría de la relatividad general es debido al efecto geométrico cuando se consideran objetos compactos con densidad del orden de la densidad nuclear.

Además las observaciones realizadas con respecto a las predicciones planteadas a partir de la suposición de la teoría de la relatividad general como son la precesión del perihelio de mercurio, la desviación de la luz, la radiación cósmica de fondo justifica el empleo de la expansión del universo entre otras la teoría de la relatividad general para describir estrellas densas.

En este capítulo dada la densidad del orden $10^{14} \frac{gr}{cm^3}$ proponemos describirlos por la teoría de la relatividad general de Einstein [52] aunque existen otras teorías de gravitación como la $F(R)$ [55, 56, 57, 58] las teorías de Einstein-Dilaton-Gauss-Bonnet [14], en las que dado los efectos de la densidad son reflejados en la necesidad de introducir los efectos de la curvatura.

Sin embargo, la construcción de modelos analíticos que represente objetos compactos estáticos y esféricamente simétricos en teorías de gravitación distintas a la relatividad general de Einstein es complicado de lograr, principalmente por el orden de diferenciabilidad de las funciones involucradas generando la necesidad de un análisis a partir de métodos numéricos.

El enfoque en este trabajo es la construcción de soluciones analíticas en el marco de la teoría de gravitación de Einstein considerando como fuente de materia un fluido anisotrópico que como se sabe objetos con densidades del orden de la densidad nuclear pueden generar anisotropías en la presión [4, 5].

Lo que tiene sus consecuencias y marca una diferencia entre modelos anisotrópicos e isotrópicos, por ejemplo, la razón de compacidad $u = \frac{GM}{c^2 R} < \frac{4}{9}$ en el caso de un fluido perfecto [43], mientras que para el caso de un fluido con presiones anisotrópicas puede ser mayor a $\frac{4}{9}$ y su valor depende de una relación entre las presiones [59].

Aún considerando modelos con materia incompresible, las diferencias entre modelos isotrópicos y anisotrópicos es notoria, en el modelo propuesto por Schwarzschild la condición de regularidad de la presión en el origen implica $u < \frac{4}{9}$ [15] y en la investigación de Bowers y Liang [8] la razón de compacidad puede ser mayor a $\frac{4}{9}$. El origen de la anisotropía en los modelos de objetos compactos se puede deber a la presencia de transiciones de fase [5] cuando se tienen densidades superiores a la densidad nuclear, en cuyo caso la materia puede estar formada por quarks u, d y s siendo esta más estable que la materia nuclear ordinaria [60], así que los quarks son candidatos para formar estrellas compactas o estrellas extrañas [52].

Algunos de los modelos propuestos tienen como característica su construcción a partir de una ecuación de estado para la presión radial y una forma de la función de masa o densidad. Un modelo para estrellas raras suponiendo un modelo de bolsa MIT con una función de densidad dada [16] es propuesto por Debabrata et al [61] y aplicado para datos observacionales correspondientes a estrellas compactas. La consideración de un modelo con una ecuación de estado de Chaplyging de la forma: $P(r) = \mu\rho - \nu/\rho$ ha sido propuesto por Piyaliry para describir estrellas de quarks.

La ecuación anterior tiene la propiedad de que cerca del centro de la estrella el término que prevalece es el lineal y a medida que nos acercamos a la frontera la contribución del término lineal e inverso de la densidad son del mismo orden de magnitud.

En este trabajo nos planteamos la cuestión del comportamiento de modelos con una ecuación de estado que difiere de la anterior en el término inverso, siendo este reemplazado por un término inverso cuadrático, es decir, una ecuación de estado de la forma $P_r(\varphi) = \mu\rho - \nu/\rho^2$, en este caso cerca de la frontera, el segundo término decrece

más rápido que en el caso lineal permitiendo una región con una densidad mayor cerca del origen que pudiera permitir objetos más compactos.

3.1. Condiciones físicamente aceptables

El tipo de modelo que nos ocupará en esta tesis es el de un fluido con presiones anisótropicas lo que significa que un observador que se mueve a lo largo de las líneas de movimiento del fluido (observador comovi) con cuatriveelocidad u^μ observa que el valor de la presión en la dirección radial y en la dirección espacial perpendicular a la dirección espacial perpendicular a la dirección son distintas.

Para que un modelo anisótropico sea físicamente aceptable independiente de la teoría que empleamos se deben satisfacer condiciones mínimas y estas son:

- (i) La solución debe estar libre de singularidades físicas y geométricas, es decir, valores finitos y positivos de presión central, densidad central y los valores no cero positivos de f y g .
- (ii) Debe existir un valor $r = R$ identificado como el radio de la estrella en donde la presión radial debe anularse ($P_r(R) = 0$) en este valor la presión tangencial y la densidad no necesariamente se anulan, sin embargo, la presión radial y tangencial en el centro de la estrella deben ser iguales.
- (iii) La presión radial debe ser una función monótona decrece como una función de la distancia al radio lo que significa que $(\frac{dp_r}{dr})_{r=0} = 0$ y $(\frac{d^2p_r}{dr^2})_{r=0} < 0$ de manera que el gradiente de la presión $\frac{dp_r}{dr}$ es negativo para $0 < r < R$.
- (iv) La densidad en el centro es máxima y decrece hacia la frontera $(\frac{d\rho}{dr})_{r=0} = 0$ y $(\frac{d^2\rho}{dr^2})_{r=0} < 0$ de manera que el gradiente de densidad $\frac{d\rho}{dr}$ es negativo para $0 < r \leq R$.
- (v) Dentro de la configuración estática la condición de causalidad debe satisfacerse la velocidad del sonido no puede ser mayor a la velocidad de la luz; es decir, $0 \leq v_{sr} = \sqrt{\frac{dp_r}{c^2 d\rho}} < 1$ y $0 \leq v_{st} = \sqrt{\frac{dp_\perp}{c^2 d\rho}} \leq 1$

3.2. La solución sin carga

Para un espacio tiempo estático y esféricamente simétrico podemos expresar el elemento de línea en coordenadas adaptadas (t, r, θ, ϕ) como:

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + g(r)dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (3.1)$$

donde $f(r)$ esta relacionada con la llamada función al corrimiento al rojo gravitacional ϕ

$$\phi = \frac{1}{2} \ln f \quad (3.2)$$

y $g(r)$ se relaciona con la función de masa mediante

$$m(r) = \left(1 - \frac{1}{g}\right) \frac{c^{2r}}{2G} \quad (3.3)$$

Considerando un fluido con presiones anisotrópicas, las ecuaciones que describen su comportamiento son obtenidos a partir de las ecuaciones de Einstein y resultan ser descritas por el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias acopladas:

$$kc^2 \rho(r) = \frac{g'}{rg^2} + \frac{1}{r^2} \left[1 - \frac{1}{g}\right] \quad (3.4)$$

$$kc^2 P_r(r) = \frac{f'}{r} + \frac{1}{r^2} \left[\frac{1}{g} - 1\right] \quad (3.5)$$

$$kP_t = \frac{1}{4fg} \left[2f'' - \frac{f''}{f}\right] + \frac{1}{4fg} \left[\frac{g'}{g} + 2\right] f' - \frac{g'}{2rg^2} \quad (3.6)$$

$$\frac{dP_r}{dt} = -\frac{(c^2 \rho + P_r)}{f} \frac{df}{dr} + \frac{2}{r} (P_r - P_t) \quad (3.7)$$

donde ρ es la densidad del fluido, P_r es la presión radial, P_t es la presión tangencial.

En el caso que la presión radial y la presión tangencial sean iguales el fluido es conocido como fluido perfecto. Para resolver este sistema notemos que de las cuatro ecuaciones (3.5)-(3.8), solo tres de ellas son independientes, la otra puede ser obtenida de las tres anteriores. Por ejemplo, reemplazando en (3.8) la densidad ρ , presión radial P_r y P_t tendríamos que esta se satisface automáticamente.

La estrategia para resolver el problema es imponer dos ecuaciones adicionales, nuestro interés es construir soluciones con una ecuación de estado modificada de Chaplygin que pueda ser comparada con otros modelos y que además sea físicamente aceptable, es decir, la ecuación de estado que aquí suponemos es de la forma

$$P_r(\rho) = \mu c^2 \rho - \frac{\nu}{c^2 \rho^2} \quad (3.8)$$

y además suponemos una forma de la función de masa

$$m = \frac{\alpha r^3}{2(1 + \alpha r^2)} \quad (3.9)$$

lo que implica

$$g(r) = 1 + \alpha r^2 \quad (3.10)$$

Algunas preguntas que abordaremos en este trabajo es como ¿Cuál es el valor de compacidad para nuevos modelos? Las soluciones son estables o inestables. ¿Qué tipo de estrellas observadas puede describir el modelo teórico? Para construir la solución reemplazamos ρ dada por (3.4) y P_r dado por (3.5) en la ecuación de estado 3.8 considerando 3.10 reduciendo tenemos la ecuación

$$\frac{f'}{f} = \frac{\alpha r(\alpha r^2 + 3)\mu}{\alpha r^2 + 1} - \frac{rk^3(\alpha r^2 + 1)^5\nu}{\alpha^2(\alpha r^2 + 3)} + \alpha r \quad (3.11)$$

$$f(r) = C(\alpha r^2 + 3)^{\frac{-40k^3\nu}{\alpha^3}}(\alpha r^2 + 1)^\mu e^{-\frac{k^3}{24} \frac{(3\alpha^5 r^{10} + 5\alpha^4 r^8 + 30\alpha^3 r^6 - 150\alpha^2 r^4 - 828\alpha r^2 + 384)\nu}{\alpha^3(\alpha r^2 + 3)} + \frac{1}{2}(\mu+1)\alpha r^2} \quad (3.12)$$

3.3. Variables hidrostáticas

Substituyendo las soluciones encontradas para las funciones metricas en las ecuaciones (3.4)-(3.7) obtenemos la densidad para la presión radial y presión tangencial

$$\rho(r) = \frac{\alpha(3 + \alpha r^2)}{c^2 k(1 + \alpha r^2)^2} \quad (3.13)$$

$$P_r(r) = \frac{\mu\alpha(3 + \alpha r^2)}{k(1 + \alpha r^2)^2} - \frac{\nu k^2(1 + \alpha r^2)^4}{\alpha^2(3 + \alpha r^2)^2} \quad (3.14)$$

$$P_t(r) = \frac{(6 + \alpha(4 + \alpha r^2)(1 + \alpha r^2)r^2)\alpha\mu}{2k(1 + \alpha r^2)^3} - \frac{\alpha^2(3 + \alpha r^2)^2\mu^2 r^2}{4k(1 + \alpha r^2)^3} - \frac{(1 + \alpha r^2)^3\nu k^2\mu r^2}{2\alpha(3 + \alpha r^2)} - \frac{(3 + \alpha r^2)\alpha^2 r^2}{4k(1 + \alpha r^2)^2} + \frac{(1 + \alpha r^2)^9\nu^2 k^5 r^2}{4\alpha^4(3 + \alpha r^2)^4} \quad (3.15)$$

Otro elemento importante en el análisis de la solución son las velocidades del sonido radial y tangencial definidas como:

$$v_{sr}^2 = \frac{\partial P_r(\phi)}{\partial \phi} = \frac{\frac{dp_r}{dr}}{\frac{d\phi}{dr}} \quad (3.16)$$

$$v_{st}^2 = \frac{\partial P_t(\phi)}{\partial \phi} = \frac{\frac{dp_t}{d\rho}}{\frac{d\phi}{dr}} \quad (3.17)$$

el cálculo de esto nos da:

$$v_{sr}^2 = \mu c^2 + \frac{2\nu c^2 k^3 (1 + \alpha r^2)^6}{\alpha^3 (3 + \alpha r^2)^3} \quad (3.18)$$

$$\begin{aligned} v_{st}^2 = & -\frac{3c^2(1 - \alpha r^2)(3 + \alpha r^2)\mu^2}{4(5 + \alpha r^2)(1 + \alpha r^2)} - \frac{3k^6(1 + 9\alpha r^2 + 2\alpha^2 r^4)(1 + \alpha r^2)^{11}c^2\nu^2}{4\alpha^6(5 + \alpha r^2)(3 + \alpha r^2)^5} \\ & \times \frac{3\nu(1 + 4\alpha r^2 + \alpha^2 r^4)(1 + \alpha r^2)^5 c^2 k^3 \mu}{2\alpha^3(5 + \alpha r^2)(3 + \alpha r^2)^2} \\ & \times \frac{(1 + \alpha r^2)^5 c^2 k^3 (138 + 406\alpha r^2 + 197\alpha^2 r^4 + 40\alpha^3 r^6 + 3\alpha^4 r^8)\nu}{2\alpha^3(3 + \alpha r^2)^4(5 + \alpha r^2)} \\ & \times \frac{(7 - \alpha r^2 + \alpha^2 r^4)c^2 \mu}{(5 + \alpha r^2)(1 + \alpha r^2)} - \frac{c^2(3 - \alpha r^2)}{4(5 + \alpha r^2)} \end{aligned} \quad (3.19)$$

3.4. Condiciones en la frontera

Una vez que hemos obtenido las variables hidrodinámicas en la siguiente sección nos centraremos a la aplicación de las condiciones para encontrar los rangos de las constantes μ , ν , C y α .

La solución debe tener una región conocida como la superficie de la estrella caracterizada porque la presión se anula en ella $P(R) = 0$ esto nos implica el valor de ν

$$\nu = \frac{\mu \alpha^3 (3 + \alpha R^2)^3}{k^3 (1 + \alpha R^2)^6} \quad (3.20)$$

este valor nos permite fijar el valor de ν .

Para obtener las relaciones que se obtienen de imponer las condiciones enunciadas en la sección 4.1 es conveniente redefinir los parámetros como $r = xR$, $\alpha = \frac{y}{R^2}$ donde (x, y) son adimensionales y $\alpha \in [0, 1]$ con $x = 0$ relacionado con el centro y $x = 1$ con la superficie, por lo que lo llamaremos densidad y presiones adimensionales. Y redefiniendo las funciones de densidad y presión como $\bar{\rho} = kc^2 R^2 \rho$, $\bar{P}_r = kR^2 P_r$, $\bar{P}_t = kR^2 P_t$, con estas definiciones las variables y funciones son adimensionales por lo que le llamaremos densidad y presiones adimensionales.

Al realizar cambio de variable la densidad adimensional es:

$$\bar{\rho}(x, y) = \frac{y(x^2 y + 3)}{(x^2 y + 1)^2} \quad (3.21)$$

La presión radial depende de un parámetro más que μ que la densidad proviene de la ecuación de estado.

$$\begin{aligned}
\overline{P}_r(x, y, \mu) = & -\frac{1}{(x^2y+1)^2(1+y)^6(x^2y+3)^2}\mu y^2(x-1)(x+1)(x^2y^2+3x^2y \\
& + 3y+5)(x^8y^6+6x^8y^5+9x^8y^4+x^6y^6+9x^6y^5+31x^6y^4+x^4y^6+39x^6y^3 \\
& + 9x^4y^5+37x^4y^4+75x^4y^3+6x^2y^5+70x^4y^2)+31x^2y^4+75x^2y^3+97x^2y^2 \\
& + 9y^4+63x^2y+39y^3+70y^2+63y+27)
\end{aligned} \tag{3.22}$$

Con esta redefinición la frontera de la estrella se encuentra en $x = 1$ como puede notarse de la relación anterior en este valor $\overline{P}(1, y, \mu) = 0$

La presión tangencial adimensional es dada por:

$$\begin{aligned}
\overline{P}_r(x, y, \mu) = & \frac{1}{4(x^2y+3)^4(1+y)^{12}(x^2y+1)^3}(y^4(x-1)^2(x+1)^2(x^2y^2+3x^2y+3y+5)^2 \\
& (x^8y^6+6x^8y^5+9x^8y^4+x^6y^6+9x^6y^5+31x^6y^4+x^4y^6+39x^6y^3+9x^4y^5 \\
& + 37x^4y^4+75x^4y^3+6x^2y^5+70x^4y^2+31x^2y^4+75x^2y^3+97x^2y^2+9y^4 \\
& + 63x^2y+39y^3+70y^2+63y+27)^2x^2\mu^2 - \frac{1}{2(x^2y+1)^3}(1+y)^6(x^2y+3)^3 \\
& \times (y^2(x^{18}y^{11}+9x^{18}y^{10}+27x^{18}y^9+27x^{18}y^8+27x^{18}y^8+17x^{16}y^{10}+153x^{16}y^9 \\
& + 459x^{16}y^8+459x^{16}y^7+115y^9-x^{12}y^{11}+1035x^{14}y^8-6x^{12}y^{10}+3105x^{14}y^7 \\
& - 15x^{12}y^9+3105x^{14}y^6+375x^{12}y^8-14x^{10}y^{10}+3540x^{12}y^7-84x^{10}y^9+10659x^{12}y^6 \\
& - 210x^{10}y^8+10664x^{12}y^5+501x^{10}y^7-76x^8y^9+6819x^{10}y^6-456x^8y^8 \\
& + 21003x^{10}y^5-1140x^8y^7+21073x^{10}y^4-579x^8y^6-204x^6y^8+7329x^8y^5)
\end{aligned} \tag{3.23}$$

De manera similar tenemos que la velocidad radial adimensional es:

$$\begin{aligned}
\overline{v}_{sr}^2(x, y, \mu) = & \frac{1}{(x^2y+3)^3(1+y)^6}(2x^{12}y^9+18x^{12}y^8+54x^{12}y^7+54x^{12}y^6+12x^{10}y^8 \\
& + 108x^{10}y^7+324x^{10}y^6+324x^{10}y^5+30x^8y^7+x^6y^9+270x^8y^6+6x^6y^8 \\
& + 810x^8y^5+15x^6y^7+810x^8y^4+60x^6y^6+9x^4y^8+375x^6y^5+54x^4y^7 \\
& + 1086x^6y^4+135x^4y^{16}+1081x^6y^3+210x^4y^5+27x^2y^7+405x^4y^4 \\
& + 162x^2y^6+864x^4y^3+405x^2y^5+819x^4y^2+552x^2y^4+27y^6+513x^2y^3 \\
& + 162y^5+486x^2y^2+405y^4+351x^2y+542y^3+423y^2+216y+81)\mu)
\end{aligned}$$

y la velocidad tangencial adimensional es:

$$\begin{aligned}
\bar{v}_{st}^2(x, y, \mu) = & -\frac{3}{4(x^2y+5)(x^2y+1)(1+y)^{12}(x^2y+3)^5} (y^2(x-1)(x+1)(x^2y^2 \\
& + 3x^2y + 3y + 5)(x^8y^6 + 6x^8y^5 + 9x^8y^4 + x^6y^6 + 9x^6y^5 + 31x^6y^4 \\
& + x^4y^6 + 39x^6y^3 + 9x^4y^5 + 37x^4y^4 + 75x^4y^3 + 6x^2y^5 + 70x^4y^2 \\
& + 31x^2y^4 + 75x^2y^3 + 97x^2y^2 + 9y^4 + 63x^2y + 39y^3 + 70y^2 + 63y + 27) \\
& (2x^{16}y^{10} + 18x^{16}y^9 + 54x^{16}y^8 + 54x^{16}y^7 + 21x^{14}y^9 + 189x^{14}y^8 \\
& + 567x^{14}y^7 + 567x^{14}y^6 + 85x^{12}y^8 + 765x^{12}y^7 + 2295x^{12}y^6 + 2296x^{12}y^5 \\
& + 181x^{10}y^7 + x^8y^9 + 1629x^{10}y^6 + 6x^8y^8 + 6x^8y^8 + 4887x^{10}y^4 + 245x^8y^6 \\
& + 8x^6y^8 + 2040x^8y^5 + 48x^6y^7 + 6081x^8y^4 + 120x^6y^6 + 6076x^8y^3 \\
& + 327x^6y^5 + 18x^4y^7 + 1623x^6y^4 + 108x^4y^6 + 4557x^6y^3 + 270x^4y^5 \\
& + 4517x^6y^2 + 431x^4y^4 + 909x^4y^3 + 2025x^4y^2 + 1935x^4y + 15x^2y^3 \\
& - 27y^5 + 135x^2y^2 - 162y^4 + 405x^2y - 405y^3 + 405x^2 - 539y^2 - 396y \\
& - 135)\mu^2) + \frac{1}{2(x^2y+5)(x^2y+3)^4(x^2y+1)(1+y)^6} ((3x^{20}y^{13} + 27x^{20}y^{12}y^{12} \\
& + 81x^{20}y^{11} + 81x^{20}y^{10}58x^{18}y^{12} + 522x^{18}y^{11} + 1566x^{18}y^{10} + 1566x^{18}y^9 \\
& + 482x^{16}y^{11} + 4338x^{16}y^{10} + 13014x^{16}y^8 + 2248x^{14}y^{10} + 2x^{12}y^{12} + 20232x^{14}y^9 \\
& + 12x^{12}y^{11} + 60696x^{14}y^8 + 702x^4y^8 + 94788x^6y^5 + 4212x^4y^7 + 273600x^6y^4 \\
& + 10530x^4y^6 + 272220x^6y^3 + 18743x^4y^5 + 1350x^2y^7 + 52857x^4y^4 + 8100x^2y^6 \\
& + 13193x^4y^3 + 20250x^2y^5 + 127683x^4y^2 + 28234x^2y^4 + 1134y^6 + 31356x^2y^3 \\
& + 6804y^5 + 41418x^2y^2 + 17010y^4 + 34668x^2y + 22818y^3 + 18252y^2 + 10530y \\
& + 4860)\mu) + \frac{1}{4} \frac{x^2y - 3}{x^2y + 5}
\end{aligned} \tag{3.24}$$

Una vez obtenidas estas funciones realizaremos el análisis en la frontera, que en la variable x esta ubicada en $x = 1$.

La densidad en la frontera es:

$$\bar{\rho}(1, y) = \frac{y(3+y)}{(1+y)^2} > 0 \tag{3.25}$$

y esta no impone restricciones puesto que $y > 0$.

La velocidad del sonido tangencial en la frontera parte de la condición

$$P_t(1, y, \mu) > 0 \tag{3.26}$$

obtenemos:

$$\mu \leq \frac{1}{12} \frac{(3+y)(1+y)}{5+y} \quad (3.27)$$

$$\bar{v}_{st}^2(1, y, \mu) = \frac{3(y^4 + 14y^3 + 67y^2 + 138y + 60)\mu}{2(1+y)(3+y)(y+5)} + \frac{-3+y}{4(y+5)} \quad (3.28)$$

Y el resultado de imponer esta sea menor o igual que la de la luz implica.

$$-\frac{(-3+y)(1+y)(3+y)}{6(y^4 + 14y^3 + 67y^2 + 138y + 60)} \leq \mu \quad (3.29)$$

imponiendo que

$$v_{st}^2 < 0 \quad (3.30)$$

si ahora consideramos

$$v_{st}^2(1, y, \mu)R > 0 \quad (3.31)$$

obtenemos esto:

$$\mu \leq \frac{1}{6} \frac{(23+3y)(1+y)(3+y)}{y^4 + 14y^3 + 67y^2 + 138y + 60} \quad (3.32)$$

La velocidad del sonido radial en la superficie es:

$$\bar{v}_{sr}^2(1, y, \mu) = 3\mu \quad (3.33)$$

Y puesto que la velocidad del sonido radial es una función monótona creciente, su máximo valor ocurre en la superficie tenemos que

$$\mu < \frac{1}{3} \quad (3.34)$$

3.5. Condiciones en el origen

De las condiciones impuestas no determinan un intervalo para los parámetros, es necesario imponer condiciones en el origen.

La presión radial en el origen es:

$$\bar{P}_r(0, y, \mu) = \frac{\mu y^2(5+3y)(27+9y^4+39y^3+70y^2+63y)}{9(1+y)^6} > 0 \quad (3.35)$$

con $\mu > 0$, $y > 0$ esta es positiva.

La velocidad del sonido radial en el origen es:

$$\bar{v}_{sr}^2(0, y, \mu) = \frac{(81+216y+423y^2+542y^3+405y^4+162y^5+27y^6)\mu}{27(1+y)^6} > 0 \quad (3.36)$$

con $\mu > 0$, $y > 0$ esta es positiva.

La velocidad del sonido tangencial en el origen es:

$$\begin{aligned}\bar{v}_{sr}^2(0, y, \mu) = & -\frac{3}{20} - \frac{y^2(5+3y)^2(27+9y^4+39y^3+70y^2+63y)^2\mu^2}{1620(1+y)^{12}} \\ & + \frac{(810+1755y+3042y^2+3803y^3+2835y^4+1134y^5+189y^6)\mu}{135(1+y)^6} \\ & + \frac{\mu}{27(1+y)^6}(81+216y+423y^2+542y^3+405y^4+162y^5+27y^6)\end{aligned}\quad (3.37)$$

La presión tangencial en el origen es positiva para $\mu > 0$ $y > 0$ y no impone restricción adicional.

La velocidad del sonido tangencial en el origen podemos expresarla como una ecuación de

$$\bar{v}_{st}^2(0, y, \mu) = a(y)\mu^2 + b(y)\mu + c \quad (3.38)$$

de segundo orden de μ donde (a, b, c) son dadas por

$$\begin{aligned}c &= -\frac{3}{20} \\ b(y) &= \frac{1}{135} \frac{810+1755y+3042y^2+3803y^3+2835y^4+1134y^5+189y^6}{(1+y)^6} \\ a(y) &= -\frac{1}{1620} \frac{(5+3y)^2(27+63y+70y^2+39y^3+9y^4)^2y^2}{(1+y)^2}\end{aligned}\quad (3.39)$$

Esta función no es positiva para todo $\mu, y > 0$.

La restricción de imponer la velocidad del sonido radial positiva en el origen es:

$$\begin{aligned}A = & -(3(-378y^6 - 2268y^5 - 5670y^4 - 7606y^3 + 6084y^2 + (123201y^{12} + 147812y^{11} \\ & + 8131266y^{10} + 27140454y^9 + 61528005y^8 + 1010533656y^7 + 126304309y^6 + 125223102y^5 \\ & + 100616634y^4 + 64466280y^3 + 31540185y^2 + 11372400y + 2624400)^{\frac{1}{2}}) \\ & - 31510y - 1620)(y+1)^6/(y^2(729y^{10} + 8748y^9 + 48114y^8 + 160326y^7 + 360045y^6 \\ & + 572184y^5 + 655021y^4 + 53623y^3 + 302346y^2 + 106920y + 18225)) \leq \mu\end{aligned}\quad (3.40)$$

En la figura 3.1 se impone que la velocidad tangencial del sonido sea menor que la velocidad de la luz, obteniendo las raíces como se muestra en la gráfica, lo que limita el intervalo para y .

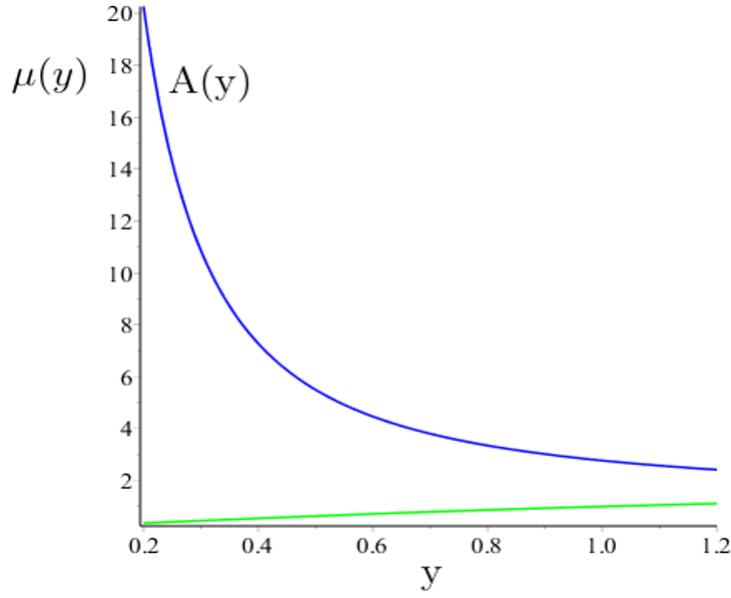


Figura 3.1: comportamiento de μ para estas dos posibles raíces la que impone restricción es la que corresponde a la de menor altura línea verde y acota a μ dada por:

$$\begin{aligned} \mu \leq & (621(y+1)^6)/(378y^6 + 2268y^5 + 5670y^4 + 7606y^3 + 6084y^2 + 3510y + 1620 \\ & + \sqrt{(-378y^6 - 2268y^5 - 5670y^4 - 7606y^3 + 6084y^2 + 3510y + 1620)^2} \\ & \sqrt{-207y^2(3y+5)^2(9y^4 + 39y^3 + 70y^2 + 63y + 27)^2} \end{aligned} \quad (3.41)$$

En conclusión las desigualdades que tenemos son:

$$\begin{aligned} - & (3(-378y^6 - 2268y^5 - 5670y^4 - 7606y^3 - 6084y^2 + (123201y^{12} + (123201y^{12} + 1478412y^{11} \\ & + 8131266y^{10} + 2740454y^9 + 61528005y^8 + 101053656y^7 + 126304309y^6 + 125223102y^5 \\ & + 100616634y^4 + 64466280y^3 + 31540183y^2 + 11372400y + 264400)^{\frac{1}{2}} - 3510y - 1620)(1+y)^6 \\ & / (y^2(729y^{10} + 8748y^9 + 48114y^8 + 160326y^7 + 360045y^6 + 572184y^5 + 65021y^4 + 536238y^3 \\ & + 302346y^2 + 106920y + 18225)) \leq \mu \end{aligned} \quad (3.42)$$

$$\begin{aligned} \mu \leq & (621(1+y)^6)/(378y^6 + 2268y^5 + 5670y^4 + 7606y^3 + 6084y^2(-8019y^{12} - 96228y^{11} \\ & - 529254y^{10} - 1718226y^9 - 3280095y^8 - 1939464y^7 + 8400529y^6 + 28700262y^5 + 46194354y^4 \\ & + 45220680y^3 + 28259685y^2) + 11372400y + 2624400)^{\frac{1}{2}} + 3510y + 1620) \end{aligned} \quad (3.43)$$

El que la velocidad del sonido *radial/seg* es menor que la velocidad de la luz deja la posibilidad de que esta sea negativa, por lo que debemos imponer $v_{st}^2(0, y, \mu) \geq 0$

$$\begin{aligned} \mu \geq & -(3(-378y^6 - 2268y^5 - 5670y^4 - 7606y^3 - 6084y^2 \\ & + \sqrt{(378y^6 - 2268y^5 - 5670y^4 - 7606y^3 - 6084y - 3510y - 1620)^2} \\ & - \sqrt{-207y^2(5 + 3y)^2(27 + 63y + 70y^2 + 39y^3 + 9y^4)^2 - 3510y - 1620}) \\ & (1 + y)^6)/(y^2(729y^{10} + 874y^9 + 48114y^8 + 160326y^7 + 360045y^6 + 572184y^5 + 635021y^4 \\ & + 536238y^3 + 302346y^2 + 106920y + 18225)) \end{aligned} \quad (3.44)$$

En la figura 3.2 existen tres desiguales para μ la que surge de imponer velocidad del sonido positivo en el origen la presión tangencial positiva en la frontera (línea verde) y la desigualdad de imponer la velocidad del sonido tangencial en la frontera menor que la de la luz (de color rojo) la velocidad tangencial del sonido positiva en el origen (línea negra).

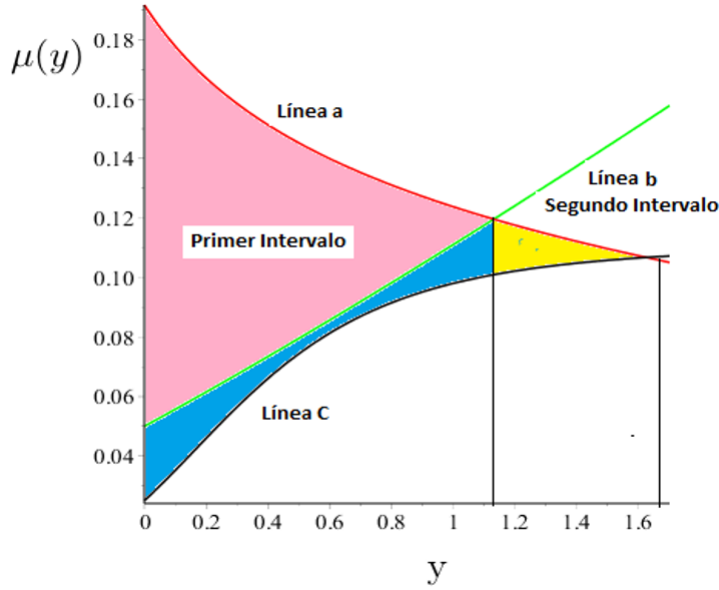


Figura 3.2: La línea azul corresponde a $y = 1.13084072$; $\mu = 0.11964322453$, la línea negra corresponde a $y = 1.13084072$

En la figura 3.3 la línea negra determina una cota inferior general, para la cota superior existen dos intervalos. El primero desde el origen hasta el valor de la intersección de las líneas roja y verde. El segundo intervalo desde la intersección de la línea roja con verde hasta la intersección de la línea roja con negro. Las líneas corresponden a la condición de presión tangencial positivo en la frontera: línea verde, la condición de

la velocidad del sonido tangencial en la frontera menor que la de la luz: línea roja y presión tangencial positivo en el origen: línea color negra.

Primera Región

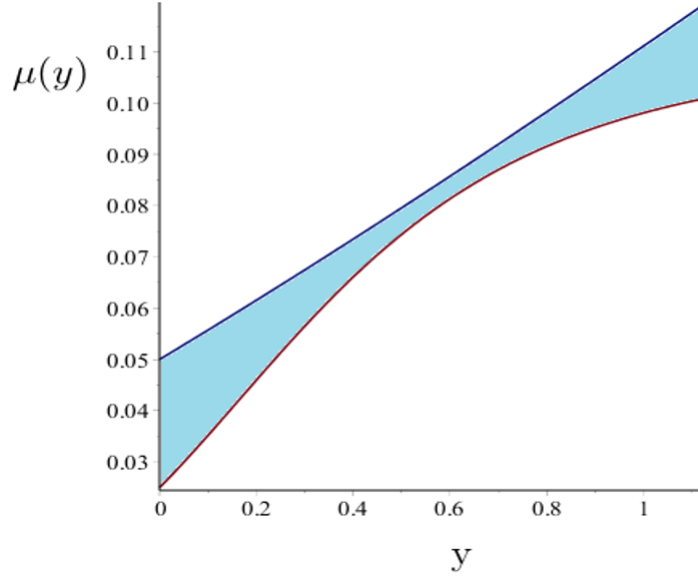


Figura 3.3: Primer intervalo para (μ, y) . El valor de μ se encuentra entre las dos gráficas de las condiciones antes mencionadas, y su valor máximo de $y = 1.13084072$. con valores para $\mu=0.11037240115424$ máximo y $\mu=0.1011015785548$ mínimo para $y = y_m$

La segunda Región esta dada por la figura 3.4 donde se muestra que la velocidad del sonido tangencial es una función que tiene un valor mínimo fuera del centro, por lo que es necesario analizar su valor en el interior. Comencemos con el valor más grande de y .

Algebraicamente la segunda región es dada por:

$$\begin{aligned}
 & (3(378y^6 + 2268y^5 + 5670y^4 + 7606y^3 + 6084y^2 + 3510y + 1620 - (123201y^{12} + 1478412y^{11} \\
 & + 813266y^{10} + 27140454y^9 + 6158005y^8 + 101053656y^7 + 126304309y^6 + 12523102y^5 \\
 & + 100616634y^4 + 64466280y^3 + 31540185y^2 + 11372400y + 2624400)^{\frac{1}{2}})(1 + y)^6) \\
 & / (y^2(729y^{10} + 8748y^9 + 4814y^8 + 160326y^7 + 360045y^6 + 572184y^5 + 655021y^4 \\
 & + 536238y^3 + 302346y^2 + 106920y + 18225)) \leq \mu
 \end{aligned}
 \tag{3.45}$$

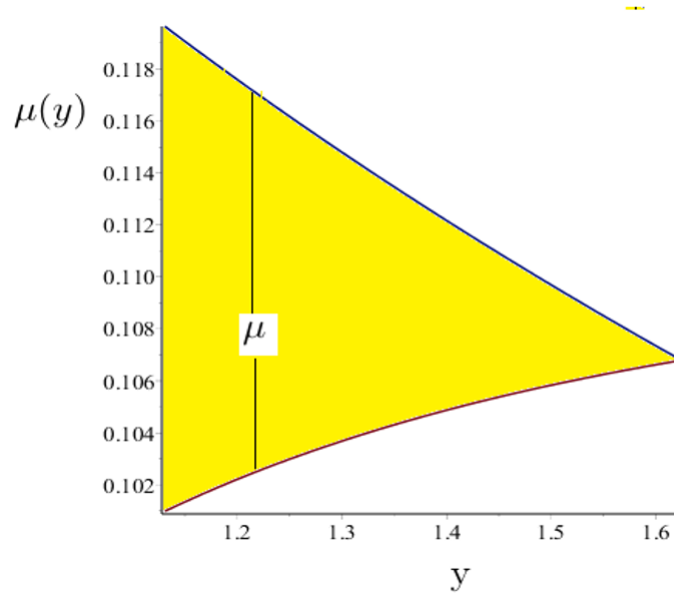


Figura 3.4: Segunda región para (μ, y) . El valor de μ nuevamente se encuentra entre las dos gráficas y el rango para y es $1.13084072 \leq y \leq 1.167084072$

Un punto importante es que la velocidad del sonido tangencial es una función que tiene un valor mínimo fuera del centro, por lo que es necesario analizar su valor en el interior, empezaremos con el intervalo para $y \in (1.13084072, 1.6244138)$.

En la figura 3.5 se muestra un intervalo donde la velocidad del sonido es negativa en el interior por lo que en este intervalo la velocidad del sonido es negativa en el interior por lo que en el intervalo queda descartado. Su comportamiento es como se muestra en la figura 3.5.

En este intervalo la velocidad del sonido es negativa por lo que el intervalo queda descartado. Ahora analizaremos el otro intervalo (primer intervalo).

Consideramos la velocidad del sonido tangencial cerca del origen es decir, $v_{st}^2(0, y, \mu)$

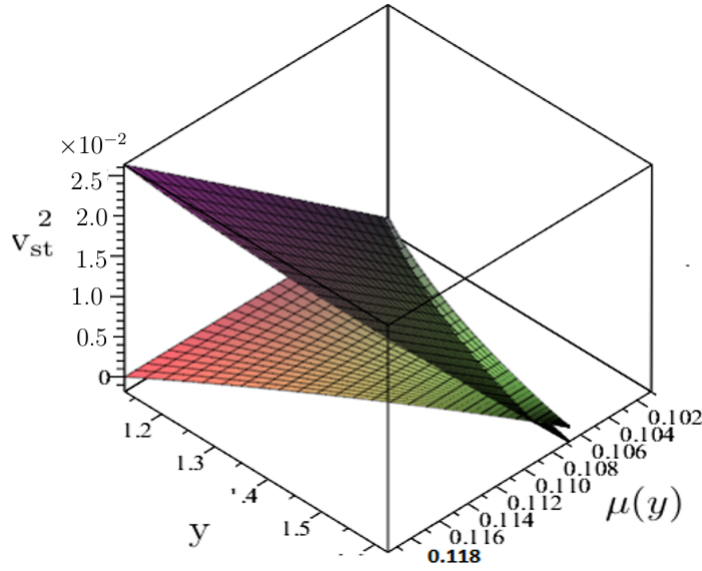


Figura 3.5: velocidad del sonido tangencial en vecindad del origen

En ese intervalo de μ en el que la velocidad tangencial en el origen es positivo para $y = 1.13084072$ es $\mu \in (0.1009563828, 0.119642378)$, aunque en este intervalo existen valores de μ donde la velocidad del sonido tangencial es negativo.

El valor a partir del cual la velocidad deja de tener valores negativos en este intervalo es para $0.1011015785554 \geq$ y sigue permaneciendo positiva cuando $\mu \geq 0.119642378$.

En la figura 3.6 se muestra el comportamiento de la velocidad del sonido para el valor de μ a partir del cual esta es positiva.

La conclusión del análisis realizado para las dos regiones mencionadas, es que la primera región es la que permite soluciones que son físicamente aceptables con $0 \geq y \geq 1.13084072$

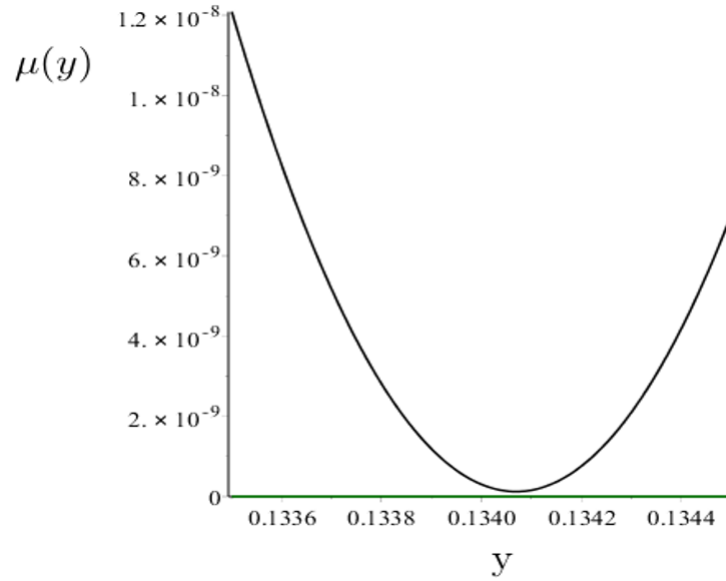


Figura 3.6: Comportamiento de la velocidad del sonido tangencial en la vecindad del origen con $y = 1.13084072$, y $\mu = 0.1011015785554$.

3.5.1. Estrella compacta

Una vez que hemos determinado los intervalos analizaremos el tipo de estrella que puede ser representada con este modelo.

Para esto tenemos que la razón de compacidad la podemos determinar de la condición en la frontera.

$$1 + y = \frac{1}{1 - 2u}. \quad (3.46)$$

donde u es la razón de compacidad definida por

$$u = \frac{GM}{c^2 R} \quad (3.47)$$

que nos determina a que tipo de estrella nos referimos.

Despejando u

$$u = \frac{1}{2} \frac{y}{1 + y} \quad (3.48)$$

y reemplazando el máximo valor admisible de $y = 1.13084072$.

Obtenemos $u = 0.2653508$, este valor indica que tenemos estrellas compactas como estrellas de neutrones.

En lo siguiente representamos las gráficas de las funciones de densidad, presión radial, presión tangencial y velocidades para el máximo de y_m con μ en el intervalo antes determinado.

En la figura 3.7 iniciamos con el comportamiento de la velocidad del sonido tangencial para valores máximos que hemos determinado en la sección anterior.

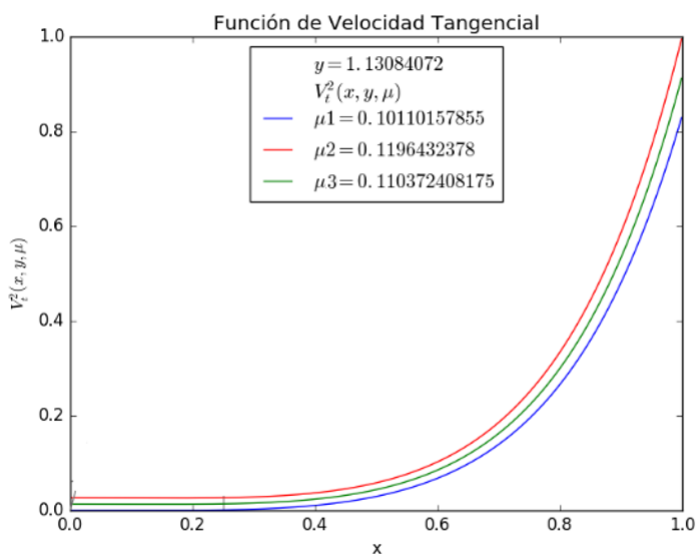


Figura 3.7: Comportamiento de la velocidad del sonido tangencial.

La velocidad tangencial tiene un mínimo en el interior del estrella cerca del origen y a partir de ese valor es monótona creciente y es menor que la velocidad de la luz, v_t^2 , c^2 .

La línea azul corresponde a $y = 1.13084072$; $\mu = 0.1196432378$, la línea negra corresponde a $y = 1.13084072$, $\mu = 0.1103724015424$, la línea verde corresponde a $y = 1.13084072$, $\mu = 0.10110157855$.

En la figura 3.8 se bosqueja la velocidad del sonido radial

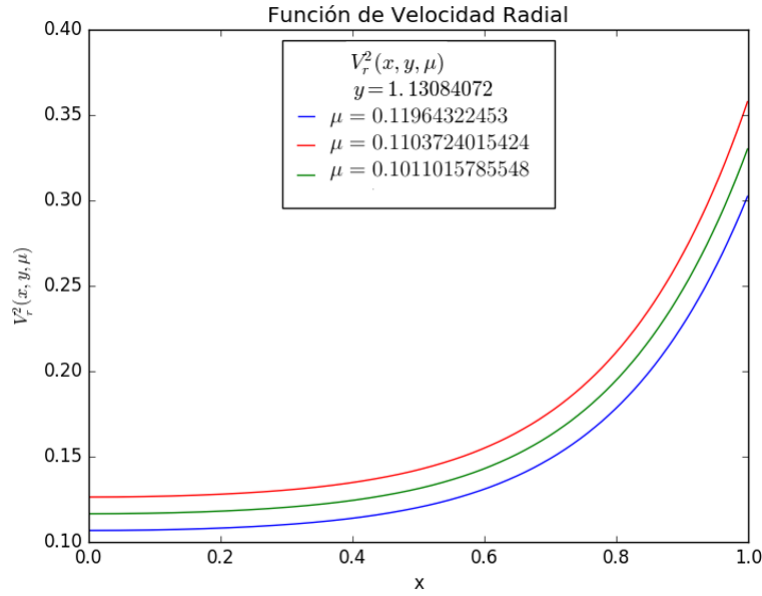


Figura 3.8: Comportamiento de la velocidad del sonido radial.

Como ya se mencionó la velocidad radial del sonido es una función monótona creciente.

Para el máximo valor admisible de $y = 1.13084072 - 0.11964322453$, $\mu = 0.1009863828 - 0.1011015785548$.

La velocidad radial del sonido es c^2 , mientras que en la frontera es 0.3.

La línea azul corresponde a $y = 1.13084072$; $\mu = 0.1196432378$, la línea negra corresponde a $y = 1.13084072$, $\mu = 0.1103724015424$,

La línea verde corresponde a $y = 1.13084072$, $\mu = 0.10110157855$.

En la figura 3.9 se observa la presión tangencial para describir el comportamiento interior en la estrella tenemos: La presión tangencial para y fijo y para diferentes valores de μ . El comportamiento de la presión tangencial se ve modificado. La línea azul corresponde a $y = 1.13084072$; $\mu = 0.1196432378$, la línea negra corresponde a $y = 1.13084072$, $\mu = 0.1103724015424$, la línea verde corresponde a $y = 1.13084072$, $\mu = 0.10110157855$.

Observamos que a medida de que el valor de μ aumenta el valor de la presión tangencial aumenta y en el centro disminuye.

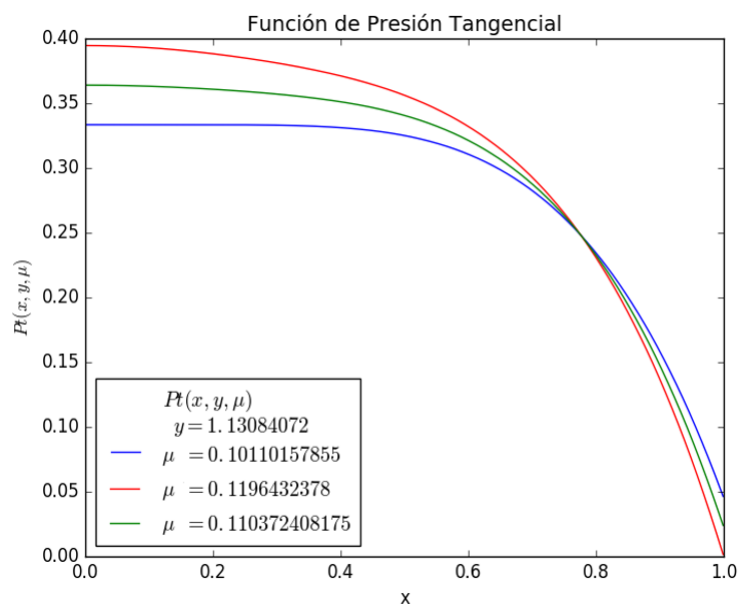


Figura 3.9: Comportamiento de la presión tangencial adimensional.

En la figura 3.10 observa la presión radial para describir el comportamiento interior en la estrella tenemos:

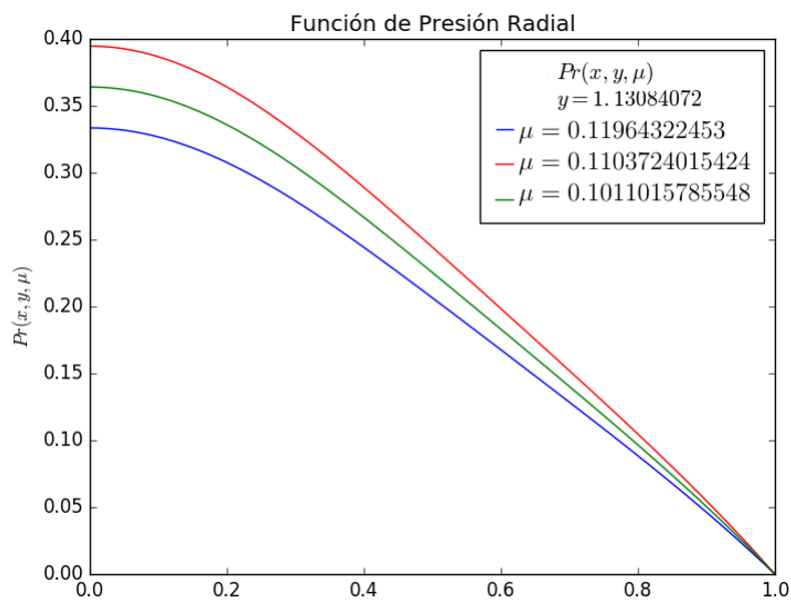


Figura 3.10: Comportamiento de la presión radial.

En la figura 3.10 de la presión radial con $y=1.13084072$ y $\mu = 0.11964322453$, $\mu = 0.1103724015424$, $\mu = 0.1011015785548$ la presión radial es una función regular

monótona decreciente y conforme el valor de μ va disminuyendo.

La presión radial central es mayor conforme la μ aumenta y la presión radial es menor conforme la μ va disminuyendo. La línea azul corresponde a $y = 1.13084072$; $\mu = 0.1196432378$, la línea negra corresponde a $y = 1.13084072$, $\mu = 0.1103724015424$, la línea verde corresponde a $y = 1.13084072$, $\mu = 0.10110157855$.

En la figura 3.11 se gráfica la densidad radial para describir el comportamiento interior en la estrella tenemos:

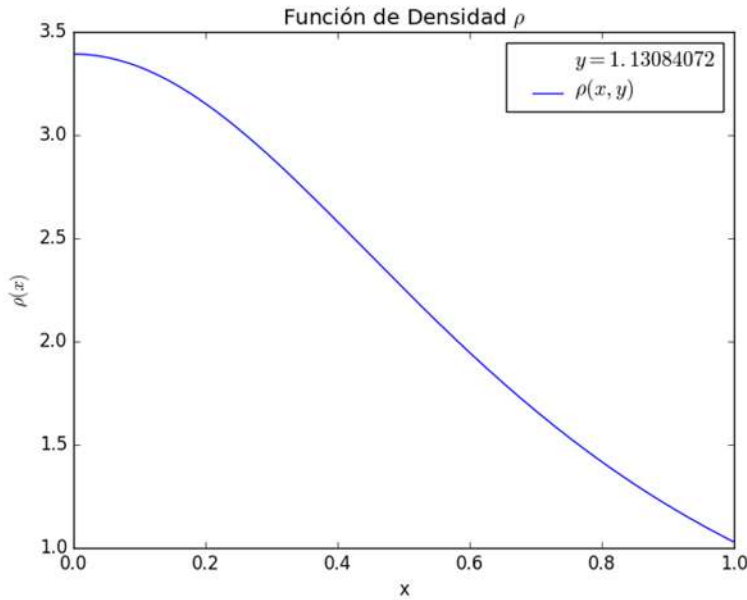


Figura 3.11: La densidad radial para el máximo valor de $y=1.13084072$ y diferentes valores de $\mu \in [0.10110157855, 0.1196432378, 0.110372408175]$ esta gráfica muestra que la densidad es una función monótona decreciente y que el valor de μ no modifica su comportamiento.

En la figura 3.12 se gráfica el comportamiento de la densidad, la presión radial y la presión tangencial, para describir el comportamiento interior en la estrella tenemos:

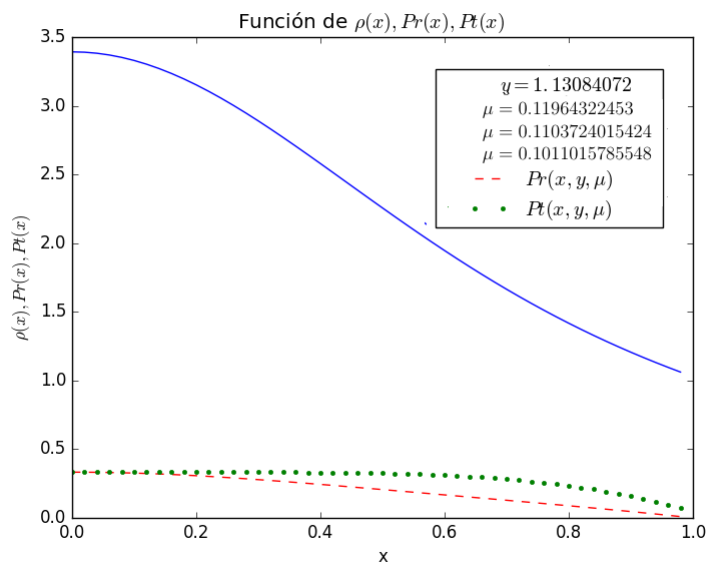


Figura 3.12: Gráfica que muestra la variación de la densidad de la presión radial y la presión tangencial de materia contra x dentro del interior de la estrella.

En la figura 3.13 se gráfica la velocidad radial y la velocidad tangencial para describir el comportamiento interior de la estrella tenemos:

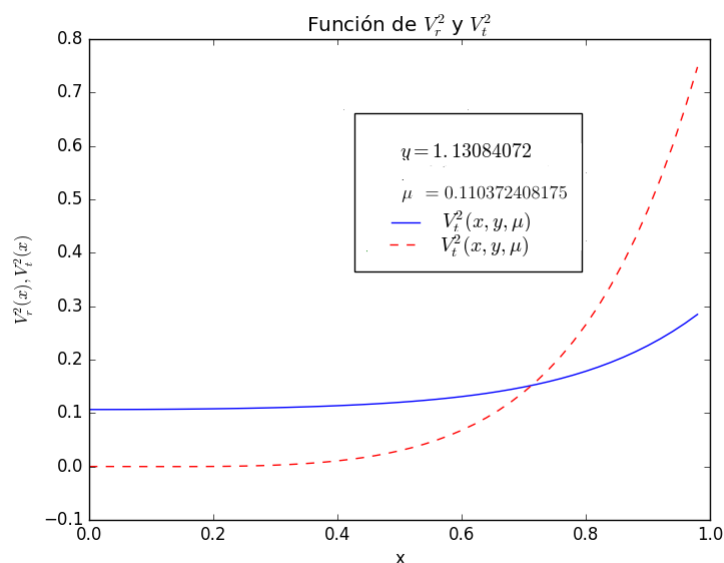


Figura 3.13: Comportamiento de las velocidades del sonido radial y tangencial.

Esta figura 3.13 nos muestra el comportamiento de las velocidades ambas son

monótonas crecientes para $r > 0$, sin embargo, cerca del origen la velocidad del sonido tangencial decrece y admite un mínimo. Este comportamiento esta presente para $y = 1.13084072$

3.5.2. Estabilidad

La estabilidad de acuerdo a Herrera [7] es determinada a partir de la diferencia de velocidades, y es caracterizado por el signo de la diferencia.

En la figura 3.14 se gráfica la presión radial para describir el comportamiento interior de la estrella tenemos:

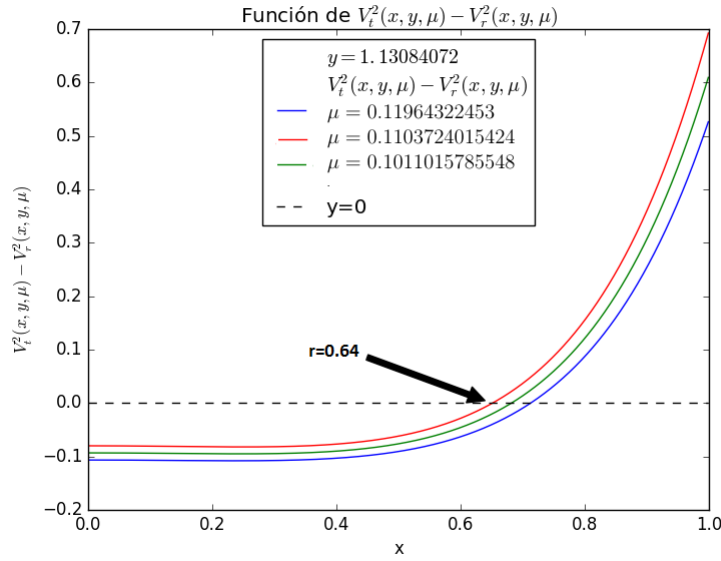


Figura 3.14: Determinación de estabilidad de la diferencia de velocidades radial y tangencial.

La gráfica muestra que existe una región para la que se tiene la estabilidad, en donde r es un valor mínimo en la figura, la herramienta que se utiliza es la de fracturas desarrollada por Herrera [7] en la que se prueba la región donde es estable hidrostáticamente es determinada por los valores negativos de $v_t^2 - v_r^2$.

Capítulo 4

Conclusiones

Se realizó un modelo de un objeto compacto estático esféricamente simétrico en equilibrio hidrostático.

Nuestra solución mostró una región de estabilidad cerca del centro y es inestable en la frontera para valores de uno de los parámetros.

Se hicieron construcciones analíticas que se fundamentaron en la teoría de la gravitación de Einstein tomando como materia un fluido anisótropico.

Tomemos en cuenta que los objetos con densidades del orden de la densidad nuclear pueden generar anisotropías en la presión.

Se tomo en consideración que para el caso de un fluido perfecto, la razón de compacidad es de:

$$u = \frac{GM}{c^2 R} < \frac{4}{9}$$

para el caso de un fluido con presiones anisotropicas puede ser mayor a $\frac{4}{9}$ y este valor depende de una relación entre las presiones.

Se tomó la presión $p(r) = \mu\rho - \frac{\nu}{\rho}$ de acuerdo a la consideración de un modelo.

Se tomó la consideración de un modelo con un estado del tipo Chaplyging de la forma:

$$P(r) = \mu\rho - \frac{\nu}{\rho}$$

que fue propuesto Piyaliry para describir estrellas de quarks. De dicha ecuación anterior se tiene que cerca del centro de la estrella el término que prevalece es lineal y a medida de que nos acercamos a la frontera, la contribución del término e inverso de la densidad son del mismo orden de magnitud.

Por lo que se propuso una ecuación de estado de la forma:

$$P_r(\phi) = \mu\rho - \frac{\nu}{\rho^2}$$

que difiere del caso anterior por un término del inverso cuadrático. Este segundo término decrece más rápido que el caso lineal permitiendo una región con una densidad mayor cerca del origen que pudiera permitir objetos más compactos.

Bibliografía

- [1] J.R. Oppenheimer y G.M. Volkoff. On Massive Neutron Cores. Department of physics, University of California, Berkeley, California.374-381(1936).
- [2] S. Chandrasekhar., *Astrophys.J.* 74, 81 (1931).
- [3] W. Baade y F. Zwicky., *Proc.Nat.Acad.Sci.U.S.*20, 254 (1934).
- [4] R. Ruderman (1972) "Pulsars: Structure and Dynamics", *Astr. Rev. Astrophys.* 427-476.
- [5] Canuto, V., and S.M. Chitre, 1973: Solidification of neutron matter. *Phys. Rev. Lett.*, 30, 99-1002, doi:10.1103/PhysRevLett.30.999.
- [6] Lemaitre, G., *Ann.Soc.Sci.Bruxelles*, A53, 97 (1933).
- [7] L.Herrera. Cracking of self-gravitating compact objects. *Phys.Lett.*,A165,206 (1992),*ibid.*188,402(1992).
- [8] R. Bowers and E. Liang (1974), *Astrophys. J.* **188** 657.
- [9] M.Consenza, L.herrera, M.E. y L.Written. Evolution of radiating anisotropic spheres in general relativity. *Phys.Rev.D*25, 2527(1982).
- [10] H. Bondi., *Mon.Not.R.Astron.Soc.*, 259, 365 (1992).
- [11] A.Diprisco, E. Fuentemayor, L.Herrera y V.Varela. Tidal forces and fragmentation of self-gravitating compact objects. *Phys.Lett.*,A165,195,23(1994).
- [12] M. Esculpi, M. Malaver y E. alomá. A comparative analysis of the adiabatic stability of anisotropic spherically symmetric solutions in general relativity. *Gen.Relat.Grav.* 39, 633.(2007).
- [13] N Pant (2010), A. Schmitt. Dense Matter in Compact Stars. A pedagogical introduction.
- [14] Paolo Pani, Emanuele Berti, Vitor Cardoso, and Jocelyn Read
- [15] R. M. Wald (1984), *General Relativity* (Univ. Chicago Press, Chicago).

- [16] M.K. Mak, T. Harko, *Chine. J.f Astron. Astrophys.* 2, 248 (2002). 10)
- [17] *ian Read Path diccionario de Astronomía.*
- [18] L.Herrera y J.Ponce de León. Anisotropic spheres admitting a one-parameter group of conformal motions *Math.Phys.Lett.*,26, 2018 (1985).
- [19] M.Chaisi y S.D Maharaj.Astrophysics and Cosmology Research Unit, School of Mathematical Sciences, University of KwaZulu-Natal.Gen.Relat.Grav,37, 1177(2005).
- [20] M.K.Gokhroo y A.L.Mehra. Anisotropic spheres with variable energy density in general relativity. *Gen.Relat.Grav*, 26(1),75 (1994).
- [21] N Pant (2012), Relativistic modelling of a superdense star containing a charged perfect fluid, *Gravitation and Cosmology* (2012), DOI 10.1134/S0202289312030073.
- [22] Saibal Ray y Basanti Das Tolman-Baxin type static charged fluid sphere in general relativity, *Mon Not. R Astron Soc.* 349, 1331-1334(2004).
- [23] *Dense Matter in Compac Stars a pedagogical introduction.* A. Schmitt. Springer
- [24] Demiansti, M, *Relativistic Astrophysics in International Series in Natural Philosophy*, Vol 11 Edited by P. Ter Har Pergamon Press Oxford (1985).
- [25] Glendenning W. K, *Compact Stars*, Springer Verlag New York (2000).
- [26] Y.K. Gupta y A Maurya (2011), “.A class of charged analogues of Durgapal and Fuloria superdense star”, *Astrophys Space Sci* Vol 331, pp 135-141.
- [27] Petarpa Boonserm, *Some exact solutions in general relativity*, 2005. 165pp.
- [28] Petarpa Boonserm, Matt Visser, Silke Weinfurtner. Solution generating theorems: perfect fluid spheres and the TOV equation gr-qc/0609099 (2006).
- [29] Petarpa Boonserm, Matt Visser, Silke Weinfurtner, Solution generating theorems for perfect fluid spheres. *J.Phys.Conf.Ser.* 68 (2007) 012055 DOI: 10.1088/1742-6596/68/1/012055.
- [30] Petarpa Boonserm, Matt Visser, Silke Weinfurtner, Generating perfect fluid spheres in general relativity, *Phys. Rev. D*71 (2005) 124307 DOI: 10.1103/Phys-revd.71.124037.
- [31] Petarpa Boonserm, Matt Visser, Silke Weinfurtner, Solution generating theorems for the TOV equation, *Phys.Rev. D*76 (2007) 044024 DOI: 10.1103/Phys-revd.76.044024.
- [32] Y.K. Gupta y A Maurya (2011), “.A class of charged analogues of Durgapal and Fuloria superdense star”, *Astrophys Space Sci* Vol 331, pp 135-141.

- [33] Philosophiænaturalis principia mathematica by Isaac Newton (copia personal de Newton de la primera edición y anotada por él.) University of Cambridge.
- [34] Albert Einstein, "Zur Elektrodynamik Bewegter Körper, Annalen der Physik 17, 891-921 (1905).
- [35] See Schwarzschild, K. (1916). "Über das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der Einsteinschen Theorie". Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften 7: 189–196. Bibcode:1916AbhKP.....189S. Or the text of the original paper, in Wikisource Translation: Antoci, S.; Loinger, A. (1999). "On the gravitational field of a mass point according to Einstein's theory". arXiv:physics/9905030 [physics].
- [36] S. Weinberg, (1972) Gravitation and Cosmology.
- [37] Tolman R. C, Static Solutions of Einstein's field equations for spheres of fluid, Phys Rev, 55, 364-373 (1939).
- [38] Selcuk S. Bryan, Solutions of Einstein field equations for static fluid spheres.
- [39] John J Matese y Patrick G Whitman, New method for extracting static equilibrium configurations in general relativity, Phys Rev D vol 22 Num 6 1270-1275 (1980).
- [40] P. N Pant, Varieties of new classes of interior solutions in general relativity, Astroph. and space Science, Vol 215. No. 1 97-109 (1994).
- [41] G. D Birkhoff, Relativity and Modern Physics. Advanced University Press, Cambridge (1923).
- [42] Nils Voje Johansen y Finn Raundal, On the discovery Birkhoff's theorem, physics/0508163v2(2005).
- [43] H. Buchdahl (1959), General Relativistic Fluid Spheres, Phys. Rev., 116, 1027.
- [44] A Comprehensive Introduction to Differential Geometry, The Frobenius integrability theorem; first version. pp 192.
- [45] Jointly y H. Andreasson (2009), Bounds on M/R for static objects with a positive cosmological constant, Classical and Quantum Gravity 26 195007 [0904.2497 gr-qc].
- [46] Jointly y Harko (2007), Minimum mass-radius ratio for charged gravitational objects, General Relativity and Gravitation 39 (2007) 757-775 [gr-qc/0702078].
- [47] M Mak, Peter N. Dobson Jr. y T. Harko (2001). Maximum Mass-Radius Ratios for Charged Compact General Relativistic Objects, Europhys.Lett. 55 310-316.
- [48] Sharma R, Mukherjee S y Maharaj S D (2001), General Solution for a Class of Static Charged Spheres, Gen. Relativ. Gravit. Vol 33 pp 999 -1009.

- [49] M Murad y S Fatema (2012), A family of well behaved charge analogues of Durgapal's perfect fluid exact solution in general relativity, arXiv:1210.0712 [gr-qc].
- [50] N Pant (2011), New class of Well behaved exact solutions of relativistic charged white-dwarf star with perfect fluid, Astrophysics and Space Science (2011), DOI 10.1007/s10509-011-0720-z.
- [51] R Tolman (1939), Static Solutions of Einstein's Field Equations for Spheres of Fluid, Phys. Rev. 55, 364.
- [52] General Relativity, An introduction for Physicists M. P. HOBSON, G. P. Efstathiou and A. N. L. A. S. E. N. B. Y. Cambridge University Press
- [53] S. Karmakar et al. The role of pressure anisotropy on the maximum mass of cold compact stars. arXiv:0708.3305v1
- [54] Manuel Malaver de la Fuente and María Esculpi. Un modelo de Estrella Anisótropa con densidad variable en Relatividad General. XXII Congreso de Ecuaciones Diferenciales y Aplicaciones XII Congreso de Matemática Aplicada. Palma de Mallorca, 5-9 septiembre 2011.
- [55] E. Babichev and D. Langlois,
- [56] E. Babichev, D. Langlois Relativistic stars in $f(R)$ and scalar-tensor theories, Phys. Rev. D 81:1240 51, 2010 DOI: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.81.124051>
- [57] S. Capozziello, M. De Laurentis, S. D. Odintsov, and A. Stabile Hydrostatic equilibrium and stellar structure in $f(R)$ gravity Phys. Rev. D 83 064004 (2011)
- [58] A. Savas Arapoglu, Cemsinan Deliduman, K. Yavuz Eksi, Constraints on perturbative $f(R)$ gravity via neutron stars,
Compact stars in alternative theories of gravity:
Einstein-Dilaton-Gauss-Bonnet gravity Phys. Rev. D 84, 104035 (2011)
DOI: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.84.104035>
- [59] M Mak, Peter N. Dobson Jr. y T. Harko (2001). Maximum Mass-Radius Ratios for Charged Compact General Relativistic Objects, Europhys. Lett. 55 310-316.
- [60] A.R. Bodmer, Phys. Rev. D 4, 1601 (1971)
- [61] Debabrata Deb, Sourav Roy Chowdhury, Saibal Ray, Farook Rahaman, B.K. Guha A model for anisotropic strange stars
- [62] K.S. Cheng, Z.G. Dai, and T. Lu, Int. J. Mod. Phys. D 7, 139 (1998).

- [63] M.S.R. Delgaty and Kayll Lake (1998). Physical Acceptability of Isolated, Static, Spherically Symmetric, Perfect Fluid Solutions of Einstein's Equations. arXiv:gr-qc/9809013v1. (1998).
- [64] S. Karmakar et al (2007). The role of pressure anisotropy on the maximum mass of cold compact stars. arXiv:0708.3305v1.