



UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN  
NICOLÁS DE HIDALGO

**ESTIMACIÓN DE ESTADO EN SISTEMAS  
ELÉCTRICOS DE POTENCIA  
CONSIDERANDO ATAQUES  
CIBERNÉTICOS**

por

GABRIEL OMAR RUBIO MARROQUÍN

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE

**DOCTOR EN CIENCIAS  
EN INGENIERÍA ELÉCTRICA**

División de Estudios de Posgrado  
Facultad de Ingeniería Eléctrica

ASESOR:

Dr. CLAUDIO RUBÉN FUERTE ESQUIVEL.

MORELIA, MICHOACÁN

FEBRERO 2018





## ESTIMACIÓN DE ESTADO EN SISTEMAS ELÉCTRICOS DE POTENCIA CONSIDERANDO ATAQUES CIBERNÉTICOS

Los Miembros del Jurado de Examen de Grado aprueban la Tesis de Doctorado en Ciencias en Ingeniería Eléctrica, Opción en Sistemas de Eléctricos de Gabriel Omar Rubio Marroquín.

Dr. J. Aurelio Medina Ríos  
Presidente

Dr. Claudio Rubén Fuerte Esquivel  
Director de Tesis

Dr. Elisa Espinosa Juarez  
Vocal

Dr. Juan José Flores Romero  
Vocal

Dr. Cesar Angeles Camacho  
Revisor Externo (UNAM)

Dr. Félix Calderón Solorio  
Jefe de la División de Estudios de Posgrado  
de la Facultad de Ingeniería Eléctrica. UMSNH  
(Por reconocimiento de firmas).

# Resumen

En esta tesis se proponen tres métodos diferentes a los comúnmente usados para resolver el problema de estimación de estado asociado con los sistemas eléctricos de potencia de distribución. En vez de usar métodos directos para la solución del sistema de ecuaciones obtenido por medio de la cuasi-linealización de Gauss-Newton, se propone la aplicación de dos métodos basados en homotopía para obtener la solución. Además, se propone la aplicación de un método de regularización basado en subespacios de Krylov para resolver en forma robusta el sistema cuasi-linealizado. La formulación de problema de estimación de estado en sistemas de distribución es desarrollada en el marco de referencia de secuencia positiva, lo cual reduce significativamente la complejidad de programar un estimador de estado polifásico para sistemas desbalanceados. Así mismo, la red de distribución es también modelada a través de modelos equivalentes de secuencia positiva. La validez y efectividad de los métodos propuestos son numéricamente demostradas en varios sistemas de prueba de distribución.

En el contexto de la estimación de estado de un sistema de potencia, los ciber ataques basados en inyección de datos falsos consisten de corromper un determinado conjunto de mediciones de tal manera que los correspondientes valores residuales de cada medición son muy pequeños. Entonces, estas mediciones erróneas son indetectables cuando un análisis de datos erróneos es realizado, causando una falsa estimación de estado que se considera correcta. Esta tesis también reporta la manera en la cual un ciber ataque puede ser intentado para corromper un conjunto de mediciones disponibles asociadas con la operación de controladores basados en electrónica de potencia: el compensador serie controlado por tiristores (Thyristor-Controlled Series Compensator-TCSC), por sus siglas en inglés, el compensador estático de VARs (Static VAR Compensator-SVC), el transformador defasador (Phase Shifter-PS), el cambiador de tap bajo carga (Load Tap Changer- LTC) y el controlador universal de flujos de potencia (Universal Power Flow Controller, UPFC). Estos ataques ponen en peligro la operación segura de los controladores si es realizada una acción de control basada en esta falsa estimación del estado de operación. Por último, diversos casos de estudio son reportados para ilustrar numéricamente las posibles consecuencias de los ataques no observables.

***Palabras clave: sistemas de potencia, estimación de estado, sistemas no lineales, ataques cibernéticos, controladores FACTS.***

# Abstract

In this thesis, three different approaches to the commonly used in order to solve the state estimation problem associated with electric power distribution systems. Instead of using direct methods for the solution of the equations system obtained through the Gauss-Newton quasi-linearization, the application of two homotopy-based methods is proposed to attain the solution. In addition, the application of a regularization method based on Krylov subspaces is used to solve the quasi-linearized system in a robust form. The formulation of the state estimation problem in distribution systems is developed in the positive sequence frame of reference, which remarkably reduces the complexity of developing a poly-phase unbalanced distribution system state estimator. Also, the distribution network is also modeled through positive-sequence equivalent models. The validity and the effectiveness of the proposed method are numerically demonstrated in several test distribution systems.

In the context of power system state estimation, cyber attacks based on false-data injections consist of corrupting a defined set of measurements in such a way that the corresponding residual value of each measurement is very small. Hence, these erroneous measurements are undetectable when a bad data analysis is performed, causing a false state estimation to be considered correct. This thesis also reports the way in which a cyber-attack can be performed to corrupt an available set of measurements associated with the operation of electronic-based controllers: the thyristor-controlled series compensator (TCSC), the Static VAR Compensator (SVC), the Phase Shifter (PS), the Load Tap Changer (LTC) and the Universal Power Flow Controller (UPFC). These attacks jeopardize the controllers' secure operation if a control action is performed based on this false estimation of the operating state. Finally, several study cases are reported to numerically illustrate the consequences for the unobservable attacks.

# Agradecimientos

Quisiera primeramente agradecer y reconocer a mi asesor Dr. Claudio Rubén Fuerte Esquivel, por su soporte y guía durante este trabajo de investigación. En todas las reuniones, el proporcionó los conceptos y procedimientos en forma clara y precisa. Así también aportó su conocimiento y honestidad, siempre motivándome para mi investigación.

A la División de Estudios de Posgrado de la FIE de la UMSNH, donde tuve la oportunidad de llevar a cabo mis estudios de posgrado, y a las personas que ahí laboran y estudian.

Agradezco y reconozco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT) de México por el apoyo financiero recibido a través de la beca No. 96959.

Quisiera agradecer también a los Profesores Revisores Miembros de Jurado, por el tiempo tomado en la revisión de la tesis.

Finalmente, agradezco a todas las personas que fueron de ayuda en la elaboración de este trabajo.

## Contenido

Resumen.....	i
Abstract.....	ii
Agradecimientos .....	iii
Contenido.....	iv
Lista de Tablas .....	viii
Lista de Figuras.....	ix
Lista de Publicaciones .....	xi
Nomenclatura.....	xii
<b>Capítulo 1    Introducción .....</b>	<b>1</b>
1.1    Justificación y motivación.....	1
1.1.1    Motivación .....	1
1.1.2    Justificación .....	1
1.2    Estado del arte.....	3
1.2.1    Estimación de estado en sistemas de distribución .....	3
1.2.2    Ciberataques en estimación de estado.....	6
1.3    Objetivos de la investigación de la tesis .....	8
1.3.1    Objetivo final de la investigación de la tesis.....	8
1.4    Metodología .....	8
1.5    Originalidad del trabajo .....	9
1.6    Contenido de la tesis .....	10
<b>Capítulo 2    Estimación de Estado en Sistemas Eléctricos de Distribución .....</b>	<b>11</b>
2.1    Introducción .....	11

2.2	Representación de secuencia positiva de una red de distribución para estimación de estado .....	11
2.2.1.	Modelado de línea trifásica en el dominio de las fases.....	12
2.2.2.	Modelado de línea trifásica por equivalente de secuencia positiva .....	13
2.2.3.	Transformadores y reguladores.....	14
2.2.4	Generadores y motores de inducción .....	17
2.3	Formulación de estimación de estado .....	19
2.4	Métodos de regularización .....	23
2.4.1	Regularización mediante mínimos cuadrados y el método Hebden-Newton.....	23
2.4.2	Dos operaciones secuenciales para reducir el número de condición. ....	24
2.5	Método de solución por homotopía .....	25
2.6	Método de solución por normas cuadradas.....	28
2.7	Algoritmo de regularización doble óptimo basado en subespacios de Krylov.....	31
2.8	Casos de estudio.....	34
2.8.1	Comparación de la estimación de estado usando métodos directos e iterativos .....	34
2.8.2	Estimación de estado sistema IEEE de 13 nodos mediciones escasas y pseudo mediciones con los métodos propuestos. ....	36
2.8.3.	Sistema de prueba de IEEE de 34 nodos con mediciones escasas y mayor error.....	39
2.8.4.	Sistema de prueba de Comprehensive Test Feeder usando el método DORA y eliminación de errores gruesos. ....	41

2.8.5.	Sistemas IEEE de prueba de distribución de 34, 37, 123 bus y el <i>Comprehensive Test Feeder</i> con el método de regularización doble óptimo. ....	43
2.9	Conclusiones .....	44
<b>Capítulo 3.</b>	<b>Ataques de Inyección de Datos Falsos en Estimación de Estado.....</b>	<b>45</b>
3.1	Introducción .....	45
3.2	Modelado de la red con controladores SIFLETCA .....	45
3.2.1	Máxima verosimilitud y distribución de probabilidad .....	46
3.3	Método de mínimos cuadrados ponderados .....	48
3.3.1	Solución de las ecuaciones lineales de estimación de estado .....	49
3.3.2	Análisis de datos erróneos.....	50
3.4	Estimación de estado y ataque de inyección de datos falsos .....	51
3.4.1	Ataque de inyección de datos falsos .....	52
3.5	Ecuaciones de potencia de los controladores SIFLETCA .....	52
3.5.1	Compensador serie controlado por tiristores .....	52
3.5.2	Compensador estático de VARs con un transformador .....	53
3.5.3	Transformador defasador .....	55
3.5.4	Cambiador de tap bajo carga.....	57
3.5.5	Controlador de flujo de potencia universal .....	58
3.6	Casos de estudio.....	60
3.6.1	Sistema IEEE de 14 buses.....	60
3.6.1.1	Ataque al TCSC.....	60



3.6.1.2	Ataque al SVC .....	62
3.6.1.3	Ataque al PST .....	62
3.6.1.4	Ataque al LTC .....	63
3.6.1.5	Ataque al UPFC .....	64
3.6.2	Sistema IEEE de 30 buses .....	65
3.6.2.1	Ataque al TCSC .....	65
3.6.2.2	Ataque al SVC .....	66
3.7	Conclusiones .....	67
<b>Capítulo 4</b>	<b>Conclusiones y Contribuciones.....</b>	<b>69</b>
4.1	Conclusiones .....	69
4.2	Contribuciones .....	70
4.3	Trabajos futuros .....	70
<b>Apéndice A</b>	<b>Modelado de línea trifásica en el dominio de las fases .....</b>	<b>72</b>
<b>Apéndice B</b>	<b>Cálculo de matrices de impedancias nodales de transformadores y reguladores.....</b>	<b>77</b>
<b>Apéndice C</b>	<b>Derivación del método Doble Óptimo basado en subespacios Krylov .....</b>	<b>81</b>
<b>Referencias</b>	<b>.....</b>	<b>91</b>

## Lista de Tablas

Tabla 2.1. Comportamiento de la DSSE considerando diferentes métodos de solución. ....	35
Tabla 2.2. Mediciones para la estimación de estado del sistema IEEE de 13 buses. ....	37
Tabla 2.3. Cotejo de los datos del OpenDSS y los DSSE con métodos RK-4, RN-2 y DORA. ....	38
Tabla 2.4. Comparación de los resultados del OpenDSS y la DSSE con el método DORA. ....	40
Tabla 2.5. Mediciones contaminadas en la red Comprehensive Test Feeder. ....	42
Tabla 2.6. Estadísticas del Método de Monte Carlo de la Estimación de Estado para el método DORA en los sistemas de prueba del IEEE de 34, 37, 123 bus y el Comprehensive Test Feeder. ....	43
Tabla 3.1. Valores de las mediciones de los controladores TCSC y SVC-T. ....	61
Tabla 3.2. Variables de estado de EE para controladores SIFLETCA en el caso base y FDIA. ....	61
Tabla 3.3. Mediciones del caso base y con ataques de los controladores PST, LTC y UPFC. ....	63
Tabla 3.4. Variables de estado del caso base y FDIA de los controladores PST, LTC y UPFC. ....	63
Tabla 3.5. Valores de las mediciones de los controladores TCSC, SVC-T. ....	66
Tabla 3.6. Variables de estado de EE para controladores SIFLETCA en el caso base y FDIA. ....	66

## Lista de Figuras

Figura 2.1. Representación general de una línea de cuatro conductores y tierra. ....	12
Figura 2.2. Circuito equivalente de secuencia positiva de una línea de distribución trifásica mutuamente acoplada. ....	14
Figura 2.3. Modelo de circuito acoplado para un transformador estrella aterrizada-delta.....	15
Figura 2.4. Circuito equivalente de secuencia positiva de un transformador estrella aterrizada-delta. ....	16
Figura 2.5. Circuito equivalente de Thevenin de un generador trifásico. ....	18
Figura 2.6. Circuito equivalente de una máquina de inducción. ....	19
Figura 2.7. Funciones típicas de un estimador de estado. ....	20
Figura 2.8. Diagrama de flujo para la DSSE usando el método DORA. ....	33
Figura. 2.9. IEEE 13 Node Test Feeder. ....	34
Figura 2.10. Sistema de prueba de la IEEE de 34 nodos. ....	39
Figura 2.11 Diagrama unifilar del Comprehensive Test Feeder. ....	41
Figura 3.1. Función de densidad de probabilidad gaussiana estándar. ....	47
Figura 3.2. Función de densidad de probabilidad $\rho(\chi^2)$ de la distribución chi-cuadrada $\chi^2_{k,\alpha}$ para ( $k < 30$ ). ....	51
Figura 3.3. Módulo TCSC.....	53
Figura 3.4. Modelo del SVC-Transformador. ....	54
Figura 3.5. Transformador desfasador de dos devanados. a) representación esquemática. b) circuito equivalente. ....	55
Figura 3.6. Transformador desfasador controlado por tiristores de dos devanados.....	56
Figura 3.7. Representación esquemática de un transformador LTC controlado por tiristores.....	58

Figura 3.8	Controlador de Flujo de Potencia Universal: circuito equivalente.....	58
Figura 3.9	Reactancia equivalente del <i>TCSC</i> .....	61

## Lista de Publicaciones

Las publicaciones derivadas de este trabajo de investigación son:

### Conferencia

- G. O. Rubio-Marroquín, C. R. Fuerte-Esquivel and E. A. Zamora-Cárdenas, "State estimation of unbalanced electric distribution systems using positive sequence equivalents and homotopy methods," *2017 IEEE International Autumn Meeting on Power, Electronics and Computing (ROPEC)*, Ixtapa, 2017, pp. 1-6. Electronic ISBN: 978-1-5386-0819-7. Print on Demand(PoD) ISBN: 978-1-5386-0820-3.
- G. O. Rubio-Marroquín, C. R. Fuerte-Esquivel and E. A. Zamora-Cárdenas, "Impact of Bad Data Injection Attacks in the Estimation of FACTS Controllers Parameters," *Ninth Conference on Innovative Smart Grid Technology (ISGT 2018)*, Washington, 2018, pp. 1-5.

## Nomenclatura

### **Terminología:**

$Y_{busL}$ :	Matriz de admitancias nodales de una línea en sistemas de distribución
$b_{ij}$ :	Susceptancia de efecto capacitivo mutuo entre el nodo $i$ y el nodo $j$
$b_{ig}$ :	Susceptancia de efecto capacitivo entre el nodo $i$ y tierra
$Y_{busT}$ :	Matriz de admitancias nodales de un transformador en sistemas de distribución
$Y_{bus}$ :	Matriz de admitancias nodales total en un sistema de distribución
$y_i$ :	Admitancia de cortocircuito del lado primario de un transformador trifásico
$V_p$ :	Voltaje nodal del lado primario de un transformador trifásico
$V_s$ :	Voltaje nodal del lado secundario de un transformador trifásico
$I_p$ :	Corriente nodal del lado primario de un transformador trifásico
$I_s$ :	Corriente nodal del lado secundario de un transformador trifásico
$V_p^0$ :	Voltaje de secuencia cero del lado primario de un transformador trifásico
$E_i^{pha}$ :	Fuente de voltaje trifásica balanceada de un generador trifásico
$Y_{abc}$ :	Matriz de admitancias nodales de un generador en sistemas de distribución
$v_s$ :	Velocidad síncrona
$s$ :	Deslizamiento de la máquina de inducción
$E_g$ :	Voltaje de la fuente de línea a neutro en el circuito equivalente de la máquina de inducción
$R_2/s$ :	Resistencia variable dependiente del deslizamiento $s$ en el lado secundario del circuito equivalente de la máquina de inducción
$r_1$ :	Resistencia del devanado del estator del circuito equivalente de la máquina de inducción
$x_1$ :	Reactancia de dispersión del estator del circuito equivalente de la máquina de inducción
$r_2$ :	Resistencia del rotor del circuito equivalente de la máquina de inducción
$x_2$ :	Reactancia de dispersión del rotor del circuito equivalente de la máquina de inducción
$X_m$ :	Reactancia magnetizante del circuito equivalente de la máquina de inducción

$R_m$ :	Resistencia de pérdidas en el hierro y de fricción de rodamiento y de aire
$I_0$ :	Corriente en el núcleo de la máquina de inducción
$I_f$ :	Corriente en el rotor de la máquina de inducción
$z$ :	Conjunto de mediciones físicas disponibles en la estimación de estado
$x$ :	Vector de variables a resolver en un sistema de ecuaciones
$h(x)$ :	Vector de funciones no lineales correspondiente a las mediciones estimadas de cada elemento de $z$
$e$ :	Error en las mediciones de la estimación de estado
$J(x)$ :	Función objetivo a minimizar en el método de mínimos cuadrados ponderados
$w_i$ :	Peso asignado a la $i$ -ésima medición física $z_i$
$G(x_k)$ :	Matriz de ganancia de coeficientes para cada iteración $k$
$H(x)$ :	Jacobiano de las funciones $h(x)$
$W$ :	Matriz diagonal de pesos con elementos $w_i$
$A$ :	Matriz de coeficientes cuadrada de un sistema de $n$ ecuaciones lineales
$y$ :	Vector de solución de ecuaciones linealizadas en la estimación de estado
$b$ :	Vector de coeficientes independientes de ecuaciones linealizadas
$c(x)$ :	Vector de funciones no lineales de restricciones en el sistema de distribución
$C(x)$ :	Jacobiano de $c(x)$
$L$ :	Función Lagrangiana para la minimización de la estimación de estado
$\lambda_s$ :	Multiplicadores de Lagrange escalados por un factor $\alpha$
$Tol$ :	Tolerancia de convergencia en la solución del sistema no lineal de ecuaciones
$\delta$ :	Parámetro de regularización determinado por el método Hebden-Newton
$T$ :	Precondicionador diagonal izquierdo para reducir el número de condición
$S$ :	Precondicionador diagonal derecho para reducir el número de condición
$C$ :	Matriz de coeficientes equilibrada por los preconditionadores
$S^f$ :	Operación para obtener un elemento del preconditionador $S$
$T^f$ :	Operación para obtener un elemento del preconditionador $T$
$F(x)$ :	Vector de funciones no lineales
$\ F(x)\ _2$ :	Norma Euclidiana de $F(x)$
$\tau$ :	Parámetro escalar artificial de homotopía

$m(\mathbf{x}, \tau)$ :	Función de homotopía entre el intervalo de 0 a 1
$\dot{\mathbf{x}}$ :	Vector de derivadas de las funciones $\mathbf{x}$ respecto al tiempo
$\mathbf{J}_{F(\mathbf{x})}$ :	Jacobiano de $F(\mathbf{x})$
$U(t)$ :	Función escalar creciente en el tiempo que depende de los parámetros $\nu$ y $c$
$\mathbf{D}(\mathbf{x})$ :	Hessiano de $c(\mathbf{x})$
$\mathbf{K}(\mathbf{x})$ :	Hessiano de $h(\mathbf{x})$
$\lambda$ :	Factor en la normalidad en la definición de variedad diferenciable
$\dot{F}(\mathbf{x})$ :	Vector de derivadas respecto al tiempo de $F(\mathbf{x})$
$\eta$ :	Factor de aceleración en el método de solución por normas cuadradas
$\beta$ :	Factor de aceleración de convergencia dinámico de notación de Landau $O(1)$
$m$ :	Número de vectores ortonormales en el método de Arnoldi
$\mathbf{y}_0$ :	Condiciones iniciales del vector de solución $\mathbf{y}$
$\mathbf{r}_k$ :	Vector de residuales en la iteración $k$
$\varepsilon$ :	Tolerancia de convergencia en el algoritmo doble óptimo de regularización
$\gamma$ :	Factor de regularización en el algoritmo doble óptimo de regularización
$\chi^2$ :	Umbral de la prueba de hipótesis con la distribución chi-cuadrada
$\mu_k$ :	Valor usado en el denominador para la precisión de los métodos Krylov
$\mathbf{I}$ :	Vector de corrientes nodal
$\sigma_i$ :	Desviación estándar de la medición $i$
$\alpha$ :	Nivel de significancia en la prueba de hipótesis chi-cuadrada
$\hat{\mathbf{x}}$ :	Variabes de estado estimadas
$\mathbf{R}$ :	Matriz diagonal inversa de $\mathbf{W}$
$\mathbf{S}$ :	Matriz de covariancia residual
$a_i$ :	Ataque a la medición $i$
$P_k$ :	Potencia activa inyectada en el nodo de envío $k$
$Q_k$ :	Potencia reactiva inyectada en el nodo de envío $k$
$P_m$ :	Potencia activa inyectada en el nodo recepción $m$
$Q_m$ :	Potencia reactiva inyectada en el nodo recepción $m$
$X_{TCSC(1)}$ :	Reactancia equivalente del TCSC a frecuencia fundamental



$Y_{SVC-T}(\alpha)$ :	Admitancia equivalente del SVC-T a frecuencia fundamental
$T_v$ :	Relación de voltaje compleja en el PST
$T_i$ :	Relación de corriente compleja en el PST
$\phi_p$ :	Ángulo del tap primario complejo en un PST
$\phi_s$ :	Ángulo del tap secundario complejo en un PST
$T_k$ :	Magnitud del tap complejo en un LTC
$V_{cR}$ :	Fasor de voltaje de la fuente serie en un UPFC
$V_{vR}$ :	Fasor de voltaje de la fuente en derivación en un UPFC
$\sigma_{I_{branch,r}}^2$ :	Desviación estándar cuadrada de medición de corriente real
$\sigma_{I_{branch,i}}^2$ :	Desviación estándar cuadrada de medición de corriente imaginaria

**Siglas:**

AMI	:	Advanced Metering Infrastructure
ANSI	:	American National Standards Institute
BCSE	:	Branch Current State Estimation
DMS	:	Distribution Management Systems
DORA	:	Double Optimal Regularization Algorithm
DSSE	:	Distribution System State Estimation
EE	:	Estimador de Estado
EMS	:	Energy Management Systems
FACTS	:	Flexible AC Transmission Systems
FDIA	:	False Data Injection Attack
LTC	:	Load Tap Changer
LU	:	Factorización de una matriz como el producto de una matriz triangular inferior y una superior
ODE-RK	:	Método de homotopía que usa el Runge-Kutta
PMU	:	Phasor Measurement Unit
PST	:	Phase Shifter Transformer
P-W	:	Método de Peters-Wilkinson
QR	:	Factorización de una matriz como producto de una matriz ortogonal por una triangular superior
RN-1	:	Método de homotopía que usa normas cuadradas y el método Euler sin aceleración
RN-2	:	Método de homotopía que usa normas cuadradas y el método Euler con aceleración fija
RN-3	:	Método de homotopía que usa normas cuadradas y el método Euler con

		aceleración automática
SCADA	:	Supervisory Control and Data Acquisition Systems
SIFLETCA	:	Sistemas Flexibles de CA
SVC-T	:	Static VAR Compensator with a Transformer
SVD	:	Singular Value Decomposition
TCSC	:	Thyristor-Controlled Series Compensator
UPFC	:	Universal Power Flow Controller
WLS	:	Weighted Least Squares
ZIP	:	Modelo de Carga de combinación de Impedancia, Corriente o Potencia Constantes

# Capítulo 1

## Introducción

### 1.1 Justificación y motivación

#### 1.1.1 Motivación

Desde su introducción a finales de la década de 1960s, el estimador de estado (EE) se ha convertido en el núcleo de los sistemas modernos de gestión de energía (Energy Management Systems-EMS) utilizados por los operadores para mantener el sistema eléctrico en su estado de operación normal. Con base en un monitoreo continuo del sistema, el cual permite recolectar mediciones en diferentes puntos del sistema y transmitirlos a un centro de control, el EE proporciona información precisa sobre el estado operativo del sistema con base en un conjunto de mediciones, y una entrada de datos confiable para la ejecución de otras funciones del EMS, tales como estudios de flujos de potencia, flujos óptimos de potencias, análisis de contingencias y despacho económico, entre otros.

#### 1.1.2 Justificación

El empleo de tecnologías de comunicación avanzadas ha permitido la construcción de una infraestructura de medición novedosa y mejorada en los sistemas eléctricos de potencia, en la cual se han integrado unidades de medición fasorial (Phasor Measurement Units-PMUs) junto con el sistema tradicional de adquisición de datos y control supervisorio (Supervisory Control and Data Acquisition Systems-SCADA). Debido a la precisión y velocidad de mediciones provistas por la tecnología de PMUs, así como su característica única de asociar una marca de tiempo a la medición, el monitoreo en tiempo real y la estimación del estado de operación de los sistemas de potencia puede ser realizado en una forma más precisa. Aunque por un lado la EE en sistemas de transmisión ha alcanzado un alto grado de madurez, por otro lado la solución de este estudio en el contexto de los sistemas de distribución puede presentar problemas de mal condicionamiento por los requerimientos de modelado de los componentes eléctricos del sistema. Bajo este razonamiento, y considerando el alto grado de complejidad que existe en monitorear las redes de distribución, la estimación de estado en sistemas de distribución (Distribution System State Estimation-DSSE) representa una gran área de oportunidad para mejorar los procesos de monitoreo de los sistemas de

administración en distribución (Distribution Management Systems-DMS). Cabe mencionar que la investigación de la DSSE empezó a mediados de los 90s, a diferencia de la estimación de estado de sistemas de transmisión que ha sido estudiada y aplicada por varias décadas.

El progreso en la tecnología de comunicaciones y la instalación en curso de PMUs e infraestructuras de medición avanzadas (Advanced Metering Infrastructure-AMI) han abierto la posibilidad de monitorear, operar y controlar los sistemas eléctricos de potencia en tiempo real. En este contexto, los datos crudos recolectados de los sistemas SCADA, PMUs y AMIs son transmitidos al sistema de manejo de energía (Energy Management System, (EMS)) y procesados por un estimador de estado para determinar el estado de operación del sistema, con base en el cual el operador toma las decisiones de control pertinentes para mantener el régimen operativo en un estado normal. Sin embargo, si los datos son transmitidos sin protocolos de seguridad adecuados, y si algunas variables de estado y parámetros del sistema son conocidos a través de un acceso cibernético avanzado a la red de medición y telecomunicación, los valores de las mediciones físicas pueden ser corrompidos, inyectando errores arbitrarios no detectables por un análisis convencional de datos erróneos. Esto resulta en una falsa estimación de las variables de estado que determinan la operación de la red y de las variables de control de dispositivos que permiten cumplir con restricciones operativas del sistema. Una consecuencia de tener un estado del sistema sesgado es que el operador del sistema o los controladores automáticos pueden tomar decisiones y acciones de control incorrectas en detrimento de la operación correcta del sistema; lo cual potencialmente conducirían al sistema a un estado de emergencia manifestado por la disrupción de operaciones, produciendo en eventos de falla en cascada, o peor aún la pérdida de suministro eléctrico en áreas de control del sistema.

La justificación de la inclusión de ataques es mostrar que un estimador de estado es vulnerable a la manipulación de datos. Además, se muestran algunas de las consecuencias que pueden ocurrir en los controladores de electrónica de potencia que se usan en redes de transmisión (Flexible AC Transmission Systems-FACTS). Asimismo, se tendría que buscar alternativas a la detección de mediciones erróneas, a los métodos de estimación de estado y a las restricciones en la formulación del problema.

Finalmente, se debe recalcar que la justificación de esta tesis es debida a la búsqueda de alternativas de solución para tener una estimación de estado más robusta de sistemas eléctrico multifásicos desbalanceados; así como entender la manera en que se pueden realizar ciberataques en sistemas de transmisión con dispositivos controladores, los cuales tienen la finalidad de que el operador del sistema tome decisiones de control con base a estimaciones de estado erróneas.

Con base a lo descrito en los párrafos anteriores, en esta tesis se desarrolla un estimador de estado para sistemas de distribución basado en el criterio estadístico de mínimos cuadrados ponderados, donde las magnitudes y ángulos de voltaje multifásicos son considerados como variables de estado. Además, se desarrolla una metodología que permite analizar ataques cibernéticos indetectables a las mediciones de un sistema eléctrico que contiene controladores de sistemas flexibles de transmisión en corriente alterna (SIFLETCA-FACTS).

## **1.2 Estado del arte**

### **1.2.1 Estimación de estado en sistemas de distribución**

La estimación de estado (EE) es uno de los cálculos más importantes en un sistema eléctrico ya que permite cuantificar su estado operativo en los estados estacionario y dinámico [Abur y Gómez-Expósito, 2002] con base en el conocimiento topológico y paramétrico del sistema [Huang et al., 2012]. Un estimador de estado trabajando en línea debe acceder a una base de datos confiable que es necesaria en todas las acciones de control y operación del sistema eléctrico, empezando con la evaluación de seguridad.

Un estimador de estado completo básicamente hace cinco funciones [Abur y Gómez-Expósito, 2002]: prefiltrado de mediciones, procesamiento topológico, análisis de observabilidad, la propia estimación de estado, y análisis de datos erróneos. El insumo principal para el estimador de estado son las mediciones recolectadas en diferentes puntos de la red eléctrica y enviadas a un centro de control por medio de un sistema de adquisición de datos y control supervisorio (SCADA), una infraestructura AMI y PMUs. Estas mediciones están asociadas a: 1) flujos de potencia activa y reactiva; 2) inyecciones nodales de potencia total activa y reactiva; 3) magnitudes de voltaje; 4) y con el uso de PMUs, fasores de voltaje y corriente. También se consideran mediciones virtuales que

están directamente relacionadas con las restricciones operativas de la red, así como pseudo-mediciones que están basadas en datos históricos o pronósticos.

De manera general, hay dos tipos de propagación de errores en la DSSE que afectan su precisión. La primera es debida a los errores aleatorios asociados con el conjunto de mediciones físicas disponibles [Abur and Gomez-Exposito, 2004], mientras que la segunda está asociada con el nivel de detalle con el cual la red eléctrica es modelada [Kersting, 2012]. Como los algoritmos para la detección e identificación de datos erróneos han alcanzado una madurez en el área de SE, muchos grupos de investigación se han enfocado en propuestas para mejorar la manera en la cual el problema de la DSSE es matemáticamente formulado y resuelto para reducir los errores asociados con las simplificaciones en el modelado de los componentes eléctricos que conforman un sistema de distribución. En este contexto, los esfuerzos se han concentrado en un modelado más preciso de las redes de distribución multifásicas desbalanceadas, donde la dimensión del problema DSSE pudiera ser mucho más grande que los sistemas de transmisión convencionales, aún para sistemas relativamente pequeños [Ranković et al., 2014], [Haughton and Heydt, 2013] y [Peralta et al., 2008]. En este caso, se debe poner una atención especial en el modelado de las posibles conexiones específicas de los devanados de los transformadores trifásicos y de las cargas multifásicas [Peralta et al., 2008], [Chen et al., 1991] y [Xiao et al., 2006]. Con la finalidad de considerar los diferentes tipos de conexiones de estos componentes eléctricos, se ha propuesto la formulación del problema de DSSE mediante la técnica de corrientes de rama (Branch Current State Estimation-BCSE)) [Baran and Kelley, 1995], [Pau et al., 2013], [Deng et al., 2002] y [Wang and Schulz, 2004] y la técnica de la matriz de admitancia nodal  $Y_{bus}$  SE (Y-Bus State Estimation (YBSE)) [Lu et al, 1995] y [Lin and Teng, 1996]. Una propuesta de DSSE basada en el análisis nodal aumentado modificado (Modified Augmented Nodal Analysis, MANA) fue también propuesto para superar limitaciones asociadas con el modelado de componentes eléctricos ideales y taps de transformadores [Therrien et al., 2013].

El método de mínimos cuadrados ponderados (Weighted Least Squares-WLS) y sus variantes siguen siendo los algoritmos más usados para formular el problema de SE en redes eléctricas de transmisión [Ranković et al., 2014], [Haughton and Heydt, 2013], [Baran and Kelley, 1995], [Pau et al., 2013], [Deng et al., 2002], [Wang and Schulz, 2004], [Lu et al, 1995], [Celli et al., 2014]. Sin embargo, cuando éste método es empleado para estimar el estado de operación de las redes de

distribución multifásicas desbalanceadas, el conjunto de ecuaciones resultante de la formulación da lugar a una matriz mal condicionada en la formulación matemática del problema de DSSE. De tal manera, los métodos de solución numérica para un sistema de ecuaciones algebraicas no lineales deben ser seleccionados de manera cuidadosa para evitar problemas de convergencia durante el proceso iterativo de solución. El mal condicionamiento de esta formulación puede estar asociada con submatrices singulares de admitancia derivadas de algunas conexiones específicas de los modelos del transformador, como el estrella-delta [Ranković et al., 2014], [Chen et al., 1991], [Mallik et al., 2012].

En [Janssen et al., 2012] se propone un estimador trifásico que puede usar mediciones trifásicas fasoriales no sincronizadas y sin marcas de tiempo. Este tipo de mediciones puede ser útil para sistemas desbalanceados. Un método trifásico linealizado para DSSE para aplicaciones en sistemas de distribución es propuesto en [Haughton and Heydt, 2013], donde las ecuaciones y las variables de estado son usadas en la forma rectangular. El rol e impacto de PMUs en la DSSE son revisados y analizados en [Macii et al., 2014]. Los resultados confirman que un número limitado de PMUs mejoran la exactitud de DSSE basada en los WLS. Sin embargo, el máximo nivel de mejora en los resultados se presenta cuando aproximadamente un tercio de los nodos o las ramas son medidos con PMUs, sin importar las localizaciones de ellos. El conocimiento de la correlación entre mediciones y pseudo mediciones es crucial para la precisión de la DSSE [Muscas et al., 2014]. Dicho trabajo muestra un análisis exhaustivo del impacto de las correlaciones en la DSSE usando mediciones tradicionales y PMUs, así como el método de solución WLS. El monitoreo y control en tiempo real en DSSE usando datos AMI se presenta en [Baran and McDermott, 2009]. En ese trabajo, se formula el problema de DSSE con base al concepto de corrientes de rama (BCSE), el cual trabaja mejor en redes radiales. En [Feng et al., 2012] se presenta un DSSE usando medidores inteligentes, datos de otros sensores y mediciones SCADA tradicionales. En [Jia et al., 2013] se cuantifica el impacto de las mediciones AMI con el método WLS en un sistema radial bajo varias condiciones. Las evaluaciones caracterizan el comportamiento del estimador WLS mejorado con los datos AMI. En [Baran and Kelley, 1995] se propone un método de BCSE considerando alimentadores con pocos anillos o mallas. En ese trabajo se demuestra que para este tipo de redes la técnica BCSE es computacionalmente más eficiente que los métodos tradicionales basados en formulaciones de voltaje. Para mejorar más la eficiencia computacional el sistema de distribución puede ser reducido sin pérdida de precisión. No obstante, ésta técnica usa el método de barrido o

escalera hacia adelante/atrás, y es principalmente apropiado para redes poco malladas. Con base a lo descrito en [Baran and Kelley, 1995], se hace una evaluación de los métodos WLS y el filtro extendido de Kalman en el contexto de DSSE en [Gelagaev, 2008]. Los resultados indican que el filtro de Kalman necesita menos iteraciones y menos tiempo de cálculo. La debilidad del filtro de Kalman es que necesita más información acerca del estado previo del sistema. Las características y requerimientos básicos de la EE trifásica son establecidos en [Lijun et al., 2011], enfocándose en el método BCSE y la utilización del modelo de información común (Common Information Model-CIM). En [Dzafic et al., 2011] se describe un DSSE trifásico basado en el método WLS y donde las cargas son modeladas en las bases de datos históricas de lecturas de mediciones avanzadas/AMI. Estos datos de carga se utilizan como pseudo mediciones y restricciones de inyección cero.

Un algoritmo de DSSE usando WLS con modelos de generadores eólicos, generadores fotovoltaicos y cargas distribuidas, se propone en [Ranković et al., 2014]. Los datos de generación y demanda son tratados como pseudo mediciones con baja ponderación o bajo peso. Los estados iniciales para GD (generación distribuida) y las cargas son calculados de pronósticos o perfiles de carga diarios, respectivamente. Un algoritmo de optimización con factores de peso variables es utilizado para el desarrollo teórico de un DSSE que considera fuentes renovables de energía [Shabaninia et al., 2012]. Por último, en [Atanackovic and Dabic, 2013] se reportan experiencias en la implementación de aplicaciones avanzadas en tiempo real para distribución, considerando un DSSE en el centro de control BC Hydro.

### **1.2.2 Ciberataques en estimación de estado**

Como se mencionó anteriormente, un conjunto de mediciones se recolecta y transmite al sistema de manejo de energía (Energy Management System-EMS) para ser procesado por un estimador de estado. Una vez estimado el estado del sistema, el operador toma las decisiones de control pertinentes para mantener el régimen operativo en un estado normal. Sin embargo, se ha documentado la corrupción de estos datos o mediciones por medio de ciberataques, sin que estos datos corruptos sean detectados porque los residuales se hacen muy pequeños mediante una combinación lineal de funciones, mediante un análisis de datos erróneos. Lo anterior da como resultado una estimación de estado y toma de decisiones de control erróneas.

Actualmente, el método WLS es la técnica de optimización más popular usada mundialmente para el EE de los sistemas eléctricos de potencia. No obstante, existen reportes que demuestran



como los ataques cibernéticos impactan la precisión de los estimadores de estado basados en WLS. En este contexto, la manera en la cual ciberataques indetectables pueden ser realizados exitosamente por medio de un algoritmo basado en la teoría de grafos es reportada en [Kosut et al., 2010]. La ciber seguridad en un estimador de estado basado en un sistema SCADA fue analizada para ataques sigilosos aplicando perturbaciones a los parámetros del sistema [Teixeira et al., 2010]. Una defensa contra un ciberataque es propuesta en [Kim and Poor, 2011] para una EE lineal aplicando dos algoritmos voraces. En [Liu et al., 2011] se demuestra matemáticamente cómo los valores de las mediciones físicas pueden ser corrompidos por errores arbitrarios, referidos como FDIA (False Data Injection Attack-FDIA), para ser no detectados por un análisis convencional de datos erróneos.

Una estrategia de optimización basada en varios algoritmos se propone en [Qin et al., 2012] para detectar el conjunto de mediciones corrompidas por el ciberataque. Un enfoque apropiado para detectar un área de control sujeta a un ciberataque se reporta en [Ozay et al., 2012] para el caso de una EE descentralizada. El conjunto de las mediciones más vulnerables a un ciberataque se determina en [Hug and Giampapa, 2012] usando el concepto de evaluación de la vulnerabilidad. De manera similar, una técnica para evaluar el conjunto de mediciones críticas que debe ser protegido contra un ciberataque es propuesta en [Gol and Abur, 2013]. Este conjunto es directamente determinado de una matriz de sensibilidades de mediciones. En [Rahman and Mohsenian-Rad, 2013] se muestra como un FDIA indetectable puede ser realizado a un conjunto de mediciones en el marco de referencia de una EE no lineal basada en un sistema SCADA. La misma clase de análisis es también reportada en [Yan, 2013] considerando mediciones provistas por un sistema SCADA y PMUs. En [Yang et al., 2014], se describe una estrategia óptima de FDIA que selecciona un conjunto de mediciones a ser corrompidas para que el operador realice acciones de control que lleven al sistema a un estado de operación extremo de emergencia. Asimismo, también se presenta una manera de detectar estas clases de ataques y de proteger este conjunto de mediciones críticas. Algunas implicaciones de los FDIAs que provocaron el apagón en Ucrania en 2015 fueron reportadas en [Liang et al., 2016]. Finalmente, un modelo de un FDIA con adversarios múltiples y un solo operador de defensa es estudiado en [Sanjab and Saad, 2016].

### **1.3 Objetivos de la investigación de la tesis**

Desarrollar un enfoque original de estimación de estado adecuado para estimar la operación en estado estable de un sistema eléctrico de distribución polifásico desbalanceado, a través del uso de un programa existente de estimación de estado de secuencia positiva, mediante la transformación de la red de distribución a un equivalente en secuencia positiva.

Usar una técnica de ataque cibernético que provoque una estimación falsa del estado operacional de los controladores SIFLETCA. Lo anterior provocará una acción de control incorrecta del dispositivo SIFLETCA que pudiera potencialmente llevar al sistema a una condición operativa de emergencia, o aún peor, que pudiera dañar físicamente a los dispositivos SIFLETCA. Una técnica de protección sería cifrar o encriptar los datos correspondientes a mediciones críticas para la estimación de estado.

#### **1.3.1 Objetivo final de la investigación de la tesis**

El objetivo final de este trabajo es obtener una estimación robusta de sistemas eléctricos de distribución; y mostrar cómo se puede hacer un ciber ataque a las variables de estado de los controladores SIFLETCA. También se mencionan algunas técnicas posibles para protección contra un FDIA como son la encriptación de datos, la redundancia en mediciones, otras formulaciones matemáticas.

### **1.4 Metodología**

La siguiente metodología de investigación ha sido adoptada para lograr los objetivos establecidos para este trabajo de investigación:

- Hacer una revisión exhaustiva de la literatura existente en el área de estimación de estado de sistemas eléctricos de distribución y de ataques de inyección de datos erróneos con un énfasis particular en los modelos matemáticos.
- Derivar un conjunto general de ecuaciones no lineales de los componentes eléctricos más importantes del sistema eléctrico de distribución, desde un contexto de estimación de estado, que relacionan voltajes y corrientes en terminales de cada componente eléctrico polifásico por medio de un circuito equivalente de secuencia positiva.
- Desarrollo de un estimador de estado para sistemas eléctricos de distribución polifásico

desbalanceado que sea robusto ante los problemas de mal condicionamiento numérico asociado a este tipo de redes eléctricas.

- Verificar la pertinencia del estimador de estado propuesto, considerando diferentes sistemas de prueba y algoritmos de solución.
- Desarrollo matemático e implementación computacional de un ataque cibernético dirigido a un estimador de estado no lineal basado en el método de mínimos cuadrados ponderados, que sea indetectable para el análisis de datos erróneos.
- Analizar el ataque cibernético propuesto, el cual pretende dar estimaciones de estado erróneas e indetectables que den lugar a acciones de control equivocadas. Por otro lado, se mencionan algunas técnicas de protección para este tipo de ataques.

### **1.5 Originalidad del trabajo**

Las contribuciones específicas del enfoque propuesto con respecto al estado del arte son las siguientes:

Se desarrolló e implementó un marco teórico para realizar la estimación de estado de sistemas eléctricos de distribución polifásicos desbalanceados en el marco de referencia de secuencia positiva. Para lo anterior se desarrollaron equivalentes de secuencia positiva para componentes eléctricos polifásicos desbalanceados.

Se desarrolló e implementó un estimador de estado de sistemas eléctricos de distribución polifásicos desbalanceados utilizando técnicas de solución robustas basadas en el concepto de homotopía en topología algebraica, de normas residuales y de métodos de regularización. Lo anterior evita la infactibilidad de la solución del conjunto de ecuaciones asociado al problema de estimación debido al problema de mal condicionamiento numérico.

Se desarrollaron ejemplos de la forma en que se puede realizar un ciberataque para corromper un conjunto disponible de mediciones asociadas con el funcionamiento de los controladores electrónicos, es decir, el compensador de serie controlado por tiristores, el compensador VAR estático, el transformador defasador, el transformador con cambiador de tap bajo carga y el controlador universal de flujos de potencia; que pudieran poner en peligro la operación segura del controlador si una acción de control se realiza en base a esta estimación falsa del estado operativo.

Por otro lado, se podrían mostrar variables de estado en estado normal operativo; mientras en realidad los controladores tienen un valor de variables de estado anormal.

## **1.6 Contenido de la tesis**

El resto de esta tesis está organizada en 4 capítulos. A continuación se ofrece una breve descripción de cada uno de estos capítulos:

El Capítulo 2 presenta un enfoque generalizado para realizar la estimación del estado de sistemas de distribución polifásicos desbalanceados en el marco de secuencia positiva. Este enfoque generalizado se aplica a la estimación de estados de diversos sistemas de distribución y sus resultados son comparados con aquellos obtenidos mediante la utilización de otros métodos de solución numérica reportados en la literatura.

En el Capítulo 3 se demuestra la vulnerabilidad de un EE basado en mínimos cuadrados ponderados a ataques de inyección de datos falsos. En este caso, los ciberataques a SCADA y/o mediciones de PMU asociadas con los controladores SIFLETCA son indetectables durante los procesos de detección e identificación de errores gruesos. Además, se presentan resultados numéricos que muestran como la falsa estimación de los parámetros de control de los controladores SIFLETCA puede llevar a decisiones de control erróneas, lo cual puede conducir al sistema a condiciones de operación posiblemente inestables que pueden causar consecuencias desastrosas, como la aparición de una resonancia en los controladores SIFLETCA.

Por último, el Capítulo 4 presenta las conclusiones generales de este trabajo de investigación y las sugerencias sobre áreas relacionadas que requieren mayor investigación.

## Capítulo 2

### Estimación de Estado en Sistemas Eléctricos de Distribución

#### 2.1 Introducción

En este capítulo se propone una metodología novedosa de estimación de estado en la cual se usa un programa secuencia positiva para el análisis de los sistemas eléctricos de distribución polifásicos desbalanceados, mediante equivalentes polifásicos en secuencia positiva. Para lograr este objetivo, la red de distribución es modelada por modelos equivalentes en secuencia positiva. Estos modelos equivalentes son completamente generales en el sentido que representan de manera precisa a los componentes eléctricos multifásicos electromagnéticamente acoplados. Por otro lado, el problema de mal condicionamiento asociado con el conjunto de ecuaciones de la DSSE es superado mediante la aplicación de tres métodos novedosos de solución iterativa de ecuaciones no lineales, de los cuales los dos primeros están basados en métodos de homotopía. El primero usa ecuaciones diferenciales ordinarias que son resueltas por el método de Runge-Kutta de cuarto orden. El segundo está basado en normas cuadráticas con un factor de aceleración, en el cual se asegura la convergencia mediante la reducción del error en la estimación. El último método está basado en subespacios de Krylov y combinaciones lineales que usan un método de regularización. Este método también asegura matemáticamente que el error es reducido durante el proceso iterativo de solución y que se logra rápidamente la convergencia mediante el uso de un factor dinámico. Cabe mencionar que la aplicación de estos métodos numéricos para resolver el problema de mal condicionamiento no ha sido previamente reportada en la solución de la DSSE, por lo que son reportados en detalle. La validez y la efectividad de la aplicación propuesta se demuestran numéricamente en los sistemas de prueba de distribución del IEEE de 13-nodos, 34-nodos, 37-nodos, 123-nodos y el “Comprehensive Test Feeder” [IEEE PES, 2018].

#### 2.2 Representación de secuencia positiva de una red de distribución para estimación de estado

Una red eléctrica de distribución multifásica puede ser representada por una red de secuencia positiva equivalente, donde los elementos multifásicos mutuamente acoplados son modelados como impedancias de secuencia positiva desacopladas electromagnéticamente [Peralta et al., 2008]. Como esta representación de secuencia positiva no añade nuevos buses y mantiene la misma estructura

topológica de la red original, ésta técnica de modelado ha sido seleccionada en este trabajo para representar redes eléctricas de potencia de distribución.

### 2.2.1. Modelado de línea trifásica en el dominio de las fases

Para el análisis de los sistemas de distribución, es necesario modelar líneas aéreas y subterráneas. La impedancia serie de las líneas de una, dos o tres fases consisten en la resistencia serie del conductor, una reactancia serie inductiva asociada a los campos magnéticos rodeando el conductor producida por las corrientes en la línea. Además, la conductancia en derivación y la susceptancia en derivación producida por los campos eléctricos pueden ser incluidas en los parámetros de la línea. La inductancia está relacionada al voltaje inducido por el flujo magnético variable y su derivada respecto al tiempo. La capacitancia es la carga multiplicada por el voltaje entre conductores. Estos cuatro parámetros están distribuidos uniformemente en la línea. A pesar de esto, el circuito equivalente es modelado con parámetros concentrados. Para líneas de distribución largas con parámetros distribuidos, se dividió la línea en dos líneas, con un nodo intermedio, y éstas líneas tuvieron parámetros concentrados. La representación de una línea trifásica conectada del bus de envío  $k$  con nodos  $a, b, c$  al bus de recepción  $m$  con nodos  $A, B$  y  $C$ , despreciando los efectos capacitivos, corresponde a la configuración de cuatro conductores multi-aterizada mostrada en la Figura 2.1. En este caso, se tiene un conductor por cada fase, un conductor neutro y un conductor que representa el retorno por tierra. Notar que solo las impedancias acopladas para la fase  $a$  son mostradas en esta Figura 2.1 [Kersting, 2012].

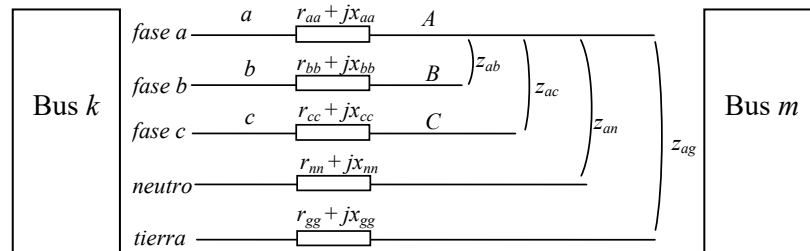


Figura 2.1. Representación general de una línea de cuatro conductores y tierra.

Con base en el Apéndice A, cualquier línea trifásica mutuamente acoplada conectando los nodos  $k$  y  $m$  puede ser representada matemáticamente por (2.1). Aunque se tenga una línea trifásica electromagnéticamente desbalanceada, la matriz de admitancias es simétrica. Por último, la matriz (2.1) corresponde a la representación de la línea trifásica desbalanceada como una red equivalente

de dos puertos de secuencia positiva. Esta red de dos puertos relaciona inyecciones de corriente de fase nodales y voltajes nodales:  $[\mathbf{I}_{abc} \quad \mathbf{I}_{ABC}]^T = \mathbf{Y}_{busL} [\mathbf{V}_{abc} \quad \mathbf{V}_{ABC}]^T$ .

$$\mathbf{Y}_{busL} = \begin{bmatrix} y_{aa} & y_{abp} & y_{acp} & -y_{aa} & -y_{ab} & -y_{ac} \\ y_{abp} & y_{bb} & y_{bcp} & -y_{ab} & -y_{bb} & -y_{bc} \\ y_{acp} & y_{bcp} & y_{cc} & -y_{ac} & -y_{bc} & -y_{cc} \\ -y_{aa} & -y_{ab} & -y_{ac} & y_{aa} & y_{abp} & y_{acp} \\ -y_{ab} & -y_{bb} & -y_{bc} & y_{abp} & y_{bb} & y_{bcp} \\ -y_{ac} & -y_{bc} & -y_{cc} & y_{acp} & y_{bcp} & y_{cc} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{aa} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_{bb} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_{cc} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_{aa} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_{bb} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{cc} \end{bmatrix} \quad (2.1).$$

### 2.2.2. Modelado de línea trifásica por equivalente de secuencia positiva

Con base en la matriz de admitancias nodales (2.1) es posible sintetizar una red libre de acoplamientos bajo el siguiente razonamiento: cada bus de una red equivalente es conectado directamente a cada uno de los otros buses por una línea monofásica ficticia. Mientras que las susceptancias en la diagonal de la segunda matriz pueden conectarse a tierra. El número de líneas ficticias, despreciando los acoplamientos capacitivos, pueden ser calculadas con la ecuación  $Np(Np-1)/2$ , siendo  $Np$  el doble del número de fases (o conductores) de la línea. Para una línea trifásica  $Np$  es 6, lo que significa un número de líneas ficticias igual a  $6(6-1)/2=15$ . Estas líneas ficticias se usan para representar los acoplamientos inductivos y capacitivos mutuos.

Por lo tanto, se conectan esquemáticamente para cada fase cinco líneas, donde cada fase se conecta por una impedancia a las fases restantes del propio nodo de envío  $k$  y todas las fases del nodo de recepción  $m$ , como se muestra en la Figura 2.2. Este procedimiento se usa para conectar a los buses de envío y recepción mediante impedancias [Peralta et al., 2008]; y las conexiones efectivas entre impedancias se hacen en los nodos ilustrados por los puntos negros en la Figura 2.2.

Es importante notar que los elementos en derivación  $b_{ig} \forall i \in \{a, b, c, A, B, C\}$  de la Figura 2.2 no son los mismos que los que se encuentran en la diagonal de matriz de la ecuación (2.1). Esto es porque en la diagonal de la primer matriz de la ecuación (2.1) se debe tener un valor  $y_{ii} \forall i \in \{a, b, c\}$ , lo cual se cumple haciendo

$$b_{ig} = b_{ii} - \sum_{i \neq j} b_{ij} \quad i, j \in \{a, b, c, A, B, C\} \quad (2.2)$$

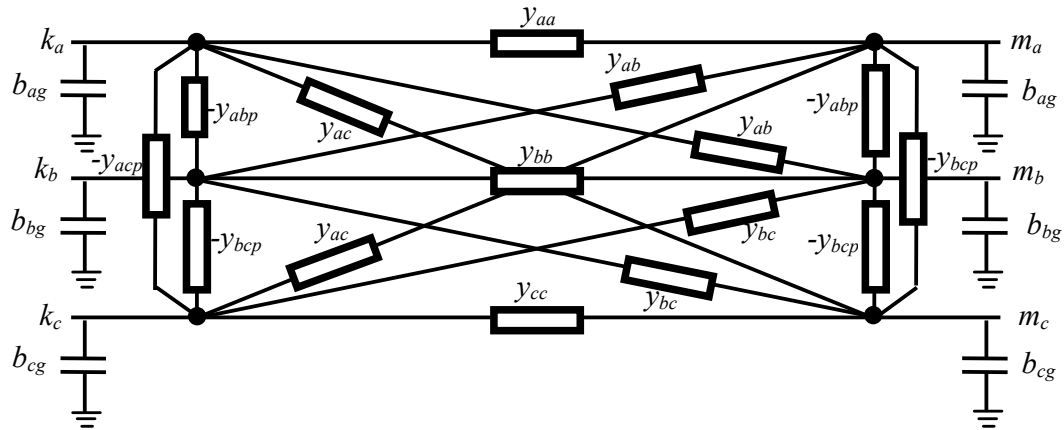


Figura 2.2. Circuito equivalente de secuencia positiva de una línea de distribución trifásica mutuamente acoplada.

Con el procedimiento anterior, en esta representación esquemática, el efecto de admitancia serie queda completamente representado por veintiuna líneas de secuencia positiva: seis elementos diagonales y 15 elementos que integran la submatriz diagonal superior de (2.18). De estos veintiún elementos de línea, quince representan admitancias serie de secuencia positiva  $y_{km} \forall \{k, m\} \in \{a, b, c\}$  entre las fases de cada nodo, mientras seis susceptancias  $-b_{kg} \forall \{k\} \in \{a, b, c, A, B, C\}$  representan el efecto capacitivo en derivación.

Finalmente, el modelo de la Figura 2.2 puede representar una línea trifásica, bifásica o monofásica; omitiendo las correspondientes fases.

### 2.2.3. Transformadores y reguladores

Los transformadores multifásicos son modelados por un conjunto de unidades de transformadores monofásicos, las cuales están conectadas en una manera apropiada para representar una operación multifásica deseada. El método de modelado de transformadores reportado fue desarrollado en [Chen, 1998], y calcula la matriz de admitancias formadas por la conexión de unidades de transformadores monofásicos. Sólo las impedancias de dispersión en las fases son consideradas, lo que significa que las pérdidas en el núcleo son despreciadas. Con base en estos transformadores monofásicos que conforman los transformadores trifásicos, las matrices de admitancia son desarrolladas siguiendo la misma técnica que el modelo de la línea trifásica. Con



base en el análisis nodal y la correspondiente matriz de incidencia  $N$ , se obtiene una matriz de impedancia o admitancia nodal para un transformador trifásico estrella aterrizada-delta en el Apéndice B. En la Figura 2.3 el circuito acoplado representa tres transformadores idénticos. Sin embargo, el mismo procedimiento puede ser usado para tres transformadores distintos.

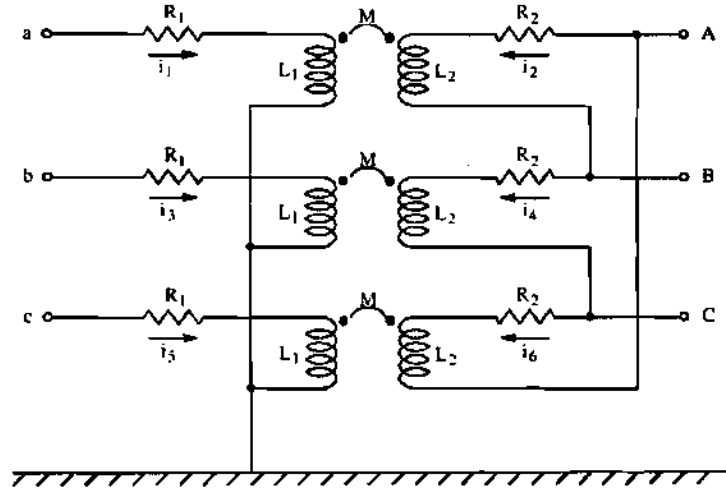


Figura 2.3. Modelo de circuito acoplado para un transformador estrella aterrizada-delta.

El modelo equivalente en secuencia positiva de un transformador trifásico estrella aterrizada-delta que conecta los nodos  $k$  y  $m$  se muestra esquemáticamente en la Figura 2.4 [Peralta et al., 2008]. Las admitancias primitivas están dadas por (2.3), donde  $y_i$  es la admitancia de corto circuito del lado primario, mientras  $\alpha$  y  $\beta$  representan taps fuera del nominal en los lados primario y secundario, respectivamente.

Entonces, para un transformador estrella-delta, la matriz de admitancias con taps fuera del nominal, se modificaría a (2.4). Si se observa la matriz de admitancias (2.4), se puede colocar una admitancia (o impedancia) entre el nodo de envío y el nodo de recepción correspondientes al negativo de la impedancia del renglón y la columna de la matriz de admitancias como se muestra en la Figura 2.4 para usarlas en el equivalente de secuencia positiva [Peralta et al., 2008], donde cada admitancia está dada por (2.3).

$$y_1 = \frac{y_i}{\alpha^2}, \quad y_2 = \frac{y_i}{3\beta^2}, \quad y_3 = \frac{y_i}{\sqrt{3}\alpha\beta} \quad (2.3)$$

$$Y_{busT} = \begin{bmatrix} \frac{y_t}{\alpha^2} & 0 & 0 & -\frac{y_t}{\sqrt{3}\alpha\beta} & \frac{y_t}{\sqrt{3}\alpha\beta} & 0 \\ 0 & \frac{y_t}{\alpha^2} & 0 & 0 & -\frac{y_t}{\sqrt{3}\alpha\beta} & \frac{y_t}{\sqrt{3}\alpha\beta} \\ 0 & 0 & \frac{y_t}{\alpha^2} & \frac{y_t}{\sqrt{3}\alpha\beta} & 0 & -\frac{y_t}{\sqrt{3}\alpha\beta} \\ -\frac{y_t}{\sqrt{3}\alpha\beta} & 0 & \frac{y_t}{\sqrt{3}\alpha\beta} & \frac{2}{3} \frac{y_t}{\beta^2} & -\frac{1}{3} \frac{y_t}{\beta^2} & -\frac{1}{3} \frac{y_t}{\beta^2} \\ \frac{y_t}{\sqrt{3}\alpha\beta} & -\frac{y_t}{\sqrt{3}\alpha\beta} & 0 & -\frac{1}{3} \frac{y_t}{\beta^2} & \frac{2}{3} \frac{y_t}{\beta^2} & -\frac{1}{3} \frac{y_t}{\beta^2} \\ 0 & \frac{y_t}{\sqrt{3}\alpha\beta} & -\frac{y_t}{\sqrt{3}\alpha\beta} & -\frac{1}{3} \frac{y_t}{\beta^2} & -\frac{1}{3} \frac{y_t}{\beta^2} & \frac{2}{3} \frac{y_t}{\beta^2} \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

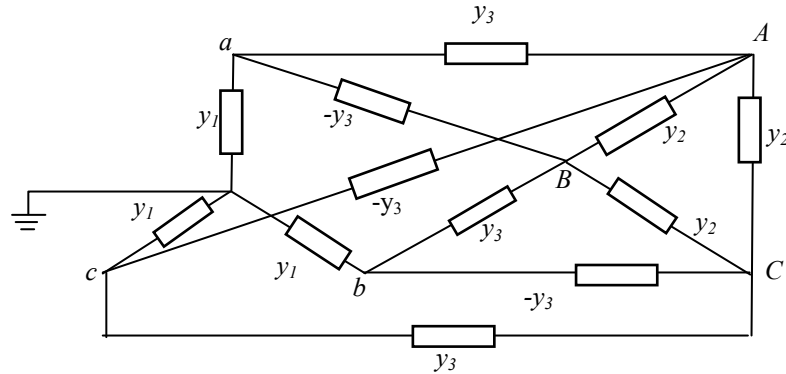


Figura 2.4. Circuito equivalente de secuencia positiva de un transformador estrella aterrizada-delta.

Las relaciones matemáticas entre los voltajes nodales y corrientes asociadas con este transformador estrella aterrizada-delta no tienen una solución única [Xiao et al., 2006]. Esto sucede en varias conexiones comunes del transformador. En esencia, la singularidad es debida a la falta de un voltaje de referencia en el primario o secundario, o ambos. En este caso resulta que tres de las submatrices de  $3 \times 3$  correspondientes a la matriz de admitancias nodales representando esta conexión de transformador son singulares porque si se obtiene su determinante es igual a 0. El determinante se puede calcular por medio de cofactores. Para resolver el problema de la singularidad en [Xiao et al., 2006] se hace el siguiente proceso para calcular las corrientes en el lado secundario  $I_s$ : se escribe en función del voltaje primario  $V_p$  y el voltaje secundario  $V_s$ ,

$$I_s = Y_{sp} V_p + Y_{ss} V_s \quad (2.5)$$

donde  $Y_{sp}$  es la submatriz superior derecha y  $Y_{ss}$  es la submatriz inferior derecha de (2.4). Se designa  $V_p^* = V_p - V_p^0$  que representa los componentes de secuencia no cero, donde  $V_p^0$  es el voltaje de secuencia cero en el lado primario. Se puede transformar la Ecuación (2.5) a,

$$Y_{sp}V_p^* = I_s - Y_{ss}V_s \quad (2.6)$$

Como  $V_p^*$  no contiene componente de secuencia cero, se satisface que  $[1 \ 1 \ 1]V_p^* = 0$ .

Finalmente, se obtiene que

$$Y_{sp}^*V_p^* = I_p^* - Y_{ss}^*V_s \quad (2.7)$$

donde  $Y_{sp}^*$  es obtenida reemplazando el último renglón de  $Y_{sp}$  por  $[1 \ 1 \ 1]$ , mientras que  $I_s$  y  $Y_{ss}$  permanecen igual, excepto que sus elementos en su último renglón son igualados a cero para que se satisfaga (2.7). De tal forma que  $Y_{sp}^*$  no es singular y los componentes de secuencia no cero pueden ser determinados a partir de (2.7).

Entonces, este modelado de los transformadores con submatrices singulares hace a la matriz de admitancias del sistema  $Y_{bus}$  mal condicionada tal que su inversa directa o su factorización presentan inestabilidades numéricas durante el proceso de solución iterativo de las ecuaciones DSSE, lo cual resulta en problemas de convergencia.

Los reguladores de voltaje son modelados como transformadores con cambiadores de tap bajo carga [Kersting, 2012], así que la forma en la cual los transformadores son representados por los equivalentes de secuencia positiva también se aplica en los reguladores del sistema de distribución. Los reguladores contienen un rango de regulación de  $\pm 10\%$ , usualmente en 32 pasos. Los reguladores son usualmente conectados en “Tipo B” de acuerdo con el estándar ANSI/IEEE C57.15-1986. En el programa DSSE, los reguladores tienen un tap específico, el cual es tomado por el programa para modelar el transformador asociado y sus correspondientes admitancias de la  $Y_{bus}$ .

## 2.2.4 Generadores y motores de inducción

A diferencia del modelo tradicional del generador basado en una potencia inyectada, se usa el circuito equivalente de Thevenin de un generador trifásico reportado en [Peralta et al., 2008]. Este modelo es presentado en la Figura 2.5, donde hay tres fuentes de voltaje internas balanceadas

$E_i^{pha}$ ,  $pha \in \{a,b,c\}$  detrás de una matriz de reactancias subtransitorias  $Z_g^{abc}$ . Como la matriz de susceptancias subtransitorias  $Y_g^{abc} = [Z_g^{abc}]^{-1}$  es incluida en la  $Y_{bus}$ ,  $Y_g^{abc}$  es también considerada para representar las mediciones físicas relacionadas a las inyecciones de potencia en el punto de conexión. Considerando que las impedancias de secuencia positiva y negativa son iguales a la reactancia subtransitoria, lo cual produce poco error, la matriz de impedancias interna del generador se vuelve simétrica. Consecuentemente, un generador síncrono trifásico puede ser modelado usando tres generadores de secuencia positiva cuyas impedancias internas  $Z_a$ ,  $Z_b$  y  $Z_c$  son cero. Además, la matriz  $Y_{abc}$  del generador se puede modelar como una red de secuencia positiva similar a una línea de transmisión trifásica que desprecia los efectos capacitivos.

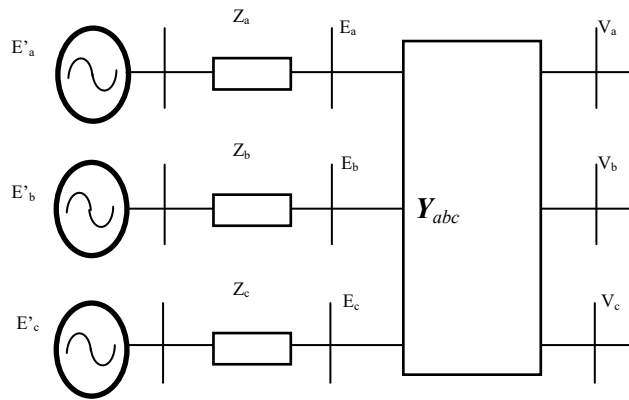


Figura 2.5. Circuito equivalente de Thevenin de un generador trifásico.

El circuito equivalente para una máquina de inducción trifásica en reposo es igual a un transformador equivalente trifásico. En la máquina de inducción se define un deslizamiento  $s$ , que significa que la velocidad del rotor es  $vs(1-s)$ , donde  $vs$  es la velocidad síncrona. El circuito de la máquina de inducción se muestra el circuito equivalente en la Figura 2.6, donde los parámetros del circuito son fijos excepto la resistencia variable  $R_2/s$  en el lado secundario; donde  $E_g$  es el voltaje de la fuente de línea a neutro,  $r_1$  es la resistencia del devanado del estator,  $x_1$  la reactancia de dispersión del estator,  $x_2$  la reactancia de dispersión del rotor,  $r_2$  la resistencia del rotor,  $X_m$ , reactancia magnetizante,  $R_m$  resistencia de pérdidas en el hierro y de fricción de rodamiento y de aire,  $I_p$  es la corriente en el estator,  $I_\theta$  es la corriente en el núcleo e  $I_l$  es la corriente que existe en el rotor.

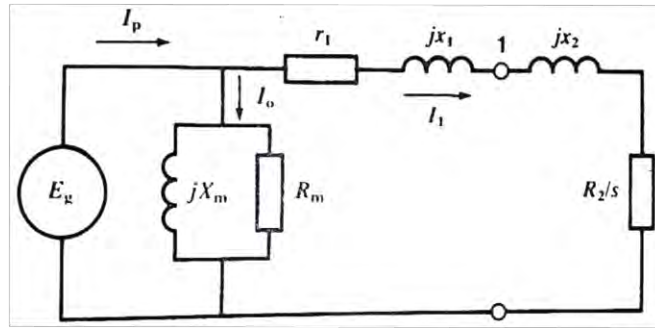


Figura 2.6 Circuito equivalente de una máquina de inducción en estado estable.

### 2.3.4 Cargas y compensación reactiva de capacitores o inductores

Para estudios DSSE, la carga es modelada con un modelo ZIP (impedancia, corriente o potencia constantes; o una combinación de éstas), conectadas en estrella o en delta, representada por una matriz de impedancias de secuencia positiva, con una estructura topológica que representa la manera en la cual la carga es conectada entre las fases de la red [Peralta et al., 2008]. Lo mismo sucede para representar la compensación reactiva, en la cual generalmente se usan capacitores. Las correspondientes matrices son incluidas en la  $Y_{bus}$ .

### 2.3.5 Buses neutros y tierra

Los buses neutros pueden ser agregados a cualquier componente eléctrico, tal que estos buses son adicionados como buses extra en la formulación DSSE. Si una impedancia es conectada a tierra, ésta es considerada en el elemento diagonal correspondiente de la  $Y_{bus}$  (a veces se agrega un pequeño valor para mejorar la estabilidad numérica (como por ejemplo en el programa OpenDSS [Dugan and Mcdermott, 2011])).

El mismo concepto de equivalentes de secuencia positiva es también aplicado a componentes cuyos circuitos incluyen una o dos fases. En estos casos, sólo las admitancias asociadas a las fases existentes son consideradas en la  $Y_{bus}$ .

## 2.3 Formulación de estimación de estado

Una ventaja de representar una red de distribución multifásica desbalanceada por modelos equivalentes de secuencia positiva es que un programa de EE basado en secuencia positiva puede ser usado para estimar su estado de operación. Por lo cual, la formulación del problema es similar a

la reportada en las redes de transmisión. La Figura 2.7 muestra las funciones típicas de un estimador de estado [Abur and Gomez-Exposito, 2004].

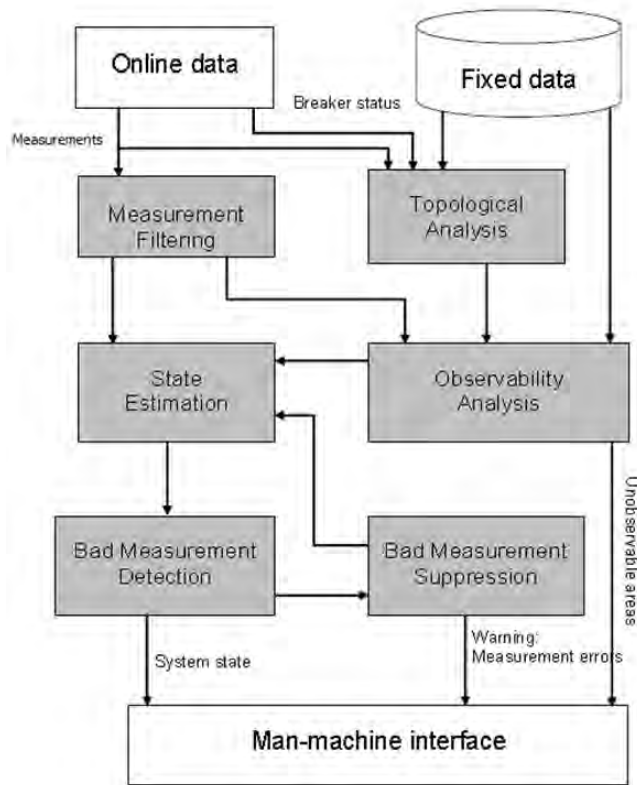


Figura 2.7. Funciones típicas de un estimador de estado.

La formulación del problema de SE está basada en el modelado de las mediciones físicas dado por

$$z = h(x) + e \quad , \quad (2.8)$$

donde  $z$  es un conjunto de  $m$  mediciones físicas y  $x$  es un vector de  $n$  variables de estado. El vector  $h$  corresponde a las mediciones estimadas que matemáticamente representan las relaciones no lineales entre cada elemento de  $z$  y el conjunto de variables de estado  $x$ , mientras  $e$  es el error en las mediciones.

En el método WLS, la estimación está basada en la minimización de la función objetivo  $J(x)$  que depende de los residuales o errores de medición:

$$\min_{\mathbf{x}} J(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^m w_i e_i^2 = \sum_{i=1}^m w_i [z_i - h_i(\mathbf{x})]^2, \quad (2.9)$$

donde  $w_i$  es el peso asignado a la  $i$ -ésima medición física  $z_i$  de acuerdo a la desviación estándar  $\sigma_i$ . La minimización de  $J(\mathbf{x})$  usando la condición de optimalidad de primer orden resulta en el siguiente conjunto de ecuaciones linealizadas que son resueltas en cada iteración  $k$ -ésima,

$$\underbrace{\mathbf{G}(\mathbf{x}_k)}_A \underbrace{\Delta \mathbf{x}_k}_y = \underbrace{\mathbf{H}_k^T \mathbf{W} [\mathbf{z} - \mathbf{h}(\mathbf{x}_k)]}_b, \quad (2.10)$$

donde  $\mathbf{H}_k$  es el Jacobiano de las funciones de mediciones  $\mathbf{h}(\mathbf{x}_k)$  y  $\mathbf{W}$  es una matriz diagonal de pesos con elementos  $w_i$ . La matriz  $\mathbf{G}(\mathbf{x}_k) = \mathbf{H}_k^T \mathbf{W} \mathbf{H}_k$ , llamada matriz de ganancia, es inherentemente mal condicionada por lo siguiente [Abur and Gomez-Exposito, 2004]: 1) la diferencia en los pesos asignados a las mediciones de acuerdo a su confiabilidad: altos pesos para las mediciones virtuales y bajos pesos para las pseudo-mediciones; 2) la diferencia en la longitud de las líneas de transmisión que componen el sistema: líneas largas y cortas en el mismo bus; y 3) la diferencia existente entre las mediciones asociadas con las inyecciones de potencia y los flujos de potencias: un gran número de mediciones de inyección de potencia que mediciones de flujo de potencia.

La ecuación (2.10) puede tratar de resolverse mediante la factorización de Cholesky aplicada a  $\mathbf{G}(\mathbf{x}_k)$  y la utilización de sustituciones hacia adelante y hacia atrás. Cuando se analizan sistemas de distribución, sin embargo, la factorización de Cholesky no es adecuada porque en su algoritmo su argumento de raíz cuadrada puede ser un número negativo en el caso de errores de redondeo. Cuando el estado de operación de los sistemas de transmisión son estimados por el método WLS, el problema de las ecuaciones mal condicionadas ha sido subsanado usando algunos de los siguientes métodos [Abur and Gomez-Exposito, 2004]: a) factorización ortogonal (QR), b) Método Peters-Wilkinson, c) descomposición en valores singulares (Singular Value Decomposition-SVD) d) restricciones de igualdad, y e) matriz aumentada de Hachtel. Otras factorizaciones de algebra lineal han sido también usadas: f) método LU y g) método QR híbrido.

Una opción para tratar con el conjunto de ecuaciones derivadas del problema DSSE consiste de usar métodos basados en subespacios Krylov que no involucran factorizaciones de matrices [Barrett et al., 1994], [Saad, 2003], [Meza, 1995], [Stephens, 1999] y [Choi and Saunders, 2014]. Estes métodos son MINRES (Minimum Residual), SYMMLQ (Symmetric LQ), LSQR (Least Squares QR) [Barrett et al., 1994], BICGSTABL (Biconjugate Gradient Stabilized), TFQMR

(Transpose-Free Quasi Minimal Residual), GMRES (Generalized Minimum Residual Method) [Saad, 2003], GMSVD (Generalized Minimum SVD) [Meza, 1995], ELMRES (Elementary Residual) [Stephens, 1999] y MINRESQLP (Minimum Residual QLP) [Choi and Saunders, 2014]. Estos métodos se comportan mejor con el uso de matrices llamadas preconditionadores, los cuales transforman la matriz original a otra con un espectro más favorable (valores singulares).

Una manera de tratar con el mal condicionamiento de la matriz de ganancia consiste en considerar las mediciones virtuales en la formulación DSSE, las cuales son incluidas como restricciones de igualdad  $c(x) = \mathbf{0}$ . De tal manera que el método de mínimos cuadrados ponderado restringido (Constrained Weighted Least Squares-CWLS) es expresado por

$$\min_x J(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^m w_i e_i^2 = \sum_{i=1}^m w_i [z_i - h_i(\mathbf{x})]^2 \quad s.t. \quad c(\mathbf{x}) = \mathbf{0} . \quad (2.11)$$

La formulación correspondiente de optimización no restringida se obtiene añadiendo el conjunto de ecuaciones de restricción a la función objetivo por medio de multiplicadores de Lagrange, lo cual resulta en la siguiente función Lagrangiana

$$L = J(\mathbf{x}) - \lambda^T c(\mathbf{x}) . \quad (2.12)$$

El conjunto de ecuaciones a ser resueltas para estimar los valores de  $\mathbf{x}$  y  $\lambda$  son obtenidos usando las condiciones de optimalidad de primer orden no lineales,

$$\begin{aligned} \frac{\partial L(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = 0 &\Rightarrow \mathbf{H}^T \mathbf{W} [z - \mathbf{h}(\mathbf{x})] + \mathbf{C}^T \lambda = 0 \\ \frac{\partial L(\mathbf{x})}{\partial \lambda} = 0 &\Rightarrow c(\mathbf{x}) = 0 \end{aligned} \quad (2.13)$$

donde  $\mathbf{C}(\mathbf{x})$  es el Jacobiano de las restricciones de igualdad  $c(\mathbf{x})$ . Linealizando el sistema de ecuaciones (2.13) por el método Gauss-Newton se obtiene (2.14). En este caso, el término del Lagrangiano se ha escalado a  $\lambda_s = \alpha \lambda$  para mejorar el número de condición del sistema linealizado durante el proceso de solución iterativa

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \alpha \mathbf{H}^T \mathbf{W} \mathbf{H} & \mathbf{C}^T \\ \mathbf{C} & \mathbf{0} \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} \Delta \mathbf{x} \\ -\lambda_s \end{bmatrix}}_{\Delta \mathbf{y}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha \mathbf{H}^T \mathbf{W} [z - \mathbf{h}(\mathbf{x})] \\ -c(\mathbf{x}) \end{bmatrix}}_b , \quad (2.14)$$

donde el valor de  $\alpha$  puede ser seleccionado como  $\alpha = \text{promedio}(\text{diag}(\mathbf{W}))$ , es decir, el promedio de



los elementos diagonales de  $W$ , para reducir el número de condición del sistema.

Con la finalidad de hacer la estimación de estado, las Ecuaciones (2.13) o (2.14) deben ser resueltas. La selección del conjunto de ecuaciones a resolver dependerá del método de solución seleccionado, tal como se describe en las próximas secciones.

En caso de solucionar la Ecuación (2.14), se resuelve iterativamente el sistema de ecuaciones para el vector  $\Delta \mathbf{y}_k$ , donde  $k$  es el número de iteraciones, para encontrar un vector nuevo de variables estimadas  $\Delta \mathbf{y}_{k+1} = \mathbf{y}_k + \Delta \mathbf{y}_k$ ,  $\Delta \mathbf{y}_k = [\Delta \mathbf{x}_{k+1} \quad -\lambda_{s,k+1}]^T$  y  $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \Delta \mathbf{x}_k$ . Este proceso iterativo se repite hasta que el criterio  $\left| \frac{J(\mathbf{x}_{k+1}) - J(\mathbf{x}_k)}{J(\mathbf{x}_0)} \right| \leq Tol$  es satisfecho. El valor de  $J(\mathbf{x})$  es calculado por (2.9).

Note que para los métodos de solución seleccionados en esta tesis para el sistema  $\mathbf{A}_k \Delta \mathbf{y}_k = \mathbf{b}_k$  son de tipo iterativo, no es un método directo, tal que hay un proceso iterativo interno asociado a cada iteración  $k$  del método Gauss-Newton. Este método es usado para resolver problemas de mínimos cuadrados no lineales. Distinto al método de Newton, sólo se usa para minimizar una suma de cuadrados, pero tiene la ventaja de que los Hessianos, los cuales son difíciles de calcular, no son requeridos. En este caso corresponde resolver la Ecuación (2.14) y sustituir  $\Delta \mathbf{x}$  como  $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \Delta \mathbf{x}$  para calcular la nueva  $J(\mathbf{x}_{k+1})$  y si no se cumple el umbral mencionado, después  $\mathbf{h}$  y  $\mathbf{c}$ .

## 2.4 Métodos de regularización

El número de condición de una matriz  $A$  puede ser definido como  $nc = \|A\| \|A^{-1}\|$ , donde  $\|A\|$  es la norma de la matriz, definida como  $\|A\| = \max \frac{\|A\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|}$ ,  $\mathbf{x} \neq 0$ , donde se observa que son vectores en el numerador y denominador. Cuando el número de condición es grande, se usan métodos de regularización para resolver sistemas de ecuaciones lineales asociados a la matriz  $A$ . Estos métodos de regularización buscan minimizar la suma de la norma euclidiana de los residuales  $\|\mathbf{b} - A\mathbf{x}\|$  y también el error en la solución  $\|\mathbf{x}\|$ .

### 2.4.1 Regularización mediante mínimos cuadrados y el método Hebden-Newton

El problema de mal condicionamiento asociado a un conjunto de ecuaciones algebraicas lineales con el DSSE puede ser resuelto mediante métodos de regularización. Asumiendo  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ , lo

cual implica solucionar el sistema de ecuaciones (2.14), el primer método de regularización investigado en este trabajo para la solución del problema DSSE es denominado como de mínimos cuadrados con restricción cuadrática, el cual es matemáticamente dado por [Hansen, 1994]

$$\min \|(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)\| \quad \text{sueto a} \quad \|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\| \leq \delta \quad , \quad (2.15)$$

donde  $\delta$  es un parámetro de regularización diferente de cero dado por el método Hebden-Newton, el cual selecciona el parámetro de regularización usando una buena estimación inicial  $\mathbf{x}_0$ .

#### 2.4.2 Dos operaciones secuenciales para reducir el número de condición.

Un sistema lineal  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  puede ser escrito como  $\mathbf{TASy} = \mathbf{Tb}_0$ , donde  $\mathbf{x} = \mathbf{Sy}$  [Liu, 2013]. El nuevo sistema para  $\mathbf{y}$  es  $\mathbf{Cy} = \mathbf{b} = \mathbf{Tb}_0$ , donde  $\mathbf{C} = \mathbf{TAS}$ . El propósito es encontrar dos preconditionadores diagonales  $\mathbf{S}$  y  $\mathbf{T}$ , tal que la nueva matriz  $\mathbf{C}$  pueda ser transformada con respecto a  $\mathbf{A}$ . El preconditionador derecho tiene la forma:

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & S_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_n \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

Se dice que la matriz  $\mathbf{C}$  está equilibrada si todos los renglones y columnas tienen la misma norma euclidiana o longitud como el caso de las columnas de  $\mathbf{C}$  en la ecuación (2.17), la matriz está mejor condicionada para resolver un sistema lineal. Es posible seleccionar los elementos  $S_k$ , tal que cada renglón o columna de la matriz  $\mathbf{C}$  tenga la misma norma, cumpliendo lo siguiente:

$$\sum_{j=1}^n C_{j1}^2 = \sum_{j=1}^n C_{j2}^2 = \cdots = \sum_{j=1}^n C_{jn}^2 \quad (2.17)$$

Además, se define una operación  $S^f$ , dada por (2.18), que obtiene como resultado el valor del elemento  $S_k$ , tal que elegida una columna  $p$  de  $\mathbf{A}$  tenga la misma norma que la matriz  $\mathbf{C}$ . Por simplicidad se escoge la primera columna (aunque puede ser cualquier columna). Si en (2.18) se selecciona  $p = 1$  y  $k = 1$ , se obtiene el primer elemento de la diagonal del preconditionador de (2.16) igual a 1. En este trabajo se selecciona  $p$  en orden  $p = 1, 2, \dots, n$ ,

$$S^f = (S_k) = \left( \frac{\sum_{j=1}^n A_{jp}^2}{\sum_{j=1}^n A_{jk}^2} \right)^{1/2} \quad (2.18)$$

para  $k = 2, \dots, n$ , donde  $S_k$  está en la diagonal. Generalmente se recomienda que el mayor coeficiente de la matriz corresponda al elemento (1,1) de la matriz  $\mathbf{A}$ , lo cual se logra mediante

permutaciones de ecuaciones y variables correspondientes. Similarmente, el preconditionador izquierdo  $T$  tiene la misma estructura de  $S$ , pero utilizando los renglones de la matriz  $A$  como:

$$T^f = (T_k) = \left( \frac{\sum_{j=1}^n A_{pj}^2}{\sum_{j=1}^n A_{kj}^2} \right)^{1/2} \quad (2.19)$$

donde para  $k = 2, \dots, n$ . Con base a lo anterior, puede ser construida una secuencia de preconditionadores  $S_m$  y  $T_m$ , donde  $m = 1, \dots, M$ , con las operaciones siguientes

$$S_1 = S^f(A), T_1 = T^f(A_1);$$

$$S_2 = S^f(A_2), T_2 = T^f(A_3);$$

...

$$S_M = S^f(A_{2M-2}), T_M = T^f(A_{2M-1});$$

donde

$$A_1 = AS_1, A_2 = T_1A_1;$$

$$A_3 = A_2S_2, A_4 = T_2A_3;$$

...

$$A_{2M-1} = A_{2M-2}S_M, A_{2M} = T_M A_{2M-1}.$$

Entonces, los preconditionadores finales están dados por  $S = S_1S_2\dots S_M$  y  $T = T_1T_2\dots T_M$ . El proceso de solución numérica  $S^f T^f$  inicia primero aplicando  $S^f$  a la matriz original  $A$  y luego aplicando  $T^f$  a la matriz resultante. Este proceso puede ser inverso: un proceso  $T^f S^f$  es igual al  $S^f T^f$  si se tiene una matriz  $A$  simétrica. La elección de  $M$  depende de la restricción del tiempo computacional para la solución numérica y una prueba del mejoramiento del número de condición del sistema. Por otro lado el subíndice  $p$  puede ser escogido en otro orden.

Para la solución del sistema de ecuaciones asociadas al problema DSSE descrito en esta tesis se utilizó el proceso  $S^f T^f$ . En este caso es mejor normalizar primeramente columnas que renglones debido a que los coeficientes tienen mayor diferencia numérica sobre las columnas. Ésta regularización fue usada como una etapa de post-procesamiento de la prueba chi cuadrada para la detección de errores gruesos.

## 2.5 Método de solución por homotopía

Este tipo de métodos se aplica directamente al conjunto de ecuaciones (2.13), tal que no es necesaria su linealización. Una manera de resolver el problema de convergencia asociado con el

proceso de solución de (2.13) es mediante el uso de métodos basados en homotopía, los cuales no requieren la inversa o la factorización de la matriz de ganancia mal condicionada [Ku et al., 2011].

Para aplicar el método de continuación de homotopía basado en una función escalar, el conjunto de ecuaciones no lineales (2.13) representado por  $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = [f_1(\mathbf{x}) \ f_2(\mathbf{x}) \ \dots \ f_n(\mathbf{x})]^T = \mathbf{0}$  es cambiado primeramente a una ecuación escalar dada por la norma Euclidiana cuadrada:  $(\|\mathbf{F}(\mathbf{x})\|_2)^2 = (f_1(\mathbf{x}))^2 + (f_2(\mathbf{x}))^2 + \dots + (f_n(\mathbf{x}))^2 = 0$ . Por otro lado, un método de homotopía consiste de la formulación de un mapa de homotopía que depende de un parámetro escalar artificial  $\tau \in [0,1]$  y el conjunto original de las ecuaciones no lineales  $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$  a ser resueltas. Entonces, el mapeo de homotopía  $m: [0,1] \times \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^1$  que define la trayectoria entre el punto de inicio y la solución deseada es definida por (2.20) para toda  $\tau \in [0,1]$  como en [Ku et al., 2011],

$$m(\mathbf{x}, \tau) = (1/2)(\|\mathbf{F}(\mathbf{x})\|_2)^2 + (1/2)(\tau - 1)(\|\mathbf{F}(\mathbf{x}_0)\|_2)^2 = 0. \quad (2.20)$$

Debido a que el valor  $\tau$  puede variar libremente entre 0 y 1,  $m(\mathbf{x}, \tau) = 0$  define en  $\mathfrak{R}^1$  una trayectoria parametrizada por  $\tau$  donde sus puntos extremos corresponden a una solución conocida  $\mathbf{x}_0$ , arbitrariamente seleccionada para  $\tau = 0$ , y la solución del sistema original de ecuaciones  $\mathbf{x}$ , para  $\tau = 1$ , respectivamente.

El mapa de homotopía (2.20) puede ser expresado como función de otra variable  $t$ ,  $0 \leq t \leq \infty$ , introduciendo una función ficticia  $U(t)$  que se incrementa monótonicamente y que satisface  $U(t) > 0$ ,  $U(0) = 1$  y  $U(\infty) = \infty$ . Asimismo, se asume  $m(\mathbf{x}, t) = 0$  para cualquier tiempo mayor que 0. Entonces, el mapa de homotopía (2.20) como una función de  $t$  es dado por (2.21) [Ku et al., 2011]:

$$m(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2}U(t)(\|\mathbf{F}(\mathbf{x})\|_2)^2 - \frac{1}{2}(\|\mathbf{F}(\mathbf{x}_0)\|_2)^2 = 0. \quad (2.21)$$

La ecuación algebraica no lineal (2.21) puede ser transformada a un conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias (ordinary differential equations, ODEs) de primer orden, derivando el mapeo de homotopía con respecto al parámetro artificial  $t$ :

$$\frac{dm(\cdot)}{dt} = \frac{\partial m(\cdot)}{\partial t} + \frac{\partial m(\cdot)}{\partial \mathbf{x}} \cdot \frac{d\mathbf{x}(\cdot)}{dt} = 0, \quad (2.22)$$

donde

$$\frac{\partial m(\cdot)}{\partial t} = \frac{1}{2} (\|\mathbf{F}(\mathbf{x})\|_2)^2 \frac{dU(t)}{dt}, \quad \frac{\partial m(\cdot)}{\partial \mathbf{x}} = U(t) \mathbf{J}_{F(\mathbf{x})}^T \mathbf{F}(\mathbf{x}). \quad (2.23)$$

En este caso,  $\mathbf{J}_{F(\mathbf{x})}^T$  es la matriz transpuesta Jacobiana de  $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ . Sustituyendo (2.23) en (2.22) y realizando manipulaciones algebraicas en la ecuación resultante, se obtiene el conjunto de ODEs:

$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{d\mathbf{x}}{dt} = -\frac{1}{2U(t)} \frac{dU(t)}{dt} \frac{(\|\mathbf{F}(\mathbf{x})\|_2)^2}{(\mathbf{F}(\mathbf{x}))^T \mathbf{J}_{F(\mathbf{x})} \mathbf{F}(\mathbf{x})} \mathbf{F}(\mathbf{x}). \quad (2.24)$$

La solución del sistema ODEs (2.24) se obtiene por el método de integración de Runge-Kutta (RK4) de cuarto orden para el intervalo de tiempo  $0 \leq t \leq \infty$ . El proceso de integración es detenido cuando el criterio  $\left| \frac{J(\mathbf{x}_{k+1}) - J(\mathbf{x}_k)}{J(\mathbf{x}_0)} \right| \leq Tol$  es satisfecho, donde  $k$  es el paso de integración y  $J(\mathbf{x})$  es calculada por (2.9). Nótese que la solución obtenida en el último paso de integración corresponde al estado estimado del sistema de distribución. Nótese también que la matriz Jacobiana  $\mathbf{J}_{F(\mathbf{x})}$  no es invertida o factorizada durante el proceso de integración, lo cual mejora el problema computacional durante el procedimiento de solución iterativo. Por otra parte, hay muchas maneras de seleccionar una función apropiada  $U(t)$ . En este contexto, la relación matemática (2.25) propuesta en [Ku et al., 2011] fue seleccionada en este trabajo

$$\frac{1}{U(t)} \frac{dU(t)}{dt} = \frac{\nu}{(1+t)^c}, \quad (2.25)$$

donde  $c$  es un parámetro de control para acelerar la convergencia y  $\nu$  es un parámetro de amortiguamiento para mejorar la convergencia. Los valores de estos parámetros fueron definidos en  $c = 0.06$  y  $\nu = 4.0$ , respectivamente, que están dentro de los valores usados en [Ku et al., 2011].

Se debe observar que la matriz Jacobiana obtenida en (2.26) contiene dos submatrices Hessianas por las derivadas de las matrices Jacobianas  $\mathbf{H}$  y  $\mathbf{C}$  en la misma ecuación (2.26):

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\mathbf{H}^T \mathbf{W} [\mathbf{z} - \mathbf{h}(\mathbf{x})])}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\partial(\mathbf{C}^T \boldsymbol{\lambda})}{\partial \mathbf{x}} &= -\mathbf{H}^T \mathbf{W} \mathbf{H} + \mathbf{D} \boldsymbol{\lambda} \\ &\quad + \mathbf{K} \mathbf{W} [\mathbf{z} - \mathbf{h}(\mathbf{x})] \\ \frac{\partial(c(\mathbf{x}))}{\partial \mathbf{x}} &= \mathbf{C}(\mathbf{x}) \\ \frac{\partial(\mathbf{C}^T \boldsymbol{\lambda})}{\partial \boldsymbol{\lambda}} &= \mathbf{C}^T \end{aligned} \quad (2.26)$$

donde  $\mathbf{D}(\mathbf{x})$  y  $\mathbf{K}(\mathbf{x})$  son los Hessianos de  $c(\mathbf{x})$  y  $\mathbf{h}(\mathbf{x})$ , respectivamente. Para reducir el costo

computacional, estos Hessianos son despreciados así que el Jacobiano aproximado  $\mathbf{J}_{F(\mathbf{x})}$  usa las mismas matrices lineales del método Gauss-Newton: la matriz de ganancia  $\mathbf{G}(\mathbf{x}_k) = \mathbf{H}^T \mathbf{W} \mathbf{H}$  y la matriz  $\mathbf{C} = \frac{\partial(c(\mathbf{x}))}{\partial \mathbf{x}}$ .

## 2.6 Método de solución por normas cuadradas

El método de solución numérica descrito en la sección 2.5, aunque es útil para resolver ecuaciones no lineales, aún tiene algunas deficiencias: a) es lento para converger debido a que usa un incremento  $\Delta t$ ; b) la convergencia es sólo local; c) contiene un valor ficticio  $\Delta t$  para integrar ODEs, las cuales son usadas como sustitutas de las ecuaciones algebraicas no lineales (nonlinear algebraic equations-NAEs). De esta forma, la técnica basada en la norma escalar del error residual (RN) [Liu and Atluri, 2011] es una mejora al método debido a que: 1) converge más rápido que otros métodos; es globalmente convergente y el proceso iterativo no integra ODEs.

La ecuación (2.24) no puede unívocamente definir la evolución en el “plano de fase” de la ecuación para  $\dot{\mathbf{x}}$ . No obstante, una condición de “normalidad” puede ser introducida a partir de la definición de variedad diferenciable para  $\mathbf{F}$  [Liu and Atluri, 2011]:

$$\dot{\mathbf{x}} = -\lambda U(t) \mathbf{J}_{F(\mathbf{x})}^T \mathbf{F}, \quad (2.27)$$

donde  $\lambda$  es calculada insertando  $\dot{\mathbf{x}}$  en (2.24) y resolver para  $\lambda$ :

$$\lambda = \frac{1}{2} \left( \frac{\dot{U}(t)}{U^2(t)} \right) \left( \frac{\|\mathbf{F}\|^2}{\|\mathbf{J}_F^T \mathbf{F}\|^2} \right) \mathbf{J}_F^T \mathbf{F} \quad (2.28)$$

Calculando una expresión para la evolución para  $\mathbf{x}$ , dado por una trayectoria de gradiente:

$$\dot{\mathbf{x}} = -u(t) \left( \frac{\|\mathbf{F}\|^2}{\|\mathbf{J}_F^T \mathbf{F}\|^2} \right) \mathbf{J}_F^T \mathbf{F} \quad (2.29)$$

donde  $u(t) = \dot{U}(t)/2U(t)$ . Para (2.21) es posible definir una superficie como  $m(\mathbf{x}, t) = C$ . Esto sugiere una variedad constante en el espacio de  $(\mathbf{x}, t)$ :  $\|\mathbf{F}(\mathbf{x})\|^2 = 2C/U(t)$ . Entonces,  $\sqrt{2C/U(t)}$  sirve como un cálculo del error residual para resolver  $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = 0$  en el tiempo y  $C$  con la condición inicial:  $C = (1/2)\|\mathbf{F}(\mathbf{x}_0)\|^2$ . Si se garantiza que  $U(t)$  es una función creciente de  $t$ , ésta pudiera tener

una propiedad absolutamente convergente en resolver  $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = 0$ . Para mantener  $\mathbf{x}$  en la variedad  $\|\mathbf{F}(\mathbf{x})\|^2$ , la evolución de  $\mathbf{F}(\mathbf{x})$  a lo largo de la trayectoria  $\mathbf{x}(t)$  es

$$\dot{\mathbf{F}}(\mathbf{x}) = \frac{d\mathbf{F}(\mathbf{x})}{dt} = \mathbf{J}_{\mathbf{F}(\mathbf{x})} \dot{\mathbf{x}} = -u(t) \left( \frac{\|\mathbf{F}\|^2}{\|\mathbf{J}_F^T \mathbf{F}\|^2} \right) \mathbf{J}_F \mathbf{J}_F^T \mathbf{F} \quad (2.30)$$

donde  $\dot{\mathbf{F}}(\mathbf{x}) = \frac{(\partial \mathbf{F}(\mathbf{x}) / \partial \mathbf{x})}{(d\mathbf{x}/dt)}$ . Usando el método de Euler se puede escribir:

$$\mathbf{F}(t + \Delta t) = \mathbf{F}(t) - \Delta t u(t) \left( \frac{\|\mathbf{F}\|^2}{\|\mathbf{J}_F^T \mathbf{F}\|^2} \right) \mathbf{J}_F \mathbf{J}_F^T \mathbf{F} \quad (2.31)$$

Tomando las normas cuadradas de ambos lados de (2.31) y usando  $\|\mathbf{F}(\mathbf{x})\|^2 = 2C/U(t)$ , el resultado de ello puede ser expresado como,

$$\frac{U(t)}{U(t + \Delta t)} = 1 - 2\Delta t u(t) \frac{\mathbf{F}(\mathbf{J}_F \mathbf{J}_F^T) \mathbf{F}}{\|\mathbf{J}_F^T \mathbf{F}\|^2} + (\Delta t)^2 u^2(t) \frac{\|\mathbf{F}\|^2}{\|\mathbf{J}_F^T \mathbf{F}\|^4} \|\mathbf{J}_F \mathbf{J}_F^T \mathbf{F}\|^2 \quad (2.32)$$

La ecuación (2.32) puede expresarse por la siguiente ecuación escalar cuadrática:

$$a(u\Delta t)^2 - 2(u\Delta t) + 1 - U(t)/U(t + \Delta t) = 0 \quad (2.33)$$

donde  $a = \frac{\|\mathbf{F}\|^2 \|\mathbf{J}_F \mathbf{J}_F^T \mathbf{F}\|^2}{\|\mathbf{J}_F^T \mathbf{F}\|^4}$ . Eliminando  $\|\mathbf{J}_F^T \mathbf{F}\|^2$  en la primer fracción de (2.32), se puede definir

$b = 2u(t)$  con  $U(t)$  seleccionado como se describe en la sección 2.5. Asimismo, Sacando raíz cuadrada del lado derecho de  $a$ , comparando el denominador y el numerador, donde el denominador es  $\|\mathbf{J}_F^T \mathbf{F}\| = \mathbf{F} \cdot (\mathbf{J}_F \mathbf{J}_F^T) \mathbf{F}$ . Usando la desigualdad Cauchy-Schwarz se puede escribir,

$$\|\mathbf{J}_F^T \mathbf{F}\|^2 = \mathbf{F} \cdot (\mathbf{J}_F \mathbf{J}_F^T) \mathbf{F} \leq \|\mathbf{F}\| \|\mathbf{J}_F \mathbf{J}_F^T \mathbf{F}\| \quad (2.34)$$

implica que  $a > 1$ .

Definiendo la razón  $s = U(t)/U(t + \Delta t)$  y encontrando el mínimo de  $s$  con respecto a  $\Delta t$  de la ecuación cuadrática, la derivada es igual a cero,

$$\frac{ds}{d\Delta t} = 2au^2 \Delta t - 2u = 0 \quad (2.35)$$

lo que resulta en el valor  $\Delta t = 1/ua$ . Sustituyendo (2.35) en (2.33), el mínimo puede ser expresado como:  $s = 1 - 1/a < 1$  debido al hecho de que  $a > 1$ . A partir de  $s$  y de  $U(t) = 2C/\|\mathbf{F}(\mathbf{x})\|^2$  la razón de dos errores residuales sucesivos es menor que uno, al tomar los incrementos de  $t$  y después de  $\mathbf{x}$ :  $s = \left\{ 2C/\|\mathbf{F}(\mathbf{x})\|^2 \right\} / \left\{ 2C/\|\mathbf{F}(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x})\|^2 \right\} = \|\mathbf{F}(t + \Delta t)\|^2 / \|\mathbf{F}(t)\|^2$ . Como  $a > 1$ ,  $s$  siempre es menor que  $s < 1$ , debido a que su raíz es:  $\|\mathbf{F}(t + \Delta t)\| / \|\mathbf{F}(t)\| = \sqrt{1 - a^{-1}} < 1$ .

Usando el método de Euler para (2.24) con  $\mathbf{x}$  en una dinámica discreta, la definición de  $u(t) = \dot{U}(t)/2U(t)$  y sustituyendo  $\Delta t$ , un primer método (RN-1) es [Liu and Atluri, 2011]:

$$\mathbf{x}(t + \Delta t) = \mathbf{x}(t) - \left( \frac{\|\mathbf{J}_F^T \mathbf{F}\|^2}{\|\mathbf{J}_F \mathbf{J}_F^T \mathbf{F}\|^2} \right) \mathbf{J}_F^T \mathbf{F} \quad (2.36)$$

donde  $\mathbf{x}(t + \Delta t) = \mathbf{x}(t) - \left( \frac{1}{a} \right) \left( \frac{\|\mathbf{F}\|^2}{\|\mathbf{J}_F^T \mathbf{F}\|^2} \right) \mathbf{J}_F^T \mathbf{F}$ . En este caso el lado derecho de la ecuación no depende de  $\Delta t$  ni de parámetros. La propiedad de que la razón  $\|\mathbf{F}(t + \Delta t)\| / \|\mathbf{F}(t)\| < 1$  es crucial, ya que garantiza ser absolutamente convergente a la solución. De acuerdo al vector gradiente  $\mathbf{J}_F^T \mathbf{F}$ , se tiene que  $\frac{\|\mathbf{J}_F^T \mathbf{F}\|^2 \mathbf{J}_F^T \mathbf{F}}{\|\mathbf{J}_F \mathbf{J}_F^T \mathbf{F}\|^2}$  es un vector gradiente regularizado.

Puesto que la selección de  $\Delta t$  puede ser demasiado conservadora, puede utilizarse un factor de peso  $\eta$  multiplicando al término  $\frac{\|\mathbf{J}_F^T \mathbf{F}\|^2 \mathbf{J}_F^T \mathbf{F}}{\|\mathbf{J}_F \mathbf{J}_F^T \mathbf{F}\|^2}$  para acelerar la convergencia. Entonces, cierta constante  $s_0 = s < 1$  puede ser usada en la solución de  $\Delta t$  con la condición  $1 - (1 - s_0)a > 0$ , dando  $\Delta t = 1 + \frac{\sqrt{1 - (1 - s_0)a}}{ua}$ ; de otra manera  $\Delta t$  es calculada como en (2.32). El segundo término de (2.31) es multiplicado por  $\eta$ , donde  $\eta = 1 + \sqrt{1 - (1 - s_0)a}$  si la condición anterior es satisfecha (RN-2); de otra manera  $\eta = 1$ .



En vez de  $s_0$ ,  $s$  puede ser una función de  $a$ . Si  $s = 1 - 1/a_k^2$  automáticamente se satisface la condición, resolviendo la ecuación cuadrática con  $\Delta t = 1 + \frac{\sqrt{1-a_k^{-1}}}{ua_k}$  y sustituyendo  $\Delta t$ , el tercer método es obtenido (RN-3); donde el factor  $\eta$  es dado por  $\eta = 1 + \sqrt{1-a_k^{-1}}$  [Liu and Atluri, 2011].

## 2.7 Algoritmo de regularización doble óptimo basado en subespacios de Krylov

Este método se aplica a la solución del sistema de ecuaciones (2.14) asociada con el problema DSSE, que para propósitos de descripción del método puede ser expresada como un conjunto de ecuaciones algebraicas lineales  $Ay = b$ . La precisión para obtener la inversa de  $A$  es afectada por su mal-condicionamiento, tal que pequeñas variaciones en la matriz de coeficientes causarían grandes variaciones en los coeficientes de  $A^{-1}$ , y entonces afecta la solución subsecuente  $y = A^{-1}b$ . Por otro lado, aún si  $A^{-1}$  es conocida, pequeñas perturbaciones en el vector  $b$  debido a las diferencias entre las mediciones físicas y estimadas causarían grandes cambios en los elementos del vector solución  $y$  porque algunos coeficientes de  $A^{-1}$  son grandes. El problema mal-condicionado asociado con la DSSE es resuelto por el método de regularización doble óptima (double optimal regularization algorithm, DORA) que se describe a continuación:

1. Seleccionar  $\beta$ ,  $m$  y dar un valor inicial de  $y_0$ .
2. Se inicia el proceso iterativo para  $k = 0, \dots$ , número máximo de iteraciones internas.
3. Para la  $k$ -ésima iteración, calcular el vector de términos residuales  $r_k = b - Ay_k$
4. Si  $\max \{r_k\} < \text{TOL} = (\epsilon)$ , se ha encontrado la solución.
5. Si no se cumple la condición  $\{r_k\} < \text{TOL} (\epsilon)$ , aplicar el método de Arnoldi para obtener los vectores ortonormales  $d_j \forall j = 1, \dots, m$ . En este caso  $d_1 = Ar_0 / \|Ar_0\|$  y los vectores restantes son calculados por el siguiente pseudo código

```

for  $j = 1$  to  $m-1$ 
     $v = Ad_j$ 
    for  $i = 1$  to  $j$ 
         $h_{ij} = d_i^T v$ 
         $v = v - h_{ij}d_i$ 
     $h_{j+1,j} = \|v\|$ 
     $d_{j+1} = v / h_{j+1,j}$ 

```

6. Con los vectores ortonormales, se forma la matriz  $D_k = [d_1, \dots, d_m]$ .

7. Con la matriz  $\mathbf{D}_k$  calcular las siguientes matrices y valores:  $\mathbf{J}_k = \mathbf{A}\mathbf{D}_k$ ,  $\mathbf{K}_k = (\mathbf{J}_k^T \mathbf{J}_k)^{-1}$ ,  
 $\mathbf{X}_k = \mathbf{D}_k \mathbf{K}_k \mathbf{J}_k^T$ ,  $\mathbf{E}_k = \mathbf{A}\mathbf{X}_k$ ,  $\alpha_0^k = [\mathbf{r}_k^T (\mathbf{I}_n - \mathbf{E}_k) \mathbf{A}\mathbf{r}_k] / [\mathbf{r}_k^T \mathbf{A}^T (\mathbf{I}_n - \mathbf{E}_k) \mathbf{A}\mathbf{r}_k]$ , y  
 $\Delta \mathbf{y}_k = \mathbf{X}_k \mathbf{r}_k + \alpha_0^k (\mathbf{r}_k - \mathbf{X}_k \mathbf{A}\mathbf{r}_k)$ .
8. Con base al incremento  $\Delta \mathbf{y}_k$ , se calcula  $\gamma_k = (\beta \|\Delta \mathbf{y}_k\|^2 \|\mathbf{A}\Delta \mathbf{y}_k\|^2)^{-1/4}$  y  $\mathbf{y}_{k+1} = \mathbf{y}_k + \gamma_k \Delta \mathbf{y}_k$ .
9. Regresar al paso 2.

Las ecuaciones asociadas al método DORA y descritas en los pasos 1 a 9, se derivan matemáticamente en el Apéndice C. Un diagrama de flujos se muestra en la Figura 2.8 donde se bosqueja el proceso de la DSSE usando el método DORA, que también es similar a los métodos de homotopía RK y RN.

Si  $\mathbf{A}$  es una matriz severamente mal-condicionada y los datos del lado derecho  $\mathbf{b}$  son perturbados por un gran ruido, se utiliza un método de regularización que consiste en minimizar la siguiente función [Liu and Atluri, 2015],

$$\min_{\Delta \mathbf{y} \in \mathfrak{R}^n} \left\{ g = \frac{\|\mathbf{v}\|^2}{(\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{v})^2} + \beta \|\Delta \mathbf{y}\|^2 \right\}, \quad (2.37)$$

para encontrar la solución con regularización doble óptima de  $\Delta \mathbf{y}$ , donde  $\mathbf{v} = \mathbf{A}\Delta \mathbf{y}$ . Bajo esta solución, una solución aproximada de (2.37) es encontrada observando que el primer término de  $g$  en (2.37) es constante en su escala, lo cual significa que si  $\mathbf{v}$  es una solución, entonces  $\Delta \mathbf{Y} = \gamma \Delta \mathbf{y}$ ,  $\gamma \neq 0$ , es también una solución. Se supone que una solución aproximada con  $\beta > 0$  es dado por  $\Delta \mathbf{Y} = \gamma \Delta \mathbf{y}$ , donde  $\gamma$  será determinada.

Usando  $\|\mathbf{v}\|^2 = \mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{v}$ , y como  $\Delta \mathbf{Y}$  es también una solución entonces, en este caso  $\mathbf{v} = \mathbf{A}\mathbf{S} = \gamma \mathbf{A}\mathbf{s}$ , así  $g$  puede ser convertido a

$$g = \frac{1}{\gamma^2 \|\mathbf{A}\Delta \mathbf{y}\|^2} + \beta \gamma^2 \|\Delta \mathbf{y}\|^2. \quad (2.38)$$

Obteniendo la primera condición de optimalidad de (2.118) con respecto a  $\gamma$  y resolviendo para esta misma variable, se obtiene

$$\gamma = \frac{1}{(\beta \|\Delta \mathbf{y}\|^2 \|\mathbf{A}\Delta \mathbf{y}\|^2)^{1/4}} \quad (2.39)$$

En la Figura 2.8 se presenta un diagrama de flujo del algoritmo DORA y el método Gauss-Newton para la DSSE con detección de errores gruesos, que es similar a los métodos de homotopía ODE-RK y RN que resuelven el ciclo interno para el sistema de ecuaciones no lineales.

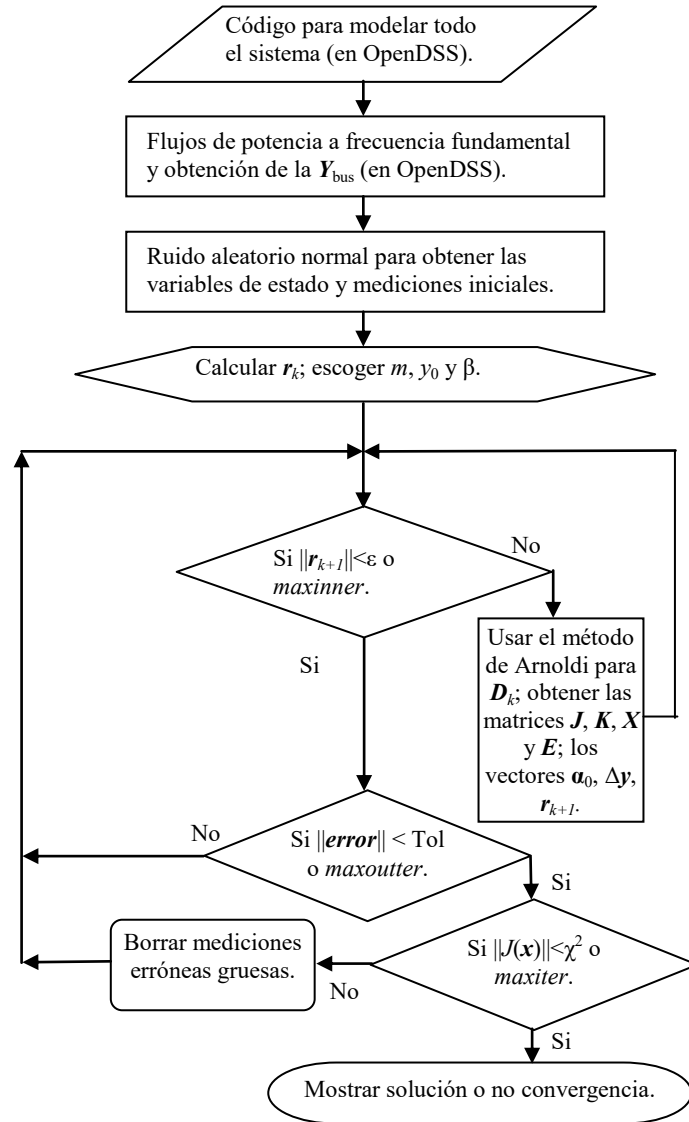


Figura 2.8. Diagrama de flujo para la DSSE usando el método DORA.

En la Figura 2.8,  $maxinner$  es el número máximo de iteraciones para resolver un sistema con el método DORA con tolerancia  $\epsilon$ ;  $maxouter$  es el número máximo de iteraciones cuando se resuelve el sistema de ecuaciones no lineales de la ecuación (2.26), con tolerancia Tol;  $maxiter$  es el número máximo de iteraciones cuando no se pasa la prueba  $\chi^2$ .

## 2.8 Casos de estudio

El software OpenDSS [Dugan and Mcdermott, 2011] fue usado para calcular las soluciones de flujos de potencia (PF) para el sistema de prueba de distribución. Los resultados de estos estudios PF fueron usados para construir los conjuntos de mediciones para los estudios DSSE y para proveer los valores iniciales de las variables de estado a ser estimadas. Nótese que el conjunto de mediciones fue definido en unidades reales, i.e. MWs, MVars, kV y radianes en vez de valores en por unidad. Los PMUs fueron localizados en buses con compensación capacitiva en derivación. Las desviaciones estándar para los diferentes tipos de mediciones fueron definidas como sigue [Abur and Gomez-Exposito, 2004]:  $\sigma_i = 0.008$  para flujos de potencia activa y reactiva y  $\sigma_i = 0.004$  para mediciones de magnitud de voltaje obtenidas de un sistema SCADA, un sistema AMI o medidores inteligentes. Además, los valores de  $\sigma_{v,i} = 0.0020$  y  $\sigma_{\theta_i} = 0.0017$  fueron seleccionados para mediciones de magnitudes de voltaje y ángulos de fase de provistos por los PMUs. Cuando se usan reguladores se añaden nodos adicionales a los que se muestran en la figuras, aunque el valor de estos nodos no se muestra en las tablas si tienen variables de estado. Asimismo, las líneas con parámetros distribuidos tienen un nodo intermedio, el cual también tiene variables de estado.

### 2.8.1 Comparación de la estimación de estado usando métodos directos e iterativos

El sistema IEEE de 13 buses [IEEE PES, 2018], mostrado en la Figura 2.9, fue usado para cuantificar la efectividad de los métodos usados para estimar las variables de estado. Este sistema es muy adecuado para examinar diferentes métodos de solución por su alto nivel de desbalance y sus diferentes tipos de componentes. También se tiene un transformador delta-estrella aterrizada.

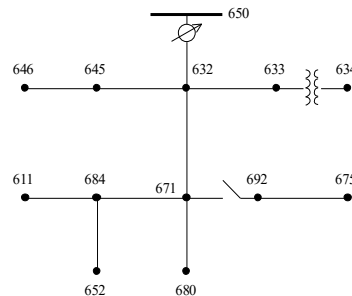


Figura. 2.9. IEEE 13 Node Test Feeder.

Diez diferentes simulaciones fueron realizadas para cada método de solución numérica implementado en el programa DSSE. En este caso, el conjunto de simulaciones fue hecho considerando perturbaciones aleatorias del orden de  $10^{-2}$  en los valores iniciales de las variables de estado y del orden de  $10^{-1}$  en las mediciones con una distribución normal. Los estudios de

estimación de estado fueron realizados usando diferentes métodos de solución, como se indica en la Tabla 2.1, para comparar su correspondiente estimación con respecto a la estimación obtenida con los métodos propuestos a usar. En contraste con los métodos propuestos, el conjunto de ecuaciones no lineales a ser resuelto por todos los otros métodos fue derivado aplicando la utilización de Gauss-Newton al conjunto de ecuaciones (2.13). El máximo número de iteraciones asociadas con esta solución Gauss-Newton fue especificada en 100. Adicionalmente, las ecuaciones linealizadas de Gauss-Newton fueron resueltas usando métodos directos e iterativos. Cuando los métodos iterativos fueron usados para resolver las ecuaciones linealizadas de Gauss-Newton, un número máximo de 20 iteraciones internas fueron especificadas con un precisión de paro de  $\mu_k = 1/2^{k+4}$ . En este caso,  $k$  es el número de iteraciones internas [Idema et al., 2013]. Además, todos los métodos lineales iterativos, excepto las técnicas MINRES y MINRES-QLP, usaron un preconditionador que multiplica la matriz a ser resuelta para mejorar el número de condición. Para lograr esta meta, se realiza una factorización incompleta LU de la matriz inicial con un umbral de  $10^{-4}$  para elementos de esta factorización que se ponen como ceros [De Leon and A. Semlyen, 2002]. Cuando en el algoritmo de Arnoldi  $m$  se incrementa, el costo computacional se incrementa al menos en  $O(m^2n)$  y el costo de memoria se incrementa como  $O(mn)$ . Lo anterior limita a  $m$  si hay un gran valor de  $n$ . Hay dos remedios para ello: el primero es reiniciar el algoritmo Krylov periódicamente y el segundo es truncar el algoritmo de Arnoldi. Entonces, el reinicio para los métodos GMRES, GMSVD y ELMRES fue especificado en 2, 4 y 2, respectivamente, para mejorar la rapidez.

Tabla 2.1. Comportamiento de la DSSE considerando diferentes métodos de solución.

MÉTODO DE SOLUCIÓN	Tol= $10^{-4}$		Tol= $10^{-5}$	
	NSSE	$t$ (s)	NSSE	$t$ (s)
Cholesky	0	-	0	-
LU	0	-	0	-
QR	0	-	0	-
P-W	0	-	0	-
SVD	9	3.81	6	12.6
MINRES	3	5.18	0	-
SYMMLQ	3	129	1	301
LSQR	1	236	0	-
BICGSTBL	4	225	0	-
TFMQR	1	262	0	-
GMRES	2	121	0	-
GMSVD	3	50.7	0	-
ELMRES	0	-	0	-
MINRESQLP	10	4.16	8	9.44
ODE-RK4	10	3.41	10	4.43
RN-2	10	2.21	10	2.38
DORA	10	1.08	10	1.12

Considerando el método RK-4, el número máximo de pasos de integración fue de 100. En el método RN-2 y el DORA el número máximo de iteraciones fue de 100. Finalmente, si en el número máximo de iteraciones de Gauss-Newton (en el último paso de integración del RK4, respectivamente) el criterio de error  $\left| \frac{J(\mathbf{x}_{k+1}) - J(\mathbf{x}_k)}{J(\mathbf{x}_0)} \right| \leq Tol$  no fue satisfecho, la estimación del estado de operación fue infactible. Todo el conjunto de estudios fue realizado usando el ambiente numérico de computación de MatLab® en una computadora con un procesador Intel Xeon X3470 a 3.0 GHz y 16 MB de memoria RAM. Los resultados de las simulaciones mostrados en la Tabla 2.1 son para dos diferentes valores de tolerancia en la convergencia:  $10^{-4}$  y  $10^{-5}$ . Los resultados reportados en la segunda y cuarta columna corresponden al número de estimaciones de estado exitosas (NSSE) del estado de operación, mientras la tercer y cuarta columnas muestran la mediana del tiempo computacional requerido por cada método de solución. Este tiempo fue obtenido considerando las estimaciones de estado exitosas. Una comparación de estos resultados muestra claramente la robustez de las metodologías propuestas hacia la convergencia para estimar el estado de operación del sistema de prueba de 13-buses.

Nótese que la mayoría de los métodos existentes, excepto el SVD, MINRES-QLP, RN-2, ODE-RK4 y DORA fallan en resolver el sistema mal-condicionado de 13-bus cuando la tolerancia de la convergencia es especificada en  $10^{-5}$ . Además, la metodología usada fue la única capaz de estimar el estado de operación para todos los casos, con la más baja mediana de tiempo computacional, para ambas tolerancias de  $10^{-4}$  y  $10^{-5}$ . Como se observa los métodos propuestos para usarse (RK4, RN-2 y DORA) son más rápidos y convergieron en todos los casos de la Tabla 2.1.

Entonces, en los casos de estudio siguientes sólo se tomaran en cuenta éstos métodos. Asimismo, se redujeron las mediciones de flujos de potencia activa y reactiva en las líneas ficticias, ya que sólo se tomaron pseudo mediciones para las líneas ficticias que se conectan de fase *a* a fase *A*, fase *b* a fase *B* y de fase *c* a fase *C*, con desviación estándar de pseudo mediciones de  $\sigma_i = 0.04$ .

### **2.8.2 Estimación de estado sistema IEEE de 13 nodos mediciones escasas y pseudo mediciones con los métodos propuestos.**

Se utilizaron 112 mediciones, las cuales fueron suficientes para solucionar un sistema de 41 variables de estado. Se utilizaron mediciones de inyección de potencia: 5 de activa y 5 de reactiva; pseudo mediciones de flujo de potencia en las líneas: 38 de activa y 38 de reactiva. Las otras

mediciones consideradas fueron 6 de magnitud de voltaje en el primario de transformadores, 3 de fasores de voltaje en el secundario de los reguladores, 3 de fasores de voltaje en el nodo de referencia angular; y 4 fasores de voltaje en los capacitores. En la Tabla 2.2 se muestran las mediciones disponibles para este caso. El valor de tolerancia en la convergencia fue de  $10^{-6}$ .

Tabla 2.2. Mediciones para la estimación de estado del sistema IEEE de 13 buses.

Mediciones de Inyección											
Nodo	$P_k$ (W)	$Q_k$ (W)	Nodo	$P_k$ (W)	$Q_k$	Nodo	$P_k$	$Q_k$	Nodo	$P_k$	$Q_k$
16	-2.01E+03	-4.38E+03	32	38.487	21.182	34	29.638	12.399			
18	-1.68E+03	5.21E+03	33	34.030	17.836						
Pseudo mediciones de flujos de líneas entre fases											
Línea	$P_{km}$ (W)	$Q_{km}$ (W)	Línea	$P_{km}$ (W)	$Q_{km}$ (W)	Línea	$P_{km}$ (W)	$Q_{km}$ (W)	Línea	$P_{km}$ (W)	$Q_{km}$ (W)
1-4	5.08E+10	3.34E+11	18-22	4.36E+05	5.28E+04	8-33	5.35E+05	-2.27E+04	21-38	-5.83E+04	-1.07E+05
2-5	4.55E+10	2.83E+11	16-23	5.84E+05	1.14E+05	11-33	-1.03E+05	-5.90E+04	34-38	4.17E+04	5.83E+04
3-6	3.94E+10	2.56E+11	23-24	5.33E+05	2.67E+04	19-33	-3.16E+05	-1.425E+05	17-39	7.52E+04	-1.51E+05
4-7	-4.98E+08	-4.51E+08	22-26	1.07E+05	9.75E+04	30-33	-1.76E+05	2.351E+05	25-39	2.65E+04	3.61E+05
5-8	-2.96E+08	-3.07E+08	16-29	-9.56E+05	-2.51E+05	9-34	9.89E+05	7.791E+05	16-40	9.54E+04	6.06E+04
6-9	-4.08E+08	-4.53E+08	17-30	-1.34E+05	3.26E+05	12-34	-6.98E+04	-8.136E+04	28-40	-1.26E+05	-9.26E+04
10-13	2.64E+07	5.98E+07	18-31	-5.87E+05	-4.15E+05	31-34	-9.45E+05	-4.886E+05	18-41	1.52E+05	4.20E+03
11-14	2.72E+07	5.82E+07	7-32	1.29E+06	5.08E+05	16-35	0.0507	-0.4580	27-41	-1.53E+05	1.76E+04
12-15	3.02E+07	5.93E+07	10-32	-1.51E+05	-8.37E+04	17-36	-0.090	-0.4925			
19-20	1.13E+05	1.02E+04	29-32	-1.10E+06	-2.27E+05	18-37	0.015	-0.4768			
Magnitud de voltaje en el primario de transformadores											
Nodo	$V_k$ (Volts)		Nodo	$V_k$ (Volts)		Nodo	$V_k$ (Volts)		Nodo	$V_k$ (Volts)	
4	2.0066E+03		6	2.6412E+03		11	2.5357E+03				
5	1.9640E+03		10	2.5856E+03		12	2.6571E+03				
Voltaje PMU en el secundario de los reguladores											
Nodo	$V_k$ (Volts)	$\theta_k$ (Grados)	Nodo	$V_k$ (Volts)	$\theta_k$ (Grados)	Nodo	$V_k$ (Volts)	$\theta_k$ (Grados)	Nodo	$V_k$ (Volts)	$\theta_k$ (Grados)
7	2.11E+03	-0.0134	8	2.502E+03	-114.816	9	2.78E+03	127.12			
Voltaje PMU en el nodo de referencia angular											
Nodo	$V_k$ (Volts)	$\theta_k$ (Grados)	Nodo	$V_k$ (Volts)	$\theta_k$ (Grados)	Nodo	$V_k$ (Volts)	$\theta_k$ (Grados)	Nodo	$V_k$ (Volts)	$\theta_k$ (Grados)
1	6.68E+04	29.99	2	6.632E+04	-90.01	3	6.16E+04	149.99			
Voltaje PMU en los capacitores											
Nodo	$V_k$ (Volts)	$\theta_k$ (Grados)	Nodo	$V_k$ (Volts)	$\theta_k$ (Grados)	Nodo	$V_k$ (Volts)	$\theta_k$ (Grados)	Nodo	$V_k$ (Volts)	$\theta_k$ (Grados)
24	2.46E+03	-4.3569	25	2.634E+03	-123.8481	26	2.62E+03	135.59	27	2.472E+03	121.02

En la Tabla 2.3 se reportan los valores de las variables de estado calculadas mediante el programa de flujos de potencia OpenDSS. En la misma Tabla 2.3 se encuentran las variables de estado estimadas con las mediciones de la Tabla 2.2 por los métodos RK-4, RN-2 y DORA.

Tabla 2.3. Cotejo de los datos del OpenDSS y los DSSE con métodos RK-4, RN-2 y DORA.

Nodo	OpenDSS		RK-4		RN-2		DORA		Error DORA	
	V(kV)	$\theta$ (°)	V(kV)	$\theta$ (°)	V(kV)	$\theta$ (°)	V(kV)	$\theta$ (°)	V Rel(%)	$\theta$ Abs(Dif°)
611-A	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
611-B	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
611-C	2.308	115.7	2.348	117.1	2.348	117.1	2.348	117.1	1.73	1.40
632-A	2.436	-2.5	2.442	-2.0	2.442	-2.0	2.442	-2.0	0.25	0.50
632-B	2.471	-121.8	2.484	-121.8	2.484	-121.8	2.484	-121.8	0.53	0.00
632-C	2.411	117.8	2.447	117.0	2.447	117.0	2.447	117.0	1.49	0.80
633-A	2.429	-2.6	2.481	-2.1	2.481	-2.1	2.481	-2.1	2.14	0.50
633-B	2.467	-121.8	2.457	-123.5	2.457	-123.5	2.457	-123.5	0.41	1.70
633-C	2.405	117.8	2.415	118.8	2.415	118.8	2.415	118.8	0.42	1.00
634-A	0.274	-3.3	0.276	-2.8	0.276	-2.8	0.276	-2.8	0.73	0.50
634-B	0.280	-122.3	0.282	-122.6	0.282	-122.6	0.282	-122.6	0.71	0.30
634-C	0.272	117.3	0.271	119.2	0.271	119.2	0.271	119.2	0.37	1.90
645-A	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
645-B	2.449	-121.9	2.487	-120.0	2.487	-120.0	2.487	-120.0	1.55	1.90
645-C	2.407	117.8	2.411	118.8	2.411	118.8	2.411	118.8	0.17	1.00
646-A	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
646-B	2.445	-122	2.439	-121.2	2.439	-121.2	2.439	-121.2	0.25	0.80
646-C	2.402	117.8	2.422	118.9	2.422	118.9	2.422	118.9	0.83	1.10
650-A	2.402	0	2.426	0.1	2.426	0.0	2.426	0.0	1.00	0.00
650-B	2.402	-120	2.352	-117.3	2.352	-117.4	2.352	-117.4	2.08	2.60
650-C	2.402	120	2.411	119.0	2.411	118.9	2.411	118.9	0.37	1.10
652-A	2.343	-5.3	2.336	-4.2	2.336	-4.2	2.336	-4.2	0.30	1.10
652-B	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
652-C	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
671-A	2.360	-5.4	2.316	-4.3	2.315	-4.4	2.315	-4.4	1.91	1.00
671-B	2.499	-122.4	2.488	-121.7	2.488	-121.7	2.488	-122.1	0.44	0.30
671-C	2.317	116	2.352	115.7	2.352	115.6	2.352	115.1	1.51	0.90
675-A	2.345	-5.6	2.339	-4.6	2.339	-4.6	2.339	-4.6	0.26	1.00
675-B	2.504	-122.6	2.492	-121.6	2.492	-121.6	2.492	-121.6	0.48	1.00
675-C	2.313	116	2.300	118.0	2.300	118.0	2.300	118.0	0.56	2.00
680-A	2.36	-5.4	2.394	-4.4	2.394	-4.3	2.394	-4.3	1.44	1.10
680-B	2.499	-122.4	2.487	-123.6	2.487	-123.6	2.487	-123.6	0.48	1.20
680-C	2.317	116	2.353	116.4	2.353	116.4	2.353	116.4	1.55	0.40
684-A	2.356	-5.4	2.357	-4.4	2.357	-4.3	2.357	-4.3	0.04	1.10
684-B	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
684-C	2.313	115.9	2.315	116.1	2.315	116.2	2.315	116.2	0.09	0.30
692-A	2.36	-5.4	2.363	-4.3	2.364	-4.4	2.364	-4.3	0.17	1.10
692-B	2.499	-122.4	2.530	-121.8	2.530	-121.8	2.530	-121.4	1.24	1.00
692-C	2.317	116	2.362	115.7	2.362	115.6	2.362	116.1	1.94	0.10



Como se puede observar en la Tabla 2.3, los resultados de los métodos DSSE son prácticamente los mismos. El valor de la  $J(x)$  es 2.9862 para RK-4, 2.9657 para RN-2 y 2.9740 para DORA, debido a que las mediciones contienen poco ruido. La prueba de detección de error es con valor de  $\chi^2 = 52.1914$  para todos los métodos. Los algoritmos lograron la convergencia en 21 pasos para RK-4, 31 iteraciones para RN-2, y 3 iteraciones para DORA. En las últimas dos columnas, se observa el error relativo en porcentaje en las magnitudes de voltaje cuyo máximo es 2.14 y el valor absoluto en los ángulos cuyo máximo es 2.60. Con esto se comprueba que los estimadores funcionan correctamente estimando el estado del sistema. Además, el método DORA, es muy rápido y robusto. Por tanto, en los siguientes casos de estudio sólo se usará el método DORA.

### 2.8.3. Sistema de prueba de IEEE de 34 nodos con mediciones escasas y mayor error

En este caso se introdujeron pseudo mediciones de flujos de potencia activa y reactiva en las líneas ficticias. La desviación estándar para estas pseudo mediciones fue de  $\sigma_i = 0.04$ . El valor de tolerancia en la convergencia fue de  $10^{-6}$ . En este caso, el conjunto de simulaciones fue hecho considerando perturbaciones aleatorias del orden de  $10^{-2}$  en los valores iniciales de las variables de estado y del orden de  $10^{-2}$  en las mediciones con una distribución normal. El sistema de prueba de la IEEE de 34 buses se muestra en la Figura 2.10 [IEEE PES, 2018].

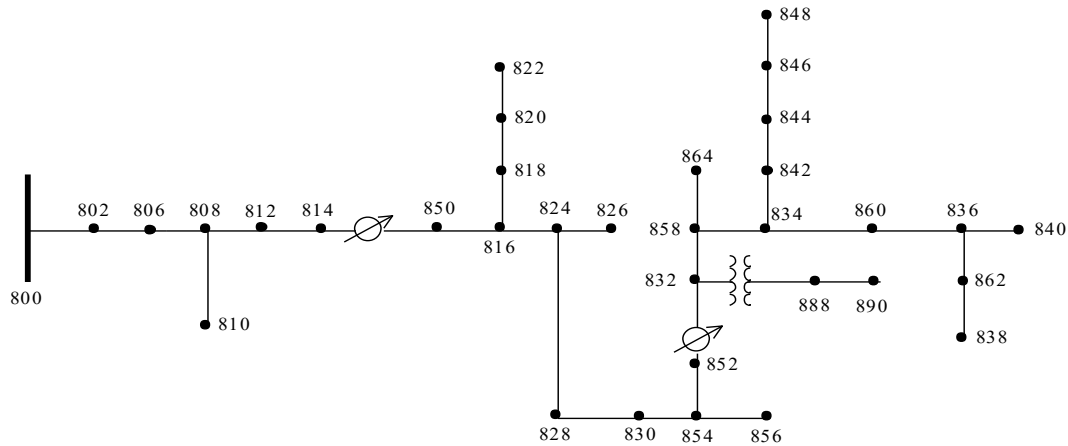


Figura 2.10. Sistema de prueba de la IEEE de 34 nodos.

Se utilizaron 335 mediciones, las cuales son pocas porque existen pocos elementos diferentes a líneas; aun así fueron suficientes para solucionar un sistema de 276 variables de estado, porque la matriz de ganancia  $G$  es no singular con un número de condición de  $nc = 2.05 \times 10^{19}$ . Se utilizaron mediciones de inyección de potencia: 14 de activa y 14 de reactiva; pseudo mediciones de flujo de

potencia en las líneas de distribución: 135 de activa y 135 de reactiva, 9 mediciones de magnitud de voltaje en el primario de transformadores; 5 mediciones fasoriales de voltaje en reguladores, 3 mediciones fasoriales de voltaje en el nodo de referencia angular; y 6 mediciones fasoriales de voltaje en los capacitores. Los resultados se muestran en la Tabla 2.4.

Tabla 2.4. Comparación de los resultados del OpenDSS y la DSSE con el método DORA.

Nodo	OpenDSS		DORA		Nodo	OpenDSS		DORA		Nodo	OpenDSS		DORA	
	V(V)	$\theta$ (°)	V(V)	$\theta$ (°)		V(V)	$\theta$ (°)	V(V)	$\theta$ (°)		V(V)	$\theta$ (°)	V(V)	$\theta$ (°)
800.A	1.509E+04	0.0	1.396E+04	0.1	828.A	1.454E+04	-1.8	1.495E+04	-1.9	848.B	1.477E+04	-123.6	1.535E+04	-113.9
800.B	1.509E+04	-120.0	1.381E+04	-126.4	828.B	1.458E+04	-122.4	1.477E+04	-128.9	848.C	1.482E+04	116.6	1.458E+04	114.1
800.C	1.509E+04	120.0	1.490E+04	114.6	828.C	1.453E+04	118.1	1.468E+04	115.9	850.A	1.469E+04	-1.7	1.295E+04	-1.7
802.A	1.506E+04	0.0	1.706E+04	0.0	830.A	1.429E+04	-2.0	1.419E+04	-2.1	850.B	1.472E+04	-122.2	1.607E+04	-123.5
802.B	1.507E+04	-120.1	1.369E+04	-110.0	830.B	1.433E+04	-122.7	1.327E+04	-128.3	850.C	1.467E+04	118.3	1.398E+04	113.8
802.C	1.507E+04	120.0	1.518E+04	123.5	830.C	1.429E+04	117.7	1.474E+04	115.7	852.A	1.385E+04	-2.4	1.481E+04	-2.4
806.A	1.504E+04	-0.1	1.372E+04	-0.1	832.A	1.497E+04	-2.4	1.461E+04	-2.3	852.B	1.390E+04	-123.4	1.378E+04	-133.7
806.B	1.506E+04	-120.1	1.500E+04	-116.8	832.B	1.485E+04	-123.4	1.520E+04	-123.9	852.C	1.385E+04	116.9	1.352E+04	111.8
806.C	1.506E+04	119.9	1.455E+04	123.8	832.C	1.489E+04	116.9	1.619E+04	116.9	854.A	1.428E+04	-2.0	1.324E+04	-2.0
808.A	1.459E+04	-0.6	1.420E+04	-0.6	834.A	1.490E+04	-2.5	1.484E+04	-2.4	854.B	1.433E+04	-122.8	1.451E+04	-123.2
808.B	1.480E+04	-120.8	1.575E+04	-120.9	834.B	1.478E+04	-123.6	1.607E+04	-128.1	854.C	1.428E+04	117.7	1.480E+04	119.0
808.C	1.479E+04	119.4	1.435E+04	125.2	834.C	1.482E+04	116.7	1.505E+04	113.3	856.B	1.432E+04	-122.8	1.486E+04	-125.5
810.B	1.479E+04	-120.8	1.568E+04	-115.9	836.A	1.489E+04	-2.5	1.484E+04	-2.2	858.A	1.494E+04	-2.4	1.449E+04	-2.3
812.A	1.407E+04	-1.2	1.444E+04	-1.2	836.B	1.477E+04	-123.6	1.475E+04	-128.1	858.B	1.482E+04	-123.5	1.605E+04	-125.1
812.B	1.451E+04	-121.6	1.553E+04	-113.4	836.C	1.482E+04	116.7	1.595E+04	107.7	858.C	1.486E+04	116.8	1.627E+04	110.0
812.C	1.448E+04	118.8	1.403E+04	111.8	838.B	1.477E+04	-123.6	1.400E+04	-127.0	860.A	1.489E+04	-2.5	1.401E+04	-2.4
814.A	1.366E+04	-1.7	1.429E+04	-1.7	840.A	1.489E+04	-2.5	1.452E+04	-2.6	860.B	1.477E+04	-123.6	1.522E+04	-126.0
814.B	1.428E+04	-122.2	1.320E+04	-117.5	840.B	1.477E+04	-123.6	1.615E+04	-119.9	860.C	1.482E+04	116.7	1.699E+04	126.4
814.C	1.423E+04	118.3	1.459E+04	113.3	840.C	1.482E+04	116.7	1.315E+04	111.2	862.A	1.489E+04	-2.5	1.437E+04	-2.3
816.A	1.468E+04	-1.7	1.500E+04	-1.6	842.A	1.490E+04	-2.5	1.479E+04	-2.4	862.B	1.477E+04	-123.6	1.453E+04	-128.6
816.B	1.472E+04	-122.2	1.517E+04	-118.1	842.B	1.478E+04	-123.6	1.616E+04	-128.0	862.C	1.482E+04	116.7	1.550E+04	114.4
816.C	1.467E+04	118.3	1.347E+04	124.9	842.C	1.482E+04	116.7	1.451E+04	122.5	864.A	1.494E+04	-2.4	1.409E+04	-2.4
818.A	1.467E+04	-1.7	1.432E+04	-1.8	844.A	1.489E+04	-2.5	1.401E+04	-2.6	888.A	2.414E+03	-3.9	2.574E+03	-4.3
820.A	1.434E+04	-1.7	1.423E+04	-1.6	844.B	1.477E+04	-123.6	1.547E+04	-124.2	888.B	2.395E+03	-124.9	2.275E+03	-131.9
822.A	1.430E+04	-1.7	1.321E+04	-1.8	844.C	1.482E+04	116.7	1.444E+04	110.0	888.C	2.402E+03	115.4	2.431E+03	107.6
824.A	1.455E+04	-1.8	1.544E+04	-1.8	846.A	1.490E+04	-2.6	1.476E+04	-2.5	890.A	2.225E+03	-4.1	2.244E+03	-4.3
824.B	1.459E+04	-122.4	1.386E+04	-115.6	846.B	1.477E+04	-123.6	1.544E+04	-115.4	890.B	2.222E+03	-125.5	2.269E+03	-119.6
824.C	1.454E+04	118.1	1.520E+04	124.5	846.C	1.482E+04	116.6	1.437E+04	122.6	890.C	2.215E+03	115.0	2.108E+03	111.2
826.B	1.458E+04	-122.4	1.429E+04	-124.3	848.A	1.490E+04	-2.6	1.442E+04	-2.5					

Para este sistema de 34 nodos el algoritmo convergió en 5 iteraciones,  $J(x)$  tiene un valor de 17.5862, mientras que el umbral de la prueba de detección de error es  $\chi^2 = 94.4221$ ; esto es debido que las pseudo mediciones tienen un gran valor de desviación estándar, y además se tienen pocas mediciones; sin embargo el sistema converge en pocas iteraciones con una tolerancia de  $10^{-6}$ . Como se puede observar, los valores de ambos estudios son similares,

aunque existen algunas diferencias debido al nivel de error en las mediciones y al poco valor de redundancia en las mediciones.

#### 2.8.4. Sistema de prueba de Comprehensive Test Feeder usando el método DORA y eliminación de errores gruesos.

Con la finalidad de validar los resultados proporcionados por el estimador cuando sea necesario estimar el estado de una red de mayor escala, también fue considerado sistema *Comprehensive Test Feeder* representado en la Figura 2.11 [IEEE PES, 2018]; del cual también se obtuvo la estimación considerando que existen errores en 11 mediciones para este caso.

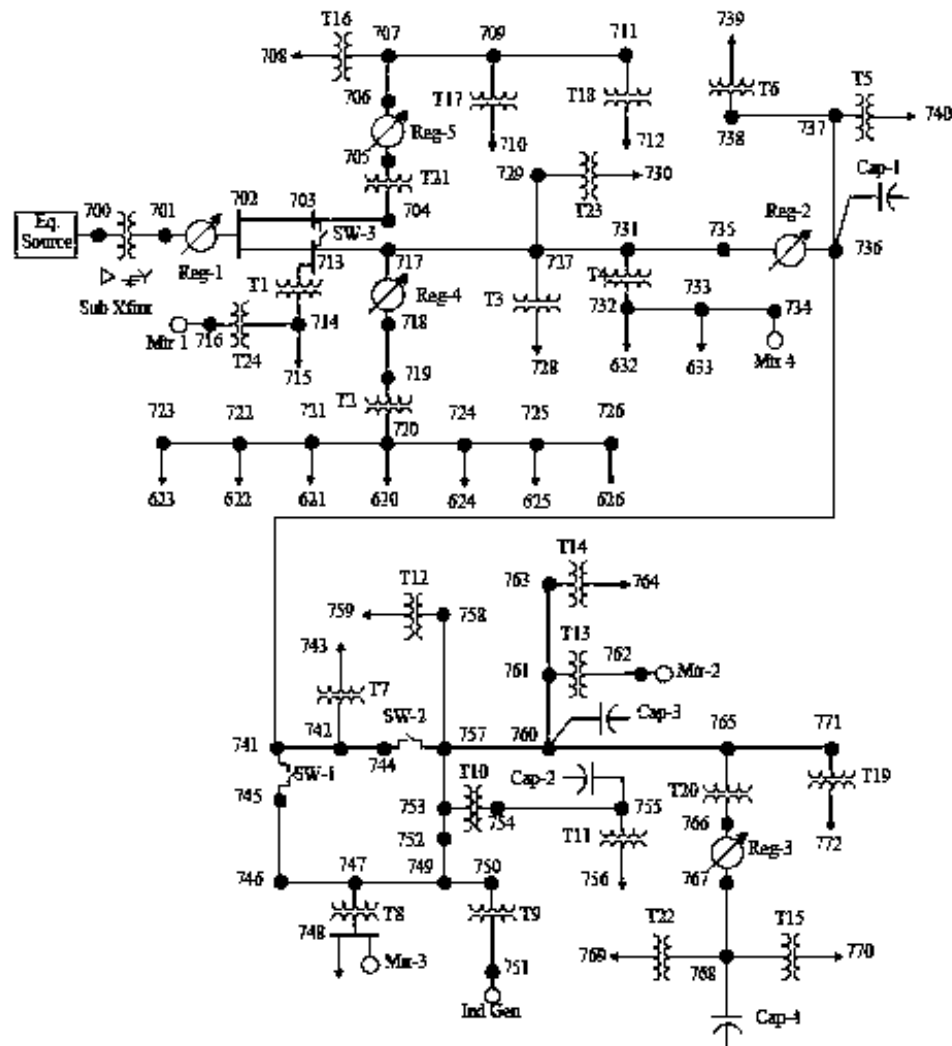


Figura 2.11 Diagrama unifilar del Comprehensive Test Feeder.

La desviación estándar para las pseudomediciones de flujo de potencia en líneas ficticias fue de  $\sigma_i = 0.04$  y la tolerancia en la convergencia de  $10^{-6}$ . En este caso, el conjunto de simulaciones fue hecho considerando perturbaciones aleatorias del orden de  $10^{-1}$  en los valores iniciales de las variables de estado, y del orden de  $10^{-1}$  en las mediciones con una distribución normal.

Para estimar el estado del sistema de prueba de la Figura 2.11 se utilizaron 695 mediciones las cuales son usadas para solucionar un sistema de 458 variables de estado. Se utilizaron mediciones de inyección de potencia correspondientes a 50 mediciones de potencias activa y reactiva, respectivamente. También se consideraron 227 pseudo mediciones de flujo de potencia de potencias activa y reactiva, respectivamente, 89 mediciones de magnitud de voltaje en el primario de transformadores, así como 11, 3 y 12 mediciones fasoriales de voltaje en reguladores, nodo de referencia angular y capacitores, respectivamente.

Adicionalmente, once mediciones fueron corrompidas arbitrariamente. A las mediciones del transformador T20 se les cambió los tres valores de magnitud de voltaje, al capacitor 1 se le cambio el valor de la potencia activa y reactiva respectivamente para con ello, provocar seis errores gruesos; y en el regulador 4 se cambiaron sus dos mediciones de valor en magnitud y ángulo de voltaje como se muestra en la Tabla 2.5.

Tabla 2.5. Mediciones contaminadas en la red “Comprehensive Test Feeder”.

<b>Mediciones exactas y contaminadas</b>		
$V_{718.A}$	1.578E+04 W	1.00E+04 W
$\theta_{718.A}$	-3.6°	180°
$P_{727.A}$	0 kW	100 MW
$P_{727.B}$	0 kW	-100 MW
$P_{727.A}$	0 kW	200 MW
$Q_{727.A}$	0 kVar	-100 MVar
$Q_{727.B}$	0 kVar	200 MVar
$Q_{727.C}$	0 KVar	100 MVar
$V_{765.A}$	1.460E+04 V	0 V
$V_{765.B}$	1.496E+04 V	0 V
$V_{765.C}$	1.469E+04 V	0 V

Después de detectar, identificar y borrar los 10 últimos errores gruesos, la estimación necesitó de 6 iteraciones con un valor de  $J(x) = 276.064$  y un umbral de  $\chi^2 = 280.597$ . Sin embargo

no se eliminó la primera medición que es errónea. Lo anterior muestra que cuando el sistema no es altamente redundante respecto a las mediciones, la precisión del estimador se ve un poco afectada. Cuando existen errores significativos, pero se pasa la prueba chi-cuadrada, se considera que la estimación es correcta. En este caso, la eliminación de los errores también depende del peso que se le asigna a cada medición, el cual está asociado a su desviación estándar.

### 2.8.5. Sistemas IEEE de prueba de distribución de 34, 37, 123 bus y el *Comprehensive Test Feeder* con el método de regularización doble óptimo.

Los sistemas de prueba de distribución del IEEE de 34, 37, 123 bus y el “Comprehensive Test Feeder” fueron analizados usando del método de Monte Carlo con el método DORA para 100 casos, como se ilustra en la Tabla 2.6. Se calcula el valor mínimo, máximo, promedio y mediana del número de iteraciones y del tiempo usado por el método DORA. El valor de  $\chi^2$  es mostrado cuando ninguna de las mediciones es desechada. Se consideraron mediciones de potencia activa y reactiva en las líneas ficticias. Se consideraron errores aleatorios con distribución normal del orden de  $10^{-2}$  para las condiciones iniciales de las variables de estado y también del orden de  $10^{-2}$  para las mediciones.

Tabla 2.6. Estadísticas del método de Monte Carlo de la estimación de estado para el método DORA en los sistemas de prueba del IEEE de 34, 37, 123 bus y el *Comprehensive Test Feeder*.

Buses	34 bus		37 bus		123 bus		Comp. Test	
	$\chi^2 = 807.0$		$\chi^2 = 580.8$		$\chi^2 = 1.3e3$		$\chi^2 = 1.3e3$	
	Iter.	Tiempo (s)	Iter.	Tiempo (s)	Iter.	Tiempo (s)	Iter.	Tiempo (s)
Mínimo	1	0.723	6	3.095	9	16.77	1	3.886
Promedio	1.36	22.72	6.75	108.8	11.82	709.2	3.72	15.76
Mediana	1	22.99	7	113.3	12	705.7	4	15.83
Máximo	2	43.96	9	207.7	13	1.4e3	5	310.0

Como se observa en la Tabla 2.6, el método DORA converge en todos los casos del método Monte Carlo y lo hace en un tiempo adecuado para una estimación DSSE. Para el sistema de 34 buses, que es un sistema real subterráneo poco cargado; se converge más rápido debido a que existe poco error en las mediciones y tiene pocos componentes eléctricos diferentes a líneas de distribución. Para el sistema de 37 buses, que es un sistema real subterráneo muy desbalanceado; el número de iteraciones y tiempo se incrementa debido a que este sistema tiene reguladores en delta abierta, los cuales hacen que no se pase el umbral de chi-cuadrada debido a las desviaciones

estándar asociadas a estos componentes. Asimismo, en el sistema de 123 nodos se tienen muchos componentes y líneas trifásicas lo que hace que el método necesite de más iteraciones para converger. Por otro lado, el *Comprehensive Test Feeder* tiene casi toda la variedad de elementos eléctricos que pueden existir en un sistema de distribución; pero tienen muchas líneas laterales, es decir, líneas bifásicas o monofásicas, por lo que converge más rápido que el sistema de 123 buses.

## **2.9 Conclusiones**

Tres metodologías para estimar el estado de operación de los sistemas de distribución desbalanceados a través de un estimador de estado basado en secuencia positiva han sido propuestas a usarse en este trabajo. Como el modelo matemático de los sistemas de distribución conduce a un sistema de ecuaciones algebraicas no lineales, al ser linealizadas con el método Gauss-Newton se obtiene un sistema de ecuaciones algebraicas mal-condicionado. Se usa el método Gauss-Newton porque no se necesita calcular los Hessianos de las funciones matemáticas que representan las mediciones. Por lo anterior, un método de homotopía, un método de normas cuadrada y un método de regularización de subespacios de Krylov han sido implementados para superar y resolver este problema. Los comportamientos del estimador de estado han sido comparados con otros métodos de solución reportados en la literatura para resolver el problema de estimación estado. La comparación de estos resultados muestra que las técnicas propuestas son muy robustas hacia la convergencia cuando diferentes conjuntos de mediciones son consideradas.

## Capítulo 3.

### Ataques de Inyección de Datos Falsos en Estimación de Estado

#### 3.1 Introducción

En el contexto de la estimación de estado de un sistema de potencia, los ciberataques basados en inyección de datos falsos consisten en corromper un conjunto definido de mediciones de tal manera que el valor residual correspondiente a cada medición es muy pequeño. Por tanto, mediciones corrompidas son indetectables cuando se realiza un análisis para la detección, identificación y eliminación o corrección de datos erróneos, causando que una estimación de estado falsa sea considerada correcta. En este capítulo, se reporta la forma en la cual un ciberataque puede ser realizado de manera indetectable para corromper un conjunto de mediciones disponibles asociadas con la operación de controladores basados en electrónica, llamados controladores SIFLETCA; específicamente aquellas mediciones asociadas con el compensador serie controlado por tiristores (Thyristor-Controlled Series Compensator-*TCSC*), el compensador estático de VAR con un transformador (Static VAR Compensator with a Transformer-*SVC-T*), transformador defasador, (Phase Shifter Transformer-*PST*), el transformador con cambiador de tap bajo carga (Load Tap Changer-*LTC*) y el controlador universal de flujos de potencia (Universal Power Flow Controller-*UPFC*). Además de que la alteración da una estimación incorrecta e indetectable con métodos de detección de datos erróneos, en particular la prueba chi-cuadrada, del estado operativo del sistema; pone en peligro la operación segura del controlador si una acción de control es realizada con base en esta información falsa del estado de operación. Con la finalidad de validar estas afirmaciones, se reportan casos de estudio que ilustran numéricamente las consecuencias de estos ataques cibernéticos inobservables.

#### 3.2 Modelado de la red con controladores SIFLETCA

El modelado en estado estacionario de los componentes eléctricos que integran un sistema eléctrico de potencia ha sido ampliamente reportado y puede ser consultado en [Chen, 1998] y [Kothari and Nagrath, 2008]. En este sentido, las líneas de transmisión son modeladas como un dispositivo de dos puertos mediante un modelo  $\pi$  de secuencia positiva. Las admitancias en

derivación representan capacitores o inductores, los cuales son usados para el control de magnitud de voltaje. Los taps complejos de los transformadores son también incluidos para modelar la característica de defasamiento. Los generadores y cargas son modelados como inyecciones de potencia, las cuales introducen relaciones no lineales en el sistema de ecuaciones de la EE. Las variables de estado de los controladores SIFLETCA son incluidos en las matrices Jacobianas asociadas al problema de EE utilizando un marco de modelado unificado.

Con base a lo anterior, el modelo de cada dispositivo es superpuesto para construir el modelo de la red del sistema de potencia. Para un análisis en estado estacionario el sistema eléctrico es modelado mediante una matriz de admitancias nodales  $\mathbf{Y}$  que relaciona voltajes e inyecciones de corriente nodales [Abur and Gomez-Exposito, 2004]:

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ \vdots \\ i_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} & \cdots & Y_{1n} \\ Y_{21} & Y_{22} & \cdots & Y_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Y_{n1} & Y_{n2} & \cdots & Y_{nn} \end{bmatrix} [\mathbf{V}] \quad , \quad (3.1)$$

donde  $i_k$  es el fasor de la corriente neta inyectada en el nodo  $k$ ,  $v_k$  es el fasor de voltaje en el nodo  $k$  y  $Y_{km}$  es el  $Y(k,m)$ -ésimo elemento de  $\mathbf{Y}$ . Cualquier dispositivo pasivo de  $n$ -puertos puede ser incluido en (3.1). Estas ecuaciones del modelo simplifican la inclusión de cambios topológicos. Un dispositivo de  $n$ -puertos puede ser fácilmente agregado cambiando los correspondientes elementos en la matriz de admitancias  $\mathbf{Y}$ .

### 3.2.1 Máxima verosimilitud y distribución de probabilidad

Con la finalidad de formular matemáticamente el problema de EE es común y justificable hacer las siguientes suposiciones sobre las propiedades estadísticas de los errores en las mediciones [Stevenson y J. Grainger, 2004]: i) los errores tienen una distribución normal; ii) el valor esperado para todos los errores es cero, o sea  $E[e_i] = 0, \forall i = 1, \dots, m$ ; y iii) los errores de las mediciones no están correlacionados:  $E[e_i e_j] = 0$ . De manera similar, se asume que la desviación estándar  $\sigma_i$  de cada medición  $i$  es conocida y cuantifica la precisión de cada dispositivo de medición. Con base a lo anterior, la formulación del problema de EE puede ser realizada mediante el concepto de estimación de máxima verosimilitud, la cual maximiza una función de probabilidad normal o función de verosimilitud del error de la medición, la cual está en función de media y varianza del error. La



solución del problema de optimización dará las estimaciones de máxima verosimilitud para estos dos valores de media y varianza del error.

Para formular el problema de EE con base al método de estimación de máxima verosimilitud, primero es necesario revisar los conceptos reportados a continuación.

Una variable aleatoria con distribución normal tiene la función de densidad de probabilidad,

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{z-\mu}{\sigma}\right)^2} \quad (3.2)$$

donde  $z$  es una variable aleatoria,  $\mu$  es la media, promedio o valor esperado de  $z$ :  $E[z]$ , mientras que  $\sigma$  es la desviación estándar de  $z$ . Si se realiza el siguiente cambio de variable  $u = \frac{z-\mu}{\sigma}$  y  $\sigma=1$  se obtiene una distribución normal estandarizada con  $E[u]=0$  con la siguiente función de probabilidad,

$$\Phi(u) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}u^2} \quad (3.3)$$

La función de densidad de probabilidad conjunta que representa la probabilidad de medir  $m$  mediciones independientes, cada una con la misma función de probabilidad Gaussiana, es dada por el producto de cada una de estas funciones:

$$f_m(z) = f(z_1)f(z_2) \cdots f(z_m) \quad (3.4)$$

donde la función  $f_m(z)$  se denomina función de verosimilitud y corresponde a una medida de la probabilidad de observar el conjunto particular de  $m$  mediciones. La función de densidad de probabilidad normal o gaussiana está representada en la Figura 3.1

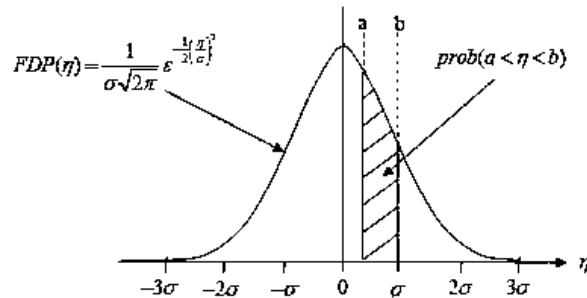


Figura 3.1. Función de densidad de probabilidad gaussiana estándar.

La variable aleatoria gaussiana en la Figura 3.1 es  $\eta$  y representa el error acumulado en la medición con media cero. La probabilidad de que  $\eta$  tome valores entre los puntos  $a$  y  $b$  está dada por el área bajo la curva desde  $a$  hasta  $b$ .

Con base a lo anterior, el objetivo de la estimación de máxima verosimilitud es maximizar la función de verosimilitud (3.4) con respecto a  $\mu_i$  y  $\sigma_i$ . Con el fin de simplificar la optimización, la función (3.4) es reemplazada por su logaritmo que se incrementa monótonicamente, lo cual produce el mismo valor óptimo de la variable independiente para ambas funciones:

$$L = \log f_m(z) = \sum_{i=1}^m \log f(z_i) = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \left( \frac{z_i - \mu_i}{\sigma_i} \right)^2 - \frac{m}{2} \log 2\pi - \sum_{i=1}^m \log \sigma_i \quad (3.5)$$

Por último, la maximización de la función de verosimilitud (o log-verosimilitud) para un conjunto de  $m$  mediciones es equivalente a minimizar  $\sum_{i=1}^m \left( \frac{z_i - \mu_i}{\sigma_i} \right)^2$  [Stevenson y J. Grainger, 2004].

### 3.3 Método de mínimos cuadrados ponderados

El conjunto disponible de mediciones físicas para un estimador de estado deberá ser suficiente y estratégicamente localizado en la red para tener un sistema completamente observable. Un sistema SCADA tradicionalmente provee medidas de flujos de potencia en terminales de los elementos de transmisión, inyecciones de potencia nodal y magnitudes de voltaje nodal:  $\mathbf{z}^{SCADA} = [\mathbf{P}_{branch} \ \mathbf{Q}_{branch} \ \mathbf{P}_{inj} \ \mathbf{Q}_{inj} \ \mathbf{V}]^T$ . Por otro lado, los PMUs suministran mediciones fasoriales sincronizadas, asociadas con los voltajes nodales y las corrientes de rama, donde las mediciones de corriente son procesadas por el estimador en coordenadas rectangulares para evitar problemas de convergencia [Zamora-Cárdenas et al, 2014]:  $\mathbf{z}^{PMU} = [\boldsymbol{\theta}^{PMU} \ \mathbf{V}^{PMU} \ \mathbf{I}_{branch,r} \ \mathbf{I}_{branch,i}]^T$ . El conjunto de todas estas mediciones físicas  $\mathbf{z} \in \mathfrak{R}^m$  recolectadas por el sistema SCADA y los PMUs,  $\mathbf{z} = [\mathbf{z}^{SCADA} \ \mathbf{z}^{PMU}]^T$ , son matemáticamente representadas por

$$\mathbf{z} = [\mathbf{z}^{SCADA} \ \mathbf{z}^{PMU}]^T = \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}}) + \mathbf{e}, \quad (3.6)$$

donde  $\hat{\mathbf{x}} \in \mathfrak{R}^n$  es el conjunto de variables de estado asociado con los voltajes nodales y los controladores SIFLETCA [15],  $\hat{\mathbf{x}} = [\hat{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\mathbf{V}}, \hat{\mathbf{x}}_{FACTS}]^T$ ,  $\mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}})$  es el vector de funciones no lineales que relacionan a las variables de estado  $\hat{\mathbf{x}}$  con las mediciones físicas  $\mathbf{z}$ , mientras  $\mathbf{e}$  es un vector de errores de ruido en mediciones [Zamora-Cárdenas et al, 2014].

Con base en el método WLS, la mejor estimación de  $\hat{\mathbf{x}}$  que satisface (3.7) es obtenida iterativamente, resolviendo el conjunto de ecuaciones (3.8) para el vector de ajustes estimados  $\Delta \hat{\mathbf{x}}^k$

y los valores iniciales  $\hat{x}_0^k$ . Los valores estimados de las variables de estado son actualizados por  $\hat{x}^{k+1} = \hat{x}_0^k + \Delta\hat{x}^k$ , donde  $k$  es el número de iteraciones:

$$(\mathbf{H}(\hat{x}))^T \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{z} - \mathbf{h}(\hat{x})) = \mathbf{0}, \quad (3.7)$$

$$\mathbf{G}(\hat{x}^k) \Delta\hat{x}^k = (\mathbf{H}(\hat{x}^k))^T \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{z} - \mathbf{h}(\hat{x}^k)). \quad (3.8)$$

Para el paso  $k$ -ésimo del proceso iterativo de solución se utilizan nuevas condiciones iniciales dadas por  $\hat{x}_0^{k+1} = \hat{x}^{k+1}$ , hasta que se satisface una tolerancia especificada  $\text{Max}|\Delta\hat{x}^k| < \text{TOL}$  o el número máximo de iteraciones se excede. En este proceso iterativo,  $\mathbf{H}(\hat{x}^k) = (\partial\mathbf{h}(\hat{x})/\partial\hat{x})|_{\hat{x}^k}$  es la matriz Jacobiana de las mediciones estimadas,  $\mathbf{R} = \text{diag}[\mathbf{R}^{\text{SCADA}} \mathbf{R}_V^{\text{PMU}} \mathbf{R}_I^{\text{PMU}}]^T$  es la matriz de covariancia, donde  $[\mathbf{R}^{\text{SCADA}}] = \text{diag}\{\sigma_{P_{inj}}^2 \sigma_{Q_{inj}}^2 \sigma_{P_{branch}}^2 \sigma_{Q_{branch}}^2 \sigma_V^2\}$ ,  $[\mathbf{R}_V^{\text{PMU}}] = \text{diag}\{\sigma_{\theta}^2 \sigma_V^2\}$  y  $[\mathbf{R}_I^{\text{PMU}}] = \text{diag}\{\sigma_{I_{branch,r}}^2 \sigma_{I_{branch,i}}^2\}$  son matrices diagonales, y  $\mathbf{G}(\hat{x}^k)$  es la matriz de ganancia. La matriz Jacobiana estimada  $\mathbf{H}(\hat{x})$  está dada por (3.9)

$$\mathbf{H}(\hat{x}) = \begin{bmatrix} \mathbf{H}^{\text{SCADA}} \\ \mathbf{H}_V^{\text{PMU}} \\ \mathbf{H}_I^{\text{PMU}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \hat{P}_{inj}}{\partial \hat{\theta}} & \hat{V} \frac{\partial \hat{P}_{inj}}{\partial \hat{V}} & \frac{\partial \hat{P}_{inj}}{\partial \hat{x}_{FACTS}} \\ \frac{\partial \hat{Q}_{inj}}{\partial \hat{\theta}} & \hat{V} \frac{\partial \hat{Q}_{inj}}{\partial \hat{V}} & \frac{\partial \hat{Q}_{inj}}{\partial \hat{x}_{FACTS}} \\ \frac{\partial \hat{P}_{branch}}{\partial \hat{\theta}} & \hat{V} \frac{\partial \hat{P}_{branch}}{\partial \hat{V}} & \frac{\partial \hat{P}_{branch}}{\partial \hat{x}_{FACTS}} \\ \frac{\partial \hat{Q}_{branch}}{\partial \hat{\theta}} & \hat{V} \frac{\partial \hat{Q}_{branch}}{\partial \hat{V}} & \frac{\partial \hat{Q}_{branch}}{\partial \hat{x}_{FACTS}} \\ \mathbf{0} & \hat{V} & \mathbf{0} \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \hat{V} & \mathbf{0} \\ \frac{\partial \hat{I}_{branch,r}}{\partial \hat{\theta}} & \hat{V} \frac{\partial \hat{I}_{branch,r}}{\partial \hat{V}} & \frac{\partial \hat{I}_{branch,r}}{\partial \hat{x}_{FACTS}} \\ \frac{\partial \hat{I}_{branch,i}}{\partial \hat{\theta}} & \hat{V} \frac{\partial \hat{I}_{branch,i}}{\partial \hat{V}} & \frac{\partial \hat{I}_{branch,i}}{\partial \hat{x}_{FACTS}} \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

### 3.3.1 Solución de las ecuaciones lineales de estimación de estado

La solución de ecuaciones lineales (3.8) que conforma la matriz de ganancia  $\mathbf{G}$  puede ser resuelta por dos factorizaciones comunes que provienen del álgebra lineal: la descomposición de Cholesky y la factorización LU. En la descomposición de Cholesky, la matriz de ganancia  $\mathbf{G}$  puede ser escrita como el producto de una matriz dispersa triangular inferior  $\mathbf{L}$  y su transpuesta cuando  $\mathbf{G}$  es positiva definida:  $\mathbf{G} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{L}^T$ .

Cuando es aplicable, la descomposición de Cholesky es aproximadamente dos veces más eficiente que la factorización LU para resolver sistemas lineales [Abur and Gomez-Exposito, 2004]. Se debe notar que estas factorizaciones no se pueden hacer para sistemas que no son completamente observables. Como resultado, una solución de EE no puede ser obtenida para sistemas inobservables.

### 3.3.2 Análisis de datos erróneos

Después de obtener la estimación de estado se debe realizar un análisis de datos erróneos, el cual consiste en detectar, identificar y remover errores gruesos, los cuales hacen la prueba de hipótesis dada por el umbral de la distribución chi-cuadrada. La distribución chi-cuadrada  $\chi^2_{(m-n),\alpha}$  es usada para detectar errores gruesos [Stevenson y J. Grainger, 2004]. En este caso,  $(m-n)$  es el grado de libertad dado por la diferencia entre el número existente de mediciones y el número de variables de estado a estimar, mientras que  $\alpha$  representa el nivel de significancia usado para detectar la presencia de errores gruesos en el conjunto disponible de mediciones físicas. En la Figura 3.2 se muestra esta distribución. Con base en la Figura 3.2, la prueba chi-cuadrada es realizada y representada por (3.10)

$$prob\left(J(\hat{x}) < x_{k,\alpha}^2\right) = (1 - \alpha) \quad (3.10)$$

donde  $J(\hat{x})$  es la suma ponderada de los cuadrados de los residuos de las mediciones y  $\chi^2_{k,\alpha}$  es el valor límite o umbral de la distribución chi-cuadrada,  $k$  y  $\alpha$  son el número de grados de libertad y el nivel de significancia respectivamente.

La distribución chi-cuadrada se encuentra dividida en dos áreas, donde el área  $\alpha$  representa la probabilidad de que  $J(\hat{x})$  exceda el valores límite  $x_{k,\alpha}^2$ , mientras que  $(1-\alpha)$  representa la probabilidad de que  $J(\hat{x})$  sea menor que  $x_{k,\alpha}^2$ . La distribución chi-cuadrada de la Figura 3.2 es

asimétrica para  $k \leq 30$ , mientras que para  $k > 30$  la distribución chi-cuadrada se asemeja a una distribución normal.

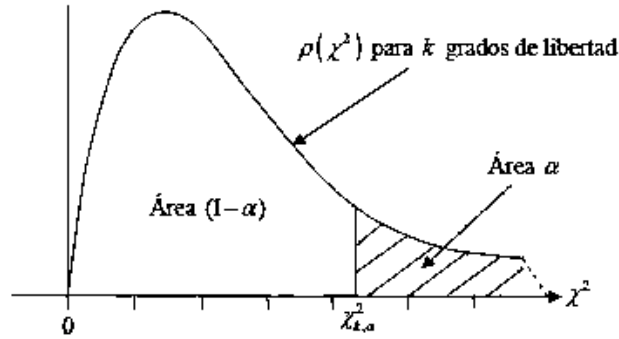


Figura 3.2. Función de densidad de probabilidad  $\rho(\chi^2)$  de la distribución chi-cuadrada  $\chi^2_{k,\alpha}$  para ( $k < 30$ ).

La detección de errores gruesos se realiza mediante la prueba dada por (3.10), asumiéndose la existencia de este tipo de errores si la desigualdad no es satisfecha. Si este es el caso, se procede a identificar las mediciones que deben ser eliminadas de la base de datos utilizando el vector de residuales normalizados (3.11) [Stevenson y J. Grainger, 2004]. Asimismo,  $\mathbf{S}$  es la matriz de covariancia residual dada por (3.12):

$$\hat{r}_N = \frac{|z - \mathbf{h}(\hat{x})|}{\sqrt{\text{diag}(\mathbf{S})}} \quad (3.11)$$

$$\mathbf{S} = \mathbf{R} - \mathbf{H} [\mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H}]^{-1} \mathbf{H}^T. \quad (3.12)$$

Por último, las mediciones asociadas con los máximos residuos normalizados son removidas del vector de mediciones, y el proceso de estimación debe realizarse nuevamente, considerando la nueva base de datos de mediciones SCADA y PMUs. La estimación de estado y el análisis de datos erróneos son ejecutados secuencialmente, hasta que la prueba de detección de datos erróneos (3.10) es satisfecha o se llega al máximo de estimaciones de estado a realizar.

### 3.4 Estimación de estado y ataque de inyección de datos falsos

El principal objetivo de un FDIA consiste en provocar una estimación falsa para informar al operador que el sistema está operando en un estado de emergencia mientras en realidad está en un estado normal de operación o viceversa. En este contexto, el intruso debe primero conocer o aproximar (usando valores típicos) el valor verdadero de cada variable de estado asociada con las

mediciones a ser atacadas, y algunas de estas variables pueden ser entonces modificadas asignando valores falsos que el estimador dará como variables estimadas. Los valores verdaderos y falsos de todas estas variables de estado son entonces usados para construir un ciberataque contra las mediciones seleccionadas, de tal manera que las mediciones corrompidas no son detectadas como mediciones con errores gruesos durante un análisis de datos erróneos. Esta última meta es alcanzada si y sólo si los residuales de cada medición corrupta pasa el proceso de detección de errores, lo cual implica que el residual de cada medida corrupta está cerca del residual de la misma medición en ausencia de un ataque [Rahman and Mohsenian-Rad, 2013].

### 3.4.1 Ataque de inyección de datos falsos

Con base en lo mencionado, se asume que la  $i$ -ésima medición física  $z_i$ , con una medición estimada  $h_i(\cdot)$  que sólo depende de las variables de estado  $\hat{x}_{z_i} \subset \hat{x}$ , es sujeta a un FDIA añadiendo un dato falso  $a_i$ , el cual resulta en una medición corrupta  $z_i^{a_i} = z_i + a_i$ . Este ataque es indetectable si y sólo si  $r(z_i^{a_i}) \approx r(z_i)$ , donde  $r(z_i^{a_i}) = z_i^{a_i} - h(\hat{x}_{z_i} + c_{\hat{x}_{z_i}})$ ,  $r(z_i) = z_i - h(\hat{x}_{z_i})$  y  $c_{\hat{x}_{z_i}}$  es un vector de errores que el atacante quiere inyectar en la solución de EE. Note que este vector puede contener algunos elementos iguales a cero. Finalmente, la condición para una medición sea indetectable  $r(z_i^{a_i}) = r(z_i)$  es satisfecha si el vector de datos falsos  $a_i$  inyectados en las mediciones es

$$a_i = h(\hat{x}_{z_i} + c_{\hat{x}_{z_i}}) - h(\hat{x}_{z_i}). \quad (3.13)$$

## 3.5 Ecuaciones de potencia de los controladores SIFLETCA

Los valores de mediciones que se usan comúnmente en el EE son las potencias activa y reactiva que son inyectadas por el controlador a los nodos  $k$  y  $m$  donde se conectan  $P_k$ ,  $Q_k$ ,  $P_m$  y  $Q_m$ . Además, se pueden medir los voltajes nodales que tienen estos dispositivos  $V_m$ . Estas mediciones dependerán de las variables de estado  $x$  que se incluyan en el modelo de cada controlador.

### 3.5.1 Compensador serie controlado por tiristores

El FDIA puede ser realizado para dar con una estimación falsa del ángulo de disparo del *TCSC*, con su módulo de circuito equivalente mostrado en la Figura 3.3, que tiene una reactancia equivalente a frecuencia fundamental dada por [Zamora-Cárdenas and Fuerte-Esquivel, 2011] y [Acha et al., 2004]:

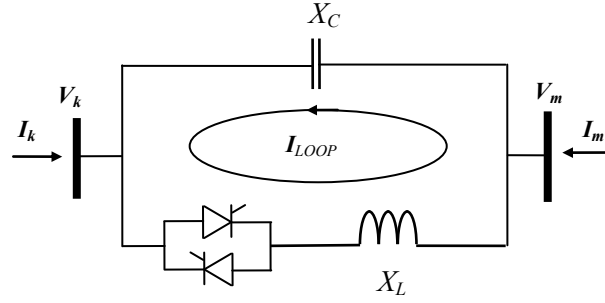


Figura 3.3. Módulo *TCSC*.

$$X_{TCSC(1)} = -X_C + (X_C + X_{LC}) \left( \frac{2(\pi - \alpha) + \sin(2(\pi - \alpha))}{\pi} \right) - \frac{4X_{LC}^2 \cos^2(\pi - \alpha)}{X_L} \left( \frac{k_1 \tan(k_1(\pi - \alpha)) - \tan(\pi - \alpha)}{\pi} \right), \quad (3.14)$$

donde  $\alpha$  es el ángulo de disparo del *TCSC* en grados eléctricos,  $X_C$  es la reactancia del capacitor,  $X_L$  es la reactancia del inductor conmutado,  $X_{LC}$  es la reactancia paralela equivalente de  $X_C$  y  $X_L$ , mientras  $k_1 = (2\pi f \sqrt{LC})^{-1}$ . Asumiendo que el *TCSC* es conectado entre los nodos  $k$  y  $m$ , la falsa estimación puede lograrse manipulando los valores de las mediciones de potencia activa y reactiva en la terminal  $k$  del *TCSC*, las cuales son matemáticamente representadas por (3.15) y (3.16), donde  $B_{TCSC(1)} = -1/X_{TCSC(1)}$  [Acha et al., 2004]:

$$P_k = -V_k V_m B_{TCSC(1)} \sin(\theta_k - \theta_m) \quad (3.15)$$

$$Q_k = -V_k^2 B_{TCSC(1)} + V_k V_m B_{TCSC(1)} \cos(\theta_k - \theta_m) \quad (3.16)$$

Estos valores  $P_k$ ,  $Q_k$  son medidos para el estimador de estado, pero pueden ser cambiados para obtener valores falsos del ángulo de disparo  $\alpha$  del *TCSC*.

### 3.5.2 Compensador estático de VARs con un transformador

Un FDIA también puede ser usado para obtener un falso estimado del ángulo de disparo de un conjunto compuesto por un compensador estático de VARs y un transformador elevador (*SVC-T*), mostrado en la Figura 3.4 [Acha et al., 2004]. La admitancia equivalente a la frecuencia fundamental del controlador equivalente está dada por la combinación serie de las admitancias de ambos componentes,  $Y_{SVC}$  y  $Y_T$ , respectivamente,

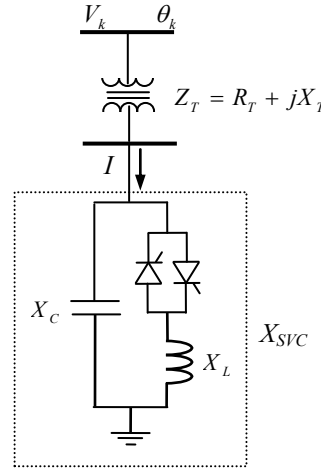


Figura 3.4. Modelo del SVC-Transformador.

$$Y_{SVC-T}(\alpha) = \frac{Y_T Y_{SVC}}{Y_T + Y_{SVC}}, \quad (3.17)$$

donde

$$Y_{SVC-T} = G_{SVC-T} + jB_{SVC-T}, \quad (3.18)$$

$$G_{SVC-T} = \frac{R_T}{R_T^2 + X_{eq}^2}, \quad B_{SVC-T} = \frac{-X_{eq}}{R_T^2 + X_{eq}^2}, \quad (3.19)$$

$$X_{eq} = X_T + X_{SVC}, \quad (3.20)$$

$$X_{SVC} = \frac{X_C X_{TCR}}{X_C - X_{TCR}}, \quad X_{TCR} = \frac{X_L \pi}{2(\pi - \alpha) + \sin(2\alpha)}. \quad (3.21)$$

En este caso, el FDIA puede ser aplicado a las mediciones de las inyecciones de potencia activa y reactiva (3.22) y (3.23), respectivamente, en la terminal de alto voltaje del transformador de acoplamiento del SVC-T conectado en el  $k$ -ésimo nodo [Acha et al., 2004]:

$$P_{SVC-T} = V_k^2 G_{SVC-T} \quad (3.22)$$

$$Q_{SVC-T} = -V_k^2 B_{SVC-T}. \quad (3.23)$$

Estos valores  $P_{SVC-T}$ ,  $Q_{SVC-T}$  son medidos para el estimador de estado, pero pueden ser cambiados para obtener valores falsos del ángulo de disparo  $\alpha$  del SVC-T.



### 3.5.3 Transformador defasador

La posibilidad de controlar la dirección y magnitud del flujo de potencia activa usando un transformador defasador *PST* fue mostrada en [Han, 1982]. Una representación esquemática de un *PST* de dos devanados es mostrada en la Figura 3.5 a). El circuito eléctrico equivalente representativo es ilustrado en la Figura 3.5 b).

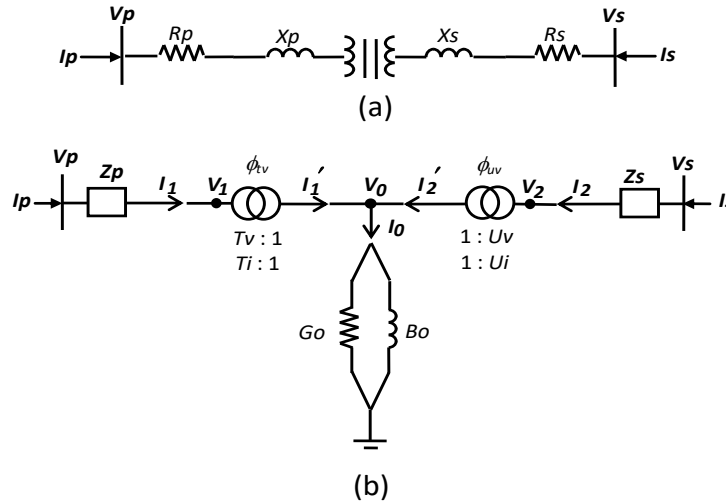


Figura 3.5. Transformador defasador de dos devanados. a) representación esquemática.  
b) circuito equivalente.

Para un modelo general, el dispositivo tiene taps complejos en los devanados primario y secundario. La rama magnetizante es incluida para tomar en cuenta las pérdidas del núcleo, las cuales en saturación tienen un comportamiento no lineal. El devanado primario es representado como un transformador ideal con una relación compleja  $T_v:1$  y  $T_i:1$  en serie con la impedancia  $Z_p$  [Zamora-Cárdenas and Fuerte-Esquivel, 2011]-[Acha et al., 2004], donde  $T_v = T_i^* = T_v \angle \phi_{tv}$ . El símbolo \* denota la operación conjugada. El devanado secundario es representado como un transformador ideal con una relación compleja  $U_v:1$  y  $U_i:1$  en serie con la impedancia  $Z_s$ , donde  $U_v = U_i^* = U_v \angle \phi_{tv}$ . En la Figura 3.6 se muestra un *PST* controlado por tiristores.

La matriz de admitancias en terminales de los dos devanados puede ser encontrada considerando la corriente  $I_1$  a través de la impedancia  $Z_p$  y la corriente  $I_2$  a través de la impedancia  $Z_s$ . Estas corrientes son expresadas por (3.24)-(3.25), respectivamente [Acha et al., 2004]:

$$I_1 = \frac{(V_p - V_1)}{Z_p} = \frac{(V_p - T_v V_0)}{Z_p} = I_p \quad (3.24)$$

$$I_2 = \frac{(V_s - V_2)}{Z_s} = \frac{(V_s - U_v V_0)}{Z_s} = I_s \quad (3.25)$$

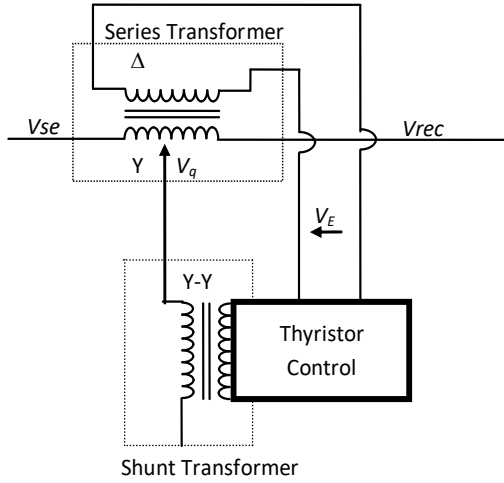


Figura 3.6. Transformador defasador controlado por tiristores de dos devanados.

La corriente  $I_0$  a través del núcleo de hierro del transformador puede expresarse en función de las corrientes  $I_1'$  y  $I_2'$ ,

$$0 = I_1' + I_2' - I_0 = T_v I_1 + U_v I_2 - I_0 \quad (3.26)$$

o bien

$$0 = -\frac{T_v^* V_p}{Z_p} + \left( \frac{T_v^2}{Z_p} + \frac{U_v^2}{Z_s} + Y_0 \right) V_0 - \frac{U_v^* V_s}{Z_s} \quad (3.27)$$

donde

$$Y_0 = G_0 + jB_0 \quad (3.28)$$

expresando las ecuaciones (3.24), (3.25) y (3.27) en forma matricial,

$$\begin{bmatrix} I_p \\ 0 \\ I_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{Z_p} & -\frac{T_v}{Z_p} & 0 \\ -\frac{T_v^*}{Z_p} & \frac{T_v^2}{Z_p} + \frac{U_v^2}{Z_s} + Y_0 & -\frac{U_v^*}{Z_s} \\ 0 & -\frac{U_v}{Z_s} & \frac{1}{Z_s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_p \\ V_0 \\ V_s \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

La ecuación (3.29) representa al transformador mostrado en la Figura 3.8. Es posible, sin embargo, encontrar una matriz reducida equivalente que correctamente modele al dispositivo en sus nodos externos  $p$  y  $s$  mediante eliminación Gaussiana, lo cual resulta en [Acha et al., 2004]

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I}_p \\ \mathbf{I}_s \end{bmatrix} = \frac{I}{T_v^2 \mathbf{Z}_s + U_v^2 \mathbf{Z}_p + \mathbf{Z}_p \mathbf{Z}_s \mathbf{Y}_0} \begin{bmatrix} U_v^2 + \mathbf{Z}_s \mathbf{Y}_0 & -T_v U_v^* \\ -T_v^* U_v & T_v^2 + \mathbf{Z}_p \mathbf{Y}_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_p \\ V_s \end{bmatrix}. \quad (3.30).$$

En términos de la conductancia y susceptancia, la ecuación (3.30) es expresada por (3.31) como una matriz de admitancias nodal para el *PST*.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I}_p \\ \mathbf{I}_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{pp} & G_{ps} \\ G_{sp} & G_{ss} \end{bmatrix} + j \begin{bmatrix} B_{pp} & B_{ps} \\ B_{sp} & B_{ss} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_p \\ V_s \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

Las inyecciones de potencia fluyendo en los devanados primario y secundario del *PST* son [Acha et al., 2004]

$$P_p = V_p^2 G_{pp} + V_p V_s (G_{ps} \cos(\theta_p - \theta_s) + B_{ps} \sin(\theta_p - \theta_s)) \quad (3.32)$$

$$Q_p = -V_p^2 B_{pp} + V_p V_s (G_{ps} \sin(\theta_p - \theta_s) - B_{ps} \cos(\theta_p - \theta_s)) \quad (3.33)$$

$$P_s = V_s^2 G_{ss} + V_s V_p (G_{sp} \cos(\theta_s - \theta_p) + B_{sp} \sin(\theta_s - \theta_p)) \quad (3.34)$$

$$Q_s = -V_s^2 B_{ss} + V_s V_p (G_{sp} \sin(\theta_s - \theta_p) - B_{sp} \cos(\theta_s - \theta_p)) \quad (3.35)$$

Suponiendo que el transformador está controlando el flujo de potencia activa desde el nodo  $p$  al nodo  $s$ , la formulación del problema de EE tendrá un Jacobiano aumentado, dado por las derivadas parciales de mediciones con respecto a la variable de estado del *PST*:  $\phi_{lv}$  o bien  $\phi_{lv}$ , sería una variable de estado adicional en el problema.

Estos valores  $P_p$ ,  $Q_p$ ,  $P_s$  y  $Q_p$  son medidos para el estimador de estado, pero pueden ser cambiados para obtener valores falsos de  $\phi_{lv}$ , o bien  $\phi_{lv}$ .

### 3.5.4 Cambiador de tap bajo carga

La función básica de un transformador *LTC* es regular la magnitud de voltaje en respuesta a las variaciones de voltaje de la red. Una representación esquemática de un *LTC* es mostrada en la Figura 3.7.

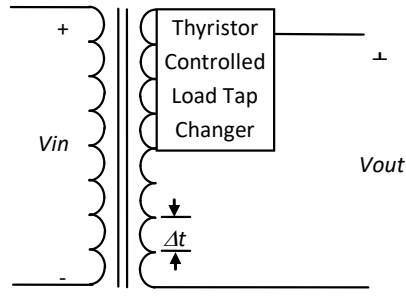


Figura 3.7. Representación esquemática de un transformador *LTC* controlado por tiristores.

La compensación de las variaciones del voltaje de entrada se realiza cambiando la relación de transformación entre los dos devanados por medio del control de la conmutación de los tiristores, lo cual permite controlar la magnitud de voltaje en alguna de sus terminales. El modelo general de un *LTC* es similar a un *PST* [Acha et al., 2004]-[Han, 1982], la matriz de admitancias nodal está dada por (3.31) y las expresiones de inyección de potencia del controlador están dadas por (3.32)-(3.35). La magnitud del tap  $T_k$  se considera como variable de estado en la formulación del problema de EE.

### 3.5.5 Controlador de flujo de potencia universal

El circuito equivalente del *UPFC* consiste en dos fuentes ideales de voltaje que representan los componentes fundamentales de voltaje en las terminales de CA de los convertidores, como se muestra en la Figura 3.8. Las fuentes de voltaje síncrono  $\bar{V}_{cR}$  y  $\bar{V}_{vR}$  representan la componente fundamental de la serie de Fourier de las formas de onda del voltaje conmutado en las terminales de CA del UPFC. Las impedancias  $\bar{Z}_{cR}$  y  $\bar{Z}_{vR}$  representan transformadores de acoplamiento.

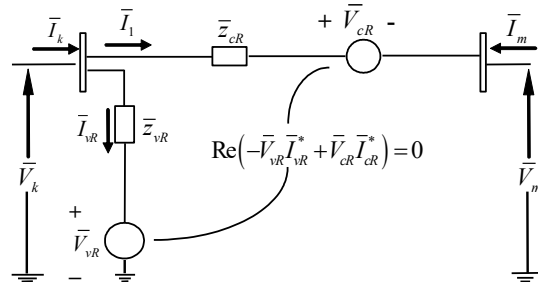


Figura 3.8 Controlador de flujo de potencia universal: circuito equivalente.

Las potencias activa y reactiva fluyendo a través del controlador desde la terminal  $k$  ( $m$ ) a la terminal  $m$  ( $k$ ) son

$$\begin{aligned}
P_{km} &= V_k^2 G_{kk} + V_k V_m (G_{km} \cos(\theta_k - \theta_m) + B_{km} \sin(\theta_k - \theta_m)) \\
&\quad + V_k V_{cR} (G_{km} \cos(\theta_k - \theta_{cR}) + B_{km} \sin(\theta_k - \theta_{cR})) \\
&\quad + V_k V_{vR} (G_{vR} \cos(\theta_k - \theta_{vR}) + B_{vR} \sin(\theta_k - \theta_{vR}))
\end{aligned} \tag{3.36}$$

$$\begin{aligned}
Q_{km} &= -V_k^2 B_{kk} + V_k V_m (G_{km} \sin(\theta_k - \theta_m) - B_{km} \cos(\theta_k - \theta_m)) \\
&\quad + V_k V_{cR} (G_{km} \sin(\theta_k - \theta_{cR}) - B_{km} \cos(\theta_k - \theta_{cR})) \\
&\quad + V_k V_{vR} (G_{vR} \sin(\theta_k - \theta_{vR}) - B_{vR} \cos(\theta_k - \theta_{vR}))
\end{aligned} \tag{3.37}$$

$$\begin{aligned}
P_{mk} &= V_m^2 G_{mm} + V_m V_k (G_{mk} \cos(\theta_m - \theta_k) + B_{mk} \sin(\theta_m - \theta_k)) \\
&\quad + V_m V_{cR} (G_{mm} \cos(\theta_m - \theta_{cR}) + B_{mm} \sin(\theta_m - \theta_{cR}))
\end{aligned} \tag{3.38}$$

$$\begin{aligned}
Q_{mk} &= -V_m^2 B_{mm} + V_m V_k (G_{mk} \sin(\theta_m - \theta_k) - B_{mk} \cos(\theta_m - \theta_k)) \\
&\quad + V_m V_{cR} (G_{mm} \sin(\theta_m - \theta_{cR}) - B_{mm} \cos(\theta_m - \theta_{cR}))
\end{aligned} \tag{3.39}$$

donde  $G_{ij}$  y  $B_{ij}$  ( $i \in k, m$  y  $j \in k, m$ ) son los elementos de una matriz de admitancias de transferencia del UPFC [Acha et al., 2004]. Suponiendo una operación del convertidor libre de pérdidas, la ecuación de diferencia de potencias en las terminales de CA de los convertidores,  $\Delta P_{DC-Link}^{upfc} = P_{bb} = P_{vR} + P_{cR} = 0$ , garantiza que el UPFC no absorba ni inyecte potencia activa con respecto a la potencia del sistema. En este caso, la potencia activa suministrada al convertidor en derivación,  $P_{vR}$ , debe satisfacer a la potencia activa demandada por el convertidor serie,  $P_{cR}$ . Las potencias de los convertidores están dadas por,

$$\begin{aligned}
P_{cR} &= V_{cR}^2 G_{mm} + V_{cR} V_k (G_{km} \cos(\theta_{cR} - \theta_k) + B_{km} \sin(\theta_{cR} - \theta_k)) \\
&\quad + V_{cR} V_m (G_{mm} \cos(\theta_{cR} - \theta_m) + B_{mm} \sin(\theta_{cR} - \theta_m))
\end{aligned} \tag{3.40}$$

$$\begin{aligned}
Q_{cR} &= -V_{cR}^2 B_{mm} + V_{cR} V_k (G_{km} \sin(\theta_{cR} - \theta_k) - B_{km} \cos(\theta_{cR} - \theta_k)) \\
&\quad + V_{cR} V_m (G_{mm} \sin(\theta_{cR} - \theta_m) - B_{mm} \cos(\theta_{cR} - \theta_m))
\end{aligned} \tag{3.41}$$

$$P_{vR} = -V_{vR}^2 G_{vR} + V_{vR} V_k (G_{vR} \cos(\theta_{vR} - \theta_k) + B_{vR} \sin(\theta_{vR} - \theta_k)) \tag{3.42}$$

$$Q_{vR} = V_{vR}^2 B_{vR} + V_{vR} V_k (G_{vR} \sin(\theta_{vR} - \theta_k) - B_{vR} \cos(\theta_{vR} - \theta_k)) \tag{3.43}$$

Para un UPFC se pueden manipular las potencias aparentes inyectadas en los nodos  $k$  y  $m$ , o la magnitud de voltaje  $V_k$ .

El ataque a una variable de control de un dispositivo SIFLETCA,  $P_{km}$ ,  $Q_{km}$ ,  $P_{mk}$ ,  $Q_{mk}$ ,  $V_k$  o  $V_m$ , es realizado con un FDIA seleccionando las variables de estado de los dispositivos a un valor falso

y luego calculando el valor de las mediciones afectadas incluyendo las variables control. Se trataría de que el proceso de EE convergiera cerca de los valores falsos escogidos de las variables de estado.

### 3.6 Casos de estudio

Cinco diferentes FDIAs han sido realizadas independientemente en cinco controladores SIFLETCA, específicamente el *TCSC*, el *SVC-T*, el *PST*, el *LTC* y el *UPFC*, insertados en el sistema de prueba IEEE de 14 nodos. Errores aleatorios asociados a las mediciones tradicionales físicas han sido agregados con media cero y con valores de desviación estándar de  $\sigma_{inj} = 0.010$ ,  $\sigma_{flow} = 0.008$  y  $\sigma_{vol} = 0.004$ , para inyecciones de potencia nodal, flujos de potencia a través de elementos de transmisión y magnitudes de voltaje, respectivamente. En este caso, las desviaciones estándar de los errores de ángulos y magnitudes de los fasores de voltaje y corriente (PMU) son más precisas, por lo que son elegidas en 0.0017 rad y 0.002 p.u., respectivamente. Como las mediciones de corriente fasoriales son procesadas en coordenadas rectangulares, sus desviaciones estándar son calculadas por [Zamora-Cárdenas et al, 2014]:

$$\sigma_{lbranch,r}^2 = (\cos \theta_l^{PMU})^2 \sigma_{I^{PMU}}^2 + (I^{PMU} \sen \theta_l^{PMU})^2 \sigma_{\theta_l^{PMU}}^2 \quad (3.44)$$

$$\sigma_{lbranch,i}^2 = (\sen \theta_l^{PMU})^2 \sigma_{I^{PMU}}^2 + (I^{PMU} \cos \theta_l^{PMU})^2 \sigma_{\theta_l^{PMU}}^2 \quad (3.45)$$

#### 3.6.1 Sistema IEEE de 14 buses

##### 3.6.1.1 Ataque al TCSC

En el primer caso de estudio, un TCSC compensa la línea de transmisión conectando los nodos 14-13 para controlar el flujo de potencia activa en  $-6.0$  MW, lo cual se logra considerando el conjunto de mediciones de potencia de rama del controlador, como se reporta en la segunda columna de la Tabla 3.1. Los parámetros del TCSC son  $X_C = 9.375e-3$ ,  $X_L = 1.625e-3$  p.u. Con base en (3.15)-(3.16), las cuales representan los flujos de potencia activa y reactiva a través del TCSC, el algoritmo de EE converge en cinco iteraciones con una tolerancia de  $10^{-4}$  considerando un conjunto de 48 mediciones. En este caso, la función de optimalidad es  $J(\hat{x}) = 0.087$  con un umbral de la prueba chi-cuadrada de  $\chi^2 = 34.8$ , como se reporta en el segundo renglón de la Tabla 3.2. La EE indica que el control especificado es alcanzado con un valor del ángulo de disparo del TCSC de  $\alpha_{TCSC} = 143.7^\circ$ , así que el TCSC está operando en su región capacitiva, como puede ser deducido de la Figura 3.7, con una reactancia equivalente a frecuencia fundamental de  $X_{TCSC(1)} = -0.061$  p.u.

Tabla 3.1. Valores de las mediciones de los controladores TCSC y SVC-T.

VALORES	TCSC	SVC-T
$z_i$	$P_{14\text{-TCSC}} = -6.0 \text{ MW}$ $Q_{14\text{-TCSC}} = -1.52 \text{ MVAR}$	$Q_{\text{SCV-T}} = -6.92 \text{ MVAR}$ $V_{14} = 1.050 \text{ P.U.}$
$z_i^{a_i}$	$P_{14\text{-TCSC}} = -2.86 \text{ MW}$ $Q_{14\text{-TCSC}} = 3.85 \text{ MVAR}$	$Q_{\text{SCV-T}} = 2.28 \text{ MVAR}$ $V_{14} = 1.049 \text{ P.U.}$

Con base en (3.14)-(3.16), las mediciones reales son corrompidas a los valores que se muestran en el segundo renglón y la segunda columna de la Tabla 3.1. En este caso, el objetivo del “hacker” es lograr una falsa estimación del ángulo de disparo del TCSC a un valor de  $\alpha_{\text{TCSC}} = 144.4^\circ$ , y así  $c_{\alpha_{\text{TCSC}}} = 0.7^\circ$ . El resultado de este ataque es exitoso, ya que el conjunto de mediciones corrompidas no es detectado, y el estimador converge en cinco iteraciones a un valor de la función de optimalidad de  $J(\hat{x}) = 0.09$  y un umbral de la prueba chi-cuadrada de  $\chi^2 = 34.8$ . La acción de control a realizar con base en esta estimación falsa consistirá en reducir el valor del ángulo de disparo del TCSC para fijar el flujo de potencia activa en  $-6.0 \text{ MW}$ , lo cual se logra reduciendo  $\alpha_{\text{TCSC}}$  en  $-0.7^\circ$ . Nótese, sin embargo, que realmente se está decrementando  $\alpha_{\text{TCSC}}$  de  $143.7^\circ$  a  $143.0^\circ$ , lo cual provoca una operación del TCSC muy cerca del punto de resonancia sobre la región capacitiva.

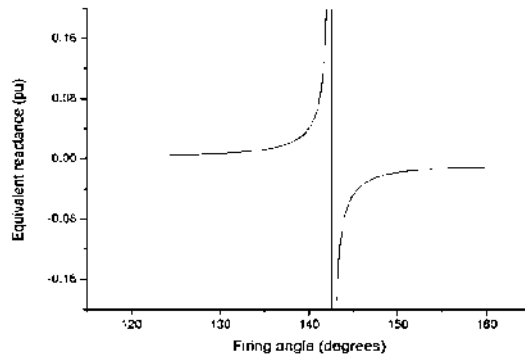


Figura 3.9 Reactancia equivalente del TCSC.

Tabla 3.2. Variables de estado de EE para controladores SIFLETCA en el caso base y FDIA

Controlador	CASOS BASE			
	$\alpha_f$	$J(x)$	$\chi^2$	It.
TCSC ( $\alpha_f$ )	$143.74^\circ$	0.09	34.8	5
SVC-T ( $\alpha_f$ )	$129.29^\circ$	1.98	37.6	4
Controlador	CASOS DE ATAQUE			
TCSC ( $\alpha_f$ )	$144.39^\circ$	0.09	34.8	5
SVC-T ( $\alpha_f$ )	$123.60^\circ$	1.87	37.6	4

### 3.6.1.2 Ataque al SVC

En este segundo caso de estudio, la magnitud de voltaje en el nodo de alto voltaje 14 es controlada localmente por un SVC-T en 1.05 p.u., donde el conjunto de parámetros es dado por  $X_C = 1.07$ ,  $X_L = 0.288$  y  $Z_T = 0.01 + j0.3$  p.u. La utilización de 48 mediciones permite obtener el estado operativo de todo el sistema eléctrico con un valor de la función de optimalidad de  $J(\hat{x}) = 1.98$  y con un umbral de la prueba chi-cuadrada de  $\chi^2 = 37.6$ , tal y como se reporta en la Tabla 3.2. Esta estimación indica que el control de la magnitud de voltaje especificada es alcanzado con un valor del ángulo de voltaje de  $\alpha_{\text{SVC-T}} = 129.29^\circ$ , el cual corresponde a una operación dentro de la región capacitiva del SVC con una impedancia equivalente, a frecuencia fundamental, de  $X_{\text{SVC-T}} = -16.24$  p.u.

El FDIA se realiza de tal manera que se estima un valor falso de  $\alpha_{\text{SVC-T}} = 123.0^\circ$ , con  $X_{\text{SVC-T}} = 3.91$  p.u., junto con una falsa estimación de la magnitud de voltaje en el nodo 14 dada por  $V_{14} = 1.049$  p.u. Lo anterior se logra al corromper dos mediciones como se reporta en la tercera columna de la Tabla 3.1. Esta estimación incorrecta provoca se realice una acción de control para incrementar el valor de ángulo de disparo del SVC-T con la finalidad de proveer soporte de potencia reactiva; sin embargo, lo que en realidad ocasiona esta acción de control es la reducción del soporte de potencia reactiva dentro de la región capacitiva cambiando el valor  $\alpha_{\text{SVC-T}}$  de  $129.29^\circ$  a  $133.30^\circ$ , lo cual da una reactancia de  $X_{\text{SVC-T}} = -3.934$  p.u.

### 3.6.1.3 Ataque al PST

Para este caso de estudio se tiene un PST que controla la potencia activa que fluye a través de la línea de transmisión 14-13 en  $P_{14-13} = -6.0$  MW. El valor del ángulo de fase al cual se logra este control se estima considerando el conjunto de mediciones de potencia de rama del transformador dados en la Tabla 3.3. Las impedancias de los devanados primario y secundario del PST tienen los mismos valores, es decir  $Z_p = Z_s = 0.001 + j0.01$  p.u., mientras que el valor de la admitancia de magnetización es seleccionada como  $Y_0 = 0.0001 + j0.001$  p.u. El conjunto de mediciones está conformado por lo siguiente: 30 flujos de potencia en terminales de líneas de transmisión, 5 magnitudes de voltaje nodales, 10 flujos de potencia a través de transformadores convencionales de dos devanados, 2 flujos de potencia a través del PST de acuerdo con (3.32)-(3.35) y una medición de ángulo de fase de PMU en el nodo de compensación. En este caso, el algoritmo EE converge en cuatro iteraciones con tolerancia de  $10^{-6}$ , un valor  $J = 0.0019$  y un umbral chi-cuadrada de  $\chi^2 = 34.8$ ,



tal como se reporta en la Tabla 3.4. El ángulo estimado para el PST es  $\phi_{uv} = -0.064^\circ$ .

Tabla 3.3. Mediciones del caso base y con ataques de los controladores PST, LTC y UPFC.

Valores	PST	LTC	UPFC
CASO BASE $z_i$	$P_p = -6.0$ MW $Q_p = -0.41$ MVAR	$P_p = -5.81$ MW $Q_p = -5.11$ MVAR	$\Delta P_{DC-Lmk}^{upfc} = P_{bb} = P_{vR} + P_{cR} = 0$ $P_{14-UPFC} = -5.97$ MW $Q_{14-UPFC} = -5.06$ MVAR $P_{UPFC-14} = 6.0$ MW $Q_{UPFC-14} = 0.0$ MVAR
A T A Q U E $z_i^{a_i}$	$P_p = -1.43$ MW $Q_p = -2.40$ MVAR	$P_p = -2.86$ MW $Q_p = 3.85$ MVAR	$\Delta P_{DC-Lmk}^{upfc} = P_{bb} = P_{vR} + P_{cR} = 0$ $P_{14-UPFC} = -4.73$ MW $Q_{14-UPFC} = 21.20$ MVAR $P_{UPFC-14} = 5.13$ MW $Q_{UPFC-14} = 4.54$ MVAR

Tabla 3.4. Variables de estado del caso base y FDIA de los controladores PST, LTC y UPFC.

FACTS	Símbolo	Valores Importantes del Caso Base				Valores Importantes del Caso de Ataque			
		Variables de Estado		$J(x)$	Iter.	Variables de Estado		$J(x)$	Iter.
		Inicial	Final			Inicial	Final		
PST	$\phi_{uv}$	0°	-0.064°	0.002	4	0°	-1.567°	0.51	4
LTC	$T_v$	1.0	1.0363	4.80	4	1.0	0.9568	7.59	4
UPFC	$V_{vR}$	1.05	1.0538	2.0	7	1.05	1.024	2.0	9
	$\theta_{vR}$	-16.0	-16.331°			-16.0	-15.53		
	$V_{cR}$	0.01	0.0127			0.01	0.0145		
	$\theta_{cR}$	40.0°	24.979°			40.0°	5.276°		

El FDIA se diseña como se reporta en la Tabla 3.3 para tener una estimación falsa del valor del ángulo del PST, o sea,  $\phi_{uv} = 2.0^\circ$ . Este es un valor del ángulo muy diferente respecto al obtenido en la estimación asociada al caso base. Para este caso, el estimador converge en cuatro iteraciones a un valor de optimalidad de  $J(\hat{x}) = 0.5393$  y un umbral de prueba chi-cuadrada de  $\chi^2=34.8$ . Como el FDIA es exitoso, el estimador provee el falso valor de  $\phi_{uv} = 1.581^\circ$ . En este contexto, la acción de control ajustará el valor estimado falso por un valor de  $\phi_{uv} = -1.0^\circ$ ; lo que provocará valores altos de flujos de potencia activa a través del PST y la línea compensada:  $P_{PST-14} = 7.100$  MW,  $Q_{PST-14} = 0.866$  MVAR,  $P_{14-PST} = -7.088$  MW,  $Q_{14-PST} = -0.749$  MVAR.

### 3.6.1.4 Ataque al LTC

En este caso se asume que el transformador de dos devanados descrito en la sección anterior trabaja como LTC controlando la magnitud de voltaje en el bus secundario en  $V_{14} = 1.05$  p.u. por medio del tap del lado primario. Las mediciones de flujo de potencia del transformador son como se

reporta en la Tabla 3.3. La estimación de estado se realiza con base a un conjunto de 49 mediciones físicas que consiste en 30 flujos de potencia en líneas de transmisión; 6 magnitudes de voltaje nodal; 10 flujos de potencia a través de transformadores convencionales de dos devanados; 2 flujos de potencia a través del LTC y una medición de ángulo de fase PMU en el nodo slack o de compensación. El algoritmo de EE converge en cuatro iteraciones con una tolerancia de  $10^{-6}$ . El valor de la función de optimalidad es  $J(\hat{x}) = 4.80$  con un umbral de prueba chi-cuadrada de  $\chi^2 = 36.19$ , como se reporta en la Tabla 3.4. La magnitud estimada del tap del LTC para el caso base al control especificado es  $T_v = 1.0363$  p.u.

En este caso, el FDIA intenta que el estimador haga una falsa estimación de la magnitud del tap a un valor de  $T_v = 0.95$  mediante el conjunto de mediciones corruptas del LTC reportadas en la Tabla 3.3. El proceso de EE converge en cuatro iteraciones obteniéndose un valor de  $J(\hat{x}) = 7.59$  y un umbral de prueba de  $\chi^2 = 36.19$ .

El análisis de datos erróneos fue incapaz de detectar el FDIA por lo que la acción de control asociada con el falso estimado será poner el valor del tap a  $T_v = 1.10$ , evitando así un bajo nivel de magnitud de voltaje en el nodo 14. Sin embargo, en este caso se incrementa el flujo de potencia reactiva a través del LTC:  $P_{LTC-14} = 8.04$  MW,  $Q_{LTC-14} = 10.87$  MVAR,  $P_{14-LTC} = -8.03$  MW,  $Q_{14-LTC} = -10.61$  MVAR.

### 3.6.1.5 Ataque al UPFC

En este último caso de estudio, un UPFC está compensando la línea de transmisión 13-14 para controlar los flujos de potencia activa y reactiva en  $P_{UPFC-14} = 6.0$  MW y  $Q_{UPFC-14} = 0.0$  MVAR, respectivamente, y la magnitud de voltaje en  $V_{14} = 1.05$ . Las impedancias de los transformadores serie y en derivación son  $Z_{CR} = Z_{VR} = 0.05 + j0.1$  p.u. El objetivo de las variables a controlar se logra considerando el conjunto de mediciones reportadas en la Tabla 3.3. Asimismo, la EE se basa en un conjunto de 52 mediciones físicas; conformado por 30 flujos de potencia en líneas de transmisión, 6 magnitudes de voltaje nodal, 10 flujos de potencia a través de los transformadores convencionales de dos devanados, 5 mediciones de potencia del UPFC y 1 medición de ángulo de fase PMU en el nodo slack o el nodo de compensación 1. El algoritmo de EE converge en siete iteraciones a una tolerancia de  $10^{-4}$ . El valor de la función de optimalidad es  $J(\hat{x}) = 2.0$  con un umbral de prueba de

$\chi^2 = 36.2$ , como se reporta en la Tabla 3.4. Para este caso base, las variables de estado estimadas del UPFC son:  $V_{vR} = 1.0538$ ,  $\theta_{vR} = -16.331^\circ$ ,  $V_{cR} = 0.0127$  y  $\theta_{cR} = 24.98^\circ$ .

Con base en el conjunto de mediciones corruptas reportadas en la Tabla 3.3, el FDIA selecciona un conjunto de variables de estado falsas del UPFC las cuales son estimadas en  $V_{vR} = 1.02$ ,  $\theta_{vR} = 15.52^\circ$ ,  $V_{cR} = 0.01$  y  $\theta_{cR} = 5.3^\circ$ . El estimador converge en nueve iteraciones porque inicia en los valores del caso base, lo cual en este caso está más alejado de la solución, dando un valor de  $J(\hat{x}) = 2.0$  y un umbral de prueba de chi-cuadrada de  $\chi^2 = 36.2$ .

Aunque este ataque no fue detectado, las mediciones falsas revelan una condición de más bajo voltaje que el caso base. Para aliviar este escenario la acción de control consistiría en tratar de establecer los valores:  $V_{vR} = 1.08$ ,  $\theta_{vR} = -16.0^\circ$ ,  $V_{cR} = 0.01$  and  $\theta_{cR} = 10.0^\circ$ . Pero, en este estado de operación, el flujo de potencia en la línea compensada sería alto:  $P_{13-UPFC} = 5.49$  MW,  $Q_{13-UPFC} = -3.33$  MVAR,  $P_{UPFC-14} = -5.43$  MW,  $Q_{UPFC-14} = 3.46$  MVAR, con respecto al caso base mostrado en la Tabla 3.3.

### 3.6.2 Sistema IEEE de 30 buses

#### 3.6.2.1 Ataque al TCSC

En el primer caso de estudio, un TCSC compensa la línea de transmisión conectando los nodos 25-24 para controlar el flujo de potencia activa en 1.72 MW, lo cual se cumple considerando el conjunto de mediciones de potencia de rama en ambos extremos del controlador TCSC, como se reporta en la segunda columna de la Tabla 3.5. Los parámetros del TCSC son  $X_C = 9.375e-3$ ,  $X_L = 1.625e-3$  p.u. Con base en (3.15)-(3.16), las cuales representan los flujos de potencia activa y reactiva a través del TCSC, el algoritmo de EE converge en cinco iteraciones con una tolerancia de  $10^{-4}$  considerando un conjunto de 132 mediciones. En este caso, el valor de la función de optimalidad es  $J(\hat{x}) = 0.03$  con un umbral de la prueba chi-cuadrada de  $\chi^2 = 97.2$ , como se reporta en el segundo renglón de la Tabla 3.6. La EE indica que el control especificado es alcanzado con un valor del ángulo de disparo del controlador de  $\alpha_{TCSC} = 143.7^\circ$ , de tal manera que el TCSC está operando en su región capacitiva con una reactancia equivalente a frecuencia fundamental de  $X_{TCSC(1)} = -0.097$  p.u.

Con base en (3.15)-(3.16), las mediciones corrompidas son como se reportan en la segunda columna de la Tabla 3.5. En este caso, el objetivo del “hacker” es lograr una estimación falsa del

ángulo de disparo del TCSC a un valor más allá de la zona de resonancia: la falsa estimación es puesta a  $\alpha_{TCSC} = 144.8^\circ$ , entonces  $c_{\alpha_{TCSC}} = 1.1^\circ$ . El resultado de este ataque es exitoso puesto que el conjunto corrupto de mediciones no es detectado y el estimador converge en cuatro iteraciones a un valor de la función de optimalidad de  $J(\hat{x}) = 0.03$  y un umbral de la prueba chi-cuadrada de  $\chi^2 = 97.2$ . Con base en esta estimación, la acción de control del TCSC consistirá en reducir el valor del ángulo de disparo para poner el incorrecto flujo de potencia activa de 3.24 MW al valor objetivo de 1.72 MW, lo cual es alcanzado reduciendo  $\alpha_{TCSC}$  en  $-1.1^\circ$ . Nótese, sin embargo, que realmente  $\alpha_{TCSC}$  se decrementa de  $143.7^\circ$  a  $142.6^\circ$ , lo cual provoca una operación del TCSC muy cerca del punto de resonancia.

Tabla 3.5. Valores de las mediciones de los controladores TCSC y SVC-T.

VALORES	TCSC	SVC-T
$z_i$	$P_{25-TCSC} = 1.72$ MW $Q_{25-TCSC} = -0.13$ MVAR $P_{TCSC-25} = -1.72$ MW $Q_{TCSC-25} = 0.12$ MVAR	$P_{23-24} = 2.04$ MW $Q_{23-24} = 2.98$ MVAR $\Sigma P_{24} = -8.70$ MW $\Sigma Q_{24} = -6.58$ MVAR $V_{24} = 1.0$ P.U.
$z_i^{a_i}$	$P_{25-TCSC} = 3.24$ MW $Q_{25-TCSC} = -0.24$ MVAR $P_{TCSC-25} = -3.24$ MW $Q_{TCSC-25} = 0.24$ MVAR	$P_{23-24} = 4.98$ MW $Q_{23-24} = 9.03$ MVAR $\Sigma P_{24} = -18.94$ MW $\Sigma Q_{24} = 0.85$ MVAR $V_{24} = 1.0$ P.U.

Tabla 3.6. Variables de estado de EE para controladores SIFLETCA en el caso base y FDIA.

Controlador	CASOS BASE			
	$\alpha_f$	$J(x)$	$\chi^2$	It.
TCSC ( $\alpha_f$ )	143.70°	0.03	97.2	5
SVC-T ( $\alpha_f$ )	128.58°	0.63	90.0	3
Controlador	CASOS DE ATAQUE			
TCSC ( $\alpha_f$ )	144.81°	0.03	97.2	4
SVC-T ( $\alpha_f$ )	123.29°	2.70	90.0	3

### 3.6.2.2 Ataque al SVC

En el segundo caso de estudio, la magnitud de voltaje en el nodo de alto voltaje 24 es controlada por un SVC-T en 1.0 p.u. con un conjunto de parámetros dados por  $X_C = 1.07$ ,  $X_L = 0.288$  y  $Z_T = 0.01 + j0.3$  p.u. Con base en (3.22)-(3.23), la EE del sistema completo de potencia es determinada en tres iteraciones con 130 mediciones, alcanzando un valor de la función de

optimalidad de  $J(\hat{x}) = 0.63$  con un umbral de la prueba chi-cuadrada de  $\chi^2 = 90.0$ , como se reporta en el tercer renglón de la Tabla 3.6. Esta estimación indica que el control de la magnitud de voltaje especificada es obtenido con un valor del ángulo de disparo del controlador de  $\alpha_{\text{SVC-T}} = 128.58^\circ$ , el cual corresponde a una operación dentro de la región capacitiva del SVC-T con una impedancia equivalente a frecuencia fundamental de  $X_{\text{SVC-T}} = -35.7$  p.u.

El FDIA es realizado de tal manera que un valor falso de  $\alpha_{\text{SVC-T}} = 123.29^\circ$  es estimado, con  $X_{\text{SVC-T}} = 4.22$  p.u., junto con un estimado falso de magnitud de voltaje en el nodo 24 dado por  $V_{24} = 1.0$  p.u. Esta meta es alcanzada corrompiendo cinco mediciones como se reporta en la tercera columna de la Tabla 3.5. Basada en esta estimación incorrecta, la acción del lazo de control de voltaje está realmente reduciendo el soporte de potencia reactiva dentro de la región capacitiva cambiando el valor  $\alpha_{\text{SVC-T}}$  de  $128.58^\circ$  a  $131.8^\circ$ , lo cual da una impedancia de  $X_{\text{SVC-T}} = -5.47$  p.u.

### 3.7 Conclusiones

En este capítulo se ha demostrado la vulnerabilidad de la EE basada en WLS a un FDIA. En este caso, los ciberataques a las mediciones de la red asociados con el TCSC, SVC-T, PST, LTC y UPFC fueron indetectables durante los análisis de datos erróneos. Adicionalmente, los resultados de la simulación muestran como la estimación falsa de los parámetros de los controladores SIFLETCA puede inducir a tomar decisiones erróneas, las cuáles podrían llevar al sistema a condiciones inestables de operación causando impactos desastrosos. En estos casos, la prueba del máximo residuo normalizado no es un método confiable para detectar FDIA en estimadores basados en WLS. La estimación falsa de las variables de control de los controladores SIFLETCA representa un alto riesgo en la operación segura de las redes eléctricas.

Es recomendable proteger cierto conjunto de mediciones cambiando los datos mediante un método criptográfico, porque la información es muy delicada y tiene que ser confidencial. Además se recomienda tener redundancia de mediciones en mediciones críticas y mediciones en equipo crítico como los controladores SIFLETCA.

Por otro lado mayor investigación se debe hacer en los siguientes aspectos para poder detectar FDIA:

- 1) Cambiar la prueba de hipótesis chi-cuadrada por otras, entre las opciones más viables existen la prueba de Geary y el análisis de la señal por transformación en “wavelet”.

- 2) Cambiar el método de minimización matemática del WLS, existen otros métodos para ello, como el método de máximos valores absolutos ponderados (Weighted Least Absolute Values-WLAV), mínimas medianas de cuadrados (Least Median of Squares-LMS), etc; que se formulan como programación matemática.
- 3) Uso de filtros de Kalman con sus variantes y de redes bayesianas dinámicas.

## Capítulo 4

### Conclusiones y Contribuciones

#### 4.1 Conclusiones

La estimación de estado es la base para el monitoreo y funciones avanzadas en redes inteligentes que integran al sistema eléctrico sistemas modernos computacionales y de comunicaciones. Por lo tanto, la estimación de estado debe ser segura, confiable, precisa y robusta. La seguridad de un sistema eléctrico y el análisis de vulnerabilidad son muy importantes debido a que el suministro de energía representa un aspecto estratégico de infraestructura de cualquier país. Desde el punto de vista analítico, la estimación de estado puede ser dividida en estimación de estado estática y dinámica. La estimación de estado tradicional se basa en sistemas SCADA, sin embargo, nuevas tecnologías de mediciones PMUs, AMI y medidores inteligentes se han venido implantando con el fin de realizar mediciones más precisas y tener un monitoreo en tiempo real. En cuanto al nivel de voltaje, la estimación de estado se divide en transmisión y distribución. La estimación de estado en transmisión ha sido estudiada ampliamente y su análisis se hace con redes de secuencia positiva. Por otro lado, la estimación de estado en distribución tiene menor investigación, debido a que la complejidad y el número de nodos del sistema se hace mayor. Aún más, la formulación, análisis y el tipo de variables de estado a tomar en cuenta en la estimación puede tener muchas variantes. En esta tesis se usó la formulación del método de mínimos cuadrados ponderados (WLS) no lineal, con restricciones de igualdad y como variables de estado los voltajes polares; que es la estimación de estado más común en los sistemas de transmisión.

Por otro lado, los modelos de las redes de distribución deben ser más precisos en el contexto de las redes inteligentes. Los modelos de los componentes básicos de una red de distribución fueron presentados extensivamente. Estos componentes son líneas de distribución polifásicas; transformadores y reguladores en diferentes configuraciones estrella y delta; generadores y motores trifásicos; y cargas en diferentes configuraciones estrella y delta. Los modelos de los componentes de una red de distribución pueden ser transformados a una red de secuencia positiva, con el fin de usar las herramientas existentes para las redes de esta secuencia.

Se usan tres métodos novedosos para resolver la estimación de estado en distribución con variables de estado polares con el método de mínimos cuadrados ponderados (WLS); lo cual inherentemente presenta ecuaciones lineales mal condicionadas. Estos métodos se comparan en casos de estudio usando las redes de prueba de distribución de la IEEE, basados en flujos de potencia proporcionados por el programa OpenDSS.

## 4.2 Contribuciones

Las principales contribuciones de esta tesis se pueden resumir como sigue:

- Crear un programa que transforme la red provista por el programa OpenDSS para obtener el modelo de la red de distribución y usar e esta red en secuencia positiva para usar un programa de EE que usa esta secuencia.
- La simulación de un ataque de inyección de datos falsos en un sistema que incluye dispositivos SIFLETCA. Dicho tipo de ataques no es detectado por los métodos de detección de errores aleatorios con distribución normal.
- Usar tres métodos novedosos y robustos para obtener la solución de la DSSE usando variables de estado de voltaje en forma polar.
- La obtención de una solución con el método WLS con restricciones en un sistema de distribución que tiene un sistema mal condicionado, en el cual los métodos tradicionales no alcanzan la convergencia.

## 4.3 Trabajos futuros

El trabajo en esta tesis puede ser extendido en las siguientes áreas:

- Integración de los modelos de más componentes de redes inteligentes y generación distribuida en la red de distribución.
- Desarrollo métodos más robustos mediante el empleo del cálculo automático del factor de relajación dinámica en el método basado en subespacios de Krylov.



- Análisis más profundo del método desarrollado basado en subespacios de Krylov para demostrar matemáticamente que este método es mejor que los demás métodos para la DSSE.
- Uso de pruebas de hipótesis y de análisis estadísticos para detectar ataques cibernéticos de inyección de datos erróneos.
- Desarrollo de métodos alternativos al WLS más robustos basados en programación matemática que tengan mejor comportamiento de la convergencia.
- Análisis del uso de filtros de Kalman y redes bayesianas dinámicas para detectar ataques cibernéticos.
- Uso de herramientas de inteligencia artificial para tener una estimación de estado para que se puedan tener redes eléctricas inteligentes.

## Apéndice A

### Modelado de línea trifásica en el dominio de las fases

La matriz de impedancias primitivas  $Z_{prim}$  de la sección de línea de la Figura 2.1 es dada por [Peralta et al., 2008]

$$Z_{prim} = \begin{bmatrix} z_{aa} & z_{ab} & z_{ac} & z_{an} \\ z_{ba} & z_{bb} & z_{bc} & z_{bn} \\ z_{ca} & z_{cb} & z_{cc} & z_{cn} \\ z_{na} & z_{nb} & z_{nc} & z_{nn} \end{bmatrix} \quad (\text{A.1})$$

donde el efecto de tierra es considerado en cada una de las impedancias mediante las ecuaciones de Carson. Considerando una resistividad de tierra uniforme de 100 [ $\Omega$ -m] y una frecuencia de 60 Hz, el valor de impedancia primitiva está dado por las ecuaciones de Carson:

$$z_{ii} = r_i + 0.0953 + j0.12134 \left[ \ln \left( \frac{1}{GMR_i} \right) + 7.934 \right] \quad \Omega / \text{mi} \quad \forall i = a, b, c, n \quad (\text{A.2})$$

$$z_{ij} = 0.0953 + j0.12134 \left[ \ln \left( \frac{1}{D_{ij}} \right) + 7.934 \right] \quad \Omega / \text{mi} \quad \forall \begin{cases} i = a, b, c, n \\ j = a, b, c, n \\ i \neq j \end{cases} \quad (\text{A.3})$$

donde  $r_i$  es la resistencia del conductor,  $GMR_i$  es el radio medio geométrico del conductor y  $D_{ij}$  es el espaciamiento entre los conductores  $i$  y  $j$ .

Con la finalidad de representar la matriz de impedancias primitivas solamente en función de impedancias asociadas a los conductores de fase, se utiliza la reducción de Kron. Puesto que los conductores neutros están aterrizados, las nuevas impedancias primitivas que consideran implícitamente el efecto de los conductores neutros son

$$z_{ij}^r = z_{ij} - z_{in} \frac{z_{nj}}{z_{nn}} \quad \forall i, j \in \{a, b, c\} \quad (\text{A.4})$$

Por tanto, la matriz de impedancias serie reducida para una línea trifásica está dada por

$$\mathbf{z}_{abc}^r = \begin{bmatrix} z_{aa}^r & z_{ab}^r & z_{ac}^r \\ z_{ba}^r & z_{bb}^r & z_{bc}^r \\ z_{ca}^r & z_{cb}^r & z_{cc}^r \end{bmatrix} \quad (\text{A.5})$$

Para completar el modelo de la línea trifásica se necesita conocer la matriz de admitancias en derivación reducida  $\mathbf{b}_{abc}^r$ , la cual incluye todos los elementos de acoplamiento capacitivo:

$$\mathbf{b}_{abc}^r = \begin{bmatrix} b_{aa}^r & b_{ab}^r & b_{ac}^r \\ b_{ba}^r & b_{bb}^r & b_{bc}^r \\ b_{ca}^r & b_{cb}^r & b_{cc}^r \end{bmatrix} \quad (\text{A.6})$$

La matriz (A.6) se obtiene de la matriz de susceptancias primitivas asociada a los efectos electrostáticos existentes entre cada uno de los conductores que conforman la línea de transmisión y entre estos conductores y el plano de tierra. Debe notarse que este efecto electrostático no involucra susceptancias de acoplamiento entre ambas terminales de la línea de transmisión, lo cual es equivalente a simplemente cambiar las impedancias  $z_{ij}$  mostradas en la Figura 2.1 por los coeficientes de potencia  $p_{ij}$  con la finalidad de representar los acoplamientos electrostáticos asociados a la fase  $a$ .

Con base a lo anterior, los elementos de  $\mathbf{b}_{abc}^r$  están dados por  $\mathbf{b}_{abc}^r = 2\pi f [\mathbf{c}_{abc}^r]$   $\mu\text{S} / \text{mi}$ , donde

$$[\mathbf{c}_{abc}^r] = [\mathbf{p}_{abc}^r]^{-1} = \begin{bmatrix} p_{aa}^r & p_{ab}^r & p_{ac}^r \\ p_{ba}^r & p_{bb}^r & p_{bc}^r \\ p_{ca}^r & p_{cb}^r & p_{cc}^r \end{bmatrix}^{-1} \quad \mu\text{S} / \text{mi} \quad (\text{A.7})$$

Los elementos de  $\mathbf{p}_{abc}^r$  antes de la reducción de Kron están dados por  $p_{ii} = 11.17689 \ln\left(\frac{S_{ii}}{RD_i}\right)$   $\text{mi} / \mu\text{S}$  y  $p_{ij} = 11.17689 \ln\left(\frac{S_{ij}}{RD_{ij}}\right)$   $\text{mi} / \mu\text{S}$ . En este caso  $RD_i$  es el radio del conductor  $i$  y  $S_{ij}$  es el espaciamiento entre los conductores  $i$  y  $j$  con  $i, j \in \{a, b, c, n\}$ .

Para obtener la matriz  $\mathbf{p}_{abc}^r$  se aplica reducción de Kron:

$$p_{ij}^r = p_{ij} - p_{in} \frac{p_{nj}}{p_{nn}} \quad \forall i, j \in \{a, b, c\} \quad (\text{A.8})$$

La matriz de admitancia nodal serie  $Y_s$  de una línea trifásica se obtiene multiplicando la inversa de la matriz primitiva  $z_{abc}$  y la matriz de incidencia rama-nodo  $N$  [Chen, 1998]:

$$Y_s = N^T z_{abc}^{-1} N \quad (\text{A.9})$$

donde la matriz de incidencia rama-nodo es dada por

$$N = \begin{array}{c|cccccc} & a & b & c & A & B & C \\ \hline a-A & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ b-B & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ c-C & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{array} \quad (\text{A.10})$$

Nótese que la matriz de incidencia  $N$  para la línea también puede obtenerse al aplicar la ley de voltajes de Kirchhoff a cada una de las fases, tal que la caída de voltaje en cada rama, i.e.  $\Delta V_{aA}$ ,  $\Delta V_{bB}$ ,  $\Delta V_{cC}$ , se relaciona con cada voltaje nodal como se muestra a continuación:

$$\begin{bmatrix} \Delta V_{aA} \\ \Delta V_{bB} \\ \Delta V_{cC} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_a \\ V_b \\ V_c \\ V_A \\ V_B \\ V_C \end{bmatrix} \quad (\text{A.11})$$

La matriz de admitancias primitivas serie es dada por

$$y_{abc} = z_{abc}^{-1} = \begin{bmatrix} z_{aa}^r & z_{ab}^r & z_{ac}^r \\ z_{ba}^r & z_{bb}^r & z_{bc}^r \\ z_{ca}^r & z_{cb}^r & z_{cc}^r \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} y_{aa} & y_{ab} & y_{ac} \\ y_{ba} & y_{bb} & y_{bc} \\ y_{ca} & y_{cb} & y_{cc} \end{bmatrix} \quad (\text{A.12})$$

De esta manera, la relación entre los voltajes nodales y corrientes a través de la admitancia serie es dada por,

$$\begin{bmatrix} I_a^{ys} \\ I_b^{ys} \\ I_c^{ys} \\ I_A^{ys} \\ I_B^{ys} \\ I_C^{ys} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} y_{aa} & y_{ab} & y_{ac} & -y_{aa} & -y_{ab} & -y_{ac} \\ y_{ab} & y_{bb} & y_{bc} & -y_{ab} & -y_{bb} & -y_{bc} \\ y_{ac} & y_{bc} & y_{cc} & -y_{ac} & -y_{bc} & -y_{cc} \\ -y_{aa} & -y_{ab} & -y_{ac} & y_{aa} & y_{ab} & y_{ac} \\ -y_{ab} & -y_{bb} & -y_{bc} & y_{ab} & y_{bb} & y_{bc} \\ -y_{ac} & -y_{bc} & -y_{cc} & y_{ac} & y_{bc} & y_{cc} \end{bmatrix}}_{Y_s} \begin{bmatrix} V_a \\ V_b \\ V_c \\ V_A \\ V_B \\ V_C \end{bmatrix} \quad (\text{A.13})$$

Aplicando un razonamiento similar para la obtención de la matriz de incidencia rama-nodo asociada al efecto electrostático en el extremo de envío,  $\{a, b, c\}$ , de la línea trifásica

$$N = \begin{array}{c|ccc} & a & b & c \\ \hline a-b & 1 & -1 & 0 \\ a-c & 1 & 0 & -1 \\ b-c & 0 & 1 & -1 \end{array} \begin{array}{ccc} A & B & C \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \quad (\text{A.14})$$

Con base al concepto de admitancia nodal dado por (A.9), la matriz de admitancia nodal del efecto capacitivo  $\mathbf{B}_{de}$  en el extremo de envío de la línea trifásica es dada por,

$$\mathbf{B}_{de} = \begin{bmatrix} b_{aa} & b_{ab} & b_{ac} & 0 & 0 & 0 \\ b_{ab} & b_{bb} & b_{bc} & 0 & 0 & 0 \\ b_{ac} & b_{bc} & b_{cc} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.15})$$

De manera similar, en el extremo receptor de la línea se tiene la ecuación (A.16). Notar que como el efecto capacitivo es simétrico, los valores de las susceptancias capacitivas son los mismos en (A.15) y (A.16)

$$\mathbf{B}_{dr} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_{aa} & b_{ab} & b_{ac} \\ 0 & 0 & 0 & b_{ab} & b_{bb} & b_{bc} \\ 0 & 0 & 0 & b_{ac} & b_{bc} & b_{cc} \end{bmatrix} \cdot \quad (\text{A.16})$$

La matriz de admitancia nodal equivalente de una línea trifásica, referida por la variable  $\mathbf{Y}_{busL}$ , que considera los efectos electromagnéticos y electrostáticos es dada por (A.17). Nótese que esta ecuación permite representar explícitamente los acoplamientos electromagnéticos del elemento en un programa de análisis de redes eléctricas desarrollado bajo el concepto de secuencia positiva. En este contexto, cada fase del elemento corresponderá a un nodo de una red representada en secuencia positiva. De igual manera, los acoplamientos electromagnéticos entre fases corresponden a los elementos no diagonales de la matriz de admitancias nodales.

$$\mathbf{Y}_{busL} = \mathbf{Y}_s + \mathbf{B}_{de} + \mathbf{B}_{dr} = \begin{bmatrix} y_{aa} & y_{ab} & y_{ac} & -y_{aa} & -y_{ab} & -y_{ac} \\ y_{ab} & y_{bb} & y_{bc} & -y_{ab} & -y_{bb} & -y_{bc} \\ y_{ac} & y_{bc} & y_{cc} & -y_{ac} & -y_{bc} & -y_{cc} \\ -y_{aa} & -y_{ab} & -y_{ac} & y_{aa} & y_{ab} & y_{ac} \\ -y_{ab} & -y_{bb} & -y_{bc} & y_{ab} & y_{bb} & y_{bc} \\ -y_{ac} & -y_{bc} & -y_{cc} & y_{ac} & y_{bc} & y_{cc} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{aa} & b_{ab} & b_{ac} & 0 & 0 & 0 \\ b_{ab} & b_{bb} & b_{bc} & 0 & 0 & 0 \\ b_{ac} & b_{bc} & b_{cc} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_{aa} & b_{ab} & b_{ac} \\ 0 & 0 & 0 & b_{ab} & b_{bb} & b_{bc} \\ 0 & 0 & 0 & b_{ac} & b_{bc} & b_{cc} \end{bmatrix} \quad (\text{A.17})$$

Por último, las 6 capacitancias mutuas  $b_{ij} \forall i, j \in \{a, b, c\}; i \neq j$  son sumadas en paralelo con las 6 inductancias mutuas  $y_{ij} \forall i, j \in \{a, b, c\}; i \neq j$  para obtener la siguiente matriz de admitancias nodales equivalente.

## Apéndice B

### Cálculo de matrices de impedancias de transformadores y reguladores

Con base a la Figura 2.3, las impedancias propias pueden escribirse como:

$$z_1 = R_1 + j\omega L_1 \quad z_2 = R_2 + j\omega L_2 \quad z_3 = z_5 = z_1 \quad z_4 = z_6 = z_2 \quad (\text{B.1})$$

De manera similar, las impedancias mutuas entre ramas pueden ser definidas como:

$$z_{12} = z_{34} = z_{56} = j\omega M \quad j\omega M \equiv z_m \quad (\text{B.2})$$

Entonces, la matriz de impedancias primitiva que relaciona voltajes y corrientes de rama es dada por

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 & z_m & 0 & 0 & 0 & 0 \\ z_m & z_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & z_1 & z_m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & z_m & z_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & z_1 & z_m \\ 0 & 0 & 0 & 0 & z_m & z_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \\ i_5 \\ i_6 \end{bmatrix} \quad (\text{B.3})$$

La relación inversa es

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \\ i_5 \\ i_6 \end{bmatrix} = \frac{1}{z_1 z_2 - z_m^2} \begin{bmatrix} z_2 & -z_m & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -z_m & z_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & z_2 & -z_m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -z_m & z_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & z_2 & -z_m \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -z_m & z_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{bmatrix} \quad (\text{B.4})$$

La configuración geométrica de este circuito puede ser completamente descrita por la relación entre los voltajes de rama y los voltajes nodales mediante la matriz de incidencia  $N$ , tal que  $V_B = NV_N$ , donde  $V_B$  es un vector de voltajes de rama y  $V_N$ , son los voltajes nodales. La matriz de incidencia que relaciona los voltajes de rama y los voltajes nodales corresponde a

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_N \begin{bmatrix} V_a \\ V_b \\ V_c \\ V_A \\ V_B \\ V_C \end{bmatrix} \quad (\text{B.5})$$

De esta forma usando la ecuación (2.9), la matriz de admitancia nodal del transformador con conexión estrella aterrizada-delta se convierte en:

$$\mathbf{Y}_{busT} = \frac{1}{z_1 z_2 - z_m^2} \begin{bmatrix} a & b & c & A & B & C & | & a \\ \hline z_2 & 0 & 0 & -z_m & z_m & 0 & | & a \\ 0 & z_2 & 0 & 0 & -z_m & z_m & | & b \\ \hline 0 & 0 & z_2 & z_m & 0 & -z_m & | & c \\ -z_m & 0 & z_m & 2z_1 & -z_1 & -z_1 & | & A \\ \hline z_m & -z_m & 0 & -z_1 & 2z_1 & -z_1 & | & B \\ 0 & z_m & -z_m & -z_1 & -z_1 & 2z_1 & | & C \end{bmatrix} \quad (\text{B.6})$$

En la práctica, los valores para  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $L_1$ ,  $L_2$ , y  $M$  son obtenidos mediante pruebas de cortocircuito y circuito abierto, tal que los valores de la matriz de admitancia nodal quedan completamente definidos. Si las ecuaciones (B.1) a (B.3) son sustituidas en el término de la impedancia propia del lado de la estrella aterrizada, es decir  $z_2 / (z_1 z_2 - z_m^2)$ , se obtiene:

$$\frac{z_2}{z_1 z_2 - z_m^2} = \frac{R_2 + j\omega L_2}{R_1 R_2 - \omega^2 L_1 L_2 + \omega^2 M^2 + j\omega(L_1 R_2 + L_2 R_1)} \quad (\text{B.7})$$

Similarmente, para los elementos diagonales de la submatriz de la admitancia propia del lado de la delta,

$$\frac{2z_1}{z_1 z_2 - z_m^2} = \frac{2(R_1 + j\omega L_1)}{R_1 R_2 - \omega^2 L_1 L_2 + \omega^2 M^2 + j\omega(L_1 R_2 + L_2 R_1)} \quad (\text{B.8})$$

Si el lado secundario de un transformador está en cortocircuito, se puede mostrar que la impedancia de entrada del lado primario del transformador es igual al recíproco del lado derecho de (B.7). Similarmente, si el lado primario del transformador está en cortocircuito, entonces la impedancia de entrada del lado secundario será igual a dos veces el recíproco del lado derecho de la ecuación (B.8). Así las submatrices trifásicas de admitancia propias pueden ser definidas en términos de admitancias de cortocircuito. Las submatrices trifásicas mutuas también pueden ser



escritas en términos de las admitancias de cortocircuito. Considerando que el coeficiente de acoplamiento en un transformador real es muy cercano a la unidad y que se cumplen las siguientes relaciones en las fracciones de los enlaces de flujos de primario a secundario:  $\alpha \ll 1$  y de secundario a primario  $\beta \ll 1$ , entonces las ecuaciones de inductancias mutuas  $M \equiv \frac{N_2}{N_1}(1-\alpha)L_1$ ,

$M \equiv \frac{N_1}{N_2}(1-\beta)L_2$ ,  $M = K\sqrt{L_1L_2}$  y el coeficiente de acoplamiento  $K = \sqrt{(1-\alpha)(1-\beta)}$  pueden ser

expresadas como  $M \approx \frac{N_2}{N_1}L_1$ ,  $M \approx \frac{N_1}{N_2}L_2$  y  $M \approx K\sqrt{L_1L_2}$ . Además, si se asume que  $R_1 \ll \omega L_1$  y

$R_2 \ll \omega L_2$ , entonces un elemento de las matrices de admitancias nodales puede ser aproximadamente definido como:

$$\frac{z_m}{z_1z_2 - z_m^2} \approx \frac{N_1}{N_2} \frac{z_2}{z_1z_2 - z_m^2} \quad (\text{B.9})$$

$$\frac{z_m}{z_1z_2 - z_m^2} \approx \frac{N_2}{N_1} \frac{z_1}{z_1z_2 - z_m^2} \quad (\text{B.10})$$

Finalmente, la matriz de admitancias nodales para el transformador trifásico puede ser formada en términos de la admitancia de cortocircuito del lado primario,  $y_t$ ,

$$y_t = \frac{z_2}{z_1z_2 - z_m^2} \quad (\text{B.11})$$

Por lo que la matriz de admitancias nodales que representa al transformador como una red de dos puertos de secuencia positiva puede escribirse como

$$\mathbf{Y}_{busT} = \begin{bmatrix} y_t & 0 & 0 & -\frac{N_1}{N_2}y_t & \frac{N_1}{N_2}y_t & 0 \\ 0 & y_t & 0 & 0 & -\frac{N_1}{N_2}y_t & \frac{N_1}{N_2}y_t \\ 0 & 0 & y_t & y_t & 0 & -\frac{N_1}{N_2}y_t \\ -\frac{N_1}{N_2}y_t & 0 & \frac{N_1}{N_2}y_t & 2\left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2y_t & -\left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2y_t & -\left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2y_t \\ \frac{N_1}{N_2}y_t & -\frac{N_1}{N_2}y_t & 0 & -\left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2y_t & 2\left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2y_t & -\left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2y_t \\ 0 & \frac{N_1}{N_2}y_t & -\frac{N_1}{N_2}y_t & -\left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2y_t & -\left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2y_t & 2\left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2y_t \end{bmatrix} \quad (\text{B.12})$$

La submatriz de admitancias trifásica mutua es igual a las submatrices superior derecha e inferior izquierda. Es importante notar que el desfaseamiento en los voltajes y corrientes son inducidos por estas submatrices en esta conexión. Un procedimiento similar puede ser usado para obtener las submatrices de admitancias para otras conexiones de transformador incluyendo la impedancia del neutro en conexiones estrella. Las submatrices de (B.12) deben ser modificadas para tomar en cuenta los taps fuera del nominal como sigue: a) dividir la submatriz de admitancias propia del lado primario por  $\alpha^2$ , b) dividir la submatriz de admitancias propia del lado secundario por  $\beta^2$ , c) dividir la submatriz de admitancias mutua por  $\alpha\beta$ .

## Apéndice C

### Derivación del método Doble Óptimo basado en subespacios Krylov

Definiendo  $\Delta y = y - y_0$ ,  $Ay = b$  es equivalente a  $A\Delta y = r_0$  con  $r_0 = b - Ay_0$ . La solución de  $Ay = b$  es obtenida usando un espacio de Krylov.

Suponiendo un subespacio de Krylov  $m$ -dimensional generado por  $A$  a partir de  $r_0$ , se tiene

$$K_m = \text{span}\{r_0, Ar_0, A^2r_0, \dots, A^{m-1}r_0\} \quad (\text{C.1})$$

Adicionalmente, un nuevo subespacio de Krylov  $m$ -dimensional puede ser generado de (C.1) definiendo  $L_m = AK_m$ , lo cual resulta en

$$L_m = AK_m = \text{span}\{Ar_0, A^2r_0, \dots, A^m r_0\}. \quad (\text{C.2})$$

Este método busca una solución en un subespacio, en el cual se minimiza el valor del residuo  $r = b - Ay$  sobre otro subespacio, y esto es llamado un método de proyección. Usando el teorema de Cayley-Hamilton,  $A^{-1}$  puede ser expandida como

$$A^{-1} = q_0 I_n + q_1 A + q_2 A^2 + \dots + q_{n-2} A^{n-2} + q_{n-1} A^{n-1} \quad (\text{C.3})$$

donde  $q_i, i = 0, 1, \dots, n-1$ , son los coeficientes dados por los polinomios simétricos elementales de los eigenvalores de  $A$ . La matriz  $A$  debe satisfacer  $p(A) = 0$ , donde  $p$  es el polinomio característico  $p(\lambda) = \det(\lambda I_n - A)$ ; donde  $\det$  es la operación determinante,  $I_n$  es la matriz identidad de orden  $n$ ;  $\lambda$  es un escalar raíz de este polinomio y un eigenvalor de  $A$ . Si  $y_0$  es una condición inicial de la solución de  $Ay = b$ , entonces

$$A(y_0 + \Delta y) = b \Rightarrow A\Delta y = b - Ay_0 = r_0 \Rightarrow \Delta y = A^{-1}r_0 \quad (\text{C.4})$$

Es importante notar que cualquier  $\Delta y$  puede ser escrita como

$$\Delta y = [r_0 \quad Ar_0 \quad A^2r_0 \quad \dots \quad A^{n-1}r_0] \cdot [q_0 \quad q_1 \quad q_2 \quad q_{n-2} \quad q_{n-1}]^T \quad (\text{C.5})$$

y una actualización en  $\Delta y$  debe pertenecer al sistema generador del subespacio (C.1).

Para crear una base ortonormal del subespacio de Krylov  $K_m$ :  $D = [d_1 \quad d_2 \quad \dots \quad d_m]$ , puede ser usado el algoritmo de Arnoldi. El algoritmo de Arnoldi es similar al proceso Gram-Schmidt, el cual

ortogonaliza un nuevo vector a partir de los anteriores. Asimismo, se puede usar el método Gram-Schmidt modificado o el algoritmo de Householder para construir una base ortogonal y normal (ortonormal) del subespacio de Krylov  $K_m$ .

El algoritmo básico de Arnoldi fue dado en pseudo código, iniciando en la columna 1 para crear el primer vector de la base ortonormal, el cual es seleccionado como  $\mathbf{d}_1$ :  $K_m^1 = \mathbf{d}_1 = \mathbf{r}_0 / \|\mathbf{r}_0\|$ .

El método de Arnoldi puede ser entonces usado para ortonormalizar los vectores de Krylov  $A^j \mathbf{r}_0, j = 1, \dots, m$ , tal que los vectores resultantes  $\mathbf{d}_i, i = 1, \dots, m$  satisfacen  $\mathbf{d}_i \cdot \mathbf{d}_j = \delta_{ij} \forall i, j = 1, \dots, m$ , donde  $\delta_{ij}$  es el símbolo delta de Kronecker.

En vez de utilizar un subespacio Krylov asociado a la ecuación (C.1),  $\Delta \mathbf{y}$  será obtenido expandiendo  $\Delta \mathbf{y}$  en un subespacio afín de Krylov:  $K'_m := span\{\mathbf{r}_0, L_m\} = span\{\mathbf{r}_0, A K_m\}$  definido como [Liu and Atluri, 2015]

$$\Delta \mathbf{y} = \alpha_0 \mathbf{r}_0 + \sum_{k=1}^m \alpha_k \mathbf{d}_k \in K'_m. \quad (C.6)$$

La ecuación (C.6) es similar a (C.5), es un subespacio  $K'_m$  y puede ser visto como una combinación doble optima de  $\mathbf{r}_0$  y del vector  $\mathbf{d}_k$ , donde  $k = 1, 2, \dots, m$  está en un subespacio afín de Krylov, donde los coeficientes  $\alpha_0$  y  $\alpha_k$  se obtienen como se describe en las próximas páginas. Se supone que la solución es encontrada en un subespacio más pequeño, así que se supone que  $m \ll n$ . Designando  $\mathbf{D} = [\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_m]$  como una matriz  $n \times m$  con su  $j$ -ésima columna siendo el vector  $\mathbf{d}_j$ . La dimensión  $m$  es seleccionada y los vectores  $\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_m$  son linealmente independientes; por lo tanto,  $rank(\mathbf{D}) = m$ , y  $\mathbf{D}^T \mathbf{D} = \mathbf{I}_m$ . La ecuación (C.6) puede ser escrita como  $\Delta \mathbf{y} = \Delta \mathbf{y}_0 + \mathbf{D} \boldsymbol{\alpha}$ , donde  $\Delta \mathbf{y}_0 = \alpha_0 \mathbf{r}_0$  y  $\boldsymbol{\alpha} = [\alpha_1, \dots, \alpha_m]^T$ . Dos funciones mérito son usadas [Liu and Atluri, 2015], cuyas minimizaciones proporcionan los coeficientes  $(\alpha_0, \boldsymbol{\alpha})$  unívocamente. La determinación de los coeficientes de expansión es obtenida como se describe a continuación.

Designando  $\mathbf{v} = A \Delta \mathbf{y}$ , se propone una función mérito  $e := \mathbf{r}_0 - \frac{\mathbf{r}_0 \mathbf{v}^2}{\|\mathbf{v}\|^2}$  tal que su minimización conduzca al mejor ajuste de  $\mathbf{v}$  a  $\mathbf{r}_0$ , ya que  $A \Delta \mathbf{y} = \mathbf{r}_0$  es la ecuación residual a resolver. Esta función mérito es la proyección ortogonal de  $\mathbf{r}_0$  a  $\mathbf{v}$ , la cual es considerada como una aproximación de  $\mathbf{r}_0$  por  $\mathbf{v}$ , cuyo vector de error se obtiene sacando la norma al cuadrado  $\|e\|^2$  y luego la suma de fracciones:

$$\|e\|^2 := \left\| \mathbf{r}_0 - \frac{\mathbf{r}_0 \mathbf{v}^2}{\|\mathbf{v}\|^2} \right\|^2 = \left\| \|\mathbf{r}_0\|^2 - 2 \frac{\mathbf{r}_0^2 \mathbf{v}^2}{\|\mathbf{v}\|^2} + \left( \frac{\mathbf{r}_0 \mathbf{v}^2}{\|\mathbf{v}\|^2} \right)^2 \right\|^2 = \left\| \|\mathbf{r}_0\|^2 + \frac{-2\mathbf{r}_0^2 \mathbf{v}^2 \|\mathbf{v}\|^2 + \mathbf{r}_0^2 \mathbf{v}^2 \|\mathbf{v}\|^2}{\|\mathbf{v}\|^4} \right\|^2,$$

$$\mathbf{e} := \mathbf{r}_0 - \left( \mathbf{r}_0, \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} \right) \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} \Rightarrow \min_y \left\{ \|e\|^2 = \|\mathbf{r}_0\|^2 - \frac{(\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{v})^2}{\|\mathbf{v}\|^2} \right\} \quad (\text{C.7})$$

donde el paréntesis expresa producto interior. La mejor aproximación puede ser encontrada minimizando la norma cuadrada de  $\mathbf{e}$ , o maximizando la proyección ortogonal cuadrada de  $\mathbf{r}_0$  a  $\mathbf{v}$ , la cual es obtenida del binomio al cuadrado. Entonces, se establece la función mérito como el recíproco del segundo término de (C.7):

$$\mathbf{f} := \min_{\Delta y} \left\{ \frac{\|\mathbf{v}\|^2}{(\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{v})^2} \right\} \quad (\text{C.8})$$

Por otro lado, asignando  $\mathbf{J} = \mathbf{A}\mathbf{D}$  se puede expresar  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{J}\boldsymbol{\alpha}$ , donde  $\mathbf{v}_0 = \mathbf{A}\Delta y_0 = \alpha_0 \mathbf{A}\mathbf{r}_0$ . Consecuentemente, la solución de  $\mathbf{A}\mathbf{y} = \mathbf{b}$  es obtenida minimizando la función merito dada por (C.8) con respecto a los residuales  $\mathbf{r}_0$  [Liu and Atluri, 2015]. Con base a lo anterior, sustituyendo  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{J}\boldsymbol{\alpha}$  el problema de minimización es encontrar  $\boldsymbol{\alpha}$ ,

$$\min_{\boldsymbol{\alpha}} \left\{ \mathbf{f} := \frac{\|\mathbf{v}\|^2}{(\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{v})^2} = \frac{\|\mathbf{v}_0 + \mathbf{J}\boldsymbol{\alpha}\|^2}{(\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{v}_0 + \mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{J}\boldsymbol{\alpha})^2} \right\} \quad (\text{C.9})$$

La minimización de  $\mathbf{e}$  por (C.7) y  $\mathbf{f}$  por (C.9) son problemas matemáticamente equivalentes. No obstante, para  $\mathbf{v}$  hay todavía un escalar desconocido  $\alpha_0$  en  $\mathbf{v}_0 = \alpha_0 \mathbf{A}\mathbf{r}_0$ . Consecuentemente, puede ser considerado el problema a partir de la minimización de la norma al cuadrado del residuo,

$$\min_{\alpha_0} : \{\|\mathbf{r}\|^2 = \|\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}\|^2 = \min_{\alpha_0} : \|\mathbf{r}_0 - \mathbf{A}\Delta y\|^2\} \quad (\text{C.10})$$

Debe enfatizarse que estas dos últimas minimizaciones (C.9) y (C.10) son distintas [Liu and Atluri, 2015]. Los términos  $\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{v}$  y  $\|\mathbf{v}\|^2$  en (C.9) pueden ser escritos como

$$\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{v} = \mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{v}_0 + \mathbf{r}_0^T \mathbf{J} \boldsymbol{\alpha} \quad (\text{C.11})$$

$$\|\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{v}_0\|^2 + 2\mathbf{v}_0^T \mathbf{J} \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\alpha}^T \mathbf{J}^T \mathbf{J} \boldsymbol{\alpha} \quad (\text{C.12})$$

Además, para la minimización de  $f$  es necesaria la condición de optimalidad, donde el numerador del gradiente es igual a cero:

$$\nabla_{\boldsymbol{\alpha}} \frac{\|\mathbf{v}\|^2}{(\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{v})^2} = \mathbf{0} \Rightarrow (\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{v})^2 \nabla_{\boldsymbol{\alpha}} \|\mathbf{v}\|^2 - 2\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{v} \|\mathbf{v}\|^2 \nabla_{\boldsymbol{\alpha}} (\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{v}) = \mathbf{0} \quad (\text{C.13})$$

en la cual  $\nabla_{\boldsymbol{\alpha}}$  denota el gradiente con respecto a los elementos de  $\boldsymbol{\alpha}$ . Entonces, eliminando  $\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{v}$  de (C.13) se puede obtener la siguiente ecuación para resolver  $\boldsymbol{\alpha}$

$$\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{v} \mathbf{v}_2 - 2\|\mathbf{v}\|^2 \mathbf{v}_1 = \mathbf{0} \quad (\text{C.14})$$

donde

$$\mathbf{v}_1 := \nabla_{\boldsymbol{\alpha}} (\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{v}) = \mathbf{J}^T \mathbf{r}_0 \quad (\text{C.15})$$

$$\mathbf{v}_2 = \nabla_{\boldsymbol{\alpha}} \|\mathbf{v}\|^2 = 2\mathbf{J}^T \mathbf{v}_0 + 2\mathbf{J}^T \mathbf{J} \boldsymbol{\alpha} \quad (\text{C.16})$$

Asignando  $\mathbf{C} = \mathbf{J}^T \mathbf{J}$ , se obtiene una matriz definida positiva porque  $\text{rank}(\mathbf{J}) = m$ . De (C.14) se puede observar que  $\mathbf{v}_2$  es proporcional a  $\mathbf{v}_1$ , lo cual se expresa como

$$\mathbf{v}_2 = \frac{2\|\mathbf{v}\|^2}{\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{v}} \mathbf{v}_1 = 2\lambda \mathbf{v}_1 \quad (\text{C.17})$$

donde  $2\lambda$  es un factor que será determinado. Cancelando  $2\mathbf{v}_1$  en ambos lados,

$$\|\mathbf{v}\|^2 = \lambda \mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{v} \quad (\text{C.18})$$

Entonces, de (C.15), (C.16) y (C.17) se obtiene que  $2\mathbf{J}^T \mathbf{v}_0 + 2\mathbf{J}^T \mathbf{J} \boldsymbol{\alpha} = 2\lambda \mathbf{J}^T \mathbf{r}_0$ , entonces:

$$\boldsymbol{\alpha} = \lambda \mathbf{K} \mathbf{J}^T \mathbf{r}_0 - \mathbf{K} \mathbf{J}^T \mathbf{v}_0 \quad (\text{C.19})$$

donde  $\mathbf{K} = (\mathbf{J}^T \mathbf{J})^{-1}$  es una matriz positiva definida. Sustituyendo (C.19) en (C.11) y (C.12) se obtiene  $\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{v} = \mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{v}_0 + \lambda \mathbf{r}_0^T \mathbf{J} \mathbf{K} \mathbf{J}^T \mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_0^T \mathbf{J} \mathbf{K} \mathbf{J}^T \mathbf{v}_0$  y  $\|\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{v}_0\|^2 + 2\lambda \mathbf{v}_0^T \mathbf{J} \mathbf{K} \mathbf{J}^T \mathbf{r}_0 - 2\mathbf{v}_0^T \mathbf{J} \mathbf{K} \mathbf{J}^T \mathbf{v}_0 + \lambda^2 \mathbf{r}_0^T \mathbf{J} \mathbf{K} \mathbf{J}^T \mathbf{J} \mathbf{K} \mathbf{J}^T \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0^T \mathbf{J} \mathbf{K} \mathbf{J}^T \mathbf{J} \mathbf{K} \mathbf{J}^T \mathbf{v}_0 - \lambda \mathbf{r}_0^T \mathbf{J} \mathbf{K} \mathbf{J}^T \mathbf{J} \mathbf{K} \mathbf{J}^T \mathbf{v}_0 - \lambda \mathbf{v}_0^T \mathbf{J} \mathbf{K} \mathbf{J}^T \mathbf{J} \mathbf{K} \mathbf{J}^T \mathbf{r}_0$ , entonces:

$$\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{v} = \mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{v}_0 + \lambda \mathbf{r}_0^T \mathbf{E} \mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_0^T \mathbf{E} \mathbf{v}_0 \quad (\text{C.20})$$

$$\|\mathbf{v}\|^2 = \lambda^2 \mathbf{r}_0^T \mathbf{E} \mathbf{r}_0 + \|\mathbf{v}_0\|^2 - \mathbf{v}_0^T \mathbf{E} \mathbf{v}_0 \quad (\text{C.21})$$

donde  $\mathbf{E} = \mathbf{J} \mathbf{K} \mathbf{J}^T$  es una matriz semi-definida positiva. Note que  $\mathbf{E}^2 = \mathbf{J} \mathbf{K} \mathbf{J}^T \mathbf{J} \mathbf{K} \mathbf{J}^T = \mathbf{J} \mathbf{K} \mathbf{K}^{-1} \mathbf{K} \mathbf{J}^T = \mathbf{J} \mathbf{K} \mathbf{J}^T = \mathbf{E}$  tal que  $\mathbf{E}$  es un operador de proyección que satisface  $\mathbf{E}^2 = \mathbf{E}$ . Así, de (C.18), (C.20) y (C.21) se puede derivar una ecuación lineal

$$\|\mathbf{v}_0\|^2 - \mathbf{v}_0^T \mathbf{E} \mathbf{v}_0 = \lambda (\mathbf{r}_0^T \mathbf{v}_0 - \mathbf{r}_0^T \mathbf{E} \mathbf{v}_0) \quad (\text{C.22})$$

tal que  $\lambda$  es

$$\lambda = \frac{\|\mathbf{v}_0\|^2 - \mathbf{v}_0^T \mathbf{E} \mathbf{v}_0}{(\mathbf{r}_0^T \mathbf{v}_0 - \mathbf{r}_0^T \mathbf{E} \mathbf{v}_0)} \quad (\text{C.23})$$

Sustituyendo (C.23) en (C.19), la solución de  $\alpha$  es obtenida

$$\alpha = \frac{\|\mathbf{v}_0\|^2 - \mathbf{v}_0^T \mathbf{E} \mathbf{v}_0}{(\mathbf{r}_0^T \mathbf{v}_0 - \mathbf{r}_0^T \mathbf{E} \mathbf{v}_0)} \mathbf{K} \mathbf{J}^T \mathbf{r}_0 - \mathbf{K} \mathbf{J}^T \mathbf{v}_0 \quad (\text{C.24})$$

Como  $\mathbf{v}_0 = \alpha_0 \mathbf{A} \mathbf{r}_0$  todavía incluye un escalar desconocido  $\alpha_0$ , se necesita otra ecuación para calcular  $\alpha_0$  y así  $\mathbf{a}$ . Sustituyendo la  $\mathbf{a}$  de (C.24) en  $\Delta \mathbf{y} = \Delta \mathbf{y}_0 + \mathbf{D} \mathbf{a}$ , con  $\Delta \mathbf{y}_0 = \alpha_0 \mathbf{r}_0$  y  $\lambda = \alpha_0 \lambda_0$  se obtiene de (C.19) y (C.24)

$$\Delta \mathbf{y} = \Delta \mathbf{y}_0 + \lambda \mathbf{X} \mathbf{r}_0 - \mathbf{X} \mathbf{v}_0 = \alpha_0 (\mathbf{r}_0 + \lambda_0 \mathbf{X} \mathbf{r}_0 - \mathbf{X} \mathbf{A} \mathbf{r}_0) \quad (\text{C.25})$$

donde  $X = DKJ^T$  y  $\lambda_0 = \frac{\|\alpha_0 A r_0\|^2 - \alpha_0^2 r_0^T A^T E A r_0}{\alpha_0 r_0^T A r_0 - \alpha_0 r_0^T E A r_0} = \frac{r_0^T A^T (I_n - E) A r_0}{r_0^T (I_n - E) A r_0}$ . Premultiplicando  $X$  por  $A$

y usando  $J = AD$ , y luego comparando el resultado con  $E = JKJ^T$ , se sigue inmediatamente que  $E = AX$ . Definiendo

$$v = r_0 + \lambda_0 X r_0 - X A r_0 \quad (2.88)$$

el valor  $\Delta y$  puede ser expresado como  $\Delta y = \alpha_0 v$ , donde  $\alpha_0$  puede ser obtenido minimizando el error residual cuadrático en  $\min \alpha_0 : \|r_0 - A \Delta y\|^2$ . Entonces, sustituyendo  $\Delta y$  en el error residual

$$\|r_0 - A \Delta y\|^2 = \|r_0 - \alpha_0 A v\|^2 = \alpha_0^2 \|w\|^2 - 2\alpha_0 w \cdot r_0 + \|r_0\|^2 \quad (C.27)$$

donde  $w = A v$ . Con la ayuda de  $E = AX$ , resulta

$$w = A v = A r_0 + \lambda_0 E r_0 - E A r_0. \quad (C.28)$$

Tomando la derivada de la ecuación (C.27) con respecto a  $\alpha_0$ , e igualando a cero se puede obtener

$$\alpha_0 = \frac{w \cdot r_0}{\|w\|^2} \quad (C.29)$$

Consecuentemente,  $\Delta y$  es dado por

$$\Delta y = \alpha_0 v = \frac{w \cdot r_0}{\|w\|^2} v, \quad (C.30)$$

de (C.30) se sustituye  $v$  con (2.88) y se obtiene

$$\Delta y = \alpha_0 (r_0 + \lambda_0 X r_0 - X A r_0) \quad (C.31)$$

De la ecuación (C.28) se obtiene su norma al cuadrado  $\|w\|^2$  y su multiplicación por  $r_0$ ,



$$\|\mathbf{w}\|^2 = \lambda_0^2 \mathbf{r}_0^T \mathbf{E} \mathbf{r}_0 + \mathbf{r}_0^T \mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_0^T \mathbf{A}^T \mathbf{E} \mathbf{A} \mathbf{r}_0, \quad (\text{C.32})$$

$$\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{w} = \lambda_0 \mathbf{r}_0^T \mathbf{E} \mathbf{r}_0 + \mathbf{r}_0^T \mathbf{A} \mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_0^T \mathbf{E} \mathbf{A} \mathbf{r}_0, \quad (\text{C.33})$$

donde  $\mathbf{E}^2 = \mathbf{E}$  fue usada en (C.32). Usando  $\lambda_0 = \frac{\mathbf{r}_0^T \mathbf{A}^T (\mathbf{I}_n - \mathbf{E}) \mathbf{A} \mathbf{r}_0}{\mathbf{r}_0^T (\mathbf{I}_n - \mathbf{E}) \mathbf{A} \mathbf{r}_0}$ , (C.33) es reducida a

$$\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{w} = \lambda_0 \mathbf{r}_0^T \mathbf{E} \mathbf{r}_0 + \frac{1}{\lambda_0} [\mathbf{r}_0^T \mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_0^T \mathbf{A}^T \mathbf{E} \mathbf{A} \mathbf{r}_0], \quad (\text{C.34})$$

Después de sustituir (C.34) en (C.29) se obtiene

$$\alpha_0 \lambda_0 \|\mathbf{w}\|^2 = \lambda_0^2 \mathbf{r}_0^T \mathbf{E} \mathbf{r}_0 + \mathbf{r}_0^T \mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_0^T \mathbf{A}^T \mathbf{E} \mathbf{A} \mathbf{r}_0. \quad (\text{C.35})$$

En vista de que el lado derecho de (C.32) es justo igual a  $\|\mathbf{w}\|^2$ ; se tiene que  $\lambda = \alpha_0 \lambda_0 = 1$ . Así, la solución doble óptima del residual obtenido de las dos minimizaciones (C.9) y (C.10), donde  $\Delta \mathbf{y} \in K^m$  es [Liu and Atluri, 2015]

$$\Delta \mathbf{y} = \mathbf{X} \mathbf{r}_0 + \alpha_0 (\mathbf{r}_0 - \mathbf{X} \mathbf{A} \mathbf{r}_0) \quad (\text{C.36})$$

donde  $\alpha_0 = \frac{\mathbf{r}_0^T (\mathbf{I}_n - \mathbf{E}) \mathbf{A} \mathbf{r}_0}{\mathbf{r}_0^T \mathbf{A}^T (\mathbf{I}_n - \mathbf{E}) \mathbf{A} \mathbf{r}_0}$ .

Si  $m = n$ , entonces  $\mathbf{J}$  es una matriz no singular de  $n \times n$ , debido a que el  $\text{rank}(\mathbf{J}) = n$ . Simultáneamente,  $\mathbf{E}$  es una matriz identidad, entonces (C.19) se reduce a

$$\alpha = \mathbf{J}^{-1} \mathbf{r}_0 - \mathbf{J}^{-1} \mathbf{v}_0 \quad (\text{C.37})$$

Por  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{J} \alpha$  y (C.37) se tiene que

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{J} \alpha = \mathbf{v}_0 + \mathbf{J} [\mathbf{J}^{-1} \mathbf{r}_0 - \mathbf{J}^{-1} \mathbf{v}_0] = \mathbf{r}_0 \quad (\text{C.38})$$

Bajo esta condición se ha obtenido una solución óptima en forma cerrada de  $\Delta\mathbf{y}$ , sustituyendo (C.37) en  $\Delta\mathbf{y} = \Delta\mathbf{y}_0 + \mathbf{D}\boldsymbol{\alpha}$  y usando  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{J}\boldsymbol{\alpha}$ ,  $\mathbf{J} = \mathbf{A}\mathbf{D}$  y  $\mathbf{v}_0 = \mathbf{A}\mathbf{r}_0$  :

$$\Delta\mathbf{y} = \Delta\mathbf{y}_0 + \mathbf{D}\mathbf{J}^{-1}\mathbf{r}_0 - \mathbf{D}\mathbf{J}^{-1}\mathbf{v}_0 = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{r}_0 + \Delta\mathbf{y}_0 - \mathbf{A}^{-1}\mathbf{v}_0 = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{r}_0 \quad (\text{C.39})$$

En la solución doble óptima de  $\mathbf{A}\mathbf{y} = \mathbf{b}$ , si  $m = n$  entonces se obtiene la solución exacta, dada por  $\Delta\mathbf{y} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{r}_0$ . Usando  $\mathbf{v} = \mathbf{A}\Delta\mathbf{y}$ , la norma cuadrada del error residual es

$$\|\mathbf{r}_0 - \mathbf{A}\Delta\mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{r}_0 - \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{r}_0\|^2 - 2\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{v} + \|\mathbf{v}\|^2 \quad (\text{C.40})$$

donde

$$\mathbf{v} = \alpha_0\mathbf{A}\mathbf{r}_0 - \alpha\mathbf{E}\mathbf{A}\mathbf{r}_0 + \mathbf{E}\mathbf{r}_0 \quad (\text{C.41})$$

es obtenida de (C.36) y  $\mathbf{E} = \mathbf{A}\mathbf{X}$ . De la (C.41) se sigue que

$$\|\mathbf{v}\|^2 = \alpha_0^2 (\mathbf{r}_0^T \mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_0^T \mathbf{A}^T \mathbf{E} \mathbf{A} \mathbf{r}_0) + \mathbf{r}_0^T \mathbf{E} \mathbf{r}_0 = \alpha_0^2 [\mathbf{r}_0^T \mathbf{A}^T (\mathbf{I}_n - \mathbf{E}) \mathbf{A} \mathbf{r}_0] + \mathbf{r}_0^T \mathbf{E} \mathbf{r}_0 \quad (\text{C.42})$$

$$\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{v} = \alpha_0 \mathbf{r}_0^T \mathbf{A} \mathbf{r}_0 - \alpha_0 \mathbf{r}_0^T \mathbf{E} \mathbf{A} \mathbf{r}_0 + \mathbf{r}_0^T \mathbf{E} \mathbf{r}_0 = \alpha_0 [\mathbf{r}_0^T (\mathbf{I}_n - \mathbf{E}) \mathbf{A} \mathbf{r}_0] + \mathbf{r}_0^T \mathbf{E} \mathbf{r}_0 \quad (\text{C.43})$$

donde  $\mathbf{E}^2 = \mathbf{E}$  fue usada en (C.43). Entonces, sustituyendo (C.42) y (C.43) en (C.40) se tiene

$$\|\mathbf{r}_0 - \mathbf{A}\Delta\mathbf{y}\|^2 = \alpha_0^2 (\mathbf{r}_0^T \mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_0^T \mathbf{A}^T \mathbf{E} \mathbf{A} \mathbf{r}_0) + 2\alpha_0 (\mathbf{r}_0^T \mathbf{E} \mathbf{A} \mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_0^T \mathbf{A} \mathbf{r}_0) + \|\mathbf{r}_0\|^2 - \mathbf{r}_0^T \mathbf{E} \mathbf{r}_0, \quad (\text{C.44})$$

Consecuentemente  $\|\mathbf{r}_0 - \mathbf{A}\Delta\mathbf{y}\|^2 = \alpha_0^2 \mathbf{r}_0^T \mathbf{A}^T (\mathbf{I}_n - \mathbf{E}) \mathbf{A} \mathbf{r}_0 - 2\alpha_0 \mathbf{r}_0^T (\mathbf{I}_n - \mathbf{E}) \mathbf{A} \mathbf{r}_0 + \|\mathbf{r}_0\|^2 - \mathbf{r}_0^T \mathbf{E} \mathbf{r}_0$ , usando

$$\alpha_0 = \left[ \frac{\mathbf{r}_0^T (\mathbf{I}_n - \mathbf{E}) \mathbf{A} \mathbf{r}_0}{\mathbf{r}_0^T \mathbf{A}^T (\mathbf{I}_n - \mathbf{E}) \mathbf{A} \mathbf{r}_0} \right]^2 \mathbf{r}_0^T \mathbf{A}^T (\mathbf{I}_n - \mathbf{E}) \mathbf{A} \mathbf{r}_0 - 2 \frac{\mathbf{r}_0^T (\mathbf{I}_n - \mathbf{E}) \mathbf{A} \mathbf{r}_0}{\mathbf{r}_0^T \mathbf{A}^T (\mathbf{I}_n - \mathbf{E}) \mathbf{A} \mathbf{r}_0} \mathbf{r}_0^T (\mathbf{I}_n - \mathbf{E}) \mathbf{A} \mathbf{r}_0 + \|\mathbf{r}_0\|^2 - \mathbf{r}_0^T \mathbf{E} \mathbf{r}_0$$

y simplificando términos resulta (C.45),

$$\| \mathbf{r}_0 - A\Delta\mathbf{y} \|^2 = \| \mathbf{r}_0 \|^2 - \mathbf{r}_0^T \mathbf{E} \mathbf{r}_0 - \frac{[\mathbf{r}_0^T (\mathbf{I}_n - \mathbf{E}) A \mathbf{r}_0]^2}{\mathbf{r}_0^T A^T (\mathbf{I}_n - \mathbf{E}) A \mathbf{r}_0} \quad (\text{C.45})$$

Como ambos  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{I}_n - \mathbf{E}$  son operadores de proyección, se obtiene

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_0^T \mathbf{E} \mathbf{r}_0 &> 0 \\ \mathbf{r}_0^T A^T (\mathbf{I}_n - \mathbf{E}) A \mathbf{r}_0 &> 0 \end{aligned} \quad (\text{C.46})$$

Entonces, de acuerdo a (C.45) y (C.46) se puede derivar (C.47)

$$\| \mathbf{r}_0 - A\Delta\mathbf{y} \|^2 < \| \mathbf{r}_0 \|^2 \quad (\text{C.47})$$

La primer función mérito a minimizar  $e$  es usada para ajustar la orientación de  $\mathbf{v}$  por la mejor aproximación a la orientación de  $\mathbf{r}_0$ , aunque no considera la longitud de  $\mathbf{v}$ . En contraste, la segunda función mérito a minimizar (C.10) que es la norma del residual  $\mathbf{r}$  al cuadrado, también se considera la longitud de con  $\mathbf{v}$  la mejor aproximación a la longitud de  $\mathbf{r}_0$ .

Sustituyendo  $\alpha_0$  en (C.42) y (C.43) se obtiene

$$\| \mathbf{v} \|^2 = \frac{[\mathbf{r}_0^T (\mathbf{I}_n - \mathbf{E}) A \mathbf{r}_0]^2}{\mathbf{r}_0^T A^T (\mathbf{I}_n - \mathbf{E}) A \mathbf{r}_0} + \mathbf{r}_0^T \mathbf{E} \mathbf{r}_0 \quad (\text{C.48})$$

$$\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{v} = \frac{[\mathbf{r}_0^T (\mathbf{I}_n - \mathbf{E}) A \mathbf{r}_0]^2}{\mathbf{r}_0^T A^T (\mathbf{I}_n - \mathbf{E}) A \mathbf{r}_0} + \mathbf{r}_0^T \mathbf{E} \mathbf{r}_0 \quad (\text{C.49})$$

por lo tanto, se tiene  $\| \mathbf{v} \|^2 = \mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{v}$ . De (C.45) y (C.49) se puede derivar

$$\| \mathbf{r}_0 - A\Delta\mathbf{y} \|^2 = \| \mathbf{r}_0 \|^2 - \| \mathbf{v} \|^2. \quad (\text{C.50})$$

Entonces, sustituyendo (C.50) para  $\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{v}$  en (C.7) y elevando al cuadrado se tiene

$$\| \mathbf{e} \|^2 = \| \mathbf{r}_0 \|^2 - \| \mathbf{v} \|^2. \quad (\text{C.51})$$

Comparando (C.50) y (C.51).

$$\|\mathbf{e}\|^2 = \|\mathbf{r}_0 - \mathbf{A}\Delta\mathbf{y}\|^2 \quad (\text{C.52})$$

Se nota de (C.52) que los valores mínimos de las dos funciones mérito son los mismos. Usando  $\mathbf{b} = \mathbf{A}\mathbf{y}$ , y la definición de  $\mathbf{r} = \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{y}$ , y de las ecuaciones (C.51) y (C.52) se tiene

$$\|\mathbf{r}\|^2 = \|\mathbf{e}\|^2 = \|\mathbf{r}_0\|^2 - \|\mathbf{v}\|^2. \quad (\text{C.53})$$

Debido a que  $\|\mathbf{v}\|^2 > 0$ , de (C.53) se observa que

$$\|\mathbf{r}\|^2 < \|\mathbf{r}_0\|^2 \quad (\text{C.54})$$

Con base a lo anterior se observa que los dos vectores mérito  $\|\mathbf{e}\|^2$  y  $\|\mathbf{r}\|^2$  son los mismos, como se muestra en (C.53). Lo más importante en este algoritmo es que (C.54) garantiza que el error residual es absolutamente reducido por:  $\|\mathbf{r}\|^2 < \|\mathbf{r}_0\|^2$ , mientras (C.52) provee la estimación del error residual.

## Referencias

- [Abur y Gómez-Expósito, 2002] Alvarado, L., et al. Análisis y operación de sistemas de energía eléctrica, capítulo 4, estimación de estado. McGraw-Hill, 2002. p. 171-215.
- [Abur and Gomez-Exposito, 2004] A. Abur and A. Gomez Exposito, Power system state estimation: theory and implementation, Ed. New York, CRC press, Marcel Dekker, 2004.
- [Acha et al., 2004] E. Acha, C.R. Fuerte-Esquivel, H. Ambriz-Perez and C. Angeles-Camacho, "FACTS: Modelling and Simulation in Power Networks," Hoboken, NJ, John Wiley & Sons, 2004.
- [Atanackovic and Dabic, 2013] Atanackovic, D., and Dabic, V. (2013, July). Deployment of real-time state estimator and load flow in BC Hydro DMS—challenges and opportunities. In Power and Energy Society General Meeting (PES), 2013 IEEE (pp. 1-5). IEEE
- [Baran and Kelley, 1995] M. E. Baran, and A. W. Kelley, "A branch-current-based state estimation method for distribution systems," IEEE transactions on power systems, vol. 10, no. 1, pp. 483-491, 1995.
- [Baran and McDermott, 2009] Baran, M., and McDermott, T. E. (2009, March). Distribution system state estimation using AMI data. In Power Systems Conference and Exposition, 2009. PSCE'09. IEEE/PES (pp. 1-3). IEEE.
- [Barrett et al., 1994] R. Barrett, M. Berry, T. F. Chan, J. Demmel, J. Donato, J. Dongarra, and H. Van der Vorst, "Templates for the solution of linear systems: building blocks for iterative methods," Philadelphia, SIAM, 1994.
- [Celli et al., 2014] G. Celli, P. A. Pegoraro, F. Pilo, G. Pisano and S. Sulis, "DMS cyber-physical simulation for assessing the impact of state estimation and communication media in smart grid operation," IEEE Transactions on Power Systems, vol. 29, no. 5, pp. 2436-2446, 2014.
- [Chen et al., 1991] T. H. Chen, M. S. Chen, T. Inoue, P. Kotas and E. A. Chebli, "Three-phase cogenerator and transformer models for distribution system analysis," IEEE Transactions on Power Delivery, vol. 6, no. 4, pp. 1671-1681, 1991.

- [Chen, 1998] Chen, M. S. (1998). Modeling and Analysis of Modern Power System. Energy Systems Research Center, University of Texas at Arlington.
- [Choi and Saunders, 2014] S. C. T. Choi, and M. A. Saunders, "Algorithm 937: MINRES-QLP for symmetric and Hermitian linear equations and least-squares problems," ACM Transactions on Mathematical Software (TOMS), vol. 40, no. 2, art. 16, pp. 1-12, 2014.
- [Deng et al., 2002] Y. Deng, Y. He and B. Zhang, "A branch-estimation-based state estimation method for radial distribution systems," IEEE Transactions on power delivery, vol. 17, no. 4, pp. 1057-1062, 2002.
- [Dugan and Mcdermott, 2011] R. C. Dugan and T. E. Mcdermott, "An open source platform for collaborating on smart grid research," in IEEE Power and Energy Society General Meeting, Detroit, MI, 2011, pp. 1-7.
- [Dzafic et al., 2011] Dzafic, I.; Henselmeyer, S.; Neisius, H.-T. High performance state estimation for smart grid distribution network operation. En Innovative Smart Grid Technologies (ISGT), 2011 IEEE PES. IEEE, 2011. p. 1-6.
- [Feng et al., 2012] Feng, X., Yang, F., & Peterson, W. (2012, July). A practical multi-phase distribution state estimation solution incorporating smart meter and sensor data. In Power and Energy Society General Meeting, 2012 IEEE (pp. 1-6). IEEE.
- [Gelagaev, 2008] Gelagaev, Ratmir; Vermeyen, Pieter; Driesen, Johan. State estimation in distribution grids. In Harmonics and Quality of Power, 2008. ICHQP 2008. 13th International Conference on. IEEE, 2008. p. 1-6.
- [Gol and Abur, 2013] M. Gol and A. Abur, "Identifying vulnerabilities of state estimators against cyber-attacks," in PowerTech (POWERTECH), 2013 IEEE Grenoble, pp. 1-4.
- [Han, 1982] Z. X. Han, "Phase shifter and power flow control," IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems, Vol. PAS-101, No. 10, pp. 3790-3795, Oct. 1982.
- [Hansen, 1994] P. C. Hansen, "Regularization tools: A Matlab package for analysis and solution of discrete ill-posed problems," Numerical algorithms, vol 6, no. 1, pp. 1-35. 1994.

- [Haughton and Heydt, 2013] D. A. Haughton and G. T. Heydt "A linear state estimation formulation for smart distribution systems," IEEE Transactions on Power Systems, vol. 28, no. 2, pp. 1187-1195, 2013.
- [Huang et al., 2012] Huang, Y. F., et al. State estimation in electric power grids: Meeting new challenges presented by the requirements of the future grid. Signal Processing Magazine, IEEE, 2012, vol. 29, no 5, p. 33-43.
- [Hug and Giampapa, 2012] G. Hug and J. A. Giampapa, "Vulnerability assessment of AC state estimation with respect to false data injection cyber-attacks," IEEE Transactions on Smart Grid, vol. 3, no. 3, pp. 1362-1370, 2012.
- [Idema et al., 2013] R. Idema, G. Papaefthymiou, D. Lahaye, C. Vuik, L. van der Sluis, "Towards faster solution of large power flow problems," IEEE Transactions on Power Systems, vol. 28, no. 4, pp. 4918-4925, 2013.
- [IEEE PES, 2018] IEEE PES Distribution Analysis Subcommittee's Distribution Test Feeder Working Group, "Distribution Test Feeders". [Online]. Available: <http://ewh.ieee.org/soc/pes/dsacom/testfeeders/>. 2018.
- [Janssen et al., 2012] Janssen, P., Sezi, T., & Maun, J. C. (2012, October). Distribution system state estimation using unsynchronized phasor measurements. In Innovative Smart Grid Technologies (ISGT Europe), 2012 3rd IEEE PES International Conference and Exhibition on (pp. 1-6). IEEE.
- [Jia et al., 2013] Jia, Z., Chen, J., & Liao, Y. (2013, April). State estimation in distribution system considering effects of AMI data. In Southeastcon, 2013 Proceedings of IEEE (pp. 1-6). IEEE.
- [Kersting, 2012] W. H. Kersting, Distribution system modeling and analysis, in Electric Power Generation, Transmission, and Distribution, 3rd ed. New York CRC press, Taylor & Francis, 2012.
- [Kim and Poor, 2011] T. T. Kim, and H. V. Poor, "Strategic protection against data injection attacks on power grids," IEEE Transactions on Smart Grid, vol. 2, no. 2, pp. 326-333, 2011.

- [Kosut et al., 2010] O. Kosut, L. Jia, R. J. Thomas and L. Tong, "Malicious data attacks on smart grid state estimation: Attack strategies and countermeasures," in First IEEE International Conference on Smart Grid Communications (SmartGridComm), pp. 220-225, 2010.
- [Kothari and Nagrath, 2008] Kothari, D. P., and Nagrath, I. J. (2008). Power system engineering. Tata McGraw-Hill.
- [Ku et al., 2011] C. Y. Ku, W. Yeih and C. S. Liu, "Dynamical newton-like methods for solving ill-conditioned systems of nonlinear equations with applications to boundary value problems," in CMES: Computer Modeling in Engineering & Sciences, vol. 76, no. 2, pp. 83-108, 2011.
- [Liang et al., 2016] G. Liang, S. R. Weller, J. Zhao, F. Luo, Z. Y. and Dong, "The 2015 Ukraine Blackout: Implications for False Data Injection Attacks," IEEE Transactions on Power Systems. vol. PP, no.99, pp.1-1, 2016.
- [Lijun et al., 2011] Lijun, Qin, et al. CIM-based three-phase state estimation of distribution network. En Advanced Power System Automation and Protection (APAP), 2011 International Conference on. IEEE, 2011. p. 667-672.
- [Lin and Teng, 1996] W. M. Lin and J. H. Teng, "State estimation for distribution systems with zero-injection constraints," IEEE Transactions on Power Systems, vol. 11, no. 1, pp. 518-524, 1996.
- [Liu and Atluri, 2011] C. S. Liu and S. N. Atluri, "Simple 'residual-norm' based algorithms, for the solution of a large system of non-linear algebraic equations, which converge faster than the Newton's method," in CMES: Computer Modeling in Engineering & Sciences, vol. 71, no. 3, pp. 279-304, 2011.
- [Liu and Atluri, 2015] C. S. Liu and S. N. Atluri, "Double optimal regularization algorithms for solving ill-posed linear problems under large noise," in CMES: Computer Modeling in Engineering & Sciences, vol. 104, pp. 1-39, 2015.



- [Liu et al., 2011] Y. Liu, P. Ning and M. Reiter, "False data injection attacks against state estimation in electric power grids," 2011 ACM Transactions on Information and System Security (TISSEC), vol. 14, no. 1, pp. 16.
- [Liu, 2013] C. S. Liu, "A two-side equilibration method to reduce the condition number of an ill-posed linear system," in CMES: Computer Modeling in Engineering & Sciences, vol. 91, pp. 17-42, 2013.
- [Lu et al, 1995] C. N. Lu, J. H. Teng and W. H. E. Liu, "Distribution system state estimation," IEEE Transactions on Power Systems, vol. 10, no. 1, pp. 229-240, 1995.
- [Macii et al., 2014] Macii, D., Barchi, G., & Schenato, L. (2014, September). On the role of phasor measurement units for distribution system state estimation. In Environmental Energy and Structural Monitoring Systems (EESMS), 2014 IEEE Workshop on (pp. 1-6). IEEE.
- [Mallik et al., 2012] S. K. Mallik, S. Chakrabarti, and S. N. Singh, "A regularized method for solving ill-conditioned hybrid state estimation problem," in 2nd International Conference on Power, Control and Embedded Systems (ICPCES, IEEE), Allahabad, Uttar Pradesh, India, 2012, pp. 1-6.
- [Meza, 1995] J. C. Meza, "A modification to the GMRES method for ill-conditioned linear systems," Scientific Computing Department, Sandia National Laboratories, Livermore, CA, SAND95-8220, 1995.
- [Muscas et al., 2014] Muscas, C., Pau, M., Pegoraro, P. A., & Sulis, S. (2014). Effects of measurements and pseudomeasurements correlation in distribution system state estimation. IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement, 63(12), 2813-2823
- [Ozay et al., 2012] M. Ozay, I. Esnaola, F. T. Y Vural, S. R. Kulkarni and H. V. Poor, "Distributed models for sparse attack construction and state vector estimation in the smart grid," IEEE Third International Conference on In Smart Grid Communications (SmartGridComm), pp. 306-311, 2012.

- [Pau et al., 2013] M. Pau, P. A. Pegoraro and S. Sulis, "Efficient branch-current-based distribution system state estimation including synchronized measurements," IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement, vol. 62, no. 9, pp. 2419-2429, 2013.
- [Peralta et al., 2008] J. Peralta, F. de Leon and J. Mahseredjian. "Unbalanced multiphase load-flow using a positive-sequence load-flow program," IEEE Transactions on Power Systems, vol. 23, no. 2, pp. 469-476, 2008.
- [Qin et al., 2012] Z. Qin, Q. Li, and M. C. Chuah, "Unidentifiable attacks in electric power systems," in Proceedings of the 2012 IEEE/ACM Third International Conference on Cyber-Physical Systems, IEEE Computer Society, pp. 193-202, 2012.
- [Rahman and Mohsenian-Rad, 2013] M. Rahman and H. Mohsenian-Rad, "False data injection attacks against nonlinear state estimation in smart power grids," in Power and Energy Society General Meeting (PES), 2013 IEEE, pp.1-5.
- [Ranković et al., 2014] A. Ranković, B. M. Maksimović and A. T. Sarić, "A three-phase state estimation in active distribution networks," International Journal of Electrical Power & Energy Systems, vol. 54, pp. 154-162, 2014.
- [Saad, 2003] Y. Saad, "Iterative methods for sparse linear systems," Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, 2003.
- [Sanjab and Saad, 2016] A. Sanjab and W. Saad, "Data injection attacks on smart grids with multiple adversaries: a game-theoretic perspective," IEEE Transactions on Smart Grid, vol. 7, no. 4, pp. 2038-2049, 2016.
- [Shabaninia et al., 2012] Shabaninia, F., Vaziri, M., Vadhva, S., & Vaziri, J. (2012, July). A novel state estimation formulation for distribution grids with Renewable Energy Sources. In Power and Energy Society General Meeting, 2012 IEEE (pp. 1-5). IEEE.
- [Stephens, 1999] D. Stephens, "ELMRES: an oblique projection method to solve sparse non-symmetric linear systems," Ph.D. dissertation, Appl. Math, Florida Inst. of Tech., Melbourne, FL, 1999.

- [Stevenson y J. Grainger, 2004] W., Stevenson y J. Grainger, Análisis de sistemas de potencia. Editorial McGraw-Hill., México, 2004.
- [Teixeira et al., 2010] A. Teixeira, S. Amin, H. Sandberg, K. H. Johansson and S. S. Sastry, "Cyber security analysis of state estimators in electric power systems," in 49th IEEE Conference on Decision and Control (CDC), pp. 5991-5998, 2010.
- [Therrien et al., 2013] F. Therrien, I. Kocar and J. Jatskevich, "A unified distribution system state estimator using the concept of augmented matrices," IEEE Transactions on Power Systems, vol. 28, no. 3, pp. 3390-3400, 2013
- [Wang and Schulz, 2004] H. Wang and N. N. Schulz, "A revised branch current based distribution system state estimation algorithm and meter placement impact," IEEE Transactions on Power Systems, vol. 19, no. 1, pp. 207-213, 2004.
- [Xiao et al., 2006] P. Xiao, D. C. Yu and W. Yan, "A unified three-phase transformer model for distribution load flow calculations," IEEE Transactions on Power Systems, vol. 21, no 1, pp. 153-159, 2006.
- [Yan, 2013] J. Yan, "Modelling and analysis on smart grid against smart attacks," M. Sc. Thesis. Elect. Eng. Dept., University of Rhode Island, 2013.
- [Yang et al., 2014] Q. Yang, J. Yang, W. Yu, D. An, N. Zhang and W. Zhao, "On false data-injection attacks against power system state estimation: Modeling and countermeasures," IEEE Transactions on Parallel and Distributed Systems, vol. 25, no. 3, pp. 717-729, 2014.
- [Zamora-Cárdenas and Fuerte-Esquivel, 2011] E. A. Zamora-Cárdenas and C. R. Fuerte-Esquivel, "State Estimation of Power Systems Containing Facts Controllers," Electric Power System Research, vol. 81, no 4, p. 995-1002, 2011.
- [Zamora-Cárdenas et al, 2014] Zamora-Cárdenas, E. A., Alcaide-Moreno, B. A., & Fuerte-Esquivel, C. R. (2014). State estimation of flexible AC transmission systems considering synchronized phasor measurements. Electric Power Systems Research, 106, 120-133.