



UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN  
NICOLÁS DE HIDALGO

FACULTAD DE INGENIERÍA ELÉCTRICA  
DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO

“ANÁLISIS Y SIMULACIÓN DE UN ROBOT  
MANIPULADOR DE SEIS GRADOS DE  
LIBERTAD”

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE  
MAESTRO EN INGENIERÍA ELÉCTRICA

PRESENTA  
ING. WALDEMAR PÉREZ BAILÓN

ASESOR  
DR. EDMUNDO BARRERA CARDIEL

MORELIA, MICHOACÁN

AGOSTO DEL 2005



Página en blanco

## Agradecimientos

*A mis Padres Gelacio Pérez Tapia y Ofelia Bailón Esquivel(†), quienes con su ejemplo y dedicación me han permitido lograr esta meta. Nunca podré pagar de ninguna manera todo lo que han hecho por mi.*

*A mis Hermanos Antonio, Oscar Jorge, Eréndira, Martha Araceli, Sergio, Gelacio, Naín, Anabella, Mireya y Mauricio.*

*Un agradecimiento especial a el M.C. José Juan Rincón Pasaye, por su amistad y sus consejos amables en el transcurso de mis estudios*

*A los integrantes de la mesa Sinodal, quienes con sus comentarios y sugerencias enriquecieron esta Tesis.*

*Con Profundo agradecimiento a mi compadre y amigo M.I Oscar Figueroa Cruz, por invaluable apoyo*

*Al CONACYT Por su apoyo económico para la realización de mis estudios de maestría.*

*A mis Hijos Narda Belén Jazmín, Edgar Waldemar, Hugo Waldemar, Eder y Waleria*

*A mi Asesor el Dr. Edmundo Barrera Cardiel, quien me permitió participar de su proyecto de investigación y con cuyas enseñanzas y consejos me ayudó a la culminación de esta Tesis.*

*A todos y cada uno de los Profesores que tuve en el transcurso de mis estudios de Maestría: Drs. J Jesús Rico Melgoza, J. Aurelio Medina Ríos, Claudio Rubén Fuerte Esquivel, Edmundo Barrera Cardiel, Leonardo Romero Muños, M.C. José Juan Rincón, M.C Juan Anzures Marín*

*A mis compañeros de generación Arnoldo Zamora Cárdenas, Alejandro Pizano Martínez, Roberto Contreras Bolaños, Jesús Maldonado Paleo, por esos buenos momentos*

*Al Ing. José Luis Guillén Aguirre así como al M.I Antonio Ramos Paz por su amistad y su gran apoyo intelectual para la conclusión de esta tesis.*

## **RESUMEN**

### **ANÁLISIS Y SIMULACIÓN DE UN ROBOT MANIPULADOR DE SEIS GRADOS DE LIBERTAD**

En esta tesis se presenta una propuesta de estructura básica para el análisis de un robot manipulador de seis grados de libertad. Se desarrollan las ecuaciones de la cinemática directa y de la cinemática inversa para esta estructura. Se desarrollan también las ecuaciones para el análisis de las velocidades y de las fuerzas que podría manejar el robot manipulador. Estas ecuaciones se desarrollan en base a transformaciones homogéneas utilizando la convención Denavit-Hartenberg. Se presenta el software desarrollado para la simulación y análisis de la cinemática directa y de la cinemática inversa de este manipulador. El software desarrollado permite analizar las velocidades del extremo final del manipulador en función de las velocidades de los motores en las articulaciones del robot manipulador. Mediante este software se puede determinar también el par que se debe aplicar a cada una de las articulaciones del manipulador para obtener una determinada fuerza estática en su extremo final. El software desarrollado incluye una interfase gráfica con animación de las simulaciones.

## **ABSTRACT**

### **ANALYSIS AND SIMULATION OF A ROBOT MANIPULATOR WITH SIX DEGREES OF FREEDOM**

This thesis presents a proposal of a basic structure for the analysis of a robot manipulator with six degrees of freedom. The forward and inverse kinematics equations for this structure are derived. Also, the equations for the analysis of the velocities and forces of the manipulator are derived. These equations are developed by using homogeneous transformation matrices based on the Denavit-Hartenberg convention. The thesis shows the software developed for the simulation and analysis of the forward and inverse kinematics for this manipulator. Also, by means of this software, the end-effector velocities as a function of the speed of the manipulator joint motors can be analyzed. The software can also compute the joint torques required to maintain the static equilibrium. The developed software includes a graphical user interface with animation of the simulations.

# CONTENIDO

RESUMEN .....	iv
ABSTRACT .....	v
LISTA DE FIGURAS .....	viii
LISTA DE TABLAS .....	xi
1. INTRODUCCION	
1.1 Antecedentes.....	1
1.2 Definición de Robot Industrial .....	10
1.3 Objetivos.....	11
1.4 Justificación .....	11
1.5 Descripción de Capítulos.....	12
2. ESTRUCTURA DEL ROBOT MANIPULADOR	
2.1 Introducción.....	13
2.2 Estructuras Básicas de Robots Manipuladores .....	13
2.3 Estructura del Robot Manipulador a Analizar .....	20
3. CINEMATICA DEL ROBOT MANIPULADOR	
3.1 Introducción.....	23
3.2 Cinemática Directa de los Robots Manipuladores .....	24
3.3 Modelo Directo del Robot Manipulador a Analizar .....	30
3.4 Cinemática Inversa de los Robots Manipuladores .....	38
3.5 Modelo Inverso del Robot Manipulador a Analizar.....	42
4. VELOCIDADES Y FUERZAS ESTATICAS	
4.1 Introducción.....	51
4.2 Propagación de Velocidades en Robots Manipuladores .....	51
4.3 Fuerzas Estáticas en Robots Manipuladores .....	57
4.4 Análisis de la Propagación de Velocidades del Robot Manipulador Propuesto .....	59
4.5 Análisis de las Fuerzas Estáticas del Robot Manipulador Propuesto .....	76
5. SIMULACION DEL ROBOT MANIPULADOR.	
5.1 Introducción.....	85
5.2 Simulación de la Cinemática del Robot Manipulador .....	86
5.3 Simulación de las Velocidades del Robot Manipulador.....	96
5.4 Simulación de las Fuerzas Estáticas del Robot Manipulador.....	100

6. CONCLUSIONES.	
6.1 Conclusiones.....	103
6.2 Trabajos Futuros.....	104
REFERENCIAS .....	106

## LISTA DE FIGURAS

1.1. Ejemplo de un telemanipulador.....	2
1.2. Robot Unimate 2000.....	3
1.3. Robot Irb6, construido por ASEA.....	4
1.4. Robot PUMA.....	5
1.5. Robot Mars Pathfinder en la superficie de Marte.....	7
1.6. Robot Spirit en la superficie de Marte.....	7
2.1. Robot Cincinnati Milacron $T^3$ .....	14
2.2. Tipos de articulaciones para robots.....	15
2.3. Configuraciones clásicas para robots industriales.....	16
2.4. Robot en configuración cartesiana.....	17
2.5. Robot en configuración cilíndrica.....	17
2.6. Robot en configuración polar o esférica.....	18
2.7. Robot PUMA, configuración angular o antropomórfica.....	19
2.8. Robot tipo SCARA.....	20
2.9. Volumen del espacio de trabajo de robots manipuladores.	
a) rectangular;	
b) cilíndrico,	
c) volumen de trabajo irregular.....	20
2.10. Estructura básica del manipulador propuesto.....	21
2.11. Volumen del espacio de trabajo del manipulador propuesto.....	22
3.1. Relación entre cinemática directa y cinemática inversa.....	24
3.2. Robot planar con dos grados de libertad.....	24
3.3. Sistemas de referencias de coordenadas sujetos al eslabón $i-1$ .....	26
3.4. Asignación de los sistemas de referencia de coordenadas a los eslabones del robot manipulador propuesto.....	31
4.1. Relación de desplazamiento entre sistemas de referencia.....	52
4.2. Velocidad rotacional en sistemas de referencia con orígenes coincidentes.....	53



4.3. Velocidad de rotación.....	54
4.4. Vectores de velocidad de eslabones vecinos .....	56
4.5. Fuerzas y pares estáticos sobre un eslabón.....	58
4.6. Asignación del vector de Fuerzas ${}^7F_7$ en el extremo del robot manipuladora analizar .....	76
5.1. Interfase gráfica para la simulación de la cinemática directa y de la cinemática inversa.....	86
5.2. Control numérico deslizable.....	87
5.3. Control de edición de número. ....	87
5.4. Control botón de comando .....	88
5.5. Control edición de tabla.....	88
5.6. Control edición foto.....	89
5.7. Diagrama de flujo de la función para el calculo de la cinemática directa. ....	90
5.8. Diagrama de flujo de la función para el calculo de la cinemática inversa. ....	91
5.9. Diagrama de flujo de la función de movimiento manual e individual de las articulaciones del manipulador.....	92
5.10. Diagrama de flujo de la función de la Rutina 1.....	93
5.11. Secuencia gráfica de la simulación de la Rutina 2,...continúa.....	94
5.11. Secuencia gráfica de la simulación de la Rutina 2. ....	95
5.12. Interfase gráfica para la simulación y análisis de las velocidades del manipulador...	96
5.13. Comportamiento de las componente X,Y y Z, de la velocidad del extremo final se gira el eje 1 en sentido positivo.....	97
5.14. Panel frontal del simulador para el caso en el que se gira el eje 1 en sentido positivo. ....	98
5.15. Comportamiento de las componente X,Y y Z, de la velocidad del extremo final cuando se gira el eje 1 en sentido negativo .....	99
5.16. Panel frontal del simulador para el caso en el que se gira el eje 1 en sentido negativo .....	99

- 5.17. Par desarrollado por los motores del manipulador para mantener en equilibrio estático un vector de carga  $F = [0 \ 0 \ 0.5]^T$  en la punta de la pinza del manipulador y en posición inicial..... 101
- 5.18. Par desarrollado por los motores del manipulador para mantener en equilibrio estático un vector de carga  $F = [0.5 \ 0.5 \ 0.5]^T$  en la punta de la pinza del manipulador y en posición inicial..... 102

## LISTA DE TABLAS

3.1. Parámetros de Denavit-Hartenberg de cada uno de los eslabones del robot propuesto. ....	32
3.2. Ecuaciones para el desarrollo de la simulación del problema de la cinemática inversa.....	50

# CAPÍTULO 1

## INTRODUCCIÓN

### 1.1 Antecedentes

A lo largo de la historia, el hombre ha sentido fascinación por las máquinas y dispositivos capaces de imitar las funciones y movimientos de los seres vivos. Los griegos llamaban a estas máquinas *automatos*; de esta palabra se deriva la actual autómatas: *máquina que imita la figura y movimientos de un ser animado* [Barrientos et. al, 1998]. Entre los siglos VIII y XV la cultura árabe heredó y difundió los conocimientos de los griegos, utilizándolos no nada más para la diversión, sino que les dieron una aplicación práctica en la vida cotidiana de la realeza.

Los robots hicieron su primera aparición en la mente prolífica de los escritores de ciencia ficción. Desde el siglo XIX se describían las notables ventajas de unas máquinas destinadas al servicio del ser humano en multitud de tareas. Sin embargo, las imaginativas perspectivas del desarrollo de los robots se quedaron en su versión de “ficción”, ya que su componente “ciencia” tuvo que esperar hasta principios de 1950 para ver su aplicación tecnológica en la industria [Barrientos et. al, 1998].

El origen de la palabra robot es la palabra eslava *robota*, que se refiere al trabajo realizado de manera forzada y que fue usado en la obra “*Rossum’s Universal Robot*” por el escritor checo Karel Capek en 1921, obra donde los robots eran máquinas andróides que servían a los humanos en los trabajos físicos, pero que al final se rebelan contra sus dueños, destruyendo toda la vida humana, a excepción de uno de sus creadores, con la frustrada esperanza de que les enseñara a reproducirse [Barrientos et. al, 1998].

Durante y después de la segunda guerra mundial, los servomecanismos y las computadoras dieron un gran impulso a la robótica. La computadora hacía los cálculos del movimiento de los dispositivos que deberían de ser posicionados por los servomecanismos para poder atacar con efectividad aviones enemigos descubiertos por el radar. Esto dio origen a la

tecnología del control numérico, propuesto en 1940 por J. T. Parsons [J. Somló et. al, 1997]. La primer máquina con control numérico se desarrolló en 1948 y en 1952 se hace una demostración en el MIT (Massachussets Institute of Technology) de un molino de tres ejes controlado por tecnología digital.

En 1948 R. C. Goertz, con el objetivo de manipular elementos radiactivos sin riesgo para el operador, desarrolló el primer telemanipulador que consistía de un dispositivo mecánico maestro/esclavo. En la Figura 1.1 podemos ver un ejemplo de uno de los primeros telemanipuladores.



Figura 1.1. Ejemplo de un telemanipulador

El manipulador maestro, situado siempre en una zona segura, era movido por el operador, mientras que el esclavo, situado en contacto con el elemento radiactivo y unido mecánicamente al maestro, reproducía fielmente los movimientos de éste. La sustitución del operador por un programa de computadora que controle los movimientos del manipulador dio paso al concepto de robot.

La primera patente de un dispositivo robótico fue solicitada por el inventor británico C. W. Kenwar, patente que le fue otorgada en 1957. Sin embargo, se considera que fue George C. Devol, ingeniero norteamericano, quien estableció las bases del robot industrial moderno y concibió la idea de un dispositivo de transferencia de artículos programada, idea que fue

patentada en 1961. En 1956 pone esta idea en conocimiento de Joseph F. Engelberger, quien además de ser asiduo lector de Asimov, era director de ingeniería de la división aeroespacial de la empresa Manning Maxwell y Moore en Stanford, Connecticut, con quien forman la Consolidated Controls Corporation, que más tarde se conocería como Unimation (Universal Automation), empresa que en 1960 instala su primer robot en la fábrica General Motors de Nueva Jersey, con una aplicación en la fundición por inyección. La Figura 1.2 nos muestra uno de los primeros robots Unimate instalados.



Figura 1.2. Robot Unimate 2000.

Con el descubrimiento de los semiconductores y el rápido avance de los dispositivos electrónicos, como los transistores y los circuitos de alta escala de integración (LSI –Large Scale Integration-) y muy alta escala de integración (VLSI –Very Large Scale Integration-) a mediados de 1960 y el descubrimiento posterior del microprocesador, se dieron excelentes condiciones para el desarrollo de la robótica, que en estos pocos años de investigación ha pasado a ser una realidad imprescindible en el mundo de la producción industrial, así como en aplicaciones de sectores no industriales como la agricultura, medicina, educación, sectores de servicio, en el mundo submarino, y por supuesto lo que estamos viendo hoy en día: aplicación en la conquista del espacio.

En 1968, Engelberger firma acuerdos con Kawasaki Heavy Industries de Japón para la construcción de robots tipo Unimate. En este mismo año, Pieper estudia el problema

cinemático de un manipulador controlado por una computadora. El crecimiento de la robótica en Japón aventajó en breve a los Estados Unidos gracias a la Nissan, que formó la primera asociación robótica del mundo en 1972, la *Asociación de Robótica Industrial del Japón* (JIRA). Dos años más tarde se formó el *Instituto de Robótica de América* (RIA), que en 1984 cambió su nombre por *Asociación de Industrias Robóticas*, manteniendo las mismas siglas (RIA). Por su parte Europa tuvo un despertar tardío, en 1974 la firma sueca ASEA construyó el primer robot con accionamiento completamente eléctrico, llamado Irb6. En la Figura 1.3 podemos ver este tipo de robot. En 1980 se fundó la *Federación Internacional de Robótica*, con sede en Estocolmo, Suecia [Barrientos et. al, 1998].



Figura 1.3. Robot Irb6, construido por ASEA

Durante la década de los 70, la investigación en robótica se centra en gran parte en el uso de sensores externos para su utilización en tareas de manipulación. Es también en estos años cuando se consolida definitivamente la presencia de robots en las cadenas de montaje y plantas industriales en el ámbito mundial. En 1971, Kahn y Roth analizan el comportamiento dinámico y el control de un brazo manipulador.

En 1975, el ingeniero mecánico estadounidense Victor Scheinman, cuando estudiaba la carrera en la Universidad de Stanford, California, desarrolló un manipulador polivalente realmente flexible conocido como Brazo Manipulador Universal Programable (PUMA, -Programmable Universal Machine for Assembly-), que posteriormente comercializó para tareas de montaje Unimation. La Figura 1.4 nos muestra uno de los primeros robots tipo PUMA. Este robot era capaz de mover un objeto y colocarlo en cualquier posición y

orientación deseada que estuviera a su alcance. El concepto básico multiarticulado del PUMA es la base de la mayoría de los robots actuales.

En 1976, estudios sobre el control dinámico llevados a cabo en los laboratorios Draper, Cambridge, permiten a los robots alinear piezas con movimientos laterales y rotacionales a la vez.



Figura 1.4. Robot PUMA

En la década de los 80 se avanza en las técnicas de reconocimiento de voz, detección de objetos móviles y factores de seguridad. También se desarrollan los primeros robots en el campo de la rehabilitación, la seguridad, con fines militares y para la realización de tareas peligrosas. Así por ejemplo, en 1982, el robot Pedesco se usa para limpiar un derrame de combustible en una central nuclear. También se pone un gran énfasis en los campos de visión artificial, sensorización táctil y lenguajes de programación.

En 1995 funcionaban unos 700,000 robots en el mundo industrializado. Más de 500,000 se empleaban en Japón, unos 120,000 en Europa Occidental y unos 60,000 en Estados Unidos, [J. Somló et. al, 1997]. Muchas aplicaciones de los robots corresponden a tareas peligrosas o desagradables para los humanos. En los laboratorios médicos los robots manejan materiales que conllevan posibles riesgos, como muestras de sangre u orina. En otros casos, los robots se emplean en tareas repetitivas y monótonas en las que el



rendimiento de una persona podría disminuir con el tiempo. Los robots pueden realizar estas operaciones repetitivas de alta precisión durante 24 horas al día sin cansarse.

Uno de los principales usuarios de robots es la industria del automóvil. La empresa General Motors utiliza aproximadamente 16,000 robots para trabajos como soldadura por puntos, pintura, carga de máquinas, transferencia de piezas y montaje. El montaje es una de las aplicaciones industriales de la robótica que más está creciendo. Esta aplicación exige mayor precisión que la soldadura o la pintura y emplea sistemas de sensores de bajo costo y computadoras potentes y baratas. Los robots se usan por ejemplo en el montaje de aparatos electrónicos, para montar microchips en placas de circuito. Las actividades que entrañan gran peligro para las personas, como la localización de barcos hundidos, la búsqueda de depósitos minerales submarinos o la exploración de volcanes activos, son especialmente apropiadas para emplear robots.

Los robots también pueden explorar planetas distantes. La sonda espacial no tripulada Galileo, de la NASA, viajó a Júpiter en 1996 y realizó tareas como la detección del contenido químico de su atmósfera. El 4 de julio de 1997, una sonda americana (la Mars Pathfinder) llegaba al planeta rojo después de meses de viaje, como sucesora de las misiones Viking. Una aureola de expectación rodeaba la misión, que se convirtió inmediatamente en un fenómeno mediático mundial. Los resultados no han decepcionado en absoluto, con un presupuesto discreto, la Pathfinder ha transmitido a la Tierra 17,000 fotografías, 8,000 millones de mediciones meteorológicas y datos sobre los 16 análisis químicos que realizó del suelo marciano y de algunas de sus rocas. La Figura 1.5 nos muestra al robot Mars Pathfinder en la superficie de Marte. Actualmente se encuentran en la superficie de Marte los robots Spirit y su gemelo Opportunity, los dos robots han tomado fotografías detalladas y panorámicas de su entorno.

Los científicos de la misión calculan un tiempo de vida sobre la superficie marciana de 90 días para cada uno de los vehículos robóticos, tomando en cuenta que el polvo cubra los paneles solares que proporcionan la energía a ambos vehículos, la Figura 1.6, nos muestra al robot Spirit.



Figura 1.5. Robot Mars Pathfinder en la superficie de Marte.



Figura 1.6. Robot Spirit en la superficie de Marte.

En estos tiempos ya se emplean robots especializados de altísima precisión para ayudar en operaciones quirúrgicas delicadas. La investigación en telecirugía emplea robots controlados de forma remota por cirujanos expertos. El objetivo de la robótica en cirugía es mejorar la colaboración entre el cirujano y el robot con el fin de hacer operaciones que hasta ahora no eran posibles. Durante una operación quirúrgica existen muchas limitaciones: el espacio para el instrumental, la capacidad de visión del cirujano y el peligro que supone acceder a zonas muy sensibles. Quienes desarrollan robots quirúrgicos están trabajando para superar las fronteras humanas.

La cirugía con incisiones más pequeñas, facilita una rápida recuperación. Pero aplicar este tipo de procedimiento obliga a introducir en el enfermo, en vez de las manos, instrumental mecánico. El robot tiene sensores que le permiten detectar fuerzas y medirlas, lo que ayuda al cirujano. Toda esta información es muy útil al médico, ya que permite que el instrumental del robot funcione como sus manos. El robot, pese a tener menos grados de libertad que la mano, posee mucha más capacidad de movimiento que el material laparoscópico actual y favorece la realización de incisiones más pequeñas.

Otra de las ventajas que ofrecen los robots quirúrgicos es la de evitar el acceso a zonas que el cirujano estima que son sensibles. Ante un movimiento erróneo el robot se queda inmóvil evitando la lesión. También tiene la posibilidad de trabajar a distintas escalas: "Mientras el médico mueve sus instrumentos unos centímetros, el robot lo hace unas micras". También limitan posibles temblores, reconociendo la oscilación de la mano y eliminándola. Una mejor preparación provoca menos sufrimiento al paciente, las incisiones son menores y la intervención dura menos tiempo, lo que disminuye los riesgos.

La experiencia de países industrializados que cuentan con un alto grado de automatización y emplean un número elevado de robots, demuestra que se eleva la productividad en porcentajes adecuados para su producto interno bruto. Los robots permiten producir con mayor rapidez, exactitud y calidad una cantidad creciente de bienes y servicios. El uso de robots no implica el desempleo por desplazamiento de las labores manuales con labores automatizadas. La aplicación de esta tecnología conlleva la necesidad de contar con mano de obra calificada, especializada en mecánica, electrónica, informática, telecomunicaciones y otras disciplinas, que puedan cubrir los puestos que la operación, creación y desarrollo de estos dispositivos implica, de modo que se crean (por el contrario de lo que muchos opinan) un número elevado de oportunidades de trabajo especializado.

Si la utilidad de los robots se demuestra en todas partes, habría que producirlos en gran cantidad, además de preparar personal capacitado y especializado en las áreas afines a la automatización y la robótica.

No obstante, conviene recordar algunas otras ideas al respecto para no precipitar las conclusiones. ¿Cuándo se justifica la implantación de robots?:

N. W. Clapp, (1982) *“únicamente en aquellas tareas donde el hombre actúa como un robot y no el robot como un hombre”*.

M. Minsky, (1985) *“a menudo sobre la base de conseguir una ganancia neta en productividad que redunde en beneficio de toda la sociedad, aunque esto signifique la pérdida de empleo y dignidad para unos pocos”*.

En un principio la robótica presagiaba un rápido progreso, haciendo un uso creciente de realimentación sensorial, para el control de sus acciones, e incorporando los nuevos avances en la teoría del control, en el diseño mecánico, en la electrónica, en la tecnología informática y, sobre todo, en las potentes herramientas que ofrecía la Inteligencia Artificial. Esto no ha sido así, de hecho, la robótica está constituyendo un auténtico reto para todas estas áreas y tecnologías, lo cual, tiene como contrapartida, un mayor esfuerzo investigador y en general una mayor inversión, de recursos humanos y materiales, hacia líneas de investigación que logren hacer avanzar la robótica, como la sociedad demanda.

Para nuestro país es urgente sentar precedentes en el uso de estas tecnologías. Se puede considerar que entre el 2010 y el 2015, México debe cambiar su rol de nación maquiladora por el de nación productora de bienes de capital. La aplicación y desarrollo nacional de la automatización para la producción industrial competitiva deberá fundarse en los resultados de una capacitación eficiente y una educación tecnológica adecuada. Para el logro de estos objetivos, se requiere además, contar con los recursos necesarios y la infraestructura correspondiente [Torres Ortega, 1997].

Se considera que al aumentar en las Instituciones de Educación Superior, la capacidad de matrícula en las carreras inherentes al uso y desarrollo de nuevas tecnologías, brindando apoyo a los Centros de Investigación y Desarrollo Tecnológico, tanto del sector público como privado, se podrá cubrir la demanda futura de profesionales, adecuando la preparación de éstos a la posibilidad de formar grupos interdisciplinarios. Sería necesario

formar una cantidad aproximada de entre dos y cuatro millones de profesionales, capacitados en las áreas de la ingeniería en automatización, robótica, mecánica, electrónica, informática y afines, para lograr un acercamiento al nivel que ostentan los países industrializados.

## **1.2 Definición de Robot Industrial**

El diccionario de la Real Academia Española define al robot como *“Máquina o ingenio electrónico programable, capaz de manipular objetos y realizar operaciones antes reservadas sólo a las personas”*.

La definición más comúnmente aceptada posiblemente sea la de la Asociación de Industrias Robóticas (RIA): *“Un robot industrial es un manipulador multifuncional reprogramable, capaz de mover materias, piezas, herramientas o dispositivos especiales, según trayectorias variables, programadas para realizar tareas diversas”* [Barrientos et. al, 1998].

Esta definición ha sido adoptada por la Organización Internacional de Estándares (ISO), que hace una definición ligeramente modificada: *“Manipulador multifuncional reprogramable con varios grados de libertad, capaz de manipular materias, piezas o dispositivos especiales según trayectorias variables programadas para realizar tareas diversas”* [Barrientos et. al, 1998].

Resumiendo, un robot industrial es un manipulador reprogramable de uso general, con sensores externos que puede efectuar diferentes tareas de montaje y que posee “inteligencia”, que se debe normalmente a los algoritmos asociados con su sistema de control sensorial. Debe de estar formado por elementos rígidos mediante articulaciones de rotación o prismáticas, donde uno de sus extremos está fijo a una base soporte, mientras que el otro extremo está libre y equipado con una herramienta para realizar las tareas encomendadas.

### **1.3 Objetivos**

En este proyecto de tesis se plantean los siguientes objetivos específicos:

- i). Proponer una estructura básica para el diseño de un robot manipulador.
- ii). Análisis de las cinemáticas directa e inversa de un robot manipulador de seis grados de libertad.
- iii). Desarrollo del software para la simulación de las cinemáticas directa e inversa del robot manipulador.
- iv). Desarrollo de una interfase gráfica hombre/máquina para la visualización de la simulación de las cinemáticas directa e inversa del robot manipulador.
- v). Análisis de las velocidades y fuerzas que se pueden manejar en el robot manipulador de seis grados de libertad.
- vi). Desarrollo de una interfase gráfica hombre/máquina para la visualización del comportamiento de las velocidades del extremo final del manipulador en función de las velocidades de los motores en las articulaciones del robot manipulador, así como el par que se debe de aplicar a cada una de sus articulaciones para obtener una determinada fuerza estática en su extremo final.

### **1.4 Justificación**

La robótica ha demostrado que pesar de su amplio desarrollo, es un área de grandes oportunidades que requiere de variados conocimientos además de una muy buena inversión económica. Como interesado en esta área se propone que en este trabajo se desarrolle el análisis y simulación de un robot manipulador de seis grados de libertad con fines didácticos y de investigación, donde se analice una estructura que se planea construir y que utilizará motores eléctricos en las articulaciones. Se espera que este trabajo sea un punto de partida a todos aquellos que estén interesados en iniciarse en la robótica.

## **1.5 Descripción de Capítulos**

En este capítulo se hizo una reseña de los antecedentes históricos y avances asociados con la robótica tanto de manipuladores como de robots móviles. Se han descrito los objetivos a lograrse en esta tesis y en seguida se describe el contenido de los capítulos posteriores que la forman.

En el Capítulo 2 se describen las características básicas de las estructuras de los robots manipuladores industriales, la estructura básica del manipulador que se planea construir, así como sus diferentes tipos de articulaciones, sus grados de libertad, y su espacio de trabajo.

En el Capítulo 3 se describen los problemas de la cinemática directa y de la cinemática inversa de los robots manipuladores industriales de  $n$  grados de libertad y se hace el desarrollo completo de las ecuaciones cinemáticas del robot manipulador que se planea construir.

En el Capítulo 4 se hace un análisis de las velocidades lineales y rotacionales y su propagación a través de los eslabones del manipulador. Se analizan también las fuerzas y pares en cada uno de sus eslabones.

En el Capítulo 5 se describe el software desarrollado para simular la cinemática directa, la cinemática inversa, las velocidades y las relaciones par-fuerza de un robot manipulador de seis grados de libertad.

En el Capítulo 6 se describen las conclusiones a las que se llegaron con el desarrollo de esta tesis así como sugerencias de trabajos futuros.

# CAPÍTULO 2

## ESTRUCTURA DEL ROBOT MANIPULADOR

### 2.1 Introducción

En este capítulo se describen las características básicas de las diferentes estructuras que existen en los robots manipuladores industriales y se presenta la estructura básica del manipulador que se ha diseñado.

Cuando se habla de la estructura del robot, se habla de la forma que debe tener el brazo del robot manipulador, forma que debe ser acorde a su aplicación. Mecánicamente, la estructura típica de un manipulador industrial se compone de un brazo y una muñeca formados por elementos con articulaciones entre ellos. Un extremo se encuentra fijo a una base soporte, mientras que el extremo final se encuentra libre y equipado con una herramienta para manipular los objetos o realizar tareas de montaje. El manipulador se diseña con el objetivo de alcanzar una pieza dentro de su espacio de trabajo. El espacio de trabajo alcanzable se refiere únicamente al espacio dentro del cual puede desplazarse el extremo de su muñeca. Dependiendo de la estructura del manipulador, el espacio de trabajo puede ser de forma regular o irregular.

### 2.2 Estructuras Básicas de Robots Manipuladores

Un manipulador industrial convencional es una cadena cinemática abierta formada por un conjunto de eslabones o elementos interrelacionados mediante articulaciones o uniones, que permiten el movimiento controlado entre dos eslabones sucesivos. Por haber cierta similitud entre el manipulador industrial y la anatomía de un brazo humano, se hace uso de los términos cuerpo, brazo, codo y muñeca para referirse a las distintas partes que lo conforman. Cada uno de los movimientos independientes que realiza cada una de las articulaciones se denomina grados de libertad (GDL). Para posicionar y orientar un cuerpo en cualquier punto del espacio de trabajo, un manipulador debe de tener seis GDL, tres para posicionamiento y tres para orientación, [FU et. al, 1987]. En la Figura 2.1 se ilustra



el robot Cincinnati Milacron  $T^3$  haciendo referencia a estos conceptos. En la práctica, son necesarios los seis GDL para llevar a cabo las tareas encomendadas, aunque muchos robots industriales cuentan únicamente con cuatro o cinco GDL. También existen casos opuestos, en que son necesarios más de seis GDL para que el robot tenga acceso a todos los puntos de su espacio de trabajo.

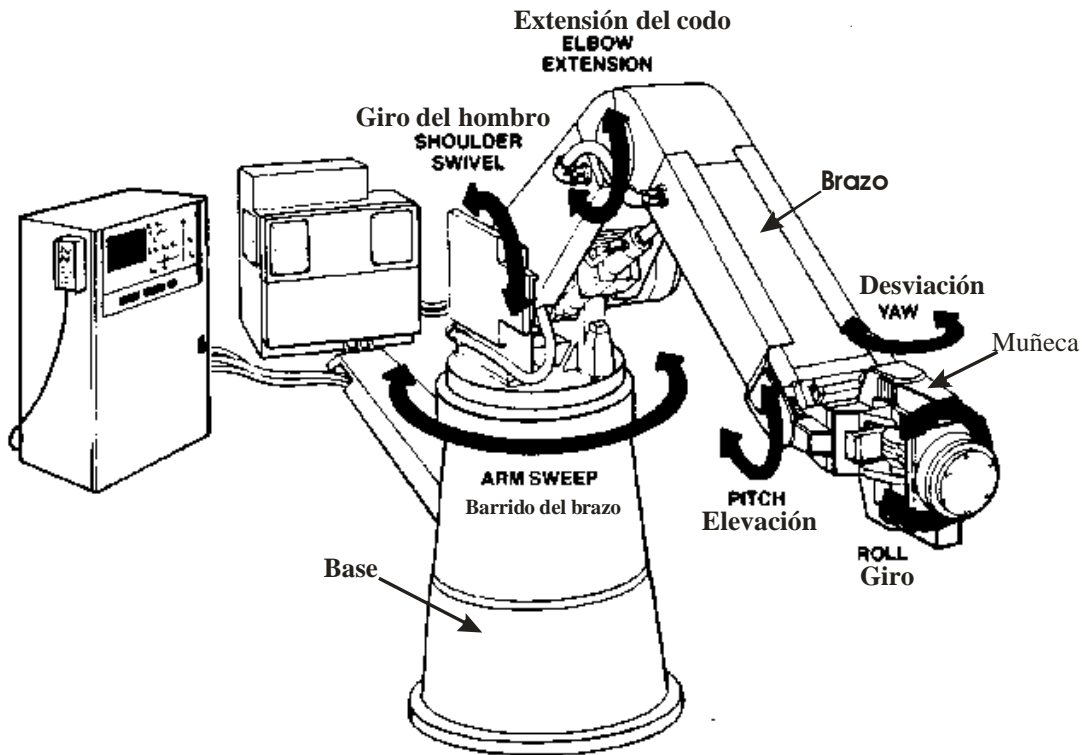


Figura 2.1 Robot Cincinnati Milacron  $T^3$

El movimiento de cada articulación puede ser de rotación, desplazamiento o una combinación de ambos. Bajo esta premisa existen seis tipos diferentes de articulaciones: **De rotación, prismática, cilíndrica, planar, esférica o rotula y de tornillo**. En la Figura 2.2 se ilustran estos tipos de articulaciones, [Ollero, 2001] [Barrientos et. al, 1998].

La articulación de **rotación** proporciona un solo GDL que consiste en un giro alrededor de su eje y es por mucho la más usada. La articulación **prismática** también nos proporciona un solo GDL que consiste en un desplazamiento a lo largo de su eje. La articulación

**cilíndrica** proporciona dos GDL, uno de rotación y otro de translación, que sería la combinación de las dos anteriores. La articulación **planar** proporciona tres GDL y se caracteriza por el desplazamiento en un plano. La articulación **esférica** nos proporciona tres GDL. Y la articulación de **tornillo** proporciona un solo grado de libertad, que consiste en desplazamiento a lo largo del tornillo.

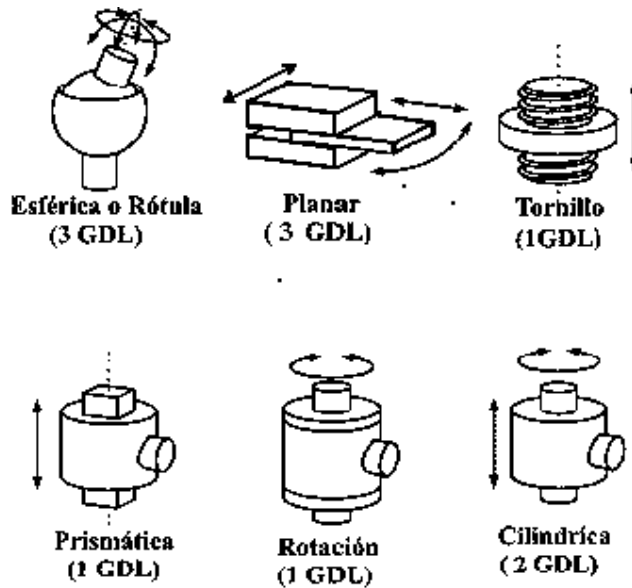


Figura 2.2 Tipos de articulaciones para robots

Las diferentes combinaciones de articulaciones en los robots, da lugar a que se puedan realizar diferentes configuraciones para el brazo del manipulador, características que se deben de tener en cuenta para su diseño. Actualmente se presentan las siguientes configuraciones clásicas: **Cartesiana, cilíndrica, polar o esférica, angular o rotacional o antropomórfica**. Además de las configuraciones clásicas existen otras configuraciones llamadas no clásicas y el ejemplo más común lo representa el robot tipo **SCARA**. En la Figura 2.3 se muestran estos tipos de configuraciones, [Ollero, 2001] [Barrientos et. al, 1998].

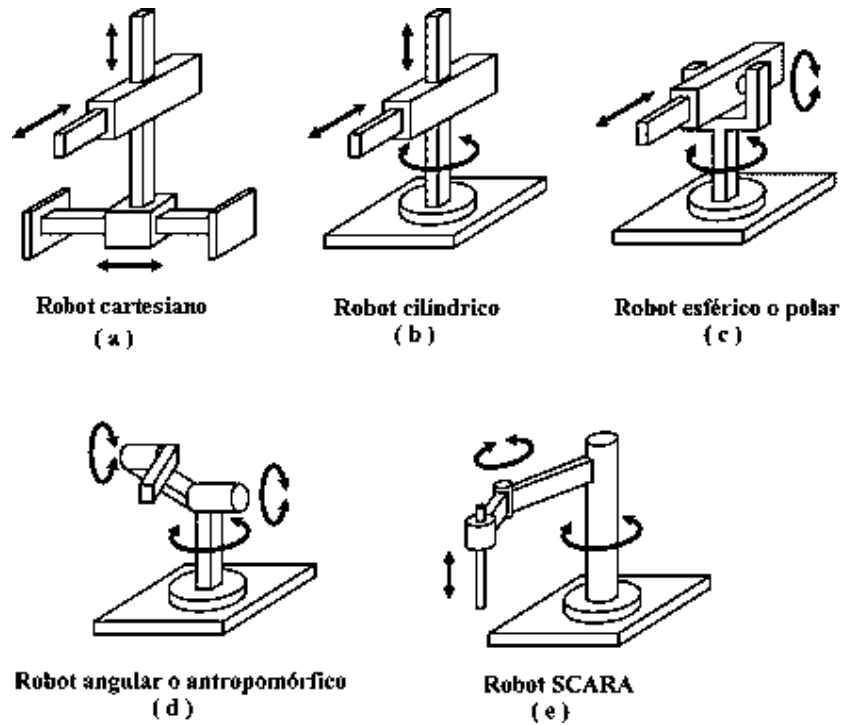


Figura 2.3 Configuraciones clásicas para robots industriales.

La configuración **cartesiana** cuenta con tres articulaciones prismáticas, posee tres movimientos lineales, es decir tiene tres grados de libertad correspondientes a los movimientos localizados en los ejes X, Y y Z, ver Figura 2.3.a. La interpretación de la posición de un punto se efectúa mediante coordenadas cartesianas. Los movimientos que realiza este robot entre un punto y otro son en base a interpolaciones lineales. Si el desplazamiento correspondiente a sus movimientos X, Y y Z fueran iguales ( $X=Y=Z=L$ ) observaríamos que el volumen de su espacio de trabajo sería  $L^3$ , ver Figura 2.9.a. Este tipo de configuración no es muy adecuada para espacios relativamente cerrados. En la Figura 2.4 se presenta un robot con configuración cartesiana. En este caso, interpolación significa el tipo de trayectoria que realiza el manipulador cuando se desplaza entre un punto y otro. A la trayectoria realizada en línea recta se le conoce como interpolación lineal y a la trayectoria hecha de acuerdo con el tipo de movimientos que tienen sus articulaciones se le llama interpolación por articulación.



Figura 2.4 Robot en configuración cartesiana.

La configuración **cilíndrica** tiene dos articulaciones prismáticas y una de rotación, con las que puede realizar dos movimientos lineales y uno rotacional, o sea tiene tres grados de libertad correspondientes a los movimientos realizados en los ejes X, Y y Z, ver Figura 2.3.b. La interpretación de la posición de un punto se efectúa mediante coordenadas cilíndricas. Este tipo de robot está diseñado para ejecutar los movimientos de interpolación lineal y de articulación. La interpolación por articulación se lleva a cabo por la articulación de rotación, mientras que la interpolación lineal es por las articulaciones prismáticas. En la Figura 2.5 se ilustra un robot con configuración cilíndrica. El volumen del espacio de trabajo de esta estructura, suponiendo un radio de giro de 360 grados en la articulación de rotación y un rango de desplazamiento L en ambas articulaciones prismáticas, es de la forma como se ilustra en la Figura 2.9.b.



Figura 2.5 Robot en configuración cilíndrica.

La configuración **polar o esférica** se caracteriza por tener dos articulaciones de rotación y una prismática, con las que puede realizar dos movimientos rotacionales y uno lineal, con lo que determinamos que tiene tres grados de libertad. En este caso, las variables articulares expresan la posición del extremo del último enlace en coordenadas polares, ver Figura 2.3.c. Este robot utiliza la interpolación por articulación para moverse en sus articulaciones de rotación y la interpolación lineal para su movimiento de extensión y retracción. La Figura 2.6 nos representa un robot de tipo polar. El volumen del espacio de trabajo de esta estructura suponiendo un radio de giro de 360 grados y un rango de desplazamiento  $L$ , tendríamos una esfera de radio  $2L$  y otra concéntrica de radio  $L$ , aproximada al de la Figura 2.9.c.

La configuración **angular o rotacional o antropomórfica** es una configuración con tres articulaciones rotacionales, con lo que sus movimientos rotacionales nos proporcionan tres grados de libertad. La posición del extremo final se especifica en coordenadas angulares o rotacionales, ver Figura 2.3.d. Aunque el brazo pueda realizar el movimiento llamado interpolación lineal, moviendo dos o tres de sus articulaciones, el movimiento natural es el de interpolación por articulación. La Figura 2.7 nos representa un robot PUMA que está diseñado con esta estructura.

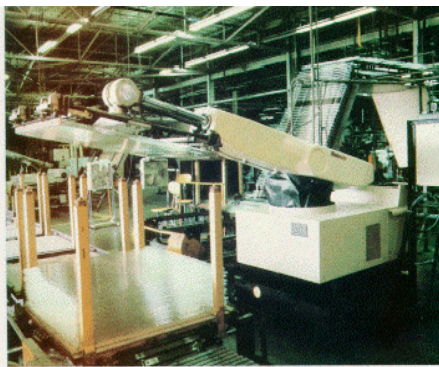


Figura 2.6 Robot en configuración polar o esférica.

Este tipo de estructuras es muy empleada en robots manipuladores industriales, sobre todo en tareas complejas. De hecho, la configuración angular es la más usada en sistemas

educativos, de investigación y desarrollo. Si los tres enlaces son de longitud  $L$ , y con giros de 360 grados, el volumen del espacio de trabajo de esta estructura sería el de una esfera de radio  $2L$ .

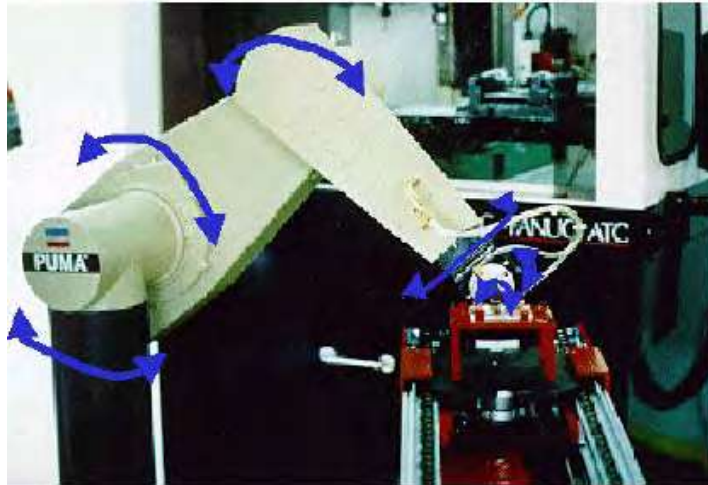


Figura 2.7 Robot PUMA, configuración angular o antropomórfica

El robot tipo **SCARA**, cuyas siglas significan: “*Selective Compliant Articulated Robot for Assembly*”, está especialmente diseñado para realizar tareas de montaje en un plano, este tipo de robots puede realizar movimientos horizontales de mayor alcance. Está constituido por dos articulaciones de rotación con respecto a dos ejes paralelos, y una articulación de desplazamiento perpendicular al plano. En la Figura 2.4.e se ilustra este tipo de estructura. El volumen del espacio de trabajo del robot SCARA, suponiendo segmentos de longitud  $L$ , y un radio de giro de 360 grados y un rango de desplazamiento  $L$  es semejante al volumen de espacio de trabajo del robot cilíndrico. En la Figura 2.8 se ilustra una aplicación del robot tipo SCARA.

En la Figura 2.9 se ilustran algunas de las formas regulares e irregulares del volumen del espacio de trabajo para diferentes estructuras de robots manipuladores.

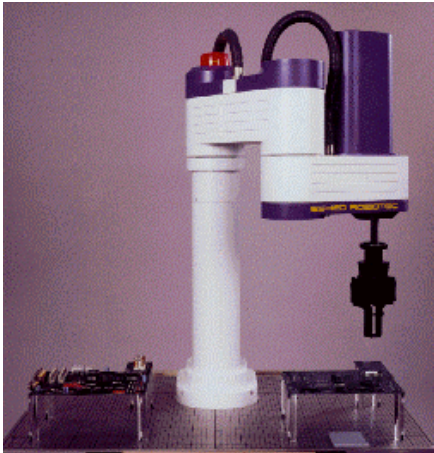


Figura 2.8 Robot tipo SCARA

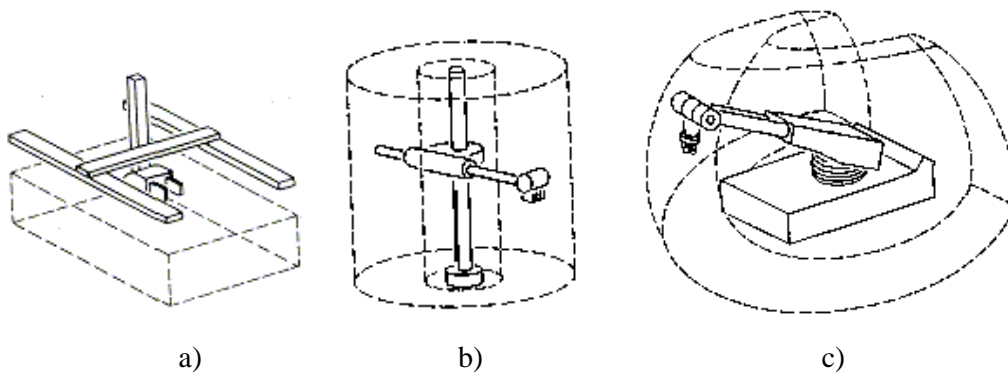


Figura 2.9 Volumen del espacio de trabajo de robots manipuladores, a) rectangular. b) cilíndrico, c) volumen de trabajo irregular.

### 2.3 Estructura Básica del Manipulador a Analizar

La estructura que se propuso para el robot manipulador que se construirá se ilustra en la Figura 2.10. Se escogió esta estructura tomando en cuenta la opinión de un experto en la construcción de estructuras mecánicas, así como la opinión de un experto en robótica tratando de que fuera una estructura **angular** que no haya sido analizada con anterioridad. El manipulador está diseñado con seis grados de libertad, 3 GDL en el brazo que proporcionan la posición en que se quiere ubicar la muñeca y 3 GDL en la muñeca que proporcionan su orientación. Con estos seis grados de libertad, el robot será capaz de

ubicarse en cualquier posición con cualquier orientación, dentro de su espacio de trabajo. El brazo humano tiene una envolvente de trabajo casi esférica, pudiendo alcanzar cualquier punto dentro del alcance de la longitud del brazo. Los brazos con coordenadas angulares o rotacionales se modelan a partir del brazo humano, de modo que pueda simular muchas de sus capacidades. Sin embargo, el diseño típico es algo diferente, debido a la complejidad de la articulación del hombro humano. El volumen del espacio de trabajo de esta estructura se ilustra en la Figura 2.11.

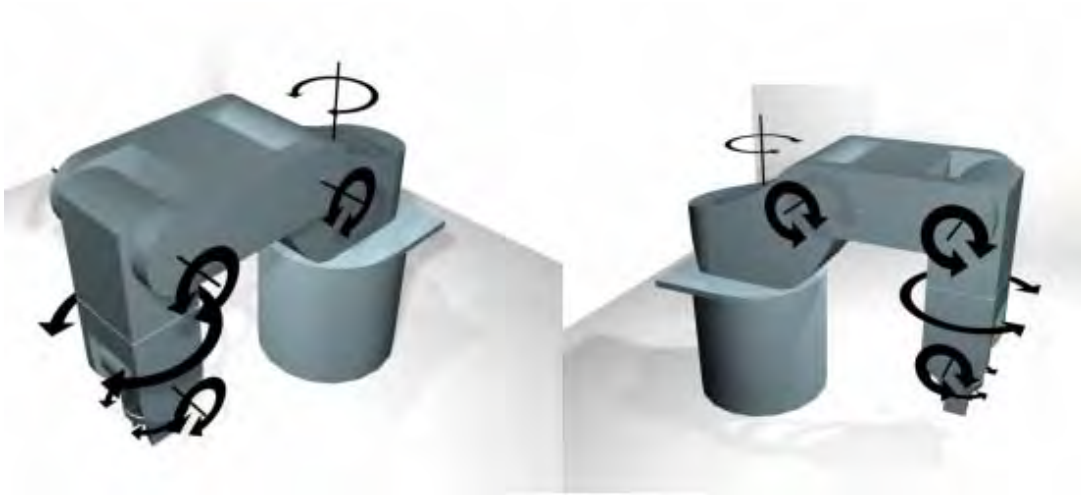


Figura 2.10 Estructura básica del manipulador propuesto

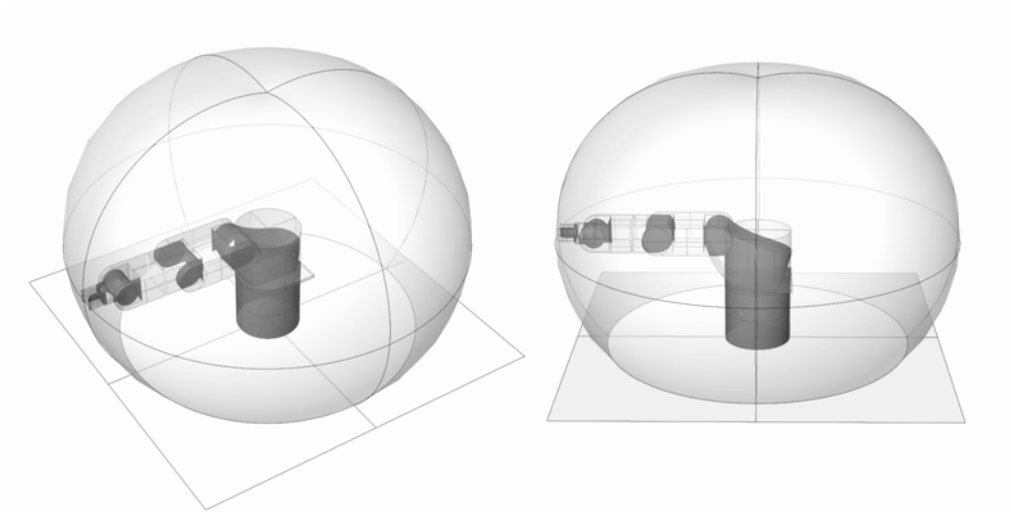


Figura 2.11 Volumen del espacio de trabajo del robot manipulador propuesto



Como se mencionó anteriormente, en los capítulos que siguen de esta tesis, se presenta el análisis y simulación del robot manipulador propuesto; es decir, se muestra el desarrollo de las ecuaciones de la cinemática directa y de la cinemática inversa, se presenta el análisis de las velocidades y fuerzas que se pueden manejar y se presenta un simulador de la cinemática de este robot manipulador.

# CAPÍTULO 3

## CINEMÁTICA DEL ROBOT MANIPULADOR

### 3.1 Introducción

En el análisis de los robots, es de gran interés la descripción analítica de su movimiento espacial como una función del tiempo, así como las relaciones entre la posición y orientación de su extremo final con los valores que toman sus coordenadas articulares. Considerando a un robot como una cadena cinemática formada por  $n$  objetos fijos o eslabones unidos entre sí, mediante articulaciones y estableciendo un sistema de coordenadas de referencia fijo situado en su base y en cada uno de sus eslabones, se puede describir la localización de cada uno de sus eslabones con respecto a la base.

Se entiende por cinemática el estudio del movimiento sin tomar en cuenta las fuerzas que lo producen [Craig. 1986]. En este capítulo se describe la cinemática del robot, la cual estudia sus movimientos con respecto a un sistema de referencia.

Existen dos problemas fundamentales a resolver en la cinemática del robot. El primero se conoce como el *problema de la cinemática directa* y consiste en determinar cuál es la posición y orientación del extremo final del robot con respecto a un sistema de coordenadas que se toma como referencia, conociendo los ángulos de sus articulaciones y sus parámetros geométricos. El segundo, denominado *problema de la cinemática inversa*, que determina los ángulos que debe adoptar cada una de las articulaciones del robot para una posición y orientación deseada del extremo final del robot [Craig. 1986]. La relación entre la cinemática directa y la cinemática inversa se ilustra en la Figura 3.1.

En este capítulo se consideraran la orientación y la posición desde un punto de vista estático, las relaciones entre el movimiento y las fuerzas que las producen se toman en cuenta en el análisis de la Dinámica del manipulador.



Figura 3.1 Relación entre la cinemática directa y la cinemática inversa.

### 3.2 Cinemática Directa de los Robots Manipuladores

Se ha establecido con anterioridad que el problema de la cinemática directa se reduce a encontrar la posición y orientación del extremo final del robot, con respecto a un sistema de referencia de coordenadas fijo, conocidos los ángulos y parámetros geométricos de los elementos del robot.

La obtención de estas relaciones no es en general complicada, incluso en robots de pocos grados de libertad es fácil de encontrarlas mediante simples consideraciones geométricas. Por ejemplo, en el caso del robot de la Figura 3.2 es muy fácil comprobar que:

$$\begin{aligned} x &= l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ y &= l_1 \text{sen} \theta_1 + l_2 \text{sen}(\theta_1 + \theta_2) \end{aligned} \quad (3.1)$$

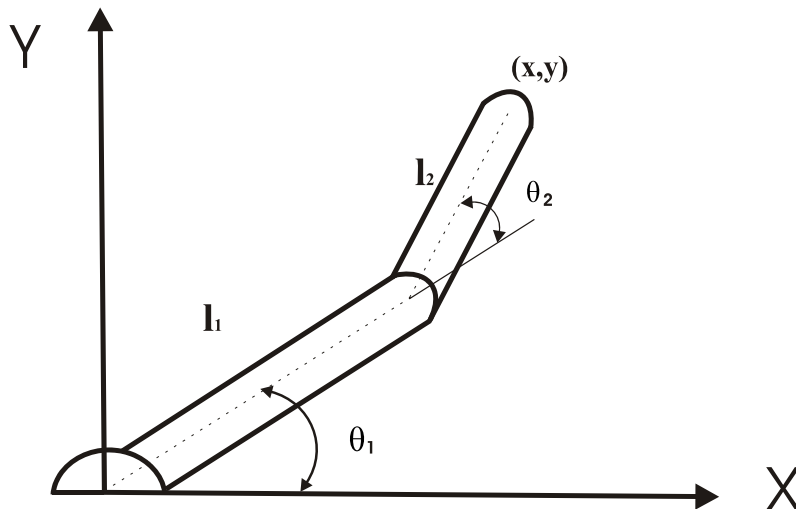


Figura 3.2 Robot planar con dos grados de libertad.

Para robots con más grados de libertad este método puede complicarse; sin embargo, se puede plantear un método sistemático basado en la utilización de matrices de transformación homogénea.

Denavit y Hartenberg propusieron en 1955 un método sistemático para describir la geometría espacial de los elementos de un robot, con respecto a un sistema de referencia fija, [Craig. 1986] [FU et. al, 1987]. El método hace uso de una matriz de transformación homogénea para describir la relación espacial entre los eslabones adyacentes del robot, por lo que el problema de la cinemática directa se reduce a encontrar una matriz de transformación homogénea de  $(4 \times 4)$ , que relaciona la localización del robot con respecto al sistema de coordenadas de su base.

Para describir la localización de cada eslabón en relación a sus vecinos este método permite establecer de forma sistemática un sistema de coordenadas ligado a cada uno de los eslabones del robot. Los sistemas de referencia de coordenadas de los eslabones se nombran de acuerdo al número del eslabón al que son asignados. Esto es, el sistema de coordenadas  $\{i\}$  se asigna al eslabón  $i$ , [Craig. 1986].

En cada uno de los sistemas de referencia de coordenadas asignado, encontraremos cuatro parámetros, llamados parámetros de Denavit-Hartenberg. En la Figura 3.3 se ilustran estos conceptos. Estos cuatro parámetros dependen únicamente de la geometría de los eslabones y de las articulaciones que los unen y son los siguientes:

$a_i$  = Es la distancia de  $\hat{Z}_i$  a  $\hat{Z}_{i+1}$  medida a lo largo de  $\hat{X}_i$ .

$\alpha_i$  = Es el ángulo de separación entre  $\hat{Z}_i$  y  $\hat{Z}_{i+1}$  medido alrededor de  $\hat{X}_i$ .

$d_i$  = Es la distancia de  $\hat{X}_{i-1}$  a  $\hat{X}_i$  medida a lo largo de  $\hat{Z}_i$ .

$\theta_i$  = Es el ángulo de separación entre  $\hat{X}_{i-1}$  y  $\hat{X}_i$  medido alrededor de  $\hat{Z}_i$ .

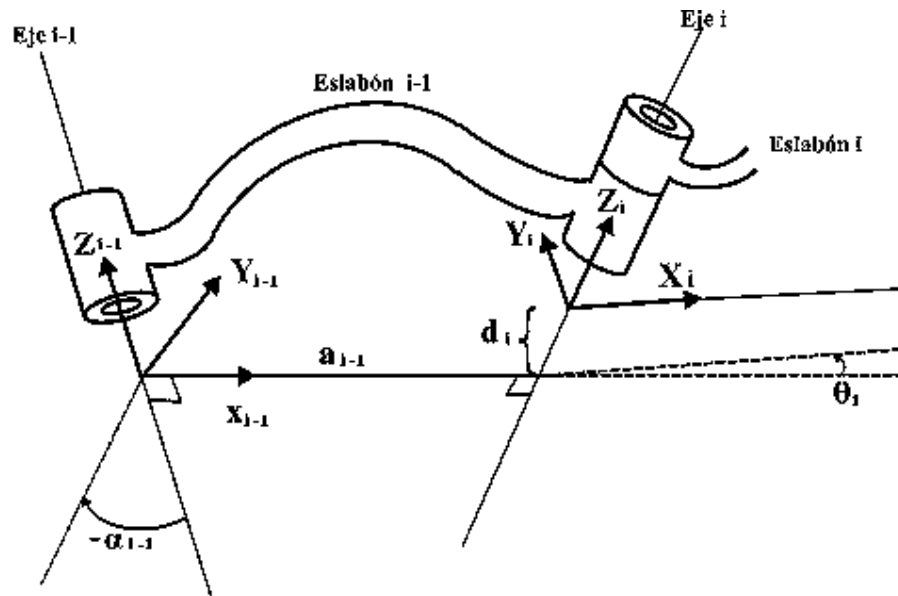


Figura 3.3 Sistemas de referencias de coordenadas sujetos al eslabón  $i-1$

De estos cuatro parámetros, dos describen al propio eslabón y dos describen la conexión entre eslabones vecinos. Para el caso de articulaciones de rotación,  $\theta_i$  es la variable de la unión y los otros tres parámetros son fijos. En el caso de articulaciones prismáticas, la variable de la unión está determinada por  $d_i$  mientras que los otros tres parámetros son fijos. Generalmente se escoge a  $a_i > 0$ , dado que corresponde a una distancia, sin embargo  $\alpha_i$ ,  $d_i$ ,  $\theta_i$  son cantidades que tienen una dirección y por tanto se les asigna un signo.

La convención que se debe de usar para localizar los sistemas de referencia de coordenadas sobre los eslabones es la siguiente: Asignar un sistema de referencia de coordenadas a la base del robot o eslabón cero, llamado sistema de referencia de coordenadas  $\{0\}$ . Este sistema es fijo y para el problema de la cinemática del brazo se considera el sistema de referencia inercial o absoluta. Se describe la posición de todos los demás eslabones en términos de este sistema.

Se considera al sistema  $\{0\}$  arbitrario, simplificando la forma de escoger a  $\hat{Z}_0$ , quedando sobre el eje 1, además de localizar al sistema de referencia  $\{0\}$  coincidente con el sistema de referencia  $\{1\}$ . Usando esta convención siempre tendremos  $a_0 = 0.0$ ,  $\alpha_0 = 0.0$ . Además esto asegura que  $d_1 = 0.0$  si la unión 1 es de rotación, o  $\theta_1 = 0.0$  si la unión 1 es prismática.

Cuando la unión  $n$ , es de rotación, la dirección de  $\hat{X}_N$  se escoge de tal forma que quede alineada con  $\hat{X}_{N-1}$  cuando  $\theta_n = 0.0$  y el origen del sistema de referencia  $\{N\}$  se escoge de tal forma que  $d_n = 0.0$ . Cuando la unión  $n$  es prismática, la dirección de  $\hat{X}_N$  se escoge de tal forma que  $\theta_n = 0.0$ , el origen del sistema de referencia  $\{N\}$  se escoge en la intersección de  $\hat{X}_{N-1}$  y la unión del eje  $n$  cuando  $d_n = 0.0$

Para los eslabones intermedios, la convención propone que el eje  $\hat{Z}$  del sistema de referencia de coordenadas  $\{i\}$ , llamado  $\hat{Z}_i$ , sea coincidente con la unión del eje  $i$ . El origen del sistema de referencia de coordenadas  $\{i\}$  está localizado donde la perpendicular  $a_i$  corta la unión del eje  $i$ . El eje  $\hat{X}_i$  apuntando en dirección a la unión  $i+1$  sobre  $a_i$ . Si  $a_i = 0$ ,  $\hat{X}_i$  se escoge normal al plano formado por  $\hat{Z}_i$  y  $\hat{Z}_{i-1}$ . El ángulo  $\alpha_i$  se mide en el sentido de la regla de la mano derecha con respecto a  $\hat{X}_i$ . Para completar el sistema de referencia de coordenadas,  $\hat{Y}_i$  se pone de acuerdo a la regla de la mano derecha, [Craig. 1986].

Los parámetros de Denavit-Hartenberg servirán para determinar la matriz de transformación homogénea de eslabonamiento, que relaciona la localización y la orientación del eslabón. Matriz que se determina con cuatro transformaciones básicas, consistentes en una sucesión de rotaciones y translaciones que permiten relacionar el sistema de referencia del elemento (i) con el sistema de referencia del elemento (i-1).

Normalmente la matriz de transformación homogénea de (4 X 4) que representa la posición y orientación relativa entre las coordenadas de los sistemas asociados a los eslabones consecutivos del robot se representa por:

$${}^{i-1}T_i = \left[ \begin{array}{c|c} R_{3x3} & P_{3x1} \\ \hline f_{1x3} & w_{1x1} \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c|c} \text{Rotación} & \text{Traslación} \\ \hline \text{Perspectiva} & \text{Escalado} \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c|c} {}^{i-1}R & {}^{i-1}P_{ORIG\ i} \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right] \quad (3.2)$$

Donde  $R_{3x3} = {}^{i-1}R$  es una matriz de rotación de (3 X 3) que determina la orientación del sistema de coordenadas (i) con respecto al sistema de coordenadas (i-1).  $P_{3x1} = {}^{i-1}P_{ORIG\ i}$  es un vector de traslación de (3 X 1) que representa la posición del origen del sistema (i) con respecto al sistema (i-1),  $f_{1x3}$  una submatriz que representa una transformación de perspectiva y  $w_{1x1}$  una submatriz que representa un escalado global. En robótica sólo interesará conocer las componentes de rotación y traslación, considerándose las componentes de  $f_{1x3}$  nulas y la de  $w_{1x1}$  la unidad [Barrientos et. al, 1998]. Considerando cada una de las transformaciones de estos parámetros y dado que el producto de matrices no es conmutativo, las transformaciones para representar {i} con respecto a {i-1} se han de realizar en el orden indicado por la siguiente ecuación, [Craig. 1986]:

$${}^{i-1}T_i = Rot(\hat{X}_{i-1}, \alpha_{i-1}) Trans(\hat{X}_{i-1}, a_{i-1}) Rot(\hat{Z}_i, \theta_i) Trans(\hat{Z}_i, d_i) \quad (3.3)$$

Cuando se escoge el eje de rotación sobre uno de los principales ejes del sistema, por ejemplo {A}, la matriz equivalente de rotación toma una de las siguientes formas, [Craig. 1986]:

$$Rot({}^A \hat{X}, \theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

$$Rot(\hat{Y}, \theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

$$Rot(\hat{Z}, \theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

Planteando las transformaciones indicadas en (3.3) y sustituyendo en esta misma ecuación:

$${}^{i-1}T_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha_{i-1} & -\sin \alpha_{i-1} & 0 \\ 0 & \sin \alpha_{i-1} & \cos \alpha_{i-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_{i-1} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i & 0 & 0 \\ \sin \theta_i & \cos \theta_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^{i-1}T_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha_{i-1} & -\sin \alpha_{i-1} & 0 \\ 0 & \sin \alpha_{i-1} & \cos \alpha_{i-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_{i-1} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i & 0 & 0 \\ \sin \theta_i & \cos \theta_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^{i-1}T_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha_{i-1} & -\sin \alpha_{i-1} & 0 \\ 0 & \sin \alpha_{i-1} & \cos \alpha_{i-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i & 0 & a_{i-1} \\ \sin \theta_i & \cos \theta_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^{i-1}T_i = \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i & 0 & a_{i-1} \\ \cos \alpha_{i-1} \sin \theta_i & \cos \alpha_{i-1} \cos \theta_i & -\sin \alpha_{i-1} & -\sin \alpha_{i-1} d_i \\ \sin \alpha_{i-1} \sin \theta_i & \sin \alpha_{i-1} \cos \theta_i & \cos \alpha_{i-1} & \cos \alpha_{i-1} d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.7)$$



En la Ecuación (3.7) se sustituyen los parámetros de Denavit y Hartenberg para obtener la matriz de transformación homogénea  ${}^{i-1}_i T$  que representa al sistema  $\{i\}$  con respecto al sistema  $\{i-1\}$ . Así  ${}^0_1 T$  describe la posición y orientación del sistema de referencia fijo al primer eslabón con respecto al sistema de referencia fijo a la base. De la misma forma  ${}^1_2 T$  describe la posición y orientación del sistema de referencia fijo al segundo eslabón con respecto al sistema de referencia fijo al primer eslabón. De tal forma que la posición y orientación del sistema de referencia fijo al tercer eslabón con respecto al sistema de coordenadas de la base se expresará como  ${}^0_3 T$ .

Cuando se consideran todos los grados de libertad del robot se tiene que la matriz que expresa la posición y orientación del último eslabón con respecto a la base se obtiene por la multiplicación de las matrices homogéneas de cada una de las relaciones entre eslabones vecinos como muestra la siguiente ecuación:

$${}^0_n T = {}^0_1 T {}^1_2 T {}^2_3 T \dots \dots {}^{n-1}_n T \quad (3.8)$$

Con esta ecuación obtenemos la solución al **problema de la cinemática directa** de cualquier robot manipulador.

### 3.3 Modelo Directo del Robot Manipulador a Analizar

En esta sección se obtiene el conjunto de ecuaciones que permiten conocer la posición y orientación del extremo final del manipulador diseñado, conociendo los desplazamientos angulares de las uniones entre los eslabones, medidas en el espacio cartesiano. La metodología usada es la representación de Denavit-Hartenberg.

Para obtener la ecuación que determine la cinemática directa del manipulador diseñado a partir de la aplicación del método de Denavit-Hartenberg, es necesario, i).- hacer la asignación de los sistemas de referencia, ii).- determinar los parámetros de Denavit-Hartenberg, iii).- determinar las matrices homogéneas que relacionan cada uno de los eslabones con sus vecinos y finalmente, iv).- multiplicar estas matrices, como se indica en

la Ecuación (3.8). En la Figura 3.4 se muestra la asignación de los sistemas de referencia de coordenadas en la posición inicial; es decir con todos los ángulos de las articulaciones iguales a cero.

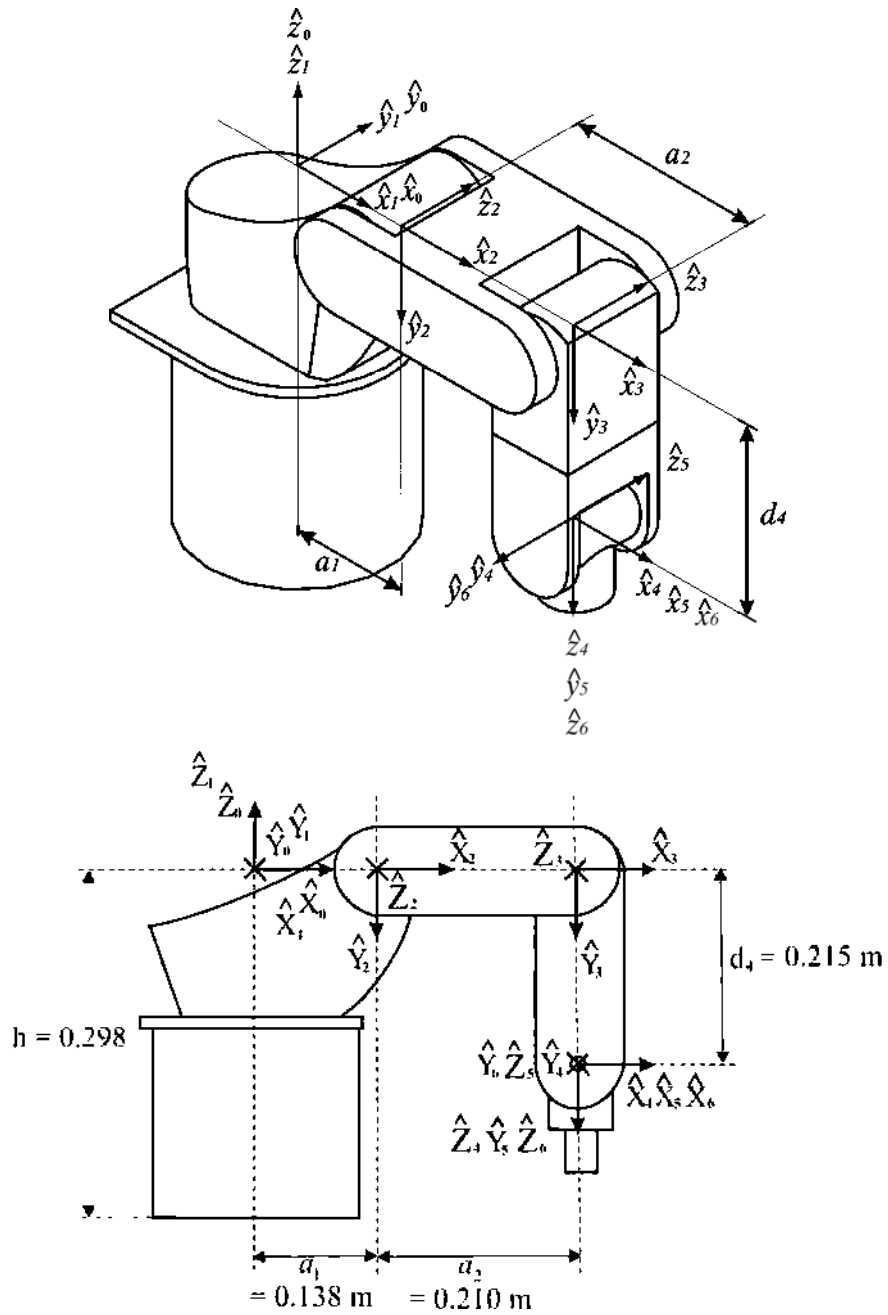


Figura 3.4 Asignación de los sistemas de referencia de coordenadas a los eslabones del robot manipulador propuesto.

Note que el sistema de referencia de coordenadas  $\{0\}$ , es coincidente con el sistema de referencia  $\{1\}$  cuando  $\theta_1 = 0$ . Note también que, para este robot, como con muchos robots industriales, los ejes de las uniones 4, 5 y 6 se cruzan en un punto común, y este punto de cruce coincide con el origen de los sistemas de referencia  $\{4\}$ ,  $\{5\}$ , y  $\{6\}$ . Los parámetros de los eslabones correspondientes a esta colocación de sistemas de referencia son mostrados en la Tabla 3.1.

Tabla 3.1 Parámetros de Denavit-Hartenberg de cada uno de los eslabones del robot propuesto

$i$	$\alpha_{i-1}$ (grados)	$a_{i-1}$ (metros)	$d_i$ (metros)	$\theta_i$ (grados)
1	0	0	0	$\theta_1$
2	-90	$a_1 = 0.138$	0	$\theta_2$
3	0	$a_2 = 0.210$	0	$\theta_3$
4	-90	0	$d_4 = 0.215$	$\theta_4$
5	90	0	0	$\theta_5$
6	-90	0	0	$\theta_6$

Sustituyendo en la ecuación (3.7) los parámetros de cada uno de los sistemas de referencia de coordenadas mostrados en la Tabla 3.1 obtenemos las matrices homogéneas que relacionan dos eslabones vecinos:  ${}^0_1T$ ,  ${}^1_2T$ ,  ${}^2_3T$ ,  ${}^3_4T$ ,  ${}^4_5T$ ,  ${}^5_6T$ .

Para  $i = 1$  tenemos:

$$a_0 = 0; \quad d_1 = 0; \quad \alpha_0 = 0; \quad \theta_1 = \text{variable};$$

$$\cos \theta_1 = c_1; \quad \sin \theta_1 = s_1; \quad \cos \alpha_0 = 1; \quad \sin \alpha_0 = 0;$$

Por lo tanto:

$${}^0_1T = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

Para  $i = 2$  tenemos:

$$a_1 = a_1; \quad d_2 = 0; \quad \alpha_1 = -90; \quad \theta_2 = \text{variable};$$

$$\cos \theta_2 = c_2; \quad \sin \theta_2 = s_2; \quad \cos \alpha_1 = 0; \quad \sin \alpha_1 = -1;$$

Por lo tanto:

$${}^1_2T = \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -s_2 & -c_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

Para  $i = 3$  tenemos:

$$a_2 = a_2; \quad d_3 = 0; \quad \alpha_2 = 0; \quad \theta_3 = \text{variable};$$

$$\cos \theta_3 = c_3; \quad \sin \theta_3 = s_3; \quad \cos \alpha_2 = 1; \quad \sin \alpha_2 = 0;$$

Por lo tanto:

$${}^2_3T = \begin{bmatrix} c_3 & -s_3 & 0 & a_2 \\ s_3 & c_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

Para  $i = 4$  tenemos:

$$a_3 = 0; \quad d_4 = d_4; \quad \alpha_3 = -90; \quad \theta_4 = \text{variable};$$

$$\cos \theta_4 = c_4; \quad \sin \theta_4 = s_4; \quad \cos \alpha_3 = 0; \quad \sin \alpha_3 = -1;$$

Por lo tanto:

$${}^3_4T = \begin{bmatrix} c_4 & -s_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_4 \\ -s_4 & -c_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

Para  $i = 5$  tenemos:

$$a_4 = 0; \quad d_5 = 0; \quad \alpha_4 = 90; \quad \theta_5 = \text{variable};$$

$$\cos \theta_5 = c_5; \quad \sin \theta_5 = s_5; \quad \cos \alpha_4 = 0; \quad \sin \alpha_4 = 1;$$

Por lo tanto:

$${}^4_5T = \begin{bmatrix} c_5 & -s_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ s_5 & c_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

Para  $i = 6$  tenemos:

$$a_5 = 0; \quad d_6 = 0; \quad \alpha_5 = -90; \quad \theta_6 = \text{variable};$$

$$\cos \theta_6 = c_6; \quad \sin \theta_6 = s_6; \quad \cos \alpha_5 = 0; \quad \sin \alpha_5 = -1;$$

Por lo tanto:

$${}^5_6T = \begin{bmatrix} c_6 & -s_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -s_6 & -c_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

Sustituyendo las ecuaciones (3.9) a la (3.14) en la ecuación (3.15) la cual corresponde a la ecuación (3.8) para el caso de  $n = 6$ .

$${}^0_6T = {}^0_1T {}^1_2T {}^2_3T {}^3_4T {}^4_5T {}^5_6T \quad (3.15)$$

En este proceso se determinarán algunos resultados parciales que serán necesarios posteriormente en el cálculo de la cinemática inversa. De esta forma se tendrá:

$${}^4_6T = {}^4_5T {}^5_6T = \begin{bmatrix} c_5 & -s_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ s_5 & c_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_6 & -s_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -s_6 & -c_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^4_6T = \begin{bmatrix} c_5 c_6 & -c_5 s_6 & -s_5 & 0 \\ s_6 & c_6 & 0 & 0 \\ s_5 c_6 & -s_5 s_6 & c_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

Premultiplicando (3.16) por (3.12):

$${}^3_6T = {}^3_4T {}^4_6T = \begin{bmatrix} c_4 & -s_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_4 \\ -s_4 & -c_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_5 c_6 & -c_5 s_6 & -s_5 & 0 \\ s_6 & c_6 & 0 & 0 \\ s_5 c_6 & -s_5 s_6 & c_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^3_6T = \begin{bmatrix} c_4 c_5 c_6 - s_4 s_6 & -c_4 c_5 s_6 - s_4 c_6 & -c_4 s_5 & 0 \\ s_5 c_6 & -s_5 s_6 & c_5 & d_4 \\ -s_4 c_5 c_6 - c_4 s_6 & s_4 c_5 s_6 - c_4 c_6 & s_4 s_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

Premultiplicando (3.17) por (3.11):

$${}^2_6T = {}^2_3T {}^3_6T = \begin{bmatrix} c_3 & -s_3 & 0 & a_2 \\ s_3 & c_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_4 c_5 c_6 - s_4 s_6 & -c_4 c_5 s_6 - s_4 c_6 & -c_4 s_5 & 0 \\ s_5 c_6 & -s_5 s_6 & c_5 & d_4 \\ -s_4 c_5 c_6 - c_4 s_6 & s_4 c_5 s_6 - c_4 c_6 & s_4 s_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^2_6T = \begin{bmatrix} c_3 c_4 c_5 c_6 - c_3 s_4 s_6 - s_3 s_5 c_6 & -c_3 c_4 c_5 s_6 - c_3 s_4 c_6 + s_3 s_5 c_6 & -c_3 c_4 s_5 - s_3 c_5 & -s_3 d_4 \\ s_3 c_4 c_5 c_6 - s_3 s_4 s_6 + c_3 s_5 c_6 & -s_3 c_4 c_5 s_6 - s_3 s_4 c_6 - c_3 s_5 c_6 & -s_3 c_4 s_5 + c_3 c_5 & c_3 d_4 \\ -s_4 c_5 c_6 - c_4 s_6 & s_4 c_5 s_6 - c_4 c_6 & s_4 s_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

Premultiplicando (3.11) por (3.10):

$${}^1_3T = {}^1_2T {}^2_3T = \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -s_2 & -c_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_3 & -s_3 & 0 & a_2 \\ s_3 & c_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^1_3T = \begin{bmatrix} c_2 c_3 - s_2 s_3 & -(c_2 s_3 + s_2 c_3) & 0 & c_2 a_2 + a_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -(s_2 c_3 + c_2 s_3) & -(c_2 c_3 - s_2 s_3) & 0 & -s_2 a_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

Aplicando las identidades trigonométricas de suma de ángulos a esta ecuación, tenemos una expresión simplificada:

$${}^1_3T = \begin{bmatrix} c_{23} & -s_{23} & 0 & c_2 a_2 + a_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -s_{23} & -c_{23} & 0 & -s_2 a_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

Donde  $c_{23} = c_2 c_3 - s_2 s_3$  y  $s_{23} = c_2 s_3 + s_2 c_3$

Premultiplicando (3.17) por (3.20) :

$${}^1_6T = {}^1_3T {}^3_6T = \begin{bmatrix} c_{23} & -s_{23} & 0 & c_2 a_2 + a_1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -s_{23} & -c_{23} & 0 & -s_2 a_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_4 c_5 c_6 - s_4 s_6 & -c_4 c_5 s_6 - s_4 c_6 & -c_4 s_5 & 0 \\ s_5 c_6 & -s_5 s_6 & c_5 & d_4 \\ -s_4 c_5 c_6 - c_4 s_6 & s_4 c_5 s_6 - c_4 c_6 & s_4 s_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^1_6T = \begin{bmatrix} c_{23}(c_4 c_5 c_6 - s_4 s_6) - s_{23} s_5 c_6 & c_{23}(-c_4 c_5 s_6 - s_4 c_6) + s_{23} s_5 s_6 & -c_{23} c_4 s_5 - s_{23} c_5 & -s_{23} d_4 + c_2 a_2 + a_1 \\ -s_4 c_5 c_6 - c_4 s_6 & s_4 c_5 s_6 - c_4 c_6 & s_4 s_5 & 0 \\ -s_{23}(c_4 c_5 c_6 - s_4 s_6) - c_{23} s_5 c_6 & -s_{23}(-c_4 c_5 s_6 - s_4 c_6) + c_{23} s_5 s_6 & s_{23} c_4 s_5 - c_{23} c_5 & -c_{23} d_4 - s_2 a_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

Definiendo:

$${}^1_6T = \begin{bmatrix} n'_x & o'_x & a'_x & p'_x \\ n'_y & o'_y & a'_y & p'_y \\ n'_z & o'_z & a'_z & p'_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

Igualando cada uno de los términos de las ecuaciones (3.21) y (3.22) tenemos:

$$n'_x = c_{23}(c_4 c_5 c_6 - s_4 s_6) - s_{23} s_5 c_6$$

$$n'_y = -s_4 c_5 c_6 - c_4 s_6$$

$$n'_z = -s_{23}(c_4 c_5 c_6 - s_4 s_6) - c_{23} s_5 c_6$$

$$o'_x = c_{23}(-c_4 c_5 s_6 - s_4 c_6) + s_{23} s_5 s_6$$

$$\begin{aligned}
o'_y &= s_4 c_5 s_6 - c_4 c_6 \\
o'_z &= -s_{23}(-c_4 c_5 s_6 - s_4 c_6) + c_{23} s_5 s_6 \\
a'_x &= -c_{23} c_4 s_5 - s_{23} c_5 \\
a'_y &= s_4 s_5 \\
a'_z &= s_{23} c_4 s_5 - c_{23} c_5 \\
p'_x &= -s_{23} d_4 + c_2 a_2 + a_1 \\
p'_y &= 0 \\
p'_z &= -c_{23} d_4 - s_2 a_2
\end{aligned} \tag{3.23}$$

También se tiene que:

$${}^0_6T = {}^0_1T {}^1_6T = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{23}(c_4 c_5 c_6 - s_4 s_6) - s_{23} s_5 c_6 & c_{23}(-c_4 c_5 s_6 - s_4 c_6) + s_{23} s_5 s_6 & -c_{23} c_4 s_5 - s_{23} c_5 & -s_{23} d_4 + c_2 a_2 + a_1 \\ -s_4 c_5 c_6 - c_4 s_6 & s_4 c_5 s_6 - c_4 c_6 & s_4 s_5 & 0 \\ -s_{23}(c_4 c_5 c_6 - s_4 s_6) - c_{23} s_5 c_6 & -s_{23}(-c_4 c_5 s_6 - s_4 c_6) + c_{23} s_5 s_6 & s_{23} c_4 s_5 - c_{23} c_5 & -c_{23} d_4 - s_2 a_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.24}$$

Definiendo:

$${}^0_6T = {}^0_1T {}^1_6T = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.25}$$

Igualando los términos resultantes de la ecuación (3.24) con la ecuación (3.25) tenemos:

$$\begin{aligned}
n_x &= c_1 c_{23}(c_4 c_5 c_6 - s_4 s_6) - c_1 s_{23} s_5 c_6 - s_1(-s_4 c_5 c_6 - c_4 s_6) \\
n_y &= s_1 c_{23}(c_4 c_5 c_6 - s_4 s_6) - s_1 s_{23} s_5 c_6 + c_1(-s_4 c_5 c_6 - c_4 s_6) \\
n_z &= -s_{23}(c_4 c_5 c_6 - s_4 s_6) - c_{23} s_5 c_6 \\
o_x &= c_1 c_{23}(-c_4 c_5 s_6 - s_4 c_6) + c_1 s_{23} s_5 s_6 - s_1(-s_4 c_5 s_6 - c_4 c_6) \\
o_y &= s_1 c_{23}(-c_4 c_5 s_6 - s_4 c_6) + s_1 s_{23} s_5 s_6 + c_1(s_4 c_5 s_6 - c_4 c_6) \\
o_z &= -s_{23}(-c_4 c_5 s_6 - s_4 c_6) + c_{23} s_5 s_6
\end{aligned} \tag{3.26}$$



$$a_x = -c_1 c_{23} c_4 s_5 - c_1 s_{23} c_5 - s_1 s_4 s_5$$

$$a_y = -s_1 c_{23} c_4 s_5 - s_1 s_{23} c_5 + c_1 s_4 s_5$$

$$a_z = s_{23} c_4 s_5 - c_{23} c_5$$

$$p_x = -c_1 s_{23} d_4 + c_1 (c_2 a_2 + a_1)$$

$$p_y = -s_1 s_{23} d_4 + s_1 (c_2 a_2 + a_1)$$

$$p_z = -c_{23} d_4 - s_2 a_2$$

Las ecuaciones (3.26) son las ecuaciones de la cinemática directa del manipulador diseñado. Estas especifican como calcular la posición y orientación del sistema de referencia {6} con respecto al sistema de referencia {0}, dados los ángulos de las articulaciones del robot manipulador.

### 3.4 Cinemática Inversa de los Robots Manipuladores

Para controlar un robot, se manejan sus variables articulares con el objetivo de controlar la posición y orientación de su extremo final y éste pueda alcanzar el objetivo deseado. Por lo cual es muy importante la solución de la cinemática inversa. Esto quiere decir que dada la posición y orientación del extremo final del brazo del robot que representa la matriz  ${}^0_n T$ , así como sus parámetros articulares, se calculan los ángulos de cada una de las articulaciones para que de esta manera se pueda posicionar el extremo final del robot en la posición y orientación deseada.

La solución de la cinemática inversa para cualquier robot manipulador con seis grados de libertad, implica involucrarse en ecuaciones no lineales. La matriz  ${}^0_n T$  (Ecuación (3.25)) que define el modelo directo tiene dieciséis elementos de los cuales los cuatro de la última línea son triviales. Por lo que tendremos doce ecuaciones no lineales con seis incógnitas para obtener los ángulos de las seis articulaciones. De estas doce ecuaciones hay que recordar de la Ecuación (3.2) que tres son de traslación y nueve de rotación, de las cuales solamente tres son independientes. Por lo tanto, el problema se reduce a seis ecuaciones no lineales con seis incógnitas, [Craig. 1986].

La pregunta de si existe solución o no, hace necesario considerar el espacio de trabajo del manipulador. El espacio de trabajo de cualquier robot manipulador es el volumen de espacio que el extremo final puede alcanzar. Es necesario asegurarse de que el extremo final (muñeca) pueda alcanzar la posición y orientación deseada, para que exista solución. En [Craig. 1986] se distingue entre espacio de trabajo diestro y espacio de trabajo alcanzable, donde el espacio de trabajo diestro es un subconjunto del espacio de trabajo alcanzable.

Espacio de trabajo diestro es el volumen del espacio que el extremo final de un robot puede alcanzar con cualquier orientación. Mientras que el espacio de trabajo alcanzable, es el volumen del espacio que el extremo final de un robot puede alcanzar cuando menos con una orientación. Cabe destacar que dentro del espacio alcanzable hay más de una forma de posicionar y orientar el extremo final del robot y que sobre los límites del espacio de trabajo hay únicamente una. Los manipuladores con menos de seis grados de libertad, no tienen la posibilidad de posicionarse y orientarse de una forma arbitraria en su espacio de trabajo tridimensional, [Craig. 1986].

Otro problema encontrado en la solución de las ecuaciones cinemáticas es el de múltiples soluciones. El hecho de que el manipulador tenga múltiples soluciones puede causar problemas. De hecho, el sistema tiene que escoger solamente una de las soluciones y los criterios en que se basa la toma de decisión varían. Una buena opción sería aquella que minimice el valor que cada unión requiere para moverse, pero la presencia de obstáculos implicaría que se tomara en cuenta otra opción.

Al contrario de las ecuaciones lineales, no existe un algoritmo general que pueda emplearse en la solución de un conjunto de ecuaciones no lineales aplicables a la cinemática de un manipulador. Se han desarrollado algunos procedimientos genéricos para obtener los diferentes valores articulares que posicionen y orienten el extremo final de un manipulador. El inconveniente de estos procedimientos es que se trata de métodos numéricos iterativos que a menudo requieren de mayores cálculos y que no siempre garantizan la convergencia a la solución correcta. Además de que el problema cinemático inverso ha de resolverse en tiempo real y una solución de tipo iterativa no garantiza el tener

la solución en el momento adecuado. Se debe de considerar que un manipulador es soluble cuando se puede determinar todo el conjunto de las variables de las uniones asociadas con una posición y orientación dada. En caso de múltiples soluciones que sea posible determinarlas todas.

Como ya se dijo, el método numérico o iterativo no es muy adecuado en la solución de la cinemática de los manipuladores, por lo que restringiremos nuestra atención a la forma cerrada como método de solución. La forma cerrada es el medio en que se basa el método de solución sobre una expresión analítica o sobre la solución de un polinomio de cuarto o menor grado, de tal forma que los cálculos sean suficientes para llegar a la solución.

Hay dos condiciones que hacen posible la solución de la cinemática inversa en forma cerrada y que todos los manipuladores comerciales tienen, ya sea una u otra o ambas y son:

- i) Tres ejes de articulaciones adyacentes se cruzan en un punto.
- ii) Tres ejes de articulaciones adyacentes son paralelas entre si.

Robots como el PUMA 560 y el Stanford, satisfacen la primera condición, mientras que los robots ASEA y MINIMOVER satisfacen la segunda condición. Se debe de hacer notar que el robot que se analiza en este trabajo satisface ambas condiciones y hace uso de la técnica de la transformada inversa, para la solución del problema cinemático inverso.

El método de la transformada inversa es la técnica que hace uso de las matrices de transformación homogénea determinadas con los parámetros de Denavit-Hartenberg en la solución de la cinemática directa. Aunque este método es correcto, existe el problema de no indicar claramente como seleccionar una solución adecuada de las diversas soluciones posibles. El usuario debe de hacer uso de su intuición matemática para elegir la respuesta correcta. Su procedimiento es el siguiente:

Iniciamos por determinar la posición y orientación deseada que representa la ecuación (3.25). Ya conocidos los parámetros de Denavit-Hartenberg, por ejemplo, para un manipulador de seis grados de libertad obtenemos las matrices homogéneas que relacionan

dos eslabones vecinos  ${}^0_1T$ ,  ${}^1_2T$ ,  ${}^2_3T$ ,  ${}^3_4T$ ,  ${}^4_5T$ ,  ${}^5_6T$ . La relación existente entre la matriz que representa la posición y orientación del manipulador y estas matrices de transformación está dada por la ecuación (3.8), de esta forma se tiene que:

$${}^0_6T = {}^0_1T {}^1_2T {}^2_3T {}^3_4T {}^4_5T {}^5_6T \quad (3.27)$$

Posteriormente se invierte la matriz homogénea  ${}^0_1T$  y se premultiplica (3.27) por esta matriz inversa, por lo que tenemos una nueva ecuación con la variable de la primera articulación  $\theta_1$  aislada del resto de las demás articulaciones y tal vez sea posible encontrar su valor a través de las igualdades que se presenten en ella:

$$([{}^0_1T]^{-1}) {}^0_6T = {}^1_2T {}^2_3T {}^3_4T {}^4_5T {}^5_6T \quad (3.28)$$

Posteriormente, una vez obtenida  $\theta_1$ , se invierte la matriz homogénea  ${}^1_2T$  y se premultiplica (3.28) por esta matriz inversa, con lo que se tiene:

$$([{}^1_2T]^{-1} [{}^0_1T]^{-1}) {}^0_6T = {}^2_3T {}^3_4T {}^4_5T {}^5_6T \quad (3.29)$$

Nuevamente se trata de encontrar  $\theta_2$ ,  $\theta_3$  o la suma de dos ángulos que nos ayude a encontrar cualquier valor articular. Se continúa de esta forma hasta encontrar todos los valores de los ángulos de las articulaciones del manipulador.

El método geométrico, es un método aplicable a manipuladores de pocos grados de libertad. En algunos casos de manipuladores de seis grados de libertad se aplica para encontrar los ángulos de las tres primeras articulaciones que posicionan la parte final del manipulador. El procedimiento consiste en descomponer la estructura del manipulador en varios triángulos con los que se puede encontrar los ángulos de las articulaciones haciendo uso de las herramientas de la geometría plana.

### 3.5 Modelo Inverso del Robot Manipulador a Analizar

En esta sección se hace uso de la técnica de la transformada inversa para la solución de la cinemática inversa del manipulador de seis grados de libertad que se ha diseñado para este trabajo. Partiendo de la Ecuación (3.28), que aquí se repite:

$$({}^0_1T^{-1}){}^0_6T = {}^1_2T {}^2_3T {}^3_4T {}^4_5T {}^5_6T = {}^1_6T \quad (3.30)$$

Sustituyendo en (3.30) la ecuación (3.25) y la inversa de (3.9):

$$\begin{bmatrix} c_1 & s_1 & 0 & 0 \\ -s_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = {}^1_6T \quad (3.31)$$

Donde el lado derecho de la ecuación (3.31) es igual a los términos establecidos en la ecuación (3.23). Igualando los elementos (2,4) de ambos lados de la ecuación (3.31) tenemos:

$$c_1 p_y - s_1 p_x = 0 \quad (3.32)$$

Esta ecuación se puede resolver haciendo las siguientes sustituciones trigonométricas:

$$p_x = r \cos \phi \quad (3.33)$$

$$p_y = r \operatorname{sen} \phi \quad (3.34)$$

De donde tenemos que:

$$r = \sqrt{p_x^2 + p_y^2}$$

$$\cos \phi = \frac{p_x}{r}$$

$$\operatorname{sen} \phi = \frac{p_y}{r}$$

La función seno o coseno por sí solas no nos identifican en que cuadrante se encuentra el ángulo, por lo que tenemos que usar la función tangente:

$$\tan(\phi) = \frac{\text{sen}\phi}{\cos\phi}$$

Y posteriormente el ángulo:

$$\phi = \text{arc tan}\left(\frac{P_y}{P_x}\right) \quad (3.35)$$

Sustituyendo las ecuaciones (3.33) y (3.34) en la ecuación (3.32) tenemos:

$$c_1 r \text{sen}\phi - s_1 r \cos\phi = 0$$

$$c_1 \text{sen}\phi - s_1 \cos\phi = 0$$

Aplicando la fórmula trigonométrica de la diferencia de ángulos tenemos:

$$\text{sen}(\phi - \theta_1) = 0 \quad (3.36)$$

Por lo tanto:

$$\cos(\phi - \theta_1) = 1$$

De donde la tangente:

$$\tan(\phi - \theta_1) = 0$$

Por lo tanto:

$$\phi - \theta_1 = 0$$

Donde la solución para  $\theta_1$ , será:

$$\theta_1 = \phi$$

$$\theta_1 = \text{arc tan}\left(\frac{P_y}{P_x}\right) \quad (3.37)$$

Se hizo un análisis igualando los términos (1,4) y (3,4) de la misma ecuación (3.31), para ver si otro ángulo se podía determinar, pero no se pudo determinar ninguno de los otros ángulos.

Posteriormente, en la Ecuación (3.29), que aquí se repite,

$$([\!^1_2T\!]^{-1})([\!^0_1T\!]^{-1})^0_6T = {}^2_3T {}^3_4T {}^4_5T {}^5_6T = {}^2_6T \quad (3.38)$$

Sustituimos  ${}^2_6T$  y el inverso de (3.10) .

$$\begin{bmatrix} c_2 & 0 & -s_2 & c_2 a_1 \\ -s_2 & 0 & -c_2 & -s_2 a_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 & s_1 & 0 & 0 \\ -s_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = {}^2_6T \quad (3.39)$$

Igualando los elementos (1,4), (2,4) y (3,4) de ambos lados de la ecuación (3.39) tenemos:

$$c_2 c_1 p_x + c_2 s_1 p_y - s_2 p_z - c_2 a_1 = -s_3 d_4 + a_2 \quad (3.40)$$

$$-s_2 c_1 p_x - s_2 s_1 p_y - c_2 p_z - s_2 a_1 = c_3 d_4 \quad (3.41)$$

$$-s_1 p_x + c_1 p_y = 0 \quad (3.42)$$

Elevando al cuadrado las ecuaciones (3.40), (3.41) y (3.42) y posteriormente sumándolas tenemos:

$$p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 + a_1^2 - 2s_1 a_1 p_y - 2c_1 a_1 p_x = d_4^2 - 2s_3 a_2 d_4 + a_2^2 \quad (3.43)$$

Despejando  $s_3$ , tenemos:

$$s_3 = \frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 + a_1^2 - a_2^2 - d_4^2 - 2s_1 a_1 p_y - 2c_1 a_1 p_x}{-2a_2 d_4} \quad (3.44)$$

De igual forma, se busca la función tangente por lo que:

$$c_3 = \pm \sqrt{1 - s_3^2} \quad (3.45)$$

Donde la solución para  $\theta_3$ , será:

$$\theta_3 = \arctan\left(\frac{s_3}{c_3}\right) \quad (3.46)$$

Premultiplicando (3.29) por  $\left[{}^2_3T\right]^{-1}$ :

$$\left(\left[{}^2_3T\right]^{-1}\right)\left(\left[{}^1_2T\right]^{-1}\right)\left(\left[{}^0_1T\right]^{-1}\right) {}^0_6T = {}^3_4T {}^4_5T {}^5_6T = {}^3_6T \quad (3.47)$$

Obteniendo  $\left[{}^2_3T\right]^{-1}$  de (3.11) y sustituyendo ese resultado y la Ecuación (3.17) en (3.47) se tiene:

$$\begin{bmatrix} c_3 & s_3 & 0 & -c_3a_2 \\ -s_3 & c_3 & 0 & s_3a_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_2 & 0 & -s_2 & c_2a_1 \\ -s_2 & 0 & -c_2 & -s_2a_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 & s_1 & 0 & 0 \\ -s_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = {}^3_6T \quad (3.48)$$

Igualando los elementos (1,4), (2,4) y (3,4) de ambos lados de la ecuación (3.48) tenemos:

$$(c_2c_3 - s_2s_3)c_1p_x + (c_2c_3 - s_2s_3)s_1p_y - (c_2s_3 + s_2c_3)p_z - c_3c_2a_1 + s_3s_2a_1 - c_3a_2 = 0 \quad (3.49)$$

$$-(c_2s_3 + s_2c_3)c_1p_x - (c_2s_3 + s_2c_3)s_1p_y + (s_2s_3 - c_2c_3)p_z + s_3c_2a_1 + c_3s_2a_1 + s_3a_2 = d_4 \quad (3.50)$$

$$-s_1p_x + c_1p_y = 0 \quad (3.51)$$

Elevando al cuadrado las ecuaciones (3.49), (3.50) y (3.51) y posteriormente sumándolas tenemos:

$$\begin{aligned} p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 + a_1^2 + a_2^2 - d_4^2 - 2c_1a_1p_x - 2s_1a_1p_y = \\ -c_2(2a_1a_2 - 2s_1a_2p_y - 2c_1a_2p_x) - 2s_2a_2p_z \end{aligned} \quad (3.52)$$

Haciendo:

$$K = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 + a_1^2 + a_2^2 - d_4^2 - 2c_1a_1p_x - 2s_1a_1p_y \quad (3.53)$$

$$K_1 = -2a_1a_2 + 2s_1a_2p_y + 2c_1a_2p_x \quad (3.54)$$



$$K_2 = -2a_2 p_z \quad (3.55)$$

Reescribiendo la ecuación (3.52), tenemos:

$$K_1 c_2 + K_2 s_2 = K \quad (3.56)$$

De la misma forma en que se trató a la ecuación (3.32). Para resolver una ecuación de esta forma, se hacen las siguientes sustituciones trigonométricas:

$$K_2 = r \cos \phi \quad (3.57)$$

$$K_1 = r \operatorname{sen} \phi \quad (3.58)$$

De donde tenemos que:

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{K_1^2 + K_2^2} \\ \cos \phi &= \frac{K_2}{r} \\ \operatorname{sen} \phi &= \frac{K_1}{r} \\ \phi &= \operatorname{arc} \tan \left( \frac{K_1}{K_2} \right) \end{aligned} \quad (3.59)$$

Sustituyendo las ecuaciones (3.57) y (3.58) en la ecuación (3.56) tenemos:

$$c_2 r \operatorname{sen} \phi + s_2 r \cos \phi = K$$

$$c_2 \operatorname{sen} \phi + s_2 \cos \phi = \frac{K}{r}$$

Aplicando la formula trigonométrica de la suma de ángulos tenemos:

$$\operatorname{sen}(\phi + \theta_2) = \frac{K}{r} \quad (3.60)$$

Por lo tanto:

$$\cos(\phi + \theta_2) = \pm \sqrt{1 - \frac{K^2}{r^2}}$$

Por lo que:

$$\phi + \theta_2 = \arctan \left( \frac{\frac{K}{r}}{\pm \sqrt{1 - \frac{K^2}{r^2}}} \right)$$

Sustituyendo  $r = \sqrt{K_1^2 + K_2^2}$ , quedaría como:

$$\phi + \theta_2 = \arctan \left( \frac{K}{\pm \sqrt{K_1^2 + K_2^2 - K^2}} \right)$$

Despejando  $\theta_2$ , tenemos:

$$\theta_2 = \arctan \left( \frac{K}{\pm \sqrt{K_1^2 + K_2^2 - K^2}} \right) - \phi$$

Sustituyendo  $\phi$ , queda la solución  $\theta_2$ :

$$\theta_2 = \arctan \left( \frac{K}{\pm \sqrt{K_1^2 + K_2^2 - K^2}} \right) - \arctan \left( \frac{K_1}{K_2} \right) \quad (3.61)$$

Utilizando nuevamente la Ecuación (3.48), igualando los elementos (1,3), (2,3) y (3,3), se puede determinar  $\theta_4$  y  $\theta_5$ . Estos elementos nos dan las siguientes ecuaciones:

$$(c_2c_3 - s_2s_3)c_1a_x + (c_2c_3 - s_2s_3)s_1a_y - (c_2s_3 + s_2c_3)a_z = -c_4s_5 \quad (3.62)$$

$$-(c_2s_3 + s_2c_3)c_1a_x - (c_2s_3 + s_2c_3)s_1a_y + (s_2s_3 - c_2c_3)a_z = c_5 \quad (3.63)$$

$$-s_1a_x + c_1a_y = s_4s_5 \quad (3.64)$$

Se ve claramente que primeramente se debe de encontrar  $\theta_5$ , su coseno se determina directamente de la ecuación (3.63) mientras que el seno será:

$$s_5 = \pm \sqrt{1 - c_5^2}$$

De tal forma que  $\theta_5$  se obtiene de:

$$\theta_5 = \arctan \left( \frac{s_5}{c_5} \right) \quad (3.65)$$

De la ecuación (3.62) se despeja  $c_4$ :

$$c_4 = -\frac{(c_2c_3 - s_2s_3)c_1a_x + (c_2c_3 - s_2s_3)s_1a_y - (c_2s_3 + s_2c_3)a_z}{s_5} \quad (3.66)$$

Y de la ecuación (3.64), se despeja  $s_4$ :

$$s_4 = \frac{-s_1a_x + c_1a_y}{s_5} \quad (3.67)$$

Por lo tanto  $\theta_4$  se obtiene de:

$$\theta_4 = \arctan \left( \frac{s_4}{c_4} \right) \quad (3.68)$$

Premultiplicando (3.47) por  $[\mathbf{{}_4^3T}]^{-1}$  obtenemos la Ecuación (3.69), de la cual podemos determinar  $\theta_6$ :

$$([\mathbf{{}_4^3T}]^{-1})([\mathbf{{}_3^2T}]^{-1})([\mathbf{{}_2^1T}]^{-1})([\mathbf{{}_1^0T}]^{-1})\mathbf{{}_6^0T} = \mathbf{{}_5^4T}\mathbf{{}_6^5T} = \mathbf{{}_6^4T} \quad (3.69)$$

Obteniendo  $[\mathbf{{}_4^3T}]^{-1}$  de (3.12) y sustituyendo ese resultado en (3.69) se tiene:

$$\begin{bmatrix} c_4 & 0 & -s_4 & 0 \\ -s_4 & 0 & -c_4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -d_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_3 & s_3 & 0 & -c_3a_2 \\ -s_3 & c_3 & 0 & s_3a_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_2 & 0 & -s_2 & c_2a_1 \\ -s_2 & 0 & -c_2 & -s_2a_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.70)$$

$$\begin{bmatrix} c_1 & s_1 & 0 & 0 \\ -s_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{{}_6^4T}$$

Sustituyendo la Ecuación (3.16) en el segundo miembro de (3.70) e igualando los elementos (2,1) y (2,2) de ambos lados de la ecuación tenemos:

$$((-s_4c_3c_2 + s_4s_3s_2)c_1 + c_4s_1)n_x + ((-s_4c_3c_2 + s_4s_3s_2)s_1 - c_4c_1)n_y + (s_4c_3s_2 + s_4s_3c_2)n_z = s_6 \quad (3.71)$$

$$((-s_4c_3c_2 + s_4s_3s_2)c_1 + c_4s_1)o_x + ((-s_4c_3c_2 + s_4s_3s_2)s_1 - c_4c_1)o_y + (s_4c_3s_2 + s_4s_3c_2)o_z = c_6 \quad (3.72)$$

Con estas dos ecuaciones obtenemos la tangente y por lo tanto el valor de  $\theta_6$  :

$$\theta_6 = \arctan\left(\frac{s_6}{c_6}\right) \quad (3.73)$$

Como se ha visto en el desarrollo de este método, en todos los cálculos de los ángulos interviene una raíz cuadrada. Esta raíz nos arroja dos valores, uno positivo y otro negativo. Esto quiere decir que el número de soluciones para una misma posición y orientación es mayor de uno.

En este capítulo se tienen resultados importantes para el análisis de la cinemática directa y de la cinemática inversa. Se obtuvieron las ecuaciones (3.9) a la (3.14) que multiplicadas como se ha indicado en la ecuación (3.15) proporcionan la solución al problema de la cinemática directa. En el capítulo 5 se describirá como se utilizan estas matrices para la solución de la cinemática directa en la siguiente función:

```
int CVICALLBACK CinematicaDirecta (int panel, int control, int event,  
void *callbackData, int eventData1, int eventData2)
```

Para el desarrollo del programa para la simulación de la cinemática inversa se aplican las ecuaciones numeradas en la Tabla 3.2, las cuales se implementan en la siguiente función.

**int CVICALLBACK CinematicaInversa (int panel, int control, int event,  
void \*callbackData, int eventData1, int eventData2)**

Tabla 3.2 Ecuaciones para el desarrollo de la simulación del problema de la cinemática inversa.

Número de ecuación	Término calculado
(3.37)	$\theta_1$
(3.46)	$\theta_3$
(3.61)	$\theta_2$
(3.63)	$c_5$
(3.65)	$\theta_5$
(3.66)	$c_4$
(3.67)	$s_4$
(3.68)	$\theta_4$
(3.71)	$s_6$
(3.72)	$c_6$
(3.73)	$\theta_6$

# CAPÍTULO 4

## VELOCIDADES Y FUERZAS ESTÁTICAS

### 4.1 Introducción

En el modelo cinemático de un robot se determina la relación entre los ángulos de las articulaciones y la posición y orientación de su extremo final. Como se estableció anteriormente, en este modelo no intervienen las fuerzas que pueden causar el movimiento de los eslabones. Sin embargo, es necesario conocer, además de esta relación, la relación de sus respectivas derivadas para poder establecer, en el sistema de control, que velocidad y que fuerza se debe de imprimir a cada articulación, para hacer que el extremo final del robot consiga desarrollar una trayectoria determinada.

En este capítulo se analiza la relación entre las velocidades del extremo final y las velocidades de las articulaciones del robot. Para poder determinar esta relación se analizan primeramente las velocidades lineales y rotacionales de cada una de las uniones del robot manipulador y posteriormente se determina la propagación de estas velocidades a través de los eslabones del robot.

### 4.2 Propagación de Velocidades en Robots Manipuladores

Antes de iniciar con el análisis de la propagación de las velocidades entre los eslabones de un robot manipulador, se hará una breve descripción de la notación utilizada para expresar las velocidades lineal y rotacional. En la Figura 4.1 se muestran dos sistemas de referencia  $\{A\}$  y  $\{B\}$  fijos a cuerpos rígidos independientes. Se desea determinar el movimiento de un punto  $Q$  dentro del sistema de referencia  $\{B\}$  en relación al sistema de referencia  $\{A\}$ .

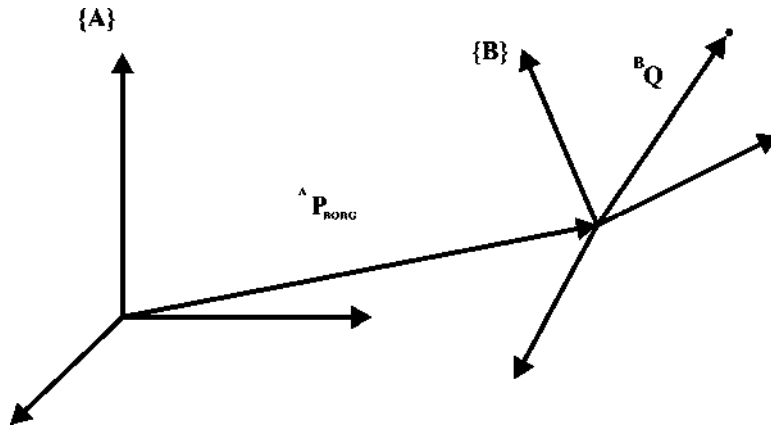


Figura 4.1. Relación de desplazamiento entre sistemas de referencia

Se observa que el sistema de referencia {B} está localizado en relación al sistema de referencia {A} por un vector de posición  ${}^A P_{BORG}$  (del origen de {A} al origen de {B}) y para una matriz de transformación  ${}^A R_B$  (matriz que relaciona el sistema de referencia {B} con el sistema de referencia {A}). Por lo tanto, la velocidad del punto Q, en relación al sistema de referencia {A}, queda expresado por [Craig. 1986]:

$${}^A V_Q = {}^A V_{BORG} + {}^A R_B {}^B V_Q \quad (4.1)$$

La notación (4.1) nos indica que la velocidad de un punto Q, (situado en el sistema de referencia {B}) con respecto al sistema de referencia {A}, es igual a la velocidad del origen del sistema de referencia {B} con respecto al origen del sistema de referencia {A} más el producto de la matriz de transformación entre los sistemas de referencia {B} y {A} con la velocidad del punto Q con respecto al sistema de referencia donde se encuentra, en este caso el sistema {B}.

Considerando ahora la Figura 4.2, donde los sistemas de referencia {A} y {B} mantienen sus orígenes coincidentes, la velocidad de translación de {B} con respecto al {A} es nula, pero donde el sistema {B} está rotando con respecto al {A}, rotación indicada por el vector  ${}^A \Omega_B$ , llamado vector de velocidad angular o de rotación. Considerando al punto Q con

velocidad cero respecto al sistema {B}, es evidente que el punto Q tiene una velocidad con respecto al sistema {A}, debida a  ${}^A\Omega_B$ .

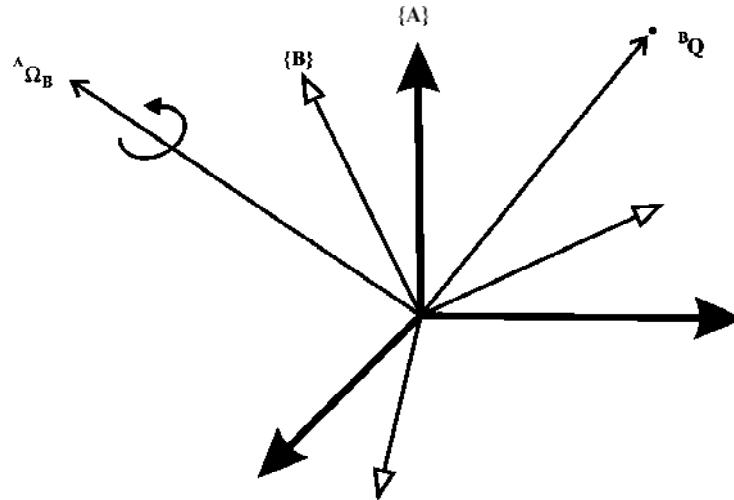


Figura 4.2. Velocidad rotacional en sistemas de referencia con orígenes coincidentes

Considerando el movimiento del punto Q debido a la rotación, tal como se muestra en la Figura 4.3, se puede observar que el cambio diferencial  $\Delta^A Q$  es perpendicular a los vectores  ${}^A\Omega_B$  y  ${}^A Q(t)$ , [Craig, 1986]. En este caso su magnitud queda expresada por:

$$|\Delta Q| = (|{}^A Q| \operatorname{sen} \theta) (|{}^A \Omega_B| \Delta t) \quad (4.2)$$

Donde  $\theta$  es el ángulo entre el sistema {A} y el sistema {B}. Conocida la posición del punto Q en el sistema {B}, su velocidad vista desde el sistema de referencia {A}, dada por la rotación  ${}^A\Omega_B$ , puede expresarse por el producto vectorial:

$${}^A V_Q = {}^A \Omega_B \times {}^A Q \quad (4.3)$$

El vector Q también puede estar cambiando con respecto al sistema de referencia {B}. Por lo tanto, la velocidad resultante por este cambio, más la rotación de {B} con respecto a {A} expresada en {A}, es:

$${}^A V_Q = {}^A R^B V_Q + {}^A \Omega_B \times {}^A R^B Q \quad (4.4)$$



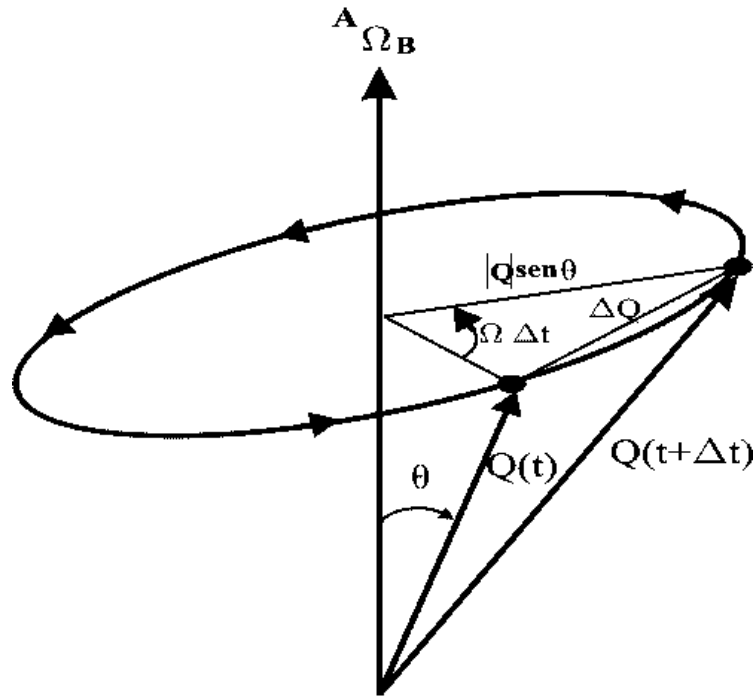


Figura 4.3 velocidad de rotación.

La velocidad resultante de la combinación de la velocidad de translación con la de rotación, tomando en cuenta (4.1) y (4.4), es [Craig. 1986]:

$${}^A V_Q = {}^A V_{BORG} + {}^A R^B V_Q + {}^A \Omega_B \times {}^A R^B Q \quad (4.5)$$

Recordando que un robot manipulador es una cadena de cuerpos rígidos capaces de moverse en relación a sus vecinos, su movimiento se puede describir mediante vectores de velocidad lineal y rotacional. La velocidad lineal del origen del sistema  $\{i\}$  se representará por  $v_i$  y su velocidad angular o rotacional por  $w_i$ .

En la propagación de velocidades entre las articulaciones del robot se debe de tener en cuenta que la velocidad angular de la unión  $i+1$  es la velocidad de la unión  $i$  más la nueva componente que agrega la velocidad rotacional de la unión  $i+1$ , [Craig. 1986]. Por lo tanto la expresión de la velocidad angular de la unión  $i+1$  en relación al sistema de referencia  $i$  será:

$${}^i\omega_{i+1} = {}^i\omega_i + {}_{i+1}{}^iR \begin{pmatrix} \dot{\theta}_{i+1} & {}^{i+1}\hat{Z}_{i+1} \end{pmatrix} \quad (4.6)$$

Donde  $\dot{\theta}_{i+1}$  es la derivada con respecto al tiempo de la variable articular (desplazamiento angular de la unión) representada en forma vectorial por la expresión:

$$\dot{\theta}_{i+1} \quad {}^{i+1}\hat{Z}_{i+1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_{i+1} \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

${}_{i+1}{}^iR$  es la matriz de transformación del eje  $i+1$  en relación al eje  $i$ . Se hace uso de esta matriz de transformación para que se puedan sumar las dos componentes angulares.

Premultiplicando ambos lados de la ecuación (4.6) por  ${}_{i+1}{}^iR$  tendremos la velocidad angular en relación a su mismo sistema de referencia:

$${}^{i+1}\omega_{i+1} = {}_{i+1}{}^iR {}^i\omega_i + \dot{\theta}_{i+1} \quad {}^{i+1}\hat{Z}_{i+1} \quad (4.8)$$

Así también, la velocidad lineal del origen del eje  $i+1$  es la velocidad del origen del eje  $i$  más la componente originada por la velocidad rotacional de la unión  $i$ , [Craig, 1986]. Por lo tanto la velocidad lineal de la unión  $i+1$  con respecto a la unión  $i$  será:

$${}^i v_{i+1} = {}^i v_i + {}^i\omega_i \times {}^i P_{i+1} \quad (4.9)$$

Donde  ${}^i P_{i+1}$  es el vector que expresa la posición del origen del sistema de referencia  $i+1$  en relación al sistema de referencia  $i$ . En la Figura 4.4 se ilustran las uniones  $i$  e  $i+1$  con sus respectivos vectores de velocidad lineal y rotacional.

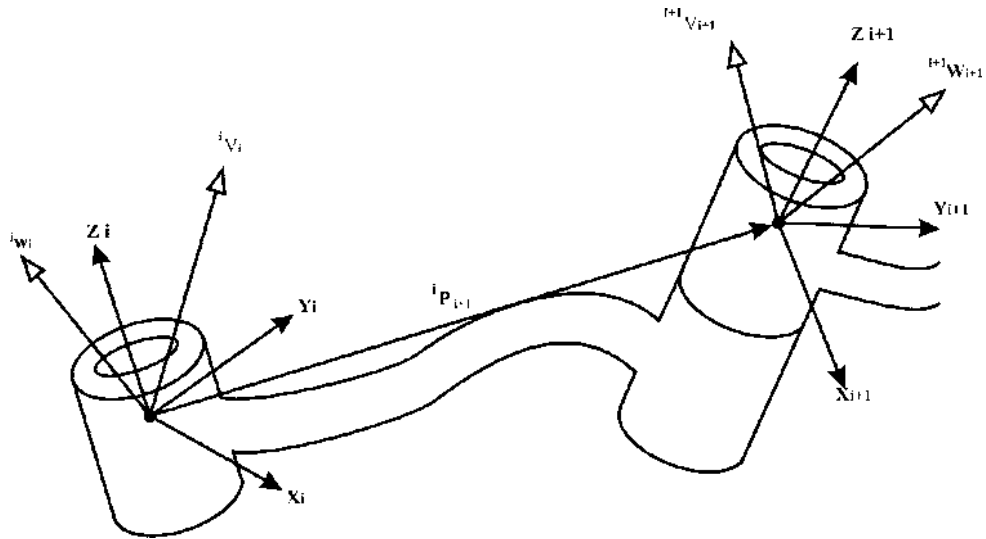


Figura 4.4 Vectores de velocidad de eslabones vecinos

Premultiplicando ambos lados de la ecuación (4.9) por  ${}^{i+1}R$  se obtiene la expresión resultante de la velocidad con respecto al sistema de referencia  $i+1$ :

$${}^{i+1}v_{i+1} = {}^{i+1}R({}^i v_i + {}^i \omega_i \times {}^i P_{i+1}) \quad (4.10)$$

Suponiendo  ${}^0 \omega_0 = 0$  y  ${}^0 v_0 = 0$ , y aplicando sucesivamente las ecuaciones (4.8) y (4.10) de eslabón en eslabón, podemos propagar las velocidades desde  $i=0$  hasta  $i=N$ , obteniéndose finalmente  ${}^N \omega_N$  y  ${}^N v_N$ . Para relacionarlas con la base o el sistema de referencia  $\{0\}$ , basta con premultiplicar cada una de las velocidades por la matriz de transformación  ${}^0 T_N$ . Cabe recordar que esta matriz nos determina la cinemática directa del robot manipulador.

En el capítulo 5 se describe como se utilizan las ecuaciones (4.8) y (4.10) de una forma iterativa desde el sistema de referencia  $\{0\}$  al sistema de referencia  $\{6\}$  del manipulador propuesto en un programa que se desarrolló para simular el comportamiento de las velocidades lineales del extremo final del manipulador con respecto a la base, así como de cualquier otra articulación. Este análisis permite relacionar las velocidades lineales del

extremo final del manipulador con las velocidades angulares de los motores en las articulaciones del mismo.

En el capítulo 5 se describe el diseño de una interfase gráfica mediante la cual se puede simular el comportamiento de las velocidades lineales del extremo final del manipulador con respecto a la base, así como de cualquier otra articulación. En la sección 4.4 se hace el desarrollo analítico detallado de las ecuaciones que definen la propagación de la velocidad del manipulador propuesto.

### 4.3 Fuerzas Estáticas en Robots Manipuladores

Generalmente la muñeca de los robots manipuladores industriales se encuentra en un ambiente libre o soportando una carga. Es necesario determinar las fuerzas y pares ejercidos por los eslabones vecinos para mantener esta carga estáticamente en equilibrio. La Figura 4.5 muestra las fuerzas y pares que se ejercen sobre un eslabón, [Craig, 1986], de esta misma figura se establece el equilibrio de las fuerzas y los pares aplicados, por medio de las ecuaciones:

$${}^i f_i = {}^i f_{i+1} \quad (4.11)$$

$${}^i n_i = {}^i n_{i+1} + {}^i P_{i+1} \times {}^i f_{i+1} \quad (4.12)$$

Para escribir esas ecuaciones únicamente en términos de las fuerzas y pares definidos en su propio sistema de referencia, se premultiplica por la matriz de transformación  ${}_{i+1}^i R$ , obteniendo:

$${}^i f_i = {}_{i+1}^i R {}^{i+1} f_{i+1} \quad (4.13)$$

$${}^i n_i = {}_{i+1}^i R {}^{i+1} n_{i+1} + {}^i P_{i+1} \times {}^i f_i \quad (4.14)$$

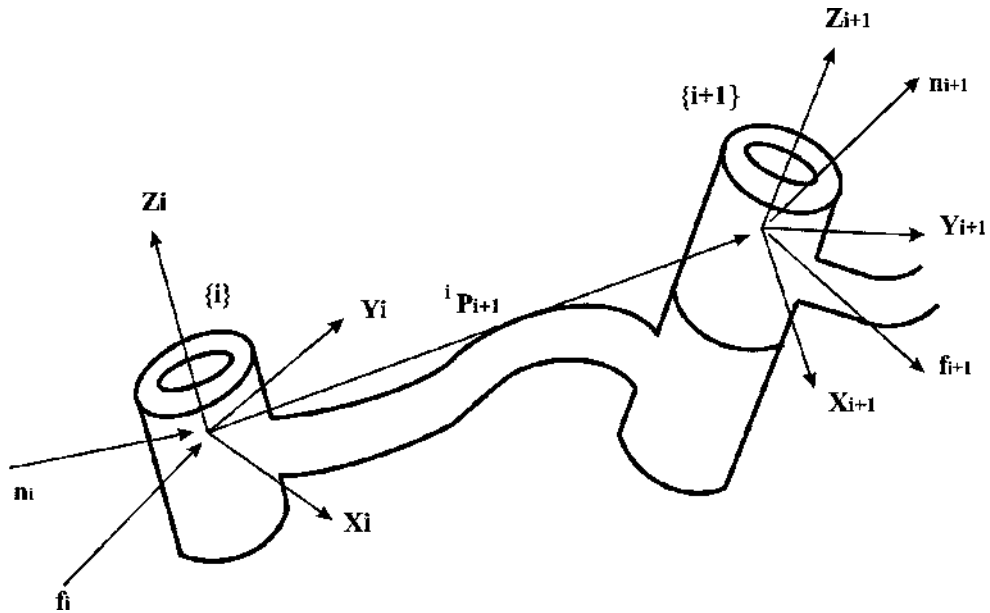


Figura 4.5 Fuerzas y pares estáticos sobre un eslabón

Estas ecuaciones se aplican desde la última articulación hasta la primera, tomando en cuenta que si el extremo final del manipulador se encuentra libre, la fuerza y el par inicial debe ser igual a cero, esto es:

$${}^{N+1}f_{N+1} = 0 \tag{4.15}$$

$${}^{N+1}n_{N+1} = 0$$

En caso contrario, se iniciará con los valores de las fuerzas y pares que estén actuando en ese momento en el extremo final del manipulador. Todas las componentes de los vectores de las fuerzas y los pares que actúan sobre los eslabones son soportadas por la estructura del manipulador excepto el par sobre el eje de la unión, por lo que para encontrar el par requerido en la unión para mantener el equilibrio estático, se debe de realizar el producto punto del vector del eje de la unión con el vector de pares actuando sobre el eslabón, con lo que para una articulación de rotación, el par en la unión  $i$  será:

$$\tau_i = {}^i n_i^T \hat{Z}_i \tag{4.16}$$

donde:

$${}^i \hat{Z}_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

En el capítulo 5 se describe el diseño de un programa, que incluye una interfase grafica, para analizar el par requerido en cada una de las uniones del manipulador para mantener en equilibrio estático el manipulador. Se hace uso de las ecuaciones (4.13) y (4.14) de una forma iterativa desde el sistema de referencia {6} hasta el sistema de referencia {0} del manipulador. Este análisis proporcionará la ayuda para determinar qué motores pueden instalarse en el manipulador. En la sección 4.5 se hace el desarrollo analítico detallado de las ecuaciones que definen la programación de fuerzas y pares en el manipulador propuesto.

#### 4.4 Análisis de la Propagación de Velocidades del Robot Manipulador Propuesto

En esta sección se desarrollarán las expresiones analíticas para calcular la propagación de velocidades del robot manipulador, aplicando iterativamente las ecuaciones (4.8) y (4.10) desde el sistema de referencia {0} al sistema de referencia {6}, del robot manipulador propuesto. Estos resultados se analizarán en el capítulo 5 mediante el programa desarrollado.

Considerando  ${}^0\omega_0 = 0$  y  ${}^0v_0 = 0$ , como condiciones iniciales.

Para  $i = 0$ :

$${}^1\omega_1 = {}^1R^0\omega_0 + \dot{\theta}_1 {}^1\hat{Z}_1$$

Donde:  ${}^1R^0$  es la transpuesta de la matriz de rotación de la transformación dada por la Ecuación (3.9). En este caso únicamente importa la parte de la transformación de rotación sin ser necesaria la parte de la posición.

$${}^1\omega_1 = \begin{bmatrix} c_1 & s_1 & 0 \\ -s_1 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix}$$

$${}^1\omega_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

$${}^1v_1 = {}^1R({}^0v_0 + {}^0\omega_0 \times {}^0P_1)$$

$${}^1v_1 = \begin{bmatrix} c_1 & s_1 & 0 \\ -s_1 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$$

$${}^1v_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

Para  $i=1$ :

$${}^2\omega_2 = {}^2R{}^1\omega_1 + \dot{\theta}_2 \hat{Z}_2$$

Donde:  ${}^2R$  es la transpuesta de la matriz de rotación de la transformación dada por la Ecuación (3.10).

$${}^2\omega_2 = \begin{bmatrix} c_2 & 0 & -s_2 \\ -s_2 & 0 & -c_2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}$$

$${}^2\omega_2 = \begin{bmatrix} -s_2 \dot{\theta}_1 \\ -c_2 \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

$$\begin{aligned} {}^2v_2 &= {}^2R({}^1v_1 + {}^1\omega_1 \times {}^1P_2) \\ {}^2v_2 &= \begin{bmatrix} c_2 & 0 & -s_2 \\ -s_2 & 0 & -c_2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} c_2 & 0 & -s_2 \\ -s_2 & 0 & -c_2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ a_1 \dot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) \\ {}^2v_2 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ a_1 \dot{\theta}_1 \end{bmatrix} \quad (4.21) \end{aligned}$$

Para  $i = 2$ :

$${}^3\omega_3 = {}^3R^2 \omega_2 + \dot{\theta}_3 \hat{Z}_3$$

Donde:  ${}^3R$  es la transpuesta de la matriz de rotación en la Ecuación (3.11).

$$\begin{aligned} {}^3\omega_3 &= \begin{bmatrix} c_3 & s_3 & 0 \\ -s_3 & c_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -s_2 \dot{\theta}_1 \\ -c_2 \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_3 \end{bmatrix} \\ {}^3\omega_3 &= \begin{bmatrix} -c_3 s_2 \dot{\theta}_1 - s_3 c_2 \dot{\theta}_1 \\ s_3 s_2 \dot{\theta}_1 - c_3 c_2 \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{\theta}_1 (s_2 c_3 + c_2 s_3) \\ \dot{\theta}_1 (s_2 s_3 - c_2 c_3) \\ \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$



$${}^3\omega_3 = \begin{bmatrix} -s_{23}\dot{\theta}_1 \\ -c_{23}\dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3 \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

$${}^3v_3 = {}^3R({}^2v_2 + {}^2\omega_2 \times {}^2P_3)$$

$${}^3v_3 = \begin{bmatrix} c_3 & s_3 & 0 \\ -s_3 & c_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ a_1\dot{\theta}_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -s_2\dot{\theta}_1 \\ -c_2\dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$$

$${}^3v_3 = \begin{bmatrix} c_3 & s_3 & 0 \\ -s_3 & c_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ a_1\dot{\theta}_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ a_2\dot{\theta}_2 \\ a_2c_2\dot{\theta}_1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} c_3 & s_3 & 0 \\ -s_3 & c_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} 0 \\ a_2\dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_1(a_1 + a_2c_2) \end{bmatrix} \right)$$

$${}^3v_3 = \begin{bmatrix} s_3a_2\dot{\theta}_2 \\ c_3a_2\dot{\theta}_2 \\ (a_1 + a_2c_2)\dot{\theta}_1 \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

Para  $i = 3$ :

$${}^4\omega_4 = {}^4R^3\omega_3 + \dot{\theta}_4 \hat{Z}_4$$

Donde:  ${}^4R$  es la transpuesta de la matriz de rotación en la Ecuación (3.12).

$$\begin{aligned}
{}^4\omega_4 &= \begin{bmatrix} c_4 & 0 & -s_4 \\ -s_4 & 0 & -c_4 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -s_{23}\dot{\theta}_1 \\ -c_{23}\dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_4 \end{bmatrix} \\
{}^4\omega_4 &= \begin{bmatrix} -c_4s_{23}\dot{\theta}_1 - s_4\dot{\theta}_2 - s_4\dot{\theta}_3 \\ s_4s_{23}\dot{\theta}_1 - c_4\dot{\theta}_2 - c_4\dot{\theta}_3 \\ -c_{23}\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_4 \end{bmatrix} \tag{4.24}
\end{aligned}$$

$${}^4v_4 = {}^4R({}^3v_3 + {}^3\omega_3 \times {}^3P_4)$$

$$\begin{aligned}
{}^4v_4 &= \begin{bmatrix} c_4 & 0 & -s_4 \\ -s_4 & 0 & -c_4 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} s_3a_2\dot{\theta}_2 \\ c_3a_2\dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_1(a_1 + a_2c_2) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -s_{23}\dot{\theta}_1 \\ -c_{23}\dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ d_4 \\ 0 \end{bmatrix} \right) \\
{}^4v_4 &= \begin{bmatrix} c_4 & 0 & -s_4 \\ -s_4 & 0 & -c_4 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} s_3a_2\dot{\theta}_2 \\ c_3a_2\dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_1(a_1 + a_2c_2) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -d_4\dot{\theta}_2 - d_4\dot{\theta}_3 \\ 0 \\ -s_{23}d_4\dot{\theta}_1 \end{bmatrix} \right) \\
{}^4v_4 &= \begin{bmatrix} c_4 & 0 & -s_4 \\ -s_4 & 0 & -c_4 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (s_3a_2 - d_4)\dot{\theta}_2 - d_4\dot{\theta}_3 \\ c_3a_2\dot{\theta}_2 \\ (a_1 + a_2c_2 - s_{23}d_4)\dot{\theta}_1 \end{bmatrix} \\
{}^4v_4 &= \begin{bmatrix} (s_3c_4a_2 - c_4d_4)\dot{\theta}_2 - c_4d_4\dot{\theta}_3 - (a_1s_4 + a_2c_2s_4 - s_{23}s_4d_4)\dot{\theta}_1 \\ (-s_3s_4a_2 + s_4d_4)\dot{\theta}_2 + s_4d_4\dot{\theta}_3 - (a_1c_4 + a_2c_2c_4 - s_{23}c_4d_4)\dot{\theta}_1 \\ c_3a_2\dot{\theta}_2 \end{bmatrix} \tag{4.25}
\end{aligned}$$

Para  $i = 4$ :

$${}^5\omega_5 = {}^5R^4\omega_4 + \dot{\theta}_5 \hat{Z}_5$$

Donde:  ${}^5R$  es la transpuesta de la matriz de rotación en la Ecuación (3.13).

$${}^5\omega_5 = \begin{bmatrix} c_5 & 0 & s_5 \\ -s_5 & 0 & c_5 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -c_4s_{23}\dot{\theta}_1 - s_4\dot{\theta}_2 - s_4\dot{\theta}_3 \\ s_4s_{23}\dot{\theta}_1 - c_4\dot{\theta}_2 - c_4\dot{\theta}_3 \\ -c_{23}\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_5 \end{bmatrix}$$

$${}^5\omega_5 = \begin{bmatrix} -c_5c_4s_{23}\dot{\theta}_1 - c_5s_4\dot{\theta}_2 - c_5s_4\dot{\theta}_3 - s_5c_{23}\dot{\theta}_1 + s_5\dot{\theta}_4 \\ s_5c_4s_{23}\dot{\theta}_1 + s_5s_4\dot{\theta}_2 + s_5s_4\dot{\theta}_3 - c_5c_{23}\dot{\theta}_1 + c_5\dot{\theta}_4 \\ -s_4s_{23}\dot{\theta}_1 + c_4\dot{\theta}_2 + c_4\dot{\theta}_3 + \dot{\theta}_5 \end{bmatrix}$$

$${}^5\omega_5 = \begin{bmatrix} (-c_5c_4s_{23} - s_5c_{23})\dot{\theta}_1 - c_5s_4\dot{\theta}_2 - c_5s_4\dot{\theta}_3 + s_5\dot{\theta}_4 \\ (s_5c_4s_{23} - c_5c_{23})\dot{\theta}_1 + s_5s_4\dot{\theta}_2 + s_5s_4\dot{\theta}_3 + c_5\dot{\theta}_4 \\ -s_4s_{23}\dot{\theta}_1 + c_4\dot{\theta}_2 + c_4\dot{\theta}_3 + \dot{\theta}_5 \end{bmatrix} \quad (4.26)$$

$${}^5V_5 = {}^5R({}^4v_4 + {}^4\omega_4 \times {}^4P_5)$$

$${}^5V_5 = \begin{bmatrix} c_5 & 0 & s_5 \\ -s_5 & 0 & c_5 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} (s_3c_4a_2 - c_4d_4)\dot{\theta}_2 - c_4d_4\dot{\theta}_3 - (a_1s_4 + a_2c_2s_4 - s_{23}s_4d_4)\dot{\theta}_1 \\ (-s_3s_4a_2 + s_4d_4)\dot{\theta}_2 + s_4d_4\dot{\theta}_3 - (a_1c_4 + a_2c_2c_4 - s_{23}c_4d_4)\dot{\theta}_1 \\ c_3a_2\dot{\theta}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -c_4s_{23}\dot{\theta}_1 - s_4\dot{\theta}_2 - s_4\dot{\theta}_3 \\ s_4s_{23}\dot{\theta}_1 - c_4\dot{\theta}_2 - c_4\dot{\theta}_3 \\ -c_{23}\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$$

$$\begin{aligned}
{}^5V_5 &= \begin{bmatrix} c_5 & 0 & s_5 \\ -s_5 & 0 & c_5 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (s_3c_4a_2 - c_4d_4)\dot{\theta}_2 - c_4d_4\dot{\theta}_3 - (a_1s_4 + a_2c_2s_4 - s_{23}s_4d_4)\dot{\theta}_1 \\ (-s_3s_4a_2 + s_4d_4)\dot{\theta}_2 + s_4d_4\dot{\theta}_3 - (a_1c_4 + a_2c_2c_4 - s_{23}c_4d_4)\dot{\theta}_1 \\ c_3a_2\dot{\theta}_2 \end{bmatrix} \\
{}^5V_5 &= \begin{bmatrix} -(a_1s_4c_5 + a_2c_2s_4c_5 - s_{23}s_4c_5d_4)\dot{\theta}_1 + (s_3c_4c_5a_2 - c_4c_5d_4 + s_5c_3a_2)\dot{\theta}_2 - c_5c_4d_4\dot{\theta}_3 \\ (a_1s_4s_5 + a_2c_2s_4s_5 - s_{23}s_4s_5d_4)\dot{\theta}_1 - (s_3c_4s_5a_2 - c_4s_5d_4 - c_5c_3a_2)\dot{\theta}_2 + s_5c_4d_4\dot{\theta}_3 \\ (a_1c_4 + a_2c_2c_4 - s_{23}c_4d_4)\dot{\theta}_1 + (s_3s_4a_2 - s_4d_4)\dot{\theta}_2 - s_4d_4\dot{\theta}_3 \end{bmatrix} \quad (4.27)
\end{aligned}$$

Para  $i = 5$  :

$${}^6\omega_6 = {}^6R^5\omega_5 + \dot{\theta}_6 \hat{Z}_6$$

Donde:  ${}^6R$  es la transpuesta de la matriz de rotación en la Ecuación (3.14).

$$\begin{aligned}
{}^6\omega_6 &= \begin{bmatrix} c_6 & 0 & -s_6 \\ -s_6 & 0 & -c_5 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (-c_5c_4s_{23} - s_5c_{23})\dot{\theta}_1 - c_5s_4\dot{\theta}_2 - c_5s_4\dot{\theta}_3 + s_5\dot{\theta}_4 \\ (s_5c_4s_{23} - c_5c_{23})\dot{\theta}_1 + s_5s_4\dot{\theta}_2 + s_5s_4\dot{\theta}_3 + c_5\dot{\theta}_4 \\ -s_4s_{23}\dot{\theta}_1 + c_4\dot{\theta}_2 + c_4\dot{\theta}_3 + \dot{\theta}_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_6 \end{bmatrix} \\
{}^6\omega_6 &= \begin{bmatrix} (-c_6c_5c_4s_{23} - c_6s_5c_{23} + s_6s_4s_{23})\dot{\theta}_1 - (c_6c_5s_4 + s_6c_4)\dot{\theta}_2 - (c_6c_5s_4 + s_6c_4)\dot{\theta}_3 + c_6s_5\dot{\theta}_4 - s_6\dot{\theta}_5 \\ (s_6c_5c_4s_{23} + s_6s_5c_{23} + c_6s_4s_{23})\dot{\theta}_1 + (s_6c_5s_4 - c_6c_4)\dot{\theta}_2 + (s_6c_5s_4 - c_6c_4)\dot{\theta}_3 - s_6s_5\dot{\theta}_4 - c_6\dot{\theta}_5 \\ (s_5c_4s_{23} - c_5c_{23})\dot{\theta}_1 + s_5s_4\dot{\theta}_2 + s_5s_4\dot{\theta}_3 + c_5\dot{\theta}_4 + \dot{\theta}_6 \end{bmatrix} \quad (4.28)
\end{aligned}$$

$${}^6v_6 = {}^6R({}^5v_5 + {}^5\omega_5 \times {}^5P_6)$$

Como  ${}^5P_6 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ , se tiene que:

$${}^5\omega_5 \times {}^5P_6 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto:

$${}^6v_6 = {}^6R{}^5v_5$$

$${}^6v_6 = \begin{bmatrix} c_6 & 0 & -s_6 \\ -s_6 & 0 & -c_6 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -(a_1s_4c_5 + a_2c_2s_4c_5 - s_{23}s_4c_5d_4)\dot{\theta}_1 + (s_3c_4c_5a_2 - c_4c_5d_4 + s_5c_3a_2)\dot{\theta}_2 - c_5c_4d_4\dot{\theta}_3 \\ (a_1s_4s_5 + a_2c_2s_4s_5 - s_{23}s_4s_5d_4)\dot{\theta}_1 - (s_3c_4s_5a_2 - c_4s_5d_4 - c_5c_3a_2)\dot{\theta}_2 + s_5c_4d_4\dot{\theta}_3 \\ (a_1c_4 + a_2c_2c_4 - s_{23}c_4d_4)\dot{\theta}_1 + (s_3s_4a_2 - s_4d_4)\dot{\theta}_2 - s_4d_4\dot{\theta}_3 \end{bmatrix}$$

$${}^6v_6 = \begin{bmatrix} (-a_1s_4c_5c_6 - a_2c_2s_4c_5c_6 + s_{23}s_4c_5c_6d_4 - a_1c_4s_6 - a_2c_2c_4s_6 + s_{23}c_4s_6d_4)\dot{\theta}_1 \\ + (s_3c_4c_5c_6a_2 - c_4c_5c_6d_4 + c_6s_5c_3a_2 - s_3s_4s_6a_2 - s_4s_6d_4)\dot{\theta}_2 \\ + (-c_6c_5c_4d_4 + s_6s_4d_4)\dot{\theta}_3 \\ (a_1s_4c_5s_6 + a_2c_2s_4c_5s_6 - s_{23}s_4c_5s_6d_4 - a_1c_4c_6 - a_2c_2c_4c_6 + s_{23}c_4c_6d_4)\dot{\theta}_1 \\ - (s_3c_4c_5s_6a_2 - c_4c_5s_6d_4 + s_6s_5c_3a_2 - s_3s_4c_6a_2 + s_4c_6d_4)\dot{\theta}_2 \\ + (s_6c_5c_4d_4 + c_6s_4d_4)\dot{\theta}_3 \\ (a_1s_4s_5 + a_2c_2s_4s_5 - s_{23}s_4s_5d_4)\dot{\theta}_1 - (s_3c_4s_5a_2 - c_4s_5d_4 - c_5c_3a_2)\dot{\theta}_2 \\ + s_5c_4d_4\dot{\theta}_3 \end{bmatrix} \quad (4.29)$$

Una vez que se han determinado las velocidades de cada uno de los eslabones, es necesario premultiplicar cada una de las ecuaciones de las velocidades obtenidas por una matriz de transformación para relacionarlas con la base. La ecuación (3.22) relaciona la posición y orientación del extremo final con la base y es esta ecuación la que se ha de utilizar para relacionar las velocidades de cada eslabón con la base del manipulador.

Hay que recordar que la matriz de transformación homogénea que representa la posición y orientación relativa entre los sistemas asociados a los eslabones consecutivos del robot se representa por la ecuación (3.2). De esta ecuación se extrae  ${}^i{}_{i+1}R$  que es la ecuación que se multiplicará por cada una de las velocidades que se desea relacionar con la base del manipulador. Por lo tanto, para relacionar la velocidad lineal  ${}^6v_6$  con la base tenemos que:

$${}^0v_6 = {}^0R^6v_6 \quad (4.30)$$

Donde  ${}^0R$  es igual a la matriz de rotación del resultado dado en la Ecuación (3.23), reescribiendo la Ecuación (4.30) tenemos:

$${}^0v_6 = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x \\ n_y & o_y & a_y \\ n_z & o_z & a_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^6v_{6x} \\ {}^6v_{6y} \\ {}^6v_{6z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_x {}^6v_{6x} + o_x {}^6v_{6y} + a_x {}^6v_{6z} \\ n_y {}^6v_{6x} + o_y {}^6v_{6y} + a_y {}^6v_{6z} \\ n_z {}^6v_{6x} + o_z {}^6v_{6y} + a_z {}^6v_{6z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^0v_{6x} \\ {}^0v_{6y} \\ {}^0v_{6z} \end{bmatrix} \quad (4.31)$$

Por lo tanto:

$${}^0v_{6x} = n_x {}^6v_{6x} + o_x {}^6v_{6y} + a_x {}^6v_{6z} \quad (4.32)$$

Donde:

$$n_x = (c_1c_{23}c_4c_5c_6 - c_1c_{23}s_4s_6 - c_1s_{23}s_5c_6 + s_1s_4c_5c_6 + s_1c_4s_6)$$

$$o_x = (-c_1c_{23}c_4c_5s_6 - c_1c_{23}s_4c_6 + c_1s_{23}s_5s_6 + s_1s_4c_5s_6 + s_1c_4c_6)$$

$$a_x = (-c_1c_{23}c_4s_5 - c_1s_{23}c_5 - s_1s_4s_5)$$

$$\begin{aligned}
{}^6v_{6x} &= (-a_1s_4c_5c_6 - a_2c_2s_4c_5c_6 + s_{23}s_4c_5c_6d_4 - a_1c_4s_6 - a_2c_2c_4s_6 + s_{23}c_4s_6d_4)\dot{\theta}_1 \\
&\quad + (s_3c_4c_5c_6a_2 - c_4c_5c_6d_4 + c_6s_5c_3a_2 - s_3s_4s_6a_2 - s_4s_6d_4)\dot{\theta}_2 \\
&\quad + (-c_6c_5c_4d_4 + s_6s_4d_4)\dot{\theta}_3 \\
{}^6v_{6y} &= (a_1s_4c_5s_6 + a_2c_2s_4c_5s_6 - s_{23}s_4c_5s_6d_4 - a_1c_4c_6 - a_2c_2c_4c_6 + s_{23}c_4c_6d_4)\dot{\theta}_1 \\
&\quad - (s_3c_4c_5s_6a_2 - c_4c_5s_6d_4 + s_6s_5c_3a_2 - s_3s_4c_6a_2 + s_4c_6d_4)\dot{\theta}_2 \\
&\quad + (s_6c_5c_4d_4 + c_6s_4d_4)\dot{\theta}_3 \\
{}^6v_{6z} &= (a_1s_4s_5 + a_2c_2s_4s_5 - s_{23}s_4s_5d_4)\dot{\theta}_1 - (s_3c_4s_5a_2 - c_4s_5d_4 - c_5c_3a_2)\dot{\theta}_2 \\
&\quad + s_5c_4d_4\dot{\theta}_3
\end{aligned}$$

Reescribiendo la Ecuación (4.32), tenemos:

$$\begin{aligned}
{}^0v_{6x} &= \left( \begin{array}{l} \left( \begin{array}{l} c_1c_{23}c_4c_5c_6 - c_1c_{23}s_4s_6 - c_1s_{23}s_5c_6 \\ +s_1s_4c_5c_6 + s_1c_4s_6 \end{array} \right) \left( \begin{array}{l} -a_1s_4c_5c_6 - a_2c_2s_4c_5c_6 + s_{23}s_4c_5c_6d_4 \\ -a_1c_4s_6 - a_2c_2c_4s_6 + s_{23}c_4s_6d_4 \end{array} \right) \\ + \left( \begin{array}{l} -c_1c_{23}c_4c_5s_6 - c_1c_{23}s_4c_6 + c_1s_{23}s_5s_6 \\ +s_1s_4c_5s_6 + s_1c_4c_6 \end{array} \right) \left( \begin{array}{l} a_1s_4c_5s_6 + a_2c_2s_4c_5s_6 - s_{23}s_4c_5s_6d_4 \\ -a_1c_4c_6 - a_2c_2c_4c_6 + s_{23}c_4c_6d_4 \end{array} \right) \\ + (-c_1c_{23}c_4s_5 - c_1s_{23}c_5 - s_1s_4s_5)(a_1s_4s_5 + a_2c_2s_4s_5 - s_{23}s_4s_5d_4) \end{array} \right) \dot{\theta}_1 \\
&\quad + \left( \begin{array}{l} \left( \begin{array}{l} c_1c_{23}c_4c_5c_6 - c_1c_{23}s_4s_6 - c_1s_{23}s_5c_6 \\ +s_1s_4c_5c_6 + s_1c_4s_6 \end{array} \right) \left( \begin{array}{l} s_3c_4c_5c_6a_2 - c_4c_5c_6d_4 + c_6s_5c_3a_2 \\ -s_3s_4s_6a_2 - s_4s_6d_4 \end{array} \right) \\ - \left( \begin{array}{l} -c_1c_{23}c_4c_5s_6 - c_1c_{23}s_4c_6 + c_1s_{23}s_5s_6 \\ +s_1s_4c_5s_6 + s_1c_4c_6 \end{array} \right) \left( \begin{array}{l} s_3c_4c_5s_6a_2 - c_4c_5s_6d_4 + s_6s_5c_3a_2 \\ -s_3s_4c_6a_2 + s_4c_6d_4 \end{array} \right) \\ - (-c_1c_{23}c_4s_5 - c_1s_{23}c_5 - s_1s_4s_5)(s_3c_4s_5a_2 - c_4s_5d_4 - c_5c_3a_2) \end{array} \right) \dot{\theta}_2
\end{array}$$

$$+ \begin{pmatrix} \left( \begin{array}{l} c_1 c_{23} c_4 c_5 c_6 - c_1 c_{23} s_4 s_6 - c_1 s_{23} s_5 c_6 \\ + s_1 s_4 c_5 c_6 + s_1 c_4 s_6 \end{array} \right) (-c_6 c_5 c_4 d_4 + s_6 s_4 d_4) \\ + \left( \begin{array}{l} -c_1 c_{23} c_4 c_5 s_6 - c_1 c_{23} s_4 c_6 + c_1 s_{23} s_5 s_6 \\ + s_1 s_4 c_5 s_6 + s_1 c_4 c_6 \end{array} \right) (s_6 c_5 c_4 d_4 + c_6 s_4 d_4) \\ + (-c_1 c_{23} c_4 s_5 - c_1 s_{23} c_5 - s_1 s_4 s_5) (s_5 c_4 d_4) \end{pmatrix} \dot{\theta}_3 \quad (4.33)$$

De la misma forma, para:

$${}^0 v_{6y} = n_y {}^6 v_{6x} + o_y {}^6 v_{6y} + a_y {}^6 v_{6z} \quad (4.34)$$

Donde:

$$n_y = (s_1 c_{23} c_4 c_5 c_6 - s_1 c_{23} s_4 s_6 - s_1 s_{23} s_5 c_6 - c_1 s_4 c_5 c_6 - c_1 c_4 s_6)$$

$$o_y = (-s_1 c_{23} c_4 c_5 s_6 - s_1 c_{23} s_4 c_6 + s_1 s_{23} s_5 s_6 + c_1 s_4 c_5 s_6 - c_1 c_4 c_6)$$

$$a_y = (-s_1 c_{23} c_4 s_5 - s_1 s_{23} c_5 + c_1 s_4 s_5)$$

Reescribiendo la Ecuación (4.34), tenemos:

$${}^0 v_{6y} = \begin{pmatrix} \left( \begin{array}{l} s_1 c_{23} c_4 c_5 c_6 - s_1 c_{23} s_4 s_6 - s_1 s_{23} s_5 c_6 \\ -c_1 s_4 c_5 c_6 - c_1 c_4 s_6 \end{array} \right) \left( \begin{array}{l} -a_1 s_4 c_5 c_6 - a_2 c_2 s_4 c_5 c_6 + s_{23} s_4 c_5 c_6 d_4 \\ -a_1 c_4 s_6 - a_2 c_2 c_4 s_6 + s_{23} c_4 s_6 d_4 \end{array} \right) \\ + \left( \begin{array}{l} -s_1 c_{23} c_4 c_5 s_6 - s_1 c_{23} s_4 c_6 + s_1 s_{23} s_5 s_6 \\ + c_1 s_4 c_5 s_6 - c_1 c_4 c_6 \end{array} \right) \left( \begin{array}{l} a_1 s_4 c_5 s_6 + a_2 c_2 s_4 c_5 s_6 - s_{23} s_4 c_5 s_6 d_4 \\ -a_1 c_4 c_6 - a_2 c_2 c_4 c_6 + s_{23} c_4 c_6 d_4 \end{array} \right) \\ + (-s_1 c_{23} c_4 s_5 - s_1 s_{23} c_5 + c_1 s_4 s_5) (a_1 s_4 s_5 + a_2 c_2 s_4 s_5 - s_{23} s_4 s_5 d_4) \end{pmatrix} \dot{\theta}_1$$



$$\begin{aligned}
& + \left( \begin{array}{l} \left( \begin{array}{l} s_1 c_{23} c_4 c_5 c_6 - s_1 c_{23} s_4 s_6 - s_1 s_{23} s_5 c_6 \\ -c_1 s_4 c_5 c_6 - c_1 c_4 s_6 \end{array} \right) \left( \begin{array}{l} s_3 c_4 c_5 c_6 a_2 - c_4 c_5 c_6 d_4 + c_6 s_5 c_3 a_2 \\ -s_3 s_4 s_6 a_2 - s_4 s_6 d_4 \end{array} \right) \\ - \left( \begin{array}{l} -s_1 c_{23} c_4 c_5 s_6 - s_1 c_{23} s_4 c_6 + s_1 s_{23} s_5 s_6 \\ +c_1 s_4 c_5 s_6 - c_1 c_4 c_6 \end{array} \right) \left( \begin{array}{l} s_3 c_4 c_5 s_6 a_2 - c_4 c_5 s_6 d_4 + s_6 s_5 c_3 a_2 \\ -s_3 s_4 c_6 a_2 + s_4 c_6 d_4 \end{array} \right) \\ - \left( -s_1 c_{23} c_4 s_5 - s_1 s_{23} c_5 + c_1 s_4 s_5 \right) (s_3 c_4 s_5 a_2 - c_4 s_5 d_4 - c_5 c_3 a_2) \end{array} \right) \dot{\theta}_2 \\
& + \left( \begin{array}{l} \left( \begin{array}{l} s_1 c_{23} c_4 c_5 c_6 - s_1 c_{23} s_4 s_6 - s_1 s_{23} s_5 c_6 \\ -c_1 s_4 c_5 c_6 - c_1 c_4 s_6 \end{array} \right) (-c_6 c_5 c_4 d_4 + s_6 s_4 d_4) \\ + \left( \begin{array}{l} -s_1 c_{23} c_4 c_5 s_6 - s_1 c_{23} s_4 c_6 + s_1 s_{23} s_5 s_6 \\ +c_1 s_4 c_5 s_6 - c_1 c_4 c_6 \end{array} \right) (s_6 c_5 c_4 d_4 + c_6 s_4 d_4) \\ + \left( -s_1 c_{23} c_4 s_5 - s_1 s_{23} c_5 + c_1 s_4 s_5 \right) (s_5 c_4 d_4) \end{array} \right) \dot{\theta}_3 \quad (4.35)
\end{aligned}$$

De la misma forma, para:

$${}^0v_{6z} = n_z {}^6v_{6x} + o_z {}^6v_{6y} + a_z {}^6v_{6z} \quad (4.36)$$

Donde:

$$n_z = (-s_{23} c_4 c_5 c_6 + s_{23} s_4 s_6 - c_{23} s_5 c_6)$$

$$o_z = (s_{23} c_4 c_5 s_6 + s_{23} s_4 c_6 + c_{23} s_5 s_6)$$

$$a_z = (s_{23} c_4 s_5 - c_{23} c_5)$$

Reescribiendo la Ecuación (4.36), tenemos:

$${}^0v_{6z} = \left( \begin{array}{l} \left( -s_{23} c_4 c_5 c_6 + s_{23} s_4 s_6 - c_{23} s_5 c_6 \right) \left( \begin{array}{l} -a_1 s_4 c_5 c_6 - a_2 c_2 s_4 c_5 c_6 + s_{23} s_4 c_5 c_6 d_4 \\ -a_1 c_4 s_6 - a_2 c_2 c_4 s_6 + s_{23} c_4 s_6 d_4 \end{array} \right) \\ + \left( s_{23} c_4 c_5 s_6 + s_{23} s_4 c_6 + c_{23} s_5 s_6 \right) \left( \begin{array}{l} a_1 s_4 c_5 s_6 + a_2 c_2 s_4 c_5 s_6 - s_{23} s_4 c_5 s_6 d_4 \\ -a_1 c_4 c_6 - a_2 c_2 c_4 c_6 + s_{23} c_4 c_6 d_4 \end{array} \right) \\ + \left( s_{23} c_4 s_5 - c_{23} c_5 \right) (a_1 s_4 s_5 + a_2 c_2 s_4 s_5 - s_{23} s_4 s_5 d_4) \end{array} \right) \dot{\theta}_1$$

$$\begin{aligned}
& + \begin{pmatrix} (-s_{23}c_4c_5c_6 + s_{23}s_4s_6 - c_{23}s_5c_6) \begin{pmatrix} s_3c_4c_5c_6a_2 - c_4c_5c_6d_4 + c_6s_5c_3a_2 \\ -s_3s_4s_6a_2 - s_4s_6d_4 \end{pmatrix} \\ - (s_{23}c_4c_5s_6 + s_{23}s_4c_6 + c_{23}s_5s_6) \begin{pmatrix} s_3c_4c_5s_6a_2 - c_4c_5s_6d_4 + s_6s_5c_3a_2 \\ -s_3s_4c_6a_2 + s_4c_6d_4 \end{pmatrix} \\ - (s_{23}c_4s_5 - c_{23}c_5) (s_3c_4s_5a_2 - c_4s_5d_4 - c_5c_3a_2) \end{pmatrix} \dot{\theta}_2 \\
& + \begin{pmatrix} (-s_{23}c_4c_5c_6 + s_{23}s_4s_6 - c_{23}s_5c_6) (-c_6c_5c_4d_4 + s_6s_4d_4) \\ + (s_{23}c_4c_5s_6 + s_{23}s_4c_6 + c_{23}s_5s_6) (s_6c_5c_4d_4 + c_6s_4d_4) \\ + (s_{23}c_4s_5 - c_{23}c_5) (s_5c_4d_4) \end{pmatrix} \dot{\theta}_3 \tag{4.37}
\end{aligned}$$

De la misma manera, para relacionar la velocidad rotacional  ${}^6\omega_6$  con la base tenemos que:

$${}^0w_6 = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x \\ n_y & o_y & a_y \\ n_z & o_z & a_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^6w_{6x} \\ {}^6w_{6y} \\ {}^6w_{6z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_x {}^6w_{6x} + o_x {}^6w_{6y} + a_x {}^6w_{6z} \\ n_y {}^6w_{6x} + o_y {}^6w_{6y} + a_y {}^6w_{6z} \\ n_z {}^6w_{6x} + o_z {}^6w_{6y} + a_z {}^6w_{6z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^0w_{6x} \\ {}^0w_{6y} \\ {}^0w_{6z} \end{bmatrix} \tag{4.38}$$

Por lo tanto:

$${}^0w_{6x} = n_x {}^6w_{6x} + o_x {}^6w_{6y} + a_x {}^6w_{6z} \tag{4.39}$$

Donde:

$$\begin{aligned}
{}^6\omega_{6x} &= (-c_6c_5c_4s_{23} - c_6s_5c_{23} + s_6s_4s_{23})\dot{\theta}_1 - (c_6c_5s_4 + s_6c_4)\dot{\theta}_2 - (c_6c_5s_4 + s_6c_4)\dot{\theta}_3 + c_6s_5\dot{\theta}_4 - s_6\dot{\theta}_5 \\
{}^6\omega_{6y} &= (s_6c_5c_4s_{23} + s_6s_5c_{23} + c_6s_4s_{23})\dot{\theta}_1 + (s_6c_5s_4 - c_6c_4)\dot{\theta}_2 + (s_6c_5s_4 - c_6c_4)\dot{\theta}_3 - s_6s_5\dot{\theta}_4 - c_6\dot{\theta}_5 \\
{}^6\omega_{6z} &= (s_5c_4s_{23} - c_5c_{23})\dot{\theta}_1 + s_5s_4\dot{\theta}_2 + s_5s_4\dot{\theta}_3 + c_5\dot{\theta}_4 + \dot{\theta}_5 \\
n_x &= (c_1c_{23}c_4c_5c_6 - c_1c_{23}s_4s_6 - c_1s_{23}s_5c_6 + s_1s_4c_5c_6 + s_1c_4s_6)
\end{aligned}$$

$$o_x = (-c_1 c_{23} c_4 c_5 s_6 - c_1 c_{23} s_4 c_6 + c_1 s_{23} s_5 s_6 + s_1 s_4 c_5 s_6 + s_1 c_4 c_6)$$

$$a_x = (-c_1 c_{23} c_4 s_5 - c_1 s_{23} c_5 - s_1 s_4 s_5)$$

Reescribiendo la Ecuación (4.39), tenemos:

$$\begin{aligned}
{}^0W_{6x} &= \left( \begin{array}{l} \left( c_1 c_{23} c_4 c_5 c_6 - c_1 c_{23} s_4 s_6 - c_1 s_{23} s_5 c_6 \right) \left( -c_6 c_5 c_4 s_{23} - c_6 s_5 c_{23} + s_6 s_4 s_{23} \right) \\ + s_1 s_4 c_5 c_6 + s_1 c_4 s_6 \\ + \left( -c_1 c_{23} c_4 c_5 s_6 - c_1 c_{23} s_4 c_6 + c_1 s_{23} s_5 s_6 \right) \left( s_6 c_5 c_4 s_{23} + s_6 s_5 c_{23} + c_6 s_4 s_{23} \right) \\ + s_1 s_4 c_5 s_6 + s_1 c_4 c_6 \\ + \left( -c_1 c_{23} c_4 s_5 - c_1 s_{23} c_5 - s_1 s_4 s_5 \right) \left( s_5 c_4 s_{23} - c_5 c_{23} \right) \end{array} \right) \dot{\theta}_1 \\
&+ \left( \begin{array}{l} - \left( c_1 c_{23} c_4 c_5 c_6 - c_1 c_{23} s_4 s_6 - c_1 s_{23} s_5 c_6 \right) \left( c_6 c_5 s_4 + s_6 c_4 \right) \\ + s_1 s_4 c_5 c_6 + s_1 c_4 s_6 \\ + \left( -c_1 c_{23} c_4 c_5 s_6 - c_1 c_{23} s_4 c_6 + c_1 s_{23} s_5 s_6 \right) \left( s_6 c_5 s_4 - c_6 c_4 \right) \\ + s_1 s_4 c_5 s_6 + s_1 c_4 c_6 \\ + \left( -c_1 c_{23} c_4 s_5 - c_1 s_{23} c_5 - s_1 s_4 s_5 \right) \left( s_5 s_4 \right) \end{array} \right) \dot{\theta}_2 \\
&+ \left( \begin{array}{l} - \left( c_1 c_{23} c_4 c_5 c_6 - c_1 c_{23} s_4 s_6 - c_1 s_{23} s_5 c_6 \right) \left( c_6 c_5 s_4 + s_6 c_4 \right) \\ + s_1 s_4 c_5 c_6 + s_1 c_4 s_6 \\ + \left( -c_1 c_{23} c_4 c_5 s_6 - c_1 c_{23} s_4 c_6 + c_1 s_{23} s_5 s_6 \right) \left( s_6 c_5 s_4 - c_6 c_4 \right) \\ + s_1 s_4 c_5 s_6 + s_1 c_4 c_6 \\ + \left( -c_1 c_{23} c_4 s_5 - c_1 s_{23} c_5 - s_1 s_4 s_5 \right) \left( s_5 s_4 \right) \end{array} \right) \dot{\theta}_3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \begin{pmatrix} \left( \begin{array}{l} c_1 c_{23} c_4 c_5 c_6 - c_1 c_{23} s_4 s_6 - c_1 s_{23} s_5 c_6 \\ + s_1 s_4 c_5 c_6 + s_1 c_4 s_6 \end{array} \right) (c_6 s_5) \\ + \left( \begin{array}{l} -c_1 c_{23} c_4 c_5 s_6 - c_1 c_{23} s_4 c_6 + c_1 s_{23} s_5 s_6 \\ + s_1 s_4 c_5 s_6 + s_1 c_4 c_6 \end{array} \right) (-s_6 s_5) \\ + \left( -c_1 c_{23} c_4 s_5 - c_1 s_{23} c_5 - s_1 s_4 s_5 \right) (c_5) \end{pmatrix} \dot{\theta}_4 \\
& + \begin{pmatrix} \left( \begin{array}{l} c_1 c_{23} c_4 c_5 c_6 - c_1 c_{23} s_4 s_6 - c_1 s_{23} s_5 c_6 \\ + s_1 s_4 c_5 c_6 + s_1 c_4 s_6 \end{array} \right) (-s_6) \\ + \left( \begin{array}{l} -c_1 c_{23} c_4 c_5 s_6 - c_1 c_{23} s_4 c_6 + c_1 s_{23} s_5 s_6 \\ + s_1 s_4 c_5 s_6 + s_1 c_4 c_6 \end{array} \right) (-c_6) \end{pmatrix} \dot{\theta}_5 \\
& + \left( -c_1 c_{23} c_4 s_5 - c_1 s_{23} c_5 - s_1 s_4 s_5 \right) \dot{\theta}_6 \tag{4.40}
\end{aligned}$$

De la misma forma, para:

$${}^0 w_{6y} = n_y {}^6 w_{6x} + o_y {}^6 w_{6y} + a_y {}^6 w_{6z} \tag{4.41}$$

Donde:

$$\begin{aligned}
n_y &= (s_1 c_{23} c_4 c_5 c_6 - s_1 c_{23} s_4 s_6 - s_1 s_{23} s_5 c_6 - c_1 s_4 c_5 c_6 - c_1 c_4 s_6) \\
o_y &= (-s_1 c_{23} c_4 c_5 s_6 - s_1 c_{23} s_4 c_6 + s_1 s_{23} s_5 s_6 + c_1 s_4 c_5 s_6 - c_1 c_4 c_6) \\
a_y &= (-s_1 c_{23} c_4 s_5 - s_1 s_{23} c_5 + c_1 s_4 s_5)
\end{aligned}$$

Reescribiendo la Ecuación (4.41), tenemos:

$${}^0 w_{6y} = \begin{pmatrix} \left( \begin{array}{l} s_1 c_{23} c_4 c_5 c_6 - s_1 c_{23} s_4 s_6 - s_1 s_{23} s_5 c_6 \\ -c_1 s_4 c_5 c_6 - c_1 c_4 s_6 \end{array} \right) (-c_6 c_5 c_4 s_{23} - c_6 s_5 c_{23} + s_6 s_4 s_{23}) \\ + \left( \begin{array}{l} -s_1 c_{23} c_4 c_5 s_6 - s_1 c_{23} s_4 c_6 + s_1 s_{23} s_5 s_6 \\ + c_1 s_4 c_5 s_6 - c_1 c_4 c_6 \end{array} \right) (s_6 c_5 c_4 s_{23} + s_6 s_5 c_{23} + c_6 s_4 s_{23}) \\ + \left( -s_1 c_{23} c_4 s_5 - s_1 s_{23} c_5 + c_1 s_4 s_5 \right) (s_5 c_4 s_{23} - c_5 c_{23}) \end{pmatrix} \dot{\theta}_1$$

$$\begin{aligned}
& + \left( \begin{array}{l} - \left( \begin{array}{l} s_1 c_{23} c_4 c_5 c_6 - s_1 c_{23} s_4 s_6 - s_1 s_{23} s_5 c_6 \\ -c_1 s_4 c_5 c_6 - c_1 c_4 s_6 \end{array} \right) (c_6 c_5 s_4 + s_6 c_4) \\ + \left( \begin{array}{l} -s_1 c_{23} c_4 c_5 s_6 - s_1 c_{23} s_4 c_6 + s_1 s_{23} s_5 s_6 \\ +c_1 s_4 c_5 s_6 - c_1 c_4 c_6 \end{array} \right) (s_6 c_5 s_4 - c_6 c_4) \\ + (-s_1 c_{23} c_4 s_5 - s_1 s_{23} c_5 + c_1 s_4 s_5) (s_5 s_4) \end{array} \right) \dot{\theta}_2 \\
& + \left( \begin{array}{l} - \left( \begin{array}{l} s_1 c_{23} c_4 c_5 c_6 - s_1 c_{23} s_4 s_6 - s_1 s_{23} s_5 c_6 \\ -c_1 s_4 c_5 c_6 - c_1 c_4 s_6 \end{array} \right) (c_6 c_5 s_4 + s_6 c_4) \\ + \left( \begin{array}{l} -s_1 c_{23} c_4 c_5 s_6 - s_1 c_{23} s_4 c_6 + s_1 s_{23} s_5 s_6 \\ +c_1 s_4 c_5 s_6 - c_1 c_4 c_6 \end{array} \right) (s_6 c_5 s_4 - c_6 c_4) \\ + (-s_1 c_{23} c_4 s_5 - s_1 s_{23} c_5 + c_1 s_4 s_5) (s_5 s_4) \end{array} \right) \dot{\theta}_3 \\
& + \left( \begin{array}{l} \left( \begin{array}{l} s_1 c_{23} c_4 c_5 c_6 - s_1 c_{23} s_4 s_6 - s_1 s_{23} s_5 c_6 \\ -c_1 s_4 c_5 c_6 - c_1 c_4 s_6 \end{array} \right) (c_6 s_5) \\ + \left( \begin{array}{l} -s_1 c_{23} c_4 c_5 s_6 - s_1 c_{23} s_4 c_6 + s_1 s_{23} s_5 s_6 \\ +c_1 s_4 c_5 s_6 - c_1 c_4 c_6 \end{array} \right) (-s_6 s_5) \\ + (-s_1 c_{23} c_4 s_5 - s_1 s_{23} c_5 + c_1 s_4 s_5) (c_5) \end{array} \right) \dot{\theta}_4 \\
& + \left( \begin{array}{l} \left( \begin{array}{l} s_1 c_{23} c_4 c_5 c_6 - s_1 c_{23} s_4 s_6 - s_1 s_{23} s_5 c_6 \\ -c_1 s_4 c_5 c_6 - c_1 c_4 s_6 \end{array} \right) (-s_6) \\ + \left( \begin{array}{l} -s_1 c_{23} c_4 c_5 s_6 - s_1 c_{23} s_4 c_6 + s_1 s_{23} s_5 s_6 \\ +c_1 s_4 c_5 s_6 - c_1 c_4 c_6 \end{array} \right) (-c_6) \end{array} \right) \dot{\theta}_5 \\
& + (-s_1 c_{23} c_4 s_5 - s_1 s_{23} c_5 + c_1 s_4 s_5) \dot{\theta}_6
\end{aligned} \tag{4.42}$$

De la misma forma, para:

$${}^0 w_{6z} = n_z {}^6 w_{6x} + o_z {}^6 w_{6y} + a_z {}^6 w_{6z} \tag{4.43}$$

Donde:

$$n_z = (-s_{23}c_4c_5c_6 + s_{23}s_4s_6 - c_{23}s_5c_6)$$

$$o_z = (s_{23}c_4c_5s_6 + s_{23}s_4c_6 + c_{23}s_5s_6)$$

$$a_z = (s_{23}c_4s_5 - c_{23}c_5)$$

Reescribiendo la Ecuación (4.43), tenemos:

$$\begin{aligned}
{}^0W_{6z} &= \begin{pmatrix} (-s_{23}c_4c_5c_6 + s_{23}s_4s_6 - c_{23}s_5c_6)(-c_6c_5c_4s_{23} - c_6s_5c_{23} + s_6s_4s_{23}) \\ + (s_{23}c_4c_5s_6 + s_{23}s_4c_6 + c_{23}s_5s_6)(s_6c_5c_4s_{23} + s_6s_5c_{23} + c_6s_4s_{23}) \\ + (s_{23}c_4s_5 - c_{23}c_5)(s_5c_4s_{23} - c_5c_{23}) \end{pmatrix} \dot{\theta}_1 \\
&+ \begin{pmatrix} -(-s_{23}c_4c_5c_6 + s_{23}s_4s_6 - c_{23}s_5c_6)(c_6c_5s_4 + s_6c_4) \\ + (s_{23}c_4c_5s_6 + s_{23}s_4c_6 + c_{23}s_5s_6)(s_6c_5s_4 - c_6c_4) \\ + (s_{23}c_4s_5 - c_{23}c_5)(s_5s_4) \end{pmatrix} \dot{\theta}_2 \\
&+ \begin{pmatrix} -(-s_{23}c_4c_5c_6 + s_{23}s_4s_6 - c_{23}s_5c_6)(c_6c_5s_4 + s_6c_4) \\ + (s_{23}c_4c_5s_6 + s_{23}s_4c_6 + c_{23}s_5s_6)(s_6c_5s_4 - c_6c_4) \\ + (s_{23}c_4s_5 - c_{23}c_5)(s_5s_4) \end{pmatrix} \dot{\theta}_3 \\
&+ \begin{pmatrix} (-s_{23}c_4c_5c_6 + s_{23}s_4s_6 - c_{23}s_5c_6)(c_6s_5) \\ + (s_{23}c_4c_5s_6 + s_{23}s_4c_6 + c_{23}s_5s_6)(-s_6s_5) \\ + (s_{23}c_4s_5 - c_{23}c_5)(c_5) \end{pmatrix} \dot{\theta}_4 \\
&+ \begin{pmatrix} (-s_{23}c_4c_5c_6 + s_{23}s_4s_6 - c_{23}s_5c_6)(-s_6) \\ + (s_{23}c_4c_5s_6 + s_{23}s_4c_6 + c_{23}s_5s_6)(-c_6) \end{pmatrix} \dot{\theta}_5 \\
&+ (s_{23}c_4s_5 - c_{23}c_5) \dot{\theta}_6
\end{aligned} \tag{4.44}$$

Las ecuaciones (4.33), (4.35) y (4.37), que representan el vector de velocidades del extremo final con respecto a la base del manipulador, pueden ser analizadas numéricamente con el simulador desarrollado que se presenta en el Capítulo 5.

#### 4.5 Análisis de las Fuerzas Estáticas del Robot Manipulador Propuesto

En esta sección se desarrollarán las expresiones analíticas para el análisis de las fuerzas estáticas ejercidas en el manipulador y los pares necesarios para que el manipulador se mantenga en equilibrio estático al aplicar una fuerza en su extremo. Se aplicaran las ecuaciones (4.13) y (4.14) sucesivamente, desde el sistema de referencia del extremo del manipulador hacia el sistema de referencia de la base y aplicando un vector de fuerzas  ${}^7F_7$  en el extremo del manipulador, como se ilustra en la Figura 4.6, considerando las siguientes condiciones iniciales:

$${}^7F_7 = \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix}; \quad {}^7n_7 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad {}^6P_7 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ L1 \end{bmatrix}$$

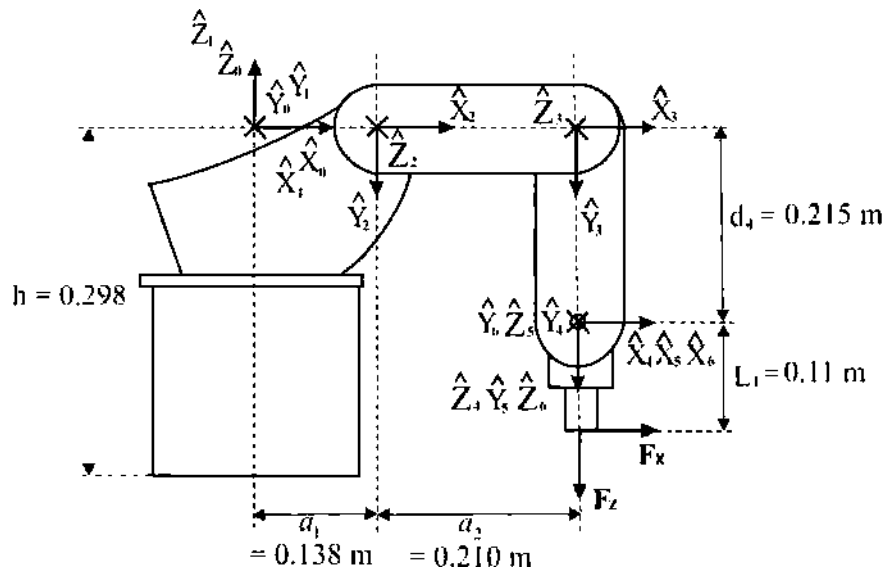


Figura 4.6 Asignación del vector de fuerzas  ${}^7F_7$  en el extremo del robot manipulador a analizar.

Para  $i = 6$ :

$${}^6f_6 = {}^6R^7 f_7$$

$$\text{Donde: } {}^6R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^6f_6 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix}$$

$${}^6f_6 = \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix} \tag{4.45}$$

$${}^6n_6 = {}^6R^7 n_7 + {}^6P_7 \times {}^6f_6$$

$${}^6n_6 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ L_1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix}$$

$${}^6n_6 = \begin{bmatrix} -L_1 F_y \\ L_1 F_x \\ 0 \end{bmatrix} \tag{4.46}$$

Para  $i = 5$ :

$${}^5f_5 = {}^5R^6 f_6$$

Donde:  ${}^5R$  es la matriz de rotación de la transformación definida por la Ecuación (3.14).



$${}^5f_5 = \begin{bmatrix} c_6 & -s_6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -s_6 & -c_6 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix}$$

$${}^5f_5 = \begin{bmatrix} c_6F_x - s_6F_y \\ F_z \\ -s_6F_x - c_6F_y \end{bmatrix} \quad (4.47)$$

$${}^5n_5 = {}^5R^6n_6 + {}^5P_6 \times {}^5f_5$$

$${}^5n_5 = \begin{bmatrix} c_6 & -s_6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -s_6 & -c_6 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -L_1F_y \\ L_1F_x \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} c_6F_x - s_6F_y \\ F_z \\ -s_6F_x - c_6F_y \end{bmatrix}$$

$${}^5n_5 = \begin{bmatrix} -c_6L_1F_y - s_6L_1F_x \\ 0 \\ s_6L_1F_y - c_6L_1F_x \end{bmatrix} \quad (4.48)$$

Para  $i = 4$ :

$${}^4f_4 = {}^4R^5f_5$$

Donde:  ${}^4R$  es la matriz de rotación en la Ecuación (3.13).

$${}^4f_4 = \begin{bmatrix} c_5 & -s_5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ s_5 & c_5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_6F_x - s_6F_y \\ F_z \\ -s_6F_x - c_6F_y \end{bmatrix}$$

$${}^4f_4 = \begin{bmatrix} c_5c_6F_x - c_5s_6F_y - s_5F_z \\ s_6F_x + c_6F_y \\ s_5c_6F_x - s_5s_6F_y + c_5F_z \end{bmatrix} \quad (4.49)$$

$${}^4n_4 = {}^4R^5 n_5 + {}^4P_5 \times {}^4f_4$$

$${}^4n_4 = \begin{bmatrix} c_5 & -s_5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ s_5 & c_5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -c_6 L_1 F_y - s_6 L_1 F_x \\ 0 \\ s_6 L_1 F_y - c_6 L_1 F_x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} c_5 c_6 F_x - c_5 s_6 F_y - s_5 F_z \\ s_6 F_x + c_6 F_y \\ s_5 c_6 F_x - s_5 s_6 F_y + c_5 F_z \end{bmatrix}$$

$${}^4n_4 = \begin{bmatrix} -c_5 s_6 L_1 F_y - c_5 s_6 L_1 F_x \\ s_6 L_1 F_y + c_6 L_1 F_x \\ -s_5 c_6 L_1 F_y - s_5 s_6 L_1 F_x \end{bmatrix} \quad (4.50)$$

Para  $i = 3$ :

$${}^3f_3 = {}^3R^4 f_4$$

Donde:  ${}^3R$  es la matriz de rotación en la Ecuación (3.12).

$${}^3f_3 = \begin{bmatrix} c_4 & -s_4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -s_4 & -c_4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_5 c_6 F_x - c_5 s_6 F_y - s_5 F_z \\ s_6 F_x + c_6 F_y \\ s_5 c_6 F_x - s_5 s_6 F_y + c_5 F_z \end{bmatrix}$$

$${}^3f_3 = \begin{bmatrix} (c_4 c_5 c_6 - s_4 s_6) F_x - (c_4 c_5 s_6 + s_4 c_6) F_y - c_4 s_5 F_z \\ s_5 c_6 F_x - s_5 s_6 F_y + c_5 F_z \\ -(s_4 c_5 c_6 + c_4 s_6) F_x + (s_4 c_5 s_6 - c_4 c_6) F_y + s_4 s_5 F_z \end{bmatrix} \quad (4.51)$$

$${}^3n_3 = {}^3R^4 n_4 + {}^3P_4 \times {}^3f_3$$

$${}^3n_3 = \begin{bmatrix} c_4 & -s_4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -s_4 & -c_4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -c_5 s_6 L_1 F_y - c_5 s_6 L_1 F_x \\ s_6 L_1 F_y + c_6 L_1 F_x \\ -s_5 c_6 L_1 F_y - s_5 s_6 L_1 F_x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ d_4 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} (c_4 c_5 c_6 - s_4 s_6) F_x - (c_4 c_5 s_6 + s_4 c_6) F_y - c_4 s_5 F_z \\ s_5 c_6 F_x - s_5 s_6 F_y + c_5 F_z \\ -(s_4 c_5 c_6 + c_4 s_6) F_x + (s_4 c_5 s_6 - c_4 c_6) F_y + s_4 s_5 F_z \end{bmatrix}$$

$${}^3n_3 = \begin{bmatrix} (-s_4 c_5 c_6 d_4 - c_4 s_6 d_4) F_x + (s_4 c_5 s_6 d_4 - c_4 c_6 d_4 - c_4 s_5 L_1) F_y + (s_4 s_5 d_4 + c_4 c_5 s_6 L_1 + s_4 c_6 L_1) F_z \\ s_5 s_6 L_1 F_z - c_5 L_1 F_y \\ (c_4 c_5 c_6 d_4 - s_4 s_6 d_4) F_x + (-c_4 c_5 c_6 d_4 - s_4 c_6 d_4 + s_4 s_5 L_1) F_y + (-c_4 s_5 d_4 - s_4 c_5 s_6 L_1 + c_4 c_6 L_1) F_z \end{bmatrix} \quad (4.52)$$

Para  $i = 2$ :

$${}^2f_2 = {}^2R^3 f_3$$

Donde:  ${}^2R$  es la matriz de rotación en la Ecuación (3.11).

$${}^2f_2 = \begin{bmatrix} c_3 & -s_3 & 0 \\ s_3 & c_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (c_4c_5c_6 - s_4s_6)F_x - (c_4c_5s_6 + s_4c_6)F_y - c_4s_5F_z \\ s_5c_6F_x - s_5s_6F_y + c_3F_z \\ -(s_4c_5c_6 + c_4s_6)F_x + (s_4c_5s_6 - c_4c_6)F_y + s_4s_5F_z \end{bmatrix}$$

$${}^2f_2 = \begin{bmatrix} (c_3c_4c_5c_6 - c_3s_4s_6 - s_3s_5c_6)F_x - (+c_3c_4c_5s_6 + c_3s_4c_6 - s_3s_5s_6)F_y + (-c_3c_4s_5 - s_3c_5)F_z \\ (s_3c_4c_5c_6 - s_3s_4s_6 + c_3s_5c_6)F_x - (s_3c_4c_5s_6 + s_3s_4c_6 + c_3s_5s_6)F_y + (-s_3c_4s_5 + c_3c_5)F_z \\ (-s_4c_5c_6 - c_4s_6)F_x + (s_4c_5s_6 - c_4c_6)F_y + s_4s_5F_z \end{bmatrix} \quad (4.53)$$

$${}^2n_2 = {}^2R^3 n_3 + {}^2P_3 \times {}^2f_2$$

$${}^2n_2 = \begin{bmatrix} c_3 & -s_3 & 0 \\ s_3 & c_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} {}^3n_3 + \begin{bmatrix} a_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times {}^2f_2$$

$${}^2n_2 = \begin{bmatrix} {}^2n_{2x} \\ {}^2n_{2y} \\ {}^2n_{2z} \end{bmatrix} \quad (4.54)$$

Donde:

$${}^2n_{2x} = (-c_3s_4c_5c_6d_4 - c_3c_4s_6d_4 - s_3s_5s_6L_1)F_x \\ + (c_3s_4c_5s_6d_4 - c_3c_4c_6d_4 - c_3c_4s_5L_1 - s_3c_5L_1)F_y \\ + (c_3s_4s_5d_4 + c_3c_4c_5s_6L_1 + c_3s_4c_6L_1)F_z \quad (4.55)$$

$${}^2n_{2y} = (-s_3s_4c_5c_6d_4 - s_3c_4s_6d_4 - c_3s_5s_6L_1 + s_4c_5c_6a_2 + c_4s_6a_2)F_x \\ + (s_3s_4c_5s_6d_4 - s_3c_4c_6d_4 - s_3c_4s_5L_1 - s_4c_5s_6a_2 + c_4c_6a_2 + c_3c_5L_1)F_y \\ + (s_3s_4s_5d_4 + s_3c_4c_5s_6L_1 + s_3s_4c_6L_1 + s_4s_5a_2)F_z \quad (4.56)$$

$$\begin{aligned}
{}^2n_{2z} = & (c_4c_5c_6d_4 - s_4s_6d_4 + s_3c_4c_5c_6a_2 + s_3s_4s_6a_2 + c_3s_5c_6a_2)F_x \\
& + (-c_4c_5c_6d_4 - s_4c_6d_4 + s_4s_5L_1 - s_3c_4c_5s_6a_2 - s_3s_4c_6a_2 - c_3s_5s_6a_2)F_y \\
& + (-c_4s_5d_4 - s_4c_5s_6L_1 + c_4c_6L_1 - s_3c_4s_5a_2 + c_3c_5a_2)F_z
\end{aligned} \tag{4.57}$$

Para  $i=1$ :

$${}^1f_1 = {}^1R^2f_2$$

Donde:  ${}^1R$  es la matriz de rotación en la Ecuación (3.10).

$${}^1f_1 = \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -s_3 & -c_3 & 0 \end{bmatrix} {}^2f_2$$

$${}^1f_1 = \begin{bmatrix} {}^1f_{1x} \\ {}^1f_{1y} \\ {}^1f_{1z} \end{bmatrix} \tag{4.58}$$

Donde:

$$\begin{aligned}
{}^1f_{1x} = & (c_2c_3c_4c_5c_6 - c_2c_3s_4s_6 - c_2s_3s_5c_6 - s_2s_3c_4c_5c_6 + s_2s_3s_4s_6 - s_2c_3s_5c_6)F_x \\
& + (-c_2c_3c_4c_5s_6 - c_2c_3s_4c_6 + c_2s_3s_5s_6 + s_2s_3c_4c_5s_6 + s_2s_3s_4c_6 + s_2c_3s_5s_6)F_y \\
& + (-c_2c_3c_4s_5 - c_2s_3c_5 + s_2s_3c_4s_5 - s_2c_3c_5)F_z
\end{aligned} \tag{4.59}$$

$${}^1f_{1y} = (-s_4c_5c_6 - c_4s_6)F_x + (s_4c_5s_6 - c_4c_6)F_y + s_4s_5F_z \tag{4.60}$$

$$\begin{aligned}
{}^1f_{1z} = & (-s_2c_3c_4c_5c_6 + s_2c_3s_4s_6 + s_2s_3s_5c_6 - c_2s_3c_4c_5c_6 + c_2s_3s_4s_6 - c_2c_3s_5c_6)F_x \\
& + (s_2c_3c_4c_5s_6 + s_2c_3s_4c_6 - s_2s_3s_5s_6 + c_2s_3c_4c_5s_6 + c_2s_3s_4c_6 + c_2c_3s_5s_6)F_y \\
& + (s_2c_3c_4s_5 + s_2s_3c_5 + c_2s_3c_4s_5 - c_2c_3c_5)F_z
\end{aligned} \tag{4.61}$$

$${}^1n_1 = {}^1R^2n_2 + {}^1P_2 \times {}^1f_1$$

$${}^1n_1 = \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -s_3 & -c_3 & 0 \end{bmatrix} {}^2n_2 + \begin{bmatrix} a_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times {}^1f_1$$

$${}^1n_1 = \begin{bmatrix} {}^1n_{1x} \\ {}^1n_{1y} \\ {}^1n_{1z} \end{bmatrix} \quad (4.62)$$

Donde:

$${}^1n_{1x} = \begin{pmatrix} c_2c_3s_4c_5c_6d_4 - c_2c_3c_4s_6d_4 - c_2s_3s_5s_6L_1 + s_2s_3s_4c_5c_6d_4 + s_2s_3c_4s_6d_4 \\ + s_2c_3s_5s_6L_1 - s_2s_4c_5c_6a_2 - s_2c_4s_6a_2 \end{pmatrix} F_x$$

$$+ \begin{pmatrix} c_2c_3s_4c_5s_6d_4 - c_2c_3c_4c_6d_4 - c_2c_3c_4s_5L_1 - c_2s_3c_5L_1 - s_2s_3s_4c_5s_6d_4 \\ + s_2s_3c_4c_6d_4 + s_2s_3c_4s_5L_1 + s_2s_4c_5s_6a_2 - s_2c_4c_6a_2 - s_2c_3c_5L_1 \end{pmatrix} F_y$$

$$+ \begin{pmatrix} c_2c_3s_4s_5d_4 + c_2c_3c_4c_5s_6L_1 + c_2c_3s_4c_6L_1 - s_2s_3s_4s_5d_4 - s_2s_3c_4c_5s_6L_1 \\ - s_2s_3s_4c_6L_1 + s_2s_4s_5a_2 \end{pmatrix} F_z \quad (4.63)$$

$${}^1n_{1y} = \begin{pmatrix} c_4c_5c_6d_4 - s_4s_6d_4 + s_3c_4c_5c_6a_2 - s_3s_4s_6a_2 + c_3s_5c_6a_2 \\ + s_2c_3c_4c_5c_6a_1 - s_2c_3s_4s_6a_1 - s_2s_3s_5c_6a_1 \\ + c_2s_3c_4c_5c_6a_1 - c_2s_3s_4s_6a_1 - c_2c_3s_5c_6a_1 \end{pmatrix} F_x$$

$$+ \begin{pmatrix} -c_4c_5c_6d_4 - s_4c_6d_4 + s_4s_5L_1 - s_3c_4c_5s_6a_2 - s_3s_4c_6a_2 \\ -c_3s_5s_6a_2 - s_2c_3c_4c_5s_6a_1 - s_2c_3s_4c_6a_1 + s_2s_3s_5s_6a_1 \\ -c_2s_3c_4c_5s_6a_1 - c_2s_3s_4c_6a_1 - c_2c_3s_5s_6a_1 \end{pmatrix} F_y$$

$$+ \begin{pmatrix} -c_4s_5d_4 - s_4c_5s_6L_1 + c_4c_6L_1 - s_3c_4s_5a_2 + c_3c_5a_2 \\ -s_2c_3c_4s_5a_1 - s_2s_3c_5a_1 - c_2s_3c_4s_5a_1 - c_2c_3c_5a_1 \end{pmatrix} F_z \quad (4.64)$$

$$\begin{aligned}
{}^1n_{1z} = & \begin{pmatrix} s_2c_3s_4c_5c_6d_4 + s_2c_3c_4s_6d_4 + s_2s_3s_5s_6L_1 + c_2s_3s_4c_5c_6d_4 + c_2s_3c_4s_6d_4 \\ +c_2c_3s_5s_6L_1 - c_2s_4c_5c_6a_2 - c_2c_4s_6a_2 - s_4c_5c_6a_1 - c_4s_6a_1 \end{pmatrix} F_x \\
& + \begin{pmatrix} -s_2c_3s_4c_5s_6d_4 + s_2c_3c_4c_6d_4 + s_2c_3c_4s_5L_1 + s_2s_3c_5L_1 - c_2s_3s_4c_5s_6d_4 \\ +c_2s_3c_4c_6d_4 + c_2s_3c_4s_5L_1 + c_2s_4c_5s_6a_2 - c_2c_4c_6a_2 - c_2c_3c_5L_1 \\ +s_4c_5s_6a_1 - c_4c_6a_1 \end{pmatrix} F_y \\
& + \begin{pmatrix} -s_2c_3s_4s_5d_4 - s_2c_3c_4c_5s_6L_1 - s_2c_3s_4c_6L_1 - c_2s_3s_4s_5d_4 - c_2s_3c_4c_5s_6L_1 \\ -c_2s_3s_4c_6L_1 + c_2s_4s_5a_2 + s_4s_5a_1 \end{pmatrix} F_z
\end{aligned} \tag{4.65}$$

De tal forma que aplicando (4.16), podemos obtener los pares que se deben de aplicar a cada una de las uniones:

$$\tau_6 = {}^6n_6^T \odot \hat{Z}_6 = \begin{bmatrix} 0 & -L_1F_z & L_1F_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = L_1F_y \tag{4.66}$$

$$\tau_5 = {}^5n_5^T \odot \hat{Z}_5 = \begin{bmatrix} s_6L_1F_z & L_1F_y & c_6L_1F_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = c_6L_1F_z \tag{4.67}$$

$$\tau_4 = {}^4n_4^T \odot \hat{Z}_4 = \begin{bmatrix} c_5s_6L_1F_z - s_5L_1F_y \\ -c_6L_1F_z \\ s_5s_6L_1F_z - c_5L_1F_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = s_5s_6L_1F_z - c_5L_1F_y \tag{4.68}$$

$$\begin{aligned}
\tau_3 = {}^3n_3^T \odot \hat{Z}_3 = & \begin{bmatrix} (-s_4c_5c_6d_4 - c_4s_6d_4)F_x + (s_4c_5s_6d_4 - c_4c_6d_4 - c_4s_5L_1)F_y \\ + (s_4s_5d_4 + c_4c_5s_6L_1 + s_4c_6L_1)F_z \\ s_5s_6L_1F_z - c_5L_1F_y \\ (c_4c_5c_6d_4 - s_4s_6d_4)F_x + (-c_4c_5c_6d_4 - s_4c_6d_4 + s_4s_5L_1)F_y \\ + (-c_4s_5d_4 - s_4c_5s_6L_1 + c_4c_6L_1)F_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\
\tau_3 = & (c_4c_5c_6d_4 - s_4s_6d_4)F_x + (-c_4c_5c_6d_4 - s_4c_6d_4 + s_4s_5L_1)F_y \\
& + (-c_4s_5d_4 - s_4c_5s_6L_1 + c_4c_6L_1)F_z
\end{aligned} \tag{4.69}$$

$$\tau_2 = {}^2n_2^T \odot \hat{Z}_2$$

$$\begin{aligned} \tau_2 = & (c_4c_5c_6d_4 - s_4s_6d_4 + s_3c_4c_5c_6a_2 + s_3s_4s_6a_2 + c_3s_5c_6a_2)F_x \\ & + (-c_4c_5c_6d_4 - s_4c_6d_4 + s_4s_5L_1 - s_3c_4c_5s_6a_2 - s_3s_4c_6a_2 - c_3s_5s_6a_2)F_y \\ & + (-c_4s_5d_4 - s_4c_5s_6L_1 + c_4c_6L_1 - s_3c_4s_5a_2 + c_3c_5a_2)F_z \end{aligned} \quad (4.70)$$

$$\tau_1 = {}^1n_1^T \odot \hat{Z}_1$$

$$\begin{aligned} \tau_1 = & \left( \begin{array}{l} s_2c_3s_4c_5c_6d_4 + s_2c_3c_4s_6d_4 + s_2s_3s_5s_6L_1 + c_2s_3s_4c_5c_6d_4 + c_2s_3c_4s_6d_4 \\ + c_2c_3s_5s_6L_1 - c_2s_4c_5c_6a_2 - c_2c_4s_6a_2 - s_4c_5c_6a_1 - c_4s_6a_1 \end{array} \right) F_x \\ & + \left( \begin{array}{l} -s_2c_3s_4c_5s_6d_4 + s_2c_3c_4c_6d_4 + s_2c_3c_4s_5L_1 + s_2s_3c_5L_1 - c_2s_3s_4c_5s_6d_4 \\ + c_2s_3c_4c_6d_4 + c_2s_3c_4s_5L_1 + c_2s_4c_5s_6a_2 - c_2c_4c_6a_2 - c_2c_3c_5L_1 \\ + s_4c_5s_6a_1 - c_4c_6a_1 \end{array} \right) F_y \\ & + \left( \begin{array}{l} -s_2c_3s_4s_5d_4 - s_2c_3c_4c_5s_6L_1 - s_2c_3s_4c_6L_1 - c_2s_3s_4s_5d_4 - c_2s_3c_4c_5s_6L_1 \\ - c_2s_3s_4c_6L_1 + c_2s_4s_5a_2 + s_4s_5a_1 \end{array} \right) F_z \end{aligned} \quad (4.71)$$

Las ecuaciones (4.66) a (4.71) representan los pares que deben aplicarse a cada una de las uniones para que exista estabilidad estática en el manipulador cuando se aplica una carga en su extremo final. Estas ecuaciones pueden ser analizadas numéricamente con el simulador desarrollado que se presenta en el capítulo 5.

# CAPITULO 5

## SIMULACIÓN DEL ROBOT MANIPULADOR

### 5.1 Introducción

En este Capítulo se describe el software desarrollado para simular la cinemática directa, la cinemática inversa, las velocidades y las relaciones par/fuerza del robot manipulador de seis grados de libertad propuesto en esta tesis.

El análisis de la posición y orientación del extremo final del robot manipulador por medio de la simulación, proporciona información de los puntos por los que puede pasar cada uno de los eslabones así como de su extremo final en la generación de una trayectoria libre de obstáculos, trayectoria que llevará al manipulador a realizar una tarea específica en la posición y orientación deseada. La simulación de la cinemática inversa es una tarea muy importante, ya que este proceso matemático de solución de la cinemática inversa se debe de realizar para un robot determinado, en tiempo real. Esto es, para desplazar el extremo final del robot a una posición y una orientación determinada, la solución de la cinemática inversa proporciona los ángulos de las articulaciones que deben ser controlados para efectuar ese desplazamiento. De la misma manera, se deben de analizar las velocidades y los pares requeridos en las uniones para seleccionar los motores que sean capaces de proporcionar estas velocidades y estos pares.

En este proyecto se utilizaron las herramientas de software LabWindows/CVI versión 6.0 y OpenGL, herramientas que facilitan las operaciones matemáticas básicas, el manejo de matrices, la creación de imágenes en tres dimensiones y la programación de animación de esas imágenes. Además, este software permite la observación de la animación desde diferentes puntos (parte superior, inferior, lateral derecha o lateral izquierda) o en cualquier vista en perspectiva, lo que permitirá analizar el desplazamiento de una posición y orientación inicial a una posición y orientación final del manipulador.



## 5.2 Simulación de la Cinemática del Robot Manipulador

Para la simulación del problema de la cinemática directa se desarrolló una interfase gráfica mediante la cual el usuario introduce datos para el cálculo y simulación de la cinemática del robot manipulador propuesto. El software se desarrolló utilizando el ambiente de desarrollo de LabWindows/CVI, programable en lenguaje C de Microsoft, y para la animación y dibujo del manipulador se hizo uso de OpenGL, definido como una “Interfase de Software para Hardware de Gráficos”, el cual en esencia es una biblioteca de software para el modelado y graficado de imágenes en tres dimensiones. La Figura 5.1 muestra el panel de esta interfase.

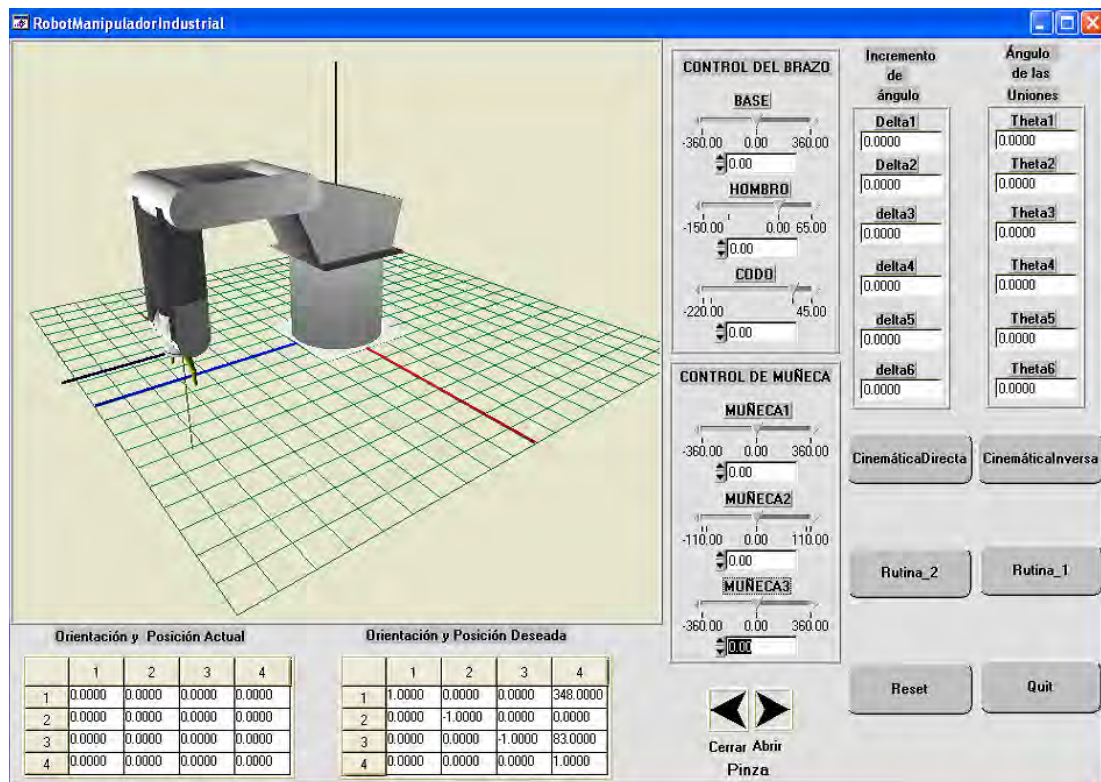


Figura 5.1. Interfase gráfica para la simulación de la cinemática directa y de la cinemática inversa.

El usuario puede controlar la simulación mediante los controles que se muestran en las figuras 5.2 a 5.6. Mediante el panel se pueden observar todos los movimientos que realiza

el robot, ya sean movimientos individuales de cada articulación o el movimiento conjunto de las seis articulaciones. El panel incluye también las matrices de transformación que definen las posiciones y orientaciones actuales y deseadas.

La Figura 5.2 muestra un control numérico deslizable, control que puede variar un número desde un valor mínimo a un valor máximo establecido por el usuario. Se hace uso de este control para variar manualmente los ángulos de las articulaciones del manipulador. Existen tres controles para las articulaciones del brazo llamadas: base, hombro y codo. Otros tres controles manipulan el movimiento de la muñeca. Estos controles son de gran utilidad para posicionar y orientar manualmente el extremo final del manipulador, sobre todo en la planeación de una trayectoria libre de obstáculos.

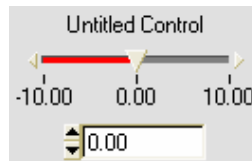


Figura 5.2 Control numérico deslizable.

La Figura 5.3 muestra un control de edición de número. En los controles de este tipo, del panel diseñado, se muestran los resultados de la cinemática inversa; es decir, los valores de los ángulos de las articulaciones, llamados  $\theta_1$ ,  $\theta_2$ ,  $\theta_3$ ,  $\theta_4$ ,  $\theta_5$  y  $\theta_6$ , el usuario también podrá introducir los datos para el cálculo de la cinemática directa. Existen otros seis controles llamados  $\Delta_1$ ,  $\Delta_2$ ,  $\Delta_3$ ,  $\Delta_4$ ,  $\Delta_5$  y  $\Delta_6$ , en los cuales se muestran los ángulos correspondientes a la diferencia entre la posición y orientación deseada con la posición y orientación actual.



Figura 5.3 Control de edición de número.

Para tener una buena animación de la simulación cinemática, es importante saber cual es la diferencia entre los ángulos correspondientes a la posición y orientación actual y los correspondientes a la posición y orientación siguientes.

La Figura 5.4 muestra un control del tipo botón de comando. Estos controles se incluyen para controlar la ejecución del cálculo de la cinemática inversa, del cálculo de la cinemática directa, de dos rutinas de simulación previamente programadas(Rutina 1 y Rutina 2), para reinicializar el sistema, así como para salir de la simulación.



Figura 5.4 Control botón de comando.

La Figura 5.5 muestra un control de edición de tabla, donde el usuario puede especificar la orientación y posición de acuerdo a la ecuación (3.2). En el panel existen dos de este tipo, uno para la posición y la orientación deseadas (donde el usuario introduce los datos para el cálculo de la cinemática inversa) y otro para la posición y orientación actuales (donde el usuario lee los resultados del cálculo de la cinemática directa).

Orientación y Posición Deseada				
	1	2	3	4
1	1.0000	0.0000	0.0000	348.0000
2	0.0000	-1.0000	0.0000	0.0000
3	0.0000	0.0000	-1.0000	83.0000
4	0.0000	0.0000	0.0000	1.0000

Figura 5.5 Control edición de tabla.

La Figura 5.6 muestra un control de edición de foto. En este tipo de control se dibujan y visualizan los movimientos del robot manipulador. También se puede pegar una figura o foto con cualquiera de los formatos \*.pcx, \*.bmp, \*.rle, \*.dib, \*.ico, \*.wmf, \*.emf.

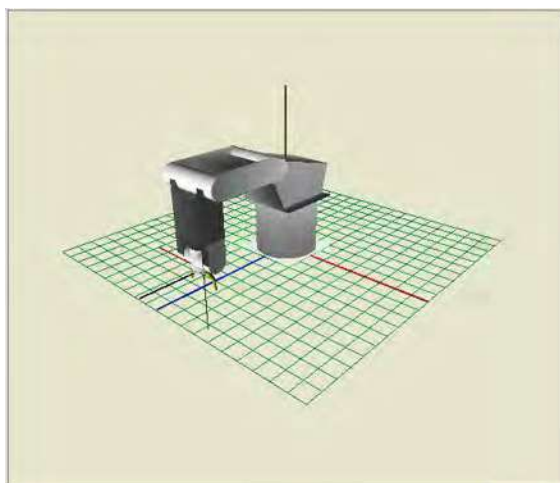


Figura 5.6 Control edición foto.

Las funciones principales que se pueden desarrollar a través de esta interfase son: Cálculo de la cinemática directa, cálculo de la cinemática inversa, ejecución de la rutina 1 para ejemplificar el posicionamiento de la punta del extremo final del manipulador en varias orientaciones, ejecución de la rutina 2 para ejemplificar el posicionado de objetos a través de una trayectoria planeada, reinicialización del sistema y terminar o salir.

Para el cálculo y simulación de la cinemática directa es necesario introducir primero los ángulos de las uniones del manipulador de  $\theta_1$  a  $\theta_6$  y después de esto presionar el botón izquierdo del ratón sobre el botón **CinemáticaDirecta**. Inmediatamente después deben aparecer los valores en los casilleros Delta1 a Delta6, una vez que los valores están en estos casilleros se vuelve a presionar el botón izquierdo del ratón sobre el botón **CinemáticaDirecta** y es en este momento en que el manipulador se mueve a la posición y orientación que se calcula con los ángulos establecidos por el usuario y se escribe la posición y orientación actual. El algoritmo del cálculo y animación de la cinemática directa se ilustra en el diagrama de flujo de la Figura 5.7.

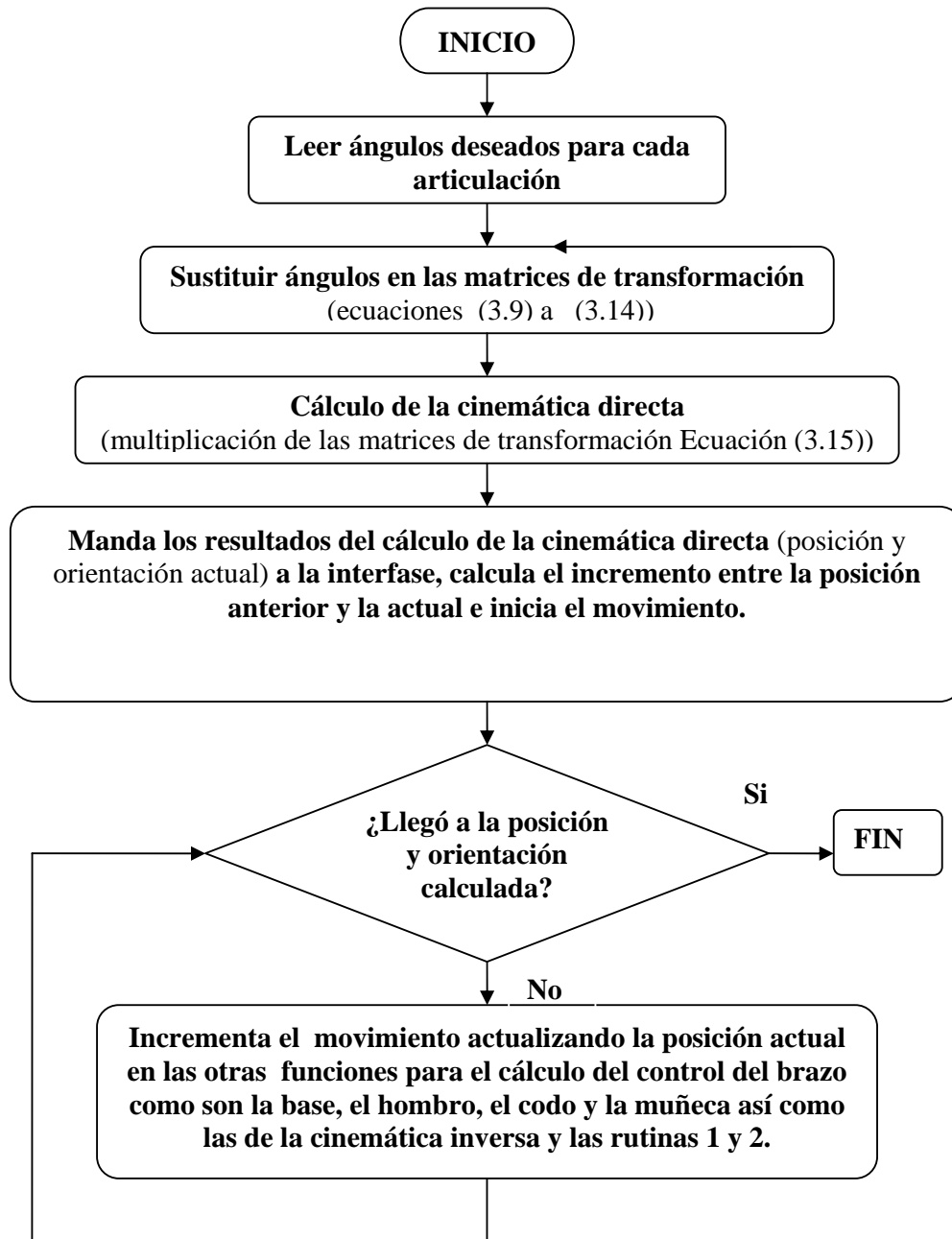


Figura 5.7 Diagrama de flujo de la función para el cálculo de la cinemática directa.

Para el cálculo y simulación de la cinemática inversa es necesario introducir primero los datos de la posición y orientación deseada, después de esto presionar el botón izquierdo del ratón sobre el botón **CinemáticaInversa**. Inmediatamente después deben aparecer los

valores de los ángulos correspondientes en los casilleros  $\theta_1$  a  $\theta_6$ , si se desea hacer el movimiento a esta posición y orientación calculada es necesario presionar el botón izquierdo del ratón sobre el botón **Cinemática Inversa**. El algoritmo del cálculo y animación de la cinemática inversa se ilustra en el diagrama de flujo de la Figura 5.8.

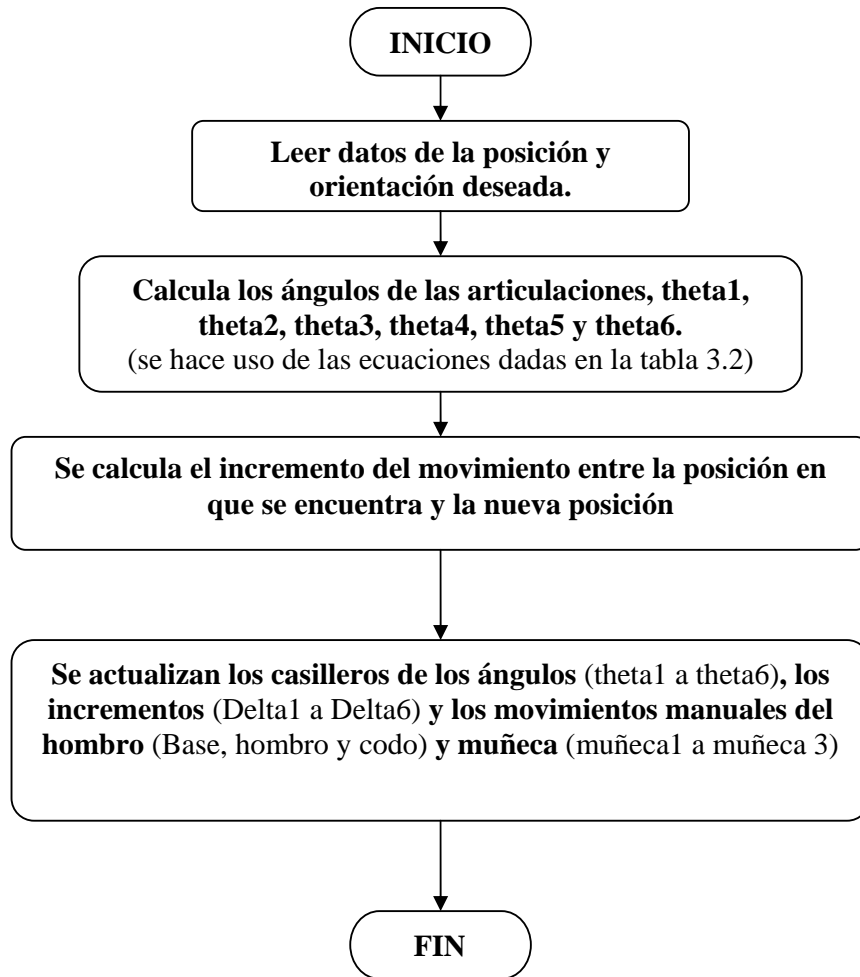


Figura 5.8 Diagrama de flujo de la función para el cálculo de la cinemática inversa.

Para el control del brazo (movimiento manual e independiente de las articulaciones) se diseñó el algoritmo de la Figura 5.9, que es igual para las seis articulaciones y se ejecuta en

el momento que se hace un deslizamiento positivo o negativo de cualquiera de los seis controles deslizables.

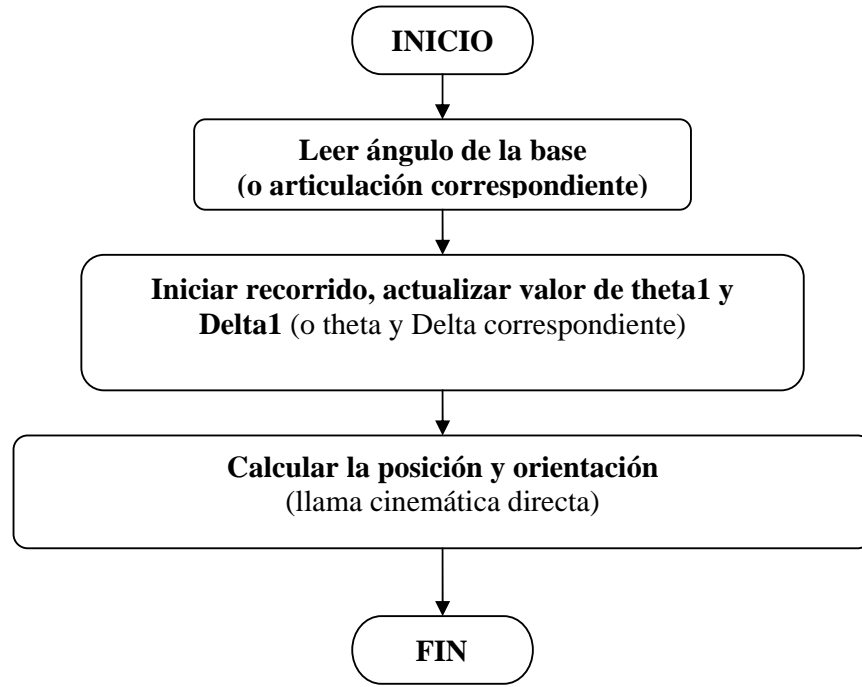


Figura 5.9 Diagrama de flujo de la función de movimiento manual e individual de las articulaciones del manipulador

La rutina 1 mostrada en la Figura 5.10 es un ejemplo que se implementó para ilustrar la importancia del movimiento individual de cada articulación, así como la propuesta de trayectorias trazadas punto a punto evitando obstáculos para prevenir una colisión, además se ejemplifican diferentes orientaciones en que el extremo final del manipulador se puede posicionar sobre un objeto. La rutina 2 también cumple con los propósitos de la rutina 1, adicionando las funciones de agarre y transportación de objetos. En la Figura 5.10 se presenta el algoritmo de la rutina 1 y en la Figura 5.11 se ilustra la secuencia grafica de un movimiento programado mediante la rutina2. Ésta se diseñó en base al uso de los movimientos individuales de las seis articulaciones del manipulador. Primeramente se proponen diferentes posiciones, desde la posición inicial del manipulador hasta la posición final del recorrido planeado. Los ángulos dados por cada posición y orientación propuesta

se listan en una tabla de datos. Estos datos se van tomando de seis en seis para simular el movimiento, haciendo un ciclo hasta completar el movimiento propuesto.

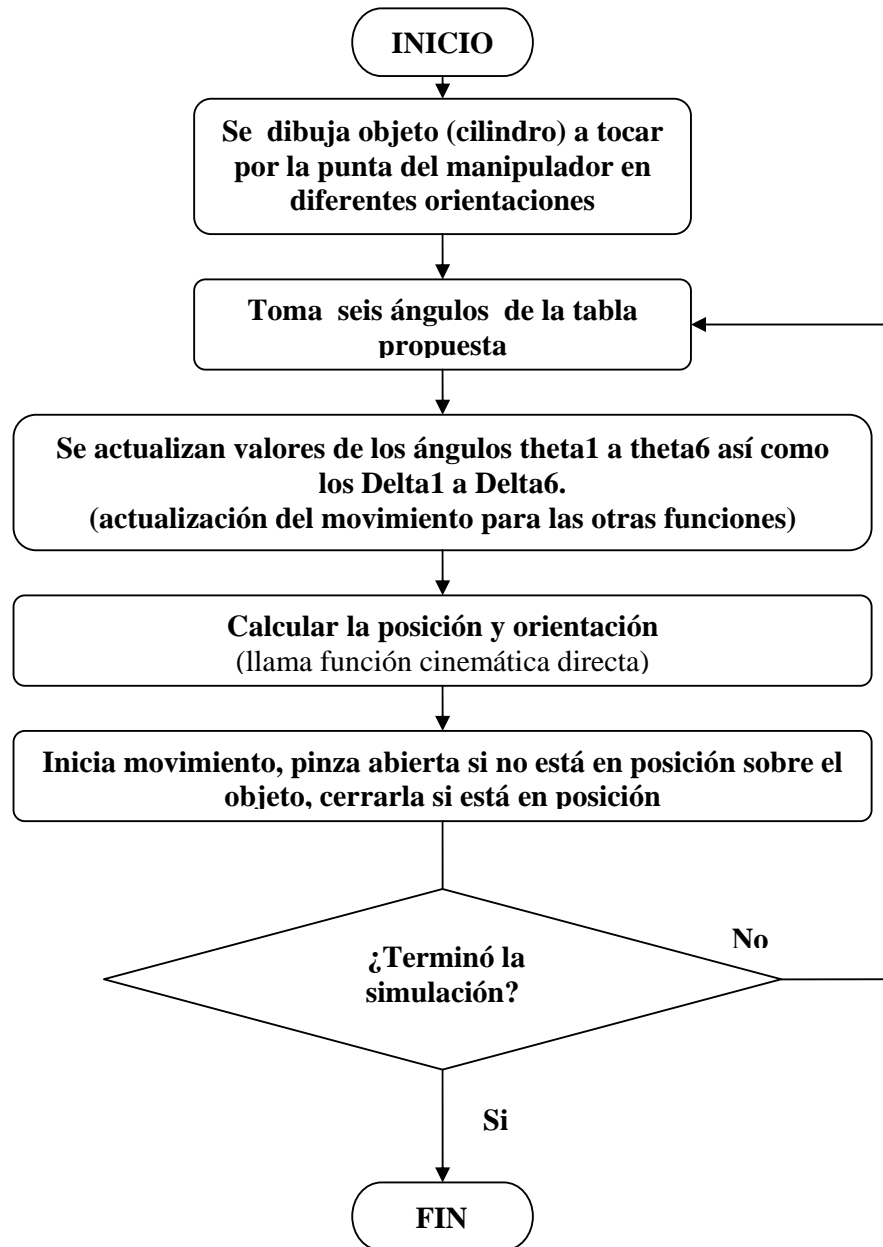


Figura 5.10 Diagrama de flujo de la función de la Rutina 1.



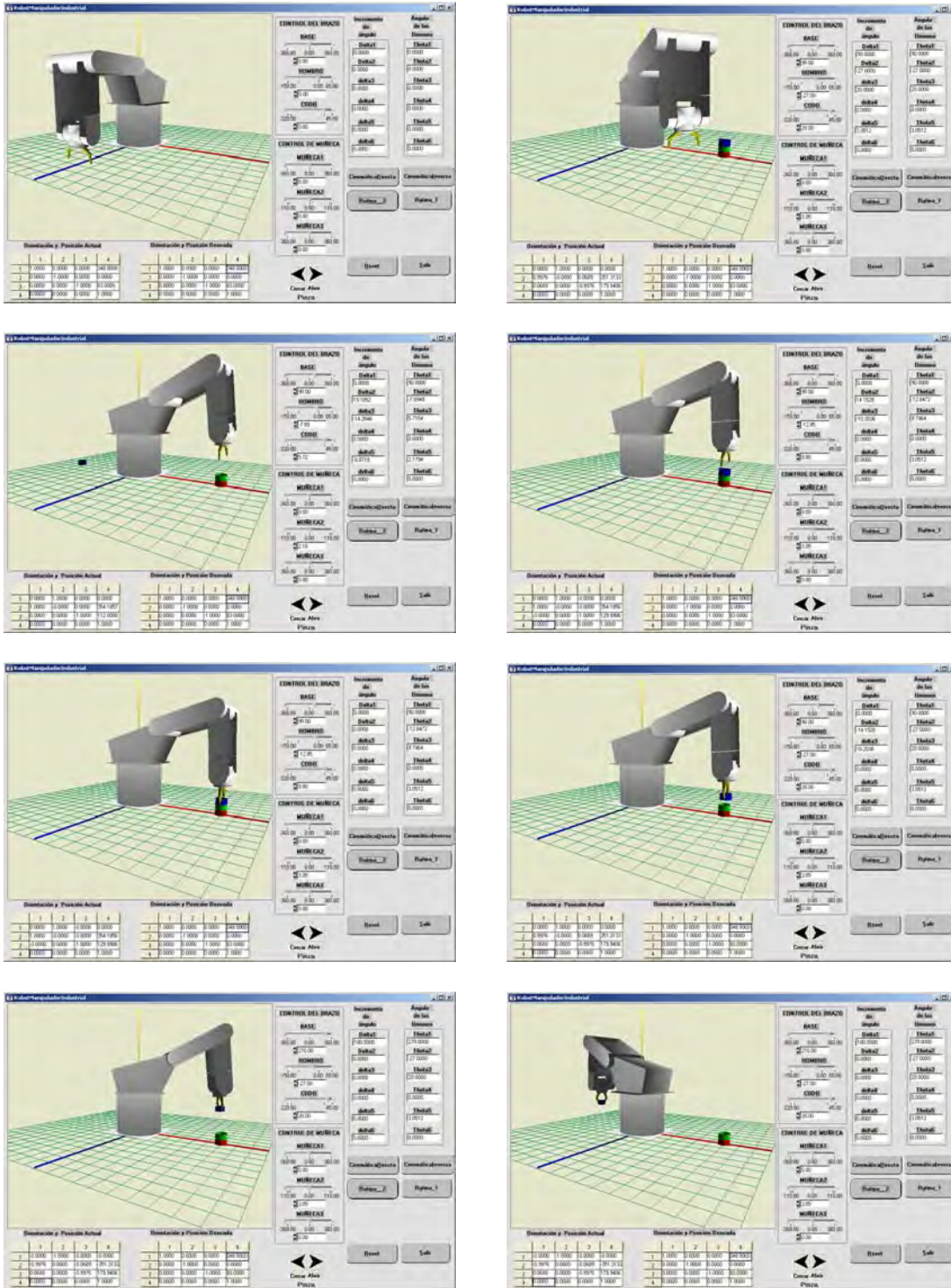


Figura 5.11 Secuencia gráfica de la simulación de la Rutina 2

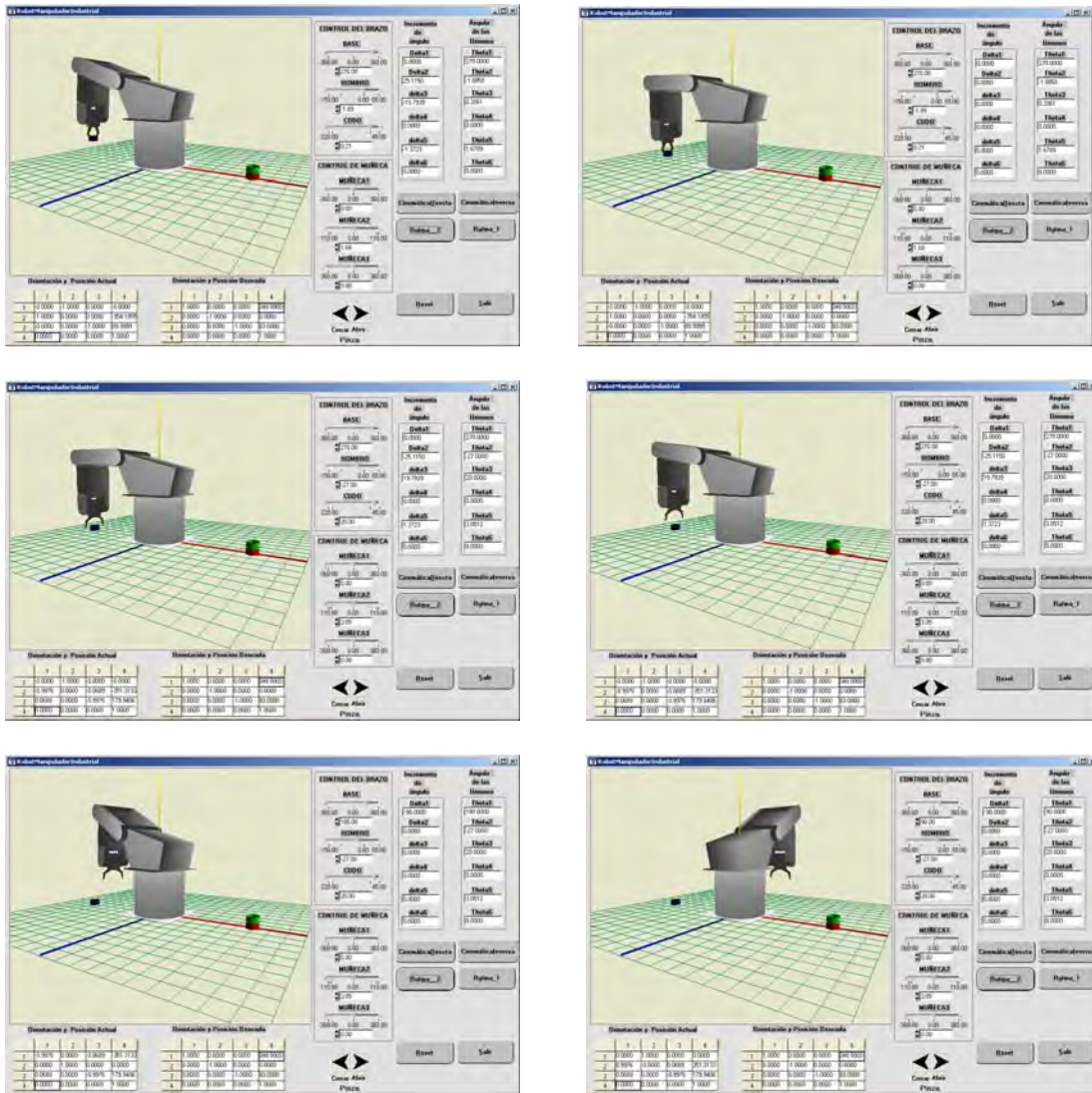


Figura 5.11 continuación.

El botón Reset, como ya se dijo, inicializa el sistema y pone todas las variables a cero, con excepción de la posición y orientación deseada. Por último, para terminar y salir de la interfase de simulación, se presiona el botón izquierdo del ratón sobre el botón Salir.

### 5.3 Simulación de las Velocidades del Robot Manipulador

Para la simulación de las velocidades del robot manipulador, se cuenta con una interfase gráfica para la comunicación entre el simulador y el usuario. El usuario introduce los datos: ángulo de recorrido para cada articulación, magnitud de la velocidad rotacional de cada articulación, sentido de giro y número de la articulación a analizar. La Figura 5.2 muestra esta interfase.

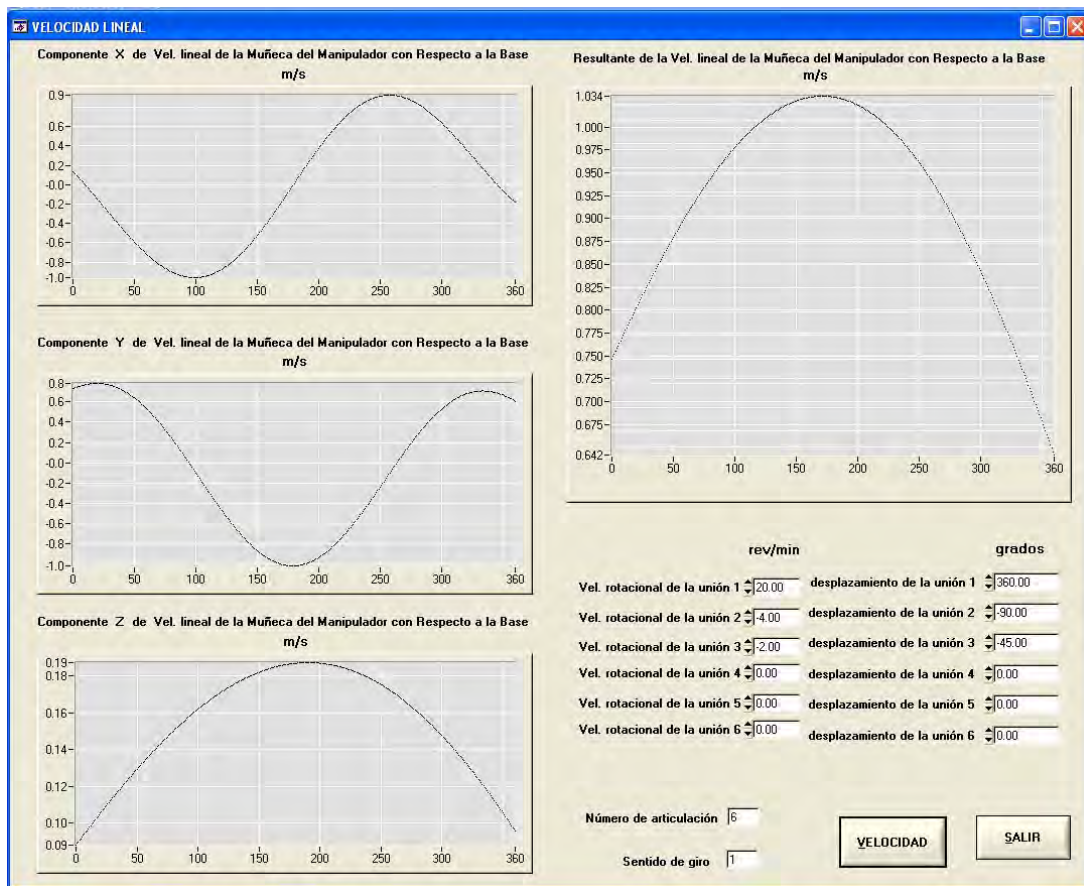


Figura 5.12. Interfase gráfica para la simulación y análisis de las velocidades del manipulador.

El panel de esta interfase incluye gráficas, controles numéricos y botones. En este panel se puede observar el comportamiento de la velocidad del extremo final del manipulador, así

como de cualquiera de sus articulaciones. Se presentan tres gráficas para ver el comportamiento en cada uno de los ejes y otra para ver el comportamiento del vector de velocidad resultante.

El algoritmo para el análisis del comportamiento de las velocidades del manipulador se ha diseñado calculando en forma iterativa las ecuaciones (4.8) y (4.10) desde el sistema de referencia {0} hasta el sistema de referencia {6}, explicadas en el Capítulo 4, Sección 4.4. Esta función se ejecuta después de que el usuario introduce los datos y presiona el botón izquierdo del ratón sobre el botón **VELOCIDAD**.

Para ilustrar el funcionamiento de este programa, enseguida se presentan los resultados para el caso en el que el manipulador hace un giro de  $360^{\circ}$  en la unión 1 en sentido positivo. En este caso el extremo final del manipulador mantendrá en su eje Z una velocidad constante e igual a cero y las componentes de los ejes X y Y tendrán el comportamiento mostrado en la Figura 5.13.

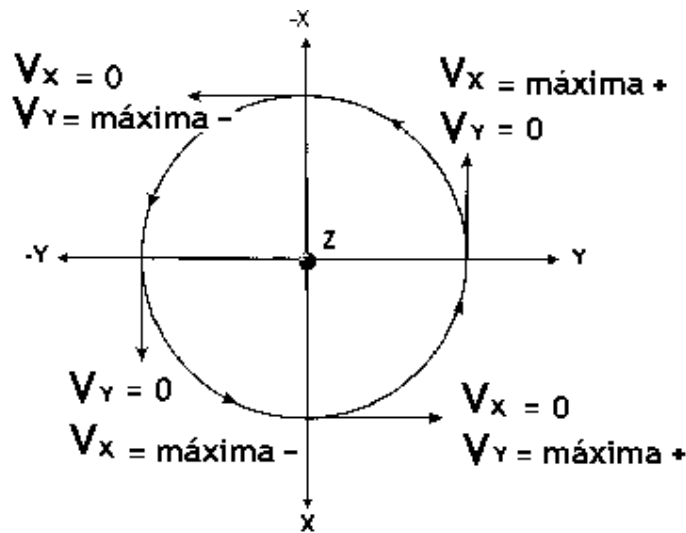


Figura 5.13 Comportamiento de las componente X,Y y Z, de la velocidad del extremo final cuando se gira el eje 1 en sentido positivo.

En la Figura 5.14 se presenta el panel frontal del simulador después de la ejecución de este caso.

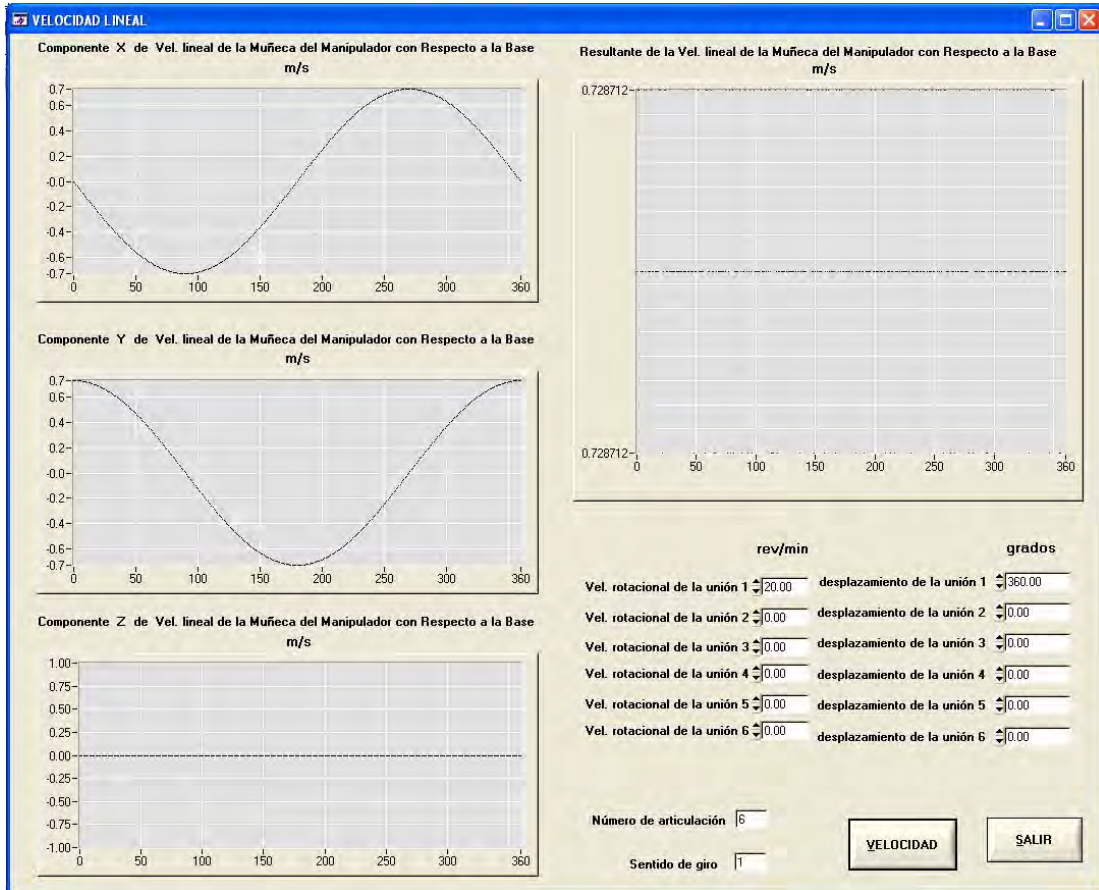


Figura 5.14 Panel frontal del simulador para el caso en el que se gira el eje 1 en sentido positivo.

La Figura 5.15 ilustra el comportamiento de la velocidad del extremo final en relación a la base del manipulador con las mismas condiciones de velocidad y desplazamiento del caso anterior, pero cambiando el sentido del giro. En la figura 5.16 se presenta el panel frontal resultante para este caso.

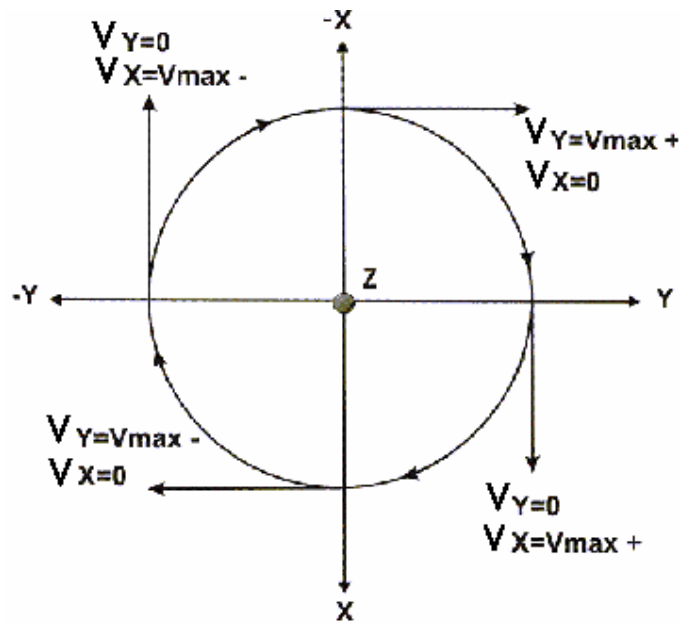


Figura 5.15 Comportamiento de las componente X,Y y Z, de la velocidad del extremo final cuando se gira el eje 1 en sentido negativo.

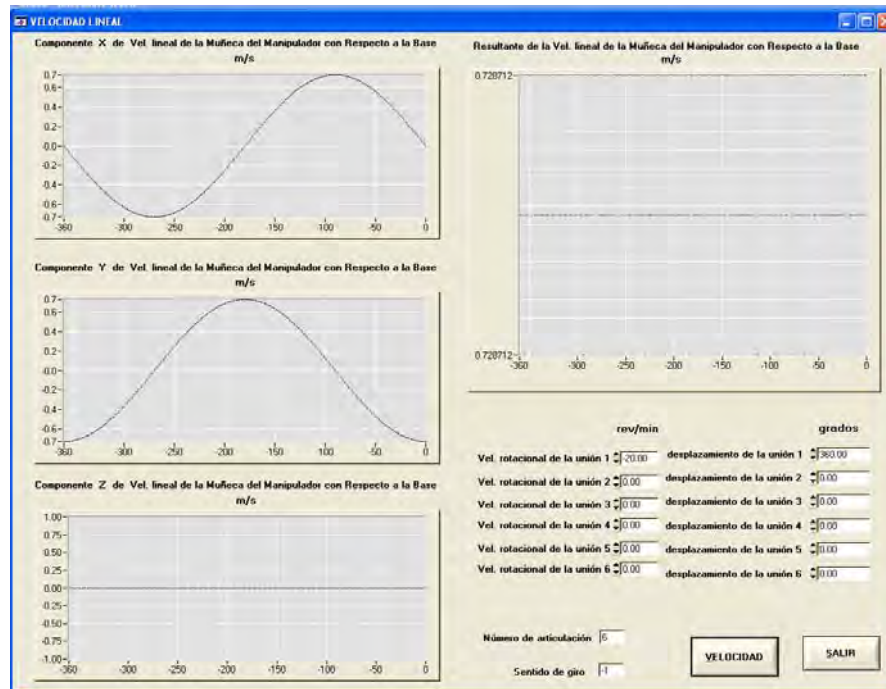


Figura 5.16 Panel frontal del simulador para el caso en el que se gira el eje 1 en sentido negativo.

Los desplazamientos que se quieran simular, pueden determinarse mediante el cálculo de la cinemática inversa. El número de articulación debe ser seis y la magnitud de la velocidad de las uniones serán las que el usuario quiera analizar. Este programa será muy útil para hacer la selección de los motores de las diferentes articulaciones.

#### **5.4 Simulación de las Fuerzas Estáticas del Robot Manipulador**

Para mantener en equilibrio estático al manipulador cuando éste está soportando un peso en su extremo final, es necesario que los motores de las articulaciones desarrollen un par para mantenerlo en equilibrio. Se ha diseñado un simulador para calcular el par de cada uno de los motores de las articulaciones, haciendo uso de las ecuaciones (4.13), (4.14) y (4.16).

En este programa se diseñó una interfase gráfica para la comunicación entre el simulador y el usuario. La Figura 5.17 muestra el panel frontal donde el usuario introduce los ángulos de las articulaciones que determinan la posición en la que se ha de calcular el par estático y un vector de fuerzas (peso soportado por el manipulador). Al accionar sobre el control tipo botón llamado PAR se determinará el par desarrollado por cada uno de los motores para mantener en equilibrio estático al manipulador cuando éste está soportando una carga. Para ilustrar el funcionamiento de este programa, se presentan los resultados para el caso en el que se le aplica un vector de carga  $F = [0 \ 0 \ 0.5]^T$  en la punta de la pinza del manipulador y en posición inicial. En la Figura 5.16 se presenta el panel frontal del simulador después de la ejecución de este caso. Se puede observar que los pares desarrollados por los motores son:

Motor 1 = 0.00 N.m

Motor 2 = 0.10 N.m

Motor 3 = 0.00 N.m

Motor 4 = 0.00 N.m

Motor 5 = 0.00 N.m

Motor 6 = 0.00 N.m

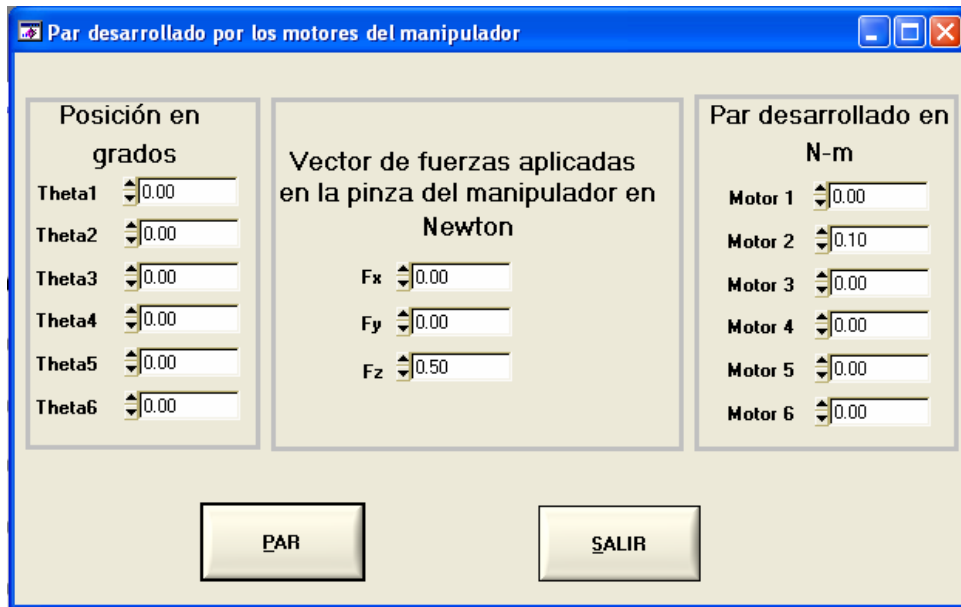


Figura 5.17. Par desarrollado por los motores del manipulador para mantener en equilibrio estático un vector de carga  $F = [0 \ 0 \ 0.5]^T$  en la punta de la pinza del manipulador y en posición inicial.

En la Figura 5.18 se presenta el panel frontal del simulador con resultados para el caso en el que se le aplica un vector de carga  $F = [0.5 \ 0.5 \ 0.5]^T$  en la punta de la pinza del manipulador y en posición inicial. Se puede observar que los pares desarrollados por los motores son:

- Motor 1 = -0.17 N.m
- Motor 2 = -0.06 N.m
- Motor 3 = -0.16 N.m
- Motor 4 = 0.00 N.m
- Motor 5 = -0.06 N.m
- Motor 6 = 0.00 N.m



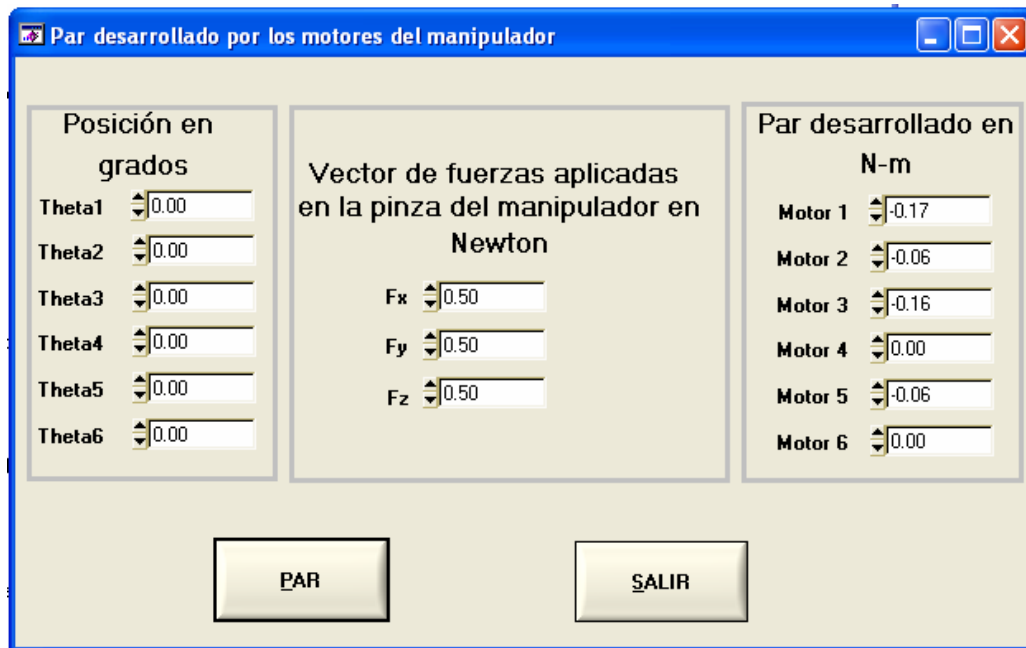


Figura 5.18. Par desarrollado por los motores del manipulador para mantener en equilibrio estático un vector de carga  $F = [0.5 \ 0.5 \ 0.5]^T$  en la punta de la pinza del manipulador y en posición inicial.

# CAPITULO 6

## CONCLUSIONES Y TRABAJOS FUTUROS

### 6.1 Conclusiones Generales

En este proyecto de tesis se propuso una estructura angular también llamada rotacional o antropomórfica, la razón por la que se propone trabajar con este tipo de estructura es por ser una estructura muy usada en sistemas educativos, investigación y desarrollo por su semejanza con un brazo humano, además de que este tipo de estructuras es muy empleada en robots manipuladores industriales, sobre todo en tareas complejas. Se espera que este proyecto ayude a futuros estudiantes en esta disciplina.

Se hizo el análisis del modelo de la cinemática directa del robot manipulador propuesto, del tal forma que con la metodología planteada se comprobó satisfactoriamente los resultados esperados de la posición y orientación del extremo final del manipulador propuesto con respecto a la base dados los ángulos de las articulaciones del robot manipulador.

Se hizo el análisis del modelo de la cinemática inversa del robot manipulador propuesto, del tal forma que con la metodología planteada se comprobó satisfactoriamente los resultados esperados que permite conocer el valor que deben tener los ángulos de las articulaciones dada la posición y orientación del extremo final con respecto a la base del manipulador propuesto.

Se hizo el análisis de la propagación de las velocidades del robot manipulador desarrollando expresiones que permiten hacer el cálculo del comportamiento de la velocidad del extremo final del manipulador, así como de cualquiera de sus articulaciones y con estas velocidades seleccionar los motores adecuados para cada una de las articulaciones del manipulador.

Se hizo el análisis de las fuerzas estáticas ejercidas en las articulaciones del manipulador y los pares necesarios para que este se mantenga en equilibrio estático al aplicar una fuerza en su extremo final. Este desarrollo permite seleccionar los motores adecuados para cada una de las articulaciones del manipulador.

Se desarrolló una interfase grafica haciendo uso del software Labwindows y OpenGL, mediante la cual se hace la simulación de la cinemática directa y la cinemática inversa, para la realización de esta interfase se usó cada una de las ecuaciones obtenidas tanto en el análisis de la cinemática directa como del análisis de la cinemática inversa. Esta interfase es de gran utilidad en el análisis de la posición y orientación del extremo final del manipulador, por que proporciona información de todos los puntos por los que puede pasar cada uno de los eslabones así como su extremo final.

Se desarrolló también una interfase mediante la cual se hace la simulación de las velocidades del extremo final del manipulador, así como de cualquiera de sus articulaciones.

Se desarrolló además una interfase gráfica mediante la cual se hace la simulación del par que debe desarrollar cada una de las articulaciones del manipulador manteniendo un equilibrio estático.

## **6.2 Trabajos Futuros.**

Este trabajo esta enfocado únicamente a situaciones de posición, velocidad, y fuerzas estáticas, donde no se han considerado las fuerzas que se requieren para causar el movimiento. Es por eso que enseguida se sugieren algunos trabajos futuros.

Se propone que se haga el análisis y formulación de las ecuaciones de la dinámica del manipulador, con cualquiera de los siguientes modelos convencionales: El modelo dinámico mediante la formulación de Lagrange-Euler, el modelo dinámico mediante la formulación de Newton-Euler y el modelo dinámico en variables de estado. Ya que cada eslabón del manipulador se considera un cuerpo rígido, para moverlo se debe de acelerar y

desacelerar, de tal forma que la fuerza necesaria para moverlo esta en función de la aceleración, desaceleración y la distribución de masa del eslabón. Los modelos mencionados dan una descripción de cómo las fuerzas, inercias y aceleraciones se relacionan.

Se propone que se haga la simulación de la dinámica del manipulador haciendo uso de los modelos dinámicos mediante la formulación de Lagrange-Euler, la formulación de Newton-Euler y Modelo dinámico en variables de estado. La simulación permitiría visualizar gráficamente el comportamiento de la dinámica del manipulador.

Se propone que se haga el análisis de métodos relacionados con el calculo de diferentes tipos de trayectorias en el espacio multidimensional que describa el movimiento deseado del manipulador como son: Trayectorias punto a punto, trayectorias coordinadas o isócronas así como trayectorias continuas. Esto con la finalidad de diseñar una o varias trayectorias libre de colisiones.

Se propone que se haga el diseño de la estructura de control del manipulador propuesto en este trabajo de tesis, estructura que contemple el control de la posición del extremo final del manipulador, así como el control de las fuerzas que se ejercen en cada una de las articulaciones del manipulador.

## REFERENCIAS

[Barrientos et. al, 1998]

Barrientos Antonio, Peñin Luíz Felipe, Balaguer Carlos, Aracil Rafael. “*Fundamentos de Robótica*”, McGraw-Hill, 1997.

[Craig. 1986]

Craig John J. “*Introduction Robotics Mechanics & Control*”, Addison-Wesley Publishing Company, 1986.

[FU et. al, 1987]

K. S. FU, R. C. González, C. S. G. Lee. “*Robótica, Control, Detección, Visión e Inteligencia*”, McGraw-Hill, 1987.

[F. Khalid , 2000]

Shahid F. Khalid, “*LabWindows/CVI, Programming for Beginners*”, Prentice Hall, 2000

[F. Khalid I, 2002]

Shahid F. Khalid, “*Advanced Topics in LabWindows/CVI s*”, Prentice Hall, 2002

[J. Somló et. al, 1997]

J. Somló, B. Lantos, P: T: Cat, “*Advanced Robot Control*”, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1997

[Mark et. al, 1989]

Mark W. Spong, M. Vidyasagar. “*Robot Dynamics and Control*”, John Wiley & Sons, 1989.

[Ollero, 2001]

Ollero Baturone Aníbal. “*Robótica, Manipuladores y robots móviles*”, Alfaomega-Marcombo, 2001.

[Rentería, et, al, 2003]

Rentería y Rivas, “*Robótica Industrial, Fundamentos y aplicaciones*”, McGraw Hill, 2003

[Sanz, 2002]

Pedro José Sanz Valero, “*Introducción a la robótica inteligente*”, Campus de Riu Sec, Castellón, Diciembre de 2002

[Torres Ortega, IPN, 1997]

José G. Torres Ortega, “*La Esime Azcapotzalco Precursora en América Latina en la Aplicación de Robots en Cirugía*”, IPN CIENCIA, ARTE: CULTURA, 1997 .

[Wright et. al, 2001]

Richard Wright, Benjamín Lipchak, “*OpenGL SuperBible*”, Sams, 2001