

SIMULACIÓN CUALITATIVA SOBRE DIAGRAMAS DE BIFURCACIÓN

TESIS

Que para obtener el grado de
MAESTRO EN CIENCIAS EN INGENIERÍA ELÉCTRICA

presenta

José Ortiz Bejar

Dr. Juan J. Flores Romero

Director de Tesis

Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo
División de Estudios de Posgrado de la Facultad de Ingeniería Eléctrica

Agosto 2008

*A mis padres Oralia y José por el
apoyo que me han brindado para
lograr este objetivo.*

*A mis hermanos Sandra, Jesús, Benito
y Francisco por su ayuda y comprensión.*

*A mi asesor el Dr. Juan J. Flores,
quien tuvo a bien apoyarme en la
supervisión y revisión de esta tesis.*

*A mis amigos en especial a Eric y Mario
a quienes agradezco su confianza, apoyo y lealtad.*

Resumen

Un diagrama de bifurcación es una representación de las posibles soluciones de un sistema dinámico en función de sus parámetros. Contiene información útil para describir la dinámica del sistema, información que puede ser utilizada para predecir el comportamiento del sistema.

La simulación cualitativa de un sistema dinámico permite conocer el comportamiento de un sistema con un mínimo de información acerca del mismo. Mediante este análisis se obtiene información que puede ayudar a mantener la estabilidad de un sistema. Un análisis cualitativo puede llevarse a cabo sin necesidad de grandes cantidades de información a diferencia de un análisis cuantitativo de los sistemas dinámicos.

En el presente trabajo se creó una representación cualitativa para los diagramas de bifurcación generados con la variación de uno y dos parámetros. Esta representación incluye eventos dinámicos que pueden modificar el comportamiento del sistema. Como resultado de este trabajo, se presenta una nueva representación de diagramas de bifurcación para la simulación cualitativa e inferencia del comportamiento de un sistema bajo la presencia de eventos dinámicos.

Adicionalmente, se desarrollaron algoritmos para realizar simulación cualitativa sobre los BD. Los algoritmos están basados en reglas de predicción que usan las definiciones de estabilidad para sistemas dinámicos.

Abstract

A bifurcation diagram represents all the solutions for a dynamical system for a set of varying parameters. It contains useful information to describe the dynamics of a system. This same information may be used to predict the system's behavior.

A qualitative simulation of a dynamical system provides knowledge about the system's behavior while needing a minimum of information from the system itself. Information leading to a system's stability can be acquired from the same simulation. A qualitative analysis of a dynamical system can be done with fewer information than a quantitative analysis.

A qualitative representation for bifurcation diagrams with one or two varying parameters. This representation contains dynamic events which may alter the dynamical system's behavior. As a result of this paper, a new representation for bifurcation diagrams of a qualitative simulation. This new representation also contains behavioral inferences for a system going through dynamic events.

A set of algorithms for qualitative simulation of bifurcation diagrams where created. This algorithms are based on prediction rules which use stability definitions for dynamic systems.

Contenido

Apéndices	I
Dedicatoria	III
Resumen	V
Abstract	VII
Contenido	VIII
Lista de Figuras	XI
Lista de Tablas	XIII
Lista de Símbolos	XVII
1. Introducción	1
1.1. Antecedentes	2
1.2. Descripción del problema	4
1.3. Objetivo	5
1.4. Distribución del contenido de la Tesis	5
2. Sistemas Dinámicos	7
2.1. Modelado de sistemas dinámicos utilizando ODEs	7
2.1.1. Sistemas no lineales	8
2.1.2. Sistemas no autónomos	10
2.2. Flujos sobre la línea	10
2.3. Puntos fijos y estabilidad	13
2.4. Diagramas de bifurcación	14
2.4.1. Clasificación de bifurcaciones	15
2.4.2. Bifurcación <i>punto de silla</i>	16
3. Razonamiento Cualitativo	21
3.1. Representaciones cualitativas	22
3.1.1. Representación de cantidades	23
3.2. Representación de relaciones matemáticas	25
3.3. Estados, tiempo y comportamiento	25
3.4. Representaciones espaciales	27
3.5. Simulación cualitativa	28
3.5.1. Interpretación de los datos	30

4. Modelos Cualitativos de Diagramas de Bifurcación	31
4.1. Representación cualitativa con un parámetro	32
4.1.1. Diagrama de bifurcación cualitativo	32
4.1.2. Eventos dinámicos	35
4.1.3. Perturbaciones	36
4.1.4. Definición del problema	37
4.1.5. Dinámica y Simulación	38
4.1.6. Algoritmo de Simulación	43
4.2. Representación cualitativa con dos parámetros	45
4.2.1. Diagrama de bifurcación cualitativo con dos parámetros	46
4.2.2. Cambios en dos parámetros	50
4.2.3. Perturbaciones en dos parámetros	51
4.2.4. Simulación dinámica	51
4.3. Algoritmo de Simulación en 3D	54
5. Experimentos y Resultados	59
5.1. Diagrama de bifurcación imperfecto	59
5.2. Sistema eléctrico con carga dinámica	64
5.3. Sistema Biológico	70
6. Conclusiones	75
6.1. Trabajos Futuros	78
Apéndice A.	79
A.1. Ejemplo con un parámetro	79
A.2. Ejemplo con dos parámetros	83
Referencias	87

Lista de Figuras

1.1. Diagrama de automatización del análisis de sistemas dinámicos	5
2.1. Curva de trayectoria	9
2.2. Campo direccional	11
2.3. Solución cualitativa para $x = \frac{\pi}{4}$	12
2.4. Solución cualitativa para cualquier valor de x	12
2.5. Solución cualitativa para cualquier valor de x	13
2.6. Cambio de estabilidad	15
2.7. Puntos fijos para $\dot{x} = r + x^2$	17
2.8. Representación como pila de vectores de campo	17
2.9. $r = -x^2$	18
2.10. Diagrama de Bifurcación para $\dot{x} = r + x^2$	18
4.1. Diagrama de Bifurcación para $\dot{x} = rx + x^3 - x^5$	33
4.2. Diagrama de bifurcación Cualitativo para la Figura 4.1	35
4.3. Casos para el Teorema 1.	39
4.4. Predicción del comportamiento causado por una perturbación	40
4.5. Predicción del comportamiento causado por caídas	41
4.6. Predicción del comportamiento causado por un descarrilamiento	42
4.7. Representación rectangular	47
4.8. Relación (r, h, x)	47
4.9. Diagrama de Bifurcación para el sistema biológico	48
4.10. Diagrama de bifurcación Cualitativo para la figura 4.9	49
4.11. Selección de regiones	49
4.12. Efectos de la representación cualitativa	50
4.13. Caída en dos dimensiones	52
4.14. Ambigüedad en BDs tridimensionales	54
5.1. Puntos fijos para $\dot{x} = 16 + rx - x^3$	60
5.2. Diagrama de bifurcación para $\dot{x} = c + rx - x^3$	61
5.3. Resultados de la simulación sobre el BD de la figura 5.2	63
5.4. Circuito de carga Dinámica	65
5.5. Diagramas de bifurcación para el sistema de carga dinámica	66

5.6. Gráfica de resultados de la Simulación para el BD del Sistema de Carga Dinámica	69
5.7. Gráficas para la Simulación sobre el Sistema Biológico	72

Lista de Tablas

4.1.	Representación cualitativa del diagrama de bifurcación de la figura 4.1 . . .	34
4.2.	Representación cualitativa del diagrama de bifurcación del sistema $\dot{x} = h + rx - x^3$	48
4.3.	Tabla de decisión para un evento descarrilamiento	52
5.1.	Representación cualitativa del diagrama de bifurcación de la Figura 5.2(b)	60
5.2.	Ruta cualitativa para el Sistema de cubico	62
5.3.	Lista de estados para la simulación cualitativa	63
5.4.	Representación cualitativa del BD del Sistema de Carga Dinámica	67
5.5.	Ruta cualitativa para el Sistema de Carga Dinámica	68
5.6.	Resultados de la Simulación para el BD del Sistema de Carga Dinámica . .	68
5.7.	Ruta cualitativa para el Sistema Biológico	70
5.8.	Resultado 1 para el Sistema Biológico	71
5.9.	Resultado 2 para el Sistema Biológico	73

Lista de Algoritmos

1.	$\text{BDQSim}(BDS_0, BD, D)$	44
2.	$\text{BDQSim2P}(BDS_0, BD, D, k, ramas, E_{cualitativos}, E_{temp})$	56

Lista de Símbolos

BD	Diagrama de Bifurcación (Bifurcation Diagram)
BDS	Segmento de un diagrama de bifurcación (Bifurcation Diagram Segment)
$B(r)$	Descripción cualitativa de como cambia r
D	Descripción resultante de combinar $B(r)$ y las perturbaciones
ϵ	Incremento infinitesimal de x
$f(x)$	Función de x
$f(x, r)$	Función de x con parámetro de bifurcación r
$f(x, r, h)$	Función de x con parámetros de bifurcación r y h
h	Parámetro de bifurcación
ls	Para hacer referencia a un punto fijo estable por la izquierda
ODE	Ecuación diferencial ordinaria (Ordinary Differential Equation)
QBD	Diagrama de Bifurcación Cualitativo (Qualitative Bifurcation Diagram)
QDE	Ecuación diferencial cualitativa (Qualitative Differential Equation)
$qdir_x$	Dirección cualitativa de x
$QS(x)$	Espacios cuantitativos de x
$qstate(x)$	Estado cualitativo de x
$qv(x)$	Valor cualitativo de x
QR	Razonamiento Cualitativo (Qualitative Reasoning)
r	Parámetro de bifurcación
rs	Para hacer referencia a un punto fijo estable por la derecha
s_r	Cada elemento en D
st	Para hacer referencia a un punto fijo o BDS estable
us	Para hacer referencia a un punto fijo o BDS inestable
x^*	Punto fijo de $f(x)$

Capítulo 1

Introducción

En la naturaleza existen algunos fenómenos que pueden ser modelados como sistemas dinámicos. Un sistema dinámico es aquel que evoluciona en el tiempo. Esta evolución está gobernada por un conjunto de reglas, las cuales especifican el estado del sistema en cada valor de tiempo (Ver [Nayfhe95, Scheinerman96]). El comportamiento del sistema se modela mediante ecuaciones diferenciales ordinarias o parciales y las soluciones de éstas representan una solución del sistema.

Es de gran interés conocer aproximaciones numéricas que modelen los sistemas dinámicos. Las soluciones numéricas son de gran utilidad para predecir el comportamiento de un sistema y tomar medidas de control que permitan prevenir daños al sistema y mejorar su desempeño, entre otras aplicaciones.

Desgraciadamente no siempre es posible tener una solución exacta y en muchos casos no es Existen. necesario situaciones en las que se necesita mantener el sistema con ciertas características cualitativas; por ejemplo mantener las ganancias de una empresa a la alza o hacer que el consumo energético se mantenga a la par de la generación.

El problema anterior se puede resolver mediante la aplicación de teorías difusas [Bonarini94, Bellazzi99] o utilizando Razonamiento Cualitativo [Kuipers84]. Este tipo de modelos se aproximan mas a la forma en que el ser humano realiza inferencias. Por lo cual podemos utilizar las teorías mencionadas para generar algoritmos que emulen el razonamiento humano.

En un sistema dinámico las variables que varían lentamente en relación con el resto de las variables del sistema se les denomina parámetros (e.j. la carga en un sistema eléctrico, el incremento en los costos, etc). Los sistemas dinámicos son sensibles a la variación de sus parámetros. Cambios en los parámetros pueden originar modificaciones en la topología de las soluciones del sistema; es decir, pueden llevar el sistema a operar en condiciones indeseables [Chin-Woo95], las cuales pueden ser causas de eventos catastróficos como colapsos de voltaje [Wang94].

Las modificaciones en los parámetros de un sistema pueden ocasionar que aparezcan y desaparezcan soluciones o que las mismas cambien de estabilidad [Strogatz94, Nayfhe95]. A los valores en los cuales ocurren esos cambios en la topología se les denomina puntos de bifurcación. El conocimiento de los puntos de bifurcación puede ayudar al desarrollo de medidas de control.

La relación resultante entre uno o varios parámetros de un sistema y la topología de las soluciones que genera se conoce como *Diagrama de Bifurcación (Bifurcation Diagram, BD)* [Strogatz94].

1.1. Antecedentes

Muchos trabajos definen representaciones cualitativas y algoritmos que resuelven sistemas dinámicos y proporcionan soluciones en términos cualitativos.

En [Kuipers84] se presenta una metodología para predecir el comportamiento de sistemas caracterizados por parámetros variantes en el tiempo. La estructura del sistema es representada mediante un conjunto de parámetros y restricciones que abstraen el sistema a una representación cualitativa. Se representa mediante Ecuaciones Diferenciales Cualitativas (Qualitative Differential Equation, QDE). El comportamiento del sistema se modela utilizando un conjunto de puntos discretizados representativos de la dinámica del sistema y la dirección de cambio.

Kuipers explica la simulación cualitativa como la clave de la inferencia del razonamiento casual [Kuipers86]. Presenta definiciones cualitativas para la estructura y comportamiento como abstracción de los modelos basados en ecuaciones diferenciales. Propone un

algoritmo, *QSIM* (Qualitative Simulation algorithm), el cual es capaz de proporcionar una versión cualitativa de cualquier solución de las ecuaciones diferenciales que representan el sistema dinámico.

Un enfoque diferente es usar razonamiento cualitativo para construir automáticamente un simulador numérico con facilidades de explicación integradas. Estos simuladores auto-explicables [Forbus90] usan técnicas tradicionales de simulación numérica para generar las soluciones de un sistema, las cuales son rastreadas cualitativamente. La información concurrente que envuelve la descripción cualitativa de la solución es usada para generar las explicaciones y para asegurar que los modelos matemáticos apropiados son usados cuando se cruzan los umbrales de aplicación.

Una solución cualitativa de sistemas complejos puede ser muy difícil de interpretar y a su vez, es común que describa un comportamiento ambiguo. Debido a estos problemas puede dudarse de la escalabilidad y la aplicación de *QSIM* a sistemas reales. En [Clancy97] se proponen dos modelos que intentan resolver los problemas de complejidad y ambigüedad que presenta *QSIM*: *DecSIM* modelo de descomposición y simulación para resolver el problema de complejidad; y *TeQSIM* para prevenir descripciones de comportamiento ambiguas.

En *DecSIM* las variables del modelo son particionadas en componentes y una descripción de comportamiento es generada para cada componente. Manteniendo las relaciones entre componentes para garantizar que todas restricciones del modelo sean satisfechas. *DecSIM* es capaz de generar una descripción del comportamiento equivalente a la generada por *QSIM*.

TeQSIM es *QSIM* integrando un modelo lógico temporal que verifica el proceso de simulación, con lo anterior es posible especificar información de comportamiento por medio de restricciones de trayectoria.

Flores [Flores05] toma los esquemas cualitativos desarrollados por Kuipers [Kuipers84, Kuipers94, Kuipers86] y propone una representación cualitativa para los Diagramas de Bifurcación; caracteriza cualitativamente los eventos dinámicos que pueden ocurrir sobre un diagrama de bifurcación; en dicho artículo también se presenta un algoritmo para determinar el comportamiento del sistema basado en la variación de un parámetro y en la ocurrencia de perturbaciones.

Los trabajos recientes en el área de QR principalmente son enfocados al área de robótica y visión. Se han desarrollado algoritmos que permiten a un robot aprender como debe moverse en un entorno real, así como generar reglas de inferencia, las cuales son desarrolladas en base a una descripción cualitativa del medio en que se mueve [Provost07, Muga07, Muga08]. En el área de visión; basados en imágenes adquiridas por cámaras es posible generar descripciones cualitativas de éstas y por medio del uso de QR automatizar la detección de objetos en movimiento [Fahimi07]. No encontramos aportes recientes de QR al análisis de sistemas dinámicos relacionado con estudios basados en sus diagramas de Bifurcación.

1.2. Descripción del problema

Los Diagramas de Bifurcación (BD del inglés Bifurcation Diagram) representan el conjunto de soluciones de equilibrio del sistema dinámico a partir de cual se generó. Cada punto en el BD es una solución para valores fijos de sus parámetros, por tanto los BD representan la dinámica del sistema al modelar como las soluciones del sistema son modificadas por la variación de sus parámetros.

El objetivo del presente trabajo es proporcionar una representación cualitativa para BDs de dos y tres dimensiones. La representación debe proveer una abstracción de las características cualitativas de los BD y proporcionar un algoritmo de simulación cualitativa que al aplicarlo sobre un BD (*BDQSim*) sea capaz de inferir sucesos que modifiquen el comportamiento del sistema. La simulación consiste en tratar de predecir la trayectoria de soluciones sobre la cual se mueve el sistema ante la presencia de eventos dinámicos.

Por medio de una representación cualitativa se puede automatizar la interpretación del comportamiento de un sistema bajo la presencia de cambios en los parámetros de un sistema o perturbaciones. En este trabajo se generan representaciones cualitativas sobre las cuales se puede emular el proceso de interpretación que realiza un experto al momento de analizar un diagrama de bifurcación. Todos los posibles comportamientos de un sistema que deduce el experto, los obtiene basado en los conceptos de estabilidad de sistemas. Así pues por medio de la cualitativización de los BD es posible generar algoritmos de inferencia que

obtengan los comportamientos de un sistema de forma semejante a como lo haría el experto. Con lo anterior es posible conocer de forma automatizada los posibles comportamientos de un sistema para diferentes procesos de variación. Es decir, si para un sistema dado se conoce su BD y como varían sus parámetros, es posible determinar como evolucionará y con esta información preparar acciones de control. Con ésto se puede dar un paso mas en la automatización del proceso de análisis de sistemas dinámicos. La etapa de automatización en la que contribuye el presente trabajo está dada por la última etapa de la Figura 1.1.

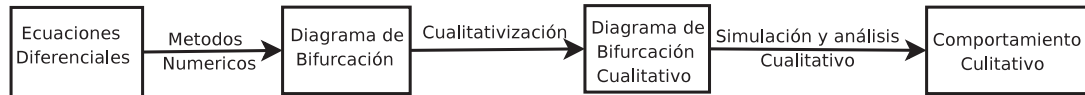


Figura 1.1: Diagrama de automatización del análisis de sistemas dinámicos

1.3. Objetivo

En esta tesis se plantean los siguientes objetivos:

- Ampliar la representación cualitativa de [Flores05] a BD con dos parámetros de bifurcación. Esto da origen a diagramas de bifurcación en tres dimensiones, por lo que se debe desarrollar un algoritmo para realizar simulaciones cualitativas sobre BD con estas características.
- Implementar la representación cualitativa de BD y el algoritmo de simulación propuestos. Generar las bibliotecas de Mathematica necesarias para realizar simulaciones.
- Aplicar las representaciones y algoritmos desarrollados a sistemas dinámicos.

1.4. Distribución del contenido de la Tesis

En este Capítulo se describieron los trabajos previos en el área de razonamiento cualitativo aplicado a la solución de sistemas dinámicos, se describió el problema a resolver y se plantearon los objetivos. El Capítulo 2 define conceptos básicos de sistemas dinámicos necesarios para la representación cualitativa de los BD. En el Capítulo 3 se exponen las

bases de la simulación cualitativa. El Capítulo 4 describe las representaciones cualitativas de los BD y de los eventos dinámicos. El Capítulo 5 presenta ejemplos cualitativos de diagramas de bifurcación y simulaciones sobre ellos. Finalmente se exponen las conclusiones y se proponen los trabajos futuros en el Capítulo 6.

Capítulo 2

Sistemas Dinámicos

La Dinámica es el estudio de la variación temporal de variables tales como temperatura, crecimiento poblacional, voltaje, precios, etc. El estudio es generalmente posible asociando los valores de las variables a puntos de tiempo diferentes, uniformemente espaciados, i.e. **ecuaciones de diferencias**, o por sistemas que relacionan los valores de las variables a su derivadas en el tiempo i.e. **ecuaciones diferenciales**. Los fenómenos dinámicos pueden ser modelados por otras representaciones matemáticas, tal como ecuaciones diferenciales parciales y autómatas celulares, entre otras metodologías.

2.1. Modelado de sistemas dinámicos utilizando ODEs

Una de las principales herramientas para modelar sistemas dinámicos es el cálculo diferencial. Las ecuaciones diferenciales se dividen en dos tipos: ordinarias y parciales. En el presente trabajo se trata con sistemas dinámicos que son representados mediante ecuaciones diferenciales ordinarias (Ordinal Differential Equations ODEs).

Una ODE es una ecuación de la forma

$$F(t, x, \frac{dx}{dt}, \dots, \frac{d^n x}{d^n t}) = 0 \quad (2.1)$$

La función $f(t)$ es una solución de (2.1) si

$$F(t, f(t), \frac{df(t)}{dt}, \dots, \frac{d^n f(t)}{d^n t}) = 0 \quad (2.2)$$

De forma general la solución de un sistema de n variables puede ser modelada por un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias (ver Ecuación 2.3).

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, \dots, x_n) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= f_n(x_1, \dots, x_n) \end{aligned} \tag{2.3}$$

donde $x_1 \cdots x_n$ son una de las variables del sistema y se dice que el sistema es n -dimensional.

Como ejemplo se muestra la ecuación para el oscilador armónico amortiguado

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + kx = 0 \tag{2.4}$$

La Ecuación 2.4 es una ecuación diferencial ordinaria, debido a que solo contiene derivadas ordinarias y solo tiene una variable independiente, el tiempo. Esta ecuación puede reescribirse como la Ecuación 2.5, introduciendo nuevas variable $x_1 = x$ y $x_2 = \dot{x}$.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{b}{m}x_2 - \frac{k}{m}x_1 \end{aligned} \tag{2.5}$$

2.1.1. Sistemas no lineales

Cuando un problema es no lineal en general es muy difícil encontrar una solución analítica e incluso puede no existir una. La forma mas usual de resolver problemas no lineales es tomando consideraciones que conviertan el problema original en un problema lineal que por lo general es fácil de resolver. Pero al hacer lo anterior se obtienen soluciones que modelan parcial o inadecuadamente el sistema original.

Típicamente una función no lineal en sus términos contiene productos, potencias y funciones de x_i tales como x_1x_2 , $(x_i)^3$, o $\cos x_2$. Por ejemplo, el movimiento de un péndulo está gobernado por la ecuación $\ddot{x} = \frac{g}{L} \sin x = 0$, donde x es el ángulo con respecto de la vertical, g es la aceleración de la gravedad y L la longitud del péndulo. El sistema equivalente lineal está dado por la Ecuación 2.6.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{g}{L}x_1 \end{aligned} \tag{2.6}$$

El movimiento de un péndulo es simple: los cambios en la energía son bajos, se mueve en una dimensión y el nivel mas alto de energía se presenta cuando éste gira sobre su eje. Por lo que debe existir una forma sencilla de extraer esa información directamente del sistema. Lo anterior es la base para plantear una solución gráfica utilizando métodos geométricos.

La idea general consiste en suponer que se conoce la solución para un condición inicial particular. La solución debe ser un par de funciones $x_1(t)$ y $x_2(t)$, que representan la posición y la velocidad del péndulo. Construyendo un espacio abstracto con coordenadas (x_1, x_2) , entonces la solución $(x_1(t), x_2(t))$ corresponde a un punto moviéndose en una curva en ese espacio. Ver Figura 2.1.

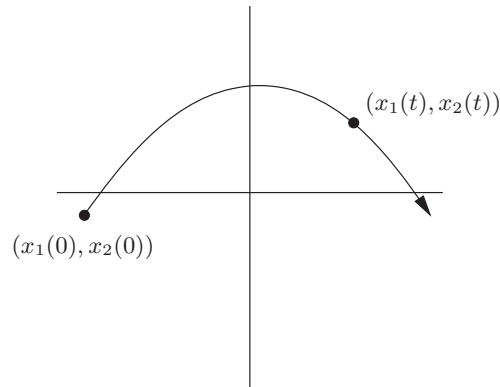


Figura 2.1: Curva de trayectoria

La curva mostrada en la Figura 2.1 es llamada **trayectoria**, y el espacio es llamado **espacio de fase del sistema**. El espacio de fase está completamente lleno de trayectorias, desde cada punto que sirve como condición inicial.

La finalidad es hacer el proceso inverso: dado el sistema, dibujar las trayectorias y a partir de ellas extraer información acerca del sistema, un razonamiento geométrico permite dibujar las trayectorias sin tener que resolver el sistema.

El espacio de fase para la representación general dado por la Ecuación 2.3 es el espacio de coordenadas $x_1 \cdots x_n$. Como el espacio consta de n variables, el sistema es referido como sistema n -dimensional o de orden n .

2.1.2. Sistemas no autónomos

Podría pensarse que la representación definida por la Ecuación 2.3 no es lo suficientemente general, ya que no incluye una dependencia explícita del tiempo. Es decir no modela sistemas no autónomos. Los sistemas de ecuaciones dependientes del tiempo o no autónomos, como la ecuación del oscilador armónico $m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F \cos t$, se pueden reescribir como en la ecuación 2.7. En la Ecuación 2.7 hacemos $x_1 = x$ y $x_2 = \dot{x}$ e introducimos $x_3 = t$. Entonces $\dot{x}_3 = 1$.

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \frac{1}{m}(-kx_1 - bx_2 + F \cos x_3) \\ \dot{x}_3 &= 1\end{aligned}\tag{2.7}$$

La Ecuación 2.7 es un ejemplo de un sistema tridimensional. Así, un sistema de orden n dependiente del tiempo es un caso especial de $(n + 1)$ dimensiones. Usando cambios de variable podemos siempre remover la dependencia del tiempo.

2.2. Flujos sobre la línea

En esta sección se define el concepto de flujo desde el punto de vista geométrico. Para ilustrar se elige la Ecuación no lineal 2.8

$$\dot{x} = \sin x\tag{2.8}$$

La Ecuación 2.8 puede ser resuelta de manera analítica utilizando separación de variables. La solución está dada por $t = \ln|\csc x + \cot x| + C$. Evaluando C para $x = x_0$ obtenemos la Ecuación 2.9.

$$t = \ln\left|\frac{\csc x_0 + \cot x_0}{\csc x + \cot x}\right|\tag{2.9}$$

Resulta difícil describir las características cualitativas de la solución. Aún cuando la Ecuación 2.9 es la solución exacta del sistema representado por la Ecuación 2.8

En contraste, un análisis gráfico de la Ecuación 2.8 es claro y simple, como se muestra en la Figura 2.2. Si t representa tiempo, x sería la posición de una partícula imaginaria moviéndose a lo largo del eje, y \dot{x} la velocidad de la partícula. Entonces la Ecuación

2.8 representa el **vector de campo** sobre la línea y define el vector de velocidad \dot{x} para cada x . Para construir el vector de campo es necesario graficar \dot{x} versus x , y después dibujar flechas sobre el eje x para indicar el vector de velocidad correspondiente a cada valor de x . Las flechas se dirigen hacia la derecha cuando $\dot{x} > 0$ y hacia la izquierda cuando $\dot{x} < 0$.

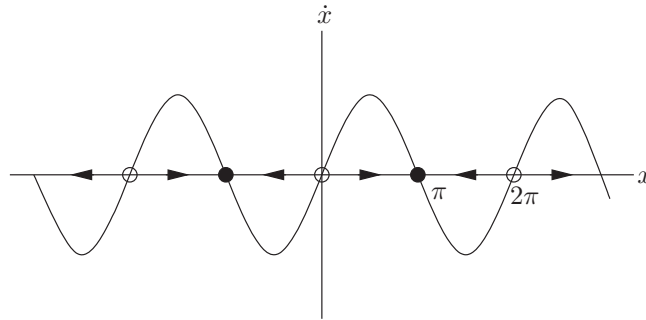


Figura 2.2: Campo direccional

La Figura 2.2 proporciona una forma física de pensar acerca de un campo direccional: podemos imaginar que un fluido se mueve a lo largo del eje x con una velocidad que varía de acuerdo a la regla $\dot{x} = \sin x$. Como se muestra en la Figura 2.2, el flujo es hacia la derecha cuando $\dot{x} > 0$ y hacia la izquierda cuando $\dot{x} < 0$. En los puntos donde $\dot{x} = 0$, no hay flujo; dichos puntos son denominados **puntos fijos**. De la Figura 2.2 se observa que hay dos clases de puntos fijos: Los puntos fijos estables (atractores) que se representan por círculos rellenos y los puntos fijos inestables (repulsores) representados por círculos vacíos.

Con ayuda de la Figura 2.2 se pueden entender fácilmente las soluciones de la ecuación diferencial $\dot{x} = \sin x$. Solo es necesario imaginar una partícula que se mueve con el flujo.

La aproximación anterior permite inferir el comportamiento cualitativo para una determinada condición inicial. Por ejemplo, una partícula que inicia en $x_0 = \pi/4$ se moverá hacia la derecha hasta cruzar $x = \pi/2$ (donde el flujo descrito alcanza un máximo). Después la partícula comienza a frenarse y eventualmente alcanzará el punto fijo que se encuentra en $x = \pi$. La Figura 2.3 muestra la solución de forma cualitativa.

La forma cualitativa de la solución para cualquier condición inicial es bosquejada en la Figura 2.4.

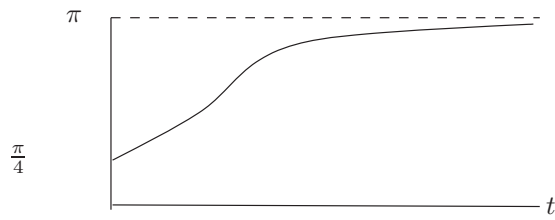


Figura 2.3: Solución cualitativa para $x = \frac{\pi}{4}$

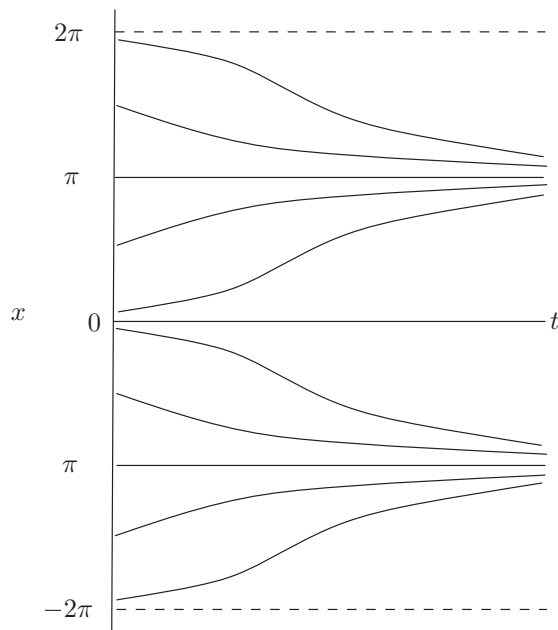


Figura 2.4: Solución cualitativa para cualquier valor de x

Aún cuando la Figura 2.4 nos proporciona información cualitativa del comportamiento del sistema, a partir de ella no podemos saber en que momento la velocidad \dot{x} es mayor. Pero esa forma de razonar es suficiente para el propósito de este trabajo.

2.3. Puntos fijos y estabilidad

Las ideas expuestas en la Sección 2.2 puede ser extendidas a cualquier sistema unidimensional $\dot{x} = f(x)$. Solo es necesario graficar \dot{x} versus x y después obtener el campo direccional sobre la línea como se muestra en la Figura 2.5. Al imaginarse el fluido que se desplaza a lo largo de la línea con velocidad $f(x)$. El fluido imaginario es llamado fluido de fase, y la línea real es el espacio de fase. El flujo es hacia la derecha donde $f(x) > 0$ y hacia la izquierda donde $f(x) < 0$. Para encontrar la solución de $\dot{x} = f(x)$, comenzando en una condición inicial x_0 , se coloca una partícula imaginaria en x_0 y se observa como se mueve a través del flujo. La partícula se mueve en a lo largo del eje x de acuerdo a $x(t)$. Esta función es llamada trayectoria basada en $x = x_0$, y representa la solución para la condición inicial $x = x_0$. Una Figura como 2.3 que muestre todas la diferentes trayectorias cualitativas de un sistema, es llamado retrato de fase. La forma del retrato de fase esta controlada por los puntos fijos x^* , definidos por $f(x^*) = 0$, los cuales corresponden a los puntos estacionarios del flujo. En la Figura 2.2, los círculos rellenos son estables (el flujo es atraído hacia ellos) y los vacíos inestables (el flujo se aleja de ellos).

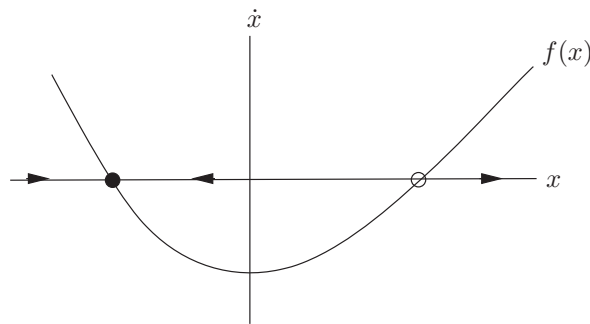


Figura 2.5: Solución cualitativa para cualquier valor de x

En términos de la ecuación diferencial original, los puntos fijos representan so-

luciones de equilibrio. El equilibrio se define como estable si las perturbaciones pequeñas son amortiguadas después de un periodo de tiempo. El equilibrio estable es representado geoméricamente por los puntos fijos estables. Contrario al equilibrio inestable, en el cual las perturbaciones pequeñas crecen en el tiempo. En el estudio anterior no es necesario evaluar la derivada (velocidad) para determinar cuando el sistema alcanza un punto de equilibrio.

El análisis de estabilidad para sistemas n -dimensionales se realiza analizando los valores característicos del sistema; dicho análisis no se expone en este trabajo pero puede consultarse en [Nayfhe95].

También existen soluciones de equilibrio que no son un solo punto fijo sino que la solución oscila entre un conjunto de puntos de forma periódica a este tipo de soluciones se les denomina periódicas. El análisis de estabilidad para esos casos se realiza mediante el uso de mapas de Poincaré [Nayfhe95].

En el presente trabajo los sistemas expuestos a lo mas exhiben soluciones periódicas con periodo 2 (la solución se queda oscilando entre dos puntos fijos).

2.4. Diagramas de bifurcación

En sistemas unidimensionales se puede observar que los sistemas dinámicos dependen de los parámetros de la ODE que los describe. La estructura cualitativa del flujo del sistema puede cambiar conforme se varían los parámetros del sistema. En particular pueden aparecer o desaparecer puntos fijos, o cambiar la estabilidad de éstos. Estos cambios cualitativos en la dinámica del sistema son llamados **bifurcaciones**, y a los valores del parámetro para los cuales ocurren los cambios se les denomina puntos de bifurcación.

Las bifurcaciones son importantes científicamente ya que proveen modelos de transiciones e inestabilidades conforme un parámetro de control varía. Por ejemplo, la deformación de un soporte, si un peso pequeño se coloca en la parte superior del soporte como en la Figura 2.6, el soporte permanece vertical, pero si el peso se incrementa la posición vertical se vuelve inestable y el soporte puede deformarse.

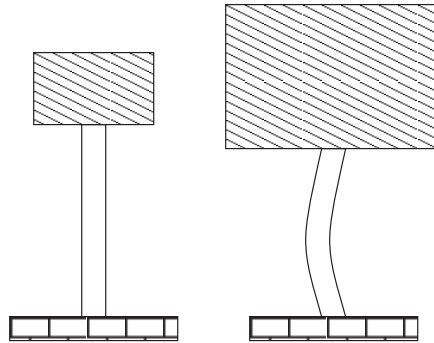


Figura 2.6: Cambio de estabilidad

2.4.1. Clasificación de bifurcaciones

Las bifurcaciones se clasifican en varios tipos [Nayfhe95, Wang94]; esta clasificación está dada en relación a como cada bifurcación modifica la topología de las soluciones del sistema dinámico.

Bifurcación de punto silla

Es el tipo más simple de bifurcación. Con ella se crean y destruyen puntos fijos. Una bifurcación de punto silla puede ocurrir en sistemas que no tienen puntos fijos. A medida que un parámetro del sistema varía, dos puntos fijos aparecen en la bifurcación, uno estable y otro inestable [Strogatz94].

Bifurcación transcítica

Una bifurcación transcítica no crea ni destruye puntos fijos. Por el contrario, a medida que varía el parámetro r , dos puntos fijos se encuentran e intercambian su estabilidad. Es decir, el punto fijo estable se hace inestable en el punto de bifurcación, y el punto inestable se hace estable [Strogatz94].

Bifurcación tenedor

La bifurcación tenedor es una bifurcación simétrica, y por ello se observa en muchos sistemas que tienen simetría entre una parte positiva y otra negativa [Nayfhe95]. Las

bifurcaciones tenedor consisten en que un único punto fijo se bifurca en tres, uno de los cuales tiene la misma estabilidad que el original y los otros dos la contraria. Las bifurcaciones tenedor pueden clasificarse en dos grupos importantes: subcríticas y supercríticas. La supercrítica ocurre cuando un punto fijo estable se bifurca en dos puntos fijos estables y uno inestable. Una bifurcación subcrítica es análoga a la anterior pero con las estabilidades y el sentido cambiados: dos puntos fijos inestables y uno estable colapsan en un punto fijo inestable.

Bifurcación de Hopf

en este tipo de bifurcación, un punto fijo se bifurca en un ciclo, o bien un ciclo colapsa en un punto fijo [Strogatz94].

Con el propósito de mostrar como una bifurcación modifica la topología del sistema solo se analiza mediante un ejemplo la bifurcación punto de silla.

2.4.2. Bifurcación *punto de silla*

La bifurcación punto de silla (saddle node bifurcation) es el mecanismo básico mediante el cual se crean y destruyen puntos fijos. Conforme el parámetro varía, dos puntos fijos pueden aparecer o colapsarse. El ejemplo prototipo de una bifurcación tipo silla está dado por el sistema de primer orden

$$\dot{x} = r + x^2 \tag{2.10}$$

donde r es el parámetro, el cual puede ser positivo, negativo o cero. Cuando r es negativo, hay 2 puntos fijos, uno estable y otro inestable (ver Figura 2.7(a)).

Conforme r se aproxima a 0, la parábola se mueve hacia arriba y los dos puntos se mueven el uno hacia el otro. Cuando $r = 0$, los puntos fijos se colapsan en un solo punto semi-estable en $\dot{x} = 0$ (ver Figura 2.7(b)). Este tipo de puntos desaparecen muy rápidamente, en este caso tan pronto como $r > 0$ (ver Figura 2.7(c)).

Existen muchas formas de representar una bifurcación. Se puede mostrar como una pila de vectores de campo para valores discretos de r (Figura 2.8). Esta representación

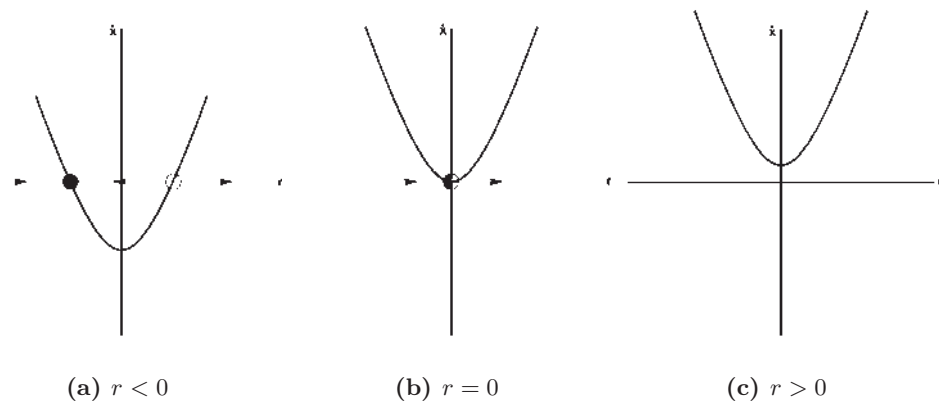


Figura 2.7: Puntos fijos para $\dot{x} = r + x^2$

enfatisa que los puntos fijos dependen de r .

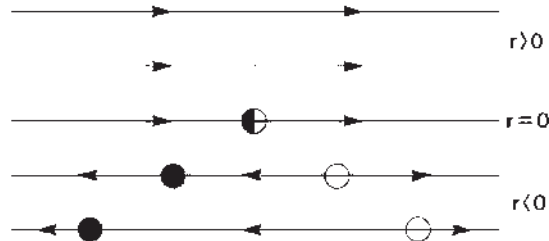
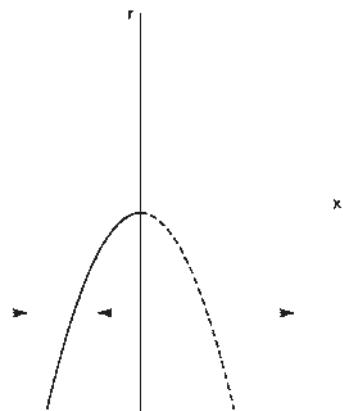
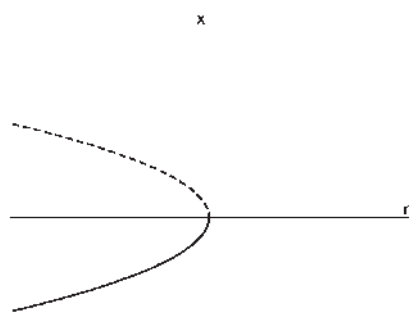


Figura 2.8: Representación como pila de vectores de campo

En el límite de la pila de vectores de campo se tiene una Figura como 2.9. La curva mostrada es $r = -x^2$, la cual da los puntos fijos para los diferentes valores de r . Para distinguir los puntos estables de los inestables se utiliza una línea sólida para los puntos estables y una línea punteada para los puntos inestables.

Sin embargo, la forma mas común de representar una bifurcación es invirtiendo los ejes como en la Figura 2.10. En la gráfica r actúa como la variable independiente, y es dibujada horizontalmente. La Figura 2.10 es conocida como **diagrama de bifurcación** (BD).

En este capítulo se definieron de forma cualitativa, los conceptos básicos de sistemas dinámicos importantes para el desarrollo de esta tesis. Conceptos tales como estabilidad, espacios de fase, flujos, puntos de equilibrio y bifurcaciones. Estas ideas básicas de

Figura 2.9: $r = -x^2$ Figura 2.10: Diagrama de Bifurcación para $\dot{x} = r + x^2$

dinámica de sistemas son usadas para el desarrollo de las representaciones cualitativas del BD, así como las reglas de inferencia de comportamiento de un sistema dinámico.

Capítulo 3

Razonamiento Cualitativo

El *razonamiento cualitativo* (Qualitative Reasoning QR) es el área de la inteligencia artificial (*IA*) relacionada con la obtención automatizada del comportamiento de modelos físicos. Se emplea en medicina, ciencias económicas, matemáticas e ingeniería. El razonamiento cualitativo busca desarrollar software similar a los programas inteligentes, por ejemplo, los del juego de ajedrez, pero que manipulen leyes físicas. Las leyes que gobiernan el comportamiento de un sistema físico pueden ser resueltas por un proceso de tipo cualitativo. Un procedimiento numérico o cuantitativo requiere el conocimiento preciso de diversos parámetros tales como la temperatura inicial y los coeficientes térmicos, en el caso de un problema de difusión de calor. En términos simples, el razonamiento cualitativo representa los parámetros de un modelo por intervalos (positivo, cero, negativo) y por relaciones en magnitud (menor que, igual a, mayor que). El comportamiento de un modelo se obtiene por procedimientos de búsqueda de soluciones y no por los procedimientos numéricos secuenciales convencionales. Utilizando QR pueden realizarse inferencias con información incompleta. QR se ha enfocado principalmente en los dominios científicos y de ingeniería, de ahí su otro nombre, *Física Cualitativa*.

La física cualitativa comienza con la investigación de *deKleer* [deKleer84]. Estudia como el conocimiento cualitativo interactúa en solución de problemas simples de mecánica. Después de una década de exploración, el potencial para aplicaciones industriales surge a mediados de los 80 y el área presenta un rápido desarrollo.

3.1. Representaciones cualitativas

Como en casi todas las representaciones, no existe una representación única, universal o mejor. Existen un espectro de posibles elecciones, cada una con sus propias ventajas y desventajas. Lo que tienen en común todas ellas es que proveen notaciones para describir y razonar sobre propiedades continuas del mundo físico. Las dos decisiones importantes de la representación cualitativa son la resolución y la composición.

La resolución se refiere al nivel de detalle de la información en la representación. La resolución necesaria es un problema debido a que una de las metas del razonamiento cualitativo es obtener conclusiones proporcionando la menor cantidad de información posible. La información de baja resolución está disponible más frecuentemente que la información precisa (ej. “El auto se mueve lentamente” vs. “La derivada de la velocidad del auto en línea a nosotros es de 12 km/h”), pero las conclusiones obtenidas con resolución baja frecuentemente son ambiguas. El papel de la ambigüedad es importante: la predicción de futuros alternos (ej., “el auto nos atropella” vs. “el auto no nos atropella”) sugiere que se debe tener más información para analizar el problema más precisamente, o tomar una acción, dependiendo del modelo de razonamiento cualitativo. La información de alta resolución es frecuentemente necesaria para obtener conclusiones particulares (v.g. un análisis de elemento finito), pero el razonamiento cualitativo con representaciones de baja resolución revela cuán importantes son las preguntas que motivan una conclusión. Las representaciones cualitativas tratan de modelar el conocimiento de las personas, desde una persona corriendo en la calle hasta el que los científicos utilizan para modelar un fenómeno físico.

La composición es la capacidad de combinar representaciones para diferentes aspectos de un fenómeno o sistema para crear una representación del fenómeno/sistema como un todo. La composición es un problema porque la meta de la física cualitativa es formalizar el modelo de un proceso en sí mismo. La mayoría de los sistemas actuales de IA son basados en conocimiento adquirido mediante la experiencia basada en la información que aportan el sistema y las tareas que lo conforman. En contraste, el componente principal del conocimiento científico consiste de principios y leyes que son ampliamente aplicables, ambos con respecto al número de sistemas que modelan y la clase de tareas relevantes para éstos. La

física cualitativa desarrolla las ideas y las técnicas de organización para generar bases de conocimiento con expresión similar y capacidad de inferencia, llamadas teorías de dominio.

3.1.1. Representación de cantidades

En QR la mayoría de la investigación se ha enfocado en entender las propiedades de las representaciones de baja resolución, dado que las propiedades de las representaciones de alta resolución tienden a ser explicadas por los modelos matemáticos [Forbus96].

La representación de baja resolución para parámetros continuos es el estado de abstracción que representa una cantidad por el hecho de si es o no normal [Abbott98]. Esta es una representación útil para ciertas tareas de diagnóstico o monitoreo y solo puede expresar la diferencia entre si algo opera o no correctamente. El siguiente paso en resolución es el álgebra de signos [], la cual representa parámetros continuos como $-$, 0 o $+$, de acuerdo con el signo del parámetro, si éste es negativo, cero o positivo. El álgebra de signos es sorprendentemente poderosa: dado que las derivadas pueden ser representadas por signos, algunos de los principales resultados del cálculo diferencial (v.g. teorema del valor central) pueden ser aplicados para razonar sobre signos [deKleer84]. Ésto permite al álgebra de signos ser utilizada para aplicar razonamiento cualitativo sobre la dinámica; además permite expresar propiedades como oscilación y estabilidad. El álgebra de signos es la representación más simple que soporta ese tipo de razonamiento [Forbus96].

La representación de valores continuos por medio de conjunto de relaciones ordenadas (también conocidas como representación de espacio cuantitativo) es el siguiente paso en resolución [Forbus84, Forbus96]. Por ejemplo, la temperatura de un fluido puede ser representada en términos de la relación entre el punto de congelamiento y el punto de ebullición. Al igual que el álgebra de signos, los espacios cuantitativos son suficientes para realizar análisis de dinámica. A diferencia del álgebra de signos, la cual tiene un número fijo de valores, los espacios cuantitativos proporcionan una resolución variable debido a que pueden utilizarse tantos puntos de comparación como se desee. La temperatura del agua en una olla sobre la estufa puede ser definida en términos de la temperatura de la estufa y de los puntos de ebullición y congelamiento. Existen dos tipos de puntos de comparación dentro de los espacios cuantitativos. Los **puntos límite** son derivados de las propiedades del

dominio y se aplican a una situación específica. Continuando con el ejemplo del agua en una olla sobre la estufa, los elementos de la relación ordenada determinan cuando los procesos físicos de ebullición, congelamiento y el flujo de calor ocurren. El valor preciso de los puntos límite pueden cambiar en el tiempo, v.g. el punto de ebullición es función de la presión. Los puntos llamados **landmark** son puntos de comparación adicionales introducidos para dar mayor resolución al proceso de razonamiento [Kuipers86]. Para deducir cuando un oscilador está sobreamortiguado, subamortiguado, o críticamente amortiguado, se requiere comparar los valores pico sucesivos. La observación del valor pico de un ciclo particular (un punto landmark), y la comparación con los landmarks generados por ciclos sucesivos, proveen una forma de realizar esa inferencia.

Los intervalos son conocidos como representación de resolución variable para valores numéricos, y han sido muy utilizados en el razonamiento cualitativo. Un espacio cuantitativo puede ser visto como información parcial acerca de un conjunto de intervalos. Si se tiene la información completa de la relación entre los puntos límite y los landmarks, estos puntos de comparación definen un conjunto de intervalos que particionan los valores del parámetro. Este mapeo natural entre espacios cuantitativos e intervalos ha sido explotada por una variedad de sistemas que usan intervalos en los cuales sus puntos límite son valores numéricos conocidos para refinar las predicciones producidas solo con razonamiento cualitativo [Kuipers94]. Los intervalos difusos también han sido utilizados de esa forma, v.g. para razonar sobre sistemas de control [Shen98].

Las representaciones de orden y magnitud satisfacen valores de acuerdo con una noción de escala. Estas representaciones pueden ser importantes para resolver ambigüedades y simplificar modelos debido a que permiten razonar acerca de qué fenómenos y efectos pueden ser ignorados en una situación determinada. Por ejemplo, las pérdidas por calor de las turbinas pueden ser ignoradas en los inicios del diseño de una planta de energía, debido a que la energía perdida por esa causa es muy pequeña en comparación con la energía generada. Muchas técnicas de estratificación han sido usadas en la literatura, incluyendo los números hiperreales [Raiman91], umbrales numéricos [Mavrovouniotis88], y escalas logarítmicas [Nayak93]. Los tres aspectos tratados por todos estos formalismos son: (1) las condiciones bajo las cuales muchos efectos pequeños pueden combinarse y producir un efecto

significativo, (2) la solidez del razonamiento soportado por el formalismo y (3) la eficiencia de su uso.

Aunque muchas representaciones cualitativas tienen los números reales como su base, otras dos bases han sido utilizadas con resultados interesantes. Una de ellas es utilizando la base hyperreal, también conocida como cálculo infinitesimal. Además de las representaciones de orden y magnitud, los hyperreales han sido utilizados en el modelado de análisis comparativo [Weld90], dinámico [Davis89], y de tiempo [Iwasaki95]. La otra representación cualitativa básica para números son las álgebras multivaluadas. Una motivación para el uso de álgebras multivaluadas es que las observaciones son naturalmente categorizadas utilizando un número finito de etiquetas, v.g., muy pequeño, pequeño, normal, grande, muy grande. El desarrollo de ese tipo de álgebras está llamado a resolver problemas tales como el incremento de la composición de tales representaciones, v.g. como propagar información entre diferentes escalas de resolución.

3.2. Representación de relaciones matemáticas

Como en el caso de los números, se han desarrollado una variedad de representaciones cualitativas de relaciones matemáticas, frecuentemente adoptando y adaptando sistemas desarrollados en las matemáticas. Para proporcionar la más baja resolución y composición deseadas se usan abstracciones de funciones analíticas. Por ejemplo, las confluencias son ecuaciones diferenciales sobre álgebra de signos [deKleer84]. Las representaciones cualitativas de relaciones matemáticas no son expuestas en el presente trabajo pero pueden consultarse en los trabajos de DeKleer y Forbus [deKleer84, Forbus96].

3.3. Estados, tiempo y comportamiento

Un estado cualitativo es un conjunto de proposiciones que caracterizan un comportamiento cualitativo de un sistema. Un estado cualitativo que describe un objeto en caída libre, por ejemplo, podría incluir información acerca de los procesos físicos que están ocurriendo (v.g., movimiento hacia abajo, la aceleración debida a la gravedad, etc.) y como

las variables del objeto cambian (v.g. su posición y su velocidad). Un estado cualitativo puede representar de manera abstracta un número infinito de estados cuantitativos: Aún cuando la posición y la velocidad del objeto son diferentes en cada momento de la caída (hasta que el objeto choca con el piso), el estado cualitativo de su movimiento permanece sin cambio.

Las representaciones cualitativas pueden ser usadas para particionar el comportamiento en unidades naturales. Por ejemplo, el tiempo en el cual el objeto está cayendo mantiene su naturaleza a lo largo de un intervalo, terminando cuando el objeto colisiona con el piso. La colisión en sí puede ser descrita como otro estado cualitativo, y el hecho de que la caída lleve a la colisión puede ser representado como transición entre estados. Si el objeto tiene una velocidad horizontal diferente de 0 y existe algún obstáculo en la dirección de la caída, otro posible comportamiento del objeto es que el objeto puede colisionar con el obstáculo en lugar de con el piso. En general, un estado cualitativo puede tener muchas transiciones a muchos estados siguientes, reflejando la ambigüedad en las representaciones cualitativas. Siguiendo con el ejemplo del objeto en caída y asumiendo que no ocurren colisiones con obstáculos, el estado cualitativo de la caída se repite una vez que el objeto alcanza la altura máxima debida a la colisión. Si los valores continuos son representados por espacios cuantitativos y las fuentes de comparación son puntos límite, entonces un conjunto finito de estados cualitativos es suficiente para describir todos los posibles estados de un sistema. Una colección de tales estados cualitativos y las transiciones entre ellos se llama *envisonment* (previsor) [deKleer77].

Podemos inferir muchas conclusiones interesantes a partir de un *envisonment*. Por ejemplo, las oscilaciones correspondientes a ciclos de estados. Desafortunadamente, la resolución fija, proporcionada por los puntos límite, no es suficiente para otras conclusiones de la dinámica, tales como determinar cuando la oscilación del objeto es o no amortiguada. Si las comparaciones pueden incluir landmarks, tales conclusiones pueden algunas veces ser inferidas, v.g., mediante la comparación de la altura máxima de un rebote con la altura máxima del siguiente. El costo de introducir landmarks es que el *envisonment* no necesariamente continúa siendo finito; todo ciclo en su correspondiente *envisonment* de resolución fija puede originar un *envisonment* con un número infinito de estados cualitativos con landmarks.

Una secuencia de estados cualitativos que ocurre sobre un periodo de tiempo particular es llamado *comportamiento*. Los comportamientos puede describirse usando solo información cualitativa, solo información cuantitativa, o una mezcla de ambos. Si todos los parámetros continuos son cuantitativos, los aspectos numéricos de los comportamientos coinciden con la noción de trayectoria en el modelo de espacio de estados. Si se utiliza una representación cualitativa, un solo comportamiento puede representar una familia de trayectorias en el espacio de estados.

En un envisionment correcto, todos los posibles comportamientos de un sistema físico corresponden a una ruta en el envisionment. Dado que los envisionments reflejan solo restricciones locales, la afirmación inversa no es cierta, ésto es, una ruta arbitraria en el envisionment no necesariamente representa un comportamiento físico posible. Tales rutas deben ser probadas contra restricciones globales, tales como conservación de la energía, para asegurar su validez física. Debido a que los usos típicos de un envisionment es probar si un comportamiento observado es posible o proponer posibles comportamientos, esta limitación no representa un problema serio.

3.4. Representaciones espaciales

Las representaciones cualitativas de espacio y forma involucran cuantitativización, al igual que las representaciones continuas de un parámetro (representaciones unidimensionales). Para representaciones en que se cualitativiza más de un parámetro (representaciones espaciales) es mas complicado obtener una representación puramente cualitativa que sea independiente del problema, debido a que la ambigüedad se incrementa en mayores dimensiones [?].

Consideremos, por ejemplo, decidir si un objeto puede pasar por una puerta. Si se tiene información detallada de su forma se puede dar una respuesta. Si se considera un conjunto particular de objetos y puertas, se puede construir una representación cualitativa para esos conjuntos particulares que permita inferir si son compatibles (pueden o no pasar) basados en sus dimensiones relativas. Si se determina la representación cualitativa para los objetos y las puertas por separado, en general las reglas de inferencia que son derivadas

para este problema son débiles. El trabajo en representaciones cualitativas espaciales tiende a tomar dos aproximaciones. El primer enfoque es explorar que aspectos del problema se prestan para hacer representaciones cualitativas. El segundo enfoque es usar representaciones cuantitativas como punto de inicio y determinar las cualitativas específicas para el problema.

3.5. Simulación cualitativa

La comprensión del análisis limítrofe (el proceso de encontrar estados de transición), es la clave para entender la simulación cualitativa. Un estado cualitativo consiste de un conjunto de proposiciones, algunas de ellas describen los valores de propiedades continuas del sistema (por simplicidad se asume que esos valores están descritos por relaciones ordinales, aunque el mismo método funciona para representaciones de signo y representaciones más ricas que las ordenadas). Dos observaciones son críticas: (1) el fenómeno que causa cambio en una situación frecuentemente depende de relaciones ordinales entre los parámetros de la situación y (2) es suficiente conocer solo el signo de las derivadas de los parámetros involucrados en estas relaciones ordinales para predecir como pueden cambiar en el tiempo. Los efectos de estos cambios cuando son calculados consistentemente, describen la posible transición a otros estados.

Como ejemplo se considera nuevamente la olla de agua sobre la estufa. Una vez que la estufa está encendida, el calor comienza a fluir hacia el agua en la estufa debido a que la temperatura de la estufa es mayor que la temperatura del agua. La relación casual entre la desigualdad de temperaturas y el flujo de calor significa que para predecir cambios en la situación se tienen que encontrar sus derivadas y cualquier otra relación ordinal relevante que pueda cambiar como resultado. En este estado cualitativo, la derivada de la temperatura del agua es positiva, y la derivada de la temperatura de la estufa es cero (su temperatura es constante). Entonces un posible cambio de estado es que el agua alcance el equilibrio térmico con la estufa y el flujo de calor se detenga, aunque esa no es la única posibilidad. Sabemos que la ebullición ocurre si la temperatura del agua crece por encima de la temperatura de ebullición. Ésta también es una transición posible para el siguiente estado. Cuál de estas

transiciones ocurre depende de la relación entre la temperatura de la estufa y la temperatura de ebullición del agua.

Este ejemplo ilustra muchas características importantes del análisis limítrofe. Primero, lo débil de la información (i.e. relación ordinal) suficiente para inferir conclusiones importantes acerca del comportamiento físico. Segundo, el análisis limítrofe con solamente información cualitativa es fundamentalmente ambiguo. Puede identificar qué transiciones pueden ocurrir, pero no puede determinar por si mismo en todos los casos cual ocurrirá. Tercero, como otras ambigüedades cualitativas, podemos usar información de mayor resolución para resolver ambigüedades cuando sea necesario. Regresando al ejemplo de la estufa, cualquier información suficiente para determinar la relación ordinal entre la temperatura de la estufa y la ebullición es suficiente para resolver la ambigüedad. Si se diseñará una olla eléctrica, por ejemplo, se podría usar esta ambigüedad como una señal de que debe asegurarse que la temperatura del elemento de calentamiento está por encima del punto de ebullición, y si se diseñara un bebedero tibio, el calor del elemento debería operar por debajo del punto de ebullición.

Los algoritmos de simulación cualitativa varían en cuatro dimensiones: (1) en sus estados iniciales, (2) qué condiciones utilizan para filtrar transiciones, (3) el hecho de si generan o no landmarks y (4) qué tanto espacio de los comportamiento posibles exploran. Envisioning es el proceso de generar un envisionment, v.g. generar todos los comportamientos posibles. Dos clases de algoritmos de envisioning han sido usado en la práctica: Envisioners alcanzables, que producen todo los estados posibles a partir de un conjunto de condiciones iniciales, y envisioners totales que producen un envisionment completo. Los algoritmos de generación de comportamiento (v.g., QSIM [Kuipers86]) comienzan con un solo estado inicial, generan landmarks y utilizan una variedad de restricciones como filtros y criterios de terminación (v.g., limitaciones del sistema y restricciones de energía, entre otros).

Se puede integrar información de mayor resolución con la simulación cualitativa en muchas maneras. Un método para resolver ambigüedades en la generación de comportamientos es proveer datos numéricos para acotar la relación matemática. Estos datos pueden ser dinámicamente refinados para proveer un mejor ajuste a las cotas de la situación espe-

cificada. Esos sistemas son llamados **Simuladores Semi-Cualitativos** [Kuipers94].

3.5.1. Interpretación de los datos

Existen dos formas en que las representaciones cualitativas pueden ser interpretadas. La primera es explicar una secuencia de mediciones en términos de una secuencia de estados cualitativos, la segunda es crear un modelo cualitativo del espacio de fase mediante la interpretación de los resultados de experimentos sucesivos de simulación numérica. Los aspectos comunes en estos problemas es el uso de las descripciones cualitativas de restricciones físicas para formular restricciones de compatibilidad que acortan el conjunto de posibles interpretaciones.

En este capítulo se expuso que la motivación del razonamiento cualitativo es inferir posibles comportamientos de procesos (para nuestro caso sistemas dinámicos) basado en información limitada. Se definieron herramientas de QR que son utilizadas como base para el desarrollo de la representación cualitativa de diagramas de bifurcación, como son los espacios cuantitativos y álgebra de signos. El proceso de simulación cualitativa trata de encontrar posibles estados de transición para una condición inicial dada.

Capítulo 4

Modelos Cualitativos de Diagramas de Bifurcación

Como se mencionó en el Capítulo 3, es posible hacer inferencia acerca de la dinámica de sistemas usando información cualitativa. En el presente capítulo se describe el modelo cualitativo utilizado para representar *Diagramas de bifurcación* cualitativamente. La representación utilizada está basada en espacios cuantitativos y álgebra de signos y se mostrará como esa representación puede ser utilizada para hacer inferencia sobre la dinámica del sistema.

Para razonar acerca de como los sistemas dinámicos exhiben bifurcaciones, el primer paso es computar el diagrama de bifurcación para el sistema. Una vez que se tiene una representación numérica del diagrama de bifurcación, se procede a generar una versión cualitativa del mismo.

Keller [Keller87] presenta muchos métodos para generar diagramas de bifurcación. En el presente estudio los diagramas utilizados son generados con *xppaut* [Ermentrout] para el caso de una dimensión y un software basado en enjambres de partículas [Barrera08] para el caso bidimensional. Ya que el objetivo de este trabajo no es la cualitativización, las versiones cualitativas de los diagramas son hechas a mano.

4.1. Representación cualitativa con un parámetro

Para generar una representación cualitativa comenzamos con los componentes principales para la descripción cualitativa del diagrama de bifurcación: las variables, los parámetros y las restricciones. Los esquemas cualitativos (espacios cuantitativos y álgebra de signos) para la representación son tomados de [Kuipers94].

4.1.1. Diagrama de bifurcación cualitativo

Como partimos del diagrama de bifurcación cuantitativo, no es necesario representar la estructura del sistema (las restricciones en la representación de QSIM).

La representación cualitativa del BD está definida en base a los valores de las variables de estado (i.e. x), los parámetros del sistema (r para el caso unidimensional) y el tipo de estabilidad. Los eventos para las transiciones entre estados cualitativos están dados por las perturbaciones y los eventos dinámicos

En cualquier punto en el tiempo, el estado del sistema puede ser especificado en términos de la relación en los espacios cuantitativos por valores de puntos límite y *landmarks*. Los puntos límite son definidos en función de la dirección de la derivada y de los cambios de estabilidad i.e., se define un punto límite en cada punto donde la derivada o la estabilidad cambia. Los landmarks adicionalmente a como son definidos en QSIM se utilizan como puntos donde ocurren perturbaciones.

El valor cuantitativo de una variable puede estar en un punto límite o entre un intervalo abierto de puntos límite. En el último caso no se sabe en que parte del intervalo se encuentra el valor de la variable; solo se sabe que está dentro de ese intervalo. La dirección cualitativa de la variable es el signo de su derivada, en este caso el signo de la velocidad de cambio de x con respecto de r .

Como ejemplo se considera el sistema quinto orden $\dot{x} = rx + x^3 - x^5$. La Figura 4.1 muestra su diagrama de bifurcación.

Como se mencionó en la Sección 2.4 en un diagrama de bifurcación se grafica x versus r , donde ni r es una función de x ni viceversa. El diagrama de bifurcación se presenta como una relación (en el sentido matemático una relación es un subconjunto del producto

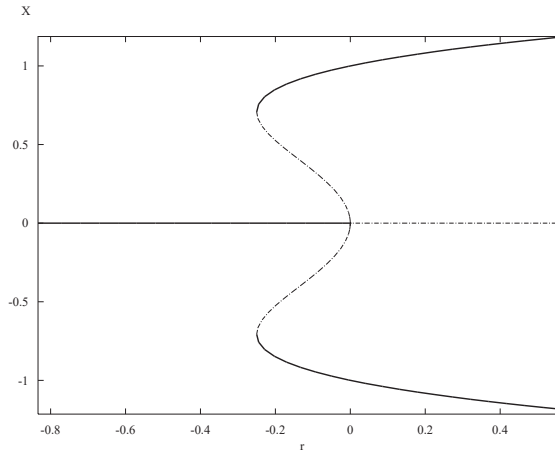


Figura 4.1: Diagrama de Bifurcación para $\dot{x} = rx + x^3 - x^5$

cartesiano). En la representación de un BD, es necesario incluir los estados de la variable y el parámetro, la dirección de cambio y el tipo de estabilidad entre cada segmento.

Un segmento de diagrama de bifurcación (**BDS** del inglés Bifurcation Diagram Segment) se representa de la forma

$\langle qv(r), qstate(x), naturaleza \rangle$, donde $qv(r)$ puede ser un intervalo o un punto, $naturaleza$ puede ser $\{st, us, ls, rs\}$ (st =estable, us =inestable, ls =estable-por-la-izquierda, rs =estable-por-la-derecha) y $qstate(x)$ está definido por $(qv(x), qdir_x)$, donde $qv(x)$ igual que $qv(r)$ y $qdir_x$ puede ser cualquiera de $\{-, +, 0, ?\}$ será “?” cuando $qv(x)$ sea un punto, debido a que la derivada en un punto es indefinida (las rectas tangentes a un punto son infinitas). En esta representación, un BDS es un subconjunto de un diagrama de bifurcación donde los valores cualitativos de x y r , la dirección y la estabilidad permanecen sin cambio en ese subconjunto.

Las variables involucradas en el diagrama de bifurcación de la Figura 4.1, sus espacios cuantitativos, y su representación cualitativa son mostrados en la Tabla 4.1.

Note que un BDS es una región donde la dirección en que se mueve x no cambia (la dirección de la derivada), pero la forma en que se mueve no es especificada. En otras palabras, la representación cualitativa de un BD no proporciona suficiente información para dibujar curvas como las de la Figura 4.1; por lo tanto para representar gráficamente la versión cualitativa de un diagrama de bifurcación (Qualitative Bifurcation Diagram QBD)

<p>Variables:</p> $\{r, x\}$ <p>Espacios Cuantitativos:</p> $QS(x) = (-\infty, x_4, x_3, 0, x_2, x_1, \infty)$ $QS(r) = (-\infty, r_0, r_1, 0, r_2, \infty)$ <p>Representación de un BD :</p> $x \ R \ r$ $R = \{ \langle (-\infty, 0), (0, 0), s \rangle ,$ $\langle (0, \infty), (0, 0), us \rangle ,$ $\langle (r_1, \infty), ((x_2, x_1), +), s \rangle ,$ $\langle r_1, (x_2, ?), rs \rangle ,$ $\langle (r_1, 0), ((0, x_2), -), us \rangle ,$ $\langle 0, (0, \infty), us \rangle ,$ $\langle (r_1, 0), ((x_3, 0), +), us \rangle ,$ $\langle r_1, (x_3, ?), ls \rangle ,$ $\langle (r_1, \infty), ((x_4, x_3), -), s \rangle \}$
--

Tabla 4.1: Representación cualitativa del diagrama de bifurcación de la figura 4.1

podemos dibujar líneas rectas, sin que esto quiera decir que la relación entre x y r sea lineal. Otra característica importante de un QBD, es que el espacio cuantitativo no incluye información cuantitativa de sus elementos, lo que implica que las distancias entre puntos límite sean relativas. Lo anterior puede llevar a que en la versión cualitativa de un BD se vea diferente a la cuantitativa. Podría parecer que dos BDS se vean de la misma magnitud en la versión cualitativa, aunque sus correspondientes segmentos cuantitativos sean de magnitudes muy diferentes.

La versión Cualitativa del Diagrama de Bifurcación expresa el conocimiento que tenemos de los puntos límites y landmark de x y r al inicio y final de cada BDS. La Figura 4.2 muestra la representación cualitativa del diagrama de bifurcación de la Figura 4.1. En

las Figuras 4.1 y 4.2 los segmentos representados por líneas solidas representan los puntos fijos estables y las líneas punteadas los puntos fijos inestables.

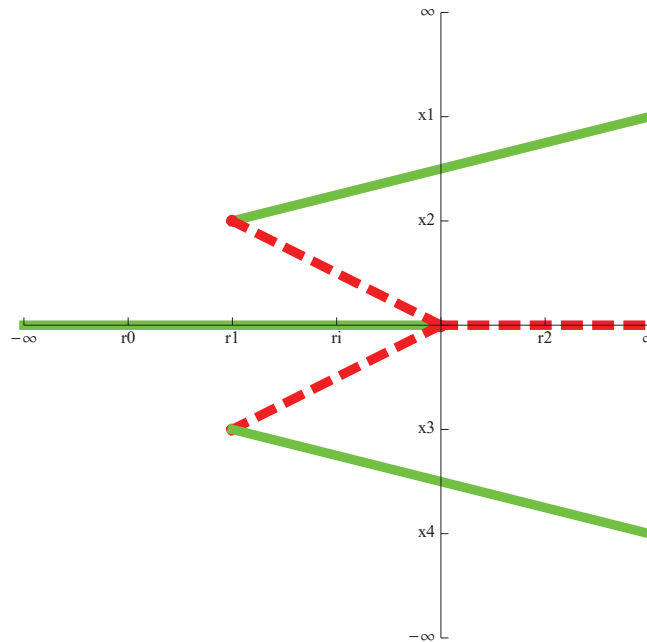


Figura 4.2: Diagrama de bifurcación Cualitativo para la Figura 4.1

4.1.2. Eventos dinámicos

Es necesario definir una representación cualitativa que nos permita razonar acerca de la dinámica que se puede inferir de un sistema dinámico a partir de un BD. Como estamos tratando con dos escalas de tiempo, la respuesta transitoria del sistema es considerada instantánea cuando es comparada con el tiempo de cambio de un parámetro. Dicho de otra manera, cuando observamos la respuesta transitoria de un sistema, un parámetro puede ser considerado como constante.

Con estas consideraciones en mente, cuando se habla de la dinámica del sistema nos referimos al conjunto de cambios en los parámetros y las perturbaciones presentes a lo largo del análisis del sistema. Los cambios de estado en las variables del sistema también se consideran como parte de la dinámica del sistema.

Cambios en los parámetros

Los cambios en los parámetros son representados como una secuencia de estados cualitativos. Estos cambios son una lista de estado cualitativos del parámetro r . Esta lista de cambios puede representar cualquier función continua de r con respecto del tiempo. Tal función no tiene por que ser monotónica. Los puntos de cambio de r en el tiempo (los valores de r donde dr/dt es cero) establecen puntos límite de r .

La simulación será realizada en una escala de tiempo lenta (i.e. la escala de tiempo en que el parámetro r cambia). En esa escala de tiempo, es necesario especificar los cambios que ocurren en r . Esta descripción no incluye de forma explícita el tiempo, ya que en la simulación no es de interés el valor del tiempo en el que ocurren los eventos, pero si el orden en que ocurren.

El comportamiento de r , $B(r)$, es una descripción cualitativa de como r cambia en el tiempo; ésto es, una secuencia de estados cualitativos de r . Un estado cualitativo contiene una magnitud y dirección cualitativas. La magnitud cualitativa puede ser un punto límite o un landmark, o un intervalo, de dos puntos, no necesariamente consecutivos en el espacio cuantitativo. La dirección cualitativa de r puede ser cualquiera de $\{-, 0, +\}$.

4.1.3. Perturbaciones

Las perturbaciones son pequeñas alteraciones en x i.e., el estado del sistema dinámico. Una perturbación cualitativa es un par formado por el valor cualitativo de r donde la perturbación ocurre y la dirección cualitativa de la propia perturbación. El dominio de la dirección cualitativa de una perturbación está limitado a $\{-, +\}$.

Debido a que las perturbaciones ocurren en instantes específicos de tiempo, y en la representación cualitativa de los eventos dinámicos no se incluye de forma directa el tiempo, es necesario incluir las perturbaciones en la descripción del comportamiento de r , el cual implícitamente contiene el tiempo.

Al Combinar el comportamiento de r con las perturbaciones en x , se obtiene una sola descripción D . D es una lista de $B(r)$ s, donde cada $B(r)$ es una tupla $(qstate_r, dir_x)$, indicando que en $qstate_r$ existe una perturbación con dirección dir_x .

4.1.4. Definición del problema

Ya han sido definidas las bifurcaciones, los puntos de bifurcación, y los diagramas de bifurcación. El problema a resolver en la presente tesis se puede enunciar de la manera siguiente:

Dada una descripción cualitativa de un diagrama de bifurcación y el comportamiento del sistema con estado inicial x_0 , determinar el comportamiento como resultado de evolucionar el sistema de acuerdo con una dinámica D dada.

En la solución problema del se asumen las siguientes consideraciones:

Continuidad. Todas las variables y funciones involucradas en el proceso son continuas y continuamente diferenciables.

Dos Escalas de tiempo. En el proceso de simulación se consideran dos escalas de tiempo.

La variación de los parámetros del sistema es mucho mas lenta que el tiempo del transitorio del sistema después de una perturbación.

Esto es, $t(\text{variación de } r) \gg t(\text{transitorio de } x)$.

Las perturbaciones ocurren en landmarks. Las perturbaciones siempre ocurren en landmarks de r . Si es necesario que una perturbación ocurra entre dos landmarks otro landmark debe agregarse en esa posición.

Las Perturbaciones son pequeñas. Las perturbaciones son lo suficientemente pequeñas como para no cruzar otro BDS. Si no se toma esta consideración el comportamiento del sistema dependerá de la magnitud relativa de la perturbación, con respecto de la distancia del siguiente BDS estable en dirección de la perturbación. Esta consideración puede no ser valida si la perturbación ocurre infinitesimalmente cercana a un punto de bifurcación. La implementación del sistema sin esta consideración, podría generar una rama en la predicción del comportamiento (i.e. en cualquier perturbación puede ser necesario considerar casos donde su magnitud podría no alcanzar, tocar exactamente o pasar cada landmark en dirección de la perturbación).

4.1.5. Dinámica y Simulación

En esta sección se definen algunos conceptos de la dinámica de sistemas que serán básicos para la simulación. El funcionamiento del algoritmo de simulación está fundamentado en estos conceptos.

Dinámica

En términos de sistemas dinámicos, un sistema de primer orden puede exhibir características limitadas. Si el sistema comienza en un punto fijo estable y una perturbación es inducida, el sistema regresará al punto fijo estable. De otra forma, si el sistema comienza en un punto fijo inestable y se presenta una perturbación, el sistema se alejará del punto fijo a otro punto fijo estable o al ∞ .

Para establecer un conjunto limitado de reglas precisas para predecir el comportamiento del sistema bajo perturbaciones, se necesita el siguiente teorema definido previamente en [Flores05].

Teorema 1 (Alternancia en los puntos fijos) *Considere el sistema $\dot{x} = f(x, r)$, donde f es una función continuamente diferenciable y r es un parámetro. Para un valor dado de r , el sistema dinámico modelado por f presenta puntos fijos alternantes.*

Demostración: La prueba está basada en la continuidad de f y en la naturaleza de las raíces de f , las cuales son los puntos fijos de x .

Caso 1. La naturaleza de dos raíces consecutivas de f puede solo ser (st, us) , o (us, st) . Ver Figura 4.3(a).

Caso 2. Si f toca 0 en x^ , y f no tiene mas raíces, la naturaleza del punto fijo puede ser determinada por la magnitud de $f(x^* - \epsilon)$ y $f(x^* + \epsilon)$. En este caso puede ser ls o rs . Ver Figura 4.3(b).*

Caso 3. Si $f(x)$ toca 0 en x^ , puede tener una raíz a la izquierda y/o una a la derecha. Considerando el caso donde existe un punto fijo estable x_1^* a la izquierda de x^* . El análisis de estabilidad lineal indica que $f'(x_1^*) < 0$ para puntos fijos estables [Strogatz94]. Este hecho implica que $f(x^* - \epsilon) < 0$ y $f(x^* + \epsilon) < 0$ para cualquier ϵ infinitesimal. Por*

lo tanto el punto fijo será estable. Ver Figura 4.3(c). En éste caso donde existe un punto fijo inestable a la derecha de x^* , $f'(x_r^*) > 0$, $f(x^* - \epsilon) > 0$ y $f(x^* + \epsilon) > 0$. Por lo tanto, el punto fijo que toca será estable por la derecha. Un argumento similar aplica si existe un punto fijo estable a la derecha de x^* .

Caso 4. Si f toca consecutivamente el eje, todos los puntos fijos consecutivos serán de la misma naturaleza: rs si existe un punto fijo us a la derecha donde toca, ls de otra manera. Ver Figura 4.3(d).

En todos los casos se observa alternancia en la naturaleza de los puntos fijos. ■

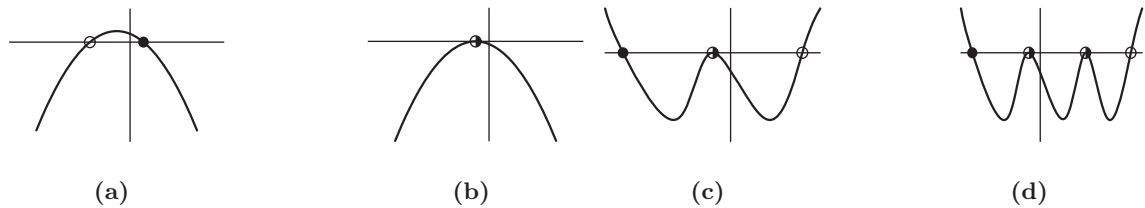


Figura 4.3: Casos para el Teorema 1.

Basados en el Teorema 1, se pueden definir los siguientes casos para la predicción de comportamiento en presencia de una perturbación. Si el sistema se encuentra en un punto fijo inestable y ocurre una perturbación positiva, y existe un punto fijo estable en la dirección positiva, el sistema se estabilizará en ese punto fijo; como se muestra en la Figura 4.4(a). Si el sistema está en un punto fijo inestable y una perturbación positiva ocurre y no existe ningún punto fijo estable en esa dirección, el sistema sufrirá una explosión (“blow up”) (i.e. el sistema tenderá a infinito); ver Figura 4.4(b). Si el sistema está en un punto fijo estable, y una perturbación ocurre, el sistema regresará al mismo punto de atracción ver Figuras 4.4(c) y 4.4(d). Casos similares ocurren para perturbaciones negativas.

Otro tipo de eventos que pueden ocurrir son las caídas (*fall-off*) de un diagrama de bifurcación. Cuando el sistema está en un punto fijo estable, y el parámetro r varía, el sistema se mueve a lo largo del BDS que contiene ese punto. Si el BDS termina y no hay otro BDS que contenga el nuevo punto el sistema será atraído al punto fijo estable mas cercano.

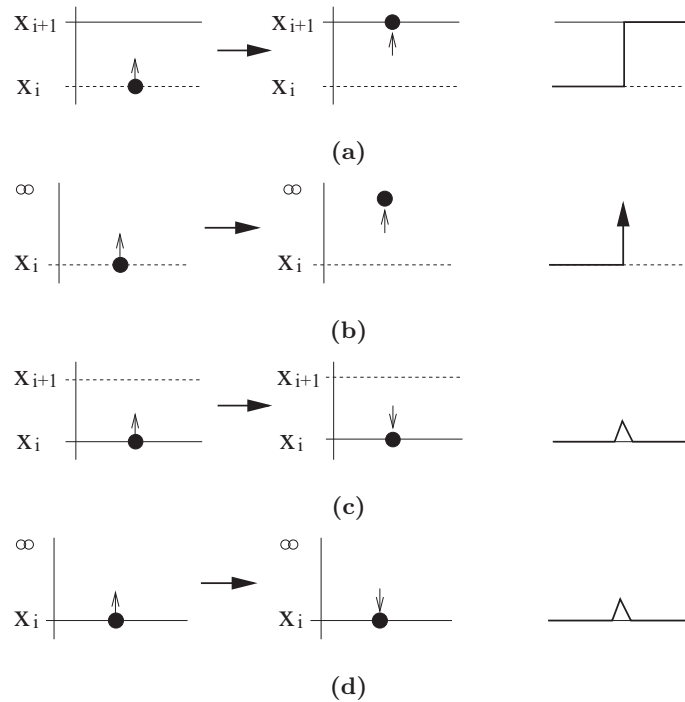


Figura 4.4: Predicción del comportamiento causado por una perturbación

El Teorema 2 ([Flores05]) permite restringir el número de casos presentes en la simulación, y provee bases más fuertes para el desarrollo del algoritmo.

Teorema 2 (No ambigüedad en las caídas) *Si el sistema dinámico se encuentra en las condiciones descritas como caída, entonces el sistema solo tiene un punto fijo a donde ir.*

Demostración. El Teorema 2 es una consecuencia de la propiedad determinista de la dinámica de sistemas ([Strogatz94], capítulo 4). Si existiera más de un punto fijo a donde pudiera ir el sistema al presentarse una caída, habría dos posibles estados siguientes para el sistema lo cual lo haría un sistema no determinista. ■

Dado el Teorema 2, La figura 4.5 muestra los posibles casos para cuando r se decrementa. La línea delgada representa el comportamiento de x en el tiempo, moviéndose con r . En la Figura 4.5(a) se observa el caso en el que el sistema presenta una caída y el único estado estable en la cual puede continuar el sistema es uno en el que la magnitud de x cambia

en dirección negativa de forma catastrófica y la Figura 4.5(b) muestra el caso en el que se incrementa x . Otros dos casos simétricos son posibles para cuando r se incrementa.

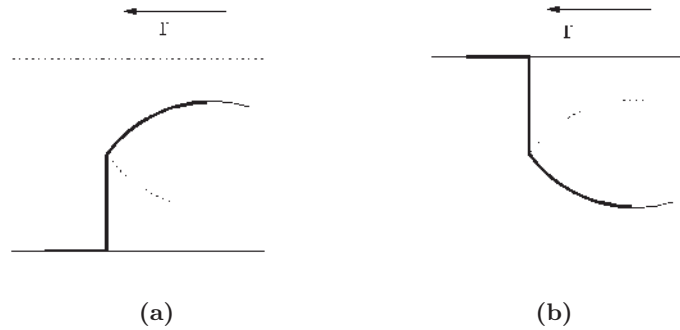


Figura 4.5: Predicción del comportamiento causado por caídas

Adicionalmente definiremos un evento (no definido en [Flores05]). Considere un sistema dinámico que se encuentra en un punto fijo inestable; si la derivada del BDS es cero y no existen perturbaciones, el sistema puede permanecer en ese punto (ver Figura 4.6(a)). En el momento que se presenta un cambio en el parámetro r y el BDS tiene una derivada diferente de cero ocurre el evento mostrado en la Figura 4.6. Al evento dinámico que ocurre en este caso, le denominamos descarrilamiento (*derailment*). En cuanto r es modificado infinitesimalmente, el estado del sistema se sale del punto fijo inestable. Como el punto en que se encontraba el estado del sistema es un repulsor, el sistema se alejará del punto fijo. Como consecuencia del Teorema 2, sólo puede tener un posible estado siguiente por encima o debajo del punto fijo donde estaba el sistema. El sistema solo puede ir a infinito o a un punto estable. La dirección en la cual evoluciona el sistema depende de si el estado queda por encima o por debajo del BDS actual. Por lo tanto, en un descarrilamiento la dirección de cambio del parámetro y la dirección de la derivada determinan la evolución del estado. Las Figuras 4.6(b) y 4.6(c) muestran el caso en que la derivada es positiva y el parámetro r se decremента. Se puede observar que el estado queda flotando por encima del BDS y el estado del sistema va a la solución adyacente superior. Las Figuras 4.6(d) y 4.6(e) muestran los casos en que el estado queda flotando por debajo del BDS debido a que el cambio de r es en dirección positiva. Casos similares ocurren cuando la dirección de la derivada es

negativa.

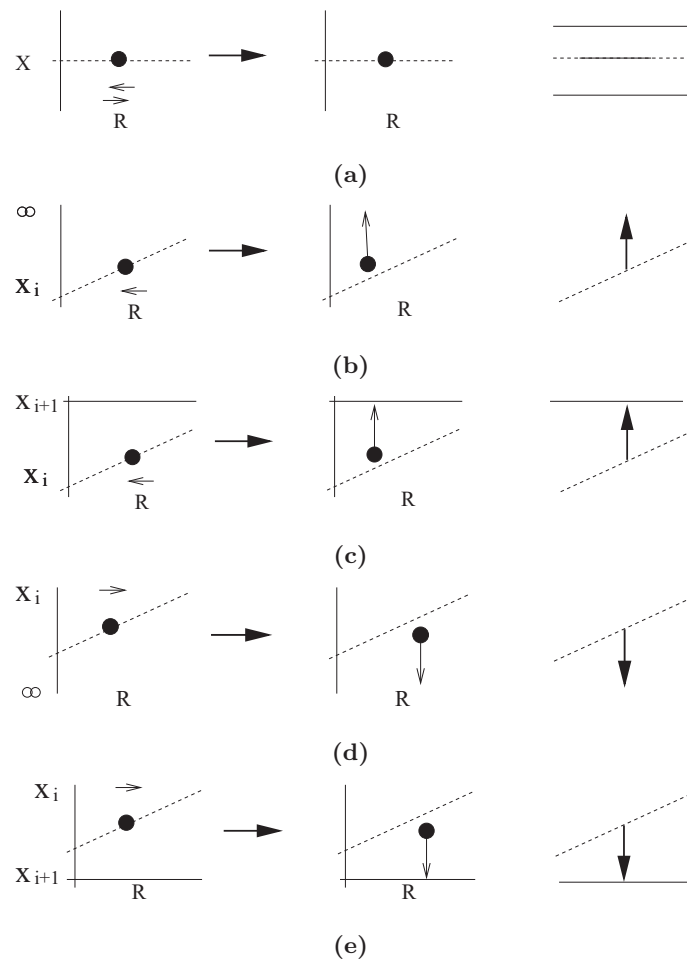


Figura 4.6: Predicción del comportamiento causado por un descarrilamiento

Si el sistema es perturbado mientras se encuentra en un estado inestable, o alcanza una situación de caída, los cambios resultantes en la magnitud pueden ser dramáticos. A estos cambios se les llama catastróficos, dado que tales cambios de magnitud pueden poner un dispositivo fuera de su región de operación. Una catástrofe puede hacer que un dispositivo explote, o si tiene protecciones, se detenga. Un ejemplo de esta situación puede ser encontrado en sistemas eléctricos, donde los cambios en la carga pueden provocar colapsos de voltaje [Chin-Woo95].

Existe otra característica exhibida por los sistemas dinámicos cerca de los puntos

de bifurcación (especialmente en sistemas no lineales), conocida como histéresis. Cuando un cambio catastrófico ocurre, el sistema se mueve a otro estado estable, y es llevado a un BDS diferente. Este cambio es producido típicamente por variaciones en un parámetro. Después de la catástrofe, revertir los cambios en el parámetro no lleva el sistema a su estado original. Este fallo en la reversibilidad como resultado de la variación de un parámetro es llamado histéresis.

4.1.6. Algoritmo de Simulación

Ahora que toda la representación necesaria ha sido definida y que todos los posibles eventos y casos han sido presentados, se está en la posibilidad de explicar el algoritmo de simulación propuesto.

El Algoritmo 1 BDQSim (Bifurcation Diagram Qualitative Simulation) recibe BDS_0 que es el estado inicial, BD es la descripción cualitativa del diagrama de bifurcación y D que es la descripción de como se varían los parámetros del sistema para la simulación. BDSim comienza en el estado inicial BDS_0 . Se visitan todos los landmarks y puntos límite de una trayectoria de r , especificada en D . En cada elemento de D , se verifica si existe una perturbación. Si existe una se infiere el siguiente estado. De igual forma se verifica si se encuentra en un BDS inestable y un cambio en el parámetro ocurre, es decir, si se presenta un evento del tipo descarrilamiento; de ser así se determina el siguiente estado. También, en cada paso, se verifica si el BDS termina, teniendo lugar una caída o si se tiene un cambio de BDS; en cualquier caso se calcula el siguiente estado.

El algoritmo recibe BDS_0 que es el BDS que contiene el estado inicial del sistema, la descripción cualitativa del BD y la lista de comportamientos para r . En la línea 4 $valc_x$ obtiene el valor del estado en BDS_0 . La función $pert$ debe tomar el BDS_0 y el estado $s_r \in D$ y regresar la dirección de la perturbación o 0 si no existe perturbación en ese estado. En la línea 7, el algoritmo calcula el siguiente segmento del QBD (BDS_i) después de que una perturbación tuvo lugar. Ésta es la parte donde los casos de la Figura 4.4 entran en juego. Si el BDS actual es estable el sistema continua en el mismo BDS. Cuando el BDS actual es inestable, primero es necesario encontrar el subconjunto de BDS estables que contiene el valor cualitativo s_r que se encuentran en dirección de la perturbación (ya que es en

Algoritmo 1 $\text{BDQSim}(BDS_0, BD, D)$

```

1:  $E_{\text{cualitativos}} \leftarrow \{\}$ 
2: for all estados  $s_r$  en  $D$  do
3:    $x_0 \leftarrow \text{valc}_x(BDS_0)$ 
4:    $BDS_i \leftarrow BDS_0$ 
5:   if  $\text{pert}(BDS_0, s_r)$  then
6:      $BDS_i \leftarrow \text{siguienteEstado}(x_0, \text{pert}(s_r), s_r)$ 
7:   else if  $\text{descarrilamiento}(BDS_0, s_r)$  then
8:      $BDS_i \leftarrow \text{siguienteEstado}(BDS_0, s_r)$ 
9:   else if  $\text{caída}(BDS_0, s_r)$  then
10:     $BDS_i \leftarrow \text{siguienteEstado}(BDS_0, s_r)$ 
11:   end if
12:    $E_{\text{cualitativos}} \leftarrow \text{add}(BDS_0, s_r)$ 
13: end for
14:  $E_{\text{cualitativos}} \leftarrow \text{add}(BDS_i, s_r)$ 
15: return  $E_{\text{cualitativos}}$ 

```

dirección de la perturbación a donde evoluciona el comportamiento del sistema) y después, basados en el espacio cuantitativo se determina cual es el más cercano. El intervalo del BDS mas cercano será el nuevo BDS_i que contiene el nuevo estado del sistema. En la línea 8 la función descarrilamiento determina si la variación del parámetro r se encuentra dentro de un BDS inestable con derivada diferente de 0 y hay un cambio en el parámetro r . En la línea 9 se determina el BDS siguiente, de manera similar al caso de una perturbación, pero en este caso la dirección en que se busca el BDS adyacente está dada por la Figura 4.6. En la línea 10 es necesario determinar si el BDS actual, en la dirección de cambio de r , termina en el landmark actual. Si es el caso, es necesario determinar si otro BDS comienza donde el BDS actual termina. Si no es el caso, entonces es necesario encontrar los BDSs que contienen puntos de atracción en ambas direcciones de x . En la línea 11, se determina donde continua el sistema después de una caída. La función siguienteEstado es sobrecargada para determinar el siguiente punto fijo en la simulación, producido por una perturbación, descarrilamiento o caída.

Para cada evento en la simulación, (BDS_0, s_r) se almacena en $E_{cualitativos}$ (es la lista de estados cualitativos visitados en la simulación), donde s_r contiene el valor cualitativo de r para el sistema y la dirección de la perturbación en ese landmark (en las líneas 13 y 15). Al terminar la simulación el algoritmo regresa $E_{cualitativos}$.

4.2. Representación cualitativa con dos parámetros

En la Sección 4.1 ya definimos la representación cualitativa de BD generados en relación con un parámetro de bifurcación, así como un algoritmo para realizar simulación cualitativa sobre los mismos. Ahora el objetivo es extender las representaciones y el algoritmo para realizar inferencias en el comportamiento en un diagrama con dos parámetros de bifurcación, i.e. los parámetros r y h . Los diagramas generados variando dos parámetros son BD tridimensionales.

La forma mas directa de extender la representación es mediante un mapeo de la representación expuesta para un parámetro y añadiendo las características adicionales de cualquier caso nuevo que se presente.

4.2.1. Diagrama de bifurcación cualitativo con dos parámetros

Si en el caso de un parámetro ya se estaba lidiando con una representación cualitativa de 2 parámetros (espacial), en el caso de un diagrama con dos parámetros estamos hablando de una representación espacial en tres dimensiones (i.e., x, r y h).

En el caso de la Sección 4.1, los BDSs eran puntos o líneas (intervalos) con una dirección de crecimiento. En el caso que se analiza ahora, como tenemos un parámetro adicional ya no es posible representar un BDS solo con intervalos, ahora se añaden a la representación regiones (i.e., intervalos definidos por 4 landmarks; ver Figura 4.7). Con la inclusión de regiones ya es posible generar una representación cualitativa de diagramas de bifurcación tridimensionales, sobre los cuales se pueden inferir hechos relacionadas con la dinámica del sistema. Adicionalmente es necesario definir un espacio cuantitativo para h .

Cada BDS se representará de la forma $\langle qv(r, h), qstate(x), naturaleza \rangle$, donde $qv(r, h)$ puede contener las combinaciones de intervalo puntal para r y h , *naturaleza* es igual que en el caso de un parámetro, $qstate(x)$ está definido por $(qv(x), qdir_x)$ donde $qv(x)$ puede ser un punto, un intervalo o una región. Los casos en que $qv(x)$ es un punto o un intervalo son igual que para el caso de un parámetro. Con $qdir_x$ representamos la tupla de direcciones de crecimiento de x en dirección de r y h y puede ser cualquiera del producto cruz de $\{-, +, 0, ?\}$ con sí mismo. Debido a la definición $qv(r, h)$ los BDSs tridimensionales solo pueden ser rectángulos en el plano (r, h) . En esta representación cada BDS es acotado por una región rectangular en el plano (r, h) en el que la características de esta región serán que su dirección de x en r y h no cambian y su tipo de estabilidad es constante para esa región.

Las regiones rectangulares en el plano (r, h) para los BDS están definidas para el intervalo del rectángulo en el plano. Por ejemplo, si se define $qv(r, h) = ((r_1, r_2), (h_1, h_2))$, esta definición es interpretada como el área rectangular que se muestra en la Figura 4.7, donde $r_1 < r_2$ y $h_1 < h_2$.

Para representar una superficie rectangular $qv(x) = (x_a, x_b, x_c, x_d)$ donde: los elementos en $qv(x)$ representan la altura en cada esquina de la superficie. La relación (r, h, x) es determina por $qdir_x$. Como ejemplo, consideremos que la relación es como se muestra

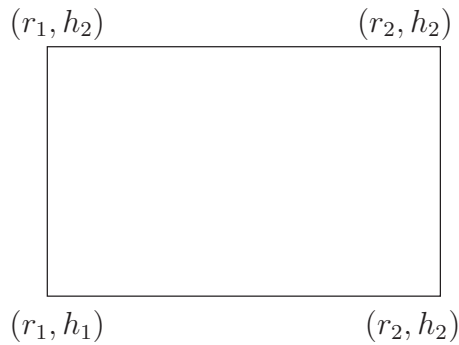
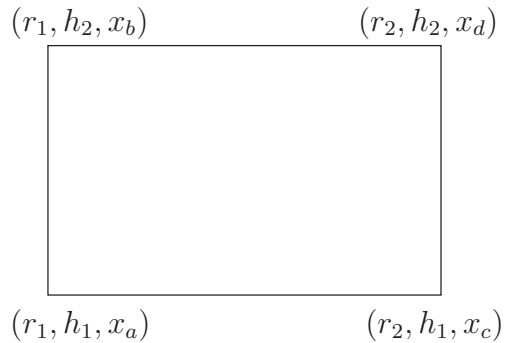


Figura 4.7: Representación rectangular

en la Figura 4.8 y $qdir_x = (0, 0)$ ésto implica que $x_a = x_b = x_c = x_d$. Para el caso en que $qdir_x = (+, -)$, en la dirección de r debe cumplirse que $x_a \leq x_c$ y $x_b < x_d$ o $x_a < x_c$ y $x_b \leq x_d$. En dirección de h las condiciones serán $x_b \leq x_c$ y $x_d < x_c$ o $x_b < x_a$ y $x_d < x_c$. Con las restricciones anteriores tenemos que $x_b \leq x_a \leq x_c \leq x_d$. Usando ese tipo de deducción es siempre posible encontrar la correspondencia entre $qv(r)$ y $qv(x)$, esto mediante el ordenamiento de $q(x)$, una vez ordenado es posible asociar los elementos en $qv(x)$ a las correspondientes esquinas para satisfacer $qdir_x$.

Figura 4.8: Relación (r, h, x)

Como ejemplo se genera el siguiente diagrama de bifurcación del sistema biológico $\dot{x} = h + rx - x^3$. El diagrama generado [Barrera08] es el mostrado en la Figura 4.9. Las variables involucradas en el diagrama de bifurcación, sus espacios cuantitativos, y su representación cualitativa son mostrados en la Tabla 4.2. La versión cualitativa del diagrama de bifurcación de la Figura 4.9 como gráfica se muestra en la Figura 4.10.

<p>Variables:</p> $\{r, h, x\}$ <p>Espacios Cuantitativos:</p> $QS(x) = (x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_7)$ $QS(r) = (r_0, r_1, r_2, r_3, 0, r_4, r_5, r_6, r_7, r_8)$ $QS(h) = (0, h_1, h_2, h_3, h_4, h_5)$ <p>Representación de un BD de dos parámetros :</p> $x \quad R \quad r \quad H$ $R = \{ \langle ((r_0, r_4), (h_2, h_5)), ((x_0, x_0, x_2, x_3), (+, 0)), s \rangle, \langle ((r_1, r_4), (h_2, h_5)), ((x_2, x_3, x_3, x_3), (-, -)), us \rangle, \langle ((r_0, r_4), (h_2, h_5)), ((x_3, x_3, x_3, x_4), (+, 0)), s \rangle, \langle ((r_4, r_8), (h_2, h_5)), ((x_3, x_4, x_6, x_7), (+, +)), s \rangle, \langle ((r_0, r_4), (0, h_2)), ((x_0, x_0, x_3, x_3), (+, +)), s \rangle, \langle ((r_4, r_8), (0, h_2)), ((x_3, x_3, x_5, x_6), (+, +)), s \rangle \}$

Tabla 4.2: Representación cualitativa del diagrama de bifurcación del sistema $\dot{x} = h + rx - x^3$

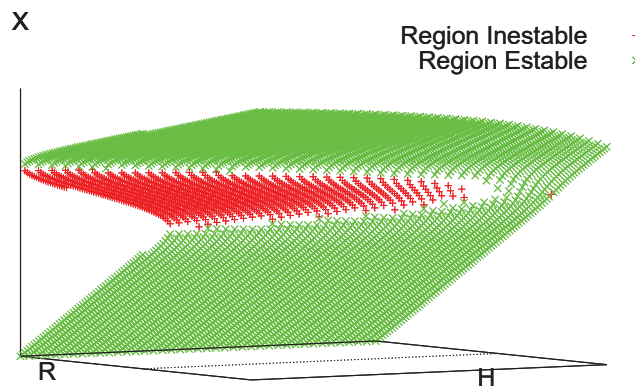


Figura 4.9: Diagrama de Bifurcación para el sistema biológico

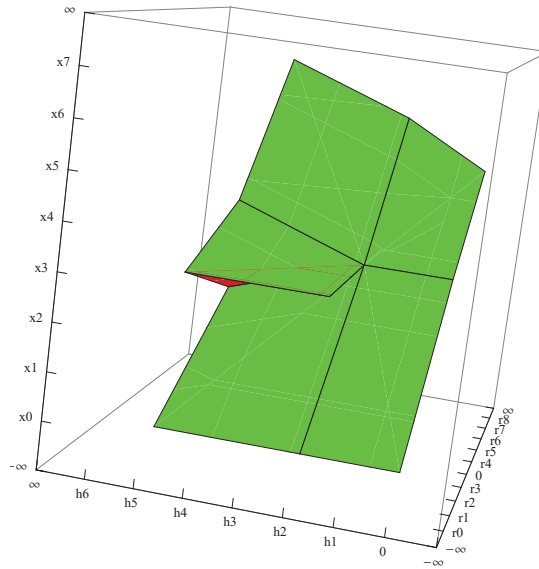


Figura 4.10: Diagrama de bifurcación Cualitativo para la figura 4.9

En este trabajo los BDS se definen a mano. La forma en que se eligieron los BDS en el plano (r, h) se muestra en la Figura 4.11, donde se muestra una vista superior del BD de un sistema biológico. Las áreas A , C y D solo definen un BDS cada una. El área B en cambio es la zona del doblez de la Figura 4.9, por tanto se define un BDS por cada capa y en esa área hay tres capas del BD y de ahí los seis BDS definidos en R (ver Figura 4.2). En B se observa claramente la incertidumbre introducida por el modelo (i.e. no se pueden modelar áreas que no sean rectangulares).

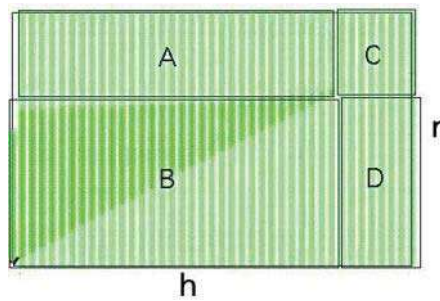


Figura 4.11: Selección de regiones

Como resultado del modelo se tienen efectos como el que se muestran en la figura 4.12; como consecuencia de la representación cualitativa los BDSs en el área B de la Figura 4.11, que se unían en un punto, son forzados a unirse en una línea recta.

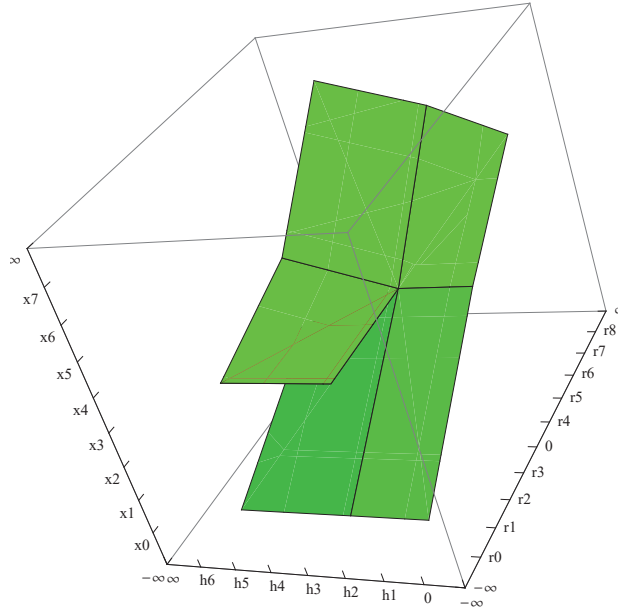


Figura 4.12: Efectos de la representación cualitativa

4.2.2. Cambios en dos parámetros

Al igual que en el caso con un solo parámetro los cambios en los parámetros son representados como una secuencia de estados cualitativos. La lista de cambios representa cualquier función continua de (r, h) con respecto del tiempo. Los puntos de cambio (r, h) en el tiempo establecen puntos límite sobre el plano (r, h) .

El comportamiento de (r, h) , $B(r, h)$, es una descripción cualitativa de cómo (r, h) varía en el tiempo. Para el caso de dos parámetros un estado cualitativo contiene los pares de magnitud y dirección cualitativas para cada parámetro. $B(r, h)$ está dado por $qstate_{rh}$. Donde $qstate_{rh}$ es $((qv(r), qdir_r), (qv(h), qdir_h))$, donde $qv(r) = (r_1, r_2)$, $qv(h) = (h_1, h_2)$ y representan los intervalos de cambio en r y h , dir_r y dir_h pueden tomar cualquier valor del

conjunto $\{-, 0, +\}$ ($dir_r=0$ cuando $r_1=r_2$).

4.2.3. Perturbaciones en dos parámetros

La definición de perturbaciones ($qstate_{rh}, dir_x$), sigue siendo válida, donde $qstate_{rh}$ y es un caso particular de la representación de cambios en los parámetros de la forma $qv(r) = r1, qv(h) = r1, dir_r = 0$ y $dir_h = 0$. La dirección de la perturbación dir_x conserva su misma definición ya que las perturbaciones solo ocurren en dirección de las variables de estado.

4.2.4. Simulación dinámica

En el caso de dos parámetros, al igual que para el caso de un solo parámetro se determinan los estados siguientes a una perturbación. Ésto se debe a que las perturbaciones ocurren en landmarks (r, h) . Para la función $\dot{x} = f(x, r, h)$ donde x representa el estado del sistema y (r, h) son sus parámetros, el diagrama de bifurcación variando los dos parámetros representa todas las posibles soluciones para todos los pares (r, h) . En una perturbación tanto r como h son puntuales, por lo que en el instante de la perturbación pueden considerarse como constantes. Así pues, si ocurre una perturbación en el punto $r = a$ y $h = b$ podemos ver la función original como $\dot{x} = f(x, r, b)$ o bien como $\dot{x} = f(x, a, h)$ donde tanto a como b son constantes. Y dado que a y b son constantes podemos ver ese punto como si el sistema estuviera parado sobre un diagrama de bifurcación de un parámetro ya sea en $\dot{x} = f(x, r)$ o $\dot{x} = f(x, h)$. Por lo anterior es que los estados siguientes de una perturbación pueden determinarse igual que el caso del BD de dos dimensiones.

Las caídas se simulan también de la misma forma, solo que ahora hay una dimensión mas en la que pueden ocurrir (ver Figura 4.13). En la Figura 4.13(a) la caída ocurre cuando el BDS se termina en dirección del eje del parámetro r . En el caso de la Figura 4.13(b) en el eje h y en el ultimo caso (ver Figura 4.13(c)) la caída ocurre en una esquina, es decir se termina el BDS en ambas direcciones. Como las caídas también ocurren en valores landmark (r, h) es fácil deducir que el estado siguiente puede determinarse como en el caso de un parámetro. Lo anterior se infiere utilizando el mismo razonamiento que en el caso de las perturbaciones.

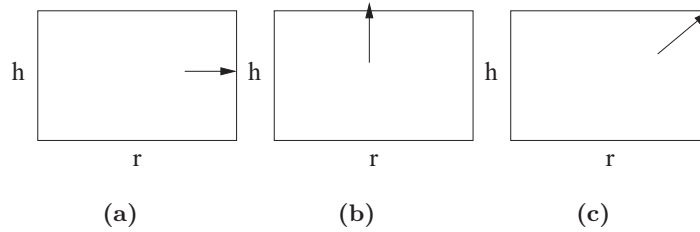


Figura 4.13: Caída en dos dimensiones

El evento que presenta una mayor complejidad bajo esta representación es el descarrilamiento, ya que para determinar hacia donde se mueve el estado del sistema en el caso de dos parámetros con la representación propuesta. El resultado puede ser ambiguo. Cuando solo se varía un parámetro a la vez, el sistema se está moviendo sobre un diagrama de bifurcación de un parámetro y pueden aplicarse los criterios del caso bidimensional. La ambigüedad solo se presenta cuando se varían los dos parámetros simultáneamente.

Debido a que es complejo mostrar de manera gráfica el porqué de la ambigüedad, nos ayudaremos de un análisis basado en la Tabla 4.3. La tabla contiene la información de cómo se decide hacia donde evoluciona el estado en relación con la dirección de cambio en un parámetro de bifurcación y la dirección de la derivada. Es decir, en que dirección se encuentra el punto fijo al que se moverá el sistema después de un descarrilamiento. Por ejemplo, la fila 2 de la tabla contiene la misma información que la Figura 4.6(b), es decir si el parámetro r se decrementa y al pendiente del BDS es positiva la dirección del cambio es positiva.

	dir_r	dir_x (dirección de la derivada)	Dirección de cambio
1	-	-	-
2	-	+	+
3	+	-	+
4	+	+	-

Tabla 4.3: Tabla de decisión para un evento descarrilamiento

En la Tabla 4.3 se puede observar que cuando la dirección de cambio del parámetro y el signo de la derivada son iguales, el estado siguiente para el sistema se encuentra por

debajo del actual; es decir, en dirección negativa. Cuando no son iguales el estado siguiente se encuentra en la dirección positiva.

Para encontrar ambigüedades, en el caso de dos parámetros solo es necesario encontrar los casos en los cuales la dirección de la evolución que dicta un parámetro es contraria a la del otro. Por ejemplo suponiendo un cambio en los parámetros donde $dir_r = +$ y $dir_h = +$ sobre un BDS de $dir_x = (+, -)$, utilizando la Tabla 4.3 la dirección de cambio dictada por el cambio en el parámetro r es hacia arriba y por h hacia abajo. Es fácil ver que no para todo los 16 casos posibles de combinaciones de los parámetros la solución es ambigua; no será ambigua solo para los casos en que todas las direcciones son iguales o cuando alguna es 0.

Aún con esta ambigüedad la representación sigue siendo útil, ya que el evento que origina el problema ambiguo solo se presenta cuando el sistema está en un punto fijo inestable. Lo anterior solo puede ocurrir si se da un punto inestable como condición inicial ya que por definición los puntos fijos inestables son repulsores. Ésto genera una ramificación de un máximo de dos estados posibles al inicio de la simulación, lo cual es fácilmente resuelto ejecutando dos simulaciones. Una vez iniciada la simulación no existe la posibilidad de ambigüedades, ni de sus consecuentes ramificaciones en las mismas.

También se presenta ambigüedad en los puntos en los que hay bifurcaciones. Puntos donde coinciden las esquinas de varios BDS. La ambigüedad en los puntos de bifurcación no solo se tiene en el caso cualitativo, ya que por definición en los puntos de bifurcación no es posible determinar la estabilidad del sistema, lo cual tiene como consecuencia no poder responder que tipo de estabilidad presenta el sistema [Nayfhe95]. Para ilustrar como se presenta ambigüedad en los puntos de bifurcación y exponer las consideraciones tomadas para la representación propuesta, se analizan los eventos que ocurre en el punto P de la Figura 4.14. Suponemos que el sistema está parado en P pero aún sobre la región B . Los posibles siguiente estados son:

Continúa en B. Si se decrementa h mientras r permanece constante, se incrementa r y h se mantiene constante o se incrementa r y se decrementa h simultáneamente.

Cambia a A. Incrementado h y r a la vez.

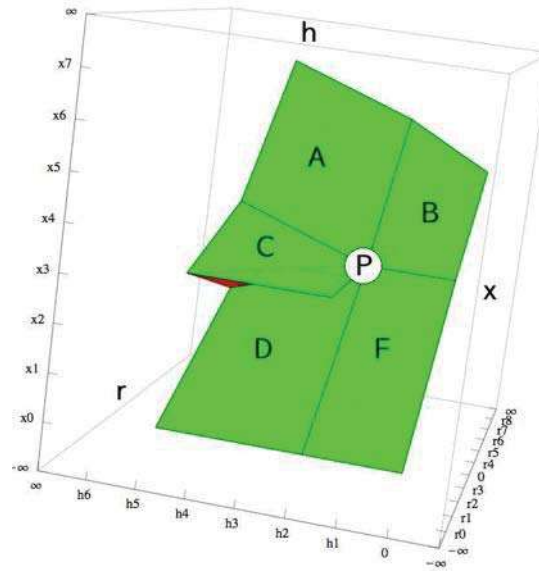


Figura 4.14: Ambigüedad en BDs tridimensionales

Cambia a F. Decrementado r y con h constante o decrementando r y h simultáneamente.

Ambigüedad. Si se incrementa h y r decrece no es posible determinar en que región continua el estado del sistema; es decir, se presenta ambigüedad. El sistema puede estar en cualquiera de las dos regiones C o D . Se presenta un ejemplo de una simulación que presenta ambigüedad en la Sección 5.3.

4.3. Algoritmo de Simulación en 3D

En este punto ya es posible definir un algoritmo de simulación sobre diagramas de bifurcación en tres dimensiones. Al igual que en el caso de un parámetro, se define un conjunto de cambios D en los que en cada paso $s_{r,h}$ se trata de inferir el siguiente estado, dado la ocurrencia de algún evento dinámico. En cada paso en D se determina si ocurre uno de los eventos descritos y se obtienen el o los posibles estados siguientes.

Como se vio en los eventos de descarrilamiento y cuando el sistema alcanza un punto de bifurcación, más de un estado de cambio es posible. Como se pueden tener varios estados siguientes en esas situaciones, el algoritmo debe continuar la simulación para cada

posible estado siguiente. El algoritmo debe generar ramificaciones.

El algoritmo está dado por el Algoritmo 2 BDQSim2P (BDQSim usando dos parámetros). En el algoritmo para la simulación cualitativa con dos parámetros es necesario utilizar una pila (*ramas*) para soportar ambigüedades. Utilizando la pila se guardan todas las listas de estados posibles cuando se genera una ramificación. Por ejemplo, si en el momento en que se presenta la ambigüedad la lista de estados visitados fuera $\{A, B\}$ y los posibles estados siguientes fueran C , D y F la pila quedaría $\{\{A, B, D\}, \{A, B, F\}\}$. Se continuaría la simulación con $\{A, B, C\}$ y después de forma recursiva se continuaría con cada elemento de la pila. $E_{c_{temp}}$ (al inicio de la simulación debe ser una lista vacía) se utiliza para guardar resultados parciales y k para recordar en que paso ocurrió la ambigüedad (al inicio de la simulación $k = 0$ y *ramas* es una lista vacía). En las líneas 6 a 9 se puede observar como las perturbaciones y las caídas son tratadas de igual forma que para el caso de un parámetro, solo que ahora la función siguienteEstado debe buscar un estado siguiente que contenga el punto (r, h) donde ocurre el evento. En la línea 10 se verifica si hay un descarrilamiento o si el sistema cambió de *BDS* (terminaBDS). En este cambio, a diferencia de una caída, pueden comenzar varios *BDSs* donde el actual termina. Si se encuentra un evento en las líneas 11 a 16 se calculan los posibles estados siguientes; uno de ellos se hace el siguiente BDS (BDS_i) y si existe más de uno, el resto se ponen en *ramas*, donde también se guarda la lista de estados cualitativos por los que ha pasado el sistema al momento de la ambigüedad, así como el paso en el que ocurrió el evento. En las líneas 19 y 20 se actualizan los valores de BDS_0 y k . En la línea 21 se guarda (BDS_0, s_{rh}) , el resultado de cada iteración sobre D . En la línea 23 se guarda el resultado de la iteración sobre D en $E_{cualitativos}$. En las líneas 24 a 29 se verifica si se generaron ramificaciones; si no hubo, se regresa $E_{cualitativos}$, la lista de posibles comportamientos. En caso de que existan ramificaciones, se saca una de ellas y se actualizan los valores de $E_{c_{temp}}$, BDS_0 y k y se completa la simulación para los nuevos datos. La simulación termina cuando ya no existen más ramificaciones y se ha iterado sobre todos los elementos en D . Un ejemplo en el que se presentan ramificaciones se muestra en la Sección 5.3.

Algoritmo 2 BDQSim2P($BDS_0, BD, D, k, ramas, E_{cualitativos}, E_{c_{temp}}$)

```

1:  $E_{c_{temp}} \leftarrow \text{add}(x_0, D_k)$ 
2:  $x_0 \leftarrow \text{valc}_x(BDS_0)$ 
3: for  $i = k$  hasta  $k = \text{Longitud}(D)$  do
4:    $s_{rh} \leftarrow D_i$ 
5:   if  $\text{pert}(BDS_0, s_{rh})$  then
6:      $BDS_i \leftarrow \text{siguienteEstado}(BDS_0, \text{pert}(s_{rh}), s_{rh})$ 
7:   else if  $\text{caída}(BDS_0, s_{rh})$  then
8:      $BDS_i \leftarrow \text{siguienteEstado}(BDS_0, s_{rh})$ 
9:   else if  $\text{descarrilamiento}(x_0, s_{rh})$  o  $\text{terminaBDS}(x, s_{rh})$  then
10:     $BDS_{list} \leftarrow \text{siguienteEstado}(BDS_0, s_{rh})$ 
11:     $BDS_i \leftarrow \text{pop}(BDS_{list})$ 
12:    if  $\neq \text{vacío}(X)$  then
13:      for all  $BDS_n$  en  $BDS_{list}$  do
14:         $ramas \leftarrow \text{push}(\{E_{c_{temp}}, BDS_n, k\})$ 
15:      end for
16:    end if
17:  end if
18:   $BDS_0 \leftarrow BDS_i$ 
19:   $k \leftarrow k + 1$ 
20:   $E_{c_{temp}} \leftarrow \text{add}(BDS_i, s_{rh})$ 
21: end for
22:  $E_{cualitativos} \leftarrow \text{add}(E_{c_{temp}})$ 
23: if  $\text{vacío}(ramas)$  then
24:  return  $E_{cualitativos}$ 
25: else
26:   $E_{c_{temp}}, BDS_0, k \leftarrow \text{pop}(ramas)$ 
27:  BDQSim2P( $BDS_0, BD, D, k, ramas, E_{cualitativos}, E_{c_{temp}}$ )
28: end if

```

En el presente capítulo se desarrollaron las representaciones cualitativas para los BDs con uno y dos parámetros de bifurcación, así como para las perturbaciones. Se establecieron las reglas para inferir como evoluciona el sistema bajo la presencia de eventos dinámicos y se definieron los algoritmos de simulación cualitativa. En el capítulo siguiente se presentan los resultados de aplicar estos algoritmos al análisis cualitativo de varios sistemas dinámicos.

Capítulo 5

Experimentos y Resultados

En este capítulo se analizan algunos sistemas usando los algoritmos propuestos en el Capítulo anterior. En todos los casos se comienza de un diagrama de bifurcación producido con un software que genera diagramas de bifurcación [Ermentrout, Barrera08]; la representación cualitativa es generada a mano. En cada caso, para realizar una simulación primero definimos una ruta para el/los parámetro(s) de bifurcación.

5.1. Diagrama de bifurcación imperfecto

El sistema bajo análisis en esta sección es descrito por la Ecuación cúbica 5.1. Se comienza con este ejemplo por ser un caso muy sencillo que exhibe varios de los eventos derivados en la Sección 4.1.5.es

$$\dot{x} = c + rx - x^3 \tag{5.1}$$

La Figura 5.1 muestra como la topología del sistema se modifica conforme el parámetro r es incrementado. Para ilustrar el comportamiento del sistema, se utiliza un ejemplo cuantitativo, suponemos $c = 16$. Usando ese valor tenemos $\dot{x} = 16 + rx - x^3$ donde r es el parámetro de bifurcación. De la Figura 5.1(a) con $r = 1$, el sistema tiene solo un punto fijo estable. Cuando r llega a $r = 12$ un nuevo punto fijo aparece, el cual es un punto fijo estable por la izquierda; en este valor de r aparece una bifurcación Hopf

[Strogatz94, Nayfhe95]. Si se continua incrementando r , el punto fijo estable por la izquierda se convierte en dos puntos fijos uno estable y otro inestable. La Figura 5.2(a) describe cuantitativamente los diferentes casos para las soluciones del sistema y su estabilidad.

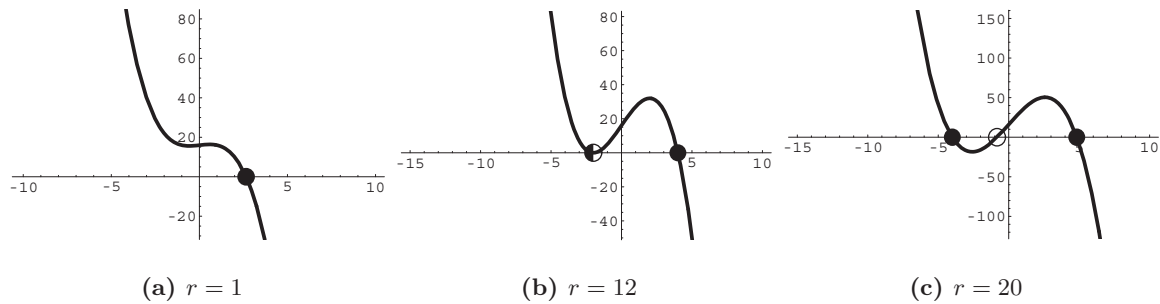
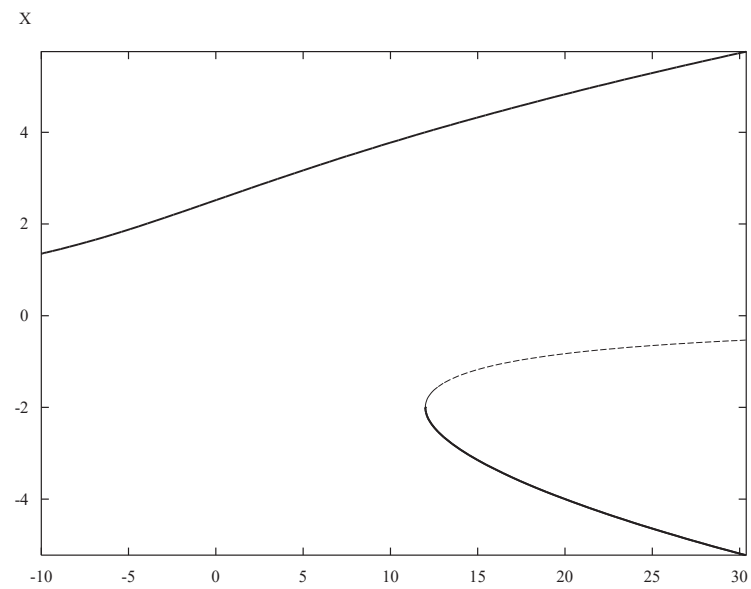
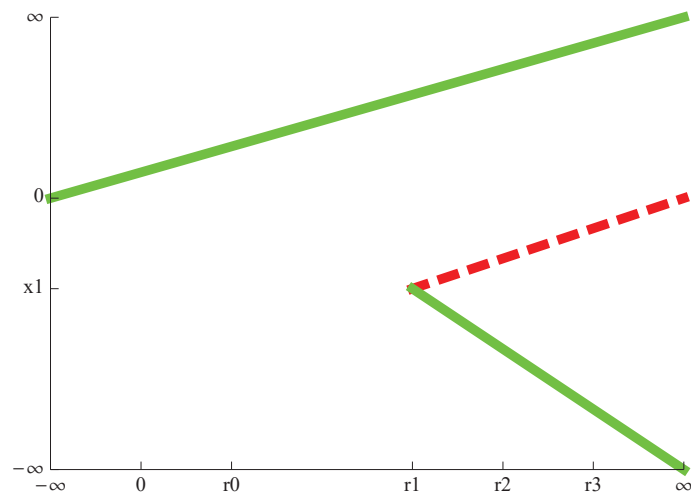


Figura 5.1: Puntos fijos para $\dot{x} = 16 + rx - x^3$

La Figura 5.2(a) muestra el BD cuantitativo para la Ecuación 5.1. Tres ramas de soluciones son encontradas para el sistema cúbico: dos estables y una inestable. La versión cualitativa del diagrama está en la Figura 5.2(b); esta versión considera solo la naturaleza y la dirección de cada rama por lo que es posible representar el diagrama utilizando solo líneas rectas. Las líneas son suficientes para representar como varían cualitativamente las soluciones del sistema en relación con sus parámetros de bifurcación. La Tabla 5.1 es la codificación de la versión cualitativa del BD para la ecuación cúbica.

<p>Variables:</p> $\{r, x\}$ <p>Espacios Cuantitativos:</p> $QS(x) = (-\infty, x_1, 0, \infty)$ $QS(r) = (-\infty, 0, r_0, r_1, r_2, r_3, \infty)$ <p>BD: $R = \{ \langle (-\infty, \infty), ((0, \infty), +), s \rangle,$ $\langle (r_1, \infty), ((x_1, 0), +), us \rangle,$ $\langle (r_1, \infty), ((-\infty, x_1), -), s \rangle \}$</p>
--

Tabla 5.1: Representación cualitativa del diagrama de bifurcación de la Figura 5.2(b)

(a) *BD Cuantitativo*(b) *BD Cualitativo*Figura 5.2: Diagrama de bifurcación para $\dot{x} = c + rx - x^3$

Para poder realizar una simulación sobre un BD, es necesario primero definir como evolucionará el parámetro r y el estado inicial del sistema (i.e., en que BDS está el sistema cuando la simulación comienza). También se requieren los espacios cuantitativos y la versión cualitativa del diagrama de bifurcación (ver Figura 5.1). La ruta propuesta se muestra en la Tabla 5.2. D indica como se varía el parámetro de bifurcación durante el proceso de simulación cualitativa. Cada elemento en D incluye el valor del parámetro, el sentido en que se varía el parámetro (se incrementa o decrementa) y la dirección en que se perturba el sistema ($\{+\}$, $\{-\}$ o $\{\}$ cuando no existe una perturbación en ese punto). El algoritmo produce la lista de estados cualitativos de la evolución del sistema como resultado de la secuencia dinámica D .

$$D = \{(r_3, r_2), -, \{\}\}, \\ (r_2, 0, \{-\}), \\ ((r_2, 0), -, \{+\})\}$$

Tabla 5.2: Ruta cualitativa para el Sistema de cubico

De la simulación se obtiene la Figura 5.3. La línea negra describe el comportamiento cualitativo que presenta el sistema cuando r varía de acuerdo a la ruta propuesta D . El sistema evoluciona de la siguiente forma: al inicio de la simulación el sistema se encuentra en r_3 en el estado entre $-\infty$ y x_1 , en este punto el sistema está en el segmento estable de la parte inferior (sobre la línea verde). Conforme el parámetro se decrementa de r_3 a r_2 (ésta variación es mostrada por la flecha negra) el sistema continua sobre el mismo BDS. Una perturbación ocurre en r_2 (las perturbaciones se representan gráficamente como flechas azules en dirección de la perturbación) pero como el BDS es estable, el sistema permanece en el mismo BDS. El parámetro se decrementa de r_2 a 0 y cuando el BDS actual termina en r_1 , ocurre un caída. Después de la caída el sistema pasa al siguiente estado entre $(0, \infty)$ (la línea verde de la parte superior en la Figura 5.2(b)) y continua sobre ese BDS hasta terminar la simulación en $r = 0$.

En la Tabla 5.3 se muestra el conjunto de estados cualitativos generados por el

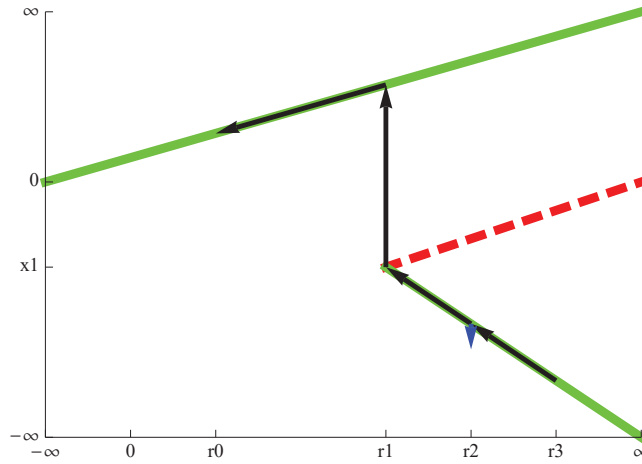


Figura 5.3: Resultados de la simulación sobre el BD de la figura 5.2

Algoritmo. Este conjunto describe la evolución que tendrá el sistema bajo la variación del parámetro de bifurcación descrita en D . Cada elemento del conjunto está formado por $BDS, s_r, evento$ donde BDS y s_r tienen la misma interpretación que se describió en la representación cualitativa y $evento$ es la descripción del evento que se presentó en ese punto. “Pert” si el evento es una perturbación, “FallOff” en el caso de una caída, “Derailment” para un descarrilamiento. Se incluye “Next” solo para indicar cuando cambia el valor cualitativo de r o se termina un BDS y “Start” para indicar que es el estado en el que se encontraba el sistema al inicio de la simulación. La versión codificada contiene la misma información que la gráfica pero en forma de lista estados cualitativos.

$$\begin{aligned}
 RP = \{ & ((r_1, \infty), (-\infty, x_1), +), s, r_3, -, Start, \\
 & ((r_1, \infty), ((-\infty, x_1), +), s, r_2, -, Pert), \\
 & ((r_1, \infty), ((-\infty, x_1), -), s, r_2, -, Next), \\
 & ((r_1, \infty), ((-\infty, x_1), -), s, r_1, 0, FallOff), \\
 & ((-\infty, \infty), ((0, \infty), +), s, r_1, 0, Next), \\
 & ((-\infty, \infty), ((0, \infty), +), s, 0, 0, Next) \}
 \end{aligned}$$

Tabla 5.3: Lista de estados para la simulación cualitativa

En el ejemplo se observa como evoluciona el estado del sistema ante la variación de un parámetro de bifurcación. Esta evolución está dada por las listas de estados cualitativos generadas mediante el Algoritmo propuesto. El ejemplo es sencillo pero útil para definir como son interpretados los resultados de una simulación.

5.2. Sistema eléctrico con carga dinámica

En este segundo caso de estudio se realiza una simulación sobre un diagrama de bifurcación de un sistema eléctrico de potencia. Este es un ejemplo de la vida real. En este ejemplo los resultados son limitados por el hecho de que se está utilizando solo un subconjunto del BD. Es un solo un subconjunto ya que como se observa en la Figura 5.5(a) el BD para este caso no presenta una alternancia de soluciones. La simulación aún resulta útil por que el subconjunto del diagrama de bifurcación es un conjunto representativo de las ramas de soluciones en el rango de operación del sistema eléctrico, es decir el BD es un conjunto de puntos de equilibrio en los cuales el sistema puede operar en una situación real.

El sistema está compuesto por dos generadores (ver Figura 5.4), una es la referencia, y la otra es una fuente de voltaje fija de las cuales su dinámica está descrita por la ecuación de oscilación [Grainger96]. El sistema puede ser modelado como un área pequeña conectada a la red, la red es considerada como un bus infinito. Las líneas de transmisión son modeladas por admitancias. La carga es modelada como un circuito de tres elementos, una carga fija, un capacitor y una máquina de inducción.

La dinámica del sistema está descrita por la Ecuación 5.2. δ_m representa el ángulo entre los campos magnéticos del rotor y el estator; dicho ángulo es llamado ángulo de carga. Si δ_m es positivo el generador inyecta energía a la red y si el ángulo es negativo entonces actúa como una carga. El subconjunto del BD fue producido utilizando xppaut [Ermentrout]. Primero se obtiene una solución estable, a partir de esa solución auto genera el diagrama de bifurcación. En este caso, se encuentra un punto de bifurcación de donde emana una rama de soluciones de periodo dos (i.e. bifurcación hopf). En [Garcia-Kasusky03] el diagrama de bifurcación generado para el sistema de carga dinámica, el estado del sistema está dado por el voltaje, pero en nuestro caso utilizamos δ_m como la variable de estado,

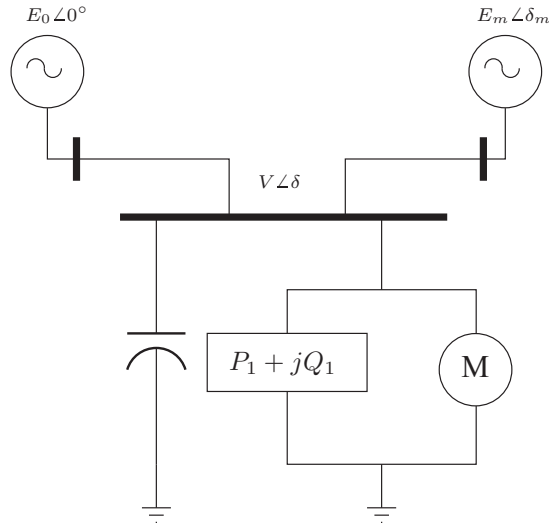


Figura 5.4: Circuito de carga Dinámica

obteniendo el BD de la Figura 5.5(a). En ambos casos se utiliza Q como parámetro de bifurcación.

$$\begin{aligned}
 \dot{\delta}_m &= \omega \\
 \dot{\omega} &= \frac{1}{M}(P_m - D_m\omega + VE_mY_m\sin(\delta - \delta_m - \theta_m) + E_m^2Y_m\sin\theta_m) \\
 \dot{\delta} &= K_{qw}^{-1}(-K_{qv}2V^2 - K_{qv}V + Q - Q_0 - Q_1) \\
 \dot{V} &= \frac{1}{-K_{qw}K_{pv}}(-K_{qw}(P_0 + P_1 - P) + (K_{pw}K_{qv} - K_{qw}K_{pv})V \\
 &\quad + K_{pw}(Q_0 + Q_1 - Q) + K_{pw}K_{qv}2V^2)
 \end{aligned} \tag{5.2}$$

La Figura 5.5(a) muestra el diagrama de bifurcación cuantitativo generado mediante el programa auto [Ermentrout]. Los segmentos dibujados con líneas sólidas y líneas punteadas representan las soluciones estables e inestables respectivamente. Los círculos rellenos representan las soluciones estables de doble periodo del sistema y los círculos vacíos las soluciones inestables de periodo dos. La Figura 5.5(b) muestra la versión cualitativa del BD. El BD cualitativo se obtiene solo analizando de forma visual el diagrama generado por auto y cada segmento es elegido solo considerando su estabilidad y la dirección de la derivada.

La codificación de la representación cualitativa para el diagrama de bifurcación se muestra en la Tabla 5.4. Cada renglón de la tabla representa con un BDS de la forma

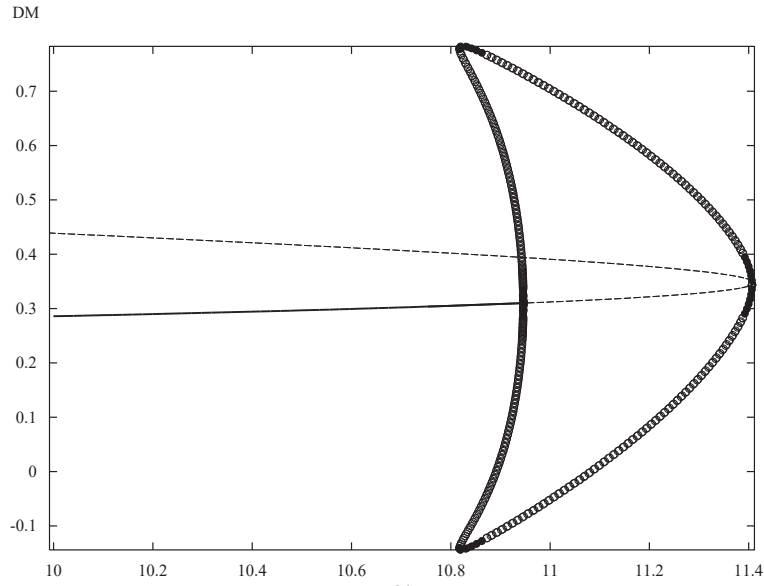
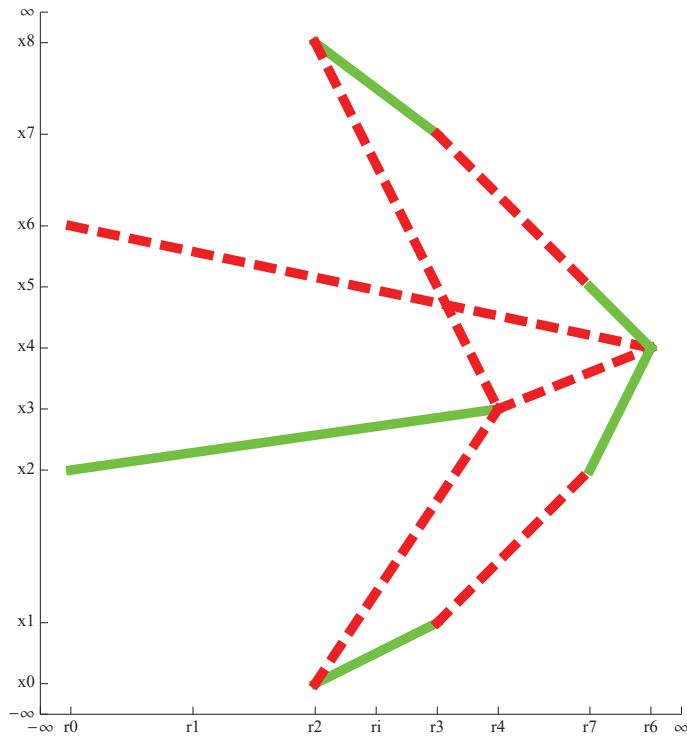
(a) *BD Cuantitativo*(b) *BD Cualitativo*

Figura 5.5: Diagramas de bifurcación para el sistema de carga dinámica

descrita en el Capítulo 4.1.

<p>Variables:</p> $\{r, x\}$ <p>Espacios Cuantitativos:</p> $QS(x) = (x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8)$ $QS(r) = (r_0, r_1, r_2, r_3, r_4, r_7, r_5, r_6)$ <p>BD: $R = \{ \langle (r_0, r_4), ((x_2, x_3), +), s \rangle ,$ $\langle (r_4, r_6), ((x_3, x_4), +), us \rangle ,$ $\langle (r_0, r_6), ((x_4, x_6), -), us \rangle ,$ $\langle (r_2, r_3), ((x_0, x_1), +), s \rangle ,$ $\langle (r_2, r_3), ((x_7, x_8), -), s \rangle ,$ $\langle (r_2, r_4), ((x_0, x_3), +), us \rangle ,$ $\langle (r_2, r_4), ((x_3, x_8), -), us \rangle ,$ $\langle (r_3, r_7), ((x_1, x_2), +), us \rangle ,$ $\langle (r_3, r_7), ((x_5, x_5), -), us \rangle ,$ $\langle (r_7, r_6), ((x_2, x_4), +), s \rangle ,$ $\langle (r_7, r_6), ((x_4, x_5), -), s \rangle \}$</p>

Tabla 5.4: Representación cualitativa del BD del Sistema de Carga Dinámica

La descripción de variación del parámetro definida para la simulación es la mostrada en la Tabla 5.5

En este ejemplo el estado inicial del sistema es en r_i sobre el BDS $\langle (r_2, r_4), ((x_0, x_3), -), us \rangle$. Como el segmento del diagrama donde se encuentra el estado inicial es inestable, tan pronto como r tiene un incremento infinitesimal el sistema exhibe un descarrilamiento y como resultado del mismo el sistema tiende hacia el atractor mas cercano por debajo del BDS actual. El segmento que contiene la siguiente solución estable es $\langle (r_2, r_3), ((x_0, x_1), -), s \rangle$ y es sobre ese BDS que el sistema alcanza r_3 . Después se decrementa el parámetro r hasta r_2 , donde el BDS termina y al continuar decrementando el parámetro

$$D = \{(r_i, r_3), +, \{\}\},$$

$$\{(r_3, r_1), -, \{\}\},$$

$$\{(r_1, 0), \{+\}\},$$

$$\{(r_1, r_0), -, \{\}\},$$

Tabla 5.5: Ruta cualitativa para el Sistema de Carga Dinámica

en r_2 se presenta una caída. Como resultado de la caída, el sistema termina en el segmento $\langle (r_0, r_4), ((x_2, x_3), +), s \rangle$, donde continúa hasta r_0 a pesar de la perturbación en r_1 . Esta perturbación no provoca un cambio de segmento; ya que el sistema se encuentra en una región estable. Los resultados de la simulación codificados se muestran en Tabla 5.6 y de manera gráfica en la Figura 5.6.

$$RP = \{(\langle (r_2, r_4), ((x_0, x_3), +), us \rangle, r_i, 0, Start),$$

$$\langle (r_2, r_3), ((x_0, x_1), +), s \rangle, r_i, 0, Derailment),$$

$$\langle (r_2, r_3), ((x_0, x_1), -), s \rangle, r_3, 0, Next),$$

$$\langle (r_2, r_3), ((x_0, x_1), +), s \rangle, r_i, 0, Next),$$

$$\langle (r_2, r_3), ((x_0, x_1), +), s \rangle, r_2, 0, FallOff),$$

$$\langle (r_0, r_4), ((x_2, x_3), +), s \rangle, r_2, 0, Next),$$

$$\langle (r_0, r_4), ((X_2, x_3), +), s \rangle, r_1, 0, Pert),$$

$$\langle (r_0, r_4), ((X_2, x_3), +), s \rangle, r_1, 0, Next),$$

$$\langle (r_0, r_4), ((X_2, x_3), +), s \rangle, r_0, 0, Next)\}$$

Tabla 5.6: Resultados de la Simulación para el BD del Sistema de Carga Dinámica

Los resultados para el sistema de carga dinámica son limitados debido a que existen segmentos del BD en que el algoritmo no puede determinar el estado siguiente del sistema. Un ejemplo de lo anterior es si el sistema se encuentra en una zona donde uno de los BDS adyacentes tiene el mismo tipo de estabilidad que el actual, ya que se violaría el Teorema 1 (i.e., no se cumple la alternancia de soluciones).

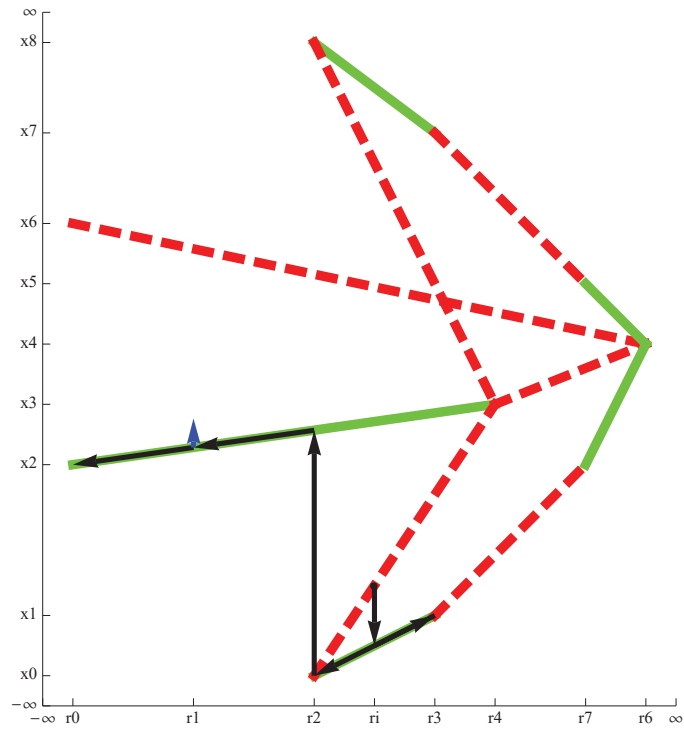


Figura 5.6: Gráfica de resultados de la Simulación para el BD del Sistema de Carga Dinámica

5.3. Sistema Biológico

Para el sistema biológico ya se presentaron su descripción cualitativa y las gráficas cuantitativa y cualitativa del diagrama de bifurcación (ver Figuras 4.2, 4.9 y 4.10).

Para realizar una simulación ya solo falta definir la ruta cualitativa D que proporcione una descripción de como deben variarse los parámetros para la simulación. En este ejemplo se utiliza la descripción de la Tabla 5.7. En esta tabla, a diferencia del los casos unidimensionales, cada elemento en D indica como son variados los dos parámetros de bifurcación. Cada elemento contiene el valor inicial y final de r y h así como la dirección en que son variados (i.e. si se decrementan o incrementan sus valores).

$$D = \{((r_6, r_4), (h_1, h_2)), (-, +), \{\}\}, \\ ((r_4, r_1), (h_2, h_4)), (-, +), \{\}\}, \\ ((r_1, r_0), h_4), (-, 0), \{\}\}, \\ (r_0, (h_2, h_4)), (0, -), \{\}\}, \\ (((r_0, r_2), (h_1, h_2)), (+, -), \{\}\})\}$$

Tabla 5.7: Ruta cualitativa para el Sistema Biológico

Para realizar la simulación suponemos que los parámetros están en los landmarks (r_6, h_1) sobre la región A de la Figura 4.9. Como primera variación, el parámetro r se decrementa de r_6 a r_4 y simultaneamente es incrementado h de h_2 a h_4 . El sistema se mueve sobre la región en que inició. El punto (r_4, h_2) es donde se unen las esquinas de todas las regiones para este BD (el sistema podría estar en cualquiera de las regiones estables, por convención en este caso el sistema continuará en la región actual). Como resultado del decremento de r y el incremento en el parámetro h el sistema tiene dos posibles estados siguientes (en los puntos de bifurcación no es posible determinar la estabilidad del sistema [Nayfhe95] y por tanto tampoco se puede determinar sobre que región continuará) por lo que en la simulación se genera una ramificación para cada uno de los posibles estados siguientes. Una simulación tomará como siguiente estado la región D y otra rama más la región C (ver la Figura 4.14).

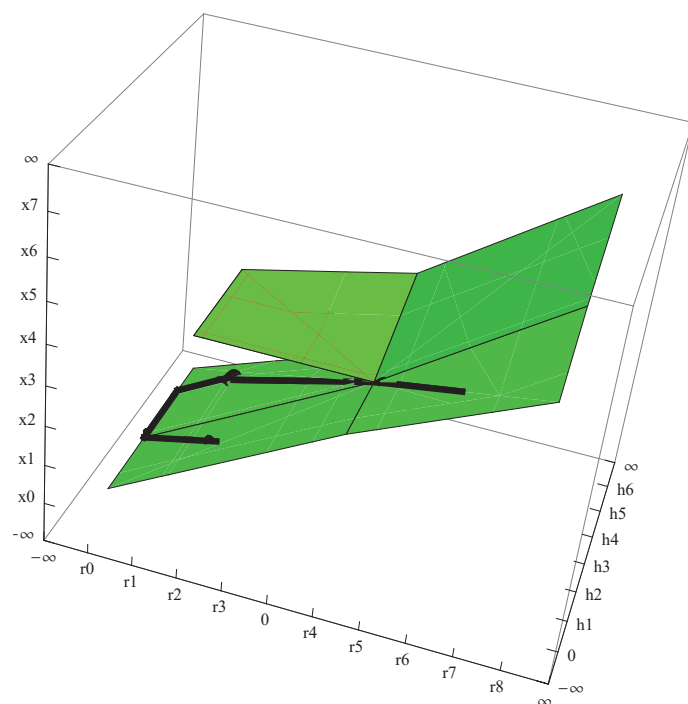
Para la rama de la simulación que continua por la región D , el parámetro r varía hasta r_1 y h se incrementa a h_4 . El comportamiento continua sobre la región D cuando se decrementa r hasta r_0 mientras h se mantiene constante y de igual forma cuando se mueve h a h_2 manteniendo r constante. En el punto (r_0, h_2) termina la región D por lo que al variar los parámetros hasta el punto (r_2, h_1) el comportamiento del sistema se mueve a la región F y en ese punto finaliza esta simulación.

En el caso en el cual se continuó por la región C hasta el punto (r_1, h_4) el estado del sistema continua en la región C , pero al variar r hasta la posición (r_0, h_4) el sistema presenta una caída. En este momento el sistema evoluciona para alcanzar el punto (r_0, h_4) sobre la región D . Para los puntos siguientes en la ruta descrita para la variación de los parámetros, el comportamiento del sistema es el mismo que para la primera rama.

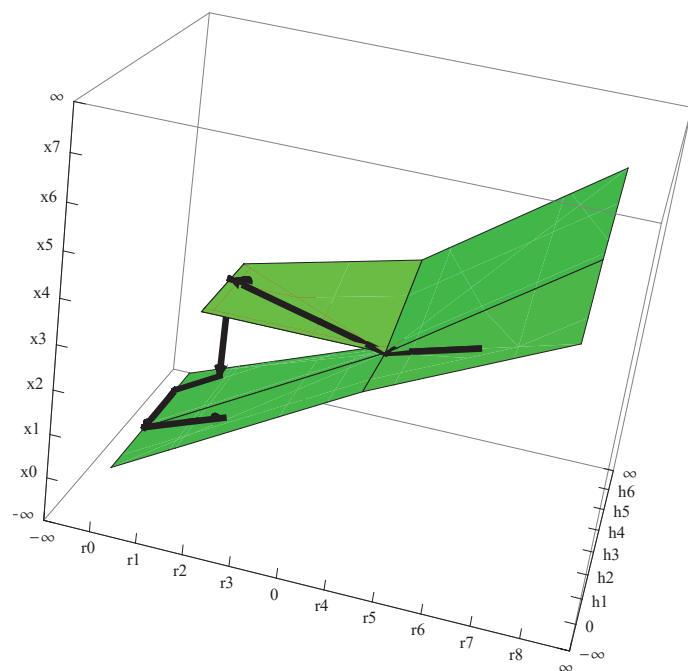
En los resultados se pueden observar los dos posibles comportamientos para el sistema biológico dado la descripción de cambio en sus parámetros. En el caso de la Figura 5.7(a) tenemos un cambio suave en el estado del sistema. En este caso el sistema al alcanzar el punto (r_4, h_2) presenta un cambio gradual en la evolución del estado conforme se visitan todos los puntos de variación para los parámetros (r, h) . Para el segundo caso (ver Figura 5.7(b)) cuando el sistema alcanza el punto (r_1, h_4) y conforme se incrementa r , el sistema exhibe una caída, lo cual lleva el sistema a un cambio catastrófico en su comportamiento. Los resultados para los dos posibles comportamientos se muestran de forma gráfica en la Figura 5.7. Los resultados codificados de la simulación son los mostrados en las Tablas 5.8 y 5.9.

$$\begin{aligned}
 RP = \{ & \langle \langle \langle (r_4, r_8), (0, h_2) \rangle, \langle (x_3, x_3, x_5, x_6,), (+, +) \rangle, s \rangle, (r_6, h_1), 0, Start \rangle, \\
 & \langle \langle (r_4, r_8), (0, h_2) \rangle, \langle (x_3, x_3, x_5, x_6,), (+, +) \rangle, s \rangle, (r_4, h_2), 0, Next \rangle, \\
 & \langle \langle \langle (r_0, r_4), (h_2, h_5) \rangle, \langle (x_0, x_0, x_2, x_3,), (+, 0) \rangle, s \rangle, (r_1, h_4), 0, Next \rangle, \\
 & \langle \langle \langle (r_0, r_4), (h_2, h_5) \rangle, \langle (x_0, x_0, x_2, x_3,), (+, 0) \rangle, s \rangle, (r_0, h_4), 0, Next \rangle, \\
 & \langle \langle \langle (r_0, r_4), (h_2, h_5) \rangle, \langle (x_0, x_0, x_2, x_3,), (+, 0) \rangle, s \rangle, (r_0, h_2), 0, Next \rangle, \\
 & \langle \langle \langle (r_0, r_4), (0, h_2) \rangle, \langle (x_0, x_0, x_3, x_3,), (+, 0) \rangle, s \rangle, (r_2, h_1), 0, Next \rangle \}
 \end{aligned}$$

Tabla 5.8: Resultado 1 para el Sistema Biológico



(a) Rama A



(b) Rama B

Figura 5.7: Gráficas para la Simulación sobre el Sistema Biológico

$$\begin{aligned}
RP = \{ & \langle \langle \langle (r_4, r_8), (0, h_2) \rangle, \langle (x_3, x_3, x_5, x_6,), (+, +) \rangle, s \rangle, (r_6, h_1), 0, Start \rangle, \\
& \langle \langle (r_4, r_8), (0, h_2) \rangle, \langle (x_3, x_3, x_5, x_6,), (+, +) \rangle, s \rangle, (r_4, h_2), 0, Next \rangle, \\
& \langle \langle (r_1, r_4), (h_2, h_5) \rangle, \langle (x_3, x_3, x_3, x_4,), (+, +) \rangle, s \rangle, (r_1, h_4), 0, Next \rangle, \\
& \langle \langle (r_0, r_4), (h_2, h_5) \rangle, \langle (x_0, x_0, x_2, x_3,), (+, 0) \rangle, s \rangle, (r_1, h_4), 0, FallOff \rangle, \\
& \langle \langle (r_0, r_4), (h_2, h_5) \rangle, \langle (x_0, x_0, x_2, x_3,), (+, 0) \rangle, s \rangle, (r_0, h_2), 0, Next \rangle, \\
& \langle \langle (r_0, r_4), (0, h_2) \rangle, \langle (x_0, x_0, x_3, x_3,), (+, 0) \rangle, s \rangle, (r_2, h_1), 0, Next \rangle \}
\end{aligned}$$

Tabla 5.9: Resultado 2 para el Sistema Biológico

De la simulación sobre el sistema biológico se observa que debido a no poder predecir el comportamiento exacto de un sistema en puntos de bifurcación, el sistema dinámico puede presentar comportamientos distintos para condiciones de operación similares, si en la evolución del sistema se pasa por un estado que coincide con un punto de bifurcación. En el presente capítulo se mostraron los resultados de forma codificada y gráfica. Estos resultados son obtenidos al aplicar una simulación cualitativa sobre diagramas de bifurcación. Como resultado se obtiene una lista de estados que indica como evoluciona el sistema ante variaciones en sus parámetros. Se mostró también que con el algoritmo se pueden inferir hechos aún sobre BDs incompletos. Se expuso cómo un sistema puede exhibir mas de un posible comportamiento para una secuencia de variación parámetros. A la situación anterior se le conoce como ambigüedad de soluciones. Además se observó que la ambigüedad que se presenta aún en casos simples como el sistema biológico.

Capítulo 6

Conclusiones

En muchos libros de texto como [Strogatz94, Scheinerman96], se menciona que es posible inferir el comportamiento de un sistema basándose solo en la información cualitativa proporcionada por sus derivadas (i.e. la razón de cambio en el estado del sistema). Esos libros presentan una metodología basada en razonamiento geométrico y definen el concepto de flujos. Utilizando flujos es posible deducir como evolucionará un sistema y como se ven modificadas las soluciones de un sistema al variar sus parámetros. En este trabajo se toman las ideas de los razonamientos expuestos principalmente en [Strogatz94] y se amplía la representación y algoritmos de [Flores05] para proporcionar un proceso automatizado de inferencia de comportamientos utilizando dichos conceptos.

Basados en los conceptos de flujos y estabilidad de sistemas se desarrollaron un grupo de reglas de decisión. Las reglas propuestas son capaces de inferir como evoluciona un sistema ante la presencia de eventos dinámicos. Estos eventos son caídas, perturbaciones y descarrilamientos. Las perturbaciones modelan eventos en los que el estado del sistema es modificado infinitesimalmente; como resultado de estas modificaciones el sistema dinámico puede presentar cambios significativos en su comportamiento. Los eventos descritos como caídas y descarrilamientos se presentan como consecuencia de la variación en los parámetros del sistema. Las reglas deducidas permiten conocer como un sistema responderá a los eventos dinámicos caracterizados. Este conocimiento es importante para prevenir comportamientos no deseados en los sistemas dinámicos. Además también puede utilizarse para modificar el

comportamiento de un sistema y llevarlo a un estado de operación de interés. Todo esto es posible hacerlo utilizando las reglas deducidas ya que con ellas podemos saber como variar los parámetros o aplicar una perturbación para que el sistema evolucione a cualquier región de estabilidad sobre el BD.

Se presentó el desarrollo de las representaciones cualitativas para diagramas de bifurcación generados a partir de la variación de uno y dos parámetros. La representación abstrae las características esenciales para hacer posible la inferencia comportamientos utilizando las reglas deducidas. Se muestra que es suficiente considerar la dirección de cambio y la estabilidad de las soluciones para obtener una representación cualitativa del BD sobre el cual se pueden aplicar el conjunto de reglas desarrolladas. Los BD son divididos en intervalos de soluciones las cuales tienen el mismo tipo de estabilidad y la dirección de cambio permanece invariable en éstos. Los límites de los intervalos están definidos por los puntos de bifurcación y los puntos donde hay cambios en la derivada del estado del sistema. Los intervalos son llamados BDS. Los BDS para el caso de un parámetro se representan con puntos y líneas rectas. Con la inclusión de otro parámetro de bifurcación es necesario añadir regiones a la representación cualitativa. Las regiones son representadas por áreas rectangulares. Las versiones cualitativas para los diagramas de bifurcación introducen incertidumbre; en el caso de un parámetro las líneas rectas no pueden representar curvas y en el caso de dos parámetros los rectángulos no pueden representar otro tipo de áreas (e.g. áreas triangulares). Aún en presencia de incertidumbre introducida puede proporcionarse información útil ya que los puntos límite de cada región representan límites cuantitativos del sistema, lo cual es suficiente para definir rangos de operación y umbrales de estabilidad.

Se presentaron algoritmos para simulación cualitativa sobre BD con uno y dos parámetros de bifurcación. La simulación es capaz de obtener los comportamientos posibles para un sistema basado solo en su BD cualitativo y una secuencia de cambios (propuesta por el usuario) en sus parámetros o perturbaciones en el estado del sistema. Los algoritmos evalúan la secuencia de cambios y para cada cambio determinan los posibles estados siguientes. Al terminar la simulación el algoritmo (para uno y dos parámetros) regresa una lista de estados cualitativos que contiene todos los estados en los que opera el sistema como resultado de la secuencia de cambios aplicada.

Como parte del trabajo se expusieron varios sistemas dinámicos de los cuales se obtuvo su diagrama de bifurcación cuantitativo, se generó a mano la versión cualitativa y se realizó simulación cualitativa sobre sus BD. En cada uno de los ejemplos se analiza como funciona el algoritmo para las secuencias de cambios propuestas. En el ejemplo de carga dinámica se observa como es posible aplicar el algoritmos con un BD incompleto. En éste caso los resultados también son parciales ya que no se conocen todas las posibles regiones de estabilidad el sistema podría caer en una de las regiones desconocidas y el resultado del algoritmo indicar que se encuentra en otra. Lo anterior muestra la importancia de conocer el BD completo. En el caso del sistema biológico, se puede observar la ambigüedad de comportamientos. La ambigüedad no puede ser resuelta con la representación cualitativa propuesta ya que por definición en los puntos de bifurcación no se puede determinar el tipo de estabilidad del sistema por lo que el estado siguiente puede ser cualquiera de los estados cercanos. El estado hacia el cual evolucionará es sistemas reales generalmente es decidido por circunstancias particulares para cada caso (v.g. el medio ambiente, el estado de los dispositivos que intervienen en el sistema ...). Pero para nuestro caso optamos por generar ramificaciones y generar soluciones para cada uno de los comportamientos posibles.

Como resultado de esta tesis se desarrolló sistema de simulación basado en conjunto de notebooks de Mathematica. El sistema desarrollado es capaz de generar gráficas cualitativas de BDs a partir de su representación cualitativa. También se producen representaciones cualitativas gráficas de los resultados de la simulación cualitativa sobre diagramas de bifurcación.

Con las herramientas desarrolladas en esta tesis se pueden inferir comportamientos de un sistema dinámico, ver como responde el sistema a variaciones en sus parámetros. Su uso facilita la obtención de conclusiones acerca de la dinámica de un sistema basándose en su diagrama de bifurcación. Con los resultados obtenidos se puede determinar el rango de operación de un sistema en el que éste funciona de forma estable, lo anterior se basa el mapeo natural entre los espacios cuantitativos y los rangos de operación. También es posible deducir como debe modificarse un parámetro de control para mantener el sistema estable y evitar eventos catastróficos.

El trabajo desarrollado en está tesis es una herramienta que contribuye al proceso

de automatización del análisis de sistemas dinámicos. No es el objetivo generar diagramas de bifurcación ni proporcionar un reemplazo para el software de generación de estos. La simulación cualitativa propuesta es utilizada para inferir posibles comportamientos del sistema dinámico a partir de su diagrama de bifurcación.

6.1. Trabajos Futuros

Los trabajos futuros pueden ir en muchas direcciones. Producir a mano la versión cualitativo de un diagrama de bifurcación en tres dimensiones es difícil ya que no pueden apreciarse del todo las características de las regiones, por lo que es necesario implementar algoritmos de cualitativización. Estos algoritmos pueden ser de dos tipos: en uno la versión cualitativa es generada a partir de la versión cuantitativa o bien desarrollar una metodología que utilice las ecuaciones diferenciales cualitativas del sistema.

Interactuar con otras áreas para mejorar el ambiente de trabajo desarrollado, mejorar en el sentido de que con simulación cualitativa puedan responderse preguntas de interés para los expertos de esas áreas.

Las representaciones propuestas en el presente trabajo solo utilizan dos parámetros de bifurcación, por lo que otro posible desarrollo es buscar o extender las representaciones cualitativas que proporcionen descripciones para diagramas de bifurcación en mayores dimensiones.

Caracterizar los efectos que influyen la evolución de estado del sistema en los puntos donde hay ambigüedad. Lo anterior podría lograrse ampliando la representación cualitativa e incluyendo representaciones de orden y magnitud para los efectos mencionados.

Formalizar un proceso de diseño para dispositivos de control que utilicen la información generada por la simulación cualitativa sobre BD. Así como desarrollar algoritmos basados en las representaciones propuestas que dado el diagrama de bifurcación cualitativo y un conjunto de restricciones de operación de un sistema sea capaz de decidir como modificar los parámetros de control para mantener el sistema dentro de las restricciones dadas.

Apéndice A

Las simulaciones presentadas en este trabajo fueron realizadas en *Mathematica*. Para realizar las simulaciones fue necesario implementar los algoritmos propuestos y usar una representación simbólica de los modelos para las representaciones cualitativas, como resultado de esto se desarrollaron un conjunto de notebooks (ver [Wolfram03]). Para mostrar el uso de las librerías se asume que el usuario tiene conocimientos básicos de como utilizar Mathematica, por lo que se hará más énfasis en describir como equivalen las representaciones en Mathematica a los modelos cualitativos desarrollados y en como se utilizan conjunto de funciones que en los detalles referentes a el uso de Mathematica.

A.1. Ejemplo con un parámetro

En esta sección se desarrolla paso a paso un ejemplo que involucra un parámetro de bifurcación.

Para poder hacer uso de las funciones implementadas es necesario primero incluirlas como parte del repositorio de Mathematica, esto puede hacerse con las siguientes instrucciones:

```
<< "/Users/job/qrb/math/qrbd.m"  
<< "/Users/job/qrb/math/qplots.m"  
  
Loading qrbd.m  
  
Loading qplots.m
```

Donde `/Users/job/qrb/math/qrbd.m`.^{es} la ruta completa de donde se localiza el archivo `qrbd.m`. En `qrbd.m` se definen el conjunto de funciones necesarias para realizar el pro-

ceso de razonamiento sobre diagramas de bifurcación cualitativos y en *qplots.m* los métodos necesarios para generar las gráficas cualitativas.

El ejemplo para mostrar el uso de las librerías es el sistema de quinto orden de la Figura 4.1.

Una vez que se tienen incluidas las funciones, deben definirse los espacios cuantitativos para el estado del sistema x y el parámetro de bifurcación r (recordando que los espacios cuantitativos deben estar ordenados). Lo anterior se hace mediante la siguiente instrucción:

```
QuantSP[x] = {-Infinity, x4, x3, 0, x2, x1, Infinity};
QuantSP[r] = {-Infinity, r0, r1, ri, 0, r2, Infinity};
```

Adicionalmente para poder obtener las representaciones gráficas deben generarse equivalencias numéricas para cada espacio cuantitativo, ésto se hace como sigue:

```
RegisterQQEquiv[x];
RegisterQQEquiv[r];
```

Después debe proporcionarse la representación cualitativa del Diagrama de bifurcación. La representación es una lista de BDSs que se definen de forma simbólica. En la implementación en Mathematica la expresión $bds[qv[r], qs[x], n[estabilidad]]$ es equivalente a la representación de un BDS que se describe en la Sección 4.1. Donde $qv[r]$ equivale a $qv(r)$, $n[estabilidad]$ es la naturaleza de segmento y $estabilidad$ es cualquiera de los valores ya mencionados para la estabilidad. En tanto $qs[x]$ es el estado cualitativo y x esta dado por $qv[x], qd[x]$, con lo que $qs[x]$ es $qv(x)$ y $qd[x]$ la derivada del segmento. Para expresar cuando r o x son intervalos se representan simbólicamente como $int[r_1, r_2]$ o $int[x_1, x_2]$.

Como ejemplo, si se quiere representar el punto $\langle r_1, (x_3, ?), ls \rangle$ se tendría la expresión:

```
bds[qv[r_1], qs[qv[x_3], qd["?"]], n[ls]]
```

si se quisiera el segmento dado por $\langle (r_1, 0), ((x_3, 0), +), us \rangle$, se tendrá:

```
bds[qv[int[r_1,0]], qs[qv[int[x_3,0]], qd["+"]], n[us]]
```

La descripción completa para representación cualitativa de la tabla 4.1 sería la siguiente:

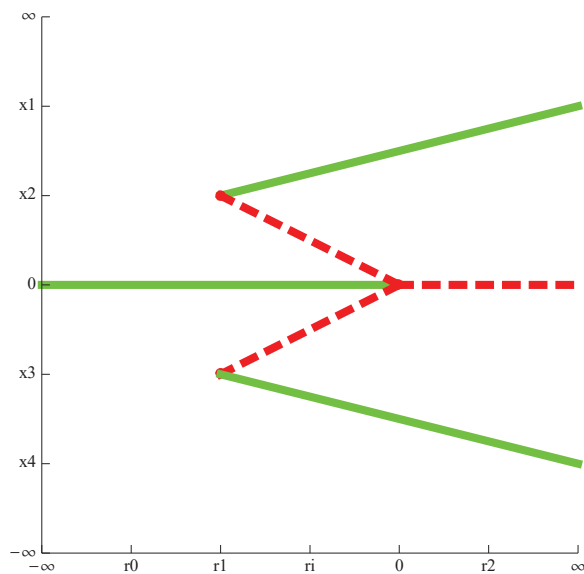

```

R = {bds[qv[int[-Infinity, 0]], qs[qv[0], qd[0]], n[s]],
     bds[qv[int[0, Infinity]], qs[qv[0], qd[0]], n[us]],
     bds[qv[int[r1, Infinity]], qs[qv[int[x2, x1]], qd["+"]], n[s]],
     bds[qv[r1], qs[qv[x2], qd["?"]], n[rs]],
     bds[qv[int[r1, 0]], qs[qv[int[0, x2]], qd["-"]], n[us]],
     bds[qv[0], qs[qv[0], qd["?"]], n[us]],
     bds[qv[int[r1, 0]], qs[qv[int[x3, 0]], qd["+"]], n[us]],
     bds[qv[r1], qs[qv[x3], qd["?"]], n[ls]],
     bds[qv[int[r1, Infinity]], qs[qv[int[x4, x3]], qd["-"]], n[s]]];

```

Una vez definida la Representación cualitativa se puede obtener la gráfica para esta con la siguiente instrucción:

```
PlotBD[R]
```



En la Figura obtenida las líneas solidas de color verde son los segmentos estables y las punteadas de color rojo inestables.

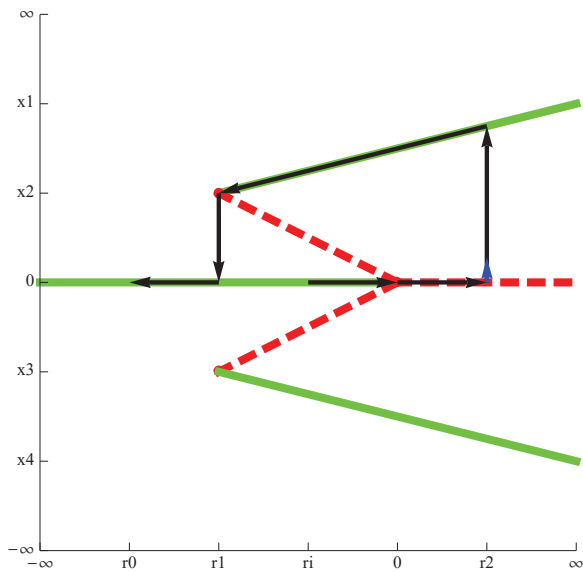
Como se menciono para poder realizar la simulación cualitativa sobre el diagrama de bifurcación es necesario definir una descripción D para nuestro caso en mathematica es necesario definir `qstep[]` que agrupa los elementos de cada s_r que son: el valor cualitativo de r la dirección de cambio de r y la dirección de la perturbación, si existe una en ese punto. Por ejemplo `qstep[qv[ri, 0], qd[" + "]]` nos dice que r cambia de r_i a 0 en dirección positiva y que no existe una perturbación y `qstep[qv[r2], pd[" + "]]` representa una perturbación positiva en $r = r_2$. Puede definirse una descripción como sigue:

```
D = {qstep[qv[int[ri, 0]], qd["+"]],
      qstep[qv[int[0, r2]], qd["+"]],
      qstep[qv[r2], pd["+"]],
      qstep[qv[int[r2, r0]], qd["-"]]};
```

Ahora es posible realizar una simulación.

```
BDQSim[R, R[[1]], D]
```

```
{bds[qv[int[-Infinity,0]],qs[qv[0],qd[0]],n[s]],ri,0,Start},
 {bds[qv[int[0,Infinity]],qs[qv[0],qd[0]],n[us]],0,0,Next},
 {bds[qv[int[0,Infinity]],qs[qv[0],qd[0]],n[us]],r2,+,Pert},
 {bds[qv[int[r1,Infinity]],qs[qv[int[x2,x1]],qd[+]],n[s]],r2,+,Next},
 {bds[qv[int[r1,Infinity]],qs[qv[int[x2,x1]],qd[+]],n[s]],r1,0,FallOff},
 {bds[qv[int[-Infinity,0]],qs[qv[0],qd[0]],n[s]],r1,0,Next},
 {bds[qv[int[-Infinity,0]],qs[qv[0],qd[0]],n[s]],r0,0,Next}}
```



Con $R[[1]]$ indicamos que el estado inicial del sistema se encuentra en el BDS de la posición 1 de la lista R . Se obtiene la impresión de la lista de estados cualitativos visitados por el sistema y la gráfica resultantes de variar el parámetro r de acuerdo con D .

Cada elemento en la lista generada está formado por el estado cualitativo, el valor cualitativo del parámetro, la dirección de la perturbación y un descriptor para el tipo de evento que se presento en es ese punto.

A.2. Ejemplo con dos parámetros

En esta caso se usará el ejemplo del sistema biológico para mostrar el uso del conjunto de funciones para el caso de dos parámetros de bifurcación.

De igual forma que en el caso anterior se comienza incluyendo los notebooks en la sesión de Mathematica.

```
<< "/Users/job/3kong/qrb/math/qplots.m"
<< "/Users/job/3kong/qrb/math/qrbd2p.m"

Loading qplots.m
Loading qrbd.m
Loading qrbd2p.m
```

En este caso *qrbd2p.m* contiene las funciones necesarias para tratar con BD de dos parámetros y es una extensión de *qrbd.m* y es por eso *qrbd2p.m* carga a *qrbd.m*.

Los espacios cuantitativos y la generación de sus correspondientes valores numéricos para la graficación se definen de la misma forma que en el caso de un parámetro. Pero ahora se hace para tres variables.

```
QuantSP[x] = {x0, x1, x2, x3, x4, x5, x6, x7};
QuantSP[r] = {r0, r1, r2, r3, 0, r4, r5, r6, r7, r8};
QuantSP[h] = {0, h1, h2, h3, h4, h5, h6};

RegisterQQEquiv[x];
RegisterQQEquiv[r];
RegisterQQEquiv[h];
```

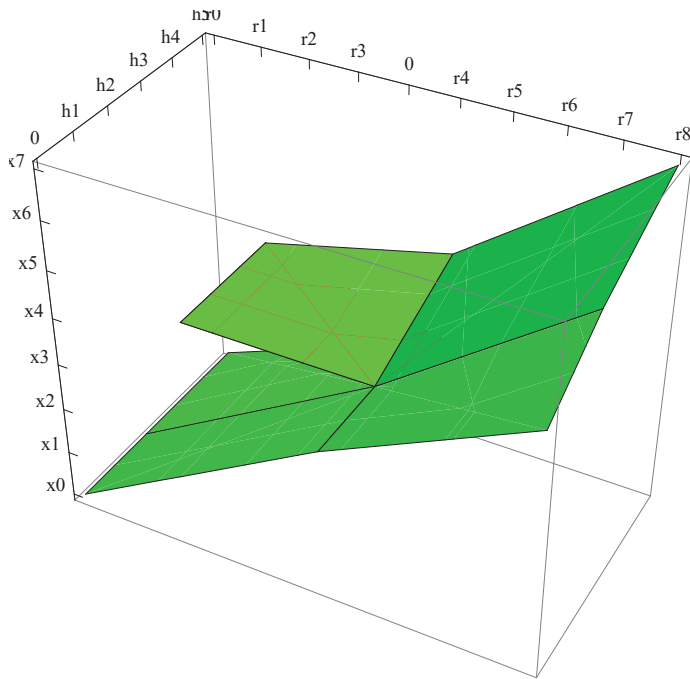
Se proporciona la representación R para el BD

```
R = {bds[qv[int[r0, r4], int[h2, h5]], qs[qv[region[x0, x0, x2, x3]], qd["+", 0]], n[s]],
    bds[qv[int[r1, r4], int[h2, h5]], qs[qv[region[x2, x3, x3, x3]], qd["-", "-"]], n[us]],
    bds[qv[int[r1, r4], int[h2, h5]], qs[qv[region[x3, x3, x3, x4]], qd["+", "+" ]], n[s]],
    bds[qv[int[r4, r8], int[h2, h5]], qs[qv[region[x3, x4, x6, x7]], qd["+", "+" ]], n[s]],
    bds[qv[int[r0, r4], int[0, h2]], qs[qv[region[x0, x0, x3, x3]], qd["+", 0]], n[s]],
    bds[qv[int[r4, r8], int[0, h2]], qs[qv[region[x3, x3, x5, x6]], qd["+", "+" ]], n[s]]};
```

Ahora $qv[]$ esta dado por los puntos limite para r y h que acotan cada región. En este caso se incluye $region[]$ que define los puntos limite para el estado de los BDS rectangulares y $qd[]$ ahora es la dirección de cambio de x en relación con cada uno de sus parámetros (debido a eso ahora es una tupla).

Al igual que en el caso de un parámetro puede obtenerse la gráfica para R

PlotBD3D[R]



Para el caso de la descripción del cambio D , cada $qstep[]$ puede variar un solo parámetro a la vez o los dos simultáneamente. Por lo que debe incluir los valores inicial y final de cada uno de los parámetros así como sus direcciones de cambio. La dirección de las perturbaciones se define de igual forma que para el caso de un parámetro.

```
D = {qstep[qv[int[r6, r4], int[h1, h2]], qd["-", "+"],
qstep[qv[int[r4, r1], int[h2, h4]], qd["-", "+"],
qstep[qv[int[r1, r0], h4], qd["-", 0]],
qstep[qv[int[r0, r2], int[h1, h4]], qd["+", "-"]],
qstep[qv[int[r2, r3], h1], qd["+", 0]]};
```

Para esta descripción el primer elemento de la lista representa que r se decrementa de r_6 a r_4 a la vez que h se incrementa de h_1 a h_2 . Mientras que el último elemento es un incremento en r de r_2 a r_3 manteniendo h constante.

Para realizar una simulación con la descripción anterior se utiliza la siguiente instrucción:

```
BDQSim2P[BD1, BD1[[6]], qpath]
```

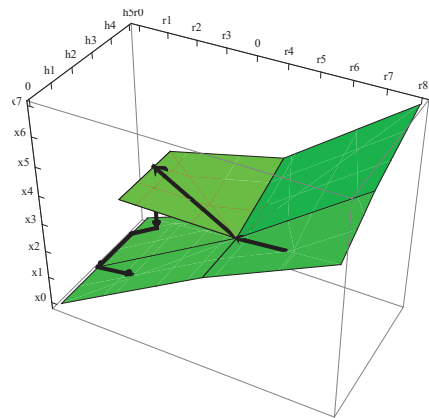
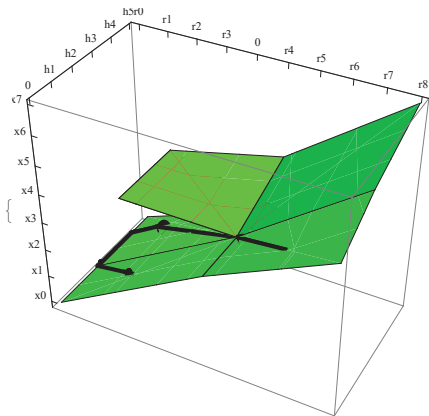
```
{{bds[qv[int[r4,r8],int[0,h2]],qs[qv[region[x3,x3,x5,x6]],qd[+,+],n[s]],{r6,h1},Start},
```

```

{bds[qv[int[r4,r8],int[0,h2]],qs[qv[region[x3,x3,x5,x6]],qd[+,+],n[s]],{r4,h2},Next},
{bds[qv[int[r0,r4],int[h2,h5]],qs[qv[region[x0,x0,x2,x3]],qd[+,0],n[s]],{r1,h4},Next},
{bds[qv[int[r0,r4],int[h2,h5]],qs[qv[region[x0,x0,x2,x3]],qd[+,0],n[s]],{r0,h4},Next},
{bds[qv[int[r0,r4],int[h2,h5]],qs[qv[region[x0,x0,x2,x3]],qd[+,0],n[s]],{r0,h2},Next},
{bds[qv[int[r0,r4],int[0,h2]],qs[qv[region[x0,x0,x3,x3]],qd[+,0],n[s]],{r2,h1},Next}},

{{bds[qv[int[r4,r8],int[0,h2]],qs[qv[region[x3,x3,x5,x6]],qd[+,+],n[s]],{r6,h1},Start},
{bds[qv[int[r4,r8],int[0,h2]],qs[qv[region[x3,x3,x5,x6]],qd[+,+],n[s]],{r4,h2},Next},
{bds[qv[int[r1,r4],int[h2,h5]],qs[qv[region[x3,x3,x3,x4]],qd[+,+],n[s]],{r1,h4},Next},
{bds[qv[int[r0,r4],int[h2,h5]],qs[qv[region[x0,x0,x2,x3]],qd[+,0],n[s]],{r1,h4},FallOff},
{bds[qv[int[r0,r4],int[h2,h5]],qs[qv[region[x0,x0,x2,x3]],qd[+,0],n[s]],{r0,h4},Next},
{bds[qv[int[r0,r4],int[h2,h5]],qs[qv[region[x0,x0,x2,x3]],qd[+,0],n[s]],{r0,h2},Next},
{bds[qv[int[r0,r4],int[0,h2]],qs[qv[region[x0,x0,x3,x3]],qd[+,0],n[s]],{r2,h1},Next}}
}

```



En los resultados al igual que en el caso de un parámetro se imprimen la lista de secuencias de estados cualitativos por los que pasa el sistema como consecuencia de la descripción D . A diferencia del simulación con un parámetro los resultados pueden ser como en este caso una lista de secuencias para una sola descripción D . Lo anterior es debido a la ambigüedad que se presenta. De igual forma los gráficos resultantes son la lista que contiene

las gráficas para cada posible comportamiento. Cada elemento en la secuencia de estados es una tripleta que contiene el estado cualitativo, el valor cualitativo para los parámetros r y h y el descriptor del evento que ocurre en ese estado.

Referencias

- [Abbott98] Abbott, K. Robust operative diagnosis as problem solving in a hypothesis space. *AAAI*, págs. 369–374. March 1998.
- [Barrera08] Barrera, J. y Flores, J. Generating complete bifurcation diagrams using a dynamic environment particle swarm optimization algorithm. *En Artificial Evolution and Applications*. 2008.
- [Bellazzi99] Bellazzi, R., Guglielmann, R., y Ironi, L. A qualitative-fuzzy framework for nonlinear black-box system identification. *En IJCAI*, págs. 1041–1046. 1999.
URL citeseer.ist.psu.edu/bellazzi99qualitativefuzzy.html
- [Bonarini94] Bonarini, A. y Bontempi, G. A qualitative simulation approach for fuzzy dynamical models. *Modeling and Computer Simulation*, 4(4):285–313, 1994.
URL citeseer.ist.psu.edu/bonarini94qualitative.html
- [Chin-Woo95] Chin-Woo, V., T.; Matthew y Pravin, V. Bifurcation, chaos, and voltage collapse in power systems. tomo 83 de *Proceedings of the IEEE*, págs. 1484–1496. November 1995.
- [Clancy97] Clancy, D. J. *Solving Complexity and Ambiguity Problems within Qualitative Simulation*. Tesis Doctoral, Universidad de Texas, 1997.
- [Davis89] Davis, J., E.; de Kleer. Order of magnitude reasoning in qualitative dif-

- ferential equations. Readings in Qualitative Physical Reasoning, págs. 424–434. 1989.
- [deKleer77] de Kleer, J. Multiple representations of knowledge in a mechanics problem solver. *En JICAI*, págs. 299–304. 1977.
- [deKleer84] de Kleer, J. y S., B. J. Qualitative physics based on confluences. *En Artificial Intelligence*, págs. 139–148. 1984.
- [Ermentrout] Ermentrout, B. *Simulating, Analyzing, and Animating Dynamical Systems: A Guide to Xppaut for Researchers and Students*. SIAM.
- [Fahimi07] Fahimi, N., F.; Liu y Brown, D. Qualitative correspondence for object tracking using dynamic panorama. 2007.
- [Flores05] Flores, J. J. y Proskurowski, A. Resasoning about dynamic systems and bifurcation. QR 2005. March 2005.
- [Forbus84] Forbus, K. D. Qualitative process theory. *En Artificial Intelligence*, págs. 85–168. 1984.
- [Forbus90] Forbus, K. y Falkenhainer, B. Self explanatory simulations: An integration of qualitative and quantitative knowledge. tomo 90 de *AAAI*, pág. 380–387. 1990.
- [Forbus96] Forbus, K. D. Crc handbook of computer science, June 04 1996.
- [Garcia-Kasusky03] Garcia-Kasusky, C., G.; Fuerte-Esquivel y Torres-Lucio, D. Assessment of the svcs effect on nonlinear instabilities and voltage collapse in electric power systems. Proceedings of the IEEE PES General Meeting. 2003.
- [Grainger96] Grainger, J. y Stevenson, W. *Análisis de Sistemas de Potencia*. McGraw-Hill, 1996.

- [Iwasaki95] Iwasaki, S., Y.; Tessler y Law, K. Qualitative structural analysis through mixed diagrammatic and symbolic reasoning. Fourteenth International Joint Conference on Artificial Intelligence. 1995.
- [Keller87] Keller, H. B. Numerical methods in bifurcation problems. Cambridge, MA, Springer-Verlag, 1987.
- [Kuipers84] Kuipers, B. J. Commonsense reasoning about causality: Deriving behavior from structure. Cambridge, MA, MIT Press, 1984.
- [Kuipers86] Kuipers, B. J. y S., B. J. Qualitative simulation. tomo 29, págs. 289–338. 1986.
- [Kuipers94] Kuipers, B. J. Qualitative reasoning: Modeling and simulation with incomplete knowledge. Cambridge, MA, MIT Press, 1994.
- [Mavrovouniotis88] Mavrovouniotis, M. y Stephanopoulos, G. Formal order-of-magnitude reasoning in process engineering. tomo 2 de *Computers and Chemical Engineering*, págs. 867–881. 1988.
- [Mugan07] Mugan, J. y Kuipers, B. Learning to predict the effects of actions: Synergy between rules and landmarks. 2007.
- [Mugan08] Mugan, J. y Kuipers, B. Continuous-domain reinforcement learning using a learned qualitative state representation. 2008.
- [Nayak93] Nayak, P. Order of magnitude reasoning using logarithms. tomo 2 de *In Proceedings of 7th Int. Workshop on Qualitative Reasoning*. 1993.
- [Nayfhe95] Nayfhe, A. H. y Balachandran, B. *Applied Nonlinear Dynamics, Analytical, Computational and Experimental Methods*. John Wiley & Sons, Inc., 1995.
- [Provost07] Provost, B., J.; Kuipers y Miikkulainen, R. Self-organizing distinctive state abstraction using options. 2007.

- [Raiman91] Raiman, O. Order of magnitude reasoning. tomo 51 de *Artificial Intelligence*, págs. 11–38. 1991.
- [Scheinerman96] Scheinerman, E. R. *Invitation to Dynamical Systems*. Prentice-Hall, 1^a ed^{ón}., 1996.
- [Shen98] Shen, Q. y Leitch, R. Fuzzy qualitative simulation. tomo 23 de *IEEE Trans. on Systems, Man, and Cybernetics*, págs. 1038–1061. 1998.
- [Strogatz94] Strogatz, S. H. *Nonlinear Dynamics and Chaos with Applications to Physics, Biology and Engineering*. Westview Press, 1994.
- [Wang94] Wang, H. O. A. E. H. y A., H. A. M. Bifurcation, chaos and crisis in voltage collapse of a model power system. tomo 41 de *IEEE Transactions on circuits and systems*, págs. 294–302. March 1994.
- [Weld90] Weld, D. *Theories of Comparative Analysis*. MIT Press, 1990.
- [Wolfram03] Wolfram. *The Mathematica Book*. Cambridge University Press, 2003.