

**Modelado y Control de una Central Hidroeléctrica  
Sujeta a Vibraciones en la Turbina en el Dominio  
Físico**

**Tesis**

Que para obtener el grado de  
**Maestro en Ciencias en Ingeniería Eléctrica**

Presenta  
**Octavio Barriga Torres**

**Dr. Gilberto González Avalos**  
Director de Tesis

Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo

Agosto 2008



MODELADO Y CONTROL DE UNA CENTRAL  
HIDROELÉCTRICA SUJETA A VIBRACIONES EN LA TURBINA EN EL  
DOMINIO FÍSICO

Los miembros del Jurado de Examen de Grado aprueban  
la Tesis de Maestría en Ciencias en Ingeniería Eléctrica de Octavio Barriga Torres

Dr. Claudio R. Fuerte Esquivel  
*Presidente del Jurado*

Dr. Gilberto González Avalos  
*Director de Tesis*

Gilberto González

Dr. J. Jesús Rico Melgoza  
*Vocal*

J. Jesús Rico Melgoza

Dr. Juan José Flores Romero  
*Vocal*

M.C. Víctor López Garza  
*Examinador Externo*  
*Universidad Michoacana de*  
*San Nicolás de Hidalgo*

Dr. J. Aurelio Medina Rios  
*Jefe de la División de Estudios de Posgrado*  
*en Ingeniería Eléctrica*

UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN NICOLAS DE HIDALGO  
Agosto del 2008

## RESUMEN

En este trabajo se presenta el modelo en el dominio físico de una central hidroeléctrica con vibraciones en la turbina. Utilizando los teoremas de la metodología de Bond Graph, se consigue una representación de un sistema físico de diferentes dominios de energía. Las ecuaciones de estado y la controlabilidad son obtenidas del modelo en el dominio físico. Así, en éste trabajo, se proporciona la información necesaria para obtener la observabilidad de todo el sistema, ésto significa que a partir de las salidas del sistema es posible conocer su comportamiento. También, se propone un modelo de vibración en el dominio físico, el cual se ubica entre la sección mecánica y eléctrica, que representa las perturbaciones en el sistema. Una representación del generador síncrono en  $dq0$  en el dominio físico es utilizada por lo que es necesario la implementación de la transformación de  $dq0$  a  $abc$  en el dominio físico. Además, se agrega un control en la válvula de regulación de flujo a la turbina de la sección hidráulica, para la sección mecánica se adiciona un control que regula la velocidad de la turbina, en la sección eléctrica se añade un control para la regulación de voltaje del devanado de campo y se colocan puntos de medición de algunas de las variables de interés en el sistema. Estos puntos son prospectos para la colocación de sensores de medición de las variables: caudal, velocidad angular, par mecánico, voltajes y corrientes. Por último, las gráficas de las variables de estado de todas las secciones acopladas son expuestas, para diferentes valores en los datos de algunos de sus elementos de la central hidroeléctrica representada en el dominio físico.

## ABSTRACT

This research work presents an hydroelectric power station modelling in the physical domain, exposed to vibrations. We were able to obtain a physical system representation of different energy domains by means of Bond Graph's methodology theorems. The state equations model of the entire hydroelectric power station were obtained. The system's controllability was also determined. All the necessary information is also provided in order to obtain the entire system's observability, which means that the entire system's behavior can be determined by means of its outputs. A vibration model in the physical domain located between the mechanical and the electrical sections are set up, fact that represents disturbances. A synchronous generator representation in the physical domain in dq0 coordinates is used, there for an implementation of the dq0-to-abc transformation in the physical domain was necessary. A system control is added into the hydraulic section in order to regulate the flow valve to the turbine, other control was put in the mechanical section, with the purpose of regulated the speed in the turbine and finally into the electrical section, in order to regulate the wound-field voltage a control was incorporated. The proposed methodology allowed us to determine measurement points (sensor locations) of some of the system's interest variables: volume, angular velocity, voltages, and currents. Finally, plots of the state variables of all connected sections are presented for different values of each hydroelectric power station section data.

# ÍNDICE

Resumen .....	i
Abstract.....	ii
Capítulo 1 Introducción.....	1
1.1. Contribución .....	1
1.2. Objetivos.....	2
1.3. Justificación.....	2
1.4. Trabajos relacionados .....	3
1.5. Contenido .....	4
Capítulo 2 Antecedentes: Bond Graph .....	6
2.1. Aportación .....	6
2.2. Sistema .....	6
2.3. Modelos .....	7
2.4. Bond Graph .....	8
2.5. Elementos que conforman un Bond Graph.....	9
2.5.1. Potencia y energía.....	9
2.6. Componentes de Bond Graph puertos-1.....	11
2.7. Elementos de Bond Graph multipuerto I, R y C.....	13
2.7.1. Puertos - 1 activos. ....	14
2.7.2. Elementos puerto - 2 ideales.....	15
2.8. Bond activo.....	15
2.8.1. Detectores .....	16
2.9. Elementos de tipo unión .....	16
2.10. Causalidad .....	17
2.11. Procedimiento para la construcción de sistemas en Bond Graph.....	20
2.11.1. Creación y reducción de modelos en Bond Graph .....	20
2.11.2. Sistema hidráulico .....	21
2.11.3. Sistemas mecánicos .....	22
2.11.4. Sistemas eléctricos.....	23
2.12. Estructuras de unión en sistemas multipuerto .....	24
2.12.1. Vectores significativos o vectores clave.....	25
2.12.2. Relaciones de campo y ecuaciones de estado.....	26
2.13. Trayectoria causal.....	27
2.14. Controlabilidad y observabilidad .....	28
2.14.1. Controlabilidad y observabilidad con una perspectiva clásica.....	29
2.14.2. Controlabilidad y observabilidad desde un enfoque de Bond Graph.....	30
Capítulo 3 Modelado de una Central Hidroeléctrica con Vibraciones en el Dominio Físico .....	33
3.1. Aportación .....	33
3.2. Vibración .....	34
3.2.1. Modelo de masa resorte.....	34
3.2.2. Movimiento armónico .....	38

3.2.3. Viscosidad de amortiguamiento .....	39
3.2.4. Velocidades críticas en discos rotativos .....	41
3.3. Modos de vibración .....	43
Modelo de un sistema de vibración y simulación .....	45
3.4. Modelo en el dominio físico de la sección hidráulica .....	49
3.5. Modelo de la turbina hidráulica con vibraciones en el dominio físico.....	50
3.5.1. Modelo de la turbina hidráulica con vibraciones.....	51
3.5.2. Modificación del sistema de vibración para la turbina hidráulica.....	52
3.5.3. Modelo de turbinas Pelton y Kaplan en modelo mecánico con vibración .....	53
3.5.4 Representación de la turbina hidráulica sujeta a vibraciones en el dominio físico.....	54
3.6. Generador síncrono.....	55
3.6.1. Descripción física de la máquina síncrona .....	56
3.6.2. Eje de cuadratura q y eje directo d .....	57
3.6.3. Representación esquemática de la máquina síncrona.....	57
3.6.4. Ecuaciones de los enlaces de flujo .....	59
3.6.9. Modelo de la máquina síncrona en Bond Graph .....	62
3.6.10. Obtención de los vectores clave .....	64
3.6.12. Modelo simplificado de la máquina síncrona.....	66
3.7. Esquema general de una central hidroeléctrica con vibraciones .....	67
3.8. Modelo de una central hidroeléctrica sometida a vibraciones en Bond Graph .	69
3.8.1. Acoplamiento del modelo en Bond Graph .....	69
3.8.2. Obtención de los vectores clave de la central hidroeléctrica en Bond Graph .....	70
3.8.3. Modelo de Bond Graph en estado estacionario .....	77
Capítulo 4 Simulación de una Central Hidroeléctrica en el Dominio Físico .....	81
4.1. Introducción.....	81
4.2. Parámetros del sistema hidráulico - mecánico .....	82
4.3. Respuesta de las secciones hidráulica y mecánica .....	82
4.4. Análisis del sistema con secciones acopladas .....	86
4.5. Análisis de secciones acopladas sin vibraciones .....	92
4.6. Análisis de controlabilidad del sistema completo en Bond Graph.....	94
4.7. Simulación y análisis en estado estable del modelo de la central hidroeléctrica en Bond Graph.....	98
4.8. Controles de una central hidroeléctrica en el dominio físico. ....	99
4.8.1. Sistemas de excitación.....	100
4.8.2. Controles de la central hidroeléctrica en el dominio físico .....	101
4.8.3. Simulación de la central hidroeléctrica en el dominio físico con implementación de controladores.....	102
Capítulo 5 Conclusiones.....	109
5.1. Conclusiones.....	109
5.2. Trabajos futuros.....	110
Bibliografía.....	111

Apéndice A.....	113
A.1. Transformación de Park.....	113
A.2. Transformación de Park en el dominio físico.....	114
Apéndice B.....	116
B.1. Inductancias de la máquina síncrona .....	116
1. <i>Las Inductancias Propias del Estator</i> .....	116
2. <i>Las Inductancias Propias del Rotor</i> .....	116
3. <i>Inductancias Mutuas del Estator</i> .....	117
4. <i>Inductancias Mutuas del Rotor</i> .....	117
5. <i>Inductancias Mutuas entre Estator y Rotor</i> .....	117
6. <i>Transformación de Inductancias</i> .....	118
Apéndice C.....	119
C.1. Estabilizador de sistemas de potencia.....	119
Apéndice D.....	121
D.1. Información .....	121
Apéndice E.....	124
E.1. Artículo Publicado .....	124

# ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1.1 Modelo a bloques de una central hidroeléctrica en el dominio físico.....	4
Figura 2.1 Proceso para obtener el Modelo de un Sistema. ....	8
Figura 2.2 Transferencia de energía. ....	9
Figura 2.3 Bond de energía con la representación .....	10
Figura 2.4 Resistencia en Bond Graph. ....	11
Figura 2.5 Elemento almacenador C en BG.....	12
Figura 2.6 Elemento almacenador I.....	12
Figura 2.7 Tetraedro de estados.....	13
Figura 2.8 Elemento multipuertos: a) Transformador, b) Representación en Bond Graph..	13
Figura 2.9 a) Fuente de esfuerzo, b) Fuente de flujo.....	14
Figura 2.10 Fuentes con entrada de comando M a) <i>Esfuerzo</i> , b) <i>Flujo</i> .....	14
Figura 2.11 Representación en Bond Graph de un transformador TF y girador GY. ....	15
Figura 2.12 Bond Activo. ....	16
Figura 2.13 Ejemplo de uso de un bond activo. ....	16
Figura 2.14 Detectores de esfuerzo y flujo.....	16
Figura 2.15 Unión – 0.....	17
Figura 2.16 Unión – 1.....	17
Figura 2.17 Concepto de causalidad, (a) ejemplo, (b) convención de causalidad.....	18
Figura 2.18 Causalidad en elementos,(a) transfiere flujo a B, (b)transfiere esfuerzo hacia A. .....	18
Figura 2.19 Reducción de uniones, a) Unión – 1, b) Unión – 0.....	21
Figura 2.20 Sistema hidráulico.....	21
Figura 2.21 Pasos para la obtención de un modelo hidráulico en Bond Graph.....	22
Figura 2.22 Modelo del sistema hidráulico en Bond Graph.....	22
Figura 2.23 Sistema mecánico.....	22
Figura 2.24 Obtención del modelo en Bond Graph.....	23
Figura 2.25 Sistema mecánico simplificado.....	23
Figura 2.26 Circuito Eléctrico para Convertir al Modelo de Bond Graph. ....	23
Figura 2.27 Pasos a seguir de acuerdo al procedimiento 1 modificado para sistemas eléctricos.....	24
Figura 2.28 Sistema eléctrico del ejemplo en Bond Graph. ....	24
Figura 2.29 Diagrama a bloques de la estructura unión de un modelo en Bond Graph. ....	25
Figura 2.30 Ejemplo de una trayectoria causal simple.....	28
Figura 2.31 Trayectoria causal mezclada: a) girador Gy, b) elemento R, I o C.....	28
Figura 3.1 Esquema de cuerpo libre: oscilador masa-resorte de un grado de libertad. ....	34
Figura 3.2 Esquema de masas resorte con resorte sin masa, mostrando su posición de equilibrio estático, seguido de los cambios provocados por los incrementos de masa. ....	35
Figura 3.3 Curva de la deflexión estática por el resorte de la Figura 3.2. ....	35
Figura 3.4 Sistema de masa-resorte dado un desplazamiento inicial en $x_0$ , desde el estado	36
Figura 3.5 Sistemas de un grado de libertad (pequeños desplazamientos). ....	36
Figura 3.6 Repuesta del sistema de masa resorte para un, .....	37

Figura 3.7 Sumatoria de desplazamiento, velocidad y aceleración.....	38
Figura 3.8 Esquema de un amortiguador que genera una fuerza de amortiguamiento $f_c = c\dot{x}$ , donde $x(t)$ es el movimiento de la cubierta del pistón.....	39
Figura 3.9 Diagrama de un sistema de un grado de libertad con un amortiguador.....	40
Figura 3.10 Modelo esquemático de un disco giratorio sobre un eje con su correspondiente centro de masa (G) la posición neutral del eje (O) y el centro del eje rotacional (E): a) vista de lado: b) vista del final.....	41
Figura 3.11 Modo de vibración 1.....	43
Figura 3.12 Modo de vibración 2.....	44
Figura 3.13 Modo de vibración 3.....	45
Figura 3.14 Modelo de coordenadas.....	45
Figura 3.15 Modelo de coordenadas con posición de equilibrio.....	46
Figura 3.16 Sistema de vibración masa-amortiguadores-resorte.....	47
Figura 3.17 Gráficas de las variables de estado ante una entrada constante.....	48
Figura 3.18 Gráficas de las variables de estado ante una entrada sinusoidal.....	49
Figura 3.19 Central hidroeléctrica simplificada.....	49
Figura 3.20 Modelo en Bond Graph de la sección hidráulica.....	50
Figura 3.21 Modelo de vibración.....	51
Figura 3.22 Modelo de turbina Francis con vibración.....	52
Figura 3.23 Modelo de turbina Francis con vibraciones.....	53
Figura 3.24 Modelos mecánicos de turbinas Pelton y Kaplan.....	53
Figura 3.25 Turbina hidráulica sujeta a vibraciones en Bond Graph.....	54
Figura 3.26 Modelo de turbina hidráulica Francis con vibraciones en Bond Graph.....	55
Figura 3.27 Esquema de una máquina síncrona.....	56
Figura 3.28 Circuito de estator y rotor de la máquina síncrona.....	58
Figura 3.29 Pares aplicados al rotor de una máquina síncrona.....	61
Figura 3.30 Máquina síncrona con devanados de amortiguamiento.....	62
Figura 3.31 Modelo en Bond Graph de la máquina síncrona sin devanados D y Q.....	66
Figura 3.32 Diagrama a bloques de una Central Hidroeléctrica.....	67
Figura 3.33 Sistema de tuberías.....	67
Figura 3.34 Acoplamiento mecánico de un sistema de turbina.....	68
Figura 3.35 Sistema de distribución convencional.....	68
Figura 3.36 Modelo completo de la Central Hidroeléctrica en Bond Graph.....	69
Figura 3.37 Para $S_f:F_1$ sus trayectorias causales son: a) $C_H$ , b) $m_a$ , c) $k_a$ , d) $k_b$ y e) $J_r$ .....	72
Figura 3.38 Para $S_f:F_1$ sus trayectorias causales: f) $L_d$ , g) $L_D$ , h) $L_f$ , i) $L_q$ y j) $L_Q$ .....	73
Figura 3.39 Para $S_e:v_q$ sus trayectorias causales son: a) $C_H$ , b) $m_a$ , c) $k_a$ , d) $k_b$ y e) $J_r$ .....	73
Figura 3.40 Para $S_e:v_q$ sus trayectorias causales: f) $L_d$ , g) $L_D$ , h) $L_f$ , i) $L_q$ y j) $L_Q$ .....	74
Figura 3.41 Para $S_e:v_d$ sus trayectorias causales son: a) $C_H$ , b) $m_a$ , c) $k_a$ , d) $k_b$ y e) $J_r$ .....	74
Figura 3.42 Para $S_e:v_d$ sus trayectorias causales: f) $L_d$ , g) $L_D$ , h) $L_f$ , i) $L_q$ y j) $L_Q$ .....	75
Figura 3.43 Para $S_e:v_f$ las trayectorias causales son: a) $C_H$ , b) $m_a$ , c) $k_a$ , d) $k_b$ y e) $J_r$ .....	75
Figura 3.44 Para $S_e:v_f$ sus trayectorias causales: f) $L_d$ , g) $L_D$ , h) $L_f$ , i) $L_q$ y j) $L_Q$ .....	76
Figura 3.45 Modelo con causalidad derivativa de la Central Hidroeléctrica.....	76
Figura 4.1 Entrada F1.....	83
Figura 4.2 Variables en CH.....	83
Figura 4.3 Presión y caudal en $R_H$ .....	84

Figura 4.4 Características de entrada en la turbina.....	84
Figura 4.5 Respuestas de $C_a$ , $K_a$ y $m_a$ en el sistema de vibración.....	85
Figura 4.6 Variables en el TF: $m_3$ y GY: $m_2$ . ....	85
Figura 4.7 Variables hidráulicas en $R_H$ y $C_H$ . ....	86
Figura 4.8 Variables críticas en $R_H$ y $C_H$ del sistema hidráulico. ....	87
Figura 4.9 Variables mecánicas GY: $m_1$ . ....	87
Figura 4.10 Respuesta de elementos $C_a$ y $K_a$ . ....	88
Figura 4.11 Respuesta de TF: $m_3$ y par mecánico en GY: $m_2$ . ....	88
Figura 4.12 Variables de acoplamiento mecánico – eléctrico, $T_m$ , $D_a$ y $J_r$ . ....	89
Figura 4.13 Voltajes de los devanados de amortiguamiento en el rotor D y Q ..... 90	90
Figura 4.14 Enlaces de flujo $\lambda_d$ y $\lambda_q$ en el estator. ....	90
Figura 4.15 Corrientes en el eje d y q en el estator. ....	91
Figura 4.16 Voltajes en $r_f$ y del devanado de campo. ....	91
Figura 4.17 Corrientes en abc del generador síncrono. ....	92
Figura 4.18 Diagrama a bloques de una central hidroeléctrica sin vibraciones en BG. ....	92
Figura 4.19 Variables de estado de secciones hidráulica y eléctrica. ....	93
Figura 4.20 Variables de estado eléctricas y de acoplamiento mecánico-eléctrico. ....	93
Figura 4.21 Bond Graph de la central hidroeléctrica reducido sin vibraciones. ....	94
Figura 4.22 Diagrama a bloques del modelo de Bond Graph de una central hidroeléctrica. ....	95
Figura 4.23 Variables de estado del sistema hidráulico y mecánico. ....	95
Figura 4.24 Variables de estado, voltajes en inductancias del generador síncrono. ....	96
Figura 4.25 Variables de voltaje en $L_q$ , $L_Q$ y fuerza en $J_r$ . ....	97
Figura 4.26 Variables de estado del sistema sin vibraciones del modelo de BG. ....	97
Figura 4.27 Simulación de las variables de estado en el estado estacionario. ....	99
Figura 4.28 Controles principales de unidad generadora de energía eléctrica. ....	100
Figura 4.29 Modelo de central hidroeléctrica con controladores en el dominio físico. ....	101
Figura 4.30 Variables de salida de la sección hidráulica. ....	102
Figura 4.31 Variables de salida de la sección mecánica velocidad de gobernador y de turbina. ....	103
Figura 4.32 Voltajes de salida $V_d$ y $V_q$ del generador síncrono. ....	103
Figura 4.33 Variables de estado de las secciones hidráulica y mecánica. ....	104
Figura 4.34 Variables de estado de las secciones eléctrica. ....	105
Figura 4.35 Modelo de central hidroeléctrica omitiendo: vibraciones y estabilizador. ....	105
Figura 4.36 Variables hidráulicas: presión y caudal en tubería. ....	106
Figura 4.37 Variables de sección mecánica: velocidad de gobernador y turbina. ....	106
Figura 4.38 Variables de estado: presión y $\omega_r$ . ....	107
Figura 4.39 Variables de estado: $I_d$ , $I_D$ , $I_f$ , $I_q$ e $I_Q$ . ....	107
Figura A.1 Transformada de Park en el dominio físico. ....	115
Figura A.2 Simulación de la transformada de Park. ....	115
Figura C.1 Representación en diagrama a bloques de un AVR y PSS. ....	119

Figura D. 1 Diagrama de ingeniería. .... 121  
Figura D.2 Modelo del diagrama, parte por parte. .... 122

# ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 2.1 Variables generalizadas de algunos sistemas. ....	10
Tabla 2.2 Variables de energía y potencia.....	10
Tabla 2.3 Elemento pasivo en Bond Graph.....	11
Tabla 2.4 Elemento almacenador C en Bond Graph. ....	12
Tabla 2.5 Elemento almacenador I en Bond Grap.....	12
Tabla 2.6 Relaciones de las variables generalizadas TF. ....	15
Tabla 2.7 Relación de las variables generalizadas GY.....	15
Tabla 2.8 Relación de Interconexión de las uniones $0$ y $1$ . ....	17
Tabla 2.9 Asignación de causalidades a cada elemento en Bond Graph.....	18
Tabla 2.10 Relaciones causales por elementos de puerto -1. ....	20

# Capítulo 1

## Introducción

### 1.1. Contribución

El procedimiento para el diseño de sistemas de control en cualquier proceso físico es una tarea donde se encuentran involucrados especialistas de diferentes áreas como: mecánicos, eléctricos, electrónicos, hidráulicos, etc. Así pues, el equipo de especialistas que se forma en los proyectos de diseño está pensado en un equipo multidisciplinario organizado de acuerdo al modelo del sistema físico que se vaya a realizar. Este grupo está a cargo de completar el diseño del proceso, considerando las limitantes que constituyen al sistema de acuerdo en el medio que se va desarrollar el proyecto y basándose en la información obtenida previamente. Este proceso de diseño comprende modelado, análisis, selección de controladores así como la ubicación de sensores, actuadores y un estudio de las condiciones de seguridad que ofrece el sistema para los operadores y personal en el área de proceso.

La metodología de Bond Graph (modelado en el dominio físico o BG) ha venido tomando importancia relevante en el diseño, modelado y construcción de sistemas, ya que puede ser aplicado en el estudio de sistemas que presentan diferentes dominios de energía. Por otro lado, debido a la naturaleza estructural del Bond Graph, permite realizar análisis visuales sobre los sistemas y los elementos que lo integran, con ésto es posible conocer aspectos en su comportamiento interno como lo son las relaciones constitutivas. La causalidad en los modelos de Bond Graph permite determinar de manera visual las posibles interacciones energéticas entre los elementos o subsistemas que conforma a un sistema.

## 1.2. Objetivos

- Construir el modelo de una central hidroeléctrica en el dominio físico, acoplando las secciones: hidráulica, mecánica y eléctrica.
- Crear un modelo de una turbina hidráulica con vibraciones en el dominio físico.
- Observar el comportamiento del modelo completo con vibraciones y sin vibraciones y analizar la propagación de las vibraciones en todo el sistema.
- Acoplar el modelo de la máquina síncrona al modelo de la turbina con vibraciones.
- Utilizar el modelo de la transformación de dq0 a abc en Bond Graph y acoplarlo al modelo de la máquina síncrona.
- Obtener el modelo en ecuaciones de estado y la respuesta en estado estacionario del sistema utilizando las herramientas de la metodología en Bond Graph, así como determinar si el sistema es observable y controlable.
- Utilizando el software 20-sim, obtener las gráficas de las variables de estado y los efectos que tienen las vibraciones en ellas.
- Proponer ubicación de sensores en el modelo completo de la central hidroeléctrica utilizando elementos de Bond Graph.

## 1.3. Justificación

Debido a la variedad de dominios de energía que se tienen en un sistema, es necesario tener herramientas para el modelado y análisis que permitan estudiar el sistema en un mismo dominio de energía, otro aspecto importante es que facilite conocer su comportamiento a los cambios críticos que se presenten en él durante una o varias tareas determinadas y que esto permita crear una estrategia para mejorar el sistema o corregir el error. De igual forma, que la representación del modelo en un ambiente gráfico no solo proporcione información de los elementos que lo conforman, si no que también sea posible conocer la relación que existe entre uno o mas elementos del sistema. Así pues, que de una forma sencilla sea posible adaptar nuevas partes al sistema, sin que sea necesario realizar nuevamente un análisis del nuevo sistema que se pretende construir.

Un aspecto importante, es el de obtener un modelo con vibraciones mecánicas en el dominio físico que en combinación con los fenómenos eléctricos e hidráulicos pueda ser de mucha utilidad en el diseño y planeación de las centrales hidroeléctricas. Así, con el modelo de vibraciones sería posible conocer los efectos de estas perturbaciones en las otras secciones de la planta antes de hacer una prueba real, lo cual sería muy beneficioso por los altos costos en el equipo en caso de daño. Debido a las ventajas que ofrece el tener un modelo en el dominio físico, es posible crear un modelo de vibraciones y acoplarlos entre la parte de la turbina y el generador síncrono.

Algunas de las ventajas que ofrece la metodología de Bond Graph, es la de determinar la controlabilidad y observabilidad directamente del Bond Graph, la obtención de la matriz de estructura de unión que representa la relación que existe entre todos los elementos del

sistema en el dominio físico, la obtención de las ecuaciones en variables de estado que determinan el comportamiento dinámico del sistema y que facilita el uso de recursos computacionales para la simulación y la determinación del estado estacionario de un sistema. Cabe mencionar que todo se hace en un mismo marco de referencia ya que las variables de diferentes dominios de energía se generalizan a las variables de: *esfuerzo* y *flujo*, lo que facilita la comprensión del sistema sin importar los dominios de energía que presente, con esto los especialistas están en comunicación entre ellos sin importar su área, permitiéndoles crear estrategias de control, lo que permite el mejor aprovechamiento de los recursos disponibles del sistema.

#### 1.4. Trabajos relacionados

La metodología de modelado en Bond Graph de sistemas físicos interviene en amplias áreas del conocimiento y cuenta con herramientas para el diseño, solución y obtención de modelos de los sistemas físicos. Estados Unidos y algunos países Europeos han puesto gran interés en esta metodología para el estudio de los sistemas físicos. La metodología de Bond Graph también puede ser aplicada a otras áreas del conocimiento como: medicina, economía, robótica, química, sistemas eléctricos de potencia entre otras, en las cuales poco a poco se están introduciendo expertos en Bond Graph desarrollando modelos, que permitan un mejor estudio de los sistemas. A continuación se expone información relacionada con el estudio del estado del arte de algunos modelos de centrales hidroeléctricas.

Previo a este trabajo, se tiene a [2] que presenta un modelo simple de la turbina y donde la máquina generadora de energía es un motor de CD el cual no tiene controles. [3] es una ponencia de varios folios, que posteriormente son editados como un libro donde se desarrolla la metodología de Bond Graph y algunas de sus aplicaciones en sus inicios.

De [4] se presenta la simulación de transitorios hidromecánicos, empleando la metodología de Bond Graph, usando el software 20-sim en el cual se emplean los bloques de control y tablas de funciones, cabe mencionar que la utilización de elementos propios de Bond Graph en el trabajo presentado es muy reducida.

En [5] se expone un método en espacio de estado para el diseño de los gobernadores empleados en turbinas de plantas hidroeléctricas, donde el tipo de turbina empleada es la Kaplan. El documento parte de las ecuaciones diferenciales y solamente estudia la parte hidráulica-mecánica. Se muestran algunas gráficas del comportamiento de las variables hidráulicas y mecánicas. Para [6] se hace un análisis de la dinámica de pequeñas hidroturbinas, las cuales impulsan un generador síncrono que es representado en diagramas a bloques.

El estudio de los recursos ambientales, es algo en lo que se hace referencia para la ubicación e instalación de una central hidroeléctrica, así [7] propone una metodología para la evaluación de los recursos hidroenergéticos en la zona, para la ubicación de pequeñas centrales hidroeléctricas.

El documento [8] estudia el efecto de la velocidad en el gobernador ante cambios en la carga al igual que los pequeños disturbios que se originan en la red de potencia eléctrica. La dirección de [9] es dirigida hacia el desempeño y estabilidad debido a los alabes de la turbina ya que de esto depende la respuesta que se tenga.

La aportación y diferencia con los trabajos presentados previamente son las vibraciones que tienen origen en el eje de la turbina así como la propagación de éstas a las secciones hidráulicas y eléctricas, y que pueden ser analizadas con las propiedades de un Bond Graph. En la Figura 1.1 se muestra el modelo a bloques de la central hidroeléctrica.

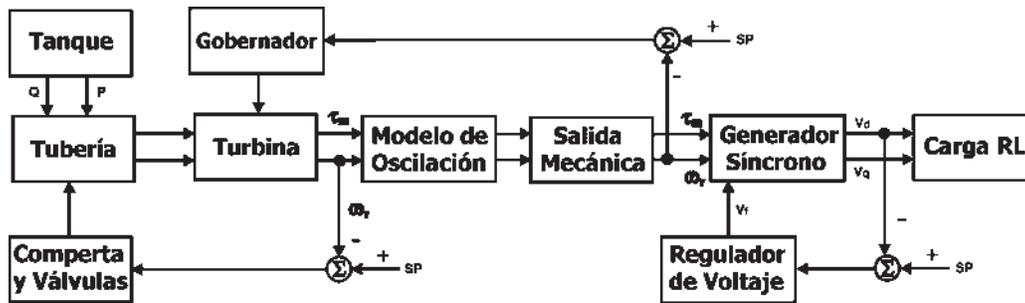


Figura 1.1 Modelo a bloques de una central hidroeléctrica en el dominio físico.

La Figura 1.1 muestra el modelo de una central hidroeléctrica en el dominio físico, con vibraciones en el eje de la turbina, las propiedades de los bonds muestran el tipo de energía que se transfiere de un elemento a otro, por ejemplo el tanque o embalse proporciona al sistema caudal y presión, esta energía va cambiando a medida que es transferida de un elemento a otro en el sistema que es alguna de las ventajas al tener un modelo en el dominio físico.

## 1.5. Contenido

La presente tesis se encuentra organizada de la siguiente manera:

El capítulo 2 contiene información referente a los elementos que forman parte de la metodología de Bond Graph y herramientas para la construcción de sistemas, así como la obtención de algunas de sus características, empleando las propiedades que se tienen al construir el Bond Graph del sistema.

La construcción de los modelos: hidráulico, mecánico y eléctrico. La propuesta de la ubicación de las vibraciones, el análisis de controlabilidad, observabilidad, obtención de las ecuaciones en variables del sistema completo y la obtención del estado estacionario, es el contenido del capítulo 3.

En el capítulo 4 se obtienen los resultados en cada una de las partes de la central hidroeléctrica variando los parámetros y se muestran sus efectos en el sistema, se propone

un control para la variación del caudal en la válvula, otro en la turbina para variar su velocidad y uno en el devanado de campo del generador síncrono.

En el capítulo 5 se presentan las conclusiones de la presente tesis.

El apéndice A contiene información relacionada a la transformación de Park. En el apéndice B se definen las ecuaciones de las inductancias que se encuentran en la máquina síncrona. En el apéndice C se muestra la propuesta de un estabilizador en unidades de generación de energía eléctrica. El apéndice D muestra una explicación breve del software 20-SIM. Finalmente, el apéndice E presenta un artículo desarrollado de este trabajo de tesis, titulado *Analysis of a Hydroelectric Plant in the Physical Domain* y que fue aceptado en la *Internacional Conference on Computer, Electrical, Systems Science and Engineering in Heidelberg, Germany*.

# Capítulo 2

## Antecedentes: Bond Graph

### 2.1. Aportación

El presente capítulo, comprende las técnicas utilizadas para obtener el modelo de un sistema físico mediante la metodología de Bond Graph. Los pasos a seguir, los tipos de elementos que se utilizan para formar el Bond Graph (con el fin de reducir el término cuando de haga referencia a un modelo en Bond Graph se abreviara como BG) y el procedimiento para obtener la matriz estructura unión, que posteriormente da origen a la formulación de las ecuaciones de sistemas, son algunos de los puntos que se tratan en este capítulo.

### 2.2. Sistema

Un sistema se considera como una combinación de componentes que actúan en forma conjunta y que tienen como objetivo realizar una tarea determinada. Los sistemas no son necesariamente físicos. El concepto “sistema” se aplica a fenómenos abstractos y dinámicos, tal es el caso de los que se encuentran en el estudio de la economía. Por tanto, la palabra sistema debe de interpretarse como una implicación de sistemas físicos, biológicos, económicos y similares a éstos [10].

El sistema de una central hidroeléctrica está dividido en tres áreas, las cuales son: sistemas hidráulicos, mecánicos y eléctricos. Donde cada uno de estos tiene sus elementos propios que los hacen representativos e identificables en el momento de un análisis. El estudio de los sistemas ya sea hidráulico, mecánico y eléctrico se puede realizar a través de modelos, que permitan conocer la forma en la que se va a desempeñar en el proceso o tarea a realizar.

### 2.3. Modelos

El término modelo para sistemas puede tener muchas interpretaciones así como significados, en los sistemas de control se le define como una abstracción matemática en términos de un conjunto de ecuaciones diferenciales. En el sentido clásico la interpretación para modelo por un ingeniero puede ser vista como el prototipo, que es la réplica exacta, pero a escala, de un sistema [10].

La variación e interpretación para los modelos, en el nivel heurístico es el modelo intuitivo, que se presenta sólo en la mente de los ingenieros, como una concepción personal del sistema. Tales modelos deben de tener a su vez una existencia física o matemática. Se debe de tener presente que los propósitos de los modelos son para el análisis, diseño e implementación de controladores y que permitan fundamentar las propiedades del sistema a través de la investigación.

Un modelo dinámico es el modelo matemático de un sistema, expresado como un sistema de ecuaciones diferenciales o transformaciones. Usados para el análisis teórico, que describen el comportamiento de un sistema y que subsecuentemente permiten reconfigurar el sistema o diseñar un controlador para éste. Esta descripción de modelo da origen a dos formas de interpretar los modelos.

- *Análisis de modelos dinámicos*, estos son obtenidos por el análisis de los sistemas físicos a un nivel fundamental, involucrando suficientes aproximaciones para simplificar el modelo hacia la forma de ecuaciones diferenciales.
- *Identificación de modelos dinámicos*, son obtenidos mediante la observación (estadística) basándose en el comportamiento del sistema físico.

La simulación de un modelo es el término empleado que incluye todas las formas del modelo, que está encaminado a la investigación básica de las características fenomenológicas de un sistema o proceso. La diferencia entre los modelos de simulación por computadora y los de análisis dinámico sólo existe en el grado de la aproximación al sistema que se está involucrando.

Así los pasos básicos en los sistemas de control en los que se desea una solución o resolver el sistema son: el modelado, diseño del controlador y validación del control. Este esquema de solución de un sistema es representado en la Figura 2.1.

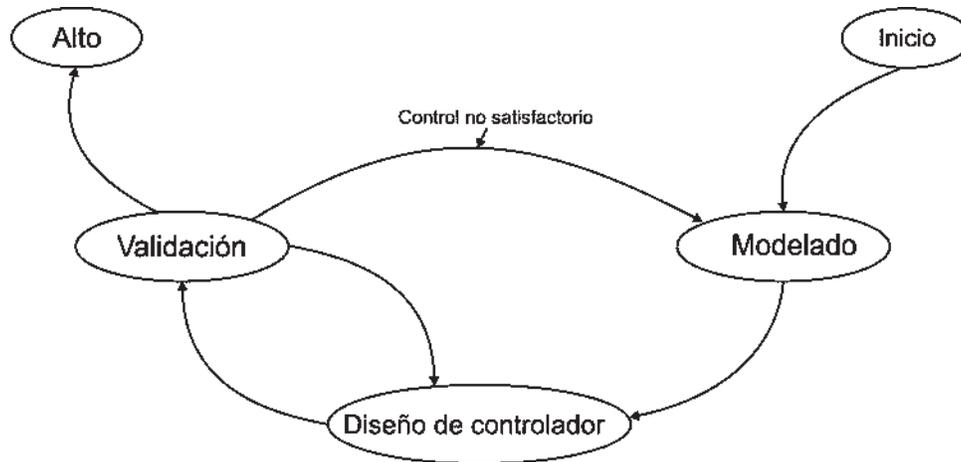


Figura 2.1 Proceso para obtener el Modelo de un Sistema.

## 2.4. Bond Graph

La teoría de Bond Graph fue desarrollada por el Profesor H. M. Paynter del Instituto Tecnológico de Massachussets, E.U. en el año de 1961 consiste en un procedimiento por medio del cual el trabajo de obtener las ecuaciones diferenciales que describen el modelo matemático de un sistema físico puede ser efectuado por una computadora [24] esta técnica se encuentra posicionada entre el sistema físico de cualquier proceso y los modelos matemáticos asociados a esté. Para que este concepto se lleve acabo es necesario que la descripción del sistema sea de forma clara, de manera que al introducir los datos a la computadora se pueda llevar a cabo un procedimiento algorítmico que permita obtener las ecuaciones diferenciales y su solución. El lenguaje en el que es posible transportar un sistema físico a un diagrama gráfico y ser resuelto por una computadora es conocido como Bond Graph.

Un Bond Graph son gráficos de dominio independiente que describen el comportamiento dinámico de los sistemas físicos. Esto se refiere a que los sistemas de diferentes dominios de energía (hidráulico, mecánico, eléctrico, acústico, termodinámico, etc.) se describen de la misma forma, siendo una ventaja cuando se tienen diferentes sistemas acoplados o trabajando en conjunto en un proceso ya sea industrial, económico o biológico. El modelado en BG es una poderosa herramienta para el modelado de sistemas en ingeniería. Además los submodelos de BG pueden ser reutilizados debido a que pueden ser vistos como una forma de modelado de sistemas físicos orientada a objetos. Un modelo en BG permite conocer información sobre las interacciones de energía entre sus elementos, lo que da origen a tener un mejor entendimiento dinámica del sistema.

## 2.5. Elementos que conforman un Bond Graph

Todo sistema en un proceso está compuesto por elementos, que interactúan unos con otros por medio del intercambio de energía o información para realizar una tarea, este tipo de interacción en los sistemas determina y genera la información necesaria para conocer la dinámica de cualquier sistema.

La energía, potencia e incluso el tiempo de derivación son la cantidad de información que es intercambiada entre dos elementos en un sistema, estos elementos poseen relaciones constitutivas las cuales describen el comportamiento que depende del tipo de elemento que se esté empleando: disipativo o almacenado.

### 2.5.1. Potencia y energía

La potencia es el producto de dos factores conocidos como variables generalizadas en BG, recibiendo este nombre ya que no importa la naturaleza física del sistema, estas variables son: flujo y esfuerzo representadas como  $f$  y  $e$  respectivamente, empleadas para la obtención de la potencia instantánea. La ecuación que describe la potencia es,

$$P = e \cdot f \quad (2.1)$$

La transferencia de energía que existe entre dos elementos en un sistema se lleva a cabo por medio de las variables generalizadas flujo y esfuerzo. Como se muestra en la Figura 2.2.

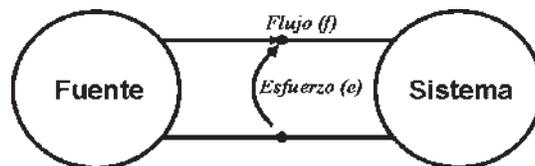


Figura 2.2 Transferencia de energía.

Donde la energía está dada por la ecuación,

$$E(t) = \int_0^t e(\tau) \cdot f(\tau) d(\tau) \quad (2.2)$$

La cual describe que la energía es la integral de la multiplicación del esfuerzo por el flujo en un intervalo de tiempo.

En Bond Graph los puertos de energía que sirven para acoplar componentes entre un elemento o sistema, es conocido como bond de energía. Este bond tiene una representación gráfica que se muestra en la Figura 2.3.

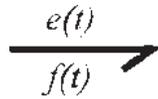


Figura 2.3 Bond de energía con la representación de las variables generalizadas.

La semiflecha de la Figura 2.3 es un elemento en Bond Graph conocido como bond, que es empleado para representar la transferencia de potencia o flujo de energía entre elementos del sistema. El bond acarrea las dos variables generalizadas consideradas para el cálculo de la potencia instantánea, y el sentido de la semiflecha corresponde al sentido positivo de la potencia.

Tabla 2.1 Variables generalizadas de algunos sistemas.

<i>Dominio Físico</i>	<i>Esfuerzo</i>	<i>Flujo</i>	<i>Momento</i>	<i>Desplazamiento</i>
<i>Hidráulico/Neumático</i>	$\rho$ Presión	$Q$ Caudal	$\Gamma = \int \rho dt$ Momento de Flujo Tubular	$V_v = \int Q dt$ Volumen
<i>Mecánico Traslacional</i>	$F$ Fuerza	$V$ Velocidad	$P = \int F dt$ Momento Rotacional	$x = \int V dt$ Distancia
<i>Mecánico Rotacional</i>	$\tau$ Par	$\omega$ Velocidad Angular	$h = \int \tau dt$ Momento Angular	$\theta = \int \omega dt$ Desplazamiento Angular
<i>Eléctrico</i>	$v$ Voltaje	$i$ Corriente	$\lambda = \int v dt$ Enlace de Flujo Magnético	$q = \int i dt$ Carga

Tabla 2.2 Variables de energía y potencia.

<i>Dominio Físico</i>	<i>Energía</i>	<i>Potencia</i>
<i>Hidráulico</i>	$\int Q(\Gamma) d\Gamma$	$\rho \cdot Q$
<i>Mecánico Traslacional</i>	$\int V(P) dP$	$F \cdot V$
<i>Mecánico Rotacional</i>	$\int \omega(h) dh$	$\tau \cdot \omega$
<i>Eléctrico</i>	$\int i(\lambda) d\lambda$	$v \cdot i$

La Tabla 2.1 muestra las variables generalizadas de algunos sistemas físicos, las variables de energía que se muestran son: momento  $p(t)$  o esfuerzo acumulado  $e_a(t)$  y desplazamiento  $q(t)$  o flujo acumulado  $f_a(t)$ , representan el estado del sistema cuando en ellos se almacena energía, la Tabla 2.2 muestra las expresiones que relacionan a la energía y potencia de algunos sistemas físicos. Las ecuaciones que definen al momento y desplazamiento generalizado se definen como:

$$p(t) = e_a(t) \triangleq \int_0^t e(\tau) d\tau \quad (2.3)$$

$$q(t) = f_a(t) \triangleq \int_0^t f(\tau) d\tau \quad (2.4)$$

## 2.6. Componentes de Bond Graph puertos-1

En los sistemas físicos este tipo de puertos son considerados como elementos ideales, donde su función o comportamiento en el sistema es el de disipar la potencia (elementos disipativos puerto-1). Los elementos pasivos pueden definirse como aquellos en el sistema que intercambian potencia en un puerto o elemento en su forma más simple.

Algunos otros elementos puertos-1 en Bond Graph son elementos capacitivos e inductivos que son del tipo almacenadores y los que disipan potencia se le conoce como resistivos o pasivos; estos elementos se encuentran en todo sistema físico como lo son los hidráulicos, mecánicos y eléctricos entre otros. Los elementos puerto-1 son representados por letras:

R-disipativos  
C-almacenadores  
I-almacenadores

A continuación se muestra su representación en Bond Graph así como sus relaciones constitutivas.

### Elemento resistivo o disipativo

La representación del elemento disipativo en Bond Graph es mostrado en la Figura 2.4:

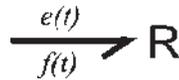


Figura 2.4 Resistencia en Bond Graph.

El elemento **R** como se le conoce en el modelado de BG, representa a un elemento en un sistema físico que tiene la característica de disipar en forma de calor la potencia que se le suministra. De esta forma se representa un elemento resistivo. En la Tabla 2.3 se muestra las ecuaciones y las variables de algunos sistemas físicos.

Tabla 2.3 Elemento pasivo en Bond Graph.

Dominio Físico	Ecuación - Lineal
Hidráulico	$\Delta\rho = R \cdot Q$
Mecánico	$F = b \cdot V$
Eléctrico	$v = R \cdot i$

### Elementos almacenadores

Existen dos tipos de elementos que almacenan energía que son los I y los C. Los que se muestran primeramente son los almacenadores de esfuerzo que se representan con la letra C, y su representación en Bond Graph es mostrada en la Figura 2.5.

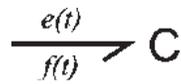


Figura 2.5 Elemento almacenador C en BG.

La Tabla 2.4 muestra las ecuaciones para el elemento almacenador de esfuerzo de un modelo de BG de algunos de los más comunes sistemas físicos en un proceso.

Tabla 2.4 Elemento almacenador C en Bond Graph.

<b>Dominio Físico</b>	<b>Ecuación - Lineal</b>
Hidráulico	$\rho = C \int \Delta Q(t) dt$
Mecánico	$F = k \int V(t) dt$
Eléctrico	$v = \frac{1}{c} \int i(t) dt$

El elemento almacenador de flujo conocido como inercia en la metodología de Bond Graph es descrito por la letra I y la forma como se representa en un modelo construido en BG es mostrado en la Figura 2.6. La Tabla 2.5 muestra las ecuaciones para cada caso de un sistema en el dominio físico.

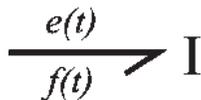


Figura 2.6 Elemento almacenador I.

Tabla 2.5 Elemento almacenador I en Bond Graph

<b>Dominio Físico</b>	<b>Ecuación - Lineal</b>
Hidráulico	$Q = I \int \Delta \rho(t) dt$
Mecánico	$V = \frac{1}{M} \int F(t) dt$
Eléctrico	$i = \frac{1}{L} \int v(t) dt$

Una forma sencilla de relacionar las variables generalizadas de esfuerzo y flujo con los elementos R, C e I en la metodología de Bond Graph es utilizando el tetraedro de estados que se muestra en la Figura 2.7:

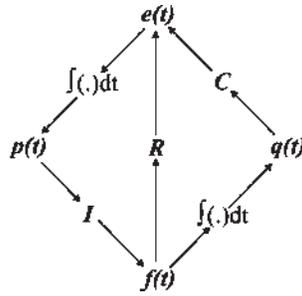


Figura 2.7 Tetraedro de estados.

### 2.7. Elementos de Bond Graph multipuerto I, R y C

En Bond Graph los elementos multipuerto I, R y C, también conocidos como “campos” son utilizados en situaciones donde una variable de un elemento es determinada por una combinación lineal de más de un bond en el sistema. Un ejemplo de su utilización es analizando las inductancias mutuas en un transformador como él de la Figura 2.8 (a).

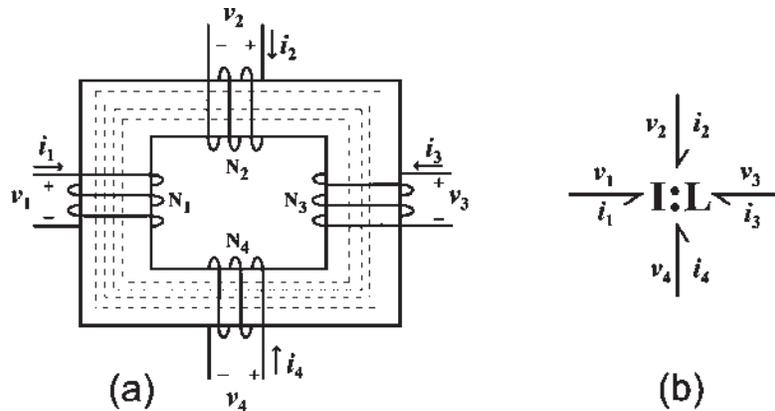


Figura 2.8 Elemento multipuertos: a) Transformador, b) Representación en Bond Graph.

En la Figura 2.8, se tienen un transformador con cuatro inductancias propias, donde cada inductancia interactúa con las otras tres por inductancia mutua. La representación de este fenómeno es representado por un elemento I multipuerto, en el cual se vincula al flujo magnético,

$$\lambda = L \cdot i \tag{2.5}$$

y su representación matricial con cuatro elementos inductivos es:

$$\lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{bmatrix}, i = \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \end{bmatrix}$$

La representación matricial de (2.5) se muestra a continuación:

$$\lambda = \begin{bmatrix} L_1 & m_{12} & m_{13} & m_{14} \\ m_{21} & L_2 & m_{23} & m_{24} \\ m_{31} & m_{32} & L_3 & m_{34} \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & L_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \end{bmatrix}$$

Así el elemento multipuerto en la Figura 2.8 tiene voltajes y corrientes en el bond, que son las variables que describen al esfuerzo y el flujo en un sistema eléctrico, y su representación vectorial es,

$$v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix}, \quad i = \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \end{bmatrix}$$

Debe de hacerse notar que los elementos multipuertos no sólo son inductivos, y que esté es un caso particular.

### 2.7.1. Puertos - 1 activos.

Las fuentes de esfuerzo y flujo son conocidos como elementos puerto-1 activos en el modelado de BG, y su función es la de suministrar potencia al sistema. La representación en Bond Graph se muestra en la Figura 2.9.

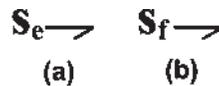


Figura 2.9 a) Fuente de esfuerzo, b) Fuente de flujo.

La fuente de esfuerzo se denota por  $S_e$  y la fuente de flujo por  $S_f$  una característica de estos puertos-1 es que la dirección que tiene la semiflecha es fija y únicamente se representa saliendo de la fuente como en los incisos (a) y (b) de la Figura 2.9.

Existe otra forma de representar a una fuente con una entrada de comando, y se muestra en la Figura 2.10, que a diferencia de las fuentes normales sobre las que no se tiene control, las fuentes  $MS_e$  y  $MS_f$  pueden ser controladas con una señal externa o perturbación proveniente de una parte del sistema o incluso de otro. La letra M significa modulación propiedad de estas fuentes que permite variar la salida de la variable de esfuerzo o flujo.

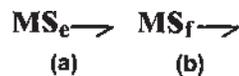


Figura 2.10 Fuentes con entrada de comando M a) Esfuerzo, b) Flujo

### 2.7.2. Elementos puerto - 2 ideales

Los elementos puerto-2 ideales, en Bond Graph son conocidos como transformadores y giradores denotados por las letras TF y GY respectivamente, y son utilizados para cambiar la relación de las variables de esfuerzo y flujo entre dos puntos. En la Figura 2.11 se muestran estos elementos en Bond Graph.

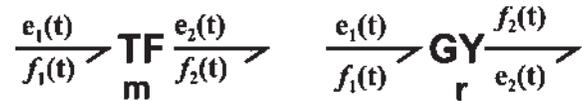


Figura 2.11 Representación en Bond Graph de un transformador TF y girador GY.

Las relaciones constitutivas para estos elementos ideales se describen en las Tabla 2.6 y Tabla 2.7.

Tabla 2.6 Relaciones de las variables generalizadas TF.

<b>Transformador Ideal Puerto - 2</b>	
<b>Variable Generalizada Esfuerzo</b>	$e_1 = m \cdot e_2$
<b>Variable Generalizada Flujo</b>	$f_1 = \frac{1}{m} \cdot f_2$

Tabla 2.7 Relación de las variables generalizadas GY.

<b>Girador Ideal Puerto - 2</b>	
<b>Variable Generalizada Esfuerzo</b>	$e_1 = r \cdot f_2$
<b>Variable Generalizada Flujo</b>	$f_1 = \frac{1}{r} \cdot e_2$

Estos elementos son una parte fuerte en el modelado de sistemas físicos aplicando la metodología de Bond Graph ya que facilitan en la conversión de potencia de un dominio físico que se este empleando a otro dominio (mecánico a eléctrico, hidráulico a mecánico, etc.), en el caso del TF por medio del modulo de transformación m se aumenta o disminuye la variable de salida sea esfuerzo o flujo Tabla 2.6 y el GY su principal función es la de cambiar la variable de salida según su entrada, un ejemplo es, si a la entrada del girador se tiene un esfuerzo éste a la salida del girador será flujo con un aumento o disminución según su modulo de transformación r, Tabla 2.7.

### 2.8. Bond activo

Esté tipo de bond utiliza sólo una de las dos señales *esfuerzo* ( $e$ ) o *flujo* ( $f$ ) en una dirección a diferencia de los representado por una semiflecha que poseen dos señales. Es representado por una flecha completa como la de la Figura 2.12 y representa una señal con un consumo de potencia de cero, es utilizado para transmitir una señal de flujo o esfuerzo de un bloque de un sistema a otro, sin consumir energía.

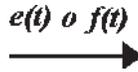


Figura 2.12 Bond Activo.

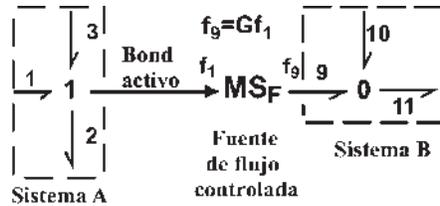


Figura 2.13 Ejemplo de uso de un bond activo.

Una forma de cómo utilizar un bond activos es mostrada en la Figura 2.13, el ejemplo muestra dos sistemas A y B, el sistema B requiere de flujo para realizar una tarea determinada y el sistema A le proporciona la energía necesaria a través de una fuente de flujo controlada, la cual recibe la energía de flujo por medio de un bond activo proveniente del sistema A.

### 2.8.1. Detectores

En la metodología de Bond Graph son empleados como sensores de medición de algunas de las variables: esfuerzo y flujo, y son expresados por  $D_e$  para los detectores de esfuerzo y  $D_f$  los detectores de flujo. Estos elementos no consumen potencia, es por eso que se les considera como elementos de instrumentación ideales para la medición. Su representación gráfica en Bond Graph es mostrada en la Figura 2.14.

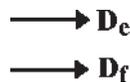


Figura 2.14 Detectores de esfuerzo y flujo.

### 2.9. Elementos de tipo unión

Son empleados para interconectar tres o más puertos de energía en un modelo en Bond Graph. Estos elementos son llamados puertos-3 en el dominio de Bond Graph, representan una conexión multipuerto a los dos tipos de conexiones fundamentales en todo sistema físico conocidas como conexión en serie y conexión en paralelo.

Existen dos tipos de conexiones puerto-3 la 0 y 1; la conexión 0 considerada como la unión de flujo o unión de esfuerzo común, representa la conexión en paralelo. Está conexión se muestra en la Figura 2.15.

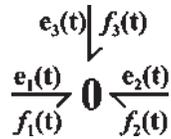


Figura 2.15 Unión – 0.

La conexión 1 es considerada como la unión de esfuerzo o unión de flujo común, representa la conexión en serie Figura 2.16.

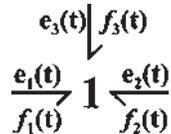


Figura 2.16 Unión – 1.

Tabla 2.8 Relación de Interconexión de las uniones 0 y 1.

Tipo de unión	Relación de interconexión
<b>Unión - 0</b>	Esfuerzo: $e_1(t) = e_2(t) = e_3(t)$
	Flujo: $f_1(t) + f_2(t) + f_3(t) = 0$
<b>Unión - 1</b>	Esfuerzo: $e_1(t) + e_2(t) + e_3(t) = 0$
	Flujo: $f_1(t) = f_2(t) = f_3(t)$

En la Tabla 2.18 se muestran las relaciones de interconexión para cada tipo de unión. Este tipo de puertos (esfuerzo y flujo) pueden extenderse a más de 3 puertos para la interconexión.

## 2.10. Causalidad

Anteriormente se mencionó que una de las ventajas de representar un sistema en Bond Graph, se debe a que de manera natural es posible apreciar el intercambio de energía entre elementos, esta propiedad es determinada por una línea perpendicular en un extremo del bond que se conoce como causalidad. La convención de causalidad en el (b) de la Figura 2.17.

Es importante distinguir entre causalidad y flujo de potencia, ya que ambos tienen propósitos distintos. El flujo de potencia, representado por la semiflecha asume la dirección positiva del flujo, mientras que el trazo causal indica cual es la variable de estado que entra al bond. En la Figura 2.17 se muestra un ejemplo físico de cómo puede interpretarse la causalidad.

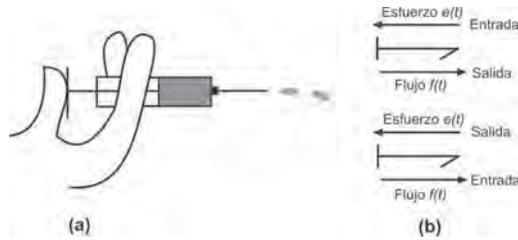


Figura 2.17 Concepto de causalidad, (a) ejemplo, (b) convención de causalidad.

La Figura 2.17 muestra el concepto general de causalidad (a), la fuerza  $e(t)$  que se está aplicando a la jeringa produce un flujo  $f(t)$ . Lo que en un sistema se ve reflejado en una reacción de causa efecto.

La Figura 2.18 muestra la representación de dos elementos en un sistema donde el elemento A está transfiriendo flujo al elemento B que a su vez reacciona transfiriendo esfuerzo hacia A, y para el (b) el elemento B está transfiriendo esfuerzo al elemento A.

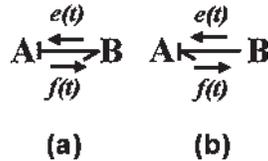


Figura 2.18 Causalidad en elementos,(a) transfiere flujo a B, (b)transfiere esfuerzo hacia A.

La Tabla 2.9 muestra las causalidades de los elementos que conforman el modelado en Bond Graph.

Tabla 2.9 Asignación de causalidades a cada elemento en Bond Graph.

Elemento	Causalidad – Restrictiva	
Unión – 0	$\begin{array}{c} \top \\ \text{---}0\text{---} \\ \text{---}0\text{---} \end{array}$	$\begin{array}{c} \top \\ \text{---}0\text{---} \\ \text{---}0\text{---} \end{array}$
Unión – 1	$\begin{array}{c} \top \\ \text{---}1\text{---} \\ \text{---}1\text{---} \end{array}$	$\begin{array}{c} \top \\ \text{---}1\text{---} \\ \text{---}1\text{---} \end{array}$
Transformador	$\begin{array}{c} \text{---}TF\text{---} \\ \text{---}m \end{array}$	$\begin{array}{c} \text{---}TF\text{---} \\ \text{---}m \end{array}$
Girador	$\begin{array}{c} \text{---}GY\text{---} \\ \text{---}r \end{array}$	$\begin{array}{c} \text{---}GY\text{---} \\ \text{---}r \end{array}$
	Causalidad – Necesaria	
Fuentes	$Ms_e \text{---}$	$Ms_f \text{---}$
	Causalidad	
	Integral	Derivativa
Inercia	$I \text{---}$	$I \text{---}$
Capacitancia	$C \text{---}$	$C \text{---}$
	Causalidad Arbitraria	
Resistencia	$R \text{---}$	$R \text{---}$

La Tabla 2.9 está dividida en secciones con términos como *causalidad restrictiva, integral, derivativa, necesaria y arbitraria*, enseguida se describen tipo de causalidad.

**Causalidad necesaria.** Este tipo de causalidad sólo se aplica a los elementos activos o fuentes en los cuales no puede asignarse una causalidad diferente. Una fuente de esfuerzo sólo puede proporcionar esfuerzo a los elementos de un sistema y la de flujo sólo flujo.

**Causalidad integral.** Causalidad que tiene importancia y que se presenta en los elementos almacenadores de esfuerzo y flujo. En el caso del elemento I tiene causalidad integral que se define como la integral de entrada  $e(t)$  se relaciona con la salida  $f(t)$  ecuación (2.6).

$$f(t) \triangleq \int e(t) dt \quad (2.6)$$

El elemento I almacena  $f(t)$  y relaciona a una variable de esfuerzo acumulado  $p(t) = \int e(t) dt$ .

**Causalidad restrictiva.** Esta causalidad se aplica a los elementos puerto-3 (uniones) e ideales puerto-2 (giradores y transformadores), ya que una vez que se asigna la causalidad en alguno de sus bonds ésta determina la causalidad de los demás en éste elemento y no puede ser cambiada. La unión-0 solo lleva una línea causal y en la unión-1 solo un bond no lleva línea causal.

**Causalidad derivativa.** Se presenta cuando un sistema contiene elementos de almacenamiento de energía que no son dinámicamente independientes, en una asignación de causalidad integral, su representación para este caso es:

$$e(t) = \frac{d}{dt} \{f(t)\} \quad (2.7)$$

**Causalidad arbitraria.** Utilizada por los elementos disipadores, no importa la causalidad integral, ya que éste elemento no tiene términos con definición integral en sus relaciones constitutivas.

Para poder obtener las ecuaciones diferenciales con las reglas de causalidad descritas en la Tabla 2.9, se describe un procedimiento para la asignación de causalidad de los elementos el cual debe de ser seguido de forma estricta.

Procedimiento 2.1 Asignación de causalidad en un multipuerto.

1. Considerar cualquier MSe o Msf y asignar su causalidad necesaria seguido de extender las implicaciones causales, usando las restricciones de 0, 1, TF y GY que se muestran en la Tabla 2.9.
2. Asignar causalidad integral a los elementos C e I respetando las restricciones de la Tabla 2.9.
3. Escoger cualquier R que no esté asignada su causalidad y darle una arbitraria. Extender las implicaciones usando 0, 1, TF y GY de la Tabla 2.9.

En la Tabla 2.10 se muestran las relaciones causales y forma causal de los elementos R, C, I, Mse y Msf conocidos como elementos puerto-1.

Tabla 2.10 Relaciones causales y forma causal de elementos de puerto-1.

Elemento	Forma Causal		Relación Causal	
	Integral	Derivativa	Integral	Derivativa
Resistencia	$\text{┌} \rightarrow \mathbf{R}$	$\text{---} \rightarrow \mathbf{R}$	$e(t) = \Phi_R \{f(t)\}$	$f(t) = \Phi_R^{-1} \{e(t)\}$
Capacitancia	$\text{┌} \rightarrow \mathbf{C}$	$\text{---} \rightarrow \mathbf{C}$	$e(t) = \Phi_c^{-1} \left\{ \int f(t) dt \right\}$	$f(t) = \frac{d}{dt} \{ \Phi_c \cdot e(t) \}$
Inercia	$\text{---} \rightarrow \mathbf{I}$	$\text{┌} \rightarrow \mathbf{I}$	$f(t) = \Phi_I^{-1} \left\{ \int e(t) dt \right\}$	$e(t) = \frac{d}{dt} \{ \Phi_I \cdot f(t) \}$
Fuente de esfuerzo	$\mathbf{Mse} \text{---} \rightarrow$		$e(t) = E(t)$	
Fuente de flujo	$\mathbf{Msf} \text{┌} \rightarrow$		$f(t) = F(t)$	

\*  $\Phi_x$  = representa las relación constitutiva en causalidad integral el elemento x.

## 2.11. Procedimiento para la construcción de sistemas en Bond Graph

El modelado en Bond Graph se ha descrito como una herramienta para modelar sistemas de diferentes dominios físicos en uno generalizado, es así como se describieron previamente, los elementos y las restricciones para ser usados; más sin embargo no se ha abordado un tema importante que es ¿Cómo es que se construyen? ¿Qué pasos se deben de seguir?, por ésto en esta sección se explican los pasos a seguir para cambiar el dominio de energía de un sistema al dominio de Bond Graph.

### 2.11.1. Creación y reducción de modelos en Bond Graph

El procedimiento 2.2 para la construcción de modelos es aplicado a los sistemas: eléctricos, mecánicos e hidráulicos, pero es conveniente plantear un procedimiento general para el diseño de todo sistema, el cual es descrito a continuación.

1. Para un sistema en el que exista un punto donde las trayectorias de esfuerzo o flujo coincidan, se deberá crear una unión-0 o unión-1 según sea el caso en el sistema.
2. Crear una unión-1 o unión-0 para cada componente en una trayectoria serie y conectar el componente apropiado de Bond Graph por medio de un bond a la unión que se esté empleando. Asumir el flujo de potencia a partir de las fuentes, elementos disipadores y almacenadores.
3. Dibujar bonds entre uniones adyacentes, indicando la dirección en que se estará transfiriendo el flujo de potencia.

4. Se deberá remover la unión-0 o unión-1 que represente la referencia, así como también los bonds que estén conectados a dicha unión.
5. Es posible reducir el Bond Graph cuando se tengan uniones como las que se muestra en la Figura 2.19.



Figura 2.19 Reducción de uniones, a) Unión - 1, b) Unión - 0

6. Asignar causalidades a los elementos comenzando con las fuentes (causalidad necesaria), después elementos almacenadores (causalidad integral) y para finalizar elementos disipadores (causalidad arbitraria).

Este procedimiento es generalizado ya que existen variantes en la colocación de uniones. Lo que es posible aplicar sin ninguna restricción es el procedimiento 4, 5 y 6 no importando el sistema.

A continuación se muestra el procedimiento para crear el modelo de Bond Graph para un sistema hidráulico, mecánico y eléctrico.

### 2.11.2. Sistema hidráulico

El método de construcción para los sistemas hidráulicos, procedimiento 2.2.1 se describe a continuación.

- Primero, se asignan uniones-0 para cada presión distinta en el sistema.
- Segundo, insertar cada elemento entre los cambios de presión (uniones-0) utilizando uniones-1. En este paso es recomendable agregar las fuentes de presión y de flujo si es el caso.
- Tercero, se debe eliminar la unión-0 que corresponde a la referencia (presión atmosférica).

Para aplicar este procedimiento, es necesario emplear un ejemplo de un sistema hidráulico, como el mostrado en la Figura 2.20, el modelo mostrado está formado por tres tanques que están siendo llenados por tres ductos, el propósito del sistema es el llenado de los tanques y enviar el líquido a través de tres tuberías con una válvula cada tubería.

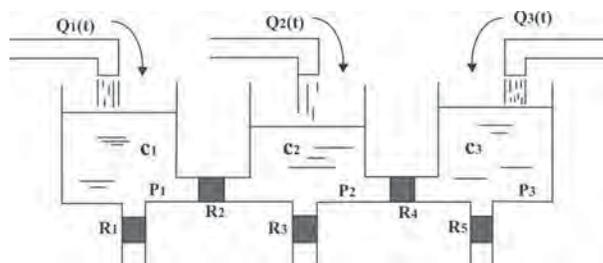


Figura 2.20 Sistema hidráulico.

A continuación se muestra en la Figura 2.21 los pasos descritos, en el procedimiento 2.2.1.

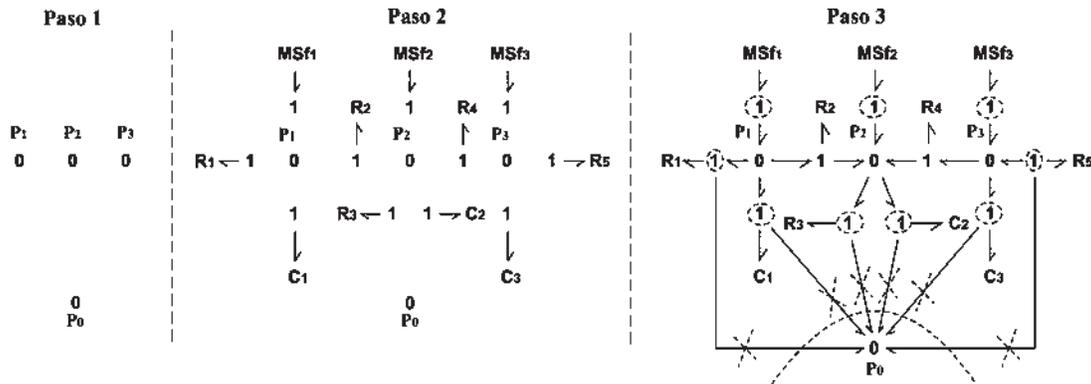


Figura 2.21 Pasos para la obtención de un modelo hidráulico en Bond Graph.

Una vez aplicados el pasos 1,2 y 3 el modelo de BG es reducido al de la Figura 2.22.

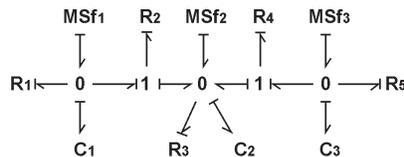


Figura 2.22 Modelo del sistema hidráulico en Bond Graph.

### 2.11.3. Sistemas mecánicos

En los sistemas mecánicos se realizan el procedimiento 2.2.3 que describe los pasos para la creación del modelo en BG.

- Paso 1, se asignan uniones-1 para los cambios de velocidad.
- Paso 2, se deben insertar elementos de generación de fuerza entre el par apropiado de uniones-1 utilizando uniones-0, también se deberán añadir inercias a sus respectivas uniones-1.
- Paso 3, el nodo de referencia cero o tierra es cualquier velocidad cero

Para emplear el procedimiento 2.2.3, se elige un sistema mecánico como el de la Figura 2.23, que consiste en dos vagones que están acoplados, a un sistema de amortiguamiento formado por amortiguadores y resortes y que se les esta aplicando una velocidad para comenzar a mover los vagones.

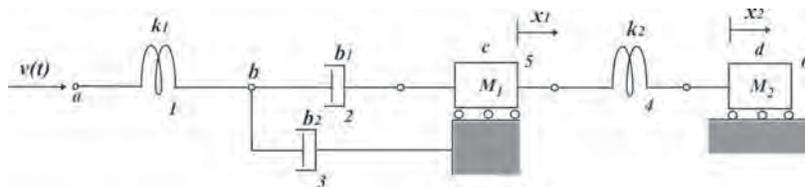


Figura 2.23 Sistema mecánico.

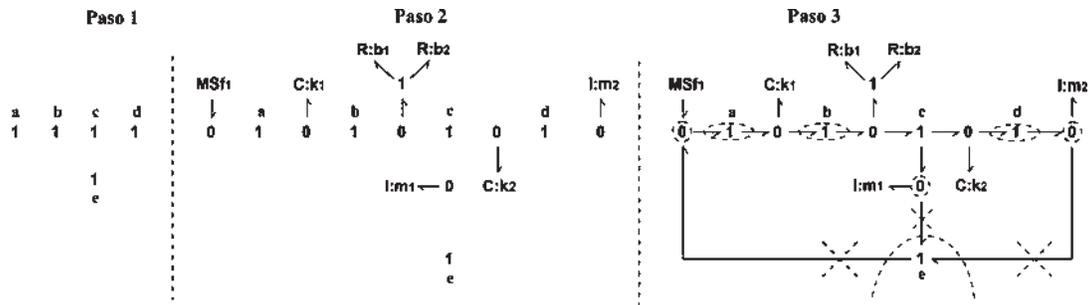


Figura 2.24 Obtención del modelo en Bond Graph.

El sistema simplificado y agregando las causalidades a los elementos, es posible verlo en la Figura 2.25.

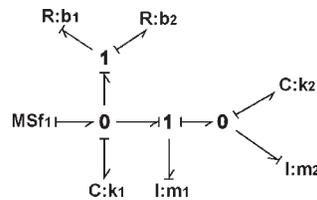


Figura 2.25 Sistema mecánico simplificado.

**2.11.4. Sistemas eléctricos**

El procedimiento 2.2.4 describe los pasos para la construcción de un modelo de BG de los sistemas eléctricos, al igual que los anteriores sistemas el procedimiento 4 es una modificación del procedimiento 1. A continuación se describen los pasos:

- Paso 1, para cada voltaje distinto en el sistema eléctrico le corresponde una unión-0.
- Paso 2, lo siguiente a colocar son uniones-1 entre uniones 0 si existe un elemento puerto-1 en el sistema o circuito eléctrico y de éste se derivará el elemento puerto-1.
- Consideración en el paso 3, en este caso se deberá de considerar el nodo de referencia como la tierra en el circuito.
- Como ultimo, el paso 4 consiste en eliminar todo los bonds que van a la referencia, reducir las uniones 0 ó 1 y asignar causalidades a los elementos (iniciando con las fuentes, seguido de los elementos almacenadores, uniones y elementos pasivos).

Considérese el circuito eléctrico de la Figura 2.26 para obtener el Bond Graph, aplicando el procedimiento 4 anterior.

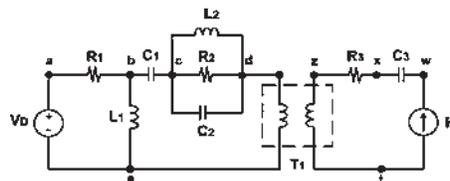


Figura 2.26 Circuito Eléctrico para Convertir al Modelo de Bond Graph.

Los pasos que cumplen con el procedimiento 2.2.4 para crear un modelo en Bond Graph de un Sistema Eléctrico se puede apreciar en la Figura 2.27.

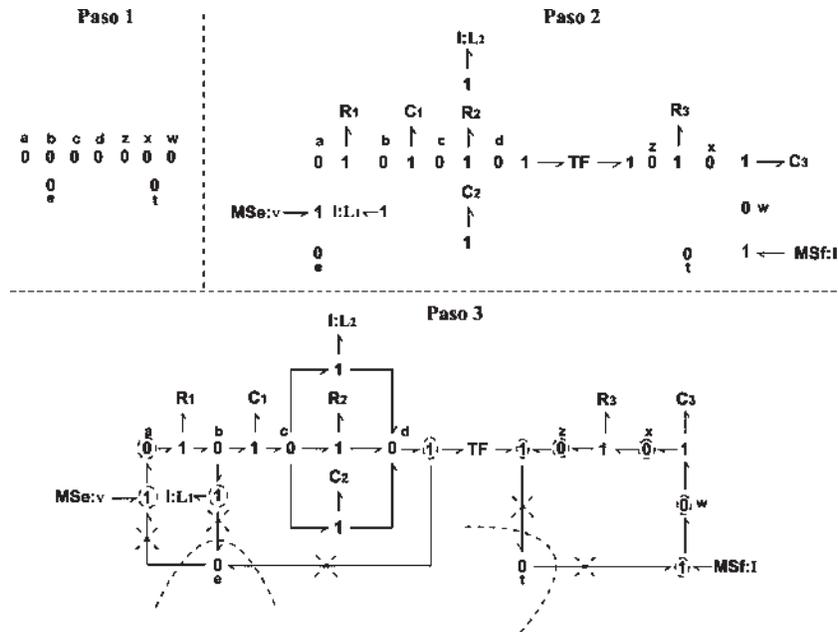


Figura 2.27 Pasos a seguir de acuerdo al procedimiento 1 modificado para sistemas eléctricos.

El paso 4 permite ver el modelo ya simplificado y en condiciones de obtener sus variables de estado y ecuación de estado que es lo que se vera en el siguiente tema. Quedando el modelo de Bond Graph de la siguiente forma.

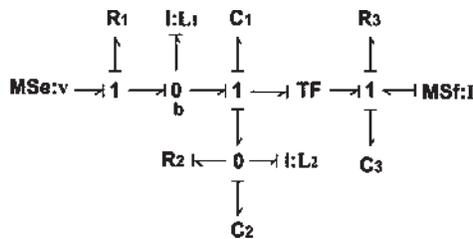


Figura 2.28 Sistema eléctrico del ejemplo en Bond Graph.

## 2.12. Estructuras de unión en sistemas multipuerto

Si se consideran algunos tipos de sistemas de grandes dimensiones como los campos interconectados, primeramente se obtiene una estructura dinámica y por lo tanto la generación, manipulación, y reducción de un gran número de ecuaciones se efectúa de una forma sistemática con la finalidad de obtener una implementación del modelo de manera exitosa.

### 2.12.1. Vectores significativos o vectores clave

En los modelos de BG es posible clasificar a los elementos o puertos que conectan  $R$ ,  $C$ ,  $I$ ,  $Mse$  y  $Msf$  como *bonds externos* y a los que conectan con los elementos  $0$ ,  $1$ ,  $TF$  y  $GY$  se les conoce comúnmente como *bonds internos*. A continuación se muestra un diagrama a bloques que describe como está compuesta la estructura unión de un modelo en Bond Graph.

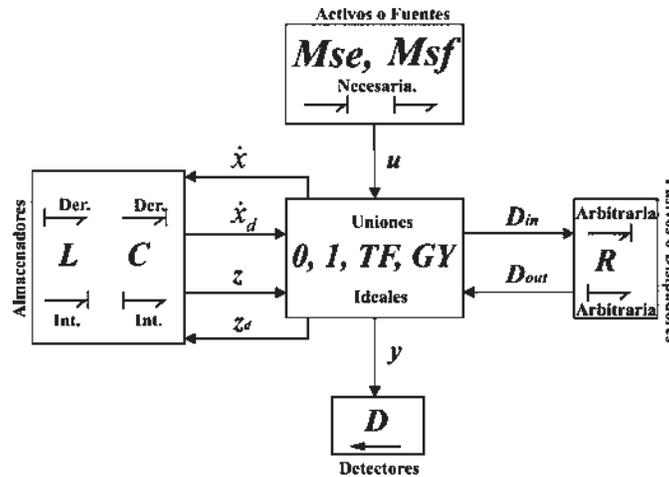


Figura 2.29 Diagrama a bloques de la estructura unión de un modelo en Bond Graph.

En la Figura 2.29 se puede apreciar la composición de elementos para cada bloque, desde las fuentes ( $Mse$  y  $Msf$ ), elementos almacenadores ( $L$  y  $C$ ), disipadores ( $R$ ), detectores ( $D$ ) y por ultimo se tiene en la estructura unión donde intervienen los transformadores, giradores y uniones  $0$  y  $1$  ( $TF$ ,  $GY$ , unión-1 y unión-0).

Los vectores clave en Bond Graph son los que representan a un sistema físico de diferentes o del mismo dominio. Estos vectores se muestran en la Figura 2.29 en forma de diagrama a bloques, haciendo notar las variables que son objeto de estudio en todo sistema representado en Bond Graph; comenzando con  $u(t) \in \mathcal{R}^p$  la cual aporta todas las variables de potencia (esfuerzos y flujos) definidos por los elementos activos o fuentes en la estructura unión. Los estados  $x(t) \in \mathcal{R}^n$  y  $x_d(t) \in \mathcal{R}^m$  compuestos de las variables de energía: momento generalizado  $p(t)$  el cual se encuentra en los elementos almacenadores de flujo ( $I$ ) y desplazamiento generalizado  $q(t)$  en elementos  $C$  en causalidad integral y derivativa respectivamente;  $z(t) \in \mathcal{R}^n$  y  $z_d(t) \in \mathcal{R}^m$  son las variables de co-energía, ya sea en causalidad integral o derivativa según se estén empleando,  $D_{in}(t) \in \mathcal{R}^r$  y  $D_{out}(t) \in \mathcal{R}^r$  es una combinación de los esfuerzos y flujos que se están analizando en el sistema estos contienen los intercambios de energía entre el campo de disipación y la estructura unión.

\*Los superíndices de:  $p$  = fuentes,  $n$  = estados del sistema,  $m$  = derivada de los estados del sistema y  $r$  = elementos disipadores en el sistema.

### 2.12.2. Relaciones de campo y ecuaciones de estado

Las relaciones de campo no lineal de los elementos de almacenamiento y de disipación o pasivos de la Figura 2.29 se muestran en las siguientes expresiones.

$$z(t) = \Phi_F(x) \quad (2.8)$$

$$z_d(t) = \Phi_{Fd}(x) \quad (2.9)$$

$$D_{out}(t) = \Phi_L(D_{in}) \quad (2.10)$$

donde

$\Phi_F$  Representa una función que relaciona cada  $z_i$  con  $x_i$  para  $i = 1, \dots, n$ .

$\Phi_{Fd}$  Denota una función que relaciona cada  $z_{di}$  con  $x_{di}$  para  $i = 1, \dots, m$ .

$\Phi_L$  Se refiere a una función que relaciona cada  $D_{outi}$  con  $D_{ini}$  para  $i = 1, \dots, r$ .

El comportamiento de un elemento se describe por una ley física conocida como *relación constitutiva*. Si las relaciones constitutivas que se tengan son del tipo lineal se tiene que:

$$z(t) = Fx(t) \quad (2.11)$$

$$z_d(t) = F_d x_d(t) \quad (2.12)$$

$$D_{out}(t) = L D_{in}(t) \quad (2.13)$$

donde  $L$ ,  $F$  y  $F_d$  son matrices reales con una dimensión de  $r \times r$ ,  $n \times n$  y  $m \times m$  respectivamente. Las relaciones de la matriz estructura unión están dadas por:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ D_{in}(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & 0 \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z(t) \\ D_{out}(t) \\ u(t) \\ \dot{x}_d(t) \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

Matriz S

$$z_d = -S_{14}^{*T} z(t) \quad (2.15)$$

Los elementos S que se encuentran dentro de la matriz toman valores dentro del conjunto  $\{0, \pm 1, \pm m, \pm r\}$  en los cuales m y r son los módulos de transformación de TF y GY. La matriz S se encuentra dividida de acuerdo a la dimensión de los vectores clave que la forman. Las submatrices  $S_{11}$ ,  $S_{12}$  y  $S_{22}$  presentan las siguientes propiedades que deben de ser consideradas al momento de crear la matriz S:

- P1.-  $S_{11}$  y  $S_{22}$  son matrices cuadradas antisimétricas.
- P2.-  $S_{12}$  es la matriz transpuesta negativa de  $S_{21}$  y viceversa.

Las propiedades P1 y P2 que presenta la matriz S están basadas en el principio de la conservación de la energía.

Las ecuaciones de estado en un sistema LTI (Lineal con parámetros invariantes en el tiempo) MIMO (múltiple entrada múltiple salida) es representado por las siguientes ecuaciones:

$$\dot{x}(t) = A_p x(t) + B_p u(t) \quad (2.16)$$

$$y(t) = C_p x(t) + D_p u(t) \quad (2.17)$$

Las matrices  $A_p, B_p, C_p, D_p$  se obtienen por medio de ecuaciones en la metodología de Bond Graph, estas ecuaciones se dan a continuación,

$$A_p = E^{-1} (S_{11} + S_{12} M S_{21}) F \quad (2.18)$$

$$B_p = E^{-1} (S_{13} + S_{12} M S_{23}) \quad (2.19)$$

$$C_p = (S_{31} + S_{32} M S_{21}) F \quad (2.20)$$

$$D_p = S_{33} + S_{32} M S_{23} \quad (2.21)$$

Las matrices E y M se obtienen de las siguientes expresiones,

$$E = I + S_{14} F_d^{-1} S_{14}^T F \quad (2.22)$$

$$M = (I - L S_{22})^{-1} L \quad (2.23)$$

Las ecuaciones (2.18) a (2.23) permiten la obtención del modelo del sistema físico que se esté analizando en variables de estado, empleándose la representación en el dominio de Bond Graph.

\* La T de (2.15) y (2.22) representa a la transpuesta.

### 2.13. Trayectoria causal

Un Bond Graph no solamente muestra una estructura topológica de un sistema sino también su organización causal pues indica las relaciones causa efecto. Esta estructura causal da la noción de *Trayectoria Causal* [12] que a continuación se explica

- Una *Trayectoria Causal* de una estructura de unión es una secuencia alternante de Bonds y nodos tal que:
  1. Para una gráfica acausal, es decir, una gráfica que no tiene la causalidad aplicada a sus elementos o bonds, la secuencia forma una cadena sencilla.
  2. Todos los nodos en la secuencia tienen una causalidad completa y correcta, es decir, se cumplen las condiciones descritas en el procedimiento 2.1.
  3. Dos nodos de una trayectoria causal tienen en el mismo nodo y orientaciones causales opuestas.
- Una *trayectoria causal es simple*, si a través de la misma sigue solamente una misma variable, tal como se muestra en la Figura 2.30

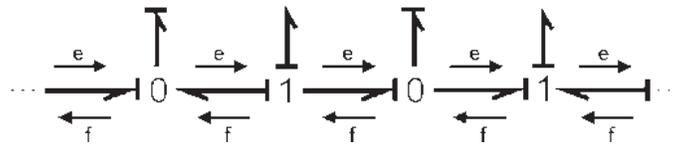


Figura 2.30 Ejemplo de una trayectoria causal simple.

- Una *trayectoria causal es mezclada* si un cambio de variable es requerido a través de la secuencia causal. Si el cambio se debe a un GY a) la trayectoria causal es llamada mezclada directa y cuando pasa la trayectoria a través de algún elemento R, C, I b) la trayectoria causal es llamada mezclada indirecta. Las siguientes figuras mostradas en la Figura 2.31 se ilustran estas trayectorias.

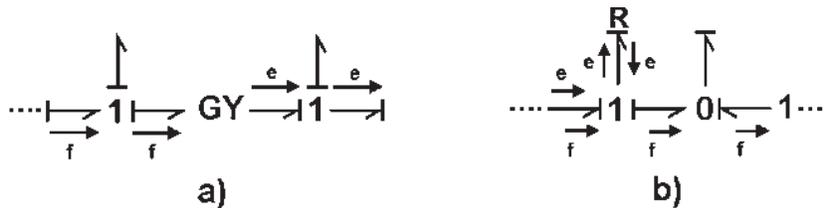


Figura 2.31 Trayectoria causal mezclada: a) girador Gy, b) elemento R, I o C.

- Dos elementos P1 y P2 perteneciendo al conjunto de {R, C, I, S<sub>e</sub>, S<sub>f</sub>, D<sub>e</sub>, D<sub>f</sub>} son causalmente conectados si la variable de entrada de una es influenciada por la variable de salida de la otra.
- Una *trayectoria directa* es una trayectoria causal entre una entrada y un detector.
- Un *Lazo Causal* es una trayectoria causal sencilla cerrada.
- Un *Lazo de Mason* es un lazo causal de la salida de un puerto a la entrada del mismo puerto sin trazar el mismo bond en la misma dirección más de una vez.

A continuación se muestran algunas de las técnicas en Bond Graph aplicadas a sistema de control LTI para determinar la controlabilidad y observabilidad.

### 2.14. Controlabilidad y observabilidad

Se dice que un sistema es controlable en el instante  $t_0$  si es posible llevarlo de cualquier estado inicial  $x(t_0)$  a otro estado, empleando un vector de control no acotado o sin restricciones en un lapso de tiempo finito.

Un sistema se dice que es observable en un tiempo  $t$  si con el sistema en el estado  $x(t_0)$  es posible determinar este estado a partir de la medición de la salida durante un intervalo de tiempo finito.

En 1960 Kalman introdujo los conceptos de controlabilidad y observabilidad. Las condiciones de controlabilidad y observabilidad determinan la existencia de una solución para un problema en el diseño de un sistema de control. Para estos casos el determino que si no existe una solución al problema del diseño, el sistema se define como no controlable. La mayor parte de los sistemas físicos son controlables y observables, en el caso de los modelos matemáticos existe la posibilidad de que no posean la propiedad de controlabilidad u observabilidad. Si se presenta este caso en el que el sistema no sea controlable u observable o ambos, es necesario determinar las condiciones bajo las cuales el sistema es controlable y observable. A continuación se muestran las ecuaciones y métodos para la determinación de controlabilidad y observabilidad en la teoría de control, para posteriormente emplear la metodología de Bond Graph.

### 2.14.1. Controlabilidad y observabilidad con una perspectiva clásica

#### Controlabilidad

Se dice que el sistema descrito por (2.16) es de estado controlable en  $t = t_0$ , si es posible construir una señal de control sin restricciones que transfiera de un estado inicial a cualquier estado final en un intervalo de tiempo  $t_0 \leq t \leq t_1$ . Si todos los estados son controlables, se dice que el sistema es de estado completamente controlable.

$$C = \begin{bmatrix} B_p & A_p B_p & A_p^2 B_p & \dots & A_p^{n-1} B_p \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

La matriz (2.24) recibe el nombre de *matriz de controlabilidad*. Si el sistema es de estado completamente controlable, entonces, dado cualquier estado inicial  $x(0)$ , esto requiere que la matriz de  $n \times n$  de (2.24) sea de rango  $n$ .

#### Observabilidad

Se dice que el sistema es completamente observable si el estado  $x(t_0)$  se determina a partir de la observación de  $y(t)$  durante un intervalo de tiempo finito,  $t_0 \leq t \leq t_1$ . Por lo tanto, el sistema es completamente observable si todas las transiciones del estado afectan a todos los elementos del vector de salida. El concepto de observabilidad es importante, debido a que en la práctica la dificultad que se encuentra con el control mediante la retroalimentación del estado es que algunas variables de estado no son accesibles para una medición directa, por lo que se hace necesario estimar las variables de estado no medibles para construir las señales de control.

Al analizar condiciones de observabilidad se considera el sistema sin excitación, la razón es dado que las matrices  $A_p$ ,  $B_p$ ,  $C_p$  y  $D_p$  al igual que  $u(t)$  que se encuentra en los dos términos finales de las ecuaciones (2.16) y (2.17) son cantidades conocidas. Por tanto, se pueden restar del valor observado de  $y(t)$ . Así, a fin de investigar una condición necesaria y suficiente para la observabilidad completa basta con considerar el sistema con

$$\dot{x} = A_p x \quad (2.25)$$

$$y = C_p x \quad (2.26)$$

La solución para determinar la observabilidad del sistema completo en tiempo continuo, dadas las ecuaciones anteriores es

$$\text{Rango}(O_r) = \begin{bmatrix} C_p^T & A_p^T C_p^T & \dots & (A_p^T)^{n-1} C_p^T \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

donde <sup>T</sup> es la transpuesta, así el sistema es completamente controlable si y solo si la matriz de  $n \times nm$  es de rango  $n$ , o tiene  $n$  vectores columna linealmente independientes. La matriz (2.27) se le denomina matriz de observabilidad [10].

### 2.14.2. Controlabilidad y observabilidad desde un enfoque de Bond Graph

La estructura de unión del modelo de Bond Graph contiene información del tipo de elementos que está compuesto el sistema y su reacomodo sin importar sus valores numéricos. La adaptación a Bond Graph y un consecuente análisis de controlabilidad y observabilidad bajo el enfoque estructural fue abordada por Sueur y G. Dauphin-Tanguy en [13], [14], [15]. Las definiciones que se muestran a continuación permiten conocer y establecer los conceptos de orden mínimo y rango estructural, los cuales forman parte importante en el análisis de controlabilidad y observabilidad en Bond Graph.

**Definición 1** [13]. El orden mínimo de un modelo en Bond Graph, que es igual de dimensión a la matriz de estado, es igual al número de elementos  $(n_i)_i$  C e I con causalidad integral en el modelo de *Bond Graph en causalidad integral o BGI*.

**Definición 2** [13]. El rango estructural de una matriz  $A_p$ , está definido como el rango máximo que esa matriz alcanza en función de sus parámetros libres, tomando en cuenta las interrelaciones de los elementos

**Definición 3** [13]. El rango estructural  $q$  de una matriz de estado  $A_p$  asociado a un modelo en Bond Graph es igual al número de elementos dinámicos C e I en causalidad integral en el BGI, que aceptan causalidad derivativa en el modelo de BGD o *Bond Graph en causalidad derivativa*. Si  $(n_i)_i$  representa al número de elementos C e I en causalidad integral y  $(n_i)_d$  para el caso de los elementos dinámicos C e I que aceptan causalidad derivativa, se tiene, que

$$q = (n_i)_i - (n_i)_d \quad (2.28)$$

donde el rango estructural permite determinar la estabilidad asintótica de un sistema dinámico. Esto es posible determinarlo por el teorema siguiente:

**Teorema 1** [13]. Una condición necesaria y suficiente para que no exista una estabilidad asintótica de un sistema descrito por (2.16) y (2.17), es que el rango estructural  $q$  de la matriz  $A_p$  sea menor que  $n$ . Para el cual existen  $n - q$  valores característicos cero de  $A_p$ .

Para calcular el rango estructural el cual permite determinar la controlabilidad estructural y la observabilidad estructural de un sistema dinámico representado en Bond Graph, se requiere conocer el concepto de dualización de fuentes. La dualización de fuentes o detectores consiste en convertir una fuente o detector de esfuerzo a uno de flujo, respectivamente y/o viceversa.

**Definición 4** [13]. El rango estructural para  $q_c$  (controlabilidad) de la matriz concatenada  $[A_p B_p]$  asociada con un modelo en Bond Graph es igual al número de elementos dinámicos  $C$  e  $I$  en causalidad integral en el BGI que acepten causalidad derivativa cuando se construye el BGD y cuando se realiza una dualización máxima de fuentes. El número de elementos en causalidad integral en el BGI que permanecen en causalidad integral en el BGD se denotan como  $t_s$ .

**Definición 5** [13]. El rango estructural para  $q_o$  (observabilidad) de la matriz concatenada  $[A C]^T$  asociada con un modelo en Bond Graph es igual al número de elementos dinámicos  $C$  e  $I$  en causalidad integral en el BGI que acepten causalidad derivativa al construir el BGD y cuando se realiza una dualización máxima de detectores. El número de elementos en causalidad integral en el BGI que permanecen con causalidad integral en el BGD se denotan como  $t_d$ .

Las siguientes propiedades hacen referencia a las ecuaciones de estado (2.16) y (2.17) así como a la matriz  $S$  descrita en (2.14).

**Propiedad 1** [14]. El rango estructural de  $[A_p B_p]$  es igual a:

\* El rango de la matriz  $S_c = [S_{11} S_{12} S_{13}]$

\*  $n - t_s$

**Propiedad 2** [14]. El rango estructural de  $[A_p C_p]^T$  es igual a:

\* El rango de la matriz concatenada  $S_o = [S_{11} S_{21} S_{31}]^T$

\*  $n - t_d$

Las propiedades 1 y 2 permiten asegurar que el rango estructural es igual al rango de las matrices concatenadas  $S_c$  y  $S_o$ , si y solo si el sistema es conservativo de energía. Las propiedades de la matriz estructura de unión (2.14) para los sistemas conservativos no obedecen a éstas propiedades.

El análisis de controlabilidad y observabilidad en Bond Graph se resumen en los siguientes dos teoremas:

**Teorema 1** [14]. El sistema de  $[A_p B_p]$  es estructuralmente controlable si y sólo si:

- Todos los elementos almacenadores  $C$  e  $I$  en causalidad integral en el BGI están causalmente conectados con una fuente.
- El rango estructural de  $[A_p B_p]$  es igual al orden mínimo  $n$ .

**Teorema 2** [14]. El sistema de  $[A_P C_P]^T$  es estructuralmente observable si y sólo si:

- Todos los elementos almacenadores  $C$  e  $I$  en causalidad integral en el BGI están causalmente conectados con un detector.
- El rango estructural de  $[A_P C_P]^T$  es igual al orden mínimo  $n$ .

Otra forma de determinar el rango estructural de  $A_P$  es mediante la construcción del BGD. En el cual todos los elementos almacenadores deben aceptar causalidad derivativa.

# Capítulo 3

## Modelado de una Central Hidroeléctrica con Vibraciones en el Dominio Físico

### 3.1. Aportación

En la actualidad las técnicas para modelar sistemas físicos deben de ser más eficientes con el propósito de que el modelo se aproxime más al sistema físico que se esté analizando. En este capítulo se obtiene un modelo de una central hidroeléctrica analizando las partes físicas que la componen (hidráulico, mecánico y eléctrico). Uno de los principales objetivos de este capítulo es aplicar la metodología de modelado en BG, que facilita el análisis de sistemas que se encuentran en diferentes dominios físicos los cuales trabajan en conjunto para realizar una tarea específica; en este caso es la generación de energía eléctrica por medio de una energía hidráulica. Las vibraciones en la mayoría de los sistemas mecánicos son despreciadas para propósito de análisis, sin embargo, utilizando la metodología de Bond Graph es posible analizar un modelo con vibraciones. Las vibraciones pueden generar fallas considerables debido a que produce fracturas en los materiales y a medida que éstas se van incrementando llegan a la destrucción del material o equipo que está siendo sometido a ellas; si no se consideran en el diseño de las obras como son las civiles, o en el caso de los acoplamientos mecánicos-eléctricos. Por esto se propone un modelo con vibraciones en la turbina hidráulica, el cual se modela en el dominio físico para su estudio.

Un aspecto importante en el capítulo es el modelo mostrado del generador síncrono en dq0 que facilita el manejo de las ecuaciones del generador de una forma más simple ya que con

esta transformación se eliminan las variables que van cambiando con el tiempo; empleando la metodología de Bond Graph es posible crear el modelo del generador síncrono, lo cual además de la obtención de las ecuaciones de estado, permite el análisis y estudio del generador empleando valores tomados directamente de los elementos que lo conforman en el sistema físico. También, se crean los modelos de la sección hidráulica y mecánica donde se encuentran ubicadas las vibraciones que son las perturbaciones en este sistema físico.

## 3.2. Vibración

La vibración es el estudio del movimiento repetitivo en los objetos, relacionándolos a un marco de referencia estacionario o a una posición nominal (usualmente equilibrio). La vibración es evidente en cualquier parte y en muchos casos afecta enormemente en la naturaleza de los diseños de ingeniería. Las vibraciones son un factor el cual frecuentemente limita el desempeño de los dispositivos creados en ingeniería. Así, la vibración es perjudicial y debe eliminarse o reducirse.

La explicación física del fenómeno de la vibración concierne a la interpretación entre la energía potencial y la energía cinética. Un sistema de vibración debe de tener componentes que almacenen energía potencial y los que la liberen en una masa como energía cinética en forma de movimiento (vibración). El movimiento de una masa, cede energía cinética al elemento de almacenamiento el cual tiene energía potencial. La vibración puede ocurrir en muchas direcciones y puede ser el resultado de la interacción de muchos objetos [17].

### 3.2.1. Modelo de masa resorte

Las cantidades fundamentales de la cinemática usadas para describir el movimiento de las partículas son el desplazamiento, velocidad y los vectores de aceleración. Añadiendo, las leyes de los estados físicos como el movimiento de la masa con velocidad cambiante, es determinando por la suma de fuerzas actuando sobre la masa. Un ejemplo sencillo empleado para la vibración es el resorte el cual está atado a un objeto fijo y una masa es atada al otro lado de éste, lo cual se muestra en la Figura 3.1 [16].

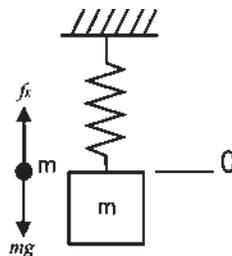


Figura 3.1 Esquema de cuerpo libre: oscilador masa-resorte de un grado de libertad.

Ignorando la masa del resorte las fuerzas que actúan sobre la masa con la fuerza de gravedad que empuja hacia abajo ( $mg = 0$ ) y la fuerza del resorte que empuja de vuelta hacia arriba ( $f_k$ ). Sin la masa, el resorte se estira a la posición del nivel de  $x_0 = 0$  como en la Figura 3.2. La fuerza natural del resorte puede deducirse haciendo un experimento estático

simple. Así, si sucesivamente más masas son atadas al resorte, la fuerza de gravedad ocasiona que el resorte se estire más y si el valor de las masas es registrado, de acuerdo al desplazamiento final del resorte y a medida que transcurre el tiempo más masas son adheridas, la gráfica de fuerza (donde la masa es  $m$ , el tiempo de aceleración de acuerdo a la gravedad denotada por  $g$ ), contra este desplazamiento, denotado por  $x$ , la curva producida es similar a la que se muestra en la Figura 3.3. Nótese en la Figura 3.3 que el valor que existe entre  $x$  y  $0$  es de 20mm (milímetros), la curva esta formada por una línea recta. Esto indica que para deflexiones menores a 20mm y fuerzas menores de 1000N (newtons), la fuerza aplicada por el resorte a la masa es proporcional al estiramiento del resorte de la Figura 3.2. La constante de proporcionalidad es la inclinación en la línea recta entre el 0 y los 20mm. Para el resorte de la Figura 3.3, su constante es 50 N/mm, ó  $5 \times 10^4$  N/mm. Así, la ecuación que describe la fuerza aplicada por el resorte se denota por  $f_k$ , a la masa es

$$f_k = kx \tag{3.1}$$

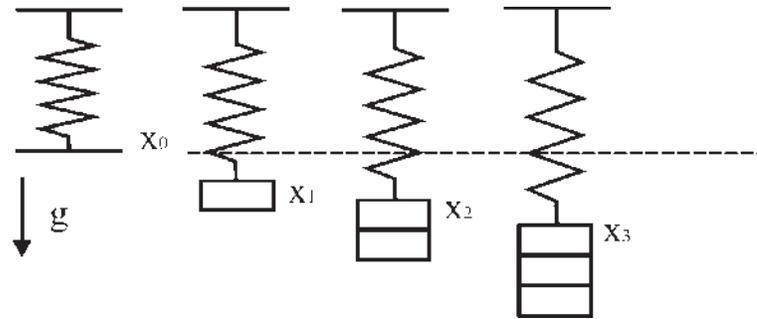


Figura 3.2 Esquema de masas resorte con resorte sin masa, mostrando su posición de equilibrio estático, seguido de los cambios provocados por los incrementos de masa.

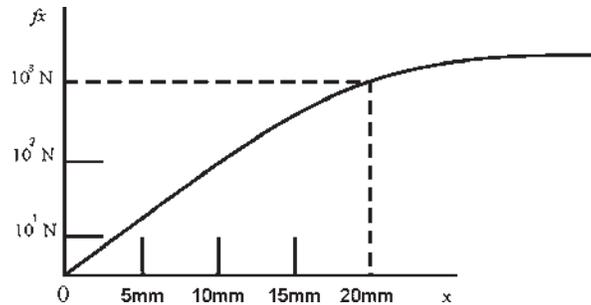


Figura 3.3 Curva de la deflexión estática por el resorte de la Figura 3.2.

Nótese que la relación de la ecuación (3.1) es lineal. Si el desplazamiento del resorte es mayor que 20mm para el experimento de la Figura 3.2, la relación es no lineal, como se indica en la Figura 3.3.

Otro ejemplo de vibraciones, diferente del mostrado en la Figura 3.1 se presenta en el diagrama de cuerpo libre de la masa Figura 3.4, del cual se asume que la masa se mueve sin

una fricción sobre la superficie a lo largo de la dirección de  $x$ , donde la única fuerza que esta actuando sobre la masa es la fuerza del resorte. El movimiento del resorte debe ser en su rango lineal y la sumatoria de las fuerzas en la dirección de  $x$  debe igualarse al producto de la masa por la aceleración. Para el sistema de la Figura 3.4,

$$m\ddot{x}(t) + kx(t) = 0 \tag{3.2}$$

donde  $\ddot{x}(t)$  denota la segunda deriva de tiempo del desplazamiento.

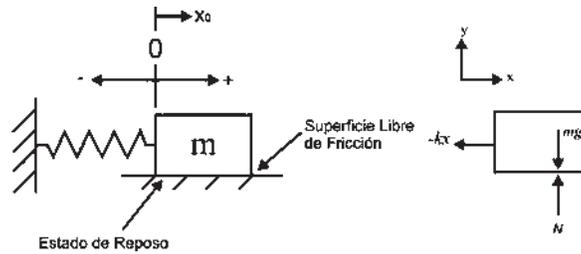


Figura 3.4 Sistema de masa-resorte dado un desplazamiento inicial en  $x_0$ , desde el estado de reposo, de su posición de equilibrio y partiendo de una velocidad de cero.

A continuación se muestra en la Figura 3.5 tres tipos de sistemas mecánicos: sistema de masa-resorte, eje rotatorio y el balanceo del péndulo los cuales pueden ser descritos por la ecuación (3.2).

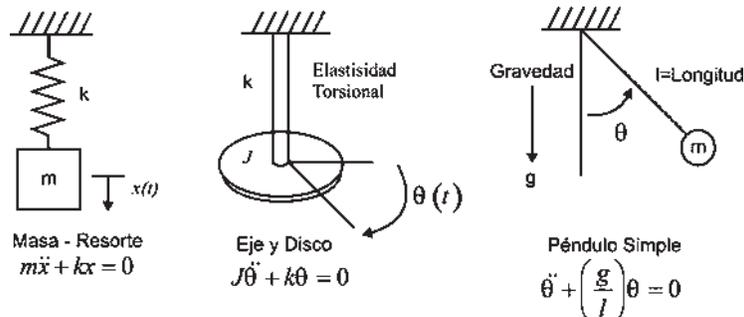


Figura 3.5 Sistemas de un grado de libertad (pequeños desplazamientos).

Uno de los objetivos en el análisis de vibración es el de predecir una respuesta del sistema sujeto a entradas de vibración. Una solución a (3.2) es,

$$x(t) = A \cdot \sin(\omega_n t + \phi) \tag{3.3}$$

donde  $A$  es la amplitud,  $\omega_n$  la frecuencia natural angular y  $\phi$  la fase. La Figura 3.6 muestra la respuesta periódica de un sistema de masa resorte como el descrito en la Figura 3.2.

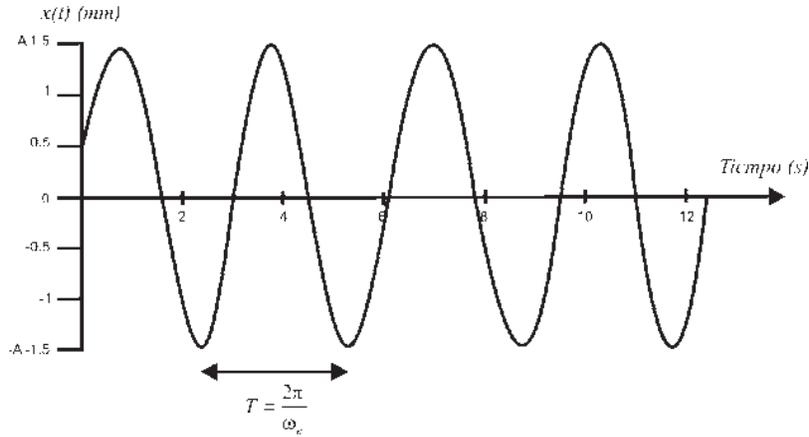


Figura 3.6 Respuesta del sistema de masa resorte para un,  $x_0=0.5\text{mm}$ ,  $v_0=2\sqrt{2}\text{ mm/s}$ ,  $\omega_n=2\text{ rad/s}$  y  $A=1.5\text{mm}$ .

Para determinar la respuesta del sistema son empleadas condiciones iniciales,

$$x_0 = x(0) = A \cdot \sin(\omega_n 0 + \phi) = A \cdot \sin \phi \quad (3.4)$$

y

$$v_0 = \dot{x}(0) = \omega_n \cdot A \cdot \cos(\omega_n 0 + \phi) = \omega_n \cdot A \cdot \cos \phi \quad (3.5)$$

Resolviendo para A y  $\phi$

$$A = \frac{\sqrt{\omega_n^2 x_0^2 + v_0^2}}{\omega_n} \quad \text{y} \quad \phi = \tan^{-1} \frac{\omega_n x_0}{v_0} \quad (3.6)$$

Sustituyendo (3.6) en (3.4) se obtiene,

$$x(t) = \frac{\sqrt{\omega_n^2 x_0^2 + v_0^2}}{\omega_n} \sin\left(\omega_n t + \tan^{-1} \frac{\omega_n x_0}{v_0}\right) \quad (3.7)$$

En la Figura 3.7 se ilustra el movimiento del sistema masa-resorte es llamado movimiento armónico simple o movimiento oscilatorio. Al sistema masa-resorte también se le refiere como oscilador armónico simple así también como sistema de un simple grado de libertad sin amortiguamiento [16].

### 3.2.2. Movimiento armónico

La propiedad cinética fundamental de las partículas en movimiento en una dimensión son desplazamiento, velocidad y aceleración. Para el movimiento armónico de un sistema simple de masa-resorte es dado por las ecuaciones (3.3), (3.4) y (3.5). En la Figura 3.7 se muestra, la relación de desplazamiento, velocidad y aceleración.

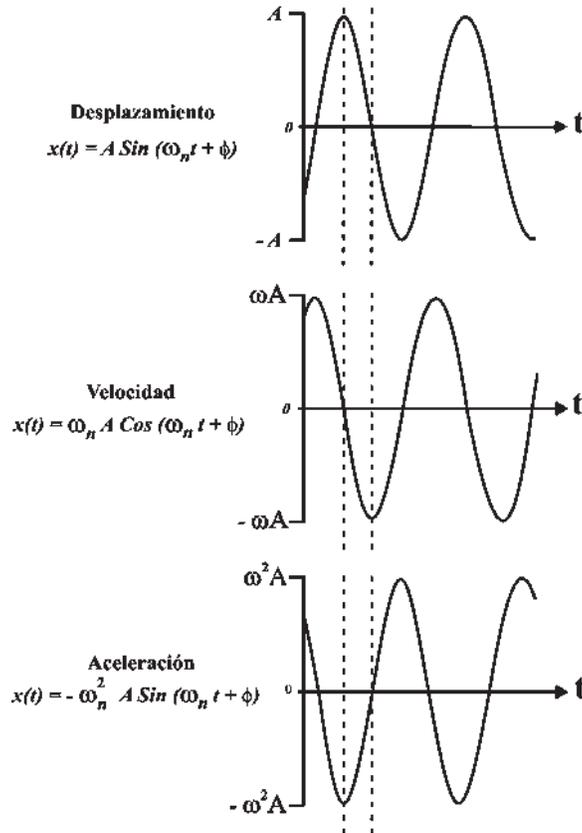


Figura 3.7 Sumatoria de desplazamiento, velocidad y aceleración.

De acuerdo a las ecuaciones (3.3), (3.4) y (3.5) con la Figura 3.7 para sistemas con una frecuencia natural mayor a 1 rad/s, la amplitud relativa de la repuesta a la velocidad es mayor que la repuesta del desplazamiento por el múltiplo de  $\omega_n$ , y la respuesta a la aceleración es mayor por el múltiplo de  $\omega_n^2$ . Para sistemas con una frecuencia menor a 1, la velocidad y la aceleración tienen pequeñas amplitudes relativas como el desplazamiento. También note que la velocidad está a  $90^\circ$  fuera de fase con la posición esto es  $\sin\left(\omega_n t + \frac{\pi}{2} + \phi\right) = \cos(\omega_n t + \phi)$ , hasta que la aceleración esté  $180^\circ$  fuera de fase con la posición y  $90^\circ$  fuera de fase con la velocidad. La frecuencia natural  $\omega_n$  empleada en las ecuaciones (3.3) y (3.7) describe la repetitividad de las oscilaciones.

### 3.2.3. Viscosidad de amortiguamiento

La respuesta del modelo masa-resorte, determina que el sistema oscila de forma indefinida. A través de la observación se puede comprobar que incluso los sistemas con más libertad de oscilación de movimiento, eventualmente las oscilaciones van desapareciendo hasta que llega a ser cero. La forma de representar un modelo de amortiguamiento cuando se basa parcialmente en la observación física y la conveniencia matemática. La teoría de las ecuaciones diferenciales sugiere que agregando un término a la ecuación (3.2) de la forma  $c\dot{x}$ , donde  $c$  es una constante, resultando en la solución de  $x(t)$  la cual se va disminuyendo. La observación física se adapta a este modelo y es empleada al modelo con amortiguamiento o decaimiento en una variedad de sistemas mecánicos. Este tipo de amortiguamiento se le conoce como viscosidad de amortiguamiento.

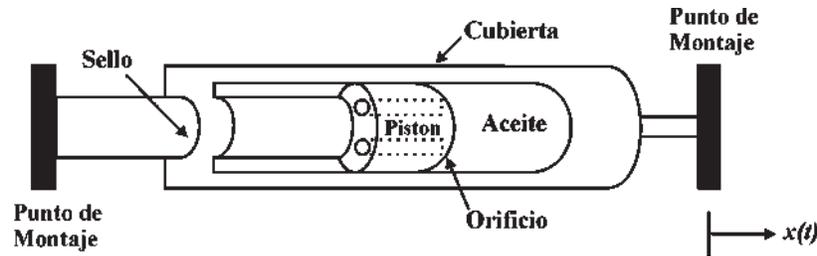


Figura 3.8 Esquema de un amortiguador que genera una fuerza de amortiguamiento  $f_c = c\dot{x}$ , donde  $x(t)$  es el movimiento de la cubierta del pistón.

Dado que el resorte forma un modelo físico para almacenamiento de energía cinética y genera la vibración, el amortiguador forma la respuesta del sistema mecánico del modelo físico para la disipación de energía y amortiguamiento. Un amortiguador consiste en un pistón que esta acoplado a un cilindro el cual contiene aceite como se indica en la Figura 3.8. El flujo laminar del aceite que se genera a través de las perforaciones cuando el pistón se mueve ocasiona una fuerza de amortiguamiento en el pistón, donde la fuerza es proporcional a la velocidad del pistón, en dirección opuesta a la del movimiento del pistón. Esta fuerza de amortiguamiento, denotada por  $f_c$  tiene la forma,

$$f_c = c\dot{x}(t) \quad (3.8)$$

donde  $c$  es la constante de proporcionalidad relacionada a la viscosidad del aceite.

Para el caso donde el amortiguador esté lleno de aceite, la constante  $c$  puede ser determinada por los principios de los fluidos. En la mayoría de los casos,  $f_c$  es proporcionada por los efectos equivalentes ocurridos en el material formado por el dispositivo. Un ejemplo es los efectos del fluir del aire y la oscilación de una masa. En todos los casos en donde la fuerza de amortiguamiento  $f_c$  es proporcional a la velocidad, el esquema del amortiguador es empleado para indicar la presencia de esta fuerza. Esto es

mostrado en la Figura 3.9. El coeficiente de amortiguamiento de un sistema no puede ser medido tan simple como la masa y la rigidez del sistema.

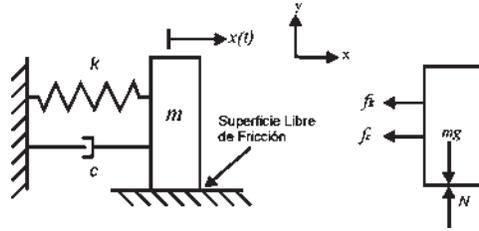


Figura 3.9 Diagrama de un sistema de un grado de libertad con un amortiguador de viscosidad.

Utilizando un balance de fuerzas en la masa de la Figura 3.9 en dirección de  $x$ , la ecuación de movimiento para  $x(t)$  se forma

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = 0 \quad (3.9)$$

En condiciones iniciales  $x(0) = x_0$  y  $\dot{x}(0) = v_0$ .

Una solución a la ecuación (3.9) es,

$$\lambda_{1,2} = -\frac{c}{2m} \pm \frac{1}{2m} \sqrt{c^2 - 4km} \quad (3.10)$$

Para el caso especial sin amortiguamiento ( $c = 0$ ).

$$m\lambda^2 + k = 0 \quad (3.11)$$

Con el propósito de análisis, es conveniente definir el coeficiente de amortiguamiento crítico  $c_{cr}$  por

$$c_{cr} = 2m\omega_n = 2\sqrt{km} \quad (3.12)$$

donde  $\omega_n$  es la frecuencia natural sin amortiguamiento. Además, el número no dimensional  $\zeta$ , llamado razón de amortiguamiento, definida por

$$\zeta = \frac{c}{c_{cr}} = \frac{c}{2m\omega_n} = \frac{c}{2\sqrt{km}} \quad (3.13)$$

Puede utilizarse para representar los tres tipos de soluciones de la ecuación característica. Rescribiendo las raíces dadas por la ecuación (3.10)

$$\lambda_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \sqrt{\zeta^2 - 1} \quad (3.14)$$

Quedando claro ahora que la razón de amortiguamiento  $\zeta$  determina tanto si las raíces son complejas o reales. Esto determina la respuesta natural del sistema de amortiguamiento de un simple grado de libertad. Para una masa positiva, amortiguamiento, y coeficiente de rigidez, hay tres casos los cuales se analizarán a continuación:

*Movimiento Sub - Amortiguado*

En este caso la razón de amortiguamiento  $\zeta$  es menor de 1 ( $0 < \lambda < 1$ ) y la ecuación (3.14) es negativa, resultando el par de raíces complejas conjugadas.

*Movimiento Sobre Amortiguado*

En este caso el valor del amortiguamiento es mayor que 1 ( $\zeta > 1$ ). La ecuación (3.14) es positiva, por lo tanto tiene raíces distintas y reales. Esto es

*Movimiento Críticamente Amortiguado*

Para este último caso, la proporción de amortiguamiento es exactamente 1 ( $\zeta = 1$ ) y la ecuación (3.14) es igual a cero. Esto corresponde a que el valor de  $\zeta$  que separa el movimiento oscilatorio del movimiento no oscilatorio [16].

**3.2.4. Velocidades críticas en discos rotativos**

Una de las consideraciones en el diseño de máquinas rotativas se debe al fenómeno de vibración a velocidades críticas. Este fenómeno, se presenta cuando está un disco en un eje girando a una velocidad equivalente a la frecuencia natural de deformación en el sistema eje-disco. Esto crea una condición de resonancia, lo cual origina una deflexión del eje, que en la mayoría de los casos provoca la destrucción del sistema. La naturaleza y los factores de resonancia son valores calculados para el diseño, seguridad de los sistemas y fabricación de controles que posteriormente son enviados para su producción. La formulación analítica para el problema de la velocidad crítica, indica el límite de velocidad que puede alcanzar este tipo de sistemas antes de sufrir un daño y proporciona una forma de evitar la resonancia en las velocidades críticas.

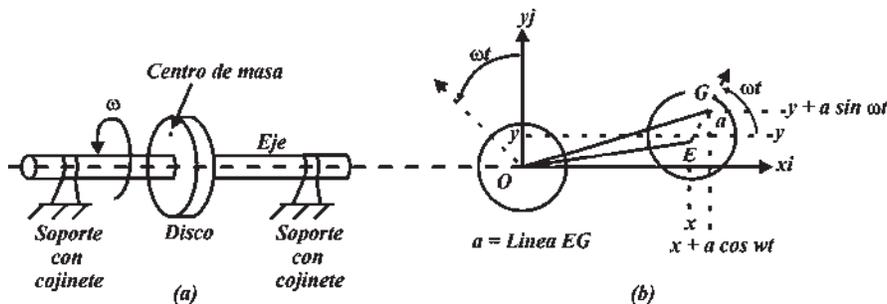


Figura 3.10 Modelo esquemático de un disco giratorio sobre un eje con su correspondiente centro de masa (G) la posición neutral del eje (O) y el centro del eje rotacional (E): a) vista de lado: b) vista del final.

Si el modelo de disco-masa rotatoria no es cercanamente homogéneo o simétrico por alguna imperfección, su centro geométrico y de gravedad están distanciados, descrito en la Figura 3.10 a), la cual presenta el modelo simplificado del eje del motor eléctrico y el sistema del rotor o las aspas de una turbina. El eje está obligado a moverse de forma radial por medio de dos soportes. Como el eje se encuentra rotando en su eje con una velocidad angular  $\omega$ , el error del centro de gravedad empuja el eje fuera de la del centro, provocando que éste se doble al estar girando. Esto se le conoce como *giradores en espiral*.

Las fuerzas que actúan en el centro de la masa de la Figura 3.10 son la fuerza inercial, de amortiguamiento (interna o externa) y elástica del eje. La fuerza balanceada en forma de vector corresponde a,

$$m\ddot{r} = -kxi - kyj - c\dot{x}i - c\dot{y}j \quad (3.15)$$

donde  $i$  y  $j$  son vectores unitarios correspondientes al eje  $x$  y  $y$  respectivamente,  $r$  la posición del vector definido por la línea OG,  $m$  la masa del disco,  $c$  es el coeficiente de amortiguamiento del eje del sistema, y  $k$  el coeficiente de rigidez proporcionado por el eje del sistema. De la Figura 3.11, el vector  $r$  puede escribirse en términos de los vectores  $i$  y  $j$  como

$$r = (x + a \cos \omega t)i + (y + a \sin \omega t)j \quad (3.16)$$

Encontrando la segunda derivada del centro de masa

$$\ddot{r} = (\ddot{x} - a\omega^2 \cos \omega t)i + (\ddot{y} - a\omega^2 \sin \omega t)j \quad (3.17)$$

Sustituyendo la ecuación (3.16) en (3.17) es

$$(m\ddot{x} - ma\omega^2 \cos \omega t + c\dot{x} + kx)i + (m\ddot{y} - ma\omega^2 \sin \omega t + c\dot{y} + ky)j = 0 \quad (3.18)$$

Dado que este es un vector ecuación, es el equivalente a dos ecuaciones escalares es

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = ma\omega^2 \cos \omega t \quad (3.19)$$

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + ky = ma\omega^2 \sin \omega t \quad (3.20)$$

Estas dos ecuaciones describen la respuesta del sistema masa-resorte rotativo no balanceado [17].

### 3.3. Modos de vibración

Un modo de vibración se define como un patrón o forma característica en el que oscila un sistema. La mayoría de los sistemas tienen muchos modos de vibración, se describen como elementales los tres primeros modos ya que los siguientes se derivan de éstos. La tarea del análisis modal es la de determinar la forma de los modos de vibración que presenten los componentes en un sistema (no siendo en nuestro caso un factor a considerar el modo de vibración). La vibración de una estructura es siempre la combinación o una mezcla de todos los modos de vibración, pero no todos están excitados al mismo grado. Por ejemplo, si se toca una campana suavemente, lo primero que se va a oír es el modo fundamental de vibración, pero si se le toca más fuerte, otros modos son excitados y los tonos se escucharan con mas intensidad.

A continuación se describen los tres modos de vibraciones principales de los cuales se derivan los siguientes modos en base a ejemplos.

#### *Modo 1 de Vibración*

Es uno de los más comunes que se desarrolla en el entorno visto, es el ejemplo de una barra ya sea metálica o de otro material ya que el material sólo determina la resistencia y el tiempo que va soportar el estar sometida a una fuerza externa antes de que llegue el momento de fractura del material. Tomando al metal como el material del que está compuesto la barra, a continuación es mostrado este fenómeno en la Figura 3.11

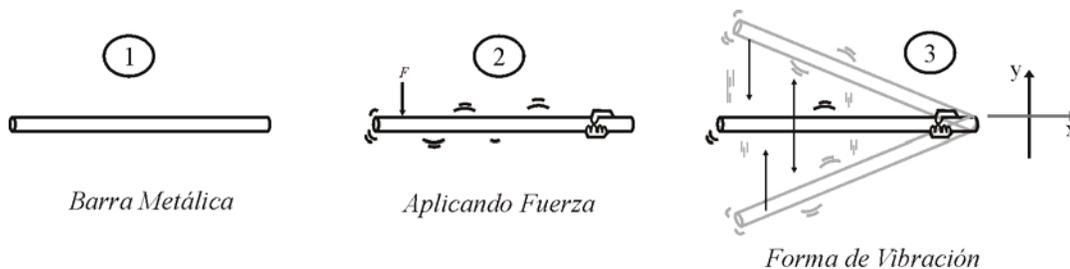


Figura 3.11 Modo de vibración 1.

En el ejemplo de la Figura 3.11 la barra es sujeta de un extremo y del otro se aplica una fuerza la cual provoca internamente que el material vibre, lo que hace notorio a este movimiento de vibración es el hecho de que la fuerza contraria que mantiene fija la barra no ha sido lo suficientemente mayor que la que esta en el otro extremo y una vez que está supere a la fuerza contraria se presentara la vibración. Para este caso la forma de vibración se comportará con un movimiento que va de arriba hacia abajo en el material, este movimiento es una forma de representar el modo uno de vibración en el cual los materiales solo tienen externa e internamente este movimiento. Este fenómeno también es posible apreciarlo si se toma la barra de un extremo y se golpea el otro contra un material rígido lo que tendrá como consecuencia el modo uno de vibración, cabe destacar la forma del objeto

que se éste empleando y su material ya que son factores que hacen depender de que sea menos o mas notoria la vibración.

*Modo 2 de Vibración*

Este modo de vibración es poco visto en la naturaleza de los materiales, ya que como en todo ambiente en el que se encuentran los sistemas en ocasiones es necesario que una fuerza externa al sistema actúe en él para provocar un cambio de su estado, en ocasiones deseado y en otras no, éste último conocido como perturbaciones las cuales generan comúnmente cambios negativos en la salida del sistema. El modo 2 de vibración que se muestra en la Figura 3.12 es sólo uno de los ejemplos que se pueden presentar.

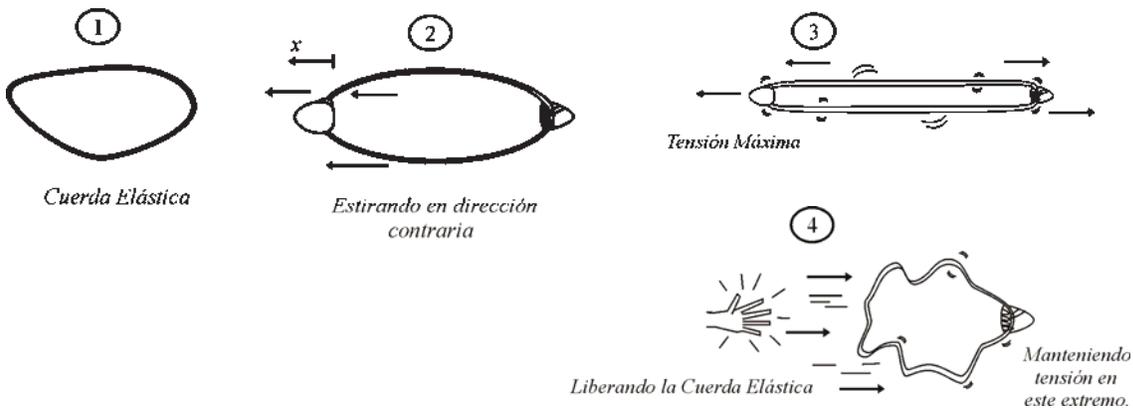


Figura 3.12 Modo de vibración 2.

Para este modo de vibración es considerado un material elástico, por ejemplo, una liga donde la fuerza que se le está aplicando ocasiona la deformación de esta y una vez que esta fuerza es retirada, la liga regrese a la forma original que tenía; pero puede presentarse el caso donde la fuerza que se le esta aplicando sea tan grande que al quitarla que el material no vuelva a la forma que tenía antes de aplicar una fuerza externa, es así como es posible explicar el modo 2 que no es otro que la Ley de Hooke. Este modo de vibración se describe al inicio como poco común ya que de forma natural es muy difícil que se presente y es más bien un efecto o movimiento deseado para uso en algunas tareas. En conclusión el modo 2 de vibración se presenta de forma longitudinal y el comportamiento es el del material que se atrae y contrae.

*Modo 3 de Vibración*

Este modo de vibración a diferencia de los modos uno y dos depende en gran parte del tipo de material empleado en la estructura o sistema físico. Con el fin de que tenga la forma de vibración que lo caracteriza.

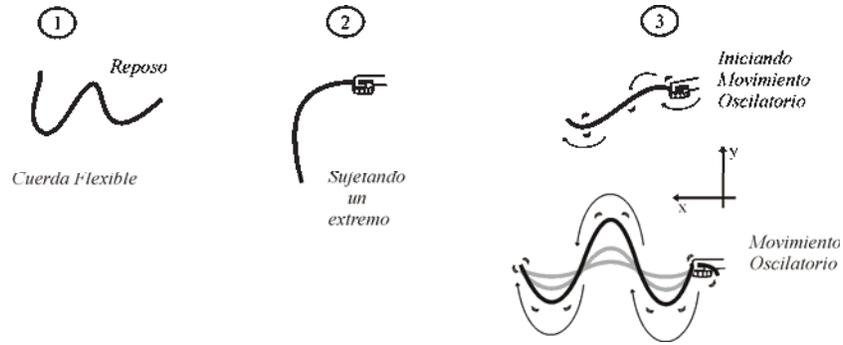


Figura 3.13 Modo de vibración 3.

El ejemplo que se muestra en la Figura 3.13 es el de una cuerda y tomándose de un extremo y el otro se mantiene fijo, y una vez hecho esto se comienza a efectuar el movimiento en la cuerda de forma oscilatoria dando forma como la de una onda seno o coseno. Este tipo de vibración es muy común en los materiales que son maleables.

### Modelo de un sistema de vibración y simulación

Los sistemas dinámicos pueden estar sometidos, como ocurre con frecuencia, a la acción de excitaciones percursivas dándose origen a una respuesta transitoria cuyas características son de vital importancia en el diseño de máquinas, ya que pueden generarse niveles excesivos de esfuerzos sobre algunas de sus componentes, como la siguiente posibilidad de falla o ruptura.

#### Acoplamiento de coordenadas.

En esta parte se propone analizar un aspecto importante en el estudio de las vibraciones en un sistema mecánico y es el como cambian las ecuaciones del movimiento de éste tipo de sistemas, cuando se escogen distintos sistemas de coordenadas que especifican su configuración. Con este fin se considera una barra rígida Figura 3.14 cuyo centro de masa es el punto G y apoyada sobre dos resortes con diferente rigidez [18].

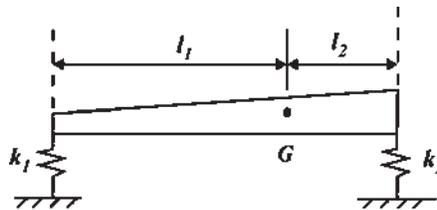


Figura 3.14 Modelo de coordenadas.

Se tomará la posición de equilibrio estático como posición de referencia, y como, coordenadas, el desplazamiento lineal  $x$  de un punto arbitrario de la barra O y la rotación de la barra  $\theta$  alrededor de dicho punto [18].

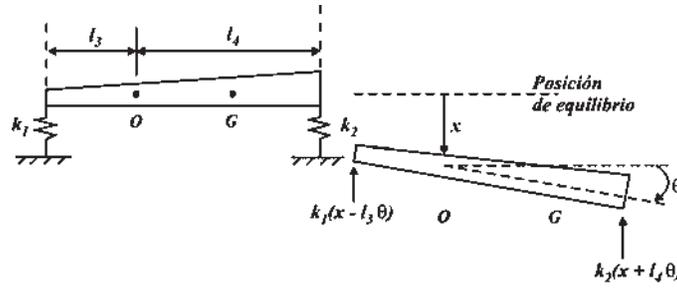


Figura 3.15 Modelo de coordenadas con posición de equilibrio.

Suponiendo pequeños desplazamientos, se pueden escribir las ecuaciones de Newton, obteniéndose:

$$-k_1(x - l_3\theta) - k_2(x + l_4\theta) = m \cdot a_G \quad (3.21)$$

como

$$x_G = x + (l_1 - l_3)\theta$$

se cumple

$$a_G = \ddot{x} + (l_1 - l_3)\ddot{\theta}$$

Sustituyendo el valor de  $a_G$  en (3.21) y, después de ordenar, se tiene

$$m\ddot{x} + m(l_1 - l_3)\ddot{\theta} + (k_1 + k_2)x + (l_4k_2 - l_3k_1) = 0 \quad (3.22)$$

En general, la ecuación que describe la rotación plana de un cuerpo rígido alrededor de un punto arbitrario 0 es:

$$M_0 \cdot \bar{k} = I_0 \cdot \ddot{\theta} \cdot \bar{k} + m \cdot \overline{OG} \cdot \bar{a}_0 \quad (3.23)$$

donde  $\bar{k}$  se refiere a un vector unitario perpendicular al plano del movimiento, e  $I_0$  es el momento de inercia del sistema respecto a 0. Aplicando (3.23) al problema en cuestión se obtiene, después de ordenar:

$$m(l_1 - l_3)\ddot{x} + I_0\ddot{\theta} + (k_2l_4 - k_1l_3)x + (k_1l_3^2 + k_2l_4^2)\theta = 0 \quad (3.24)$$

o sea, en forma matricial, la ecuación del movimiento será:

$$\begin{bmatrix} m & m(l_1 - l_3) \\ m(l_1 - l_3) & I_0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & l_4k_2 - l_3k_1 \\ k_2l_4 - k_1l_3 & k_1l_3^2 + k_2l_4^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ \theta \end{Bmatrix} = [0] \quad (3.25)$$

Como las ecuaciones que describen el movimiento (3.22) y (3.24) se expresan simultáneamente en función de  $x(t)$  y  $\theta(t)$ , estas variables estarán relacionadas entre sí. Entonces se dice que el movimiento de las masas está acoplado [18].

Considérese el modelo de vibración mecánica de la Figura 3.16 y utilizando la ecuación diferencial que rige el comportamiento de un sistema de un grado de libertad, cuya configuración se describe mediante la coordenada  $x(t)$ , bajo el efecto de una excitación  $f(t)$  [18]. Obtener las variables de movimiento que rigen al sistemas y simularlas.

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F(t) \quad (3.26)$$

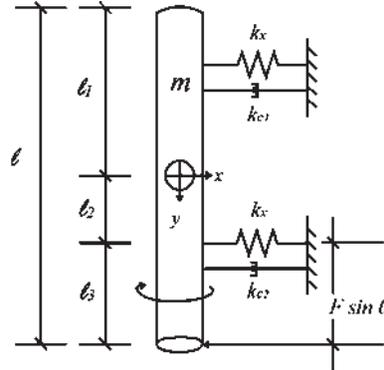


Figura 3.16 Sistema de vibración masa-amortiguadores-resorte.

El sistema físico de la Figura 3.16 consiste de una barra acoplada a un sistema de amortiguamiento sujeto a una estructura fija. A éste sistema es posible efectuarle dos análisis uno para una fuerza aplicada constantemente y otra que sea constante pero oscilando.

Solución del procedimiento de obtención de coordinas descrito anteriormente se obtiene que:

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & c_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (k_1 + k_2) & (k_2 l_2 - k_1 l_1) \\ (k_2 l_2 - k_1 l_1) & k_1 l_1^2 + k_2 l_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \theta \end{bmatrix} = [u] \quad (3.27)$$

De la ecuación (3.27) obteniendo su representación de la forma (2.16) se tiene que

$$\begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -c_1/m & 0 \\ 0 & -c_2/m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} -(k_1 + k_2)/m & (k_1 l_1 + k_2 l_2)/m \\ -(k_1 l_1 + k_2 l_2)/J & (k_1 l_1^2 + k_2 l_2^2)/m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ \theta \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} -1/m & 0 \\ 0 & -1/J \end{bmatrix} u \quad (3.28)$$

donde la  $m$  es la masa de la barra,  $J$  es la inercia,  $c$  es la constante de amortiguamiento,  $k$  es la constante de rigidez,  $f$  es la fuerza y  $l$  es la longitud [18]. Realizando una asignación de variables, para obtener el modelo en variables de estado,

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_3 & \dot{x}_3 &= \ddot{x}_1 \\ \dot{x}_2 &= x_4 & \dot{x}_4 &= \ddot{\theta} = \ddot{\theta} \end{aligned}$$

Se obtiene el modelo dado por,

$$\begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \\ \ddot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \beta_{11} & \beta_{12} & \alpha_{11} & 0 \\ \beta_{21} & \beta_{22} & 0 & \alpha_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -1/m & 0 \\ 0 & -1/J \end{bmatrix} u \quad (3.29)$$

donde los términos de

$$\begin{aligned} \alpha_{11} &= -c_1/m & \alpha_{12} &= 0 & \beta_{11} &= -(k_1+k_2)/m & \beta_{12} &= (k_1l_1-k_2l_2)/m \\ \alpha_{21} &= 0 & \alpha_{22} &= -c_2/m & \beta_{21} &= (k_1l_1-k_2l_2)/J & \beta_{22} &= -(k_1l_1^2-k_2l_2^2)/J \\ u &= -f_3 \cdot l_3 \cdot \sin \omega t \end{aligned}$$

La simulación de (3.29) se realiza utilizando el programa **Simnon** que simula modelos matemáticos de sistemas físicos y lineales. Los valores numéricos de los elementos son:  $m=100$ ,  $l_1=5$ ,  $l_2=2$ ,  $l_3=3$ ,  $l_4=10$ ,  $J=137.044$ ,  $F_1=200$ ,  $c_1=c_2=1.8$ ,  $k_1=k_2=2.40$ , valores ficticios para este ejemplo, tiene el comportamiento de:

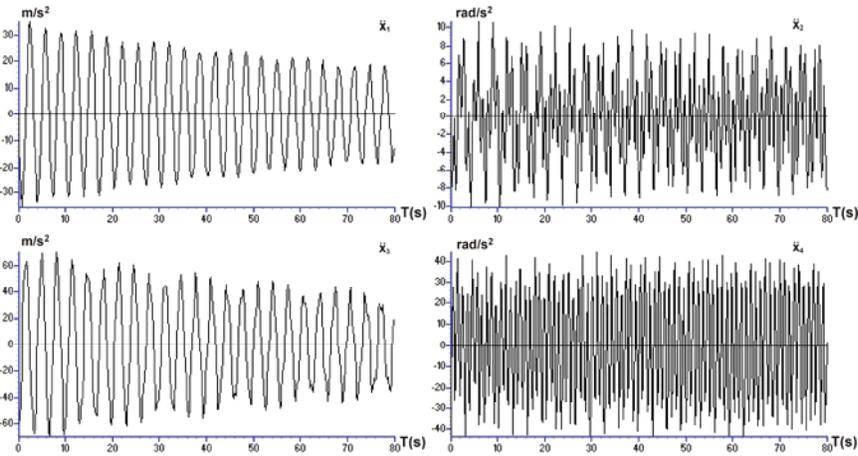


Figura 3.17 Gráficas de las variables de estado ante una entrada constante.

La Figura 3.17 muestra la respuesta del modelo de vibración simulado en **Simnon** para cuando se tiene un sistema con una fuente de alimentación constante, donde las cuatro variables en el sistema son: aceleración ( $\ddot{x}_1$  y  $\ddot{x}_3$ ) y aceleración angular ( $\ddot{x}_2$  y  $\ddot{x}_4$ ) y se observa que están afectadas por las vibraciones aún después de un tiempo.

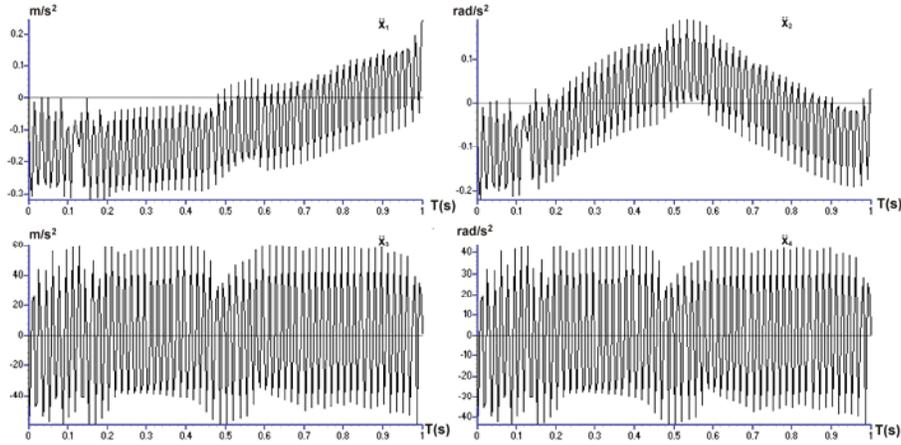


Figura 3.18 Gráficas de las variables de estado ante una entrada sinusoidal.

La Figura 3.18 muestra las variables de estado del sistema de vibración ante una entrada oscilatoria y variante en el tiempo, empleando en este caso una entrada sinusoidal [18].

En la siguiente sección se realiza el análisis de una central hidroeléctrica y las partes que la forman empleando la metodología de Bond Graph, para el estudio de la controlabilidad y observabilidad, así como la obtención de los vectores clave y la forma representativa en el dominio físico de cada sección del sistema de la central hidroeléctrica.

### 3.4. Modelo en el dominio físico de la sección hidráulica

La Figura 3.19 muestra un dibujo simplificado de una central hidroeléctrica en la cual se pueden ubicar las secciones más esenciales para la generación de energía y de la cual se obtiene el modelo en el dominio físico desde la obra civil hasta el generador.

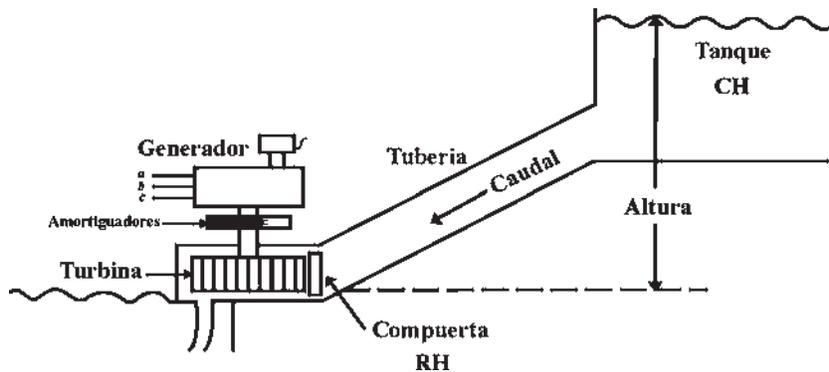


Figura 3.19 Central hidroeléctrica simplificada.

El modelo del sistema hidráulico empleando la metodología de Bond Graph se muestra en la Figura 3.20 el cual fue obtenido en base a la Figura 3.19 de la donde la fuente de energía

de entrada es el caudal, éste es representado por una fuente de flujo, así como las resistencias de las válvulas por un elemento disipativo y el tanque con un elemento almacenador.

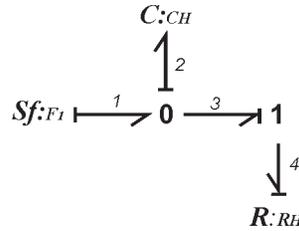


Figura 3.20 Modelo en Bond Graph de la sección hidráulica.

Del modelo de la Figura 3.20 es posible obtener los vectores claves para el estudio de sus características como pueden ser controlabilidad y observabilidad por mencionar algunas de ellas.

Los vectores clave de la Figura 3.20 son,

$$x = q_2; \dot{x} = f_2; z = e_2; D_{in} = e_4; D_{out} = f_4 \tag{3.30}$$

donde  $D_{out}$  y  $z$  están definidas por (2.10) y (2.12)

$$L = R_H \tag{3.31}$$

$$F = \frac{1}{C_H} \tag{3.32}$$

Una vez definidos los vectores clave se puede llegar a la matriz estructura de unión descrita en el capítulo 2.

### 3.5. Modelo de la turbina hidráulica con vibraciones en el dominio físico

La turbina es un elemento mecánico empleado para el aprovechamiento de la energía potencial o cinética de algún fluido, así pues la turbina ya sea de tipo hidráulica o eólica es utilizada como un medio de transformación de energía, por ejemplo de un sistema hidráulico a uno mecánico, durante esta transformación de energía existen sin duda algunas perturbaciones que afectan al proceso de conversión de energía, un caso notorio y muy poco evaluado es el análisis de vibración en las turbinas hidráulicas el cual permite conocer el desgaste de los materiales al ser expuestos a vibraciones y provoca el fenómeno de fatiga en ellos. La fatiga es un desgaste debido agentes externos que al entrar en resonancia con el material, elemento u equipo provoca un deterioro de éstos destruyéndolos a medida que son expuestos a este fenómeno, esto ocurre desde una barra de metal hasta construcciones de grandes dimensiones, también está presente en los seres vivos ya que todo ser vivo al igual que cualquier material también tiene una forma natural de vibración.

La vibración cuando se presenta puede provocar cambios irreversibles tanto en materiales como en seres vivos. De ahí la importancia del análisis de vibración ya que al conocer o tener en cuenta este fenómeno se puede reducir en medida el daño provocado en equipos, y ¿Cómo evitarlo? Introduciendo materiales más eficientes así como la selección de equipo poco susceptible a vibraciones, ya que sólo se reduce en medida y su eliminación por completo es imposible. En elementos mecánicos que giran a altas revoluciones como puede ser una flecha de una turbina hidráulica, el análisis de vibración aplicado a este problema mecánico es de suma importancia ya que el fenómeno de la fatiga puede presentarse en cualquier momento y provocar en un periodo muy corto de tiempo una fractura.

### 3.5.1. Modelo de la turbina hidráulica con vibraciones

El modelado de sistemas físicos en el dominio de Bond Graph se ha venido describiendo a lo largo de estos capítulos así como la forma de llegar a ellos, ahora se hace un estudio a la turbina hidráulica. En esta sección se hace el análisis y el modelo de una turbina hidráulica tipo Francis en el dominio físico la cual es sometida a vibraciones ubicándolas en el eje que une la sección mecánica con la sección eléctrica, siendo esta última sección donde se encuentra el generador síncrono. La forma de introducir las vibraciones es por medio de un modelo de vibración, este modelo se muestra en la Figura 3.21

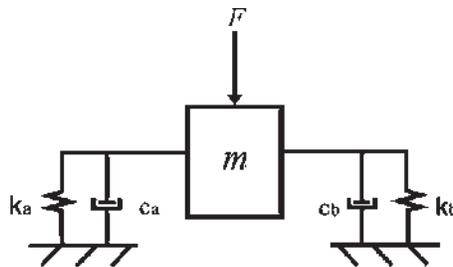


Figura 3.21 Modelo de vibración.

El sistema de la Figura 3.21 representa una vibración y tomando como ejemplo a los sistemas mecánicos, donde al ejercer una fuerza ( $F$ ) sobre una masa ( $m$ ), ésta interactúa tanto con elementos que liberan la energía cinética como con aquellos, que al verse influenciados por la acción de la masa tendrán la función de almacenar la energía del sistema, para posteriormente transferir energía a los elementos que la van a disipar, este es el caso de los resortes ( $k_a$  y  $k_b$ ) los cuales tienen la función de almacenar la fuerza que es ejercida sobre ellos y una parte de esta energía es transferida como calor en el sistema. La función de los amortiguadores, por su parte es la de suprimir u oponerse a la fuerza ejercida sobre la masa del sistema [18].

¿Esta representación del sistema para el análisis de vibración que *ventajas* y *desventajas* tiene?, primeramente el sistema puede considerarse completo para un análisis de vibración, ya que contiene los elementos más fundamentales (disipadores de energía y elementos

almacenadores de energía) y que se requieren para observar el fenómeno de la vibración en los materiales, una ventaja de este sistema es, que permite agregar más elementos, haciéndolo susceptible a cambios y permite que el sistema pueda crecer, lo cual beneficia al modelo ya que con estas modificaciones el sistema se aproxima más al comportamiento de un sistema con vibraciones en la realidad. Debido a esto, el hecho de que algunos sistemas sea posible representarlos con la forma más simple no significa que carezcan de exactitud, por el contrario, si es posible demostrar que con la forma mas simplificada del modelo de vibración se alcanza el comportamiento esperado del material al ser sometido a vibraciones no es necesario agregar más elementos lo que también puede ser un factor para que el sistema sea pequeño. Existen casos en los sistemas en los cuales se conozcan todos sus componentes y la influencia que estos van a tener unos con otros en estos casos es conveniente hacer todas las consideraciones posibles para analizar la posibilidad de omitir algunos de estos componentes (esto ya dependerá de la experiencia del usuario al momento de crear el modelo).

Una desventaja podría ser que en algunos sistemas debido a su complejidad, es necesario que se consideren las partes más afectadas o influenciadas por la vibración haciendo posible despreciar las partes que presentan una vibración muy por debajo de las consideradas mas críticas en el diseño, ya que en un sistema no todas las partes de una estructura y elementos que la conforman vibran en igual proporción. Pero la forma en la que se presente en cada elemento es lo que determina el grado de fatiga al que se esta sometido el material y esto es un factor muy importante a considerar.

### 3.5.2. Modificación del sistema de vibración para la turbina hidráulica

Considerando el modelo de vibración de la Figura 3.21 como base para el diseño de la turbina hidráulica la cual es sometida a vibraciones, es necesario realizar algunas modificaciones al modelo anterior de vibración debido a que influye el hecho de cómo funciona la turbina hidráulica, si bien la que se está modelando es una turbina tipo Francis, la aproximación a su modelo con vibraciones corresponde al mostrado en la Figura 3.22.

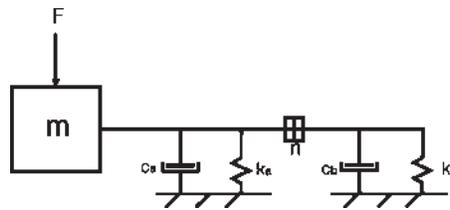


Figura 3.22 Modelo de turbina Francis con vibración.

La colocación de la masa y transformador mecánico entre los elementos de amortiguamiento son factores importantes en este modelo, el primero se debe al movimiento que realiza la masa con la fuerza que esta ejerciendo. De acuerdo a la Figura 3.22 la masa representa el peso de los álabes y su acoplamiento mecánico en la turbina hidráulica, el transformador ubicado en el eje de la turbina hidráulica representa un cambio de la velocidad de oscilación, esto debido a que el esfuerzo que realizan los elementos de

amortiguamiento ( $C_a$  y  $K_a$  previo al transformador) no es el mismo que presenta en la parte más cercana al acoplamiento mecánico-eléctrico descrito por otro conjunto de elementos que reducen la vibración ( $C_b$  y  $K_b$ ).

La posición del modelo de vibración dependerá del tipo de sistema o tipo de turbina hidráulica empleada, para este caso estudio la turbina es tipo Francis. la cual opera para potencias mayores y se encuentra en posición vertical. Para todas las turbinas hidráulicas de instalación vertical, el peso de las partes rotatorias e incluyendo la armadura del generador es soportada por cojinetes de suspensión diseñados y colocados en la parte superior de la flecha, estos son apoyados sobre la estructura del generador. Así, para esta modificación sólo se cambia la posición del modelo ya propuesto de la Figura 3.22.

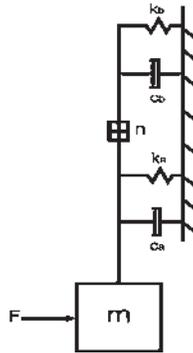


Figura 3.23 Modelo de turbina Francis con vibraciones.

La Figura 3.23 muestra el modelo mecánico final de cómo se representa a la turbina hidráulica tipo Francis sujeta a vibraciones en el eje de acoplamiento mecánico - eléctrico. Si embargo, si se desea emplear otro tipo de turbina como la Pelton o Kaplan debe modificarse el modelo de la Figura 3.21

### 3.5.3. Modelo de turbinas Pelton y Kaplan en modelo mecánico con vibración

Para no dejar a dudas de que es posible realizar las otras turbinas con el modelo mecánico se hacen las siguientes aproximaciones que se muestran en la Figura 3.24.

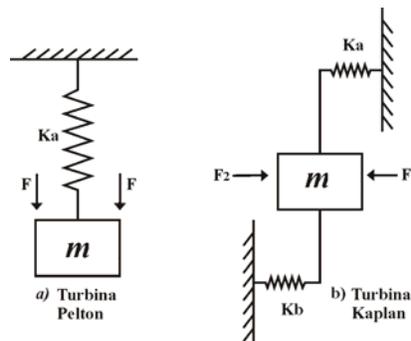


Figura 3.24 Modelos mecánicos de turbinas Pelton y Kaplan.

Los modelos de la Figura 3.24 tienen la forma del modelo masa resorte. Debe recordarse que el nivel de precisión está determinado por la cantidad de elementos almacenadores de energía que se tengan y el número de disipadores. La forma que tienen estos modelos es determinada por la forma en la que se le aplica la fuerza y la posición en el sistema físico.

### 3.5.4 Representación de la turbina hidráulica sujeta a vibraciones en el dominio físico

El modelo que se muestra en la Figura 3.25 representa a la turbina hidráulica sujeta a vibraciones en la parte mecánica.

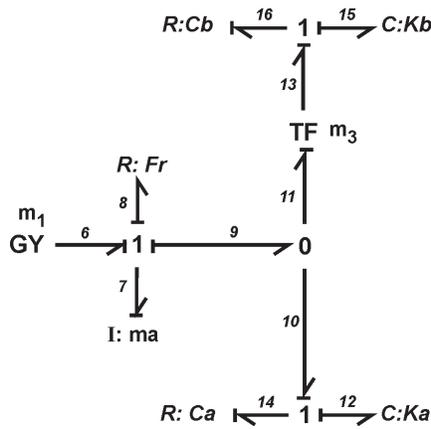


Figura 3.25 Turbina hidráulica sujeta a vibraciones en Bond Graph.

Del modelo de la Figura 3.25 la masa (elemento I) representa el peso de la turbina; el sistema de amortiguamiento es representado por los elementos disipadores y almacenadores (elementos R y C) donde sus valores son constantes y con el propósito de análisis estos valores pueden ser modificados. Previo al sistema de vibración se encuentra un girador que representa los álabes donde su relación de transformación está relacionada al cambio de energía y aprovechamiento de la misma por la turbina hidráulica. La energía que pasa a través del girador es dirigida al sistema de vibración, provocando condiciones no deseadas en el valor y transferencia de una sección del sistema a otra. Esto es debido al sistema de vibración que se está agregando al modelo de la turbina hidráulica, con el fin de conocer la propagación de las vibraciones a otras partes del sistema y los daños que puede provocar en la respuesta deseada de esta sección.

Por medio de la metodología de Bond Graph se puede conocer esta propagación de vibraciones a cada parte del sistema y el alcance de estas, así como también si el sistema es observable y controlable. En la Figura 3.26 se muestra un modelo más completo para el análisis de controlabilidad, observabilidad y propagación de las vibraciones a otros elementos del sistema.

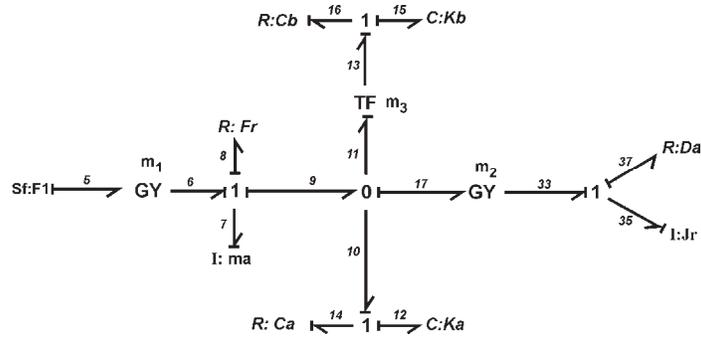


Figura 3.26 Modelo de turbina hidráulica Francis con vibraciones en Bond Graph.

Previo a la determinación de observabilidad y controlabilidad del modelo es posible encontrar los vectores clave. Para los elementos almacenadores y disipadores así como sus relaciones constitutivas son:

$$x = \begin{bmatrix} p_7 \\ q_{12} \\ q_{15} \\ p_{35} \end{bmatrix}; \dot{x} = \begin{bmatrix} e_7 \\ f_{12} \\ f_{15} \\ e_{35} \end{bmatrix}; z = \begin{bmatrix} f_7 \\ e_{12} \\ e_{15} \\ f_{35} \end{bmatrix}; D_{in} = \begin{bmatrix} f_8 \\ e_{14} \\ e_{16} \\ f_{37} \end{bmatrix}; D_{out} = \begin{bmatrix} e_8 \\ f_{14} \\ f_{16} \\ e_{37} \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

$$L = \text{diag} \left\{ Fr, 1/C_a, 1/C_b, D_a \right\} \quad (3.34)$$

$$F = \text{diag} \left\{ 1/ma, 1/K_a, 1/K_b, 1/Jr \right\} \quad (3.35)$$

Una vez obtenidos los vectores clave del modelo la turbina hidráulica con vibraciones, se puede obtener la matriz estructura unión.

### 3.6. Generador síncrono

En casi todo el mundo donde se involucran sistemas de potencia son utilizadas las máquinas síncronas enfocadas para ser empleadas en turbinas hidráulicas o de vapor o en maquinaria de combustión. El principal objetivo de la máquina síncrona es el de convertir energía mecánica a eléctrica. El comportamiento eléctrico y electromecánico de la mayoría de las máquinas síncronas puede ser determinado por las ecuaciones que describen las tres fases de la máquina síncrona de polos salientes. En particular estas ecuaciones pueden emplearse para predecir el desempeño directamente en generadores síncronos, y con pequeñas modificaciones las inductancias del motor.

El rotor de la máquina síncrona está equipado con un devanado de campo y uno o más devanados de amortiguamiento y por lo general, todos los devanados del rotor tienen diferentes características eléctricas. Por otro lado, el rotor de la máquina síncrona de polos

salientes es magnéticamente asimétrico. Como resultado de esta asimetría, un cambio de variables del rotor no ofrece ninguna ventaja. Sin embargo un cambio en las variables del estator es beneficioso. En la mayoría de los casos, las variables del estator son cambiadas a un marco de referencia fijo con el rotor (Transformación de Park), como sea las variables del estator también pueden ser expresadas en cualquier marco de referencia, lo cual es conveniente para algunas simulaciones en computadora.

### 3.6.1. Descripción física de la máquina síncrona

La Figura 3.27 muestra una máquina síncrona de tres fases con un par de polos y un devanado de campo. La máquina consiste de dos elementos básicos que son el campo y la armadura.

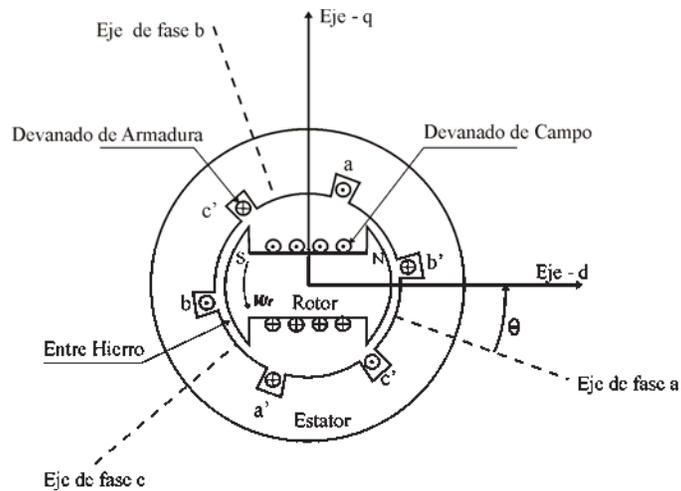


Figura 3.27 Esquema de una máquina síncrona.

Además de los elementos más importantes en la máquina, la Figura 3.27 muestra la ubicación de los devanados del inducido, así como la distribución de las fases en la máquina del entre hierro a-a', b-b' y c-c' la  $\omega_r$  que es la frecuencia angular del rotor,  $\theta$  que es el ángulo que proporciona la posición del motor.

Los voltajes que se encuentran en los devanados de la armadura son más altos que los que se tienen en el devanado de campo. Las tres fases en la máquina se encuentran distribuidos 120° entre ellos. Con una rotación uniforme del devanado de campo en el generador, el desplazamiento producido será de 120° en tiempo de fase. Debido a que la armadura está sujeta a variaciones del flujo magnético, el acero del estator es construido con láminas delgadas para reducir las pérdidas por las corrientes de Eddy.

Cuando se tiene corriente balanceadas en las tres fases, la armadura producirá a la velocidad síncrona un campo magnético rotatorio en el entre hierro. Para crear un par estable, los campos del estator y del rotor deben rotar a la misma velocidad.

Existen dos estructuras básicas empleadas para el rotor las cuales dependen de su velocidad. Las turbinas hidráulicas operan a bajas velocidades por lo tanto esto lleva a que estén formadas por un número mayor de polos para generar la frecuencia requerida. Las Turbinas de vapor y gas por otro lado operan a altas velocidades, y sus generadores están contruidos de forma cilíndrica y con acero sólido. Formados por dos o cuatro pares de polos, es común que no tengan devanados de campo pero debido al acero con que está construido el rotor éste ofrece camino para las corrientes de Eddy equivalentes a que si se tuvieran amortiguadores.

Bajo condiciones de estado estable, la única corriente que existe en el rotor es de corriente directa en el devanado de campo. Por otro lado bajo condiciones dinámicas las corrientes de Eddy son inducidas en la superficie del rotor, en las paredes de las ranuras y en los devanados de amortiguamiento [20].

### 3.6.2. Eje de cuadratura $q$ y eje directo $d$

Para propósitos de identificar las características de la máquina síncrona es conveniente definir dos ejes:

- Eje directo  $d$ , posicionado en el eje del polo norte magnético.
- Eje de cuadratura  $q$ , este se encuentra a  $90^\circ$  del eje de cuadratura  $d$ .

La posición relativa del rotor al estator es medida por el ángulo  $\theta$  entre el eje  $-d$  y el eje magnético del devanado de la fase  $a$ .

### 3.6.3. Representación esquemática de la máquina síncrona

Para determinar las ecuaciones, se hacen las siguientes consideraciones.

- Los devanados del estator se encuentran distribuidos sinusoidalmente a lo largo del entre hierro.
- La máquina es de dos polos.
- La máquina es de polos salientes.
- Las ranuras del estator no crean una variación considerable en las inductancias con la posición que tenga el rotor.
- La histéresis magnética es despreciable.
- Los efectos de saturación magnética son despreciables.

A continuación se muestra la Figura 3.28 los circuitos esquemáticos de estator y rotor de la máquina síncrona.

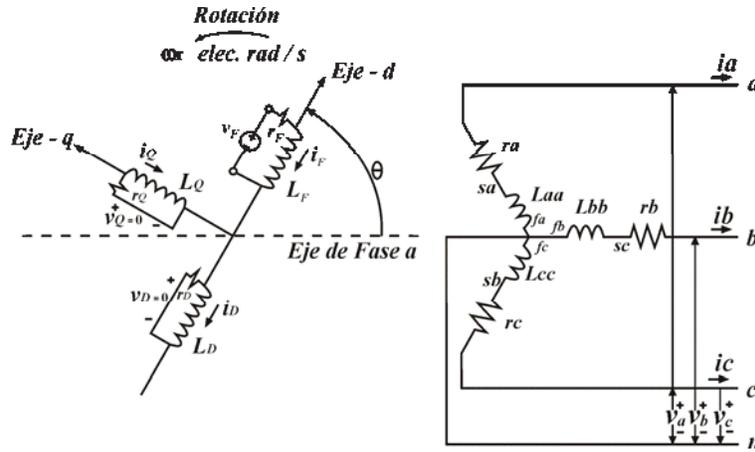


Figura 3.28 Circuito de estator y rotor de la máquina síncrona.

La notación que describe los subíndices de la Figura 3.28 son:

- *a, b, c* denotan devanados de fase de estator. Por tanto,  $i_a(t), i_b(t), i_c(t)$  denotan las corrientes del estator,  $v_a(t), v_b(t), v_c(t)$  voltajes de fase de estator,  $r_a, r_b, r_c$  resistencias de fase del estator, y  $L_{aa}, L_{bb}, L_{cc}$  inductancias propias de fase del estator.
- *F* denota el devanado de campo. Así,  $i_F(t)$  denota la corriente en *F*,  $v_F(t)$  voltaje en *F*,  $r_F$  resistencia de *F* y  $L_F$  inductancia propia de *F*.
- *D* denota el circuito de amortiguamiento en el eje-*d*. Así,  $i_D(t)$  denota la corriente en *D*,  $v_D(t)$  voltaje en *D*,  $r_D$  resistencia de *D* y  $L_D$  inductancia propia de *D*.
- *Q* denota el circuito de amortiguamiento en el eje-*q*. Así,  $i_Q(t)$  denota la corriente en *Q*,  $v_Q(t)$  voltaje en *Q*,  $r_Q$  resistencia de *Q* y  $L_Q$  inductancia propia de *Q*.
- $\theta(t)$  denota el ángulo para el cual el eje-*d* adelanta al eje magnético del devanado de la fase *a*.
- $\omega_r(t)$  denota la velocidad angular del rotor en rad/seg.

La máquina síncrona de la Figura 3.28 está formada por 6 devanados magnéticamente acoplados. El acoplamiento magnético entre los devanados es una función de la posición del rotor  $\theta(t)$ . El voltaje instantáneo en terminales  $v(t)$  de cualquier devanado está dado por:

$$v(t) = \pm \sum ri(t) \pm \sum \frac{di(t)}{dt} \quad (3.36)$$

donde  $di(t)/dt$  es el enlace de flujo ( $\lambda(t)$ ),  $r$  es la resistencia de los devanados e  $i(t)$  es la corriente en los devanados, con direcciones positivas de las corrientes del estator fluyendo hacia fuera de las terminales si opera como generador síncrono [21].

### 3.6.4. Ecuaciones de los enlaces de flujo

Los enlaces de flujo de la fase  $a$  en cualquier instante de tiempo esta dado por el siguiente grupo de ecuaciones,

$$\begin{aligned}\lambda_a(t) &= L_{aa}i_a(t) + L_{ab}i_b(t) + L_{ac}i_c(t) + L_{aF}i_F(t) + L_{aD}i_D(t) + L_{aQ}i_Q(t) \\ \lambda_b(t) &= L_{ba}i_a(t) + L_{bb}i_b(t) + L_{bc}i_c(t) + L_{bF}i_F(t) + L_{bD}i_D(t) + L_{bQ}i_Q(t) \\ \lambda_c(t) &= L_{ca}i_a(t) + L_{cb}i_b(t) + L_{cc}i_c(t) + L_{cF}i_F(t) + L_{cD}i_D(t) + L_{cQ}i_Q(t)\end{aligned}\quad (3.37)$$

$$\begin{aligned}\lambda_F(t) &= L_{Fa}i_a(t) + L_{Fb}i_b(t) + L_{Fc}i_c(t) + L_{FF}i_F(t) + L_{FD}i_D(t) + L_{FQ}i_Q(t) \\ \lambda_D(t) &= L_{Da}i_a(t) + L_{Db}i_b(t) + L_{Dc}i_c(t) + L_{DF}i_F(t) + L_{DD}i_D(t) + L_{DQ}i_Q(t) \\ \lambda_Q(t) &= L_{Qa}i_a(t) + L_{Qb}i_b(t) + L_{Qc}i_c(t) + L_{QF}i_F(t) + L_{QD}i_D(t) + L_{QQ}i_Q(t)\end{aligned}$$

Las ecuaciones de las inductancias del rotor se describen en el apéndice B.

### 3.6.5. Ecuaciones de voltaje

Considerando los circuitos de una máquina síncrona que se muestra en la Figura 3.28 la ecuación matricial esta particionada dada por,

$$\begin{bmatrix} v_a(t) \\ v_b(t) \\ v_c(t) \\ v_F(t) \\ v_D(t) \\ v_Q(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r_b & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r_c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r_F & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & r_D & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & r_Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a(t) \\ i_b(t) \\ i_c(t) \\ i_F(t) \\ i_D(t) \\ i_Q(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{\lambda}_a(t) \\ \dot{\lambda}_b(t) \\ \dot{\lambda}_c(t) \\ \dot{\lambda}_F(t) \\ \dot{\lambda}_D(t) \\ \dot{\lambda}_Q(t) \end{bmatrix}\quad (3.38)$$

Aplicando la transformación de Park descrita en el apéndice A en la ecuación (3.38) y considerando para condiciones balanceadas con la secuencia cero igual a cero, se tiene que:

$$\begin{bmatrix} v_d(t) \\ v_q(t) \\ v_F(t) \\ v_D(t) \\ v_Q(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_d & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r_q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r_F & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r_D & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & r_Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_d(t) \\ i_q(t) \\ i_F(t) \\ i_D(t) \\ i_Q(t) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \omega(t)\lambda_d(t) \\ -\omega(t)\lambda_q(t) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{\lambda}_d(t) \\ \dot{\lambda}_q(t) \\ \dot{\lambda}_F(t) \\ \dot{\lambda}_D(t) \\ \dot{\lambda}_Q(t) \end{bmatrix}\quad (3.39)$$

### 3.6.6. Formulación de ecuaciones de estado

Si las ecuaciones que describen la máquina síncrona son lineales, se reduce a un sistema de la forma (2.16). Sin embargo, este no es el caso y tiene la forma:

$$\dot{x} = f[x(t), u(t), t] \quad (3.40)$$

de lo cual se puede deducir que contiene enlaces de flujo y corrientes como variables de estado. Entonces, es posible obtener dos modelos.

1. Con las corrientes como variables de estado  $i_n(t)$ .
2. Con los enlaces de flujo  $\lambda_n(t)$ .

### 3.6.7. Formulación de corriente

Un modelo basado en corrientes como variables de estado tiene la ventaja de ofrecer relaciones simples entre los voltajes y las variables de estado. Es posible reemplazar los términos de  $\lambda(t)$  y  $\dot{\lambda}(t)$  por términos en  $i(t)$  y  $di(t)/dt$  utilizando las siguientes ecuaciones matriciales [21],

$$\begin{bmatrix} \lambda_d(t) \\ \lambda_D(t) \\ \lambda_F(t) \\ \lambda_Q(t) \\ \lambda_q(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_d & M_{dD} & M_{dF} & 0 & 0 \\ M_{dD} & L_D & M_{DF} & 0 & 0 \\ M_{dF} & M_{DF} & L_F & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & L_Q & M_{qQ} \\ 0 & 0 & 0 & M_{qQ} & L_q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_d(t) \\ i_D(t) \\ i_F(t) \\ i_Q(t) \\ i_q(t) \end{bmatrix} \quad (3.41)$$

Reescribiendo (3.39) con los datos que se tiene de (3.41) es

$$\begin{bmatrix} v_d(t) \\ v_D = 0 \\ v_F(t) \\ v_Q = 0 \\ v_q(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_d & 0 & 0 & \omega(t)M_{qQ} & \omega(t)L_q \\ 0 & r_D & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r_F & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r_Q & 0 \\ -\omega(t)L_d & -\omega(t)M_{dF} & -\omega(t)M_{dD} & 0 & r_q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_d(t) \\ i_D(t) \\ i_F(t) \\ i_Q(t) \\ i_q(t) \end{bmatrix} \quad (3.42)$$

$$+ \begin{bmatrix} L_d & M_{dD} & M_{dF} & 0 & 0 \\ M_{dD} & L_D & M_{DF} & 0 & 0 \\ M_{dF} & M_{DF} & L_F & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & L_Q & M_{qQ} \\ 0 & 0 & 0 & M_{qQ} & L_q \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_d(t) \\ i_D(t) \\ i_F(t) \\ i_Q(t) \\ i_q(t) \end{bmatrix}, \text{ en pu}$$

### 3.6.8. La ecuación de onda normalizada

Hay muchas formas de escribir la ecuación de onda en la dinámica de un sistema de potencia, mientras que el par está casi siempre dado en  $pu$ , frecuentemente no es claro para  $\omega(t)$  y  $t$ . Iniciando con  $\omega(t)$  en  $pu$  tenemos que:

$$\frac{2H}{\omega_B(t)} \frac{d\omega(t)}{dt} = 2H \frac{d\omega(t)}{dt_u} = T_a(t) \quad (3.43)$$

donde  $H$  denota la constante de inercia en  $pu$ ,  $\omega_B$  es la velocidad angular base y  $T_a$  la aceleración del par en  $pu$  y siendo  $t_u = \omega_B(t)$ ; si  $t$  y  $\omega(t)$  están en  $pu$ , entonces

$$T_j \frac{d\omega(t)}{dt} = T_a(t), \quad (3.44)$$

donde

$$T_j = 2H\omega_B \quad (3.45)$$

Los pares aplicados a un rotor de una máquina síncrona son  $T_e(t)$  el par electromagnético,  $T_d(t)$  es el par de amortiguamiento y  $T_m(t)$  es el par mecánico. Mostrados en la Figura 3.29

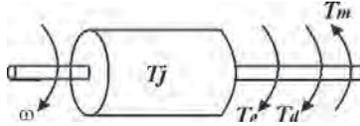


Figura 3.29 Pares aplicados al rotor de una máquina síncrona.

De la Figura 3.29, se tiene en  $pu$

$$T_a(t) = T_m(t) - T_e(t) - T_d(t) \quad (3.46)$$

donde

$$T_e(t) = i_d(t)\lambda_d(t) - i_q(t)\lambda_q(t) \quad (3.47)$$

$$T_d(t) = D_a\omega(t) \quad (3.48)$$

siendo  $D_a$  la constante de amortiguamiento. Sustituyendo (3.41), (3.46) a (3.45) en (3.44), tenemos

$$T_j \dot{\omega}(t) = T_m(t) + \begin{bmatrix} -L_d i_q(t) & -M_{Dd} i_q(t) & -M_{dF} i_q(t) & M_{qD} i_d(t) & L_q i_d(t) & -D_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_d(t) \\ i_D(t) \\ i_F(t) \\ i_Q(t) \\ i_q(t) \\ \omega(t) \end{bmatrix} \quad (3.49)$$

Finalmente, es posible obtener la formulación completa de corriente de la máquina síncrona incluyendo la ecuación angular de potencia la cual es

$$\dot{\delta}(t) = \omega(t) \tag{3.50}$$

Tomando (3.49), (3.50) y (3.42) el modelo completo está dado por:

$$\begin{bmatrix} v_d(t) \\ v_D = 0 \\ v_F(t) \\ v_Q = 0 \\ v_q(t) \\ T_m(t) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_d & 0 & 0 & \omega(t)M_{qQ} & \omega(t)L_q & 0 & 0 \\ 0 & r_D & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r_F & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r_Q & 0 & 0 & 0 \\ -\omega(t)L_d & -\omega(t)M_{df} & -\omega(t)M_{dD} & 0 & r_q & 0 & 0 \\ L_d & M_{Dd} & M_{dF} & M_{qQ} & L_q & D & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_d(t) \\ i_D(t) \\ i_F(t) \\ i_Q(t) \\ i_q(t) \\ \omega(t) \\ \delta(t) \end{bmatrix} \tag{3.51}$$

$$- \begin{bmatrix} L_d & M_{dD} & M_{dF} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ M_{dD} & L_D & M_{DF} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ M_{df} & M_{DF} & L_F & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & L_Q & M_{qQ} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & M_{qQ} & L_q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & T_j & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_d(t) \\ i_D(t) \\ i_F(t) \\ i_Q(t) \\ i_q(t) \\ \omega(t) \\ \delta(t) \end{bmatrix}, pu$$

Esta ecuación matricial está en la forma (3.40), donde se puede apreciar que el sistema es no lineal debido al producto de las variables de estado [21].

### 3.6.9. Modelo de la máquina síncrona en Bond Graph

El modelo que se describe a continuación es la representación de la máquina síncrona en Bond Graph empleando el modelo en  $dq0$ . Este modelo contiene los devanados de amortiguamiento, y es mostrado en la Figura 3.30.

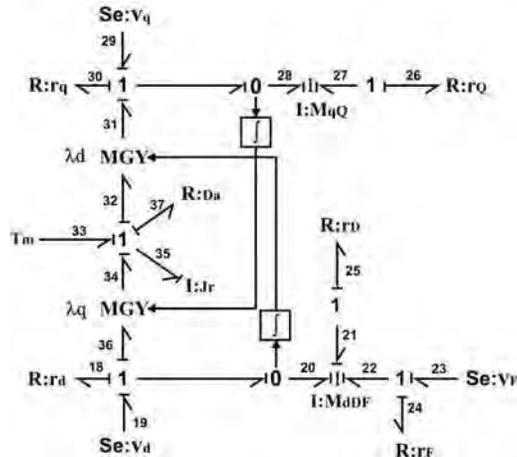


Figura 3.30 Máquina síncrona con devanados de amortiguamiento.

Algunas consideraciones para este modelo son:

- Tiene la característica de dos polos.
- La histéresis, saturación y pérdidas mecánicas son despreciadas.
- Los devanados a, b, c en la armadura están sinusoidalmente distribuidos a lo largo de la circunferencia del rotor.

Así como las principales características para este modelo de la máquina síncrona en Bond Graph son:

- Todos los elementos que intervienen en la máquina se tienen en variables de energía.
- Los subsistemas eléctrico, magnético y mecánico se representan en un solo Bond Graph.
- El modelo simplificado se obtiene directamente de la eliminación de bonds en el Bond Graph.
- La formulación de la corriente o de enlace de flujo se obtiene a partir del mismo sistema construido en Bond Graph.

Para lo cual  $T_m$  es el par mecánico de entrada de la máquina síncrona,  $J_r$  es la inercia definida por (3.38),  $D_a$  es el coeficiente de amortiguamiento dado por (3.41),  $M_{Qq}$  representa a los acoplamientos propios y mutuos de los devanados del eje  $q$ ,  $M_{dDF}$  representa los acoplamientos propios y mutuos de los devanados en el eje  $d$  y  $v_f$  la fuente de excitación del devanado de campo [22].

Los elementos resistivos que se encuentran denotados por un subíndice D o Q representan los elementos del eje  $d$  y  $q$  respectivamente; para el caso de los que tienen  $F$  denotan al devanado de excitación de campo. Las letras  $d$  y  $q$  localizadas en los bonds 34 y 35 respectivamente representan los devanados de conmutación de esos ejes.

Las definición para la representación matricial de los acoplamientos propios y mutuos de los devanados en el eje  $q$  y  $d$  es:

$$M_{Qq} = \begin{bmatrix} L_Q & M_q \\ M_q & L_q \end{bmatrix} \quad (3.52)$$

$$M_{dDF} = \begin{bmatrix} L_d & M_d & M_d \\ M_d & L_D & M_d \\ M_d & M_d & L_d \end{bmatrix} \quad (3.53)$$

La obtención de las matrices, que dan origen a la creación de la matriz de estructura unión se muestra en la siguiente sección, la información que proporciona el análisis matemático de la metodología de Bond Graph de un sistema físico, es información de cómo se encuentra relacionados los elementos en el sistema de acuerdo a los bonds de energía.

### 3.6.10. Obtención de los vectores clave

Los vectores clave que corresponden al sistema físico eléctrico de la maquina síncrona se muestran a continuación:

$$x(t) = \begin{bmatrix} p_{20}(t) \\ p_{21}(t) \\ p_{22}(t) \\ p_{27}(t) \\ p_{28}(t) \\ p_{35}(t) \end{bmatrix}; \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} e_{20}(t) \\ e_{21}(t) \\ e_{22}(t) \\ e_{27}(t) \\ e_{28}(t) \\ e_{35}(t) \end{bmatrix}; z = \begin{bmatrix} f_{20}(t) \\ f_{21}(t) \\ f_{22}(t) \\ f_{27}(t) \\ f_{28}(t) \\ f_{35}(t) \end{bmatrix}; D_{in} = \begin{bmatrix} f_{18}(t) \\ f_{24}(t) \\ f_{25}(t) \\ f_{26}(t) \\ f_{30}(t) \\ f_{37}(t) \end{bmatrix}; D_{out} = \begin{bmatrix} e_{18}(t) \\ e_{24}(t) \\ e_{25}(t) \\ e_{26}(t) \\ e_{30}(t) \\ e_{37}(t) \end{bmatrix}; u = \begin{bmatrix} e_{19} \\ e_{23} \\ e_{29} \\ e_{33} \end{bmatrix} \quad (3.54)$$

Las relaciones constitutivas de los elementos están dadas por

$$L = diagonal\{r_d, r_D, r_F, r_Q, r_q, D_a\} \quad (3.55)$$

$$F^{-1} = diagonal\{M_{dDF}, M_{Qq}, J_r\} \quad (3.56)$$

Donde la representación de cada parte interna de la matriz es:

$$S_{11} = \begin{bmatrix} 0 & -\lambda_d & -\lambda_q & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_d & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_q & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; S_{12} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}; S_{13} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \begin{matrix} S_{21} = S_{12} \\ S_{22} = S_{23} = 0 \end{matrix} \quad (3.57)$$

Siendo que la matriz estructura unión puede crearse a partir de los vectores clave definidos en (3.54) que corresponden a  $\dot{x}$ ,  $z$ ,  $u$ ,  $D_{in}$  y  $D_{out}$  :

$$\begin{matrix} \dot{x} \\ D_{in} \end{matrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_q & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_d & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\lambda_q & 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda_d & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} f_{20} \\ f_{21} \\ f_{22} \\ f_{27} \\ f_{28} \\ f_{35} \\ e_{18} \\ e_{24} \\ e_{25} \\ e_{26} \\ e_{20} \\ e_{37} \\ e_{19} \\ e_{23} \\ e_{29} \\ e_{33} \end{matrix} \quad (3.58)$$

El modelo lineal que se tiene para los enlaces de flujo está dado por (2.16) a (2.20). A continuación se da la formulación de corriente. Obteniendo la derivada de (2.10) y sustituyendo (2.10) en (2.16) se tiene el siguiente modelo no lineal en términos de co-energía dado por:

$$\begin{aligned}\dot{z}(t) &= f(z(t)) + \tilde{B}_p u(t), \\ y(t) &= \tilde{C}_p z(t) + D_p u(t),\end{aligned}\tag{3.59}$$

donde:

$$f(z(t)) = F[S_{11}(\lambda) + S_{12}MS_{21}]; \tilde{B}_p = F(S_{13} + S_{12}MS_{23}); \tilde{C}_p = S_{31} + S_{32}MS_{21}\tag{3.60}$$

$$f(z(t)) = F[S_{11}(\lambda) + S_{12}MS_{21}]; \tilde{B}_p = F(S_{13} + S_{12}MS_{23}); \tilde{C}_p = S_{31} + S_{32}MS_{21}\tag{3.61}$$

Para el caso lineal, se tiene:

$$\begin{aligned}\dot{z}(t) &= \tilde{A}_p z(t) + \tilde{B}_p u(t) \\ y(t) &= \tilde{C}_p z(t) + D_p u(t)\end{aligned}\tag{3.62}$$

donde

$$\tilde{A}_p = F[S_{11} + S_{12}MS_{21}]\tag{3.63}$$

Multiplicando (3.59) por  $F^{-1}$  y utilizando de (3.54) a (3.57), (3.63) y (2.22) se obtiene

$$\begin{bmatrix} L_d & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & L_D & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & L_F & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & L_Q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & L_q & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & J_r \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} f_{20}(t) \\ f_{21}(t) \\ f_{22}(t) \\ f_{27}(t) \\ f_{28}(t) \\ f_{35}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -r_d & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_q \\ 0 & -r_D & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r_F & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r_Q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -r_q & \lambda_d \\ -\lambda_q & 0 & 0 & 0 & -\lambda_d & -D_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{20}(t) \\ f_{21}(t) \\ f_{22}(t) \\ f_{27}(t) \\ f_{28}(t) \\ f_{35}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{19}(t) \\ e_{23}(t) \\ e_{29}(t) \\ e_{33}(t) \end{bmatrix}\tag{3.64}$$

Obteniendo los voltajes de (3.64) se tiene que:

$$\begin{bmatrix} e_{19}(t) \\ 0 \\ e_{23}(t) \\ 0 \\ e_{29}(t) \\ e_{33}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_d & 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda_q \\ 0 & r_D & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r_F & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r_Q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & r_q & -\lambda_d \\ \lambda_q & 0 & 0 & 0 & \lambda_d & D_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{20}(t) \\ f_{21}(t) \\ f_{22}(t) \\ f_{27}(t) \\ f_{28}(t) \\ f_{35}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_d & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & L_D & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & L_F & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & L_Q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & L_q & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & J_r \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} f_{20}(t) \\ f_{21}(t) \\ f_{22}(t) \\ f_{27}(t) \\ f_{28}(t) \\ f_{35}(t) \end{bmatrix}\tag{3.65}$$

Sustituyendo los valores de los enlaces de flujo  $\lambda_d(t)$  y  $\lambda_q(t)$  de (3.65) esta tendrá la forma de (3.51) a excepción de la ecuación del ángulo  $\delta(t)$  que no se considera en (3.65). Para realizar la transformación de valores reales a  $pu$  [10].

Es importante notar que se tiene una representación gráfica de la máquina síncrona, incluyendo inductancias propias y mutuas, y su respectiva resistencia en cada uno de los devanados. Así mismo, la parte mecánica es considerada en el mismo Bond Graph, conociendo el intercambio energético entre sus elementos y determinando el modelo matemático de acuerdo a la estructura de unión. Al modelo aquí presentado es posible determinar si es controlable u observable. A continuación se realiza el procedimiento para determinar controlabilidad y observabilidad de un sistema físico empleando la metodología de Bond Graph.

### 3.6.12. Modelo simplificado de la máquina síncrona

Los devanados de amortiguamiento de una máquina síncrona pueden ser despreciados si su efecto en el transitorio bajo estudio es lo suficiente pequeño con respecto a la dinámica del sistema. Esto es particularmente cierto en el estudio donde el amortiguamiento entre máquinas acopladas no es de interés. En el modelo de Bond Graph de la máquina síncrona donde los devanados son despreciados se logra eliminando los bonds:

$$\begin{aligned} D &= 21 \text{ y } 25 \\ Q &= 26 \text{ y } 27 \end{aligned}$$

La Figura 3.31 muestra el modelo de Bond Graph simplificado de la máquina síncrona sin devanados de amortiguamiento.

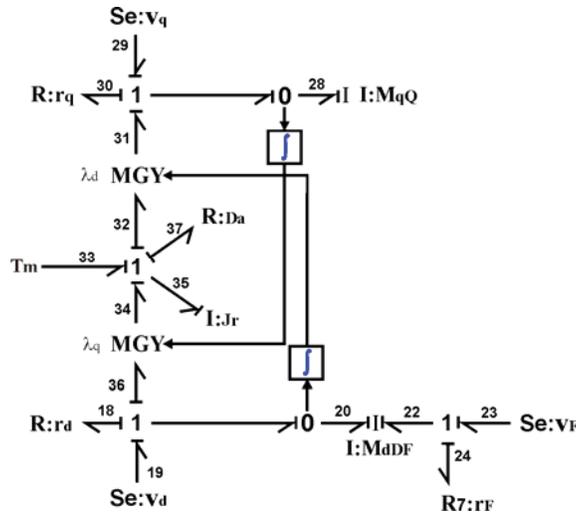


Figura 3.31 Modelo en Bond Graph de la máquina síncrona sin devanados D y Q.

donde los vectores clave con la simplificación quedan la expresiones,

$$x(t) = \begin{bmatrix} p_{20}(t) \\ p_{22}(t) \\ p_{28}(t) \\ p_{35}(t) \end{bmatrix}; \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} e_{20}(t) \\ e_{22}(t) \\ e_{28}(t) \\ e_{35}(t) \end{bmatrix}; z = \begin{bmatrix} f_{20}(t) \\ f_{22}(t) \\ f_{28}(t) \\ f_{35}(t) \end{bmatrix}; D_{in} = \begin{bmatrix} f_{18}(t) \\ f_{24}(t) \\ f_{18}(t) \\ f_{37}(t) \end{bmatrix}; D_{out} = \begin{bmatrix} e_{18}(t) \\ e_{24}(t) \\ e_{18}(t) \\ e_{37}(t) \end{bmatrix}; u = \begin{bmatrix} e_{19} \\ e_{23} \\ e_{29} \\ e_{33} \end{bmatrix} \quad (3.66)$$

### 3.7. Esquema general de una central hidroeléctrica con vibraciones

El esquema general presentado de una Central Hidroeléctrica en esta sección es un diagrama a bloques de las secciones que la forman, así como también se aprecia la forma en la que están acoplando los sistemas de diferentes dominios de energía.

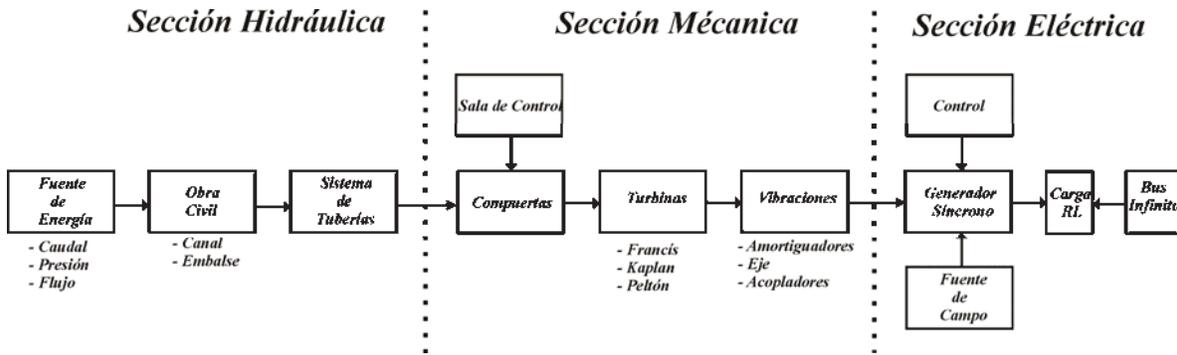


Figura 3.32 Diagrama a bloques de una Central Hidroeléctrica.

El diagrama a bloques de la Figura 3.32 se divide en tres secciones:

- Sección hidráulica la cual tiene como objetivo de entregar la fuerza primaria para la producción de energía que es creada por el cauce del río, la obra civil que la forma al canal y embalse (siendo las partes mas fundamentales) así como también el sistema de tuberías que transfiere la energía de la sección hidráulica a la sección mecánica.

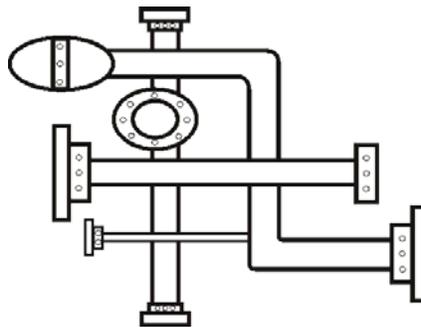


Figura 3.33 Sistema de tuberías.

- Sección mecánica, es donde se lleva a cabo el cambio de energía. La energía hidráulica que es enviada a través de un sistema de tuberías que la hacen llegar a la turbina la cual se encarga de cambiar la energía hidráulica a mecánica. La turbina

elemento donde se ubican las vibraciones, el efecto de éstas en las secciones de la central hidroeléctrica es el objeto de estudio en esta sección.

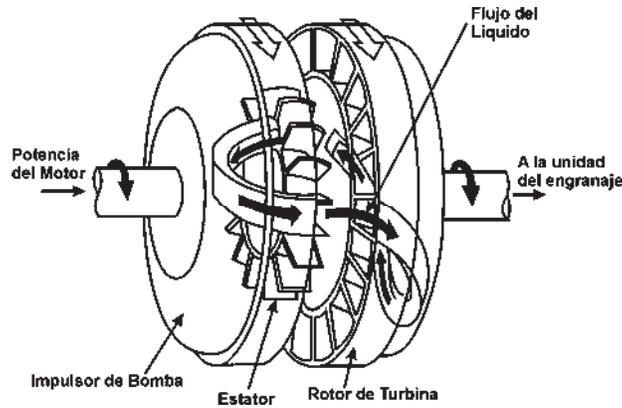


Figura 3.34 Acoplamiento mecánico de un sistema de turbina.

- Sección Eléctrica en la que se encuentra el generador síncrono que tiene como función la de generar energía eléctrica que posteriormente es enviada distribución. La alimentación para su correcto funcionamiento, el acoplamiento mecánico – eléctrico son algunas de las partes que conforman a esta sección, así como el control del generador para su funcionamiento.

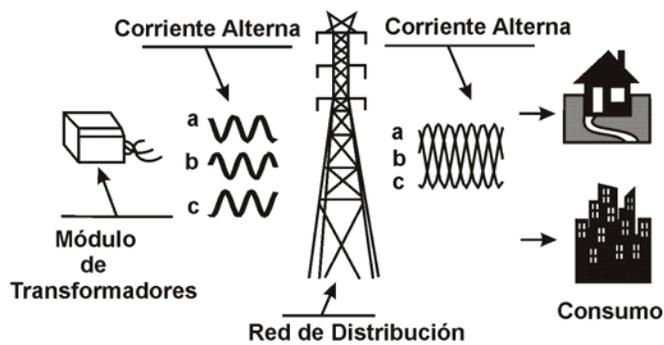


Figura 3.35 Sistema de distribución convencional.

### 3.8. Modelo de una central hidroeléctrica sometida a vibraciones en Bond Graph

Una vez descritas las partes por separado de lo que forma a la central hidroeléctrica en Bond Graph es posible llevar el acoplamiento de estas partes en una sola. En la Figura 3.36 se muestra el modelo completo de la Central Hidroeléctrica con vibraciones en el dominio físico:

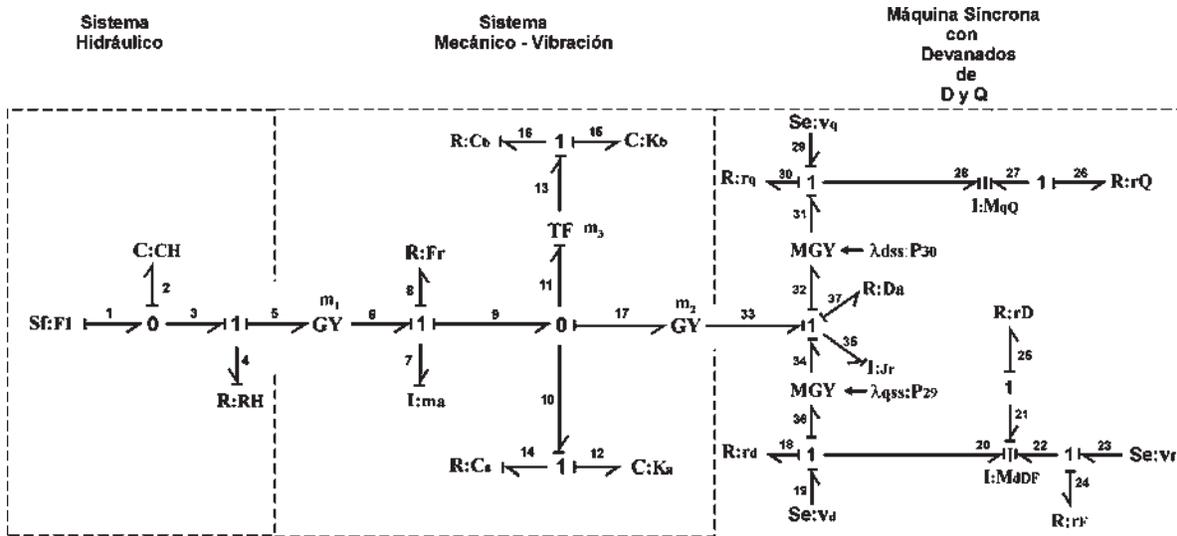


Figura 3.36 Modelo completo de la Central Hidroeléctrica en Bond Graph.

#### 3.8.1. Acoplamiento del modelo en Bond Graph

El diagrama de la Figura 3.36 es la representación final de la central hidroeléctrica sometida a vibraciones en su sección mecánica. En este diagrama se puede apreciar la división de cada una de sus partes por unos recuadros punteados, esto para hacer visible cada sección de la central hidroeléctrica. A continuación se describe cada sección:

##### Sistema hidráulico

Esta sección es expresada de una forma general donde  $Sf : F_1$  y representa una fuente de flujo que es la fuerza que va alimentar al sistema, este elemento es considerado de alta prioridad para el diseño y construcción de una planta generadora de energía eléctrica, seguido se tiene  $C : CH$  que representa la capacidad del tanque o embalse de la presa y el último elemento  $R : RH$  que es una consideración importante ya que este tipo de elementos representan válvulas o tuberías que transfieren el flujo de agua hasta la casa de máquinas donde se encuentra la sección mecánica. Esta seccion es posible modelarla con múltiples Bonds, así como, múltiples elementos resistivos pero para propósitos de estudio generalizado se emplea una que puede considerarse como la suma de todas ellas.

*Sistema mecánico – vibratorio.*

El análisis del sistema mecánico está enfocado al tipo de turbina y a las vibraciones. Para propósitos de estudio las vibraciones usualmente son consideradas despreciables tanto en análisis de estructuras al igual que en el de los materiales, es por eso que aquí se consideran en una de las partes más esenciales de la generación de energía que es en la turbina y se pretende ver que efecto tienen estas vibraciones en los demás partes del sistema.

Los elementos en esta sección la representación de la turbina, es mediante elementos  $G_y$ : *girador*, en los que su relación de giro  $r$  representa la eficiencia de los álabes de la turbina, para propósito de aprovechamiento de la energía hidráulica y que es enviada como energía mecánica al generador eléctrico.

*Máquina Síncrona con devanados D y Q.*

Esta sección cuenta con una gran variedad de elementos que describen el comportamiento del generador síncrono para la generación de energía eléctrica. Este modelo del generador síncrono tiene una parte no lineal ocasionada por los enlaces de flujo  $d$  y  $q$ . Es por esto que el valor de éstos se considera constante para análisis de estado estacionario. Esto se describe en el análisis en estado estacionario empleando la metodología de Bond Graph.

**3.8.2. Obtención de los vectores clave de la central hidroeléctrica en Bond Graph**

En el análisis de sistemas físicos, es importante llegar a la formulación o representación del sistema en un modelo ecuaciones que describan el comportamiento del sistema de cada una de sus secciones que la integren sin importar el dominio de energía, es por esto que a continuación se obtienen las ecuaciones de todo el sistema de la central hidroeléctrica en el dominio físico, utilizando herramientas de la metodología de Bond Graph.

*Elementos almacenadores.*

$$\begin{aligned} x &= [q_2 \quad p_7 \quad q_{12} \quad q_{15} \quad p_{20} \quad p_{21} \quad p_{22} \quad p_{27} \quad p_{28} \quad p_{35}]^T \\ \dot{x} &= [f_2 \quad e_7 \quad f_{12} \quad f_{15} \quad e_{20} \quad e_{21} \quad e_{22} \quad e_{27} \quad e_{28} \quad e_{35}]^T \\ z &= [e_2 \quad f_7 \quad e_{12} \quad e_{15} \quad f_{20} \quad f_{21} \quad f_{22} \quad f_{27} \quad f_{28} \quad f_{35}]^T \end{aligned}$$

*Elementos disipadores.*

$$\begin{aligned} D_{in} &= [e_4 \quad f_8 \quad e_{14} \quad e_{16} \quad f_{18} \quad f_{25} \quad f_{24} \quad f_{26} \quad f_{30} \quad f_{37}]^T \\ D_{out} &= [f_4 \quad e_8 \quad f_{14} \quad f_{16} \quad e_{18} \quad e_{25} \quad e_{24} \quad e_{26} \quad e_{30} \quad e_{37}]^T \end{aligned}$$

*Elementos generadores de energía.*

$$u = [f_1 \quad e_{19} \quad e_{23} \quad e_{29}]^T$$

Relaciones constitutivas.

$$L = \text{diag} \left\{ \frac{1}{R_H}, Fr, \frac{1}{C_a}, \frac{1}{C_b}, R_d, R_D, R_f, R_Q, R_q, Da \right\}$$

$$F^{-1} = \text{diag} \{ C_H, ma, K_a, K_b, M_{dDf}, M_{Qq}, J_r \}$$

Una vez determinados los vectores es posible determinar la matriz estructura unión definida por (2.16).

$$s_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -m_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda_{qss} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_{dss} \\ 0 & m_2 & 0 & 0 & \lambda_{qss} & 0 & 0 & 0 & -\lambda_{dss} & 0 & 0 \end{bmatrix}, s_{12} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ m_1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -m_2 & -\frac{m_2}{m_3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$s_{13} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{m_2}{m_3} \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, s_{21} = \begin{bmatrix} 1 & -m_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, s_{22} = s_{23} = 0$$

donde m1, m2, m3 son la relación de transformación de girador y transformador que representa el efecto de turbina en el sistema,  $\lambda_{dss}$  y  $\lambda_{qss}$  son los enlaces de flujo en estado estacionario.

Con la matriz S es posible obtener las matrices A y B para representación de la ecuación en variables de estado. Donde la forma de obtener es por medio de las ecuaciones descritas por (2.19) a (2.22). A continuación se muestra la matriz A

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{C_H R_H} & \frac{m_1}{R_H m_a} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{m_1}{C_H R_H} & -\frac{1}{m_a} \left( F_r + \frac{m_1^2}{R_H} \right) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{m_2}{J_r} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{C_a K_a} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{m_2}{C_a J_r} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{C_b K_b} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{m_2}{m_3 C_b J_r} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{L_d} R_d & -M_d R_d & -M_d R_d & 0 & 0 & 0 & \frac{\lambda_q}{J_r} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -M_d R_D & -\frac{1}{L_D} R_D & -M_d R_D & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -M_d R_f & -M_d R_f & -\frac{1}{L_f} R_f & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{L_Q} R_Q & -R_Q M_q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -M_q R_q & -\frac{1}{L_q} R_q & \frac{\lambda_{dss}}{J_r} \\ 0 & \frac{m_2}{m_a} & \frac{m_2}{C_a K_a} & \frac{m_2}{m_3 C_b K_b} & \frac{\lambda_{qss}}{L_d} & \lambda_{qss} M_d & \lambda_{qss} M_d & -\lambda_{dss} M_q & \frac{\lambda_{dss}}{L_q} & -\frac{1}{J_r} \left( D_a + \frac{m_2^2}{C_a} + \frac{m_2^2}{m_3 C_b} \right) & 0 \end{bmatrix}$$

Y donde la representación de la matriz B es:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$$

Las matrices C y D varían dependiendo de la salida que se desee en este caso se puede tomar como ejemplo la salida de los voltajes  $d$  y  $q$ , lo que genera las siguientes matrices,

$$C = 0, \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

En el Bond Graph estas salidas deseadas corresponden a  $e_{19}$  y  $e_{29}$  las cuales son  $v_d$  y  $v_q$  respectivamente. A continuación se determina si el sistema es controlable.

*Controlabilidad*

Una vez que se tiene el BGI el cual corresponde al de la Figura 3.36 se procede a seguir trayectorias causales de las fuentes para los elementos almacenadores.

Para  $S_f: F_1$  las trayectorias causales de la Figura 3.37 son:

- a)  $C_H$  → {1-2}
- b)  $m_a$  → {1-2-2-3-4-4-5-6-7}
- c)  $k_a$  → {1-2-2-3-4-4-5-6-7-7-9-17-17-10-14-14-12}
- d)  $k_b$  → {1-2-2-3-4-4-5-6-7-7-9-17-17-11-13-16-16-15}
- e)  $J_r$  → {1-2-2-3-4-4-5-6-7-7-9-17-33-35}

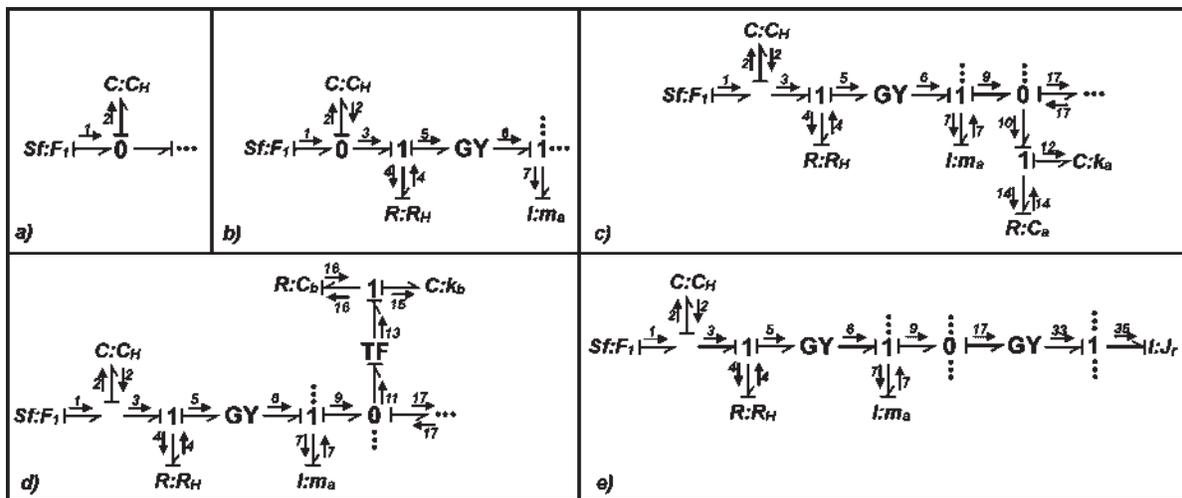


Figura 3.37 Para  $S_f:F_1$  sus trayectorias causales son: a)  $C_H$ , b)  $m_a$ , c)  $k_a$ , d)  $k_b$  y e)  $J_r$ .

Para la Figura 3.38 las trayectorias causales son:

- f)  $L_d$  → {1-2-2-3-4-4-5-6-7-7-9-17-33-35-35-34-36-20}
- g)  $L_D$  → {1-2-2-3-4-4-5-6-7-7-9-17-33-35-35-34-36-20-20-21}
- h)  $L_f$  → {1-2-2-3-4-4-5-6-7-7-9-17-33-35-35-34-36-20-20-21-21-22}
- i)  $L_q$  → {1-2-2-3-4-4-5-6-7-7-9-17-33-35-35-32-31-28}
- j)  $L_Q$  → {1-2-2-3-4-4-5-6-7-7-9-17-33-35-35-32-31-28-28-27}

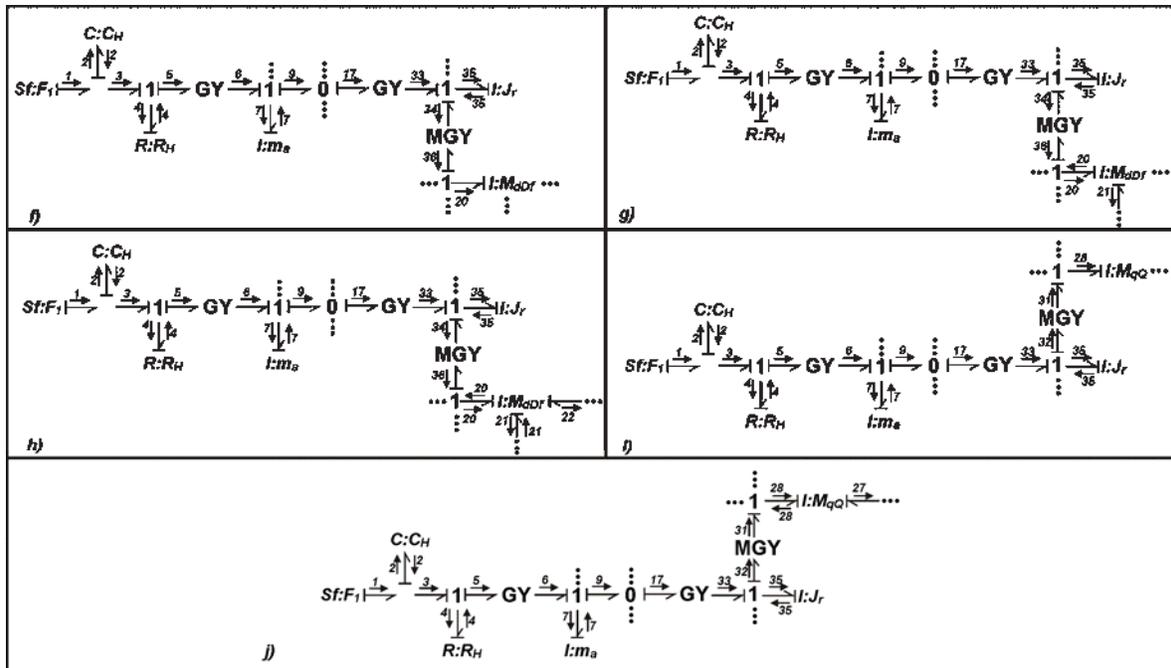


Figura 3.38 Para  $S_f:F_1$  sus trayectorias causales: f)  $L_d$ , g)  $L_D$ , h)  $L_f$ , i)  $L_q$  y j)  $L_Q$ .

Para  $S_e:v_q$  las trayectorias causales de la Figura 3.39 son:

- a)  $C_H$  → {29-28-28-31-32-35-35-33-17-9-7-7-6-5-4-4-3-2}
- b)  $m_a$  → {29-28-28-31-32-35-35-33-17-9-7}
- c)  $k_a$  → {29-28-28-31-32-35-35-33-17-10-14-14-12}
- d)  $k_b$  → {29-28-28-31-32-35-35-33-17-11-13-16-16-15}
- e)  $J_r$  → {29-28-28-31-32-35}

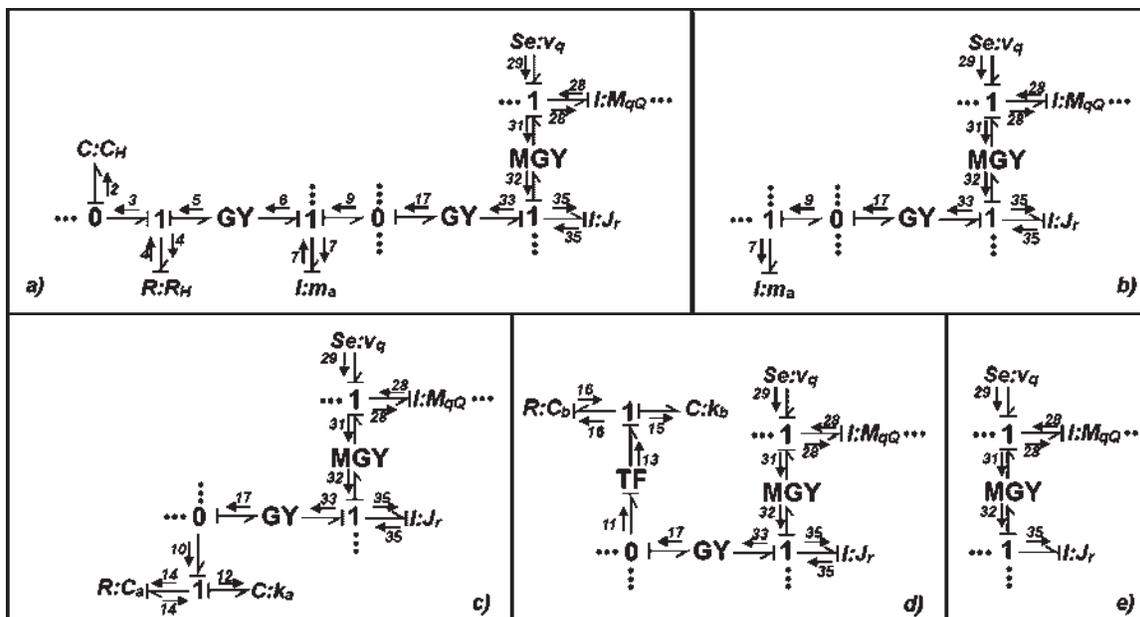


Figura 3.39 Para  $S_e:v_q$  sus trayectorias causales son: a)  $C_H$ , b)  $m_a$ , c)  $k_a$ , d)  $k_b$  y e)  $J_r$ .

Para la Figura 3.40 las trayectorias causales son:

- f)  $L_d \rightarrow \{29-28-28-31-32-35-35-34-36-20\}$
- g)  $L_D \rightarrow \{29-28-28-31-32-35-35-34-36-20-20-21\}$
- h)  $L_f \rightarrow \{29-28-28-31-32-35-35-34-36-20-20-21-21-22\}$
- i)  $L_q \rightarrow \{29-28\}$
- j)  $L_Q \rightarrow \{29-28-28-27\}$

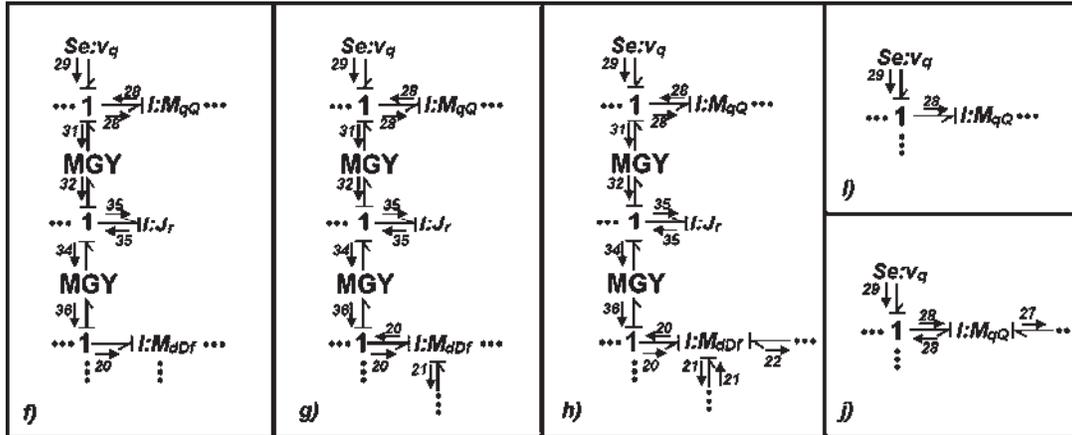


Figura 3.40 Para  $S_e:v_q$  sus trayectorias causales: f)  $L_d$ , g)  $L_D$ , h)  $L_f$ , i)  $L_q$  y j)  $L_Q$ .

Para  $S_e:v_d$  las trayectorias causales de la Figura 3.41 son:

- a)  $C_H \rightarrow \{29-28-28-31-32-35-35-33-17-9-7-7-6-5-4-4-3-2\}$
- b)  $m_a \rightarrow \{29-28-28-31-32-35-35-33-17-9-7\}$
- c)  $k_a \rightarrow \{29-28-28-31-32-35-35-33-17-10-14-14-12\}$
- d)  $k_b \rightarrow \{29-28-28-31-32-35-35-33-17-11-13-16-16-15\}$
- e)  $J_r \rightarrow \{29-28-28-31-32-35\}$

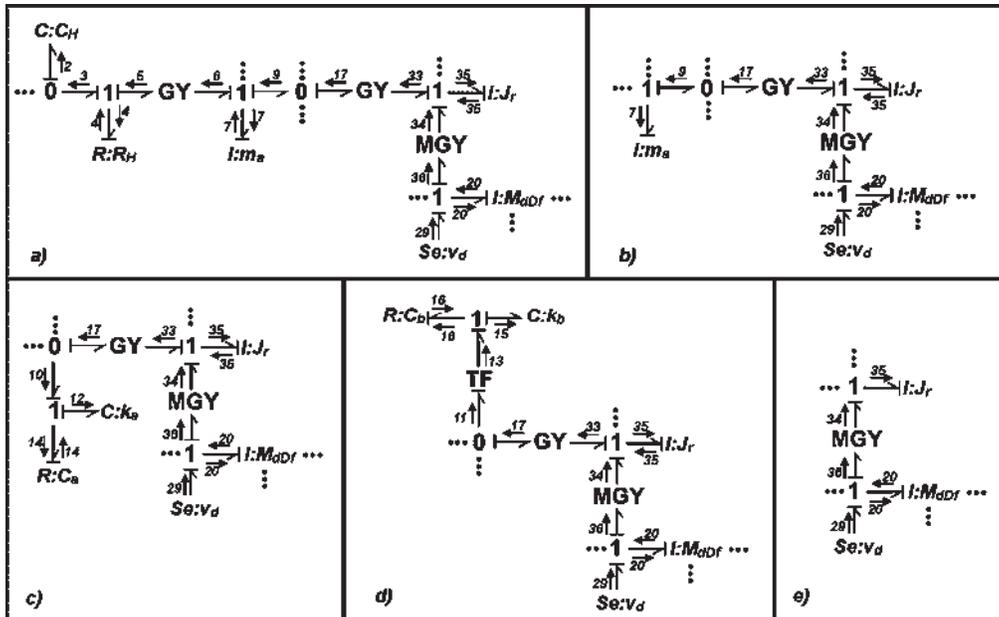


Figura 3.41 Para  $S_e:v_d$  sus trayectorias causales son: a)  $C_H$ , b)  $m_a$ , c)  $k_a$ , d)  $k_b$  y e)  $J_r$ .

Las trayectorias causales en la Figura 3.42 son:

- f)  $L_d \rightarrow \{29-20\}$
- g)  $L_D \rightarrow \{29-20-20-21\}$
- h)  $L_f \rightarrow \{29-20-20-21-21-22\}$
- i)  $L_q \rightarrow \{29-20-20-36-34-35-35-32-31-28\}$
- j)  $L_Q \rightarrow \{29-20-20-36-34-35-35-32-31-28-28-27\}$

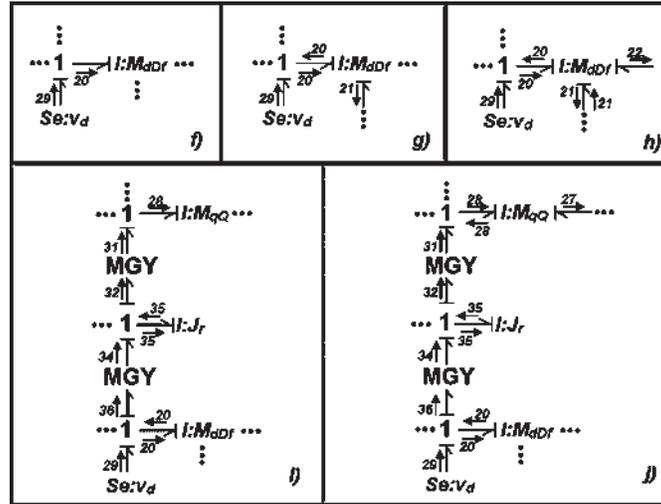


Figura 3.42 Para  $S_e: v_d$  sus trayectorias causales: f)  $L_d$ , g)  $L_D$ , h)  $L_f$ , i)  $L_q$  y j)  $L_Q$ .

Para  $S_e: v_f$  las trayectorias causales de la Figura 3.43 son:

- a)  $C_H \rightarrow \{23-22-22-21-21-20-20-36-34-35-35-33-17-9-7-7-6-5-4-4-3-2\}$
- b)  $m_a \rightarrow \{23-22-22-21-21-20-20-36-34-35-35-33-17-9-7\}$
- c)  $k_a \rightarrow \{23-22-22-21-21-20-20-36-34-35-35-33-17-10-14-14-12\}$
- d)  $k_b \rightarrow \{23-22-22-21-21-20-20-36-34-35-35-33-17-11-13-16-16-15\}$
- e)  $J_r \rightarrow \{23-22-22-21-21-20-20-36-34-35\}$

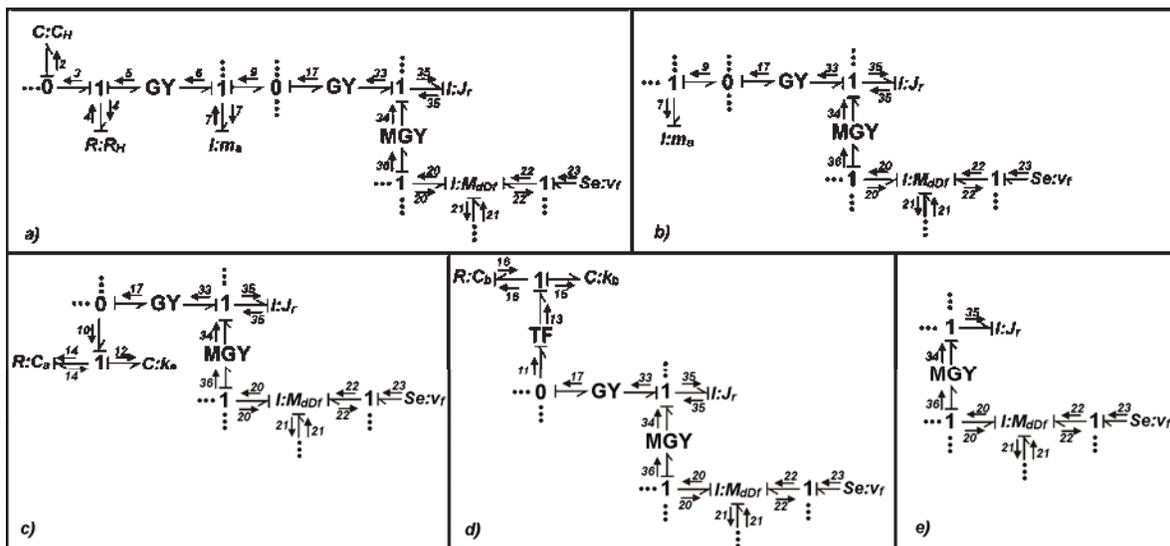


Figura 3.43 Para  $S_e: v_f$  las trayectorias causales son: a)  $C_H$ , b)  $m_a$ , c)  $k_a$ , d)  $k_b$  y e)  $J_r$ .

De la son:

- f)  $L_d \rightarrow \{23-22-22-21-21-20\}$
- g)  $L_D \rightarrow \{23-22-22-21\}$
- h)  $L_f \rightarrow \{23-22\}$
- i)  $L_q \rightarrow \{23-22-22-21-21-20-20-36-34-35-35-32-31-28\}$
- j)  $L_Q \rightarrow \{23-22-22-21-21-20-20-36-34-35-35-32-31-28-28-27\}$

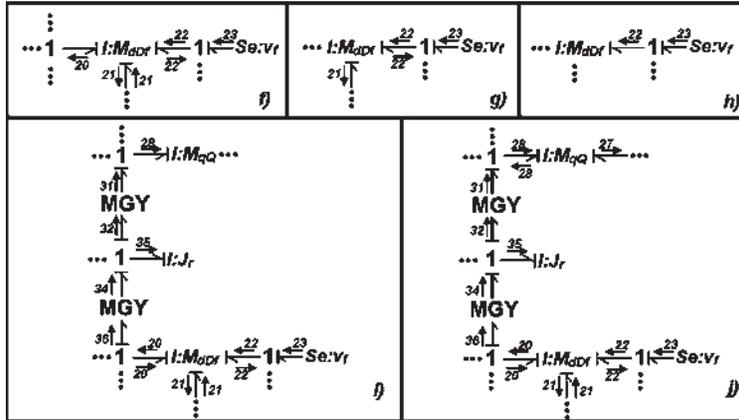


Figura 3.44 Para  $S_e :v_f$  sus trayectorias causales: f)  $L_d$ , g)  $L_D$ , h)  $L_f$ , i)  $L_q$  y j)  $L_Q$ .

En la Figura 3.45 se muestra el modelo en BGD.

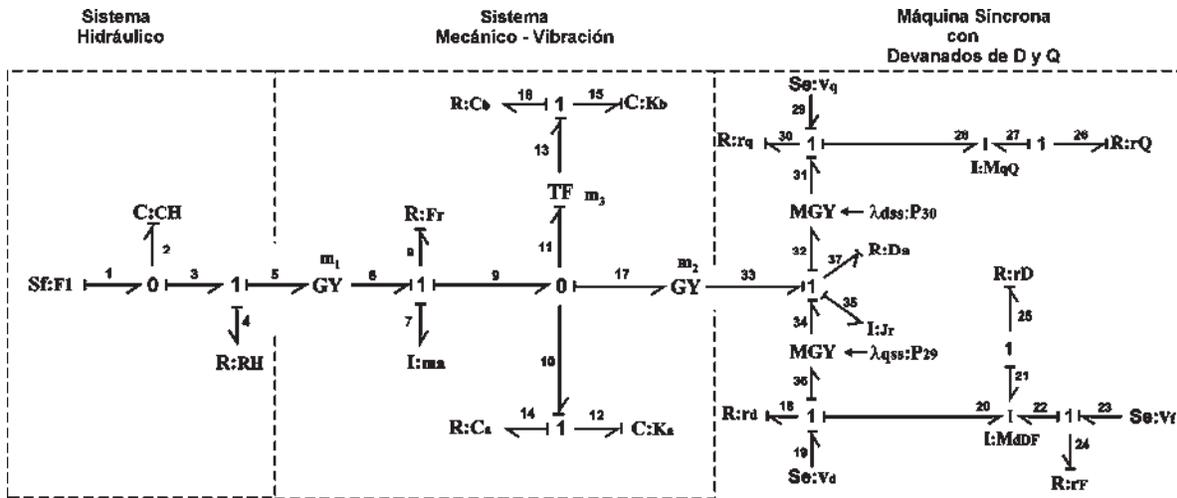


Figura 3.45 Modelo con causalidad derivativa de la Central Hidroeléctrica.

Existen trayectorias causales de las fuentes a cada uno de los elementos y los elementos almacenadores aceptan causalidad derivativa en el BGD por lo tanto los estados del sistema son controlables. El modelo del sistema tiene una parte no lineal esto se encuentra en los  $\lambda_d$  y  $\lambda_q$ . Es por esto que estas variables se toman como valores constantes para el análisis en variables de estado de un sistema lineal y para la obtención del estado estacionario utilizando la metodología de Bond Graph; siendo representados en el Bond Graph como  $\lambda_{dss}$  y  $\lambda_{qss}$ . En esta siguiente sección se muestra el análisis en estado estacionario.

### 3.8.3. Modelo de Bond Graph en estado estacionario

La respuesta de estado estacionario es útil para conocer el valor que alcanza cada variable de estado del sistema físico en una representación en espacio de estado cuando el periodo dinámico ha terminado. Aplicando el teorema de valor final se puede determinar el valor de estado estacionario de la respuesta de un sistema. Así, el error en estado estacionario queda determinado,

$$e_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} [e(t)] = \lim_{s \rightarrow 0} [s \cdot e(s)] \quad (3.67)$$

Empleando (3.67) a (2.16) y (2.17) se tiene que:

$$x_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} [x(t)] = -A_p^{-1} B_p u_{ss} \quad (3.68)$$

$$y_{ss} = (D_p - C_p A_p^{-1} B_p) u_{ss} \quad (3.69)$$

donde

$$u_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} [s \cdot u(s)] \quad (3.70)$$

De esta manera, utilizando (3.68) y (3.69) se calcula el estado estacionario, pero es necesario que se calcule  $A_p^{-1}$ , lo cual lleva una complejidad su obtención si el sistema es de alto orden.

Si el sistema es representado en función de transferencia, se tiene que:

$$y(s) = G(s)u(s) \quad (3.71)$$

Con el teorema del valor final, se obtiene el valor de estado estacionario de la salida dada por:

$$y_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} [y(t)] = \lim_{s \rightarrow 0} [sG(s)u(s)] \quad (3.72)$$

Utilizando la metodología de Bond Graph se resuelve directamente el problema de obtener  $A_p^{-1}$  de (3.68) al tener el Bond Graph en causalidad derivativa del sistema físico; de igual forma es posible determinar el valor de estado estacionario de la respuesta del sistema. Antes de realizar este análisis se deben de hacer dos consideraciones en el modelo de Bond Graph las cuales son:

- El modelo de Bond Graph deberá ser el de un sistema lineal o en su caso estar trabajando en un punto de equilibrio.
- El BGD del sistema debe existir.

El proceso de obtención de los vectores claves se hace de la misma manera que el mencionado en el capítulo dos con el BGI. La matriz L, los vectores  $D_{in}$  y  $D_{out}$  son obtenidas del directamente del BGD y son designados como:  $L_d$ ,  $D_{ind}$  y  $D_{outd}$ . Suponer que

$A_p$  es invertible y se tiene una asignación de causalidad derivativa en el modelo de Bond Graph. A partir de (2.14) la matriz estructura de unión es la siguiente

$$\begin{bmatrix} z \\ D_{ind} \\ y \end{bmatrix} = J \begin{bmatrix} \dot{x} \\ D_{outd} \\ u \end{bmatrix} \quad (3.73)$$

$$D_{outd}(t) = L_d D_{ind}(t) \quad (3.74)$$

donde  $J$  es,

$$J = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} & J_{13} \\ J_{21} & J_{22} & J_{23} \\ J_{31} & J_{32} & J_{33} \end{bmatrix} \quad (3.75)$$

de (2.16) a (2.23), (3.73) y (3.74) se obtiene:

$$z(t) = A_p^* \dot{x}(t) + B_p^* u(t) \quad (3.76)$$

$$y_d(t) = C_p^* \dot{x}(t) + D_p^* u(t) \quad (3.77)$$

La obtención de las matrices para determinar el estado estacionario están definidas [10],

$$A_p^* = J_{11} + J_{12} N J_{21} \quad (3.78)$$

$$B_p^* = J_{13} + J_{12} N J_{23} \quad (3.79)$$

$$C_p^* = J_{31} + J_{32} N J_{21} \quad (3.80)$$

$$D_p^* = J_{33} + J_{32} N J_{23} \quad (3.81)$$

donde

$$N = (I - L_d J_{22})^{-1} L_d \quad (3.82)$$

Las ecuaciones de estado para este sistema en causalidad integral están dadas por (2.16) y (2.17). Entonces, de (2.8), (2.16), (2.17), (3.76) y (3.77) se tiene:

$$A_p^* = F A_p^{-1} \quad (3.83)$$

$$B_p^* = -F A_p^{-1} B_p \quad (3.84)$$

$$C_p^* = C_p A_p^{-1} \quad (3.85)$$

$$D_p^* = D_p - C_p A_p^{-1} B_p \quad (3.86)$$

Finalmente el estado estacionario o  $x_{ss}$  está dado por,

$$x_{ss} = F^{-1} B_p^* u_{ss} \quad (3.87)$$

$$y_{ss} = D_p^* u_{ss} \quad (3.88)$$

Aplicando los resultados de estado estacionario en el dominio físico al Bond Graph de la Figura 3.45 se obtiene que:

$$D_{ind} = [f_4, e_8, f_{14}, f_{16}, e_{18}, e_{25}, e_{24}, e_{26}, e_{30}, e_{37}]^T$$

$$D_{outd} = [e_4, f_8, e_{14}, e_{16}, f_{18}, f_{25}, f_{24}, f_{26}, f_{30}, f_{37}]^T$$

$$L_d = \text{diag} \left\{ R_H, \frac{1}{F_r}, C_a, C_b, \frac{1}{r_d}, \frac{1}{r_D}, \frac{1}{r_f}, \frac{1}{r_Q}, \frac{1}{r_q}, \frac{1}{D_a} \right\}$$

la matriz J con cada una de sus submatrices es,

$$J_{12} = \begin{bmatrix} 1 & m_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, J_{21} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -m_1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -m_2 & -m_2/m_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$J_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -m_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda_{qss} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_{dss} & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & 0 & \lambda_{qss} & 0 & 0 & 0 & -\lambda_{dss} & 0 \end{bmatrix}, J_{23} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ m_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{Así, } J_{11}=0, J_{13}=0$$

Obteniendo la matriz N y B

$$N = \begin{bmatrix} R_H & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{F_r} \frac{F_r r_d \lambda_{dss}^2 + F_r r_q \lambda_{qss}^2 + D_a F_r r_d r_q}{\Delta} & 0 & 0 & \frac{m_2 r_q \lambda_{qss}}{\Delta} & 0 & 0 & 0 & -\frac{m_2 r_d \lambda_{dss}}{\Delta} & \frac{m_2 r_d r_q}{\Delta} \\ 0 & 0 & C_a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{m_2 r_q \lambda_{qss}}{\Delta} & 0 & 0 & \frac{1}{r_d} \frac{-r_d r_q m_2^2 + F_r r_d \lambda_{dss}^2 + D_a F_r r_d r_q}{\Delta} & 0 & 0 & 0 & \frac{F_r \lambda_{dss} \lambda_{qss}}{\Delta} & -\frac{F_r r_q \lambda_{qss}}{\Delta} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{r_D} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{r_f} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{r_Q} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m_2 r_d \lambda_{dss}}{\Delta} & 0 & 0 & \frac{F_r \lambda_{dss} \lambda_{qss}}{\Delta} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{r_q} \frac{-r_d r_q m_2^2 + F_r r_q \lambda_{qss}^2 + D_a F_r r_d r_q}{\Delta} & \frac{F_r r_d \lambda_{dss}}{\Delta} \\ 0 & \frac{m_2 r_d r_q}{\Delta} & 0 & 0 & \frac{F_r r_q \lambda_{qss}}{\Delta} & 0 & 0 & 0 & -\frac{F_r r_d \lambda_{dss}}{\Delta} & \frac{F_r r_d r_q}{\Delta} \end{bmatrix}$$

donde

$$\Delta = r_d r_q m_2^2 + F_r r_d \lambda_{dss}^2 + F_r r_q \lambda_{qss}^2 + D_a F_r r_d r_q$$

$$B = \begin{bmatrix}
 R_H + \frac{m_1^2}{F_r} \frac{F_r r_d \lambda_{dss}^2 + F_r r_q \lambda_{qss}^2}{-r_d r_q m_2^2 + F_r r_d \lambda_{dss}^2 + F_r r_q \lambda_{qss}^2} & m_1 m_2 r_q \frac{\lambda_{qss}}{-r_d r_q m_2^2 + F_r r_d \lambda_{dss}^2 + F_r r_q \lambda_{qss}^2} & 0 & -m_1 m_2 r_d \frac{\lambda_{dss}}{-r_d r_q m_2^2 + F_r r_d \lambda_{dss}^2 + F_r r_q \lambda_{qss}^2} \\
 \frac{m_1}{F_r} \frac{F_r r_d \lambda_{dss}^2 + F_r r_q \lambda_{qss}^2}{-r_d r_q m_2^2 + F_r r_d \lambda_{dss}^2 + F_r r_q \lambda_{qss}^2} & m_2 r_q \frac{\lambda_{qss}}{-r_d r_q m_2^2 + F_r r_d \lambda_{dss}^2 + F_r r_q \lambda_{qss}^2} & 0 & -m_2 r_d \frac{\lambda_{dss}}{-r_d r_q m_2^2 + F_r r_d \lambda_{dss}^2 + F_r r_q \lambda_{qss}^2} \\
 m_1 m_2^2 r_d \frac{r_q}{-r_d r_q m_2^2 + F_r r_d \lambda_{dss}^2 + F_r r_q \lambda_{qss}^2} & m_2 F_r r_q \frac{\lambda_{qss}}{-r_d r_q m_2^2 + F_r r_d \lambda_{dss}^2 + F_r r_q \lambda_{qss}^2} & 0 & -m_2 F_r r_d \frac{\lambda_{dss}}{-r_d r_q m_2^2 + F_r r_d \lambda_{dss}^2 + F_r r_q \lambda_{qss}^2} \\
 m_1 \frac{m_2^2}{m_3} r_d \frac{r_q}{-r_d r_q m_2^2 + F_r r_d \lambda_{dss}^2 + F_r r_q \lambda_{qss}^2} & \frac{m_2}{m_3} F_r r_q \frac{\lambda_{qss}}{-r_d r_q m_2^2 + F_r r_d \lambda_{dss}^2 + F_r r_q \lambda_{qss}^2} & 0 & -\frac{m_2}{m_3} F_r r_d \frac{\lambda_{dss}}{-r_d r_q m_2^2 + F_r r_d \lambda_{dss}^2 + F_r r_q \lambda_{qss}^2} \\
 -m_1 m_2 r_q \frac{\lambda_{qss}}{-r_d r_q m_2^2 + F_r r_d \lambda_{dss}^2 + F_r r_q \lambda_{qss}^2} & -\frac{1}{r_d} \frac{m_2^2 r_d r_q - F_r r_d \lambda_{dss}^2}{-r_d r_q m_2^2 + F_r r_d \lambda_{dss}^2 + F_r r_q \lambda_{qss}^2} & 0 & F_r \lambda_{dss} \frac{\lambda_{qss}}{-r_d r_q m_2^2 + F_r r_d \lambda_{dss}^2 + F_r r_q \lambda_{qss}^2} \\
 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & \frac{1}{r_f} & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 \\
 m_1 m_2 r_d \frac{\lambda_{dss}}{-r_d r_q m_2^2 + F_r r_d \lambda_{dss}^2 + F_r r_q \lambda_{qss}^2} & F_r \lambda_{dss}^2 \frac{\lambda_{qss}}{-r_d r_q m_2^2 + F_r r_d \lambda_{dss}^2 + F_r r_q \lambda_{qss}^2} & 0 & -\frac{1}{r_q} \frac{m_2^2 r_d r_q - F_r r_q \lambda_{qss}^2}{-r_d r_q m_2^2 + F_r r_d \lambda_{dss}^2 + F_r r_q \lambda_{qss}^2} \\
 m_1 m_2 r_d \frac{r_q}{-r_d r_q m_2^2 + F_r r_d \lambda_{dss}^2 + F_r r_q \lambda_{qss}^2} & F_r r_q \frac{\lambda_{qss}}{-r_d r_q m_2^2 + F_r r_d \lambda_{dss}^2 + F_r r_q \lambda_{qss}^2} & 0 & -F_r r_d \frac{\lambda_{dss}^2}{-r_d r_q m_2^2 + F_r r_d \lambda_{dss}^2 + F_r r_q \lambda_{qss}^2}
 \end{bmatrix}$$

Obteniendo el  $Z_{ss}$

$$Z_{ss} = \begin{bmatrix}
 R_H + \frac{m_1^2}{F_r} \frac{F_r r_d \lambda_{dss}^2 + F_r r_q \lambda_{qss}^2}{\Delta_2} & \frac{m_1 m_2 r_q \lambda_{qss}}{\Delta_2} & 0 & \frac{m_1 m_2 r_d \lambda_{dss}}{\Delta_2} \\
 \frac{m_1}{F_r} \frac{F_r r_d \lambda_{dss}^2 + F_r r_q \lambda_{qss}^2}{\Delta_2} & \frac{m_2 r_q \lambda_{qss}}{\Delta_2} & 0 & \frac{m_2 r_d \lambda_{dss}}{\Delta_2} \\
 m_1 m_2^2 r_d \frac{r_q}{\Delta_2} & \frac{m_2 F_r r_q \lambda_{qss}}{\Delta_2} & 0 & \frac{m_2 F_r r_d \lambda_{dss}}{\Delta_2} \\
 m_1 \frac{m_2^2}{m_3} r_d \frac{r_q}{\Delta_2} & \frac{m_2}{m_3} F_r r_q \frac{\lambda_{qss}}{\Delta_2} & 0 & \frac{m_2}{m_3} F_r r_d \frac{\lambda_{dss}}{\Delta_2} \\
 \frac{m_1 m_2 r_q \lambda_{qss}}{\Delta_2} & \frac{1}{r_d} \frac{r_d r_q m_2^2 + F_r r_d \lambda_{dss}^2}{\Delta_2} & 0 & \frac{F_r \lambda_{dss} \lambda_{qss}}{\Delta_2} \\
 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & \frac{1}{r_f} & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \frac{m_1 m_2 r_d \lambda_{dss}}{\Delta_2} & \frac{F_r \lambda_{dss} \lambda_{qss}}{\Delta_2} & 0 & \frac{1}{r_q} \frac{r_d r_q m_2^2 + F_r r_q \lambda_{qss}^2}{\Delta_2} \\
 \frac{m_1 m_2 r_d r_q}{\Delta_2} & \frac{F_r r_q \lambda_{qss}}{\Delta_2} & 0 & \frac{F_r r_d \lambda_{dss}}{\Delta_2}
 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ e_{19} \\ e_{23} \\ e_{29} \end{bmatrix}$$

donde

$$\Delta_2 = -r_d r_q m_2^2 + F_r r_d \lambda_{dss}^2 + F_r r_q \lambda_{qss}^2$$

El valor en estado estacionario obtenido corresponde al de las corrientes del Bond Graph. Así empleando la metodología de Bond Graph es posible obtener algunas de las condiciones y parámetros para el análisis de sistemas lineales.

En el siguiente capítulo se muestran las gráficas en las cuales se demuestra como se ven afectados los estados por la variación de los valores de la fuente lo cual corresponde al análisis de controlabilidad, así como el análisis en estado estacionario por medio de la simulación y otras respuestas del sistema que pueden ser obtenidas empleando el simulador 20 - SIM.

# Capítulo 4

## Simulación de una Central Hidroeléctrica en el Dominio Físico

### 4.1. Introducción

En el presente capítulo se hacen simulaciones mediante la utilización del software 20-sim el cual simula modelos en BG. Además, por medio de la simulación se analiza la propagación de las perturbaciones a cada uno de los elementos de todo el sistema y se obtienen graficas del efecto que tienen las perturbaciones en el proceso de generación de energía eléctrica. El modelo de la turbina con vibraciones proporciona estas perturbaciones. También, se obtienen simulación en el análisis del estado estacionario del sistema completo.

La simulación del modelo en BG de la central hidroeléctrica con controles, se realizo en el software 20-sim, el software cuenta con dos plataformas de programación que son: en un ambiente gráfico y el otro 3por medio de ecuaciones. El primero consiste en introducir el modelo que se tiene del sistema en Bond Graph y el programa se encarga de asignar causalidades o si el usuario lo desea puede asignarlas de forma manual. El segundo es en base a las ecuaciones que se obtienen del modelo obtenido e introducir las para la obtención de los resultados correspondientes.

## 4.2. Parámetros del sistema hidráulico - mecánico

Los parámetros empleados pertenecen a una aproximación de las características en una central hidroeléctrica. Donde los parámetros utilizados son una parte importante en el modelo y simulación de sistemas, ya que con parámetros y metodologías eficientes de simulación es posible obtener resultados satisfactorios antes de su construcción física.

Algunos de los parámetros empleados en el modelo de la central hidroeléctrica se muestran en la siguiente tabla,

Tabla 4.1 Parámetros de los elementos en la sección hidráulica.

Elementos	Valores
Caudal de entrada $Q_1$	1
Resistencia de válvula de salida $R_H$	0.7
Capacidad del tanque $C_H$	0.5780

La sección mecánica donde se encuentra la turbina la cual tiene variables asociadas a esta como lo son: dos hidráulicas y dos mecánicas. Las hidráulicas son la presión que tiene el fluido a la entrada de la turbina y el caudal que pasa a través de ella, las mecánicas son el par generado en la flecha de la turbina y la velocidad angular de está.

La relación entre las variables es:

$$P = K_1 T_T \quad (4.89)$$

$$\omega_T = K_2 q \quad (4.90)$$

donde  $P$  y  $q$  son las variables de presión y caudal,  $T_T$  y  $\omega_T$  el par producido en la flecha y la velocidad angular. Conociendo las variables de potencia tanto en la entrada como en la salida de la turbina es posible asignar una aproximación al modelo empleando un elemento girador (Tabla 2.7) en Bond Graph, ya que la variable generalizada a la entrada de la turbina en el modelo es el *flujo* y lo que se requiere es presión o *esfuerzo* a la salida. En la turbina donde se agregan las vibraciones permite tener un modelo mas completo de una turbina. [20]

Los valores que se emplearon en las secciones hidráulica, mecánica y eléctrica para la construcción de la central hidroeléctrica son valores que permiten que la simulaciones se lleven a cabo, se indican las unidades de medida de las variables obtenidas en y cada una de las secciones.

## 4.3. Respuesta de las secciones hidráulica y mecánica

Las gráficas mostradas son de algunas de las variables del sistema hidráulico y mecánico desacopladas, esto se hace con el fin de conocer su comportamiento cuando las secciones están trabajando en conjunto o de forma independiente, de está manera es posible conocer que variables se ven afectadas por estar conectadas a otras secciones y elementos.

La Figura 4.1 muestra la entrada de caudal al sistema hidráulico del modelo de Bond Graph, donde se tiene un valor constante de 1 definido como el valor de F1.

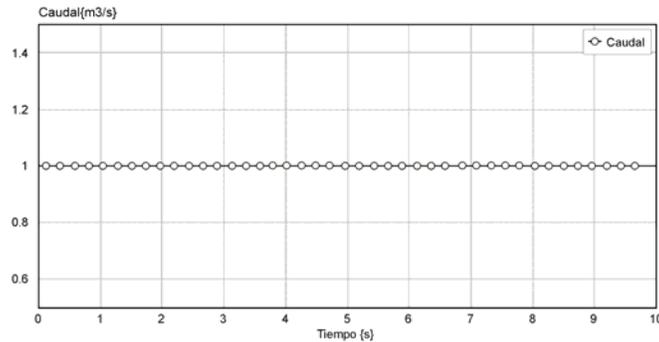


Figura 4.1 Entrada F1.

La Figura 4.2 muestra la velocidad en la que el volumen del tanque se va incrementando en cierto tiempo hasta alcanzar un valor estático lo cual tiene como significado el llenado del mismo representado en el Bond Graph como  $C_H$ . También se muestra la gráfica del caudal, la cual de un valor equivalente al de F1 comienza a disminuir hasta llegar a un valor muy pequeño debido a que el tanque se encuentra lleno, caso contrario en la presión ya que comienza con un valor de cero para posteriormente alcanzar el valor estático coincidiendo con el llenado de  $C_H$ .

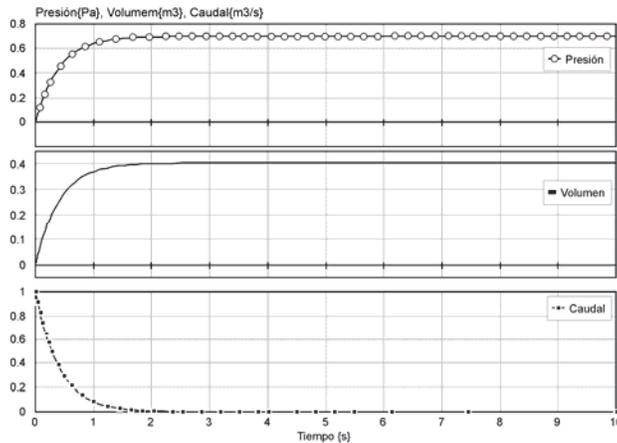


Figura 4.2 Variables en CH.

La Figura 4.3 muestra las características de la válvula  $R_H$  en la que la cantidad de caudal que pasa a través de ella comienza por incrementarse hasta llegar a un valor estable seguida de la presión generada por el paso del caudal a través de ella.

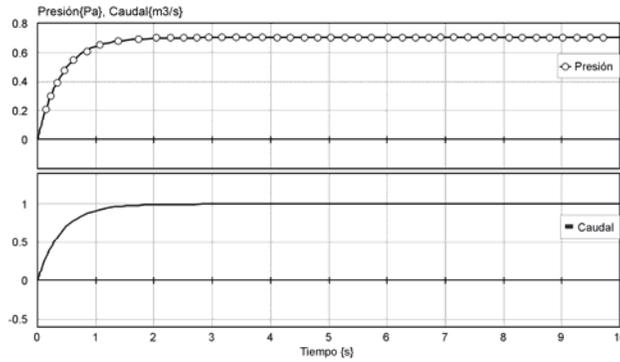


Figura 4.3 Presión y caudal en  $R_H$ .

Las gráficas mostradas anteriormente son para el caso en que el sistema hidráulico no se encuentra conectado al sistema mecánico y eléctrico. Por lo tanto las gráficas describen el comportamiento de algunos de los elementos del sistema hidráulico aislado. Enseguida se muestran las gráficas para las cuales se tiene al sistema mecánico sin ser aún conectado al sistema hidráulico.

La Figura 4.4 en la gráfica superior muestra la entrada que se tiene en el sistema mecánico donde está ubicada la turbina, se puede notar que la velocidad angular mantiene un valor constante ya que en este caso particular se colocó una fuente de flujo a la entrada de está lo cual representa un flujo constante, la segunda gráfica es el par mecánico en el cual se tienen dos casos uno donde el transitorio permanece por más tiempo y con una componente oscilatoria, el segundo caso sólo tiene un pequeño sobre impulso por un periodo de tiempo corto para después alcanzar el estado estable. Esta característica se hace posible apreciarla al variar el  $Da$ .

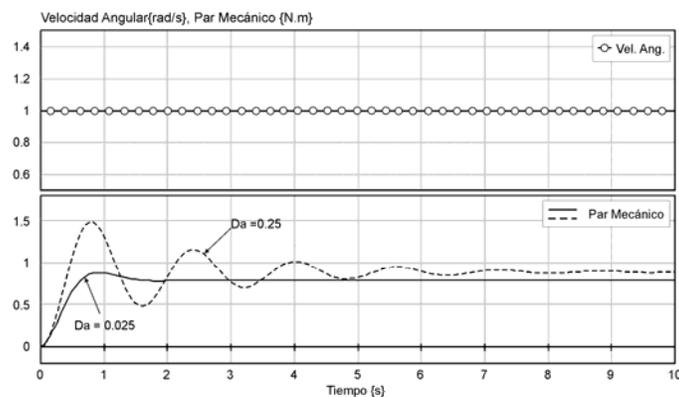


Figura 4.4 Características de entrada en la turbina.

La Figura 4.5 muestra tres gráficas las cuales representan a diferentes elementos en el sistema de vibración: en la primera se tiene la fuerza ubicada en el amortiguador que representa la cantidad de esfuerzo ejercido por el amortiguador  $C_a$  para evitar las oscilaciones, en la segunda la posición en  $x$  de contracción del resorte  $K_a$  y por último se tiene el momento en la masa la cual al igual que en las demás gráficas tiene presente una oscilación que va disminuyendo a medida que pasa el tiempo en esta gráfica al igual que en

las otras se tienen dos casos en el cual se pueden apreciar las oscilación al modificar los valores de  $Da$ .

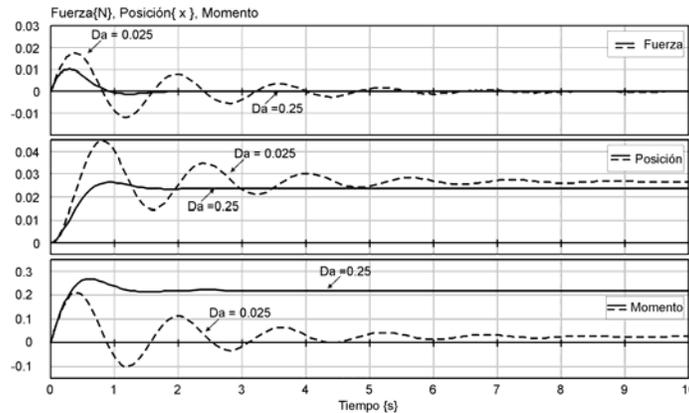


Figura 4.5 Respuestas de  $Ca$ ,  $Ka$  y  $ma$  en el sistema de vibración.

Un parámetro importante a considerar es el de la relación de transformación denotada por  $m_3$  en el transformador. Está relación de transformación se define 1:1.5 considerando el tamaño de la turbina sin contar el eje que va al acoplamiento eléctrico del generador. En este análisis se considera el valor de la relación de transformación para  $m_3 = 1.5$ .

La Figura 4.6 muestra cuatro gráficas donde las a) y b) corresponden a la velocidad que tienen origen en la entrada y salida del transformador en el modelo de vibración, con dos casos donde se varía el valor de  $Da$ , ambas gráficas a) y b) tienen un transitorio el cual después de un tiempo tienden a disminuir hasta alcanzar un valor de cero que tienen como significado la velocidad en la que van disminuyendo las vibraciones. Las gráficas c) y d) son obtenidas del acoplamiento que existe entre la sección mecánica-eléctrica. Que en el caso de la velocidad angular c) en un determinado tiempo su valor llega al estado estacionario, y en el par mecánico d) si se tiene un  $Da$  menor el valor al que tiende el par mecánico es pequeño con relación al otro debido a la relación que existe con (3.41).

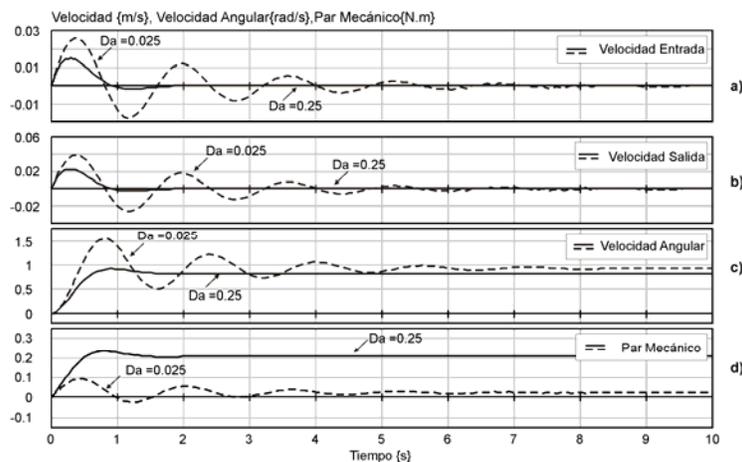


Figura 4.6 Variables en el TF:  $m_3$  y GY:  $m_2$ .

#### 4.4. Análisis del sistema con secciones acopladas

En esta parte se muestran gráficas que describen el comportamiento de las variables del sistema con las secciones acopladas hidráulica, mecánica y eléctrica. También se hace un análisis de controlabilidad en el cual se cambian los valores de las fuentes con el fin de mostrar el efecto que esto tiene sobre los elementos almacenadores del sistema. Además se obtienen otras gráficas del sistema como los son: corrientes en *abc*, voltajes en algunos elementos del generador síncrono, etc.

La Figura 4.7 muestra algunas de las variables hidráulicas de los elementos  $R_H$  y  $C_H$ . Con el fin de mostrar los efectos que tienen las variables mecánicas en el transitorio. Se modificaron los valores de  $Da$  y  $Jr$  respectivamente y hace notorias las oscilaciones en el sistema.

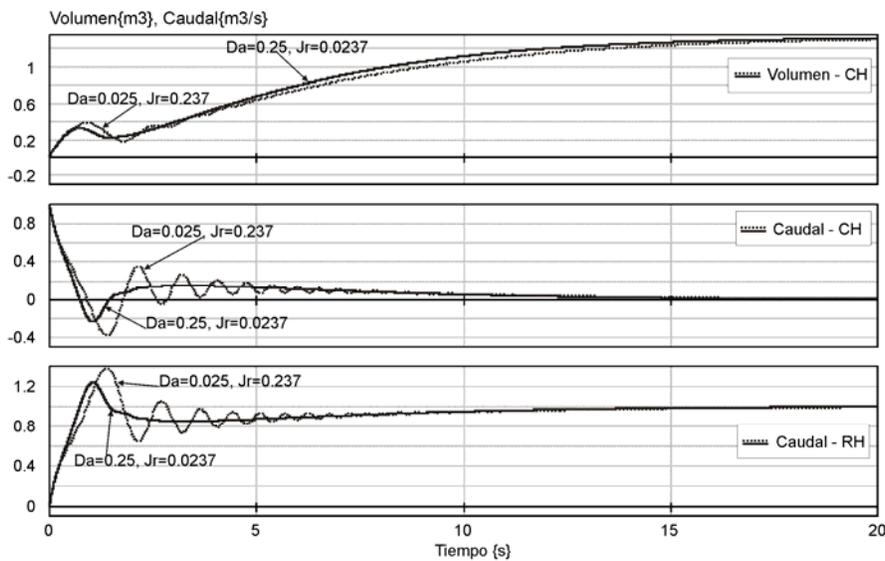


Figura 4.7 Variables hidráulicas en  $R_H$  y  $C_H$ .

Las gráficas de la Figura 4.8 son variables que se deben de tener en cuenta en el momento del diseño de una presa ya que las estructuras pueden colapsar ante perturbaciones como las vibraciones, en las gráficas mostradas se modificaron los parámetros del modelo de vibración y se obtuvieron tres diferentes respuestas por cada variable donde estas no están presentes durante todo el tiempo, pero basta con el transitorio para que se provoquen daños, por ejemplo se está analizando el volumen del tanque y se observa un incremento en las respuestas para valores altos de  $K_a$  y  $K_b$  lo que puede originar daños en la obra civil si no se cuenta con un buen diseño; en el caso de la tubería se tienen oscilaciones reflejadas en el caudal pues a medida que transcurre el tiempo se crea una fatiga en los materiales debilitándolos y lo que da origen a fugas. Con este análisis, se pueden determinar de forma aproximada algunas de las consecuencias a las que se puede llegar en un sistema hidráulico si no se consideran las vibraciones en estructuras y los elementos que lo conforman. Las siguientes gráficas corresponden a la sección mecánica.

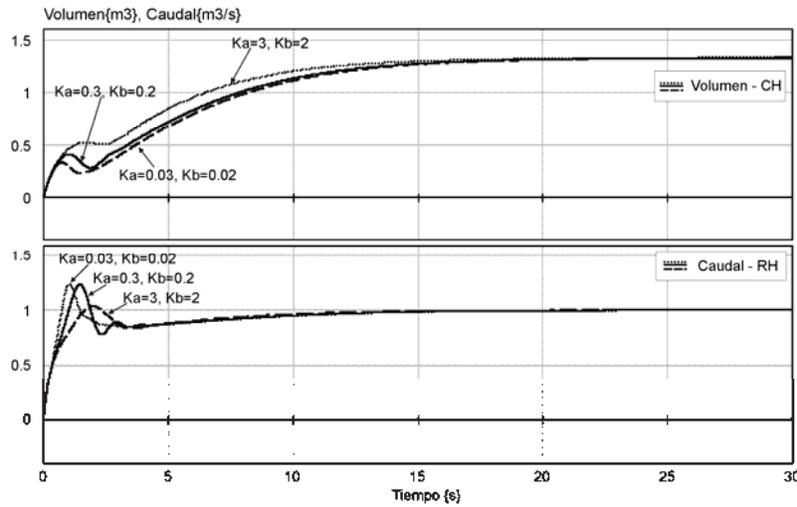


Figura 4.8 Variables críticas en  $R_H$  y  $C_H$  del sistema hidráulico.

En las gráficas anteriores se ha mencionado la importancia de los efectos de la vibración y más importante donde tienen origen. Las gráficas a), b) y c) de la Figura 4.9 corresponden a la entrada y salida de la turbina, la gráfica a) corresponde a la velocidad de entrada la cual para diferentes valores en los resortes del sistema de vibración, la gráfica b) es la velocidad de la turbina ubicada entre el sistema de vibración y los álabes de la turbina, la gráfica c) muestra la fuerza ejercida en la turbina la cual durante el transitorio, momento en que resulta más afectada por las variaciones de  $K_a$  y  $K_b$ . A diferencia de a) y b) la gráfica c) llega un momento en el que su valor se va disminuyendo hasta hacerse muy pequeño esto al inicio de rotación ya que de estar en reposo y recibir el impacto del caudal en la tubería genera un gran esfuerzo, este esfuerzo después de un tiempo va disminuyendo hasta alcanzar un valor en estado estable.

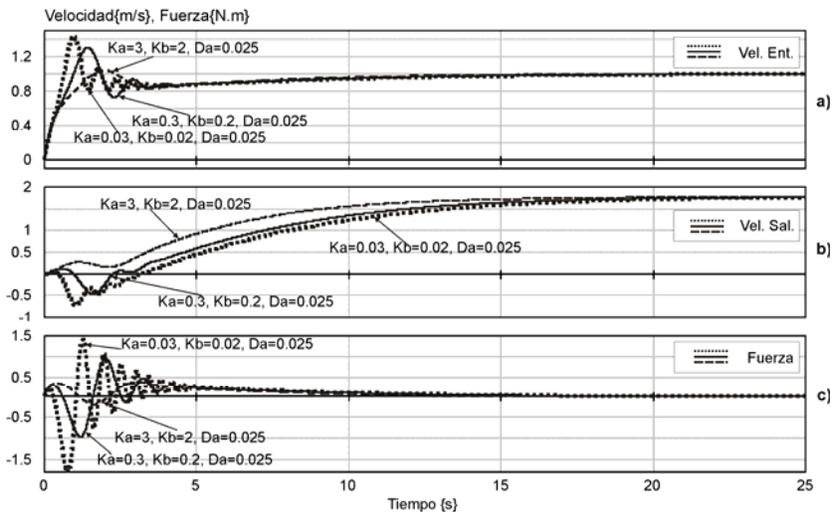


Figura 4.9 Variables mecánicas GY:  $m_1$ .

Las siguientes gráficas describen el comportamiento de los elementos en el sistema de vibraciones. En las gráficas a) y b) de la Figura 4.10 la variación de la magnitud es debida a los cambios en los parámetros de los elementos  $C_a$  y  $K_a$ .

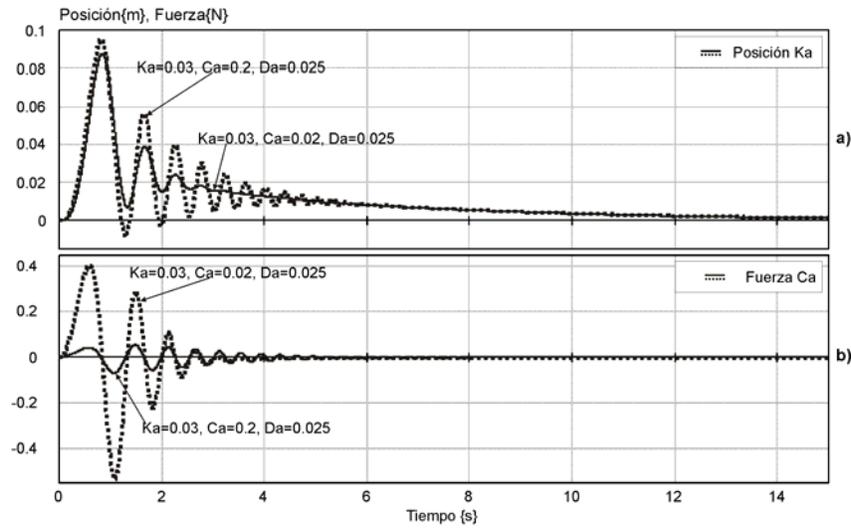


Figura 4.10 Respuesta de elementos Ca y Ka.

El motivo de que las gráficas anteriores excluyan a los elementos Cb y Kb se debe a que el comportamiento será el mismo pero con diferente amplitud y menor tiempo en el transitorio que en los casos de donde solo se esta simulando Ca y Ka.

En la Figura 4.11 las gráficas a) y b) son variables en el transformador que está en el modelo de vibración, las cual representa un cambio de velocidad de entrada con respecto a la salida, la gráfica c) muestra el par mecánico en el eje que está acoplado al generador síncrono donde se puede apreciar una componente de oscilación en la señal, al igual que en las gráficas anteriores se varían algunos parámetros para que se pueda observar el efecto que esto tiene en la respuesta del sistema, la amplitud de las gráficas, el tiempo que las oscilaciones se mantienen se ve afectado por los cambios en los parametros.

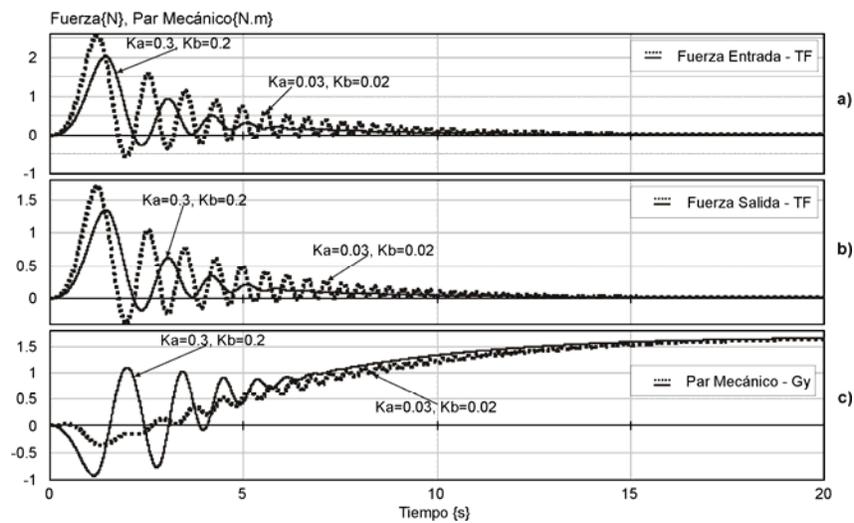


Figura 4.11 Respuesta de TF:  $m_3$  y par mecánico en GY:  $m_2$ .

La Figura 4.12 muestra las gráficas de las variables mecánicas  $T_m$ ,  $D_a$  y  $J_r$  en el acoplamiento del generador síncrono, para diferentes valores de  $K_a$  y  $K_b$  aumentan o disminuyen las vibraciones. La gráfica de par mecánico que corresponde al  $T_m$  alcanza un valor en estado estacionario después de un tiempo determinado, las siguientes gráficas corresponden al  $D_a$  y  $J_r$  que mantienen un valor con una componente de oscilación que posteriormente decaen a un valor pequeño.

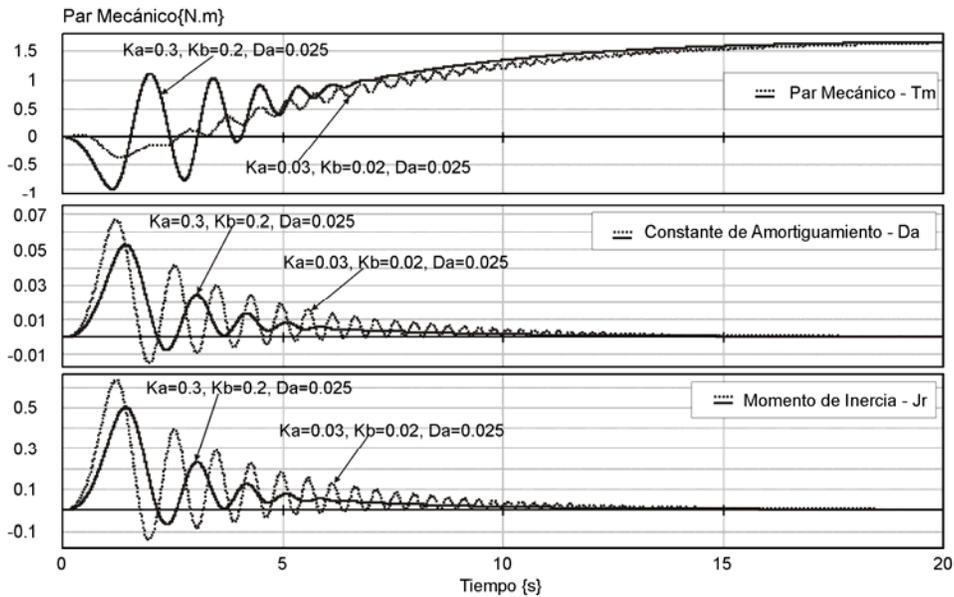


Figura 4.12 Variables de acoplamiento mecánico – eléctrico,  $T_m$ ,  $D_a$  y  $J_r$ .

En las gráficas anteriores se han venido observando la propagación de las vibraciones, las cuales están presentes en toda variable para después de un tiempo determinado disminuir al grado que pueden ser despreciables, es por esto que en la siguiente sección se analizan las variables eléctricas en el generador síncrono y como se ven afectadas por las vibraciones.

Los voltajes en los devanados de amortiguamiento, se muestran en la Figura 4.13 el  $V_Q$  y  $V_D$  tienden a cero después de un determinado tiempo por eso para efectos de estabilidad es posible despreciarlos en un modelo reducido de la máquina síncrona. En las gráficas se varían los valores de  $D_a$  y  $J_r$  donde para valores pequeños el  $V_D$  disminuye el tiempo del transitorio y el  $V_Q$  muestra un transitorio con oscilaciones al disminuir los valores de  $D_a$  y  $J_r$ .

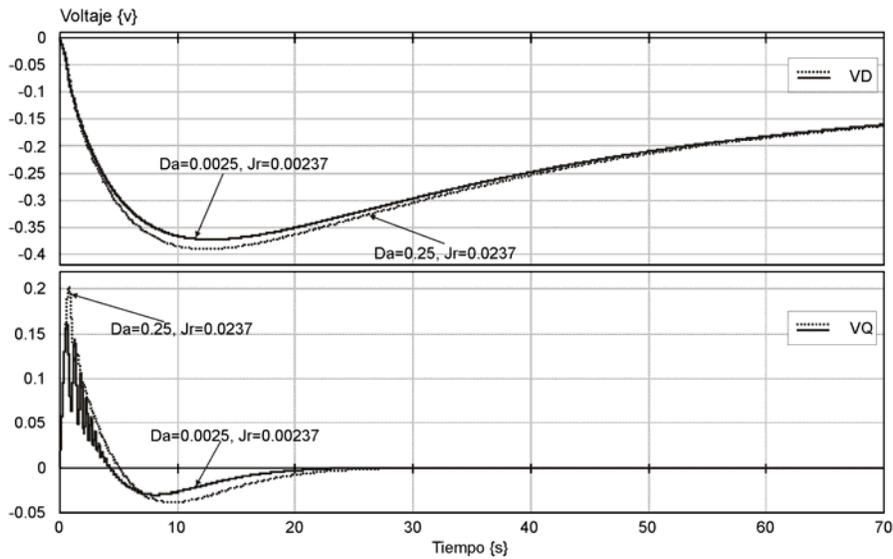


Figura 4.13 Voltajes de los devanados de amortiguamiento en el rotor D y Q .

Las gráficas de la Figura 4.14 muestra la respuesta de los enlaces de flujo en el generador síncrono en el estator. Se tienen dos gráficas en cada enlace de flujo donde se tienen diferentes comportamientos al variar las inductancias mutuas que tiene como resultado llegar a la estabilidad en un menor tiempo.

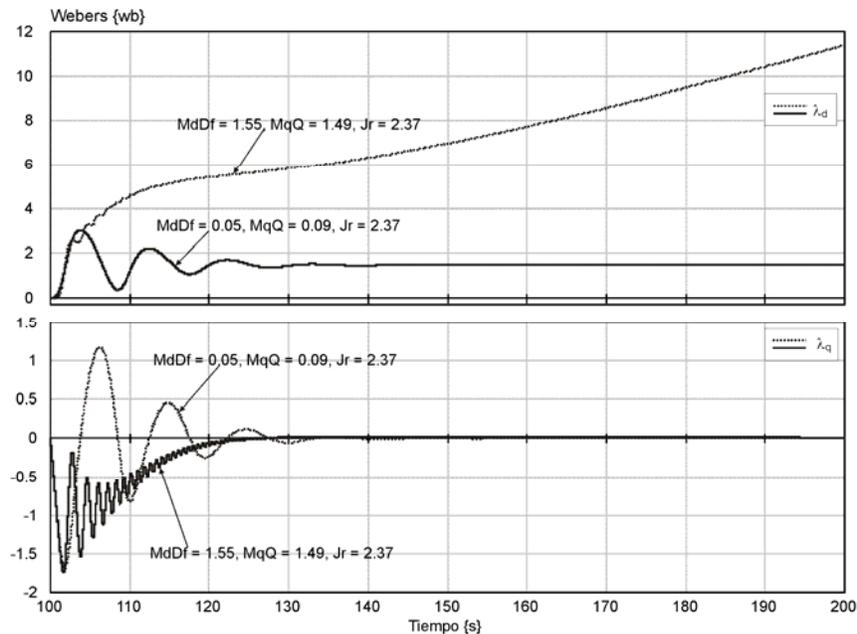


Figura 4.14 Enlaces de flujo  $\lambda_d$  y  $\lambda_q$  en el estator.

La Figura 4.15 muestra las corrientes en el estator del generador síncrono correspondientes a los ejes d y q, en la primera gráfica que corresponde a la corriente en d tiene un valor negativo, así mismo el tiempo de estabilización es mayor que el caso en el que se

decrementa el valor de la inductancia mutua pues el tiempo de estabilización es menor. El transitorio en la corriente  $q$  permanece por más tiempo cuando el valor de  $M_{dDf}$  es 0.05 y para el caso en donde  $M_{dDf}$  es 1.55 el transitorio es menor pero las oscilaciones son más periódicas durante el transitorio.

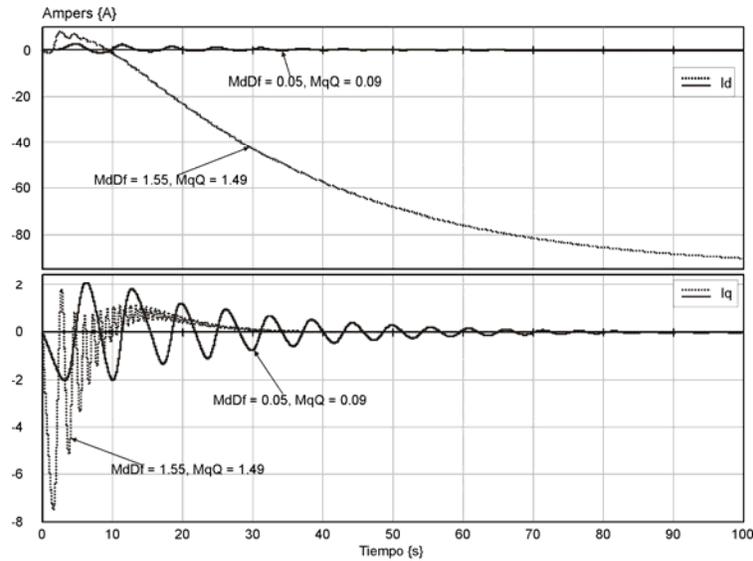


Figura 4.15 Corrientes en el eje  $d$  y  $q$  en el estator.

El contenido de la Figura 4.16 corresponde a las variables de los voltajes en el devanado de campo. En el cual la primera gráfica muestra el voltaje de la fuente de  $cd$ , las siguientes gráficas corresponden a los voltajes en la  $r_f$  para diferentes valores de está resistencia. Al cambiar los valores de la resistencia es posible apreciar que el tiempo en que el voltaje de la resistencia alcanza al de la fuente de voltaje ocurre en un tiempo menor, caso contrario para cuando este valor es muy pequeño.

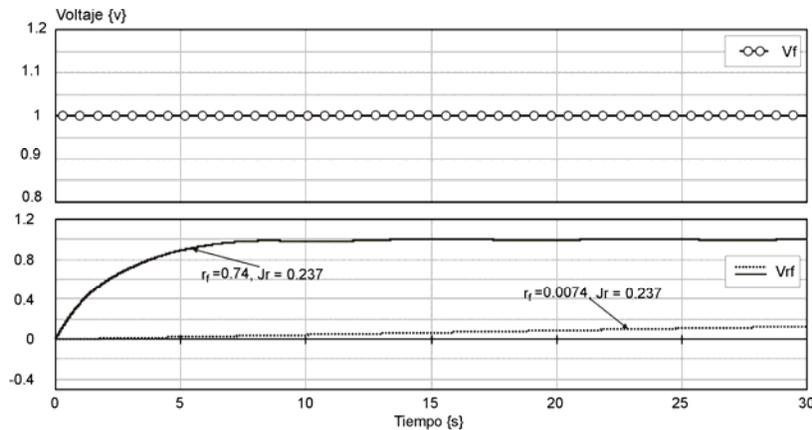


Figura 4.16 Voltajes en  $r_f$  y del devanado de campo.

La Figura 4.17 muestra las corrientes de salida del generador síncrono en el estado estacionario, algo a mencionar es que los datos de la máquina síncrona se fueron variando hasta conseguir que llegará al estado estacionario en un menor tiempo.

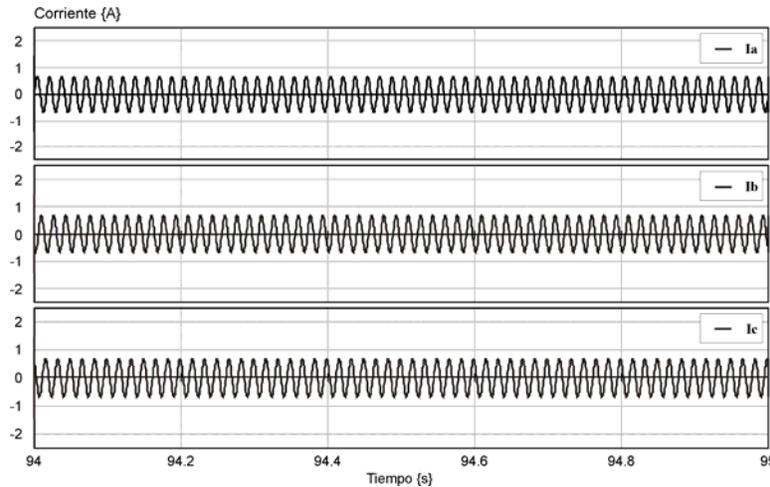


Figura 4.17 Corrientes en abc del generador síncrono.

A continuación se hace un análisis del sistema omitiendo el sistema de vibraciones.

### 4.5. Análisis de secciones acopladas sin vibraciones

En las secciones anteriores de este capítulo se han analizado las secciones del modelo físico de la central hidroeléctrica en Bond Graph antes de ser acopladas entre si y ya cuando éstas son acopladas e incluyendo las vibraciones. En esta parte se analiza el sistema acoplado a las demás secciones pero omitiendo las vibraciones.

Con el fin de reducir este análisis solamente se incluyen las variables de estado del sistema sin vibraciones, considerando la numeración de los Bonds como los descritos en el capítulo anterior Figura 3.38. El diagrama a bloques de la central hidroeléctrica se muestra en la Figura 4.18.

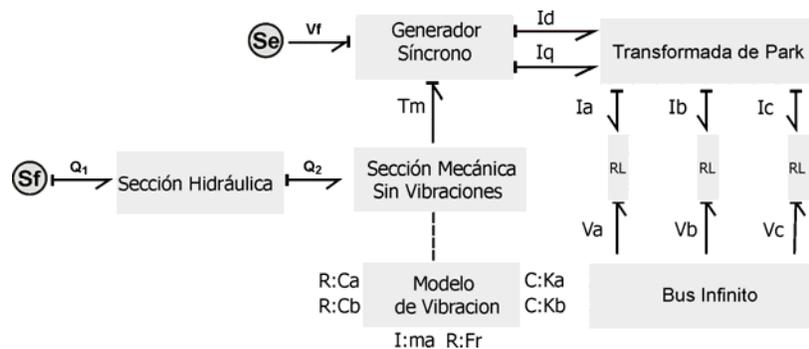


Figura 4.18 Diagrama a bloques de una central hidroeléctrica sin vibraciones en BG.

El diagrama de la Figura 4.18 muestra en forma de bloques la representación del modelo de una central hidroeléctrica, que para éste caso se están despreciando las vibraciones ubicadas en la sección mecánica. Internamente del bloque mecánico se tiene un girador que

representa a la turbina. Los bloques siguientes a éste es la máquina síncrona, la transformación de dq0 a abc y por ultimo la conexión al bus infinito a través de una línea RL. De este modelo solo se obtienen las variables de estado.

Las gráficas de la Figura 4.19 corresponden a las variables de: la sección hidráulica f2 que es el caudal en  $C_H$ , sección eléctrica f8 es la corriente en  $L_d$  de estator, f9 es la corriente en  $L_D$  y f10 corriente en  $L_f$  ambas en el rotor.

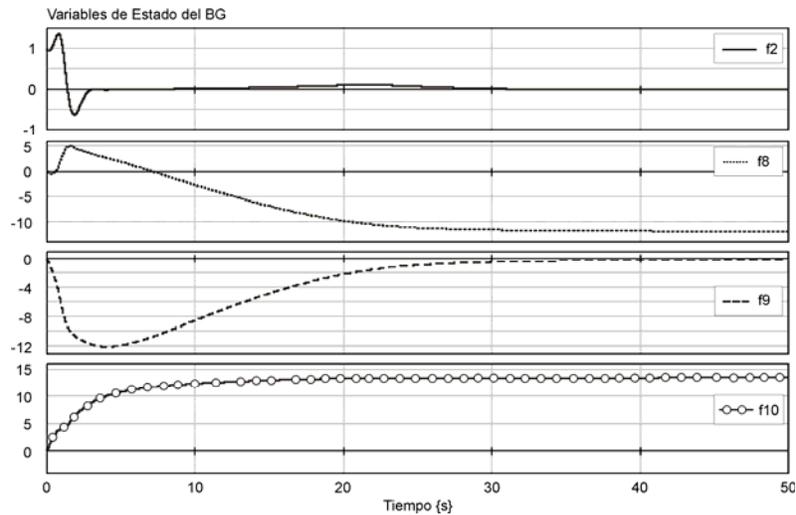


Figura 4.19 Variables de estado de secciones hidráulica y eléctrica.

La Figura 4.20 muestra las variables restantes del sistemas correspondientes a la parte eléctrica, f15 es la corriente en  $L_Q$ , f16 corriente en  $L_q$  y por último e23 que representa al par mecánico en el acoplamiento mecánico - eléctrico. Los efectos de las vibraciones no son vistos en la respuesta de este modelo, de hecho el tiempo de cada respuesta alcanza la estabilidad en un menor tiempo.

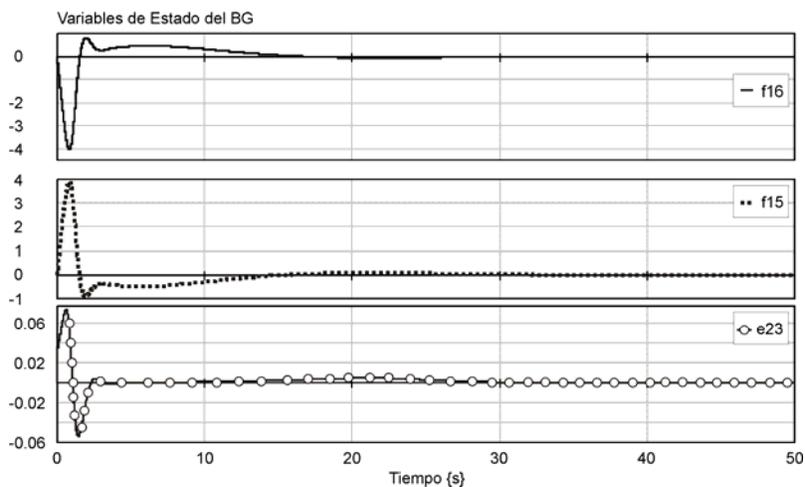


Figura 4.20 Variables de estado eléctricas y de acoplamiento mecánico-eléctrico.



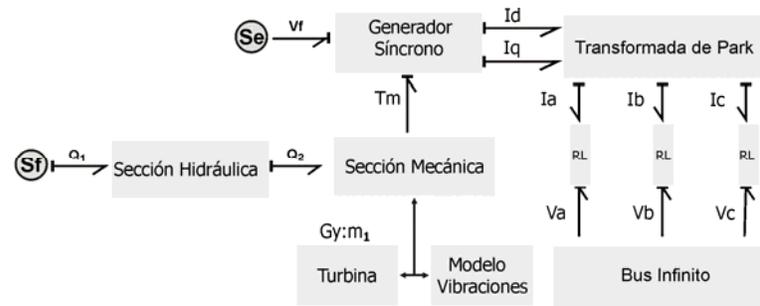


Figura 4.22 Diagrama a bloques del modelo de Bond Graph de una central hidroeléctrica.

La Figura 4.22 muestra un diagrama a bloques de cómo está constituido el sistema en diferentes secciones, este modelo tiene el modelo de vibraciones mecánicas a diferencia del mostrado en la Figura 4.18.

La simulación que se muestra a continuación corresponde a las variables de estado del sistema completo, para esta simulación se variaron los valores de las fuentes.

La Figura 4.23 muestra las variables de estado de las secciones hidráulica y mecánica para diferentes valores de  $F_1$  y  $V_f$ , esto con el objetivo de demostrar la teoría de controlabilidad en la metodología de Bond Graph. En las gráficas se tienen dos casos donde se varían los valores de las fuentes el primer caso es  $F_1 = 2$  y  $V_f = 1$  en el segundo caso  $F_1 = 1$  y  $V_f = 2$ .

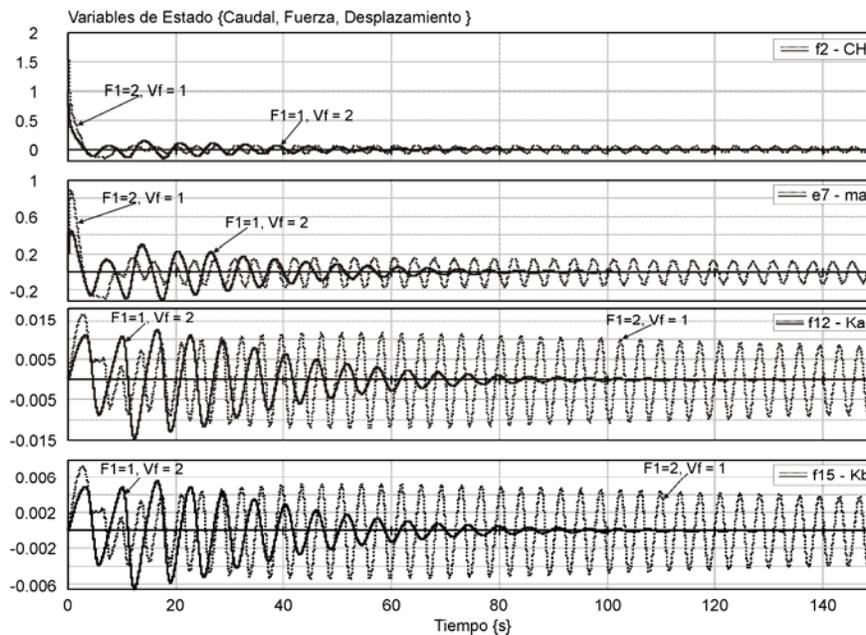


Figura 4.23 Variables de estado del sistema hidráulico y mecánico.

El primer caso genera una respuesta en las variables de estado, en las cuales existe un incremento en la oscilación y aumento el tiempo que está presente la oscilación. Si esto es comparado con el segundo caso, donde las oscilaciones disminuyen provocando que las variables lleguen al estado estacionario en un tiempo menor.

El efecto que provoca el variar  $F1$  puede considerarse obvio ya que el caudal en el tanque está directamente afectado por él y de alguna forma la sección mecánica por el hecho de que el sistema de amortiguamiento responde ante un mayor flujo en la turbina lo que provoca un incremento de las oscilaciones en el sistema, caso contrario al variar el  $V_f$  ya que está en una sección posterior a las secciones hidráulica y mecánica, pero que se puede apreciar que las variaciones en esta fuente provocan cambios en las variables de estado.

La Figura 4.24 muestra los voltajes en  $L_d$ ,  $L_D$  y  $L_f$  del generador síncrono. La gráfica de  $L_d$  muestra un voltaje el cual mantiene un transitorio durante un tiempo mayor para el caso en el que se tiene un  $V_f = 2$ , y donde se tiene un  $V_f = 1$  se llega al valor en estado estacionario en un menor tiempo, el voltaje en  $L_D$  tiende a cero después de un tiempo. La gráfica del voltaje de  $L_f$  inicia en el voltaje de la fuente y conforme transcurre el tiempo éste va decayendo hasta llegar a su valor estable.

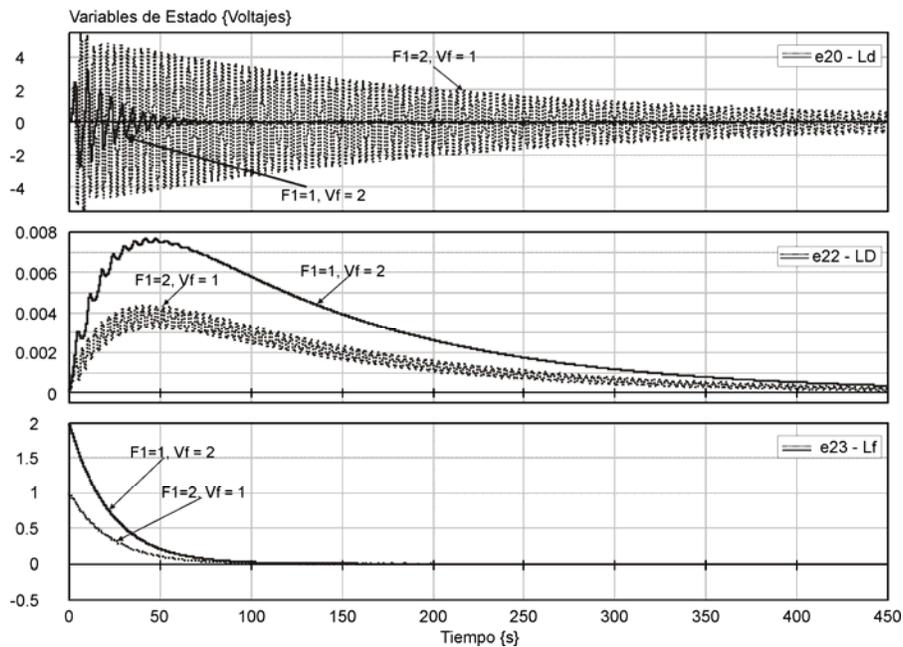


Figura 4.24 Variables de estado, voltajes en inductancias del generador síncrono.

La primera gráfica de la Figura 4.25 muestra el voltaje del inductor  $L_q$  para diferentes valores en las fuentes del sistema, descritas anteriormente, la gráfica para  $L_Q$  muestra su voltaje el cual tiende a un valor de cero y que al variar las fuentes de potencia afecta directamente en el tiempo que llegara al valor en estado estacionario, la gráfica final de  $J_r$  muestra la fuerza ejercida en el acoplamiento mecánico - eléctrico la cual llega a un tiempo de establecimiento mas corto ante un valor de  $V_f = 2$ .

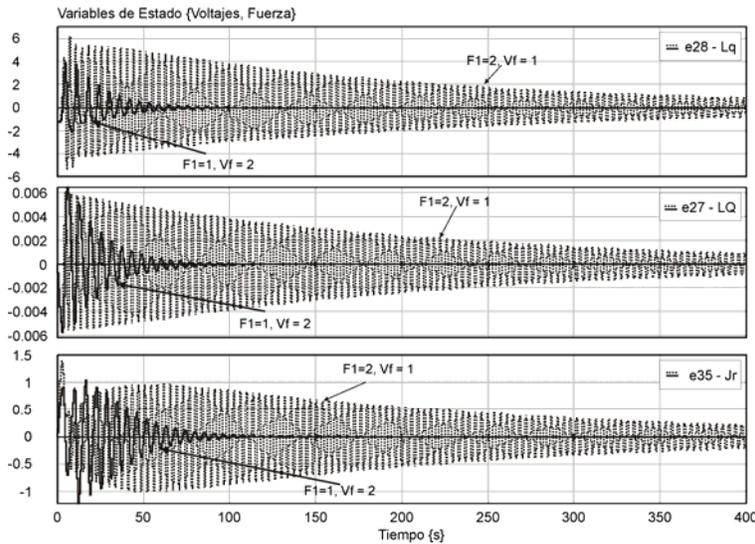


Figura 4.25 Variables de voltaje en  $L_q$ ,  $L_Q$  y fuerza en  $J_r$ .

Las gráficas mostradas anteriormente presentan cambios importantes al variar las fuentes de potencia en el modelo de Bond Graph y en todos los estados del sistema donde este sistema tiene el modelo de vibraciones. Las siguientes simulaciones son para el sistema sin vibraciones.

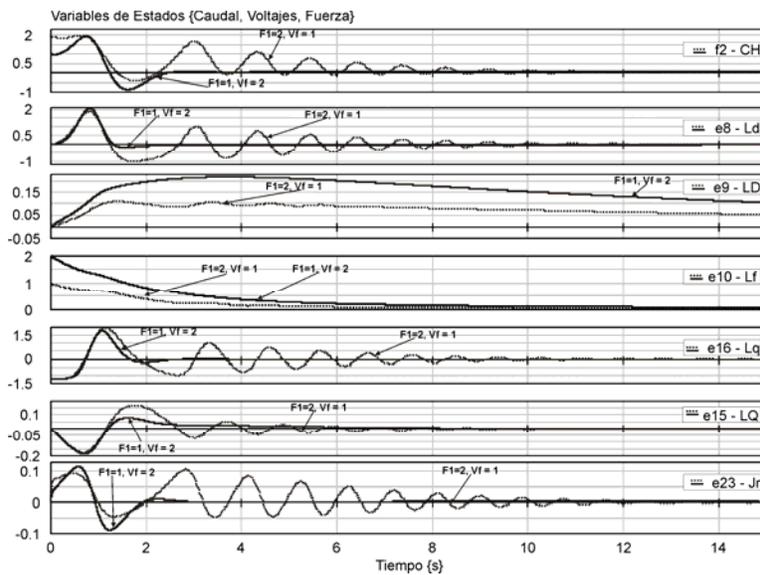


Figura 4.26 Variables de estado del sistema sin vibraciones del modelo de BG.

La Figura 4.26 muestra las variables de caudal y voltaje que corresponde a las variables de estado de las secciones hidráulica y eléctrica acopladas para el modelo en BG cuando se están omitiendo las vibraciones en la sección mecánica. La variable  $f_2$  representa el caudal en el tanque  $C_H$  el cual después de un tiempo tiende a un valor muy pequeño ya que para un sistema hidráulico en el cual ha transcurrido el tiempo el tanque se encuentra lleno y el caudal que pasa a través de él es casi nulo, para el caso de los voltajes de las inductancias  $L_d$ ,  $L_q$ ,  $L_f$  su comportamiento es muy similar ya que para un valor de  $F_1 = 2$  la respuesta en el transitorio es oscilatoria para posteriormente llegar a un valor diferente de cero y sin oscilaciones, caso contrario para los voltajes en  $L_D$  y  $L_Q$  ya que su valor tiende a cero después de un tiempo aun cuando se varía  $F_1$  de un valor de 1 a 2 y ocurriendo de igual manera al variar  $V_f$  de 1 a 2. En la siguiente parte se estudia el estado estacionario y se efectua la simulación del sistema completo utilizando el programa 20-sim.

#### 4.7. Simulación y análisis en estado estable del modelo de la central hidroeléctrica en Bond Graph

Utilizando las matrices descritas por (3.82), (3.79) y (3.87) es posible determinar el estado estacionario del sistema sustituyendo los valores de los elementos del modelo en Bond Graph:  $R_H = 0.7$ ,  $R_{fr} = 0.5$ ,  $R_{Ca} = 0.2$ ,  $R_{Cb} = 0.2$ ,  $R_{rd} = 0.0011$ ,  $R_{rD} = 0.0131$ ,  $R_{rf} = 0.00742$ ,  $R_Q = 0.054$ ,  $R_q = 0.0011$ ,  $R_{Da} = 0.25$ ,  $m_1 = 0.9$ ,  $m_2 = 0.95$ ,  $m_3 = 1.5$ ,  $\lambda_d = 1.47143$ ,  $\lambda_q = -0.0006259$  y llegar a lo siguiente:

$$N = \begin{bmatrix} 0.7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.9982 & 0 & 0 & 5.4869 \times 10^{-4} & 0 & 0 & 0 & 1.2899 & -9.6432 \times 10^{-4} \\ 0 & 0 & 0.2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5.4868 \times 10^{-4} & 0 & 0 & 909.09 & 0 & 0 & 0 & -0.38629 & 2.8878 \times 10^{-4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 76.336 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 134.77 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 18.519 & 0 & 0 \\ 0 & 1.2899 & 0 & 0 & -0.38629 & 0 & 0 & 0 & 0.94836 & 0.67892 \\ 0 & 9.643 \times 10^{-4} & 0 & 0 & -2.8878 \times 10^{-4} & 0 & 0 & 0 & -0.6789 & 5.0752 \times 10^{-4} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 2.3185 & 0 & 0 & 1.1609 \\ 1.7984 & 0 & 0 & 1.2899 \\ 0 & 0 & 0 & -0.64496 \\ 0 & 0 & 0 & -0.42997 \\ 0 & 909.09 & 0 & -0.38629 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 134.77 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1.1609 & -0.38629 & 0 & 0.94836 \\ 0 & 0 & 0 & -0.6789 \end{bmatrix}$$

Para finalmente llegar,

$$Z_{ss} = \begin{bmatrix} 2.3185 & 0 & 0 & 1.1609 \\ 1.7984 & 0 & 0 & 1.2899 \\ 0 & 0 & 0 & -0.64496 \\ 0 & 0 & 0 & -0.42997 \\ 0 & 909.09 & 0 & -0.38629 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 134.77 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1.1609 & -0.38629 & 0 & 0.94836 \\ 0 & 0 & 0 & -0.6789 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1.2246 \end{bmatrix}$$

$$Z_{ss} = \begin{bmatrix} 3.7401 \\ 3.378 \\ -0.78982 \\ -0.52654 \\ -0.47305 \\ 0 \\ 134.77 \\ 0 \\ 2.3223 \\ -0.83138 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_2 \\ f_7 \\ e_{12} \\ e_{15} \\ f_{20} \\ f_{21} \\ f_{22} \\ f_{27} \\ f_{28} \\ f_{35} \end{bmatrix}$$

Estos valores es posible comprobarlos mediante la simulación en 20-sim y construyendo el Bond Graph de la Figura 3.36. En la Figura 4.27 se muestran los valores que se alcanzan en estado estacionario, del modelo completo de la central hidroeléctrica en el dominio físico. En la simulación es posible notar que algunas variables se simularon para mucho tiempo con la finalidad de que no haya duda en el tiempo de establecimiento esto solo para el caso de las variables en la sección eléctrica.

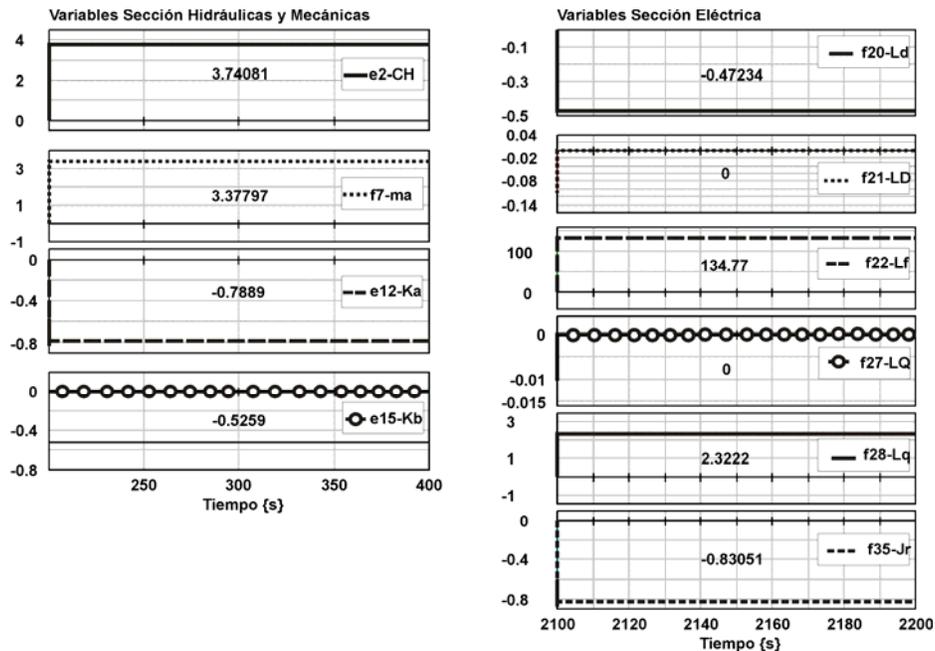


Figura 4.27 Simulación de las variables de estado en el estado estacionario.

Al comprobar los valores obtenidos en la simulación con los resultados de la solución analítica se concluye que en el estado estable las variables de estado de todo el sistema tienden al valor obtenido previamente a la simulación.

#### 4.8. Controles de una central hidroeléctrica en el dominio físico.

Un controlador automático compara el valor real de la salida de una planta con el valor de referencia (valor deseado o set point), determina la desviación y produce una señal de control que reducirá la desviación a cero o a un valor pequeño. La manera en la que el controlador automático produce la señal de control se denomina *acción de control* [10].

Los sistemas controlados son compuestos generalmente por dos partes que son: elementos pasivos y los de la arquitectura de control, formados por actuadores y sensores. Cuando se trabaja con estos sistemas el primer punto a considerar es el estudio del sistema sin controladores. Para realizar esto es necesario tener el modelo en orden de obtener resultados de su comportamiento dinámico y en el dominio de la frecuencia. El segundo paso es el de diseñar la arquitectura de control, con los actuadores y sensores, especificando

de forma clara y concisa los objetivos, alcances y costos de los controladores. Por algunos años la metodología de Bond Graph ha mostrado estas cualidades para el modelado y creación de controladores para sistemas alcanzables, especialmente en modelos multidisciplinares. Las propiedades de los modelos son generalizadas y pueden ser utilizadas “para integrarlas al diseño” los alcances del control, el diseño del modelo pasivo y su arquitectura de control se obtiene de forma simultánea.

El propósito de la metodología para la creación de controles y asignación de sensores depende de las manipulaciones de causalidad en el modelo de Bond Graph (asignación de causalidad integral o derivativa, trayectorias y lazos causales). Estas aplicaciones probablemente requieran de regresar al modelo y realizar correcciones de algunas propuestas hechas hipotéticamente al modelo.

#### 4.8.1. Sistemas de excitación

Existen tres sistemas de control que afectan directamente al generador síncrono en un modelo de una central hidroeléctrica que son: control de caudal de la tubería de compuerta a la turbina, gobernador de la turbina y excitación del devanado de campo. En la Figura 4.28 se muestra una representación simplificada a diagrama bloques de los controles en un sistema de generación de energía eléctrica.

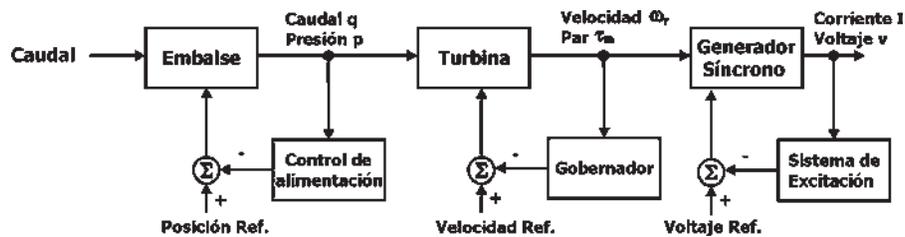


Figura 4.28 Controles principales de unidad generadora de energía eléctrica.

Refiriéndose a la Figura 4.28 es posible asumir que en las unidades de generación se desprecian las pérdidas. Esto no es una mala suposición, cuando el total de pérdidas que ocurren en la turbina y en el generador son pequeñas, si se compara con el resultado de la salida. Bajo estas condiciones toda la potencia de caudal de entrada, es aprovechada por la turbina que transfiere la energía a la salida como velocidad angular al generador que transforma la velocidad  $\omega_r$  a una potencia eléctrica de salida.

La representación de la unidad de generación de energía eléctrica de la Figura 4.28 es una conversión de energía de diferentes dominios. Esto se puede apreciar por el cambio de un caudal de entrada a una energía eléctrica de salida. Donde de acuerdo al diagrama a bloques la cantidad de caudal que permita la turbina está determinada por el gobernador, y el fluido enviado a todo el sistema está determinado por la posición de apertura de la válvula. Los controles del sistema de excitación son los encargados de llevar a cabo el control de la potencia reactiva del generador síncrono de acuerdo a los valores de salida no sólo de los voltajes si no también para las corrientes.

### 4.8.2. Controles de la central hidroeléctrica en el dominio físico

La adaptación de controles en un sistema físico requiere de la manipulación de una variable en específico, a la cual se desea cambiar de un estado inicial a uno deseado y el tiempo que se mantenga a esta variable en el valor deseado o el tiempo que transcurra antes de alcanzarla dependerá del controlador.

Una vez evaluado lo anterior, es recomendable obtener la respuesta del sistema en lazo abierto y observar el tiempo en que el sistema llega al estado estacionario o si es posible determinarlo con algunas de las herramientas descritas anteriormente una vez construido el Bond Graph del sistema físico. Ya que se determinaron los valores de estado estacionario de todo el sistema es posible la colocación de los controladores y así alcanzar los estados deseados en un periodo más corto de tiempo o si no es el caso, entonces mantenerlos en ese valor. Estos valores fueron obtenidos en las secciones previas de este capítulo por lo tanto los controladores que se ubiquen en el modelo completo del sistema en Bond Graph deberán mantener a un valor constante las variables de entrada de cada una de las secciones de la central hidroeléctrica modelada en el dominio físico, se considerando lo siguiente para la implementación:

- El caudal de entrada a la turbina deberá de permanecer constante, aún cuando el modelo de oscilación, o vibraciones, se encuentre acoplado al sistema.
- La velocidad de la turbina debe mantener un par mecánico a una velocidad constante la cual es transferida al generador síncrono.
- Debido a que el modelo de la máquina síncrona descrito [22] en operación como generador síncrono se requiere de una velocidad constante a un par constante, por el hecho de que constituye una norma en los sistemas de potencia hoy en día. Ya que tradicionalmente el control de voltaje (potencia reactiva) era a través del control de la corriente en el devanado de la excitación y éste se encontraba separado de la velocidad o control de frecuencia que es el que proporcionaba el gobernador.
- El sistema se considera aislado de la red nacional de energía (bus infinito) y el tipo de carga es RL.

A continuación se muestra en la el Bond Graph completo de la central hidroeléctrica con controles.

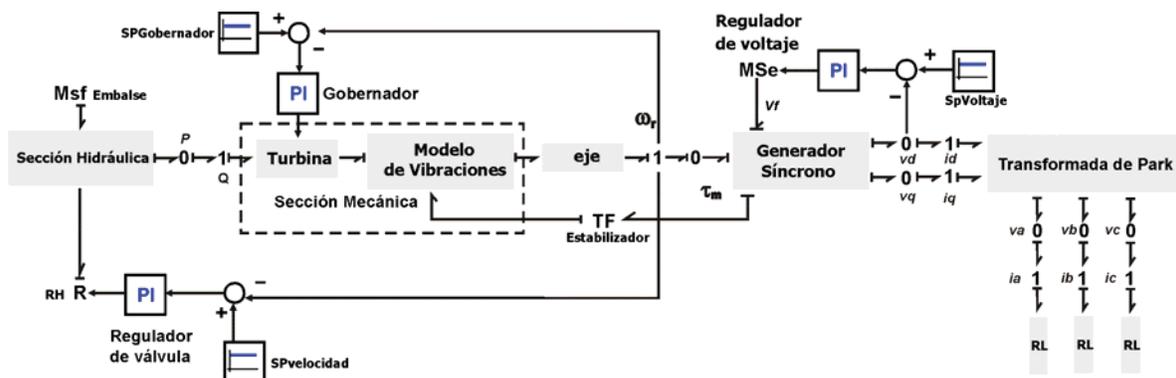


Figura 4.29 Modelo de central hidroeléctrica con controladores en el dominio físico.

El diagrama mostrado anteriormente se le agrega un estabilizador que en los modelos completos en lazo abierto no se mostraba. En el apéndice D se muestra la propuesta de un estabilizador en sistemas de potencia descrito en diagrama a bloques [20].

Los sensores o tomas de prueba son aquellos en los cuales se está observando la variable deseada las uniones 0 y 1 del modelo de la Figura 4.29 son puntos en los cuales se puede medir señales ya sea caudal, presión, velocidad, par, voltaje o corriente en todo el sistema y es posible ver los cambios de estas variables que presenten ante variaciones en algunas de las fuentes de alimentación o disturbios en cualquiera de las secciones. Ésta es una forma de monitorear una variable empleando la metodología de Bond Graph.

Los parámetros empleados en todo el sistema son los necesarios para que la simulación se lleve a cabo satisfactoriamente y lograr la estabilidad en un intervalo de tiempo pequeño, partiendo de condiciones iniciales que permiten que el sistema sea estable.

Los controladores que se implementan son en bloques del software 20-sim utilizado para la simulación de modelos en Bond Graph, los tipos de controladores utilizados son PI (Proporcional, Integral). Las ganancias que se utilizaron en los controladores tienen valores adecuados para efectuar la simulación, existe una gran variedad de literatura [10], [23] por mencionar algunas, estas proporcionan la forma de obtener las ganancias. En la simulación de esta parte del capítulo se consideran dos puntos:

- Modelo con vibraciones.
- Modelo sin vibraciones (eliminación de estabilizador).

#### 4.8.3. Simulación de la central hidroeléctrica en el dominio físico con implementación de controladores.

La simulación de las variables se muestra en las siguientes figuras, para diferentes valores de las ganancias de los controladores con la finalidad de observar los cambios en las respuestas del sistema.

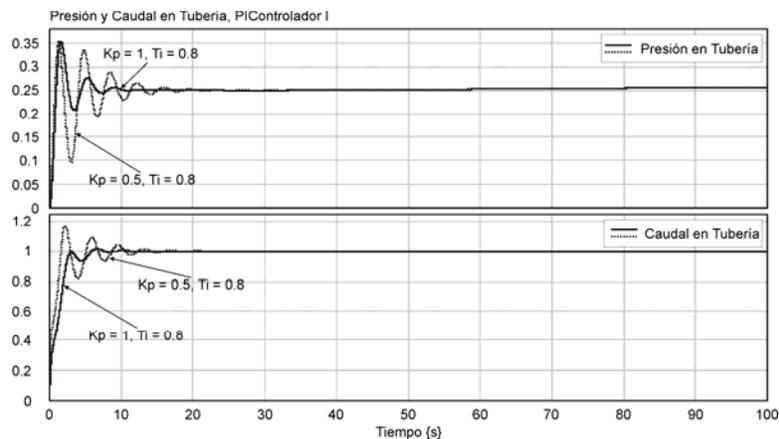


Figura 4.30 Variables de salida de la sección hidráulica.

La Figura 4.30 muestra la acción de control que efectúa el regulador de posición de válvula para manipular las variables de presión y flujo, el flujo es el que se requiere que se a constante a un valor de 1. Se tienen dos valores de distintos de  $K_p$  en los cuales se ven afectadas las dos variables durante el transitorio, las oscilaciones decrecen para valor de  $K_p = 1$  y se incrementa su amplitud y su oscilación para  $K_p = 0.5$ . El tiempo en el que se llega al estado estacionario para el caudal es de 30 segundos, para ambos valores de  $K_p$  pero aun en el caso de  $K_p = 0.5$  las oscilaciones se sostienen un poco más de tiempo.

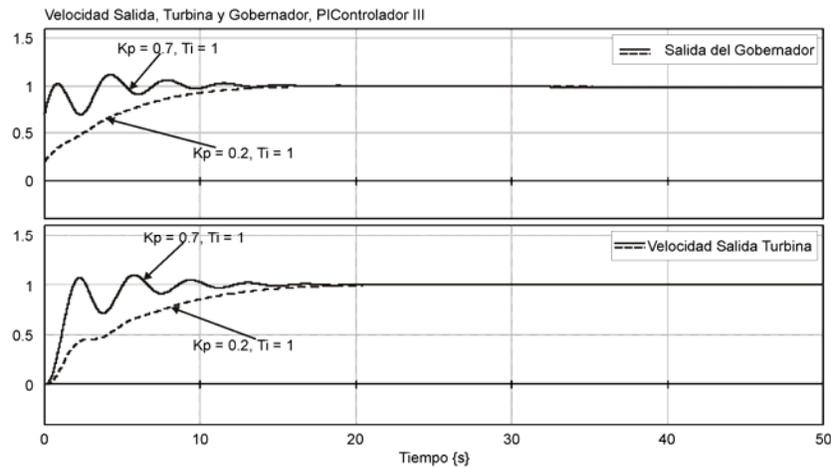


Figura 4.31 Variables de salida de la sección mecánica velocidad de gobernador y de turbina.

Las gráficas de la Figura 4.31 muestran el comportamiento de la velocidad en la salida de los elementos de la sección mecánica, turbina y gobernador, donde el gobernador es el encargado de manipular la velocidad de la turbina, ésta debe de mantener un valor de 1 pu en el menor tiempo posible y el control que se implemento tiene esta tarea, así las ganancias que se manipulan en el controlador son las de  $K_p$  de 0.7 a 0.2 las cuales reducen las oscilaciones del transitorio y el tiempo de establecimiento.

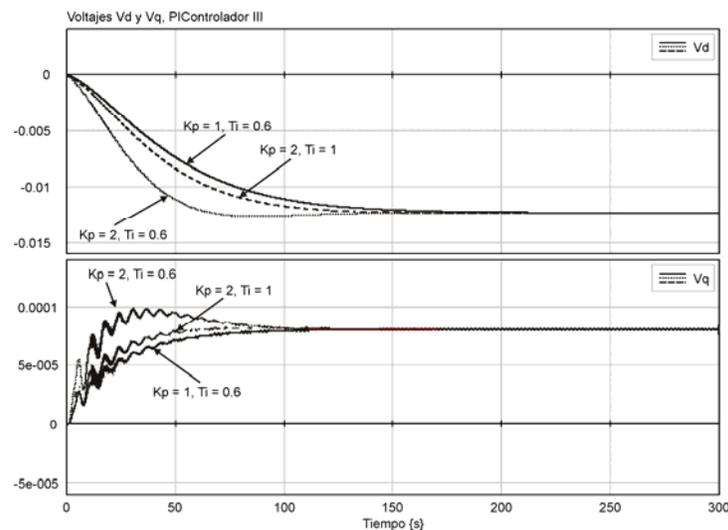


Figura 4.32 Voltajes de salida  $V_d$  y  $V_q$  del generador síncrono.

Las gráficas mostradas en la Figura 4.32 corresponden a los voltajes del generador síncrono  $V_d$  y  $V_q$  los cuales están variando en su estado oscilatorio durante el transitorio ya que se modificaron los valores de  $K_p$  del control PI correspondiente al del regulador de voltaje en el devanado de campo.

La Figura 4.33 muestra el comportamiento de las variables de estado para valores distintos de  $K_p$ , dando origen a una mejora en el comportamiento de las variables ya que debido a las perturbaciones, que en este caso son las vibraciones, ubicadas en la parte mecánica se propagan a la sección hidráulica. Se puede observar que las vibraciones no presentan la misma amplitud y a medida que transcurre el tiempo tienden a disminuir, cuando se incrementa  $K_p$  las vibraciones se eliminan en los elementos quedando únicamente el transitorio.

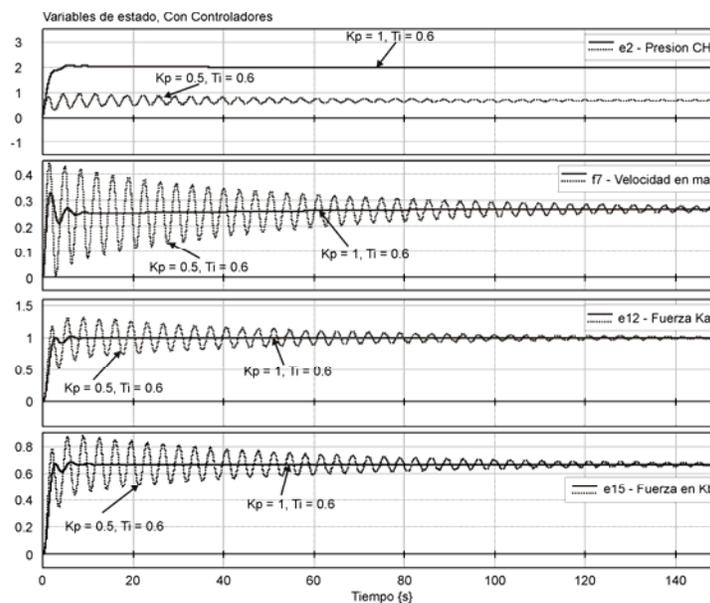


Figura 4.33 Variables de estado de las secciones hidráulica y mecánica.

La Figura 4.34 muestra las variables corrientes del estator y rotor en el generador síncrono, las ganancias  $K_p$  que se están variando son del controlador PI de la sección hidráulica y la variable que se ve afectada es la parte del acoplamiento mecánico – eléctrico en la flecha del generador, esto es un análisis importante ya que las implicaciones que se tienen al controlar una variable de un sistema de diferente dominio de energía afecta directamente en la parte mecánica eléctrica, y este análisis es una ventaja que proporciona el estar utilizando la metodología de Bond Graph.

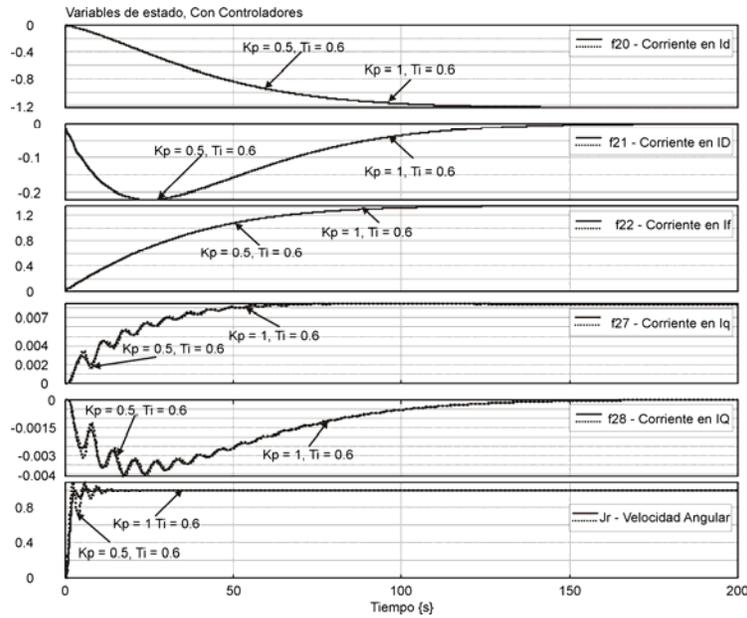


Figura 4.34 Variables de estado de las secciones eléctrica.

Algo a tomar en cuenta es que el modelo de la central hidroeléctrica para el caso en el que se está eliminando el modelo de vibración deberá de eliminarse el estabilizador ya que éste su función es la de aumentar amortiguamiento a las oscilaciones del rotor quedando el diagrama como el mostrado en la Figura 4.35

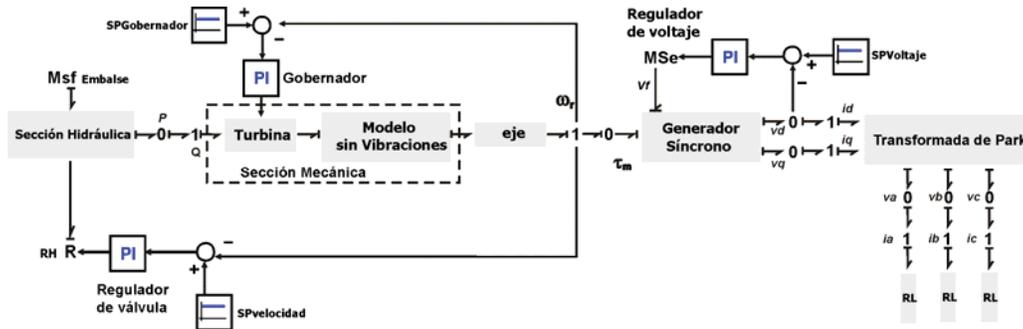


Figura 4.35 Modelo de central hidroeléctrica omitiendo: vibraciones y estabilizador.

Del diagrama mostrado en la Figura 4.35 cual se obtienen las siguientes simulaciones para el caso en el que el modelo se desprecian las vibraciones.

En la Figura 4.36 se muestran las variables hidráulicas de presión y caudal en la tubería. Para dos valores distintos del controlador PI en la ganancia  $K_p$ . La mejoría es durante el transitorio al eliminar los sobre impulsos de las respuesta. El tiempo de establecimiento es en un intervalo de tiempo menor las variables alcanzan los valores deseados debido a la ausencia de las vibraciones en el sistema. El controlador que realiza la acción de corrección

corresponde al controlador que está en la sección hidráulica que su función es la de regular el caudal variando la válvula.

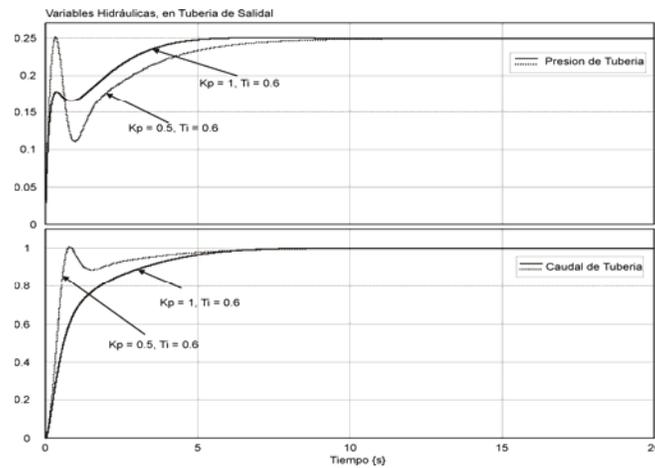


Figura 4.36 Variables hidráulicas: presión y caudal en tubería.

Estas gráficas corresponden al sistema completo en Bond Graph donde se desprecian las vibraciones en el eje de la turbina – generador síncrono. El tiempo de establecimiento y las oscilaciones son factores en los cuales las variables se afectan por el modelo de vibración.

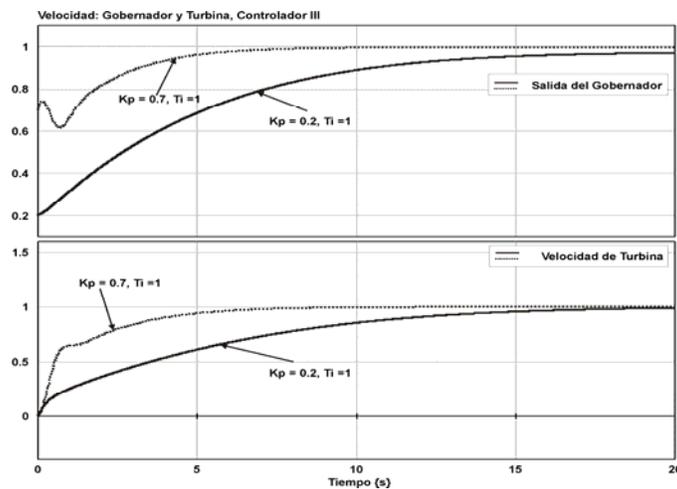


Figura 4.37 Variables de sección mecánica: velocidad de gobernador y turbina.

Las gráficas anteriores de la Figura 4.37 que se muestran corresponden a la respuesta de la sección mecánica y que se afectan por el controlador PI. Se muestran dos señales por cada variables en las gráficas, una para el caso en el que  $K_p$  vale 0.5 y la respuesta de la señal tiene un transitorio para posteriormente tender al valor deseado. Cuando se cambia  $K_p$  a 0.2 la pendiente de la señal es mayor y por lo tanto el tiempo de establecimiento de la señal es mayor que en el caso contrario, una observación es que la señal no presenta oscilaciones en el transitorio.

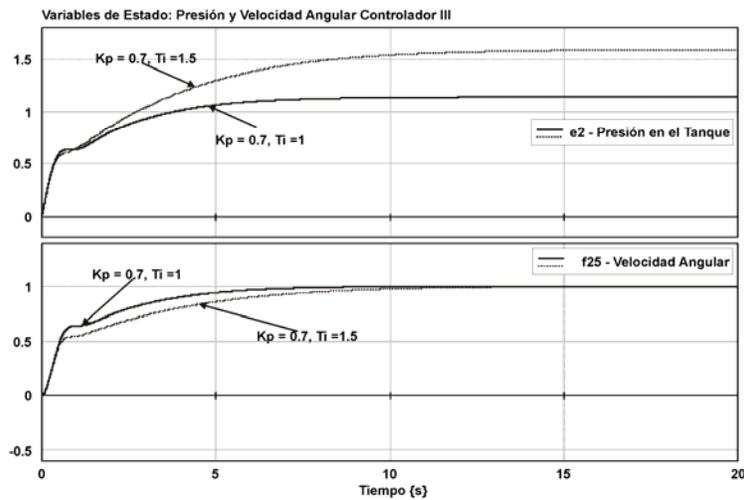


Figura 4.38 Variables de estado: presión y  $\omega_r$ .

Las variables mostradas en la Figura 4.38 corresponden a la presión en CH con dos valores distintos de  $T_i$ , la segunda gráfica es la velocidad angular en  $J_r$ . Para un valor de  $T_i = 1$  la presión mantiene un valor por encima de la unidad, para estabilizarse en un periodo corto de tiempo y en la gráfica de la velocidad angular durante el transitorio se produce un pequeño sobre impulso para posteriormente alcanzar el estado estable. Al incrementar  $T_i$  a 1.5 la pendiente de velocidad disminuye y esto produce un tiempo de establecimiento mayor que consecuentemente da origen a un incremento en la presión del tanque.

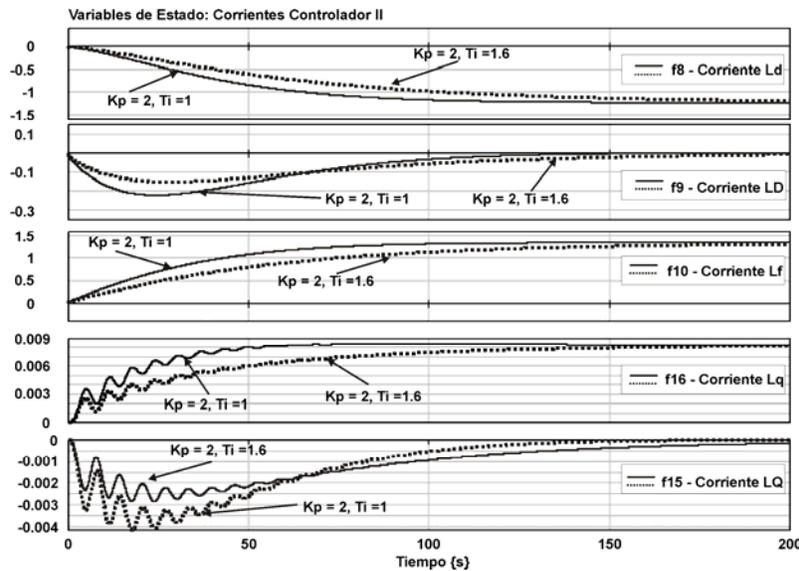


Figura 4.39 Variables de estado:  $I_d$ ,  $I_D$ ,  $I_f$ ,  $I_q$  e  $I_Q$ .

Las gráficas de la Figura 4.39 son las variables de estado en el generador, corrientes en las inductancias del estator y rotor:  $L_d$ ,  $L_q$ ,  $L_Q$ ,  $L_D$  y  $L_f$ . La acción de control esta siendo efectuada por el controlador PI que manda la señal de error al regulador de voltaje al devanado de campo (actuador  $MS_E$ ). La acción de los controladores ubicados en las secciones hidráulica y mecánica a pesar de los cambios que se les efectúen en las

ganancias de cada controlador no afectan en medida a la sección del generador síncrono en sus variables eléctricas a excepción por sus variables de acoplamiento mecánico - eléctrico (Da Y Jr). Se muestran dos comportamientos por cada gráfica de corriente, una para el caso de  $T_i = 1$  y otra cuando se varía a  $T_i = 1.6$ . Tomando como referencia  $T_i = 1$ , las corrientes en los elementos en cierto tiempo llegan a un valor de estado estable donde para el caso de las corrientes de los devanados de amortiguamiento su valor en estado estacionario es 0 y en el caso de las otras corrientes su valor es diferente de 0. En el caso en el que se incrementa el valor de  $T_i = 1.6$  las corrientes tienden al mismo valor pero con un tiempo mayor para llegar al estado estacionario.

En este punto se concluye las simulaciones de los diferentes sistemas modelados en la metodología de Bond Graph, es importante notar la facilidad de uso que presenta la metodología ya que secciones de un sistema fueron de forma sencilla eliminarlas de los modelos y su reconstrucción no requiere un alto grado de dificultad, factor que es determinado por la experiencia en el modelado de sistemas utilizando la metodología de Bond Graph. El siguiente capítulo desarrolla de una forma simple los resultados obtenidos al realizar el presente trabajo, algunos alcances y otras futuras mejoras en el trabajo desarrollado.

# Capítulo 5

## Conclusiones

### 5.1. Conclusiones

En el desarrollo de este trabajo se obtuvo la representación de una central hidroeléctrica en el dominio físico, considerando los elementos necesarios para llevar a cabo su representación, además se consideran las vibraciones como las perturbaciones existentes en el sistema y se obtiene el modelo en el dominio físico de un sistema de oscilación mecánico el cual se considero ubicado en el eje de acoplamiento turbina – generador que representa las vibraciones.

Se utiliza el generador síncrono en dq0 por lo que es necesario el uso de la transformación de dq0 a abc en el dominio físico para obtener las corrientes de fase [22]. Al obtener el modelo completo en el dominio físico se obtuvo su representación en variables de estado utilizando las herramientas y propiedades del Bond Graph con esto de igual forma fue posible la obtención de las ecuaciones para determinar los valores de las variables de estado en estado estacionario en una representación simbólica.

Los valores numéricos de los elementos son datos necesarios para que la simulación alcance los valores en un periodo de tiempo corto, pero si se contara con los valores reales del sistema es posible llegar a muy buenas aproximaciones del sistema [21].

La simulación de las variables obtenidas para cada sección del sistema de la central hidroeléctrica en el dominio físico son considerando las vibraciones para un caso y otras donde no se consideran, esto con el objetivo de ver la respuesta de cada variable y demostrar la propagación de las vibraciones en todo el sistema.

El estudio de la controlabilidad en la metodología de Bond Graph que se demuestra variando los valores de las fuentes de energía del sistema como son la fuente hidráulica que proporciona el caudal al sistema hidráulico y que al variarse afecta directamente a los estados del sistema de cada una de las secciones mecánica, eléctrica e hidráulica, y ocurriendo lo mismo cuando se varía la fuente de potencia del devanado de campo del generador síncrono en la sección eléctrica y que de igual forma afecta a las variables de estado en las secciones mecánica, hidráulica y eléctrica lo que prueba que existe un interacción e intercambio de energía entre los elementos y las fuentes del sistema sin importar su dominio de energía y que al variar las fuentes afecta a secciones previas como a secciones posteriores.

Por lo tanto una vez obtenido el modelo en el dominio físico de la central hidroeléctrica se implementan los controles en cada una de las secciones. La utilización de controladores de diferente representación que la de Bond Graph se llevo acabo satisfactoriamente donde se aprovecha el modelado y las propiedades del Bond Graph.

## **5.2. Trabajos futuros**

Los trabajos para mejorar sobre esta área pueden ser considerados a futuro ya que uno de los modelos que se pueden proponer es sobre el diseño y construcción de los alabes de las turbinas dependiendo su tipo y ser anexado al modelo realizado, esto podría ser como aportación en la sección mecánica. Por otro lado otra aportación importante es el diseño de la máquina síncrona en abc utilizando la metodología de Bond Graph, el modelado de transformadores para las cargas por mencionar algunas sería un aporte importante al modelo del trabajo realizado.

# Bibliografía

- [1] E.B Wylie y V. L. Streeter, Fluid Transients, MacGraw-Hill.
- [2] Modelado de una Central Hidroeléctrica Básica en el Dominio Físico.
- [3] Henry M. Paynter, Analysis and Desing of Systems, MIT.
- [4] Simulación de Transitorios Hidromecánicos en Centrales Hidroeléctricas Utilizando Bond Graph, Adair Martins, Geraldo Lúcio Tiago Filho y Roberto Laurent, Mecánica Computacional XXIII G. Buscaglia, E.Dari, O. Zamonsky (Eds.), Bariloche, Argentina, November 2004.
- [5] D. B. Arnautovic and D. M. Skataric, Suboptimal Design of Hydroturbine Governors, IEEE Transactions on Energy Conversion, vol. 6, No. 3, September 1991.
- [6] S. C. Trypathy and V. Bhardwaj, Automatic Generation Control of a Small Hydro Turbine Driven Generator, Energy Convers. Mgmt Vol. 37, No 11, pp. 1635-1645,1996
- [7] N. K. Malinin y O. F. Ramiro, Evaluación de los Recursos Hidroenergeticos en Pequeña Escala.
- [8] Yeshi Wangdi and Dr. Earl F. Richards, Modelling and Simulation of the Chukha Hydropower Plan Bhutan and the Nerby Indian Power system, IEEE TH0343-4/90/0000/0398.
- [9] Shinji Yumoto, Takashi Kaito, Yasua Takeuchi, Kiyohito Tani and Katsumasa Shimmei, Hydro Turbine Technology Contributing to Power System Stabilization, IEEE 0-7803-7525-4/02

- [10] Ingeniería de Control Moderna, Katsuhiko Ogata, Editorial Prentice Hall
- [11] Introduction of Physical System Modelling, P.E. Wellstead, Publisher Electronic Principles of Control.
- [12] Notas para Estudiantes de la Maestría de la Especialidad en Control de la Maestría en Ingeniería Eléctrica del Curso Análisis y Control de Sistemas en el Dominio Físico.
- [13] C. Sueur and G. Dauphin-Tanguy, Bond Graph Approach for Structural Analysis of MIMO Linear Systems, Journal of the Franklin Institute 328(1) (1991) 55 - 70.
- [14] G. Dauphin-Tanguy, A. Rahmani and C. Sueur, Bond Graph Aided Design of Controlled Systems, Simulation Practice and Theory 7 (1999) 493-513.
- [15] C. Sueur and G. Dauphin-Tanguy, Structural Controllability/Observability of linear systems represented by Bond Graphs., Journal of The Franklin Institute, vol. 326 No. 6, pp. 869-883, 1989.
- [16] Daniel J. Inman, Engineering Vibration, Second Edition Prentice Hall.
- [17] John M. Vance, Rotordynamics of Turbomachinery, Editorial Wiley Interscience.
- [18] R. Roca Villa Ph.D, Vibraciones Mecánicas, Editorial Limusa.
- [19] George E. Russell, Hidráulica, Editorial CECSA.
- [20] P. Kundur, Power System Stability and Control 1994 McGraw – Hill.
- [21] P. M. Anderson and A. A. Fouad, Power System Control and Analisis, The Iowa State University Press 1977.
- [22] A two-axis, Bond Graph model of the dynamics of synchronous electrical machines, Dietrich Sahn, Institut für Leistungselektronik und Anlagentechnik der Universität Stuttgart, Postfach 560, D 7000 Stuttgart, West Germany.
- [23] K. Astrom and T. Hagglund, PID Controllers: Theory, Design, and Tuning, Library of Congress Cataloging-in-Publication Data.
- [24] S. Banerjee, Course Dynamics of Physical Systems (EE30016), Institute Technologic of India, <http://www.ee.iitkgp.ernet.in/~soumitro/drops/>

# Apéndice A

## A.1. Transformación de Park.

La transformación de Park es una herramienta matemática empleada para la simplificación de las ecuaciones características de la máquina síncrona. Esta transformación define un nuevo conjunto de ecuaciones de corrientes, voltajes y enlaces de flujo en términos de las variables actuales del devanado. Las nuevas cantidades son obtenidas de la proyección de las actuales variables en las tres fases; una a lo largo del eje *directo* del devanado de campo del rotor, conocido como eje directo; la segunda a lo largo del eje neutral del devanado de campo, conocido como eje de cuadratura; y el tercero en el eje estacionario. A continuación se muestra la estructura que tiene la transformada de Park.

$$P = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} \cos \theta(t) & \cos\left(\theta(t) - \frac{2\pi}{3}\right) & \cos\left(\theta(t) + \frac{2\pi}{3}\right) \\ -\sin \theta(t) & \sin\left(\theta(t) - \frac{2\pi}{3}\right) & \sin\left(\theta(t) + \frac{2\pi}{3}\right) \\ \sqrt{\frac{1}{2}} & \sqrt{\frac{1}{2}} & \sqrt{\frac{1}{2}} \end{bmatrix} \quad (\text{A.1})$$

Esta es la representación alternativa de la transformada de Park. La diferencia existente entre esta representación alternativa y la otra empleada sólo es el cambio del término que multiplica a la matriz que para este caso es  $\sqrt{2/3}$  y para el otro caso es  $2/3$ , así como el valor de la secuencia cero que para este caso es  $\sqrt{1/2}$  y para la otra transformación

empleada es de  $1/2$ . La representación de la inversa de la transformada de Park se muestra a continuación.

$$P^{-1} = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} \cos \theta(t) & -\sin \theta(t) & \sqrt{\frac{1}{2}} \\ \cos\left(\theta(t) - \frac{2\pi}{3}\right) & -\sin\left(\theta(t) - \frac{2\pi}{3}\right) & \sqrt{\frac{1}{2}} \\ \cos\left(\theta(t) + \frac{2\pi}{3}\right) & -\sin\left(\theta(t) + \frac{2\pi}{3}\right) & \sqrt{\frac{1}{2}} \end{bmatrix} \quad (\text{A.2})$$

La matriz es ortogonal. Ya que la inversa de la matriz  $P^{-1} = P^T$  esto quiere decir que la matriz  $P$  es de potencia invariante,

$$\begin{aligned} p_t &= e_a i_a + e_b i_b + e_c i_c \\ &= e_d i_d + e_q i_q + e_0 i_0 \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

La transformación ortogonal no corresponde a una situación o significado físico. Con el término de  $\sqrt{2/3}$ , el equivalente de las inductancias en los ejes  $d$  y  $q$  tendrán  $\sqrt{3/2}$  veces el número de vueltas como las inductancias en  $abc$ . Esto elimina la relación unidad por unidad entre las variables de  $abc$  y  $dq0$  [8].

## A.2. Transformación de Park en el dominio físico

Empleando la matriz de transformación descrita en (A.1) es posible llegar a una representación en el dominio físico, considerando las leyes de la conservación de la energía,

$$P_{abc} = P_{dq0} \quad (\text{A.4})$$

Esta consideración en Bond Graph es conocida en la literatura como “desplazamiento por transformador modulado” y se muestra en la siguiente figura

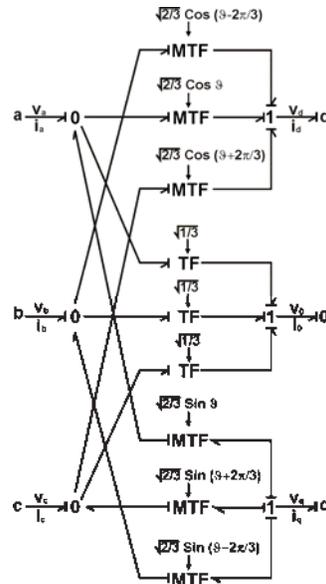


Figura A.1 Transformada de Park en el dominio físico.

La Figura A.1 presenta la transformada de Park en el dominio físico utilizando los transformadores modulados, las terminales: a, b, c, d, q y 0 pueden ser entradas o salidas dependiendo en que se requiera el valor. La asignación de causalidad es de acuerdo a la causalidad que permite la unión 0 ó 1. La Figura A.2 muestra la simulación en 20-SIM de la transformación [22],

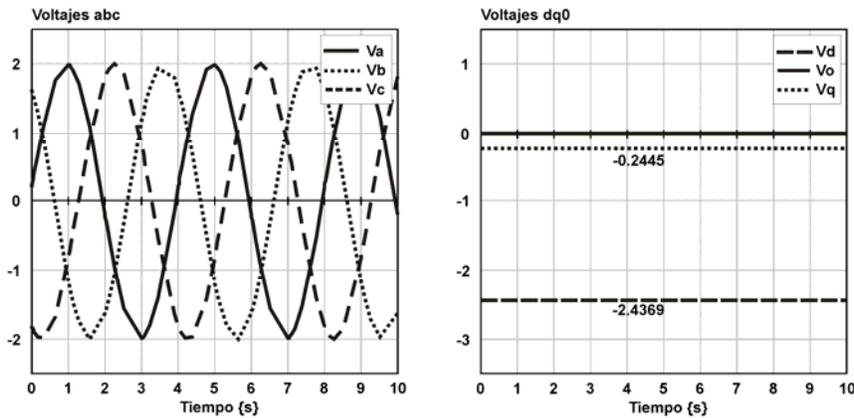


Figura A.2 Simulación de la transformada de Park.

Evaluación numérica con las ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} Vd \\ Vq \\ V0 \end{bmatrix} = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} \cos(2 * \pi * 0.25 + \frac{\pi}{2}) & \cos(2 * \pi * 0.25 + \frac{\pi}{2} - \frac{2 * \pi}{3}) & \cos(2 * \pi * 0.25 + \frac{\pi}{2} + \frac{2 * \pi}{3}) \\ -\sin(2 * \pi * 0.25 + \frac{\pi}{2}) & -\sin(2 * \pi * 0.25 + \frac{\pi}{2} - \frac{2 * \pi}{3}) & -\sin(2 * \pi * 0.25 + \frac{\pi}{2} + \frac{2 * \pi}{3}) \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 * \sin(2 * \pi * 0.25 + 0.1) \\ 2 * \sin(2 * \pi * 0.25 + 0.1 - \frac{2 * \pi}{3}) \\ 2 * \sin(2 * \pi * 0.25 + 0.1 + \frac{2 * \pi}{3}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2.4373 \\ -0.24454 \\ 0 \end{bmatrix}$$

# Apéndice B

## B.1. Inductancias de la máquina síncrona

En el presente Apéndice se mencionan las ecuaciones que definen las inductancias que se encuentran en la máquina síncrona. Ahora bien se definen las ecuaciones para las inductancias las cuales están en función de la posición del rotor.

### *1. Las Inductancias Propias del Estator*

Dado que las fases b y c son idénticas a la fase a y solo están desplazadas  $120^\circ$  y  $240^\circ$  se tiene que

$$\begin{aligned}L_{aa} &= L_s + L_m \cos 2\theta(t) \\L_{bb} &= L_s + L_m \cos \left[ \theta(t) - \frac{2\pi}{3} \right] \\L_{cc} &= L_s + L_m \cos \left[ \theta(t) + \frac{2\pi}{3} \right]\end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

De las ecuaciones anteriores  $L_s$  y  $L_m$  son constantes y para el cual  $L_s > L_m$

### *2. Las Inductancias Propias del Rotor*

Desde que la saturación y el efecto de ranura son despreciados, todas las inductancias propias del rotor son constantes, las cuales son:

$$L_{FF} = L_F; L_{DD} = L_D; L_{QQ} = L_Q \quad (\text{B.2})$$

donde  $L_F$ ,  $L_D$  y  $L_Q$  son constantes.

### 3. Inductancias Mutuas del Estator

Las inductancias mutuas entre las fases están en función de  $\theta(t)$

$$\begin{aligned} L_{ab} = L_{ba} &= -M_S - L_m \cos \left[ 2\theta(t) + \frac{\pi}{3} \right] \\ L_{bc} = L_{cb} &= -M_S - L_m \cos \left[ 2\theta(t) - \pi \right] \\ L_{ca} = L_{ac} &= -M_S - L_m \cos \left[ 2\theta(t) - \frac{\pi}{3} \right] \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

donde  $|M_S| > L_m$ .

### 4. Inductancias Mutuas del Rotor

La inductancia mutua entre devanados  $F$  y  $D$  es constante y todos los pares de devanados con desplazamiento de  $90^\circ$  tienen una inductancia mutua igual a cero

$$L_{FD} = L_{DF} = M_R; L_{FQ} = L_{QF} = 0; L_{DQ} = L_{QD} = 0. \quad (\text{B.4})$$

### 5. Inductancias Mutuas entre Estator y Rotor.

Cuando el devanado del Estator está alineado con el devanado del Rotor los enlaces de flujo y las inductancias mutuas están en su valor máximo

$$\begin{aligned} L_{aF} &= L_{aF} \cos \theta(t) \\ L_{aD} &= L_{aD} \cos \theta(t) \\ L_{aQ} &= L_{aQ} \cos \left[ \theta(t) + \frac{\pi}{2} \right] = -L_{aQ} \sin \theta(t) \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

Para considerar las inductancias mutuas entre el devanado de la fase  $b$  y el circuito del rotor solo se sustituye  $\theta$  por  $\theta - 2\pi/3$ ; y para el caso de la fase  $c$   $\theta$  se reemplaza por  $\theta + 2\pi/3$ .

### 6. Transformación de Inductancias

Se observa que la ecuación 3.32 tiene inductancias variantes en el tiempo que pueden ser simplificadas refiriendo todas las cantidades al marco de referencia del rotor a través de la transformación de Park resultando

$$\begin{bmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_d \\ \lambda_q \\ \lambda_F \\ \lambda_D \\ \lambda_Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & L_d & 0 & M_{dF} & M_{dD} & 0 \\ 0 & 0 & L_q & 0 & 0 & M_{qQ} \\ 0 & M_{dF} & 0 & L_F & M_{DF} & 0 \\ 0 & M_{dD} & 0 & M_{DF} & L_D & 0 \\ 0 & 0 & M_{qQ} & 0 & 0 & L_Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_0(t) \\ i_d(t) \\ i_q(t) \\ i_F(t) \\ i_D(t) \\ i_Q(t) \end{bmatrix} \quad (\text{B.6})$$

donde

$$L_d = L_s + M_s + (3/2)L_m; \quad M_{dF} = \sqrt{3/2}M_F; \quad M_{dD} = \sqrt{3/2}M_D$$

$$L_q = L_s + M_s - (3/2)L_m; \quad L_0 = L_s - 2M_s; \quad M_{qQ} = \sqrt{3/2}M_Q$$

En (B.6),  $\lambda_d(t)$  es el enlace de flujo en un circuito moviéndose con el rotor y centrado en el eje. Similarmente,  $\lambda_q(t)$  es centrado en el eje  $q$  y  $\lambda_0(t)$  es completamente un circuito que permite conocer si el sistema esta balanceado.

También es importante observar que la matriz de inductancias (B.6) es una matriz de constantes. Así, la transformación de Park de potencia remueve los coeficientes variantes en el tiempo de la ecuación (3.32). También notamos que la matriz transformada (B.6) es simétrica y por lo tanto es físicamente realizable por un circuito equivalente [21].



Debido a que el propósito del PSS es el de introducir una componente de amortiguamiento en el par, es empleada una señal lógica de  $\Delta\omega_r$  al control de excitación.

Si la función de transferencia  $G_{ex}(s)$  y la función de transferencia entre  $\Delta E_{fd}$  y  $\Delta T_e$  solo consistieran en ganancias, una retroalimentación directa de  $\Delta\omega_r$  sería el resultado para la componente de amortiguamiento del par. Sin embargo, en la práctica ambos: generador y excitador (dependiendo del tipo) exhiben una frecuencia que depende de la ganancia y de las características de fase. Para el caso ideal, el PSS resultara de un amortiguamiento puro a todas las oscilaciones de frecuencia en el par.

Debe notarse que el modelo del generador de la Figura C.1 desprecia el amortiguamiento con el fin de simplificar el modelo del sistema y permite su representación en diagrama a bloques por lo tanto, el amortiguamiento puede tener un efecto significativo en las características de fase del generador y deberán de considerarse para establecer los parámetros del PSS [20].

# Apéndice D

## D.1. Información

20-sim es un programa de modelaje y simulación que funciona en la plataforma de Windows. Con 20-sim, usted podrá simular el comportamiento de sistemas dinámicos, como sistemas eléctricos, mecánicos, hidráulicos y cualquier combinación de estos.

20-sim soporta completamente el modelaje gráfico, de manera que se pueden diseñar y analizar sistemas dinámicos de manera muy intuitiva, sin tener que comprometer la potencia del equipo. 20-sim también funciona con el uso de componentes, lo cual le permite modelar sistemas como si fuesen bosquejos de problemas de ingeniería. Al escoger los componentes que necesita de librería, los podrá concatenar para reconstruir su diagrama de ingeniería, sin tener que escribir una sola línea de matemáticas. Del diagrama de ingeniería,

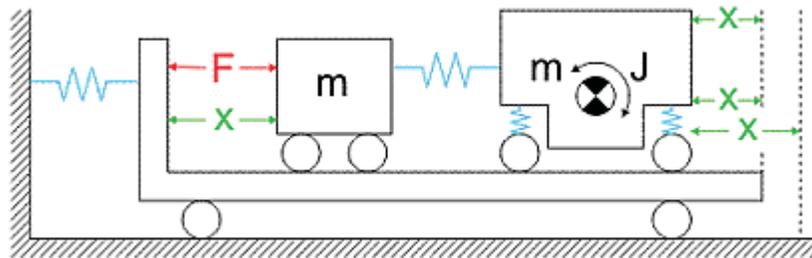


Figura D. 1 Diagrama de ingeniería.

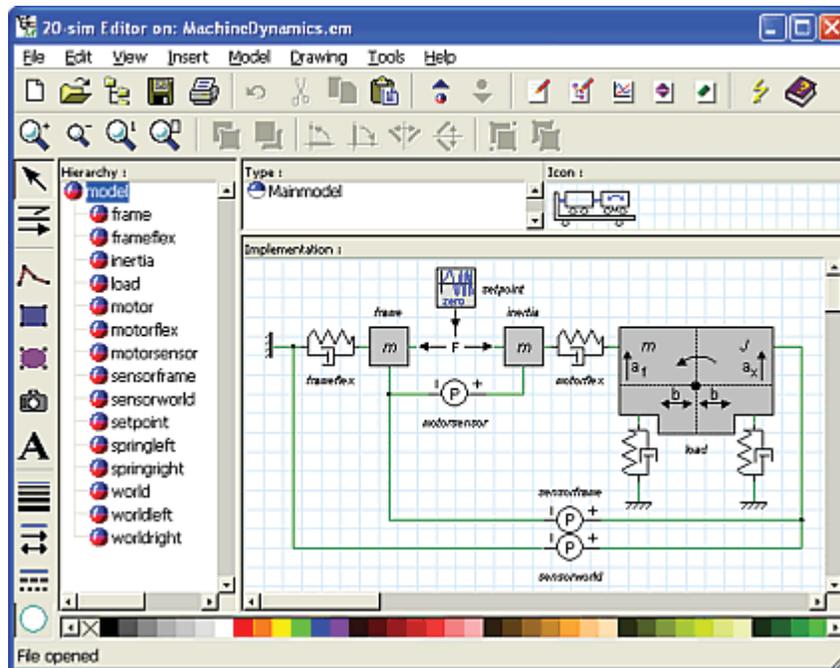


Figura D.2 Modelo del diagrama, parte por parte.

### Características generales

Tanto el modelo (formato .emx en 20-sim 3.x) como el experimento (formato .exp en 20sim 3.x) han sido integrados en un único archivo. Para distinguir este archivo de archivos de versiones antiguas de 20-sim, la extensión de formato utilizada es .emx. 20-sim ahora es compatible y corre con mayor eficiencia sobre la plataforma Windows Vista. Se tiene la posibilidad de cambiar el lenguaje utilizado en la interfaz.

### Editor

Ahora los modelos pueden tener múltiples implementaciones. Reemplazo automático de modelos. Con el comando Find en el menú de Editor, es posible buscar a través del modelo completo.

### Simulador

Las graficas adicionales ahora poseen sus propios menús y botones. El comando Export ahora le permite exportar gráficos, parámetros, archivos de datos, etc.

### Librería

La librería ha sido reorganizada en cuatro grupos:

Librería: todos los bloques de construcción.

Ejemplos: Ejemplos de modelos que usted puede crear en 20-sim.

Tutoriales: Tutoriales acerca de cajas de herramientas y trucos.

Getting Started: todos los modelos del Manual para Principiantes.

Ahora puede agregar sus propias librerías (folders de Windows) para poder utilizarlas en sus modelos.

Se han agregado nuevos modelos a la librería.

Ahora la función linsolve (solución lineal) posee métodos opcionales (lu, gr, cholesky, gmres).

Varios modelos han sido integrados para lograr implementaciones múltiples.

### **Toolbox de Mecánica en 3D**

Ahora se pueden agregar estructuras que sean completamente independientes una de la otra.

### **Toolbox de Mecatrónica**

Un nuevo ayudante (Motion Profile Wizard) se ha puesto a su disposición de manera que usted tenga mayor libertad al crear perfiles de movimiento.

# Apéndice E

## E.1. Artículo Publicado

En este apéndice se presenta el artículo derivado del presente trabajo.

# Analysis of a Hydroelectric Plant connected to Electrical Power System in the Physical Domain

Gilberto Gonzalez-A, Octavio Barriga

**Abstract**—A bond graph model of a hydroelectric plant is proposed. In order to analyze the system some structural properties of a bond graph are used. The structural controllability of the hydroelectric plant is described. Also, the steady state of the state variables applying the bond graph in a derivative causality assignment is obtained. Finally, simulation results of the system are shown.

**Keywords**— Bond graph, hydraulic plant, steady state.

## I. INTRODUCTION

Bond graph was established by [1]. The idea was developed by [2] and [3] how a powerful tool of modelling. The main key of the bond graph methodology are: a model containing the energetic junction structure, *i.e.* the system architecture; different energy domains are covered and the coupling of subsystems are allowed; the cause of effect relations of each element are obtained graphically; and the state variables have a physical meaning.

Our main motivation is to apply the bond graph methodology to model a hydroelectric plant and connect to electrical power system. This methodology allows to use a variety of energy types (hydraulic, mechanical and electrical sections).

Firstly, bond graph theory is introduced by [1] modelling a basic hydroelectric plant.

In [4], [5] describe the modelling of a hydroelectric using block diagrams and each block contains the transfer function. However, if it is necessary to change the connection of the elements or introduce new elements or reduce the model, this is difficult. Also, the analysis and control of a hydroelectric plant using block diagrams and simulation are obtained in [6], [7]. In [8] a bond graph approach is taken to model the power system on board a supply vessel. Therefore, the contribution of this paper is to propose a bond graph model of a power system using kinetic energy water and determining the controllability and steady state analysis.

In section 2 describes the basic elements of the bond graph model. In section 3, a bond graph model of a hydroelectric plant is proposed. The steady state of the system is presented in section 4. Also, the controllability of the system is described in section 5. Section 6 shows the simulations of the system and finally the conclusions are given in section 7.

## II. MODELLING IN BOND GRAPH

Consider the following scheme of a multiport system which includes the key vectors of Fig. 1 [3], [9].

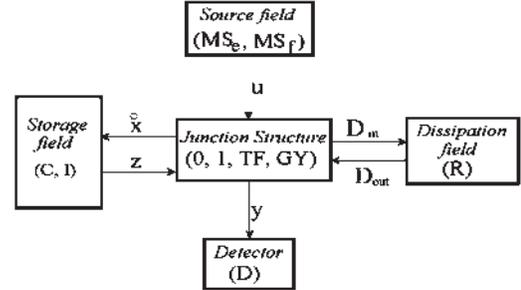


Fig. 1. Key vectors of a bond graph.

In Fig. 1,  $(MS_e, MS_f)$ ,  $(C, I)$  and  $(R)$  denote the source, the energy storage and the energy dissipation fields,  $(D)$  the detector and  $(0, 1, TF, GY)$  the junction structure with transformers  $TF$ , and gyrators,  $GY$ .

The state  $x \in \mathbb{R}^n$  is composed of energy variables  $p$  and  $q$  associated with  $C$  and  $I$  elements in integral causality,  $u \in \mathbb{R}^p$  denotes the plant input,  $y \in \mathbb{R}^q$  the plant output,  $z \in \mathbb{R}^n$  the co-energy vector, and  $D_{in} \in \mathbb{R}^r$  and  $D_{out} \in \mathbb{R}^r$  are a mixture of the power variables called effort  $e$  and flow  $f$  showing the energy exchanges between the dissipation field and the junction structure [3], [9].

The Table 1 gives the effort and flow variables for the direct formulation in some physical domains [2].

Table 1. Power variables in some energy domains.

Systems	Effort ( $e$ )	Flow ( $f$ )
Mechanical	Force ( $F$ ) Torque ( $\tau$ )	Velocity ( $v$ ) Angular velocity ( $\omega$ )
Electrical	Voltage ( $\mathcal{F}$ )	Current ( $i$ )
Hydraulic	Pressure ( $P$ )	Volume flow rate ( $\mathcal{Q}$ )

The relations of the storage and dissipation fields for LTI systems are,

$$z = Fx \quad (1)$$

$$D_{out} = LD_{in} \quad (2)$$

The relations of the junction structure are,

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ D_{in} \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ D_{out} \\ u \end{bmatrix} \quad (3)$$

The entries of  $S$  take values inside the set  $(0, \pm 1, \pm m, \pm n)$  where  $m$  and  $n$  are transformer and gyrator modules;  $S_{11}$  and  $S_{22}$  are square skew-symmetric matrices and  $S_{12}$  and  $S_{21}$  are matrices each other negative transpose [9]. The state equation

is,

$$\dot{x} = A_p x + B_p u \quad (4)$$

$$y = C_p x + D_p u$$

where

$$A_p = (S_{11} + S_{12}MS_{21})F \quad (5)$$

$$B_p = S_{13} + S_{12}MS_{23} \quad (6)$$

$$C_p = (S_{31} + S_{32}MS_{21})F \quad (7)$$

$$D_p = S_{33} + S_{32}MS_{23} \quad (8)$$

being

$$M = (I - LS_{22})^{-1}L \quad (9)$$

Next section a bond graph model of a hydroelectric plant is proposed.

### III. BOND GRAPH MODEL OF A HYDROELECTRIC PLANT

At first, the most important application for the synchronous machine was a water-turbine driven generator, making it necessary to adapt its design to the specific requirements of the hydropower plant [4].

The essential elements of the hydraulic plant are depicted in Fig. 2.

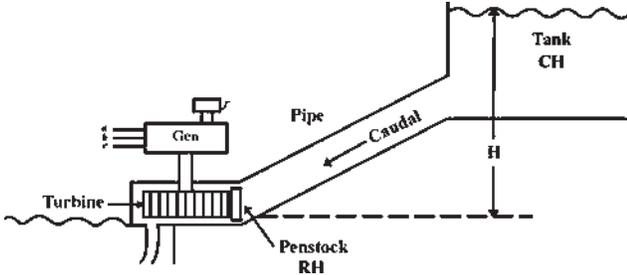


Fig. 2. Schematic of a hydroelectric plant.

The representation of the hydraulic turbine and water column in stability studies is usually based on the following assumptions [4]:

- The hydraulic resistance is negligible.
- The penstock pipe is inelastic and the water is incompressible.
- The velocity of the water varies directly with the gate opening.
- The turbine output power is proportional to the product of head and volume flow.

In according with Fig. 2 the hydroelectric plant can be divided in three sections that shows in Fig. 3.

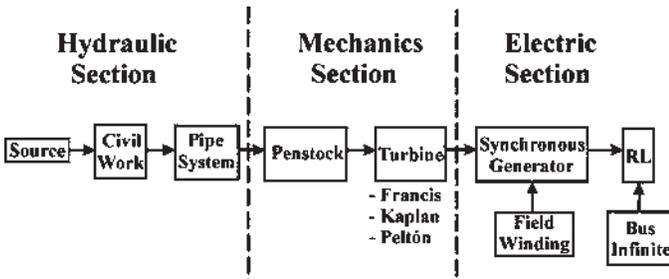


Fig. 3. Blocks diagram of a hydroelectric plant.

#### A. A Bond Graph Model of Hydraulic and Mechanical Sections

Hydraulic turbines are of two basic types. The impulse-type turbine (also known as Pelton wheel) is used for high heads. The high velocity jets of water impinge on spoon-shaped buckets on the runner, the change in momentum provides the torque to drive the runner, the energy supplied being entirely kinetic.

In a reaction turbine the pressure within the turbine is above atmospheric; the energy is supplied by the water in both kinetic and potential forms [4].

Precise modelling of hydraulic turbines requires inclusion of transmission line like reflections which occur in the elastic-walled pipe carrying compressible fluid. In this paper, a simple bond graph model considering the tank, the penstock and the turbine is proposed. In Fig. 4, the bond graph of the components and connection of the hydraulic and mechanical sections is shown.

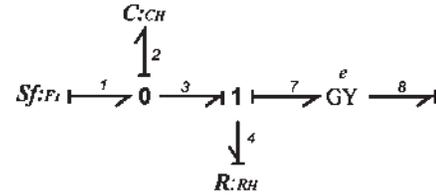


Fig. 4. Bond graph of the hydraulic and mechanical sections.

Note that the gyrator element corresponds to the converter element from hydraulic energy to mechanical energy.

#### B. A Bond Graph Model of a Synchronous Machine

Synchronous generators form the principal source of electric energy in power systems, many large loads are driven by synchronous motors and synchronous condensers are sometimes used as a means of providing reactive power compensation and controlling voltage. These devices operate on the same principle and are collectively referred to as synchronous machines [4], [5].

It is useful to develop mathematical models of a synchronous machine to explain their electric, magnetic and mechanical behavior. However, a graphical model of a synchronous machine is described in this section, this new model is based on bond graph model.

In this paper, the following assumptions are made for the development of a mathematical and graphical model for a synchronous machine:  $S_1$ : the stator windings are sinusoidally distributed along the air-gap;  $S_2$ : the stator slots cause no appreciable variation of the rotor inductances with rotor position;  $S_3$ : magnetic hysteresis is negligible;  $S_4$ : magnetic saturation effects are negligible.

Consider the representation of a synchronous machine of Fig. 5 [4], [5].



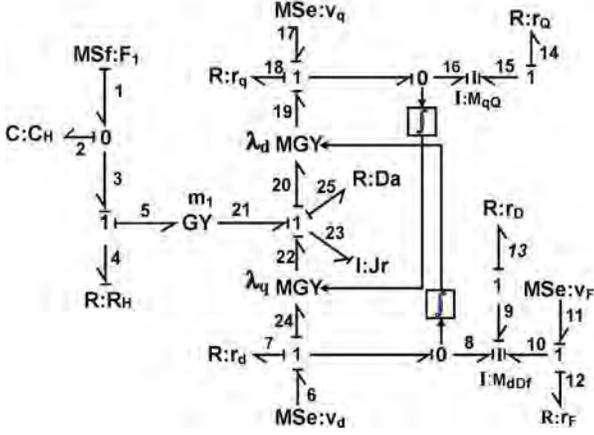


Fig. 7. Bond graph of a hydroelectric plant.

The key vectors of the bond graph are

$$x = [q_2 \ p_8 \ p_9 \ p_{10} \ p_{15} \ p_{16} \ p_{23}]^T \quad (18)$$

$$\dot{x} = [f_2 \ e_8 \ e_9 \ e_{10} \ e_{15} \ e_{16} \ e_{23}]^T$$

$$z = [e_2 \ f_8 \ f_9 \ f_{10} \ f_{15} \ f_{16} \ f_{23}]^T$$

$$D_{in} = [f_4 \ e_7 \ e_{12} \ e_{13} \ e_{14} \ e_{18} \ e_{25}]^T$$

$$D_{out} = [e_4 \ f_7 \ f_{12} \ f_{13} \ f_{14} \ f_{18} \ f_{25}]^T$$

the constitutive relations of the fields are

$$L = \text{diag} \left\{ \frac{1}{R_H}, r_d, r_f, r_D, r_Q, r_q, R_{Da} \right\} \quad (19)$$

$$F^{-1} = \text{diag} \{C_H, M_{dDf}, M_{qQ}, Jr\} \quad (20)$$

where

$$M_{dDf} = \begin{bmatrix} L_d & m & m \\ m & L_D & m \\ m & m & L_f \end{bmatrix}; M_{qQ} = \begin{bmatrix} L_q & m_q \\ m_q & L_Q \end{bmatrix}$$

and the junction structure is,

$$S_{11} = \begin{bmatrix} 0_{6 \times 6} & g^T(\lambda) \\ -g(\lambda) & 0 \end{bmatrix} \quad (21)$$

$$S_{12} = -S_{21}^T = \begin{bmatrix} -1 & 0_{1 \times 3} & 0_{1 \times 3} \\ 0_{3 \times 1} & h & 0_{3 \times 3} \\ k & 0_{3 \times 3} & -I_3 \end{bmatrix}$$

$$S_{13} = \begin{bmatrix} I_2 & 0_{2 \times 2} & 0_{3 \times 2} \\ 0_{2 \times 2} & a_1^T & a_2^T \end{bmatrix}^T$$

where  $g(\lambda) = [0 \ \lambda_q \ 0 \ 0 \ 0 \ -\lambda_d]$ ;

$$h = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}; k = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{bmatrix};$$

$$a_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; a_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

The nonlinear synchronous machine yields a nonlinear state equations of the complete hydroelectric plant. In this case, from (4) the nonlinear junction structure of the bond graph of the system can be defined by,

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) + B_p u(t) \quad (22)$$

where

$$f(x(t)) = [S_{11}(\lambda) + S_{12}MS_{21}]F \quad (23)$$

By substituting (19), (20) and (21) into (23) and (6) we have,

$$f(x(t)) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

$$\text{where } a_{11} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{C_H R_H} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-r_d}{L_d} & -mr_d & -mr_d \\ 0 & -mr_D & \frac{-r_D}{L_D} & -mr_D \\ 0 & -mr_f & -mr_f & \frac{-r_f}{L_f} \end{bmatrix};$$

$$a_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{r}{C_H J_r} \\ 0 & 0 & \frac{-\lambda_d r_{Dq}}{J_r} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$a_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{r}{C_H R_H} & \frac{\lambda_q r_d}{L_d} & m\lambda_q r_d & m\lambda_q r_d \end{bmatrix};$$

$$a_{22} = \begin{bmatrix} \frac{-r_Q}{L_Q} & -mr_Q & 0 \\ -mr_q & \frac{-r_q}{L_q} & \frac{\lambda_d r_{Dq}}{L_q} \\ -m\lambda_d r_d & \frac{-\lambda_d r_q}{L_q} & \frac{-1}{J_r} \left( \frac{r^2}{R_H} + r_{Da} \right) \end{bmatrix}$$

$$B_p = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$$

The mathematical model to analyze the variables performance can be used. However, the next section a steady state analysis using the bond graph model is applied.

#### IV. STEADY STATE ANALYSIS

The response of the steady state is useful to know the value that reaches each state variable of the physical system when the dynamic period has finished. So, from (4) doing  $\dot{x} = 0$ , we have

$$x_{ss} = -A_p^{-1} B_p u_{ss} \quad (24)$$

where  $x_{ss}$  and  $u_{ss}$  are the steady state of the state variables and the input, respectively.

Thus, using (24) we can determine the steady state, however, we need  $A_p^{-1}$  and it is not easy to get for some high order systems. A bond graph in a derivative causality assignment to solve directly the problem of the  $A_p^{-1}$  can be applied [11].

Suppose that  $A_p$  is invertible and a derivative causality assignment is performed on the bond graph model. From (3) the junction structure is given by [11],

$$\begin{bmatrix} z \\ D_{outd} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} & J_{13} \\ J_{21} & J_{22} & J_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ D_{outd} \\ u \end{bmatrix} \quad (25)$$

$$D_{outd} = L_d D_{ind}$$

where the entries of  $J$  have the same properties that  $S$ . The storage elements in (25) have a derivative causality. So,  $D_{ind}$  and  $D_{out}$  are defined of the same manner that  $D_{in}$  and  $D_{out}$ , but they depend on the causality assignment for the storage

elements and that junctions must have a correct causality assignment.

From (4) to (9) and (25) we obtain,

$$z = A_p^* \dot{x} + B_p^* u \quad (26)$$

where

$$A_p^* = J_{11} + J_{12} N J_{21} \quad (27)$$

$$B_p^* = J_{13} + J_{12} N J_{23} \quad (28)$$

being

$$N = (I - L_d J_{22})^{-1} L_d \quad (29)$$

It follows, from (1), (4) and (26) that,

$$A_p^* = F A_p^{-1} \quad (30)$$

$$B_p^* = -F A_p^{-1} B_p \quad (31)$$

From (31) and (24) we obtain the steady state,

$$x_{ss} = F^{-1} B_p^* u_{ss} \quad (32)$$

The bond graph in a derivative causality assignment of the hydroelectric plant is shown in Fig. 8.

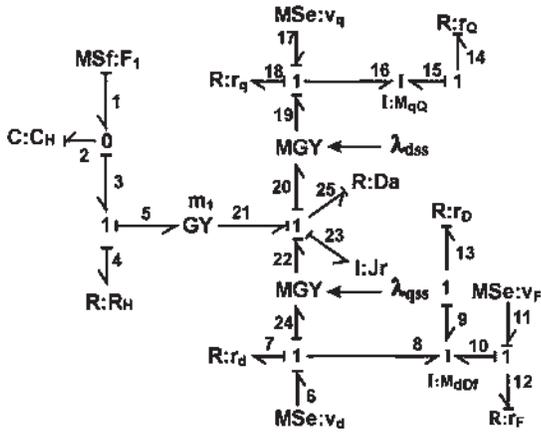


Fig. 8. Bond graph in a derivative causality assignment.

The key vectors of the bond graph in derivative causality assignment are given in (18) and the constitutive relation of the dissipation field is  $L_d = L^{-1}$  and the junction structure is

$$J_{21} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & 0_{4 \times 3} \\ \alpha_{21} & -I_3 \end{bmatrix}; J_{22} = \begin{bmatrix} 0_{6 \times 6} & -g^T(\lambda)_{ss} \\ g(\lambda)_{ss} & 0 \end{bmatrix}$$

$$J_{23} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & r \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T; J_{11} = J_{13} = 0$$

where

$$\alpha_{11} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (33)$$

$$\alpha_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -r & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

and  $g(\lambda)_{ss}$  are constants.

By substituting (19), (20), (33) into (28) we obtain

$$B_p^* = \begin{bmatrix} R_H + \frac{r^2 r_d r_q}{\Delta} & \frac{r r_q (\lambda_q)_{ss}}{\Delta} & 0 & \frac{-r r_d (\lambda_d)_{ss}}{\Delta} \\ \frac{-r r_q (\lambda_q)_{ss}}{\Delta} & \frac{(\lambda_d^2)_{ss} + r_q r_d \alpha}{\Delta} & 0 & \frac{(\lambda_d)_{ss} (\lambda_q)_{ss}}{\Delta} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r_f} & 0 \\ \frac{r r_d (\lambda_d)_{ss}}{\Delta} & \frac{(\lambda_d)_{ss} (\lambda_q)_{ss}}{\Delta} & 0 & \frac{(\lambda_q^2)_{ss} + r_d r_d \alpha}{\Delta} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{r r_d r_q}{\Delta} & \frac{r_q (\lambda_q)_{ss}}{\Delta} & 0 & \frac{-r_d (\lambda_d)_{ss}}{\Delta} \end{bmatrix} \quad (34)$$

where  $\Delta = r_d (\lambda_d^2)_{ss} + r_q (\lambda_q^2)_{ss} + r_d r_q r_d \alpha$ .

From (20), (32) and (34) the steady state of the hydroelectric plant is obtained.

By substituting the following numerical parameters:  $C_H = 0.578$ ,  $R_H = 0.6$ ,  $m_1 = 1$ ,  $J_r = 0.0237$ ,  $D_a = 0.25$ ,  $r_d = r_q = 0.0011$ ,  $r_f = 0.0742$ ,  $r_D = 0.0131$ ,  $r_Q = 0.054$ ,  $L_q = 1.64$ ,  $L_Q = 1.526$ ,  $L_d = 1.7$ ,  $L_D = 1.605$ ,  $L_f = 1.65$ ,  $M_{dDf} = 1.55$ ,  $M_{qQ} = 1.49$ ,  $v_f = f_1 = 1$ ,  $v_q = 1.2245$ ,  $v_d = 0$ ,  $\lambda_{qss} = 0.003475$  and  $\lambda_{dss} = 0.31981$  into (34) the steady state of the synchronous machine is  $(e_2)_{ss} = -3.2184$ ,  $(f_8)_{ss} = 12.062$ ,  $(f_9)_{ss} = 0$ ,  $(f_{10})_{ss} = 13.477$ ,  $(f_{15})_{ss} = 0$ ,  $(f_{16})_{ss} = 6.2342$ ,  $(f_{23})_{ss} = -3.8184$ . The complete system simulation shows the steady state of the state variables in Fig. 9 and 10.

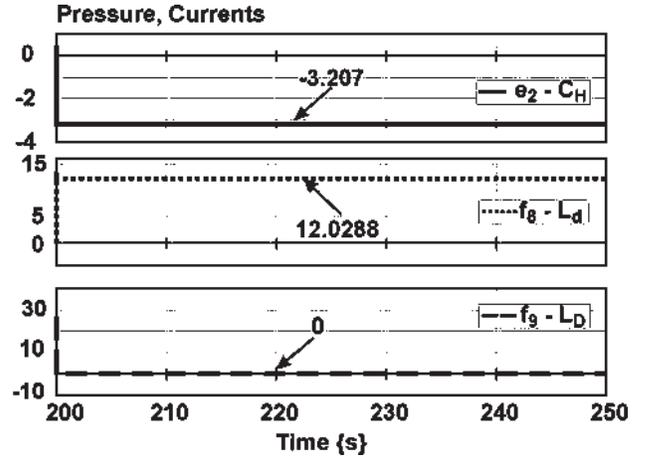


Fig. 9. Steady state of the state variables  $e_2$ ,  $f_8$  and  $f_9$ .

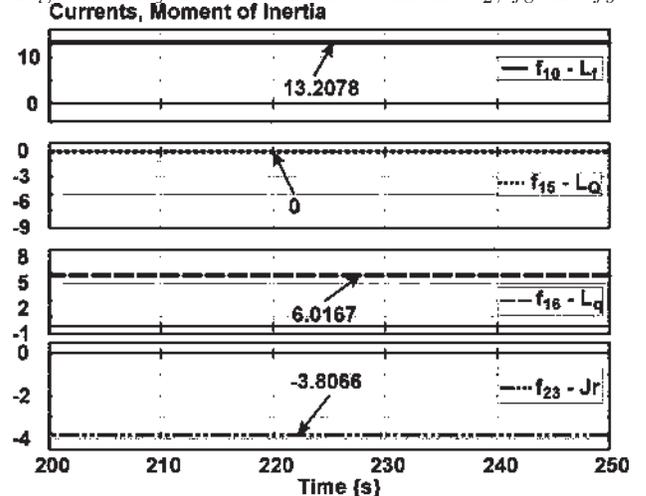


Fig. 10. Steady state of the state variables  $f_{10}$ ,  $f_{15}$ ,  $f_{16}$  and  $f_{23}$ .

In order to determine the steady state of the original nonlinear system,  $(\lambda_d)_{ss}$  and  $(\lambda_q)_{ss}$  should be changed by  $\lambda_d$  and  $\lambda_q$ , respectively. Thus, substituting (34) into (32) with (20) we have to solve the simultaneous equations.

The following section applies the structural controllability of the hydroelectric plant in the physical domain.

## V. CONTROLLABILITY ANALYSIS

The structural properties of a bond graph model that represents a physical system has received much attention such as structural controllability/observability. The great advantages of this method, such as its simplicity of implementation as well as its importance in control design and system conception are shown [9].

A linear time invariant system is completely state controllable iff:

$$\text{rank} \begin{bmatrix} B_p & A_p B_p & \cdots & A_p^{n-1} B_p \end{bmatrix} = n$$

Also, a system  $[A_p B_p]$  is structurally state controllable iff [9]:

- 1) All dynamical elements in integral causality are causally connected with a source.
- 2)  $\text{struct-rank} [A_p B_p] = n$ .

The structural rank of  $[A_p B_p]$  is equal to

- The rank of the matrix  $(S_{11} S_{12} S_{13})$
- $(n - t_s)$ , where  $n$  is the order of the system and  $t_s$  the number of dynamical elements remaining in integral causality when a derivative causality assignment is performed or a dualization of the maximal number of input sources is performed in order to eliminate these integral causalities.

The bond graph in an integral causality assignment of the hydroelectric plant of Fig. 7 has the following causal paths.

- For source  $F_1 \rightarrow 1-2 \rightarrow C_h$ ;  $F_1 \rightarrow 1-2-2-3-4-4-5-21-23 \rightarrow J_2$ ;  $F_1 \rightarrow 1-2-2-3-4-5-21-23-23-22-24-8 \rightarrow M_{dDF}$  and  $F_1 \rightarrow 1-2-2-3-4-4-5-21-23-23-20-19-16 \rightarrow M_{qQ}$ .
- For source  $V_f \rightarrow 11-10-8-24-22-23-23-21-5-4-4-3-2 \rightarrow C_H$ ;  $F_1 \rightarrow 11-10-8-24-22-23 \rightarrow J_r$ ;  $F_1 \rightarrow 11-10 \rightarrow M_{dDf}$  and  $F_1 \rightarrow 11-10-8-24-22-23-23-20-19-16 \rightarrow M_{qQ}$ .
- For source  $V_d \rightarrow 6-8-8-24-22-23-23-21-5-4-4-3-2 \rightarrow C_H$ ;  $V_d \rightarrow 6-8-8-24-22-23 \rightarrow J_r$ ;  $V_d \rightarrow 6-8 \rightarrow M_{dDf}$  and  $V_d \rightarrow 6-8-8-24-22-23-23-20-19-16 \rightarrow M_{qQ}$ .
- For source  $V_q \rightarrow 17-16-16-19-20-23-23-21-5-4-4-3-2 \rightarrow C_H$ ;  $V_q \rightarrow 17-16-16-19-20-23 \rightarrow J_2$ ;  $V_q \rightarrow 17-16-16-19-20-23-23-22-24-8$  and  $V_q \rightarrow 17-16 \rightarrow M_{qQ}$ .

The previous causal paths indicate that all the dynamic elements are causally connected to each source on the bond graph model in an integral causality assignment. Also, the structural rank of  $[A_p B_p] = n$ , because of the bond graph in a derivative causality assignment of Fig. 8 shows that all the dynamic elements have derivative causality. Thus, the bond graph of the hydroelectric system is structurally state controllable.

## VI. SIMULATION OF A HYDROELECTRIC PLANT

In order to prove the controllability performance of the state variables of the proposed bond graph model, the hydroelectric system simulation using the software 20-Sim, is presented. Fig. 11 presents a block diagram in 20-Sim.

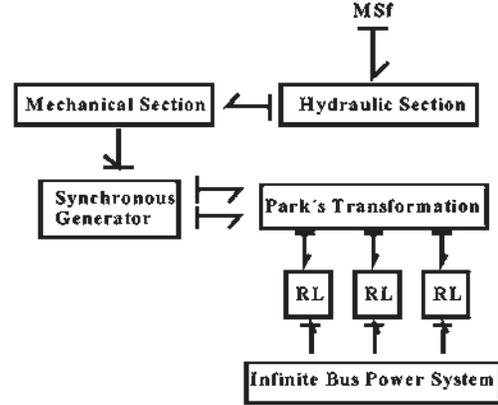


Fig. 11. Block diagram in 20-Sim.

Fig. 12 shows the variable performance  $e_2$  when the input changes from  $F_1 = 1$  to  $F_1 = 3$  and  $V_f = 1$  to 2 and 4.

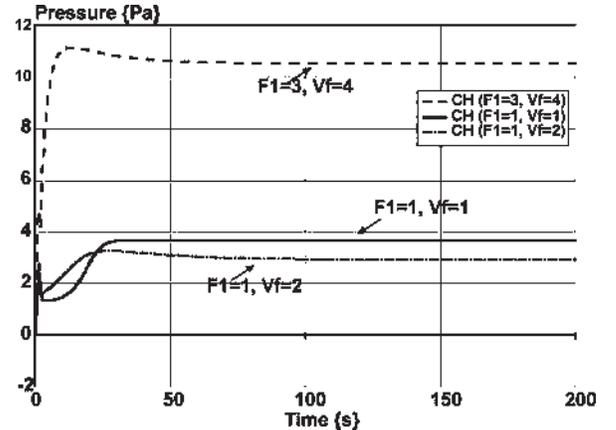


Fig. 12. Variable performance  $e_2$ .

Also, the state variables behavior of the amortisseur circuits  $f_9$  and  $f_{15}$  are shown in Fig. 13, where the steady state of both amortisseurs are zero.

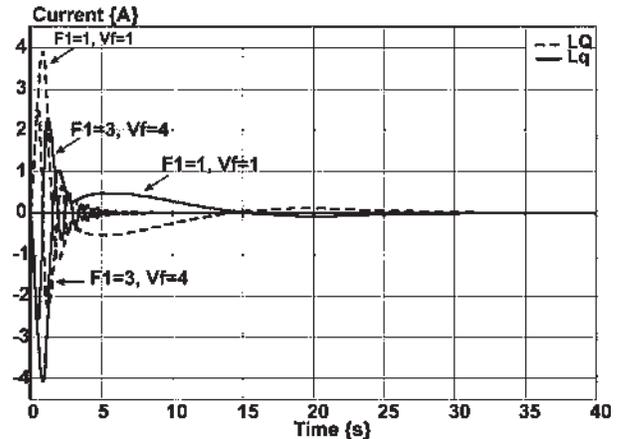


Fig. 13. State variables behavior  $p_9$  and  $p_{15}$ .

Also, the dynamic and steady state periods of state variables  $f_8$ ,  $f_{10}$  and  $f_{16}$  are illustrated in Fig. 14. Note that these are the most important variables to the power system. So, these variables are controllable by the sources  $F_1$  and  $V_f$ .

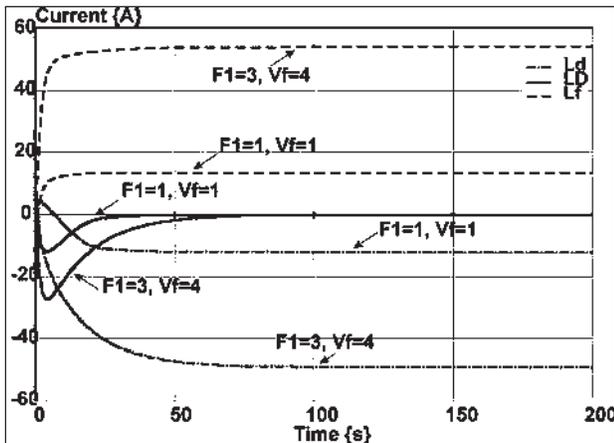


Fig. 14. State variables performance  $f_8$ ,  $f_{10}$  and  $f_{16}$ .

The variable response  $p_{23}$  is shown in Fig. 15 indicating that this variable can be controllable by the two sources.

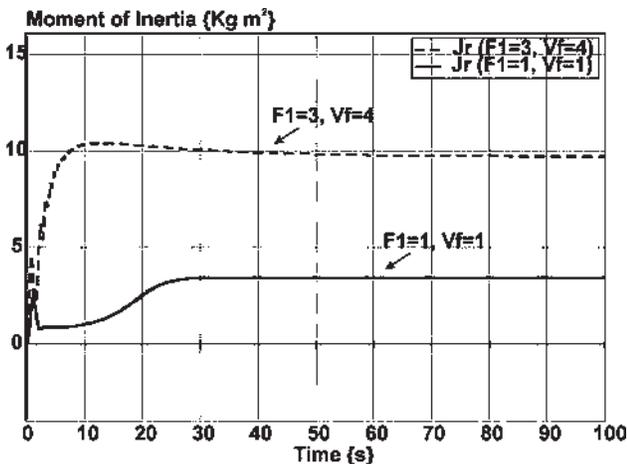


Fig. 15. Variables response  $f_{23}$ .

Finally, Fig. 16 shows the three phase currents on the loads  $RL$  that connects the hydroelectric plant with the infinite bus power system.

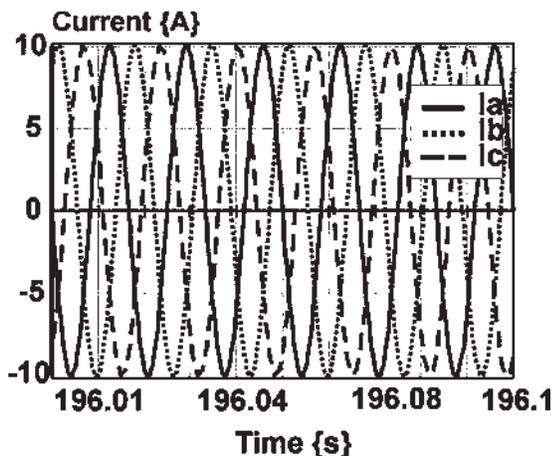


Fig. 16. Three phase currents of the system.

Therefore, the bond graph model of the hydroelectric plant allows to know the dynamic and steady state performance, controllability, reconfiguration and simplified models in a simple and direct manner.

## VII. CONCLUSIONS

A bond graph model of a hydroelectric plant is presented. Important characteristics of the system as controllability and steady state in the physical domain can be obtained. In order to verify the state variables performance, simulation results are given.

## REFERENCES

- [1] H. M. Paynter, *Analysis and design of engineering systems*, MIT press, Cambridge, Mass, 1961.
- [2] Dean C. Karnopp, Donald L. Margolis and Ronald C. Rosenberg, *System Dynamics Modeling and Simulation of Mechatronic Systems*, Wiley, John & Sons, 2000.
- [3] P. E. Wellstead, *Physical System Modelling*, Academic Press, London, 1979.
- [4] John R. Kundur, *Power System Stability and Control*, Mc-Graw-Hill, 1994
- [5] P. M. Anderson, *Power System Control and Stability*, The IOWA state University Press, 1977.
- [6] F. Irie, M. Takeo, S. Sato, O. Katahira, F. Fukui, H. Okada, T. Ezaki, K. Ogawa, H. Koba, M. Takamatsu and T. Shimojo, *A Field Experiment on Power line Stabilization by a SMES System*, IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 28, No. 1 January 1992.
- [7] D. B. Arnatovic and D. M. Skataric, *Suboptimal Design of Hydropower Governors*, IEEE Transactions on Energy Conversion, Vol. 6, No. 3, September 1991.
- [8] Toma Arne Pedersen and Elif Pedersen, *Bond Graph Model of a Supply Vessel Operating in the North Sea*, Proceedings of the 2007 International Conference on Bond Graph Modeling
- [9] C. Sueur and G. Dauphin-Tanguy, *Bond graph approach for structural analysis of MIMO linear systems*, Journal of the Franklin Institute, Vol. 328, No. 1, pp. 55-70, 1991.
- [10] Dietrich Sahn, A two-Axis, *Bond Graph Model of the Dynamics of Synchronous Electrical Machine*, Journal of the Franklin Institute, Vol. 308, No. 3, pp. 205-218, 1979.
- [11] Gilberto Gonzalez-A and R. Galindo, *Steady State Values for a Physical System with a Bond Graph Approach*, Proceedings of 9th IEEE International Conference Methods and Models in Automation and Robotics, pp. 1317-1322, 2003.