

DINAMICA Y ESTADO ESTACIONARIO DE UN ROBOT MANIPULADOREN EL DOMINIO FISICO

TESIS

Que para obtener el grado de
MAESTRO EN CIENCIAS EN INGENIERÍA ELÉCTRICA

presenta
José Aarón Padilla García

Dr. Gilberto González Avalos
Director de Tesis

Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo

Facultad de Ingeniería Eléctrica
División de Estudios de Posgrado

Agosto 2009

Resumen

En este trabajo de investigación se propone un procedimiento para determinar la respuesta de estado estacionario de un robot manipulador planar, el cual pertenece a un tipo de sistemas no lineales caracterizado por el producto de estados, mediante el modelado en Bond Graph con una causalidad derivativa (BGD) en los elementos almacenadores. Esta representación del sistema no tiene sentido físico, pero dentro del marco teórico del Bond Graph puede proporcionar información valiosa del sistema a modelar, como son las propiedades de controlabilidad y observabilidad. El Bond Graph es una técnica de modelado que va ganando adeptos por su versatilidad en el manejo de distintos dominios de energía y llevando el sistema modelado a otro dominio en variables generalizadas. Se realiza, además, una comparación de resultados con una técnica de modelado de robots tradicional como es Euler-Lagrange, donde se puede ver que para las técnicas tradicionales cuando se incrementa el número de eslabones las ecuaciones resultantes se vuelven relativamente grandes y difíciles de simular, en cambio con la técnica de Bond Graph su metodología es menos engorrosa de llevar a cabo, aunque el procedimiento maneja matrices relativamente grandes, lo cual es compensado por la facilidad en la simulación del modelo mediante programas de simulación como el 20-sim[®].

El procedimiento propuesto está basado principalmente en el procedimiento de Gawthrop haciendo uso de los transformadores modulados multipuerto propuestos por Karnopp, además de agregar las pérdidas por rozamiento debido a las fricciones.

Abstract

In this research work is proposing a procedure to determine the response steady state of a planar robot manipulator, which belongs to a type of non-linear systems characterized by the product of states, through the modeling in Bond Graph with a derivative causality (BGD) assignment in the storage elements. This representation of the system does not have a physical sense, but within the theoretical framework of Bond Graph can provide valuable information of the system to model, as are controllability and observability properties. The Bond Graph is a technique of modeling that is gaining followers by its versatility in the handling of different energy domains and carrying the modelled system to another domain in generalized variables. In addition, a comparison of results with a technique of modeling robots traditional as is Euler-Lagrange is performed, where you can see that for the traditional techniques when increases the number of links the equations resulting become relatively large and difficult to simulate, in contrast with the technique of Bond Graph its methodology is less cumbersome to carry out, although the procedure manages matrices relatively large, which is offset by the facility in the simulation of the model through simulation programs such as the 20-sim[®].

The proposed procedure is mainly based on the procedure of Gawthrop making use of modulated multiport transformers proposed by Karnopp, in addition to add the lost by friction due to friction.

Índice general

Resumen	i
Abstract	ii
Lista de figuras	iv
Lista de tablas	v
1 Introducción	1
1.1 La robótica y su modelado	1
1.2 Objetivo General	2
1.2.1 Objetivos particulares	2
1.3 Justificación	2
1.4 Publicaciones y trabajos relacionados	3
1.5 Dominio físico	5
1.6 Estructura de la tesis	5
2 Antecedentes	7
2.1 Introducción	7
2.2 Comprendiendo el Bond Graph	8
2.2.1 Elementos	9
2.2.2 Bonds y conexiones	10
2.2.3 Elementos de un puerto o puerto-1	11
2.2.4 Puertos uno y medio	11
2.2.5 Elementos de dos puertos o puertos-2	12
2.2.6 Elementos de tres puertos o puertos-3	13
2.2.7 Elementos multipuerto o multipuertos	15
2.2.8 Símbolos de potencia	16
2.3 La Causalidad en un Bond Graph	18
2.3.1 Procedimiento para la asignación de causalidad	18
2.3.2 La causalidad derivativa en un Bond Graph	20
2.4 Transformadores modulados multipuerto	21

2.5	El modelado en Bond Graph	27
2.5.1	Procedimiento para la construcción de modelos en Bond Graph	27
2.5.2	Sistemas eléctricos	28
2.5.3	Sistemas Mecánicos	30
2.5.4	Sistemas Hidráulicos	32
2.6	Estructura de unión en sistemas multipuerto	33
2.6.1	Vectores clave	34
2.6.2	Relaciones de campo y ecuaciones de estado	35
2.6.3	Obtención de un modelo en espacio de estado en Bond Graph	37
2.7	Sistemas multicuerpo	42
3	Robots Manipuladores	52
3.1	Introducción	52
3.2	Cinemática y dinámica del brazo del robot	55
3.3	Cinemática directa. La representación de Denavit-Hartenberg	56
3.3.1	Cadenas cinématicas	56
3.3.2	Representación Denavit-Hartenberg	58
3.3.3	Ejemplo: Manipulador Elbow planar	64
4	Modelado de Robots Manipuladores en Bond Graph	67
4.1	Sistemas Mecánicos y Robóticas en Bond Graph	67
4.2	Movimiento en dos dimensiones en Bond Graph	67
4.3	Un péndulo simple en Bond Graph	71
4.4	Un péndulo simple con peso en Bond Graph	72
4.5	Un péndulo doble en Bond Graph	72
4.6	Un robot manipulador en dos dimensiones en Bond Graph	75
4.7	No linealidades cinemáticas en mecánica dinámica	77
4.8	El procedimiento de modelado básico	79
4.9	Ejemplo de modelado	80
4.10	Procedimiento propuesto de modelado	83
4.11	Modelado matemático a partir de su Bond Graph	84
4.11.1	Manipulador de un eslabón en BGI (Bond Graph en causalidad Integral)	85
4.12	Modelado matemático a partir de su representación Euler-Lagrange	90
4.12.1	Principio de D'Alembert	91
4.12.2	Ecuación Euler-Lagrange	93
4.13	Comparación de resultados de los modelos Euler-Lagrange y Bond Graph . .	95
4.13.1	Modelo Euler-Lagrange del robot manipulador planar de dos eslabones	100
5	El Estado Estacionario de un Robot Manipulador en Bond Graph	104
5.1	Introducción	104
5.1.1	Estado estacionario a partir de la dinámica obtenida de su Bond Graph	105
5.1.2	Manipulador de un eslabón en BGI (Bond Graph en causalidad Integral)	105
5.1.3	Un Bond Graph para la determinación directa del estado estacionario	109

5.1.4	Manipulador de un eslabón en BGD (Bond Graph en causalidad Derivativa)	110
5.1.5	Manipulador de dos eslabones en BGD (Bond Graph en causalidad Derivativa)	115
5.1.6	Manipulador de tres eslabones en BGD (Bond Graph en causalidad Derivativa)	123
6	Conclusiones y Trabajos Futuros	132
6.1	Conclusiones	132
6.2	Trabajos futuros	133
A	Movimiento en Tres Dimensiones en Bond Graph	134
A.1	Motores desacoplados en Bond Graph	135
A.2	Ejemplo de robots en Bond Graph	136
A.3	Movimiento en tres dimensiones y ecuaciones de Euler en Bond Graph	137
A.4	Sistemas mecánicos con geometría no lineal	137
A.5	Dinámica multidimensional	139
A.6	Transformación de coordenadas	141
A.6.1	Ecuaciones de Euler	145
A.7	Modelado de un Robot PUMA de dos Grados de Libertad	146
A.8	Modelado de un Robot PUMA de Tres Grados de Libertad	149
B	Artículo Publicado	151
	Bibliografía	158

Lista de figuras

2.1	Bond con las variables generalizadas de potencia.	9
2.2	Ejemplo de elemento multipuerto: a) Transformador; b) Representación en bond Graph.	15
2.3	Símbolos de potencia usuales para elementos BG.	17
2.4	Causalidades en un bond.	18
2.5	Ejemplo de un circuito eléctrico donde existe dependencia lineal entre los capacitores.	20
2.6	Bond graphs con causalidad derivativa para el circuito eléctrico de la figura 2.5.	21
2.7	Estructura unión de una transformación bilateral de variables (2x2).	21
2.8	Estructura unión de la figura 2.7 con modificación en el signo de las semiflechas de los puertos 1 y 2.	22
2.9	Simplificación de la estructura unión de la figura 2.8 de dos TF's a uno.	22
2.10	Coordenadas rectangulares y polares.	24
2.11	Una representación de la transformación de coordenadas polares a rectangulares usando un MTF.	25
2.12	Ejemplo de varilla rígida, donde se representan las fuerzas y las velocidades.	26
2.13	Bond graph con MTF para el ejemplo de varilla rígida.	26
2.14	Regla para la reducción de unión en un Bond Graph.	28
2.15	Sistema Eléctrico.	29
2.16	Procedimiento para obtener el bond Graph de un sistema eléctrico.	29
2.17	Bond Graph para el sistema eléctrico de la figura 2.15.	30
2.18	Sistema mecánico.	31
2.19	Procedimiento para obtener el bond Graph de un sistema mecánico.	31
2.20	Bond Graph para el sistema mecánico de la figura 2.18.	32
2.21	Sistema hidráulico.	33
2.22	Procedimiento para obtener el bond Graph de un sistema hidráulico.	33
2.23	Bond Graph para el sistema hidráulico de la figura 2.21.	34
2.24	Diagrama a bloques de la estructura de unión de un Bond Graph.	34
2.25	Bond Graph para el sistema mecánico de la figura 2.18 con los bonds numerados.	37
2.26	Ejemplo elemental de un carretón con péndulo invertido que se mueve usando un motor eléctrico.	43

2.27	Barra y carretón de la figura 2.26 donde se muestran las aberturas δ_1 y δ_2 y las fuerzas λ_1 y λ_2 asociadas con ellas.	44
2.28	Bond graph que relaciona las velocidades de abertura con las velocidades del cuerpo.	45
2.29	Bond graph para el sistema de la figura 2.26.	47
2.30	Sistema de doble péndulo invertido.	49
2.31	Bond graph para el sistema de doble péndulo invertido.	51
3.1	Robots manipuladores : a) Robot Cincinnati Milacron T3; b) Robot de la serie PUMA 560.	54
3.2	Diversas categorías de robots: a) Cartesiana, b) cilíndrica, c) esférica y d) de revolución o angular.	54
3.3	Marcos de referencia satisfaciendo las hipótesis (<i>DH1</i>) y (<i>DH2</i>).	60
3.4	Sentido positivo para α_i y θ_i	62
3.5	Asignación de marco de referencia de Denavit-Hartenberg.	62
3.6	Manipulador planar de dos eslabones.	64
4.1	Una barra rígida.	68
4.2	Bond Graph de una barra rígida.	69
4.3	Un péndulo simple.	72
4.4	Bond graph de un péndulo simple.	73
4.5	Bond Graph de un péndulo simple con masa.	74
4.6	Un péndulo doble.	75
4.7	Bond Graph de un péndulo doble.	76
4.8	Un manipulador de dos eslabones.	77
4.9	Bond Graph de un manipulador de dos eslabones.	78
4.10	Modelo de un bond graph simbólico para un sistema conservativo básico no lineal (a) Campos -C y -I acoplados; (b) Campos -C y -I uniones-1.	80
4.11	Un oscilador mecánico no lineal (a) Diagrama esquemático; (b) Cantidades geométricas claves definidas.	81
4.12	Bond graph correspondiente al oscilador no lineal de la figura 4.11.	81
4.13	Los cuatro transformadores modulados necesarios en la técnica de Gawthrop.	84
4.14	Transformador modulado que sustituye los cuatro MTF del modelo de Gawthrop.	85
4.15	Bond Graph de un manipulador de un eslabón.	86
4.16	Interacción de fuerzas que actúan sobre una partícula.	92
4.17	Robot manipulador más simple: de un eslabón.	96
4.18	Simulación de un manipulador de un eslabón en Simnon TM	98
4.19	Simulación de un manipulador de un eslabón en 20-sim.	99
4.20	Esquemático de un robot manipulador planar.	100
5.1	Manipulador de un eslabón en BGI (Bond Graph en causalidad Integral).	106
5.2	Simulación en 20-sim para llevar al manipulador de un brazo a 45° en estado estable.	108

5.3	Vectores clave de un bond Graph.	109
5.4	Diagrama de flujo para el cálculo de la respuesta en estado estacionario en un enfoque de Bond Graph.	110
5.5	Manipulador de un eslabón en BGD (Bond Graph en causalidad Derivativa).	111
5.6	Bond Graph de un manipulador de dos eslabones.	116
5.7	Simulación del robot manipulador de dos eslabones en 20-sim para $\theta_1 = 30^\circ$ y $\theta_2 = 45^\circ$	121
5.8	Simulación del robot manipulador de dos eslabones en 20-sim para $\theta_1 = 50^\circ$ y $\theta_2 = 20^\circ$	122
5.9	Manipulador de tres eslabones en bond Graph.	124
5.10	Simulación del robot manipulador de tres eslabones en 20-sim para $\theta_1 = 15^\circ$, $\theta_2 = 20^\circ$ y $\theta_3 = 30^\circ$	130
5.11	Simulación del robot manipulador de tres eslabones en 20-sim para $\theta_1 = 35^\circ$, $\theta_2 = 50^\circ$ y $\theta_3 = 45^\circ$	131
A.1	Bond Graph de motores desacoplados.	136
A.2	Ejemplo de un robot manipulador.	137
A.3	Bond graph del robot manipulador de la figura A.2.	138
A.4	Cuerpo en movimiento 3-D general.	139
A.5	Bond Graph para movimiento de cuerpo rígido en 3-D.	141
A.6	Transformación de coordenadas de ángulo Cardan.	142
A.7	Bond Graph de transformación de coordenadas.	144
A.8	Bond Graph del anillo de Euler.	145
A.9	Bond Graph del anillo de Euler, alternativa causal.	146
A.10	Bond Graph del anillo de Euler, movimiento rotacional y traslacional.	147
A.11	Diagrama esquemático de un robot PUMA de dos grados de libertad.	147
A.12	Bond Graph del robot PUMA de dos grados de libertad.	148
A.13	Diagrama esquemático de un robot PUMA de tres grados de libertad.	149
A.14	Bond Graph del robot PUMA de tres grados de libertad.	150

Lista de tablas

2.1	Variables generalizadas en algunos dominios de energía.	9
2.2	Bonds y conexiones.	11
2.3	Elementos de un puerto o puerto-1.	12
2.4	Puertos uno y medio.	13
2.5	Elementos de dos puertos o puertos-2.	14
2.6	Elementos de tres puertos o puertos-3.	14
2.7	Elementos multipuerto o multipuertos.	17
2.8	Consideraciones de causalidad para elementos en Bond Graph.	19
3.1	Parametros de unión para un manipulador planar de 2 eslabones.	64

Capítulo 1

Introducción

1.1 La robótica y su modelado

La robótica es una ciencia que ha evolucionado de manera constante, inicialmente, su uso con fines industriales para el mejoramiento no sólo de la calidad si no de la cantidad de productos realizados en una jornada, hoy en día, la robótica ya no sólo son brazos mecánicos amorfos anclados a un lugar determinado y que no podían realizar ninguna tarea más que para la que fueron creados, ahora son máquinas complejas capaces de realizar un sin fin de tareas que van desde emular seres humanos hasta mascotas virtuales, por lo que se han vuelto más complejos tanto de realizar como de predecir su comportamiento.

El modelado dentro de la robótica como en cualquier rama de la ciencia es un factor importante, ya que teniendo un modelo cercano o muy cercano al sistema físico al cual se le pueden *crear* condiciones extremas, se puede predecir su comportamiento en presencia de dichas condiciones sin necesidad de llevar a cabo el experimento en la realidad, con el propósito de tomar desiciones respecto a la evolución del sistema real en presencia de condiciones reales, es decir, los modelos son simplificaciones de la realidad. Un modelo excesivamente complejo y detallado puede contener parámetros que sean imposibles o muy difíciles de estimar o medir, pero un modelo excesivamente simplificado no es capaz de mostrar las características importantes del sistema, por lo que se debe buscar un punto intermedio de acuerdo con las

necesidades y las características del sistema a modelar.

El modelado con la técnica Bond Graph ofrece entre sus principales ventajas la unificación de diferentes dominios físicos en uno generalizado donde se exhibe el intercambio de potencia (y conservación de la misma) dentro del sistema. Además de la posibilidad de encapsular modelos en Bond Graph y conectarlos a otros por medio de puertos externos lo cual convierte a esta técnica en una herramienta valiosa para la representación y manipulación de sistemas complejos (Cellier, 1992).

1.2 Objetivo General

El objetivo general del presente trabajo de investigación es modelar y analizar un robot manipulador en el dominio físico (Bond Graph). A partir de este modelo en Bond Graph determinar el estado estacionario del sistema.

1.2.1 Objetivos particulares

- Dado un robot manipulador construir su modelo en el dominio físico (Bond Graph).
- i)* Proponer una metodología para obtener el modelo en Bond Graph.
- ii)* Determinar la estructura unión del modelo en Bond Graph del sistema.
- iii)* Obtener el modelo matemático del sistema.
- Comparar metodología clásica (Euler-Lagrange) con la metodología en Bond Graph.
- Obtención del estado estacionario de un robot manipulador en Bond Graph. *Resultado nuevo.

1.3 Justificación

El modelado de sistemas con Bond Graph está siendo utilizado en muchas áreas de la ingeniería. En robótica, se pretende aprovechar la característica principal del bond Graph, la

cual es englobar en un marco de referencia distintos tipos de energía, ya que en los robots se tiene partes mecánicas y eléctricas.

las técnicas de modelado clásicas como Euler-Lagrange conforme se incrementan los grados de libertad en el robot manipulador de igual manera crece la dificultad para obtener su modelo matemático, en bond Graph, se puede hacer uso del modelado por bloques, así, al incrementar los grados de libertad sólo se tendrán que ir agregando bloques los cuales representarán los eslabones del manipulador.

Cuando Paynter inventó el Bond Graph intentaba crear una metodología en la cual se pudieran modelar *todos* los sistemas físicos, aunque el objetivo era muy ambicioso, ésta técnica puede aportar mucho al modelado de distintos fenómenos físicos, principalmente los que manejan interacción de distintos tipos de energía, que son una mayoría en la realidad, por esto se decide usar la metodología del Bond graph para modelar los robots manipuladores.

1.4 Publicaciones y trabajos relacionados

En esta sección se enuncian importantes trabajos relacionados con este trabajo de tesis.

Un Bond Graph es una representación abstracta de un sistema, donde varios componentes interactúan entre ellos por medio de puertos de energía y son colocados en un sistema donde existe intercambio de energía [Karnopp, 2000].

En [Karnopp, 2000] se establecen los elementos básicos para modelar sistemas físicos con Bond Graph. Por otro lado la interpretación del estado estacionario es una característica muy importante de un sistema cuando el periodo dinámico ha terminado [González, 2003]. En [González, 2003] es propuesto un procedimiento para determinar el estado estacionario de un sistema lineal e invariante en el tiempo representado en un modelo en Bond Graph en causalidad derivativa.

En el caso de sistemas lineales la condición del estado estacionario puede ser formulada en términos del sistema de ecuaciones, esto es: $\dot{x} = A_p x + B_p u$ para $\dot{x} = 0$. El concepto de estado estacionario para sistemas no lineales fue introducido por Isidori y Byrnes para formular el problema de regulación de la salida de un sistema [Xia, 2007]. En [Breedveld, 1984] se propone

un algoritmo para determinar por inspección directa del Bond Graph el estado de equilibrio de un sistema con entrada constante.

En [Filippini, 2000] es implantada una teoría general para sistema multicuerpo dentro del marco de modelado Bond Graph. En mecánica clásica existen varios procedimientos por los cuales se pueden deducir las ecuaciones diferenciales un sistema de cuerpos rígidos. El protocolo Bond Graphs permite un modelado unificado de sistemas físicos multidisciplinarios y esta bien adaptado para un enfoque modular, modelando basándose en los principios físicos [Filippini, 2000].

En [Karnopp, 2000] se establecen las bases de los transformadores multipuerto modulados y su aplicación en los sistemas mecánicos. En [Karnopp, 1997] se demuestra que Bond Graphs pueden ser utilizados para describir sistemas mecánicos y frecuentemente proporcionan un significado intuitivo y físico para mostrar las diferentes relaciones que actúan en un sistema. En [Brown, 1991] se presentan procedimientos para determinar Bond Graphs hamiltonianos que representan directamente ecuaciones de hamilton. En esto se emplea un campo I multipuerto para el cual la velocidad generalizada o el vector de velocidad es una función algebraica del vector de momento generalizado, y un campo C multipuerto para la fuerza generalizada o el vector de esfuerzo es una función algebraica del vector de desplazamiento generalizado, consistentes con la notación de Bond Graph convencional. Así mismo, en [Brown, 1991] se describe el Bond Graph Lagrangiano que emplea elementos de Bond Graph convencionales. En [Allen, 1997] se presenta una técnica la cual produce ecuaciones de lagrange o de Hamilton explícitas para dinámicas de mecanismos adecuados para solución computacional.

En [Zeid, 1992] se modelan mecanismos de espacio y sistemas multicuerpo utilizando el método de Karnopp-Margolis. además, se presenta una librería de Bond Graph para seis tipos de uniones que son comunes en construcciones de mecanismos de espacio. En [Tienego, 1985] se describe un método para modelar sistemas mecánicos con Multibond Gaphs. El método está basado en la descripción de la relación de un punto en movimiento del vector de velocidad en un sistema rotatorio. Esta relación es incorporada en un Bond Graph. En [Karnopp, 1982] se muestra que una representación de transformadores multipuerto de un sistema inercial produce las mismas fuerzas generalizadas a partir de las fuerzas dinámicas inerciales que

representan la operación de la formula de Lagrange.

En [Gawthrop, 1995] se presentan los modelos de sistemas mecánicos en dos planos usando bond Graph, como son los péndulos.

1.5 Dominio físico

El dominio físico es el conjunto de elementos que pueden ser representados en la teoría de Bond Graph. Así, un sistema físico que contenga elementos eléctricos, mecánicos, hidráulicos, magnéticos y térmicos pueden ser modelados como un único Bond Graph.

A partir de un modelo en Bond Graph que representa un sistema físico, se puede obtener un modelos en variables de estado que determina el dominio del tiempo o un modelo en función de transferencia que implica el dominio de la frecuencia.

1.6 Estructura de la tesis

La presente tesis se encuentra organizada de la siguiente manera:

El capítulo 2 contiene los antecedentes y los elementos necesarios para modelar sistemas en Bond Graph y una descripción detallada de los transformadores multipuerto modulados. Cuenta también con los procedimientos para construir modelos de sistemas mecánicos, eléctricos e hidráulicos así como un ejemplo de cada uno de ellos. Se incluye un ejemplo completo (mecánico) de la obtención de su modelo matemático.

En el capítulo 3 se da una breve introducción a los robots manipuladores, además del movimiento y las transformaciones homogéneas que en ellos se producen, y finalmente se plantean las bases para la representación Denavit-Hartenberg.

El capítulo 4 contiene el modelado de los sistemas mecánicos dinámicos (como los péndulos) y el procedimiento propuesto para los robots manipuladores planares, contiene además el modelo matemático de un manipulador y su simulación, así como la comparación de resultados con la técnica de Euler-Lagrange.

En el capítulo 5 se presenta la obtención del estado estacionario de un robot manipulador

planar usando el Bond Graph en causalidad Integral y comparando con la obtención del estado final con el Bond Graph en causalidad Derivativa.

El capítulo 6 contiene las conclusiones y los trabajos propuestos a futuro.

El apéndice A entrega una descripción del movimientos en tres dimensiones para los robots manipuladores. En el apéndice B presenta el artículo desarrollado de los resultados obtenidos en la presente tesis, titulado *Steady State for a Class of Nolinear Systems: A Bond Graph Approach* y que fue aceptado en la 14th IEEE International Conference on Methods and Automation and Robotics que se llevará a cabo del 19 al 21 de agosto del 2009 en Miedzyzdroje, Polonia.

Capítulo 2

Antecedentes

2.1 Introducción

El Bond Graph es una técnica que ha venido tomando fuerza y renombre debido a algunas características como son la flexibilidad y la robustez. Este método fue desarrollado por Henry Paynter en 1961 para modelar la interacción entre los subsistemas hidráulico, mecánico y eléctrico en el proceso de generación hidroeléctrica.

Esta metodología de modelado de sistemas en el dominio físico, en inglés Bond Graph, se establece como un enfoque unificado para representar de manera conjunta sistemas hidráulicos, mecánicos, eléctrico, neumáticos y térmicos a través del flujo de potencia entre los componentes del sistema por medio de puertos de energía.

Los Bond Graphs consisten en señales, líneas y símbolos propios que permiten representar gráficamente el modelo físico, de igual forma, proporciona una visualización de las interacciones de causa y efecto entre sus distintos componentes y suministra implícita y sistemáticamente el modelo matemático en forma de variables de estado. Y así, facilitando el uso de recursos computacionales para la simulación que se realiza directamente de ésta representación gráfica.

Es importante mencionar que esta técnica utiliza analogías de los sistemas eléctricos, lo que permite la construcción de modelos complejos con elementos básicos. Esta técnica de

modelado permite conocer propiedades del sistema como son observabilidad, controlabilidad y la dependencia lineal de los elementos que lo componen, basado en una representación gráfica y generalizada de los conceptos de la variable de flujo y esfuerzo.

2.2 Comprendiendo el Bond Graph

Los sistemas bondgraphs son sistemas interdisciplinarios y consisten de elementos con líneas entre ellos llamadas bonds. Del mismo modo que encontramos en circuitos electrónicos. Cuando los inventó, Paynter quedó impresionado por su parecido (superficial) con los enlaces químicos, de ahí su nombre (bonds).

Las líneas llevan signos especiales y los elementos son letras código para ingeniería eléctrica. Básicamente los Bond Graphs relaciona la noción de voltaje y corriente a todas las definiciones científicas. Llamadas esfuerzo y flujo en dentro de la metodología de Bond Graph.

La ecuación de potencia siempre es como se muestran en (2.1):

$$\dot{E}(t) = e(t) \cdot f(t) \quad (2.1)$$

donde la potencia es igual al producto entre el esfuerzo ($e(t)$) y el flujo ($f(t)$). La ecuación (2.1) es válida para Bond Graphs verdaderos (los bondgraphs son verdaderos cuando el producto de esfuerzo y flujo es potencia).

Dado que existen interacciones de potencia cuando en un sistema se conectan dos o más elementos, es útil clasificar la variedad de variables de potencia en un esquema universal y describir todos los tipos de multipuerto en un lenguaje común. Las variables de potencia son llamadas *esfuerzo* $e(t)$ y *flujo* $f(t)$. Estas son llamadas variables generalizadas debido a que pueden ser utilizadas en todos los dominios de energía. En la Figura 2.1 se muestra la representación de un bond con las variables de potencia asociadas.

Ejemplos de estos pares de variables son voltaje y corriente para un sistema eléctrico, fuerza y velocidad para un sistema mecánico. La relación de ambas variables está dada en (2.2):

$$P(t) \triangleq e(t) f(t) \quad (2.2)$$

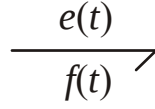


Figura 2.1: Bond con las variables generalizadas de potencia.

Variables (t)	Eléctrico (t)	Hidráulico (t)	M.Traslacional (t)	M.Rotacional (t)
Esfuerzo e	Voltaje v	Presión P	Fuerza F	Par τ
Momento p	Enlace de flujo λ	M. de flujo Γ	M. rotacional p_R	M. angular h_R
Flujo f	corriente i	Caudal Q	Velocidad V	Vel. angular ω
Desplazamiento q	Carga q	Volumen V	Distancia x	Desp. angular θ

Tabla 2.1: Variables generalizadas en algunos dominios de energía.

En sistemas que almacenan energía es necesario definir variables que representen el estado del sistema llamadas variables de energía, denominadas *momento* $p(t)$ ó *esfuerzo acumulado* $e_a(t)$ y *desplazamiento* $q(t)$ ó *flujo acumulado* $f_a(t)$, y son descritas por (2.3) y (2.4):

$$p(t) = e_a(t) \triangleq \int_0^t e(\tau) d\tau \quad (2.3)$$

$$q(t) = f_a(t) \triangleq \int_0^t f(\tau) d\tau \quad (2.4)$$

La Tabla 2.1 muestra las variables generalizadas para sistemas físicos utilizadas en el modelado mediante Bond Graph, donde se describe la correspondencia entre las variables generalizadas y las variables físicas en diferentes dominios de energía. Por ejemplo, el esfuerzo $e(t)$ en sistemas eléctricos es el voltaje $v(t)$, el momento $p(t)$ representa el enlace de flujo $\lambda(t)$, el flujo $f(t)$ representa la corriente $i(t)$ y el desplazamiento $q(t)$ es la carga $q(t)$ en un sistema eléctrico.

2.2.1 Elementos

En el modelado en Bond Graph se utilizan varios elementos propios de dicha metodología para representar los componentes de un sistema físico. Existen elementos disipativos (elementos-

R) los cuales representan componentes que disipan energía en forma de calor. Los elementos capacitivos e inductivos (Elementos- C y $-I$, respectivamente) son necesarios para representar los componentes de un sistema físico que son almacenadores de energía. Dentro de la metodología existen otros elementos los cuales se detallarán más adelante.

Escencialmente el número de conexiones o puertos en cada elemento es lo que permite clasificarlos en elementos de puerto-1, puerto-2, etc. Los puertos son utilizados para conectar elementos a otros elementos y al entorno.

La convención del flujo de potencia es que entra a los elementos $-C$, $-I$, y elementos- R y sale de las fuentes hacia los elementos del sistema. Siempre se dibuja la semiflecha en la parte de abajo de los bonds horizontales, ya que este hábito se ha propagado.

2.2.2 Bonds y conexiones

Los diferentes bonds que se utilizan para modelar en Bond Graph son presentados en la Tabla 2.2. Los bonds son utilizados para conectar elementos y transmitir potencia, el trazo causal (línea vertical) indica la dirección del esfuerzo $e(t)$ (el esfuerzo va hacia el trazo causal y en consecuencia el flujo en sentido contrario), a continuación se detalla la importancia de la causalidad en la metodología de Bond Graph.

Para organizar las leyes constitutivas de un conjunto de ecuaciones diferenciales, es necesario definir las relaciones causa y efecto. Estas relaciones para el esfuerzo y el flujo se presentan en direcciones opuestas. Una marca en un bond, la cual es llamada *trazo causal*, indica la dirección del esfuerzo y del flujo simultáneamente.

Aplicamos a todos los símbolos, preferentemente, la causalidad integral. Se prefiere la causalidad integral en un Bond Graph para buscar la independencia lineal del modelo, es decir, evitar que en el modelo matemático se tengan ecuaciones diferenciales linealmente dependientes, y con esto facilitar la solución numérica del modelo matemático.

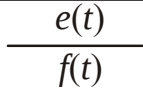
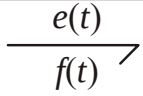
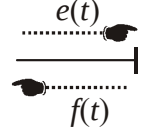
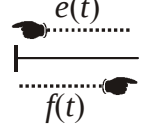
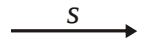
Símbolo Bond Graph	Descripción	Ecuación
	Bond simple: Transmisión de potencia como un producto de dos factores, esfuerzo $e(t)$ y flujo $f(t)$.	$\dot{E}(t) = e(t) \cdot f(t)$
	Flujo de potencia positivo: La semiflecha indica la convección del signo positivo.	$\dot{E}(t) = e(t) \cdot f(t)$
	Causalidad directa: El esfuerzo a la derecha, el flujo a la izquierda.	$\dot{E}(t) = e(t) \cdot f(t)$
	Causalidad inversa: El esfuerzo a la izquierda, el flujo a la derecha.	$\dot{E}(t) = e(t) \cdot f(t)$
	Señal o bond activo: Conexión en la cual una del par de variables es despreciada.	$\dot{E}(t) = 0$

Tabla 2.2: Bonds y conexiones.

2.2.3 Elementos de un puerto o puerto-1

Los elementos de puerto-1 con la causalidad aplicada se muestran en la Tabla 2.3. Para las fuentes la causalidad es obligatoria, los elementos-1 activos (también llamados fuentes) son los que suministran potencia al sistema (existen las fuentes de esfuerzo Se y las fuentes de flujo Sf). De una Se sale un esfuerzo, y de una Sf sale un flujo.

2.2.4 Puertos uno y medio

En Bond Graph se utilizan las fuentes moduladas, es decir, son fuentes de esfuerzo o flujo las cuales tiene un puerto extra de control por el cual se introduce una ganancia para modificar el valor de la fuente, este valor puede ser una constante o una variable generalizada (normalmente se usan detectores ya sea de flujo o esfuerzo dentro de un Bond Graph para obtener las señales modulantes). Estos elementos se muestran en la Tabla 2.4.

Símbolo Bond Graph	Descripción	Ecuación
$\begin{array}{c} e(t) \\ \text{---} \\ f(t) \end{array} \nearrow \mathbf{C}$	Elemento-C o Capacitor: Integra flujo.	$e(t) = \frac{1}{C} \int f(t) dt$
$\begin{array}{c} e(t) \\ \text{---} \\ f(t) \end{array} \nearrow \mathbf{I}$	Elemento-I o Inercia: Integra esfuerzo.	$f(t) = \frac{1}{I} \int e(t) dt$
$\begin{array}{c} e(t) \\ \text{---} \\ f(t) \end{array} \nearrow \mathbf{R}$ $\begin{array}{c} e(t) \\ \text{---} \\ f(t) \end{array} \nearrow \mathbf{R}$	Elemento-R o Resistor: Disipador o desfogue de potencia con causalidad libre.	$e(t) = Rf(t)$ $f(t) = \frac{1}{R}e(t)$
$\mathbf{Se} \begin{array}{c} e(t) \\ \text{---} \\ f(t) \end{array} \nearrow$	Fuente de esfuerzo: Provee o sustrae potencia.	$e(t) = \text{Constante.}$
$\mathbf{Sf} \begin{array}{c} e(t) \\ \text{---} \\ f(t) \end{array} \nearrow$	Fuente de flujo: Provee o sustrae potencia.	$f(t) = \text{Constante.}$

Tabla 2.3: Elementos de un puerto o puerto-1.

2.2.5 Elementos de dos puertos o puertos-2

Los elementos de dos puertos son conocidos como *transformadores* (TF) y *giradores* (GY). Los TF 's son elementos que relacionan los esfuerzos de entrada con los esfuerzos de salida y los flujos de entrada con los flujos de salida por medio de una ganancia, un ejemplo de estos elementos son los trenes de engranes en sistemas mecánicos en los que la velocidad del primer engrane esta relacionada con la velocidad del último, de igual forma, el par de salida de la caja de engranes dependerá del par en el primer engrane dependiendo de la relación de las muescas en el engranaje (ganancia).

Los GY 's son elementos que relacionan los esfuerzos de entrada con los flujos de salida y los flujos de entrada con los esfuerzos de salida utilizando una ganancia, un ejemplo de estos se puede encontrar en los motores de CD, en los cuales el esfuerzo de entrada (voltaje de armadura) esta relacionado con la velocidad de salida, y el flujo de entrada (corriente de

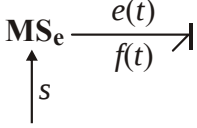
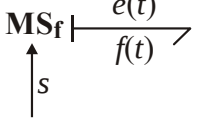
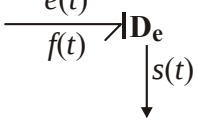
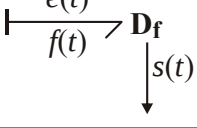
Símbolo Bond Graph	Descripción	Ecuación
	Fuente modulada de esfuerzo: La fuente es modulada por una señal de control s .	$e(t) = K(s)$
	Fuente modulada de flujo: La fuente es modulada por una señal de control s .	$f(t) = K(s)$
	Detector de esfuerzo: Produce una señal de control $s(t)$.	$s(t) = K e(t)$
	Detector de flujo: Produce una señal de control $s(t)$.	$s(t) = K f(t)$

Tabla 2.4: Puertos uno y medio.

armadura) determina el par en la salida del motor mediante una ganancia.

Con frecuencia ocurre que las propiedades de un material o algún componente son dependientes de una entrada o variable externa, estos son los llamados puertos-2 *modulados*, ambos elementos se muestran en la Tabla 2.5.

K es un modulo constante de transformación para los transformadores y giradores. $K(s)$ es una función de la señal s .

2.2.6 Elementos de tres puertos o puertos-3

Los elementos tipo unión son necesarios para representar las conexiones serie (uniones-1 o de flujo común) y paralelo (uniones-0 o de esfuerzo común) en los sistemas físicos, estas uniones son conservadoras de energía.

Las uniones pueden tener más de tres puertos, pero la clasificación de tres puertos es más conveniente para explicar su funcionamiento. Estos elementos se muestran en la Tabla 2.6.

Símbolo Bond Graph	Descripción	Ecuación
	Transformador: Transmite potencia en el mismo o en otro dominio de energía.	$e_2(t) = K e_1(t)$ $f_1(t) = K f_2(t)$
	Girador: Transmite potencia en el mismo o en otro dominio de energía.	$f_2(t) = K e_1(t)$ $f_1(t) = K e_2(t)$
	Transformador modulado: Transformador modulado por medio de una señal s desde un controlador.	$e_2(t) = K(s) e_1(t)$ $f_1(t) = K(s) f_2(t)$
	Girador modulado: Girador modulado usando una señal s desde un controlador.	$f_2(t) = K(s) e_1(t)$ $f_1(t) = K(s) e_2(t)$

Tabla 2.5: Elementos de dos puertos o puertos-2.

Símbolo Bond Graph	Descripción	Ecuación
	Unión de esfuerzo: Los esfuerzos en todos los bonds son iguales y la suma algebraica de los flujos es cero.	$e_1(t) = e_2(t) = e_3(t)$ $f_3(t) = f_1(t) + f_2(t)$
	Unión de flujo: Los flujos en todos los bonds son iguales y la suma algebraica de los esfuerzos es cero	$e_3(t) = e_1(t) + e_2(t)$ $f_1(t) = f_2(t) = f_3(t)$

Tabla 2.6: Elementos de tres puertos o puertos-3.

Hay dos reglas de causalidad en las uniones:

- En una unión de esfuerzo (paralelo o unión-0) un esfuerzo está entrando (indicado por el trazo causal, $e_1(t)$) y los demás esfuerzos están saliendo ($e_2(t)$ y $e_3(t)$).
- En una unión de flujo (serie o unión-1) un flujo está entrando (contrario a el trazo causal, $f_1(t)$) y los demás flujos están saliendo ($f_2(t)$ y $f_3(t)$).

2.2.7 Elementos multipuerto o multipuertos

En ciertos casos no es posible representar los fenómenos que se desean mediante elementos-1, como en el caso de las inductancias mutuas que se muestra en la Figura 2.2 a).

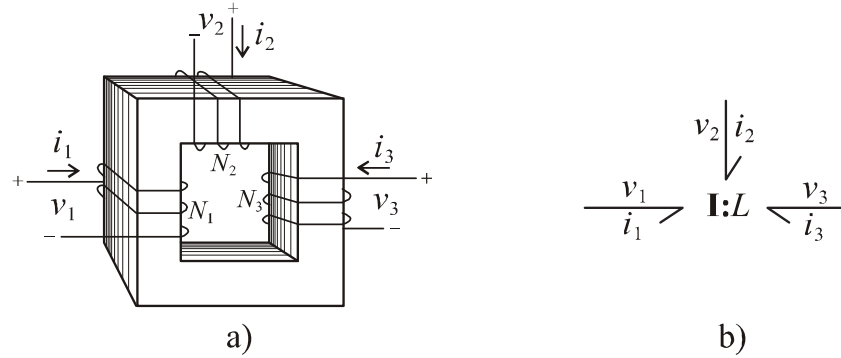


Figura 2.2: Ejemplo de elemento multipuerto: a) Transformador; b) Representación en bond Graph.

En la Figura 2.2 a) cada devanado posee una inductancia propia L_i pero interactúa con los otros dos devanados por inductancia mutua.

La representación de estos fenómenos acoplados se realiza mediante un elemento I multipuerto (también conocido como campo- I) al cual se asocia una relación matricial que vincula el vector de flujos magnéticos (2.5) con el vector de corrientes (2.6) bajo la forma representada por (2.7).

$$\phi = \begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 & \phi_3 \end{bmatrix}^T \quad (2.5)$$

$$i = \begin{bmatrix} i_1 & i_2 & i_3 \end{bmatrix}^T \quad (2.6)$$

$$\phi = Li = \begin{bmatrix} L_1 & M_{12} & M_{13} \\ M_{21} & L_2 & M_{23} \\ M_{31} & M_{32} & L_3 \end{bmatrix} i \quad (2.7)$$

La energía almacenada en este sistema se expresa mediante la ecuación:

$$E(\phi) = \frac{1}{2} \phi^T L^{-1} \phi \quad (2.8)$$

La representación grafica se muestra en la Figura 2.2 b)

Las variables de esfuerzo y flujo se agrupan en los vectores (2.9) y (2.10) respectivamente, y la potencia es expresada por (2.11)

$$v = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix}^T \quad (2.9)$$

$$i = \begin{bmatrix} i_1 & i_2 & i_3 \end{bmatrix}^T \quad (2.10)$$

$$P = v^T i \quad (2.11)$$

Los elementos multipuerto no necesariamente tienen que ser inductivos, y este es un caso particular. Es decir, también existen los elementos multipuerto o campos resistivos y capacitivos [Karnopp, 2000].

Los elementos multipuerto se describen en la Tabla 2.7.

2.2.8 Símbolos de potencia

La orientación normal de los símbolos de potencia o medias flechas deben ser como se muestra en la Figura 2.3, es decir hacia los puertos uno, hacia afuera de las fuentes y a través de los

Símbolo Bondgraph	Descripción	Ecuación
$\begin{array}{c} e_1(t) \\ \hline f_1(t) \end{array} \text{---} \mathbf{C} \text{---} \begin{array}{c} e_2(t) \\ \hline f_2(t) \end{array}$	Capacitancia multipuerto: Almacenamiento de energía múltiple con dos flujos como entrada.	$\begin{bmatrix} e_1(t) \\ e_2(t) \end{bmatrix} = f(t) \begin{bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \end{bmatrix}$
$\begin{array}{c} e_1(t) \\ \hline f_1(t) \end{array} \text{---} \mathbf{I} \text{---} \begin{array}{c} e_2(t) \\ \hline f_2(t) \end{array}$	Inductancia multipuerto: Almacenamiento de energía múltiple con dos esfuerzos como entrada.	$\begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{bmatrix} = f(t) \begin{bmatrix} p_1(t) \\ p_2(t) \end{bmatrix}$
$\begin{array}{c} e_1(t) \\ \hline f_1(t) \end{array} \text{---} \mathbf{IC} \text{---} \begin{array}{c} e_2(t) \\ \hline f_2(t) \end{array}$	Multipuerto combinado C e I: Almacenamiento de energía múltiple con un flujo y un esfuerzo como entrada.	$\begin{bmatrix} e_1(t) \\ f_2(t) \end{bmatrix} = f(t) \begin{bmatrix} p_1(t) \\ q_2(t) \end{bmatrix}$

Tabla 2.7: Elementos multipuerto o multipuertos.

transformadores y giradores, esto da valores positivos para los parámetros en casi todos los casos.

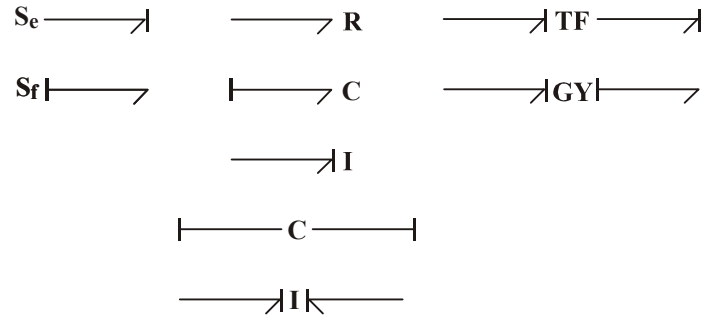


Figura 2.3: Símbolos de potencia usuales para elementos BG.

Note que la semiflecha para potencia sólo da la dirección del flujo de potencia, que es una dirección positiva. Así, el esfuerzo y el flujo pueden ser ambos positivos o ambos negativos.

2.3 La Causalidad en un Bond Graph

La causalidad es una de las características más importantes de Bond Graph, ya que permite analizar en forma visual las interrelaciones que ocurren en un sistema. Un modelo en Bond Graph representa la forma en que la potencia es intercambiada entre los elementos que lo conforman [Dauphin-Tanguy, 2000]. La causalidad define las relaciones causa y efecto, la representación de la causalidad se hace mediante una línea perpendicular al bond (semiflecha) llamado *trazo causal*, dicha línea indica el sentido del *esfuerzo* $e(t)$, y de forma implícita también indica el sentido del *flujo* $f(t)$, ya que este último siempre va en sentido contrario al *esfuerzo*.



Figura 2.4: Causalidades en un bond.

La Figura 2.4 muestra dos elementos **A** y **B** los cuales están conectados mediante un bond que indica el sentido del esfuerzo y del flujo mediante el trazo causal. El esfuerzo entra a un elemento en el sentido del trazo causal. Para la asignación de la causalidad se deben cumplir las reglas que se muestran en la Tabla 2.8.

2.3.1 Procedimiento para la asignación de causalidad

La asignación de la causalidad en un sistema en Bond Graph aporta una importante información, ya que determina la interrelación de conexión de las variables generalizadas, esfuerzo y flujo. El siguiente procedimiento permite realizar una asignación en la cual no existan conflictos de causalidad.

1. Asignar la causalidad requerida a MS_e o MS_f e inmediatamente extender las implicaciones causales, usando las restricciones de la Tabla 2.8.

Causalidad Necesaria	
$\mathbf{MS_e} \text{---} $	$\mathbf{MS_f} \text{---}$
Causalidad Restrictiva	
$\text{---} \overset{\text{T}}{\underset{\text{0}}{\text{---}}} $	$ \overset{\text{T}}{\underset{\text{0}}{\text{---}}} $
$\text{---} \overset{\text{T}}{\underset{\text{1}}{\text{---}}} $	$ \overset{\text{T}}{\underset{\text{1}}{\text{---}}} $
$\text{---} \overset{\text{TF}}{\underset{\text{K}}{\text{---}}} $	$ \overset{\text{TF}}{\underset{\text{K}}{\text{---}}} $
$\text{---} \overset{\text{GY}}{\underset{\text{K}}{\text{---}}} $	$ \overset{\text{GY}}{\underset{\text{K}}{\text{---}}} $
Causalidad Integral	
$ \text{---} \mathbf{C}$	$\text{---} \mathbf{I}$
Causalidad Derivativa	
$\text{---} \mathbf{C}$	$ \text{---} \mathbf{I}$
Causalidad Arbitraria	
$ \text{---} \mathbf{R}$	$\text{---} \mathbf{R}$

Tabla 2.8: Consideraciones de causalidad para elementos en Bond Graph.

2. Asignar causalidad integral a los elementos C e I respetando las restricciones de la Tabla 2.8.

3. Escoger cualquier R que no tenga asignada causalidad y darle una arbitraria. Extender la asignación de causalidad respetando las reglas de la Tabla 2.8.

Un Bond Graph es *causalmente correcto*, cuando no existe conflicto de causalidades entre elementos y las uniones. Se debe observar que la causalidad derivativa de un elemento almacenador de energía proporciona propiedades importantes que se explican a continuación.

2.3.2 La causalidad derivativa en un Bond Graph

La causalidad derivativa se presenta cuando un sistema contiene elementos de almacenamiento de energía que son dinámicamente dependientes a otros elementos en el sistema. Esto se presenta por ejemplo, cuando en un sistema eléctrico se encuentran dos capacitores en paralelo como se muestra en la Figura 2.5.

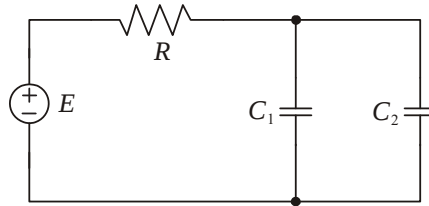


Figura 2.5: Ejemplo de un circuito eléctrico donde existe dependencia lineal entre los capacitores.

Del circuito de la Figura 2.5, podemos obtener dos posibles bond graphs dependiendo si a C_1 se le asigna una causalidad integral entonces C_2 tendrá causalidad derivativa o viceversa, es decir, los elementos almacenadores C_1 y C_2 son linealmente dependientes (ya que la carga del capacitor C_1 depende de la carga almacenada en C_2 y viceversa.) y por lo tanto no es posible asignar causalidad integral a ambos. El número de elementos almacenadores de energía en un sistema en causalidad integral es el número de ecuaciones linealmente independientes en el mismo. La Figura 2.6 muestra los dos bond graphs posibles para el circuito de la figura 2.5.

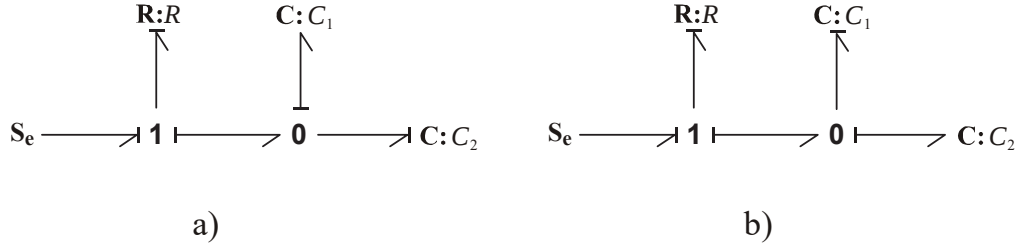


Figura 2.6: Bond graphs con causalidad derivativa para el circuito eléctrico de la figura 2.5.

2.4 Transformadores modulados multipuerto

Un punto de vista interesante sobre las estructuras de unión (las estructuras de unión son el conjunto de uniones-0 y -1, transformadores y giradores, más adelante se detallará este concepto) involucra las transformaciones de variables que ocurren dentro de las estructuras de unión. Consideraremos, por ejemplo, la estructura de unión que se muestra en la Figura 2.7 [Karnopp, 2000].

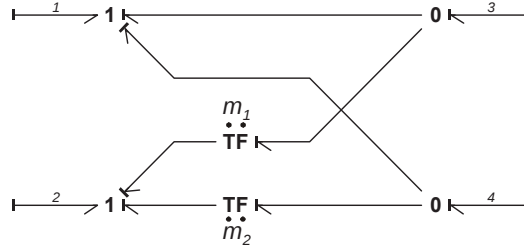


Figura 2.7: Estructura unión de una transformación bilateral de variables (2x2).

Se transforman las variables $e_3(t)$ y $e_4(t)$ en $e_1(t)$ y $e_2(t)$:

$$\begin{bmatrix} e_1(t) \\ e_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -m_1 & -m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_3(t) \\ e_4(t) \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

Pero esta transformación de esfuerzo es acompañada por una transformación de flujo:

$$\begin{bmatrix} f_3(t) \\ f_4(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & m_1 \\ 1 & m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

A partir de que la estructura unión indica que las transformaciones deben ser conservadoras de potencia (todos los elementos dentro de una estructura unión no son disipadores ni almacenadores de energía, es decir, sus relaciones constitutivas son conservadores de energía). Reordenando las ecuaciones, aparece la forma asimétrica característica de conservación de potencia:

$$\begin{bmatrix} e_1(t) \\ e_2(t) \\ f_3(t) \\ f_4(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -m_1 & -m_2 \\ 1 & m_1 & 0 & 0 \\ 1 & m_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ e_3(t) \\ e_4(t) \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

Esta estructura se considera una generalización de un transformador puerto-2.

Considerando el Bond Graph de la Figura 2.8 en el que se cambio el flujo de potencia en los bonds 1 y 2, esto para representar que existe una interacción con el exterior (elementos disipadores y/o almacenadores de energía). La Figura 2.8 se puede simplificar usando un sólo TF, esto es importante cuando los Bond Graphs son grandes, el TF incluye las relaciones constitutivas de transformación (Figura 2.9).

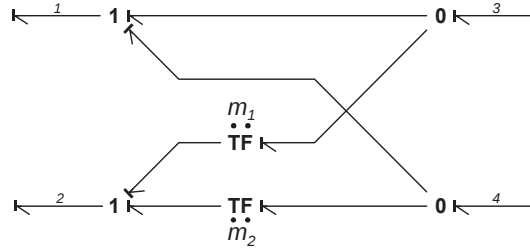


Figura 2.8: Estructura unión de la figura 2.7 con modificación en el signo de las semiflechas de los puertos 1 y 2.



Figura 2.9: Simplificación de la estructura unión de la figura 2.8 de dos TF's a uno.

Las relaciones de transformación de esfuerzo y flujo son las que se muestran en (2.15) y (2.15),

respectivamente.

$$\begin{bmatrix} e_1(t) \\ e_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ m_1 & m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_3(t) \\ e_4(t) \end{bmatrix} \implies M = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ m_1 & m_2 \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & m_1 \\ 1 & m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_3(t) \\ f_4(t) \end{bmatrix} \implies M^t = \begin{bmatrix} 1 & m_1 \\ 1 & m_2 \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

Se puede probar que las transformaciones involucrando una matriz y su transpuesta implican que la potencia que fluye en un lado de un transformador multipuerto debe ser igual a la potencia que fluye por el otro extremo.

Sean $[e_1]$, $[f_1]$ vectores columna de esfuerzos y flujos en un lado de un transformador multipuerto y $[e_2]$, $[f_2]$ son vectores de esfuerzo y flujo en el otro lado del mismo y que dependen del tiempo, entonces, sea una $[M]$ matriz de transformación de dimensiones apropiadas, entonces,

$$[e_1] = [M] [e_2] \quad (2.17)$$

Considerando la relación entre los flujos de entrada y de salida se obtiene:

$$[M]^T [f_1] = [f_2] \quad (2.18)$$

Realizando la operación transpuesta en ambos lados de la ecuación (2.18):

$$[f_1]^T [M] = [f_2]^T \quad (2.19)$$

Multiplicando ambos lados de (2.19) por el vector de esfuerzos $[e_2]$:

$$[f_1]^T [M] [e_2] = [f_2]^T [e_2] \quad (2.20)$$

Sustituyendo (2.17) en (2.20) se obtiene:

$$[f_1]^T [e_1] = [f_2]^T [e_2]$$

Como la potencia es flujo por esfuerzo.

$$P_{Entrada} = P_{Salida} \quad (2.21)$$

Lo cual establece que la suma de las potencias de los puertos en el lado número 1 es igual a la suma de las potencias de los puertos en el lado número 2.

Es interesante que en la prueba anterior, no solamente puedan ser en cualquier número de puertos en los dos lados del transformador o que los elementos de la matriz tengan que ser constantes. Por lo tanto, las consideraciones aplican no solamente a transformadores de multipuerto con matrices constantes sino también para transformadores de multipuerto modulados en los cuales los elementos de la matriz cambian con el tiempo.

Una aplicación importante de transformadores multipuerto modulados es en mecánica donde se tienen no linealidades. Considerando, por ejemplo, la transformación entre coordenadas rectangulares y coordenadas polares que se muestra en la Figura 2.10.

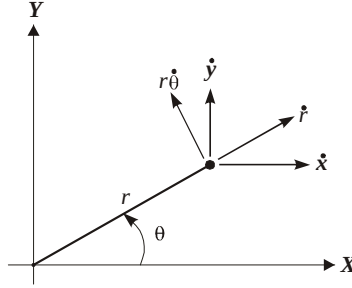


Figura 2.10: Coordenadas rectangulares y polares.

Las relaciones entre r y θ , y x y y son funciones no lineales las cuales se pueden expresar en diferentes formas, por ejemplo, para convertir a partir de r y θ a x y y .

Se puede escribir como se muestra en (2.22).

$$x = r \cos \theta \quad (2.22)$$

$$y = r \sin \theta$$

La relación inversa es la que se muestra en (2.23).

$$r = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} \quad (2.23)$$

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{y}{x} \right)$$

Estas relaciones de desplazamiento pueden ser complicadas, pero las relaciones de velocidad correspondientes tienen una estructura particular, como se muestra en (2.24) y (2.25).

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial x}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial t} + \frac{\partial x}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial t} \quad (2.24)$$

y

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\partial y}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial t} + \frac{\partial y}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial t} \quad (2.25)$$

de esta forma, las relaciones de velocidad se denotan como:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{r} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} \implies M = \begin{bmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

Si esta transformación es representada por un transformador multipuerto modulado, entonces sabemos que la transformación correspondiente de los esfuerzos (fuerzas o pares) debe involucrar la transpuesta de la matriz dada:

$$\begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -r \sin \theta & r \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_r \\ \tau \end{bmatrix} \implies M^t = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -r \sin \theta & r \cos \theta \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

Una representación en bond graph utilizando un transformador multipuerto se muestra en la Figura 2.11.

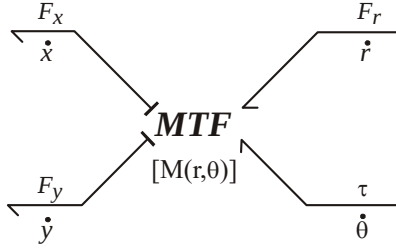


Figura 2.11: Una representación de la transformación de coordenadas polares a rectangulares usando un MTF.

No siempre es necesario obtener relaciones de velocidades por diferenciación de relaciones de desplazamientos. En este ejemplo, se podría encontrar $\dot{r}$ y $\dot{\theta}$ por consideración directa de las

componentes de velocidades, lo cual es:

$$\begin{bmatrix} \dot{r} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\frac{\sin \theta}{r} & \frac{\cos \theta}{r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

lo cual implica qué:

$$\begin{bmatrix} \cos \theta & -\frac{\sin \theta}{r} \\ \sin \theta & \frac{\cos \theta}{r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_r \\ \tau \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

Un ejemplo final consiste en una varilla rígida en la cual actúan tres fuerzas. La fuerza F_3 es perpendicular a la varilla y F_1 y F_2 son horizontales y verticales, respectivamente. Las velocidades correspondientes son v_1 , v_2 y v_3 . Geométricamente, hay solamente un grado de libertad, así, si una velocidad es conocida, las restantes pueden ser determinadas.

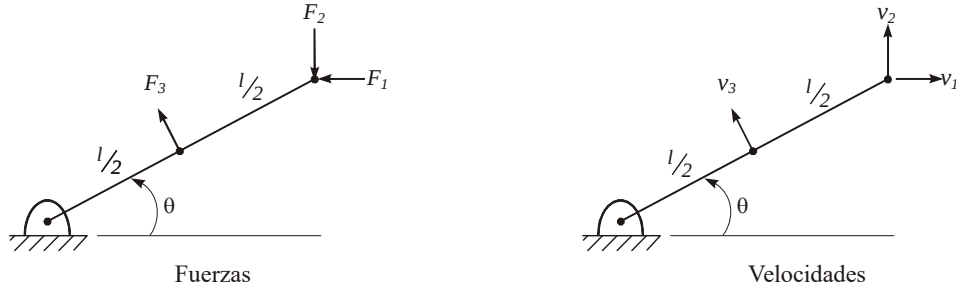


Figura 2.12: Ejemplo de varilla rígida, donde se representan las fuerzas y las velocidades.

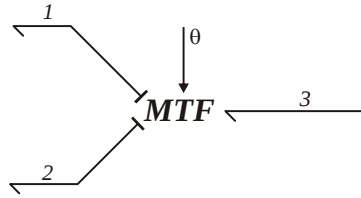


Figura 2.13: Bond graph con MTF para el ejemplo de varilla rígida.

El MTF muestra que v_1 y v_2 son determinadas por v_3 y que F_3 es determinada por F_1 y F_2 . Por consideración de la cinemática del sistema, se pueden deducir, de forma directa, las

siguientes relaciones de velocidad:

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \sin \theta \\ 2 \cos \theta \end{bmatrix} [v_3] \quad (2.30)$$

La transpuesta de la matriz que relaciona las fuerzas:

$$\begin{bmatrix} -2 \sin \theta & 2 \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} = [F_3] \quad (2.31)$$

El hecho de que el ángulo θ aparece en las matrices de transformación mientras $\dot{\theta}$ no es uno de los flujos involucrados en los puntos, es un aspecto interesante de sistemas mecánicos que involucran transformadores modulados. En principio, los coeficientes en las matrices del transformador son funciones de desplazamientos asociados con flujos en los puertos del transformador. En el presente caso, θ siempre es utilizado pensando que $\dot{\theta}$ no fuera un flujo de interés, en este caso, θ debe ser considerado solamente como una variable de estado tal como p 's y q 's asociado con los I 's y C 's en el sistema. Esto significa que las fuerzas de MTF escriben una ecuación para $\dot{\theta}$ aún cuando no pueda existir un elemento- C para el cual θ sería una variable de estado. Ya que v_3 determina todas las velocidades de la varilla, también determina $\dot{\theta}$ entonces, debemos escribir una ecuación de estado separada para completar la formulación del sistema:

$$\dot{\theta} = \frac{v_3}{\frac{\ell}{2}} \quad (2.32)$$

2.5 El modelado en Bond Graph

Al modelar en Bond Graph pasamos de un dominio físico que puede ser eléctrico, mecánico, etc. a otro dominio en el cual se usan variables generalizadas, sin importar si el sistema viene de uno o más dominios de energía. El siguiente procedimiento explica los pasos a seguir para obtener un modelo en Bond Graph.

2.5.1 Procedimiento para la construcción de modelos en Bond Graph

1. Dibujar una unión-0 ó unión-1 de acuerdo al sistema correspondiente para los puntos donde las trayectorias paralelas coincidan.

2. Dibujar una unión-0 ó unión-1 para cada componente en una trayectoria serie y conectar el componente apropiado de Bond Graph usando un bond en esa unión. La dirección asumida del flujo de potencia es a partir de las fuentes hacia los elementos amacenedores y/o disipadores de energía, la dirección se indica por el sentido de la semiflecha.
3. Dibujar bonds entre las uniones adyacentes indicando la dirección del flujo de potencia.
4. Remover la unión-0 ó unión-1 que representa el punto de referencia, así como también todos los bonds conetados a dicha unión.
5. Simplificar el modelo obtenido usando las reglas que se muestran en la figura 2.14.

$$\begin{array}{ccc}
 \longrightarrow \mathbf{0} \longrightarrow & = & \longrightarrow \\
 \text{a)} & &
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 \longrightarrow \mathbf{1} \longrightarrow & = & \longrightarrow \\
 \text{b)} & &
 \end{array}$$

Figura 2.14: Regla para la reducción de unión en un Bond Graph.

Asignar la causalidad a los elementos comenzando con las fuentes (causalidad necesaria), después los elementos almacenadores (causalidad integral) y finalmente los elementos disipadores (causalidad arbitraria).

El procedimiento anterior es general, a continuación se muestra dicho procedimiento aplicado a sistemas específicos.

2.5.2 Sistemas eléctricos

Para obtener el Bond Graph de sistemas eléctricos se usa el procedimiento general con las siguientes modificaciones:

- En el inciso 1 se asignan uniones-0 en los puntos que tienen voltaje distinto.
- En el inciso 4 se asigna como punto de referencia el nodo de voltaje cero, que es la tierra del circuito.

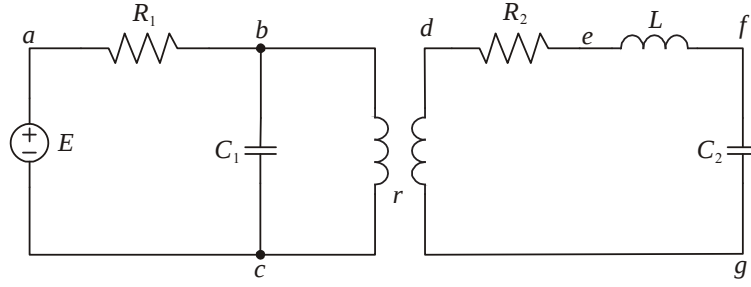


Figura 2.15: Sistema Eléctrico.

Como ejemplo del procedimiento para sistemas eléctricos considérese el circuito mostrando en la figura 2.15.

Aplicando el inciso 1 se identifican los nodos donde existen diferentes voltajes (marcados como a , b , c , d , e y f) y se colocan uniones-0 por cada uno de ellos, en el paso 2 se colocan uniones-1 para unir los diferentes elementos al Bond Graph, en el paso 3 se agregan los bonds faltantes para terminar de unir todos los componentes y en el paso 4 se identifican los nodos de referencia (c y g) los cuales se eliminarán junto con los bonds que están conectados a ellos, esto se muestra en la figura 2.16.

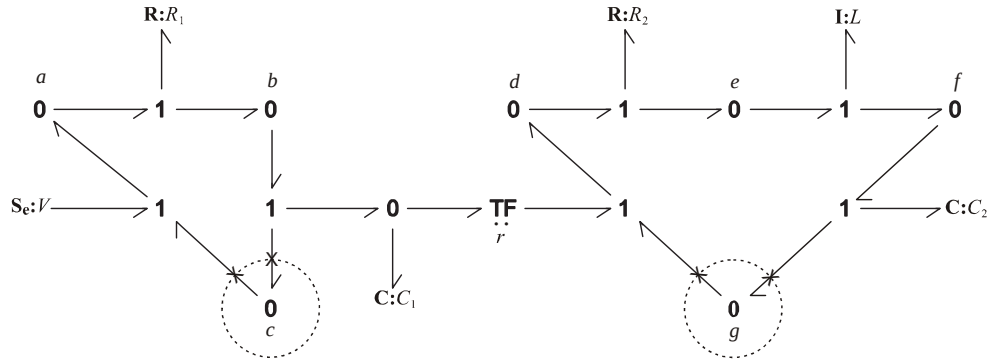


Figura 2.16: Procedimiento para obtener el bond Graph de un sistema eléctrico.

Simplificando como se indica en el paso 5 y colocando los trazos causales de acuerdo al paso 6 se obtiene el Bond Graph que se muestra en la figura 2.17.

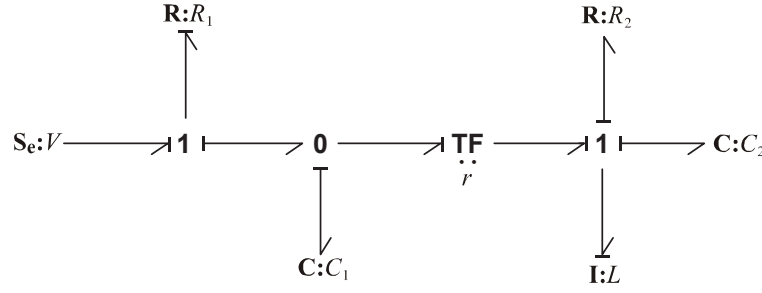


Figura 2.17: Bond Graph para el sistema eléctrico de la figura 2.15.

2.5.3 Sistemas Mecánicos

En la obtención del Bond Graph para los sistemas mecánicos se usa el procedimiento general con la siguientes obobservaciones:

- En el inciso 1 se asignan uniones-1 en los puntos donde se tienen velocidades distintas.
- En el inciso 2 se insertan los elementos de generación de fuerza entre el par correspondiente de uniones-1 usando uniones-0. También se deben incluir inercias en sus respectivas uniones-1.
- En el inciso 4 el nodo de referencia es cualquier velocidad cero.

Como ejemplo del procedimiento para sistemas mecánicos considérese el sistema de la suspensión de un auto, como se muestra en la figura 2.18.

De forma similar que en el sistema eléctrico, Aplicando el paso 1 se identifican los puntos donde existen velocidades distintas (marcados como a , b y c) y se colocan uniones-1 por cada una de ellas, en el paso 2 se colocan uniones-0 para unir los diferentes elementos al Bond Graph, en el paso 3 se agregan los bonds faltantes para terminar de unir todos los componentes y en el paso 4 se identifica el nodo de referencia (denotado como a) el cual se eliminará junto con los bonds que están conectados a él, esto se muestra en la figura 2.19.

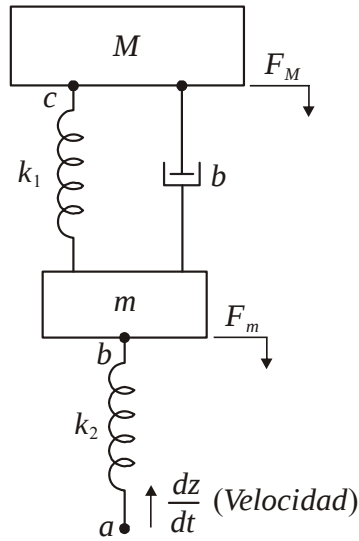


Figura 2.18: Sistema mecánico.

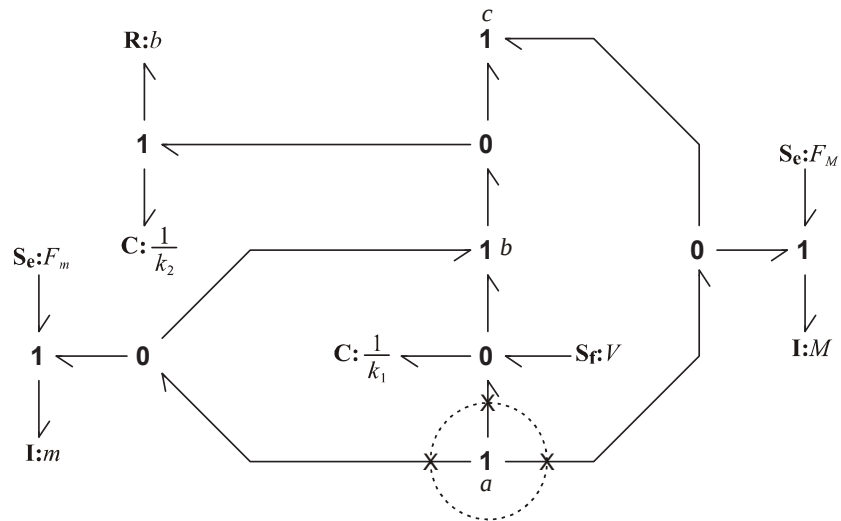


Figura 2.19: Procedimiento para obtener el bond Graph de un sistema mecánico.

Simplificando y colocando la causalidad a los bonds de acuerdo al pasos 5 y 6 respectivamente, se obtiene el Bond Graph que se muestra en la figura 2.20.

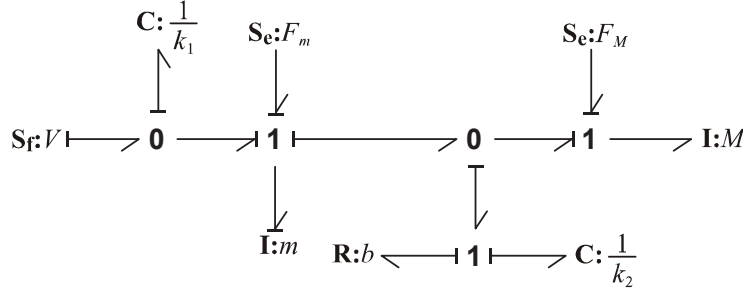


Figura 2.20: Bond Graph para el sistema mecánico de la figura 2.18.

2.5.4 Sistemas Hidráulicos

Para obtener el Bond Graph de sistemas hidráulicos se realizan las siguientes observaciones al procedimiento general:

- En el inciso 1 se asignan uniones-0 en los puntos que tienen presión distinta.
- En el inciso 2 se insertan los elementos utilizando uniones-1 entre los pares de uniones-0 correspondientes, incluir también las fuentes de flujo y/o de presión.
- En el inciso 4 escoger una presión de referencia (por lo general se usa la presión atmosférica) y eliminar la unión-0 de referencia del modelo así como los bonds asociados a ella.

Como ejemplo del procedimiento para sistemas hidráulicos considérese el sistema mostrando en la figura 2.21.

Aplicando el paso 1 se identifican los nodos donde existen diferentes presiones (marcados como a , b , c , etc.) y se colocan uniones-0 por cada uno de ellos, en el paso 2 se colocamos uniones-1 para unir los diferentes elementos al Bond Graph, en el paso 3 se agregan los bonds faltantes para terminar de unir todos los componentes y en el paso 4 se identifica

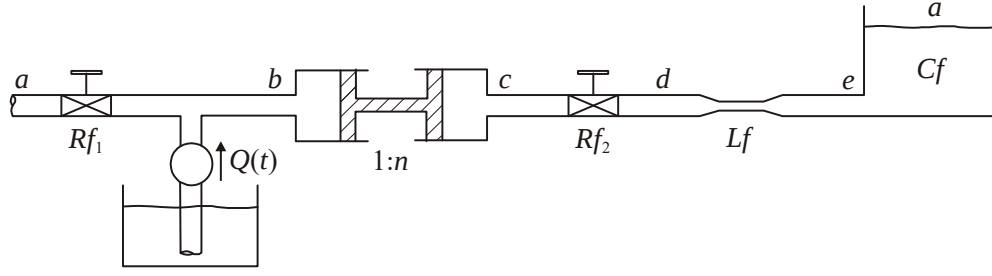


Figura 2.21: Sistema hidráulico.

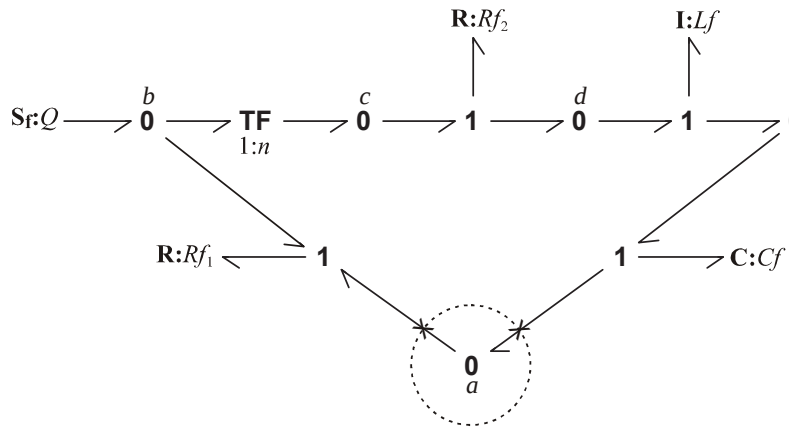


Figura 2.22: Procedimiento para obtener el bond Graph de un sistema hidráulico.

la presión de referencia (atmosférica, denotada como a) la cual se eliminarán junto con los bonds que están conectados a ella, esto se muestra en la figura 2.22.

Ahora se realiza la simplificación y se agrega la causalidad de acuerdo a los incisos 5 y 6 respectivamente, se obtiene el Bond Graph que se muestra en la figura 2.23.

2.6 Estructura de unión en sistemas multipuerto

Si se consideran sistemas de grandes dimensiones como los campos interconectados, se obtiene una estructura dinámica y por lo que la generación, manipulación, y reducción de un gran número de ecuaciones se realiza de una forma sistemática para obtener una implementación

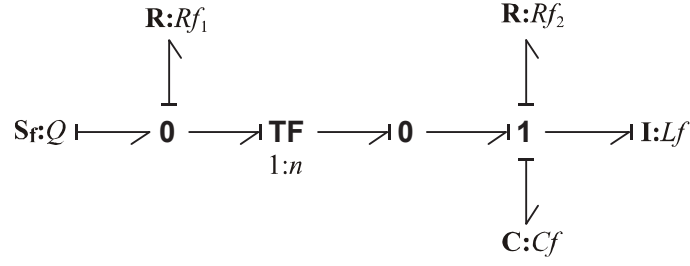


Figura 2.23: Bond Graph para el sistema hidráulico de la figura 2.21.

exitosa del modelo.

2.6.1 Vectores clave

En un Bond Graph (BG) en forma convencional es posible clasificar como *bonds externos* a los elementos o puertos que conectan R , C , I , Se y Sf y a los que conectan con los elementos 0 , 1 , TF y GY se les llaman *bonds internos*. Los *bonds externos* pueden ser clasificados de acuerdo a su forma de manifestación de energía. La figura 2.24 muestra un diagrama a bloques que describe la *estructura unión* de un modelo en Bond Graph.

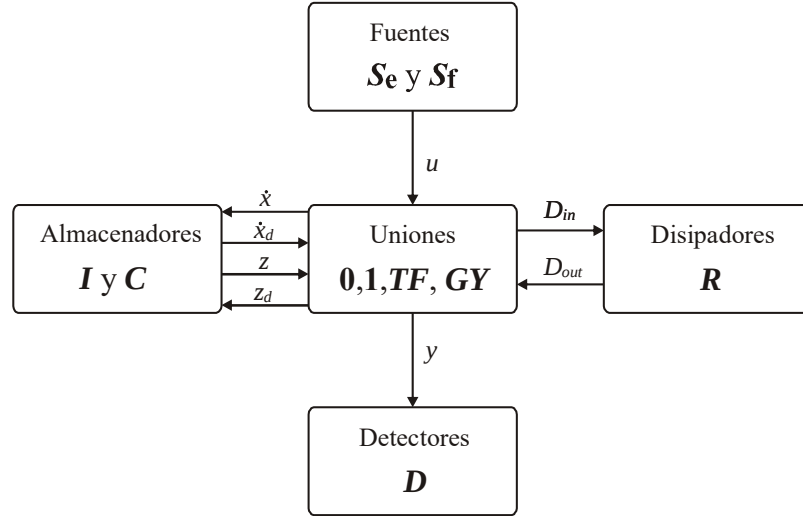


Figura 2.24: Diagrama a bloques de la estructura de unión de un Bond Graph.

En la Figura 2.24, los vectores clave son formados por las fuentes (S_e y S_f), elementos almacenadores (I y C), disipadores (R), detectores (D) y por último se tiene en la estructura unión donde intervienen los transformadores, giradores y uniones-0 y uniones-1 ($1, 0, TF, GY$). Los vectores clave son los que representan el sistema, estos se muestran en la figura 2.24, donde $u(t) \in \mathbb{R}^p$ contiene las variables de potencia (esfuerzos y flujos) debidas a las fuentes en la Estructura de Unión. Los estados $x(t) \in \mathbb{R}^n$ y $x_d(t) \in \mathbb{R}^m$ están compuestos de variables de energía, momento generalizado $p(t)$ en elementos almacenadores I y desplazamiento generalizado $q(t)$ en elementos almacenadores C en causalidad integral y derivativa respectivamente; $z(t) \in \mathbb{R}^n$ y $z_d(t) \in \mathbb{R}^m$ son variables de co-energía en causalidad integral y derivativa, respectivamente $D_{in}(t) \in \mathbb{R}^r$ y $D_{out}(t) \in \mathbb{R}^r$ son una mezcla de esfuerzos y flujos que contienen los intercambios energéticos entre el campo de disipación y la Estructura de Unión, n y m son el número de elementos almacenadores en causalidad integral y derivativa, respectivamente; p es el número de fuentes y r es el número de elementos disipadores de energía.

2.6.2 Relaciones de campo y ecuaciones de estado

Las relaciones de campo no lineales de la figura 2.24 de los elementos de almacenamiento y de disipación son:

$$z(t) = \Phi_F(x) \quad (2.33)$$

$$z_d(t) = \Phi_{Fd}(x_d) \quad (2.34)$$

$$D_{out}(t) = \Phi_L(D_{in}) \quad (2.35)$$

donde:

Φ_F es una función que relaciona cada z_i con x_i para $i = 1, \dots, n$.

Φ_{Fd} representa una función que relaciona cada z_{di} con x_{di} para $i = 1, \dots, m$.

Φ_L denota una función que relaciona cada D_{outi} con D_{ini} para $i = 1, \dots, r$.

El comportamiento de un elemento específico está descrito por una ley física la cual ese conoce

como *relación constitutiva*. Si las relaciones constitutivas son tipo lineal tenemos:

$$z(t) = Fx(t) \quad (2.36)$$

$$z_d(t) = F_d x_d(t) \quad (2.37)$$

$$D_{out}(t) = LD_{in}(t) \quad (2.38)$$

donde:

L , F y F_d son matrices reales de dimensión $r \times r$, $n \times n$ y $m \times m$, respectivamente.

Las relaciones de la estructura de unión están dadas por:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ D_{in}(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & 0 \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & 0 \end{bmatrix}}_{\text{Matriz de estructura unión } S} \begin{bmatrix} z(t) \\ D_{out}(t) \\ u(t) \\ \dot{x}_d(t) \end{bmatrix} \quad (2.39)$$

$$z_d(t) = -S_{14}^T z(t) \quad (2.40)$$

Los elementos dentro de la matriz de estructura unión S toman valores dentro del conjunto $\{0, \pm 1, \pm kt, \pm kg\}$ donde kt y kg representan el módulo o relación del transformador y del girador. La matriz S está particionada de acuerdo a la dimensión de sus vectores clave. Las submatrices S_{ij} tienen las siguientes propiedades:

- Propiedad 1.- S_{11} y S_{22} son matrices cuadradas antisimétricas.
- Propiedad 2.- S_{12} es la matriz transpuesta negativa de S_{21} y viceversa.

Las propiedades 1 y 2 están basadas en el principio de conservación de energía.

Un sistema LTI (Lineal con parámetros invariantes en el tiempo) MIMO (múltiple entrada múltiple salida) se representa en variables de estado por:

$$\dot{x}(t) = A_p x(t) + B_p u(t) \quad (2.41)$$

$$y(t) = C_p x(t) + D_p u(t) \quad (2.42)$$

Relacionando las ecuaciones (2.36) a la (2.38) con (2.41) y (2.42) obtenemos las matrices que representan este tipo de sistemas y que permiten conocer el modelo matemático en variables

de estado utilizando la representación en Bond Graph:

$$A_p = E^{-1} (S_{11} + S_{12}MS_{21}) F \quad (2.43)$$

$$B_p = E^{-1} (S_{13} + S_{12}MS_{23}) \quad (2.44)$$

$$C_p = (S_{31} + S_{32}MS_{21}) F \quad (2.45)$$

$$D_p = S_{33} + S_{32}MS_{23} \quad (2.46)$$

Las matrices E y M se encuentran mediante las siguientes expresiones:

$$E = I + S_{14}F_d^{-1}S_{14}^T F \quad (2.47)$$

$$M = (I - LS_{22})^{-1} L \quad (2.48)$$

2.6.3 Obtención de un modelo en espacio de estado en Bond Graph

Usando el sistema de la suspensión de un auto de la figura 2.18 tomando como salida la velocidad de la masa m , al modelo en Bond Graph que se obtuvo se le agrega una numeración a los bonds tal como se muestra en la figura 2.25.

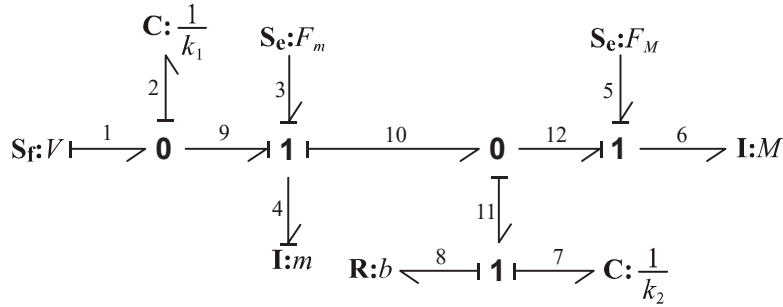


Figura 2.25: Bond Graph para el sistema mecánico de la figura 2.18 con los bonds numerados.

Los vectores clave son:

$$x = \begin{bmatrix} q_2 \\ p_4 \\ p_6 \\ q_7 \end{bmatrix}, \quad z = \begin{bmatrix} e_2 \\ f_4 \\ f_6 \\ e_7 \end{bmatrix}, \quad D_{in} = f_8, \quad D_{out} = e_8, \quad u = \begin{bmatrix} f_1 \\ e_3 \\ e_5 \end{bmatrix}, \quad y = f_4 \quad (2.49)$$

Las relaciones constitutivas para los elementos son:

$$F = \begin{bmatrix} k_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{m} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{M} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_2 \end{bmatrix}, \quad D_{out} = LD_{in} \implies e_8 = Lf_8 \quad \therefore L = b \quad (2.50)$$

Como no hay elementos almacenadores en causalidad derivativa:

$$F_d = 0 \quad (2.51)$$

De acuerdo con la ecuación (2.39) para la matriz de estructura de unión tenemos que:

$$\begin{bmatrix} f_2 \\ e_4 \\ e_6 \\ f_7 \\ f_8 \\ f_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_2 \\ f_4 \\ f_6 \\ e_7 \\ e_8 \\ f_1 \\ e_3 \\ e_5 \end{bmatrix} \quad (2.52)$$

Un análisis del modelo en Bond Graph de la figura 2.25 permite determinar las ecuaciones

que definen a $\dot{x}(t)$, $D_{in}(t)$ y $y(t)$:

Para f_2 tenemos que : (2.53)

$$f_2 = f_1 - f_9 \text{ y como: } f_9 = f_4 \therefore f_2 = f_1 - f_4$$

Para e_4 tenemos que :

$$e_4 = e_9 + e_3 - e_{10} \text{ y como: } e_9 = e_2 ; e_{10} = e_{11} ; e_{11} = e_8 + e_7$$

$$\therefore e_4 = e_2 + e_3 - e_8 - e_9$$

Para e_6 tenemos que :

$$e_6 = e_{12} + e_5 \text{ y como: } e_{12} = e_{11} = e_8 + e_7 \therefore e_6 = e_{12} + e_5$$

Para f_7 tenemos que :

$$f_7 = f_{11} \text{ y como: } f_{11} = f_{10} - f_{12} ; f_{12} = f_6 ; f_{10} = f_4$$

$$\therefore f_7 = f_4 - f_6$$

Para f_8 tenemos que :

$$f_8 = f_7 = f_4 - f_6$$

Para f_4 tenemos que :

$$f_4 = f_4$$

Por lo que la matriz de estructura unión queda:

$$\begin{bmatrix} f_2 \\ e_4 \\ e_6 \\ f_7 \\ f_8 \\ f_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_2 \\ f_4 \\ f_6 \\ e_7 \\ e_8 \\ f_1 \\ e_3 \\ e_5 \end{bmatrix} \quad (2.54)$$

De la estructura unión, ecuación (2.54) decimos que:

$$S_{11} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.55)$$

$$S_{12} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.56)$$

$$S_{13} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.57)$$

$$S_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.58)$$

$$S_{22} = 0 \quad (2.59)$$

$$S_{23} = 0 \quad (2.60)$$

$$S_{31} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.61)$$

$$S_{32} = 0 \quad (2.62)$$

$$S_3 = 0 \quad (2.63)$$

Usando las ecuaciones (2.43) y (2.46) para obtener la representación en espacio de estado.

Como no hay elementos almacenadores en causalidad derivativa se tiene que:

$$E = I + S_{14} \underbrace{F_d^{-1}}_0 S_{14}^T F = I \quad \text{y} \quad M = \left(I - L \underbrace{S_{22}}_0 \right)^{-1} \quad L = L \quad (2.64)$$

Entonces $E = E^{-1} = I$. Por lo que para A_p se tiene que:

$$A_p = \left(\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} * [b] * \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \right) * \begin{bmatrix} k_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{m} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{M} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_2 \end{bmatrix} \quad (2.65)$$

$$A_p = \begin{bmatrix} k_1 & -\frac{1}{m} & 0 & 0 \\ k_1 & -\frac{b}{m} & \frac{b}{M} & -k_2 \\ 0 & \frac{b}{m} & -\frac{b}{M} & k_2 \\ 0 & \frac{1}{m} & -\frac{1}{M} & 0 \end{bmatrix} \quad (2.66)$$

Para B_p se obtiene mediante:

$$B_p = \underbrace{E^{-1}}_I \left(S_{13} + S_{12} M \underbrace{S_{23}}_0 \right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.67)$$

Ahora para encontrar C_p se tiene que:

$$C_p = \left(S_{31} + \underbrace{S_{32}}_0 M S_{21} \right) F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} k_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{m} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{M} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_2 \end{bmatrix} \quad (2.68)$$

$$C_p = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{m} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Para D_p se obtiene que:

$$D_p = \underbrace{S_{33}}_0 + \underbrace{S_{32}}_0 M S_{23} = 0 \quad (2.69)$$

Por lo que la representación de espacio de estados queda:

$$\begin{bmatrix} f_2 \\ e_4 \\ e_6 \\ f_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & -\frac{1}{m} & 0 & 0 \\ k_1 & -\frac{b}{m} & \frac{b}{M} & -k_2 \\ 0 & \frac{b}{m} & -\frac{b}{M} & k_2 \\ 0 & \frac{1}{m} & -\frac{1}{M} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_2 \\ p_4 \\ p_6 \\ q_7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ e_3 \\ e_5 \end{bmatrix} \quad (2.70)$$

$$f_4 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{m} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_2 \\ p_4 \\ p_6 \\ q_7 \end{bmatrix} \quad (2.71)$$

Donde las variables de estado son:

q_2 es el desplazamiento del resorte k_1 y f_2 es la velocidad en dicho resorte.

p_4 es el momento inercial en la masa m y e_4 es la fuerza en dicha masa.

p_6 es el momento inercial en la masa M y e_6 es la fuerza en dicha masa.

q_7 es el desplazamiento del resorte k_2 y f_7 es la velocidad en dicho resorte.

Además e_3 y e_5 son los esfuerzos debidos a la fuerza de gravedad en las masas m y M respectivamente; f_1 es una fuente de velocidad externa la cual inicial el movimiento del sistema; f_4 es la velocidad en la masa m la cual es la salida seleccionada del sistema.

2.7 Sistemas multicuerpo

La descripción y análisis de sistemas multicuerpo ha sido objeto de investigación por mucho tiempo. Cuando un número de cuerpos rígidos son forzados por diferentes tipos de uniones y se mueven a través de grandes ángulos en tres dimensiones, las relaciones cinemáticas pueden llegar a ser muy complejas. Especialistas en sistemas multicuerpo han desarrollado un número de técnicas para la manipulación de este tipo de sistemas mecánicos dinámicos y sería presuntuoso sugerir que los bond graphs siempre serían una mejor selección como un mecanismo descriptivo que las técnicas establecidas alternativas. A pesar de que, ciertamente, los bond graphs pueden ser usados para estudiar los sistemas mecánicos multicuerpo puros, es probablemente más lógico utilizar un enfoque de bond graph cuando el sistema a ser estudiado contiene otros componentes, los cuales, son particularmente bien trabajados utilizando bond graphs.

Como un ejemplo elemental, considerar el sistema de la figura 2.26, el cual consiste de un motor eléctrico que mueve un carretón a través de una polea y una banda, y en el carretón se monta un péndulo invertido. El objetivo es diseñar un sistema de control el cual varíe

el voltaje en el motor de tal manera que el péndulo esté estabilizado en la posición derecha hacia arriba en cualquier posición x deseada del carretón.

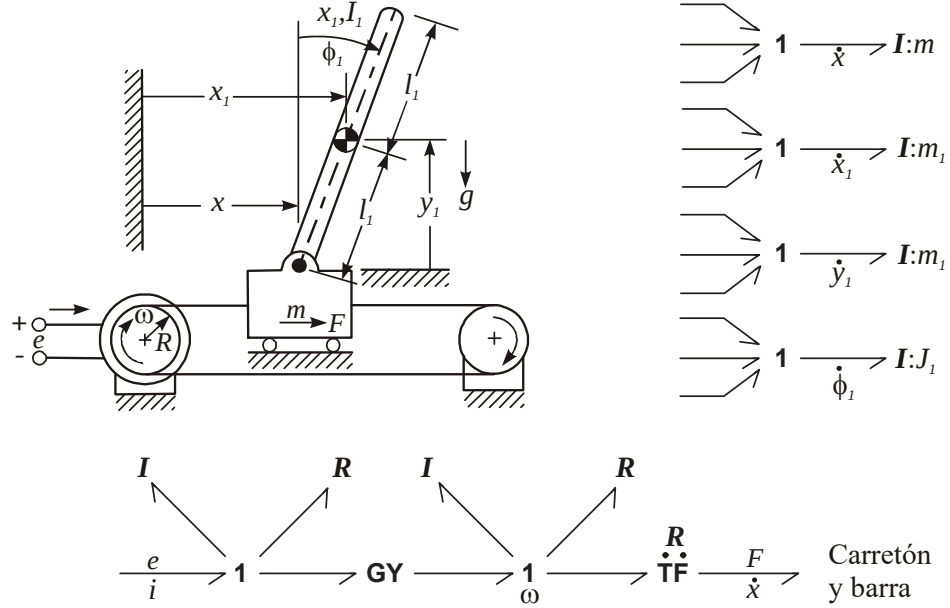


Figura 2.26: Ejemplo elemental de un carretón con péndulo invertido que se mueve usando un motor eléctrico.

Como se muestra en la figura 2.26, la representación del bond graph del sistema se obtiene directamente, pero la limitación rígida entre el carretón y la barra ciertamente causará problemas de causalidad derivativa los cuales son complicados si el ángulo ϕ_1 no es pequeño.

Continuando con el desarrollo, se muestra que un enfoque de bond graph a sistemas multicuerpo está estrechamente relacionado a un enfoque de sistema multicuerpo obteniendo las ecuaciones en la forma descriptiva.

El primer paso es considerar elementos de bond graph representando la dinámica del cuerpo rígido sin considerar restricciones entre los cuerpos. Las coordenadas x para el carretón y x_1 , y_1 y ϕ_1 para la barra se definen con respecto a un marco de referencia inercial. Por lo tanto, los cuatro elementos- I del lado derecho de la figura 2.26 representan correctamente las leyes bajo las cuales se afirma que la suma de todas las fuerzas aplicadas es igual a la relación de

cambio del momento lineal y que las componentes de velocidad del centro de masa son los momentos divididos entre las masas.

También, la suma del momento sobre el centro de masa de la barra es igual a la relación de cambio del momento angular. Para este caso del movimiento plano, la velocidad angular dividida por el momento centroide de la inercia da la velocidad angular de la barra.

A fin de limitar los cuatro elementos-I y por lo tanto crear un bond graph para la barra y el subsistema del carretón que será conectado al bond graph de la transmisión. Primero definimos las aberturas δ_1 y δ_2 en la figura 2.27, estas aberturas horizontales y verticales entre el pivote de la barra y el pivote del carretón se desvanecerán. Además, serán necesarias las fuerzas λ_1 y λ_2 a través de las aberturas para asegurar que δ_1 y δ_2 desaparezcan. El uso de λ para representar fuerzas asociadas con restricciones se propone para recordar que en el formalismo multicuerpo [Dauphin-Tanguy, 2000], estas fuerzas de abertura son multiplicadores de Lagrange.

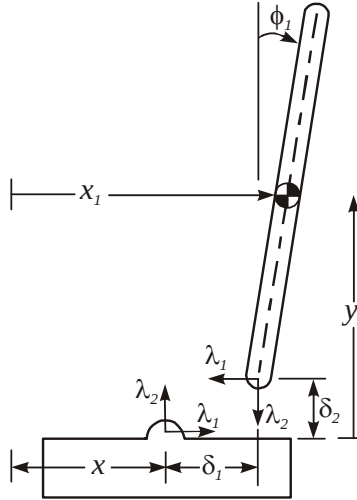


Figura 2.27: Barra y carretón de la figura 2.26 donde se muestran las aberturas δ_1 y δ_2 y las fuerzas λ_1 y λ_2 asociadas con ellas.

Estas aberturas se relacionan con las coordenadas de posición de los cuerpos rígidos en la

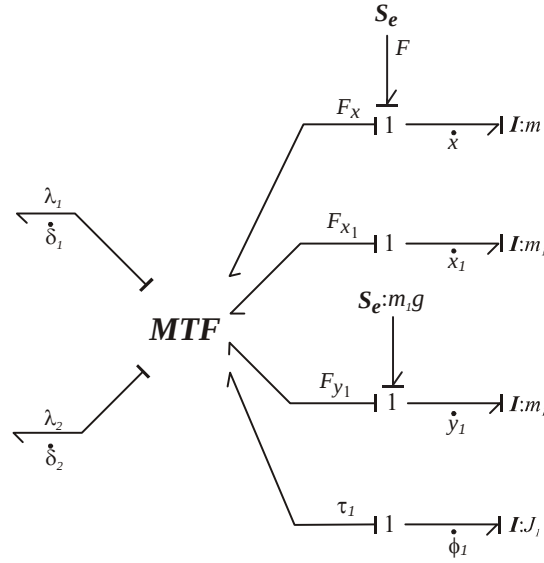


Figura 2.28: Bond graph que relaciona las velocidades de abertura con las velocidades del cuerpo.

figura 2.27.

$$\delta_1 = x_1 - x - \ell_1 \sin \phi_1 \quad (2.72)$$

$$\delta_2 = y_1 - \ell_1 \cos \phi_1$$

Por diferenciación de las expresiones de las aberturas, se pueden relacionar las velocidades de las aberturas con las velocidades del cuerpo:

$$\begin{bmatrix} \dot{\delta}_1 \\ \dot{\delta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & -\ell_1 \cos \phi_1 \\ 0 & 0 & 1 & \ell_1 \sin \phi_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_1 \\ \dot{y}_1 \\ \dot{\phi}_1 \end{bmatrix} \quad (2.73)$$

La relación (2.73) puede ser representada en términos de bond graph por un transformador multipuerto modulado de desplazamiento. La figura 2.28 muestra el transformador conectado a los cuatro elementos-I representando los dos cuerpos.

La transpuesta de la matriz en la ecuación (2.73) relaciona automáticamente las fuerzas de

abertura λ_1 y λ_2 a las fuerzas efectivas en los cuatro elementos- I :

$$\begin{bmatrix} F_x \\ F_{x1} \\ F_{y1} \\ \tau_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -\ell_1 \cos \phi_1 & \ell_1 \sin \phi_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} \quad (2.74)$$

En el bond graph también es aplicada la fuerza debido a la gravedad $m_1 g$, siguiendo los trazos causales, pueden escribirse algunas ecuaciones dinámicas:

$$\begin{aligned} \dot{p}_x &= F - F_x = F + \lambda & \dot{x} &= \frac{p_x}{m} \\ \dot{p}_{x1} &= -F_{x1} = -\lambda_1 & \dot{x}_1 &= \frac{p_{x1}}{m_1} \\ \dot{p}_{y1} &= -m_1 g - F_{y1} = -m_1 g - \lambda_2 & \dot{y}_1 &= \frac{p_{y1}}{m_1} \\ \dot{p}_{\phi 1} &= -\tau_1 = (\ell_1 \cos \phi_1) \lambda_1 - (\ell_1 \sin \phi_1) \lambda_2 & \dot{\phi}_1 &= \frac{p_{\phi 1}}{J_1} \end{aligned} \quad (2.75)$$

Rescribiendo se obtiene:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= F + \lambda \\ m_1\ddot{x}_1 &= -\lambda_1 \\ m_1\ddot{y}_1 &= -m_1 g - \lambda_2 \\ J\ddot{\phi}_1 &= (\ell_1 \cos \phi_1) \lambda_1 - (\ell_1 \sin \phi_1) \lambda_2 \end{aligned} \quad (2.76)$$

En las ecuaciones anteriores las fuerzas de abertura λ_1 y λ_2 se desconocen. En la formulación convencional de multicuerpos, la información extra es suministrada requiriendo que δ_1 y δ_2 tiendan a desaparecer.

A pesar de que esta información es matemáticamente correcta, representa un conjunto de ecuaciones algebraico-diferenciales y tales sistemas no son particularmente fáciles de resolver numéricamente. El bond graph de la figura 2.28 sugiere un enfoque alternativo.

Suponiendo que en lugar de requerir que δ_1 y δ_2 desaparezcan completamente, modelamos la interacción del pivote entre los dos cuerpos como si existieran resortes rígidos, los cuales generarían las fuerzas cada vez que las aberturas no fueran cero. En un sentido, esto parece ser más real, a partir de que los cuerpos rígidos realmente no existen. Sin embargo, si no se usarán barras rígidamente reales, se podría crear un modelo con frecuencias naturales

muy altas de vibración, lo cual necesitaría pasos de tiempo cortos en cualquier simulación numérica.

Es mejor considerar resortes y amortiguadores insertados a lo largo de las aberturas como dispositivos artificiales para forzar las limitaciones y hacer esto con ecuaciones diferenciales explícitas en lugar de ecuaciones algebraicodiferenciales.

La idea es experimentar con resortes rígidos para encontrar la rigidez menor la cual producirá valores lo suficientemente pequeños de δ_1 y δ_2 en la operación del sistema real. Esto producirá pasos de tiempo más grandes en simulación y tiempos de simulación cortos.

El bond graph completo del sistema se muestra en la figura 2.29.

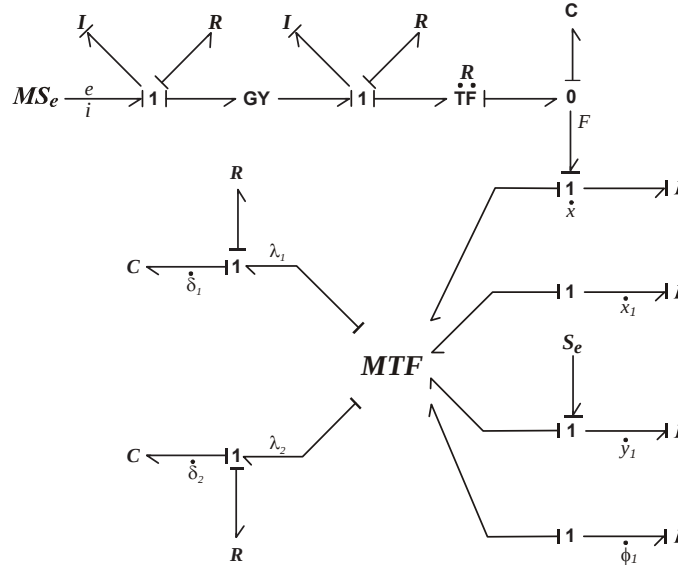


Figura 2.29: Bond graph para el sistema de la figura 2.26.

Los elementos R y C generan las fuerzas de restricción y como una función de δ_1 , δ_2 , $\dot{\delta}_1$ y $\dot{\delta}_2$. Incrementando la rigidez de los elementos- C tendrá el efecto de producir fuerzas más grandes cuando las aberturas no son cero y por lo tanto reducirá dichas separaciones. Ya que la introducción de los resortes implica que es posible el movimiento de vibración, también es útil introducir elementos- R artificiales para proveer amortiguamiento. Asimismo, es necesario algo de experimentación con los valores de los parámetros de amortiguamiento para alcanzar

un resultado favorable.

El elemento- C extra insertado, es porque si los dos fragmentos de bond graph son simplemente conectados, la inercia rotatoria del motor y la inercia del carretón están acopladas por un transformador relacionando variables de movimiento rotatorio a lineal.

Esta es otra alternativa de acoplamiento rígido entre elementos de inercia que siempre induce causalidades derivativas. En este caso, sería simple eliminar este inconveniente definiendo una equivalencia sencilla rotatoria o elementos de inercia lineal, ó definir un campo- I usando los métodos establecidos. En lugar de esto, esta restricción rígida ha sido reemplazada con una aproximación definiendo un elemento- C equivalente. Este elemento podría ser considerado para representar la flexibilidad de conducción de la polea o simplemente un dispositivo para hacer que el modelo completo pueda tener causalidad integral.

Finalmente, podemos notar que sería relativamente fácil escribir las ecuaciones de estado para todos los elementos I y C en la figura 2.29. Se debe recordar, sin embargo, que en esta técnica de multipuerto, el transformador modulado de desplazamiento utiliza los desplazamientos de los elementos de inercia para expresar las restricciones o ecuaciones de abertura. En bond graphs, las variables de desplazamiento para elementos de inercia normalmente no son necesarias como variables de estado, entonces serán necesarias algunas ecuaciones de estado extras.

Las matrices del transformador de este ejemplo, en realidad necesitan el desplazamiento ϕ_1 , entonces, estrictamente hablando, solamente la última ecuación en (2.75), $\dot{\phi}_1 = \frac{p_{\phi_1}}{J_1}$ necesitaría ser incluida. Para este tipo de sistemas sería, probablemente, más útil incluir ecuaciones de estado para todos los desplazamientos x , x_1 , y_1 y ϕ_1 en cualquier caso, como se indica en las ecuaciones (2.75). Estas ecuaciones hacen que se incremente el orden del sistema, pero su inclusión solamente tiene un efecto menor en el tiempo de simulación para un estudio por computadora.

Para ilustrar como este método de introducir restricciones entre cuerpos interconectados puede ser de gran extensión, consideremos una segunda barra conectada al sistema anteriormente estudiado, como se muestra en la figura 2.30.

Definiendo δ_3 , δ_4 y las fuerzas correspondientes λ_3 y λ_4 que pertenecen al segundo conjunto

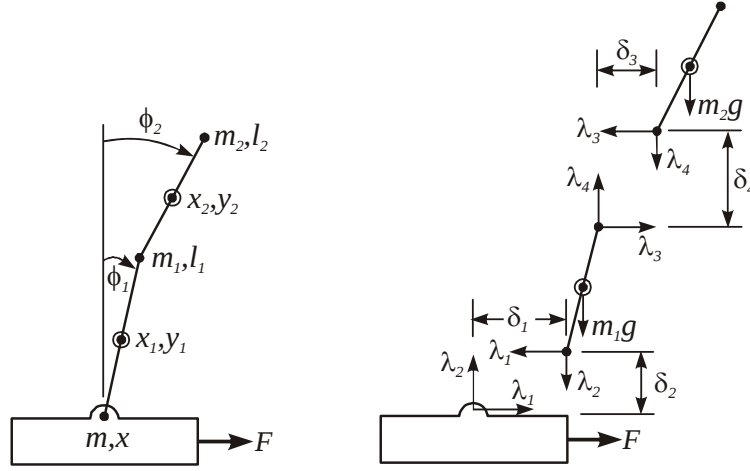


Figura 2.30: Sistema de doble péndulo invertido.

de restricciones relacionando la posición de arriba de la barra 1 a la parte de debajo de la barra 2, podemos deducir dos relaciones más para obtener:

$$\delta_3 = x_2 - \ell_2 \sin \phi_2 - x_1 - \ell_1 \sin \phi_1 \quad (2.77)$$

$$\delta_4 = y_2 - \ell_2 \cos \phi_2 - y_1 - \ell_1 \cos \phi_1$$

Diferenciando las ecuaciones anteriores, resultan ecuaciones que relacionan $\dot{\delta}_3$, $\dot{\delta}_4$ a $\dot{x}_1$, $\dot{y}_1$, $\dot{\phi}_1$, $\dot{x}_2$, $\dot{y}_2$ y $\dot{\phi}_2$:

$$\begin{bmatrix} \dot{\delta}_3 \\ \dot{\delta}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -\ell_1 \cos \phi_1 & 1 & 0 & -\ell_2 \cos \phi_2 \\ 0 & -1 & \ell_1 \sin \phi_1 & 0 & 1 & \ell_2 \sin \phi_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{y}_1 \\ \dot{\phi}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{\phi}_2 \end{bmatrix} \quad (2.78)$$

La transpuesta de la matriz (2.78) relaciona las seis componentes de fuerza para λ_3 y λ_4 :

$$\begin{bmatrix} F_{x1} \\ F_{y1} \\ \tau_1 \\ F_{x2} \\ F_{y2} \\ \tau_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ -\ell_1 \cos \phi_1 & \ell_1 \sin \phi_1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -\ell_2 \cos \phi_2 & \ell_2 \sin \phi_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{bmatrix} \quad (2.79)$$

En este caso, ambas barras tienen tres grados de libertad, así como seis velocidades generalizadas que son involucradas cuando dos cuerpos son forzados. Asimismo, hay la posibilidad de relacionar λ_3 y λ_4 a las fuerzas que están actuando en los elementos- I y requiriendo que δ_3 y δ_4 tiendan a desaparecer en las ecuaciones (2.77).

En la figura 2.31 se muestra el bond graph usando resortes y amortiguadores para forzar la restricción de una manera aproximada.

Hasta ahora se ha visto el modelado y la obtención de su modelo en espacio de estado en Bond Graph de manera general, en el siguiente capítulo se abordarán los robots manipuladores y en el capítulo 4 la obtención de su modelo en Bond Graph.

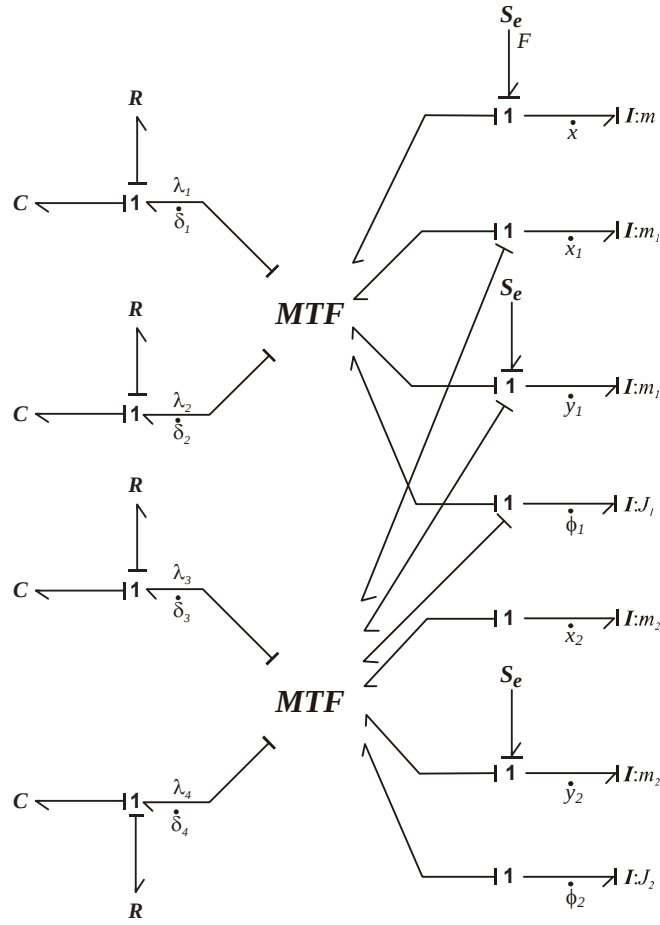


Figura 2.31: Bond graph para el sistema de doble péndulo invertido.

Capítulo 3

Robots Manipuladores

3.1 Introducción

La necesidad de aumentar la productividad y conseguir productos acabados de una calidad uniforme, está haciendo que la industria gire cada vez más hacia una automatización basada en computadoras. En el momento actual, la mayoría de las tareas de fabricación automatizadas se realizan mediante máquinas de uso especial diseñadas para realizar funciones predeterminadas en un proceso de manufacturación. La inflexibilidad y generalmente el alto costo de estas máquinas, a menudo llamadas sistemas de automatización duros, han llevado a un interés creciente en el uso de robots capaces de efectuar una variedad de funciones de fabricación en un entorno de trabajo más flexible y a un menor costo de producción.

La palabra robot proviene de la palabra checa robota, que significa trabajo. El diccionario Webster define a un robot como “un dispositivo automático que efectúa funciones ordinariamente asignadas a los seres humanos”. Con esta definición, se pueden considerar que las lavadoras son robots. Una definición utilizada por el Robot Institute of America da una descripción más precisa de los robots industriales: “un robot es un manipulador reprogramable multifuncional diseñado para mover materiales, piezas o dispositivos especializados, a través de movimientos programados variables para la realización de una diversidad de tareas”. En suma, un robot es un manipulador reprogramable de uso general con sensores externos que

pueden efectuar diferentes tareas de montaje. Con esta definición, un robot debe poseer inteligencia que se debe normalmente a los algoritmos de computador asociados con su sistema de control y sensorial.

Un robot industrial es un manipulador de uso general controlado por computador que consiste en algunos elementos rígidos conectados en serie mediante articulaciones prismáticas o de revolución. El final de la cadena está fijo a una base soporte, mientras el otro extremo está libre y equipado con una herramienta para manipular objetos o realizar tareas de montaje. El movimiento de las articulaciones resulta en, o produce, un movimiento relativo de los distintos elementos. Mecánicamente, un robot se compone de un brazo y una muñeca más una herramienta. Se diseña para alcanzar una pieza de trabajo localizada dentro de su volumen de trabajo. El volumen de trabajo es la esfera de influencia de un robot cuyo brazo puede colocar el submontaje de la muñeca en cualquier punto dentro de la esfera. El brazo generalmente se puede mover con tres grados de libertad. La combinación de estos movimientos orienta a la pieza de acuerdo a la configuración del objeto para facilitar su recogida. Estos tres últimos movimientos se denominan con frecuencia elevación (pitch), desviación (yaw) y giro (roll). Por tanto, para un robot con seis articulaciones, el brazo es el mecanismo de posicionamiento, mientras que la muñeca es el mecanismo de orientación. Estos conceptos se ilustran para el robot Cincinnati Milacron T3 y el robot PUMA de Unimation que se muestran en la figura 3.1.

Muchos robots industriales que están disponibles comercialmente, se utilizan ampliamente en tareas de fabricación y ensamblaje, tales como manejo de material, soldadura por arco y de punto, montaje de piezas, pinturas al spray, carga y descarga de máquinas controladas numéricamente, exploraciones espaciales y submarinas, investigación de brazos protésicos y en el manejo de materiales peligrosos. Estos robots caen en una de las cuatro categorías que definen movimientos básicos (figura 3.2):

- Coordenadas cartesianas (tres ejes lineales) ejemplo: robot RS-1 de IBM y el robot Sigma de Olivetti.
- Coordenadas cilíndricas (dos ejes lineales y un eje rotacional) ejemplo: robot Versatran

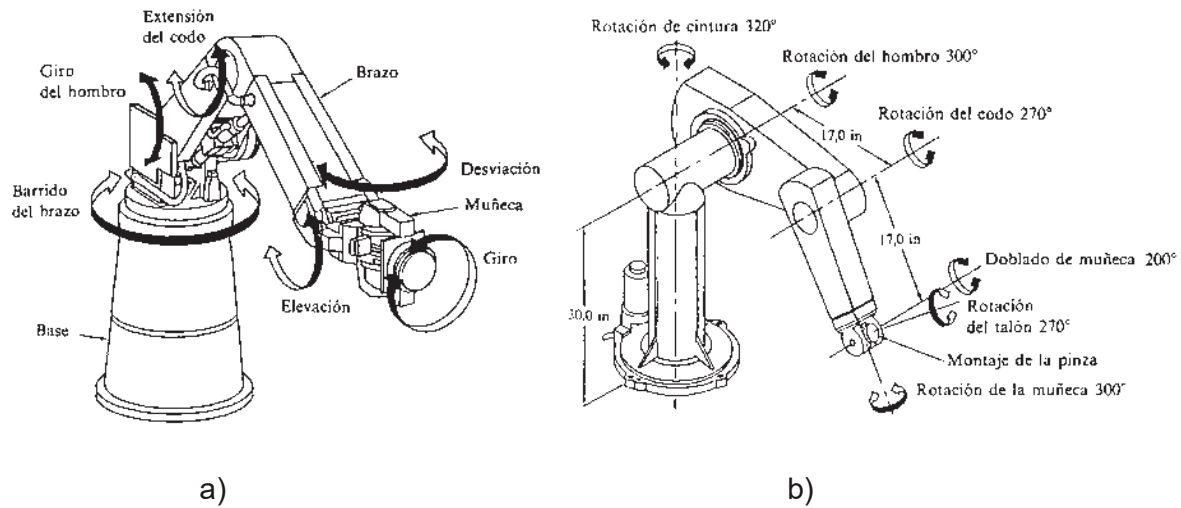


Figura 3.1: Robots manipuladores : a) Robot Cincinnati Milacron T3; b) Robot de la serie PUMA 560.

600 de Prat.

- Coordenadas esféricas (un eje lineal y dos ejes rotacionales) ejemplo: Unimate 2000B de Unimation Inc.
- Coordenadas de revolución o articuladas (tres ejes rotacionales) ejemplo: robot T3 de Cincinnati Milacron y el PUMA de Unimation Inc.

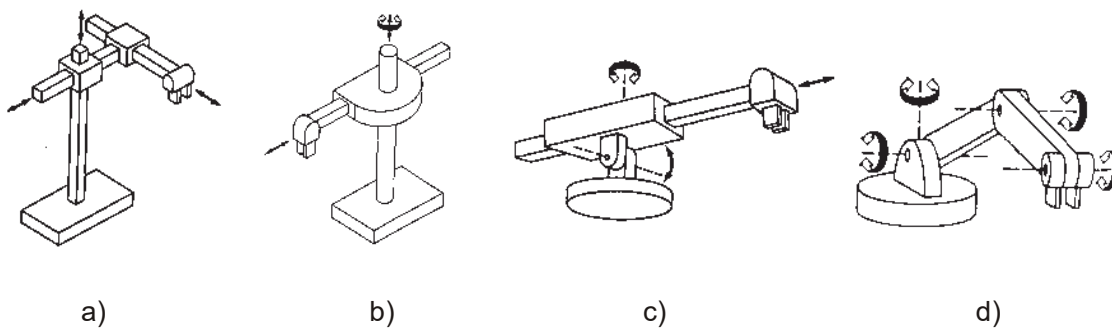


Figura 3.2: Diversas categorías de robots: a) Cartesiana, b) cilíndrica, c) esférica y d) de revolución o angular.

3.2 Cinemática y dinámica del brazo del robot

La cinemática del brazo del robot trata con el estudio analítico de la geometría del movimiento de un brazo de robot con respecto a un sistema de coordenadas de referencia fijo sin considerar las fuerzas o momentos que originan el movimiento. Así, la cinemática se interesa por la descripción analítica del desplazamiento espacial del robot como una función del tiempo, en particular de las relaciones entre la posición de las variables de articulación, la posición y orientación del efector final del brazo de robot.

Hay dos problemas fundamentales en la cinemática del robot. El primero se suele conocer como el *problema cinemático directo*, mientras que el segundo es el *problema cinemático inverso*. Como las variables independientes en un robot son las variables de articulación, y una tarea se suele dar en términos del sistema de coordenadas de referencia, se utiliza de manera más frecuente el problema cinemática inverso. Denavit y Hartenberg [1955] propusieron un enfoque sistemático y generalizado de utilizar álgebra matricial para describir y representar la geometría espacial de los elementos del brazo de robot con respecto a un sistema de referencia fijo. Este método utiliza una matriz de transformación homogénea 4×4 para describir la relación espacial entre dos elementos mecánicos rígidos adyacentes y reduce el problema cinemático directo a encontrar una matriz de transformación homogénea 4×4 que relaciona el desplazamiento espacial del sistema de coordenadas de la mano al sistema de coordenadas de referencia. Estas matrices de transformación homogéneas son también útiles en derivar ecuaciones dinámicas de movimiento del brazo del robot. En general, el problema cinemático inverso se puede resolver mediante algunas técnicas. Los métodos utilizados más comúnmente son el algebraico matricial, iterativo, o geométrico.

La dinámica del robot, por otra parte, trata con la formulación matemática de las ecuaciones del movimiento del brazo. Las ecuaciones dinámicas del movimiento de un manipulador son un conjunto de ecuaciones matemáticas que describen la conducta dinámica del manipulador. Tales ecuaciones de movimiento son útiles para simulación en computadora del movimiento del brazo, el diseño de ecuaciones de control apropiadas para el robot y la evaluación del diseño y estructura cinemática del robot. El modelo dinámico real de un brazo se puede obtener

de las leyes físicas conocidas tales como las leyes de Newton y la mecánica lagrangiana. Esto conduce al desarrollo de las ecuaciones dinámicas de movimiento para las distintas articulaciones del manipulador en términos de los parámetros geométricos e inerciales especificados para los distintos elementos. Se puede aplicar sistemáticamente enfoques convencionales como la formulación de Lagrange-Euler y de Newton-Euler para desarrollar las ecuaciones de movimiento del robot.

3.3 Cinemática directa. La representación de Denavit-Hartenberg

El problema de la cinemática directa puede ser establecido como sigue: dadas las variables de las uniones del robot, determinar la posición y orientación del efector-final. Las variables de las uniones son los ángulos entre los eslabones en el caso de uniones de revolución o rotacionales, y la prolongación en el caso de uniones prismáticas o de deslizamiento.

3.3.1 Cadenas cinématicas

Para los propósitos de análisis de cinemática, se puede pensar en un robot como un conjunto de enlaces rígidos conectados por medio de uniones.

El objetivo del análisis de la cinemática directa es determinar el efecto acumulativo del conjunto de las variables de unión. Para hacer esto de una manera sistemática, realmente se deberían introducir algunas convenciones. Sin embargo, el análisis de la cinemática de un manipulador de n -eslabones es extremadamente complejo y las convenciones introducidas a continuación simplifican considerablemente las ecuaciones. Más aún, ellas dan un lenguaje universal con el cual los ingenieros de robótica se pueden comunicar.

- Suponer un robot que tiene $n + 1$ enlaces numerados de 0 a n iniciando a partir de la base del robot, el cual es tomado como enlace 0. Las uniones son numeradas de 1 a n , y la unión i –ésima es el punto en el espacio donde los eslabones $i - 1$ e i son conectados.
- La variable de unión i –ésima está denotada por q_i . En caso de una unión de revolución,

q_i es el ángulo de rotación, y en el caso de una unión prismática, q_i es la unión de desplazamiento. A continuación, un marco de coordenadas es fijado rígidamente a cada eslabón. Para ser específico, se conecta un marco de referencia inercial a la base y se denomina 0. Entonces, se escogen marcos de referencia de 1 a n tal que el marco de referencia i está rígidamente conectado al eslabón i .

- Suponer que A_i es la matriz homogénea que transforma las coordenadas de un punto a partir del marco de referencia i al $i - 1$. La matriz A_i no es constante, puesto que varía cuando la configuración del robot cambia.

Sin embargo, la hipótesis de que todas las uniones son de revolución o prismáticas significa que A_i es una función de una sola variable de unión, llamada q_i . En otras palabras,

$$A_i = A_i(q_i) \quad (3.1)$$

Ahora, la matriz homogénea que transforma las coordenadas de un punto a partir del marco de referencia j al marco de referencia i , es llamada, por convención, matriz de transformación y es usualmente denotada por T_i^j . Sabemos que:

$$T_i^j = A_{i+1}A_{i+2} \cdots A_{j-1}A_j \quad \text{si} \quad i < j \quad (3.2)$$

$$T_i^j = I \quad \text{si} \quad i = j \quad (3.3)$$

$$T_i^j = (T_j^i)^{-1} \quad \text{si} \quad j > i \quad (3.4)$$

Por la manera en la cual se tienen colocados los diferentes marcos de referencia a los eslabones correspondientes, se desprende que la posición de cualquier punto en el efector-final, cuando es expresado en el marco de referencia n , es una constante independiente de la configuración del robot. Denotar la posición y orientación del efector-final con respecto a marco base o inercial por medio un vector tridimensional d_o^n y una matriz de rotación de 3×3 R_o^n , respectivamente, y se define la matriz homogénea como:

$$H = \begin{bmatrix} R_o^n & d_o^n \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.66)$$

Entonces, la posición y orientación del efector-final en el marco de referencia inercial están dadas por:

$$H = T_0^n = A_1(q_1) \cdots A_n(q_n) \quad (3.5)$$

Cada transformación homogénea A_i es de la forma,

$$A_i = \begin{bmatrix} R_{i-1}^i & d_{i-1}^i \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

Por lo tanto:

$$T_i^j = A_{i+1} \cdots A_j = \begin{bmatrix} R_i^j & d_i^{ji} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

La matriz R_i^j expresa la orientación del marco de referencia j relativa al marco de referencia i , está dada por las partes rotacionales de las matrices A como:

$$R_i^j = R_i^{i+1} \cdots R_{j-1}^j \quad (3.8)$$

Los vectores d_i^j son entregados recursivamente por la fórmula:

$$d_i^j = d_i^{j-1} + R_i^{j-1} d_{j-1}^j \quad (3.9)$$

3.3.2 Representación Denavit-Hartenberg

La convención utilizada comúnmente para seleccionar los marcos de referencia en aplicaciones de robótica es la convención de Denavit-Hartenberg. En esta convención, cada transformación homogénea A_i es representada como un producto de cuatro transformaciones básicas,

$$A_i = Rot_{z,\theta_i} Trans_{z,d_i} Trans_{x,a_i} Rot_{x,\alpha_i} \quad (3.10)$$

Es decir:

$$A_i = \begin{bmatrix} C_{\theta_i} & -S_{\theta_i} & 0 & 0 \\ S_{\theta_i} & C_{\theta_i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_{\alpha_i} & -S_{\alpha_i} & 0 \\ 0 & S_{\alpha_i} & C_{\alpha_i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

Realizando la multiplicación matricial se obtiene:

$$A_i = \begin{bmatrix} C_{\theta_i} & -S_{\theta_i}C_{\alpha_i} & S_{\theta_i}S_{\alpha_i} & a_iC_{\theta_i} \\ S_{\theta_i} & C_{\theta_i}C_{\alpha_i} & C_{\theta_i}S_{\alpha_i} & a_iS_{\theta_i} \\ 0 & S_{\alpha_i} & C_{\alpha_i} & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

donde las cuatro cantidades $\theta_i, a_i, d_i, \alpha_i$ son parámetros del eslabón i y unión i .

Los parámetros en (3.12) son: a_i es la *longitud*; α_i es la *torsión*; d_i es el *desplazamiento* y θ_i es el *ángulo*.

A partir de que la matriz A_i es una función de una sola variable, entonces tres de la cuatro variables son constantes para un eslabón dado, mientras que de los cuatro parámetros, θ_i es para la unión de revolución y d_i para la unión prismática.

Una matriz homogénea arbitraria puede ser descrita por 6 cantidades, tal como, por ejemplo, las tres componentes de desplazamiento del vector d y tres ángulos de Euler correspondiente a la matriz de rotación R .

En la representación $D - H$, en contraste, hay solamente cuatro parámetros, Como es esto posible? La respuesta es que mientras el marco de referencia i es requerido para colocarse rígidamente al eslabón i , se tiene libertad considerable en escoger el origen y los ejes de las coordenadas del marco de referencia. Así, con una selección hábil del origen y de los ejes de coordenadas, es posible reducir el número de parámetros necesitados de 6 a 4 (en algunos casos menor).

Para comprobar lo anterior, se inicia determinando pequeñas transformaciones homogéneas que pueden ser expresadas en la forma de (3.10). Suponer que se tienen dos marcos de referencia denotados por 0 y 1. Entonces existe una matriz de transformación única A que toma las coordenadas a partir de 1 hacia 0. Ahora, suponer que los marcos de referencia tienen las siguientes características adicionales:

- (DH1) el eje x_1 es perpendicular al eje z_0 .
- (DH2) el eje x_1 intersecta al eje z_0 .

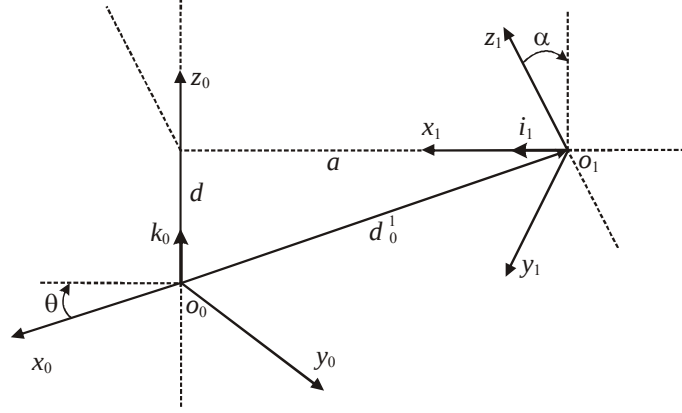


Figura 3.3: Marcos de referencia satisfaciendo las hipótesis (DH1) y (DH2).

Estas características se muestran gráficamente en la figura 3.3.

Bajo estas condiciones, se asegura que existe cantidades únicas a , d , θ , α tal que:

$$A_i = Rot_{z,\theta} Trans_{z,d_i} Trans_{x,a_i} Rot_{x,\alpha} \quad (3.13)$$

$$A_i = \begin{bmatrix} C_{\theta_i} & -S_{\theta_i}C_{\alpha_i} & S_{\theta_i}S_{\alpha_i} & a_iC_{\theta_i} \\ S_{\theta_i} & C_{\theta_i}C_{\alpha_i} & C_{\theta_i}S_{\alpha_i} & a_iS_{\theta_i} \\ 0 & S_{\alpha_i} & C_{\alpha_i} & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

Para mostrar que la matriz A puede ser escrita en esta forma, se puede escribir A como:

$$A = \begin{bmatrix} R & d \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

Entonces r_i denota la columna i -ésima de la matriz de rotación R . De acuerdo a la figura 3.3, la hipótesis (DH1) significa que el vector r_1 (el cual es la representación del vector unitario i_1 en el marco de referencia 0) es ortogonal a $k_o = (0, 0, 1)^T$, esto es $r_{31} = 0$. A partir de esto se asegura que existen ángulos θ y α tal que:

$$R = R_{z,\theta} R_{x,\alpha} = \begin{bmatrix} C_{\theta} & -S_{\theta}C_{\alpha} & S_{\theta}S_{\alpha} \\ S_{\theta} & C_{\theta}C_{\alpha} & -C_{\theta}S_{\alpha} \\ 0 & S_{\alpha} & C_{\alpha} \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

La única información que tenemos es que $r_{31} = 0$, pero es suficiente. Primero, a partir de que cada renglón y columna de R debe tener longitud unitaria, $r_{31} = 0$ implica qué:

$$r_{11}^2 + r_{21}^2 = 1; \quad r_{32}^2 + r_{33}^2 = 1 \quad (3.17)$$

Por lo tanto, existen θ, α únicos tal qué:

$$(r_{11}, r_{21}) = (C_\theta, S_\theta); \quad (r_{32}, r_{33}) = (C_\alpha, S_\alpha) \quad (3.18)$$

Una vez que θ y α fueron encontrados, es de rutina mostrar que los elementos restantes de R deben tener la la forma mostrada en (3.16), utilizando la matriz de rotación R .

A continuación, la hipótesis (*DH2*) indica que el vector $d = d_0^1$ (el cual es el vector de coordenadas del origen del marco de referencia 1 en términos del marco de referencia 0) es una combinación lineal de k_o y Ri_1 . por lo tanto, a partir de que $r_{31} = 0$ se puede expresar d_0^1 como:

$$d_0^1 = dk_0 + aRi_1 \quad (3.19)$$

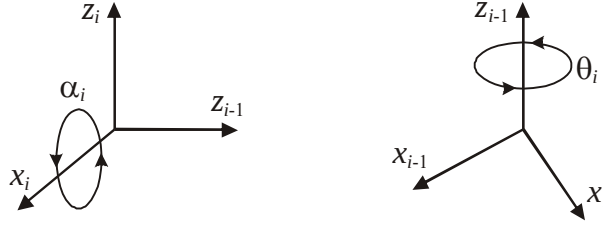
$$= dk_0 + ar_1 = \begin{bmatrix} aC_\theta \\ aS_\theta \\ d \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

Una vez que se ha establecido que cada matriz homogénea que satisface las condiciones (*DH1*) y (*DH2*) ésta puede ser representada en la forma (3.13), se puede dar una interpretación física a las cuatro cantidades en (3.13).

El parámetro a es la distancia entre los ejes z_0 y z_1 y es medida sobre el eje x_1 . El ángulo α es el ángulo entre los ejes z_0 y z_1 medido en un plano normal a x_1 . El sentido positivo de α es determinado de z_0 a z_1 por la regla de la mano derecha, tal como se muestra en la figura 3.4.

El parámetro d es la distancia entre el origen o_0 y la intersección del eje x_1 con z_o medido a lo largo del eje z_o . Finalmente, θ es el ángulo entre los ejes x_0 y x_1 medido en un plano normal al eje z_0 .

Para iniciar, es útil identificar todas las uniones de los ejes y etiquetarlas $z_0, \dots, z_{n-1}$. z_i es el eje de revolución de la unión $i+1$, si la unión $i+1$ es de revolución, y es el eje de traslación


 Figura 3.4: Sentido positivo para α_i y θ_i

de la unión $i + 1$ si la unión $i + 1$ es prismática. A continuación se escoge el origen o_0 del marco de referencia base. Este punto puede ser seleccionado en cualquier parte a lo largo del eje z_0 . Finalmente, se selecciona x_0, y_0 de manera conveniente.

Ahora, suponer que los marcos de referencia $0, \dots, i - 1$ han sido colocados. Para comprender esto es útil considerar la figura 3.5.

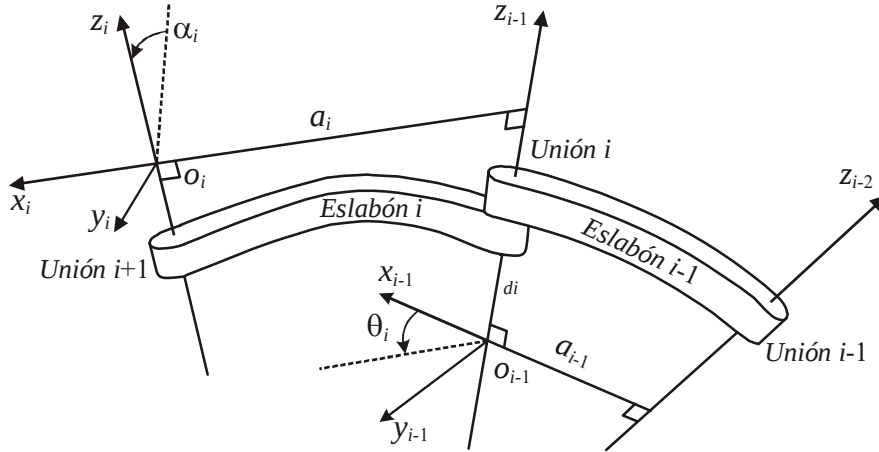


Figura 3.5: Asignación de marco de referencia de Denavit-Hartenberg.

Para colocar de manera correcta el marco de referencia i es necesario considerar dos casos:

- Los ejes z_{i-1}, z_i no son coplanares.
- Ellos son coplanares.

Si los ejes z_{i-1}, z_i no son coplanares entonces existe una *única* línea perpendicular a ambos

tal qué, la línea que conecta a ambos tiene longitud mínima. La línea es normal común a z_{i-1} y z_i , entonces la línea es definida como x_i , y el punto de intersección con z_i es el origen o_i .

Entonces por construcción, se satisfacen ambas condiciones ($DH1$) y ($DH2$) y el vector de o_{i-1} a o_i es una combinación lineal de z_{i-1} y x_i .

La especificación del marco de referencia i esta completa seleccionando el eje y_i para formar el marco de referencia de la mano derecha. Dado que las hipótesis ($DH1$) y ($DH2$) son satisfechas, la matriz homogénea A_i está en la forma (3.13).

Ahora considerando el caso b), esto es, los ejes z_{i-1} y z_i son coplanarios. Esto significa que son paralelos, o que se intersectan.

Si los ejes z_{i-1} y z_i son paralelos, hay una infinidad de líneas normales entre ellos y la condición ($DH1$) no especifica completamente a x_i . En este caso se escoge el origen o_i en la unión i así que x_i es normal a partir de z_{i-1} la cual pasa a través de o_i . Notar que la selección de o_i es arbitrario en este caso. Se podría también escoger la normal que pasa a través de o_{i-1} como el eje x_i en el cual el caso d_i sería cero.

A partir de que los ejes z_{i-1} y z_i son paralelos, α_i será cero en este caso. Una vez que x_i esta fijo, y_i se puede determinar. Finalmente, considerar el caso donde z_i intersecta el eje z_{i-1} . En este caso x_i se escoge normal al plano formado por z_i y z_{i-1} . La dirección positiva de x_i es arbitraria. Notar que en este caso el parámetro a_i es cero.

Este procedimiento constructivo para los marcos de referencia $0, \dots, n-1$ en un robot de n eslabones. Para completar la construcción, es necesario especificar el marco de referencia n . El sistema de coordenadas final $o_n x_n y_n z_n$ es comúnmente llamado marco de referencia del *efector-final* o de la *herramienta*. El origen o_n se coloca simetricamente entre los dedos de la agarradera. Los vectores unitarios a lo largo de los ejes x_n, y_n y z_n son etiquetados como n, s y a , respectivamente.

Finalmente, notar el siguiente hecho importante. En todos los casos, independientemente de la unión en cuestión sea de revolución o prismática, las cantidades a_i y α_i son siempre constantes para todo i y son características del manipulador. Si la unión i es prismática, entonces θ_i es también una constante, mientras d_i es la variable de unión i -ésima. De forma

Eslabón	a_i	α_i	d_i	θ_i
1	a_1	0	0	θ_1
2	a_2	0	0	θ_2

Tabla 3.1: Parametros de unión para un manipulador planar de 2 eslabones.

similar, si la unión i es de revolución, entonces d_i es constante y θ_i es la variable de unión i -ésima.

3.3.3 Ejemplo: Manipulador Elbow planar

Este robot manipulador se muestra en la figura 3.6.

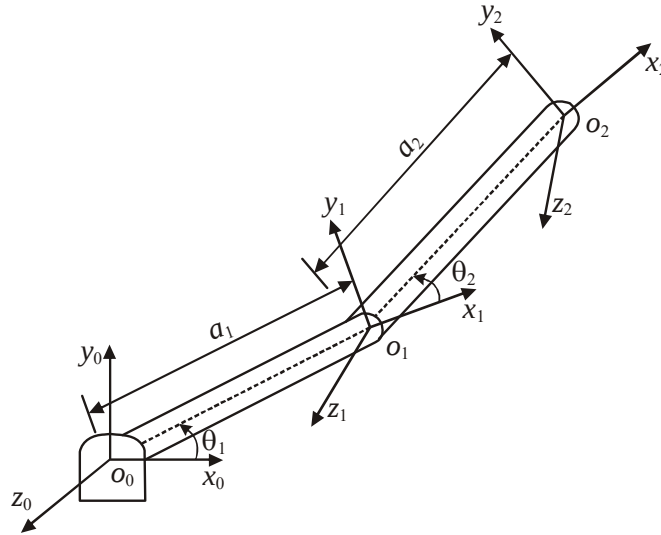


Figura 3.6: Manipulador planar de dos eslabones.

Los parámetros de los eslabones se muestran en la tabla 3.1:

Se determina las matrices A a partir de (3.14):

$$A_1 = \begin{bmatrix} C_1 & -S_1 & 0 & a_1 C_1 \\ S_1 & C_1 & 0 & a_1 S_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} C_2 & -S_2 & 0 & a_2 C_2 \\ S_2 & C_2 & 0 & a_2 S_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

Las matrices T están dadas por

$$T_0^1 = A_1 \quad (3.23)$$

$$T_0^2 = A_1 A_2 \quad (3.24)$$

$$T_0^2 = \begin{bmatrix} C_1 & -S_1 & 0 & a_1 C_1 \\ S_1 & C_1 & 0 & a_1 S_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_2 & -S_2 & 0 & a_2 C_2 \\ S_2 & C_2 & 0 & a_2 S_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

$$T_0^2 = \begin{bmatrix} C_1 C_2 - S_1 S_2 & -C_1 S_2 - S_1 C_2 & 0 & a_2 C_1 C_2 - a_2 S_1 S_2 + a_1 C_1 \\ S_1 C_2 + C_1 S_2 & -S_1 S_2 + C_1 C_2 & 0 & a_2 S_1 C_2 + a_2 C_1 S_2 + a_1 S_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

$$T_0^2 = \begin{bmatrix} C_{12} & -S_{12} & 0 & a_1 C_1 + a_2 C_{12} \\ S_{12} & C_{12} & 0 & a_1 S_1 + a_2 S_{12} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

Notar que las primeras dos entradas de la última columna de T_2 son las componentes x y y

del origen o_2 en el marco de referencia base, esto es:

$$x = a_1 C_1 + a_2 C_{12} \quad (3.28)$$

$$y = a_1 S_1 + a_2 S_{12} \quad (3.29)$$

son las coordenadas del efector-final en el marco de referencia base. La parte de rotación de T_0^2 entrega la orientación del marco de referencia $o_2 x_2 y_2 z_2$ relativa al marco de referencia base.

Capítulo 4

Modelado de Robots

Manipuladores en Bond Graph

4.1 Sistemas Mecánicos y Robóticas en Bond Graph

Existen diferentes caminos para determinar las ecuaciones de movimiento de sistemas mecánicos. El propósito de esta sección es mostrar como el bond graph proporciona un camino sistemático para describir los sistemas mecánicos y su dinámica correspondiente. el documento fundamental en esta área es el que redactó Karnopp en 1969 y las extensiones de esta teoria aparecen en un libro de texto escrito por Karnopp y otros autores en 1990.

Un concepto clave introducido por Karnopp es la representación de *transformaciones* geométrica (conservadoras de energía) usando *transformadores* en Bond Graph. Esto permite que el Bond Graph sea escrito bajo consideraciones *geométricas*; la conservación de potencia implica automáticamente las fuerzas correspondientes a las velocidades.

4.2 Movimiento en dos dimensiones en Bond Graph

La barra rígida de la figura 4.1 que se mueve en el plano, es un componente estándar de los sistemas mecánicos, los tres puntos importantes en la barra son los dos extremos y el centro

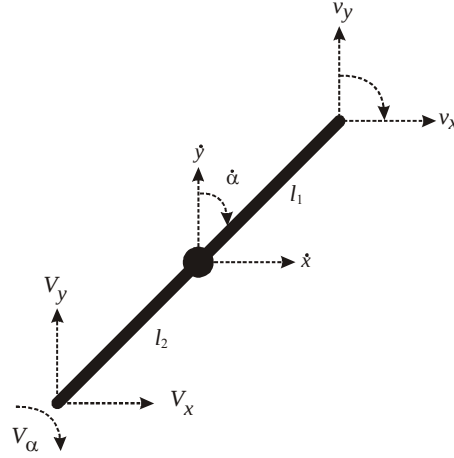


Figura 4.1: Una barra rígida.

de masa. Los extremos son importantes porque ellos definen las conexiones en la barra; el centro de masa es importante debido a que ahí es más conveniente escribir las ecuaciones de movimiento. La barra rígida por lo tanto, actúa como una *restricción* entre estos tres puntos del espacio.

La figura 4.2 muestra el bond graph de un cuerpo rígido.

El movimiento se considera con respecto a un sistema de coordenadas absoluto: v_x y v_y son las componentes de velocidad de un extremo con respecto a dicho sistema de coordenadas; V_x y V_y son las componentes de velocidad del otro extremo; $\dot{x}$ y $\dot{y}$ son las componentes de velocidad del centro de masa. Estos tres puntos muestran la misma velocidad angular $\dot{\alpha} = v_\alpha = V_\alpha$. La distancia a partir del primer extremo al centro de masa es l_1 y la distancia a partir del segundo extremo al centro de masa es l_2 .

La cinemática de la barra es expresada por las ecuaciones:

$$\dot{x} = v_x - v_{x\alpha} \quad (4.1)$$

$$\dot{y} = v_y + v_{y\alpha} \quad (4.2)$$

$$V_x = \dot{x} - V_{x\alpha} \quad (4.3)$$

$$V_y = \dot{y} + V_{y\alpha} \quad (4.4)$$

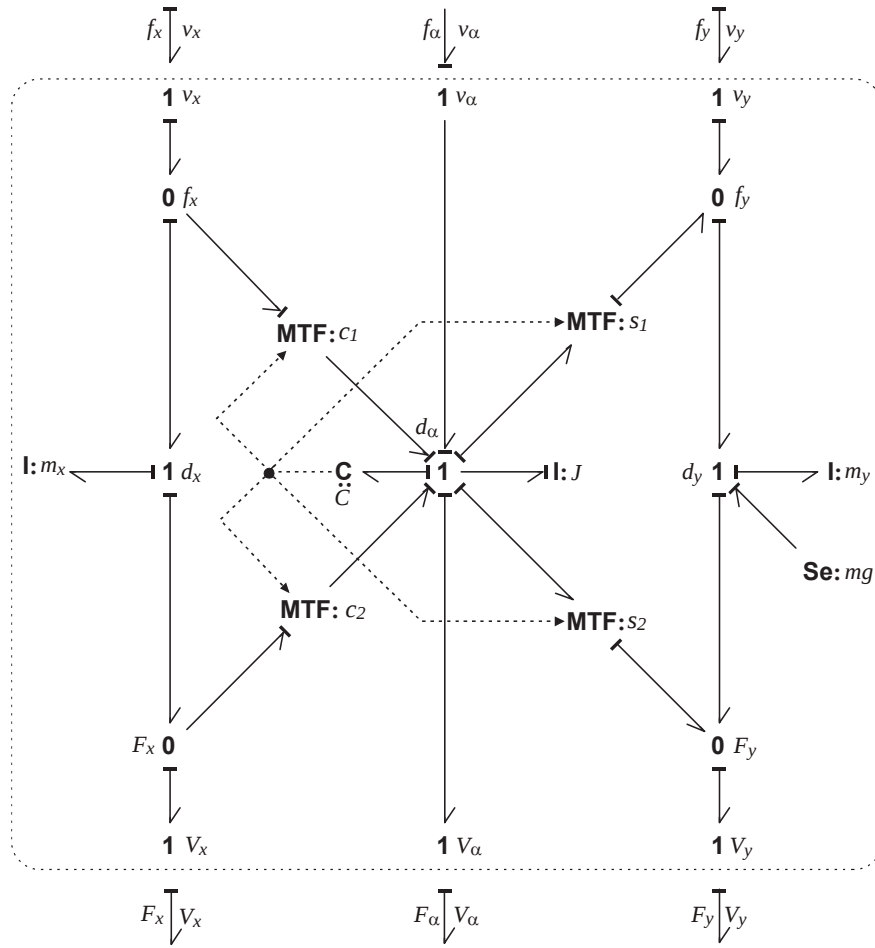


Figura 4.2: Bond Graph de una barra rígida.

donde $v_{x\alpha}$, $v_{y\alpha}$, $V_{x\alpha}$ y $V_{y\alpha}$ son las componentes de velocidad debido a la velocidad angular $\dot{\alpha}$ dada por las ecuaciones de *transformación*:

$$v_{x\alpha} = l_1 \cos \alpha \dot{\alpha} \quad (4.5)$$

$$v_{y\alpha} = l_1 \sin \alpha \dot{\alpha} \quad (4.6)$$

$$V_{x\alpha} = l_2 \cos \alpha \dot{\alpha} \quad (4.7)$$

$$V_{y\alpha} = l_2 \sin \alpha \dot{\alpha} \quad (4.8)$$

La dinámica de la barra está dada por las tres ecuaciones (Newton-Euler):

$$\ddot{x} = \frac{\Delta f_x}{m}; \ddot{y} = \frac{\Delta f_y}{m}; \ddot{\alpha} = \frac{\Delta \tau}{J} \quad (4.9)$$

donde m y J son la masa e inercia de la barra respectivamente, y Δf_x y Δf_y son las fuerzas netas que están actuando en el centro de masa en las direcciones x y y , y $\Delta \tau$ es el par neto que está actuado en el centro de la masa.

El área dentro del cuadro punteado en la figura 4.2 representa la barra, los seis bonds externos indican como se hacen las conexiones a la barra.

- Hay tres componentes etiquetados como m_x , m_y y J , estos implementan las tres ecuaciones de la dinámica de la barra (ecuación 4.9).
- Hay un elemento- C llamado " C " que tiene rigidez cero y por lo tanto no afecta en el comportamiento del sistema, pero su correspondiente variable de flujo integrada q es:

$$q = \int_0^t \dot{\alpha}(t') dt' = \alpha + q_0 \quad (4.10)$$

Si inicializamos en $q_0 = 0$, $q = \alpha$ y así proporcionar una señal modulante para los transformadores.

- Hay tres uniones-1 etiquetadas dx , dy y $d\alpha$.
 - Estas uniones-1 transportan las tres velocidades asociadas con el centro de masa $\dot{x}$, $\dot{y}$ y $\dot{\alpha}$.
 - Estas uniones-1 calculan los esfuerzos netos que están actuando en el elemento- I correspondiente (Δf_x , Δf_y y $\Delta \tau$).

- Hay cuatro uniones-0 llamadas f_x, f_y, F_x, F_y .
 - Estas uniones-0 transportan las componentes x y y de la fuerza asociada con las partes *superiores* e *inferiores* de la barra.
 - Estas uniones-0 implican las ecuaciones de la cinemática de la barra (ecuaciones 4.1 a la 4.4).
- Hay cuatro transformadores modulados etiquetados como c_1, s_1, c_2 y s_2 .
 - Estos transformadores modulados implican las ecuaciones de transformación (ecuaciones 4.5 a la 4.8).
 - Estos transformadores modulados, por conservación de potencia, también implican las transformaciones de fuerza correspondientes.
 - Estos transformadores son modulados por α (generada por el elemento- C).

4.3 Un péndulo simple en Bond Graph

La figura 4.3 muestra un péndulo simple construido por una varilla conectada a la parte superior de una estructura. Un par es aplicado a la parte superior del péndulo. Por simplicidad $l_1 = l_2 = l$, una fuerza de gravedad $u_1 = f_g$ actúa en el centro de la masa.

Debido a que el péndulo es un caso especial de la barra, el bond graph es el mismo que el de la barra pero con componentes adicionales, en particular:

- Fuentes de *velocidad* cero son conectadas a las uniones v_x y v_y que indican que la parte superior está fija.
- Fuentes de *fuerza* cero son conectadas a las uniones V_x y V_y para indicar que no hay fuerzas actuando en el extremo inferior.
- Una fuente de fuerza es conectada a la unión d_y para indicar que la gravedad está actuando en la dirección negativa del eje y en el centro de masa.

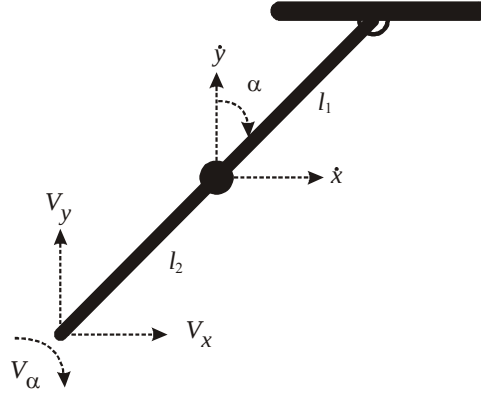


Figura 4.3: Un péndulo simple.

- Otra fuente de fuerza es conectada a la unión v_α para indicar el par aplicado en la articulación.

Solamente uno de los tres elementos- I puede tener causalidad integral, el único que la tiene es el elemento correspondiente de rotación como se muestra en la figura 4.4.

4.4 Un péndulo simple con peso en Bond Graph

Una variación de este tipo de sistemas es agregando a la parte inferior de la varilla un peso de masa m_b de pequeña dimensión, el bond graph de la figura 4.5 es semejante al de la figura 4.4 excepto que las dos fuentes de fuerza de la parte baja de la barra han sido reemplazadas por elementos- I correspondientes a las velocidades x y y de la masa agregada y una tercera entrada F_b ha sido añadida en la forma de una fuente adicional para considerar el efecto de la gravedad debido a la masa agregada.

4.5 Un péndulo doble en Bond Graph

La figura 4.6 muestra un péndulo doble construido con dos péndulos simples sujetando un extremo de la segunda barra a la parte baja de la primera usando una unión de revolución

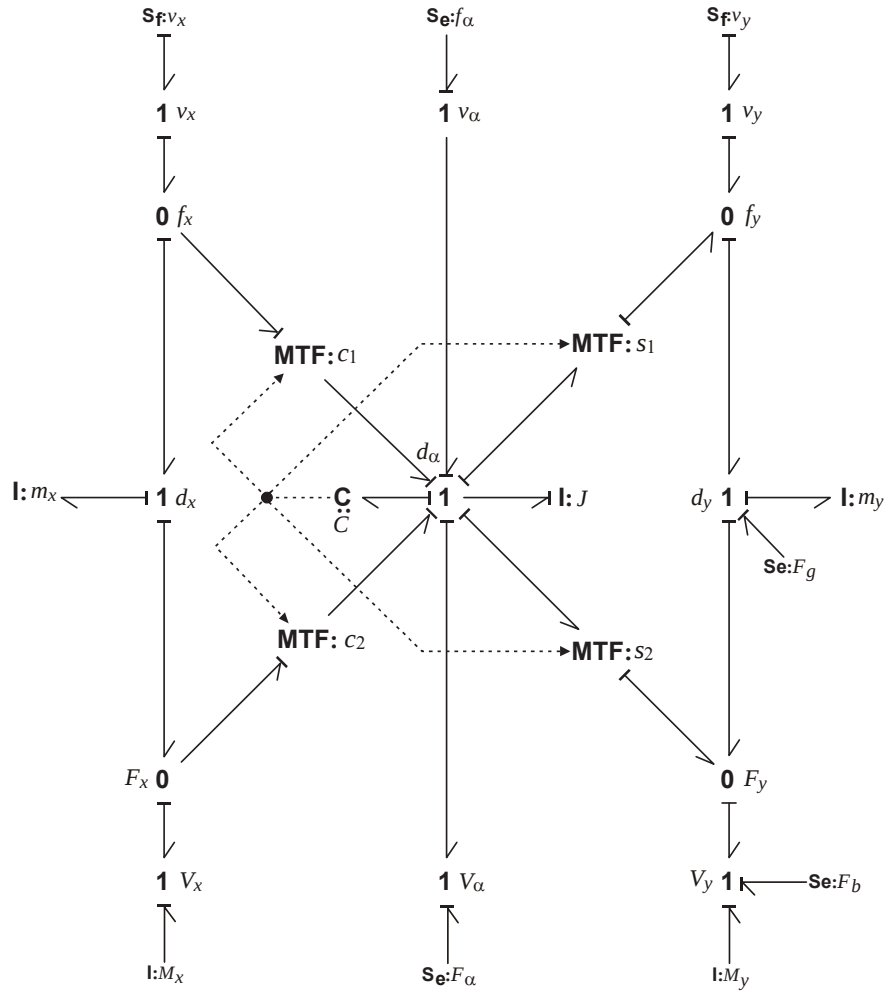


Figura 4.5: Bond Graph de un péndulo simple con masa.

sin fricción. Esta unión obliga que las velocidades sean iguales en la parte baja de la barra superior y la parte superior de la segunda barra. Por simplicidad, las barras se consideran uniformes y de longitud $2l$. La inercia J sobre el centro es:

$$J = \frac{ml^2}{3} \quad (4.11)$$

El ángulo relativo θ_2 de la segunda barra con respecto a la primera es la diferencia de los ángulos absolutos α_1 y α_2 :

$$\theta_2 = \alpha_2 - \alpha_1 \quad (4.12)$$

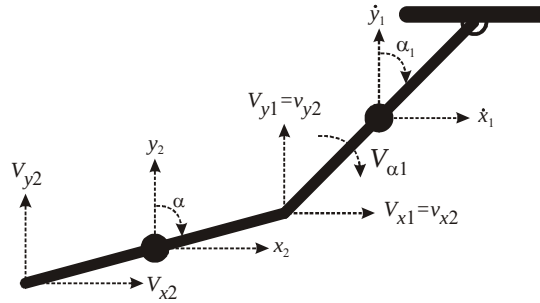


Figura 4.6: Un péndulo doble.

La figura 4.7 muestra el bond graph correspondiente a un péndulo doble. Una copia del bond graph de una barra simple ha sido agregada a otro del péndulo simple y conectada por dos bonds, lo cual asegura que las velocidades sean iguales en la parte baja de la barra superior y la parte superior de la barra inferior.

4.6 Un robot manipulador en dos dimensiones en Bond Graph

Los manipuladores compuestos de eslabones rígidos conectados por uniones de revolución son analizados generalmente por medios de técnicas recursivas como son Newton-Euler o Lagrange. Sin embargo, Bond Graph proporciona una técnica alternativa la cual es particularmente atractiva cuando son modeladas las características de actuador.

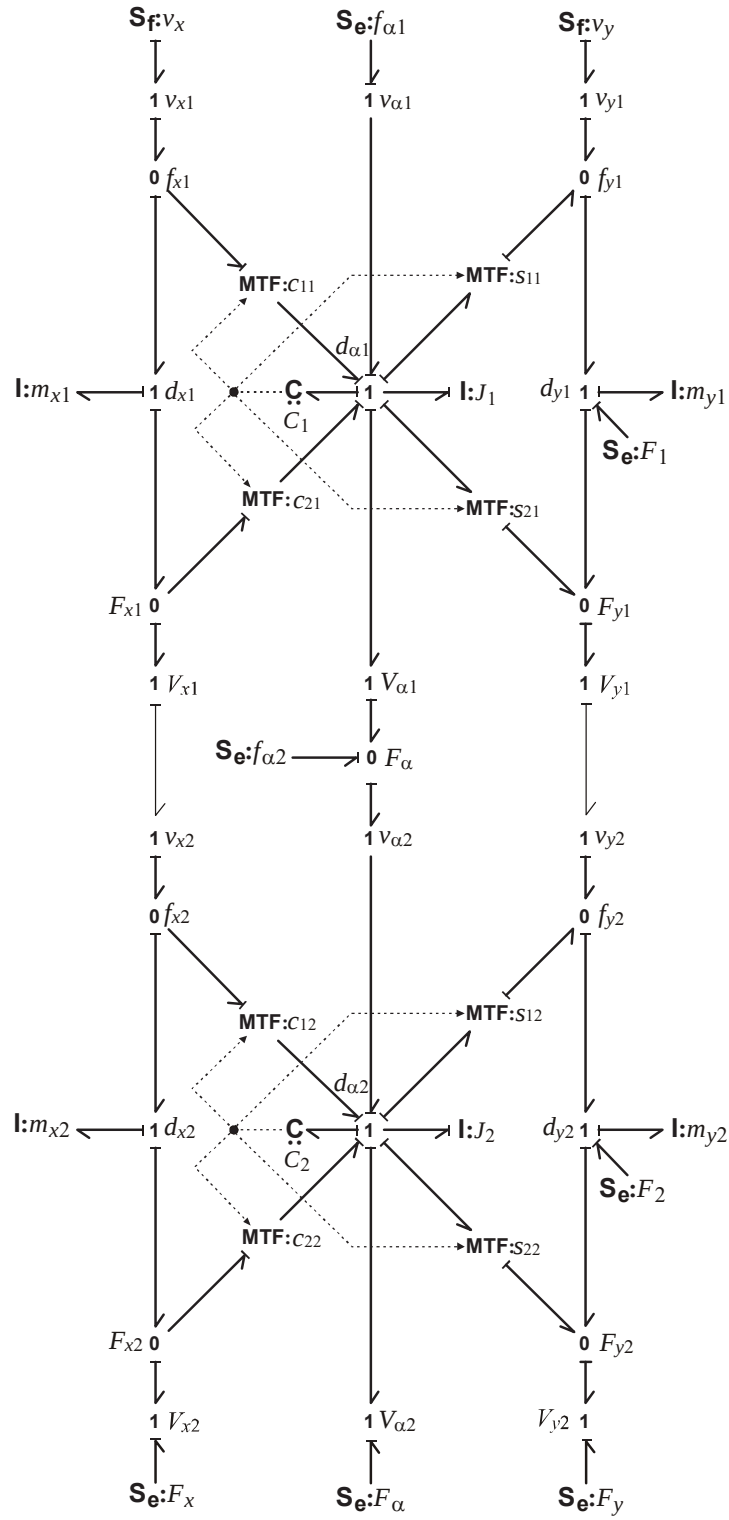


Figura 4.7: Bond Graph de un péndulo doble.

Esta sección considera el manipulador de dos eslabones que se muestra en la figura 4.8 compuesta de dos eslabones rígidos uniformes de longitud $2l$ moviéndose en un plano horizontal.

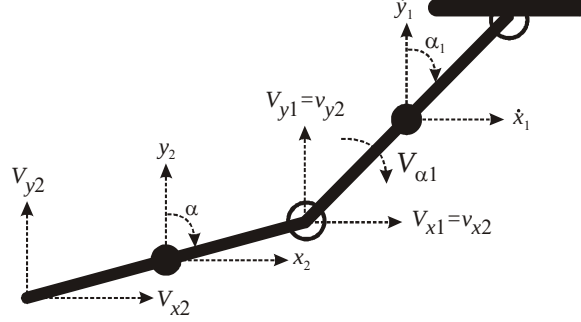


Figura 4.8: Un manipulador de dos eslabones.

Los ángulos de unión θ_1 y θ_2 son:

$$\theta_1 = \alpha_1 \quad (4.13)$$

$$\theta_2 = \alpha_2 - \alpha_1 \quad (4.14)$$

El bond graph que se muestra en la figura 4.9 es similar al del péndulo doble excepto porque:

- No hay términos de gravedad (el manipulador se mueve en un plano horizontal)
- Los pares son aplicados en cada unión y son medidas las correspondientes velocidades de unión.

4.7 No linealidades cinemáticas en mecánica dinámica

Esta sección está dirigida a resolver el siguiente problema, dada una representación esquemática de un sistema mecánico acompañado de descripciones matemáticas de las partes que lo componen, encontrar una forma conveniente para modelar el sistema así como predecir su comportamiento dinámico.

La importancia del problema no necesita remarcarse, se ha trabajado en forma constante, al menos desde el tiempo de Newton y ha atraído la atención de muchos científicos notables,

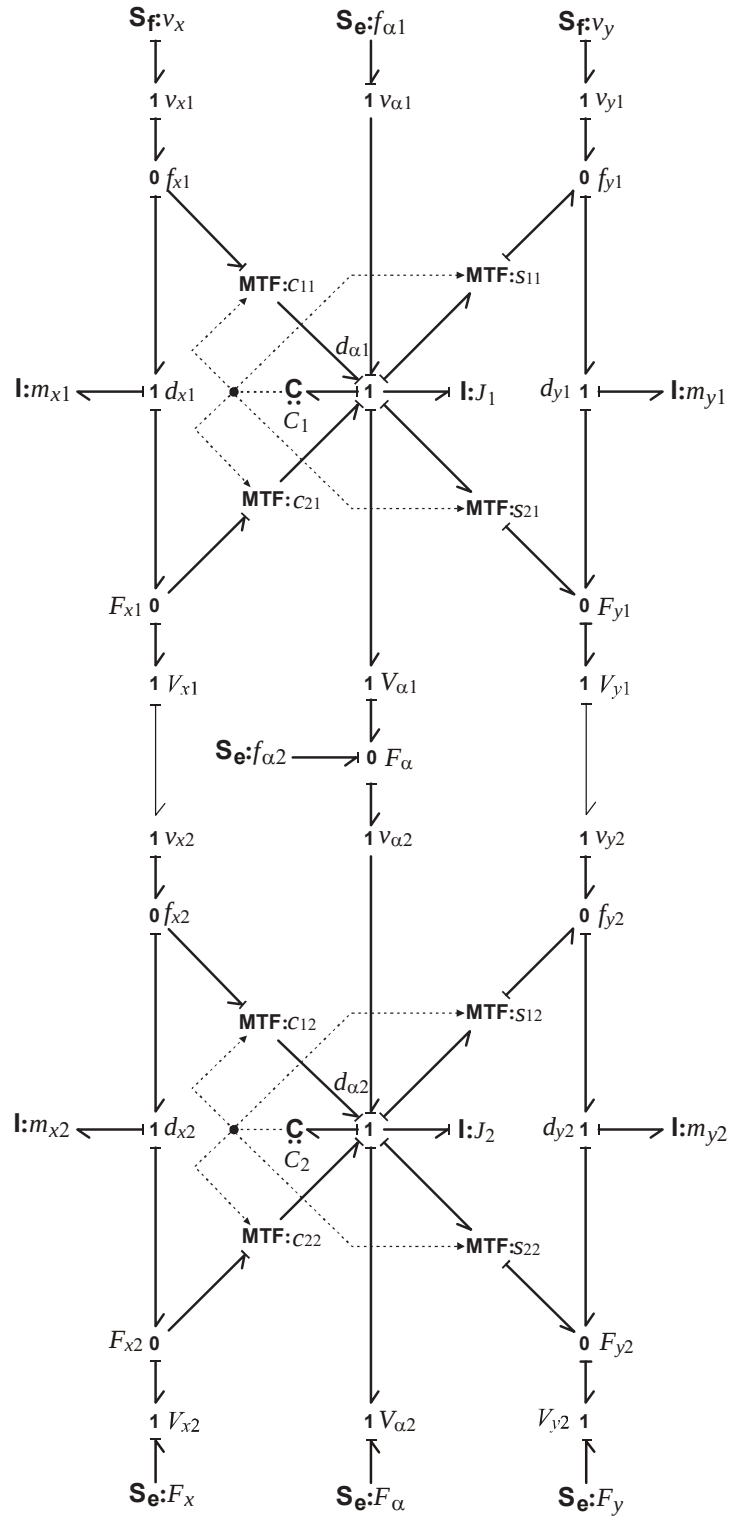


Figura 4.9: Bond Graph de un manipulador de dos eslabones.

incluyendo a Hamilton y Lagrange.

El propósito de esta sección es presentar y desarrollar el uso de ciertas formas de Bond Graph como modelos estándares en mecanismos. Se estudiarán los sistemas mecánicos implicando el movimiento a gran escala de partículas y cuerpos rígidos. Se utilizan una gran variedad de técnicas, incluyendo la selección por el modelador de variables clave para la formulación, la determinación de ciertas transformaciones requeridas por medios analíticos simples, y la combinación de todas las partes en una representación unificada por un Bond Graph.

4.8 El procedimiento de modelado básico

Se inicia considerando el resultado que nos gustaría alcanzar. Para un problema dado en mecánica involucrando partículas, cuerpos rígidos y elementos elásticos, deseamos obtener un conjunto de ecuaciones diferenciales de primer orden en términos de variables que producen significado físico dentro del comportamiento del sistema. Se anticipa que las ecuaciones serán acopladas y si es posible explícitas (esto es, una derivada en cada ecuación) teniendo la siguiente forma:

$$\text{campo-}C \quad \mathbf{f}_C = \phi_C(\mathbf{q}_C) \quad (4.15)$$

$$\text{Campo-}I \quad \mathbf{v}_I = \phi_I(\mathbf{p}_I) \quad (4.16)$$

$$\begin{aligned} \text{Estructura unión} \quad \dot{\mathbf{q}}_C &= [\mathbf{T}_{CI}(\mathbf{q}_C)] \mathbf{v}_I \\ \dot{\mathbf{p}}_I &= [-\mathbf{T}_{CI}^t(\mathbf{q}_C)] \mathbf{f}_C \end{aligned} \quad (4.17)$$

donde $\mathbf{f}_C$ es el conjunto de fuerzas definiendo la coenergía potencial, $\mathbf{q}_C$ es el conjunto de desplazamientos definiendo la energía potencial, $\mathbf{v}_I$ es el conjunto (inercial) de velocidades definiendo la coenergía cinética; $\mathbf{p}_I$ es el conjunto de momentos definiendo la energía cinética, y $\dot{\mathbf{q}}_C$ y $\dot{\mathbf{p}}_I$ son las derivadas de $\mathbf{q}_C$ y $\mathbf{p}_I$, respectivamente.

Abordando un ejemplo para reducir las ecuaciones de (4.15) a (4.17) se tiene:

$$\dot{\mathbf{q}}_C = [\mathbf{T}_{CI}(\mathbf{q}_C)] \phi_I(\mathbf{p}_I) \quad (4.18)$$

$$\dot{\mathbf{p}}_I = [-\mathbf{T}_{CI}^t(\mathbf{q}_C)] \phi_C(\mathbf{q}_C)$$

Estas son las ecuaciones de un sistema conservativo no lineal expresado en términos de variables de estado $\mathbf{q}_C$ y $\mathbf{p}_I$.

La figura 4.10 muestra un modelo de bond graph representando el tipo de sistema antes mencionado.

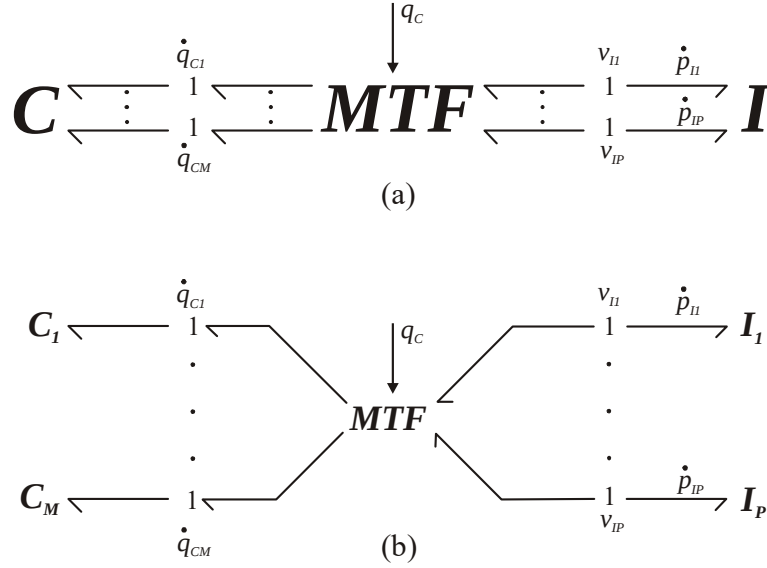


Figura 4.10: Modelo de un bond graph simbólico para un sistema conservativo básico no lineal (a) Campos -C y -I acoplados; (b) Campos -C y -I uniones-1.

4.9 Ejemplo de modelado

Considerando el oscilador no lineal de la figura 4.11a, en el cual la masa es libre para girar en una cuerda y es limitada por un resorte. Un segundo resorte limita la cuerda a girar en el plano X - Y .

Las variables geométricas claves son identificadas en la figura 4.11b como r , θ , x , y , v_x y v_y . Las relaciones constitutivas para resortes e inercias lineales, en forma de las ecuaciones (4.15) y (4.16), son entregadas por las ecuaciones (4.19) y (4.20) para resortes y las ecuaciones (4.21) y (4.22) para inercias:

$$F = k_1 (r - R) \quad (4.19)$$

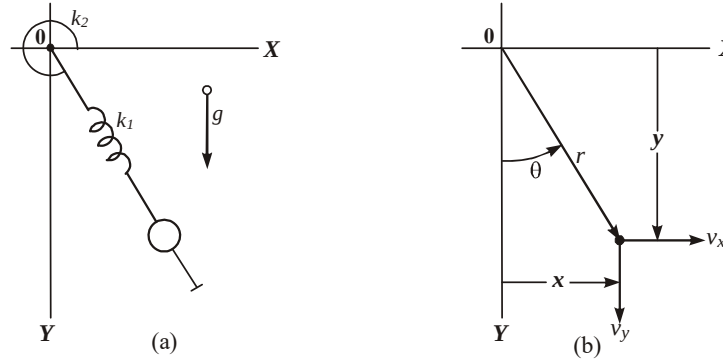


Figura 4.11: Un oscilador mecánico no lineal (a) Diagrama esquemático; (b) Cantidades geométricas claves definidas.

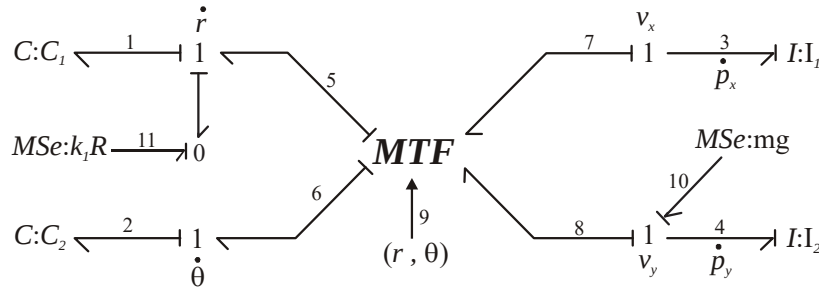


Figura 4.12: Bond graph correspondiente al oscilador no lineal de la figura 4.11.

$$\tau = k_2 \theta \quad (4.20)$$

$$v_x = \frac{1}{m} p_x \quad (4.21)$$

$$v_y = \frac{1}{m} p_y \quad (4.22)$$

donde R es la longitud libre de la barra flexible (resorte), F es la fuerza de la barra flexible, τ es el par de la torsión del resorte en la barra respecto a un eje a través del origen normal al plano X - Y , y k_1 y k_2 son constantes del resorte. Tanto el campo- C como el campo- I son lineales y desacoplados.

El bond graph correspondiente es el que se muestra en la figura 4.12.

Los vectores claves son:

$$\begin{aligned}
 x &= \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \\ \theta \\ p_x \\ p_y \end{bmatrix} ; \dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{f}_1 \\ \dot{f}_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{r} \\ \dot{\theta} \\ F_x \\ F_y \end{bmatrix} ; z = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{bmatrix} \\
 z &= F_I x ; \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{m} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{4.23}$$

Si se identifican r y θ como elementos de el vector $\mathbf{q}_C$, y además v_x y v_y como elementos del vector v_1 , el arreglo $\mathbf{T}_{CI}(\mathbf{q}_C)$ se puede encontrar al considerar las componentes de velocidad que son:

$$\dot{r} = (\sin \theta) v_x + (\cos \theta) v_y \tag{4.24}$$

$$\dot{\theta} = \left(\frac{\cos \theta}{r} \right) v_x + \left(-\frac{\sin \theta}{r} \right) v_y \tag{4.25}$$

por lo tanto:

$$\mathbf{T}_{CI}(\mathbf{q}_C) = \begin{bmatrix} \sin \theta & \cos \theta \\ \frac{\cos \theta}{r} & -\frac{\sin \theta}{r} \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} f_5 \\ f_6 \end{bmatrix} = \mathbf{T}_{CI}(\mathbf{q}_C) \begin{bmatrix} f_3 \\ f_4 \end{bmatrix} \tag{4.26}$$

Sólo resta calcular $\dot{\mathbf{p}}_I$ en términos de las fuerzas en el resorte. Para una definición apropiada de la fuerza F y el efecto del par τ en las direcciones X y Y (esto es p_x y p_y), obtenemos:

$$\dot{p}_x = (-\sin \theta) F + \left(-\frac{\cos \theta}{r} \right) \tau \tag{4.27}$$

$$\dot{p}_y = (-\cos \theta) F + \left(\frac{\sin \theta}{r} \right) \tau + mg \tag{4.28}$$

La inspección cuidadosa de las ecuaciones (4.27) y (4.28) muestran que ciertamente la transformación del arreglo $\mathbf{T}_{CI}(\mathbf{q}_C)$ es integrada como el transpuesto negativo, particularmente:

$$-\mathbf{T}_{CI}^t(\mathbf{q}_C) = \begin{bmatrix} -\sin \theta & -\frac{\cos \theta}{r} \\ -\cos \theta & \frac{\sin \theta}{r} \end{bmatrix} \tag{4.29}$$

La influencia de la gravedad simplemente se suma en forma apropiada (es decir, afecta directamente en p_y) y se muestra en la figura 4.12 como una fuente de esfuerzo, MSe .

Primero se muestran las ecuaciones (4.24) y (4.25) combinadas con las (4.27) y (4.28), eliminando F , τ , v_x y v_y usando las ecuaciones de la (4.19) y (4.22). El sistema de ecuaciones de estado es:

$$\dot{r} = (\sin \theta) \frac{1}{m} p_x + (\cos \theta) \frac{1}{m} p_y \quad (4.30)$$

$$\dot{\theta} = \left(\frac{\cos \theta}{r} \right) \frac{1}{m} p_x + \left(-\frac{\sin \theta}{r} \right) \frac{1}{m} p_y \quad (4.31)$$

$$\dot{p}_x = (-\sin \theta) k_1 (r - R) + \left(-\frac{\cos \theta}{r} \right) k_2 \theta \quad (4.32)$$

$$\dot{p}_y = (-\cos \theta) k_1 (r - R) + \left(\frac{\sin \theta}{r} \right) k_2 \theta + mg \quad (4.33)$$

Una representación bond graph del sistema completo se muestra en la figura 4.12. Los signos menos en las ecuaciones (4.27), (4.28) y (4.29) surgen debido a la convención de signos en las uniones-1 en el lado derecho de la figura 4.12.

4.10 Procedimiento propuesto de modelado

El modelado propuesto está basado principalmente en el desarrollo que realizó Peter Gawthrop, como se muestra en la figura 4.13, esto porque su forma de modelar los sistemas es explícita, y de Karnoop se retoma la idea de simplificar los modelos, es decir, eliminar el uso de 4 transformadores modulados por uno sólo, el cual, tiene la relación constitutiva de los cuatro usados en la primer técnica mencionada.

Las relaciones constitutivas para c_1 y c_2 es $\cos \lambda$ y para s_1 y s_2 es $\sin \lambda$, donde $\lambda = \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$ de acuerdo con el número de eslabones en el robot manipulador, con los efectos moduladores $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$ que se obtienen de los elementos capacitivos.

Ahora, estos 4 MTF's pueden ser sustituidos por uno sólo (como se muestra en la figura 4.14) el cual tendrá dos entradas, y tres salidas con la siguiente relación constitutiva (θ es la señal

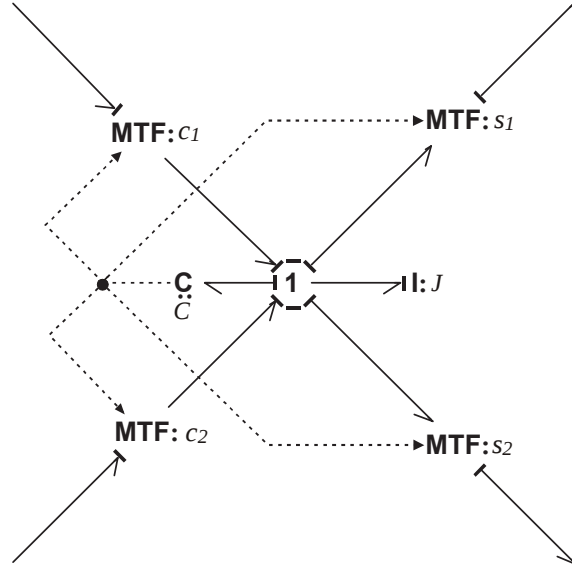


Figura 4.13: Los cuatro transformadores modulados necesarios en la técnica de Gawthrop.

de modulación):

$$f_2 = \cos \theta \cdot f_4 \quad (4.34)$$

$$f_1 = \cos \theta \cdot f_4 \quad (4.35)$$

$$f_5 = \sin \theta \cdot f_4 \quad (4.36)$$

$$f_3 = \sin \theta \cdot f_4 \quad (4.37)$$

$$e_4 = \cos \theta \cdot e_2 + \cos \theta \cdot e_1 - \sin \theta \cdot e_5 - \sin \theta \cdot e_3 \quad (4.38)$$

Además, se le agregan al modelo los efectos de la fricción, tanto en las barras como en las masa de las uniones (donde se considera el peso del motor de control).

4.11 Modelado matemático a partir de su Bond Graph

Una característica importante del modelado de un sistema en Bond Graph, es que a partir de éste, su modelo matemático puede ser derivado en forma directa y relativamente simple.

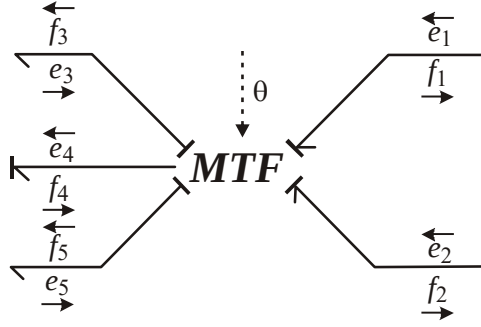


Figura 4.14: Transformador modulado que sustituye los cuatro MTF del modelo de Gawthrop.

4.11.1 Manipulador de un eslabón en BGI (Bond Graph en causalidad Integral)

La figura 4.15 muestra el Bond Graph de un robot manipular de un sólo eslabón.

En este Bond Graph se ha agregado:

- Una fuente $MSe : f_{\alpha_1}$ es la fuente de esfuerzo (generalmente un motor de CD).
- Los 4 elementos- R los cuales representan la fricción de la barra (b_x y b_y) y la fricción debida al efector final (M_x y M_y).
- Las inercias se representan con los 4 elementos- I debido a la barra ($I : m_x$ y $I : m_y$) y debido a la masa del efector final ($I : M_x$ y $I : M_y$).
- Hay un elemento- C que tiene rigidez cero y por lo tanto no afecta en el comportamiento del sistema, pero su correspondiente variable de flujo integrada nos proporciona la señal modulante para el transformador multipuerto (ángulo θ).

El transformador modulado MTF contiene las relaciones constitutivas que implican las transformaciones de fuerza correspondientes.

El efecto de la gravedad se agrega con la fuente de esfuerzo (mg) la cual sólo afecta en el eje y .

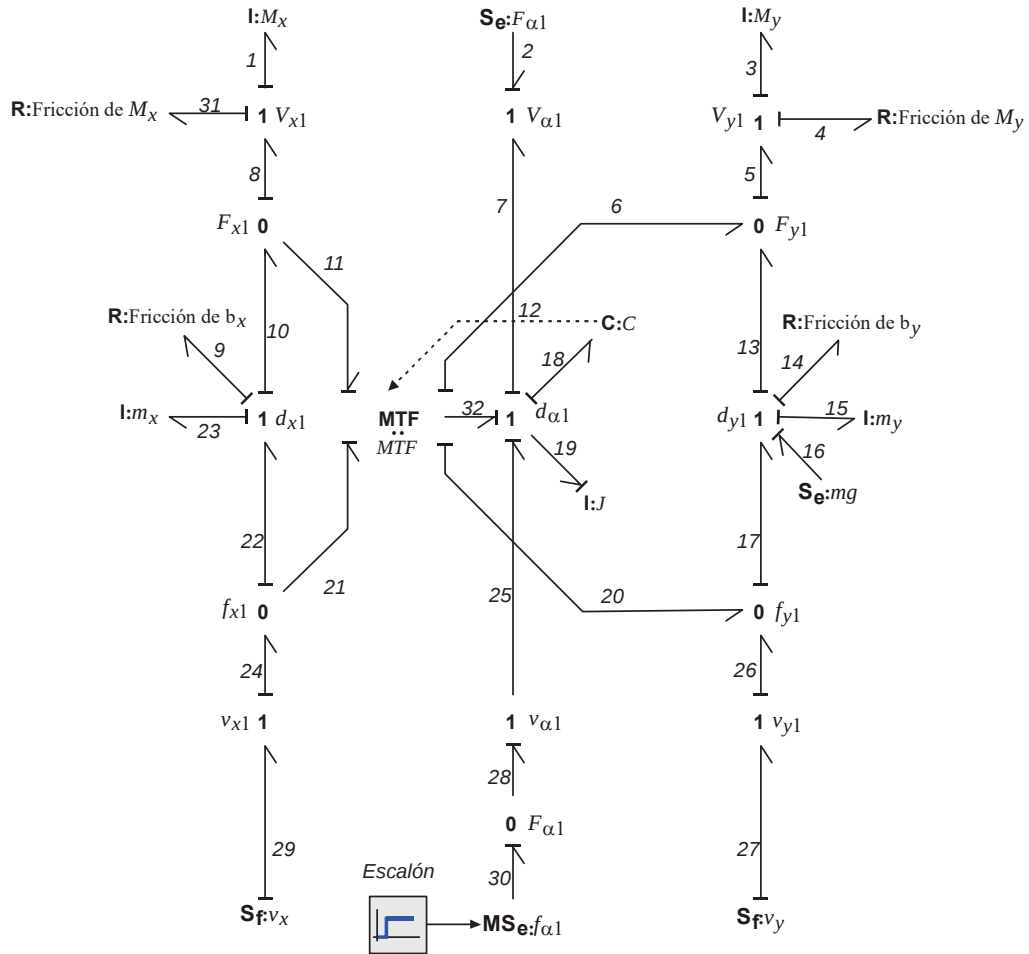


Figura 4.15: Bond Graph de un manipulador de un eslabón.

Los vectores clave son:

$$x = \begin{bmatrix} q_{18} \\ p_{19} \end{bmatrix}; \quad \dot{x} = \begin{bmatrix} f_{18} \\ e_{19} \end{bmatrix}; \quad z = \begin{bmatrix} e_{18} \\ f_{19} \end{bmatrix}; \quad x_d = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_3 \\ p_{15} \\ p_{23} \end{bmatrix}; \quad (4.39)$$

$$\dot{x}_d = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_3 \\ e_{15} \\ e_{23} \end{bmatrix}; \quad D_{in} = \begin{bmatrix} f_4 \\ f_9 \\ f_{14} \\ f_{31} \end{bmatrix}; \quad D_{out} = \begin{bmatrix} e_4 \\ e_9 \\ e_{14} \\ e_{31} \end{bmatrix}; \quad u = \begin{bmatrix} e_2 \\ e_{30} \\ f_{27} \\ f_{29} \\ e_{16} \end{bmatrix} \quad (4.40)$$

Las relaciones constitutivas para los elementos son:

$$F = \text{Diag} \left\{ \frac{1}{C}; \frac{1}{J} \right\}; \quad F_d = \text{Diag} \{M_x; M_y; m_y; m_x\}; \quad L = \text{Diag} \{FM_y; Fb_x; Fb_y; FM_x\} \quad (4.41)$$

Las relaciones entrada-salida del transformador modulado (MTF) en forma de ecuaciones:

$$f_{21} = \cos \theta \cdot f_{32} \quad (4.42)$$

$$f_{11} = \cos \theta \cdot f_{32} \quad (4.43)$$

$$f_{20} = \sin \theta \cdot f_{32} \quad (4.44)$$

$$f_6 = \sin \theta \cdot f_{32} \quad (4.45)$$

$$e_{32} = \cos \theta \cdot e_{21} + \cos \theta \cdot e_{11} - \sin \theta \cdot e_{20} - \sin \theta \cdot e_6 \quad (4.46)$$

Para la matriz de estructura de unión se tiene que:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ D_{in} \\ y \end{bmatrix} = S \begin{bmatrix} z \\ D_{out} \\ u \\ \dot{x}_d \end{bmatrix} \quad (4.47)$$

$$z_d = -S_{14}^T z$$

La matriz de estructura unión queda:

$$\begin{bmatrix} f_{18} \\ e_{19} \\ f_4 \\ f_9 \\ f_{14} \\ f_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \sin \theta & \cos \theta & -\sin \theta & 2 \cos \theta & 1 & 1 & 0 & 0 & \sin \theta & 2 \cos \theta & -2 \sin \theta & -\sin \theta & \cos \theta \\ 0 & 2 \sin \theta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\cos \theta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sin \theta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 \cos \theta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{18} \\ f_{19} \\ e_4 \\ e_9 \\ e_{14} \\ e_{31} \\ e_2 \\ e_{30} \\ f_{27} \\ f_{29} \\ e_{16} \\ e_1 \\ e_3 \\ e_{15} \\ e_{23} \end{bmatrix} \quad (4.48)$$

En la estructura se puede observar que S_{11} y S_{22} son matrices cuadradas antisimétricas y que S_{12} es la matriz transpuesta negativa de S_{21} . Las propiedades anteriores están basadas en el principio de conservación de energía.

De la estructura unión anterior (ecuación 4.48) se observa que:

$$S_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.49)$$

$$S_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 \sin \theta & \cos \theta & -\sin \theta & 2 \cos \theta \end{bmatrix} \quad (4.50)$$

$$S_{13} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & \sin \theta \end{bmatrix} \quad (4.51)$$

$$S_{14} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 \cos \theta & -2 \sin \theta & -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (4.52)$$

$$S_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \sin \theta \\ 0 & -\cos \theta \\ 0 & \sin \theta \\ 0 & -2 \cos \theta \end{bmatrix} \quad (4.53)$$

$$S_{22} = 0 \quad (4.54)$$

$$S_{23} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.55)$$

$$S_{24} = 0 \quad (4.56)$$

Para obtener la representación de estados de esta clase de sistemas no lineales a partir del Bond Graph en causalidad Integral se tiene que:

$$\dot{x} = f(x)x(t) + g(x)u(t) \quad (4.57)$$

$$y = h(x)x(t) + i(x)u(t) \quad (4.58)$$

donde:

$$f(x) = E^{-1}(S_{11} + S_{12}MS_{21})F \quad (4.59)$$

$$g(x) = E^{-1}(S_{13} + S_{12}MS_{23}) \quad (4.60)$$

$$h(x) = (S_{31} + S_{32}MS_{21})F \quad (4.61)$$

$$i(x) = S_{33} + S_{32}MS_{23} \quad (4.62)$$

$$E = I + S_{14}F_d^{-1}S_{14}^TF \quad (4.63)$$

$$M = (I - LS_{22})^{-1}L \quad (4.64)$$

Por lo que usando las ecuaciones (4.63) y (4.64), se obtiene E y M respectivamente:

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 + \frac{\cos^2 \theta}{J} \left(\frac{4}{M_x} + \frac{1}{m_x} \right) + \frac{\sin^2 \theta}{J} \left(\frac{4}{M_y} + \frac{1}{m_y} \right) \end{bmatrix} \quad (4.65)$$

Se encuentra la inversa de la matriz E :

$$E^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & J \frac{\Gamma}{\Delta} \end{bmatrix} \quad (4.66)$$

donde:

$$\Gamma = M_x M_y m_x m_y \quad (4.67)$$

$$\Delta = M_x M_y m_y \cos^2 \theta + 4 M_y m_x m_y \cos^2 \theta + M_x M_y m_x \sin^2 \theta + 4 M_x m_x m_y \sin^2 \theta + J M_x M_y m_x m_y$$

La matriz M se obtiene de:

$$M = \left(I - \underbrace{LS_{22}}_0 \right)^{-1} \quad L = \text{Diag} \{ FM_y; Fb_x; Fb_y; FM_x \} \quad (4.68)$$

De acuerdo a las ecuaciones (4.59) a la (4.62), se sustituyen valores y se obtiene $f(x)$:

$$f(x) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{J} \\ -\frac{J\Gamma}{C\Delta} & -\frac{M_x M_y m_x m_y (4FM_x \cos^2 \theta + Fb_x \cos^2 \theta + 4FM_y \sin^2 \theta + Fb_y \sin^2 \theta)}{\Delta} \end{bmatrix} \quad (4.69)$$

Por lo que para $g(x)$:

$$g(x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ J\frac{\Gamma}{\Delta} & J\frac{\Gamma}{\Delta} & -J\frac{\Gamma}{\Delta} Fb_y \sin \theta & J\frac{\Gamma}{\Delta} (2FM_x \cos \theta + Fb_x \cos \theta) & J\frac{\Gamma}{\Delta} \sin \theta \end{bmatrix} \quad (4.70)$$

Es decir, la representación en espacio de estados es:

$$\begin{bmatrix} f_{18} \\ e_{19} \end{bmatrix} = f(x) \begin{bmatrix} q_{18} \\ p_{19} \end{bmatrix} + g(x) \begin{bmatrix} e_2 \\ e_{30} \\ f_{27} \\ f_{29} \\ e_{16} \end{bmatrix} \quad (4.71)$$

donde, los estados son q_{18} que es la posición angular del brazo ó ángulo θ , y p_{19} es el momento angular en el mismo, e_{30} es la entrada para llevar el brazo a la posición deseada y por último e_{16} es el efecto debido a la fuerza de gravedad (mg), además los valores de $e_2 = f_{27} = f_{29} = 0$.

4.12 Modelado matemático a partir de su representación Euler-Lagrange

El análisis tradicional de sistemas dinámicos típicamente emplean métodos de modelado directo cuando los sistemas son simples o sencillos, y métodos de energía indirectos sofisticados cuando no los son. Los métodos directos de modelado incluyen aplicación directa de principios conocidos de conservación de masa, momento, y relaciones constitutivas variadas; los métodos de energía incluyen el uso de ecuaciones de Lagrange y hamilton.

La dinámica del robot trata con las formulaciones matemáticas de las ecuaciones de movimiento del brazo. Tales ecuaciones son útiles para la simulación en computadora del movimiento del robot, el diseño de ecuaciones de control apropiadas para el robot y la evaluación del diseño y estructura del brazo.

El modelo dinámico de un robot se puede obtener a partir de leyes físicas conocidas tales como las leyes de la mecánica newtoniana y lagrangiana. Esto conduce al desarrollo de las ecuaciones de movimiento dinámico para las diversas articulaciones del manipulador en términos de los parámetros geométricos e inerciales de los elementos. Métodos convencionales como las formulaciones de Lagrange-Euler y Newton-Euler se pueden aplicar de manera sistemática para desarrollar las ecuaciones de movimiento del brazo.

Las ecuaciones de movimiento general de un manipulador se pueden expresar mediante la aplicación directa de la formulación Euler-Lagrange a sistemas no conservativos[Fu, 1989].

4.12.1 Principio de D'Alembert

La idea de D'Alembert (1717-1783) fue utilizar la metodología del principio de trabajos virtuales para aplicar a los problemas no estáticos sino dinámicos. Tan sólo es necesario modificar el comienzo, y en lugar de decir "para que un sistema se encuentre en equilibrio estático la fuerza neta aplicada a cada cuerpo es cero, $F_i = 0$ para todo i ". Cambia por: "para que un sistema se encuentre en equilibrio dinámico la fuerza neta aplicada a cada cuerpo menos la masa por aceleración del cuerpo es cero, $F_i - m_i a_i = 0$ [http://materias.fi.ub.ar]. Es decir, considere el sistema de partículas que se muestra en la figura 4.16 [Goldstein, 1980]. La segunda ley de Newton aplicada a la partícula i .

$$\sum_j (F_{ji}) + F_i^{(e)} = m_i \ddot{r}_i \quad (4.72)$$

donde: $F_i^{(e)}$ es la fuerza externa que está actuando sobre la partícula i debido a fuentes externas al sistema, F_{ji} es la fuerza interna sobre la partícula i debido a la partícula j . Haciendo las sumas sobre todas las partículas i :

$$\sum_{i,j \ i \neq j} (F_{ji}) + F_i^{(e)} = \sum_i m_i \ddot{r}_i \quad (4.73)$$

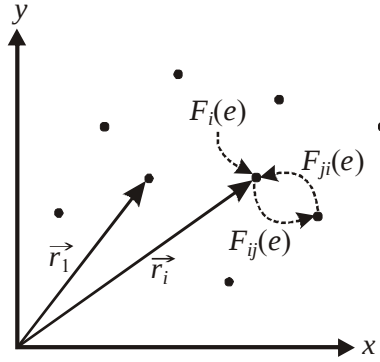


Figura 4.16: Interacción de fuerzas que actúan sobre una partícula.

Claramente $F_{ii} = 0$, también debido a la tercera ley de Newton $\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$ por lo tanto:

$$\sum_i F_i^{(e)} = \sum_i m_i \ddot{r}_i \quad (4.74)$$

La ecuación anterior no describe totalmente el movimiento de la partícula i , es necesario tomar en cuenta las restricciones de movimiento (restricciones holonómicas) $r_{ij} = \text{constante}$, descomponiendo la fuerza externa $F_i^{(e)}$ en la fuerza externa aplicada $F_i^{(a)}$ y la fuerza externa debido a la fuerza de restricción f_i ,

$$\sum_i \left(F_i^{(a)} + f_i \right) = \sum_i m_i \ddot{r}_i \quad (4.75)$$

Ahora, considere un desplazamiento infinitesimal δr_i , entonces el trabajo virtual está dado por:

$$w = \sum_i F_i^{(e)} \cdot \delta r_i \quad (4.76)$$

Si el sistema está en equilibrio,

$$\sum F_i^{(e)} \cdot \delta r_i = 0 \implies \text{principio de trabajo virtual.} \quad (4.77)$$

Sustituyendo $F_i^{(e)}$,

$$\sum_i \left(F_i^{(a)} + f_i \right) \cdot \delta r_i = 0 \quad (4.78)$$

Considerando aquellos sistemas para los cuales las fuerzas de restricción no realizan trabajo, entonces:

$$\sum_i F_i^{(a)} \cdot \delta r_i = 0 \implies \text{para sistemas con restricciones holónomicas.} \quad (4.79)$$

$$F_i^{(e)} = F_i^{(a)} + f_i = \dot{p}_i = m_i \dot{v}_i = m_i \ddot{r}_i \quad (4.80)$$

$$F_i^{(a)} = F_i^{(e)} - f_i \therefore \sum_i \left(F_i^{(e)} - f_i \right) \cdot \delta r_i = 0 \quad (4.81)$$

Pero $\sum F_i^{(e)} \cdot \delta r_i = 0$, entonces:

$$\sum_i \left(F_i^{(a)} - \dot{p}_i \right) \cdot \delta r_i = 0 \implies \text{Principio de D'Alembert.} \quad (4.82)$$

4.12.2 Ecuación Euler-Lagrange

Como el principio de D'Alembert (ecuación (4.82)) es función de las coordenadas r_i que pueden ser linealmente independientes. Se desea expresarlo en función de las variables generalizadas q_j ; $j = 1, 2, \dots, n$.

$$\sum_i \left(F_i^{(a)} - \dot{p}_i \right) \cdot \sum_j \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \delta q_j = \sum_j \left(Q_j - \sum_i \dot{p}_i \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \right) \cdot \delta q_j \quad (4.83)$$

donde se define la fuerza generalizada Q_j como:

$$Q_j = \sum_i F_i^{(a)} \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \quad (4.84)$$

Considere el término:

$$\sum_i m_i \ddot{r}_i \frac{\partial r_i}{\partial q_j} = \sum_i \left(\frac{d}{dt} \left(m_i \dot{r}_i \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \right) - m_i \dot{r}_i \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial r_i}{\partial q_j} \right) \right) \quad (4.85)$$

donde se restó y sumó el término $m_i \dot{r}_i \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial r_i}{\partial q_j} \right)$, dado que:

$$r_i = r_i(q_1, q_2, \dots, q_n, t) \quad (4.86)$$

Entonces:

$$\dot{r}_i = \frac{d \vec{r}_i}{dt} = \sum_j \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \quad (4.87)$$

donde $\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}$ generalmente es cero. expandiendo la ecuación (4.87),

$$\dot{\vec{r}}_i = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_2} \dot{q}_2 + \cdots + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_n} \dot{q}_n + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \quad (4.88)$$

De la ecuación (4.88) se puede deducir que:

$$\frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{q}_1} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_1}; \quad \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{q}_2} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_2}; \cdots; \quad \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{q}_n} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_n} \quad (4.89)$$

es decir,

$$\frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \quad (4.90)$$

Sustituyendo en la ecuación (4.85),

$$\sum_i m_i \ddot{\vec{r}}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = \sum_i \left(\frac{d}{dt} \left(m_i \dot{\vec{r}}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial \dot{q}_j} \right) - m_i \dot{\vec{r}}_i \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial q_j} \right) \quad (4.91)$$

$$\sum_i m_i \ddot{\vec{r}}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = \sum_i \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left(\frac{m_i \dot{\vec{r}}_i \dot{\vec{r}}_i}{2} \right) - \frac{\partial}{\partial q_j} \frac{m_i \dot{\vec{r}}_i \dot{\vec{r}}_i}{2} \right) \quad (4.92)$$

$$\sum_i m_i \ddot{\vec{r}}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} \quad (4.93)$$

donde la energía cinética es:

$$T = \frac{1}{2} \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i^2 = \frac{1}{2} \sum m_i \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \right)^2 \quad (4.94)$$

Sustituyendo (4.85) en (4.83) se obtiene:

$$T = \frac{1}{2} \sum_j \left(Q_j - \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} + \frac{\partial T}{\partial q_j} \right) \cdot \delta q_j = 0 \quad (4.95)$$

Si las restricciones son holonómicas, entonces todos los δq_j son linealmente independientes.

Así:

$$Q_j - \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} + \frac{\partial T}{\partial q_j} = 0 \quad (4.96)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j \quad (4.97)$$

Si las $F_i^{(a)}$ son derivables de una función de potencial, $F_i^{(a)} = \frac{\partial V(r_1, r_2, \dots)}{\partial r_i}$, entonces, la fuerza generalizada Q_j toma la forma:

$$Q_j = \sum_i \left(-\frac{\partial V}{\partial r_i} \right) \cdot \frac{\partial r_i}{\partial q_j} = - \left(\frac{\partial V}{\partial r_1} \cdot \frac{\partial r_1}{\partial q_1} + \frac{\partial V}{\partial r_2} \cdot \frac{\partial r_2}{\partial q_1} + \cdots \right) \quad (4.98)$$

$$Q_j = - \frac{\partial V(r_1, r_2, \dots)}{\partial q_j} \quad (4.99)$$

Como $V(q_j)$, entonces $\frac{dV}{dq_j} = 0$, entonces la ecuación (4.97) se puede escribir como:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \quad (4.100)$$

donde se define la función de Lagrange:

$$L = T - V \quad (4.101)$$

En el caso que se tengan fuerzas τ_j no derivables de una función potencial, Q_j puede dividirse en las que si lo son y en τ_j (como es el caso de fuerza de fricción), la ecuación (4.100) se rescribe como:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = \tau_j \implies \text{Modelo Euler-Lagrange} \quad (4.102)$$

Supóngase que el sistema a modelar satisface:

- i)* El marco de referencia (x, y, z) es inercial, así, son validadas las leyes de Newton.
- ii)* El trabajo virtual neto realizado por las fuerzas de restricción es despreciable. Entonces es valido el principio de D'Alembert.
- iii)* Restricciones holonómicas.

4.13 Comparación de resultados de los modelos Euler-Lagrange y Bond Graph

Para comparar los dos métodos de modelado, se propone modelar el robot manipulador más simple: el de un sólo eslabón, como se muestra en la figura 4.17.

Se aplica el modelo matemático Euler-Lagrange: La variable generalizada es:

$$q = \theta \quad (4.103)$$

Para la masa m tenemos:

$$\cos \theta = \frac{x}{l} \therefore x = l \cos \theta \quad \text{y} \quad \sin \theta = \frac{y}{l} \therefore y = l \sin \theta \quad (4.104)$$

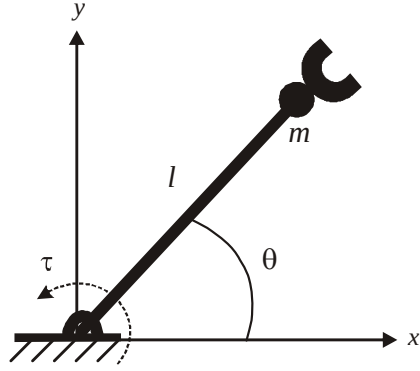


Figura 4.17: Robot manipulador más simple: de un eslabón.

Por lo que el vector $\vec{r}$ es:

$$\vec{r} = (l \cos \theta) i + (l \sin \theta) j \quad (4.105)$$

Como se vio anteriormente, la energía cinética es:

$$T = \frac{1}{2} \sum_j m_i \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j \right)^2 \quad (4.106)$$

Sustituyendo $\vec{r}_1$ se obtiene:

$$T = \frac{1}{2} m \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} \dot{\theta} \right)^2 \quad (4.107)$$

Se resuelve la derivada parcial, y recordando que $i \cdot i = j \cdot j = 1$ y $i \cdot j = j \cdot i = 0$,

$$T = \frac{1}{2} m \left\{ [(-l \sin \theta) i + (l \cos \theta) j] \dot{\theta} \right\}^2 \quad (4.108)$$

$$T = \frac{1}{2} m (l^2 \sin^2 \theta i^2 - 2l^2 \sin \theta \cos \theta i j + l^2 \cos^2 \theta j^2) \dot{\theta}^2 \quad (4.109)$$

$$T = \frac{1}{2} m l^2 (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) \dot{\theta}^2 \quad (4.110)$$

$$T = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2 \quad (4.111)$$

La energía potencial debida a la masa m es:

$$V_m = m l g \sin \theta \quad (4.112)$$

Sustituyendo en la ecuación de Lagrange (ecuación (4.101)) se obtiene:

$$L = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 - mlg \sin \theta \quad (4.113)$$

Se resuelve la derivada para el modelo Euler-Lagrange (ecuación (4.100)):

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = ml^2\dot{\theta} \quad ; \quad \frac{\partial L}{\partial \theta} = -mlg \cos \theta \quad ; \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) = ml^2\ddot{\theta} \quad (4.114)$$

Entonces, para obtener la ecuación del modelo matemático Euler-Lagrange, de acuerdo a la ecuación (4.102) se tiene que:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = \tau \quad (4.115)$$

Sustituyendo las derivadas obtenidas queda:

$$ml^2\ddot{\theta} + mlg \cos \theta = \tau \quad (4.116)$$

Escrito en la forma de ecuaciones diferenciales de primer orden, donde $x_1 = \theta$ y $x_2 = \dot{\theta}$:

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (4.117)$$

$$\dot{x}_2 = \frac{\tau}{ml^2} - \frac{g}{l} \cos x_1 \quad (4.118)$$

Simulando en el software SimnonTM el sistema de las ecuaciones (4.117) y (4.118), y considerando valores unitarios (excepto la gravedad $g = -9.78 \frac{m}{s^2}$) se obtienen las graficas de la figura 4.18.

Ahora, el Bond Graph de un manipulador de un eslabón es el que se muestra en la figura 4.15, el modelado matemático es el de la ecuación (4.71).

El resultado de la simulación del Bond Graph de la figura 4.15 graficando posición (ángulo $\theta = q_{18}$) y la velocidad angular ($\dot{\theta} = f_{18}$) usando el programa 20-sim[®] es la que se muestra en la figura 4.19.

Notar que en esta simulación (figura 4.19) se eliminó el efecto del rozamiento para compararla con la obtenida con el metodo Euler-Lagrange ya que en este no se concideraron pérdidas de energía por fricción.

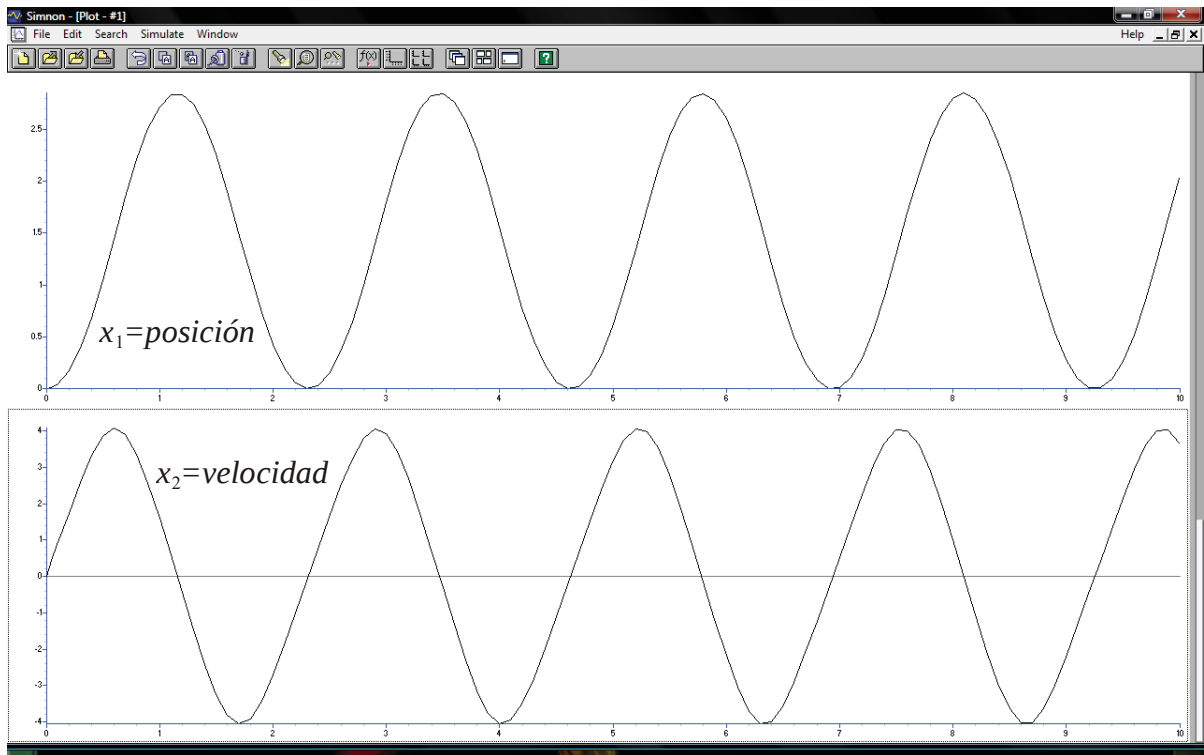


Figura 4.18: Simulación de un manipulador de un eslabón en SimnonTM.

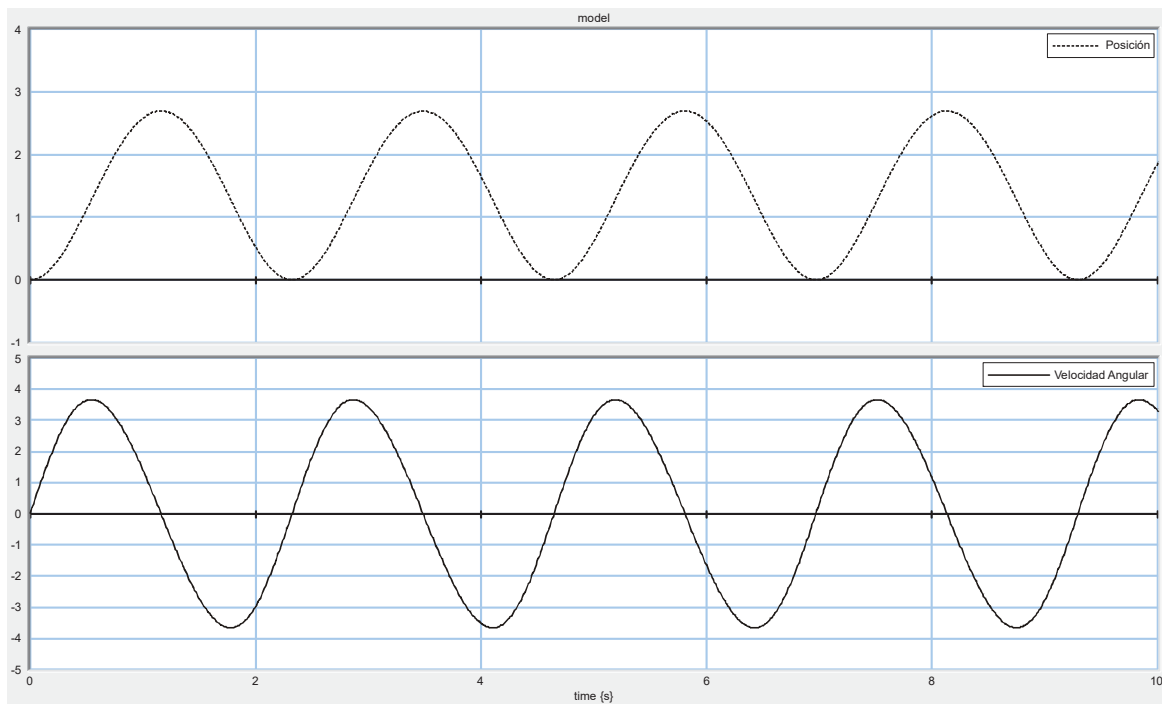


Figura 4.19: Simulación de un manipulador de un eslabón en 20-sim.

4.13.1 Modelo Euler-Lagrange del robot manipulador planar de dos eslabones

Considere el robot manipulador planar de la figura 4.20, además se consideran masas concentradas en los puntos extremos.

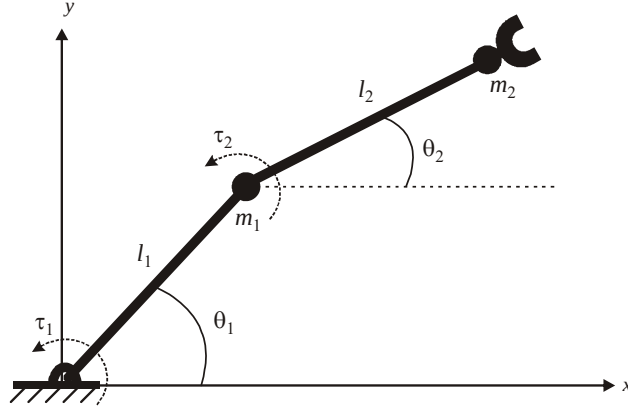


Figura 4.20: Esquemático de un robot manipulador planar.

Las variables generalizadas son:

$$q_1 = \theta_1 \text{ y } q_2 = \theta_2 \quad (4.119)$$

Para la masa m_1 se tiene:

$$\cos \theta_1 = \frac{x_1}{l_1} \therefore x_1 = l_1 \cos \theta_1 \text{ y } \sin \theta_1 = \frac{y_1}{l_1} \therefore y_1 = l_1 \sin \theta_1 \quad (4.120)$$

Por lo que el vector $\vec{r}_1$ es:

$$\vec{r}_1 = (l_1 \cos \theta_1) i + (l_1 \sin \theta_1) j \quad (4.121)$$

Para masa m_2 se tiene:

$$\cos \theta_2 = \frac{x_2}{l_2} \therefore x_2 = l_2 \cos \theta_2 + x_1 \text{ y } \sin \theta_2 = \frac{y_2}{l_2} \therefore y_2 = l_2 \sin \theta_2 + y_1 \quad (4.122)$$

Por lo que el vector $\vec{r}_2$ es:

$$\vec{r}_2 = (l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos \theta_2) i + (l_1 \sin \theta_1 + l_2 \sin \theta_2) j \quad (4.123)$$

Como se vio anteriormente, la energía cinética es:

$$T = \frac{1}{2} \sum_j m_i \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j \right)^2 \quad (4.124)$$

Desarrollando la sumatoria y sustituyendo $\vec{r}_1$ y $\vec{r}_2$ se obtiene:

$$T = \underbrace{\frac{1}{2} m_1 \left(\frac{\partial \vec{r}_1}{\partial \theta_1} \dot{\theta}_1 + \frac{\partial \vec{r}_1}{\partial \theta_2} \dot{\theta}_2 \right)^2}_{T_1} + \underbrace{\frac{1}{2} m_2 \left(\frac{\partial \vec{r}_2}{\partial \theta_1} \dot{\theta}_1 + \frac{\partial \vec{r}_2}{\partial \theta_2} \dot{\theta}_2 \right)^2}_{T_2} \quad (4.125)$$

Se resuelven las derivadas parciales,

$$\frac{\partial \vec{r}_1}{\partial \theta_1} = (-l_1 \sin \theta_1) i + (l_1 \cos \theta_1) j \quad ; \quad \frac{\partial \vec{r}_1}{\partial \theta_2} = 0 \quad (4.126)$$

$$\frac{\partial \vec{r}_2}{\partial \theta_1} = (-l_1 \sin \theta_1) i + (l_1 \cos \theta_1) j \quad ; \quad \frac{\partial \vec{r}_2}{\partial \theta_2} = (-l_2 \sin \theta_2) i + (l_2 \cos \theta_2) j \quad (4.127)$$

Sustituyendo se encuentran los valores de T_1 , y recordando que $i \cdot i = j \cdot j = 1$ y $i \cdot j = j \cdot i = 0$,

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{1}{2} m_1 \left\{ [(-l_1 \sin \theta_1) i + (l_1 \cos \theta_1) j] \dot{\theta}_1 \right\}^2 \\ T_1 &= \frac{1}{2} m_1 \left[l_1^2 \sin^2 \theta_1 i^2 - \underbrace{2 \sin \theta_1 \cos \theta_1 i j}_0 + l_1^2 \cos^2 \theta_1 j^2 \right] \dot{\theta}_1^2 \\ T_1 &= \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot{\theta}_1^2 \end{aligned} \quad (4.128)$$

Para T_2 ,

$$\begin{aligned} T_2 &= \frac{1}{2} m_2 \left\{ [(-l_1 \sin \theta_1) i + (l_1 \cos \theta_1) j] \dot{\theta}_1 + [(-l_2 \sin \theta_2) i + (l_2 \cos \theta_2) j] \dot{\theta}_2 \right\}^2 \\ T_2 &= \frac{1}{2} m_2 \left[(-l_1 \dot{\theta}_1 \sin \theta_1 - l_2 \dot{\theta}_2 \sin \theta_2)^2 i^2 + (l_1 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 + l_2 \dot{\theta}_2 \cos \theta_2)^2 j^2 \right] \\ T_2 &= \frac{1}{2} m_2 [l_1^2 \dot{\theta}_1^2 \sin^2 \theta_1 + 2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin \theta_1 \sin \theta_2 + l_2^2 \dot{\theta}_2^2 \sin^2 \theta_2 + l_1^2 \dot{\theta}_1^2 \cos^2 \theta_1 \\ &\quad + 2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos \theta_1 \cos \theta_2 + l_2^2 \dot{\theta}_2^2 \cos^2 \theta_2] \\ T_2 &= \frac{1}{2} m_2 [l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + 2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 (\sin \theta_1 \sin \theta_2 + \cos \theta_1 \cos \theta_2)] \end{aligned} \quad (4.129)$$

Entonces realizando la suma $T = T_1 + T_2$ y usando la identidad trigonométrica $\cos(A \pm B) = \cos A \cos B \mp \sin A \sin B$ queda:

$$T = \frac{1}{2} l_1^2 \dot{\theta}_1^2 (m_1 + m_2) + \frac{1}{2} m_2 l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + l_1 l_2 m_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \quad (4.130)$$

La energía potencial debida a las masas es $V = V_{m_1} + V_{m_2}$ es,

$$V_{m_1} = m_1 l_1 g \sin \theta_1 \quad ; \quad V_{m_2} = m_2 g (l_1 \sin \theta_1 + l_2 \sin \theta_2) \quad (4.131)$$

Sustituyendo en la ecuación de Lagrange (ecuación (4.101)) se obtiene:

$$L = \frac{1}{2} l_1^2 \dot{\theta}_1^2 (m_1 + m_2) + \frac{1}{2} m_2 l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + l_1 l_2 m_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos (\theta_1 - \theta_2) - m_1 l_1 g \sin \theta_1 - m_2 g (l_1 \sin \theta_1 + l_2 \sin \theta_2) \quad (4.132)$$

Se resuelven las derivadas parciales para el modelo Euler-Lagrange (ecuación (4.100)):

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} = l_1^2 \dot{\theta}_1 (m_1 + m_2) + l_1 l_2 m_2 \dot{\theta}_2 \cos (\theta_1 - \theta_2) \quad (4.133)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} = m_2 l_2^2 \dot{\theta}_2 + l_1 l_2 m_2 \dot{\theta}_1 \cos (\theta_1 - \theta_2) \quad (4.134)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_1} = -l_1 l_2 m_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin (\theta_1 - \theta_2) - l_1 g \cos \theta_1 (m_1 + m_2) \quad (4.135)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_2} = l_1 l_2 m_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin (\theta_1 - \theta_2) - l_2 m_2 g \cos \theta_2 \quad (4.136)$$

Ahora se resuelven las derivadas ordinarias de las ecuaciones (4.133) y (4.134):

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} \right) = l_1^2 \ddot{\theta}_1 (m_1 + m_2) + l_1 l_2 m_2 \left[\ddot{\theta}_2 \cos (\theta_1 - \theta_2) - \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin (\theta_1 - \theta_2) + \dot{\theta}_2^2 \sin (\theta_1 - \theta_2) \right] \quad (4.137)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} \right) = m_2 l_2^2 \ddot{\theta}_2 + l_1 l_2 m_2 \left[\ddot{\theta}_1 \cos (\theta_1 - \theta_2) + \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin (\theta_1 - \theta_2) - \dot{\theta}_1^2 \sin (\theta_1 - \theta_2) \right] \quad (4.138)$$

Entonces, para obtener las ecuaciones del modelo matemático Euler-Lagrange, de acuerdo a la ecuación (4.102) para la primera ecuación se tiene que:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} - \frac{\partial L}{\partial \theta_1} = \tau_1 \quad (4.139)$$

Sustituyendo las derivadas obtenidas y factorizando queda:

$$\ddot{\theta}_1 l_1^2 (m_1 + m_2) + \ddot{\theta}_2 l_1 l_2 m_2 \cos (\theta_1 - \theta_2) + \dot{\theta}_2^2 l_1 l_2 m_2 \sin (\theta_1 - \theta_2) + l_1 g (m_1 + m_2) \cos \theta_1 = \tau_1 \quad (4.140)$$

Para la segunda ecuación:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} - \frac{\partial L}{\partial \theta_2} = \tau_2 \quad (4.141)$$

Sustituyendo las derivadas obtenidas y factorizando la segunda ecuación queda:

$$\ddot{\theta}_2 m_2 l_2^2 + \ddot{\theta}_1 l_1 l_2 m_2 \cos (\theta_1 - \theta_2) - \dot{\theta}_1^2 l_1 l_2 m_2 \sin (\theta_1 - \theta_2) + l_2 m_2 g \cos \theta_2 = \tau_2 \quad (4.142)$$

Escrito en la forma $\tau = M\ddot{q} + C\dot{q} + G$,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} l_1^2 (m_1 + m_2) & l_1 l_2 m_2 \cos (\theta_1 - \theta_2) \\ l_1 l_2 m_2 \cos (\theta_1 - \theta_2) & m_2 l_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} 0 & \dot{\theta}_2 l_1 l_2 m_2 \sin (\theta_1 - \theta_2) \\ -\dot{\theta}_1 l_1 l_2 m_2 \sin (\theta_1 - \theta_2) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} l_1 g (m_1 + m_2) \cos \theta_1 \\ l_2 m_2 g \cos \theta_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.143)$$

Para comprobar que el modelo matemático obtenido sea correcto se realizan las siguientes pruebas:

Primera prueba $M = M^T$:

$$\begin{bmatrix} l_1^2 (m_1 + m_2) & l_1 l_2 m_2 \cos (\theta_1 - \theta_2) \\ l_1 l_2 m_2 \cos (\theta_1 - \theta_2) & m_2 l_2^2 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} l_1^2 (m_1 + m_2) & l_1 l_2 m_2 \cos (\theta_1 - \theta_2) \\ l_1 l_2 m_2 \cos (\theta_1 - \theta_2) & m_2 l_2^2 \end{bmatrix} \quad (4.144)$$

Segunda prueba $(\dot{M} - 2C)^T = -(\dot{M} - 2C)$:

$$\dot{M} = \begin{bmatrix} 0 & -l_1 l_2 m_2 \sin (\theta_1 - \theta_2) (\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) \\ -l_1 l_2 m_2 \sin (\theta_1 - \theta_2) (\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) & 0 \end{bmatrix} \quad (4.145)$$

Entonces:

$$\dot{M} - 2C = \begin{bmatrix} 0 & -(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) l_1 l_2 m_2 \sin (\theta_1 - \theta_2) \\ (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) l_1 l_2 m_2 \sin (\theta_1 - \theta_2) & 0 \end{bmatrix} \quad (4.146)$$

Por lo que se cumple la segunda condición,

$$(\dot{M} - 2C)^T = \begin{bmatrix} 0 & -(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) l_1 l_2 m_2 \sin (\theta_1 - \theta_2) \\ (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) l_1 l_2 m_2 \sin (\theta_1 - \theta_2) & 0 \end{bmatrix} \quad (4.147)$$

$$(\dot{M} - 2C)^T = -(\dot{M} - 2C) \quad (4.148)$$

En el capítulo 5 se obtiene el estado estacionario de este tipo de manipulador.

Capítulo 5

El Estado Estacionario de un Robot Manipulador en Bond Graph

5.1 Introducción

Una característica muy importante del funcionamiento de un sistema es su *estabilidad*, Un *sistema estable* se define como aquel que tiene una respuesta limitada. Esto es, el sistema es estable si estando sujeto a una entrada o perturbación limitada, su respuesta es de magnitud limitada [Dorf, 1989]. En el caso de la presente tesis se consideran sistemas con estabilidad y se enfoca sólo a la respuesta en estado estacionario.

La respuesta en el tiempo de un sistema consta de dos componentes fundamentales: la respuesta transitoria y la respuesta en estado estable (ó estado estacionario). La respuesta transitoria es la que va del estado inicial al estado final y la respuesta en estado estacionario es la manera en que se comporta el sistema cuando el tiempo tiende a infinito [Ogata, 1998]. El estado estacionario de un sistema es importante ya que conociendolo se puede tomar como referencia para realizar un control en un sistema determinado.

5.1.1 Estado estacionario a partir de la dinámica obtenida de su Bond Graph

Una forma de obtener el estado estacionario de sistema, es obtener la representación en variables de estado del sistema no lineal de la forma:

$$\dot{x} = f(x)x(t) + g(x)u(t) \quad (5.1)$$

$$y = h(x)x(t) + i(x)u(t) \quad (5.2)$$

después igualar a cero $\dot{x}$, con lo cual desaparece el efecto de la dinámica y se puede obtener el estado estacionario de las variables de estado.

5.1.2 Manipulador de un eslabón en BGI (Bond Graph en causalidad Integral)

La figura 5.1 muestra un manipulador de un eslabón en causalidad integral, es decir, los elementos de almacenamiento del sistema están en causalidad integral.

Su modelo matemático se obtuvo en el capítulo 4 resultando el sistema:

$$\begin{bmatrix} f_{18} \\ e_{19} \end{bmatrix} = f(x) \begin{bmatrix} q_{18} \\ p_{19} \end{bmatrix} + g(x) \begin{bmatrix} e_2 \\ e_{30} \\ f_{27} \\ f_{29} \\ e_{16} \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

donde:

$$f(x) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{J} \\ -\frac{J\Gamma}{C\Delta} & -\frac{M_x M_y m_x m_y (4F M_x \cos^2 \theta + F b_x \cos^2 \theta + 4F M_y \sin^2 \theta + F b_y \sin^2 \theta)}{\Delta} \end{bmatrix} \quad (5.4)$$

$$g(x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ J\frac{\Gamma}{\Delta} & J\frac{\Gamma}{\Delta} & -J\frac{\Gamma}{\Delta} F b_y \sin \theta & J\frac{\Gamma}{\Delta} (2F M_x \cos \theta + F b_x \cos \theta) & J\frac{\Gamma}{\Delta} \sin \theta \end{bmatrix} \quad (5.5)$$

$$\Gamma = M_x M_y m_x m_y \quad (5.6)$$

$$\Delta = M_x M_y m_y \cos^2 \theta + 4M_y m_x m_y \cos^2 \theta + M_x M_y m_x \sin^2 \theta + 4M_x m_x m_y \sin^2 \theta + J M_x M_y m_x m_y \quad (5.7)$$

Los estados son q_{18} que es la posición angular del brazo ó ángulo θ , y p_{19} es el momento angular en el mismo, e_{30} es la entrada para llevar el brazo a la posición deseada y e_{16} es el efecto debido a la fuerza de gravedad ($mg = -9.78 \frac{m}{s^2}$), además los valores de $e_2 = f_{27} = f_{29} = 0$. Para simplificar, consideramos valores unitarios en todos los elementos, se obtiene el siguiente sistema:

$$\begin{bmatrix} f_{18} \\ e_{19} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{6} & -\frac{5}{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{18} \\ p_{19} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \sin \theta & \frac{3}{6} \cos \theta & \frac{1}{6} \sin \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ e_{30} \\ 0 \\ 0 \\ -9.78 \end{bmatrix} \quad (5.8)$$

para el estado estable, es decir cuando $\dot{x}(t) = 0$, se tiene:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{19} \\ -\frac{5}{6}p_{19} - \frac{1}{6}q_{18} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{6}e_{30} - 1.63 \sin \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{19} \\ \frac{1}{6}e_{30} - \frac{5}{6}p_{19} - \frac{1}{6}q_{18} - 1.63 \sin \theta \end{bmatrix} \quad (5.9)$$

se observa que como $p_{19} = 0$ y $q_{18} = \theta$, podemos expresar la ecuación de la siguiente forma :

$$0 = \frac{1}{6}e_{30} - \frac{1}{6}\theta - 1.63 \sin \theta \quad (5.10)$$

entonces la relación entre la entrada y la posición final del brazo es:

$$e_{30} = \theta + 9.78 \sin \theta \quad (5.11)$$

usando la ecuación (5.11), si se desea que la posición final del brazo sea por ejemplo $45^\circ = \frac{\pi}{4} rad = 0.78539 rad$, sustituimos el valor de θ para determinar el esfuerzo necesario para alcanzar dicha posición en estado estacionario:

$$e_{30} = \frac{\pi}{4} + 9.78 \sin \left(\frac{\pi}{4} \right) = 7.7008 \quad (5.12)$$

simulando el sistema en 20-sim[®] con la entrada calculada se obtiene la gráfica de la figura 5.2 donde se puede observar que el resultado en simulación para el estado estacionario es prácticamente el mismo que el que se desea tener.

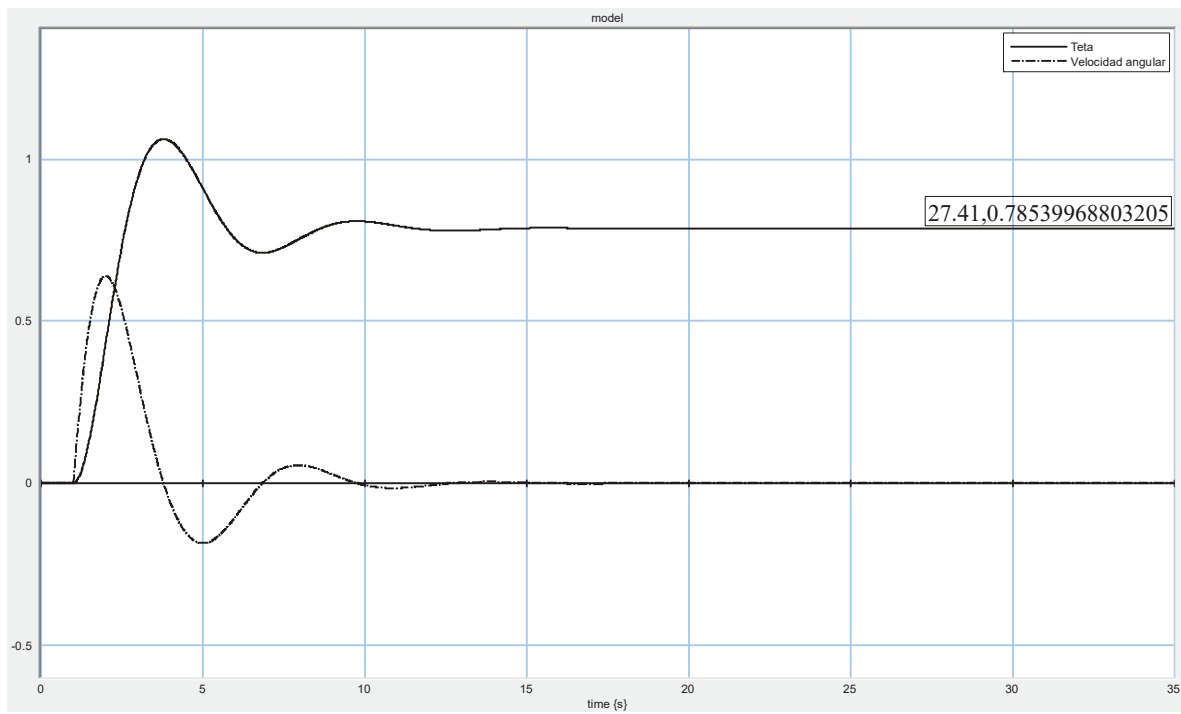


Figura 5.2: Simulación en 20-sim para llevar al manipulador de un brazo a 45° en estado estable.

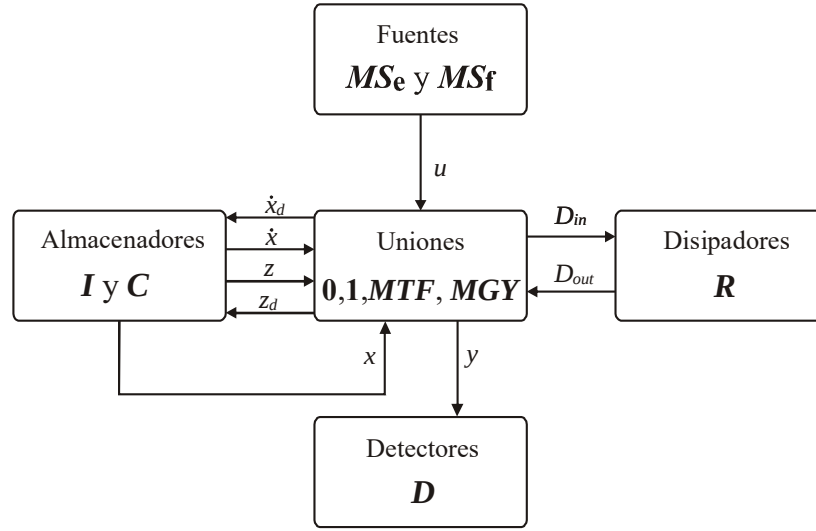


Figura 5.3: Vectores clave de un bond Graph.

5.1.3 Un Bond Graph para la determinación directa del estado estacionario

El resultado más importante del presente trabajo de investigación es la determinación directa del estado estacionario para una clase de sistemas no lineales representado en un Bond Graph. En esta clase de sistemas no lineales califican los robots manipuladores que se han analizado en esta tesis. Donde el diagrama a bloques de los vectores clave dentro de un bond Graph es como se muestra en la figura 5.3.

En la figura 5.3 se denotan las fuentes moduladas, los elementos almacenadores y los elementos disipadores de energía como (MS_e, MS_f) , (I, C) y (R) , respectivamente. Además, se muestran los detectores (D) y la estructura unión con transformadores y giradores modulados $(0, 1, MTF, MGY)$.

El estado estacionario se determina a partir del Bond Graph en causalidad derivativa, es decir, asignando de manera predefinida una causalidad derivativa a los elementos almacenadores del sistema.

Por lo tanto, en la figura 5.4 se muestra un diagrama a partir del cual se obtiene el estado estacionario en un enfoque de Bond Graph.



Figura 5.4: Diagrama de flujo para el cálculo de la respuesta en estado estacionario en un enfoque de Bond Graph.

Finalmente, este resultado propuesto es una generalización de un resultado publicado en el artículo [González, 2003] y a partir del cual se llegó a desarrollar un artículo de esta tesis, el cuál ya fue aceptado para su publicación en la *14th IEEE International Conference on Methods and Models in Automation and Robotics* que se llevará a cabo del 19 al 21 de agosto del presente año en la ciudad de Miedzyzdroje, polonia. El artículo se anexa en el apéndice B.

5.1.4 Manipulador de un eslabón en BGD (Bond Graph en causalidad Derivativa)

Una forma más directa de obtener el estado estable es usando el BGD (Bond Graph en causalidad Derivativa), que es simplemente intercambiando la causalidades integrales por derivativas, en este caso, la causalidad de los elementos J y C , el Bond Graph obtenido es el de la figura 5.5.

Los vectores clave son:

$$x = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_3 \\ p_{15} \\ q_{18} \\ p_{19} \\ p_{23} \end{bmatrix}; \dot{x} = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_3 \\ e_{15} \\ f_{18} \\ e_{19} \\ e_{23} \end{bmatrix}; z = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_3 \\ f_{15} \\ e_{18} \\ f_{19} \\ f_{23} \end{bmatrix}; D_{in} = \begin{bmatrix} f_4 \\ f_9 \\ f_{14} \\ f_{31} \end{bmatrix}; D_{out} = \begin{bmatrix} e_4 \\ e_9 \\ e_{14} \\ e_{31} \end{bmatrix}; u = \begin{bmatrix} e_2 \\ e_{30} \\ f_{27} \\ f_{29} \\ e_{16} \end{bmatrix} \quad (5.13)$$

las relaciones constitutivas para los elementos son:

$$D_{in} = L_d D_{out}; L_d = \text{Diag} \{FM_y; Fb_x; Fb_y; FM_x\}; F_d = \text{Diag} \left\{ \frac{1}{M_x}; \frac{1}{M_y}; \frac{1}{m_y}; \frac{1}{C}; \frac{1}{J}; \frac{1}{m_x} \right\} \quad (5.14)$$

las relaciones entrada-salida del transformador modulado (MTF) en forma de ecuaciones son:

$$f_{21} = \cos \theta \cdot f_{32} \quad (5.15)$$

$$f_{11} = \cos \theta \cdot f_{32} \quad (5.16)$$

$$f_{20} = \sin \theta \cdot f_{32} \quad (5.17)$$

$$f_6 = \sin \theta \cdot f_{32} \quad (5.18)$$

$$e_{32} = \cos \theta \cdot e_{21} + \cos \theta \cdot e_{11} - \sin \theta \cdot e_{20} - \sin \theta \cdot e_6 \quad (5.19)$$

la matriz de estructura de unión del BGD es la siguiente,

$$\begin{bmatrix} z \\ D_{in} \\ y_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} & J_{13} \\ J_{21} & J_{22} & J_{23} \\ J_{31} & J_{32} & J_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ D_{out} \\ u \end{bmatrix} \quad (5.20)$$

y la matriz de estructura unión queda de la siguiente manera,

$$\begin{bmatrix} f_1 \\ f_3 \\ f_{15} \\ e_{18} \\ f_{19} \\ f_{23} \\ f_4 \\ f_9 \\ f_{14} \\ f_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -2 \cos \theta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \sin \theta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin \theta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 \cos \theta & -2 \sin \theta & -\sin \theta & 0 & -1 & \cos \theta & -2 \sin \theta & \cos \theta & -\sin \theta & 2 \cos \theta & 1 & 1 & 0 & 0 & \sin \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\cos \theta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \sin \theta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\cos \theta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin \theta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \cos \theta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_3 \\ p_{15} \\ q_{18} \\ p_{19} \\ p_{23} \\ e_4 \\ e_9 \\ e_{14} \\ e_{31} \\ e_2 \\ e_{30} \\ f_{27} \\ f_{29} \\ e_{16} \end{bmatrix} \quad (5.21)$$

de la estructura unión anterior (ecuación (5.21)) decimos que:

$$J_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -2 \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \sin \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin \theta & 0 & 0 \\ 2 \cos \theta & -2 \sin \theta & -\sin \theta & 0 & -1 & \cos \theta \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\cos \theta & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.22)$$

$$J_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 \sin \theta & \cos \theta & -\sin \theta & 2 \cos \theta \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.23)$$

$$J_{13} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & \sin \theta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.24)$$

$$J_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \sin \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \cos \theta & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.25)$$

$$J_{22} = 0 \quad (5.26)$$

$$J_{23} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.27)$$

para obtener la representación de estados de esta clase de sistemas no lineales a partir del Bond Graph en causalidad Derivativa tenemos que:

$$z = f^*(x) \dot{x}(t) + g^*(x) u(t) \quad (5.28)$$

$$y_d = h^*(x) \dot{x}(t) + i^*(x) u(t) \quad (5.29)$$

donde:

$$f^*(x) = J_{11} + J_{12} N J_{21} \quad (5.30)$$

$$g^*(x) = J_{13} + J_{12} N J_{23} \quad (5.31)$$

$$h^*(x) = J_{31} + J_{32} N J_{21} \quad (5.32)$$

$$i^*(x) = J_{33} + J_{32} N J_{23} \quad (5.33)$$

$$N = (I - L_d J_{22})^{-1} L_d \quad (5.34)$$

de la representación en espacio de estado anterior (ecuaciones (5.28) y (5.29)), si se considera el estado estable, es decir $\dot{x}(t) = 0$, tenemos que:

$$z = \underbrace{f^*(x) \dot{x}(t)}_0 + g^*(x) u(t) \implies z = g^*(x) u(t) \quad (5.35)$$

como:

$$z = F_d x \implies x = F_d^{-1} z \quad (5.36)$$

por lo que para el estado estacionario se tiene que:

$$x_{ss} = F_d^{-1} g^*(x) u_{ss} \quad (5.37)$$

como F_d^{-1} y u_{ss} se conocen, sólo falta encontrar $g^*(x)$ para encontrar el estado estable.

Entonces N es:

$$N = \left(I - \underbrace{L_d J_{22}}_0 \right)^{-1} L_d = \text{Diag} \{ F M_y; F b_x; F b_y; F M_x \} \quad (5.38)$$

entonces como:

$$F_d = \text{Diag} \left\{ \frac{1}{M_x}; \frac{1}{M_y}; \frac{1}{m_y}; \frac{1}{C}; \frac{1}{J}; \frac{1}{m_x} \right\} \quad \therefore \quad F_d^{-1} = \text{Diag} \{ M_x; M_y; m_y; C; J; m_x \} \quad (5.39)$$

usando las ecuaciones (5.30) a la (5.34) se encuentra $g^*(x)$:

$$g^*(x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2F M_y \sin \theta - F b_y \sin \theta & 2F M_x \cos \theta + F b_x \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.40)$$

por lo que sustituyendo $g^*(x)$ en la ecuación (5.37) se obtienen los estados estacionario:

$$\begin{bmatrix} p_1 \\ p_3 \\ p_{15} \\ q_{18} \\ p_{19} \\ p_{23} \end{bmatrix}_{ss} = \begin{bmatrix} f_{29} M_x \\ f_{27} M_y \\ f_{27} m_y \\ C(e_2 + e_{30} + e_{16} \sin \theta + f_{29}(2F M_x \cos \theta + F b_x \cos \theta) - f_{27}(2F M_y \sin \theta + F b_y \sin \theta)) \\ 0 \\ f_{29} m_x \end{bmatrix} \quad (5.41)$$

considerando valores unitarios en todos los elementos como en el caso del BGI, y además los valores de $e_2 = f_{27} = f_{29} = 0$. se obtiene lo siguiente:

$$\begin{bmatrix} p_1 \\ p_3 \\ p_{15} \\ q_{18} \\ p_{19} \\ p_{23} \end{bmatrix}_{ss} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ C(e_{30ss} + e_{16ss} \sin \theta) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.42)$$

de la ecuación (5.42) se observa que el único estado diferente de cero en estado estacionario es:

$$q_{18} = C(e_{30} + e_{16} \sin \theta) \quad (5.43)$$

como q_{18} es la posición angular del brazo ó ángulo θ , e_{30} es la entrada para llevar el brazo a la posición deseada y e_{16} es el efecto debido a la fuerza de gravedad ($mg = -9.78 \frac{m}{s^2}$):

$$\theta = (e_{30} - 9.78 \sin \theta) \quad (5.44)$$

$$e_{30} = \theta + 9.78 \sin \theta$$

esta relación entre el esfuerzo de entrada y el ángulo en estado estacionario es la misma obtenida para el Bond graph en causalidad integral (ecuación (5.11)).

5.1.5 Manipulador de dos eslabones en BGD (Bond Graph en causalidad Derivativa)

El modelo de un robot manipulador de dos eslabones en Bond Graph se muestra en la figura 5.6.

Notar que el modelo se constituye prácticamente de dos manipuladores de un eslabón unidos, es decir, no importa de cuantos eslabones sea el manipulador a simular, sólo se necesita colocar más bloques hasta completa el manipulador del cual se desea obtener su estado estacionario.

Los vectores clave son:

$$\begin{aligned}
 x = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_3 \\ p_{15} \\ q_{18} \\ p_{19} \\ p_{24} \\ p_{39} \\ p_{45} \\ q_{48} \\ p_{49} \end{bmatrix}; \dot{x} = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_3 \\ e_{15} \\ f_{18} \\ e_{19} \\ e_{24} \\ e_{39} \\ e_{45} \\ f_{48} \\ e_{49} \end{bmatrix}; z = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_3 \\ f_{15} \\ e_{18} \\ f_{19} \\ f_{24} \\ f_{39} \\ f_{45} \\ e_{48} \\ f_{49} \end{bmatrix}; D_{in} = \begin{bmatrix} f_4 \\ f_9 \\ f_{14} \\ f_{25} \\ f_{38} \\ f_{44} \end{bmatrix}; D_{out} = \begin{bmatrix} e_4 \\ e_9 \\ e_{14} \\ e_{25} \\ e_{38} \\ e_{44} \end{bmatrix}; u = \begin{bmatrix} e_2 \\ e_{16} \\ e_{31} \\ e_{46} \\ f_{55} \\ e_{56} \\ f_{57} \end{bmatrix} \quad (5.45)
 \end{aligned}$$

Las relaciones constitutivas para los elementos son:

$$D_{in} = L_d D_{out}; \quad L_d = \text{Diag} \{FM_y; FM_x; Fb_{2y}; Fb_{2x}; Fb_{1x}; Fb_{1y}\} \quad (5.46)$$

$$F_d = \text{Diag} \left\{ \frac{1}{M_x}; \frac{1}{M_y}; \frac{1}{m_{2y}}; \frac{1}{C_2}; \frac{1}{J_2}; \frac{1}{m_{2x}}; \frac{1}{m_{1x}}; \frac{1}{m_{1y}}; \frac{1}{C_1}; \frac{1}{J_1} \right\} \quad (5.47)$$

las relaciones entrada-salida de los transformadores modulados ($MTF1$ y $MTF2$), son las siguientes ecuaciones para el $MTF1$.

$$f_{52} = \cos \theta_1 \cdot f_{58} \quad (5.48)$$

$$f_{37} = \cos \theta_1 \cdot f_{58} \quad (5.49)$$

$$f_{51} = \sin \theta_1 \cdot f_{58} \quad (5.50)$$

$$f_{42} = \sin \theta_1 \cdot f_{58} \quad (5.51)$$

$$e_{58} = \cos \theta_1 \cdot e_{52} + \cos \theta_1 \cdot e_{37} - \sin \theta_1 \cdot e_{51} - \sin \theta_1 \cdot e_{42} \quad (5.52)$$

para el $MTF2$:

$$f_{22} = \cos \theta_2 \cdot f_{59} \quad (5.53)$$

$$f_{11} = \cos \theta_2 \cdot f_{59} \quad (5.54)$$

$$f_{21} = \sin \theta_2 \cdot f_{59} \quad (5.55)$$

$$f_6 = \sin \theta_2 \cdot f_{59} \quad (5.56)$$

$$e_{59} = \cos \theta_2 \cdot e_{22} + \cos \theta_2 \cdot e_{11} - \sin \theta_2 \cdot e_{21} - \sin \theta_2 \cdot e_6 \quad (5.57)$$

para la matriz de estructura de unión del BGD se tiene la siguiente estructura:

$$\begin{bmatrix} z \\ D_{in} \\ y_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} & J_{13} \\ J_{21} & J_{22} & J_{23} \\ J_{31} & J_{32} & J_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ D_{out} \\ u \end{bmatrix} \quad (5.58)$$

donde:

$$J_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -2 \cos \theta_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \cos \theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \sin \theta_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \sin \theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin \theta_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \sin \theta_1 & 0 \\ 2 \cos \theta_2 & -2 \sin \theta_2 & -\sin \theta_2 & 0 & -1 & \cos \theta_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\cos \theta_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \cos \theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\cos \theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sin \theta_1 & 0 \\ 2 \cos \theta_1 & -2 \sin \theta_1 & -2 \sin \theta_1 & 0 & 0 & 2 \cos \theta_1 & \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.59)$$

$$J_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 \sin \theta_2 & 2 \cos \theta_2 & -\sin \theta_2 & \cos \theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 \sin \theta_1 & 2 \cos \theta_1 & -2 \sin \theta_1 & 2 \cos \theta_1 & \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.60)$$

$$J_{13} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & \sin \theta_2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 \sin \theta_1 & -1 & \sin \theta_1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.61)$$

$$J_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \sin \theta_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \sin \theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \cos \theta_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \cos \theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin \theta_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \sin \theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & -\cos \theta_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \cos \theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\cos \theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sin \theta_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.62)$$

$$J_{22} = 0 \quad (5.63)$$

$$J_{23} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.64)$$

se obtiene la representación en espacio de estados de la misma manera que se hace para el caso de un eslabón. Considerando valores unitarios para todos los elementos (para simplificar los cálculos).

$$N = \left(I - \underbrace{L_d J_{22}}_0 \right)^{-1} L_d = \text{Diag} \{ FM_y; FM_x; Fb_{2y}; Fb_{2x}; Fb_{1x}; Fb_{1y} \} = I \quad (5.65)$$

$$F_d = I \implies F_d^{-1} = I \quad (5.66)$$

se encuentra $g^*(x)$ usando el paquete de computadora Scientific WorkPlace V5.50:

$$g^*(x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & \sin \theta_2 & 1 & 0 & 3 \sin \theta_2 & 0 & -3 \sin \theta_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 \sin \theta_1 & -1 & \sin \theta_1 & 5 \sin \theta_1 & 1 & -3 \sin \theta_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.67)$$

entonces, de acuerdo con la ecuación $x_{ss} = F_d^{-1} g^*(x) u_{ss}$, substituyendo $g^*(x)$ se obtienen los estados en estado estacionario:

$$\begin{bmatrix} p_1 \\ p_3 \\ p_{15} \\ q_{18} \\ p_{19} \\ p_{24} \\ p_{39} \\ p_{45} \\ q_{48} \\ p_{49} \end{bmatrix}_{ss} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ e_{31} - 9.78 \sin \theta_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ e_{48} - e_{31} - 29.34 \sin \theta_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.68)$$

de la ecuación (5.68) se observa que los únicos estados diferentes de cero en estado estable son:

$$q_{18} = e_{31} - 9.78 \sin \theta_2 \quad (5.69)$$

$$q_{48} = e_{56} - e_{31} - 29.34 \sin \theta_1 \quad (5.70)$$

como $q_{18} = \theta_2$ y $q_{56} = \theta_1$ y las fuentes de esfuerzo de control para los brazos son e_{31} y e_{56} , substituyendo y despejando se obtienen las siguientes expresiones:

$$e_{31} = \theta_2 + 9.78 \sin \theta_2 \quad (5.71)$$

$$e_{56} = e_{31} + \theta_1 + 29.34 \sin \theta_1 \quad (5.72)$$

usando las ecuaciones (5.71) y (5.72), si se desea que la posición final del brazo sea por ejemplo $\theta_1 = 30^\circ = \frac{\pi}{6} = 0.52359rad$ y $\theta_2 = 45^\circ = \frac{\pi}{4}rad = 0.78539rad$, se sustituyen los valores de los ángulos para determinar los esfuerzos necesarios para alcanzar dicha posición en estado estacionario:

$$e_{31} = \frac{\pi}{4} + 9.78 \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = 7.7008 \quad (5.73)$$

$$e_{56} = 7.7008 + \frac{\pi}{6} + 29.34 \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = 22.8941 \quad (5.74)$$

simulando el robot manipulador en 20-sim con las entradas calculadas se obtiene la gráfica de la figura 5.7 donde se puede observar que las velocidades angulares en estado estacionario se van a cero y el resultado en estado estacionario para los ángulos es prácticamente el mismo que se deseaba obtener.

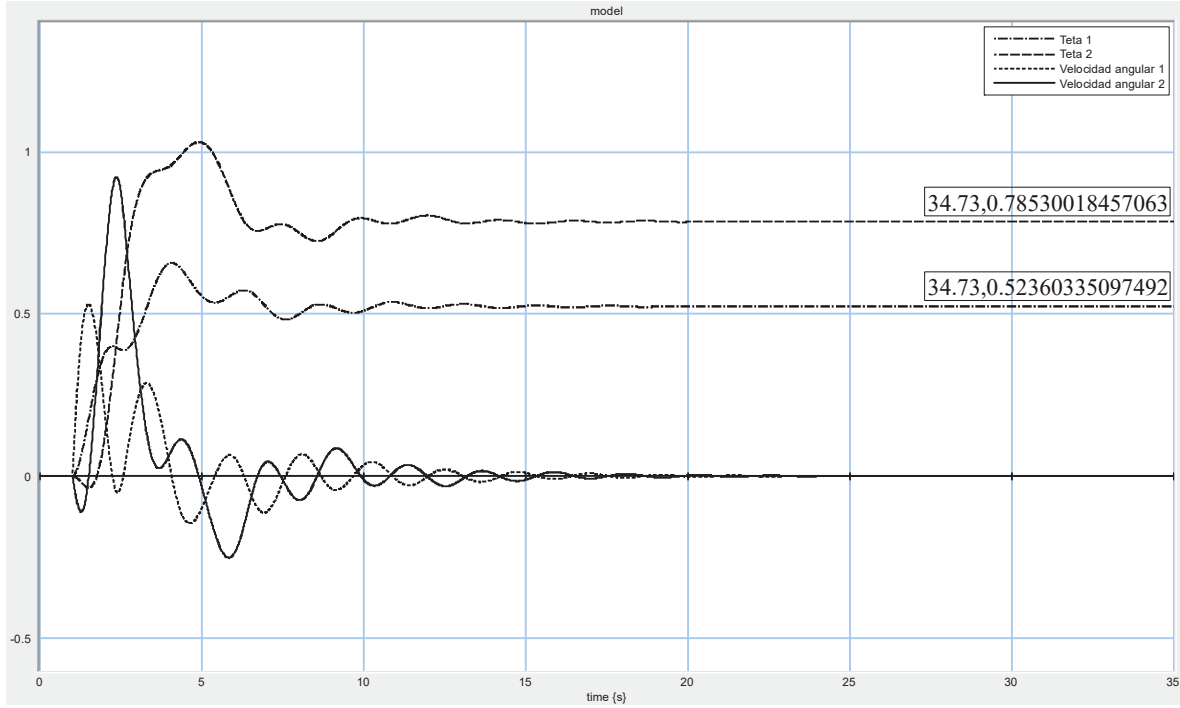


Figura 5.7: Simulación del robot manipulador de dos eslabones en 20-sim para $\theta_1 = 30^\circ$ y $\theta_2 = 45^\circ$.

Analizando otro caso, por ejemplo si se desea que la posición final del brazo sea ahora $\theta_1 =$

$50^\circ = 0.87266\text{rad}$ y $\theta_2 = 20^\circ = 0.34906\text{rad}$, se sustituyen los valores de los ángulos para determinar los esfuerzos necesarios para alcanzar dicha posición en estado estacionario en las ecuaciones (5.71) y (5.72), se obtiene:

$$e_{31} = 0.34906 + 9.78 \sin(0.34906) = 3.69396 \quad (5.75)$$

$$e_{56} = 3.69396 + 0.87266 + 29.34 \sin(0.87266) = 27.0422 \quad (5.76)$$

simulando el robot manipulador en 20-sim con las entradas calculadas se obtiene la gráfica de la figura 5.8 donde se puede observar que las velocidades angulares en estado estacionario se van a cero y el resultados en estado estacionario para los ángulos es prácticamente el mismo que se encontró de manera analítica.

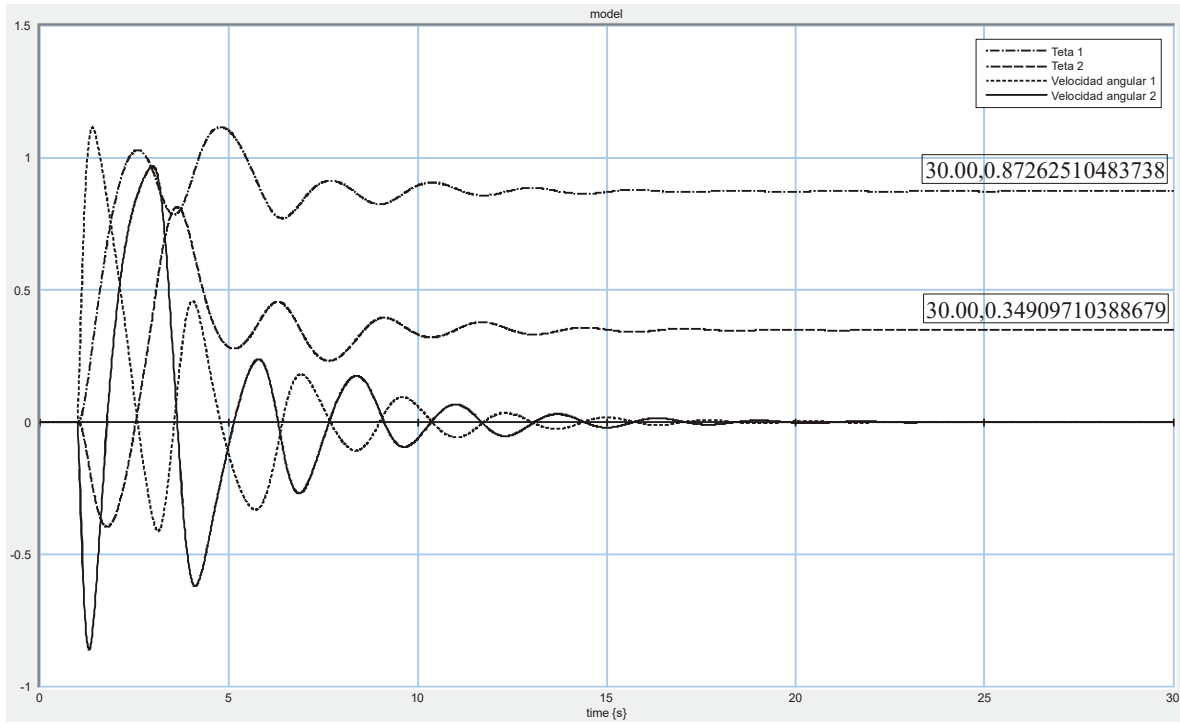


Figura 5.8: Simulación del robot manipulador de dos eslabones en 20-sim para $\theta_1 = 50^\circ$ y $\theta_2 = 20^\circ$.

5.1.6 Manipulador de tres eslabones en BGD (Bond Graph en causalidad Derivativa)

El modelo de un robot manipulador de tres eslabones en Bond Graph se muestra en la figura 5.9.

Observar que el modelo se constituye de tres manipuladores de un eslabón unidos, es decir, no importa de cuantos eslabones sea el manipulador a simular, solo se necesita colocar más bloques hasta completa el manipulador del cual se desea obtener su estado estacionario.

Los vectores clave son:

$$x = \begin{bmatrix} p_1 & p_3 & p_{14} & q_{18} & p_{19} & p_{22} & p_{40} & p_{45} & q_{48} & p_{49} & p_{66} & p_{72} & q_{78} & p_{79} \end{bmatrix}^T \quad (5.77)$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} e_1 & e_3 & e_{14} & f_{18} & e_{19} & e_{22} & e_{40} & e_{45} & f_{48} & e_{49} & e_{66} & e_{72} & f_{78} & e_{79} \end{bmatrix}^T \quad (5.78)$$

$$z = \begin{bmatrix} f_1 & f_3 & f_{14} & e_{18} & f_{19} & f_{22} & f_{40} & f_{45} & e_{48} & f_{49} & f_{66} & f_{72} & e_{78} & f_{79} \end{bmatrix}^T \quad (5.79)$$

$$D_{in} = \begin{bmatrix} f_4 & f_9 & f_{13} & f_{21} & f_{39} & f_{44} & f_{65} & f_{71} \end{bmatrix}^T \quad (5.80)$$

$$D_{out} = \begin{bmatrix} e_4 & e_9 & e_{13} & e_{21} & e_{39} & e_{44} & e_{65} & e_{71} \end{bmatrix}^T \quad (5.81)$$

$$u = \begin{bmatrix} e_2 & e_{15} & e_{31} & e_{46} & e_{58} & e_{73} & f_{81} & e_{82} & f_{84} \end{bmatrix}^T \quad (5.82)$$

Las relaciones constitutivas para los elementos son:

$$D_{in} = L_d D_{out}; \quad L_d = \text{Diag}\{FM_y; FM_x; Fb3_y; Fb3_x; Fb2_x; Fb2_y; Fb1_x; Fb1_y; \} \quad (5.83)$$

$$F_d = \text{Diag}\left\{\frac{1}{M_x}; \frac{1}{M_y}; \frac{1}{m3_y}; \frac{1}{C_3}; \frac{1}{J_3}; \frac{1}{m3_x}; \frac{1}{m2_x}; \frac{1}{m2_y}; \frac{1}{C_2}; \frac{1}{J_2}; \frac{1}{m1_x}; \frac{1}{m1_y}; \frac{1}{C_1}; \frac{1}{J_1}\right\} \quad (5.84)$$

Las relaciones entrada-salida de los transformadores modulados son las siguientes ecuaciones: para el *MTF1*:

$$f_{68} = \cos \theta_1 \cdot f_{80} \quad (5.85)$$

$$f_{63} = \cos \theta_1 \cdot f_{80} \quad (5.86)$$

$$f_{75} = \sin \theta_1 \cdot f_{80} \quad (5.87)$$

$$f_{69} = \sin \theta_1 \cdot f_{80} \quad (5.88)$$

$$e_{80} = \cos \theta_1 \cdot e_{68} + \cos \theta_1 \cdot e_{63} - \sin \theta_1 \cdot e_{75} - \sin \theta_1 \cdot e_{69} \quad (5.89)$$

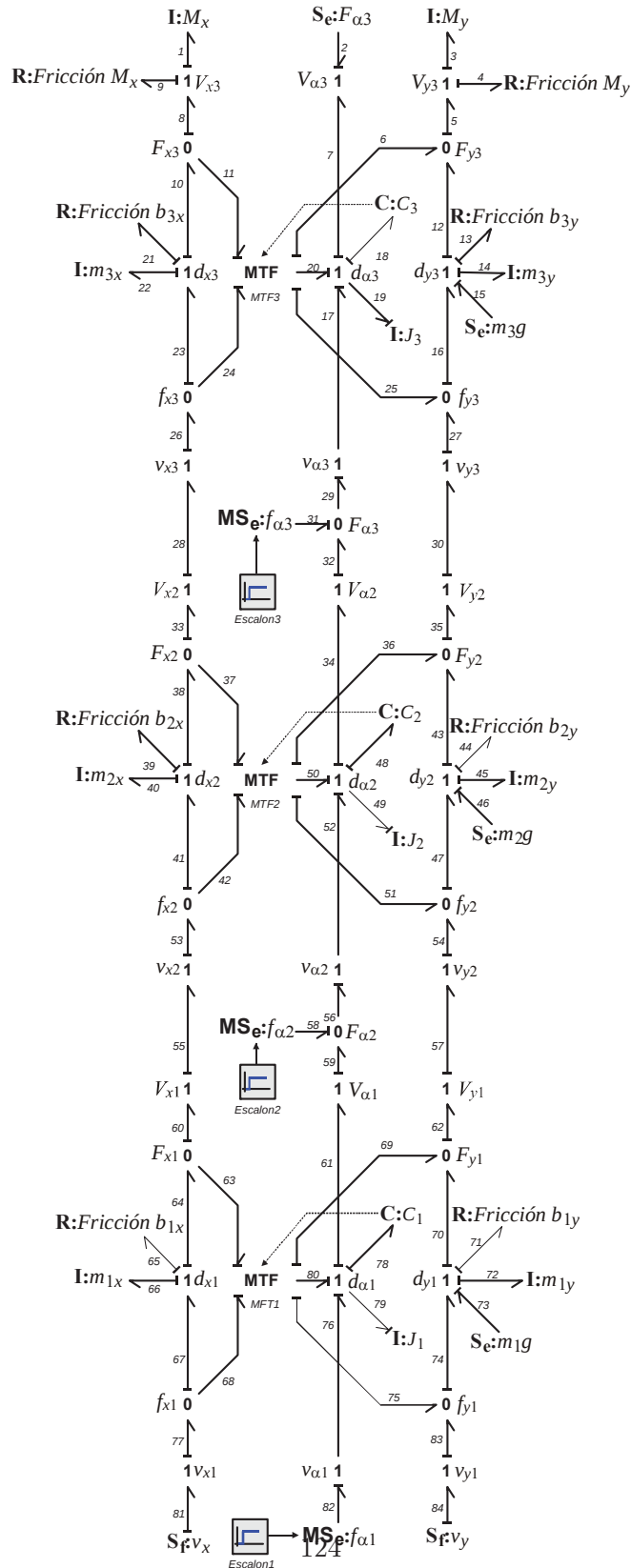


Figura 5.9: Manipulador de tres eslabones en bond Graph.

para el *MTF2* :

$$f_{42} = \cos \theta_2 \cdot f_{50} \quad (5.90)$$

$$f_{37} = \cos \theta_2 \cdot f_{50} \quad (5.91)$$

$$f_{51} = \sin \theta_2 \cdot f_{50} \quad (5.92)$$

$$f_{36} = \sin \theta_2 \cdot f_{50} \quad (5.93)$$

$$e_{50} = \cos \theta_2 \cdot e_{42} + \cos \theta_2 \cdot e_{37} - \sin \theta_2 \cdot e_{51} - \sin \theta_2 \cdot e_{36} \quad (5.94)$$

para el *MTF3* :

$$f_{24} = \cos \theta_2 \cdot f_{20} \quad (5.95)$$

$$f_{11} = \cos \theta_2 \cdot f_{20} \quad (5.96)$$

$$f_{25} = \sin \theta_2 \cdot f_{20} \quad (5.97)$$

$$f_6 = \sin \theta_2 \cdot f_{20} \quad (5.98)$$

$$e_{59} = \cos \theta_2 \cdot e_{24} + \cos \theta_2 \cdot e_{11} - \sin \theta_2 \cdot e_{25} - \sin \theta_2 \cdot e_6 \quad (5.99)$$

para la matriz de estructura de unión del BGD se tiene la siguiente estructura:

$$\begin{bmatrix} z \\ D_{in} \\ y_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} & J_{13} \\ J_{21} & J_{22} & J_{23} \\ J_{31} & J_{32} & J_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ D_{out} \\ u \end{bmatrix} \quad (5.100)$$

donde:

$$J_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -2 \cos \theta_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \cos \theta_2 & 0 & 0 & 0 & -2 \cos \theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \sin \theta_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \sin \theta_2 & 0 & 0 & 0 & 2 \sin \theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin \theta_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \sin \theta_2 & 0 & 0 & 0 & 2 \sin \theta_1 & 0 \\ 2 \cos \theta_3 & -2 \sin \theta_3 & -\sin \theta_3 & 0 & -1 & \cos \theta_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\cos \theta_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \cos \theta_2 & 0 & 0 & 0 & -2 \cos \theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\cos \theta_2 & 0 & 0 & 0 & -2 \cos \theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sin \theta_2 & 0 & 0 & 0 & 2 \sin \theta_1 & 0 \\ 2 \cos \theta_2 & -2 \sin \theta_2 & -2 \sin \theta_2 & 0 & 0 & 2 \cos \theta_2 & \cos \theta_2 & -\sin \theta_2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\cos \theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sin \theta_1 & 0 \\ 2 \cos \theta_1 & -2 \sin \theta_1 & -2 \sin \theta_1 & 0 & 0 & 2 \cos \theta_1 & 2 \cos \theta_1 & -2 \sin \theta_1 & 0 & 0 & \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.101)$$

$$J_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 \sin \theta_3 & 2 \cos \theta_3 & -\sin \theta_3 & \cos \theta_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 \sin \theta_2 & 2 \cos \theta_2 & -2 \sin \theta_2 & 2 \cos \theta_2 & \cos \theta_2 & -\sin \theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 \sin \theta_1 & 2 \cos \theta_1 & -2 \sin \theta_1 & 2 \sin \theta_1 & 2 \cos \theta_1 & -2 \sin \theta_1 & \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.102)$$

$$J_{13} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & \sin \theta_3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 \sin \theta_2 & -1 & \sin \theta_2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 \sin \theta_1 & 0 & 2 \sin \theta_1 & -1 & \sin \theta_1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.103)$$

$$J_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 2\sin\theta_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\sin\theta_2 & 0 & 0 & 0 & 2\sin\theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2\cos\theta_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2\cos\theta_2 & 0 & 0 & 0 & -2\cos\theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin\theta_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\sin\theta_2 & 0 & 0 & 0 & 2\sin\theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\cos\theta_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2\cos\theta_2 & 0 & 0 & 0 & -2\cos\theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\cos\theta_2 & 0 & 0 & 0 & -2\cos\theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sin\theta_2 & 0 & 0 & 0 & 2\sin\theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\cos\theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sin\theta_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.104)$$

$$J_{22} = 0 \quad (5.105)$$

$$J_{23} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.106)$$

se obtiene la representación en espacio de estados de la misma manera que se hace para el caso de un eslabón. Considerando valores unitarios para todos los elementos (para simplificar los cálculos).

$$N = \left(I - \underbrace{L_d J_{22}}_0 \right)^{-1} L_d = \text{Diag}\{FM_y; FM_x; Fb_{2y}; Fb_{2x}; Fb_{1x}; Fb_{1y}\} = I \quad (5.107)$$

$$F_d = I \implies F_d^{-1} = I \quad (5.108)$$

se encuentra $g^*(x)$ usando el paquete de computadora Scientific WorkPlace V5.50:

$$g^*(x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & \sin \theta_3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \cos \theta_3 & 0 & -3 \sin \theta_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 \sin \theta_2 & -1 & \sin \theta_2 & 1 & 0 & 5 \cos \theta_2 & 0 & -5 \sin \theta_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 \sin \theta_1 & 0 & 2 \sin \theta_1 & -1 & \sin \theta_1 & 5 \cos \theta_1 + 2 \sin \theta_1 & 1 & -7 \sin \theta_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.109)$$

Entonces, de acuerdo con ecuación $x_{ss} = F_d^{-1} g^*(x) u_{ss}$, sustituyendo $g^*(x)$ se obtienen los estados en estado estacionario:

$$\begin{bmatrix} p_1 \\ p_3 \\ p_{14} \\ q_{18} \\ p_{19} \\ p_{22} \\ p_{40} \\ p_{45} \\ q_{48} \\ p_{49} \\ p_{66} \\ p_{72} \\ q_{78} \\ p_{79} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ e_{31} - 9 \cdot 78 \sin \theta_3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ e_{58} - e_{31} - 29 \cdot 34 \sin \theta_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ e_{82} - e_{58} - 48 \cdot 9 \sin \theta_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.110)$$

de la ecuación 5.110 se observa que los únicos estados diferentes de cero en estado estacionario son:

$$q_{18} = e_{31} - 9 \cdot 78 \sin \theta_3 \quad (5.111)$$

$$q_{48} = e_{58} - e_{31} - 29 \cdot 34 \sin \theta_2 \quad (5.112)$$

$$q_{78} = e_{82} - e_{58} - 48 \cdot 9 \sin \theta_1 \quad (5.113)$$

como $q_{18} = \theta_3$, $q_{48} = \theta_2$ y $q_{78} = \theta_1$ y las fuentes de esfuerzo de control para los brazos son e_{31} , e_{58} y e_{82} , sustituyendo y despejando se obtienen las siguientes expresiones:

$$e_{31} = \theta_3 + 9.78 \sin \theta_3 \quad (5.114)$$

$$e_{58} = e_{31} + \theta_2 + 29.34 \sin \theta_2 \quad (5.115)$$

$$e_{82} = e_{58} + \theta_1 + 48.9 \sin \theta_1 \quad (5.116)$$

usando las ecuaciones (5.114), (5.115) y (5.116), si se desea que la posición final del brazo sea por ejemplo $\theta_1 = 15^\circ = 0.2617rad$, $\theta_2 = 20^\circ = 0.349rad$ y $\theta_3 = 30^\circ = 0.5236rad$, se sustituyen los valores de los ángulos para determinar los esfuerzos necesarios para alcanzar dicha posición en estado estacionario:

$$e_{31} = 0.5236 + 9.78 \sin(0.5236) = 5.4136 \quad (5.117)$$

$$e_{58} = 5.4136 + 0.349 + 29.34 \sin(0.349) = 15.795 \quad (5.118)$$

$$e_{82} = 15.795 + 0.2617 + 48.9 \sin(0.2617) = 28.708 \quad (5.119)$$

simulando el robot manipulador en 20-sim con las entradas calculadas se obtiene la gráfica de la figura 5.10 donde se puede observar que las velocidades angulares en estado estacionario se van a cero y el resultados en estado estacionario para los ángulos es prácticamente el mismo que se obtuvo de manera analítica.

Analizando otro caso, por ejemplo si se desea que la posición final del brazo sea ahora $\theta_1 = 35^\circ = 0.6108rad$, $\theta_2 = 50^\circ = 0.8726rad$ y $\theta_3 = 45^\circ = 0.7853rad$, se sustituyen los valores de los ángulos para determinar los esfuerzos necesarios para alcanzar dicha posición en estado estacionario en las ecuaciones (5.114), (5.115) y (5.116), se obtiene:

$$e_{31} = 0.7853 + 9.78 \sin(0.7853) = 7.7008 \quad (5.120)$$

$$e_{58} = 7.7008 + 0.8726 + 29.34 \sin(0.8726) = 31.047 \quad (5.121)$$

$$e_{82} = 31.047 + 0.6108 + 48.9 \sin(0.6108) = 59.70 \quad (5.122)$$

simulando el robot manipulador en 20-sim con las entradas calculadas se obtiene la gráfica de la figura 5.11 donde se puede observar que las velocidades angulares en estado estacionario se

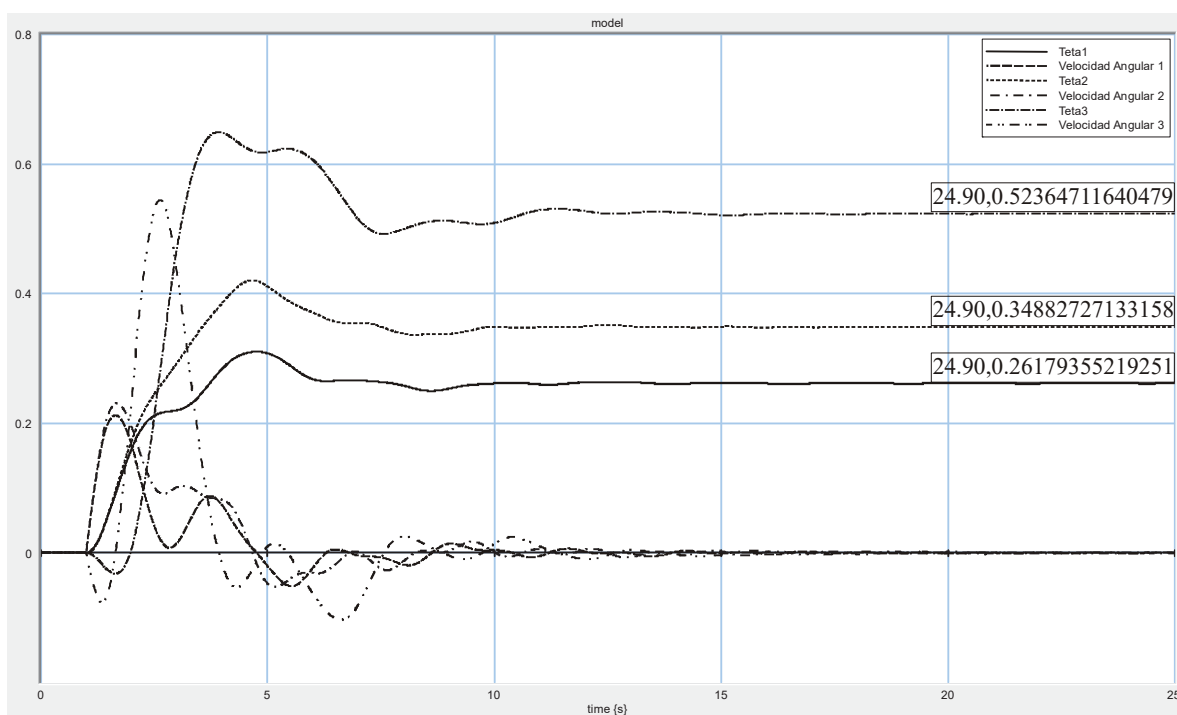


Figura 5.10: Simulación del robot manipulador de tres eslabones en 20-sim para $\theta_1 = 15^\circ$, $\theta_2 = 20^\circ$ y $\theta_3 = 30^\circ$.

van a cero y el resultados en estado estacionario para los ángulos es prácticamente el mismo que se obtuvo de manera analítica.

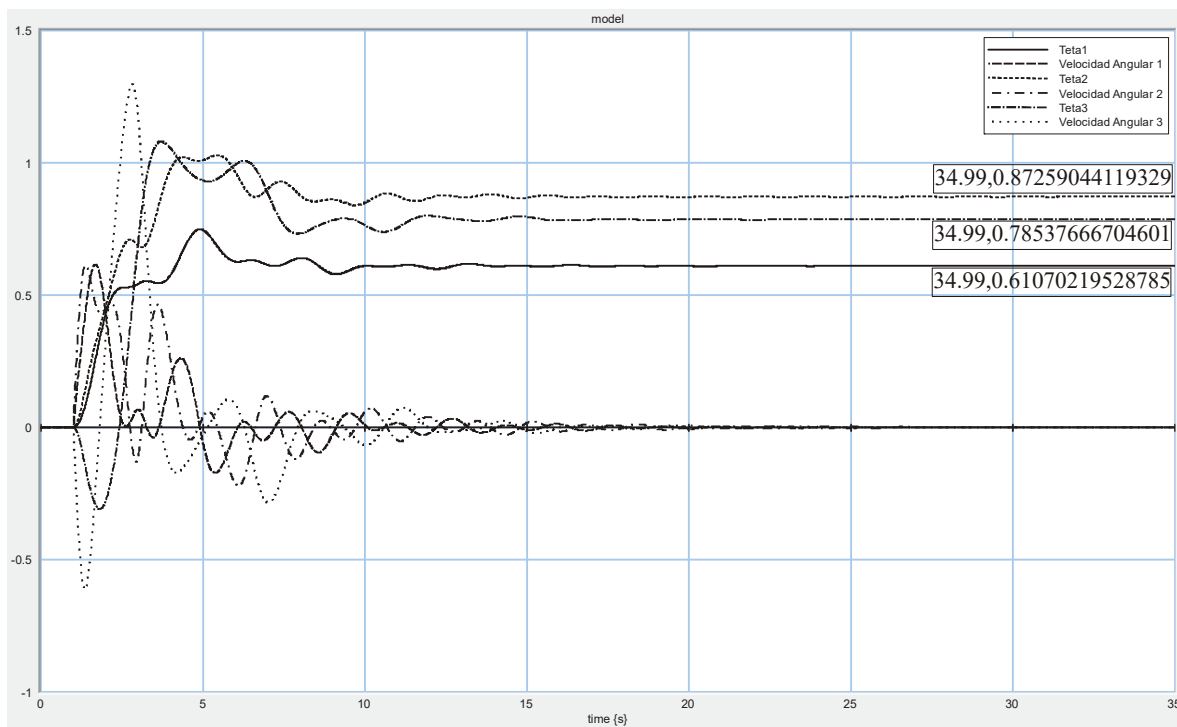


Figura 5.11: Simulación del robot manipulador de tres eslabones en 20-sim para $\theta_1 = 35^\circ$, $\theta_2 = 50^\circ$ y $\theta_3 = 45^\circ$.

Capítulo 6

Conclusiones y Trabajos Futuros

6.1 Conclusiones

El Bond Graph en causalidad derivativa no tiene un sentido físico, pero de él se pueden obtener características intrínsecas importantes del sistema. En los robots manipuladores, regularmente, lo más importante es poder conocer su estado estacionario o final, ya que en algunos procesos su finalidad principal es llegar a un punto determinado (como por ejemplo en las maquiladoras, taladros de precisión, etc), dejando a un lado la manera en la que se llega a dicho estado, El Bond Graph en causalidad derivativa es de gran ayuda, ya que de él se puede obtener el estado estacionario de una forma relativamente directa.

La principal aportación de la presente tesis es el proporcionar un procedimiento para poder determinar el estado final de un robot manipulador planar que pertenece a un tipo de sistema no lineales caracterizado por el producto de estado, usando la asignación de causalidad derivativa en el Bond Graph, la comparación del modelado en Bond Graph con las técnicas tradicionales, en éste caso con Euler-Lagrange, ponen en evidencia que para la segunda cuando se incrementa el número de eslabones las ecuaciones resultantes crecen de manera exponencial y resultan ser muy difíciles de simular, en cambio con la técnica de Bond Graph su metodología es menos engorrosa de llevar a cabo, aunque, si bien es cierto, el procedimiento maneja matrices relativamente grandes, esto puede ser compensado por la facilidad

en la simulación del modelo mediante programas de simulación como el 20-sim[®]. El procedimiento propuesto está basado principalmente en el procedimiento de Gawtrhop haciendo uso de los transformadores modulados multipuerto propuestos por Karnopp, además de agregar las pérdidas por rozamiento debido a las fricciones.

6.2 Trabajos futuros

El trabajo a futuro principal a considerar es extender el procedimiento planteado dentro del presente trabajo que fué en dos dimensiones al movimiento tridimensional, ver el apéndice A, donde se da una breve introducción a dicho movimiento en Bond Graph.

En el presente trabajo se encuentra el modelado matemático de un tipo de sistemas no lineales, ver figura 5.3, como trabajo futuro también se podría extender el modelado matemático a otros tipos de sistemas no lineales.

Otro punto importante a desarrollar sería modelar en Bond Graph los diferentes tipos de robots manipuladores que existe, como son los PUMA, SCARA, etc. Además de definir el área de trabajo de los robots manipuladores, es decir, los ángulos en los cuales el robot puede ser estabilizado.

Apéndice A

Movimiento en Tres Dimensiones en Bond Graph

Un bond graph entrega una representación de un sistema de libre causalidad en el que, a pesar de que esto implica restricciones en las posibles causalidades de los componentes del sistema; no especifica cual de las posibles causalidades puede ser utilizada. Esta flexibilidad puede ser usada para dar representaciones causales alternativas del mismo sistema; la selección entre estas alternativas depende del uso de la representación que se realizará. En este contexto (robótica) hay tres consideraciones fundamentales para esta selección:

- La necesidad de obtener un significado físico en la dinámica del manipulador.
- La necesidad de generar un código de simulación efectivo.
- La necesidad de comparar las ecuaciones obtenidas con la ecuación de robot estándar.

$$M(\theta)\ddot{\theta} + V(\theta, \dot{\theta}) + G(\theta) = \tau \quad (\text{A.1})$$

En particular, en el contexto de los manipuladores con manejadores de corriente directa (CD), podemos creer que una perspectiva intuitiva correcta para tales manipuladores es resumida como: *un manipulador es un conjunto de motores de CD acoplados a un mecanismo*. Existen algunas razones para este punto de vista:

1. Si los motores están acoplados al mecanismo a través de una caja de transmisión de una alta relación, el mecanismo parecerá tener una inercia relativamente pequeña para el motor, por lo que la dinámica es dominada por los motores.
2. Es natural pensar en las variables de estado del sistema en términos de velocidades del motor y posiciones; en el caso rígido, este estado determina la posición y velocidad de cada eslabón del mecanismo.
3. Desde el punto de vista del control, es agradable ver el sistema como un conjunto ordenado de sensores y actuadores: las velocidades angulares y pares del motor.
4. El control, simulación y compresión de un conjunto de motores desacoplados es relativamente sencillo: la dinámica es expresada por ecuaciones diferenciales ordinarias lineales que corresponden a un conjunto de integradores dobles.

A.1 Motores desacoplados en Bond Graph

Considerar un conjunto de motores lineales vistos como fuentes de torque ideales manejando una inercia. Dada la discusión anterior, cada motor tiene dos estados asociados con él: el motor i -ésimo tiene un estado que comprende el ángulo θ_i y la velocidad angular $\dot{\theta}_i$. Sin embargo, Desde el punto de vista de modelado sistemático del sistema, los estados deberían ser variables de esfuerzo integrado o el flujo integrado. Por lo tanto, un estado alternativo consiste de un ángulo θ_i (flujo integrado) y un momento angular $h_i = i_i \dot{\theta}_i$ (esfuerzo integrado). La figura A.1 proporciona un bond graph de tres motores desacoplados ideales conectados a las fuentes de par que están manejando una inercia. Los elementos C suministran los ángulos de cada motor como un estado, como ellos tienen cero rigidez no afectan a la dinámica. donde:

- dt_1 , dt_2 y dt_3 son las velocidades angulares $\dot{\theta}_1$, $\dot{\theta}_2$ y $\dot{\theta}_3$ (uniones de velocidad).
- id_1 , id_2 e id_3 son las inercias del motor: estados h_1 , h_2 y h_3 (componentes de inercia).
- C_1 , C_2 y C_3 proporciona los ángulos de unión θ_1 , θ_2 y θ_3 (componentes de restricción).

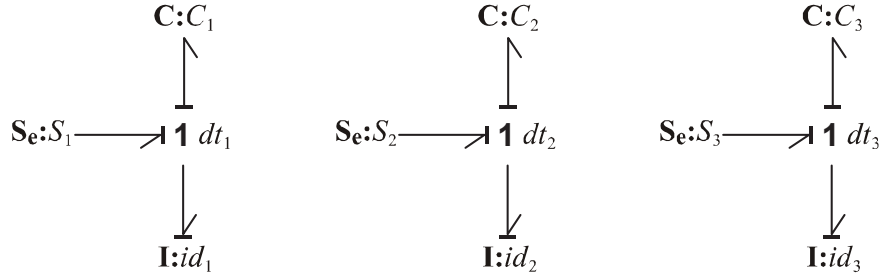


Figura A.1: Bond Graph de motores desacoplados.

- S_1 , S_2 y S_3 son los pares aplicados T_1 , T_2 y T_3 (fuentes).

Las ecuaciones correspondientes son:

$$\dot{h} = T \quad (\text{A.2})$$

$$\dot{\theta} = I_m^{-1} h \quad (\text{A.3})$$

donde I_m es una matriz diagonal e $I_{mii} = i_i$.

A.2 Ejemplo de robots en Bond Graph

Considerar el manipulador de la figura A.2 con una unión prismática simple (con parámetro θ_3) así como un ángulo fijo θ_2 en la horizontal.

En términos de bond graph, esto puede ser representado como se muestra en la figura A.3, donde:

- v_x y v_y son las velocidades (uniones de velocidad común).
- m_x y m_y son el momento del centro de masa p_x , p_y (Componentes de inercia).
- S_3 es la fuerza aplicada (fuente).
- S_g e i_g son la fuente de esfuerzo e inercia debidas a la gravedad (fuente e inercia)

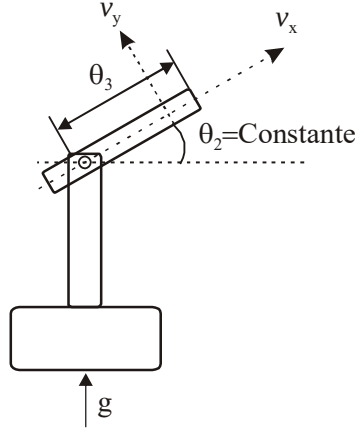


Figura A.2: Ejemplo de un robot manipulador.

La fuente S_g maneja a una masa i_g con una aceleración de g . Esta aceleración es transformada a las coordenadas x y y por los dos transformadores t_{gx} (con ganancia $\sin \theta_2$) y t_{gy} (con ganancia $\cos \theta$). El acoplamiento es por medio de señales o bonds activos, así que la aceleración de la masa no es afectada por el resto del sistema.

A.3 Movimiento en tres dimensiones y ecuaciones de Euler en Bond Graph

Karnopp (1969) fue quien marcó el camino para la representación de cuerpos mecánicos rígidos en tres dimensiones en Bond Graph, la idea principal es que las ecuaciones de Euler pueden ser representadas por medio de un Bond Graph de estructura triangular.

A.4 Sistemas mecánicos con geometría no lineal

En esta sección se trata de la mecánica de cuerpos rígidos multidimensionales y la inclusión de tal mecánica compleja en los modelos de sistema.

Los primeros ejemplos del uso de ingeniería de mecánica no lineal son sistemas de vehículos, a pesar de que hay muchos otros.

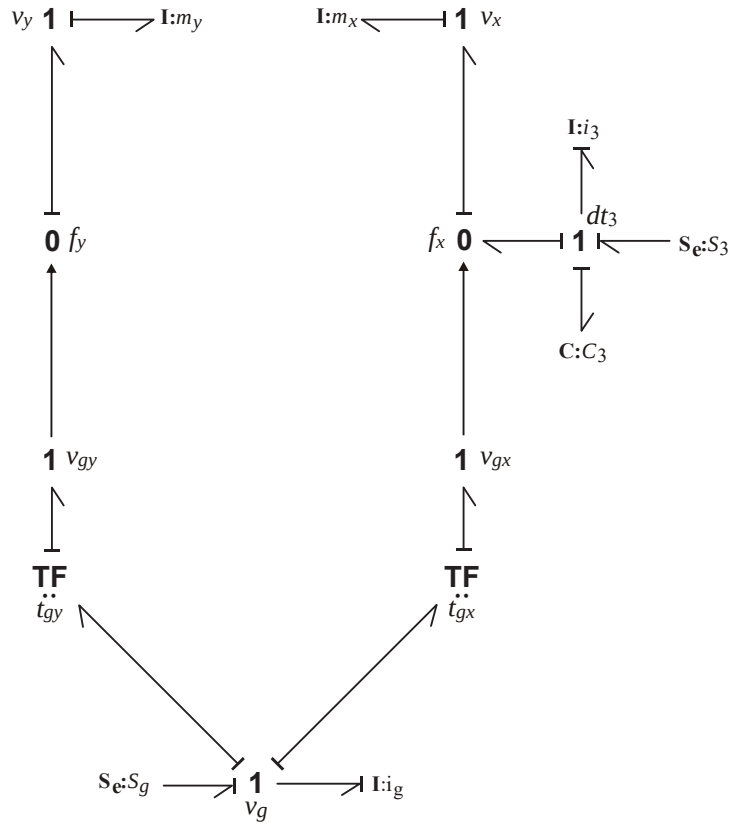


Figura A.3: Bond graph del robot manipulador de la figura A.2.

A.5 Dinámica multidimensional

La figura A.4 muestra un cuerpo rígido general girando y trasladándose en el espacio. Se muestran los ejes inerciales XYZ y los ejes x,y,z los cuales son unidos al cuerpo en su centro de masa y alineados con los principales ejes del cuerpo.

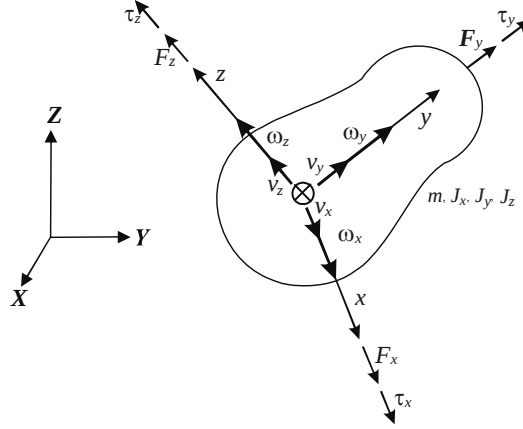


Figura A.4: Cuerpo en movimiento 3-D general.

En el instante mostrado, el cuerpo tiene una velocidad absoluta $\mathbf{v}$ y una velocidad angular absoluta $\boldsymbol{\omega}$. Newton estableció que la fuerza neta $\mathbf{F}$ actuando en el cuerpo cambia su momento:

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \quad (\text{A.4})$$

donde:

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} \quad (\text{A.5})$$

Si $\mathbf{v}$ es expresado con respecto a un marco de referencia rotatorio, entonces:

$$\mathbf{F} = \left. \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial t} \right|_{rel} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{p} \quad (\text{A.6})$$

donde $\left. \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial t} \right|_{rel}$, indica la relación de cambio del momento relativo al marco de referencia en movimiento. Una ley de momento angular puede ser deducida si el par neto que actúa en el cuerpo $\boldsymbol{\tau}$ y el momento angular $\mathbf{h}$ son evaluados con respecto a punto fijo, si existe uno para

el cuerpo o el centro de masa:

$$\tau = \frac{d\mathbf{h}}{dx} \quad (\text{A.7})$$

Si se asume que los ejes del sistema $x - y - z$ están alineados con los ejes principales del cuerpo, entonces el momento angular está relacionado a la velocidad angular por:

$$\mathbf{h} = \mathbf{J}\boldsymbol{\omega} \quad (\text{A.8})$$

En la cual $\mathbf{J}$ es una matriz diagonal de los momentos principales de inercia, J_x, J_y, J_z . Para $\mathbf{h}$ expresado con respecto al marco de referencia en rotación.

$$\boldsymbol{\tau} = \left. \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t} \right|_{rel} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{h} \quad (\text{A.9})$$

Utilizando la regla de la mano derecha las ecuaciones de las componentes son:

$$\begin{aligned} F_x &= m\dot{v}_x + m\omega_y v_z - m\omega_z v_y \\ F_y &= m\dot{v}_y + m\omega_z v_x - m\omega_x v_z \\ F_z &= m\dot{v}_z + m\omega_x v_y - m\omega_y v_x \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

y

$$\begin{aligned} \tau_x &= J_x \dot{\omega}_x + \omega_y J_z \omega_z - \omega_z J_y \omega_y \\ \tau_y &= J_y \dot{\omega}_y + \omega_z J_x \omega_x - \omega_x J_z \omega_z \\ \tau_z &= J_z \dot{\omega}_z + \omega_x J_y \omega_y - \omega_y J_x \omega_x \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

Estas ecuaciones diferenciales son conocidas como *Ecuaciones de Euler*. Estas ecuaciones no tienen solución general y solamente pueden ser resueltas analíticamente para algunos casos especiales.

Si estas ecuaciones fueran resueltas, entonces se conocería $v_x, v_y, v_z, \omega_x, \omega_y, \omega_z$, con respecto a un marco de referencia que estaría apuntando en una dirección diferente en todo instante, lo cual hace la interpretación del movimiento del cuerpo un poco más difícil. Además, las componentes de fuerza y par deben estar alineadas con las coordenadas fijas al cuerpo para poder utilizar de manera correcta estas ecuaciones. Esto nunca ocurriría naturalmente, así, la utilidad de estas ecuaciones es cuestionable en esta etapa de desarrollo. Un Bond Graph de las ecuaciones de Euler se muestran en la figura A.5.

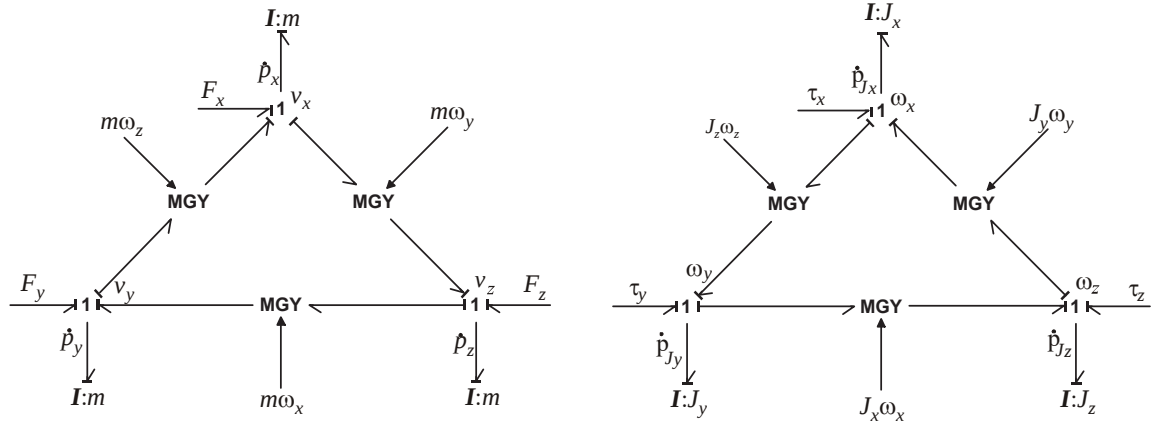


Figura A.5: Bond Graph para movimiento de cuerpo rígido en 3-D.

A.6 Transformación de coordenadas

A partir de que es improbable que las fuerzas externas y pares estén alineados de forma conveniente con las direcciones principales que están cambiando constantemente, y a partir de que es difícil interpretar el movimiento del cuerpo con respecto a las coordenadas del cuerpo fijo, es necesario transferir a otros marcos de referencia más convenientes a partir de las coordenadas del cuerpo fijo, esto, a través de una serie de transformaciones de coordenadas a las coordenadas inerciales, la figura A.6 muestra un marco de referencia inercial (X, Y, Z) una orientación del cuerpo fijo (x, y, z), y dos marcos de referencia intermedios (x', y', z' y x'', y'', z'').

El marco de referencia del cuerpo se obtiene primero girando sobre el eje Z a través de un ángulo ψ (desviación) produciendo el marco de referencia x', y', z' . A continuación, se gira sobre el eje y' a través de un ángulo θ (elevación) produciendo los ejes x'', y'', z'' . Finalmente, se gira sobre el eje x'' a través de un ángulo ϕ (giro) produciendo el marco de referencia instantáneo del cuerpo fijo (el marco de referencia está fijo al cuerpo instantáneo) x, y, z .

Ahora, se asume que las velocidades angulares del cuerpo fijo $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ son conocidas y se escriben las componentes de velocidad angular en los marcos de referencia intermedios y

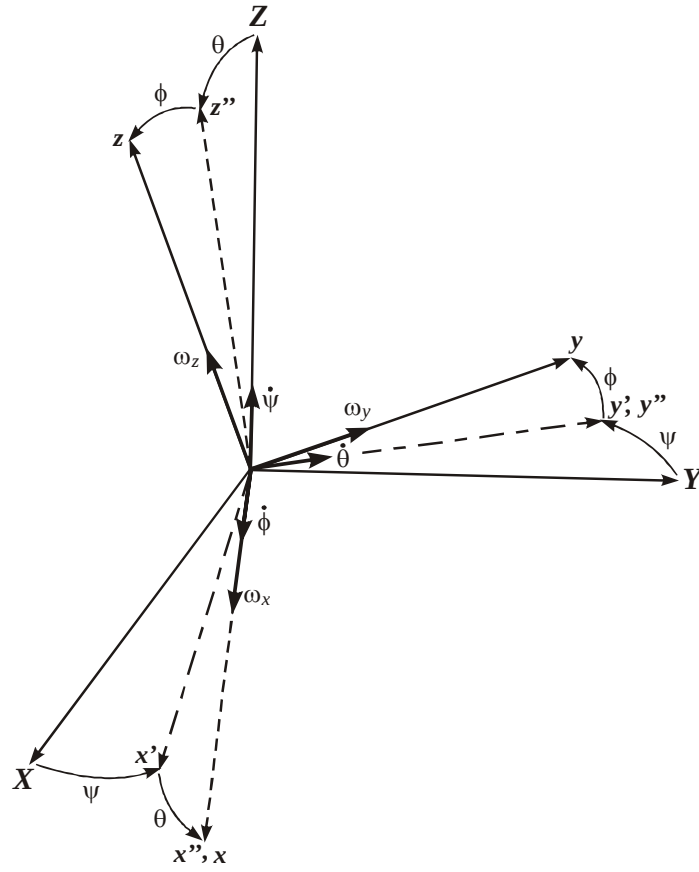


Figura A.6: Transformación de coordenadas de ángulo Cardan.

finalmente en el marco de referencia inercial.

$$\begin{aligned}
 \omega_{x'} &= \omega_x \\
 \omega_{y''} &= \omega_y \cos \phi - \omega_z \sin \phi \\
 \omega_{z''} &= \omega_y \sin \phi + \omega_z \cos \phi \\
 \omega_{x'} &= \omega_{x''} \cos \theta + \omega_{z''} \sin \theta \\
 \omega_{y'} &= \omega_{y''} \\
 \omega_{z'} &= -\omega_{x''} \sin \theta + \omega_{z''} \cos \theta \\
 \omega_X &= \omega_{x'} \cos \psi - \omega_{y'} \sin \psi \\
 \omega_Y &= \omega_{x'} \sin \psi + \omega_{y'} \cos \psi \\
 \omega_Z &= \omega_{z'}
 \end{aligned} \tag{A.12}$$

Se pueden escribir estas relaciones en forma matricial como:

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} \omega_{x''} \\ \omega_{y''} \\ \omega_{z''} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & \sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} \\
 \begin{bmatrix} \omega_{x'} \\ \omega_{y'} \\ \omega_{z'} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_{x''} \\ \omega_{y''} \\ \omega_{z''} \end{bmatrix} \\
 \begin{bmatrix} \omega_X \\ \omega_Y \\ \omega_Z \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_{x'} \\ \omega_{y'} \\ \omega_{z'} \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{A.13}$$

Por lo tanto, si conocemos ω_x , ω_y , ω_z entonces podemos determinar las componentes de velocidad angular en todos los marcos de referencia, incluyendo el marco de referencia inercial.

Si denotamos las matrices de transformación como:

$$\Phi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & \sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} ; \quad \Theta = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} ; \quad \Psi = \begin{bmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{A.14}$$

entonces:

$$\begin{bmatrix} \omega_X \\ \omega_Y \\ \omega_Z \end{bmatrix} = \Psi \Theta \Phi \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} ; \quad \begin{bmatrix} v_X \\ v_Y \\ v_Z \end{bmatrix} = \Psi \Theta \Phi \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} \quad (\text{A.15})$$

la relación entre fuerzas y pares es:

$$\begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix} = (\Psi \Theta \Phi)^t \begin{bmatrix} F_X \\ F_Y \\ F_Z \end{bmatrix} ; \quad \begin{bmatrix} \tau_x \\ \tau_y \\ \tau_z \end{bmatrix} = (\Psi \Theta \Phi)^t \begin{bmatrix} \tau_X \\ \tau_Y \\ v \tau_Z \end{bmatrix} \quad (\text{A.16})$$

Esta transformación a partir de las componentes de un cuerpo fijo a las componentes inerciales es una transformación conservadora de potencia, y se muestra en la figura A.7.

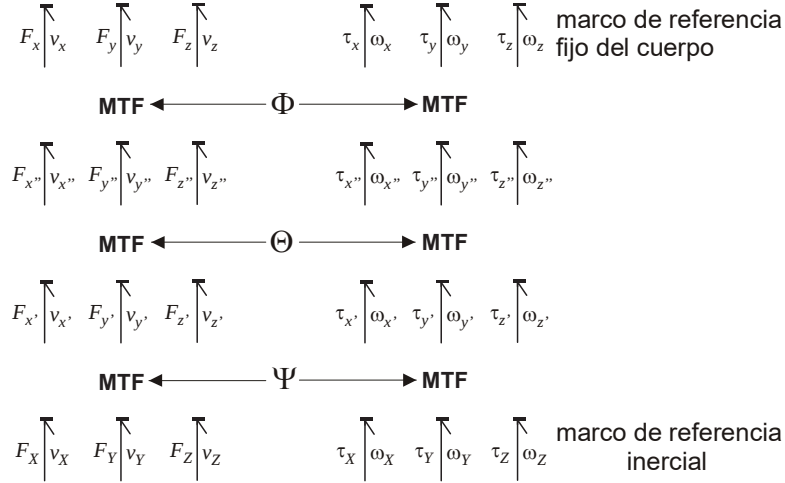


Figura A.7: Bond Graph de transformación de coordenadas.

Se debe notar que los ángulos ϕ , θ , ψ son requeridos para representar las transformaciones de coordenadas. Es relativamente simple relacionar $\dot{\phi}$, $\dot{\theta}$, $\dot{\psi}$ a las componentes del cuerpo fijo ω_x , ω_y y ω_z . A partir de la figura A.6.

$$\begin{aligned} \omega_x &= \dot{\phi} - \dot{\psi} \sin \theta \\ \omega_y &= \dot{\theta} \cos \phi + \dot{\psi} \cos \theta \sin \phi \\ \omega_z &= -\dot{\theta} \sin \phi + \dot{\psi} \cos \theta \cos \phi \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

Resolviendo para $\dot{\phi}$ y $\dot{\psi}$:

$$\begin{aligned}\dot{\theta} &= \omega_y \cos \phi - \omega_z \sin \phi \\ \dot{\psi} &= \omega_y \frac{\sin \phi}{\cos \theta} + \omega_z \frac{\cos \phi}{\cos \theta}\end{aligned}\tag{A.18}$$

entonces:

$$\dot{\phi} = \omega_x + \omega_y \sin \phi \frac{\sin \theta}{\cos \theta} + \omega_z \cos \phi \frac{\sin \theta}{\cos \theta}\tag{A.19}$$

Estas tres ecuaciones de estado adicionales deben ser integradas junto con las otras, de tal manera que ϕ , θ y ψ estén siempre disponibles como variables modulantes.

A.6.1 Ecuaciones de Euler

La versión más simple de las ecuaciones de Euler ocurre cuando el movimiento del cuerpo rígido se realiza sobre un punto *fijo*, este caso simple puede ser representado por el Bond Graph de la figura A.8.

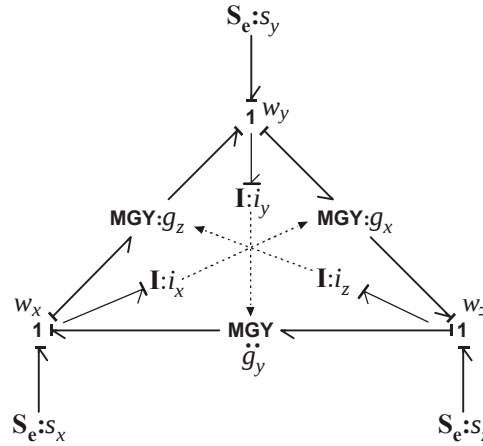


Figura A.8: Bond Graph del anillo de Euler.

donde:

- w_x , w_y y w_z son las velocidades angulares ω_x , ω_y y ω_z (uniones de velocidad común).
- i_x , i_y e i_z son los momentos angulares h_x , h_y y h_z (componentes de inercia).
- g_x , g_y y g_z son los acoplamientos debidos a la rotación (giradores modulados).

- S_x , S_y y S_z son los pares τ_x , τ_y y τ_z (fuentes).

En la práctica, un cuerpo rígido normalmente se conecta a otros objetos como parte de un sistema, por lo que los tres movimientos angulares son típicamente limitados y estas ecuaciones no tendrían esta causalidad. Por ejemplo, la figura A.9 muestra otra posibilidad causal, las velocidades angulares ω_x, ω_y están fijas (por fuentes) mientras que el eje z es manejado como en la figura A.8.

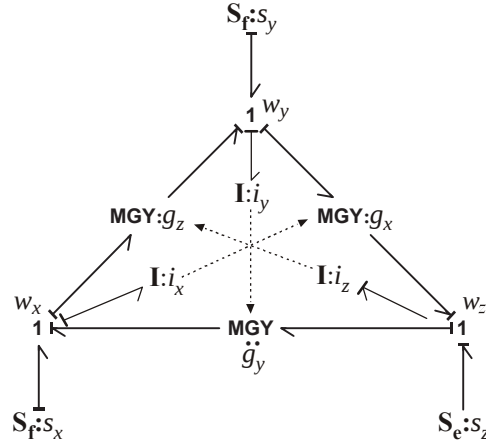


Figura A.9: Bond Graph del anillo de Euler, alternativa causal.

Las entradas ahora son: $u = \begin{bmatrix} \omega_x & \omega_y & \tau_z \end{bmatrix}^T$ y se tiene una sola ecuación diferencial linealmente independiente (los elementos **I** marcados como i_x e i_y tienen causalidad derivativa). El caso más complejo ocurre cuando el movimiento se considera con respecto al centro de masa. El bond graph resultante es el que se muestra en la figura A.10.

A.7 Modelado de un Robot PUMA de dos Grados de Libertad

Un manipulador simple de dos grados de libertad en tres dimensiones aparece en la figura A.11.

Este manipulador puede ser observado como un PUMA simplificado. El segundo eslabón a pesar de estar moviéndose en tres dimensiones, gira sobre un punto *fijo*: unión 2. Por lo que

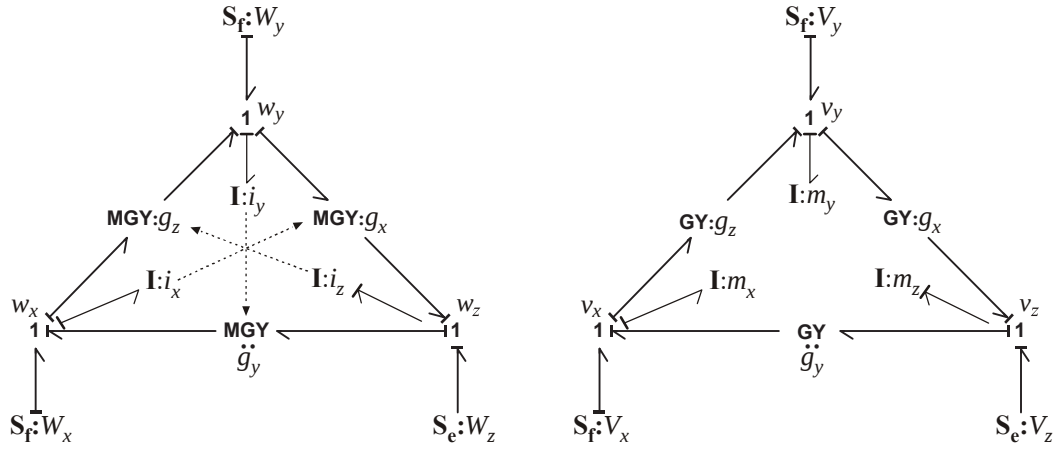


Figura A.10: Bond Graph del anillo de Euler, movimiento rotacional y traslacional.

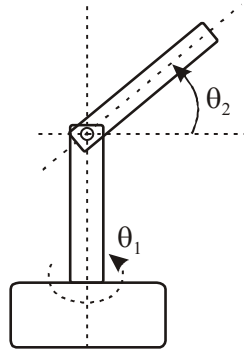


Figura A.11: Diagrama esquemático de un robot PUMA de dos grados de libertad.

su dinámica es determinada por el anillo de Euler.

El primer eslabón es una simple inercia giratoria acoplada al segundo eslabón mediante una unión. Las velocidades angulares del segundo eslabón sobre los ejes x y y , ω_x y ω_y son completamente determinadas por medio del primer eslabón ω_1 .

$$\omega_x = \omega_1 \sin \theta_2 \quad (\text{A.20})$$

$$\omega_y = \omega_1 \cos \theta_2 \quad (\text{A.21})$$

El Bond Graph correspondiente se muestra en la figura A.12.

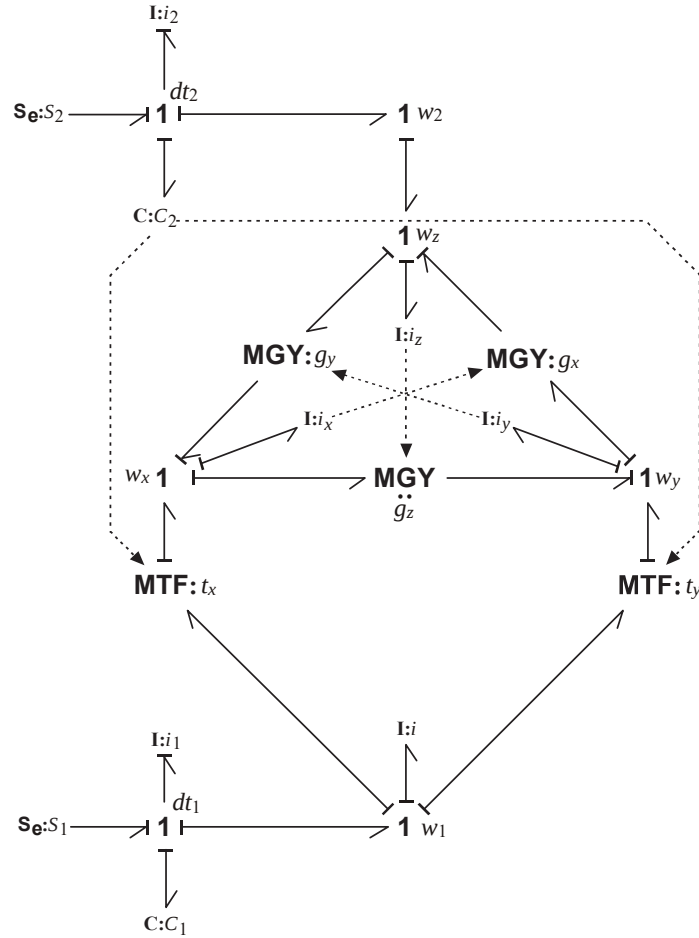


Figura A.12: Bond Graph del robot PUMA de dos grados de libertad.

donde:

i_1 y i_2 son las inercias de los eslabones 1 y 2 respectivamente, y w_1 y w_2 son las velocidades angulares.

A.8 Modelado de un Robot PUMA de Tres Grados de Libertad

Una aproximación a un robot PUMA de tres grados de libertad aparece en la figura A.13, y el Bond Graph correspondiente se muestra en la figura A.14. La parte baja del diagrama es similar al de la figura A.12 (pero sin la unión prismática), la parte superior contiene la estructura doble de anillo de Euler.

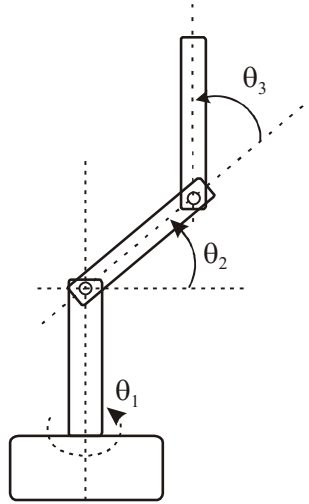


Figura A.13: Diagrama esquemático de un robot PUMA de tres grados de libertad.

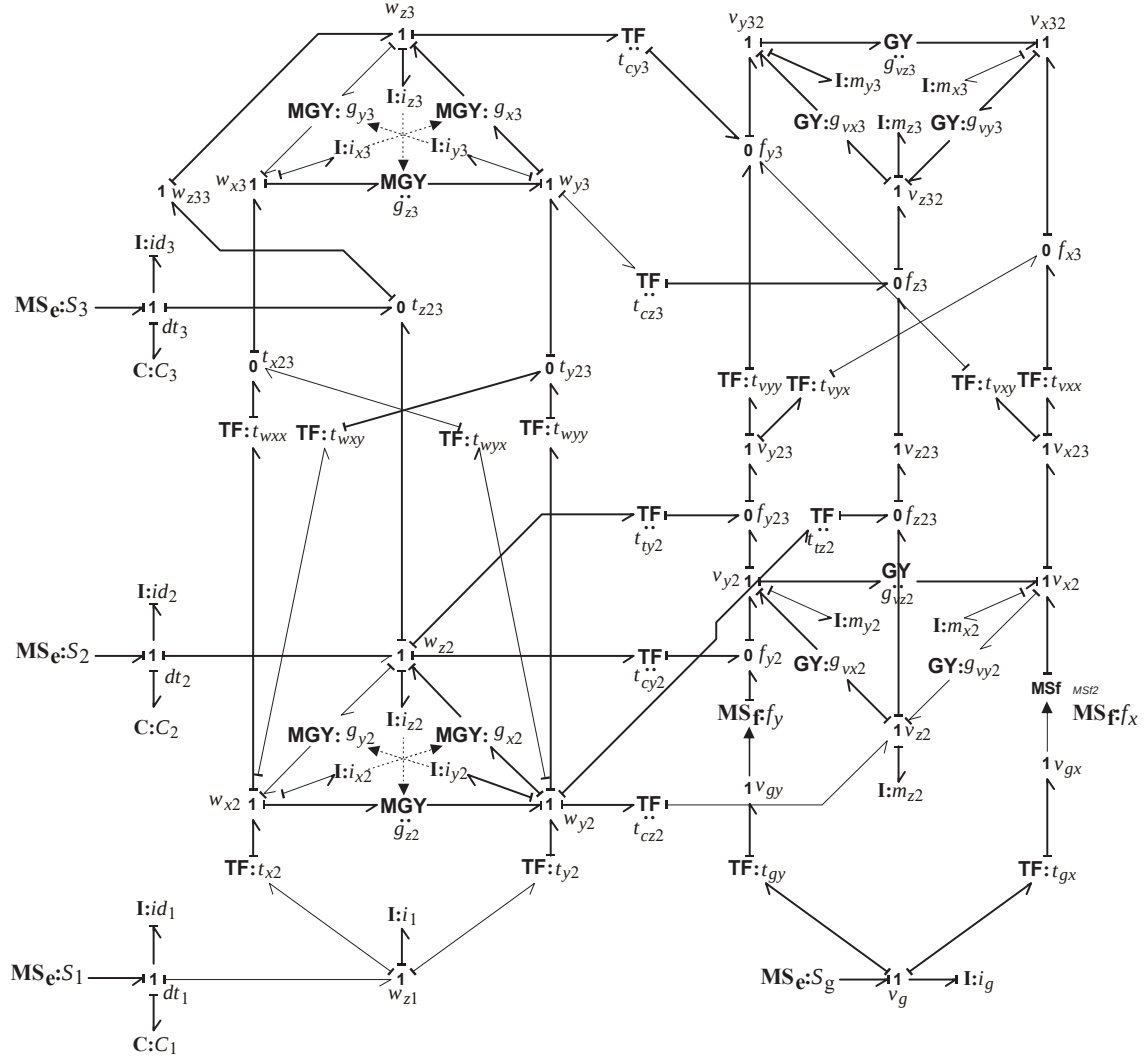


Figura A.14: Bond Graph del robot PUMA de tres grados de libertad.

Apéndice B

Artículo Publicado

En el presente apéndice se presenta el artículo derivado del presente trabajo, aceptado para su publicación en la *14th IEEE International Conference on Methods and Models in Automation and Robotics* que se llevará a cabo del 19 al 21 de agosto del presente año. en la ciudad de Miedzydroje, polonia.

Bibliografía

- [Zeid, 1992] Ashaf Zeid, Chin-Huang Chung (1992), *Bond Graph Modeling of Multibody System: a library of Three-dimensional Joints*, Journal of the Franklin Institute, Vol. 329, No. 4, pp. 605-636.
- [Karnopp, 1982] Dean Karnopp (1982), *Dynamic Forces in Multiport Mechanics: Direct and Lagrangian Formulations*, Journal of the Franklin Institute, Vol. 314, No. 5, pp. 265-270.
- [Karnopp, 2000] Dean. C. Karnopp D. L. Margolis and Roland C. Rosenber (2000), *System Dynamics: Modeling and Simulation of -mechatronic Systems*, John Wiley & Sons, April.
- [González, 2003] G. Gonzalez-A y R. Galindo(2003), *Steady-State Values for a Physycal System with Bond Graph Approach*, 9th IEEE International Conference on Methods and Models in Automation and Robotics, pp. 25-28, Miedzyzdroje, Poland.
- [Xia, 2007] Xia X. and Jiangfeng Zhang (2007) *Steady States of Nonlinear Systems*, Proceedings of IEEE international Conference on control and Automation, pp. 1525-1530, Guangzhou, China.
- [Breedveld, 1984] P. C. Breedveld (1984) *A Bond Graph Algorithm to Determine the Equilibrium State of a System*, Journal of The Franklin Institute, vol. 318, No. 2, pp. 77-75

- [Filippini, 2000] G. Filippini, D. Delarmelina, J. Pagano, J. P. Alianak, S. Junco and N. Nigro, *Dynamics of Multibody Systems with Bond Graph*. Mecánica Computacional Vol XXVI, pp. 2943-2958, Córdoba, Argentina, octubre 2007.
- [Thoma, 2006] J. Thoma and G. Mocellin (2006), *Simulation with Entropy in Engineering Thermodynamics*, Springer.
- [Gawthrop, 1995] P. Gawthrop and L. Smith (1995), *Metamodeling*, Prentice Hall.
- [Wellstead, 1979] P. E. Wellstead (1979), *Introduction to Physical System Modelling*, Academic Press.
- [Spong, 1989] M. W. Spong y M. Vidyasagar (1989), *Robot Dynamics and Control*, John Wiley & Sons.
- [Fu, 1989] K. S. Fu., R. C. González y C. S. G. Lee (1989), *Robótica: Control, Detección, Visión e Inteligencia*, McGraw-Hill.
- [Ogata, 1998] K. Ogata (1998), *Ingeniería de control Moderna*, Prentice Hall.
- [Dorf, 1989] R. C. Dorf (1989), *Sistemas Modernos de Control: Teoría y Práctica*, Addison-Wesley Iberoamericana.
- [Dauphin-Tanguy, 2000] Dauphin-Tanguy Geneviève (2000), et al., *Les Bond Graphs*, Hermes Science Publications, France.
- [Barasözen, 1995] B. Barasözen, P. Rentrop, and Y. Wagner (1995), *Inverter n-Bar Model in Description and in State Space Form*, Math. Model. Syst., **1**, 272-285
- [<http://materias.fi.ub.ar>] [http://materias.fi.uba.ar/6211/Mecanica rac 2007 De Newton a Lagrange - Dalembert.htm](http://materias.fi.uba.ar/6211/Mecanica%20rac%202007%20De%20Newton%20a%20Lagrange%20-%20Dalembert.htm).
- [Goldstein, 1980] Hebert Goldstein (1980), *Classical Mechanics*, Addison-Wesley publishing company, second edition.

- [Karnopp, 1997] D. Karnopp (1997), *Understanding Multibody Dynamics Using Bond Graph Representations*. Journal of the Franklin Institute, Vol. 334B, No. 4, pp. 631-642.
- [Brown, 1991] Forbes T. Brown (1991), *Hamiltonian and Lagrangian Bond Graphs*, Journal of the Franklin Institute, Vol. 328, No. 5/6, pp. 809-831.
- [Allen, 1997] Ross R. Allen (1997), *Multiport Representation of Inertia Properties of Kinematic Mechanisms*, Journal of the Franklin Institute, Vol. 308, No. 3, pp. 235-253.
- [Tierneho, 1985] M. J. L. Tierneho, A. M. Bos (1985), *Modelling the Dynamics and Kinematics of Mechanical Systems with Multibond Graphs*, Journal of the Franklin Institute, Vol. 319, No. 1/2, pp. 37-50.