



UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN  
NICOLÁS DE HIDALGO

*FACULTAD DE INGENIERÍA ELÉCTRICA  
DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO*

“SOLUCIÓN EFICIENTE PARA EL DESPACHO  
ECONÓMICO BASADA EN GRAFOS”

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE  
MAESTRA EN CIENCIAS EN INGENIERÍA  
ELÉCTRICA

PRESENTA  
ING. NANCY PAOLA CIRA PÉREZ

DIRECTOR DE TESIS  
DR. JAIME CERDA JACOBO

MORELIA, MICHOACÁN

FEBRERO DE 2011



# Resumen

Una de las cuestiones más fuertes al enfrentar problemas de Programación No Lineal es el manejo de las restricciones activas y no activas del sistema. Esto ha provocado que muchas de las aplicaciones que usan modelos de optimización para la solución de estos problemas, se inclinen por la utilización de métodos de barrera o penalización con las ineficiencias que estos generan.

Esta tesis describe como, basados en conceptos básicos de Programación No Lineal, utilizando una representación cuya solución está basada en grafos, el problema anterior desaparece.

El uso de métodos matriciales y todas las herramientas y ambientes de desarrollo para la manipulación de los mismos, hacen que los métodos basados en grafos sean considerados hasta cierto punto complejos, sacrificando así la eficiencia de los métodos basados en los últimos. En este documento se hará evidente la facilidad del uso de tales gráficas y algunas de las ventajas que ofrecen con respecto a los métodos que no explotan la topología de los grafos a resolver.

Para este fin, partes de la gráfica son consideradas activas o inactivas dependiendo de la solución actual del sistema, así como los valores de los multiplicadores de Lagrange y las variables duales. La modificación de tales propiedades en porciones de la gráfica provocará que la gráfica vaya cambiando dinámicamente su topología, para adaptarse a las condiciones actuales del problema cuya solución está en curso, a diferencia de los métodos en los que la topología se asume estática. Tales soluciones además de ser eficientes, nos proporcionan esquemas de almacenamiento óptimos, ya que solo se necesita la información fundamental del problema.

Por ello se presenta un método de solución para el problema del despacho económico basado en grafos, el cual tiene como principales herramientas de solución el método de Newton, la eliminación Gaussiana y los multiplicadores de Lagrange. A partir de esto se verá que el uso de estos métodos obtienen resultados eficientes además de un ahorro computacional en cuestión de memoria.

# Abstract

One of the greatest challenges to solve Nonlinear Programming Problems is the selection of the active and non active sets of constraints of the system. For this reason many optimization applications prefer to use barrier or penalty methods with their related inefficiencies.

This thesis describes how with the use of basic concepts of Nonlinear Programming, a graph-based solution for these models facilitates the handling of such constraints and, therefore, the solution process for the model.

The use of matrix methods with their tools and development environments for their handling make those graph-based methods in some sense more complex, discarding a priori the efficiency of them. This thesis will show how easy it is to use the graphs and the advantages of those methods which does not have a topology to explode.

To this end, some parts of the graph are considered active or non active, depending on the actual model solution as well as the values of the Lagrange multipliers and slack variables. At every solution step, there will probably be some changes on the graph topology to reflect the current conditions of the problem whose solution is in progress. Besides being efficient these solutions, provide an optimal storage scheme since only the fundamental information of the problem is stored.

This thesis presents a new solution method for economic dispatch using graphs, which will use some mathematical tools as Newton Step, Gaussian elimination, and Lagrange multipliers. In order it will show the advantages that this method obtains efficient results in addition to computational savings in a matter of memory.

# Contenido

Resumen . . . . .	III
Abstract . . . . .	V
Contenido . . . . .	VII
Lista de Figuras . . . . .	IX
Lista de Tablas . . . . .	XI
Lista de Símbolos . . . . .	XIII
1. Introducción . . . . .	1
1.1. Planteamiento del problema . . . . .	1
1.2. Antecedentes . . . . .	2
1.3. Objetivos de la tesis . . . . .	3
1.3.1. Objetivo general . . . . .	3
1.3.2. Objetivos particulares . . . . .	3
1.4. Descripción de Capítulos . . . . .	3
2. Fundamentos . . . . .	5
2.1. Fundamentos matemáticos . . . . .	5
2.1.1. Funciones convexas . . . . .	5
2.1.2. Multiplicadores de Lagrange o variables duales . . . . .	7
2.1.3. Condiciones Karush-Kuhn Tucker . . . . .	9
2.1.4. Método de Newton . . . . .	10
2.2. Fundamentos de un Sistema de Energía de Eléctrica . . . . .	12
2.2.1. Nodos . . . . .	12
2.2.2. Generadores . . . . .	13
2.2.3. Sistemas de energía eléctrica . . . . .	14
2.2.4. Flujos óptimos en corriente directa . . . . .	15
2.3. Conclusiones . . . . .	16
3. Sistemas de ecuaciones lineales y su solución basada en grafos . . . . .	17
3.1. Conversión del Método de Newton a un Sistema Basado en Grafos . . . . .	18
3.2. Representación basada en grafos para sistemas de ecuaciones lineales . . . . .	19
3.3. Sistemas de ecuaciones lineales simétricas y su representación basada en grafos . . . . .	24
3.4. Sistemas de ecuaciones lineales simétricas con estructura de árbol y su representación basada en grafos . . . . .	25

3.4.1. Solución Algebraica . . . . .	26
3.5. Eliminación Gaussiana y su interpretación por medio de grafos . . . . .	28
3.5.1. Casos Especiales de la Eliminación Gaussiana . . . . .	31
3.6. Solución de un sistema de ecuaciones lineales simétricas basado en grafos . . . . .	33
3.6.1. Importancia de la configuración inicial . . . . .	37
3.7. Solución de un sistema de ecuaciones lineales simétricos con estructura de árbol . . . . .	37
3.8. Conclusiones . . . . .	39
4. Solución del despacho económico basada en grafos . . . . .	41
4.1. El despacho económico . . . . .	41
4.2. El despacho económico y su representación basada en grafos . . . . .	44
4.2.1. Algoritmos . . . . .	46
4.2.2. Caso de estudio . . . . .	47
4.2.3. Resultados . . . . .	54
4.3. Conclusiones . . . . .	56
5. Solución del despacho económico basada en grafos descartando las variables de holgura . . . . .	59
5.1. Despacho Económico y su nueva gráfica . . . . .	59
5.2. Algoritmos . . . . .	61
5.3. Caso de estudio . . . . .	62
5.4. Resultados . . . . .	69
5.5. Conclusiones . . . . .	72
6. Conclusiones . . . . .	73
6.1. Conclusiones Generales . . . . .	73
6.2. Trabajo Futuro . . . . .	74
Referencias . . . . .	77

# Lista de Figuras

2.1. Una función convexa . . . . .	6
2.2. Interpretación gráfica de los multiplicadores de Lagrange . . . . .	7
2.3. Modelo de un nodo genérico. . . . .	13
2.4. Modelo del generador . . . . .	14
2.5. La transición de los sistemas aislados de energía interconectados . . . . .	15
3.1. Modelo basado en grafos para el método de Newton . . . . .	19
3.2. SEL totalmente desacoplado . . . . .	20
3.3. SEL completamente acoplado . . . . .	21
3.4. Un sistema disperso conectado . . . . .	21
3.5. Conversión de un sistema lineal de ecuaciones a su modelo gráfico . . . . .	22
3.6. Grafo correspondiente al sistema definido en la Ecuación ( 3.11) . . . . .	23
3.7. Conversión de un sistema ecuaciones lineales simétrico a su modelo gráfico . . . . .	24
3.8. Grafo correspondiente al sistema definido por la Ecuación ( 3.12) . . . . .	25
3.9. Grafo correspondiente al sistema definido por la Ecuación ( 3.13) . . . . .	26
3.10. Eliminación Gaussiana y su interpretación gráfica . . . . .	29
3.11. Eliminación Gaussiana y su interpretación gráfica . . . . .	29
3.12. Eliminación Gaussiana en una matriz dispersa . . . . .	30
3.13. Eliminación Gaussiana y su interpretación de una matriz dispersa . . . . .	30
3.14. Eliminación Gaussiana para $ \Gamma_k  = 3$ . . . . .	32
3.15. Eliminación Gaussiana para $ \Gamma_k  = 2$ . . . . .	32
3.16. Eliminación Gaussiana para $ \Gamma_k  = 1$ . . . . .	33
3.17. Grafo del sistema . . . . .	33
3.18. Solución basada en grafos con eliminación en orden $1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 3$ . . . . .	35
3.19. Solución basada en grafos con eliminación en orden $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4$ . . . . .	36
3.20. Solución basada en grafos con eliminación en orden $3 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$ . . . . .	36
3.21. Ejemplo de un árbol . . . . .	37
4.1. Diagrama equivalente del despacho económico . . . . .	42
4.2. Gráfica del modelo de reducción . . . . .	44
4.3. Proceso de reducción . . . . .	45
4.4. Grafo inicial . . . . .	49
4.5. Grafo primera iteración resuelta . . . . .	49

4.6. Grafo inicial segunda iteración . . . . .	50
4.7. Grafo segunda iteración resuelta . . . . .	51
4.8. Grafo inicial tercera iteración . . . . .	51
4.9. Grafo tercera iteración resuelta . . . . .	52
4.10. Grafo inicial cuarta iteración . . . . .	52
4.11. Grafo cuarta iteración resuelta . . . . .	53
4.12. Grafo inicial quinta iteración . . . . .	53
4.13. Grafo quinta iteración resuelta . . . . .	54
4.14. Convergencia de $p_1, p_2, p_3$ . . . . .	55
4.15. Convergencia variables duales . . . . .	55
4.16. Convergencia de $C_1(p_1), C_2(p_2), C_3(p_3)$ . . . . .	56
5.1. Grafo del modelo de reducción . . . . .	60
5.2. Grafo del modelo de reducción . . . . .	61
5.3. Grafo inicial . . . . .	64
5.4. Grafo inicial resuelto . . . . .	65
5.5. Segunda iteración grafo inicial . . . . .	65
5.6. Segunda iteración nodo $p_1$ reducido . . . . .	66
5.7. Segunda iteración grafo resuelto . . . . .	66
5.8. Tercera iteración grafo inicial . . . . .	67
5.9. Tercera iteración grafo resuelto . . . . .	67
5.10. Cuarta iteración grafo inicial . . . . .	68
5.11. Cuarta iteración grafo resuelta . . . . .	68
5.12. Convergencia de $p_1, p_2, p_3$ . . . . .	69
5.13. Convergencia variables duales . . . . .	70
5.14. Convergencia de $C_1(p_1), C_2(p_2), C_3(p_3)$ . . . . .	70
5.15. Total de nodos generados conforme crece el número de variables . . . . .	71
5.16. Relación entre el aumento del numero de variables . . . . .	71

# Lista de Tablas

4.1. El Paso de Newton y los componentes involucrados. . . . .	43
4.2. Datos del sistema . . . . .	47
5.1. El Paso de Newton y los componentes involucrados. . . . .	60



# Lista de Símbolos

$\nabla$	Gradiente
$H$	Hessiano
$\mathcal{L}(z)$	Lagrangiano
$\mathbb{R}$	Conjunto de números reales
$\mu_k$	Multiplicadores de Lagrange
$z^*$	Óptimo de una función
$g_j(z)$	Conjunto de igualdades
$h_k(z)$	Conjunto de desigualdades
$N$	Conjunto de nodos eléctricos
$E$	Conjunto de líneas
$G$	Conjunto de generadores
$Q$	Conjunto de cargas fijas
$\Gamma_k$	Conjunto de nodos conectados al nodo $k$
$\Upsilon_i$	Conjunto de hijos
$\lambda$	Precio de la energía
$p_g$	Potencia del generador $g$
$\lfloor p_g \rfloor$	Límite inferior de la potencia del generador $g$
$\lceil p_g \rceil$	Límite superior de la potencia del generador $g$



# Capítulo 1

## Introducción

### 1.1. Planteamiento del problema

El modelo general del despacho económico es un problema cuadrático convexo separable. La solución a este tipo de problemas con  $z$  representando todas las variables que serán utilizadas en el proceso de solución (i.e. variables duales y variables slack), se basa en el Lagrangiano  $\mathcal{L}(z)$ , el gradiente ( $\nabla(\mathcal{L}(z))$ ) y la Matriz Hessiana  $H(\mathcal{L}(z))$ . La solución ha este sistema es por medio de un proceso iterativo donde la hipótesis inicial  $z_o$  es mejorada resolviendo el Método de Newton (i.e.  $\Delta z = -H(\mathcal{L}(z))^{-1} \nabla(\mathcal{L}(z))$ ).

Existen diferentes formas para dar solución al problema del despacho económico, una de ellas basada en grafos planteada en [Cerdea y De Roure, 2010], el cual plantea la solución con el uso de variables duales y variables de holgura. Este método resuelve el problema de despacho económico, pero en ciertos casos maneja valores cercanos a cero, por lo cual puede llegar a algunas inconsistencias en el proceso de reducción. Por ello en la presente tesis se plantea un método de solución con una topología basada en grafos, pero sin el uso de las variables de holgura. Con esto se mostrarán las ventajas que tienen estos tipos de métodos de solución, contra los métodos que utilizan matrices para la solución del despacho económico.

## 1.2. Antecedentes

El despacho económico ha sido considerado un problema de Programación No Lineal Convexo. Uno de las cuestiones más fuertes al enfrentar problemas de este tipo es el manejo de las restricciones activas y no activas del sistema. Esto ha provocado que muchas de las aplicaciones que usan modelos de optimización se inclinen por la utilización de métodos de barrera o penalización con las ineficiencias que estos generan [Griva et al., 2009].

El uso de métodos matriciales y todas las herramientas y ambientes de desarrollo para la manipulación de las mismas hacen que los métodos basados en grafos sean considerados hasta cierto punto complejos, sacrificando así la eficiencia de los métodos basados en [Nocedal y Wright, 2006].

El problema del despacho económico, ha sido abordado por diferentes métodos, un ejemplo de estos es la solución por medio de Algoritmos Evolutivos, los cuales han mostrado resultados óptimos para el problema. Los algoritmos más utilizados dentro de los algoritmos evolutivos son los algoritmos genéticos, un ejemplo del uso de estos es el híbrido de la combinación de un algoritmo genético (AG), un patrón de búsqueda y una programación cuadrática secuencial (PCS) [Alsumait y Sykulski, 2009]. El GA es el principal optimizador de este algoritmo, donde el patrón de búsqueda y el PCS se utilizan para ajustar los resultados obtenidos por AG.

Otro método utilizado anteriormente es llamado el algoritmo distribuido de búsqueda Tabú [Khamsawang et al., 2004], el cual mejora el algoritmo de búsqueda Tabú adicionando cómputo distribuido, actualizando las soluciones globales y locales del algoritmo mencionado. Este método garantiza una solución óptima cercana y reduce notablemente el tiempo de cómputo.

Las redes neuronales son otra forma de dar solución al problema de despacho económico. Un ejemplo de estas es la red neuronal Hopfield [Mohammadi y Varahram, 2007], la cual se considera eficiente porque el tiempo que requiere para llegar a una convergencia es pequeño comparado con los métodos clásicos.

Existen varios métodos utilizados para la solución del problema de despacho económico. En la presente tesis se presenta una extensión al modelo de descentralización directa-

mente sobre el grafo presentada en [Cerdeja y De Roure, 2006] como una alternativa a las propuestas basadas en técnicas matriciales [Bakirtzis y Biskas, 2003, Bakirtzis et al., 2000, Biskas y Bakirtzis, 2006, Conejo y Aguado, 1998].

### **1.3. Objetivos de la tesis**

#### **1.3.1. Objetivo general**

El objetivo general de la presente tesis es la aportación de un método de solución al problema del despacho económico basado en grafos, omitiendo el uso de variables de holgura, y hacer evidente la facilidad del uso de este método.

#### **1.3.2. Objetivos particulares**

- Describir la representación y solución de un sistema de ecuaciones lineales usando una estructura topológica basada en grafos, para así mostrar la facilidad del uso de estos.
- Establecer las ventajas de la solución de los sistemas de ecuaciones lineales mediante grafos comparada con la solución matricial.
- Implementar las metodologías basadas en grafos, para los sistemas de ecuaciones lineales generados por el despacho económico.

### **1.4. Descripción de Capítulos**

En el Capítulo 2 se presentan los fundamentos matemáticos necesarios para la definición y solución de los sistemas de ecuaciones lineales. Uno de los conceptos principales que se presenta es el Método de Newton, el cual es una de las herramientas principales para la solución del despacho económico. También se definen los fundamentos de los sistemas de energía eléctrica, en donde se muestran los componentes necesarios para la definición del despacho económico.

El Capítulo 3 muestra la representación gráfica para los sistemas de ecuaciones lineales, también se muestra la representación gráfica de los sistemas de ecuaciones lineales

simétricos, incluyendo una solución algebraica. También se presenta la solución a los sistemas de ecuaciones lineales en una forma basada en grafos así como la conversión del Método Newton a un sistema basado en grafos.

El Capítulo 4 define el problema de despacho económico, su solución a través del método de Newton, introduce sus componentes y se define una solución de manera gráfica, con el uso de variables duales y variables de holgura, así como el uso de restricciones activas e inactivas, para la solución eficiente a este problema.

El Capítulo 5 muestra la solución del problema del despacho económico de forma gráfica, pero sin el uso de variables slack, presentando una nueva forma de reducción de la gráfica.

Finalmente, en el Capítulo 6 se presentan las conclusiones, así como el Trabajo futuro a partir del presente documento.

## Capítulo 2

# Fundamentos

### 2.1. Fundamentos matemáticos

En esta sección se presentan los conceptos matemáticos necesarios para la definición y solución de los sistemas de ecuaciones lineales. En la Sección ?? se presentan las Series de Taylor, las cuales nos ayudan a la aproximación de una función. A continuación en la Sección 2.1.1 se definen las funciones convexas, las cuales establecen las bases para la resolución de problemas de optimización. En la Sección 2.1.2 se presentan los Multiplicadores de Lagrange, donde se introduce la función del Lagrangiano y su interpretación económica. Después en la Sección 2.1.3, se introducen las condiciones Karush-Kuhn Tucker, las cuales generalizan el método de los Multiplicadores de Lagrange, para resolver el problema del despacho económico. La Sección 2.1.4 presentando una de las herramientas principales para la resolución del despacho económico, el método de Newton.

#### 2.1.1. Funciones convexas

Los métodos para problemas no lineales, donde la función objetivo tiene múltiples mínimos locales, son muy difíciles de enfrentar, ya que estos deben distinguir entre un mínimo local y un mínimo global. Sin embargo, existen muchos problemas que cuentan solamente con un mínimo. Por otra parte, existen funciones con mínimos múltiples las cuales pueden ser consideradas como si tuvieran un punto extremo. Esto se debe a que en

el límite de la región solamente se encuentra ese mínimo. Para poder comprender el uso de estas técnicas de resolución de problemas de programación no lineal, es necesario definir el concepto de función convexa.

Una función  $f(z)$  es llamada convexa si para dos puntos  $z_1, z_2 \in \mathbb{R}^n$  y  $0 \leq \alpha \leq 1$ .

$$f(\alpha z_1 + (1 - \alpha)z_2) \leq \alpha f(z_1) + (1 - \alpha)f(z_2) \quad (2.1)$$

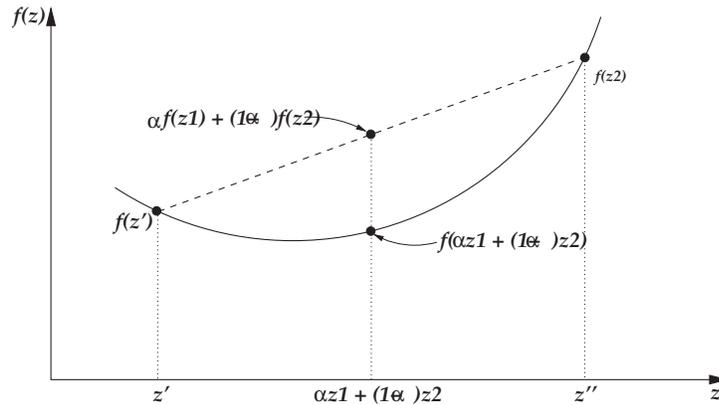


Figura 2.1: Una función convexa

La Figura 2.1 muestra una curva convexa basado en la Ecuación ( 2.2), la cual muestra la estructura de un problema no lineal, este será llamado un problema no lineal convexo, si las funciones  $f(z)$ ,  $g_j(z)$  y  $h_k(z)$  son convexas.

$$\begin{aligned} & \underset{z}{\text{mín}} f(z) \\ \text{s.a.} \quad & g_j(z) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, m \\ & h_k(z) \leq 0, \quad k = 1, 2, \dots, p \end{aligned} \quad (2.2)$$

La programación convexa establece las bases para resolver problemas de optimización para funciones convexas en  $\mathbb{R}^n$ . La existencia de solamente en un mínimo local, y por ello un mínimo global, es la característica principal de las funciones convexas. Como resultado, algunas técnicas eficientes pueden ser aplicadas en forma ordenada para resolver el sistema.

### 2.1.2. Multiplicadores de Lagrange o variables duales

La solución a los problemas no lineales con restricciones de igualdad fue desarrollada por Joseph Louis Lagrange. Una configuración básica para este problema se muestra en la Figura 2.2. La función objetivo es  $f(z)$  y  $g(z)$  es la restricción lineal la cual tiene que cumplirse para la solución.

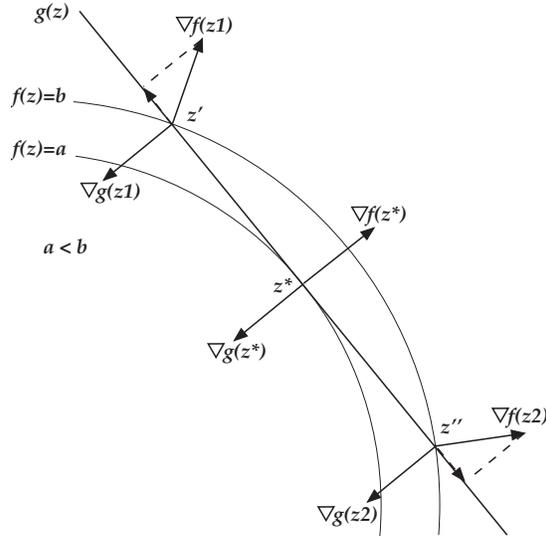


Figura 2.2: Interpretación gráfica de los multiplicadores de Lagrange

Se denotará el gradiente para cada función como  $\nabla f(z)$  y  $\nabla g(z)$ , respectivamente. En este caso son presentadas dos isocurvas para  $f(z)$ . La primera representa los puntos donde  $f(z) = a$ , y la otra los puntos donde  $f(z) = b$ , donde  $a < b$ . Ciertamente, si se trata de maximizar  $f(z)$ , restringida por  $g(z)$ , entonces el punto de solución es donde  $g(z)$  toca  $f(z)$ , i.e.  $g(z)$  es tangente a  $f(z)$ . En ese punto ambos vectores  $\nabla f(z)$  y  $\nabla g(z)$  son paralelos. Por lo cual, el punto de solución tiene que estar en el punto  $z^*$  como se observa en la Ecuación ( 2.3).

$$\nabla f(z^*) + \lambda \nabla g(z^*) = 0 \quad (2.3)$$

En esta ecuación, las variables representadas por el vector  $\lambda$  son conocidas como Multiplicadores de Lagrange o Variables Duales. Los Multiplicadores de Lagrange pueden considerarse como factores de escalamiento para cada restricción del vector gradiente para

cumplir con la Ecuación ( 2.3). Por lo tanto, para resolver un problema de programación no lineal, es necesario un mecanismo para construir esta expresión. Este proceso se realiza definiendo la Ecuación ( 2.4) la cual es llamada el *Lagrangiano*. El Lagrangiano es una expresión de alta dimensionalidad ya que además de resolver el problema original, utiliza los Multiplicadores de Lagrange así como las variables de holgura, con el fin de convertir las desigualdades en igualdades.

$$\mathcal{L}(z, \lambda) = f(z^*) + \lambda g(z^*) \quad (2.4)$$

Por lo tanto, con el fin de resolver la Ecuación( 2.3), la condición de primer orden para la Ecuación ( 2.4), se denota en la Ecuación( 2.5), la cual debe ser resuelta.

$$\nabla \mathcal{L}(z, \lambda) = \nabla f(z^*) + \nabla \lambda g(z^*) = 0 \quad (2.5)$$

La Ecuación ( 2.5) produce la Ecuación ( 2.3) cuya solución nos lleva al punto óptimo para el problema no lineal. Por lo tanto, una vez que el problema no lineal se ha especificado, el Langrangiano puede ser construido y resuelto basado en esa información.

### Los Multiplicadores de Lagrange y su interpretación económica

Si  $z^*$  es el optimizador con valor para la función objetivo  $f(z^*)$ , nuestra siguiente pregunta es: ¿qué pasa si variamos el lado derecho de las restricciones(*RightHandSide, RHS*)?. Recordemos que en la mayoría de las ocasiones, los modelos de optimización son construidos con datos aproximados. Consideremos el problema

$$\begin{aligned} & \min_z f(z) \\ \text{s.a.} \quad & \mathbf{A}z = b \end{aligned} \quad (2.6)$$

Supongamos pequeñas variaciones en el vector del RHS, i.e.  $b$ . Mas aún, supondremos, que  $f(z^*)$  es dos veces continuamente diferenciable, y  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$  es una matriz de rango completo.

Supongamos ahora que el RHS  $b$  es perturbado con un pequeño vector de perturbaciones denominado  $\delta$ , i.e.  $b \leftarrow b + \delta$ . Es natural pensar entonces que el nuevo optimizador,

$\tilde{z}$ , deberá estar cerca de  $z^*$  con un valor cercano a  $f(z^*)$ . Supongamos que  $\tilde{z} \approx z^*$ , sabemos que  $\mathbf{A}z^* = b$ , por lo cual  $\mathbf{A}\tilde{z} = b + \delta$  usando los dos primeros términos de la serie de Taylor en  $z$  tenemos

$$\begin{aligned} f(\tilde{z}) &\approx f(z^*) + (\tilde{z} - z^*)^T \nabla f(z^*) \\ &= f(z^*) + (\tilde{z} - z^*)^T \mathbf{A}\lambda \\ &= f(z^*) + \delta^T \lambda \end{aligned} \tag{2.7}$$

Esto es, si el RHS de la restricción  $i$  es cambiado en  $\delta$  unidades, entonces el valor de la función objetivo cambiara en  $\delta_i \lambda_i$ . En particular, supongamos que el lado derecho de la restricción  $i$  se aumenta en uno, entonces la función objetivo será aumentada en  $\lambda_i$ . Es decir, los Multiplicadores de Lagrange representan el cambio en la función objetivo por unidad de cambio unitaria en la restricción  $i$ .

### 2.1.3. Condiciones Karush-Kuhn Tucker

El método de los Multiplicadores de Lagrange permite el uso de condiciones de optimalidad para las restricciones de igualdad [Cerdea et al., 2011]. Sin embargo, varios problemas son expresados en términos de restricciones de desigualdad, definidas por

$$\begin{aligned} \min_z & f(z) \\ \text{s.a.} \quad & g_j(z) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, m \\ & h_k(z) \leq 0, \quad k = 1, 2, \dots, p \end{aligned} \tag{2.8}$$

Las condiciones Karush-Kuhn Tucker (KKT) generalizan el método de los Multiplicadores de Lagrange para resolver este problema, definiendo un mínimo de condiciones, las cuales garantizan las condiciones necesarias de optimalidad para problemas de programación no lineal. Además, las condiciones KKT proveen condiciones de optimalidad para problemas de programación convexos. Si se asume  $z^*$  como una solución óptima para un problema no lineal con  $n = |z|$  variables,  $m$  restricciones de igualdad y  $p$  restricciones de

desigualdad, estas condiciones [Nocedal y Wright, 2006] son:

$$\nabla f(z^*) + \sum_{j=1}^m \lambda_j \nabla g_j(z^*) + \sum_{k=1}^p \mu_k \nabla h_k(z^*) = 0 \quad (2.9)$$

$$g_j(z^*) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, m \quad (2.10)$$

$$h_k(z^*) \leq 0, \quad k = 1, 2, \dots, p \quad (2.11)$$

$$\mu_k h_k(z^*) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, p \quad (2.12)$$

$$\mu_k \geq 0, \quad k = 1, 2, \dots, p \quad (2.13)$$

Donde la Ecuación ( 2.9) representa el equilibrio entre las restricciones y los gradientes de la función objetivo. La Ecuación ( 2.10) y la Ecuación ( 2.11) representan la solución de factibilidad en el punto óptimo. La Ecuación ( 2.12) representa la condición de complementariedad, i.e.  $\mu_k = 0$  o  $h_k = 0$ . Y finalmente la Ecuación ( 2.13) representa la factibilidad dual, establecida por la positividad de las variables duales.

Cuando las restricciones de desigualdad son expresadas como igualdades por medio de la introducción de un término de holgura cuadrático, la Ecuación ( 2.12) puede ser expresada como la Ecuación ( 2.14).

$$h_k(z^*) + \frac{\psi_k^2}{2} = 0, \quad \psi_k \in \mathbb{R}, k = 1, 2, \dots, p \quad (2.14)$$

Por lo cual la condición establecida por la Ecuación ( 2.12) puede ser expresada por la Ecuación ( 2.15).

$$\mu_k \psi_k = 0, \quad \psi_k \in \mathbb{R}, k = 1, 2, \dots, p \quad (2.15)$$

Es decir, ahora la Ecuación ( 2.15) representa las nuevas condiciones de complementariedad, i.e. ya sea  $\mu_k = 0$  o  $\psi_k = 0$ . Por otro lado, la condición de la Ecuación ( 2.13), establece que los Multiplicadores de Lagrange deben ser positivos. Un valor negativo indica que se encuentra en la región de factibilidad, no en el límite y que aún es factible mejorar la función objetivo.

#### 2.1.4. Método de Newton

Consideremos la función  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  y el punto  $z^* \in \mathbb{R}^n$  el cual representa una solución óptima. El Método de Newton es una herramienta matemática que permite

movernos en  $\mathbb{R}^n$ , basándose en la información que se tiene sobre cada punto  $z_i$  desde  $z_i$  hasta  $z_{i+1}$ . Su objetivo es llegar a  $z^*$ , que es donde  $f(z)$  alcanza sus puntos extremos (i.e. el máximo o el mínimo). Por lo tanto, a cada paso se encuentra más cerca de  $z^*$ . El Método de Newton está basado en la expansión de Taylor de  $f(z)$  en  $z_i$  como una aproximación de  $f(z_{i+1})$ . Este está basado en los valores de sus gradientes  $\nabla^{(m)} f(z_i)$  evaluados en  $z_i$ , donde  $m$  representa el grado del gradiente. Tomando esto en consideración, la expansión de Taylor se define como

$$f(z_{i+1}) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\nabla^{(m)} f(z_i)}{m!} (\Delta z)^m \quad (2.16)$$

donde  $\Delta z = z_{i+1} - z_i$  y  $\nabla f(z_i)$  es el gradiente de  $f(z_i)$ , evaluados en el punto  $z_i$ .

Para un polinomio grado  $n$ , una expansión de Taylor de orden  $n$  producirá un resultado exacto. Por ello, la información sobre la derivada de orden  $n$  es necesaria. Las funciones utilizadas en esta investigación son cuadráticas, por consiguiente, se necesita solo una serie de Taylor polinomial de segundo orden para obtener la solución exacta definida como la siguiente ecuación.

$$f(z_{i+1}) = f(z_i) + \nabla f(z_i)^T \Delta z + \frac{1}{2} \Delta z^T H(f(z_i)) \Delta z \quad (2.17)$$

donde  $H(f(z_i)) = \nabla^2 f(z_i)$  y conocido con la Matriz Hessiana de  $f(z_i)$ . Ambos,  $\nabla$  y  $H$  son evaluados en  $z_i$ .

El Método de Newton encuentra aproximaciones sucesivas que conducen a las raíces de una función en  $\mathbb{R}_n$ . Aplicando la expansión de Taylor, se puede observar que es una función de  $\Delta z$ . Por lo tanto, aplicando las condiciones de primer orden a la Ecuación ( 2.17) y resolviendo para  $\Delta z$  se obtiene la Ecuación ( 2.18)

$$\nabla f(z_i) + H(f(z_i)) \Delta z = 0 \quad (2.18)$$

esto nos lleva a la ecuación

$$H(f(z_i)) \Delta z = -\nabla f(z_i) \quad (2.19)$$

## 2.2. Fundamentos de un Sistema de Energía de Eléctrica

Desde un punto de vista topológico un circuito eléctrico, puede interpretarse como una gráfica formada por nodos y aristas. Donde las aristas representan un componente eléctrico, tal como líneas de transmisión. Los puntos donde los componentes se conectan son representados por nodos, que en el área eléctrica son llamados buses. La descripción topológica de un circuito nos habla sobre la interconexión de este, la cual es independiente de cualquier fuente de energía que nosotros apliquemos a él.

Con el fin de realizar una evaluación económica de un sistema de energía eléctrica, es necesario describir sus componentes básicos, así como sus modelos económicos correspondientes.

Un Sistema de Energía Eléctrica (SEE) puede ser abstraído como una estructura topológica, la cual es descrita por varios conjuntos. El conjunto  $N$  representa el conjunto de nodos eléctricos en el sistema. El conjunto  $E$  representa el conjunto de líneas. Estos son representados por las tuplas  $(i, j)$ , donde  $i, j \in N$ .  $G$  representa el conjunto de generadores conectado dentro del SEE.  $Q$  representa el conjunto de las cargas fijas conectadas a través del SEE. Adicionalmente algunos subconjuntos están definidos a partir de los conjuntos previamente definidos. Los subconjuntos  $G_i$  y  $L_i$  representan los generadores y las cargas variables conectadas al nodo  $i$ .

### 2.2.1. Nodos

El elemento principal para el análisis un SEE es el nodo, también llamado bus. Los nodos son definidos como los puntos donde varios elementos se encuentran conectados, por ejemplo las líneas, cargas, generadores, como se muestra en la Figura 2.3. Aunque un nodo es un componente "pasivo", este tiene algunas características que llegan a ser la esencia del análisis de las redes de Energía Eléctrica.

Una propiedad invariante en todos los nodos del sistema de energía eléctrica es el balance de flujo de energía. Esta propiedad establece que el nodo no puede almacenar energía, por lo tanto, la energía que entra de un nodo debe ser igual a la energía que fluye fuera de este. Los generadores inyectan la energía  $\sum_{g \in G_i} p_g$  en el nodo, mientras que las



caso, la curva de oferta costo será representada por una función cuadrática definida como  $C(p) = \alpha + \beta p + \gamma p^2$ ,  $\gamma > 0$ . Una curva fundamental es derivada como una curva de costos marginales. Esto se muestra en la Figura 2.4(b). Esta curva es construida por la derivación de la curva de costo con respecto a  $p$ .

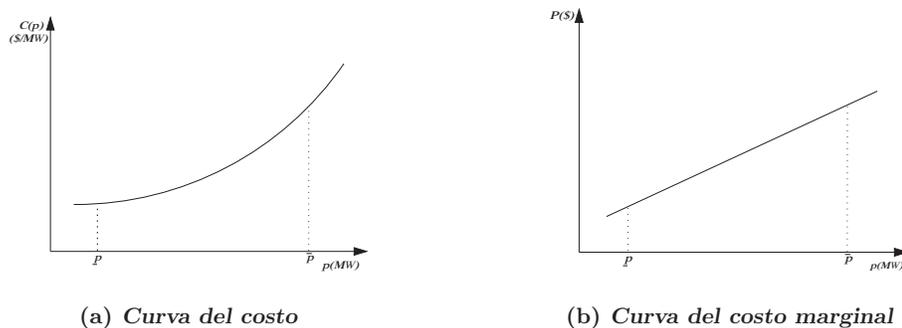


Figura 2.4: Modelo del generador

### 2.2.3. Sistemas de energía eléctrica

Un sistema de energía eléctrica puede verse como un circuito eléctrico enorme que incluye proveedores y consumidores. Los proveedores son representados por las compañías generadoras, conocidas como productores y los consumidores son representados por las cargas, conocidas como la demanda lateral. Entre estos dos conjuntos debe existir una infraestructura adecuada para transportar la energía desde los puntos de generación hasta los puntos de consumo. Esta infraestructura es el sistema de transmisión junto con el sistema de control. La diferencia principal entre un sistema de energía eléctrica y un circuito normal, además del gran manejo de energía, es que tiene que ser bajo algunas restricciones físicas, principalmente en la frecuencia, voltaje y capacidad de las líneas de transmisión.

Este tipo de sistemas de energía eléctrica han evolucionado a lo largo del tiempo en diferentes lugares del mundo, tal como se muestra en la Figura 2.5(a). Como resultado de las oportunidades económicas o razones políticas, comenzaron a aparecer las interconexiones entre las áreas vecinas, tal como se muestra en la 2.5(b).

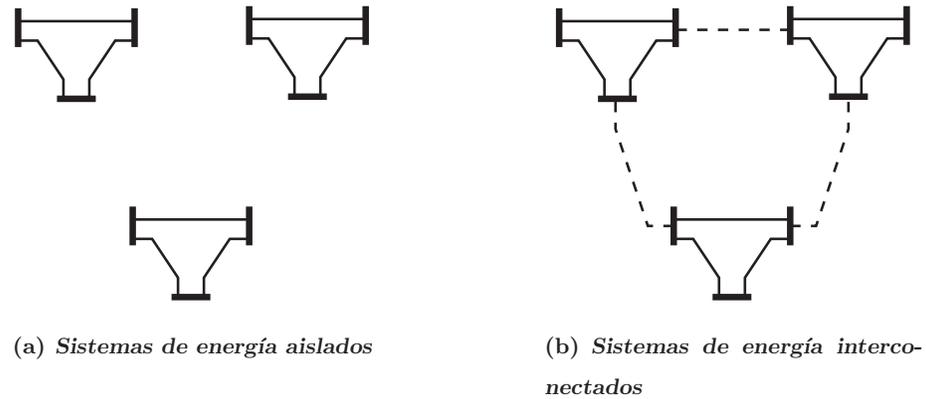


Figura 2.5: La transición de los sistemas aislados de energía interconectados

#### 2.2.4. Flujos óptimos en corriente directa

El modelo de flujos de energía en corriente directa resuelve el sistema desde un punto de vista eléctrico. Es decir, encuentra una solución para el sistema, pero no toma en cuenta las implicaciones económicas. La primera técnica utilizada en mercados de energía para analizar el sistema tomando en cuenta la eficiencia económica fue el despacho económico. El objetivo fue obtener un costo de generación, i.e. minimizar el costo de generación. Esto no incluía el modelo de transmisión. El modelo de transmisión es importante porque cuando la energía que fluye por la línea llega a su límite de transferencia, se dice que esta línea está congestionada, lo cual implica consecuencias económicas.

El modelo de flujos óptimos en corriente directa generalmente es un problema cuadrático separable utilizado para resolver el mercado de energía [Wollenberg y Wood, 1996]. El flujo óptimo de energía extiende el problema de despacho económico introduciendo restricciones en la red. El manejo de la congestión hace la diferencia entre el despacho económico y el flujo óptimo de energía; en sistemas donde no existe congestión, estos son equivalentes. Cuando la congestión aparece en el sistema, esta equivalencia ya no se mantiene.

### 2.3. Conclusiones

En este capítulo se presentaron las herramientas principales que serán utilizadas a lo largo de este documento. Se presentaron las principales funciones para establecer los problemas de optimización, así como para poder resolverlos. Además de presentar los conceptos para definir los sistemas de ecuaciones lineales. Posteriormente se estableció una de las herramientas principales para resolución del despacho económico, el método de Newton, donde se introduce la Matriz Hessiana. Se describieron los principales componentes que debe cumplir un sistema de energía eléctrica, los cuales serán utilizados en el problema de despacho económico en los siguientes capítulos.

## Capítulo 3

# Sistemas de ecuaciones lineales y su solución basada en grafos

Un gran rango de problemas pueden ser abordados por la solución de un sistema de ecuaciones lineales (SEL). En particular, la principal herramienta utilizada para la resolución de problemas de optimización no lineales, se basan en el método de Newton. Este método resuelve un SEL iterativamente hasta alcanzar convergencia (si existe una solución). Por lo tanto, si el objetivo es obtener un algoritmo eficiente para resolver problemas no lineales de optimización, entonces se debe tener una visión más profunda de como ha sido resuelto un SEL. En este capítulo se describe la solución basada en grafos de un SEL y son analizados algunos casos especiales. La Sección 3.2 muestra una representación por medio de grafos para un SEL. Observando que en el método de Newton está basado en una matriz Hessiana  $H(\mathcal{L}(z))$ , cuya estructura es simétrica. La Sección 3.3 se enfoca en los SELs simétricos (SELS) y en su representación basada en grafos. La siguiente Sección 3.4 presenta una mirada mas cercana a los SELS cuya estructura es representada por un árbol (SELSEA), incluyendo una solución algebraica para cada sistema. Después, se define a solución de estos grafos para familiarizarse con las diferentes clases de SEL y su representación basada en grafos. En la Sección 3.5 se presenta la interpretación de la eliminación Gaussiana. Después, en la Sección 3.6 se comparan las diferentes estrategias para resolver el grafo del SELSEA utilizando las transformaciones definidas en la Sección 3.5. Continuando con

una solución basada en grafos para SELSEA definida en la Sección 3.7. La Sección 3.1 presenta una representación del método de Newton basada en grafos. Finalmente la Sección 3.8 presenta algunas observaciones finales.

### 3.1. Conversión del Método de Newton a un Sistema Basado en Grafos

Como se definió en la Sección 2.1.4, el método de Newton es una linealización para  $\mathcal{L}(\mathbf{z})$  definido por el SSELS señalado en la Ecuación (3.1) cuando se le aplica al Lagrangiano (i.e.  $f(\mathbf{z}) \equiv \mathcal{L}(\mathbf{z})$ ).

$$H(\mathcal{L}(\mathbf{z}))\Delta\mathbf{z} = -\nabla\mathcal{L}(\mathbf{z}) \quad (3.1)$$

Expandiendo esta expresión se obtiene

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2\mathcal{L}(\mathbf{z})}{\partial z_1\partial z_1} & \cdots & \frac{\partial^2\mathcal{L}(\mathbf{z})}{\partial z_1\partial z_j} & \cdots & \frac{\partial^2\mathcal{L}(\mathbf{z})}{\partial z_1\partial z_n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2\mathcal{L}(\mathbf{z})}{\partial z_i\partial z_1} & \cdots & \frac{\partial^2\mathcal{L}(\mathbf{z})}{\partial z_i\partial z_j} & \cdots & \frac{\partial^2\mathcal{L}(\mathbf{z})}{\partial z_i\partial z_n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2\mathcal{L}(\mathbf{z})}{\partial z_n\partial z_1} & \cdots & \frac{\partial^2\mathcal{L}(\mathbf{z})}{\partial z_n\partial z_j} & \cdots & \frac{\partial^2\mathcal{L}(\mathbf{z})}{\partial z_n\partial z_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta z_1 \\ \vdots \\ \Delta z_i \\ \vdots \\ \Delta z_n \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \frac{\partial\mathcal{L}(\mathbf{z})}{\partial z_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial\mathcal{L}(\mathbf{z})}{\partial z_i} \\ \vdots \\ \frac{\partial\mathcal{L}(\mathbf{z})}{\partial z_n} \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

Un hecho fundamental aquí es que el  $H(\mathcal{L}(\mathbf{z}))$  es simétrico como  $\frac{\partial^2\mathcal{L}(\mathbf{z})}{\partial z_i\partial z_j} = \frac{\partial^2\mathcal{L}(\mathbf{z})}{\partial z_j\partial z_i}$ .

El modelo basado en grafos para una ecuación general en el SEL descrito en la Figura 3.2 se muestra en la Figura 3.1. Para convertir este sistema de matrices en el modelo de grafos, se requieren realizar los siguientes pasos. Un nodo es definido por cada variable en  $\Delta\mathbf{z}$ . En ese nodo la mitad superior del círculo se refiere a la variable cuyo valor ha sido resuelto, en este caso  $\Delta z_i$ . La mitad inferior del círculo se refiere al coeficiente de la variable  $\Delta z_i$ , en realidad  $\frac{\partial^2\mathcal{L}(\mathbf{z})}{\partial^2 z_i}$ , la cual en este documento se conocerá como  $a_{z_i}$ . Además el término independiente representa un arco incidente en el nodo, inicializado con  $-\nabla_{z_i}\mathcal{L}(\mathbf{z})$ , el cual se denotará como  $b_{z_i}$ . Fuera del nodo posiblemente habrá interconexiones con otras variables representadas como aristas. La expresión que enlaza esas aristas son valores del  $H(\mathcal{L}(\mathbf{z}))$  en las posiciones relativas de las variables conectadas en cada extremo (i.e.  $\frac{\partial^2\mathcal{L}(\mathbf{z})}{\partial z_i\partial z_j}$ ). Finalmente el valor actual para cada variable  $z_i$ , también se almacenará en el nodo.

$$.. + \frac{\partial^2 \mathcal{L}(z)}{\partial^2 z_i} \Delta z_i + .. + \frac{\partial^2 \mathcal{L}(z)}{\partial z_j \partial z_i} \Delta z_j + .. = -\frac{\partial \mathcal{L}(z)}{\partial z_i}$$

Figura 3.1: Modelo basado en grafos para el método de Newton

### 3.2. Representación basada en grafos para sistemas de ecuaciones lineales

Los sistemas de ecuaciones lineales representan sistemas de la forma que se muestra en la Ecuación ( 3.3).

$$\begin{aligned}
 a_{11}x_1 \quad \cdots \quad a_{1j}x_i \quad \cdots \quad a_{1n}x_n &= b_1 \\
 \vdots & \\
 a_{i1}x_1 \quad \cdots \quad a_{ij}x_i \quad \cdots \quad a_{in}x_n &= b_i \\
 \vdots & \\
 a_{in}x_1 \quad \cdots \quad a_{nj}x_i \quad \cdots \quad a_{nn}x_n &= b_n
 \end{aligned} \tag{3.3}$$

Definiendo las siguientes variables

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \tag{3.4}$$

donde  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  y  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ . Por lo tanto, la Ecuación ( 3.3) puede describirse en la notación matricial de la Ecuación ( 3.5).

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \tag{3.5}$$

Los elementos diferentes de cero en  $\mathbf{A}$  definen la topología del grafo que representa el sistema lineal de ecuaciones. Si  $\mathbf{A}$  es muy dispersa entonces el grafo tendrá muy pocas

interconexiones. Los sistemas dispersos pueden ser resueltos utilizando algoritmos especiales que necesitan estructuras de datos especiales. Por lo tanto una medida de dispersidad es necesaria a fin de evaluar que tan dispersa es la matriz. Definamos  $n_z$  como el número de elementos cero fuera de la diagonal en  $\mathbf{A}$  donde  $0 \leq n_z \leq n(n-1)$ . En la Ecuación (3.6) se define el grado de dispersidad de la matriz  $\mathbf{A}$ .

$$s = \frac{n_z}{n(n-1)} \quad (3.6)$$

Los posibles valores para  $s$  se encuentran en el intervalo  $[0, 1]$ . Cuando  $s = 0$ , su grafo correspondiente representará un sistema totalmente desacoplado. La Figura 3.2 muestra un sistema desacoplado con cinco nodos representando un sistema de ecuaciones lineales con cinco ecuaciones y cinco variables.

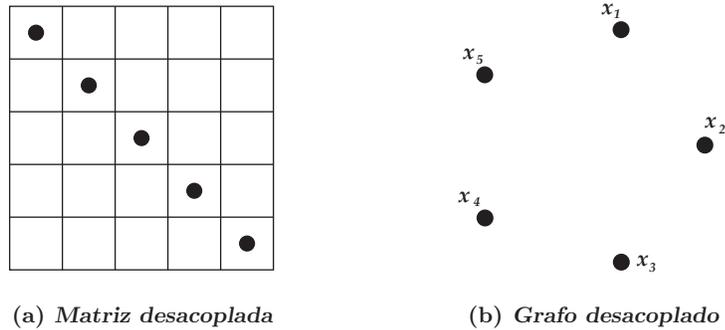


Figura 3.2: SEL totalmente desacoplado

Por otro lado,  $s = 1$  representa un sistema totalmente conectado, i.e. cada nodo está conectado a todos los demás nodos, tal como se muestra en la Figura 3.3, representando un sistema de ecuaciones lineales completamente acoplado, con cinco ecuaciones y cinco incógnitas.

Entre estos dos extremos  $0 < s < 1$ ,  $\mathbf{A}$  no es ni desacoplada ni completa y su grafo correspondiente no estará completamente conectado, i.e. no todos los nodos estarán conectados entre sí. La Figura 3.4 representa un sistema de ecuaciones lineales con cinco ecuaciones y cinco variables.

Algunos sistemas físicos son resueltos utilizando sistemas lineales que son bastante dispersos, i.e.  $s \rightarrow 1$ . En particular, en sistemas de energía eléctrica, las matrices

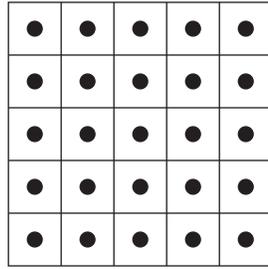
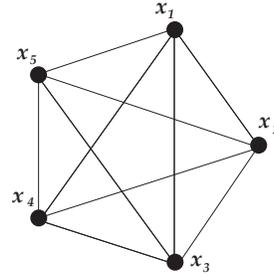
(a) *Matriz completamente acoplada*(b) *Grafo completamente acoplado*

Figura 3.3: SEL completamente acoplado

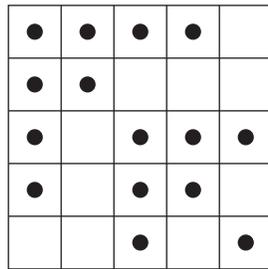
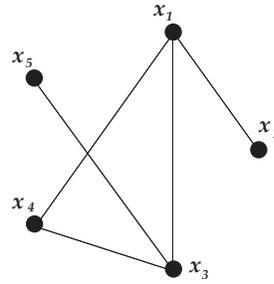
(a) *Matrix*(b) *Grafo*

Figura 3.4: Un sistema disperso conectado

que representan las redes de transmisión son muy dispersas. Esta es la principal razón por la que las técnicas de dispersidad han sido mejoradas por la investigación en sistemas de energía eléctrica, cuyo objetivo es resolver de manera eficiente el actual sistema de energía [Markowitz, 1957]. Las técnicas de dispersidad han utilizado desde 1970 con una técnica conocida como bifactorización [Zollenkopf, 1970]. Los principios básicos utilizados en bifactorización están fuertemente dirigidos hacia la explotación de la matriz gráfica subyacente.

Por lo tanto, con el fin de abordar la solución utilizando una representación por medio de grafos, primero un modelo apropiado debe ser derivado. El modelo tiene que ser capaz de representar los elementos de un sistema de ecuaciones lineales  $(\mathbf{A}, \mathbf{x}, \mathbf{b})$ . Este modelo está basado en un par de componentes básicos, su representación se muestra en la Figura 3.5.

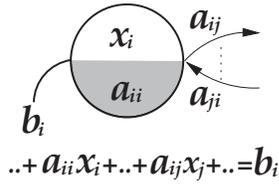


Figura 3.5: Conversión de un sistema lineal de ecuaciones a su modelo gráfico

En este modelo una ecuación es representada por dos componentes: un nodo y un conjunto de enlaces. El nodo es un componente bien definido el cual consta de dos subcomponentes: un círculo formado por dos partes y un arco. La parte de arriba del círculo representa la variable relacionada a la ecuación que será resuelta por el sistema ( $x_i$ ) y la parte baja representa el coeficiente relacionado a esa variable en la Ecuación  $i$  ( $a_{ii}$ ). El arco representa el  $i$ -ésimo elemento en  $\mathbf{b}$ , i.e.  $b_i$ . La segunda parte depende de la topología del sistema lineal de ecuaciones y se representa por enlaces que conectan los nodos. Estos enlaces serán denotados como  $(i, j)$  donde  $i$  y  $j$  representan el número de reglón y columna respectivamente. Puede haber cero o más enlaces que conectan los nodos con otros en el gráfico. Cada enlace tiene asociado un valor para localizar su coeficiente en el reglón  $i$  columna  $j$ , i.e.  $a_{ij}$ . Quizás sea un poco absurdo considerar este caso donde existen enlaces no externos. Sin embargo, esta es la configuración básica, la cual siempre se llevará a cabo con el fin de resolver el sistema de ecuaciones lineales.

Para ilustrar estos conceptos se definirá un ejemplo de un SEL. Considere un SEL representado por las Ecuaciones ( 3.7) a ( 3.10).

$$0.5x_1 - x_2 - x_3 = 0 \quad (3.7)$$

$$-x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \quad (3.8)$$

$$-x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = -5 \quad (3.9)$$

$$-2x_3 + 4x_4 = 0 \quad (3.10)$$

Instanciando la Ecuación ( 3.3) con las Ecuaciones ( 3.7) a ( 3.10) se obtiene la Ecuación ( 3.11).

$$\begin{pmatrix} 0.5 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.11)$$

Aplicando a cada ecuación el modelo definido en la Figura 3.5 se obtiene el grafo que se muestra en la Figura 3.6.

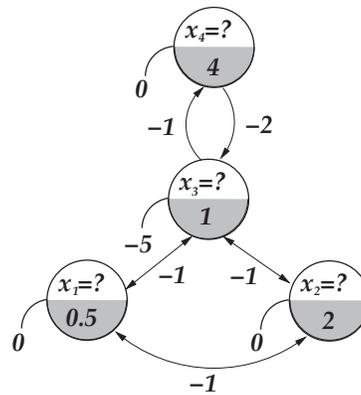


Figura 3.6: Grafo correspondiente al sistema definido en la Ecuación ( 3.11)

Los enlaces unidireccionales ( $\rightarrow$  y  $\leftarrow$ ) deben ser usados en general  $a_{ij} \neq a_{ji}$ , como muestran los enlaces (3, 4) y (4, 3), representando los elementos  $a_{34}$  y  $a_{43}$ . Si  $a_{ij} = a_{ji}$  entonces los elementos son representados por un enlace bidireccional ( $\leftrightarrow$ ) como puede verse en el enlace (1, 3), representando los elementos  $a_{1,3}$  y  $a_{3,1}$ . Este grafo representa un SEL asimétrico (ASLE). Un ASLE es un SEL donde existe por lo menos un par de enlaces  $(i, j), (j, i)$  donde  $i \neq j$ , de manera que  $a_{ij} \neq a_{ji}$ .

El principal objetivo de este documento es mostrar que el método de Newton puede resolver problemas no lineales de optimización mediante un enfoque gráfico. El tipo de matrices que derivan estos problemas son simétricas, por lo tanto fijemos nuestra atención en este subconjunto de SEL.

### 3.3. Sistemas de ecuaciones lineales simétricas y su representación basada en grafos

Los sistemas de ecuaciones lineales simétricos (SELS) son SELs donde  $a_{ij} = a_{ji}$  para todos  $i, j$ . Este documento no abordará el análisis de las propiedades que estos sistemas contiene. El principal interés es como representar estos sistemas utilizando grafos y a la vez como resolver un SEL por medio de estas. SELS son sistemas físicos muy comunes. Particularmente, un gran número de problemas de sistemas de energía eléctrica son abordados con SELS. Para representar un SELS en una forma de grafo, la representación propuesta en la Figura 3.5 es modificada y se muestra en la Figura 3.7.

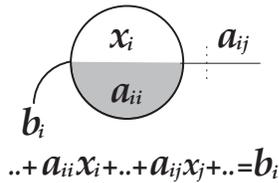


Figura 3.7: Conversión de un sistema ecuaciones lineales simétrico a su modelo gráfico

La única modificación realizada es respecto a los enlaces unidireccionales. Las gráficas que representen SELS deben contener únicamente enlaces bidimensionales. La representación de los enlaces ha sido modificada y las flechas no son necesarias porque no aportan ninguna información adicional. Con el fin de ilustrar estos conceptos se creará una instancia de la Ecuación ( 3.3) con la Ecuación ( 3.12) lo que básicamente es la Ecuación ( 3.11) donde el elemento  $a_{43}$  se ha establecido a  $-1$  con el fin de ser igual con el elemento  $a_{34}$ .

$$\begin{pmatrix} 0.5 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.12)$$

Aplicando el modelo definido en la Figura 3.7, se obtiene el grafo que se muestra en la Figura 3.8.

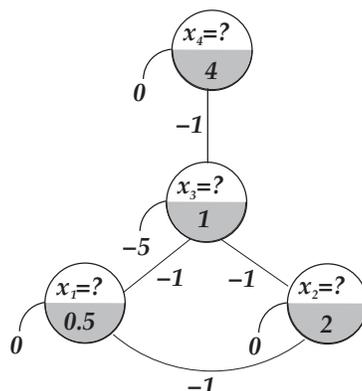


Figura 3.8: Grafo correspondiente al sistema definido por la Ecuación ( 3.12)

SELS pueden describirse como SELs perfectos; cuentan con un buen comportamiento y sus propiedades son conocidas desde tiempo atrás. Sin embargo, existe un subconjunto de SSELS, el cual además de poseer esas propiedades, cuenta con otra propiedad. Estos pueden ser representados por medio de un grafo conocido como un árbol y como consecuencia de ello, todos los algoritmos respecto a árboles pueden ser aplicados a estos.

### 3.4. Sistemas de ecuaciones lineales simétricas con estructura de árbol y su representación basada en grafos

Los sistemas de ecuaciones lineales simétricas con estructura de árbol (SELSEA) son SELS donde la representación de estos es un árbol. Basándose en esta estructura, los algoritmos eficientes pueden ser derivados con el fin de resolver este tipo de problemas. Estos algoritmos surgen naturalmente sólo mediante la explotación de las propiedades de los árboles. Este tipo de gráficas ha sido aplicado para la resolución de redes de distribución eléctrica cuyo principal característica es su forma radial (i.e. no existen ciclos en la red). Por lo tanto, una estructura de árbol puede ser derivada de un SEL que representan estos sistemas. Los algoritmos para resolver diferentes problemas con grados de complejidad diferente han sido propuestos para una red de distribución basada en esta estructura en [Goswami y Basu, 1991, Das et al., 1994, Chen et al., 2000, Mekhamer et al., 2002].

Un grafo con forma de árbol no debe contener ciclos. Esta tesis no se ocupa de como identificar y eliminar ciclos de los grafos. Las técnicas de descentralización removerán los ciclos resultantes de la red de transmisión. Por lo tanto eliminando el enlace (1,2) el grafo que se muestra en la Figura 3.8 se convertirá en un grafo que represente un SELSEA. Esto implica eliminar los elementos  $a_{12}$  and  $a_{21}$  de la matriz  $\mathbf{A}$ . Creando una instancia de la Ecuación ( 3.3) con la Ecuación ( 3.13), la cual es básicamente la Ecuación ( 3.12) donde los elementos  $a_{12}$  y  $a_{21}$  se han establecido a 0.

$$\begin{pmatrix} 0.5 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.13)$$

Aplicando el modelo definido en la Figura 3.7, se obtiene el grafo que se muestra en la Figura 3.9 cuya grafo es 3.8 donde el enlace (1,2) ha sido eliminado.

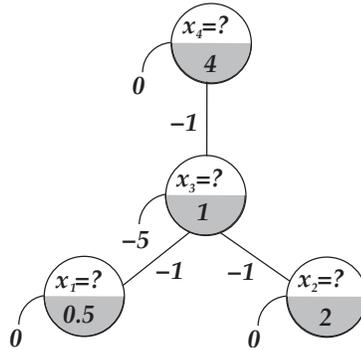


Figura 3.9: Grafo correspondiente al sistema definido por la Ecuación ( 3.13)

El modelo del grafo SELSEA será utilizado a lo largo de este documento para enfrentar problemas diferentes, los cuales deben resolverse dentro del mercado de energía eléctrica.

### 3.4.1. Solución Algebraica

En esta Sección el sistema que se muestra en la Ecuación ( 3.13) se resolverá algebraicamente, añadiendo filas, eliminando filas y sustituyendo variables. Con este fin se

expandirá este sistema dado en la Ecuación ( 3.14) a la Ecuación ( 3.17).

$$0.5x_1 - x_3 = 0 \tag{3.14}$$

$$2x_2 - x_3 = 0 \tag{3.15}$$

$$-x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = -5 \tag{3.16}$$

$$-x_3 + 4x_4 = 0 \tag{3.17}$$

Sustrayendo la Ecuación ( 3.15) de la Ecuación ( 3.14) se obtiene la Ecuación ( 3.18).

$$.5x_1 - 2x_2 = 0 \tag{3.18}$$

Entonces sumando la Ecuación ( 3.16) y la Ecuación ( 3.17) resulta la Ecuación ( 3.19).

$$-x_1 - x_2 + 3x_4 = -5 \tag{3.19}$$

Sumando la Ecuación ( 3.15) y la Ecuación ( 3.16) se obtiene la Ecuación ( 3.20).

$$-x_1 + x_2 - x_4 = -5 \tag{3.20}$$

La Ecuación ( 3.18) produce la Ecuación ( 3.21).

$$x_1 = 4x_2 \tag{3.21}$$

Sustituyendo 3.21 en 3.19 y 3.20, las ecuaciones 3.22 y 3.23 son devidabas, respectivamente.

$$-5x_2 + 3x_4 = -5 \tag{3.22}$$

$$-3x_2 - x_4 = -5 \tag{3.23}$$

De la Ecuación ( 3.23), se obtiene la Ecuación ( 3.24).

$$x_4 = 5 - 3x_2 \tag{3.24}$$

Sustituyendo la Ecuación ( 3.24) en la Ecuación ( 3.22)  $x_2$  es calculada

$$-5x_2 + 3(5 - 3x_2) = -5 \implies x_2 = \frac{10}{7}$$

Usando  $x_2 = 10/7$  en 3.23,  $x_4$  es resuelta

$$x_4 = 5 - 3\left(\frac{10}{7}\right) = \frac{5}{7}$$

Ahora  $x_1$  se calcula utilizando  $x_2$  en la Ecuación ( 3.21).

$$x_1 = 4\left(\frac{10}{7}\right) = \frac{40}{7}$$

Finalmente usando  $x_1 = 40/7$  en la Ecuación ( 3.14),  $x_3$  es resuelta.

$$x_3 = .5\left(\frac{40}{7}\right) = \frac{20}{7}$$

Por lo tanto la solución del SELSEA definido por la Ecuación ( 3.13), esta dada por 3.25

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40/7 \\ 10/7 \\ 20/7 \\ 5/7 \end{pmatrix} \quad (3.25)$$

Este ejemplo se utilizará a lo largo de este Capítulo. El sistema será resuelto utilizando diferentes estrategias que obtendrán la misma solución. Para ellos se utilizará la eliminación Gaussiana como la principal herramienta para resolver el sistema.

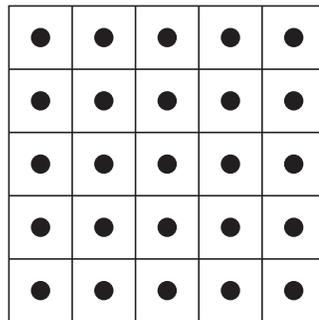
### 3.5. Eliminación Gaussiana y su interpretación por medio de grafos

La eliminación Gaussiana es un método general para resolver un SEL. Ésta consiste en la aplicación iterativa de las operaciones elementales de la fila la cual lleva a un sistema de forma escalonada. Esto se logra mediante la modificación de cada elemento que no pertenece a la columna y fila de la ecuación en la reducción. Estos elementos son modificados utilizando la Ecuación ( 3.26).

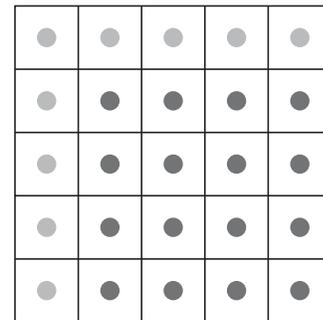
$$a'_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{ik}a_{kj}}{a_{kk}} \quad (3.26)$$

La eliminación Gaussiana puede ser considerada una operación de transformación de  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}^{n-1}$ . El sistema resultante cuenta con toda la información necesaria

para resolver el subsistema resultante de la transformación, asumiendo que  $\mathbf{A}$  es una matriz completa. Por lo tanto la eliminación Gaussiana, como puede observarse en la Figura 3.10, se puede pensar como una transformación donde la fila y la columna (mostrada en gris), donde se aplicó ha sido desactivada y el SEL resultante consiste únicamente de las filas y columnas restantes, las cuales han sido modificadas por la Ecuación ( 3.26) (se muestran en negro).



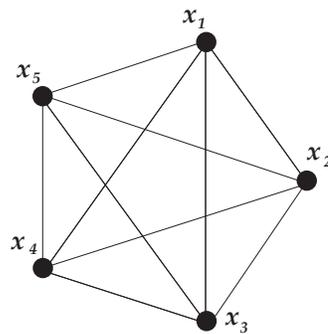
(a) Antes de la eliminación



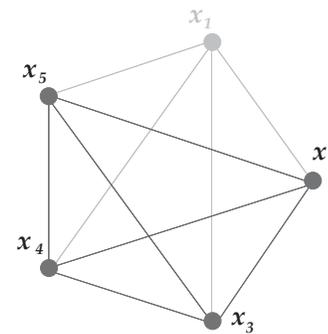
(b) Después de la eliminación

Figura 3.10: Eliminación Gaussiana y su interpretación gráfica

Una interpretación por medio de grafos para la transformación cuando es aplicada al nodo  $k$  se muestra en la Figura 3.11 donde se pueden observar que todos los nodo y enlaces del grafo se modificaron con el fin de reflejar esta equivalencia.



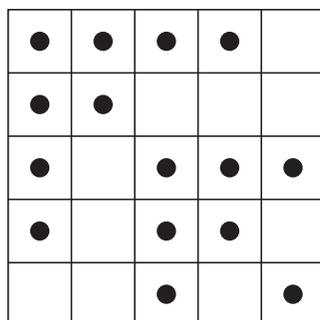
(a) Antes de la eliminación



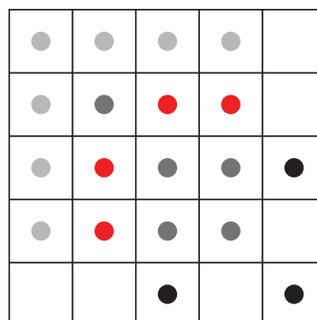
(b) Después de la eliminación

Figura 3.11: Eliminación Gaussiana y su interpretación gráfica

Cuando se trata de sistemas dispersos varias observaciones se deben hacer. La Figura 3.12(a) reproduce una matriz dispersa definida en la Figura 3.4(a) y la Figura 3.12(b) muestra la transformación cuando la eliminación Gaussiana es aplicada a  $x_1$ . Las entradas en rojo indican los elementos cuyos valores eran cero antes de la transformación. Sin embargo, esto solo denota un cambio de valor.



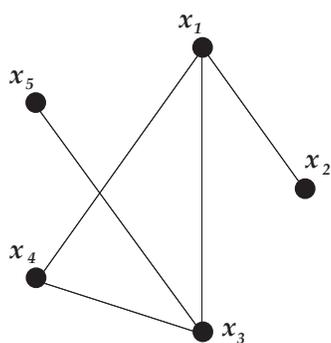
(a) Antes de la eliminación



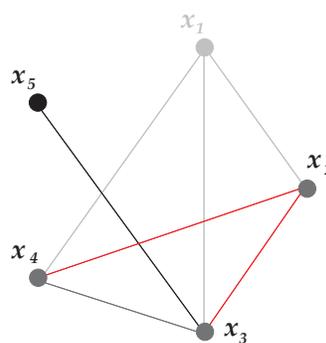
(b) Después de la eliminación

Figura 3.12: Eliminación Gaussiana en una matriz dispersa

Ahora se analizará la transformación de su representación por medio de grafos. Con este fin, se define  $\Gamma_k$  como un conjunto de nodos conectados al nodo  $k$ . En este caso se creó la instancia  $k = 1$  como el nodo que será eliminado; consecuentemente,  $\Gamma_1 = \{2, 3, 4\}$ . En la Figura 3.13 se muestra esta interpretación por medio de grafos.



(a) Antes de la eliminación



(b) Después de la eliminación

Figura 3.13: Eliminación Gaussiana y su interpretación de una matriz dispersa

La Figura 3.13(a) representa el estado del grafo antes de aplicar la transformación y la Figura 3.13(b) representa el estado del grafo después de que la transformación a sido aplicada.

Esto muestra que cuando el nodo  $k$  es eliminado, los nodos que se encontraban conectados a este,  $\Gamma_k$ , formaran un grafo completo como resultado de esta transformación. Esto es reflejado en la Ecuación ( 3.27).

$$\Gamma'_j \leftarrow (\Gamma_j \cup \Gamma_k) \setminus \{j, k\} \quad \forall j \in \Gamma_k \quad (3.27)$$

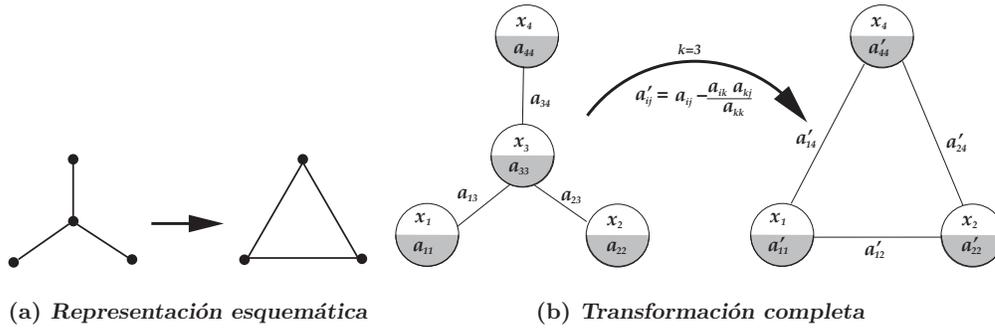
Donde  $\Gamma_j$  y  $\Gamma'_j$  denotan los nodos vecinos del nodo  $j$  antes y después de la transformación, respectivamente. Si los nodos  $i$  y  $j$  se encontraban conectados antes de la transformación, los valores del enlace  $(i, j)$  que los conectaba (mostrados en gris) será actualizado por la Ecuación ( 3.26). Por otro lado, si estos están conectados (i.e.  $a_{ij} = 0$ ), estas interconexiones serán creadas (mostradas en rojo). Si el par de nodos  $i, j$ , donde  $i, j \in \Gamma_k$ , se encontraban conectados antes de la transformación entonces el subgrafo será creado entre ellos. El número de enlaces necesarios para construir esta subgrafo,  $N_k$ , está dado por la Ecuación ( 3.28).

$$N_k = \frac{|\Gamma_k| (|\Gamma_k| - 1)}{2} \quad (3.28)$$

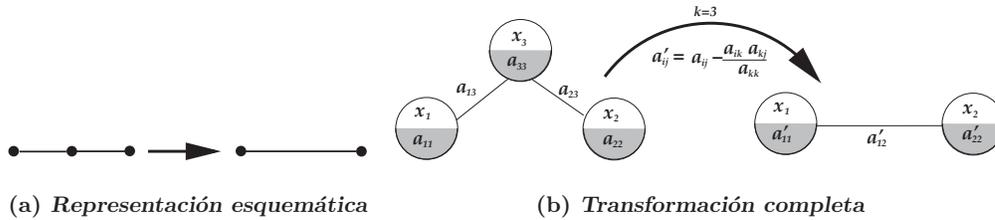
Por tanto, la eliminación Gaussiana cuenta con dos costos: la primera tiene que ser aplicada para cada actualización, y la segunda es la creación de nuevos enlaces, conocidos en la literatura como *fill-ins*. Además, de la Figura 3.13(b) el enlace  $(3, 5)$  y el nodo 5 no son utilizados en todo la transformación.

### 3.5.1. Casos Especiales de la Eliminación Gaussiana

Como se mencionó previamente, la eliminación Gaussiana tiene dos principales costos: la actualización y la creación de enlaces. El primero es inevitable pero el segundo puede optimizarse si la eliminación se realiza de manera que el número de enlaces creados sea mínimo, o en el caso ideal ningún enlace sea creado. Existen tres casos especiales, los cuales merecen una atención especial. El primero se muestra en la Figura 3.14, este es conocido como la transformación estrella-delta en la ingeniería eléctrica. Aquí  $|\Gamma_k| = 3$  y por la Ecuación ( 3.28) tres enlaces serán generados.

Figura 3.14: Eliminación Gaussiana para  $|\Gamma_k| = 3$ .

El segundo caso puede ser observado en la Figura 3.15. Este es conocido en la ingeniería eléctrica como reducción en serie. Aquí  $|\Gamma_k| = 2$  y por la Ecuación ( 3.28) al menos un enlace será generado.

Figura 3.15: Eliminación Gaussiana para  $|\Gamma_k| = 2$ .

El tercero y más importante caso con respecto a este documento, se muestra en la Figura 3.16. Esta configuración puede ser considerada como un nodo colgante el cual puede ser reducido en el nodo del que se encuentra colgado. Aquí  $|\Gamma_k| = 1$  y por la Ecuación ( 3.28), en este caso ningún enlace será generado. Este hecho fundamental se utilizará con el fin de reducir el SELSEA, cuando las hojas son consideradas nodos colgantes. Una vez que han sido reducidos, los nodos de los cuales se encontraban colgados pueden ser reducidos y así sucesivamente.

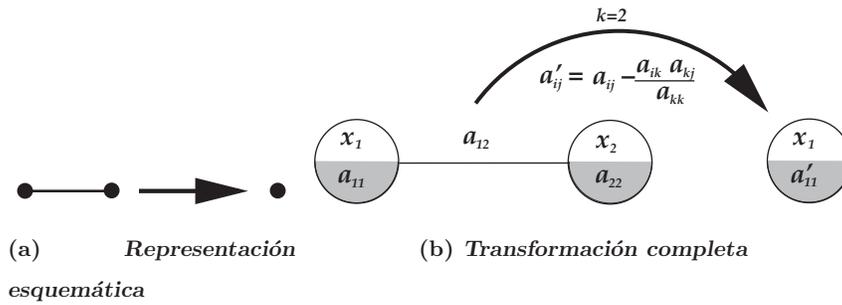


Figura 3.16: Eliminación Gaussiana para  $|\Gamma_k| = 1$ .

### 3.6. Solución de un sistema de ecuaciones lineales simétricas basado en grafos

Resolviendo un SEL, cuando se convierte a su grafo equivalente, significa ir a la configuración que se muestra en la Figura 3.17(a) la configuración que muestra la Figura 3.17(b), donde todas las variables han sido resueltas de la forma que se definió en la Sección 3.4.1 usando un enfoque algebraico. Es conveniente terminar con los mismos valores de la configuración inicial, pero como se verá, esto no será posible ya que aplicando sucesivamente la eliminación Gaussiana esta modificará los valores. Además, la configuración final dependerá del orden en el que se aplique la eliminación Gaussiana.

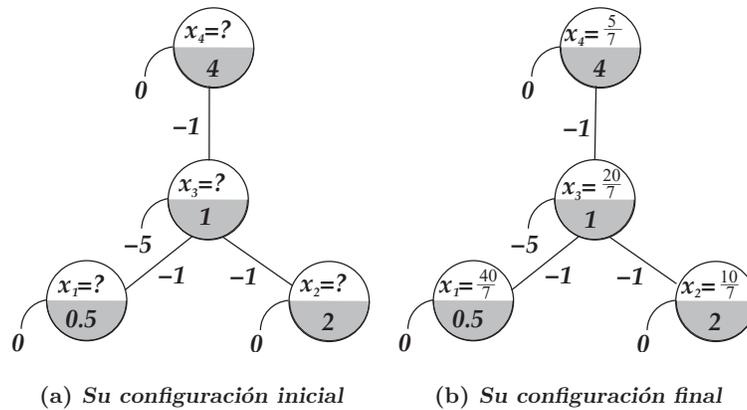


Figura 3.17: Grafo del sistema

¿Cómo se obtuvieron estos valores? Existen varios métodos para resolver un SEL

los cuales están basados en la eliminación Gaussiana. En este método se reduce el grafo aplicando la eliminación Gaussiana, utilizando la reducción que se muestra en la Figura 3.16(b), iterando un nodo a la vez, hasta que el grafo sea reducido a un solo nodo. Este método es conocido como eliminación hacia adelante. En este punto el sistema puede ser resuelto con la siguiente configuración:

$$a'_{ii}x_i = b'_i$$

desde  $x_i$  se resuelve con el valor de

$$x_i = \frac{b'_i}{a'_{ii}}$$

Entonces el proceso llamado sustitución hacia atrás puede ser aplicado por la solución del nodo anterior y así sucesivamente. Es importante conservar la estructura de árbol en el proceso de eliminación, ya que llevará acabo la solución de una forma más rápida y con un costo menor para el SEL. Como ejemplo se aplicará la eliminación Gaussiana al grafo que se muestra en la Figura 3.17.

La primera incógnita es ¿a qué nodo debe aplicarse la eliminación? Una pregunta más avanzada es qué eliminación deberá ser aplicada. Esta es un pregunta abierta y ha sido abordada en diferentes escenarios. Existen varios ordenes de eliminación las cuales pueden ser tomadas para ir de la configuración 3.17(a) a la configuración 3.17(b). De hecho el número total de eliminaciones  $N_e$ , para un sistema con  $n$  variables y  $n$  ecuaciones es  $n^n$ . Sin embargo, algunos de ellos no pueden ser aplicados, ya que daría lugar a un sistema inestable. Una configuración inconsistente aparece cuando el nodo donde la eliminación Gaussiana ha sido aplicada es cero. Esto llevaría a la Ecuación ( 3.26) a un valor indefinido y detendría el proceso de reducción. Si obtenemos una configuración donde todos los nodos son cero, entonces se dice que el sistema es singular. Por tanto, en su versión de la matriz, esta situación se evita intercambiando filas y columnas, siempre y cuando el sistema no sea singular. En la representación basada en grafos solo una inspección es realizada al nodo actual donde la eliminación Gaussiana ha sido aplicada. Si su valor es cero entonces su reducción se retrasa hasta un momento posterior

En esta Sección, se aplicaron al grafo del sistema mostrado en la Figura 3.17(a) tres diferentes formas de obtener algunas percepciones del proceso de la eliminación Gaussiana.

La primera forma de eliminación se observa en la Figura 3.18 es  $1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 3$ . Primero, un nodo, utilizando la reducción que puede observarse en la Figura 3.16(b), se reduce en el nodo 3 como muestra la Figura 3.18(a). De la misma manera, el nodo 2 es reducido en el nodo 3 como se muestra en la Figura 3.18(b). Finalmente, para el proceso de reducción, el nodo 4 se reduce en el nodo 3 como muestra la parte superior de la Figura 3.18(c). Ahora  $x_3$  puede ser resuelta, como se muestra en la parte baja de la Figura 3.18(c). Una vez que se resuelve  $x_3$ , el proceso de sustitución puede aplicarse a los nodos 1, 2 y 4 que estaban conectados al nodo 3. Este proceso obtiene la configuración que se muestra en la Figura 3.18(d). Como puede observarse, no se crearon enlaces nuevos. Por otro lado, el nodo 3 es el único nodo cuya configuración inicial es modificada.

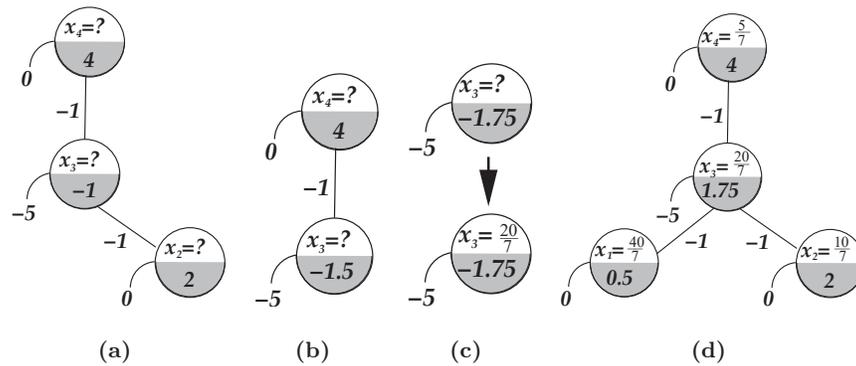
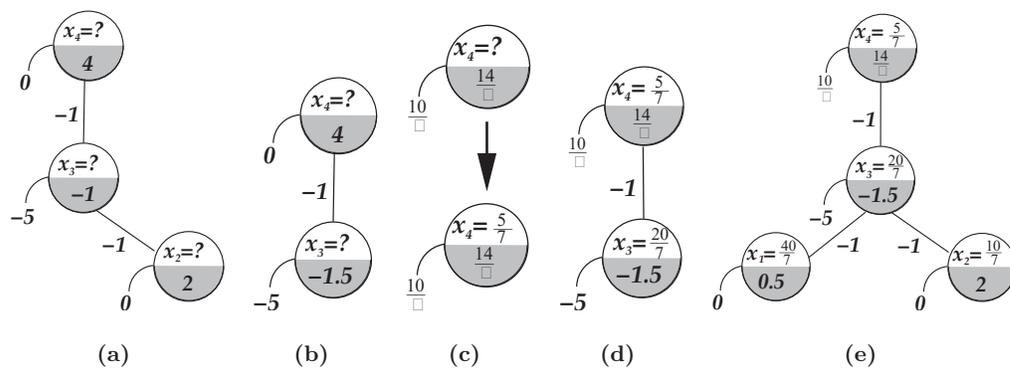
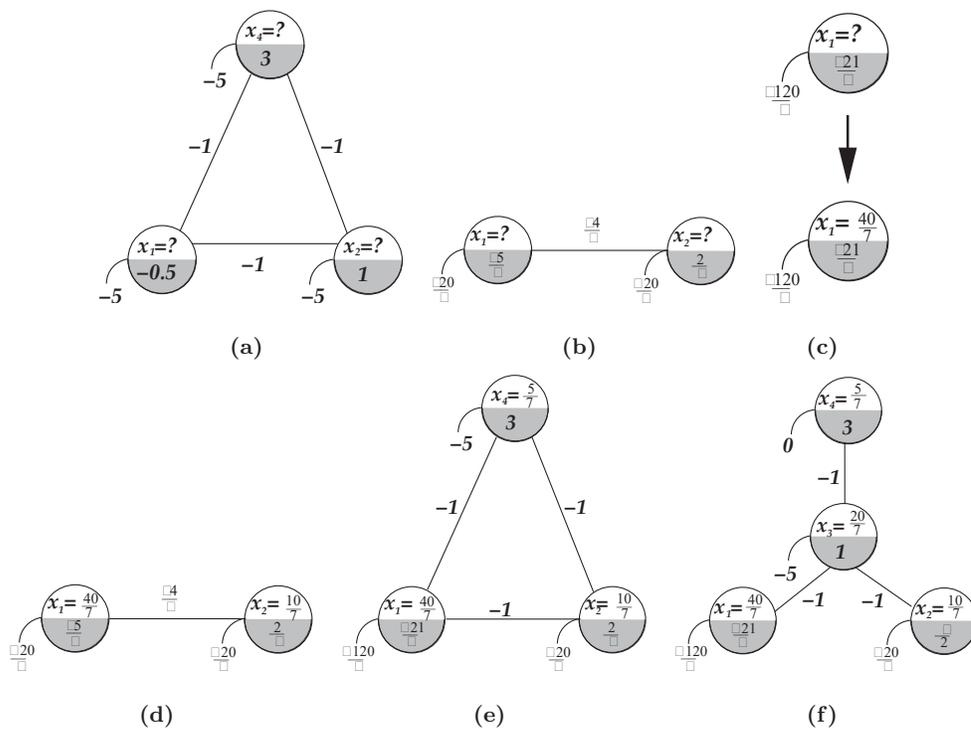


Figura 3.18: Solución basada en grafos con eliminación en orden  $1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 3$

El segundo orden de eliminación se muestra en la Figura 3.19 es  $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4$ . En ella, no se crean nuevos enlaces. Sin embargo, la configuración inicial de los nodos 3 y 4 ha sido modificada. Por lo tanto, una vez que  $x_4$  se resuelve,  $x_3$  puede resolverse y el resto de las variables después de utilizar la sustitución para atrás.

El tercer orden de eliminación puede observarse en la Figura 3.20 es  $3 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$ . En ella, son creados tres nuevos enlaces cuando el nodo 3 es eliminado  $|\Gamma_3| = 3$ . La configuración de todos los nodos ha sido modificada. Por lo tanto, se resolverá  $x_3$  y el resto de las variables deberá resolverse. Para resolver  $x_4$ , primero debe resolverse  $x_1$  y  $x_2$ . Finalmente para resolver  $x_2$ , primero se resolverá  $x_1$ .

Figura 3.19: Solución basada en grafos con eliminación en orden  $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4$ Figura 3.20: Solución basada en grafos con eliminación en orden  $3 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$

### 3.6.1. Importancia de la configuración inicial

En los ejemplos anteriores, la modificación de la configuración inicial del grafo fue mencionada. Es importante conservar o al menos tratar de conservar lo más posible la configuración inicial, existen algoritmos iterativos los cuales pueden utilizar este orden de configuración para obtener la solución. Si el algoritmo que resuelve el grafo modifica la configuración en cada iteración, entonces tendrá que reinstanciar cada una de ellas.

## 3.7. Solución de un sistema de ecuaciones lineales simétricos con estructura de árbol

Un árbol es un tipo especial de grafo, cuya principal característica es la ausencia de ciclos. Una representación estándar de un árbol se presenta en la Figura 3.21. Un árbol tiene  $n$  capas,  $n \geq 1$ , numeradas desde 0 hasta  $n - 1$ . El número de capas representa su profundidad. La función  $capa(x)$  determina la capa donde se encuentra el nodo  $x$ ; por ejemplo  $capa(E) = 2$ . Otra función útil es  $padre(x)$  la cual regresa el nodo donde el nodo  $x$  se encuentra colgado o *nulo* si este no tiene un padre, por ejemplo  $padre(E) = B$  y  $padre(A) = nulo$ .

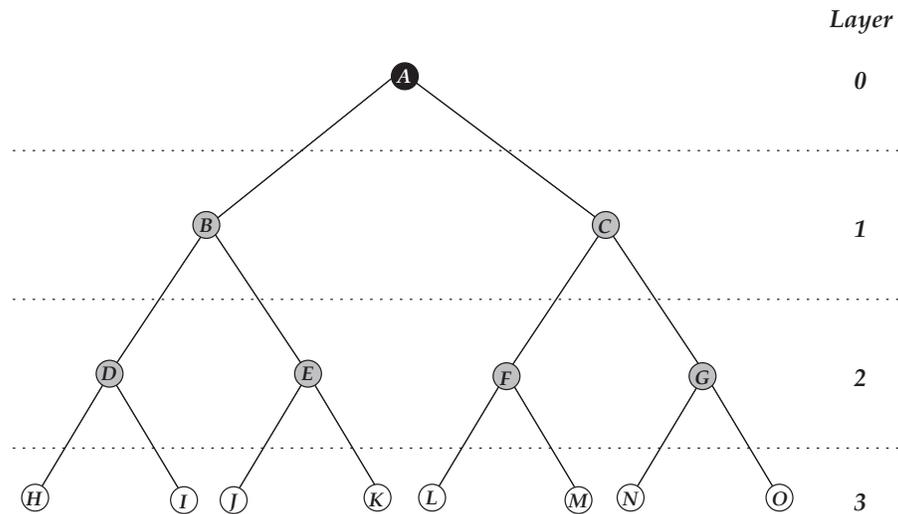


Figura 3.21: Ejemplo de un árbol

Se creará  $\Upsilon_i$  como un conjunto de índices  $j$  que corresponden a las variables  $x_j$ , este conjunto corresponde al conjunto de hijos de  $x_i$ , como lo define la Ecuación ( 3.29).

$$\Upsilon_i = \{j : \exists(i, j), \text{padre}(i) \neq j\} \quad (3.29)$$

Por ejemplo  $\Upsilon_A = \{B, C\}$ , y  $\Upsilon_G = \{N, O\}$  en la Figura 3.21. Basándose en estas definiciones, los nodos en un árbol pueden clasificarse en tres tipos:

- nodo *raíz*: Solo puede existir uno en cada grafo, tal que  $\text{capa}(\text{raíz})=0$  y  $\text{padre}(\text{raíz})=\text{nulo}$ . Por ejemplo, el nodo raíz en la Figura 3.21 es  $A$  (en negro),
- nodo *interno*: son los nodos  $x$  tal que  $\Upsilon_x \neq \emptyset$  y  $x \neq \text{raíz}$ . El conjunto de nodos internos,  $I$ , en la Figura 3.21 es  $\{B, C, D, E, F, G\}$  (en gris),
- nodo *final*: también llamado nodo *hoja*, son estos nodos  $x$  donde  $\Upsilon_x = \emptyset$ . Por lo tanto, el conjunto  $L$  representa los nodos hoja en la Figura 3.21 es  $\{H, I, J, K, L, M, N, N, O\}$  (en blanco).

Este tipo de grafos es una de las estructuras más utilizadas en la ciencia de la computación. Su aplicación se extiende desde del análisis de la gramática libre de contexto en la teoría de compiladores, la representación XML en Internet, etc. Una característica sobre estas aplicaciones es que únicamente los nodos hoja contienen información real. Sin embargo, cuando se aplica a los SELSEAs, la información que contienen los nodos internos tendrán ser procesada en orden para resolver el SEL.

Es sumamente importante conservar la estructura de árbol del sistema en el proceso de reducción. La mejor manera de reducir esos grafos es definiendo un orden en el cual no se generen nuevos elementos. De las Figuras 3.14, 3.15 y 3.16 puede afirmarse un hecho básico: la única reducción que no genera ningún elemento es la que se aplica a los nodos  $k$  donde  $|\Gamma_k| = 1$ . Por lo tanto, esos son los candidatos ideales para aplicar el proceso de reducción.

La eliminación Gaussiana, cuando se aplica a todos los nodos  $j$  donde  $j \in \Upsilon_i$ , se expresa en las Ecuaciones 3.30 y 3.31 por el coeficiente correspondiente a cada variable  $x_i$  y el término independiente, respectivamente.

$$a'_{ii} = a_{ii} - \sum_{j \in \Upsilon_i} \frac{a_{ij}^2}{a_{jj}} \quad (3.30)$$

$$b'_i = b_i - \sum_{j \in \Upsilon_i} \frac{b_j a_{ij}}{a_{jj}} \quad (3.31)$$

La solución del SEL una vez que el proceso de reducción ha sido aplicado es sencilla. Para este fin, se aprovechan las modificaciones del proceso de reducción el cual en este proceso crea un árbol. Se ha actualizado el valor de  $b_i$  y  $a_{ii}$  cuando sus dependencias con la capa baja fueron eliminadas. Supongamos  $\text{padre}(i) = k$ . Entonces, la Ecuación que se resolverá para  $x_i$  es

$$a_{ii}x_i + a_{ik}x_k = b_i \quad (3.32)$$

la cual es resuelta como

$$x_i = \frac{b_i - a_{ik}x_k}{a_{ii}} \quad (3.33)$$

claramente para esta Ecuación si el nodo  $i$  es la raíz del árbol, entonces no se encontraran más leyes superiores, por ello esta Ecuación llega a ser

$$x_i = \frac{b_i}{a_{ii}} \quad (3.34)$$

Por lo tanto, un enfoque de arriba abajo puede aplicarse para resolver los nodos en capas inferiores. Esto puede basarse en Breadth-first (BF) o Depth-first (DF) algoritmo [Cormen et al., 2006]. No obstante, si la forma del grafo es apriori, entonces pueden ser propuestos algoritmos más eficientes con el fin de acelerar los cálculos evitando la recursividad o el manejo de otras estructuras de datos auxiliares.

### 3.8. Conclusiones

En este Capítulo se analizó la representación de los SELs, SSELS y SELSEA. Aquí se aprendió las diferencias entre ellos y el hecho de que  $\text{SELSEA} \subset \text{SSELS} \subset \text{SEL}$ . Fueron presentadas la eliminación Gaussiana y su interpretación por medio de grafos. Incluso que las diferentes órdenes de eliminación obtienen la misma solución cuando se aplica la eliminación Gaussiana, algunos requieren de menos operaciones para obtener la solución.

También dependiendo del orden de la eliminación, el número de nuevos enlaces creados o no es variable. Además, algunos ordenamientos de eliminación no son permitidos ya que se obtienen grafos cuyo pivote es cero cuando es aplicada la eliminación Gaussiana.

Cuando un SEL se resuelve, el objetivo es encontrar valores para las representar las variables del vector  $\mathbf{x}$ . La herramienta básica para encontrar estos valores se basará en la eliminación Gaussiana. El procedimiento para este grafo se ocupará de las características anteriores por lo que no se crearán enlaces en absoluto. Un SELSEA es un SEL que puede ser representado por un árbol. La solución para un SELSEA no requiere de la creación de enlaces, por lo tanto, es una estructura muy eficiente la cual en este trabajo tratará de obtener. Finalmente, se ha obtenido una representación por medio de grafos para el método de Newton el cual será la base para los modelos que se desarrollarán en los próximos capítulos.

## Capítulo 4

# Solución del despacho económico basada en grafos

### 4.1. El despacho económico

El despacho económico puede ser visto como una solución inicial al problema de flujos óptimos en DC, en la cual los efectos de la red son despreciados. La solución de un problema de este tipo, donde  $z$  representa todas las variables utilizadas en el proceso de la solución, se basa en el Lagrangiano  $\mathcal{L}(z)$ , su gradiente ( $\nabla(\mathcal{L}(z))$ ) y su Matriz Hessiana  $H(\mathcal{L}(z))$ . La solución a este sistema se obtiene por proceso de iteración donde la hipótesis inicial  $z_0$  es mejorada resolviendo el paso de Newton, i.e.  $\Delta z = -H(\mathcal{L}(z))^{-1} \nabla(\mathcal{L}(z))$ . Esto también puede ser resuelto por medio de gradiente, pero al realizarse por ese método se pierden las propiedades de descentralización.

El despacho económico es un problema donde un conjunto de productores conectados a un nodo tratando de satisfacer la demanda  $Q$  la cual también se encuentra conectada al nodo. Su meta es encontrar el nivel de producción óptimo para cada generador, así como el precio de la energía  $\lambda$ , es decir, encontrar una solución a la producción con eficiencia económica. El nivel de producción por cada unidad de generación tiene límites inferior y superior  $[p_g]$  y  $[p_g]$  respectivamente. Se asume que la función de producción de los generadores es cuadrática, como se muestra en la Ecuación ( 4.5). Del mismo modo, la función de

beneficio se asume cóncava cuadrática  $B_l(q_l) = \beta_l q_l - \gamma q_l^2$ . La Figura 4.1 es una representación esquemática de este modelo para el caso en que tenemos 3 generadores y una carga de 850W [Wollenberg y Wood, 1996].

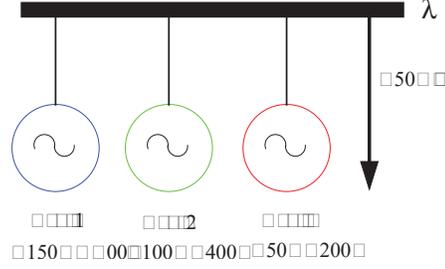


Figura 4.1: Diagrama equivalente del despacho económico

$$\max_{p_g, q_l} \sum_{l \in \mathbb{L}} B_l(q_l) - \sum_{g \in \mathbb{G}} C_g(p_g) \quad (4.1)$$

**s.a.**

$$\sum_{g \in \mathbb{G}_i} P_g - \sum_{l \in \mathbb{L}_i} q_l - Q = 0 \quad (4.2)$$

$$[P_g] \leq p_g \leq [P_g] \forall g \in \mathbb{G} \quad (4.3)$$

$$[Q_l] \leq q_l \leq [Q_l] \forall l \in \mathbb{L} \quad (4.4)$$

El objetivo es maximizar el bienestar social [Mas-Collel et al., 1995], el cual es la diferencia entre el beneficio de consumo de la energía y el costo de producción, i.e.  $\sum_{l \in \mathbb{L}} B_l(q_l) - \sum_{g \in \mathbb{G}} C_g(p_g)$ . Esto está sujeto a dos restricciones: La primera sería la restricción del balance de energía, es decir, lo que se produce es lo que se consume, y la segunda se refiere a los límites físicos de los generadores, ya que por restricciones físicas de los generadores no pueden ir mas allá de ciertos límites. La función de costo de producción de los generadores es definida por ecuaciones cuadráticas cuya forma es mostrada en la Ecuación (4.5).

$$C_g(p_g) = \alpha_g + \beta_g p_g + \gamma_g p_g^2 \quad (4.5)$$

De la misma manera, el modelo de beneficio económico para cada carga variable es representada por la función cóncava cuadrática  $B_l(q_l) = \beta_l q_l - \gamma q_l^2$ .

Si las cargas se consideran inelásticas, es decir, no reaccionan al precio de la energía, las variables que representan las cargas pueden ser eliminadas del modelo, con lo cual el modelo del despacho económico puede ser descrito por las ecuaciones 4.6 a 4.8.

$$\min_{p_g} \sum_{g \in \mathbb{G}} C_g(p_g) \quad (4.6)$$

**s.a.**

$$\sum_{g \in \mathbb{G}_i} p_g - Q = 0 \quad (4.7)$$

$$\lfloor p_g \rfloor \leq p_g \leq \lceil p_g \rceil \forall g \in \mathbb{G} \quad (4.8)$$

La Tabla 4.1, muestra los componentes involucrados en el despacho económico sin cargas elásticas, para el cálculo del paso de Newton.

$$\mathcal{L}(\mathbf{z}) = \sum_{g \in \mathbb{G}} C_g(p_g) - \lambda \left( \sum_{g \in \mathbb{G}_i} p_g - Q \right) - \left( \sum_{g \in \mathbb{G}_i} \rho_g (\lfloor P_g \rfloor - p_g + \frac{1}{2} p_g^2) \right) - \left( \sum_{g \in \mathbb{G}_i} \bar{\rho}_g (p_g - \lceil P_g \rceil + \frac{1}{2} \bar{p}_g^2) \right)$$

$\mathbf{z}$	$\nabla(\mathcal{L}(\mathbf{z}))$	$H(\mathcal{L}(\mathbf{z}))$					
		$p_g$	$\underline{p}_g$	$\bar{p}_g$	$\lambda$	$\underline{\rho}_g$	$\bar{\rho}_g$
$p_g$	$\beta_g + 2\gamma_g p_g - \lambda - \underline{\rho}_g + \bar{\rho}_g$	$2\gamma_g$			-1	-1	1
$\underline{p}_g$	$\underline{\rho}_g \underline{p}_g$		$\underline{\rho}_g$			$\underline{p}_g$	
$\bar{p}_g$	$\bar{\rho}_g \bar{p}_g$			$\bar{\rho}_g$			$\bar{p}_g$
$\lambda$	$\sum_{g \in \mathbb{G}} p_g - \sum_{l \in \mathbb{L}} q_l - Q$	-1					
$\underline{\rho}_g$	$\lfloor p_g \rfloor - p_g + p_g^2/2$	-1	$\underline{p}_g$				
$\bar{\rho}_g$	$p_g - \lceil p_g \rceil + \bar{p}_g^2/2$	1		$\bar{p}_g$			

Tabla 4.1: El Paso de Newton y los componentes involucrados.

Para este caso el Lagrangiano de este sistema se encuentra definido por la Ecuación mostrada en la cabecera de la tabla. En ella, ya se han introducido las variables de holgura así como las variables duales para cada una de las restricciones del sistema.

## 4.2. El despacho económico y su representación basada en grafos

El grafo que define el paso de Newton para el despacho económico del sistema mostrado en la Figura 4.1 se muestra en la Figura 4.2.

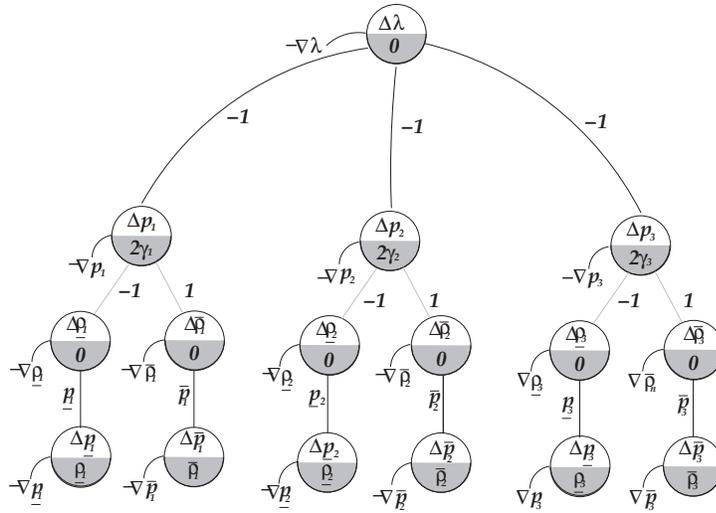


Figura 4.2: Gráfica del modelo de reducción

Como muestra la Figura 4.2 cada restricción se representa por una variable dual y un conjunto de ligas que representan los términos lineales de la restricción. Este conjunto de enlaces son los responsables de unir las variables primarias con las variables duales. Existe solo una diferencia entre las restricciones de igualdad y desigualdad, es el tipo de enlaces utilizados para construir la estructura de interconexión. Para el caso de las restricciones de igualdad los enlaces siempre se encontrarán activos en el proceso de solución. En el caso de la estructura de interconexión para las restricciones de desigualdad, los enlaces se tomarán en cuenta solo cuando las restricciones se encuentren activas. La modificación de estas propiedades en porciones del grafo provocarán que el grafo vaya cambiando dinámicamente su topología para adaptarse a las condiciones actuales del problema cuya solución está en curso, a diferencia de los métodos en los que la topología es asumida estática [Gilbert et al., 1992].

La forma en que se le dará solución al problema del despacho económico es por

medio de un grafo, el cual se muestra en la Figura 4.2. Como se puede observar, el grafo tiene una estructura de árbol. En una estructura de árbol los nodos de la capa  $k$  se encuentran conectados únicamente por un solo nodo de la capa  $k - 1$ , a excepción de la capa cero, donde se encuentra el nodo raíz, en la cual ya no existen capas superiores. Asumiendo que existe una conexión entre las variables  $i$  y  $j$ . Si se aplica la eliminación Gaussiana al nodo  $j$ , entonces el único nodo afectado por el proceso es el nodo  $i$  el cual se encuentra en una capa superior del nodo  $j$ . El proceso de reducción de este grafo se muestra en la Figura 4.3 cuando se aplica la eliminación Gaussiana al nodo  $j$ .

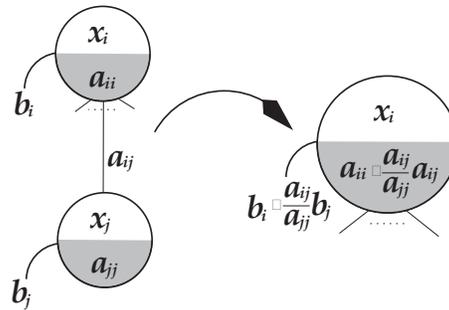


Figura 4.3: Proceso de reducción

Aplicando repetidamente el proceso de reducción de forma ordenada, se obtendrá un grafo, el cual contendrá únicamente el nodo raíz. Una vez que el grafo ha sido reducido, se aplicará un algoritmo basado en la topología del grafo, para ser resuelto. Este algoritmo se guiará por medio del grafo y realizará una sustitución hacia atrás. Por ello, supongamos que el nodo  $i$  está en la capa  $n$  y el nodo  $k$  se encuentra en la capa  $n + 1$ . Entonces la Ecuación de la variable  $x_i$  se definirá por la Ecuación ( 4.9)

$$a_{ii}x_i + a_{ik}x_k = b_i \quad (4.9)$$

de donde  $x_i$  será resuelta como lo indica la Ecuación ( 4.10).

$$x_i = \frac{b_i - a_{ik}x_k}{a_{ii}} \quad (4.10)$$

Si el nodo  $i$  es la raíz del árbol, entonces no existen capas superiores, por lo tanto

la Ecuación ( 4.10) se convertirá en la Ecuación ( 4.11).

$$x_i = \frac{b_i}{a_{ii}} \quad (4.11)$$

#### 4.2.1. Algoritmos

Se definieron dos variables booleanas  $isLB_g$  y  $isUB_g$  para cada generador  $g$ , a las cuales se les asignan valores de acuerdo a los siguientes criterios. A la variable que controlará el límite inferior

$$isLB_g \leftarrow \begin{cases} true, & \text{si } p_g < \lfloor p \rfloor \\ false, & \text{si } \underline{\rho}_g < 0 \end{cases} \quad (4.12)$$

y para la variable que controlará el límite superior

$$isUB_g \leftarrow \begin{cases} true, & \text{si } p_g > \lceil p \rceil \\ false, & \text{si } \overline{\rho}_g < 0 \end{cases} \quad (4.13)$$

Las dos variables son inicializadas con el valor *false*. Además se utilizarán dos funciones: La primera,  $reduce(x_i, x_{i-1})$ , reducirá  $x_i$  en  $x_{i-1}$ , como se muestra en la Figura 4.3, y la segunda función,  $solve(x_i, x_{i-1})$ , la cual resolverá la variable  $x_i$  basada en el valor de  $x_{i-1}$ , como indican las ecuaciones 4.10 y 4.11.

El Algoritmo 1 *reduceIt*, el cual especifica la reducción del grafo, mientras que el Algoritmo 2 *solveIt*, especifica la solución del grafo.

Por ultimo, el Algoritmo 3 *main*, es un algoritmo iterativo, el cual se encargará de aplicar los algoritmos *reduceIt* y *solveIt* hasta que algún criterio de convergencia sea alcanzado.

Una iteración resuelve un problema con un conjunto de restricciones diferentes ya que la función objetivo es cuadrática. Si no fuese el caso entonces, se tendría que iterar hasta converger con un conjunto de restricciones activas, después de esto se tiene que revisar el nuevo conjunto de restricciones activas.

**Algoritmo 1**  $\text{reduceIt}(\mathbb{G}, \lambda)$ 


---

```

for all  $g \in \mathbb{G}$  do
  if  $isLB_g$  o  $isUB_g$  then
    if  $isLB_g$  then
       $reduce(\underline{p}_g, \underline{\rho}_g)$ 
       $reduce(\underline{\rho}_g, \underline{p}_g)$ 
    else
       $reduce(\overline{p}_g, \overline{\rho}_g)$ 
       $reduce(\overline{\rho}_g, \overline{p}_g)$ 
    end if
  end if
   $reduce(p_g, \lambda)$ 
end for

```

---

**4.2.2. Caso de estudio**

En esta Sección se analizará un caso basado en tres generadores como lo muestra la Figura 4.1. La Tabla 4.2 muestra los datos del sistema para la resolución del problema de despacho económico.

generador	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$	$\lfloor p \rfloor$	$\lceil p \rceil$
1	459	6.48	0.00128	150	600
2	310	7.85	0.00194	100	400
3	78	7.97	0.00482	50	250

Tabla 4.2: Datos del sistema

Se construye el grafo mostrado en la Figura 4.4. Se comienza con un grafo en el cual se asume que las restricciones no se encuentran activas, por lo cual las partes del grafo que se muestra en la Figura 4.2, correspondientes a tales restricciones, no son tomadas en cuenta. Al aplicar los Algoritmos 1 y 2, se obtienen los valores mostrados en la Figura 4.5.

La Figura 4.5 muestra que la potencia del generador 1 sobrepasa su potencia

---

**Algoritmo 2** solveIt( $\mathbb{G}, \lambda$ )
 

---

 $solve(\lambda)$ 
 $\lambda \leftarrow \lambda + \Delta\lambda$ 
**for all**  $g \in \mathbb{G}$  **do**
 $solve(p_g, \lambda)$ 
 $p_g \leftarrow p_g + \Delta p_g$ 
**if**  $isLB_g \circ isUB_g$  **then**
**if**  $isLB_g$  **then**
 $solve(\underline{\rho}_g, p_g)$ 
 $\underline{\rho}_g \leftarrow \underline{\rho}_g + \Delta\underline{\rho}_g$ 
 $solve(\underline{p}_g, \underline{\rho}_g)$ 
 $\underline{p}_g \leftarrow \underline{p}_g + \Delta\underline{p}_g$ 
**if**  $\underline{\rho}_g < 0$  **then**
 $isLB \leftarrow F$ 
**end if**
**else**
 $solve(\overline{\rho}_g, p_g)$ 
 $\overline{\rho}_g \leftarrow \overline{\rho}_g + \Delta\overline{\rho}_g$ 
 $solve(\overline{p}_g, \overline{\rho}_g)$ 
 $\overline{p}_g \leftarrow \overline{p}_g + \Delta\overline{p}_g$ 
**if**  $\overline{\rho}_g < 0$  **then**
 $isUB \leftarrow F$ 
**end if**
**end if**
**else**
**if**  $p_g < \lfloor p_g \rfloor$  **then**
 $isLB \leftarrow T$ 
**else**
**if**  $p_g > \lceil p_g \rceil$  **then**
 $isUB \leftarrow T$ 
**end if**
**end if**
**end if**
**end for**


---

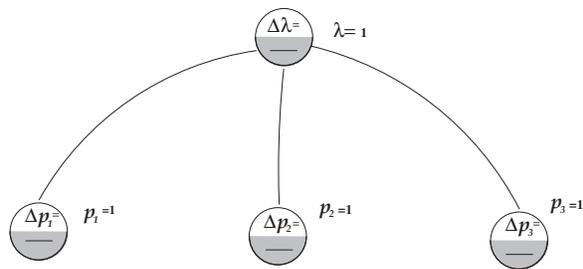
**Algoritmo 3**  $\text{main}(\mathbb{G}, \lambda)$ Inicializar  $z$ **repeat**    Evaluar  $\nabla(\mathcal{L}(z))$     reduceIt( $\mathbb{G}, \lambda$ )    solveIt( $\mathbb{G}, \lambda$ )**until**  $\Delta z_i < \xi \quad \forall_i = 1, n$ 

Figura 4.4: Grafo inicial

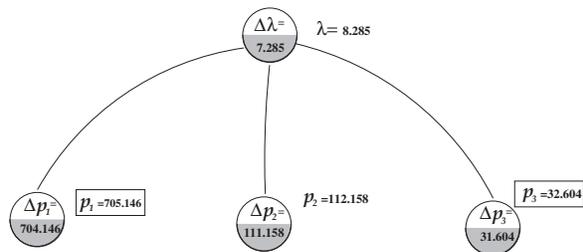


Figura 4.5: Grafo primera iteración resuelta

máxima, y a la vez la potencia del generador no cumple con su potencia mínima. Por ello es necesario activar la restricción superior en el generador 1 y la restricción inferior en el generador 3. Por lo tanto, se debe de realizar una nueva iteración, pero en esta ocasión el grafo debe incluir las partes correspondientes a tales restricciones, como se muestra en la Figura 4.6.

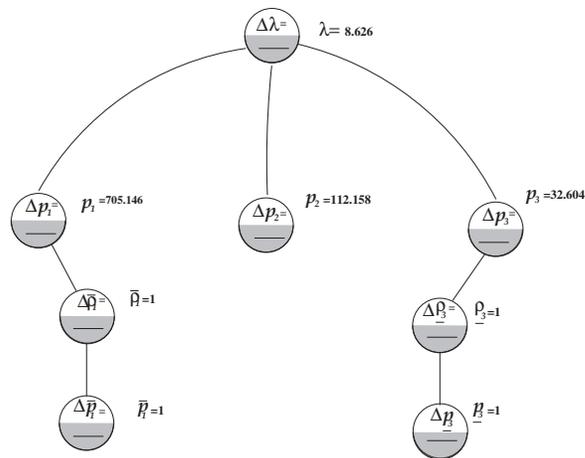


Figura 4.6: Grafo inicial segunda iteración

Al aplicar los algoritmo 1 y 2, los valores del grafo obtenidos son los mostrados en el grafo de la Figura 4.7.

Como se observa en la Figura 4.7, el generador 1 se encuentra en el valor máximo de su potencia y el generador 3 en su valor mínimo, sin embargo, los incrementos calculados aún tienen valores elevados, por lo cual se debe realizar una tercera iteración, conservando la topología, tal como se muestra en la Figura 4.8.

Aplicando el proceso de reducción al grafo obtenemos la configuración mostrada en la Figura 4.9, la cual muestra las  $\Delta s$ , es decir, los incrementos calculados continúan siendo diferentes de cero, por ello es necesario realizar una nueva iteración.

En esta iteración nos arroja un  $\underline{\rho}_3$  negativo, lo cual de acuerdo a la Ecuación ( 2.13), esta se encuentra forzada, por lo tanto debe ser liberada, es decir, la restricción se desactivará del grafo. Se realiza una iteración con la nueva topología del grafo mostrado en la Figura 4.10. Ahora la parte del grafo correspondiente al límite inferior del generador 3

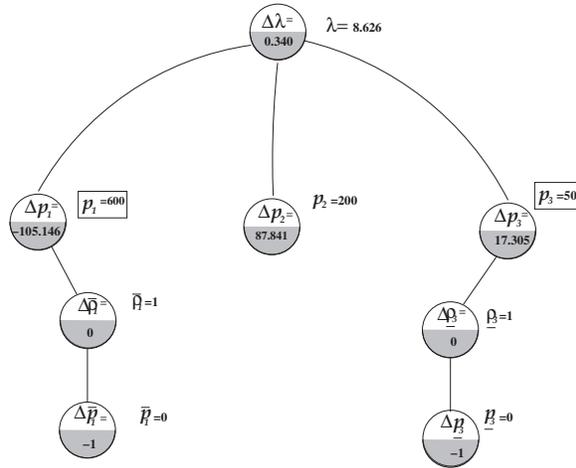


Figura 4.7: Grafo segunda iteración resuelta

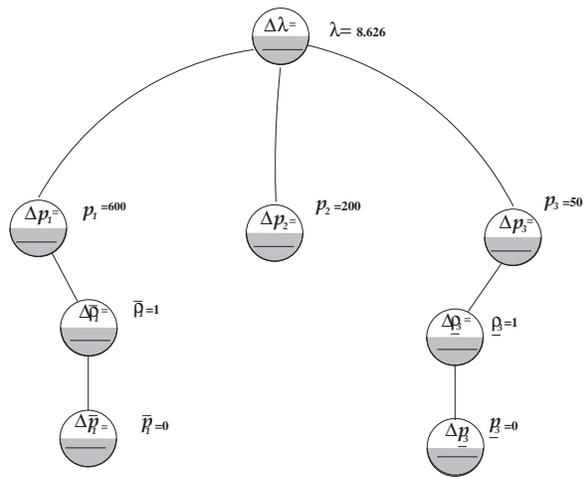


Figura 4.8: Grafo inicial tercera iteración

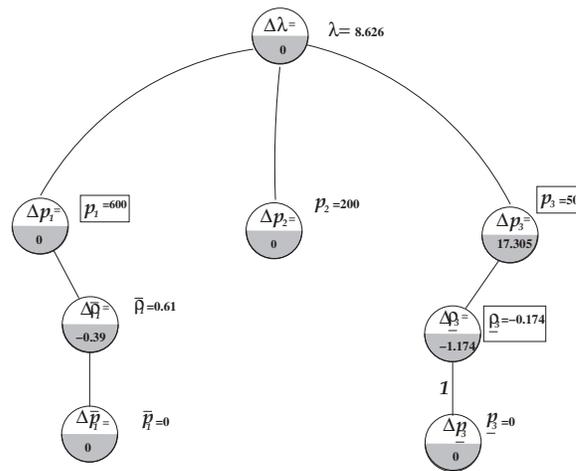


Figura 4.9: Grafo tercera iteración resuelta

ha sido eliminada.

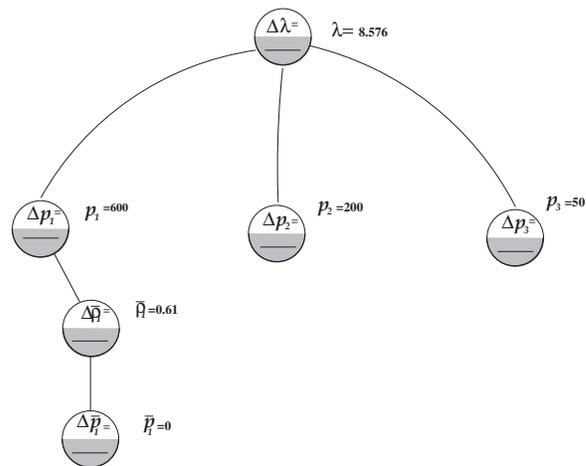


Figura 4.10: Grafo inicial cuarta iteración

Aplicando el proceso de reducción y sustitución se obtienen los incrementos mostrados en la Figura 4.11.

Dado que los incrementos aún son diferentes de cero, se aplicará el proceso de reducción al grafo de la Figura 4.12 cuya topología es idéntica a la iteración anterior, con ello llegamos a la configuración mostrada en la Figura 4.13.

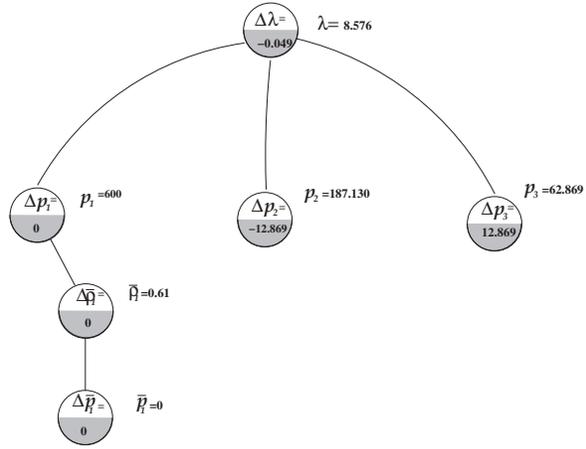


Figura 4.11: Grafo cuarta iteración resuelta

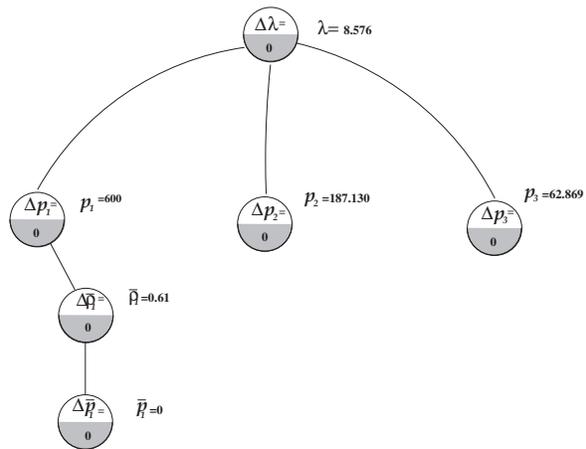


Figura 4.12: Grafo inicial quinta iteración

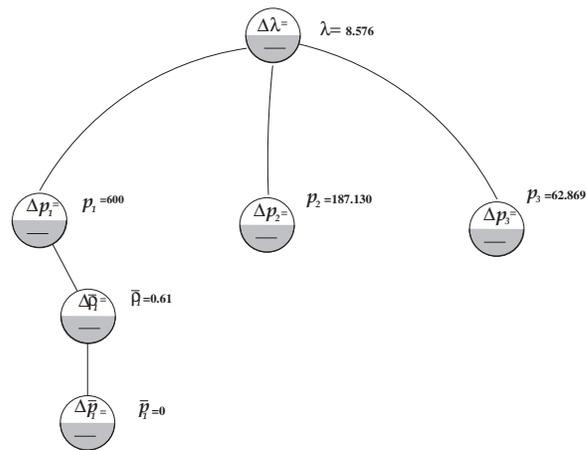


Figura 4.13: Grafo quinta iteración resuelta

Como puede observarse no existe ningún cambio entre las iteraciones; es decir, los incrementos son cero, por lo cual no es necesario realizar una nueva iteración, porque se ha resuelto el problema del despacho económico.

### 4.2.3. Resultados

En esta Sección se muestran los resultados obtenidos en la Sección anterior en forma gráfica. La Figura 4.14, muestra el comportamiento de la convergencia de las potencias, como puede observarse la potencia de generador 1 se estabiliza en la tercera iteración mientras tanto la potencia del generador 2 y del generador 3 se estabilizan en la quinta iteración. Otra característica que puede observarse es que la potencia del generador 2 disminuye y la potencia del generador 3 aumenta esto se debe a que el generador 2 sede potencia al generador 3 para que este la genere y llegue a su mínima potencia de generación.

La Figura 4.15 muestra el comportamiento de la convergencia de las variables duales, puede observarse que la variable  $\lambda$  se estabiliza en la tercera iteración, también puede observarse que las variables correspondientes a los Multiplicadores de Lagrange y las variables de holgura aparecen en la segunda iteración debido a que el generador 1 no cumple con su restricción máxima y el generador 3 no cumple con la restricción mínima. Otra característica que puede observarse es que las variables correspondientes al generador

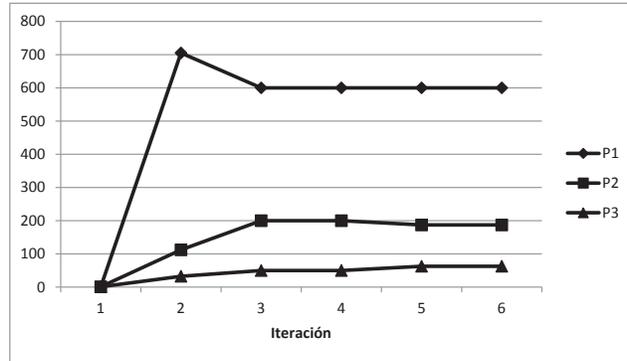


Figura 4.14: Convergencia de  $p_1, p_2, p_3$

3 desaparecen en la cuarta iteración debido a que la variable correspondiente al Multiplicador de Lagrange presenta un valor negativo, por ello no es necesario mantener activa la restricción mínima del generador 3.

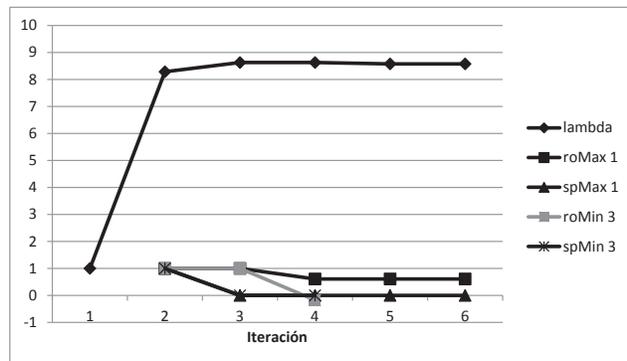


Figura 4.15: Convergencia variables duales

Finalmente en la Figura 4.16 se muestra como es el comportamiento de los costos de las funciones de producción así como el costo de producción agregado.

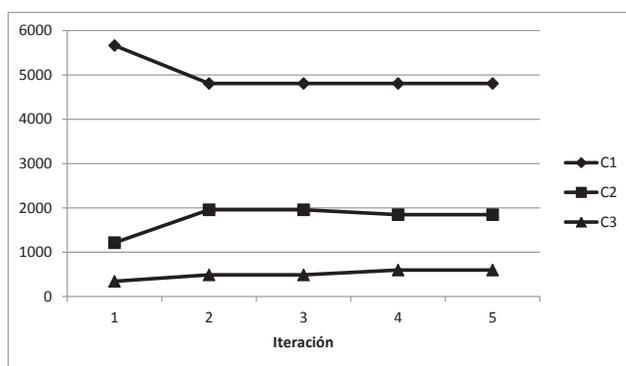


Figura 4.16: Convergencia de  $C_1(p_1)$ ,  $C_2(p_2)$ ,  $C_3(p_3)$

### 4.3. Conclusiones

En este capítulo se presentó un ejemplo sencillo, de como aplicar la reducción de grafos cuando estos son aplicados a los problemas de Programación No Lineal. Esto se realizó por medio de la introducción de un modelo topológico para el paso de Newton, en particular al modelo del despacho económico. Este es un modelo multicapa, en el cual se encuentran variables duales, variables duales para los límites de las variables, variables slack para tales límites y variables de decisión. Además este modelo topológico permite una representación más simple, por la cual se puede realizar una implementación directa.

Aunque existen métodos que explotan al máximo la dispersidad de la matriz, esto no se realiza de forma dinámica. Es decir, a lo que pueden llegar es a la representación del modelo gráfico inicial, pero sin la estructura por capas. Por lo anterior se concluye que esta representación y la manera de resolver los grafos explotan al máximo la dispersidad general

y temporal del sistema, con el consiguiente ahorro computacional.



## Capítulo 5

# Solución del despacho económico basada en grafos descartando las variables de holgura

En el Capítulo 4 se definió la solución al problema de despacho económico por medio de un grafo, el cual contaba con variables duales y variables de holgura. En este Capítulo se mostrara una nueva forma de reducción, sin el uso de variables slack, el cual se muestra en la Figura 4.3, En la sección 5.1 se presenta la nueva forma de reducción y la ecuaciones necesarias para esta.

### 5.1. Despacho Económico y su nueva gráfica

La Tabla 5.1, muestra los componentes involucrado, en el despacho económico, para el cálculo del método de Newton, sin el uso de variables de holgura.

La nueva representación por medio de grafos del sistema que muestra la Figura 4.1 se muestra en la Figura 5.1.

Como se puede observar ahora el grafo únicamente cuenta con tres capas, ya que ahora no se introducen variables slack para las restricciones. El modo de solución para este

$$\mathcal{L}(z) = \sum_{g \in \mathbb{G}} C_g(p_g) - \lambda(\sum_{g \in \mathbb{G}_i} p_g - Q) - (\sum_{g \in \mathbb{G}_i} \rho_g(\lfloor P_g \rfloor - p_g) - (\sum_{g \in \mathbb{G}_i} \bar{\rho}_g(p_g - \lceil P_g \rceil))$$

$z$	$\nabla(\mathcal{L}(z))$	$H(\mathcal{L}(z))$			
		$p_g$	$\lambda$	$\rho_g$	$\bar{\rho}_g$
$p_g$	$\beta_g + 2\gamma_g p_g - \lambda - \rho_g + \bar{\rho}_g$	$2\gamma_g$	-1	-1	1
$\lambda$	$\sum_{g \in \mathbb{G}} p_g - \sum_{l \in \mathbb{L}} q_l - Q$	-1			
$\rho_g$	$\lfloor p_g \rfloor - p_g + p_g^2/2$	-1			
$\bar{\rho}_g$	$p_g - \lceil p_g \rceil + \bar{p}_g^2/2$	1			

Tabla 5.1: El Paso de Newton y los componentes involucrados.

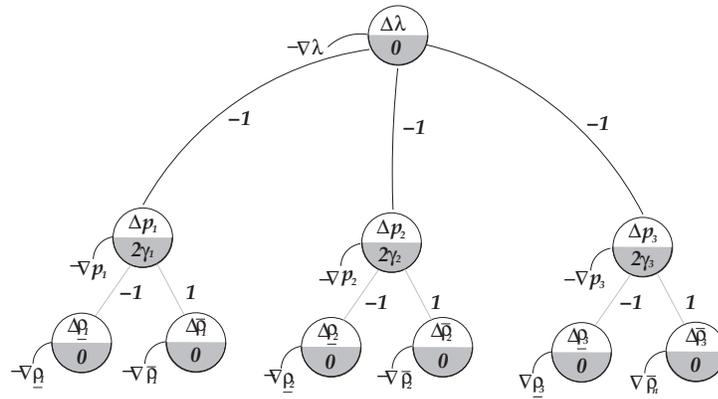


Figura 5.1: Grafo del modelo de reducción

grafo será el mismo que para el grafo que muestra la Figura 4.2, se utilizara de forma repetida y ordenada el modelo de reducción que se presenta en la Figura 4.3, así como las ecuaciones 4.10 y 4.11.

Se realizará una nueva forma de reducción únicamente cuando existan restricciones activas para las cuales se utilizará planteó un nuevo modelo de reducción basado en la eliminación Gaussiana, conocido en la ingeniería eléctrica como reducción en serie, la cual se muestra en la Figura 3.15. Se utilizó este tipo de de eliminación Gaussiana, porque si se utilizaba la implementada en la Figura 4.3 se obtendría una inconsistencia, ya que ese proceso de reducción llevaba una división con un dividendo cercano a cero. Realizando este cambio en la eliminación Gaussiana se obtiene el nuevo modelo de reducción, el cual se

presenta en la Figura 5.2.

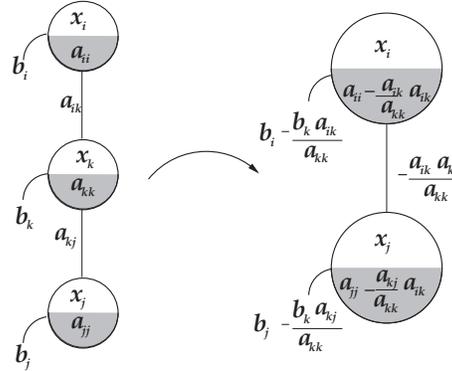


Figura 5.2: Grafo del modelo de reducción

Con el cambio en el proceso de reducción se realizaron cambios en el proceso de solución. La Ecuación ( 4.9) cambiará debido a que la eliminación Gaussiana utilizada para ésta se basaba en la Figura 3.16(b) porque se reducía el nodo colgante en el nodo que se encuentra colgado, se obtiene la Ecuación ( 5.1).

$$a_{kk}x_k + a_{ik}x_i + a_{kj}x_j = b_k \quad (5.1)$$

De donde  $x_k$  será resuelta como lo indica la Ecuación ( 5.2). En la cual puede observarse que este será el ultimo valor conocido durante el proceso de solución debido a que es necesario saber los valores del nodo padre y nodo hijo de este, para poder obtener su valor.

$$x_k = \frac{b_k - a_{ik}x_i - a_{kj}x_j}{a_k} \quad (5.2)$$

Y para los nodos raíz se continuará utilizando la Ecuación ( 4.11).

## 5.2. Algoritmos

Para la definición de los algoritmos, se utilizaron la variables booleanas definidas para los límites superior e inferior de cada potencia Ecuación ( 4.12) y Ecuación ( 4.13), respectivamente. Utilizando las ecuaciones que se muestran en la Figura 5.2 para la reducción podemos modificar el algoritmo 1 para crear el primer algoritmo que se utilizará para

el proceso de reducción será el algoritmo 4 *reduceItNoSlack*, donde se aplicará la función *reduce* primero al segundo nodo, para así continuar con la reducción que ya se conoce.

---

**Algoritmo 4** *reduceItNoSlack*( $\mathbb{G}, \lambda$ )

---

```

for all  $g \in \mathbb{G}$  do
  if  $isLB_g$  o  $isUB_g$  then
    if  $isLB_g$  then
       $reduce(p_g, \underline{\rho}_g)$ 
       $reduce(p_g, \lambda)$ 
       $reduce(\lambda, \underline{\rho}_g)$ 
    else
       $reduce(p_g, \overline{\rho}_g)$ 
       $reduce(p_g, \lambda)$ 
       $reduce(\lambda, \overline{\rho}_g)$ 
    end if
  end if
end for

```

---

Utilizando la Ecuación ( 5.2) se puede definir el Algoritmo 5 *solveItNoslack*, en el cual se aplicará primero la función *resolve* al nodo raíz, una vez que se conozca su valor se resolverá el nodo de la última capa, ya que como se mencionó anteriormente, es necesario conocer los valores del nodo raíz y el valor del nodo en la última capa para así poder conocer el valor del nodo que conecta a ambos nodos.

Por ultimo se definió el algoritmo 6 *mainNew*, el cual se encargará de aplicar los algoritmos *reduceItNoSlack* y *solveItNoslack* hasta que algún criterio de convergencia sea alcanzado.

### 5.3. Caso de estudio

En esta Sección se analizará de nuevo el caso de estudio utilizado en Capítulo 4. La Tabla 4.2, muestra los datos del sistema a analizar. Para una mayor claridad, el grafo únicamente mostrará los valores de los incrementos, i.e.  $\Delta x$ , en el semicírculo debajo del

**Algoritmo 5** solveItNoSlack( $\mathbb{G}, \lambda$ )

---

```

solve( $\lambda$ )
 $\lambda \leftarrow \lambda + \Delta\lambda$ 
for all  $g \in \mathbb{G}$  do
  if  $isLB_g$  o  $isUB_g$  then
    if  $isLB_g$  then
      solve( $\underline{\rho}_g, \lambda$ )
       $\underline{\rho}_g \leftarrow \underline{\rho}_g + \Delta\underline{\rho}_g$ 
      solve( $p_g, \underline{\rho}_g, \lambda$ )
       $p_g \leftarrow p_g + \Delta p_g$ 
      if  $\underline{\rho}_g < 0$  then
         $isLB \leftarrow F$ 
      end if
    else
      solve( $\overline{\rho}_g, \lambda$ )
       $\overline{\rho}_g \leftarrow \overline{\rho}_g + \Delta\overline{\rho}_g$ 
      solve( $p_g, \overline{\rho}_g, \lambda$ )
       $p_g \leftarrow p_g + \Delta p_g$ 
      if  $\overline{\rho}_g < 0$  then
         $isUB \leftarrow F$ 
      end if
    end if
  else
    if  $p_g < \lfloor p_g \rfloor$  then
       $isLB \leftarrow T$ 
    else
      if  $p_g > \lceil p_g \rceil$  then
         $isUB \leftarrow T$ 
      end if
    end if
  end if
end for

```

---

**Algoritmo 6**  $\text{mainNew}(\mathbb{G}, \lambda)$

Inicializar  $\mathbf{z}$

**repeat**

Evaluar  $\nabla(\mathcal{L}(\mathbf{z}))$

$\text{reduceItNoSlack}(\mathbb{G}, \lambda)$

$\text{solveItNoSlack}(\mathbb{G}, \lambda)$

**until**  $\Delta z_i < \xi \quad \forall_i = 1, n$

nodo, así como los valores de las variables  $x$  de cada iteración, se mostraran al lado del nodo. Comenzando con el grafo que muestra la Figura 5.3, en este caso todas las restricciones se consideran inactivas.

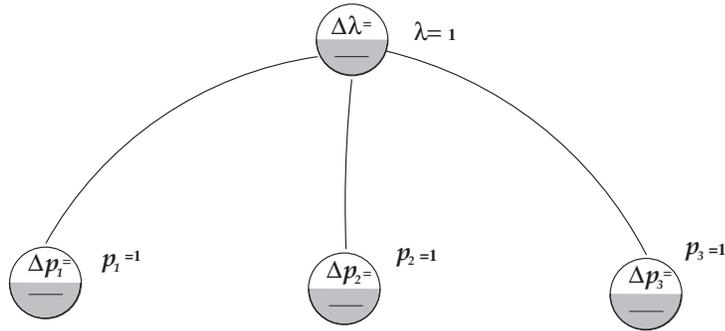


Figura 5.3: Grafo inicial

Utilizando los algoritmos 4 y 5, los valores obtenidos al resolver este grafo se muestran en la Figura 5.4.

Como puede observarse en la Figura 5.4, la potencia del generador 1, sobrepasa su potencia máxima, mientras que la potencia del generador 3, no satisface su potencia mínima. Por ello, la restricción superior del generador 1 se activará, al igual que la restricción mínima del generador 3. Es necesario realizar una nueva iteración, pero el grafo contará con nuevas partes para incluir las restricciones, como lo muestra la Figura 5.5.

Utilizando el Algoritmo 4 el primer nodo que se reducirá es el que contiene a la potencia del generador 1; las ecuaciones que se utilizan para esta reducción son descritas en la Figura 5.2. La Figura 5.6 muestra el grafo después de la reducción del nodo que contiene

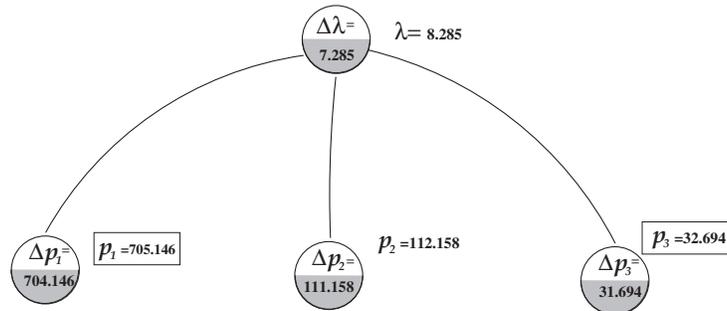


Figura 5.4: Grafo inicial resuelto

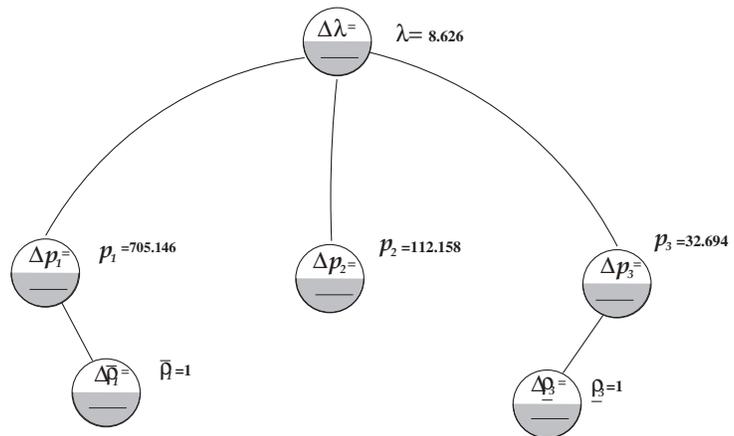


Figura 5.5: Segunda iteración grafo inicial

la potencia del generador 1.

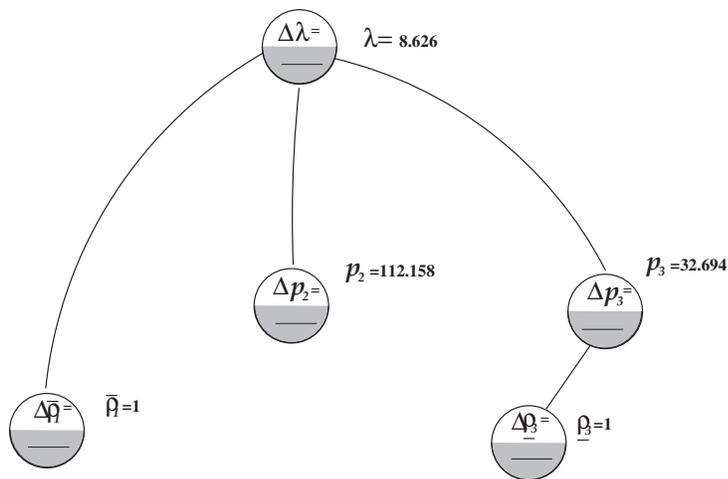


Figura 5.6: Segunda iteración nodo  $p_1$  reducido

Continuando con la aplicación de los Algoritmos 4 y 5, se obtienen valores de la segunda iteración los cuales se muestra en la Figura 5.7.

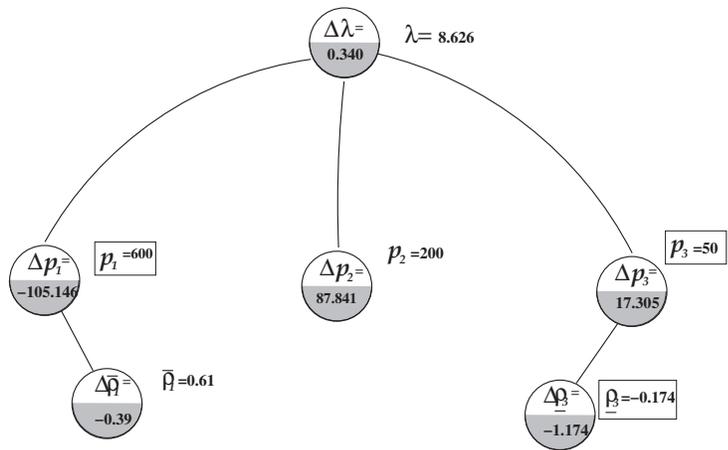


Figura 5.7: Segunda iteración grafo resuelto

La Figura 5.7 muestra que el generador 1 se encuentra en su valor máximo así como el generador 3 se encuentra en su valor mínimo y su multiplicador de Lagrange, i.e.  $\rho_3$ , presenta un valor negativo. Por ello, de acuerdo con la condición KKT establecida en

la Ecuación ( 2.13), la restricción no debe permanecer activa, ya que se tiene un valor negativo. Como se desactivó una restricción es necesario realizar una nueva iteración la cual contará con una nueva topología, como puede observarse en la Figura 5.8.

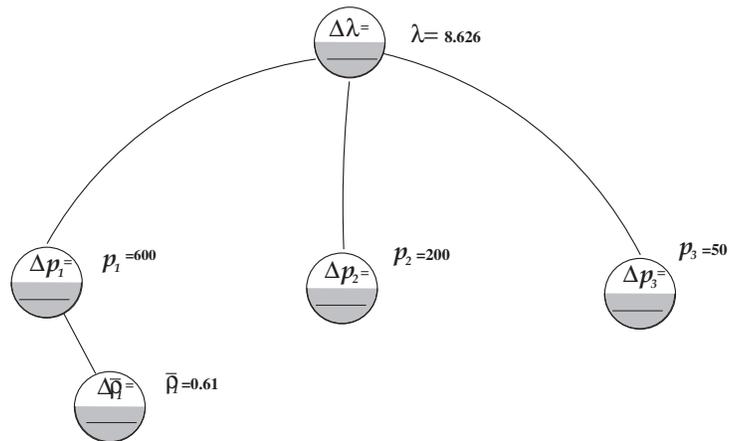


Figura 5.8: Tercera iteración grafo inicial

Aplicando los Algoritmos 4 y 5, en la Figura 5.9 se muestran los nuevos valores del grafo.

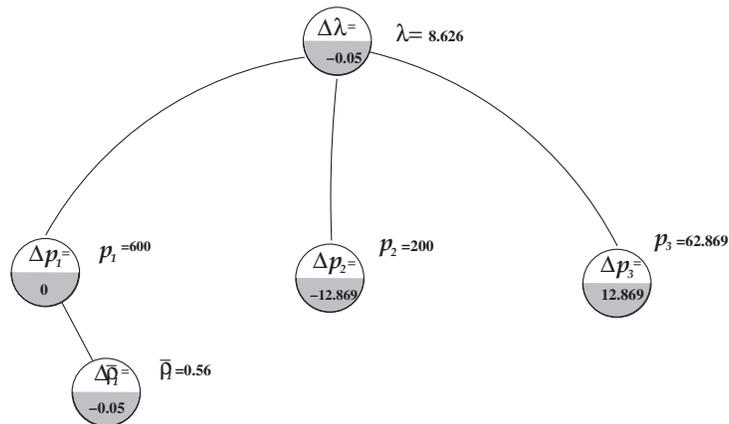


Figura 5.9: Tercera iteración grafo resuelto

Como se observa en la Figura 5.9 el generador 3 ya no se encuentra en su límite inferior, pero como los incrementos continúan siendo diferentes de cero, es necesario realizar

una nueva iteración, sin cambios en la topología del grafo, como lo muestra la Figura 5.10.

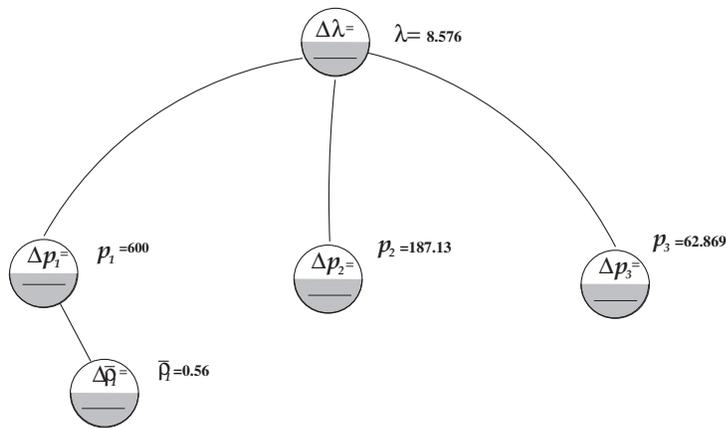


Figura 5.10: Cuarta iteración grafo inicial

Una vez aplicados los Algoritmos 4 y 5, se obtienen los valores que muestra la Figura 5.11.

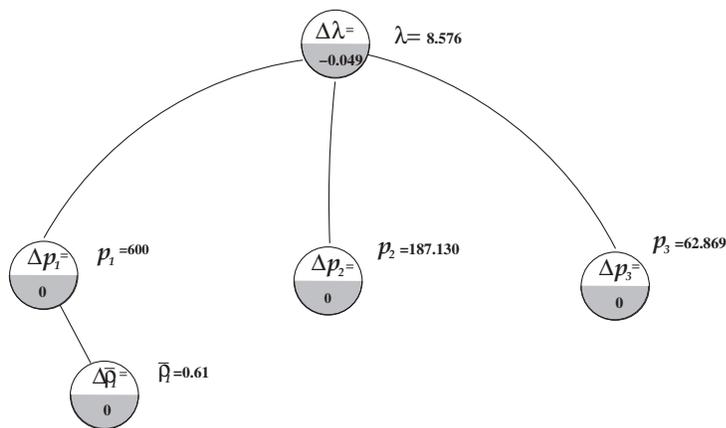


Figura 5.11: Cuarta iteración grafo resuelta

La Figura 5.11 muestra que todos los incrementos son cero, por ello no es necesario realizar una nueva iteración, ya que se ha alcanzado la convergencia.

## 5.4. Resultados

En esta sección se analizan los resultados obtenidos mostrando algunas curvas de convergencia. La Figura 5.12 muestra la convergencia de las potencias  $p_1, p_2$  y  $p_3$ , como puede observarse la potencia de generador 1 se estabiliza en la tercera iteración mientras tanto la potencia del generador 2 y del generador 3 se estabilizan en la cuarta iteración. Otra característica que puede observarse es que la potencia del generador 2 disminuye y la potencia del generador 3 aumenta esto se debe a que el generador 2 cede potencia al generador 3 para que este genere y llegue a su mínima potencia de generación.

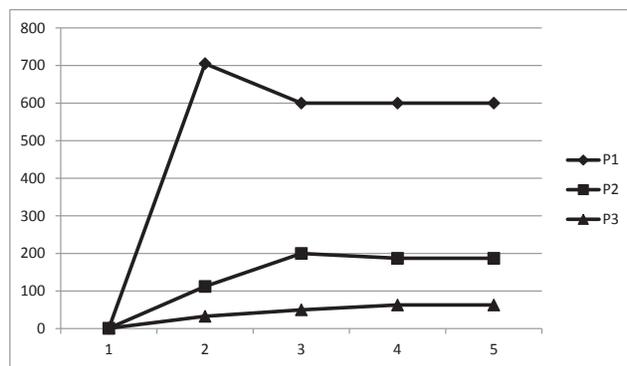


Figura 5.12: Convergencia de  $p_1, p_2, p_3$

La Figura 5.13 muestra las convergencias de las variables duales i.e.  $\lambda$ ,  $\bar{\rho}_1$  y  $\underline{\rho}_3$ , puede observarse que la variable  $\lambda$  se estabiliza en la tercera iteración, también puede observarse que las variables correspondientes a los Multiplicadores de Lagrange aparecen en la segunda iteración debido a que el generador 1 no se cumple con su restricción máxima y el generador 3 no cumple con la restricción mínima. Otra característica que puede observarse es que la variable correspondiente al Multiplicador de Lagrange del generador 3 desaparece en la tercera iteración debido a que presenta un valor negativo, por ello no es necesario

mantener activa la restricción mínima del generador 3.

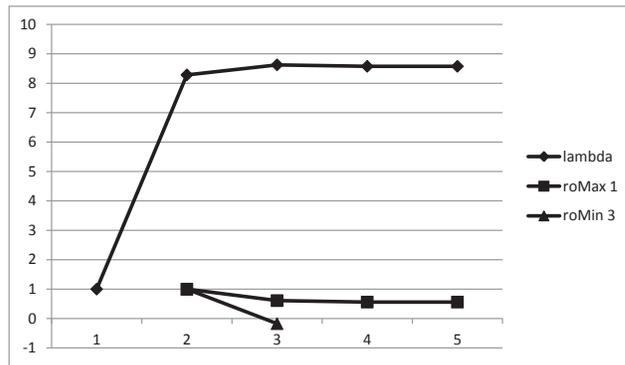


Figura 5.13: Convergencia variables duales

Finalmente la Figura 5.14 el comportamiento de la función de producción.

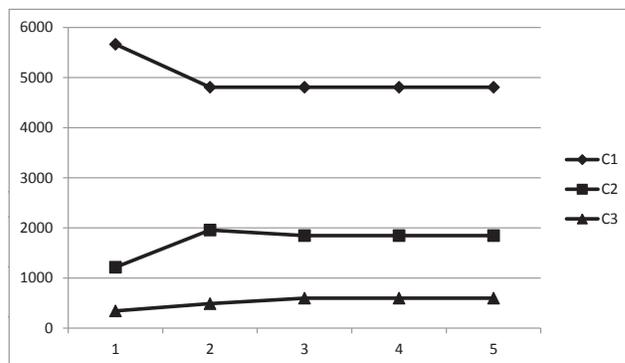


Figura 5.14: Convergencia de  $C_1(p_1)$ ,  $C_2(p_2)$ ,  $C_3(p_3)$

La Figura 5.15 muestra el número de nodos  $n$  que se generarían conforme crece el número variables. Como puede observarse con el método que considera las variables de holgura, generará un número mayor de nodos, ya que genera  $1 + n + 2n_a$ , donde  $n_a$  son los nodos que se generan si las variables contienen restricciones activas. En cambio con el método que descarta las variables de holgura se generan solamente  $1 + n + n_a$  nodos. Sin embargo el resultado obtenido de este método basado en grafos descartando las variables de holgura, es la eliminación de las inestabilidades numéricas derivadas de las condiciones de complementariedad.

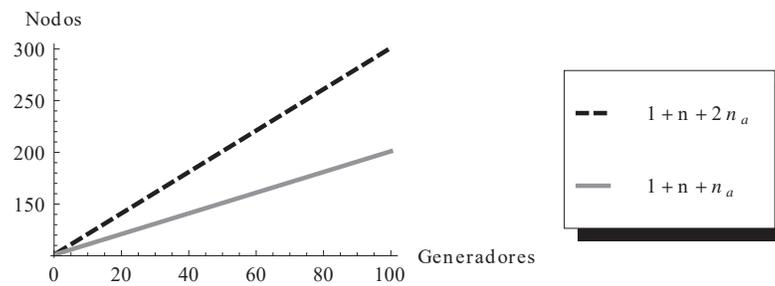


Figura 5.15: Total de nodos generados conforme crece el número de variables

La Figura 5.16 muestra la relación que existe entre los dos métodos y se puede observar como se va mejorando el espacio en memoria y el tiempo de ejecución conforme aumenta el número de variables.

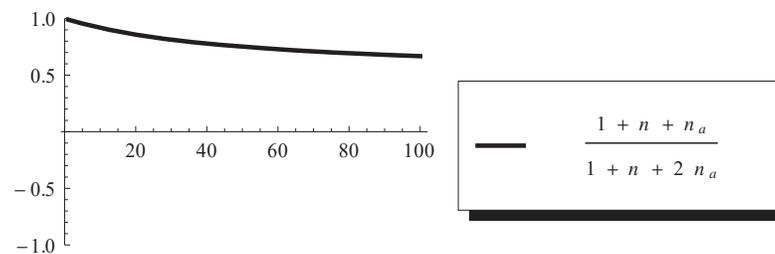


Figura 5.16: Relación entre el aumento del número de variables

## 5.5. Conclusiones

En este Capítulo, se presentó un nuevo esquema de eliminación. Bajo este esquema se le concede al proceso de reducción del grafo, una libertad singular la cual consiste en que no existan pivotes con valor cero. Con este fin, se presentó un ejemplo de cómo utilizar una reducción gráfica para el problema del despacho económico. Esto se hizo introduciendo un modelo para el método de Newton usando un modelo basado en grafos. Este modelo gráfico cuenta con una topología multicapa, con un solo tipo de variable por capa el cual puede ser: variable dual, variable de decisión y variable límite para las variables. Comenzando con una topología inicial, esta topología evolucionará a lo largo del proceso de solución de acuerdo a la solución actual del problema. Aunque existen métodos que utilizan una matriz dispersa, estos solo utilizan el modelo inicial pero sin la estructura de capas y sin la característica evolutiva. Por lo tanto, se puede concluir que esta representación y proceso solución gráfica explota la dispersidad del sistema al máximo con un ahorro computacional respectivo tanto en tiempo como en memoria.

## Capítulo 6

# Conclusiones

### 6.1. Conclusiones Generales

En la presente tesis se han presentado las principales características de los sistemas de energía eléctrica. Además se establecieron los principales conceptos matemáticos para las definiciones de los sistemas de ecuaciones lineales así como su solución algebraica.

Se definió un método de solución para los sistemas de ecuaciones lineales basada en grafos, la cual utiliza una topología tipo árbol, con variables duales y variables slack. El proceso de solución de este tipo de sistemas comienza con un reducción a los nodos del grafo, por medio de la eliminación Gaussiana. Una de las características principales de este proceso es el uso de enlaces inactivos para la restricciones del sistema. Esto conlleva a una mejor solución que la dada por los métodos de barrera o penalización ya que estos generan problemas de convergencia.

Desgraciadamente el uso de métodos matriciales y todas las herramientas y ambientes de desarrollo para la manipulación de las mismas, hacen que los métodos basados en gráficas sean considerados hasta cierto punto complejos, sacrificando así la eficiencia de los métodos [Nocedal y Wright, 2006].

Se introdujo otro método basado en grafos con un proceso similar, pero a la vez con ciertas mejoras, ya que se descarta el uso de variables de holgura, porque estas durante el proceso de solución, en particular el de reducción, proporcionaban cierta inconsistencia al sistema, debido a que presentaban valores cercanos a cero. Por ello se decidió omitir estas variables y se modificó el proceso de solución utilizando un número mejor de capas para el grafo, por ello la eliminación Gaussiana fue diferente.

Al presentarse estos métodos se le dio una solución diferente al problema del despacho económico, los cuales obtuvieron soluciones eficientes, proporcionaron esquemas de almacenamiento óptimo ya que solamente se utiliza la información fundamental del problema. Esto se debe a que la topología que utiliza este método es multicapa, pero esta siempre mantendrá el mismo número de capas que el sistema establezca desde el principio.

## 6.2. Trabajo Futuro

De este trabajo pueden surgir distintas líneas de investigación para una explotación futura. Una de ellas la extensión del análisis de flujos óptimos y corriente directa, utilizando las técnicas de descentralización de manera paralela para así evitar la generación de árboles.

En el área de optimización, dado que la presente tesis propone la solución de un problema de programación cuadrática, el trabajo futuro puede ser la extensión del método presentado hacia un sinfín de problemas de este tipo. Por ejemplo la solución a las máquinas de soporte vectorial (SVM) y algoritmos de selección basados en mínimos cuadrados i.e. lasso.

El método presentado en este documento utiliza únicamente enlaces constantes, por ellos se propone implementar un método en el cual los enlaces no solo sean constantes sino funciones, los cuales darían un enfoque diferente al de este trabajo.

Utilizando las técnicas de descentralización se pueden generar modelos que ignoren el proceso de propagación, para así conservar la topología de árboles, pero considerando los enlaces únicamente para el cálculo del gradiente.



# Referencias

- [Alsumait y Sykulski, 2009] Alsumait, J. y Sykulski, J. (2009). Dynamic economic dispatch solution using an enhanced real-quantum evolutionary algorithm. *EUROCON 2009 IEEE*.
- [Bakirtzis et al., 2000] Bakirtzis, A., Biskas, P. N., Macheras, N., y Pasiadis, N. (2000). A decentralized implementation of dc optimal power flow on a network of computers. *IEEE Transactions on Power Systems*, 20(1):25–33.
- [Bakirtzis y Biskas, 2003] Bakirtzis, A. G. y Biskas, P. N. (2003). A decentralized solution of the dc-opf of interconnected power systems. *IEEE Transactions on Power Systems*, 18(3):1007–1013.
- [Biskas y Bakirtzis, 2006] Biskas, P. y Bakirtzis, A. (2006). Decentralised opf of large multi-area power systems. *IEE Power, Generation, Transmission and Distribution*, 153(1).
- [Cerdea y De Roure, 2006] Cerdeza, J. y De Roure, D. (2006). An efficient graph based distributed opf model. *IEEE Transactions on Power Systems*, pages 132–138.
- [Cerdeza y De Roure, 2010] Cerdeza, J. y De Roure, D. (2010). A graph-based economical dispatch model. In Arabnia, H. R., Gravvanis, G. A., y Solo, A. M. G., editors, *Proceedings of WORLDCOMP 2010: Foundation of Computer Sciences*, pages 132–138, Las Vegas, Nevada, USA. CSREA Press.
- [Cerdeza et al., 2011] Cerdeza, J., P., C., y J., F. (2011). Un enfoque gráfico para la solución de problemas de programación no lineal. In *Proceedings of Reunión de Otoño de Potencia, Electronica y Computación: ROPEC 2011.*; pages 132–138, Morelia, Mich. MEX.

- [Chen et al., 2000] Chen, G., Li, K., Chung, T., y Tang, G. (2000). An efficient two-stage loa flow method for meshed distribution networks. In *Proceedings of the 5th Conference on Advances in Power System, Control, Operation and Management*, page 537–542. APSCOM.
- [Conejo y Aguado, 1998] Conejo, A. J. y Aguado, J. A. (1998). Multi-area coordinated decentralized dc optimal power flow. *IEEE Transactions on Power Systems*, 13(4):1272–1278.
- [Cormen et al., 2006] Cormen, T. H., Leiserson, C. E., Rivest, R. L., y Stein, C. (2006). Introduction to algorithms. *MIT Press*.
- [Das et al., 1994] Das, D., Nagi, H. S., y Kothari, D. P. (1994). Novel method for solving radial distribution networks. *IEE Proceedings on Generation*, 141:291–298.
- [Gilbert et al., 1992] Gilbert, J. R., Moler, C., y Schreiber, R. (1992). Sparse matrices in matlab: design and implementation. *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, 13(1):333–356.
- [Goswami y Basu, 1991] Goswami, S. K. y Basu, S. (1991). Direct solution of distribution systems. *Direct solution of distribution systems*, 138:78–85.
- [Griva et al., 2009] Griva, I., Nash, S. G., y Soferr, A. (2009). *Linear and nonlinear optimization*. SIAM Society for Industrial and Applied Mathematics.
- [Khamsawang et al., 2004] Khamsawang, S., Pothiya, S., y Boonseng, C. (2004). Distributed tabu search algorithm for solving the economic dispatch problem. *TENCON 2004. 2004 IEEE Region 10 Conference*.
- [Markowitz, 1957] Markowitz, H. M. (1957). The elimination form of the inverse and its application to linear programming. *Management Science*, 3(3):255–269.
- [Mas-Collel et al., 1995] Mas-Collel, A., Whinston, A., y Green, J. (1995). *Microeconomic Theory*. Oxford University Press, New York.
- [Mekhamer et al., 2002] Mekhamer, S., Soliman, S., Moustafa, M., y El-Hawary, M. (2002).

Load flow solution of radial distribution feeders: A new contribution. *Electrical power and Energy Systems*, 24:70–707.

[Mohammadi y Varahram, 2007] Mohammadi, A. y Varahram, M. (2007). Using neural network for solving of on-line economic dispatch problem. *Computational Intelligence for Modelling, Control and Automation, 2006 and International Conference on Intelligent Agents, Web Technologies and Internet Commerce, International Conference on*.

[Nocedal y Wright, 2006] Nocedal, J. y Wright, S. (2006). *Numerical Optimization*. Springer Verlag, 2nd edition.

[Wollenberg y Wood, 1996] Wollenberg, B. y Wood, A. (1996). *Power Generation, Operation and Control*. IEEE Press, Wiley Inter-Science.

[Zollenkopf, 1970] Zollenkopf, K. (1970). Bifactorization: Basic computational algorithm and programming techniques. *Conference on Large Sets of Sparse Linear Equations*, pages 76–96.