

**UNIVERSIDAD MICHOACANA DE  
SAN NICOLÁS DE HIDALGO**

**FACULTAD DE INGENIERÍA ELÉCTRICA  
DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO**

**“ANÁLISIS DE SISTEMAS LTI CON  
INCERTIDUMBRE PARAMÉTRICA MODELADOS  
EN BOND GRAPH”**

**TESIS**

**QUE PARA OBTENER EL GRADO DE  
MAESTRO EN CIENCIAS EN INGENIERÍA ELÉCTRICA**

**PRESENTA  
ISRAEL NÚÑEZ HERNÁNDEZ**

**DIRECTOR DE TESIS  
DR. GILBERTO GONZÁLEZ AVALOS**

**JULIO 2011**







## ANÁLISIS DE SISTEMAS LTI CON INCERTIDUMBRE PARAMÉTRICA MODELADOS EN BOND GRAPH

Los Miembros del Jurado de Examen de Grado aprueban  
la **Tesis de Maestría en Ciencias en Ingeniería Eléctrica** de *Israel Núñez Hernández*

Dr. Antonio Ramos Paz  
Presidente

Antonio Ramos Paz

Dr. Gilberto González Avalos  
Director de Tesis

Gilberto González

Dr. Juan José Flores Romero  
Vocal

Dr. Claudio R. Fuerte Esquivel  
Vocal

Dr. Víctor López Garza  
Revisor Externo

Dr. J. Aurelio Medina Ríos  
Jefe de la División de Estudios de Posgrado  
En Ingeniería Eléctrica.

UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN NICOLÁS DE HIDALGO  
Junio 2011



*El científico no tiene por objeto un  
resultado inmediato. Su deber es  
sentar las bases para aquellos que  
están por venir, y señalar el camino.*

Nikola Tesla



# Resumen

Considerando que la existencia de incertidumbre paramétrica en los sistemas es un punto crucial para el estudio de la robustez en el modelado y control. Esta tesis propone una metodología para construir de manera sistemática las dos formas de ecuaciones lineales existentes en la literatura, aplicadas al estudio de la robustez en el caso de incertidumbre presente en los parámetros.

Primeramente, se plantean las bases sobre las cuales está fundamentada la metodología de Bond Graph, describiendo sus elementos, procedimientos para el modelado y consideraciones propias.

Se describe cómo modelar la incertidumbre paramétrica desde un punto de vista de Bond Graph. La principal aportación de esta tesis es el modelado de elementos de almacenamiento en causalidad derivativa con incertidumbre, así como los efectos producidos por ésta. Además se plantean las matrices de estructura unión correspondientes, permitiendo así la obtención de las ecuaciones de estado del sistema.

Posteriormente, se realiza el análisis de las propiedades de estabilidad, controlabilidad y observabilidad, utilizando herramientas del modelado clásico y modelado con Bond Graphs. También se hace uso de herramientas concernientes a la teoría de grafos mediante el uso de gráficas de Coates; esto para determinar de una manera práctica la estabilidad de un sistema de orden superior.

Queda de manifiesto que el sistema no pierde su controlabilidad u observabilidad al ser agregada la incertidumbre, sin embargo, surgen nuevas trayectorias causales que afectan el comportamiento del sistema.

Finalmente, este enfoque aplicable a sistemas lineales invariantes en el tiempo es ilustrado por dos ejemplos.





# Abstract

Considering uncertainties in model parameter values is a crucial point for studying robustness in modeling and control. This thesis proposes to construct in a systematic procedure two forms of the linear state equation usually found in the literature for studying the robustness problem in the case of structured uncertainties on parameters.

Firstly, it is shown the basis in which Bond Graph methodology is founded, describing the elements, procedures for modeling and specific considerations of this methodology.

It is developed how to model parametric uncertainties in a Bond Graph approach. The main contribution of this thesis is the modeling of storage elements with derivative causality uncertainties, as well as the effects produced by them.

Furthermore, it is proposed the corresponding junction structure matrices, thus the state equations of the system are obtained.

Subsequently, it is analyzed the stability, controllability and observability properties using classic modeling tools and typical tools of Bond Graph. Also, it is used tools concerning to the graph theory using Coates graphs; this, to determine in a practical manner the stability of high order systems.

It is clear that the system does not lose its controllability or observability when the uncertainties are added, however, the existence of new causal paths affect the behavior of the system.

Finally, this approach applicable to linear time-invariant systems is illustrated by two examples.



# Índice general

|                                                    |              |
|----------------------------------------------------|--------------|
| <b>Resumen</b>                                     | <b>vii</b>   |
| <b>Abstract</b>                                    | <b>ix</b>    |
| <b>Lista de publicaciones</b>                      | <b>xv</b>    |
| <b>Lista de figuras</b>                            | <b>xvii</b>  |
| <b>Lista de tablas</b>                             | <b>xxi</b>   |
| <b>Lista de símbolos</b>                           | <b>xxiii</b> |
| <b>Agradecimientos</b>                             | <b>xxv</b>   |
| <b>1 Introducción</b>                              | <b>1</b>     |
| 1.1 El estudio de sistemas . . . . .               | 1            |
| 1.2 Bond Graphs . . . . .                          | 3            |
| 1.3 Incertidumbre Paramétrica . . . . .            | 3            |
| 1.4 Estado del arte . . . . .                      | 5            |
| 1.5 Objetivo . . . . .                             | 6            |
| 1.6 Metodología . . . . .                          | 7            |
| 1.7 Aportaciones . . . . .                         | 7            |
| 1.8 Contenido . . . . .                            | 8            |
| <b>2 Modelado en Bond Graphs</b>                   | <b>9</b>     |
| 2.1 Introducción . . . . .                         | 9            |
| 2.2 Componentes básicos de un Bond Graph . . . . . | 10           |
| 2.2.1 Variables de potencia y de energía . . . . . | 10           |
| 2.2.2 Enlaces y flujo de potencia . . . . .        | 13           |
| 2.2.3 Bond activo . . . . .                        | 15           |
| 2.2.3.1 Detectores . . . . .                       | 16           |
| 2.2.4 Elementos básicos tipo puerto-1 . . . . .    | 16           |
| 2.2.4.1 Elemento $-R$ . . . . .                    | 16           |
| 2.2.4.2 Elemento $-C$ . . . . .                    | 18           |
| 2.2.4.3 Elemento $-I$ . . . . .                    | 19           |
| 2.2.4.4 Puertos-1 activos . . . . .                | 21           |

|          |                                                                              |           |
|----------|------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| 2.2.5    | Elementos básicos tipo puerto-2 . . . . .                                    | 22        |
| 2.2.5.1  | Transformador . . . . .                                                      | 22        |
| 2.2.5.2  | Girador . . . . .                                                            | 22        |
| 2.2.6    | Elementos básicos tipo puerto- $n$ . . . . .                                 | 24        |
| 2.2.6.1  | Unión de flujo, unión $-0$ ó unión de esfuerzo común . . . . .               | 24        |
| 2.2.6.2  | Unión de esfuerzo, unión $-1$ ó unión de esfuerzo común . . . . .            | 25        |
| 2.2.7    | Campos $R, C, I$ . . . . .                                                   | 26        |
| 2.3      | Modelado de sistemas en Bond Graphs . . . . .                                | 28        |
| 2.3.1    | Sistemas eléctricos . . . . .                                                | 28        |
| 2.3.2    | Sistemas mecánicos . . . . .                                                 | 30        |
| 2.3.3    | Sistemas hidráulicos . . . . .                                               | 33        |
| 2.4      | Causalidad . . . . .                                                         | 35        |
| 2.4.1    | Causalidad para puertos-1 . . . . .                                          | 36        |
| 2.4.2    | Causalidad para puertos-2 y puertos- $n$ . . . . .                           | 37        |
| 2.4.3    | Causalidad derivativa . . . . .                                              | 39        |
| 2.4.4    | Asignación de la causalidad a un diagrama de Bond Graph . . . . .            | 39        |
| 2.4.5    | Trayectorias causales . . . . .                                              | 42        |
| 2.5      | Estructuras de unión en sistemas multipuerto . . . . .                       | 43        |
| 2.5.1    | Vectores claves . . . . .                                                    | 44        |
| 2.5.2    | Relaciones de campo y ecuaciones de estado . . . . .                         | 45        |
| 2.5.3    | Obtención del modelo en espacio de estado desde Bond Graph . . . . .         | 46        |
| <b>3</b> | <b>Modelado de Incertidumbre Paramétrica con Bond Graphs</b>                 | <b>51</b> |
| 3.1      | Introducción . . . . .                                                       | 51        |
| 3.2      | Construcción del modelo en su forma canónica . . . . .                       | 53        |
| 3.2.1    | Incertidumbre como componente físico . . . . .                               | 53        |
| 3.2.1.1  | Elemento $-R$ . . . . .                                                      | 53        |
| 3.2.1.2  | Elemento $-C$ . . . . .                                                      | 54        |
| 3.2.1.3  | Elemento $-I$ . . . . .                                                      | 54        |
| 3.2.1.4  | Elementos puerto $-2$ . . . . .                                              | 55        |
| 3.2.2    | Determinación de las ecuaciones de estado . . . . .                          | 56        |
| 3.3      | Construcción del modelo de la estructura de interconexión estándar . . . . . | 60        |
| 3.3.1    | Modelado de los componentes . . . . .                                        | 61        |
| 3.3.1.1  | Elemento $-R$ . . . . .                                                      | 61        |
| 3.3.1.2  | Elemento $-C$ . . . . .                                                      | 62        |
| 3.3.1.3  | Elemento $-I$ . . . . .                                                      | 63        |
| 3.3.1.4  | Elementos puerto $-2$ . . . . .                                              | 64        |
| 3.3.2    | Determinación de las ecuaciones de estado . . . . .                          | 64        |
| 3.4      | Aplicación . . . . .                                                         | 70        |
| 3.4.1    | Transformador Eléctrico . . . . .                                            | 70        |
| 3.4.1.1  | Modelo en Bond Graph . . . . .                                               | 72        |
| 3.4.1.2  | Obtención del modelo en espacio de estado . . . . .                          | 73        |
| 3.4.1.3  | Modelo del transformador en la forma canónica . . . . .                      | 78        |
| 3.4.1.4  | Modelo del transformador en la forma de interconexión estándar . . . . .     | 85        |
| 3.4.2    | Generador Síncrono . . . . .                                                 | 95        |
| 3.4.2.1  | Modelo en Bond Graph . . . . .                                               | 98        |

|          |                                                                               |            |
|----------|-------------------------------------------------------------------------------|------------|
| 3.4.2.2  | Obtención del modelo en espacio de estado . . . . .                           | 100        |
| 3.4.2.3  | Modelo del generador síncrono en la forma canónica . . . . .                  | 107        |
| 3.4.2.4  | Modelo del generador síncrono en la forma de interconexión estándar           | 117        |
| <b>4</b> | <b>Implicaciones de la Incertidumbre Paramétrica en el Sistema</b>            | <b>127</b> |
| 4.1      | Introducción . . . . .                                                        | 127        |
| 4.2      | Estabilidad . . . . .                                                         | 128        |
| 4.2.1    | Criterio de Routh-Hurwitz . . . . .                                           | 128        |
| 4.3      | Análisis de estabilidad desde un enfoque de Bond Graph . . . . .              | 132        |
| 4.3.1    | Obtención del polinomio característico mediante trayectorias causales . . . . | 132        |
| 4.3.2    | Obtención de las condiciones de estabilidad . . . . .                         | 134        |
| 4.3.3    | Bond Graph en causalidad derivativa . . . . .                                 | 136        |
| 4.3.4    | Modelo en Bond Graph del estado estacionario . . . . .                        | 137        |
| 4.4      | Controlabilidad . . . . .                                                     | 139        |
| 4.5      | Observabilidad . . . . .                                                      | 140        |
| 4.6      | Controlabilidad y Observabilidad desde un enfoque de Bond Graph . . . . .     | 141        |
| 4.7      | Aplicación . . . . .                                                          | 144        |
| 4.7.1    | Transformador Eléctrico . . . . .                                             | 144        |
| 4.7.1.1  | Análisis de estabilidad en Bond Graph . . . . .                               | 144        |
| 4.7.1.2  | Estado estable del sistema . . . . .                                          | 149        |
| 4.7.1.3  | Análisis de la controlabilidad para el transformador eléctrico . . . .        | 159        |
| 4.7.1.4  | Análisis de la observabilidad para el transformador eléctrico . . . .         | 163        |
| 4.7.2    | Generador Síncrono . . . . .                                                  | 169        |
| 4.7.2.1  | Análisis de estabilidad en Bond Graph . . . . .                               | 169        |
| 4.7.2.2  | Estado estacionario del sistema . . . . .                                     | 173        |
| 4.7.2.3  | Análisis de la controlabilidad para el generador síncrono . . . . .           | 181        |
| 4.7.2.4  | Análisis de la observabilidad para el generador síncrono . . . . .            | 186        |
| <b>5</b> | <b>Conclusiones</b>                                                           | <b>191</b> |
|          | <b>Bibliografía</b>                                                           | <b>193</b> |
| <b>A</b> | <b>Transformación de Park</b>                                                 | <b>197</b> |
| <b>B</b> | <b>Linealización por Bond Graph</b>                                           | <b>199</b> |
| <b>C</b> | <b>Publicaciones</b>                                                          | <b>203</b> |



# Lista de publicaciones

- Núñez-H.Israel, Gonzalez-A.Gilberto, *Structured Uncertainties of a System with Linearly Dependent State Variables Using Bond*, 2010 International Conference on Modeling Simulation and Control, ICMSC 2010, Cairo, Egypt, November 2010, ISBN: 978-1-4244-8824-7





# Lista de figuras

|      |                                                                                          |    |
|------|------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 2.1  | Colección de subsistemas. . . . .                                                        | 11 |
| 2.2  | Tetraedro de estados. . . . .                                                            | 13 |
| 2.3  | Enlace o bond. . . . .                                                                   | 14 |
| 2.4  | Sistema en Bond Graph. . . . .                                                           | 15 |
| 2.5  | Enlace activo o bond activo. . . . .                                                     | 15 |
| 2.6  | Uso de un bond activo. . . . .                                                           | 16 |
| 2.7  | Detectores de esfuerzo y flujo. . . . .                                                  | 16 |
| 2.8  | Elemento $-R$ . . . . .                                                                  | 17 |
| 2.9  | Elemento $-C$ . . . . .                                                                  | 18 |
| 2.10 | Energía almacenada en el puerto-1 capacitor. . . . .                                     | 19 |
| 2.11 | Elemento $-I$ . . . . .                                                                  | 19 |
| 2.12 | Energía almacenada en el puerto-1 inercia. . . . .                                       | 20 |
| 2.13 | Tetraedro de estados con su relación de elementos tipo puerto-1 correspondiente. . . . . | 20 |
| 2.14 | Elementos puerto-1 activos. . . . .                                                      | 21 |
| 2.15 | Elementos puerto-1 activos modulados. . . . .                                            | 21 |
| 2.16 | Transformador. . . . .                                                                   | 23 |
| 2.17 | Girador. . . . .                                                                         | 23 |
| 2.18 | Transformador y girador modulados. . . . .                                               | 24 |
| 2.19 | Unión $-0$ . . . . .                                                                     | 24 |
| 2.20 | Unión $-1$ . . . . .                                                                     | 25 |
| 2.21 | Puertos- $n$ básicos en diferentes dominios. . . . .                                     | 26 |
| 2.22 | Campos. . . . .                                                                          | 27 |
| 2.23 | Ejemplo de un elemento multipuerto y su representación en Bond Graph. . . . .            | 27 |
| 2.24 | Diagrama esquemático de un sistema eléctrico. . . . .                                    | 29 |
| 2.25 | Primer paso para obtener el Bond Graph de un circuito eléctrico. . . . .                 | 29 |
| 2.26 | Segundo paso para obtener el Bond Graph de un circuito eléctrico. . . . .                | 29 |
| 2.27 | Tercer y Cuarto paso para obtener el Bond Graph de un circuito eléctrico. . . . .        | 30 |
| 2.28 | Bond Graph de un circuito eléctrico. . . . .                                             | 30 |
| 2.29 | Diagrama esquemático de un sistema mecánico. . . . .                                     | 31 |
| 2.30 | Primer paso para obtener el Bond Graph de un sistema mecánico. . . . .                   | 31 |
| 2.31 | Segundo y tercer paso para obtener el Bond Graph de un sistema mecánico. . . . .         | 32 |
| 2.32 | Cuarto, Quinto y Sexto paso para obtener el Bond Graph de un sistema mecánico. . . . .   | 32 |
| 2.33 | Diagrama en Bond Graph de un sistema mecánico. . . . .                                   | 32 |
| 2.34 | Diagrama esquemático de un sistema hidráulico. . . . .                                   | 33 |

|      |                                                                                                        |    |
|------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 2.35 | Primer y segundo paso para obtener el Bond Graph de un sistema hidráulico. . . . .                     | 34 |
| 2.36 | Tercer y cuarto paso para obtener el Bond Graph de un sistema hidráulico. . . . .                      | 34 |
| 2.37 | Diagrama en Bond Graph de un sistema hidráulico. . . . .                                               | 34 |
| 2.38 | Significado del trazo causal. . . . .                                                                  | 35 |
| 2.39 | Relaciones entre el trazo causal y la semiflecha. . . . .                                              | 35 |
| 2.40 | Esquema mecánico con una causalidad derivativa. . . . .                                                | 39 |
| 2.41 | Primer paso de la asignación de causalidad. . . . .                                                    | 40 |
| 2.42 | Segundo paso para la asignación de causalidad. . . . .                                                 | 40 |
| 2.43 | Implicaciones para asignar causalidad. . . . .                                                         | 41 |
| 2.44 | Asignación de causalidad para un sistema mecánico. . . . .                                             | 41 |
| 2.45 | Asignación de causalidad para un sistema hidráulico. . . . .                                           | 42 |
| 2.46 | Ejemplo de una trayectoria causal simple . . . . .                                                     | 43 |
| 2.47 | Trayectoria causal mezclada. . . . .                                                                   | 43 |
| 2.48 | Diagrama de bloques de la estructura unión de un Bond Graph. . . . .                                   | 44 |
| 2.49 | Modelo con los enlaces numerados. . . . .                                                              | 47 |
|      |                                                                                                        |    |
| 3.1  | Modelo de interconexión estándar. . . . .                                                              | 52 |
| 3.2  | Incertidumbre en el elemento $-R$ con causalidad asignada. . . . .                                     | 53 |
| 3.3  | Incertidumbre en el elemento $-C$ con causalidad asignada. . . . .                                     | 54 |
| 3.4  | Incertidumbre en el elemento $-I$ con causalidad asignada. . . . .                                     | 54 |
| 3.5  | Incertidumbre en el Transformador con sus dos posibles causalidades. . . . .                           | 55 |
| 3.6  | Incertidumbre en el Girador con sus dos posibles causalidades. . . . .                                 | 55 |
| 3.7  | Diagrama de bloques de la estructura unión para el modelo en la forma canónica. . .                    | 56 |
| 3.8  | Elemento $-R$ con incertidumbre multiplicativa. . . . .                                                | 62 |
| 3.9  | Elemento $-C$ con incertidumbre multiplicativa. . . . .                                                | 63 |
| 3.10 | Elemento $-I$ con incertidumbre multiplicativa. . . . .                                                | 64 |
| 3.11 | Elemento $-TF-$ con incertidumbre multiplicativa y sus dos causalidades correspon-<br>dientes. . . . . | 65 |
| 3.12 | Elemento $-GY-$ con incertidumbre multiplicativa y sus dos causalidades correspon-<br>dientes. . . . . | 65 |
| 3.13 | Diagrama de bloques de la estructura unión para el modelo de interconexión estándar. .                 | 66 |
| 3.14 | Trayectoria causales desde una fuente hacia elementos con causalidad derivativa. . .                   | 67 |
| 3.15 | Transformador de tipo núcleo en el cual un circuito magnético conecta a dos devanados. .               | 71 |
| 3.16 | Diagrama esquemático de un transformador eléctrico monofásico. . . . .                                 | 72 |
| 3.17 | Procedimiento 2.1 aplicado al transformador eléctrico. . . . .                                         | 73 |
| 3.18 | Asignación de causalidades requeridas, preferentes y arbitrarias. . . . .                              | 73 |
| 3.19 | Transformador eléctrico modelado en Bond Graph. . . . .                                                | 73 |
| 3.20 | Diagrama del transformador eléctrico en 20-sim <sup>®</sup> . . . . .                                  | 76 |
| 3.21 | Respuesta en el tiempo de las corrientes en los devanados y la inductancia mutua. . .                  | 77 |
| 3.22 | Respuesta al escalón unitario en los devanados del transformador. . . . .                              | 77 |
| 3.23 | UBG en la forma canónica del transformador eléctrico. . . . .                                          | 78 |
| 3.24 | Diagrama UBG en la forma canónica del transformador eléctrico en 20-sim <sup>®</sup> . . . . .         | 84 |
| 3.25 | Respuesta en el tiempo de las corrientes en el UBG. . . . .                                            | 84 |
| 3.26 | Respuesta al escalón unitario del UBG en el transformador. . . . .                                     | 85 |
| 3.27 | Comparación de las respuestas al escalón unitario del BGI y UBG en el transformador. .                 | 86 |
| 3.28 | UBG en la forma de interconexión estándar del transformador eléctrico. . . . .                         | 86 |

|      |                                                                                                  |     |
|------|--------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 3.29 | UBG en la forma de interconexion estandar del transformador eléctrico en 20-sim <sup>®</sup> .   | 92  |
| 3.30 | Respuesta en el tiempo de las corrientes en el UBG.                                              | 93  |
| 3.31 | Respuesta del UBG en la forma de interconexión estándar, salidas reales                          | 93  |
| 3.32 | Respuesta del UBG en la forma de interconexión estándar, salidas virtuales.                      | 94  |
| 3.33 | Comparacion del BGI con el UBG en la forma de interconexión estándar.                            | 94  |
| 3.34 | Esquema de una máquina síncrona.                                                                 | 96  |
| 3.35 | Circuito del estator y rotor de la máquina síncrona.                                             | 97  |
| 3.36 | Máquina síncrona con devanados de amortiguamiento.                                               | 98  |
| 3.37 | Modelo en Bond Graph de la máquina síncrona sin devanados $D$ y $Q$ .                            | 100 |
| 3.38 | Linealización de la máquina síncrona en Bond Graph.                                              | 101 |
| 3.39 | Linealización del generador síncrono en 20-sim <sup>®</sup>                                      | 105 |
| 3.40 | Comparacion de las salidas no lineales y linealizadas del generador síncrono.                    | 106 |
| 3.41 | Respuesta al escalón unitario del generador síncrono.                                            | 106 |
| 3.42 | UBG en la forma canónica del generador síncrono.                                                 | 107 |
| 3.43 | Diagrama UBG en la forma canónica del generador síncrono en 20-sim <sup>®</sup>                  | 115 |
| 3.44 | Respuesta en el tiempo del UBG.                                                                  | 116 |
| 3.45 | Respuesta al escalón unitario del UBG.                                                           | 116 |
| 3.46 | Comparacion de las respuestas al escalón unitario del BGI y UBG.                                 | 117 |
| 3.47 | UBG en la forma de interconexión estándar del generador síncrono.                                | 118 |
| 3.48 | UBG en la forma de interconexión estándar del generador síncrono en 20-sim <sup>®</sup>          | 124 |
| 3.49 | Respuesta en el tiempo de las salidas del sistema en su forma de interconexión estándar.         | 124 |
| 3.50 | Respuesta al escalón unitario de la parte nominal del UBG en la forma de interconexión estándar. | 125 |
| 4.1  | Lazo propio de un nodo.                                                                          | 134 |
| 4.2  | Ramas a la derecha.                                                                              | 134 |
| 4.3  | Ramas a la izquierda.                                                                            | 135 |
| 4.4  | Diagrama de bloques de un BGD.                                                                   | 136 |
| 4.5  | Lazos Mason del transformador eléctrico.                                                         | 145 |
| 4.6  | Grafo de Coates de estabilidad para el transformador eléctrico.                                  | 145 |
| 4.7  | Subgrafo seccional.                                                                              | 146 |
| 4.8  | Lazos de Mason en el UBG.                                                                        | 147 |
| 4.9  | Lazos Mason en el UBG de la forma de interconexión estándar.                                     | 148 |
| 4.10 | BGD del transformador eléctrico.                                                                 | 150 |
| 4.11 | Estado estable de las variables de salida en el transformador.                                   | 152 |
| 4.12 | BGD con incertidumbres.                                                                          | 153 |
| 4.13 | Estado estable de las salidas del UBG.                                                           | 155 |
| 4.14 | BGD del modelo en la forma de interconexion estandar.                                            | 156 |
| 4.15 | Trayectorias causales de las fuentes a los elementos.                                            | 159 |
| 4.16 | Trayectorias causales de las fuentes a los elementos en el UBG.                                  | 160 |
| 4.17 | Trayectorias causales de las fuentes a los elementos en el modelo de interconexion estandar.     | 161 |
| 4.18 | Comportamiento de los estados en el BGI bajo la entrada de control.                              | 162 |
| 4.19 | Comportamiento de los estados en el UBG bajo la entrada de control.                              | 163 |
| 4.20 | Trayectorias causales de los elementos a los detectores.                                         | 163 |
| 4.21 | Trayectorias causales de los elementos almacenadores a los detectores en el UBG.                 | 164 |

|      |                                                                                                        |     |
|------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 4.22 | Trayectorias causales de los elementos en el modelo de interconexion estandar. . . .                   | 165 |
| 4.23 | Respuesta de los estados. . . . .                                                                      | 167 |
| 4.24 | Respuesta de los estados. . . . .                                                                      | 168 |
| 4.25 | Grafo de Coates de estabilidad para el generador síncrono. . . . .                                     | 170 |
| 4.26 | Subgrafo seccional de cuatro nodos. . . . .                                                            | 170 |
| 4.27 | Subgrafo seccional de tres nodos. . . . .                                                              | 170 |
| 4.28 | Subgrafo seccional de dos nodos. . . . .                                                               | 171 |
| 4.29 | Subgrafo seccional de un nodo. . . . .                                                                 | 171 |
| 4.30 | BGD del generador síncrono. . . . .                                                                    | 174 |
| 4.31 | Estado estable de las salidas del generador síncrono. . . . .                                          | 176 |
| 4.32 | BGD del generadro síncrono con incertidumbres. . . . .                                                 | 177 |
| 4.33 | Estado estable de las salidas del UBG en el generador síncrono. . . . .                                | 178 |
| 4.34 | UBG del modelo en la forma de interconexión estándar del generador síncrono. . . .                     | 179 |
| 4.35 | Estado estable de las salidas del generador síncrono en su forma de interconexión<br>estándar. . . . . | 181 |
| 4.36 | Trayectorias causales desde los elementos activos a cada uno de los elementos dinámicos.               | 182 |
| 4.37 | Trayectorias causales del generador síncrono modelado en la forma canónica. . . .                      | 183 |
| 4.38 | Trayectorias causales en el UBG de interconexión estandar del generador síncrono. .                    | 185 |
| 4.39 | Trayectorias causales de los elementos dinámicos a los detectores. . . . .                             | 187 |
| 4.40 | Trayectorias causales de los elementos dinámicos a los detectores en el UBG. . . .                     | 188 |
| 4.41 | Trayectorias causales en el UBG de la forma de interconexión estándar. . . . .                         | 189 |
| A.1  | Transformación de Park en el generador síncrono. . . . .                                               | 198 |
| B.1  | Estructura general de un sistema linealizado en Bond Graph. . . . .                                    | 199 |

# Lista de tablas

|     |                                                                                               |     |
|-----|-----------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 2.1 | Variables de potencia de algunos dominios físicos. . . . .                                    | 14  |
| 2.2 | Variables de energía de algunos dominios físicos. . . . .                                     | 14  |
| 2.3 | Interpretaciones de uniones $-0$ y $-1$ en algunos dominios físicos . . . . .                 | 26  |
| 2.4 | Reglas de equivalencia para la simplificación de bond graphs . . . . .                        | 28  |
| 2.5 | Formas causales para puertos-1 básicos. . . . .                                               | 36  |
| 2.6 | Formas causales para puertos-2 y puertos- $n$ . . . . .                                       | 38  |
| 2.7 | Tabla guía para completar los vectores generados por los elementos de almacenamiento. . . . . | 47  |
| 4.1 | Tabla de Routh . . . . .                                                                      | 129 |
| 4.2 | Transmitancias para elementos de puerto-1 . . . . .                                           | 133 |
| 4.3 | Grafos de Estabilidad de Coates . . . . .                                                     | 135 |



# Lista de símbolos

|              |                                                                             |
|--------------|-----------------------------------------------------------------------------|
| $e(t)$       | Variable de esfuerzo                                                        |
| $f(t)$       | Variable de flujo                                                           |
| $p(t)$       | Variable de momento                                                         |
| $q(t)$       | Variable de desplazamiento                                                  |
| $-R$         | Elemento resistencia                                                        |
| $-C$         | Elemento capacitor                                                          |
| $-I$         | Elemento inercia                                                            |
| $-TP-$       | Representación general de un elemento tipo puerto-2                         |
| $-TF-$       | Elemento transformador                                                      |
| $-GY-$       | Elemento girador                                                            |
| $-0$         | Unión cero                                                                  |
| $-1$         | Unión uno                                                                   |
| $S_e-$       | Fuente de esfuerzo                                                          |
| $S_f-$       | Fuente de flujo                                                             |
| $u(t)$       | Vector de entrada del sistema                                               |
| $y(t)$       | Vector de salida del sistema                                                |
| $x(t)$       | Vector de estados asociado a elementos en causalidad integral               |
| $z(t)$       | Vector complementario asociado a elementos en causalidad integral           |
| $x_d(t)$     | Vector de estados asociado a elementos en causalidad derivativa             |
| $z_d(t)$     | Vector complementario asociado a elementos en causalidad derivativa         |
| $A, B, C, D$ | Matrices de estado                                                          |
| $x_n(t)$     | Vector de estados asociado a elementos nominales en causalidad integral     |
| $z_n(t)$     | Vector complementario asociado a elementos nominales en causalidad integral |
| $x_{nd}(t)$  | Vector de estados asociado a elementos nominales en causalidad derivativa   |

|                                          |                                                                                          |
|------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------|
| $z_{nd}(t)$                              | Vector complementario asociado a elementos nominales en causalidad derivativa            |
| $x_{\Delta}(t)$                          | Vector de estados asociado a la incertidumbre en elementos con causalidad integral       |
| $z_{\Delta}(t)$                          | Vector complementario asociado a la incertidumbre en elementos con causalidad integral   |
| $x_{\Delta d}(t)$                        | Vector de estados asociado a la incertidumbre en elementos con causalidad derivativa     |
| $z_{\Delta d}(t)$                        | Vector complementario asociado a la incertidumbre en elementos con causalidad derivativa |
| $\theta_n$                               | Valor nominal del parámetro                                                              |
| $\Delta\theta$                           | Incertidumbre del parámetro                                                              |
| $A_n, B_n, C_n, D_n$                     | Matrices de estado del sistema nominal                                                   |
| $\Delta A, \Delta B, \Delta C, \Delta D$ | Matrices de estado asociadas a la incertidumbre en el sistema                            |
| $\delta_{\theta}$                        | Error relativo del parámetro                                                             |
| $\Delta$                                 | Matriz de incertidumbre para la forma de interconexión estándar                          |
| $diag\{a_1, a_2, \dots, a_p\}$           | Denota una matriz diagonal $p \times p$ cuyos elementos son $a_i, i = 1, \dots, p$ .     |
| $I_{n \times n}$                         | Denota una matriz identidad de $n \times n$ .                                            |
| $0_{n \times m}$                         | Denota una matriz de dimensión $n \times m$ cuyos elementos son todos cero.              |
| $A^T$                                    | Denota la matriz transpuesta de $A$ .                                                    |
| $A^{-1}$                                 | Denota la matriz inversa de $A$ .                                                        |



# Agradecimientos

A Dios, por permitirme llegar hasta este momento tan importante de mi vida y lograr otra meta más.

A mi madre, por su cariño, comprensión y apoyo sin condicion ni medida. Gracias por ser mi soporte y una guía en todos los aspectos de mi vida. Sin ella no estaría en el momento en el que me encuentro ahora.

A mi director de tesis, el Dr. Gilberto González Avalos, por brindarme la oportunidad de recurrir a su capacidad y experiencia científica en un marco de confianza, afecto y amistad, fundamentales para la terminación de este trabajo.

A la Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, a la División de Estudios de Posgrado de la Facultad de Ingeniería Eléctrica y al CONACYT por haber confiado en un servidor y haber apoyado mis estudios de maestría.

A todos mis maestros por su capacidad académica y amistad, sin su ayuda y conocimientos no habría sido posible la terminación de esta etapa.

Y a todas aquellas personas que de una u otra forma, colaboraron o participaron en mi formación académica.



# Capítulo 1

## Introducción

### 1.1 El estudio de sistemas

La palabra “sistema” es usada tan comúnmente para describir una variedad de conceptos que es difícil darle una definición significativa, puesto que los sistemas no necesariamente son físicos y este concepto se puede aplicar tanto a fenómenos abstractos como a dinámicos.

Un animal, por ejemplo, puede ser considerado como un sistema que reacciona a su entorno y que intercambia energía e información con el mismo, este es el caso de un límite físico o espacial. Un sistema de control de tráfico aéreo, por otro lado, es un sistema complejo desarrollado por el hombre, el entorno no sólo es físico sino que también involucra decisiones humanas.

Un sistema puede considerarse como una combinación de subsistemas que actúan en forma conjunta y que tienen como objetivo realizar una determinada tarea. En el ejemplo del animal, se pueden reconocer sus órganos, los cuales cumplen una función específica, además de que pueden transmitir información. En el sistema de control de tráfico aéreo, éste se compone de hombres y máquinas que tienen una comunicación entre ellos. El elemento que une a estos dos sistemas es la habilidad para decidir que pertenece al sistema y que representa una perturbación externa [1].

El estudio y diseño de un sistema físico puede ser realizado por métodos empíricos. Simplemente con aplicar varias señales al sistema físico y medir sus respuestas, si el desempeño no es satisfactorio, se ajusta alguno de sus parámetros o se conecta algún compensador para mejorar su desempeño. Este diseño es guiado por experiencias pasadas o a prueba y error, este diseño ha sido indudablemente exitoso en muchos sistemas físicos.

El método empírico puede convertirse insatisfactorio si las especificaciones sobre el desempeño son muy precisas o rigurosas, además puede ser inconveniente si el sistema físico es complicado, costoso y sobretodo peligroso. En este caso, los métodos analíticos toman gran relevancia. Un estudio analítico de los sistemas físicos consiste de cuatro partes: modelado, desarrollo de la descripción matemática, análisis y diseño [2].

Un sistema físico puede tener diferentes modelos dependiendo de las necesidades y de los diferentes rangos de operación. Por ejemplo, un amplificador electrónico puede ser modelado de manera diferente para altas y bajas frecuencias. Un automóvil puede ser modelado como una partícula en el estudio de su trayectoria; sin embargo, también pueden ser modelados de manera independiente sus componentes internos, como las suspensiones, frenos, llantas, etc.

Una vez que el modelo del sistema es encontrado, el siguiente paso en el desarrollo, es la aplicación de leyes físicas, es decir, las ecuaciones matemáticas que describen el sistema. Por ejemplo, se aplican las leyes de voltajes y de corrientes de Kirchhoff para sistemas eléctricos y las leyes de Newton para sistemas mecánicos. Las ecuaciones que describen al sistema pueden tener diferentes formas; pueden ser ecuaciones lineales, no lineales, integrales, diferenciales, etc. Dependiendo de las necesidades, se puede seleccionar una forma o la otra para describir el mismo sistema. En conclusión, un sistema puede tener diferentes descripciones matemáticas, así como puede tener diferentes modelos.

Ya que la descripción matemática del sistema es obtenida, el siguiente paso en el estudio, involucra el análisis, cuantitativo y/o cualitativo. En el análisis cuantitativo se está interesado en la respuestas exactas del sistema debidas a una entrada conocida. Esta parte del análisis puede ser llevada a cabo usando una computadora analógica o digital. En el análisis cualitativo se está interesado en las propiedades generales del sistema, tales como la estabilidad, controlabilidad y observabilidad. Esta parte del análisis es sumamente importante, porque la elección correcta de la técnica de diseño depende de este estudio.

Si la respuesta de un sistema no es satisfactoria, el sistema tiene que ser mejorado u optimizado. En algunos casos, las respuestas de los sistemas pueden ser mejoradas ajustando ciertos parámetros de ellos; en otros casos, algunos compensadores deben de ser introducidos.

Así, si el modelo es propiamente seleccionado, el desempeño del sistema físico debería ser mejorado con la introducción de los ajustes y compensadores necesarios.

## 1.2 Bond Graphs

Puesto que los modelos son una simplificación de la realidad, su construcción es una gran labor. Es importante reconocer que ningún sistema puede ser modelado exactamente y que un diseñador competente necesita tener un procedimiento para construir una variedad de modelos con complejidades diferentes y así poder encontrar el modelo más simple capaz de responder las preguntas sobre el sistema a estudiar.

Para modelar un sistema, en ocasiones es necesario fragmentar el sistema en partes similares que puedan ser modeladas y entonces obtener el modelo final del sistema ensamblándolas. Las principales partes de un sistema son llamadas subsistemas, y estos a su vez están conformados por elementos. Básicamente un subsistema puede ser modelado como un sistema en sí y puede ser separado en elementos que tienen una interacción. En cambio, un elemento es modelado como una entidad que no puede ser descompuesta en partes más simples.

Existe la ventaja de que los modelos pueden ser contruidos usando una notación generalizada para todo tipo de sistemas físicos. Es extraordinario el hecho de que modelos basados aparentemente en diferentes ramas de la ingeniería, puedan ser expresados usando la notación de Bond Graphs, que está basada en el flujo de energía e información [3]. Esto permite estudiar la estructura del modelo de un sistema, la naturaleza de las partes de el modelo y la forma en que las partes interactúan pueden ser más evidentes en una forma gráfica. En este sentido, las analogías entre varios tipos de sistemas son evidentes y las experiencias en un campo pueden ser extendidas a otros campos.

Usando el lenguaje de Bond Graphs, pueden construirse modelos eléctricos, magnéticos, mecánicos, hidráulicos, térmicos y otros sistemas, usando sólo un pequeño grupo de elementos ideales. La enorme ventaja de este lenguaje es que con algunas técnicas ya estandarizadas se permite convertir los modelos en ecuaciones diferenciales.

## 1.3 Incertidumbre Paramétrica

Un hecho inevitable en el diseño de sistemas de control es que el modelo del sistema diferirá en su comportamiento con respecto del sistema real. Esta diferencia de comportamiento es llamada incertidumbre [4].

Existen diferentes fuentes de incertidumbre [5]:

- No linealidades en el sistema físico: La mayoría de los sistemas físicos son no lineales, por lo que si el modelo a ser usado fue linealizado, el comportamiento del modelo lineal será limitado a la vecindad escogida para la linealización y se deteriorará conforme se aleje de este punto.
- Condiciones diferentes de operación: En algunas ocasiones, el sistema físico puede ser descrito con precisión por el modelo lineal, pero las diferentes condiciones de operación pueden generar cambios en los parámetros del modelo lineal.
- Modelo de parámetros inciertos y dinámicas no modelables: Incluso si el sistema físico puede ser representado por un modelo lineal, los verdaderos parámetros físicos nunca son conocidos exactamente y las dinámicas en altas frecuencias usualmente son descuidadas en el modelo matemático.

Los procesos con incertidumbre siempre están presentes, resultando así modelos imperfectos para el diseño de sistemas de control. Por lo que si se desea diseñar sistemas de control robusto se debe saber cómo estos errores en el modelo afectarán adversamente la estabilidad y el comportamiento del sistema.

Para los sistemas lineales invariantes en el tiempo existen dos tipos de incertidumbre, incertidumbre no-paramétrica e incertidumbre paramétrica.

La incertidumbre no-paramétrica puede ser descrita por perturbaciones normalmente acotadas y tiene dos formas de describir dinámicas no modelables, estructurada y no-estructurada. La estructurada representa los efectos de dinámicas no modeladas de altas frecuencias, no linealidades y los errores esperados por la linealización, errores de truncación, etc.. La no-estructurada en cambio, no tiene sus orígenes en elementos específicos del proceso, es decir, es aleatoria.

Por otro lado, la incertidumbre paramétrica representa una falta del conocimiento de los parámetros del sistema que puede ser provocado por errores de identificación, cambios en las condiciones de operación, desgaste, etc. Este tipo de incertidumbre es altamente estructurada ya que la fuente de la incertidumbre es identificada con variaciones en los parámetros del modelo, sin embargo no es posible determinar cuánto va a variar dicho parámetro.

En los últimos años, los esfuerzos por incorporar la incertidumbre paramétrica dentro de las especificaciones de la robustez han sido realizados por Doyle en [6, 7].

## 1.4 Estado del arte

En trabajos previos, Borutzky y Granda [8, 9] introdujeron un Bond Graph llamado *Bond Graph Incremental* (IBG) con el objetivo de determinar sensibilidades no normalizadas en el dominio de la frecuencia. Un IBG es construido de una manera sistemática, desde un Bond Graph original se reemplazan los elementos por su correspondiente modelo incremental. El IBG representa la relación entre los incrementos  $\Delta e(t)$  o  $\Delta f(t)$  de las variables de potencia reales  $e(t)$  y  $f(t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ ,  $t \geq 0$ .

Posteriormente, el IBG inicialmente introducido para la determinación de la sensibilidad fue también apropiado como un punto de partida para la derivación de las ecuaciones de estado para el estudio de la robustez [10].

Al mismo tiempo, Kam y Dauphin-Tanguy en [11, 12, 13] muestran como *la forma canónica* de las ecuaciones de estado con incertidumbre paramétrica y *la forma de interconexión estándar*, ambas usadas en el estudio de la robustez, pueden ser derivadas de un así llamado *Bond Graph de Incertidumbre* (UBG) que es, un Bond Graph con las variables de potencia  $e(t)$  y  $f(t)$  perturbadas, en el cual los elementos han sido divididos en una parte nominal, que como su nombre lo indica, contiene los valores nominales del parámetro,  $\theta_n$ ; y otra de incertidumbre, que contiene la variación del parámetro,  $\Delta\theta$ .

En [14] se determina que el enfoque del IBG es equivalente al enfoque del UBG, además de que éste último también puede proveer la matriz de sensibilidad.

Finalmente, en [15] se consolida el uso del UBG para el estudio de la incertidumbre paramétrica presente en un sistema, así como la derivación de las ecuaciones de estado usadas para el estudio de la robustez.

En el UBG un elemento en el Bond Graph inicial es remplazado por un elemento del mismo tipo con un parámetro nominal y un elemento adicional que tiene la función de incertidumbre y ambos están ligados por una unión. El tipo de elemento agregado depende si se trata de la forma canónica o de la forma de interconexión estándar, es decir, variaciones paramétricas aditivas y multiplicativas, respectivamente.

De esta manera, la presente tesis se encuentra ubicada en el estudio posterior de Kam y Dauphin-Tanguy. Se pretende hacer una aportación a la teoría de Bond Graph, incrementando el conocimiento establecido en el modelado de sistemas con incertidumbre paramétrica, mediante la ampliación de los elementos disponibles modelados en presencia de incertidumbre. Tal es el caso

de los elementos almacenadores en causalidad derivativa; así mismo obteniendo también el modelo matemático respectivo.

## 1.5 Objetivo

En el desarrollo de modelos para sistemas dinámicos se debe de ser consciente de las deficiencias debidas a la incertidumbre. Estas pueden ser causadas por perturbaciones externas y de manera azarosa o tal vez debido a la mala identificación de parámetros, o a los valores de tolerancia en el proceso de manufactura del sistema, etc.

El objetivo del análisis de un sistema con respecto a la robustez es asegurar la estabilidad, así como el comportamiento requerido para el sistema dentro de una tolerancia aceptable en presencia de perturbaciones azarosas o variaciones paramétricas.

El objetivo de esta tesis es complementar los estudios hechos sobre el modelado de sistemas con incertidumbre paramétrica en la metodología de Bond Graph y ampliar el conocimiento en este campo. En la literatura descrita en la sección anterior siempre se han modelado sistemas con elementos linealmente independientes, razón por la cual se plantearán los modelos correspondientes a los elementos linealmente dependientes y así modelar un sistema con ambos tipos de elementos.

La idea de incluir elementos dependientes en un sistema es fomentada por el hecho de que estos se encuentran presentes en muchos de los sistemas físicos. Puesto que la determinación de los parámetros dependientes es aún más difícil de obtener, se hace manifiesta la necesidad de modelar estos elementos y considerar sus posibles variaciones.

A su vez, se pretende obtener las ecuaciones de estado para sistemas con incertidumbre por medio del uso de la matriz de estructura unión propia de la teoría de Bond Graph, dejando así un punto de partida para la aplicación de un control robusto.

Finalmente, se tiene como objetivo encontrar las implicaciones producidas por la incertidumbre, razón por la cual se analizan las propiedades cualitativas y cuantitativas al sistema modelado en Bond Graph, de esta manera determinar si dichas propiedades cambian.



## 1.6 Metodología

Para llevar a cabo este objetivo se procederá a estudiar la manera en la cual los elementos del sistema son modelados en Bond Graph para las dos formas de ecuaciones de estados usadas en el estudio de la robustez, forma canónica y forma de interconexión estándar.

Con la experiencia adquirida en el paso anterior, se plantearán los modelos para los elementos dinámicos que son linealmente dependientes.

Una vez que se ha obtenido el modelo de los elementos que conforman al sistema, se procede a plantear una estructura unión para el modelo en Bond Graph, y de esta forma obtener las ecuaciones de estado correspondientes.

El análisis de las propiedades del sistema es llevado a cabo mediante el uso de herramientas pertenecientes a la teoría de Bond Graph, así como las propias del control clásico.

## 1.7 Aportaciones

En esta sección se describen brevemente las aportaciones hechas por la presente tesis en la teoría de Bond Graph:

- Se obtiene el modelo de los elementos de almacenamiento con incertidumbre cuando estos se encuentran con una causalidad derivativa, es decir, que son linealmente dependientes a otros elementos del sistema.
- Se plantean las dos matrices de estructura unión correspondientes para las dos formas de modelado de incertidumbre comúnmente encontradas en la literatura. La ventaja de estas dos matrices reside en considerar la existencia de elementos dependientes y su posible incertidumbre.
- Se obtienen las ecuaciones que modelan al sistema, tomándose en cuenta algunas de las peculiaridades que pueden existir según las propiedades del sistema.
- Se ilustra que el estudio del estado estable desde el punto de vista de Bond Graph, es una herramienta útil para el análisis sistemas con incertidumbre.
- La aplicación del concepto de trayectorias causales, usado en Bond Graph para determinar

la controlabilidad y observabilidad del sistema, es aplicado por primera vez al estudio del modelo con incertidumbre. Teniéndose una implementación exitosa.

- Se determina que las propiedades de observabilidad y controlabilidad no se ven alteradas en cuanto a su existencia, sin embargo, tienen variaciones que hacen necesario el uso del control robusto.

## 1.8 Contenido

La presente tesis se encuentra organizada de la siguiente manera:

El Capítulo 2 contiene la información referente a los elementos que forman parte de la metodología de Bond Graph y las herramientas necesarias para la construcción de sistemas, así como la definición de los conceptos propios de ésta metodología, además se establece la manera en la cual se puede obtener el modelo matemático del sistema a partir del modelo en Bond Graph.

En el Capítulo 3 se da una breve introducción acerca de la incertidumbre paramétrica, así como las dos formas de modelado comúnmente usadas en la literatura. Posteriormente se define la manera de modelar los sistemas con Bond Graphs en presencia de incertidumbre y la obtención de su modelo matemático. Finalmente se plantean dos ejemplos, los cuales se modelan en Bond Graph con las herramientas dadas en el Capítulo 2 y se hace su respectivo estudio con la información dada a lo largo de este capítulo.

El Capítulo 4 presenta las definiciones de algunas de las propiedades más importantes en el estudio de sistemas, se plantea la metodología en las cuales éstas son estudiadas desde el punto de vista de Bond Graph y finalmente es aplicada a los ejemplos mostrados en el capítulo anterior.

En el Capítulo 5 se dan las conclusiones de la presente tesis.

El Apéndice A contiene la información relacionada con la transformación de Park. En el Apéndice B se define la linealización por medio de Bond Graph. Finalmente, en el Apéndice C se imprime el artículo derivado de este trabajo de tesis.

## Capítulo 2

# Modelado en Bond Graphs

### 2.1 Introducción

El primer paso para analizar un sistema dinámico es encontrar su modelo, existen diferentes formas de llevar a cabo esta acción, las más comunes son el uso de ecuaciones de estado (ecuaciones diferenciales) y el uso de la función de transferencia de dicho sistema (transformada de Laplace), la elección de la metodología a seleccionar depende del tipo de sistema, así como de las acciones que se pretenden implementar en él.

La metodología de Bond Graph fue ideada por el profesor Henry M. Paynter del Instituto Tecnológico de Massachussetts, E.U.A., en (Paynter, 1969), para modelar la interacción entre los subsistemas involucrados en el proceso de generación de una planta hidroeléctrica. Posteriormente, la idea fue formalizada por Dean C. Karnopp y Ronald C. Rosenberg en sus textos (1975, 1983) y llevada a la práctica por J. Thomas en (Thomas, 1975).

Llegó a Europa a finales de los años setentas, por los Países Bajos a través de la Universidad de Twente y a partir de ahí se ha ido incrementando su popularidad por todo el mundo. Este lenguaje tiene un carácter gráfico y unifica todos los dominios físicos, haciéndolo así una herramienta útil entre diferentes disciplinas [16].

En un sistema físico la energía puede almacenarse, disiparse o intercambiarse. Cuando se unen dos sistemas o subsistemas, aparecen distintos flujos de potencia entre ellos, de esta manera la metodología se fundamenta en el estudio de la transferencia de potencia en un sistema y se sitúa de manera intermedia entre el sistema físico y los modelos matemáticos que están asociados al sistema.

Esta metodología permite modelar un sistema de una manera simple y directa. Un Bond Graph modela un sistema dinámico en donde un conjunto de componentes interactúan entre sí a través de puertos de energía y unidos por líneas que muestran las conexiones que existen, así como la manera en que la potencia fluye a través del sistema [17].

Usando Bond Graphs adecuadamente, es posible estudiar un sistema complejo a detalle, permitiendo así la manipulación de los mismos. A su vez se pueden encontrar las ecuaciones de estado, algunas propiedades tales como la controlabilidad, observabilidad y la dependencia lineal, entre otras.

Así mismo, Bond Graphs permite al mismo tiempo un modelado funcional por la representación en bonds, estructural por la visualización de propiedades de causalidad y conductual por la deducción de modelos matemáticos directamente del modelo de Bond Graph [18].

Las principales características de esta herramienta son las siguientes:

- Es un lenguaje que representa la transferencia de potencia en el seno del sistema.
- Es gráfico.
- Se fundamenta en la noción de analogía.
- Manifiesta explícitamente la relación entre causa y efecto (causalidad).
- Permite la construcción de manera sistemática de los modelos matemáticos clásicos.

En este capítulo se dan los primeros pasos hacia el desarrollo de la técnica de Bond Graph para modelar sistemas que se encuentran comúnmente en ingeniería. Se establece una clasificación uniforme de las variables asociadas con la potencia y energía. También se hace una introducción a la interconexión de subsistemas por medio de Bond Graphs, así como la descripción de elementos básicos y las leyes que los rigen.

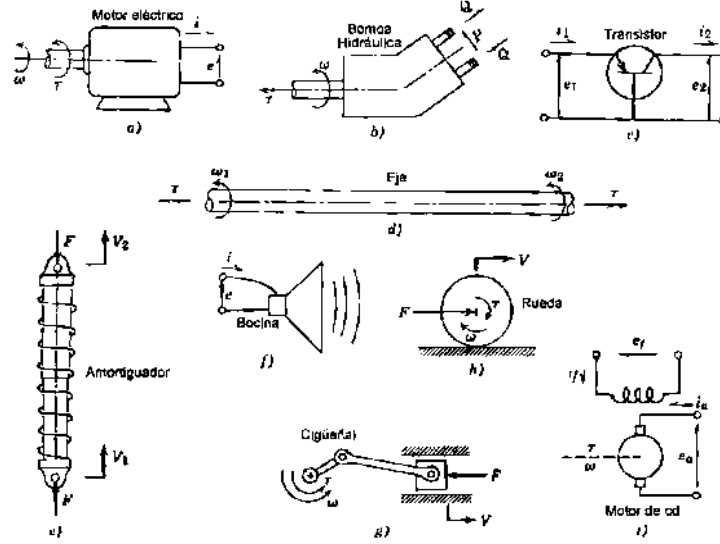
## 2.2 Componentes básicos de un Bond Graph

### 2.2.1 Variables de potencia y de energía

Considerando la colección de subsistemas mostrados en la Figura 2.1, en ella se muestran las variables involucradas para cada subsistema. Las variables tienen lugar en pares asociados con los puntos en los cuales el subsistema puede ser conectado con otro subsistema.

Si fuera posible, por ejemplo, acoplar el eje del motor eléctrico *a)* a un extremo del eje *d)* y el otro extremo a la bomba hidráulica *b)*. Después de acoplarlos, el par del motor y su velocidad serán idénticos al par y velocidad en el otro extremo del eje. Similarmente, el par y la velocidad en el eje, será idéntico al par y velocidad de la bomba hidráulica.

Cuando dos subsistemas son unidos físicamente, dos variables complementarias son forzosamente iguales en ambos. Los puntos en los cuales los subsistemas pueden ser interconectados son lugares en donde la potencia puede fluir entre los subsistemas. A estos puntos se les denomina puertos; a los subsistemas físicos con uno o más puertos se les llama multipuertos. La terminología de puertos y multipuertos también se hace extensiva a los elementos, cuando éstos se unen para formar subsistemas.



**Figura 2.1:** Colección de subsistemas. *a)* Motor eléctrico; *b)* bomba hidráulica; *c)* transistor; *d)* eje; *e)* amortiguador; *f)* bocina; *g)* cigüeñal; *h)* rueda; *i)* motor de excitación independiente.

Las variables mostradas para los multipuertos de la Figura 2.1 y las variables que son forzosamente iguales cuando los multipuertos se conectan son llamadas *variables de potencia*. El producto de estas dos variables es la potencia instantánea que fluye entre los dos puertos. Por ejemplo, si el motor eléctrico es acoplado a la bomba hidráulica, el producto de la velocidad angular y el par generará una potencia, la cual fluirá hacia la bomba.

Puesto que la potencia puede fluir en cualquier dirección se establece un signo convencional para las variables de potencia. Similarmente, la potencia puede ser expresada como el producto de

la fuerza y la velocidad para un multipuerto con un movimiento mecánico traslacional, así como el producto de voltaje y corriente para un puerto eléctrico y el producto de presión y caudal para un puerto en el cual la potencia hidráulica interactúa.

Ya que las interacciones de potencia siempre se presentan cuando dos multipuertos son conectados, es útil clasificar diferentes variables de potencia en un esquema universal y describir todos los tipos de multipuertos en un lenguaje común. Así, se puede denominar a todas las variables de potencia en esfuerzo y flujo, denotadas como  $e(t)$  y  $f(t)$  respectivamente [1].

La potencia  $P(t)$ , que fluye desde o hacia un puerto puede ser expresada como el producto de las variables esfuerzo y flujo, independientemente del dominio considerado, así la notación general está determinada por la siguiente expresión:

$$P(t) = e(t) f(t) \quad (2.1)$$

En un sistema dinámico el esfuerzo, el flujo y por ende la potencia, varían con el tiempo, así que otro tipo de variables resultan importantes para describir la dinámica de un sistema y se les denomina *variables de energía*. Estas variables son el momento  $p(t)$  y el desplazamiento  $q(t)$ . El momento es definido como la integral en el tiempo del esfuerzo.

$$p(t) = \int_0^t e(\tau) d\tau + p_0 \quad (2.2)$$

De la misma manera, el desplazamiento es la integral en el tiempo del flujo.

$$q(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau + q_0 \quad (2.3)$$

La energía  $E(t)$ , la cual también entra o sale de un puerto es la integral en el tiempo de la potencia. Así se tiene que:

$$E(t) = \int_0^t P(t) dt = \int_0^t e(\tau) f(\tau) d\tau + E_0 \quad (2.4)$$

La razón por la cual  $p(t)$  y  $q(t)$  son llamadas variables de energía está en (2.4), ya que derivando el esfuerzo o el flujo con respecto del tiempo, la energía puede ser escrita como:

$$\begin{aligned} E(t) &= \int_0^t e(\tau) dq(\tau) + E_0 \\ &= \int_0^t f(\tau) dp(\tau) + E_0 \end{aligned} \quad (2.5)$$

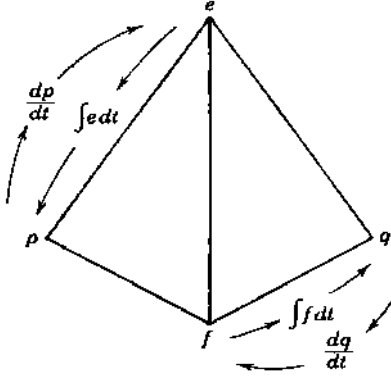
La energía no sólo puede ser expresada como una función del tiempo, sino también como una función de una de las variables de energía.

$$E(q) = \int_{q_0}^q e(q) dq + E_0 \quad (2.6)$$

$$E(p) = \int_{p_0}^p f(p) dp + E_0 \quad (2.7)$$

Por simplicidad, las variables  $e(t)$ ,  $f(t)$ ,  $p(t)$ ,  $q(t)$ ,  $P(t)$  y  $E(t)$ , pueden ser expresadas simplemente como  $e$ ,  $f$ ,  $p$ ,  $q$ ,  $P$  y  $E$  respectivamente, entendiéndose que dependen del tiempo.

En la Figura 2.2 se muestra el llamado tetraedro de estado, en el cual las variables de potencia y de energía, son asociadas a los cuatro vértices del tetraedro y a lo largo de dos de los bordes del tetraedro se indican la relación existente entre  $e$  y  $p$ , así como de  $f$  y  $q$ . Por ejemplo, para obtener momento,  $p$ , a partir de esfuerzo, se requiere la operación de integración, tal como lo muestra el borde superior izquierdo del tetraedro.



**Figura 2.2:** Tetraedro de estados.

Es interesante el hecho de que sólo se necesitan las variables de potencia y energía para modelar un sistema físico. En las Tablas 2.1 y 2.2 se muestran las variables de potencia y energía para algunos de los diferentes tipos de dominios físicos.

Para los dominios magnético, químico, y térmico, no existe la variable de momento ya que no es posible expresar las variables de esfuerzo correspondientes como una función dependiente de la derivada del flujo.

### 2.2.2 Enlaces y flujo de potencia

Propiamente dicho, un Bond Graph establece la forma en la cual los subsistemas son unidos unos con otros, el intercambio de esfuerzo y flujo entre los puertos y los signos para el intercambio de

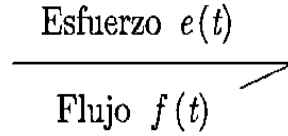
**Tabla 2.1:** Variables de potencia de algunos dominios físicos.

| <b>Dominio</b>        | <b>Esfuerzo, <math>e</math></b> | <b>Flujo, <math>f</math></b> |
|-----------------------|---------------------------------|------------------------------|
| Eléctrico             | Voltaje, $V$                    | Corriente, $i$               |
| Mecánico Traslacional | Fuerza, $F$                     | Velocidad, $V$               |
| Mecánico Rotacional   | Par, $\tau$                     | Vel. angular, $\omega$       |
| Hidráulico            | Presión, $P$                    | Caudal, $Q$                  |
| Magnético             | Fuerza magnetomotriz            | Derivada del flujo magnético |
| Químico               | Potencial químico               | Flujo molar                  |
| Térmico               | Temperatura                     | Flujo de entropía            |

**Tabla 2.2:** Variables de energía de algunos dominios físicos.

| <b>Dominio</b>        | <b>Momento, <math>p</math></b> | <b>Desplazamiento, <math>q</math></b> |
|-----------------------|--------------------------------|---------------------------------------|
| Eléctrico             | Enlace de flujo, $\lambda$     | Carga, $q$                            |
| Mecánico Traslacional | Momento, $P$                   | Desplazamiento, $X$                   |
| Mecánico Rotacional   | Momento angular, $P_\tau$      | Angulo, $\theta$                      |
| Hidráulico            | Diferencial de presión, $P_P$  | Volumen, $V$                          |
| Magnético             | —                              | Flujo magnético                       |
| Químico               | —                              | Masa molar                            |
| Térmico               | —                              | Entropía                              |

potencia. La transferencia de potencia (o flujo de energía) entre dos subsistemas o elementos está representada por una semiflecha que corresponde a un *bond*, tal como se aprecia en la Figura 2.3. Esta semiflecha porta las dos variables puestas en juego en el cálculo de la potencia, a su vez indica la dirección hacia donde fluye la potencia en un instante de tiempo cuando el esfuerzo y el flujo son positivos [18].


**Figura 2.3:** Enlace o bond.

Como conveniencia, el esfuerzo y el flujo se escriben a un lado de las líneas que representan el puerto de la siguiente manera:

- El esfuerzo es puesto sobre o a la izquierda de las líneas de puerto.
- El flujo es puesto abajo o a la derecha de las líneas de puerto.

Cuando dos puertos son acoplados las variables de flujo y energía de ambos puertos son idénticas, entonces se dice que entre ellos existe un enlace o bond en común.



Un Bond Graph simplemente consta de subsistemas ligados por líneas que representan enlaces de potencia como se muestra en la Figura 2.4.

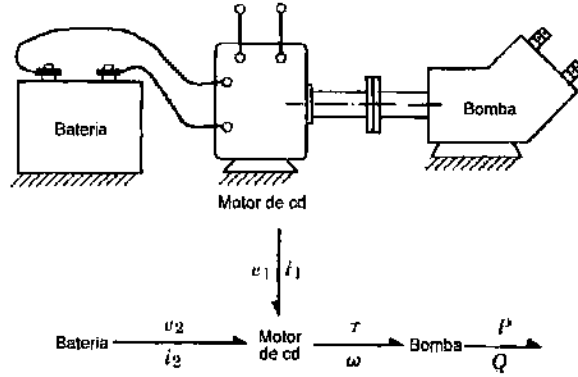


Figura 2.4: Sistema en Bond Graph.

De la Figura 2.4 se aprecia que el motor y la bomba tienen en común la velocidad angular  $\omega$  y el par  $\tau$ , así la línea entre ellos implica que se encuentran conectados y la semiflecha indica que la potencia está fluyendo del motor a la bomba. La batería y el motor tienen en común el voltaje y la corriente definida en las terminales donde la batería se conecta con la armadura del motor, en este caso la potencia fluye de la batería hacia el motor.

### 2.2.3 Bond activo

En la metodología de Bond Graphs no sólo existe la semiflecha, también está la flecha completa que se muestra en la Figura 2.5. Esta notación indica que existe una conexión con un flujo de potencia igual a cero, es decir, que el esfuerzo o el flujo son igual a cero.

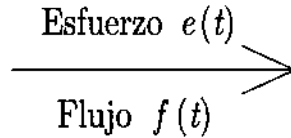
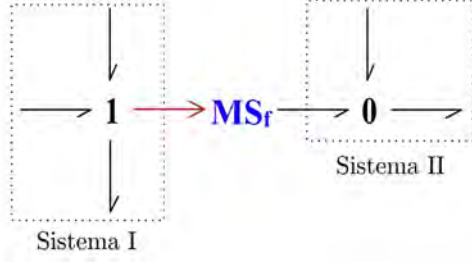


Figura 2.5: Enlace activo o bond activo.

Un enlace con esta flecha es conocido como *enlace activo* o *bond activo* e indica que la señal que fluye tiene una potencia muy baja.

El bond activo es utilizado para transmitir una señal de flujo o esfuerzo de un bloque del sistema hacia otro, sin consumir energía. La Figura 2.6 muestra un ejemplo de cómo se pueden utilizar los bond activos.

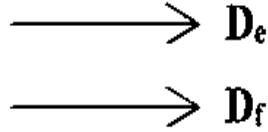


**Figura 2.6:** Uso de un bond activo.

En la Figura 2.6 se aprecia que el flujo que se genera en el primer sistema es posible emplearlo para abastecer de energía al segundo sistema, mediante la fuente de flujo modulada  $MS_f$ . Más adelante se detallará lo referente a las fuentes de flujo.

### 2.2.3.1 Detectores

Los detectores en Bond Graphs son empleados como sensores de medición de las variables de esfuerzo o flujo y son expresados por  $D_e$  y  $D_f$  respectivamente. Estos elementos no consumen potencia es por eso que se les considera como elementos de instrumentación ideales para medición. Su representación en Bond Graph se muestra en la Figura 2.7.



**Figura 2.7:** Detectores de esfuerzo y flujo.

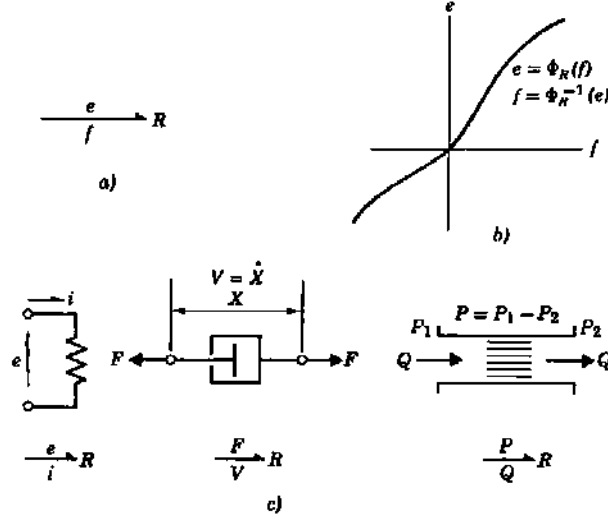
### 2.2.4 Elementos básicos tipo puerto-1

Los elementos puerto-1 constan de un sólo puerto de potencia y en ese puerto sólo existe un esfuerzo y un flujo. A continuación se muestran los principales tipos de puerto-1, se considerarán en orden, elementos que disipan potencia, almacenan energía y suministran potencia.

#### 2.2.4.1 Elemento $-R$

La *resistencia* es un elemento tipo puerto-1 en el cual las variables de esfuerzo y flujo son relacionadas por una función constante. En la Figura 2.8 se muestra el símbolo en Bond Graphs de

$-R$ , una gráfica típica de la relación entre  $e$  y  $f$ , así como dibujos de este elemento en diferentes dominios. Usualmente las resistencias disipan energía, por lo tanto la potencia fluye hacia el puerto; esto es correcto para simples resistencias eléctricas, amortiguadores mecánicos o hidráulicos, tapones porosos en líneas de fluido, entre otros.



**Figura 2.8:** Elemento  $-R$ . a) Símbolo en Bond Graphs; b) relación entre esfuerzo y flujo; c) representación en algunos dominios.

Note de la Figura 2.8 a) que la potencia fluye hacia el puerto cuando el producto de  $e$  y  $f$  es positivo, de acuerdo con la convención de signos mostrada; se puede deducir que la potencia siempre es disipada si la relación entre  $e$  y  $f$  corresponde al primer y tercer cuadrante del plano  $e - f$ , mostrado en la Figura 2.8 b).

Cuando la relación entre  $e$  y  $f$  para una resistencia es curvada como en la Figura 2.8 b), entonces la resistencia es un elemento no lineal, de la misma manera si la relación es una línea recta se dice pues que el elemento es una resistencia lineal.

Note que las resistencias disipadoras de potencia, con el signo de convención mostrada en la Figura 2.8 a), son positivas, en otras palabras para resistencias pasivas, se establece el signo de potencia por medio de la media flecha apuntando hacia la resistencia.

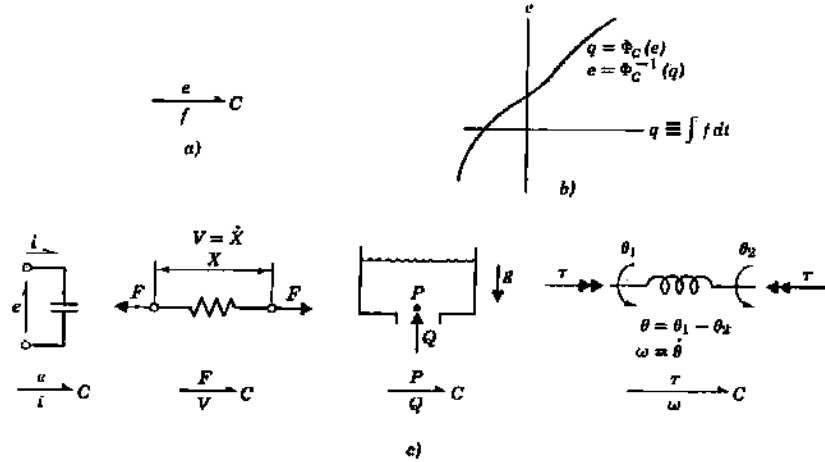
En ocasiones  $-R$  es usado para modelar una relación entre  $e$  y  $f$ , la cual en realidad surge de un subsistema que puede suministrar y disipar energía. Por ejemplo, las características de par-velocidad en los motores puede graficarse como en la Figura 2.8 b), con el signo  $\rightarrow R$ , sin embargo, la relación podría no estar en el primer o tercer cuadrante, de hecho, en la mayoría

de los regímenes operantes, un motor tanto suministra como disipa potencia. Así, para algunas resistencias no pasivas, uno de los signos más usados es:  $\leftarrow R$ .

#### 2.2.4.2 Elemento $-C$

Considérese un dispositivo puerto-1 en el cual exista una relación entre el esfuerzo y un desplazamiento, es decir, un dispositivo que almacene y suministre energía sin tener pérdidas.

En la terminología de Bond Graphs un elemento que relacione  $e$  con  $q$  es llamado puerto-1 *capacitor*. En términos físicos, un capacitor es una idealización de los dispositivos denominados resortes, barras de torsión, capacitores eléctricos, tanques de gravedad y acumuladores. El símbolo en Bond Graphs, la relación y algunos ejemplos físicos son mostrados en la Figura 2.9.

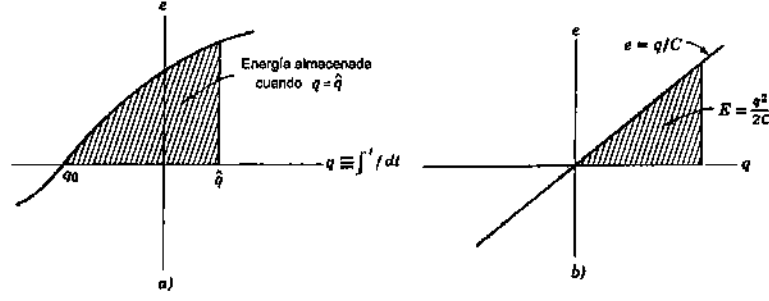


**Figura 2.9:** Elemento  $-C$ . a) Símbolo en Bond Graphs; b) relación entre esfuerzo y flujo; c) representación en algunos dominios.

Note que cuando el signo de convención similar al usado para la resistencia, es decir  $\rightarrow C$ , es usado para el elemento  $-C$ , entonces representa la potencia que fluye hacia el capacitor y representa la energía almacenada en el capacitor en cualquier tiempo.

La operación indicada en (2.6) puede ser interpretada gráficamente como se muestra en la Figura 2.10.

Como  $q$  varía, el área bajo la curva de  $e$  contra  $q$  varía también, y es igual a  $E$ . La conservación de la energía para  $\rightarrow C$  es casi obvia. Si  $q$  va de  $q_0$  a  $\hat{q}$  como en la Figura 2.10 a), entonces la energía es almacenada; si  $q$  regresa a  $q_0$ , el área sombreada desaparece al igual que toda la energía almacenada. La potencia fluye hacia el puerto, lo cual resulta en un almacenamiento

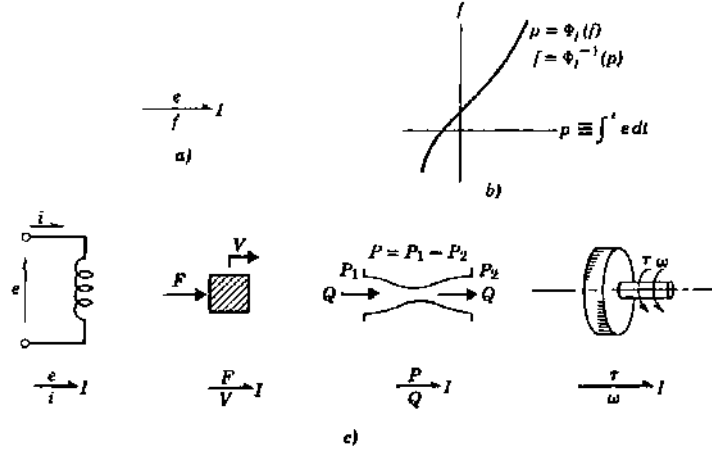


**Figura 2.10:** Energía almacenada en el puerto-1 capacitor. a) Caso no lineal; b) caso lineal.

de energía, de lo contrario la potencia fluye fuera del puerto, durante este proceso no existe una pérdida de energía.

### 2.2.4.3 Elemento $-I$

Un segundo almacenador de energía surge si el momento  $p$  es relacionado por una constante con el flujo  $f$ . Tal elemento es llamado *inercia*. El símbolo en Bond Graphs para la inercia, su relación, y algunos ejemplos físicos son mostrados en la Figura 2.11.



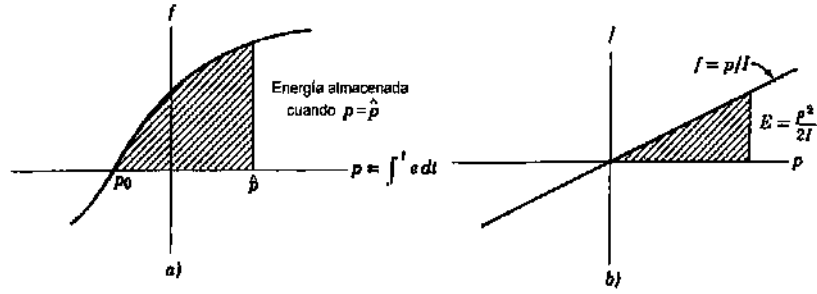
**Figura 2.11:** Elemento  $-I$ . a) Símbolo en Bond Graphs; b) relación entre esfuerzo y flujo; c) representación en algunos dominios.

La inercia es usada para modelar los efectos de una inductancia en sistemas eléctricos y la masa o los efectos de inercia en sistemas mecánicos o hidráulicos. Usando el signo convencional,  $\rightarrow I$ , la potencia fluye hacia la inercia.

Las similitudes entre las ecuaciones (2.6) y (2.7) son evidentes, a menudo la energía asociada con un capacitor es denominada energía potencial, mientras que la energía asociada con la

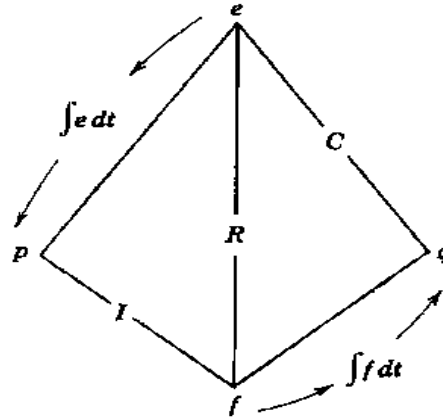
inercia es llamada energía cinética, estos nombres son principalmente usados en sistemas mecánicos. En sistemas eléctricos, las dos formas de almacenar energía son llamadas energía eléctrica y energía magnética.

De manera similar al caso del capacitor, si la relación de la inercia es graficada, entonces existe un área interpretada como el almacenamiento de energía. Esta interpretación se muestra en la Figura 2.12, y nuevamente se observa que la energía almacenada en un  $-I$  puede ser recuperada sin pérdidas.



**Figura 2.12:** Energía almacenada en el puerto-1 inercia. a) Caso no lineal; b) caso lineal.

Una ayuda para recordar la relación que existe entre las variables de los tres puerto-1, el tetraedro de estados presentado en la Figura 2.2 puede ser redibujado como se muestra en la Figura 2.13.



**Figura 2.13:** Tetraedro de estados con su relación de elementos tipo puerto-1 correspondiente.

La Figura 2.13 deja expresada de una manera más clara, que el elemento  $-R$  relaciona a las variables  $e$  y  $f$ ; el elemento  $-C$  relaciona las variables  $e$  y  $q$ ; finalmente el elemento  $-I$  relaciona a  $f$  con  $p$ .

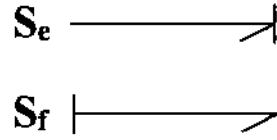
#### 2.2.4.4 Puertos-1 activos

Finalmente, se definen dos elementos tipo puerto-1 muy utilizados y son: la fuente de esfuerzo y la fuente de flujo. Estos elementos son versiones idealizadas de fuentes de voltaje, fuentes de presión, elementos sujetos a vibración, sistemas de flujo constante, etc.

En cada caso, el esfuerzo o el flujo pueden mantenerse constantes, independientemente de la potencia suministrada o absorbida por la fuente, también pueden ser funciones variantes en el tiempo.

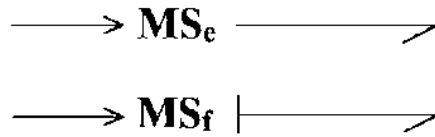
Por lo general, estas fuentes son vistas como las encargadas de suministrar potencia al sistema, de ahí su nombre de elementos activos. La semiflecha implica que cuando es positiva, la potencia fluye desde la fuente hacia cualquier sistema conectado a ella.

Ya que una fuente mantiene sólo una de las variables de potencia constante o una función específica en el tiempo, no importando que tan grande sea la otra variable; la fuente puede suministrar una gran cantidad de potencia. Esto, por supuesto en la realidad no es cierto, ya que ninguna fuente es infinita. La Figura 2.14 muestra el símbolo en Bond Graphs de cada una de las fuentes.



**Figura 2.14:** Elementos puerto-1 activos.

Cuando las fuentes de esfuerzo o flujo reciben energía mediante un bond activo, se dicen ser *fuentes de esfuerzo modulada* y *fuentes de flujo modulada*, respectivamente. Su representación en Bond Graphs se muestra en la Figura 2.15.



**Figura 2.15:** Elementos puerto-1 activos modulados.

Estas fuentes moduladas, cumplen la función de transformar la señal proveniente del bond activo a una señal de esfuerzo o flujo.

### 2.2.5 Elementos básicos tipo puerto-2

Uno esperaría que fuera necesario definir más puertos-2 que puertos-1, pero, de hecho sólo son necesarios dos tipos básicos de puerto-2. Hay por supuesto un número ilimitado de subsistemas de puerto-2, pero sólo es necesario describir aquellos que no pueden ser modelados por puertos-1.

Los puertos-2 analizados aquí son versiones idealizadas de la conservación de la potencia. Si cualquier puerto-2,  $-TP-$ , tiene el signo de convención  $\frac{e_1}{f_1} TP \frac{e_2}{f_2}$ , entonces la conservación de potencia significa que en cada instante de tiempo:

$$e_1 f_1 = e_2 f_2 \quad (2.8)$$

En (2.8) se afirma que cualquier potencia fluyendo hacia un lado del puerto-2 está simultáneamente fluyendo hacia afuera por el otro puerto.

#### 2.2.5.1 Transformador

Una manera en la cual (2.8) puede ser satisfecha es usando el puerto-2 conocido como transformador, su símbolo en Bond Graph es  $-TF-$ . Las leyes de un puerto-2 transformador son:

$$\begin{aligned} e_1 &= m e_2 \\ f_1 &= \frac{1}{m} f_2 \end{aligned} \quad (2.9)$$

donde el parámetro  $m$ , es denominado módulo del transformador y los subíndices 1 y 2 corresponden a los dos puertos de éste, entrada y salida respectivamente. Se muestran en la Figura 2.16 algunos dispositivos que pueden ser modelados con el transformador.

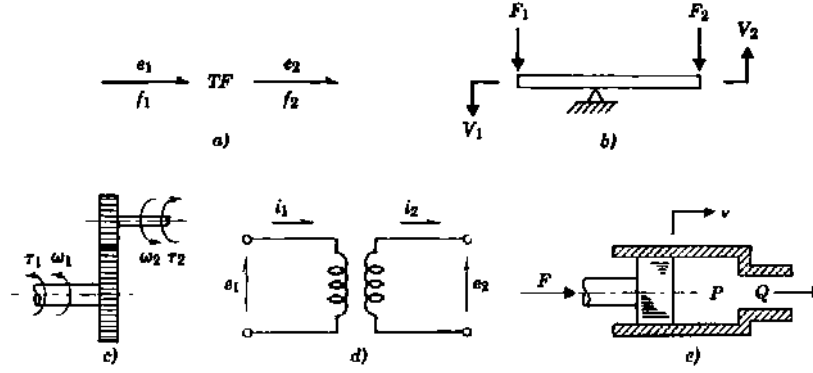
#### 2.2.5.2 Girador

Otra manera en la que se puede balancear la potencia como lo muestra (2.8) es incorporar un girador, el cual se simboliza así:  $-GY-$ . Las leyes para el girador son:

$$\begin{aligned} e_1 &= r f_2 \\ f_1 &= \frac{1}{r} e_2 \end{aligned} \quad (2.10)$$

en la cual es  $r$  el módulo girador. En la Figura 2.17 se muestran algunos dispositivos que pueden ser modelados como giradores. Los giradores eléctricos pueden ser hechos usando el efecto Hall. El

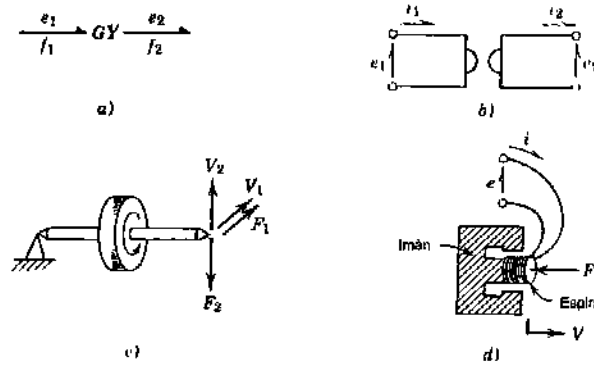




**Figura 2.16:** Transformador. a) Símbolo en Bond Graphs; b) palanca ideal; c) par de engranes; d) transformador eléctrico; e) cilindro hidráulico.

girador también se necesita para modelar efectos de las microondas, aunque en algunos casos no se puede ser identificado como un dispositivo físico.

Es importante comprender que el girador, esencialmente intercambia los roles de esfuerzo y flujo, esto puede ser visto haciendo  $r = 1$  en (2.10).

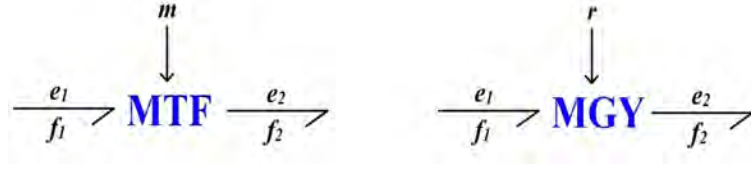


**Figura 2.17:** Girador. a) Símbolo en Bond Graphs; b) símbolo para el girador eléctrico; c) girador mecánico; d) bobina de voz.

Entonces el esfuerzo de un puerto  $-GY-$  es el flujo del otro, y viceversa. Así, la combinación  $-GY - I$ , es equivalente a  $-C$ . Se puede apreciar esto, recordando que  $-I$  relaciona  $f$  con  $q = \int e dt$ . Después que el girador es adicionado y los roles de  $e$  y  $f$  se intercambian, la combinación relaciona  $e$  y  $p = \int f dt$  en la parte externa del puerto, así pues el elemento que relaciona  $e$  con  $q$  es  $-C$ . Similarmente,  $-GY - C$  es equivalente a  $-I$ .

Finalmente, existe una generalización de los transformadores y giradores basada en el hecho de que (2.9) y (2.10) conservan la potencia entre los dos puertos, manteniéndose incluso

cuando los módulos  $m$  y  $r$  no son constantes. El transformador y el girador modulados se denotan en Bond Graphs tal y como se muestra en la Figura 2.40.



**Figura 2.18:** Transformador y girador modulados.

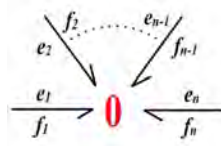
Note que  $m$  y  $r$  se muestran como señales con un enlace activo, esto quiere decir que ninguna potencia es asociada con el cambio de  $m$  y  $r$ , es decir que  $e_1 f_1$  es exactamente igual a  $e_2 f_2$ .

### 2.2.6 Elementos básicos tipo puerto- $n$

Ahora se describen los componentes de puerto-3, como los puertos-2 de la sección anterior, también conservan potencia. Estos puertos-3 son denominados *de unión* y sirven para interconectar otros multipuertos al sistema, representan una de las ideas fundamentales detrás del formalismo en Bond Graphs. La idea es representar los dos tipos de conexiones que hay, los cuales en términos eléctricos son llamados paralelo y serie.

#### 2.2.6.1 Unión de flujo, unión $-0$ ó unión de esfuerzo común

El símbolo para esta unión es un 0 con dos o más enlaces emanando de él. La Figura 2.19 muestra un ejemplo de dicha unión.



**Figura 2.19:** Unión  $-0$ .

Usando signo de convención hacia adentro, mostrado, la relación puede ser escrita de la siguiente manera:

$$e_1 = e_2 = \dots = e_{n-1} = e_n \quad (2.11)$$

$$f_1 + f_2 + \dots + f_{n-1} + f_n = 0 \quad (2.12)$$

En otras palabras, el esfuerzo en todos los enlaces de unión  $-0$  son siempre idénticos y la suma algebraica de los flujos es cero. Uniendo (2.11) y (2.12) se observa que la potencia en los enlaces suma cero.

$$e_1 f_1 + e_2 f_2 + \cdots + e_{n-1} f_{n-1} + e_n f_n = 0 \quad (2.13)$$

Esto quiere decir que si la potencia fluye de  $n - 1$  puertos hacia la unión  $-0$ , fluirá hacia afuera por el  $n$ -ésimo puerto.

### 2.2.6.2 Unión de esfuerzo, unión $-1$ ó unión de flujo común

El símbolo para este multipuerto es un 1 con  $n$  enlaces. Con el signo de convención indicado, las relaciones para estos elementos se aprecian en la Figura 2.20:



**Figura 2.20:** Unión  $-1$ .

Al igual que en  $-0$ , las ecuaciones para la unión  $-1$  aseguran la conservación de la potencia de (2.13). La unión  $-1$  tiene un sólo flujo y la suma de los valores de esfuerzo es igual a cero, es decir que:

$$e_1 + e_2 + \cdots + e_{n-1} + e_n = 0 \quad (2.14)$$

$$f_1 = f_2 = \cdots = f_{n-1} = f_n \quad (2.15)$$

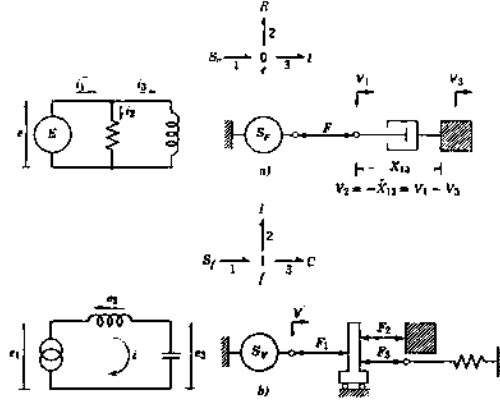
Entender el significado de las uniones  $-0$  y  $-1$  es importante dar algunas interpretaciones para estos multipuertos en algunos dominios físicos, tal y como se muestra en la Tabla 2.3.

Para hacer clara la utilidad de las uniones, se muestran algunos ejemplos en la Figura 2.21, los aspectos de las uniones serie y paralelo son más obvios en los casos eléctricos que en los mecánicos.

Cuando el signo convencional de la flecha hacia adentro es cambiado por el introducido por los puertos- $n$ , entonces (2.12) y (2.14) deben ser modificadas por un signo menos para cada puerto con un punto de salida. Las ecuaciones (2.11) y (2.15) permanecen invariantes. Es importante mencionar que una unión  $-0$  tiene un y sólo un esfuerzo y la unión  $-1$  tiene un y sólo un flujo, independientemente del signo de convención.

**Tabla 2.3:** Interpretaciones de uniones  $-0$  y  $-1$  en algunos dominios físicos

|                             |       |                                                                                                               |
|-----------------------------|-------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Circuitos eléctricos</b> | $-0-$ | Representa la ley de Kirchhoff de corriente en un nodo de tres conductores.                                   |
|                             | $-1-$ | Representa la ley de Kirchhoff de voltaje a lo largo de un lazo cerrado y experimenta tres caídas de voltaje. |
| <b>Sistemas mecánicos</b>   | $-0-$ | Representa un estado que involucra una sola fuerza y tres velocidades que suman cero.                         |
|                             | $-1-$ | Representa un equilibrio dinámico de fuerzas asociadas a una sola velocidad.                                  |
| <b>Sistemas hidráulicos</b> | $-0-$ | Representa la conservación del flujo volumétrico en un punto donde tres tuberías se unen.                     |
|                             | $-1-$ | Representa la suma algebraica igual a cero de un sólo flujo cuando el circuito tiene tres caídas de presión.  |

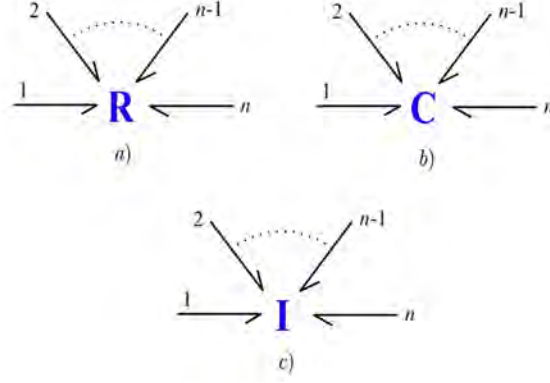

**Figura 2.21:** Puertos- $n$  básicos en diferentes dominios. a) Empalme  $-0$ ; b) empalme  $-1$ .

### 2.2.7 Campos $R$ , $C$ , $I$

El objetivo de estos elementos en Bond Graphs es importante y su utilización se puede llevar a cabo tan pronto se haya asumido que en un mismo elemento, las diferentes variables (esfuerzos y flujos) están relacionadas entre sí. Este tipo de elementos se conforma de diferentes puertos-1 conectados entre sí a un mismo elemento.

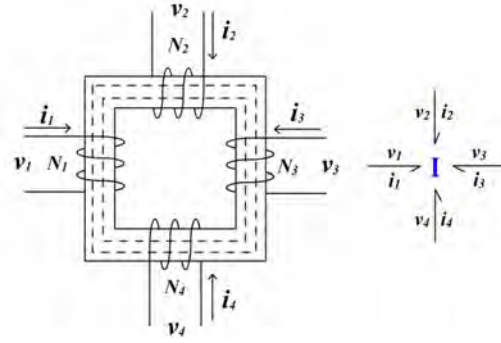
En las situaciones donde una variable de un elemento es determinada por una combinación de información lineal de más de un bond es necesario emplear los elementos conocidos como *campos*. En la Figura 2.22 se muestran dichos campos para los elementos  $-R$ ,  $-C$  e  $-I$ .

Para explicar este concepto se utiliza el ejemplo de un transformador. Un transformador, es una de las máquinas eléctricas más eficiente en los sistemas de potencia. La Figura 2.23 muestra como un transformador está compuesto por cuatro elementos almacenadores de flujo conocidas



**Figura 2.22:** Campos. a) Campo  $R$ ; b) campo  $C$ ; c) campo  $I$ .

como inductancias propias de la máquina, además en estas máquinas existen inductancias mutuas, ya que una inductancia están interactuando con tres de las cuatro y así sucesivamente.



**Figura 2.23:** Ejemplo de un elemento multipuerto y su representación en Bond Graph.

Este elemento de potencia se modela en Bond Graphs por medio de un elemento  $-I$  en su configuración multipuerto o de campo, ambos nombres son válidos para ser identificados en la metodología de Bond Graph. Los flujos que existen en el transformador son representados matricialmente en la ecuación (2.16).

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 & m_{12} & m_{13} & m_{14} \\ m_{21} & L_2 & m_{23} & m_{24} \\ m_{31} & m_{32} & L_3 & m_{34} \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & L_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

donde  $L_i$ , para  $i = 1, \dots, 4$ , son las inductancias propias del transformador y  $m_{ij}$ , para  $i = 1, \dots, 4$  y  $j = 1, \dots, 4$ , son las inductancias mutuas contenidas entre cada uno de los devanados.

Debe hacerse notar que los campos no sólo son para elementos  $-I$ , y que este caso particular se consideró para la explicación.

## 2.3 Modelado de sistemas en Bond Graphs

Habiendo introducido los elementos básicos de Bond Graphs para representar procesos físicos fundamentales, la pregunta ahora es, ¿cómo estos elementos pueden ser combinados en un sistema?. Los procedimientos para los diferentes dominios de energía han sido dados por Karnopp, Margolis y Rosenberg en sus textos [1, 19, 23]. Borutzky en [24] da una formulación para dominios mecánicos y no-mecánicos, los cuales son descritos a continuación.

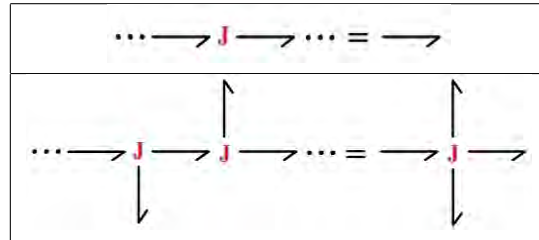
### 2.3.1 Sistemas eléctricos

En esta sección se describen los pasos necesarios para determinar el modelo en Bond Graph de un sistema eléctrico; posteriormente se ilustra un ejemplo.

#### Procedimiento 2.1

1. Dibujar una unión  $-0$  para cada nodo en el circuito donde exista un potencial diferente.
2. Dibujar por cada puerto  $-1$  (elementos  $-R$ ,  $-C$ ,  $-I$ ,  $S_e$  y  $S_f$ ) en el circuito una unión  $-1$  y enlazar dicha unión con el elemento por medio de un bond. Recordando que la dirección de la semiflecha indica la dirección asumida por la potencia.
3. Asignar direcciones de potencia al resto de los enlaces, usando una convención de *conexión de potencia*, la cual está dada de la siguiente manera:  $0 \rightarrow 1 \rightarrow 0$ .
4. Si el circuito tiene un punto de referencia, borrar esa unión  $-0$  junto con los enlaces conectados al mismo; si no hay un punto de referencia, escoger cualquier unión  $-0$  y borrarlo.
5. Simplificar la gráfica de acuerdo a las reglas mostradas en la Tabla 2.4. Donde el símbolo  $J$  puede ser una unión  $-0$  ó  $-1$ .

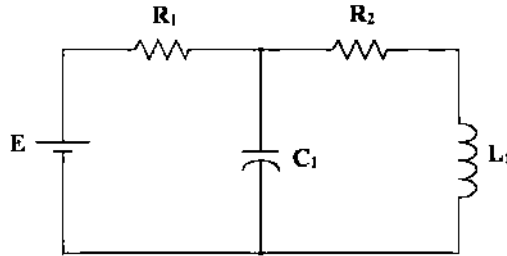
**Tabla 2.4:** Reglas de equivalencia para la simplificación de bond graphs



Finalmente, es una buena práctica etiquetar cada uno de los elementos; de esta manera pueden ser fácilmente identificados y distinguidos de los demás elementos del mismo tipo.

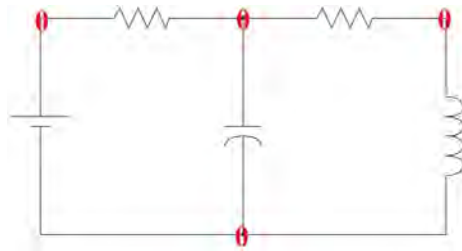
### Ejemplo 2.1

A continuación se aplica el Procedimiento 2.1 al sistema eléctrico que se muestra en la Figura 2.24.



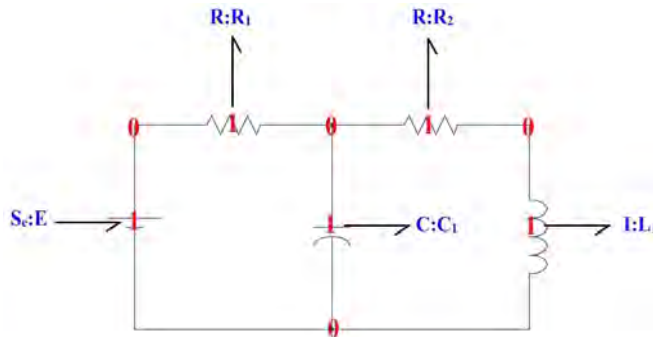
**Figura 2.24:** Diagrama esquemático de un sistema eléctrico.

Atendiendo a lo dicho en el primer paso, se agregan ceros en los nodos donde existe una diferencia de potencial y se obtiene el resultado mostrado en la Figura 2.25.



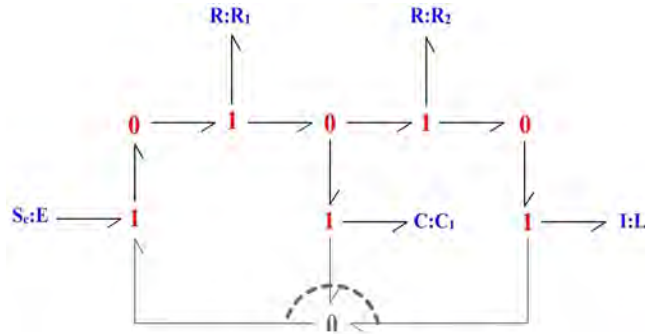
**Figura 2.25:** Primer paso para obtener el Bond Graph de un circuito eléctrico.

Posteriormente se dibuja una unión  $-1$  por cada elemento del sistema y se une dicha unión al respectivo elemento mediante un bond, tal y como se muestra la Figura 2.26.



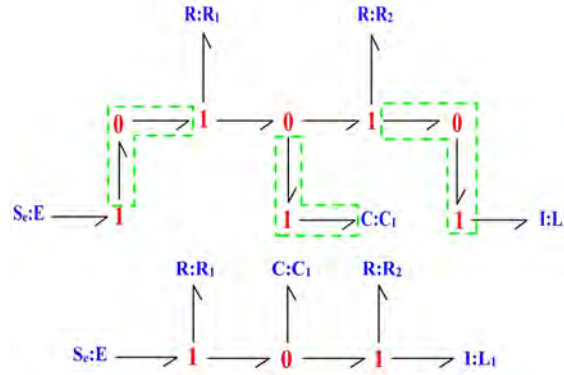
**Figura 2.26:** Segundo paso para obtener el Bond Graph de un circuito eléctrico.

Ahora se procede a asignar las direcciones de potencia para los nodos restantes, conforme lo sugiere el tercer paso. A continuación se elimina la unión  $-0$  que representa al punto de referencia, así como los enlaces conectados a él. La Figura 2.27 muestra los dos pasos mencionados.



**Figura 2.27:** Tercer y Cuarto paso para obtener el Bond Graph de un circuito eléctrico.

Finalmente se reduce el diagrama, según las reglas del quinto paso. Esto se aprecia en la Figura 2.28.



**Figura 2.28:** Bond Graph de un circuito eléctrico.

Mediante la inspección del modelo, se puede obtener una idea de cómo está configurado el sistema, por ejemplo, en la Figura 2.28 se aprecia que la resistencia  $R_1$  está en serie con la fuente de esfuerzo, también está en serie con un bloque que contiene al capacitor, que a su vez está en paralelo con los elementos en serie  $R_2$  y  $L_1$ .

### 2.3.2 Sistemas mecánicos

En esta sección, la construcción de un Bond Graph para un sistema mecánico, será desarrollada y después ilustrada por un ejemplo. Es importante hacer notar que este procedimiento se puede aplicar a sistemas mecánicos traslacionales como a rotacionales.

#### Procedimiento 2.2

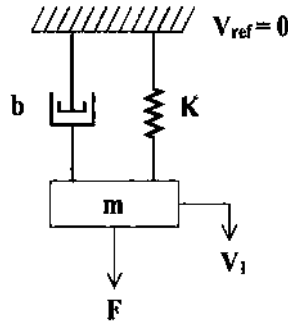
1. Identificar las velocidades lineales y/o angulares y representarlas por una unión  $-1$ .



2. Conectar los elementos  $-C$ , que representan resortes y elementos  $-R$ , que representan fricciones, mediante uniones  $-0$  e insertarlos entre los pares apropiados de uniones  $-1$ .
3. Agregar los elementos de inercia en su respectiva unión  $-1$ , así como las respectivas fuentes de esfuerzo o flujo según sea el caso.
4. Asignar las direcciones de potencia.
5. Eliminar cualquier velocidad igual a cero con sus respectivos enlaces.
6. Simplificar el diagrama siguiendo las mismas reglas usadas en el Procedimiento 2.1.

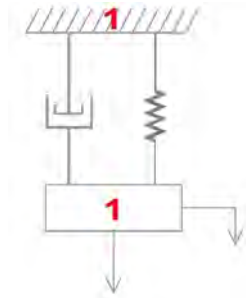
### Ejemplo 2.2

A continuación, se aplica el Procedimiento 2.2, para encontrar el Bond Graph del sistema mecánico mostrado en la Figura 2.29.



**Figura 2.29:** Diagrama esquemático de un sistema mecánico.

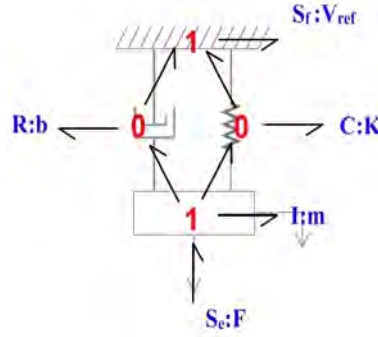
En la Figura 2.30 se colocan las uniones  $-1$  en los lugares donde existan velocidades distintas, esto según lo dicho en el primer paso.



**Figura 2.30:** Primer paso para obtener el Bond Graph de un sistema mecánico.

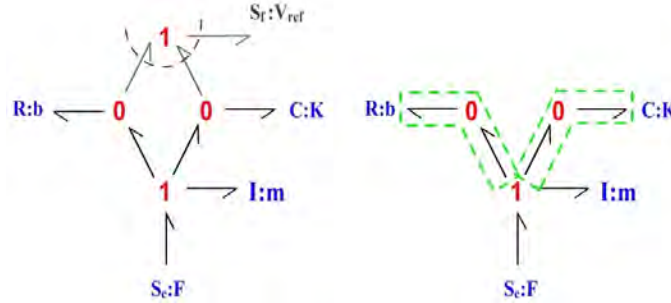
Se agregan los elementos necesarios para el sistema, tal y como lo describe el segundo y el tercer paso. Obsérvese que se agregó una fuente de esfuerzo en la masa, que es la encargada de

proporcionar la fuerza al sistema y una fuente de flujo que es la encargada de dar la velocidad de referencia. Todo lo anterior es mostrado en la Figura 2.31.



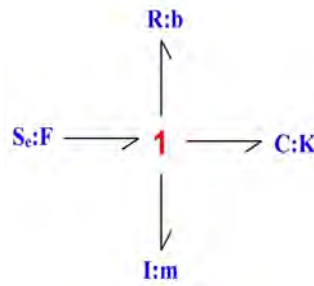
**Figura 2.31:** Segundo y tercer paso para obtener el Bond Graph de un sistema mecánico.

Se asignan las direcciones de potencia al sistema y se elimina la velocidad de referencia, así como sus enlaces, posteriormente se simplifica el diagrama, tal y como se aprecia en la Figura 2.32.



**Figura 2.32:** Cuarto, Quinto y Sexto paso para obtener el Bond Graph de un sistema mecánico.

Finalmente el sistema queda mostrado en la Figura 2.33.



**Figura 2.33:** Diagrama en Bond Graph de un sistema mecánico.

Por inspección, de la Figura 2.33 se puede apreciar que debido a la presencia de una unión  $-1$ , los tres elementos pasivos del sistema tienen la misma velocidad cuando se aplica una fuerza  $F$ , sin embargo la fuerza aplicada es distribuida de manera diferente a cada uno de los tres elementos.

### 2.3.3 Sistemas hidráulicos

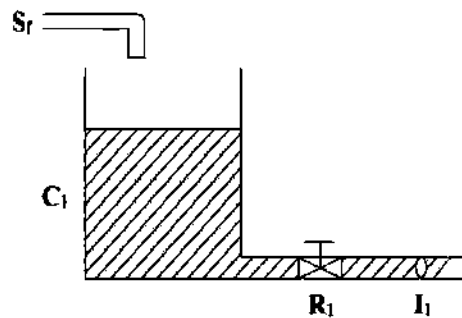
Para obtener el Bond Graph de sistemas hidráulicos se deben seguir los pasos detallados en el Procedimiento 2.3.

#### Procedimiento 2.3

1. Para cada presión distinta asignar una unión  $-0$ .
2. Insertar los elementos necesarios, así como generadores de presión y de flujo entre los pares apropiados de uniones  $-0$ , usando uniones  $-1$ .
3. Asignar las direcciones de potencia.
4. Escoger una presión de referencia (por lo general se usa la presión atmosférica) y eliminar la unión  $-0$  de referencia del modelo así como los bonds asociados a él.
5. Simplificar el diagrama. (Véase Tabla 2.4)

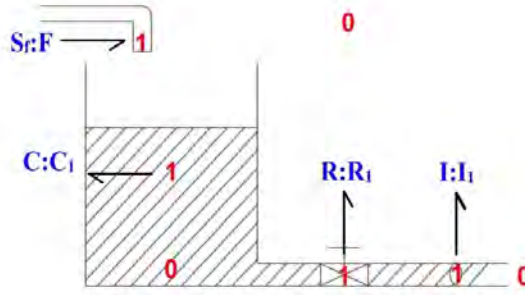
#### Ejemplo 2.3

Como ejemplo del procedimiento para sistemas hidráulicos considérese el sistema mostrando en la Figura 2.34.



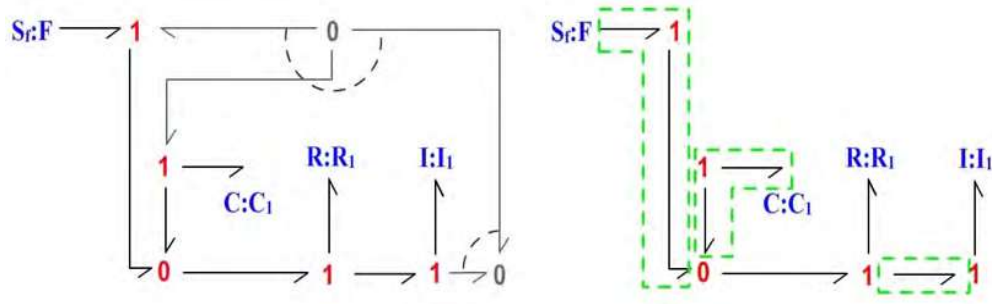
**Figura 2.34:** Diagrama esquemático de un sistema hidráulico.

Aplicando el primer y segundo paso, se identifican los nodos donde existen diferentes presiones y se colocan uniones  $-0$  por cada uno de ellos y posteriormente se colocan uniones  $-1$  para unir los diferentes elementos al Bond Graph, observe la Figura 2.35.



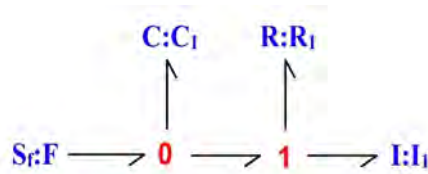
**Figura 2.35:** Primer y segundo paso para obtener el Bond Graph de un sistema hidráulico.

En la Figura 2.36, se aplican los pasos tercero y cuarto; se asignan las direcciones de potencia necesarias, también se eliminan los uniones  $-0$  que tengan presión atmosférica y se eliminan.



**Figura 2.36:** Tercer y cuarto paso para obtener el Bond Graph de un sistema hidráulico.

Realizando la simplificación, se obtiene el Bond Graph del sistema, mostrándose en la Figura 2.37.



**Figura 2.37:** Diagrama en Bond Graph de un sistema hidráulico.

De la Figura 2.37 se puede apreciar que el caudal existente en la tubería es igual al caudal suministrado por  $S_f$  más el caudal producido por el líquido almacenado en  $C_1$ . Además de que la presión en el fondo del tanque menos la presión en la inductancia hidráulica  $I_1$  es igual a la presión existente en la válvula, denotada por  $R_1$ .

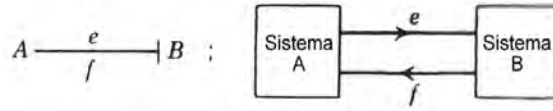
## 2.4 Causalidad

En los experimentos de desempeño que se les practica a los sistemas se tienen las nociones de entrada y salida o en otras palabras excitación y respuesta, estos mismos conceptos existen en el campo matemático cuando se modela un sistema.

En estos experimentos se debe tomar la decisión sobre el comportamiento de los puertos. En cada puerto existen el esfuerzo y el flujo, se puede controlar cualquiera de los dos, pero no los dos al mismo tiempo, así que sólo es posible que una sea la entrada y la otra sea la salida.

Si dos sistemas son enlazados, se puede pensar que el esfuerzo de un sistema causa que el segundo responda con un flujo, este flujo a su vez causa al primer sistema para responder con esfuerzo. De este modo la relación entre causa (entrada) y efecto (salida) para esfuerzos y flujos es en dirección opuesta.

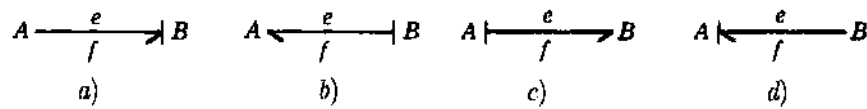
Para saber si el esfuerzo o el flujo es la señal de entrada se agrega una *pieza* más de información a los diagramas en Bond Graphs. De esta manera las entradas y las salidas son especificadas por un *trazo causal*. El trazo causal es una pequeña y perpendicular línea hecha al final del enlace y nos indica la dirección del esfuerzo [1, 19].



**Figura 2.38:** Significado del trazo causal.

La Figura 2.38 muestra al sistema  $A$  y  $B$  enlazados, donde el trazo causal está en el extremo cercano a  $B$ . Esto significa que  $A$  determina al esfuerzo y lo aplica sobre  $B$ , lo cual causa que  $B$  responda con flujo, de tal manera que el flujo regresa hacia  $A$ .

Al ser opuestas estas señales, el trazo causal indica simultáneamente la dirección de la señal de esfuerzo y la señal de flujo. Nótese que la media flecha y el trazo causal son completamente independientes. La Figura 2.39 muestra los cuatro casos posibles.



**Figura 2.39:** Relaciones entre el trazo causal y la semiflecha.

En *a)* y *b)* de la Figura 2.39 se aprecia como el esfuerzo va de *A* hacia *B*, sin embargo la potencia toma dos diferentes direcciones, de *A* hacia *B* y de *B* hacia *A*, respectivamente. Mientras que en *c)* y *d)* el esfuerzo va de *B* hacia *A*, de manera similar a los casos anteriores, la potencia toma las mismas dos direcciones.

Algunos multipuertos son fuertemente afectados por la causalidad, otros se mantienen relativamente indiferentes y otros actúan de diferentes formas para diferentes causalidades.

### 2.4.1 Causalidad para puertos-1

Las fuentes de esfuerzo y flujo son las más fáciles de asignar causalidad. Por definición, una fuente imprime una historia temporal de esfuerzo o flujo a cualquier sistema que esté conectada a ella. Así, si se usan los símbolos  $S_e-$  y  $S_f-$  como fuentes abstractas de esfuerzo y flujo, respectivamente, la única causalidad permitida para estos elementos es  $S_e\vdash$  y  $S_f\vdash$ . Las formas causales de las fuentes de esfuerzo y flujo están resumidas en los primeros dos renglones de la Tabla 2.5.

En contraste de las fuentes, el puerto-1 resistencia es normalmente indiferente a la causalidad impuesta. Las dos posibilidades pueden ser representadas en ecuaciones de la forma  $e = \Phi_R(f)$  y  $f = \Phi_R^{-1}(e)$ , donde por convención se usa que la variable a la izquierda del signo de igualdad representa la salida de la resistencia o de la variable dependiente, y la que aparece al lado derecho es la entrada o la variable independiente para el elemento.

La correspondencia de la causalidad interpretada en ecuaciones y el trazo causal sobre el enlace del elemento  $-R$  es mostrada en el tercer renglón de la Tabla 2.5. Mientras que las funciones  $\Phi_R$  y  $\Phi_R^{-1}$  existan y sean conocidas, no existe razón para preferir una causalidad sobre la otra.

**Tabla 2.5:** Formas causales para puertos-1 básicos.

| Elemento           | Forma acausal     | Forma causal                                   | Relación causal                                                                |
|--------------------|-------------------|------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------|
| Fuente de esfuerzo | $S_e \rightarrow$ | $S_e \rightarrow\!\!\!\rightarrow$             | $e(t) = E(t)$                                                                  |
| Fuente de flujo    | $S_f \rightarrow$ | $S_f \vdash$                                   | $f(t) = F(t)$                                                                  |
| Resistencia        | $\rightarrow R$   | $\vdash R$<br>$\rightarrow\!\!\!\rightarrow R$ | $e = \Phi_R(f)$<br>$f = \Phi_R^{-1}(e)$                                        |
| Capacitor          | $\rightarrow C$   | $\vdash C$<br>$\rightarrow\!\!\!\rightarrow C$ | $e = \Phi_C^{-1} \left( \int^t f dt \right)$<br>$f = \frac{d}{dt} [\Phi_C(e)]$ |
| Inercia            | $\rightarrow I$   | $\rightarrow\!\!\!\rightarrow I$<br>$\vdash I$ | $f = \Phi_I^{-1} \left( \int^t e dt \right)$<br>$e = \frac{d}{dt} [\Phi_I(f)]$ |

Las leyes de los elementos  $-C$  e  $-I$  son expresadas como una relación estática entre  $e$  con  $q = \int^t f dt$  y  $f$  con  $p = \int^t e dt$ . En expresiones de relaciones causales entre esfuerzos y flujos, se encontrará que la elección de la causalidad tiene un efecto importante. Tomando el capacitor, pueden escribirse las relaciones constitutivas de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} e &= \Phi_C^{-1} \left( \int^t f dt \right) \\ f &= \frac{d}{dt} [\Phi_C(e)] \end{aligned} \quad (2.17)$$

En las cuales, la causalidad es implicada por la forma de la ecuación, tal y como se aprecia en (2.17), puede ser *causalidad integral* y *causalidad derivativa*, respectivamente.

Note que cuando  $f$  es la entrada de  $-C$ ,  $e$  es dado por la función de la integral en el tiempo de  $f$ , pero cuando  $e$  es la entrada,  $f$  es la derivada en el tiempo de  $e$ .

La correspondencia entre estas ecuaciones causales y la notación del trazo causal para la capacitancia es mostrada en el cuarto renglón de la Tabla 2.5.

Dado que la inercia es el dual del capacitor, ocurren efectos similares con las dos elecciones de causalidad. Reescribiendo la relación del elemento de inercia de la Tabla 2.5, se tiene que:

$$\begin{aligned} f &= \Phi_I^{-1} \left( \int^t e dt \right) \\ e &= \frac{d}{dt} [\Phi_I(f)] \end{aligned} \quad (2.18)$$

En este caso, la causalidad integral existe cuando  $e$  es la entrada a la inercia y la causalidad derivativa existe cuando  $f$  es la entrada. Estas observaciones son resumidas en el quinto renglón de la Tabla 2.5.

### 2.4.2 Causalidad para puertos-2 y puertos- $n$

Procediendo ahora para los puertos-2 básicos, se puede pensar inicialmente que habría un total de cuatro posibilidades para la asignación de causalidad en un transformador, las dos posibles combinaciones de causalidad para los dos puertos. Sin embargo, existen sólo dos asignaciones de causalidad posibles, tal y como las relaciones definidas en las ecuaciones (2.9) y (2.10) lo muestran.

Tan pronto como uno de los esfuerzos o flujos haya sido asignado como una entrada al  $-TF-$ , el otro esfuerzo o flujo es forzado a ser una salida debido a (2.9). Así, de hecho, las únicas dos posibilidades para elegir la causalidad de un transformador son  $\vdash TF \vdash$  y  $\dashv TF \dashv$ . Las posibles

causalidades son tabuladas en el primer renglón de la Tabla 2.6 (se simplifica el nombre de los esfuerzos o flujos para sólo mostrar el número del enlace).

Para el girador, la ecuación (2.10) muestra que tan pronto como la causalidad de un enlace sea determinada, automáticamente se determina para el otro enlace. Así, las únicas causalidades permitidas para  $-GY-$  son  $\neg GY \vdash$  y  $\vdash GY \neg$ . Las elecciones de causalidad para el girador están resumidas en el segundo renglón de la Tabla 2.6.

**Tabla 2.6:** Formas causales para puertos-2 y puertos- $n$ .

| Elemento      | Forma acausal                                                                                  | Forma causal                                                                                   | Relación causal                                                                      |
|---------------|------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------|
| Transformador | $\xrightarrow{1} TF \xrightarrow{2}$                                                           | $\xrightarrow{1} TF \xrightarrow{2}$<br>$\xrightarrow{1} TF \xrightarrow{2}$                   | $e_1 = m e_2; \quad f_2 = m f_1$<br>$f_1 = \frac{f_2}{m}; \quad e_2 = \frac{e_1}{m}$ |
| Girador       | $\xrightarrow{1} GY \xrightarrow{2}$                                                           | $\xrightarrow{1} GY \xrightarrow{2}$<br>$\xrightarrow{1} GY \xrightarrow{2}$                   | $e_1 = r f_2; \quad e_2 = r f_1$<br>$f_1 = \frac{e_2}{r}; \quad f_2 = \frac{e_1}{r}$ |
| Empalme $-0$  | $\xrightarrow{1} 0 \xrightarrow{2}$<br>$\quad \quad \quad \downarrow$<br>$\quad \quad \quad 3$ | $\xrightarrow{1} 0 \xrightarrow{2}$<br>$\quad \quad \quad \downarrow$<br>$\quad \quad \quad 3$ | $e_1 = e_2 = e_3$<br>$f_1 = -(f_2 + f_3)$                                            |
| Empalme $-1$  | $\xrightarrow{1} 1 \xrightarrow{2}$<br>$\quad \quad \quad \downarrow$<br>$\quad \quad \quad 3$ | $\xrightarrow{1} 1 \xrightarrow{2}$<br>$\quad \quad \quad \downarrow$<br>$\quad \quad \quad 3$ | $f_1 = f_2 = f_3$<br>$e_1 = -(e_2 + e_3)$                                            |

Las propiedades causales para los puertos- $n$  son de alguna manera similares a los puertos-2. Aunque cada enlace de los puertos- $n$  se considera individualmente y podría tener dos posibles causalidades, no todas las combinaciones están permitidas.

Por ejemplo, la relación para los empalmes  $-0$ , dada en la Tabla 2.6 indica que todos los esfuerzos en todos los enlaces son iguales y que la suma de los flujos es igual a cero. Así, si en cualquier enlace el esfuerzo es una entrada a la unión  $-0$ , los esfuerzos de los enlaces restantes deben ser salidas de dicha unión.

De manera inversa, si el flujo en todos los enlaces, excepto en uno son entradas a la unión  $-0$ , el flujo en el enlace restante debe ser una salida de la unión. Una causalidad típica permisible para las uniones  $-0$  es mostrada en el tercer renglón de la Tabla 2.6. Aquí, el trazo causal al final del enlace 1, cerca del 0 indica que  $e_1$  es una entrada de la unión y que los otros enlaces deben tener su trazo causal en el extremo más alejado del 0.

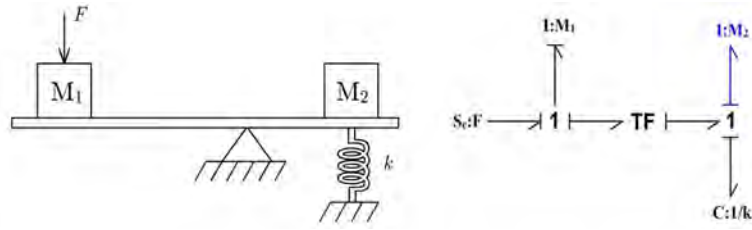
Para una unión  $-1$  se aplican las mismas consideraciones que para las uniones  $-0$ , excepto que los roles de esfuerzo y flujo se intercambian.



De esta manera, si el flujo en cualquier enlace es una entrada a la unión  $-1$ , los flujos restantes son considerados como salidas de la unión. Por otro lado, cuando los esfuerzos de todos los enlaces, excepto en uno son entradas a la unión  $-1$ , y el esfuerzo restante debe ser una salida de la unión. Una causalidad típica permitida es mostrada en el cuarto renglón de la Tabla 2.6.

### 2.4.3 Causalidad derivativa

La causalidad derivativa se presenta cuando un sistema contiene elementos de almacenamiento de energía que no son dinámicamente independientes, en una asignación de causalidad integral predefinida. El Bond Graph presentado en la Figura 2.40 debe tener un elemento  $-I$  obligatoriamente en causalidad derivativa, es decir  $I : M_2$  tal y como se muestra en dicha figura es afectado por la causalidad de  $I : M_1$ .



**Figura 2.40:** Esquema mecánico con una causalidad derivativa.

En particular debe observarse que la causalidad derivativa de un elemento almacenador de energía proporciona propiedades importantes. Así, el número de elementos que almacenan energía en causalidad integral es el número de ecuaciones diferenciales linealmente independientes y el número de elementos almacenadores en causalidad derivativa es el número de ecuaciones diferenciales linealmente dependientes.

### 2.4.4 Asignación de la causalidad a un diagrama de Bond Graph

Una vez que se ha obtenido el diagrama, se procede a describir los pasos necesarios para colocar el trazo causal a cada elemento del sistema [19]. Considere la información contenida en la Tabla 2.6.

#### Procedimiento 2.4

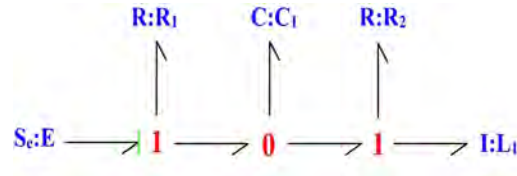
1. Considerar cualquier fuente ( $S_e-$  o  $S_f-$ ) y asignar su *causalidad requerida*, inmediatamente extender las implicaciones causales a través del diagrama, tanto como sea posible, usando las

- restricciones para los elementos  $-0$ ,  $-1$ ,  $-TF-$  y  $-GY-$ . Repetir esto para cada fuente en el diagrama.
2. Escoger algún elemento de almacenamiento ( $-C$  o  $-I$ ) y asignarle una *causalidad preferentemente integral*, cuando en el sistema se tienen todas las causalidades integrales se dice que es un Bond Graph Integral (*BGI*). Nuevamente extender las implicaciones causales por el diagrama. Hacer esto para cada uno de los elementos de almacenamiento.
  3. Escoger cualquier elemento y darle una *causalidad arbitraria*. Extender las implicaciones causales. Se repite este paso para cada elemento  $\rightarrow R$ .

Se dice que un Bond Graph es causalmente correcto, cuando no existe conflicto de causalidad entre los elementos y cuando no tiene causalidad asignada se dice que es *acausal*.

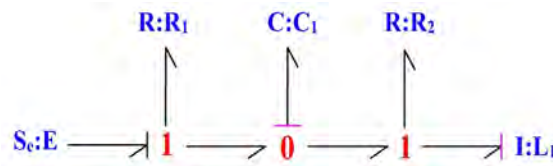
### Ejemplo 2.4

Se asigna la causalidad al sistema eléctrico del Ejemplo 2.1 mostrado en la Figura 2.28. Aplicando el primer paso del Procedimiento 2.4, se procede a dibujar el trazo causal en el enlace que emana de la fuente de esfuerzo, esto se observa en la Figura 2.41.



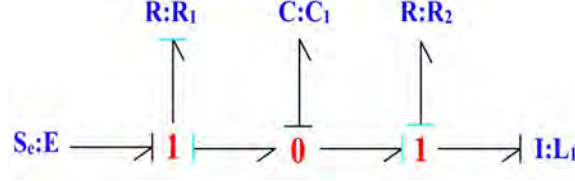
**Figura 2.41:** Primer paso de la asignación de causalidad.

Enseguida se asigna la causalidad a los elementos almacenadores, preferentemente una causalidad integral, según lo describe el segundo paso. Tal acción es mostrada en la Figura 2.42.



**Figura 2.42:** Segundo paso para la asignación de causalidad.

Una vez hecho el segundo paso, ahora se pueden hacer implicaciones, siguiendo las reglas mostradas en la Tabla 2.6. El efecto de dichas implicaciones se puede apreciar en la Figura 2.43.

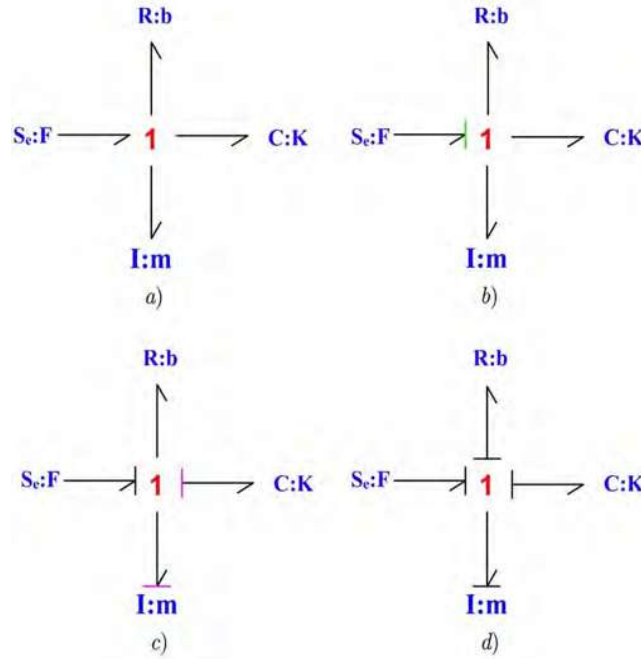


**Figura 2.43:** Implicaciones para asignar causalidad.

Tras aplicar las implicaciones, finalmente el diagrama ya con su causalidad incluida queda terminado.

### Ejemplo 2.5

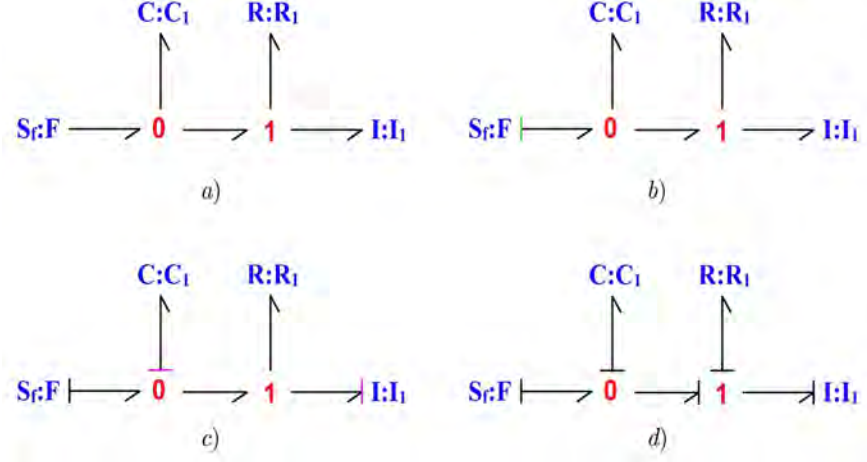
Para el sistema mecánico de la Figura 2.33 se aplica el procedimiento para asignar la causalidad, tal acción es mostrada en la Figura 2.44.



**Figura 2.44:** Asignación de causalidad para un sistema mecánico. a) Sistema acausal; b) primer paso; c) segundo paso; d) sistema con su causalidad asignada.

### Ejemplo 2.6

En la Figura 2.45 se muestran los pasos para asignar la causalidad del sistema hidráulico de la Figura 2.37.



**Figura 2.45:** Asignación de causalidad para un sistema hidráulico. a) Sistema acausal; b) primer paso; c) segundo paso; d) sistema con su causalidad asignada.

La aplicación adecuada de este procedimiento es fundamental para el modelado en Bond Graphs. Si existen errores de causalidad se tendrá un modelo equivocado del sistema, ya que se estarían violando las leyes de la conservación de la energía.

### 2.4.5 Trayectorias causales

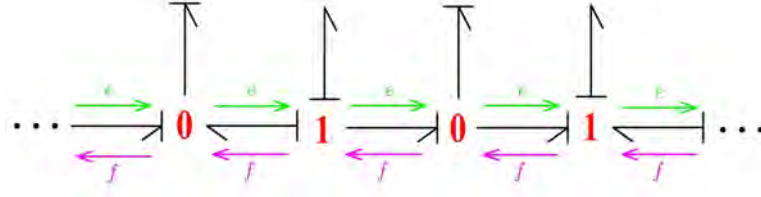
Un Bond Graph no solamente muestra una estructura topológica de un sistema sino también su organización causal, ya que indica las relaciones causa-efecto. Esta estructura causal da la noción de *trayectorias causales* [25].

Una trayectoria causal es una secuencia alternante de bonds y nodos tal que:

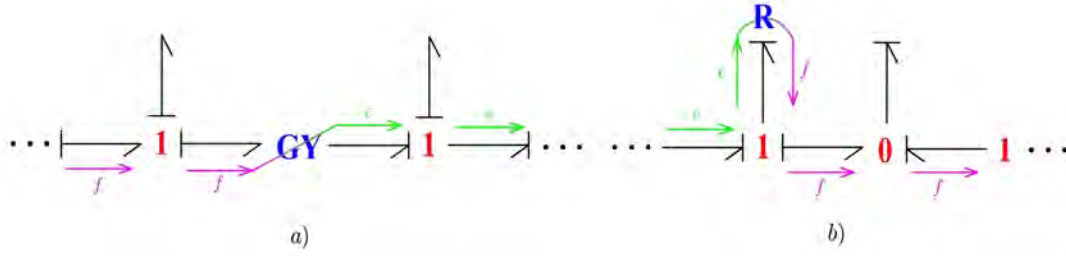
- Para una gráfica acausal, la secuencia forma una cadena sencilla.
- Todos los nodos en la secuencia tienen una causalidad completa y correcta.
- Dos bonds de una trayectoria causal tienen orientaciones causales opuestas en el mismo nodo.

**Definición 2.1** Una *trayectoria causal es simple*, si a través de la misma sigue solamente una misma variable, tal como se muestra en la Figura 2.46 .

**Definición 2.2** Una *trayectoria causal es mezclada*, si un cambio de variable es requerido a través de la secuencia causal. Si el cambio se debe a la presencia de un  $-GY-$ , la trayectoria causal es llamada *directa* y cuando la trayectoria pasa a través de algún elemento  $-R$ ,  $-C$  o  $-I$  la trayectoria causal es llamada *indirecta*. La Figura 2.47 ilustra estas trayectorias.



**Figura 2.46:** Ejemplo de una trayectoria causal simple



**Figura 2.47:** Trayectoria causal mezclada. a) Girador; b) elemento  $-R$ ,  $-C$  o  $-I$

**Definición 2.3** Dos elementos  $P_1$  y  $P_2$  que pertenezcan al conjunto  $\{-R, -C, -I, S_e-, S_f-\}$  están *causalmente conectados* si la variable de entrada de uno es influenciada por la variable de salida del otro.

**Definición 2.4** Una *trayectoria directa* es una trayectoria causal entre una entrada y un detector.

**Definición 2.5** Una *trayectoria indirecta* es aquella que pasa a través de elementos  $-R$ ,  $-C$  o  $-I$ .

**Definición 2.6** Un *lazo causal* es una trayectoria causal sencillalla cerrada.

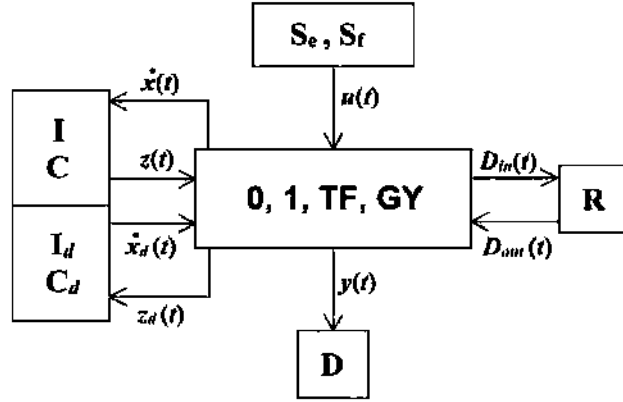
Es de suma importancia considerar lo descrito en esta sección, puesto que en capítulos posteriores será necesario aplicar las definiciones antes mencionados.

## 2.5 Estructuras de unión en sistemas multipuerto

Para Bond Graph, al considerar algunos tipos de sistemas grandes como campos interconectados, se obtiene una estructura dinámica y entonces la generación, manipulación y reducción de las ecuaciones es realizada sistemáticamente. En las siguientes secciones se dan las bases para obtener las ecuaciones de estado de un sistema modelado en Bond Graph.

### 2.5.1 Vectores claves

En un Bond Graph en forma convencional, todos los bonds pueden ser clasificados en *bonds externos*, que conectan a los elementos o puertos  $-R$ ,  $-C$ ,  $-I$ ,  $S_e$  y  $S_f$ ; y en *bonds internos* que conectan a uniones  $-0$ ,  $-1$ ,  $-TF$  y  $-GY$ . Así mismo, los bonds externos pueden ser clasificados de acuerdo a su forma de manifestación de energía. En la Figura 2.48 se muestra el diagrama de bloques de la *estructura unión* de un Bond Graph [1].



**Figura 2.48:** Diagrama de bloques de la estructura unión de un Bond Graph.

En la Figura 2.48, las variables  $(S_e, S_f)$  denotan los campos de fuente,  $(I, C, I_d, C_d)$  campos de almacenamiento en causalidad integral y derivativa respectivamente,  $(R)$  es el campo de disipación,  $(D)$  los detectores y  $(0, 1, TF, GY)$  es la estructura unión con transformadores, giradores y uniones  $-0$  y  $-1$ .

Los vectores que representan al sistema son llamados *vectores clave*, donde  $u(t) \in \mathbb{R}^{n_u}$  contiene los esfuerzos y flujos impuestos por los elementos de las fuentes en la estructura unión,  $y(t) \in \mathbb{R}^{n_y}$  contiene las variables de salida del sistema.

Los estados  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  y  $x_d(t) \in \mathbb{R}^{n_d}$  están compuestos de variables de energía, momento generalizado  $p(t)$  en elementos  $-I$  y desplazamiento generalizado  $q(t)$  en elementos  $-C$  en causalidad integral;  $z(t) \in \mathbb{R}^n$  y  $z_d(t) \in \mathbb{R}^{n_d}$  son variables de potencia en causalidad integral y derivativa, respectivamente,  $D_{in}(t) \in \mathbb{R}^{n_r}$  y  $D_{out} \in \mathbb{R}^{n_r}$  son una mezcla de esfuerzos y flujos que muestran los intercambios energéticos entre el campo de disipación y la estructura unión.

Los superíndices  $n$  y  $n_d$  son el número de elementos almacenadores en causalidad integral y derivativa, respectivamente.  $n_u$  es el número de fuentes,  $n_y$  es el numero de detectores y  $n_r$  es el número de elementos disipadores de energía.

### 2.5.2 Relaciones de campo y ecuaciones de estado

Las relaciones de campo no lineales de la Figura 2.48 de almacenamiento y de disipación son:

$$z(t) = \Phi_F(x(t)) \quad (2.19)$$

$$z_d(t) = \Phi_{Fd}(x(t)) \quad (2.20)$$

$$D_{out}(t) = \Phi_L(D_{in}(t)) \quad (2.21)$$

donde:

$\Phi_F$  denota una función que relaciona cada  $z_i$  con  $x_i$  para  $i = 1, \dots, n$ .

$\Phi_{Fd}$  denota una función que relaciona cada  $z_{di}$  con  $x_{di}$  para  $i = 1, \dots, n_d$ .

$\Phi_L$  denota una función que relaciona cada  $D_{outi}$  con  $D_{ini}$  para  $i = 1, \dots, n_r$ .

El comportamiento de un elemento específico está descrito por una ley física la cual es llamada como su *relación constitutiva*. Si las relaciones constitutivas son lineales, se tiene:

$$z(t) = F x(t) \quad (2.22)$$

$$z_d(t) = F_d x_d(t) \quad (2.23)$$

$$D_{out}(t) = L \cdot D_{in}(t) \quad (2.24)$$

donde  $L$ ,  $F$  y  $F_d$  son matrices de  $n_r \times n_r$ ,  $n \times n$  y  $n_d \times n_d$ , respectivamente. Las relaciones de la estructura de unión están dadas por:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ D_{in}(t) \\ y(t) \\ z_d(t) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & 0 \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & 0 \\ S_{41} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\text{Matriz de estructura unión } S} \begin{bmatrix} z(t) \\ D_{out}(t) \\ u(t) \\ \dot{x}_d(t) \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

Los elementos de  $S$  toman valores dentro del conjunto  $\{0, \pm 1, \pm m, \pm r\}$  donde  $m$  y  $r$  son los módulos del transformador y girador. La matriz está particionada de acuerdo a la dimensión de sus vectores clave. La submatrices  $S_{ij}$  tienen las siguientes propiedades, que están basadas en el principio de conservación de la energía [19]:

- Propiedad 1:  $S_{11}$  y  $S_{22}$  son matrices cuadradas antisimétricas.

- Propiedad 2:  $S_{12}$  es la matriz transpuesta negativa de  $S_{21}$  y viceversa. Esta propiedad también puede ser aplicada para el par de submatrices  $S_{14}$  y  $S_{41}$  en caso de que éstas existan.

Un sistema LTI MIMO (*Linear Time-Invariant, Multiple Input Multiple Output*) está representado en variables de estado por:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (2.26)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \quad (2.27)$$

Relacionando las ecuaciones (2.25), (2.26) y (2.27) se obtiene [19]:

$$A = E^{-1} (S_{11} + S_{12}MS_{21}) F \quad (2.28)$$

$$B = E^{-1} (S_{13} + S_{12}MS_{23}) \quad (2.29)$$

$$C = (S_{31} + S_{32}MS_{21}) F \quad (2.30)$$

$$D = S_{33} + S_{32}MS_{23} \quad (2.31)$$

siendo,

$$E = I + S_{14}F_d^{-1}S_{14}^T F \quad (2.32)$$

$$M = L (I - S_{22}L)^{-1} \quad (2.33)$$

donde  $I$  es una matriz identidad de dimensiones apropiadas. Así, las ecuaciones (2.28) a (2.33) permiten la obtención directa del modelo de un sistema físico en variables de estado, utilizando la representación en Bond Graph.

### 2.5.3 Obtención del modelo en espacio de estado desde Bond Graph

A continuación se describe el procedimiento para obtener el modelo en espacio de estado de un sistema.

#### Procedimiento 2.5

1. Numerar cada uno de los enlaces existentes en el modelo.
2. Definir la entrada  $u(t)$  y la salida  $y(t)$ .
3. Llenar el vector  $D_{in}(t)$  con las variables de potencia que entran a cada elemento de disipación (puerto-1 resistor).



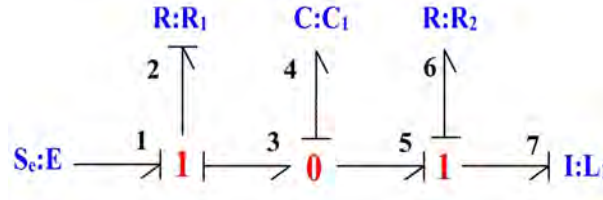
4. Encontrar el vector  $D_{out}(t)$  con las variables de potencia que salen de cada elemento de disipación.
5. Formar los vectores  $x(t)$ ,  $\dot{x}(t)$ ,  $x_d(t)$ ,  $\dot{x}_d(t)$ ,  $z(t)$  y  $z_d(t)$  para los elementos de almacenamiento (puerto-1 capacitor y puerto-1 inercia), de acuerdo a la Tabla 2.7.
6. Completar la matriz de estructura unión.
7. Comprobar las propiedades 1 y 2, si no se cumplen quiere decir que se está violando la ley de la conservación de la energía y se debe volver a plantear el modelo del sistema.
8. Obtener las matrices  $F$ ,  $F_d$  y  $L$ .
9. Obtener las matrices  $E$  y  $M$ .
10. Finalmente obtener las matrices  $A$ ,  $B$ ,  $C$  y  $D$  usando sus respectivas ecuaciones.

**Tabla 2.7:** Tabla guía para completar los vectores generados por los elementos de almacenamiento.

| Elemento | $x(t)$ , $x_d(t)$ | $\dot{x}(t)$ , $\dot{x}_d(t)$ | $z(t)$ , $z_d(t)$ |
|----------|-------------------|-------------------------------|-------------------|
| $I$      | $p$               | $e$                           | $f$               |
| $C$      | $q$               | $f$                           | $e$               |

### Ejemplo 2.7

Una vez obtenido el Bond Graph del sistema eléctrico mostrado en la Figura 2.28, se aplica a continuación el Procedimiento 2.5. El primer paso se puede apreciar en la Figura 2.49.



**Figura 2.49:** Modelo con los enlaces numerados.

Ahora se asignan la entrada y la salida del sistema, como entrada se tiene que  $u(t) = e_1$  y como salida se tiene  $y(t) = f_7$ , los subíndices indican de que enlaces se está hablando. En seguida se completan los vectores  $D_{in}(t)$  y  $D_{out}(t)$ , para esto se puede apreciar en la Figura 2.49 que el esfuerzo  $e_2$  y el flujo  $f_6$  entran hacia los elementos resistivos  $R_1$  y  $R_2$  respectivamente. Por lo tanto:

$$D_{in}(t) = \begin{bmatrix} e_2 \\ f_6 \end{bmatrix}; \quad D_{out}(t) = \begin{bmatrix} f_2 \\ e_6 \end{bmatrix}; \quad (2.34)$$

Como quinto paso, se procede a llenar los vectores  $x(t)$ ,  $\dot{x}(t)$ ,  $x_d(t)$ ,  $\dot{x}_d(t)$ ,  $z(t)$  y  $z_d(t)$  para los elementos de almacenamiento, todo esto usando la información de la Tabla 2.7. En el modelo se tienen dos elementos de almacenamiento, un elemento  $-C$  en el enlace 4 y otro un elemento  $-I$  en el enlace 7, por lo tanto dichos vectores quedan de la siguiente manera:

$$x(t) = \begin{bmatrix} q_4 \\ p_7 \end{bmatrix}; \quad \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} f_4 \\ e_7 \end{bmatrix}; \quad z(t) = \begin{bmatrix} e_4 \\ f_7 \end{bmatrix} \quad (2.35)$$

Introduciendo los vectores de (2.34) y (2.35) en (2.25) y debido a que no se tienen elementos con causalidad derivativa en el Bond Graph, la matriz de estructura unión queda:

$$\begin{bmatrix} f_4 \\ e_7 \\ e_2 \\ f_6 \\ f_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_4 \\ f_7 \\ f_2 \\ e_6 \\ e_1 \end{bmatrix} \quad (2.36)$$

Ahora se procede a completar la matriz de estructura unión usando las reglas de las uniones  $-0$  y  $-1$  para cada uno de los esfuerzos y flujos que se tienen.

$$\begin{aligned} f_4 &= f_3 - f_5 & e_7 &= e_5 - e_6 & e_2 &= e_1 - e_3 & f_6 &= f_5 = f_7 \\ &= f_2 - f_7 & &= e_4 - e_6 & &= e_1 - e_4 & & \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} f_4 \\ e_7 \\ e_2 \\ f_6 \\ f_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_4 \\ f_7 \\ f_2 \\ e_6 \\ e_1 \end{bmatrix} \quad (2.37)$$

De (2.36) y (2.37) se obtiene que:

$$\begin{aligned} S_{11} &= \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; & S_{12} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}; & S_{21} &= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \\ S_{23} &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}; & S_{31} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}; \\ S_{22} &= 0_{2 \times 2}; & S_{32} &= 0_{1 \times 2}; & S_{13} &= 0_{2 \times 1}; & S_{33} &= 0; \end{aligned}$$

Hecho lo anterior, se comprueban las propiedades 1 y 2. Se observa que la matriz  $S_{11}$ , así como la matriz  $S_{22}$  son antisimétricas, también la matriz  $S_{12}$  es la matriz transpuesta negada de  $S_{21}$ , por lo que se puede continuar con el procedimiento.

Se obtienen las matrices  $L$  y  $F$  usando (2.22) y (2.24), así como los vectores apropiados.

$$\begin{aligned} D_{out}(t) &= L D_{in}(t) \\ \begin{bmatrix} f_2 \\ e_6 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} & 0 \\ 0 & R_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_2 \\ f_6 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.38)$$

$$\begin{aligned} z(t) &= F x(t) \\ \begin{bmatrix} e_4 \\ f_7 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{1}{C_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_4 \\ p_7 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.39)$$

Según el noveno paso, se obtiene la matriz  $M$  usando (2.33), ya que no existen elementos en causalidad derivativa, la matriz  $E$  es igual a una matriz identidad de  $n \times n$ .

$$\begin{aligned} M &= L(I - S_{22}L)^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} & 0 \\ 0 & R_2 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - 0_{2 \times 2} L \right)^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} & 0 \\ 0 & R_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.40)$$

Por último, del décimo paso se calculan las matrices  $A$ ,  $B$ ,  $C$  y  $D$  por medio de las ecuaciones (2.28) a (2.31).

$$\begin{aligned} A &= (S_{11} + S_{12}MS_{21})F \\ &= \left( \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} & 0 \\ 0 & R_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \frac{1}{C_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{C_1 R_1} & -\frac{1}{L_1} \\ \frac{1}{C_1} & -\frac{R_2}{L_1} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 B &= S_{13} + S_{12}MS_{23} \\
 &= 0_{2 \times 1} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} & 0 \\ 0 & R_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} \\ 0 \end{bmatrix} \\
 C &= (S_{31} + S_{32}MS_{21})F \\
 &= \left( \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} + 0_{1 \times 2}MS_{21} \right) \begin{bmatrix} \frac{1}{C_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_1} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{L_1} \end{bmatrix} \\
 D &= S_{33} + S_{32}MS_{23} \\
 &= 0 + 0_{1 \times 2}MS_{23} \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

Finalmente, las ecuaciones de estado del sistema eléctrico quedan:

$$\begin{aligned}
 \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\
 \begin{bmatrix} f_4 \\ e_7 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{C_1 R_1} & -\frac{1}{L_1} \\ \frac{1}{C_1} & -\frac{R_2}{L_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_4 \\ p_7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} \\ 0 \end{bmatrix} e_1 \\
 y(t) &= Cx(t) + Du(t) \\
 f_7 &= \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{L_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_4 \\ p_7 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

A lo largo de este capítulo se dieron las bases para modelar en Bond Graph sistemas en diferentes dominios físicos. Se planteó el concepto de causalidad, este concepto es muy importante en la teoría de Bond Graph. Si no se asigna correctamente la causalidad del sistema no se cumplirán las propiedades características de la matriz de estructura unión, y por ende el modelo matemático no será el correcto. Finalmente, se detalló el proceso mediante el cual se puede obtener el modelo matemático del sistema desde el Bond Graph.

En el siguiente capítulo se hace uso de las herramientas vistas anteriormente con la finalidad de modelar sistemas que tienen incertidumbre en sus parámetros.

## Capítulo 3

# Modelado de Incertidumbre Paramétrica con Bond Graphs

### 3.1 Introducción

El conocimiento de los efectos provocados por la incertidumbre paramétrica de un sistema es un punto de estudio muy importante en el control robusto, así como en el modelado. El problema consiste en encontrar condiciones que garanticen el comportamiento apropiado del sistema en presencia de incertidumbre estructurada.

Este capítulo propone la construcción sistemática de las dos formas de ecuaciones de estado encontradas en la literatura para el estudio del problema de robustez en el caso de incertidumbre paramétrica estructurada.

La incertidumbre en un modelo puede ser debida a una mala estimación en la dinámica del sistema, a una identificación no adecuada de los valores paramétricos o a una variación de estos valores debido a los factores ambientales, el tiempo, condiciones de trabajo, etc.

Existen diferentes métodos para estudiar la robustez en presencia de incertidumbre. De acuerdo a la propiedad estudiada y a la metodología utilizada, dos formas de ecuaciones de estado son definidas.

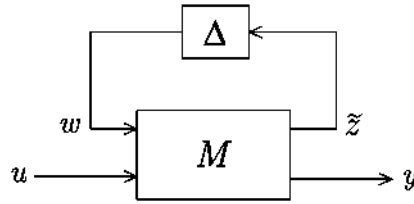
El primer modelo es la *forma canónica* de las ecuaciones de estado para sistemas con

incertidumbre y es denotado como:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= (A_n + \Delta A)x(t) + (B_n + \Delta B)u(t) \\ y(t) &= (C_n + \Delta C)x(t) + (D_n + \Delta D)u(t)\end{aligned}\tag{3.1}$$

con  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  como el vector de estados,  $u(t) \in \mathbb{R}^v$  el vector de entradas,  $y(t) \in \mathbb{R}^m$  el vector de salidas del sistema,  $A_n, B_n, C_n, D_n$  son las matrices que contienen solamente los valores nominales y  $\Delta A, \Delta B, \Delta C, \Delta D$  contienen tanto los valores nominales como los valores de la incertidumbre. Esta forma es el modelo inicial para diferentes trabajos en la literatura [20].

El segundo modelo es el denominado *estructura de interconexión estándar* o *lazo interno de retroalimentación* [21, 22], la incertidumbre paramétrica es separada del modelo nominal, como se muestra en la Figura 3.1.



**Figura 3.1:** Modelo de interconexión estándar.

Este modelo es la forma base para los métodos  $\mu$ -análisis y  $\mu$ -síntesis, los cuales usan la Transformación Lineal Fraccionaria (*LFT*).  $M$  es la matriz de interconexión y  $\Delta$  la matriz de incertidumbre. La estructura de interconexión genera la siguientes ecuaciones estado:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A_n x(t) + B_{1n} u(t) + B_2 w(t) \\ y(t) &= C_{1n} x(t) + D_{11n} u(t) + D_{12} w(t) \\ \tilde{z}(t) &= C_2 x(t) + D_{21} u(t) + D_{22} w(t)\end{aligned}\tag{3.2}$$

donde  $w \in \mathbb{R}^l$  es el vector de entrada auxiliar,  $\tilde{z} \in \mathbb{R}^l$  el vector de salida auxiliar,  $w = \Delta \tilde{z}$  con  $\Delta = \text{diag}(\delta_i I_{q_i})$  y  $\delta_i$  es el  $i$ -ésimo parámetro con incertidumbre. La definición de los vectores  $\tilde{z}$  y  $w$  no es simple, principalmente porque la matriz  $\Delta$  tiene que ser diagonal. Para el modelo de interconexión estándar, las matrices con subíndices  $n$  son las matrices nominales del sistema.

En esta tesis, se considera solamente el caso de incertidumbre paramétrica estructurada con características lineales. Sólo la incertidumbre en los parámetros  $-R$ ,  $-C$ ,  $-I$ ,  $-TF-$  y  $-GY-$  será considerada.

## 3.2 Construcción del modelo en su forma canónica

Se considera para este modelo incertidumbre aditiva,  $\Delta\theta_i$  sobre los parámetros  $\theta_i$  para  $i = 1, \dots, q$ , siendo que  $\theta_i = \theta_{in} + \Delta\theta_i$ , donde  $\theta_{in}$  es el valor nominal del parámetro. La incertidumbre es representada sobre el modelo en Bond Graph agregando elementos físicos, a este Bond Graph se le denomina *Bond Graph con Incertidumbre* (UBG, *Uncertainty Bond Graph*), de este modo cada elemento ésta dividido en una parte nominal y otra con incertidumbre [15].

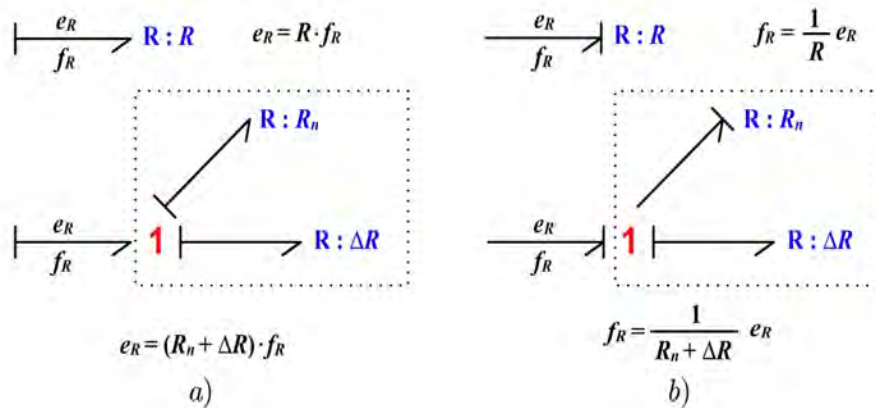
Debe tomarse en cuenta que determinado tipo de incertidumbre no cambian el orden del sistema y los elementos nominales mantienen su causalidad cuando se adhiere el elemento de incertidumbre.

### 3.2.1 Incertidumbre como componente físico

#### 3.2.1.1 Elemento $-R$

La impedancia del elemento  $-R$  es  $Z_R = \frac{e_R}{f_R} = R = R_n + \Delta R$ . Esta expresión corresponde a dos elementos  $-R$  conectados a una unión  $-1$ . Un elemento  $-R$  lineal puede tener dos posibles causalidades de acuerdo a dos leyes diferentes, tal y como se muestra en la Figura 3.2. Para un elemento  $R : \Delta R$  sólo dos acoplamientos causales pueden suceder:

- La misma conexión causal asociada al elemento nominal  $R : R_n$ , caso a) de la Figura 3.2.
- La conexión causal sólo es asociada al elemento nominal  $R : R_n$ , caso b) de la Figura 3.2.

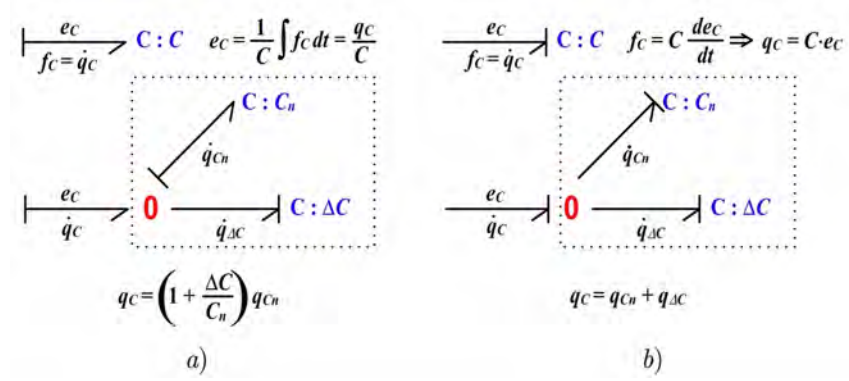


**Figura 3.2:** Incertidumbre en el elemento  $-R$  con causalidad asignada.

Lo anterior impondrá algunas condiciones en la estructura de las ecuaciones correspondientes como se explica más adelante.

### 3.2.1.2 Elemento $-C$

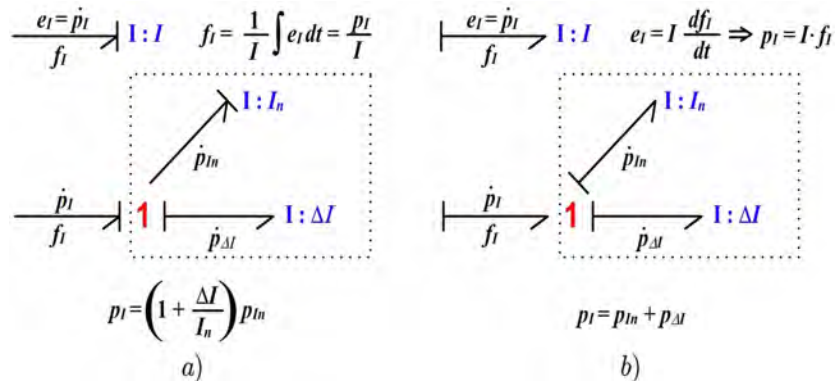
La impedancia para un elemento  $-C$  es  $Z_C = \frac{e_C(s)}{f_C(s)} = \frac{1}{(C_n + \Delta C)s}$ . Esta expresión corresponde a dos elementos  $-C$  conectados a una unión  $-0$ . Un elemento  $-C$  puede tener dos asignaciones de causalidad, siendo la forma integral o derivativa de su ley característica, lo anterior se aprecia en la Figura 3.3.



**Figura 3.3:** Incertidumbre en el elemento  $-C$  con causalidad asignada. a) Integral; b) derivativa.

### 3.2.1.3 Elemento $-I$

La impedancia para el elemento  $-I$  esta dada por  $Z_I = \frac{e_I(s)}{f_I(s)} = (I_n + \Delta I)s$ . Esta expresión corresponde a dos elementos  $-I$  conectados a una unión  $-1$ . El elemento  $-I$  puede tener causalidad integral o causalidad derivativa, como se observa en la Figura 3.4.



**Figura 3.4:** Incertidumbre en el elemento  $-I$  con causalidad asignada. a) Integral; b) derivativa.

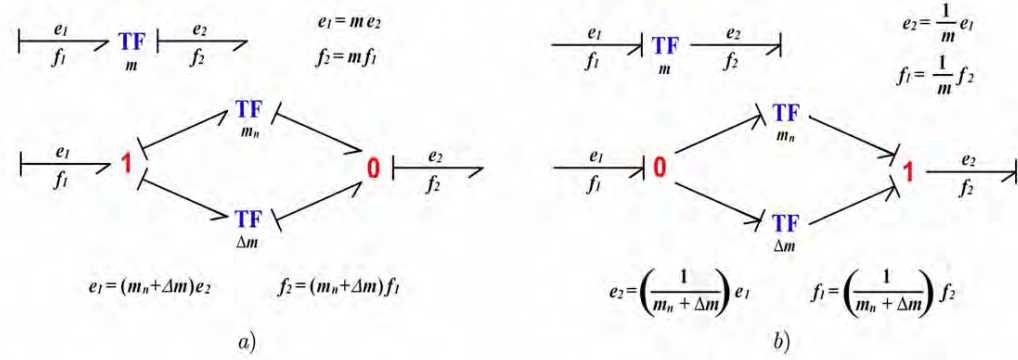
Igual que para el elemento  $R : \Delta R$ , sólo dos casos pueden ocurrir con el acoplamiento causal de  $C : \Delta C$  y  $I : \Delta I$ .



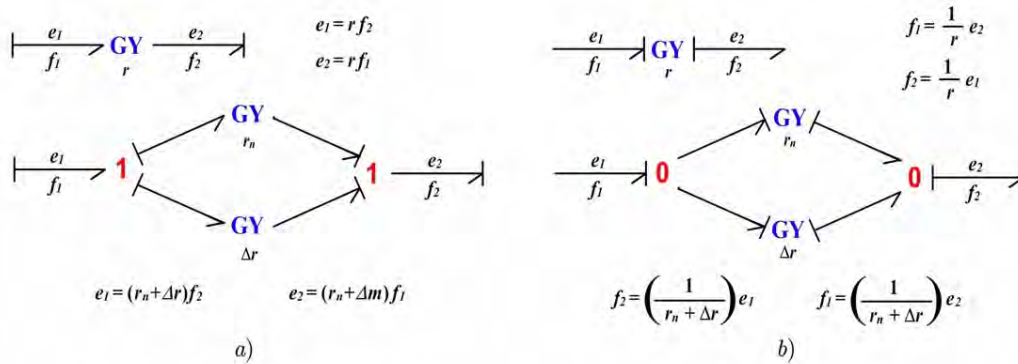
- Están conectados causalmente sólo con sus elementos nominales asociados,  $I : I_n$  y  $C : C_n$  cuando tienen causalidad integral, como se aprecia en el caso *a*) de las Figuras 3.3 y 3.4.
- Tienen la misma conexión causal que sus elementos nominales asociados,  $I : I_n$  y  $C : C_n$  cuando tienen causalidad derivativa, tal es el caso *b*) de las Figuras 3.3 y 3.4.

### 3.2.1.4 Elementos puerto-2

Estos elementos, como ya se ha dicho anteriormente, están caracterizados por un conjunto de ecuaciones que relacionan las variables de flujo y de esfuerzo. Los elementos nominales del transformador y del girador junto con su respectiva incertidumbre tienen la misma causalidad. Las dos posibles causalidades del transformador y del girador son mostradas en la Figuras 3.5 y 3.6 respectivamente.



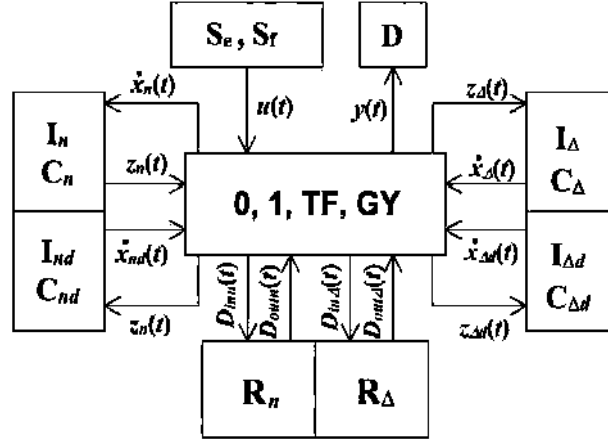
**Figura 3.5:** Incertidumbre en el Transformador con sus dos posibles causalidades.



**Figura 3.6:** Incertidumbre en el Girador con sus dos posibles causalidades.

### 3.2.2 Determinación de las ecuaciones de estado

En la Figura 3.7 se muestra el diagrama de bloques propuesto para la estructura unión del *Bond Graph con incertidumbre*, dicha estructura contiene incertidumbre paramétrica tanto para los elementos de almacenamiento con causalidad integral o derivativa como para los elementos disipativos.



**Figura 3.7:** Diagrama de bloques de la estructura unión para el modelo en la forma canónica.

Los diferentes vectores clave de este diagrama de bloques son:

- $D_{inn}$  y  $D_{outn}$  contienen las variables de esfuerzo y flujo que entran o salen de los elementos  $R : R_n$ , siendo su relación constitutiva la mostrada en la ecuación (3.3).

$$D_{outn}(t) = L_n D_{inn}(t) \quad (3.3)$$

donde  $L_n$  es una matriz diagonal compuesta de  $R_{in}$  ó  $\frac{1}{R_{jn}}$ .

- $D_{in\Delta}$  y  $D_{out\Delta}$  contienen las variables de esfuerzo y flujo que entran o salen de los elementos  $R : \Delta R$ , con la relación constitutiva:

$$D_{out\Delta}(t) = L_{\Delta} D_{in\Delta}(t) \quad (3.4)$$

donde  $L_{\Delta}$  es una matriz diagonal compuesta de  $\Delta R_i$  ó  $\frac{1}{\Delta R_j}$ .

- $x_n$  es el vector de estados asociado a los elementos nominales  $I : I_n$  y  $C : C_n$  con causalidad integral,  $z_n$  es el vector complementario compuesto de variables de esfuerzo o flujo, tal que su relación constitutiva es:

$$z_n(t) = F_n x_n(t) \quad (3.5)$$

donde  $F_n$  es una matriz diagonal compuesta de  $\frac{1}{I_{in}}$ ,  $i = 1, \dots, N_I$  y  $\frac{1}{C_{jn}}$ ,  $j = 1, \dots, N_C$ , siendo  $N_I$  y  $N_C$  el número de elementos  $-I$  ó  $-C$  con causalidad integral.

- $x_{nd}$  es el vector de estados asociado a los elementos nominales  $I : I_{nd}$  y  $C : C_{nd}$  con causalidad derivativa,  $z_{nd}$  es el vector complementario compuesto de variables de esfuerzo o flujo, donde la relación constitutiva es:

$$z_{nd}(t) = F_{nd} x_{nd}(t) \quad (3.6)$$

donde  $F_{nd}$  es una matriz diagonal compuesta de  $\frac{1}{I_{ind}}$ ,  $i = 1, \dots, N_{Id}$  y  $\frac{1}{C_{jnd}}$ ,  $j = 1, \dots, N_{Cd}$ , siendo  $N_{Id}$  y  $N_{Cd}$  el numero de elementos  $-I$  ó  $-C$  con causalidad derivativa.

- $x_{\Delta}$  es el vector de estados asociado a los elementos con incertidumbre  $I : \Delta I$  y  $C : \Delta C$ , estos elementos siempre tienen causalidad derivativa,  $z_{\Delta}$  es el vector complementario compuesto de variables de esfuerzo o flujo, en (3.7) se muestra su relación constitutiva.

$$z_{\Delta}(t) = F_{\Delta} x_{\Delta}(t) \quad (3.7)$$

donde  $F_{\Delta}$  es una matriz diagonal compuesta de  $\frac{1}{\Delta I_i}$ ,  $i = 1, \dots, N_{\Delta I}$  y  $\frac{1}{\Delta C_j}$ ,  $j = 1, \dots, N_{\Delta C}$ , siendo  $N_{\Delta I}$  y  $N_{\Delta C}$  el número de elementos  $-I$  ó  $-C$  con incertidumbre.

- $x_{\Delta d}$  es el vector de estados asociado a los elementos en causalidad derivativa con incertidumbre  $I : \Delta I_d$  y  $C : \Delta C_d$ ,  $z_{\Delta d}$  es el vector complementario compuesto de variables de esfuerzo o flujo, la ecuación (3.8) muestra tal relación constitutiva.

$$z_{\Delta d}(t) = F_{\Delta d} x_{\Delta d}(t) \quad (3.8)$$

donde  $F_{\Delta d}$  es una matriz diagonal compuesta de  $\frac{1}{\Delta I_{di}}$ ,  $i = 1, \dots, N_{\Delta Id}$  y  $\frac{1}{\Delta C_{dj}}$ ,  $j = 1, \dots, N_{\Delta Cd}$ , siendo  $N_{\Delta Id}$  y  $N_{\Delta Cd}$  el numero de elementos  $-I$  ó  $-C$  con incertidumbre.

La matriz de estructura unión del diagrama de bloques tiene la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_n(t) \\ D_{inn}(t) \\ y(t) \\ z_{nd}(t) \\ z_{\Delta}(t) \\ D_{in\Delta}(t) \\ z_{\Delta d}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & S_{15} & S_{16} & S_{17} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & S_{26} & 0 \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & 0 & 0 & S_{36} & 0 \\ S_{41} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ S_{51} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ S_{61} & S_{62} & S_{63} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ S_{71} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_n(t) \\ D_{outn}(t) \\ u(t) \\ \dot{x}_{nd}(t) \\ \dot{x}_{\Delta}(t) \\ D_{out\Delta}(t) \\ \dot{x}_{\Delta d}(t) \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

La matriz de estructura unión de (3.9) conserva las mismas dos propiedades de la matriz de estructura unión de la ecuación (2.25), gracias a que los primeros cuatro renglones y columnas de (3.9) están acomodados de igual manera que en la matriz (2.25). Además se tienen las siguientes propiedades que obedecen al principio de conservación de la energía:

- Sólo existe una conexión causal entre  $I : I_n$  y su incertidumbre asociada  $I : \Delta I$  o  $C : C_n$  y su asociado  $C : \Delta C$  cuando los elementos nominales están en causalidad integral, razón por la cual  $S_{51} = -S_{15}^T$ .
- Cuando existe incertidumbre en los elementos disipativos pueden existir trayectorias causales desde elementos en causalidad integral, otros elementos disipativos y de las entradas del sistema, por lo que  $S_{61} = S_{16}^T$ ,  $S_{62} = -S_{26}^T$ ,  $S_{63} = -S_{36}^T$ .
- Cuando existe incertidumbre en elementos con causalidad derivativa, el elemento que modela a la incertidumbre también está en causalidad derivativa, de este modo existen las mismas trayectorias causales para ambos, así que  $S_{71} = -S_{17}^T$ .
- En el caso de incertidumbre en los módulos de los transformadores o giradores, todas las matrices  $S_{ij}$  serán escritas como  $S_{ij} = S_{ijn} + \Delta S_{ij}$ .

Una vez que se ha planteado la matriz de estructura unión es necesario encontrar las ecuaciones de estado del sistema. Al expandir (3.9) se tiene que:

$$\begin{aligned} \dot{x}_n(t) = & S_{11}z_n(t) + S_{12}D_{outn}(t) + S_{13}u(t) + S_{14}\dot{x}_{nd}(t) \\ & + S_{15}\dot{x}_\Delta(t) + S_{16}D_{out\Delta}(t) + S_{17}\dot{x}_{\Delta d}(t) \end{aligned} \quad (3.10a)$$

$$D_{inn}(t) = S_{21}z_n(t) + S_{22}D_{outn}(t) + S_{23}u(t) + S_{26}D_{out\Delta}(t) \quad (3.10b)$$

$$D_{in\Delta}(t) = S_{61}z_n(t) + S_{62}D_{outn}(t) + S_{63}u(t) \quad (3.10c)$$

Sustituyendo (3.10b) y (3.10c) en (3.10a) y considerando (3.3) hasta (3.8), se pueden obtener las ecuaciones de estado del sistema en su forma nominal [15, 11], dado por:

$$\begin{aligned} \dot{x}_n(t) = & E^{-1} (A_1 + A_2) x_n(t) + E^{-1} (B_1 + B_2) u(t) \\ y(t) = & (C_1 + C_2) x_n(t) + (D_1 + D_2) u(t) \end{aligned} \quad (3.11)$$

La existencia de  $E$  depende de los elementos en causalidad derivativa, ante la posibilidad de encontrar tres diferentes grupos de elementos con causalidad derivativa,  $E$  se puede expresar

como:

$$E = E_d + E_\Delta + E_{\Delta d} \quad (3.12)$$

donde:

$$E_d = I + S_{14}F_{nd}^{-1}S_{14}^T F_n$$

y su existencia está determinada por los elementos nominales en causalidad derivativa que se encuentren en el sistema. Por otro lado, se tiene:

$$E_\Delta = S_{15}F_\Delta^{-1}S_{15}^T F_n$$

su existencia depende de la incertidumbre paramétrica presentes en los elementos con causalidad integral. Finalmente,

$$E_{\Delta d} = S_{17}F_{\Delta d}^{-1}S_{17}^T F_n$$

el cual existe cuando hay incertidumbre en los elementos nominales con causalidad derivativa.

Las matrices restantes quedan definidas por:

$$\begin{aligned} A_1 &= (S_{11} + S_{12}MS_{21}) F_n \\ A_2 &= (S_{16} + S_{12}MS_{26}) L_\Delta P F_n \end{aligned} \quad (3.13)$$

$$\begin{aligned} B_1 &= (S_{13} + S_{12}MS_{23}) \\ B_2 &= (S_{16} + S_{12}MS_{26}) L_\Delta Q \end{aligned} \quad (3.14)$$

$$\begin{aligned} C_1 &= (S_{31} + S_{32}MS_{21}) F_n \\ C_2 &= (S_{36} + S_{32}MS_{26}) L_\Delta P F_n \end{aligned} \quad (3.15)$$

$$\begin{aligned} D_1 &= (S_{33} + S_{32}MS_{23}) \\ D_2 &= (S_{36} + S_{32}MS_{26}) L_\Delta Q \end{aligned} \quad (3.16)$$

donde:

$$M = L_n (I - S_{22}L_n)^{-1} \quad (3.17)$$

$$P = (I + S_{26}^T M S_{26} L_\Delta)^{-1} (S_{61} - S_{26}^T M S_{21}) \quad (3.18)$$

$$Q = (I + S_{26}^T M S_{26} L_\Delta)^{-1} (S_{63} - S_{26}^T M S_{23}) \quad (3.19)$$

Se denotó que  $x$  es el vector de estados del Bond Graph inicial,  $x \in \mathbb{R}^N$ ,  $N = N_I + N_C$  es el número de elementos  $-I$  o  $-C$  con causalidad integral, y  $x_n$  es el vector de estados nominales en el Bond Graph con incertidumbre,  $x_n \in \mathbb{R}^N$ , entonces  $x$  y  $x_n$  satisfacen la relación:

$$x(t) = T x_n(t) \quad (3.20)$$

donde  $T$  está definida por:

$$T = I + E_\Delta \quad (3.21)$$

La relación (3.20) es sustituida en (3.11), de esta manera las ecuaciones de estado del modelo inicial quedan:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= TE^{-1}(A_1 + A_2)T^{-1}x(t) + TE^{-1}(B_1 + B_2)u(t) \\ y(t) &= (C_1 + C_2)T^{-1}x(t) + (D_1 + D_2)u(t) \end{aligned} \quad (3.22)$$

Así, entonces la ecuación (3.22) puede ser reescrita bajo la forma (3.1) como:

$$\begin{aligned} A_n &= E_d^{-1}A_1 \\ \Delta A &= (TE^{-1}A_1T^{-1} - E_d^{-1}A_1) + (TE^{-1}A_2T^{-1}) \end{aligned} \quad (3.23)$$

$$\begin{aligned} B_n &= E_d^{-1}B_1 \\ \Delta B &= (TE^{-1} - E_d^{-1})B_1 + (TE^{-1})B_2 \end{aligned} \quad (3.24)$$

$$\begin{aligned} C_n &= C_1 \\ \Delta C &= C_1(T^{-1} - I) + C_2T^{-1} \end{aligned} \quad (3.25)$$

$$\begin{aligned} D_n &= D_1 \\ \Delta D &= D_2 \end{aligned} \quad (3.26)$$

### 3.3 Construcción del modelo de la estructura de interconexión estándar

El objetivo de esta sección es proponer una representación en Bond Graph de la incertidumbre paramétrica basándose en el modelo de la estructura de interconexión estándar, para tal motivo se consideran las variaciones de los parámetros como errores multiplicativos. Los bond graphs que se

obtendrán estarán compuestos de una parte con bonds activos asociados a los elementos nominales y una parte con bonds que inyectan una señal que tiene la función de ser una incertidumbre.

### 3.3.1 Modelado de los componentes

#### 3.3.1.1 Elemento $-R$

Las dos posibles situaciones de causalidad en un elemento  $-R$  genera dos modelos de Bond Graph diferentes.

- Causalidad de resistencia: La ley característica de un elemento  $-R$  con causalidad de resistencia sobre un parámetro con incertidumbre puede ser escrita con un error aditivo como:

$$e_R = (R_n + \Delta R) f_R$$

de tal forma que se puede reescribir de la siguiente manera:

$$e_R = R_n (1 + \delta_R) f_R$$

donde:

$$\delta_R = \frac{\Delta R}{R_n}$$

y es denominado *error relativo*. Lo anterior se puede apreciar en la Figura 3.8a.

- Causalidad de conductancia: La ley característica de un elemento  $-R$  con causalidad de conductancia es:

$$f_R = \frac{e_R}{R_n + \Delta R}$$

Introduciendo el error multiplicativo, esta ley puede ser reescrita como:

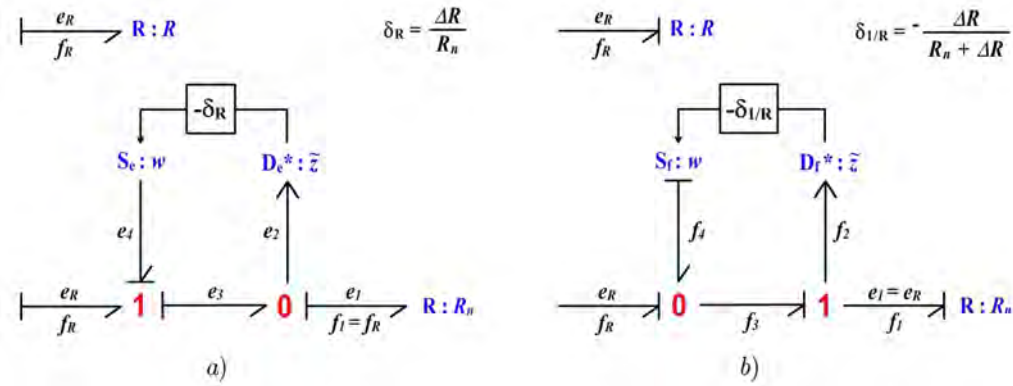
$$f_R = \frac{e_R}{R_n (1 + \delta_{1/R})}$$

con:

$$\delta_{1/R} = -\frac{\Delta R}{R_n + \Delta R}$$

El Bond Graph correspondiente se encuentra en la Figura 3.8 b).

Nótese que los símbolos de  $D_e^*$  y  $D_f^*$  son usados para señalar que no son medidas reales de las variables de salida, dicho de otra manera son sensores virtuales.



**Figura 3.8:** Elemento  $-R$  con incertidumbre multiplicativa. a) Causalidad de resistencia; b) causalidad de conductancia.

### 3.3.1.2 Elemento $-C$

De manera similar al elemento  $-R$ , se tienen dos posibles situaciones de causalidad para este elemento.

- Causalidad integral: En causalidad integral, la ley constitutiva es:

$$e = \frac{1}{C} \int f dt$$

Cuando se introduce el error relativo, la ley característica para la causalidad integral puede ser reescrita como:

$$e = \frac{1}{C_n} (1 + \delta_C) \int f dt$$

con:

$$\delta_C = -\frac{\Delta C}{C_n + \Delta C}$$

El Bond Graph mostrado en la Figura 3.9 a) denota lo anteriormente dicho.

- Causalidad derivativa: Para la causalidad derivativa, la ley constitutiva es:

$$f = C \frac{d}{dt} e$$

Introduciendo el error relativo de dicha ley se puede reescribir como:

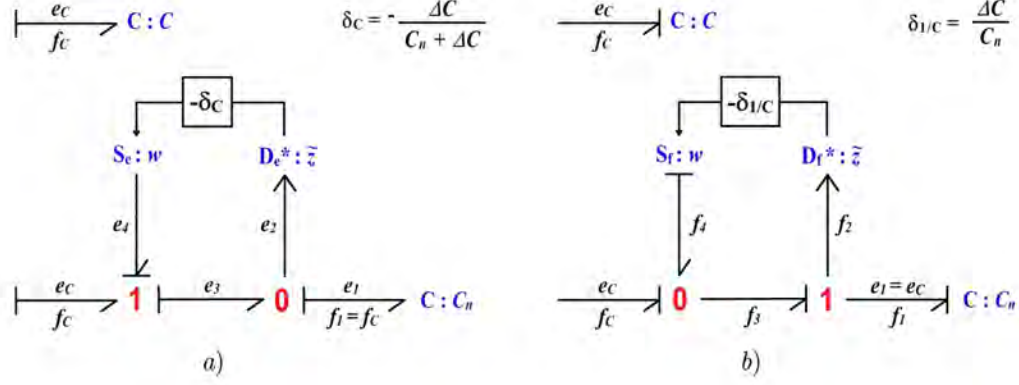
$$f = C (1 + \delta_{1/C}) \frac{d}{dt} e$$

siendo:

$$\delta_{1/C} = \frac{\Delta C}{C_n}$$



En la Figura 3.9 b) se aprecia el Bond Graph correspondiente.



**Figura 3.9:** Elemento  $-C$  con incertidumbre multiplicativa. a) Causalidad integral; b) causalidad derivativa.

### 3.3.1.3 Elemento $-I$

Puesto que el elemento  $-I$  es el dual del elemento  $-C$ , se tienen los mismos dos casos de causalidad.

- Causalidad integral: En causalidad integral, la ley constitutiva está determinada por:

$$f = \frac{1}{I} \int e \, dt$$

Introduciendo el término de error relativo, esta ley puede ser reescrita como:

$$f = \frac{1}{I_n} (1 + \delta_I) \int e \, dt$$

con:

$$\delta_I = -\frac{\Delta I}{I_n + \Delta I}$$

La Figura 3.10 a) muestra el Bond Graph de este elemento.

- Causalidad derivativa: En el caso de la causalidad derivativa, la ley constitutiva es:

$$e = I \frac{d}{dt} f$$

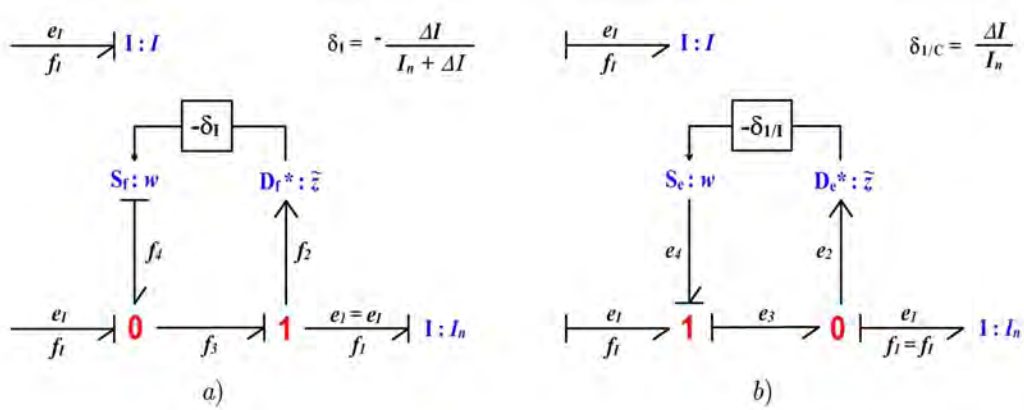
Al introducir el error relativo, la ley se puede reescribir como:

$$e = I (1 + \delta_{1/I}) \frac{d}{dt} f$$

siendo:

$$\delta_{1/I} = \frac{\Delta I}{I_n}$$

En la Figura 3.10 b) se describe el Bond Graph correspondiente.



**Figura 3.10:** Elemento  $-I$  con incertidumbre multiplicativa. a) Causalidad integral; b) causalidad derivativa.

### 3.3.1.4 Elementos puerto-2

Para el caso del transformador y del girador, dos casos de causalidad son permitidos para cada uno. Al introducir los errores relativos en los módulos de los elementos anteriormente mencionados son mostrados en las Figuras 3.11 y 3.12 en a) y b).

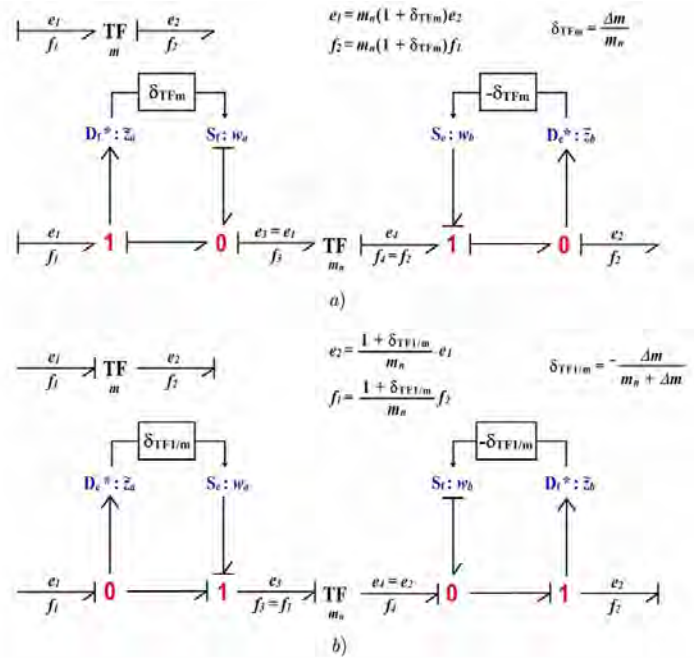
## 3.3.2 Determinación de las ecuaciones de estado

El diagrama de bloques para la interconexión estándar es mostrado en la Figura 3.13, en él se agrega un bloque,  $\Delta$ , el cual contiene la matriz de incertidumbre del sistema.

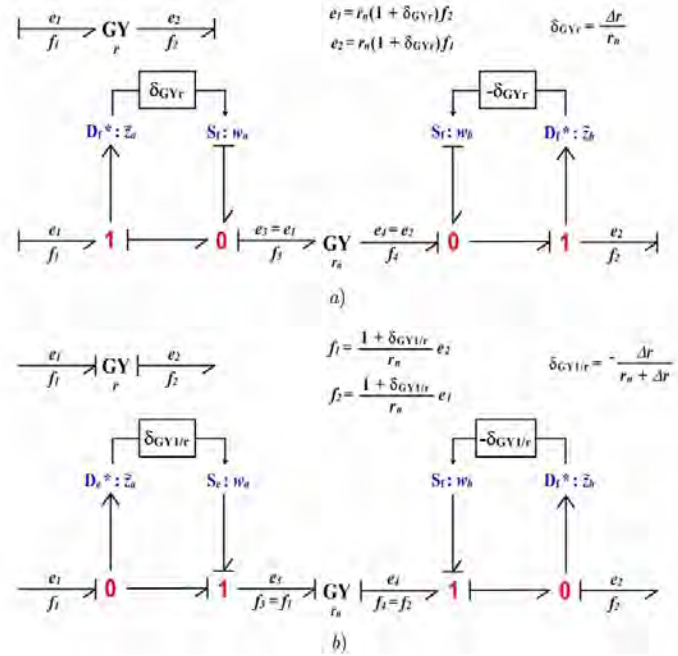
Esta matriz  $\Delta$  es diagonal puesto que la incertidumbre en el sistema es modelada elemento por elemento, la relación de  $\tilde{z}$  y  $w$  es única para cada uno de ellos, es decir que la salida  $\tilde{z}$  de un elemento no puede ser la entrada  $\tilde{w}$  de otro. Por lo que la relación para  $\Delta$  es:

$$w(t) = \Delta \tilde{z}(t) \quad (3.27)$$

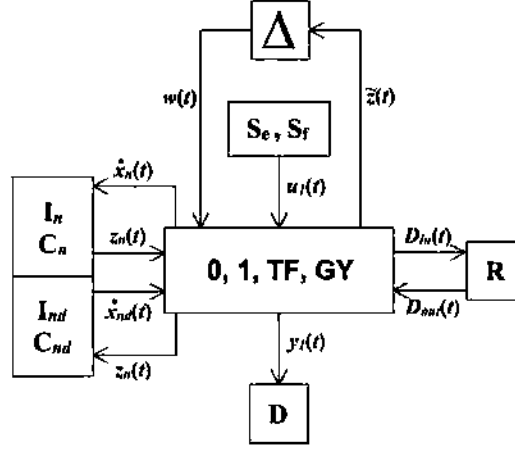
De la Figura 3.13 se puede apreciar que el sistema tiene un par de entradas y un par de salidas, por lo cual el vector de entrada,  $u(t)$ , así como el vector de salida,  $y(t)$ , deben de ser



**Figura 3.11:** Elemento  $-TF-$  con incertidumbre multiplicativa y sus dos causalidades correspondientes.



**Figura 3.12:** Elemento  $-GY-$  con incertidumbre multiplicativa y sus dos causalidades correspondientes.



**Figura 3.13:** Diagrama de bloques de la estructura unión para el modelo de interconexión estándar.

reescritos como:

$$u(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ w(t) \end{bmatrix}; \quad y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ \tilde{z}(t) \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

Por lo que la ecuación de la estructura unión queda:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ D_{in}(t) \\ \begin{bmatrix} y_1(t) \\ \tilde{z}(t) \end{bmatrix} \\ z_d(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & \begin{bmatrix} S_{13}^1 & S_{13}^2 \end{bmatrix} & S_{14} \\ S_{21} & S_{22} & \begin{bmatrix} S_{23}^1 & S_{23}^2 \end{bmatrix} & 0 \\ \begin{bmatrix} S_{31}^1 \\ S_{31}^2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} S_{32}^1 \\ S_{32}^2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} S_{33}^{11} & S_{33}^{12} \\ S_{33}^{21} & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ S_{34}^2 \end{bmatrix} \\ S_{41} & 0 & \begin{bmatrix} 0 & S_{43}^2 \end{bmatrix} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z(t) \\ D_{out}(t) \\ \begin{bmatrix} u_1(t) \\ w(t) \end{bmatrix} \\ \dot{x}_d(t) \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

La matriz de estructura unión para el modelo de interconexión estándar conserva las mismas propiedades de la matriz de estructura unión de (2.25), así como sus relaciones constitutivas. Sin embargo adquiere la siguiente propiedad:

- No existe trayectoria causal entre la entrada  $w(t)$  y la salida  $\tilde{z}(t)$ , por lo que la submatriz  $S_{33}^{22} = 0$ .
- Puede existir una trayectoria causal desde la entrada  $w(t)$  hasta un elemento en causalidad derivativa, por lo que puede existir  $S_{43}^2$ .

De manera similar al modelo canónico se pueden obtener las ecuaciones de estado para la forma de interconexión estándar. Considerando (2.22), (2.23), (2.24) y (3.29) se puede determinar

las ecuaciones de estado bajo la forma de interconexión estándar de (3.2), siendo así:

$$\dot{x}(t) = A_n x(t) + B_{1n} u_1(t) + B_2 w(t) + G_1 \dot{w}(t) \quad (3.30)$$

donde:

$$A_n = E^{-1} (S_{11} + S_{12} M S_{21}) F \quad (3.31)$$

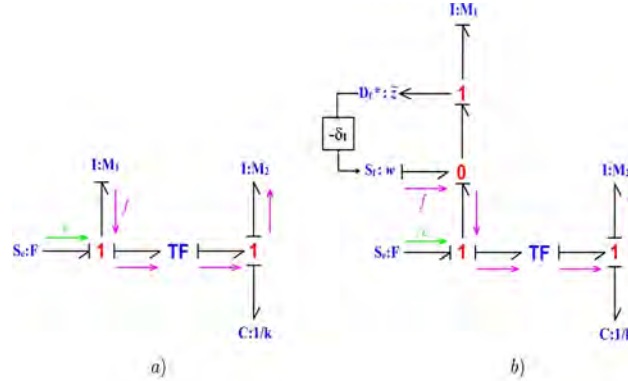
$$B_{1n} = E^{-1} (S_{13}^1 + S_{12} M S_{23}^1) \quad (3.32)$$

$$B_2 = E^{-1} (S_{13}^2 + S_{12} M S_{23}^2) \quad (3.33)$$

$$G_1 = E^{-1} S_{14} F_d^{-1} S_{43}^2 \quad (3.34)$$

además  $M = L(I - S_{22}L)^{-1}$  y  $E = (I + S_{14}F_d^{-1}S_{14}^T F)$  nuevamente está relacionada con la existencia de elementos nominales con causalidad derivativa.

Un caso similar ocurre con  $G_1$ , dado que los elementos en causalidad derivativa dependen de uno o más elementos de almacenamiento en causalidad integral, entonces al existir incertidumbre en estos últimos, las fuentes que son utilizadas para modelar la incertidumbre tienen una trayectoria causal hacia el elemento en causalidad derivativa, por lo cual  $S_{43}^2 \neq 0$ . A continuación se muestra un ejemplo con la finalidad de esclarecer lo anteriormente dicho, considérese la Figura 3.14.



**Figura 3.14:** Trayectoria causales desde una fuente hacia elementos con causalidad derivativa. a) BGI, no existe trayectoria desde  $S_e : F$  hacia  $I : M_2$ ; b) UBG, existe una trayectoria desde  $S_f : w$  hacia  $I : M_2$ .

En la Figura 3.14 a) se aprecia como en un sistema las fuentes de entrada no están conectadas causalmente a los elementos en causalidad derivativa, en la Figura 3.14 b) se observa que al modelar la incertidumbre en el elemento  $I : M_1$ , la fuente de flujo  $S_f : w$  tiene una trayectoria hacia el elemento  $I : M_2$  que está en causalidad derivativa.

Si existe  $G_1$  entonces existe el término  $\dot{w}(t)$  en (3.30), el cual debe ser reescrito de otra manera con la finalidad de que (3.30) y (3.2) tengan la misma forma.

Es sabido que para la interconexión estándar se considera que existe incertidumbre en cuatro tipos de elementos: en los disipadores, en los almacenadores con causalidad integral y derivativa, y finalmente en los transformadores y giradores, en estos dos últimos su incertidumbre se ve reflejada en la matriz de estructura unión, pero para el resto de elementos, su incertidumbre es almacenada en la matriz  $\Delta$ , por lo que es posible reescribir (3.27) de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} w_I(t) \\ w_d(t) \\ w_R(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta_I & 0 & 0 \\ 0 & \Delta_d & 0 \\ 0 & 0 & \Delta_R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{z}_I(t) \\ \tilde{z}_d(t) \\ \tilde{z}_R(t) \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

donde  $\Delta_I$ ,  $\Delta_d$  y  $\Delta_R$  son matrices diagonales que contienen los errores relativos de los elementos en causalidad integral, causalidad derivativa y elementos disipadores, respectivamente.

Puesto que los elementos en causalidad integral son los que afectan a los elementos en causalidad derivativa y gracias a la estructura de  $S_{43}^2$ , se procede a eliminar todas las columnas de  $\Delta$  que contienen elementos derivativos y resistivos, formándose así una denominada *delta reducida*,  $\Delta_r$ . Por lo que (3.35) queda expresada como:

$$w(t) = \Delta_r \tilde{z}_I(t) \quad (3.36)$$

Lo anterior se hace con la finalidad de mantener las apropiadas dimensiones de las matrices involucradas. De las Figuras 3.9 y 3.10 se aprecia que la señal que toma el sensor virtual es igual a la señal de salida del elemento que contiene la incertidumbre, por lo que:

$$\tilde{z}_I(t) = z_r(t) \quad (3.37)$$

donde  $z_r(t)$  es denominado como el vector *z reducida*, obtenido a partir de la eliminación de los renglones de  $z(t)$  que contienen a los flujos o esfuerzos de los elementos en causalidad integral sin incertidumbre, por lo que la relación constitutiva ha cambiado, siendo ahora:

$$z_r(t) = F_r x(t) \quad (3.38)$$

donde  $F_r$  es la matriz *F reducida*, obtenida de igual manera, que  $z_r(t)$ , eliminando los renglones que contienen a los elementos sin incertidumbre.

Entonces sustituyendo (3.36), (3.37) y (3.38) en (3.30) se tiene que:

$$\dot{x}(t) = A_n x(t) + B_{1n} u_1(t) + B_2 w(t) + G_1 \Delta_r F_r \dot{x}(t)$$

finalmente,

$$\dot{x}(t) = \hat{A} x(t) + \hat{B}_1 u_1(t) + \hat{B}_2 w(t) \quad (3.39)$$

donde:

$$\hat{A} = E_z^{-1} A_n \quad (3.40)$$

$$\hat{B}_1 = E_z^{-1} B_{1n} \quad (3.41)$$

$$\hat{B}_2 = E_z^{-1} B_2 \quad (3.42)$$

$$E_z = (I - G_1 \Delta_r F_r) \quad (3.43)$$

Es importante recalcar que la existencia de  $G_1$  provoca que la matriz  $\hat{A}$  no sea igual a la matriz nominal  $A_n$ , debido a la presencia de incertidumbre en  $E_z$ . Si  $G_1 = 0$  entonces  $\hat{A} = A_n$ ,  $\hat{B}_1 = B_{1n}$  y  $\hat{B}_2 = B_2$ .

Ahora considerando de (3.2) la salida, se tiene:

$$y_1(t) = C_{1n} x(t) + D_{11n} u_1(t) + D_{12} w(t) \quad (3.44)$$

siendo:

$$C_{1n} = (S_{31}^1 + S_{32}^1 M S_{21}) F \quad (3.45)$$

$$D_{11n} = (S_{33}^{11} + S_{32}^1 M S_{23}^1) \quad (3.46)$$

$$D_{12} = (S_{33}^{12} + S_{32}^1 M S_{23}^2) \quad (3.47)$$

Para las salidas de los detectores virtuales,

$$\tilde{z}(t) = C_2 x(t) + D_{21} u_1(t) + D_{22} w(t) + G_2 \dot{w}(t) \quad (3.48)$$

donde:

$$C_2 = (S_{31}^2 + S_{32}^2 M S_{21}) F - S_{34}^2 F_d^{-1} S_{14}^T F A_n \quad (3.49)$$

$$D_{21} = (S_{33}^{21} + S_{32}^2 M S_{23}^1 - S_{34}^2 F_d^{-1} S_{14}^T F B_1) \quad (3.50)$$

$$D_{22} = (S_{32}^2 M S_{23}^2 - S_{34}^2 F_d^{-1} S_{14}^T F B_2) \quad (3.51)$$

$$G_2 = S_{34}^2 F_d^{-1} (I - S_{14}^T F E^{-1} S_{14} F_d^{-1}) S_{43}^2 \quad (3.52)$$

El caso de  $G_2$  es similar al de  $G_1$ , al observar la matriz de estructura unión de (3.29) se observa que  $S_{34}^2$  existe cuando hay una incertidumbre presente en los elementos con causalidad derivativa, por lo cual se puede aplicar el criterio hecho para  $G_1$ , así, nuevamente (3.37) se hace válida. Sustituyendo (3.36), (3.37), (3.38) y (3.39) en (3.48):

$$\tilde{z}(t) = C_2 x(t) + D_{21}u_1(t) + D_{22}w(t) + G_2\Delta_r F_r \left( \hat{A}x(t) + \hat{B}_1u_1(t) + \hat{B}_2w(t) \right)$$

finalmente:

$$\tilde{z}(t) = \hat{C}_2 x(t) + \hat{D}_{21}u_1(t) + \hat{D}_{22}w(t) \quad (3.53)$$

donde:

$$\hat{C}_2 = C_2 + G_2\Delta_r F_r \hat{A} \quad (3.54)$$

$$\hat{D}_{21} = D_{21} + G_2\Delta_r F_r \hat{B}_1 \quad (3.55)$$

$$\hat{D}_{22} = D_{22} + G_2\Delta_r F_r \hat{B}_2 \quad (3.56)$$

Quedando así definidas todas las ecuaciones del modelo de interconexión estándar.

## 3.4 Aplicación

En esta sección se desarrollan los procedimientos descritos en los capítulos anteriores para sistemas físicos, en primer lugar se modelan en un lenguaje de Bond Graph, posteriormente son obtenidas las ecuaciones de estado, se agrega incertidumbre paramétrica y se hace el estudio correspondiente para el modelo en su forma canónica, finalmente se hace el modelado de la incertidumbre en la forma de interconexión estándar.

### 3.4.1 Transformador Eléctrico

Los transformadores fueron inventados al final del siglo XIX por dos ingenieros, Lucien Gaulard y John Gibbs. Este invento fue luego desarrollado y mejorado para el transporte de la energía sobre largas distancias. La elevación de la tensión permite reducir las pérdidas por calentamiento en los cables de transporte, dado que se disipa energía en los conductores por la circulación de corriente.

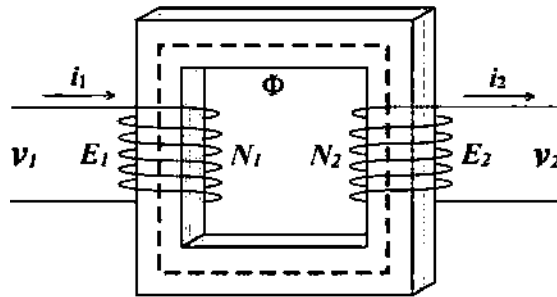
El uso de transformador es únicamente posible en corriente alterna debido a la naturaleza de su funcionamiento. El transformador usa los principios de la inducción electromagnética para transformar la tensión, lo que restringe al uso de tensiones dinámicas.



Un transformador consiste en dos bobinas acopladas por un circuito magnético. El circuito magnético está hecho de un material ferromagnético, actúa como un conductor de las líneas de campo magnético. Sin este material, la casi totalidad del flujo magnético se perdería en el aire, sirve de "canal" por el cual circula el flujo magnético.

En el transformador más común, el núcleo se presenta como laminas de material ferromagnéticos pegadas entre si y aisladas eléctricamente con un tratamiento termo-químico. No se suele usar bloques macizos por una cuestión de perdidas de energía. Las corrientes de Foucault y las pérdidas por histéresis son las principales responsables de estas pérdidas [26].

En la Figura 3.15 se tiene un transformador de tipo núcleo en el cual los devanados están unidos por un circuito magnético circular o cuadrado. Se alimenta la bobina de entrada, llamada *bobina primaria* con una corriente alterna. Como se ha visto anteriormente, las bobinas alimentadas con un corriente alterna producen un flujo magnético que se expresa con la ley de inducción de Faraday,  $E_1 = N_1 \frac{d\Phi}{dt}$ , con  $N_1$  es igual al numero de espiras al primario. Se tiene un signo positivo aquí para satisfacer la ley de Lenz; se tiene una f.e.m (*fuerza contra-electromotriz*) que se opone a la tensión que le ha dado lugar. En la Figura 3.15, la fuerza electromotriz  $E_1$  creada tiene el mismo sentido que la tensión  $V_1$  que le ha dado lugar.



**Figura 3.15:** Transformador de tipo núcleo en el cual un circuito magnético conecta a dos devanados.

El flujo así creado está canalizado por el circuito magnético. Al atravesar la *bobina del secundario* el flujo va a inducir también una tensión alterna acorde con la ley de Faraday,  $E_2 = N_2 \frac{d\Phi}{dt}$ .

El signo positivo viene también de la ley de Lenz, la corriente generada va a crear un flujo que se opone al flujo que le ha dado lugar, esta orientada entonces hacia afuera. La corriente del secundario tiene que aparecer en convención generador para poder proporcionar energía a una carga. La tensión  $V_2$  tiene también el mismo sentido que la f.e.m inducida  $E_2$ .

La relación entre la tensión de entrada y la tensión de salida depende del número de espiras en el primario y el secundario y del flujo generado en el transformador primario.

$$m = \frac{E_1}{E_2} = \frac{V_1}{V_2} = \frac{N_1}{N_2}$$

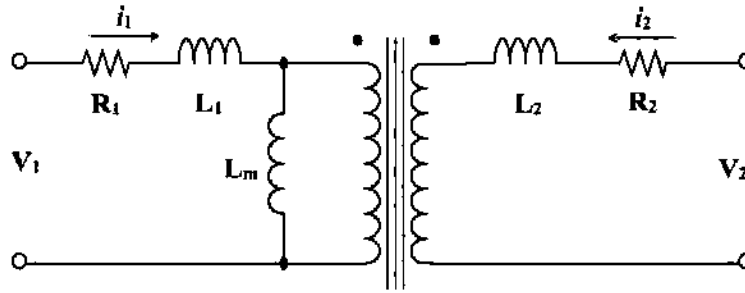
Esta razón se le llama *relación de transformación*. Existen dos tipos de transformadores en función del valor de  $m$ :

- Transformador elevador:  $m < 1$  se tiene que  $V_1 < V_2$ .
- Transformador reductor:  $m > 1$  se tiene que  $V_1 > V_2$ .

En la siguiente sección se describe el modelo y el circuito equivalente de un transformador de dos devanados.

### 3.4.1.1 Modelo en Bond Graph

Charles P. Steinmetz desarrolló el modelo del circuito que es universalmente utilizado para el análisis de transformadores de núcleo de hierro. Considere el modelo de Steinmetz para un transformador monofásico de dos devanados ilustrado en la Figura 3.16.

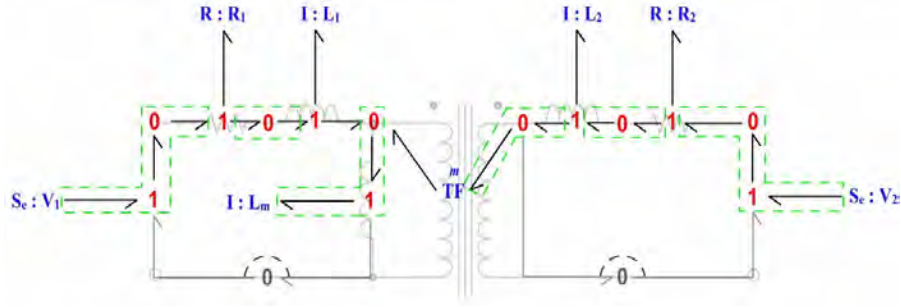


**Figura 3.16:** Diagrama esquemático de un transformador eléctrico monofásico.

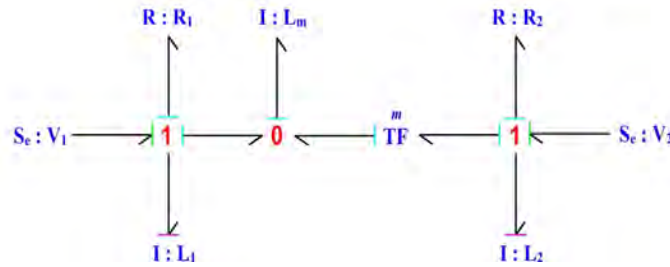
Una vez obtenido el diagrama esquemático se aplican los pasos descritos en el Procedimiento 2.1, esto con la finalidad de convertir el esquema eléctrico a un modelo de Bond Graph.

En la Figura 3.17 se detallan los pasos del procedimiento arriba mencionado.

Una vez obtenido el Bond Graph acausal, se aplica el Procedimiento 2.4 para así asignar la causalidad del sistema. El Bond Graph simplificado así como las causalidades asignadas a los bonds se aprecian en la Figura 3.18.



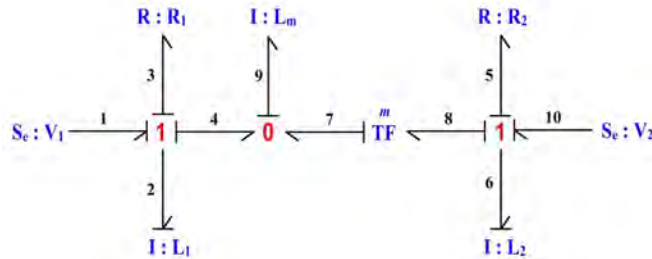
**Figura 3.17:** Procedimiento 2.1 aplicado al transformador eléctrico.



**Figura 3.18:** Asignación de causalidades requeridas, preferentes y arbitrarias.

### 3.4.1.2 Obtención del modelo en espacio de estados

Una vez obtenido el Bond Graph con causalidad, se enumeran los bonds, para su fácil identificación. La Figura 3.19 muestra el Bond Graph del cual se obtendrá las ecuaciones en espacio de estados.



**Figura 3.19:** Transformador eléctrico modelado en Bond Graph.

Hecho lo anterior, se asignan las entradas,  $u(t)$ , y las salidas,  $y(t)$ , a su vez se completan los vectores  $D_{in}(t)$  y  $D_{out}(t)$ . Recordando que los subíndices que acompañan a las variables de potencia y energía indican el bond del que se esta hablando.

Este transformador es de dos devanados, por lo que en el primero se suministrará un voltaje de corriente alterna,  $V_1(t)$ , y por el segundo devanado se demanda un voltaje constante,  $V_2(t)$ , razón por la cual también se modela este voltaje como una entrada. Las salidas que se

considerarán son las corrientes en los devanados, así se tiene que:

$$u(t) = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_{10} \end{bmatrix}; \quad y(t) = \begin{bmatrix} f_2 \\ f_6 \end{bmatrix} \quad (3.57)$$

Es claro que  $f_3$  y  $f_5$  son las entradas a las resistencias  $R_1$  y  $R_2$  respectivamente, entonces:

$$D_{in}(t) = \begin{bmatrix} f_3 \\ f_5 \end{bmatrix}; \quad D_{out}(t) = \begin{bmatrix} e_3 \\ e_5 \end{bmatrix} \quad (3.58)$$

Se observa que se tienen dos elementos dinámicos,  $I : L_1$  e  $I : L_2$ , localizados en el enlace 2 y 6 respectivamente, por lo que:

$$x(t) = \begin{bmatrix} p_2 \\ p_6 \end{bmatrix}; \quad \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} e_2 \\ e_6 \end{bmatrix}; \quad z(t) = \begin{bmatrix} f_2 \\ f_6 \end{bmatrix} \quad (3.59)$$

El par de elementos anteriores se encuentran en causalidad integral, pero el elemento  $I : L_m$  se encuentra en causalidad derivativa, de esta manera surgen los vectores siguientes:

$$x_d(t) = p_9; \quad \dot{x}_d(t) = e_9; \quad z_d(t) = f_9 \quad (3.60)$$

Hecho lo anterior, se acomodan de manera adecuada los vectores de entrada y salida en la ecuación (2.25), con ayuda de (3.57), (3.58), (3.59) y (3.60) se completa la matriz de estructura unión, utilizando la información contenida en el Bond Graph.

$$\begin{bmatrix} e_2 \\ e_6 \\ f_3 \\ f_5 \\ f_2 \\ f_6 \\ f_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & -m \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & m & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_2 \\ f_6 \\ e_3 \\ e_5 \\ e_1 \\ e_{10} \\ e_9 \end{bmatrix} \quad (3.61)$$

De (3.61) se hace evidente que:

$$\begin{aligned} S_{12} &= -S_{21}^T = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}; \quad S_{13} = S_{31} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ S_{14} &= -S_{41}^T = \begin{bmatrix} -1 \\ -m \end{bmatrix}; \quad S_{11} = S_{22} = S_{23} = S_{32} = S_{33} = 0_{2 \times 2} \end{aligned} \quad (3.62)$$

Formando las matrices constitutivas de los elementos, usando (2.22), (2.23) y (2.24).

$$L = \begin{bmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & R_2 \end{bmatrix}; \quad F = \begin{bmatrix} \frac{1}{L_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_2} \end{bmatrix}; \quad F_d = \frac{1}{L_m} \quad (3.63)$$

Con los vectores y matrices de (3.62) y (3.63), se encuentran las matrices  $M$  y  $E$ .

$$\begin{aligned} M &= L(I - S_{22}L)^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & R_2 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - 0_{2 \times 2}L \right)^{-1} = \begin{bmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & R_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.64)$$

$$\begin{aligned} E &= I + S_{14}F_d^{-1}S_{14}^T F \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ -m \end{bmatrix} \left[ \frac{1}{L_m} \right]^{-1} \begin{bmatrix} -1 & -m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{L_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{L_1+L_m}{L_1} & m\frac{L_m}{L_2} \\ m\frac{L_m}{L_1} & \frac{L_2+m^2L_m}{L_2} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.65)$$

Finalmente, reunidas todas las matrices y vectores necesarios, se determinan las ecuaciones de estado para el transformador eléctrico, a continuación se detallan:

$$\begin{aligned} A &= E^{-1}(S_{11} + S_{12}MS_{21})F \\ &= \begin{bmatrix} \frac{L_1+L_m}{L_1} & m\frac{L_m}{L_2} \\ m\frac{L_m}{L_1} & \frac{L_2+m^2L_m}{L_2} \end{bmatrix}^{-1} \left( 0_{2 \times 2} + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & R_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \frac{1}{L_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_2} \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{L_1L_2 + L_2L_m + m^2L_1L_m} \begin{bmatrix} -R_1(L_2 + m^2L_m) & m\frac{R_2L_1L_m}{L_2} \\ m\frac{R_1L_2L_m}{L_1} & -R_2(L_1 + L_m) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.66)$$

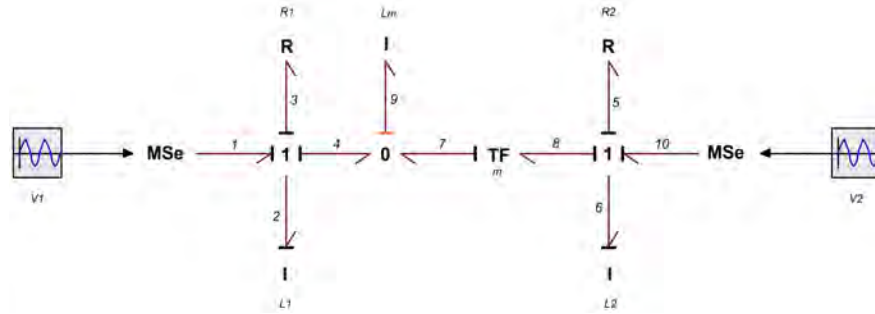
$$\begin{aligned} B &= E^{-1}(S_{13} + S_{12}MS_{23}) \\ &= \begin{bmatrix} \frac{L_1+L_m}{L_1} & m\frac{L_m}{L_2} \\ m\frac{L_m}{L_1} & \frac{L_2+m^2L_m}{L_2} \end{bmatrix}^{-1} \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + S_{12}M0_{2 \times 2} \right) \\ &= \frac{1}{L_1L_2 + L_2L_m + m^2L_1L_m} \begin{bmatrix} L_1(L_2 + m^2L_m) & -mL_1L_m \\ -mL_2L_m & L_2(L_1 + L_m) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.67)$$

$$\begin{aligned}
 C &= (S_{31} + S_{32}MS_{21})F \\
 &= \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + 0_{2 \times 2}MS_{21} \right) \begin{bmatrix} \frac{1}{L_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_2} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \frac{1}{L_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_2} \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{3.68}$$

$$\begin{aligned}
 D &= S_{33} + S_{32}MS_{23} \\
 &= 0_{2 \times 2} + 0_{2 \times 2}M0_{2 \times 2} \\
 &= 0_{2 \times 2}
 \end{aligned} \tag{3.69}$$

Posteriormente, se asignan valores numéricos a los parámetros y se simula el sistema en el software 20-sim<sup>®</sup>, software especializado en sistemas desarrollados en Bond Graph.

En la Figura 3.20 se muestra el diagrama del transformador en 20-sim<sup>®</sup>.

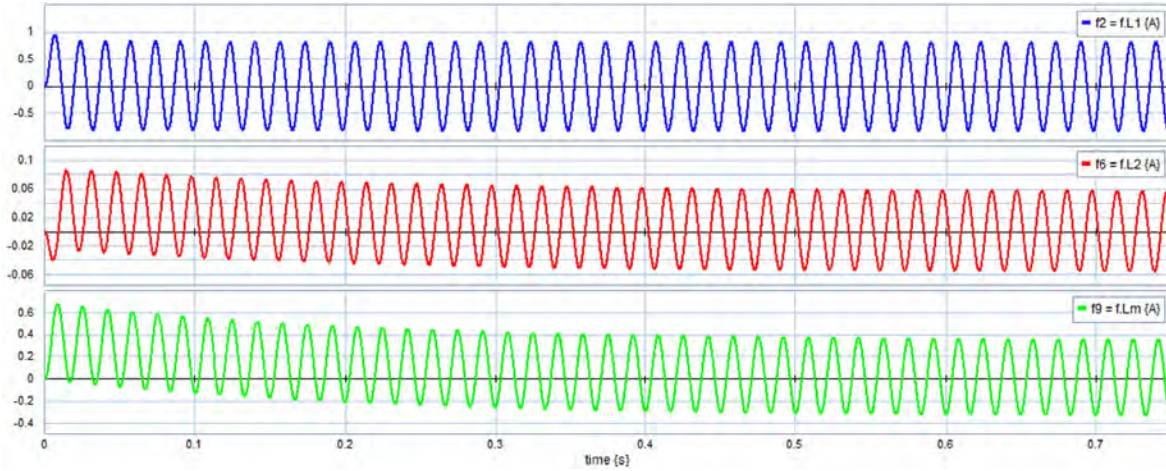


**Figura 3.20:** Diagrama del transformador eléctrico en 20-sim<sup>®</sup>.

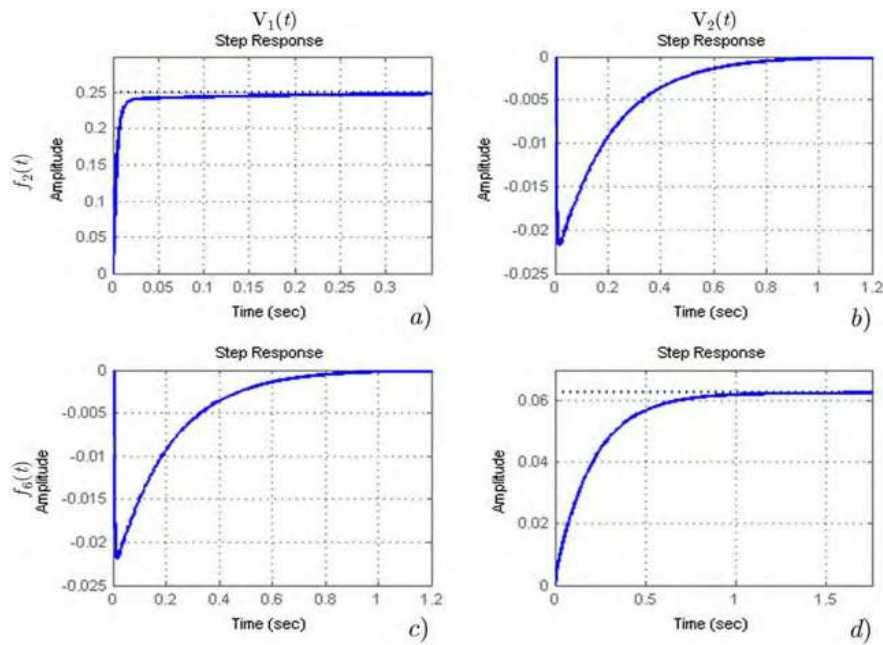
Las respuestas en el tiempo, presentadas en la Figura 3.21 son las corrientes en cada uno de los devanados, así como la corriente de la inductancia mutua, cuando el sistema tiene los siguientes valores:  $L_1 = 15.9mH$ ,  $L_2 = 63.5mH$ ,  $L_m = 31.9mH$ ,  $R_1 = 4\Omega$ ,  $R_2 = 16\Omega$ ,  $m = 10$ ,  $V_1(t) = 10 \sin(2\pi 60 t)$  y  $V_2(t) = 40 \sin(2\pi 60 t)$ .

Se procede a determinar la respuesta al escalón unitario para las dos entradas y dos salidas del sistema, utilizando el software MATLAB<sup>®</sup>. Tales gráficas son mostradas en la Figura 3.22.

Finalmente, queda planteado el comportamiento del sistema cuando carece de incertidumbre paramétrica. En la siguiente sección se adiciona incertidumbre en algunos parámetros y subsecuentemente se modela el sistema para que quede establecido en su forma canónica.



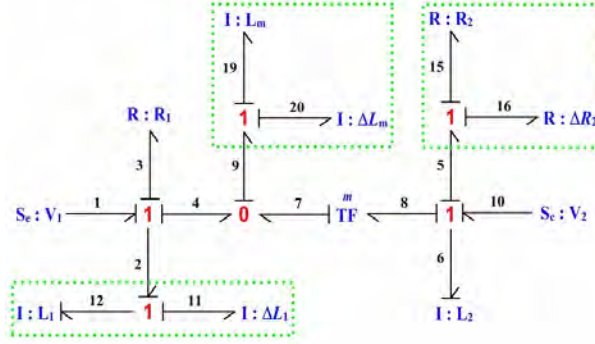
**Figura 3.21:** Respuesta en el tiempo de las corrientes en los devanados y la inductancia mutua.



**Figura 3.22:** Respuesta al escalón unitario en los devanados del transformador.

### 3.4.1.3 Modelo del transformador en la forma canónica

Siguiendo lo descrito en paginas anteriores, se construye el modelo del transformador en la forma canónica, para este caso se agrega incertidumbre en los elementos:  $I : L_1$ ,  $R : R_2$  y  $I : L_m$ , es decir, en el devanado del primario, en la resistencia del secundario y en la inductancia mutua de los devanados. En la Figura 3.23 se muestra el UBG del transformador.



**Figura 3.23:** UBG en la forma canónica del transformador eléctrico.

Una vez obtenido el UBG, se definen nuevamente todos los vectores necesarios para construir la matriz de estructura unión, las entradas y salidas para este modelo son las mismas que para el modelo sin incertidumbre, siendo:

$$u(t) = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_{10} \end{bmatrix}; \quad y(t) = \begin{bmatrix} f_2 \\ f_6 \end{bmatrix} \quad (3.70)$$

Se determinan los vectores de entrada y salida de los elementos resistivos nominales.

$$D_{inn}(t) = \begin{bmatrix} f_3 \\ f_{15} \end{bmatrix}; \quad D_{outn}(t) = \begin{bmatrix} e_3 \\ e_{15} \end{bmatrix} \quad (3.71)$$

De similar manera se construyen los vectores de entrada y salida para los elementos resistivos que son incertidumbre.

$$D_{in\Delta}(t) = f_{16}; \quad D_{out\Delta}(t) = e_{16} \quad (3.72)$$

Los vectores de estado para los elementos nominales quedan de la siguiente manera:

$$x_n(t) = \begin{bmatrix} p_{12} \\ p_6 \end{bmatrix}; \quad \dot{x}_n(t) = \begin{bmatrix} e_{12} \\ e_6 \end{bmatrix}; \quad z_n(t) = \begin{bmatrix} f_{12} \\ f_6 \end{bmatrix} \quad (3.73)$$



Al existir un elemento dinámico nominal en causalidad derivativa, entonces:

$$x_{nd}(t) = p_{19}; \quad \dot{x}_{nd}(t) = e_{19}; \quad z_{nd}(t) = f_{19} \quad (3.74)$$

En (3.75) y (3.76) se expresan los vectores formados por la incertidumbre en elementos integrales y derivativos, respectivamente.

$$x_{\Delta}(t) = p_{11}; \quad \dot{x}_{\Delta}(t) = e_{11}; \quad z_{\Delta}(t) = f_{11} \quad (3.75)$$

$$x_{\Delta d}(t) = p_{20}; \quad \dot{x}_{\Delta d}(t) = e_{20}; \quad z_{\Delta d}(t) = f_{20} \quad (3.76)$$

Completando la matriz de estructura unión de (3.9) con los vectores arriba mencionados y con la información del UBG, se tiene que:

$$\begin{bmatrix} e_{12} \\ e_6 \\ f_3 \\ f_{15} \\ f_2 \\ f_6 \\ f_{19} \\ f_{11} \\ f_{16} \\ f_{20} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & -m & 0 & -1 & -m \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & m & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & m & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{12} \\ f_6 \\ e_3 \\ e_{15} \\ e_2 \\ e_6 \\ e_{19} \\ e_{11} \\ e_{16} \\ e_{20} \end{bmatrix} \quad (3.77)$$

Las submatrices  $S_{ij}$  de (3.77) son:

$$\begin{aligned} S_{12} &= -S_{21}^T = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}; & S_{13} &= S_{31} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \\ S_{14} &= S_{17} = -S_{41}^T = -S_{71}^T = \begin{bmatrix} -1 \\ -m \end{bmatrix}; & S_{15} &= -S_{51}^T = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ S_{16} &= -S_{61}^T = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}; & S_{11} &= S_{22} = S_{23} = S_{32} = S_{33} = 0_{2 \times 2} \\ S_{26} &= S_{36} = S_{62}^T = S_{63}^T = 0_{2 \times 1} \end{aligned} \quad (3.78)$$

Las relaciones constitutivas determinadas por (3.3) a (3.8) quedan definidas por:

$$\begin{aligned} L_n &= \begin{bmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & R_2 \end{bmatrix}; & F_n &= \begin{bmatrix} \frac{1}{L_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_2} \end{bmatrix}; & F_{nd} &= \frac{1}{L_m} \\ L_\Delta &= \Delta R_2; & F_\Delta &= \frac{1}{\Delta L_1}; & F_{\Delta d} &= \frac{1}{\Delta L_m} \end{aligned} \quad (3.79)$$

Puesto que existe un elemento en causalidad derivativa la existencia de (3.12) es garantizada por:

$$\begin{aligned} E_d &= I + S_{14} F_{nd}^{-1} S_{14}^T F_n \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ -m \end{bmatrix} \left[ \frac{1}{L_m} \right]^{-1} \begin{bmatrix} -1 & -m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{L_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{L_1+L_m}{L_1} & m \frac{L_m}{L_2} \\ m \frac{L_m}{L_1} & \frac{L_2+m^2 L_m}{L_2} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.80)$$

$$\begin{aligned} E_\Delta &= S_{15} F_\Delta^{-1} S_{15}^T F_n \\ &= \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \left[ \frac{1}{\Delta L_1} \right]^{-1} \begin{bmatrix} -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{L_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\Delta L_1}{L_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.81)$$

$$\begin{aligned} E_{\Delta d} &= S_{17} F_{\Delta d}^{-1} S_{17}^T F_n \\ &= \begin{bmatrix} -1 \\ -m \end{bmatrix} \left[ \frac{1}{\Delta L_m} \right]^{-1} \begin{bmatrix} -1 & -m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{L_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\Delta L_m}{L_1} & m \frac{\Delta L_m}{L_2} \\ m \frac{\Delta L_m}{L_1} & m^2 \frac{\Delta L_m}{L_2} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.82)$$

$$\begin{aligned} E &= E_d + E_\Delta + E_{\Delta d} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{(L_1+\Delta L_1)+(L_m+\Delta L_m)}{L_1} & m \frac{L_m+\Delta L_m}{L_2} \\ m \frac{L_m+\Delta L_m}{L_1} & \frac{L_2+m^2(L_m+\Delta L_m)}{L_2} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.83)$$

Sustituyendo (3.79) y la submatriz  $S_{22}$  en (3.17), la matriz auxiliar  $M$  resulta:

$$\begin{aligned} M &= L_n (I - S_{22} L_n)^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & R_2 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - 0_{2 \times 2} L_n \right)^{-1} = \begin{bmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & R_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.84)$$

Ya que las submatrices  $S_{26} = 0_{2 \times 1}$  y  $S_{63} = 0_{1 \times 2}$ , entonces las matrices auxiliares  $P$  y  $Q$  definidas por (3.18) y (3.19) quedan:

$$\begin{aligned} P &= (I + S_{26}^T M S_{26} L_{\Delta})^{-1} (S_{61} - S_{26}^T M S_{21}) \\ &= S_{61} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.85)$$

$$\begin{aligned} Q &= (I + S_{26}^T M S_{26} L_{\Delta})^{-1} (S_{63} - S_{26}^T M S_{23}) \\ &= 0_{1 \times 2} \end{aligned} \quad (3.86)$$

Una vez obtenidas todas las matrices auxiliares, se procede a completar las matrices que dan forma al modelo canónico, sustituyendo los valores apropiados de (3.78), así como las ecuaciones (3.79) y (3.84) a (3.86); en (3.13) a (3.16), se tiene que:

$$\begin{aligned} A_1 &= (S_{11} + S_{12} M S_{21}) F_n \\ &= \left( 0_{2 \times 2} + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & R_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \frac{1}{L_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{R_1}{L_1} & 0 \\ 0 & \frac{R_2}{L_2} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.87)$$

$$\begin{aligned} A_2 &= (S_{16} + S_{12} M S_{26}) L_{\Delta} P F_n \\ &= \left( \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} + S_{12} M 0_{2 \times 1} \right) [\Delta R_2] \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{L_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\Delta R_2}{L_2} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.88)$$

$$\begin{aligned} B_1 &= (S_{13} + S_{12} M S_{23}) \\ &= I_{2 \times 2} + S_{12} M 0_{2 \times 2} = I_{2 \times 2} \end{aligned} \quad (3.89)$$

$$\begin{aligned} B_2 &= (S_{16} + S_{12} M S_{26}) L_{\Delta} Q \\ &= (S_{16} + S_{12} M 0_{2 \times 1}) L_{\Delta} 0_{1 \times 2} = 0_{2 \times 2} \end{aligned} \quad (3.90)$$

$$\begin{aligned} C_1 &= (S_{31} + S_{32} M S_{21}) F_n \\ &= \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + 0_{2 \times 2} M S_{21} \right) \begin{bmatrix} \frac{1}{L_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{L_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_2} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.91)$$

$$\begin{aligned}
 C_2 &= (S_{36} + S_{32}MS_{26}) L_{\Delta} P F_n \\
 &= (0_{2 \times 1} + 0_{2 \times 2} M 0_{2 \times 1}) L_{\Delta} P F_n = 0_{2 \times 2}
 \end{aligned} \tag{3.92}$$

$$\begin{aligned}
 D_1 &= S_{33} + S_{32}MS_{23} \\
 &= 0_{2 \times 2} + 0_{2 \times 2} M 0_{2 \times 2} = 0_{2 \times 2}
 \end{aligned} \tag{3.93}$$

$$\begin{aligned}
 D_2 &= (S_{36} + S_{32}MS_{26}) L_{\Delta} Q \\
 &= (0_{2 \times 1} + 0_{2 \times 2} M 0_{2 \times 1}) L_{\Delta} Q = 0_{2 \times 2}
 \end{aligned} \tag{3.94}$$

Se obtiene la matriz que relaciona el vector  $x_n(t)$  con  $x(t)$ , definida por (3.21).

$$T = I + E_{\Delta} = \begin{bmatrix} \frac{L_1 + \Delta L_1}{L_1} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.95}$$

Para expresar el sistema en su forma canónica controlable se substituyen las matrices necesarias en (3.23) a (3.26), quedando las ecuaciones de estado como:

$$\begin{aligned}
 A_n &= E_d^{-1} A_1 \\
 &= \frac{1}{L_1 L_2 + L_2 L_m + m^2 L_1 L_m} \begin{bmatrix} -R_1 (L_2 + m^2 L_m) & m \frac{R_2 L_1 L_m}{L_2} \\ m \frac{R_1 L_2 L_m}{L_1} & -R_2 (L_1 + L_m) \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{3.96}$$

$$\begin{aligned}
 \Delta A &= (T E^{-1} A_1 T^{-1} - E_d^{-1} A_1) + (T E^{-1} A_2 T^{-1}) \\
 &= \frac{1}{\alpha \beta} \begin{bmatrix} R_1 (\beta \delta - \alpha (L_2 + m^2 L_m)) & m \frac{\alpha R_2 L_1 L_m + \beta \xi \sigma}{L_2} \\ m \frac{R_1 L_2 (\alpha L_m (L_1 + \Delta L_1) - \beta L_1 (L_m + \Delta L_m))}{L_1 (L_1 + \Delta L_1)} & -(\alpha R_2 (L_1 + L_m) + \beta \gamma \sigma) \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{3.97}$$

$$\begin{aligned}
 B_n &= E_d^{-1} B_1 \\
 &= \frac{1}{L_1 L_2 + L_2 L_m + m^2 L_1 L_m} \begin{bmatrix} L_1 (L_2 + m^2 L_m) & -m L_1 L_m \\ -m L_2 L_m & L_2 (L_1 + L_m) \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{3.98}$$

$$\begin{aligned}
 \Delta B &= (T E^{-1} - E_d^{-1}) B_1 + (T E^{-1}) B_2 \\
 &= \frac{1}{\alpha \beta} \begin{bmatrix} \beta \delta (L_1 + \Delta L_1) - \alpha L_1 (L_2 + m^2 L_m) & m (\alpha L_1 L_m - \beta \xi) \\ m L_2 (\alpha L_m - \beta (L_m + \Delta L_m)) & L_2 (\beta \gamma - \alpha (L_1 + L_m)) \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{3.99}$$

donde:

$$\begin{aligned}
 \alpha &= L_1 (L_2 + m^2 (L_m + \Delta L_m)) + L_2 (\Delta L_1 + L_m + \Delta L_m) + m^2 \Delta L_1 (L_m + \Delta L_m) \\
 \beta &= L_1 L_2 + L_2 L_m + m^2 L_1 L_m \\
 \delta &= L_2 + m^2 (L_m + \Delta L_m) \\
 \gamma &= L_1 + \Delta L_1 + L_m + \Delta L_m \\
 \xi &= (L_1 + \Delta L_1) (L_m + \Delta L_m) \\
 \sigma &= \Delta R_2 - R_2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 C_n &= C_1 \\
 &= \begin{bmatrix} \frac{1}{L_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_2} \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{3.100}$$

$$\begin{aligned}
 \Delta C &= C_1 (T^{-1} - I) + C_2 T^{-1} \\
 &= \begin{bmatrix} -\frac{\Delta L_1}{L_1(L_1 + \Delta L_1)} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{3.101}$$

$$\begin{aligned}
 D_n &= D_1 & \Delta D &= D_2 \\
 &= 0_{2 \times 2} & &= 0_{2 \times 2}
 \end{aligned} \tag{3.102}$$

Para obtener las ecuaciones de estado que involucran la parte nominal y la parte con incertidumbre es necesario sumar las matrices correspondientes.

$$\begin{aligned}
 A &= A_n + \Delta A \\
 &= \frac{1}{\Delta_1} \begin{bmatrix} -R_1 (L_2 + m^2 (L_m + \Delta L_m)) & m \frac{(R_2 + \Delta R_2)(L_1 + \Delta L_1)(L_m + \Delta L_m)}{L_2} \\ m \frac{R_1 L_2 (L_m + \Delta L_m)}{(L_1 + \Delta L_1)} & -(R_2 + \Delta R_2) (L_1 + \Delta L_1 + L_m + \Delta L_m) \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{3.103}$$

$$\begin{aligned}
 B &= B_n + \Delta B \\
 &= \frac{1}{\Delta_1} \begin{bmatrix} (L_1 + \Delta L_1) (L_2 + m^2 (L_m + \Delta L_m)) & -m (L_1 + \Delta L_1) (L_m + \Delta L_m) \\ -m L_2 (L_m + \Delta L_m) & L_2 (L_1 + \Delta L_1 + L_m + \Delta L_m) \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{3.104}$$

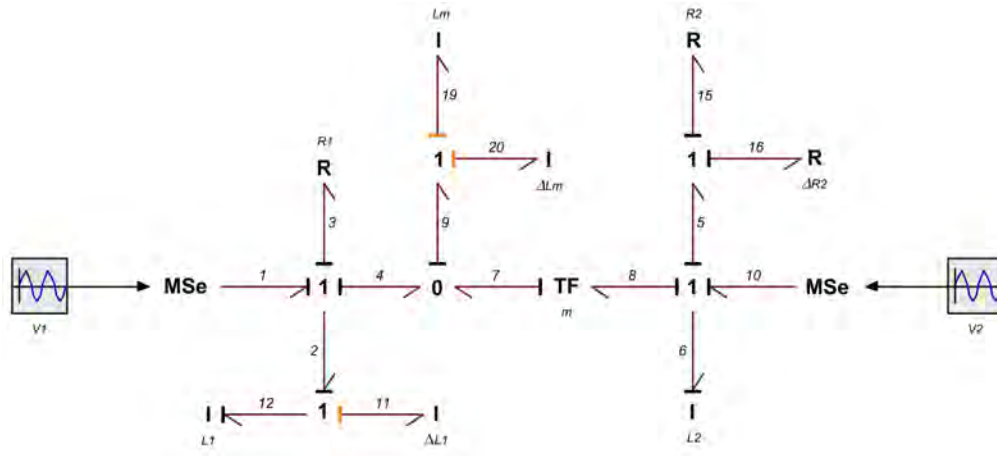
$$C = C_n + \Delta C = \begin{bmatrix} \frac{1}{L_1 + \Delta L_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_2} \end{bmatrix} \tag{3.105}$$

$$D = D_n + \Delta D = 0_{2 \times 2} \quad (3.106)$$

donde

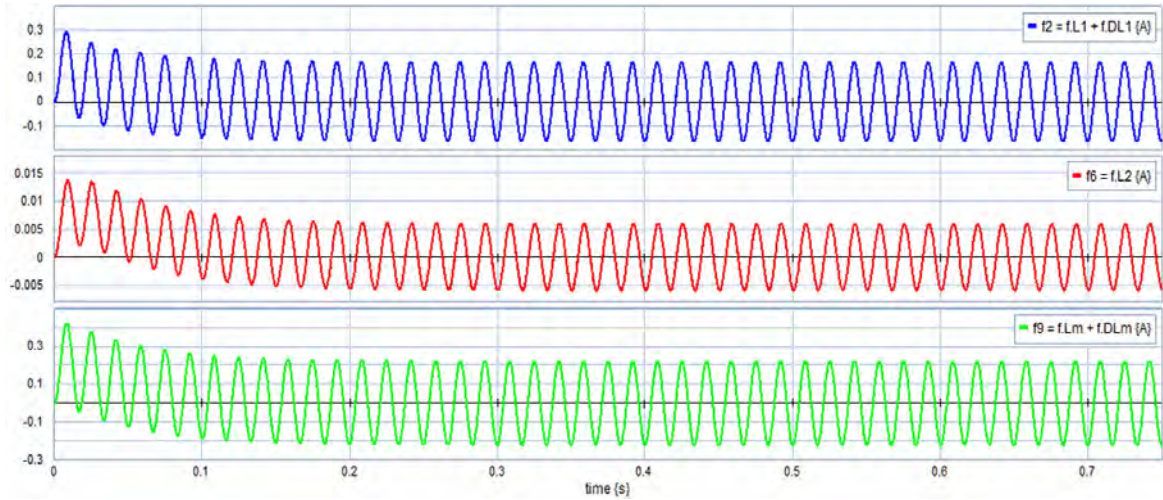
$$\Delta_1 = (L_1 + \Delta L_1) L_2 + L_2 (L_m + \Delta L_m) + m^2 (L_1 + \Delta L_1) (L_m + \Delta L_m)$$

Finalmente, el sistema ha sido expresado en la forma canónica para sistemas con incertidumbre, ecuación (3.1). Los valores numéricos para la incertidumbre adicionada son:  $\Delta L_1 = 79.5mH$ ,  $\Delta L_m = 15.95mH$ ,  $\Delta R_2 = 160\Omega$ . El diagrama del transformador con incertidumbre en 20-sim<sup>®</sup> es mostrado en la Figura 3.24.



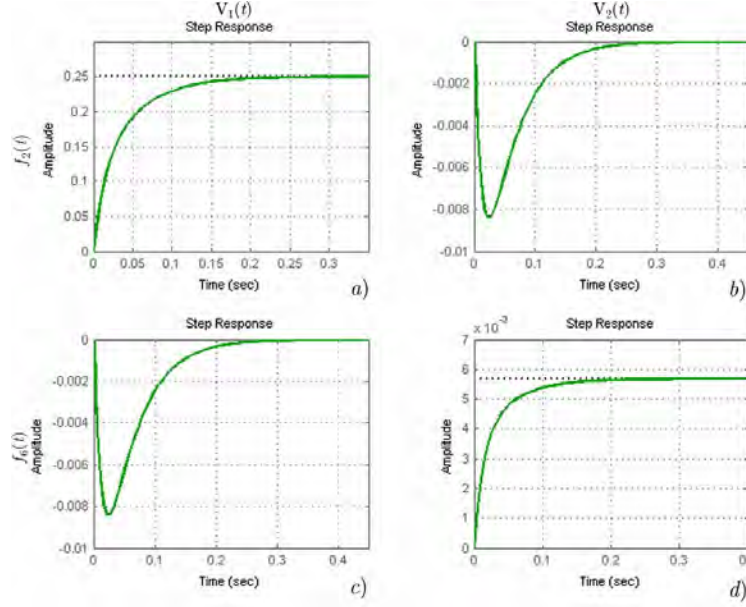
**Figura 3.24:** Diagrama UBG en la forma canónica del transformador eléctrico en 20-sim<sup>®</sup>.

A continuación se simula la respuesta en el tiempo, donde las gráficas representan las corrientes ya afectadas de los devanados así como de la inductancia mutua, Figura 3.25.



**Figura 3.25:** Respuesta en el tiempo de las corrientes en el UBG.

Se puede apreciar en la Figura 3.25 que las corrientes en los devanados y en la inductancia mutua han cambiado tanto en magnitud como en fase. En la Figura 3.26 se presenta la respuesta al escalón unitario de las ecuaciones de estado,  $\{A_n + \Delta A, B_n + \Delta B, C_n + \Delta C, D_n + \Delta D\}$ .



**Figura 3.26:** Respuesta al escalón unitario del UBG en el transformador.

Las gráficas presentadas en la Figura 3.27 muestran las respuestas al escalón unitario del sistema nominal y con incertidumbre, como era de esperarse el sistema se vio afectado por ellas.

Queda así demostrada la efectividad de la propuesta hecha para modelar sistemas con incertidumbre en presencia de elementos derivativos y la posible existencia de incertidumbre en ellos.

#### 3.4.1.4 Modelo del transformador en la forma de interconexión estándar

Para este fin, la incertidumbre es agregada a los mismos elementos que para el modelo en su forma canónica, así como los mismo valores numéricos, el UBG del transformador en la forma de interconexión estándar se muestra en la Figura 3.28.

Se definen las entradas y salidas de manera apropiada segun (3.28):

$$u_1(t) = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_{10} \end{bmatrix}; \quad y_1(t) = \begin{bmatrix} f_2 \\ f_6 \end{bmatrix}; \quad w(t) = \begin{bmatrix} f_{13} \\ e_{21} \\ e_{17} \end{bmatrix}; \quad \tilde{z}(t) = \begin{bmatrix} f_{14} \\ e_{20} \\ e_{16} \end{bmatrix} \quad (3.107)$$

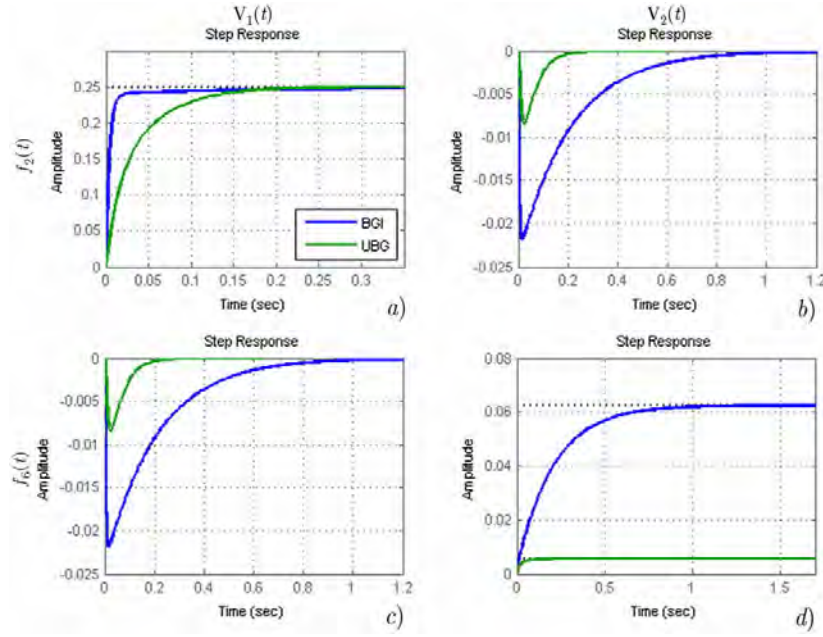


Figura 3.27: Comparacion de las respuestas al escalón unitario del BGI y UBG en el transformador.

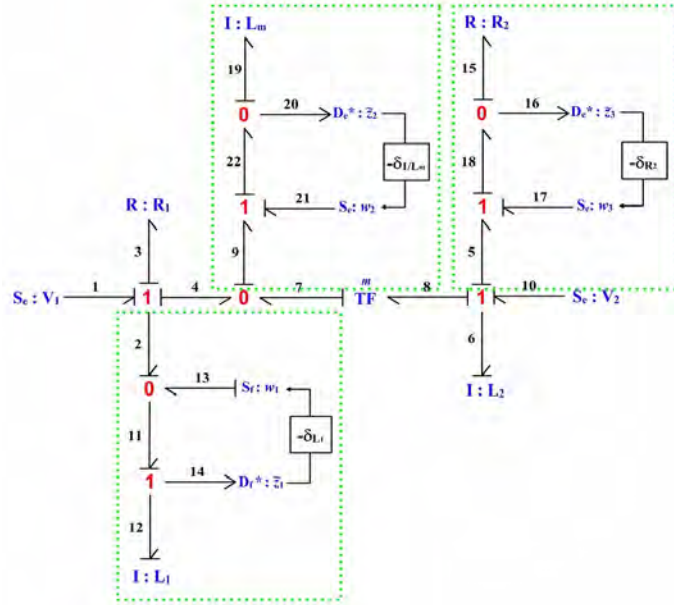


Figura 3.28: UBG en la forma de interconexión estandar del transformador eléctrico.



Definiendo los vectores claves:

$$\begin{aligned}
 D_{in}(t) &= \begin{bmatrix} f_3 \\ f_{15} \end{bmatrix}; \quad D_{out}(t) = \begin{bmatrix} e_3 \\ e_{15} \end{bmatrix}; \quad x(t) = \begin{bmatrix} p_{12} \\ e_6 \end{bmatrix}; \quad \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} e_{12} \\ e_6 \end{bmatrix} \\
 z(t) &= \begin{bmatrix} f_{12} \\ f_6 \end{bmatrix} \quad x_d(t) = p_{19}; \quad \dot{x}_d(t) = e_{19}; \quad z_d(t) = f_{19}
 \end{aligned} \tag{3.108}$$

Se sustituyen (3.107) y (3.108) en la matriz de estructura unión de (3.29) y usando la información del UBG de la Figura 3.22:

$$\left[ \begin{array}{c|c} \begin{bmatrix} e_{12} \\ e_6 \end{bmatrix} \\ \hline \begin{bmatrix} f_3 \\ f_{15} \end{bmatrix} \\ \hline \begin{bmatrix} f_2 \\ f_6 \\ f_{14} \\ e_{20} \\ e_{16} \end{bmatrix} \\ \hline f_{19} \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c|c|c|c} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & m & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -1 \\ -m \end{bmatrix} \\ \hline \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \hline \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \hline \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \hline \begin{bmatrix} 1 & m \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} f_{12} \\ f_6 \\ \hline e_3 \\ e_{15} \\ \hline \begin{bmatrix} e_1 \\ e_{10} \\ f_{13} \\ e_{21} \\ e_{17} \end{bmatrix} \\ \hline e_{19} \end{array} \right] \tag{3.109}$$

Donde las submatrices  $S_{ij}^k$  están definidas por:

$$\begin{aligned}
 S_{12} &= -S_{21}^T = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}; \quad S_{13}^1 = S_{31}^1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad S_{13}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & m & 1 \end{bmatrix} \\
 S_{14} &= -S_{41}^T = \begin{bmatrix} -1 \\ -m \end{bmatrix}; \quad S_{23}^2 = S_{33}^{12} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad S_{31}^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 S_{32}^2 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad S_{34}^2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad S_{43}^2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 S_{11} &= S_{22} = S_{23}^1 = S_{32}^1 = S_{33}^{11} = 0_{2 \times 2}; \quad S_{33}^{21} = 0_{3 \times 2}
 \end{aligned} \tag{3.110}$$

Las relaciones constitutivas son:

$$L = \begin{bmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & R_2 \end{bmatrix}; \quad F = \begin{bmatrix} \frac{1}{L_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_2} \end{bmatrix}; \quad F_d = \frac{1}{L_m} \quad (3.111)$$

$$\begin{aligned} w(t) &= \Delta \tilde{z}(t) \\ \begin{bmatrix} f_{13} \\ e_{21} \\ e_{17} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -\delta_{L_1} & 0 & 0 \\ 0 & -\delta_{1/L_m} & 0 \\ 0 & 0 & -\delta_{R_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{14} \\ e_{20} \\ e_{16} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.112)$$

donde  $-\delta_{L_1} = \frac{\Delta L_1}{L_1 + \Delta L_1}$ ,  $-\delta_{1/L_m} = -\frac{\Delta L_m}{L_m}$  y  $-\delta_{R_2} = -\frac{\Delta R_2}{R_2}$ . Se procede a encontrar las matrices auxiliares  $M$  y  $E$ .

$$\begin{aligned} M &= L(I - S_{22}L)^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & R_2 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - 0_{2 \times 2} L \right)^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & R_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.113)$$

$$\begin{aligned} E &= I + S_{14}F_d^{-1}S_{14}^T F \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ -m \end{bmatrix} \left[ \frac{1}{L_m} \right]^{-1} \begin{bmatrix} -1 & -m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{L_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{L_1 + L_m}{L_1} & m \frac{L_m}{L_2} \\ m \frac{L_m}{L_1} & \frac{L_2 + m^2 L_m}{L_2} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.114)$$

A continuación, de (3.30) se determinan las ecuaciones de estado del sistema.

$$\begin{aligned} A_n &= E^{-1}(S_{11} + S_{12}MS_{21})F \\ &= \begin{bmatrix} \frac{L_1 + L_m}{L_1} & m \frac{L_m}{L_2} \\ m \frac{L_m}{L_1} & \frac{L_2 + m^2 L_m}{L_2} \end{bmatrix}^{-1} \left( 0_{2 \times 2} + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & R_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \frac{1}{L_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_2} \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{\Delta_1} \begin{bmatrix} -R_1(L_2 + m^2 L_m) & m \frac{R_2 L_1 L_m}{L_2} \\ m \frac{R_1 L_2 L_m}{L_1} & -R_2(L_1 + L_m) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.115)$$

$$\begin{aligned}
 B_{1n} &= E^{-1} (S_{13}^1 + S_{12} M S_{23}^1) \\
 &= \begin{bmatrix} \frac{L_1+L_m}{L_1} & m \frac{L_m}{L_2} \\ m \frac{L_m}{L_1} & \frac{L_2+m^2 L_m}{L_2} \end{bmatrix}^{-1} \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & R_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \\
 &= \frac{1}{\Delta_1} \begin{bmatrix} L_1 (L_2 + m^2 L_m) & -m L_1 L_m \\ -m L_2 L_m & L_2 (L_1 + L_m) \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{3.116}$$

$$\begin{aligned}
 B_2 &= E^{-1} (S_{13}^2 + S_{12} M S_{23}^2) \\
 &= \begin{bmatrix} \frac{L_1+L_m}{L_1} & m \frac{L_m}{L_2} \\ m \frac{L_m}{L_1} & \frac{L_2+m^2 L_m}{L_2} \end{bmatrix}^{-1} \left( \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & m & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & R_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \\
 &= \frac{1}{\Delta_1} \begin{bmatrix} R_1 L_1 (L_2 + m^2 L_m) & L_1 L_2 & -m L_1 L_m \\ -m L_2 L_m R_1 & m L_1 L_2 & L_2 (L_1 + L_m) \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{3.117}$$

$$\begin{aligned}
 G_1 &= E^{-1} S_{14} F_d^{-1} S_{43}^2 \\
 &= \begin{bmatrix} \frac{L_1+L_m}{L_1} & m \frac{L_m}{L_2} \\ m \frac{L_m}{L_1} & \frac{L_2+m^2 L_m}{L_2} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -1 \\ -m \end{bmatrix} \left[ \frac{1}{L_m} \right]^{-1} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 &= \frac{1}{\Delta_1} \begin{bmatrix} L_1 L_2 L_m & 0 & 0 \\ m L_1 L_2 L_m & 0 & 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{3.118}$$

donde

$$\Delta_1 = L_1 L_2 + L_2 L_m + m^2 L_1 L_m$$

Es importante recordar que  $A_n$  y  $B_{1n}$  son las matrices nominales del sistema, es decir son iguales a (3.66) y (3.67), respectivamente. Para este sistema existe la matriz  $G_1$ , como ya se explico anteriormente es por que existe una incertidumbre en un elemento integral que tienen una trayectoria causal hacia un elemento derivativo, para el transformador eléctrico de este caso, dichos elementos son  $I : L_1$  y  $I : L_m$ . Así pues se hace necesaria la aplicación de (3.39) para la cual se procede a obtener  $E_z$ .

De (3.36), (3.37) y (3.38) se tiene que:

$$\Delta_r = \begin{bmatrix} -\delta_{L_1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad F_r = \begin{bmatrix} \frac{1}{L_1} & 0 \end{bmatrix} \tag{3.119}$$

Sustituyendo (3.119) en (3.43) y considerando el valor del error relativo de  $-\delta_{L_1}$ :

$$\begin{aligned}
 E_z &= I - G_1 \Delta_r F_r \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{\Delta_1} \begin{bmatrix} L_1 L_2 L_m & 0 & 0 \\ m L_1 L_2 L_m & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\Delta L_1}{L_1 + \Delta L_1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{L_1} & 0 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \frac{L_1(L_1 L_2 + m^2 L_1 L_m + L_2 L_m + m^2 L_m \Delta L_1 + L_2 \Delta L_1)}{(L_1 + \Delta L_1) \Delta_1} & 0 \\ -m \frac{L_2 L_m \Delta L_1}{(L_1 + \Delta L_1) \Delta_1} & 1 \end{bmatrix} \quad (3.120)
 \end{aligned}$$

De este modo:

$$\begin{aligned}
 \hat{A} &= E_z^{-1} A_n \\
 &= \frac{1}{\Delta_2} \begin{bmatrix} -\frac{R_1(L_2 + m^2 L_m)(L_1 + \Delta L_1)}{L_1} & m \frac{R_2(L_1 + \Delta L_1)L_m}{L_2} \\ m \frac{R_1 L_2 L_m}{L_1} & -R_2(L_1 + \Delta L_1 + L_m) \end{bmatrix} \quad (3.121)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \hat{B}_1 &= E_z^{-1} B_{1n} \\
 &= \frac{1}{\Delta_2} \begin{bmatrix} (L_1 + \Delta L_1)(L_2 + m^2 L_m) & -m(L_1 + \Delta L_1)L_m \\ -m L_2 L_m & L_2(L_1 + \Delta L_1 + L_m) \end{bmatrix} \quad (3.122)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \hat{B}_2 &= E_z^{-1} B_2 \\
 &= \frac{1}{\Delta_2} \begin{bmatrix} R_1(L_1 + \Delta L_1)(L_2 + m^2 L_m) & (L_1 + \Delta L_1)L_2 & -m(L_1 + \Delta L_1)L_m \\ -m L_2 L_m R_1 & m(L_1 + \Delta L_1)L_2 & L_2(L_1 + \Delta L_1 + L_m) \end{bmatrix} \quad (3.123)
 \end{aligned}$$

donde

$$\Delta_2 = (L_1 + \Delta L_1)L_2 + L_2 L_m + m^2(L_1 + \Delta L_1)L_m$$

Como se puede apreciar en (3.121) y (3.122), debido a que  $G_1 \neq 0$  las matrices no son iguales a las nominales.

Las ecuaciones de estado de las salidas quedan definidas por:

$$\begin{aligned}
 C_{1n} &= (S_{31}^1 + S_{32}^1 M S_{21}) F \\
 &= \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + 0_{2 \times 2} M S_{21} \right) \begin{bmatrix} \frac{1}{L_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{L_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_2} \end{bmatrix} \quad (3.124)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 D_{11n} &= S_{33}^1 + S_{32}^1 M S_{23}^1 \\
 &= 0_{2 \times 2} + 0_{2 \times 2} M 0_{2 \times 2} = 0_{2 \times 2} \quad (3.125)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 D_{12} &= S_{33}^{12} + S_{32}^1 M S_{23}^2 \\
 &= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + 0_{2 \times 2} M \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{3.126}$$

Para las ecuaciones de estado de las salidas, las matrices  $C_{1n}$  y  $D_{11n}$  permanecen iguales a las del sistema sin incertidumbre, (3.68) y (3.69), respectivamente. Haciendo uso de las adecuadas sustituciones, los vectores de las salidas auxiliares son:

$$\begin{aligned}
 C_2 &= (S_{31}^2 + S_{32}^2 M S_{21}) F - S_{34}^2 F_d^{-1} S_{14}^T F A_n \\
 &= \begin{bmatrix} \frac{1}{L_1} & 0 \\ -\frac{R_1 L_2 L_m}{L_1 \Delta_3} & -m \frac{R_2 L_1 L_m}{L_2 \Delta_3} \\ 0 & \frac{R_2}{L_2} \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{3.127}$$

$$\begin{aligned}
 D_{21} &= (S_{33}^{21} + S_{32}^2 M S_{23}^1 - S_{34}^2 F_d^{-1} S_{14}^T F B_1) \\
 &= \frac{1}{\Delta_3} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ L_2 L_m & m L_1 L_m \\ 0 & 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{3.128}$$

$$\begin{aligned}
 D_{22} &= (S_{32}^2 M S_{23}^2 - S_{34}^2 F_d^{-1} S_{14}^T F B_2) \\
 &= \frac{1}{\Delta_3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ R_1 L_2 L_m & L_m (L_2 + m^2 L_1) & m L_1 L_m \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{3.129}$$

$$\begin{aligned}
 G_2 &= S_{34}^2 F_d^{-1} (I - S_{14}^T F E^{-1} S_{14} F_d^{-1}) S_{43}^2 \\
 &= \frac{1}{\Delta_3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -L_1 L_m L_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{3.130}$$

donde  $\Delta_3 = \Delta_1$ .

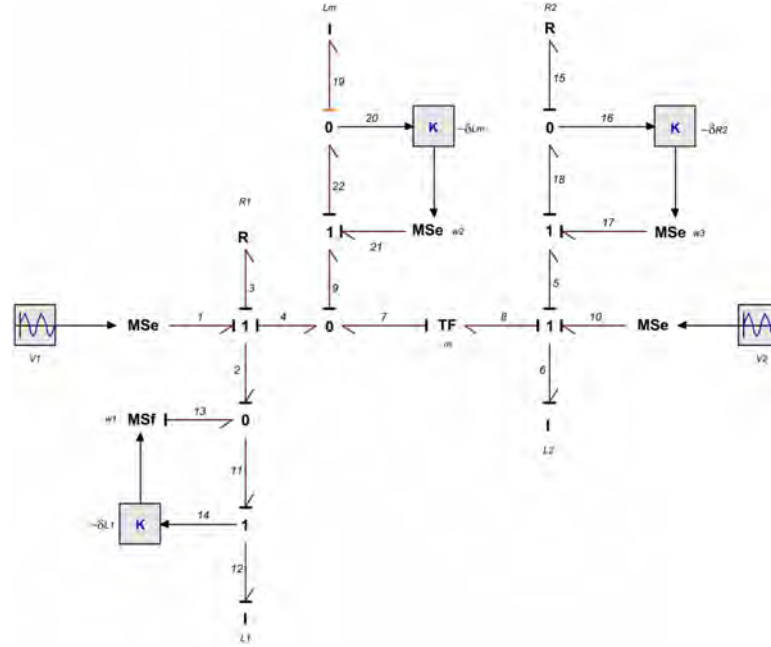
Además, se tiene el caso de que  $G_2 \neq 0$  puesto que existe una incertidumbre en el elemento derivativo,  $I : L_m$ , por lo que las matrices  $C_2$ ,  $D_{21}$  y  $D_{22}$  deben cambiar, así que:

$$\begin{aligned}
 \hat{C}_2 &= C_2 + G_2 \Delta_r F_r \hat{A} \\
 &= \begin{bmatrix} \frac{1}{L_1} & 0 \\ -\frac{R_1 L_2 L_m}{L_1 \Delta_2} & -m \frac{R_2 L_1 L_m}{L_2 \Delta_2} \\ 0 & \frac{R_2}{L_2} \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{3.131}$$

$$\begin{aligned}
 \hat{D}_{21} &= D_{21} + G_2 \Delta_r F_r \hat{B}_1 \\
 &= \frac{1}{\Delta_2} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ L_2 L_m & m L_1 L_m \\ 0 & 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{3.132}$$

$$\begin{aligned}
 \hat{D}_{22} &= D_{22} + G_2 \Delta_r F_r \hat{B}_2 \\
 &= \frac{1}{\Delta_2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -L_1 L_m L_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{3.133}$$

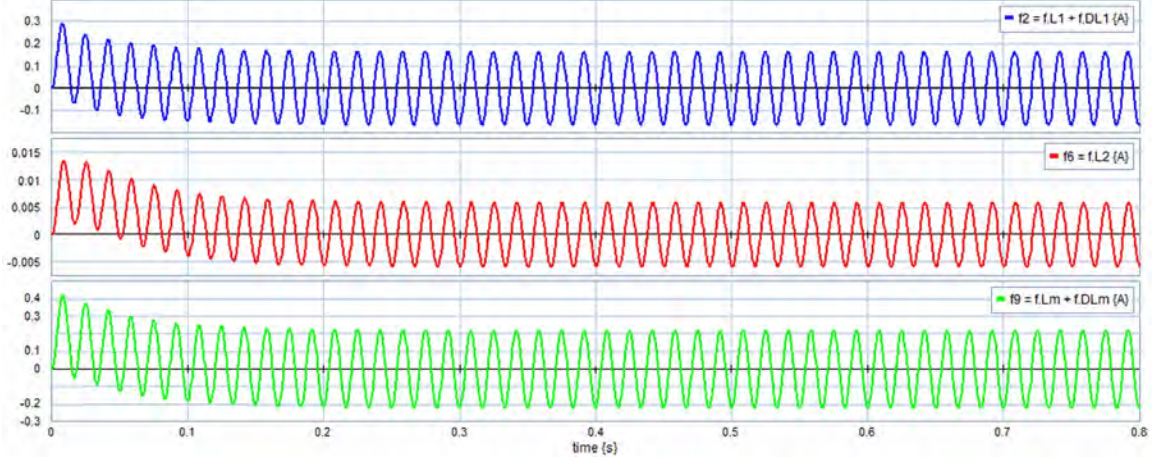
Quedando así las ecuaciones de estado bajo la forma de (3.2). Para simular el sistema se utilizan los mismos valores que fueron utilizados para la forma canónica. En la Figura 3.29 se muestra el diagrama del transformador en la forma de interconexión estándar en 20-sim<sup>®</sup>.



**Figura 3.29:** UBG en la forma de interconexion estandar del transformador eléctrico en 20-sim<sup>®</sup>.

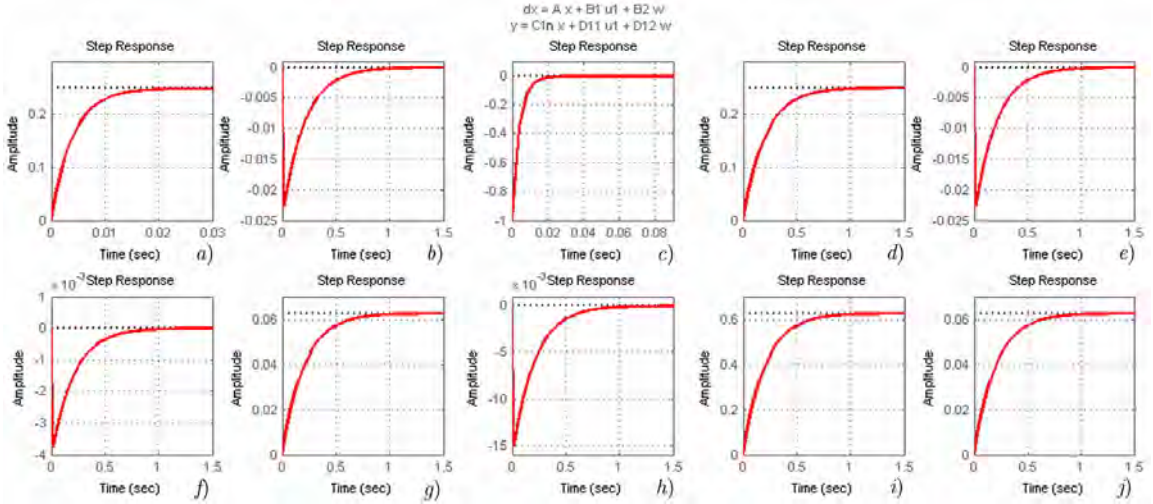
En la Figura 3.30 se muestra la respuesta en el tiempo generada por el sistema mostrado en la Figura 3.29.

Al hacer una comparación entre la respuestas de las Figuras 3.25 y 3.30 se aprecia que ambas son iguales, por lo que se valida el uso de ambos métodos para el modelado de sistemas con incertidumbre paramétrica.



**Figura 3.30:** Respuesta en el tiempo de las corrientes en el UBG.

La Figura 3.31 muestra la respuesta del sistema a la entrada escalón unitario, considerándose las entradas  $u_1(t)$  y  $w(t)$ , y teniéndose las salidas reales,  $y(t)$ .



**Figura 3.31:** Respuesta del UBG en la forma de interconexión estándar, salidas reales

En la Figura 3.32 se grafican las respuestas del sistema a las entradas  $u_1(t)$  y  $w(t)$  y la salidas  $\tilde{z}(t)$ . Las respuestas generadas por las entradas y salidas virtuales,  $\omega(t)$  y  $\tilde{z}(t)$ , respectivamente, no son de interés particular en esta tesis y sólo son expuesta a manera de ejemplificar su comportamiento.

Recordando que  $G_1 \neq 0$  y que su existencia altera a las matrices nominales,  $A_n$  y  $B_{1n}$ , es importante hacer la comparación de las entradas y salidas reales del sistema en su forma de interconexión estándar contra el sistema nominal, dicha comparación se plasma en la Figura 3.33.

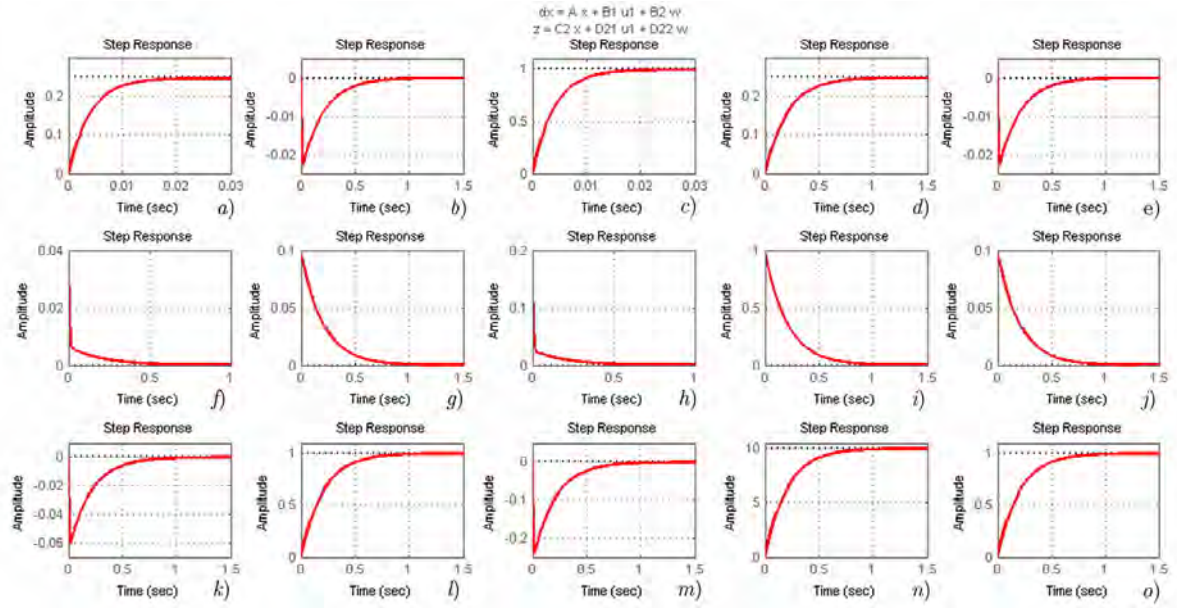


Figura 3.32: Respuesta del UBG en la forma de interconexión estándar, salidas virtuales.

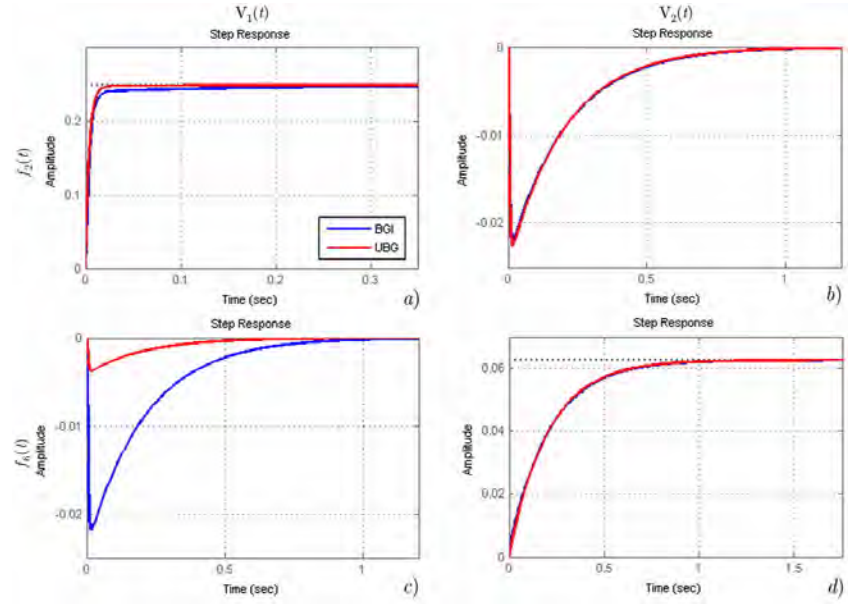


Figura 3.33: Comparacion del BGI con el UBG en la forma de interconexión estándar.



Tal y como se aprecia en la Figura 3.33, el efecto que tuvo  $G_1$  en  $A_n$  y  $B_{1n}$  fue pequeña, tres de las cuatro respuestas son prácticamente iguales. Lo anterior es debido a que el error relativo  $-\delta_{L_1}$  es muy pequeño y su efecto es de la misma proporción sobre las matrices nominales antes mencionadas.

### 3.4.2 Generador Síncrono

En casi todo el mundo donde se involucran sistemas de potencia son empleadas las máquinas síncronas, están dirigidas para ser utilizadas con turbinas hidráulicas o de vapor, también en maquinaria de combustión. El principal objetivo de la máquina síncrona es el de convertir energía mecánica a eléctrica.

El comportamiento eléctrico y electromecánico de la mayoría de las máquinas síncronas puede ser determinado por las ecuaciones que describen las tres fases de la máquina síncrona de polos salientes.

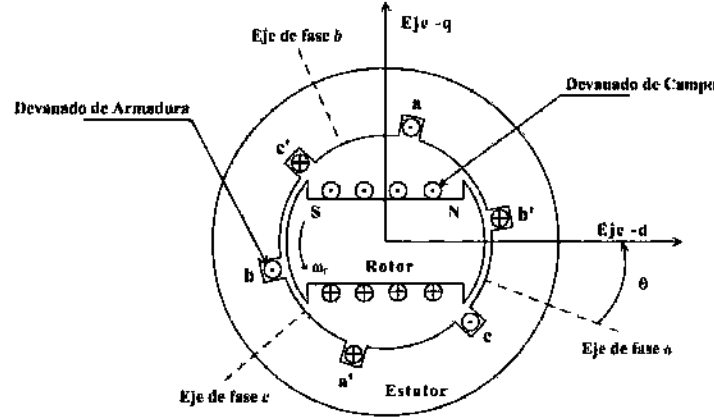
El rotor de la máquina síncrona está equipado con un devanado de campo y uno o más devanados de amortiguamiento y por lo general, todos los devanados del rotor tienen diferentes características eléctricas. Por otro lado, el rotor de la máquina síncrona de polos salientes es magnéticamente asimétrico. Como resultado de esta asimetría, un cambio de variables del rotor no ofrece ninguna ventaja. Sin embargo, un cambio en las variables del estator es beneficioso.

En la mayoría de los casos, las variables del estator son cambiadas a un marco de referencia fijo con el rotor (Transformación de Park), como sea las variables del estator también pueden ser expresadas en cualquier marco de referencia, lo cual es conveniente para algunas simulaciones en computadora.

La Figura 3.34 muestra una máquina síncrona de tres fases con un par de polos y un devanado de campo. La máquina consiste de dos elementos básicos que son el campo y la armadura.

Además de los elementos más importantes en la máquina, la Figura 3.34 muestra la ubicación de los devanados del inducido, así como la distribución de las fases en la máquina del entrehierro  $a - a'$ ,  $b - b'$  y  $c - c'$ , la  $\omega_r$  es la frecuencia angular del rotor,  $\theta$  es el ángulo que proporciona la posición del motor.

Los voltajes que se encuentran en los devanados de la armadura son más altos que los que se tienen en el devanado de campo. Las tres fases en la máquina se encuentran distribuidas  $120^\circ$  entre ellas. Con una rotación uniforme del devanado de campo en el generador, el desplazamiento



**Figura 3.34:** Esquema de una máquina síncrona.

producido será de  $120^\circ$  en tiempo de fase. Debido a que la armadura está sujeta a variaciones del flujo magnético, el acero del estator es construido con delgadas láminas para reducir las pérdidas por las corrientes de Eddy.

Cuando se tienen corrientes balanceadas en las tres fases, la armadura producirá a la velocidad síncrona un campo magnético rotatorio en el entrehierro. Para crear un par estable, los campos del estator y del rotor deben rotar a la misma velocidad.

Bajo condiciones de estado estacionario, la única corriente que existe en el rotor es de corriente directa del devanado de campo. Por otro lado bajo condiciones dinámicas las corrientes de Eddy son inducidas en la superficie del rotor, en las paredes de las ranuras y en los devanados de amortiguamiento [27].

Para propósitos de identificar las características de la máquina síncrona es conveniente definir dos ejes:

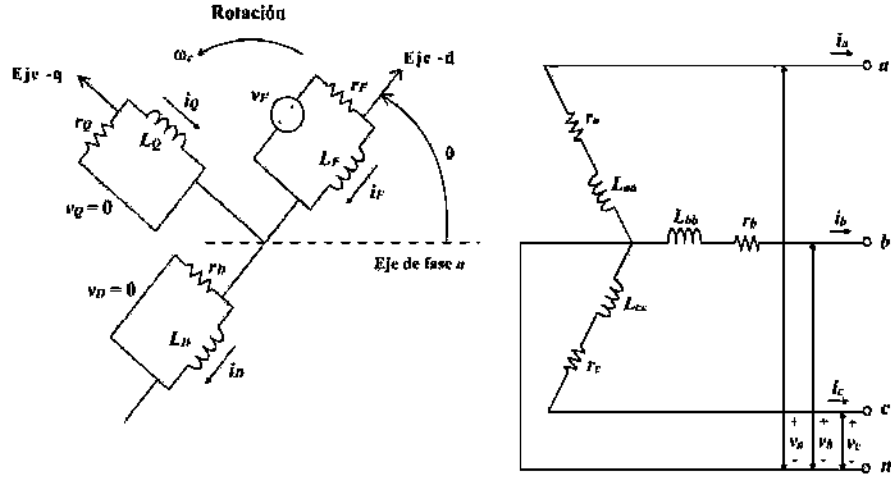
- Eje directo  $-d$ , posicionado en el eje del polo norte magnético.
- Eje de cuadratura  $-q$ , este se encuentra a  $90^\circ$  del eje  $-d$ .

La posición relativa del rotor al estator es medida por el ángulo  $\theta$  entre el eje  $-d$  y el eje magnético del devanado de la fase  $a$ . Algunas consideraciones importantes para la máquina síncrona son las siguientes:

- Los devanados del estator se encuentran distribuidos sinusoidalmente a lo largo del entrehierro.
- La máquina es de dos polos.

- La máquina es de polos salientes.
- Las ranuras del estator no crean una variación considerable en las inductancias con la posición que tenga el rotor.
- La histéresis magnética es despreciable.
- Los efectos de saturación magnética son despreciables.

A continuación se muestran en la Figura 3.35 los circuitos esquemáticos de estator y rotor de la máquina síncrona.



**Figura 3.35:** Circuito del estator y rotor de la máquina síncrona.

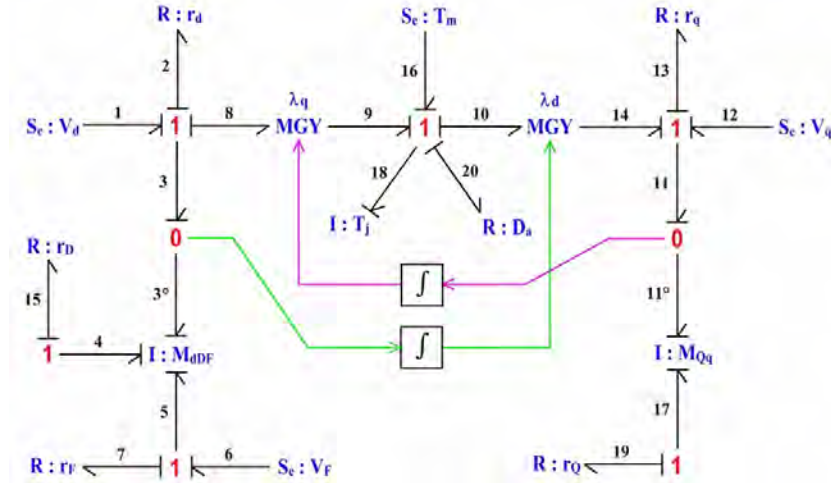
La notación que describen los subíndices de la Figura 3.35 son:

- $a, b, c$  denotan los devanados de fase del estator. Por lo tanto,  $i_a(t)$ ,  $i_b(t)$ ,  $i_c(t)$  son las corrientes del estator,  $v_a(t)$ ,  $v_b(t)$ ,  $v_c(t)$  los voltajes de fase del estator,  $r_a$ ,  $r_b$ ,  $r_c$  son las resistencias, y  $L_{aa}$ ,  $L_{bb}$ ,  $L_{cc}$  las inductancias propias.
- $F$  denota el devanado de campo. Así,  $i_F(t)$  es la corriente en  $F$ ,  $v_F(t)$  el voltaje,  $r_F$  la resistencia y  $L_F$  es la inductancia propia de  $F$ .
- $D$  denota el circuito de amortiguamiento en el eje  $-d$ . Así,  $i_D(t)$  denota la corriente en  $D$ ,  $v_D(t)$  el voltaje,  $r_D$  es la resistencia y  $L_D$  la inductancia propia de  $D$ .
- $Q$  denota el circuito de amortiguamiento en el eje  $-q$ . Así,  $i_Q(t)$  denota la corriente en  $Q$ ,  $v_Q(t)$  es el voltaje,  $r_Q$  la resistencia y  $L_Q$  es la inductancia propia de  $Q$ .
- $\theta(t)$  es el ángulo para el cual el eje  $-d$  adelanta al eje magnético del devanado de la fase  $a$ .
- $\omega_r(t)$  denota la velocidad angular del rotor en  $\frac{rad}{seg}$ .

En la siguiente sección se introduce el modelo de la máquina síncrona representado en Bond Graph.

### 3.4.2.1 Modelo en Bond Graph

El modelo mostrado en la Figura 3.36 es la representación de la máquina síncrona en Bond Graph empleando el modelo en  $dq0$ . Este modelo contiene los devanados de amortiguamiento.



**Figura 3.36:** Máquina síncrona con devanados de amortiguamiento.

Algunas consideraciones para este modelo son:

- Tiene la característica de dos polos.
- La histéresis, saturación y pérdidas mecánicas son despreciadas.
- Los devanados  $a$ ,  $b$ ,  $c$  en la armadura están sinusoidalmente distribuidos a lo largo de la circunferencia del rotor.

Así como las principales características para este modelo de la máquina síncrona en Bond Graph son:

- Todos los elementos que intervienen en la máquina se tienen en variables de energía.
- Los subsistemas eléctrico, magnético y mecánico se representan en un solo Bond Graph.
- El modelo simplificado se obtiene directamente de la eliminación de bonds en el Bond Graph.
- La formulación de la corriente o de enlace de flujo se obtiene a partir del mismo sistema construido en Bond Graph.

Para lo cual  $T_m$  es el par mecánico de entrada de la máquina síncrona,  $J_r$  es la inercia,  $D_a$  es el coeficiente de amortiguamiento,  $M_{Qq}$  representa a los acoplamientos propios y mutuos de los devanados del eje  $-q$ ,  $M_{dDF}$  representa los acoplamientos propios y mutuos de los devanados en el eje  $-d$  y  $v_F$  la fuente de excitación del devanado de campo [28].

Los elementos que se encuentran denotados por un subíndice  $d$  o  $q$  representan los elementos del eje  $-d$  y  $-q$ , respectivamente; para los elementos que tienen subíndice  $F$  denotan al devanado de excitación de campo.

Las definición para la representación matricial de los acoplamientos propios y mutuos de los devanados en el eje  $-q$  y  $-d$  son:

$$M_{Qq} = \begin{bmatrix} L_Q & M_{qQ} \\ M_{qQ} & L_q \end{bmatrix}$$

$$M_{dDF} = \begin{bmatrix} L_d & M_{dD} & M_{dF} \\ M_{dD} & L_D & M_{DF} \\ M_{dF} & M_{DF} & L_F \end{bmatrix}$$

Es importante notar que se tiene una representación gráfica de la máquina síncrona, incluyendo inductancias propias y mutuas, y su respectiva resistencia en cada uno de los devanados. Así mismo, la parte mecánica es considerada en el mismo Bond Graph, conociendo así el intercambio energético entre sus elementos y siendo posible la determinación del modelo matemático de acuerdo a la estructura de unión.

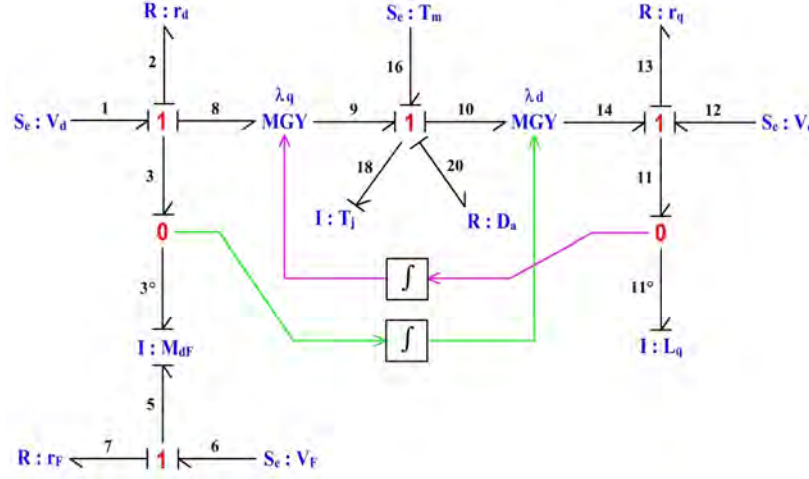
### Modelo Simplificado de la Máquina Síncrona

Los devanados de amortiguamiento de una máquina síncrona pueden ser despreciados si su efecto en el transitorio bajo estudio es lo suficiente pequeño con respecto a la dinámica del sistema. Esto es particularmente cierto en el estudio donde el amortiguamiento entre máquinas acopladas no es de interés. En el modelo de Bond Graph de la máquina síncrona donde los devanados son despreciados se logra eliminando los bonds:

$$D \rightarrow \{15, 4\}$$

$$Q \rightarrow \{19, 17\}$$

La Figura 3.37 muestra el modelo de Bond Graph simplificado de la máquina síncrona sin devanados de amortiguamiento.



**Figura 3.37:** Modelo en Bond Graph de la máquina síncrona sin devanados  $D$  y  $Q$ .

Como se puede apreciar en la Figura 3.37 el sistema es no lineal debido al producto de las variables de estado, enlaces de flujo y corrientes [29], por lo tanto el sistema tiene la forma:

$$\dot{x}(t) = f[x(t), u(t), t] \quad (3.134)$$

Dicho lo anterior, se hace evidente la necesidad de una linealización de la máquina síncrona para poder cumplir con los requisitos hechos en esta tesis para el estudio de la incertidumbre paramétrica en el sistema.

### 3.4.2.2 Obtención del modelo en espacio de estados

Un sistema linealizado es útil para conocer el comportamiento del sistema cuando es perturbado, tal que el nuevo y el viejo punto de equilibrio son cercanamente iguales. Las ecuaciones del sistema están linealizadas alrededor de puntos de operación. Las nuevas ecuaciones lineales así obtenidas son supuestas a ser validas en una región cercana al punto de equilibrio. La información gráfica de un Bond Graph puede ser utilizada para identificar las secciones no lineales de un sistema físico [30]. Las ecuaciones de estado linealizadas se pueden expresar como:

$$\begin{aligned} \dot{x}_\delta(t) &= A_\delta x_\delta(t) + B_\delta u_\delta(t) \\ y_\delta(t) &= C_\delta x_\delta(t) + D_\delta u_\delta(t) \end{aligned} \quad (3.135)$$

donde  $A_\delta$ ,  $B_\delta$ ,  $C_\delta$  y  $D_\delta$  son los jacobianos de las matrices del sistema no linealizado y son evaluadas en los puntos de equilibrio.



Las relaciones constitutivas son determinadas por:

$$\begin{aligned} F &= \text{diag} \left\{ M_{dF}^{-1}, \frac{1}{L_q}, \frac{1}{T_j} \right\} \\ L &= \text{diag} \{ r_d, r_F, r_q, D_a \} \end{aligned} \quad (3.138)$$

donde  $M_{dF}$  es una matriz que comprende las inductancias propias y mutuas entre  $-d$  y  $F$ , dicha matriz está definida por:

$$M_{dF} = \begin{bmatrix} L_d & m_{Fd} \\ m_{Fd} & L_F \end{bmatrix} \quad (3.139)$$

La matriz de estructura unión para el generador síncrono linealizado, queda expresada en (3.140).

$$\begin{bmatrix} e_3 \\ e_5 \\ e_{11} \\ e_{18} \\ \hline f_2 \\ f_7 \\ f_{13} \\ f_{20} \\ \hline f_2 \\ f_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -\tilde{\lambda}_q & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda_q \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \tilde{\lambda}_d & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \lambda_d \\ \tilde{\lambda}_q & 0 & -\tilde{\lambda}_d & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & \lambda_q & -\lambda_d & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_3 \\ f_5 \\ f_{11} \\ f_{18} \\ \hline e_2 \\ e_7 \\ e_{13} \\ e_{20} \\ \hline e_1 \\ e_6 \\ e_{12} \\ e_{16} \\ f_{22} \\ f_{24} \\ f_{27} \end{bmatrix} \quad (3.140)$$

Con auxilio de las submatrices  $S_{ij}$  de (3.140) se procede a encontrar la matriz auxiliar:

$$\begin{aligned} M &= L(I - S_{22}L)^{-1} \\ &= \text{diag} \{ r_d, r_F, r_q, D_a \} \end{aligned} \quad (3.141)$$

Puesto que el modelo del generador síncrono no tiene elementos en causalidad derivativa,  $E = I_{4 \times 4}$ .



Finalmente, se calculan las ecuaciones de estado del sistema:

$$\begin{aligned}
 A_\delta &= E^{-1} (S_{11} + S_{12} M S_{21}) F \\
 &= \begin{bmatrix} -\frac{r_d L_F}{\alpha} & \frac{r_d m_{Fd}}{\alpha} & 0 & -\frac{\tilde{\lambda}_q}{T_j} \\ \frac{r_F m_{Fd}}{\alpha} & -\frac{r_F L_d}{\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{r_q}{L_q} & \frac{\tilde{\lambda}_d}{T_j} \\ \frac{\tilde{\lambda}_q L_F}{\alpha} & -\frac{\tilde{\lambda}_q m_{Fd}}{\alpha} & -\frac{\tilde{\lambda}_d}{L_q} & -\frac{D_a}{T_j} \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{3.142}$$

$$\begin{aligned}
 B_\delta &= E^{-1} (S_{13} + S_{12} M S_{23}) \\
 &= \left[ \begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda_q \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \lambda_d \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \lambda_q & -\lambda_d & 0 \end{array} \right]
 \end{aligned} \tag{3.143}$$

$$\begin{aligned}
 C_\delta &= (S_{31} + S_{32} M S_{21}) F \\
 &= \begin{bmatrix} \frac{L_F}{\alpha} & -\frac{m_{Fd}}{\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{L_q} & 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{3.144}$$

$$\begin{aligned}
 D_\delta &= S_{33} + S_{32} M S_{23} \\
 &= 0_{2 \times 7}
 \end{aligned} \tag{3.145}$$

donde  $\alpha = L_d L_F - M_{Fd}^2$ . Siguiendo el procedimiento de linealización, la matriz  $B_\delta$  puede ser reescrita de la siguiente manera:

$$B_\delta = \bar{B}_\delta u_\delta(t) + \hat{B}_\delta \tilde{u}(t) \tag{3.146}$$

donde

$$\hat{B}_\delta \tilde{u}(t) = B_1 x_\delta(t) \tag{3.147}$$

De manera similar:

$$D_\delta = \bar{D}_\delta u_\delta(t) + \hat{D}_\delta \tilde{u}(t) \tag{3.148}$$

$$\hat{D}_\delta \tilde{u}(t) = D_1 x_\delta(t) \tag{3.149}$$

Así, (3.135) puede ser reescrita, como:

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_\delta(t) &= (A_\delta + B_1) x_\delta(t) + \bar{B}_\delta u_\delta(t) \\
 y_\delta(t) &= (C_\delta + D_1) x_\delta(t) + \bar{D}_\delta u_\delta(t)
 \end{aligned} \tag{3.150}$$

Haciendo uso de (3.147) y (3.149) en (3.143) y (3.145), y recordando del sistema no lineal que  $\lambda_q = p_{11}$  y  $\lambda_d = p_3$ , se tiene que:

$$\begin{aligned}
 \hat{B}_\delta \tilde{u}(t) &= B_1 x_\delta(t) \\
 \begin{bmatrix} 0 & 0 & -p_{11} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_3 \\ p_{11} & -p_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{22} \\ f_{24} \\ f_{27} \end{bmatrix} &= B_1 \begin{bmatrix} p_3 \\ p_5 \\ p_{11} \\ p_{18} \end{bmatrix} \\
 \begin{bmatrix} -f_{27} p_{11} \\ 0 \\ f_{27} p_3 \\ f_{22} p_{11} - f_{24} p_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -f_{27} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ f_{27} & 0 & 0 & 0 \\ -f_{24} & 0 & f_{22} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_3 \\ p_5 \\ p_{11} \\ p_{18} \end{bmatrix} \quad (3.151)
 \end{aligned}$$

Para el caso de  $D_\delta$ ,  $D_1 = 0_{2 \times 4}$ . Finalmente, bajo la forma (3.150) las matrices quedan:

$$\begin{aligned}
 \bar{A}_\delta &= A_\delta + B_1 \\
 &= \begin{bmatrix} -\frac{r_d L_F}{\alpha} & \frac{r_d m_{Fd}}{\alpha} & -f_{27} & -\frac{\tilde{\lambda}_q}{T_j} \\ \frac{r_F m_{Fd}}{\alpha} & -\frac{r_F L_d}{\alpha} & 0 & 0 \\ f_{27} & 0 & -\frac{r_q}{L_q} & \frac{\tilde{\lambda}_d}{T_j} \\ \frac{\tilde{\lambda}_q L_F}{\alpha} - f_{24} & -\frac{\tilde{\lambda}_q m_{Fd}}{\alpha} & -\frac{\tilde{\lambda}_d}{L_q} + f_{22} & -\frac{D_a}{T_j} \end{bmatrix} \quad (3.152)
 \end{aligned}$$

$$\bar{B}_\delta = I_{4 \times 4} \quad (3.153)$$

$$\begin{aligned}
 \bar{C}_\delta &= C_\delta + D_1 \\
 &= C_\delta \quad (3.154)
 \end{aligned}$$

$$\bar{D}_\delta = 0_{2 \times 4} \quad (3.155)$$

Quedando establecidas las ecuaciones de estado para el sistema linealizado. En la Figura 3.39 se muestra el diagrama en  $20\text{-sim}^{\text{®}}$  del generador síncrono linealizado.

Para obtener la respuesta en el tiempo se tienen los siguientes valores en los parámetros:  $D_a = 1.33 \frac{N m s}{rad}$ ,  $T_j = 2 \frac{N m s^2}{rad}$ ,  $L_q = 1.3 H$ ,  $L_d = 1.7 H$ ,  $L_F = 1.65 H$ ,  $m_{Fd} = 0.8 H$ ,  $r_q = 10 \Omega$ ,  $r_d = 50 \Omega$ ,  $r_F = 120 \Omega$ ,  $T_m = 100 N m$ ,  $V_q = 5v$ ,  $V_d = 12v$ ,  $V_F = 30v$ .

En cuanto a los valores  $\tilde{\lambda}_q$  y  $\tilde{\lambda}_d$  son los enlaces de flujo de los bond 11 y 3, respectivamente;  $\tilde{I}_{q0}$ ,  $\tilde{I}_{d0}$  y  $\tilde{\omega}_0$  son los flujos existentes los elementos  $I_d$ ,  $I_q$  y  $T_j$ . Estos valores son obtenidos de la

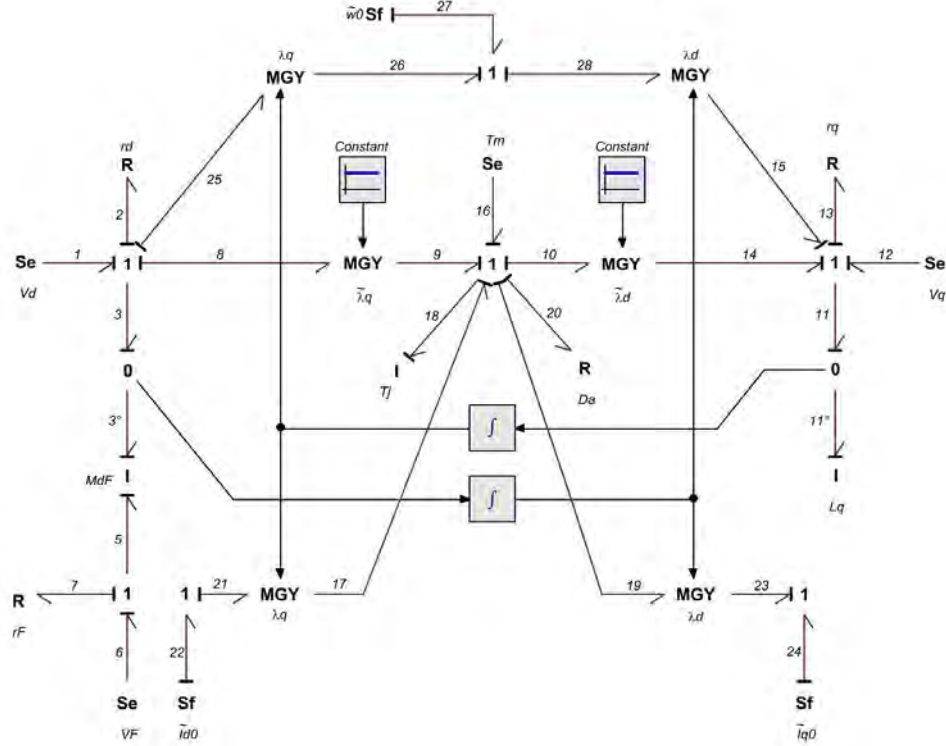


Figura 3.39: Linealización del generador síncrono en 20-sim<sup>®</sup>.

simulación del sistema no lineal en su estado estacionario, es decir son los puntos de equilibrio sobre los cuales la linealización fue efectuada.

Una vez realizada la simulación en 20-sim<sup>®</sup> del sistema no lineal, se tiene que  $\tilde{\lambda}_q = 0.2538 \text{ Wb}$ ,  $\tilde{\lambda}_d = -0.0405 \text{ Wb}$ ,  $\tilde{I}_{q0} = 0.1956 \text{ A}$ ,  $\tilde{I}_{d0} = -0.1415 \text{ A}$  y  $\tilde{\omega}_0 = 75.1669 \frac{\text{rad}}{\text{seg}}$ . Finalmente se tienen todos los valores para realizar la simulación del sistema linealizado.

En la Figura 3.40 se aprecia la comparación de las salidas no lineales y linealizadas.

Al observar el transitorio de las salidas en la Figura 3.40 es claro que la respuesta no lineal (gráficas continuas) es diferente a la respuesta linealizada (gráficas punteadas), esto es debido a que los valores con tilde, descritos líneas arriba; fueron obtenidos en el estado estacionario, por lo que el comportamiento del sistema no lineal y linealizado debe ser muy parecido en el estado estacionario, caso que se corrobora en dicha gráfica.

En la Figura 3.41 se muestra la respuesta a una entrada escalón unitario del generador síncrono.

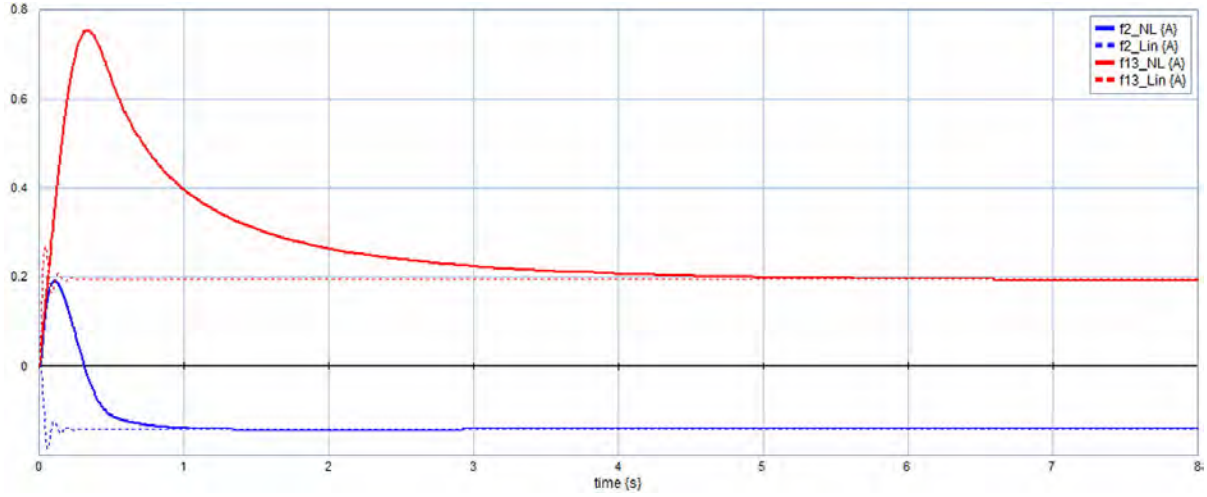


Figura 3.40: Comparacion de las salidas no lineales y linealizadas del generador síncrono.

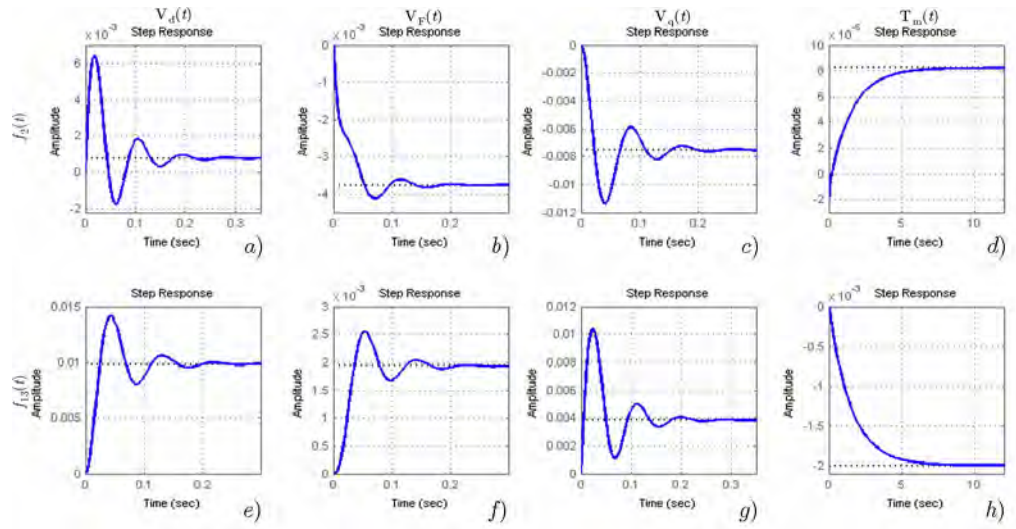
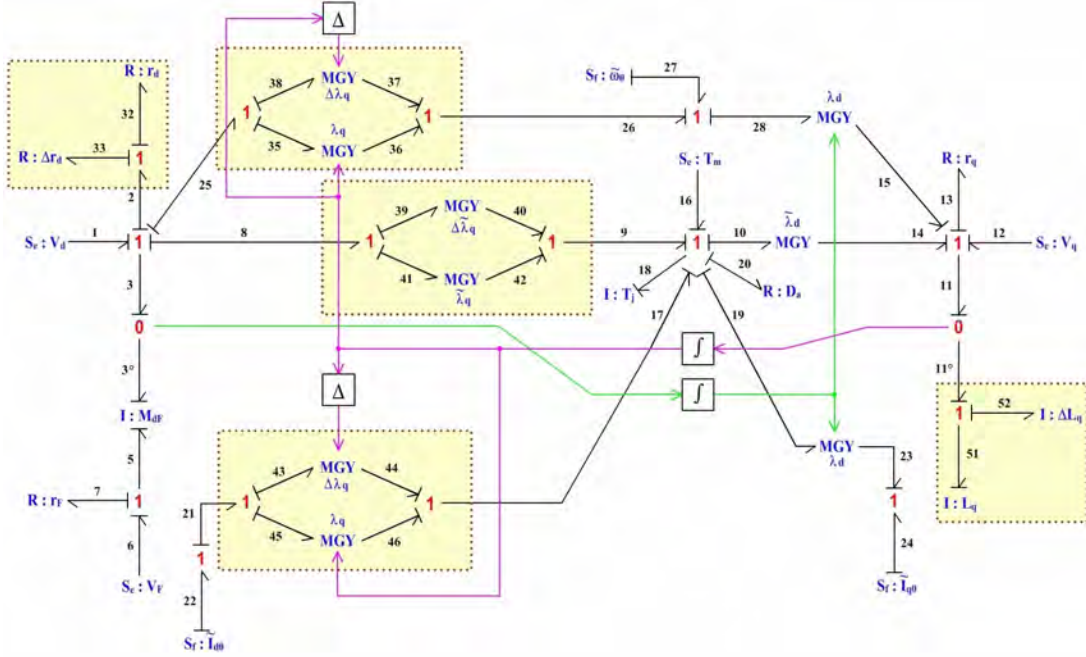


Figura 3.41: Respuesta al escalón unitario del generador síncrono.

### 3.4.2.3 Modelo del generador síncrono en la forma canónica

Para la adición de incertidumbre paramétrica, se considera el modelo linealizado del generador síncrono, mostrado en la Figura 3.38. La incertidumbre agregada se encuentran en los elementos  $R : r_d$ ,  $I : L_q$  y en el girador con el módulo  $\tilde{\lambda}_q$ , así como en los giradores auxiliares utilizados para la linealización,  $\lambda_q$ . En la Figura 3.42 se puede apreciar el UBG del generador síncrono.



**Figura 3.42:** UBG en la forma canónica del generador síncrono.

Con ayuda de la Figura 3.42 se obtienen los vectores claves de entrada y salida, descritos a continuación:

$$\begin{aligned} u_\delta(t) &= \begin{bmatrix} e_1 & e_6 & e_{12} & e_{16} \end{bmatrix}^T; & \tilde{u}(t) &= \begin{bmatrix} f_{22} & f_{24} & f_{27} \end{bmatrix}^T \\ y_\delta(t) &= \begin{bmatrix} f_2 & f_{13} \end{bmatrix}^T \end{aligned} \quad (3.156)$$

Los vectores de entrada y salida de los elementos resistivos nominales y con incertidumbre, son determinados por:

$$\begin{aligned} D_{in}(t) &= \begin{bmatrix} f_{32} & f_7 & f_{13} & f_{20} \end{bmatrix}^T; & D_{in\Delta}(t) &= f_{33} \\ D_{out}(t) &= \begin{bmatrix} e_{32} & e_7 & e_{13} & e_{20} \end{bmatrix}^T; & D_{out\Delta}(t) &= e_{33} \end{aligned} \quad (3.157)$$

Se obtienen los vectores clave de los estados, nominales y con incertidumbre:

$$\begin{aligned}
 x_{\delta n}(t) &= \begin{bmatrix} p_3 & p_5 & p_{51} & p_{18} \end{bmatrix}^T; & x_{\delta \Delta}(t) &= p_{52} \\
 \dot{x}_{\delta n}(t) &= \begin{bmatrix} e_3 & e_5 & e_{51} & e_{18} \end{bmatrix}^T; & \dot{x}_{\delta \Delta}(t) &= e_{52} \\
 z_{\delta n}(t) &= \begin{bmatrix} f_3 & f_5 & f_{51} & f_{18} \end{bmatrix}^T; & z_{\delta \Delta}(t) &= f_{52} \\
 x_{\delta nd}(t) &= \dot{x}_{\delta nd}(t) = z_{\delta nd}(t) = x_{\delta \Delta d}(t) = \dot{x}_{\delta \Delta d}(t) = z_{\delta \Delta d}(t) = 0
 \end{aligned} \tag{3.158}$$

Completando la matriz de estructura unión de (3.7), se tienen las siguientes submatrices:

$$\begin{aligned}
 S_{11} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -(\tilde{\lambda}_q + \Delta\tilde{\lambda}_q) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \tilde{\lambda}_d \\ \tilde{\lambda}_q + \Delta\tilde{\lambda}_q & 0 & -\tilde{\lambda}_d & 0 \end{bmatrix}; & S_{31} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\
 S_{13} &= \left[ \begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -(\lambda_q + \Delta\lambda_q) \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \lambda_d \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \lambda_q + \Delta\lambda_q & -\lambda_d & 0 \end{array} \right] \\
 S_{16} &= -S_{61}^T = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; & S_{15} &= -S_{51}^T = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \\
 S_{14} &= S_{17} = S_{26} = 0_{4 \times 1}; & S_{22} &= 0_{4 \times 4}; & S_{23} &= 0_{4 \times 7}; \\
 S_{33} &= 0_{2 \times 7}; & S_{32} &= 0_{2 \times 4}; & S_{12} &= -S_{21}^{-1} = I_{4 \times 4}; & S_{36} &= 0_{2 \times 1}; \\
 S_{62} &= S_{71} = 0_{1 \times 4}; & S_{63} &= 0_{1 \times 7}
 \end{aligned} \tag{3.159}$$

Las relaciones constitutivas (3.3) a (3.8) son:

$$\begin{aligned}
 F_n &= \text{diag} \left\{ M_{dF}^{-1}, \frac{1}{L_q}, \frac{1}{T_j} \right\}; & F_{nd} &= 0 \\
 F_{\Delta} &= \frac{1}{\Delta L_q}; & F_{\Delta d} &= 0 \\
 L_n &= \text{diag} \{ r_d, r_F, r_q, D_a \}; & L_{\Delta} &= \Delta r_d
 \end{aligned} \tag{3.160}$$

donde  $M_{dF}$  es definida por (3.139). Se procede a determinar la existencia de (3.12):

$$\begin{aligned} E_d &= I + S_{14}F_{nd}^{-1}S_{14}^T F_n \\ &= I_{4 \times 4} \end{aligned} \quad (3.161)$$

$$\begin{aligned} E_\Delta &= S_{15}F_\Delta^{-1}S_{15}^T F_n \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\Delta L_q}{L_q} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.162)$$

$$\begin{aligned} E_{\Delta d} &= S_{17}F_{\Delta d}^{-1}S_{17}^T F_n \\ &= 0_{4 \times 4} \end{aligned} \quad (3.163)$$

$$\begin{aligned} E &= E_d + E_\Delta + E_{\Delta d} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{L_q + \Delta L_q}{L_q} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.164)$$

Las matrices auxiliares  $M$ ,  $P$  y  $Q$  son:

$$\begin{aligned} M &= L_n (I - S_{22}L_n)^{-1} \\ &= \text{diag}\{r_d, r_F, r_q, D_a\} \end{aligned} \quad (3.165)$$

$$\begin{aligned} P &= (I + S_{26}^T M S_{26} L_\Delta)^{-1} (S_{61} - S_{26}^T M S_{21}) \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.166)$$

$$\begin{aligned} Q &= (I + S_{26}^T M S_{26} L_\Delta)^{-1} (S_{63} - S_{26}^T M S_{23}) \\ &= 0_{1 \times 7} \end{aligned} \quad (3.167)$$

Para este ejemplo, la existencia de incertidumbre en el módulo del girador provoca un cambio en el planteamiento de las ecuaciones (3.13) y (3.14), esto se debe a que en la matrices  $S_{11}$  y  $S_{13}$  se encuentra expresada la incertidumbre del módulo, por lo que deben ser reescritas:

$$\begin{aligned}
 S_{11} &= S_{11n} + \Delta S_{11} \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -\tilde{\lambda}_q \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \tilde{\lambda}_d \\ \tilde{\lambda}_q & 0 & -\tilde{\lambda}_d & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -\Delta\tilde{\lambda}_q \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \Delta\tilde{\lambda}_q & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.168)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 S_{13} &= S_{13n} + \Delta S_{13} \\
 &= \left[ \begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda_q \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \lambda_d \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \lambda_q & -\lambda_d & 0 \end{array} \right] + \left[ \begin{array}{cccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\Delta\lambda_q \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \Delta\lambda_q & 0 & 0 \end{array} \right] \quad (3.169)
 \end{aligned}$$

Así, (3.13) puede ser reescrita:

$$\begin{aligned}
 A_1 &= (S_{11n} + \Delta S_{11} + S_{12}MS_{21}) F_n \\
 &= (S_{11n} + S_{12}MS_{21}) F_n + \Delta S_{11}F_n \quad (3.170)
 \end{aligned}$$

donde

$$\tilde{A}_1 = (S_{11n} + S_{12}MS_{21}) F_n$$

De manera similar para  $B_1$  queda:

$$\begin{aligned}
 B_1 &= (S_{13} + \Delta S_{13} + S_{12}MS_{23}) \\
 &= (S_{13} + S_{12}MS_{23}) + \Delta S_{13} \quad (3.171)
 \end{aligned}$$

donde

$$\tilde{B}_1 = (S_{13} + S_{12}MS_{23})$$

Así, (3.23) y (3.24) han cambiado:

$$\begin{aligned}
 A_{\delta n} &= E_d^{-1} \tilde{A}_1 \\
 \Delta A_{\delta} &= \left( TE^{-1} A_1 T^{-1} - E_d^{-1} \tilde{A}_1 \right) + (TE^{-1} A_2 T^{-1}) \quad (3.172)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 B_{\delta n} &= E_d^{-1} \tilde{B}_1 \\
 \Delta B_{\delta} &= TE^{-1} B_1 - E_d^{-1} \tilde{B}_1 + TE^{-1} B_2 \quad (3.173)
 \end{aligned}$$



Ahora se está en la posibilidad de encontrar las matrices que dan forma al modelo canónico:

$$\begin{aligned}
 \tilde{A}_1 &= (S_{11n} + S_{12}MS_{21})F_n \\
 &= \begin{bmatrix} -\frac{r_d L_F}{\alpha} & \frac{r_d m_{Fd}}{\alpha} & 0 & -\frac{\tilde{\lambda}_q}{T_j} \\ \frac{r_F m_{Fd}}{\alpha} & -\frac{r_F L_d}{\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{r_q}{L_q} & \frac{\tilde{\lambda}_d}{T_j} \\ \frac{\tilde{\lambda}_q L_F}{\alpha} & -\frac{\tilde{\lambda}_q m_{Fd}}{\alpha} & -\frac{\tilde{\lambda}_d}{L_q} & -\frac{D_d}{T_j} \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{3.174}$$

$$\begin{aligned}
 A_2 &= (S_{16} + S_{12}MS_{26})L_\Delta PF_n \\
 &= \begin{bmatrix} -\frac{\Delta r_d L_F}{\alpha} & \frac{\Delta r_d m_{Fd}}{\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{3.175}$$

$$\begin{aligned}
 \tilde{B}_1 &= (S_{13n} + S_{12}MS_{23}) \\
 &= \left[ \begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda_q \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \lambda_d \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \lambda_q & -\lambda_d & 0 \end{array} \right]
 \end{aligned} \tag{3.176}$$

$$\begin{aligned}
 B_2 &= (S_{16} + S_{12}MS_{26})L_\Delta Q \\
 &= 0_{4 \times 7}
 \end{aligned} \tag{3.177}$$

$$\begin{aligned}
 C_1 &= (S_{31} + S_{32}MS_{21})F_n \\
 &= \begin{bmatrix} \frac{L_F}{\alpha} & -\frac{m_{Fd}}{\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{L_q} & 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{3.178}$$

$$\begin{aligned}
 C_2 &= (S_{36} + S_{32}MS_{26})L_\Delta PF_n \\
 &= 0_{2 \times 4}
 \end{aligned} \tag{3.179}$$

$$\begin{aligned}
 D_1 &= S_{33} + S_{32}MS_{23} \\
 &= 0_{2 \times 7}
 \end{aligned} \tag{3.180}$$

$$\begin{aligned}
 D_2 &= (S_{36} + S_{32}MS_{26})L_\Delta Q \\
 &= 0_{2 \times 7}
 \end{aligned} \tag{3.181}$$

donde  $\alpha = L_d L_F - m_{Fd}^2$ . Se determina la matriz de transformación entre  $x_{\delta n}(t)$  y  $x_\delta(t)$ , definida

por (3.20):

$$T = I + E_{\Delta} = E \quad (3.182)$$

Así, usando (3.172), (3.173), (3.25) y (3.26), se obtienen las ecuaciones de estado para el sistema en su forma canónica:

$$\begin{aligned} A_{\delta n} &= E_d^{-1} \tilde{A}_1 \\ &= \begin{bmatrix} -\frac{r_d L_F}{\alpha} & \frac{r_d m_{Fd}}{\alpha} & 0 & -\frac{\tilde{\lambda}_q}{T_j} \\ \frac{r_F m_{Fd}}{\alpha} & -\frac{r_F L_d}{\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{r_q}{L_q} & \frac{\tilde{\lambda}_d}{T_j} \\ \frac{\tilde{\lambda}_q L_F}{\alpha} & -\frac{\tilde{\lambda}_q m_{Fd}}{\alpha} & -\frac{\tilde{\lambda}_d}{L_q} & -\frac{D_a}{T_j} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.183)$$

$$\begin{aligned} \Delta A_{\delta} &= \left( T E^{-1} A_1 T^{-1} - E_d^{-1} \tilde{A}_1 \right) + \left( T E^{-1} A_2 T^{-1} \right) \\ &= \begin{bmatrix} -\frac{\Delta r_d L_F}{\alpha} & \frac{\Delta r_d m_{Fd}}{\alpha} & 0 & -\frac{\Delta \tilde{\lambda}_q}{T_j} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{r_q \Delta L_q}{\beta} & 0 \\ \frac{\Delta \tilde{\lambda}_q L_F}{\alpha} & -\frac{\Delta \tilde{\lambda}_q m_{Fd}}{\alpha} & \frac{\tilde{\lambda}_d \Delta L_q}{\beta} & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.184)$$

$$\begin{aligned} B_{\delta n} &= E_d^{-1} \tilde{B}_1 \\ &= \left[ \begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda_q \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \lambda_d \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \lambda_q & -\lambda_d & 0 \end{array} \right] \end{aligned} \quad (3.185)$$

$$\begin{aligned} \Delta B_{\delta} &= T E^{-1} B_1 - E_d^{-1} \tilde{B}_1 + T E^{-1} B_2 \\ &= \left[ \begin{array}{cccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\Delta \lambda_q \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \Delta \lambda_q & 0 & 0 \end{array} \right] \end{aligned} \quad (3.186)$$

$$\begin{aligned} C_{\delta n} &= C_1 \\ &= \begin{bmatrix} \frac{L_F}{\alpha} & -\frac{m_{Fd}}{\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{L_q} & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.187)$$

$$\begin{aligned}\Delta C_\delta &= C_1 (T^{-1} - I) + C_2 T^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\Delta L_q}{\beta} & 0 \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (3.188)$$

$$D_{\delta n} = D_1; \quad \Delta D_\delta = D_2 \quad (3.189)$$

donde  $\beta = L_q (L_q + \Delta L_q)$ . Calculando (3.147):

$$\begin{aligned}\hat{B}_\delta \tilde{u}(t) &= (B_{\delta n} + \Delta B_\delta) \tilde{u}(t) = B_1 x_\delta(t) \\ \begin{bmatrix} -f_{27} (p_{11} + \Delta p_{11}) \\ 0 \\ f_{27} p_3 \\ f_{22} (p_{11} + \Delta p_{11}) - f_{24} p_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -(f_{27} + \Delta f_{27}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ f_{27} & 0 & 0 & 0 \\ -f_{24} & 0 & f_{22} + \Delta f_{22} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_3 \\ p_5 \\ p_{11} \\ p_{18} \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (3.190)$$

Ya que (3.190) contiene una parte nominal y otra con incertidumbre provocada por el modulo del girador, se pude reescribir de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}B_1 &= B_{1n} + \Delta B_1 \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -f_{27} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ f_{27} & 0 & 0 & 0 \\ -f_{24} & 0 & f_{22} & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\Delta f_{27} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Delta f_{22} & 0 \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (3.191)$$

De manera similar para  $D_{\delta n} + \Delta D_\delta$  y usando (3.148),  $D_{1n} = \Delta D_1 = 0_{2 \times 4}$ . Entonces (3.150) se reescribe como:

$$\begin{aligned}\dot{x}_\delta(t) &= (\bar{A}_{\delta n} + \Delta \bar{A}_\delta) x_\delta(t) + (\bar{B}_{\delta n} + \Delta \bar{B}_\delta) u_\delta(t) \\ y_\delta(t) &= (\bar{C}_{\delta n} + \Delta \bar{C}_\delta) x_\delta(t) + (\bar{D}_{\delta n} + \Delta \bar{D}_\delta) u_\delta(t)\end{aligned}\quad (3.192)$$

Por lo que las ecuaciones de estado de la forma canónica quedan:

$$\begin{aligned}\bar{A}_{\delta n} &= A_{\delta n} + B_{1n} \\ &= \begin{bmatrix} -\frac{r_d L_F}{\alpha} & \frac{r_d m_{Fd}}{\alpha} & -f_{27} & -\frac{\tilde{\lambda}_q}{T_j} \\ \frac{r_F m_{Fd}}{\alpha} & -\frac{r_F L_d}{\alpha} & 0 & 0 \\ f_{27} & 0 & -\frac{r_q}{L_q} & \frac{\tilde{\lambda}_d}{T_j} \\ \frac{\tilde{\lambda}_q L_F}{\alpha} - f_{24} & -\frac{\tilde{\lambda}_q m_{Fd}}{\alpha} & -\frac{\tilde{\lambda}_d}{L_q} + f_{22} & -\frac{D_a}{T_j} \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (3.193)$$

$$\begin{aligned}\Delta \bar{A}_\delta &= \Delta A_\delta + \Delta B_1 \\ &= \begin{bmatrix} -\frac{\Delta r_d L_F}{\alpha} & \frac{\Delta r_d m_{Fd}}{\alpha} & -\Delta f_{27} & -\frac{\Delta \tilde{\lambda}_q}{T_j} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{r_q \Delta L_q}{\beta} & 0 \\ \frac{\Delta \tilde{\lambda}_q L_F}{\alpha} & -\frac{\Delta \tilde{\lambda}_q m_{Fd}}{\alpha} & \frac{\tilde{\lambda}_d}{\beta} + \Delta f_{22} & 0 \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (3.194)$$

$$\bar{B}_{\delta n} = I_{4 \times 4} \quad (3.195)$$

$$\Delta \bar{B}_\delta = 0_{4 \times 4} \quad (3.196)$$

$$\begin{aligned}\bar{C}_{\delta n} &= C_{\delta n} + D_{1n} \\ &= C_{\delta n}\end{aligned}\quad (3.197)$$

$$\begin{aligned}\Delta \bar{C}_\delta &= \Delta C_\delta + \Delta D_1 \\ &= \Delta C_\delta\end{aligned}\quad (3.198)$$

$$\bar{D}_{\delta n} = 0_{2 \times 4}; \quad \Delta \bar{D}_\delta = 0_{2 \times 4} \quad (3.199)$$

Comparando las matrices anteriores con el subíndice  $n$ , matrices nominales, con (3.152) a (3.155) es claro ver que son exactamente iguales, validándose así la propuesta hecha en esta tesis para sistemas con incertidumbre en la forma canónica.

Sumando las matrices nominales con las matrices correspondientes a la incertidumbre se tiene:

$$\begin{aligned}\bar{A}_\delta &= \bar{A}_{\delta n} + \Delta \bar{A}_\delta \\ &= \begin{bmatrix} -\frac{(r_d + \Delta r_d) L_F}{\alpha} & \frac{(r_d + \Delta r_d) m_{Fd}}{\alpha} & -(f_{27} + \Delta f_{27}) & -\frac{\tilde{\lambda}_q + \Delta \tilde{\lambda}_q}{T_j} \\ \frac{r_F m_{Fd}}{\alpha} & -\frac{r_F L_d}{\alpha} & 0 & 0 \\ f_{27} & 0 & -\frac{r_q}{L_q + \Delta L_q} & \frac{\tilde{\lambda}_d}{T_j} \\ \frac{(\tilde{\lambda}_d + \Delta \tilde{\lambda}_d) L_F}{\alpha} - f_{24} & -\frac{(\tilde{\lambda}_d + \Delta \tilde{\lambda}_d) m_{Fd}}{\alpha} & -\frac{\tilde{\lambda}_d}{L_q + \Delta L_q} + (f_{22} + \Delta f_{22}) & -\frac{D_a}{T_j} \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (3.200)$$

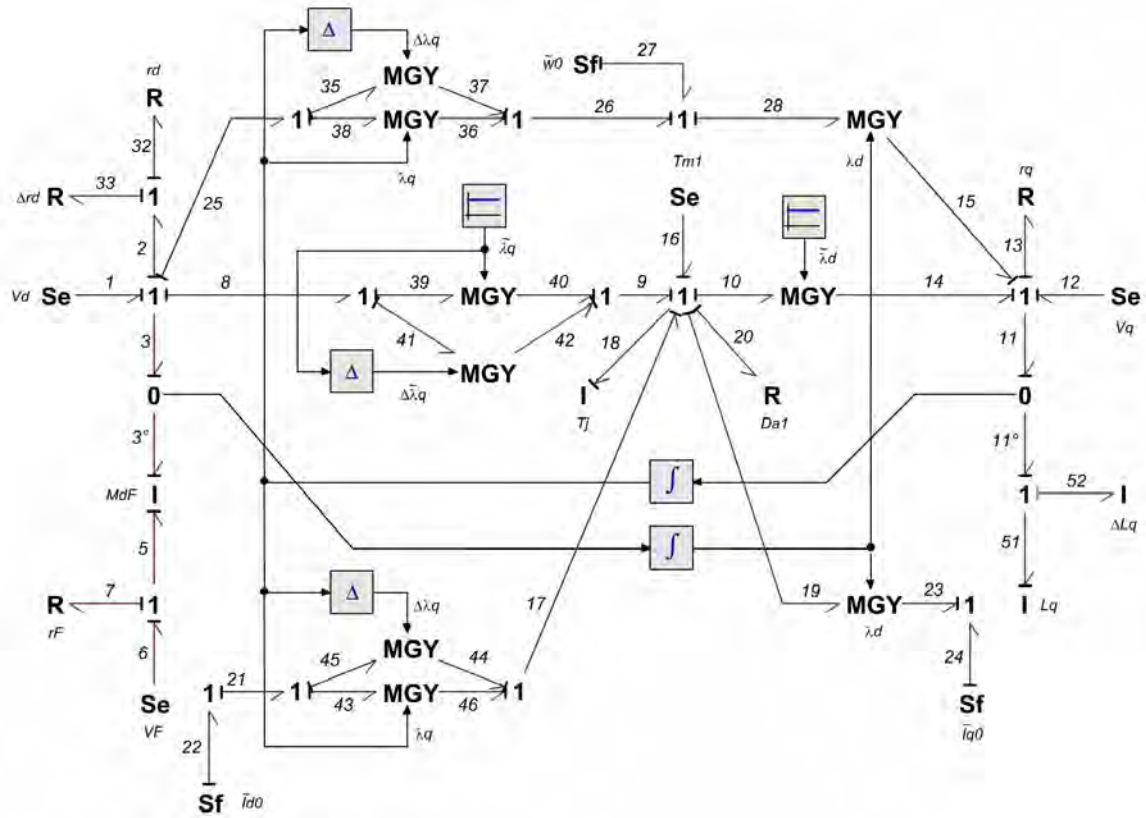
$$\begin{aligned}\bar{B}_\delta &= \bar{B}_{\delta n} + \Delta \bar{B}_\delta \\ &= I_{4 \times 4}\end{aligned}\quad (3.201)$$

$$\begin{aligned}\bar{C}_\delta &= \bar{C}_{\delta n} + \Delta \bar{C}_\delta \\ &= \begin{bmatrix} \frac{L_F}{\alpha} & -\frac{m_{Fd}}{\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{L_q + \Delta L_q} & 0 \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (3.202)$$

$$\begin{aligned}\bar{D}_\delta &= \bar{D}_{\delta n} + \Delta \bar{D}_\delta \\ &= 0_{2 \times 4}\end{aligned}\quad (3.203)$$

donde  $\alpha = L_d L_F - m_{Fd}^2$ . El sistema queda así expresado en su forma canónica.

Los valores numéricos de la incertidumbre son:  $\Delta r_d = 250\Omega$ ,  $\Delta L_q = 1.3H$  y  $\Delta = 0.1$ . Para obtener los valores de  $\tilde{\lambda}_q$ ,  $\tilde{\lambda}_d$ ,  $\tilde{I}_{q0}$ ,  $\tilde{I}_{d0}$  y  $\tilde{\omega}_0$  se mantienen iguales a los calculados para el sistema nominal. El diagrama del generador síncrono con incertidumbre en 20-sim<sup>®</sup> se muestra en la Figura 3.43.



**Figura 3.43:** Diagrama UBG en la forma canónica del generador síncrono en 20-sim<sup>®</sup>.

La respuesta en el tiempo graficada en la Figura 3.44 muestra las afectaciones sufridas por el sistema en presencia de las incertidumbre.

En la Figura 3.44 se aprecia que las respuestas de las corrientes en el generador síncrono han sufrido un cambio debido a la presencia de la incertidumbre.

La Figura 3.45 representa la respuesta al escalón unitario para el generador síncrono con incertidumbre.

En la Figura 3.46 se muestra la comparación de las respuestas entre el sistema sin incertidumbre, BGI, y el sistema con incertidumbre, UBG.

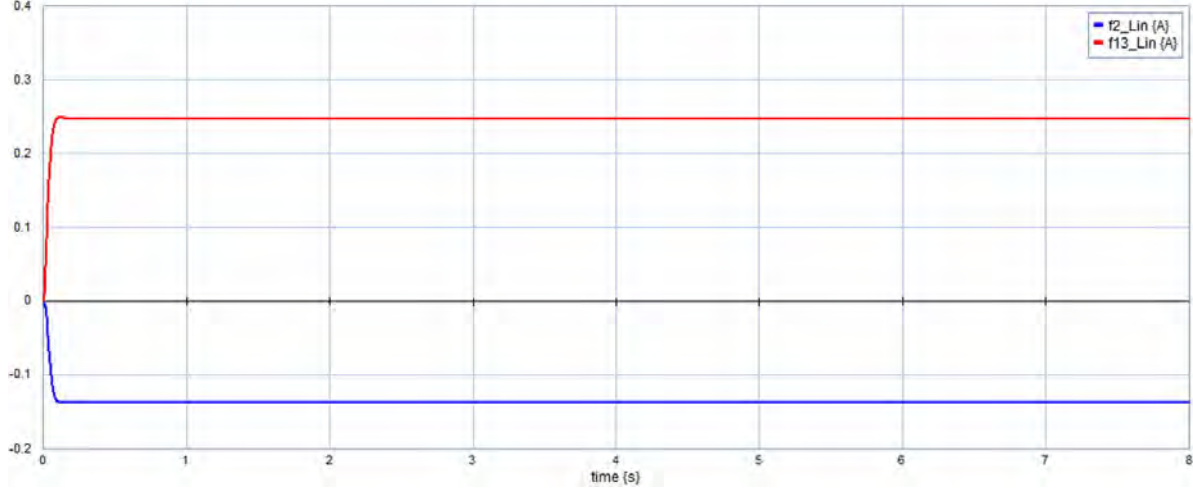


Figura 3.44: Respuesta en el tiempo del UBG.

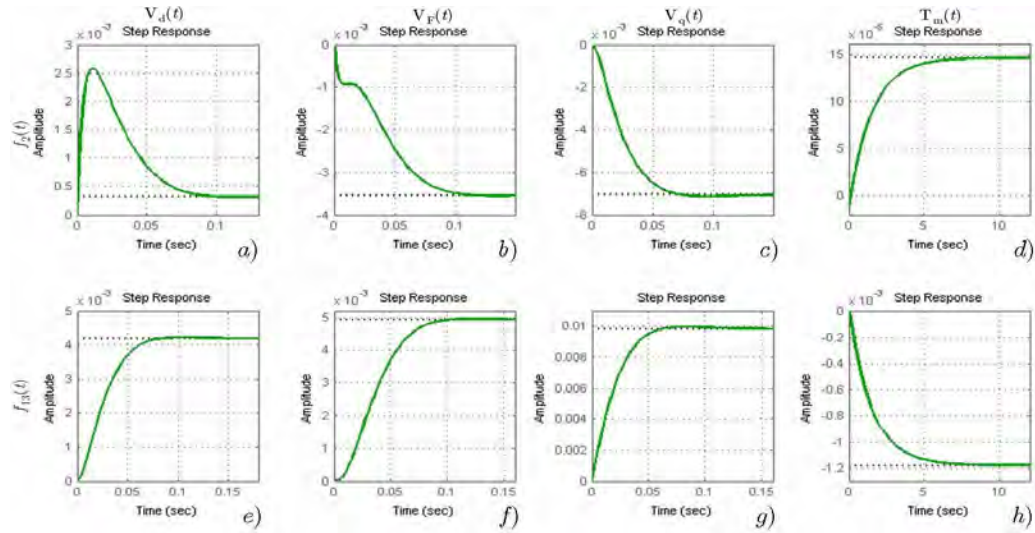
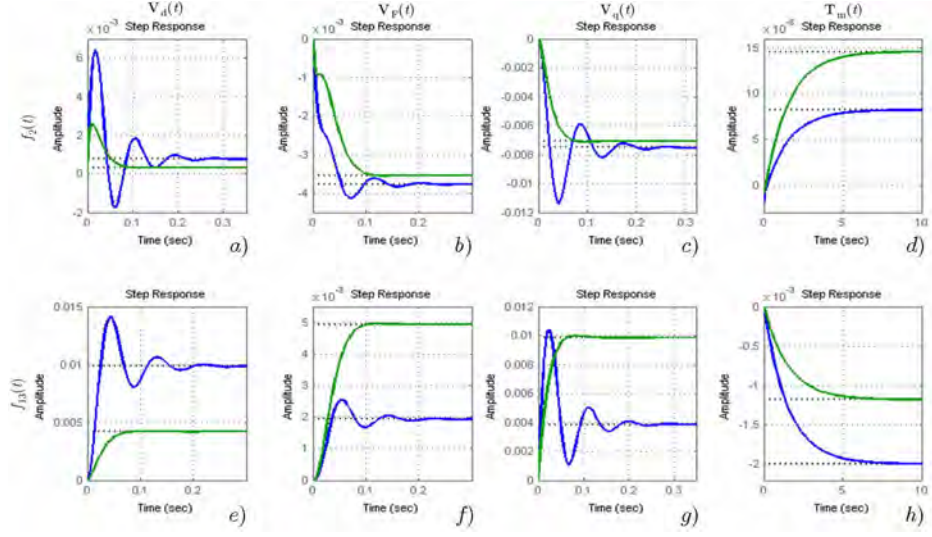


Figura 3.45: Respuesta al escalón unitario del UBG.



**Figura 3.46:** Comparacion de las respuestas al escalón unitario del BGI y UBG.

Es claro que el sistema sufrió cambios en su respuesta debido a la presencia de la incertidumbre.

#### 3.4.2.4 Modelo del generador síncrono en la forma de interconexión estándar

La incertidumbre es agregada en los mismos elementos descritos en la sección anterior, así, el UBG en la forma de interconexión estándar es mostrado en la Figura 3.47.

Definiendo las respectivas entradas y salidas del sistema:

$$\begin{aligned}
 u_{\delta 1}(t) &= \begin{bmatrix} e_1 & e_6 & e_{12} & e_{16} \end{bmatrix}^T; & \tilde{u}_1(t) &= \begin{bmatrix} f_{22} & f_{24} & f_{27} \end{bmatrix}^T \\
 w_{\delta}(t) &= \begin{bmatrix} e_{34} & f_{37} & f_{42} & f_{50} & f_{58} & f_{45} & f_{47} & f_{63} \end{bmatrix}^T \\
 \tilde{z}_{\delta}(t) &= \begin{bmatrix} e_{33} & f_{43} & f_{41} & f_{53} & f_{59} & f_{46} & f_{49} & f_{60} \end{bmatrix}^T; & y_{\delta 1}(t) &= \begin{bmatrix} f_2 & f_{13} \end{bmatrix}^T
 \end{aligned} \tag{3.204}$$

Definiendo los vectores claves:

$$\begin{aligned}
 D_{in}(t) &= \begin{bmatrix} f_{32} & f_7 & f_{13} & f_{20} \end{bmatrix}^T; & D_{out}(t) &= \begin{bmatrix} e_{32} & e_7 & e_{13} & e_{20} \end{bmatrix}^T \\
 x_{\delta}(t) &= \begin{bmatrix} p_3 & p_5 & p_{61} & p_{18} \end{bmatrix}^T; & \dot{x}_{\delta}(t) &= \begin{bmatrix} e_3 & e_5 & e_{61} & e_{18} \end{bmatrix}^T \\
 z_{\delta}(t) &= \begin{bmatrix} f_3 & f_5 & f_{51} & f_{18} \end{bmatrix}^T; & x_{\delta d}(t) &= \dot{x}_{\delta d}(t) = z_{\delta d}(t) = 0
 \end{aligned} \tag{3.205}$$

La matriz de estructura unión de (3.29) se construye a partir de los vectores claves (3.204) y (3.205), así como de la información del UBG de la Figura 3.47.





$$\begin{aligned}
 S_{23}^2 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad S_{32}^1 = 0_{2 \times 4}; \quad S_{33}^{11} = 0_{2 \times 7} \\
 S_{31}^2 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad S_{32}^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad S_{33}^{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{3.207}$$

Se obtienen las respectivas relaciones constitutivas:

$$\begin{aligned}
 F &= \text{diag} \left\{ M_{dF}^{-1}, \frac{1}{L_q}, \frac{1}{T_j} \right\}; \quad F_d = 0 \\
 L &= \text{diag} \{ r_d, r_F, r_q, D_a \} \\
 \Delta &= \text{diag} \left\{ -\delta_{rd}, \delta_{\tilde{\lambda}_{q1}}, -\delta_{\tilde{\lambda}_{q1}}, \delta_{\lambda_{q2}}, -\delta_{\lambda_{q2}}, \delta_{\lambda_{q3}}, -\delta_{\lambda_{q3}}, -\delta_{Lq} \right\}
 \end{aligned} \tag{3.208}$$

donde  $-\delta_{rd} = -\frac{\Delta r_d}{r_d}$ ,  $\pm \delta_{\tilde{\lambda}_{q1}} = \pm \frac{\Delta \tilde{\lambda}_q}{\tilde{\lambda}_q}$ ,  $\pm \delta_{\lambda_{q2}} = \pm \frac{\Delta \lambda_q}{\lambda_q}$ ,  $\pm \delta_{\lambda_{q3}} = \pm \frac{\Delta \lambda_q}{\lambda_q}$  y  $-\delta_{Lq} = \frac{\Delta L_q}{L_q + \Delta L_q}$ . Se calculan las matrices auxiliares:

$$\begin{aligned}
 M &= L (I - S_{22} L)^{-1} \\
 &= \text{diag} \{ r_d, r_F, r_q, D_a \}
 \end{aligned} \tag{3.209}$$

$$\begin{aligned}
 E &= (I + S_{14} F_d^{-1} S_{14}^T F) \\
 &= I_{4 \times 4}
 \end{aligned} \tag{3.210}$$

La matriz auxiliar  $E$  es una matriz identidad puesto que no existen elementos en causalidad derivativa en este sistema.

A continuación, se obtienen las ecuaciones de estado del generador síncrono usando (3.30):

$$\begin{aligned}
 A_{\delta n} &= E^{-1} (S_{11} + S_{12}MS_{21}) F \\
 &= \begin{bmatrix} -\frac{r_d L_F}{\alpha} & \frac{r_d m_{Fd}}{\alpha} & 0 & -\frac{\tilde{\lambda}_q}{T_j} \\ \frac{r_F m_{Fd}}{\alpha} & -\frac{r_F L_d}{\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{r_q}{L_q} & \frac{\tilde{\lambda}_d}{T_j} \\ \frac{\tilde{\lambda}_q L_F}{\alpha} & -\frac{\tilde{\lambda}_q m_{Fd}}{\alpha} & -\frac{\tilde{\lambda}_d}{L_q} & -\frac{D_a}{T_j} \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{3.211}$$

$$\begin{aligned}
 B_{\delta 1n} &= E^{-1} (S_{13}^1 + S_{12}MS_{23}^1) \\
 &= \left[ \begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda_q \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \lambda_d \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \lambda_q & -\lambda_d & 0 \end{array} \right]
 \end{aligned} \tag{3.212}$$

$$\begin{aligned}
 B_{\delta 2} &= E^{-1} (S_{13}^2 + S_{12}MS_{23}^2) \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\tilde{\lambda}_q & 0 & 0 & 0 & \lambda_q & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & r_q \\ 0 & \tilde{\lambda}_q & 0 & \lambda_q & 0 & 0 & 0 & \tilde{\lambda}_d \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{3.213}$$

$$\begin{aligned}
 G_{\delta 1} &= E^{-1} S_{14} F_d^{-1} S_{43}^2 \\
 &= 0_{4 \times 7}
 \end{aligned} \tag{3.214}$$

donde  $\alpha = L_d L_F - m_{Fd}^2$ . Para el generador síncrono no existe  $G_1$  por lo que no es necesario convertir (3.30) en la forma de (3.39). Se procede a obtener las ecuaciones de salida:

$$\begin{aligned}
 C_{\delta 1n} &= (S_{31}^1 + S_{32}^1MS_{21}) F \\
 &= \begin{bmatrix} \frac{L_F}{\alpha} & -\frac{m_{Fd}}{\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{L_q} & 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{3.215}$$

$$\begin{aligned}
 D_{\delta 11n} &= (S_{33}^{11} + S_{32}^1MS_{23}^1) \\
 &= 0_{2 \times 7}
 \end{aligned} \tag{3.216}$$

$$\begin{aligned}
 D_{\delta 12} &= (S_{33}^{12} + S_{32}^1MS_{23}^2) \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{3.217}$$

Las ecuaciones de las salida auxiliares son:

$$\begin{aligned}
 C_{\delta 2} &= (S_{31}^2 + S_{32}^2 M S_{21}) F - S_{34}^2 F_d^{-1} S_{14}^T F A_n \\
 &= \begin{bmatrix} \frac{r_d L_F}{\alpha} & -\frac{r_d m_{Fd}}{\alpha} & 0 & 0 \\ \frac{L_F}{\alpha} & -\frac{m_{Fd}}{\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{T_j} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{T_j} \\ \frac{L_F}{\alpha} & -\frac{m_{Fd}}{\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{L_q} & 0 \end{bmatrix} \quad (3.218)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 D_{\delta 21} &= (S_{33}^{21} + S_{32}^2 M S_{23}^1 - S_{34}^2 F_d^{-1} S_{14}^T F B_1) \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.219)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 D_{\delta 22} &= (S_{32}^2 M S_{23}^2 - S_{34}^2 F_d^{-1} S_{14}^T F B_2) \\
 &= 0_{8 \times 8} \quad (3.220)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 G_{\delta 2} &= S_{34}^2 F_d^{-1} (I - S_{14}^T F E^{-1} S_{14} F_d^{-1}) S_{43}^2 \\
 &= 0_{8 \times 8} \quad (3.221)
 \end{aligned}$$

Puesto que el sistema no contiene elementos en causalidad derivativa, la no existencia de  $G_2$  es puesta en manifiesto ya que tampoco pueden existir incertidumbre paramétrica en los elementos mencionados.

De manera similar a la sección anterior, la matriz  $B_{\delta n}$  puede ser reescrita siguiendo la ecuación (3.147) por lo que:

$$\begin{aligned} \hat{B}_\delta \tilde{u}(t) &= B_1 x_\delta(t) \\ \begin{bmatrix} -f_{27} p_{11} \\ 0 \\ f_{27} p_3 \\ f_{22} p_{11} - f_{24} p_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -f_{27} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ f_{27} & 0 & 0 & 0 \\ -f_{24} & 0 & f_{22} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_3 \\ p_5 \\ p_{11} \\ p_{18} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.222)$$

Reescribiendo (3.211) y (3.212).

$$\begin{aligned} \bar{A}_{\delta n} &= A_{\delta n} + B_1 \\ &= \begin{bmatrix} -\frac{r_d L_F}{\alpha} & \frac{r_d m_{Fd}}{\alpha} & -f_{27} & -\frac{\tilde{\lambda}_q}{T_j} \\ \frac{r_F m_{Fd}}{\alpha} & -\frac{r_F L_d}{\alpha} & 0 & 0 \\ f_{27} & 0 & -\frac{r_q}{L_q} & \frac{\tilde{\lambda}_d}{T_j} \\ \frac{\tilde{\lambda}_q L_F}{\alpha} - f_{24} & -\frac{\tilde{\lambda}_q m_{Fd}}{\alpha} & -\frac{\tilde{\lambda}_d}{L_q} + f_{22} & -\frac{D_a}{T_j} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.223)$$

$$\bar{B}_{\delta 1n} = I_{4 \times 4} \quad (3.224)$$

Para  $D_{\delta 11n}$ , usando (3.149),  $D_1 = 0_{2 \times 4}$ . Reescribiendo (3.215) y (3.216).

$$\begin{aligned} \bar{C}_{\delta 1n} &= C_{\delta 1n} + D_1 \\ &= C_{\delta 1n} \end{aligned} \quad (3.225)$$

$$\bar{D}_{\delta 11n} = 0_{2 \times 4} \quad (3.226)$$

Para el caso de  $D_{\delta 21}$  se debe reescribir también de manera diferente:

$$D_{\delta 21} = \check{D}_{\delta 21} u_\delta(t) + \hat{D}_{\delta 21} \tilde{u}_1(t) \quad (3.227)$$

Puesto que las salidas virtuales cercanas a las fuentes auxiliares usadas para la linealización tienen el mismo valor, entonces  $\tilde{u}_1(t) = \tilde{z}_\delta(t)$ , así (3.227) puede ser reescrita:

$$\begin{aligned} D_{\delta 21} &= \check{D}_{\delta 21} u_{\delta 1}(t) + \hat{D}_{\delta 21} \tilde{z}_\delta(t) \\ \hat{D}_{\delta 21} \tilde{z}_\delta(t) &= D_2 \tilde{z}_\delta(t) \end{aligned} \quad (3.228)$$

Por lo que (3.48) puede ser reescrita, para el caso del generador síncrono,  $G_2 = 0$ :

$$\begin{aligned} (I + D_2) \tilde{z}_\delta(t) &= C_{\delta 2} x_\delta(t) + \check{D}_{\delta 21} u_{\delta 1}(t) + D_{\delta 22} w_\delta(t) \\ \tilde{z}_\delta(t) &= \bar{C}_{\delta 2} x_\delta(t) + \bar{D}_{\delta 21} u_{\delta 1}(t) + \bar{D}_{\delta 22} w_\delta(t) \end{aligned} \quad (3.229)$$

donde  $\bar{C}_{\delta 2} = (I + D_2)^{-1} C_{\delta 2}$ ,  $\bar{D}_{\delta 21} = (I + D_2)^{-1} \check{D}_{\delta 21}$  y  $\bar{D}_{\delta 22} = (I + D_2)^{-1} D_{\delta 22}$ . Sustituyendo los valores apropiados en (3.228):

$$\begin{aligned} \hat{D}_{\delta 21} \tilde{u}_1(t) &= \hat{D}_{\delta 21} \tilde{z}_\delta(t) = D_2 \tilde{z}_\delta(t) \\ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ f_{22} \\ 0 \\ 0 \\ f_{27} \\ 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ f_{53} \\ 0 \\ 0 \\ f_{49} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{33} \\ f_{43} \\ f_{41} \\ f_{53} \\ f_{59} \\ f_{46} \\ f_{49} \\ f_{60} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.230)$$

Hecho lo anterior se determinan las matrices correspondientes a (3.229):

$$\begin{aligned} \bar{C}_{\delta 2} &= (I + D_2)^{-1} C_{\delta 2} \\ &= C_{\delta 2} \end{aligned} \quad (3.231)$$

$$\begin{aligned} \bar{D}_{\delta 21} &= (I + D_2)^{-1} \check{D}_{\delta 21} \\ &= 0_{8 \times 4} \end{aligned} \quad (3.232)$$

$$\begin{aligned} \bar{D}_{\delta 22} &= (I + D_2)^{-1} D_{\delta 22} \\ &= 0_{8 \times 8} \end{aligned} \quad (3.233)$$

De esta manera las ecuaciones de estado del generador síncrono son definidas por:

$$\begin{aligned} \dot{x}_\delta(t) &= \bar{A}_{\delta n} x_\delta(t) + \bar{B}_{\delta 1n} u_{\delta 1}(t) + B_{\delta 2} w(t) \\ y_{\delta 1}(t) &= \bar{C}_{\delta 1n} x_\delta(t) + \bar{D}_{\delta 11n} u_{\delta 1}(t) + D_{\delta 12} w(t) \\ \tilde{z}_\delta(t) &= \bar{C}_{\delta 2} x_\delta(t) + \bar{D}_{\delta 21} u_{\delta 1}(t) + \bar{D}_{\delta 22} w(t) \end{aligned} \quad (3.234)$$

Una vez determinadas las ecuaciones de estado para el sistema linealizado y en su forma de interconexión estándar, se muestra el diagrama en 20-sim<sup>®</sup>, obsérvese la Figura 3.48.

En la Figura 3.49 se muestra la respuesta en el tiempo de las corrientes de salida.

Al hacer la comparación entre la Figura 3.49 y la Figura 3.44 es claro que ambas son idénticas, confirmandose de esta forma que el sistema fue bien modelado por los dos métodos.

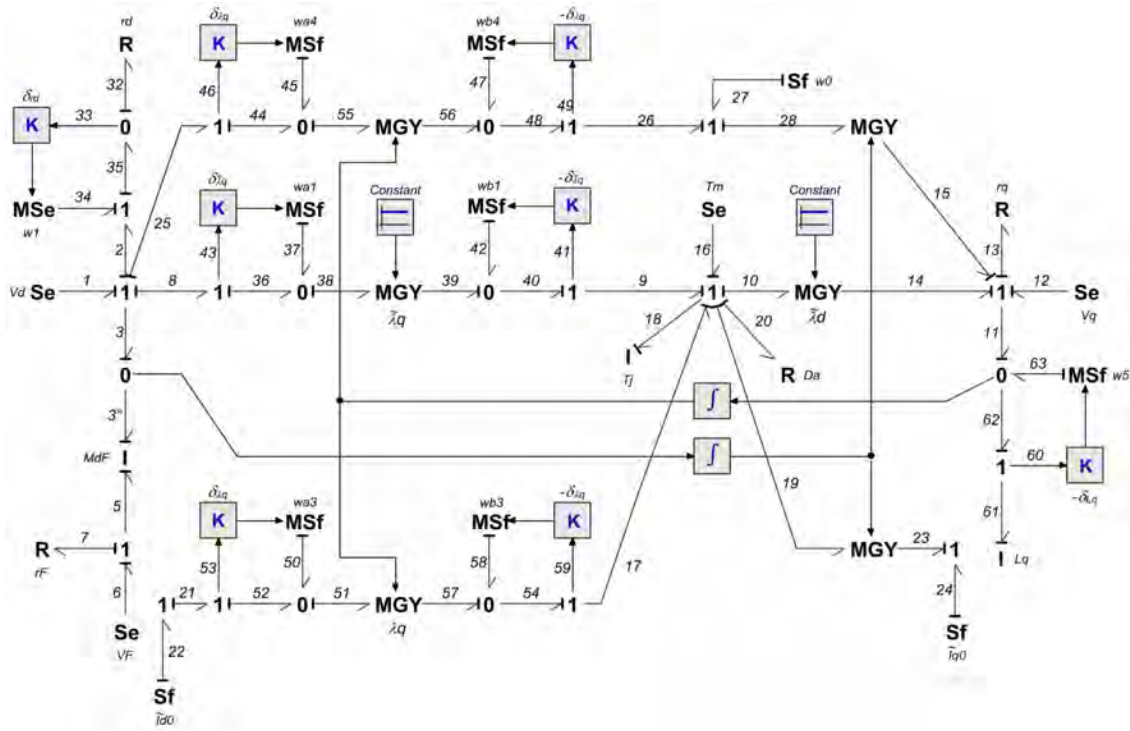


Figura 3.48: UBG en la forma de interconexión estándar del generador síncrono en 20-sim<sup>®</sup>.

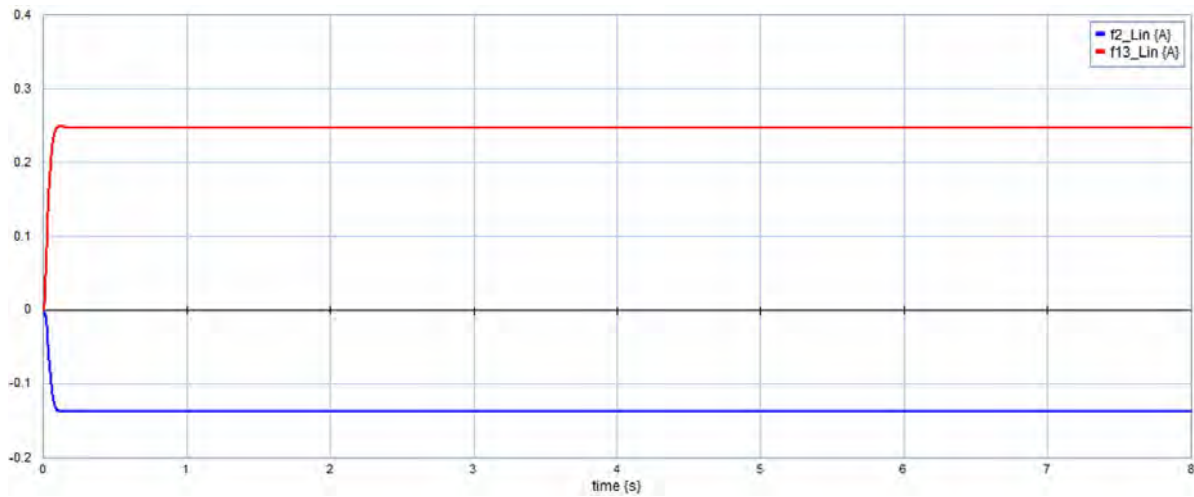
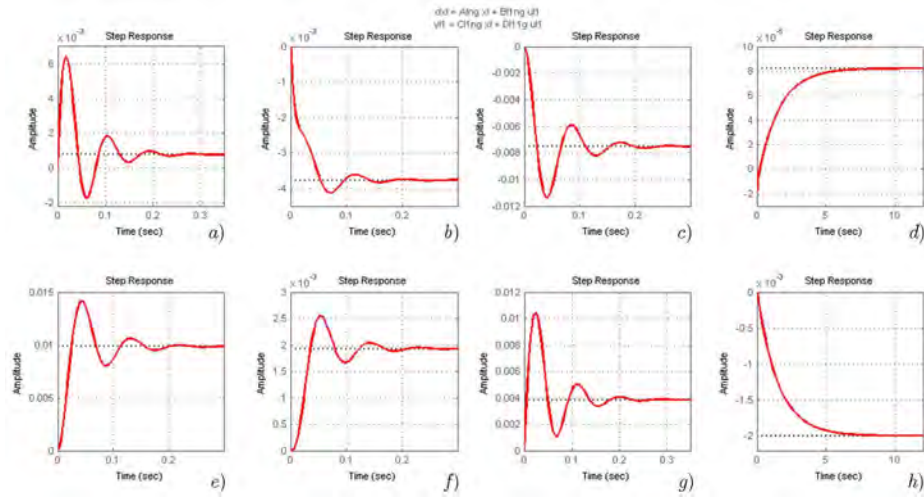


Figura 3.49: Respuesta en el tiempo de las salidas del sistema en su forma de interconexión estándar.

A continuación se grafican las respuestas al escalón unitario, Figura 3.50, cabe destacar que para los fines de esta tesis y puesto que el objetivo principal del modelado en la forma de interconexión estándar es separar toda la incertidumbre del sistema en el bloque  $\Delta$ , sólo se graficará la parte nominal de las ecuaciones de estado mostradas en (3.234), es decir, no se toman en cuenta las salidas virtuales  $\tilde{z}(t)$ , ni las entradas virtuales  $\omega(t)$ .



**Figura 3.50:** Respuesta al escalón unitario de la parte nominal del UBG en la forma de interconexión estándar.

Después de hacer la respectiva comparación entre la Figura 3.50 y las gráficas obtenidas en la Figura 3.41 queda claro que el modelado del sistema con incertidumbres en su forma de interconexión estándar fue exitoso, ya que dichas gráficas resultan ser idénticas.

En este capítulo se describió el proceso de modelado de sistemas con incertidumbre en Bond Graph. Primeramente se modeló la incertidumbre para las dos formas de ecuaciones existentes en la literatura. Después, se plantearon los diagramas de bloques respectivos, donde se hizo una contribución al considerar a los elementos en causalidad derivativa así como su incertidumbre. Finalmente se obtuvo el modelo matemático desde el diagrama en Bond Graph.

En el siguiente capítulo se hace el análisis del efecto producido por la incertidumbre en el sistema, lo anterior es llevado a cabo mediante el uso de herramientas propias de Bond Graphs, así como de conceptos de la teoría de control.





## Capítulo 4

# Implicaciones de la Incertidumbre Paramétrica en el Sistema

### 4.1 Introducción

El análisis de sistemas generalmente consiste en dos partes: cuantitativa y cualitativa. En el estudio cuantitativo se está interesado en la respuesta exacta del sistema para cierta entrada y condiciones iniciales. En el estudio cualitativo se está interesado en las propiedades generales del sistema [31].

En este capítulo se introducirán tres propiedades cualitativas de los sistemas dinámicos lineales: estabilidad, controlabilidad y observabilidad.

El concepto de estabilidad es extremadamente importante, porque la mayoría de los sistemas de trabajo están diseñados para ser estables. Gracias a la representación matricial es posible obtener el polinomio característico y poder aplicar el *Criterio de Hurwitz* para conocer la estabilidad del sistema. También, en este capítulo, se presenta un procedimiento gráfico y sencillo para obtener las condiciones de estabilidad del sistema físico utilizando la Teoría de Grafos.

Los conceptos fundamentales de controlabilidad y estabilidad para ecuaciones de estado lineales con  $n_u$  entradas,  $n_y$  salidas y de dimensión  $n$  son introducidos en este capítulo.

La controlabilidad involucra la influencia de señales de entrada sobre el vector de estados, pero no involucra la ecuación de salida. La observabilidad trata con la influencia del vector de estados sobre la salida, pero no involucra los efectos de las señales de entrada conocidas. Además de sus definiciones en términos de conducir el estado por medio de la entrada, y encontrar el

estado desde la salida, estos conceptos juegan un papel fundamental en la estructura básica de las ecuaciones de estado lineales.

Estos dos conceptos son definidos bajo la suposición que se ha completado la información de las ecuaciones dinámicas; eso es que, las matrices  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , y  $D$  son conocidas de antemano.

## 4.2 Estabilidad

Los sistemas LTI a menudo son descritos por funciones de transferencia; por lo que es útil estudiar las condiciones de estabilidad en términos de la función de transferencia.

Si la función de transferencia de un sistema es una función racional de  $s$ , entonces la estabilidad BIBO (*bounded-input–bounded-output*) del sistema es completamente determinada por los polos de  $G(s)$ .

Si  $G(s)$  es irreducible, es decir, que no exista un factor común no-trivial entre el denominador y el numerador, entonces los polos de  $G(s)$  son iguales a las raíces del denominador. Por lo que bajo la irreducibilidad de  $G(s)$ , la estabilidad BIBO de un sistema es determinada por las raíces de un polinomio, el denominador de  $G(s)$ .

### 4.2.1 Criterio de Routh-Hurwitz

Un polinomio es denominado *polinomio Hurwitz* si todas sus raíces tienen partes reales negativas. Por lo cual un sistema tiene estabilidad BIBO si y sólo si el denominador de su función de transferencia irreducible es un polinomio Hurwitz [32], dicho en otras palabras, los polos de  $G(s)$  se encuentran en la mitad izquierda del plano  $s$  o, equivalentemente, todos los polos de  $G(s)$  tienen parte real negativa.

Si el polinomio es de grado cuatro o mayor, el cómputo de sus raíces no es una tarea sencilla. Además, el conocimiento de la localización exacta de las raíces no es necesaria para determinar la estabilidad. Por lo que es deseable tener algún método para determinar la estabilidad sin necesidad de resolver las raíces.

Considere el polinomio,

$$D(s) = a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \cdots + a_{n-1} s + a_n \quad (4.1)$$

donde  $a_i$  son números reales. Formando de (4.1) los siguientes polinomios,

$$\begin{aligned} D_0(s) &= a_0^{(0)} s^n + a_1^{(0)} s^{n-2} + \dots + a_{n'-1}^{(0)} s^2 + a_{n'}^{(0)} \\ D_1(s) &= a_0^{(1)} s^{n-1} + a_1^{(1)} s^{n-3} + \dots + a_{n'-1}^{(1)} s \end{aligned} \quad (4.2)$$

Siendo  $n' = \frac{n}{2}$ . Note que el numero de coeficientes en  $D_1(s)$  es uno menos que los de  $D_0(s)$  si  $n$  es par; y son iguales si  $n$  es non. Usando estos coeficientes se forma la Tabla 4.1, la cual es denominada como Tabla de Routh [2].

**Tabla 4.1:** Tabla de Routh

|           |               |               |             |         |                  |                |
|-----------|---------------|---------------|-------------|---------|------------------|----------------|
| $s^n$     | $a_0^{(0)}$   | $a_1^{(0)}$   | $a_2^{(0)}$ | $\dots$ | $a_{n'-1}^{(0)}$ | $a_{n'}^{(0)}$ |
| $s^{n-1}$ | $a_0^{(1)}$   | $a_1^{(1)}$   | $a_2^{(1)}$ | $\dots$ | $a_{n'-1}^{(1)}$ |                |
| $s^{n-2}$ | $a_0^{(2)}$   | $a_1^{(2)}$   | $a_2^{(2)}$ | $\dots$ | $a_{n'-1}^{(2)}$ |                |
| $s^{n-3}$ | $a_0^{(3)}$   | $a_1^{(3)}$   | $a_2^{(3)}$ | $\dots$ | $a_{n'-2}^{(3)}$ |                |
| $\vdots$  | $\vdots$      | $\vdots$      | $\vdots$    |         | $\vdots$         |                |
| $s^2$     | $a_0^{(n-2)}$ | $a_1^{(n-2)}$ |             |         |                  |                |
| $s^1$     | $a_0^{(n-1)}$ |               |             |         |                  |                |
| $s^0$     | $a_0^{(n)}$   |               |             |         |                  |                |

Los coeficientes en las primeras dos filas son los coeficientes de  $D_0(s)$  y  $D_1(s)$ . Los coeficientes en el resto de las filas son obtenidos de las dos filas previas usando la formula,

$$a_i^{(k+2)} = \frac{a_0^{(k+1)} a_{i+1}^{(k)} - a_0^{(k)} a_{i+1}^{(k+1)}}{a_0^{(k+1)}} = a_{i+1}^{(k)} - \alpha_{k+1} a_{i+1}^{(k+1)} \quad (4.3)$$

donde

$$\alpha_{k+1} = \frac{a_0^{(k)}}{a_0^{(k+1)}}$$

**Teorema 4.1** El polinomio (4.1) es un polinomio Hurwitz si y sólo si los  $n$  términos de  $a_0^{(i)}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , en la primer columna de la Tabla 4.1 son todos positivos o si y sólo si todos los coeficientes  $a_j^{(i)}$  en dicha tabla son positivos [2].

Al formar la Tabla de Routh para un polinomio, si un número negativo o cero aparecen, se pude concluir que el polinomio no es un polinomio Hurwitz.

Es importante mencionar que la Tabla de Routh también puede ser utilizada para determinar el número de raíces en la mitad izquierda del plano  $s$ . Si  $a_0^{(i)} \neq 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , entonces el

número de raíces en la mitad izquierda del plano  $s$  es igual al número de veces que cambia el signo en  $\{a_0^{(1)}, a_0^{(2)}, \dots, a_0^{(n)}\}$ .

Pueden presentarse dos casos especiales [34]:

1. Si el primer término de un renglón es cero, será necesaria una división entre cero para formar el siguiente renglón. Para evitar este fenómeno, se asigna una  $\epsilon$ , para sustituir el cero en la primera columna. Se deja que el valor  $\epsilon$  se aproxime a cero, ya sea desde el lado positivo o el negativo, después de lo cual es posible determinar los signos de los términos de la primera columna.
2. Si se encuentra todo un renglón formado por ceros, primeramente se toman los coeficientes del renglón situado inmediatamente arriba del renglón de ceros y se forma un polinomio auxiliar, este polinomio empezará con la potencia de  $s$  en la columna marcada y se continua, saltándose una potencia de  $s$  y otra no. A continuación, se deriva el polinomio con respecto a  $s$ . Finalmente, se usan los coeficientes de la derivada para sustituir el renglón de ceros, se forma el resto del arreglo de una manera sencilla al seguir la forma estándar de la Tabla 4.1.

El criterio de Routh-Hurwitz, en realidad fue desarrollado originalmente por Routh. Sin embargo, es completamente análogo al desarrollado por Hurwitz, al que se va a dedicar las siguientes líneas.

Sea un polinomio (4.1), se define la *matriz de Hurwitz* como la matriz formada por los coeficientes del anterior polinomio, siendo así:

$$H = \begin{bmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \cdots & a_{2n-1} \\ a_0 & a_2 & a_4 & \cdots & a_{2n-2} \\ 0 & a_1 & a_3 & \cdots & a_{2n-3} \\ 0 & a_0 & a_2 & \cdots & a_{2n-4} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

**Teorema 4.2** El polinomio  $D(s)$  es un polinomio de Hurwitz si y sólo si los menores principales diagonales de  $H$  son todos positivos.

Los menores principales diagonales de  $H$  o también conocidos como *Determinantes de*

*Hurwitz* son los siguientes [33]:

$$\begin{aligned} D_1 &= a_1; & D_2 &= \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} \\ D_3 &= \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix}; & D_n &= |H| \end{aligned} \quad (4.5)$$

donde los coeficientes con índices mayores que  $n$  o con índices negativos son reemplazados con ceros. En un primer vistazo, la aplicación de los determinantes de Hurwitz parece ser un trabajo formidable para polinomios de alto orden, dado que se requiere una gran cantidad de trabajo en la evaluación de los determinantes, por lo que para aplicaciones prácticas se recomienda emplear el método tabular de Routh.

La estabilidad de ecuaciones dinámicas LTI puede ser determinada directamente de la matriz  $A$  [31]. Considere la ecuación dinámica LTI de dimensión  $n$ ,

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} \quad (4.6)$$

donde  $A$ ,  $B$ , y  $C$  son matrices constantes de dimensiones apropiadas. La respuesta de estado cero de (4.6) es caracterizada por:

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B \quad (4.7)$$

**Teorema 4.3** La respuesta de estado cero de (4.7) tiene *estabilidad BIBO* si y sólo si todos los polos de cada entrada de  $G(s)$  tienen parte real negativa.

**Teorema 4.4** La respuesta de entrada cero de (4.7) es gobernada por  $\dot{x} = Ax$  o  $x(t) = e^{At}x_0$ . Recordando que un estado de equilibrio de  $\dot{x} = Ax$  es una solución de  $\dot{x} = 0$  o  $Ax = 0$ , y tiene la propiedad  $x_e = e^{At}x_e$  para todo  $t \geq 0$ , donde  $x_e$  es un estado de equilibrio. Note también que la estabilidad implica *estabilidad uniforme* para los sistemas LTI.

**Teorema 4.5** El estado cero de  $\dot{x} = Ax$  es *asintóticamente estable* si y sólo si todos los eigenvalores de  $A$  tienen parte real negativa.

Si un sistema LTI es asintóticamente estable, su respuesta de entrada cero se aproximará a cero exponencialmente; así, también es dicho a ser *exponencialmente estable*. La estabilidad asintótica en el caso de los sistemas LTI también implica *estabilidad asintótica uniforme*.

Los eigenvalores de  $A$  son las raíces de la ecuación característica de  $A$ ,  $\det(sI - A) = 0$ . Se ha dicho ya que el criterio de Routh-Hurwitz verifica si todas las raíces del polinomio tienen parte real negativa. Por lo tanto, la estabilidad asintótica de la respuesta de entrada cero de  $\dot{x} = Ax$  puede ser fácilmente determinada primero encontrando el polinomio característico de  $A$  y después aplicando el criterio de Routh-Hurwitz.

A su vez, si el estado cero de (4.7) es asintóticamente estable, la respuesta de estado cero tendrá estabilidad BIBO. Inversamente, la estabilidad BIBO de la respuesta de estado cero en general no implica estabilidad asintótica del estado cero.

### 4.3 Análisis de estabilidad desde un enfoque de Bond Graph

Como ya se mencionó anteriormente, la estabilidad de un sistema puede ser determinada conociendo el polinomio característico. Este polinomio puede ser encontrado analíticamente o gráficamente utilizando Bond Graph y basándose en las trayectorias causales.

#### 4.3.1 Obtención del polinomio característico mediante trayectorias causales

La función de transferencia puede ser obtenida directamente de un Bond Graph para un sistema MIMO. Esto puede ser conseguido por medio de reglas de lazos, originalmente presentadas por Shannon en 1941 y redescubiertas por Mason en 1955. Las reglas de lazos se aplican a gráficas de flujo. Sin embargo, dichas reglas pueden ser aplicadas directamente a los Bond Graphs sin necesidad de convertir un Bond Graph en una gráfica de flujo [35].

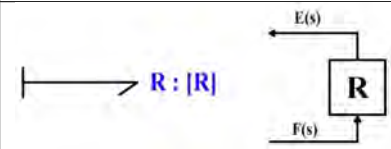
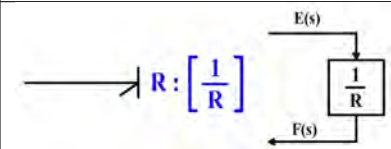
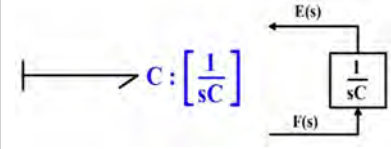
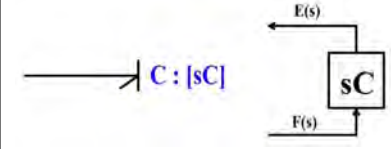
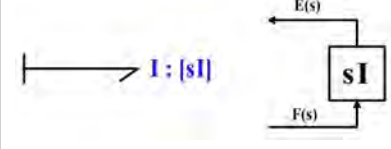
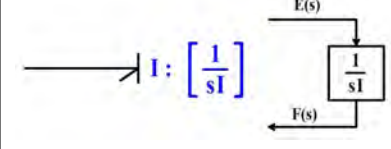
La obtención del polinomio característico tiene varios componentes que deben evaluarse, para lo cual se estudian algunas definiciones básicas.

**Definición 4.1** Un *lazo Mason* es un lazo causal de la salida de un puerto a la entrada del mismo sin trazar el mismo bond en la misma dirección más de una vez.

**Definición 4.2** Una *ganancia de lazo* es el producto de las transmitancias de cada uno de los elementos encontrados al recorrer el lazo. La Tabla 4.2 muestra las transmitancias para los elementos

en causalidad derivativa e integral.

**Tabla 4.2:** Transmitancias para elementos de puerto-1

| Impedancias                                                                                                         | Admitancias                                                                                                          |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|  $R : [R]$                         |  $R : \left[ \frac{1}{R} \right]$  |
|  $C : \left[ \frac{1}{sC} \right]$ |  $C : [sC]$                        |
|  $I : [sI]$                        |  $I : \left[ \frac{1}{sI} \right]$ |

**Definición 4.3** Los *lazos disjuntos* son aquellos que no tienen uniones en común.

**Definición 4.4** La *ganancia de lazos disjuntos* es el producto de ganancias de lazos que no se tocan, tomadas a la vez, uno (lazos simples), dos (lazos dobles), tres (lazos triples), cuatro (mallas cuádruples), etc.

Con esta información, ahora se está en la posibilidad de obtener el polinomio característico desde un Bond Graph usando la regla de Mason. El polinomio característico está dado por:

$$D(s) = 1 - \sum_j L_{1j}(s) + \sum_k L_{2k}(s) - \sum_l L_{3l}(s) + \dots - \dots \quad (4.8)$$

donde  $L_{rk}(s)$  es el producto de las ganancias de lazo del  $k$ -ésimo conjunto de los  $r$  lazos de Mason que no se tocan. Nótese los signos alternantes para los componentes de  $D(s)$ .

La  $L_{ij}(s)$  ganancia del  $j$ -ésimo lazo de Mason es definido por:

$$L_{ij}(s) = (-1)^{n_0+n_1} \prod_{j,k} \left( m_j \text{ ó } \frac{1}{m_j} \right)^2 \left( r_k \text{ ó } \frac{1}{r_k} \right)^2 \prod_g \quad (4.9)$$

donde  $n_0$  y  $n_1$  representan el numero total de cambios de orientación de los bonds, respectivamente en las uniones  $-0$ , al seguir a la variable de flujo; y en las uniones  $-1$ , al seguir a la variable de esfuerzo;  $\prod_{j,k}$  denota el producto de  $m_j$  o  $\frac{1}{m_j}$  y  $r_k$  o  $\frac{1}{r_k}$  son los módulos de los elementos de los

transformadores y giradores, los cuales son incluidos en la trayectoria causal, dependiendo de sus causalidades, y  $\prod_h$  designa el producto de ganancias de los elementos que componen el lazo.

### 4.3.2 Obtención de las condiciones de estabilidad

Considerando un sistema LTI MIMO se presenta un procedimiento para obtener un grafo lineal, que representa el polinomio característico. Se utiliza para determinar las condiciones de estabilidad usando la matriz de Hurwitz de (4.4), en una forma gráfica.

El siguiente procedimiento propone la construcción de una grafo lineal, denominado *Grafo de Estabilidad de Coates*,  $G_c(D)$ , que representa a la matriz de Hurwitz y al polinomio característico [36].

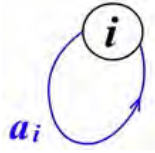
#### Procedimiento 4.1

1. Sea el polinomio característico,

$$a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \dots + a_n s^0 = 0 \quad (4.10)$$

con  $a_0 = 1$ .

2. El número de nodos del sistema correspondiente es igual al orden del polinomio. Cada nodo tiene un lazo propio como se muestra en la Figura 4.1.



**Figura 4.1:** Lazo propio de un nodo.

3. Considérense ramas entre nodos diferentes utilizando las Figuras 4.2 y 4.3.

\* Ramas a la derecha. Inicialmente  $j = 1$ ,  $h = 0$ .

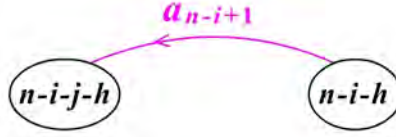


**Figura 4.2:** Ramas a la derecha.



Para  $i = j, \dots, k$ ; donde  $k = n - 2j + h + 1 \forall i \leq k$ . Si  $i = k$  entonces  $j \leftarrow j + 1$  y  $h \leftarrow h + 1$  e incrementar  $j$  mientras  $j < k$ , donde  $x \leftarrow y$  denota que el valor de  $y$  es asignado a  $x$ .

\* Ramas a la izquierda. Inicialmente  $j = 1, h = 0$ .



**Figura 4.3:** Ramas a la izquierda.

Para  $i = 1, \dots, k$ ; donde  $k = n - j - 1 - h, \forall i \leq k$ . Si  $i = k$  entonces  $j \leftarrow j + 1$  y  $h \leftarrow h + 1$  e incrementar  $j$  mientras  $j < k$ .

En la Tabla 4.3 se muestran algunos grafos de estabilidad de Coates. Note que se puede extender gráficamente a más de cuatro nodos.

**Tabla 4.3:** Grafos de Estabilidad de Coates

| Polinomio Característico                    | Grafo de Estabilidad de Coates |
|---------------------------------------------|--------------------------------|
| $a_0s + a_1 = 0$                            |                                |
| $a_0s^2 + a_1s + a_2 = 0$                   |                                |
| $a_0s^3 + a_1s^2 + a_2s + a_3 = 0$          |                                |
| $a_0s^4 + a_1s^3 + a_2s^2 + a_3s + a_4 = 0$ |                                |

El grafo  $G_c(D)$  representa un grafo de Coates de la matriz de Hurwitz. Así, de la teoría de grafos [37], el determinante de Hurwitz  $D_n$  está dado por:

$$D_n = (-1)^n \sum_h (-1)^{L_h} f(h) \quad (4.11)$$

donde  $h$  es un factor-1 en  $G_c(D)$  y  $L_h$  denota el número de circuitos dirigidos en  $h$  y  $f(h)$  representa el producto de los pesos asociados con las ramas  $h$ .

Para encontrar los  $n$  determinantes del criterio de Hurwitz, se propone el siguiente procedimiento [36]:

#### Procedimiento 4.2

1. Calcular  $D_n$  de (4.11).
2. El determinante  $D_{n-1}$  es obtenido removiendo el nodo  $n$  del grafo  $G_c(D)$ , y usando (4.11) para este subgrafo de  $G_c(D)$ , que tiene  $n - 1$  nodos.
3. Remover el nodo  $n - 1$  del subgrafo de  $G_c(D)$  del paso 2, y usando (4.11) se calcula  $D_{n-2}$ ; y así sucesivamente hasta obtener  $D_1$ .

Así, finalmente se obtienen los determinantes de Hurwitz, sabiendo que dichos determinantes deben de ser todos positivos para garantizar la estabilidad del sistema.

#### 4.3.3 Bond Graph en causalidad derivativa

Una herramienta importante en Bond Graph, es la existencia del denominado Bond Graph Derivativo (*BGD*), el cual consiste en asignarles causalidad derivativa a los elementos dinámicos y extender las implicaciones causales en el diagrama, recordando el Procedimiento 2.4.

En la Figura 4.4 se muestra el diagrama de bloques para un BGD, comparado con la Figura 2.48, se aprecia que la única diferencia radica en la dirección de  $\dot{x}(t)$  y  $z(t)$ .

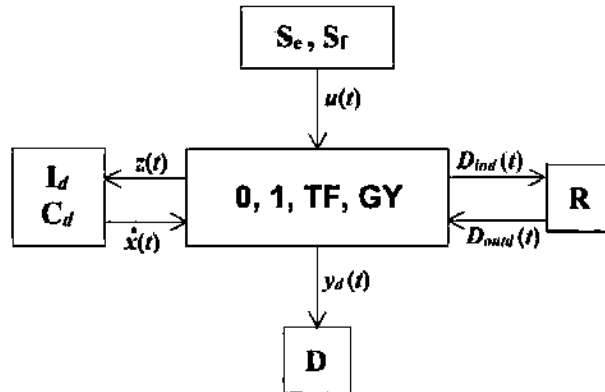


Figura 4.4: Diagrama de bloques de un BGD.

En la siguiente sección se profundizara más acerca del BGD y su aplicación para encontrar el estado estacionario de un sistema.

#### 4.3.4 Modelo en Bond Graph del estado estacionario

La respuesta en estado estacionario o estado estable, es útil para conocer el valor que alcanza cada variable de estado del sistema físico en una representación en espacio de estado cuando el periodo dinámico ha terminado. Aplicando el teorema del valor final se puede determinar el valor de estado estacionario de la respuesta de un sistema.

Así, el error de estado estacionario queda determinado, por:

$$e_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} [e(t)] = \lim_{s \rightarrow 0} [s e(s)] \quad (4.12)$$

Empleando (4.12), (2.26) y (2.27) se tiene que:

$$x_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} [x(t)] = -A^{-1} B u_{ss} \quad (4.13)$$

$$y_{ss} = (D - C A^{-1} B) u_{ss} \quad (4.14)$$

donde

$$u_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} [s u(s)]$$

De esta manera utilizando (4.13) y (4.15) se calcula el estado estacionario, pero es necesario que se calcule  $A^{-1}$ , lo cual conlleva una complejidad cuando el sistema es de alto orden.

Si el sistema es representado en función de transferencia, se tiene que:

$$y(s) = G(s) u(s) \quad (4.15)$$

Con el teorema del valor final, se obtiene el valor de estado estacionario de la salida:

$$y_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} [y(t)] = \lim_{s \rightarrow 0} [s G(s) u(s)] \quad (4.16)$$

Utilizando la metodología de Bond Graph se resuelve directamente el problema de obtener  $A^{-1}$  al tener el BGD del sistema físico; de igual forma es posible determinar el valor de estado estacionario de la respuesta del sistema [38].

Antes de realizar este análisis se deben de hacer dos consideraciones en el modelo en Bond Graph, las cuales son:

- El modelo de Bond Graph deberá ser el de un sistema lineal o en su caso estar trabajando en un punto de equilibrio.
- El BGD del sistema debe existir.

El proceso de obtención de los vectores claves se hace de la misma manera que el mencionado en el capítulo dos. La matriz  $L$ , los vectores  $D_{in}$  y  $D_{out}$  son obtenidos directamente del BGD y son designados como:  $L_d$ ,  $D_{ind}$  y  $D_{outd}$ .

Suponer que la matriz  $A$  es invertible y se tiene una asignación de causalidad derivativa en el modelo en Bond Graph. A partir de (2.25) y la Figura 4.4 la estructura unión queda reescrita como:

$$\begin{bmatrix} z(t) \\ D_{ind}(t) \\ y_d(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} & J_{13} \\ J_{21} & J_{22} & J_{23} \\ J_{31} & J_{32} & J_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ D_{outd}(t) \\ u(t) \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

La relación constitutiva de los elementos disipativos en el BGD, es:

$$D_{outd}(t) = L_d D_{ind}(t) \quad (4.18)$$

De (2.26) a (2.33), (4.17) y (4.18) se obtiene:

$$\begin{aligned} z(t) &= A^* \dot{x}(t) + B^* u(t) \\ y_d(t) &= C^* \dot{x}(t) + D^* u(t) \end{aligned} \quad (4.19)$$

Las matrices para determinar el estado estacionario están definidas por [38]:

$$A^* = J_{11} + J_{12}N J_{21} \quad (4.20)$$

$$B^* = J_{13} + J_{12}N J_{23} \quad (4.21)$$

$$C^* = J_{31} + J_{32}N J_{21} \quad (4.22)$$

$$D^* = J_{33} + J_{32}N J_{23} \quad (4.23)$$

donde

$$N = (I - L_d J_{22})^{-1} L_d$$

De (2.22), (2.26), (2.27) y (4.19) se tiene:

$$A^* = FA^{-1} \quad (4.24)$$

$$B^* = -FA^{-1}B \quad (4.25)$$

$$C^* = CA^{-1} \quad (4.26)$$

$$D^* = D - CA^{-1}B \quad (4.27)$$

Finalmente el estado estacionario,  $x_{ss}$ , está dado por:

$$x_{ss} = F^{-1}B^*u \quad (4.28)$$

$$y_{ss} = D^*u \quad (4.29)$$

## 4.4 Controlabilidad

La controlabilidad estudia la posibilidad de direccionar el estado desde la entrada, en otras palabras, si una ecuación dinámica es controlable, todo los modos de la ecuación pueden ser excitados desde la entrada. En esta sección se introducirá el concepto de controlabilidad de ecuaciones dinámicas lineales. Considere las ecuaciones de estado de un sistema LTI de dimensión  $n$ :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (4.30)$$

donde  $x$  es el vector de estados de  $n \times 1$ ,  $u$  es el vector de entrada de  $n_u \times 1$ .  $A$  y  $B$  son matrices reales constantes de  $n \times n$  y  $n \times n_u$  respectivamente. Para ecuaciones dinámicas invariantes en el tiempo, el intervalo de interés es del tiempo presente al infinito,  $[0, \infty)$ .

**Definición 4.5** La ecuación de estado (4.30) es dicha a ser *controlable* para el tiempo  $t_0$ , si existe un tiempo finito  $t_1 > t_0$  tal que para cualquier  $x(t_0)$  en el espacio de estado  $\sum$  y cualquier  $x_1$  en  $\sum$ , existe una entrada  $u_{[t_0, t_1]}$  tal que transfiera el estado  $x(t_0)$  a el estado  $x_1$  en el tiempo  $t_1$ . De no ser así, la ecuación de estado se dice ser *no-controlable* para el tiempo  $t_0$  [31].

Esta definición requiere solamente que la entrada  $u$  sea capaz de mover cualquier estado en el espacio de estados a cualquier otro estado en un tiempo finito, la trayectoria que el estado debería tomar no es especificada. Además de que no se impone ninguna restricción sobre la entrada y la magnitud puede ser tan grande como se desee.

El sistema lineal invariante en el tiempo de (4.30) es controlable si y sólo si cualquiera de las siguientes condiciones es satisfecha:

1. Todas las filas de  $e^{-At}B$  (y consecuentemente  $e^{At}B$ ) son linealmente independientes sobre  $[0, \infty)$  en el campo de números complejos  $\mathbb{C}$ .
2. Todas las filas de  $(sI - A)^{-1}B$  son linealmente independientes en  $\mathbb{C}$ .
3. El *gramiano de controlabilidad*

$$W_{ct} = \int_0^t e^{A\tau} B B^* e^{A^*\tau} d\tau \quad (4.31)$$

es no-singular para cualquier  $t > 0$ . Donde  $A^*$  y  $B^*$  son las matrices transpuestas de  $A$  y  $B$ , respectivamente.

4. La *matriz de controlabilidad* de  $n \times (n n_u)$

$$C_t = [B : AB : A^2B : \dots : A^{n-1}B] \quad (4.32)$$

tiene rango  $n$ .

5. Para cada eigenvalor  $\lambda$  de  $A$  (y consecuentemente para cada  $\lambda$  en  $\mathbb{C}$ ), la matriz compleja  $[\lambda I - A : B]$  de  $n \times (n + n_u)$  tiene rango  $n$ .

## 4.5 Observabilidad

El concepto de observabilidad es el dual del de controlabilidad. La observabilidad estudia la posibilidad de estimar el estado desde la salida, es decir, si una ecuación dinámica es observable, todos los modos de la ecuación pueden ser observados con las salidas.

Considere las ecuaciones de estado de un sistema LTI de dimensión  $n$ :

$$y(t) = C x(t) + D u(t) \quad (4.33)$$

donde  $x$  es el vector de estados de  $n \times 1$ ,  $u$  es el vector de entrada de  $n_u \times 1$  y finalmente  $y$  es el vector de salida de  $n_y \times 1$ .  $C$  y  $D$  son matrices reales constantes de  $n_y \times n$  y  $n_y \times n_u$  respectivamente. El intervalo de interés es del tiempo presente al infinito,  $[0, \infty)$ .

**Definición 4.6** La ecuación dinámica (4.33) se dice a ser *observable* para  $t_0$  si existe un tiempo finito  $t_1 > t_0$  tal que para cualquier estado  $x_0$  en el tiempo  $t_0$ , la información de la entrada  $u_{[t_0, t_1]}$

y la salida  $y_{[t_0, t_1]}$  sobre el intervalo de tiempo  $[t_0, t_1]$  sea suficiente para determinar el estado  $x_0$ . De otra manera, la ecuación dinámica es dicha a ser *no-observable* para el tiempo  $t_0$  [31].

La ecuación dinámica lineal invariante en el tiempo de dimensión  $n$  de (4.4) es observable si y sólo si cualquiera de las siguientes condiciones equivalentes es satisfecha:

1. Todas las columnas de  $Ce^{At}$  son linealmente independientes en  $[0, \infty)$  sobre el campo de los números complejos  $\mathbb{C}$ .
2. Todas las columnas de  $C(sI - A)^{-1}$  son linealmente independientes sobre  $\mathbb{C}$ .
3. El *gramiano de observabilidad*

$$W_{ot} = \int_0^t e^{A^*\tau} C^* C e^{A\tau} d\tau \quad (4.34)$$

es no-singular para cualquier  $t > 0$ .

4. La *matriz de observabilidad* de  $(n \ n_y) \times n$

$$O_t = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \quad (4.35)$$

tiene rango  $n$ .

5. Para cada eigenvalor  $\lambda$  de  $A$  (y consecuentemente para cada  $\lambda$  en  $\mathbb{C}$ ), la matriz compleja de  $(n + n_y) \times n$

$$\begin{bmatrix} \lambda I - A \\ C \end{bmatrix} \quad (4.36)$$

tiene rango  $n$ .

## 4.6 Controlabilidad y Observabilidad desde un enfoque de Bond Graph

La estructura unión de un modelo en Bond Graph contiene información de los tipos de elementos que conforman el sistema, la manera en que están interconectados, sin importar los valores numéricos del sistema.

El análisis en Bond Graph de la controlabilidad y observabilidad está desarrollado bajo el enfoque estructural del sistema. Las siguientes definiciones permiten conocer y establecer algunos conceptos de importancia [39].

**Definición 4.7** El orden mínimo de un modelo de Bond Graph que es de igual dimensión a la matriz de estado, es igual al número de elementos  $-C$  e  $-I$  en causalidad integral,  $n_{iI}$ , en el modelo BGI.

**Definición 4.8** El rango estructural de una matriz  $A$  está definido como el rango máximo que esa matriz alcanza en función de sus parámetros libres, tomando en cuenta las interrelaciones de los elementos.

**Definición 4.9** El rango estructural  $q$  de una matriz de estado  $A$  asociado a un modelo en Bond Graph es igual al número de elementos dinámicos  $-C$  e  $-I$  en causalidad integral en el BGI, que aceptan causalidad derivativa en el modelo del Bond Graph Derivativo ( $BGD$ ). Si  $n_{iI}$  representa al número de elementos  $-C$  e  $-I$  en causalidad integral y  $n_{id}$  para el caso de los elementos que aceptan causalidad derivativa, se tiene que:

$$q = n_{iI} - n_{id} \quad (4.37)$$

donde el rango estructural permite determinar la estabilidad asintótica de un sistema dinámico. Esto es posible determinarlo por el siguiente teorema.

**Teorema 4.6** Una condición necesaria y suficiente para que no exista estabilidad asintótica de un sistema descrito por (4.30) y (4.33), es que el rango estructural  $q$  de la matriz  $A$  sea menor que  $n$ . Para la cual existen  $n - q$  valores característicos iguales cero en  $A$ .

Para calcular el rango estructural el cual permite determinar la controlabilidad estructural y observabilidad estructural de un sistema dinámico representado en Bond Graph, se requiere conocer el concepto de dualización de fuentes.

La dualización de fuentes o detectores consiste en convertir una fuente o detector de esfuerzo a uno de flujo, respectivamente, y/o viceversa

**Definición 4.10** El rango estructural para  $q_c$  (controlabilidad) de la matriz  $[A; B]$  asociada con un modelo en Bond Graph es igual al número de elementos dinámicos  $-C$  e  $-I$  en causalidad integral



en el BGI que aceptan causalidad derivativa cuando se construye el BGD y cuando se realiza una dualización máxima de fuentes. El número de elementos en causalidad integral en el BGI que permanecen en causalidad integral en el BGD se denotan como  $t_s$ .

**Definición 4.11** El rango estructural para  $q_o$  (observabilidad) de la matriz  $[A:C]^T$  asociada con un modelo en Bond Graph es igual al número de elementos dinámicos  $-C$  e  $-I$  en causalidad integral en el BGI que acepten causalidad derivativa al construir el BGD y cuando se realiza una dualización máxima de detectores. El número de elementos en causalidad integral en el BGI que permanecen con causalidad integral en el BGD se denotan como  $t_d$ .

Las siguientes propiedades hacen referencia a las ecuaciones de estado (4.30) y (4.33), así como a la matriz  $S$  descrita en (2.25).

1. El rango estructural de  $[A:B]$  es igual a:
  - \* El rango de la matriz  $S_c = [S_{11}:S_{12}:S_{13}]$
  - \*  $n - t_s$
2. El rango estructural de  $[A:C]^T$  es igual a:
  - \* El rango de la matriz  $S_o = [S_{11}:S_{21}:S_{31}]^T$
  - \*  $n - t_d$

Éstas dos propiedades permiten asegurar que el rango estructural es igual al rango de las matrices concatenadas  $S_c$  y  $S_o$  sólo si el sistema es conservatorio de energía. Donde las propiedades de la matriz  $S$  para sistemas no conservativos no obedecen a estas propiedades.

El análisis de controlabilidad y observabilidad en Bond Graph se resumen en los siguientes dos teoremas [39]:

**Teorema 4.7** El sistema de  $[A:B]$  es estructuralmente controlable si y sólo si:

- Todos los elementos almacenadores en causalidad integral en el BGI están causalmente conectados con una fuente.
- El rango estructural de  $[A:B]$  es igual al orden mínimo  $n$ , en otras palabras, que todos los elementos dinámicos en el BGD acepten causalidad derivativa.

**Teorema 4.8** El sistema de  $[A:C]^T$  es estructuralmente observable si y sólo si:

- Todos los elementos almacenadores en causalidad integral en el BGI están causalmente conectados con un detector.
- El rango estructural de  $[A:C]^T$  es igual al orden mínimo  $n$ , en otras palabras, que todos los elementos dinámicos en el BGD acepten causalidad derivativa.

## 4.7 Aplicación

En la siguiente sección se continua con los ejemplos de aplicación del capítulo anterior, ahora se hace su análisis de estabilidad, observabilidad y controlabilidad correspondiente usando las herramientas de Bond Graph descritas en las secciones anteriores.

### 4.7.1 Transformador Eléctrico

Una vez obtenido el modelo del transformador con y en ausencia de incertidumbre, es importante realizar un estudio cuantitativo y cualitativo del transformador y averiguar los efectos que tiene la incertidumbre sobre el mismo.

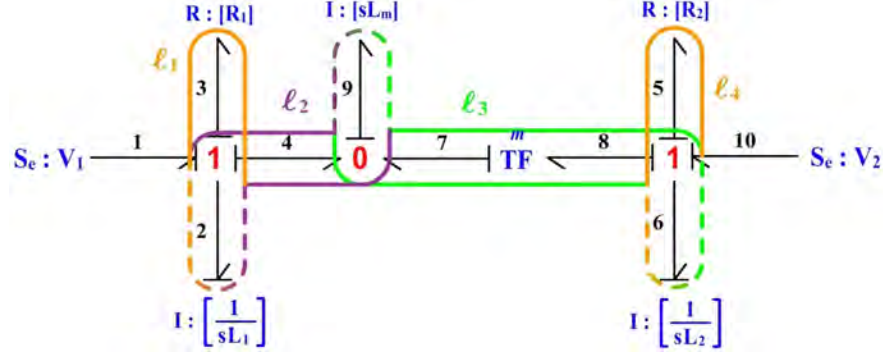
En las siguientes secciones se analizará la estabilidad del transformador, en primer lugar con la ausencia de incertidumbre, posteriormente se analiza la estabilidad para los modelos en la forma canónica y de interconexión estándar, después se hace el análisis del estado estacionario con y sin incertidumbre. Finalmente se estudia la controlabilidad y observabilidad del sistema.

#### 4.7.1.1 Análisis de estabilidad en Bond Graph

Para obtener la estabilidad de un sistema LTI es necesario encontrar las raíces del polinomio característico, considere el Bond Graph del transformador eléctrico mostrado en la Figura 3.19, posteriormente se proceden a dibujar todos los lazos Mason del sistema, Figura 4.5.

Se puede apreciar en la Figura 4.5 que los diferentes lazos individuales y sus ganancias son:

$$\begin{aligned}\ell_1 &= -\frac{R_1}{L_1 s} \rightarrow \{2, 3, 3, 2\}; & \ell_3 &= -m^2 \frac{L_m}{L_2} \rightarrow \{6, 8, 7, 9, 7, 8, 6\} \\ \ell_2 &= -\frac{L_m}{L_1} \rightarrow \{2, 4, 9, 9, 4, 2\}; & \ell_4 &= -\frac{R_2}{L_2 s} \rightarrow \{5, 6, 6, 5\}\end{aligned}$$



**Figura 4.5:** Lazos Mason del transformador eléctrico.

En este sistema sólo existen lazos disjuntos dobles, las ganancias de dichos lazos son:

$$\ell_{13} = m^2 \frac{R_1 L_m}{L_1 L_2 s}; \quad \ell_{14} = \frac{R_1 R_2}{L_1 L_2 s^2}; \quad \ell_{24} = \frac{R_2 L_m}{L_1 L_2 s}$$

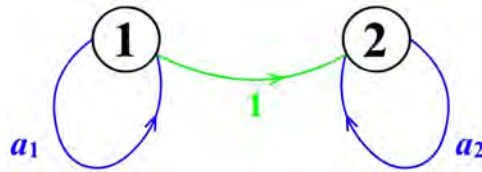
Finalmente, el polinomio característico puede ser construido mediante (4.8), quedando:

$$\begin{aligned} \Delta &= 1 - (\ell_1 + \ell_2 + \ell_3 + \ell_4) + (\ell_{13} + \ell_{14} + \ell_{24}) \\ &= 1 - \left( \frac{R_1}{L_1 s} + \frac{L_m}{L_1} + m^2 \frac{L_m}{L_2} + \frac{R_2}{L_2 s} \right) + \left( m^2 \frac{R_1 L_m}{L_1 L_2 s} + \frac{R_1 R_2}{L_1 L_2 s^2} + \frac{R_2 L_m}{L_1 L_2 s} \right) \\ &= s^2 + \frac{R_1 (L_2 + m^2 L_m) + R_2 (L_1 + L_m)}{L_2 (L_1 + L_m) + m^2 L_1 L_m} s + \frac{R_1 R_2}{L_2 (L_1 + L_m) + m^2 L_1 L_m} \end{aligned} \quad (4.38)$$

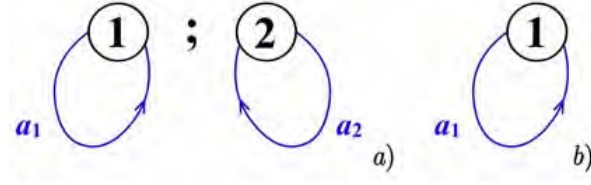
Considerando (4.10) y (4.38) no es difícil ver que:

$$\begin{aligned} a_0 &= 1 \\ a_1 &= \frac{R_1 (L_2 + m^2 L_m) + R_2 (L_1 + L_m)}{L_2 (L_1 + L_m) + m^2 L_1 L_m} \\ a_2 &= \frac{R_1 R_2}{L_2 (L_1 + L_m) + m^2 L_1 L_m} \end{aligned} \quad (4.39)$$

Con la información obtenida, se está en la posibilidad de obtener el grafo de estabilidad Coates, con ayuda de la Tabla 4.3, la Figura 4.6 representa dicho grafo para el transformador eléctrico.



**Figura 4.6:** Grafo de Coates de estabilidad para el transformador eléctrico.



**Figura 4.7:** Subgrafo seccional. a) Dos nodos; b) un nodo.

Para encontrar los determinantes de Hurwitz considere la Figura 4.7 .

Aplicando el Procedimiento 4.2 y considerando los subgrafos seccionales se tiene que:

$$D_2 = a_1 a_2 \quad (4.40)$$

$$D_1 = a_1 \quad (4.41)$$

Sustituyendo (4.39) en (4.40) y (4.41), se obtienen las condiciones de estabilidad:

$$\begin{aligned} D_2 &= R_1 R_2 \frac{R_1 (m^2 L_m + L_2) + R_2 (L_1 + L_m)}{(L_2 (L_1 + L_m) + m^2 L_1 L_m)^2} > 0 \\ D_1 &= \frac{R_1 (L_2 + m^2 L_m) + R_2 (L_1 + L_m)}{L_2 (L_1 + L_m) + m^2 L_1 L_m} > 0 \end{aligned} \quad (4.42)$$

De (4.42) se puede apreciar que el sistema tiene estabilidad Hurwitz. Este procedimiento gráfico, permite averiguar el comportamiento del sistema en una forma sencilla a través de los conocimientos de las condiciones de estabilidad y de los parámetros del sistema. Más aún, este procedimiento muestra como los parámetros del sistema son reflejados en el sistema físico, herramienta que será muy útil a la hora de agregar incertidumbre en los parámetros.

### Estabilidad en el modelo de la forma canónica

Una vez analizado el sistema sin incertidumbre, se procede a agregar incertidumbre paramétrica, en la Figura 4.8 se aprecian los lazos Mason del sistema con incertidumbre.

Los lazos individuales existentes son:

$$\begin{aligned} \ell_1 &= -\frac{R_1}{L_1 s} \rightarrow \{12, 2, 3, 3, 2, 12\}; & \ell_5 &= -\frac{\Delta L_1}{L_1} \rightarrow \{11, 12, 12, 11\} \\ \ell_2 &= -\frac{L_m}{L_1} \rightarrow \{12, 2, 4, 9, 19, 19, 9, 4, 2, 12\}; & \ell_6 &= -\frac{\Delta L_m}{L_1} \rightarrow \{12, 2, 4, 9, 20, 20, 9, 4, 2, 12\} \\ \ell_3 &= -m^2 \frac{L_m}{L_2} \rightarrow \{6, 8, 7, 9, 19, 19, 9, 7, 8, 6\}; & \ell_7 &= -m^2 \frac{\Delta L_m}{L_2} \rightarrow \{6, 8, 7, 9, 20, 20, 9, 7, 8, 6\} \\ \ell_4 &= -\frac{R_2}{L_2 s} \rightarrow \{15, 5, 6, 6, 5, 15\}; & \ell_8 &= -\frac{\Delta R_2}{L_2 s} \rightarrow \{16, 5, 6, 6, 5, 16\} \end{aligned}$$

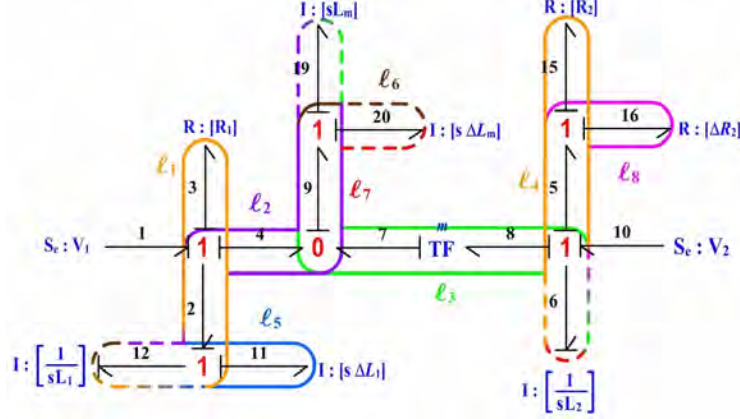


Figura 4.8: Lazos de Mason en el UBG.

Encontrando los lazos disjuntos dobles.

$$\begin{aligned}
 \ell_{13} &= m^2 \frac{R_1 L_m}{L_1 L_2 s}; & \ell_{14} &= \frac{R_1 R_2}{L_1 L_2 s^2}; & \ell_{17} &= m^2 \frac{R_1 \Delta L_m}{L_1 L_2 s}; & \ell_{18} &= \frac{R_1 \Delta R_2}{L_1 L_2 s^2} \\
 \ell_{24} &= \frac{R_2 L_m}{L_1 L_2 s}; & \ell_{28} &= \frac{\Delta R_2 L_m}{L_1 L_2 s}; & \ell_{64} &= \frac{R_2 \Delta L_m}{L_1 L_2 s}; & \ell_{68} &= \frac{\Delta R_2 \Delta L_m}{L_1 L_2 s} \\
 \ell_{53} &= m^2 \frac{L_m \Delta L_1}{L_1 L_2}; & \ell_{54} &= \frac{R_2 \Delta L_1}{L_1 L_2 s}; & \ell_{57} &= m^2 \frac{\Delta L_1 \Delta L_m}{L_1 L_2}; & \ell_{58} &= \frac{\Delta R_2 \Delta L_1}{L_1 L_2 s}
 \end{aligned}$$

El polinomio característico está definido por:

$$\begin{aligned}
 \Delta &= 1 - (\ell_1 + \dots + \ell_8) + (\ell_{1i} + \ell_{2j} + \ell_{6j} + \ell_{5i}) \\
 &= s^2 + \frac{\beta}{\alpha} s + \frac{R_1 (R_2 + \Delta R_2)}{\alpha}
 \end{aligned} \tag{4.43}$$

donde  $i = 3, 4, 7, 8$ ;  $j = 4, 8$ ;  $\alpha = L_2 (L_1 + \Delta L_1 + L_m + \Delta L_m) + m^2 (L_1 + \Delta L_1) (L_m + \Delta L_m)$  y  $\beta = R_1 (L_2 + m^2 (L_m + \Delta L_m)) + (R_2 + \Delta R_2) (L_1 + \Delta L_1 + L_m + \Delta L_m)$ .

Es evidente que al agregar incertidumbre, el número de lazos Mason cambio, provocando a su vez el cambio de los coeficientes en el polinomio característico. Para encontrar los determinantes de Hurwitz se un obtiene el grafo de Coates similar al de la Figura 4.6, por lo tanto los valores de  $D_n$  se obtienen de la misma manera que (4.40) y (4.41), quedando:

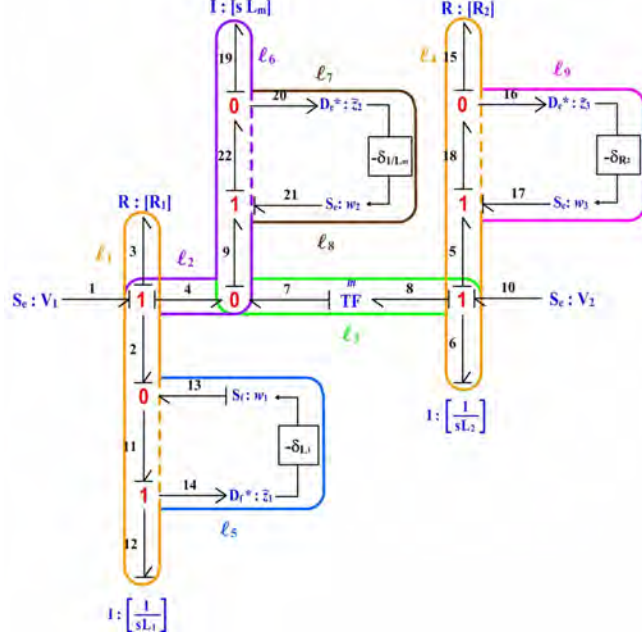
$$\begin{aligned}
 D_2 &= \frac{R_1 (R_2 + \Delta R_2) ((L_2 + m^2 (L_m + \Delta L_m)) + (R_2 + \Delta R_2) (L_1 + \Delta L_1 + L_m + \Delta L_m))}{\alpha^2} > 0 \\
 D_1 &= \frac{R_1 (R_2 + \Delta R_2)}{\alpha} > 0
 \end{aligned} \tag{4.44}$$

Para que se cumpla la estabilidad de Hurwitz es necesario que todos los valores sean positivos, si  $\Delta L_1 \leq -L_1$ ,  $\Delta L_m \leq -L_m$  y  $\Delta R_2 \leq -R_2$  se hace evidente que el sistema perderá su estabilidad.

### Estabilidad en el modelo de la forma de interconexión estándar

A continuación se obtiene la estabilidad del sistema modelado en la forma de interconexión estándar.

La Figura 4.9 muestra los lazos Mason encontrados.



**Figura 4.9:** Lazos Mason en el UBG de la forma de interconexión estándar.

Lazos individuales del modelo en la forma de interconexión estándar.

$$\begin{aligned}
 \ell_1 &= -\frac{R_1}{L_1 s} \rightarrow \{12, 11, 2, 3, 3, 2, 11, 12\} \\
 \ell_2 &= -\frac{L_m}{L_1} \rightarrow \{12, 11, 2, 4, 9, 22, 19, 19, 22, 9, 4, 2, 11, 12\} \\
 \ell_3 &= -m^2 \frac{L_m}{L_2} \rightarrow \{6, 8, 7, 9, 22, 19, 19, 22, 9, 7, 8, 6\} \\
 \ell_4 &= -\frac{R_2}{L_2 s} \rightarrow \{15, 18, 5, 6, 6, 5, 18, 15\} \\
 \ell_5 &= -\delta_{L_1} \frac{R_1}{L_1 s} \rightarrow \{12, 14, 13, 2, 3, 3, 2, 11, 12\} \\
 \ell_6 &= -\delta_{L_1} \frac{L_m}{L_1} \rightarrow \{12, 14, 13, 2, 4, 9, 22, 19, 19, 22, 9, 4, 2, 11, 12\} \\
 \ell_7 &= -\delta_{L_1} \delta_{1/L_m} \frac{L_m}{L_1} \rightarrow \{12, 14, 13, 2, 4, 9, 22, 19, 20, 21, 9, 4, 2, 11, 12\} \\
 \ell_8 &= -m^2 \delta_{1/L_m} \frac{L_m}{L_2} \rightarrow \{6, 8, 7, 9, 22, 19, 20, 21, 9, 7, 8, 6\} \\
 \ell_9 &= -\delta_{R_2} \frac{R_2}{L_2 s} \rightarrow \{15, 16, 17, 5, 6, 6, 5, 18, 15\}
 \end{aligned}$$

Los lazos disjuntos son:

$$\begin{aligned}
 \ell_{13} &= m^2 \frac{R_1 L_m}{L_1 L_2 s}; & \ell_{14} &= \frac{R_1 R_2}{L_1 L_2 s^2}; & \ell_{18} &= m^2 \frac{\delta_{1/L_m} R_1 L_m}{L_1 L_2 s}; & \ell_{19} &= \frac{\delta_{R_2} R_1 R_2}{L_1 L_2 s^2} \\
 \ell_{24} &= \frac{R_2 L_m}{L_1 L_2 s}; & \ell_{29} &= \frac{\delta_{R_2} R_2 L_m}{L_1 L_2 s}; & \ell_{74} &= \frac{\delta_{L_1} \delta_{1/L_m} R_2 L_m}{L_1 L_2 s}; & \ell_{79} &= \frac{\delta_{R_2} \delta_{L_1} \delta_{1/L_m} R_2 L_m}{L_1 L_2 s} \\
 \ell_{53} &= m^2 \frac{\delta_{L_1} R_1 L_m}{L_1 L_2 s}; & \ell_{54} &= \frac{\delta_{L_1} R_1 R_2}{L_1 L_2 s^2}; & \ell_{58} &= m^2 \frac{\delta_{L_1} \delta_{1/L_m} R_1 L_m}{L_1 L_2 s}; & \ell_{59} &= \frac{\delta_{R_2} \delta_{L_1} R_1 R_2}{L_1 L_2 s^2} \\
 \ell_{64} &= \frac{\delta_{L_1} R_2 L_m}{L_1 L_2 s}; & \ell_{69} &= \frac{\delta_{R_2} \delta_{L_1} R_2 L_m}{L_1 L_2 s}
 \end{aligned}$$

Sustituyendo los valores de  $\delta_{R_2}$ ,  $\delta_{L_1}$  y  $\delta_{1/L_m}$ , se encuentra el polinomio característico:

$$\begin{aligned}
 \Delta &= 1 - (\ell_1 + \dots + \ell_9) + (\ell_{1i} + \ell_{2j} + \ell_{6j} + \ell_{5i} + \ell_{7j}) \\
 &= s^2 + \frac{\beta}{\alpha} s + \frac{R_1 (R_2 + \Delta R_2)}{\alpha}
 \end{aligned} \tag{4.45}$$

donde  $i = 3, 4, 8, 9$ ;  $j = 4, 9$ ;  $\alpha = L_2 (L_1 + \Delta L_1 + L_m + \Delta L_m) + m^2 (L_1 + \Delta L_1) (L_m + \Delta L_m)$  y  $\beta = R_1 (L_2 + m^2 (L_m + \Delta L_m)) + (R_2 + \Delta R_2) (L_1 + \Delta L_1 + L_m + \Delta L_m)$ .

Comparando (4.43) con (4.45) se puede apreciar que el polinomio característico es idéntico, por lo que la gráfica de Coates, los determinantes de Hurwitz y las condiciones de estabilidad arrojarán los mismos resultados que para el modelo en la forma canónica. Quedando claro que con cualquiera de las dos formas de modelado se puede obtener la estabilidad del sistema en presencia de incertidumbre.

#### 4.7.1.2 Estado estacionario del sistema

Una vez que ya se conoce la estabilidad del sistema, es interesante analizar su comportamiento en estado estacionario cuando el sistema tiene incertidumbre. En esta sección se analiza el estado estacionario cuando el sistema no tiene incertidumbre y posteriormente cuando éstas son adicionadas. El BGD del transformador eléctrico es mostrado en la Figura 4.10.

De la Figura 4.10 los vectores de entrada y salida, así como los vectores clave son:

$$\begin{aligned}
 u(t) &= \begin{bmatrix} e_1 \\ e_{10} \end{bmatrix}; & y_d(t) &= \begin{bmatrix} f_2 \\ f_6 \end{bmatrix}; & D_{ind}(t) &= \begin{bmatrix} e_3 \\ e_5 \end{bmatrix} & D_{outd}(t) &= \begin{bmatrix} f_3 \\ f_5 \end{bmatrix} \\
 x(t) &= \begin{bmatrix} p_2 \\ p_6 \\ p_9 \end{bmatrix}; & \dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} e_2 \\ e_6 \\ e_9 \end{bmatrix}; & z(t) &= \begin{bmatrix} f_2 \\ f_6 \\ f_9 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{4.46}$$

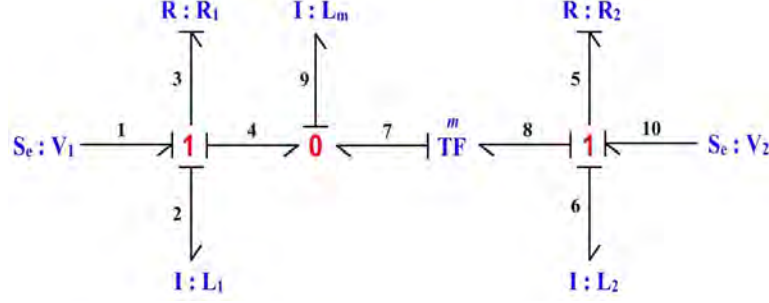


Figura 4.10: BGD del transformador eléctrico.

Siendo las relaciones constitutivas:

$$F = \text{diag} \left\{ \frac{1}{L_1}, \frac{1}{L_2}, \frac{1}{L_m} \right\}; \quad L_d = \text{diag} \left\{ \frac{1}{R_1}, \frac{1}{R_2} \right\} \quad (4.47)$$

Sustituyendo los vectores claves apropiados en (4.17) la matriz de estructura unión  $J$  está definida por:

$$\begin{bmatrix} f_2 \\ f_6 \\ f_9 \\ e_3 \\ e_5 \\ f_2 \\ f_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & m & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -m & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_2 \\ e_6 \\ e_9 \\ f_3 \\ f_5 \\ e_1 \\ e_{10} \end{bmatrix} \quad (4.48)$$

De (4.48) se obtienen las submatrices  $J_{ij}$ , siendo:

$$\begin{aligned} J_{11} &= 0_{3 \times 3}; & J_{22} &= J_{33} = 0_{2 \times 2}; & J_{13} &= 0_{3 \times 2}; & J_{31} &= 0_{2 \times 3} \\ J_{23} &= J_{32} = I_{2 \times 2}; & J_{12} &= -J_{21}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & m \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.49)$$

Obteniendo la matriz auxiliar correspondiente al BGD:

$$\begin{aligned} N &= (I - L_d J_{22})^{-1} L_d \\ &= \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - L_d 0_{2 \times 2} \right) \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{R_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{R_2} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.50)$$



Calculando las matrices del estado estacionario.

$$\begin{aligned}
 A^* &= J_{11} + J_{12}N J_{21} \\
 &= 0_{3 \times 3} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{R_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -m \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{R_1} & 0 & -\frac{1}{R_1} \\ 0 & -\frac{1}{R_2} & -m\frac{1}{R_2} \\ -\frac{1}{R_1} & -m\frac{1}{R_2} & -\frac{R_2+m^2R_1}{R_2} \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{4.51}$$

$$\begin{aligned}
 B^* &= J_{13} + J_{12}N J_{23} \\
 &= 0_{2 \times 3} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{R_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{R_2} \\ \frac{1}{R_1} & m\frac{1}{R_2} \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{4.52}$$

$$\begin{aligned}
 C^* &= J_{31} + J_{32}N J_{21} \\
 &= 0_{2 \times 3} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{R_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -m \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{R_1} & 0 & -\frac{1}{R_1} \\ 0 & -\frac{1}{R_2} & -m\frac{1}{R_2} \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{4.53}$$

$$\begin{aligned}
 D^* &= J_{33} + J_{32}N J_{23} \\
 &= 0_{2 \times 2} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{R_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{R_2} \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{4.54}$$

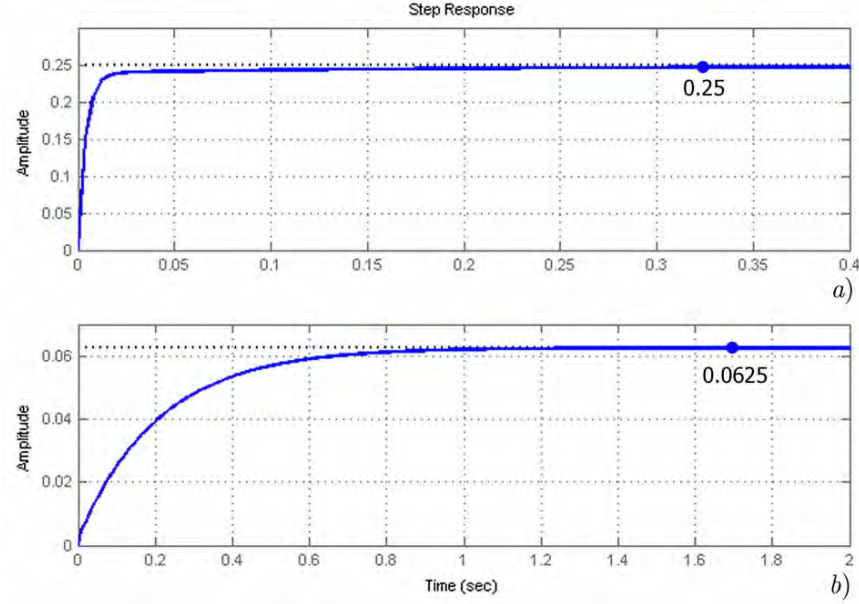
Así el estado estacionario queda definido por:

$$\begin{aligned}
 x_{ss} &= F^{-1}B^*u \\
 &= \begin{bmatrix} \frac{L_1}{R_1} & 0 \\ 0 & \frac{L_2}{R_2} \\ \frac{L_m}{R_1} & m\frac{L_m}{R_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_{10} \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{4.55}$$

$$\begin{aligned}
 y_{ss} &= D^*u \\
 &= \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{R_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_{10} \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{4.56}$$

Una vez que se tienen las respuestas en estado estacionario de las salidas, se compara con las señales arrojadas por Matlab<sup>®</sup>, utilizando los valores numéricos ya conocidos, teniéndose en cuenta que  $u(t)$  es una entrada escalón para  $e_1$  y  $e_{10}$ , Figura 4.11.

$$\begin{bmatrix} f_2 \\ f_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{R_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.25 e_1 \\ 0.0625 e_2 \end{bmatrix} \quad (4.57)$$



**Figura 4.11:** Estado estable de las variables de salida en el transformador. a)  $f_2(t)$ , b)  $f_6(t)$ .

### Estado estacionario en la forma canónica

Ahora es necesario comprobar el efecto de la incertidumbre en el estado estacionario, para tal efecto considere la Figura 4.12, donde se muestra el BGD del sistema con incertidumbre.

Los vectores correspondientes a la Figura 4.12:

$$\begin{aligned} u(t) &= \begin{bmatrix} e_1 \\ e_{10} \end{bmatrix}; & y_d(t) &= \begin{bmatrix} f_2 \\ f_6 \end{bmatrix}; & x(t) &= \begin{bmatrix} p_{12} & p_{11} & p_6 & p_{19} & p_{20} \end{bmatrix}^T \\ \dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} e_{12} & e_{11} & e_6 & e_{19} & e_{20} \end{bmatrix}^T; & z(t) &= \begin{bmatrix} f_{12} & f_{11} & f_6 & f_{19} & f_{20} \end{bmatrix}^T & (4.58a) \\ D_{ind}(t) &= \begin{bmatrix} e_3 & e_{15} & f_{16} \end{bmatrix}^T; & D_{outd}(t) &= \begin{bmatrix} f_3 & f_{15} & e_{16} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

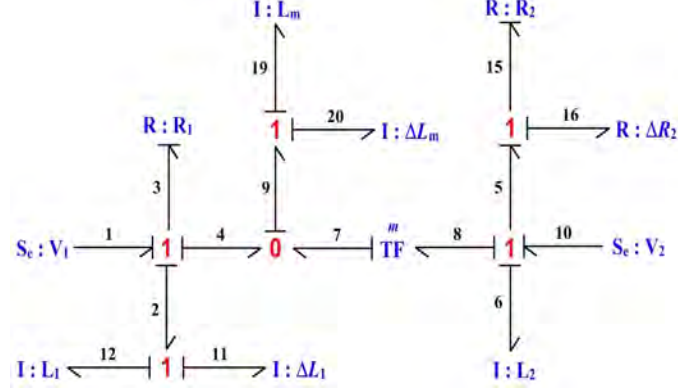


Figura 4.12: BGD con incertidumbres.

Sustituyendo (4.58a) en (4.17) se tiene la matriz de estructura unión  $J$ , definida por:

$$\begin{bmatrix} f_{12} \\ f_{11} \\ f_6 \\ f_{19} \\ f_{20} \\ e_3 \\ e_{15} \\ f_{16} \\ f_2 \\ f_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & m & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -m & -m & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{12} \\ e_{11} \\ e_6 \\ e_{19} \\ e_{20} \\ f_3 \\ f_{15} \\ e_{16} \\ e_1 \\ e_{10} \end{bmatrix} \quad (4.59)$$

Siendo las relaciones constitutivas:

$$\begin{aligned} F &= \text{diag} \left\{ \frac{1}{L_1}, \frac{1}{\Delta L_1}, \frac{1}{L_2}, \frac{1}{L_m}, \frac{1}{\Delta L_m} \right\} \\ L_d &= \text{diag} \left\{ \frac{1}{R_1}, \frac{1}{R_2}, \frac{1}{\Delta R_2} \right\} \end{aligned} \quad (4.60)$$

Con ayuda de las submatrices  $J_{ij}$  de (4.59), las matrices para el estado estacionario quedan:

$$\begin{aligned} N &= (I - L_d J_{22})^{-1} L_d \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{R_2 + \Delta R_2} & -\frac{\Delta R_2}{R_2 + \Delta R_2} \\ 0 & \frac{\Delta R_2}{R_2 + \Delta R_2} & R_2 \frac{\Delta R_2}{R_2 + \Delta R_2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A^* &= J_{11} + J_{12}N J_{21} \\
 &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{R_1} & -\frac{1}{R_1} & 0 & -\frac{1}{R_1} & -\frac{1}{R_1} \\ -\frac{1}{R_1} & -\frac{1}{R_1} & 0 & -\frac{1}{R_1} & -\frac{1}{R_1} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{R_2+\Delta R_2} & -m\frac{1}{R_2+\Delta R_2} & -m\frac{1}{R_2+\Delta R_2} \\ -\frac{1}{R_1} & -\frac{1}{R_1} & -m\frac{1}{R_2+\Delta R_2} & -\frac{R_2+\Delta R_2+m^2 R_1}{R_1(R_2+\Delta R_2)} & -\frac{R_2+\Delta R_2+m^2 R_1}{R_1(R_2+\Delta R_2)} \\ -\frac{1}{R_1} & -\frac{1}{R_1} & -m\frac{1}{R_2+\Delta R_2} & -\frac{R_2+\Delta R_2+m^2 R_1}{R_1(R_2+\Delta R_2)} & -\frac{R_2+\Delta R_2+m^2 R_1}{R_1(R_2+\Delta R_2)} \end{bmatrix} \quad (4.61)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 B^* &= J_{13} + J_{12}N J_{23} \\
 &= \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} & 0 \\ \frac{1}{R_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{R_2+\Delta R_2} \\ \frac{1}{R_1} & m\frac{1}{R_2+\Delta R_2} \\ \frac{1}{R_1} & m\frac{1}{R_2+\Delta R_2} \end{bmatrix} \quad (4.62)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 C^* &= J_{31} + J_{32}N J_{21} \\
 &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{R_1} & -\frac{1}{R_1} & 0 & -\frac{1}{R_1} & -\frac{1}{R_1} \\ 0 & -\frac{1}{R_2+\Delta R_2} & -m\frac{1}{R_2+\Delta R_2} & -m\frac{1}{R_2+\Delta R_2} \end{bmatrix} \quad (4.63)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 D^* &= J_{33} + J_{32}N J_{23} \\
 &= \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{R_2+\Delta R_2} \end{bmatrix} \quad (4.64)
 \end{aligned}$$

El estado estacionario para el transformador con incertidumbre es:

$$\begin{aligned}
 x_{ss} &= F^{-1}B^*u \\
 &= \begin{bmatrix} \frac{L_1}{R_1} & 0 \\ \frac{\Delta L_1}{R_1} & 0 \\ 0 & \frac{L_2}{R_2+\Delta R_2} \\ \frac{L_m}{R_1} & m\frac{L_m}{R_2+\Delta R_2} \\ \frac{\Delta L_m}{R_1} & m\frac{\Delta L_m}{R_2+\Delta R_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_{10} \end{bmatrix} \quad (4.65)
 \end{aligned}$$

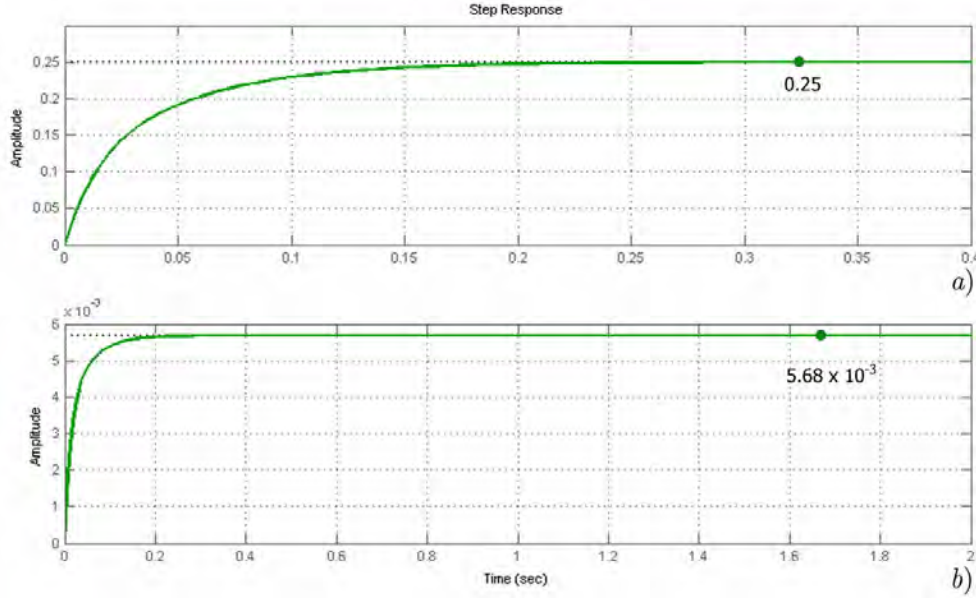
$$\begin{aligned}
 y_{ss} &= D^*u \\
 &= \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{R_2+\Delta R_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_{10} \end{bmatrix} \quad (4.66)
 \end{aligned}$$

Sustituyendo los valores numéricos apropiados en la salida  $y_{ss}$  y recordando que se aplica

una entrada escalón, el estado estacionario esta definido por:

$$\begin{bmatrix} f_2 \\ f_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{R_2 + \Delta R_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.25 e_1 \\ 5.68 \times 10^{-3} e_2 \end{bmatrix} \quad (4.67)$$

En la Figura 4.13 se realiza la comprobación gráfica de los valores en estado estacionario.



**Figura 4.13:** Estado estable de las salidas del UBG. a)  $f_2(t)$ , b)  $f_6(t)$ .

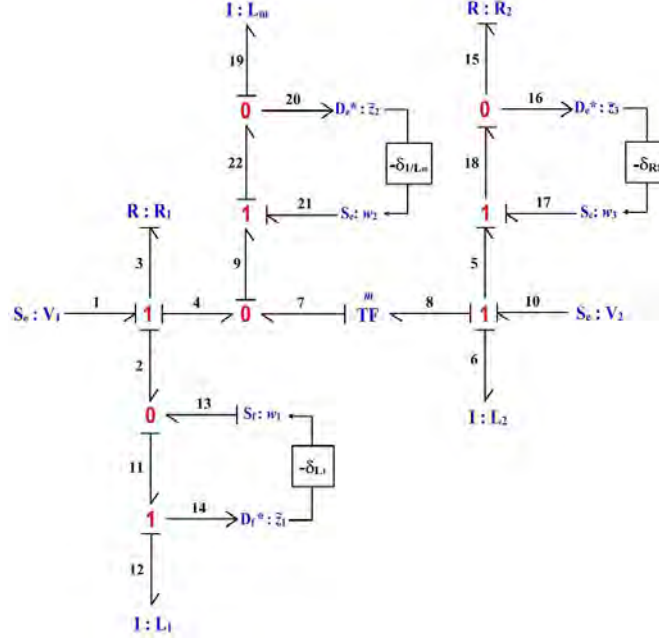
Con las gráficas de las Figuras 4.13 y 4.11 es claro que el estado estacionario de  $f_2(t)$  tiene el mismo valor, esto es evidente ya que no se encuentra ninguna incertidumbre en el elemento  $R : R_1$ , en cambio al existir una incertidumbre en  $R : R_2$  el estado estacionario de  $f_6(t)$  se vio afectado.

### Estado estacionario en la forma de interconexión estándar

El BGD del sistema modelado en la forma de interconexión estándar es mostrado la Figura 4.14.

Los vectores clave están definidos por:

$$\begin{aligned} u(t) &= \begin{bmatrix} e_1 & e_{10} \end{bmatrix}^T; & y_d(t) &= \begin{bmatrix} f_2 & f_6 \end{bmatrix}^T; & D_{ind}(t) &= \begin{bmatrix} e_3 & e_{15} \end{bmatrix}^T \\ D_{outd}(t) &= \begin{bmatrix} f_3 & f_{15} \end{bmatrix}^T & \dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} e_{12} & e_6 & e_{19} \end{bmatrix}^T; & z(t) &= \begin{bmatrix} f_{12} & f_6 & f_{19} \end{bmatrix}^T \\ x(t) &= \begin{bmatrix} p_{12} & p_6 & p_{19} \end{bmatrix}^T; & \omega(t) &= \begin{bmatrix} f_{13} & e_{21} & e_{17} \end{bmatrix}^T; & \tilde{z}(t) &= \begin{bmatrix} f_{14} & e_{20} & e_{16} \end{bmatrix}^T \end{aligned} \quad (4.68a)$$



**Figura 4.14:** BGD del modelo en la forma de interconexion estandar.

Las relaciones constitutivas son:

$$\begin{aligned} F &= \text{diag} \left\{ \frac{1}{L_1}, \frac{1}{L_2}, \frac{1}{L_m} \right\} \\ L_d &= \text{diag} \left\{ \frac{1}{R_1}, \frac{1}{R_2} \right\} \end{aligned} \quad (4.69)$$

Sustituyendo (4.68a) y (4.69) en (4.17) se obtiene la matriz  $J$ , siendo:

$$\begin{bmatrix} f_{12} \\ f_6 \\ f_{19} \\ \hline f_3 \\ f_{15} \\ \hline \begin{bmatrix} f_2 \\ f_6 \end{bmatrix} \\ f_{14} \\ e_{20} \\ e_{16} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & m \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \hline \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -m \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & m & 1 \end{bmatrix} \\ \hline \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \hline \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -m \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & m & 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{12} \\ e_6 \\ e_{19} \\ \hline e_3 \\ e_{15} \\ \hline \begin{bmatrix} e_1 \\ e_{10} \end{bmatrix} \\ f_{13} \\ e_{21} \\ e_{17} \end{bmatrix} \quad (4.70)$$

Una vez obtenida las submatrices  $J_{ij}$  se determinan las matrices necesarias:

$$\begin{aligned}
 N &= (I - L_d J_{22})^{-1} L_d \\
 &= \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{R_2} \end{bmatrix} \\
 A^* &= J_{11} + J_{12} N J_{21} \\
 &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{R_1} & 0 & -\frac{1}{R_1} \\ 0 & -\frac{1}{R_2} & -m \frac{1}{R_2} \\ -\frac{1}{R_1} & -m \frac{1}{R_2} & -\frac{R_2+m^2 R_1}{R_1 R_2} \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{4.71}$$

$$\begin{aligned}
 B^* &= J_{13} + J_{12} N J_{23} \\
 &= \left[ \begin{array}{cc|cc} \frac{1}{R_1} & 0 & 1 & \frac{1}{R_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{R_2} & 0 & m \frac{1}{R_2} & \frac{1}{R_2} \\ \frac{1}{R_1} & m \frac{1}{R_2} & 0 & \frac{R_2+m^2 R_1}{R_1 R_2} & m \frac{1}{R_2} \end{array} \right]
 \end{aligned} \tag{4.72}$$

$$\begin{aligned}
 C^* &= J_{31} + J_{32} N J_{21} \\
 &= \left[ \begin{array}{ccc|ccc} -\frac{1}{R_1} & 0 & -\frac{1}{R_1} & & & \\ 0 & -\frac{1}{R_2} & -m \frac{1}{R_2} & & & \\ \hline -\frac{1}{R_1} & 0 & -\frac{1}{R_1} & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & \\ 0 & -1 & -m & & & \end{array} \right]
 \end{aligned} \tag{4.73}$$

$$\begin{aligned}
 D^* &= J_{33} + J_{32} N J_{23} \\
 &= \left[ \begin{array}{cc|ccc} \frac{1}{R_1} & 0 & 0 & \frac{1}{R_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{R_2} & 0 & m \frac{1}{R_2} & \frac{1}{R_2} \\ \hline \frac{1}{R_1} & 0 & 1 & \frac{1}{R_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & m & 1 \end{array} \right]
 \end{aligned} \tag{4.74}$$

Finalmente el estado estacionario queda:

$$\begin{aligned}
 x_{ss} &= F^{-1}B^*u \\
 &= \left[ \begin{array}{cc|ccc} \frac{L_1}{R_1} & 0 & L_1 & \frac{L_1}{R_1} & 0 \\ 0 & \frac{L_2}{R_2} & 0 & m\frac{L_2}{R_2} & \frac{L_2}{R_2} \\ \frac{L_m}{R_1} & m\frac{L_m}{R_2} & 0 & L_m\frac{R_2+m^2R_1}{R_1R_2} & m\frac{L_m}{R_2} \end{array} \right] \begin{bmatrix} e_1 \\ e_{10} \\ f_{13} \\ e_{21} \\ e_{17} \end{bmatrix} \quad (4.75)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 y_{ss} &= D^*u \\
 \begin{bmatrix} f_2 \\ f_6 \\ f_{14} \\ e_{20} \\ e_{16} \end{bmatrix} &= \left[ \begin{array}{cc|ccc} \frac{1}{R_1} & 0 & 0 & \frac{1}{R_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{R_2} & 0 & m\frac{1}{R_2} & \frac{1}{R_2} \\ \frac{1}{R_1} & 0 & 1 & \frac{1}{R_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & m & 1 \end{array} \right] \begin{bmatrix} e_1 \\ e_{10} \\ f_{13} \\ e_{21} \\ e_{17} \end{bmatrix} \quad (4.76)
 \end{aligned}$$

sustituyendo los valores numéricos apropiados se tiene:

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} f_2 \\ f_6 \\ f_{14} \\ e_{20} \\ e_{16} \end{bmatrix} &= \left[ \begin{array}{cc|ccc} 0.25 & 0 & 0 & 0.25 & 0 \\ 0 & 0.0625 & 0 & 0.625 & 0.0625 \\ 0.25 & 0 & 1 & 0.25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 10 & 1 \end{array} \right] \begin{bmatrix} e_1 \\ e_{10} \\ f_{13} \\ e_{21} \\ e_{17} \end{bmatrix} \quad (4.77)
 \end{aligned}$$

Los valores obtenidos en (4.77) indican el estado estacionario de las salidas definidas del sistema,  $f_2$  y  $f_6$ , así como de los sensores virtuales usados para modelar la incertidumbre. Es claro que el estado estacionario de  $f_2$  y  $f_6$  tiene el mismo valor que el obtenido por (4.57).

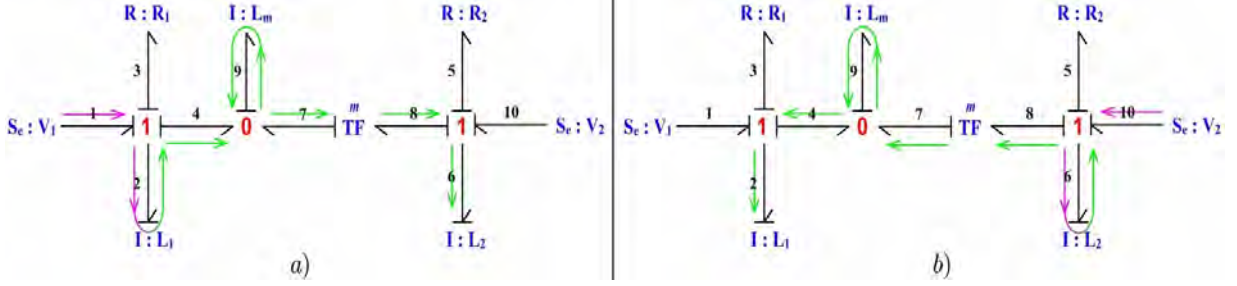
El resto de valores dados por (4.77) son los valores en estado estacionario de las salidas propias del sistema junto con las virtuales, considerando todas las entradas, dichos comportamientos están plasmados en las Figuras 3.31 y 3.32.

Entonces, se hace evidente la utilidad del análisis en estado estacionario, ya que si un elemento del sistema está involucrado en la ecuación del estado estacionario, cualquier incertidumbre en tal elemento afectará el estado estacionario, y si en un determinado caso la incertidumbre varía con respecto del tiempo y tiene una función no acotada, el sistema será inestable.



#### 4.7.1.3 Análisis de la controlabilidad para el transformador eléctrico

El teorema 4.7 da los dos requisitos necesarios para que un sistema sea controlable, la primera de estas condiciones consta de encontrar las trayectorias causales que van desde los puertos activos del sistema hasta cada uno de los elementos en causalidad integral. En la Figura 4.15 se muestran dichas trayectorias causales existentes en el transformador eléctrico.



**Figura 4.15:** Trayectorias causales de las fuentes a los elementos. a) De  $V_1$  a cada elemento almacenador, b) de  $V_2$  a cada elemento almacenador.

Para  $S_e : V_1$  las trayectorias causales de la Figura 4.15 a) son:

$$I : L_1 \rightarrow \{1, 2\}$$

$$I : L_2 \rightarrow \{1, 2, 2, 4, 9, 9, 7, 8, 6\}$$

En la Figura 4.15 b) se muestran las trayectorias causales para  $S_e : V_2$ , definidas por:

$$I : L_2 \rightarrow \{10, 6\}$$

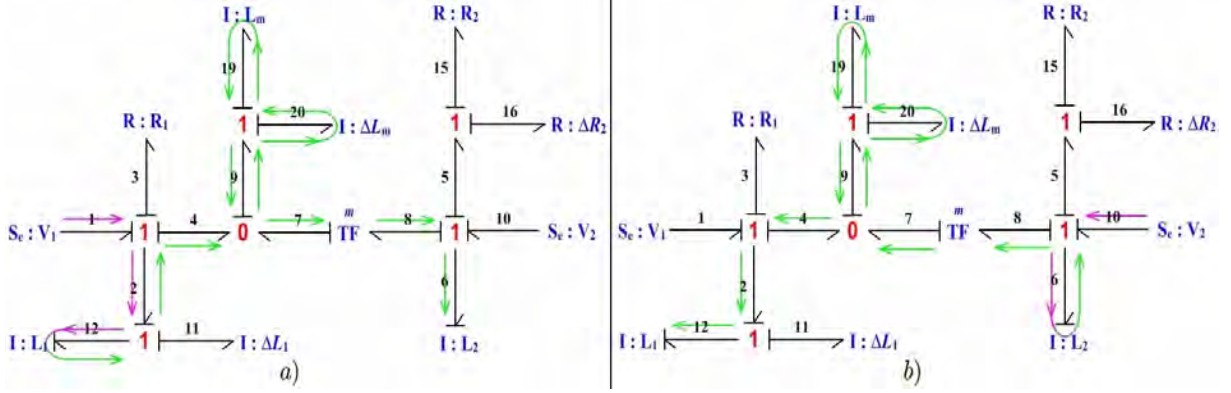
$$I : L_1 \rightarrow \{10, 6, 6, 8, 7, 9, 9, 4, 2\}$$

Con esto se cumple la primer condición para la controlabilidad, la segunda condición, la existencia del BGD quedo establecida anteriormente en la Figura 4.10. Por lo cual el transformador eléctrico es *Controlable* en ausencia de incertidumbre.

#### Controlabilidad en el modelo de la forma canónica

A continuación se adiciona la incertidumbre correspondientes y se hace el análisis de trayectorias causales, considérese la Figura 4.16.

De la Figura 4.16 a) se aprecian las trayectorias causales desde  $S_e : V_1$  a cada elemento



**Figura 4.16:** Trayectorias causales de las fuentes a los elementos en el UBG. a) De  $V_1$  a cada elemento almacenador, b) de  $V_2$  a cada elemento almacenador.

en causalidad integral:

$$I : L_1 \rightarrow \{1, 2, 12\}$$

$$I : L_2 \rightarrow \{1, 2, 12, 12, 2, 4, 9, 19, 19, 9, 7, 8, 6\}$$

Para  $S_e : V_2$  se tienen las trayectorias visualizadas en la Figura 4.16 b), siendo:

$$I : L_2 \rightarrow \{10, 6\}$$

$$I : L_1 \rightarrow \{10, 6, 6, 8, 7, 9, 19, 19, 9, 4, 2, 12\}$$

Nuevamente se tiene una trayectoria causal de las dos fuentes a cada uno de los elementos, la adición de incertidumbre no cambió la controlabilidad del sistema, también se tiene el BGD para la forma canónico, mostrado en la Figura 4.12. Finalmente, el transformador eléctrico con incertidumbre es *Controlable*.

### Controlabilidad en el modelo de la forma de interconexión estándar

Dado que se adicionaron fuentes para modelar la incertidumbre, éstas no se toman en cuenta a la hora de buscar las trayectorias causales, puesto que dichas fuentes no existen en el sistema físico. En la Figura 4.17 se muestran las trayectorias causales del UBG en la forma de interconexión estándar.

Las trayectorias causales de  $S_e : V_1$  son:

$$I : L_1 \rightarrow \{1, 2, 11, 12\}$$

$$I : L_2 \rightarrow \{1, 2, 11, 12, 12, 11, 2, 4, 9, 22, 19, 19, 22, 9, 7, 8, 6\}$$



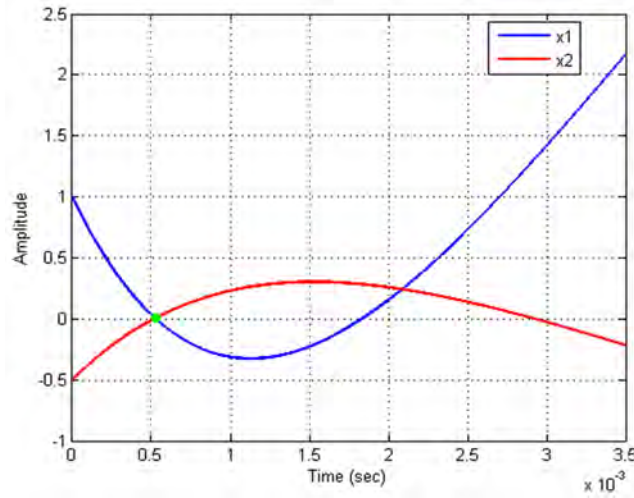
Dada cualquier  $x_0$  y cualquier  $x_1$ , la entrada de control es definida por:

$$u(t) = -B^* e^{A^* t} W_{ct}^{-1} (x_0 - e^{At} x_1) \quad (4.79)$$

sustituyendo los valores apropiados y considerando las condiciones iniciales,  $x_0 = [1 \ -0.5]^T$ , y las condiciones finales,  $x_1 = [0 \ 0]^T$ , en (4.79) se tiene:

$$\begin{aligned} u(t) &= -B^* e^{A^* t} W_{ct}^{-1} (x_0 - e^{At} 0_{2 \times 1}) \\ &= \begin{bmatrix} 3681.9e^{-4.732t} - 5376.9e^{-251.59t} \\ 9435.3e^{-4.732t} + 535.72e^{-251.59t} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.80)$$

Una vez obtenida la entrada de control, es aplicada al sistema, teniéndose la respuesta mostrada en la Figura 4.18.

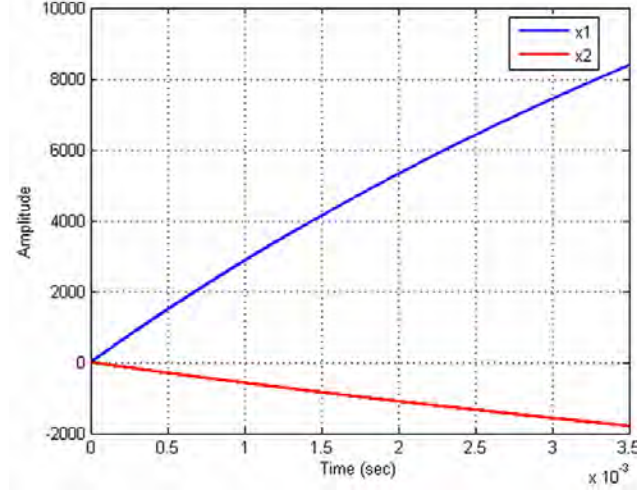


**Figura 4.18:** Comportamiento de los estados en el BGI bajo la entrada de control.

En la Figura 4.18 se hace evidente que el sistema sin incertidumbre es controlable, puesto que ambos estados cortan por cero en el tiempo que fue hecho el cálculo, por lo que es posible dirigir a los estados a una condición deseada.

Recordando que los estados  $x_1$  y  $x_2$  son el momento en los enlaces 2 y 6 del transformador sin incertidumbre, es decir son los enlaces de flujo en los devanados primario y secundario, respectivamente.

A continuación se aplica la entrada de (4.80) al sistema con incertidumbre, recordando que ahora las matrices que definen al sistema están determinadas por (3.103) y (3.104), observe la Figura 4.19.



**Figura 4.19:** Comportamiento de los estados en el UBG bajo la entrada de control.

En la respuesta de la Figura 4.19 se asienta que la entrada de control estimada para el sistema sin incertidumbre, no funciona con el sistema en presencia de incertidumbre.

Comparando las respuestas de las Figuras 4.18 y 4.19 queda claro que el sistema a pesar de que sigue siendo controlable, su controlabilidad ha cambiado y se hace efectiva la necesidad de hacer un control robusto, así como la importancia que tienen ambos modelos presentados en esta tesis.

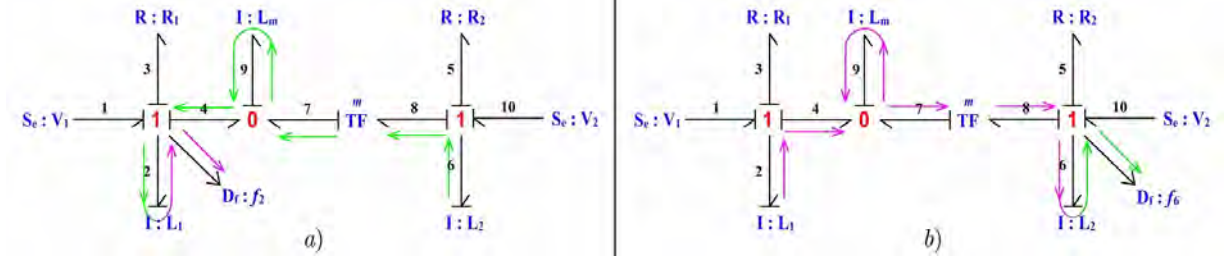
#### 4.7.1.4 Análisis de la observabilidad para el transformador eléctrico

De manera análoga a la controlabilidad, son necesarias dos condiciones, mismas que se encuentran establecidas en el teorema 4.8. Una de esas condiciones, ya ha sido establecida anteriormente, la existencia del BGD, por lo cual se procederá únicamente a establecer la primer condición, para lo cual se adicionarán sensores en las salidas del sistema y se buscarán las trayectorias causales hasta cada uno de los elementos en causalidad integral. Para el sistema sin incertidumbre, se muestran las trayectorias causales en la Figura 4.20

Las trayectorias causales de los elementos a  $D_f : f_2$  se muestran en la Figura 4.20 a), siendo:

$$I : L_1 \rightarrow \{2\}$$

$$I : L_2 \rightarrow \{6, 8, 7, 9, 9, 4, 2, 2\}$$



**Figura 4.20:** Trayectorias causales de los elementos a los detectores. a) De cada elemento almacenador a  $D_f : f_2$ , b) de cada elemento almacenador a  $D_f : f_6$ .

Para  $D_f : f_6$ , las trayectorias mostradas en la Figura 4.20 b) son:

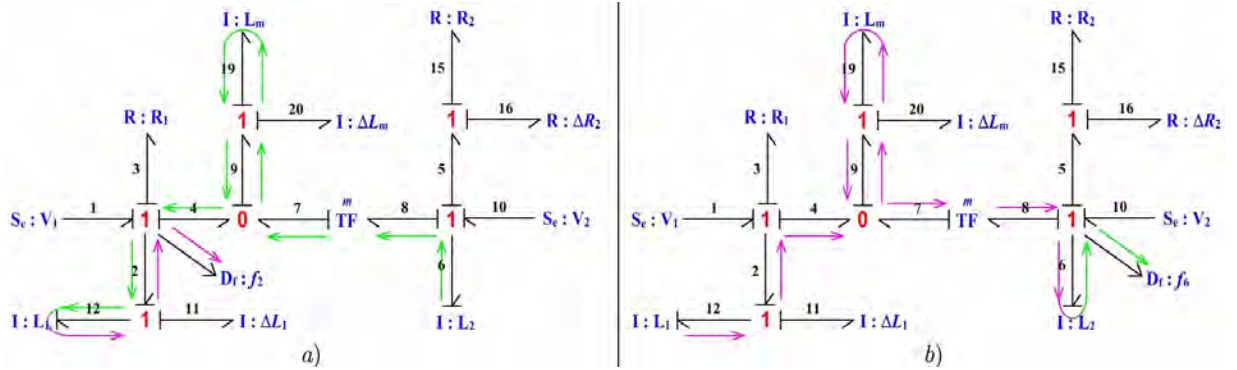
$$I : L_2 \rightarrow \{6\}$$

$$I : L_2 \rightarrow \{2, 4, 9, 9, 7, 8, 6, 6\}$$

Quedando así cumplidas las dos condiciones, por lo tanto, el sistema es *Observable*. A continuación se adiciona la incertidumbre y se desarrolla el modelo en la forma canónica.

### Observabilidad en el modelo de la forma canónica

Las trayectorias causales para el sistema en la forma canónica se muestran en la Figura 4.21.



**Figura 4.21:** Trayectorias causales de los elementos almacenadores a los detectores en el UBG. a) De cada elemento almacenador a  $D_f : f_2$ , b) de cada elemento almacenador a  $D_f : f_6$ .

Las trayectorias causales para  $D_f : f_2$  son:

$$I : L_1 \rightarrow \{12, 2\}$$

$$I : L_2 \rightarrow \{6, 8, 7, 9, 19, 9, 4, 2, 12, 12, 2\}$$

Las trayectorias causales para  $D_f : f_6$  quedan definidas por:

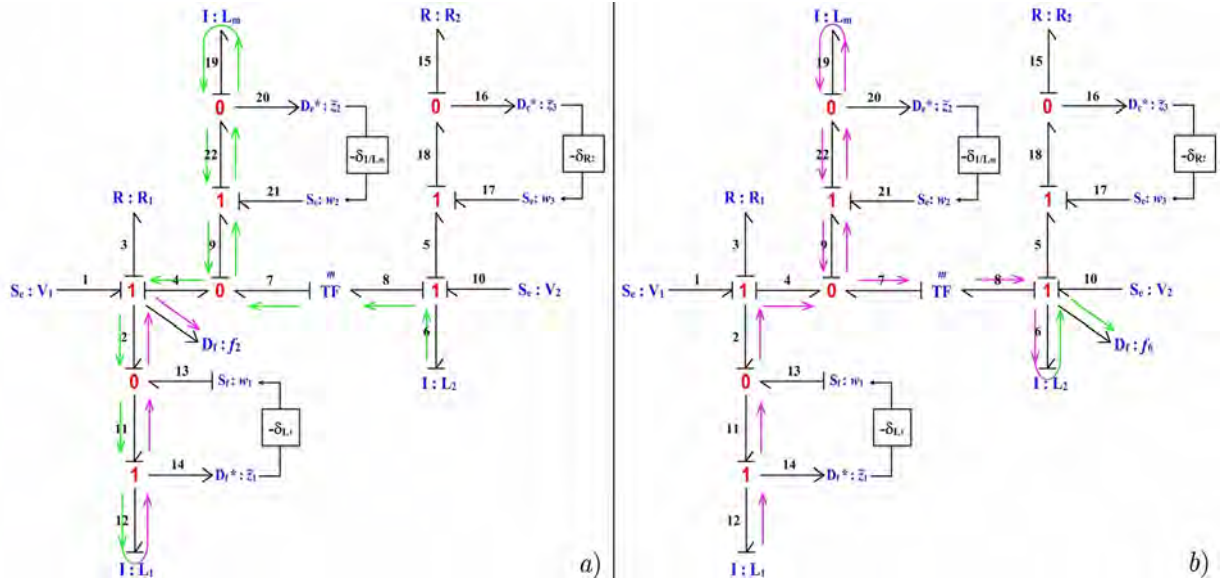
$$I : L_2 \rightarrow \{6\}$$

$$I : L_1 \rightarrow \{12, 2, 4, 9, 19, 19, 7, 8, 6, 6\}$$

El sistema en la forma canónica continua siendo *Observable*.

### Observabilidad en el modelo de la forma de interconexión estándar

Para el caso del modelo en la forma de interconexión estándar, la Figura 4.22 muestra las trayectorias causales existentes.



**Figura 4.22:** Trayectorias causales de los elementos en el modelo de interconexión estándar. a) De cada elemento almacenador a  $D_f : f_2$ , b) de cada elemento almacenador a  $D_f : f_6$ .

Según la Figura 4.22 a) las trayectorias causales son:

$$I : L_1 \rightarrow \{12, 11, 2\}$$

$$I : L_2 \rightarrow \{6, 8, 7, 9, 22, 19, 22, 9, 4, 2, 11, 12, 12, 11, 2\}$$

De la Figura 4.22 b) se tienen:

$$I : L_2 \rightarrow \{6\}$$

$$I : L_1 \rightarrow \{12, 11, 2, 4, 9, 22, 19, 22, 9, 7, 8, 6, 6\}$$

Tras haber encontrado las trayectorias causales en el modelado de la forma de interconexión estándar el sistema continua siendo *Observable*.

De manera similar que lo ocurrido con la controlabilidad, el sistema no perdió sus propiedades de observabilidad, sin embargo, también debe existir un cambio interno en ésta ultima, para corroborar esto, se analiza la observabilidad del sistema con el gramiano, considere que (3.66) y (3.68) son sustituidas en (4.34) para una  $t = 0.5ms$ , se tiene que:

$$\begin{aligned} W_{ot} &= \int_0^t e^{A^* \tau} C^* C e^{A \tau} d\tau \\ &= \begin{bmatrix} 1.757 & 0.0132 \\ 0.0132 & 0.1232 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.81)$$

Siguiendo lo descrito en la definición 4.6, conociendo la entrada,  $u$ , y la salida,  $y$ , de un sistema en un intervalo de tiempo es posible encontrar la condición inicial de dicho sistema. La salida de un sistema LTI está definida por:

$$y(t) = C e^{At} x_0 + C e^{At} \int_0^t e^{-A\tau} B u(\tau) d\tau + D u(t) \quad (4.82)$$

Bajo una entrada escalón, unas condiciones iniciales de

$$x_0 = \begin{bmatrix} -0.025 \\ 0.01 \end{bmatrix} \quad (4.83)$$

y sustituyendo (3.66) hasta (3.69) en (4.81), la salida es:

$$y(t) = \begin{bmatrix} -0.0336e^{-4.732t} - 1.7887e^{-251.59t} + 0.25 \\ -0.0839e^{-4.732t} + 0.1788e^{-251.59t} + 0.0625 \end{bmatrix} \quad (4.84)$$

Una vez conocida la entrada y la salida, el valor de las condiciones iniciales,  $x_0$  son dadas por:

$$x_0 = W_{ot}^{-1} \int_{t_0}^{t_1} e^{A^*(t-t_0)} C^* y(t) dt \quad (4.85)$$

sustituyendo los valores apropiados y un  $t_0 = 0s$  en (4.85) se tiene que:

$$x_0 = \begin{bmatrix} -0.0249 \\ 0.0099 \end{bmatrix} \quad (4.86)$$

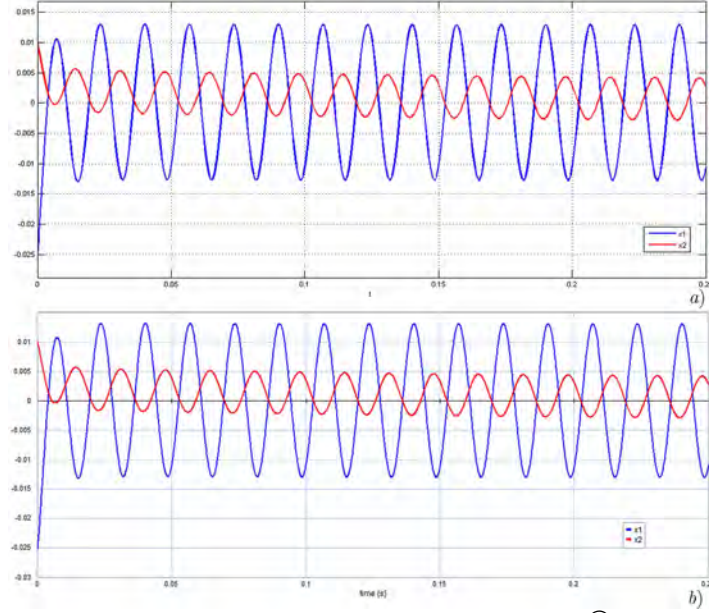
Así, finalmente se obtienen las condiciones iniciales. Es claro que dichas condiciones ya eran sabidas de (4.83), puesto que fueron las utilizadas para generar una salida, lo que se pretende demostrar es que usando el gramiano se pueden obtener las condiciones iniciales.



Si  $x_0$  es sabida, entonces el estado después de  $t_0$  puede ser reconstruido por:

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau \quad (4.87)$$

Sustituyendo (4.86), así como las matrices correspondientes para el sistema sin incertidumbre, un  $t_0 = 0s$  y las entradas propias del transformador, ondas senoidales, en (4.87), las respuestas de los estados son obtenidas, y graficadas en la Figura 4.23.



**Figura 4.23:** Respuesta de los estados. a) Reconstruidos en Matlab<sup>®</sup>; b) arrojados por 20-sim<sup>®</sup>.

Las Figuras 4.23 a) y b) hacen la comparación de las respuestas reconstruidas de los estados en Matlab<sup>®</sup> y las respuestas arrojadas por 20-sim<sup>®</sup>, respectivamente, es evidente que ambas respuestas son iguales, es decir que la reconstrucción del estado a partir de las condiciones iniciales y el conocimiento de la entrada y la salida, fue exitosa. Los estados representan, al igual que para el caso de controlabilidad, a los flujos existentes en el devanado primario y secundario, es decir  $x_1 = p_2 = \lambda_2$  y  $x_2 = p_6 = \lambda_6$ .

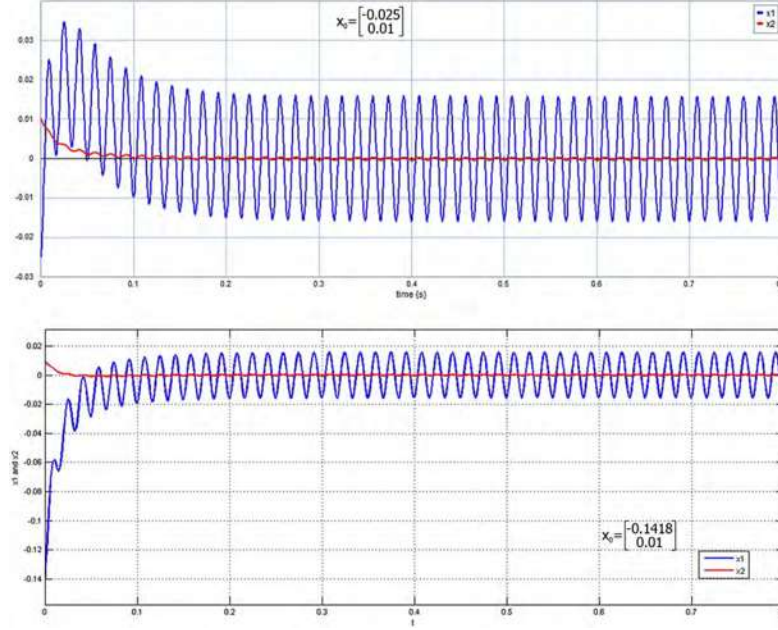
A continuación se aplica lo anterior al sistema con incertidumbre, es decir, se usará la salida (4.84) y el gramiano de observabilidad para determinar las condiciones del sistema con incertidumbre y tratar de reconstruir los estados. Sustituyendo (3.103) y (3.105), con un  $t = 0.5ms$  en (4.34) se tiene:

$$W_{ot} = \int_0^t e^{A^*\tau} C^* C e^{A\tau} d\tau = \begin{bmatrix} 0.0538 & 0.0037 \\ 0.0037 & 0.121 \end{bmatrix} \quad (4.88)$$

Considerando la salida (4.84), así como las matrices correspondientes para el sistema con incertidumbre y el gramiano de observabilidad, sustituyendo en (4.85), las condiciones iniciales calculadas son:

$$x_0 = \begin{bmatrix} -0.1418 \\ 0.0096 \end{bmatrix} \quad (4.89)$$

Comparando (4.86) y (4.89) es claro que el estado inicial del elemento  $I : L_2$  no cambio, puesto que carece de incertidumbre, el estado inicial del elemento  $I : L_1$  ha sufrido un cambio, por lo cual la reconstrucción de éste estado no será la esperada, más sin embargo los dos estados no pierden su observabilidad, era claro que su condiciones iban a cambiar debido a la incertidumbre. En la Figura 4.24 se muestran las respuestas en el tiempo de los estados.



**Figura 4.24:** Respuesta de los estados. a) Arrojados por 20-sim<sup>®</sup>; b) reconstruidos en Matlab<sup>®</sup>

En la Figura 4.24 a) se muestra la gráfica de los estados con las condiciones iniciales de (4.83), al simular el sistema con las condiciones obtenidas por (4.89) en la Figura 4.24 b) se aprecia claramente que el estado  $x_1$  no tiene el mismo comportamiento, gracias a la diferencia de condiciones iniciales, caso contrario ocurre con el estado  $x_2$ , el cual se comporta exactamente igual en el sistema con y sin incertidumbre.

Finalmente, queda claro que el uso de un observador para un sistema con incertidumbre modelado en cualquiera de los dos formas presentadas en esta tesis puede ser aplicado.

## 4.7.2 Generador Síncrono

En esta sección, se analiza el comportamiento cualitativo y cuantitativo del generador síncrono. De manera similar al ejemplo anterior, transformador eléctrico, se analiza la estabilidad del generador síncrono sin incertidumbre y posteriormente con ellas, seguido se determina el estado estable del sistema y finalmente se analizan las propiedades de controlabilidad y observabilidad.

### 4.7.2.1 Análisis de estabilidad en Bond Graph

Para el caso del generador síncrono se obtendrán los coeficientes del polinomio característico por medio de:

$$p(s) = \det(sI - A) \quad (4.90)$$

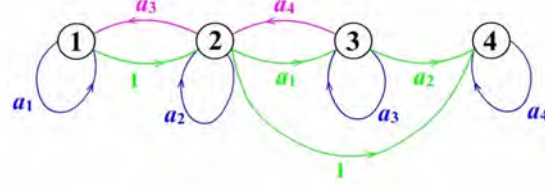
Se considera la matriz (3.152) para la obtención del polinomio característico, así (4.90) queda como:

$$p(s) = \det(sI_{4 \times 4} - \bar{A}_\delta) \quad (4.91)$$

El polinomio característico queda de la forma (4.10) con  $n = 4$ , donde los coeficientes son definidos por:

$$\begin{aligned} a_0 &= 1 \\ a_1 &= \frac{r_q}{L_q} + \frac{D_a}{T_j} + \frac{\beta}{\alpha} \\ a_2 &= \frac{p_{11}^2 L_F + \beta D_a}{\alpha T_j} + \frac{\beta r_q}{\alpha L_q} + \frac{r_d r_F}{\alpha} + \frac{p_3^2 + r_q D_a}{T_j L_q} \\ &\quad - \frac{f_{24} p_{11} + f_{22} p_3}{T_j} + f_{27}^2 \\ a_3 &= \frac{\beta (D_a r_q + p_3^2) + p_{11}^2 L_F r_q}{\alpha T_j L_q} + \frac{r_d r_F r_q}{\alpha L_q} + \frac{L_d r_F f_{27}^2}{\alpha} - \frac{\beta f_{22} p_3}{\alpha T_j} \\ &\quad - \frac{(f_{27} D_a + f_{24} p_3 + f_{22} p_{11}) f_{27}}{T_j} + \frac{r_F (p_{11}^2 - L_d f_{24} p_{11} + r_d D_a)}{\alpha T_j} \\ &\quad + \frac{p_{11} L_F f_{27} p_3}{\alpha T_j} - \frac{(f_{24} r_q + f_{27} p_3) p_{11}}{T_j L_q} \\ a_4 &= L_d r_F f_{27} \frac{(D_a f_{27} + p_{11} f_{22})}{\alpha T_j} - \frac{L_d f_{27} r_F p_{11} p_3}{\alpha T_j L_q} + r_F r_d \frac{p_3^2 + r_q D_a}{\alpha T_j L_q} \\ &\quad - r_F p_3 \frac{L_d f_{24} f_{27} + r_d f_{22} - p_{11} f_{27}}{\alpha T_j} + r_F r_q p_{11} \frac{p_{11} - L_d f_{24}}{\alpha T_j L_q} \end{aligned} \quad (4.92a)$$

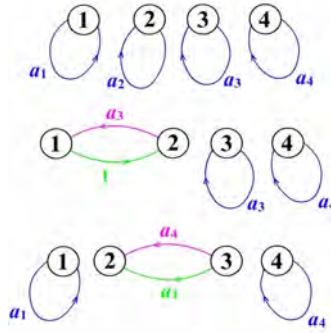
donde  $\alpha = L_d L_F - m_F d^2$ ,  $\beta = r_F L_d + r_d L_F$ . El grafo de estabilidad de Coates es obtenido con ayuda de la Tabla 4.3, quedando mostrado en la Figura 4.25.



**Figura 4.25:** Grafo de Coates de estabilidad para el generador síncrono.

Encontrando los determinantes de Hurwitz por medio del Procedimiento 4.2. Considere la Figura 4.26 para obtener  $D_4$ .

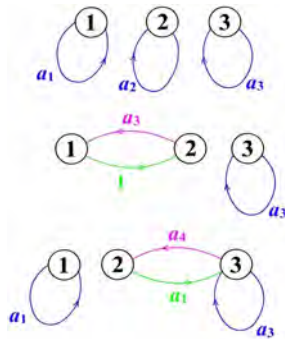
$$D_4 = a_1 a_2 a_3 a_4 - a_3^2 a_4 - a_1^2 a_4^2 \quad (4.93)$$



**Figura 4.26:** Subgrafo seccional de cuatro nodos.

De la Figura 4.27,  $D_3$  es:

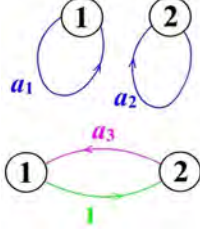
$$D_3 = a_1 a_2 a_3 - a_3^2 - a_1^2 a_4 \quad (4.94)$$



**Figura 4.27:** Subgrafo seccional de tres nodos.

La Figura 4.28, produce  $D_2$ .

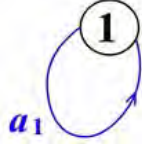
$$D_2 = a_1 a_2 - a_3 \quad (4.95)$$



**Figura 4.28:** Subgrafo seccional de dos nodos.

Finalmente,  $D_1$  se obtiene de la Figura 4.29.

$$D_1 = a_1 \quad (4.96)$$



**Figura 4.29:** Subgrafo seccional de un nodo.

Al sustituirse los valores numéricos necesarios, los determinantes de Hurwitz son:

$$\begin{aligned} D_4 &= 1.588 \times 10^{17} > 0 \\ D_3 &= 4.316 \times 10^{11} > 0 \\ D_2 &= 783730 > 0 \\ D_1 &= 141 > 0 \end{aligned} \quad (4.97)$$

Es claro que el sistema tiene estabilidad Hurwitz, sin embargo, se debe ser cuidadoso en los parámetros que forman la constante  $\alpha$ , ya que ésta se encuentra como denominador en los coeficientes del polinomio característico, por lo que para garantizar la estabilidad del sistema  $L_d L_F \neq m_{Fd}^2$ .

### Estabilidad en el modelo de la forma canónica y de interconexión estándar

La obtención de la estabilidad del sistema nominal determinó que se tiene estabilidad Hurwitz. Teniendo la experiencia del cálculo de la estabilidad para el transformador eléctrico, quedo de manifiesto que las dos formas propuestas para modelar la incertidumbre paramétrica, generan el mismo polinomio característico, obsérvese (4.43) y (4.45); por lo que no es necesario hacer el análisis para ambos casos.

La selección del modelo a utilizar para obtener la estabilidad en presencia de incertidumbre, se deja a libre elección, considerando siempre la mejor manera de obtener el resultado deseado.

A continuación se agrega la incertidumbre en los parámetros ya conocidos del capítulo anterior. Sustituyendo (3.200) en (4.90) se obtiene el polinomio característico correspondiente, del cual sus coeficientes son:

$$\begin{aligned}
 a_0 &= 1 \\
 a_1 &= \frac{r_q}{L_q + \Delta L_q} + \frac{D_a}{T_j} + \frac{\beta}{\alpha} \\
 a_2 &= \frac{(p_{11} + \Delta p_{11})^2 L_F + \beta D_a}{\alpha T_j} + \frac{\beta r_q}{\alpha (L_q + \Delta L_q)} + \frac{(r_d + \Delta r_d) r_F}{\alpha} + \frac{p_3^2 + r_q D_a}{T_j (L_q + \Delta L_q)} \\
 &\quad - \frac{f_{24} (p_{11} + \Delta p_{11}) + (f_{22} + \Delta f_{22}) p_3}{T_j} + f_{27} (f_{27} + \Delta f_{27}) \\
 a_3 &= \frac{\beta (D_a r_q + p_3^2) + (p_{11} + \Delta p_{11})^2 L_F r_q}{\alpha T_j (L_q + \Delta L_q)} + \frac{r_F r_q (r_d + \Delta r_d)}{\alpha (L_q + \Delta L_q)} \\
 &\quad - \frac{(f_{22} + \Delta f_{22}) (p_{11} + \Delta p_{11}) f_{27} - (f_{27} D_a + f_{24} p_3) (f_{27} + \Delta f_{27})}{T_j} \\
 &\quad - \frac{(f_{24} r_q + f_{27} p_3) (p_{11} + \Delta p_{11})}{T_j (L_q + \Delta L_q)} + L_F p_3 \frac{(p_{11} + \Delta p_{11}) (f_{27} + \Delta f_{27})}{\alpha T_j} \\
 &\quad + r_F \frac{\left( (p_{11} + \Delta p_{11})^2 - L_d f_{24} (p_{11} + \Delta p_{11}) + (r_d + \Delta r_d) D_a \right)}{\alpha T_j} \\
 &\quad + \frac{L_d r_F f_{27} (f_{27} + \Delta f_{27})}{\alpha} - \frac{\beta (f_{22} + \Delta f_{22}) p_3}{\alpha T_j} \\
 a_4 &= L_d r_F f_{27} \frac{(D_a (f_{27} + \Delta f_{27}) + (p_{11} + \Delta p_{11}) (f_{22} + \Delta f_{22}))}{\alpha T_j} \\
 &\quad - r_F p_3 \frac{L_d f_{24} (f_{27} + \Delta f_{27}) + (r_d + \Delta r_d) (f_{22} + \Delta f_{22})}{\alpha T_j} \\
 &\quad + r_F (r_d + \Delta r_d) \frac{p_3^2 + r_q D_a}{\alpha T_j (L_q + \Delta L_q)} + r_F r_q (p_{11} + \Delta p_{11}) \frac{(p_{11} + \Delta p_{11}) - L_d f_{24}}{\alpha T_j (L_q + \Delta L_q)} \\
 &\quad - \frac{L_d f_{27} r_F (p_{11} + \Delta p_{11}) p_3}{\alpha T_j (L_q + \Delta L_q)} - \frac{(p_{11} + \Delta p_{11}) (f_{27} + \Delta f_{27})}{\alpha T_j}
 \end{aligned} \tag{4.98a}$$

donde  $\alpha = L_d L_F - m_{Fd}^2$ ,  $\beta = r_F L_d + (r_d + \Delta r_d) L_F$ . Los determinantes de Hurwitz se obtienen usando nuevamente la Figura 4.25, así los valores de dichos determinantes se encuentran definidos por (4.93) a (4.96).

Sustituyendo los valores numéricos apropiados, los determinantes de Hurwitz son:

$$\begin{aligned}
 D_4 &= 2.075 \times 10^{18} > 0 \\
 D_3 &= 4.8 \times 10^{12} > 0 \\
 D_2 &= 7280100 > 0 \\
 D_1 &= 327 > 0
 \end{aligned} \tag{4.99}$$

El sistema no ha sufrido un cambio en su estabilidad después de la adición de la incertidumbre, sin embargo, es claro que éstas lo han afectado. Si la incertidumbre se mantiene lo suficientemente pequeña comparada con su valor nominal, el sistema mantendrá su estabilidad.

Al igual que para el sistema nominal si se da la condición de que  $L_d L_F = m_{Fd}^2$ , nuevamente se garantiza la inestabilidad del sistema, además, para el sistema con incertidumbre también se puede apreciar que si  $L_d = \Delta L_d$  provocara que el sistema sea inestable.

Para el caso de que  $\Delta f_{27} \leq -f_{27}$ ,  $\Delta f_{22} \leq -f_{22}$ ,  $\Delta p_{11} \leq -p_{11}$  y  $\Delta r_d \leq -r_d$  existe la posibilidad de que el sistema se inestabilice, dependiendo de la magnitud de dicha incertidumbre; si se da el caso que la incertidumbre antes mencionada sea igual a los valores nominales, el sistema tendrá un polo en cero, generando así una inestabilidad.

#### 4.7.2.2 Estado estacionario del sistema

En esta sección se calcula el estado estacionario de las salidas correspondientes del generador síncrono sin incertidumbre, usando el BGD del mismo. Posteriormente se realiza dicho análisis con la respectiva incertidumbre. El BGD del generador síncrono es mostrado en la Figura 4.30.

Considerando la Figura 4.28, los vectores clave son:

$$\begin{aligned}
 u_{\delta 1}(t) &= \begin{bmatrix} e_1 & e_6 & e_{12} & e_{16} \end{bmatrix}^T & \tilde{u}(t) &= \begin{bmatrix} f_{22} & f_{24} & f_{27} \end{bmatrix}^T; \\
 x_{\delta}(t) &= \begin{bmatrix} p_3 & p_5 & p_{11} & p_{18} \end{bmatrix}^T; & \dot{x}_{\delta}(t) &= \begin{bmatrix} e_3 & e_5 & e_{11} & e_{18} \end{bmatrix}^T \\
 z_{\delta}(t) &= \begin{bmatrix} f_3 & f_5 & f_{11} & f_{18} \end{bmatrix}^T; & D_{ind}(t) &= \begin{bmatrix} e_2 & e_7 & e_{13} & e_{20} \end{bmatrix}^T \\
 D_{outd}(t) &= \begin{bmatrix} f_2 & f_7 & f_{13} & f_{20} \end{bmatrix}^T & y_{\delta d}(t) &= \begin{bmatrix} f_2 & f_{13} \end{bmatrix}^T
 \end{aligned} \tag{4.100}$$

Se tienen las siguientes relaciones constitutivas:

$$F = \text{diag} \left\{ M_{dF}^{-1}, \frac{1}{L_q}, \frac{1}{T_j} \right\}; \quad L_d = \text{diag} \left\{ \frac{1}{r_d}, \frac{1}{r_F}, \frac{1}{r_q}, \frac{1}{D_a} \right\} \tag{4.101}$$

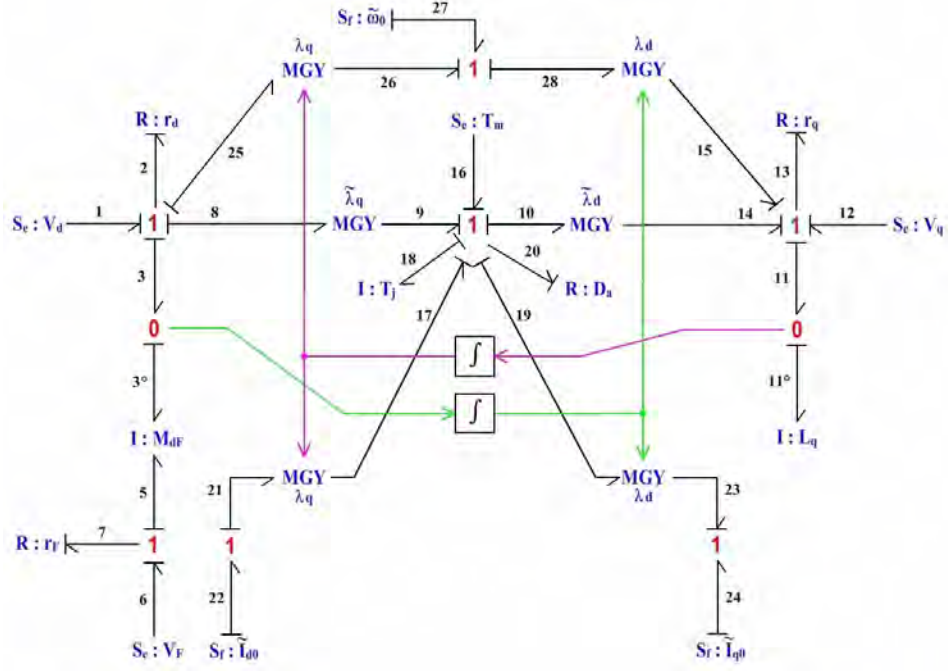


Figura 4.30: BGD del generador síncrono.

Con la información antes mencionada se forma la matriz de estructura unión  $J$  propia del BGD, donde:

$$\begin{aligned} J_{11} &= 0_{4 \times 4}; & J_{12} &= -J_{21}^T = I_{4 \times 4}; & J_{13} &= 0_{4 \times 7} \\ J_{31} &= 0_{2 \times 4}; & J_{33} &= 0_{2 \times 7}; & J_{32} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.102a)$$

$$J_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -\tilde{\lambda}_q \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \tilde{\lambda}_d \\ \tilde{\lambda}_q & 0 & -\tilde{\lambda}_d & 0 \end{bmatrix}; \quad J_{23} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda_q \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \lambda_d \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \lambda_q & -\lambda_d & 0 \end{bmatrix} \quad (4.102b)$$

con la matriz auxiliar  $N$ .

$$\begin{aligned} N &= (I - L_d J_{22})^{-1} L_d \\ &= \begin{bmatrix} \frac{r_q D_a + p_3}{\Lambda} & 0 & \frac{p_{11} p_3}{\Lambda} & -\frac{p_{11} r_q}{\Lambda} \\ 0 & \frac{1}{r_F} & 0 & 0 \\ \frac{p_{11} p_3}{\Lambda} & 0 & -\frac{p_{11} + D_a r_d}{\Lambda} & \frac{p_3 r_d}{\Lambda} \\ \frac{p_{11} r_q}{\Lambda} & 0 & -\frac{p_3 r_d}{\Lambda} & \frac{r_d r_q}{\Lambda} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.103)$$



donde  $\Lambda = p_{11}^2 r_q + p_3^2 r_q + D_a r_q r_d$ . Puesto que sólo es necesario obtener  $y_{ss}$ , por medio de (4.29), se requiere calcular  $D^*$ , para esto es importante hacer una observación sobre  $J_{23}$ , es claro que esta matriz tiene la forma de (3.143), razón por la cual se hacen los siguientes pasos. Sustitúyase (4.23) en (4.29), se tiene que:

$$y_{\delta ss} = (J_{33} + J_{32} N J_{23}) u \quad (4.104)$$

donde las submatrices requeridas han sido definidas por (4.102a), por lo que (4.104) puede ser reescrita como:

$$\begin{aligned} y_{\delta ss} &= J_{32} N \begin{bmatrix} J_{23}^1 & J_{23}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{\delta 1} \\ \tilde{u} \end{bmatrix} \\ &= J_{32} N J_{23}^1 u_{\delta 1} + J_{32} N J_{23}^2 \tilde{u} \end{aligned} \quad (4.105)$$

donde  $J_{23}^2$  puede ser reescrita de manera similar que en (3.147) para el caso de  $B_1$ , entonces  $J_{23}^2 \tilde{u} = \widetilde{J_{23}^2} x_{\delta ss}$ . Se puede reescribir (4.105), recordando (2.22):

$$y_{\delta ss} = J_{32} N J_{23}^1 u_{\delta 1} + J_{32} N \widetilde{J_{23}^2} F^{-1} z_{\delta ss} \quad (4.106)$$

donde  $z_{\delta}$  es obtenida por (4.28), así que:

$$\begin{aligned} z_{\delta ss} &= B^* u = (N J_{23}) u = N J_{23}^1 u_{\delta 1} + N J_{23}^2 \tilde{u} \\ &= N J_{23}^1 u_{\delta 1} + N \widetilde{J_{23}^2} F^{-1} z_{\delta ss} \\ &= \left( I - N \widetilde{J_{23}^2} F^{-1} \right)^{-1} N J_{23}^1 u_{\delta 1} \end{aligned} \quad (4.107)$$

donde

$$\widetilde{J_{23}^2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -f_{27} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ f_{27} & 0 & 0 & 0 \\ -f_{24} & 0 & f_{22} & 0 \end{bmatrix}$$

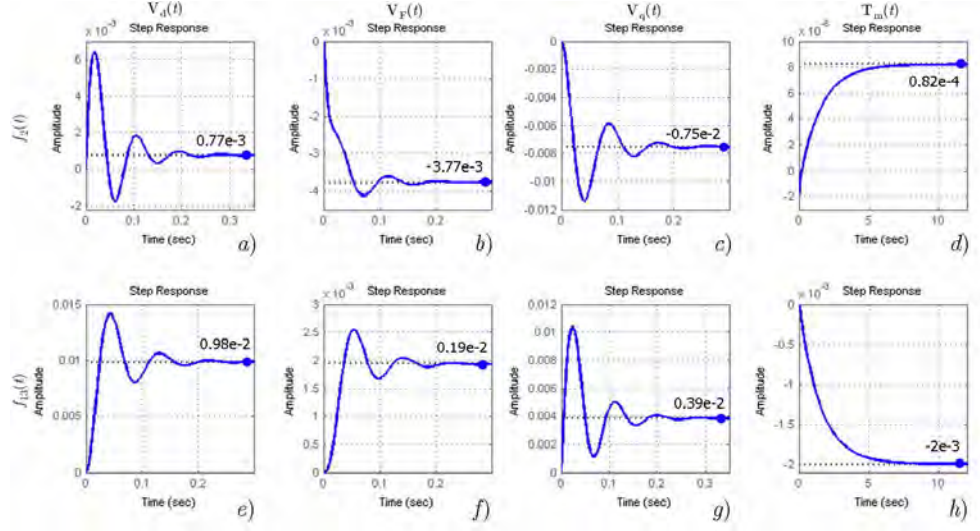
Finalmente se sustituye (4.107) en (4.106), siendo:

$$y_{\delta ss} = J_{32} N J_{23}^1 u_{\delta 1} + J_{32} N \widetilde{J_{23}^2} F^{-1} \left( I - N \widetilde{J_{23}^2} F^{-1} \right)^{-1} N J_{23}^1 u_{\delta 1} \quad (4.108)$$

Sustituyendo las matrices apropiadas, los valores numéricos de los estados son:

$$y_{\delta ss} = \begin{bmatrix} 0.00077 & -0.00377 & -0.0075 & 0.822 \times 10^{-4} \\ 0.0098 & 0.0019 & 0.0039 & -0.002 \end{bmatrix} \quad (4.109)$$

En la Figura 4.31 se hace la comparación de los valores calculados con las respuestas simuladas en Matlab<sup>®</sup> a la entrada de tipo escalón.



**Figura 4.31:** Estado estable de las salidas del generador síncrono.

### Estado estacionario en la forma canónica

Una vez obtenido el estado estacionario del sistema, se agrega la incertidumbre correspondiente y se encuentra el BGD. La Figura 4.32 muestra dicho BGD.

Los vectores claves respectivos son:

$$\begin{aligned}
 u_{\delta 1}(t) &= \begin{bmatrix} e_1 & e_6 & e_{12} & e_{16} \end{bmatrix}^T & \tilde{u}(t) &= \begin{bmatrix} f_{22} & f_{24} & f_{27} \end{bmatrix}^T; \\
 x_{\delta}(t) &= \begin{bmatrix} p_3 & p_5 & p_{51} & p_{18} & p_{52} \end{bmatrix}^T; & \dot{x}_{\delta}(t) &= \begin{bmatrix} e_3 & e_5 & e_{11} & e_{18} & e_{52} \end{bmatrix}^T \\
 z_{\delta}(t) &= \begin{bmatrix} f_3 & f_5 & f_{11} & f_{18} & f_{52} \end{bmatrix}^T; & y_{\delta d}(t) &= \begin{bmatrix} f_2 & f_{13} \end{bmatrix}^T \\
 D_{outd}(t) &= \begin{bmatrix} f_2 & f_7 & f_{13} & f_{20} & e_{33} \end{bmatrix}^T; & D_{ind}(t) &= \begin{bmatrix} e_{32} & e_7 & e_{13} & e_{20} & f_{33} \end{bmatrix}^T
 \end{aligned} \tag{4.110}$$

Con las relaciones constitutivas:

$$F = \text{diag} \left\{ M_{dF}^{-1}, \frac{1}{L_q}, \frac{1}{T_j}, \frac{1}{\Delta L_q} \right\}; \quad L_d = \text{diag} \left\{ \frac{1}{r_d}, \frac{1}{r_F}, \frac{1}{r_q}, \frac{1}{D_a}, \frac{1}{\Delta r_d} \right\} \tag{4.111}$$

Las submatrices  $J_{ij}$  del BGD son:

$$J_{12} = -J_{21}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad J_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -\tilde{\lambda}_q - \Delta\tilde{\lambda}_q & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \tilde{\lambda}_d & 0 \\ \tilde{\lambda}_q + \Delta\tilde{\lambda}_q & 0 & -\tilde{\lambda}_d & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{4.112a}$$

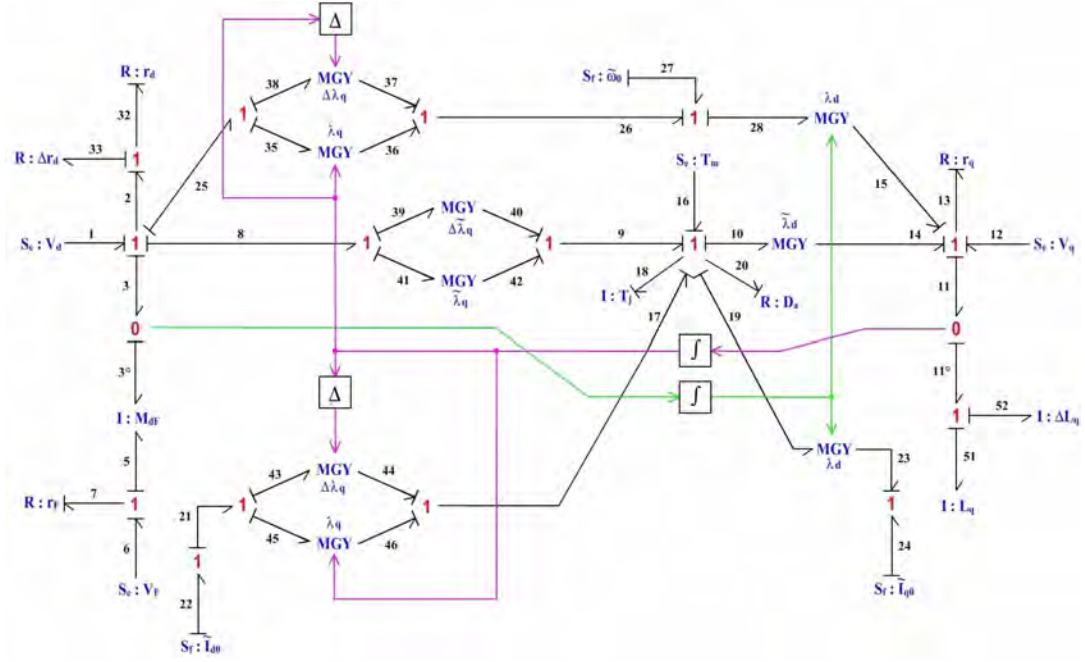


Figura 4.32: BGD del generador síncrono con incertidumbres.

$$\begin{aligned}
 J_{11} &= 0_{4 \times 4}; & J_{13} &= 0_{5 \times 7}; & J_{31} &= 0_{2 \times 4}; & J_{33} &= 0_{2 \times 7} \\
 J_{23} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\lambda_q - \Delta\lambda_q \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_d \\ \lambda_q + \Delta\lambda_q & -\lambda_d & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; & J_{32} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.112b)
 \end{aligned}$$

La matriz auxiliar es definida por:

$$\begin{aligned}
 N &= (I - L_d J_{22})^{-1} L_d \\
 &= \begin{bmatrix} \frac{\Phi}{\Lambda} & 0 & \frac{\Psi p_3}{\Lambda} & -\frac{\Psi r_q}{\Lambda} & -\Delta r_d \frac{\Phi}{\Lambda} \\ 0 & \frac{1}{r_F} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\Psi p_3}{\Lambda} & 0 & -\frac{\Psi^2 + D_a(r_d + \Delta r_d)}{\Lambda} & \frac{(r_d + \Delta r_d)p_3}{\Lambda} & -\Delta r_d \frac{\Psi p_3}{\Lambda} \\ \frac{\Psi r_q}{\Lambda} & 0 & -\frac{(r_d + \Delta r_d)p_3}{\Lambda} & \frac{(r_d + \Delta r_d)r_q}{\Lambda} & -\Delta r_d \frac{\Psi r_q}{\Lambda} \\ \Delta r_d \frac{\Phi}{\Lambda} & 0 & \Delta r_d \frac{\Psi p_3}{\Lambda} & -\Delta r_d \frac{\Psi r_q}{\Lambda} & \Delta r_d \frac{r_q^2 \Psi + r_d \Phi}{\Lambda} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

donde  $\Lambda = (p_{11} + \Delta p_{11})^2 r_q + p_3^2 r_q + D_a r_q (r_d + \Delta r_d)$ ,  $\Phi = r_q D_a + p_3^2$  y  $\Psi = p_{11} + \Delta p_{11}$ . Para encontrar el estado estacionario de las salidas es necesario obtener la matriz  $\tilde{J}_{23}^2$ , recordando que  $\lambda_q = p_{11}$  en el sistema sin incertidumbre, por lo que  $p_{11} = p_{51}$ , para tal acción se utiliza la matriz

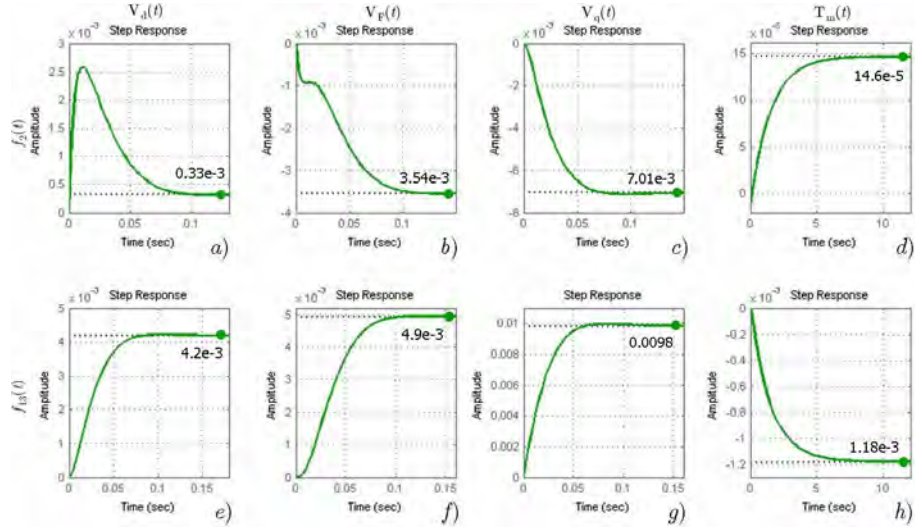
de transformación descrita en (3.20), por lo que:

$$\widetilde{J}_{23}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{(f_{27}+\Delta f_{27})L_q}{L_q+\Delta L_q} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ f_{27} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -f_{24} & 0 & \frac{(f_{22}+\Delta f_{22})L_q}{L_q+\Delta L_q} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.113)$$

Finalmente el estado estacionario de las salidas es:

$$\begin{aligned} y_{\delta ss} &= J_{32}N J_{23}^1 u_{\delta 1} + J_{32}N \widetilde{J}_{23}^2 F^{-1} \left( I - N \widetilde{J}_{23}^2 F^{-1} \right)^{-1} N J_{23}^1 u_{\delta 1} \\ &= \begin{bmatrix} 0.00033 & -0.0035 & -0.007 & 14.6 \times 10^{-5} \\ 0.0042 & 0.0049 & 0.0098 & -0.00118 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.114)$$

La Figura 4.33 compara las salidas graficadas con los valores numéricos obtenidos.

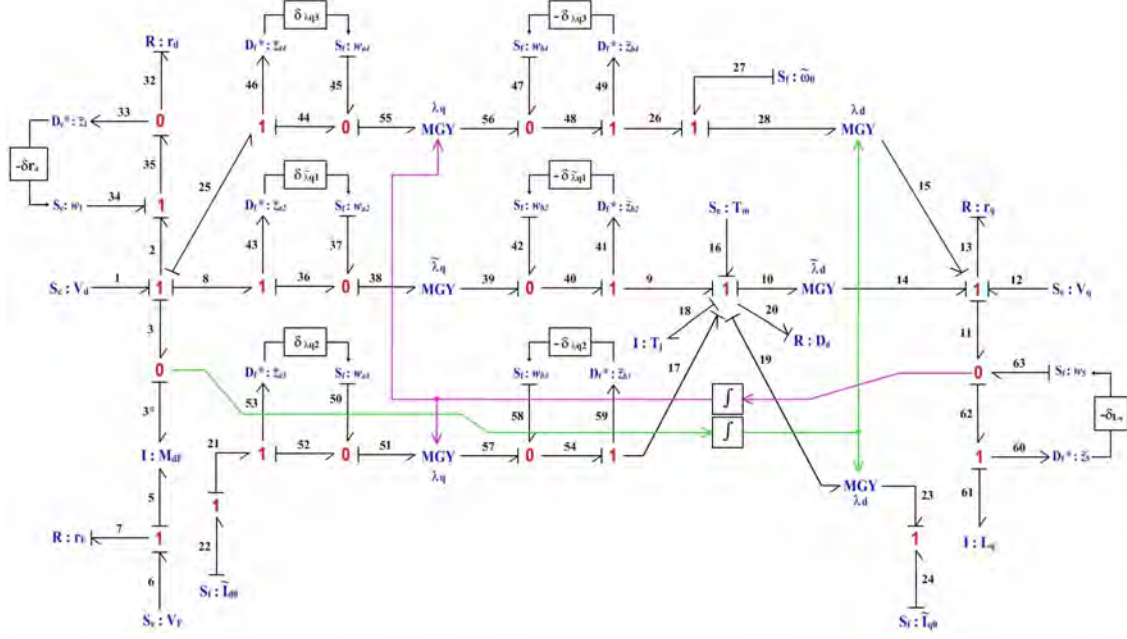


**Figura 4.33:** Estado estable de las salidas del UBG en el generador síncrono.

Las salidas del sistema graficadas son iguales a los valores obtenidos numéricamente, con esto se concluye que los pasos hechos para reescribir las matrices han sido exitosos.

### Estado estacionario en la forma de interconexión estándar

La Figura 4.34 muestra el BGD del modelo con incertidumbre en su forma de interconexión estándar.



**Figura 4.34:** UBG del modelo en la forma de interconexión estándar del generador síncrono.

Los vectores claves son:

$$\begin{aligned}
 u_\delta(t) &= \begin{bmatrix} e_1 & e_6 & e_{12} & e_{16} \end{bmatrix}^T \\
 w_\delta(t) &= \begin{bmatrix} e_{34} & f_{37} & f_{42} & f_{50} & f_{58} & f_{45} & f_{47} & f_{63} \end{bmatrix}^T \\
 \tilde{z}_\delta(t) &= \begin{bmatrix} e_{33} & f_{43} & f_{41} & f_{53} & f_{59} & f_{46} & f_{49} & f_{60} \end{bmatrix}^T \\
 \tilde{u}(t) &= \begin{bmatrix} f_{22} & f_{24} & f_{27} \end{bmatrix}^T; \quad y_{\delta 1}(t) = \begin{bmatrix} f_2 & f_{13} \end{bmatrix}^T \\
 D_{outd}(t) &= \begin{bmatrix} f_{32} & f_7 & f_{13} & f_{20} \end{bmatrix}^T; \quad D_{ind}(t) = \begin{bmatrix} e_{32} & e_7 & e_{13} & e_{20} \end{bmatrix}^T \\
 x_\delta(t) &= \begin{bmatrix} p_3 & p_5 & p_{61} & p_{18} \end{bmatrix}^T; \quad \dot{x}_\delta(t) = \begin{bmatrix} e_3 & e_5 & e_{61} & e_{18} \end{bmatrix}^T \\
 z_\delta(t) &= \begin{bmatrix} f_3 & f_5 & f_{51} & f_{18} \end{bmatrix}^T
 \end{aligned} \tag{4.115}$$

Las relaciones constitutivas:

$$F = \text{diag} \left\{ M_{dF}^{-1}, \frac{1}{L_q}, \frac{1}{T_j} \right\}; \quad L_d = \text{diag} \left\{ \frac{1}{r_d}, \frac{1}{r_F}, \frac{1}{r_q}, \frac{1}{D_a} \right\} \tag{4.116}$$

Las submatrices  $J_{ij}$  del BGD están definidas por:

$$J_{11} = 0_{4 \times 4}; \quad J_{12} = -J_{21}^T = I_{4 \times 4} \tag{4.117a}$$

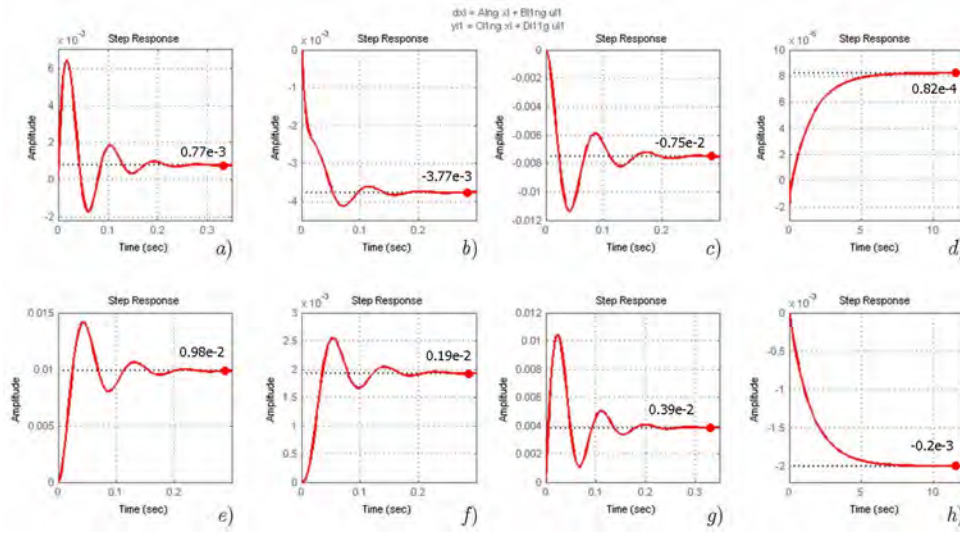
$$\begin{aligned}
 J_{13} &= \left[ \begin{array}{c|c} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{matrix} \\ \hline 0_{4 \times 7} & 0_{4 \times 7} \end{array} \right]; \quad J_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -\tilde{\lambda}_q \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \tilde{\lambda}_d \\ \tilde{\lambda}_q & 0 & -\tilde{\lambda}_d & 0 \end{bmatrix} \\
 J_{23} &= \left[ \begin{array}{ccc|cccccc} 0 & 0 & -\lambda_q & 1 & 0 & \tilde{\lambda}_q & 0 & 0 & 0 & \lambda_q & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_d & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_q & -\lambda_d & 0 & 0 & \tilde{\lambda}_q & 0 & \lambda_q & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \\
 J_{31} &= \left[ \begin{array}{c} 0_{2 \times 4} \\ \hline -1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \\ \hline 0_{7 \times 4} \end{array} \right]; \quad J_{32} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -\tilde{\lambda}_q \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\
 J_{33} &= \left[ \begin{array}{c|c} 0_{2 \times 7} & 0_{2 \times 8} \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda_q & 0 \\ 0_{2 \times 7} & 0_{2 \times 8} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0_{2 \times 7} & 0_{2 \times 8} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0_{1 \times 8} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]
 \end{aligned} \tag{4.117b}$$

La matriz  $N$  es definida nuevamente por (4.103), puesto que en esta tesis las funciones de transferencia que involucran las entradas y salidas virtuales son ignoradas, por lo que sólo se busca obtener el estado estacionario de la parte nominal, sustituyendo los valores apropiados de las

matrices antes mencionadas, así como los respectivos valores numéricos se tiene que:

$$\begin{aligned}
 y_{\delta ss} &= J_{32} N J_{23}^1 u_{\delta} + J_{32} N \widetilde{J}_{23}^2 F^{-1} \left( I - N \widetilde{J}_{23}^2 F^{-1} \right)^{-1} N J_{23}^1 u_{\delta} \\
 &= \begin{bmatrix} 0.00077 & -0.00377 & -0.0075 & 0.822 \times 10^{-4} \\ 0.0098 & 0.0019 & 0.0039 & -0.002 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{4.118}$$

Comparando (4.109) con (4.118) se aprecia que los valores de la parte nominal obtenidos por medio de la forma de interconexión estándar son iguales a los del sistema nominal. En la Figura 4.35 se muestran las respuestas nominales con sus respectivos valores en el estado estacionario.



**Figura 4.35:** Estado estable de las salidas del generador síncrono en su forma de interconexión estándar.

Queda así demostrado que el uso del BGD para obtener las condiciones de estabilidad es exitoso, sin embargo, deben hacerse los acondicionamientos necesarios para obtener la matriz  $J_{ij}$  y finalmente obtener el estado estacionario.

#### 4.7.2.3 Análisis de la controlabilidad para el generador síncrono

Es necesario encontrar las trayectorias causales en el diagrama en Bond Graph del generador síncrono y así cumplir con el requisito del Teorema 4.7. Dichas trayectorias son mostradas en la Figura 4.36.

Para  $S_e : V_d$  las trayectorias causales son:

$$I : L_d \rightarrow \{1, 3, 3^\circ\}$$

$$I : L_F \rightarrow \{1, 3, 3^\circ, 5, 7, 7, 5\}$$



$$I \quad : \quad L_q \rightarrow \{1, 3, 3^\circ, 3^\circ, 3, 8, 9, 18, 18, 10, 14, 11, 11^\circ\}$$

$$I \quad : \quad L_F \rightarrow \{6, 5\}$$

$$I : L_q \rightarrow \{6, 5, 3^\circ, 3, 8, 9, 18, 18, 10, 14, 11, 11^\circ\}$$

$$I \quad : \quad L_F \rightarrow \{12, 11, 11^\circ, 11^\circ, 11, 14, 10, 18, 18, 9, 8, 3, 3^\circ\}$$

$$I \quad : \quad L_q \rightarrow \{12, 11, 11^\circ\}$$





Para  $S_e : V_d$  existen las siguientes trayectorias:

$$I : L_d \rightarrow \{1, 3, 3^\circ\}$$

$$I : L_F \rightarrow \{1, 3, 3^\circ, 5, 7, 7, 5\}$$

$$I : T_j \rightarrow \{1, 3, 3^\circ, 3^\circ, 3, 8, (41, 42)(39, 40), 9, 18\}$$

$$I : L_q \rightarrow \{1, 3, 3^\circ, 3^\circ, 3, 8, (41, 42)(39, 40), 9, 18, 18, 10, 14, 11, 11^\circ, 51\}$$

Las trayectorias causales para  $S_e : V_F$  están definidas por:

$$I : L_d \rightarrow \{6, 5, 3^\circ, 3, 2, (32, 32)(33, 33), 2, 3, 3^\circ\}$$

$$I : L_F \rightarrow \{6, 5\}$$

$$I : T_j \rightarrow \{6, 5, 3^\circ, 3, 8, (41, 42)(39, 40), 9, 18\}$$

$$I : L_q \rightarrow \{6, 5, 3^\circ, 3, 8, (41, 42)(39, 40), 9, 18, 18, 10, 14, 11, 11^\circ, 51\}$$

Para  $S_e : V_q$  se tienen las trayectorias causales siguientes:

$$I : L_d \rightarrow \{12, 11, 11^\circ, 51, 51, 11^\circ, 11, 14, 10, 18, 18, 9, (42, 41)(40, 39), 8, 3, 3^\circ\}$$

$$I : L_F \rightarrow \{12, 11, 11^\circ, 51, 51, 11^\circ, 11, 14, 10, 18, 18, 9, (42, 41)(40, 39), 8, 3, 3^\circ, 5, 7, 5\}$$

$$I : T_j \rightarrow \{12, 11, 11^\circ, 51, 51, 11^\circ, 11, 14, 10, 18\}$$

$$I : L_q \rightarrow \{12, 11, 11^\circ, 51\}$$

Para  $S_e : T_m$  las trayectorias causales son:

$$I : L_d \rightarrow \{16, 18, 18, 9, (42, 41)(40, 39), 8, 3, 3^\circ\}$$

$$I : L_F \rightarrow \{16, 18, 18, 9, (42, 41)(40, 39), 8, 3, 3^\circ, 5, 7, 7, 5\}$$

$$I : T_j \rightarrow \{16, 18\}$$

$$I : L_q \rightarrow \{16, 18, 18, 10, 14, 11, 11^\circ, 51\}$$

Nuevamente, la adición de incertidumbre en los parámetros no ha cambiado la controlabilidad del sistema, sin embargo, se han creado nuevos trazos causales, que como es de esperar afectan al sistema. Al existir también el BGD en esta forma de modelo, se afirma que el generador síncrono con incertidumbre es *Controlable*.



Para  $S_e : V_q$  se tiene que:

$$I : L_d \rightarrow \{12, 11, 62, 61, 61, 62, 11, 14, 10, 18, 18, 9, 40, 39, 38, 36, 8, 3, 3^\circ\}$$

$$I : L_F \rightarrow \{12, 11, 62, 61, 61, 62, 11, 14, 10, 18, 18, 9, 40, 39, 38, 36, 8, 3, 3^\circ, 5, 7, 5\}$$

$$I : T_j \rightarrow \{12, 11, 62, 61, 61, 62, 11, 14, 10, 18\}$$

$$I : L_q \rightarrow \{12, 11, 62, 61\}$$

Para  $S_e : T_m$  se tienen las trayectorias causales siguientes:

$$I : L_d \rightarrow \{16, 18, 18, 9, 40, 39, 38, 36, 8, 3, 3^\circ\}$$

$$I : L_F \rightarrow \{16, 18, 18, 9, 40, 39, 38, 36, 8, 3, 3^\circ, 5, 7, 7, 5\}$$

$$I : T_j \rightarrow \{16, 18\}$$

$$I : L_q \rightarrow \{16, 18, 18, 10, 14, 11, 62, 61\}$$

Queda así asentado que existen todas las trayectorias causales que garantizan la controlabilidad del sistema, por lo que el Teorema 4.7 ha sido cumplido al existir también un BGD para el sistema en su forma de interconexión estándar, por lo que el generador síncrono en este caso también es dicho a ser *Controlable*.

#### 4.7.2.4 Análisis de la observabilidad para el generador síncrono

Una vez que se ha determinado la controlabilidad del generador síncrono en sus diferentes casos, se procede a estudiar otra propiedad importante, la observabilidad. Para cumplir con lo establecido en el Teorema 4.8, se buscan las trayectorias causales correspondientes, es importante recordar que existe el BGD del sistema, por lo que sólo es necesario encontrar las trayectorias para garantizar la observabilidad. En la Figura 4.39 se muestran las trayectorias causales del generador síncrono sin incertidumbre.

Las trayectorias causales hacia  $D_f : f_2$  son:

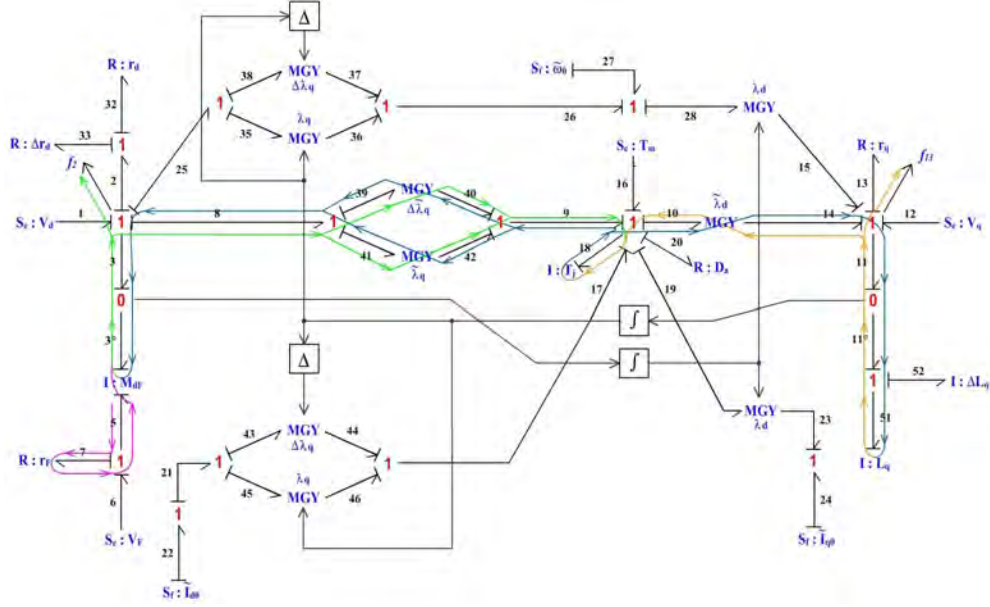
$$I : L_d \rightarrow \{3^\circ, 3\}$$

$$I : L_F \rightarrow \{5, 7, 7, 5, 3^\circ, 3\}$$

$$I : T_j \rightarrow \{18, 9, 8, 3, 3^\circ, 3^\circ, 3\}$$

$$I : L_q \rightarrow \{11^\circ, 11, 14, 10, 18, 18, 9, 8, 3, 3^\circ, 3^\circ, 3\}$$





**Figura 4.40:** Trayectorias causales de los elementos dinámicos a los detectores en el UBG.

$$I : T_j \rightarrow \{18, 9, (40, 39)(42, 41), 8, 3, 3^\circ, 3^\circ, 3\}$$

$$I : L_q \rightarrow \{51, 11^\circ, 11, 14, 10, 18, 18, 9, (40, 39)(42, 41), 8, 3, 3^\circ, 3^\circ, 3\}$$

Las trayectorias definidas para  $D_f : f_{13}$  son:

$$I : L_d \rightarrow \{3^\circ, 3, 8, (39, 40)(41, 42), 9, 18, 18, 10, 14, 11, 11^\circ, 51, 51, 11^\circ, 11\}$$

$$I : L_F \rightarrow \{5, 7, 7, 5, 3^\circ, 3, 8, (39, 40)(41, 42), 9, 18, 18, 10, 14, 11, 11^\circ, 51, 51, 11^\circ, 11\}$$

$$I : T_j \rightarrow \{18, 10, 14, 11, 11^\circ, 51, 51, 11^\circ, 11\}$$

$$I : L_q \rightarrow \{51, 11^\circ, 11\}$$

Con lo anterior, quedan de manifiesto las trayectorias necesarias para cumplir con el teorema 4.7, en la Figura 4.32 se manifiesta la existencia del BGD, por lo que el sistema es *Observable*.

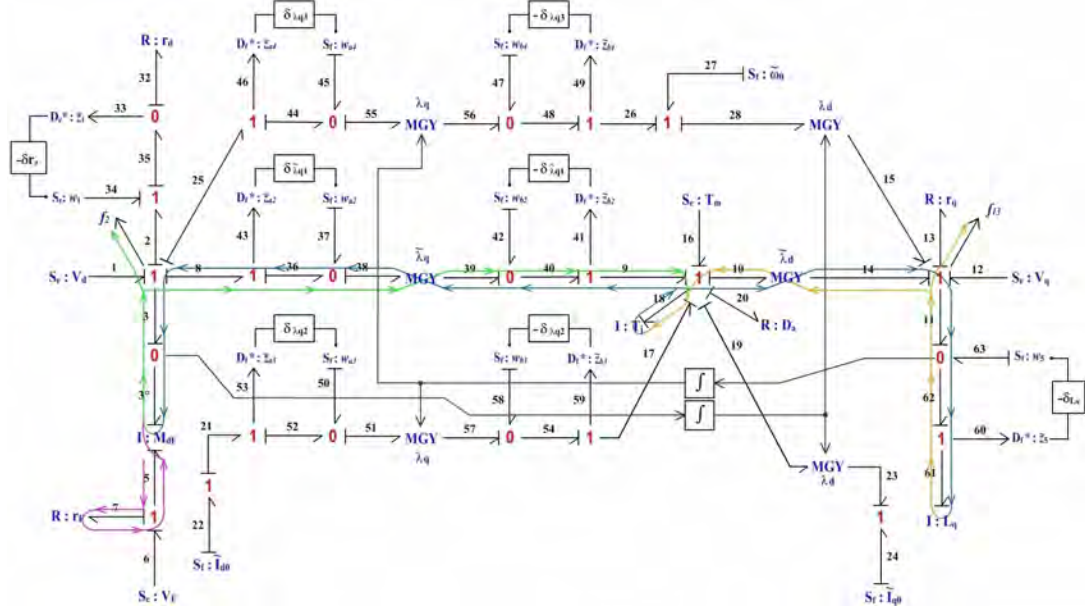
### Observabilidad en el modelo de la forma de interconexión estándar

Las trayectorias causales del UBG en la forma de interconexión estándar son mostradas en la Figura 4.41.

Las trayectorias causales hacia  $D_f : f_2$  son:

$$I : L_d \rightarrow \{3^\circ, 3\}$$

$$I : L_F \rightarrow \{5, 7, 7, 5, 3^\circ, 3\}$$



**Figura 4.41:** Trayectorias causales en el UBG de la forma de interconexión estándar.

$$I : T_j \rightarrow \{18, 9, 40, 39, 38, 36, 8, 3, 3^\circ, 3^\circ, 3\}$$

$$I : L_q \rightarrow \{61, 62, 11, 14, 10, 18, 18, 9, 40, 39, 38, 36, 8, 3, 3^\circ, 3^\circ, 3\}$$

Para  $D_f : f_{13}$  las trayectorias están definidas por:

$$I : L_d \rightarrow \{3^\circ, 3, 8, 36, 38, 39, 40, 9, 18, 18, 10, 14, 11, 62, 61, 61, 62, 11\}$$

$$I : L_F \rightarrow \{5, 7, 7, 5, 3^\circ, 3, 8, 36, 38, 39, 40, 9, 18, 18, 10, 14, 11, 62, 61, 61, 62, 11\}$$

$$I : T_j \rightarrow \{18, 10, 14, 11, 62, 61, 61, 62, 11\}$$

$$I : L_q \rightarrow \{61, 62, 11\}$$

Satisfechas las dos condiciones para el modelo en la forma de interconexión estándar, el generador síncrono es *Observable*.

Con la experiencia del transformador eléctrico queda claro que las propiedades de controlabilidad y observabilidad no se ven afectadas por la incertidumbre, sin embargo, tal y como se demostró con el uso del gramiano, ambas propiedades sufren cambios, con lo que se hace necesario el uso de un control robusto.





## Capítulo 5

# Conclusiones

El uso de las herramientas para el estudio de estabilidad o de comportamiento en sistemas robustos ha cambiado en los últimos años. El objetivo de esta tesis fue mostrar como el modelado en Bond Graph de sistemas con incertidumbre puede ayudar a encontrar las expresiones matemáticas del sistema.

Primeramente, se analizaron las bases existentes sobre el modelado de la incertidumbre paramétrica en Bond Graph. Si bien, la mayoría de los elementos que pueden conformar un sistema ya habían sido modelados cuando estos contienen incertidumbre, había ciertos elementos que no tenían su modelo, tal era el caso de los elementos almacenadores con causalidad derivativa.

Al no estar modelados dichos elementos, una gama de sistemas con elementos dependientes quedaba excluida o si se optaba por ignorar el elemento dependiente, su modelo no sería el óptimo.

Razón por la cual se llevó a cabo la tarea de modelar los elementos faltantes y plantear una nueva matriz de estructura unión que los involucrará y así también obtener las ecuaciones de estado adecuadas.

Si bien la tarea de modelar los elementos en causalidad derivativa en presencia de incertidumbre no fue muy complicada. Por otro lado, la determinación de las ecuaciones de estado, representó un gran reto.

La principal problemática fue obtener la matriz de estructura unión, debido a las consideraciones que se deben de hacer al momento de calcular las ecuaciones de estado.

Puesto que la representación de la incertidumbre en los elementos de almacenamiento son linealmente dependientes en el UBG, el orden del sistema no cambia, sin embargo, la existencia de

elementos dependientes complica de cierto modo la obtención de las ecuaciones de estado. Aunado a esto, el sistema contiene elementos en causalidad derivativa y además su respectiva incertidumbre, es ineludible el hecho de que se generarán nuevas matrices, las cuales según su existencia complicarán la determinación de las ecuaciones de estado.

Sin embargo, los obstáculos ya mencionados fueron satisfactoriamente superados, como se pudo observar en los ejemplos, fue exitosa la obtención de las ecuaciones de estado. La matriz de estructura unión planteada y por ende las ecuaciones de estado que se obtienen de ella, abarcan los diferentes casos que se pueden presentar en un sistema, tales casos son: que el sistema no tenga elementos dependientes, que puedan existir elementos dependientes, y que además estos últimos contengan incertidumbre.

Otro punto notable, es que los dos formas, forma canónica y de interconexión estándar; arrojan resultados diferentes en su presentación, sin embargo, ambos describen de manera exitosa el comportamiento del sistema en presencia de incertidumbre paramétrica, de igual manera, esto quedado validado en los ejemplos mencionados, ya que tanto matemáticamente como gráficamente el sistema tiene el mismo comportamiento en presencia de la incertidumbre sin importar en cual de las dos formas fue modelado el sistema.

En el estudio de las implicaciones de la incertidumbre paramétrica en el sistema, se encontraron algunos puntos importantes.

Se determinó que la adición de incertidumbre paramétrica no afecta la estabilidad del sistema mientras éstas se encuentren acotadas y suficientemente pequeñas comparadas con el valor nominal del elemento al que pertenecen.

El estudio del estado estacionario arrojó resultados interesantes, es muy importante hacer este estudio al sistema sin incertidumbre y de esta manera encontrar que elementos predominan en el estado estacionario, así, se podrá predecir como éste podría cambiar si dichos elementos adquieren una incertidumbre.

En cuanto a la observabilidad y controlabilidad, se demostró que su análisis resulta sencillo desde el punto de vista de Bond Graph, ya que sólo se deben de seguir las trayectorias causales y aprovechar la existencia del BGD, estudiado para el estado estable.

Si bien la observabilidad y controlabilidad no se ven afectadas por la incertidumbre, el surgimiento de nuevas trayectorias causales en el sistema genera que este se comporte de una manera diferente al sistema nominal, confirmándose así la necesidad de implementar un control robusto.

# Bibliografía

- [1] Dean C. Karnopp, Donald L. Margolis and Ronald C. Rosenberg, *System Dynamics Modeling and Simulation of Mechatronic Systems*, John Wiley & Sons, 2000.
- [2] Chi-Tsong Chen, *Linear System Theory and Design*, Hold, Rinehart and Winston Inc., 1984.
- [3] Peter Breedveld, *Bond Graphs*, University of Twente, Dept EE Control Laboratory, Enschede, Netherlands, 2003.
- [4] Yi-Sheng Zhong, *Robust Output Tracking Control of SISO Plants with Multiple Operating Points and with Parametric and Unstructured Uncertainties*, International Journal of Control 75: 4 219 - 241, 2002.
- [5] Mario Laiseca, *Tuning Robust Control Systems under Parametric Uncertainty*, Doctoral Thesis, Department of Chemical Engineering, Case Western Reserve University, 1994.
- [6] John C. Doyle, *Structured Uncertainty in Control System Design*, Proceedings of the 24th IEEE Conference on Decision and Control, 1985.
- [7] John C. Doyle, *A Review of  $\mu$  for Cases Studies in Robust Control*, Proceedings of the IFAC World Congress, 1987.
- [8] W. Borutzky, J. Granda, *Bond Graph Based Frequency Domain Sensitivity Analysis of Multidisciplinary Systems*, Proceedings of the Institution of Mechanical Engineer Part I, Journal of Systems and Control Engineer 216, 2002.
- [9] W. Borutzky, J. Granda, *Determining Sensitivities from an Incremental True Bond Graph*, 2001 International Conference on Bond Graph Modeling, 2001.

- [10] W. Borutzky, G. Dauphin-Tanguy, *Incremental Bond Graph Approach to the Derivation of State Equations for Robustness Study*, Simulation Modelling Practice and Theory by Elsevier Ltd., 2004.
- [11] C.S. Kam, *Les Bond Graphs pour la Modélisation des Systèmes Linéaires Incertains*, PhD thesis, L'Ecole Centrale de Lille et L'Université des Sciences et Technologies de Lille, Lille, France, 2001.
- [12] C.S. Kam, G. Dauphin-Tanguy, *Bond Graph Tools for Standard Interconnection Structure Determination*, 2001 International Conference on Bond Graph Modeling, 2001.
- [13] G. Dauphin-Tanguy, C.S. Kam, *How to Model Parameter Uncertainties in a Bond Graph Framework*, 11th European Simulation Symposium, Erlangen, Germany, 1999.
- [14] W. Borutzky, G. Dauphin-Tanguy, C. Kam, *Relation Between Two Bond Graph Approaches to Sensitivity Analysis and to Robustness Study*, IMACS Symposium on Mathematical Modelling vol-2, ARGESIM-Verlag, Vienna, 2003.
- [15] Casimir Sié Kam, Geneviève Dauphin-Tanguy, *Bond Graph Models of Structured Parameter Uncertainties*, Journal of The Franklin Institute 342 by Elsevier Ltd, 2005.
- [16] Jan F. Broenink, *Introduction to Physical Systems Modelling with Bond Graphs*, University of Twente, Dept EE Control Laboratory, Enschede, Netherlands, 1999.
- [17] P. E. Wellstead, *Physical System Modelling*, Academic Press, London, 1979.
- [18] Geneviève Dauphin-Tanguy, *Les Bond Graphs*, HERMES Science Europe Ltd, 2000.
- [19] Ronald C. Rosenberg, Dean C. Karnopp, *Introduction to Physical System Dynamics*, McGraw-Hill, 1983.
- [20] J. Liu, *Design of Stable Systems with Uncertainties and Constrained Performance Variations*, International Journal of Control 67, 1997.
- [21] B.G. Morton, *New Application of  $\mu$  to Real-parameter Variation Problems*, Proceedings of 24th Conference On Decision and Control, 1995.

- [22] B.G Morton, R.M. Mcafoos, A mu-test for Robustness Analysis of a Real Parameter Variation Problem, American Conference Fourth, 1985.
- [23] D. Karnopp, R.C Rosenberg, *System Dynamics: A Unified Approach*, Wiley, New York, 1975.
- [24] Wolfgang Borutzky, *Bond Graph Methodology: Development and Analysis of Multidisciplinary Dynamic System Models*, Springer-Verlag London Limited 2010.
- [25] G. Dauphin-Tanguy, Sege Scavarda, *Modelisation des Systemes Physiques par Bond Graphs*, Systemes Lineaires Ouvre Collectif, Editions Masson, Paris, 1993.
- [26] George McPerson, Robert D. Laramore, *An Introduction to Electrical Machines and Transformers*, John Wiley & Sons, 1990.
- [27] P. Kundur, *Power System Stability and Control*, McGraw Hill, 1994.
- [28] Dietrich Sahm, *A two-axis, Bond Graph model of the dynamics of synchronous electrical machines*, Institut für Leistungselektronik und Anlagentechnik der Universität Stuttgart, Postfach 560, D 7000 Stuttgart, West Germany.
- [29] P.M. Anderson, A.A. Fouad, *Power System Control and Analysis*, The Iowa State University Press, 1977.
- [30] González-A. Gilberto, R. Galindo, *A Linearization Procedure for a Class of Nonlinear Systems Based on Bond Graph*, Complex Systems, Intelligence and Modern Technology Applications (CSIMTA), Cherbourg, 2004.
- [31] Wilson J. Rugh, *Lineal System Theory*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1993.
- [32] F.R Gantmacher, *The Theory of Matrices*, Chelsea Publishing Company, 1974.
- [33] Benjamin C. Kuo, *Automatic Control Systems*, Prentice-Hall, 1991.
- [34] Norman S. Nise, *Control Systems Engineering*, John Wiley & Sons, 2000.
- [35] F.T. Brown, *Direct Application of the Loop Rule to Bond Graphs*, Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control, 1992.

- [36] Gonzalez-A Gilberto, R. Galindo, J. de Leon, *Hurwitz Stability Conditions for a LTI System: A Bond Graph Approach*, 9th IEEE International Conference on Methods and Models in Automation and Robotics, Poland, 2003.
- [37] Wai-Kai Chen, *Applied Graph Theory*, Prentice-Hall, 1976.
- [38] Gonzalez-A Gilberto, R. Galindo, *Steady-State Values for a Physical System with Bond Graph Approach*, 9th IEEE International Conference on Methods and Models in Automation and Robotics, Poland, 2003.
- [39] C. Sueur, Geneviève Dauphin-Tanguy, *Bond-Graph Approach for Structural Analysis of MIMO Linear Systems*, Journal of The Franklin Institute 328, Pergamon Press, Great Britain, 1991.
- [40] Gilberto González Avalos, *Técnicas de Control Basadas en el Dominio Físico para Sistemas LTI MIMO. Aplicación a la Máquinas Síncrona*, Tesis Doctoral, Universidad Autónoma de Nuevo León, 2004.

## Apéndice A

# Transformación de Park

La transformación de Park es una herramienta matemática empleada para la simplificación de las ecuaciones características de la máquina síncrona. Esta transformación expresa las variables del estator tales como las corrientes, voltajes o enlaces de flujo en términos de un nuevo conjunto de variables [27].

Las nuevas cantidades son obtenidas de la proyección de las actuales variables en las tres fases; una a lo largo del eje  $-d$  del devanado de campo del rotor, conocido como eje directo; la segunda a lo largo del eje  $-q$ , conocido como eje de cuadratura; y el tercero en el eje estacionario.

El efecto de la transformación de Park es simplemente transformar todas las cantidades del estator a partir de las fases  $a$ ,  $b$  y  $c$  en otras variables de referencia, las cuales se mueven con el rotor. Si se tienen tres variables  $i_a(t)$ ,  $i_b(t)$  y  $i_c(t)$  son necesarias tres nuevas variables de la transformación de Park dos para los ejes  $-d$  y  $-q$ , las cuales son proporcionales a la corriente de secuencia cero. Un multiplicador es utilizado para simplificar los cálculos numéricos. Así por definición:

$$i_{0qd}(t) = P i_{abc}(t) \quad (\text{A.1})$$

donde la transformación de Park,  $P$ , es definida por:

$$P = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \cos \theta(t) & \cos \left( \theta(t) - \frac{2\pi}{3} \right) & \cos \left( \theta(t) + \frac{2\pi}{3} \right) \\ \sin \theta(t) & \sin \left( \theta(t) - \frac{2\pi}{3} \right) & \sin \left( \theta(t) + \frac{2\pi}{3} \right) \end{bmatrix} \quad (\text{A.2})$$

La representación inversa de la transformada de Park se muestra a continuación:

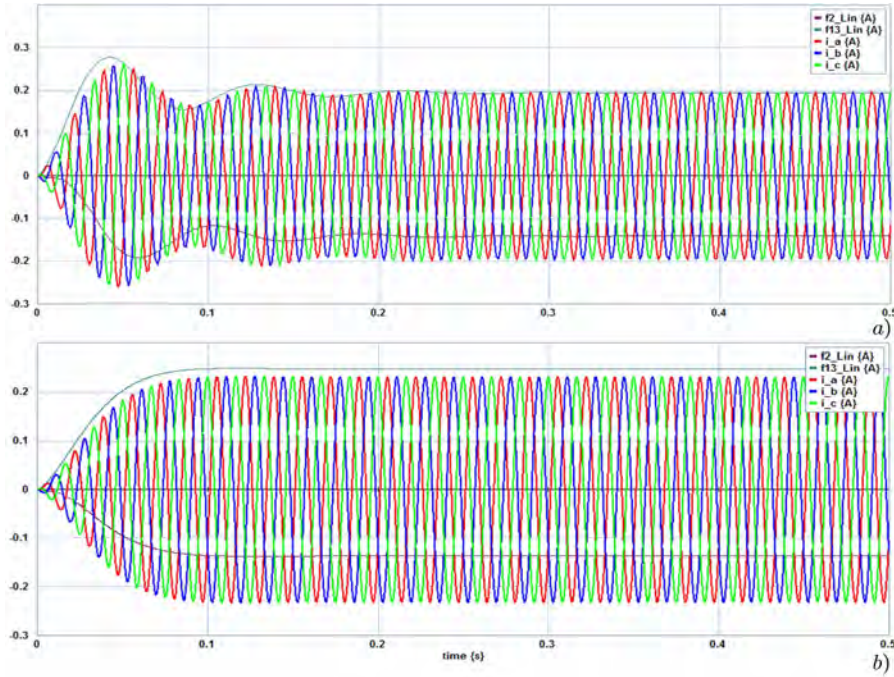
$$P^{-1} = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \cos \theta(t) & \sin \theta(t) \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \cos \left( \theta(t) - \frac{2}{3}\pi \right) & \sin \left( \theta(t) - \frac{2}{3}\pi \right) \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \cos \left( \theta(t) + \frac{2}{3}\pi \right) & \sin \left( \theta(t) + \frac{2}{3}\pi \right) \end{bmatrix}$$

Nótese que  $P^{-1} = P^T$  lo cual significa que la transformación  $P$  es ortogonal. Teniendo  $P$  ortogonal significa que la transformación  $P$  es de potencia invariante, entonces se tiene la misma expresión de potencia en términos de  $a - b - c$  que en términos de  $0 - q - d$ , es decir, se tiene:

$$p(t) = v_{abc}^T(t) i_{abc}(t) = v_{0dq}^T(t) i_{0dq}(t) \quad (\text{A.3})$$

Con la finalidad de observar el comportamiento que tendrán las corrientes  $i_a(t)$ ,  $i_b(t)$  e  $i_c(t)$  al agregar la incertidumbre en el generador síncrono se aplica la transformación de Park a las corrientes obtenidas al sistema linealizado con y sin incertidumbre.

La Figura A.1 a) representa las corrientes alternas obtenidas después de aplicar la transformación de Park al sistema sin incertidumbre, mientras que la Figura A.1 b) muestra el comportamiento de las corrientes en presencia de incertidumbre.



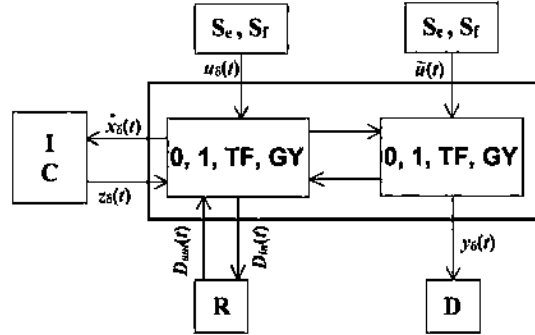
**Figura A.1:** Transformación de Park en el generador síncrono. a) Sin incertidumbres; b) con incertidumbres



## Apéndice B

# Linealización por Bond Graph

La información gráfica del Bond Graph puede ser utilizada para identificar las secciones no lineales de un sistema físico. Así, se presenta una técnica directa para obtener el Bond Graph linealizado. Primero considere la estructura general de un sistema linealizado, Figura B.1.



**Figura B.1:** Estructura general de un sistema linealizado en Bond Graph.

El objetivo de representar un sistema linealizado de acuerdo a la Figura B.1 es obtener relaciones simples para la estructura de unión modificada, denotada por  $\tilde{S}$ . Esto permite conocer el cambio de  $S$  debido a la linealización.

Considere el esquema linealizado de la Figura B.1. La estructura del sistema está dada por:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_\delta(t) \\ D_{in}(t) \\ y_\delta(t) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} S_{11}^x + S_{11}^0 & S_{12} & S_{13}^x & S_{13}^0 \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & 0 \\ S_{31}^x + S_{31}^0 & S_{32} & S_{33}^x & S_{33}^0 \end{bmatrix}}_{\text{Estructura unión } \tilde{S}} \begin{bmatrix} z_\delta(t) \\ D_{out}(t) \\ u_\delta(t) \\ \tilde{u}(t) \end{bmatrix} \quad (\text{B.1})$$

Los valores de  $S_{11}^x$ ,  $S_{13}^x$ ,  $S_{31}^x$  y  $S_{33}^x$  son la interconexión de los elementos que no participan en la trayectoria nominal del sistema, y los valores de  $S_{11}^0$ ,  $S_{13}^0$ ,  $S_{31}^0$  y  $S_{33}^0$  son la trayectoria nominal;  $u_\delta(t)$  es la entrada del sistema y  $\tilde{u}(t)$  es la entrada nominal.

La representación del sistema en variables de estado esta dado por:

$$A_\delta = (S_{11}^x + S_{11}^0 + S_{12}MS_{21})F + S_{13}^1 \quad (\text{B.2})$$

$$B_\delta = S_{13}^x + S_{12}MS_{23} \quad (\text{B.3})$$

$$C_\delta = (S_{31}^x + S_{31}^0 + S_{32}MS_{21})F + S_{33}^1 \quad (\text{B.4})$$

$$D_\delta = S_{33}^x + S_{32}MS_{23} \quad (\text{B.5})$$

donde:

$$M = L(I - S_{22}L)^{-1} \quad (\text{B.6})$$

y,  $S_{13}^1$  y  $S_{33}^1$  son tales que satisfacen:

$$S_{13}^0\tilde{u}(t) = S_{13}^1x_\delta(t) \quad (\text{B.7})$$

$$S_{33}^0\tilde{u}(t) = S_{33}^1x_\delta(t) \quad (\text{B.8})$$

El siguiente procedimiento gráfico sirve para construir el Bond Graph linealizado de la Figura B.1 a partir de un sistema físico no lineal de productos de estados.

### Procedimiento B.1 [40]

1. Obtener el Bond Graph no lineal del sistema físico.
2. Identificar el producto de dos variables de estado, mediante una trayectoria causal que contenga un transformador o un girador, cuyo módulo es una variable de estado de energía o coenergía.
3. La trayectoria causal empieza a partir de una variable de estado pasando a través del  $TF$  o  $GY$  del paso 2 y termina en otra variable de estado, esta trayectoria causal debe de pasar sólo una vez por cada bond.
4. Dado que la linealización es alrededor de la trayectoria nominal  $(\tilde{x}(t), \tilde{u}(t))$ , el módulo de cada  $-TF-$  y/o  $-GY-$  del Bond Graph original del paso 1, se cambia por el valor de la trayectoria nominal de la variable de estado de coenergía respectiva.

5. Por cada trayectoria causal, se añaden bonds con los elementos que forman parte de la misma trayectoria. Los bonds añadidos forman otra trayectoria causal que empieza con un elemento de puerto  $-1$ , el cual representa a la variable de estado del paso 2, se sustituye este elemento por una fuente de esfuerzo si el elemento de la variable de estado es  $-C$  o por una fuente de flujo si el elemento es  $-I$ . A continuación se añaden bonds de la trayectoria causal respectiva, hasta llegar a la unión que conecta a la otra variable de estado de la trayectoria causal considerada. Así mismo, tomar en cuenta lo siguiente:
  - Si existe más de una trayectoria causal para cada variable de estado se unen el inicio de estas trayectorias y la fuente del paso 5 a cada unión  $-1$  si la fuente es de flujo, en caso contrario es una unión  $-0$ .
  - El valor de la fuente del paso 5 es el de la trayectoria nominal de la variable de estado respectiva.
  - El módulo de los  $-TF-$  o  $-GY-$  de la trayectoria causal del paso 5 es el módulo de la trayectoria causal del paso 2 del Bond Graph original de la variable de estado de co-energía.
6. El modelo matemático que representa el Bond Graph linealizado, se obtiene utilizando las ecuaciones (B.2) a (B.5).



## Apéndice C

# Publicaciones

En este apéndice se presenta el artículo derivado del trabajo de tesis.

# Structured Uncertainties of a System with Linearly Dependent State Variables Using Bond Graph

Núñez-H. Israel<sup>1</sup>, Gonzalez-A. Gilberto<sup>2</sup>

Faculty of Electrical Engineering  
University of Michoacan (UMSNH)  
58030, Morelia, Michoacán, México

<sup>1</sup> i\_nunez\_h@yahoo.com.mx, <sup>2</sup> gilmichga@yahoo.com.mx

**Abstract**— This paper shows that the uncertainty bond graph can serve to obtain the canonical form of state equations used for robustness. The aim is find the state equations when elements with derivative causality are involved in the system. Also, the possibility of uncertainties in the derivative causality elements is considered. A junction structure in bond graph is proposed in order to reach this objective. The result obtained is applied on the model of a transformer.

**Keywords:** Structured parameter uncertainties; canonical form; uncertainty bond graph; derivative causality

## I. INTRODUCTION

In the last years, robustness in stability introduced by Doyle [1] and robustness in performances have been extensively studied. The problem consists in finding conditions to guarantee desired performances in the presence of structured or non-structured uncertainties in a model.

Uncertainties in modeling can be due to a bad estimation of dynamics in a system, a non-precise identification of numerical values of the parameters or a variation of their values because heat, time or working conditions.

Several methods exist to study the robustness in the presence of uncertainties. According to the studied property and the methodology used, two forms of state equations are built: the canonical form and a special interconnection form called “standard interconnection structure”, which is not the topic of this paper. Those two structures are composed of two parts, the first one contains the nominal values and the second one the uncertainty part of the parameters.

On the other hand, a bond graph is a model of a dynamic system where a collection of components interact with each other through energy ports. A bond graph consists of sub-systems linked by lines to show the energetic connections. It can represent a variety of energy types and can describe how the power flows through the system [2], [3].

Kam and Dauphin-Tanguy in [4], [5], [6], [7] have shown how the canonical form of state equations with uncertain parameters can be derived systematically from a so-called uncertainty bond graph that is, a bond graph with true perturbed power variables  $e(t)$  and  $f(t)$ , in which elements have been split into a nominal and uncertain part.

Therefore, in this paper a model containing the energy junction structure is proposed, considering that the nominal elements can be in causality derivative and some of them could have uncertainties too. The causality derivative is

important since represents linearly dependent elements, which are involved in a lot of systems.

The outline of the paper is as follows: Section II gives some basic elements of the modeling in bond graph. Section III shows how particular forms of state equations used for robustness study can be set up from the initial and the associated uncertainty bond. The obtained results are applied in section IV. Finally, conclusions are given in section V.

## II. MODELLING IN BOND GRAPH

The bond graph methodology allows to model a system in a simple and direct manner. Using fields and junction structures, one may conveniently study systems containing complex multiport components using bond graphs. In fact, bond graphs with fields prove to be a most effective way to handle the modeling of complex multiport systems [8].

Consider the following scheme of a multiport LTI system which includes the key vectors of Fig. 1 [8], [9].

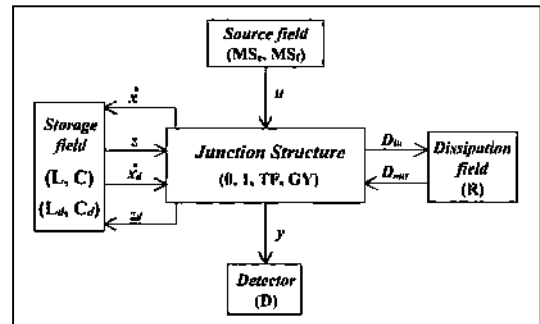


Figure 1. Key vectors of a bond graph.

In Fig. 1,  $(MS_e, MS_f)$ ,  $(C, I)$ ,  $(R)$  and  $(D)$  denote the source, the energy storage, the energy dissipation and the detector fields, and  $(0, 1, TF, GY)$  the junction structure with transformers,  $TF$ , and gyrators,  $GY$ .

The state  $x \in \mathcal{R}^n$  and  $x_d \in \mathcal{R}^m$  are composed of energy variables  $p$  and  $q$  associated with  $I$  and  $C$  elements in integral and derivative causality, respectively,  $u \in \mathcal{R}^p$  denotes the plant input,  $y \in \mathcal{R}^q$ , the plant output,  $z \in \mathcal{R}^n$  the co-energy vector,  $z_d \in \mathcal{R}^m$  the derivative co-energy and  $D_{in} \in \mathcal{R}^r$  and  $D_{out} \in \mathcal{R}^r$  are a mixture of  $e(t)$  and  $f(t)$  showing the energy exchanges between the dissipation field and the junction structure.

The relations of the storage and dissipation field are,

$$z = Fx \quad (1)$$

$$z_d = F_d x \quad (2)$$

$$D_{out} = LD_{in} \quad (3)$$

The relations of the junction structure are [8], [9].

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ D_{in} \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & 0 \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ D_{out} \\ u \\ \dot{x}_d \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$z_d = -S_{14}^T z \quad (5)$$

The entries of  $S$  take values inside the set  $\{0, \pm 1, \pm m, \pm n\}$  where  $m$  and  $n$  are transformer and gyrator modules;  $S_{11}$  and  $S_{22}$  are square skew-symmetric matrices and  $S_{12}$  and  $S_{21}$  are matrices each other negative transpose. The state equation is,

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du \end{aligned} \quad (6)$$

where

$$A = E^{-1}(S_{11} + S_{12}MS_{21})F \quad (7)$$

$$B = E^{-1}(S_{13} + S_{12}MS_{23}) \quad (8)$$

$$C = (S_{31} + S_{32}MS_{21})F \quad (9)$$

$$D = S_{33} + S_{32}MS_{23} \quad (10)$$

Being  $E = I + S_{14}F_d^{-1}S_{14}^TF$  and  $M = (I - LS_{22})^{-1}L$ . The existence of elements with derivative causality is determined by  $E$ . Next section addressed the canonical form, which has been the starting point for research reported in the literature.

### III. MODELLING IN BOND GRAPH WITH STRUCTURED PARAMETER UNCERTAINTIES

#### A. Problem statement

In this work, only the case of structured uncertainties on parameters involved in linear characteristic laws are considered. The objective is to determine the matrices in the linear time-invariant state space model.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= [A_n + \Delta A]x + [B_n + \Delta B]u \\ y &= [C_n + \Delta C]x + [D_n + \Delta D]u \end{aligned} \quad (11)$$

The matrices  $A_n, B_n, C_n, D_n$  are appropriate dimensions and depend only on components of the vector of nominal parameters and  $\Delta A, \Delta B, \Delta C, \Delta D$  are functions of the parameter variations and nominal parameters. With  $\theta$  parameter vector and replacing it by  $\theta = \theta_n + \Delta\theta$  does not lead directly and easily to (11), because matrices  $A$  and  $C$  are non-linear functions of  $\theta$  [4].

#### B. Construction of model

The absolute uncertainties  $\Delta\theta_i$  on parameters  $\theta_i$ ,  $i = 1, \dots, k$ , defined by  $\theta_i = \theta_{in} + \Delta\theta_i$  are represent on the bond graph model as added physical components. Taking into account some uncertainties in parameters does not change the order of the state model [4].

1) *R-element*: A linear R-element with nominal value  $R_n$  and uncertainty value  $\Delta R$  can have two possible causalities leading to two different laws, as shown in Fig. 2.

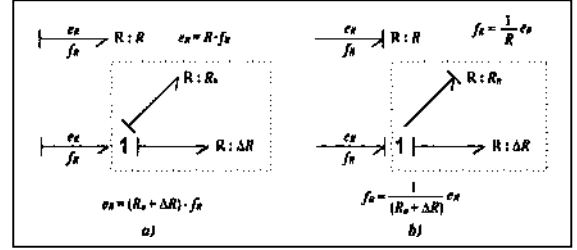


Figure 2. Uncertain R-element with causality assignments.

2) *C-element*: The C-element with nominal value  $C_n$  and uncertainty value  $\Delta C$  can have two causality assignments, leading to integral or derivative forms for its characteristic law as shown Fig. 3.

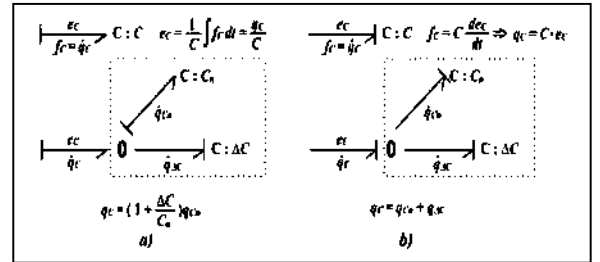


Figure 3. Uncertain C-element with integral a) and derivative b) causality.

3) *I-element*: The I-element with nominal value  $I_n$  and uncertainty value  $\Delta I$  can have two possible causalities, derivative and integral causality, as shown in Fig. 4.

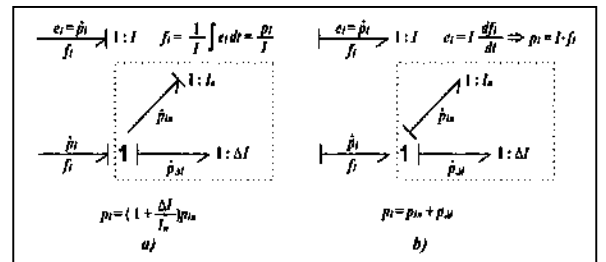


Figure 4. Uncertain I-element with integral a) and derivative b) causality.

It is denoted by  $x$  the state vector in the initial bond graph,  $x \in \mathcal{R}^N$ ,  $N = N_I + N_C$  the number of I- and C-elements in integral causality, and  $x_n$  the “nominal state vector” in the bond graph with uncertainty elements,  $x_n \in \mathcal{R}^N$ , then  $x$  and  $x_n$  satisfy relation showed in (12).

$$x = Tx_n$$

$$T = \text{diag} \left[ \left( 1 + \frac{\Delta I_i}{I_{in}} \right), i=1, \dots, N_I, \left( 1 + \frac{\Delta C_j}{C_{jn}} \right), j=1, \dots, N_C \right] \quad (12)$$

### C. State equation determination

The structure of a system with parameters uncertainties including storage element in causality derivative and uncertainties in these elements is proposed in Fig. 5.

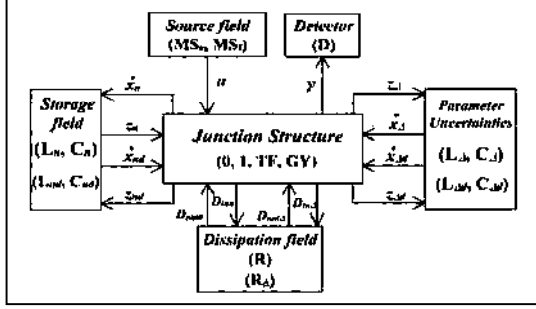


Figure 5. Key vectors of a bond graph with uncertainties.

In Fig. 5  $x_n$  and  $x_{nd}$  are composed of energy variables in integral and derivative causality, respectively,  $z_n$  and  $z_{nd}$  are the co-energy vectors (integral and derivative causality), all of them in the nominal system. In the same manner  $x_\Delta$ ,  $x_{\Delta d}$ ,  $z_\Delta$ ,  $z_{\Delta d}$  are associated with the corresponding uncertainties elements.

The junction structure matrix deduced from the block diagram has the following form:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_n \\ D_{inn} \\ y \\ z_{nd} \\ - \\ z_\Delta \\ D_{in\Delta} \\ z_{\Delta d} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & | & S_{15} & S_{16} & S_{17} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & 0 & | & 0 & S_{26} & 0 \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & 0 & | & 0 & S_{36} & 0 \\ S_{41} & 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 \\ - & - & - & - & + & - & - & - \\ S_{51} & 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 \\ S_{61} & S_{62} & S_{63} & 0 & | & 0 & 0 & 0 \\ S_{71} & 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_n \\ D_{outn} \\ u \\ \dot{x}_{nd} \\ - \\ \dot{x}_\Delta \\ D_{out\Delta} \\ \dot{x}_{\Delta d} \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$S_{14} = -S_{41}^T; \quad S_{15} = -S_{51}^T; \quad S_{16} = -S_{61}^T;$$

$$S_{17} = -S_{71}^T; \quad S_{26} = -S_{62}^T; \quad S_{36} = -S_{63}^T$$

Also, the nominal part of the matrix (13) has the same properties than  $S$  in (4).

$$z_n = F_n x_n; \quad z_{nd} = F_{nd} x_{nd} \quad (14)$$

$$z_\Delta = F_\Delta x_\Delta; \quad z_{\Delta d} = F_{\Delta d} x_{\Delta d} \quad (15)$$

$$D_{outn} = L_n D_{inn}; \quad D_{out\Delta} = L_\Delta D_{in\Delta} \quad (16)$$

$F_n$ ,  $F_{nd}$  are the storages fields (integral and derivative causality) and  $L_n$  is the relation of the dissipation field in the nominal elements. In similar way  $F_\Delta$ ,  $F_{\Delta d}$  and  $L_\Delta$  correspond to uncertainties elements.

From (13) to (16), the general form of the “nominal” state equation can be obtained:

$$\dot{x}_n = E^{-1} (A_1 + A_2) x_n + E^{-1} (B_1 + B_2) u$$

$$y = (C_1 + C_2) x_n + (D_1 + D_2) u \quad (17)$$

where  $E = E_d + E_\Delta + E_{\Delta d}$ , being

$$E_d = I + S_{14} F_{nd}^{-1} S_{14}^T F_n \quad (18)$$

$$E_\Delta = S_{15} F_\Delta^{-1} S_{15}^T F_n \quad (19)$$

$$E_{\Delta d} = S_{17} F_{\Delta d}^{-1} S_{17}^T F_n \quad (20)$$

$$M = L_n (I - S_{22} L_n)^{-1} \quad (21)$$

$$P = (I + S_{26}^T M S_{26} L_\Delta)^{-1} (S_{61} - S_{26}^T M S_{21}) \quad (22)$$

$$Q = (I + S_{26}^T M S_{26} L_\Delta)^{-1} (S_{63} - S_{26}^T M S_{23}) \quad (23)$$

Hence,

$$A_1 = (S_{11} + S_{12} M S_{21}) F_n \quad (24)$$

$$A_2 = (S_{16} + S_{12} M S_{26}) L_\Delta P F_n$$

$$B_1 = (S_{13} + S_{12} M S_{23}) \quad (25)$$

$$B_2 = (S_{16} + S_{12} M S_{26}) L_\Delta Q$$

$$C_1 = (S_{31} + S_{32} M S_{21}) F_n \quad (26)$$

$$C_2 = (S_{36} + S_{32} M S_{26}) L_\Delta P F_n$$

$$D_1 = (S_{33} + S_{32} M S_{23}) \quad (27)$$

$$D_2 = (S_{36} + S_{32} M S_{26}) L_\Delta Q$$

The previously given relationship  $x = Tx_n$  applied in model (17) leads to the state space equation of the initial model as

$$\dot{x} = TE^{-1} (A_1 + A_2) T^{-1} x + TE^{-1} (B_1 + B_2) u$$

$$y = (C_1 + C_2) T^{-1} x + (D_1 + D_2) u \quad (28)$$

Equation (28) can thus be written under form (11) as

$$A_n = E_d^{-1} A_1 \quad (29)$$

$$\Delta A = (TE^{-1} A_1 T^{-1} - E_d^{-1} A_1) + (TE^{-1} A_2 T^{-1})$$

$$B_n = E_d^{-1} B_1 \quad (30)$$

$$\Delta B = (TE^{-1} - E_d^{-1}) B_1 + (TE^{-1}) B_2$$

$$C_n = C_1 \quad (31)$$

$$\Delta C = C_1 (T^{-1} - I) + C_2 T^{-1}$$

$$D_n = D_1 \quad (32)$$

$$\Delta D = D_2$$



## IV. EXAMPLES

Consider the equivalent circuit of transformer where the primary and secondary windings have resistors  $R_1$  and  $R_2$  and inductances  $L_1$  and  $L_2$ , respectively, including the element  $L_m$  as the mutual inductance in core of the Fig. 6.

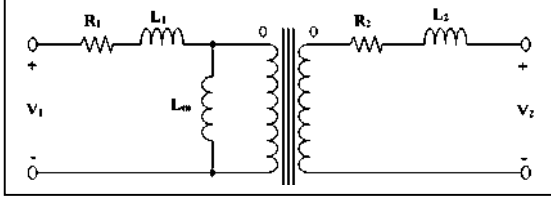


Figure 6. Equivalent circuit of transformer.

In Fig. 7 the transformer without parameters uncertainties is modeled in bond graph.

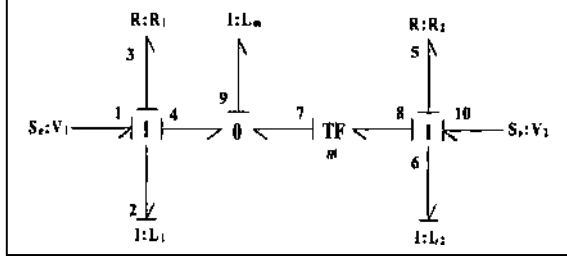


Figure 7. Bond graph of a transformer.

The key vectors of the bond graph of Fig. 7 are,

$$\begin{aligned} x &= \begin{bmatrix} p_2 \\ p_6 \end{bmatrix}; \quad \dot{x} = \begin{bmatrix} e_2 \\ e_6 \end{bmatrix}; \quad z = \begin{bmatrix} f_2 \\ f_6 \end{bmatrix} \\ x_d &= p_9; \quad \dot{x}_d = e_9; \quad z_d = f_9 \\ D_{in} &= \begin{bmatrix} f_3 \\ f_5 \end{bmatrix}; \quad D_{out} = \begin{bmatrix} e_3 \\ e_5 \end{bmatrix}; \quad u = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_{10} \end{bmatrix}; \quad y = \begin{bmatrix} f_2 \\ f_6 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (33)$$

the constitutive relations of the fields are,

$$F = \text{diag} \left\{ \frac{1}{L_1}, \frac{1}{L_2} \right\}; \quad F_d = \frac{1}{L_m}; \quad L = \text{diag} \{ R_1, R_2 \} \quad (34)$$

and the junction structure is given by

$$\begin{aligned} S_{12} &= -S_{21}^T = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}; \quad S_{13} = S_{31} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad S_{14} = \begin{bmatrix} -1 \\ -n \end{bmatrix} \\ S_{11} &= S_{22} = S_{23} = S_{32} = S_{33} = 0 \end{aligned} \quad (35)$$

By substituting (33) to (35) into (7) to (10), the state space representation of the transformer is,

$$A = \frac{1}{L_1 L_2 + m^2 L_m L_1 + L_m L_2} \begin{bmatrix} -R_1 (L_2 + m^2 L_m) & m \frac{R_2 L_m L_1}{L_2} \\ m \frac{R_1 L_m L_2}{L_1} & -R_2 (L_1 + L_m) \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} B &= \frac{1}{L_1 L_2 + m^2 L_m L_1 + L_m L_2} \begin{bmatrix} L_1 (L_2 + m^2 L_m) & -m L_m L_1 \\ -m L_m L_2 & L_2 (L_1 + L_m) \end{bmatrix} \\ C &= \begin{bmatrix} 1/L_1 & 0 \\ 0 & 1/L_2 \end{bmatrix}; \quad D = 0 \end{aligned} \quad (36)$$

Now, adding an uncertainty on the inductance  $L_1$  in the bond graph is given in Fig. 8.

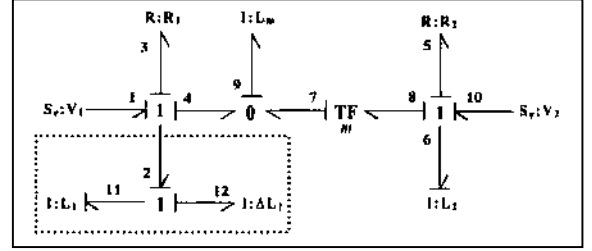


Figure 8. Bond graph of a transformer with uncertainty.

The new key vectors of the bond graph of Fig. 8 are,

$$\begin{aligned} x_n &= \begin{bmatrix} p_{11} \\ p_6 \end{bmatrix}; \quad \dot{x}_n = \begin{bmatrix} e_{11} \\ e_6 \end{bmatrix}; \quad z_n = \begin{bmatrix} f_{11} \\ f_6 \end{bmatrix} \\ x_{\Delta n} &= p_{12}; \quad \dot{x}_{\Delta n} = e_{12}; \quad z_{\Delta n} = f_{12} \\ x_{nd} &= p_9; \quad \dot{x}_{nd} = e_9; \quad z_{nd} = f_9 \\ D_{inn} &= \begin{bmatrix} f_3 \\ f_5 \end{bmatrix}; \quad D_{outn} = \begin{bmatrix} e_3 \\ e_5 \end{bmatrix}; \quad u = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_{10} \end{bmatrix}; \quad y = \begin{bmatrix} f_2 \\ f_6 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (37)$$

the constitutive relations of the fields are,

$$F_n = \text{diag} \left\{ \frac{1}{L_1}, \frac{1}{L_2} \right\}; \quad F_{\Delta n} = \frac{1}{\Delta L_1} \quad (38)$$

$$F_{nd} = \frac{1}{L_m}; \quad L_n = \text{diag} \{ R_1, R_2 \} \quad (39)$$

the structure junction is,

$$\begin{aligned} S_{12} &= -S_{21}^T = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}; \quad S_{13} = S_{31} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ S_{14} &= \begin{bmatrix} -1 \\ -n \end{bmatrix}; \quad S_{15} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}; \\ S_{11} &= S_{16} = S_{17} = S_{22} = S_{23} = S_{26} = S_{32} = S_{33} = S_{36} = 0 \end{aligned} \quad (40)$$

Substituting (38) to (40) in (29) to (32), the state space representation of the transformer with uncertainty is,

$$\begin{aligned} A_n &= A; \quad B_n = B; \quad C_n = C; \quad D_n = D \\ \Delta A &= \frac{1}{W_1 W_2} \begin{bmatrix} R_1 (L_2 + m^2 L_m)^2 \Delta L_1 & m R_2 L_m^2 \Delta L_1 \\ L_m L_2 R_1 (L_1 L_2 + m^2 L_1 L_2 + W_2) \Delta L_1 & -m^2 R_2 L_m^2 \Delta L_1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\Delta B = \frac{1}{W_1 W_2} \begin{bmatrix} L_m L_2 (L_2 + m^2 L_m) \Delta L_1 & -m L_m^2 L_2 \Delta L_1 \\ m L_m L_2 (L_2 + m^2 L_m) \Delta L_1 & -m^2 L_m^2 L_2 \Delta L_1 \end{bmatrix} \quad (41)$$

$$\Delta C = -\frac{\Delta L_1}{(L_1 + \Delta L_1) L_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \Delta D = 0$$

where,

$$\begin{aligned} W_1 &= L_1 L_2 + m^2 L_m L_1 + L_m L_2 \\ W_2 &= (L_1 + \Delta L_1) L_2 + m^2 L_m (L_1 + \Delta L_1) + L_m L_2 \end{aligned} \quad (42)$$

The bond graph proposed in Fig. 9 represents the addition of an uncertainty in the element  $L_m$ .

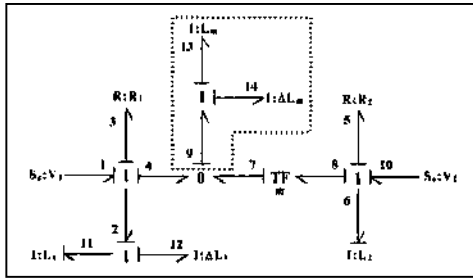


Figure 9. Bond graph of a transformer with uncertainty in derivative causality element.

The key vectors of the bond graph of the Fig. 9 are,

$$\begin{aligned} x_n &= \begin{bmatrix} p_{11} \\ p_{12} \end{bmatrix}; \quad \dot{x}_n = \begin{bmatrix} e_{11} \\ e_{12} \end{bmatrix}; \quad z_n = \begin{bmatrix} f_{11} \\ f_{12} \end{bmatrix} \\ x_{\Delta n} &= p_{12}; \quad \dot{x}_{\Delta n} = e_{12}; \quad z_{\Delta n} = f_{12} \\ x_{nd} &= p_{13}; \quad \dot{x}_{nd} = e_{13}; \quad z_{nd} = f_{13} \\ x_{\Delta d} &= p_{14}; \quad \dot{x}_{\Delta d} = e_{14}; \quad z_{\Delta d} = f_{14} \\ D_{inn} &= \begin{bmatrix} f_3 \\ f_5 \end{bmatrix}; \quad D_{outn} = \begin{bmatrix} e_3 \\ e_5 \end{bmatrix}; \quad u = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_{10} \end{bmatrix}; \quad y = \begin{bmatrix} f_2 \\ f_6 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (43)$$

the constitutive relations of the fields are

$$F_n = \text{diag} \left\{ \frac{1}{L_1}, \frac{1}{L_2} \right\}; \quad F_{\Delta n} = \frac{1}{\Delta L_1} \quad (44)$$

$$F_{nd} = \frac{1}{L_m}; \quad F_{\Delta d} = \frac{1}{\Delta L_m} \quad (45)$$

$$L_n = \text{diag} \{ R_1, R_2 \} \quad (46)$$

the structure junction is,

$$S_{12} = -S_{21}^T = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}; S_{13} = S_{31} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; S_{14} = S_{17} = \begin{bmatrix} -1 \\ -n \end{bmatrix}; S_{15} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (47)$$

$$S_{11} = S_{16} = S_{22} = S_{23} = S_{26} = S_{32} = S_{33} = S_{36} = 0$$

Substituting (44) to (47) in (29) to (32), the state space representation of the transformer with uncertainty is,

$$A_n = A; \quad B_n = B; \quad C_n = C; \quad D_n = D$$

$$\Delta A = \frac{1}{W_1 W_b} \begin{bmatrix} \alpha & m\beta \\ -m \frac{L_2 \phi}{(L_1 + \Delta L_1) L_1} & m^2 \beta \end{bmatrix}; \quad \Delta B = \frac{1}{W_1 W_b} \begin{bmatrix} \lambda & -m\delta \\ m\lambda & -m^2 \delta \end{bmatrix} \quad (48)$$

$$\Delta C = -\frac{\Delta L_1}{(L_1 + \Delta L_1) L_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \Delta D = 0$$

where  $W_1$  was defined before, and

$$\begin{aligned} W_b &= (L_1 + \Delta L_1) L_2 + m^2 (L_m + \Delta L_m) (L_1 + \Delta L_1) + (L_m + \Delta L_m) L_2 \\ \alpha &= R_1 ((\Delta L_1 + \Delta L_m) L_2^2 + m^2 \Delta L_1 L_2 (2L_m + \Delta L_m) + m^4 \Delta L_1 L_m (L_m + \Delta L_m)) \\ \phi &= R_1 (m^2 \Delta L_1 L_m (2L_1 + \Delta L_1) (L_m + \Delta L_m) + L_m L_2 \Delta L_1 (2L_1 + \Delta L_1 + L_m + \Delta L_m) - \Delta L_m L_1 L_2) \\ \beta &= R_2 (\Delta L_m L_1^2 + (L_m (L_m + \Delta L_m) + \Delta L_m L_1) \Delta L_1) \\ \lambda &= L_2 (m^2 L_m \Delta L_1 (L_m + \Delta L_m) + L_2 (\Delta L_1 L_m - \Delta L_m L_1)) \\ \delta &= L_2 (L_m \Delta L_1 (L_m + \Delta L_m) + L_1 \Delta L_m (L_1 + \Delta L_1)) \end{aligned}$$

In both examples A, B, C, D the matrices obtained of the transformer model without uncertainties.

## V. CONCLUSIONS

It has been shown that the incremental bond graph can be used to represent parameters uncertainties in a system. It is proposed a structure junction in bond graph to obtain the canonical form of uncertain system state equation, when the system can have elements with derivative causality and these ones can have uncertainties too. This methodology is applied to typical example of an electrical transformer with mutual inductance.

## REFERENCES

- [1] J. C. Doyle, "Robustness of multiloop linear feedback systems, Preedings of the 17<sup>th</sup> IEEE Conference on Decision and Control, 1979, pp. 12-18.
- [2] Dean C. Karnopp, Donald L. Margolis and Ronald C. Rosenberg, "System Dynamics Modeling and Simulation of Mechatronic Systems", Wiley, John & Sons, 2000.
- [3] P. E. Wellstead, "Physical System Modelling", Academic Press, London, 1979.
- [4] Casimir Sié Kam and G. Dauphin-Tanguy, "Bond graph models of structured parameter uncertainties", Journal of the Franklin Institute 324 (2005) 379-399.
- [5] Casimir Sié Kam, "Les bond graphs pour la modélisation des systèmes linéaires incertains", PhD thesis, L'Ecole Centrale de Lille et L'Université des Sciences et Technologies de Lille, Lille, France, 2001.
- [6] Casimir Sié Kam, G. Dauphin-Tanguy, "Bond graph tools for standar interconnection structure determination", in: J.J Granda, G. Dauphin-Tanguy (Eds.), 2001 International Conference on Bond Graph Modeling, and Simulation, ICBGM 2001, Simulation Series, No. 1, vol 33, SCS Publishing, 2001, ISBN 1-56555-221-0.
- [7] G. Dauphin-Tanguy, C.S. Kam, "How to model parameter uncertainties in a bond graph framework", in: G. Horton, D. Möller, U. Rüde (Eds.), Simulation in Industry, 11th European Simulation Symposium, ESS'99, Erlangen, Germany, 1999, pp. 121-125.
- [8] Dean C. Karnopp, Donald L. Margolis and Ronald C. Rosenberg, "System Dynamics Modeling and Simulation of Mechatronic Systems", Wiley, John & Sons, 2000.
- [9] C. Sueur and G. Dauphin-Tanguy, "Bond graph approach for structural analysis of MIMO linear systems", Journal of the Franklin Institute, Vol. 328, No. 1, pp. 55-70, 1991.