



**UNIVERSIDAD MICHUACANA DE
SAN NICOLÁS DE HIDALGO**

**FACULTAD DE INGENIERÍA ELÉCTRICA
DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO**

**“MODELADO EN TRES DIMENSIONES Y OBTENCIÓN
DEL ESTADO ESTACIONARIO
EN BOND GRAPH DE LOS ROBOTS PUMA Y STANFORD,
SU LINEALIZACIÓN Y OBSERVADORES DE ESTADOS LINEALES”**

TESIS

**QUE PARA OBTENER EL GRADO DE
MAESTRO EN CIENCIAS EN INGENIERÍA ELÉCTRICA**

PRESENTA

THOR E. MORALES BIEZE

DIRECTOR DE TESIS

DR. GILBERTO GONZÁLEZ AVALOS

AGOSTO 2011



A mis padres Jéssica y José Luis.
Porque ustedes me enseñaron a vivir con honor.

Resumen

En 1975, el ingeniero Victor Scheinman desarrolló, en la Universidad de Stanford, un manipulador polivalente realmente flexible conocido como Brazo Manipulador Universal Programable (PUMA, por sus siglas en inglés). El desarrollo del PUMA sirvió como la base para la creación del robot Stanford, el cual es uno de los robots industriales más utilizados. El concepto básico multiarticulado del PUMA y Stanford son la base de la mayoría de los robots manipuladores actuales. En este trabajo de investigación se proponen modelos matemáticos de los robots manipuladores PUMA y Stanford, estos modelos fueron obtenidos a partir de la representación en Bond Graph (dominio físico) de estos sistemas. Se muestra además una comparación de los modelos obtenidos con los modelos ya conocidos de Euler-Lagrange para estos sistemas. Una de las propiedades más importantes que se pueden apreciar en un bond graph, son las relaciones causales de los elementos que componen al sistema físico. En esta tesis se propone también un procedimiento para la obtención del estado estacionario de estos sistemas, procedimiento que implica la solución implícita de la cinemática inversa de los manipuladores, mediante el uso del bond graph en causalidad derivativa (BGD). Usando trayectorias causales, se obtienen los bond graphs linealizados correspondientes a estos robots y de esta manera se propone el diseño de observadores de estados lineales para los sistemas en cuestión.

Abstract

In 1975, Victor Scheinman, an engineer from the Stanford University, developed a flexible polivalent manipulator known as Programmable Universal manipulator Arm (PUMA). This research was the base for the creation of the Stanford robot, which is one of the most used industrial manipulators up to this day. The basic multi joint concept of the PUMA and Stanford are the base of nearly all the manipulator robots. In this research work, mathematical models for the PUMA and Stanford manipulator robots are proposed. This models were derived from the Bond Graph representations of this systems. Also, the obtained models were compared with the Euler-Lagrange known models. One of the most important characteristics that can be appreciated by analyzing a bond graph are the causal relationship between the elements of the physical systems. This thesis also proposes a procedure for obtaining the steady state of these systems, this procedure involves the implicit solution of the inverse kinematics of manipulators by using the derivative causality bond graph (BGD). Using causal trayectories, a linearized bond graph of the robots are obtained and by that, the linear state observer design for this systems is finally proposed.

Índice general

Resumen	ii
Abstract	iii
Lista de figuras	vii
Lista de tablas	x
Lista de símbolos	xi
Lista de publicaciones	xiii
1 Introducción	1
1.1 La importancia de la robótica	1
1.2 Objetivo General	2
1.2.1 Objetivos particulares	2
1.3 Justificación	2
1.4 Metodología	3
1.5 Estado del arte	5
1.6 Estructura de la tesis	6
2 Modelado en Bond Graph	8
2.1 Introducción	8
2.2 Conceptos fundamentales	9
2.2.1 Las variables de potencia y sus analogías	9
2.3 La notación de Bond Graph	11
2.3.1 Introducción	11
2.3.2 Los elementos de Bond Graph	11
2.4 La causalidad en Bond Graph	16
2.4.1 Procedimiento para la asignación de causalidad en un multipuerto	19
2.4.2 Causalidad derivativa en un Bond Graph	20
2.5 Bond activo	21
2.6 Puertos-2 modulados	21
2.6.1 Transformadores multipuertos	22
2.7 El modelado de sistemas físicos usando Bond Graph	24

2.7.1	Construcción sistemática de bond graphs	24
2.8	Estructuras de unión en sistemas multipuerto	28
2.8.1	Vectores clave	28
2.8.2	Relaciones de campo y ecuaciones de estado	29
3	La robótica y su modelado	32
3.1	Introducción	32
3.2	Componentes y estructuras de robots manipuladores	32
3.2.1	Las uniones y eslabones dentro de la cadena	32
3.2.2	Disposiciones cinemáticas	34
3.3	Movimientos rígidos y transformaciones homogéneas	38
3.3.1	Posición y orientación de un cuerpo rígido	38
3.3.2	Transformación de coordenadas	39
3.3.3	Ángulos de euler	41
3.3.4	Transformaciones homogéneas	45
3.4	Modelo cinemático de brazos manipuladores	47
3.4.1	Cadenas cinemáticas abiertas	47
3.4.2	La notación Denavit-Hartenberg	49
3.4.3	Ejemplo: manipulador Elbow planar	52
4	Modelado en Bond Graph de robots manipuladores	55
4.1	Introducción	55
4.2	Modelado de robots manipuladores en dos dimensiones en Bond Graph	55
4.2.1	La barra rígida	56
4.2.2	El péndulo simple	59
4.2.3	El péndulo doble	60
4.2.4	Un robot manipulador en dos dimensiones en Bond Graph	62
4.3	Modelado de robots manipuladores en tres dimensiones en Bond Graph	65
4.3.1	Motores desacoplados en Bond Graph	66
4.3.2	Ecuaciones en forma de robot	68
4.3.3	Efectos de la gravedad	70
4.3.4	Movimiento en tres dimensiones y ecuaciones de Euler en Bond Graph	73
4.3.5	Modelado en Bond Graph de un robot manipulador PUMA de dos grados de libertad	78
4.3.6	Modelo matemático del robot manipulador PUMA a partir de su representación en Bond Graph	82
4.3.7	Modelado en Bond Graph de un robot manipulador Stanford	90
4.3.8	Modelo matemático del robot manipulador Stanford a partir de su representación en Bond Graph	92
4.4	Obtención del estado estacionario de un robot manipulador a partir de su Bond Graph	103
4.4.1	El estado estacionario	103
4.4.2	Determinación directa del estado estacionario en Bond Graph	104
4.4.3	Estado estacionario de un robot manipulador PUMA	106
4.4.4	Estado estacionario de un robot manipulador Standford	112
5	Linealización y los observadores de estados lineales en Bond Graph	121

5.1	Introducción	121
5.2	Trayectoria causal	121
5.2.1	Controlabilidad y observabilidad desde una perspectiva clásica	123
5.2.2	Controlabilidad y observabilidad desde un enfoque de Bond Graph	124
5.3	Linealización	126
5.3.1	Linealización tradicional	127
5.3.2	Procedimiento para obtener el bond graph linealizado	128
5.3.3	Estructura unión linealizada	129
5.3.4	Linealización del bond graph del robot manipulador PUMA	132
5.3.5	Linealización del bond graph del robot manipulador Stanford	138
5.4	Observadores de estados lineales	150
5.4.1	Antecedentes de la ley de control	150
5.4.2	Observador asintótico de Luenberger	150
5.4.3	Diseño del observador de estados del robot manipulador PUMA	153
5.4.4	Diseño del observador de estados del robot manipulador Stanford	157
6	Conclusiones y trabajos futuros	163
6.1	Conclusiones	163
6.2	Trabajos futuros	164
A	Modelo de Euler-Lagrange para sistemas electromecánicos	165
A.1	Introducción	165
A.2	Modelo dinámico de Euler-Lagrange	166
A.3	Manipulador de un sólo eslabón	169
	Bibliografía	171

Lista de figuras

1.1	Líneas de investigación.	4
2.1	Conexión de dos puertos de energía mediante un bond	11
2.2	Fuentes de esfuerzo y flujo.	12
2.3	Elemento-C y Elemento-I	12
2.4	Elemento resistivo.	13
2.5	Bond Graph de un transformador y un girador	14
2.6	Unión-0	15
2.7	Unión-1	15
2.8	Causalidad en un bond	16
2.9	Ejemplo de una unión-0 sin causalidad	16
2.10	Ejemplo de una unión-0 con causalidad.	17
2.11	Elemento -C en causalidad integral.	18
2.12	Elemento-C en causalidad derivativa	19
2.13	Ejemplo de un circuito eléctrico en causalidad derivativa	20
2.14	Bond Graph en causalidad derivativa.	20
2.15	Bond activo	21
2.16	Bond Graph con bond activo	21
2.17	Estructura unión que involucra transformadores	22
2.18	Estructura unión de un transformador multipuerto.	23
2.19	Ejemplo de un sistema mecánico.	25
2.20	Procedimiento para encontrar el Bond Graph de un sistema mecánico	26
2.21	Bond Graph del ejemplo de un sistema mecánico	26
2.22	Ejemplo de un circuito eléctrico	27
2.23	Procedimiento para encontrar el Bond Graph de un circuito eléctrico	27
2.24	Bond Graph del ejemplo de un sistema eléctrico	27
2.25	Diagrama a bloques de la estructura unión.	28
3.1	Unión de revolución (R).	33
3.2	Unión prismática (P).	33
3.3	Estructura del manipulador ELBOW	35
3.4	Configuración del manipulador esférico	35
3.5	Configuración del manipulador SCARA	36
3.6	Configuración del manipulador cilíndrico	37
3.7	Configuración del manipulador cartesiano	37

3.8	Posición y orientación de un cuerpo rígido.	38
3.9	Transformación de coordenadas.	39
3.10	Las tres rotaciones consecutivas usadas para definir los ángulos de Euler.	43
3.11	Transformaciones homogéneas consecutivas.	46
3.12	Cadena cinemática abierta	47
3.13	La notación de Denavit-Hartenberg.	49
3.14	La relación entre dos marcos de coordenadas adyacentes en la notación de Denavit-Hartenberg.	51
3.15	Manipulador planar de dos eslabones.	52
4.1	Barra rígida.	56
4.2	Bond graph de la barra rígida.	58
4.3	Un péndulo simple.	60
4.4	Bond graph del péndulo simple.	61
4.5	Un péndulo doble.	62
4.6	Bond graph del péndulo doble.	63
4.7	Manipulador planar de dos eslabones.	64
4.8	Bond graph de un robot planar de dos eslabones.	64
4.9	Motores desacoplados en Bond Graph.	67
4.10	Añadiendo los efectos de la gravedad: diagrama.	71
4.11	Añadiendo los efectos de la gravedad: bond graph.	71
4.12	Anillo de Euler: Bond Graph.	74
4.13	Anillo de Euler: causalidad alternativa.	75
4.14	Anillo de Euler: movimiento translacional.	77
4.15	Robot PUMA: diagrama.	78
4.16	Robot PUMA: Bond Graph.	79
4.17	Robot PUMA: bond graph con fricciones en las uniones.	83
4.18	Robot Stanford: diagrama	90
4.19	Robot Stanford: Bond Graph.	91
4.20	Manipulador Stanford: bond graph con fricciones en las uniones.	92
4.21	Configuración de la estructura unión para el BGD.	104
4.22	Robot PUMA: diagrama.	106
4.23	BGD del robot PUMA.	107
4.24	Simulación del estado estacionario del robot PUMA.	111
4.25	BDG del robot Stanford.	112
4.26	Simulación del estado estacionario del robot Standford con entradas seleccionadas.	118
4.27	Simulación del estado estacionario del robot Stanford con posiciones seleccionadas.	120
5.1	Ejemplo de una trayectoria causal simple.	122
5.2	Trayectoria causal mezclada: a) girador b) elemento R, I o C	123
5.3	Estructura unión linealizada.	129
5.4	Bond graph linealizado del robot PUMA.	133
5.5	Comparación de los estados linealizados y no-lineales del robot PUMA.	137
5.6	Bond graph linealizado del robot Stanford.	139
5.7	Diagrama interno del submodelo 1.	140
5.8	Diagrama interno del submodelo 2.	141

5.9	Diagrama interno del submodelo 3.	142
5.10	Comparación de los estados linealizados y no-lineales del robot Stanford.	149
5.11	Estimador de lazo cerrado.	151
5.12	Diseño del observador de estados lineales para el manipulador PUMA.	154
5.13	Respuesta del observador de estados del robot PUMA.	156
5.14	Diagrama de diseño del observador de estados del robot Stanford.	158
5.15	Diseño del observador de estados para el robot Stanford.	159
5.16	Comparación de los estados reales y estimados del robot Stanford.	161
A.1	Manipulador de un sólo eslabón.	169

Lista de tablas

2.1	Variables generalizadas en algunos dominios de energía.	10
2.2	Consideraciones de causalidad para elementos en Bond Graph.	17
2.3	Formas Causales para Puertos-1.	19
3.1	Parámetros de unión para un manipulador planar de 2 eslabones.	52
4.1	Descripción de las variables de la figura 4.9.	68
4.2	Descripción de las variables de la figura 4.11.	70
4.3	Etiquetas de elementos del anillo de Euler.	74
4.4	PUMA de dos grados de libertad: etiquetas del bond graph.	80

Lista de símbolos

$e(t)$	Variable de esfuerzo
$f(t)$	Variable de flujo
$p(t)$	Variable de momento
$q(t)$	Variable de desplazamiento
$-R$	Elemento resistencia
$-C$	Elemento capacitor
$-I$	Elemento inercia
$-TF-$	Elemento transformador
$-GY-$	Elemento girador
-0	Unión cero
-1	Unión uno
S_e-	Fuente de esfuerzo
S_f-	Fuente de flujo
$u(t)$	Vector de entrada del sistema
$y(t)$	Vector de salida del sistema
$x(t)$	Vector de estados asociado a elementos en causalidad integral
$z(t)$	Vector complementario asociado a elementos en causalidad integral
$x_d(t)$	Vector de estados asociado a elementos en causalidad derivativa
$z_d(t)$	Vector complementario asociado a elementos en causalidad derivativa
A, B, C, D	Matrices de estado
x_{ss}	Variables de estado en estado estacionario
y_{ss}	Ssalidas en estado estacionario
x_i^i	Variables de estado con causalidad integral en el bond graph integral
x_d^i	Variables de estado con causalidad derivativa en el bond graph derivativo

x_d^i	VARIABLES DE ESTADO CON CAUSALIDAD INTEGRAL EN EL BOND GRAPH DERIVATIVO
x_d^d	VARIABLES DE ESTADO CON CAUSALIDAD DERIVATIVA EN EL BOND GRAPH DERIVATIVO
sen	Seno
cos	Coseno
LTI	Lineal invariante en el tiempo (linear time invariant)
MIMO	Múltiples entradas - múltiples salidas (multiple input - multiple output)
PUMA	Brazo manipulador universal programable (programable universal manipulator arm)

Lista de publicaciones

Artículo derivado del presente trabajo de tesis.

- González Ávalos Gilberto, Morales Bieze Thor, *Steady State of a Three Degrees of Freedom Stanford: A Bond Graph Approach*, International Conference Modelling, Identification and Control (MIC 2011), Febrero 14-16 2011, Innsbruck Austria.

Capítulo 1

Introducción

1.1 La importancia de la robótica

Un robot puede ser definido como un sistema capaz de realizar labores de manipulación de objetos, herramientas, e incluso su extremidad (actuador final) con la capacidad de ser reprogramado para llevar a cabo diversos tipos de operaciones. A menudo, estos sistemas automáticos están conformados por partes mecánicas y de control, e incluso de elementos que proporcionan capacidades sensoriales e inteligencia artificial a estos. Así, la operación simultánea y el diseño de integración de los sistemas antes mencionados es el trabajo de la robótica.

La robótica, como técnica y disciplina científica, puede ser considerada entonces como la evolución de la automatización, la cual se vale de una integración interdisciplinaria de varios campos tecnológicos, [Cecarelli, 2008].

Debido a su versatilidad mecánica (fuerza y movimiento), así como de su capacidad sensorial (similar a la de un ser humano) e intelectual (control, decisión y memoria), los robots han sido implementados en prácticamente todas las áreas de la industria, en especial, los robots manipuladores, los cuales a menudo son diseñados para realizar operaciones muy particulares dentro de procesos industriales.

El proceso de globalización y el cambio tecnológico han modificado constantemente las estrategias de producción desarrolladas por la industria en general, por lo que esta se orienta hoy hacia una actitud de constante innovación, en donde la robótica juega un papel primordial [Cecarelli, 2008].

1.2 Objetivo General

El objetivo del presente trabajo de investigación es modelar y analizar los robots manipuladores PUMA y Stanford en tres dimensiones en el dominio físico (Bond Graph), así como obtener el estado estacionario de estos sistemas partiendo de los modelos generados. Se propone además una linealización para estos modelos y partiendo de esta linealización se obtiene el observador lineal de estados de los sistemas.

1.2.1 Objetivos particulares

A continuación se presentan los objetivos particulares de esta tesis:

- Usando la representación de las ecuaciones de Euler en Bond Graph, generar modelos matemáticos en 3D para los robots manipuladores PUMA y Standford.
- Analizar el comportamiento de estos manipuladores usando el modelo antes obtenido calculando el estado estacionario, y de esa manera, resolver la cinemática inversa de estos robots.
- Posteriormente, buscar una linealización de los sistemas, cercanas a los puntos de equilibrio de estos.
- Por último, aplicar la metodología propuesta para el diseño de observadores a estos sistemas supuestamente lineales, con el propósito de obtener los observadores de estados.

1.3 Justificación

Un robot está conformado por diferentes sistemas físicos (mecánicos y electrónicos). Debido a esto, el modelo matemático de este tipo de sistemas representa la interacción de distintos tipos de energía. En Bond Graph, los diversos tipos de energía son generalizados en dos variables únicas, por lo que el proceso de desarrollo de modelos integrales se simplifica en gran medida. Una gran mayoría de los robots manipuladores actualmente operando en la industria basan su configuración en los robots PUMA y Stanford, debido a la relativa simplicidad de su diseño y a la eficacia de su configuración cinemática.

En particular, al tratar de modelar manipuladores con técnicas convencionales como Euler-Lagrange, es normal observar que, mientras se aumenten los grados de libertad en el manipulador,

el modelo se complica, mientras que en Bond Graph, sólo basta con agregar bloques que representan a los eslabones para completar el modelo.

Uno de los problemas que se presentan cuando se habla de modelado de manipuladores es la cinemática inversa, pero usando la metodología de bond graph es posible, mediante procedimientos sencillos, encontrar el estado estacionario de éstos, así como su linealización y el diseño de sus observadores lineales.

El uso de Bond Graph como metodología de modelado nos permite analizar dinámicamente cadenas cinemáticas abiertas con relativa sencillez, además de proveer un método sistemático para el modelado de plataformas similares.

1.4 Metodología

Las no-linealidades son muy comunes cuando se intentan modelar matemáticamente sistemas electromecánicos, como son los robots manipuladores. Una alternativa a esta tarea de modelado es el uso de la técnica de Bond Graph. Esta técnica simplifica el modelado usando grafos, los cuales representan la dirección y la manera en la que la potencia es intercambiada entre los elementos del sistema físico.

Para la realización de este trabajo de investigación es necesario el entendimiento de esta técnica de modelado, además del uso de algunas técnicas aplicadas propias de esta metodología. Algunas de estas técnicas son, la obtención del estado estacionario del sistema mediante el uso del bond graph en causalidad derivativa, así como el proceso para la obtención del bond graph linealizado y el diseño del observador de estados.

De manera paralela, es necesaria la comprensión del modelado clásico de robots manipuladores, el cual se consigue, por lo general, mediante el uso de las ecuaciones de movimiento de Euler. Esto con la intención de comparar los modelos obtenidos mediante bond graphs y los modelos ya ampliamente conocidos de Euler-Lagrange para los robots PUMA y Stanford.

La Figura 1.1 muestra un diagrama que indica los pasos requeridos para obtener los conocimientos necesarios con el objetivo de llevar a cabo esta investigación.

En la Figura 1.1 se muestran dos líneas de investigación, la primera representa los pasos realizados para comprender la metodología de Bond Graph; es necesario comprender el modelado de sistemas multicuerpo para después abordar el problema del modelado de sistemas dinámicos

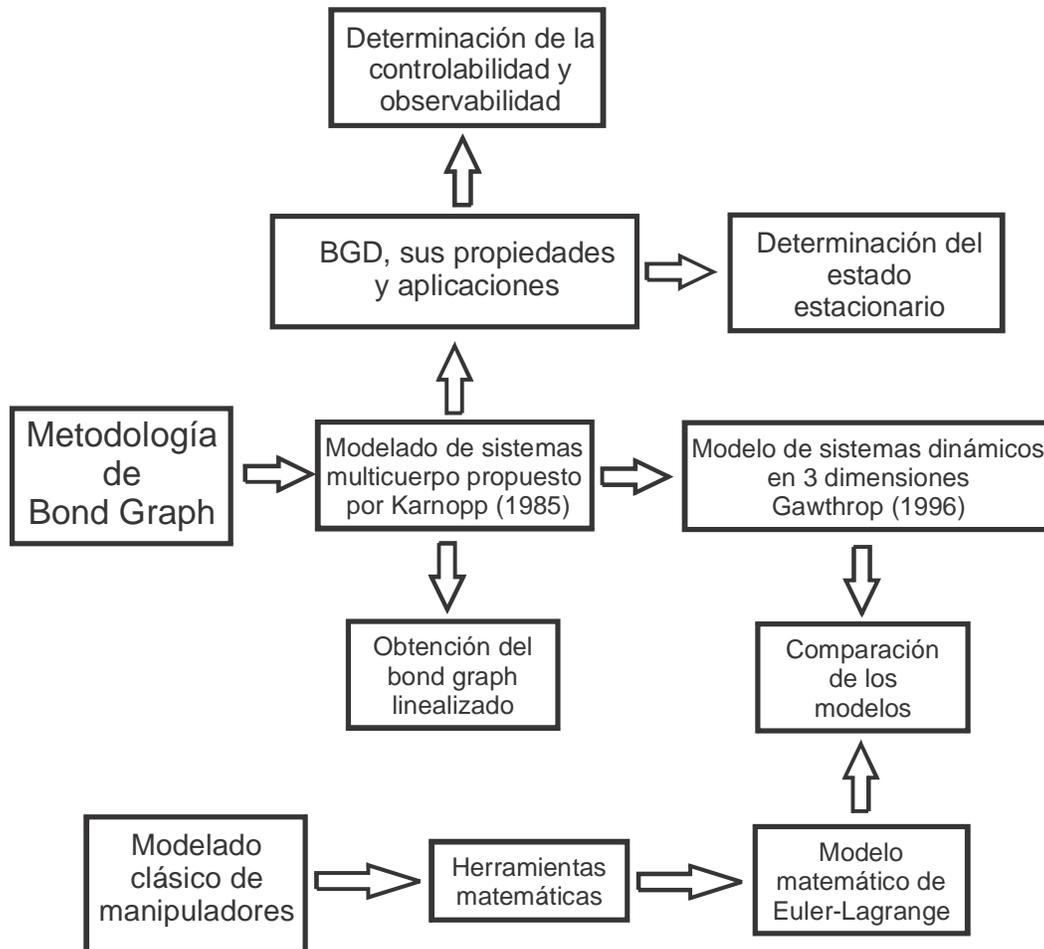


Figura 1.1: Líneas de investigación.

en tres dimensiones. La segunda línea representa los pasos requeridos para llegar al modelo de los manipuladores de Euler-Lagrange. Ambas líneas convergen en la comparación de modelos matemáticos. De manera paralela al modelado de sistemas multicuerpo, dos definiciones son analizadas a fondo, los bond graphs linealizados y el BGD, este último siendo muy importante, puesto que es necesario para la determinación del estado estacionario del sistema, observabilidad y controlabilidad.

1.5 Estado del arte

En esta sección se enuncian importantes trabajos relacionados con este trabajo de tesis, los cuales han servido como base para la realización de esta investigación.

El profesor Henry M. Paynter formuló en los años cincuentas los conceptos que formaron la metodología de Bond Graph. Actualmente, se han publicado una cantidad importante de artículos y libros relacionados con ésta metodología de modelado, entre los que destacan [Breedveld, 2003], [Karnopp, 1996] y [Dauphin, 1991].

Los sistemas electromecánicos representan un reto desde el punto de vista matemático, cuando se pretende generar un modelo que describa su comportamiento. Es habitual ver modelos matemáticos de sistemas mecánicos en donde las ecuaciones de Lagrange son aplicadas con el objeto de generar ecuaciones diferenciales que describan la respuesta de estos sistemas. En [Karnopp, 1977] se presenta una manera alternativa y muy conveniente de escribir estos modelos usando Bond Graph. En [Brown, 1991] se explica la forma en la cual, las porciones más difíciles de modelar de los sistemas físicos pueden ser integrados en un bond graph convencional con la ayuda de un *macro símbolo*.

En [Allen, 1979] se presenta una técnica que produce ecuaciones de Lagrange explícitas para mecanismos dinámicos, las cuales son aptas para ser resueltas mediante el uso de herramientas computacionales.

Un método para modelar sistemas mecánicos usando bond graphs multicuerpo es descrito en [Tiernego, 1985]. Este método está basado en la descripción de la relación existente en el vector de velocidad de un punto móvil en un sistema rotacional. Esta relación es incorporada en un bond graph. Siendo que los bond graphs están basados en el concepto de conservación de energía, las relaciones de fuerza o momento pueden ser utilizadas también.

La notación de multibond graphs resulta ser una manera natural y concisa de describir el

comportamiento de la energía, potencia entropía y otras propiedades físicas de sistemas multipuerto. En [Breedveld, 1985], la descripción de características naturales específicas es discutida desde un punto de vista específico: los sistemas macroscópicos son considerados desde el punto de vista de la llamada teoría de sistemas físicos.

La necesidad de generar modelos de sistemas mecánicos cada vez más precisos, en particular de robots manipuladores, obligan al investigador a considerar la dinámica de estos sistemas en tres dimensiones. Es natural pensar en las ecuaciones de Euler cuando hablamos de la dinámica de un cuerpo relativo a un sistema de coordenadas o ejes. En [Dauphin, 1991] se presenta una manera sencilla de representar estas ecuaciones mediante una estructura simple de bonds, el anillo de Euler.

Una problemática recurrente en el modelado de manipuladores es la resolución de la cinemática inversa. Es posible, mediante la construcción del BGD determinar el estado estacionario de los estados de un sistema físico. En [González, 2003] se muestra esta propiedad de los bond graphs en un método directo para determinar el valor del estado estacionario.

Un procedimiento gráfico para obtener la linealización de una clase de sistemas no-lineales, llamados Sistemas No-Lineales de Producto de Estados, usando Bond Graph, es propuesta en [González, 2003], y en [González, 2002], se propone un método para obtener un observador de estados de manera directa en Bond Graph.

1.6 Estructura de la tesis

Este trabajo de investigación puede ser dividido en tres partes principales, la primera parte es el estudio de los fundamentos de la metodología de Bond Graph, la segunda parte es el estudio del análisis clásico de robots manipuladores y por último la tercera parte es el análisis de los modelos generados en Bond Graph con la intención, primero, de generar modelos linealizados de éstos, y después, diseñar los observadores de estados de estos sistemas.

En el Capítulo 2 de esta tesis se encuentran los fundamentos de la técnica de modelado en Bond Graph, la cuál comprende su particular notación, la creación de representaciones de sistemas multicuerpo en el dominio físico (modelo gráfico), así como la obtención del modelo en espacio de estados a partir de la representación gráfica.

El Capítulo 3 comprende el modelado clásico de robots manipuladores, considerándolos

desde el punto de vista de la cinemática. En este capítulo se pueden observar las diferentes configuraciones o disposiciones cinemáticas que pueden tener los manipuladores. Este capítulo aborda, además, las diferentes herramientas matemáticas necesarias para el modelado de las llamadas *cadena cinemáticas abiertas*, como lo son la transformación de coordenadas, las transformaciones homogéneas y la notación de Denavit-Hartenberg.

El Capítulo 4 de este trabajo puede ser considerado medular, ya que en este se realiza el modelado de robots manipuladores usando la técnica de Bond Graph. En la primera parte de este capítulo se analizan, primero, sistemas planares simples, como la barra rígida y el péndulo simple. En la segunda parte se explica la manera en la que, mediante una estructura simple de bonds, podemos incluir el movimiento en tres dimensiones y sus implicaciones en nuestros modelos. Este capítulo comprende los modelos en tres dimensiones de los manipuladores PUMA y Stanford, además del cálculo de sus estados estacionarios.

El Capítulo 5 está comprendido, principalmente, por los procedimientos necesarios para realizar la linealización de los modelos resultantes del capítulo anterior, además del diseño de los estimadores de estados de estos modelos supuestamente lineales. Se incluye además el concepto de *trayectoria causal*, concepto necesario para la comprobación de la observabilidad estructural de nuestros modelos.

Por último, en el Capítulo 6 de esta tesis se dan a conocer las conclusiones resultantes de este trabajo de investigación.

Capítulo 2

Modelado en Bond Graph

2.1 Introducción

Los Bond Graphs fueron introducidos por Henry M. Paynter (1923-2002), profesor en MIT y UT Austin, quien, con la introducción del concepto de "unión" en abril de 1959, concluyó un periodo de cerca de una década, periodo en el cuál la mayoría de los conceptos de Bond Graph fueron conformados en un marco conceptual y su notación correspondiente. En los años sesentas, esta notación fue elaborada por sus estudiantes, en particular Dean C. Karnopp profesor en UC Davis (Ca.) y Ronald C Rosenberg, profesor en la Universidad del Estado de Michigan (Mich.), quien además diseñó la primer herramienta computacional (ENPORT) que soportaba la simulación de modelos de bond graph. A principios de los setentas, Jan J. van Dixhoorn, profesor de la Universidad de Twente, NL y Jean U. Thoma, profesor de la Universidad de Waterloo, Ont. fueron los primeros en introducir los bond graphs en Europa.

Estos pioneros en el campo del modelado de sistemas y sus estudiantes han compartido estas ideas alrededor del mundo. Jan J. van Dixhoorn descubrió que un prototipo previo del software basado en diagramas de bloques TUTSIM podía ser usado para introducir bond graphs causales simples, el cuál, una década después se convirtió en una herramienta computacional. Esta herramienta fundó las bases de desarrollo de la verdadera herramienta computacional basada en puertos 20-sim en la Universidad de Twente.

En las últimas dos décadas, bond graphs han sido un tópico de investigación, o bien, han sido utilizados en investigaciones alrededor del mundo y forman parte ya de las herramientas de

ingeniería en un número creciente de universidades. En la última década, el uso industrial de esta técnica se ha vuelto cada vez más y más importante [Breedveld, 2003].

2.2 Conceptos fundamentales

La metodología de Bond Graph considera de manera intuitiva que la energía fluye entre los puertos de los componentes de un sistema dinámico. Los efectos físicos y sus interacciones son tomados en cuenta, primero, de manera cualitativa, y en etapas posteriores del proceso de modelado, los detalles de estas interacciones son contemplados para que un modelo matemático pueda ser obtenido y evaluado. Si es aplicada de manera correcta, la metodología de Bond Graph facilita el desarrollo de un modelo gráfico, que resulta consistente con el primer principio de conservación de la energía sin la necesidad de plantear y reformular ecuaciones [Borutzky, 2006]. La parte medular de esta metodología de modelado es formada por las nociones de potencia y unión. La potencia, por su parte, fluye entre dos puertos de potencia dentro del modelo y su sentido es sugerido añadiendo una semiflecha entre estos. Las uniones son representaciones de conexiones, ya sea en paralelo o en serie, de los elementos físicos de nuestro sistema. Ambos conceptos serán analizados a profundidad en las siguientes secciones.

2.2.1 Las variables de potencia y sus analogías

Una de las virtudes del método de modelado de Bond Graph es que éste generaliza el concepto de potencia, separándolo en dos variables, el *esfuerzo* y el *flujo*, las cuales están presentes en todos los sistemas físicos. Esto nos permite tratar todos los sistemas de la misma manera (en el dominio de la potencia) y así obtener un procedimiento de modelado generalizado, que funciona, sin importar si el sistema es mecánico, hidráulico o eléctrico.

Como la energía puede fluir hacia adelante y hacia atrás entre dos puertos de potencia de diferentes nodos, una *semiflecha* es añadida en la unión de estos puertos indicando una *dirección de referencia* del flujo de energía.

Se observa de manera general que la cantidad de potencia en cada instante de tiempo, t , puede ser determinada como el producto de dos variables conjugadas, que son llamadas *esfuerzo*, e , y *flujo*, f , respectivamente.

$$Potencia = Esfuerzo \times Flujo \quad (2.1)$$

En sistemas mecánicos traslacionales, esfuerzo y flujo pueden ser identificados como fuerza y velocidad lineal. En sistemas eléctricos, el producto de la caída de voltaje a través de dos terminales de un puerto y la corriente en ambas terminales es la cantidad de potencia eléctrica instantánea en este puerto. A su vez, en el dominio térmico, estas variables son la temperatura absoluta y la razón de cambio de la entropía. Adicionalmente, para sistemas en donde cierta energía es almacenada, es necesario definir las variables que representan el estado del sistema. Estas variables son denominadas *momento* $p(t)$ ó *esfuerzo acumulado* $e_a(t)$ y *desplazamiento* $q(t)$ ó *flujo acumulado* $f_a(t)$. Las ecuaciones que describen estas variables se muestran a continuación:

$$p(t) = e_a(t) \triangleq \int_0^t e(\tau) d\tau \quad (2.2)$$

$$q(t) = f_a(t) \triangleq \int_0^t f(\tau) d\tau \quad (2.3)$$

En la Tabla 2.1 se muestran las variables de esfuerzo y flujo en algunos dominios de energía.

Tabla 2.1: Variables generalizadas en algunos dominios de energía.

Dominio	Esfuerzo e	Flujo f	Momento p	Desplazamiento q
M. traslacional	Fuerza F	Velocidad v	M. rotacional p_R	Distancia x
M. rotacional	Par M	V. angular ω	M. angular h_R	Desp. angular θ
Eléctrico	Voltaje u	Corriente i	Enlace de flujo λ	Carga q
Hidráulico	Presión p	V. de flujo Q	M. de flujo Γ	Volumen V

Otro de los conceptos mencionados anteriormente es el de unión, el cual es de suma importancia en el modelado de cualquier sistema. Este se refiere a la forma en la que están interconectados los elementos de un sistema y como es que la energía se distribuye debido a estas uniones, siendo las dos posibles uniones, la conexión en paralelo y la conexión en serie. En la siguiente sección observaremos la notación utilizada en esta metodología de modelado y analizaremos ambas uniones, así como las ecuaciones que los rigen.

2.3 La notación de Bond Graph

2.3.1 Introducción

Bond Graphs son comunmente etiquetados como *bi-grafos*: los extremos son llamados *bonds* y representan el flujo bilateral de las variables conjugadas de potencia, flujo y esfuerzo. La convención común para la posición de los símbolos de las variables de esfuerzo y flujo en un bond graph indica que los esfuerzos son escritos arriba o a la izquierda de un bond y los flujos abajo o a la derecha. Para indicar el sentido del flujo de potencia en un bond, se añade a éste una línea en el extremo hacia donde el flujo de potencia fluye, formando así una semiflecha [Breedveld, 2003].

En la Figura 2.1 se muestra la conexión de los puertos de energía de los elementos A y B mediante un bond.

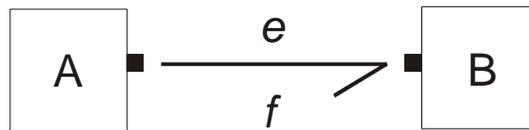


Figura 2.1: Conexión de dos puertos de energía mediante un bond

2.3.2 Los elementos de Bond Graph

El modelado en Bond Graph utiliza un pequeño conjunto básico de siete elementos conceptuales representando procesos energéticos fundamentales. Estos pueden ser agrupados en cinco categorías.

Suministro y absorción de energía

La introducción de energía a un sistema es modelada por fuentes. Debido a que un puerto de potencia tiene dos variables, dos fuentes de energía existen. Las fuentes pueden suministrar esfuerzo o flujo a un sistema. Una batería sirviendo como una fuente constante de voltaje puede ser modelada como una fuente de esfuerzo, mientras que una bomba hidráulica suministrando un flujo volumétrico constante puede ser modelada como una fuente de flujo. En bond graph, las fuentes son denotadas por la letra S (Source) y el tipo de fuente es indicado añadiendo la letra e, para fuentes de esfuerzo, o la letra f, para fuentes de flujo (Se ó Sf respectivamente), [Borutzky, 2006]. Estos elementos son conocidos como Puertos-1 Activos. En la Figura 2.2 se muestra la representación de la fuente

de esfuerzo y la fuente de flujo. En estos elementos la semiflecha apunta hacia afuera de ellos, denotando que estos elementos entregan potencia.



Figura 2.2: Fuentes de esfuerzo y flujo.

Existen también fuentes moduladas de esfuerzo y flujo, las cuales son controladas por una señal de retroalimentación. Estas fuentes tienen un puerto de energía adicional y son identificadas por la letra M representando una fuente *modulada* (MSe y MSf).

Almacenamiento de energía

Similar al modelado de redes eléctricas y sistemas mecánicos simples, en el modelado de bond graph dos tipos de almacenamiento de energía son considerados: almacenamiento capacitivo C y almacenamiento inercial I . Estos dos elementos forman parte de los Puertos-1 Pasivos. En la ecuación (2.4) se muestra la relación que existe entre el esfuerzo y el flujo en el *Elemento-C*.

$$e(t) = \frac{1}{C} \int f(t) dt \quad (2.4)$$

A su vez, la ecuación (2.5) muestra la relación entre el esfuerzo y el flujo en el *Elemento-I*.

$$f(t) = \frac{1}{I} \int e(t) dt \quad (2.5)$$

En la Figura 2.3 se muestra la representación del Elemento-C y del Elemento-I. En la notación de estos elementos la semiflecha apunta hacia ellos, indicando que estos elementos consumen potencia dentro del sistema.



Figura 2.3: Elemento-C y Elemento-I

Transformación Irreversible de Energía en Calor

La disipación de energía en resistores eléctricos o debido a la fricción en sistemas mecánicos e hidráulicos, es a menudo modelada como una *pérdida* de energía. En bond graph, esta disipación

es representada por un elemento R o elemento resistivo. Este elemento también forma parte de los Puertos-1 Pasivos. La ecuación (2.6) describe el valor de $e(t)$ en el *Elemento-R*.

$$e(t) = Rf(t) \quad (2.6)$$

y mediante un pequeño despeje de la ecuación (2.6) obtenemos la ecuación (2.7) que representa el valor de $f(t)$ en el *Elemento-R*.

$$f(t) = \frac{1}{R}e(t) \quad (2.7)$$

A continuación, se muestra la representación del elemento resistivo. Al igual que los demás Puertos-1 pasivos, la semiflecha apunta hacia el elemento resistivo indicando que éste consume potencia.



Figura 2.4: Elemento resistivo.

Transformación Reversible de Energía

En este proceso, idealmente, no existe disipación de energía, por lo cual es conservativo de potencia. Existen dos elementos en bond graph que representan este proceso. Estos son denotados por los acrónimos TF y GY . En el caso más simple, estos elementos forman parte de los Puertos-2. El hecho de que este proceso sea conservativo de potencia significa que la potencia instantánea en uno de los puertos es igual a la potencia instantánea en el otro puerto. Un elemento TF relaciona los esfuerzos en sus puertos y de manera separada relaciona los flujos, mientras que un elemento GY relaciona el esfuerzo de un puerto con el flujo del otro puerto y viceversa. En la relación constitutiva de ambos elementos, una variable es multiplicada por una constante o por una función del tiempo. Físicamente, transformadores eléctricos o cajas de engranes mecánicos pueden ser modelados por un elemento TF , mientras que motores eléctricos y bombas centrífugas pueden ser modelados por un elemento GY . Ambos elementos conceptuales pueden ser elementos multipuerto,[Borutzky, 2006]. En la Figura 2.5 se muestra el bond graph que representa a un transformador y un girador, en donde K representa el *módulo* de estos elementos.



Figura 2.5: Bond Graph de un transformador y un girador

La relación entre las variables generalizadas en el transformador, TF , están dadas por:

$$e_2(t) = K e_1(t) \quad (2.8)$$

$$f_2(t) = \frac{1}{K} f_1(t) \quad (2.9)$$

y para el girador, GY , estas relaciones son:

$$e_1(t) = K f_2(t) \quad (2.10)$$

$$f_1(t) = \frac{1}{K} e_2(t) \quad (2.11)$$

Estos elementos tienen un papel muy importante en el modelado de conversión de potencia de un dominio de energía a otro.

Distribución de energía

El modelado del flujo de energía en un sistema representa la distribución de esta entre los elementos conceptuales del modelo. Puesto que el almacenamiento y la transformación irreversible de la energía han sido considerados mediante elementos de almacenamiento y resistores, podemos considerar el proceso de distribución como conservativo de potencia. Existen dos tipos de elementos de unión llamados *Unión-0* y *Unión-1*. Estos dos elementos forman los llamados Puertos-3, ellos distribuyen la potencia dentro del sistema y tienen relaciones constitutivas lineales. Para la Unión-0, los esfuerzos en todos sus puertos son iguales, mientras que la suma de todos los flujos en sus puertos es igual a cero, tomando en cuenta su signo. El signo es determinado por la orientación de las semiflechas adyacentes a la unión. Si la semiflecha apunta hacia la unión, entonces se considera que el signo del flujo es positivo, si apunta hacia afuera de la unión, entonces el signo es negativo. Se puede observar entonces que la *Unión-0* representa la conexión en paralelo dentro de un sistema. Para la *Unión-1*, los flujos de todos los bonds incidentes en la unión son iguales y la suma de los esfuerzos es igual a cero tomando en consideración su signo. Es fácil entonces deducir que

la *Unión-1* representa las conexiones en serie dentro de un sistema. En la Figura 2.6 se muestra la representación de la Unión-0.

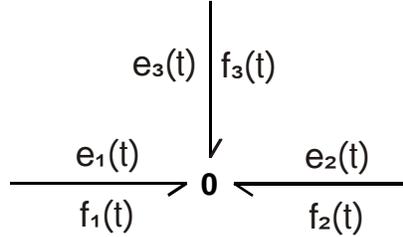


Figura 2.6: Unión-0

Las relaciones de interconexión que describen una Unión-0 están dadas por:

$$e_1(t) = e_2(t) = e_3(t) \quad (2.12)$$

$$f_1(t) + f_2(t) + f_3(t) = 0 \quad (2.13)$$

En la Figura 2.7 se muestra la representación de la Unión-1.

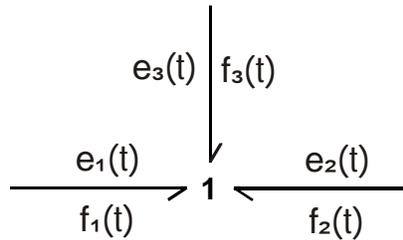


Figura 2.7: Unión-1

Las relaciones de interconexión para este elemento están dadas por:

$$f_1(t) = f_2(t) = f_3(t) \quad (2.14)$$

$$e_1(t) + e_2(t) + e_3(t) = 0 \quad (2.15)$$

2.4 La causalidad en Bond Graph

Un modelo en bond graph representa el intercambio de potencia entre los elementos de un sistema. La causalidad es una de las características más importantes de esta metodología de modelado, ya que permite determinar de manera gráfica la relación de causa y efecto que existe entre los elementos de un sistema, [Borutzky, 2006]. Las relaciones de causa y efecto para los esfuerzos y flujos dentro de nuestro modelo son representadas en direcciones opuestas. La dirección del esfuerzo y del flujo en un bond que conecta dos elementos es determinada mediante el trazo causal, el cuál es una línea perpendicular al bond que se sitúa en uno de sus extremos. Se considera que el esfuerzo entra en un bond en el mismo sentido del trazo causal, y a su vez, el flujo sale de éste en dirección opuesta. Dos ejemplos de causalidad en un bond conectando dos elementos se presentan en la Figura 2.8.



Figura 2.8: Causalidad en un bond

Existen ciertas reglas definidas para la asignación de causalidad en los multipuertos básicos, estas reglas se presentan en la Tabla 2.2.

Más adelante se analizarán estas reglas mediante un procedimiento de asignación de causalidad y veremos que significan.

Para observar la importancia de la causalidad dentro de un bond, consideremos los siguientes ejemplos. Un modelo para la unión-0 sin causalidad se muestra en la Figura 2.9.

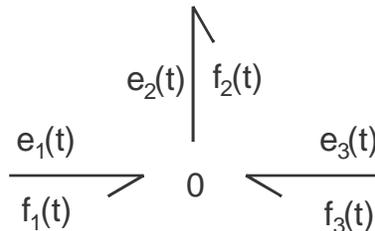


Figura 2.9: Ejemplo de una unión-0 sin causalidad

Tabla 2.2: Consideraciones de causalidad para elementos en Bond Graph.

Causalidad Necesaria	
Se	Sf
Causalidad Restrictiva	
TF	TF
GY	GY
Causalidad Integral	
I	C
Causalidad Derivativa	
D	C
Causalidad Arbitraria	
R	R

De la Figura 2.9, obtenemos:

$$e_1(t) = e_2(t) = e_3(t) \tag{2.16}$$

$$f_1(t) - f_2(t) - f_3(t) = 0 \tag{2.17}$$

Ahora, con el trazo causal, como se muestra en la Figura 2.10, significa que $e_1(t)$, entra en la unión y $e_2(t)$ y $e_3(t)$ son salidas de la unión, efectos de $e_1(t)$, así $f_1(t)$ está en el sentido opuesto y va fuera de la unión, es una salida, y $f_2(t)$ y $f_3(t)$ son entradas a la unión.

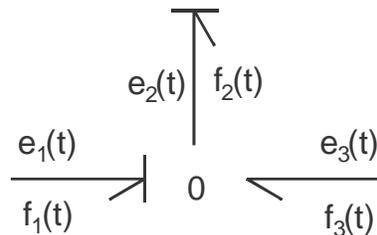


Figura 2.10: Ejemplo de una unión-0 con causalidad.

Esto se representa con las ecuaciones de interconexión:

$$e_3(t) = e_2(t) = e_1(t) \quad (2.18)$$

$$f_1(t) = f_2(t) + f_3(t) \quad (2.19)$$

la cual es una forma bien adaptada para el cálculo numérico.

Consideremos ahora el *elemento-C*. La relación constitutiva es de $f(t)$ a $e(t)$ y almacena flujo, es decir, relaciona $e(t)$ a una variable de flujo acumulada $q(t) = \int f(t)dt$. Esto es, si $f(t)$ es la entrada a un elemento- C como se muestra en la Figura 2.11, se integra primero para encontrar $q(t)$ y entonces $e(t)$ es una salida relacionada a $q(t)$. A esta cuasalidad en un elemento de almacenamiento se le llama causalidad integral, debido a que la integral de la entrada $f(t)$ se relaciona con la salida $e(t)$, esto es,

$$e(t) \triangleq \frac{1}{C} \int f(t)dt \quad (2.20)$$

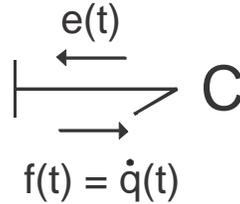


Figura 2.11: Elemento -C en causalidad integral.

Invirtiendo la causalidad mostrada en la Figura 2.11, se obtiene la misma relación pero escrita con derivada:

$$f(t) \triangleq C \frac{d}{dt} e(t) \quad (2.21)$$

A esta causalidad se le llama causalidad derivativa de un elemento de almacenamiento. En la tabla se muestran los Puertos-1 con la causalidad correspondiente a cada elemento considerado.

Ahora bien, para poder obtener las ecuaciones diferenciales cumpliendo con las reglas de causalidad de la Tabla 2.2, el siguiente procedimiento debe ser seguido en orden estricto.

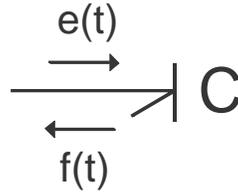


Figura 2.12: Elemento-C en causalidad derivativa

Tabla 2.3: Formas Causales para Puertos-1.

Elemento	Forma Causal	Relación Causal
Fuente de esfuerzo	$MS_e \rightarrow \diagup$	$e(t) = E(t)$
Fuente de flujo	$MS_f \leftarrow \diagup$	$f(t) = F(t)$
Resistencia	$\leftarrow \diagup R$ $\rightarrow \diagdown R$	$e(t) = \Phi_R[f(t)]$ $f(t) = \Phi_R^{-1}[e(t)]$
Capacitancia	$\leftarrow \diagup C$ $\rightarrow \diagdown C$	$e(t) = \Phi_C^{-1} \left[\int^t f(\tau) d\tau \right]$ $f(t) = \frac{d}{dt} [\Phi_C e(t)]$
Inductancia	$\leftarrow \diagup I$ $\rightarrow \diagdown I$	$f(t) = \Phi_I^{-1} \left[\int^t e(\tau) d\tau \right]$ $e(t) = \frac{d}{dt} [\Phi_I f(t)]$

2.4.1 Procedimiento para la asignación de causalidad en un multipuerto

1. Considerar cualquier Se o Sf y asignar su causalidad requerida e inmediatamente extender sus implicaciones causales, usando las restricciones de la tabla 2.2.
2. Asignar causalidad integral a los elementos C e I respetando nuevamente las restricciones de la Tabla 2.2.
3. Escoger cualquier R que no tenga causalidad y asignarle una arbitraria respetando las restricciones que los demás elementos impongan sobre R . Ver la tabla 2.2.

Un Bond Graph es considerado *causalmente correcto* si no existen conflictos de causalidad en el.

Es importante hacer notar que la causalidad derivativa en un elemento almacenador de energía aporta características importantes que se mencionarán en la siguiente sección.

2.4.2 Causalidad derivativa en un Bond Graph

La causalidad derivativa se presenta, en una asignación de causalidad integral predefinida, cuando un sistema contiene elementos almacenadores de energía que no son dinámicamente independientes. Este tipo de esquemas se originan cuando, por ejemplo, en sistemas eléctricos, se encuentran capacitores conectados en paralelo como se muestra en la Figura 2.13.

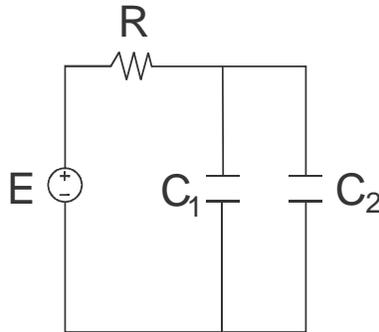


Figura 2.13: Ejemplo de un circuito eléctrico en causalidad derivativa

A continuación se muestran dos esquemas de Bond Graph en los cuales existe la causalidad derivativa en uno de sus elementos debido a restricciones causales dentro del esquema. Ver Tabla 2.2.



Figura 2.14: Bond Graph en causalidad derivativa.

Se observa que, forzosamente, uno de los elementos capacitivos tendrá causalidad derivativa.

En general, el número de elementos que almacenan energía en causalidad integral es el número de ecuaciones diferenciales linealmente independientes y el número de elementos almacenadores en causalidad derivativa es el número de ecuaciones linealmente dependientes.

2.5 Bond activo

Un bond normal conlleva dos señales, esfuerzo $e(t)$ y flujo $f(t)$. Un *bond activo*, a diferencia de un bond normal, comunica una de las dos señales en una sola dirección.

Un *bond activo* se representa por una flecha completa, como se muestra en la Figura 2.15, indicando un flujo de señal de potencia cero.



Figura 2.15: Bond activo

Un bond activo se utiliza como una señal en un diagrama de bloques, la cual conecta un bloque a otro sin consumir energía como se ilustra en la Figura 2.16.

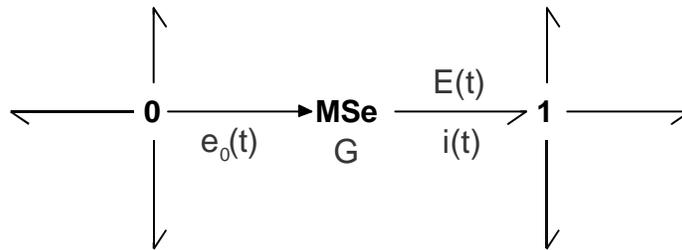


Figura 2.16: Bond Graph con bond activo

El bond activo que entra a Se indica que $E(t)$ es modulada por $e_0(t)$, así, $E(t) = Ge_0(t)$, donde G es la ganancia de voltaje.

El bond Activo viene de una unión-0, el voltaje $e_0(t)$ es el mismo que e_1 , e_2 y e_3 . Además, el bond activo tiene potencia cero debido a que se considera que la corriente correspondiente a $e_0(t)$ es despreciable. La suma de las corrientes en la unión-0, se debe únicamente a i_1 , i_2 e i_3 .

2.6 Puertos-2 modulados

Como se explicó antes, en el modelado en Bond Graph, la transformación reversible de energía dentro de los sistemas se lleva a cabo en los elementos Puerto-2 (transformadores y giradores), en donde las variables de potencia, flujo y esfuerzo, son multiplicadas por una constante llamada

módulo, siendo m el módulo de un transformador y r el módulo de un girador. Estos elementos son considerados lineales y conservadores de potencia. Esto implica que, la potencia que entra en uno de los puertos de un transformador o girador debe ser igual a la potencia presente en el puerto de salida de éste, sin importar el valor del módulo.

Estos parámetros m y r pueden ser modulados mediante una señal usando un bond activo que no conduce potencia. El transformador modulado (*MTF*) y el girador modulado (*MGY*) son elementos no lineales y son generalizaciones de conservadores de potencia. Básicamente, los parámetros de los elementos TF y GY son una función de algún parámetro, por ejemplo, ξ , en los Puertos-2 modulados.

2.6.1 Transformadores multipuertos

Considerar la estructura unión que se muestra en la Figura 2.17.

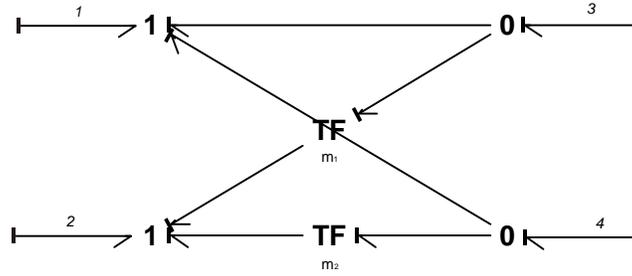


Figura 2.17: Estructura unión que involucra transformadores

Las variables e_3 y e_4 se transforman en e_1 y e_2 , respectivamente.

$$\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -m_1 & -m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_3 \\ e_4 \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

Esta transformación de esfuerzo es acompañada por la siguiente transformación de flujo.

$$\begin{bmatrix} f_3 \\ f_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & m_1 \\ 1 & m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

Estas transformaciones, como se indicó anteriormente, son conservadoras de potencia. Rearreglando las ecuaciones de transformación anteriores, la forma asimétrica característica de

conservación de potencia aparece.

$$\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -m_1 & -m_2 \\ 1 & m_1 & 0 & 0 \\ 1 & m_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

Considerando el bond graph de la Figura 2.18.

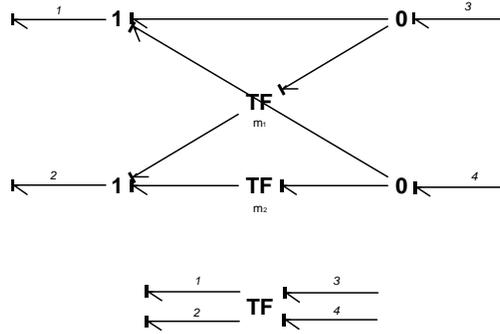


Figura 2.18: Estructura unión de un transformador multipuerto.

$$\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ m_1 & m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_3 \\ e_4 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 1 & m_1 \\ 1 & m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_3 \\ f_4 \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

Se observa que la relación constitutiva de estas transformaciones involucran una matriz de transformaciones y su transpuesta. Es sencillo probar que la potencia que fluye en uno de los lados del transformador multipuerto debe ser igual a la potencia que fluye en el otro lado.

Sean $[e_1]$ y $[f_1]$ vectores columna de esfuerzos y flujos en un lado de un transformador multipuerto, y sean $[e_2]$ y $[f_2]$ los vectores de esfuerzos y flujos en el otro lado del transformador. Entonces, sea $[M]$ una matriz de transformaciones de dimensiones apropiadas, entonces,

$$[e_1] = [M] [e_2] \quad (2.26)$$

$$[M^T] [f_1] = [f_2] \quad (2.27)$$

$$[f_1]^T [M] = [f_2]^T \quad (2.28)$$

multiplicando $[e_2]$ en ambos lados de la igualdad tenemos,

$$[f_1]^T [M] [e_2] = [f_2]^T [e_2] \quad (2.29)$$

sustituyendo (2.26) en (2.29), finalmente nos resulta,

$$[f_1]^T [e_1] = [f_2]^T [e_2] \quad (2.30)$$

lo cual establece que la suma de las potencias de los puertos del lado número 1 es igual a la suma de las potencias de los puertos en el lado número 2.

Es interesante que la prueba anterior es aplicable para cualquier número de puertos en el transformador y no es necesario que los elementos de la matriz de transformación sean constantes. Esto implica que la conservación de la potencia se mantiene, incluso, en transformadores multipuerto modulados, en los cuales los elementos de la matriz de transformación cambian con el tiempo.

2.7 El modelado de sistemas físicos usando Bond Graph

Una vez que hemos analizado algunos de los conceptos fundamentales de la metodología de Bond Graph, podemos comenzar a construir modelos basados en sistemas de diversos dominios de energía. En esta sección conoceremos, a grandes rasgos, el procedimiento general para la formación de modelos gráficos de sistemas, así como la formulación de modelos matemáticos partiendo solo de lo que conocemos acerca del sistema gracias a Bond Graph.

2.7.1 Construcción sistemática de bond graphs

Una de las ventajas de esta metodología es que la topología usada en la conexión de los componentes de un sistema puede guiar la construcción sistemática de bond graphs [Borutzky, 2006]. En general, dos procedimientos pueden ser formulados, uno para la construcción de bond graphs de subsistemas mecánicos, y otro para sistemas de dominios de energía diferente al mecánico (subsistema no-mecánico).

Subsistemas mecánicos.

1. Identificar distintas velocidades y velocidades angulares. Representarlas por una unión-1.

2. Insertar elementos -C, -R,-TF- y -GY- mediante uniones-0, entre dos uniones-1 según corresponda.
3. Añadir elementos de inercia -I a su respectiva unión-1.
4. Añadir fuentes -Se ó -Sf a sus respectivas uniones-1.
5. Asignar una dirección de referencia a la potencia uniendo las uniones mediante bonds (semi-flechas).
6. Eliminar las uniones-1 que representen una velocidad o velocidad angular $\equiv 0$, eliminar también los bonds incidentes a estas uniones.

Ejemplo de subsistema mecánico

La Figura 2.19 muestra un ejemplo de un sistema mecánico, al cual se le aplicará el procedimiento anterior para encontrar el Bond Graph correspondiente.

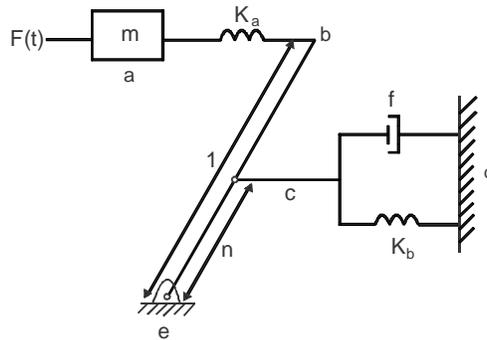


Figura 2.19: Ejemplo de un sistema mecánico.

Aplicando los pasos 1,2,3,4 y 5 del procedimiento anterior obtenemos la Figura 2.20.

Reduciendo el Bond Graph como se indica en el paso 6, obtenemos el Bond Graph mostrado en la Figura 2.21, el cual tiene ya una causalidad aplicada.

Subsistemas no-mecánicos.

1. Identificar esfuerzos distintos y representarlos por uniones-0.

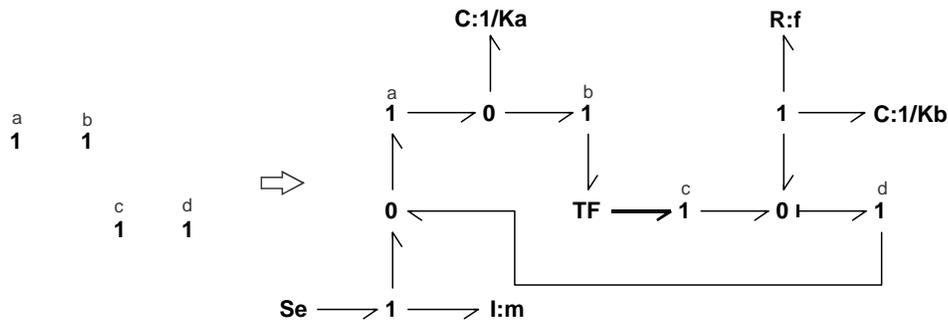


Figura 2.20: Procedimiento para encontrar el Bond Graph de un sistema mecánico

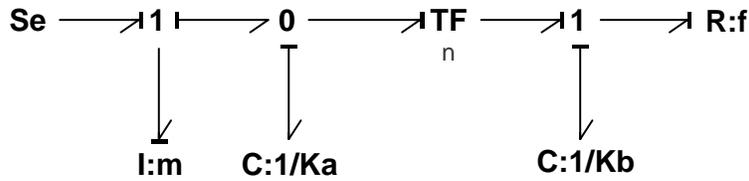


Figura 2.21: Bond Graph del ejemplo de un sistema mecánico

2. Insertar fuentes, capacitores, disipadores, transformadores y giradores mediante una unión-1 entre dos uniones-0 como corresponda. Observar la topología mediante la cual estan conectados los elementos del sistema.
3. Añadir bonds (semiflechas) a las uniones.
4. Elegir un potencial de referencia, eliminar su respectiva unión-0 así como todos los bonds incidentes. Si dos subsistemas estan unidos por un solo transformador, un potencial de referencia debe ser elegido para cada subsistema [Borutzky, 2006].

Ejemplo de subsistema no-mecánico (sistema eléctrico)

A continuación se ilustra el procedimiento anterior con el ejemplo de un circuito eléctrico, mostrado en la Figura 2.22.

Los pasos 1, 2, 3 y 4 del procedimiento se ilustran en la Figura 2.23.

Finalmente, reduciendo el Bond Graph resultante y aplicando la asignación de causalidad descrita anteriormente se obtiene el Bond Graph de la Figura 2.24.

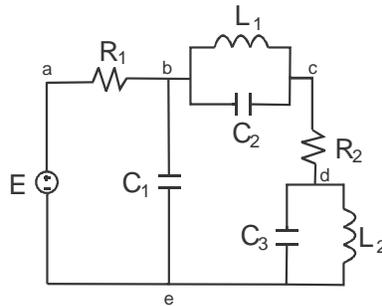


Figura 2.22: Ejemplo de un circuito eléctrico

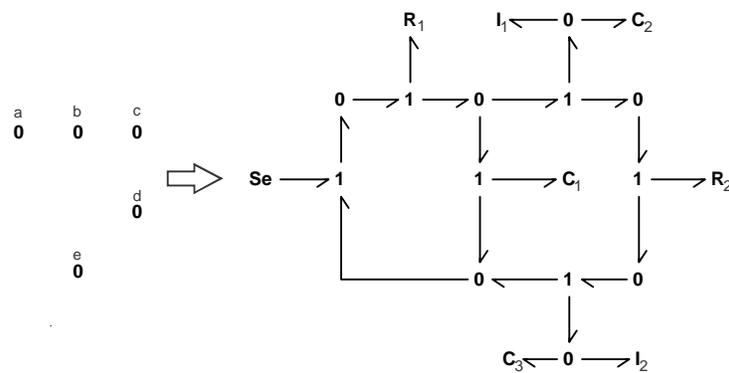


Figura 2.23: Procedimiento para encontrar el Bond Graph de un circuito eléctrico

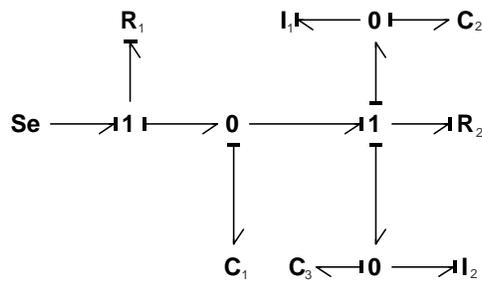


Figura 2.24: Bond Graph del ejemplo de un sistema eléctrico

2.8 Estructuras de unión en sistemas multipuerto

La metodología de Bond Graph tiene la virtud de convertir estructuras dinámicas provenientes de sistemas complejos en un modelos gráficos, los cuales pueden ser manipulados y vertidos en matrices que son fáciles de manipular. En esta sección se presenta un método sistemático que permite obtener un modelo en variables de estado de un sistema físico, partiendo de su representación en Bond Graph.

2.8.1 Vectores clave

En general, todos los bonds se pueden clasificar en *bonds externos*, los cuales conectan los elementos R , C , I , S_e , S_f , y en *bonds internos* que conectan las uniones, transformadores y giradores. Así mismo, los bonds externos pueden ser clasificados de acuerdo a los elementos que estos conectan al sistema. La Figura 2.25 muestra el diagrama a bloques de la Estructura Unión de un Bond Graph.

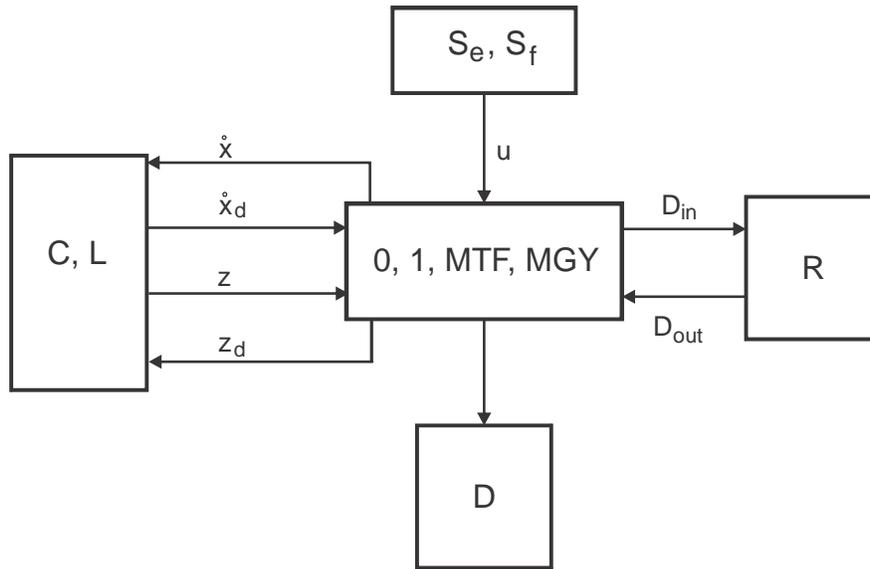


Figura 2.25: Diagrama a bloques de la estructura unión.

En la Figura (2.25), las variables (S_e, S_f) , (L, C) y (R) denotan los campos de fuente, almacenamiento y disipación respectivamente, (D) el detector y $(0, 1, TF, GY)$ la estructura unión.

Los vectores que representan al sistema, llamados vectores clave, están representados en la Figura (2.25), donde $u(t)$ contiene las variables de potencia o los esfuerzos y flujos impuestos por los

elementos de las fuentes en la Estructura de Unión, los estados $x(t) \in \mathbb{R}^n$ y $x_d(t) \in \mathbb{R}^m$ están compuestos por variables de energía, momento generalizado $p(t)$ en elementos I y desplazamiento generalizado $q(t)$ en elementos C en causalidad integral y derivativa respectivamente; $z(t) \in \mathbb{R}^n$ y $z_d(t) \in \mathbb{R}^m$ son variables de co-energía en causalidad integral y derivativa, respectivamente y $D_{in}(t) \in \mathbb{R}^r$ y $D_{out}(t) \in \mathbb{R}^r$ son una mezcla de esfuerzos y flujos que muestran los intercambios energéticos entre el campo de disipación y la Estructura de Unión.

2.8.2 Relaciones de campo y ecuaciones de estado

Las relaciones de campo no lineales de la Figura 2.25 de almacenamiento y de disipación son:

$$z(t) = \Phi_F(t), \quad (2.31)$$

$$z_d(t) = \Phi_{F_d}(t), \quad (2.32)$$

$$D_{out}(t) = \Phi_L(D_{in}), \quad (2.33)$$

donde:

Φ_F denota una función que relaciona cada z_i con x_i para $i = 1, \dots, n$.

Φ_{F_d} denota una función que relaciona cada z_{di} con x_{di} para $i = 1, \dots, m$

Φ_L denota una función que relaciona cada D_{outi} con D_{ini} para $i = 1, \dots, r$

El comportamiento de un elemento específico está descrito por una ley física la cual es llamada su *relación constitutiva*. Si las relaciones constitutivas son lineales tenemos:

$$z(t) = Fx(t), \quad (2.34)$$

$$z_d(t) = F_d x_d(t), \quad (2.35)$$

$$D_{out}(t) = LD_{in}(t), \quad (2.36)$$

donde L , F y F_d son matrices reales de dimensión $r \times r$, $n \times n$ y $m \times m$, respectivamente.

Las relaciones de la estructura de unión están dadas por:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ D_{in}(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = S \begin{bmatrix} z(t) \\ D_{out}(t) \\ u(t) \\ \dot{x}_d(t) \end{bmatrix} \quad (2.37)$$

$$z_d(t) = -S_{14}^T z(t) \quad (2.38)$$

donde la estructura de unión está formada por:

$$S = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & 0 \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & 0 \end{bmatrix} \quad (2.39)$$

Los elementos de S toman valores dentro del conjunto $\{0, \pm 1, \pm n, \pm r\}$ donde n y r son los módulos del transformador y girador. La matriz S está particionada de acuerdo a la dimensión de sus vectores clave. Las submatrices S_{ij} tienen las siguientes propiedades:

- S_{11} y S_{22} son matrices cuadradas antisimétricas.
- S_{12} es la matriz transpuesta negativa de S_{21} y viceversa.

Estas propiedades están basadas en el principio de conservación de energía y sirven como comprobación al proceso de cálculo de la matriz de estructura de unión.

Un sistema LTI MIMO es entonces representado en variables de estado por:

$$\dot{x}(t) = A_p x(t) + B_p u(t) \quad (2.40)$$

$$y(t) = C_p x(t) + D_p u(t) \quad (2.41)$$

Relacionando (2.37) y (2.38) con (2.40) y (2.41) obtenemos:

$$A_p = E^{-1}(S_{11} + S_{12}MS_{21})F, \quad (2.42)$$

$$B_p = E^{-1}(S_{13} + S_{12}MS_{23}), \quad (2.43)$$

$$C_p = (S_{31} + S_{32}MS_{21})F \quad (2.44)$$

$$D_p = S_{33} + S_{32}MS_{23}. \quad (2.45)$$

siendo,

$$E = I + S_{14}F_d^{-1}S_{14}^T F, \quad (2.46)$$

$$M = (I - LS_{22})^{-1}L. \quad (2.47)$$

Las Ecuaciones (2.40) a (2.47) permiten la obtención directa del modelo de un sistema físico en variables de estado, utilizando la representación de Bond Graph.

En este Capítulo se analizó a grandes rasgos la metodología de Bond Graph. Se dió a conocer un método sistemático para la creación de bond graphs, así como los pasos a seguir para obtener el modelo de nuestros sistemas en espacio de estados, a partir de su representación en Bond Graph. En el siguiente Capítulo se mostrarán algunas de las herramientas utilizadas en el modelado clásico de cadenas cinemáticas abiertas.

Capítulo 3

La robótica y su modelado

3.1 Introducción

En este Capítulo se dará una breve explicación acerca de los problemas que describen los robots manipuladores cuando son modelados matemáticamente. Se darán a conocer algunas de las configuraciones en las que pueden estar basados los robots y se tratarán los problemas de la cinemática directa e inversa. Se da además un pequeño bosquejo matemático necesario para comprender el modelado clásico de los robots manipuladores como cadenas cinemáticas abiertas [Asada, 1986].

3.2 Componentes y estructuras de robots manipuladores

3.2.1 Las uniones y eslabones dentro de la cadena

Los robots manipuladores están compuestos de eslabones conectados por uniones dentro de una cadena cinemática abierta. Estas uniones son, típicamente, rotatorias (revolución) o lineales (prismáticas) [Spong, 1989].

Una unión de tipo revolución es parecida a una bisagra, la cual permite la rotación entre dos eslabones. Por otra parte, una unión prismática permite un movimiento relativo de un eslabon a otro.

Utilizaremos la convención (R) para representar una unión de revolución y (P) para uniones prismáticas como se muestra en las Figuras 3.1 y 3.2. Cada unión representa la conexión entre dos eslabones l_i y l_{i+1} . Se denota el eje de rotación de una unión de revolución o el eje

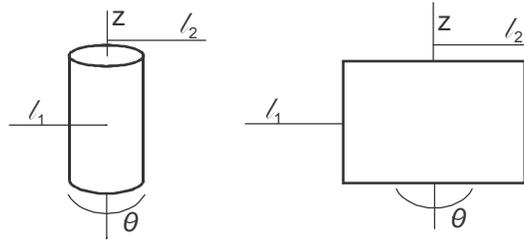


Figura 3.1: Unión de revolución (R).

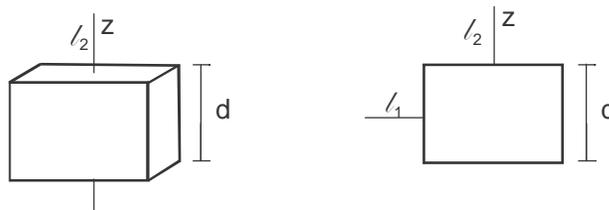


Figura 3.2: Unión prismática (P).

a lo largo del deslizamiento de una unión prismática, por z_i si la unión es la interconexión de los eslabones i y $i + 1$.

Las variables de unión, denotadas por θ_i para una unión de revolución y d_i para una unión prismática que representa el desplazamiento relativo entre uniones adyacentes.

Las uniones de un manipulador pueden ser actuadas eléctricamente, hidráulicamente o neumáticamente.

El número de uniones determina el número de grados de libertad (DOF) del manipulador.

Típicamente un manipulador debería poseer al menos seis grados de libertad independientes: tres para la posición y tres para la orientación. Si el manipulador tiene menos de seis grados de libertad, el brazo no puede alcanzar cualquier punto en su medio ambiente de trabajo con orientación arbitraria. Por otro lado, un manipulador con más de seis grados de libertad, es considerado cinemáticamente redundante.

El espacio de trabajo de un manipulador es el volumen alcanzable por el efector final cuando todos los movimientos posibles son ejecutados. Este espacio de trabajo es delimitado por la geometría del manipulador, así como por las limitantes mecánicas de las uniones que lo componen.

3.2.2 Disposiciones cinemáticas

A pesar de que un manipulador es en principio un dispositivo de propósito general, en la práctica, los manipuladores son diseñados con una función en particular en mente, como pueden ser soldar, sujetar piezas grandes o ensamblar. Estas aplicaciones indican la selección de varios parámetros de diseño del manipulador, incluyendo su estructura cinemática.

Es por eso que los robots manipuladores pueden ser clasificados por algunos criterios tales como su geometría, o la manera en la que son controlados. A continuación se presenta una clasificación de acuerdo a su geometría.

Los manipuladores industriales en su mayoría tienen seis grados de libertad, donde tres de estos seis grados de libertad se encuentran en la muñeca o actuador final y su propósito es el de orientar este actuador, [Murray, 1994]. La mayoría de estos manipuladores caen en los cinco tipos geométricos que a continuación se describen.

- Articulado (RRR)
- Esférico (RRP)
- SCARA (RRP)
- Cilíndrico (RPP)
- Cartesiano (PPP)

Configuración articulada (RRR)

Este manipulador también es conocido como de revolución o antropomórfico, como se muestra en la Figura 3.3. Dos diseños de revolución comunes son del tipo Elbow como el PUMA o el eslabón paralelogramo como el Milacron Cincinnati.

En este arreglo, eje de la unión z_2 es paralelo a z_1 y ambos son perpendiculares a z_0 .

Configuración esférica (RRP)

Reemplazando el tercer eslabón en la configuración de revolución por una unión prismática, se obtiene la configuración esférica que se muestra en la Figura 3.4.

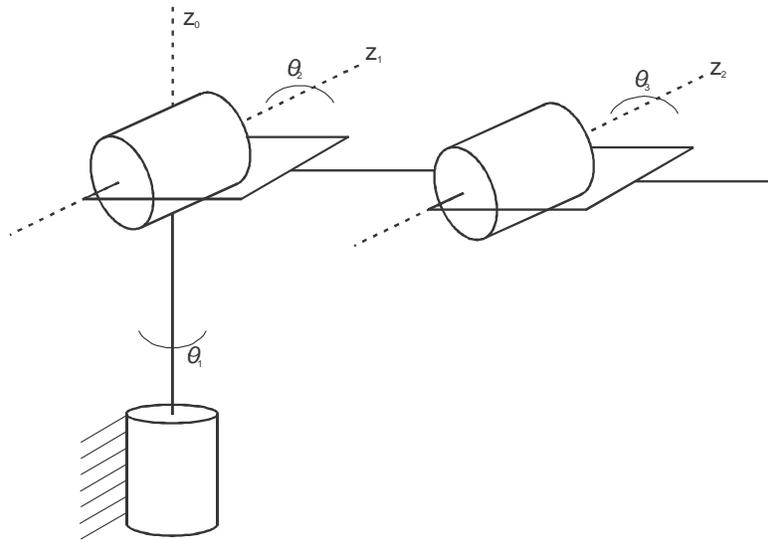


Figura 3.3: Estructura del manipulador ELBOW

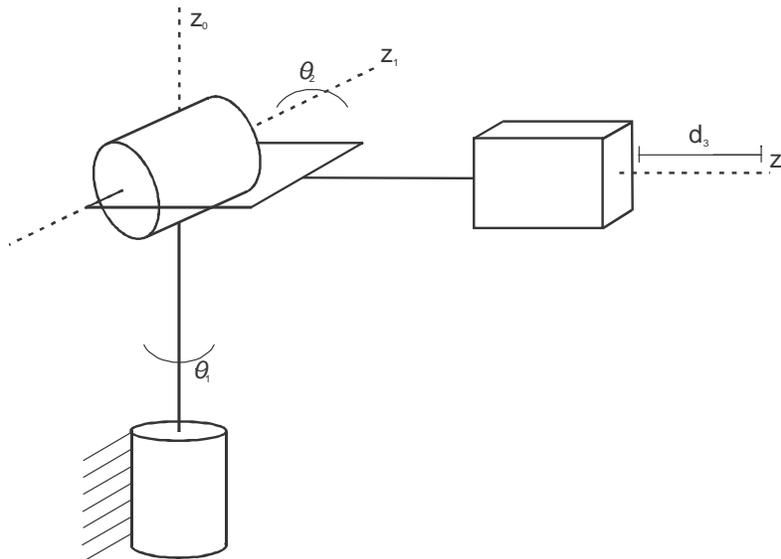


Figura 3.4: Configuración del manipulador esférico

El término de configuración esférica deriva del hecho de que las coordenadas esféricas definen la posición del efector final con respecto a una representación cuyo origen se fija en la intersección de los ejes z_1 y z_2 . Un manipulador que comparte esta configuración es el manipulador Stanford.

Configuración SCARA (RRP)

El robot manipulador llamado Robot Articulado de Limitación Selectiva para Ensamblado ó SCARA (por sus siglas en inglés) es una configuración relativamente reciente. A pesar de que el SCARA tiene una configuración RRP es seguramente diferente de la configuración esférica en apariencia y en su rango de aplicaciones. En la configuración SCARA, los ejes z_0 , z_1 y z_2 son paralelos, como se muestra en la Figura 3.5.

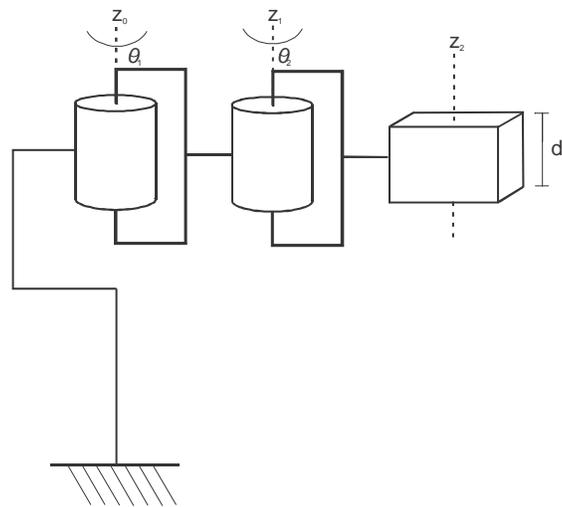


Figura 3.5: Configuración del manipulador SCARA

Configuración Cilíndrica (RPP)

En la configuración cilíndrica la primera unión es de revolución y produce una rotación sobre la base, mientras que la segunda y tercera unión son prismáticas. Como su nombre lo indica, las variables de las uniones están en coordenadas cilíndricas con respecto a la base. En la Figura 3.6 se muestra esta clase de configuración.

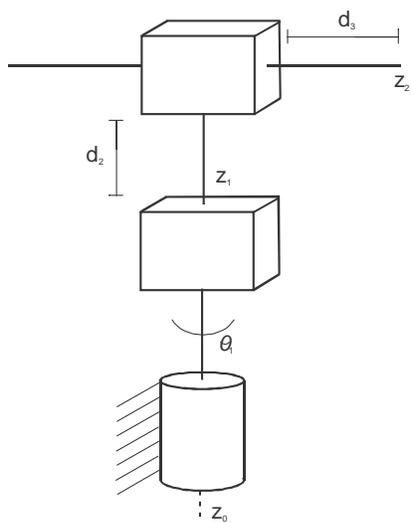


Figura 3.6: Configuración del manipulador cilíndrico

Configuración cartesiana (PPP)

Un manipulador cuyas primeras tres uniones son prismáticas se conoce como manipulador cartesiano. Para el manipulador cartesiano, las variables de unión son las coordenadas cartesianas del efector final con respecto a la base. Como es de esperarse, la descripción cinemática de este manipulador es la más simple de todas las configuraciones [Murray, 1994]. En la Figura 3.7 se muestra la configuración de este robot manipulador.

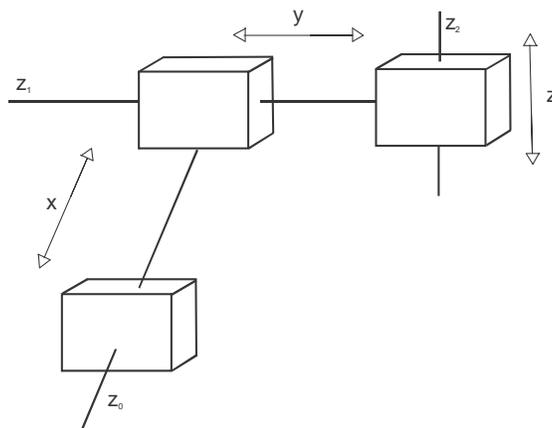


Figura 3.7: Configuración del manipulador cartesiano

3.3 Movimientos rígidos y transformaciones homogéneas

En esta sección se describen brevemente algunas herramientas matemáticas necesarias para el análisis y modelado de los manipuladores. En particular, se analizarán las transformaciones homogéneas de coordenadas aplicadas directamente a los eslabones de los manipuladores [Spong, 1989].

3.3.1 Posición y orientación de un cuerpo rígido

Los eslabones de un brazo manipulador pueden ser modelados como un sistema de cuerpos rígidos. La ubicación de cada cuerpo rígido es representada entonces por su *posición* y su *orientación*.

La posición puede ser representada por las coordenadas de un punto arbitrario fijo, con respecto del cuerpo. Sea $O - xyz$ el marco de coordenadas fijo al suelo y sea el punto O' un punto arbitrario fijo al cuerpo rígido, como se muestra en la Figura 3.8. Entonces, la posición del cuerpo rígido es representada con referencia al marco de coordenadas $O - xyz$ por

$$\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

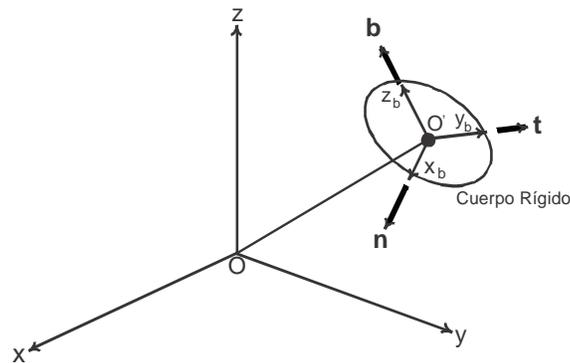


Figura 3.8: Posición y orientación de un cuerpo rígido.

Para representar la orientación del cuerpo rígido, tres ejes coordenados x_b , y_b y z_b se fijan al cuerpo rígido como se muestra en la Figura 3.8. Estos ejes forman otro marco de coordenadas $O' - x_b y_b z_b$, el cual se mueve con el cuerpo rígido. La orientación del cuerpo rígido es entonces representada por las direcciones de los ejes coordenados. Sea \mathbf{n} , \mathbf{t} y \mathbf{b} vectores unitarios apuntando

en la dirección de los ejes coordenados, x_b , y_b y z_b respectivamente. Las componentes de cada vector unitario son cosenos direccionales de cada eje coordenado proyectado en el marco de coordenadas fijo $O - xyz$. Por conveniencia, se combinan los tres vectores juntos y se escriben usando la matriz \mathbf{R} de 3×3 :

$$\mathbf{R} = [\mathbf{n}, \mathbf{t}, \mathbf{b}] \quad (3.2)$$

La matriz \mathbf{R} describe por completo la orientación del cuerpo rígido con referencia al marco de coordenadas fijo $O - xyz$. Se observa que los vectores columna de la matriz \mathbf{R} son ortogonales entre si

$$\mathbf{n}^T \mathbf{t} = 0 \quad \mathbf{t}^T \mathbf{b} = 0 \quad \mathbf{b}^T \mathbf{n} = 0 \quad (3.3)$$

además, tienen longitud unitaria

$$|\mathbf{n}| = 1 \quad |\mathbf{t}| = 1 \quad |\mathbf{b}| = 1 \quad (3.4)$$

(donde $|\mathbf{a}|$ es la norma Euclidiana del vector \mathbf{a}). A la matriz en la cual todos sus vectores columna tienen longitud unitaria y son ortogonales entre si, se le llama *matriz ortogonal*.

3.3.2 Transformación de coordenadas

Imaginemos un punto P situado arbitrariamente en el espacio como se muestra en la Figura 3.9.

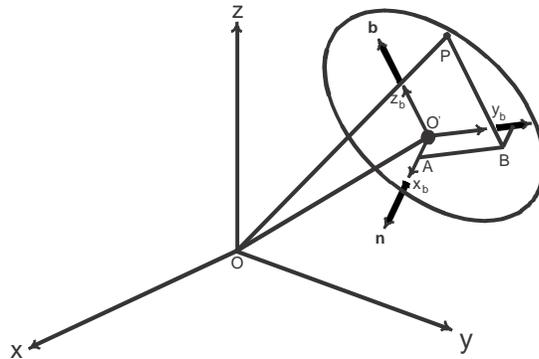


Figura 3.9: Transformación de coordenadas.

Representamos entonces las coordenadas del punto P en referencia al marco de coorde-

nadas $O - xyz$ por

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

La posición del punto P puede ser representada también en referencia al marco de coordenadas fijo al cuerpo rígido, $O' - x_b y_b z_b$, por

$$\mathbf{x}^b = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

El superíndice b indica que el vector es definido en referencia al marco de coordenadas del cuerpo. Encontremos ahora la relación entre los dos sistemas de coordenadas. Esta relación define la transformación de coordenadas entre el marco fijo y el marco de coordenadas del cuerpo. La posición y orientación del cuerpo rígido, que son representadas por el vector \mathbf{x}_0 de dimensiones 3×1 y la matriz \mathbf{R} de dimensiones 3×3 . Como se muestra en la Figura 3.9, el punto P puede ser alcanzado mediante los puntos O' , A y B . Esto se representa de manera matemática como

$$\overrightarrow{\mathbf{OP}} = \overrightarrow{\mathbf{OO}'} + \overrightarrow{\mathbf{O'A}} + \overrightarrow{\mathbf{AB}} + \overrightarrow{\mathbf{BP}} \quad (3.7)$$

donde $\overrightarrow{\mathbf{OP}} = \mathbf{x}$ y $\overrightarrow{\mathbf{OO}'} = \mathbf{x}_0$. Se puede apreciar que los vectores $\overrightarrow{\mathbf{O'A}}$, $\overrightarrow{\mathbf{AB}}$, $\overrightarrow{\mathbf{BP}}$ son paralelos a los vectores unitarios \mathbf{n} , \mathbf{t} , y \mathbf{b} , respectivamente, y que sus longitudes están dadas por \mathbf{u} , \mathbf{v} y \mathbf{w} . De esta forma podemos reescribir la expresión anterior como:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{un} + \mathbf{vt} + \mathbf{wb} \quad (3.8)$$

de (3.2) y (3.4) podemos escribir lo anterior como

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{R}\mathbf{x}^b \quad (3.9)$$

la ecuación (3.9) provee de la transformación de coordenadas deseada de las coordenadas del cuerpo \mathbf{x}^b al marco de coordenadas fijo \mathbf{x} . Se puede ver que esta transformación de coordenadas está dada en términos de \mathbf{x}_0 y \mathbf{R} , la cual representa la posición y orientación del cuerpo rígido, o visto de otra manera, la posición y orientación del marco de coordenadas del cuerpo relativo a el marco fijo.

Si premultiplicamos ambos lados de la ecuación por la transpuesta \mathbf{R}^T de la matriz \mathbf{R} , resulta la expresión

$$\mathbf{R}^T \mathbf{x} = \mathbf{R}^T \mathbf{x}_0 + \mathbf{R}^T \mathbf{R} \mathbf{x}^b \quad (3.10)$$

el producto matricial $R^T R$ en el lado derecho de la ecuación resulta

$$\mathbf{R}^T \mathbf{R} = \begin{bmatrix} n^T n & n^T t & n^T b \\ t^T n & t^T t & t^T b \\ b^T n & b^T t & b^T b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

de esta manera la ecuación se reduce a

$$\mathbf{x}^b = -\mathbf{R}^T \mathbf{x}_0 + \mathbf{R}^T \mathbf{x} \quad (3.12)$$

La ecuación representa la transformación de coordenadas del marco fijo a las coordenadas del cuerpo, eso es, la inversa de la transformada original. Así, la transformación inversa es obtenida simplemente usando la matriz transpuesta de la matriz \mathbf{R} . Además, como la ecuación (3.10) lo muestra, la inversa de una matriz ortonormal es simplemente dada por la transpuesta de la matriz:

$$\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^T \quad (3.13)$$

En conclusión, la matriz de rotación \mathbf{R} tiene tres distintos significados físicos. Esta puede representar

1. La orientación del marco de coordenadas $O' - x_b y_b z_b$ relativo a $O - xyz$, donde el vector columna representa los cosenos direccionales de cada eje de $O' - x_b y_b z_b$ proyectados en el marco $O - xyz$,
2. La transformación de coordenadas de $O' - x_b y_b z_b$ a $O - xyz$,
3. La rotación de un vector en el marco de coordenadas $O - xyz$.

Las tres proposiciones anteriores son equivalentes en el sentido de que, usando cualquiera de las tres, podemos derivar las otras dos [Asada, 1986].

3.3.3 Ángulos de euler

En la sección previa, usamos la matriz \mathbf{R} de 3×3 , para representar la orientación de un cuerpo rígido o del marco de coordenadas fijo al cuerpo. Sin embargo, los elementos de la matriz no son independientes. La matriz tiene nueve elementos en total, los cuales están sujetos a las condiciones de ortogonalidad y las condiciones de longitud unitaria. Existen seis de esas condiciones, por lo que

sólo tres de los nueve elementos son independientes. En otras palabras, la representación matricial de la orientación es *redundante*. En esta sección, una representación de la orientación del cuerpo rígido que sólo utiliza tres variables independientes es discutida.

Consideremos las tres rotaciones del marco $O - xyz$ que se muestra en la Figura 3.10. Primero, el marco de coordenadas es rotado un ángulo ϕ en torno al eje z (Figura 3.10 (a)). Ahora, el nuevo marco $O - x'y'z'$ es rotado un ángulo θ en torno al eje x' (Figura 3.10 (b)). Finalmente, el marco resultante $O - x''y''z''$ es ahora rotado un ángulo ψ en torno al eje z'' . El marco de coordenadas resultante $O - x_b y_b z_b$ es mostrado en la Figura 3.10 (c). Los tres ángulos, ϕ , θ y ψ , determinan la orientación del marco de coordenadas y son llamados *ángulos de Euler*. Los ángulos de Euler son independientes puesto que cada uno de ellos puede variar arbitrariamente.

Para una orientación arbitraria del marco de coordenadas $O - x_b y_b z_b$, los ángulos de Euler pueden ser determinados de la siguiente manera. Sea la línea Ox' en la figura (c) la intersección entre el plano $x_b - y_b$ y el plano $x - y$. Esta intersección es llamada *línea de nodos*. El ángulo ψ es definido como el ángulo entre la línea de nodos y el eje x_b en la figura (c), mientras que el ángulo ϕ es el ángulo entre el eje x y la línea de nodos. El ángulo θ , por otro lado, es definido como el ángulo entre el eje z y el eje $z_b = z''$. Todos los ángulos son medidos en sentido de la mano derecha. Por lo tanto, los tres ángulos pueden ser definidos para una orientación arbitraria del marco de coordenadas $O - x_b y_b z_b$ relativo al marco fijo $O - xyz$.

Los ángulos de Euler son variables independientes que determinan la orientación de un marco de coordenadas de manera única. Encontremos ahora la matriz de rotación \mathbf{R} que representa las tres rotaciones consecutivas asociadas a los ángulos de Euler. Considerar la transformación de coordenadas asociada con la rotación ϕ . Las coordenadas $\mathbf{x}' = [x', y', z]^T$ son transformadas en las coordenadas $\mathbf{x} = [x, y, z]^T$ mediante la matriz de rotación de 3×3 $R_z(\phi)$, la cual se define como:

$$\mathbf{x} = R_z(\phi) \mathbf{x}'$$

donde

$$R_z(\phi) = \begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

Similarmente, la transformación de coordenadas de $\mathbf{x}'' = [x'', y'', z'']^T$ a \mathbf{x}' asociada con la

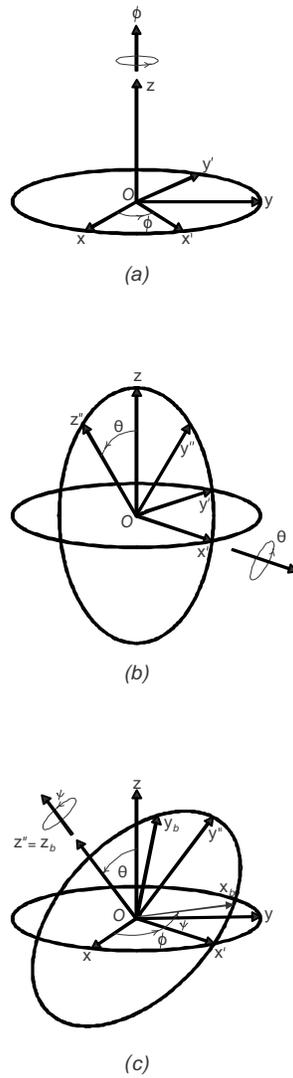


Figura 3.10: Las tres rotaciones consecutivas usadas para definir los ángulos de Euler.

rotación θ está dada por:

$$\mathbf{x}' = R_{z'}(\theta) \mathbf{x}''$$

donde

$$R_{z'}(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

Finalmente, para la rotación ψ , tenemos:

$$\mathbf{x}'' = R_{z''}(\psi) \mathbf{x}^b$$

donde

$$R_{z''}(\psi) = \begin{bmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

Combinando las tres transformaciones de coordenadas anteriores tenemos

$$\mathbf{x} = R_z(\phi) R_{z'}(\theta) R_{z''}(\psi) \mathbf{x}^b \quad (3.17)$$

Podemos reemplazar el producto matricial anterior por:

$$R(\phi, \theta, \psi) = R_z(\phi) R_{z'}(\theta) R_{z''}(\psi) \quad (3.18)$$

La matriz $R(\phi, \theta, \psi)$ provee la transformación de coordenadas de \mathbf{x}^b a \mathbf{x} . Como resultado de la equivalencia entre la matriz de transformación de coordenadas y la matriz de rotación discutida en la Sección 3.3.1, la matriz $R(\phi, \theta, \psi)$ representa la rotación a partir del marco de coordenadas $O - xyz$ hacia el marco de coordenadas $O - x_b y_b z_b$. Además, los vectores columna de la matriz $R(\phi, \theta, \psi)$ representan los cosenos direccionales de los ejes coordenados x_b , y_b y z_b con referencia al marco $O - xyz$.

Otro conjunto de ángulos independientes son los ángulos de *giro*, *desviación* y *elevación*, los cuales son ampliamente utilizados en robótica para describir la orientación de cuerpos rígidos. El ángulo de giro θ_z representa una rotación en torno al eje z , mientras que los ángulos de desviación y elevación representan rotaciones consecutivas en torno a los ejes x y y respectivamente. Usando la notación de la Figura 3.10, la matriz de rotación asociada a giro-desviación-elevación es $\mathbf{R}_z(\theta_z)\mathbf{R}_{y'}(\theta_{y'})\mathbf{R}_{x''}(\theta_{x''})$.

3.3.4 Transformaciones homogéneas

En esta sección se muestra un método útil para representar transformaciones de coordenadas de manera compacta.

Recordemos la ecuación (3.9):

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{R}\mathbf{x}^b$$

El primer término del lado derecho de la ecuación representa la transformación translacional, mientras que el segundo término representa la transformación rotacional. El objetivo de esta sección es derivar una representación simple de la transformación de coordenadas, en la cual, ambas transformaciones (rotacional y translacional) son dadas por una sola matriz. Para este fin, definamos entonces los vectores de 4×1 :

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{X}^b = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ 1 \end{bmatrix}$$

y la matriz de 4×4 :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} & \mathbf{R} & & \\ & & \mathbf{x}_0 & \\ & & & \\ 0 & & & 1 \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

Los vectores originales \mathbf{x} y \mathbf{x}^b son aumentados añadiendo un "1" como cuarto elemento y la matriz \mathbf{R} es extendida combinandola con el vector de posición \mathbf{x}_0 , con tres 0's y un 1 en la cuarta fila.

La ecuación (3.9) puede reescribirse entonces como:

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}\mathbf{X}^b \quad (3.20)$$

esto es:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{x}_0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

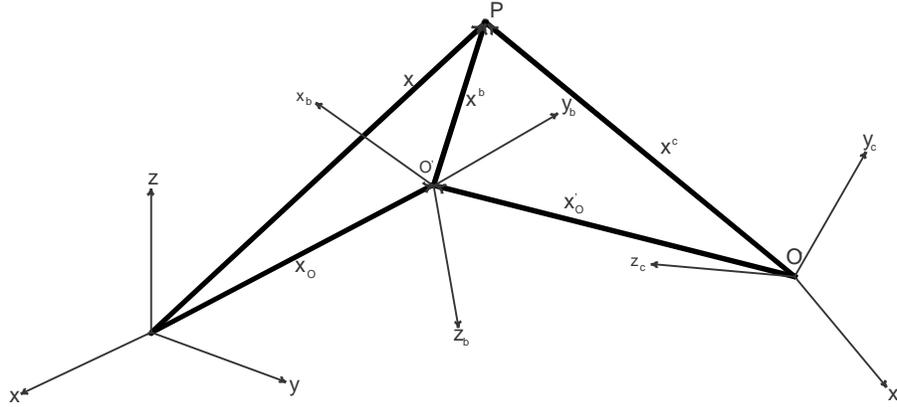


Figura 3.11: Transformaciones homogéneas consecutivas.

La matriz \mathbf{A} representa la posición y orientación del marco $O - x_b y_b z_b$. Los dos términos del lado derecho de la ecuación (3.9) son reducidos a un sólo término en la ecuación (3.20). La transformación de coordenadas dada por la ecuación (3.20) es conocida como *transformación homogénea*.

Lo compacto de la transformación homogénea es particularmente ventajoso cuando representamos transformaciones consecutivas. Sea $O^n - x_c y_c z_c$ otro marco de coordenadas, como muestra la Figura 3.11, y \mathbf{x}^c las coordenadas del punto P con referencia al marco $O^n - x_c y_c z_c$. Entonces:

$$\mathbf{x}^b = \mathbf{x}'_0 + \mathbf{R}'\mathbf{x}^c \quad (3.22)$$

donde \mathbf{x}'_0 y \mathbf{R}' son el vector de 3×1 y la matriz de 3×3 asociados con la transformación de coordenadas de \mathbf{x}^c a \mathbf{x}^b . Sustituyendo (3.22) en (3.9) obtenemos:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{R}\mathbf{x}'_0 + \mathbf{R}\mathbf{R}'\mathbf{x}^c \quad (3.23)$$

Ahora hay tres términos del lado derecho de la ecuación (3.23). Mientras la transformación se repita, el número de términos del lado derecho aumenta. En general, n transformaciones de coordenadas consecutivas generan un polinomio de n -ésimo orden, el cual consiste de $n+1$ términos no-homogéneos. Las transformaciones homogéneas, por otra parte, proveen de una forma compacta de representar cualquier transformación consecutiva con un sólo término. Consideremos n transformaciones consecutivas desde el marco n hacia atrás al marco 0 . Sea A_i^{i-1} la matriz de 4×4 asociada con la transformación homogénea del marco i al marco $i - 1$; entonces, un vector de

posición \mathbf{X}^n en el marco n es transformado a \mathbf{X}^0 en el marco 0 por

$$\mathbf{X}^0 = \mathbf{A}_1^0 \mathbf{A}_2^1 \dots \mathbf{A}_n^{n-1} \mathbf{X}^n \quad (3.24)$$

Por lo tanto, las transformaciones consecutivas son completamente descritas por un solo término.

Una matriz de 4×4 representa la posición y orientación de un marco coordenado. Esta también representa la translación y rotación del marco de coordenadas. Por lo tanto, la propiedad de equivalencia para matrices de rotación también es aplicable a matrices de 4×4 , en las cuales, ambas, la traslación y rotación están involucradas [Asada, 1986].

3.4 Modelo cinemático de brazos manipuladores

3.4.1 Cadenas cinemáticas abiertas

Un brazo manipulador es, básicamente, una serie de cuerpos rígidos en una estructura cinemática. En la Figura 3.12, se muestra un brazo manipulador modelado como una serie de cuerpos rígidos unidos.

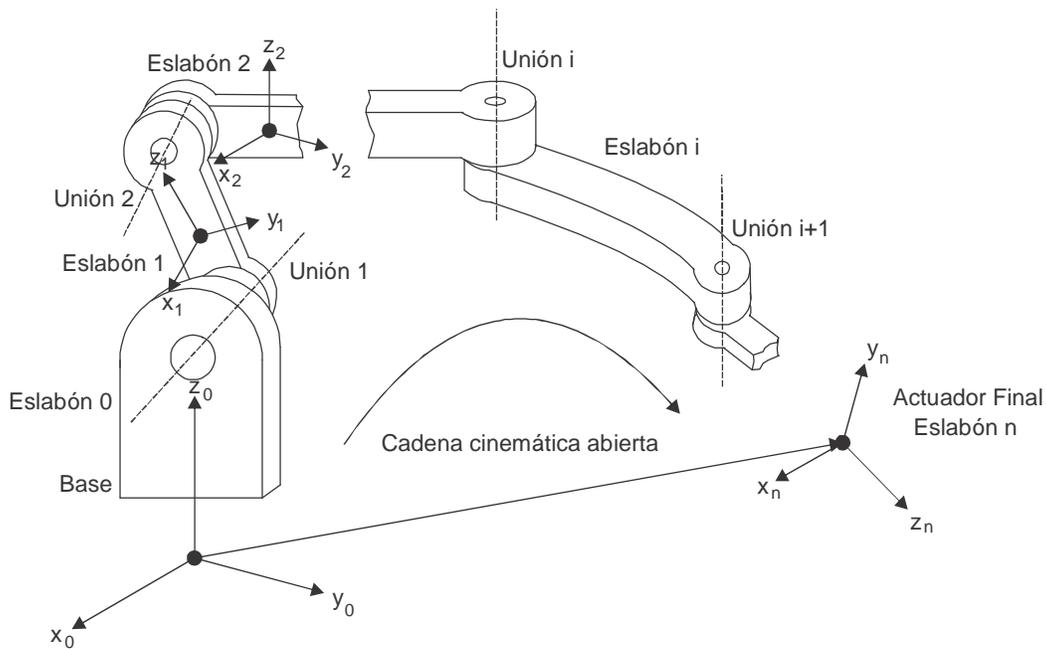


Figura 3.12: Cadena cinemática abierta

Esa estructura es conocida como cadena cinemática abierta. La mayoría de robots manipuladores industriales y de investigación son cadenas cinemáticas abiertas o estructuras equivalentes. Se asume que todos los brazos manipuladores analizados en esta sección son cadenas cinemáticas abiertas.

Cada eslabón de la cadena cinemática puede ser numerado desde 0 hasta n . El eslabón base, el cual está posado sobre el suelo, es numerado 0 por conveniencia. El eslabón más distante es entonces numerado n . Siendo que el manipulador realiza tareas mediante el movimiento de un efector final adjunto al último eslabón, nuestro mayor interés es analizar el movimiento de este último eslabón [Shilling, 1990].

Para representar la posición y orientación del efector final, fijaremos un marco de coordenadas $O_n - x_n y_n z_n$ al último eslabón. La ubicación del marco de coordenadas es descrito en referencia a otro marco de coordenadas $O_0 - x_0 y_0 z_0$, fijo al suelo (es decir, al eslabon base), como se muestra en la figura. El movimiento del efector final es causado por el movimiento de los eslabones entre la base y el último eslabón. Así, la ubicación del efector final puede ser determinada investigando la posición y orientación de cada eslabón en serie, desde la base hasta la punta del brazo. Para este fin, adjuntamos un marco de coordenadas a cada uno de los eslabones nombrando a los marcos $O_i - x_i y_i z_i$ para el eslabon i . Describimos entonces la posición y orientación del marco $O_i - x_i y_i z_i$ en relación al marco anterior $O_{i-1} - x_{i-1} y_{i-1} z_{i-1}$ mediante el uso de una matriz de dimensiones 4 x 4 que describe la transformación homogénea entre estos marcos. La posición y orientación del efector final es entonces obtenida mediante las transformaciones homogéneas consecutivas desde el último marco hacia el marco de la base. Siendo que el brazo es una cadena cinemática abierta, podemos aplicar estas transformaciones en serie para encontrar la ubicación del efector final en referencia al marco de la base.

El movimiento relativo de un par de eslabones adyacentes es causado por el movimiento de la unión que conecta estos eslabones. Existe un total de n uniones involucradas en el movimiento de un brazo que consiste de $(n + 1)$ eslabones. Nos referimos a la unión entre el eslabón $i - 1$ y el eslabón i como la unión i . Cada unión es operada por un actuador individual, el cual causa el desplazamiento de la unión. De esta manera, la posición y orientación del efector final son determinadas por el desplazamiento de las n uniones. El modelo cinemático de un brazo pretende encontrar la relación directa entre la posición del efector final y los desplazamientos de las uniones.

3.4.2 La notación Denavit-Hartenberg

La notación de Denavit-Hartenberg es introducida como un método sistemático para encontrar la relación cinemática entre un par de eslabones adyacentes dentro de una cadena cinemática abierta. El método se basa en la representación matricial de la orientación y posición de un cuerpo rígido. Este utiliza un número mínimo de parámetros para describir por completo las relaciones cinemáticas del cuerpo en cuestión [Asada, 1986].

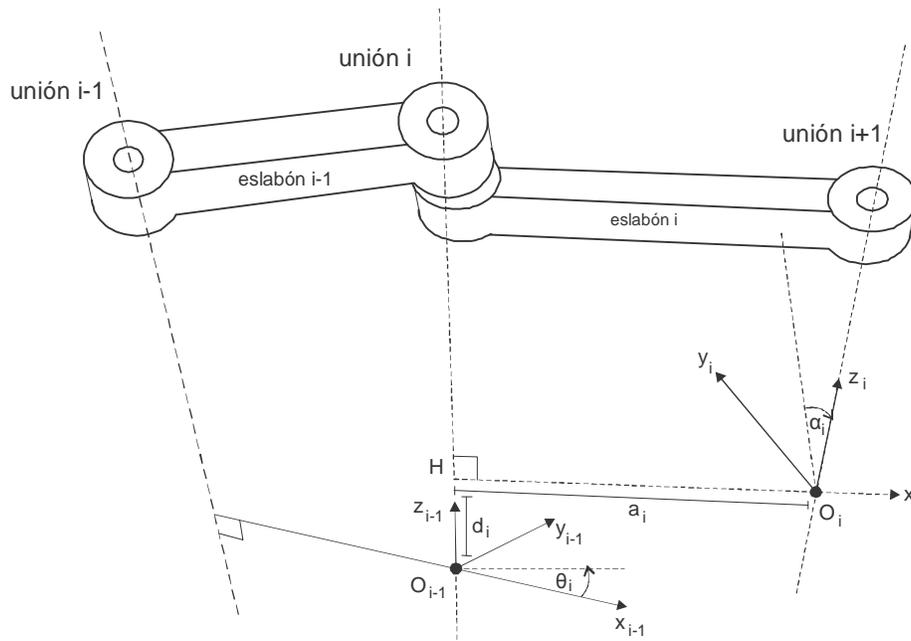


Figura 3.13: La notación de Denavit-Hartenberg.

La Figura 3.13 muestra un par de eslabones adyacentes, el eslabón $i + 1$ y el eslabón i , y sus uniones asociadas $i - 1$, i e $i + 1$. La línea $H_i O_i$ en la Figura 3.13 es la línea normal común a los ejes de las uniones i e $i + 1$. La relación entre los dos eslabones es descrita por la posición relativa y la orientación de los dos marcos de coordenadas adjuntos a los dos eslabones. En la notación de Denavit-Hartenberg, el origen del $i - \text{ésimo}$ marco de coordenadas O_i se encuentra en la intersección de los ejes de la unión $i + 1$ y la línea normal común entre los ejes de las uniones i e $i + 1$, como se muestra en la Figura 3.13. Es importante notar que el marco de coordenadas del eslabón i está en la unión $i + 1$ y no en la unión i . El eje x_i es una extensión de la línea normal común, mientras que el eje z_i pasa a través del eje de la unión $i + 1$. Finalmente, el eje y_i es elegido

tal que el marco de coordenadas resultante $O_i - x_i y_i z_i$ forma un sistema coordenado que sigue el principio de la mano derecha.

La ubicación relativa de los dos marcos de coordenadas puede ser determinado mediante los siguientes cuatro parámetros:

a_i es la longitud de la línea normal

d_i es la distancia entre el origen O_{i-1} y el punto H_i

α_i es el ángulo entre los ejes de la unión i y el eje z_i en el sentido de la regla de la mano derecha

θ_i es el ángulo entre el eje x_{i-1} y la línea normal común $H_i O_i$ medido en relación al eje z_{i-1} siguiendo la regla de la mano derecha.

Los parámetros a_i y α_i son parámetros constantes y pueden ser determinados por la geometría del eslabón: a_1 representa la longitud del eslabón y α_i es el ángulo de torsión entre los dos ejes de la unión.

Existen dos tipos de mecanismos en las uniones utilizadas en brazos manipuladores: unión de revolución, en la cuál el eslabón adyacente rota con respecto al eje de la unión, y la unión prismática, en la cuál el eslabón adyacente se traslada linealmente a lo largo del eje de la unión. Para una unión de revolución, el parámetro θ_i es la variable que representa el desplazamiento de la unión mientras que el parámetro d_i es constante. Para una unión prismática, por otro lado, el parámetro d_i representa el desplazamiento de la unión, mientras que θ_i es constante.

Ahora formulemos la relación cinemática entre un par de eslabones adyacentes usando matrices de 4×4 . Usando la propiedad de equivalencia, las matrices de 4×4 que representan la ubicación del marco de coordenadas i relativa a el marco $i-1$ pueden ser determinadas considerando la transformación de coordenadas asociada. La Figura 3.14 muestra los dos marcos de coordenadas $O_i - x_i y_i z_i$ y $O_{i-1} - x_{i-1} y_{i-1} z_{i-1}$, y el marco de coordenadas intermedio, $H_i - x'_i y'_i z'_i$ sujeto al punto H_i . Sean \mathbf{X}^i , \mathbf{X}' y \mathbf{X}^{i-1} los vectores de posición de 4×1 en $O_i - x_i y_i z_i$, $H_i - x'_i y'_i z'_i$, y $O_{i-1} - x_{i-1} y_{i-1} z_{i-1}$, respectivamente.

De la Figura 3.14, la transformación de coordenadas de \mathbf{X}^i a \mathbf{X}' está dada por

$$\mathbf{X}' = \mathbf{A}_i^{int} \mathbf{X}^i \quad (3.25)$$

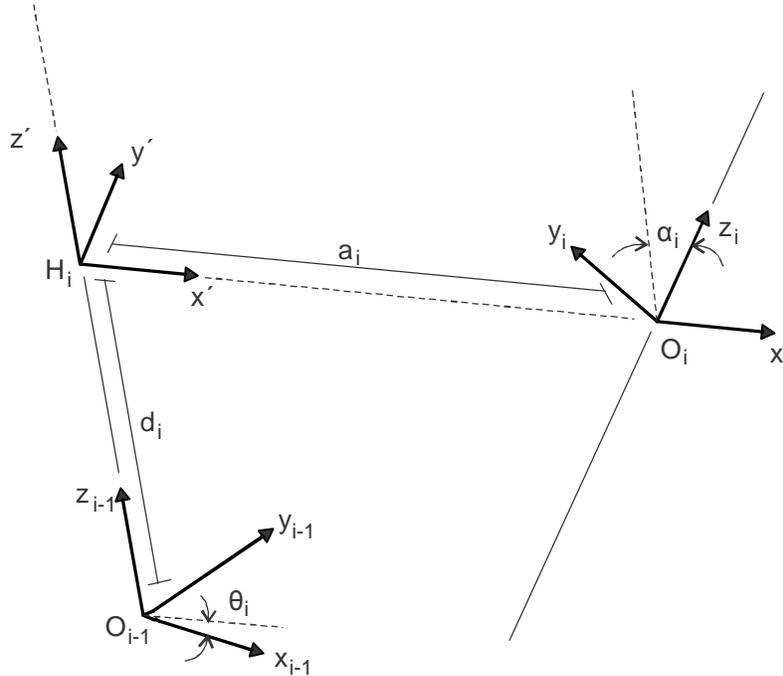


Figura 3.14: La relación entre dos marcos de coordenadas adyacentes en la notación de Denavit-Hartenberg.

donde

$$\mathbf{A}_i^{int} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_i \\ 0 & \cos \alpha_i & -\sin \alpha_i & 0 \\ 0 & \sin \alpha_i & \cos \alpha_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

De manera similar, la transformación de \mathbf{X}' a \mathbf{X}^{i-1} está dada por

$$\mathbf{X}^{i-1} = \mathbf{A}_{int}^{i-1} \mathbf{X}' \quad (3.27)$$

donde

$$\mathbf{A}_{int}^{i-1} = \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i & 0 & 0 \\ \sin \theta_i & \cos \theta_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

Combinando las ecuaciones (3.25) y (3.27) resulta

$$\mathbf{X}^{i-1} = \mathbf{A}_i^{i-1} \mathbf{X}^i \quad (3.29)$$

donde

$$\mathbf{A}_i^{i-1} = \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i \cos \alpha_i & \sin \theta_i \sin \alpha_i & a_i \cos \theta_i \\ \sin \theta_i & \cos \theta_i \cos \alpha_i & -\cos \theta_i \sin \alpha_i & a_i \sin \theta_i \\ 0 & \sin \alpha_i & \cos \alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

La matriz \mathbf{A}_i^{i-1} representa la posición y orientación del marco i relativa a el marco $i - 1$. Como se puede observar, los primeros tres vectores columna de 3×1 de \mathbf{A}_i^{i-1} contienen los cosenos direccionales de los ejes coordenados del marco i , mientras que los últimos vectores columna de 3×1 representan la posición del origen O_i .

3.4.3 Ejemplo: manipulador Elbow planar

El robot manipulador de codo plano (Elbow Planar) se muestra en la Figura 3.15. Los parámetros de los eslabones se muestran en la Tabla 3.1.

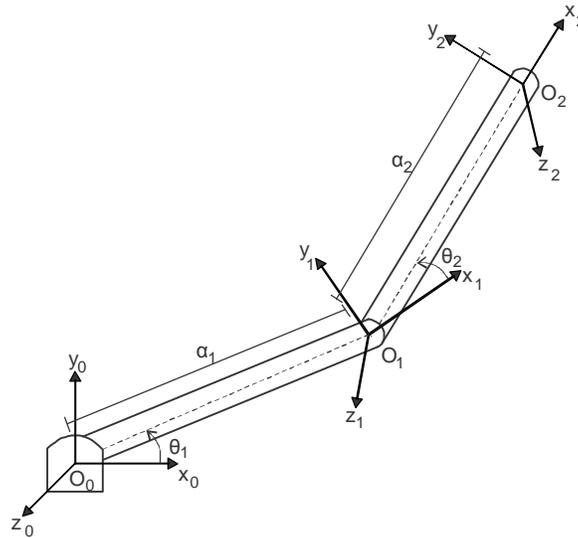


Figura 3.15: Manipulador planar de dos eslabones.

Tabla 3.1: Parámetros de unión para un manipulador planar de 2 eslabones.

Eslabón	a_i	α_i	d_i	θ_i
1	a_1	0	0	θ_1
2	a_2	0	0	θ_2

Determinando las matrices \mathbf{A} a partir de la ecuación (3.26):

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 & 0 & a_1 \cos \theta_1 \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 & 0 & a_1 \sin \theta_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

$$\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} \cos \theta_2 & -\sin \theta_2 & 0 & a_2 \cos \theta_2 \\ \sin \theta_2 & \cos \theta_2 & 0 & a_2 \sin \theta_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

Las matrices de transformación están dadas por:

$$\mathbf{T}_0^1 = \mathbf{A}_1 \quad (3.33)$$

$$\mathbf{T}_0^2 = \mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 \quad (3.34)$$

Sustituyendo (3.31) y (3.32) en (3.34) resulta

$$\mathbf{T}_0^2 = \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 & 0 & a_1 \cos \theta_1 \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 & 0 & a_1 \sin \theta_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta_2 & -\sin \theta_2 & 0 & a_2 \cos \theta_2 \\ \sin \theta_2 & \cos \theta_2 & 0 & a_2 \sin \theta_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

$$\mathbf{T}_0^2 = \begin{bmatrix} \cos(\theta_1 + \theta_2) & -\sin(\theta_1 + \theta_2) & 0 & a_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) + a_1 \cos \theta_1 \\ \sin(\theta_1 + \theta_2) & \cos(\theta_1 + \theta_2) & 0 & a_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) + a_1 \sin \theta_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

Notar que las primeras dos entradas de la última columna de \mathbf{T}_2 son las componentes de x y y del origen O_2 en el marco de coordenadas relativo a la base, esto es:

$$x = a_1 \cos \theta_1 + a_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \quad (3.37)$$

$$y = a_1 \sin \theta_1 + a_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \quad (3.38)$$

Las ecuaciones (3.37) y (3.38) son las coordenadas del efector final en el marco de coordenadas de la base. La submatriz de rotación de \mathbf{T}_0^2 proporciona la orientación del marco de coordenadas $O_2 - x_2y_2z_2$ relativa al marco de coordenadas de la base [Spong, 1989].

En el Capítulo siguiente se muestra el procedimiento mediante el cual se modelan los manipuladores en Bond Graph. Se muestra la diferencia entre el movimiento en dos y tres dimensiones, así como la teoría detrás de los motores desacoplados, parte fundamental en el modelado de manipuladores en tres dimensiones.

Capítulo 4

Modelado en Bond Graph de robots manipuladores

4.1 Introducción

En general, las partes mecánicas de varios sistemas (en particular, robots manipuladores) involucran cuerpos conectados que interactúan dinámicamente entre sí. En el estudio de estos cuerpos, se deben incorporar complejas relaciones cinemáticas no-lineales complejas a las ecuaciones de movimiento.

Un sin número de procedimientos para tratar las dinámicas de sistemas multicuerpo se han desarrollado. La metodología de Bond Graphs, no sólo trata con sistemas mecánicos, sino con cualquier forma de sistemas de potencia y ha sido usada también para el análisis de sistemas multicuerpo [Karnopp, 1996].

El propósito de este capítulo es el de mostrar la manera en la cual los sistemas multicuerpo son analizados usando Bond Graphs así como de introducir el modelado en tres dimensiones de dichos sistemas.

4.2 Modelado de robots manipuladores en dos dimensiones en Bond Graph

El modelado de manipuladores en dos dimensiones usando Bond Graphs se apreciará en esta sección en forma de una serie de ejemplos, en los cuales se analizarán, primero, cuerpos simples. Dicho

análisis proporcionará el camino sistemático para el análisis de cuerpos más complejos.

4.2.1 La barra rígida

La barra rígida de la Figura 4.1, moviéndose en el plano, es un componente estándar de sistemas mecánicos multicuerpo. Las tres localidades significativas en la barra son los dos extremos y su centro de masa. La importancia de los extremos se desprende del hecho de que estos definen las conexiones en la barra; el centro de masa es significativo debido a que es más conveniente escribir las ecuaciones de movimiento en ese punto específico [Cecarelli, 2008]. La barra rígida actúa como una restricción entre estas tres localidades espaciales.

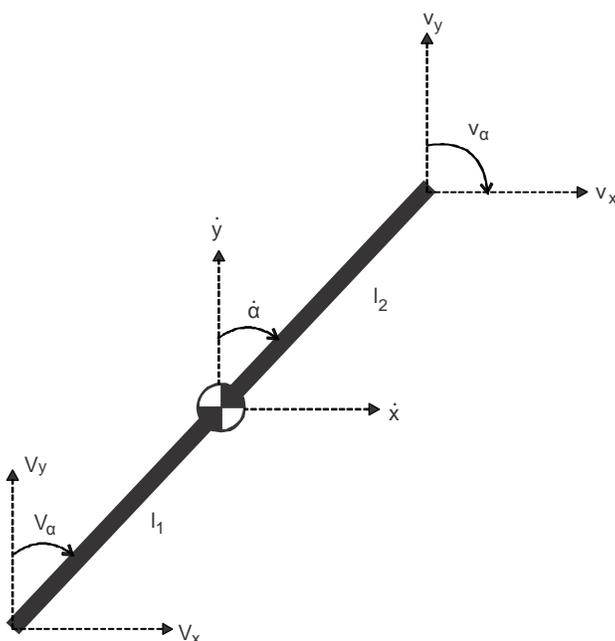


Figura 4.1: Barra rígida.

El movimiento es considerado respecto a un sistema de coordenadas absoluto: v_x y v_y son las componentes de velocidad de un extremo con respecto a este sistema de coordenadas, mientras que V_x y V_y son las componentes de la velocidad en el otro extremo; \dot{x} y \dot{y} son las componentes de la velocidad en el centro de masa. Estos tres puntos muestran la misma velocidad angular $\dot{\alpha} = v_\alpha = V_\alpha$. La distancia a partir del primer extremo al centro de masa es l_1 y la distancia del segundo extremo al centro de la masa es l_2 .

La cinemática de la barra es expresada por las siguientes ecuaciones:

$$\dot{x} = v_x - v_{x\alpha} \quad (4.1)$$

$$\dot{y} = v_y + v_{y\alpha} \quad (4.2)$$

$$V_x = \dot{x} - V_{x\alpha} \quad (4.3)$$

$$V_y = \dot{y} + V_{y\alpha} \quad (4.4)$$

donde $v_{x\alpha}$, $v_{y\alpha}$, $V_{x\alpha}$, $V_{y\alpha}$ son las componentes de la velocidad debido a la velocidad angular $\dot{\alpha}$ dada por las ecuaciones de transformación:

$$v_{x\alpha} = l_1 \cos \alpha \dot{\alpha} \quad (4.5)$$

$$v_{y\alpha} = l_1 \sin \alpha \dot{\alpha} \quad (4.6)$$

$$V_{x\alpha} = l_2 \cos \alpha \dot{\alpha} \quad (4.7)$$

$$V_{y\alpha} = l_2 \sin \alpha \dot{\alpha} \quad (4.8)$$

Las dinámicas de la barra están dadas por las tres ecuaciones,

$$\ddot{x} = \frac{\Delta f_x}{m}; \ddot{y} = \frac{\Delta f_y}{m}; \ddot{\alpha} = \frac{\Delta \tau}{J} \quad (4.9)$$

donde m y J son la masa y la inercia de la barra, respectivamente y Δf_x y Δf_y son las fuerzas netas actuando en las direcciones x y y en el centro de masa y $\Delta \tau$ es el par neto actuando en el centro de masa de la barra [Gawthrop, 1996].

El área dentro del cuadro punteado en la Figura 4.2 representa a la barra rígida, los seis bonds externos indican las conexiones en los extremos de la barra (4.9).

- Hay tres componentes etiquetados m_x , m_y y J , estos implementan las tres ecuaciones dinámicas.
- Hay una componente C etiquetada c , esta tiene rigidez cero y por lo tanto no afecta al comportamiento del sistema, pero su variable de flujo integrada correspondiente q es,

$$q = \int_0^{t_0} \alpha(t') dt' = \alpha + q_0 \quad (4.10)$$

Si inicializamos en $q_0 = 0$, $q = \alpha$ y por lo tanto proporciona una señal modulante para los transformadores.

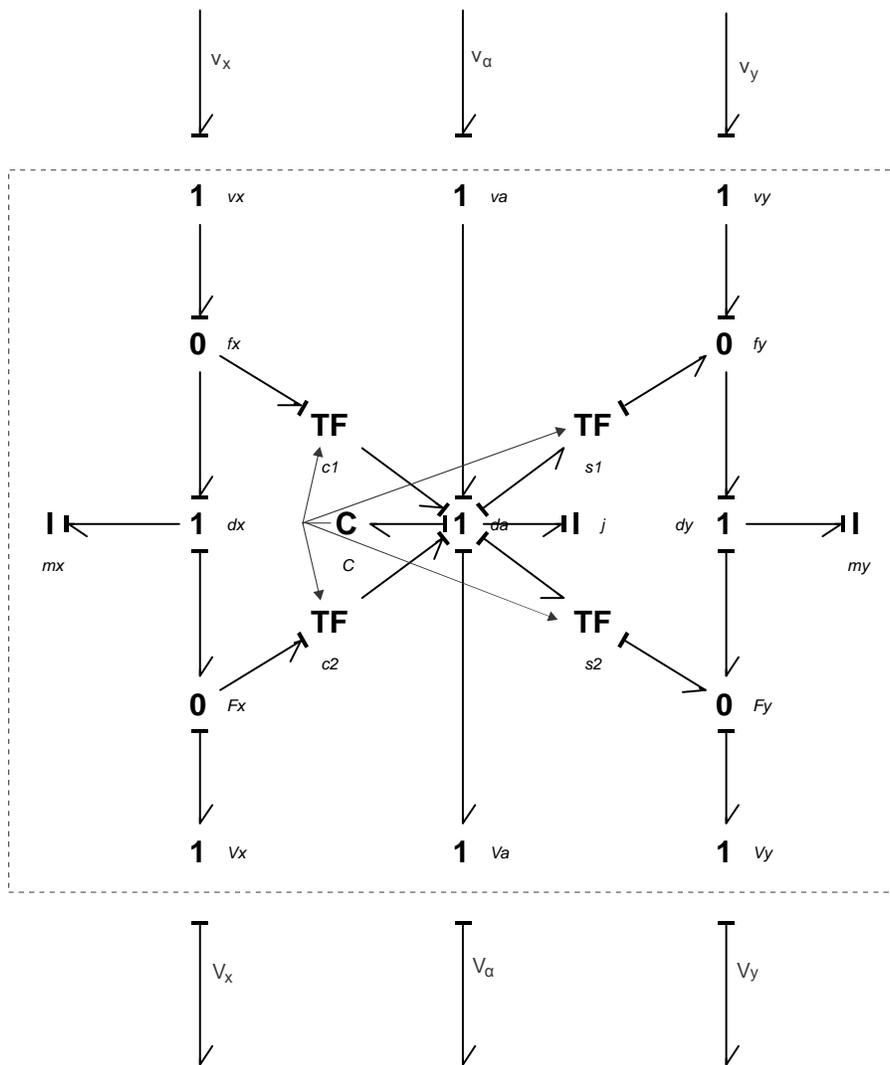


Figura 4.2: Bond graph de la barra rígida.

- Hay tres uniones-1 etiquetadas dx , dy y $d\alpha$.
 1. Estas tres uniones-1 transportan las tres velocidades asociadas con el centro de masa \dot{x} , \dot{y} y $\dot{\alpha}$, además.
 2. Estas tres uniones calculan cada una el esfuerzo neto actuando en el elemento- I correspondiente (Δf_x , Δf_y y $\Delta \tau$).
- Hay cuatro uniones-0 etiquetadas f_x , f_y , F_x , F_y .
 1. Estas cuatro uniones-0 transportan las componentes x y y de la fuerza asociada con las partes superior e inferior de la barra.
 2. Estas cuatro uniones implican las cuatro ecuaciones cinemáticas (ecuaciones (4.1) a (4.4))
- Hay cuatro transformadores etiquetados c_1 , s_1 , c_2 y s_2 .
 1. Estos cuatro transformadores implican las cuatro ecuaciones de transformación (ecuaciones (4.5) a (4.8)).
 2. Debido al principio de conservación de potencia, estos transformadores también implican las transformaciones de fuerza correspondientes. Los transformadores son modulados cada uno por α (generada por el elemento-C).

4.2.2 El péndulo simple

La Figura 4.3 muestra un péndulo simple construido por una varilla conectada a la parte superior de una estructura. Un par es aplicado a la parte superior del péndulo. Por simplicidad consideraremos que $l_1 = l_2 = l$, la fuerza de gravedad $u_1 = f_g$ actúa en el centro de masa [Gawthrop, 1996].

Debido a que el péndulo es un caso especial de la barra rígida, el bond graph es el mismo que el de la barra pero con algunos componentes adicionales, en particular,

- Fuentes de velocidad cero son conectadas a las uniones v_x y v_y que indican que la parte superior de la barra es fija.
- Fuentes de fuerza cero son conectadas a las uniones V_x y V_y para indicar que en el extremo inferior no existen fuerzas actuando.

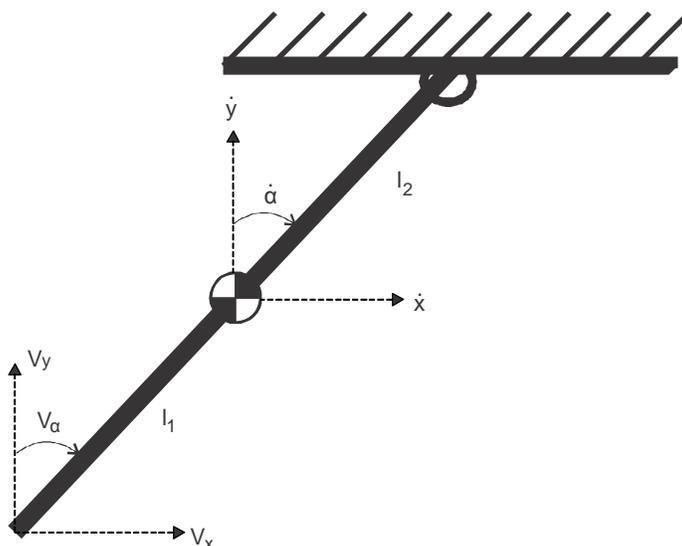


Figura 4.3: Un péndulo simple.

- Una fuerza es conectada a la unión dy para indicar que la gravedad está actuando en dirección negativa en el centro de masa.
- Una fuente de fuerza es conectada a la unión v_α para indicar el par aplicado.

Para este modelo en bond graph, sólo uno de los tres elementos-I puede tener causalidad integral, el único que tiene esa causalidad es el elemento correspondiente a la rotación que se muestra en la Figura 4.4.

Un peso de masa m_b y de pequeña dimensión podría ser añadido a la parte inferior de la varilla, el bond graph de la Figura 4.4 es idéntico al anterior, excepto que las dos fuentes de fuerza en la parte inferior han sido reemplazadas por componentes-I correspondientes a las velocidades x y y del contrapeso y una tercer entrada F_b ha sido añadida en la forma de una fuente adicional.

4.2.3 El péndulo doble

La figura 4.5 muestra un péndulo doble construido con péndulos simples. Por simplicidad, las barras son consideradas uniformes y de longitud $2l$. La inercia J sobre el centro es $J = ml^2/3$. El ángulo relativo θ_2 de la segunda barra con respecto a la primera es la diferencia de los ángulos absolutos α_1 y α_2 , $\theta_2 = \alpha_2 - \alpha_1$.

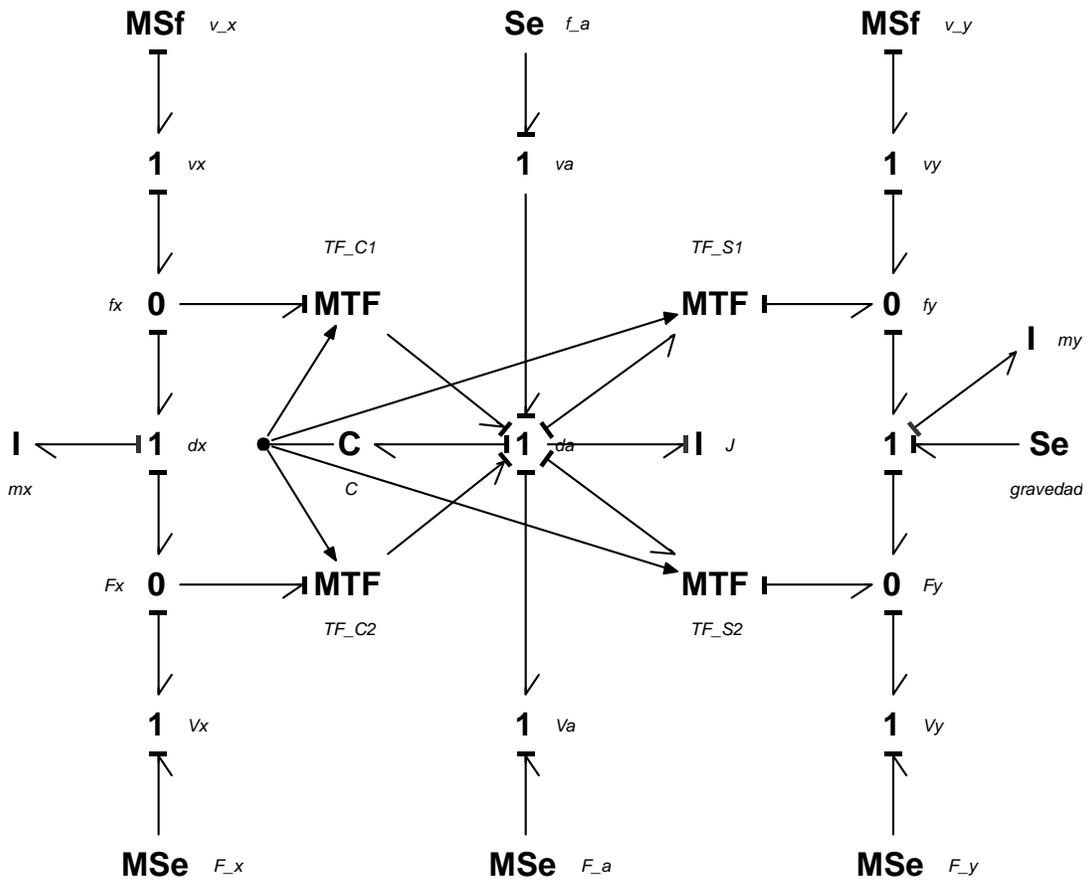


Figura 4.4: Bond graph del péndulo simple.

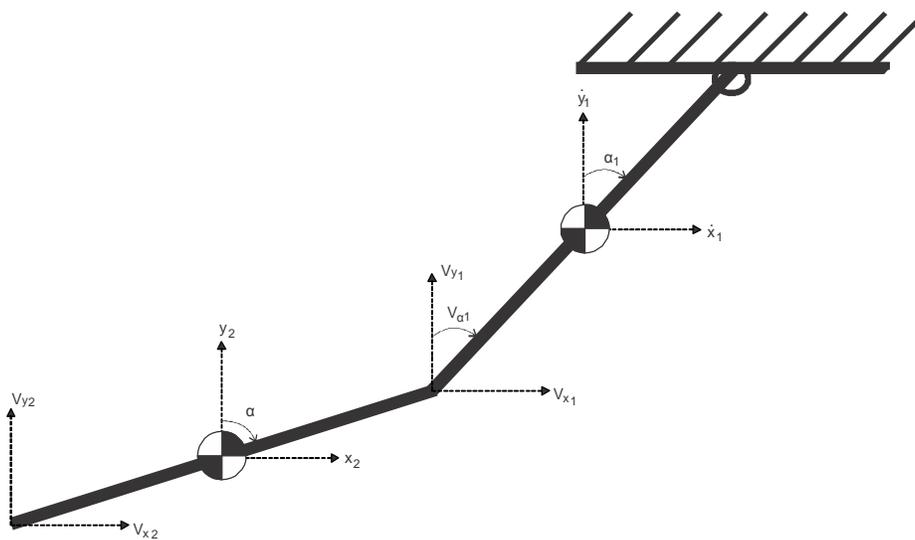


Figura 4.5: Un péndulo doble.

La Figura 4.6 muestra el bond graph correspondiente al péndulo doble. Una copia del bond graph de una simple barra ha sido añadida a otro del péndulo simple y conectada por dos bonds, lo cuál asegura que las velocidades de la parte inferior de la barra superior y la parte superior de la barra inferior sean las mismas.

4.2.4 Un robot manipulador en dos dimensiones en Bond Graph

Los manipuladores compuestos de eslabones rígidos conectados por uniones de revolución son usualmente analizados por medios recursivos Newton-Euler ó técnicas de Lagrange. Sin embargo, bond graphs proveen una técnica alternativa la cual es particularmente atractiva cuando las características geométricas del manipulador serán modeladas.

Se considera que el manipulador de dos eslabones de la Figura 4.7 está compuesto de dos eslabones rígidos uniformes de longitud $2l$ moviéndose en un plano horizontal.

El bond graph que se muestra en la Figura 4.8 es similar al del péndulo doble, excepto por lo siguiente:

- No hay términos de gravedad

Esto es porque el manipulador se mueve en un plano horizontal, por lo que no existen fuerzas de gravedad afectando el movimiento de este.

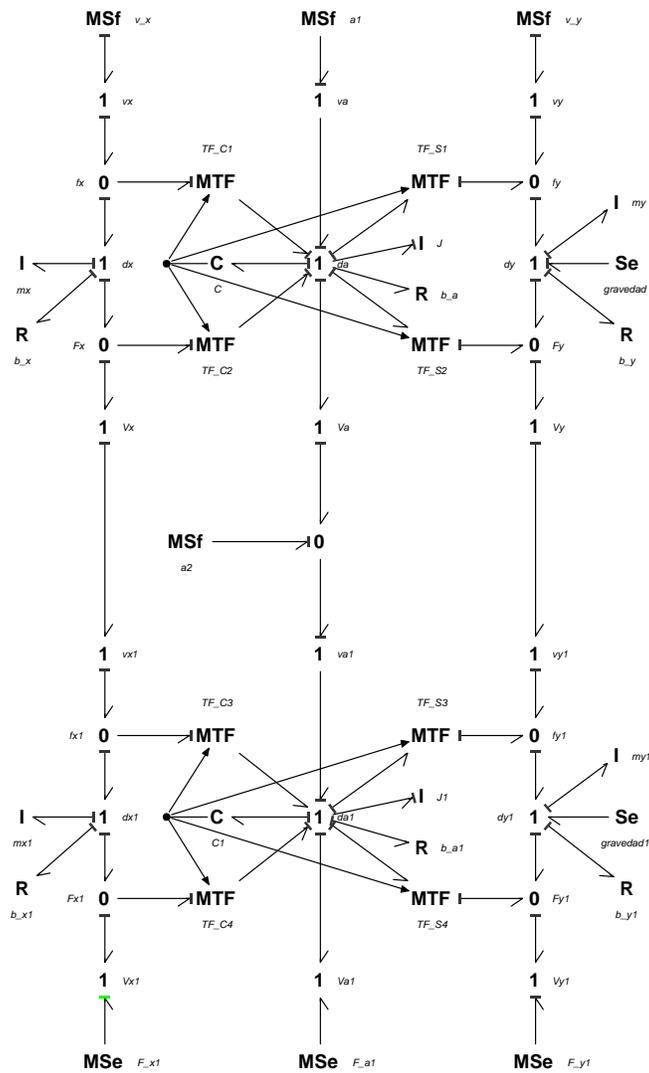


Figura 4.6: Bond graph del péndulo doble.

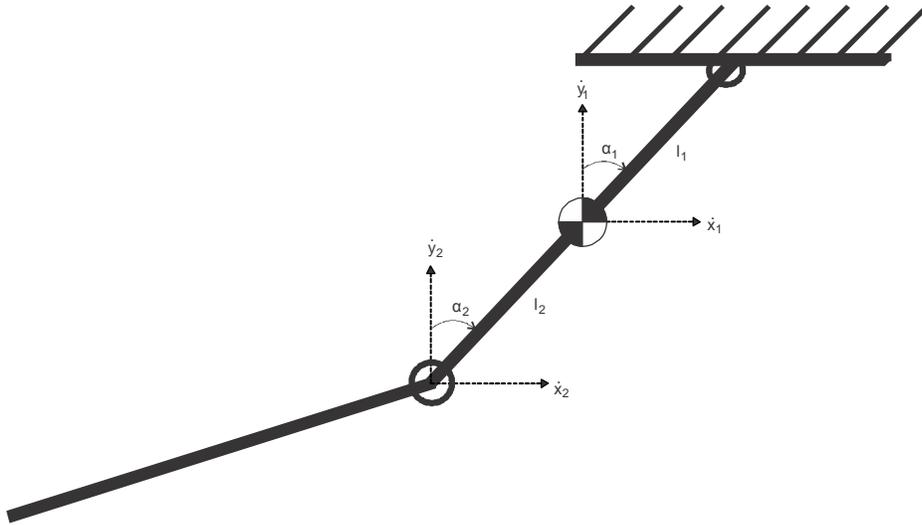


Figura 4.7: Manipulador planar de dos eslabones.

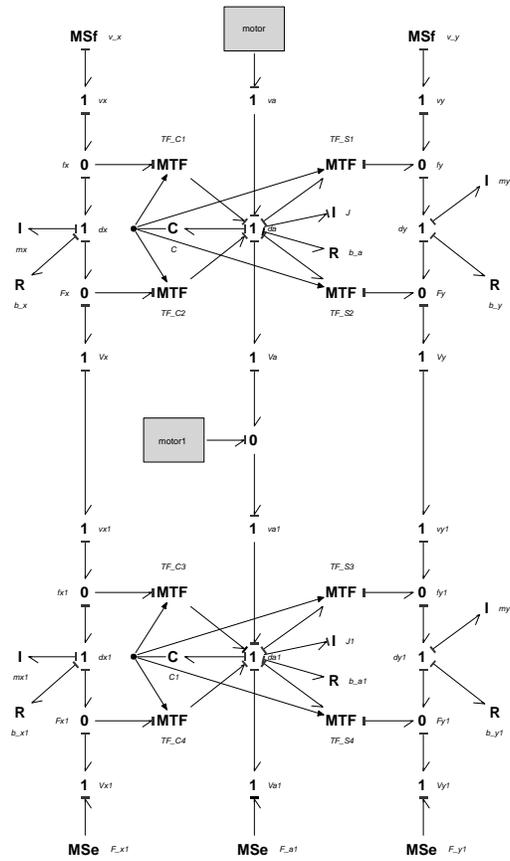


Figura 4.8: Bond graph de un robot planar de dos eslabones.

- Los pares son aplicados en cada unión y las correspondientes velocidades angulares en las uniones medidas.

4.3 Modelado de robots manipuladores en tres dimensiones en Bond Graph

Esta sección describe el modelado de robots moviéndose en *tres dimensiones*. Dentro de este contexto, dos configuraciones son modeladas: El robot Puma de dos grados de libertad y el robot Stanford de tres grados de libertad con dos uniones de revolución y una prismática.

Este capítulo está basado principalmente en el trabajo realizado por Gawthrop [Gawthrop, 1996] donde se explica claramente como representar las ecuaciones de Euler de manera sencilla en bond graph.

Un bond graph da la representación de un sistema de libre causalidad en el cual, apesar de contener restricciones de causalidad debido a sus componentes; no especifica cuál de estas causalidades debe ser utilizada. Esta flexibilidad puede ser utilizada para dar representaciones causales alternativas del mismo sistema; la selección de causalidad dependerá entonces de la utilidad que se dará a la representación. Para el contexto que nos interesa (robótica), hay tres consideraciones fundamentales en esta selección:

- La necesidad de obtener significado físico en la dinámica del manipulador.
- La necesidad de generar código de simulación efectivo.
- La necesidad de comparar las ecuaciones que describen el modelo con la ecuación del robot estándar.

$$M(\theta)\ddot{\theta} + V(\theta, \dot{\theta}) + G(\theta) = T \quad (4.11)$$

De esta manera, un manipulador es un conjunto de motores acoplados a un mecanismo. Existen algunas razones para este punto de vista:

1. Si los motores están acoplados al mecanismo a través de una caja de transmisión con una alta relación, el mecanismo parece tener una inercia relativamente pequeña a partir del motor, por lo que la dinámica es dominada por los motores.

2. Es natural pensar en el estado del sistema en términos de la velocidad del motor y posiciones; en el caso rígido, este estado determina la posición y velocidad de cada eslabón del mecanismo.
3. A partir del punto de vista del control, es agradable la visión del sistema como un conjunto de sensores y actuadores colocados: velocidades angulares del motor y sus pares aplicados.
4. El control, la simulación y la comprensión de un conjunto de motores desacoplados es sencillo: las dinámicas son ecuaciones diferenciales ordinarias lineales [Karnopp, 1996], que corresponden a un conjunto de integradores dobles.

Por lo tanto, las características restantes del sistema no son sino perturbaciones sobre el caso simple.

4.3.1 Motores desacoplados en Bond Graph

Como una base para el resto del capítulo, considere un conjunto de motores lineales vistos como fuentes par ideales manejando inercia. Como se discutió antes, cada motor tiene asociados dos estados: el i –ésimo motor tiene un estado que comprende el ángulo θ_i y la velocidad angular $\dot{\theta}_i$. Sin embargo, a partir del punto de vista del modelado del sistema, los estados deberían ser las variables de esfuerzo integrado o el flujo integrado. Por lo tanto, un estado alternativo consiste de un ángulo θ_i (flujo integrado) y un momento angular $h_i = I_i \dot{\theta}_i$ (esfuerzo integrado).

La Figura 4.9 muestra un bond graph de tres motores desacoplados ideales conectados a las fuentes de par, los cuales están manejando una inercia. Los elementos-C proporcionan los ángulos de cada motor como un estado, debido a que ellos tienen cero rigidez no afectan a la dinámica.

En la tabla 4.1 se indica la descripción de las variables del bond graph de la figura 4.9.

Las ecuaciones correspondientes son:

$$\dot{h} = T \tag{4.12}$$

$$\dot{\theta} = I_m^{-1} h \tag{4.13}$$

donde I_m es una matriz diagonal y $I_{mii} = i_i$.

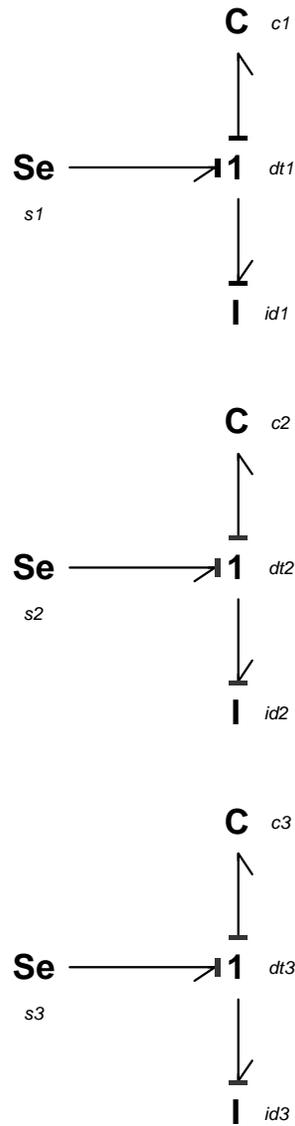


Figura 4.9: Motores desacoplados en Bond Graph.

Tabla 4.1: Descripción de las variables de la figura 4.9.

Etiqueta del componente	Tipo de componente	Variable física asociada
dt_1, dt_2, dt_3	Uniones de velocidad común	Velocidades angulares de los motores $\dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2, \dot{\theta}_3$
id_1, id_2, id_3	Componente de inercia	Inercias de los motores: Estados h_1, h_2, h_3
C_1, C_2, C_3	Componentes de restricción	Proporciona los ángulos de unión $\theta_1, \theta_2, \theta_3$
S_1, S_2, S_3	Fuentes	Pares T_1, T_2, T_3

4.3.2 Ecuaciones en forma de robot

Tomando en cuenta la idea que se planteó anteriormente (un manipulador es una serie de motores de CD acoplados a un mecanismo), el siguiente paso en la derivación de una forma general de ecuaciones en forma de robot, es considerar el efecto de fijar un mecanismo a estos motores desacoplados. Si asumimos que el mecanismo es rígido, el movimiento del mecanismo es condicionado por el movimiento de los motores: la posición y la velocidad de cada parte del mecanismo, dada su geometría, es determinado completamente por la posición y velocidad de cada motor. En otras palabras, la dinámica del robot puede ser descrita por las mismas variables (ángulos de los motores θ_i , y momento angular $h_i = i_i \dot{\theta}_i$) del sistema de motores desacoplados. Por lo que el vector de estados x puede ser escrito como

$$x = \begin{pmatrix} h \\ \theta \end{pmatrix} \quad (4.14)$$

donde h y θ son, a su vez, vectores que contienen los momentos angulares de los n motores y los ángulos de las n uniones, respectivamente

$$h = \begin{pmatrix} h_1 \\ \dots \\ h_i \\ \dots \\ h_n \end{pmatrix}; \theta = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \dots \\ \theta_i \\ \dots \\ \theta_n \end{pmatrix} \quad (4.15)$$

Definiendo un vector z que contiene los momentos asociados con todos los otros elementos I (los no- estados), resulta entonces

$$z = g(x) \quad (4.16)$$

donde $g(x)$ es una función no lineal que parte del estado al no-estado. Derivando en ambos lados de la ecuación resulta

$$\dot{z} = G(x)\dot{x} \quad (4.17)$$

donde

$$G(x) = \frac{\partial g(x)}{\partial x} \quad (4.18)$$

Como se discutió en secciones anteriores de esta tesis, el bond graph del resto del mecanismo comprende elementos I acoplados por transformadores modulados por los ángulos de las uniones y giradores modulados por momentos angulares y velocidades. Por lo tanto, las ecuaciones dinámicas que describen el momento del motor, dado por la ecuación (4.12), tienen la forma:

$$\dot{h} = \tau + f_z(x)\dot{z} + f_x(x) \quad (4.19)$$

La ecuación para el ángulo de unión permanece igual (4.13). Ahora bien, resulta que las ecuaciones dinámicas derivadas en esta sección pueden considerarse un caso especial de la forma de estados compactados [Craig, 1989]

$$E(x)\dot{x} = f(x) + u \quad (4.20)$$

donde

$$E = I_{2n \times 2n} - \begin{pmatrix} f_z \\ 0 \end{pmatrix} G(x) \quad (4.21)$$

De esta manera, la matriz E de $2n \times 2n$ tiene la forma

$$E = \begin{pmatrix} E_{11} & E_{12} \\ 0 & I_{n \times n} \end{pmatrix} \quad (4.22)$$

Esto puede ser reescrito en forma de la ecuación standar del robot (4.11) como

$$M(\theta) = E_{11}I_m \quad (4.23)$$

$$V(\theta, \dot{\theta}) = E_{12} - f_x \quad (4.24)$$

La matriz V puede ser reescrita como

$$V(\theta, \dot{\theta}) = B(\theta) [\dot{\theta}\dot{\theta}] + C(\theta) [\dot{\theta}^2] \quad (4.25)$$

donde la matriz de Coriolis $B(\theta)(n \times n(n-1)/2)$ y la matriz centrífuga $C(\theta)(n \times n)$ dependen solo de los ángulos de unión θ . $[\dot{\theta}\dot{\theta}]$ es un vector de productos cruz de velocidades de dimensiones $n(n-1)/2$

$$[\dot{\theta}\dot{\theta}] = [\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \ \dot{\theta}_1\dot{\theta}_3 \dots \dot{\theta}_{n-1}\dot{\theta}_n] \quad (4.26)$$

y $[\dot{\theta}^2]$ es un vector de $n \times 1$ de velocidades angulares cuadradas

$$[\dot{\theta}^2] = [\dot{\theta}_1^2 \dots \dot{\theta}_n^2]^T \quad (4.27)$$

En el caso simple considerado en la sección anterior, los únicos valores que no son cero dentro de la matriz M son

$$\begin{aligned} M_{11} &= i_1 \\ M_{22} &= i_2 \\ M_{33} &= i_3 \end{aligned} \quad (4.28)$$

El resto de los modelos contemplados en este capítulo pueden ser considerados como perturbaciones de este caso simple.

4.3.3 Efectos de la gravedad

Los efectos de la gravedad pueden ser incluidos dentro de nuestro modelo en bond graph, haciendo la simple suposición de que el manipulador libre de gravedad es montado en una plataforma, la cual se mueve hacia arriba con una aceleración de g [Gawthrop, 1996].

Consideremos el manipulador de la Figura 4.10 con una unión prismática simple, con el parámetro correspondiente θ_3 , así como un ángulo arreglado a la horizontal θ_2 .

En términos de bond graph, esto puede ser representado como se muestra en la Figura 4.11 con la notación de la Tabla 4.2.

Tabla 4.2: Descripción de las variables de la figura 4.11.

Etiqueta del componente	Tipo de componente	Variable física asociada
V_x, V_y	Uniones de velocidad común	Velocidades v_x, v_y
m_x, m_y	Componente de inercia	Momento del centro de masa p_x, p_y
S_3	Fuente	Fuerza aplicada
S_g, \dot{i}_g	Fuente, inercia	Fuente e inercia de la gravedad

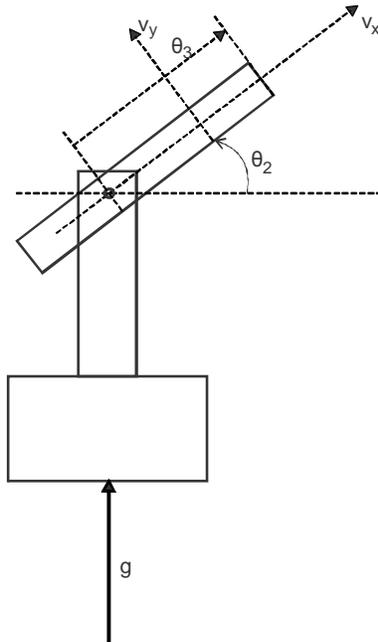


Figura 4.10: Añadiendo los efectos de la gravedad: diagrama.

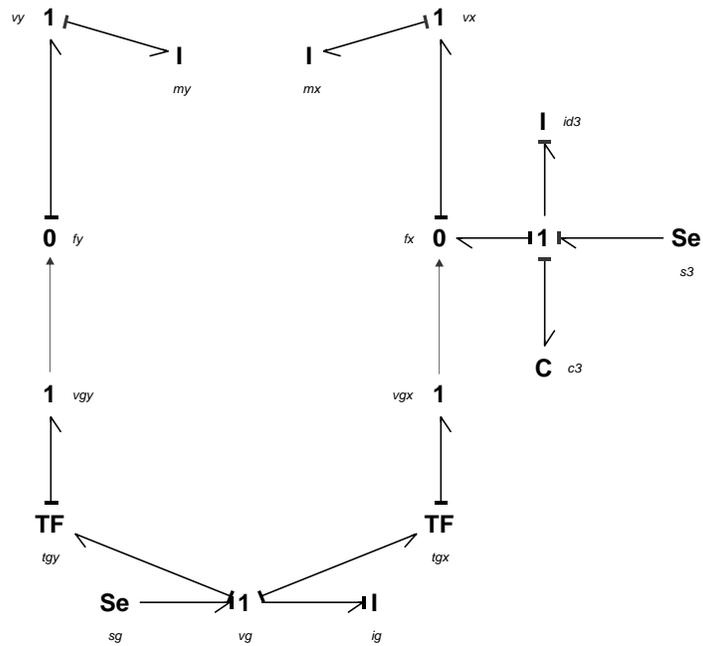


Figura 4.11: Añadiendo los efectos de la gravedad: bond graph.

La fuente S_g direcciona una masa i_g con una aceleración de g . Esta aceleración es transformada a las coordenadas x y y por medio de los dos transformadores tg_x (con módulo $\sin\theta_2$) y tg_y (con ganancia $\cos\theta_2$). El acoplamiento se realiza mediante señales, por lo que la aceleración de la masa no se ve afectada por el resto del sistema.

$$\dot{x}_1 = u_1 - \dot{z}_1 \quad (4.29)$$

$$\dot{x}_2 = \frac{x_1}{i_3} \quad (4.30)$$

$$\dot{x}_3 = u_2 \quad (4.31)$$

$$z_1 = \frac{(\sin(\theta_2)i_3x_3 + x_1)m}{i_3} \quad (4.32)$$

$$z_2 = \cos(\theta_2)mx_3 \quad (4.33)$$

$$y_1 = \frac{x_1}{i_3} \quad (4.34)$$

En la forma de estados comprimidos se convierten en

$$\dot{\chi}_1 = u_1 \quad (4.35)$$

$$\dot{\chi}_2 = \frac{x_1}{i_3} \quad (4.36)$$

$$\dot{\chi}_3 = u_2 \quad (4.37)$$

$$y_1 = \frac{x_1}{i_3} \quad (4.38)$$

$$E = \begin{pmatrix} \frac{m+i_3}{i_3} & 0 & \sin(\theta_2)m \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.39)$$

donde

$$x = \begin{pmatrix} h_3 \\ \theta_3 \\ h_g \end{pmatrix}; z = \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \end{pmatrix}; y = s_3; u = \begin{pmatrix} s_3 \\ s_g \end{pmatrix} \quad (4.40)$$

Notar que $x_3 = h_g = v_g$, el momento de la masa unitaria.

Recordando la ecuación (4.20)

$$E(x)\dot{x} = f(x) + u \quad (4.41)$$

La primera ecuación contiene los términos $E_{13}\dot{x}_3 = E_{13}\dot{v}_g = E_{13}g$. Por lo que $E_{13}g$ es, en este caso, la matriz de gravedad.

En general, siguiendo la notación previamente desarrollada, el vector de estados es

$$x = \begin{pmatrix} h \\ \theta \\ v_g \end{pmatrix} \quad (4.42)$$

y por lo tanto

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} \dot{h} \\ \dot{\theta} \\ g \end{pmatrix} \quad (4.43)$$

Por lo tanto, E gana una columna y una fila adicional y puede ser reescrita como

$$E = \begin{pmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{13} \\ 0 & I_{n \times n} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.44)$$

Así

$$G(\theta) = E_{13}g \quad (4.45)$$

Regresando al ejemplo del robot prismático, las matrices del robot son

$$M_{11} = m + i_3 \quad (4.46)$$

$$G_1 = \sin(\theta_2)m \quad (4.47)$$

4.3.4 Movimiento en tres dimensiones y ecuaciones de Euler en Bond Graph

La idea de una representación en bond graph del movimiento en tres dimensiones de un cuerpo rígido fue publicada por Karnopp, en el año de 1969. La idea principal es que las ecuaciones de Euler pueden ser representadas por una estructura triangular en bond graph [Gawthrop, 1996].

Como se discutió en el segundo capítulo de esta tesis, la versión más simple de las ecuaciones de movimiento de un cuerpo rígido ocurren cuando este movimiento es relativo a un *punto fijo*. Este caso simple puede ser representado por el bond graph de la Figura 4.12 Las características principales de este bond graph se encuentran en la Tabla 4.3.

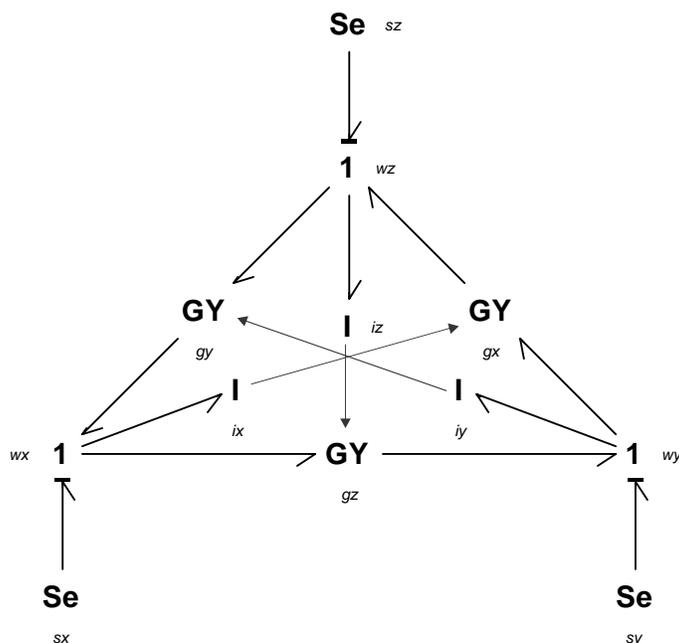


Figura 4.12: Anillo de Euler: Bond Graph.

Tabla 4.3: Etiquetas de elementos del anillo de Euler.

Etiqueta del componente	Tipo de componente	Variable física asociada
w_x, w_y, w_z	Uniones de velocidad común	Velocidades angulares $\omega_x, \omega_y, \omega_z$
i_x, i_y, i_z	Componentes de inercia	Momentos angulares h_x, h_y, h_z
g_x, g_y, g_z	Giradores	Acoplamiento debido a la rotación
s_x, s_y, s_z	Fuentes	Torques τ_x, τ_y, τ_z

ω_x, ω_y y ω_z son las tres componentes de la *velocidad angular absoluta* referida a los ejes instantáneos del cuerpo. El hecho de que este es un sistema de coordenadas que se mueve, resulta en el acoplamiento de las tres ecuaciones dinámicas. Los tres bonds activos indican que el módulo de los giradores laterales es el momento angular de cada punta del arreglo.

El anillo de Euler ha sido aumentado con tres fuentes-sensores con la causalidad mostrada en la figura 4.12, las fuentes de *esfuerzo* (torque) son entradas, llamadas $u_1 - u_3$, y las correspondientes velocidades son consideradas como salidas, llamadas $y_1 - y_3$.

Las ecuaciones dinámicas correspondientes son

$$\dot{x}_1 = \frac{(-(j_z - j_y)x_2x_3 - j_zj_yu_1)}{(j_zj_y)} \quad (4.48)$$

$$\dot{x}_2 = \frac{((j_z - j_x)x_1x_3 - j_zj_xu_2)}{(j_zj_x)} \quad (4.49)$$

$$\dot{x}_3 = \frac{-((j_y - j_x)x_1x_2 - j_yj_xu_3)}{(j_yj_x)} \quad (4.50)$$

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{x_1}{j_x} \\ y_2 &= \frac{x_2}{j_y} \\ y_3 &= \frac{x_3}{j_z} \end{aligned} \quad (4.51)$$

En la práctica, un cuerpo rígido es conectado a otros objetos como parte de un sistema, por lo que estos tres movimientos angulares son por lo general restringidos y estas ecuaciones no tendrían esta causalidad. Por ejemplo, la Figura 4.13 muestra otra posible causalidad: las velocidades angulares ω_x y ω_y son fijas (por fuentes de velocidad) mientras que ω_z se maneja como antes. Las entradas y salidas son ahora

$$u = \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \tau_z \end{pmatrix}; y = \begin{pmatrix} \tau_x \\ \tau_y \\ \omega_z \end{pmatrix} \quad (4.52)$$

Las ecuaciones resultantes son

$$\dot{x}_1 = (j_x - j_y)u_1u_2 + u_3 \quad (4.53)$$

$$z_1 = j_xu_1 \quad (4.54)$$

$$z_2 = j_yu_2 \quad (4.55)$$

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{-((j_y - j_z)x_1u_2 - j_z\dot{z}_1)}{j_z} \\ y_2 &= \frac{((j_x - j_z)x_1u_1 - j_z\dot{z}_2)}{j_z} \\ y_3 &= \frac{x_1}{j_z} \end{aligned} \quad (4.56)$$

El caso más complejo ocurre cuando el movimiento es considerado respecto al centro de masa no estacionario. El bond graph resultante es mostrado en la figura 4.14. El anillo de Euler es aumentado, agregando tres fuentes de *esfuerzo* (fuerza), estas son las entradas $u_1 - u_3$ y

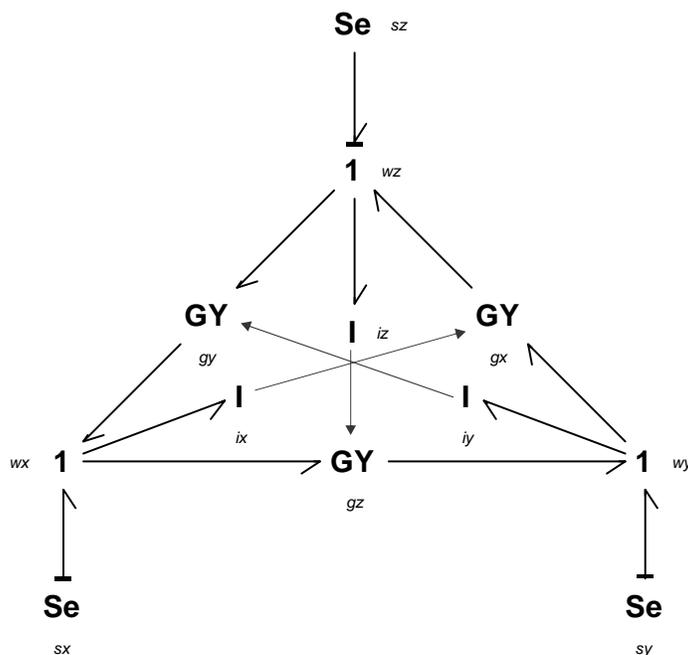


Figura 4.13: Anillo de Euler: causalidad alternativa.

las correspondientes velocidades son consideradas como salidas, llamadas $y_1 - y_3$. Las ecuaciones dinámicas correspondientes son

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \frac{(-((j_z - j_y)x_2x_3 - j_zj_yu_1))}{(j_zj_y)} \\ \dot{x}_2 &= \frac{((j_z - j_x)x_1x_3 - j_zj_xu_2)}{(j_zj_x)} \\ \dot{x}_3 &= \frac{(-((j_y - j_x)x_1x_2 - j_yj_xu_3))}{(j_yj_x)} \\ \dot{x}_4 &= \frac{((j_yu_4 - x_2x_6)j_z - j_yx_3x_5)}{(j_zj_y)} \\ \dot{x}_5 &= \frac{((j_xu_5 - x_1x_6)j_z - j_xx_3x_5)}{(j_zj_x)} \\ \dot{x}_6 &= \frac{((j_xu_6 - x_1x_5)j_y - j_xx_2x_4)}{(j_yj_x)} \end{aligned} \tag{4.57}$$

$$y_1 = \frac{x_1}{j_x}$$

$$y_2 = \frac{x_2}{j_y}$$

$$\begin{aligned}
 y_3 &= \frac{x_3}{j_z} \\
 y_4 &= \frac{x_4}{m} \\
 y_5 &= \frac{x_5}{m} \\
 y_6 &= \frac{x_6}{m}
 \end{aligned}
 \tag{4.58}$$

Una vez más, cuando esta estructura es introducida en el bond graph de un manipulador, el fragmento del bond graph de la Figura 4.14 normalmente tiene una causalidad diferente impuesta a él, debido a la restricción de estar unido a otros componentes.

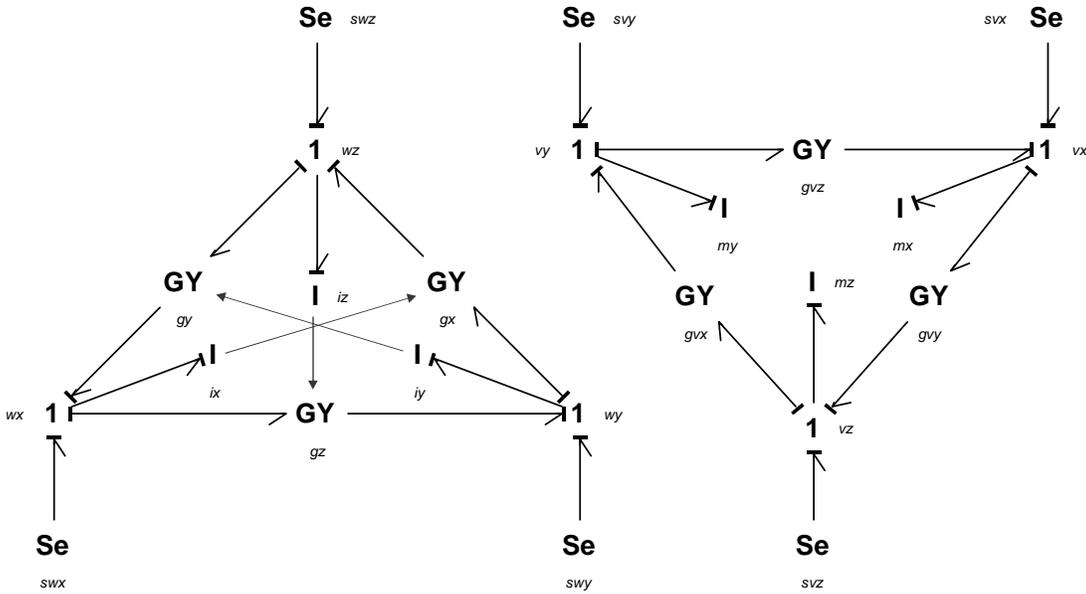


Figura 4.14: Anillo de Euler: movimiento translacional.

4.3.5 Modelado en Bond Graph de un robot manipulador PUMA de dos grados de libertad

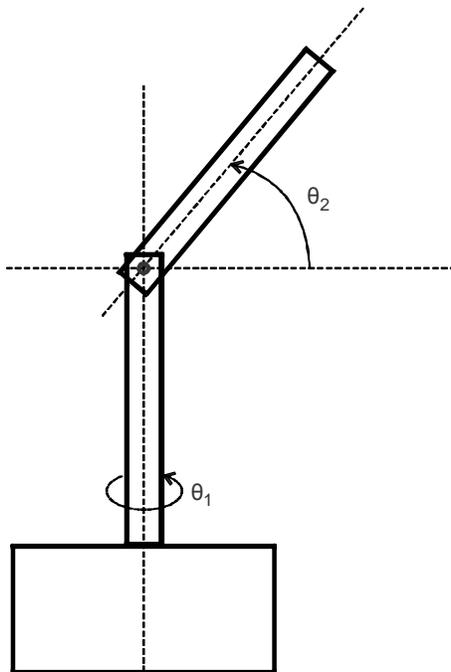


Figura 4.15: Robot PUMA: diagrama.

Un manipulador simple de dos grados de libertad (pero tridimensional) se muestra en la Figura 4.15. Este manipulador puede ser considerado como un PUMA con las articulaciones de codo y muñeca. El segundo eslabón, aunque se mueve en tres dimensiones, rota en torno a un punto fijo: la segunda unión. Su dinámica es entonces determinada por el anillo de Euler mostrado en las figuras 4.12 y 4.13. El primer eslabón es una inercia rotatoria acoplada al segundo eslabón mediante una unión. Las velocidades angulares del segundo eslabón respecto a los ejes x y y , ω_x y ω_y , son enteramente determinadas por la velocidad angular de la primera unión ω_1 .

$$\omega_x = \sin \theta_2 \omega_1 \quad (4.59)$$

$$\omega_y = \cos \theta_2 \omega_1 \quad (4.60)$$

La causalidad apropiada se muestra en la Figura 4.16. Note que la gravedad no puede ser incluida en este caso usando el método discutido antes puesto que la unión se asume estacionaria.

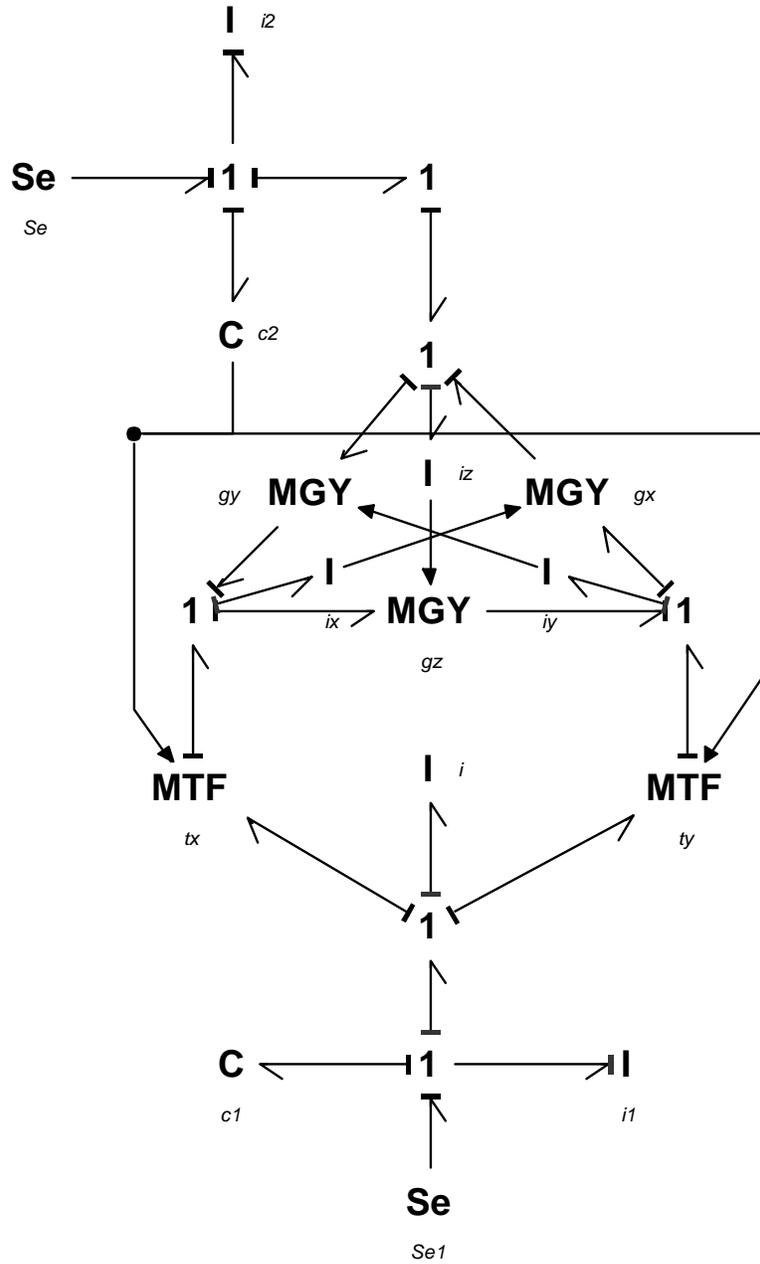


Figura 4.16: Robot PUMA: Bond Graph.

Tabla 4.4: PUMA de dos grados de libertad: etiquetas del bond graph.

Etiqueta del componente	Tipo de componente	Variable física asociada
$dt1, dt2$	Uniones de velocidad común	Velocidades angulares de las uniones $\dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2$
wx, wy, wz	Uniones de velocidad común	Velocidades angulares $\omega_x, \omega_y, \omega_z$
$i1$	Componente de inercia	Inercia del eslabón 1
ix, iy, iz	Componentes de inercia	Momentos angulares principales h_x, h_y, h_z
gx, gy, gz	Giradores	Acoplamiento debido al sistema coordenado de rotación
$s1, s2$	Fuentes-sensores	Torques τ_1, τ_2 ; Velocidades angulares $\dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2$
tx, ty	Transformadores	Transformaciones 4.59 y 4.60
c	Componente de acoplamiento	Provee el ángulo de unión θ_2

El bond graph correspondiente aparece en la figura 4.16 con la notación de la Tabla 4.4.

Las ecuaciones resultantes de este bond graph pueden ser presentada de varias maneras. Primero, las ecuaciones pueden ser derivadas en forma algebraico-diferencial: un conjunto de ecuaciones diferenciales en el estado x (4.14) y un conjunto de ecuaciones algebraicas dando el no-estado z en términos del estado x (4.16). Estas ecuaciones son,

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= \frac{(-((j_x - j_y) \cos(x_4)x_1x_3 + i_2i_1\dot{z}_2) \sin(x_4) - (u_1 - \dot{z}_1)i_2i_1 + \cos(x_4)i_2i_1\dot{z}_3))}{(i_2i_1)} \\
 \dot{x}_2 &= \frac{x_1}{i_1} \\
 \dot{x}_3 &= \frac{((j_x - j_y) \sin(x_4) \cos(x_4)x_1^2 + (u_2 - \dot{z}_4)i_1^2)}{i_1^2} \\
 \dot{x}_4 &= \frac{x_3}{i_2} \\
 z_1 &= \frac{(j_1x_1)}{i_1} \\
 z_2 &= \frac{(\sin(x_4)j_x x_1)}{i_1} \\
 z_3 &= \frac{(\cos(x_4)j_y x_1)}{i_1}
 \end{aligned} \tag{4.61}$$

$$z_1 = \frac{(j_z x_3)}{i_2} \quad (4.62)$$

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{x_1}{i_1} \\ y_2 &= \frac{x_3}{i_2} \end{aligned} \quad (4.63)$$

Estas ecuaciones algebraico-diferenciales pueden ser reescritas en la forma de estados comprimidos (4.41) como

$$\dot{\chi}_1 = \frac{(-((j_x - j_y) \sin(x_4) \cos(x_4) x_1 x_3 - i_2 i_1 u_1))}{(i_2 i_1)} \quad (4.64)$$

$$\dot{\chi}_2 = \frac{x_1}{i_1} \quad (4.65)$$

$$\dot{\chi}_3 = \frac{((j_x - j_y) \sin(x_4) \cos(x_4) x_1^2 + i_1^2 u_2)}{i_1^2} \quad (4.66)$$

$$\dot{\chi}_4 = \frac{x_3}{i_2} \quad (4.67)$$

$$y_1 = \frac{x_1}{i_1} \quad (4.68)$$

$$y_2 = \frac{x_3}{i_2} \quad (4.69)$$

$$E = \begin{pmatrix} \frac{(\sin(x_4)^2 j_x + \cos(x_4)^2 j_y + i_1 + j_1)}{i_1} & 0 & 0 & \frac{((j_x - j_y) \sin(x_4) \cos(x_4) x_1)}{i_1} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{i_2 + j_z}{i_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.70)$$

Reordenando las ecuaciones y usando las ecuaciones (4.23), (4.24) y (4.25) obtenemos las matrices del robot como

$$M = \begin{pmatrix} \sin(\theta_2)^2 j_x + \cos(\theta_2)^2 j_y + i_1 + j_1 & 0 \\ 0 & i_2 + j_z \end{pmatrix} \quad (4.71)$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -(j_x - j_y) \sin(\theta_2) \cos(\theta_2) & 0 \end{pmatrix} \quad (4.72)$$

$$B = \begin{pmatrix} 2(j_x - j_y) \sin(\theta_2) \cos(\theta_2) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.73)$$

La matriz de masa M tiene dos términos que no son ceros. M_{11} es la inercia del motor 1 (i_1) + la inercia del eslabón 1 respecto a sus ejes (j_1) + dos términos representando el efecto del eslabón 2 que depende de θ_2 . La interpretación es clara cuando $\theta_2 = 0$ ó $\theta_2 = \frac{\pi}{2}$. M_{22} es la inercia del motor 2 (i_2) + la inercia del eslabón 2 respecto a los ejes de la unión 2 (j_z).

La matriz centrífuga C tiene un elemento que no es cero C_{21} que representa el torque adicional actuando en la unión 2 debido a la velocidad angular de la unión 1, $\dot{\theta}_2$. Este es cero cuando $\theta_2 = 0$ ó $\theta_2 = \frac{\pi}{2}$. La matriz de *coriolis* B tiene un elemento que no es cero B_{11} que representa el torque adicional actuando sobre la unión 1 debido a las dos velocidades angulares. Esto, otra vez, es cero cuando $\theta_2 = 0$ ó $\theta_2 = \frac{\pi}{2}$.

4.3.6 Modelo matemático del robot manipulador PUMA a partir de su representación en Bond Graph

Una de las características más sobresalientes de la representación en bond graph es que, a partir de esta, es relativamente sencillo obtener el modelo matemático del sistema.

Consideremos el bond graph de la Figura 4.17, el cual es el bond graph del manipulador PUMA. Notar que se han añadido dos elementos-R, uno en cada eslabón, las cuales representan las fricciones de estos.

Los vectores clave son

$$x = \begin{bmatrix} p_2 \\ p_{24} \\ q_3 \\ q_{23} \end{bmatrix}; \dot{x} = \begin{bmatrix} e_2 \\ e_{24} \\ f_3 \\ f_{23} \end{bmatrix}; z = \begin{bmatrix} f_2 \\ f_{24} \\ e_3 \\ e_{23} \end{bmatrix}; x_d = \begin{bmatrix} p_8 \\ p_{12} \\ q_{12} \\ q_{19} \end{bmatrix} \quad (4.74)$$

$$\dot{x}_d = \begin{bmatrix} e_8 \\ e_{12} \\ e_{12} \\ e_{19} \end{bmatrix}; z_d = \begin{bmatrix} f_8 \\ f_{12} \\ f_{12} \\ f_{19} \end{bmatrix}; D_{in} = \begin{bmatrix} f_6 \\ f_{21} \end{bmatrix}; D_{out} = \begin{bmatrix} e_6 \\ f_{21} \end{bmatrix} \quad (4.75)$$

Las relaciones constitutivas de los elementos son

$$F = \text{diag} \left\{ \frac{1}{i_2}, \frac{1}{i_1}, \frac{1}{c_2}, \frac{1}{c_1} \right\}; F_d = \text{diag} \left\{ \frac{1}{i_z}, \frac{1}{i_x}, \frac{1}{i_y}, \frac{1}{i} \right\} \quad (4.76)$$

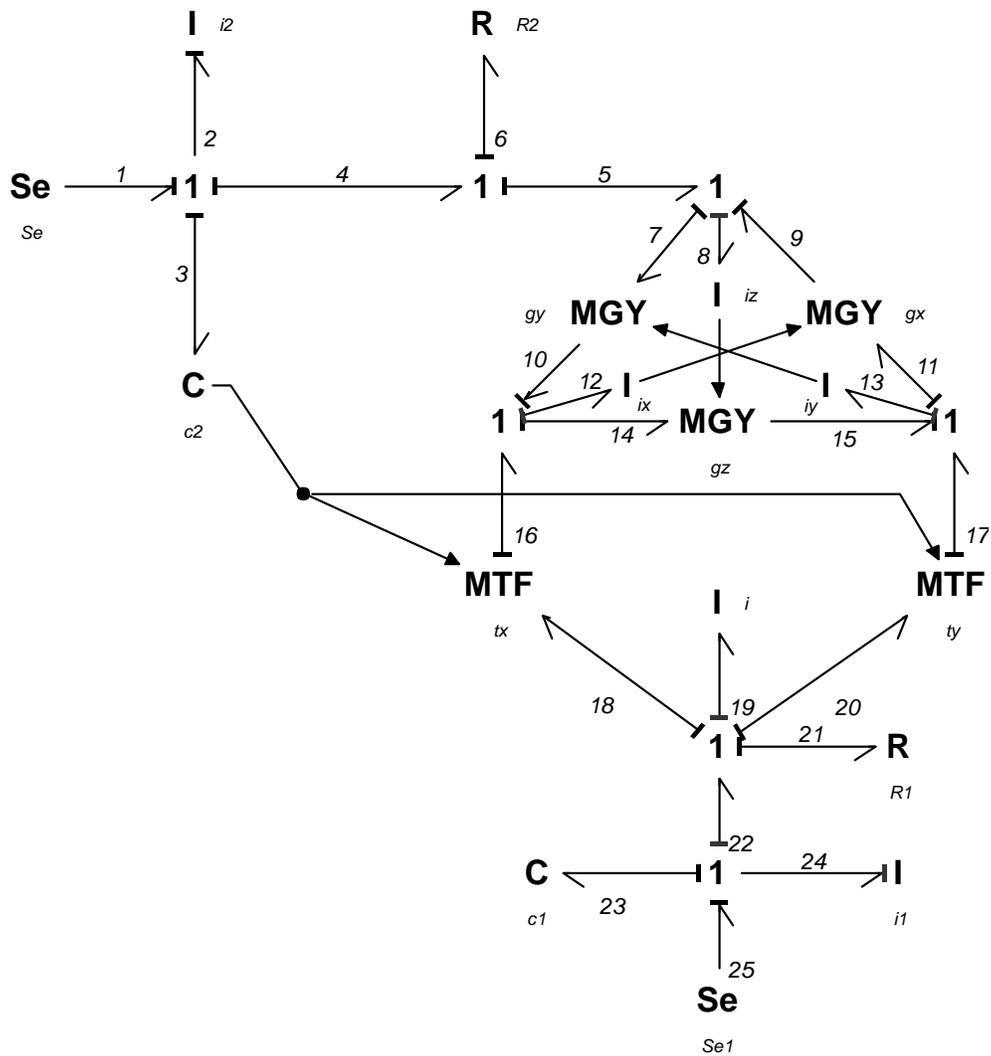


Figura 4.17: Robot PUMA: bond graph con fricciones en las uniones.

Recordando que las relaciones de transformación para los elementos MTF (tfx y tfy) tienen la forma

$$\begin{aligned} f_{16} &= \sin(\theta_2) \bullet f_{18} \\ f_{17} &= \cos(\theta_2) \bullet f_{20} \end{aligned} \quad (4.77)$$

donde

$$\theta_2 = q_3 \quad (4.78)$$

Para la matriz de estructura unión se tiene

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ D_{in}(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = S \begin{bmatrix} z(t) \\ D_{out}(t) \\ u(t) \\ \dot{x}_d(t) \end{bmatrix}$$

$$z_d(t) = -S_{14}^T z(t) \quad (4.79)$$

La matriz de estructura unión S queda

$$\begin{bmatrix} e_2 \\ e_{24} \\ f_3 \\ f_{23} \\ f_6 \\ f_{21} \\ f_8 \\ f_{12} \\ f_{13} \\ f_{19} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -h_1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ h_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -\sin(q_3) & -\cos(q_3) & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sin(q_3) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(q_3) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_2 \\ f_{24} \\ e_3 \\ e_{23} \\ e_6 \\ e_{21} \\ e_1 \\ e_{25} \\ e_8 \\ e_{12} \\ e_{13} \\ e_{19} \end{bmatrix} \quad (4.80)$$

donde

$$h_1 = p_{13} \cos(q_3) + p_{12} \sin(q_3) \quad (4.81)$$

De la matriz de estructura unión (4.80), se observa que

$$S_{11} = \begin{bmatrix} 0 & -h_1 & -1 & 0 \\ h_1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.82)$$

$$S_{12} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.83)$$

$$S_{13} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.84)$$

$$S_{14} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sin(q_3) & -\cos(q_3) & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.85)$$

$$S_{21} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.86)$$

$$S_{31} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sin(q_3) & 0 & 0 \\ 0 & \cos(q_3) & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.87)$$

$$S_{22} = S_{23} = S_{32} = S_{33} = 0 \quad (4.88)$$

Se observa que la matriz S_{11} es una matriz antisimétrica y que,

$$\begin{aligned} S_{21} &= -S_{12}^T \\ S_{31} &= -S_{14}^T \end{aligned} \quad (4.89)$$

Las propiedades anteriores están basadas en el principio de conservación de la energía.

Para la obtención de la representación del sistema en espacio de estados a partir del bond graph en causalidad integral se tiene que

$$\dot{x} = f(x)x(t) + g(x)u(t) \quad (4.90)$$

Para lo cual se tiene,

$$f(x) = E^{-1} \left[S_{11} + S_{12}MS_{21} + S_{14}(F_d)^{-1}\dot{S}_{31} \right] F \quad (4.91)$$

$$g(x) = E^{-1} [S_{13} + S_{12}MS_{23}] \quad (4.92)$$

donde,

$$E = I - S_{14}(F_d)^{-1}S_{31}F \quad (4.93)$$

$$M = (I - LS_{22})^{-1}L \quad (4.94)$$

Para este análisis se supone que $L = 0$, por lo que el términos de $f(x)$ y $g(x)$ que representan a las resistencias ($S_{12}MS_{21}$ y $S_{12}MS_{23}$ respectivamente) son iguales a cero, esto con la intención de realizar la comparación de las ecuaciones resultantes.

Calculando E usando la ecuación (4.93)

$$E = I - S_{14}(F_d)^{-1}S_{31}F = \begin{bmatrix} 1 + \frac{i_z}{i_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - h_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.95)$$

donde h_2 es,

$$h_2 = \frac{-1}{i_1} [i_x \sin^2 q_3 + i_y \cos^2 q_3 + i] \quad (4.96)$$

De las ecuaciones (4.90), (4.91) y (4.92) tenemos,

$$E\dot{x} = f'(x)x(t) + g'(x)u(t) \quad (4.97)$$

donde,

$$f'(x) = \left[S_{11} + S_{12}MS_{21} + S_{14}(F_d)^{-1}\dot{S}_{31} \right] F \quad (4.98)$$

$$g'(x) = [S_{13} + S_{12}MS_{23}] \quad (4.99)$$

calculando el tercer término de la ecuación (4.98)

$$S_{31} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sin(q_3) & 0 & 0 \\ 0 & \cos(q_3) & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \dot{S}_{31} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(q_3)\dot{q}_3 & 0 & 0 \\ 0 & -\sin(q_3)\dot{q}_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.100)$$

$$S_{14}(F_d)^{-1}\dot{S}_{31} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sin(q_3) & -\cos(q_3) & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(q_3)\dot{q}_3 & 0 & 0 \\ 0 & -\sin(q_3)\dot{q}_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.101)$$

donde

$$h_3 = -(i_x - i_y) \sin(q_3) \cos(q_3) \dot{q}_3 \quad (4.102)$$

Calculando la ecuación (4.97)

$$\begin{bmatrix} 1 + \frac{i_z}{i_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - h_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_2 \\ e_{24} \\ f_3 \\ f_{23} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -h_1 & -1 & 0 \\ h_1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} Fx + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} Fx + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} u \quad (4.103)$$

La ecuación (4.103) es el modelo matemático del robot manipulador PUMA derivado de su representación en bond graph.

Reduciendo la expresión anterior a sólo los dos primeros renglones, los cuales representan los pares en los dos eslabones, y sustituyendo F y x resulta

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} 1 + \frac{i_z}{i_2} & 0 \\ 0 & 1 - h_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_2 \\ e_{24} \end{bmatrix} = \\
 & = \begin{bmatrix} 0 & -h_1 \\ h_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{i_2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{i_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_2 \\ p_{24} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & h_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{i_2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{i_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_2 \\ p_{24} \end{bmatrix} + \\
 & \quad + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_{25} \end{bmatrix} \tag{4.104}
 \end{aligned}$$

considerando que

$$\dot{x} = F^{-1}\dot{z} \tag{4.105}$$

y sustituyendo las ecuaciones (4.81), (4.96) y (4.102) en (4.104)

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} i_2 + i_z & 0 \\ 0 & i_1 + i_x \sin^2 q_3 + i_y \cos^2 q_3 + i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{f}_2 \\ \dot{f}_{24} \end{bmatrix} = \\
 & = \begin{bmatrix} 0 & (i_x - i_y) \sin(q_3) \cos(q_3) f_{24} \\ -(i_x - i_y) \sin(q_3) \cos(q_3) f_{24} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_2 \\ f_{24} \end{bmatrix} + \\
 & \quad + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -(i_x - i_y) \sin(q_3) \cos(q_3) f_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_2 \\ f_{24} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_{25} \end{bmatrix} \tag{4.106}
 \end{aligned}$$

Pasando el segundo y tercer término del lado derecho de la igualdad hacia el lado izquierdo nos queda

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} i_2 + i_z & 0 \\ 0 & i_1 + i_x \sin^2 q_3 + i_y \cos^2 q_3 + i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{f}_2 \\ \dot{f}_{24} \end{bmatrix} + \\
 & \quad + \begin{bmatrix} 0 & -(i_x - i_y) \sin(q_3) \cos(q_3) f_{24} \\ (i_x - i_y) \sin(q_3) \cos(q_3) f_{24} & (i_x - i_y) \sin(q_3) \cos(q_3) f_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_2 \\ f_{24} \end{bmatrix} = \\
 & \quad = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_{25} \end{bmatrix} \tag{4.107}
 \end{aligned}$$

La cual es una ecuación en la forma del modelo de Euler-Lagrange

$$M\ddot{q} + C\dot{q} + G = \tau \tag{4.108}$$

donde la matriz M tiene la característica de que $M = M^T$ y es mayor que cero. De la ecuación (4.107) podemos deducir que

$$M = \begin{bmatrix} i_2 + i_z & 0 \\ 0 & i_1 + i_x \sin^2 q_3 + i_y \cos^2 q_3 + i \end{bmatrix} \quad (4.109)$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & -(i_x - i_y) \sin(q_3) \cos(q_3) f_{24} \\ (i_x - i_y) \sin(q_3) \cos(q_3) f_{24} & (i_x - i_y) \sin(q_3) \cos(q_3) f_2 \end{bmatrix} \quad (4.110)$$

derivando (4.109)

$$\dot{M} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2i_x \sin q_3 \cos q_3 \dot{q}_3 - 2i_y \cos q_3 \sin q_3 \dot{q}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2(i_x - i_y) \sin q_3 \cos q_3 f_2 \end{bmatrix} \quad (4.111)$$

Para comprobar la característica de la matriz M mencionada antes se tiene

$$\dot{M} - 2C = (\dot{M} - 2C)^T = \begin{bmatrix} 0 & 2(i_x - i_y) \sin q_3 \cos q_3 f_{24} \\ -2(i_x - i_y) \sin q_3 \cos q_3 f_{24} & 0 \end{bmatrix} \quad (4.112)$$

La ecuación (4.112) comprueba que el modelo obtenido de Euler-Lagrange es correcto.

De acuerdo con [Craig, 1989], las ecuaciones en forma de robot estándar es

$$M(\theta)\ddot{\theta} + V(\theta, \dot{\theta}) + G(\theta) = \tau \quad (4.113)$$

donde, como se mencionó antes, la matriz V puede ser escrita como

$$V(\theta, \dot{\theta}) = B(\theta) [\dot{\theta}\dot{\theta}] + C(\theta) [\dot{\theta}^2] \quad (4.114)$$

Las ecuaciones en forma de robot estándar para el PUMA son

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} i_2 + i_z & 0 \\ 0 & i_1 + i_x \sin^2 q_3 + i_y \cos^2 q_3 + i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{f}_2 \\ \dot{f}_{24} \end{bmatrix} + \\ & + \begin{bmatrix} 0 & -(i_x - i_y) \sin(q_3) \cos(q_3) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (f_2)^2 \\ (f_{24})^2 \end{bmatrix} + \\ & + \begin{bmatrix} 0 \\ 2(i_x - i_y) \sin q_3 \cos q_3 \end{bmatrix} [f_2 - f_{24}] = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.115)$$

donde

$$M(\theta) = \begin{bmatrix} i_2 + i_z & 0 \\ 0 & i_1 + i_x \sin^2 q_3 + i_y \cos^2 q_3 + i \end{bmatrix} \quad (4.116)$$

$$C(\theta) = \begin{bmatrix} 0 & -(i_x - i_y) \sin(q_3) \cos(q_3) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.117)$$

$$B(\theta) = \begin{bmatrix} 0 \\ 2(i_x - i_y) \sin q_3 \cos q_3 \end{bmatrix} \quad (4.118)$$

Lo cuál valida el modelo matemático obtenido usando bond graph.

4.3.7 Modelado en Bond Graph de un robot manipulador Stanford

El robot manipulador Stanford se muestra en la Figura 4.18. Este tiene un grado de libertad más en comparación con el PUMA; hay una unión traslacional añadida. Desde el punto de vista dinámico, esto quiere decir que el anillo de Euler simple no puede ser usado, puesto que el segundo eslabón ya no tiene un punto fijo. En la Figura 4.19 se muestra el bond graph correspondiente a este manipulador. Además de las dos uniones rotacionales con ángulos θ_1 y θ_2 , existe una unión prismática con desplazamiento θ_3 .

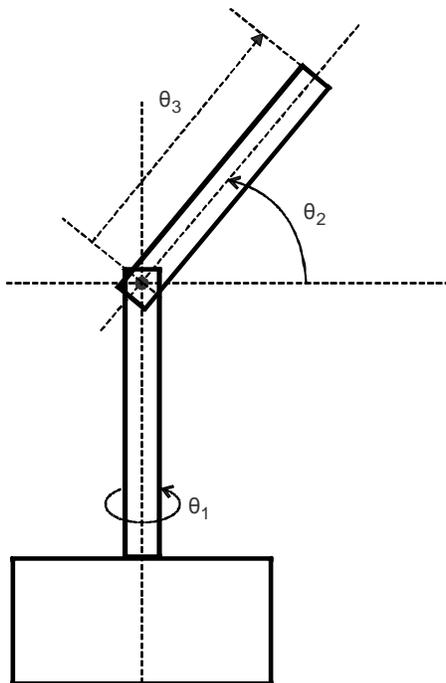


Figura 4.18: Robot Stanford: diagrama

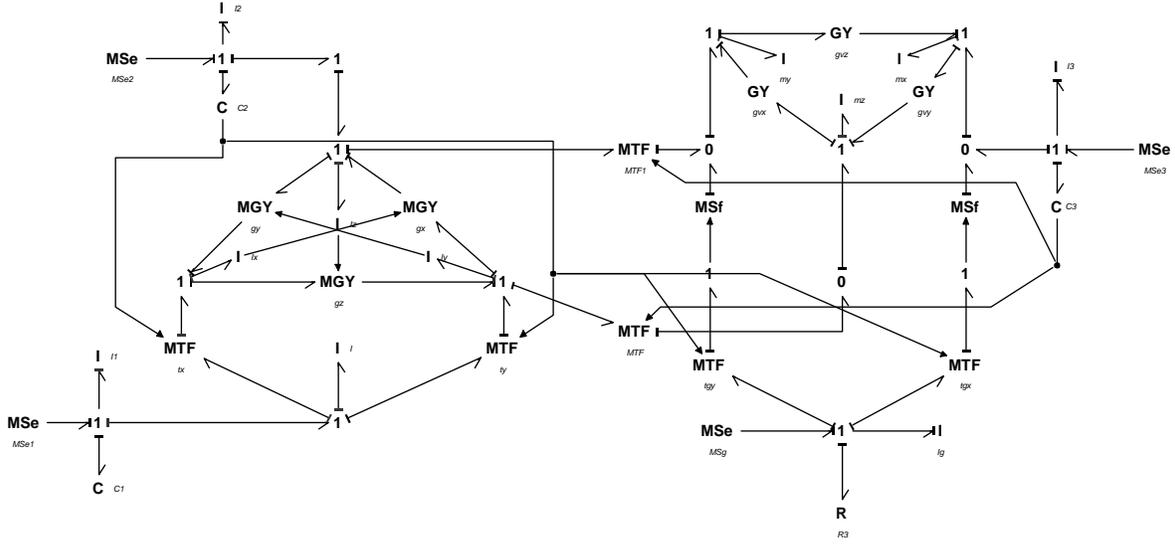


Figura 4.19: Robot Stanford: Bond Graph.

Adicionalmente a los transformadores tx y ty , los transformadores txy y tyx , también son modulados, pero esta vez por el desplazamiento θ_3 de la unión prismática.

Los efectos de la gravedad han sido incluidos como se discutió antes.

Las matrices del robot son

$$M = \begin{bmatrix} m\theta_3^2 + j_y \cos(\theta_2)^2 + \sin(\theta_2)^2 j_x + i_1 + j_1 & 0 & 0 \\ 0 & m\theta_3^2 + i_2 + j_z & 0 \\ 0 & 0 & m + i_3 \end{bmatrix} \quad (4.119)$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -(m\theta_3^2 + j_x + j_y) \sin(\theta_2) \cos(\theta_2) & 0 & 0 \\ \cos(\theta_2)^2 m\theta_3 & -m\theta_3 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.120)$$

$$B = \begin{bmatrix} 2(j_x - j_y) \sin(\theta_2) \cos(\theta_2) & \cos(\theta_2)^2 m\theta_3 & 0 \\ 0 & 0 & m\theta_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.121)$$

$$G = \begin{bmatrix} 0 \\ \cos(\theta_2) m\theta_3 \\ \sin(\theta_2) m \end{bmatrix} \quad (4.122)$$

Los dos primeros elementos de la matriz M , M_{11} y M_{22} son similares a los del PUMA. La inercia es, sin embargo, con respecto al centro de masa, por lo que el término $m\theta_3^2$ aparece para aumentar a j_y . El tercer elemento M_{33} es solo la suma de la masa y la unidad prismática del eslabón 3.

La gravedad no afecta a la unión 1, así que $G_1 = 0$. El segundo término G_2 nos da el momento respecto a la unión 2 debido a la gravedad.

4.3.8 Modelo matemático del robot manipulador Stanford a partir de su representación en Bond Graph

La Figura 4.20 muestra el bond graph del manipulador Stanford. Se puede notar que se han añadido tres resistencias representando las diferentes fricciones existentes de manera física en cada una de las uniones del manipulador.

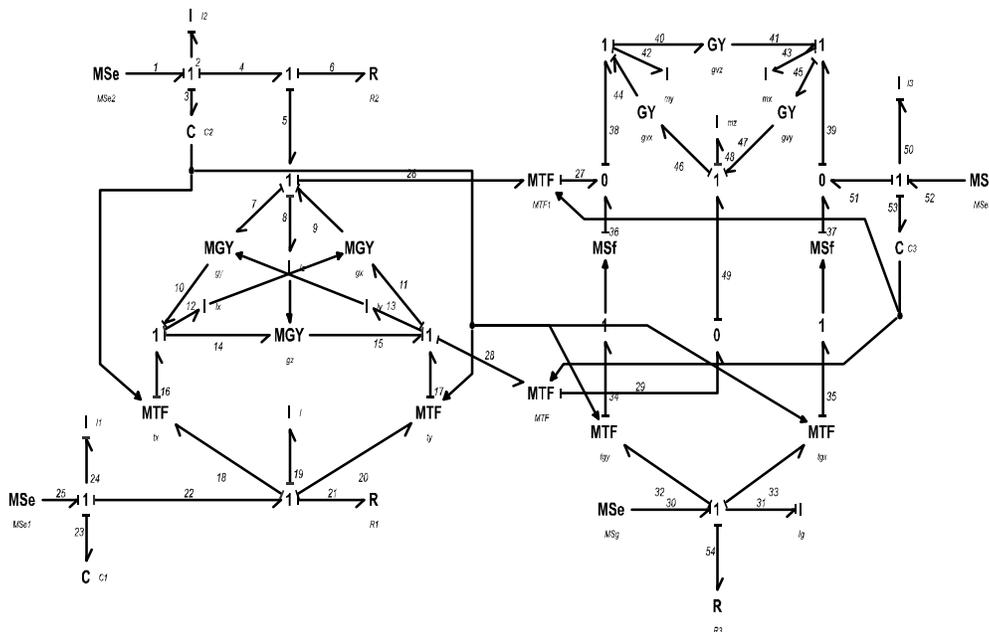


Figura 4.20: Manipulador Stanford: bond graph con fricciones en las uniones.

La Figura 4.20 muestra el BGI del manipulador, por lo que la matriz de estructura unión

en este caso queda representada por,

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ D_{in} \\ z_d \end{bmatrix} = S \begin{bmatrix} z \\ D_{out} \\ u \\ \dot{x}_d \end{bmatrix} \quad (4.123)$$

Los vectores clave de este BGI son,

$$x = \begin{bmatrix} p_2 \\ p_{24} \\ p_{50} \\ p_{31} \\ q_3 \\ q_{23} \\ q_{53} \end{bmatrix}; \dot{x} = \begin{bmatrix} e_2 \\ e_{24} \\ e_{50} \\ e_{31} \\ f_3 \\ f_{23} \\ f_{53} \end{bmatrix}; z = \begin{bmatrix} f_2 \\ f_{24} \\ f_{50} \\ f_{31} \\ e_3 \\ e_{23} \\ e_{53} \end{bmatrix} \quad (4.124)$$

$$x_d = \begin{bmatrix} p_8 \\ p_{12} \\ p_{13} \\ p_{19} \\ p_{42} \\ p_{43} \\ p_{48} \end{bmatrix}; \dot{x}_d = \begin{bmatrix} e_8 \\ e_{12} \\ e_{13} \\ e_{19} \\ e_{42} \\ e_{43} \\ e_{48} \end{bmatrix}; z_d = \begin{bmatrix} f_8 \\ f_{12} \\ f_{13} \\ f_{19} \\ f_{42} \\ f_{43} \\ f_{48} \end{bmatrix} \quad (4.125)$$

$$D_{in} = \begin{bmatrix} f_6 \\ f_{21} \\ f_{54} \end{bmatrix}; D_{out} = \begin{bmatrix} e_6 \\ e_{21} \\ e_{54} \end{bmatrix}; u = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_{25} \\ e_{52} \\ e_{30} \end{bmatrix} \quad (4.126)$$

Las relaciones de los campos de almacenamiento y disipación son,

$$F = \text{diag} \left\{ \frac{1}{i_2}, \frac{1}{i_1}, \frac{1}{i_3}, \frac{1}{i_g}, \frac{1}{c_2}, \frac{1}{c_1}, \frac{1}{c_3} \right\}$$

$$F_d = \text{diag} \left\{ \frac{1}{i_z}, \frac{1}{i_x}, \frac{1}{i_y}, \frac{1}{i}, \frac{1}{m_y}, \frac{1}{m_x}, \frac{1}{m_z} \right\}$$

$$L = \text{diag} \left\{ R_2, R_1, \frac{1}{R_3} \right\} \quad (4.127)$$

La matriz de estructura unión S del BGI del manipulador Stanford puede ser escrita de la siguiente manera,

$$S = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & S_{24} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & S_{34} \end{bmatrix} \quad (4.128)$$

donde,

$$S_{11} = \begin{bmatrix} 0 & h_1 & -nq_{53} & -h_2 & -1 & 0 & 0 \\ -h_1 & 0 & h_4 & h_3 & 0 & -1 & 0 \\ nq_{53} & -h_4 & 0 & h_6 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.129)$$

$$S_{12} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.130)$$

$$S_{13} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.131)$$

$$S_{14} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & -q_{53} & 0 & 0 \\ 0 & -\sin q_3 & -\cos q_3 & -1 & 0 & 0 & -h_5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.132)$$

$$S_{21} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.133)$$

$$S_{31} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sin q_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos q_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ q_{53} & 0 & 0 & \cos q_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \sin q_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.134)$$

$$S_{22} = S_{23} = S_{24} = S_{32} = S_{33} = S_{34} = 0 \quad (4.135)$$

donde,

$$h_1 = p_{12} \cos q_3 - p_{13} \sin q_3 + r q_{53}^2 \cos q_3 \quad (4.136)$$

$$h_2 = n q_{53} \sin q_3 \quad (4.137)$$

$$h_3 = s q_{53} \sin q_3 \cos q_3 - r q_{53} \cos^2 q_3 \quad (4.138)$$

$$h_4 = s q_{53} \cos q_3 \quad (4.139)$$

$$h_5 = q_{53} \cos q_3 \quad (4.140)$$

$$h_6 = n \cos q_3 \quad (4.141)$$

Para determinar el modelo en espacio de estados del manipulador Stanford, tenemos,

$$\dot{x} = f(x)x(t) + g(x)u(t) \quad (4.142)$$

donde $f(x)$ y $g(x)$ son funciones matriciales no lineales, estas tienen la forma,

$$f(x) = E^{-1} \left[S_{11} + S_{12}MS_{21} + S_{14}(F_d)^{-1}\dot{S}_{31} \right] F \quad (4.143)$$

$$g(x) = E^{-1} [S_{13} + S_{12}MS_{23}] \quad (4.144)$$

donde la matriz E es,

$$E = I - S_{14}(F_d)^{-1}S_{31}F \quad (4.145)$$

Calculando la matriz E a partir de las ecuaciones (4.127), (4.132) y (4.134), resulta,

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & -q_{53} & 0 & 0 \\ 0 & -\sin q_3 & -\cos q_3 & -1 & 0 & 0 & -h_5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} i_z & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i_x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i_y & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sin q_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos q_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ q_{53} & 0 & 0 & \cos q_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \sin q_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{i_2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{i_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{i_3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{i_g} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{c_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{c_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{c_3} \end{bmatrix} \quad (4.146)$$

$$E = \begin{bmatrix} \frac{i_2+i_z+q_{53}^2m_y}{i_2} & 0 & 0 & \frac{q_{53}m_y \cos q_3}{i_g} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \alpha_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{i_3+m_x}{i_3} & \frac{m_x \sin q_3}{i_g} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.147)$$

donde

$$\alpha_1 = \frac{-i_x}{i_1} \sin^2 q_3 - \frac{i_y}{i_1} \cos^2 q_3 - \frac{i}{i_1} - \frac{m_z}{i_1} h_5^2 \quad (4.148)$$

En la sección anterior se mostró el bond graph del manipulador Stanford, así como su modelo calculado usando el método de Euler-Larange. Se puede observar que no existen fricciones en sus uniones, por lo que para efecto de comprobación de nuestro modelo, tampoco se considerarán estas fricciones. De lo anterior, la matriz $M = 0$, por lo que el término $S_{12}MS_{21}$ de la ecuación (4.143) se elimina. Reescribiendo esta ecuación,

$$f(x) = E^{-1} \left[S_{11} + S_{14}(F_d)^{-1} \dot{S}_{31} \right] F \quad (4.149)$$

calculando el segundo término

$$S_{14}(F_d)^{-1} \dot{S}_{31} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & -q_{53} & 0 & 0 \\ 0 & -\sin q_3 & -\cos q_3 & -1 & 0 & 0 & -h_5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} * \quad (4.150)$$

$$* \begin{bmatrix} i_z & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i_x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i_y & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dot{q}_3 \cos q_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\dot{q}_3 \sin q_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dot{q}_{53} & 0 & 0 & -\dot{q}_3 \sin q_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dot{q}_3 \cos q_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

donde,

$$\alpha_2 = -q_{53} \dot{q}_3 \sin q_3 + \dot{q}_{53} \cos q_3 \quad (4.151)$$

$$S_{14}(F_d)^{-1}\dot{S}_{31} = \begin{bmatrix} -m_y\dot{q}_{53}q_{53} & 0 & 0 & m_y\dot{q}_3q_{53}\sin q_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -m_x\dot{q}_3\cos q_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.152)$$

donde,

$$\alpha_3 = -i_x\dot{q}_3\sin q_3\cos q_3 + i_y\dot{q}_3\sin q_3\cos q_3 - q_{53}\cos q_3m_z(-q_{53}\dot{q}_3\sin q_3 + \dot{q}_{53}\cos q_3) \quad (4.153)$$

Usando las ecuaciones (4.129), (4.147), (4.152) y (4.127),

$$f(x) = E^{-1} \begin{bmatrix} 0 & h_1 & -nq_{53} & -h_2 & -1 & 0 & 0 \\ -h_1 & 0 & h_4 & h_3 & 0 & -1 & 0 \\ nq_{53} & -h_4 & 0 & h_6 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} F+ \quad (4.154)$$

$$+E^{-1} \begin{bmatrix} -m_y\dot{q}_{53}q_{53} & 0 & 0 & m_y\dot{q}_3q_{53}\sin q_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -m_x\dot{q}_3\cos q_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} F$$

De la misma forma, usando las ecuaciones (4.144) y (4.131), $g(x)$ se puede calcular de la

siguiente manera,

$$g(x) = E^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.155)$$

Las ecuaciones (4.154) y (4.155) son entonces el modelo del manipulador Stanford derivado de su representación en bond graph. Ahora bien, considerando las ecuaciones del robot estandar [Craig, 1989], mostradas en secciones anteriores, tenemos,

$$\begin{aligned} M(\theta)\ddot{\theta} + V(\theta, \dot{\theta}) + G(\theta) &= \tau \\ V(\theta, \dot{\theta}) &= B(\theta) [\dot{\theta}\dot{\theta}] + C(\theta) [\dot{\theta}^2] \end{aligned} \quad (4.156)$$

Estas matrices pueden ser derivadas directamente de la matriz de estructura unión S y de la matriz E de manera directa. Para ello, particionaremos nuestras matrices previamente calculadas, así como nuestros vectores clave; esto con la intención de determinar estas ecuaciones del robot estandar sólo para las variables que nos interesan, en este caso, la matriz E_M queda de la siguiente manera,

$$E_M = \begin{bmatrix} \frac{i_2 + i_z + q_{53}^2 m_y}{i_2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \alpha_1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{i_3 + m_x}{i_3} \end{bmatrix} \quad (4.157)$$

podemos también particionar nuestra matriz F , la matriz F_M resulta entonces como,

$$F_M = \begin{bmatrix} \frac{1}{i_2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{i_1} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{i_3} \end{bmatrix} \quad (4.158)$$

La matriz $M(\theta)$ puede ser calculada entonces como,

$$M(\theta) = E_M F_M^{-1} = \begin{bmatrix} i_2 + i_z + q_{53}^2 m_y & 0 & 0 \\ 0 & (1 - \alpha_1) i_1 & 0 \\ 0 & 0 & i_3 + m_x \end{bmatrix} \quad (4.159)$$

donde,

$$\alpha_1 = \frac{1}{i_1}(-i_x \sin^2 q_3 - i_y \cos^2 q_3 - i - q_{53}^2 m_z \cos^2 q_3) \quad (4.160)$$

sustituyendo (4.160) en (4.159), la matriz $M(\theta)$ resulta,

$$M(\theta) = \begin{bmatrix} i_2 + i_z + q_{53}^2 m_y & 0 & 0 \\ 0 & \cos^2 q_3 (i_y + q_{53}^2 m_z) + i_x \sin^2 q_3 + i + i_1 & 0 \\ 0 & 0 & i_3 + m_x \end{bmatrix} \quad (4.161)$$

La matriz $V(\theta, \dot{\theta})$ puede ser derivada directamente de la matriz S del sistema,

$$V(\theta, \dot{\theta}) = \left[S_{11} + S_{14}(F_d)^{-1} \dot{S}_{31} \right] Z \quad (4.162)$$

De las ecuaciones (4.129) y (4.152), la matriz $V(\theta, \dot{\theta})$ se calcula como sigue,

$$V(\theta, \dot{\theta}) = \begin{bmatrix} 0 & h_1 & -nq_{53} & -h_2 & -1 & 0 & 0 \\ -h_1 & 0 & h_4 & h_3 & 0 & -1 & 0 \\ nq_{53} & -h_4 & 0 & h_6 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} Z +$$

$$+ \begin{bmatrix} -m_y \dot{q}_{53} q_{53} & 0 & 0 & m_y \dot{q}_3 q_{53} \sin q_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -m_x \dot{q}_3 \cos q_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} Z \quad (4.163)$$

$$V(\theta, \dot{\theta}) = \begin{bmatrix} -m_y \dot{q}_{53} q_{53} & h_1 & -nq_{53} & -h_2 + m_y \dot{q}_3 q_{53} \sin q_3 & -1 & 0 & 0 \\ -h_1 & \alpha_3 & h_4 & h_3 & 0 & -1 & 0 \\ nq_{53} & -h_4 & 0 & h_6 - m_x \dot{q}_3 \cos q_3 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} Z \quad (4.164)$$

De igual manera, para propósitos prácticos, sólo tomaremos la parte que nos interesa de esta matriz,

$$V(\theta, \dot{\theta}) = \begin{bmatrix} -m_y \dot{q}_{53} q_{53} & h_1 & -nq_{53} \\ -h_1 & \alpha_3 & h_4 \\ nq_{53} & -h_4 & 0 \end{bmatrix} Z_M \quad (4.165)$$

sustituyendo Z_M ,

$$V(\theta, \dot{\theta}) = \begin{bmatrix} -m_y \dot{q}_{53} q_{53} & h_1 & -nq_{53} \\ -h_1 & \alpha_3 & h_4 \\ nq_{53} & -h_4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_2 \\ f_{24} \\ f_{50} \end{bmatrix} \quad (4.166)$$

$$V(\theta, \dot{\theta}) = \begin{bmatrix} -m_y \dot{q}_{53} q_{53} f_2 + h_1 f_{24} - nq_3 f_{50} \\ -h_1 f_2 + \alpha_3 f_{24} + h_4 f_{50} \\ nq_{53} f_2 - h_4 f_{24} \end{bmatrix} \quad (4.167)$$

Recordando la ecuación (4.136),

$$h_1 = p_{12} \cos q_3 - p_{13} \sin q_3 + r q_{53}^2 \cos q_3$$

donde, del BGI del sistema observamos que,

$$p_{12} = i_x f_{24} \sin q_3; \quad p_{13} = i_y f_{24} \cos q_3 \quad (4.168)$$

Ahora bien, los giradores del segundo anillo de Euler del BGI del sistema, aunque son lineales (sus módulos son constantes), tienen los siguientes valores, derivados también del BGI,

$$n = m_z f_8 = m_z f_2 \quad (4.169)$$

$$r = m_x f_{12} = m_x f_{24} \sin q_3 \quad (4.170)$$

$$s = m_y f_{24} \cos q_3 \quad (4.171)$$

Sustituyendo la ecuación (4.168) en la ecuación (4.136), y a su vez, sustituyendo la ecuación resultante además de las ecuaciones (4.169), (4.170) y (4.171) en la ecuación (4.167), podemos reescribir cada uno de sus términos. Para el primer término tenemos,

$$-m_y \dot{q}_{53} q_{53} f_2 + i_x f_{24} \sin q_3 \cos q_3 f_{24} - i_y f_{24} \sin q_3 \cos q_3 f_{24} - m_z f_2 q_3 f_{50} + m_x \dot{q}_{53}^2 f_{24} \sin q_3 \cos q_3 f_{24} \quad (4.172)$$

Los estados q_3 y q_{23} representan los ángulos de nuestras uniones 1 y 2, el estado q_{53} representa, a su vez, el desplazamiento lineal del eslabón 2, por lo que, para propósitos de comparar este modelo con el modelo presentado en la sección 4.3.7, se hará la siguiente sustitución,

$$q_{23} = \theta_1; \quad q_3 = \theta_2; \quad q_{53} = \theta_3 \quad (4.173)$$

Recordando que los flujos en nuestras uniones (así como en cualquier sistema mecánico rotacional) representan las velocidades angulares, podemos entonces definir estos flujos como sigue,

$$f_2 = \dot{\theta}_2; \quad f_{24} = \dot{\theta}_1; \quad f_{50} = \dot{\theta}_3 \quad (4.174)$$

Considerando las ecuaciones (4.173) y (4.174), podemos reescribir el primer término de la ecuación (4.167) como sigue,

$$\sin \theta_2 \cos \theta_2 (i_x - i_y + m_x \theta_3^2) \dot{\theta}_1^2 - \theta_3 \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 (m_y + m_z) \quad (4.175)$$

para el segundo término tenemos,

$$\sin \theta_2 \cos \theta_2 [2(i_y - i_x)] \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + [(m_y - m_x) \theta_3 \cos^2 \theta_2] \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_3 + \sin \theta_2 \cos \theta_2 (m_z - m_x) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \theta_3^2 \quad (4.176)$$

finalmente, el tercer término resulta,

$$- [m_y \theta_3 \cos^2 \theta_2] \dot{\theta}_1 + m_z \theta_3 \dot{\theta}_2 \quad (4.177)$$

De las ecuaciones (4.175), (4.176) y (4.177) podemos derivar las matrices $C(\theta)$ y $B(\theta)$ de la sección anterior (ecuaciones (4.120) y (4.121)), considerando la ecuación (4.156).

La matriz $G(\theta)$ se deriva directamente de la matriz E de nuestro sistema,

$$G(\theta) = E_G i_g \quad (4.178)$$

donde,

$$E_G = \begin{bmatrix} \frac{q_{53} m_y \cos q_3}{i_g} \\ 0 \\ \frac{m_x \sin q_3}{i_g} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\theta_3 m_y \cos \theta_2}{i_g} \\ 0 \\ \frac{m_x \sin \theta_2}{i_g} \end{bmatrix} \quad (4.179)$$

sustituyendo la ecuación (4.179) en (4.178), resulta,

$$G(\theta) = \begin{bmatrix} m_y \theta_3 \cos \theta_2 \\ 0 \\ m_x \sin \theta_2 \end{bmatrix} \quad (4.180)$$

Este modelo de Euler-Lagrange para el Stanford derivado directamente del modelo conseguido mediante bond graphs resulta ser igual al presentado en la sección anterior, se puede observar que las Ecuaciones (4.119) y (4.161) son iguales, así como las Ecuaciones (4.122) y (4.180), por lo que nuestro modelo matemático queda así comprobado y validado.

4.4 Obtención del estado estacionario de un robot manipulador a partir de su Bond Graph

La respuesta en el tiempo de un sistema dinámico tiene dos componentes, la respuesta transitoria, y la respuesta en estado estacionario. La respuesta en estado estacionario, a su vez, determina la estabilidad del sistema. Un sistema es considerado estable, si al introducir a éste una entrada acotada (comprendida entre dos límites finitos), la salida de éste también está acotada, es decir, no presenta comportamientos asintóticos en ningún instante en el tiempo [Ogata, 1998]. Más aún, si la salida del sistema tiende a un valor finito, podemos asumir que es posible determinar el valor a la entrada que produce esta salida en particular.

Particularmente, cuando hablamos de robots manipuladores, esta problemática comprende la solución al problema de la cinemática inversa. En otras palabras, se pretenden determinar los torques aplicados a las uniones de nuestro manipulador, para conseguir los ángulos o desplazamientos en nuestros eslabones, que posicionen al actuador final en un punto específico dentro de nuestra área de trabajo.

En esta tesis se presenta un procedimiento mediante el cual podemos determinar el estado estacionario del sistema partiendo de su representación en bond graph. La teoría contenida en esta

sección está basada, en gran parte, en el artículo publicado derivado de la investigación de esta tesis.

4.4.1 El estado estacionario

Una de las maneras de determinar el estado estacionario de la clase de sistemas no-lineales analizados en esta tesis, consiste en obtener su representación en variables de estado, la cual tiene la forma:

$$\dot{x} = f(x)x(t) + g(x)u(t) \quad (4.181)$$

donde \dot{x} es el vector de estados derivados. Al igualar este vector de estados a cero, se elimina la dinámica del sistema y el estado estacionario puede ser determinado.

4.4.2 Determinación directa del estado estacionario en Bond Graph

En esta sección se presenta un procedimiento para la obtención del estado estacionario de una clase particular de sistemas no-lineales representado en un bond graph. Dentro de esta clase de sistemas no-lineales se encuentran los robots manipuladores analizados en esta tesis [Ogata, 1998].

Una forma más directa de obtener el estado estable es usando el bond graph en causalidad derivativa, el cual se obtiene cambiando las causalidades de los elementos almacenadores de energía de manera predefinida. El diagrama de la Figura 4.21 muestra la configuración de los vectores clave dentro de la estructura de unión para un bond graph en causalidad derivativa (BGD).

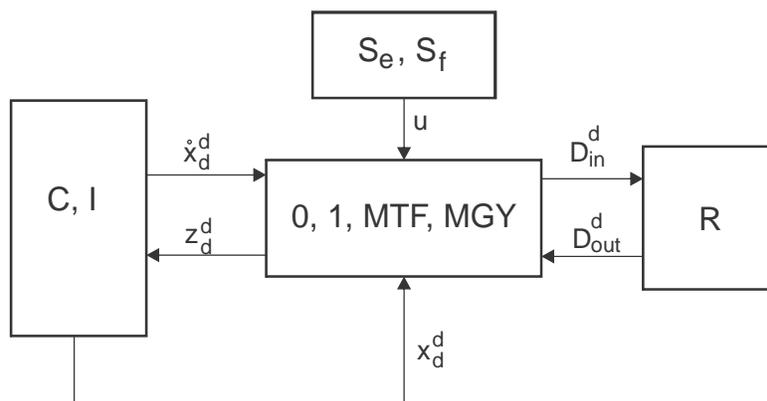


Figura 4.21: Configuración de la estructura unión para el BGD.

En la Figura 4.21, el vector de estados x_d^d está compuesto por las variables almacenadoras de energía en causalidad derivativa; z_d^d son las variables de co-energía con causalidad derivativa asignada, D_{in}^d y D_{out}^d son los campos de disipación de energía con causalidad derivativa asignada y u es la entrada del sistema. Las relaciones entre los campos de almacenamiento y disipación en el BGD son,

$$z_d^d(t) = F_d^d x_d^d(t) \quad (4.182)$$

$$D_{out}^d(t) = L^d D_{in}^d(t) \quad (4.183)$$

La matriz de estructura unión para la configuración propuesta del BGD se define en el lema siguiente

Lema 4.1 *Sea un modelo de un sistema representado en bond graph con causalidad derivativa asignada, entonces, la matriz de estructura unión J para dicho sistema es*

$$\begin{bmatrix} z_d^d(t) \\ D_{in}^d(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} & J_{13} \\ J_{21} & J_{22} & J_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_d^d(t) \\ D_{out}^d(t) \\ u(t) \end{bmatrix} \quad (4.184)$$

esta matriz está particionada de acuerdo a las dimensiones de $\dot{x}_d^d(t)$, $D_{out}^d(t)$ y $u(t)$, y sus entradas toman valores dentro del rango $\{0, \pm 1, \pm r, \pm l\}$ donde r y l son los módulos de los transformadores y giradores, respectivamente. Entonces, la ecuación (4.185) es obtenida directamente de (4.184),

$$z_d^d(t) = A^*(x) \dot{x}_d^d(t) + B^*(x) u(t) \quad (4.185)$$

donde

$$A^*(x) = J_{11} + J_{12} M_d J_{21} \quad (4.186)$$

$$B^*(x) = J_{13} + J_{12} M_d J_{23} \quad (4.187)$$

siendo

$$M_d = (I_r - L^d J_{22})^{-1} L^d \quad (4.188)$$

En el BGD, de la segunda línea de (4.184) y usando la ecuación (4.183), tenemos

$$D_{in}^d(t) = (I_r - L^d J_{22})^{-1} [J_{21} \dot{x}_d^d(t) + J_{23} u(t)] \quad (4.189)$$

sustituyendo (4.189) en la primera línea de (4.184) y usando (4.183) obtenemos

$$z_d^d(t) = [J_{11} + J_{12} M_d J_{21}] \dot{x}_d^d(t) + [J_{13} + J_{12} M_d J_{23}] u(t) \quad (4.190)$$

y de esta manera, la ecuación (4.185) del lema anterior es obtenida [González, 2010].

En este caso, cuando la submatriz $S_{14} \neq 0$ del bond graph en causalidad integral (BGI), entonces la matriz de estados $A(x)$ es no singular, pero $A^*(x)$ es singular. Por lo tanto, la matriz de estados permite obtener,

$$B^*(x)_i^i = -F_i^i A^{-1}(x)B(x) \quad (4.191)$$

$$B^*(x)_d^i = -S_{14}^T B^*(x)_i^i \quad (4.192)$$

donde

$$B(x) = \begin{bmatrix} B^*(x)_i^i \\ B^*(x)_d^i \end{bmatrix} \quad (4.193)$$

Como el sistema tiene una matriz de estados no singular, $A(x)$, de (4.185), $\dot{x}_d^d(t) = 0$ y usando el Teorema del Valor Final, el estado estable de las variables de estado puede ser obtenido como

$$(x_d^d)_{ss} = (F_d^d)^{-1} B^*(x) u_{ss} \quad (4.194)$$

donde

$$(x_d^d)_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} [s \cdot x_d^d(s)] \quad \text{y} \quad u_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} [s \cdot u(s)] \quad (4.195)$$

En la siguiente sección se presenta la metodología propuesta para obtener el estado estacionario del robot PUMA.

4.4.3 Estado estacionario de un robot manipulador PUMA

Un manipulador de dos grados de libertad en tres dimensiones se presenta en la Figura 4.22, este manipulador puede ser considerado como un robot PUMA con las uniones de codo y muñeca.

El segundo eslabón, aunque se mueve en tres dimensiones, rota en torno a un punto fijo: la segunda unión.

Como se mencionó antes, el estado estacionario del robot, puede ser determinado mediante el análisis de su BGD, el bond graph en causalidad derivativa del manipulador PUMA se muestra en la Figura 4.23.

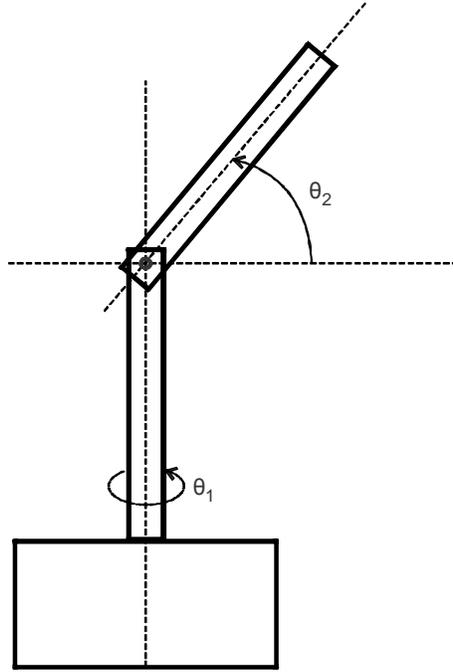


Figura 4.22: Robot PUMA: diagrama.

Los vectores clave del BGD son,

$$x_d^d = \begin{bmatrix} p_2 \\ p_8 \\ p_{12} \\ p_{13} \\ p_{19} \\ p_{24} \\ q_3 \\ q_{23} \end{bmatrix}; \dot{x}_d^d = \begin{bmatrix} e_2 \\ e_8 \\ e_{12} \\ e_{13} \\ e_{19} \\ e_{24} \\ f_3 \\ f_{23} \end{bmatrix}; z_d^d = \begin{bmatrix} f_2 \\ f_8 \\ f_{12} \\ f_{13} \\ f_{19} \\ f_{24} \\ e_3 \\ e_{23} \end{bmatrix} \quad (4.196)$$

$$D_{in}^d = \begin{bmatrix} f_6 \\ f_{21} \end{bmatrix}; D_{out}^d = \begin{bmatrix} e_6 \\ e_{21} \end{bmatrix}; u = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_{25} \end{bmatrix} \quad (4.197)$$

las relaciones constitutivas de los campos de almacenamiento y disipación son,

$$F_d^d = \text{diag} \left\{ \frac{1}{i_2}, \frac{1}{i_z}, \frac{1}{i_x}, \frac{1}{i_y}, \frac{1}{i}, \frac{1}{i_1}, \frac{1}{c_2}, \frac{1}{c_1} \right\} \quad (4.198)$$

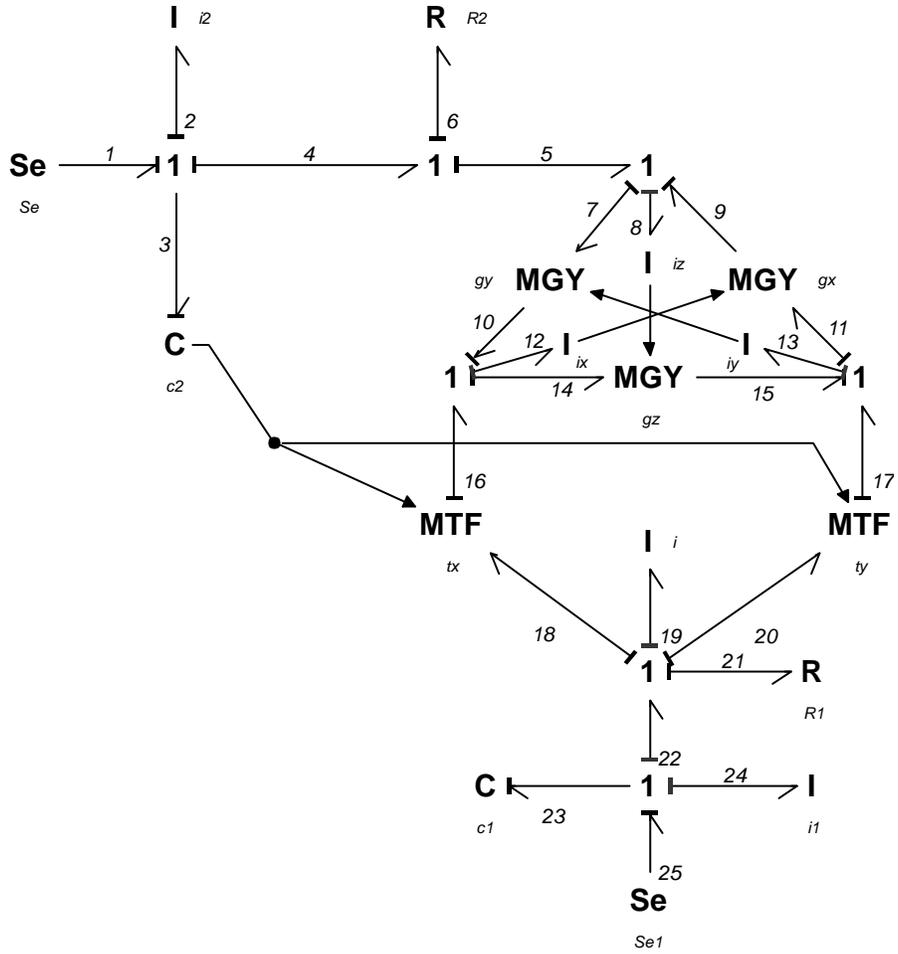


Figura 4.23: BGD del robot PUMA.

$$L_d = \text{diag}\{R_2, R_1\} \quad (4.199)$$

Para la matriz de estructura unión del BGD se tiene

$$\begin{bmatrix} z \\ D_{in} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} & J_{13} \\ J_{21} & J_{22} & J_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ D_{out} \end{bmatrix} \quad (4.200)$$

La matriz de estructura unión para el PUMA en causalidad derivativa queda de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} f_2 \\ f_8 \\ f_{12} \\ f_{13} \\ f_{19} \\ f_{24} \\ e_3 \\ e_{23} \\ f_6 \\ f_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -q_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -q_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_{12}q_3 - p_{13}q_3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & q_3 & q_3 & 1 & 1 & -p_{12}q_3 + p_{13}q_3 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_2 \\ e_8 \\ e_{12} \\ e_{13} \\ e_{19} \\ e_{24} \\ f_3 \\ f_{23} \\ e_6 \\ e_{21} \\ e_1 \\ e_{25} \end{bmatrix} \quad (4.201)$$

de donde,

$$J_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -q_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -q_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_{12}q_3 - p_{13}q_3 \\ 0 & 0 & q_3 & q_3 & 1 & 1 & -p_{12}q_3 + p_{13}q_3 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.202)$$

$$J_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (4.203)$$

$$J_{13} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.204)$$

$$J_{21} = -J_{12}^T \quad (4.205)$$

$$J_{22} = J_{23} = 0 \quad (4.206)$$

Para obtener la representación de los estados de esta clase de sistemas no lineales a partir de su bond graph se tiene

$$z_d^d(t) = A^*(x)\dot{x}_d^d(t) + B^*(x)u(t) \quad (4.207)$$

si se considera sólo el estado estable del sistema, es decir $\dot{x} = 0$, se tiene que

$$z_d^d(t) = \underbrace{A^*(x)\dot{x}_d^d(t)}_0 + B^*(x)u(t) \quad (4.208)$$

de lo anterior se obtiene

$$z_{ss} = B^*(x)u(t) \quad (4.209)$$

para el manipulador PUMA se obtiene el estado estacionario,

$$z_{ss} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (e_1)_{ss} \\ (e_{25})_{ss} \end{bmatrix} \quad (4.210)$$

De lo anterior se puede observar que los estados están completamente controlados por el valor de las entradas, en otras palabras, el estado estacionario de las variables de estado tenderán al valor de la entrada.

Finalmente, se presenta una simulación del sistema en BGI realizada con la ayuda del simulador 20-sim. Los parámetros del sistema son: $c_1 = 0.1rad/N - m$, $c_2 = 0.2rad/N - m$, $i_1 = 0.1N - m - s^2$, $i_2 = 0.2N - m - s^2$, $i = i_z = i_x = i_y = 1N - m - s^2$, $R_1 = 4N - s/m$ y $R_2 = 3N - s/m$. Dos fuentes fueron utilizadas. Primero, dos escalones $\tau_1 = 1N - m$ y $\tau_2 = 2N - m$. Después de ocho segundos, un segundo escalón de $2N - m$ es aplicado a ambas entradas.

Se observa que la simulación corresponde a la ecuación (4.210), porque después de seis segundos el estado estacionario es alcanzado y sus valores son $(e_3)_{ss} = 2N - m$, $(e_{23})_{ss} = 1N - m$. El segundo periodo dinámico se termina en quince segundos, la respuesta en estado estacionario es entonces $(e_3)_{ss} = 4N - m$, $(e_{23})_{ss} = 3N - m$, esto es debido a las entradas aplicadas antes. Además, la velocidad angular de ambos eslabones es igual a cero cuando los estados estacionarios son alcanzados.

4.4.4 Estado estacionario de un robot manipulador Standford

Para encontrar la respuesta en estado estable del robot manipulador Stanford, la representación en bond graph con causalidad derivativa de este es presentada en la Figura 4.25.

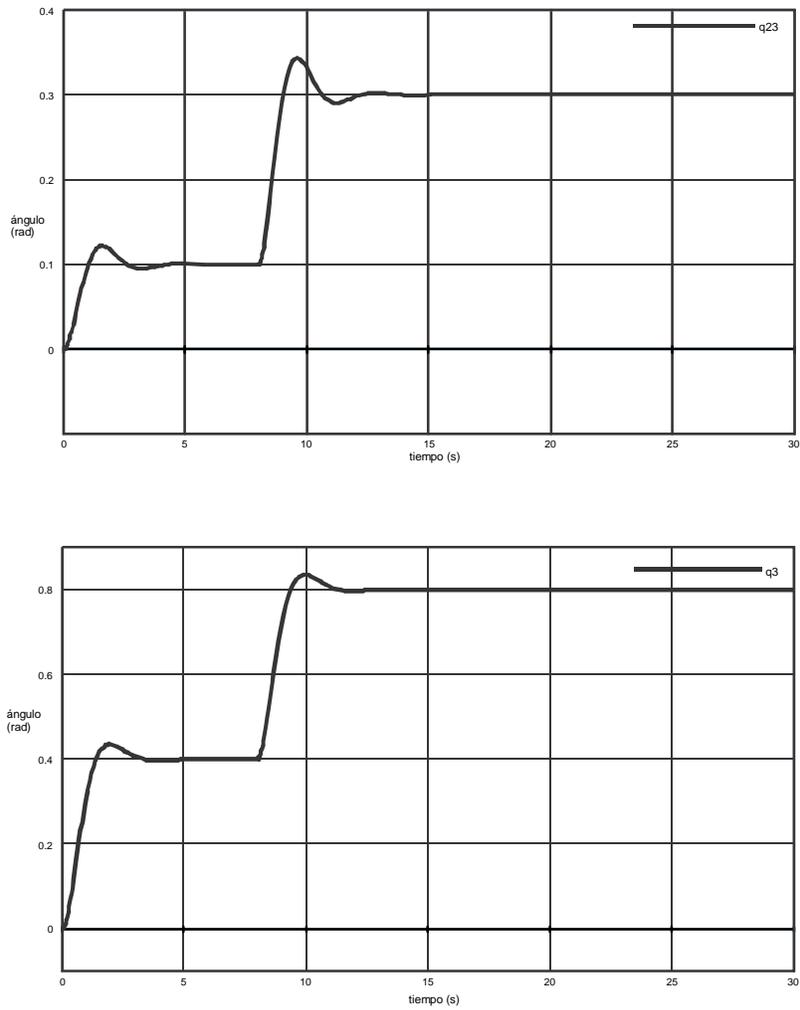


Figura 4.24: Simulación del estado estacionario del robot PUMA.

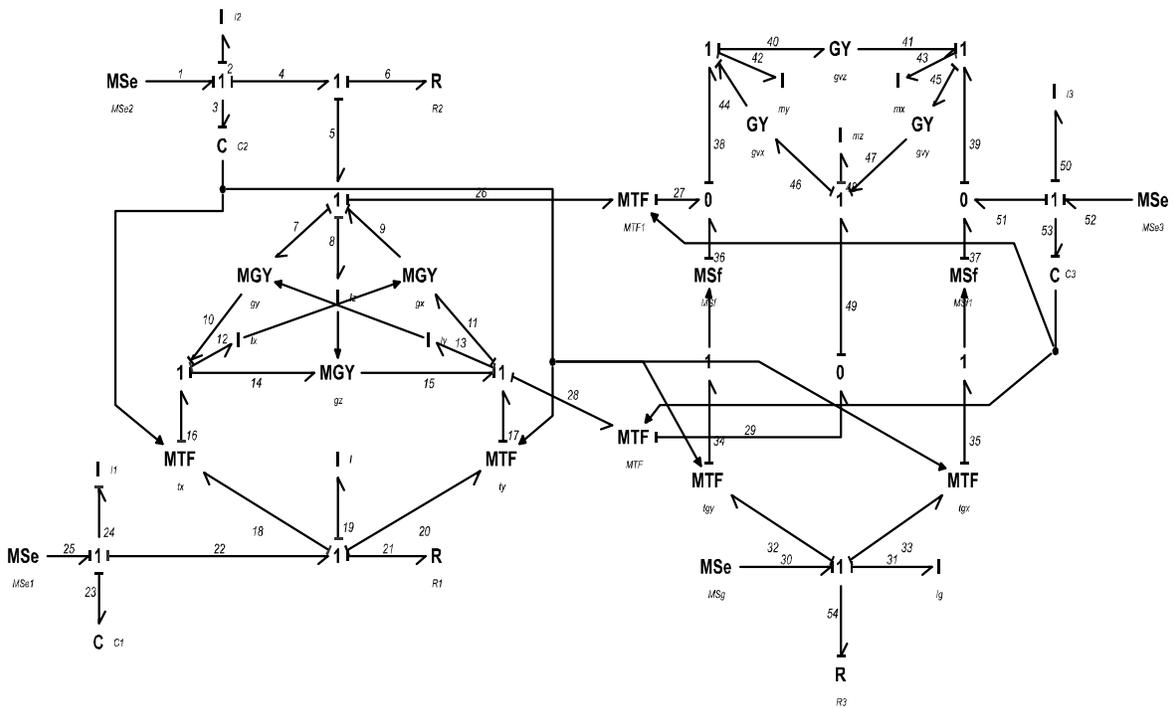


Figura 4.25: BDG del robot Stanford.

Los vectores clave son,

$$(x_d^d)^1 = \begin{bmatrix} p_2 \\ p_{24} \\ p_{44} \\ p_{53} \\ q_3 \\ q_{25} \\ q_{43} \end{bmatrix}; (x_d^d)^2 = \begin{bmatrix} p_8 \\ p_{12} \\ p_{13} \\ p_{20} \\ p_{32} \\ p_{35} \\ p_{40} \end{bmatrix}; (\dot{x}_d^d)^1 = \begin{bmatrix} e_2 \\ e_{24} \\ e_{44} \\ e_{53} \\ f_3 \\ f_{25} \\ f_{43} \end{bmatrix}; (\dot{x}_d^d)^2 = \begin{bmatrix} e_8 \\ e_{12} \\ e_{13} \\ e_{20} \\ e_{32} \\ e_{35} \\ e_{40} \end{bmatrix} \quad (4.211)$$

$$(z_d^d)^1 = \begin{bmatrix} f_2 \\ f_{24} \\ f_{44} \\ f_{53} \\ e_3 \\ e_{25} \\ e_{43} \end{bmatrix}; (z_d^d)^2 = \begin{bmatrix} f_8 \\ f_{12} \\ f_{13} \\ f_{20} \\ f_{32} \\ f_{35} \\ f_{40} \end{bmatrix} \quad (4.212)$$

$$D_{in}^d = \begin{bmatrix} f_5 \\ f_{22} \\ e_{54} \end{bmatrix}; D_{out}^d = \begin{bmatrix} e_5 \\ e_{22} \\ f_{54} \end{bmatrix}; u = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_{26} \\ e_{45} \\ e_{52} \end{bmatrix} \quad (4.213)$$

donde $x_d^d = [(x_d^d)^1 (x_d^d)^2]^T$. Las relaciones constitutivas son,

$$(F_d^d)^1 = \text{diag} \left\{ \frac{1}{i_2}, \frac{1}{i_1}, \frac{1}{i_3}, \frac{1}{i_g}, \frac{1}{c_2}, \frac{1}{c_1}, \frac{1}{c_3} \right\} \quad (4.214)$$

$$(F_d^d)^2 = \text{diag} \left\{ \frac{1}{i_z}, \frac{1}{i_x}, \frac{1}{i_y}, \frac{1}{i}, \frac{1}{m_y}, \frac{1}{m_x}, \frac{1}{m_z} \right\} \quad (4.215)$$

$$L_d = \text{diag} \left\{ R_2, R_1, \frac{1}{R_3} \right\} \quad (4.216)$$

donde

$$(z_d^d)^1 = (F_d^d)^1 (x_d^d)^1 \quad (4.217)$$

$$(z_d^d)^2 = (F_d^d)^2 (x_d^d)^2 \quad (4.218)$$

La matriz de estructura unión para el BGD puede ser escrita como,

$$J = \begin{bmatrix} J_{11}^{11} & J_{11}^{12} & J_{12}^{11} & J_{13}^{11} \\ J_{11}^{21} & J_{11}^{22} & J_{12}^{21} & J_{13}^{21} \\ J_{21}^{11} & J_{21}^{12} & J_{22} & J_{23} \end{bmatrix} \quad (4.219)$$

La matriz de estructura unión para el BGD del Stanford queda entonces distribuida de la siguiente manera,

$$J_{11}^{11} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & h_2 - h_1 + h_3 & -nq_{46} \\ 0 & -1 & 0 & 0 & h_1 - h_2 - h_3 & 0 & h_5 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & nq_{46} & -h_5 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.220)$$

$$J_{12}^{11} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -h_6 \\ 0 & -1 & h_7 - h_9 \\ 0 & 0 & h_8 \end{bmatrix} \quad (4.221)$$

$$J_{13}^{11} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.222)$$

$$J_{11}^{21} = (J_{11}^{12})^T \quad (4.223)$$

$$J_{12}^{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos q_3 \\ 0 & 0 & \sin q_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.224)$$

$$J_{21}^{11} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.225)$$

$$J_{23} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.226)$$

$$J_{13}^{21} = J_{11}^{22} = J_{21}^{12} = J_{22} = 0 \quad (4.227)$$

siendo

$$\begin{aligned} h_1 &= p_{13} \sin q_3 \\ h_2 &= p_{12} \cos q_3 \\ h_3 &= q_{46}^2 r \cos q_3 \\ h_4 &= q_{46}^2 s \cos q_3 \\ h_5 &= q_{46} s \cos q_3 \\ h_6 &= q_{46} n \sin q_3 \\ h_7 &= q_{46} s \cos q_3 \sin q_3 \\ h_8 &= n \cos q_{46} \\ h_9 &= q_{46} r \cos^2 q_3 \end{aligned} \quad (4.228)$$

Como $J_{22} = 0$, entonces $M_d = L_d$.

De acuerdo a la partición de la matriz J , podemos escribir la matriz B_p^* de la siguiente manera,

$$B^*(x) = \begin{bmatrix} (B_p^*)^1 \\ (B_p^*)^2 \end{bmatrix} \quad (4.229)$$

donde,

$$(B^*(x))^1 = J_{13}^{11} + J_{12}^{11} M_d J_{23} \quad (4.230)$$

$$(B^*(x))^2 = J_{13}^{21} + J_{12}^{21} M_d J_{23} \quad (4.231)$$

De las ecuaciones (4.216), (4.221), (4.222), (4.226) y (4.230), tenemos,

$$(B^*(x))^1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -h_6 \\ 0 & -1 & h_7 - h_9 \\ 0 & 0 & h_8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_2 & 0 & 0 \\ 0 & R_1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{R_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.232)$$

$$(B^*(x))^1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{R_3} \\ 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{R_3} h_6 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{R_3} (h_7 - h_9) \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{R_3} h_8 \end{bmatrix} \quad (4.233)$$

también, de las ecuaciones (4.216), (4.227), (4.224), (4.226) y (4.231), tenemos,

$$(B^*(x))^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos q_3 \\ 0 & 0 & \sin q_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_2 & 0 & 0 \\ 0 & R_1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{R_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.234)$$

$$(B^*(x))^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{R_3} \cos q_3 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{R_3} \sin q_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.235)$$

De las ecuaciones (4.194), (4.214), (4.215), (4.233) y (4.235), el estado estacionario de las variables de estado es,

$$(f_2)_{ss} = (f_{24})_{ss} = (f_{44})_{ss} = (f_8)_{ss} = (f_{12})_{ss} = (f_{13})_{ss} = (f_{20})_{ss} = (f_{40})_{ss} = 0 \quad (4.236)$$

$$(f_{53})_{ss} = \frac{(e_{30})_{ss}}{R_3} \quad (4.237)$$

$$(e_3)_{ss} = (e_1)_{ss} - \frac{h_6}{R_3}(e_{30})_{ss} \quad (4.238)$$

$$(e_{25})_{ss} = (e_{26})_{ss} - \frac{h_7 - h_9}{R_3}(e_{30})_{ss} \quad (4.239)$$

$$(e_3)_{ss} = (e_{52})_{ss} - \frac{h_8}{R_3}(e_{30})_{ss} \quad (4.240)$$

$$(f_{32})_{ss} = \frac{\cos q_3}{R_3}(e_{30})_{ss} \quad (4.241)$$

$$(f_{35})_{ss} = \frac{\sin q_3}{R_3}(e_{30})_{ss} \quad (4.242)$$

Para conocer el comportamiento del manipulador Stanford, los siguientes parámetros son sustituidos en el BGI del sistema: $c_1 = 0.1rad/N - m$, $c_2 = 0.2rad/N - m$, $c_3 = 0.3rad/N - m$, $i_1 = 0.15N - m - s^2$, $i_2 = 0.2N - m - s^2$, $i_3 = 0.25N - m - s^2$, $i_g = 0.15N - m - s^2$, $n = r = s = 2$, $i = 0.1$, $i_z = i_x = i_y = 0.3N - m - s^2$, $m_x = m_y = m_z = 0.4N - m - s^2$, $R_1 = 3N - s/m$, $R_2 = 5N - s/m$ y $R_3 = 2N - s/m$. Las fuentes utilizadas son $e_{26}(t) = 10$ después de 1s, $e_1(t) = 2$ después de 1s, $e_{52}(t) = 5$ después de 1s y $e_{30}(t) = -0.5$ después de 1s. La Figura 4.26 muestra el comportamiento de las variables q_{25} , q_3 y q_{46} .

De acuerdo con las ecuaciones (4.238), (4.239), (4.240) y (4.214), con las variables $(q_{25})_{ss}$, $(q_3)_{ss}$ y $(q_{46})_{ss}$, la respuesta en estado estacionario de las entradas es:

$$(e_{52})_{ss} = 4.9980N - m; \quad (e_1)_{ss} = 1.9957N - m; \quad (e_{26})_{ss} = 10.0089N - m \quad (4.243)$$

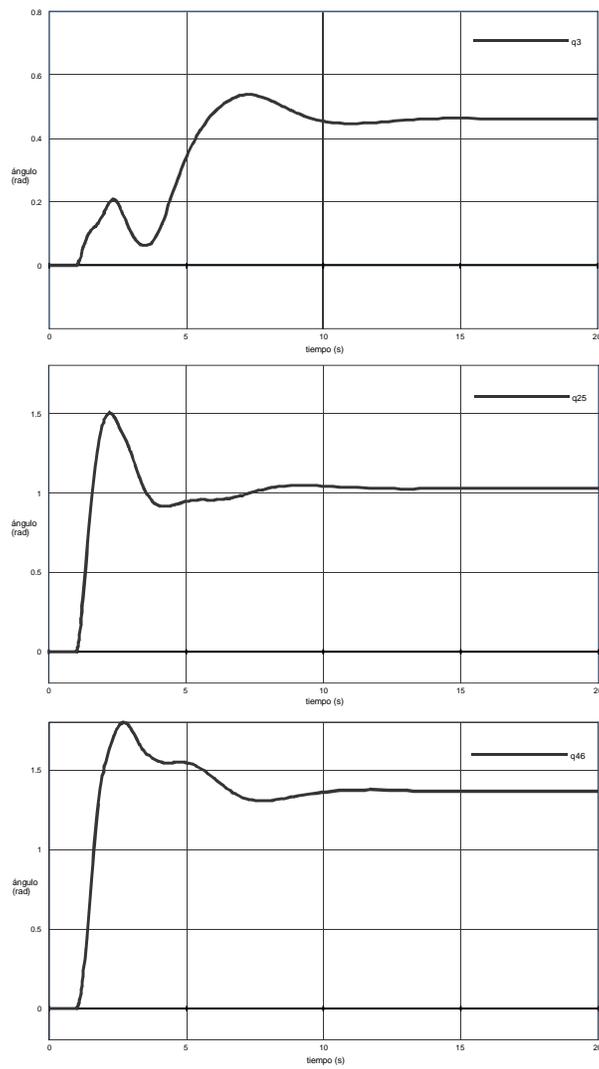


Figura 4.26: Simulación del estado estacionario del robot Stanford con entradas seleccionadas.

Otro caso interesante mencionado antes (cinemática inversa), es el obtener las entradas necesarias para conseguir una posición del brazo en particular. Las ecuaciones (4.238), (4.239), (4.240) pueden ser descritas por,

$$(e_{52})_{ss} = \frac{(q_{46})_{ss}}{c_3} - \frac{n \cos(q_3)_{ss}}{R_3} (e_{30})_{ss} \quad (4.244)$$

$$(e_1)_{ss} = \frac{(q_3)_{ss}}{c_2} + \frac{(q_{46})_{ss} n \sin(q_3)_{ss}}{R_3} (e_{30})_{ss} \quad (4.245)$$

$$(e_{26})_{ss} = \frac{(q_{25})_{ss}}{c_1} + \frac{(q_{46})_{ss} \cos(q_3)_{ss}}{R_3} [(e_{30})_{ss} s \cos(q_3)_{ss} - r \sin(q_3)_{ss} (e_{30})_{ss}] \quad (4.246)$$

De las ecuaciones (4.244), (4.245) y (4.246), y dada una posición particular del manipulador: $(q_{46})_{ss} = 0.5rad.$ $(q_3)_{ss} = 0.3rad.$ y $(q_{25})_{ss} = 0.6rad.$ las entradas necesarias para alcanzar esa posición en el Stanford son:

$$(e_{52})_{ss} = 2.1443N - m, \quad (e_1)_{ss} = 1.4261N - m, \quad (e_{26})_{ss} = 5.8432N - m \quad (4.247)$$

Aplicando las entradas determinadas en la ecuación (4.247) y usando los mismos parámetros que en el BGI del sistema, la simulación resulta como se muestra en la figura 4.27.

El cálculo del estado estacionario de sistemas como los mostrados en este Capítulo, usando métodos tradicionales de modelado, resulta una tarea difícil, puesto que involucra la inversión de una matriz. Mientras que, con el uso de Bond Graph, ese cálculo resulta sencillo, y mejor aún, la solución del problema de la cinemática inversa no tiene que ser resuelto, puesto que las ecuaciones que resuelven este problema son derivadas directamente del primer resultado.

En el siguiente capítulo se darán a conocer los procedimientos necesarios, primero, para conseguir el bond graph linealizado para una clase de sistemas no-lineales, y segundo, para el diseño del observador de estados lineal, el cual nos permite estimar los estados de cualquier sistema lineal.

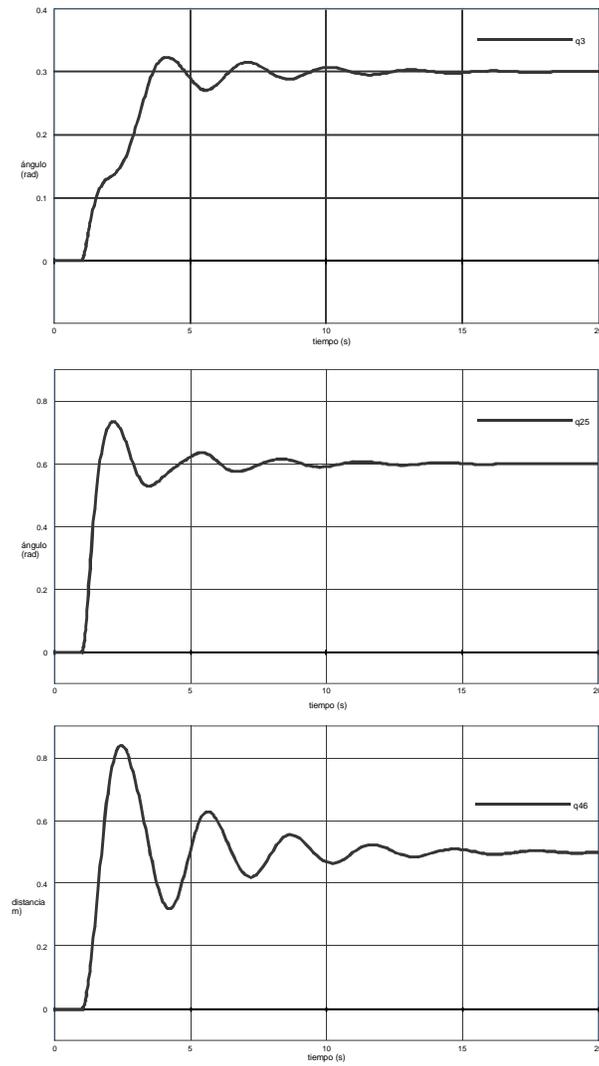


Figura 4.27: Simulación del estado estacionario del robot Stanford con posiciones seleccionadas.

Capítulo 5

Linealización y los observadores de estados lineales en Bond Graph

5.1 Introducción

En éste capítulo se introducirá el concepto de trayectoria causal. Las trayectorias causales permiten conocer, entre otras cosas, si un sistema representado en bond graph es controlable y/o observable. Se presentan, además, dos procedimientos, uno que permite llegar al modelo linealizado de un sistema a partir de su modelo en bond graph, es decir, observar el comportamiento del sistema bajo condiciones de estado estable (punto de equilibrio del sistema) y otro que permite la construcción de un observador asintótico de estados para un sistema lineal invariante en el tiempo, modelado en bond graph, así como la obtención del modelo en espacio de estados del mismo, partiendo del modelo del sistema original. Se intentará entonces linealizar el modelo de los robots PUMA y Stanford, para luego construir sus observadores lineales.

5.2 Trayectoria causal

Un bond graph no solamente muestra una estructura topológica de un sistema sino también su organización causal, la cual indica las relaciones de causa-efecto. Esta estructura causal da la noción de *Trayectoria Causal* que a continuación se explica.

- Una trayectoria causal de una estructura de unión es una secuencia alternante de bonds y

nodos, tal que:

1. Para una gráfica acausal (una gráfica que no tiene causalidad aplicada a sus elementos o bonds), la secuencia forma una cadena sencilla.
 2. Todos los nodos en una secuencia tienen una causalidad completa y correcta.
 3. Dos bonds en una trayectoria causal tienen el mismo nodo y orientaciones causales opuestas.
- Una trayectoria causal es *simple*, si a través de la misma sigue solamente una misma variable, tal como se muestra en la Figura 5.1.

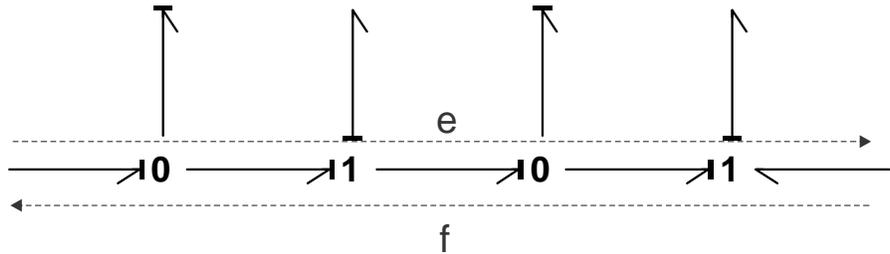


Figura 5.1: Ejemplo de una trayectoria causal simple.

- Una trayectoria causal es *mezclada* si un cambio de variable es requerido a través de la secuencia causal. Si el cambio se debe a un girador a) la trayectoria causal es llamada mezclada directa y cuando la trayectoria pasa a través de un elemento R, C o I b) la trayectoria causal es llamada mezclada indirecta. Los bond graphs mostrados en la Figura 5.2 ilustran estas trayectorias.
- Dos elementos P_1 y P_2 que pertenecen al conjunto de $\{R, C, I, S_e, S_f\}$ son causalmente conectados si la variable de entrada de una es influenciada por la variable de salida de la otra.
- Una *trayectoria directa* es una trayectoria causal entre una entrada y un detector.
- Un *Lazo Causal* es una trayectoria causal sencilla cerrada.
- Un *Lazo de Mason* es un lazo causal de la salida de un puerto a la entrada del mismo puerto sin trazar el mismo bond en la misma dirección más de una vez.

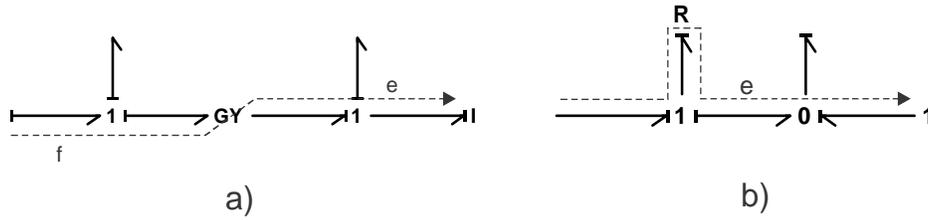


Figura 5.2: Trayectoria causal mezclada: a) girador b) elemento R, I o C

5.2.1 Controlabilidad y observabilidad desde una perspectiva clásica

Controlabilidad

Se dice que el sistema descrito por las ecuaciones (2.40) y (2.41) es de estado controlable en $t = t_0$, si es posible construir una señal de control sin restricciones que transfiera un estado inicial a cualquier estado final en un intervalo de tiempo $t_0 \leq t \leq t_1$. Si todos los estados son controlables, se dice que el sistema es de estado completamente controlable.

$$C = \begin{bmatrix} B_p & A_p B_p & A_p^2 B_p & \dots & A_p^{n-1} B_p \end{bmatrix} \quad (5.1)$$

La matriz (5.1) recibe el nombre de *matriz de controlabilidad*. El sistema será de estado completamente controlable, si y sólo si la matriz de controlabilidad de dimensión $n \times n$ es de rango pleno, es decir, igual a n .

Observabilidad

Se dice que un sistema es completamente observable si el estado $x(t_0)$ puede ser determinado a partir de la observación de la salida $y(t)$ durante un intervalo de tiempo finito $t_0 \leq t \leq t_1$. Por lo tanto, el sistema será completamente observable si todas las transiciones del estado afectan a todos los elementos del vector de salida. El concepto de observabilidad es importante debido a que en la práctica, es común encontrar sistemas en los cuales la medición de todos sus estados no es posible. Por lo tanto, si se requiere un control por retroalimentación de estados, es necesaria la estimación de las variables de estado no medibles para construir las señales de control.

La solución para determinar la observabilidad del sistema completo en tiempo continuo, tomando en cuenta el sistema sin excitación, es,

$$Rango(O_r) = \begin{bmatrix} C_p^T & A_p^T C_p^T & \dots & (A_p^T)^{n-1} C_p^T \end{bmatrix} \quad (5.2)$$

así, el sistema será completamente observable si y sólo si la matriz de observabilidad O de dimensión $n \times m$ es de rango n . Es decir, tiene n vectores columna linealmente independientes [Ogata, 1998].

A continuación se muestran algunas definiciones que ayudarán a entender la dinámica utilizada para la comprobación de la observabilidad y controlabilidad desde un punto de vista de Bond Graph.

5.2.2 Controlabilidad y observabilidad desde un enfoque de Bond Graph

La estructura unión del modelo de Bond Graph contiene información del tipo de elementos de los que está compuesto el sistema y su configuración topológica sin importar sus valores numéricos. Las definiciones que se muestran a continuación permiten conocer y establecer los conceptos de orden mínimo y rango estructural, los cuales forman parte importante en el análisis de controlabilidad y observabilidad en Bond Graph.

Definición 5.1 El orden mínimo de un modelo en Bond Graph es igual en dimensión a la matriz de estados, y es igual al número de elementos C e I con causalidad integral en el modelo de Bond Graph en causalidad integral o $BGI(n_i)_i$ [Dauphin, 1991].

Definición 5.2 El rango estructural de una matriz A_p , es el rango máximo que esa matriz alcanza en función de sus parámetros libres, tomando en cuenta las interrelaciones de los elementos [Dauphin, 1991].

Definición 5.3 El rango estructural q de una matriz de estados A_p asociada a un modelo en Bond Graph es igual al número de elementos dinámicos C e I en causalidad integral en el BGI, que aceptan causalidad derivativa en el BGD. Si $(n_i)_i$ representa el número de elementos C e I en causalidad integral y $(n_i)_d$ para el caso de los elementos dinámicos C e I que aceptan causalidad derivativa, se tiene que,

$$q = (n_i)_i - (n_i)_d \quad (5.3)$$

donde el rango estructural permite determinar la estabilidad asintótica de un sistema dinámico. Esto es posible determinarlo por el teorema siguiente:

Teorema 5.1 [Dauphin, 1991] Una condición necesaria y suficiente para que no exista una estabilidad asintótica de un sistema, es que el rango estructural q de la matriz A_p sea menor que $(n_i)_i$. Para el cual existen $(n_i)_i - q$ valores característicos cero de la matriz A_p .

Para calcular el rango estructural, el cual permite determinar la controlabilidad estructural y la observabilidad estructural de un sistema dinámico representado en Bond Graph, se requiere conocer el concepto de dualización de fuentes. La dualización de fuentes o detectores consiste en convertir una fuente o un detector de esfuerzo en uno de flujo, respectivamente y viceversa [Dauphin, 1991].

Definición 5.4 El rango estructural para q_c (controlabilidad) de la matriz concatenada $[A_p \ B_p]$ asociada a un modelo en Bond Graph es igual al número de elementos dinámicos C e I en causalidad integral en el BGI que acepten causalidad derivativa cuando se construye el BGD y cuando se realiza una dualización máxima de fuentes. El número de elementos en causalidad integral en el BGI que permanecen en causalidad integral en el BGD se denotan como t_s [Dauphin, 1991].

Definición 5.5 El rango estructural para q_o (observabilidad) de la matriz concatenada $[A_p \ C_p]^T$ asociada a un modelo en Bond Graph es igual al número de elementos C e I en causalidad integral en el BGI que acepten causalidad derivativa cuando se construye el BGD y cuando se realiza una dualización máxima de detectores. El número de elementos en causalidad integral en el BGI que permanecen en causalidad integral en el BGD se denotan como t_d [Dauphin, 1991].

Las siguientes observaciones hacen referencia a las ecuaciones de estado dadas por las ecuaciones (2.40) y (2.41), y a la matriz de estructura unión S (2.39).

Observación 5.2 El rango estructural de $[A_p \ B_p]$ es igual a:

- El rango de la matriz $S_c = [S_{11} \ S_{12} \ S_{13}]$
- $(n_i)_i - t_s$

Observación 5.3 El rango estructural de $[A_p \ C_p]^T$ es igual a:

- El rango de la matriz concatenada $S_o = [S_{11} \ S_{21} \ S_{31}]^T$
- $(n_i)_i - t_d$

Las observaciones 5.2 y 5.3 permiten asegurar que el rango estructural es igual al rango de las matrices concatenadas S_c y S_o , si y sólo si el sistema es conservativo de energía [Dauphin, 1991].

El análisis de controlabilidad y observabilidad en Bond Graph se resumen en los siguientes dos teoremas:

Teorema 5.4 [Dauphin, 1991] El sistema de $[A_p \ B_p]$ es estructuralmente controlable si y sólo si:

- Todos los elementos almacenadores C e I en causalidad integral en el BGI están causalmente conectados con una fuente.
- El rango estructural de $[A_p \ B_p]$ es igual al orden mínimo n .

Teorema 5.5 [Dauphin, 1991] El sistema de $[A_p \ C_p]^T$ es estructuralmente observable si y sólo si:

- Todos los elementos almacenadores C e I en causalidad integral en el BGI están causalmente conectados con un detector.
- El rango estructural de $[A_p \ C_p]^T$ es igual al orden mínimo n .

Otra forma de determinar el rango estructural de A_p es mediante la construcción del BGD, en el cual todos los elementos almacenadores deben aceptar causalidad derivativa.

5.3 Linealización

Un sistema linealizado es útil cuando se pretende conocer el comportamiento del sistema no-lineal, cuando este es perturbado de tal forma que ambos sistemas, linealizado y no-lineal, tengan un punto de equilibrio casi idéntico. Las ecuaciones del sistema son linealizadas alrededor de un punto de operación en particular. Las ecuaciones linealizadas derivadas, son consideradas válidas en una pequeña región cerca del punto de equilibrio.

Existen varias aplicaciones para los sistemas linealizados, por ejemplo, la determinación de estabilidad de pequeña señal, que es la habilidad del sistema de mantener sincronía cuando se somete a perturbaciones pequeñas. En este contexto, una perturbación es considerada pequeña, si las ecuaciones que describen la respuesta del sistema pueden ser linealizadas para propósitos de análisis.

A continuación se propone un procedimiento para obtener una linealización mediante bond graph para un sistema no-lineal. Este procedimiento se basa en un nuevo bond graph que representa la linealización del sistema. Además, se presenta una estructura unión para el bond graph linealizado, por lo que un modelo en espacio de estados puede ser determinado usando esta estructura unión.

5.3.1 Linealización tradicional

Una ecuación de estados lineal es útil como aproximación de una ecuación de estados no-lineal,

$$x(t) = f(x(t), u(t)) \quad x(t_0) = x_0 \quad (5.4)$$

con la ecuación de salida no-lineal,

$$y(t) = h(x(t), u(t)) \quad (5.5)$$

donde el estado $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $y(t) \in \mathbb{R}^q$ y la entrada $u(t) \in \mathbb{R}^p$.

Sean las ecuaciones (5.4) y (5.5) resueltas para una señal de entrada particular llamada entrada nominal $\tilde{u}(t)$ y un estado inicial particular llamado estado inicial nominal \tilde{x}_0 para obtener una única solución nominal, generalmente llamada trayectoria nominal $\tilde{x}(t)$. Considerar,

$$u(t) = \tilde{u}(t) + u_\delta(t) \quad (5.6)$$

$$x_0 = \tilde{x}_0 + x_{0\delta} \quad (5.7)$$

donde $x_\delta(t)$ y $u_\delta(t)$ denotan las variables de estado y las entradas que se encuentran cerca de los valores nominales. Además, $\|x_{0\delta}\|_2$ y $\|u_\delta\|_2$ son apropiadamente pequeñas para $t \geq t_0$.

Asumimos que la solución correspondiente permanece cercana a $\tilde{x}(t)$ y que la variación de la salida $\tilde{y}(t)$ para cada t está dada por,

$$x(t) = \tilde{x}(t) + x_\delta(t) \quad (5.8)$$

$$y(t) = \tilde{y}(t) + y_\delta(t) \quad (5.9)$$

sustituyendo las ecuaciones (5.6) y (5.8) en la ecuación (5.4), además, las ecuaciones (5.6) y (5.9) en la ecuación (5.5), y asumiendo que las ecuaciones (5.4) y (5.5) son continuas y diferenciables, podemos entonces expandir el lado derecho de las igualdades usando la serie de Taylor alrededor de $\tilde{x}(t)$ y $\tilde{u}(t)$, y conservando sólo los términos de primer orden obtenemos,

$$\dot{x}_\delta(t) = A_\delta x_\delta(t) + B_\delta u_\delta(t) \quad (5.10)$$

$$y_\delta(t) = C_\delta x_\delta(t) + D_\delta u_\delta(t) \quad (5.11)$$

donde A_δ , B_δ , C_δ y D_δ son las derivadas parciales evaluadas en la trayectoria nominal, esto es,

$$A_\delta = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(\tilde{x}(t), \tilde{u}(t))} ; B_\delta = \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{(\tilde{x}(t), \tilde{u}(t))} \quad (5.12)$$

$$C_\delta = \left. \frac{\partial h}{\partial x} \right|_{(\tilde{x}(t), \tilde{u}(t))}; \quad D_\delta = \left. \frac{\partial h}{\partial u} \right|_{(\tilde{x}(t), \tilde{u}(t))} \quad (5.13)$$

siendo $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial h}{\partial x}$ los Jacobianos.

En este desarrollo, se asume que una solución nominal existe para todo $t \geq t_0$, así, la linealización tiene sentido como una aproximación [González, 2003].

Un procedimiento gráfico para obtener el bond graph linealizado es propuesto en la siguiente sección.

5.3.2 Procedimiento para obtener el bond graph linealizado

Bond graph presenta una estructura gráfica que denota intercambio de potencia en el sistema físico. Por lo que es posible codificar en los grafos la estructura matemática del sistema, es decir, es posible obtener una estructura gráfica que muestre las relaciones causales entre las señales del sistema.

La información gráfica del bond graph puede ser utilizada para identificar las secciones no-lineales de un sistema físico. De esta manera, una técnica gráfica directa para obtener el bond graph linealizado de una clase de sistemas no-lineales es presentada.

Consideramos posible la linealización por bond graph de un sistema no-lineal de productos de estados, si la parte no-lineal puede ser descrita por,

$$x_i x_j, x_i u_k; \quad i \neq j; \quad i, j = 1, \dots, n \text{ y } k = 1, \dots, p \quad (5.14)$$

A continuación se muestra el procedimiento para encontrar el bond graph linealizado del sistema descrito por (5.14).

Procedimiento 5.1

1. Considerar un bond graph no-lineal de un sistema físico, del cual es necesario identificar las secciones no-lineales. Siguiendo trayectorias causales, las cuales comienzan en elementos I ó C, y que pasan, ya sea através de transformadores MTF, o giradores MGY, con variables de estado como módulos y terminan en otro elemento I o C.
2. La linealización funciona alrededor de la trayectoria nominal, así que los módulos de los transformadores y giradores del paso a serán la trayectoria nominal para la variable de estado correspondiente.

3. Se incluyen bonds de acuerdo con las trayectorias causales del paso 1. Cada elemento I se sustituye por una fuente nominal de flujo, y si el elemento es C, se sustituye por una fuente nominal de esfuerzo. Se añaden bonds para considerar el trazo causal que termina ya sea en un elemento I o C como se muestra en la Figura 5.3. El valor de estas fuentes son la trayectoria nominal de las variables de estado de co-energía. Los módulos de los elementos MTF y MGY de la trayectoria causal adicional son los módulos originales del bond graph del paso 1.
4. Si existe una variable de estado con dos o más trayectorias causales en el paso 1, el inicio de estas trayectorias debe ser unido a la fuente del paso 3. Se unen usando una unión-1 si es una fuente de flujo, en caso contrario se utiliza una unión-0.

En la siguiente sección se presenta una estructura unión para el bond graph linealizado.

5.3.3 Estructura unión linealizada

La estructura general de la linealización gráfica de la ecuación (5.4) usando el procedimiento 5.1 se muestra en la Figura 5.3.

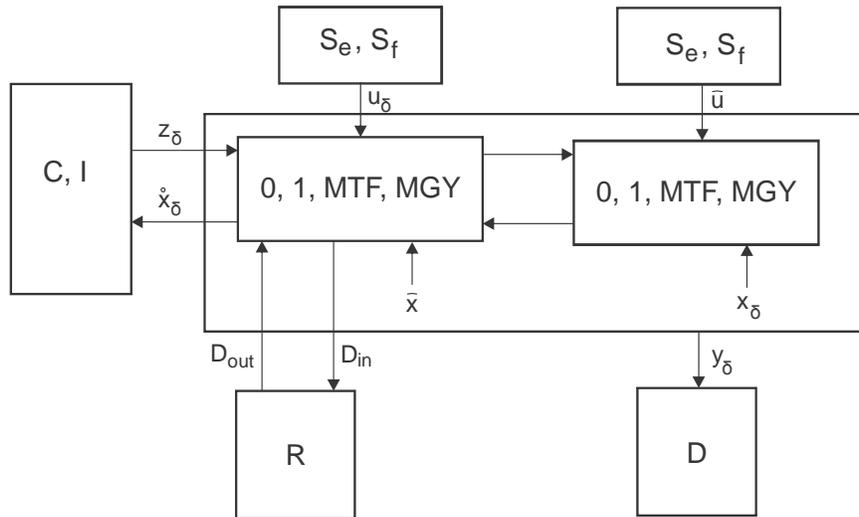


Figura 5.3: Estructura unión linealizada.

Se observa que en la Figura 5.3 la estructura unión es obtenida a partir de un bond graph linealizado que representa al sistema no-lineal. Así, los módulos de los elementos MTF y

MGY son la trayectoria nominal, $\tilde{x}(t)$. Además, es necesario incluir bonds adicionales, de acuerdo con los trazos causales que representan las secciones no-lineales del bond graph original, con las correspondientes fuentes de flujo y esfuerzo las cuales forman el vector $\tilde{u}(t)$.

El objetivo de representar la linealización del sistema físico no-lineal de acuerdo con la Figura 5.3 es obtener relaciones lineales en la matriz de estructura unión, \tilde{S} , la cual es propuesta en el siguiente lema. Este lema muestra los cambios que sufre la matriz S debido a la linealización.

Lema 5.6 *Considerar la estructura linealizada que se muestra en la Figura 5.3, la cual representa un bond graph linealizado con causalidad integral predefinida de un sistema no-lineal de productos de estados. La estructura unión linealizada del sistema es,*

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_\delta(t) \\ D_{in}(t) \\ y_\delta(t) \end{bmatrix} = \tilde{S} \begin{bmatrix} z_\delta(t) \\ D_{out}(t) \\ u_\delta(t) \\ \tilde{u}(t) \end{bmatrix} \quad (5.15)$$

donde,

$$\tilde{S} = \begin{bmatrix} S_{11}^x + S_{11}^0 & S_{12} & S_{13}^x & S_{13}^0 \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & 0 \\ S_{31}^x + S_{31}^0 & S_{32} & S_{33}^x & S_{33}^0 \end{bmatrix} \quad (5.16)$$

Las entradas de S_{11}^x , S_{13}^x , S_{31}^x y S_{33}^x son las interconexiones de los elementos que no participan en la trayectoria nominal del sistema. Las entradas de los elementos S_{11}^0 , S_{13}^0 , S_{31}^0 y S_{33}^0 están en la trayectoria nominal, u_δ es la entrada del sistema y \tilde{u} es la entrada nominal, tal que,

$$S_{13}^0 \tilde{u}(t) = S_{13}^1 x_\delta(t) \quad (5.17)$$

$$S_{33}^0 \tilde{u}(t) = S_{33}^1 x_\delta(t) \quad (5.18)$$

donde las entradas de las matrices S_{13}^1 y S_{33}^1 son seleccionadas para satisfacer las ecuaciones (5.17) y (5.18) respectivamente.

Demostración. La representación del sistema en variables de estado está dada por,

$$\dot{x}_\delta(t) = A_\delta x_\delta(t) + B_\delta u_\delta(t) \quad (5.19)$$

$$y_\delta(t) = C_\delta x_\delta(t) + D_\delta u_\delta(t) \quad (5.20)$$

donde,

$$A_\delta = (S_{11}^x + S_{11}^0 + S_{12}MS_{21})F + S_{13}^1 \quad (5.21)$$

$$B_\delta = S_{13}^x + S_{12}MS_{23} \quad (5.22)$$

$$C_\delta = (S_{31}^x + S_{31}^0 + S_{32}MS_{21})F + S_{33}^1 \quad (5.23)$$

$$D_\delta = S_{33}^x + S_{32}MS_{23} \quad (5.24)$$

para el sistema linealizado mostrado en la Figura 5.3, considerando la relación antes mencionada $z = Fx$, y sustituyendola en la primer línea de la Ecuación (5.15), obtenemos,

$$\dot{x}_\delta(t) = (S_{11}^x + S_{11}^0)Fx_\delta(t) + S_{12}D_{out}(t) + S_{13}^x u_\delta(t) + S_{13}^0 \tilde{u}(t) \quad (5.25)$$

considerando la relación entre los campos de disipación, $D_{out}(t) = LD_{in}(t)$, la segunda línea de la ecuación (5.15) resulta,

$$D_{in}(t) = (I - S_{22}L)^{-1}(S_{21}Fx_\delta(t) + S_{23}u_\delta(t)) \quad (5.26)$$

recordando que,

$$M = L(I - S_{22}L)^{-1} \quad (5.27)$$

y tomando las ecuaciones (5.17) y (5.26) y sustituyendolas en la ecuación (5.25), obtenemos,

$$\dot{x}_\delta(t) = [(S_{11}^x + S_{11}^0 + S_{12}MS_{21})F + S_{13}^1] x_\delta(t) + (S_{13}^x + S_{12}MS_{23})u_\delta(t) \quad (5.28)$$

De esa manera obtenemos la ecuación (5.19) del bond graph no-lineal y usando el procedimiento de linealización descrito en la sección anterior y comparándolo con la ecuación (5.28) comprobamos las ecuaciones (5.21) y (5.22).

De manera similar, si sustituimos las ecuaciones (5.18) y (5.26) en la tercera línea de la ecuación (5.15), resulta,

$$y_\delta(t) = [(S_{31}^x + S_{31}^0 + S_{32}MS_{21})F + S_{33}^1] x_\delta(t) + (S_{33}^x + S_{32}MS_{23})u_\delta(t) \quad (5.29)$$

aplicando la linealización al bond graph no-lineal, la Ecuación (5.20) es obtenida, y comparándola con la ecuación (5.29), comprobamos las ecuaciones (5.23) y (5.24) [González, 2003]. ■

Se debe observar que las ecuaciones (5.17) y (3.17) siempre se satisfacen, puesto que sólo las entradas del lado izquierdo de las igualdades de estas ecuaciones son arregladas para obtener S_{13}^1 y S_{33}^1 .

A continuación se realiza la linealización de los bond graphs de los robots PUMA y Stanford siguiendo el procedimiento 5.1.

5.3.4 Linealización del bond graph del robot manipulador PUMA

En la Figura 4.17 se muestra el bond graph no-lineal del robot manipulador PUMA. Siguiendo los pasos del procedimiento 5.1, identificamos las secciones del bond graph que son no-lineales. Esto se realiza siguiendo las trayectorias causales que comienzan en alguna variable almacenadora de energía (C ó I) y que pasan a través de transformadores o giradores los cuales sean modulados por alguno de los estados del sistema, y que a su vez, terminen en alguna otra variable almacenadora C ó I, en este caso, estas trayectorias, de acuerdo con la numeración de los bonds de la figura ,son:

$$\begin{aligned}
 T_1 &= \{2, 4, 5, 9, 11, 17, 20, 22, 24\} \\
 T_2 &= \{24, 22, 20, 17, 11, 9, 5, 4, 2\} \\
 T_3 &= \{2, 4, 5, 7, 10, 16, 18, 22, 24\} \\
 T_4 &= \{24, 22, 18, 16, 10, 7, 5, 4, 2\}
 \end{aligned} \tag{5.30}$$

Ahora, siguiendo el paso 3 del procedimiento 5.1, se agregan las trayectorias causales al bond graph, sustituyendo los elementos I por fuentes de flujo, recordando que el valor de estas fuentes será el valor en estado estacionario del flujo asociado a la variable I en cuestión. En este caso, hay dos trayectorias causales no-lineales por cada elemento I, por lo que ambas trayectorias iniciarán en la misma fuente de flujo y se bifurcarán mediante una unión-1 (paso 4 del procedimiento 5.1). A continuación se muestra en la Figura 5.4, el bond graph linealizado para el robot manipulador PUMA, donde,

$$\tilde{u} = \begin{bmatrix} f_{30} \\ f_{36} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{f}_{24} \\ \hat{f}_2 \end{bmatrix} \tag{5.31}$$

siendo \hat{f}_2 y \hat{f}_{24} las llamadas trayectorias nominales y representa el valor de esos flujos en el estado estacionario del sistema.

Debido a que la linealización funciona sólo alrededor del punto de equilibrio del sistema, es necesario sustituir los módulos de los transformadores y giradores del bond graph no-lineal por los valores de estado estable del sistema de esas variables de estado en particular. Esto da como resultado que la respuesta de esta linealización sólo sea una pequeña parte de la respuesta del sistema no-lineal.

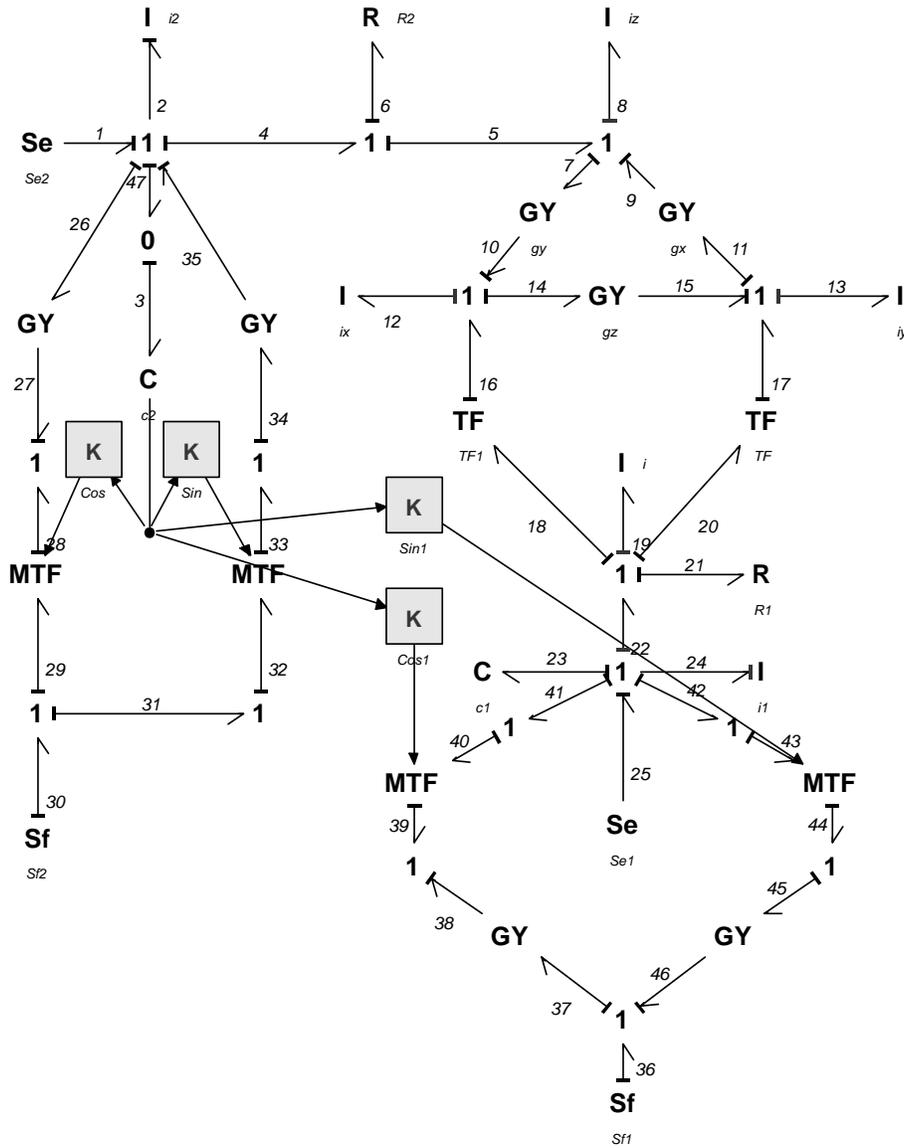


Figura 5.4: Bond graph linealizado del robot PUMA.

Observando la Ecuación (5.16), la matriz de estructura unión linealizada de este sistema es,

$$\begin{bmatrix} e_2 \\ e_{24} \\ f_3 \\ f_{23} \\ f_6 \\ f_{21} \\ y(t) = f_3 \\ f_8 \\ f_{12} \\ f_{13} \\ f_{19} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11}^x + S_{11}^0 & S_{12} & S_{13}^x & S_{13}^0 \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & 0 \\ S_{31}^x + S_{31}^0 & S_{32} & S_{33}^x & S_{33}^0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_2 \\ f_{24} \\ e_3 \\ e_{23} \\ e_6 \\ e_{21} \\ e_1 \\ e_{25} \\ f_{30} \\ f_{36} \\ e_8 \\ e_{12} \\ e_{13} \\ e_{19} \end{bmatrix} \quad (5.32)$$

donde,

$$S_{11}^x + S_{11}^0 = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & -1 & 0 \\ -k_1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}; S_{12} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.33)$$

$$S_{13}^x = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; S_{13}^0 = \begin{bmatrix} k_2 & 0 \\ 0 & -k_2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; S_{14} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sin \hat{q}_3 & -\cos \hat{q}_3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.34)$$

$$S_{21} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}; S_{31} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; S_{41} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sin \hat{q}_3 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \hat{q}_3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.35)$$

$$S_{22} = S_{23} = S_{24} = S_{32} = S_{33} = S_{34} = S_{42} = S_{43} = S_{44} = 0 \quad (5.36)$$

a su vez,

$$\begin{aligned} k_1 &= -\hat{p}_{13} \sin \hat{q}_3 + \hat{p}_{12} \cos \hat{q}_3 \\ k_2 &= -\hat{p}_{13} \cos \hat{q}_3 \hat{q}_3 - \hat{p}_{12} \sin \hat{q}_3 \hat{q}_3 \end{aligned} \quad (5.37)$$

Se considera en este caso que la salida del sistema $y(t)$ será la velocidad de la segunda unión, ya que mediante esta velocidad podemos determinar la posición del segundo eslabón.

Ahora, calculando la matriz A_δ a partir de la ecuación (5.21),

$$A_\delta = \left(\begin{array}{c} \left[\begin{array}{cccc} 0 & k_1 & -1 & 0 \\ -k_1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{cc} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right] \left[\begin{array}{cc} R_2 & 0 \\ 0 & R_1 \end{array} \right] \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right] \end{array} \right) F + S_{13}^1 \quad (5.38)$$

Calculando S_{13}^1 a partir de (5.17),

$$\begin{bmatrix} k_2 & 0 \\ 0 & -k_2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{30} = \hat{f}_{24} \\ f_{36} = \hat{f}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & k_3 & 0 \\ 0 & 0 & k_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_2 \\ p_{24} \\ q_3 \\ q_{23} \end{bmatrix} \quad (5.39)$$

donde,

$$\begin{aligned} k_3 &= -\hat{f}_{24}(\hat{p}_{13} \cos \hat{q}_3 + \hat{p}_{12} \sin \hat{q}_3) \\ k_4 &= \hat{f}_2(\hat{p}_{13} \cos \hat{q}_3 + \hat{p}_{12} \sin \hat{q}_3) \end{aligned} \quad (5.40)$$

Sustituyendo la matriz S_{13}^1 calculada en (5.39) en la ecuación (5.38) tenemos,

$$A_\delta = \begin{bmatrix} -\frac{R_2}{i_2} & \frac{1}{i_1}(\hat{p}_{12} \cos \hat{q}_3 - \hat{p}_{13} \sin \hat{q}_3) & \frac{1}{c_2} \hat{f}_{24}(\hat{p}_{12} \sin \hat{q}_3 + \hat{p}_{13} \cos \hat{q}_3) & 0 \\ -\frac{1}{i_2}(\hat{p}_{12} \cos \hat{q}_3 - \hat{p}_{13} \sin \hat{q}_3) & -\frac{R_1}{i_1} & \hat{f}_2(\hat{p}_{12} \sin \hat{q}_3 + \hat{p}_{13} \cos \hat{q}_3) & -\frac{1}{c_1} \\ \frac{1}{i_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{i_1} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.41)$$

Se denota que la matriz A_δ del sistema linealizado tiene elementos constantes.

Calculando la matriz B_δ a partir de la ecuación (5.22),

$$B_\delta = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.42)$$

puesto que, de la ecuación (5.36) se puede observar que la matriz S_{23} es cero.

Observando la ecuación (5.19), el sistema linealizado queda representado entonces por,

$$\dot{x}_\delta(t) = \begin{bmatrix} -\frac{R_2}{i_2} & \frac{1}{i_1}(\hat{p}_{12} \cos \hat{q}_3 - \hat{p}_{13} \sin \hat{q}_3) & \frac{1}{c_2} \hat{f}_{24}(\hat{p}_{12} \sin \hat{q}_3 + \hat{p}_{13} \cos \hat{q}_3) & 0 \\ -\frac{1}{i_2}(\hat{p}_{12} \cos \hat{q}_3 - \hat{p}_{13} \sin \hat{q}_3) & -\frac{R_1}{i_1} & \hat{f}_2(\hat{p}_{12} \sin \hat{q}_3 + \hat{p}_{13} \cos \hat{q}_3) & -\frac{1}{c_1} \\ \frac{1}{i_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{i_1} & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} u(t) \quad (5.43)$$

Calculando la matriz C_p a partir de la ecuación (5.23),

$$C_\delta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} F = \begin{bmatrix} \frac{1}{i_2} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.44)$$

De la ecuación (5.24), podemos observar que,

$$D_\delta = 0 \quad (5.45)$$

Considerando la ecuación (5.20), la salida del sistema linealizado queda determinada por,

$$y(t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{i_2} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) \quad (5.46)$$

Por otra parte, las entradas del bond graph linealizado serán apenas una pequeña parte de las entradas nominales del sistema, estas entradas son llamadas Δu y representan la porción de la entrada para la cual es válida la linealización. A continuación se muestra en la Figura 5.5 la respuesta del PUMA linealizado, para la cual fue necesario sumar de manera algebraica el valor de la respuesta en estado estacionario del sistema no-lineal.

En las gráficas se observa el comportamiento lineal del sistema en comparativa con el comportamiento no-lineal.

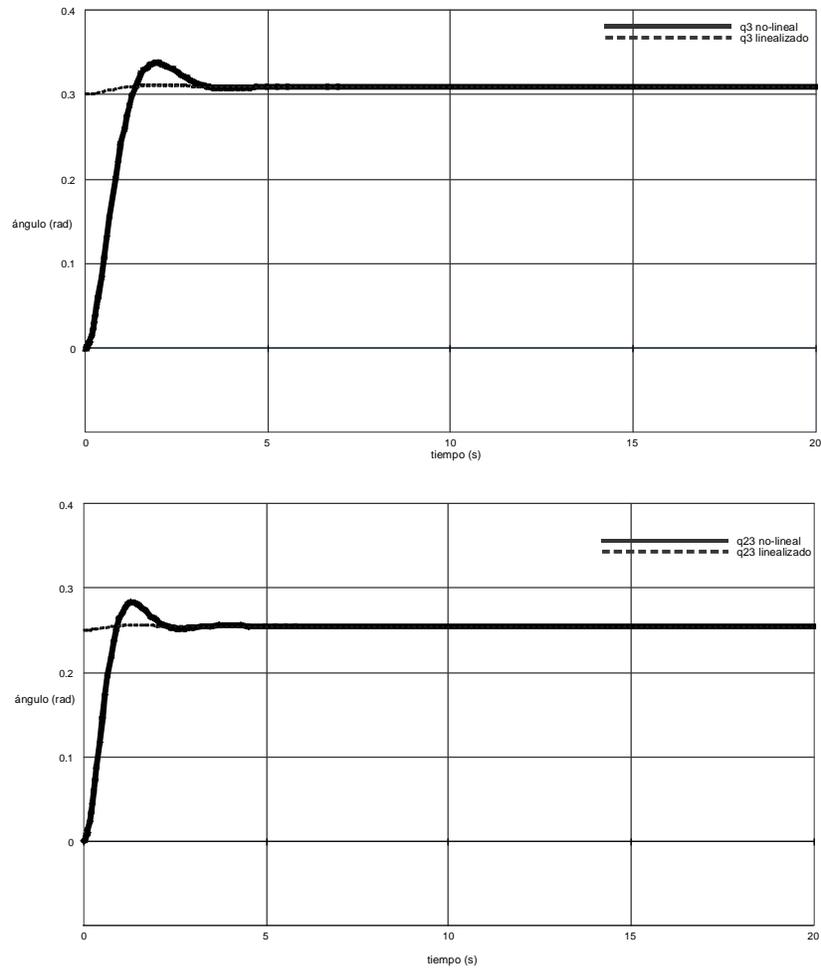


Figura 5.5: Comparación de los estados linealizados y no-lineales del robot PUMA.

5.3.5 Linealización del bond graph del robot manipulador Stanford

En la Figura 4.20 se muestra la representación en Bond Graph del robot manipulador Stanford, el cuál tiene secciones no-lineales, que pueden ser identificadas siguiendo las siguientes trayectorias, de acuerdo con la numeración de la figura antes mencionada,

$$\begin{aligned}
 T_1 &= \{2, 4, 5, 7, 10, 16, 18, 22, 24\} \\
 T_2 &= \{24, 22, 18, 16, 10, 7, 5, 4, 2\} \\
 T_3 &= \{2, 4, 5, 9, 11, 17, 20, 22, 24\} \\
 T_4 &= \{24, 22, 20, 17, 11, 9, 5, 4, 2\} \\
 T_5 &= \{2, 4, 5, 26, 27, 38, 40, 41, 39, 51, 50\} \\
 T_6 &= \{50, 51, 39, 41, 40, 38, 27, 26, 5, 4, 2\} \\
 T_7 &= \{2, 4, 5, 26, 27, 38, 44, 46, 49, 29, 28, 17, 20, 22, 24\} \\
 T_8 &= \{24, 22, 20, 17, 28, 29, 49, 46, 44, 38, 27, 26, 5, 4, 2\} \\
 T_9 &= \{31, 33, 35, 37, 39, 41, 40, 38, 27, 26, 5, 4, 2\} \\
 T_{10} &= \{24, 22, 20, 17, 28, 29, 49, 47, 45, 39, 51, 50\} \\
 T_{11} &= \{50, 51, 39, 45, 47, 49, 29, 28, 17, 20, 22, 24\} \\
 T_{12} &= \{31, 32, 34, 36, 38, 44, 46, 49, 29, 28, 17, 22, 24\} \\
 T_{13} &= \{31, 33, 35, 37, 39, 45, 47, 49, 29, 28, 17, 20, 22, 24\} \\
 T_{14} &= \{31, 32, 34, 36, 38, 40, 41, 39, 51, 50\}
 \end{aligned} \tag{5.47}$$

Siguiendo el paso 3 del procedimiento 5.1, se agregan las trayectorias causales al bond graph, sustituyendo los elementos I por fuentes de flujo. En este caso, algunas trayectorias se repiten debido a que existe más de un transformador o girador que tiene un estado como módulo en esta trayectoria. En estos casos, la trayectoria se repite tantas veces como productos de estados haya en la trayectoria. Esto se realiza para que la matriz A_δ contenga los elementos algebraicamente correctos y correspondientes a su Jacobiano. En la Figura 5.6 se muestra el bond graph linealizado para el manipulador Stanford, resultado de seguir los pasos 3 y 4 del procedimiento 5.1.

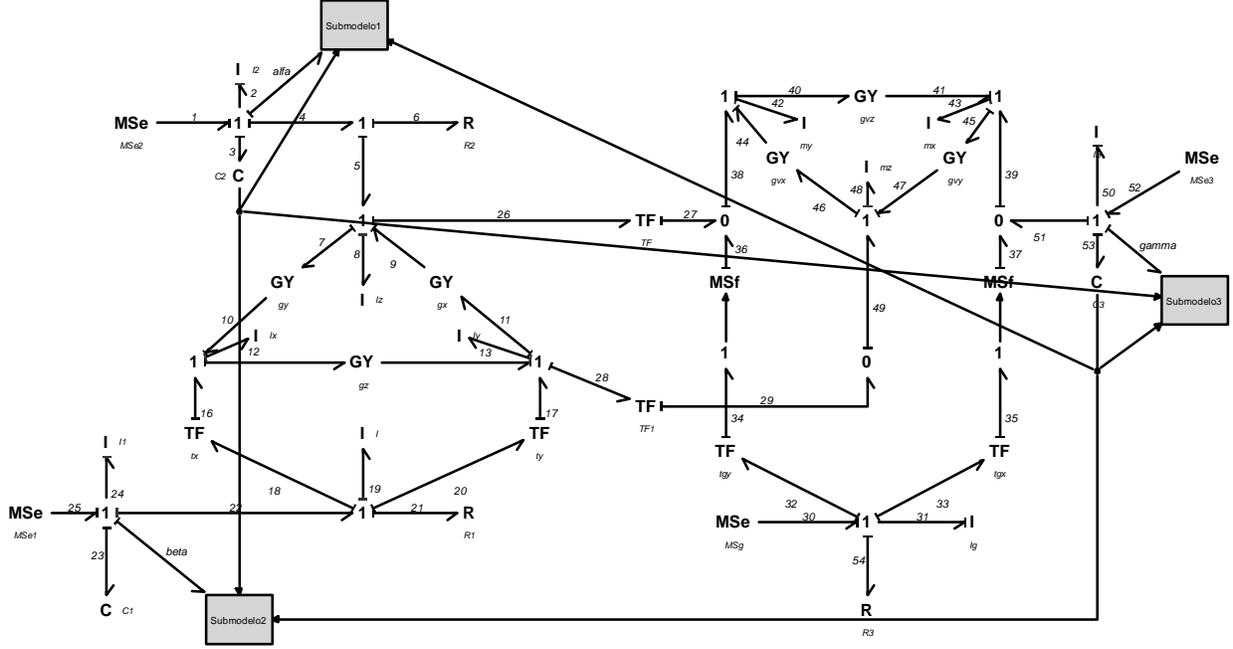


Figura 5.6: Bond graph linealizado del robot Stanford.

Debido a la complejidad de la linealización de este sistema fue necesario el uso de submodelos en nuestra representación en Bond Graph, en la Figura 5.6 se pueden apreciar los bonds alfa, beta y gamma, estos bonds sirven de enlace con los submodelos 1,2 y 3. Estos submodelos contienen las trayectorias adicionales del bond graph linealizado, de acuerdo con la Ecuación (5.47), el submodelo 1 corresponde a las trayectorias adicionales que llegan al estado i_2 , el submodelo 2 corresponde a las trayectorias adicionales que llegan al estado i_1 y asu vez, el submodelo 3 corresponde a las trayectorias causales adicionales que llegan al estado i_3 . Se observa que mientras los transformadores tienen su respectivo módulo conectado, los giradores por su parte tienen módulo constante,

$$\begin{aligned}
 gvz &= m_z \dot{f}_2 \\
 gv_x &= m_x \dot{f}_{24} \sin \hat{q}_3 \\
 gv_y &= m_y \dot{f}_{24} \cos \hat{q}_3
 \end{aligned} \tag{5.48}$$

En las Figuras 5.7, 5.8 y 5.9 se muestran los submodelos a detalle.

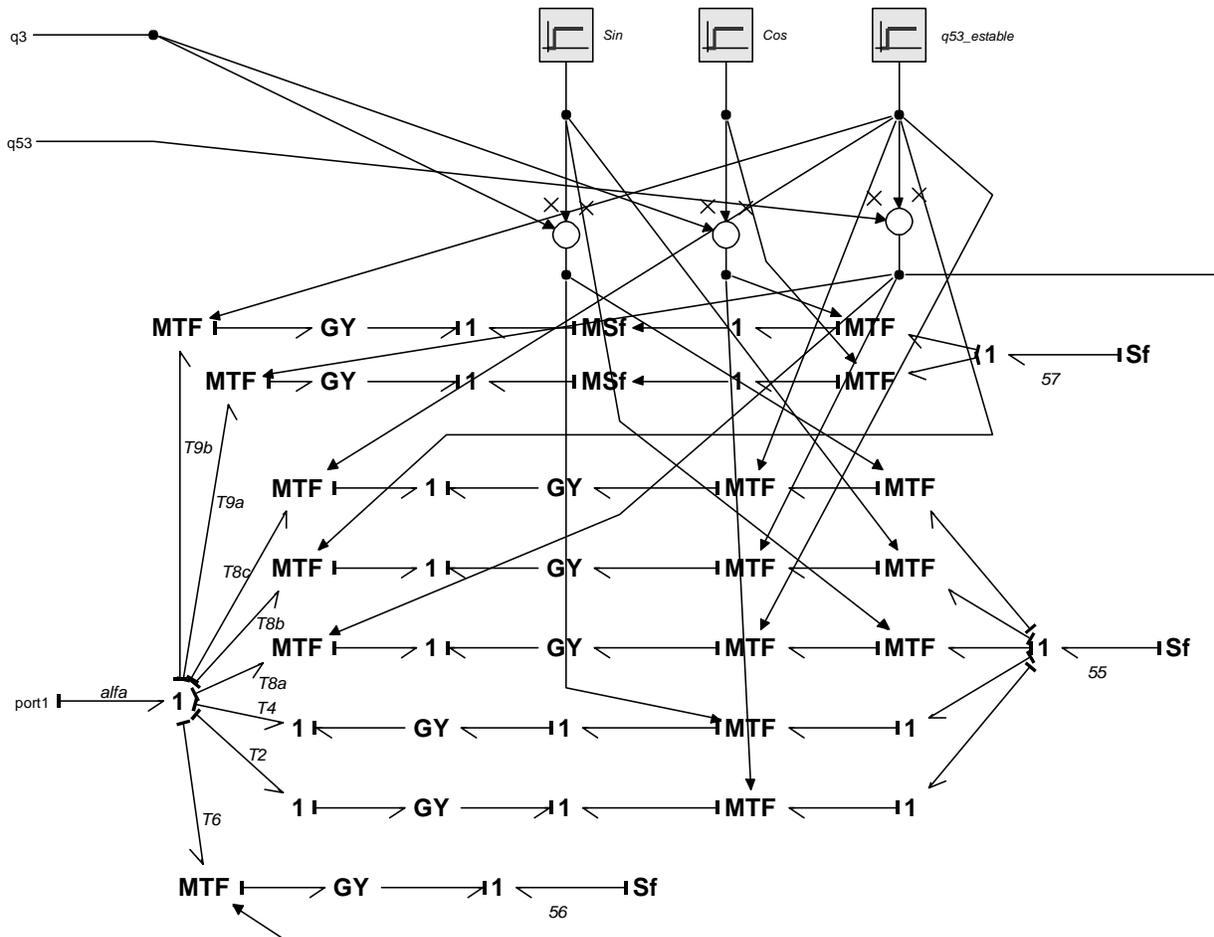


Figura 5.7: Diagrama interno del submodelo 1.

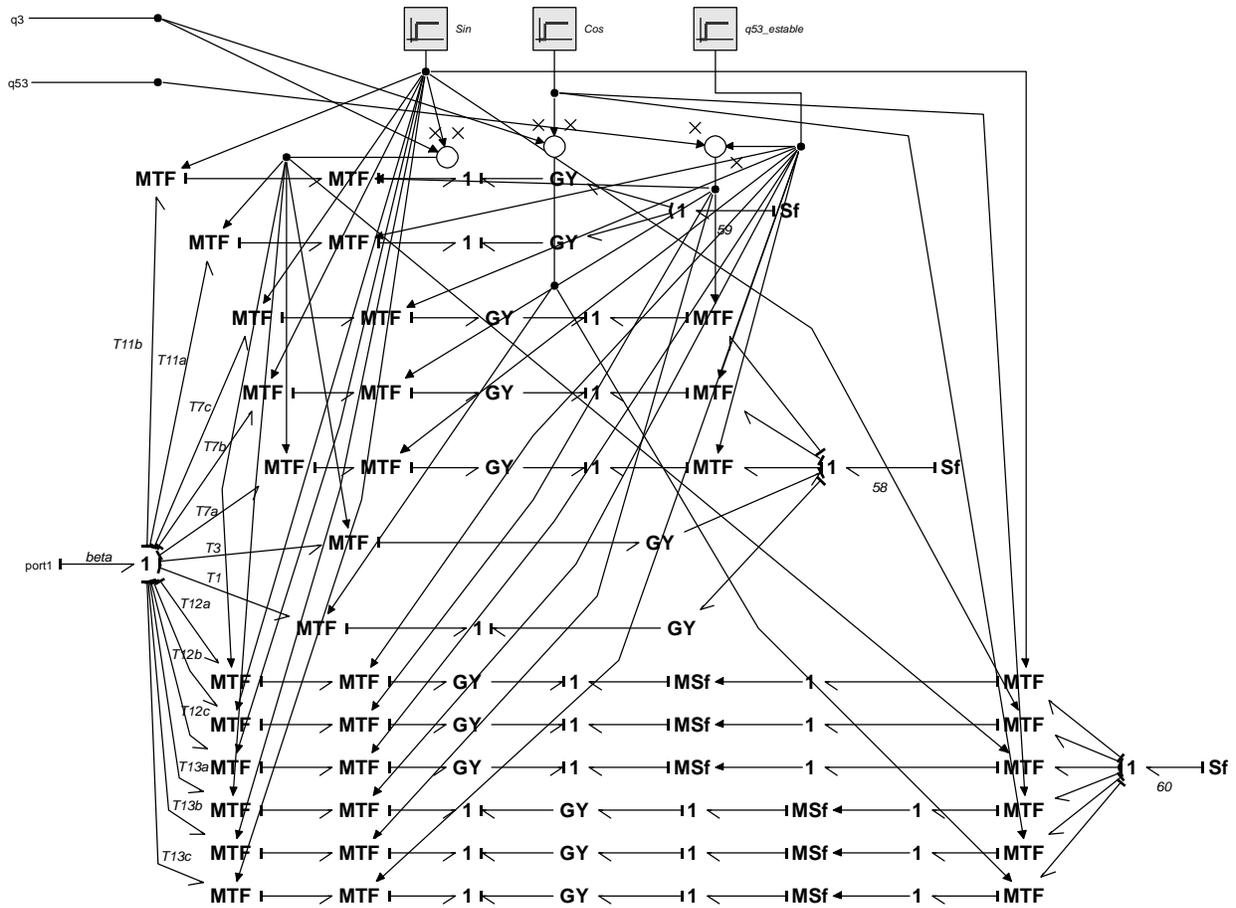


Figura 5.8: Diagrama interno del submodelo 2.

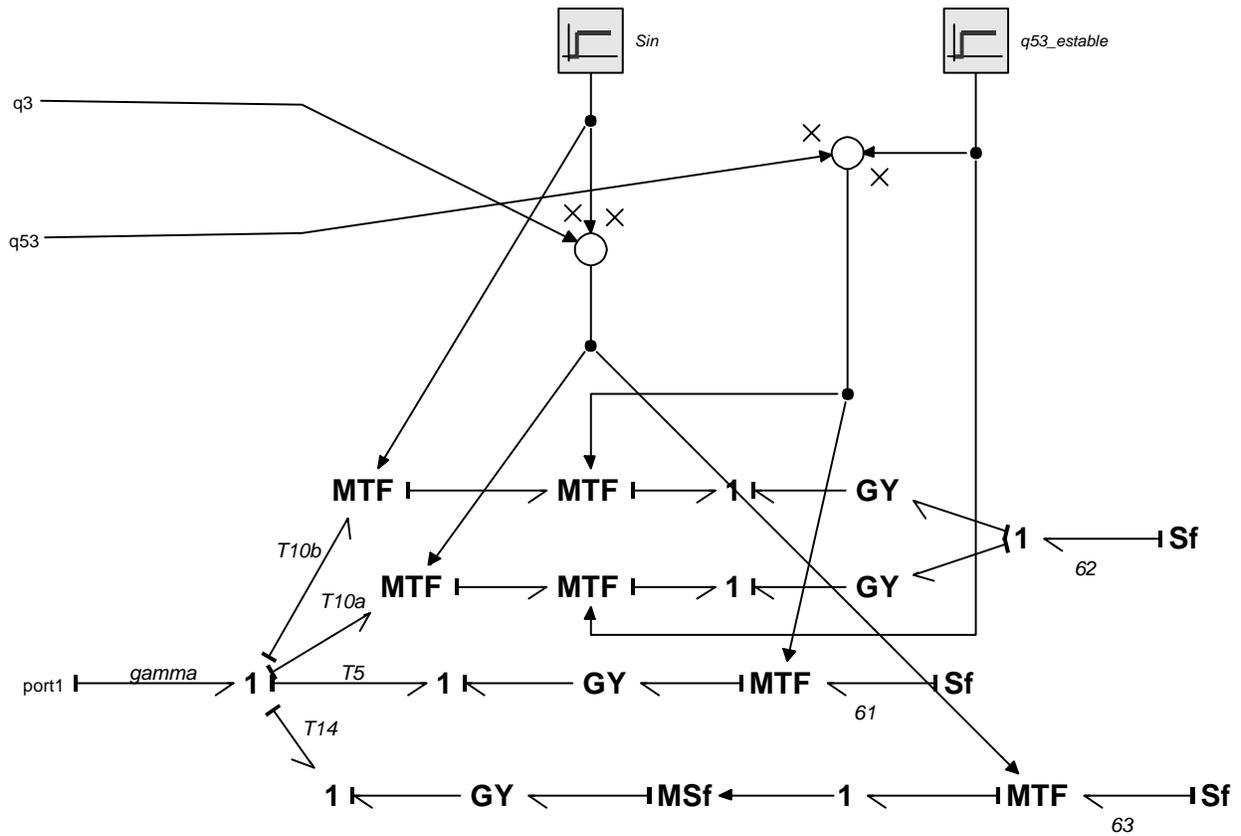


Figura 5.9: Diagrama interno del submodelo 3.

donde,

$$\tilde{u} = \begin{bmatrix} f_{55} \\ f_{56} \\ f_{57} \\ f_{58} \\ f_{59} \\ f_{60} \\ f_{61} \\ f_{62} \\ f_{63} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{f}_{24} \\ \hat{f}_{50} \\ \hat{f}_{31} \\ \hat{f}_2 \\ \hat{f}_{50} \\ \hat{f}_{31} \\ \hat{f}_2 \\ \hat{f}_{24} \\ \hat{f}_{31} \end{bmatrix} \quad (5.49)$$

el superíndice $\hat{\cdot}$ indica que se trata de los valores en estado estacionario. Observando las

Ecuaciones (5.15) y (5.16), la matriz de estructura unión linealizada de este sistema es

$$\begin{bmatrix} e_2 \\ e_{24} \\ e_{50} \\ e_{31} \\ f_3 \\ f_{23} \\ f_{53} \\ f_6 \\ f_{21} \\ f_{54} \\ y(t) = f_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11}^x + S_{11}^0 & S_{12} & S_{13}^x & S_{13}^0 \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & 0 \\ S_{31}^x + S_{31}^0 & S_{32} & S_{33}^x & S_{33}^0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_2 \\ f_{24} \\ f_{50} \\ f_{31} \\ e_3 \\ e_{23} \\ e_{53} \\ e_1 \\ e_{25} \\ e_{52} \\ e_{30} \\ f_{55} \\ f_{56} \\ f_{57} \\ f_{58} \\ f_{59} \\ f_{60} \\ f_{61} \\ f_{62} \\ f_{63} \end{bmatrix} \quad (5.50)$$

donde,

$$S_{11}^x + S_{11}^0 = \begin{bmatrix} 0 & h_1 & -h_2 & -h_3 & -1 & 0 & 0 \\ -h_1 & 0 & h_8 & -h_9 & 0 & -1 & 0 \\ h_2 & -h_8 & 0 & h_{13} & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; S_{12} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.51)$$

$$S_{13}^x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; S_{13}^0 = \begin{bmatrix} h_5 & -h_4 & -h_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h_{11} & -h_{12} & -h_{10} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & h_{14} & -h_{12} & h_{15} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.52)$$

$$S_{21} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; S_{31}^x + S_{31}^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.53)$$

$$S_{22} = S_{23} = S_{32} = S_{33} = 0 \quad (5.54)$$

a su vez,

$$h_1 = \dot{p}_{12} \cos \dot{q}_3 - \dot{p}_{13} \sin \dot{q}_3 + \dot{q}_{53}^2 m_x f_{24} \sin \dot{q}_3 \cos \dot{q}_3$$

$$h_2 = \dot{q}_{53} m_z \dot{f}_2$$

$$h_3 = \dot{q}_{53} m_z \dot{f}_2 \sin \dot{q}_3$$

$$h_4 = q_{53} \dot{q}_{53} m_z \dot{f}_2$$

$$h_5 = q_3 \dot{q}_{53} m_z \dot{f}_2 - q_3 \dot{p}_{12} \sin \dot{q}_3 - 2q_{53} \dot{q}_{53}^2 m_x f_{24} \sin^2 \dot{q}_3 - q_3 \dot{q}_{53}^2 m_x f_{24} \sin^2 \dot{q}_3$$

$$h_6 = q_{53} \dot{q}_{53} m_z \dot{f}_2 \cos \dot{q}_3 + q_3 \dot{q}_{53} m_z \dot{f}_2 \cos \dot{q}_3$$

$$h_7 = \dot{q}_{53} \cos \dot{q}_3$$

$$h_8 = \dot{q}_{53} m_y \dot{f}_{24} \cos^2 \dot{q}_3$$

$$h_9 = \dot{q}_{53} m_x \dot{f}_{24} \sin \dot{q}_3 \cos^2 \dot{q}_3$$

$$h_{10} = 2q_3 \dot{q}_{53} m_y \dot{f}_{24} \sin \dot{q}_3 \cos^2 \dot{q}_3 + q_{53} \dot{q}_{53} m_y \dot{f}_{24} \sin \dot{q}_3 \cos^2 \dot{q}_3 + \dots$$

$$\dots + 2q_3 \dot{q}_{53} m_x \dot{f}_{24} \sin^3 \dot{q}_3 + q_{53} \dot{q}_{53} m_x \dot{f}_{24} \sin^3 \dot{q}_3$$

$$h_{11} = q_3 \dot{p}_{13} \cos \dot{q}_3 + q_3 \dot{p}_{12} \sin \dot{q}_3 + q_3 \dot{q}_{53}^2 m_x f_{24} \sin^2 \dot{q}_3 + 2q_{53} \dot{q}_{53}^2 m_x f_{24} \sin^2 \dot{q}_3$$

$$h_{12} = q_3 \dot{q}_{53} m_y \dot{f}_{24} \sin \dot{q}_3 \cos \dot{q}_3 + q_{53} \dot{q}_{53} m_y \dot{f}_{24} \sin \dot{q}_3 \cos \dot{q}_3$$

$$h_{13} = m_z \dot{f}_2 \cos \dot{q}_3$$

$$h_{14} = q_{53} \dot{q}_{53} m_z \dot{f}_2$$

$$h_{15} = q_3 m_z \dot{f}_2 \sin \dot{q}_3 \quad (5.55)$$

De nueva cuenta, se considera que la salida del sistema $y(t)$ será la velocidad de la segunda unión, ya que mediante esta velocidad podemos determinar la posición del segundo eslabón.

Ahora, calculando la matriz A_δ a partir de la ecuación (5.21),

$$A_\delta = \left(\begin{array}{c} \left[\begin{array}{ccccccc} 0 & h_1 & -h_2 & -h_3 & -1 & 0 & 0 \\ -h_1 & 0 & h_8 & -h_9 & 0 & -1 & 0 \\ h_2 & -h_8 & 0 & h_{13} & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{ccccccc} -R_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -R_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -R_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \end{array} \right) F + S_{13}^1 \quad (5.56)$$

Calculando la matriz S_{13}^1 a partir de la ecuación (5.17),

$$\left[\begin{array}{ccccccc} h_5 & -h_4 & -h_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h_{11} & -h_{12} & -h_{10} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & h_{14} & -h_{12} & h_{15} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \begin{array}{c} f_{55} \\ f_{56} \\ f_{57} \\ f_{58} \\ f_{59} \\ f_{60} \\ f_{61} \\ f_{62} \\ f_{63} \end{array} = S_{13}^1 \begin{array}{c} p_2 \\ p_{24} \\ p_{50} \\ p_{31} \\ q_3 \\ q_{23} \\ q_{53} \end{array} \quad (5.57)$$

Podemos observar que la matriz S_{13}^1 será en realidad un vector de dimensión 7×1 , a diferencia del vector resultante del lado izquierdo de la igualdad, el cual es de dimensión 9×1 , esto se debe a que algunas de las fuentes de flujo adicionales dentro del vector \tilde{u} se repiten.

De acuerdo con las ecuaciones (5.49) y (5.55) e igualando renglón con renglón, la matriz

S_{13}^1 necesaria para que la igualdad se cumpla es,

$$S_{13}^1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & G_1 & 0 & G_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_3 & 0 & G_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_5 & 0 & G_6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.58)$$

donde,

$$\begin{aligned} G_1 &= \dot{q}_{53} m_z \dot{f}_2 \dot{f}_{24} - \dot{q}_{53} m_x \dot{f}_{24}^2 \sin^2 \dot{q}_3 + \dot{q}_{53} m_z \dot{f}_2 \dot{f}_{31} \cos \dot{q}_3 \\ G_2 &= -2\dot{q}_{53}^2 m_x \dot{f}_{24}^2 \sin^2 \dot{q}_3 - \dot{q}_{53} m_z \dot{f}_2 \dot{f}_{50} - \dot{q}_{53} m_z \dot{f}_2 \dot{f}_{31} \cos \dot{q}_3 \\ G_3 &= \dot{p}_{13} \dot{f}_2 \cos \dot{q}_3 + \dot{p}_{12} \dot{f}_2 \sin \dot{q}_3 + \dot{q}_{53}^2 m_x \dot{f}_{24} \dot{f}_2 \sin^2 \dot{q}_3 - \dots \\ &\dots - \dot{q}_{53} m_y \dot{f}_{24} \dot{f}_{50} \sin \dot{q}_3 \cos \dot{q}_3 - 2\dot{q}_{53} m_y \dot{f}_{24} \dot{f}_{31} \sin \dot{q}_3 \cos \dot{q}_3 - 2\dot{q}_{53} m_x \dot{f}_{24} \dot{f}_{31} \sin^3 \dot{q}_3 \\ G_4 &= 2\dot{q}_{53}^2 m_x \dot{f}_{24} \sin^2 \dot{q}_3 - \dot{q}_{53} m_y \dot{f}_{24} \dot{f}_{50} \sin \dot{q}_3 \cos \dot{q}_3 - \dots \\ &\dots - \dot{q}_{53} m_y \dot{f}_{24} \dot{f}_{31} \sin \dot{q}_3 \cos \dot{q}_3 - \dot{q}_{53} m_x \dot{f}_{24} \dot{f}_{31} \sin^3 \dot{q}_3 \\ G_5 &= m_z \dot{f}_2 \dot{f}_{31} \sin \dot{q}_3 - \dot{q}_{53} m_y \dot{f}_{24}^2 \sin \dot{q}_3 \cos \dot{q}_3 \\ G_6 &= \dot{q}_{53} m_z \dot{f}_2^2 - \dot{q}_{53} m_y \dot{f}_{24}^2 \sin \dot{q}_3 \cos \dot{q}_3 \end{aligned} \quad (5.59)$$

Sustituyendo la ecuación (5.58) en (5.56) tenemos,

$$A_\delta = \begin{bmatrix} -\frac{1}{i_2} R_2 & \frac{1}{i_1} h_1 & -\frac{1}{i_3} h_2 & -\frac{h_3}{i_g} & \frac{1}{c_2} (G_1 c_2 - 1) & 0 & G_2 \\ -\frac{1}{i_2} h_1 & -\frac{1}{i_1} R_1 & \frac{1}{i_3} h_8 & -\frac{h_9}{i_g} & G_3 & -\frac{1}{c_1} & G_4 \\ \frac{1}{i_2} h_2 & -\frac{1}{i_1} h_8 & 0 & \frac{h_{13}}{i_g} & G_5 & 0 & \frac{1}{c_3} (G_6 c_3 - 1) \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{R_3}{i_g} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{i_2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{i_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{i_3} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.60)$$

Puesto que la matriz S_{23} es cero, la matriz B_δ calculada a partir de la ecuación (5.22) es,

$$B_\delta = S_{13}^x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.61)$$

Usando la ecuación (5.23) y debido a que la matriz S_{33}^0 es cero, la matriz C_δ es,

$$C_\delta = \begin{bmatrix} \frac{1}{i_2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.62)$$

Como las matrices S_{33}^x y S_{32} son cero, de la ecuación (5.24) se observa que,

$$D_\delta = 0 \quad (5.63)$$

Usando las ecuaciones (5.60), (5.61), (5.62) y (5.63) se obtiene la siguiente expresión que representa al manipulador Stanford linealizado,

$$\dot{x}_\delta(t) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{i_2}R_2 & \frac{1}{i_1}h_1 & -\frac{1}{i_3}h_2 & -\frac{h_3}{i_g} & \frac{1}{c_2}(G_1c_2 - 1) & 0 & G_2 \\ -\frac{1}{i_2}h_1 & -\frac{1}{i_1}R_1 & \frac{1}{i_3}h_8 & -\frac{h_9}{i_g} & G_3 & -\frac{1}{c_1} & G_4 \\ \frac{1}{i_2}h_2 & -\frac{1}{i_1}h_8 & 0 & \frac{h_{13}}{i_g} & G_5 & 0 & \frac{1}{c_3}(G_6c_3 - 1) \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{R_3}{i_g} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{i_2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{i_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{i_3} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x_\delta(t) + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} u(t) \quad (5.64)$$

con su respectiva ecuación de salida,

$$y(t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{i_2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x_\delta(t) \quad (5.65)$$

En las siguientes gráficas de la Figura 5.10 se muestra la respuesta del bond graph linealizado del manipulador Stanford en comparativa con la respuesta del sistema no-lineal.

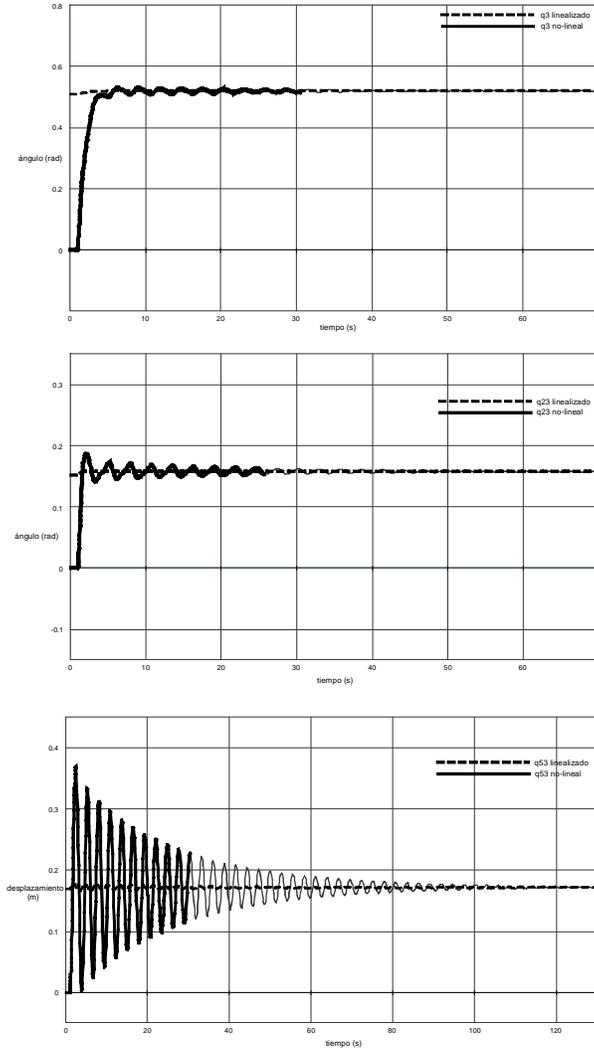


Figura 5.10: Comparación de los estados linealizados y no-lineales del robot Stanford.

De esta manera hemos conseguido un sistema linealizado que se comporta de manera similar que su contraparte no-lineal para un punto de operación en particular.

5.4 Observadores de estados lineales

En la teoría de control moderna, algunos diseños están basados en la hipótesis de que el vector de estados del sistema a ser controlado está disponible para su medición, en el caso de retroalimentación de estados. En muchas situaciones prácticas solamente algunas variables de estados son medibles, en estos casos, el vector de estados de un sistema LTI MIMO puede ser reconstruido a partir de las mediciones de las entradas y salidas del sistema, por medio de un observador de estados, si el sistema es observable.

En esta sección se presenta un procedimiento mediante el cual podemos crear el observador de estados de un sistema lineal, a partir de su representación en bond graph.

5.4.1 Antecedentes de la ley de control

Frecuentemente, en el diseño de sistemas de control es necesario construir observadores de las variables de estado. Si un sistema es lineal, su vector de estados puede ser reconstruido por las entradas y salidas disponibles del sistema original, mediante un observador. Si el sistema es observable, un observador produce una estimación del vector de estados o de una combinación lineal del vector de estados.

Una vez que un observador ha sido construido para un sistema lineal, es importante considerar el efecto inducido de usar este observador de estados en lugar del llamado valor verdadero del estado para una ley de control.

A continuación se explica la teoría general del observador de Luenberger, indicando las propiedades del observador de estados en lazo abierto y del asintótico de estados.

5.4.2 Observador asintótico de Luenberger

El dispositivo que construye una aproximación del vector de estados a partir de la salida del sistema original es llamado observador de estados.

Considere el sistema LTI MIMO dado por,

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A_p x(t) + B_p u(t) \\ y(t) &= C_p x(t) + D_p u(t)\end{aligned}\tag{5.66}$$

suponemos que las variables de estado no son medibles y que las matrices A_p , B_p , C_p y D_p son

completamente conocidas. Entonces, el problema consiste en estimar $x(t)$ a partir del conocimiento de la entrada $u(t)$ y la salida $y(t)$ del sistema.

Si el sistema es observable y conocemos las matrices A_p y B_p podemos entonces duplicar el sistema original y obtener el llamado observador de lazo abierto mostrado en la Figura 5.11.

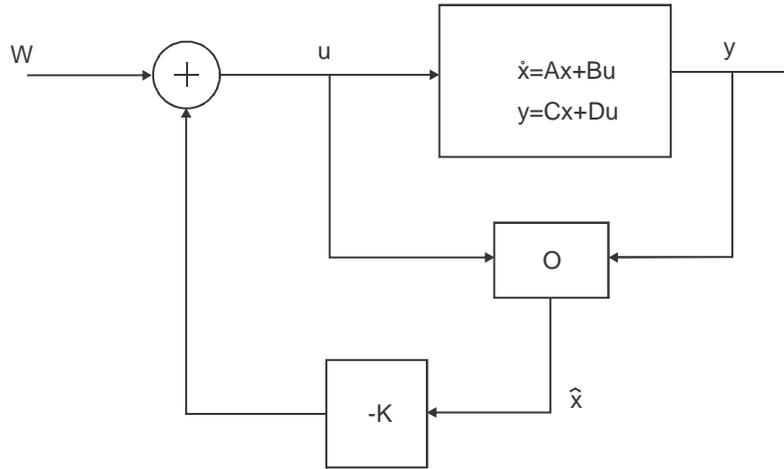


Figura 5.11: Estimador de lazo cerrado.

Ahora bien, si el sistema original de la ecuación (5.66) y el observador tienen el mismo estado inicial y la misma entrada, la salida $\hat{x}(t)$ del estimador será igual a $x(t)$ para todo t .

Así, la pregunta restante es como encontrar el estado inicial x_0 del sistema y usarlo en el observador. Este problema es resuelto, si el sistema dado por la ecuación (5.66) es observable en t_0 . Un sistema es observable en t_0 , si existe un tiempo finito $t_1 > t_0$, tal que para cualquier estado x_0 en el tiempo t_0 , el conocimiento de la entrada $u_{[t_0, t_1]}$ y la salida $y_{[t_0, t_1]}$ sobre el intervalo de tiempo $[t_0, t_1]$ es suficiente para determinar el estado x_0 .

Consecuentemente, si el sistema dado por la ecuación (5.66) es observable, un observador en lazo abierto puede ser utilizado para generar el vector de estados $x(t)$.

Si se utiliza un observador en lazo abierto el estado inicial debe ser calculado cada vez que se utilice el observador. Así, un observador en lazo abierto es, en general, no satisfactorio.

Es importante notar que a pesar de que $u(t)$ y $y(t)$ del sistema dado por (5.66) están disponibles, utilizamos solamente $u(t)$ en el observador en lazo abierto, de tal manera que si ambas $u(t)$ y $y(t)$ son aplicadas, el comportamiento del observador puede ser mejorado, tal como se muestra en el llamado observador asintótico de estados, mostrado en la Figura 5.11.

Se observa en el diagrama mostrado en la Figura 5.11 que la salida del sistema $y(t) = C_p x(t) + D_p u(t)$ es comparada con la salida del observador $\gamma(t) = C_p \hat{x}(t) + D_p u(t)$ y su diferencia es multiplicada por la ganancia del observador, $H \in \mathbb{R}^{n \times q}$, lo cual es un término de corrección.

El observador de estados asintótico está dado por:

$$\dot{\hat{x}}(t) = (A_p - HC_p)\hat{x}(t) + Hy(t) + B_p u(t) \quad (5.67)$$

De las ecuaciones (5.66) y (5.67) obtenemos,

$$\dot{\tilde{x}}(t) = (A_p - HC_p)\tilde{x}(t) \quad (5.68)$$

donde

$$\tilde{x}(t) \triangleq x(t) - \hat{x}(t) \quad (5.69)$$

dado que los eigenvalores de $(A_p - HC_p)$ pueden ser seleccionados para obtener la convergencia del estado estimado al estado real, entonces se controla la dinámica de $\tilde{x}(t)$.

A continuación se presenta un procedimiento para encontrar en un enfoque gráfico el observador de estados, a partir del modelo en bond graph del sistema físico en lazo abierto.

Procedimiento 5.2

A través de este procedimiento se encuentra el observador de estados, considerando que se tiene el bond graph del sistema en lazo abierto.

1. Se obtiene el observador de estados en bond graph, el cual es una copia del sistema en lazo abierto.
2. Identificar la(s) salida(s) del sistema y del observador:
 - Si la salida es de esfuerzo, agregar un bond activo de la salida a un detector de esfuerzo, que se conecta a una fuente modulada de esfuerzo mediante otro bond activo.
 - Si la salida es de flujo, agregar un bond activo de esta salida a un detector de flujo, el cual se conecta a una fuente modulada de flujo mediante otro bond activo.
3. La salida del observador debe ser negativa, así, la salida de la fuente del paso 2, llega a una unión-1 para una fuente de flujo y 0 para el caso contrario y después se conecta un bond que entra también a esa unión.

4. La fuente modulada de la salida del sistema del paso 2 y el bond adicional de la salida del observador del paso 3 se unen a través de bonds en una unión-0 para fuentes de flujo y una unión-1 para fuentes de esfuerzo.
5. El número de bonds de salida de la unión del paso 4 es igual al número de variables de estado, las cuales son elementos que almacenan energía en causalidad integral.
6. Conectar un transformador y/o girador entre el bond de salida del paso 5 y la variable de estado respectiva del observador.
7. Se utiliza un transformador para el paso 6 si la salida del sistema y observador es del mismo tipo (esfuerzo o flujo) a la de la variable de estado, y en caso contrario se utiliza un girador.
8. Asignar la causalidad a cada uno de los bonds, de acuerdo con el procedimiento discutido en el capítulo 2, debiéndose lograr una causalidad correcta en las uniones y no cambiando la causalidad del resto de los elementos que ya tienen asignada una causalidad.
9. La ganancia gráfica directa del observador está dada por el o los módulos del transformador y/o girador y son calculadas usando el determinante de $(A_p - HC_p)$.

A continuación se presentan los observadores de estados para los esquemas linealizados de los robots PUMA y Stanford.

5.4.3 Diseño del observador de estados del robot manipulador PUMA

Recordando la Figura 5.4 en la cual se muestra el bond graph linealizado para el robot manipulador PUMA, para el cual nos interesa diseñar el observador de estados. Tomaremos la velocidad angular de la segunda unión como salida de nuestro sistema,

$$y(t) = f_3 = \dot{\theta}_2 \quad (5.70)$$

Para que todos los estados linealmente independientes de este sistema sean observables, es necesario determinar si estos están causalmente conectados con la salida $y(t)$, esta determinación se lleva a cabo mediante las siguientes trayectorias causales, de acuerdo con la numeración del bond graph de la Figura 5.4,

$$T_1 = \{3, 3, 2\}$$

$$T_2 = \{3, 3, 4, 5, 7, 10, 16, 18, 22, 24\}$$

$$T_3 = \{3\}$$

$$T_4 = \{3, 4, 4, 5, 7, 10, 16, 18, 22, 24, 24, 23\} \quad (5.71)$$

Siguiendo los pasos descritos en el procedimiento 5.2, se construye el observador de estados lineal para el PUMA partiendo de su representación en Bond Graph, el cual es una copia del sistema original, en este caso, del bond graph linealizado presentado en la sección anterior. En la Figura 5.12 se muestra el observador de estados para este sistema.

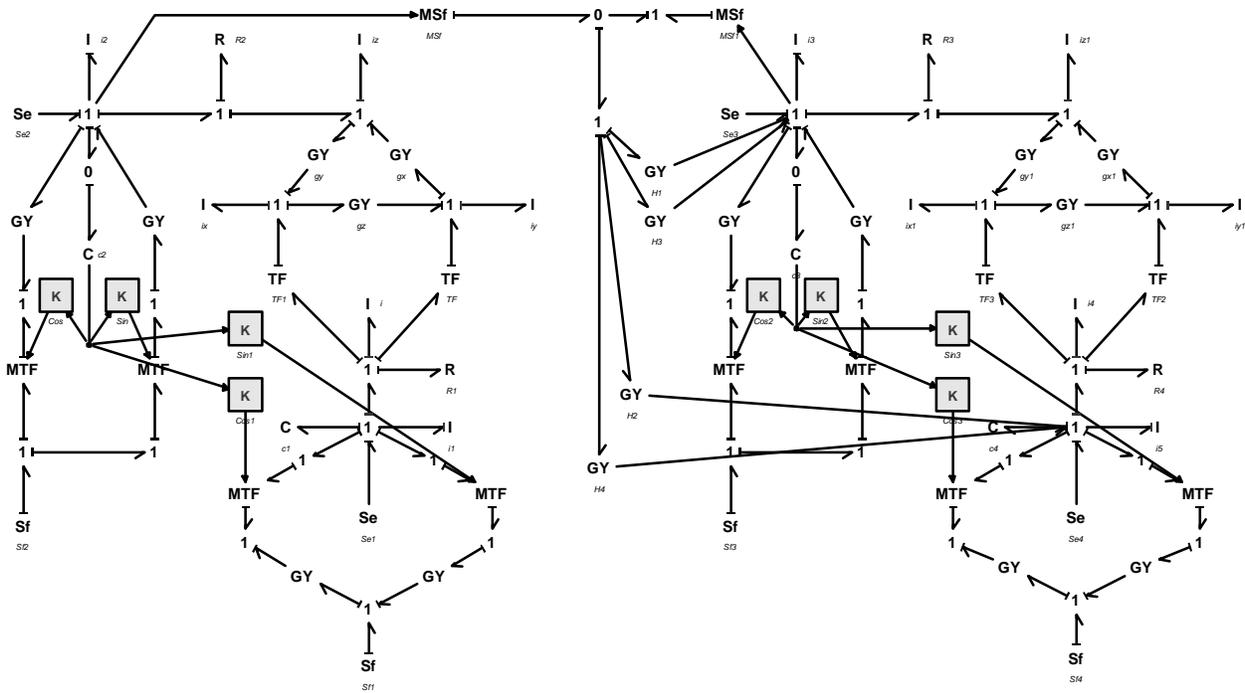


Figura 5.12: Diseño del observador de estados lineales para el manipulador PUMA.

De acuerdo con el paso número 9 del procedimiento 5.2, es necesario calcular la ganancia gráfica del observador, que para este caso, son los módulos de los giradores H_1 , H_2 , H_3 y H_4 . Esto se consigue eligiendo los eigenvalores de la matriz $A_p - HC_p$, que para este caso sería $A_\delta - HC_\delta$, de tal manera que los eigenvalores de esta matriz resulten estables. Es importante recordar que H es el vector de ganancias de $n \times 1$, donde n es el número de variables almacenadoras de energía que pueden ser alcanzadas por la salida del sistema.

Recordando la ecuación (5.41),

$$A_\delta = \begin{bmatrix} -\frac{R_2}{i_2} & \frac{1}{i_1}(\hat{p}_{12} \cos \hat{q}_3 - \hat{p}_{13} \sin \hat{q}_3) & \frac{1}{c_2} \dot{f}_{24}(\hat{p}_{12} \sin \hat{q}_3 + \hat{p}_{13} \cos \hat{q}_3) & 0 \\ -\frac{1}{i_2}(\hat{p}_{12} \cos \hat{q}_3 - \hat{p}_{13} \sin \hat{q}_3) & -\frac{R_1}{i_1} & \dot{f}_2(\hat{p}_{12} \sin \hat{q}_3 + \hat{p}_{13} \cos \hat{q}_3) & -\frac{1}{c_1} \\ \frac{1}{i_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{i_1} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

debido a que las velocidades angulares son cero cuando desaparece la dinámica tenemos,

$$A_\delta = \begin{bmatrix} -\frac{1}{i_2} R_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{i_1} R_1 & 0 & -\frac{1}{c_1} \\ \frac{1}{i_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{i_1} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.72)$$

sustituyendo los siguientes valores paramétricos: $c_1 = 0.1$, $c_2 = 0.2$, $i_1 = 0.1$, $i_2 = 0.2$, $R_1 = 4$, $R_2 = 3$ la nueva matriz A_δ resulta,

$$A_\delta = \begin{bmatrix} -15.0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -40.0 & 0 & -10.0 \\ 5.0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10.0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.73)$$

Recordando la ecuación (5.44),

$$C_\delta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} F = \begin{bmatrix} \frac{1}{i_2} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

tenemos entonces,

$$HC_\delta = \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \\ H_3 \\ H_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{i_2} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{H_1}{i_2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{H_2}{i_2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{H_3}{i_2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{H_4}{i_2} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5.0H_1 & 0 & 0 & 0 \\ 5.0H_2 & 0 & 0 & 0 \\ 5.0H_3 & 0 & 0 & 0 \\ 5.0H_4 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.74)$$

Para el cálculo de las ganancias gráficas del observador tenemos,

$$A_\delta - HC_\delta = \begin{bmatrix} -5.0H_1 - 15.0 & 0 & 0 & 0 \\ -5.0H_2 & -40.0 & 0 & -10.0 \\ -5.0H_3 + 5.0 & 0 & 0 & 0 \\ -5.0H_4 & 10.0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.75)$$

Podemos entonces elegir el determinante de la ecuación (5.75) como un polinomio Hurwitz para que las ganancias aseguren la convergencia de los estados reales y los estimados. Para este caso, elegimos los polos del sistema como, -1.5146×10^{-28} , -2.6795 , -5.0 , -37.32 . Esto da como resultado los siguientes valores de las ganancias:

$$H_1 = -2; H_2 = -2; H_3 = -2; H_4 = -2 \quad (5.76)$$

En la Figura 5.13 se muestra la respuesta del observador de estados en comparativa con los estados reales del sistema,

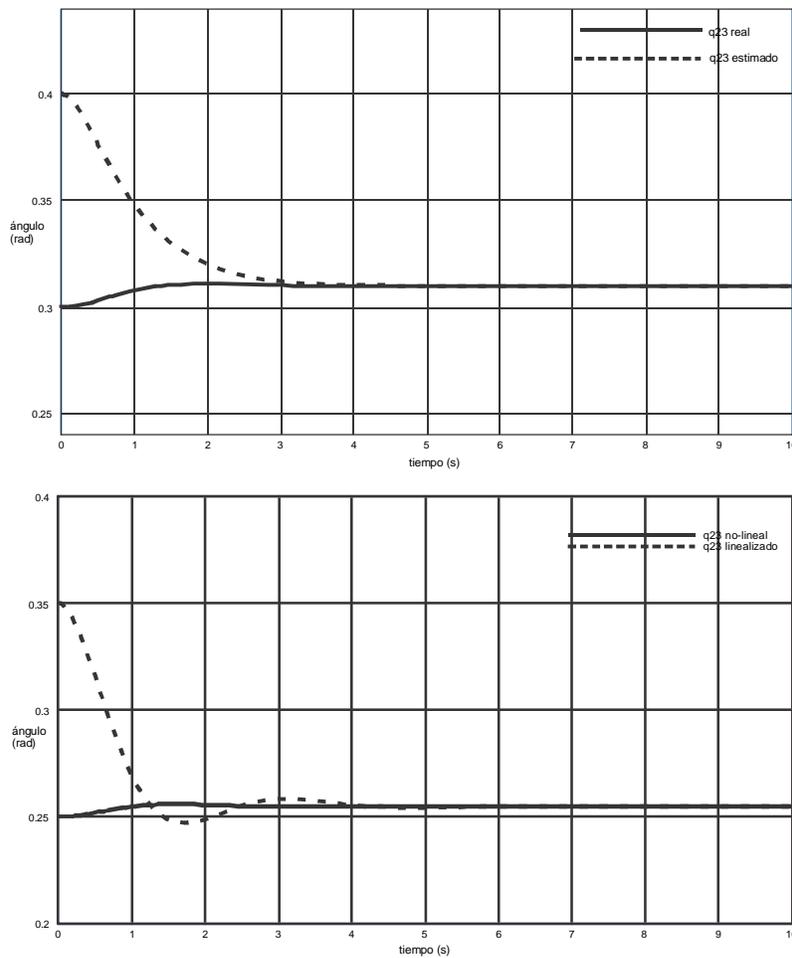


Figura 5.13: Respuesta del observador de estados del robot PUMA.

Se aprecia en las gráficas que, aunque los estados observados tengan un estado inicial diferente, después de aproximadamente diez segundos convergen con los estados reales del sistema.

Ahora bien, la ecuación (5.67) describe al observador de estados,

$$\dot{\hat{x}}(t) = (A_p - HC_p)\hat{x}(t) + Hy(t) + B_p u(t)$$

sustituyendo en esta las ecuaciones (5.75), (5.46) y (5.42), tenemos,

$$\dot{\hat{x}}(t) = \begin{bmatrix} -5.0H_1-15.0 & 0 & 0 & 0 \\ -5.0H_2 & -40.0 & 0 & -10.0 \\ -5.0H_3+5.0 & 0 & 0 & 0 \\ -5.0H_4 & 10.0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \hat{x}(t) + \begin{bmatrix} 5.0H_1 & 0 & 0 & 0 \\ 5.0H_2 & 0 & 0 & 0 \\ 5.0H_3 & 0 & 0 & 0 \\ 5.0H_4 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} u(t) \quad (5.77)$$

La ecuación (5.77) es la representación en variables de estado del observador de estados del robot manipulador PUMA, para esa configuración paramétrica en particular.

5.4.4 Diseño del observador de estados del robot manipulador Stanford

Diseñaremos ahora el observador de estados lineal para el robot manipulador Stanford. Según la teoría antes discutida, para que el sistema sea estructuralmente observable, es necesario que el BGD del sistema exista (lo cuál fue comprobado en el capítulo anterior) y que, además, existan trayectorias causales desde la salida hacia cada uno de los elementos almacenadores asociados con los estados del sistema. De acuerdo con la Figura 5.6 y considerando

$$y(t) = f_3 = \dot{\theta}_2 \quad (5.78)$$

estas trayectorias son,

$$T_1 = \{3\}$$

$$T_2 = \{3, 3, 2\}$$

$$T_3 = \{3, 4, 5, 7, 10, 16, 18, 22, 24\}$$

$$T_4 = \{3, 4, 5, 7, 10, 16, 18, 22, 24, 24, 23\}$$

$$T_5 = \{3, 3, 4, 5, 26, 27, 38, 40, 41, 39, 51, 50\}$$

$$T_6 = \{3, 3, 4, 5, 26, 27, 38, 40, 41, 39, 51, 50, 50, 53\} \quad (5.79)$$

Siguiendo los pasos del procedimiento 5.2, se construye entonces el observador de estados lineal del sistema. En la Figura 5.14 se muestra el diagrama de diseño para este observador,

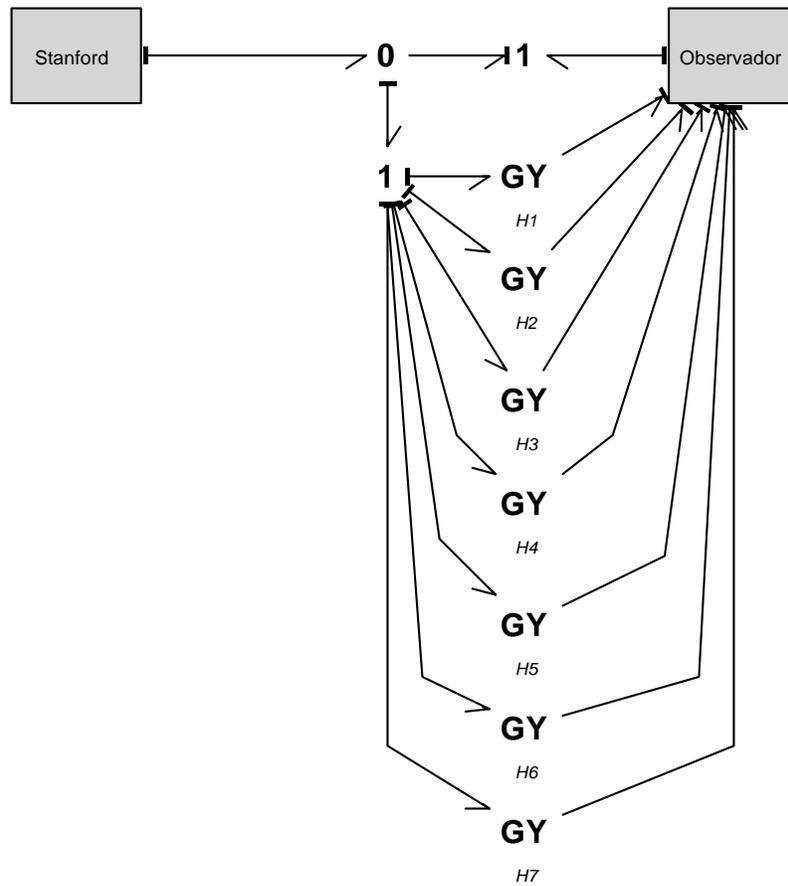


Figura 5.14: Diagrama de diseño del observador de estados del robot Stanford.

El submodelo llamado Stanford en la Figura 5.14 es el sistema original (Figura 5.6) con su salida conectada a una unión-0 como lo indica el procedimiento 5.2, mientras que el submodelo llamado Observador es una copia del sistema original con la diferencia de las salidas retroalimentada a sus estados. A continuación se muestra en la Figura 5.15 el diagrama interno de este submodelo,

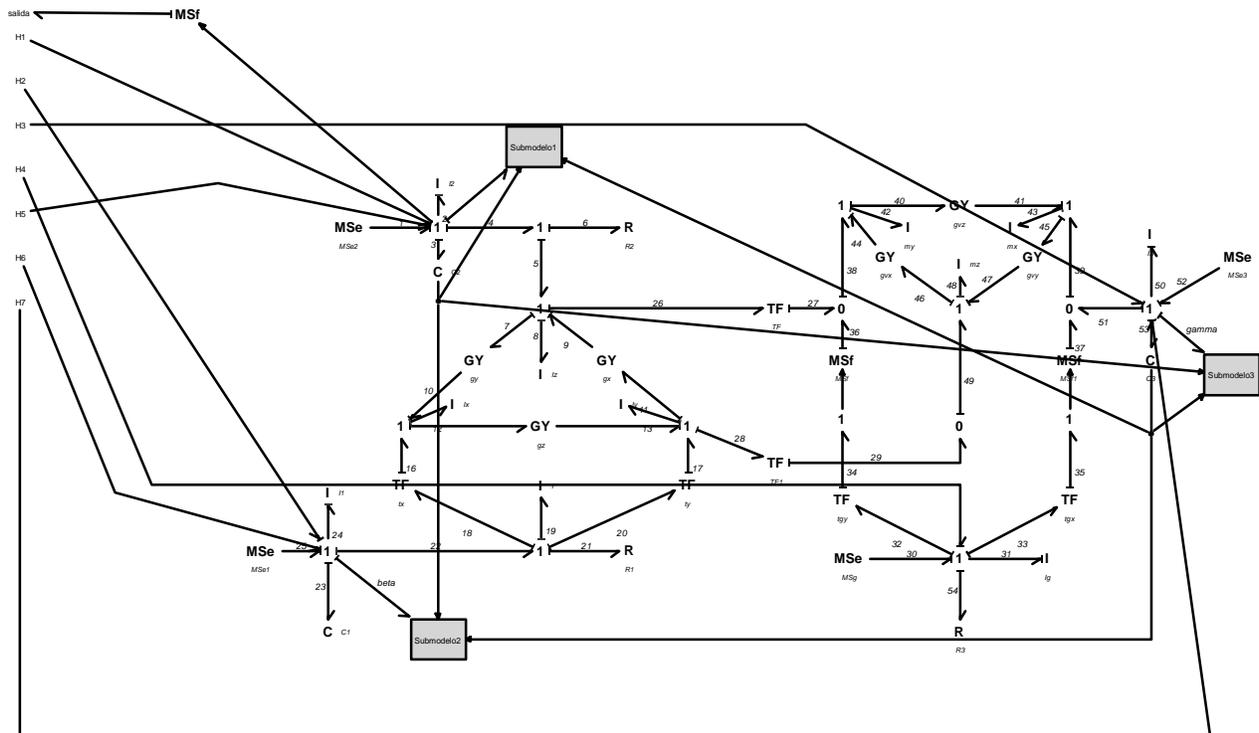


Figura 5.15: Diseño del observador de estados para el robot Stanford.

De acuerdo con el paso número 9 del procedimiento 5.2, es necesario calcular la ganancia gráfica del observador, en este caso las ganancias gráficas del observador son los módulos H_1 , H_2 , H_3 , H_4 , H_5 , H_6 y H_7 . Esto se consigue eligiendo estas ganancias de tal forma que los eigenvalores

de la matriz $A_\delta - HC_\delta$ sean estables. Recordando la ecuación (5.60),

$$A_\delta = \begin{bmatrix} -\frac{1}{i_2}R_2 & \frac{1}{i_1}h_1 & -\frac{1}{i_3}h_2 & -\frac{h_3}{i_g} & \frac{1}{c_2}(G_1c_2 - 1) & 0 & G_2 \\ -\frac{1}{i_2}h_1 & -\frac{1}{i_1}R_1 & \frac{1}{i_3}h_8 & -\frac{h_9}{i_g} & G_3 & -\frac{1}{c_1} & G_4 \\ \frac{1}{i_2}h_2 & -\frac{1}{i_1}h_8 & 0 & \frac{h_{13}}{i_g} & G_5 & 0 & \frac{1}{c_3}(G_6c_3 - 1) \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{R_3}{i_g} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{i_2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{i_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{i_3} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

sustituyendo los siguientes valores paramétricos usados en el modelo linealizado: $\dot{p}_{13} = 0$, $\dot{p}_{12} = 0$, $\dot{q}_3 = 0.5086$, $\dot{q}_{53} = 0.1689$, $\dot{f}_2 = 3.8589 \times 10^{-5}$, $\dot{f}_{24} = -3.7287 \times 10^{-5}$, $\dot{f}_{31} = -0.25$, $\dot{f}_{50} = -6.9441 \times 10^{-4}$, $m_x = 0.4$, $m_y = 0.4$, $m_z = 0.4$, $i_2 = 0.2$, $i_1 = 0.15$, $i_3 = 0.25$, $i_g = 0.15$, $c_2 = 0.2$, $c_1 = 0.1$, $c_3 = 0.3$, $R_1 = 3$, $R_2 = 5$ y $R_3 = 2$ tenemos,

$$A_\delta = \begin{bmatrix} -25.0 & -1.2064 \times 10^{-6} & -1.0428 \times 10^{-5} & -8.4633 \times 10^{-6} & -5.0 & 0 & 5.7107 \times 10^{-7} \\ 9.048 \times 10^{-7} & -20.0 & -7.6872 \times 10^{-6} & 6.2387 \times 10^{-6} & -6.819 \times 10^{-7} & -10.0 & -5.431 \times 10^{-7} \\ 1.3036 \times 10^{-5} & 1.2812 \times 10^{-5} & 0 & 8.988 \times 10^{-5} & -1.8792 \times 10^{-6} & 0 & -3.3333 \\ 0 & 0 & 0 & -13.333 & 0 & 0 & 0 \\ 5.0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6.6667 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4.0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.80)$$

y usando la Ecuación (5.62) para formar la matriz HC_δ , tenemos,

$$HC_\delta = \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \\ H_3 \\ H_4 \\ H_5 \\ H_6 \\ H_7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{i_2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5.0H_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5.0H_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5.0H_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5.0H_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5.0H_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5.0H_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5.0H_7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.81)$$

Para el cálculo de las ganancias gráficas del observador tenemos,

$$A_\delta - HC_\delta = \begin{bmatrix} -5.0H_1 - 25.0 & -1.2064 \times 10^{-6} & -1.0428 \times 10^{-5} & -8.4633 \times 10^{-6} & -5.0 & 0 & 5.7107 \times 10^{-7} \\ 9.048 \times 10^{-7} - 5.0H_2 & -20.0 & -7.6872 \times 10^{-6} & 6.2387 \times 10^{-6} & -6.819 \times 10^{-7} & -10.0 & -5.431 \times 10^{-7} \\ 1.3036 \times 10^{-5} - 5.0H_3 & 1.2812 \times 10^{-5} & 0 & 8.988 \times 10^{-5} & -1.8792 \times 10^{-6} & 0 & -3.3333 \\ -5.0H_4 & 0 & 0 & -13.333 & 0 & 0 & 0 \\ 5.0 - 5.0H_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -5.0H_6 & 6.6667 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -5.0H_7 & 0 & 4.0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.82)$$

Podemos entonces elegir las ganancias gráficas del observador para que el determinante de la Ecuación (5.82) resulte un polinomio Hurwitz. Para posicionar los polos del sistema en $-8.2132 \times 10^{-8} - 3.6515i$, $-8.2132 \times 10^{-8} + 3.6515i$, -1.1792 , -4.2265 , 13.33 , -15.773 y -23.32 , las ganancias gráficas del observador son:

$$H_1 = H_2 = H_3 = H_4 = H_5 = H_6 = H_7 = -0.1 \quad (5.83)$$

En la Figura 5.16 se muestra la respuesta del observador de estados en comparativa con los estados reales del sistema,

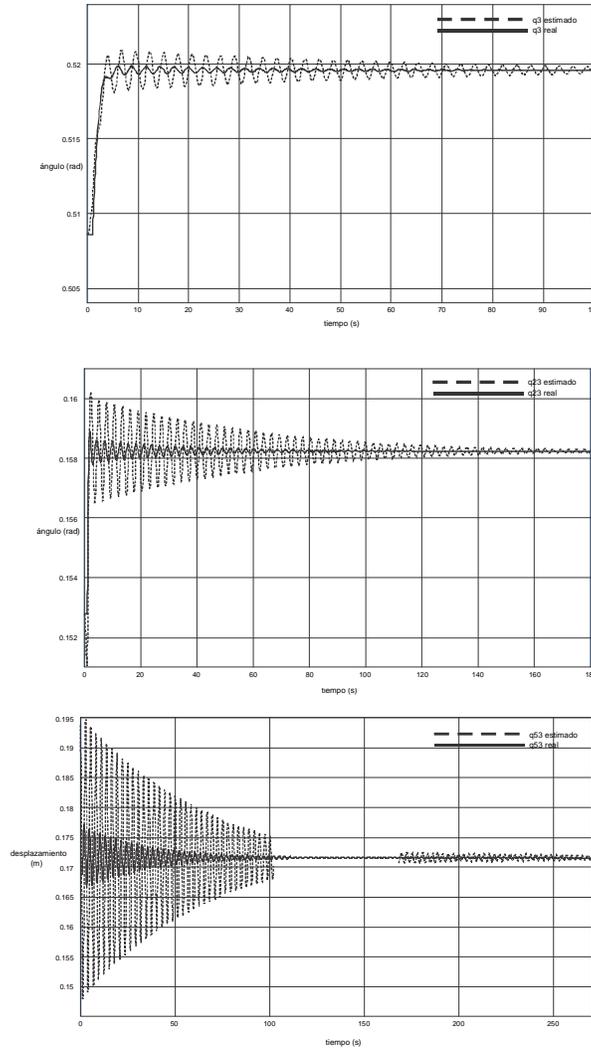


Figura 5.16: Comparación de los estados reales y estimados del robot Stanford.

Se observa en las gráficas anteriores que se logra la convergencia de los estados estimados y los estados reales del sistema. Los diseños de los observadores diseñados en este capítulo pueden ser implementados usando un sustituto del sistema, como puede ser un circuito eléctrico y proveer de esta manera los estados para su retroalimentación.

Recordando que la Ecuación (5.67) describe al observador de estados,

$$\dot{\hat{x}}(t) = (A_p - HC_p)\hat{x}(t) + Hy(t) + B_p u(t)$$

tenemos entonces que el observador de estados para el robot Stanford está dado por,

$$\dot{\hat{x}}(t) = \begin{bmatrix} -5.0H_1 - 25.0 & -1.2064 \times 10^{-6} & -1.0428 \times 10^{-5} & -8.4633 \times 10^{-6} & -5.0 & 0 & 5.7107 \times 10^{-7} \\ 9.048 \times 10^{-7} - 5.0H_2 & -20.0 & -7.6872 \times 10^{-6} & 6.2387 \times 10^{-6} & -6.819 \times 10^{-7} & -10.0 & -5.431 \times 10^{-7} \\ 1.3036 \times 10^{-5} - 5.0H_3 & 1.2812 \times 10^{-5} & 0 & 8.988 \times 10^{-5} & -1.8792 \times 10^{-6} & 0 & -3.3333 \\ -5.0H_4 & 0 & 0 & -13.333 & 0 & 0 & 0 \\ 5.0 - 5.0H_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -5.0H_6 & 6.6667 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -5.0H_7 & 0 & 4.0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \hat{x}(t) + \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \\ H_3 \\ H_4 \\ H_5 \\ H_6 \\ H_7 \end{bmatrix} y(t) + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} u(t) \quad (5.84)$$

La Ecuación (5.84) es la representación en espacio de estados del observador del robot manipulador Stanford, para esa configuración paramétrica en particular.

En este Capítulo se realizaron los diseños para los observadores de estados de los robots PUMA y Stanford. En estos diseños se implementaron los bond graphs linealizados de estos sistemas. El diseño resultante puede ser implementado no solo usando una copia del sistema, sino que también puede ser utilizado usando un circuito eléctrico o mecanismo que se ajuste al comportamiento de la representación matemática del observador. Notar que el observador puede entrar en operación en cualquier momento puesto que no es necesario el cálculo de los valores iniciales de los estados para su funcionamiento.

Capítulo 6

Conclusiones y trabajos futuros

6.1 Conclusiones

En este trabajo de investigación se propuso un modelo en el dominio físico de los robots PUMA y Stanford, dichos modelos fueron formulados usando la metodología de Bond Graph, contemplando el movimiento en tres dimensiones de los eslabones de estos robots. Para la obtención de estos modelos, fue necesaria la implementación de las ecuaciones de movimiento de Euler dentro de los bond graphs. También se incluyeron los efectos de la gravedad sobre los cuerpos en movimiento. Estos modelos fueron validados mediante la comparación con los modelos formulados usando las ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange. Además, fue posible la determinación del estado estacionario de las variables de estado de estos sistemas dinámicos, usando la representación en Bond Graph de los sistemas en causalidad derivativa o BGD. Este resultado en particular implica la solución al problema de la cinemática inversa de los manipuladores, es decir, mediante el procedimiento propuesto, es posible determinar las entradas del sistema necesarias para alcanzar una posición particular del actuador final del manipulador, dentro de su espacio de trabajo. Usando técnicas convencionales, la solución a este problema no es tarea fácil, pero en este trabajo de tesis se demostró que Bond Graph provee un acercamiento sencillo a este problema.

Otro resultado notable obtenido en esta investigación fue la linealización de los bond graphs de los manipuladores, ya que, como se mostró en el desarrollo de la tesis, los modelos matemáticos resultantes son no-lineales. Aunque esta linealización sólo funciona en las vecindades de un punto de operación muy particular, es una buena aproximación al comportamiento lineal de

estos sistemas.

En algunas estrategias de control, en particular la retroalimentación de estados, es necesaria la medición de las variables de estado del sistema. Desafortunadamente, en la práctica es raro encontrar sistemas en los cuales estén disponibles todos los estados para su medición. En esta tesis se presenta un procedimiento para el diseño de los observadores de estados lineales de los manipuladores PUMA y Stanford. Dichos observadores proveen una estimación bastante buena de los estados del sistema.

6.2 Trabajos futuros

Cuando observamos los modelos no-lineales de los manipuladores obtenidos en esta tesis, es natural pensar en aplicar técnicas de control para modificar el comportamiento de estos sistemas, ya sea para mejorar sus tiempos de respuesta o la estabilidad en las trayectorias que ejecutan para alcanzar su posición final. Esta tarea implica, ya sea la linealización de los sistemas para poder observar sus estados y de esa manera retroalimentarlos, o bien, la implementación de técnicas de control no-lineal. Esta meta podría ser alcanzada usando la metodología de Bond Graph, la cual ha probado ser eficaz, tanto en el modelado, como en la determinación de características esenciales de los sistemas como la controlabilidad y observabilidad. Los modelos conseguidos de los robots manipuladores consideran la geometría de estos, por lo que la optimización de trayectorias puede ser posible.

Apéndice A

Modelo de Euler-Lagrange para sistemas electromecánicos

A.1 Introducción

Sistemas dinámicos complejos pueden ser modelados de una manera elegante y relativamente simple usando una aproximación llamada la formulación de Lagrange. La formulación de Lagrange se basa en la noción de coordenadas generalizadas, energía y fuerzas generalizadas. Para un robot manipulador, un conjunto apropiado de coordenadas generalizadas es el vector de n variables de unión, a las cuales llamaremos q . Las componentes de q para uniones de revolución son los ángulos en las uniones y distancias lineales para las uniones prismáticas. Sea T y U las representaciones de la energía cinética y energía potencial del brazo, respectivamente. Definimos la función de Lagrange como la diferencia entre la energía cinética y potencial como sigue,

$$L(q, \dot{q}) \triangleq T(q, \dot{q}) - U(q) \quad (\text{A.1})$$

donde $\dot{q} = dq/dt$ es el vector de velocidades angulares. Se observa que la energía cinética T depende tanto de la posición del brazo como de su velocidad, mientras que la energía potencial solo depende de la posición del brazo. Las ecuaciones generales de movimiento de un brazo robot pueden ser formuladas en términos de la función de Lagrange como se muestra a continuación [Shilling, 1990],

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} L(q, \dot{q}) - \frac{\partial}{\partial q_i} L(q, \dot{q}) = F_i \quad 1 \leq i \leq n \quad (\text{A.2})$$

En la ecuación (A.2), F_i es la fuerza generalizada actuando sobre la i -ésima unión. Es

la fuerza residual que resulta después de que los efectos de las fuerzas inerciales y de gravedad han sido removidos. La formulación de Lagrange para la dinámica de un brazo robot en la ecuación (A.2) consiste de un sistema de n ecuaciones diferenciales no-lineales de segundo orden en el vector de variables de unión q . Para especificar estas ecuaciones de manera más detallada, es necesario formular expresiones para la energía cinética T , la energía potencial U , y la fuerza generalizada F .

A.2 Modelo dinámico de Euler-Lagrange

Esa necesario detallar las expresiones de la energía cinética y la energía potencial para poder aplicar la ecuación de Lagrange (A.2) y de esa manera desarrollar un modelo generalizado del brazo robot. Para la energía cinética tenemos la siguiente expresión [Shilling, 1990],

$$T(q, \dot{q}) = \frac{\dot{q}^T D(q) \dot{q}}{2} \quad (\text{A.3})$$

donde $D(q)$ es el tensor de inercia del manipulador, el cual es una matriz simétrica definida positiva, de la forma,

$$D(q) \triangleq \sum_{k=1}^n \left\{ \left[A^k(q) \right]^T m_k A^k(q) + \left[B^k(q) \right]^T D_k(q) B^k(q) \right\} \quad (\text{A.4})$$

Para la energía potencial tenemos [Shilling, 1990],

$$U(q) = -g^T \bar{c}(q) \quad (\text{A.5})$$

Para facilitar las derivadas requeridas, expandemos las ecuaciones (A.3) y (A.5) en sumas de escalares, como sigue,

$$T(q, \dot{q}) = \frac{\sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n D_{kj}(q) \dot{q}_k \dot{q}_j}{2} \quad (\text{A.6})$$

$$U(q) = - \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n g_k m_j \bar{c}_k^j(q) \quad (\text{A.7})$$

Recordando la ecuación del Lagrangiano (A.1). Puesto que $D(q)$ es simétrica, la derivada del Lagrangiano con respecto a \dot{q}_i puede ser formulada como,

$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} L(q, \dot{q}) = \sum_{j=1}^n D_{ij}(q) \dot{q}_j \quad (\text{A.8})$$

Resulta entonces, que el primer término en la ecuación de Lagrange para un brazo robot es,

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} L(q, \dot{q}) = \sum_{j=1}^n D_{ij}(q) \dot{q}_j + \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \left[\frac{\partial D_{ij}(q)}{\partial q_k} \right] \dot{q}_k \dot{q}_j \quad (\text{A.9})$$

Ahora, examinando el segundo término de la ecuación (A.2), el cual es la derivada del Lagrangiano respecto a q_i , tenemos,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial q_i} L(q, \dot{q}) &= \frac{\partial}{\partial q_i} T(q, \dot{q}) - \frac{\partial}{\partial q_i} U(q) \\ \frac{\partial}{\partial q_i} L(q, \dot{q}) &= \frac{\sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \left[\frac{\partial D_{ij}(q)}{\partial q_k} \right] \dot{q}_k \dot{q}_j}{2} + \sum_{k=1}^3 \sum_{j=1}^n g_k m_j A_{ki}^j(q) \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

Para simplificar las ecuaciones finales de movimiento, introducimos dos nuevas cantidades:

$$C_{kj}^i(q) \triangleq \frac{\partial}{\partial q_k} D_{ij}(q) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial q_i} D_{kj}(q) \quad 1 \leq i, j, k \leq n \quad (\text{A.11})$$

$$h_i(q) \triangleq - \sum_{k=1}^3 \sum_{j=1}^n g_k m_j A_{ki}^j(q) \quad 1 \leq i \leq n \quad (\text{A.12})$$

Nos referimos a la matriz de $n \times n$ C^i como la matriz de velocidades de acoplamiento para la unión i , y al vector de $n \times 1$ h como el vector de cargas de gravedad. Con la ayuda de C^i y h podemos entonces desarrollar una formulación concisa del modelo dinámico para el brazo robot.

Proposición A.1 Ecuaciones de Euler-Lagrange. Sean q las variables de unión y τ los torques en los actuadores para un brazo robot de n ejes. Si el manipulador se mueve libremente dentro de su espacio de trabajo, entonces sus ecuaciones de movimiento son:

$$\sum_{j=1}^n D_{ij}(q) \ddot{q}_j + \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n C_{kj}^i(q) \dot{q}_k \dot{q}_j + h_i(q) + b_i(\dot{q}) = \tau_i \quad 1 \leq i \leq n \quad (\text{A.13})$$

Demostración. Sea $1 \leq i \leq n$. Entonces, para la fuerza generalizada aplicada al brazo robot tenemos,

$$F = \tau - b(\dot{q}) \quad (\text{A.14})$$

donde b es la fricción en las uniones, la cual es considerada también como una fuerza generalizada. Sustituyendo las ecuaciones (A.9), (A.13) y (A.10) en la ecuación (A.2) y usando las ecuaciones (A.11) y (A.12), tenemos,

$$\tau_i = F_i + b_i(\dot{q})$$

$$\tau_i = \sum_{j=1}^n D_{ij}(q)\ddot{q}_j + \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n C_{kj}^i(q)\dot{q}_k\dot{q}_j + h_i(q) + b_i(\dot{q}) \quad (\text{A.15})$$

■

El primer término de la proposición A.1 es un término de aceleración que representa las fuerzas inerciales y torques generados por el movimiento de los eslabones del brazo. El segundo término es un término de producto de velocidades, asociado con las fuerzas de Coriolis y centrífugas. El tercer término es un término de posición que representa las cargas debido a la gravedad. Finalmente, el cuarto término es un término de velocidad, el cual representa a la fricción que se opone al movimiento del brazo.

Las n ecuaciones escalares separadas en la proposición A.1 pueden ser combinadas en un solo vector de ecuaciones que representa el modelo dinámico del brazo. Para facilitar lo anterior, considerar la siguiente función cuadrática de la velocidad de unión:

$$c_i(q, \dot{q}) \triangleq \dot{q}^T C^i(q) \dot{q} \quad 1 \leq i \leq n \quad (\text{A.16})$$

Notar que $c_i(q, \dot{q})$ es el término de productos de velocidad en la proposición A.1. Por lo tanto, las n ecuaciones escalares separadas en la proposición A.1 pueden ser reescritas como un vector de ecuaciones, como sigue,

$$D(q)\ddot{q} + c(q, \dot{q}) + h(q) + b(\dot{q}) = \tau \quad (\text{A.17})$$

El vector $c(q, \dot{q})$ es llamado vector de velocidad de acoplamiento. Es claro observar en la ecuación (A.16) que $c(q, 0) = 0$. Existen dos tipos de velocidades de acoplamiento en los ejes de las uniones que resaltan. Para ver esto, expandemos el vector de velocidad de acoplamiento como sigue,

$$c_i(q, \dot{q}) = \sum_{k=1}^n C_{kk}^i(q)\dot{q}_k^2 + \sum_{k=1}^n \sum_{j=1, j \neq k}^n C_{kj}^i(q)\dot{q}_k\dot{q}_j \quad (\text{A.18})$$

Las dos sumatorias en la ecuación (A.18) son generadas por los componentes de la diagonal y los componentes fuera de la diagonal de las matrices de velocidad de acoplamiento, respectivamente. La primer sumatoria corresponde a los términos de velocidades cuadradas asociadas a las fuerzas centrífugas. Por ejemplo, el término $C_{kk}^i(q)\dot{q}_k^2$ representa la fuerza centrífuga actuando sobre la unión i debido al movimiento de la unión k .

La segunda sumatoria corresponde a los términos de producto de velocidades asociados con las fuerzas de Coriolis. En este caso, el término $C_{kj}^i(q)\dot{q}_k\dot{q}_j$ representa la fuerza de Coriolis actuando sobre la unión i debido a los movimientos combinados de las uniones k y j donde $k \neq j$.

A.3 Manipulador de un sólo eslabón

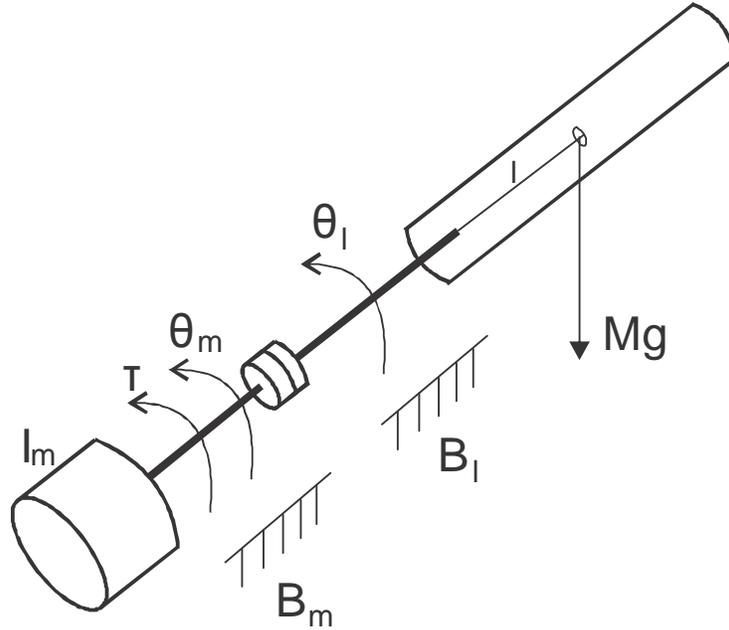


Figura A.1: Manipulador de un sólo eslabón.

Considerar el brazo de un sólo eslabón de la Figura A.1, el cual consiste de un eslabón rígido acoplado mediante un tren de engranes a un motor de CD. Sea θ_l y θ_m los ángulos de la unión y del eje del motor, respectivamente. Entonces,

$$\theta_l = \frac{1}{n}\theta_m \quad (\text{A.19})$$

donde n es la relación de los engranes respecto a su radio. La energía cinética del sistema está dada por,

$$T = \frac{1}{2}(J_m + J_l/n^2)\dot{\theta}_m^2 \quad (\text{A.20})$$

donde J_m y J_l son las inercias rotacionales del motor y de la unión, respectivamente. La energía potencial está dada por,

$$U = Mgl(1 - \cos \theta_l) = Mgl(1 - \cos(\theta_m/n)) \quad (\text{A.21})$$

donde M es la masa total del eslabón y l es la distancia del eje de la unión al centro de masa del eslabón.

El Lagrangiano L está dado entonces por,

$$L = \frac{1}{2}(J_m + J_l/n^2)\dot{\theta}_m^2 - Mgl(1 - \cos(\theta_m/n)) \quad (\text{A.22})$$

Sustituyendo esta expresión en las ecuaciones de Euler-Lagrange nos resulta la siguiente ecuación de movimiento,

$$(J_m + J_l/n)\dot{\theta}_m + \frac{Mgl}{n} \sin(\theta_m/n) = \tau \quad (\text{A.23})$$

La fuerza generalizada τ consiste en el torque de entrada del motor u y de los torques de amortiguamiento $B_m\dot{\theta}_m$ y $B_l\dot{\theta}_l$. Reflejando el amortiguamiento del eslabón al eje del motor tenemos,

$$\tau = u - (B_m + B_l/n^2)\dot{\theta}_m \quad (\text{A.24})$$

De esta manera, la expresión completa para la dinámica de este sistema es,

$$J\ddot{\theta}_m + B\dot{\theta}_m + C \sin(\theta_m/n) = u \quad (\text{A.25})$$

donde

$$J = J_m + J_l/n^2$$

$$B = B_m + B_l/n$$

$$C = Mgl/n \quad (\text{A.26})$$

En general, para cualquier sistema del tipo considerado, la aplicación de las ecuaciones de Euler-Lagrange resulta en un sistema de ecuaciones diferenciales no-lineales de segundo orden en las coordenadas generalizadas.

Bibliografía

- [Cecarelli, 2008] Marco Ceccarelli, 2008, Robots Manipulators, In-Teh
- [Breedveld, 2003] P. C. Breedveld, Holten, 2003, Bond Graphs
- [Borutzky, 2006] W. Borutzky, 2006, Bond Graph Modelling and Simulation of Mechatronic Systems An Introduction into the Methodology
- [Asada, 1986] H. Asada y J. E. Slotine, 1986, Robot Analysis and Control, Wiley-Interscience
- [Spong, 1989] M. W. Spong y M. Vidyasagar, 1989, Robot Dynamics and Control, John Wiley & Sons
- [Murray, 1994] Richard M. Murray, Zexiang Li, S. Shankar Sastry, 1994, A Matemathical Introducción to Robotics Manipulation, CRC Press
- [Karnopp, 1996] Dean Karnopp, 1996, Understanding Multibody Dynamics Using Bond Graph Representations, The Franklin Institute , Elsevier Science Ltd.
- [Gawthrop, 1996] Peter Gawthrop, Lorcan Smith, 1996, Metamodelling, Prentice Hall International.
- [González, 2002] Gilberto González A., R. Galindo, 2002, Direct Control in Bond Graph by State Estimated Feedback for MIMO LTI Systems, Conference on Control Applications, IEEE International, Glasgow Scotland, U.K.
- [Craig, 1989] Craig J. J., 1989, Introducción to Robotics, Mecanics and Control. Addison-Wesley.
- [Ogata, 1998] K. Ogata, 1998, Modern Control Engineering, Prentice Hall.

- [Dauphin, 1991] C. Sueur y G. Dauphin-Tanguy, 1991, Bond Graph Approach for Structural Analysis of MIMO Linear Systems, Journal of the Franklin Institute.
- [Karnopp, 1977] Dean Karnopp, 1977, Lagrange's Equations for Complex Bond Graph Systems, Department of Mechanical Engineering, University of California, Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control.
- [Allen, 1979] Ross R. Allen, 1979, Multiport Representation of Inertia Properties of Kinematic Mechanisms, Mechanics and Structures Department, University of California, Journal of the Franklin Institute.
- [Tienego, 1985] M. L. J. Tienego y A. M. Bos, 1985, Modelling the Dynamics and Kinematics of Mechanical Systems with Multibond Graphs, Twente University of Technology, Journal of the Franklin Institute.
- [Breedveld, 1985] P. C. Breedveld, 1985, Multibond Graph Elements In Physical Systems Theory, Twente University of Technology, Journal of the Franklin Institute.
- [Brown, 1991] Forbes T. Brown, 1991, Hamiltonian and Lagrangian Bond Graph, Department of Mechanical Engineering, Lehigh University, Journal of the Franklin Institute.
- [González, 2003] González A. Gilberto y R. Galindo, 2003, Steady-State Values for a Physical System with Bond Graph Approach, 9th IEEE International Conference on Methods and Models in Automation and Robotics, Miedzyzdroje, Poland.
- [González, 2003] González A. Gilberto y R. Galindo, 2003, A Linealization Procedure for a Class of Nonlinear Systems Based on Bond Graph, Universidad Michoacana de San Nicolas de Hidalgo, Facultad de Ingeniería Eléctrica.
- [Shilling, 1990] Shilling J. Robert, 1990, Fundamental of Robotics Analisis and Control, Clarkson University, Prentice Hall.
- [González, 2010] González A. Gilberto y Thor Morales Bieze, Steady State of a Three Degrees of Freedom Stanford: A Bond Graph Approach, Universidad Michoacana de San Nicolas de Hidalgo, Facultad de Ingeniería Eléctrica.