



UNIVERSIDAD MICHOCANA DE  
SAN NICOLÁS DE HIDALGO

*DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO  
FACULTAD DE INGENIERÍA ELÉCTRICA*

“SOLUCIÓN AL PROBLEMA DE FLUJOS DE  
POTENCIA EN SISTEMAS ELÉCTRICOS  
MEDIANTE LAS FORMULACIONES DE  
INYECCIONES DE CORRIENTE Y EXPANSIÓN  
EN FRACCIONES CONTINUAS”

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE  
MAESTRO EN CIENCIAS EN INGENIERÍA ELÉCTRICA

PRESENTA

ING. VÍCTOR ARMANDO VEGA FERNÁNDEZ

ASESOR

DR. CLAUDIO RUBÉN FUERTE ESQUIVEL

MORELIA, MICHOCÁN

SEPTIEMBRE, 2011



# Resumen

El estudio de flujos de potencia es una herramienta imprescindible en la planeación y diseño de los sistemas eléctricos de potencia, así como también en la determinación de las mejores condiciones de operación de los sistemas existentes. En esta investigación se presentan dos métodos para resolver el problema de flujos de potencia, el primero es llamado Flujos de Potencia de Inyecciones de Corriente (FPIC) y el segundo se llamado Flujos de Potencia de Fracción Continua (FPFC).

El método FPIC esta basado en inyecciones de corriente y utiliza un conjunto de variables de estado expresadas en una mezcla de coordenadas polares y rectangulares. El método FPIC consiste en expresar las ecuaciones de desbalance de corriente nodal en coordenadas rectangulares, lo cual resulta en un conjunto de ecuaciones algebraicas no-lineales que se resuelven mediante el algoritmo Newton-Raphson. El Jacobiano asociado a esta formulación tiene una ventaja importante con respecto al método convencional, la mayoría de sus elementos permanecen constantes durante el proceso iterativo. Además, se incorpora un manejo eficiente de nodos *PV* en la formulación presentada.

El método FPFC es un método no-iterativo que consiste en expresar las ecuaciones de flujos de potencia en función de una variable compleja. Las ecuaciones correspondientes a los voltajes nodales se expanden en series de Maclaurin y cada una de ellas se aproxima mediante una fracción continua, al evaluar la fracción continua para cada nodo se obtienen los voltajes complejos nodales.

En los métodos tradicionales de flujos de potencia se experimenta una inestabilidad numérica al ser aplicados al análisis del fenómeno de colapso de voltaje, en esta investigación se aplican los métodos desarrollados, FPIC y FPFC, al análisis del fenómeno de colapso de voltaje para examinar su comportamiento ante dicho fenómeno.

# Abstract

Power flow analysis is an indispensable tool in planning and designing a power electric system, as well as determining the optimal operating conditions of existing systems. This research introduces two methods to solve the power flow problem, the former is called Current Injection Power Flow (FPIC) and the latter is called Continued Fraction Power Flow (FPFC).

The FPIC method is a formulation based on current injections and uses a mathematical representation of state variables in both polar and rectangular coordinates. FPIC method expresses nodal current mismatches equations in rectangular coordinates, this yields a set of nonlinear algebraic equations to be solved by Newton-Raphson method. The Jacobian matrix associated with this formulation shows an important advantage in relation to conventional methods, most of its elements remain unchanged through the iterative process. Furthermore, this research incorporates an efficient *PV* node handling in the proposed formulation.

The FPFC method is a noniterative method based in expressing the power flow equations in the complex variable domain, nodal voltage equations are expanded in Maclaurin power series. These series are represented by a continued fraction, and nodal complex voltages are then computed by evaluating the continued fraction for each node.

Conventional power flow methods undergoes numerical instability when applied to voltage collapse analysis. The described methods are applied to voltage collapse analysis to assess their behavior when they are applied to the analysis of this phenomenon.

# Índice General

<b>Resumen</b>	<b>I</b>
<b>Abstract</b>	<b>II</b>
<b>Índice General</b>	<b>III</b>
<b>Índice de Figuras</b>	<b>VII</b>
<b>Índice de Tablas</b>	<b>XI</b>
<b>Lista de Símbolos y Abreviaturas</b>	<b>XV</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Introducción . . . . .	1
1.2. Revisión al Estado del Arte . . . . .	2
1.3. Objetivo . . . . .	5
1.4. Justificación . . . . .	5
1.5. Metodología . . . . .	6
1.6. Contribuciones . . . . .	7
1.7. Estructura de la Tesis . . . . .	7
<b>2. Flujos de Potencia en Base a Inyecciones de Potencia</b>	<b>9</b>
2.1. Introducción . . . . .	9

2.2.	Ecuaciones de Flujo de Potencia . . . . .	10
2.3.	Clasificación de Nodos y Variables . . . . .	16
2.4.	Solución de las Ecuaciones de Flujos de Potencia . . . . .	17
2.4.1.	El Algoritmo Newton-Raphson . . . . .	18
2.4.2.	Solución de las Ecuaciones de Flujos de Potencia mediante el Método Newton-Raphson (FPNR) . . . . .	20
2.4.3.	Inicialización de Variables de Estado . . . . .	25
2.5.	Manejo de Nodos <i>PV</i> . . . . .	26
2.6.	Casos de Estudio . . . . .	27
2.6.1.	Sistema de 5 Nodos . . . . .	27
2.6.2.	Sistema IEEE-14 Nodos . . . . .	29
2.6.3.	Sistema IEEE-57 Nodos . . . . .	31
2.7.	Conclusiones . . . . .	34
<b>3.</b>	<b>Flujos de Potencia en Base a Inyecciones de Corriente</b>	<b>35</b>
3.1.	Introducción . . . . .	35
3.2.	Ecuaciones de Flujos de Potencia basadas en Inyecciones de Corriente . . . . .	36
3.3.	Solución de las Ecuaciones de Flujos de Potencia . . . . .	41
3.3.1.	Ecuaciones para Nodos <i>PQ</i> . . . . .	41
3.3.2.	Cálculo de los Desajustes de Corriente . . . . .	47
3.3.3.	Ecuaciones para Nodos <i>PV</i> . . . . .	48
3.3.4.	Actualización de Magnitud y Ángulo de Voltaje Nodal . . . . .	54
3.4.	Manejo de Nodos <i>PV</i> . . . . .	55
3.5.	Algoritmo FPIC . . . . .	57
3.6.	Casos de Estudio . . . . .	58
3.6.1.	Sistema de 5 Nodos . . . . .	59
3.6.2.	Sistema IEEE-14 Nodos . . . . .	61
3.6.3.	Sistema IEEE-57 Nodos . . . . .	63

3.7. Análisis Comparativo con el Método Basado en Inyecciones de Potencia . . . . .	65
3.7.1. Comparación del Tiempo de Cálculo entre los Métodos FPNR y FPIC . . . . .	72
3.8. Observaciones sobre el Método . . . . .	74
3.8.1. Correcciones Truncadas . . . . .	78
3.9. Conclusiones . . . . .	82
<b>4. Flujos de Potencia de Fracción Continua</b>	<b>84</b>
4.1. Introducción . . . . .	84
4.2. Fracciones Continuas . . . . .	85
4.3. Descripción del Algoritmo de Flujos de Potencia No-iterativo (FPFC) . . . . .	91
4.3.1. Transformación de las Ecuaciones de Flujos de Potencia . . . . .	92
4.3.2. Cálculo de los Coeficientes de la Serie de Maclaurin . . . . .	94
4.3.3. Expansión en Fracciones Continuas . . . . .	99
4.3.4. Solución de la Expansión en Fracciones Continuas . . . . .	102
4.4. Algoritmo FPFC . . . . .	103
4.5. Casos de Estudio . . . . .	104
4.5.1. Sistema de 5 Nodos . . . . .	104
4.5.2. Sistema IEEE-14 Nodos . . . . .	116
4.5.3. Sistema IEEE-57 Nodos . . . . .	118
4.5.4. Comparación del Tiempo de Cálculo entre los Métodos FPNR y FPFC . . . . .	121
4.6. Conclusiones . . . . .	123
<b>5. Análisis de Colapso de Voltaje</b>	<b>124</b>
5.1. Introducción . . . . .	124
5.2. Causas del Problema de Estabilidad de Voltaje en Sistemas Eléctricos de Potencia . . . . .	126
5.2.1. Límite de Estabilidad de Magnitud de Voltaje . . . . .	126
5.3. Descripción de los Métodos de Continuación . . . . .	132

5.3.1. Predictor . . . . .	134
5.3.2. Parametrización y Corrector . . . . .	136
5.4. Aplicación de los Métodos FPIC y FPFC al Análisis de Colapso de Voltaje . . . . .	138
5.4.1. Sistema de 3 Nodos . . . . .	138
5.4.2. Sistema de 5 Nodos . . . . .	140
5.4.3. Sistema de 79 Nodos . . . . .	142
5.5. Conclusiones . . . . .	144
<b>6. Conclusiones</b>	<b>146</b>
6.1. Trabajos Futuros . . . . .	148
<b>A. Datos de los Sistemas de Prueba</b>	<b>149</b>
A.1. Sistema de 3 Nodos . . . . .	149
A.2. Sistema de 5 Nodos . . . . .	150
A.3. Sistema IEEE-11 Nodos . . . . .	151
A.4. Sistema IEEE-14 Nodos . . . . .	153
A.5. Sistema IEEE-57 Nodos . . . . .	155
A.6. Sistema de 79 Nodos . . . . .	159
<b>B. Descripción de los Archivos de Datos para FPIC y FPFC</b>	<b>164</b>
B.1. Descripción del Archivo de Datos para FPIC . . . . .	164
B.2. Descripción del Archivo de Datos para FPFC . . . . .	169
<b>C. Deducción del Método de Viscovatov</b>	<b>170</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>179</b>

# Índice de Figuras

1.1. Etapas de un sistema eléctrico de potencia. . . . .	2
2.1. Modelo $\pi$ de la línea de transmisión. . . . .	11
2.2. Balance de potencia en el nodo $k$ . . . . .	15
2.3. Sistema eléctrico de 5 nodos. . . . .	28
2.4. Trayectoria de convergencia del método FPNR al resolver el sistema de 5 nodos. . . . .	28
2.5. Red eléctrica del sistema IEEE-14 nodos. . . . .	30
2.6. Trayectoria de convergencia que sigue el método FPNR al resolver el sistema IEEE-14 nodos. . . . .	30
2.7. Red eléctrica del sistema IEEE-57 nodos. . . . .	32
2.8. Trayectoria de convergencia que sigue el método FPNR al resolver el sistema IEEE-57 nodos. . . . .	32
3.1. Modelo $\pi$ de la línea de transmisión. . . . .	37
3.2. Sistema de dos nodos, <i>slack-PV</i> . . . . .	48
3.3. Sistema de dos nodos, <i>PQ-PV</i> . . . . .	51
3.4. Diagrama de flujo del algoritmo FPIC. . . . .	58
3.5. Sistema eléctrico de 5 nodos con los resultados de flujos de potencia. . . . .	59
3.6. Trayectoria de convergencia que sigue el método FPIC al resolver el sistema de 5 nodos. . . . .	60
3.7. Sistema IEEE-14 nodos. . . . .	61

3.8. Trayectoria de convergencia que sigue el método FPIC al resolver el sistema IEEE-14 nodos. . . . .	62
3.9. Trayectoria de convergencia que sigue el método FPIC al resolver el sistema IEEE-57 nodos. . . . .	63
3.10. Estructura de los Jacobianos de los métodos FPNR y FPIC, para el sistema IEEE-14 nodos. . . . .	66
3.11. Perfil de magnitud de voltaje obtenido con los métodos FPNR y FPIC para el sistema de 5 nodos. . . . .	67
3.12. Ángulos de voltaje obtenidos con los métodos FPNR y FPIC para el sistema de 5 nodos. . . . .	67
3.13. Trayectoria de convergencia de los métodos FPNR y FPIC al resolver el sistema de 5 nodos. . . . .	68
3.14. Perfil de magnitud de voltaje obtenido con los métodos FPNR y FPIC para el sistema IEEE-14 nodos. . . . .	69
3.15. Ángulos de voltaje obtenidos con los métodos FPNR y FPIC para el sistema IEEE-14 nodos. . . . .	69
3.16. Trayectoria de convergencia de los métodos FPNR y FPIC al resolver el sistema IEEE-14 nodos. . . . .	70
3.17. Perfil de magnitud de voltaje obtenido con los métodos FPNR y FPIC para el sistema IEEE-57 nodos. . . . .	70
3.18. Ángulos de voltaje obtenidos con los métodos FPNR y FPIC para el sistema IEEE-57 nodos. . . . .	71
3.19. Trayectoria de convergencia de los métodos FPNR y FPIC al resolver el sistema IEEE-57 nodos. . . . .	72
3.20. Comparación de tiempos de cálculo entre los métodos FPNR y FPIC. . . . .	73
3.21. Trayectoria de convergencia de los métodos FPNR y FPIC al resolver el sistema IEEE-11 nodos. . . . .	75

3.22. Trayectoria de convergencia de los métodos FPNR y FPIC al resolver el sistema IEEE-11 nodos disminuyendo en 100 MW la carga del nodo 9. . . . .	76
3.23. Trayectoria de convergencia de los métodos FPNR y FPIC al resolver el sistema IEEE-11 nodos en los distintos casos propuestos. . . . .	77
3.24. Máximos incrementos calculados con los métodos FPNR y FPIC durante el proceso iterativo para el caso base del sistema IEEE-11 nodos. . . . .	77
3.25. Máximos incrementos calculados con los métodos FPNR y FPIC durante el proceso iterativo para el caso 1 del sistema IEEE-11 nodos. . . . .	78
3.26. Diferencia entre las características de convergencia del método FPIC sin utilizar y utilizando el criterio de soluciones truncadas para el caso base del sistema IEEE-11 nodos. . . . .	79
3.27. Características de convergencia de los métodos FPNR y FPIC utilizando el criterio de correcciones truncadas al caso base IEEE-11 nodos. . . . .	80
3.28. Máximos incrementos calculados con los métodos FPNR y FPIC utilizando el criterio de correcciones truncadas para el sistema IEEE-11 nodos. . . . .	81
3.29. Perfil de magnitud de voltaje obtenido con los métodos FPNR y FPIC para el sistema IEEE-11 nodos. . . . .	81
3.30. Ángulos de voltaje obtenidos con los métodos FPNR y FPIC para el sistema de IEEE-11 nodos. . . . .	82
4.1. Proceso para el cálculo de los coeficientes de la expansión en series de $\bar{V}_k(s)$ . . . . .	98
4.2. Proceso de cálculo para obtener el $n$ -ésimo aproximante de la fracción continua. . . . .	103
4.3. Perfil de magnitud de voltaje obtenido con los métodos FPNR y FPFC para el sistema de 5 nodos. . . . .	115
4.4. Ángulos de fase obtenidos con los métodos FPNR y FPFC para el sistema de 5 nodos. . . . .	116
4.5. Perfil de magnitud de voltaje obtenido con los métodos FPNR y FPFC para el sistema IEEE-14 nodos. . . . .	117

4.6. Ángulos de fase obtenidos con los métodos FPNR y FPFC para el sistema IEEE-14 nodos. . . . . 118

4.7. Perfil de magnitud de voltaje obtenido con los métodos FPNR y FPFC para el sistema IEEE-57 nodos. . . . . 120

4.8. Ángulos de fase obtenidos con los métodos FPNR y FPFC para el sistema IEEE-57 nodos. . . . . 120

4.9. Comparación de tiempos de cálculo entre los métodos FPNR y FPFC. . . . . 122

5.1. Sistema de dos nodos. . . . . 127

5.2. Curva *PV* en un nodo débil a factor de potencia unitario. . . . . 129

5.3. Curvas *PV* asociadas a un nodo débil para diferentes valores de factor de potencia. 130

5.4. Pasos de los métodos de continuación. . . . . 134

5.5. Intersección del hiperplano con la trayectoria de solución. . . . . 137

5.6. Red de 3 nodos. . . . . 138

5.7. Diagramas de bifurcación obtenidos con los métodos MCFP, FPIC y FPFC, para el sistema de 3 nodos. . . . . 140

5.8. Diagramas de bifurcación obtenidos con los métodos MCFP, FPIC y FPFC, para el sistema de 5 nodos. . . . . 142

5.9. Diagramas de bifurcación obtenidos con los métodos MCFP, FPIC y FPFC, para el sistema de 79 nodos. . . . . 144

# Índice de Tablas

2.1. Resultados obtenidos con el método FPNR para el sistema de 5 nodos. . . . .	29
2.2. Resultados de generación en nodos <i>PV</i> obtenidos con el método FPNR para el sistema de 5 nodos. . . . .	29
2.3. Resultados arrojados por el método FPNR al resolver el sistema IEEE-14 nodos. . . . .	31
2.4. Generación en nodos <i>PV</i> obtenida con el método FPNR para el sistema IEEE-14 nodos. . . . .	31
2.5. Inyección de potencia reactiva de los compensadores fijos en derivación, obtenida con el método FPNR para el sistema IEEE-14 nodos. . . . .	31
2.6. Resultados obtenidos con el método FPNR para el sistema IEEE-57 nodos. . . . .	33
2.7. Generación en nodos <i>PV</i> obtenida con el método FPNR para el sistema IEEE-57 nodos. . . . .	33
2.8. Inyección de potencia reactiva de los compensadores fijos en derivación, obtenida con el método FPNR para el sistema IEEE-57 nodos. . . . .	34
3.1. Resultados obtenidos con el método FPIC para el sistema de 5 nodos. . . . .	60
3.2. Resultados de generación en nodos <i>PV</i> obtenidos con el método FPIC para el sistema de 5 nodos. . . . .	60
3.3. Resultados de FPIC para el sistema IEEE-14 nodos. . . . .	62
3.4. Generación en nodos <i>PV</i> obtenida con el método FPIC para el sistema IEEE-14 nodos. . . . .	62

3.5. Inyección de potencia reactiva de los compensadores fijos en derivación, obtenida con el método FPIC para el sistema IEEE-14 nodos. . . . .	63
3.6. Resultados de FPIC para el sistema IEEE-57 nodos. . . . .	64
3.7. Generación en nodos <i>PV</i> obtenida con el método FPIC para el sistema IEEE-57 nodos. . . . .	65
3.8. Inyección de potencia reactiva de los compensadores fijos en derivación, obtenida con el método FPIC para el sistema IEEE-57 nodos. . . . .	65
3.9. Tiempos de cálculo obtenidos con los métodos FPNR y FPIC al resolver los diferentes sistemas de prueba. . . . .	73
4.1. Resultados de FPFC para la red de 5 nodos con diferente número de coeficientes utilizados en la expansión. . . . .	115
4.2. Resultados de FPFC para el sistema IEEE-14 nodos con diferente número de coeficientes utilizados en la expansión. . . . .	117
4.3. Resultados obtenidos con el método FPFC para el sistema IEEE-57 nodos con diferente número de coeficientes utilizados en la expansión. . . . .	119
4.4. Tiempos de cálculo obtenidos con los métodos FPNR y FPFC al resolver los diferentes sistemas de prueba. . . . .	121
5.1. Resultados de las simulaciones realizadas para el sistema de 3 nodos. . . . .	139
5.2. Resultados de las simulaciones realizadas para el sistema de 5 nodos. . . . .	141
5.3. Resultados de las simulaciones realizadas para el sistema de 79 nodos. . . . .	143
A.1. Número de nodos y componentes del sistema eléctrico de 3 nodos. . . . .	149
A.2. Datos del nodo <i>slack</i> del sistema de 3 nodos. . . . .	149
A.3. Datos de líneas de transmisión del sistema de 3 nodos. . . . .	149
A.4. Datos de generadores del sistema de 3 nodos. . . . .	150
A.5. Datos de cargas del sistema de 3 nodos. . . . .	150
A.6. Número de nodos y componentes del sistema eléctrico de 5 nodos. . . . .	150

A.7. Datos del nodo *slack* del sistema de 5 nodos. . . . . 150

A.8. Datos de líneas de transmisión del sistema de 5 nodos. . . . . 150

A.9. Datos de generadores del sistema de 5 nodos. . . . . 151

A.10. Datos de cargas del sistema de 5 nodos. . . . . 151

A.11. Número de nodos y componentes del sistema eléctrico IEEE-11 nodos. . . . . 151

A.12. Datos del nodo *slack* del sistema IEEE-11 nodos. . . . . 151

A.13. Datos de líneas de transmisión del sistema IEEE-11 nodos. . . . . 152

A.14. Datos de transformadores del sistema IEEE-11 nodos. . . . . 152

A.15. Datos de generadores del sistema IEEE-11 nodos. . . . . 152

A.16. Datos de cargas del sistema IEEE-11 nodos. . . . . 152

A.17. Número de nodos y componentes del sistema eléctrico IEEE-14 nodos. . . . . 153

A.18. Datos del nodo *slack* del sistema IEEE-14 nodos. . . . . 153

A.19. Datos de líneas de transmisión del sistema IEEE-14 nodos. . . . . 153

A.20. Datos de transformadores del sistema IEEE-14 nodos. . . . . 154

A.21. Datos de generadores del sistema IEEE-14 nodos. . . . . 154

A.22. Datos de cargas del sistema IEEE-14 nodos. . . . . 154

A.23. Datos de compensadores fijos en derivación del sistema IEEE-14 nodos. . . . . 154

A.24. Número de nodos y componentes del sistema eléctrico IEEE-57 nodos. . . . . 155

A.25. Datos del nodo *slack*. . . . . 155

A.26. Datos de líneas de transmisión del sistema IEEE-57 nodos. . . . . 155

A.27. Datos de transformadores del sistema IEEE-57 nodos. . . . . 157

A.28. Datos de los generadores del sistema IEEE-57 nodos. . . . . 157

A.29. Datos de cargas del sistema IEEE-57 nodos. . . . . 158

A.30. Datos de compensadores fijos en derivación del sistema IEEE-57 nodos. . . . . 158

A.31. Número de nodos y componentes del sistema eléctrico de 79 nodos. . . . . 159

A.32. Datos del nodo *slack* del sistema de 79 nodos. . . . . 159

A.33. Datos de líneas de transmisión del sistema de 79 nodos. . . . . 159

A.34. Datos de transformadores del sistema de 79 nodos. . . . .	161
A.35. Datos del los generadores del sistema de 79 nodos. . . . .	162
A.36. Datos de cargas del sistema de 79 nodos. . . . .	162

# Lista de Símbolos y Abreviaturas

$N$	Número de nodos del sistema eléctrico.
$j$	Número complejo $\sqrt{-1}$ .
$\bar{V}_k$	Voltaje complejo del nodo $k$ .
$V_k$	Magnitud de voltaje del nodo $k$ .
$\theta_k$	Ángulo de fase del voltaje del nodo $k$ .
$\Delta P_k$	Desbalance de potencia activa del nodo $k$ .
$\Delta Q_k$	Desbalance de potencia reactiva del nodo $k$ .
$P_{Gk}$	Potencia activa inyectada por el generador conectado al nodo $k$ .
$Q_{Gk}$	Potencia reactiva inyectada por el generador conectado al nodo $k$ .
$Q_{Gk\text{mín}}$	Límite mínimo de generación de potencia reactiva del generador conectado al nodo $k$ .
$Q_{Gk\text{máx}}$	Límite máximo de generación de potencia reactiva del generador conectado al nodo $k$ .
$P_{Lk}$	Potencia activa de carga conectada al nodo $k$ .
$Q_{Lk}$	Potencia reactiva de carga conectada al nodo $k$ .
$P_k^{\text{cal}}$	Potencia activa neta inyectada al nodo $k$ .
$Q_k^{\text{cal}}$	Potencia reactiva neta inyectada al nodo $k$ .
$\bar{S}_k^{\text{cal}}$	Potencia compleja neta inyectada al nodo $k$ .
$P_k^{\text{sp}}$	Potencia activa especificada en el nodo $k$ .
$Q_k^{\text{sp}}$	Potencia reactiva especificada en el nodo $k$ .

$\bar{I}_k$	Corriente compleja inyectada al nodo $k$ .
$\bar{I}_{km}$	Corriente compleja que fluye del nodo $k$ al nodo $m$ .
$\bar{I}_k^{sh}$	Corriente compleja que fluye a través del elemento <i>shunt</i> conectado al nodo $k$ .
$\bar{z}_{km}$	Impedancia compleja serie conectada entre los nodos $k$ y $m$ .
$\bar{y}_{km}$	Admitancia compleja serie conectada entre los nodos $k$ y $m$ .
$\bar{y}_k^{sh}$	Admitancia compleja <i>shunt</i> conectada al nodo $k$ .
$\bar{Y}_{km}$	Elemento complejo de la matriz de admitancia nodal conectado entre los nodos $k$ y $m$ .
$G_{km}$	Conductancia del elemento $\bar{Y}_{km}$ .
$B_{km}$	Susceptancia del elemento $\bar{Y}_{km}$ .
$\mathbf{Y}_{bus}$	Matriz de Admitancia nodal.
$\mathbf{I}$	Vector de corrientes nodales complejas.
$\mathbf{V}$	Vector de voltajes nodales complejos.
$\Delta V_k$	Término correctivo asociado a la magnitud de voltaje del nodo $k$ .
$\Delta \theta_k$	Término correctivo asociado al ángulo de fase del voltaje del nodo $k$ .
$\partial$	Operador de derivación parcial.
$\Delta \bar{S}_k$	Desbalance de potencia compleja en el nodo $k$ .
$\bar{S}_{Gk}$	Potencia compleja inyectada por el generador conectado al nodo $k$ .
$\bar{S}_{Lk}$	Potencia compleja extraída por la carga conectada al nodo $k$ .
$\bar{S}_k^{cal}$	Potencia compleja neta inyectada al nodo $k$ .
$\bar{S}_k^{sp}$	Potencia compleja especificada en el nodo $k$ .
$\Delta \bar{I}_k$	Desbalance de corriente compleja en el nodo $k$ .
$\Delta I_k^{re}$	Componente real de $\Delta \bar{I}_k$ .
$\Delta I_k^{im}$	Componente imaginaria de $\Delta \bar{I}_k$ .

*	Complejo conjugado.
$V_k^{\text{re}}$	Componente real del voltaje complejo $\bar{V}_k$ .
$V_k^{\text{im}}$	Componente imaginaria del voltaje complejo $\bar{V}_k$ .
$\mathbf{V}^{\text{re}}$	Vector de componentes reales de los voltajes nodales.
$\mathbf{V}^{\text{im}}$	Vector de componentes imaginarias de los voltajes nodales.
$\Sigma$	Sumatoria.
$\bar{I}_k^{\text{cal}}$	Corriente compleja neta inyectada al nodo $k$ .
$I_k^{\text{re cal}}$	Componente real de $\bar{I}_k^{\text{cal}}$ .
$I_k^{\text{im cal}}$	Componente imaginaria de $\bar{I}_k^{\text{cal}}$ .
$it$	Contador de iteraciones.
$t_{FPNR}$	Tiempo de cálculo obtenido con el método FPNR.
$t_{FPIC}$	Tiempo de cálculo obtenido con el método FPIC.
$t_{FPFC}$	Tiempo de cálculo obtenido con el método FPFC.
$\{x_n\}$	Secuencia infinita de elementos ordenados.
$\mathbf{K}_{m=1}^{\infty}$	Es el equivalente de $\Sigma$ en la notación de fracciones continuas, es la notación para una fracción continua con un número infinito de numeradores y denominadores parciales.
$r_n$	$n$ -ésimo aproximante de una fracción continua.
$A_n$	Numerador del cociente asociado a $r_n$ .
$B_n$	Denominador del cociente asociado a $r_n$ .
$L$	Problema de flujos de potencia con sus ecuaciones expresadas en función de variables reales.
$L(s)$	Problema de flujos de potencia con sus ecuaciones expresadas en función de la variable compleja.
$s$	Variable compleja.
$\otimes$	Operador convolución.
$\bullet$	Producto punto entre dos vectores.

$\bar{V}_k(s)$	Voltaje del nodo $k$ expresado como una serie de Maclaurin.
$n$	Número de coeficientes considerados en la expansión en series de Maclaurin.
$\bar{V}_k[n]$	$n$ -ésimo coeficiente de la expansión en series de Maclaurin para el voltaje del nodo $k$ .
$\lambda$	Parámetro de continuación.
$\mathbf{Z}$	Vector gradiente.
ms	Milisegundos.
p.u.	En por unidad.
SEP	Sistema Eléctrico de Potencia.
FPNR	Flujos de Potencia Newton-Raphson.
FPIC	Flujos de Potencia de Inyecciones de Corriente.
FPFC	Flujos de Potencia de Fracción Continua.
MCFP	Método de Continuación de Flujos de Potencia.
IEEE	Instituto de Ingenieros Electricistas y Electrónicos (Institute of Electrical and Electronics Engineers).
AIA	Aplicaciones en Informática Avanzada, S.A.
AGORA	Algoritmos Fiables para la Observación Avanzada de la Red (Advanced Grid Observation Reliable Algorithms).
MC	Métodos de Continuación.

# Capítulo 1

## Introducción

### 1.1. Introducción

Un sistema de eléctrico de potencia (SEP) es en esencia un conjunto de centrales eléctricas, líneas de transmisión y nodos o subestaciones interconectados con el fin de abastecer de energía eléctrica a los consumidores. Un SEP se divide principalmente en tres secciones: generación, transmisión y distribución, como se muestra en la Figura 1.1.

La transmisión de energía eléctrica debe realizarse de una manera segura y confiable, tal que los consumidores siempre reciban la energía requerida dentro de los rangos de operación de los dispositivos eléctricos que la demandan. La seguridad del sistema está dada por el balance energético existente durante la transmisión de potencia, es decir, la potencia eléctrica que se genera debe ser igual a la potencia eléctrica que circula y se pierde a través de la red de transmisión más la potencia eléctrica demandada por los consumidores. Debido a que la energía demandada está cambiando continuamente es necesario calcular el punto de operación donde se logra este balance de energía, mediante un análisis de flujos de potencia. Por lo anterior, el estudio de flujos de potencia es una parte esencial de la planeación, diseño y control de los sistemas eléctricos de potencia.

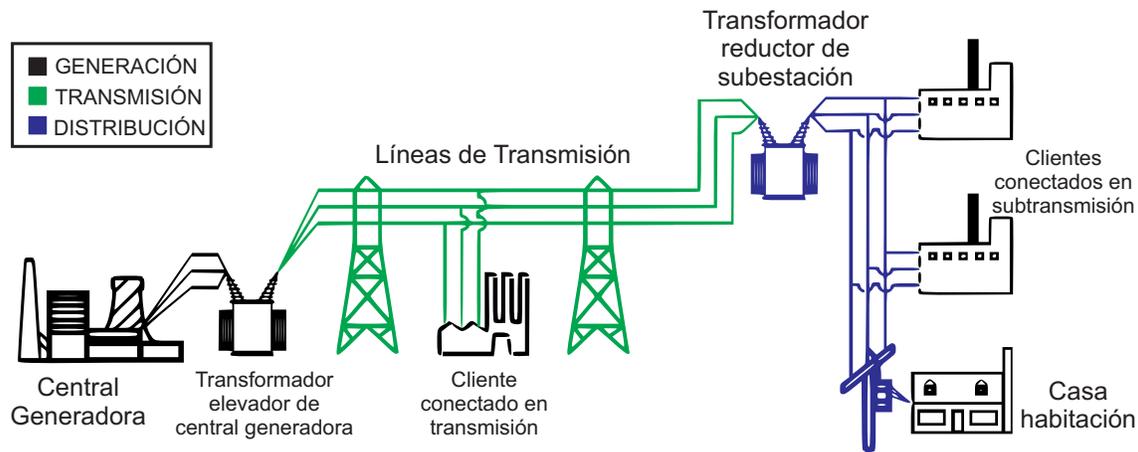


Figura 1.1: Etapas de un sistema eléctrico de potencia.

El estudio de flujos de potencia es definido como un proceso de análisis que proporciona la magnitud y ángulo de fase del voltaje en estado estacionario en cada uno de los nodos que conforman la red eléctrica, así como los flujos de potencia activa y reactiva inyectados en terminales de cada elemento de transmisión; lo anterior, teniendo valores conocidos de potencia generada y consumida.

En esta investigación se desarrollan dos métodos para realizar estudios de flujos de potencia, alternos al método flujos de potencia basado en inyecciones de potencia, el cual es el método convencional para realizar estudios de este tipo. El primer método a desarrollar está basado en inyecciones de corriente, mientras que el segundo método es un algoritmo no-iterativo basado en expansión en fracciones continuas; una vez desarrollados, implementados y validados estos métodos, éstos se aplican al análisis del fenómeno de colapso de voltaje con el fin de examinar su comportamiento ante dicho fenómeno.

## 1.2. Revisión al Estado del Arte

Los primeros métodos de solución al problema de flujos de potencia aparecieron en la literatura en 1956 y años posteriores [Ward y Hale, 1956, Brown y Tinney, 1957, Glimn y Stagg, 1957]. Estos algoritmos estaban basados en la matriz de admitancia nodal  $\mathbf{Y}_{bus}$  y se adecuaron bien a las

primeras generaciones de computadoras, ya que requerían un mínimo de almacenamiento en memoria al utilizar como técnica de solución de las ecuaciones algebraicas no-lineales métodos iterativos tipo Gauss. Aunque su desempeño fuese bueno para gran cantidad de problemas, convergían lentamente y a menudo no lo hacían. El incentivo para superar estas deficiencias llevó al desarrollo de los métodos que utilizan la matriz de impedancia nodal  $\mathbf{Z}_{bus}$  [Gupta y Humphrey, 1961, Brameller y Denmead, 1962, Brown et al., 1963], los cuales tenían una mayor confiabilidad en cuanto a convergencia pero sacrificaban algunas de las ventajas de los métodos que utilizan la matriz  $\mathbf{Y}_{bus}$ , como el mínimo almacenamiento en memoria y la velocidad de cómputo al aplicarse a sistemas de gran escala. Alrededor de ese tiempo, se demostró que el método Newton-Raphson podía ser aplicado al problema de flujos de potencia obteniéndose una solución iterativa con características de convergencia cuadrática [Van Ness, 1959, Van Ness y Griffin, 1961], pero computacionalmente incompetentes para el análisis de redes de gran escala debido a las capacidades de almacenamiento de las computadoras digitales de aquellos años. A mediados de los 60's se realizaron grandes aportaciones al análisis de redes de gran escala mediante las propuestas de Tinney entre otros, las cuales aluden a ordenamientos muy eficientes para el uso de técnicas de dispersidad. Uno de los primeros éxitos de estas propuestas fue el mejorar dramáticamente la velocidad de cálculo y los requerimientos de memoria para el análisis de flujos de potencia mediante el método Newton-Raphson, el cual ahora es el método más utilizado para estudios de flujos de potencia de propósito general [Tinney y Hart, 1967], y ha sido adoptado por gran parte de la industria eléctrica. Después surgieron los métodos desacoplados [Stott, 1972, Stott y Alsac, 1974], los cuales están basados en la consideración de que la variación de la magnitud del voltaje nodal solamente está relacionada con el cambio en la inyección nodal de potencia reactiva y que la variación del ángulo de fase del voltaje nodal solamente está relacionada con el cambio en la inyección nodal de potencia activa.

Una formulación de flujos de potencia basada en inyecciones de corriente y utilizando variables de estado expresadas en una mezcla de coordenadas polares y rectangulares se presenta en [Dommel et al., 1970]. Cada nodo de carga ( $PQ$ ) se representa por dos ecuaciones, las cuales comprenden las componentes real e imaginaria de los desajustes de corriente nodales expresados en tér-

minos del voltaje nodal expresado en coordenadas rectangulares. Los nodos de voltaje controlado (*PV*) son representados por una sola ecuación de desbalance de potencia activa y el correspondiente ángulo de fase del voltaje nodal. En base a esta propuesta, un algoritmo de inyecciones de corriente basado en el uso de una matriz de admitancia nodal constante se describe en [Tinney, 1991]. Sin embargo, se menciona que este algoritmo no puede ser usado en aplicaciones de flujos de potencia de propósito general debido a que no se modela de manera adecuada los nodos de tipo *PV*, y que los métodos conocidos para incluir los nodos *PV* nulifican la velocidad de convergencia del método propuesto. Este inconveniente es resuelto de manera parcial en [Costa et al., 1999], donde se propone una formulación que considera nodos *PV* con capacidad de inyección de potencia reactiva infinita. En virtud de esta problemática de modelado, en esta tesis se propone un modelado más preciso de nodos *PV* en la formulación de flujos de potencia basada en inyecciones de corriente considerando los límites de inyección de potencia reactiva del generador, de lo cual no se encontraron antecedentes en la literatura revisada.

Referente a los métodos de flujos de potencia no-iterativos, se han realizado trabajos de investigación en los que se propone encontrar la solución aproximando las ecuaciones de flujos de potencia por medio de una expansión en series. En [Sauer, 1981] se investigan dos propuestas para determinar la representación en series de la solución de flujos de potencia en forma-cerrada. Sin embargo, las series de flujos de potencia derivadas de ambas propuestas son esencialmente una representación analítica de un proceso iterativo de punto fijo. En [Xu et al., 1998] se propone un método no-iterativo para resolver las ecuaciones de flujos de potencia, el método está basado en la expansión en series de una función inversa de flujos de potencia. En esta última propuesta se expanden las ecuaciones de flujos de potencia en series de Taylor y la solución se obtiene sumando los términos significativos de la serie resultante.

En esta investigación se explora la propuesta de [Bonet, 2004], la cual consiste en expresar las ecuaciones de flujos de potencia en función de una variable compleja, expandir en series de Maclaurin las ecuaciones correspondientes a los voltajes nodales y representar cada una de las series resultantes como una fracción continua, la evaluación de cada una de las fracciones continuas

resulta en la solución.

### 1.3. Objetivo

Los objetivos de esta investigación son:

- Desarrollar el método de flujos de potencia en base a inyecciones de corriente (FPIC) incorporando un manejo eficiente de nodos *PV* para el control del voltaje nodal. Implementarlo mediante un programa digital para aplicarlo a diferentes sistemas de prueba.
- Describir el método de flujos de potencia no-iterativo propuesto en [Bonet, 2004], llamado flujos de potencia de fracción continua (FPFC), e implementarlo en un programa digital.
- Examinar el comportamiento de los métodos a implementar, FPIC y FPFC, en el análisis del fenómeno de colapso de voltaje.

### 1.4. Justificación

Los estudios de flujos de potencia son de gran importancia en la planeación y diseño de los sistemas de potencia, así como también en la determinación de las mejores condiciones de operación de los sistemas existentes.

El método convencional para resolver el problema de flujos de potencia (FPNR) utiliza el algoritmo iterativo Newton-Raphson, el cual hace uso de una matriz Jacobiana en la que todos sus elementos se recalculan en cada una de las iteraciones del proceso iterativo, el cálculo de la matriz Jacobiana es la tarea que más esfuerzo computacional requiere en el método convencional FPNR. Lo anterior hace deseable desarrollar un método en el cual se reduzca en gran medida el esfuerzo computacional del cálculo del Jacobiano sin considerar un desacoplamiento entre los lazos de control asociados con potencia reactiva-magnitud de voltaje y potencia activa-ángulo de fase del voltaje. En este contexto, el método de flujos de potencia basado en inyecciones de corriente (FPIC) reportado en esta investigación mantiene constantes la mayoría de los elementos del Jacobiano a

través del proceso iterativo, lo cual resulta en una reducción importante en lo que a esfuerzo computacional respecta. Asimismo, resulta importante incorporar un manejo eficiente de nodos de tipo *PV* para controlar la magnitud del voltaje nodal, esto debido a que en la literatura revisada acerca de los métodos de inyecciones de corriente, no se encontraron antecedentes de lo anterior.

Por otra parte, los métodos convencionales están basados en métodos iterativos, los cuales pueden ser implementados muy eficientemente. Sin embargo, estas metodologías son eficientes si se les provee una condición inicial suficientemente cercana a la solución final del problema analizado. En cualquier caso, la convergencia del algoritmo no puede asegurarse, ya que el método no siempre es capaz de encontrar la solución físicamente factible. Lo anterior hace deseable el desarrollo de una herramienta matemática para resolver el problema de flujos de potencia, en la cual no sea necesario proporcionar una condición inicial, es decir, un algoritmo no iterativo para resolver dicho problema. El método flujos de potencia de fracción continua (FPFC) reportado en esta investigación es un algoritmo determinista, no-iterativo capaz de resolver el problema de flujos de potencia sin la necesidad de proporcionar una condición inicial.

## 1.5. Metodología

La metodología empleada para formular el método FPIC consiste en expresar el balance energético mediante un balance de inyecciones de corriente nodal en coordenadas rectangulares, obteniéndose un conjunto de ecuaciones algebraicas no-lineales que es solucionado por medio del método Newton-Raphson. El método FPIC se implementa en un programa de computadora, los resultados obtenidos se validan con los resultados arrojados por el método convencional FPNR.

El método no-iterativo FPFC consiste en expresar las ecuaciones de flujos de potencia en el dominio de la variable compleja, expresar las ecuaciones correspondientes a los voltajes nodales como una serie de Maclaurin, y representar cada una de estas series como una fracción continua. Al evaluar la fracción continua se obtiene el voltaje nodal complejo. El método FPFC se codifica en un programa de computadora, los resultados obtenidos se validan con los que resultan de la aplicación

del método convencional FPNR.

## 1.6. Contribuciones

Se describe de manera detallada la formulación matemática del método FPIC, la cual no se encuentra reportada con detalle en la literatura. Además, se implementó la revisión de límites de generación de potencia reactiva y con esto, un manejo más eficiente de nodos *PV* en el proceso iterativo del método FPIC, de lo cual no se encontraron antecedentes en la literatura revisada acerca de métodos de inyección de corriente. Asimismo, se muestra bajo qué circunstancias podría divergir el método FPIC y se propone una técnica para corregir la divergencia ante estos casos.

Se describe matemáticamente el algoritmo de flujos de potencia no iterativo propuesto en [Bonet, 2004], algoritmo cuyos antecedentes son casi nulos. Asimismo, se describe numéricamente paso a paso la aplicación del método FPFC a una red pequeña para su mejor entendimiento.

Los métodos desarrollados, FPIC y FPFC, se aplican al estudio del fenómeno de colapso de voltaje para examinar su comportamiento ante dicho fenómeno, tópico del cual no se encontraron antecedentes en la literatura revisada.

## 1.7. Estructura de la Tesis

A continuación se describe de manera general el contenido de los capítulos que conforman esta tesis.

En el Capítulo 1 se presenta una introducción del problema de flujos de potencia, además de una breve reseña de los métodos existentes para dar solución a dicho problema. Se presenta el objetivo, justificación, metodología, contribuciones y la estructura de la tesis.

En el Capítulo 2 se presenta la deducción matemática de la formulación de flujos de potencia basada en inyecciones de potencia y la manera en que se plantea el problema de flujos de potencia en redes eléctricas mediante la técnica de balance de potencia. Asimismo, se describe de manera detallada como se aplica el método de Newton-Raphson para solucionar el sistema de ecuaciones

algebraicas no-lineales asociado a este problema. Finalmente, se aplica la metodología descrita a diferentes sistemas de prueba.

En el Capítulo 3 se presenta en detalle la deducción matemática de las ecuaciones de flujos de potencia basadas en inyecciones de corriente (FPIC) y su solución mediante la técnica de Newton-Raphson. Asimismo, se propone una técnica de manejo de nodos *PV*, la técnica propuesta se implementa dentro del método FPIC, el cual es utilizado para analizar diferentes sistemas de prueba. Los resultados obtenidos son validados con aquellos encontrados mediante el método convencional FPNR. Finalmente, se hacen observaciones al método FPIC y se proponen una mejora en el método para los casos en los que se tiene divergencia.

En el Capítulo 4 se introduce el concepto de fracción continua. Asimismo, se describe un algoritmo no-iterativo para resolver el problema de flujos de potencia, llamado flujos de potencia de fracción continua (FPFC), mediante la expansión en fracciones continuas utilizando el método de Viscovatov. Se aplica el método FPFC a diferentes sistemas de prueba y los resultados son validados con los obtenidos por el método convencional FPNR.

En el Capítulo 5 se describe el fenómeno de colapso de voltaje; así como también, la aplicación de un método de continuación para el análisis de sistemas de ecuaciones algebraicas no-lineales mal condicionadas, el cual acontece en el sistema de ecuaciones de balance de potencia cuando el sistema eléctrico se acerca a la región operativa de inestabilidad de voltaje. Se aplican los métodos FPIC y FPFC al análisis de colapso de voltaje con el fin de examinar su comportamiento ante dicho fenómeno. Los resultados obtenidos en los estudios realizados a diferentes sistemas de prueba se comparan con los arrojados por un método de continuación de flujos de potencia (MCFP).

En el Capítulo 6 se presentan las conclusiones generales de la presente investigación y los trabajos futuros que podrían derivarse de esta.

# Capítulo 2

## Flujos de Potencia en Base a Inyecciones de Potencia

### 2.1. Introducción

La transmisión de energía eléctrica debe realizarse de una manera segura y confiable, tal que los consumidores siempre reciban la energía requerida dentro de los rangos de operación de los dispositivos eléctricos que la demandan. La seguridad del sistema está dada por el balance energético existente durante la transmisión de potencia, es decir, la potencia eléctrica que se genera debe ser igual a la potencia eléctrica que circula a través de la red de transmisión más la potencia eléctrica demandada por los consumidores. Debido a que la energía demandada esta cambiando continuamente es necesario calcular el punto de operación donde se logra este balance de energía, mediante un análisis de flujos de potencia.

Este análisis es definido como el proceso de solución que proporciona la magnitud y ángulo de fase del voltaje en estado estacionario en cada uno de los nodos que conforman la red eléctrica, así como los flujos de potencia activa y reactiva inyectados en terminales de cada elemento de transmisión, lo anterior bajo condiciones conocidas de potencia generada y consumida. Las ecuaciones matemáticas usadas para resolver este problema son conocidas como ecuaciones de flujos

de potencia, las cuales son derivadas al considerar la red de transmisión con parámetros concentrados lineales y balanceados, así como condiciones de operación conocidas en todos los nodos que conforman al sistema. Sin embargo, debido a que la formulación matemática se realiza en base a inyecciones de potencia, las ecuaciones algebraicas resultantes son no lineales, requiriéndose de un método numérico iterativo para su solución. La solución final es obtenida cuando la magnitud y ángulo de los voltajes nodales tienen un valor tal que la suma de la potencia neta inyectada en cada nodo del sistema es cero.

## 2.2. Ecuaciones de Flujo de Potencia

El punto de equilibrio en estado estacionario en un sistema eléctrico de potencia es formulado matemáticamente mediante ecuaciones en las cuales la suma de la potencia generada, la potencia demandada por la carga y la potencia que fluye a través de los elementos de transmisión debe ser igual a cero en cada nodo, tanto para la potencia activa como para la reactiva. Estas ecuaciones son conocidas como ecuaciones de balance de potencia o ecuaciones de desajuste de potencia,

$$\Delta P_k = P_{Gk} - P_{Lk} - P_k^{\text{cal}} = P_k^{\text{sp}} - P_k^{\text{cal}} = 0 \quad (2.1)$$

$$\Delta Q_k = Q_{Gk} - Q_{Lk} - Q_k^{\text{cal}} = Q_k^{\text{sp}} - Q_k^{\text{cal}} = 0. \quad (2.2)$$

Las variables  $P_{Gk}$  y  $Q_{Gk}$  representan las potencias activa y reactiva que son inyectadas al nodo  $k$  por un generador, respectivamente. Para propósitos de la solución del estudio de flujos de potencia, se considera que estas variables pueden ser controladas por el operador de la planta, y por lo tanto, son variables conocidas. Las variables  $P_{Lk}$  y  $Q_{Lk}$  representan las potencias activa y reactiva, respectivamente, extraídas por la carga conectada al nodo  $k$ . En el problema de flujos de potencia estas variables son conocidas y dan lugar a lo que se conoce como potencia activa especificada  $P_k^{\text{sp}}$  y potencia reactiva especificada  $Q_k^{\text{sp}}$ ,

$$P_k^{\text{sp}} = P_{Gk} - P_{Lk} \quad (2.3)$$

$$Q_k^{\text{sp}} = Q_{Gk} - Q_{Lk}. \quad (2.4)$$

Las potencias activa y reactiva,  $P_k^{\text{cal}}$  y  $Q_k^{\text{cal}}$ , inyectadas en terminales de cada elemento de transmisión son función de la magnitud y el ángulo de los voltajes nodales, es por esto que deben ser calculadas por medio de las ecuaciones de flujos de potencia.

Estas ecuaciones son deducidas a partir de las relaciones de voltaje y corriente nodales existentes en terminales de un elemento de transmisión. En base a la Figura 2.1, la corriente compleja inyectada en el nodo  $k$ , denotada por  $\bar{I}_k$ , es la suma de las corrientes que fluyen a través de los elementos en serie y en derivación que conforman la línea de transmisión,

$$\bar{I}_k = \bar{I}_{km} + \bar{I}_k^{\text{sh}}. \quad (2.5)$$

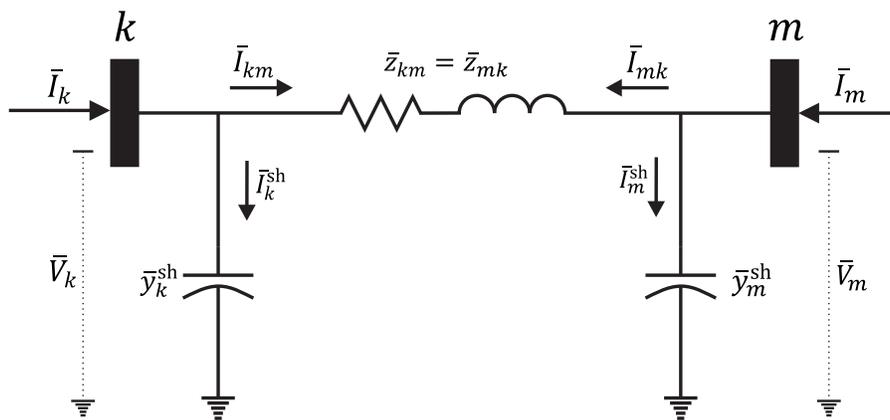


Figura 2.1: Modelo  $\pi$  de la línea de transmisión.

La ecuación (2.5) puede ser expresada en términos de los voltajes complejos  $\bar{V}_k$  y  $\bar{V}_m$  como,

$$\bar{I}_k = \frac{\bar{V}_k - \bar{V}_m}{\bar{z}_{km}} + \bar{y}_k^{\text{sh}} \bar{V}_k = \bar{y}_{km} (\bar{V}_k - \bar{V}_m) + \bar{y}_k^{\text{sh}} \bar{V}_k \quad (2.6)$$

$$\bar{I}_k = (\bar{y}_{km} + \bar{y}_k^{sh}) \bar{V}_k - \bar{y}_{km} \bar{V}_m \quad (2.7)$$

de manera similar para el nodo  $m$ ,

$$\bar{I}_m = (\bar{y}_{mk} + \bar{y}_m^{sh}) \bar{V}_m - \bar{y}_{mk} \bar{V}_k. \quad (2.8)$$

Las ecuaciones (2.7) y (2.8) se pueden escribir en forma matricial como,

$$\begin{bmatrix} \bar{I}_k \\ \bar{I}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{y}_{km} + \bar{y}_k^{sh} & -\bar{y}_{km} \\ -\bar{y}_{mk} & \bar{y}_{mk} + \bar{y}_m^{sh} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{V}_k \\ \bar{V}_m \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

o simplemente,

$$\begin{bmatrix} \bar{I}_k \\ \bar{I}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Y}_{kk} & \bar{Y}_{km} \\ \bar{Y}_{mk} & \bar{Y}_{mm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{V}_k \\ \bar{V}_m \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

donde los elementos de la matriz de admitancia y los voltajes nodales pueden ser expresados de manera general en coordenadas rectangulares y polares, respectivamente,

$$\bar{Y}_{ij} = G_{ij} + jB_{ij} \quad (2.11)$$

$$\bar{V}_i = V_i e^{j\theta_i} = V_i (\cos \theta_i + j \sin \theta_i) \quad (2.12)$$

donde  $i = k, m$  y  $j = k, m$ .

Particularmente, la potencia compleja inyectada en el nodo  $k$ , se expresa en función del voltaje nodal y de la corriente inyectada al nodo, de la siguiente manera

$$\left. \begin{aligned} \bar{S}_k^{\text{cal}} &= P_k^{\text{cal}} + jQ_k^{\text{cal}} = \bar{V}_k \bar{I}_k^* \\ \bar{S}_k^{\text{cal}} &= \bar{V}_k (\bar{Y}_{kk} \bar{V}_k + \bar{Y}_{km} \bar{V}_m)^* \end{aligned} \right\} \quad (2.13)$$

donde  $\bar{I}_k^*$  es la corriente compleja conjugada inyectada en el nodo  $k$ .

Al sustituir (2.11) y (2.12) en (2.13) e igualar parte real e imaginaria de las ecuaciones resultantes, se obtienen expresiones para los términos  $P_k^{\text{cal}}$  y  $Q_k^{\text{cal}}$  que aparecen en las ecuaciones (2.1) y (2.2),

$$P_k^{\text{cal}} = V_k^2 G_{kk} + V_k V_m [G_{km} \cos(\theta_k - \theta_m) + B_{km} \sin(\theta_k - \theta_m)] \quad (2.14)$$

$$Q_k^{\text{cal}} = -V_k^2 B_{kk} + V_k V_m [G_{km} \sin(\theta_k - \theta_m) - B_{km} \cos(\theta_k - \theta_m)] \quad (2.15)$$

De manera similar, para el nodo  $m$ ,

$$P_m^{\text{cal}} = V_m^2 G_{mm} + V_m V_k [G_{mk} \cos(\theta_m - \theta_k) + B_{mk} \sin(\theta_m - \theta_k)] \quad (2.16)$$

$$Q_m^{\text{cal}} = -V_m^2 B_{mm} + V_m V_k [G_{mk} \sin(\theta_m - \theta_k) - B_{mk} \cos(\theta_m - \theta_k)] \quad (2.17)$$

Las ecuaciones (2.14) y (2.15) son llamadas ecuaciones de flujos de potencia. Con estas ecuaciones es posible calcular la potencia inyectada en el nodo  $k$ , de manera similar para el nodo  $m$ .

En general, un sistema eléctrico de potencia consiste en más de dos nodos. Para un sistema de  $N$  nodos, la relación entre voltajes y corrientes nodales está dada por

$$\begin{bmatrix} \bar{I}_1 \\ \bar{I}_2 \\ \vdots \\ \bar{I}_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Y}_{11} & \bar{Y}_{12} & \cdots & \bar{Y}_{1N} \\ \bar{Y}_{21} & \bar{Y}_{22} & \cdots & \bar{Y}_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{Y}_{N1} & \bar{Y}_{N2} & \cdots & \bar{Y}_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{V}_1 \\ \bar{V}_2 \\ \vdots \\ \bar{V}_N \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

o simplemente,

$$\mathbf{I} = \mathbf{Y}_{\text{bus}} \mathbf{V} \quad (2.19)$$

donde  $\mathbf{I}$  es un vector de  $N \times 1$  elementos complejos, el cual representa las inyecciones de corriente nodal,  $\mathbf{V}$  es un vector de  $N \times 1$  elementos complejos que representa los voltajes nodales, y  $\mathbf{Y}_{\text{bus}}$  es la matriz de admitancia nodal de  $N \times N$  elementos complejos  $\bar{Y}_{ij}$ . En este caso, la corriente total inyectada al nodo  $k$  es,

$$\bar{I}_k = \bar{Y}_{k1}\bar{V}_1 + \bar{Y}_{k2}\bar{V}_2 + \cdots + \bar{Y}_{kN}\bar{V}_N = \sum_{j=1}^N \bar{Y}_{kj}\bar{V}_j \quad (2.20)$$

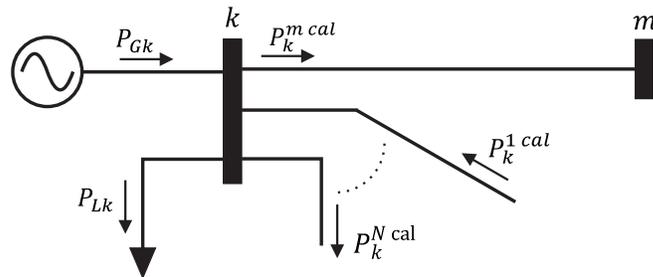
Así, las expresiones para las potencias netas calculadas  $P_k^{\text{cal}}$  y  $Q_k^{\text{cal}}$  en el nodo  $k$  son,

$$P_k^{\text{cal}} = V_k \sum_{j=1}^N V_j [G_{kj} \cos(\theta_k - \theta_j) + B_{kj} \sin(\theta_k - \theta_j)] \quad (2.21)$$

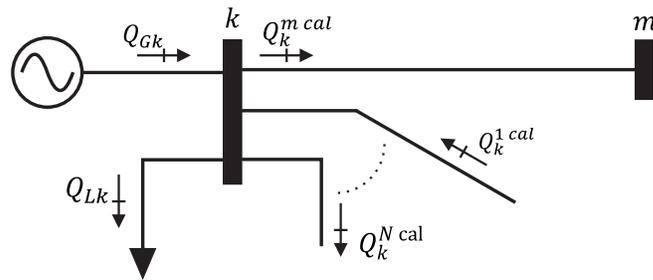
$$Q_k^{\text{cal}} = V_k \sum_{j=1}^N V_j [G_{kj} \sin(\theta_k - \theta_j) - B_{kj} \cos(\theta_k - \theta_j)]. \quad (2.22)$$

La complejidad del problema de flujos de potencia es patente de las ecuaciones anteriores, (2.21) y (2.22), que muestran que la potencia inyectada en un nodo cualquiera es función de la magnitud y ángulo de voltaje existente en todos los nodos del sistema. De igual manera, y opuesto al caso de dos nodos, estas ecuaciones representan la inyección de potencia neta, es decir, la suma

de las potencias que fluyen por cada uno de los elementos de transmisión conectados al nodo  $k$ , tal como se muestra en la Figura 2.2.



a) Balance de potencia activa.



b) Balance de potencia reactiva.

Figura 2.2: Balance de potencia en el nodo  $k$ .

Una vez obtenidas las ecuaciones de flujo de potencia, es posible escribir las ecuaciones de balance de potencia para cada nodo del sistema. Para el caso del sistema de dos nodos,

$$\Delta P_k = P_{Gk} - P_{Lk} - \{V_k^2 G_{kk} + V_k V_m [G_{km} \cos(\theta_k - \theta_m) + B_{km} \sin(\theta_k - \theta_m)]\} \quad (2.23)$$

$$\Delta Q_k = Q_{Gk} - Q_{Lk} - \{-V_k^2 B_{kk} + V_k V_m [G_{km} \sin(\theta_k - \theta_m) - B_{km} \cos(\theta_k - \theta_m)]\}. \quad (2.24)$$

Para el nodo  $m$  se obtienen ecuaciones similares, basta con intercambiar los subíndices  $k$  por  $m$  y viceversa.

Finalmente, las ecuaciones generales de balance de potencia en el nodo  $k$  al cual están conectados son,

$$\Delta P_k = P_{Gk} - P_{Lk} - \left\{ V_k \sum_{j=1}^N V_j [G_{kj} \cos(\theta_k - \theta_j) + B_{kj} \sin(\theta_k - \theta_j)] \right\} = 0 \quad (2.25)$$

$$\Delta Q_k = Q_{Gk} - Q_{Lk} - \left\{ V_k \sum_{j=1}^N V_j [G_{kj} \sin(\theta_k - \theta_j) - B_{kj} \cos(\theta_k - \theta_j)] \right\} = 0 \quad (2.26)$$

### 2.3. Clasificación de Nodos y Variables

En la teoría de flujos de potencia cada nodo se caracteriza por cuatro variables: potencia activa neta, potencia reactiva neta, magnitud y ángulo de fase de los voltajes nodales. De la sección anterior se sabe que sólo se cuenta con dos ecuaciones por nodo, por lo tanto, dos de las cuatro variables deben ser especificadas para tener un problema que pueda ser resuelto. Desde el punto de vista matemático, se podrían especificar cualesquiera de las cuatro variables; sin embargo, en términos ingenieriles, la decisión se toma en base a cuales variables pueden ser controladas físicamente en cada nodo. De manera general, se consideran magnitud y ángulo de fase nodal como variables de estado, y las potencias activa y reactiva como variables de control.

Los nodos se clasifican de acuerdo a las dos de las cuatro variables que son especificadas:

**Nodo PQ de carga:** En este tipo de nodo no hay generador conectado, por lo tanto, las variables de control  $P_G$  y  $Q_G$  son cero. Además, las potencias activa y reactiva,  $P_L$  y  $Q_L$  extraídas por la carga son conocidas de mediciones disponibles. En este tipo de nodos, las potencias activa y reactiva son especificadas, y se resuelve para  $V$  y  $\theta$ .

**Nodo PV generador:** En este caso, hay un generador conectado al nodo, el cual mantiene la magnitud del voltaje nodal  $V$  en un valor constante mediante el ajuste de la corriente de campo del generador, es decir, el generador inyecta o absorbe potencia reactiva según se requiera. Además, la potencia activa generada  $P_G$  se fije en un valor específico, y se resuelve para las

otras dos cantidades,  $\theta$  y  $Q_G$ . La operación a voltaje constante es posible siempre y cuando los límites de potencia reactiva del generador no sean violados, es decir,  $Q_{G_{\min}} < Q_G < Q_{G_{\max}}$ .

**Nodo PQ generador:** Si en un nodo *PV* el generador no puede brindar el soporte de potencia reactiva necesario para mantener la magnitud de voltaje en el valor especificado, la potencia reactiva se fija en el límite violado y se libera la magnitud de voltaje. En este caso, se especifica la generación de potencia activa y reactiva,  $P_G$  y  $Q_G$ , respectivamente, y se resuelve para la magnitud de voltaje nodal  $V$  y el ángulo de fase  $\theta$ .

**Nodo Slack (Compensador):** Uno de los nodos generadores del sistema se elige para ser el nodo *slack*, en el cual se especifica la magnitud del voltaje nodal,  $V_{slack}$ , y el ángulo de fase,  $\theta_{slack}$ . Hay un solo nodo *slack* en el SEP, y su función es proporcionar la potencia suficiente para satisfacer la demanda de potencia del sistema, así como las pérdidas existentes que son desconocidas al inicio del proceso de solución. Debido a esto, generalmente se escoge como nodo *slack* al generador de mayor capacidad nominal conectado al sistema. El ángulo de fase del voltaje del nodo *slack*,  $\theta_{slack}$ , se escoge como la referencia contra la cual serán medidos los demás ángulos de fase nodales, es normal fijar este valor en cero.

## 2.4. Solución de las Ecuaciones de Flujos de Potencia

Desde el punto de vista del modelado matemático, la solución del problema de flujos de potencia consiste en resolver un conjunto de ecuaciones algebraicas no-lineales que describen el sistema de potencia en condiciones de estado estable. A través de los años se han presentado varias propuestas para la solución de las ecuaciones de flujo de potencia. Las primeras propuestas de solución se basan en métodos numéricos del tipo Gauss y Gauss-Seidel con factores de aceleración. El atractivo del empleo de estos métodos es su mínimo requerimiento de almacenamiento en memoria, y el hecho de ser fáciles de comprender y codificar en forma de programa de computadora. El inconveniente es que estos algoritmos presentan características de convergencia pobres cuando se aplican a la solución de redes de tamaño real [Elgerd, 1982]. Para superar dichas limitaciones, se aplicó el mé-

todo Newton-Raphson a principios de los 70's, y desde entonces se ha establecido firmemente en la industria eléctrica [Tinney y Hart, 1967, Peterson y Scott, 1974, Stott, 1974, Stott y Alsac, 1974].

### 2.4.1. El Algoritmo Newton-Raphson

En estudios de flujos de potencia a redes de gran tamaño, el método Newton-Raphson ha probado tener el mayor éxito, debido a su característica de convergencia cuadrática. Este algoritmo utiliza un proceso iterativo para resolver un conjunto de ecuaciones algebraicas no lineales de la forma,

$$\left. \begin{array}{l} f_1(x_1, x_2, \dots, x_M) \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_M) \\ \vdots \\ f_M(x_1, x_2, \dots, x_M) \end{array} \right\}, \text{ o } \mathbf{F}(\mathbf{X}) = \mathbf{0} \quad (2.27)$$

donde  $\mathbf{F}$  representa un conjunto de  $M$  ecuaciones algebraicas no lineales, y  $\mathbf{X}$  es el vector de  $M$  variables de estado desconocidas.

La esencia del método Newton-Raphson consiste en determinar el vector de variables de estado  $\mathbf{X}$  por medio de la expansión en series de Taylor de  $\mathbf{F}(\mathbf{X})$  alrededor de una condición inicial  $\mathbf{X}^{(0)}$  [Acha et al., 2004],

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}) = \mathbf{F}(\mathbf{X}^{(0)}) + \mathbf{J}(\mathbf{X}^{(0)})(\mathbf{X} - \mathbf{X}^{(0)}) + t.a.o \quad (2.28)$$

donde  $\mathbf{J}(\mathbf{X}^{(0)})$  es la matriz de derivadas parciales de primer orden de  $\mathbf{F}(\mathbf{X})$  con respecto de  $\mathbf{X}$  evaluada en  $\mathbf{X} = \mathbf{X}^{(0)}$ , esta matriz se conoce como Jacobiano.

Esta expansión se adecua a una formulación apropiada para el cálculo del vector de variables de estado  $\mathbf{X}$  asumiendo que  $\mathbf{X}^{(1)}$  es el valor calculado por el algoritmo en la iteración 1, y que este valor está lo suficientemente cerca de la condición inicial  $\mathbf{X}^{(0)}$ . Basado en esta premisa, todos los

términos de alto orden asociados a derivadas en la ecuación (2.28) pueden ser despreciados. Por lo tanto,

$$\underbrace{\begin{bmatrix} f_1(\mathbf{X}^{(1)}) \\ f_2(\mathbf{X}^{(1)}) \\ \vdots \\ f_M(\mathbf{X}^{(1)}) \end{bmatrix}}_{\mathbf{F}(\mathbf{X}^{(1)})} \approx \underbrace{\begin{bmatrix} f_1(\mathbf{X}^{(0)}) \\ f_2(\mathbf{X}^{(0)}) \\ \vdots \\ f_M(\mathbf{X}^{(0)}) \end{bmatrix}}_{\mathbf{F}(\mathbf{X}^{(0)})} + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(\mathbf{X})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(\mathbf{X})}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1(\mathbf{X})}{\partial x_M} \\ \frac{\partial f_2(\mathbf{X})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(\mathbf{X})}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2(\mathbf{X})}{\partial x_M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_M(\mathbf{X})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_M(\mathbf{X})}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_M(\mathbf{X})}{\partial x_M} \end{bmatrix}}_{\mathbf{J}(\mathbf{X}^{(0)})} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1^{(1)} - x_1^{(0)} \\ x_2^{(1)} - x_2^{(0)} \\ \vdots \\ x_M^{(1)} - x_M^{(0)} \end{bmatrix}}_{\mathbf{X}^{(1)} - \mathbf{X}^{(0)}} \quad (2.29)$$

En forma compacta y generalizando la expresión anterior para la  $i$ -ésima iteración se tiene,

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}^{(i)}) \approx \mathbf{F}(\mathbf{X}^{(i-1)}) + \mathbf{J}(\mathbf{X}^{(i-1)}) (\mathbf{X}^{(i)} - \mathbf{X}^{(i-1)}) \quad (2.30)$$

donde  $i = 1, 2, \dots$ . Además, se asume que  $\mathbf{X}^{(i)}$  está suficientemente cerca de la solución  $\mathbf{X}^{(*)}$ , por lo tanto  $\mathbf{F}(\mathbf{X}^{(i)}) \approx \mathbf{F}(\mathbf{X}^{(*)}) = 0$ . De manera que la ecuación (2.30) se puede escribir como,

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}^{(i-1)}) + \mathbf{J}(\mathbf{X}^{(i-1)}) (\mathbf{X}^{(i)} - \mathbf{X}^{(i-1)}) = \mathbf{0} \quad (2.31)$$

la cual es resuelta para  $\mathbf{X}^{(i)}$ ,

$$\mathbf{X}^{(i)} = \mathbf{X}^{(i-1)} - \mathbf{J}(\mathbf{X}^{(i-1)})^{-1} \mathbf{F}(\mathbf{X}^{(i-1)}) \quad (2.32)$$

La solución iterativa puede ser expresada en términos del vector de correcciones  $\Delta\mathbf{X}^{(i)} = \mathbf{X}^{(i)} - \mathbf{X}^{(i-1)}$ ,

$$\Delta\mathbf{X}^{(i)} = -\mathbf{J}(\mathbf{X}^{(i-1)})^{-1} \mathbf{F}(\mathbf{X}^{(i-1)}) \quad (2.33)$$

de esta manera, las condiciones iniciales son actualizadas usando la siguiente relación:

$$\mathbf{X}^{(i)} = \mathbf{X}^{(i-1)} + \Delta\mathbf{X}^{(i)} \quad (2.34)$$

Los cálculos se repiten tantas veces como sea necesario, usando los valores actualizados de  $\mathbf{X}$  en la ecuación (2.33) para la iteración en curso. El proceso termina cuando los desajustes  $\Delta\mathbf{X}$  son más pequeños que una tolerancia especificada (e.g.  $1 \times 10^{-12}$ ).

## 2.4.2. Solución de las Ecuaciones de Flujos de Potencia mediante el Método Newton-Raphson (FPNR)

Para aplicar el método Newton-Raphson al problema de flujos de potencia, las ecuaciones relevantes deben ser expresadas en la forma de la ecuación (2.33), donde  $\mathbf{X}$  representa el conjunto de magnitudes y ángulos de voltajes nodales desconocidos. Las ecuaciones de desbalance de potencia  $\Delta\mathbf{P}$  y  $\Delta\mathbf{Q}$  se expanden alrededor de un punto base  $(\theta^{(0)}, \mathbf{V}^{(0)})$  y, por lo tanto, el algoritmo de flujos de potencia Newton-Raphson (FPNR) queda expresado por la siguiente relación [Acha et al., 2004],

$$\begin{bmatrix} \Delta P_1 \\ \Delta P_2 \\ \vdots \\ \Delta P_N \\ \hline \Delta Q_1 \\ \Delta Q_2 \\ \vdots \\ \Delta Q_N \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \frac{\partial \Delta P_1}{\partial \theta_1} & \frac{\partial \Delta P_1}{\partial \theta_2} & \cdots & \frac{\partial \Delta P_1}{\partial \theta_N} & \frac{\partial \Delta P_1}{\partial V_1} V_1 & \frac{\partial \Delta P_1}{\partial V_2} V_2 & \cdots & \frac{\partial \Delta P_1}{\partial V_N} V_N \\ \frac{\partial \Delta P_2}{\partial \theta_1} & \frac{\partial \Delta P_2}{\partial \theta_2} & \cdots & \frac{\partial \Delta P_2}{\partial \theta_N} & \frac{\partial \Delta P_2}{\partial V_1} V_1 & \frac{\partial \Delta P_2}{\partial V_2} V_2 & \cdots & \frac{\partial \Delta P_2}{\partial V_N} V_N \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \Delta P_N}{\partial \theta_1} & \frac{\partial \Delta P_N}{\partial \theta_2} & \cdots & \frac{\partial \Delta P_N}{\partial \theta_N} & \frac{\partial \Delta P_N}{\partial V_1} V_1 & \frac{\partial \Delta P_N}{\partial V_2} V_2 & \cdots & \frac{\partial \Delta P_N}{\partial V_N} V_N \\ \hline \frac{\partial \Delta Q_1}{\partial \theta_1} & \frac{\partial \Delta Q_1}{\partial \theta_2} & \cdots & \frac{\partial \Delta Q_1}{\partial \theta_N} & \frac{\partial \Delta Q_1}{\partial V_1} V_1 & \frac{\partial \Delta Q_1}{\partial V_2} V_2 & \cdots & \frac{\partial \Delta Q_1}{\partial V_N} V_N \\ \frac{\partial \Delta Q_2}{\partial \theta_1} & \frac{\partial \Delta Q_2}{\partial \theta_2} & \cdots & \frac{\partial \Delta Q_2}{\partial \theta_N} & \frac{\partial \Delta Q_2}{\partial V_1} V_1 & \frac{\partial \Delta Q_2}{\partial V_2} V_2 & \cdots & \frac{\partial \Delta Q_2}{\partial V_N} V_N \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \Delta Q_N}{\partial \theta_1} & \frac{\partial \Delta Q_N}{\partial \theta_2} & \cdots & \frac{\partial \Delta Q_N}{\partial \theta_N} & \frac{\partial \Delta Q_N}{\partial V_1} V_1 & \frac{\partial \Delta Q_N}{\partial V_2} V_2 & \cdots & \frac{\partial \Delta Q_N}{\partial V_N} V_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \vdots \\ \theta_N \\ \hline \frac{\Delta V_1}{V_1} \\ \frac{\Delta V_2}{V_2} \\ \vdots \\ \frac{\Delta V_N}{V_N} \end{bmatrix} \quad (2.35)$$

expresando (2.35) de forma matricial, tenemos,

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \Delta \mathbf{P} \\ \Delta \mathbf{Q} \end{bmatrix}}_{\mathbf{F}(\mathbf{X}^{(i-1)})} = - \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial \Delta \mathbf{P}}{\partial \theta} & \frac{\partial \Delta \mathbf{P}}{\partial \mathbf{V}} \mathbf{V} \\ \frac{\partial \Delta \mathbf{Q}}{\partial \theta} & \frac{\partial \Delta \mathbf{Q}}{\partial \mathbf{V}} \mathbf{V} \end{bmatrix}}_{\mathbf{J}(\mathbf{X}^{(i-1)})} \underbrace{\begin{bmatrix} \Delta \theta \\ \frac{\Delta \mathbf{V}}{\mathbf{V}} \end{bmatrix}}_{\Delta \mathbf{X}^{(i)}} \quad (2.36)$$

Las cuatro submatrices del Jacobiano pueden consistir de hasta  $(N-1) \times (N-1)$  elementos de la forma,

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial \Delta P_k}{\partial \theta_m}, \quad \frac{\partial \Delta P_k}{\partial V_m} V_m, \\ \frac{\partial \Delta Q_k}{\partial \theta_m}, \quad \frac{\partial \Delta Q_k}{\partial V_m} V_m, \end{array} \right\} \quad (2.37)$$

donde  $k = 1, \dots, N$  y  $m = 1, \dots, N$  omitiendo la entrada del nodo *slack*. Las filas y columnas correspondientes a potencia reactiva y magnitud de voltaje para nodos *PV* también pueden omitirse. Además, cuando los nodos  $k$  y  $m$  no están conectados directamente por un elemento de transmisión, el elemento  $k-m$  del Jacobiano es nulo. Debido al bajo grado de conectividad que prevalece en los sistemas de potencia reales, los Jacobianos de flujos de potencia son matrices altamente dispersas. Una característica adicional es que las matrices Jacobianas son simétricas en estructura pero no en valor.

Debe notarse que los términos correctivos  $\Delta V_m$  están divididos por  $V_m$ , esto para compensar el hecho de que los términos del Jacobiano  $(\partial \Delta P_k / \partial V_m) V_m$  y  $(\partial \Delta Q_k / \partial V_m) V_m$  están multiplicados por  $V_m$ , este artificio matemático resulta en útiles simplificaciones en el cálculo de los elementos de la matriz Jacobiana, ya que permite establecer las siguientes relaciones,

$$\frac{\partial Q_k^{\text{cal}}}{\partial \theta_m} = - \frac{\partial P_k^{\text{cal}}}{\partial V_m} V_m \quad (2.38)$$

$$\frac{\partial Q_k^{\text{cal}}}{\partial V_m} V_m = \frac{\partial P_k^{\text{cal}}}{\partial \theta_m} \quad (2.39)$$

En las siguientes expresiones, el signo negativo que precede a las derivadas parciales es el que multiplica al Jacobiano en la ecuación (2.36). Así, los elementos del Jacobiano están dados por, [Acha et al., 2004]

para  $k \neq m$ :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \Delta P_k}{\partial \theta_m} &= -\frac{\partial}{\partial \theta_m} (P_{Gk} - P_{Lk} - P_k^{\text{cal}}) = \frac{\partial P_k^{\text{cal}}}{\partial \theta_m} \\ \frac{\partial P_k^{\text{cal}}}{\partial \theta_m} &= V_k V_m [G_{km} \sin(\theta_k - \theta_m) - B_{km} \cos(\theta_k - \theta_m)] \\ \frac{\partial P_k^{\text{cal}}}{\partial \theta_m} &= Q_k^{\text{cal}} + V_k^2 B_{kk} \end{aligned} \right\} \quad (2.40)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \Delta P_k V_m}{\partial V_m} &= -\frac{\partial}{\partial V_m} (P_{Gk} - P_{Lk} - P_k^{\text{cal}}) V_m = \frac{\partial P_k^{\text{cal}}}{\partial V_m} V_m \\ \frac{\partial P_k^{\text{cal}} V_m}{\partial V_m} &= V_k V_m [G_{km} \cos(\theta_k - \theta_m) + B_{km} \sin(\theta_k - \theta_m)] \\ \frac{\partial P_k^{\text{cal}} V_m}{\partial V_m} &= P_k^{\text{cal}} - V_k^2 G_{kk} \end{aligned} \right\} \quad (2.41)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \Delta Q_k}{\partial \theta_m} &= -\frac{\partial}{\partial \theta_m} (Q_{Gk} - Q_{Lk} - Q_k^{\text{cal}}) = \frac{\partial Q_k^{\text{cal}}}{\partial \theta_m} \\ \frac{\partial Q_k^{\text{cal}}}{\partial \theta_m} &= V_k V_m [-G_{km} \cos(\theta_k - \theta_m) - B_{km} \sin(\theta_k - \theta_m)] \\ \frac{\partial Q_k^{\text{cal}}}{\partial \theta_m} &= -P_k^{\text{cal}} + V_k^2 G_{kk} = -\frac{\partial P_k^{\text{cal}}}{\partial V_m} V_m \end{aligned} \right\} \quad (2.42)$$

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{\partial \Delta Q_k}{\partial V_m} V_m &= -\frac{\partial}{\partial V_m} (Q_{Gk} - Q_{Lk} - Q_k^{\text{cal}}) V_m = \frac{\partial Q_k^{\text{cal}}}{\partial V_m} V_m \\
 \frac{\partial Q_k^{\text{cal}}}{\partial V_m} V_m &= V_k V_m [G_{km} \sin(\theta_k - \theta_m) - B_{km} \cos(\theta_k - \theta_m)] \\
 \frac{\partial Q_k^{\text{cal}}}{\partial V_m} V_m &= Q_k^{\text{cal}} + V_k^2 B_{kk} = \frac{\partial P_k^{\text{cal}}}{\partial \theta_m}
 \end{aligned} \right\} \quad (2.43)$$

para  $k = m$ :

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{\partial \Delta P_k}{\partial \theta_k} &= -\frac{\partial}{\partial \theta_k} (P_{Gk} - P_{Lk} - P_k^{\text{cal}}) = \frac{\partial P_k^{\text{cal}}}{\partial \theta_k} \\
 \frac{\partial P_k^{\text{cal}}}{\partial \theta_k} &= V_k V_m [-G_{km} \sin(\theta_k - \theta_m) + B_{km} \cos(\theta_k - \theta_m)] \\
 \frac{\partial P_k^{\text{cal}}}{\partial \theta_k} &= -Q_k^{\text{cal}} - V_k^2 B_{kk} = -\frac{\partial P_k^{\text{cal}}}{\partial \theta_m}
 \end{aligned} \right\} \quad (2.44)$$

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{\partial \Delta P_k}{\partial V_k} V_k &= -\frac{\partial}{\partial V_k} (P_{Gk} - P_{Lk} - P_k^{\text{cal}}) V_k = \frac{\partial P_k^{\text{cal}}}{\partial V_k} V_k \\
 \frac{\partial P_k^{\text{cal}}}{\partial V_k} V_k &= 2V_k^2 G_{kk} + V_k V_m [G_{km} \cos(\theta_k - \theta_m) + B_{km} \sin(\theta_k - \theta_m)] \\
 \frac{\partial P_k^{\text{cal}}}{\partial V_k} V_k &= P_k^{\text{cal}} + V_k^2 G_{kk}
 \end{aligned} \right\} \quad (2.45)$$

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{\partial \Delta Q_k}{\partial \theta_k} &= -\frac{\partial}{\partial \theta_{k,l}} (Q_{Gk} - Q_{Lk} - Q_k^{\text{cal}}) = \frac{\partial Q_k^{\text{cal}}}{\partial \theta_k} \\
 \frac{\partial Q_k^{\text{cal}}}{\partial \theta_k} &= V_k V_m [G_{km} \cos(\theta_k - \theta_m) + B_{km} \sin(\theta_k - \theta_m)] \\
 \frac{\partial Q_k^{\text{cal}}}{\partial \theta_k} &= P_k^{\text{cal}} - V_k^2 G_{kk} = \frac{\partial P_k^{\text{cal}}}{\partial V_m} V_m
 \end{aligned} \right\} \quad (2.46)$$

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{\partial \Delta Q_k}{\partial V_k} V_k &= -\frac{\partial}{\partial V_k} (Q_{Gk} - Q_{Lk} - Q_k^{\text{cal}}) V_k = \frac{\partial Q_k^{\text{cal}}}{\partial V_k} V_k \\
 \frac{\partial Q_k^{\text{cal}}}{\partial V_k} V_k &= -2V_k^2 B_{kk} + V_k V_m [G_{km} \sin(\theta_k - \theta_m) - B_{km} \cos(\theta_k - \theta_m)] \\
 \frac{\partial Q_k^{\text{cal}}}{\partial V_k} V_k &= Q_k^{\text{cal}} - V_k^2 B_{kk}
 \end{aligned} \right\} \quad (2.47)$$

Un punto importante que se debe tener presente es que las ecuaciones de balance de potencia  $\Delta P$  y  $\Delta Q$  correspondientes al nodo *slack* no son incluidas en la ecuación (2.36), esto debido a que las incógnitas asociadas a este nodo,  $V_{\text{slack}}$  y  $\theta_{\text{slack}}$ , son datos especificados. Además, las variables desconocidas  $P_{\text{slack}}$  y  $Q_{\text{slack}}$  son calculadas una vez que se han determinado los flujos y las pérdidas de potencia en la red de transmisión del sistema eléctrico [Acha et al., 2004]. También, la potencia reactiva generada en nodos *PV*,  $Q_G$ , es calculada en cada iteración, esto para verificar si los generadores se encuentran dentro de límites de generación de potencia reactiva [Acha et al., 2004]. Sin embargo, las ecuaciones de balance de potencia reactiva correspondientes a nodos *PV* no son incluidas en la ecuación (2.36) ya que en este tipo de nodos se especifica la magnitud de voltaje.

Una de las principales fortalezas del método Newton-Raphson es la confiabilidad en relación con la convergencia. Para la mayoría de los casos prácticos, y dadas las condiciones iniciales  $\mathbf{X}^{(0)}$  adecuadas, el método exhibe una característica de convergencia cuadrática; es decir,

$$f(x^{(1)}) = 1 \times 10^{-1},$$

$$f(x^{(2)}) = 1 \times 10^{-2},$$

$$f(x^{(3)}) = 1 \times 10^{-4},$$

$$f(x^{(4)}) = 1 \times 10^{-8}.$$

para el valor del máximo desajuste  $\Delta x$  [Acha et al., 2004]. Contrario a lo que sucede en técnicas de solución diferentes al Newton-Raphson, esta característica de convergencia es independiente del tamaño de la red a resolver [Castro et al., 2011] y de la clase y número de equipos de control presentes en el sistema de potencia [Fuerte et al., 1998]. Algunos de los aspectos que podrían mermar esta característica de convergencia son las violaciones de límites de potencia reactiva en los generadores de nodos *PV* y condiciones extremas de carga.

### 2.4.3. Inicialización de Variables de Estado

La efectividad del método Newton-Raphson para lograr una solución factible, depende de la selección de valores iniciales adecuados para todas las variables de estado involucradas en el problema.

En la solución de flujos de potencia, las magnitudes de voltaje generalmente se inicializan en 1 p.u. (por unidad) en nodos de tipo *PQ*, esto debido a que se espera que en estado estable los valores de magnitud de voltaje estén muy cercanos a 1 p.u. y por lo tanto esta sea una condición inicial en la cual el método Newton-Raphson tenga un buen desempeño. Para el nodo *slack* y nodos *PV* los valores de magnitud de voltaje son datos especificados, los cuales permanecen constantes durante el proceso iterativo si no hay violación de límites de potencia reactiva en los generadores. Los valores para los ángulos de fase de los voltajes nodales son inicializados en  $0^\circ$  para todos los nodos.

## 2.5. Manejo de Nodos *PV*

Aún cuando la ecuación de balance de potencia reactiva  $\Delta Q_k$  del nodo  $k$  del tipo *PV* no es requerida en la ecuación (2.36), dado que  $Q_{Gk} = Q_{Lk} + Q_k^{\text{cal}}$ , la solución de la ecuación (2.22) para nodos *PV* se realiza en cada iteración para evaluar si la potencia reactiva aportada por el generador conectado al nodo  $k$  se encuentra dentro de límites operativos, es decir

$$Q_{G_{k\text{mín}}} < Q_{G_k} < Q_{G_{k\text{máx}}} \quad (2.48)$$

Si durante el proceso iterativo ocurre alguna de las siguientes condiciones:

$$\left. \begin{array}{l} Q_{G_k} \geq Q_{G_{k\text{máx}}} \\ Q_{G_k} \leq Q_{G_{k\text{mín}}} \end{array} \right\} \quad (2.49)$$

el nodo  $k$  se convierte en nodo *PQ generador*, y en la ecuación (2.36) se incorpora una de las siguientes ecuaciones de balance de potencia reactiva,

$$\left. \begin{array}{l} \Delta Q_k = Q_{G_{k\text{máx}}} - Q_{Lk} - Q_k^{\text{cal}} \\ \Delta Q_k = Q_{G_{k\text{mín}}} - Q_{Lk} - Q_k^{\text{cal}} \end{array} \right\} \quad (2.50)$$

dependiendo del límite violado, junto con los correspondientes elementos del Jacobiano. En este caso, se libera la magnitud del voltaje del nodo  $k$ , es decir, ya no permanecerá constante durante el resto del proceso iterativo, de manera que  $V_k$  se convierte en una variable de estado.

Se debe notar que el nodo  $k$  puede retornar a nodo generador *PV* si durante el proceso iterativo se obtiene una mejor estimación de  $Q_k^{\text{cal}}$ , calculada con valores de voltaje nodal más precisos, y que este valor indique que el generador conectado al nodo  $k$  puede aportar la potencia reactiva requerida por dicho nodo. Por lo tanto, la verificación de violación de límites de potencia reactiva en los generadores se realiza cada iteración. La experiencia programando algoritmos de flujos de potencia

indica que la verificación de límites debe comenzar después de la segunda o la tercera iteración, esto debido a que los valores calculados al inicio del proceso iterativo pueden distar mucho de los correctos, conllevando con ello a falsos requerimientos de potencia reactiva. El cambio de nodo *PV* a nodo *PQ* y viceversa suponen esfuerzo numérico adicional en la solución iterativa y retarda la convergencia [Acha et al., 2004].

## 2.6. Casos de Estudio

En esta Sección se presentan resultados del análisis de flujos de potencia realizado mediante la formulación de inyecciones de potencia (FPNR), para sistemas eléctricos de 5, 14 y 57 nodos. Los datos de los sistemas estudiados en esta sección se encuentran en el Apéndice A. La tolerancia de convergencia utilizada en los análisis es de  $1 \times 10^{-12}$  p.u. Además de poner a prueba la característica de convergencia del método, se utiliza este valor de tolerancia para que los desbalances de potencia en unidades reales sean del orden de  $1 \times 10^{-4}$  Watts.

### 2.6.1. Sistema de 5 Nodos

Los resultados para voltajes nodales y generación de reactivos obtenidos con el método FPNR al aplicarlo al sistema de 5 nodos de la Figura 2.3, se muestran en las Tablas 2.1 y 2.2, respectivamente. La trayectoria de convergencia del método Newton-Raphson se muestra en la Figura 2.4.

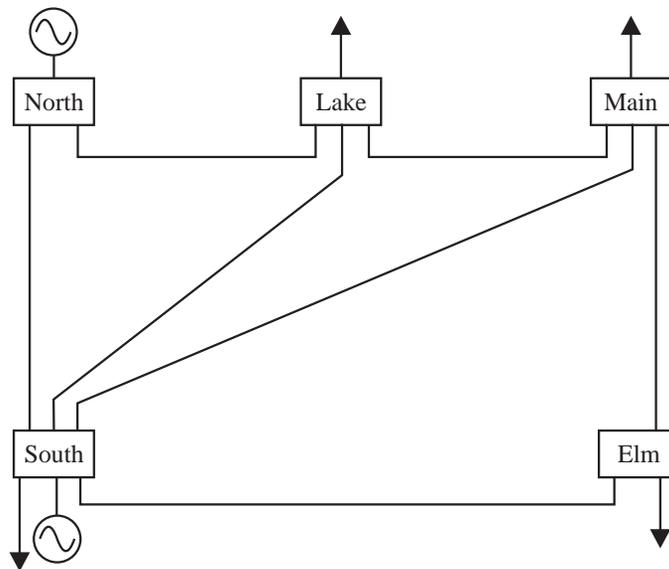


Figura 2.3: Sistema eléctrico de 5 nodos.

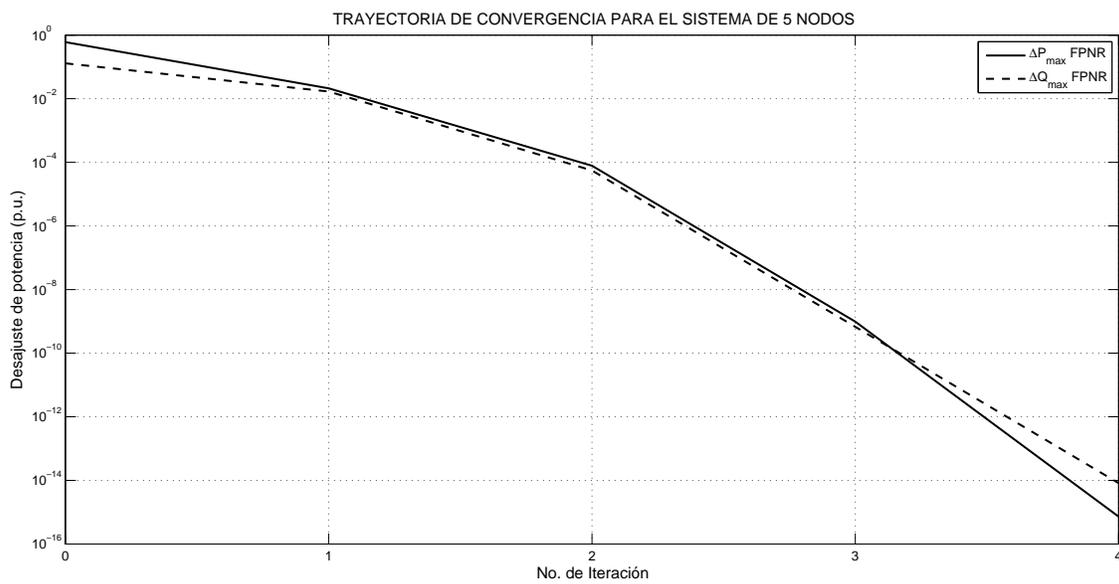


Figura 2.4: Trayectoria de convergencia del método FPNR al resolver el sistema de 5 nodos.

Tabla 2.1: Resultados obtenidos con el método FPNR para el sistema de 5 nodos.

<i>Nodo</i>	<i>Voltaje Nodal</i>	
	<i>V (p.u.)</i>	<i>θ (°)</i>
North	1.06	0
South	1.0	-2.0612
Lake	0.9872	-4.6367
Main	0.9841	-4.9570
Elm	0.9717	-5.7649

Tabla 2.2: Resultados de generación en nodos *PV* obtenidos con el método FPNR para el sistema de 5 nodos.

<i>Nodo</i>	<i>Generación</i>
	<i>Q (p.u.)</i>
South	-0.615929

En la Figura 2.4 se observa que en la cuarta iteración el método FPNR cumple con la tolerancia especificada para los máximos desajustes de potencia nodal, es decir  $1 \times 10^{-12}$ .

### 2.6.2. Sistema IEEE-14 Nodos

Los resultados para voltajes nodales, generación de reactivos en nodos *PV* e inyección de reactivos debida a compensadores fijos en derivación obtenidos con el método FPNR, aplicado al sistema IEEE-14 nodos de la Figura 2.5, se muestran en las Tablas 2.3, 2.4 y 2.5, respectivamente. La trayectoria de convergencia es la mostrada en la Figura 2.6.

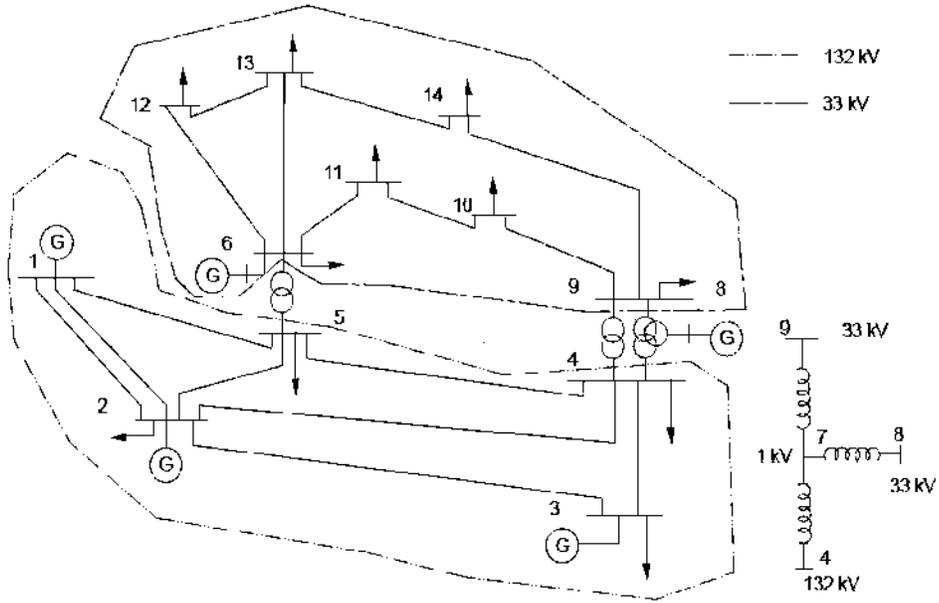


Figura 2.5: Red eléctrica del sistema IEEE-14 nodos.

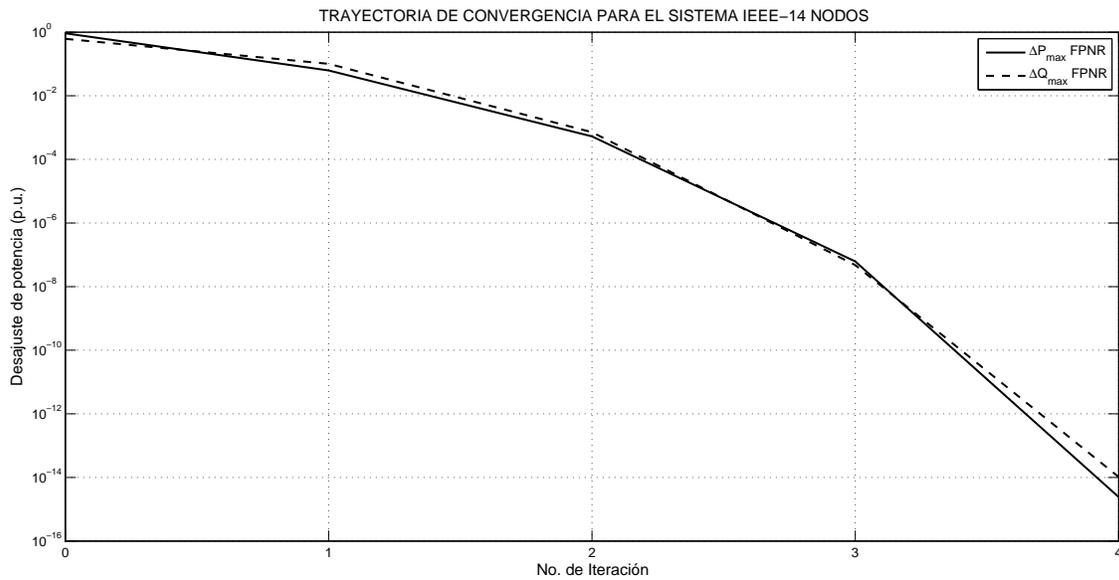


Figura 2.6: Trayectoria de convergencia que sigue el método FPNR al resolver el sistema IEEE-14 nodos.

Tabla 2.3: Resultados arrojados por el método FPNR al resolver el sistema IEEE-14 nodos.

<i>Nodo</i>	<i>Voltaje Nodal</i>		<i>Nodo</i>	<i>Voltaje Nodal</i>	
	<i>V (p.u.)</i>	$\theta$ ( $^{\circ}$ )		<i>V (p.u.)</i>	$\theta$ ( $^{\circ}$ )
1	1.06	0	8	1.09	-13.3682
2	1.045	-4.981	9	1.0564	-14.9466
3	1.01	-12.718	10	1.0513	-15.1043
4	1.0186	-10.3242	11	1.0571	-14.7953
5	1.0203	-8.78258	12	1.0552	-15.0774
6	1.07	-14.2227	13	1.0504	-15.1589
7	1.062	-13.3682	14	1.0358	-16.0389

Tabla 2.4: Generación en nodos *PV* obtenida con el método FPNR para el sistema IEEE-14 nodos.

<i>Nodo</i>	<i>Generación</i>
	<i>Q (p.u.)</i>
2	0.423965
3	0.233936
6	0.122404
8	0.173566

Tabla 2.5: Inyección de potencia reactiva de los compensadores fijos en derivación, obtenida con el método FPNR para el sistema IEEE-14 nodos.

<i>Nodo</i> <i>Compensado</i>	<i>Q inyectada</i> <i>(p.u.)</i>
9	-0.212015

En la Figura 2.6 se observa que el método FPNR converge en la cuarta iteración para la tolerancia especificada. Además, en la Tabla 2.4 se observa que todos los generadores están dentro de sus límites de generación de potencia reactiva y en consecuencia la magnitud de voltaje en estos nodos se encuentra en el valor especificado, como se muestra en la Tabla 2.3.

### 2.6.3. Sistema IEEE-57 Nodos

Los resultados arrojados por el método FPNR para magnitud y ángulo de fase nodales, generación de reactivos en nodos *PV* e inyección de reactivos debida a compensadores fijos en derivación

aplicado al sistema IEEE-57 nodos de la Figura 2.7, se muestran en las Tablas 2.6, 2.7 y 2.8, respectivamente. La Figura 2.8 describe la trayectoria de convergencia.

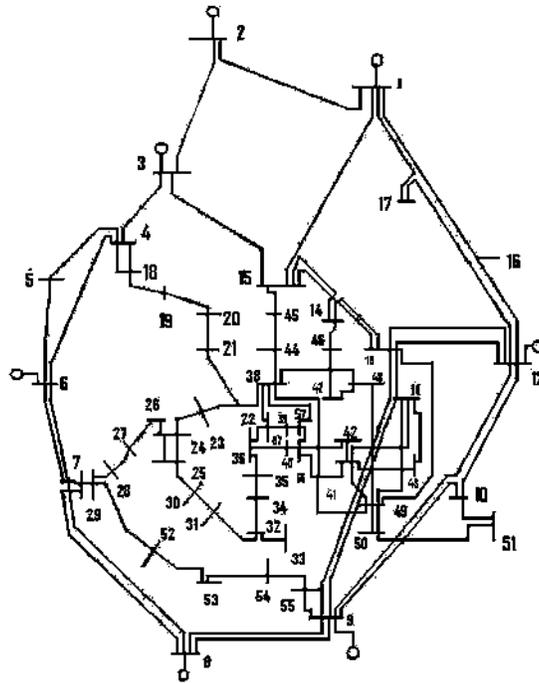


Figura 2.7: Red eléctrica del sistema IEEE-57 nodos.

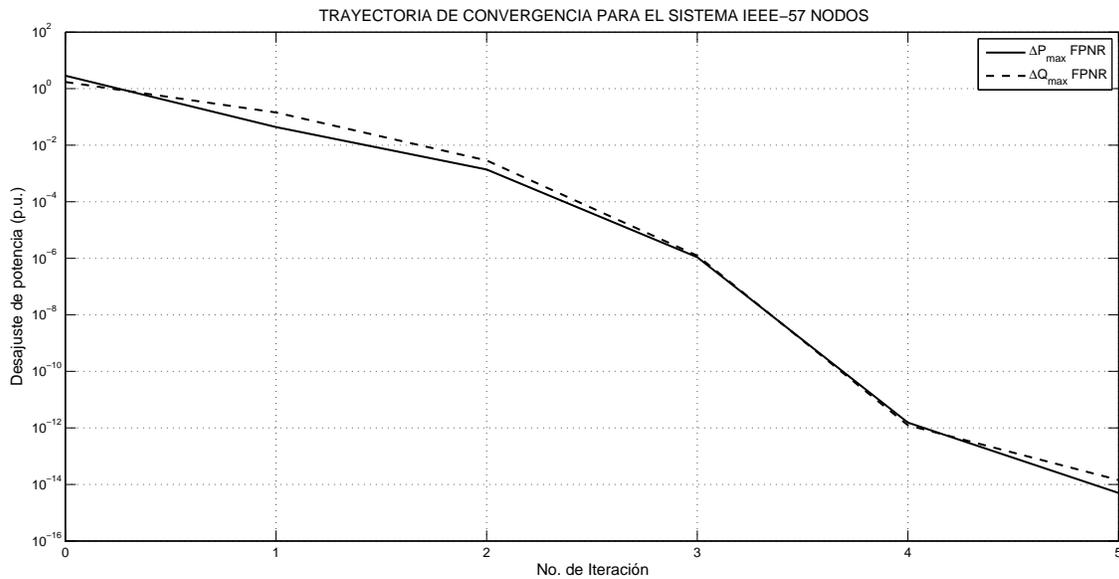


Figura 2.8: Trayectoria de convergencia que sigue el método FPNR al resolver el sistema IEEE-57 nodos.

Tabla 2.6: Resultados obtenidos con el método FPNR para el sistema IEEE-57 nodos.

Nodo	Voltaje Nodal		Nodo	Voltaje Nodal	
	V (p.u.)	$\theta$ (°)		V (p.u.)	$\theta$ (°)
1	1.04	0	30	0.9629	-18.7182
2	1.01	-1.1881	31	0.9361	-19.3822
3	0.985	-5.9878	32	0.9501	-18.5114
4	0.9808	-7.337	33	0.9478	-18.551
5	0.9765	-8.5458	34	0.9594	-14.1498
6	0.98	-8.6735	35	0.9664	-13.9072
7	0.9842	-7.6007	36	0.976	-13.6359
8	1.005	-4.4772	37	0.9851	-13.4473
9	0.98	-9.584	38	1.013	-12.737
10	0.9863	-11.4489	39	0.983	-13.4923
11	0.974	-10.1932	40	0.973	-13.6592
12	1.015	-10.4707	41	0.9963	-14.0759
13	0.9789	-9.804	42	0.9666	-15.5326
14	0.9702	-9.351	43	1.0096	-11.3542
15	0.9881	-7.1905	44	1.017	-11.8579
16	1.0134	-8.8586	45	1.0361	-9.2701
17	1.0175	-5.3957	46	1.0599	-11.1162
18	1.0007	-11.7289	47	1.0334	-12.5121
19	0.9703	-13.2274	48	1.0276	-12.6119
20	0.9639	-13.4463	49	1.0365	-12.9378
21	1.0087	-12.9306	50	1.0235	-13.4131
22	1.01	-12.8762	51	1.0523	-12.5322
23	1.0086	-12.9413	52	0.9804	-11.4966
24	0.9994	-13.2928	53	0.971	-12.2516
25	0.9827	-18.172	54	0.9963	-11.7087
26	0.959	-12.9822	55	1.0308	-10.8003
27	0.9816	-11.5134	56	0.9685	-16.0656
28	0.9967	-10.481	57	0.965	-16.5845
29	1.0103	-9.7708			

Tabla 2.7: Generación en nodos PV obtenida con el método FPNR para el sistema IEEE-57 nodos.

Nodo	Generación
	Q (p.u.)
2	-0.007553
3	-0.009867
6	0.008576
8	0.620849
9	0.021991
12	1.28518

Tabla 2.8: Inyección de potencia reactiva de los compensadores fijos en derivación, obtenida con el método FPNR para el sistema IEEE-57 nodos.

<i>Nodo Compensado</i>	<i>Q inyectada (p.u.)</i>
18	-0.100137
25	-0.056977
53	-0.059395

En la Figura 2.8 se observa que a diferencia de los casos anteriores, para este caso en particular el método FPNR converge en la quinta iteración. Sin embargo, se observa que en la cuarta iteración, el valor de los desajustes de potencia tanto activa como reactiva es muy cercano a  $1 \times 10^{-12}$ . Además, todos los generadores se encuentran dentro de límites de generación de potencia reactiva como se muestra en la Tabla 2.7 y los voltajes se mantienen fijos en estos nodos.

## 2.7. Conclusiones

En este Capítulo se presenta en detalle la formulación matemática del problema de flujos de potencia basada en inyecciones de potencia, así como su solución mediante el algoritmo Newton-Raphson (FPNR), dicha formulación es la más utilizada en la industria para realizar estudios de flujos de potencia. Finalmente, se aplica el método FPNR a distintos sistemas de prueba, al realizar el análisis se observa que el método converge alrededor de la cuarta iteración para los sistemas de prueba analizados.

# Capítulo 3

## Flujos de Potencia en Base a Inyecciones de Corriente

### 3.1. Introducción

En este Capítulo se describe una formulación alterna a la convencional<sup>1</sup> para resolver el problema de flujos de potencia, la formulación basada en inyecciones de corriente (FPIC). Esta formulación consiste en expresar las inyecciones de corriente nodal en coordenadas rectangulares, resolver un conjunto de ecuaciones algebraicas no lineales asociadas a las ecuaciones de desbalance de corrientes por medio del método Newton-Raphson.

En la formulación basada en inyecciones de corriente, la mayoría de los elementos del Jacobiano permanecen constantes durante el proceso iterativo, exceptuando los elementos de la diagonal y aquellos correspondientes a nodos *PV*; es por esto que, a diferencia de la formulación convencional, no hay necesidad de recalcular en cada iteración todos los elementos del Jacobiano. Esta característica es la ventaja principal de esta formulación con respecto a la convencional, además de que no se requiere el uso de funciones trascendentales como *seno* y *coseno*.

---

<sup>1</sup>Formulación basada en inyecciones de potencia.

## 3.2. Ecuaciones de Flujos de Potencia basadas en Inyecciones de Corriente

Matemáticamente, es posible expresar el desbalance de potencia compleja en el nodo  $k$ ,  $\Delta\bar{S}_k$ , como

$$\Delta\bar{S}_k = \bar{V}_k\Delta\bar{I}_k^* = 0 \quad (3.1)$$

$$\bar{S}_{Gk} - \bar{S}_{Lk} - \bar{S}_k^{\text{cal}} = \bar{V}_k\Delta\bar{I}_k^* = 0 \quad (3.2)$$

$$\bar{S}_k^{\text{sp}} - \bar{S}_k^{\text{cal}} = \bar{V}_k\Delta\bar{I}_k^* = 0 \quad (3.3)$$

o bien,

$$\Delta\bar{S}_k^* = \bar{S}_k^{\text{sp}*} - \bar{S}_k^{\text{cal}*} = \bar{V}_k^*\Delta\bar{I}_k = 0 \quad (3.4)$$

donde el superíndice  $*$  indica el complejo conjugado,  $\bar{V}_k$  es el voltaje complejo en el nodo  $k$ ; la variable  $\Delta\bar{I}_k$  es el desajuste de corriente compleja en el nodo  $k$ , y la variable  $\bar{S}_{Gk} = P_{Gk} + jQ_{Gk}$ , representa la potencia compleja inyectada al nodo  $k$  por un generador. Para propósitos de la solución del estudio de flujos de potencia, se considera que la variable,  $P_{Gk}$ , puede ser controlada por el operador de la planta, y por lo tanto, es una variable conocida. El valor de la variable  $Q_{Gk}$ , puede o no ser fijo, lo cual depende de si el generador participa o no en la regulación de voltaje del nodo. La variable  $\bar{S}_{Lk} = P_{Lk} + jQ_{Lk}$ , representa la potencia compleja extraída por la carga conectada al nodo  $k$ , la cual es conocida. Por último, las potencias activa y reactiva especificadas,  $P_k^{\text{sp}}$  y  $Q_k^{\text{sp}}$ , respectivamente, son:

$$P_k^{\text{sp}} = P_{Gk} - P_{Lk} \quad (3.5)$$

$$Q_k^{\text{sp}} = Q_{Gk} - Q_{Lk} \quad (3.6)$$

de manera que,

$$\bar{S}_k^{\text{sp}} = P_k^{\text{sp}} + jQ_k^{\text{sp}} \quad (3.7)$$

Sin embargo, la potencia compleja,  $\bar{S}_k^{\text{cal}} = P_k^{\text{cal}} + jQ_k^{\text{cal}}$ , inyectada en terminales de cada elemento de transmisión, es función del voltaje complejo nodal. En base a la Figura 3.1, la corriente compleja inyectada en el nodo  $k$ , denotada por  $\bar{I}_k$ , está dada por la suma de la corriente que fluye a través de los elementos en serie y en derivación que conforman la línea de transmisión.

$$\bar{I}_k = \bar{I}_{km} + \bar{I}_k^{\text{sh}}. \quad (3.8)$$

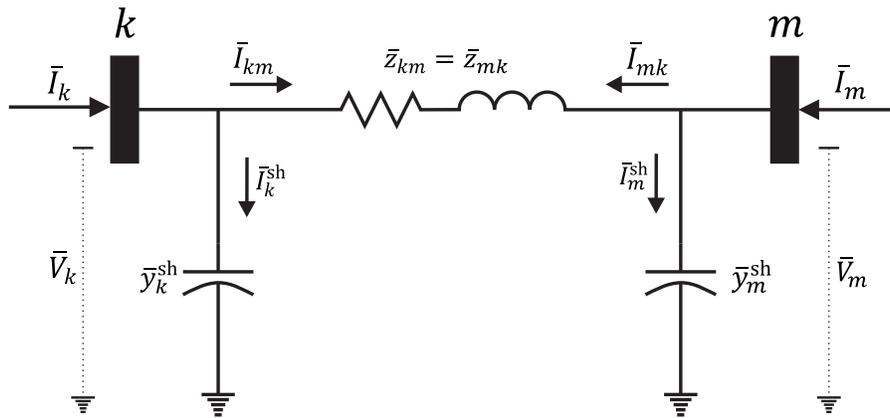


Figura 3.1: Modelo  $\pi$  de la línea de transmisión.

La ecuación (3.8) puede ser expresada en términos de los voltajes complejos  $\bar{V}_k$  y  $\bar{V}_m$  como sigue,

$$\bar{I}_k = \frac{\bar{V}_k - \bar{V}_m}{\bar{z}_{km}} + \bar{y}_k^{\text{sh}} \bar{V}_k = \bar{y}_{km} (\bar{V}_k - \bar{V}_m) + \bar{y}_k^{\text{sh}} \bar{V}_k \quad (3.9)$$

$$\bar{I}_k = (\bar{y}_{km} + \bar{y}_k^{\text{sh}}) \bar{V}_k - \bar{y}_{km} \bar{V}_m \quad (3.10)$$

o bien,

$$\bar{I}_k = \bar{Y}_{kk}\bar{V}_k + \bar{Y}_{km}\bar{V}_m \quad (3.11)$$

de manera similar para el nodo  $m$ ,

$$\bar{I}_m = (\bar{y}_{mk} + \bar{y}_m^{sh})\bar{V}_m - \bar{y}_{mk}\bar{V}_k \quad (3.12)$$

$$\bar{I}_m = \bar{Y}_{mm}\bar{V}_m + \bar{Y}_{mk}\bar{V}_k. \quad (3.13)$$

Las ecuaciones (3.10) y (3.12) se pueden escribir en forma matricial como sigue,

$$\begin{bmatrix} \bar{I}_k \\ \bar{I}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{y}_{km} + \bar{y}_k^{sh} & -\bar{y}_{km} \\ -\bar{y}_{mk} & \bar{y}_{mk} + \bar{y}_m^{sh} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{V}_k \\ \bar{V}_m \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

o simplemente,

$$\begin{bmatrix} \bar{I}_k \\ \bar{I}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Y}_{kk} & \bar{Y}_{km} \\ \bar{Y}_{mk} & \bar{Y}_{mm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{V}_k \\ \bar{V}_m \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

donde los elementos de la matriz de admitancia y los voltajes nodales pueden ser expresados de forma general en coordenadas rectangulares y polares respectivamente, es decir,

$$\bar{Y}_{ij} = G_{ij} + jB_{ij} \quad (3.16)$$

$$\bar{V}_i = V_i e^{j\theta_i} = V_i^{re} + jV_i^{im} \quad (3.17)$$

donde  $i = k, m$  y  $j = k, m$ ,  $V_i^{re}$  y  $V_i^{im}$  son la parte real e imaginaria del voltaje complejo  $\bar{V}_i$ , respectivamente.

De manera particular, la potencia compleja calculada es,

$$\bar{S}_k^{\text{cal}*} = \bar{V}_k^* \bar{I}_k \quad (3.18)$$

tal que sustituyendo la ecuación (3.18) en (3.4), y resolviendo para  $\Delta \bar{I}_k$ , se obtiene:

$$\Delta \bar{I}_k = \frac{\bar{S}_k^{\text{sp}*}}{\bar{V}_k^*} - \bar{I}_k = 0. \quad (3.19)$$

Sustituyendo las ecuaciones (3.7) y (3.11) en (3.19) es posible obtener el balance de corrientes en el nodo  $k$ ,

$$\Delta \bar{I}_k = \frac{P_k^{\text{sp}} - jQ_k^{\text{sp}}}{\bar{V}_k^*} - (\bar{Y}_{kk} \bar{V}_k + \bar{Y}_{km} \bar{V}_m) = 0. \quad (3.20)$$

De manera similar par el nodo  $m$

$$\Delta \bar{I}_m = \frac{P_m^{\text{sp}} - jQ_m^{\text{sp}}}{\bar{V}_m^*} - (\bar{Y}_{mm} \bar{V}_m + \bar{Y}_{mk} \bar{V}_k) = 0. \quad (3.21)$$

Con la finalidad de obtener la parte real e imaginaria del balance de corrientes en el nodo  $k$ , se considera que

$$V_k = \sqrt{(V_k^{\text{re}})^2 + (V_k^{\text{im}})^2} \quad (3.22)$$

y se sustituyen las ecuaciones (3.16) y (3.17) en (3.20), para obtener:

$$\Delta I_k^{\text{re}} = \frac{P_k^{\text{sp}} V_k^{\text{re}} + Q_k^{\text{sp}} V_k^{\text{im}}}{V_k^2} - (G_{kk} V_k^{\text{re}} - B_{kk} V_k^{\text{im}}) - (G_{km} V_m^{\text{re}} - B_{km} V_m^{\text{im}}) = 0 \quad (3.23)$$

$$\Delta I_k^{\text{im}} = \frac{P_k^{\text{sp}} V_k^{\text{im}} - Q_k^{\text{sp}} V_k^{\text{re}}}{V_k^2} - (G_{kk} V_k^{\text{im}} + B_{kk} V_k^{\text{re}}) - (G_{km} V_m^{\text{im}} + B_{km} V_m^{\text{re}}) = 0 \quad (3.24)$$

En general, para un sistema de  $N$  nodos, la relación entre voltajes y corrientes nodales está dada por

$$\begin{bmatrix} \bar{I}_1 \\ \bar{I}_2 \\ \vdots \\ \bar{I}_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Y}_{11} & \bar{Y}_{12} & \cdots & \bar{Y}_{1N} \\ \bar{Y}_{21} & \bar{Y}_{22} & \cdots & \bar{Y}_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{Y}_{N1} & \bar{Y}_{N2} & \cdots & \bar{Y}_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{V}_1 \\ \bar{V}_2 \\ \vdots \\ \bar{V}_N \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

o simplemente,

$$\mathbf{I} = \mathbf{Y}_{\text{bus}} \mathbf{V} \quad (3.26)$$

donde  $\mathbf{I}$  es un vector de  $N \times 1$  elementos complejos que representa las inyecciones de corriente nodal,  $\mathbf{V}$  es un vector de  $N \times 1$  elementos complejos que representa los voltajes nodales, y  $\mathbf{Y}_{\text{bus}}$  es la matriz de admitancia nodal de  $N \times N$  elementos complejos  $\bar{Y}_{ij}$ . En este caso, la corriente total inyectada al nodo  $k$  es,

$$\bar{I}_k = \bar{Y}_{k1}\bar{V}_1 + \bar{Y}_{k2}\bar{V}_2 + \cdots + \bar{Y}_{kN}\bar{V}_N = \sum_{j=1}^N \bar{Y}_{kj}\bar{V}_j \quad (3.27)$$

Así, las expresiones para los desajustes de corriente nodal  $\Delta I_k^{\text{re}}$  y  $\Delta I_k^{\text{im}}$  para un sistema de  $N$  nodos son,

$$\Delta I_k^{\text{re}} = \frac{P_k^{\text{sp}}V_k^{\text{re}} + Q_k^{\text{sp}}V_k^{\text{im}}}{V_k^2} - \sum_{i=1}^N (G_{ki}V_i^{\text{re}} - B_{ki}V_i^{\text{im}}) = 0 \quad (3.28)$$

$$\Delta I_k^{\text{im}} = \frac{P_k^{\text{sp}}V_k^{\text{im}} - Q_k^{\text{sp}}V_k^{\text{re}}}{V_k^2} - \sum_{i=1}^N (G_{ki}V_i^{\text{im}} + B_{ki}V_i^{\text{re}}) = 0 \quad (3.29)$$

Las ecuaciones (3.28) y (3.29) se pueden escribir de forma compacta como

$$\Delta I_k^{\text{re}} = \Delta I_k^{\text{re a}} - \Delta I_k^{\text{re cal}} = 0 \quad (3.30)$$

$$\Delta I_k^{\text{im}} = \Delta I_k^{\text{im a}} - \Delta I_k^{\text{im cal}} = 0 \quad (3.31)$$

donde,

$$\Delta I_k^{\text{re cal}} = \sum_{i=1}^N \left( G_{ki} V_i^{\text{re}} - B_{ki} V_i^{\text{im}} \right) \quad (3.32)$$

$$\Delta I_k^{\text{im cal}} = \sum_{i=1}^N \left( G_{ki} V_i^{\text{im}} + B_{ki} V_i^{\text{re}} \right) \quad (3.33)$$

En esta formulación, las ecuaciones algebraicas no lineales (3.28) y (3.29) son resueltas mediante el método Newton-Raphson para cumplir el balance energético en cada uno de los nodos que conforman la red eléctrica.

### 3.3. Solución de las Ecuaciones de Flujos de Potencia

#### 3.3.1. Ecuaciones para Nodos PQ

Para aplicar el método Newton-Raphson al problema de flujos de potencia basado en inyecciones de corriente, las ecuaciones relevantes deben ser expresadas en la forma de la ecuación (2.27), donde  $\mathbf{X}$  representa el conjunto de componentes rectangulares  $V_k^{\text{re}}$  y  $V_k^{\text{im}}$  de cada voltaje complejo nodal. Las ecuaciones de desbalance de corriente  $\mathbf{F}(\mathbf{X})$  en parte real e imaginaria,  $\Delta \mathbf{I}^{\text{re}}$  y  $\Delta \mathbf{I}^{\text{im}}$ , se expanden alrededor de un punto base  $(\mathbf{V}^{\text{re}(0)}, \mathbf{V}^{\text{im}(0)})$ , y por lo tanto, el algoritmo de flujos de potencia Newton-Raphson basado en inyecciones de corriente (FPIC) queda expresado por la siguiente relación,

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \Delta I_1^{\text{im}} \\ \Delta I_1^{\text{re}} \\ \hline \Delta I_2^{\text{im}} \\ \Delta I_2^{\text{re}} \\ \vdots \\ \hline \Delta I_N^{\text{im}} \\ \Delta I_N^{\text{re}} \end{bmatrix}}_{\mathbf{F}(\mathbf{X}^{(i-1)})} \stackrel{(i)}{=} - \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial \Delta I_1^{\text{im}}}{\partial V_1^{\text{re}}} & \frac{\partial \Delta I_1^{\text{im}}}{\partial V_1^{\text{im}}} & \frac{\partial \Delta I_1^{\text{im}}}{\partial V_2^{\text{re}}} & \frac{\partial \Delta I_1^{\text{im}}}{\partial V_2^{\text{im}}} & \dots & \frac{\partial \Delta I_1^{\text{im}}}{\partial V_N^{\text{re}}} & \frac{\partial \Delta I_1^{\text{im}}}{\partial V_N^{\text{im}}} \\ \frac{\partial \Delta I_1^{\text{re}}}{\partial V_1^{\text{re}}} & \frac{\partial \Delta I_1^{\text{re}}}{\partial V_1^{\text{im}}} & \frac{\partial \Delta I_1^{\text{re}}}{\partial V_2^{\text{re}}} & \frac{\partial \Delta I_1^{\text{re}}}{\partial V_2^{\text{im}}} & \dots & \frac{\partial \Delta I_1^{\text{re}}}{\partial V_N^{\text{re}}} & \frac{\partial \Delta I_1^{\text{re}}}{\partial V_N^{\text{im}}} \\ \hline \frac{\partial \Delta I_2^{\text{im}}}{\partial V_1^{\text{re}}} & \frac{\partial \Delta I_2^{\text{im}}}{\partial V_1^{\text{im}}} & \frac{\partial \Delta I_2^{\text{im}}}{\partial V_2^{\text{re}}} & \frac{\partial \Delta I_2^{\text{im}}}{\partial V_2^{\text{im}}} & \dots & \frac{\partial \Delta I_2^{\text{im}}}{\partial V_N^{\text{re}}} & \frac{\partial \Delta I_2^{\text{im}}}{\partial V_N^{\text{im}}} \\ \frac{\partial \Delta I_2^{\text{re}}}{\partial V_1^{\text{re}}} & \frac{\partial \Delta I_2^{\text{re}}}{\partial V_1^{\text{im}}} & \frac{\partial \Delta I_2^{\text{re}}}{\partial V_2^{\text{re}}} & \frac{\partial \Delta I_2^{\text{re}}}{\partial V_2^{\text{im}}} & \dots & \frac{\partial \Delta I_2^{\text{re}}}{\partial V_N^{\text{re}}} & \frac{\partial \Delta I_2^{\text{re}}}{\partial V_N^{\text{im}}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \hline \frac{\partial \Delta I_N^{\text{im}}}{\partial V_1^{\text{re}}} & \frac{\partial \Delta I_N^{\text{im}}}{\partial V_1^{\text{im}}} & \frac{\partial \Delta I_N^{\text{im}}}{\partial V_2^{\text{re}}} & \frac{\partial \Delta I_N^{\text{im}}}{\partial V_2^{\text{im}}} & \dots & \frac{\partial \Delta I_N^{\text{im}}}{\partial V_N^{\text{re}}} & \frac{\partial \Delta I_N^{\text{im}}}{\partial V_N^{\text{im}}} \\ \frac{\partial \Delta I_N^{\text{re}}}{\partial V_1^{\text{re}}} & \frac{\partial \Delta I_N^{\text{re}}}{\partial V_1^{\text{im}}} & \frac{\partial \Delta I_N^{\text{re}}}{\partial V_2^{\text{re}}} & \frac{\partial \Delta I_N^{\text{re}}}{\partial V_2^{\text{im}}} & \dots & \frac{\partial \Delta I_N^{\text{re}}}{\partial V_N^{\text{re}}} & \frac{\partial \Delta I_N^{\text{re}}}{\partial V_N^{\text{im}}} \end{bmatrix}}_{\mathbf{J}(\mathbf{X}^{(i-1)})} \underbrace{\begin{bmatrix} \Delta V_1^{\text{re}} \\ \Delta V_1^{\text{im}} \\ \hline \Delta V_2^{\text{re}} \\ \Delta V_2^{\text{im}} \\ \vdots \\ \hline \Delta V_N^{\text{re}} \\ \Delta V_N^{\text{im}} \end{bmatrix}}_{\Delta \mathbf{X}^{(i)}} \stackrel{(i)}{=} \quad (3.34)$$

De la ecuación anterior se puede observar que la matriz Jacobiana está dividida en submatrices de  $2 \times 2$ , cuyos elementos están dados por las derivadas parciales de las ecuaciones (3.28) y (3.29) con respecto de cada una de las variables de estado,  $\mathbf{V}^{\text{re}}$  y  $\mathbf{V}^{\text{im}}$ . Los términos correspondientes a las derivadas parciales están dados por las siguientes expresiones [Costa et al., 1999],

para  $k \neq m$ :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \Delta I_k^{\text{im}}}{\partial V_m^{\text{re}}} &= \frac{\partial}{\partial V_m^{\text{re}}} \left[ \frac{P_k^{\text{sp}} V_k^{\text{im}} - Q_k^{\text{sp}} V_k^{\text{re}}}{V_k^2} - \sum_{i=1}^N (G_{ki} V_i^{\text{im}} + B_{ki} V_i^{\text{re}}) \right] \\ \frac{\partial \Delta I_k^{\text{im}}}{\partial V_m^{\text{re}}} &= -B_{km} \end{aligned} \right\} \quad (3.35)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \Delta I_k^{\text{im}}}{\partial V_m^{\text{im}}} &= \frac{\partial}{\partial V_m^{\text{im}}} \left[ \frac{P_k^{\text{sp}} V_k^{\text{im}} - Q_k^{\text{sp}} V_k^{\text{re}}}{V_k^2} - \sum_{i=1}^N (G_{ki} V_i^{\text{im}} + B_{ki} V_i^{\text{re}}) \right] \\ \frac{\partial \Delta I_k^{\text{im}}}{\partial V_m^{\text{im}}} &= -G_{km} \end{aligned} \right\} \quad (3.36)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \Delta I_k^{\text{re}}}{\partial V_m^{\text{re}}} &= \frac{\partial}{\partial V_m^{\text{re}}} \left[ \frac{P_k^{\text{sp}} V_k^{\text{re}} + Q_k^{\text{sp}} V_k^{\text{im}}}{V_k^2} - \sum_{i=1}^N (G_{ki} V_i^{\text{re}} - B_{ki} V_i^{\text{im}}) \right] \\ \frac{\partial \Delta I_k^{\text{re}}}{\partial V_m^{\text{re}}} &= -G_{km} \end{aligned} \right\} \quad (3.37)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \Delta I_k^{\text{re}}}{\partial V_m^{\text{im}}} &= \frac{\partial}{\partial V_m^{\text{im}}} \left[ \frac{P_k^{\text{sp}} V_k^{\text{re}} + Q_k^{\text{sp}} V_k^{\text{im}}}{V_k^2} - \sum_{i=1}^N (G_{ki} V_i^{\text{re}} - B_{ki} V_i^{\text{im}}) \right] \\ \frac{\partial \Delta I_k^{\text{re}}}{\partial V_m^{\text{im}}} &= B_{km} \end{aligned} \right\} \quad (3.38)$$

En las ecuaciones (3.35) a (3.38), se observa que los términos del Jacobiano ubicados fuera de la diagonal son constantes e iguales a los elementos de la matriz de admitancia nodal.

Para  $k = m$ :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \Delta I_k^{\text{im}}}{\partial V_k^{\text{re}}} &= \frac{\partial}{\partial V_k^{\text{re}}} \left[ \frac{P_k^{\text{sp}} V_k^{\text{im}} - Q_k^{\text{sp}} V_k^{\text{re}}}{V_k^2} - \sum_{i=1}^N (G_{ki} V_i^{\text{im}} + B_{ki} V_i^{\text{re}}) \right] \\ \frac{\partial \Delta I_k^{\text{im}}}{\partial V_k^{\text{re}}} &= \frac{Q_k^{\text{sp}} [(V_k^{\text{re}})^2 - (V_k^{\text{im}})^2] - 2P_k^{\text{sp}} V_k^{\text{re}} V_k^{\text{im}}}{V_k^4} - B_{kk} \end{aligned} \right\} \quad (3.39)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \Delta I_k^{\text{im}}}{\partial V_k^{\text{im}}} &= \frac{\partial}{\partial V_k^{\text{im}}} \left[ \frac{P_k^{\text{sp}} V_k^{\text{im}} - Q_k^{\text{sp}} V_k^{\text{re}}}{V_k^2} - \sum_{i=1}^N (G_{ki} V_i^{\text{im}} + B_{ki} V_i^{\text{re}}) \right] \\ \frac{\partial \Delta I_k^{\text{im}}}{\partial V_k^{\text{im}}} &= \frac{P_k^{\text{sp}} [(V_k^{\text{re}})^2 - (V_k^{\text{im}})^2] + 2Q_k^{\text{sp}} V_k^{\text{re}} V_k^{\text{im}}}{V_k^4} - G_{kk} \end{aligned} \right\} \quad (3.40)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \Delta I_k^{\text{re}}}{\partial V_k^{\text{re}}} &= \frac{\partial}{\partial V_k^{\text{re}}} \left[ \frac{P_k^{\text{sp}} V_k^{\text{re}} + Q_k^{\text{sp}} V_k^{\text{im}}}{V_k^2} - \sum_{i=1}^N (G_{ki} V_i^{\text{re}} - B_{ki} V_i^{\text{im}}) \right] \\ \frac{\partial \Delta I_k^{\text{re}}}{\partial V_k^{\text{re}}} &= -\frac{P_k^{\text{sp}} [(V_k^{\text{re}})^2 - (V_k^{\text{im}})^2] + 2Q_k^{\text{sp}} V_k^{\text{re}} V_k^{\text{im}}}{V_k^4} - G_{kk} \end{aligned} \right\} \quad (3.41)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \Delta I_k^{\text{re}}}{\partial V_k^{\text{im}}} &= \frac{\partial}{\partial V_k^{\text{im}}} \left[ \frac{P_k^{\text{sp}} V_k^{\text{re}} + Q_k^{\text{sp}} V_k^{\text{im}}}{V_k^2} - \sum_{i=1}^N (G_{ki} V_i^{\text{re}} - B_{ki} V_i^{\text{im}}) \right] \\ \frac{\partial \Delta I_k^{\text{re}}}{\partial V_k^{\text{im}}} &= \frac{Q_k^{\text{sp}} [(V_k^{\text{re}})^2 - (V_k^{\text{im}})^2] - 2P_k^{\text{sp}} V_k^{\text{re}} V_k^{\text{im}}}{V_k^4} + B_{kk} \end{aligned} \right\} \quad (3.42)$$

De las ecuaciones (3.39) a la (3.42), se observa que los elementos de la diagonal del Jacobiano no son constantes, ya que están en función de las partes real e imaginaria de los voltajes nodales,  $V_k^{\text{re}}$  y  $V_k^{\text{im}}$ , respectivamente, las cuales son actualizadas cada iteración.

En base a las ecuaciones anteriores, las submatrices que conforman el Jacobiano se pueden escribir como sigue

$$\mathbf{Y}_{\mathbf{kk}}^* = \begin{bmatrix} \frac{\partial \Delta I_k^{\text{im}}}{\partial V_k^{\text{re}}} & \frac{\partial \Delta I_k^{\text{im}}}{\partial V_k^{\text{im}}} \\ \frac{\partial \Delta I_k^{\text{re}}}{\partial V_k^{\text{re}}} & \frac{\partial \Delta I_k^{\text{re}}}{\partial V_k^{\text{im}}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B'_{kk} & G'_{kk} \\ G''_{kk} & B''_{kk} \end{bmatrix} \quad (3.43)$$

$$\mathbf{Y}_{\mathbf{km}}^* = \begin{bmatrix} \frac{\partial \Delta I_k^{\text{im}}}{\partial V_m^{\text{re}}} & \frac{\partial \Delta I_k^{\text{im}}}{\partial V_m^{\text{im}}} \\ \frac{\partial \Delta I_k^{\text{re}}}{\partial V_m^{\text{re}}} & \frac{\partial \Delta I_k^{\text{re}}}{\partial V_m^{\text{im}}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{km} & G_{km} \\ G_{km} & -B_{km} \end{bmatrix} \quad (3.44)$$

donde,

$$B'_{kk} = B_{kk} - a_k \quad (3.45)$$

$$G'_{kk} = G_{kk} - b_k \quad (3.46)$$

$$G''_{kk} = G_{kk} - c_k \quad (3.47)$$

$$B''_{kk} = -B_{kk} - d_k \quad (3.48)$$

y,

$$a_k = \frac{Q_k^{\text{SP}} [(V_k^{\text{re}})^2 - (V_k^{\text{im}})^2] - 2P_k^{\text{SP}} V_k^{\text{re}} V_k^{\text{im}}}{V_k^4} \quad (3.49)$$

$$b_k = \frac{P_k^{\text{SP}} [(V_k^{\text{re}})^2 - (V_k^{\text{im}})^2] + 2Q_k^{\text{SP}} V_k^{\text{re}} V_k^{\text{im}}}{V_k^4} \quad (3.50)$$

$$c_k = -b_k \quad (3.51)$$

$$d_k = a_k \quad (3.52)$$

Los términos  $a_k$ ,  $b_k$ ,  $c_k$  y  $d_k$ , dependen de la generación y carga especificada. Utilizando las ecuaciones (3.43) y (3.44), la ecuación (3.34) se puede escribir como sigue

$$\begin{bmatrix} \Delta I_1^{\text{im}} \\ \Delta I_1^{\text{re}} \\ \hline \Delta I_2^{\text{im}} \\ \Delta I_2^{\text{re}} \\ \hline \vdots \\ \hline \Delta I_N^{\text{im}} \\ \Delta I_N^{\text{re}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_{11}^* & \mathbf{Y}_{12}^* & \cdots & \mathbf{Y}_{1N}^* \\ \mathbf{Y}_{21}^* & \mathbf{Y}_{22}^* & \cdots & \mathbf{Y}_{2N}^* \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{Y}_{N1}^* & \mathbf{Y}_{N2}^* & \cdots & \mathbf{Y}_{NN}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta V_1^{\text{re}} \\ \Delta V_1^{\text{im}} \\ \hline \Delta V_2^{\text{re}} \\ \Delta V_2^{\text{im}} \\ \hline \vdots \\ \hline \Delta V_N^{\text{re}} \\ \Delta V_N^{\text{im}} \end{bmatrix} \quad (3.53)$$

la cual puede ser escrita en forma compacta como:

$$\Delta \mathbf{I}^{\text{ir}} = \mathbf{Y}^* \Delta \mathbf{V}^{\text{ri}} \quad (3.54)$$

En el caso de un nodo  $i$ , de tipo  $PQ$  sin carga especificada,  $P_i^{\text{sp}}$  y  $Q_i^{\text{sp}}$  son cero, y por lo tanto,

$$\mathbf{Y}_{ii}^* = \begin{bmatrix} B_{ii} & G_{ii} \\ G_{ii} & -B_{ii} \end{bmatrix} \quad (3.55)$$

debe notarse que la submatriz de la ecuación (3.55) correspondiente a la diagonal del Jacobiano es constante, cuyos elementos son iguales a los de la matriz de admitancia nodal.

Nótese que en la ecuación (3.53) la parte imaginaria del desajuste de corriente se ordena primero para que  $\mathbf{Y}^*$  sea diagonal dominante, esto debido a que el valor de los términos de susceptancia,  $B_{km}$ , es mucho mayor que el de los términos de conductancia  $G_{km}$ . Los elementos del Jacobiano correspondientes al nodo *slack* no se incluyen en la ecuación (3.53).

### 3.3.2. Cálculo de los Desajustes de Corriente

Para poder dar solución a las ecuaciones de flujos de potencia basadas en inyecciones de corriente, es necesario calcular el vector de desajustes de corriente, es decir, el vector que se muestra en el lado izquierdo de la ecuación (3.53). Los desajustes de potencia activa y reactiva en el nodo  $k$  están dados por

$$\Delta P_k = P_{Gk} - P_{Lk} - P_k^{\text{cal}} = P_k^{\text{SP}} - P_k^{\text{cal}} = 0 \quad (3.56)$$

$$\Delta Q_k = Q_{Gk} - Q_{Lk} - Q_k^{\text{cal}} = Q_k^{\text{SP}} - Q_k^{\text{cal}} = 0 \quad (3.57)$$

además, se sabe que

$$\bar{I}_k^{\text{cal}} = I_k^{\text{re cal}} + jI_k^{\text{im cal}}, \quad (3.58)$$

sustituyendo las ecuaciones (3.17) y (3.58) en la ecuación (3.18), e igualando parte real y parte imaginaria se obtienen las expresiones de potencia calculada en términos de inyecciones de corriente, (3.59) y (3.60), las cuales son utilizadas en (3.56) y (3.57) para calcular los desbalances de potencia.

$$P_k^{\text{cal}} = V_k^{\text{re}} I_k^{\text{re cal}} + V_k^{\text{im}} I_k^{\text{im cal}} \quad (3.59)$$

$$Q_k^{\text{cal}} = V_k^{\text{im}} I_k^{\text{re cal}} - V_k^{\text{re}} I_k^{\text{im cal}} \quad (3.60)$$

Las ecuaciones de desajuste de corrientes en función de los desajustes de potencia se obtienen al resolver (3.4) para  $\Delta \bar{I}_k$ ,

$$\Delta \bar{I}_k = \frac{\Delta \bar{S}_k^*}{\bar{V}_k^*} = \frac{\Delta P_k - j\Delta Q_k}{V_k^{\text{re}} - jV_k^{\text{im}}} \quad (3.61)$$

cuya descomposición en parte real e imaginaria resulta en,

$$\Delta I_k^{\text{re}} = \frac{\Delta P_k V_k^{\text{re}} + \Delta Q_k V_k^{\text{im}}}{V_k^2} \quad (3.62)$$

$$\Delta I_k^{\text{im}} = \frac{\Delta P_k V_k^{\text{im}} - \Delta Q_k V_k^{\text{re}}}{V_k^2} \quad (3.63)$$

donde  $V_k^2 = (V_k^{\text{re}})^2 + (V_k^{\text{im}})^2$ . Las ecuaciones (3.62) y (3.63) permiten calcular los elementos del vector de desajustes de corriente que aparece en el lado izquierdo de la ecuación (3.53).

### 3.3.3. Ecuaciones para Nodos *PV*

En el caso de nodos *PV* se debe cumplir la restricción de que mientras no se violen límites de generación de potencia reactiva, la magnitud de voltaje del nodo debe de mantenerse constante. Cabe mencionar que en esta investigación se propone un modelado más preciso de nodos *PV* dentro de la formulación de flujos de potencia basada en inyecciones de corriente, ya que se consideran los límites de generación de potencia reactiva del generador, de lo cual no se encontraron antecedentes en la literatura revisada.

Considere un sistema de dos nodos, un nodo *PV* conectado a un nodo *slack* a través de un elemento de transmisión, como el mostrado en la Figura 3.2.



Figura 3.2: Sistema de dos nodos, *slack-PV*.

De acuerdo a la ecuación (3.53), si el nodo *k* fuese del tipo *PQ*, el sistema de la Figura (3.2) queda descrito por la siguiente ecuación,

$$\begin{bmatrix} \Delta I_k^{\text{im}} \\ \Delta I_k^{\text{re}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B'_{kk} & G'_{kk} \\ G''_{kk} & B''_{kk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta V_k^{\text{re}} \\ \Delta V_k^{\text{im}} \end{bmatrix} \quad (3.64)$$

sustituyendo las ecuaciones (3.62) y (3.63) en la ecuación anterior, se obtiene

$$\begin{bmatrix} \frac{V_k^{\text{im}}}{V_k^2} \Delta P_k - \frac{V_k^{\text{re}}}{V_k^2} \Delta Q_k \\ \frac{V_k^{\text{re}}}{V_k^2} \Delta P_k + \frac{V_k^{\text{im}}}{V_k^2} \Delta Q_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B'_{kk} & G'_{kk} \\ G''_{kk} & B''_{kk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta V_k^{\text{re}} \\ \Delta V_k^{\text{im}} \end{bmatrix} \quad (3.65)$$

Asumiendo ahora que el nodo  $k$  es del tipo  $PV$ , la ecuación anterior debe modificarse para incluir la restricción en que la magnitud de voltaje debe mantenerse constante, es decir, el incremento durante el proceso iterativo debe ser cero,

$$\Delta V_k = 0 \quad (3.66)$$

Con la finalidad de incluir (3.66) en el conjunto de ecuaciones linealizadas (3.65), es necesario expresar la ecuación (3.66) en función de  $V_k^{\text{re}}$  y  $V_k^{\text{im}}$ , ya que estas son las variables de estado en esta formulación, y linealizar la ecuación resultante por medio del *Teorema de Taylor*, despreciando los términos de alto orden. La ecuación resultante de este proceso es:

$$V_k^{(i)} = V_k^{(i-1)} + \left. \frac{\partial V_k}{\partial V_k^{\text{re}}} \right|_{V_k^{\text{re}}=V_k^{\text{re}(i-1)}} \left( V_k^{\text{re}(i)} - V_k^{\text{re}(i-1)} \right) + \left. \frac{\partial V_k}{\partial V_k^{\text{im}}} \right|_{V_k^{\text{im}}=V_k^{\text{im}(i-1)}} \left( V_k^{\text{im}(i)} - V_k^{\text{im}(i-1)} \right) \quad (3.67)$$

o bien,

$$\Delta V_k = \left. \frac{\partial V_k}{\partial V_k^{\text{re}}} \right|_{V_k^{\text{re}}=V_k^{\text{re}(i-1)}} \Delta V_k^{\text{re}} + \left. \frac{\partial V_k}{\partial V_k^{\text{im}}} \right|_{V_k^{\text{im}}=V_k^{\text{im}(i-1)}} \Delta V_k^{\text{im}} = 0 \quad (3.68)$$

Derivando la ecuación (3.22) con respecto de  $V_k^{\text{re}}$  y  $V_k^{\text{im}}$  y sustituyendo las expresiones resultan-

tes en la ecuación anterior, se puede escribir la ecuación (3.68) como,

$$\Delta V_k = \frac{V_k^{\text{re}}}{V_k} \Delta V_k^{\text{re}} + \frac{V_k^{\text{im}}}{V_k} \Delta V_k^{\text{im}} = 0 \quad (3.69)$$

La ecuación (3.69) debe incluirse en (3.65) para considerar la restricción de magnitud de voltaje constante en el nodo  $PV$ . Además, el desajuste de potencia reactiva  $\Delta Q_k$  se vuelve una variable dependiente. Las consideraciones anteriores permiten que la ecuación (3.65) se exprese como,

$$\begin{bmatrix} \frac{V_k^{\text{im}}}{V_k^2} \Delta P_k \\ \frac{V_k^{\text{re}}}{V_k^2} \Delta P_k \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B'_{kk} & G'_{kk} & \frac{V_k^{\text{re}}}{V_k^2} \\ G''_{kk} & B''_{kk} & -\frac{V_k^{\text{im}}}{V_k^2} \\ \frac{V_k^{\text{re}}}{V_k} & \frac{V_k^{\text{im}}}{V_k} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta V_k^{\text{re}} \\ \Delta V_k^{\text{im}} \\ \Delta Q_k \end{bmatrix} \quad (3.70)$$

La ecuación anterior puede reducirse al resolver (3.69) para  $\Delta V_k^{\text{re}}$ ,

$$\Delta V_k^{\text{re}} = -\frac{V_k^{\text{im}}}{V_k^{\text{re}}} \Delta V_k^{\text{im}} \quad (3.71)$$

y sustituir la ecuación resultante (3.71) en (3.70), lo que resulta en

$$\begin{bmatrix} \frac{V_k^{\text{im}}}{V_k^2} \Delta P_k \\ \frac{V_k^{\text{re}}}{V_k^2} \Delta P_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G'_{kk} - B'_{kk} \frac{V_k^{\text{im}}}{V_k^{\text{re}}} & \frac{V_k^{\text{re}}}{V_k^2} \\ B''_{kk} - G''_{kk} \frac{V_k^{\text{im}}}{V_k^{\text{re}}} & -\frac{V_k^{\text{im}}}{V_k^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta V_k^{\text{im}} \\ \Delta Q_k \end{bmatrix} \quad (3.72)$$

o bien,

$$\begin{bmatrix} \Delta I_k^{\text{im}\star} \\ \Delta I_k^{\text{re}\star} \end{bmatrix} = \mathbf{Y}_{\mathbf{kk}}^{\star\star} \begin{bmatrix} \Delta V_k^{\text{im}} \\ \Delta Q_k \end{bmatrix} \quad (3.73)$$

donde

$$\Delta I_k^{\text{im}^*} = \frac{V_k^{\text{im}}}{V_k^2} \Delta P_k \quad (3.74)$$

$$\Delta I_k^{\text{re}^*} = \frac{V_k^{\text{re}}}{V_k^2} \Delta P_k. \quad (3.75)$$

Como consecuencia de modelar el nodo  $PV$  de esta manera, la dimensión del Jacobiano se mantiene de  $2N \times 2N$ , con la nueva variable  $\Delta Q_k$  reemplazando  $\Delta V_k^{\text{re}}$  para cada nodo  $PV$ . Además, el Jacobiano cuenta con la misma estructura que la matriz de admitancia nodal, es decir, por cada elemento en la matriz de admitancia nodal existe una submatriz de dimensión  $2 \times 2$  en el Jacobiano.



Figura 3.3: Sistema de dos nodos,  $PQ$ - $PV$ .

Considerando ahora el sistema de la Figura 3.3, con los nodos  $m$  y  $k$  del tipo  $PQ$  y  $PV$ , respectivamente, si consideramos el nodo  $k$  de tipo  $PQ$ , el sistema linealizado de ecuaciones de balance de corriente es,

$$\begin{bmatrix} \Delta I_m^{\text{im}} \\ \Delta I_m^{\text{re}} \\ \Delta I_k^{\text{im}} \\ \Delta I_k^{\text{re}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B'_{mm} & G'_{mm} & B_{mk} & G_{mk} \\ G''_{mm} & B''_{mm} & G_{mk} & -B_{mk} \\ B_{km} & G_{km} & B'_{kk} & G'_{kk} \\ G_{km} & -B_{km} & G''_{kk} & B''_{kk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta V_m^{\text{re}} \\ \Delta V_m^{\text{im}} \\ \Delta V_k^{\text{re}} \\ \Delta V_k^{\text{im}} \end{bmatrix} \quad (3.76)$$

Ahora, como el nodo  $k$  es un nodo  $PV$ , se debe cumplir la restricción (3.66), por lo tanto, se sustituye la ecuación (3.71) en (3.76), lo cual resulta en,

$$\begin{bmatrix} \Delta I_m^{\text{im}} \\ \Delta I_m^{\text{re}} \\ \Delta I_k^{\text{im}\star} \\ \Delta I_k^{\text{re}\star} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B'_{mm} & G'_{mm} & G_{mk} - B_{mk} \frac{V_k^{\text{re}}}{V_k^{\text{im}}} & 0 \\ G''_{mm} & B''_{mm} & -B_{mk} - G_{mk} \frac{V_k^{\text{re}}}{V_k^{\text{im}}} & 0 \\ B_{km} & G_{km} & G'_{kk} - B'_{kk} \frac{V_k^{\text{im}}}{V_k^{\text{re}}} & \frac{V_k^{\text{re}}}{V_k^2} \\ G_{km} & -B_{km} & B''_{kk} - G''_{kk} \frac{V_k^{\text{im}}}{V_k^{\text{re}}} & -\frac{V_k^{\text{im}}}{V_k^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta V_m^{\text{re}} \\ \Delta V_m^{\text{im}} \\ \Delta V_k^{\text{im}} \\ \Delta Q_k \end{bmatrix} \quad (3.77)$$

o bien,

$$\begin{bmatrix} \Delta I_m^{\text{im}} \\ \Delta I_m^{\text{re}} \\ \Delta I_k^{\text{im}\star} \\ \Delta I_k^{\text{re}\star} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_{mm}^{\star} & \mathbf{Y}_{mk}^{\star\star} \\ \mathbf{Y}_{km}^{\star} & \mathbf{Y}_{kk}^{\star\star} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta V_m^{\text{re}} \\ \Delta V_m^{\text{im}} \\ \Delta V_k^{\text{im}} \\ \Delta Q_k \end{bmatrix} \quad (3.78)$$

Así, los nodos *PV* dan lugar a tres tipos de submatrices de dimensiones  $2 \times 2$  en el Jacobiano, las cuales se describen a continuación, la submatriz diagonal correspondiente al nodo *k*, de tipo *PV*, está dada por

$$\mathbf{Y}_{kk}^{\star\star} = \begin{bmatrix} G'_{kk} - B'_{kk} \frac{V_k^{\text{im}}}{V_k^{\text{re}}} & \frac{V_k^{\text{re}}}{V_k^2} \\ B''_{kk} - G''_{kk} \frac{V_k^{\text{im}}}{V_k^{\text{re}}} & -\frac{V_k^{\text{im}}}{V_k^2} \end{bmatrix}. \quad (3.79)$$

Las submatrices fuera de la diagonal asociadas a cualquier rama *k-l*, están dadas por

$$\mathbf{Y}_{lk}^{\star\star} = \begin{bmatrix} G_{lk} - B_{lk} \frac{V_k^{\text{re}}}{V_k^{\text{im}}} & 0 \\ -B_{lk} - G_{lk} \frac{V_k^{\text{re}}}{V_k^{\text{im}}} & 0 \end{bmatrix} \quad (3.80)$$

$$\mathbf{Y}_{kl}^{**} = \mathbf{Y}_{kl}^* = \left[ \begin{array}{c|c} B_{kl} & G_{kl} \\ \hline G_{kl} & -B_{kl} \end{array} \right] \quad (3.81)$$

En el contexto de esta tesis, se utiliza el símbolo  $\star$  para distinguir entre sí, los diferentes tipos de submatrices del Jacobiano, así como también para distinguir los elementos del vector de desajustes de corriente asociados a nodos  $PV$ .

Una vez establecido lo anterior, la ecuación (3.53) para un sistema de tres nodos, donde el nodo  $k$  de tipo  $PV$ , está conectado a dos nodos  $PQ$ ,  $i$  y  $l$ , se muestra a continuación

$$\begin{bmatrix} \vdots \\ \hline \Delta I_i^{im} \\ \Delta I_i^{re} \\ \hline \Delta I_k^{im\star} \\ \Delta I_k^{re\star} \\ \hline \Delta I_l^{im} \\ \Delta I_l^{re} \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ \cdots & \mathbf{Y}_{ii}^* & \mathbf{Y}_{ik}^{**} & \mathbf{Y}_{il}^* & \cdots \\ \cdots & \mathbf{Y}_{ki}^* & \mathbf{Y}_{kk}^{**} & \mathbf{Y}_{kl}^* & \cdots \\ \cdots & \mathbf{Y}_{li}^* & \mathbf{Y}_{lk}^{**} & \mathbf{Y}_{ll}^* & \cdots \\ \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vdots \\ \hline \Delta V_i^{re} \\ \Delta V_i^{im} \\ \hline \Delta V_k^{im} \\ \Delta Q_k \\ \hline \Delta V_l^{re} \\ \Delta V_l^{im} \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (3.82)$$

o de forma compacta,

$$\Delta \mathbf{I}^{ir\star} = \mathbf{Y}^{**} \Delta \mathbf{V}^{ri\star} \quad (3.83)$$

Para obtener los incrementos en las variables de estado, es decir, el cambio en las componentes real e imaginaria del voltaje nodal, se resuelve la ecuación (3.82) para  $\Delta \mathbf{V}^{ri\star}$ . La variable  $\Delta Q_k$  no se actualiza, haya o no violaciones de límites de generación de potencia reactiva.

### 3.3.4. Actualización de Magnitud y Ángulo de Voltaje Nodal

Una vez obtenidos los incrementos en las variables de estado, se deben actualizar los voltajes nodales en su forma polar, para la  $i$ -ésima iteración, las actualizaciones están dadas por

$$V_k^{(i)} = V_k^{(i-1)} + \Delta V_k^{(i)} \quad (3.84)$$

$$\theta_k^{(i)} = \theta_k^{(i-1)} + \Delta \theta_k^{(i)} \quad (3.85)$$

Para poder utilizar las ecuaciones (3.84) y (3.85), es necesario expresarlas en función de los incrementos obtenidos,  $\Delta V_k^{\text{re}}$  y  $\Delta V_k^{\text{im}}$ ,

$$\Delta V_k = f\left(\Delta V_k^{\text{re}}, \Delta V_k^{\text{im}}\right) \quad (3.86)$$

$$\Delta \theta_k = f\left(\Delta V_k^{\text{re}}, \Delta V_k^{\text{im}}\right) \quad (3.87)$$

La ecuación (3.86) se obtuvo en la Sección (3.3.3), ecuación 3.69. Para obtener una ecuación en la forma de (3.87), se sabe que,

$$\theta_k = \tan^{-1}\left(\frac{V_k^{\text{im}}}{V_k^{\text{re}}}\right). \quad (3.88)$$

La ecuación anterior se linealiza aplicando el *Teorema de Taylor* despreciando los términos de alto orden. La expresión resultante es,

$$\theta_k^{(i)} = \theta_k^{(i-1)} + \left. \frac{\partial \theta_k}{\partial V_k^{\text{re}}} \right|_{V_k^{\text{re}}=V_k^{\text{re}(i-1)}} \left( V_k^{\text{re}(i)} - V_k^{\text{re}(i-1)} \right) + \left. \frac{\partial \theta_k}{\partial V_k^{\text{im}}} \right|_{V_k^{\text{im}}=V_k^{\text{im}(i-1)}} \left( V_k^{\text{im}(i)} - V_k^{\text{im}(i-1)} \right) \quad (3.89)$$

o bien,

$$\Delta\theta_k = \left. \frac{\partial\theta_k}{\partial V_k^{\text{re}}} \right|_{V_k^{\text{re}}=V_k^{\text{re}(i-1)}} \Delta V_k^{\text{re}} + \left. \frac{\partial\theta_k}{\partial V_k^{\text{im}}} \right|_{V_k^{\text{im}}=V_k^{\text{im}(i-1)}} \Delta V_k^{\text{im}} \quad (3.90)$$

Derivando la ecuación (3.88) con respecto de  $V_k^{\text{re}}$  y  $V_k^{\text{im}}$  y sustituyendo las expresiones resultantes en la ecuación anterior, se obtiene una expresión en la forma de (3.87), de manera que las actualizaciones en coordenadas polares para la  $i$ -ésima iteración quedan expresadas por,

$$\Delta V_k^{(i)} = \frac{V_k^{\text{re}(i-1)}}{V_k^{(i-1)}} \Delta V_k^{\text{re}(i)} + \frac{V_k^{\text{im}(i-1)}}{V_k^{(i-1)}} \Delta V_k^{\text{im}(i)} \quad (3.91)$$

$$\Delta\theta_k^{(i)} = \frac{V_k^{\text{re}(i-1)}}{V_k^{2(i-1)}} \Delta V_k^{\text{im}(i)} - \frac{V_k^{\text{im}(i-1)}}{V_k^{2(i-1)}} \Delta V_k^{\text{re}(i)} \quad (3.92)$$

Para actualizar la magnitud y ángulo de voltaje de nodos  $PQ$ , se utilizan directamente las ecuaciones (3.84) y (3.85). En nodos  $PV$  los incrementos obtenidos son  $\Delta V_k^{\text{im}}$  y  $\Delta Q_k$ , pero la variable  $\Delta Q_k$  no tiene efecto en la actualización, el manejo de esta variable se explica en la Sección 3.4. La actualización de la magnitud y el ángulo de voltaje de nodos  $PV$ , requiere del cálculo de  $\Delta V_k^{\text{re}}$  por medio de la ecuación (3.71), y el resultado se sustituye en (3.91) y (3.92). El resultado de la sustitución anterior en la ecuación de incremento de voltaje siempre será cero mientras no haya violación de límites de generación de potencia reactiva, por lo tanto, para nodos de tipo  $PV$  solo se actualiza el ángulo de fase del voltaje nodal.

Los voltajes actualizados deben ser expresados en coordenadas rectangulares al inicio de la siguiente iteración. Cabe notar que el método FPIC exhibe una característica de convergencia cuadrática.

### 3.4. Manejo de Nodos $PV$

En los nodos de tipo  $PV$  la generación de potencia reactiva está dada por  $Q_{Gk} = Q_{Lk} + Q_k^{\text{cal}}$ . La solución de la ecuación (3.60), para nodos  $PV$  se realiza cada iteración para evaluar si la potencia reactiva aportada por el generador conectado al nodo  $k$  se encuentra dentro de límites operativos,

es decir,

$$Q_{G_{k\text{mín}}} < Q_{G_k} < Q_{G_{k\text{máx}}} \quad (3.93)$$

Mientras no haya violación de límites de generación de potencia reactiva, el desajuste de potencia reactiva en nodos *PV* se considera cero,  $\Delta Q_k = 0$ . Si durante el proceso iterativo ocurre alguna de las siguientes condiciones:

$$\left. \begin{array}{l} Q_{G_k} \geq Q_{G_{k\text{máx}}} \\ Q_{G_k} \leq Q_{G_{k\text{mín}}} \end{array} \right\} \quad (3.94)$$

el nodo *k* se convierte en nodo *PQ generador*, y el desajuste de potencia reactiva quedará dado por la siguiente expresión,

$$\left. \begin{array}{l} \Delta Q_k = Q_{G_{k\text{máx}}} - Q_{Lk} - Q_k^{\text{cal}} \\ \Delta Q_k = Q_{G_{k\text{mín}}} - Q_{Lk} - Q_k^{\text{cal}} \end{array} \right\} \quad (3.95)$$

dependiendo del límite violado. Además, se libera la magnitud del voltaje nodal del nodo *k*, es decir, ya no permanecerá constante durante el resto del proceso iterativo, de manera que  $V_k$  se convierte en una variable de estado.

Se debe notar que, el nodo *k* puede regresar a nodo *PV generador*, si durante el proceso iterativo se obtiene una mejor estimación de  $Q_k^{\text{cal}}$ , calculada con valores de voltaje nodal más precisos, y que este valor indique que el generador conectado al nodo *k* puede aportar la potencia reactiva requerida por dicho nodo. Por lo tanto, la verificación de violación de límites de potencia reactiva de los generadores se realiza cada iteración.

En la experiencia que se tiene programando algoritmos para resolver el problema de flujos de potencia, se ha observado que la verificación de límites en los generadores se debe llevar a cabo después de la segunda o tercera iteración, ya que los valores calculados al inicio del proceso iterativo pueden tener grandes diferencias con los correctos, lo cual resulta en falsos requerimientos de

potencia reactiva. El cambio de nodo  $PV$  a nodo  $PQ$  y viceversa suponen esfuerzo numérico adicional en el proceso iterativo, como consecuencia, al ocurrir dichos cambios se retarda la convergencia [Acha et al., 2004].

### 3.5. Algoritmo FPIC

Los pasos a seguir para resolver el problema de flujos de potencia mediante la formulación basada en inyecciones de corriente son los siguientes:

**Paso 1:** Formar la Matriz de Admitancia Nodal,  $\mathbf{Y}_{\text{bus}}$ .

Inicializar las variables de estado,  $V_k$  y  $\theta_k$ , para  $k = 1, \dots, N$ .

Inicializar el contador de iteraciones  $it = 0$ .

Expresar en coordenadas rectangulares los voltajes nodales.

**Paso 2:** Calcular las inyecciones de corriente calculadas,  $\Delta I_k^{\text{re cal}}$  y  $\Delta I_k^{\text{im cal}}$ , ecuaciones (3.32) y (3.33).

Calcular las potencias inyectadas,  $P_k^{\text{cal}}$  y  $Q_k^{\text{cal}}$ , ecuaciones (3.59) y (3.60).

**Paso 3:** Verificar límites de generación de potencia reactiva en los generadores, ecuación (3.93).

Calcular los desajustes de potencia,  $\Delta P_k$  y  $\Delta Q_k$ , ecuaciones (3.56) y (3.57).

**Paso 4:** Si  $(\max(\Delta \mathbf{P}, \Delta \mathbf{Q}) > \text{tolerancia}) \ \& \ (it \leq \text{máximo de iteraciones})$  :

**entonces:** Formar el vector de desajustes de corriente, ecuaciones (3.62),(3.63) y/o (3.74), (3.75).

Formar el Jacobiano y resolver para el vector de correcciones, ec. (3.83).

Actualizar magnitud y ángulo de voltajes nodales, ecuaciones (3.91) y (3.92),  $it = it + 1$ .

**si no:** Ir al paso 5.

**Paso 5:** Imprimir Resultados.

El diagrama de flujo del algoritmo FPIC se muestra en la Figura 3.4.

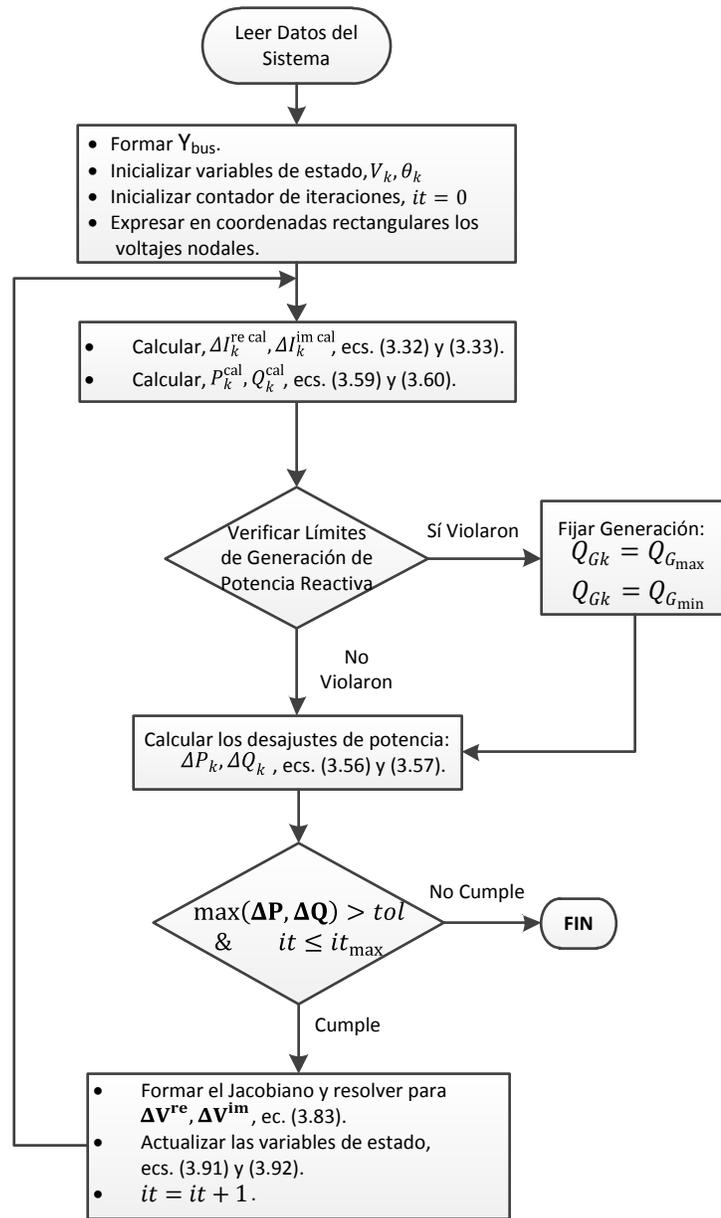


Figura 3.4: Diagrama de flujo del algoritmo FPIC.

### 3.6. Casos de Estudio

En esta Sección se presentan resultados de análisis de flujos de potencia realizados mediante el método de inyecciones de corriente (FPIC), para sistemas eléctricos de 5, 14 y 57 nodos, es decir,



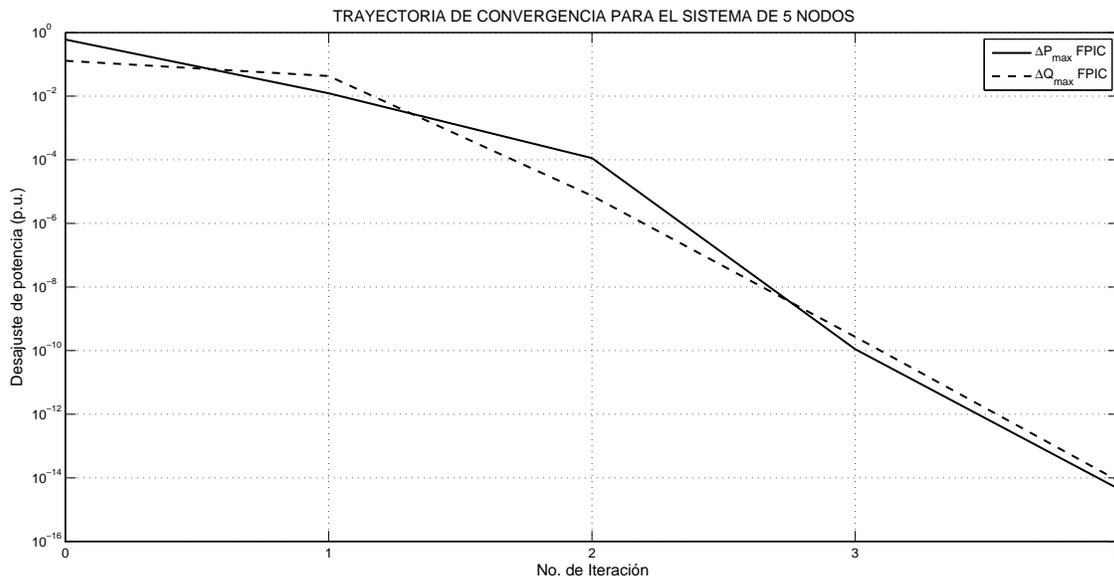


Figura 3.6: Trayectoria de convergencia que sigue el método FPIC al resolver el sistema de 5 nodos.

Tabla 3.1: Resultados obtenidos con el método FPIC para el sistema de 5 nodos.

Nodo	Voltaje Nodal	
	V (p.u.)	$\theta$ ( $^{\circ}$ )
North	1.06	0
South	1.0	-2.0612
Lake	0.9872	-4.6367
Main	0.9841	-4.9570
Elm	0.9717	-5.7649

Tabla 3.2: Resultados de generación en nodos PV obtenidos con el método FPIC para el sistema de 5 nodos.

Nodo	Generación
	Q (p.u.)
South	-0.615929

De la Figura 3.6 se observa que el método FPIC alcanza la tolerancia prescrita en la cuarta iteración, los generadores se encuentran dentro de límites de generación de potencia reactiva de acuerdo a la Tabla 3.2.

### 3.6.2. Sistema IEEE-14 Nodos

La solución al estudio de flujos de potencia del sistema IEEE-14 nodos de la Figura 3.7 mediante el método FPIC se muestra en la Tabla 3.3. La característica de convergencia se ilustra en la Figura 3.8.

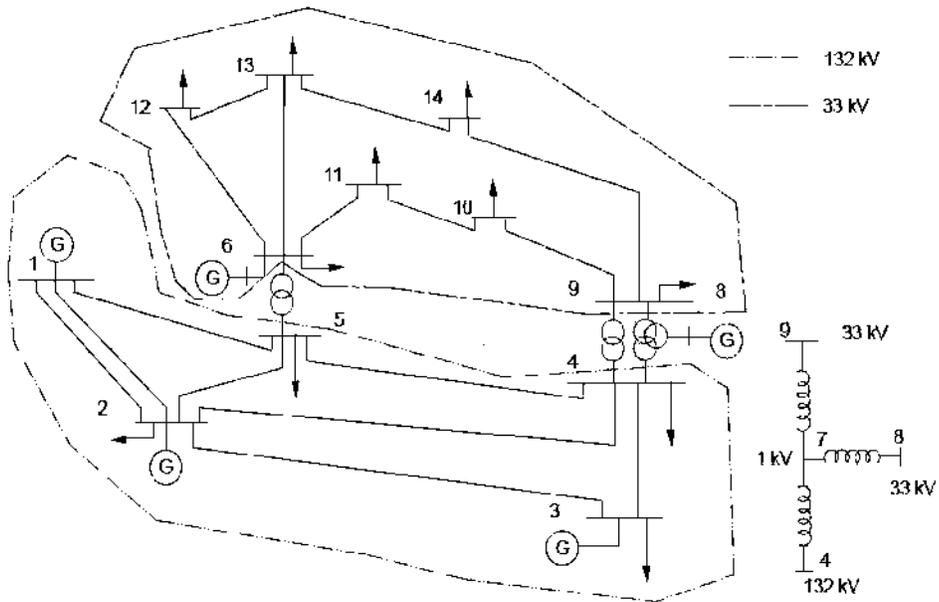


Figura 3.7: Sistema IEEE-14 nodos.

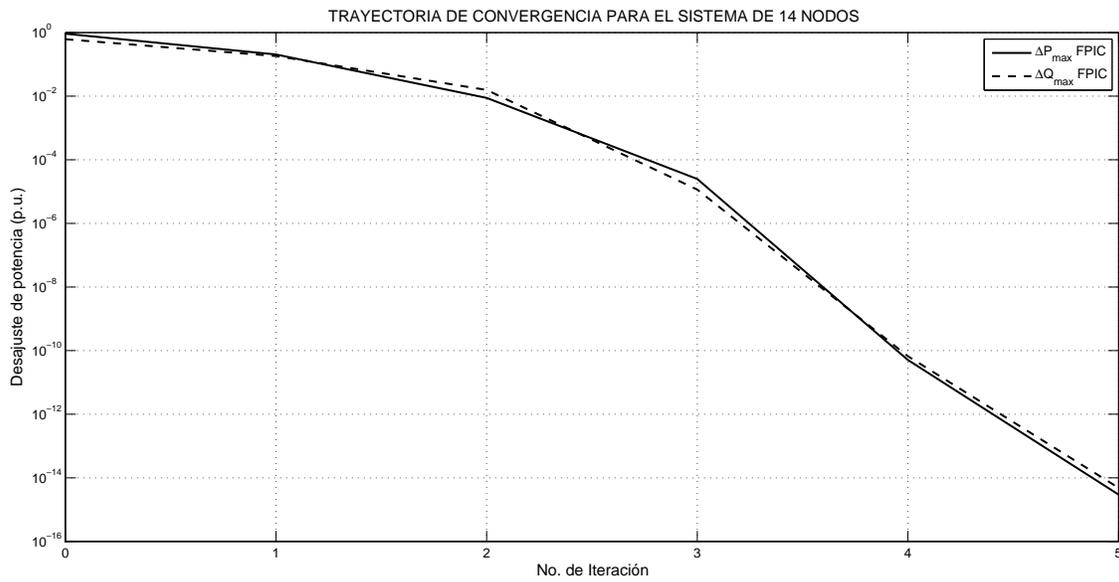


Figura 3.8: Trayectoria de convergencia que sigue el método FPIC al resolver el sistema IEEE-14 nodos.

Tabla 3.3: Resultados de FPIC para el sistema IEEE-14 nodos.

Nodo	Voltaje Nodal		Nodo	Voltaje Nodal	
	V (p.u.)	$\theta$ (°)		V (p.u.)	$\theta$ (°)
1	1.06	0	8	1.09	-13.3682
2	1.045	-4.981	9	1.0564	-14.9466
3	1.01	-12.718	10	1.0513	-15.1043
4	1.0186	-10.3242	11	1.0571	-14.7953
5	1.0203	-8.78258	12	1.0552	-15.0774
6	1.07	-14.2227	13	1.0504	-15.1589
7	1.062	-13.3682	14	1.0358	-16.0389

Tabla 3.4: Generación en nodos PV obtenida con el método FPIC para el sistema IEEE-14 nodos.

Nodo	Generación
	Q (p.u.)
2	0.423965
3	0.233936
6	0.122404
8	0.173566

Tabla 3.5: Inyección de potencia reactiva de los compensadores fijos en derivación, obtenida con el método FPIC para el sistema IEEE-14 nodos.

<i>Nodo Compensado</i>	<i>Q inyectada (p.u.)</i>
9	-0.212015

En la figura 3.8 se observa que el método converge a la tolerancia especificada en la quinta iteración. Además, no hay violación de límites de generación de potencia reactiva en los generadores conectados al sistema.

### 3.6.3. Sistema IEEE-57 Nodos

La solución al estudio de flujos de potencia del sistema IEEE-57 nodos obtenida con el método FPIC se muestra en la Tabla 3.3, la trayectoria de convergencia es mostrada en la Figura 3.9.

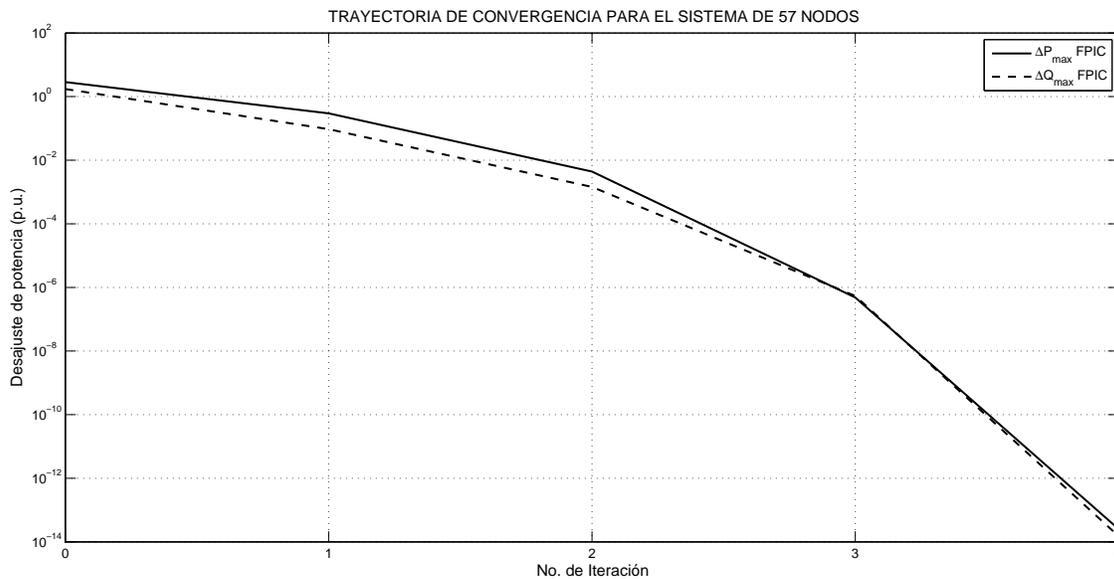


Figura 3.9: Trayectoria de convergencia que sigue el método FPIC al resolver el sistema IEEE-57 nodos.

Tabla 3.6: Resultados de FPIC para el sistema IEEE-57 nodos.

Nodo	Voltaje Nodal		Nodo	Voltaje Nodal	
	V (p.u.)	$\theta$ (°)		V (p.u.)	$\theta$ (°)
1	1.04	0	30	0.9629	-18.7182
2	1.01	-1.1881	31	0.9361	-19.3822
3	0.985	-5.9878	32	0.9501	-18.5114
4	0.9808	-7.337	33	0.9478	-18.551
5	0.9765	-8.5458	34	0.9594	-14.1498
6	0.98	-8.6735	35	0.9664	-13.9072
7	0.9842	-7.6007	36	0.976	-13.6359
8	1.005	-4.4772	37	0.9851	-13.4473
9	0.98	-9.584	38	1.013	-12.737
10	0.9863	-11.4489	39	0.983	-13.4923
11	0.974	-10.1932	40	0.973	-13.6592
12	1.015	-10.4707	41	0.9963	-14.0759
13	0.9789	-9.804	42	0.9666	-15.5326
14	0.9702	-9.351	43	1.0096	-11.3542
15	0.9881	-7.1905	44	1.017	-11.8579
16	1.0134	-8.8586	45	1.0361	-9.2701
17	1.0175	-5.3957	46	1.0599	-11.1162
18	1.0007	-11.7289	47	1.0334	-12.5121
19	0.9703	-13.2274	48	1.0276	-12.6119
20	0.9639	-13.4463	49	1.0365	-12.9378
21	1.0087	-12.9306	50	1.0235	-13.4131
22	1.01	-12.8762	51	1.0523	-12.5322
23	1.0086	-12.9413	52	0.9804	-11.4966
24	0.9994	-13.2928	53	0.971	-12.2516
25	0.9827	-18.172	54	0.9963	-11.7087
26	0.959	-12.9822	55	1.0308	-10.8003
27	0.9816	-11.5134	56	0.9685	-16.0656
28	0.9967	-10.481	57	0.965	-16.5845
29	1.0103	-9.7708			

Tabla 3.7: Generación en nodos *PV* obtenida con el método FPIC para el sistema IEEE-57 nodos.

<i>Nodo</i>	<i>Generación</i>
	<i>Q (p.u.)</i>
2	-0.007553
3	-0.009867
6	0.008576
8	0.620849
9	0.021991
12	1.28518

Tabla 3.8: Inyección de potencia reactiva de los compensadores fijos en derivación, obtenida con el método FPIC para el sistema IEEE-57 nodos.

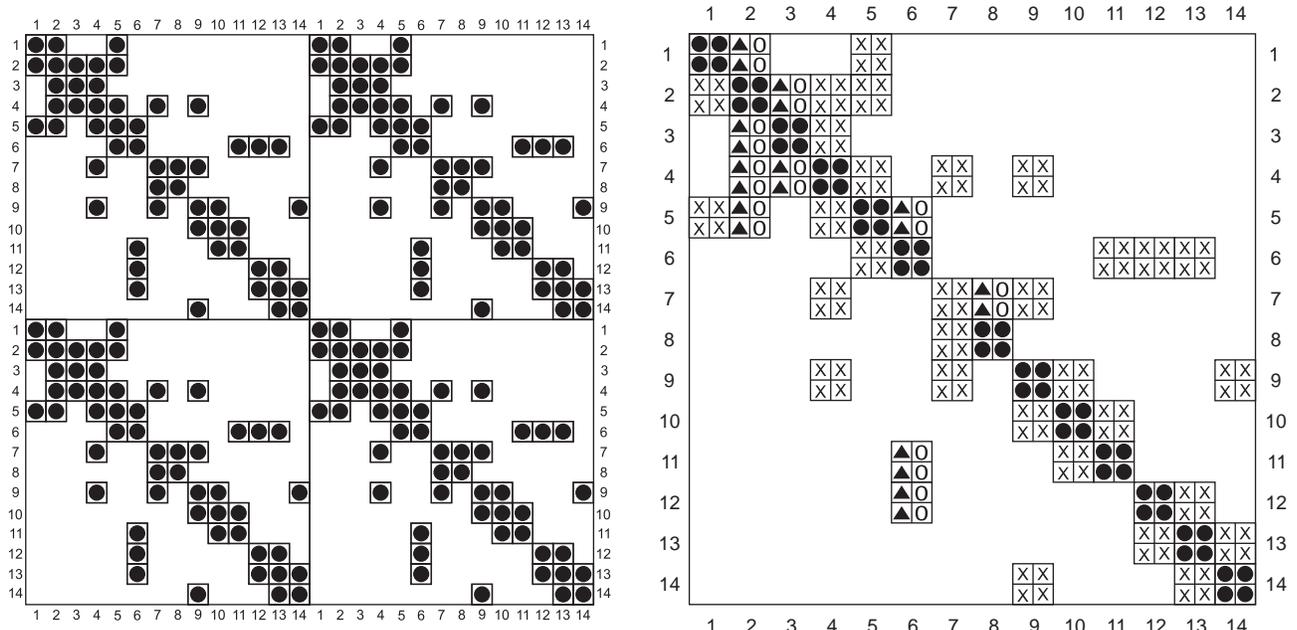
<i>Nodo Compensado</i>	<i>Q inyectada (p.u.)</i>
18	-0.100137
25	-0.056977
53	-0.059395

De la Tabla 3.7 se observa que todos los nodos que cuentan con generador, están dentro de sus límites de generación de potencia reactiva, por lo tanto el voltaje en los nodos *PV* se mantiene constante, en este caso, el método FPIC converge a la tolerancia especificada en la cuarta iteración de acuerdo a la Figura 3.9.

### 3.7. Análisis Comparativo con el Método Basado en Inyecciones de Potencia

El método FPIC presentado en este Capítulo se compara con el método convencional, FPNR, para saber las ventajas y desventajas que presentan entre sí. El método FPIC presenta una característica de gran importancia, la mayoría de los elementos del Jacobiano permanecen constantes durante el proceso iterativo, excepto los elementos de la diagonal y los correspondientes a nodos *PV*, en cambio, en el método FPNR se deben recalcular todos los elementos del Jacobiano en cada

iteración. Esta característica del método FPIC tiene como consecuencia una reducción importante en términos de esfuerzo computacional al ser implementado.



a) Estructura de la matriz jacobiana del método FPNR, para el sistema IEEE-14 nodos.

b) Estructura de la matriz jacobiana del método FPIC, para el sistema IEEE-14 nodos.

- X = Elementos de la Matriz de Admitancia Nodal.
- O = Elementos nulos.
- = Elementos recalculados en cada iteración.
- ▲ = Elementos asociados a nodos PV, también recalculados en cada iteración.

Figura 3.10: Estructura de los Jacobianos de los métodos FPNR y FPIC, para el sistema IEEE-14 nodos.

En la Figura 3.10 se muestra la estructura del Jacobiano FPIC y del Jacobiano FPNR sin omitir los elementos correspondientes a nodos *PV* y *slack*, se observa que la cantidad de elementos que hay que recalcularse en cada iteración es mucho mayor en el Jacobiano FPNR. Omitiendo las ecuaciones del nodo *slack* y aquellas asociadas a nodos *PV*, en el Jacobiano FPNR asociado al sistema IEEE-14 nodos hay que recalcular 146 elementos en cada iteración, mientras que en el Jacobiano FPIC hay que recalcular solamente 68 elementos en cada iteración. La cantidad de elementos a recalcularse en el método FPNR es más de dos veces mayor que en el método FPIC.

Comparando los resultados obtenidos en la Sección 2.6 con los obtenidos en la Sección 3.6, se observa que no hay diferencia alguna en los resultados arrojados por los análisis realizados a los

sistemas de prueba. Sin embargo, existen algunas diferencias entre las iteraciones que les toma a ambos métodos, FPNR y FPIC, alcanzar la tolerancia de convergencia especificada. En las Figuras 3.11 y 3.12 se comparan la magnitud y el ángulo de voltaje obtenidos con ambos métodos.

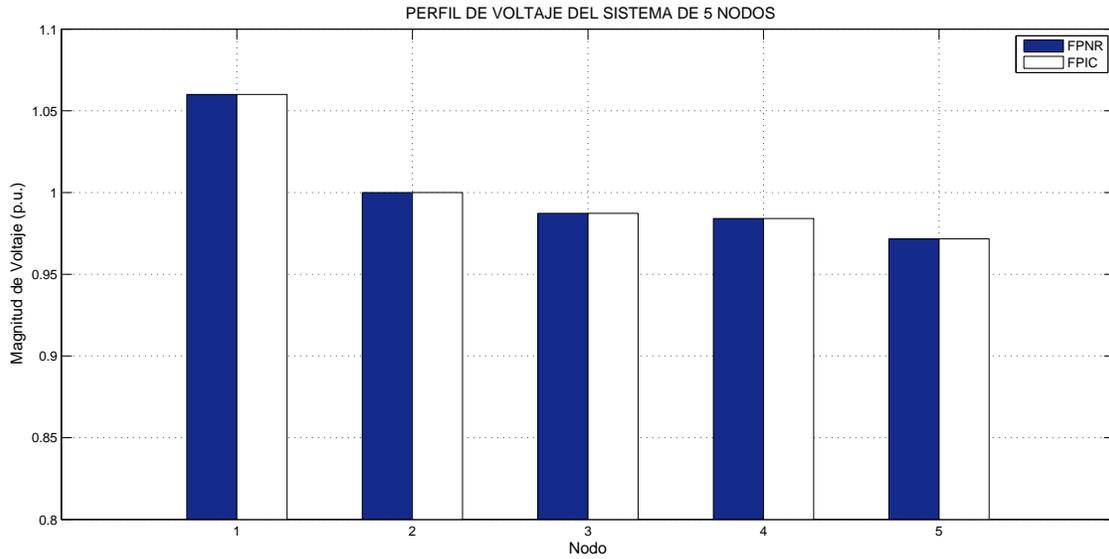


Figura 3.11: Perfil de magnitud de voltaje obtenido con los métodos FPNR y FPIC para el sistema de 5 nodos.

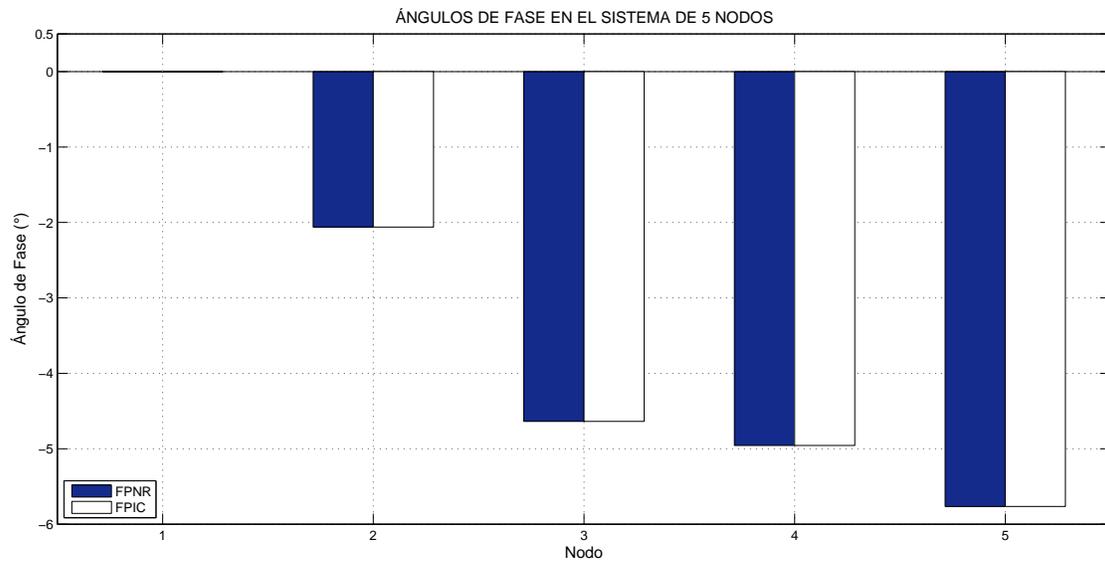


Figura 3.12: Ángulos de voltaje obtenidos con los métodos FPNR y FPIC para el sistema de 5 nodos.

Las trayectorias de convergencia que presentan ambos métodos son similares, estas se muestran en la Figura 3.13, se observa que ambos métodos convergen para una tolerancia de  $1 \times 10^{-12}$  en la cuarta iteración.

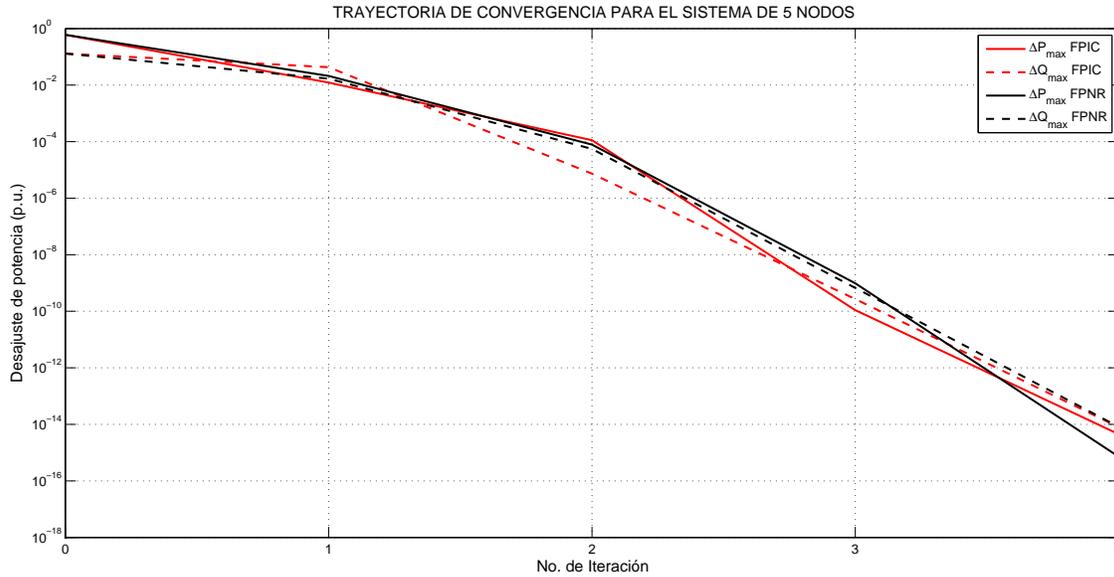


Figura 3.13: Trayectoria de convergencia de los métodos FPNR y FPIC al resolver el sistema de 5 nodos.

De manera similar, las figuras 3.14 y 3.15 comparan los resultados obtenidos con ambos métodos, para el sistema IEEE-14 nodos. Se puede observar que no hay diferencia alguna en los resultados obtenidos, de la trayectoria de convergencia para el sistema IEEE-14 nodos que se muestra en la Figura 3.16, se observa que mientras el FPNR converge en 4 iteraciones, el FPIC lo hace en 5 iteraciones.

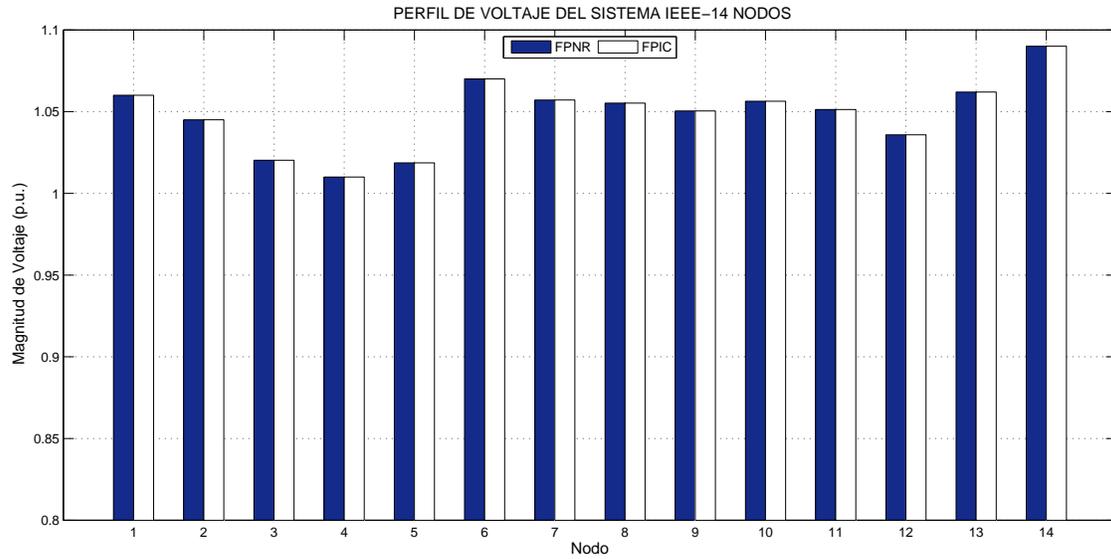


Figura 3.14: Perfil de magnitud de voltaje obtenido con los métodos FPNR y FPIC para el sistema IEEE-14 nodos.

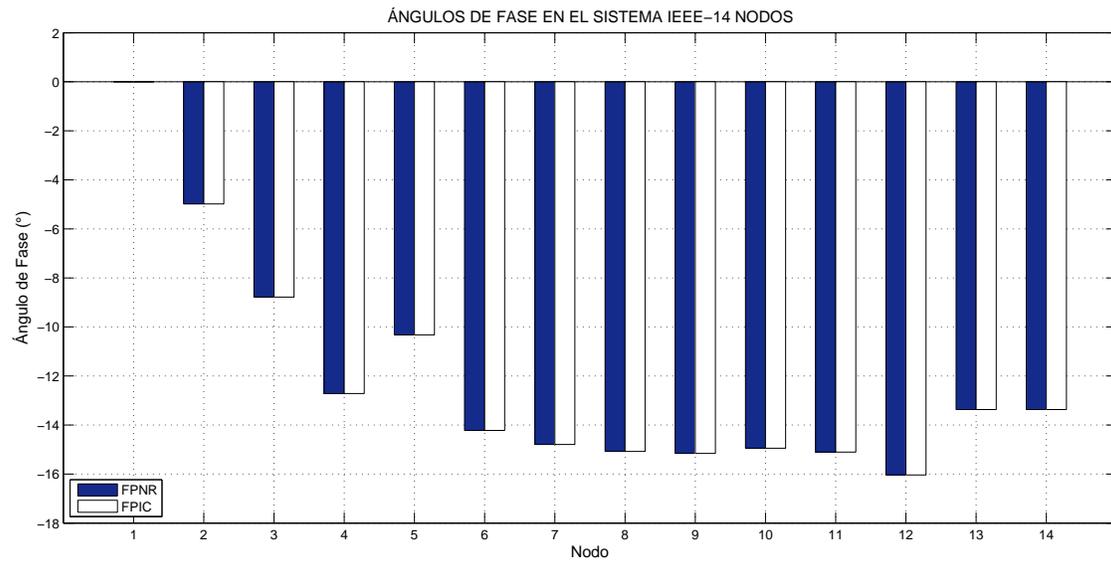


Figura 3.15: Ángulos de voltaje obtenidos con los métodos FPNR y FPIC para el sistema IEEE-14 nodos.

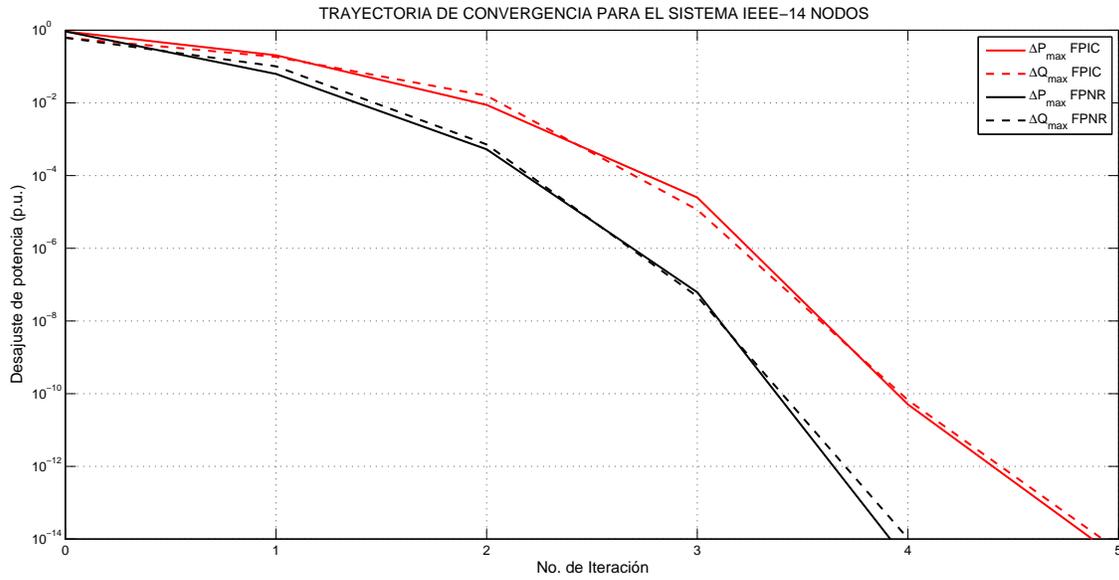


Figura 3.16: Trayectoria de convergencia de los métodos FPNR y FPIC al resolver el sistema IEEE-14 nodos.

Las Figuras 3.17 y 3.18, comparan de manera gráfica los resultados obtenidos para magnitud de voltaje y ángulo de fase, respectivamente, para el sistema IEEE-57 nodos. Se observa que no hay diferencias entre los resultados obtenidos por ambos métodos.

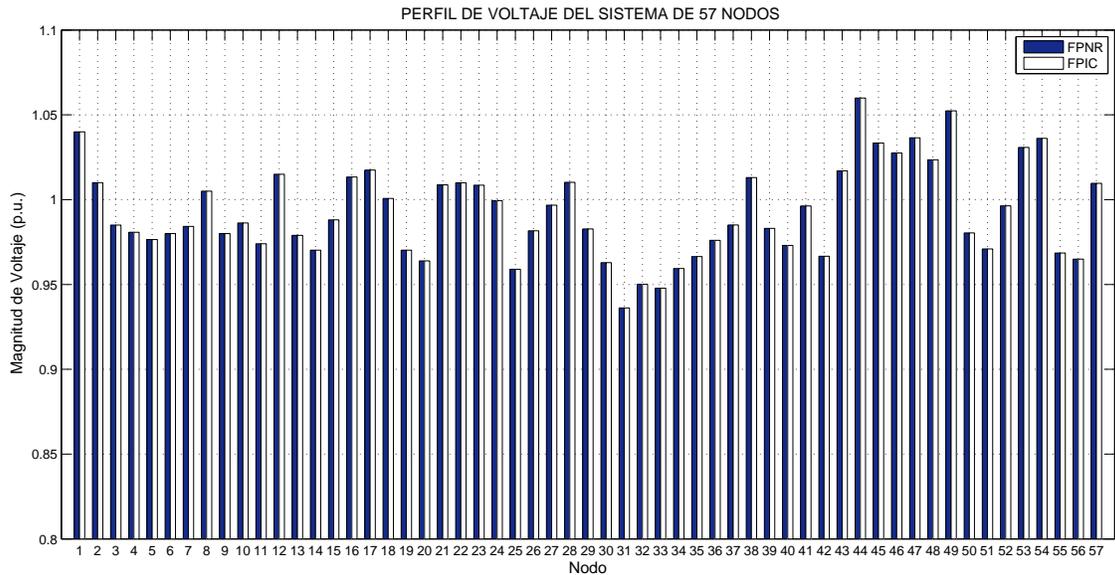


Figura 3.17: Perfil de magnitud de voltaje obtenido con los métodos FPNR y FPIC para el sistema IEEE-57 nodos.

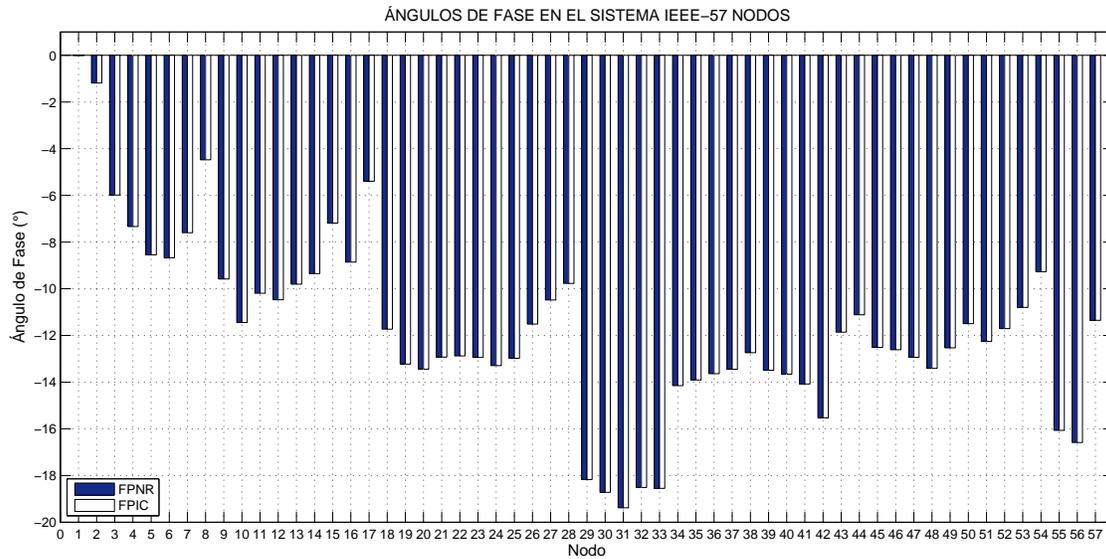


Figura 3.18: Ángulos de voltaje obtenidos con los métodos FPNR y FPIC para el sistema IEEE-57 nodos.

Contrario a lo que ocurre en la solución del sistema IEEE-14 nodos, para el sistema IEEE-57 nodos el método FPIC converge una iteración antes que el método FPNR, es decir, el método FPIC converge en 4 iteraciones, mientras que el método FPNR converge en 5 iteraciones como se muestra en la Figura 3.19. Además, se observa que en la cuarta iteración el método FPNR está muy cerca de cumplir con la tolerancia de  $1 \times 10^{-12}$ , si se cambia la tolerancia a  $1 \times 10^{-10}$ , ambos convergen en 4 iteraciones.

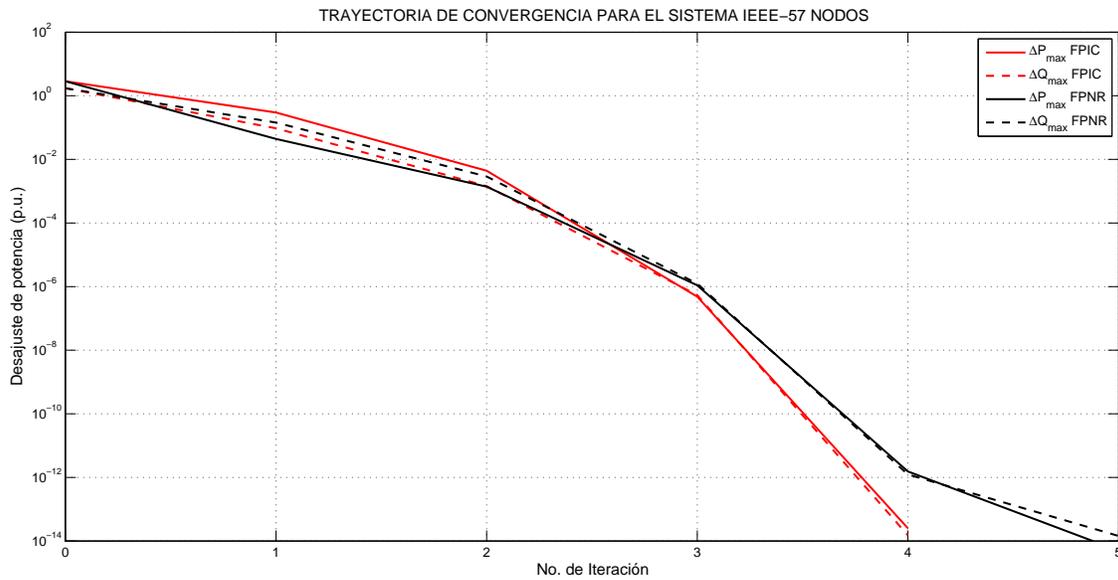


Figura 3.19: Trayectoria de convergencia de los métodos FPNR y FPIC al resolver el sistema IEEE-57 nodos.

### 3.7.1. Comparación del Tiempo de Cálculo entre los Métodos FPNR y FPIC

En la presente Subsección se miden y comparan los tiempos de cálculo que les toma a los métodos FPNR y FPIC resolver los sistemas de 5 nodos, IEEE-14 nodos, IEEE-57 nodos. Además, con el fin de obtener una medición adicional, se incluye el tiempo de cálculo de la solución del sistema de 79 nodos que se utiliza en el Capítulo 5 y cuyos datos se encuentran en el Apéndice A. Las mediciones de tiempo se realizan con el objetivo de observar el efecto que tiene el hecho de que la mayoría de los elementos del Jacobiano FPIC permanezcan constantes durante el proceso iterativo en el cálculo. Para realizar la comparación de los tiempos de cálculo se utiliza una computadora con un procesador *Intel Core i3 M370 @ 2.40 GHz*, con un sistema operativo a 64 bits y 4 Gb de memoria RAM. Ambos métodos fueron implementados en el software *Matlab®*, versión R2010a. Al realizar las simulaciones se observó que los tiempos de ejecución varían, para realizar una comparación más objetiva se optó por realizar diez simulaciones para cada uno de los sistemas, eliminar el máximo y el mínimo de las mediciones obtenidas, y calcular el tiempo promedio de las mediciones restantes, el cual se reporta en la Tabla 3.9.

No. de nodos del sistema	$t_{FPNR}$ (ms)	$t_{FPIC}$ (ms)	$t_{FPIC}$ en % del $t_{FPNR}$
5	6.9301	5.5477	80.0527
14	19.2508	15.9326	82.7634
57	189.6637	95.0650	50.1229
79	335.8208	190.72	56.7922

Tabla 3.9: Tiempos de cálculo obtenidos con los métodos FPNR y FPIC al resolver los diferentes sistemas de prueba.

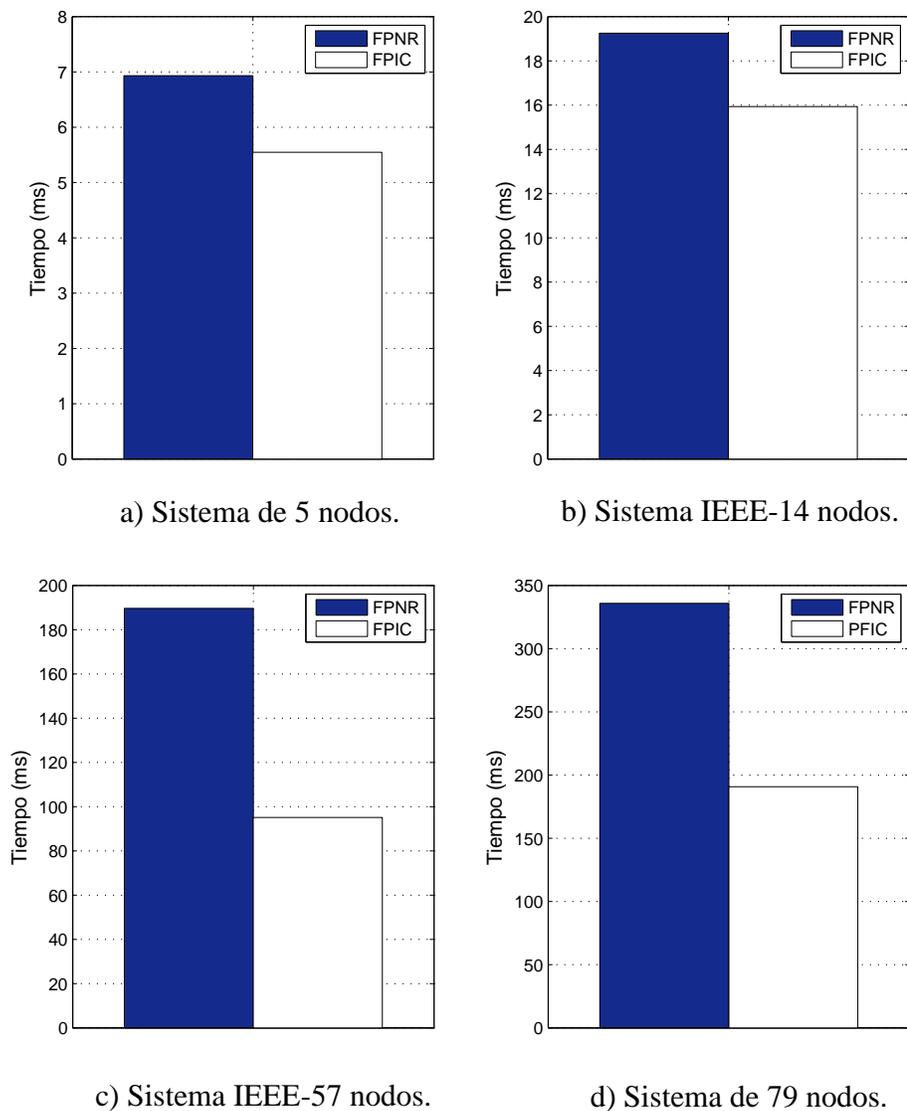


Figura 3.20: Comparación de tiempos de cálculo entre los métodos FPNR y FPIC.

En los datos que se muestran en la Tabla 3.9, se observa que para los sistemas de 5 y 14 nodos, se registra una disminución en el tiempo de cálculo del método FPIC de alrededor del 20% con respecto al obtenido con el método FPNR. Además, en la solución de los sistemas de 57 y 79 nodos, la disminución del tiempo de cálculo se hace más evidente, se observa que el método FPIC obtiene la solución aproximadamente en la mitad del tiempo en que lo hace el método FPNR. Los datos de la Tabla 3.9 se comparan gráficamente en la Figura 3.20.

### **3.8. Observaciones sobre el Método**

En esta Sección se presentan algunas observaciones asociadas al método de inyecciones de corriente relacionadas a las circunstancias en las cuales puede fallar, y si es posible hacer algo para que esto deje de ocurrir; para esto se utilizará un sistema de prueba, el sistema IEEE-11 nodos. Se utiliza este sistema debido a que no cuenta con un gran número de nodos y los resultados se pueden analizar con mayor facilidad, los datos de este sistema se encuentran situados en el Apéndice A. La trayectoria de convergencia que siguen ambos métodos al resolver el sistema en cuestión es la que se muestra en la Figura 3.21, se observa que el método FPNR converge en 6 iteraciones mientras que el método FPIC no converge.

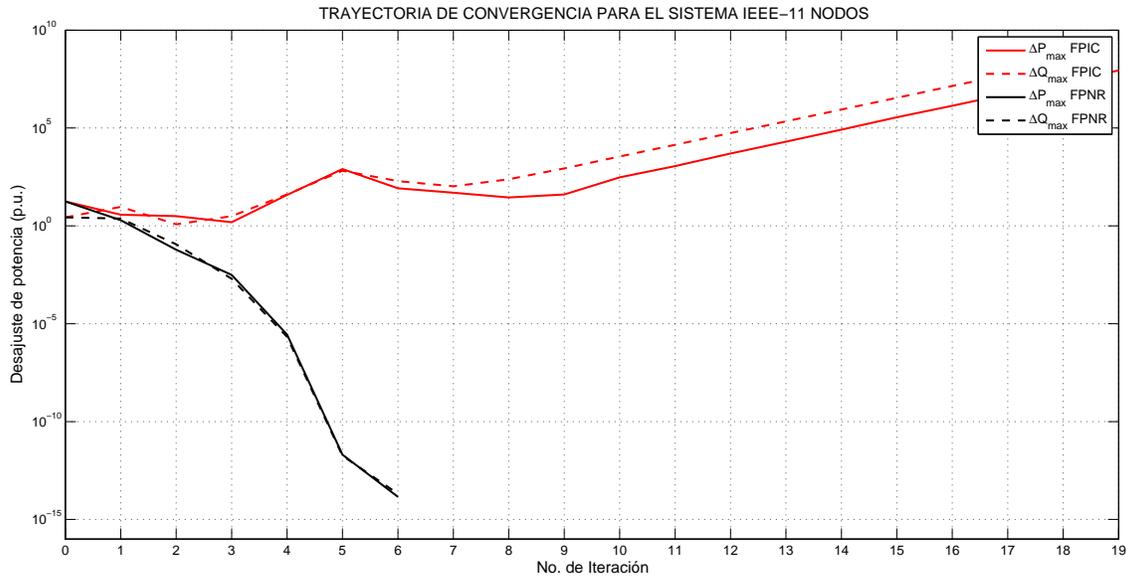


Figura 3.21: Trayectoria de convergencia de los métodos FPNR y FPIC al resolver el sistema IEEE-11 nodos.

En general, a los métodos iterativos como lo es el Newton-Raphson se les debe proporcionar una condición inicial que este lo suficientemente cercana a la solución real para que convergan, si el estimado inicial no está lo suficientemente cerca de la solución, el método puede llevar a soluciones erróneas e incluso diverger. En particular, la formulación basada en inyecciones de corriente tiene un problema de convergencia al resolver el sistema IEEE-11. Para el punto de operación del sistema dado por los datos reportados en el Apéndice A y las condiciones iniciales dadas como se definió anteriormente el método FPNR converge, mientras que el método FPIC no lo hace. Sin embargo, si se disminuye en 100 MW la carga conectada al nodo 9 resulta que ambos métodos convergen con las trayectorias mostrada en la Figura 3.22, al método FPIC le toma tres iteraciones más alcanzar la tolerancia especificada.

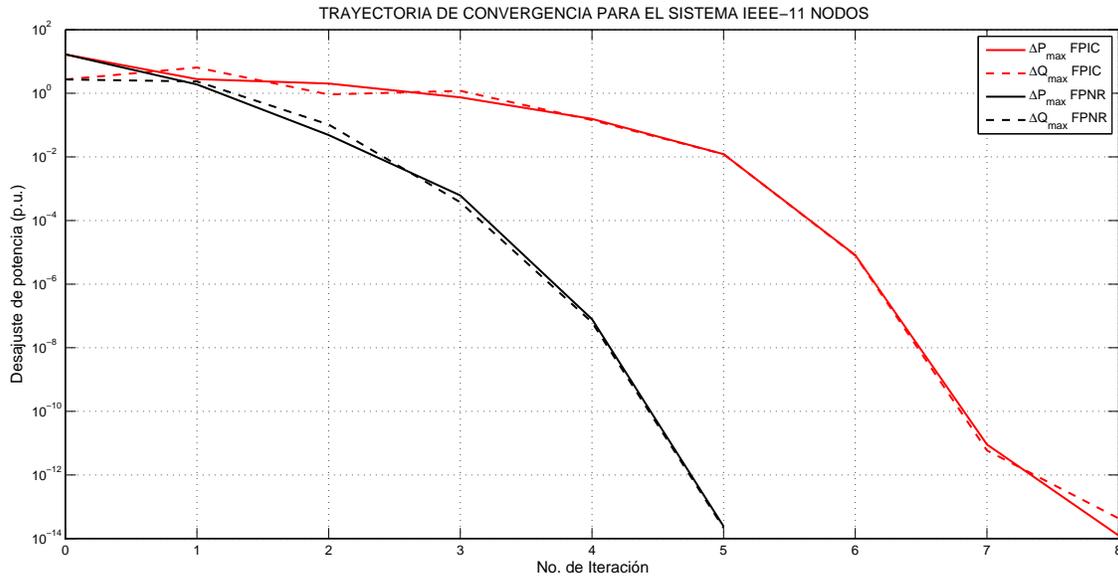


Figura 3.22: Trayectoria de convergencia de los métodos FPNR y FPIC al resolver el sistema IEEE-11 nodos disminuyendo en 100 MW la carga del nodo 9.

Se plantean dos casos más, un segundo caso en donde se disminuye en 200 MW la carga conectada al nodo 9, y un tercer caso en donde se disminuye en 350 MW la carga conectada a este nodo. En la Figura 3.23 se muestran las trayectorias de convergencia asociadas a los tres casos, ambas formulaciones se resuelven mediante el algoritmo Newton-Raphson. Se observa que a medida que se incrementa la carga es más probable que el método FPIC deje de converger a que lo haga el método FPNR, así que el método FPNR es más robusto en este aspecto. Una característica adicional es que a medida que se disminuye la carga en el sistema, la trayectoria de convergencia descrita por el método FPIC se asemeja más a la descrita por el método FPNR; además, la trayectoria de convergencia del método FPNR no cambia mucho al disminuir la carga, contrario a lo que ocurre con el método FPIC en donde se observa un cambio más pronunciado.

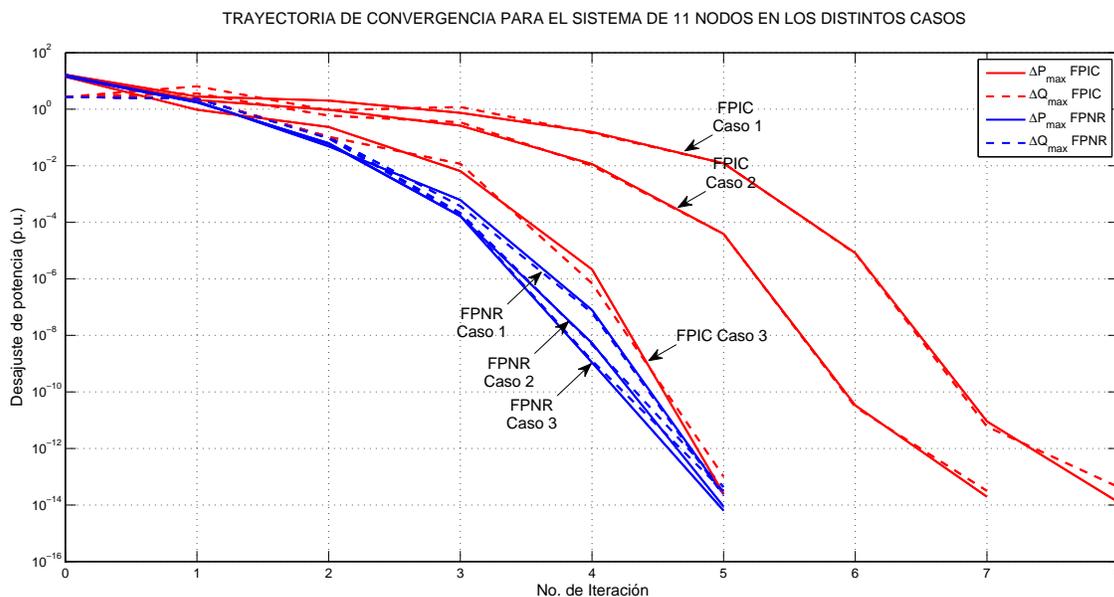


Figura 3.23: Trayectoria de convergencia de los métodos FPNR y FPIC al resolver el sistema IEEE-11 nodos en los distintos casos propuestos.

En la Figura 3.24 se muestran los máximos incrementos para magnitud y ángulo de voltaje calculados por ambos métodos a través del proceso iterativo para el caso base del sistema IEEE-11, el sistema para el cual el método FPIC no converge.

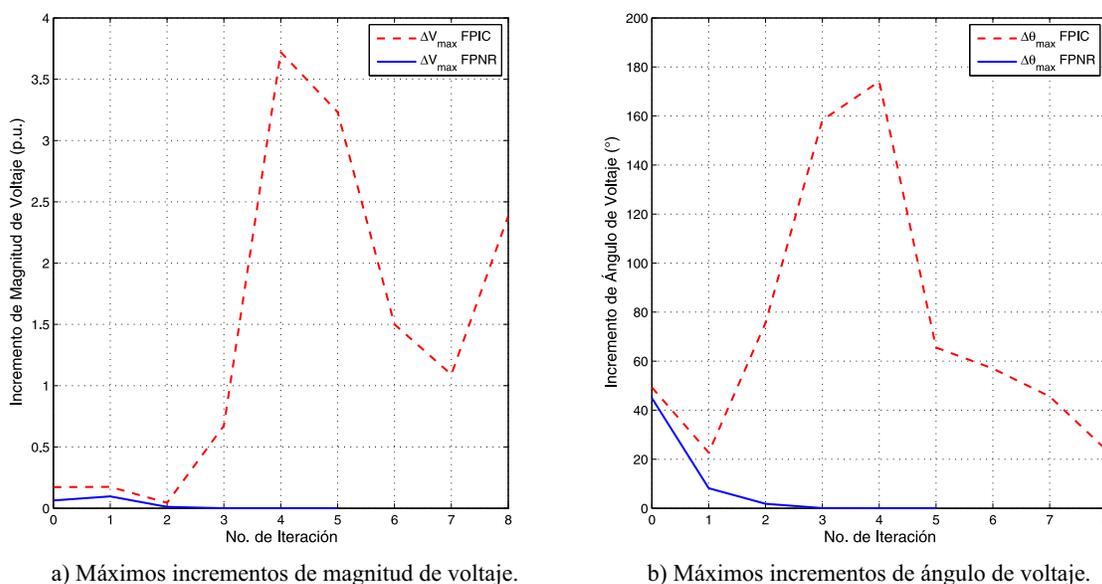


Figura 3.24: Máximos incrementos calculados con los métodos FPNR y FPIC durante el proceso iterativo para el caso base del sistema IEEE-11 nodos.

En la Figura 3.24 se observa que a partir de la cuarta iteración el incremento máximo de magnitud y ángulo de fase obtenido con el método FPIC es demasiado grande, lo cual resulta en la divergencia de dicho método. En cambio, se observa una diferencia importante en los incrementos obtenidos con el método FPNR, los cuales a partir de la cuarta iteración son prácticamente cero. En la Figura 3.25 se muestra la evolución del máximo incremento de magnitud y ángulo de voltaje calculados con ambos métodos en el proceso iterativo para el primer caso de disminución de carga en el nodo 9.

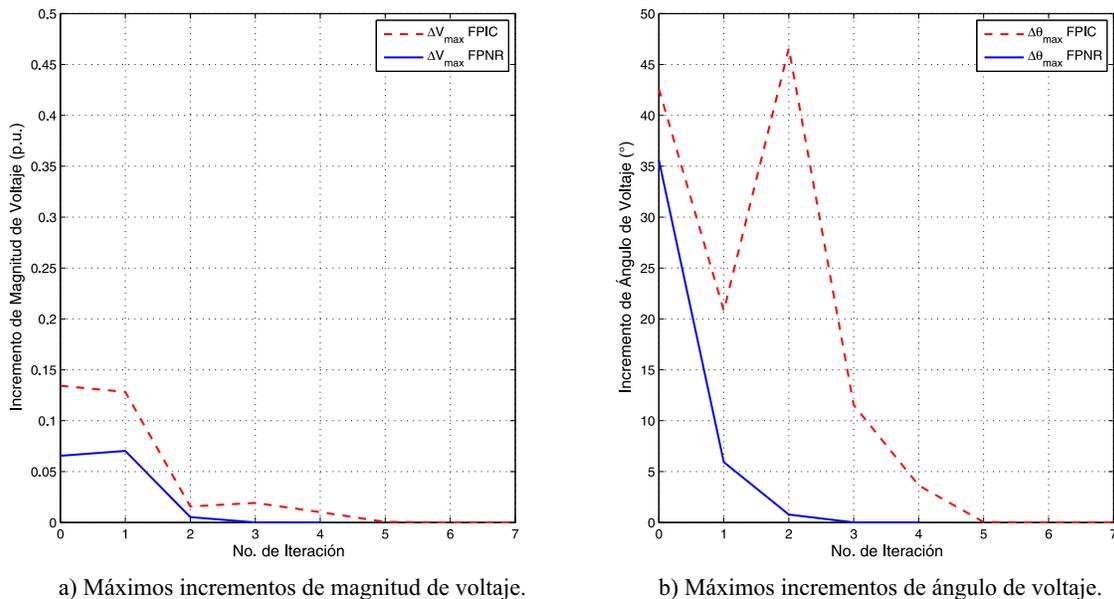


Figura 3.25: Máximos incrementos calculados con los métodos FPNR y FPIC durante el proceso iterativo para el caso 1 del sistema IEEE-11 nodos.

En la Figura 3.25 se observa que no hay un cambio abrupto de una iteración hacia otra en los incrementos de magnitud de voltaje, para el incremento de ángulo se observa una trayectoria con un cambio abrupto asociada al método FPIC pero que finalmente tiende a cero.

### 3.8.1. Correcciones Truncadas

El algoritmo Newton-Raphson puede tener un desempeño pobre cuando se resuelven sistemas que están fuertemente cargados. Bajo estas circunstancias, se pueden dar incrementos muy grandes en las variables de estado durante el proceso iterativo, lo cual provoca valores grandes para  $\Delta P$

y  $\Delta Q$  [Acha et al., 2004]. Este resultado propicia una característica de convergencia pobre, o aún peor, soluciones divergentes.

Estos problemas no deseados se pueden evitar de manera efectiva limitando el tamaño de la actualización, es decir, reemplazando las actualizaciones calculadas por actualizaciones truncadas [Acha et al., 2004]. Para implementar el criterio de correcciones truncadas, se elige un valor máximo de corrección en forma polar, magnitud y ángulo de fase, se expresa en su forma rectangular, y al factorizar el Jacobiano, en el caso de la factorización  $LU$ , en la sustitución hacia atrás, se sustituyen las actualizaciones obtenidas con los valores de la máxima actualización definida, en caso de que esta última sea menor. Se observan resultados satisfactorios con valores máximos de 0.4 p.u. para magnitud de voltaje nodal y  $55^\circ$  para el ángulo de fase. El criterio anterior se aplica a la formulación basada en inyecciones de corriente, al caso base del sistema IEEE-11 nodos. En la Figura 3.26 se observa como con el criterio de las correcciones truncadas, se da solución al problema de divergencia que se tiene con el método FPIC al resolver el caso base del sistema IEEE-11 nodos.

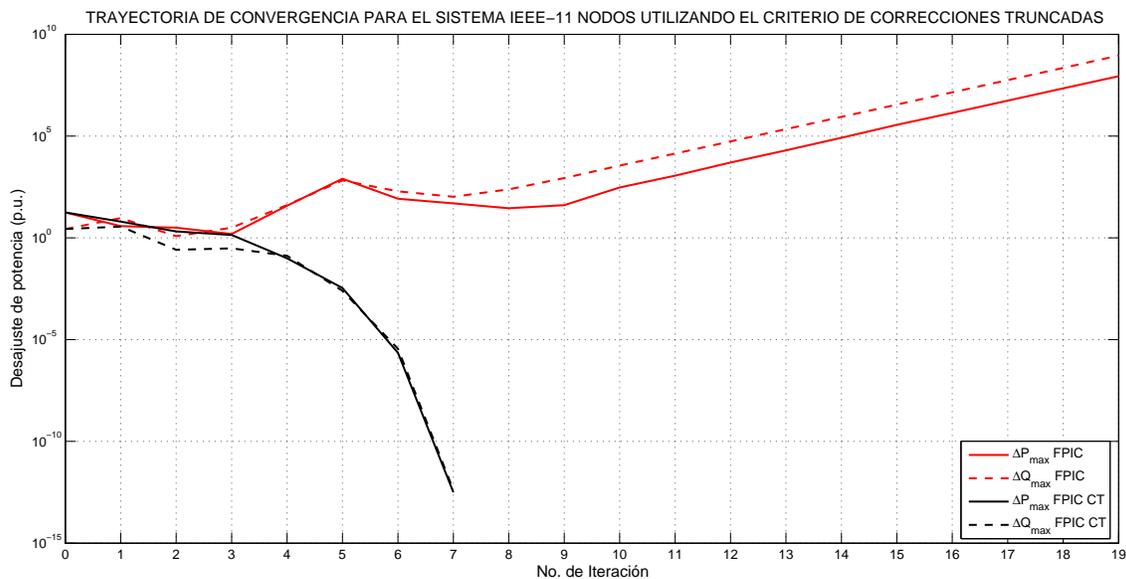


Figura 3.26: Diferencia entre las características de convergencia del método FPIC sin utilizar y utilizando el criterio de soluciones truncadas para el caso base del sistema IEEE-11 nodos.

En la Figura 3.27 se observa que tanto el método FPNR como el FPIC convergen, al método FPIC le toma una iteración más en converger que al método FPNR, pero el problema de no

convergencia es resuelto.

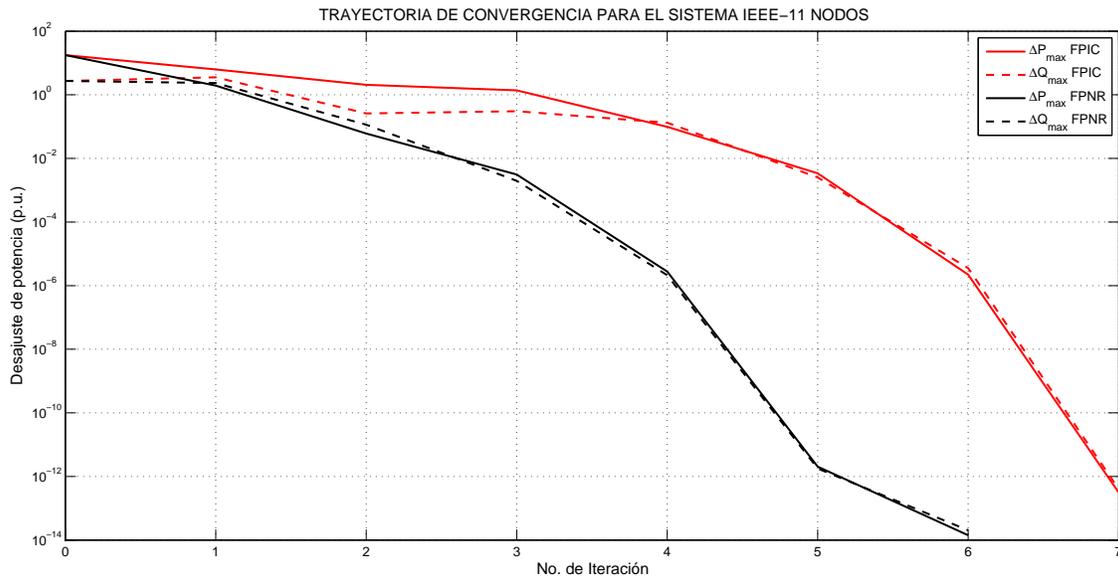


Figura 3.27: Características de convergencia de los métodos FPNR y FPIC utilizando el criterio de correcciones truncadas al caso base IEEE-11 nodos.

En la Figura 3.28, se compara la evolución de los incrementos de magnitud y ángulo de voltaje entre los métodos FPNR y FPIC al implementar el criterio de correcciones truncadas durante el proceso iterativo, se observa que el comportamiento de los incrementos durante el proceso iterativo es diferente al mostrado en la Figura 3.24.

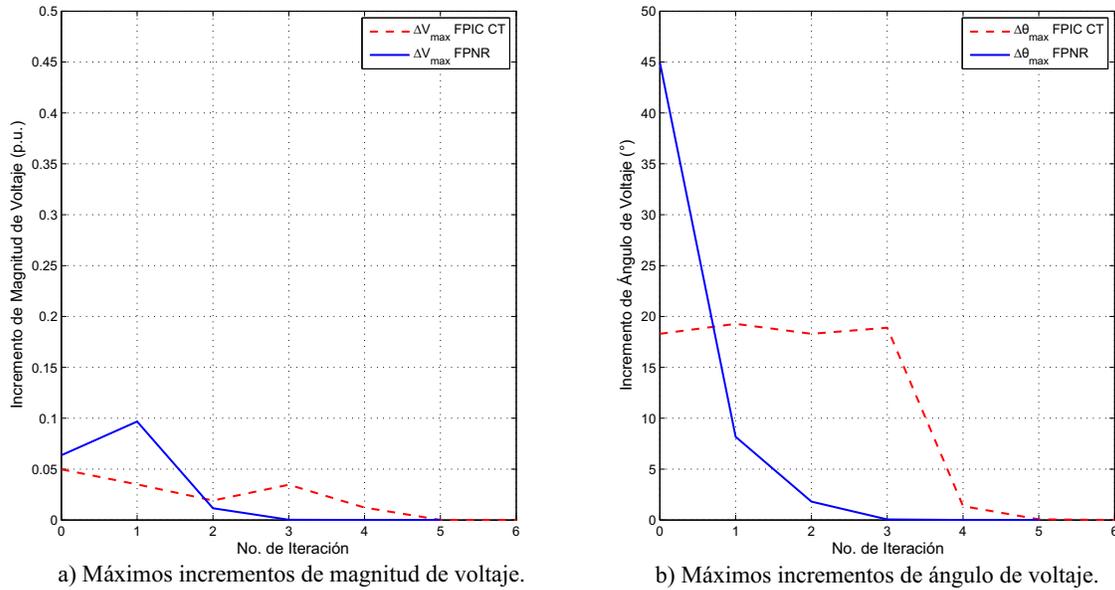


Figura 3.28: Máximos incrementos calculados con los métodos FPNR y FPIC utilizando el criterio de correcciones truncadas para el sistema IEEE-11 nodos.

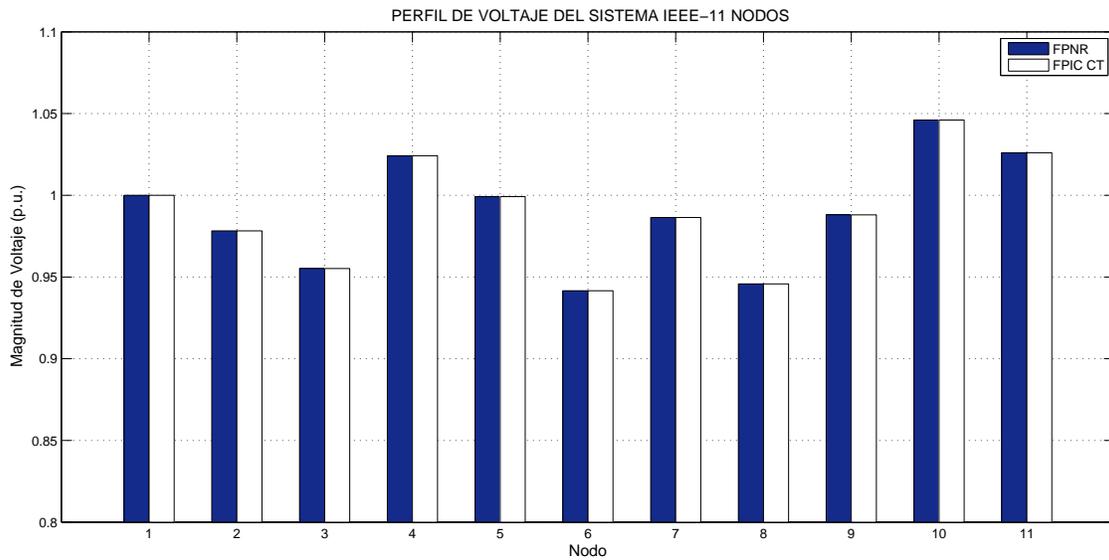


Figura 3.29: Perfil de magnitud de voltaje obtenido con los métodos FPNR y FPIC para el sistema IEEE-11 nodos.

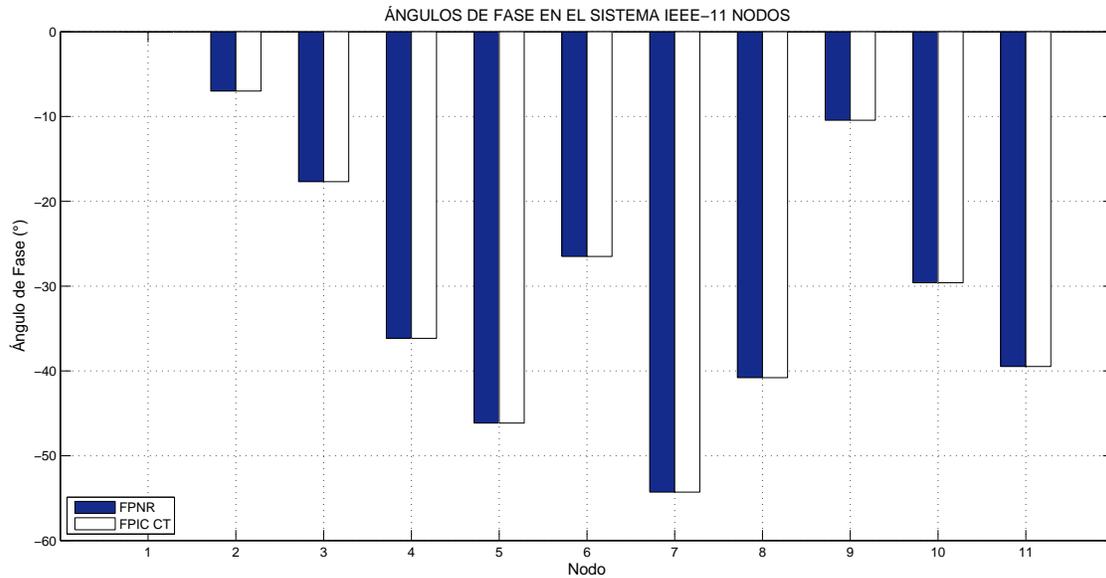


Figura 3.30: Ángulos de voltaje obtenidos con los métodos FPNR y FPIC para el sistema de IEEE-11 nodos.

Los resultados obtenidos al implementar el criterio de correcciones truncadas son idénticos a los obtenidos con el método FPNR, como se observa en las figuras 3.29 y 3.30.

### 3.9. Conclusiones

En el presente Capítulo se presentó a detalle la formulación matemática del problema de flujos de potencia basada en inyecciones de corriente, así como también, se describe su solución mediante el algoritmo Newton-Raphson. El método FPIC se aplica a la solución de tres sistemas de prueba, los sistemas de 5, 14 y 57 nodos, los resultados obtenidos se compararon con los arrojados por el método FPNR sin observarse diferencia alguna. Se hizo una comparación general del método FPIC con el método FPNR, en la cual se observa que la cantidad de iteraciones en las que se alcanza la convergencia para la tolerancia prescrita difiere en algunos casos. Además, se observa una mayor eficiencia en cuanto a tiempo de cálculo en el desempeño del método FPIC con respecto al del método FPNR, disminuyendo hasta en 50% el tiempo de solución para algunos de los sistemas de prueba utilizados.

Asimismo, se presenta un ejemplo en el cual el método FPIC no converge, y finalmente se muestra una técnica que corrige el problema de divergencia.

# Capítulo 4

## Flujos de Potencia de Fracción Continua

### 4.1. Introducción

El sueño de cualquier ingeniero en sistemas de potencia es desarrollar un algoritmo no-iterativo confiable para resolver el problema de flujos de potencia. El grupo AIA<sup>1</sup> intentó llevar a cabo este sueño, mediante el desarrollo del producto llamado AGORA<sup>2</sup> (Algoritmos Fiables para la Observación Avanzada de la Red). Según el fabricante, AGORA es la primera herramienta rápida y confiable en el mundo para la restauración de sistemas eléctricos de potencia basada en un algoritmo de flujos de potencia no-iterativo [Bonet, 2004] y [Alsaffar, 2005].

Usualmente las ecuaciones de flujos de potencia se resuelven con metodologías basadas en métodos iterativos, los cuales pueden implementarse muy eficientemente. Sin embargo, estos métodos dependen de una “buena aproximación” como punto de partida para encontrar una solución iterativamente, aunque esta no sea necesariamente la mejor solución o la solución físicamente factible. Cuando la solución obtenida está dentro de una tolerancia prescrita, se dice que el algoritmo “converge”.

Con los métodos iterativos existen dos problemas:

---

<sup>1</sup>Aplicaciones en Informática Avanzada S.A., tiene sede en Barcelona, España. Está enfocado en el desarrollo de software y la consultoría tecnológica.

<sup>2</sup>De las siglas en inglés, Advanced Grid Observation Reliable Algorithms.

- La necesidad de suponer una condición inicial cuando el sistema se encuentra en un punto operativo que puede conducir al colapso, es decir, una condición inicial que permita al sistema alcanzar la convergencia dentro de un tiempo razonable a una solución dentro de la región de soluciones factibles. Esto hace que resolver un sistema basado en métodos iterativos probablemente falle cuando más se necesita obtener la solución.
- El que un proceso iterativo converja a una solución matemática, no garantiza que la solución encontrada corresponda al verdadero estado operativo del sistema. El conjunto de ecuaciones utilizado tendrá múltiples soluciones, de las cuales solo una corresponde al verdadero estado físico de la red.

AGORA, como sus desarrolladores indican, no necesita una condición inicial y se basa en un algoritmo no-iterativo que garantiza la mejor solución (la que corresponde al estado físico de la red en tiempo-real) [Bonet, 2004]. Cabe mencionar que para hacer uso de este algoritmo deben especificarse los valores de potencia activa y reactiva inyectada a cada nodo, es decir, no se modelan nodos de tipo *PV*. Este algoritmo está pensado para aplicación en tiempo real, ya que en este tipo de aplicaciones se cuenta con medición de variables en todo el SEP. En este Capítulo se examina el algoritmo de flujos de potencia utilizado en AGORA, llamado Flujos de Potencia de Fracción Continua (FPFC), cuyos antecedentes son casi nulos, lo cual ubica este trabajo como pionero en el desarrollo de este novedoso e innovador método.

## 4.2. Fracciones Continuas

La aplicación de fracciones continuas permite representar números racionales y reales por medio de números enteros. Por ejemplo, el número real 4.46236 es el resultado aproximado de la división de 415/93. Este número real puede ser representado mediante una secuencia de operaciones de números enteros. Intuitivamente, se podría decir que este número real es aproximadamente  $4 + 1/2$ . Sin embargo, el número 2 en el denominador es incorrecto, por lo que debe ser poco mayor tal que la aproximación ahora sea  $4 + 1/(2 + 1/6)$ . En este caso, el número 6 en el denominador

debe ser un poco mayor, es decir  $6 + 1/7$ . Así, la aproximación del número real mediante fracciones continuas es,

$$\frac{415}{93} \approx 4.46236 \approx 4 + \frac{1}{2 + \frac{1}{6 + \frac{1}{7}}}$$

Desde el punto de vista matemático, si  $f$  es una función es posible obtener una secuencia iterativa asociada a  $f$  escogiendo una condición inicial  $x_0$  y generando una secuencia  $\{x_n\}$  mediante la relación  $x_{n+1} = f(x_n)$ , donde la función  $f(x_n)$  puede contener cualquier tipo de expresiones matemáticas. Si  $\{a_n\}$  es una secuencia dada, es posible obtener una nueva secuencia  $\{\beta_n\}$  considerando  $\beta_0 = 0$  y siempre sumando un nuevo término  $a_n$  para obtener  $\beta_n = \beta_{n-1} + a_n$ . En este caso se itera mediante la translación  $t_n(z) := z + a_n$ . Si el límite  $\beta := \lim \beta_n$  existe, se ha obtenido una serie infinita. Dependiendo de cómo sea definida la función  $f(x_n)$ , y si el límite existe, es el tipo de serie infinita obtenida. De igual manera, una serie infinita de productos se obtiene al iterar con la transformación  $t_n := a_n z$  [Jones y Thron, 1980].

Asumiendo que  $\mathbb{N}$  y  $\mathbb{N}_0$  denotan los conjuntos  $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \dots\}$  y  $\mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ , respectivamente, y considerando el par de secuencias  $(\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}, \{b_n\}_{n \in \mathbb{N}_0})$ , es posible iterar para obtener una secuencia  $\{r\}$  de la forma,

$$r = b_0 + \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2 + \frac{a_3}{b_3 + \dots}}} \tag{4.1}$$

conocida como fracción continua. Los elementos  $a_n$  y  $b_n$  pueden ser números reales o complejos y son llamados  $n$ -ésimo numerador parcial y  $n$ -ésimo denominador parcial de la fracción continua, respectivamente. La ecuación (4.1) puede ser escrita de manera más compacta de la siguiente forma [Cuyt et al., 2008],

$$r = b_0 + \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \frac{a_3}{b_3} + \dots \tag{4.2}$$

o bien,

$$r = b_0 + \mathbf{K} \left( \frac{a_m}{b_m} \right). \quad (4.3)$$

Al trincar una fracción continua a un número infinito de elementos se obtiene,

$$r = b_0 + \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \frac{a_3}{b_3} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{b_{n-1}} + \frac{a_n}{b_n}. \quad (4.4)$$

La expresión anterior es equivalente a la ecuación (4.2) considerando  $a_{n+1} = 0$ . El valor  $r_n$  es llamado  $n$ -ésimo aproximante de la fracción continua y se denota por la razón  $\frac{A_n}{B_n}$ , tal que,

$$r_n = \frac{A_n}{B_n} = b_0 + \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \frac{a_3}{b_3} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{b_{n-1}} + \frac{a_n}{b_n} \quad (4.5)$$

donde [Jones y Thron, 1980],

$$\frac{A_0}{B_0} = \frac{b_0}{1} \quad (4.6)$$

$$\frac{A_1}{B_1} = b_0 + \frac{a_1}{b_1} = \frac{b_1 b_0 + a_1}{b_1} \quad (4.7)$$

$$\frac{A_2}{B_2} = b_0 + \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2}} = \frac{b_2(b_1 b_0 + a_1) + a_2 b_0}{b_2 b_1 + a_2} = \frac{b_2 A_1 + a_2 A_0}{b_2 B_1 + a_2 B_0} \quad (4.8)$$

$$\frac{A_2}{B_2} = b_0 + \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2 + \frac{a_3}{b_3}}} = \frac{b_3(b_2(b_1 b_0 + a_1) + a_2 b_0) + a_3(b_1 b_0 + a_1)}{b_3(b_2 b_1 + a_2) + a_3 b_1} = \frac{b_3 A_2 + a_3 A_1}{b_3 B_2 + a_3 B_1} \quad (4.9)$$

$$\frac{A_i}{B_i} = \frac{b_i A_{i-1} + a_i A_{i-2}}{b_i B_{i-1} + a_i B_{i-2}} \quad i = 2, \dots, n. \quad (4.10)$$

En general, una fracción continua converge y tiene un valor  $v$  si [Cuyt et al., 2008],

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{A_n}{B_n} \right) = v. \quad (4.11)$$

En otras palabras, si existe el límite de las divisiones  $\frac{A_n}{B_n}$  conforme  $n \rightarrow \infty$ , este define el valor de la función continua. De lo contrario, la fracción continua diverge.

Es posible construir diferentes fracciones continuas que sean equivalentes si y solo si todos sus aproximantes  $r_i = \frac{A_i}{B_i}$  tiene el mismo valor, es decir,

$$b_0 + \mathbf{K}_{m=1}^{\infty} \left( \frac{a_m}{b_m} \right) = d_0 + \mathbf{K}_{m=1}^{\infty} \left( \frac{c_m}{d_m} \right). \quad (4.12)$$

A manera de ejemplo, la fracción continua de la ecuación (4.1) puede ser expresada por la ecuación (4.13) al dividir el “primer” numerador y denominador entre  $b_1$ , y por la división del  $n$ -ésimo numerador y denominador entre  $b_n$  para  $n = 2, 3, 4, \dots$ , tal que los elementos del denominador se reducen a la unidad,

$$r_n = b_0 + \frac{a_1/b_1}{1 + \frac{a_2/b_1 b_2}{1 + \frac{a_3/b_2 b_3}{1 + \dots}}} \quad (4.13)$$

Esta propiedad de construir fracciones continuas mediante diferentes elementos constituye un grupo de transformaciones equivalentes.

En el contexto de esta tesis, se aplica el concepto de representar una serie de potencias por medio de fracciones continuas, tal que esta representación tenga una mejor convergencia que la correspondiente a la serie. Para ilustrar lo anterior se asume la serie de Maclaurin dada por (4.14),

$$f(s) = c_0 + c_1 s + c_2 s^2 + c_3 s^3 + \dots \quad (4.14)$$

considerando la sumatoria a partir del segundo término del lado derecho de (4.14), se define la siguiente serie recíproca,

$$c_1s + c_2s^2 + c_3s^3 + \dots = c_1s \left( 1 + \frac{c_2}{c_1}s + \frac{c_3}{c_1}s^2 + \dots \right) \quad (4.15)$$

$$c_1s + c_2s^2 + c_3s^3 + \dots = c_1s \left( 1 + c_1^{(1)}s + c_2^{(1)}s^2 + \dots \right)^{-1} \quad (4.16)$$

sustituyendo (4.16) en (4.14), se obtiene

$$f(s) = c_0 + \frac{c_1s}{1 + c_1^{(1)}s + c_2^{(1)}s^2 + \dots} \quad (4.17)$$

obteniendo la serie recíproca del término del denominador,

$$c_1^{(1)}s + c_2^{(1)}s^2 + c_3^{(1)}s^3 + \dots = c_1^{(1)}s \left( 1 + \frac{c_2^{(1)}}{c_1^{(1)}}s + \frac{c_3^{(1)}}{c_1^{(1)}}s^2 + \dots \right) \quad (4.18)$$

$$c_1^{(1)}s + c_2^{(1)}s^2 + c_3^{(1)}s^3 + \dots = c_1^{(1)}s \left( 1 + c_1^{(2)}s + c_2^{(2)}s^2 + \dots \right)^{-1} \quad (4.19)$$

sustituyendo (4.19) en (4.17),

$$f(s) = c_0 + \frac{c_1s}{1 + \frac{c_1^{(1)}s}{1 + c_1^{(2)}s + c_2^{(2)}s^2 + \dots}} \quad (4.20)$$

obteniendo la serie recíproca del término del segundo denominador,

$$c_1^{(2)}s + c_2^{(2)}s^2 + c_3^{(2)}s^3 + \dots = c_1^{(2)}s \left( 1 + \frac{c_2^{(2)}}{c_1^{(2)}}s + \frac{c_3^{(2)}}{c_1^{(2)}}s^2 + \dots \right) \quad (4.21)$$

$$c_1^{(2)}s + c_2^{(2)}s^2 + c_3^{(2)}s^3 + \dots = c_1^{(2)}s \left( 1 + c_1^{(3)}s + c_2^{(3)}s^2 + \dots \right)^{-1} \quad (4.22)$$

sustituyendo (4.22) en (4.20),

$$f(s) = c_0 + \frac{c_1 s}{1 + \frac{c_1^{(1)} s}{1 + \frac{c_1^{(2)} s}{1 + c_1^{(3)} s + c_2^{(3)} s^2 + \dots}}}. \quad (4.23)$$

Del procedimiento anterior es claro que formando las series recíprocas se puede obtener de manera iterativa la fracción parcial (4.24) correspondiente a (4.14)

$$f(s) = c_0 + \frac{c_1 s}{1} + \frac{c_1^{(1)} s}{1} + \frac{c_1^{(2)} s}{1} + \frac{c_1^{(3)} s}{1} + \dots \quad (4.24)$$

donde  $c_i^{(j)} = \frac{c_{i+1}^{(j-1)}}{c_1^{(j-1)}}$  para  $j \geq 1, i \geq 1$ .

De manera general, la ecuación (4.24) puede ser expresada por (4.25), tal que (4.24) es solo un caso especial,

$$f(s) = b_0 + \frac{a_1 s}{b_1} + \frac{a_2 s}{b_2} + \frac{a_3 s}{b_3} + \dots \quad (4.25)$$

y al igual que lo descrito anteriormente, al truncar a un número finito de elementos las fracciones continuas, se obtiene su  $n$ -ésimo aproximante dado por,

$$f_n(s) = \frac{A_n(s)}{B_n(s)} = b_0 + \frac{a_1 s}{b_1} + \frac{a_2 s}{b_2} + \frac{a_3 s}{b_3} + \dots + \frac{a_{n-1} s}{b_{n-1}} + \frac{a_n s}{b_n} \quad (4.26)$$

donde,

$$\frac{A_0(s)}{B_0(s)} = \frac{b_0}{1} \quad (4.27)$$

$$\frac{A_1(s)}{B_1(s)} = b_0 + \frac{a_1 s}{b_1} = \frac{b_1 b_0 + a_1 s}{b_1} \quad (4.28)$$

$$\frac{A_2(s)}{B_2(s)} = b_0 + \frac{a_1 s}{b_1 + \frac{a_2 s}{b_2}} = \frac{b_2 (b_1 b_0 + a_1 s) + a_2 s b_0}{b_2 b_1 + a_2 s} = \frac{b_2 A_1(s) + a_2 s A_0(s)}{b_2 B_1(s) + a_2 s B_0(s)} \quad (4.29)$$

$$\frac{A_3(s)}{B_3(s)} = b_0 + \frac{a_1 s}{b_1 + \frac{a_2 s}{b_2 + \frac{a_3 s}{b_3}}} = \frac{b_3 (b_2 (b_1 b_0 + a_1 s) + a_2 s b_0) + a_3 s (b_1 b_0 + a_1 s)}{b_3 (b_2 b_1 + a_2 s) + a_3 s b_1} = \frac{b_3 A_2(s) + a_3 s A_1(s)}{b_3 B_2(s) + a_3 s B_1(s)} \quad (4.30)$$

$$\frac{A_i(s)}{B_i(s)} = \frac{b_i A_{i-1}(s) + a_i s A_{i-2}(s)}{b_i B_{i-1}(s) + a_i s B_{i-2}(s)} \quad i \geq 2. \quad (4.31)$$

En general, la fracción continua converge y tiene un valor  $v$  si,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{A_n(s)}{B_n(s)} \right) = v. \quad (4.32)$$

En base a lo descrito anteriormente se concluye que para obtener el valor  $v$  de la serie por medio de fracciones continuas es necesario lo siguiente:

1. Definir el número  $n$  de elementos de la fracción continua.
2. Obtener los elementos de la fracción continua  $(\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}, \{b_n\}_{n \in \mathbb{N}_0})$ .
3. Obtener el aproximante  $f_n(s)$  de la fracción continua dado por la división  $\frac{A_n(s)}{B_n(s)}$ . El valor de este aproximante es igual al valor  $v$  de la serie.

### 4.3. Descripción del Algoritmo de Flujos de Potencia No-iterativo (FPFC)

El desarrollo del algoritmo no-iterativo que se describe en esta Sección está basado en la propuesta descrita en [Bonet, 2004]. El método es un proceso determinista, no-iterativo para encontrar la solución al problema de flujos de potencia. El método converge universalmente si el problema admite una solución, y nunca lo hace si el problema no tiene una solución físicamente factible [Bonet, 2004].

Se define el método para encontrar la solución física al problema de flujos de potencia en los siguientes pasos:

1. Fijar el problema de flujos de potencia  $L$  en un parámetro  $L(s)$  que va de manera continua del caso  $L(0)$  a la solución del problema  $L(1)$ .
2. Desarrollar en series de potencia las incógnitas de las ecuaciones ( $L(s)$ ) en la vecindad del caso 0.
3. Utilizar análisis de aproximantes algebraicos para encontrar el valor de las incógnitas. (Método de Viscovatov, Aproximaciones de Padé, etc.).

Los detalles para obtener la solución del problema de flujos de potencia utilizando fracciones continuas se describen a continuación.

### 4.3.1. Transformación de las Ecuaciones de Flujos de Potencia

Para utilizar el método FPFC, primeramente deben expresarse las ecuaciones de inyecciones de potencia en terminales de los elementos de transmisión en el plano de variable compleja. Para un sistema de  $N$  nodos, se define el nodo *slack* como el nodo 1, es decir, el primer nodo en el ordenamiento para obtener la matriz de admitancia nodal,  $\bar{Y}_{km}$  como un elemento de la matriz de admitancia nodal,  $\bar{S}_k$  como la potencia compleja y  $\bar{V}_k$  como el voltaje complejo en el nodo  $k$ . Además,  $s$  es definida como la variable compleja.

Tomando en cuenta la ecuación (3.27), la ecuación de inyección de potencia en el nodo  $k$ ,  $\bar{S}_k^* = \bar{V}_k^* \bar{I}_k$ , se puede escribir como

$$\frac{\bar{S}_k^*}{\bar{V}_k^*} = \sum_{m=1}^N \bar{Y}_{km} \bar{V}_m \quad (4.33)$$

Para resolver la ecuación (4.33), esta debe expresarse en el dominio de la variable compleja  $s$ , de una manera tal que la solución para  $s = 0$  es conocida, y para  $s = 1$  se obtengan las ecuaciones

de flujos de potencia originales. Lo anterior se logra al expresar la ecuación (4.33) de la siguiente manera [Bonet, 2004]:

$$s \frac{\bar{S}_k^*}{\bar{V}_k^*(s)} = \sum_{m=1}^N \bar{Y}_{km} \bar{V}_m(s) - (1-s) \sum_{m=1}^N \bar{Y}_{km} \quad (4.34)$$

$$\bar{V}_0(s) = 1 + (1-s)\bar{V}_0 \quad (4.35)$$

$$\bar{V}_1(s) = s\bar{V}_1 + (1-s) \quad (4.36)$$

$$\bar{V}_m(0) = 1, \quad \forall m \quad (4.37)$$

$$\bar{V}_m(1) = \bar{V}_m, \quad \forall m \quad (4.38)$$

Ahora, se define una transformación funcional para poder expresar una función analítica como un conjunto de secuencias infinitas [Bonet, 2004],

$$\tau : f(s) \rightarrow f[n] = \frac{1}{n!} \left[ \frac{\partial^n f(s)}{\partial s^n} \right] \Big|_{s=0} \quad (4.39)$$

donde  $f[n]$  es el  $n$ -ésimo coeficiente de la expansión en series de Maclaurin de  $f(s)$ ,

$$f(s) = f[0] + f[1]s + f[2]s^2 + \dots + f[n]s^n + \dots \quad (4.40)$$

con las siguientes propiedades [Bonet, 2004]:

$$\tau(f(s)) = f[n] \quad (4.41)$$

$$\tau(1) = \phi_{n0} \quad (4.42)$$

$$\tau(s) = \phi_{n1} \quad (4.43)$$

$$\tau(s f(s)) = f[n-1] \quad (4.44)$$

$$\tau(f(s)g(s)) = (f \otimes g)[n] = \sum_{i=0}^n f[i]g[n-i] \quad (4.45)$$

donde  $\otimes$  es el operador convolución. Además,  $\phi_{n0}$  es equivalente a una función impulso  $\delta(n)$  que es igual a 1 cuando  $n = 0$  y es igual a 0 en caso contrario. De forma similar,  $\phi_{n1}$  es una función impulso  $\delta(n - 1)$  que es igual a 1 cuando  $n = 1$  y es 0 en caso contrario.

En el contexto del problema analizado, la ecuación (4.40) corresponde al voltaje nodal complejo expresado en el dominio de  $s$  por medio de la serie de Maclaurin. Es decir, para el voltaje en el nodo  $k$  se tiene

$$\bar{V}_k(s) = \bar{V}_k[0] + \bar{V}_k[1]s + \bar{V}_k[2]s^2 + \dots + \bar{V}_k[n]s^n + \dots \quad (4.46)$$

La ecuación (4.46) muestra la expansión en series de Maclaurin del voltaje nodal, la obtención de los coeficientes  $\bar{V}_k[i]$ , para  $i = 0, 1, 2, \dots$ , se describe en la siguiente sección.

### 4.3.2. Cálculo de los Coeficientes de la Serie de Maclaurin

Para calcular los coeficientes de la expansión en series de Maclaurin de los voltajes nodales, se manipula algebraicamente la ecuación (4.34), obteniéndose,

$$\sum_{m=1}^N \bar{Y}_{km} \bar{V}_m(s) = s \frac{\bar{S}_k^*}{\bar{V}_k^*(s)} + (1-s) \sum_{m=1}^N \bar{Y}_{km} \quad (4.47)$$

Definiendo,

$$\bar{W}_k(s) = \frac{1}{\bar{V}_k(s)} \quad (4.48)$$

se tiene

$$\sum_{m=1}^N \bar{Y}_{km} \bar{V}_m(s) = s \bar{S}_k^* \bar{W}_k^*(s) + (1-s) \sum_{m=1}^N \bar{Y}_{km} \quad (4.49)$$

$$\sum_{m=2}^N \bar{Y}_{km} \bar{V}_m(s) + \bar{Y}_{k1} \bar{V}_1(s) = s \bar{S}_k^* \bar{W}_k^*(s) + (1-s) \sum_{m=1}^N \bar{Y}_{km} \quad (4.50)$$

$$\sum_{m=2}^N \bar{Y}_{km} \bar{V}_m(s) = s \bar{S}_k^* \bar{W}_k^*(s) - \bar{Y}_{k1} \bar{V}_1(s) + (1-s) \sum_{m=1}^N \bar{Y}_{km} \quad (4.51)$$

sustituyendo la ecuación (4.36) en (4.51)

$$\sum_{m=2}^N \bar{Y}_{km} \bar{V}_m(s) = s \bar{S}_k^* \bar{W}_k^*(s) - \bar{Y}_{k1} (s \bar{V}_1 + (1-s)) + (1-s) \sum_{m=1}^N \bar{Y}_{km} \quad (4.52)$$

Aplicando la transformación descrita por las ecuaciones (4.41) a (4.45) en ambos lados de la ecuación (4.52), tenemos

$$\sum_{m=2}^N \bar{Y}_{km} \bar{V}_m[n] = \bar{S}_k^* \bar{W}_k^*[n-1] - \bar{Y}_{k1} (\phi_{n1} \bar{V}_1 + (\phi_{n0} - \phi_{n1})) + (\phi_{n0} - \phi_{n1}) \sum_{m=1}^N \bar{Y}_{km}. \quad (4.53)$$

La solución de la ecuación (4.53) fue obtenida considerando la inyección de potencia en el  $k$ -ésimo nodo. Considerando los  $N-1$  nodos del sistema, la ecuación (4.53) puede ser expresada en forma matricial de la siguiente manera,

$$\begin{bmatrix} \bar{Y}_{22} & \bar{Y}_{23} & \cdots & \bar{Y}_{2N} \\ \bar{Y}_{32} & \bar{Y}_{33} & \cdots & \bar{Y}_{3N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{Y}_{N2} & \bar{Y}_{N3} & \cdots & \bar{Y}_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{V}_2[n] \\ \bar{V}_3[n] \\ \vdots \\ \bar{V}_N[n] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{S}_2^* \bar{W}_2^*[n-1] - \bar{Y}_{21} (\phi_{n1} \bar{V}_1 + (\phi_{n0} - \phi_{n1})) + (\phi_{n0} - \phi_{n1}) \sum_{m=1}^N \bar{Y}_{2m} \\ \bar{S}_3^* \bar{W}_3^*[n-1] - \bar{Y}_{31} (\phi_{n1} \bar{V}_1 + (\phi_{n0} - \phi_{n1})) + (\phi_{n0} - \phi_{n1}) \sum_{m=1}^N \bar{Y}_{3m} \\ \vdots \\ \bar{S}_N^* \bar{W}_N^*[n-1] - \bar{Y}_{N1} (\phi_{n1} \bar{V}_1 + (\phi_{n0} - \phi_{n1})) + (\phi_{n0} - \phi_{n1}) \sum_{m=1}^N \bar{Y}_{Nm} \end{bmatrix} \quad (4.54)$$

La solución de la ecuación (4.54) es un sistema de ecuaciones lineales de la forma  $[\mathbf{A}] \mathbf{x} = \mathbf{b}$ , donde la matriz  $\mathbf{A}$  puede obtenerse de la matriz de admitancia nodal,  $\mathbf{Y}_{\text{bus}}$ , eliminando la primera

fila y columna correspondientes al nodo *slack*. Además,  $\mathbf{b}$  se muestra en su forma general, esta ecuación permite obtener el  $n$ -ésimo coeficiente de la serie de Maclaurin para cada uno de los voltajes nodales. Cuando  $n = 0$  ó  $n = 1$ , el vector de términos independientes  $\mathbf{b}$  toma la siguiente forma,

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} \bar{S}_2^* \bar{W}_2^*[0] - \bar{Y}_{21} (\bar{V}_1 - 1) - \sum_{m=1}^N \bar{Y}_{2m} \\ \bar{S}_3^* \bar{W}_3^*[0] - \bar{Y}_{31} (\bar{V}_1 - 1) - \sum_{m=1}^N \bar{Y}_{3m} \\ \vdots \\ \bar{S}_N^* \bar{W}_N^*[0] - \bar{Y}_{N1} (\bar{V}_1 - 1) - \sum_{m=1}^N \bar{Y}_{Nm} \end{bmatrix} \quad (4.55)$$

si  $n \geq 2$ , el vector  $\mathbf{b}$  se convierte en,

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} \bar{S}_2^* \bar{W}_2^*[n-1] \\ \bar{S}_3^* \bar{W}_3^*[n-1] \\ \vdots \\ \bar{S}_N^* \bar{W}_N^*[n-1] \end{bmatrix}. \quad (4.56)$$

De las ecuaciones (4.53) y (4.54) se observa que es necesario conocer las inyecciones de potencia nodales en cada uno de los nodos,  $\bar{S}_k$ , así como los coeficientes  $\bar{W}_k[n-1]$ , para encontrar los coeficientes de la expansión en series de potencia  $V_m[n]$  para  $m = 1, 2, \dots, N$ . Las potencias inyectadas son especificadas, tal que se consideran variables conocidas. Los coeficientes  $\bar{W}_k$  se obtienen al considerar que,

$$\begin{aligned} (\bar{W}_k \otimes \bar{V}_k)[n] &= \phi_{n0} \\ \bar{W}_k[0] &= \frac{1}{\bar{V}_k[0]} = 1 \\ \bar{W}_k(s) \bar{V}_k(s) &= 1 \end{aligned} \quad (4.57)$$

tal que la expresión de recurrencia obtenida mediante el operador de convolución es [Bonet, 2004],

$$\bar{W}_k[n] = - \sum_{i=0}^{n-1} \bar{W}_k[i] \bar{V}_k[n-i] \quad (4.58)$$

En resumen, los pasos para el cálculo de los coeficientes de voltaje en la expansión en series de Maclaurin de orden  $n$  son:

1. Inicialización,

$$\bar{V}_k[0] = \bar{W}_k[0] = 1 \quad k = 2, \dots, N \quad (4.59)$$

2. Para  $i = 1, \dots, n$

- a) Calcular  $\bar{V}_k[i]$ ,  $k = 2, \dots, N$  resolviendo el sistema de ecuaciones lineales (4.54).
- b) Calcular  $\bar{W}_k[i]$ ,  $k = 2, \dots, N$  resolviendo la ecuación (4.58).

Al finalizar este proceso, el cual se muestra esquemáticamente en la Figura 4.1, se obtienen las series de Maclaurin dadas por

$$\begin{aligned} \bar{V}_2(s) &= \bar{V}_2[0] + \bar{V}_2[1]s + \bar{V}_2[2]s^2 + \dots + \bar{V}_2[n]s^n \\ \bar{V}_3(s) &= \bar{V}_3[0] + \bar{V}_3[1]s + \bar{V}_3[2]s^2 + \dots + \bar{V}_3[n]s^n \\ &\vdots \\ \bar{V}_N(s) &= \bar{V}_N[0] + \bar{V}_N[1]s + \bar{V}_N[2]s^2 + \dots + \bar{V}_N[n]s^n \end{aligned} \quad (4.60)$$

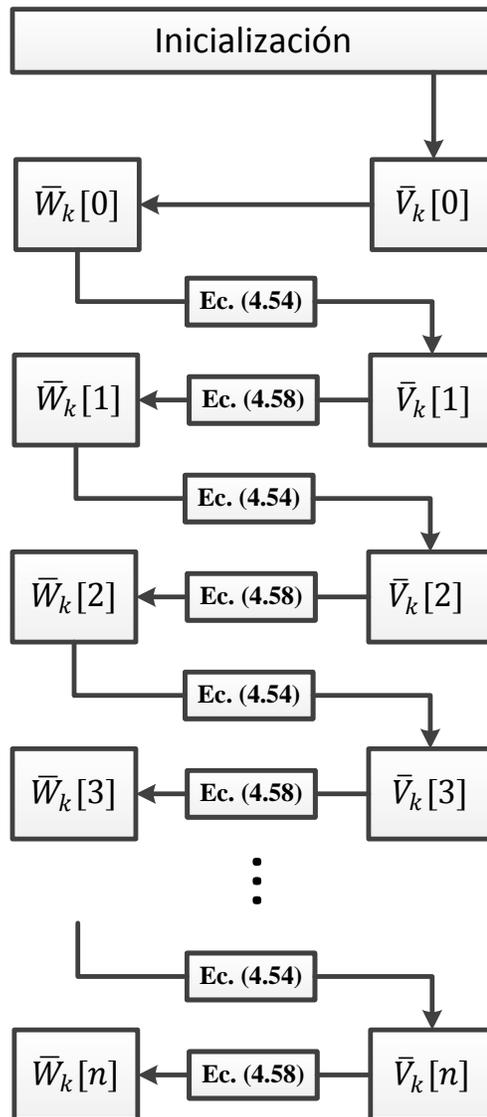


Figura 4.1: Proceso para el cálculo de los coeficientes de la expansión en series de  $\bar{V}_k(s)$ .

Los valores calculados  $\bar{V}_k[n]$  y  $\bar{W}_k[n]$  en donde  $k = 2, \dots, N$  pueden ser almacenados en una matriz para simplificar el algoritmo, es decir

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \bar{V}_2[0] & \bar{V}_2[1] & \cdots & \bar{V}_2[n] \\ \bar{V}_3[0] & \bar{V}_3[1] & \cdots & \bar{V}_3[n] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{V}_N[0] & \bar{V}_N[1] & \cdots & \bar{V}_N[n] \end{bmatrix} \quad (4.61)$$

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} \bar{W}_2[0] & \bar{W}_2[1] & \cdots & \bar{W}_2[n] \\ \bar{W}_3[0] & \bar{W}_3[1] & \cdots & \bar{W}_3[n] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{W}_N[0] & \bar{W}_N[1] & \cdots & \bar{W}_N[n] \end{bmatrix} \quad (4.62)$$

Un problema de esta formulación es que la expansión en series de potencia de la ecuación (4.46) no converge para  $s = 1$  [Alsaffar, 2005]. Sin embargo, una expansión de esta serie en fracciones continuas si converge para  $s = 1$  [Bonet, 2004]. A continuación se describe como se obtiene la expansión en fracciones continuas.

### 4.3.3. Expansión en Fracciones Continuas

Existen diversos métodos para la construcción de la aproximación algebraica de una serie de potencias por medio de fracciones continuas [Mathews y Fink, 1999]. En esta Sección se presenta el método de Viskovatov utilizado en [Khovanskii, 1963]. Este método permite construir la expansión en fracciones continuas, o equivalentemente las sucesiones de aproximaciones de Padé, de una serie de potencias dada. Las demostraciones de las expresiones siguientes se encuentran en el Apéndice C. Dada una serie de potencias,

$$f(s) = f[0]^{(0)} + f[1]^{(0)}s + f[2]^{(0)}s^2 + \cdots + f[n]^{(0)}s^n + \dots \quad (4.63)$$

esta puede expresarse como,

$$\begin{aligned} f(s) &= f[0]^{(0)} + s \left( f[1]^{(0)} + f[2]^{(0)}s + \dots + f[n]^{(0)}s^{n-1} + \dots \right) \\ &= f[0]^{(0)} + \frac{s}{\left( \frac{1}{f[1]^{(0)} + f[2]^{(0)}s + \dots + f[n]^{(0)}s^{n-1} + \dots} \right)} \end{aligned} \quad (4.64)$$

El denominador del segundo término del lado derecho de la ecuación (4.64) se puede expresar como,

$$\frac{1}{f[1]^{(0)} + f[2]^{(0)}s + \dots + f[n]^{(0)}s^{n-1} + \dots} = C_1 + \frac{f[1]^{(1)}s + f[2]^{(1)}s^2 + \dots + f[n-1]^{(1)}s^{n-1} + \dots}{f[1]^{(0)} + f[2]^{(0)}s + \dots + f[n]^{(0)}s^{n-1} + \dots} \quad (4.65)$$

donde,

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{1}{f[1]^{(0)}} \\ f[1]^{(1)} &= -C_1 f[2]^{(0)} \\ f[2]^{(1)} &= -C_1 f[3]^{(0)} \\ &\vdots \\ f[n]^{(1)} &= -C_1 f[n+1]^{(0)} \end{aligned} \quad (4.66)$$

Sustituyendo (4.65) en (4.64), se obtiene

$$f(s) = f[0]^{(0)} + \frac{s}{C_1 + \frac{f[1]^{(1)}s + f[2]^{(1)}s^2 + \dots + f[n-1]^{(1)}s^{n-1} + \dots}{f[1]^{(0)} + f[2]^{(0)}s + \dots + f[n]^{(0)}s^{n-1} + \dots}} \quad (4.67)$$

la ecuación anterior puede expresarse como,

$$f(s) = f[0]^{(0)} + \frac{s}{C_1 + \frac{s \left( f[1]^{(1)} + f[2]^{(1)}s + \dots + f[n]^{(1)}s^{n-1} \right) + \dots}{f[1]^{(0)} + f[2]^{(0)}s + \dots + f[n]^{(0)}s^{n-1} + \dots}} \quad (4.68)$$

o bien,

$$f(s) = f[0]^{(0)} + \frac{s}{C_1 + \frac{\frac{f[1]^{(0)} + f[2]^{(0)}s + \dots + f[n]^{(0)}s^{n-1} + \dots}{f[1]^{(1)} + f[2]^{(1)}s + \dots + f[n]^{(1)}s^{n-1} + \dots}}}{s}} \quad (4.69)$$

La división dada en el último denominador del lado derecho de la ecuación (4.69) puede expresarse como,

$$\frac{f[1]^{(0)} + f[2]^{(0)}s + \dots + f[n]^{(0)}s^{n-1} + \dots}{f[1]^{(1)} + f[2]^{(1)}s + \dots + f[n]^{(1)}s^{n-1} + \dots} = C_2 + \frac{f[1]^{(2)} + f[2]^{(2)}s^2 + \dots + f[n]^{(2)}s^n + \dots}{f[1]^{(1)} + f[2]^{(1)}s + \dots + f[n]^{(1)}s^{n-1} + \dots} \quad (4.70)$$

donde,

$$\begin{aligned} C_2 &= \frac{f[1]^{(0)}}{f[1]^{(1)}} \\ f[1]^{(2)} &= f[2]^{(0)} - C_2 f[2]^{(1)} \\ f[2]^{(2)} &= f[3]^{(0)} - C_2 f[3]^{(1)} \\ &\vdots \\ f[n]^{(2)} &= f[n+1]^{(0)} - C_2 f[n+1]^{(1)} \end{aligned} \quad (4.71)$$

Sustituyendo (4.70) en (4.69) se obtiene,

$$f(s) = f[0]^{(0)} + \frac{s}{C_1 + \frac{s}{C_2 + \frac{f[1]^{(1)} + f[2]^{(1)}s + \dots + f[n]^{(1)}s^{n-1} + \dots}{f[1]^{(2)} + f[2]^{(2)}s + \dots + f[n]^{(2)}s^{n-1} + \dots}}}. \quad (4.72)$$

Continuando con el proceso anterior se obtienen la fracción continua (4.73) de la serie de potencias bajo análisis,

$$f(s) = f[0]^{(0)} + \frac{s}{C_1 + \frac{s}{C_2 + \frac{s}{C_3 + \dots}}}. \quad (4.73)$$

#### 4.3.4. Solución de la Expansión en Fracciones Continuas

Una vez obtenida la ecuación (4.73), es necesario obtener el aproximante que proporcione la solución al problema de flujos de potencia. El aproximante  $\frac{A_n(s)}{B_n(s)}$  de orden  $n$  de la fracción continua (4.73) se calcula mediante las ecuaciones (4.74) a la (4.79) [Alsaffar, 2005].

$$A_0(s) = f[0]^{(0)} \quad (4.74)$$

$$A_1(s) = C_1 f[0]^{(0)} + s \quad (4.75)$$

$$A_i(s) = C_i A_{i-1}(s) + s A_{i-2}(s) \quad i \geq 2 \quad (4.76)$$

$$B_0(s) = 1 \quad (4.77)$$

$$B_1(s) = C_1 \quad (4.78)$$

$$B_i(s) = C_i B_{i-1}(s) + s B_{i-2}(s) \quad i \geq 2 \quad (4.79)$$

Al considerar  $s = 1$ , la evaluación del aproximante de orden  $n$  mediante (4.74) a (4.79) es equivalente a evaluar la serie de potencias de la ecuación (4.46), obteniéndose el valor complejo de  $\bar{V}_k(s)$  [Alsaffar, 2005]. Puesto que este cálculo debe hacerse para cada voltaje nodal, se calcularán  $N$  aproximantes, es decir

$$\mathbf{Ap} = \left[ \left( \frac{A_n}{B_n} \right)_2 \quad \left( \frac{A_n}{B_n} \right)_3 \quad \dots \quad \left( \frac{A_n}{B_n} \right)_N \right] \quad (4.80)$$

La Figura muestra en forma esquemática el proceso computacional para obtener el aproximante de orden  $n$ .

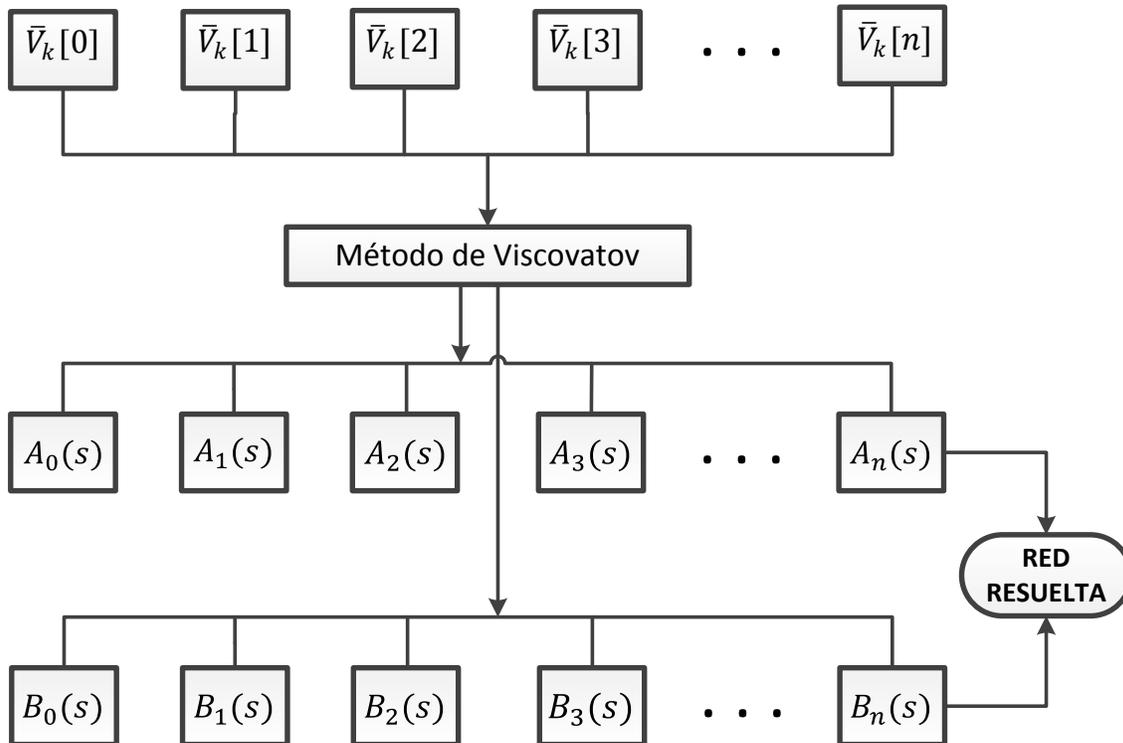


Figura 4.2: Proceso de cálculo para obtener el  $n$ -ésimo aproximante de la fracción continua.

Una vez que se ha calculado el  $n$ -ésimo aproximante para el nodo  $k$  y se evalúa en  $s = 1$ , se obtiene la solución buscada del problema de flujos de potencia. El proceso que se describe en la Figura 4.2 habrá de realizarse  $N$  veces, es decir, una vez por nodo.

#### 4.4. Algoritmo FPFC

Los pasos a seguir para resolver el problema de flujos de potencia mediante el método FPFC son los siguientes:

- Paso 1:** Formar la Matriz de Admitancia Nodal,  $\mathbf{Y}_{\text{bus}}$ .  
Definir inyecciones de potencia de generación y consumo en cada nodo.  
Inicializar las variables,  $V_k[0] = W_k[0] = 1$ .
- Paso 2:** Calcular los coeficientes de la expansión en series de Maclaurin para cada voltaje nodal ec. (4.54) y (4.58), proceso descrito en la Figura 4.1.
- Paso 3:** Obtener los  $n$  numeradores y denominadores parciales de la expansión en fracción continua de la serie de potencias para cada nodo, ecuaciones (4.74) a (4.79), proceso descrito en la Figura 4.2.
- Paso 4:** Imprimir Resultados.

## 4.5. Casos de Estudio

En esta Sección se presentan los resultados obtenidos al realizar estudios de flujos de potencia con el método FPFC a los sistemas analizados en los Capítulos 2 y 3, es decir, al sistema de 5 nodos, IEEE-14 nodos e IEEE-57 nodos. Los resultados obtenidos son comparados con los obtenidos con el método FPNR para propósitos de validación.

De acuerdo a la ecuación (4.54), la aplicación del método FPFC requiere del conocimiento de las potencias nodales inyectadas por los generadores. En el caso de un sistema real, estas potencias se obtienen de las mediciones existentes. Sin embargo, para poder utilizar el método FPFC en los siguientes casos de estudio, la potencia reactiva inyectada en cada nodo se calcula mediante la aplicación del método FPNR al sistema que se desea analizar, estas inyecciones son utilizadas como datos para el método FPFC.

### 4.5.1. Sistema de 5 Nodos

En esta sección se describe detalladamente el proceso numérico para resolver el problema de flujos de potencia para la red de 5 nodos tomando en cuenta 6 coeficientes en la expansión en series

de Maclaurin de los voltajes nodales. Para aplicar el método FPFC a la red de 5 nodos primeramente se obtiene la matriz de admitancia nodal  $\mathbf{Y}_{\text{bus}}$ , la cual en base a los datos descritos en el Apéndice A es,

$$\mathbf{Y}_{\text{bus}} = \begin{bmatrix} 6.25 - j18.695 & -5 + j15 & -1.25 + j3.75 & 0 & 0 \\ -5 + j15 & 10.8333 - j32.415 & -1.6667 + j5 & -1.6667 + j5 & -2.5 + j7.5 \\ -1.25 + j3.75 & -1.6667 + j5 & 12.9167 - j38.695 & -10 + j30 & 0 \\ 0 & -1.6667 + j5 & -10 + j30 & 12.9167 - j38.695 & -1.25 + j3.75 \\ 0 & -2.5 + j7.5 & 0 & -1.25 + j3.75 & 3.75 - j11.21 \end{bmatrix} \quad (4.81)$$

Las inyecciones de potencia activa en los nodos se obtiene del Apéndice A, las inyecciones de potencia reactiva se toman de la Tabla 2.2. De esta manera el vector de inyecciones de potencia compleja es,

$$\begin{bmatrix} \bar{S}_2 \\ \bar{S}_3 \\ \bar{S}_4 \\ \bar{S}_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.2 - j0.7159 \\ -0.45 - j0.15 \\ -0.4 - j0.05 \\ -0.6 - j0.1 \end{bmatrix} \quad (4.82)$$

Se procede a inicializar las variables  $\bar{W}_k[0]$  y  $\bar{V}_k[0]$ ,

$$\begin{bmatrix} \bar{V}_2[0] \\ \bar{V}_3[0] \\ \bar{V}_4[0] \\ \bar{V}_5[0] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.83)$$

$$\begin{bmatrix} \bar{W}_2[0] \\ \bar{W}_3[0] \\ \bar{W}_4[0] \\ \bar{W}_5[0] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.84)$$

Se sabe que  $V_1 = 1.06$  p.u., ahora se utiliza (4.54) para obtener el segundo coeficiente de la expansión en series,

$$\begin{bmatrix} \bar{V}_2[1] \\ \bar{V}_3[1] \\ \bar{V}_4[1] \\ \bar{V}_5[1] \end{bmatrix} = \mathbf{Y}_{tr}^{-1} \left( \begin{bmatrix} 0.2 - j0.7159 \\ -0.45 - j0.15 \\ -0.4 - j0.05 \\ -0.6 - j0.1 \end{bmatrix}^* \bullet \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}^* - \begin{bmatrix} \bar{Y}_{21} \\ \bar{Y}_{31} \\ \bar{Y}_{41} \\ \bar{Y}_{51} \end{bmatrix} (1.06 - 1) - \begin{bmatrix} j0.085 \\ j0.055 \\ j0.055 \\ j0.04 \end{bmatrix} \right) \quad (4.85)$$

$$\begin{bmatrix} \bar{V}_2[1] \\ \bar{V}_3[1] \\ \bar{V}_4[1] \\ \bar{V}_5[1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0044939 - j0.039269 \\ -0.00710016 - j0.0844247 \\ -0.0100119 - j0.0898184 \\ -0.0213193 - j0.102825 \end{bmatrix} \quad (4.86)$$

donde  $\bullet$  es el *producto punto* entre dos vectores,  $\mathbf{Y}_{tr}$  es la matriz de admitancia nodal una vez que se eliminan la primera fila y columna correspondientes al nodo *slack* de la matriz  $\mathbf{Y}_{bus}$ . Para calcular los elementos  $\bar{W}_k[1]$  se usa la ecuación (4.58),

$$\begin{bmatrix} \bar{W}_2[1] \\ \bar{W}_3[1] \\ \bar{W}_4[1] \\ \bar{W}_5[1] \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 0.0044939 - j0.039269 \\ -0.00710016 - j0.0844247 \\ -0.0100119 - j0.0898184 \\ -0.0213193 - j0.102825 \end{bmatrix} \quad (4.87)$$

$$\begin{bmatrix} \bar{W}_2[1] \\ \bar{W}_3[1] \\ \bar{W}_4[1] \\ \bar{W}_5[1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.0044939 + j0.039269 \\ 0.00710016 + j0.0844247 \\ 0.0100119 + j0.0898184 \\ 0.0213193 + j0.102825 \end{bmatrix} \quad (4.88)$$

Ahora se calculan los coeficientes  $\bar{V}_k[2]$  mediante la ecuación (4.54) utilizando el vector de términos independientes dado por (4.56),

$$\begin{bmatrix} \bar{V}_2[2] \\ \bar{V}_3[2] \\ \bar{V}_4[2] \\ \bar{V}_5[2] \end{bmatrix} = \mathbf{Y}_{tr}^{-1} \left( \begin{bmatrix} 0.2 - j0.7159 \\ -0.45 - j0.15 \\ -0.4 - j0.05 \\ -0.6 - j0.1 \end{bmatrix}^* \cdot \begin{bmatrix} -0.0044939 + j0.039269 \\ 0.00710016 + j0.0844247 \\ 0.0100119 + j0.0898184 \\ 0.0213193 + j0.102825 \end{bmatrix}^* \right) \quad (4.89)$$

$$\begin{bmatrix} \bar{V}_2[2] \\ \bar{V}_3[2] \\ \bar{V}_4[2] \\ \bar{V}_5[2] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.00491077 + j0.0035058 \\ -0.0087258 + j0.00496316 \\ -0.0093637 + j0.00513884 \\ -0.0115993 + j0.00558171 \end{bmatrix} \quad (4.90)$$

Ahora es posible calcular los coeficientes de  $\bar{W}_k[2]$  los cuales se obtienen como sigue,

$$\begin{bmatrix} \bar{W}_2[2] \\ \bar{W}_3[2] \\ \bar{W}_4[2] \\ \bar{W}_5[2] \end{bmatrix} = - \left( \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -0.00491 + j0.00350 \\ -0.00872 + j0.00496 \\ -0.00936 + j0.00513 \\ -0.01159 + j0.00558 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0.00449 + j0.03926 \\ 0.00710 + j0.08442 \\ 0.01001 + j0.08981 \\ 0.02131 + j0.10282 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.00449 - j0.03926 \\ -0.00710 - j0.08442 \\ -0.01001 - j0.08981 \\ -0.02131 - j0.10282 \end{bmatrix} \right) \quad (4.91)$$

Se procede a calcular los elementos  $\bar{V}_k[3]$ ,

$$\begin{bmatrix} \bar{V}_2[3] \\ \bar{V}_3[3] \\ \bar{V}_4[3] \\ \bar{V}_5[3] \end{bmatrix} = \mathbf{Y}_{lr}^{-1} \left( \begin{bmatrix} 0.2 - j0.7159 \\ -0.45 - j0.15 \\ -0.4 - j0.05 \\ -0.6 - j0.1 \end{bmatrix}^* \bullet \begin{bmatrix} -0.0044939 + j0.039269 \\ 0.00710016 + j0.0844247 \\ 0.0100119 + j0.0898184 \\ 0.0213193 + j0.102825 \end{bmatrix}^* \right) \quad (4.92)$$

$$\begin{bmatrix} \bar{V}_2[3] \\ \bar{V}_3[3] \\ \bar{V}_4[3] \\ \bar{V}_5[3] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.000107894 - j0.000224793 \\ 0.0000344187 - j0.000354784 \\ 0.0000322447 - j0.000366531 \\ -0.0000429698 - j0.000369042 \end{bmatrix} \quad (4.93)$$

Ahora se obtienen valores para los términos  $\bar{W}_k[3]$ ,

$$\begin{bmatrix} \bar{W}_2[3] \\ \bar{W}_3[3] \\ \bar{W}_4[3] \\ \bar{W}_5[3] \end{bmatrix} = - \left( \begin{bmatrix} \bar{W}_2[0] \\ \bar{W}_3[0] \\ \bar{W}_4[0] \\ \bar{W}_5[0] \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} \bar{V}_2[3] \\ \bar{V}_3[3] \\ \bar{V}_4[3] \\ \bar{V}_5[3] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{W}_2[1] \\ \bar{W}_3[1] \\ \bar{W}_4[1] \\ \bar{W}_5[1] \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} \bar{V}_2[2] \\ \bar{V}_3[2] \\ \bar{V}_4[2] \\ \bar{V}_5[2] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{W}_2[2] \\ \bar{W}_3[2] \\ \bar{W}_4[2] \\ \bar{W}_5[2] \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} \bar{V}_2[1] \\ \bar{V}_3[1] \\ \bar{V}_4[1] \\ \bar{V}_5[1] \end{bmatrix} \right) \quad (4.94)$$

lo cual resulta en,

$$\begin{bmatrix} \bar{W}_2[3] \\ \bar{W}_3[3] \\ \bar{W}_4[3] \\ \bar{W}_5[3] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.000359794 + j0.000583809 \\ 0.000776055 + j0.00116868 \\ 0.000837072 + j0.00124811 \\ 0.00101889 + j0.00156948 \end{bmatrix} \quad (4.95)$$

Continuando con el proceso que se ha seguido se obtienen valores para  $\bar{V}_k[4]$ ,  $\bar{W}_k[4]$  y  $\bar{V}_k[5]$ ,

$$\begin{bmatrix} \bar{V}_2[4] \\ \bar{V}_3[4] \\ \bar{V}_4[4] \\ \bar{V}_5[4] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.00010869 + j0.00002065 \\ -0.00017529 + j0.00001211 \\ -0.00018701 + j0.00001088 \\ -0.00023113 + j9.148926 \times 10^{-6} \end{bmatrix} \quad (4.96)$$

$$\begin{bmatrix} \bar{W}_2[4] \\ \bar{W}_3[4] \\ \bar{W}_4[4] \\ \bar{W}_5[4] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.00007795 - j0.00003674 \\ 0.00004764 + j0.00002028 \\ 0.00004596 + j0.00003911 \\ 0.00006494 + j0.00011921 \end{bmatrix} \quad (4.97)$$

$$\begin{bmatrix} \bar{V}_2[5] \\ \bar{V}_3[5] \\ \bar{V}_4[5] \\ \bar{V}_5[5] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9.392310 \times 10^{-6} - j4.059377 \times 10^{-7} \\ -0.00001101 - j1.604778 \times 10^{-6} \\ -0.00001197 - j1.619375 \times 10^{-6} \\ -0.00001727 - j8.776973 \times 10^{-7} \end{bmatrix} \quad (4.98)$$

Para formar una fracción continua con los coeficientes obtenidos previamente, se utiliza el método de Viscovatov descrito en la Sección 4.3.3 y cuya derivación matemática se encuentra en el Apéndice C. Se formará la fracción continua para los coeficientes de la serie de Maclaurin correspondiente al nodo 2. Por simplicidad, se utilizarán las ecuaciones (C.56) a (C.59) para obtener los numeradores y denominadores parciales de la fracción continua. La serie de Maclaurin para el voltaje nodal correspondiente al nodo 2 está dada por,

$$\bar{V}_2(s) = \bar{V}_2[0] + \bar{V}_2[1]s + \bar{V}_2[2]s^2 + \bar{V}_2[3]s^3 + \bar{V}_2[4]s^4 + \bar{V}_2[5]s^5 \quad (4.99)$$

o bien,

$$f(s) = a[0]^{(0)} + a[1]^{(0)}s + a[2]^{(0)}s^2 + a[3]^{(0)}s^3 + a[4]^{(0)}s^4 + a[5]^{(0)}s^5 \quad (4.100)$$

donde  $f(s) = \bar{V}_2(s)$ , y

$$a[0]^{(0)} = \bar{V}_2[0] = 1 \quad (4.101)$$

$$a[1]^{(0)} = \bar{V}_2[1] = 0.0044939 - j0.039269 \quad (4.102)$$

$$a[2]^{(0)} = \bar{V}_2[2] = -0.00491077 + j0.0035058 \quad (4.103)$$

$$a[3]^{(0)} = \bar{V}_2[3] = -0.000107894 - j0.000224793 \quad (4.104)$$

$$a[4]^{(0)} = \bar{V}_2[4] = -0.00010869 + j0.00002065 \quad (4.105)$$

$$a[5]^{(0)} = \bar{V}_2[5] = -9.392310 \times 10^{-6} - j4.059377 \times 10^{-7} \quad (4.106)$$

En base a la ecuación (C.56) tenemos,

$$C_1 = \frac{1}{a[1]^{(0)}} = \frac{1}{0.0044939 - j0.039269} = 2.87655 + j25.1362 \quad (4.107)$$

Ahora se calculan los coeficientes de la segunda serie  $a[n]^{(1)}$  para  $n \geq 1$ , esto se logra mediante (C.58), con el número de coeficientes disponibles solo se podrán calcular 4 coeficientes de la segunda serie,

$$a[1]^{(1)} = -\frac{a[n+1]^{(0)}}{a[1]^{(0)}} = -\frac{a[2]^{(0)}}{a[1]^{(0)}} = \frac{-0.00491077 + j0.0035058}{0.0044939 - j0.039269} \quad (4.108)$$

$$a[1]^{(1)} = 0.102248 + j0.113353 \quad (4.109)$$

$$a[2]^{(1)} = -\frac{a[3]^{(0)}}{a[1]^{(0)}} = \frac{-0.000107894 - j0.000224793}{0.0044939 - j0.039269} \quad (4.110)$$

$$a[2]^{(1)} = -0.00534007 + j0.00335867 \quad (4.111)$$

$$a[3]^{(1)} = -\frac{a[4]^{(0)}}{a[1]^{(0)}} = \frac{-0.00010869 + j0.00002065}{0.0044939 - j0.039269} \quad (4.112)$$

$$a[3]^{(1)} = 0.000831751 + j0.00267284 \quad (4.113)$$

$$a[4]^{(1)} = -\frac{a[5]^{(0)}}{a[1]^{(0)}} = \frac{-9.392310 \times 10^{-6} - j4.059377 \times 10^{-7}}{0.0044939 - j0.039269} \quad (4.114)$$

$$a[4]^{(1)} = 0.0000168137 + j0.000237254 \quad (4.115)$$

Se procede a calcular el segundo denominador parcial  $C_2$  mediante (C.57),

$$C_2 = \frac{a[1]^{(n-2)}}{a[1]^{(n-1)}} = \frac{a[1]^{(0)}}{a[1]^{(1)}} = \frac{0.0044939 - j0.039269}{0.102248 + j0.113353} \quad (4.116)$$

$$C_2 = -0.171294 - j0.194158 \quad (4.117)$$

Para obtener los coeficientes de la tercera serie se utiliza la ecuación (C.59). Con los coeficientes disponibles solamente se podrán calcular tres coeficientes de la tercera serie,

$$a[1]^{(2)} = a[2]^{(0)} - C_2 a[2]^{(1)} \quad (4.118)$$

$$a[1]^{(2)} = -0.00491 + j0.00350 - [(-0.17129 - j0.19415)(-0.00534 + j0.00335)] \quad (4.119)$$

$$a[1]^{(2)} = -0.0064776 + j0.0030443 \quad (4.120)$$

$$a[2]^{(2)} = a[3]^{(0)} - C_2 a[3]^{(1)} \quad (4.121)$$

$$a[2]^{(2)} = -0.000107 - j0.000224 - [(-0.17129 - j0.19415)(0.00083 + j0.00267)] \quad (4.122)$$

$$a[2]^{(2)} = -0.000484372 + j0.000394539 \quad (4.123)$$

$$a[3]^{(2)} = a[4]^{(0)} - C_2 a[4]^{(1)} \quad (4.124)$$

$$a[3]^{(2)} = -9.39 \times 10^{-6} - j4 \times 10^{-7} - [(-0.1712 - j0.1941)(0.00001 + j0.00023)] \quad (4.125)$$

$$a[3]^{(2)} = -0.000151882 + j0.0000645553 \quad (4.126)$$

El tercer denominador parcial se calcula mediante,

$$C_3 = \frac{a[1]^{(1)}}{a[1]^{(2)}} = \frac{0.102248 + j0.113353}{-0.0064776 + j0.0030443}$$

$$C_3 = -6.19286 - j20.4098$$

Para la obtención de los coeficientes correspondientes a la cuarta serie se aplica nuevamente la

ecuación (C.59),

$$a[1]^{(3)} = a[2]^{(1)} - C_3 a[2]^{(2)} \quad (4.127)$$

$$a[1]^{(3)} = -0.005340 + j0.003358 - [(-6.192 - j20.409)(-0.000484 + j0.000394)] \quad (4.128)$$

$$a[1]^{(3)} = -0.0163922 - j0.00408393 \quad (4.129)$$

$$a[2]^{(3)} = a[3]^{(1)} - C_3 a[3]^{(2)} \quad (4.130)$$

$$a[2]^{(3)} = 0.000831 + j0.002672 - [(-6.192 - j20.409)(-0.000151 + j0.000064)] \quad (4.131)$$

$$a[2]^{(3)} = -0.00142639 - j0.0000272592 \quad (4.132)$$

Ahora se calcula el cuarto denominador parcial,

$$C_4 = \frac{a[1]^{(2)}}{a[1]^{(3)}} = \frac{-0.0064776 + j0.0030443}{-0.0163922 - j0.00408393} \quad (4.133)$$

$$C_4 = 0.328505 - j0.26756 \quad (4.134)$$

De la quinta serie solo es posible calcular un coeficiente con los elementos disponibles, este es

$$a[1]^{(4)} = a[2]^{(2)} - C_4 a[2]^{(3)} \quad (4.135)$$

$$a[1]^{(4)} = -0.000484 + j0.000394 - [(0.3285 - j0.2675)(-0.001426 - j0.000027)] \quad (4.136)$$

$$a[1]^{(4)} = -8.5013 \times 10^{-6} + j0.0000218475 \quad (4.137)$$

y finalmente se calcula el último denominador parcial que puede ser obtenido con los coeficientes disponibles,

$$C_5 = \frac{a[1]^{(3)}}{a[1]^{(4)}} = \frac{-0.0163922 - j0.00408393}{-8.5013 \times 10^{-6} + j0.0000218475} \quad (4.138)$$

$$C_5 = 91.218 + j714.805 \quad (4.139)$$

Una vez obtenidos los elementos anteriores se calcula el  $n$ -ésimo aproximante, en este caso  $\frac{A_5(s)}{B_5(s)}$  y se evalúa para  $s = 1$ , lo anterior se logra calculando los numeradores y denominadores de cada uno de los aproximantes mediante las ecuaciones (4.74) a (4.79) como sigue,

$$A_0(s) = A_0(1) = a[0]^{(0)} = 1 \quad (4.140)$$

$$A_1(s) = C_1 a[0]^{(0)} + s \quad (4.141)$$

$$A_1(1) = (2.87655 + j25.1362)(1) + 1 \quad (4.142)$$

$$A_1(1) = 3.87655 + j25.1362 \quad (4.143)$$

$$A_2(1) = C_2 A_1(1) + A_0(1) = (-0.171294 - j0.194158)(3.87655 + j25.1362) + 1 \quad (4.144)$$

$$A_2(1) = 5.21635 - j5.05833 \quad (4.145)$$

$$A_3(1) = C_3 A_2(1) + A_1(1) \quad (4.146)$$

$$A_3(1) = (-6.19286 - j20.4098)(5.21635 - j5.05833) + (3.87655 + j25.1362) \quad (4.147)$$

$$A_3(1) = -131.667 - j50.0027 \quad (4.148)$$

$$A_4(1) = C_4 A_3(1) - A_2(1) \quad (4.149)$$

$$A_4(1) = (0.328505 - j0.26756)(-131.667 - j50.0027) - (5.21635 - j5.05833) \quad (4.150)$$

$$A_4(1) = -51.4156 + j13.7444 \quad (4.151)$$

$$A_5(1) = C_5 A_4(1) + A_3(1) \quad (4.152)$$

$$A_5(1) = (91.218 + j714.805)(-51.4156 + j13.7444) + (-131.667 - j50.0027) \quad (4.153)$$

$$A_5(1) = -14646.2 - j35548.4 \quad (4.154)$$

A continuación se calculan los denominadores de cada uno de los aproximantes,

$$B_0(s)=B_0(1) = 1 \quad (4.155)$$

$$B_1(s)=B_1(1) = C_1 = 2.87655 + j25.1362 \quad (4.156)$$

$$B_2(1)=C_2B_1(1) + B_0(1) \quad (4.157)$$

$$B_2(1)=(-0.171294 - j0.194158)(2.87655 + j25.1362) + 1 \quad (4.158)$$

$$B_2(1)=5.38764 - j4.86417 \quad (4.159)$$

$$B_3(1)=C_3B_2(1) + B_1(1) \quad (4.160)$$

$$B_3(1)=(-6.19286 - j20.4098)(5.38764 - j4.86417) + (2.87655 + j25.1362) \quad (4.161)$$

$$B_3(1)=-129.765 - j54.7011 \quad (4.162)$$

$$B_4(1)=C_4B_3(1) + B_2(1) \quad (4.163)$$

$$B_4(1)=(0.328505 - j0.26756)(-129.765 - j54.7011) + (5.38764 - j4.86417) \quad (4.164)$$

$$B_4(1)=-51.8767 + j11.8862 \quad (4.165)$$

$$B_5(1)=C_5B_4(1) + B_3(1) \quad (4.166)$$

$$B_5(1)=(91.218 + j714.805)(-51.8767 + j11.8862) + (-129.765 - j54.7011) \quad (4.167)$$

$$B_5(1)=-13358.2 - j36052.2 \quad (4.168)$$

Ahora es posible calcular el voltaje complejo en el nodo 2,

$$\bar{V}_2 = \frac{A_5(1)}{B_5(1)} = \frac{-14646.2 - j35548.4}{-13358.2 - j36052.2} \quad (4.169)$$

$$\bar{V}_2 = 0.999354 - j0.0359678 \quad (4.170)$$

La magnitud y ángulo de (4.170) son:

$$V_2 = 1 \text{ p.u.} \tag{4.171}$$

$$\theta_2 = -2.06124^\circ \tag{4.172}$$

Para obtener el voltaje nodal complejo en cada nodo se realiza el procedimiento anterior para cada uno de ellos. En la Tabla 4.1 se muestran los resultados obtenidos con diferentes números de coeficientes en la expansión en series de Maclaurin.

Tabla 4.1: Resultados de FPFC para la red de 5 nodos con diferente número de coeficientes utilizados en la expansión.

Nodo	Voltaje Nodal					
	5 términos		15 términos		100 términos	
	V (p.u.)	$\theta$ (°)	V (p.u.)	$\theta$ (°)	V (p.u.)	$\theta$ (°)
North	1.06	0	1.06	0	1.06	0
South	1	-2.06122	1	-2.06123	1	-2.06123
Lake	0.987252	-4.63602	0.987247	-4.63668	0.987247	-4.63668
Main	0.984138	-4.95627	0.984132	-4.95702	0.984132	-4.95702
Elm	0.971705	-5.76395	0.971696	-5.76495	0.971696	-5.76495

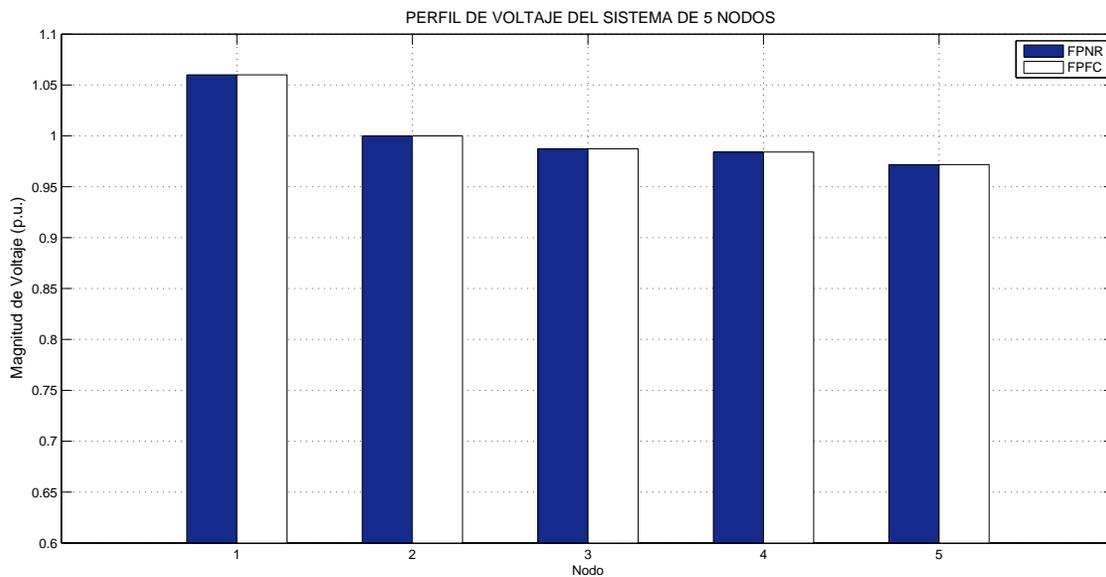


Figura 4.3: Perfil de magnitud de voltaje obtenido con los métodos FPNR y FPFC para el sistema de 5 nodos.

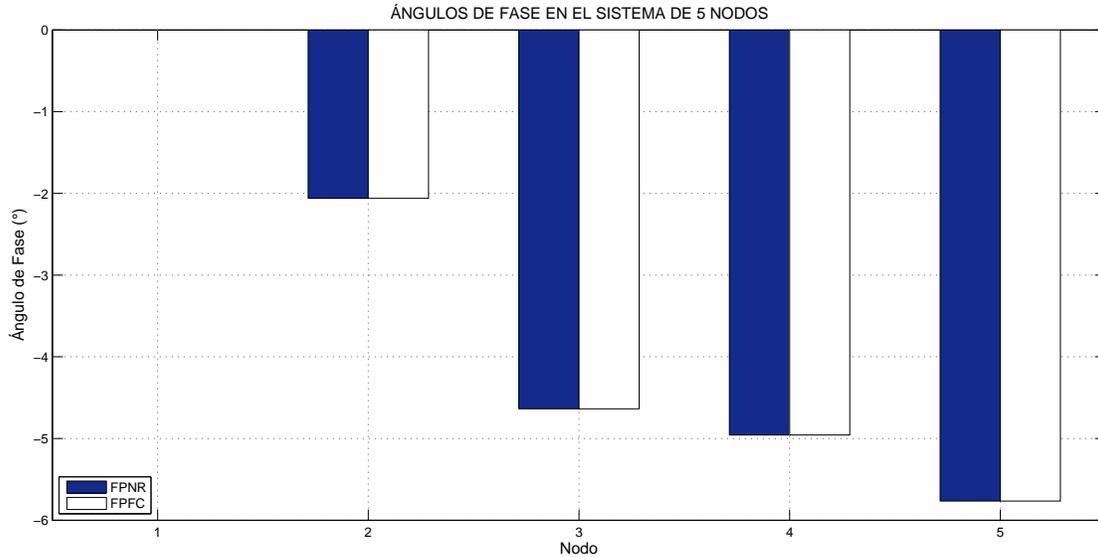


Figura 4.4: Ángulos de fase obtenidos con los métodos FPNR y FPFC para el sistema de 5 nodos.

De las Figuras 4.3 y 4.4 se observa que prácticamente no hay diferencia entre los resultados obtenidos con los métodos FPFC y FPNR. En la Tabla 4.1 se puede apreciar que existe una pequeña diferencia entre los resultados obtenidos con 5 coeficientes en la expansión y los obtenidos considerando 15 coeficientes, pero no existe diferencia entre los resultados obtenidos al considerar 15 y 100 coeficientes.

#### 4.5.2. Sistema IEEE-14 Nodos

Los resultados obtenidos al aplicar el método FPFC al sistema IEEE-14 nodos se muestran a continuación.

Tabla 4.2: Resultados de FPFC para el sistema IEEE-14 nodos con diferente número de coeficientes utilizados en la expansión.

Nodo	Voltaje Nodal					
	5 términos		15 términos		100 términos	
	V (p.u.)	$\theta$ (°)	V (p.u.)	$\theta$ (°)	V (p.u.)	$\theta$ (°)
1	1.06	0	1.06	0	1.06	0
2	1.04536	-4.96442	1.045	-4.98095	1.045	-4.98095
3	1.01022	-12.6778	1.01	-12.718	1.01	-12.718
4	1.01891	-10.2904	1.01862	-10.3242	1.01862	-10.3242
5	1.02055	-8.75257	1.02026	-8.78258	1.02026	-8.78258
6	1.07044	-14.1671	1.07	-14.2227	1.07	-14.2227
7	1.06236	-13.3175	1.06195	-13.3682	1.06195	-13.3682
8	1.09038	-13.3196	1.09	-13.3682	1.09	-13.3682
9	1.05678	-14.8876	1.05635	-14.9466	1.05635	-14.9466
10	1.05177	-15.0445	1.05133	-15.1043	1.05133	-15.1043
11	1.05752	-14.7368	1.05708	-14.7953	1.05708	-14.7953
12	1.05565	-15.0181	1.05522	-15.0774	1.05522	-15.0774
13	1.05088	-15.0988	1.05044	-15.1589	1.05044	-15.1589
14	1.03623	-15.9747	1.03579	-16.0389	1.03579	-16.0389

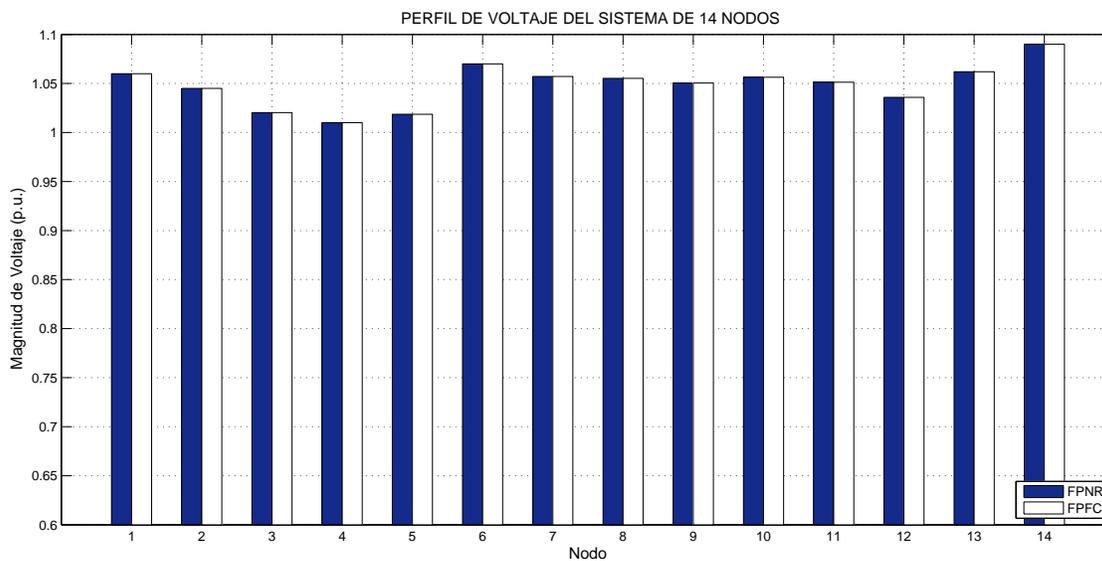


Figura 4.5: Perfil de magnitud de voltaje obtenido con los métodos FPNR y FPFC para el sistema IEEE-14 nodos.

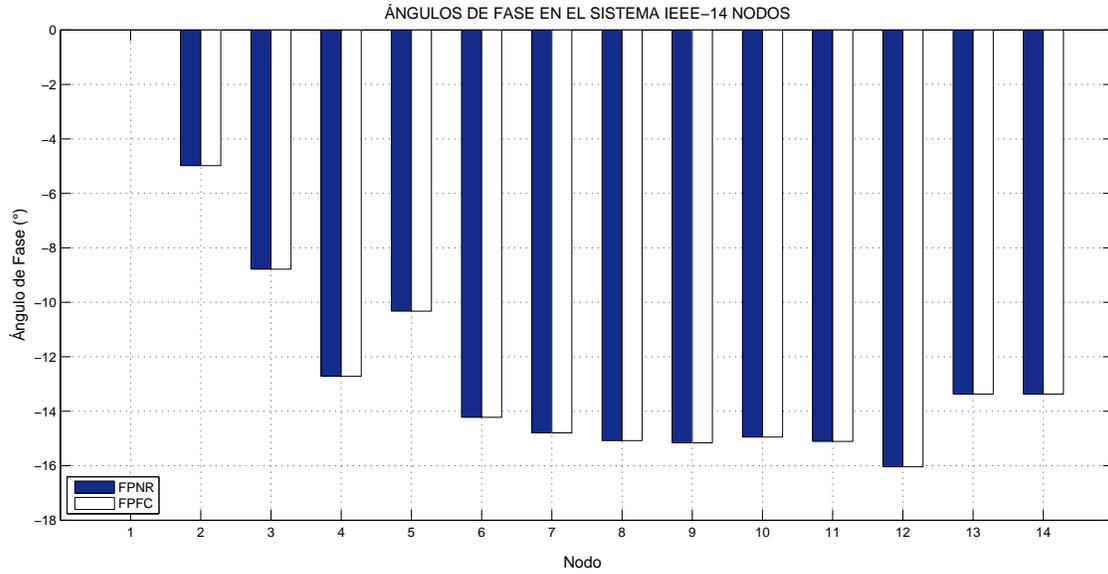


Figura 4.6: Ángulos de fase obtenidos con los métodos FPNR y FPFC para el sistema IEEE-14 nodos.

De las figuras 4.5 y 4.6 se observa que no hay diferencia entre los resultados obtenidos con los métodos FPNR y FPFC. Además, se observa que a partir de 15 coeficientes, los resultados ya no varían significativamente.

### 4.5.3. Sistema IEEE-57 Nodos

Los resultados obtenidos al aplicar el método FPFC al sistema IEEE-57 nodos se muestran en la Tabla.

Tabla 4.3: Resultados obtenidos con el método FPFC para el sistema IEEE-57 nodos con diferente número de coeficientes utilizados en la expansión.

Nodo	Voltaje nodal						Nodo	Voltaje nodal					
	5 términos		15 términos		100 términos			5 términos		15 términos		100 términos	
	V (p.u.)	$\theta$ (°)	V (p.u.)	$\theta$ (°)	V (p.u.)	$\theta$ (°)		V (p.u.)	$\theta$ (°)	V (p.u.)	$\theta$ (°)	V (p.u.)	$\theta$ (°)
1	1.04	0	1.04	0	1.04	0	30	0.96410	-18.41	0.96285	-18.71	0.96285	-18.71
2	1.00878	-1.09	1.01	-1.18	1.01	-1.18	31	0.93764	-19.08	0.93614	-19.38	0.93614	-19.38
3	0.98563	-5.90	0.985	-5.98	0.985	-5.98	32	0.95141	-18.23	0.95009	-18.51	0.95009	-18.51
4	0.98157	-7.22	0.98078	-7.33	0.98078	-7.33	33	0.9491	-18.27	0.9478	-18.55	0.9478	-18.55
5	0.97744	-8.41	0.9765	-8.54	0.9765	-8.54	34	0.96072	-13.94	0.95941	-14.14	0.95941	-14.14
6	0.98097	-8.52	0.98	-8.67	0.98	-8.67	35	0.96766	-13.70	0.96642	-13.90	0.96642	-13.90
7	0.98485	-7.41	0.98421	-7.60	0.98421	-7.60	36	0.9772	-13.43	0.97604	-13.63	0.97604	-13.63
8	1.00326	-4.26	1.005	-4.47	1.005	-4.47	37	0.9862	-13.25	0.9851	-13.44	0.9851	-13.44
9	0.9811	-9.42	0.98	-9.58	0.98	-9.58	38	1.01405	-12.53	1.01304	-12.73	1.01304	-12.73
10	0.98745	-11.31	0.98627	-11.44	0.98627	-11.44	39	0.98415	-13.29	0.98303	-13.49	0.98303	-13.49
11	0.97513	-10.05	0.97399	-10.19	0.97399	-10.19	40	0.97419	-13.46	0.97302	-13.65	0.97302	-13.65
12	1.01601	-10.36	1.015	-10.47	1.015	-10.47	41	0.99735	-13.87	0.99629	-14.07	0.99629	-14.07
13	0.97998	-9.69	0.97893	-9.80	0.97893	-9.80	42	0.96788	-15.32	0.96663	-15.53	0.96663	-15.53
14	0.97124	-9.24	0.97024	-9.35	0.97024	-9.35	43	1.01063	-11.16	1.00961	-11.35	1.00961	-11.35
15	0.98884	-7.10	0.98807	-7.19	0.98807	-7.19	44	1.01794	-11.67	1.01699	-11.85	1.01699	-11.85
16	1.01418	-8.77	1.01337	-8.85	1.01337	-8.85	45	1.03694	-9.107	1.03611	-9.27	1.03611	-9.27
17	1.01801	-5.35	1.01745	-5.39	1.01745	-5.39	46	1.06125	-10.89	1.05993	-11.11	1.05993	-11.11
18	1.0016	-11.57	1.00068	-11.72	1.00068	-11.72	47	1.03451	-12.30	1.03343	-12.51	1.03343	-12.51
19	0.97135	-13.07	0.97025	-13.22	0.97025	-13.22	48	1.02861	-12.40	1.02755	-12.61	1.02755	-12.61
20	0.96511	-13.28	0.96392	-13.44	0.96392	-13.44	49	1.03765	-12.73	1.03648	-12.93	1.03648	-12.93
21	1.00971	-12.72	1.00871	-12.93	1.00871	-12.93	50	1.02468	-13.21	1.02351	-13.41	1.02351	-13.41
22	1.01098	-12.67	1.00996	-12.87	1.00996	-12.87	51	1.0537	-12.33	1.05233	-12.53	1.05233	-12.53
23	1.00957	-12.73	1.00855	-12.94	1.00855	-12.94	52	0.9812	-11.27	0.98038	-11.49	0.98038	-11.49
24	1.00039	-13.04	0.99939	-13.29	0.99939	-13.29	53	0.97186	-12.02	0.97096	-12.25	0.97096	-12.25
25	0.98379	-17.86	0.98271	-18.17	0.98271	-18.17	54	0.9971	-11.47	0.99632	-11.70	0.99632	-11.70
26	0.96032	-12.78	0.95896	-12.98	0.95896	-12.98	55	1.03165	-10.55	1.03079	-10.8	1.03079	-10.8
27	0.98264	-11.30	0.98161	-11.51	0.98161	-11.51	56	0.96977	-15.84	0.96849	-16.06	0.96849	-16.06
28	0.99753	-10.26	0.99671	-10.48	0.99671	-10.48	57	0.96627	-16.35	0.96497	-16.58	0.96497	-16.58
29	1.01092	-9.53	1.01025	-9.77	1.01025	-9.77							

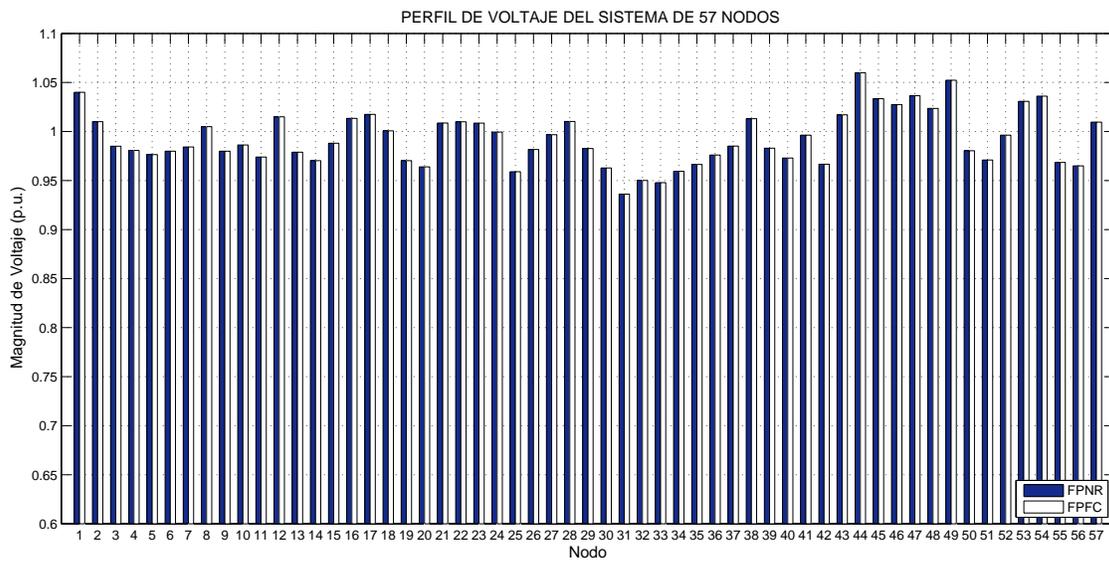


Figura 4.7: Perfil de magnitud de voltaje obtenido con los métodos FPNR y FPFC para el sistema IEEE-57 nodos.

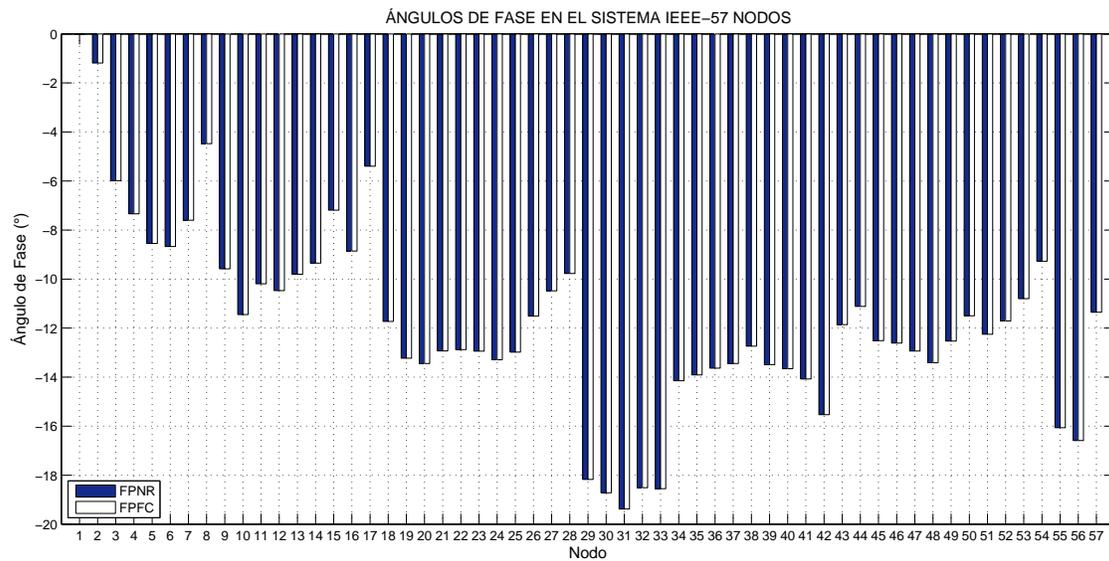


Figura 4.8: Ángulos de fase obtenidos con los métodos FPNR y FPFC para el sistema IEEE-57 nodos.

De las figuras 4.7 y 4.8 se observa que no hay diferencia entre los resultados obtenidos con los métodos FPNR y FPFC. De los datos obtenidos en la Tabla 4.3, se observa que 15 coeficientes dan un valor que ya no cambiará mucho aún cuando se aumente el número de coeficientes en la

expansión.

#### 4.5.4. Comparación del Tiempo de Cálculo entre los Métodos FPNR y FPFC

En la presente Subsección se presenta una comparación entre los tiempos de cálculo medidos al aplicar los métodos FPNR y FPFC a la solución de los sistemas de 5 nodos, IEEE-14 nodos e IEEE-57 nodos; además, con el fin de obtener una muestra de tiempo adicional, se agrega la medición correspondiente a la solución del sistema de 79 nodos que se utiliza en el Capítulo 5, los datos de este sistema se encuentran en el Apéndice A.

Las mediciones de tiempo se realizan con el objetivo de observar como es el comportamiento del método FPFC ante el método FPNR, en lo que a tiempo de cálculo respecta. Para realizar la comparación de los tiempos de cálculo se emplea una computadora con un procesador *Intel Core i3 M370 @ 2.40 GHz*, con un sistema operativo *Windows 7 Home Premium®* a 64 bits y 4 Gb de memoria RAM. Ambos métodos se implementaron en el software *Matlab®*, versión R2010a. El criterio tomado para efectuar las comparaciones de tiempo fue realizar diez simulaciones para cada uno de los sistemas de prueba, eliminar el máximo y el mínimo de las mediciones obtenidas, y calcular el tiempo promedio de las mediciones restantes. En la Tabla 4.4 se muestran los resultados obtenidos.

No. de nodos del sistema	$t_{FPNR}$ (ms)	5 coeficientes		15 coeficientes		100 coeficientes	
		$t_{FPFC}$ (ms)	$t_{FPFC}$ en % del $t_{FPNR}$	$t_{FPFC}$ (ms)	$t_{FPFC}$ en % del $t_{FPNR}$	$t_{FPFC}$ (ms)	$t_{FPFC}$ en % del $t_{FPNR}$
5	5.14	2.61	50.85	2.990	58.22	17.22	335.21
14	16.13	7.70	47.71	8.29	51.40	37.64	233.29
57	186.84	37.84	20.26	44.23	23.67	143.77	76.95
79	331.99	53.64	16.16	62.08	18.70	209.41	63.08

Tabla 4.4: Tiempos de cálculo obtenidos con los métodos FPNR y FPFC al resolver los diferentes sistemas de prueba.

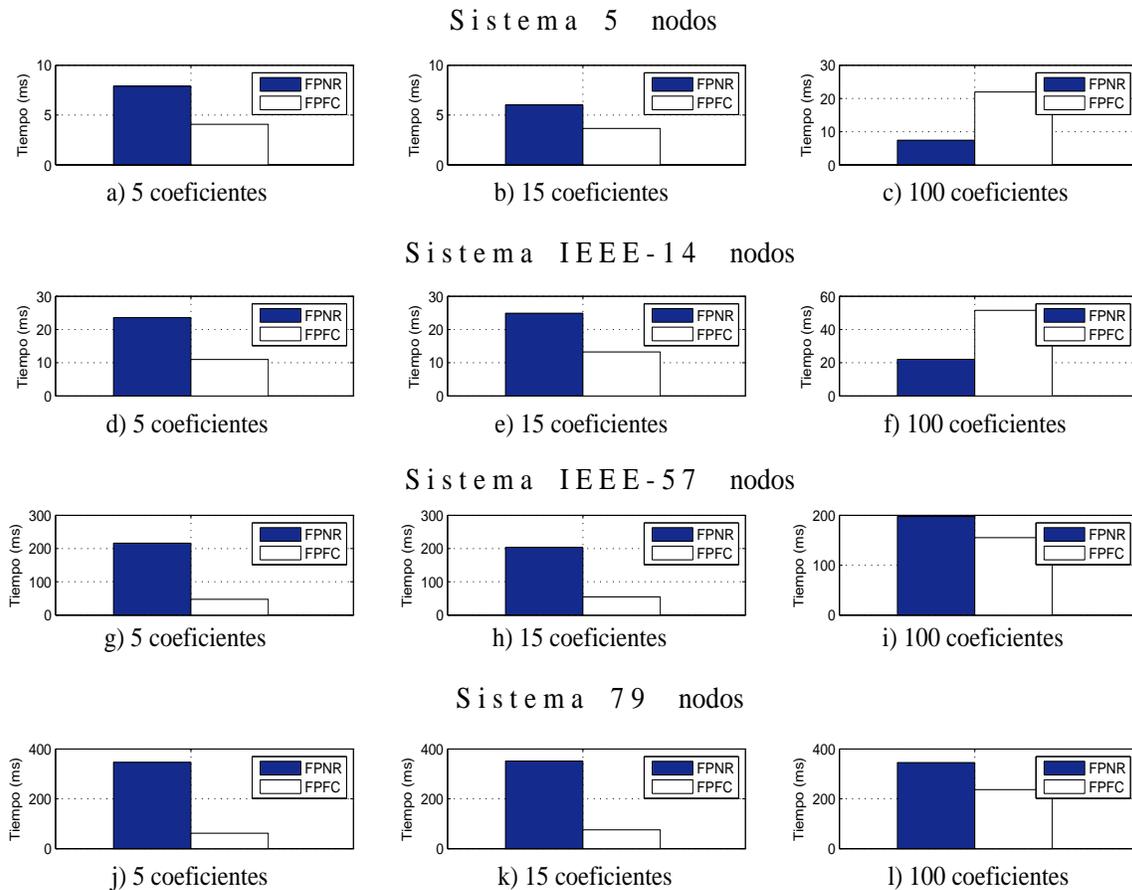


Figura 4.9: Comparación de tiempos de cálculo entre los métodos FPNR y FPFC.

Los datos de la Tabla 4.4 se comparan gráficamente en la Figura 4.9. Para los sistemas de 5 y 14 nodos, se observa que para un número relativamente pequeño de coeficientes en la solución obtenida por el método FPFC (5 y 15 coeficientes), este último es más rápido que el método FPNR. Sin embargo, al aumentar el número de coeficientes en la solución del método FPFC, se registra un tiempo de cálculo que llega a ser mayor de dos veces a aquel obtenido con el método FPNR.

Por otro lado, para los sistemas de 57 y 79 nodos, se observa que el método FPFC obtiene la solución en el 20% del tiempo que le toma obtenerla al método FPNR, lo anterior con un número de coeficientes relativamente pequeño. Cuando se toman en cuenta 100 coeficientes para obtener la solución mediante el método FPFC, sigue siendo más rápido, se observa que se llega a la solución en aproximadamente el 70% del tiempo en que lo hace el método FPNR.

## 4.6. Conclusiones

En el presente Capítulo se presentó de manera general, los principios matemáticos de las fracciones continuas y cómo representar una serie de Maclaurin como una fracción continua mediante el método de Viscovatov. Además, se presentó de manera detallada la formulación matemática del problema de flujos de potencia basada en expansión en fracciones continuas, así como su solución. El método FPFC se implementó en un programa de computadora, el cual se aplicó a la solución de tres sistemas de prueba, los sistemas de 5, 14 y 57 nodos. Los resultados obtenidos así como los tiempos de cálculo se comparan con aquellos arrojados por el método FPNR, en los resultados se observa una pequeña diferencia, la cual disminuye conforme aumenta el número de coeficientes considerados en la solución mediante el método FPFC. En cuanto al tiempo de cálculo, se observa que el método FPFC puede o no ser más rápido que el método FPNR dependiendo del número de coeficientes considerados en la solución del método FPFC.

# Capítulo 5

## Análisis de Colapso de Voltaje

### 5.1. Introducción

Como consecuencia del incremento en la demanda de energía eléctrica, la complejidad de los sistemas eléctricos de potencia ha aumentado en términos de su interconectividad y variedad de dispositivos conectados a la red. Asimismo, a causa de presiones económicas, ambientales y derechos de uso de suelo, el incremento en la carga ha sido mayor que el crecimiento en los medios de generación y transmisión de energía eléctrica, ocasionando así, que las empresas suministradoras de energía eléctrica estén operando sus sistemas de potencia cada vez más cerca de sus márgenes de estabilidad en estado estable.

La estabilidad de un sistema de potencia se define como la habilidad de un sistema eléctrico de potencia, dada una condición operativa inicial, para recuperar un estado operativo de equilibrio con la mayoría de sus variables dentro de límites operativos después de ser sometido a un disturbio físico, de manera que prácticamente el sistema permanezca intacto [Kundur et al., 2004].

Los sistemas de potencia están sujetos a una amplia gama de disturbios para determinadas condiciones de operación. En este contexto, la *estabilidad de voltaje* se refiere a la habilidad del sistema de potencia para mantener los voltajes dentro de límites operativos en todos los nodos del sistema, después de ser sometido a un disturbio dada una condición operativa inicial [Kundur et al., 2004].

El problema de estabilidad surge cuando ocurren fluctuaciones de voltaje, que incluso pueden llegar al colapso del mismo.

El fenómeno de colapso de voltaje estático se define como [Van Cutsem y Vournas, 1998]: una transición catastrófica repentina en el voltaje que usualmente es debida al aumento de carga en un SEP, donde este aumento de carga supera las capacidades combinadas de transmisión y generación del mismo. Como consecuencia, cuando un sistema es llevado a un punto de operación muy cercano a sus límites de estabilidad de voltaje se presenta un mecanismo inestable mediante el cual, en la mayoría de los casos, ya no es posible dar marcha atrás y mantenerlo dentro de dichos límites llegando inclusive a afectar a grandes cantidades de usuarios; además, se observa que este fenómeno se caracteriza por aparecer repentinamente sin antes haberse presentado cambios significativos en el voltaje en algunos nodos del sistema. Debido a que el aumento de carga es uno de los principales detonadores de dicho fenómeno es común que en la literatura aparezca con el nombre de *inestabilidad de carga* [Gutiérrez, 2004].

Se han presentado varios eventos de colapso de voltaje en el mundo con diversos grados de severidad, como los ocurridos en Francia en Diciembre de 1978 y en Bélgica en Agosto de 1981 [Dobson y Chiang, 1989], por mencionar algunos.

Cuando se analiza este fenómeno utilizando métodos convencionales como el análisis de flujos de potencia mediante el método FPNR, al acercarse la trayectoria de solución a la región de inestabilidad de voltaje se presenta una inestabilidad numérica que provoca que el Jacobiano sea singular o cercano a la singularidad, imposibilitando la obtención de más puntos de equilibrio, perdiendo información relevante del comportamiento del perfil de voltaje cuando el sistema se está acercando a su límite de estabilidad de voltaje. Los métodos de continuación (MC) son una opción para resolver este problema [Gutiérrez, 2004].

El objetivo de este Capítulo es observar el comportamiento de los métodos FPIC y FPFC cuando el SEP está cerca de la región de colapso de voltaje, y si ante esta situación es posible seguir obteniendo puntos de equilibrio. Los resultados obtenidos se comparan con los arrojados por el método de continuación de flujos de potencia (MCFP) desarrollado en [Gutiérrez, 2004].

## 5.2. Causas del Problema de Estabilidad de Voltaje en Sistemas Eléctricos de Potencia

Una de las causas que propician el problema de inestabilidad de voltaje es el operar el sistema de potencia cerca de los límites de máxima transferencia de potencia de los elementos de transmisión. Estos límites son:

**1. Restricciones físicas de la línea:** La principal limitación física de la línea es la impuesta por sus límites térmicos. Existe un límite de la temperatura que un conductor puede soportar, este depende del material del cual esta constituida la línea. Temperaturas excesivas podrían causar deformaciones en la línea entre torres de transmisión, lo cual resultaría en violaciones a los límites mínimos de *claros* entre la línea y tierra, incluso podría sufrir deformaciones físicas como la irreversible elongación de los conductores tal que no recuperen su longitud original cuando se enfríen.

**2. Límites impuestos por la red:** se refieren principalmente al límite de estabilidad de magnitud de voltaje y al límite de estabilidad angular.

Aunque un sistema se opere por debajo de los límites correspondientes a las restricciones físicas de la línea, es imperativo tener presentes los límites impuestos por la red. Para tener una perspectiva más amplia del fenómeno de colapso de voltaje, estos límites se definen y analizan a continuación.

### 5.2.1. Límite de Estabilidad de Magnitud de Voltaje

Para explicar este concepto se utiliza el sistema de la Figura 5.1, bajo la consideración de que el nodo 1 es un bus infinito, por lo que su voltaje es constante con un ángulo de referencia de cero grados, el cual suministra la energía demandada por el nodo 2.

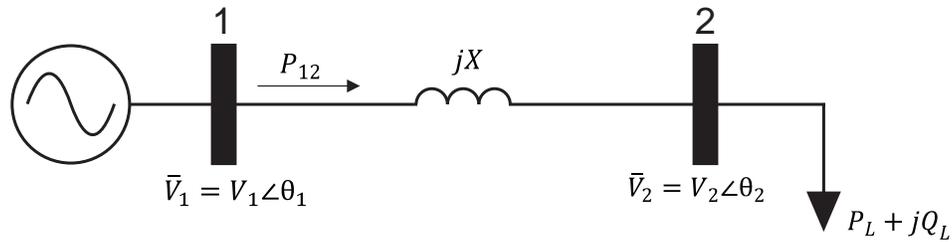


Figura 5.1: Sistema de dos nodos.

La potencia que se suministra a la carga es [Ajjarapu y Christy, 1992]:

$$P_{21} = -P_{12} = -\frac{V_2 V_1}{X} \sin \theta_{12} \quad (5.1)$$

$$Q_{21} = \frac{V_2^2}{X} - \frac{V_2 V_1}{X} \cos \theta_{12} \quad (5.2)$$

donde  $\theta_{12} = \theta_1 - \theta_2$ , y  $X$  es la reactancia serie de la línea de transmisión.

Considerando las expresiones (5.1) y (5.2), las ecuaciones de balance de potencia en el nodo 2 se pueden expresar como,

$$-P_L - P_{21} = -P_L + \frac{V_2 V_1}{X} \sin \theta_{12} = 0 \quad (5.3)$$

$$-Q_L - Q_{21} = -Q_L - \frac{V_2^2}{X} + \frac{V_2 V_1}{X} \cos \theta_{12} = 0 \quad (5.4)$$

resolviendo (5.3) y (5.4) para  $\sin \theta_{12}$  y  $\cos \theta_{12}$ , respectivamente, resulta,

$$\sin \theta_{12} = \frac{P_L X}{V_2 V_1} \quad (5.5)$$

$$\cos \theta_{12} = \frac{Q_L X + V_2^2}{V_2 V_1}. \quad (5.6)$$

Elevando al cuadrado ambas ecuaciones se puede aplicar la identidad trigonométrica,  $\sin^2 \theta_{12} + \cos^2 \theta_{12} = 1$ , lo cual resulta en,

$$\left(\frac{P_L X}{V_2 V_1}\right)^2 + \left(\frac{Q_L X + V_2^2}{V_2 V_1}\right)^2 = 1. \quad (5.7)$$

Resolviendo (5.7) para  $V_2^2$  obtenemos,

$$V_2^4 + V_2^2(2Q_L X - V_1^2) + (P_L^2 X^2 + Q_L^2 X^2) = 0. \quad (5.8)$$

La expresión cuadrática (5.8), se puede resolver para  $V_2^2$  para obtener,

$$V_2^2 = \frac{(V_1^2 - 2Q_L X) \pm \sqrt{(2Q_L X - V_1^2)^2 - 4X^2 (P_L^2 + Q_L^2)}}{2}. \quad (5.9)$$

Finalmente, tomando la solución positiva de (5.9) para  $V_2$ , ya que es evidente que la magnitud de voltaje es positiva, tenemos,

$$V_2 = \sqrt{\frac{(V_1^2 - 2Q_L X) \pm \sqrt{(2Q_L X - V_1^2)^2 - 4X^2 (P_L^2 + Q_L^2)}}{2}}. \quad (5.10)$$

En base a la ecuación (5.10) es posible simular un escenario de operación para el sistema de la Figura 5.1, en el cual se cuantifique la variación de magnitud de voltaje en función del incremento de carga, considerando la solución positiva del radical. Dado que el voltaje es positivo, se descartan como soluciones operativas las correspondientes al signo negativo. De esta ecuación se puede observar que para cada valor de incremento de potencia activa y reactiva existen dos soluciones para la magnitud de voltaje (por el signo  $\pm$  dentro del radical). La curva *PV* de la Figura 5.2 se obtiene al considerar  $V_1 = 1$  p.u. y  $X = 0.1$  p.u., y un factor de potencia unitario.

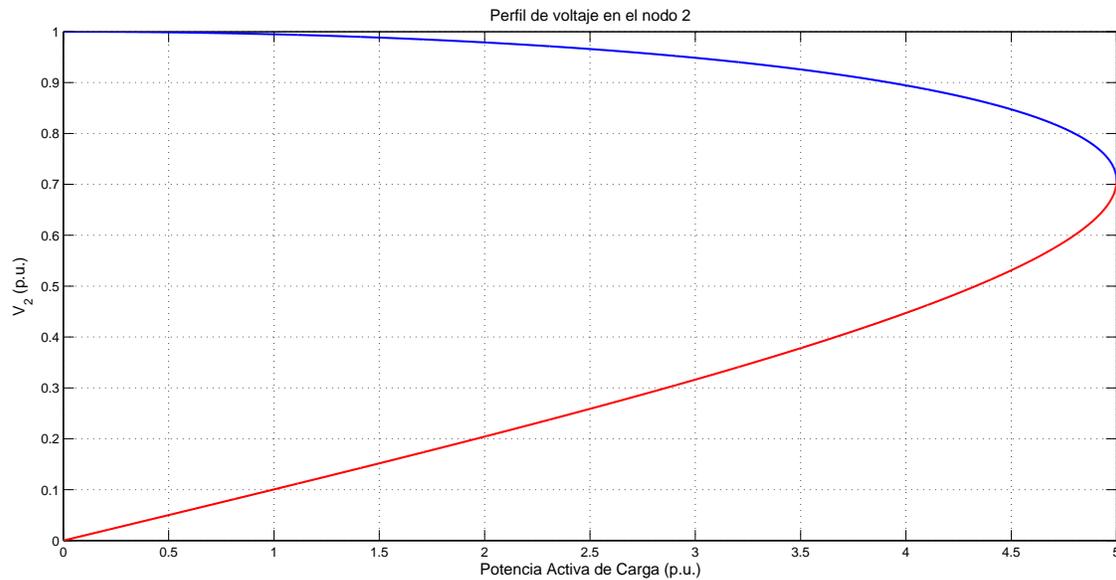


Figura 5.2: Curva  $PV$  en un nodo débil a factor de potencia unitario.

La región de soluciones factibles corresponde a la parte superior de la curva  $PV^1$ , la línea que se muestra en azul en la Figura 5.2; el conjunto de soluciones que físicamente no son factibles para la operación normal del sistema<sup>2</sup> corresponde a la parte inferior de la curva  $PV$ , la cual se muestra en rojo en la Figura 5.2. Conforme aumenta el nivel de cargabilidad se observa que ambas soluciones convergen hacia el mismo punto de operación, llamado *punto crítico* ó *punto de bifurcación* y desaparecen. Este punto corresponde al máximo nivel de cargabilidad del sistema. En la Figura 5.2 se observa que conforme se aumenta la carga se degrada el perfil de magnitud de voltaje en el nodo 2, disminuyendo la seguridad del sistema debido a que este cada vez está más cerca del límite de estabilidad de voltaje (*punto crítico*). Cuando se alcanza el *punto crítico* y se desea mejorar el perfil de magnitud de voltaje al disminuir la carga, este perfil continúa degradándose ya que los nuevos puntos de equilibrio se encuentran en la parte inferior de la trayectoria de solución.

En la Figura 5.3 se muestra un conjunto de curvas  $PV$ , las cuales corresponden a casos en donde se dispone de compensación de potencia reactiva para mejorar el perfil de magnitud de voltaje en la carga.

<sup>1</sup>Solución correspondiente al signo positivo del radical interior de la ecuación (5.10).

<sup>2</sup>Solución correspondiente al signo negativo del radical interior de la ecuación (5.10).

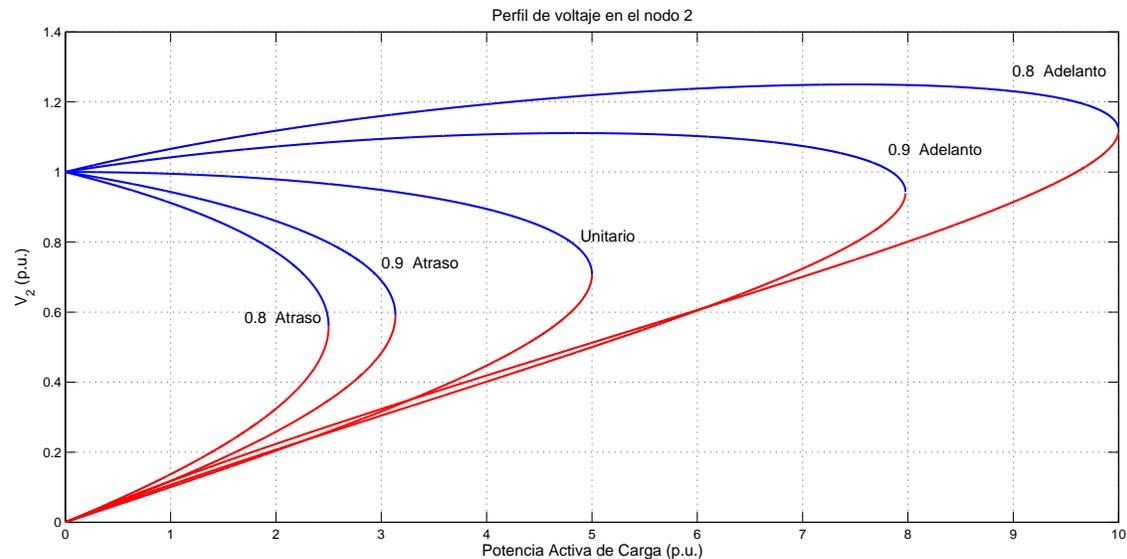


Figura 5.3: Curvas  $PV$  asociadas a un nodo débil para diferentes valores de factor de potencia.

De las curvas  $PV$  mostradas en la Figura 5.3 se puede concluir lo siguiente:

- Para cualquier potencia de carga por debajo de la máxima transferencia de potencia, existen dos soluciones que resultan de resolver (5.10). La primera corresponde a un alto voltaje y una baja corriente (caso normal) y la segunda corresponde a un bajo voltaje y una alta corriente (caso anormal).
- Cuando se compensa un nodo de carga, la máxima transferencia de potencia ocurre en un punto de operación tal que la magnitud de voltaje en ese punto se encuentra en valores cercanos al valor nominal de operación. Por lo tanto, al transmitir un valor de una potencia cercano al límite máximo de transferencia con un alto grado de compensación se estará operando el sistema en valores de magnitud de voltaje nominales pero cada vez más cerca de su límite de estabilidad. Este modo de operación puede ser demasiado riesgoso ya que el colapso de voltaje puede presentarse de manera repentina sin antes haberse presentado variaciones significativas de la magnitud del voltaje.

El mecanismo de colapso de voltaje puede acontecer mediante la siguiente secuencia de eventos cuando el sistema de potencia se somete a un disturbio, en este caso se toma en cuenta el incremento

gradual en la carga conectada en un nodo débil del sistema.

- Al aumentar la carga en un nodo débil se degrada el perfil de magnitud de voltaje en el mismo. Como consecuencia, se requiere de una mayor cantidad de potencia reactiva para mantener el voltaje dentro de los márgenes operativos de seguridad para el sistema. Esto representa un problema de estabilidad de voltaje local.
- Si las reservas de potencia reactiva del nodo en cuestión se agotan, comienza a fluir potencia reactiva de las líneas de nodos adyacentes conectadas al nodo débil.
- Conforme la carga va aumentando, el perfil de magnitud de voltaje tiende a degradarse aún más, sobrecargando así las líneas adyacentes. Debido a esto, los nodos que tienen líneas conectadas al nodo débil presentan el mismo problema, ya que se tiene un aumento de carga en dichos nodos, degradándose su perfil de magnitud de voltaje. Esto resulta en un problema de estabilidad de voltaje que se va haciendo cada vez más global.
- Debido a lo anterior, se presenta un efecto en cascada, en donde si no se toman las medidas correctivas en tiempo y forma, operarán las protecciones contra bajo voltaje en los nodos y contra sobrecarga en los elementos de transmisión. En este momento, el sistema de potencia comienza a perder elementos, cambiando drásticamente su topología, hasta llegar a quedar completamente desmantelado, llegando a afectar incluso a miles de usuarios.

De acuerdo a la experiencia en la industria eléctrica y en diversos trabajos de investigación, el fenómeno de colapso de voltaje se puede clasificar de acuerdo a los siguientes intervalos de tiempo considerados para su análisis [Ajjarapu y Lee, 1992]:

**Análisis transitorio rápido:** Incluye las respuestas rápidas de los componentes *RLC* del sistema de potencia. Su duración es del orden de los micro a los milisegundos.

**Análisis transitorio:** Considera disturbios prolongados y cargas que tienen una respuesta rápida, con un periodo de duración que va de uno a varios segundos.

**Análisis prolongado:** Considera el aumento de carga y/o el aumento de potencia transferida entre áreas o sistemas. Su duración va de los 30 segundos a los 30 minutos.

El último caso es el que concierne a este trabajo, ya que los métodos de flujos de potencia son estudios en estado estacionario.

### 5.3. Descripción de los Métodos de Continuación

La divergencia en la solución de flujos de potencia puede ser causada por problemas numéricos en la matriz Jacobiana o por el hecho de que se ha alcanzado el punto de bifurcación. Se han propuesto diversos métodos numéricos para solucionar este problema, de entre los cuales destacan los MC [Edwards, 1994] y [Dobson, 1997]. Básicamente, un método de continuación agrega pasos extra en el cálculo de los flujos de potencia, aumentando el conjunto de ecuaciones de tal manera que el nuevo conjunto está numéricamente bien condicionado. En esta Sección se describe de manera muy general los principios matemáticos de los métodos de continuación.

Las ecuaciones de desbalance de potencia deben expresarse por un conjunto de ecuaciones de la forma,

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, \lambda) = \mathbf{0} \quad (5.11)$$

donde  $\mathbf{x}$  representa las variables de estado tales como magnitudes y ángulos de voltajes nodales, y  $\lambda$  es el *parámetro de continuación* y representa parámetros algebraicos tales como demandas de energía, estados de equipos, etc.

Para una condición operativa  $\lambda = \lambda_0$ , diversos puntos de equilibrio  $\mathbf{x}_0(1), \mathbf{x}_0(2), \dots, \mathbf{x}_0(n_0)$ , satisfacen la ecuación (5.11). Conforme  $\lambda$  continua cambiando, el sistema puede no llegar a un nuevo punto de equilibrio, haciéndose inestable. Este punto operativo en el cual ocurre la pérdida de estabilidad puede acontecer en una condición operativa  $\lambda_{l_s}$  en la cual las múltiples soluciones de (5.11) convergen hacia un mismo punto de equilibrio, es decir,  $\mathbf{x}_{l_s}(1) = \mathbf{x}_{l_s}(2) = \dots = \mathbf{x}_{l_s}(n_{l_s})$ . El punto en el cual desaparece el equilibrio del sistema es conocido como *punto de bifurcación de punto de*

*silla* (también llamado *punto crítico* ó *punto de bifurcación*) [Cañizares, 1997, Dobson, 1997]. En este punto ya no es posible la solución del conjunto de ecuaciones algebraicas no-lineales. La forma de la trayectoria de estado del sistema se conoce como curva nariz. Cuando dicha curva se obtiene graficando una variable de estado en el eje vertical y el parámetro que produce la bifurcación graficado en el eje horizontal, el diagrama es llamado *diagrama de bifurcación* [Dobson, 1997].

La aplicación de los MC consiste en encontrar la trayectoria de solución por medio del cálculo secuencial de los puntos de equilibrio que la conforman, en función de la variación del parámetro de continuación.

De tal manera, considerando que para un valor dado  $\lambda_1$  del parámetro  $\lambda$  se ha calculado el punto de equilibrio  $(\mathbf{x}_1, \lambda_1)$  que satisface  $\mathbf{f}(\mathbf{x}_1, \lambda_1) = \mathbf{0}$ , es posible trazar una trayectoria de solución en el espacio  $\mathbb{R}^{n+1}$  al encontrar una secuencia de puntos de equilibrio  $(\mathbf{x}_2, \lambda_2), (\mathbf{x}_3, \lambda_3), \dots$  para valores  $\lambda_2, \lambda_3, \dots$ , que satisfacen  $\mathbf{f}(\mathbf{x}_j, \lambda_j) = \mathbf{0}$  para  $j = 2, 3, \dots$ , respectivamente. De tal manera, el procedimiento de continuación comienza de una solución dada  $(\mathbf{x}_j, \lambda_j)$  para calcular la siguiente iteración  $(\mathbf{x}_{j+1}, \lambda_{j+1})$ .

La mayoría de los algoritmos de continuación aplicados al estudio de colapso de voltaje se basan en métodos predictor-corrector, debido a su simplicidad y buen comportamiento reportado en la literatura. Estos algoritmos incluyen los siguientes pasos fundamentales que deben ser realizados repetidamente: predicción, parametrización, corrección y control de paso. A continuación se explica la relación existente entre dichos pasos, los cuales son ilustrados en la Figura 5.4.

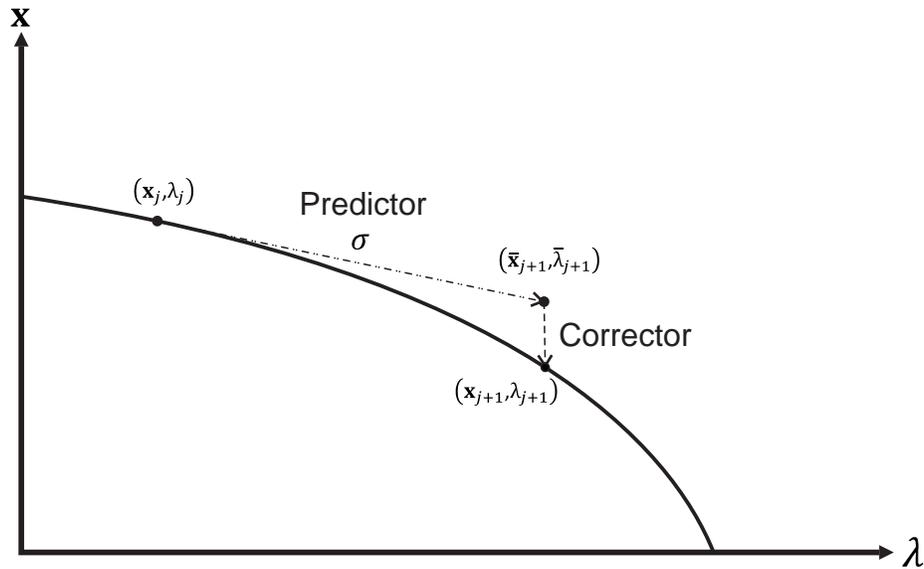


Figura 5.4: Pasos de los métodos de continuación.

Dada una solución  $(\mathbf{x}_j, \lambda_j)$ , y con una longitud de paso definida con anticipación, se predice un nuevo punto solución  $(\bar{\mathbf{x}}_{j+1}, \bar{\lambda}_{j+1})$ , el cual será una aproximación a la solución exacta  $(\mathbf{x}_{j+1}, \lambda_{j+1})$ , a este procedimiento se le conoce como predictor. Hecho lo anterior, y tomando en cuenta como condición inicial la solución estimada, se aplica el paso corrector. El objetivo de este paso es minimizar el error de la estimación realizada y aproximarla a un punto de equilibrio que se encuentre sobre la trayectoria de solución. Para identificar la ubicación de un punto de equilibrio sobre la trayectoria se necesita una relación que indique al corrector cuando ha llegado a la solución exacta buscada. Esta identificación se realiza con una parametrización. A continuación se explican cada uno de estos pasos.

### 5.3.1. Predictor

Un método que facilita su implementación en las ecuaciones de flujos de potencia, es el método *Predictor tangente* [Chiang et al., 1995]. En este caso, el punto de equilibrio estimado se obtiene mediante la siguiente ecuación,

$$\left( \bar{\mathbf{x}}_{j+1}, \bar{\lambda}_{j+1} \right) = \left( \mathbf{x}_j, \lambda_j \right) + \sigma_j \mathbf{Z} \quad (5.12)$$

donde  $\sigma_j$  es un paso de longitud apropiada y  $\mathbf{Z} \in \mathbb{R}^{n+1}$  es un vector tangente a la trayectoria de solución en el punto de equilibrio  $(\mathbf{x}_j, \lambda_j)$ .

Diferenciando la ecuación (5.11), el vector tangente es,

$$d\mathbf{f}(\mathbf{x}, \lambda) = \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}, \lambda)}{\partial \mathbf{x}} d\mathbf{x} + \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}, \lambda)}{\partial \lambda} d\lambda = \mathbf{0} \quad (5.13)$$

$$d\mathbf{f}(\mathbf{x}, \lambda) = \mathbf{f}_x d\mathbf{x} + \mathbf{f}_\lambda d\lambda = \mathbf{0} \quad (5.14)$$

La ecuación (5.14) puede expresarse como,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{f}_x & \mathbf{f}_\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\mathbf{x} \\ d\lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_x & \mathbf{f}_\lambda \end{bmatrix} \mathbf{Z} = \mathbf{0} \quad (5.15)$$

La ecuación (5.15) tiene múltiples soluciones debido a que el número de incógnitas es mayor que el número de ecuaciones por 1. Para obtener una solución única se normaliza el vector  $\mathbf{Z}$  para obtener una ecuación adicional en (5.15), una opción es utilizar la siguiente normalización,

$$\mathbf{e}_k \mathbf{Z} = \pm 1 \quad (5.16)$$

donde  $\mathbf{e}_k$  es un vector fila con todos sus elementos cero excepto el  $k$ -ésimo cuyo valor es igual a 1. La variable del vector tangente que corresponde al elemento unitario es el parámetro de continuación. El signo de la igualdad corresponde a la manera en que está cambiando el parámetro de continuación para obtener la trayectoria de solución. Si este parámetro se está incrementando, el signo es positivo; de lo contrario, el signo es negativo. De tal manera, al combinar las ecuaciones (5.15) y (5.16) resulta,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{f}_x & \mathbf{f}_\lambda \\ & \mathbf{e}_k \end{bmatrix} \mathbf{Z} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \pm 1 \end{bmatrix} \quad (5.17)$$

Para obtener los valores de los elementos del vector tangente  $\mathbf{Z}$  se resuelve el conjunto de

ecuaciones lineales de la ecuación (5.17), y el punto estimado,  $(\bar{\mathbf{x}}_{j+1}, \bar{\lambda}_{j+1})$ , se obtiene mediante la ecuación (5.12).

### 5.3.2. Parametrización y Corrector

Una vez que se ha obtenido la aproximación  $(\bar{\mathbf{x}}_{j+1}, \bar{\lambda}_{j+1})$  a la solución exacta  $(\mathbf{x}_{j+1}, \lambda_{j+1})$ , es necesario minimizar el error solucionando la ecuación (5.11) con las condiciones iniciales dadas por  $(\bar{\mathbf{x}}_{j+1}, \bar{\lambda}_{j+1})$ . Sin embargo, debido a la diferencia entre el número de ecuaciones e incógnitas, es necesario tener otra ecuación que permita obtener un sistema de ecuaciones de rango completo, tal como se muestra en la ecuación (5.18),

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{f}(\mathbf{x}, \lambda) &= \mathbf{0} \\ g(\mathbf{x}, \lambda) &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (5.18)$$

Una posible forma de especificar la ecuación de parametrización  $g(\mathbf{x}, \lambda) = 0$  es [Seydel, 1994],

$$g(\mathbf{Y}) = y_k - \bar{y}_k = 0 \quad (5.19)$$

donde  $\mathbf{Y} = [x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda] = [y_1, y_2, \dots, y_n, y_k]$ . La variable  $y_k$  corresponde al parámetro de continuación seleccionado y  $\bar{y}_k$  corresponde al valor estimado de dicho parámetro. El proceso de solución del conjunto de ecuaciones dadas en (5.18), se interpreta geoméricamente como la búsqueda del punto intersección entre la trayectoria de solución y el hiperplano que contiene a la solución estimada como se muestra en la Figura 5.5.

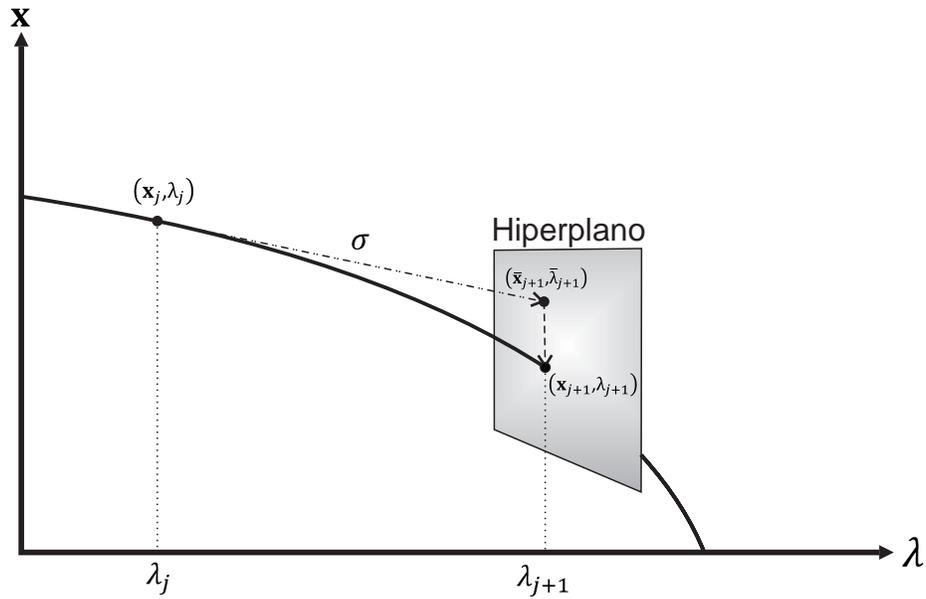


Figura 5.5: Intersección del hiperplano con la trayectoria de solución.

Para resolver el conjunto de ecuaciones dado por (5.18) es posible utilizar el algoritmo Newton-Raphson, por lo que el sistema a resolver está dado por,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{f}_x & \mathbf{f}_\lambda \\ & \mathbf{e}_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{x} \\ \Delta \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.20)$$

Con la solución de la ecuación (5.20), el punto de equilibrio está dado por,

$$(\mathbf{x}_{j+1}, \lambda_{j+1}) = (\bar{\mathbf{x}}_{j+1} + \Delta \mathbf{x}, \bar{\lambda}_{j+1} + \Delta \lambda) \quad (5.21)$$

Para el caso del análisis de colapso de voltaje el parámetro de continuación es la cargabilidad del sistema. El punto de operación inicial se obtiene al aplicar un estudio de flujos de potencia convencional al caso base del sistema que se desea analizar. Aplicando repetidamente los pasos predictor-corrector es posible obtener los diagramas de bifurcación para el o los nodos de interés de un sistema de potencia.

## 5.4. Aplicación de los Métodos FPIC y FPFC al Análisis de Colapso de Voltaje

En esta Sección se aplican los métodos FPIC y FPFC al análisis de colapso de voltaje a sistemas de 3, 5 y 79 nodos, cuyos datos se encuentran en el Apéndice A. Para los diferentes sistemas de prueba se obtienen los diagramas de bifurcación en base a los resultados arrojados por el método de continuación de flujos de potencia (MCFP) desarrollado en [Gutiérrez, 2004]. Para cada punto operativo que describe el diagrama de bifurcación del sistema se aplican los métodos FPIC y FPFC. Al método FPIC se le suministran como condiciones iniciales las magnitudes y ángulos de voltaje obtenidos en el punto de equilibrio previo al punto en cuestión, excepto para el caso base en donde las condiciones iniciales se proporcionan como se describe en la Sección 2.4.3, también conocido como *arranque plano*; se utiliza una tolerancia de  $1 \times 10^{-12}$  en todos los casos. Para el método FPFC se utilizan 15 coeficientes en la expansión en series de Maclaurin.

### 5.4.1. Sistema de 3 Nodos

La red que se estudiará es la que se muestra en la Figura 5.6. Se incrementará gradualmente la carga conectada en el nodo 3 de acuerdo al incremento utilizado en el MCFP. Los resultados obtenidos por los métodos MCFP, FPIC y FPFC se muestran en la Tabla 5.1.

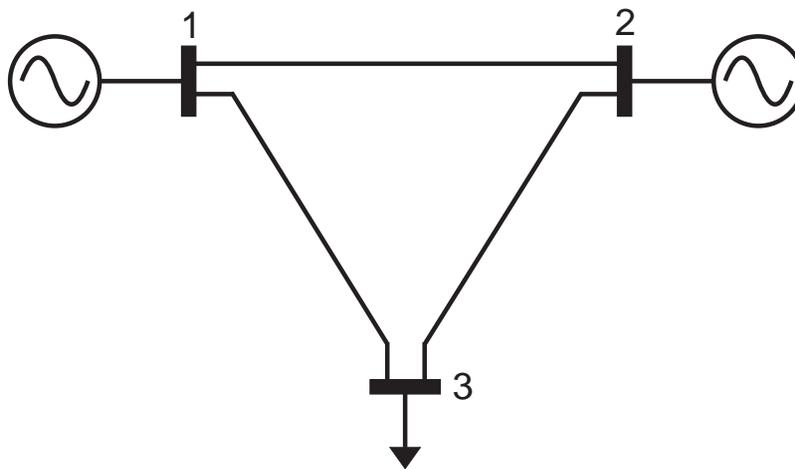


Figura 5.6: Red de 3 nodos.

Tabla 5.1: Resultados de las simulaciones realizadas para el sistema de 3 nodos.

$\lambda$ (p.u.)	$P_{L_3}$ (MW)	$Q_{L_3}$ (MVAR)	MCFP		FPIC		FPFC	
			$V_3$ (p.u.)	$\theta_3$ (°)	$V_3$ (p.u.)	$\theta_3$ (°)	$V_3$ (p.u.)	$\theta_3$ (°)
0	2.8653	1.7244	0.919933	-10.294	0.919933	-10.294	0.919934	-10.294
1.1	4.7503	2.8588	0.801764	-20.432	0.801764	-20.432	0.801833	-20.427
1.2	4.9216	2.9619	0.786191	-21.625	0.786196	-21.625	0.78638	-21.612
1.3	5.093	3.0651	0.768966	-22.913	0.768962	-22.913	0.769443	-22.879
1.4	5.2644	3.1682	0.749526	-24.327	0.749524	-24.327	0.750859	-24.239
1.5	5.4357	3.2713	0.726892	-25.925	0.726897	-25.925	0.730753	-25.683
1.6	5.6071	3.3745	0.699021	-27.824	0.699012	-27.824	0.71077	-27.132
1.7	5.7784	3.4776	0.659772	-30.377	0.659772	-30.377	0.699754	-28.199
<b>1.76876</b>	<b>5.8963</b>	<b>3.5485</b>	<b>0.593794</b>	<b>-34.376</b>	<b>0.593707</b>	<b>-34.381</b>	<b>0.738893</b>	<b>-27.042</b>
1.73335	5.8356	3.512	0.534415	-37.683	0.639906	-31.619	0.796649	-24.647
1.62949	5.6576	3.4049	0.480973	-40.437	0.689161	-28.478	0.85451	-22.062
1.48195	5.4048	3.2527	0.432876	-42.743	0.731283	-25.619	0.9048	-19.707
1.30813	5.1069	3.0735	0.389588	-44.684	0.767474	-23.022	0.948093	-17.599
1.1203	4.7851	2.8798	0.35063	-46.324	0.79871	-20.668	0.985445	-15.714
0.927094	4.454	2.6805	0.315567	-47.717	0.825775	-18.535	1.01778	-14.025
0.734524	4.124	2.4819	0.28401	-48.904	0.849288	-16.604	1.04587	-12.512
0.546711	3.8021	2.2882	0.255609	-49.92	0.869779	-14.858	1.07033	-11.154
0.366391	3.4932	2.1023	0.230048	-50.794	0.887672	-13.279	1.09169	-9.934
0.19529	3.2	1.9258	0.207043	-51.547	0.903349	-11.853	1.11041	-8.838
0.034403	2.9243	1.7599	0.186339	-52.199	0.917101	-10.564	1.12683	-7.8527

Los diagramas de bifurcación obtenidos con los valores de la Tabla 5.1 se muestran en la Figura 5.7, donde se observa que desde el caso base y hasta el *punto crítico* los métodos MCFP y FPIC obtienen los mismos puntos de equilibrio, el método FPFC coincide con los métodos MCFP y FPIC hasta el punto de equilibrio que precede al *punto crítico*. Para los puntos operativos posteriores al punto de máxima cargabilidad, el método FPIC obtiene puntos de equilibrio muy cercanos a la parte superior del diagrama de bifurcación, es decir, los puntos de equilibrio obtenidos prácticamente están sobre la misma trayectoria por la cual se llegó al *punto crítico*, no así los puntos de equilibrio obtenidos con el método FPFC, en los cuales se observa que, contrario a lo esperado, el voltaje en el nodo en cuestión se sigue elevando después de haber llegado al punto de máxima cargabilidad, lo cual de acuerdo a la Figura 5.3 no corresponde a la solución real. El MCFP obtiene el diagrama de bifurcación “completo”, donde se observa que para los puntos operativos posteriores al *punto crítico* el perfil de magnitud de voltaje en el nodo estudiado continúa degradándose.

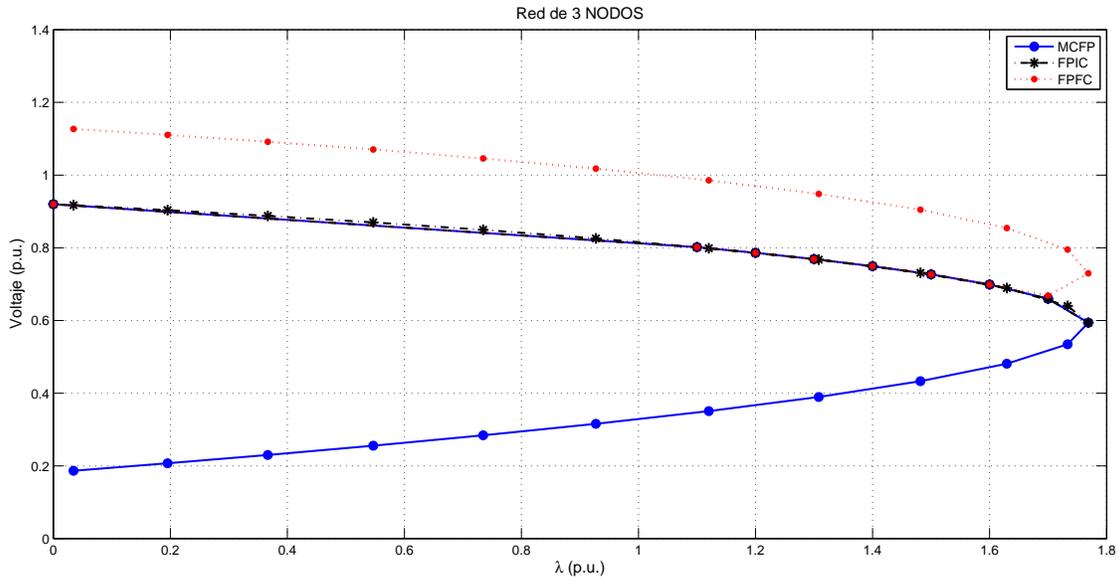


Figura 5.7: Diagramas de bifurcación obtenidos con los métodos MCFP, FPIC y FPFC, para el sistema de 3 nodos.

### 5.4.2. Sistema de 5 Nodos

En esta sección se realiza el estudio de colapso de voltaje al sistema de 5 nodos cuyos datos están descritos en el Apéndice A. En este caso, se incrementa gradualmente la carga conectada al nodo *Lake* de acuerdo al incremento del parámetro de continuación en el método MCFP. Los resultados obtenidos se muestran en la Tabla 5.2.

Tabla 5.2: Resultados de las simulaciones realizadas para el sistema de 5 nodos.

$\lambda$ (p.u.)	$P_{Lake}$ (MW)	$Q_{Lake}$ (MVAR)	MCFP		FPIC		FPFC	
			$V_{Lake}$ (p.u.)	$\theta_{Lake}$ (°)	$V_{Lake}$ (p.u.)	$\theta_{Lake}$ (°)	$V_{Lake}$ (p.u.)	$\theta_{Lake}$ (°)
0	45	15	0.987247	-4.636	0.987247	-4.636	0.987247	-4.636
1.2	192.995	64.3315	0.908871	-12.646	0.908871	-12.646	0.908871	-12.646
1.4	217.66	72.5535	0.893053	-14.152	0.893053	-14.152	0.893054	-14.152
1.6	242.326	80.7754	0.876117	-15.73	0.876117	-15.73	0.876117	-15.73
1.8	266.992	88.9973	0.857851	-17.393	0.857851	-17.393	0.857852	-17.393
2	291.658	97.2192	0.837964	-19.16	0.837964	-19.16	0.837968	-19.16
2.2	316.323	105.4411	0.816038	-21.061	0.816038	-21.061	0.816065	-21.059
2.4	340.989	113.6631	0.791434	-23.136	0.791434	-23.136	0.791576	-23.127
2.6	365.655	121.885	0.76308	-25.458	0.76308	-25.458	0.763856	-25.412
<b>2.8</b>	<b>390.321</b>	<b>130.107</b>	<b>0.659547</b>	<b>-30.929</b>	<b>0.659541</b>	<b>-30.929</b>	<b>0.688848</b>	<b>-29.441</b>
2.67988	375.507	125.169	0.527638	-37.199	0.689959	-28.606	0.751481	-26.404
2.36005	336.062	112.0207	0.42211	-42.127	0.747753	-23.978	0.843311	-21.732
1.97689	288.808	96.2693	0.337688	-46.088	0.797872	-19.712	0.912896	-18.03
1.5967	241.919	80.64	0.27015	-49.336	0.83754	-16.147	0.965438	-15.125
1.24959	199.11	66.3701	0.21612	-52.053	0.868388	-13.244	1.00547	-12.834
0.946799	161.768	53.9226	0.172896	-54.366	0.892315	-10.905	1.0362	-11.023
0.689841	130.077	43.3591	0.138317	-56.363	0.910909	-9.029	1.05994	-9.589
0.475387	103.629	34.543	0.110654	-58.099	0.92542	-7.526	1.0784	-8.451
0.297718	81.717	27.239	0.088529	-59.595	0.936834	-6.318	1.09289	-7.542
0.148842	63.357	21.1188	0.070818	-60.808	0.942373	-5.547	1.10453	-6.801

En la Figura 5.8 se muestran los diagramas de bifurcación obtenidos con los datos de la Tabla 5.2. En la Figura 5.8 se observa que para los puntos operativos desde el caso base y hasta el *punto crítico* los tres métodos, MCFP, FPIC y FPFC, obtienen los mismos puntos de equilibrio. Para los puntos operativos posteriores al punto de máxima cargabilidad, el método MCFP obtiene puntos de equilibrio en donde el perfil de magnitud de voltaje continua degradándose hasta prácticamente llegar a cero. Por el contrario, el método FPIC obtiene puntos de equilibrio un poco por debajo de la trayectoria sobre la cual se obtuvo el punto de equilibrio correspondiente al *punto crítico*, mientras que el método FPFC, contrario a lo esperado, para puntos operativos posteriores al *punto crítico* obtiene puntos de equilibrio en donde el perfil de magnitud de voltaje se mejora, lo cual no es posible, ya que la trayectoria característica como la de la Figura 5.3 indica lo contrario.

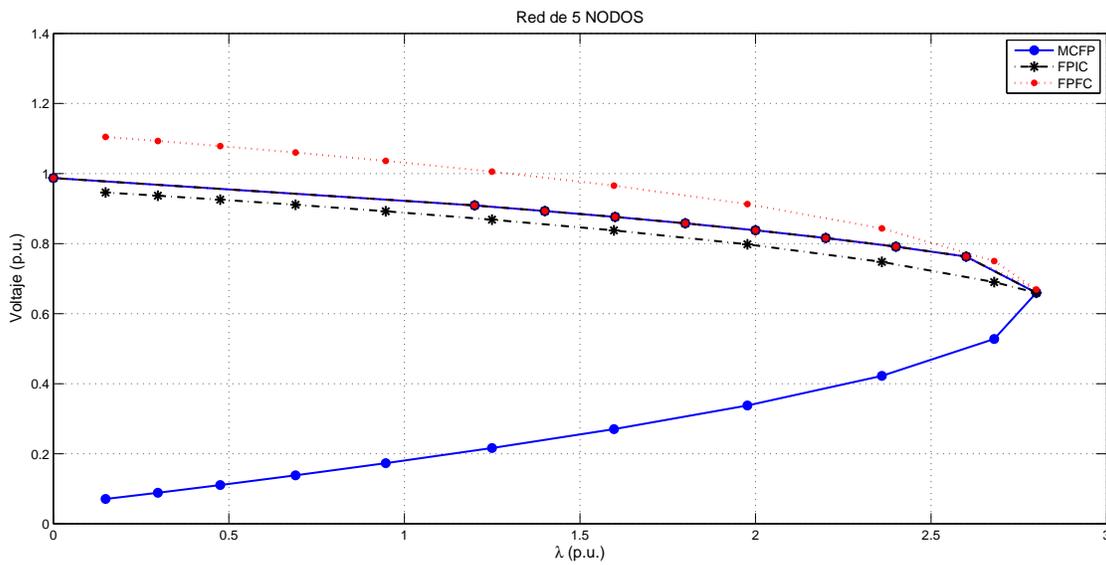


Figura 5.8: Diagramas de bifurcación obtenidos con los métodos MCFP, FPIC y FPFC, para el sistema de 5 nodos.

### 5.4.3. Sistema de 79 Nodos

En esta sección se realiza el análisis del fenómeno de colapso de voltaje para un sistema de 79 nodos, cuyos datos están descritos en el Apéndice A. Para efectos de la simulación, la carga conectada en el nodo 47 se aumenta gradualmente, de acuerdo al aumento realizado en el parámetro de continuación del MCFP. Los resultados de las simulaciones se muestran en la Tabla 5.3.

Tabla 5.3: Resultados de las simulaciones realizadas para el sistema de 79 nodos.

$\lambda$ (p.u.)	$P_{L_{47}}$ (MW)	$Q_{L_{47}}$ (MVAR)	MCFP		FPIC		FPFC	
			$V_{47}$ (p.u.)	$\theta_{47}$ (°)	$V_{47}$ (p.u.)	$\theta_{47}$ (°)	$V_{47}$ (p.u.)	$\theta_{47}$ (°)
0	32	11	0.973412	-7.3159	0.973412	-7.315	0.973412	-7.315
0.218309	58.839	20.226	0.923778	-13.045	0.928476	-13.006	0.923777	-13.045
0.407454	82.092	28.219	0.870621	-18.775	0.874239	-18.703	0.870622	-18.775
0.558171	100.621	34.589	0.80698	-24.504	0.807367	-24.492	0.806977	-24.504
0.658403	112.944	38.824	0.731321	-30.234	0.731322	-30.234	0.731325	-30.234
<b>0.704536</b>	<b>118.615</b>	<b>40.774</b>	<b>0.647254</b>	<b>-35.963</b>	<b>0.647255</b>	<b>-35.963</b>	<b>0.680996</b>	<b>-34.073</b>
0.692083	117.084	40.248	0.555253	-41.693	0.673311	-34.112	0.772912	-29.257
0.617914	107.966	37.113	0.4557	-47.423	0.749988	-28.274	0.864548	-24.142
0.481143	91.151	31.333	0.349176	-53.152	0.830566	-21.702	0.949355	-18.953
0.283842	66.895	22.995	0.236537	-58.882	0.904095	-14.963	1.012	-13.776
0.031736	35.902	12.341	0.118974	-64.611	0.966965	-8.104	1.09251	-8.292

En la Figura 5.9 se muestran los diagramas de bifurcación obtenidos con los datos de la Tabla 5.3. Para este sistema se observa que los métodos MCFP, FPIC y FPFC, obtienen los mismos puntos de equilibrio partiendo del caso base hasta el *punto crítico*, más allá del *punto crítico* se observa que los puntos de equilibrio obtenido con el método FPIC están sobre una trayectoria un poco por debajo de la trayectoria por la cual se llegó al *punto crítico*. Por otro lado, los puntos de equilibrio obtenidos por el método FPFC están sobre una trayectoria por encima de la cual se llegó al *punto crítico*, lo cual de acuerdo a la trayectoria característica mostrada en la Figura 5.2 esto no es posible.

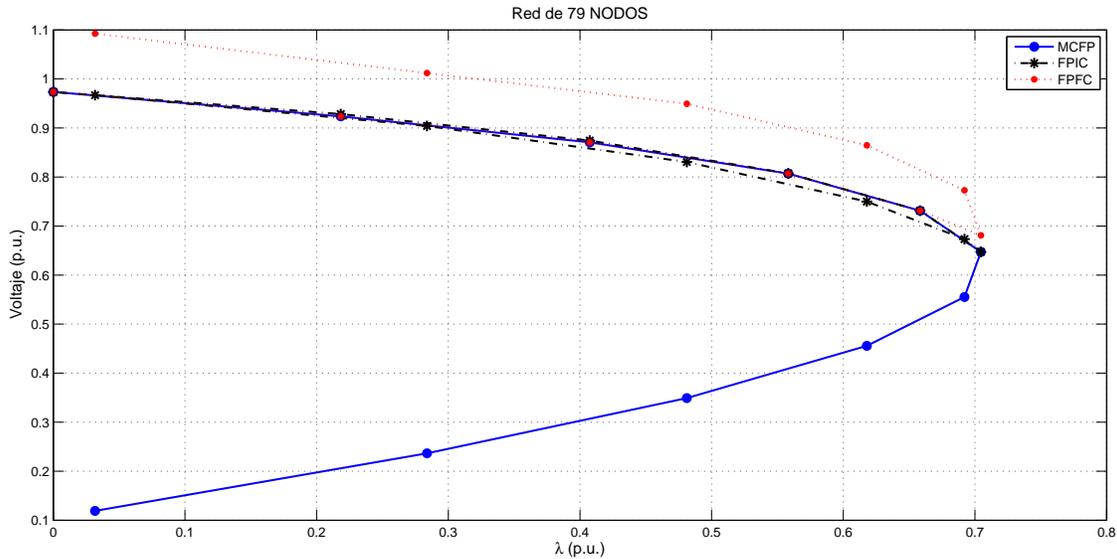


Figura 5.9: Diagramas de bifurcación obtenidos con los métodos MCFP, FPIC y FPFC, para el sistema de 79 nodos.

De los análisis anteriores se concluye que al igual que el método FPNR, los métodos FPIC y FPFC al acercarse la trayectoria de solución a la región de colapso de voltaje los puntos de equilibrio obtenidos son matemáticamente factibles pero físicamente no lo son. Lo anterior es debido a la multiplicidad de soluciones del problema de flujos de potencia; además, el punto de equilibrio físicamente factible se encuentra sobre la trayectoria que describe el diagrama de bifurcación.

## 5.5. Conclusiones

En este Capítulo se describe en que consiste la problemática del fenómeno de colapso de voltaje; asimismo, se presenta de manera general la formulación matemática de los Métodos de Continuación, los cuales constituyen una herramienta para analizar el fenómeno de colapso de voltaje. Además, se aplican los métodos desarrollados, FPIC y FPFC, al estudio del fenómeno de colapso de voltaje en tres diferentes sistemas de prueba; lo anterior con el objetivo de examinar su comportamiento ante dicho fenómeno.

Los resultados obtenidos indican que los métodos FPIC y FPFC, no obtienen soluciones física-

mente factibles al acercarse a la región de colapso de voltaje del SEP, y en consecuencia, no son una herramienta adecuada para el estudio del fenómeno de colapso de voltaje.

# Capítulo 6

## Conclusiones

El estudio de flujos de potencia es una herramienta imprescindible para la planeación, extensión y estudios de operación de sistemas eléctricos de potencia. En este trabajo se desarrollaron dos herramientas computacionales para realizar estudios de flujos de potencia en tres etapas, la primera fue el desarrollo del método de flujos de potencia basado en inyecciones de corriente (FPIC), la segunda fue el desarrollo del método de flujos de potencia no-iterativo llamado flujos de potencia de fracción continua (FPFC) descrito en [Bonet, 2004]. Por último, se examina el comportamiento de los métodos desarrollados, FPIC y FPFC, al ser aplicados al estudio del fenómeno de colapso de voltaje.

El método FPIC es un método en el cual se expresan las ecuaciones de desbalance de corriente en coordenadas rectangulares para cada nodo, las cuales se linealizan por medio del método Newton-Raphson. La principal ventaja de este método radica en que la mayoría de los elementos del Jacobiano permanecen constantes durante el proceso iterativo, exceptuando los elementos de la diagonal y aquellos asociados a nodos  $PV$ , lo anterior resulta en una reducción importante en términos de esfuerzo computacional con respecto al método convencional FPNR. Este método se implementó en un programa de computadora, para mostrar su desempeño se aplicó a tres sistemas de prueba: 5 nodos, IEEE-14nodos, IEEE-57nodos. En base a las pruebas realizadas, se observa que al obtener la solución de flujos de potencia, el tiempo de cálculo del método FPIC es hasta

50% menor que el del método FPNR para un mismo caso. Los resultados obtenidos se validaron comparándolos con aquellos arrojados por el método FPNR desarrollado en [Fuerte, 1997].

El método FPFC es un algoritmo matemático por medio del cual se puede llevar a cabo el estudio de flujos de potencia. Para aplicar el método es necesario expresar las ecuaciones de flujos de potencia en función de la variable compleja, las ecuaciones correspondientes a los voltajes nodales deben ser expandidas en series de Maclaurin, una vez obtenidas estas series, cada una de ellas debe aproximarse por medio de una fracción continua, la cual tiene una mejor convergencia que la serie de Maclaurin [Bonet, 2004]. Las fracciones continuas son construidas mediante el método de Vis-covatov, una vez construida, se evalúa la fracción continua y el resultado para el voltaje complejo nodal es obtenido. Para poder utilizar este método deben especificarse las inyecciones de potencia activa y reactiva, y como consecuencia no hay modelado de nodos *PV*, es decir, está pensado para su aplicación en tiempo real ya que el método FPFC utiliza una filosofía similar a la que sigue un *estimador de estado* en lo que a adquisición de datos respecta. El método FPFC se aplicó a tres sistemas de prueba: 5 nodos, IEEE-14nodos, IEEE-57nodos. La validación de los resultados obtenidos se realizó utilizando el programa desarrollado en [Fuerte, 1997]. Asimismo, se comparan los tiempos de cálculo entre los métodos FPNR y FPFC, se observa que el tiempo de cálculo del método FPFC es menor que aquél del método FPNR; sin embargo, a medida que se incrementa el número de coeficientes en el cálculo del método FPFC, el tiempo de cálculo aumenta, llegando incluso a ser mayor que el del método FPNR.

Finalmente, los métodos desarrollados, FPIC y FPFC, son aplicados al análisis del fenómeno de colapso de voltaje, fenómeno en el cual los métodos convencionales como el FPNR presentan inestabilidad numérica, problema que se corrige con los métodos de continuación (MC), cuyos principios matemáticos básicos fueron descritos. Así, se aplicaron los métodos FPIC y FPFC al análisis del colapso de voltaje con la finalidad de examinar su comportamiento ante dicho fenómeno, el cual tiene lugar cuando se incrementa gradualmente la carga conectada en un nodo del sistema. El análisis de colapso de voltaje se realizó en tres sistemas de prueba: 3, 5 y 79 nodos, los resultados obtenidos se comparan con aquellos arrojados por el método de continuación de flujos

de potencia (MCFP) desarrollado en [Gutiérrez, 2004]. Después de realizadas las pruebas se concluye que los métodos FPIC y FPFC no son adecuados para el estudio de colapso de voltaje ya que después de alcanzar el punto de máxima cargabilidad del sistema y continuar incrementando la carga se obtienen puntos de equilibrio que son matemáticamente factibles pero físicamente no lo son, ya que se encuentran fuera de la trayectoria de solución que muestra el diagrama de bifurcación.

## 6.1. Trabajos Futuros

A continuación se presentan algunas recomendaciones que podrían dar lugar a nuevas investigaciones y desarrollo de herramientas para el análisis de SEP. Las recomendaciones para trabajos futuros en relación el método FPIC son:

- Incluir técnicas de dispersidad en el proceso de solución del método FPIC.
- La inclusión de dispositivos FACTS en la formulación de flujos de potencia basada en inyecciones de corriente.
- Implementar un método de continuación utilizando como método corrector el método FPIC.

En lo que respecta al método FPFC, se recomienda lo siguiente:

- Determinar la razón por la cual en los diagramas de bifurcación, al alcanzar el punto de máxima cargabilidad del sistema, el método arroja soluciones que se encuentran por arriba de la trayectoria por la cual se alcanzó el punto crítico.

# Apéndice A

## Datos de los Sistemas de Prueba

### A.1. Sistema de 3 Nodos

La potencia base para este sistema en las aplicaciones realizadas es 1 MVA.

Tabla A.1: Número de nodos y componentes del sistema eléctrico de 3 nodos.

<i>Nodos</i>	<i>Líneas de Transmisión</i>	<i>Transformadores</i>	<i>Generadores</i>	<i>Cargas</i>	<i>Compensadores fijos en derivación</i>
3	3	0	1	1	0

Tabla A.2: Datos del nodo *slack* del sistema de 3 nodos.

<i>Nodo Slack</i>	<i>Magnitud (p.u.)</i>	<i>Ángulo (°)</i>
1	1.0	0

Tabla A.3: Datos de líneas de transmisión del sistema de 3 nodos.

<i>Nodo de envío</i>	<i>Nodo de recepción</i>	<i>R (p.u.)</i>	<i>X<sub>L</sub> (p.u.)</i>	<i>G<sub>shunt total</sub> (p.u.)</i>	<i>B<sub>shunt total</sub> (p.u.)</i>
1	2	0	0.1	0	0.02
1	3	0	0.1	0	0.02
2	3	0	0.1	0	0.02

Tabla A.4: Datos de generadores del sistema de 3 nodos.

Nodo	Potencia generada		Límites de generación de potencia reactiva		Voltaje de control (p.u.)
	MWs	MVARs	Mínimo (MVARs)	Máximo (MVARs)	
2	0.6661	0	-100	300	1.05

Tabla A.5: Datos de cargas del sistema de 3 nodos.

Nodo	Potencia demandada	
	MWs	MVARs
2	2.8653	1.7244

## A.2. Sistema de 5 Nodos

La potencia base para este sistema en las aplicaciones realizadas es 100 MVA.

Tabla A.6: Número de nodos y componentes del sistema eléctrico de 5 nodos.

Nodos	Líneas de Transmisión	Transformadores	Generadores	Cargas	Compensadores fijos en derivación
5	7	0	1	4	0

Tabla A.7: Datos del nodo *slack* del sistema de 5 nodos.

Nodo Slack	Magnitud (p.u.)	Ángulo (°)
North	1.06	0

Tabla A.8: Datos de líneas de transmisión del sistema de 5 nodos.

Nodo de envío	Nodo de recepción	R (p.u.)	$X_L$ (p.u.)	$G_{shunt\ total}$ (p.u.)	$B_{shunt\ total}$ (p.u.)
North	South	0.02	0.06	0	0.06
North	Lake	0.08	0.24	0	0.05
South	Lake	0.06	0.18	0	0.04
South	Main	0.06	0.18	0	0.04
South	Elm	0.04	0.12	0	0.03
Lake	Main	0.01	0.03	0	0.02
Main	Elm	0.08	0.24	0	0.05

Tabla A.9: Datos de generadores del sistema de 5 nodos.

<i>Nodo</i>	<i>Potencia generada</i>		<i>Límites de generación de potencia reactiva</i>		<i>Voltaje de control (p.u.)</i>
	<i>MWs</i>	<i>MVARs</i>	<i>Mínimo (MVARs)</i>	<i>Máximo (MVARs)</i>	
South	40	0	-300	300	1.0

Tabla A.10: Datos de cargas del sistema de 5 nodos.

<i>Nodo</i>	<i>Potencia demandada</i>	
	<i>MWs</i>	<i>MVARs</i>
South	20	10
Lake	45	15
Main	40	5
Elm	60	10

### A.3. Sistema IEEE-11 Nodos

La potencia base para este sistema en las aplicaciones realizadas es 100 MVA.

Tabla A.11: Número de nodos y componentes del sistema eléctrico IEEE-11 nodos.

<i>Nodos</i>	<i>Líneas de Transmisión</i>	<i>Transformadores</i>	<i>Generadores</i>	<i>Cargas</i>	<i>Compensadores fijos en derivación</i>
11	8	4	3	4	0

Tabla A.12: Datos del nodo *slack* del sistema IEEE-11 nodos.

<i>Nodo Slack</i>	<i>Magnitud (p.u.)</i>	<i>Ángulo (°)</i>
1	1.0	0

Tabla A.13: Datos de líneas de transmisión del sistema IEEE-11 nodos.

<i>Nodo de envío</i>	<i>Nodo de recepción</i>	<i>R (p.u.)</i>	<i>X<sub>L</sub> (p.u.)</i>	<i>G<sub>shunt total</sub> (p.u.)</i>	<i>B<sub>shunt total</sub> (p.u.)</i>
5	6	0.0025	0.025	0	0.04375
11	10	0.0025	0.025	0	0.04375
6	7	0.001	0.01	0	0.0175
10	9	0.001	0.01	0	0.0175
7	8	0.011	0.11	0	0.1925
7	8	0.011	0.11	0	0.1925
9	8	0.011	0.11	0	0.1925
9	8	0.011	0.11	0	0.1925

Tabla A.14: Datos de transformadores del sistema IEEE-11 nodos.

<i>Nodo de envío</i>	<i>Nodo de recepción</i>	<i>Primario</i>				<i>Secundario</i>				<i>Rama de magnetización</i>	
		<i>R<sub>1</sub> (p.u.)</i>	<i>X<sub>L1</sub> (p.u.)</i>	<i>V<sub>1tap</sub> (p.u.)</i>	<i>θ<sub>1tap</sub> (p.u.)</i>	<i>R<sub>2</sub> (p.u.)</i>	<i>X<sub>L2</sub> (p.u.)</i>	<i>V<sub>2tap</sub> (p.u.)</i>	<i>θ<sub>2tap</sub> (p.u.)</i>	<i>G<sub>shunt</sub> (p.u.)</i>	<i>X<sub>shunt</sub> (p.u.)</i>
1	5	0	0	1	0	0	0.017	1	0	0	0
2	6	0	0	1	0	0	0.017	1	0	0	0
3	11	0	0	1	0	0	0.017	1	0	0	0
4	10	0	0	1	0	0	0.017	1	0	0	0

Tabla A.15: Datos de generadores del sistema IEEE-11 nodos.

<i>Nodo</i>	<i>Potencia generada</i>		<i>Límites de generación de potencia reactiva</i>		<i>Voltaje de control (p.u.)</i>
	<i>MWs</i>	<i>MVARs</i>	<i>Mínimo (MVARs)</i>	<i>Máximo (MVARs)</i>	
2	700	0	-300	300	0.988
3	719	0	-300	300	1.046
4	700	0	-300	300	1.026

Tabla A.16: Datos de cargas del sistema IEEE-11 nodos.

<i>Nodo</i>	<i>Potencia demandada</i>	
	<i>MWs</i>	<i>MVARs</i>
7	967	100
9	1767	100

### A.4. Sistema IEEE-14 Nodos

La potencia base para este sistema en las aplicaciones realizadas es 100 MVA.

Tabla A.17: Número de nodos y componentes del sistema eléctrico IEEE-14 nodos.

<i>Nodos</i>	<i>Líneas de Transmisión</i>	<i>Transformadores</i>	<i>Generadores</i>	<i>Cargas</i>	<i>Compensadores fijos en derivación</i>
14	15	5	4	11	1

Tabla A.18: Datos del nodo *slack* del sistema IEEE-14 nodos.

<i>Nodo Slack</i>	<i>Magnitud (p.u.)</i>	<i>Ángulo (°)</i>
1	1.06	0

Tabla A.19: Datos de líneas de transmisión del sistema IEEE-14 nodos.

<i>Nodo de envío</i>	<i>Nodo de recepción</i>	<i>R (p.u.)</i>	<i>X<sub>L</sub> (p.u.)</i>	<i>G<sub>shunt total</sub> (p.u.)</i>	<i>B<sub>shunt total</sub> (p.u.)</i>
1	2	0.01938	0.05917	0	0.0528
1	5	0.05403	0.22304	0	0.0492
2	3	0.04699	0.19797	0	0.0438
2	4	0.05811	0.17632	0	0.0374
2	5	0.05695	0.17388	0	0.0340
3	4	0.06701	0.17103	0	0.0346
4	5	0.01335	0.04211	0	0.0128
6	11	0.09498	0.1989	0	0
6	12	0.12291	0.25581	0	0
6	13	0.06615	0.13027	0	0
9	10	0.03181	0.0845	0	0
9	14	0.12711	0.27038	0	0
10	11	0.08205	0.19207	0	0
12	13	0.22092	0.19988	0	0
13	14	0.17093	0.34802	0	0

Tabla A.20: Datos de transformadores del sistema IEEE-14 nodos.

Nodo de envío	Nodo de recepción	Primario				Secundario				Rama de magnetización	
		$R_1$ (p.u.)	$X_{L1}$ (p.u.)	$V_{1tap}$ (p.u.)	$\theta_{1tap}$ (p.u.)	$R_2$ (p.u.)	$X_{L2}$ (p.u.)	$V_{2tap}$ (p.u.)	$\theta_{2tap}$ (p.u.)	$G_{shunt}$ (p.u.)	$X_{shunt}$ (p.u.)
4	7	0	0	0.978	0	0	0.20912	1	0	0	0
4	9	0	0	0.969	0	0	0.55618	1	0	0	0
5	6	0	0	0.932	0	0	0.25202	1	0	0	0
7	8	0	0	1	0	0	0.17615	1	0	0	0
7	9	0	0	1	0	0	0.11001	1	0	0	0

Tabla A.21: Datos de generadores del sistema IEEE-14 nodos.

Nodo	Potencia generada		Límites de generación de potencia reactiva		Voltaje de control (p.u.)
	MWs	MVARs	Mínimo (MVARs)	Máximo (MVARs)	
2	40	0	-40	50	1.045
3	0	0	0	40	1.01
6	0	0	-6	24	1.07
8	0	0	-6	24	1.09

Tabla A.22: Datos de cargas del sistema IEEE-14 nodos.

Nodo	Potencia demandada	
	MWs	MVARs
2	21.7	12.7
3	94.2	19
4	47.8	-3.9
5	7.6	1.6
6	11.2	7.5
9	29.5	16.6
10	9	5.8
11	3.5	1.8
12	6.1	1.6
13	13.5	5.8
14	14.9	5

Tabla A.23: Datos de compensadores fijos en derivación del sistema IEEE-14 nodos.

Nodo compensado	$G_{shunt}$ (p.u.)	$B_{shunt}$ (p.u.)
9	0	0.19

## A.5. Sistema IEEE-57 Nodos

La potencia base para este sistema en las aplicaciones realizadas es 100 MVA.

Tabla A.24: Número de nodos y componentes del sistema eléctrico IEEE-57 nodos.

<i>Nodos</i>	<i>Líneas de Transmisión</i>	<i>Transformadores</i>	<i>Generadores</i>	<i>Cargas</i>	<i>Compensadores fijos en derivación</i>
57	62	18	6	57	3

Tabla A.25: Datos del nodo *slack*.

<i>Nodo Slack</i>	<i>Magnitud (p.u.)</i>	<i>Ángulo (°)</i>
1	1.04	0

Tabla A.26: Datos de líneas de transmisión del sistema IEEE-57 nodos.

<i>Nodo de envío</i>	<i>Nodo de recepción</i>	<i>R (p.u.)</i>	<i>X<sub>L</sub> (p.u.)</i>	<i>G<sub>shunt total</sub> (p.u.)</i>	<i>B<sub>shunt total</sub> (p.u.)</i>
1	2	0.0083	0.028	0	0.129
2	3	0.0298	0.085	0	0.0818
3	4	0.0112	0.0366	0	0.038
4	5	0.0625	0.132	0	0.0258
4	6	0.043	0.148	0	0.0348
6	7	0.02	0.102	0	0.0276
6	8	0.0339	0.173	0	0.047
8	9	0.0099	0.0505	0	0.0548
9	10	0.0369	0.1679	0	0.044
9	11	0.0258	0.0848	0	0.0218
9	12	0.0648	0.295	0	0.0772
9	13	0.0481	0.158	0	0.0406
13	14	0.0132	0.0434	0	0.011
13	15	0.0269	0.0869	0	0.023
1	15	0.0178	0.091	0	0.0988
1	16	0.0454	0.206	0	0.0546
1	17	0.0238	0.108	0	0.0286
3	15	0.0162	0.053	0	0.0544
5	6	0.0302	0.0641	0	0.0124

<i>Nodo de envío</i>	<i>Nodo de recepción</i>	<i>R (p.u.)</i>	<i>X<sub>L</sub> (p.u.)</i>	<i>G<sub>shunt total</sub> (p.u.)</i>	<i>B<sub>shunt total</sub> (p.u.)</i>
7	8	0.0139	0.0712	0	0.0194
10	12	0.0277	0.1262	0	0.0328
11	13	0.0223	0.0732	0	0.0188
12	13	0.0178	0.058	0	0.0604
12	16	0.018	0.0813	0	0.0216
12	17	0.0397	0.179	0	0.0476
14	15	0.0171	0.0547	0	0.0148
18	19	0.461	0.685	0	0
19	20	0.283	0.434	0	0
21	22	0.0736	0.117	0	0
22	23	0.0099	0.0152	0	0
23	24	0.166	0.256	0	0.0084
26	27	0.165	0.254	0	0
27	28	0.0618	0.0954	0	0
28	29	0.0418	0.0587	0	0
25	30	0.135	0.202	0	0
30	31	0.326	0.497	0	0
31	32	0.507	0.755	0	0
32	33	0.0392	0.036	0	0
34	35	0.052	0.078	0	0.0032
35	36	0.043	0.0537	0	0.0016
36	37	0.029	0.0366	0	0
37	38	0.0651	0.1009	0	0.002
37	39	0.0239	0.0379	0	0
36	40	0.03	0.0466	0	0
22	38	0.0192	0.0295	0	0
41	42	0.207	0.352	0	0
38	44	0.0289	0.0585	0	0.002
46	47	0.023	0.068	0	0.0032
47	48	0.0182	0.0233	0	0
48	49	0.0834	0.129	0	0.0048
49	50	0.0801	0.128	0	0
50	51	0.1386	0.22	0	0
29	52	0.1442	0.187	0	0
52	53	0.0762	0.0984	0	0
53	54	0.1878	0.232	0	0
54	55	0.1732	0.2265	0	0
44	45	0.0624	0.1242	0	0.004
56	41	0.553	0.549	0	0
56	42	0.2125	0.354	0	0
57	56	0.174	0.26	0	0

<i>Nodo de envío</i>	<i>Nodo de recepción</i>	<i>R (p.u.)</i>	<i>X<sub>L</sub> (p.u.)</i>	<i>G<sub>shunt total</sub> (p.u.)</i>	<i>B<sub>shunt total</sub> (p.u.)</i>
38	49	0.115	0.177	0	0.006
38	48	0.0312	0.0482	0	0

Tabla A.27: Datos de transformadores del sistema IEEE-57 nodos.

<i>Nodo de envío</i>	<i>Nodo de recepción</i>	<i>Primario</i>				<i>Secundario</i>				<i>Rama de magnetización</i>	
		<i>R<sub>1</sub> (p.u.)</i>	<i>X<sub>L1</sub> (p.u.)</i>	<i>V<sub>1tap</sub> (p.u.)</i>	<i>θ<sub>1tap</sub> (p.u.)</i>	<i>R<sub>2</sub> (p.u.)</i>	<i>X<sub>L2</sub> (p.u.)</i>	<i>V<sub>2tap</sub> (p.u.)</i>	<i>θ<sub>2tap</sub> (p.u.)</i>	<i>G<sub>shunt</sub> (p.u.)</i>	<i>X<sub>shunt</sub> (p.u.)</i>
4	18	0	0	0.97	0	0	0.555	1	0	0	0
4	18	0	0	0.978	0	0	0.43	1	0	0	0
21	20	0	0	1.043	0	0	0.7767	1	0	0	0
24	25	0	0	1	0	0	1.182	1	0	0	0
24	25	0	0	1	0	0	1.23	1	0	0	0
24	26	0	0	1.043	0	0	0.0473	1	0	0	0
7	29	0	0	0.967	0	0	0.0648	1	0	0	0
34	32	0	0	0.975	0	0	0.953	1	0	0	0
11	41	0	0	0.955	0	0	0.749	1	0	0	0
41	43	0	0	1	0	0	0.412	1	0	0	0
15	45	0	0	0.955	0	0	0.1042	1	0	0	0
14	46	0	0	0.9	0	0	0.0735	1	0	0	0
10	51	0	0	0.93	0	0	0.0712	1	0	0	0
13	49	0	0	0.895	0	0	0.191	1	0	0	0
11	43	0	0	0.958	0	0	0.153	1	0	0	0
40	56	0	0	0.958	0	0	1.195	1	0	0	0
39	57	0	0	0.98	0	0	1.355	1	0	0	0
9	55	0	0	0.94	0	0	0.1205	1	0	0	0

Tabla A.28: Datos del los generadores del sistema IEEE-57 nodos.

<i>Nodo</i>	<i>Potencia generada</i>		<i>Límites de generación de potencia reactiva</i>		<i>Voltaje de control (p.u.)</i>
	<i>MWs</i>	<i>MVARs</i>	<i>Mínimo (MVARs)</i>	<i>Máximo (MVARs)</i>	
2	0	0	-17	50	1.01
3	40	0	-10	60	0.985
6	0	0	-8	25	0.98
8	450	0	-140	200	1.005
9	0	0	-3	9	0.98
12	310	0	-150	155	1.015

Tabla A.29: Datos de cargas del sistema IEEE-57 nodos.

<i>Nodo</i>	<i>Potencia demandada</i>		<i>Nodo</i>	<i>Potencia demandada</i>	
	<i>MWs</i>	<i>MVARs</i>		<i>MWs</i>	<i>MVARs</i>
1	55	17	30	3.6	1.8
2	3	88	31	5.8	2.9
3	41	21	32	1.6	0.8
4	0	0	33	3.8	1.9
5	13	4	34	0	0
6	75	2	35	6	3
7	0	0	36	0	0
8	150	22	37	0	0
9	121	26	38	14	7
10	5	2	39	0	0
11	0	0	40	0	0
12	377	24	41	6.3	3
13	18	2.3	42	7.1	4.4
14	10.5	5.3	43	2	1
15	22	5	44	12	1.8
16	43	3	45	0	0
17	42	8	46	0	0
18	27.2	9.8	47	29.7	11.6
19	3.3	0.6	48	0	0
20	2.3	1	49	18	8.5
21	0	0	50	21	10.5
22	0	0	51	18	5.3
23	6.3	2.1	52	4.9	2.2
24	0	0	53	20	10
25	6.3	3.2	54	4.1	1.4
26	0	0	55	6.8	3.4
27	9.3	0.5	56	7.6	2.2
28	4.6	2.3	57	6.7	2
29	17	2.6			

Tabla A.30: Datos de compensadores fijos en derivación del sistema IEEE-57 nodos.

<i>Nodo compensado</i>	$G_{shunt}$ (p.u.)	$B_{shunt}$ (p.u.)
9	0	0.19
25	0	0.059
53	0	0.063

## A.6. Sistema de 79 Nodos

La potencia base para este sistema en las simulaciones realizadas es 100 MVA.

Tabla A.31: Número de nodos y componentes del sistema eléctrico de 79 nodos.

<i>Nodos</i>	<i>Líneas de Transmisión</i>	<i>Transformadores</i>	<i>Generadores</i>	<i>Cargas</i>	<i>Compensadores fijos en derivación</i>
79	74	19	17	31	0

Tabla A.32: Datos del nodo *slack* del sistema de 79 nodos.

<i>Nodo Slack</i>	<i>Magnitud (p.u.)</i>	<i>Ángulo (°)</i>
69	1.06	0

Tabla A.33: Datos de líneas de transmisión del sistema de 79 nodos.

<i>Nodo de envío</i>	<i>Nodo de recepción</i>	<i>R (p.u.)</i>	<i>X<sub>L</sub> (p.u.)</i>	<i>G<sub>shunt total</sub> (p.u.)</i>	<i>B<sub>shunt total</sub> (p.u.)</i>
11	12	0.001	0.2389	0	0
11	67	0.001	0.2389	0	0
10	3	0.1559	0.5682	0	0.0694
3	4	0.00001	1.346	0	0
3	8	0.089	0.3198	0	0.0394
8	9	0.00001	1.5181	0	0
3	2	0.0573	0.2074	0	0.0251
2	5	0.0085	0.0318	0	0.0036
5	6	0.00001	1.368	0	0
5	7	0.00001	0.549	0	0
5	7	0.00001	0.5778	0	0
5	13	0.1364	0.4963	0	0.0605
13	14	0.00001	0.568	0	0
13	15	0.00001	1.2	0	0
13	16	0.2134	0.3365	0	0.0322
13	17	0.0925	0.3553	0	0.0204
17	18	0.00001	0.5181	0	0
17	19	0.046	0.1666	0	0.0202
19	20	0.1523	0.5548	0	0.0677

<i>Nodo de envío</i>	<i>Nodo de recepción</i>	<i>R (p.u.)</i>	<i>X<sub>L</sub> (p.u.)</i>	<i>G<sub>shunt total</sub> (p.u.)</i>	<i>B<sub>shunt total</sub> (p.u.)</i>
20	23	0.0159	0.0576	0	0.007
2	25	0.02341	0.0872	0	0.099
25	26	0.00001	0.617	0	0
25	27	0.1037	0.3876	0	0.0443
27	28	0.00001	0.9268	0	0
27	29	0.0511	0.1905	0	0.0209
2	30	0.1734	0.6519	0	0.0752
30	32	0.0038	0.0138	0	0.0017
30	36	0.0076	0.0266	0	0.0034
30	36	0.0076	0.0266	0	0.0034
30	29	0.0113	0.0423	0	0.0048
30	34	0.0113	0.0423	0	0.0048
16	33	0.00001	0.625	0	0
16	33	0.00001	0.7315	0	0
34	35	0.0092	0.0344	0	0.0039
16	35	0.0445	0.07	0	0.0067
36	37	0.00001	0.4142	0	0
36	37	0.00001	0.546	0	0
36	38	0.0091	0.0326	0	0.004
36	38	0.0091	0.0326	0	0.004
35	39	0.001	0.1195	0	0
35	72	0.001	0.1195	0	0
35	73	0.001	0.239	0	0
35	74	0.001	0.239	0	0
35	43	0.00001	0.5754	0	0
35	43	0.00001	0.5754	0	0
35	42	0.00001	0.618	0	0
42	44	0.00001	0.435	0	0
35	38	0.0133	0.0478	0	0.0059
35	38	0.0133	0.0478	0	0.0059
35	45	0.1518	0.5495	0	0.0679
35	46	0.0033	0.011	0	0.0015
46	47	0.00001	0.5154	0	0
46	47	0.00001	0.5154	0	0
38	40	0.00001	0.568	0	0
38	41	0.00001	0.6495	0	0
38	49	0.0006	0.002	0	0.0003
38	50	0.0365	0.1344	0	0.0157
50	51	0.00001	0.6084	0	0
50	52	0.1198	0.4484	0	0.0514
50	53	0.00001	0.6295	0	0

<i>Nodo de envío</i>	<i>Nodo de recepción</i>	<i>R (p.u.)</i>	<i>X<sub>L</sub> (p.u.)</i>	<i>G<sub>shunt total</sub> (p.u.)</i>	<i>B<sub>shunt total</sub> (p.u.)</i>
52	45	0.0527	0.1908	0	0.0231
52	54	0.1484	0.5499	0	0.0648
45	48	0.00001	0.6825	0	0
45	58	0.1562	0.5693	0	0.0695
58	59	0.00001	0.135	0	0
58	54	0.0128	0.0463	0	0.0056
58	60	0.0624	0.226	0	0.0274
54	57	0.001	0.3655	0	0
54	75	0.001	0.3655	0	0
54	76	0.001	0.3655	0	0
54	77	0.001	0.3655	0	0
54	62	0.0122	0.0436	0	0.0054
78	45	0.001	0.3655	0	0
63	45	0.001	0.3655	0	0

Tabla A.34: Datos de transformadores del sistema de 79 nodos.

<i>Nodo de envío</i>	<i>Nodo de recepción</i>	<i>Primario</i>				<i>Secundario</i>				<i>Rama de magnetización</i>	
		<i>R<sub>1</sub> (p.u.)</i>	<i>X<sub>L1</sub> (p.u.)</i>	<i>V<sub>1tap</sub> (p.u.)</i>	<i>θ<sub>1tap</sub> (p.u.)</i>	<i>R<sub>2</sub> (p.u.)</i>	<i>X<sub>L2</sub> (p.u.)</i>	<i>V<sub>2tap</sub> (p.u.)</i>	<i>θ<sub>2tap</sub> (p.u.)</i>	<i>G<sub>shunt</sub> (p.u.)</i>	<i>X<sub>shunt</sub> (p.u.)</i>
10	11	0	0	0.95	0	0	0.5154	1	0	0	0
2	79	0	0	1.02	0	0.001	0.0554	1	0	0	0
2	64	0	0	1.02	0	0.001	0.0554	1	0	0	0
2	65	0	0	1.02	0	0.001	0.0554	1	0	0	0
2	66	0	0	1.02	0	0.001	0.0554	1	0	0	0
20	21	0	0	0.95	0	0	0.618	1	0	0	0
20	22	0	0	0.95	0	0.001	0.3147	1	0	0	0
20	68	0	0	0.95	0	0.001	0.3147	1	0	0	0
23	24	0	0	0.956	0	0	0.5154	1	0	0	0
30	31	0	0	1.025	0	0.01	0.0329	1	0	0	0
30	69	0	0	1.025	0	0.01	0.0329	1	0	0	0
30	70	0	0	1.02	0	0.01	0.0329	1	0	0	0
30	71	0	0	1.02	0	0.01	0.0329	1	0	0	0
60	61	0	0	0.957	0	0	0.9681	1	0	0	0
60	61	0	0	0.957	0	0	0.9681	1	0	0	0
54	55	0	0	0.957	0	0	0.6359	1	0	0	0
54	55	0	0	0.957	0	0	0.5535	1	0	0	0
54	56	0	0	0.957	0	0	0.5736	1	0	0	0
62	1	0	0	0.956	0	0	0.6495	1	0	0	0

Tabla A.35: Datos del los generadores del sistema de 79 nodos.

Nodo	Potencia generada		Límites de generación de potencia reactiva		Voltaje de control (p.u.)
	MWs	MVARs	Mínimo (MVARs)	Máximo (MVARs)	
79	25	0	-50	50	1
64	5	0	-50	50	1
65	10	0	-50	50	1
66	30	0	-50	50	1
31	40	0	-50	45	1
70	40	0	-50	45	1
71	40	0	-50	45	1
39	20	0	0	7	1
72	20	0	0	7	1
73	20	0	0	7	1
74	5	0	0	7	1
22	4	0	-50	50	1
68	6	0	-50	50	1
57	4	0	-50	50	1
75	4	0	-50	50	1
76	4	0	-50	50	1
77	4	0	-50	50	1

Tabla A.36: Datos de cargas del sistema de 79 nodos.

Nodo	Potencia demandada		Nodo	Potencia demandada	
	MWs	MVARs		MWs	MVARs
1	6	2	33	20	7
2	10	3	35	3	1
4	4	1.5	37	30	9
6	5	2	40	12	5
7	17	6	41	8	3
9	3	1	42	11	4
11	19	6	43	18	6
14	6	3	47	32	11
15	3	2	48	6	2
18	4	2	49	9	2
21	8	3	51	10	4
24	17	6	53	6	2
26	7	2	55	23	6

<i>Nodo</i>	<i>Potencia demandada</i>		<i>Nodo</i>	<i>Potencia demandada</i>	
	<i>MWs</i>	<i>MVARs</i>		<i>MWs</i>	<i>MVARs</i>
28	4	2	56	15	5
30	11	3	61	12	5
32	12	3			

# Apéndice B

## Descripción de los Archivos de Datos para FPIC y FPFC

### B.1. Descripción del Archivo de Datos para FPIC

El objetivo de este Apéndice es describir como están conformados los archivos de datos que se utilizan para el programa de Flujos de Potencia en Base a Inyecciones de Corriente (FPIC).

El archivo de datos está integrado por las siguientes secciones:

1. Datos generales.
2. Número de nodos y componentes del sistema eléctrico.
3. Datos del nodo *slack* o compensador.
4. Datos de líneas de transmisión.
5. Datos de transformadores convencionales.
6. Datos de generadores.
7. Datos de cargas.
8. Datos de compensadores fijos en derivación.

Tomando como base los datos del sistema IEEE-14 nodos, la descripción de las secciones anteriores se presenta a continuación:

### 1. Datos Generales.

Consisten en las cantidades base en MVA y kV así como la tolerancia que debe satisfacer el método para la convergencia.

Los datos se dan de la siguiente manera,

100 400 1e-12

donde,

100 es la cantidad base en MVA.

400 es la cantidad base en kV.

1e-12 es la tolerancia.

### 2. Número de Nodos y Componentes del Sistema Eléctrico.

Los datos se dan como sigue,

14 15 5 0 0 4 11 0 1 0 0 0 0 0 0

donde,

14 es el número de nodos o subestaciones.

15 es el número de líneas de transmisión.

5 es el número de transformadores convencionales.

0 es el número de transformadores LTC.

0 es el número de transformadores defasadores.

4 es el número de generadores.

- 11 es el número de cargas.
- 0 es el número de ASCs (modelo VSC).
- 1 es el número de compensadores fijos en derivación.
- 0 es el número de enlaces HDVC monopolares.
- 0 es el número de SVCs (modelo VSC).
- 0 es el número de UPFCs.
- 0 es el número de SVCs (modelo TCR).
- 0 es el número de ASCs (modelo TCSC).

### 3. Datos del Nodo *Slack*.

Los datos se escriben como sigue,

```
nod_1 1.06 0
```

donde,

- nod\_1 es el nombre del nodo o subestación.
- 1.06 es la magnitud de voltaje nodal en el nodo *slack* (en p.u.).
- 0 es el ángulo de voltaje nodal en el nodo *slack* (en grados).

### 4. Datos de Líneas de Transmisión.

Los datos son dados en la siguiente forma,

```
nod_1 nod_2 0.01938 0.05917 0 0.0528
```

donde,

- nod\_1 es el nodo de envío.

- nod\_2 es el nodo de recepción.
- 0.01938 es el valor total de resistencia en serie (en p.u.).
- 0.05917 es el valor total de reactancia inductiva (en p.u.).
- 0 es el valor total de conductancia en derivación (en p.u.).
- 0.0528 es el valor total de susceptancia en derivación (en p.u.).

### 5. Datos de Transformadores Convencionales.

Los datos son dados como sigue,

```
nod_4 nod_7 0.00 0.0 0.0 0.20912 0.0 0.0
0.978 1.0 0.0 0.0
```

donde,

- nod\_4 es el nodo de envío (devanado primario).
- nod\_7 es el nodo de recepción (devanado secundario).
- 0.00 es el valor total de resistencia serie del lado primario (en p.u.).
- 0.0 es el valor total de reactancia inductiva serie del lado primario (en p.u.).
- 0.0 es el valor total de resistencia serie del lado secundario (en p.u.).
- 0.20912 es el valor total de reactancia inductiva serie del lado secundario (en p.u.).
- 0.0 es el valor total de conductancia de la rama de magnetización en derivación (en p.u.).
- 0.0 es el valor total de susceptancia de la rama de magnetización en derivación (en p.u.).
- 0.978 es el valor de magnitud del tap complejo del lado primario (en p.u.).
- 1.0 es el valor de magnitud del tap complejo del lado secundario (en p.u.).

0.0 es el valor de ángulo del tap complejo del lado primario (en grados).

0.0 es el valor de ángulo del tap complejo del lado secundario (en grados).

### 6. Datos de los Generadores.

Los datos se introducen de la siguiente manera,

```
nod_2 40.0 0.0 -40.0 50.0 1.045
```

donde,

nod\_2 es el nodo al cual está conectado el generador.

40.0 es la potencia activa inyectada por el generador (en MWs).

0.0 es la potencia reactiva inyectada por el generador (en MVARs).

-40.0 es el límite inferior o mínimo de generación de potencia reactiva del generador (en MVARs).

50.0 es el límite superior o máximo de generación de potencia reactiva del generador (en MVARs).

1.045 es la magnitud de voltaje que se desea mantener el nodo (en p.u.).

### 7. Datos de las Cargas.

Los datos son dados como sigue,

```
nod_2 21.7 12.7
```

donde,

nod\_2 es el nodo al cual esta conectada la carga.

21.7 es la demanda de potencia activa (en MWs).

12.7 es la demanda de potencia reactiva (en MVARs).

### 8. Datos de los Compensadores Fijos en Derivación.

Los datos se introducen de la siguiente forma,

```
nod_9 0.0 0.19
```

donde,

nod\_9 es el nodo compensado.

0.0 es la conductancia del compensador en derivación (en p.u.).

0.19 es la susceptancia del compensador en derivación. Un valor positivo esta asociado a compensación capacitiva. De otra manera, esta asociada a compensación inductiva (en p.u.).

## B.2. Descripción del Archivo de Datos para FPFC

El archivo de datos para el método FPFC varía solo en una sección con el archivo de datos asociado al método FPIC. El punto en el cual se presenta la diferencia es el siguiente:

### 1. Datos Generales.

Consisten en las cantidades base en MVA y kV así como el número de coeficientes que se tomarán en cuenta para hacer la expansión en series de Maclaurin.

Los datos se dan de la siguiente manera,

```
100 400 15
```

donde,

100 es la cantidad base en MVA.

400 es la cantidad base en kV.

15 es el número de términos en la expansión en serie de potencias.

Se debe tomar en cuenta que en donde se especifican los datos de los generadores como se explica en la Sección B.1, se deben especificar las inyecciones de potencia reactiva.

# Apéndice C

## Deducción del Método de Viscovatov

En este Apéndice se describe la derivación matemática detallada del método de Viscovatov empleado para representar una serie de potencias como una fracción continua en el Capítulo 4.

Sea la serie de potencias dada por,

$$f(s) = f[0] + f[1]s + f[2]s^2 + \dots + f[n]s^n + \dots \quad (\text{C.1})$$

la ecuación anterior se puede escribir como,

$$f(s) = f[0] + s(f[1] + f[2]s + \dots + f[n]s^{n-1} + \dots). \quad (\text{C.2})$$

Multiplicando ambos lados de la ecuación (C.2) por  $1 = \frac{1}{\frac{f[1]+f[2]s+\dots+f[n]s^{n-1}+\dots}{1}}$ ,

$$f(s) = f[0] + \frac{s}{\frac{1}{f[1]+f[2]s+\dots+f[n]s^{n-1}+\dots}} \quad (\text{C.3})$$

Analizando el denominador de (C.3),

$$D_1 = \frac{1 + \left(\frac{f[2]}{f[1]}s + \frac{f[3]}{f[1]}s^2 + \dots\right) - \left(\frac{f[2]}{f[1]}s + \frac{f[3]}{f[1]}s^2 + \dots\right)}{f[1] + f[2]s + \dots + f[n]s^{n-1} + \dots} \quad (\text{C.4})$$

definiendo,

$$C_1 = \frac{1}{f[1]} \Rightarrow 1 = C_1 f[1], \quad (C.5)$$

se puede expresar (C.4) como sigue,

$$D_1 = \frac{1 + C_1 (f[2]s + f[3]s^2 + \dots + f[n]s^{n-1} + \dots) - C_1 (f[2]s + f[3]s^2 + \dots + f[n]s^{n-1} + \dots)}{f[1] + f[2]s + \dots + f[n]s^{n-1} + \dots} \quad (C.6)$$

o bien,

$$D_1 = \frac{C_1 f[1] + C_1 (f[2]s + f[3]s^2 + \dots + f[n]s^{n-1} + \dots) - C_1 (f[2]s + f[3]s^2 + \dots + f[n]s^{n-1} + \dots)}{f[1] + f[2]s + \dots + f[n]s^{n-1} + \dots} \quad (C.7)$$

$$D_1 = \frac{C_1 (f[1] + f[2]s + f[3]s^2 + \dots + f[n]s^{n-1} + \dots) - C_1 (f[2]s + f[3]s^2 + \dots + f[n]s^{n-1} + \dots)}{f[1] + f[2]s + \dots + f[n]s^{n-1} + \dots} \quad (C.8)$$

$$D_1 = C_1 + \frac{-C_1 (f[2]s + f[3]s^2 + \dots + f[n]s^{n-1} + \dots)}{f[1] + f[2]s + \dots + f[n]s^{n-1} + \dots}. \quad (C.9)$$

La ecuación (C.9) puede expresarse como,

$$D_1 = C_1 + \frac{B[1]^{(1)}s + B[2]^{(1)}s^2 + \dots + B[n-1]^{(1)}s^{n-1} + \dots}{f[1] + f[2]s + \dots + f[n]s^{n-1} + \dots} \quad (C.10)$$

donde,

$$\left. \begin{aligned} B[1]^{(1)} &= -\frac{f[2]}{f[1]} \\ B[2]^{(1)} &= -\frac{f[3]}{f[1]} \\ &\vdots \\ B[n]^{(1)} &= -\frac{f[n+1]}{f[1]} \end{aligned} \right\}. \quad (\text{C.11})$$

Sustituyendo (C.10) en (C.3)

$$f(s) = f[0] + \frac{s}{C_1 + \frac{B[1]^{(1)}s + B[2]^{(1)}s^2 + \dots + B[n-1]^{(1)}s^{n-1} + \dots}{f[1] + f[2]s + \dots + f[n]s^{n-1} + \dots}}, \quad (\text{C.12})$$

para continuar la fracción, la ecuación (C.12) se expresa como sigue,

$$f(s) = f[0] + \frac{s}{C_1 + \frac{s \left( B[1]^{(1)} + B[2]^{(1)}s + \dots + B[n-1]^{(1)}s^{n-2} + \dots \right)}{f[1] + f[2]s + \dots + f[n]s^{n-1} + \dots}} \quad (\text{C.13})$$

o bien,

$$f(s) = f[0] + \frac{s}{C_1 + \frac{s}{\frac{f[1] + f[2]s + \dots + f[n]s^{n-1} + \dots}{B[1]^{(1)} + B[2]^{(1)}s + \dots + B[n-1]^{(1)}s^{n-2} + \dots}}} \quad (\text{C.14})$$

agregando un término a la serie  $B^{(1)}(s)$  se tiene,

$$f(s) = f[0] + \frac{s}{C_1 + \frac{s}{\frac{f[1] + f[2]s + \dots + f[n]s^{n-1} + \dots}{B[1]^{(1)} + B[2]^{(1)}s + \dots + B[n]^{(1)}s^{n-1} + \dots}}}. \quad (\text{C.15})$$

Analizando el segundo denominador de la ecuación (C.15),

$$D_2 = \frac{f[1] + f[2]s + \dots + f[n]s^{n-1} + \dots}{B[1]^{(1)} + B[2]^{(1)}s + \dots + B[n]^{(1)}s^{n-1} + \dots}. \quad (\text{C.16})$$

$$D_2 = \frac{f[1] + f[2]s + \dots + f[n]s^{n-1} + \dots + C_2 (B[2]^{(1)}s + \dots + B[n]s^{n-1}) - C_2 (B[2]^{(1)}s + \dots + B[n]^{(1)}s^{n-1})}{B[1]^{(1)} + \dots + B[n]^{(1)}s^{n-1} + \dots} \quad (C.17)$$

$$D_2 = \frac{f[1] + C_2 (B[2]^{(1)}s + \dots + B[n]s^{n-1}) + (f[2]s + \dots + f[n]s^{n-1}) + \dots - C_2 (B[2]^{(1)}s + \dots + B[n]^{(1)}s^{n-1})}{B[1]^{(1)} + B[2]^{(1)}s + \dots + B[n]^{(1)}s^{n-1} + \dots} \quad (C.18)$$

$$D_2 = \frac{f[1] + C_2 (B[2]^{(1)}s + \dots + B[n]s^{n-1}) + \{ (f[2] - C_2 B[2]^{(1)})s + \dots + (f[n] - C_2 B[n]^{(1)})s^{n-1} \}}{B[1]^{(1)} + B[2]^{(1)}s + \dots + B[n]^{(1)}s^{n-1} + \dots} \quad (C.19)$$

Asumiendo,

$$f[0] = C_2 B[1]^{(1)} \quad (C.20)$$

$$D_2 = \frac{C_2 B[1]^{(1)} + C_2 (B[2]^{(1)}s + \dots + B[n]s^{n-1}) + \{ (f[2] - C_2 B[2]^{(1)})s + \dots + (f[n] - C_2 B[n]^{(1)})s^{n-1} \}}{B[1]^{(1)} + B[2]^{(1)}s + \dots + B[n]^{(1)}s^{n-1} + \dots} \quad (C.21)$$

$$D_2 = \frac{C_2 (B[1]^{(1)} + \dots + B[n]s^{n-1}) + \{ (f[2] - C_2 B[2]^{(1)})s + \dots + (f[n] - C_2 B[n]^{(1)})s^{n-1} \}}{B[1]^{(1)} + B[2]^{(1)}s + \dots + B[n]^{(1)}s^{n-1} + \dots} \quad (C.22)$$

$$D_2 = C_2 + \frac{(f[2] - C_2 B[2]^{(1)})s + (f[3] - C_2 B[3]^{(1)})s^2 + \dots + (f[n] - C_2 B[n]^{(1)})s^{n-1}}{B[1]^{(1)} + B[2]^{(1)}s + \dots + B[n]^{(1)}s^{n-1} + \dots} \quad (C.23)$$

o bien,

$$D_2 = C_2 + \frac{B[1]^{(2)}s + B[2]^{(2)}s^2 + \dots + B[n]^{(2)}s^{n-1}}{B[1]^{(1)} + B[2]^{(1)}s + \dots + B[n]^{(1)}s^{n-1} + \dots} \quad (C.24)$$

donde,

$$\left. \begin{aligned} B[1]^{(2)} &= f[2] - C_2 B[2]^{(1)} \\ B[2]^{(2)} &= f[3] - C_2 B[3]^{(1)} \\ &\vdots \\ B[n]^{(2)} &= f[n+1] - C_2 B[n+1]^{(1)} \end{aligned} \right\} \quad (C.25)$$

Sustituyendo la ecuación (C.24) en (C.15) se tiene,

$$f(s) = f[0] + \frac{s}{C_1 + \frac{B[1]^{(2)}s + B[2]^{(2)}s^2 + \dots + B[n]^{(2)}s^{n-1}}{C_2 + \frac{B[1]^{(1)} + B[2]^{(1)}s + \dots + B[n]^{(1)}s^{n-1} + \dots}}} \quad (C.26)$$

donde,

$$C_1 = \frac{1}{f[1]} \quad (C.27)$$

$$B[n]^{(1)} = -\frac{f[n+1]}{f[1]} \quad n = 1, \dots \quad (C.28)$$

$$C_2 = \frac{f[1]}{B[1]^{(1)}} \quad (C.29)$$

$$B[n]^{(2)} = f[n+1] - C_2 B[n+1]^{(1)} \quad n = 1, \dots \quad (C.30)$$

La ecuación (C.26) se puede expresar como,

$$f(s) = f[0] + \frac{s}{C_1 + \frac{s}{C_2 + \frac{s(B[1]^{(2)} + B[2]^{(2)}s + \dots + B[n]^{(2)}s^{n-1})}{B[1]^{(1)} + B[2]^{(1)}s + \dots + B[n]^{(1)}s^{n-1} + \dots}}} \quad (C.31)$$

o bien,

$$f(s) = f[0] + \frac{s}{C_1 + \frac{s}{C_2 + \frac{s(B[1]^{(1)} + B[2]^{(1)}s + \dots + B[n]^{(1)}s^{n-1} + \dots)}{B[1]^{(2)} + B[2]^{(2)}s + \dots + B[n]^{(2)}s^{n-1}}} \quad (C.32)$$

Analizando el tercer denominador se tiene,

$$D_3 = \frac{B[1]^{(1)} + B[2]^{(1)}s + \dots}{B[1]^{(2)} + B[2]^{(2)}s + \dots} \quad (C.33)$$

siguiendo un procedimiento similar al realizado para  $D_2$ , la ecuación (C.33) se puede expresar como,

$$D_3 = C_3 + \frac{s}{\frac{B[1]^{(2)} + B[2]^{(2)}s + \dots}{B[1]^{(3)} + B[2]^{(3)}s + \dots}} \quad (C.34)$$

sustituyendo (C.34) en (C.32) resulta en,

$$f(s) = f[0] + \frac{s}{C_1 + \frac{s}{C_2 + \frac{s}{C_3 + \frac{s(B[1]^{(2)} + B[2]^{(2)}s + \dots)}{B[1]^{(3)} + B[2]^{(3)}s + \dots}}}} \quad (C.35)$$

donde,

$$C_1 = \frac{1}{f[1]} \quad (C.36)$$

$$B[n]^{(1)} = -\frac{f[n+1]}{f[1]} \quad (\text{C.37})$$

$$C_2 = \frac{f[1]}{B[1]^{(1)}} \quad (\text{C.38})$$

$$B[n]^{(2)} = f[n+1] - C_2 B[n+1]^{(1)} \quad (\text{C.39})$$

$$C_3 = \frac{B[1]^{(1)}}{B[1]^{(2)}} \quad (\text{C.40})$$

$$B[n]^{(3)} = B[n+1]^{(1)} - C_3 B[n+1]^{(2)} \quad (\text{C.41})$$

continuando con este proceso, se tiene que la ecuación (C.1) se puede expresar como,

$$f(s) = f_0 + \frac{s}{C_1} + \frac{s}{C_2} + \frac{s}{C_3} + \dots \quad (\text{C.42})$$

donde,

$$C_1 = \frac{1}{f[1]} \quad (\text{C.43})$$

$$C_2 = \frac{f[1]}{B[1]^{(1)}} \quad (\text{C.44})$$

$$C_3 = \frac{B[1]^{(1)}}{B[1]^{(2)}} \quad (\text{C.45})$$

$$C_n = \frac{B[1]^{(n-2)}}{B[1]^{(n-1)}} \quad n \geq 3 \quad (\text{C.46})$$

$$B[n]^{(1)} = -\frac{f[n+1]}{f[1]} \quad (\text{C.47})$$

$$B[n]^{(2)} = f[n+1] - C_2 B[n+1]^{(1)} \quad n \geq 1 \quad (\text{C.48})$$

$$B[n]^{(3)} = B[n+1]^{(1)} - C_3 B[n+1]^{(2)} \quad n \geq 1 \quad (\text{C.49})$$

$$B[n]^{(k)} = B[n+1]^{(k-2)} - C_k B[n+1]^{(k-1)} \quad \begin{array}{l} k \geq 3 \\ n \geq 1 \end{array} \quad (\text{C.50})$$

Con el fin de describir la última deducción de una forma más compacta y de manera computacionalmente adecuada podemos expresar las variables de la siguiente manera,

$$f[n] = a[n]^{(0)} \quad (\text{C.51})$$

$$C_n = C_n \quad (\text{C.52})$$

$$B[n]^{(k)} = a[n]^{(k)} \quad (\text{C.53})$$

Partiendo de las definiciones anteriores, la serie (C.1) queda expresada por,

$$f(s) = a[0]^{(0)} + a[1]^{(0)}s + a[2]^{(0)}s^2 + \dots + a[n]^{(0)}s^n + \dots \quad (\text{C.54})$$

de manera que la fracción continua queda expresada por,

$$f(s) = a[0]^{(0)} + \frac{s}{C_1} + \frac{s}{C_2} + \frac{s}{C_3} + \dots \quad (\text{C.55})$$

donde,

$$C_1 = \frac{1}{a[1]^{(0)}} \quad (\text{C.56})$$

$$C_n = \frac{a[1]^{(n-2)}}{a[1]^{(n-1)}} \quad n \geq 2 \quad (\text{C.57})$$

$$a[n]^{(1)} = -\frac{a[n+1]^{(0)}}{a[1]^{(0)}} \quad n \geq 1 \quad (\text{C.58})$$

$$a[n]^{(k)} = a[n+1]^{(k-2)} - C_k a[n+1]^{(k-1)} \quad \begin{array}{l} k \geq 2 \\ n \geq 1 \end{array} \quad (\text{C.59})$$

# Bibliografía

- [Acha et al., 2004] Acha E., Fuerte-Esquivel C.R., *et al.*, *FACTS Modelling and Simulation in Power Networks*, John Wiley & Sons, UK, 2004.
- [Ajarapu y Christy, 1992] Ajarapu V., Christy C., “*The continuation power flow: a tool for steady state voltage stability analysis*”, IEEE Trans. Power Systems, vol 7., no.1, pp. 416 - 423, 1992.
- [Ajarapu y Lee, 1992] Ajarapu V., Lee B., “*Bifurcation theory and its application to nonlinear dynamical phenomena in an electrical power system*”, IEEE Transactions on Power Systems, vol. 7, no. 1, pp. 424-431, 1992.
- [Alsaffar, 2005] A. Alsaffar Mohammad, PhD Thesis, “*Voltage Collapse and Power Flow Algorithms*”, University of Minnesota – twin cities, November 2005.
- [Bonet, 2004] A. T. Bonet, “*System and method for monitoring and managing electrical power transmission and distribution networks*”, *Patent Application Publication*, August 2004, Pub. No.: US 2004/0158417 A1.
- [Brameller y Denmead, 1962] A. Brameller and J. K. Denmead, “*Some improved methods of digital network analysis*”, Proc. Inst. Elec. Eng., vol. 109A, pp. 109- 116, Feb. 1962.
- [Brown et al., 1963] H. E. Brown, G. K. Carter, H. H. Happ, and C. E. Person, “*Power flow solution by impedance matrix iterative method*,” IEEE Trans. Power App. Syst., vol. PAS-82, pp. 1-10, Apr. 1963.

- [Brown y Tinney, 1957] R. J. Brown and W. F. Tinney, “*Digital solutions for large power networks*,” AIEE Trans. (Power App. Syst.), vol. 76, pp. 347-355, June 1957.
- [Cañizares, 1997] Cañizares C.A., “*Voltage Stability Indices*”, Chapter 4 Draft of IEEE/PES Working Group Report, Voltage Stability, Assesment-Procedures and Guides, Mayo, 1997, 52 págs. Available from <http://www.power.uwaterloo.ca>.
- [Castro et al., 2011] Castro L.M., Fuerte-Esquivel C.R., & Tovar-Hernández J.H. “*A unified approach for the solution of power flows in electric power systems including wind farms*”, Accepted to be published in Electric Power Systems Research, ISSN: 0378-7796, May 18th 2011.
- [Chiang et al., 1995] Hsiao-Dong Chiang, Flueck A.J., Shah K.S., Balu N, “*CPFLOW: a practical tool for tracing power system steady-state stationary behavior due to load and generation variations*”, IEEE Transactions on Power Systems, vol. 10, no. 2, pp. 623-634, 1995.
- [Costa et al., 1999] V.M. da Costa, N. Martins, and J.L.R. Pereira, “*Developments in the Newton Raphson power flow formulation based on current injections*”, IEEE Trans. Power Systems, vol. 14, no. 4, pp. 1320-1326, Nov. 1999.
- [Cuyt et al., 2008] A. Cuyt , V. B. Petersen, B. Verdonk, H. Waadeland, W. B. Jones, *Handbook of Continued Fractions for Special Functions*, Springer, 2008.
- [Dobson y Chiang, 1989] Dobson I. and Chiang H.D. “*Towards a Theory of Voltage Collapse in Electric Power Systems*”, Systems & Control Letters, Vol. 13, 1989, págs. 253-262.
- [Dobson, 1997] Dobson I., “*Basic Concepts and Theoretical Perspective*”, Chapter 2 Draft of IEEE/PES Working Group Report, Voltage Stability, Assesment-Procedures and Guides, Mayo, 1997, 59 págs. available from <http://www.power.uwaterloo.ca>.

- [Dommel et al., 1970] H.W. Dommel, W.F. Tinney, and W.L. Powell. “*Further developments in Newton’s method for power system applications*”. IEEE Winter Power Meeting, Conference Paper No. 70 CP 161-PWR New York, January 1970.
- [Edwards, 1994] Edwards H.M., “*Advanced Calculus: A Differential Forms Approach*”, Birkhäuser 1994, Tercera Ed., ISBN 0-8176-3707-9.
- [Elgerd, 1982] Elgerd, O., 1982, *Electric Energy System Theory: An Introduction*, McGraw-Hill, New York.
- [Fuerte et al., 1998] Fuerte-Esquivel C.R., Acha E., Tan S.G. y Rico J.J.: “*Efficient Object Oriented Power Systems Software for the Analysis of Large-scale Networks Containing FACTS-Controlled Branches*”, IEEE Transactions on Power Systems, ISSN 0885-8950, Vol.12, No 2, May 1998, pp.464-472 .
- [Fuerte, 1997] CR Fuerte-Esquivel, PhD Thesis, “*Steady State Modelling and Analysis of Flexible AC Transmission Systems*”, Department of Electronics and Electrical Engineering, University of Glasgow, Glasgow Scotland, Agosto, 1997.
- [Glimn y Stagg, 1957] A. F. Glimn and G. W. Stagg, “*Automatic calculation of load flows,*” AIEE Trans. (Power App. Syst.), vol. 76, pp, 817-828, Oct. 1957.
- [Gupta y Humphrey, 1961] P. P. Gupta and M. W. Humphrey Daviea, “*Digital computers in power system analysis,*” Proc. Inst. Elec. Eng., vol. 108A, pp. 383-404, Jan. 1961.
- [Gutiérrez, 2004] Gutiérrez Víctor, “*Aplicación de un método de Continuación para el análisis del fenómeno de colapso de voltaje estático en sistemas flexibles de corriente alterna*”, Tesis Maestría, Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, Noviembre 2004.
- [Jones y Thron, 1980] Jones W., Thron W.J., 1980 *Continued Fractions, Analytic Theory and Applications*, volume 11 of Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Addison-Wesley Publishing Company, Canada.

- [Khovanskii, 1963] A. Khovanskii, “*The application of continued Fractions an their Generalizations to problem in Aproximation Theory*”, The Netherlands, 1963. Translated by: Peter Wynn.
- [Kundur et al., 2004] Prabha Kundur, John Paserba, Venkat Ajjarapu, Goran Andersson, Anjan Bose, Claudio Cañizares, Nikos Hatziargyriou, David Hill, Alex Stankovic, Carson Taylor, Thierry Van Custem, Vijay Vittal, “*Definition and Classification of Power System Stability*”, IEEE Transactions on Power Systems, IEEE/CIGRE Joint Task Force on Stability Terms and Definitions, Vol. 19, No. 2, págs. 1387-1401, Mayo, 2004.
- [Mathews y Fink, 1999] H. Mathews John and K. Fink Kurtis, “*Numerical Methods Using Matlab*”, third Edition. 1999.
- [Peterson y Scott, 1974] Peterson, N.M., Scott Meyer, W., 1974, “*Automatic Adjustment of Transformer and Phase Shifter Taps in the Newton Power Flow*”, IEEE Trans. Power Apparatus and Systems PAS-90(1) 103–108.
- [Sauer, 1981] Sauer, P.M., “*Explicit load flow series and functions*”, IEEE Trans., PAS–100, pp. 3754–3763 , August 1981.
- [Seydel, 1994] Rudiger Seydel, “*Practical Bifurcation and Stability Analysis From Equilibrium to Chaos*”, Second Edition, Ed. Springer – Verlag, New York, 1994.
- [Stott y Alsac, 1974] B. Stott and O. Alsac. “Fast decoupled load flow”. IEEE Transactions on Power Systems, PAS-93, No. 32359-869, May/June 1974.
- [Stott, 1972] B. Stott, “*Decoupled Newton load flow*”, IEEE Trans. Power App. Syst., Vol. PAS-91, pp. 1955-1959, Sept./Oct. 1972.
- [Stott, 1974] Stott, B., 1974, “*Review of Load-flow Calculation Methods*”, IEEE Proceedings 62(July) 916–929.

- [Tinney y Hart, 1967] Tinney, W.F., Hart, C.E., “*Power Flow Solution by Newton’s Method*”, IEEE Trans. Power Apparatus and Systems PAS-86(11) 1449–1460, 1967.
- [Tinney y Walker, 1967] W. F. Tinney and J. W. Walker, “*Direct solutions of sparse network equations by optimally ordered triangular factorization,*” Proc. IEEE, vol. 55, pp. 1801-1809, Nov. 1967.
- [Tinney, 1991] W.F. Tinney. “*A presentation to the workshop in engineering mathematics and computer sciences*”. EPRI publication EAR/EL-7/ 07, pages 1-15, august 1991.
- [Van Cutsem y Vournas, 1998] T. Van Cutsem, C. Vournas, “*Voltage Stability of Electric Power Systems*”, Kluwer Academic Publishers, Norwell, Massachusetts, 1998.
- [Van Ness y Griffin, 1961] J. E. Van Ness and J. H. Griffin, “Elimination methods for loadflow studies, AIEE Trans. (Power App. Syst.), vol. 80, pp. 299-304, June 1961.
- [Van Ness, 1959] J. E. Van Ness, “*Iteration methods for digital load flow studies,*” AIEE Trans. (Power App. Syst.), vol. 78. pp. 583-588, Aug. 1959.
- [Ward y Hale, 1956] J. B. Ward and H. W. Hale, “*Digital computer solution of power flow problems*”, AIEE Trans. (Power App. Syst.), vol. 75, pp. 398-404, June 1956.
- [Xu et al., 1998] W. Xu, Y. Liu, J.C. Salmon, T. Le, and G.W.K. Chang, “*Series load flow: A novel non-iterative load flow method*”, IEE Proc. Gener. Transm. Distrib., vol. 145, no. 3, pp. 251–256, May 1998.