



**UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN
NICOLÁS DE HIDALGO**

**FACULTAD DE INGENIERÍA ELÉCTRICA
DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO**

**MODELADO Y ANÁLISIS DE CIRCUITOS LINEALES CON
DIODOS E INTERRUPTORES IDEALES EN EL MARCO DE
REFERENCIA COMPLEMENTARIO**

TESIS

**QUE PARA OBTENER EL GRADO DE
MAESTRO EN CIENCIAS EN INGENIERÍA ELÉCTRICA**

PRESENTA

ING. JOSÉ PILAR SUÁREZ CRUZ

ASESOR

DR. J. JESÚS RICO MELGOZA

MORELIA, MICHOACÁN ENERO 2012



Agradecimientos

Con infinito agradecimiento a mis padres por haberme brindado la posibilidad de tener una educación a costa de un fuerte sacrificio, dándome siempre aliento y esperanza cuando me siento perdido.

A mi hermanas Jane, Jovita y Gloria que soportan mis estados de ánimo y que siempre me brindan su apoyo cuando me siento aturdido. Gracias por su comprensión.

A mi hermano Manuel que siempre está luchando para salir adelante poniéndose como ejemplo para mí.

A mi tío Ignacio que siempre nos ha apoyado cuando más lo necesitamos y a todos mis Cruces del Moro Grande que están siempre al pendiente de nosotros.

A mi asesor de tesis el Dr. J. Jesús Rico Melgoza por permitirme trabajar en su área de investigación, por sus visionarios consejos y por sus enseñanzas para hacer posible este trabajo. A los miembros de mi mesa sinodal por sus acertadas observaciones para enriquecer y llevar a buen término este trabajo.

A los compañeros del Posgrado: Julio Cesar Suárez por tu buen trato, atención y motivación que siempre me has brindado y por los valores que me has inculcado: la fuerza humana, la disciplina y la disposición para el trabajo de equipo en aquellas noches y días de estudio. Victor Vega, Félix Ortega, Omar Beltrán, Omar Rico, José Roberto Espinoza, Rubén Darío, Noé Barrera Gallegos deseo agradecerles la calidez humana y el buen trato hacia mi persona. Gracias, aprecio de todo corazón la amistad que me han brindado. Noé Barrera Gallegos por tu gran disponibilidad para atender mis dudas y tu acertada asesoría en los temas de la vida. Roberto Espinoza por tu amistad y tu buen trato y porque siempre me apoyas en la solución de los trámites burocráticos de la vida. Rubén Darío por tu amistad, tu gran sentido hacia la vida, tu cosmovisión y tu contracorriente al orden establecido.

A mis compañeros de Licenciatura: Alejandro Gil García, gracias por tener siempre tiempo para mí aunque estés ocupado, aprecio hondamente tu amistad, tu casa, tu calidez humana, y tus buenos comentarios cuando estamos hundidos sentimentalmente y necesitamos salir. A mi buen Rody Osvaldo por ofrecerme tu apoyo cuando más lo

necesito. Gibrán por tu tu amistad, tu casa y hacerme valer ante la gente. A Juan Luis, gracias por brindarme tu casa para terminar este proyecto.

A mis poetas: Danny Fredy Rodriguez Chavez, Alberto Portillo Ambriz, Gildardo Noble Pano para decirles que no es tarde agradecer cuando se necesita romper este sabor seco y asfixiante.

A mis compañeros del Consejo Universitario: Saray, Tania, Dulce, Anayeli, Grecia, Daniel Mata, Edgar, Cuahatemoc, Cirilo, y Erick por su amistad.

A mis maestros Pedro Ferreira Herrejón, Ana María Maldonado, María de Los Angeles, Alejandra Martínez, Sigridt García, Rubén Rusiles, Victor Barbosa, Cecilia Herrera, Antonio Rodriguez Naranjo, Victor Quintero, Nicolás Alvarado, Félix Calderón, Edmundo Barrera, Gilberto González, Carlos Pérez, Antonio Camarena, Pedraza, Alberto Avalos, Ramos Paz, Isidro Lazaro, José Garabito, Norberto Garcia, Gustavo Saucedo, Juan Anzures, Claudio Rubén Fuerte, Leonardo Romero.

A ti que con un solo batir de alas rompes mi delgado trayecto. Me guardo tu nombre porque necesito un secreto y la posibilidad de abrirlo para pronunciar el sabor de tus vocales cisnes y tus consonantes mariposas.

A todos ustedes que nunca les he dicho mi aprecio y que el orden descendente de este texto no los pone en menor escala de agradecimiento.

Resumen

En la presente tesis se hace uso del Marco de Referencia Complementario (MRC) para representar convertidores de Electrónica de Potencia (EP) de CA/CD y de CD/CD. En este esquema los modelos para los convertidores de potencia son representados por un conjunto de ecuaciones algebro-diferenciales sujetas a restricciones complementarias. Dos variables cualesquiera mayores de cero son complementarias si el producto de ellas es siempre cero. Este hecho se aprovecha en el MRC para modelar el diodo y el interruptor electrónico idealmente.

En el desarrollo de la tesis se presentan varios modelos para sistemas con diodos haciendo hincapié en las particularidades y dificultades del modelado. Asimismo se muestra como utilizando el formalismo complementario pueden ser representados circuitos eléctricos con una gran cantidad de diodos en una forma sencilla y sistemática. Una de las ventajas que ofrece esta técnica consiste en que es posible representar modelos completos que son válidos para los modos de operación que experimentan los convertidores de potencia, desde una representación matemática única. Para comprobar el juicio anterior los modelos complementarios correspondientes al Rectificador de Onda Completa (ROC) y al Rectificador Trifásico (RT) son simulados en diferentes escenarios de operación. En particular para el RT son investigadas las causas de los modos de operación en función de: la inyección de armónicos en las fuentes de alimentación, la variación del filtro capacitivo y en diferentes condiciones de carga. En el caso del ROC los modos de operación se analizan en función de la variación del filtro capacitivo y en diferentes condiciones de carga.

Los convertidores de EP de CD/CD como el Convertidor Reductor y el Convertidor Resonante de CD/CD que se analizan son sistemas que constan de diodos e interruptores. En el MRC los interruptores son manipulados y transformados en funciones conocidas o representados como restricciones complementarias. El modelado del Convertidor Reductor en el formalismo complementario sugiere que es posible representar modelos complementarios sujetos a leyes de control al nivel de complejidad deseado, si el comportamiento de los interruptores controlados es representado como un conjunto

de restricciones complementarias.

Para el cálculo de la respuesta transitoria y el cálculo del estado estable periódico con base en el MRC las condiciones de conmutación son manejadas por restricciones complementarias y el usuario no requiere de una lógica para calcular los tiempos de conmutación, lo cual es complicado determinar si el número de interruptores se incrementa.

Abstract

In this thesis the Complementary Framework (CF) is used to represent Power Electronics Converters (PEC) AC/DC and DC/DC. In this scheme the models for power converters are represented by a set of differential algebraic equations subject to complementarity constraints. Two variables greater than zero are complementary if the product of them is always zero. This fact is exploited in the CF to modelling the diode and switch ideally.

In the developing of the thesis several models for systems with diodes are presented with emphasis in the characteristics and difficulties of modelling. It also shows how inside of the complementary formalism the circuits with a large number of diodes can be represented in a simple and systematic way. One of the advantages of this technique is the possibility to represent complete models that are valid for the operating modes that present the power converters under an unified mathematical representation. To verify the previous premise the complementary models for the Full Wave Rectifier (FWR) and the Three-Phase Rectifier (TFR) are simulated with different scenarios of operation. In particular for the TFR are investigated the causes of the operating modes considering: the injection of harmonics in power sources, the variation of capacitive filter to different load conditions. In the case of FWR several operating modes are analyzed as a function of the capacitive filter variation and different load conditions.

The PEC CD/CD as the buck converter and resonant converter DC/DC which are analyzed are systems consisting of diodes and switches. In the CF the switches are manipulated and processed in known functions or represented as complementarity constraints. The buck converter modeling within the complementarity formalism suggests that it is possible to represent complementarity models subject to control laws to the level of complexity desired, if the behavior of the controlled switches is represented as a set of complementary constraints.

For computation of the transient response and the calculation of periodic steady state within the CF the switching conditions are processed by complementary constraints and the user does not require a logic to calculate the switching times, which is

complicated to determine if the number of switches increases.

Lista de Símbolos y Abreviaturas

EP	Electrónica de Potencia
MC	Modelo Conmutado
MP	Modelo Promediado
MRC	Marco de Referencia Complementario
SLC	Sistema Lineal Complementario
SCC	Sistema Complementario Conmutado
PLC	Problema Lineal Complementario
CC	Conjunto Cortado
PQ	Programación Cuadrática
MOC	Modo de Operación Continuo
MOD	Modo de Operación Discontinuo
RMO	Rectificador de Media Onda
ROC	Rectificador de Onda Completa
RT	Rectificador Trifásico
MAP	Modulación por Ancho de Pulso
λ	Coefficiente del modo de operación en el Convertidor Resonante de CD/CD
α	Ángulo de desfasamiento del Convertidor Resonante de CD/CD en el MOC
β	Ángulo de desfasamiento del Convertidor Resonante de CD/CD en el MOD

Índice general

Agradecimientos	III
Resumen	V
Abstract	VII
Lista de Símbolos y Abreviaturas	VIII
Índice General	XIII
1. Introducción	1
1.1. Revisión del Estado del Arte	1
1.2. Objetivo	5
1.3. Justificación	6
1.4. Aportaciones	6
1.5. Descripción de la Tesis	7
1.6. Lista de Publicaciones	7
2. Marco Teórico	9
2.1. Introducción	9
2.2. Sistemas Lineales Complementarios	9
2.2.1. Antecedentes	9
2.2.2. Formato de un Sistema Lineal Complementario	10
2.2.3. Problema Lineal Complementario	10
2.3. Algoritmos de Solución para un Problema Lineal Complementario	11
2.4. Solución de los Sistemas Lineales Complementarios	14
2.5. Cálculo de Estado Estable para Sistemas Lineales Complementarios	17
2.6. Conclusiones	20

3. Modelado de Circuitos con Diodos	23
3.1. Introducción	23
3.1.1. Elementos Generales para el Modelado de Convertidores de Potencia.	23
3.1.2. Representación del Modelo del Diodo como un Elemento Complementario	25
3.2. Modelado Complementario para Circuitos con Diodos	26
3.2.1. Ejemplo 1	26
3.2.2. Ejemplo 2	29
3.2.3. Ejemplo 3	37
3.3. Descripción General del Proceso de Modelado y Simulación en el MRC	40
3.4. Conclusiones	41
4. Modelado y Simulación de Convertidores de Potencia No-Controlados	43
4.1. Introducción	43
4.2. Modelado del Rectificador de Media Onda	44
4.2.1. Obtención del Modelo del Rectificador de Media Onda	44
4.2.2. Simulaciones del Rectificador de Media Onda	45
4.3. Modelado del Rectificador de Onda Completa	47
4.3.1. Obtención del Modelo del Rectificador de Onda Completa	48
4.3.2. Modo de Operación Continuo del Rectificador de Onda Completa en Estado Estable	51
4.3.3. Modo de Operación Discontinuo del Rectificador de Onda Completa en Estado Estable	53
4.3.4. Respuesta Transitoria en el Modo de Operación Continuo del Rectificador de Onda Completa	55
4.3.5. Respuesta Transitoria en el Modo de Operación Discontinuo del Rectificador de Onda Completa	57
4.3.6. Comparación del Algoritmo de Lemke y Programación Cuadrática en el Cálculo de la Respuesta Transitoria	58
4.3.7. Análisis Armónico de los Modos de Operación del Rectificador de Onda Completa	60
4.3.8. Determinación de la Operación del Rectificador de Onda Completa en el Modo de Operación en la Condición Frontera	61
4.4. Modelado del Rectificador Trifásico	63

4.4.1.	Obtención del Modelo del Rectificador Trifásico	63
4.4.2.	Modo de Operación Continuo del Rectificador Trifásico en Estado Estable	69
4.4.3.	Modo de Operación Discontinuo del Rectificador Trifásico en Estado Estable	72
4.4.4.	Respuesta Transitoria en el Modo de Operación Continuo del Rectificador Trifásico	75
4.4.5.	Respuesta Transitoria en el Modo de Operación Discontinuo del Rectificador Trifásico	76
4.4.6.	Comparación del Algoritmo de Lemke y Programación Cuadrática en el Cálculo de la Respuesta Transitoria	77
4.4.7.	Determinación de la Operación del Rectificador Trifásico en el Modo de Operación en la Condición Frontera	78
4.4.8.	Análisis Armónico de los Modos de Operación del Rectificador Trifásico	80
4.4.9.	Influencia de los Armónicos de las Fuentes de Voltaje en el Modo de Operación	83
4.5.	Análisis de la Existencia de una Solución en Base a la Matriz M	88
4.6.	Comparación del Rectificador de Onda Completa y el Rectificador Trifásico	90
4.7.	Conclusiones	91
5.	Modelado de Sistemas Controlados	95
5.1.	Introducción	95
5.2.	Obtención del Modelo del Convertidor Reductor	95
5.3.	Respuesta Transitoria del Convertidor Reductor en Lazo Cerrado	99
5.4.	Obtención del Modelo del Convertidor Resonante de CD/CD	101
5.5.	Cálculo de la Respuesta Transitoria para el Convertidor Resonante CD/CD en el MOC y el MOD.	103
5.6.	Análisis de la Existencia de una Solución en Base a la Matriz M	106
5.7.	Conclusiones	107
6.	Conclusiones y Trabajos Futuros	109
6.1.	Conclusiones Generales	109
6.2.	Trabajos Futuros	110
	Bibliografía	112

A. Desarrollo Matemático del Cálculo de Estado Estable en el MRC 117

Índice de figuras

2.1. Característica complementaria	11
2.2. Diagrama de flujo para la solución de un SLC en el MRC	16
2.3. Diagrama de flujo para el cálculo de estado estable en el MRC	19
3.1. Característica del diodo ideal	26
3.2. Circuito eléctrico del Ejemplo 1	26
3.3. Árbol y co-árbol para el circuito eléctrico del Ejemplo 1	27
3.4. CCs y Lazos para el circuito eléctrico del Ejemplo 1	27
3.5. Circuito eléctrico del Ejemplo 2	29
3.6. Árbol y co-árbol para el circuito del Ejemplo 2	30
3.7. CCs y Lazos para el circuito del Ejemplo 2	30
3.8. (a)Circuito eléctrico para el Ejemplo 3; (b) Árbol y co-árbol para el circuito del Ejemplo 3	38
3.9. Lazos y CCs para el circuito del Ejemplo 3	39
3.10. Diagrama de flujo de proceso de modelado y simulación en el MRC	40
4.1. Circuito eléctrico del RMO	44
4.2. Arbol y co-árbol del RMO	44
4.3. Lazos y CCs para el RMO	45
4.4. Corriente en el inductor del RMO	46
4.5. Voltaje en el diodo del RMO	47
4.6. Circuito eléctrico del ROC	48
4.7. Árbol y co-árbol del ROC	48
4.8. Lazos y CCs en el ROC	49
4.9. (a)Circuito eléctrico en el subintervalo de conmutación; (b) Circuito eléc- trico en el subintervalo de conducción para el ROC	51
4.10. Formas de Onda del ROC en el MOC	52

4.11. (a)Circuito eléctrico durante el subintervalo de conducción; (b) Circuito eléctrico en el subintervalo de no-conducción para el ROC	54
4.12. Formas de Onda del ROC en el MOD	55
4.13. Formas de onda de la corriente $i_L(t)$ con PSpice, Simulink y el MRC . .	56
4.14. Formas de onda del ROC en el MOC durante el transitorio	56
4.15. Formas de onda de la corriente $i_L(t)$ en el ROC	57
4.16. Formas de onda del ROC en el MOD durante el transitorio	58
4.17. Formas de Onda de la corriente $i_L(t)$ obtenidas con PQ y el Algoritmo de Lemke; (a) En el MOC y; (b) En el MOD	59
4.18. Armónicos del ROC en el MOC y el MOD utilizando Simulink y el MRC	60
4.19. (a)Modo de operación del ROC como función del capacitor; (b) Forma de onda de la corriente $i_d(t)$ en la región frontera	62
4.20. Circuito eléctrico del RT	63
4.21. Árbol y co-árbol del RT	64
4.22. CCs y Lazos del RT	64
4.23. (a)Topología válida en el subintervalo de conducción; (b) Topología válida en el subintervalo de conmutación del RT en el MOC.	70
4.24. Formas de onda de las corrientes trifásicas en el MOC	71
4.25. Formas de onda en el MOC	71
4.26. Topologías válidas en el MOD: (a) Modelo para el subintervalo de conducción; (b) Modelo para el subintervalo de no-conducción	72
4.27. Formas de onda en el MOD: (a)Voltajes de CA y de CD; (b) Corrientes trifásicas	73
4.28. Formas de onda en el MOC	74
4.29. Formas de onda de la corriente en el MOC obtenidas utilizando PSpice, Simulink y el MRC	75
4.30. Formas de onda de la corriente en el MOD obtenidas utilizando PSpice, Simulink y el MRC	76
4.31. Formas de Onda de la corriente i_a obtenidas con PQ y el Algoritmo de Lemke: (a) En el MOC y; (b) En el MOD	77
4.32. (a)Modo de operación del RT como función del capacitor; (b) Forma de onda de la corriente i_d en la región frontera	79
4.33. Comparación de la corriente i_a en estado estable con Simulink y el MRC: (a)En el MOC y; (b) En el MOD	80
4.34. Magnitudes de las corrientes armónicas de la fase i_a en porciento de la fundamental en el MOC y el MOD utilizando el MRC y Simulink . . .	81

4.35. Comparación de las magnitudes de las corrientes armónicas de la fase i_a en porciento de la fundamental en el MOC y el MOD	82
4.36. Formas de onda de los voltajes trifásicos para el caso de estudio (c) . .	85
4.37. Formas de onda de la corriente i_a en los casos de estudio (a), (b) y (c) en el estado estable	85
4.38. Formas de onda de los voltajes trifásicos para el caso de estudio (d) . .	86
4.39. Formas de onda de las corrientes del RT durante el transitorio en el caso de estudio (d)	87
4.40. Formas de onda de las corrientes de las fases con el cálculo de estado estable utilizando el MRC para el caso de estudio (d)	88
4.41. Valores Propios en el MOC y el MOD del ROC de la matriz $(M_N + M_N^T)/2$	89
4.42. Valores Propios en el MOC y el MOD del RT de la matriz $(M_N + M_N^T)/2$	90
5.1. Convertidor Reductor controlado por MAP	96
5.2. Circuito equivalente para el Convertidor Reductor	96
5.3. CCs y Lazos para el Convertidor Reductor	97
5.4. Formas de onda del voltaje y la corriente para el Convertidor Reductor en Lazo cerrado	99
5.5. Vista detallada del voltaje y la corriente en el Convertidor Reductor en Lazo cerrado	100
5.6. Circuito del Convertidor Resonante de CD/CD	101
5.7. Circuito equivalente del Convertidor Resonante de CD/CD	102
5.8. Formas de onda del Convertidor Resonante de CD/CD utilizando Simulink y el MRC en el MOC	104
5.9. Formas de onda del Convertidor Resonante de CD/CD utilizando Simulink y el MRC en el MOD	105

Índice de tablas

4.1. Datos para la simulación del RMO	46
4.2. Datos para el MOC del ROC	51
4.3. Parámetros eléctricos del ROC en el MOD	53
4.4. Valores RMS de la corriente $i_L(t)$ en el MOC y el MOD utilizando el MRC y Simulink	61
4.5. Valores para determinar el MOC y el MOD variando la magnitud del capacitor	62
4.6. Datos del RT para el MOC	70
4.7. Datos del RT para el MOD	74
4.8. Valores para determinar el MOC y el MOD variando la capacitancia . .	79
4.9. Valores RMS de la corriente i_a en el MOC y el MOD utilizando el MRC y Simulink	82
4.10. Parámetros eléctricos comunes para los casos de estudio (a), (b), (c) y (d)	83
4.11. Valores Propios del ROC en el MOC y el MOD en el análisis transitorio	89
4.12. Valores Propios del RT en el MOC y el MOD en el análisis transitorio .	89
5.1. Datos de simulación para el Convertidor Reductor	99
5.2. Parámetros eléctricos del Convertidor Resonante de CD/CD en el MOC	103
5.3. Valores Propios del Convertidor Reductor en el análisis transitorio . . .	107
5.4. Valores Propios del Convertidor Reductor de CD/CD en el MOC y el MOD en el análisis transitorio	107

Capítulo 1

Introducción

1.1. Revisión del Estado del Arte

Desde la aplicación de los primeros esquemas de control y conversión de energía basados en Electrónica de Potencia (EP), esta disciplina ha probado ser un medio viable para controlar procesos en sistemas de diversa naturaleza tales como en aplicaciones para sistemas eléctricos de potencia, en la industria y en aplicaciones del hogar [Mohan et al, 1995] y [M.Rashid, 1993]. Asimismo la EP ha tenido un alto impacto en esquemas de control orientados a robótica, en comunicaciones y en el desarrollo de veloces procesadores de cómputo.

Las aplicaciones de EP aun y cuando han permitido mejores esquemas de control y conversión de la energía han agregado efectos negativos en los sistemas eléctricos de potencia, tales como la distorsión en las formas de onda del voltaje y la corriente que tienen consecuencias en disparos no planeados de relevadores y operaciones inadecuadas de sistemas que son sensibles a los armónicos. Con base en este contexto el proceso de modelado y simulación de convertidores de EP representa una parte clave en el desarrollo de nuevas aplicaciones que demandan que los modelos y esquemas de solución reflejen de manera real su comportamiento.

Los circuitos que contienen elementos de EP son sistemas no lineales. La no linealidad se asocia principalmente a los procesos de conmutación de los interruptores de potencia. Esta particularidad de los sistemas de EP hace que su tratamiento requiera de ciertas simplificaciones en el proceso de modelado. Los esquemas de modelado basados en Modelos Conmutados (MCs) [Burdio, Martinez, 1995], [Kassakian et al, 2001], [Maksimovic et al, 2001] y en Modelos Promediados (MPs) [Middlebrook, Cuk, 1976] evitan de alguna forma la característica no lineal de los elementos de conmutación. En las referencias [Burdio, Martinez, 1995], [Kassakian et al, 2001], [Vasca et al, 2009] los

procesadores de potencia son considerados como circuitos eléctricos compuestos de elementos lineales pasivos (resistencia, inductancia y capacitancia) y elementos no lineales (diodos, tiristores e interruptores controlados por corriente y voltaje) energizados por fuentes de voltaje y corriente independientes. De esta manera la parte no lineal se centra principalmente en los elementos de conmutación.

En los esquemas de solución basados en MPs la característica de los elementos de conmutación es descartada y se hace un promedio de los estados antes y después del proceso de conmutación de tal forma que los modelos a resolver son sistemas lineales invariantes en el tiempo, promediados [Middlebrook, Cuk, 1976]. En los esquemas de solución para resolver MCs se requiere de un conocimiento profundo en primer lugar de las principales configuraciones (válidas) que describen el comportamiento de los convertidores así como el cálculo de los instantes de conmutación para pasar a la siguiente configuración. Esta situación en sistemas eléctricos conformados por una gran cantidad de interruptores electrónicos representa una tarea que se dificulta en el sentido de que no es trivial determinar sus estados de operación (encendido o apagado). Una inadecuada selección de la condición de operación de los elementos de conmutación conduce a problemas de convergencia en la solución. Por lo que esta condición representa un punto crítico en metodologías basadas en MCs. Es posible resumir que las metodologías basadas en MCs y MPs no incorporan en el análisis de la dinámica de los convertidores de potencia, los eventos discretos asociados a los interruptores.

En [W.P.M.H. Heemels, 1999] y [Brogliato, 2003] se acuña el concepto de sistemas híbridos para describir sistemas que contienen dinámicas caracterizadas por eventos continuos y eventos discretos los cuales surgen de problemas de optimización y de aplicaciones para sistemas mecánicos. Este resultado muestra que los sistemas híbridos son adecuados para representar la dinámica de sistemas de estructura variable, sistemas de robótica, así como en la solución de problemas económicos cuyo estado de equilibrio depende del cumplimiento de ciertas restricciones. Así también se ha mostrado que los sistemas híbridos son útiles para representar circuitos eléctricos con diodos e interruptores.

En los sistemas híbridos hay una clase particular de sistemas a los cuales se les ha denominado Sistemas Lineales Complementarios (SLCs) [Camlibel et al, 2003]. Los SLCs han sido utilizados para estudiar sistemas mecánicos con resortes, sistemas hidráulicos con válvulas, dinámicas económicas Walrasian [Brogliato, 2003], y se ha mostrado que los circuitos que constan únicamente de diodos pueden ser representados adecuadamente como un conjunto de ecuaciones algebro-diferenciales sujetas a restricciones complementarias [W.P.M.H. Heemels, 1999]. Donde las restricciones complementarias

se adecuan en forma natural para representar el comportamiento de los diodos. De esta forma los SLCs permiten construir modelos que incorporan de manera conjunta la dinámica de sistemas de EP con diodos descrita por eventos continuos y por eventos discretos. Una clase de representación más general de los SLCs son los Sistemas Lineales Complementarios Conmutados (SLCCs) los cuales también pertenecen a los sistemas híbridos. En [Vasca et al, 2009], los SLCCs han sido fuertemente estudiados y aplicados para representar y simular circuitos con diodos e interruptores electrónicos. Probando que el concepto de sistemas híbridos es una herramienta con gran potencial en el área de modelado y simulación de convertidores de EP. También se ha mostrado que en el Marco de Referencia Complementario (MRC) de los SLCs la lógica de operación para ciertos interruptores controlados puede ser representada y simulada como un conjunto de restricciones complementarias.

El fundamento matemático para la solución de sistemas de EP en el MRC se ha construido en base a la teoría de los Problemas Lineales Complementarios (PLCs) mostrando que es adecuada para su solución [Cottle et al, 1997]. Una forma de aplicar los PLCs en el MRC requiere de una discretización de los SLCs utilizando el método de Euler para el cálculo de la respuesta transitoria. De esta forma el proceso de solución implica resolver un PLC en cada instante de tiempo [W.P.M.H. Heemels, 1999]. La ventaja de este esquema de modelado en el proceso de solución consiste en que no es requerida una lógica donde el usuario utilice un algoritmo adicional para detectar en cada instante de tiempo los estados de conmutación de los interruptores electrónicos es decir la detección de los instantes de conmutación se incorpora implícitamente en el algoritmo de solución mediante restricciones complementarias. Los PLCs pueden ser resueltos utilizando el algoritmo de Lemke [Lloyd, 2005], o también se puede utilizar Programación Cuadrática (PQ) [Murty, Tien, 1997]. En esta tesis se utiliza el algoritmo de Lemke que está disponible gratuitamente en la red el cual puede ser descargado de [Fackler, Mirand] y la función *FindMinimum* del programa comercial *Mathematica* que pertenece al paquete de funciones de optimización. Otro algoritmo que se encuentra en la red es PATH [Dirske et al, 2008], el cual es adecuado cuando se desea resolver PLCs de grandes dimensiones.

Otro aspecto importante dentro del MRC consiste en que la formulación del cálculo de estado estable para los sistemas de EP se fundamenta de igual forma en la utilización del concepto de los PLCs pero utilizando un retenedor de orden cero, lo cual ofrece las mismas características desde un punto de vista algorítmico (no se requiere la determinación de los instantes de conmutación). Un aspecto nodal de esta metodología consiste en que el cálculo de estado estable está desarrollado para modelos completos

y no requiere en su solución la determinación de una condición inicial definida por el usuario (para esta situación ya se han comentado las dificultades que se tienen cuando se tiene un gran número de interruptores).

Un sistema de estudio adecuado para aplicar esta formulación es el Rectificador Trifásico (RT) con diodos, el cual sigue siendo un dispositivo de interés en la literatura [Lian et al, 2008], [Carpinelli et al, 2004], [Sakui, Fujita, 1994], y [Bleijs, 2005] debido a que su aplicación es común en la industria como un interfaz en sistemas de control de EP para proveer una fuente de CD. En [Lian et al, 2008], [Carpinelli et al, 2004], y [Sakui, Fujita, 1994], el RT ha sido modelado y simulado utilizando metodologías basadas en MCs en el dominio del tiempo y en el dominio armónico. Estos trabajos son novedosos en el sentido de que presentan un análisis que describe de manera completa el Modo de Operación Continuo (MOC) y el Modo de Operación Discontinuo (MOD); trabajos anteriores sólo muestran un análisis para el MOC [Bleijs, 2005]. En [Carpinelli et al, 2004] se presenta un análisis para el cálculo de estado estable en el dominio armónico, sin embargo la desventaja que puede presentar este método consiste en que un alto grado de exactitud en la solución requiere de una transformada inversa de Laplace computacionalmente costosa. En [Sakui, Fujita, 1994] se presenta un análisis del RT en el dominio armónico y utilizando funciones descriptivas, así mismo, esta metodología obtiene resultados matemáticos para calcular la condición frontera utilizando un promedio del armónico 6° de la corriente de directa i_d basado en una aproximación. En [Lian et al, 2008] se presenta un método iterativo utilizando un método de solución tipo-Newton para el cálculo de los armónicos con la ventaja de que son omitidas transformas inversas de Laplace, las cuales pueden ser costosas computacionalmente cuando se analiza el MOC en el dominio armónico. La exactitud de las armónicas de interés bajo este esquema de simulación no son afectadas por errores de truncamiento y efectos *aliasing* [Lian et al, 2008]. En la utilización de estos enfoques no se consideran relaciones matemáticas para un modo de operación en la condición frontera ya que la construcción de estas metodologías se basa en establecer una configuración para el MOC y otra para el MOD, y no es claro matemáticamente como representar una configuración compuesta por el MOC y el MOD.

A *grosso modo* se puede resumir que las metodologías revisadas siguen un esquema de modelado donde el modelo del RT es construido como un MC y el usuario requiere de una configuración eléctrica para el MOC y otra para el MOD con el objetivo de tener un descripción completa del RT, sin embargo la identificación de estos modos de operación no es una tarea trivial ya que requieren de un conocimiento profundo del comportamiento del convertidor y una gran capacidad de ingenio. Con la aplicación del

MRC es posible representar el MOC y el MOD del RT en un esquema de modelado y simulación unificado donde el cálculo de la respuesta transitoria así como el cálculo de estado estable es realizado con la utilización de los PLCs sin requerir de la determinación de una configuración válida para el MOC y otra para el MOD del convertidor. El modelo del RT en el MRC es un modelo completo y es posible obtener resultados para encontrar un modo de operación en la región frontera en función de los parámetros tales como la capacitancia, la carga, y la distorsión armónica de las fuentes de alimentación.

Otro sistema de aplicación es el Rectificador de Onda Completa (ROC) cuando se tiene una fuente de alimentación monofásica y se desea tener un voltaje de CD en el lado de carga. Este sistema aun cuando es de fácil operación no tiene un modelo completo en la literatura, y su análisis es realizado utilizando un MC [Mohan et al, 1995]. Con el MRC el ROC puede ser estudiado ante diferentes escenarios de operación e investigar las causas de los modos de operación en función de los parámetros de la carga y el filtro capacitivo.

Sistemas con interruptores como el Convertidor Reductor controlado por voltaje [Mohan et al, 1995] y el Convertidor Resonante de CD/CD [Foster et al, 2008], [Yang et al, 2002] son sistemas con interruptores los cuales al ser manipulados pueden ser representados efectivamente en el MRC como un SLC, mostrando que esta herramienta de modelado y simulación tiene un gran potencial también para sistemas con interruptores controlados y no controlados.

1.2. Objetivo

El principal objetivo de este trabajo se centra en la utilización del MRC para construir modelos completos que describan de manera adecuada la dinámica de los dispositivos comúnmente estudiados en EP, tales como el RT, el ROC, así como el Rectificador de Media Onda (RMO). Mostrando la potencialidad de este esquema de modelado en relación con los MCs. Asimismo se busca explorar la generalidad que tiene el formato de los SLCs en la representación de los modelos de diferentes convertidores de potencia.

Otro aspecto fundamental de este trabajo se centra en resolver los modelos complementarios de los convertidores estudiados y mostrar las potencialidades que representa el MRC en torno a la características del proceso de solución de los modelos estudiados ante diferentes escenarios de operación. En lo referente a la solución de los SLCs se pretende aplicar PQ a la solución de los SLCs y comparar los resultados con los obtenidos a través del algoritmo de Lemke. Asimismo se pretende aplicar la teoría del cálculo de estado estable del MRC al ROC y al RT para comparar los resultados obtenidos con la

respuesta transitoria. Un aspecto secundario consiste en medir el tiempo de cómputo en el MRC con relación a los paquetes comerciales de simulación de convertidores de EP tales como Simulink y PSpice.

Para mostrar que en el MRC se pueden también modelar circuitos con interruptores y diodos se resuelven los modelos complementarios para el Convertidor Reductor sujeto a leyes de control y el Convertidor Resonante de CD/CD donde los interruptores son representados como un conjunto de restricciones complementarias o como funciones conocidas.

1.3. Justificación

En esta tesis se hace uso del MRC para modelar y simular convertidores de CA/CD y convertidores de CD/CD. Este enfoque representa una alternativa con gran potencial para el análisis de sistemas de EP en varios aspectos: en primer lugar, es posible construir modelos únicos los cuales son válidos para los modos de operación que experimentan los convertidores estudiados; en segundo lugar, en el proceso de modelado y simulación no se requiere una lógica que le demande al usuario determinar los tiempos de conmutación para cambiar a la siguiente configuración; en tercer lugar, bajo esta metodología es posible realizar el cálculo de estado estable periódico de los convertidores con independencia de los estados de operación (encendido o apagado) causados por los elementos de conmutación. Este hecho representa una ventaja con respecto a las metodologías basadas en MCs donde se requiere la asignación del estado de operación del convertidor en cada instante de tiempo para su simulación. Esta tarea puede resultar fácil de realizarse si el sistema consta de pocos diodos e interruptores electrónicos, sin embargo a medida que el número de elementos de conmutación del sistema se incrementa, la definición del estado de operación de los interruptores puede resultar en un rutina que demande gran capacidad de imaginación y experiencia. Una inadecuada selección de la condición inicial puede resultar en problemas de convergencia al efectuar la solución, esta problemática es resuelta con la utilización del MRC.

1.4. Aportaciones

Las aportaciones de esta tesis en conjunto con los artículos de la Lista de Publicaciones se centran en construir el modelo complementario del RT y el ROC y aplicar el concepto de PQ y el algoritmo de Lemke para el cálculo de la respuesta transitoria y el cálculo de estado estable de cada uno de los modelos en el MRC ante diferentes escenarios de

operación.

En particular sobre la generación de los modelos complementarios se describe la problemática para la generación automatizada de las ecuaciones algebro-diferenciales de los convertidores de potencia en el formato de los SLCs mostrando que no siempre es posible representar el modelo de los convertidores en el formato de los modelos complementarios.

1.5. Descripción de la Tesis

En el Capítulo 2 se describen los elementos matemáticos para representar los modelos de los convertidores de EP y plantear su solución en el MRC. Se parte de la definición de un PLC el cual es utilizado para manejar la característica ideal de los diodos de potencia. Siguiendo en orden, se presenta la definición de un SLC, donde su representación matemática es aprovechada para describir los modelos de los convertidores de potencia estudiados en el MRC. Finalmente se presenta la solución para el cálculo de la respuesta transitoria y el cálculo de estado estable de los SLCs.

En el Capítulo 3 se presenta la metodología para generar modelos de convertidores de EP con diodos en el MRC. En este sentido se presentan varios circuitos electrónicos con diodos para ejemplificar el uso de la metodología en la generación de SLCs. Así también para tener un ejemplo que describa el proceso de modelado y simulación en el MRC se presenta de manera simbólica el cálculo de la respuesta transitoria y el cálculo de estado estable para un circuito con diodos.

En el Capítulo 4 se presentan los modelos del RMO, el ROC, y el RT. La respuesta transitoria y el cálculo de estado estable son obtenidas para el ROC y el RT. Particularmente, en el análisis del RT se investiga el efecto de los armónicos de las fuentes de voltaje, la variación de la carga, y la variación del filtro capacitivo en el MOC y el MOD. En el Capítulo 5 se presenta el proceso de modelado y simulación de los convertidores siguientes: el Convertidor Reductor “Buck” en Lazo cerrado utilizando un control de voltaje y el Convertidor Resonante de CD/CD. En el Capítulo 6 se presentan algunas conclusiones y trabajos futuros sobre la utilización del MRC para modelar procesadores de potencia.

1.6. Lista de Publicaciones

1. Suárez, P., Rico, Melgoza J., “An Alternative Approach for Modelling Power Electronics Converters”. *43rd North American Power Symposium* Boston, Massachu-

setts August 4-6, 2011.

2. Rico, Melgoza J., Suárez, P., Barrera, Cardiel E., Madrigal, M., “A Complementarity Framework for Modeling and Analysis of Power Electronic Converters: Application to the Harmonic Current Analysis of Three Phase Diode Bridge Rectifiers”. *Electric Power Components and Systems*. (En la segunda etapa del proceso de revisión). El proceso de revisión inicio en Septiembre de 2011.
3. Suárez, P., Rico, Melgoza J., “Modelado de Convertidores de Electrónica de Potencia I: Análisis Transitorio”. *XIII, ROPEC'2011*, Morelia Michoacán, México, del 9 al 11 de Noviembre del 2011.(Aceptado)
4. J. Pilar Suárez y Jesús Rico Melgoza. “Modelado de Convertidores de Electrónica de Potencia II: Cálculo de Estado Estable”. *XIII, ROPEC'2011*, Morelia Michoacán, México, del 9 al 11 de Noviembre del 2011.(Aceptado)

Capítulo 2

Marco Teórico

2.1. Introducción

En este capítulo se presenta la teoría que será utilizada para modelar y resolver sistemas de EP en el MRC. Primeramente se presenta una breve contextualización de los SLCs, dentro de una clase más general de sistemas, llamados sistemas híbridos. Siguiendo en orden, se presenta el formato general de un SLC y la definición de un PLC el cual será utilizado para resolver los modelos de los convertidores de potencia que se analizan en este trabajo. Finalmente se presenta el desarrollo matemático para la solución de la respuesta transitoria y el cálculo de estado estable en el MRC.

2.2. Sistemas Lineales Complementarios

2.2.1. Antecedentes

Los sistemas que exhiben una dinámica descrita por eventos continuos y discretos en general se les denomina sistemas híbridos [W.P.M.H. Heemels, 1999]. Estos modelos han sido aplicados a sistemas mecánicos, biológicos, económicos así como en circuitos eléctricos con elementos de conmutación y en teoría de control, entre otros.

Matemáticamente los sistemas híbridos pueden ser representados como un conjunto de ecuaciones algebro-diferenciales que se restringen a igualdades y desigualdades. Los SCCs y los SLCs son grupos de sistemas que pertenecen a una subclase de los sistemas híbridos. La diferencia que existe entre los SCCs y los SLCs está definida por las características de las restricciones que contienen. En este sentido los SLCs pueden verse como una subclase de los SCCs porque estos últimos manejan dos tipos de restricciones. Para un estudio más detallado de los sistemas híbridos pueden revisarse las siguientes

referencias [W.P.M.H. Heemels, 1999, Brogliato, 2003, Camlibel et al, 2003].

2.2.2. Formato de un Sistema Lineal Complementario

Definición 1. *Un sistema continuo lineal complementario (SCLC) es un sistema dado por las Ecuaciones (2.1) y (2.2) y las variables z y w se sujetan a restricciones complementarias*

$$\dot{x} = A_c x + B_c z + E_c u \quad (2.1)$$

$$w = C_c x + D_c z + F_c u \quad (2.2)$$

$$0 \leq (w \perp z) \leq 0 \quad (2.3)$$

donde $x \in \mathbb{R}^{N_x}$ es el vector de estado, $u \in \mathbb{R}^{N_u}$ es el vector de entradas, $z \in \mathbb{R}^{N_z}$ y $w \in \mathbb{R}^{N_z}$ son vectores complementarios. Si los vectores z y w contienen un solo elemento, la variable z es conocida como variable complementaria de entrada y w es conocida como variable complementaria de salida. El símbolo de ortogonalidad \perp significa que dados dos vectores reales z y w la notación $w \perp z$ es equivalente a $z^T w = 0$ (el producto escalar es cero). Las matrices A_c, B_c, C_c, D_c, E_c y F_c son matrices de dimensiones adecuadas en el sentido de que al efectuar la discretización del SLC están implicadas multiplicaciones matriciales y para que las operaciones puedan ser realizadas en ciertos casos se requiere modificar las dimensiones de algunas de ellas agregando vectores de ceros en columnas o renglones.

El término SCLC es utilizado indistintamente como SLC o modelo complementario. De las Ecuaciones (2.1-2.3) se observa que en este tipo de sistemas es posible agrupar dinámicas de sistemas que se componen de eventos continuos (2.1) y de eventos discretos (2.2,2.3).

2.2.3. Problema Lineal Complementario

Definición 2. Sea q un vector real y M una matriz real, un *Problema Lineal Complementario* (PLC) consiste en encontrar un vector z tal que

$$z_i \geq 0 \quad \forall_i \quad (2.4)$$

$$q_i + (Mz)_i \geq 0 \quad \forall_i \quad (2.5)$$

$$(z^T)_i (q_i + (Mz)_i) = 0 \quad \forall_i. \quad (2.6)$$

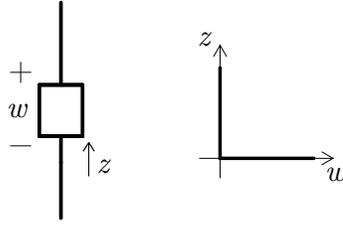


Figura 2.1: Característica complementaria

Las restricciones expresadas en las Ecuaciones (2.4-2.6), que se establecen en el PLC(q, M) pueden ser expresadas en forma compacta como

$$w_i = q_i + (Mz)_i \geq 0 \quad \forall_i \quad (2.7)$$

$$0 \leq (w_i \perp z_i) \geq 0 \quad \forall_i \quad (2.8)$$

La relación (2.8) es llamada “condición complementaria” e implica que para cada par de variables complementarias por lo menos una de ellas debe ser cero. Por ejemplo para la relación (2.8), el comportamiento general para un par de variables complementarias (z, w) es que si $z = 0$ implica que $w > 0$, por el contrario si $w = 0$ implica que $z > 0$. La representación de la condición complementaria se muestra en la Figura 2.1.

El comportamiento de la condición complementaria puede ser utilizado como análogo para representar la característica de un diodo ideal cuando opera como un interruptor de potencia mostrado en la Figura 3.1.

El concepto de un PLC ha sido utilizado para el análisis de sistemas económicos, problemas de programación matemática con restricciones de equilibrio y en teoría de juegos así como en el área de EP [Murty, Tien, 1997], [Heemels et al, 2003], entre otras aplicaciones [Ferris, Pang, 1997].

2.3. Algoritmos de Solución para un Problema Lineal Complementario

Existen diferentes alternativas para resolver un PLC. Algunos de los algoritmos comúnmente utilizados para resolver PLCs es el algoritmo de Lemke y PQ. Los problemas de PQ y Programación Lineal pueden ser expresados de manera compacta en el formato de los PLCs. En [Murty, Tien, 1997] se afirma que la representación de problemas de PQ y Programación Lineal en el formato de los PLCs asegura la utilización de algoritmos más eficientes para su solución cuando se trata de sistemas de grandes dimensiones

y el Método Simplex no puede abordarlos. Una importante clase de aplicaciones que surge de los PLCs es el hecho de que las condiciones necesarias de optimalidad para un problema de PQ convexo se relaciona directamente a un PLC [Murty, Tien, 1997]. De acuerdo a la teoría de los PLCs si la matriz M es positiva semidefinida puede contener más de una solución o ninguna, de otra manera si M es una matriz positiva definida existe una única solución.

Sea el PLC(q, M) donde la matriz M es una matriz semidefinida positiva y considérese el siguiente problema de PQ

$$\begin{aligned} & \text{Minimizar } z^T(q + Mz) \\ & \text{sujeto a: } q + Mz \geq 0 \\ & \quad z_i \geq 0 \quad \forall_i \end{aligned} \tag{2.9}$$

Este es un problema de PQ convexo si M es una matriz positiva semidefinida. Si al resolver el problema de PQ el valor objetivo es mayor de cero, el PLC no tiene solución. Por el contrario si el valor objetivo es igual a cero, los valores de z representan una solución del PLC. De esta forma para un PLC con una matriz M semidefinida positiva puede ser planteado como un problema de PQ convexo pero su solución puede ser no única o no tener solución, asegurar una solución única solo es posible si la matriz M es una matriz positiva definida [Murty, Tien, 1997]. Las condiciones para formular un PLC como un problema de PQ se presentan en [Murty, Tien, 1997]. De este resultado, las soluciones para los PLCs pueden ser planteadas como problemas de PQ si las matrices M son positivas definidas, positivas semidefinidas o bien pueden ser resueltas a través del algoritmo de Lemke. En los siguientes PLCs que se analizan son resueltos varios problemas con el objetivo de mostrar como en un PLC la positividad de las matrices pueden ser explotada para plantear su solución como un problema de PQ

Ejemplo 1. Resolver el PLC donde

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } q = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

La matriz $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ es positiva semidefinida. Por lo tanto la solución para este ejemplo puede plantearse como un problema de PQ convexo asegurando que existe una solución. Sustituyendo valores se tiene que

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar } z_1(-1 + z_1 + z_2) + z_2(-1 + z_1 + z_2) \\ &\text{sujeto a: } -1 + z_1 + z_2 \geq 0 \\ &\quad -1 + z_1 + z_2 \geq 0 \\ &\quad z_1 \geq 0 \\ &\quad z_2 \geq 0 \end{aligned}$$

el vector $z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$

La solución no es única y puede ser $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Estos resultados son correctos y los tres son válidos debido a la semi-positividad de la matriz M .

Ejemplo 2. Resolver el PLC donde

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ y } q = \begin{pmatrix} -5 \\ -6 \end{pmatrix}$$

La matriz $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ es una matriz positiva definida. Entonces este PLC puede ser formulado como un problema de PQ representado como

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar } z_1(-5 + 2z_1 + z_2) + z_2(-6 + z_1 + 2z_2) \\ &\text{sujeto a: } -5 + 2z_1 + z_2 \geq 0 \\ &\quad -6 + z_1 + 2z_2 \geq 0 \\ &\quad z_1 \geq 0 \\ &\quad z_2 \geq 0 \end{aligned}$$

el vector $z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$

La solución es $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,33333 \\ 2,33333 \end{pmatrix}$. Este resultado es único debido a que la matriz M es positiva definida.

Para la solución de los PLCs en esta tesis se empleará el algoritmo de Lemke y PQ, los cuales pueden ser revisados a detalle en las referencias [Lloyd, 2005], [Murty, Tien, 1997]. El algoritmo de Lemke se encuentra disponible gratuitamente en la dirección electrónica [Fackler, Mirand] y la función *FindMinimum* [Mehrotra, 1992, Ingber, 1993, Nelder, Mead, 1965, Price, Storn, 1997] de *Mathematica* se empleará para resolver los problemas de PQ.

2.4. Solución de los Sistemas Lineales Complementarios

El método para discretizar el SLC que se utilizará es el método de Euler Implícito en razón a que de la discretización el problema de integración del sistema se reduce a resolver un PLC en cada instante de tiempo y esto es precisamente lo que se busca debido a que un PLC puede manejar adecuadamente las características de los diodos sin requerir de un algoritmo adicional que determine en cada paso de integración los instantes de conmutación así como el conocimiento teórico de los PLCs para tratar su solución. En la Subsección 2.2.3 y la Subsección 2.2.2 se ha presentado la definición de un PLC y de un SLC respectivamente. Con estas definiciones ahora se procede a obtener una solución para la dinámica de los SLCs utilizando el método de integración de Euler Implícito como se describe a continuación:

para el SLC mostrado en las Ecuaciones (2.1, 2.2, 2.3) dado por :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A_c x + B_c z + E_c u \\ w &= C_c x + D_c z + F_c u \\ 0 &\leq (w \perp z) \geq 0 \end{aligned} \quad (2.10)$$

y aplicando el método de integración de Euler Implícito [Mastascusa, 1989], se tiene que el sistema (2.10) discretizado está dado por:

$$\frac{x_{k+1} - x_k}{h} = (Ax_{k+1} + Bz_{k+1} + Eu_{k+1}) \quad (2.11)$$

$$w_{k+1} = Cx_{k+1} + Dz_{k+1} + Fu_{k+1} \quad (2.12)$$

donde $h = t_{k+1} - t_k$, es el paso de integración y

$$\begin{aligned} A &= A_c \\ B &= B_c \\ E &= E_c \\ C &= C_c \\ D &= D_c \\ F &= F_c. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Resolviendo para x_{k+1} de (2.11)

$$x_{k+1} = (I - hA)^{-1}x_k + (I - hA)^{-1}hBz_{k+1} + (I - hA)^{-1}hEu_{k+1}, \quad (2.14)$$

y sustituyendo en (2.12) resulta

$$w_{k+1} = C \left((I - hA)^{-1}x_k + (I - hA)^{-1}hBz_{k+1} + (I - hA)^{-1}hEu_{k+1} \right) + Dz_{k+1} + Fu_{k+1}, \quad (2.15)$$

agrupando los elementos del vector z_{k+1} del lado derecho de la Ecuación (2.15)

$$w_{k+1} = (C(I - hA)^{-1}hB + D) z_{k+1} + C(I - hA)^{-1}hEu_{k+1} + Fu_{k+1} + C(I - hA)^{-1}x_k, \quad (2.16)$$

el resultado de la Ecuación (2.16) tiene la siguiente forma

$$w_{k+1} = M(f(A, B, C, D, h))z_{k+1} + q_k(f(A, C, F, E, h, u_{k+1}, x_k)) \quad (2.17)$$

$$M(f(A, B, C, D, h)) = (C(I - hA)^{-1}hB + D) \quad (2.18)$$

$$q_k(f(A, C, F, E, h, u_{k+1}, x_k)) = (C(I - hA)^{-1}hE + F)u_{k+1} + C(I - hA)^{-1}x_k \quad (2.19)$$

y está sujeto a $0 \leq (w_{k+1} \perp z_{k+1}) \geq 0$ para cada valor de k . Así se muestra como un SLC puede ser resuelto en cada paso de integración como un PLC. Un diagrama de flujo para la solución dinámica de los SLCs se presenta en la Figura 2.2, donde la condición inicial es definida arbitrariamente y en la solución del SLC no se requiere de un algoritmo adicional para detectar los instantes de conmutación. En los datos de entrada los parámetros eléctricos se conforman por el vector de resistencias, inductancias, capacitancias, el tiempo de simulación y el número de puntos (paso de integración) y en el siguiente bloque se inicia un ciclo donde se resuelve un PLC en cada paso de integración hasta un determinado número de puntos. En el cálculo del PLC se puede utilizar el algoritmo de Lemke o PQ si la matriz M es positiva semidefina o positiva definida. Si la solución obtenida cumple las condiciones de complementariedad la dinámica del sistema es resuelta satisfactoriamente, de lo contrario un mensaje de solución no encontrada se presenta.

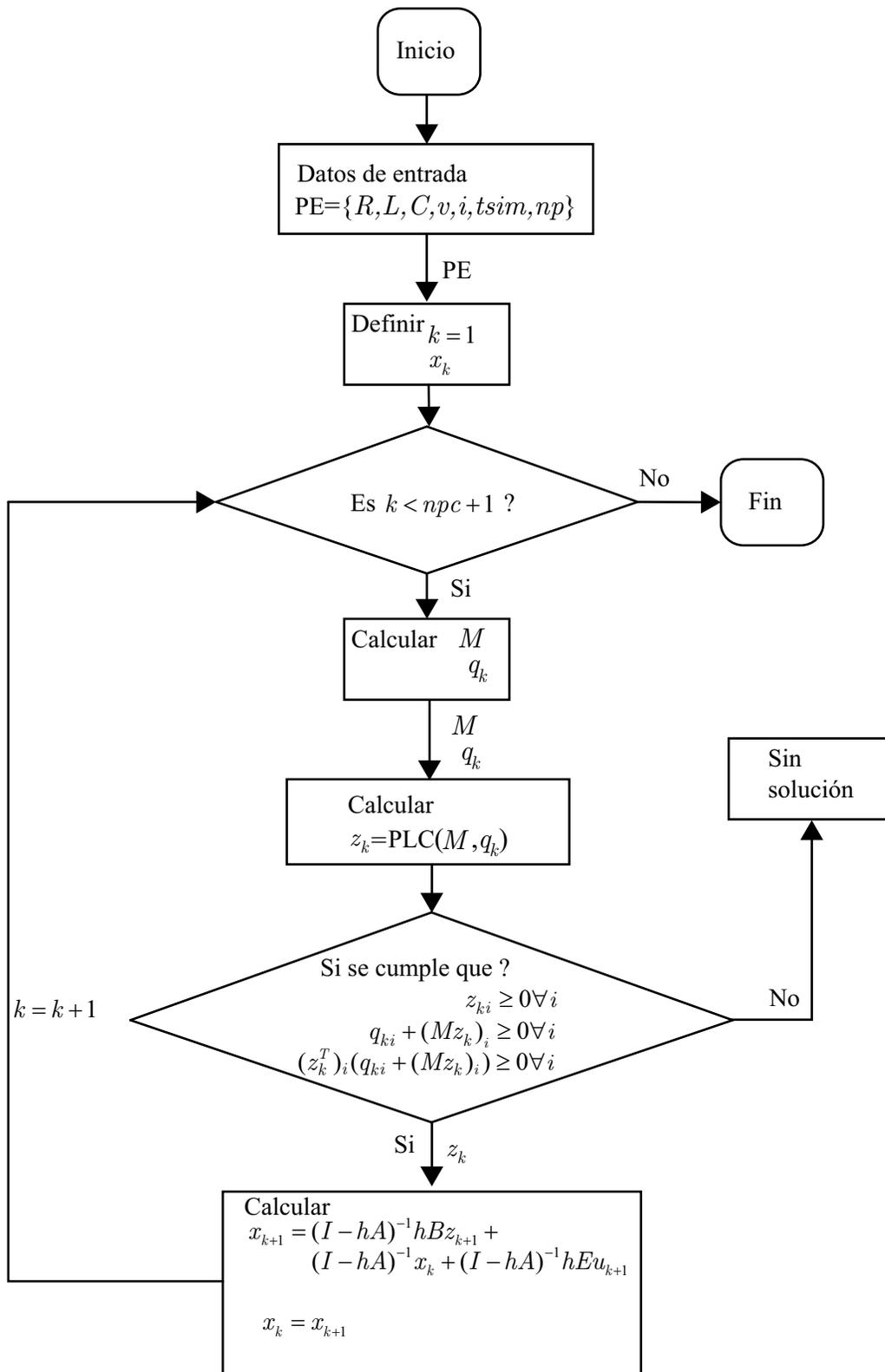


Figura 2.2: Diagrama de flujo para la solución de un SLC en el MRC

2.5. Cálculo de Estado Estable para Sistemas Lineales Complementarios

El SLC expresado por la Ecuaciones (2.1), (2.2) y (2.3) puede ser discretizado utilizando técnicas clásicas de integración como el método de Euler Implícito o métodos usados en control digital como la discretización con el retenedor de orden cero. Si se aplica al conjunto de Ecuaciones (2.1, 2.2, 2.3), un método de diferenciación numérica implícito y un retenedor de orden cero con un paso de integración h . Es posible obtener el siguiente sistema discretizado:

$$x_k = Ax_{k-1} + Bz_k + Eu_k \quad (2.20)$$

$$w_k = Cx_{k-1} + Dz_k + Fu_k \quad (2.21)$$

$$0 \leq w_k \perp z_k \geq 0,$$

donde

$$\begin{aligned} A &= e^{A_c h} \\ B &= A_c^{-1} (e^{A_c h} - I) B_c \\ C &= C_c A \\ D &= D_c + C_c B \\ E &= A_c^{-1} (e^{A_c h} - I) E_c \\ F &= F_c + C_c E \end{aligned} \quad (2.22)$$

y h es el paso de integración.

Sea el sistema de Ecuaciones (2.20,2.21) alimentado por una entrada periódica $\{u_k\}$ de periodo N y se asume que el sistema es un sistema periódico esto es, si $x_{k+N} = x_k \forall k$. La evolución del estado es descrita como:

$$\begin{aligned} x_1 &= Ax_0 + (Bz_1 + Eu_1) \\ x_2 &= A(Ax_0 + Bz_1 + Eu_1) + (Bz_2 + Eu_2) \\ &\vdots \\ x_N &= A^N x_0 + \sum_{i=1}^N A^{N-i} (Bz_i + Eu_i) = x_0. \end{aligned} \quad (2.23)$$

resolviendo con respecto a x_0 ;

$$x_0 = \Pi \sum_{i=1}^N A^{N-i} (Bz_i + Eu_i) \quad (2.24)$$

donde Π es una matriz bien definida debido a que la matriz A_c es no singular. Además la matriz Π satisface las siguientes propiedades:

$$\begin{aligned} A\Pi &= \Pi A \\ \Pi A^N &= \Pi - I \\ \Pi &= (I - A^N)^{-1} \end{aligned} \tag{2.25}$$

Sustituyendo las propiedades de la Ecuación (2.25) y la Ecuación (2.24) en la Ecuación (2.20), resulta el siguiente PLC(q_N, M_N);

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_N \end{pmatrix} &= q_N + M_N \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_N \end{pmatrix} \\ 0 \leq w_k, z_k &\geq 0, k = 1, \dots, N \end{aligned} \tag{2.26}$$

donde

$$M_N = \begin{pmatrix} D & 0 & \dots & 0 \\ 0 & D & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & D \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} C\Pi A^{N-1}B & C\Pi A^{N-2}B & \dots & C\Pi B \\ C\Pi B & C\Pi A^{N-1}B & \dots & C\Pi AB \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C\Pi A^{N-2}B & C\Pi A^{N-3}B & \dots & C\Pi A^{N-1}B \end{pmatrix}$$

y $q_N = P u$ con

$$P u = \left(\begin{pmatrix} F & 0 & \dots & 0 \\ 0 & F & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & F \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} C\Pi A^{N-1}E & C\Pi A^{N-2}E & \dots & C\Pi E \\ C\Pi E & C\Pi A^{N-1}E & \dots & C\Pi AE \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C\Pi A^{N-2}E & C\Pi A^{N-3}E & \dots & C\Pi A^{N-1}E \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_N \end{pmatrix}$$

Las matrices M_N y P son bloques de matrices circulantes. En consecuencia el PLC (2.26) no puede ser desacoplado en N diferentes PLCs debido a que para cada k todos los componentes de la secuencia z_i desde $i = 1 \dots N$ aparecen en w_k .

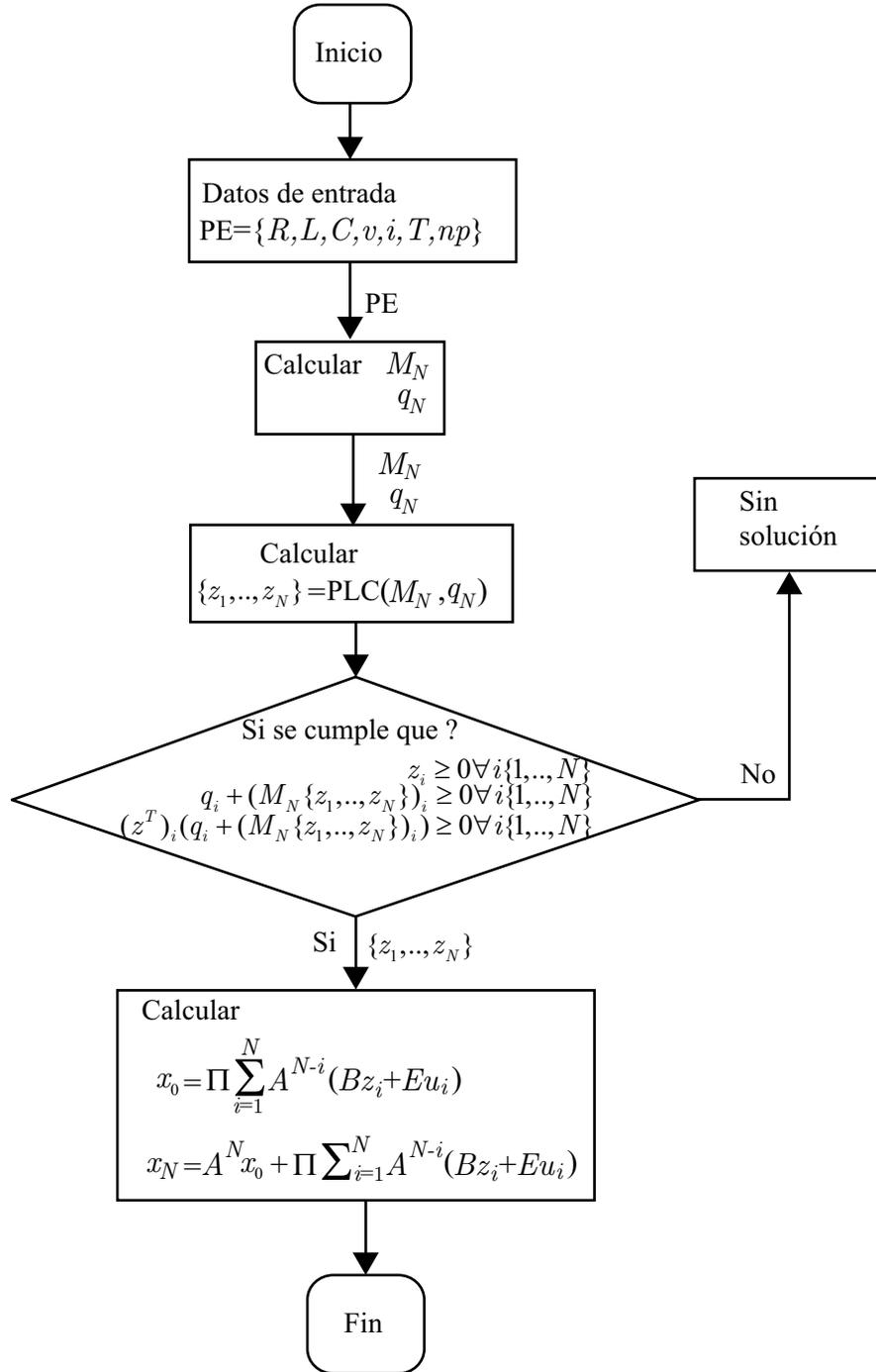


Figura 2.3: Diagrama de flujo para el cálculo de estado estable en el MRC

Si el vector $z = \{z_1, z_2, \dots, z_N\}$ es calculado de la Ecuación (2.26), la respuesta periódica discretizada puede ser obtenida de la Ecuación (2.23). En la Figura 2.3 la implementación del cálculo de estado estable requiere de un algoritmo que calcule las matrices M_N y q_N para un número de pasos determinados N , una selección que se considera en esta tesis es que el número de puntos sea una potencia de 2^{np} con la finalidad

de realizar el análisis armónico de las señales. El paso de integración h que se considera está dado por la relación T/N donde T es el periodo de la señal de alimentación. Con esta información el PLC(q_N, M_N) se formula y se resuelve mediante el algoritmo de Lemke o mediante PQ si se satisfacen las restricciones de complementariedad estipuladas en las Ecuaciones (2.4,2.5,2.6), de este cálculo se obtiene un vector de soluciones $z = \{z_1, z_2, \dots, z_N\}$ y el estado estable periódico es calculado mediante la Ecuación (2.23) donde la condición inicial está implícitamente considerada. Si las restricciones de complementariedad no se satisfacen el algoritmo debe mandar un mensaje señalando que no puede resolver el PLC(q_N, M_N). Otra alternativa de solución consiste en resolver el PLC utilizando PQ lo cual requiere revisar la positividad de la matriz M_N y determinar si es posible formular el PLC como un problema de PQ convexo donde si la matriz M_N es positiva definida existe una única solución o bien si es positiva semidefinida existen múltiples soluciones o ninguna solución. El cálculo de estado estable desde el concepto de un PLC es de gran interés en el sentido de que no son empleados métodos numéricos tipo Newton para resolver el SLC, evitando de esta forma la posibilidad de problemas de convergencia. Otra peculiaridad del cálculo de estado estable utilizando el concepto de PLC consiste en que no es requerido un punto de inicio para la solución del sistema, lo cual es atractivo cuando no se tiene certeza segura de cual debe ser la condición inicial a tomar para su solución. Una demostración detallada del cálculo de estado estable periódico puede ser revisada en el Apéndice A.

2.6. Conclusiones

En este capítulo se ha presentado la teoría para resolver SLCs. Uno de los aspectos con gran potencial que exhiben los SLCs consiste en que se pueden representar en un formato único dinámicas de sistemas que son altamente no lineales causadas por eventos discretos. Esta formulación es adecuada para representar la evolución de una gran variedad de sistemas físicos tales como sistemas mecánicos sujetos a restricciones complementarias, problemas de optimización y sistemas mecánicos con resortes acoplados a una masa, incluidos los sistemas de EP con diodos.

El cálculo de la respuesta transitoria como el cálculo del estado estable periódico para los SLCs es resuelto sin requerir de un algoritmo adicional que detecte los instantes de conmutación. Una característica sobresaliente del cálculo de estado estable periódico para los SLCs consiste en que las condiciones iniciales no son requeridas para iniciar el proceso de solución. Este hecho representa un aspecto crítico en la solución de sistemas con dinámicas que expresan comportamientos altamente no lineales y son analizadas

con métodos tipo Newton como sucede en las metodologías basadas en MCs aplicadas a la solución de sistemas de EP.

Las restricciones de complementariedad pueden ser aprovechadas para representar el comportamiento de los diodos ideales como se describe en el siguiente capítulo.

Capítulo 3

Modelado de Circuitos con Diodos

3.1. Introducción

En esta sección se presenta la metodología para modelar sistemas de EP dentro del MRC. Para ejemplificar la construcción de los modelos complementarios, se analiza un circuito eléctrico con dos diodos, un rectificador de media onda con un diodo que genera una trayectoria de conducción alterna llamado diodo de libre circulación así como un circuito electrónico para cargar baterías.

Se describe la característica del diodo ideal expresada como una restricción complementaria. Mostrando que el MRC ofrece una alternativa con potencial para expresar de manera adecuada la dinámica de los circuitos que contienen diodos respetando las restricciones que imponen estos durante el proceso de conmutación.

Los sistemas de EP de estudio seleccionados son un buen ejemplo para mostrar que su topología es clave para poder expresar su dinámica como un conjunto de ecuaciones algebro-diferenciales sujetas a restricciones complementarias.

3.1.1. Elementos Generales para el Modelado de Convertidores de Potencia.

En la generación de ecuaciones para los convertidores de potencia se parte de que el sistema de EP está conformado por elementos lineales pasivos RLC , con fuentes de voltaje y corriente independientes y dispositivos electrónicos como diodos e interruptores ideales. Los circuitos eléctricos considerados constan únicamente de diodos. Con el objetivo de facilitar el análisis se hace uso de la teoría de grafos [Chua et al, 1987] para obtener un SLC que represente el modelo de cada uno de los convertidores que se estudian.

En la generación de ecuaciones se siguen los siguientes pasos:

1. Se asocia a cada elemento del circuito una corriente y un voltaje.
2. Se define el número de nodos del circuito, y el número de elementos que conforman el árbol expresado por la relación $N_{Elementos_{Arbol}} = N_{Nodos} - 1$.
3. Con la información del paso anterior se establece el árbol del circuito, el cual en general debe contener principalmente capacitores, fuentes de voltaje independientes, resistencias y diodos. Si este es el caso se denomina árbol normal. Nótese que esto no siempre sucede porque la lógica exacta que se sigue para la generación del árbol en un circuito eléctrico se basa en establecer una trayectoria que no contenga Lazos cerrados sin importar si contiene elementos tales como resistencias, inductores, capacitores, fuentes de corriente, fuentes de voltaje, diodos e interruptores electrónicos. En resumen, la determinación del árbol se forma en el siguiente orden de prioridad: en primer lugar deben evitarse trayectorias cerradas y en segundo lugar debe buscarse que el árbol solo contenga capacitores y fuentes de voltaje así como todos los elementos resistivos y de EP que sean necesarios. Esto no siempre es posible como se verá en el modelado del RT porque su árbol contiene elementos inductivos. Esto significa físicamente que el modelo matemático obtenido para un sistema de EP que contiene inductores en el árbol es un modelo equivalente.
4. El co-árbol obtenido del resto de los elementos no contenidos en el árbol se compone de elementos inductivos, fuentes de corriente, resistencias y diodos. Pero en general puede contener capacitores. Cuando el co-árbol solo contiene inductores, fuentes de corriente, resistencias y elementos de EP se dice que es un co-árbol normal. En consecuencia si un sistema de EP contiene elementos capacitivos en el co-árbol, el modelo matemático resultante es un modelo equivalente si su representación es posible. Si un circuito con diodos e interruptores electrónicos contiene un árbol y un co-árbol normal, el modelo matemático obtenido se conforma por todas las variables que describen su comportamiento. Por el contrario, si en un sistema de EP su árbol o co-árbol son no normales las variables que determinan la evolución del sistema son expresadas como relaciones dependientes entre variables (es decir no es posible representarlas como relaciones explícitas), esto sólo si el modelo puede ser representado como un sistema equivalente en el formato de los SLCs (no siempre es posible).

5. Una vez mencionando algunas particularidades clave sobre la determinación del árbol y el co-árbol. Se establecen los Conjuntos Cortados (CCs) para cada elemento del árbol y se establecen los Lazos para cerrar las trayectorias abiertas generadas por el árbol. A cada CC se aplican Leyes de Corriente de Kirchhoff (LCK) y para cada Lazo se establecen Leyes de Voltaje de Kirchhoff (LVK).
6. Las variables complementarias asociadas a los diodos que aparecen en la parte dinámica, representadas por las ecuaciones diferenciales como resultado de las LCK y las LVK, son agrupadas en el vector de entrada complementario denominado z . Para cada una de las variables complementarias que componen el vector de entrada z , deben ser calculadas expresiones algebraicas que relacionen el vector complementario de salida w , con: el vector de variables complementarias de entrada z , las variables de estado x y las entradas tales como fuentes de voltaje y fuentes de corriente independientes. En la Sección 3.2 se presentan varios circuitos para ejemplificar la construcción de modelos complementarios con base en esta metodología de generación de ecuaciones.

3.1.2. Representación del Modelo del Diodo como un Elemento Complementario

El comportamiento del diodo ideal cuando está conduciendo puede ser expresado matemáticamente como

$$i_d > 0 \text{ y } v_d = 0, \quad (3.1)$$

lo que significa que cuando la corriente es mayor de cero, el diodo conduce y el voltaje en el diodo es cero. La otra condición para tener de manera completa el comportamiento del diodo ideal cuando está bloqueado es

$$v_d > 0 \text{ y } i_d = 0, \quad (3.2)$$

de forma compacta el estado de encendido y apagado del diodo se representa como

$$0 \leq v_d \perp i_d \leq 0 \quad (3.3)$$

En la Figura 3.1 se presenta la característica del diodo. La polaridad del voltaje en el diodo es establecida para representar su comportamiento acorde con las restricciones de complementariedad establecidas en la teoría de los SLCs de la Ecuación (2.8).

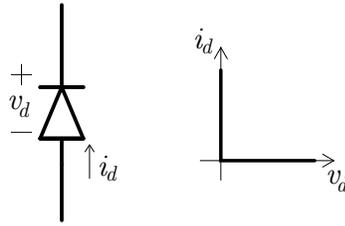


Figura 3.1: Característica del diodo ideal

El modelo del diodo ideal es escogido debido a que un modelo más detallado es utilizado cuando el interés se centra en analizar los procesos de conmutación internos de los diodos. El modelo del diodo ideal para el propósito de obtener un comportamiento cualitativo de los sistemas de EP con diodos es factible. No obstante se puede representar la característica del diodo real al grado de exactitud deseada si se utiliza el concepto de curvas lineales por segmentos [Vasca et al, 2009].

3.2. Modelado Complementario para Circuitos con Diodos

3.2.1. Ejemplo 1

En la Figura 3.2, se muestra un circuito eléctrico formado por dos diodos con un capacitor y un inductor. Este circuito es útil para describir la metodología que se sigue en la obtención de su modelo complementario como se describe a continuación.

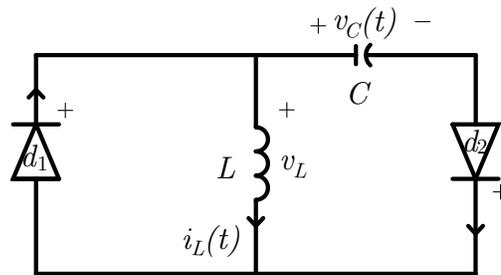


Figura 3.2: Circuito eléctrico del Ejemplo 1

El árbol y el co-árbol en el circuito del Ejemplo 1 se muestran en la Figura 3.3. Como se observa el árbol del circuito se conforma por un elemento capacitivo C y un diodo d_2 . El co-árbol se conforma por un elemento inductivo L y un diodo d_1 . Esto significa que la representación matemática para este circuito contiene 2 variables de estado (el número de nodos es 3). En este circuito su árbol y su co-árbol son normales,

por lo que es posible representar su modelo como un SLC, donde las variables de estado son expresadas explícitamente.

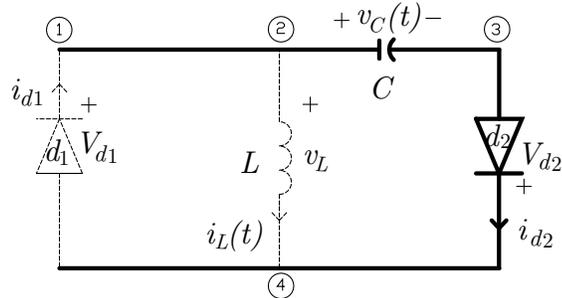


Figura 3.3: Árbol y co-árbol para el circuito eléctrico del Ejemplo 1

En la Figura 3.4, se muestran los Lazos y los CCs en el circuito del Ejemplo 1.

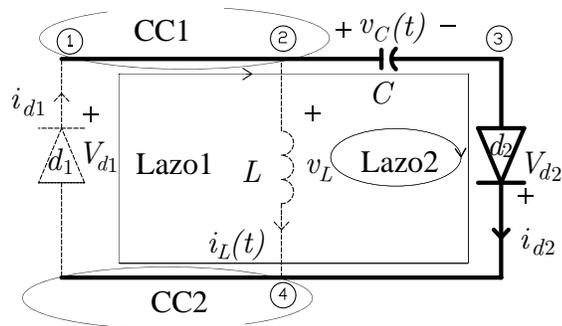


Figura 3.4: CCs y Lazos para el circuito eléctrico del Ejemplo 1

Para determinar las ecuaciones diferenciales del circuito del Ejemplo 1 se analizarán las relaciones de los Lazos 1 y 2 y los CC 1 y 2 como se describe a continuación:
para el CC 1

$$i_{d1} - i_L(t) = i_C, \quad (3.4)$$

y la corriente en el capacitor es

$$i_C = C \frac{dv_C(t)}{dt}. \quad (3.5)$$

De la Ecuación (3.4) y la Ecuación (3.5) resulta

$$\frac{dv_C(t)}{dt} = -\frac{i_L(t)}{C} + \frac{i_{d1}}{C}, \quad (3.6)$$

para el Lazo 2

$$\frac{di_L(t)}{dt} = \frac{v_C(t)}{L} - \frac{V_{d2}}{L}, \quad (3.7)$$

del tal forma que el vector de variables complementarias de entrada z se conforma como

$$z = \begin{pmatrix} V_{d2} & i_{d1} \end{pmatrix}^T, \quad (3.8)$$

en consecuencia el vector de variables complementarias de salida w resultante es

$$w = \begin{pmatrix} i_{d2} & V_{d1} \end{pmatrix}^T. \quad (3.9)$$

Del CC 2 y el Lazo 1, para cada elemento del vector complementario de salida w se satisfacen las siguientes relaciones:

para el Lazo 1

$$V_{d1} = v_C(t) - V_{d2}, \quad (3.10)$$

para el CC 2

$$i_{d2} = -i_L(t) + i_{d1}. \quad (3.11)$$

Agrupando las ecuaciones del modelo complementario para el circuito del Ejemplo 1

$$\begin{pmatrix} \frac{di_L(t)}{dt} = \frac{v_C(t)}{L} - \frac{V_{d2}}{L} \\ \frac{dv_C(t)}{dt} = -\frac{i_L(t)}{C} + \frac{i_{d1}}{C} \\ V_{d1} = v_C(t) - V_{d2} \\ i_{d2} = -i_L(t) + i_{d1} \end{pmatrix}$$

en forma matricial se tiene

$$\begin{pmatrix} \dot{i}_L(t) \\ v_C(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{L} \\ -\frac{1}{C} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_L(t) \\ v_C(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{L} & 0 \\ 0 & \frac{1}{C} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_{d2} \\ i_{d1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (0)$$

$$\begin{pmatrix} i_{d2} \\ V_{d1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_L \\ v_C \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_{d2} \\ i_{d1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (0)$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} i_{d2} \\ V_{d1} \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} V_{d2} \\ i_{d1} \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

las matrices A_c, B_c, E_c, C_c, D_c y F_c se conforman como se muestra a continuación

$$\begin{aligned}
 A_c &= \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{L} \\ -\frac{1}{C} & 0 \end{pmatrix} & B_c &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{L} & 0 \\ 0 & \frac{1}{C} \end{pmatrix} \\
 E_c &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} & C_c &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 D_c &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} & F &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Este sistema de EP no tiene entradas externas o forzantes.

3.2.2. Ejemplo 2

El circuito del Ejemplo 2 es un Rectificador monofásico de media onda con un diodo de libre circulación mostrado en la Figura 3.5 que alimenta una carga RL la cual puede representar un actuador electromecánico o un motor eléctrico.

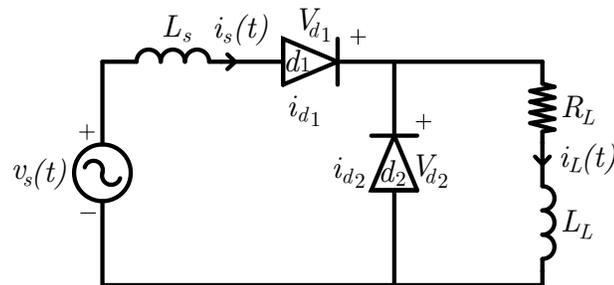


Figura 3.5: Circuito eléctrico del Ejemplo 2

El voltaje $v_s(t)$ está en serie con una impedancia equivalente que es predominantemente inductiva la cual es considerada para representar en forma más real un generador de voltaje. El diodo d_2 es llamado diodo de libre circulación, debido a que en el estado de corte el diodo d_1 no aporta energía a la carga y el diodo d_2 establece una trayectoria de continuidad para la corriente en la carga RL .

Para la determinación del modelo complementario se establece el gráfico orientado el cual consiste en asociar a cada elemento del circuito de EP un voltaje y una corriente. El gráfico orientado para el circuito del Ejemplo 2 se muestra en la Figura 3.6, obsérvese que la polaridad del voltaje en los diodos es asignada para adecuarse a las restricciones de complementariedad establecidas en un SLC.

El siguiente paso en el proceso de modelado consiste en determinar el árbol y el co-árbol, donde el número de elementos que componen el árbol está dado por la relación $N_{elementos_{árbol}} = N_{nodos} - 1 = 4$ y el resto de elementos resultantes que conforman el co-árbol es 2 como se muestra en la Figura 3.6. En la generación del árbol se busca que todos

los elementos que lo conformen sean capacitores, fuentes de voltaje independientes, resistencias y diodos. Para la topología del Ejemplo 2, este circuito contiene un árbol y un co-árbol normal lo cual es una garantía para representar su modelo como un SLC.

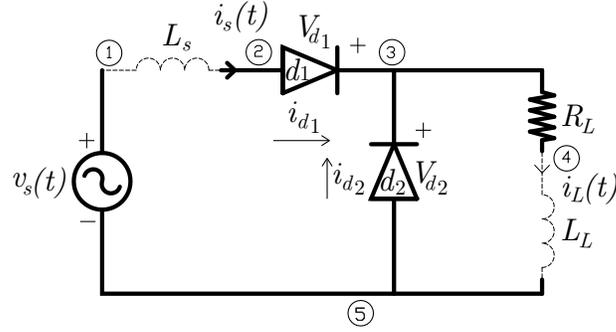


Figura 3.6: Árbol y co-árbol para el circuito del Ejemplo 2

Los CCs y Lazos obtenidos del árbol y el co-árbol se muestran en la Figura 3.7.

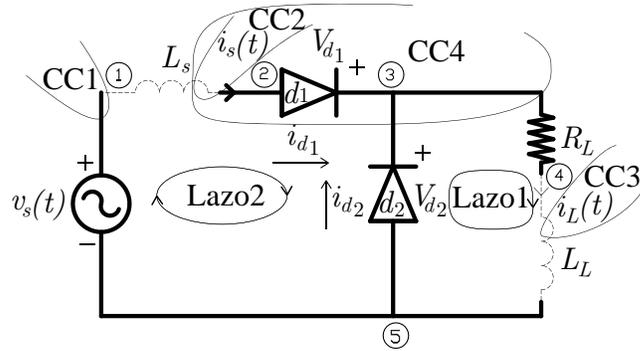


Figura 3.7: CCs y Lazos para el circuito del Ejemplo 2

Para el Lazo 2

$$\frac{di_s(t)}{dt} = \frac{V_{d1}}{L_s} - \frac{V_{d2}}{L_s} + \frac{v_s(t)}{L_s}, \quad (3.12)$$

para el Lazo 1

$$\frac{di_L(t)}{dt} = -\frac{R_L}{L_L} i_L(t) + \frac{V_{d2}}{L_L} \quad (3.13)$$

En las Ecuaciones diferenciales (3.12,3.13) aparecen las variables complementarias de entrada V_{d1} y V_{d2} . Por consiguiente el vector complementario de salida w se compone de las variables (i_{d1}, i_{d2}) para las cuales deber ser obtenidas expresiones algebraicas como se muestra a continuación:

para el CC 1

$$i_{v_s(t)} = i_s(t), \quad (3.14)$$

para el CC 2

$$i_s(t) = i_{d_1}, \quad (3.15)$$

para el CC 3

$$i_{R_L} = i_L(t), \quad (3.16)$$

para el CC 4

$$i_s(t) + i_{d_2} = i_L(t). \quad (3.17)$$

De las expresiones algebraicas obtenidas de los CCs (2-4) es tomada la información de las Ecuaciones (3.15,3.17) para ser expresadas en términos de las variables complementarias de salida como

$$i_{d_1} = i_s(t), \quad (3.18)$$

$$i_{d_2} = i_L(t) - i_s(t). \quad (3.19)$$

El modelo complementario del Ejemplo 2 expresado en forma matricial es

$$\begin{pmatrix} \frac{di_s(t)}{dt} \\ \frac{di_L(t)}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\frac{R_L}{L_L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_s(t) \\ i_L(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{L_s} & -\frac{1}{L_s} \\ 0 & \frac{1}{L_L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_{d_1} \\ V_{d_2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{L_s} \\ 0 \end{pmatrix} (v_s(t))$$

$$\begin{pmatrix} i_{d_1} \\ i_{d_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_s(t) \\ i_L(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_{d_1} \\ V_{d_2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} (v_s(t))$$

$$0 \leq \begin{pmatrix} i_{d_1} & i_{d_2} \end{pmatrix}^T \perp \begin{pmatrix} V_{d_1} & V_{d_2} \end{pmatrix}^T \geq 0$$

Discretizando el SLC para tener una representación del sistema como un PLC:

$$\begin{pmatrix} i_{s_{k+1}} - i_{s_k} \\ i_{L_{k+1}} - i_{L_k} \end{pmatrix} / h = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\frac{R_L}{L_L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_{s_{k+1}} \\ i_{L_{k+1}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{L_s} & -\frac{1}{L_s} \\ 0 & \frac{1}{L_L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_{d_{1_{k+1}}} \\ V_{d_{2_{k+1}}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{L_s} \\ 0 \end{pmatrix} (v_{s_{k+1}}) \quad (3.20)$$

$$\begin{pmatrix} i_{d_{1_{k+1}}} \\ i_{d_{2_{k+1}}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_{s_{k+1}} \\ i_{L_{k+1}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_{d_{1_{k+1}}} \\ V_{d_{2_{k+1}}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} (v_{s_{k+1}}) \quad (3.21)$$

$$0 \leq \begin{pmatrix} i_{d_{1_{k+1}}} & i_{d_{2_{k+1}}} \end{pmatrix}^T \perp \begin{pmatrix} V_{d_{1_{k+1}}} & V_{d_{2_{k+1}}} \end{pmatrix}^T \geq 0 \quad (3.22)$$

donde $h = t_{k+1} - t_k$.

Resolver $\begin{pmatrix} i_{d_{1_{k+1}}} & i_{d_{2_{k+1}}} \end{pmatrix}^T$ de la Ecuación (3.21) en términos de $\begin{pmatrix} i_{s_{k+1}} & i_{L_{k+1}} \end{pmatrix}^T$ de la Ecuación (3.20)

$$\begin{pmatrix} i_{s_{k+1}} - i_{s_k} \\ i_{L_{k+1}} - i_{L_k} \end{pmatrix} = h \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\frac{R_L}{L_L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_{s_{k+1}} \\ i_{L_{k+1}} \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} \frac{1}{L_s} & -\frac{1}{L_s} \\ 0 & \frac{1}{L_L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_{d_{1_{k+1}}} \\ V_{d_{2_{k+1}}} \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} \frac{1}{L_s} \\ 0 \end{pmatrix} (v_{s_{k+1}}) \quad (3.23)$$

$$\begin{pmatrix} i_{s_{k+1}} \\ i_{L_{k+1}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i_{s_k} \\ i_{L_k} \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\frac{R_L}{L_L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_{s_{k+1}} \\ i_{L_{k+1}} \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} \frac{1}{L_s} & -\frac{1}{L_s} \\ 0 & \frac{1}{L_L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_{d_{1_{k+1}}} \\ V_{d_{2_{k+1}}} \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} \frac{1}{L_s} \\ 0 \end{pmatrix} (v_{s_{k+1}}) \quad (3.24)$$

$$\begin{pmatrix} i_{s_{k+1}} \\ i_{L_{k+1}} \end{pmatrix} = \left(I_{2 \times 2} - h \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\frac{R_L}{L_L} \end{pmatrix} \right)^{-1} \begin{pmatrix} i_{s_k} \\ i_{L_k} \end{pmatrix} + \left(I_{2 \times 2} - h \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\frac{R_L}{L_L} \end{pmatrix} \right)^{-1} h \begin{pmatrix} \frac{1}{L_s} & -\frac{1}{L_s} \\ 0 & \frac{1}{L_L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_{d_{1_{k+1}}} \\ V_{d_{2_{k+1}}} \end{pmatrix} + \left(I_{2 \times 2} - h \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\frac{R_L}{L_L} \end{pmatrix} \right)^{-1} h \begin{pmatrix} \frac{1}{L_s} \\ 0 \end{pmatrix} (v_{s_{k+1}}) \quad (3.25)$$

$$\text{donde } I_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.26)$$

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} i_{d_{1k+1}} \\ i_{d_{2k+1}} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \left(I_{2 \times 2} - h \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\frac{R_L}{L_L} \end{pmatrix} \right)^{-1} \begin{pmatrix} i_{s_k} \\ i_{L_k} \end{pmatrix} \\
 + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \left(I_{2 \times 2} - h \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\frac{R_L}{L_L} \end{pmatrix} \right)^{-1} h \begin{pmatrix} \frac{1}{L_s} & -\frac{1}{L_s} \\ 0 & \frac{1}{L_L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_{d_{1k+1}} \\ V_{d_{2k+1}} \end{pmatrix} \\
 + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \left(\left(I_{2 \times 2} - h \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\frac{R_L}{L_L} \end{pmatrix} \right)^{-1} h \begin{pmatrix} \frac{1}{L_s} \\ 0 \end{pmatrix} (v_{s_{k+1}}) \right) \\
 + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_{d_{1k+1}} \\ V_{d_{2k+1}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} (v_{s_{k+1}})
 \end{aligned} \tag{3.27}$$

ordenando términos para darle la forma de un PLC

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} i_{d_{1k+1}} \\ i_{d_{2k+1}} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \left(I_{2 \times 2} - h \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\frac{R_L}{L_L} \end{pmatrix} \right)^{-1} h \begin{pmatrix} \frac{1}{L_s} & -\frac{1}{L_s} \\ 0 & \frac{1}{L_L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_{d_{1k+1}} \\ V_{d_{2k+1}} \end{pmatrix} \\
 + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \left(\left(I_{2 \times 2} - h \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\frac{R_L}{L_L} \end{pmatrix} \right)^{-1} h \begin{pmatrix} \frac{1}{L_s} \\ 0 \end{pmatrix} (v_{s_{k+1}}) \right) + \\
 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \left(\left(I_{2 \times 2} - h \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\frac{R_L}{L_L} \end{pmatrix} \right)^{-1} \begin{pmatrix} i_{s_k} \\ i_{L_k} \end{pmatrix} \right)
 \end{aligned} \tag{3.28}$$

donde

$$w_{k+1} = \begin{pmatrix} i_{d_{1k+1}} \\ i_{d_{2k+1}} \end{pmatrix} \tag{3.29}$$

$$Mz_{k+1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \left(I_{2 \times 2} - h \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\frac{R_L}{L_L} \end{pmatrix} \right)^{-1} h \begin{pmatrix} \frac{1}{L_s} & -\frac{1}{L_s} \\ 0 & \frac{1}{L_L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_{d_{1k+1}} \\ V_{d_{2k+1}} \end{pmatrix} \tag{3.30}$$

$$\begin{aligned}
 q_k &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \left(\left(I_{2 \times 2} - h \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\frac{R_L}{L_L} \end{pmatrix} \right)^{-1} \begin{pmatrix} i_{s_k} \\ i_{L_k} \end{pmatrix} \right) + \\
 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \left(\left(I_{2 \times 2} - h \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\frac{R_L}{L_L} \end{pmatrix} \right)^{-1} h \begin{pmatrix} \frac{1}{L_s} \\ 0 \end{pmatrix} (v_{s_{k+1}}) \right)
 \end{aligned} \tag{3.31}$$

sujetas a las restricciones de complementariedad

$$0 \leq \begin{pmatrix} i_{d_{1k+1}} & i_{d_{2k+1}} \end{pmatrix}^T \perp \begin{pmatrix} V_{d_{1k+1}} & V_{d_{2k+1}} \end{pmatrix}^T \geq 0 \quad (3.32)$$

y al resolver $z_{k+1} = \text{PLC}(M, q_k)$ con el algoritmo de Lemke o PQ si se cumple la positividad de la matriz M y si se satisfacen las restricciones de complementariedad el valor del voltaje en los diodos $(V_{d_{1k+1}} \ V_{d_{2k+1}})^T$ se sustituye en la Ecuación (3.20) para una condición inicial $(i_{s_k} \ i_{L_k})^T$ la cual se va actualizando con el valor de $(i_{s_{k+1}} \ i_{L_{k+1}})^T$ para la siguiente iteración y este proceso se realiza sucesivamente hasta un paso k definido.

El modelo discretizado y reordenado del Ejemplo 2 es reestructurado como un PLC el cual debe ser resuelto en cada instante de tiempo para calcular la dinámica del circuito electrónico. Este resultado muestra como el problema de simulación del circuito electrónico se reduce a resolver un PLC del cual existe una teoría sólida para obtener su solución.

Aplicando el cálculo de estado estable para un periodo $T = 0.016$ donde $N=4$ y un paso de integración de $h = T/N = 0.004$ se tiene que A_c es singular y este es uno de los requisitos que se deben cumplir (A_c debe ser no singular) para poder aplicar el cálculo de la estado estable en el MRC. La singularidad de la matriz A_c puede ser resuelta si se agrega una resistencia en serie R_s mayor de cero con el inductor L_s y la matriz A_c ahora se define como

$$A_c = \begin{pmatrix} -\frac{R_s}{L_s} & 0 \\ 0 & -\frac{R_L}{L_L} \end{pmatrix} \quad (3.33)$$

donde la Matriz M_N se conforma como

$$M_N = \begin{pmatrix} D & 0 & 0 & 0 \\ 0 & D & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} C\Pi A^3 B & C\Pi A^2 B & C\Pi A^1 B & C\Pi A^0 B \\ C\Pi A^0 B & C\Pi A^3 B & C\Pi A^2 B & C\Pi A^1 B \\ C\Pi A^1 B & C\Pi A^2 B & C\Pi A^3 B & C\Pi A^2 B \\ C\Pi A^2 B & C\Pi A^1 B & C\Pi A^0 B & C\Pi A^3 B \end{pmatrix} \quad (3.34)$$

$$q_N = \left(\begin{pmatrix} F & 0 & 0 & 0 \\ 0 & F & 0 & 0 \\ 0 & 0 & F & 0 \\ 0 & 0 & 0 & F \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} C\Pi A^3 E & C\Pi A^2 E & C\Pi A^1 E & C\Pi A^0 E \\ C\Pi A^0 E & C\Pi A^3 E & C\Pi A^2 E & C\Pi A^1 E \\ C\Pi A^1 E & C\Pi A^2 E & C\Pi A^3 E & C\Pi A^2 E \\ C\Pi A^2 E & C\Pi A^1 E & C\Pi A^0 E & C\Pi A^3 E \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} v_s(0,004 \times T) \\ v_s(0,008 \times T) \\ v_s(0,012 \times T) \\ v_s(0,016 \times T) \end{pmatrix} \quad (3.35)$$

$$D = \begin{pmatrix} \frac{-1+e^{-\frac{hR_s}{L_s}}}{R_s} & \frac{-1+e^{-\frac{hR_s}{L_s}}}{R_s} \\ \frac{-1+e^{-\frac{hR_s}{L_s}}}{R_s} & -\frac{-1+e^{-\frac{hR_L}{L_L}}}{R_L} - \frac{-1+e^{-\frac{hR_s}{L_s}}}{R_s} \end{pmatrix} F = \begin{pmatrix} \frac{-1+e^{-\frac{hR_s}{L_s}}}{R_s} \\ \frac{-1+e^{-\frac{hR_s}{L_s}}}{R_s} \end{pmatrix} \quad (3.36)$$

$$C\Pi A^3 B = \begin{pmatrix} \frac{e^{-\frac{4hR_s}{L_s}} \left(-1+e^{-\frac{hR_s}{L_s}}\right)}{\left(1-e^{-\frac{2hR_s}{L_s}}\right) R_s} & \frac{e^{-\frac{4hR_s}{L_s}} \left(-1+e^{-\frac{hR_s}{L_s}}\right)}{\left(1-e^{-\frac{2hR_s}{L_s}}\right) R_s} \\ \frac{e^{-\frac{4hR_s}{L_s}} \left(-1+e^{-\frac{hR_s}{L_s}}\right)}{\left(1-e^{-\frac{2hR_s}{L_s}}\right) R_s} & -\frac{e^{-\frac{4hR_L}{L_L}} \left(-1+e^{-\frac{hR_L}{L_L}}\right)}{\left(1-e^{-\frac{2hR_L}{L_L}}\right) R_L} - \frac{e^{-\frac{4hR_s}{L_s}} \left(-1+e^{-\frac{hR_s}{L_s}}\right)}{\left(1-e^{-\frac{2hR_s}{L_s}}\right) R_s} \end{pmatrix} \quad (3.37)$$

$$C\Pi A^2 B = \begin{pmatrix} \frac{e^{-\frac{3hR_s}{L_s}} \left(-1+e^{-\frac{hR_s}{L_s}}\right)}{\left(1-e^{-\frac{2hR_s}{L_s}}\right) R_s} & \frac{e^{-\frac{3hR_s}{L_s}} \left(-1+e^{-\frac{hR_s}{L_s}}\right)}{\left(1-e^{-\frac{2hR_s}{L_s}}\right) R_s} \\ \frac{e^{-\frac{3hR_s}{L_s}} \left(-1+e^{-\frac{hR_s}{L_s}}\right)}{\left(1-e^{-\frac{2hR_s}{L_s}}\right) R_s} & -\frac{e^{-\frac{3hR_L}{L_L}} \left(-1+e^{-\frac{hR_L}{L_L}}\right)}{\left(1-e^{-\frac{2hR_L}{L_L}}\right) R_L} - \frac{e^{-\frac{3hR_s}{L_s}} \left(-1+e^{-\frac{hR_s}{L_s}}\right)}{\left(1-e^{-\frac{2hR_s}{L_s}}\right) R_s} \end{pmatrix} \quad (3.38)$$

$$C\Pi A B = \begin{pmatrix} \frac{e^{-\frac{2hR_s}{L_s}} \left(-1+e^{-\frac{hR_s}{L_s}}\right)}{\left(1-e^{-\frac{2hR_s}{L_s}}\right) R_s} & \frac{e^{-\frac{2hR_s}{L_s}} \left(-1+e^{-\frac{hR_s}{L_s}}\right)}{\left(1-e^{-\frac{2hR_s}{L_s}}\right) R_s} \\ \frac{e^{-\frac{2hR_s}{L_s}} \left(-1+e^{-\frac{hR_s}{L_s}}\right)}{\left(1-e^{-\frac{2hR_s}{L_s}}\right) R_s} & -\frac{e^{-\frac{2hR_L}{L_L}} \left(-1+e^{-\frac{hR_L}{L_L}}\right)}{\left(1-e^{-\frac{2hR_L}{L_L}}\right) R_L} - \frac{e^{-\frac{2hR_s}{L_s}} \left(-1+e^{-\frac{hR_s}{L_s}}\right)}{\left(1-e^{-\frac{2hR_s}{L_s}}\right) R_s} \end{pmatrix} \quad (3.39)$$

$$C\Pi B = \begin{pmatrix} \frac{e^{-\frac{hR_s}{L_s}} \left(-1 + e^{-\frac{hR_s}{L_s}}\right)}{\left(1 - e^{-\frac{2hR_s}{L_s}}\right) R_s} & \frac{e^{-\frac{hR_s}{L_s}} \left(-1 + e^{-\frac{hR_s}{L_s}}\right)}{\left(1 - e^{-\frac{2hR_s}{L_s}}\right) R_s} \\ \frac{e^{-\frac{hR_s}{L_s}} \left(-1 + e^{-\frac{hR_s}{L_s}}\right)}{\left(1 - e^{-\frac{2hR_s}{L_s}}\right) R_s} & -\frac{e^{-\frac{hR_L}{L_L}} \left(-1 + e^{-\frac{hR_L}{L_L}}\right)}{\left(1 - e^{-\frac{2hR_L}{L_L}}\right) R_L} - \frac{e^{-\frac{hR_s}{L_s}} \left(-1 + e^{-\frac{hR_s}{L_s}}\right)}{\left(1 - e^{-\frac{2hR_s}{L_s}}\right) R_s} \end{pmatrix} \quad (3.40)$$

$$C\Pi A^3 E = \begin{pmatrix} \frac{e^{-\frac{4hR_s}{L_s}} \left(-1 + e^{-\frac{hR_s}{L_s}}\right)}{\left(1 - e^{-\frac{2hR_s}{L_s}}\right) R_s} \\ \frac{e^{-\frac{4hR_s}{L_s}} \left(-1 + e^{-\frac{hR_s}{L_s}}\right)}{\left(1 - e^{-\frac{2hR_s}{L_s}}\right) R_s} \end{pmatrix} \quad C\Pi A^2 E = \begin{pmatrix} \frac{e^{-\frac{3hR_s}{L_s}} \left(-1 + e^{-\frac{hR_s}{L_s}}\right)}{\left(1 - e^{-\frac{2hR_s}{L_s}}\right) R_s} \\ \frac{e^{-\frac{3hR_s}{L_s}} \left(-1 + e^{-\frac{hR_s}{L_s}}\right)}{\left(1 - e^{-\frac{2hR_s}{L_s}}\right) R_s} \end{pmatrix} \quad (3.41)$$

$$C\Pi A E = \begin{pmatrix} \frac{e^{-\frac{2hR_s}{L_s}} \left(-1 + e^{-\frac{hR_s}{L_s}}\right)}{\left(1 - e^{-\frac{2hR_s}{L_s}}\right) R_s} \\ \frac{e^{-\frac{2hR_s}{L_s}} \left(-1 + e^{-\frac{hR_s}{L_s}}\right)}{\left(1 - e^{-\frac{2hR_s}{L_s}}\right) R_s} \end{pmatrix} \quad C\Pi E = \begin{pmatrix} \frac{e^{-\frac{hR_s}{L_s}} \left(-1 + e^{-\frac{hR_s}{L_s}}\right)}{\left(1 - e^{-\frac{2hR_s}{L_s}}\right) R_s} \\ \frac{e^{-\frac{hR_s}{L_s}} \left(-1 + e^{-\frac{hR_s}{L_s}}\right)}{\left(1 - e^{-\frac{2hR_s}{L_s}}\right) R_s} \end{pmatrix} \quad (3.42)$$

Al resolverse el PLC(M_N, q_N) y considerando que existe una solución el resultado que se obtiene es un vector de variables complementarias de entrada $\{z_1, \dots, z_N\}$ en el dominio del tiempo dado por

$$\begin{pmatrix} z_1 = \left(V_{d_{1t=0,004}}, V_{d_{2t=0,004}} \right)^T \\ z_2 = \left(V_{d_{1t=0,008}}, V_{d_{2t=0,008}} \right)^T \\ z_3 = \left(V_{d_{1t=0,012}}, V_{d_{2t=0,012}} \right)^T \\ z_4 = \left(V_{d_{1t=0,016}}, V_{d_{2t=0,016}} \right)^T \end{pmatrix} \quad (3.43)$$

y utilizando (2.24) y (2.23) se tiene el siguiente resultado

$$x_0 = \Pi \left(A^3 (Bz_1 + Eu_1) + A^2 (Bz_2 + Eu_2) + A (Bz_3 + Eu_3) + (Bz_4 + Eu_4) \right) \quad (3.44)$$

$$x_1 = Ax_0 + A(Bz_1 + Eu_1) \quad (3.45)$$

$$x_2 = A^2x_0 + A^2Bz_1 + A^2Eu_1 + A(Bz_2 + Eu_2) \quad (3.46)$$

$$x_3 = A^3x_0 + A^3Bz_1 + A^3Eu_1 + A^2Bz_2 + A^2Eu_2 + A(Bz_3 + Eu_3) \quad (3.47)$$

$$x_4 = A^4x_0 + A^4Bz_1 + A^4Eu_1 + A^3Bz_2 + A^3Eu_2 + A^2Bz_3 + Eu_3 + A(Bz_4 + Eu_4) \quad (3.48)$$

En el cálculo de estado estable para el circuito del Ejemplo 2 se puede apreciar dos aspectos con ventajas potenciales que ofrece el MRC en relación con las metodologías basadas en MCs: no son requeridos los modos de operación y no se requiere un punto de inicio para efectuar el cálculo de estado estable, es decir no se requiere conocer el estado de operación de los diodos (apagado o encendido). Así también el cálculo de estado estable periódico es un método de cálculo directo (no iterativo).

3.2.3. Ejemplo 3

El circuito del Ejemplo 3 mostrado en la Figura 3.8a, es un circuito práctico para cargar baterías. Los diodos d_1 y d_2 rectifican el voltaje de CA y la energía se alimenta a la batería representada por la fuente de voltaje de CD E . Las inductancias L_1 y L_2 representan el alternador.

Para obtener el modelo complementario del circuito del Ejemplo 3 se define el árbol y el co-árbol como se muestra en la Figura 3.8b. Este circuito consta de 5 nodos, en consecuencia el árbol debe conformarse por 4 elementos. Se observa que para este circuito de EP su árbol y su co-árbol son normales.

Para cada elemento del árbol se traza un CC que contenga a todos los elementos del co-árbol conectados a este. En esta topología hacen falta dos CCs, uno que corta a la fuente de voltaje y otro que corta a la batería los cuales han sido omitidos porque no son necesarios para obtener el modelo complementario del circuito (esto no siempre sucede así, en general todos los CCs y Lazos se emplean para obtener el modelo complementario). Las trayectorias abiertas generadas por el árbol son cerradas por el Lazo 1 y el Lazo 2, y los CCs 1 y 2 son obtenidos para establecer LCK como se muestra en

la Figura 3.9.

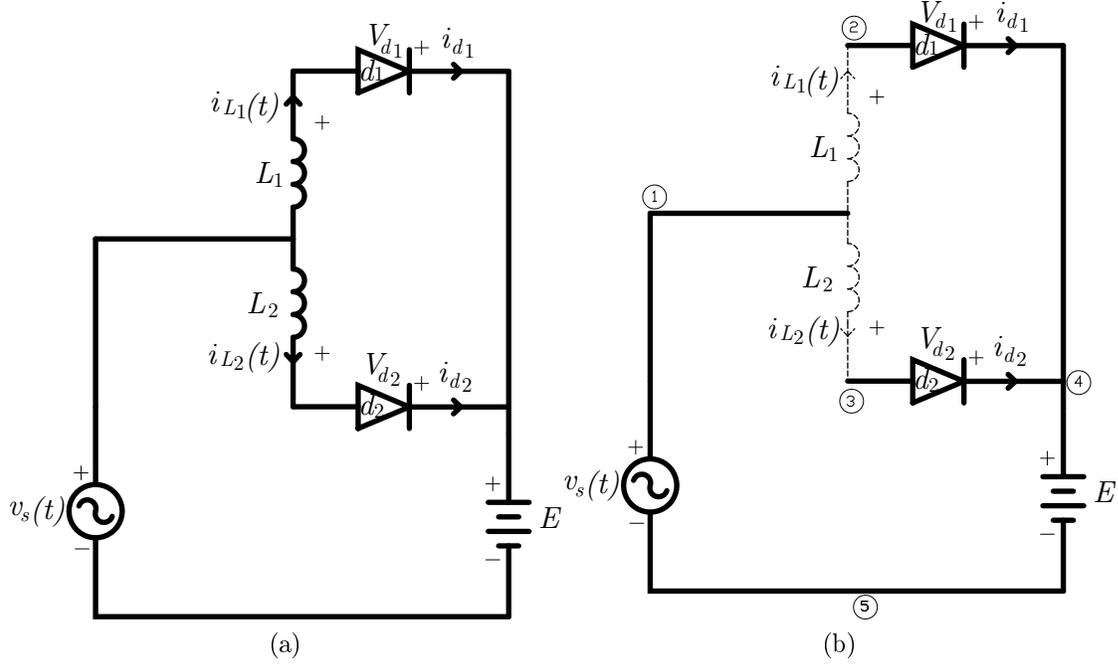


Figura 3.8: (a) Circuito eléctrico para el Ejemplo 3; (b) Árbol y co-árbol para el circuito del Ejemplo 3

A continuación con la información de los Lazos y CCs se procede a representar un SLC a partir del conjunto de ecuaciones algebro-diferenciales que describan la dinámica del circuito del Ejemplo 3.

Del Lazo 1

$$\frac{di_{L_1}(t)}{dt} = -\frac{V_{d_1}}{L_1} - \frac{v_s(t)}{L_1} + \frac{E}{L_1}, \quad (3.49)$$

del Lazo 2

$$\frac{di_{L_2}(t)}{dt} = -\frac{V_{d_2}}{L_2} - \frac{v_s(t)}{L_2} + \frac{E}{L_2}. \quad (3.50)$$

La parte dinámica del sistema se expresa por la Ecuación (3.49) y la Ecuación (3.50). Asimismo se observa que las voltajes de los diodos que aparecen, representan el vector de variables complementarias de entrada z definido como

$$z = \begin{pmatrix} V_{d_1} & V_{d_2} \end{pmatrix}^T, \quad (3.51)$$

y su vector complementario de salida w resultante es expresado como

$$w = \begin{pmatrix} i_{d_1} & i_{d_2} \end{pmatrix}^T. \quad (3.52)$$

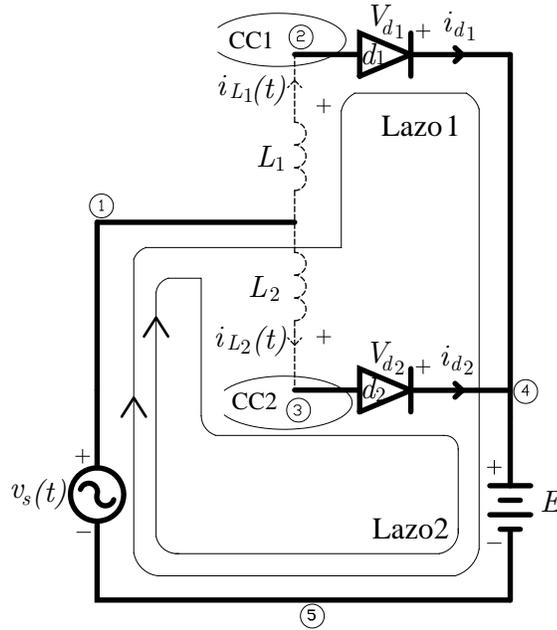


Figura 3.9: Lazos y CCs para el circuito del Ejemplo 3

Las relaciones algebraicas para cada uno de los elementos del vector complementario de salida deben ser expresadas en términos (si es posible) de: las variables complementarias de entrada (V_{d_1}, V_{d_2}), las variables de estado (i_{L_1}, i_{L_2}) y las entradas ($v_s(t), E$), como se describe a continuación:

para el CC 1 resulta

$$i_{d_1} = i_{L_1}(t), \quad (3.53)$$

para el CC 2 resulta

$$i_{d_2} = i_{L_2}(t). \quad (3.54)$$

El SLC en forma matricial para el circuito del Ejemplo 3 está expresado por:

$$\begin{pmatrix} \frac{di_{L_1}(t)}{dt} \\ \frac{di_{L_2}(t)}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_{L_1}(t) \\ i_{L_2}(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{L_1} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{L_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_{d_1} \\ V_{d_2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{L_1} & \frac{1}{L_1} \\ -\frac{1}{L_2} & \frac{1}{L_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_s(t) \\ E \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \dot{i}_{d_1} \\ \dot{i}_{d_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_{L_1} \\ i_{L_2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_{d_1} \\ V_{d_2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_s(t) \\ E \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} i_{d_1} & i_{d_2} \end{pmatrix}^T \perp \begin{pmatrix} V_{d_1} & V_{d_2} \end{pmatrix}^T \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

3.3. Descripción General del Proceso de Modelado y Simulación en el MRC

La descripción general del proceso de modelado se presenta en la Figura 3.10. Para la obtención de las ecuaciones algebro-diferenciales del circuito se determina el árbol y el co-árbol y se procede a la definición de los Lazos y CCs del circuito aplicando LVK y LCK respectivamente.

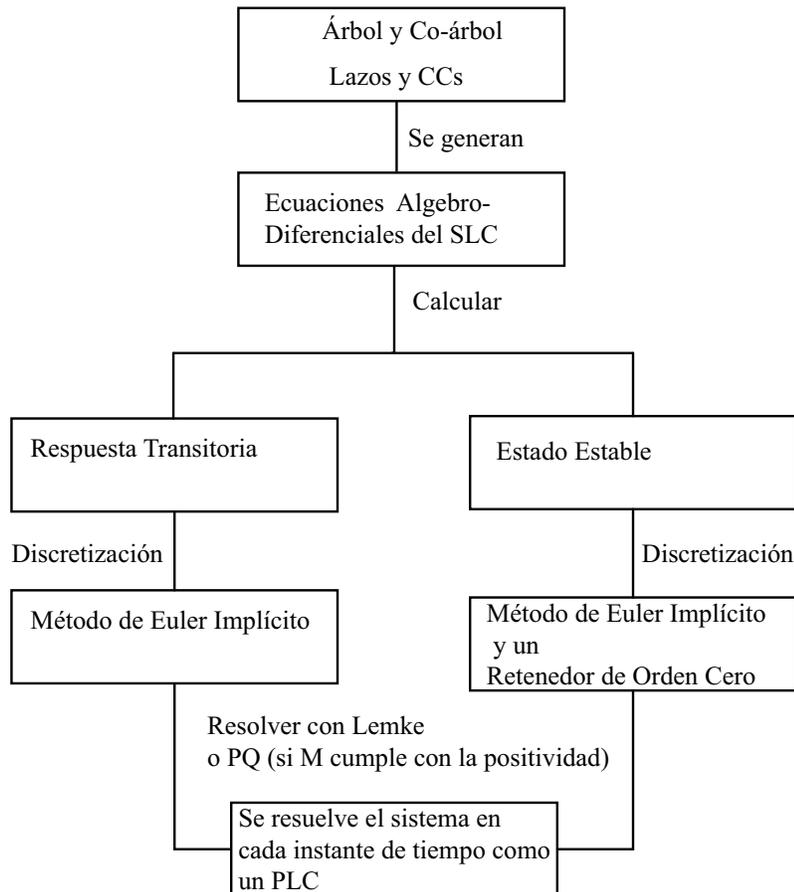


Figura 3.10: Diagrama de flujo de proceso de modelado y simulación en el MRC

Una vez que el SLC se conforma con las ecuaciones algebro-diferenciales se procede a su discretización utilizando el método de Euler Implícito o un retenedor de orden cero utilizado en control digital. Para el cálculo de la respuesta transitoria y el cálculo de estado estable se utilizará el método de Euler y el retenedor de orden cero respectivamente. El algoritmo de Lemke y PQ será utilizado para resolver el SLC discretizado como un PLC en cada instante de tiempo.

3.4. Conclusiones

La generación de ecuaciones utilizando la teoría de grafos es un medio eficaz para formular el comportamiento de los circuitos de EP en el formato de un SLC. Se ha presentado una metodología que describe de manera general el proceso de modelado de y simulación en el MRC. En particular, se han mencionado las dificultades que se tienen en la representación de los sistemas de EP cuando su árbol y co-árbol es no normal en el formato de los SLCs. Este hecho sugiere que no siempre es posible representar la dinámica de los convertidores de EP en el MRC.

De los resultados de modelado se observa que los diodos pueden ser contenidos en el árbol o en el co-árbol, lo cual dependerá de la topología de la red. Esto no afecta en la representación del SLC porque lo único que sucedería es que las variables complementarias (i_d, v_d) de los diodos se intercambian, donde i_d puede aparecer como una variable complementaria de entrada y v_d puede aparecer como una variable complementaria de salida o viceversa. Lo que si no debe suceder es que las variables complementarias que representan a un elemento de conmutación aparezcan ambas en la parte dinámica o en la parte algebraica, en esta situación no es posible formular un sistema de EP como un SLC.

Se ha mostrado que el formato de los SLCs es adecuado para representar el comportamiento de circuitos de EP con diodos de manera más exacta en un formato único. Esto significa que los estados de conmutación de los diodos son representados como una restricción complementaria y no requieren ser conocidos para efectuar la simulación.

Capítulo 4

Modelado y Simulación de Convertidores de Potencia No-Controlados

4.1. Introducción

En este capítulo se analiza el RMO, el ROC y el RT. Cada uno de los modelos complementarios para los convertidores de potencia se construyen utilizando la teoría de grafos.

Para el ROC y el RT se estudian diferentes condiciones de operación, mostrando como sus modelos complementarios permiten representar el MOC y el MOD en un esquema práctico para fines de simulación. En el análisis del RT se realiza una investigación detallada sobre las causas del MOC y el MOD variando los armónicos en las fuentes del voltaje, y variando el valor del filtro capacitivo. En este capítulo también se aplica el cálculo de estado estable periódico para el ROC y el RT utilizando el MRC. Las formas de onda para el ROC y el RT obtenidas con el concepto de estado estable son congruentes con los resultados obtenidos utilizando simuladores comerciales como PSpice y Simulink. En el análisis de la respuesta transitoria para el modelo complementario del RT se utilizan dos esquemas de solución: el algoritmo de Lemke y PQ.

4.2. Modelado del Rectificador de Media Onda

4.2.1. Obtención del Modelo del Rectificador de Media Onda

El RMO mostrado en la Figura 4.1, contiene una carga puramente inductiva la cual está en serie con un diodo y es alimentada por un voltaje de CA. Por la acción del diodo la carga recibe un voltaje rectificado no controlado. En el semiciclo positivo el diodo conduce y se inicia el flujo de corriente hacia la carga, en esta condición de operación el diodo se representa eléctricamente como un cortocircuito. En el semiciclo negativo el diodo se polariza inversamente y no existe flujo de corriente en la carga, en consecuencia el comportamiento del diodo bajo esta condición de operación se representa como un circuito abierto. Este dispositivo cuyo funcionamiento es de fácil descripción es adecuado para explicar el proceso de modelado y simulación dentro del MRC.

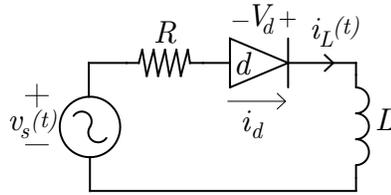


Figura 4.1: Circuito eléctrico del RMO

Para la topología del RMO su árbol y su co-árbol se muestran en la Figura 4.2. El número de nodos del circuito es 4, entonces el árbol debe componerse por tres elementos y el co-árbol por un elemento. Los elementos que componen el árbol son: la fuente de voltaje $v_s(t)$, la resistencia R , y el diodo d . El co-árbol se conforma por el inductor L .

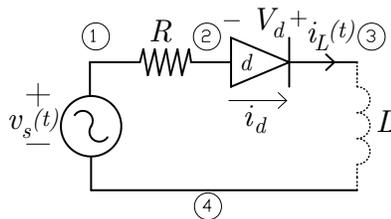


Figura 4.2: Arbol y co-árbol del RMO

El siguiente paso para la obtención del modelo complementario consiste en determinar los CCs y Lazos del circuito. En la Figura 4.3 se traza un CC entre el diodo y el inductor y un Lazo para cerrar la trayectoria abierta generada por el árbol.

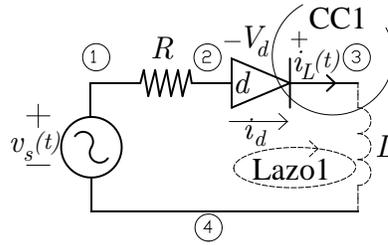


Figura 4.3: Lazos y CCs para el RMO

Para el CC 1 se aplica la LCK y para el Lazo 1 se aplica la LVK como se describe a continuación:

en el Lazo 1

$$\frac{di_L(t)}{dt} = -\frac{R}{L}i_L(t) + \frac{V_d}{L} + \frac{v_s(t)}{L}, \quad (4.1)$$

en el CC 1

$$i_d = i_L(t). \quad (4.2)$$

Siguiendo la definición de un SLC expresado en las Ecuaciones (2.1,2.2,2.3) se tiene que i_d representa una variable de salida denotada por w y V_d representa una variable de entrada denotada por z . Las matrices A_c , B_c , C_c , D_c , E_c , y F_c (para este caso particular son escalares) se componen de los siguientes parámetros eléctricos

$$\begin{aligned} A_c &= \left(-\frac{R}{L}\right) & B_c &= \left(\frac{1}{L}\right) & E_c &= \left(\frac{1}{L}\right) \\ C_c &= (1) & D_c &= 0 & F_c &= 0 \\ & & & & & 0 \leq (i_d)^T \perp (V_d)^T \geq 0 \end{aligned}$$

El modelo del RMO como un SLC incorpora el comportamiento del diodo sin realizar ninguna consideración sobre su operación, es decir, no es necesario conocer si el diodo está conduciendo o bloqueado. En otras palabras, el modelo complementario del RMO expresa que la evolución de la corriente $i_L(t)$ debe respetar la característica de conmutación del diodo contenida en la restricción de complementariedad: $0 \leq (i_d) \perp (V_d) \geq 0$.

4.2.2. Simulaciones del Rectificador de Media Onda

Utilizando el MRC, el RMO es simulado considerando los datos de la Tabla 4.1.

Tabla 4.1: Datos para la simulación del RMO

$v_s(t)$	$120 \text{ sen}(377t)$	V
R	1.0	Ω
L	1.0	mH

En la Figura 4.4 se muestra el comportamiento del RMO. En el semiciclo positivo el diodo es polarizado directamente por la fuente de voltaje y permite el flujo de corriente hacia el inductor. En esta condición de operación el voltaje en el diodo es cero (considerando que el comportamiento del diodo es ideal). Durante el periodo de conducción del diodo, el inductor recibe energía la cual es almacenada en forma de campo magnético. En la parte final en el intervalo del semiciclo positivo e inicio del semiciclo negativo el diodo se mantiene polarizado directamente debido a la energía almacenada en el inductor expresada como un voltaje inductivo.

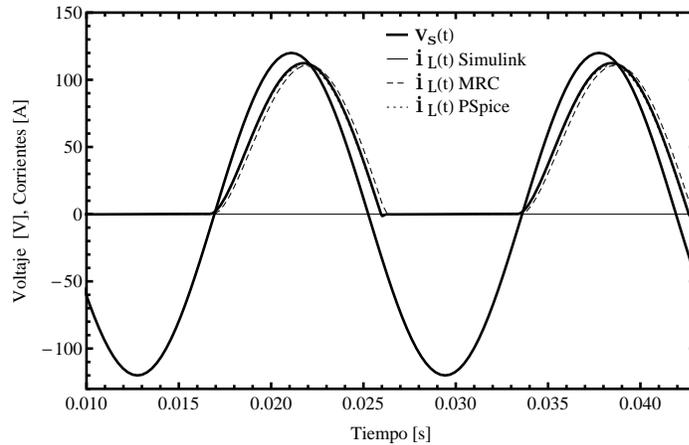


Figura 4.4: Corriente en el inductor del RMO

Una vez que el voltaje de la fuente es menor que el voltaje inductivo, el diodo se polariza inversamente soportando la tensión de la fuente como se muestra en la Figura 4.5.

El comportamiento del RMO representado en las Figuras (4.4,4.5) se analiza en [Mohan et al, 1995] utilizando la metodología de los MCs. Para modelar el RMO utilizando un MC se requiere calcular el tiempo de extinción de la corriente en el inductor para describir las topologías que le corresponden antes y después del proceso de conmutación. Para un MC del RMO es relativamente sencillo calcular el cruce de la corriente del inductor utilizando un método para el cálculo de raíces y determinar el cruce por cero de la corriente.

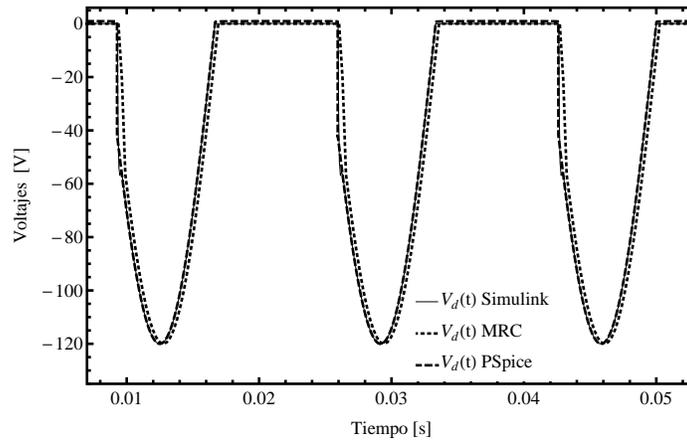


Figura 4.5: Voltaje en el diodo del RMO

Los resultados de simulación mostrados en las Figuras (4.4,4.5) utilizando el MRC y los programas comerciales como PSpice y Simulink muestran concordancia entre sí, donde son identificadas claramente dos configuraciones dictadas por el comportamiento del diodo: una configuración durante el periodo de conducción y otra configuración durante el periodo de no conducción. Cuando el diodo está apagado existe una caída de tensión debido a que el modelo utilizado para el diodo en PSpice no es ideal. Los modelos ideales para elementos de EP en PSpice pueden causar problemas de convergencia y no es posible efectuar la simulación.

4.3. Modelado del Rectificador de Onda Completa

En esta sección se presenta la generación del modelo del ROC como un SLC. Asimismo el modelo complementario es estudiado en diferentes escenarios de operación. Para mostrar que es posible validar el modelo complementario del ROC se realiza un barrido del capacitor incrementando su valor para mostrar que el convertidor de potencia experimenta un MOC y un MOD. De este proceso de simulación se obtiene que el modelo complementario experimenta un punto de operación en la condición frontera el cual es un estado de operación difícil de describir matemáticamente cuando se utilizan MCs porque no es claro establecer las ecuaciones que modelan esta condición de operación.

4.3.1. Obtención del Modelo del Rectificador de Onda Completa

En la Figura 4.6 se muestra un ROC. El cual está conformado por un puente rectificador de cuatro diodos los cuales rectifican la corriente suministrando siempre corriente positiva en el lado de CD. La carga es representada por medio de una resistencia R_2 . El voltaje en el lado de CD contiene rizado y es filtrado por medio de un capacitor C en paralelo con la carga.

De acuerdo a la Subsección 3.1.1, la primera parte en la obtención del modelo consiste en determinar el árbol y el co-árbol en base a la topología del circuito como se muestra en la Figura 4.7. El número de nodos del circuito es 6 en consecuencia el árbol debe contener 5 elementos y el co-árbol 4 elementos. Para esta topología del ROC el árbol y el co-árbol son normales lo cual es una garantía para representar el modelo del convertidor como un SLC.

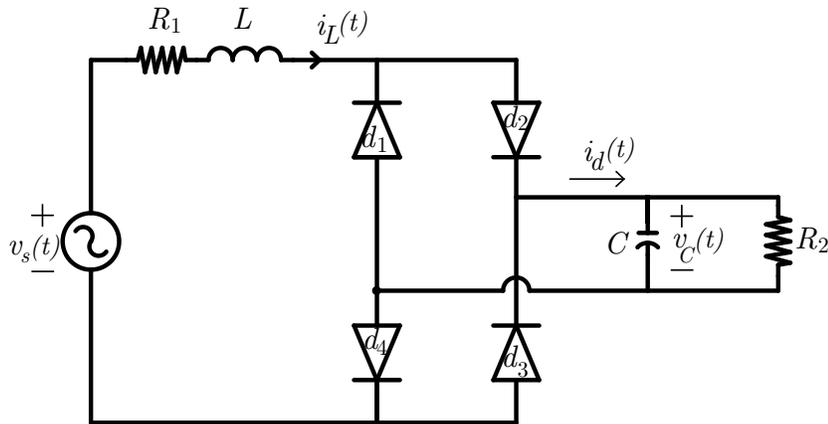


Figura 4.6: Circuito eléctrico del ROC

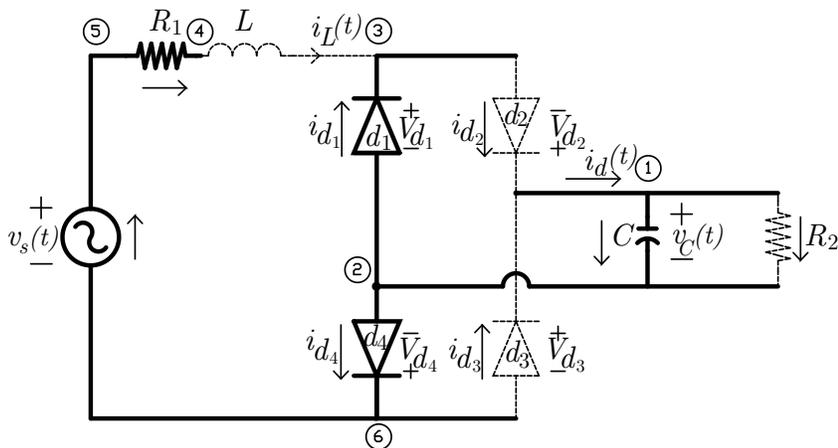


Figura 4.7: Árbol y co-árbol del ROC

Determinando el árbol y el co-árbol del circuito se procede a obtener los Lazos y los CCs como se muestra en la Figura 4.8.

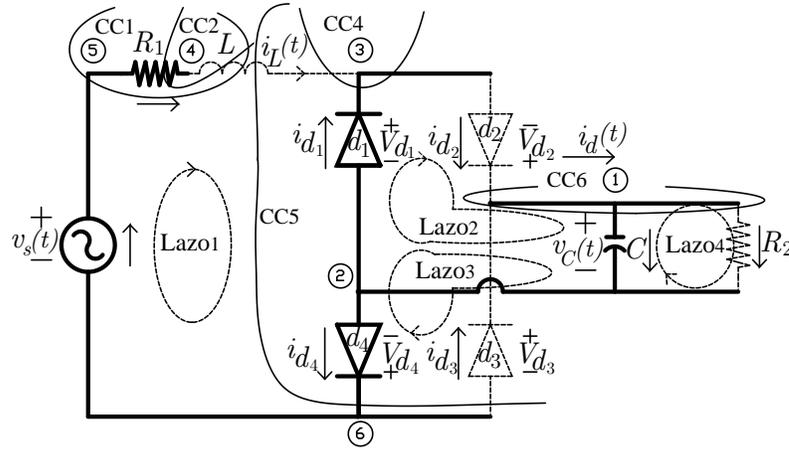


Figura 4.8: Lazos y CCs en el ROC

Con la información de los Lazos y los CCs se aplican LVK y LCK y se procede a obtener el modelo complementario del ROC.

Del Lazo 1

$$\frac{di_L(t)}{dt} = -\frac{R_1}{L}i_L(t) - \frac{V_{d1}}{L} + \frac{V_{d4}}{L} + \frac{v_s(t)}{L}, \quad (4.3)$$

del CC 6

$$\frac{dv_C(t)}{dt} = -\frac{v_C(t)}{R_2C} + \frac{i_{d2}}{C} + \frac{i_{d3}}{C}, \quad (4.4)$$

de las Ecuaciones (4.3,4.4) se define el vector de variables de entrada complementario z definido como

$$z = \left(V_{d1} \quad V_{d4} \quad i_{d2} \quad i_{d3} \right)^T$$

y el vector de salida complementario w se define como

$$w = \left(i_{d1} \quad i_{d4} \quad V_{d2} \quad V_{d3} \right)^T.$$

Para obtener el modelo complementario del ROC en forma completa se establecen relaciones para cada variable del vector complementario de salida w con la información de los Lazos y CCs como sigue:

del CC 4

$$i_{d_1} = -i_L(t) + i_{d_2}, \quad (4.5)$$

del CC 5

$$i_{d_4} = i_L(t) + i_{d_3}, \quad (4.6)$$

del Lazo 2

$$V_{d_2} = v_C(t) - V_{d_1}, \quad (4.7)$$

del Lazo 3

$$V_{d_3} = v_C(t) - V_{d_4}, \quad (4.8)$$

sujetas a las restricciones de complementariedad

$$0 \leq \begin{pmatrix} i_{d_1} & i_{d_4} & V_{d_2} & V_{d_3} \end{pmatrix}^T \perp \begin{pmatrix} V_{d_1} & V_{d_4} & i_{d_2} & i_{d_3} \end{pmatrix}^T \geq 0. \quad (4.9)$$

El conjunto de ecuaciones algebro-diferenciales que describen al ROC en el MRC son:

$$\begin{pmatrix} \frac{di_L(t)}{dt} = -\frac{R_1}{L}i_L(t) - \frac{V_{d_1}}{L} + \frac{V_{d_4}}{L} + \frac{v_s(t)}{L} \\ \frac{dv_C(t)}{dt} = -\frac{v_C(t)}{R_2C} + \frac{i_{d_2}}{C} + \frac{i_{d_3}}{C} \\ i_{d_1} = -i_L(t) + i_{d_2} \\ i_{d_4} = i_L(t) + i_{d_3} \\ V_{d_2} = v_C(t) - V_{d_1} \\ V_{d_3} = v_C(t) - V_{d_4} \end{pmatrix}$$

De acuerdo a la definición de los SLCs expresado en las Ecuaciones (2.1,2.2,2.3), las matrices A_c , B_c , C_c , y D_c se conforman de la siguiente forma como:

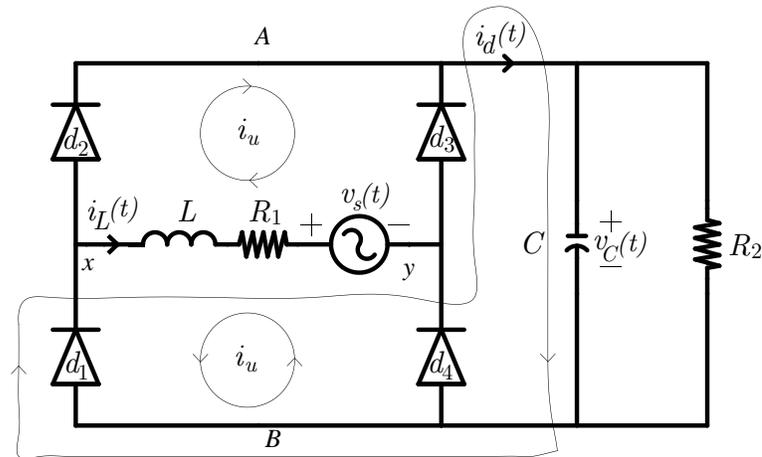
$$\begin{aligned} A_c &= \begin{pmatrix} -\frac{R_1}{L} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{R_2C} \end{pmatrix} \quad B_c = \begin{pmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{C} & \frac{1}{C} \end{pmatrix} \quad E_c = \begin{pmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{pmatrix}, \\ D_c &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad C_c = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad F_c = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ 0 &\leq \begin{pmatrix} i_{d_1} & i_{d_4} & V_{d_2} & V_{d_3} \end{pmatrix}^T \perp \begin{pmatrix} V_{d_1} & V_{d_4} & i_{d_2} & i_{d_3} \end{pmatrix}^T \geq 0 \end{aligned}$$

4.3.2. Modo de Operación Continuo del Rectificador de Onda Completa en Estado Estable

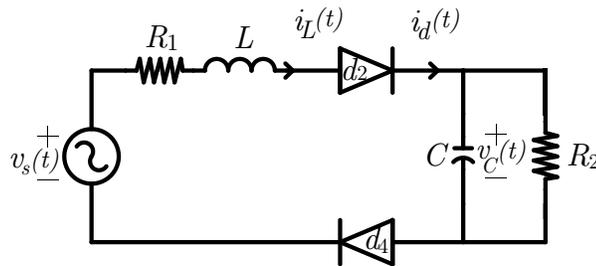
Los datos mostrados en la Tabla 4.2, son utilizados para simular el ROC en el MOC.

Tabla 4.2: Datos para el MOC del ROC

$v_s(t)$	$120 \text{ sen}(377t)$	V
R_1	1.0	Ω
L	1.0	mH
C	40.0	μF
R_2	1.0	Ω



(a)



(b)

Figura 4.9: (a) Circuito eléctrico en el subintervalo de conmutación; (b) Circuito eléctrico en el subintervalo de conducción para el ROC

El MOC puede ser representado por dos subintervalos para su análisis: el subintervalo de conmutación y el subintervalo de conducción. El circuito eléctrico que corresponde al subintervalo de conmutación se muestra en la Figura 4.9a. Antes de $\omega t = 0$ los diodos d_3 y d_1 conducen en el intervalo $0 \leq \omega t \leq \mu$, inmediatamente después los diodos

d_2 y d_4 empiezan a conducir pero los diodos d_3 y d_1 siguen conduciendo debido a la inductancia de la fuente. Un análisis más general sobre las causas del MOC requiere analizar los valores de resistencia, capacitancia, inductancia e incluso los armónicos inyectados a la fuente de alimentación.

El subintervalo de conducción en el MOC corresponde al circuito eléctrico mostrado en la Figura 4.9b. La configuración del rectificador para esta condición de operación es válida para el intervalo $\mu < \omega t < \eta$ y los diodos d_2 y d_4 conducen y los diodos d_3 y d_1 están bloqueados.

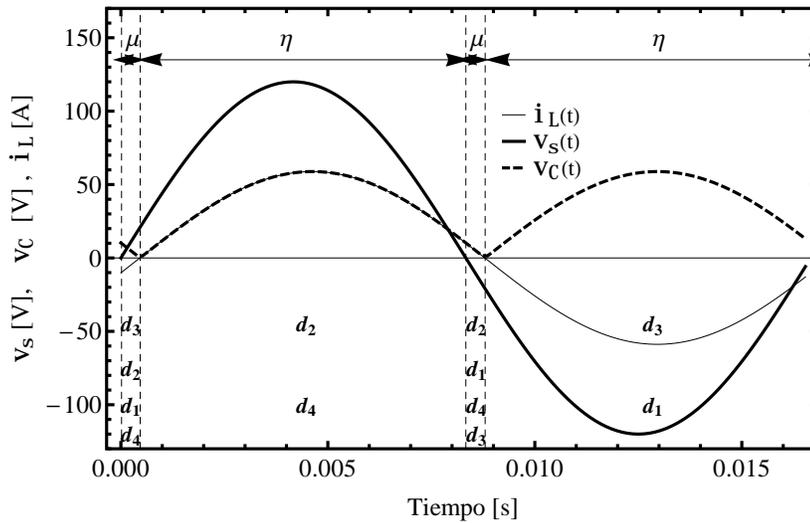


Figura 4.10: Formas de Onda del ROC en el MOC

En los resultados de simulación mostrados en la Figura 4.10 se aprecia que la forma de onda para la corriente $i_L(t)$ conserva una forma sinusoidal, sin embargo el costo de un bajo nivel armónico en la corriente resulta en un voltaje de salida con un rizado apreciable. En esta condición de operación son apreciados los subintervalos de conducción en el MOC. El subintervalo de conducción es representado por la porción de periodo η y el subintervalo de conmutación es representado por la porción del periodo μ . Las formas de onda en el estado estable para la corriente $i_L(t)$ en el lado de CA y el voltaje en el capacitor, $v_C(t)$ se calcularon utilizando el concepto de cálculo de estado estable presentado en la Sección 2.5. Donde se resuelve un PLC cuya dimensión es de 512×512 con un paso de integración de $1/(60 \times 128)$ utilizando el algoritmo de Lemke. El tiempo de cómputo para el cálculo de estado estable en el MRC es de 6.9683 segundos.

Utilizando el modelo complementario del ROC se tiene un modelo completo y no es necesario conocer la secuencia de los modos de operación, así también no es necesario conocer las configuraciones eléctricas de los modos.

4.3.3. Modo de Operación Discontinuo del Rectificador de Onda Completa en Estado Estable

Para representar un MOD en el ROC se consideran los datos de simulación de la Tabla 4.3.

Tabla 4.3: Parámetros eléctricos del ROC en el MOD

$v_s(t)$	$120 \text{ sen}(377t)$	V
R_1	1.0	Ω
L	1.0	mH
C	1400.0	μF
R_2	100.0	Ω

El MOD puede ser representado por dos subintervalos para su análisis. El subintervalo de conducción es representado por el segmento η y el intervalo de no-conducción es representado por el segmento ξ . El circuito eléctrico válido en el subintervalo de conducción se muestra en la Figura 4.11a, para esta condición de operación los diodos d_2 y d_4 inician a conducir en el tiempo t_b y la evolución del sistema es descrito por las siguientes ecuaciones diferenciales hasta el tiempo t_f .

$$|v_s(t)| = R_1 i_d(t) + L \frac{di_d(t)}{dt} + v_C(t) \quad (4.10)$$

$$i_d(t) = C \frac{dv_C(t)}{dt} + \frac{v_C(t)}{R_2} \quad (4.11)$$

El circuito eléctrico válido para el subintervalo de no-conducción ξ se muestra en la Figura 4.11b. En esta condición de operación el puente rectificador de diodos no inyecta corriente a la carga debido a la magnitud del capacitor que impide que los diodos se polaricen directamente y como resultado el valor de la corriente $i_d(t)$ es cero. Las ecuaciones diferenciales válidas para este subintervalo son:

$$i_d(t) = 0 \quad (4.12)$$

$$\frac{dv_C(t)}{dt} = -\frac{v_C(t)}{R_2 C} \quad (4.13)$$

La solución analítica de la Ecuación (4.13) es

$$v_C(t) = v_C(t_f) e^{-(t-t_f)/(R_2 C)} \quad (4.14)$$

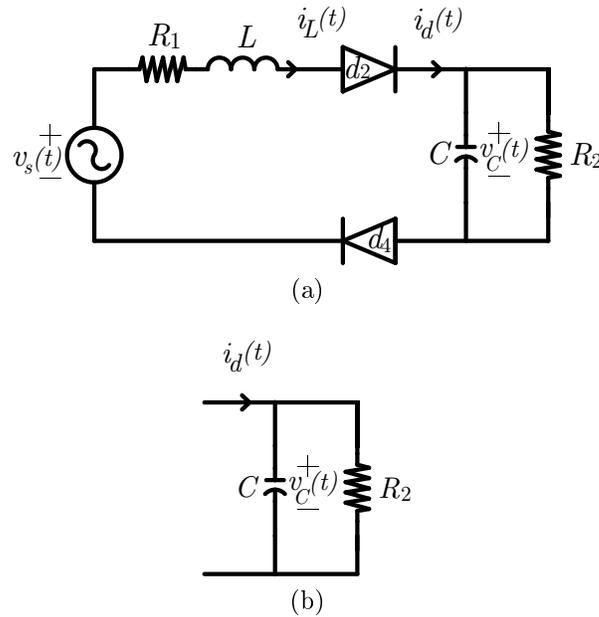


Figura 4.11: (a) Circuito eléctrico durante el subintervalo de conducción; (b) Circuito eléctrico en el subintervalo de no-conducción para el ROC

Físicamente la carga se desconecta de la fuente de alimentación por efecto del capacitor, el cual impide la polarización directa de los diodos en el semiciclo positivo de la fuente de voltaje representado en la Figura 4.12 como el periodo ξ . La forma de onda de la corriente es amplificada por un factor de 15 para que pueda ser visualizada. En este modo de operación el rizado en el voltaje es mucho menor si se compara con el obtenido en el MOC, sin embargo el costo que se tiene para este bajo rizado se traduce en una distorsión de la forma de onda de la corriente $i_L(t)$. Las formas de onda para el voltaje y la corriente son obtenidas utilizando el cálculo de estado estable con el MRC. El esfuerzo computacional para la obtención de las formas de onda es de 4.4854 segundos con un paso de integración de $1/(60 \times 128)$ y un tiempo de simulación de $1/60$ segundos.

Se ha presentado que el SLC para el ROC es válido en ambos escenarios de operación: el MOC y el MOD. En el cálculo de estado estable utilizando el MRC no es requerido delimitar los estados de operación del convertidor de potencia. Una característica del MRC en el proceso del cálculo de estado estable consiste en que no es requerido en la solución de un PLC un método iterativo. Solo es necesario seleccionar un paso de integración adecuado de tal forma que el error sea reducido. De esta forma si se desea tener un resultado grueso sobre las formas de onda en el estado estable es posible para un paso de integración de $T/128$ muestras en un periodo de la fuente de alimentación y la solución puede ser reducida en error si se escoge un paso de integración más pequeño.

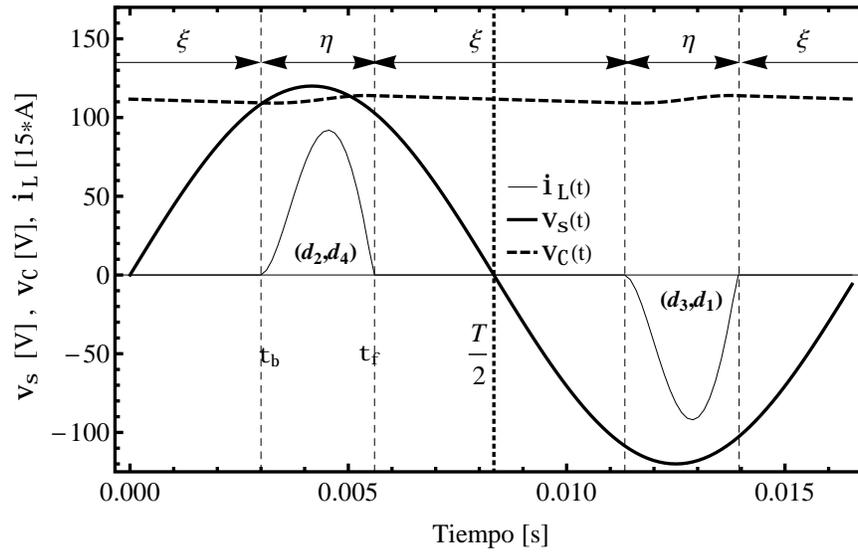


Figura 4.12: Formas de Onda del ROC en el MOD

Uno de los problemas interesantes que se presentan cuando se desea realizar el cálculo de estado estable utilizando MCs consiste en que los resultados pueden no ser reales si el sistema consta de un considerable número de diodos, de hecho ya para 4 diodos implican 16 modos de operación. Entonces, no es claro establecer una condición inicial de conducción o bloqueo si el sistema consta de un número considerable de diodos. De la situación anterior un esquema de simulación basado en un MC la selección de la condición inicial puede representar una desventaja.

4.3.4. Respuesta Transitoria en el Modo de Operación Continuo del Rectificador de Onda Completa

En esta sección se presenta la respuesta transitoria del ROC utilizando el MRC. Los resultados obtenidos con el formalismo complementario son comparados con los resultados obtenidos mediante PSpice y Simulink en el MOC. La formas de onda de la corriente $i_L(t)$ en la Figura 4.13, muestran concordancia con los tres esquemas de simulación. Se puede apreciar que en el MOC después del transitorio las corrientes tienen la misma forma que las obtenidas en el estado estable.

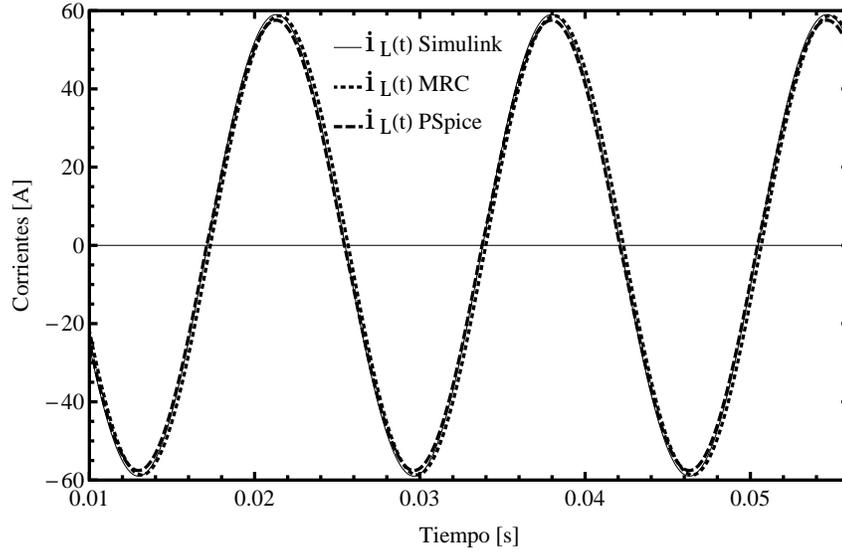


Figura 4.13: Formas de onda de la corriente $i_L(t)$ con PSpice, Simulink y el MRC

Para los resultados obtenidos con Simulink se utilizó el método de integración *Ode45* con un paso de integración variable y una tolerancia relativa de 1.0×10^{-3} . En el MRC el paso de integración utilizado es de 1.8229×10^{-4} .

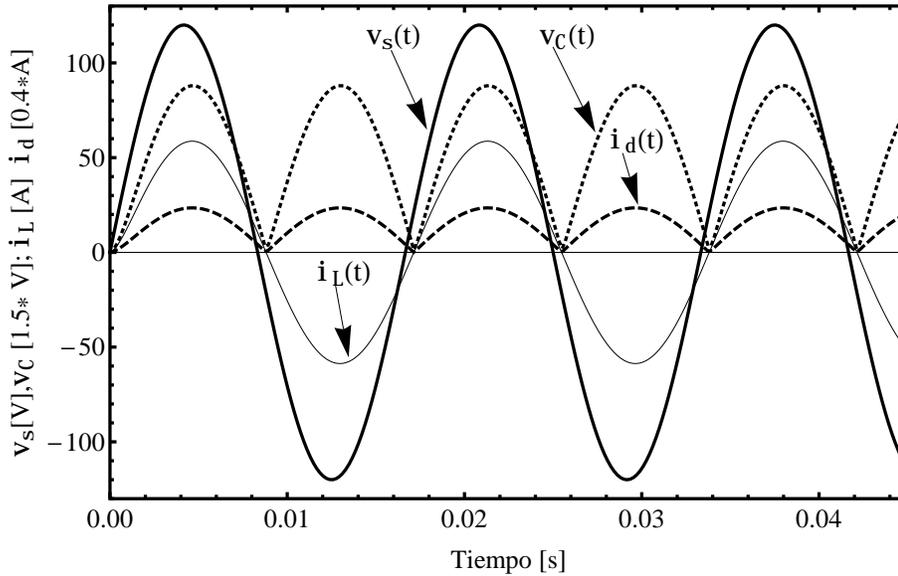


Figura 4.14: Formas de onda del ROC en el MOC durante el transitorio

En la Figura 4.14 se muestran las formas de onda del ROC que describen el comportamiento en el MOC. En este modo de operación el voltaje en el capacitor tiene

un valor de rizado grande asociado al valor pequeño del capacitor y la corriente de la fuente de voltaje presenta una forma sinusoidal.

4.3.5. Respuesta Transitoria en el Modo de Operación Discontinuo del Rectificador de Onda Completa

En la Figura 4.15 se muestra la respuesta transitoria del ROC en el MOD utilizando el MRC y los paquetes comerciales de simulación de EP como Simulink y PSpice. El método de integración utilizado en Simulink es el *Ode45* con un paso de integración variable y una tolerancia relativa de 1.0×10^{-3} .

Las señales que describen de manera completa el comportamiento del ROC en el transitorio utilizando el MRC se muestran en la Figura 4.16. El voltaje en el capacitor $v_C(t)$ contiene un nivel de rizado menor en el MOD si se compara con el MOC y la corriente en el inductor $i_L(t)$ presenta una distorsión apreciable en su forma de onda causada por la polarización del voltaje del filtro capacitivo. Las corrientes ($i_d(t), i_L(t)$) son multiplicados por un factor para ser apreciadas en forma conjunta con los voltajes del ROC. En el inicio del transitorio se presenta un valor elevado de la corriente experimentado por los diodos al momento de ser energizado el puente rectificador.

El diseño de un filtro capacitivo que represente el mínimo entre el nivel de rizado y la distorsión armónica requiere de un gran número de simulaciones para determinar los diferentes modos de operación en función de la capacitancia en el lado de CD y evaluar sus armónicos. Esta tarea puede ser realizada con el MRC como se describe en las Secciones 4.3.8 y 4.3.7.

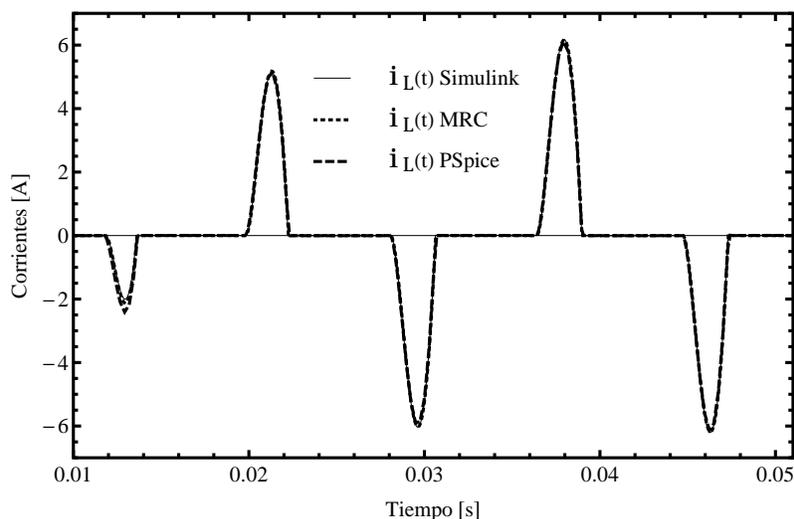


Figura 4.15: Formas de onda de la corriente $i_L(t)$ en el ROC

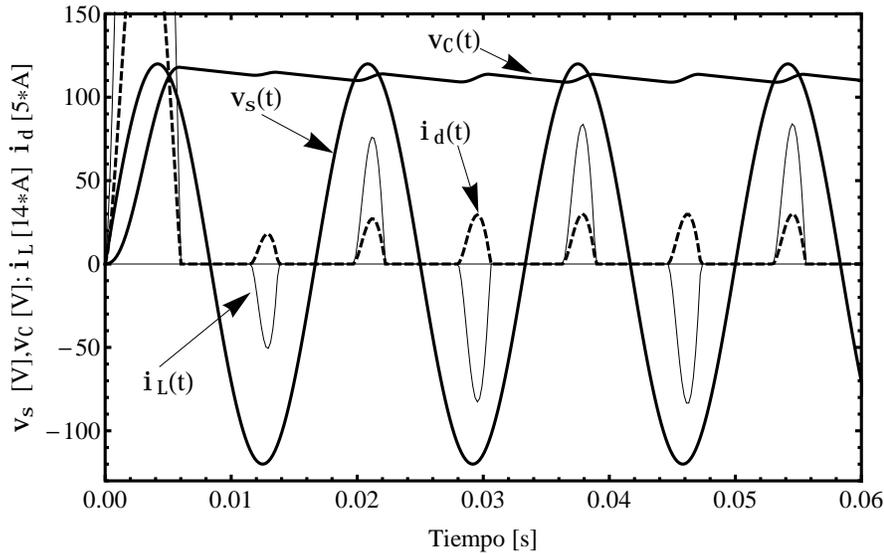
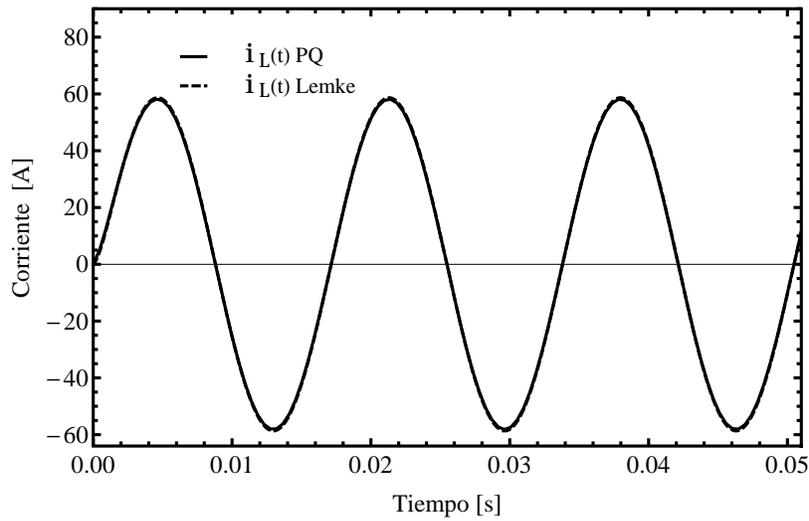


Figura 4.16: Formas de onda del ROC en el MOD durante el transitorio

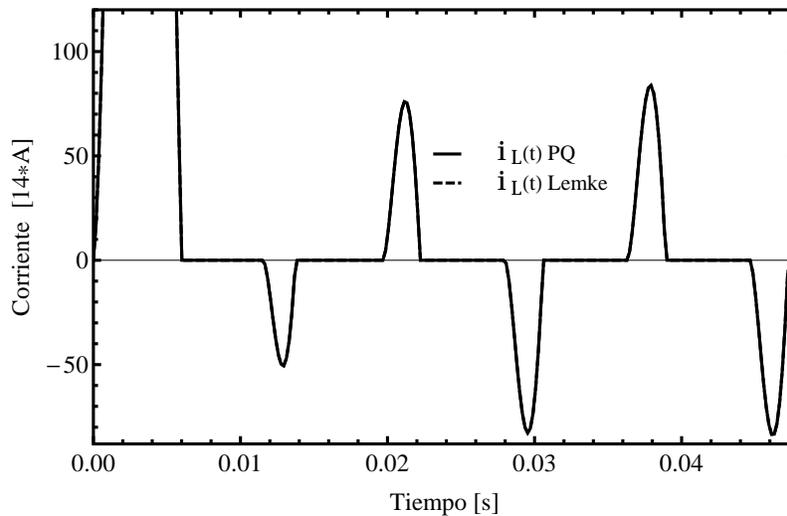
4.3.6. Comparación del Algoritmo de Lemke y Programación Cuadrática en el Cálculo de la Respuesta Transitoria

El objetivo de esta sección consiste en evaluar el algoritmo de Lemke y la herramienta de PQ, *FindMinimum* desarrollada por *Mathematica*. La función *FindMinimum* es una función empleada para resolver problemas de optimización local restringida. La función utiliza algoritmos basados en el gradiente como son: PQ secuencial, el método lagrangiano aumentado y el método del punto interior, o bien métodos directos como el método de Nelder-Mead, algoritmos genéticos y evolución diferencial. Para un estudio detallado de los algoritmos que conforman la función *FindMinimum* de *Mathematica* pueden ser revisadas las referencias [Mehrotra, 1992, Nelder, Mead, 1965, Ingber, 1993, Price, Storn, 1997].

En la Figura 4.17 se muestra la respuesta transitoria del ROC en el MOC y el MOD. Las forma de onda de la corriente $i_L(t)$ utilizando el algoritmo de Lemke y PQ muestran que ambos esquemas de solución son equivalentes en cuanto a la exactitud de los resultados.



(a)



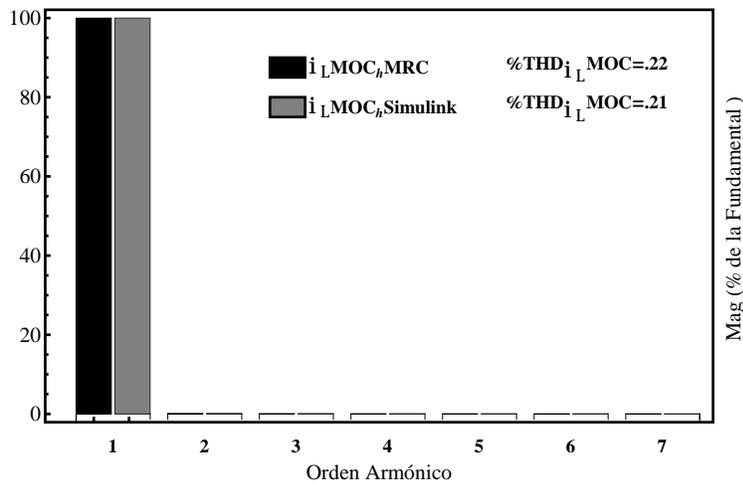
(b)

Figura 4.17: Formas de Onda de la corriente $i_L(t)$ obtenidas con PQ y el Algoritmo de Lemke; (a) En el MOC y; (b) En el MOD

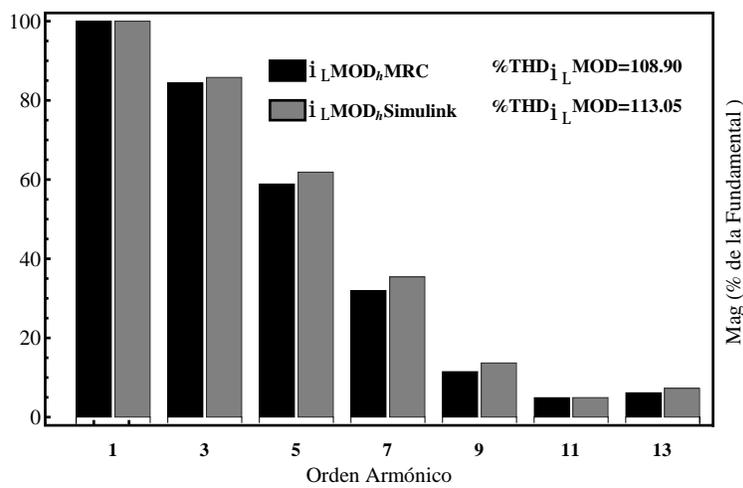
El paso de integración utilizado en el algoritmo de Lemke y PQ es de $(5 \times 0.7) / (60 \times 64)$ con un tiempo de simulación de $5/60$ segundos en el MOD y con un esfuerzo computacional de 1.0318 (Lemke) y 23.7907 (PQ) segundos. Para el mismo paso de integración y tiempo de simulación, el tiempo de cómputo requerido en el MOC es de 1.0147 segundos con el esquema de solución de Lemke y con PQ es de 4.67533 segundos.

4.3.7. Análisis Armónico de los Modos de Operación del Rectificador de Onda Completa

El análisis armónico en el MOD para el ROC presenta un nivel de distorsión de la corriente mayor comparado con el MOC. En la Figura 4.18 se muestra el tipo de armónicas presentes en el MOC y el MOD. En el MOD se presenta un alto contenido armónico por lo que el diseñador requiere de valores para el filtro capacitivo que sean acordes con los niveles aceptables de distorsión armónica estipulados en la norma eléctrica de calidad de energía.



(a)



(b)

Figura 4.18: Armónicos del ROC en el MOC y el MOD utilizando Simulink y el MRC

El valor rms de la corriente $i_L(t)$ en el MOC y el MOD utilizando el MRC y Simulink

se muestran en la Tabla 4.4. Para la obtención de la distorsión armónica de la corriente en el lado de CA, se utilizó el analizador de armónicos de Simulink con los resultados mostrados en la Figura 4.18, donde se realiza una comparación de los armónicos en el MOC y el MOD con Simulink y el MRC para su validación.

Tabla 4.4: Valores RMS de la corriente $i_L(t)$ en el MOC y el MOD utilizando el MRC y Simulink

	MRC	Simulink
$I_L MOC$	41.57	41.69
$I_L MOD$	1.531	1.52

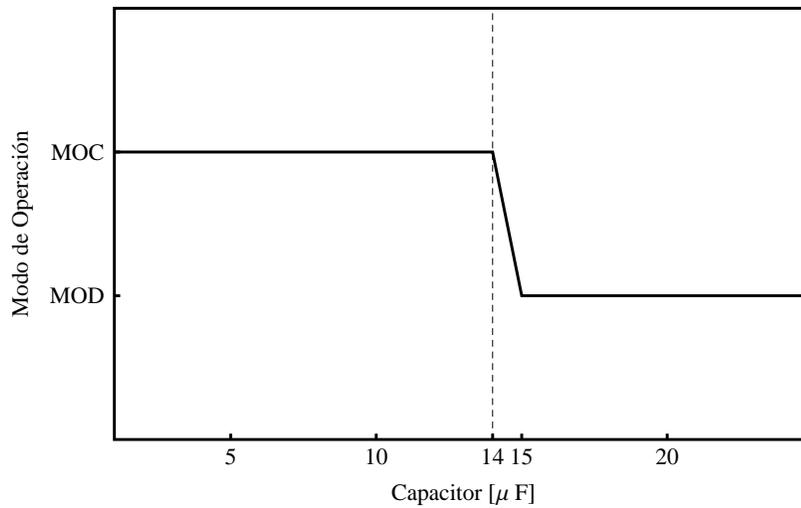
4.3.8. Determinación de la Operación del Rectificador de Onda Completa en el Modo de Operación en la Condición Frontera

Utilizando el modelo complementario del ROC se presenta un barrido del capacitor con el objetivo de determinar la condición para la cual el convertidor cambia del MOC al MOD conocida como condición frontera. La condición para saber si el modelo del rectificador está operando en el MOD o en el MOC consiste en determinar si la corriente $i_d(t)$ cruza por cero. La Figura 4.19b muestra como la corriente $i_d(t)$ está cercana al cruce por cero. En esta condición de operación la corriente $i_d(t)$ que está cercana al valor de cero se le denomina operación en la región frontera y es difícil de ser obtenida con un MC dado que en este esquema se trabaja con un MOC y un MOD y no es claro como representar una configuración compuesta de un MOC y un MOD simultáneamente.

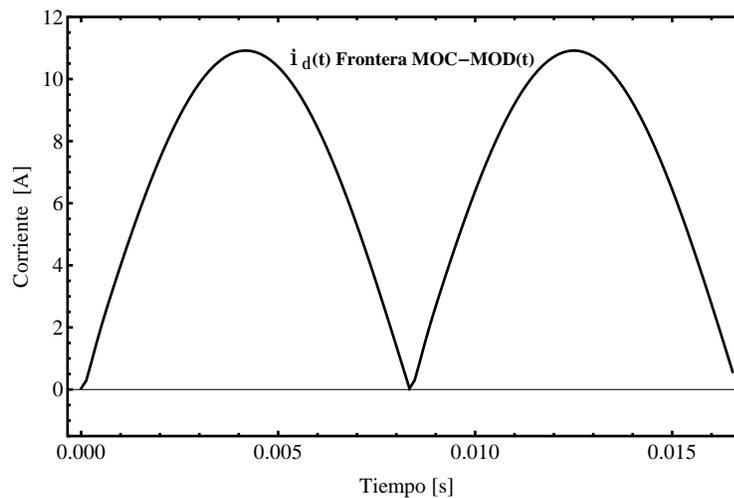
Para la determinación del cruce de la corriente por cero se presenta un barrido del capacitor para determinar la condición frontera como se muestra en la Figura 4.19a la cual fue obtenida siguiendo los valores de la Tabla 4.5. Utilizando incrementos de capacitancia de $\Delta C=1.0 \mu F$, un valor de capacitancia mayor a $14.0 \mu F$ hace que el sistema electrónico entre en el MOD. Para este valor de capacitancia el ROC opera en la región frontera como se muestra en la Figura 4.19b. La corriente $i_d(t)$ toca ligeramente el valor de cero para el valor de capacitancia de $14.0 \mu F$, lo cual se interpreta como un condición de operación en la frontera entre el MOC y el MOD.

Tabla 4.5: Valores para determinar el MOC y el MOD variando la magnitud del capacitor

$v_s(t)$	$120 \text{ sen}(377t)$	V
R_1	1.0	Ω
L	1.0	mH
C	{1 – 100}	μF
R_2	10.0	Ω
ΔC	1.0	μF



(a)



(b)

Figura 4.19: (a) Modo de operación del ROC como función del capacitor; (b) Forma de onda de la corriente $i_d(t)$ en la región frontera

4.4. Modelado del Rectificador Trifásico

En esta sección se desarrolla el modelo complementario para el RT donde son analizados diferentes escenarios de operación como el MOC y el MOD, asimismo se determina la condición de operación en la región frontera. Se realiza un barrido del capacitor donde se investiga como al variar la magnitud de la capacitancia se tiene una fotografía de los modos de operación en función del filtro capacitivo. También se investigan los efectos que tienen ciertos armónicos en el cambio de un MOC a un MOD variando su magnitud y sus ángulos de fase. De esta forma se muestra que el modelo complementario es válido también para condiciones de desbalance en el voltaje de alimentación.

Así también en esta sección son investigados los tiempos de cómputo requeridos para realizar el proceso de integración en Simulink y el MRC. Para el cálculo de estado estable utilizando el algoritmo de Lemke se muestra que el tiempo de cómputo es mayor que el requerido para el cálculo de la respuesta transitoria en el MRC y en Simulink.

4.4.1. Obtención del Modelo del Rectificador Trifásico

A continuación se procede a obtener el modelo del RT representado por el circuito que se muestra en la Figura 4.20.

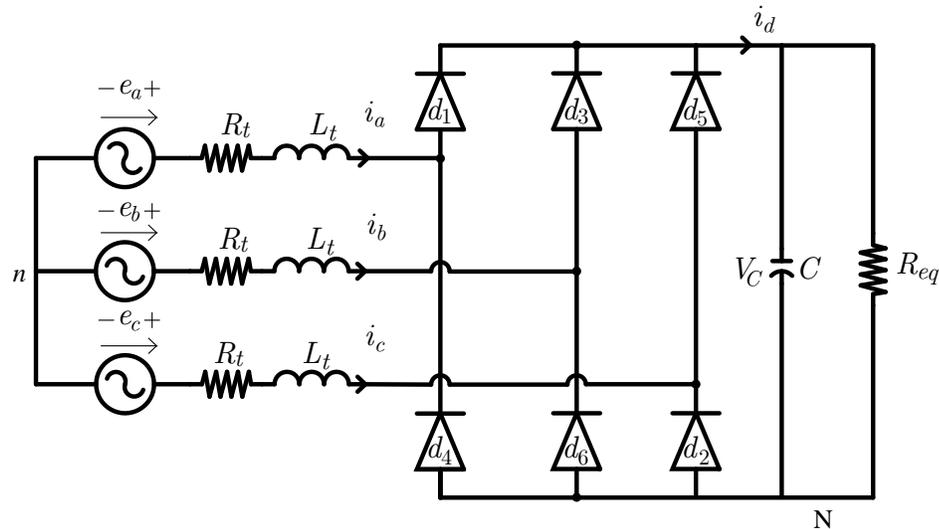


Figura 4.20: Circuito eléctrico del RT

Para determinar el modelo complementario del RT se obtiene el árbol y el co-árbol en base a la topología del circuito como se muestra en la Figura 4.21.

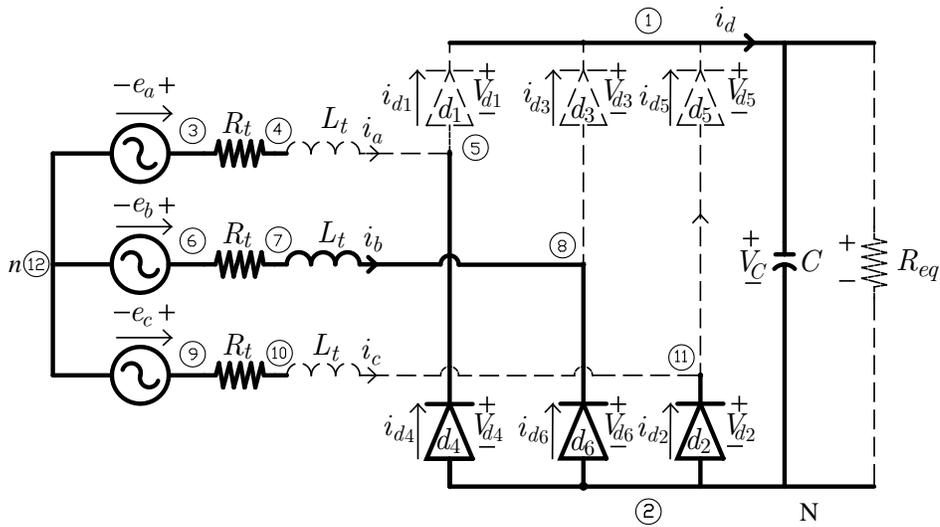


Figura 4.21: Árbol y co-árbol del RT

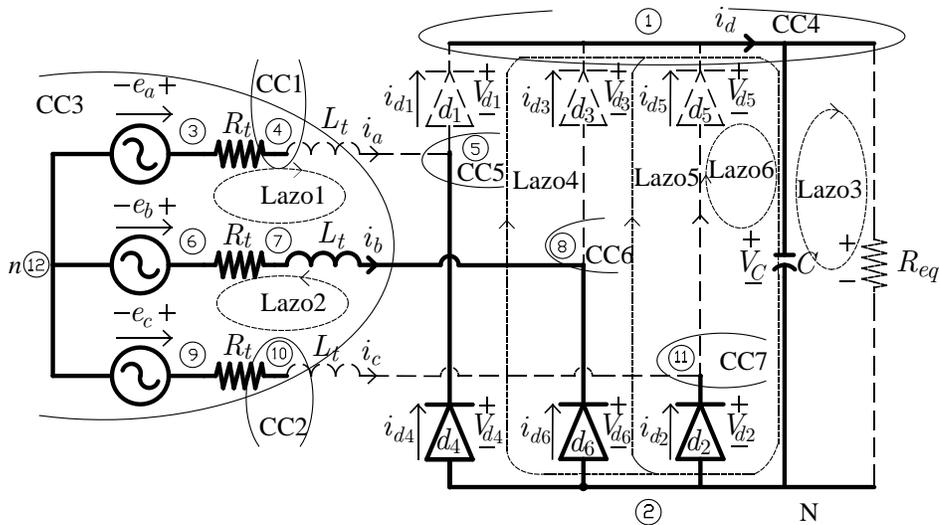


Figura 4.22: CCs y Lazos del RT

La línea gruesa representa el árbol y la línea delgada punteada representa los elementos que conforman el co-árbol del RT. Con la definición del árbol y el co-árbol se procede a obtener los CCs y los Lazos que conforman el circuito como se muestran en la Figura 4.22. Obsérvese también que el árbol del circuito contiene un elemento inductor, en consecuencia no es un árbol normal. Una representación de orden cuarto correspondería a un árbol y un co-árbol normal donde las variables de estado serían las corrientes de las fases (i_a, i_b, i_c) y el voltaje en el capacitor V_C . Debido al árbol no normal la representación matemática para el convertidor corresponde a un modelo de orden 3 donde alguna corriente de las fases debe ser expresada en términos de las corrientes

restantes. Para este caso de estudio es posible obtener un modelo equivalente para el RT en el formato de los SLCs pero no se puede asegurar en general que circuitos con un árbol o un co-árbol no normales puedan ser siempre representados en el MRC.

Utilizando LVK para los Lazos y LCK para los CCs se obtiene el siguiente conjunto de ecuaciones diferenciales:

para el Lazo 1

$$-e_a + R_t i_a + L_t \frac{di_a}{dt} + V_{d4} - V_{d6} - L_t \frac{di_b}{dt} - R_t i_b + e_b = 0, \quad (4.15)$$

para el Lazo 2

$$-e_c + R_t i_c + L_t \frac{di_c}{dt} + V_{d2} - V_{d6} - L_t \frac{di_b}{dt} - R_t i_b + e_b = 0, \quad (4.16)$$

para el CC 3

$$i_a + i_b + i_c = 0, \quad (4.17)$$

derivando la Ecuación (4.17) del CC 3 y resolviendo para i_a resulta que

$$\frac{di_a}{dt} = -\frac{di_b}{dt} - \frac{di_c}{dt}, \quad (4.18)$$

para el CC 4

$$i_{d1} + i_{d3} + i_{d5} = i_C + i_{Req}, \quad (4.19)$$

para el Lazo 3

$$V_C = V_{Req} = R_{eq} i_{Req}, \quad (4.20)$$

si se sustituye la Ecuación (4.18) en la Ecuación (4.15) se tiene que

$$-e_a + R_t i_a + L_t \left(-\frac{di_b}{dt} - \frac{di_c}{dt} \right) + V_{d4} - V_{d6} - L_t \frac{di_b}{dt} - R_t i_b + e_b = 0, \quad (4.21)$$

sumando la Ecuación (4.21) y la Ecuación (4.16) se resuelve para i_b

$$\begin{aligned} & -e_a + R_t i_a + L_t \left(-\frac{di_b}{dt} - \frac{di_c}{dt} \right) + V_{d4} - V_{d6} - L_t \frac{di_b}{dt} - R_t i_b + e_b = 0 \\ & -e_c + R_t i_c + L_t \frac{di_c}{dt} + V_{d2} - V_{d6} - L_t \frac{di_b}{dt} - R_t i_b + e_b = 0 \\ & -e_a + e_b - e_c + e_b + R_t i_a - R_t i_b + R_t (-i_a - i_b) - R_t i_b + \\ & V_{d4} - V_{d6} + V_{d2} - V_{d6} + \left(-L_t \frac{di_b}{dt} - L_t \frac{di_c}{dt} \right) - L_t \frac{di_b}{dt} + L_t \frac{di_c}{dt} - L_t \frac{di_b}{dt} = 0 \end{aligned}$$

$$\frac{di_b}{dt} = -\frac{e_a}{3L_t} + \frac{2e_b}{3L_t} - \frac{e_c}{3L_t} - \frac{R_t}{L_t}i_b + \frac{V_{d4}}{3L_t} - \frac{2V_{d6}}{3L_t} + \frac{V_{d2}}{3L_t} \quad (4.22)$$

sustituyendo la $\frac{di_b}{dt}$ de la Ecuación (4.22) en la Ecuación (4.15) y resolviendo para la $\frac{di_a}{dt}$ se tiene que

$$\begin{aligned} -e_a + R_t i_a + L_t \frac{di_a}{dt} + V_{d4} - V_{d6} - L_t \frac{di_b}{dt} - R_t i_b + e_b &= 0 \\ \frac{di_b}{dt} &= -\frac{e_a}{3L_t} + \frac{2e_b}{3L_t} - \frac{e_c}{3L_t} - \frac{R_t}{L_t}i_b + \frac{V_{d4}}{3L_t} - \frac{2V_{d6}}{3L_t} + \frac{V_{d2}}{3L_t}, \\ \frac{di_a}{dt} &= \frac{e_a}{L_t} - \frac{e_b}{L_t} - \frac{R_t}{L_t}i_a + \frac{R_t}{L_t}i_b - \frac{V_{d4}}{L_t} + \frac{V_{d6}}{L_t} - \frac{e_a}{3L_t} \\ &\quad + \frac{2e_b}{3L_t} - \frac{e_c}{3L_t} - \frac{R_t}{L_t}i_b + \frac{V_{d4}}{3L_t} - \frac{2V_{d6}}{3L_t} + \frac{V_{d2}}{3L_t}, \\ \frac{di_a}{dt} &= \frac{2e_a}{3L_t} - \frac{e_b}{3L_t} - \frac{e_c}{3L_t} - \frac{R_t}{L_t}i_a - \frac{2V_{d4}}{3L_t} + \frac{V_{d6}}{3L_t} + \frac{V_{d2}}{3L_t}. \end{aligned} \quad (4.23)$$

A continuación se desarrolla la Ecuación (4.19) en función de la $\frac{dV_C}{dt}$ y se sustituye i_{Req} de la Ecuación (4.20) cuyo resultado es:

$$i_{d1} + i_{d3} + i_{d5} = i_C + \frac{V_C}{R_{eq}}, \quad (4.24)$$

y

$$i_C = C \frac{dV_C}{dt}. \quad (4.25)$$

La variación del voltaje en el capacitor C está dada en términos de

$$C \frac{dV_C}{dt} = i_{d1} + i_{d3} + i_{d5} - \frac{V_C}{R_{eq}}. \quad (4.26)$$

Del conjunto de ecuaciones obtenidas para $\frac{di_a}{dt}$, $\frac{di_b}{dt}$, y $\frac{dV_C}{dt}$ el vector de variables complementarias de entrada z se conforma por

$$z = \left(V_{d4} \quad V_{d6} \quad V_{d2} \quad i_{d1} \quad i_{d3} \quad i_{d5} \right)^T, \quad (4.27)$$

y el vector complementario de salida w se conforma por las variables de salida

$$w = \left(i_{d4} \quad i_{d6} \quad i_{d2} \quad V_{d1} \quad V_{d3} \quad V_{d5} \right)^T. \quad (4.28)$$

Para formular de manera completa el modelo complementario se establecen LKV y LKC para cada una de las variables complementarias de salida como se muestra a continuación:

para el CC 5

$$i_{d4} + i_a = i_{d1} \longrightarrow i_{d4} = -i_a + i_{d1}, \quad (4.29)$$

para el CC 6

$$i_{d6} + i_b = i_{d3} \longrightarrow i_{d6} = -i_b + i_{d3}, \quad (4.30)$$

para el CC 7

$$i_{d2} + i_c = i_{d5} \longrightarrow i_{d2} = i_{d5} - i_c = i_{d5} - (-i_a - i_b) = i_{d5} + (i_a + i_b), \quad (4.31)$$

para el Lazo 4

$$-V_{d1} + V_C - V_{d4} = 0 \longrightarrow V_{d1} = V_C - V_{d4}, \quad (4.32)$$

para el Lazo 5

$$-V_{d3} + V_C - V_{d6} = 0 \longrightarrow V_{d3} = V_C - V_{d6}, \quad (4.33)$$

para el Lazo 6

$$-V_{d5} + V_C - V_{d2} = 0 \longrightarrow V_{d5} = V_C - V_{d2}. \quad (4.34)$$

El conjunto de ecuaciones que describen la dinámica del RT en el MRC están expresadas por:

$$\begin{pmatrix} \frac{di_a}{dt} = -\frac{R_t}{L_t}i_a - \frac{2V_{d4}}{3L_t} + \frac{V_{d6}}{3L_t} + \frac{V_{d2}}{3L_t} + \frac{2}{3}\frac{e_a}{L_t} - \frac{e_b}{3L_t} - \frac{e_c}{3L_t} \\ \frac{di_b}{dt} = -\frac{R_t}{L_t}i_b + \frac{V_{d4}}{3L_t} - \frac{2V_{d6}}{3L_t} + \frac{V_{d2}}{3L_t} - \frac{e_a}{3L_t} + \frac{2e_b}{3L_t} - \frac{e_c}{3L_t} \\ \frac{dV_C}{dt} = -\frac{V_C}{R_{eq}C} + \frac{i_{d1}}{C} + \frac{i_{d3}}{C} + \frac{i_{d5}}{C} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} i_{d4} = -i_a + i_{d1} \\ i_{d6} = -i_b + i_{d3} \\ i_{d2} = i_a + i_b + i_{d5} \\ V_{d1} = V_C - V_{d4} \\ V_{d3} = V_C - V_{d6} \\ V_{d5} = V_C - V_{d2} \end{pmatrix}$$

en forma matricial se expresan como:

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} \dot{i}_a \\ \dot{i}_b \\ \dot{V}_C \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -\frac{R_t}{L_t} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{R_t}{L_t} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{CR_{eq}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_a \\ i_b \\ V_C \end{pmatrix} + \\
 &\begin{pmatrix} -\frac{2}{3L_t} & \frac{1}{3L_t} & \frac{1}{3L_t} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3L_t} & -\frac{2}{3L_t} & \frac{1}{3L_t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{C} & \frac{1}{C} & \frac{1}{C} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_{d4} \\ V_{d6} \\ V_{d2} \\ i_{d1} \\ i_{d3} \\ i_{d5} \end{pmatrix} + \\
 &\begin{pmatrix} \frac{2}{3L_t} & -\frac{1}{3L_t} & -\frac{1}{3L_t} \\ -\frac{1}{3L_t} & \frac{2}{3L_t} & -\frac{1}{3L_t} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_a \\ e_b \\ e_c \end{pmatrix} \\
 \\
 \begin{pmatrix} i_{d4} \\ i_{d6} \\ i_{d2} \\ V_{d1} \\ V_{d3} \\ V_{d5} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_a \\ i_b \\ V_c \end{pmatrix} + \\
 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_{d4} \\ V_{d6} \\ V_{d2} \\ i_{d1} \\ i_{d3} \\ i_{d5} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_a \\ e_b \\ e_c \end{pmatrix} \\
 \\
 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} &\leq \begin{pmatrix} i_{d4} \\ i_{d6} \\ i_{d2} \\ V_{d1} \\ V_{d3} \\ V_{d5} \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} V_{d4} \\ V_{d6} \\ V_{d2} \\ i_{d1} \\ i_{d3} \\ i_{d5} \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

y las matrices A_c , B_c , E_c , C_c , D_c y F_c que representan el SLC del RT se conforman como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned}
 A_c &= \begin{pmatrix} -\frac{R_t}{L_t} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{R_t}{L_t} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{CR_{eq}} \end{pmatrix} & B_c &= \begin{pmatrix} -\frac{2}{3L_t} & \frac{1}{3L_t} & \frac{1}{3L_t} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3L_t} & -\frac{2}{3L_t} & \frac{1}{3L_t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{C} & \frac{1}{C} & \frac{1}{C} \end{pmatrix} \\
 E_c &= \begin{pmatrix} \frac{2}{3L_t} & -\frac{1}{3L_t} & -\frac{1}{3L_t} \\ -\frac{1}{3L_t} & \frac{2}{3L_t} & -\frac{1}{3L_t} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & C_c &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 D_c &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & F &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 z &= \begin{pmatrix} V_{d4} \\ V_{d6} \\ V_{d2} \\ i_{d1} \\ i_{d3} \\ i_{d5} \end{pmatrix} & w &= \begin{pmatrix} i_{d4} \\ i_{d6} \\ i_{d2} \\ V_{d1} \\ V_{d3} \\ V_{d5} \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

4.4.2. Modo de Operación Continuo del Rectificador Trifásico en Estado Estable

En la Subsección 4.4.1 se obtuvo el modelo complementario del RT el cual es un modelo completo y es válido para los modos de operación que se puedan presentar para diferentes parámetros eléctricos seleccionados. El modelo del RT en el MRC es capaz de reproducir el MOC y el MOD incluyendo una condición frontera. El rectificador como un dispositivo con 6 elementos de potencia que conmutan, implica 2^6 modos de operación si se desea describir de manera completa su comportamiento.

El MOC se compone principalmente de dos subintervalos: el subintervalo durante el proceso de conmutación y el subintervalo durante el proceso de conducción. Las topologías válidas para estos subintervalos se muestran en la Figura 4.23.

Los datos de simulación utilizados para reproducir el MOC se muestran en la Tabla 4.6.

Tabla 4.6: Datos del RT para el MOC

e_a	$120 \text{ sen}(377t)$	V
e_b	$120 \text{ sen}(377t - 2\frac{\pi}{3})$	V
e_c	$120 \text{ sen}(377t + 2\frac{\pi}{3})$	V
R_t	0.001Ω	Ω
L_t	1.0	mH
C	1000.0	μF
R_{eq}	25.0	Ω

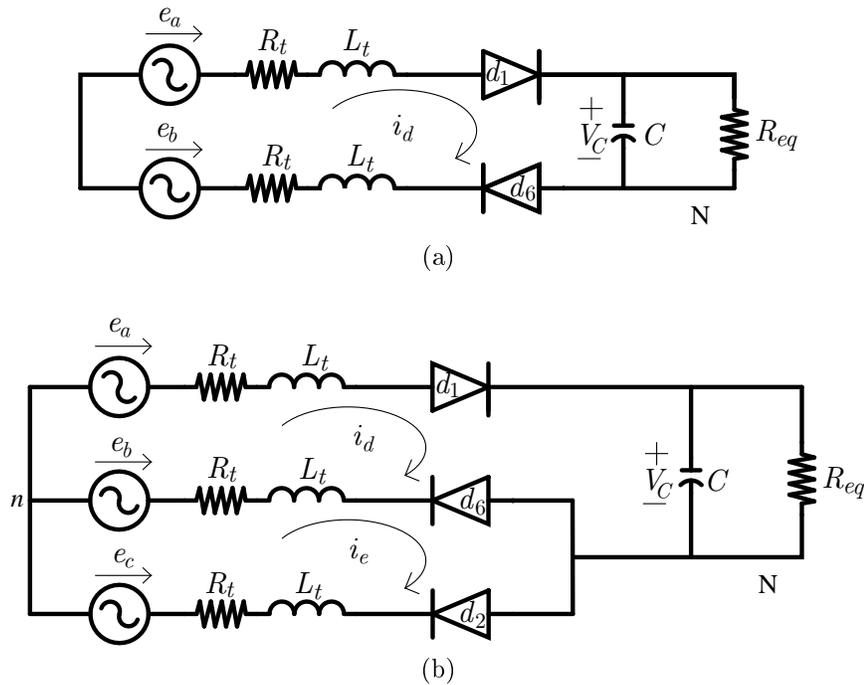


Figura 4.23: (a) Topología válida en el subintervalo de conducción; (b) Topología válida en el subintervalo de conmutación del RT en el MOC.

La operación del RT en estado estable en el MOC puede ser descrita cada 6° del valor del periodo de la señal de la fuente de alimentación [Lian et al, 2008]. En la Figura 4.24, el subintervalo de conducción se representa por la fracción de periodo η y el subintervalo de conmutación se representa por el segmento μ cuyo valor está dado por $\frac{T}{6} - \eta$. Asimismo se observa como el encendido y el apagado de los diodos se traslapa debido al subintervalo de conmutación μ y γ se refiere al tiempo cuando el grupo de diodos d_1, d_6 inician a conducir y la corriente i_a es mayor de cero.

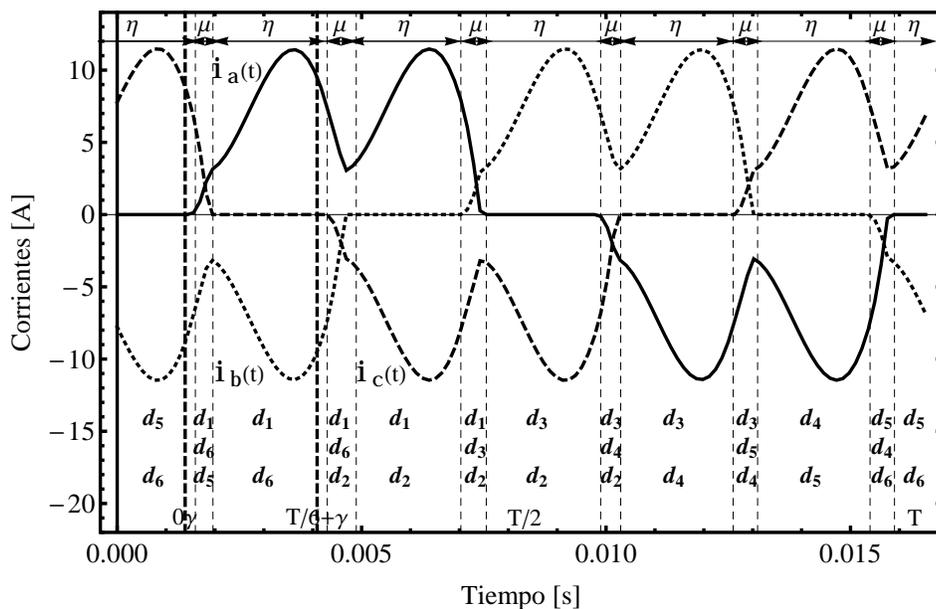


Figura 4.24: Formas de onda de las corrientes trifásicas en el MOC

Las formas de onda en el estado estable para el MOC se muestran en la Figura 4.25, las magnitudes del voltaje y la corriente son multiplicadas por un factor de 1.8 y 10 respectivamente, para tener una apreciación visual clara.

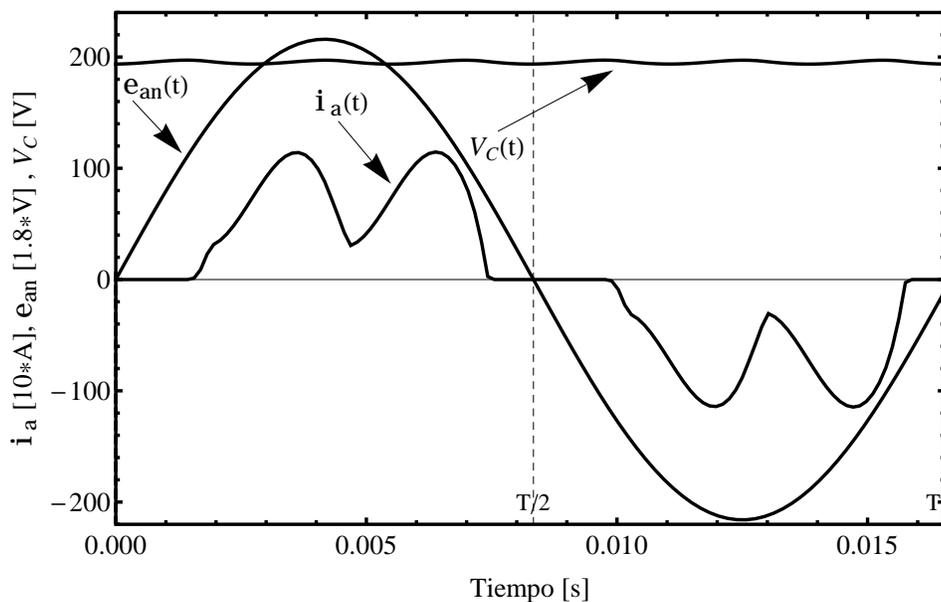


Figura 4.25: Formas de onda en el MOC

Para la obtención de las señales periódicas del convertidor utilizando el cálculo de

estado estable se requiere resolver un PLC de dimensión 768×768 , para un periodo de $1/60$ segundos que corresponde al voltaje de entrada con un paso de integración de $1/(60 \times 128)$. Las dimensiones de la matriz M_N de 768×768 corresponden al producto de $N = 128$ por las dimensiones del producto matricial $CIAB$ que es de 6×6 . El costo computacional requerido para el cálculo del MOC es de 18.2018 segundos.

4.4.3. Modo de Operación Discontinuo del Rectificador Trifásico en Estado Estable

En la literatura para el análisis del MOD [Lian et al, 2008] y [Carpinelli et al, 2004], proponen que este modo de operación se compone de un subintervalo de conducción y un subintervalo de no-conducción. Las topologías válidas para el MOD se muestran en la Figura 4.26.

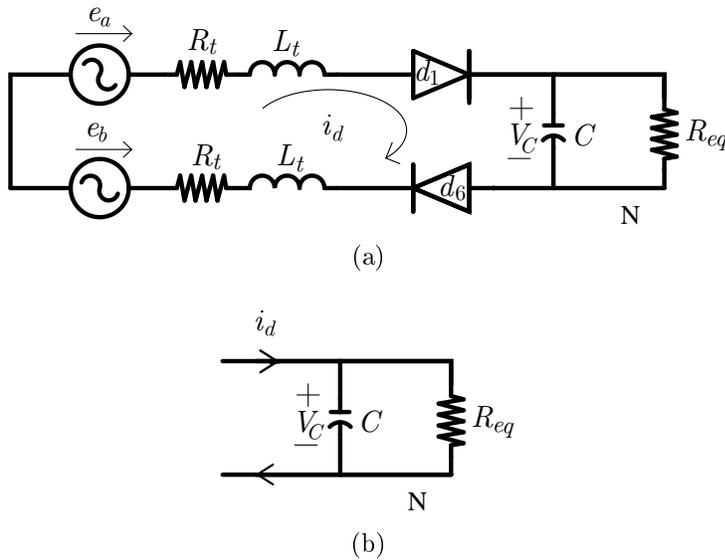
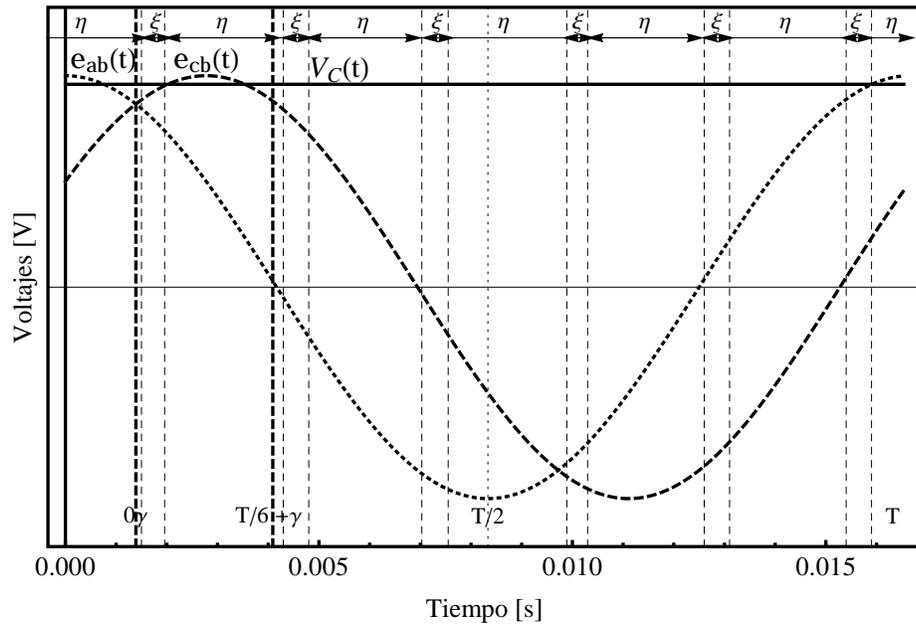
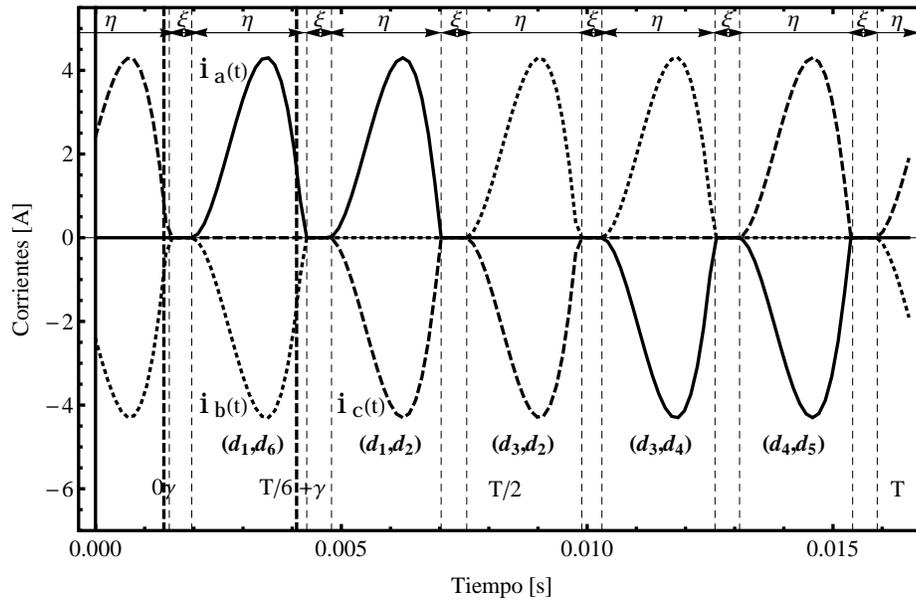


Figura 4.26: Topologías válidas en el MOD: (a) Modelo para el subintervalo de conducción; (b) Modelo para el subintervalo de no-conducción

En cada 6° del periodo de la señal de la fuente de alimentación se presentan los subintervalos que describen en forma completa el MOD. En la Figura 4.27b, el subintervalo de conducción es representado por η y el subintervalo de no-conducción se representa por $\xi = \frac{T}{6} - \eta$ segundos.



(a)



(b)

Figura 4.27: Formas de onda en el MOD: (a) Voltajes de CA y de CD; (b) Corrientes trifásicas

En la Figura 4.27a se muestra la forma de onda del voltaje en el capacitor V_C . En esta condición de operación el instante γ representa el punto de intersección entre los voltajes e_{ab} y e_{cb} el cual es utilizado como un punto de referencia para realizar el análisis del MOD [Lian et al, 2008]. Cuando los diodos d_1 y d_6 no conducen, el capacitor se

descarga a través de la carga resistiva, este comportamiento se repite en cada segmento ξ . En la Figura 4.28, el voltaje en el capacitor es más plano que el voltaje obtenido en el MOC de la Figura 4.25, causado por la magnitud del filtro capacitivo. La magnitud de la corriente y el voltaje es multiplicada por un factor de 30 y 1.8 respectivamente, para tener una mejor apreciación visual en conjunto con el voltaje del capacitor V_C . El desfase de la corriente i_a en el MOC y el MOD es pequeño debido a la magnitud de la inductancia de las fuentes de voltaje e_a, e_b, e_c .

Los datos para la simulación del MOD se muestran en la Tabla 4.7.

Tabla 4.7: Datos del RT para el MOD

e_a	$120 \text{ sen}(377t)$	V
e_b	$120 \text{ sen}(377t - 2\frac{\pi}{3})$	V
e_c	$120 \text{ sen}(377t + 2\frac{\pi}{3})$	V
R_t	0.001Ω	Ω
L_t	1.0	mH
C	1400.0	μF
Req	100.0	Ω

El tiempo de cómputo requerido para realizar la simulación es de 14.2806 segundos con el algoritmo de Lemke. El paso de integración seleccionado es de $1/(60 \times 128)$ y el proceso del cálculo requiere resolver un PLC con una dimensión de 768×768 . Soluciones más exactas pueden ser obtenidas utilizando un paso de integración más pequeño con un costo computacional mayor.

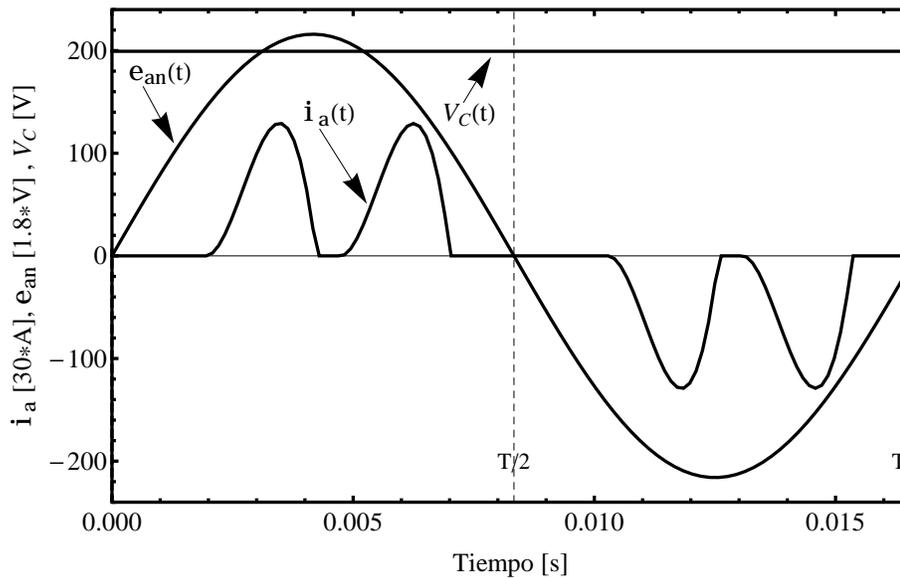


Figura 4.28: Formas de onda en el MOC

4.4.4. Respuesta Transitoria en el Modo de Operación Continuo del Rectificador Trifásico

El cálculo de la respuesta transitoria para la corriente i_a se muestra en la Figura 4.29. Los resultados de la simulación transitoria concuerdan con los resultados obtenidos en la Subsección 4.4.2 aplicando el desarrollo para el cálculo de estado estable presentado en la Sección 2.5. Se observa como utilizando el modelo complementario y los paquetes de simulación comercial como PSpice y Simulink aseguran que las corrientes sean cero en el intervalo de no-conducción.

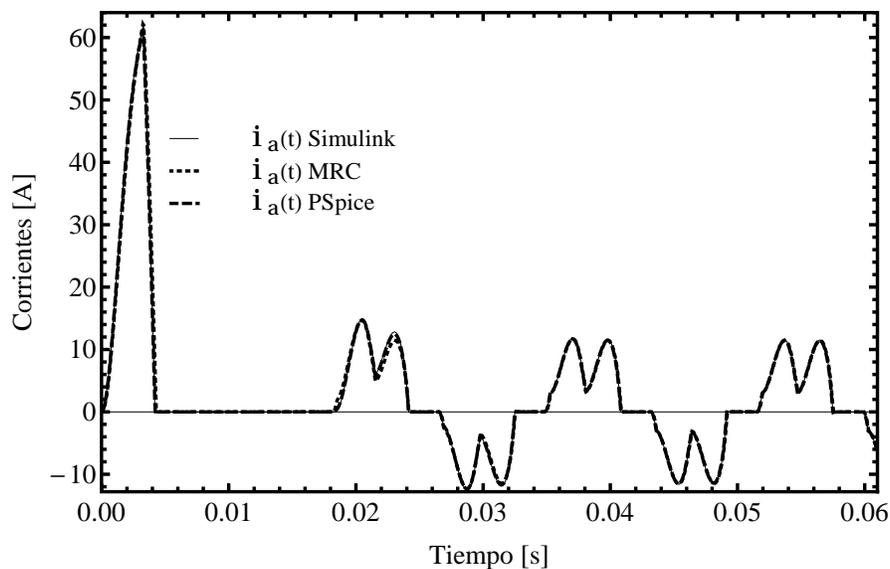


Figura 4.29: Formas de onda de la corriente en el MOC obtenidas utilizando PSpice, Simulink y el MRC

En Simulink para resolver el modelo del RT se utilizó el método de integración *Ode3* con un paso de integración fijo de 6.5104×10^{-5} segundos. Resultados similares son obtenidos utilizando el método de integración numérica *Ode45* con un paso de integración variable y una tolerancia relativa de 1.0×10^{-6} . Los parámetros considerados en Simulink y PSpice para el modelo de los diodos ($d_1, d_2, d_3, d_4, d_5, d_6$) constan de una resistencia de encendido ($R_{enc} = 0.001 \Omega$), una resistencia de protección ($R_{protecc} = 1000.0 \Omega$), y una capacitancia de protección ($C_{proteccion} = 0.1 \mu F$).

Con el objetivo de comparar el desempeño computacional entre Simulink y el MRC se utilizó un mismo paso de integración (6.5104×10^{-5}) para un tiempo de simulación de $7/60$ segundos. El tiempo de integración en Simulink es de 1.4116 segundos con el método de integración *Ode3* con un paso de integración fijo y en el MRC es de 2.2827

segundos.

4.4.5. Respuesta Transitoria en el Modo de Operación Discontinuo del Rectificador Trifásico

El cálculo de la respuesta transitoria para la corriente i_a se muestra en la Figura 4.30. La forma de onda de la corriente i_a obtenida con el MRC y los simuladores comerciales: Simulink y PSpice validan las formas de onda obtenidas en el cálculo de estado estable para el MOD obtenidos en la Subsección 4.4.3.

Los resultados en Simulink fueron calculados utilizando el método de integración *Ode3* con un paso de integración fijo de 3.2552×10^{-5} y el método de integración *Ode45* con un paso de integración variable y una tolerancia relativa de 1.0×10^{-6} . Con ambos métodos de integración las formas de onda son aproximadamente iguales. Los valores para la resistencia de encendido del diodo y los valores de capacitancia y resistencia de los circuitos de protección son los mismos que los utilizados en el MOC tanto en PSpice como en Simulink. En el MRC se utilizó un paso de integración de 3.2552×10^{-5} . En el MRC el tiempo de cómputo es de 3.3713 segundos para un paso de integración de 3.2552×10^{-5} y en Simulink para el mismo paso de integración (3.2552×10^{-5} con el *Ode3*) es de 2.1580 segundos para un tiempo de simulación de $7/60$ segundos.

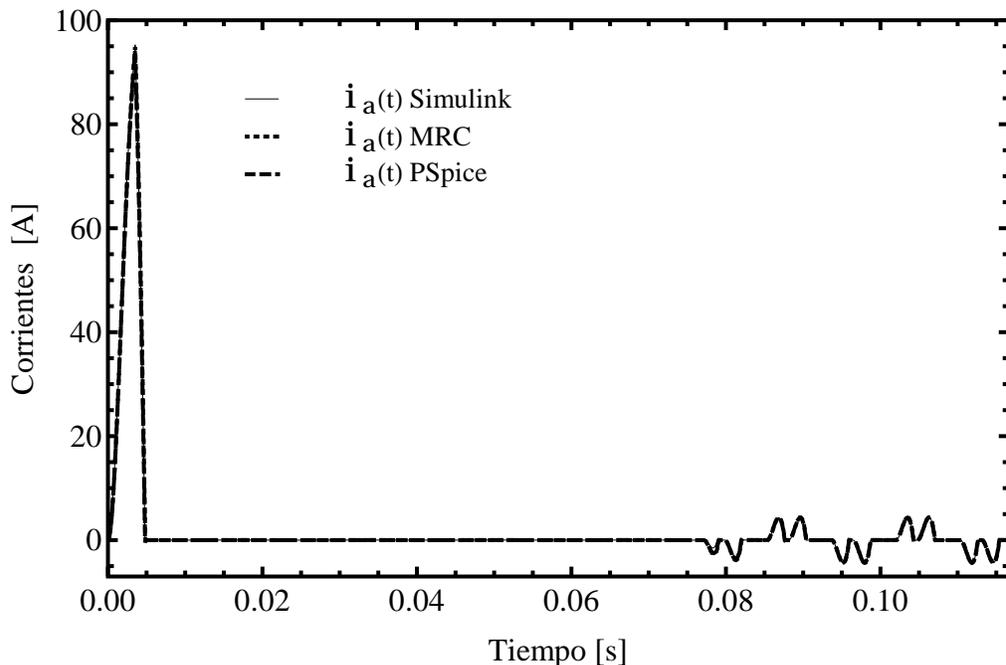
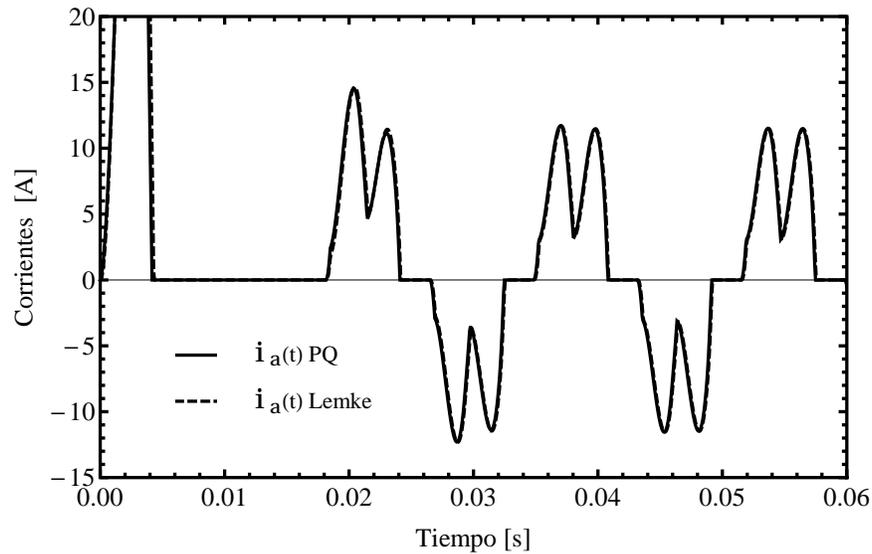


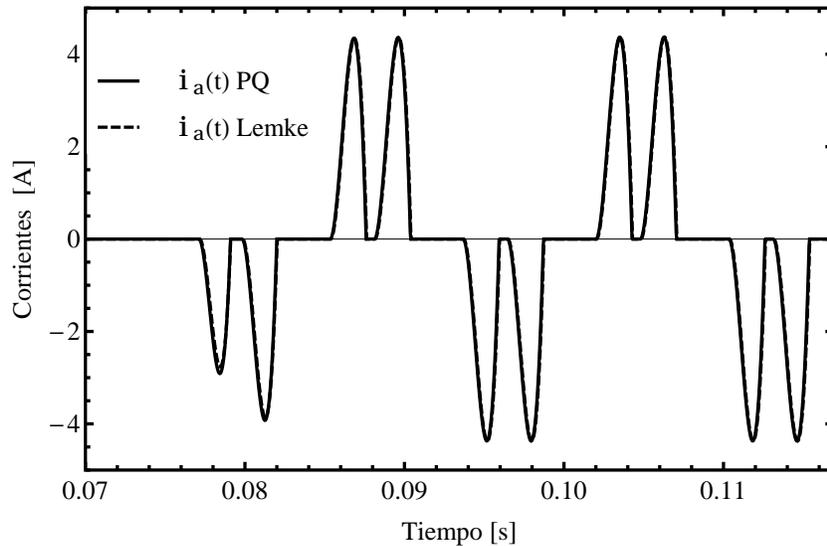
Figura 4.30: Formas de onda de la corriente en el MOD obtenidas utilizando PSpice, Simulink y el MRC

4.4.6. Comparación del Algoritmo de Lemke y Programación Cuadrática en el Cálculo de la Respuesta Transitoria

El propósito de esta subsección consiste en comparar los resultados que se obtienen con el algoritmo de Lemke y el algoritmo de PQ aplicado a la solución del modelo complementario del RT en el modo MOC y el MOD.



(a)



(b)

Figura 4.31: Formas de Onda de la corriente i_a obtenidas con PQ y el Algoritmo de Lemke: (a) En el MOC y; (b) En el MOD

En la Figura 4.31 se muestran las formas de onda para la corriente de la fase i_a , utilizando el algoritmo de Lemke y la función de *FindMinimum* en el MOC y el MOD. Los dos algoritmos pueden reproducir el mismo comportamiento de las formas de onda con lo cual se valida que son equivalentes bajo las consideraciones matemáticas establecidas en la Sección 2.3.

Asimismo con la finalidad de medir el tiempo requerido para realizar el proceso de integración en el MOD, se seleccionó un paso de integración de $1/(60 \times 512)$ con un tiempo de simulación de $7/60$ segundos y el tiempo de cómputo requerido con el algoritmo de Lemke es de 3.3047 segundos y con PQ es de 229.992 segundos. En el MOC el tiempo de cómputo requerido con el algoritmo de Lemke es de 2.6505 segundos y con PQ es de 111.421 segundos para un paso de integración de $1/(60 \times 256)$ con un tiempo de simulación de $7/60$ segundos. En el MOC y el MOD las formas de onda son equivalentes para los pasos de integración seleccionados. Las diferencias en el tiempo de cómputo son apreciables en ambos esquemas de solución del modelo complementario del RT pero la solución basada en un problema de PQ permite la disposición de funciones empaquetadas con una diversidad de métodos que las hacen más robustas y su disposición comercial permite la utilización de software como *Mathematica* y *Matlab*, entre otros algoritmos desarrollados especialmente para resolver problemas de PQ de grandes dimensiones en un menor tiempo de cómputo como el KNITRO [Byrd et al, 2006].

4.4.7. Determinación de la Operación del Rectificador Trifásico en el Modo de Operación en la Condición Frontera

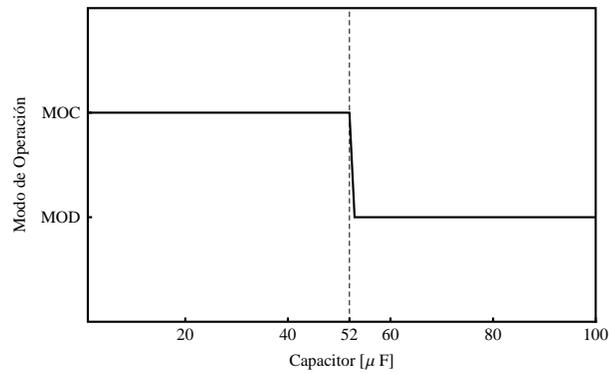
En esta sección se utilizará el modelo complementario para estudiar como afecta la variación de la capacitancia en el modo de operación. Para este propósito se realizaron múltiples simulaciones donde el valor del capacitor fue incrementado de $1.0 \mu F$ hasta $100.0 \mu F$ para evaluar el modo de operación del RT y los resultados obtenidos son mostrados en la Figura 4.32a. El valor crítico del capacitor es el valor donde la corriente i_d se aproxima a cero como se muestra en la Figura 4.32b. Para un valor mayor a $52.0 \mu F$ se presenta el MOD. La determinación de una expresión matemática que determine el modo de operación en la región frontera es complicada de obtener utilizando un MC sin embargo con el modelo complementario es posible realizar las simulaciones necesarias para determinar como afectan los parámetros del RT en el modo de operación, sin importar si para ciertos parámetros eléctricos el RT opera en una condición de operación en la región frontera. Un valor de capacitancia crítica más exacta requiere de un incremento más pequeño en el valor del filtro capacitivo a un costo computacional

mayor por el número de simulaciones a realizar.

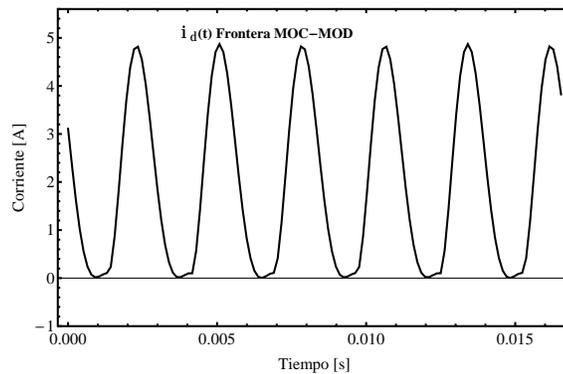
Para determinar el valor de capacitancia crítica correspondiente al modo de operación en la región frontera se consideraron los datos de la Tabla 4.8.

Tabla 4.8: Valores para determinar el MOC y el MOD variando la capacitancia

e_a	$120 \text{ sen}(377t)$	V
e_b	$120 \text{ sen}(377t - 2\frac{\pi}{3})$	V
e_c	$120 \text{ sen}(377t + 2\frac{\pi}{3})$	V
R_t	0.001	Ω
L_t	1.0	mH
C	{1 – 100}	μF
ΔC	1.0	μF
Req	100.0	Ω



(a)



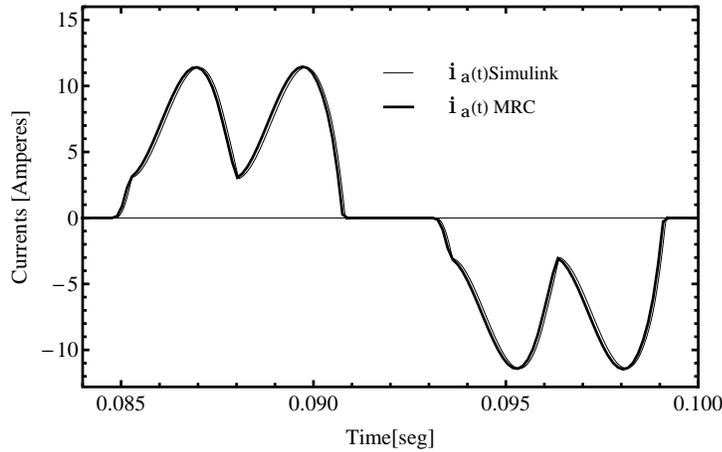
(b)

Figura 4.32: (a) Modo de operación del RT como función del capacitor; (b) Forma de onda de la corriente i_d en la región frontera

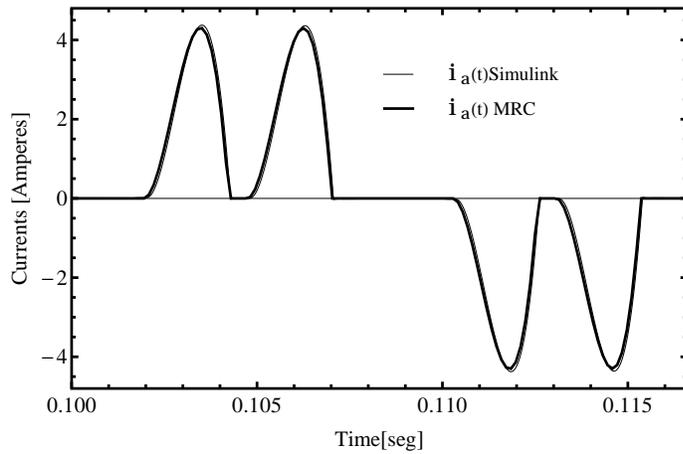
En la Figura 4.32b se muestra el comportamiento de la corriente i_d en el RT para

el valor de capacitancia crítica ($52.0 \mu F$). Obsérvese como la corriente i_d se acerca al valor de cero pero no lo toca lo cual significa que el RT opera en la región frontera.

4.4.8. Análisis Armónico de los Modos de Operación del Rectificador Trifásico



(a)



(b)

Figura 4.33: Comparación de la corriente i_a en estado estable con Simulink y el MRC: (a) En el MOC y; (b) En el MOD

En las Subsecciones 4.4.2 y 4.4.3 se mostró el comportamiento de las formas de onda para las corrientes en las fases (i_a i_b i_c) en el MOC y el MOD. Claramente se observó que las formas de onda de las corrientes (i_a i_b i_c) en el MOD están distorsionadas y se alejan de la forma senoidal del voltaje debido a: la característica no lineal de los diodos

durante el proceso de conmutación y a los valores de los parámetros del RT. El objetivo de esta sección consiste en mostrar el contenido armónico en el MOC y el MOD para la corriente de la fase a . Las señales de las corrientes (i_a i_b i_c) son simétricas por lo que el contenido armónico en cualquiera de las fases es el mismo.

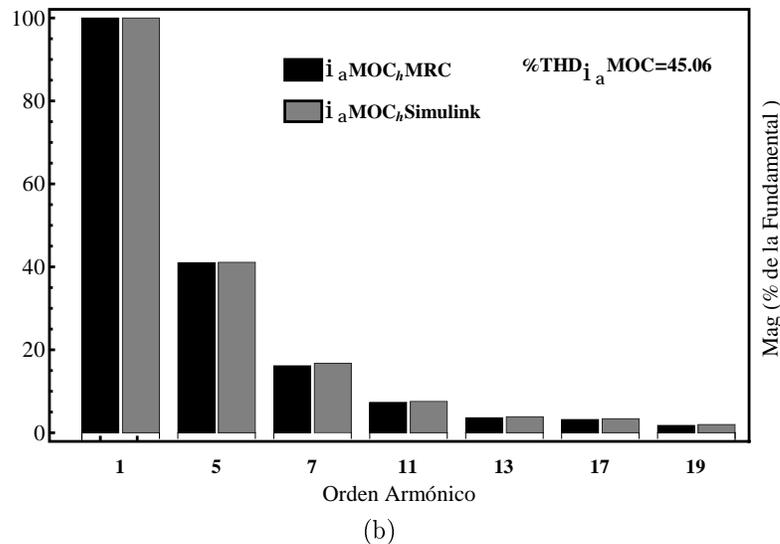
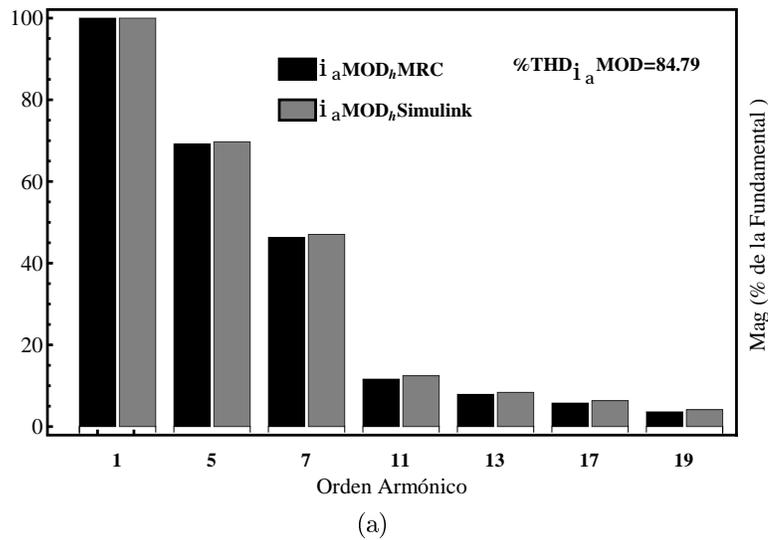


Figura 4.34: Magnitudes de las corrientes armónicas de la fase i_a en por ciento de la fundamental en el MOC y el MOD utilizando el MRC y Simulink

Las formas de onda para la corriente i_a en el MOC y el MOD se muestran en la Figura 4.33. Para la apreciación de las formas de onda en el estado estable se superpuso la corriente obtenida con el MRC en un tiempo para el cual la corriente obtenida con Simulink es periódica. Las corrientes en el estado estable (obtenidas con el concepto de

estado estable periódico en el MRC) muestran diferencias en magnitud con las obtenidas en Simulink. Esto explica las diferencias en las magnitudes de las armónicas de la corriente i_a calculadas con el MRC y Simulink mostradas en la Figura 4.34. Esta diferencia puede ser reducida si se incrementa el número de puntos logrando un paso de integración más pequeño.

El valor rms de la corriente i_a en el MOC y el MOD utilizando el MRC y Simulink se muestran en la Tabla 4.9. Para validar las simulaciones en el dominio armónico se utilizó el analizador de armónicos de Simulink y los resultados obtenidos se muestran en la Figura 4.34. Finalmente en la Figura 4.35, se hace una comparación de los armónicos en el MOC y el MOD utilizando el MRC. En general el MOD se caracteriza por una nivel de distorsión mayor en la corriente i_a en relación con el nivel de distorsión obtenido en el MOC.

Tabla 4.9: Valores RMS de la corriente i_a en el MOC y el MOD utilizando el MRC y Simulink

	MRC	Simulink
$I_a MOC$	6.15041	6.16314
$I_a MOD$	1.60938	1.60513

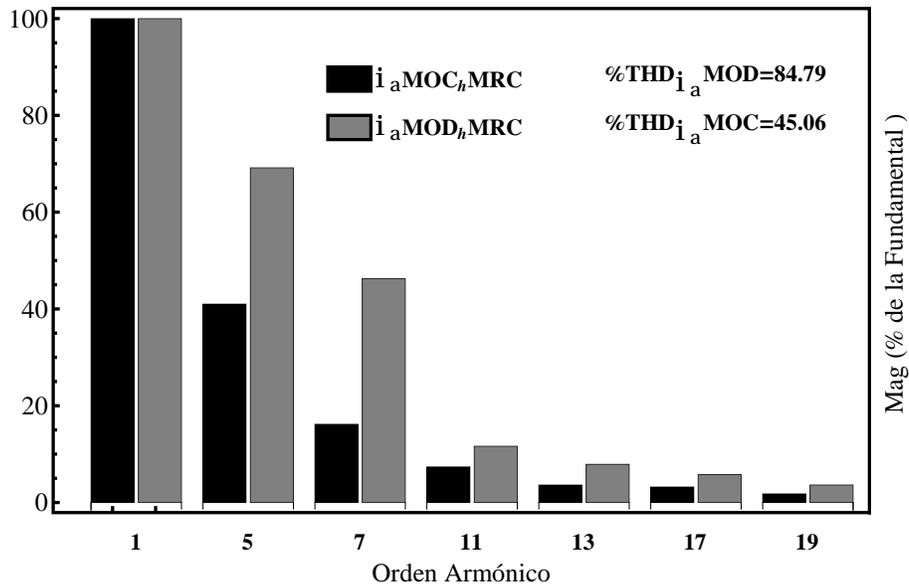


Figura 4.35: Comparación de las magnitudes de las corrientes armónicas de la fase i_a en porcentaje de la fundamental en el MOC y el MOD

4.4.9. Influencia de los Armónicos de las Fuentes de Voltaje en el Modo de Operación

En la Subsección 4.4.7 se presentó la influencia del capacitor en el modo de operación del RT. Concluyendo que valores altos de capacitancia pueden dar lugar a un MOD en el RT. Otro tipo de factores que pueden ser estudiados para observar la influencia en el modo de operación es la variación de la potencia de corriente directa absorbida por la carga, la relación de impedancia X_t/R_t o bien, la adición de armónicos en las fuentes de voltaje. El objetivo de esta subsección se centra en investigar como los armónicos de las fuentes de voltaje afectan el modo de operación del RT. En la Subsección 4.4.2 el RT opera en el MOC, para estos mismos parámetros eléctricos se analiza la influencia que tienen los armónicos de las fuentes de voltaje en el modo de operación. Para los casos de estudio (b) y (c), las fuentes de voltaje contienen las armónicas 5^a , 7^a , 11^a , 13^a , con una amplitud del 3% de la magnitud de la fundamental del voltaje de fase. Para el caso de estudio (b), las armónicas 5^a , 13^a , tienen el mismo ángulo de fase de la fundamental y las armónicas 7^a , 11^a , tiene un ángulo de fase opuesto al ángulo de fase de la fundamental. Para el caso de estudio (c), las armónicas 7^a , 13^a , tienen el mismo ángulo de fase de la fundamental y las armónicas 5^a , 11^a tiene un ángulo de fase opuesto al ángulo de fase de la fundamental. En el caso de estudio (d) se pretende mostrar el desempeño del algoritmo de Lemke para detectar el cruce por cero de las corrientes de fase en el lado de CA para una armónica séptima con una amplitud de 100 V en serie con el voltaje de la fase b . Los parámetros eléctricos para los casos de estudio (a), (b), (c) y (d) se muestran en la Tabla 4.10.

Tabla 4.10: Parámetros eléctricos comunes para los casos de estudio (a), (b), (c) y (d)

R_t	0.001 Ω	Ω
L_t	1.0	mH
C	1000.0	μF
R_{eq}	25.0	Ω

Los valores de los voltajes en cada uno de los casos de estudio se anotan a continuación:

voltajes en el caso de estudio (a)

$$\begin{aligned}
 e_a &= 120 \operatorname{sen}(377t) V \\
 e_b &= 120 \operatorname{sen}(377t - 2\frac{\pi}{3}) V \\
 e_c &= 120 \operatorname{sen}(377t + 2\frac{\pi}{3}) V
 \end{aligned}$$

voltajes en el caso de estudio (b)

$$\begin{aligned}
 e_a &= 120 \operatorname{sen}(377t) + 3.6 \operatorname{sen}(5 \times 377t) + \\
 &3.6 \operatorname{sen}(7 \times 377t - \pi) + 3.6 \operatorname{sen}(11 \times 377t - \pi) \\
 &\quad + 3.6 \operatorname{sen}(13 \times 377t) V \\
 e_b &= 120 \operatorname{sen}(377t - 2\frac{\pi}{3}) + 3.6 \operatorname{sen}(5 \times 377t - 2\frac{\pi}{3}) \\
 &+ 3.6 \operatorname{sen}(7 \times 377t - \pi - 2\frac{\pi}{3}) + 3.6 \operatorname{sen}(11 \times 377t - \pi - 2\frac{\pi}{3}) \\
 &\quad + 3.6 \operatorname{sen}(13 \times 377t - 2\frac{\pi}{3}) V \\
 e_c &= 120 \operatorname{sen}(377t + 2\frac{\pi}{3}) + 3.6 \operatorname{sen}(5 \times 377t + 2\frac{\pi}{3}) \\
 &3.6 \operatorname{sen}(7 \times 377t + 2\frac{\pi}{3} - \pi) + 3.6 \operatorname{sen}(11 \times 377t + 2\frac{\pi}{3} - \pi) \\
 &\quad 3.6 \operatorname{sen}(13 \times 377t + 2\frac{\pi}{3}) V
 \end{aligned}$$

voltajes en el caso de estudio (c)

$$\begin{aligned}
 e_a &= 120 \operatorname{sen}(377t) + 3.6 \operatorname{sen}(5 \times 377t - \pi) + \\
 &3.6 \operatorname{sen}(7 \times 377t) + 3.6 \operatorname{sen}(11 \times 377t - \pi) \\
 &\quad + 3.6 \operatorname{sen}(13 \times 377t) V \\
 e_b &= 120 \operatorname{sen}(377t - 2\frac{\pi}{3}) + 3.6 \operatorname{sen}(5 \times 377t - \pi - 2\frac{\pi}{3}) \\
 &3.6 \operatorname{sen}(7 \times 377t - 2\frac{\pi}{3}) + 3.6 \operatorname{sen}(11 \times 377t - \pi - 2\frac{\pi}{3}) \\
 &\quad + 3.6 \operatorname{sen}(13 \times 377t - 2\frac{\pi}{3}) V \\
 e_c &= 120 \operatorname{sen}(377t + 2\frac{\pi}{3}) + 3.6 \operatorname{sen}(5 \times 377t - \pi + 2\frac{\pi}{3}) + \\
 &3.6 \operatorname{sen}(7 \times 377t + 2\frac{\pi}{3}) + 3.6 \operatorname{sen}(11 \times 377t - \pi + 2\frac{\pi}{3}) \\
 &\quad + 3.6 \operatorname{sen}(13 \times 377t + 2\frac{\pi}{3}) V
 \end{aligned}$$

voltajes en el caso de estudio (d)

$$\begin{aligned}
 e_a &= 120 \operatorname{sen}(377t) V \\
 e_b &= 120 \operatorname{sen}(377t - 2\frac{\pi}{3}) + 100 \operatorname{sen}(7 \times 377t) V \\
 e_c &= 120 \operatorname{sen}(377t + 2\frac{\pi}{3}) V
 \end{aligned}$$

Los resultados de estado estable de las corrientes de la fase a para diferentes niveles

de distorsión del voltaje de alimentación se muestran en la Figura 4.37; en el caso de estudio (a), las fuentes de voltaje no contienen armónicos y el RT opera en el MOC; para el caso de estudio (b), las fuentes de voltaje contienen armónicos y el RT opera en el MOC; para el caso de estudio (c), las armónicas de las fuentes de voltaje dan como resultado un MOD en el convertidor de potencia. Los formas de onda de los voltajes trifásicos para el caso de estudio (c), mostrados en la Figura 4.36, tienen diferentes magnitudes pico por lo que se tiene un sistema de excitación desbalanceado el cual no representa ninguna dificultad respecto a su representación y simulación en el MRC.

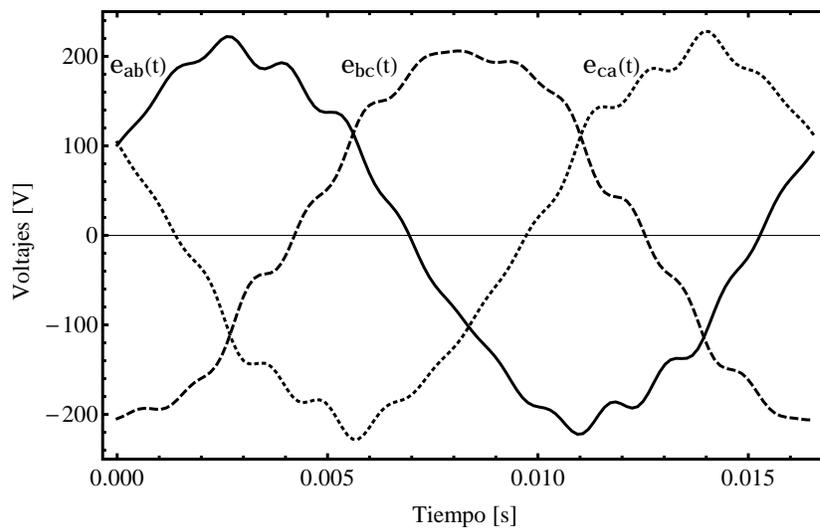


Figura 4.36: Formas de onda de los voltajes trifásicos para el caso de estudio (c)

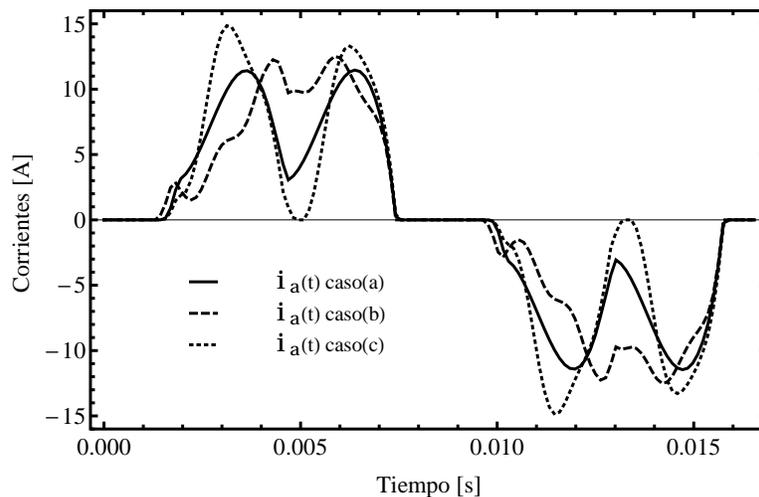


Figura 4.37: Formas de onda de la corriente i_a en los casos de estudio (a), (b) y (c) en el estado estable

Los casos de estudio (a), (b) y (c) muestran que los modos de operación del convertidor trifásico dependen de la magnitud de los armónicos, del tipo de armónicos y de sus ángulos de fase. Mostrando como el modelo complementario del RT es válido para representar diferentes escenarios de operación como: el MOC y el MOD. Asimismo se muestra que es posible reproducir la dinámica del convertidor aun para condiciones de desbalanceo del voltaje de alimentación con el modelo complementario. Con la herramienta para el cálculo de estado estable y la respuesta transitoria en el MRC, el RT puede ser estudiado con diferentes propósitos; con el análisis transitorio es posible diseñar adecuadamente los valores de las capacidades de los diodos así como los circuitos de protección para la carga; con el desarrollo para el cálculo de estable en el MRC se provee de un adecuado instrumento para analizar los armónicos presentes en el RT sin necesidad del cálculo de la respuesta transitoria, lo cual es útil cuando se tiene un transitorio de larga duración y se desea conocer las formas de onda en el estado estable periódico.

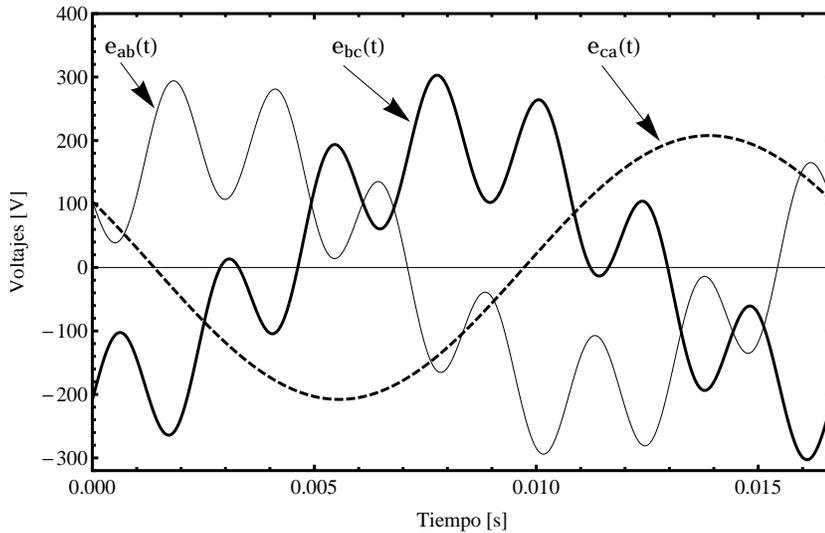
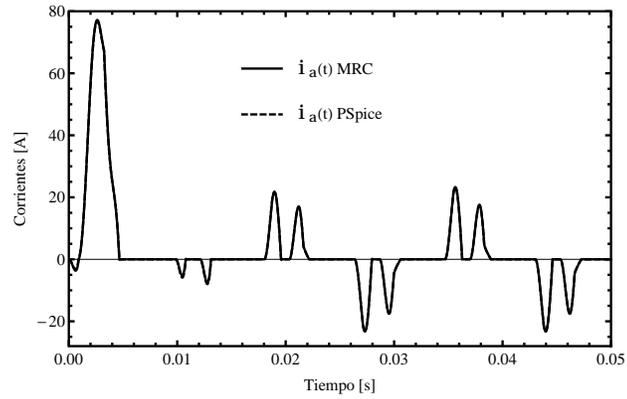


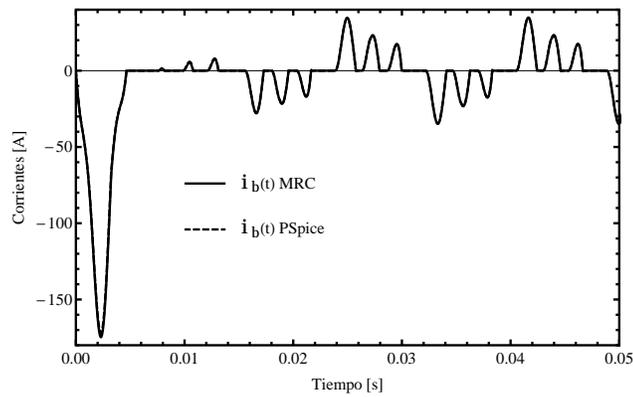
Figura 4.38: Formas de onda de los voltajes trifásicos para el caso de estudio (d)

Para el caso de estudio (d) se tiene una alimentación trifásica desbalanceada donde la armónica séptima da lugar a cruces por cero rápidos de los voltajes como se muestra en la Figura 4.38. De esta forma este caso de estudio es útil si desea mostrar el desempeño del algoritmo de Lemke en la detección de los cruces de la corriente utilizando el cálculo de la respuesta transitoria y el cálculo del estado estable. Las formas de onda para cada una de las corrientes de las fases del RT se muestran en la Figuras (4.39a, 4.39b, 4.39c). Los resultados de simulación obtenidos con el MRC son comparados con PSpice mostrando que ambos esquemas de simulación son equivalentes y el algoritmo de Lemke

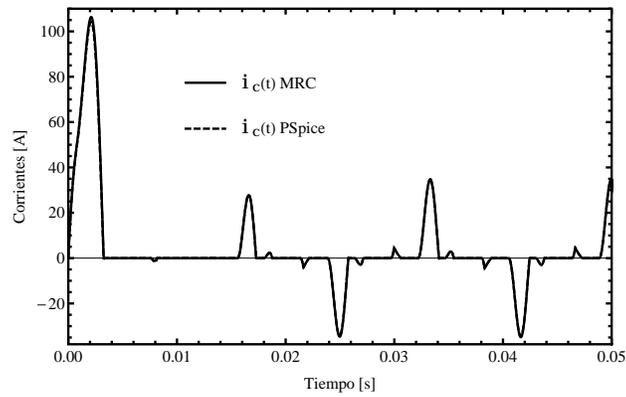
tiene un desempeño equivalente a los esquemas de integración de PSpice. El paso de integración utilizado en el MRC es de $1/(60 \times 4096)$ segundos.



(a)



(b)



(c)

Figura 4.39: Formas de onda de las corrientes del RT durante el transitorio en el caso de estudio (d)

Resultados similares son obtenidos con PSpice y la utilización del concepto de estado estable del MRC. Donde las formas de onda de las corrientes de fase son superpuestas mostrando concordancia con los resultados presentados en la Figura 4.40. En el MRC se utilizó un paso de integración de $1/(60 \times 128)$ donde se resuelve un PLC con una matriz M_N de 768×768 con un tiempo de cómputo de 15.2871 segundos para un tiempo de simulación de $1/60$ segundos.

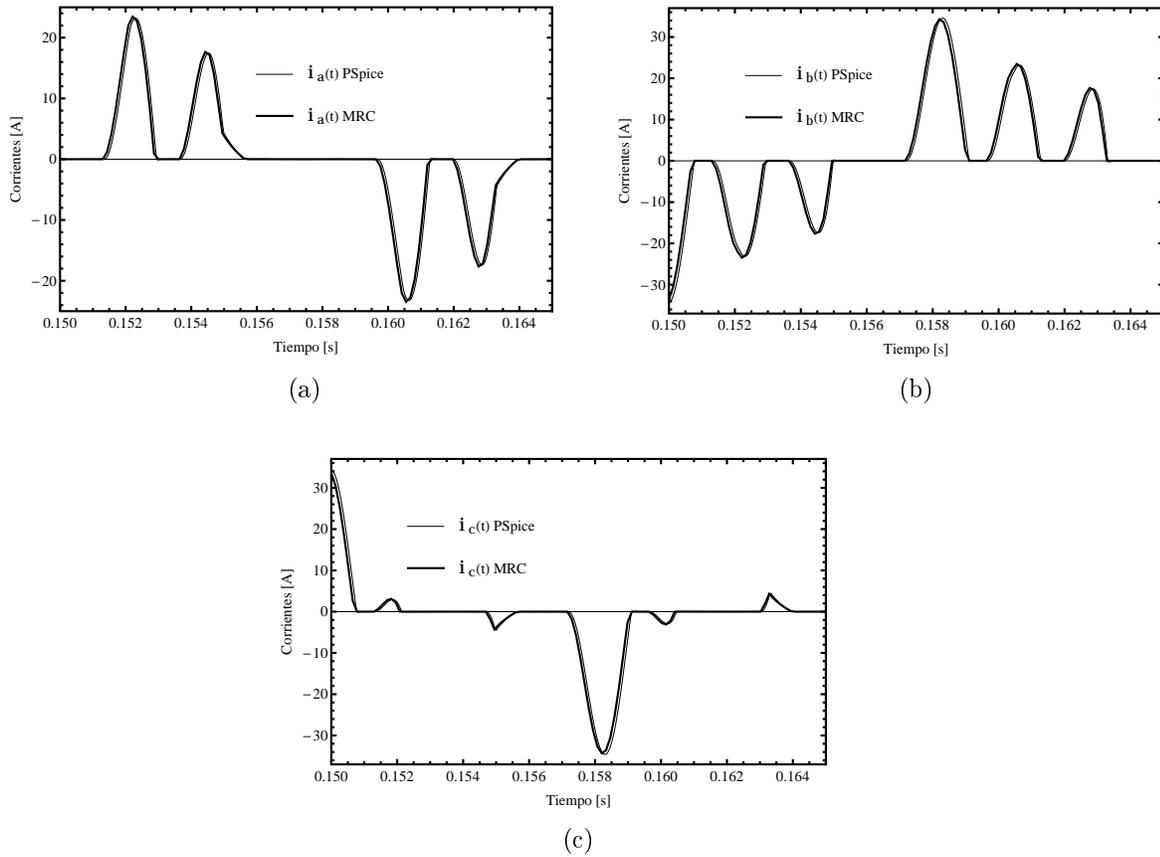


Figura 4.40: Formas de onda de las corrientes de las fases con el cálculo de estado estable utilizando el MRC para el caso de estudio (d)

4.5. Análisis de la Existencia de una Solución en Base a la Matriz M

Las matrices M y M_N para el ROC y el RT son matrices no simétricas y los Valores Propios que se obtienen son valores reales e imaginarios por lo que para obtener un análisis correcto sobre la positividad de las matrices se utiliza la siguiente relación $(M + M^T)/2$ que es una matriz simétrica [Murty, Tien, 1997]. El análisis de los Valores

4.5. ANÁLISIS DE LA EXISTENCIA DE UNA SOLUCIÓN EN BASE A LA MATRIZ M

Propios de la matriz $(M + M^T)/2$ en el modelo complementario del ROC y el RT que se muestran en las Tablas 4.11 y 4.12 aseguran múltiples soluciones o ninguna solución independientemente si se utiliza el algoritmo de Lemke o PQ. Así también la matriz $(M_N + M_N^T)/2$ que resulta para el cálculo de estado estable del ROC y el RT es semipositiva definida como se describe en las Figuras 4.41 y 4.42 donde su Valores Propios son mayores o iguales a cero y una solución de múltiples es obtenida en el MOC y el MOD con el algoritmo de Lemke. Asimismo su solución puede ser planteada y obtenida como un problema de PQ presentada en las Subsecciones 4.3.6 y 4.4.6.

Tabla 4.11: Valores Propios del ROC en el MOC y el MOD en el análisis transitorio

Valores Propios en el MOC	Valores Propios en el MOD
0.578436	0.0320307
0.0320307	0.0232488
0	0
0	0

Tabla 4.12: Valores Propios del RT en el MOC y el MOD en el análisis transitorio

Valores Propios en el MOC	Valores Propios en el MOD
0.194805	0.139444
0.0650999	0.0650999
0.0650999	0.0650999
-3.92977×10^{-17}	-9.6931×10^{-18}
6.53449×10^{-18}	6.1808×10^{-18}
6.1808×10^{-18}	-1.11165×10^{-18}

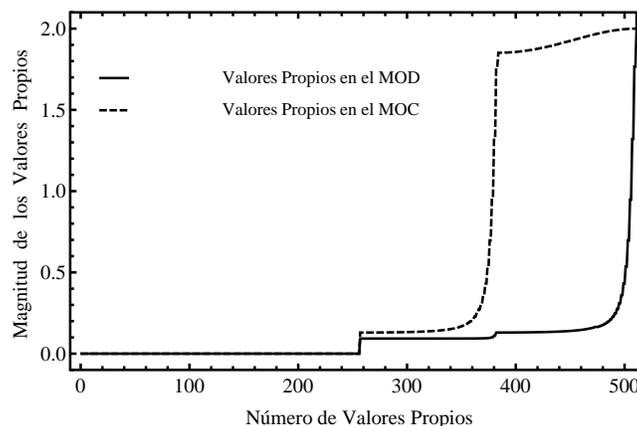


Figura 4.41: Valores Propios en el MOC y el MOD del ROC de la matriz $(M_N + M_N^T)/2$

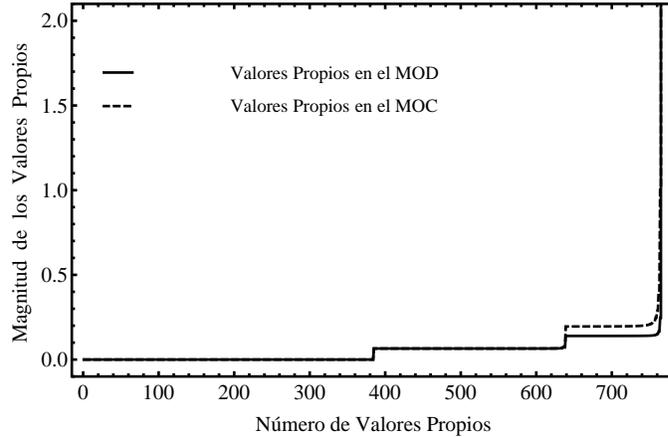


Figura 4.42: Valores Propios en el MOC y el MOD del RT de la matriz $(M_N + M_N^T)/2$

4.6. Comparación del Rectificador de Onda Completa y el Rectificador Trifásico

En los resultados de simulación del ROC y el RT se observa que a medida que el valor del capacitor se incrementa, el rizado en el voltaje de CD es menor. La utilización de un filtro capacitivo de gran magnitud se traduce en un incremento en el nivel de distorsión de la corriente en el lado de CA, asimismo se observa que la corriente en el lado de CD se extingue para una porción del periodo. En el MOD, la corriente de la fase a en el RT se caracteriza por las armónicas 5^a , 7^a , 11^a , 15^a , 17^a ; en el ROC aparecen las armónicas impares lo cual es congruente de acuerdo a [Mohan et al, 1995]. Debido a la magnitud y el tipo de armónicas así como sus fases el ROC presenta un mayor nivel de distorsión que el RT. Si se tiene a disposición un sistema de alimentación trifásico y se requiere un voltaje de CD, el RT es una mejor opción hablando en términos de calidad de energía y capacidad de conversión de potencia. Si los requerimientos de diseño son más estrictos y el diseñador debe atender al nivel de distorsión armónica producida por el convertidor de potencia, el rizado en el voltaje de CD y los armónicos inyectados por el voltaje de alimentación, entre otras consideraciones, con los modelos complementarios del ROC y el RT es posible realizar simulaciones para encontrar el valor del filtro capacitivo que satisfaga los requerimientos del valor del capacitor y el nivel de distorsión armónica. Asimismo si se está interesado en tener una fotografía de los convertidores de CA/CD, en el MOC o en el MOD como una función del valor capacitivo; el MRC ofrece la posibilidad de tener una vista macroscópica rápida de la capacitancia en función del modo de operación, la cual es de gran utilidad cuando

el diseñador no tiene experiencia en la selección del filtro capacitivo. Estudios más detallados y completos sobre la influencia de los armónicos del voltaje en función del modo de operación pueden ser realizados bajo el formalismo complementario de manera satisfactoria.

4.7. Conclusiones

Se ha mostrado que el modelo complementario representa de manera adecuada diferentes escenarios de operación (el MOC, el MOD, y un modo de operación en la región frontera). Con este esquema de solución el cálculo de estado estable periódico como la respuesta transitoria no requiere de algoritmos adicionales basados en la detección de las configuraciones eléctricas que sean válidas para los instantes de conmutación del MOC y el MOD. En la formulación del ROC y el RT se ha mostrado que la representación de los eventos continuos y los eventos discretos se incorpora en un formato unificado. Asimismo se ha mostrado que los algoritmos para resolver los modelos complementarios del ROC y el RT están diseñados adecuadamente para resolver en forma conjunta dinámicas de naturaleza continua sujeta a eventos discretos mediante la utilización de la teoría de los PLCs.

La utilización del algoritmo de Lemke y PQ son equivalentes en cuanto a resultados sin embargo la solución con PQ es más lenta. La ventaja de utilizar PQ es la disponibilidad de este algoritmo en paquetes comerciales como *Mathematica* y *Matlab* donde las funciones de PQ internamente están empaquetadas con una gran cantidad de rutinas que las hacen más robustas comparadas con el algoritmo de Lemke. En el caso de los métodos de integración para simular en Simulink requieren de un conocimiento adecuado sobre los métodos que deben emplearse así como de las tolerancias. En los métodos de integración que se utilizaron en varias simulaciones aparecen problemas de convergencia, o las respuestas no son adecuadas por lo que el usuario requiere estar jugando con el paso de integración y tener un conocimiento que le permita escoger los métodos de integración adecuados.

Indudablemente los algoritmos de solución de Simulink son más rápidos que el algoritmo de Lemke basado en una discretización de Euler, no obstante el MRC representa un herramienta de gran potencial para simular sistemas de EP con diodos donde el cálculo de estado estable es de gran valor computacionalmente porque no son requeridos métodos de solución tipo Newton y aun cuando los procesos de conmutación son altamente no lineales, son manejados sin ninguna dificultad algorítmicamente, evitando los problemas de convergencia.

En el análisis de la topología del RT para generar el modelo complementario se muestra que su representación (generación de sus ecuaciones algebro-diferenciales) no es directa debido a que su árbol es no normal sin embargo su representación en el formato de los SLCs es posible. En [Frasca et al] se propone que para árboles y co-árboles no normales es posible transformarlos en árboles y co-árboles normales insertando interruptores ideales abiertos cuando se tienen inductores en el árbol (para generar trayectorias alternas evitando los inductores) e insertando interruptores ideales cerrados cuando se tienen capacitores en el co-árbol (para romper trayectorias cerradas y se pueda incluir los capacitores en el árbol). Sin embargo para el RT con un filtro en el lado de CA [Alexa et al, 2006], se han utilizado estos mismos principios: resistencias de un valor muy grande para los inductores en el árbol y resistencias muy pequeñas para los capacitores en el co-árbol sin poder probar que el convertidor pueda ser representado como un SLC.

Un proceso automatizado de generación de ecuaciones requiere del desarrollo de un algoritmo computacional que sea capaz de manejar adecuadamente circuitos de EP que contengan un árbol y un co-árbol no normales. Una cuestión interesante sobre la generación automatizada de ecuaciones para representar SLCs consiste en preguntarse si existe siempre una representación de estado (en el formato de los SLCs) para sistemas que contienen un árbol y un co-árbol no normales. Para resolver este problema algunos simuladores se valen de resistencias artificiales (en algunos casos de valor muy grande o muy pequeño, dependiendo si se desea romper una trayectoria o bien si se desea generar una trayectoria cerrada alterna) para resolver el problema de árboles y co-árboles no normales y obtener a través de estas resistencias árboles y co-árboles normales. Una cuestión interesante que surge de esta forma de solucionar el problema de los árboles y co-árboles no normales consiste en la dificultad de establecer algorítmicamente la magnitud de la resistencia (que tan pequeña o que tan grande debe ser) de tal forma que se mantenga un modelo que represente de manera fiel el sistema. Una complejidad que se puede agregar a esta problemática se presenta cuando se requiere analizar un sistema de potencia compuesto de sistemas de EP con un gran número de nodos y se desea analizar cada una de las variables que determinan la evolución del sistema (esto es deseado en sistemas de potencia de gran dimensión los cuales pueden contener sistemas de EP donde no se desea realizar reducciones del circuito, sino más bien se desea una representación matemática completa del circuito eléctrico original), es decir un sistema de orden completo o bien compuesto de un árbol y un co-árbol normal, donde las derivadas de las variables de estado son expresadas independientemente en términos de las variables de estado. Esto sugiere que se requiere investigar un formato

más general que describa circuitos de EP con árboles y co-árboles no normales.

Capítulo 5

Modelado de Sistemas Controlados

5.1. Introducción

La solución de los sistemas electrónicos dentro del MRC que han sido estudiados en el Capítulo 4 constan de diodos únicamente. Se ha probado que tales sistemas pueden ser representados adecuadamente como SLCs. En este capítulo son estudiados sistemas electrónicos que constan de diodos e interruptores electrónicos controlados. Los interruptores electrónicos son manipulados para representar el comportamiento de los interruptores mediante funciones conocidas, de tal forma que puedan ser representados como modelos complementarios. Se presenta la generación de los modelos complementarios para el Convertidor Reductor el cual contiene un esquema de control para seguir un voltaje de referencia y el Convertidor Resonante de CD/CD, respectivamente. En particular el Convertidor Resonante es analizado ante diferentes condiciones de carga y frecuencia para mostrar que el modelo complementario es válido en el MOC y el MOD.

5.2. Obtención del Modelo del Convertidor Reductor

La representación del modelo del Convertidor Reductor en Lazo cerrado puede ser obtenida como un SLC. El Convertidor Reductor presentado en la Figura 5.1 contiene un esquema de control para proporcionar un voltaje constante a la salida mediante un control de Modulación por Ancho de Pulso (MAP).

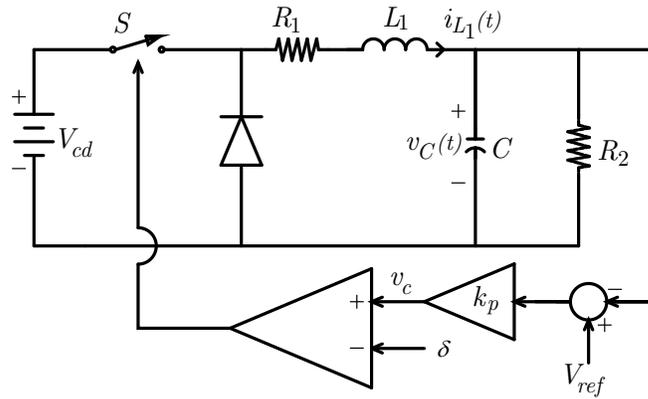


Figura 5.1: Convertidor Reductor controlado por MAP

El comportamiento del Convertidor Reductor puede ser representado por medio del circuito que se muestra en la Figura 5.2. El voltaje de entrada v_{in} es impuesto por el control en Lazo cerrado y es expresado por la relación matemática dada por la Ecuación (5.1) y la Ecuación (5.1).

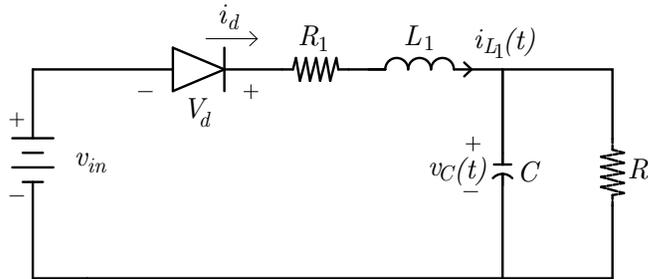


Figura 5.2: Circuito equivalente para el Convertidor Reductor

$$v_{in} = \begin{cases} V_{cd} & \text{para } v_c > \delta \\ 0 & \text{para } v_c < \delta \\ [0, V_{cd}] & \text{para } v_c = \delta \end{cases} \quad (5.1)$$

$$\delta = \frac{\Delta}{T_s} \text{mod}(t, T_s) \quad (5.2)$$

donde δ es una señal diente de sierra con amplitud Δ y periodo T_s , y v_c es el voltaje de control en la entrada del comparador mostrado en la Figura 5.1. Este voltaje es la diferencia del voltaje en el capacitor C y el voltaje de referencia V_{ref} .

La función $\text{mod}(t, T_s)$ es el residuo de dividir t entre T_s . El comportamiento del proceso de MAP puede ser expresado en términos de variables complementarias como

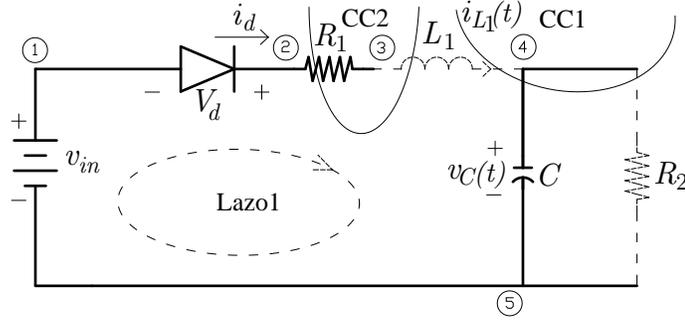


Figura 5.3: CCs y Lazos para el Convertidor Reductor

$$v_{in} = -V_{cd}z_2 + V_{cd} \quad (5.3)$$

$$w_2 = z_3 + v_c - \delta \quad (5.4)$$

$$w_3 = -V_{cd}z_2 + V_{cd} \quad (5.5)$$

$$0 \leq w_2 \perp z_2 \geq 0 \quad (5.6)$$

$$0 \leq w_3 \perp z_3 \geq 0 \quad (5.7)$$

Las variables complementarias z_2, z_3 y w_2, w_3 no han sido marcadas en las Figuras (5.1,5.2) ya que no son variables físicas, pero son utilizadas con el objetivo de representar el esquema de control basado en MAP dentro del MRC. Las Ecuaciones (5.3-5.7) representan el comportamiento del controlador. La operación del controlador se sujeta a las siguientes condiciones de operación: si $v_c > \delta$, de la Ecuación (5.4) se sigue que w_2 es estrictamente positivo independientemente de z_3 (cero o positivo). Entonces el producto entre w_2 y z_2 debe ser cero, por consiguiente $z_2 = 0$ y de la Ecuación (5.3) se tiene que $v_{in} = V_{cd}$. Si $v_c < \delta$ de la Ecuación (5.4) se sigue que $z_3 > 0$ y entonces de la Ecuación (5.7) se debe cumplir que $w_3 = 0$, así también de la Ecuación (5.5) $z_2 = 1$ y de la Ecuación (5.3) $v_{in} = 0$. Finalmente si $v_c = \delta$, de las Ecuaciones (5.5,5.6), z_2 puede tomar cualquier valor entre 0 y 1 y v_{in} puede tomar cualquier valor entre 0 y V_{cd} .

De la Figura 5.1 es posible escribir

$$v_c = k_p(V_{ref} - v_c)$$

Aplicando LVK y LCK a los Lazos y CCs al circuito equivalente del Convertidor Reductor mostrado en la Figura 5.3 se obtiene el modelo complementario descrito a continuación:

del Lazo 1

$$L_1 \frac{di_{L_1}(t)}{dt} = -R_1 i_{L_1}(t) - v_C(t) + V_d + v_{in}, \quad (5.8)$$

del CC1

$$C \frac{dv_C(t)}{dt} = i_{L_1}(t) - \frac{v_C(t)}{R_2}, \quad (5.9)$$

del CC 2

$$i_d = i_{L_1}(t). \quad (5.10)$$

El modelo complementario del Convertidor Reductor en Lazo cerrado queda expresado como sigue

$$L_1 \frac{di_{L_1}(t)}{dt} = -R_1 i_{L_1}(t) - v_C(t) + V_d + (-V_{cd}z_2 + V_{cd}) \quad (5.11)$$

$$C \frac{dv_C(t)}{dt} = i_{L_1}(t) - \frac{v_C(t)}{R_2} \quad (5.12)$$

$$i_d = i_{L_1}(t) \quad (5.13)$$

$$w_2 = z_3 + v_c - \delta \quad (5.14)$$

$$w_3 = -V_{cd}z_2 + V_{cd} \quad (5.15)$$

$$0 \leq i_d \perp V_d \geq 0 \quad (5.16)$$

$$0 \leq w_2 \perp z_2 \geq 0 \quad (5.17)$$

$$0 \leq w_3 \perp z_3 \geq 0 \quad (5.18)$$

definiendo como entrada $u = \begin{pmatrix} 1 & \delta \end{pmatrix}^T$ en forma matricial se tiene

$$A_c = \begin{pmatrix} -\frac{R_1}{L_1} & -\frac{1}{L_1} \\ \frac{1}{C} & -\frac{1}{R_2 C} \end{pmatrix} \quad B_c = \begin{pmatrix} \frac{1}{L_1} & -\frac{V_{cd}}{L_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$E_c = \begin{pmatrix} \frac{V_{cd}}{L_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad C_c = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -k_p \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D_c = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -V_{cd} & 0 \end{pmatrix} \quad F_c = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ k_p V_{ref} & -1 \\ V_{cd} & 0 \end{pmatrix}$$

$$w = \begin{pmatrix} i_d \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} \quad z = \begin{pmatrix} V_d \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$$

5.3. Respuesta Transitoria del Convertidor Reductor en Lazo Cerrado

El objetivo de esta sección consiste en obtener la respuesta en Lazo cerrado para el Convertidor Reductor utilizando un control de voltaje mediante MAP. Los datos considerados para la simulación se muestran en la Tabla 5.1.

Tabla 5.1: Datos de simulación para el Convertidor Reductor

R_1	0.01	Ω
L_1	20	mH
C	47	μF
R_2	22	Ω
V_{cd}	33	V
V_{ref}	5	V
$\delta(t)$	$\frac{\Delta}{T_s} \text{mod}(t, T_s)$	—
Δ	1	—
k_p	8.4	—
T_s	100	μs

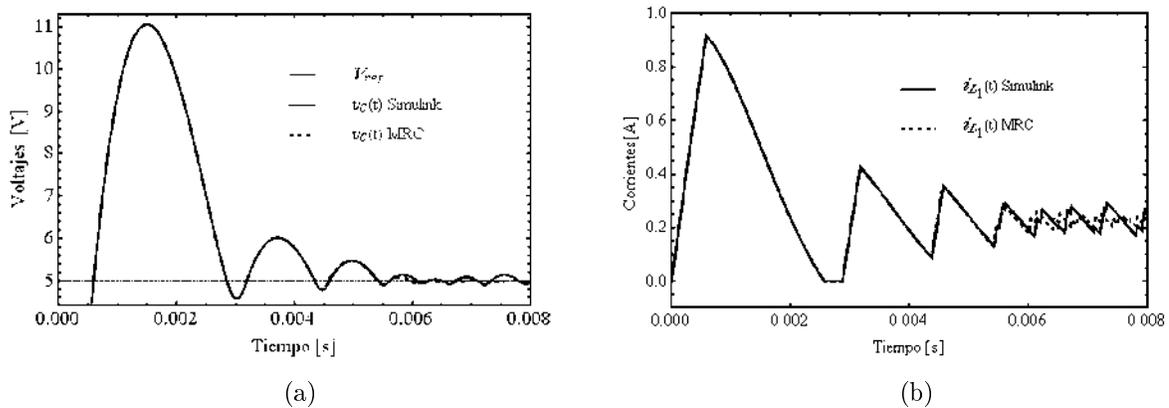
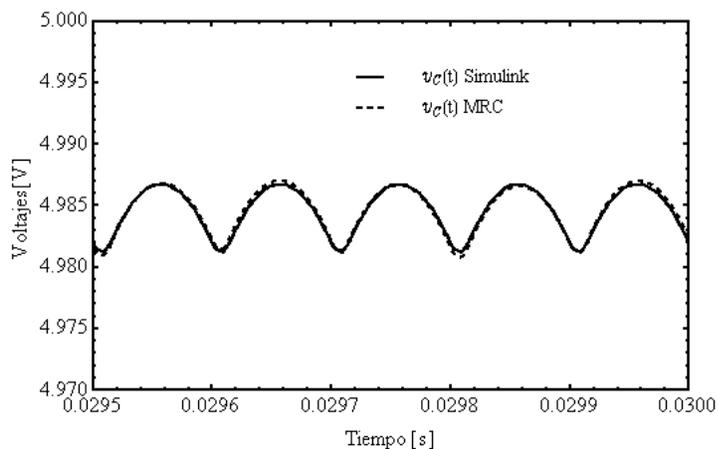


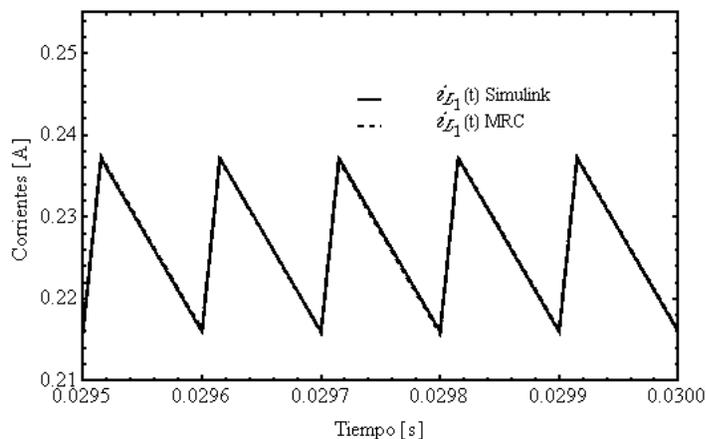
Figura 5.4: Formas de onda del voltaje y la corriente para el Convertidor Reductor en Lazo cerrado

Las formas de onda obtenidas en Lazo cerrado para el Convertidor Reductor se

muestran en la Figura 5.4. El comportamiento del voltaje y la corriente obtenidas con el MRC y las señales obtenidas con Simulink son muy similares y efectivamente el esquema de control de voltaje llega al valor de referencia.



(a)



(b)

Figura 5.5: Vista detallada del voltaje y la corriente en el Convertidor Reductor en Lazo cerrado

En los resultados de simulación obtenidos con el MRC se utilizó un paso de integración de 1.0×10^{-8} y en Simulink se empleó el método numérico de integración *ode23tb* de paso variable con un paso de integración mínimo de 1.0×10^{-6} y una tolerancia relativa de 1.0×10^{-8} . Para efectuar la simulación el tiempo de cómputo requerido en el MRC es de 131.727889 segundos y en Simulink es de 8.3638 segundos para un tiempo de simulación de 0.03 segundos. Una vista detallada del voltaje y la corriente se presenta en la Figura (5.5) mostrando como en el estado estable las formas obtenidas

en Simulink son muy similares a las obtenidas con el MRC. Las pequeñas diferencias de los voltajes apreciadas en la Figura 5.5a, pueden ser reducidas utilizando un paso de integración de 1.0×10^{-9} en ambos esquemas de simulación. Las pequeñas diferencias pueden estar asociadas a los circuitos de protección que tiene por defecto Simulink para los dispositivos de conmutación como es el diodo y el interruptor que forman parte de la topología del Convertidor.

Los resultados de simulación de la Figura 5.4, muestran que es posible modelar sistemas controlados donde su dinámica depende del proceso de conmutación de variables controladas internamente (diodos) y variables controladas externamente (interruptores electrónicos), cuando es posible representar su control como un conjunto de relaciones complementarias. Siendo el MRC útil para modelar y simular sistemas controlados donde el cálculo de la respuesta transitoria del Convertidor Reductor se realiza sin requerir un conocimiento de las configuraciones que experimenta.

5.4. Obtención del Modelo del Convertidor Resonante de CD/CD

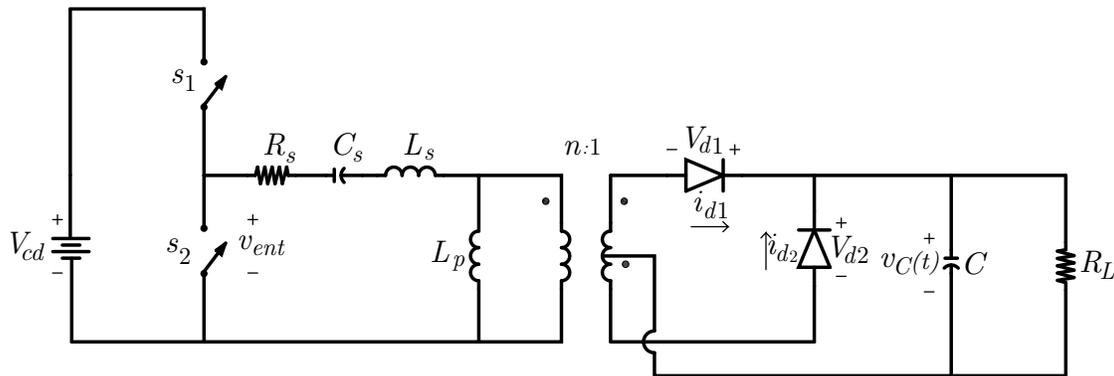


Figura 5.6: Circuito del Convertidor Resonante de CD/CD

El Convertidor Resonante de CD/CD mostrado en la Figura 5.6, está conformado por dos interruptores ideales s_1 y s_2 los cuales son controlados en antifase a una frecuencia de conmutación f_s . El Convertidor es excitado por una fuente de CD independiente V_{cd} . La modulación determina una onda cuadrada de voltaje v_{ent} con una amplitud $|V_{cd}|$. De esta forma el voltaje de entrada V_{cd} y los interruptores s_1 y s_2 se representan como el voltaje v_{ent} para representar el modelo del Convertidor como un circuito equivalente mostrado en la Figura 5.7 y facilitar la construcción de su modelo complementario. El capacitor

C_s y los inductores L_s y L_p representan un circuito resonante. Un transformador con un tap central en el secundario se utiliza para conectar el circuito resonante con el puente rectificador de diodos. Si $|L_p \frac{di_{Lp}(t)}{dt}| < nv_C(t)$ el Convertidor debe operar en el MOD. Para una descripción más detallada sobre la operación del Convertidor Resonante pueden consultarse las siguientes referencias [Foster et al, 2008] y [Yang et al, 2002].

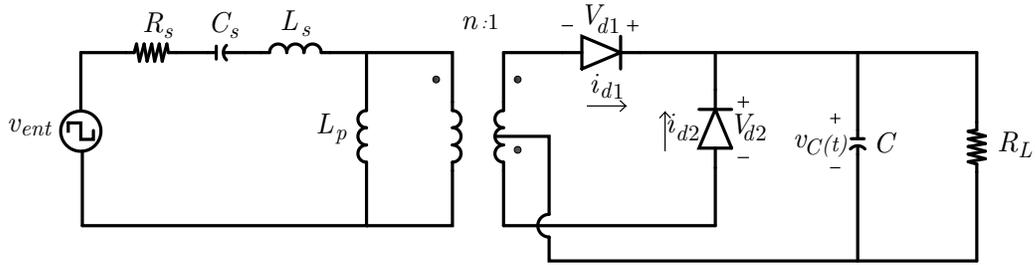


Figura 5.7: Circuito equivalente del Convertidor Resonante de CD/CD

El conjunto de ecuaciones algebro-diferenciales que describen el Convertidor Reductor de CD/CD son tomadas de la referencia [Vasca et al, 2009].

$$\left(\begin{array}{l} \frac{di_{L_s}(t)}{dt} = -\frac{R_s}{L_s}i_{L_s}(t) - \frac{v_{C_s}(t)}{L_s} - n\frac{v_C(t)}{L_s} + n\frac{V_{d1}}{L_s} + \frac{v_{ent}}{L_s} \\ \frac{dv_{C_s}(t)}{dt} = \frac{i_{L_s}(t)}{C_s} \\ \frac{di_{L_p}(t)}{dt} = n\frac{v_C(t)}{L_p} - n\frac{V_{d1}}{L_p} \\ \frac{dv_C(t)}{dt} = n\frac{i_{L_s}(t)}{C} - n\frac{i_{L_p}(t)}{C} - \frac{v_C(t)}{R_L C} + 2\frac{i_{d2}}{C} \\ i_{d1} = ni_{L_s}(t) - ni_{L_p}(t) + i_{d2} \\ V_{d2} = 2v_C(t) - V_{d1} \end{array} \right)$$

En forma matricial el modelo complementario para el Convertidor Resonante de CD/CD es representado por las siguientes matrices

$$A_c = \begin{pmatrix} -\frac{R_s}{L_s} & -\frac{1}{L_s} & 0 & -\frac{n}{L_s} \\ \frac{1}{C_s} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{n}{L_p} \\ \frac{n}{C} & 0 & -\frac{n}{C} & -\frac{1}{R_L C} \end{pmatrix} \quad B_c = \begin{pmatrix} \frac{n}{L_s} & 0 \\ 0 & 0 \\ -\frac{n}{L_p} & 0 \\ 0 & \frac{2}{C} \end{pmatrix} \quad E_c = \begin{pmatrix} \frac{1}{L_s} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 C_c = \begin{pmatrix} n & 0 & -n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad D_c = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad F_c = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

5.5. Cálculo de la Respuesta Transitoria para el Convertidor Resonante CD/CD en el MOC y el MOD.

En esta sección se presentan dos casos de estudio donde el modelo complementario es analizado para diferentes condiciones de frecuencia y carga con el objetivo de mostrar como en el MRC el comportamiento del Convertidor Resonante de CD/CD puede ser estudiado como un SLC el cual es válido en el MOC y en el MOD. En [Foster et al, 2008] se reporta que el MOC para el Convertidor Resonante de CD/CD es descrito por las siguiente relación

$$\lambda \geq \frac{2}{\Pi} \quad (5.19)$$

y en el MOD se cumple que

$$\lambda < \frac{2}{\Pi} \quad (5.20)$$

donde

$$\lambda = \frac{L_p \omega_s}{n^2 R_L} \quad (5.21)$$

$$\omega_s = 2\Pi f_s$$

L_p, R_L, n^2 son parámetros eléctricos del Convertidor Resonante de CD/CD.

Para los datos de la Tabla 5.2,

Tabla 5.2: Parámetros eléctricos del Convertidor Resonante de CD/CD en el MOC

L_s	7.6	μH
R_s	0	Ω
C_s	138	ηF
L_p	9.6	μH
C	100	μF
R_L	1.5	Ω
n	1.64	—
f_s	16000	Hz

el valor del coeficiente λ es de 2.39217 y de acuerdo a la Ecuación (5.19) el convertidor debe operar en el MOC. En la Figura 5.8, se muestran las formas de onda del Convertidor Resonante de CD/CD el cual es alimentado por una onda cuadrada de voltaje con una magnitud de 42 V a la frecuencia f_s . Las formas de onda en el MRC y en Simulink son similares entre si en el transitorio como se muestra en las Figuras (5.8a-5.8c). El paso de integración que se utilizó en el MRC es de 5.0×10^{-9} y en Simulink es de

1.0×10^{-8} con el método de integración *Ode4* (Runge-Kutta). El tiempo de computación en el MRC es de 18.872 segundos mientras que en Simulink es de 1.168 segundos para un tiempo integración de $50/16000$ segundos. Se pueden obtener resultados con un error prácticamente de cero utilizando un paso de integración 5.0×10^{-10} en el MRC y 1.0×10^{-9} en Simulink.

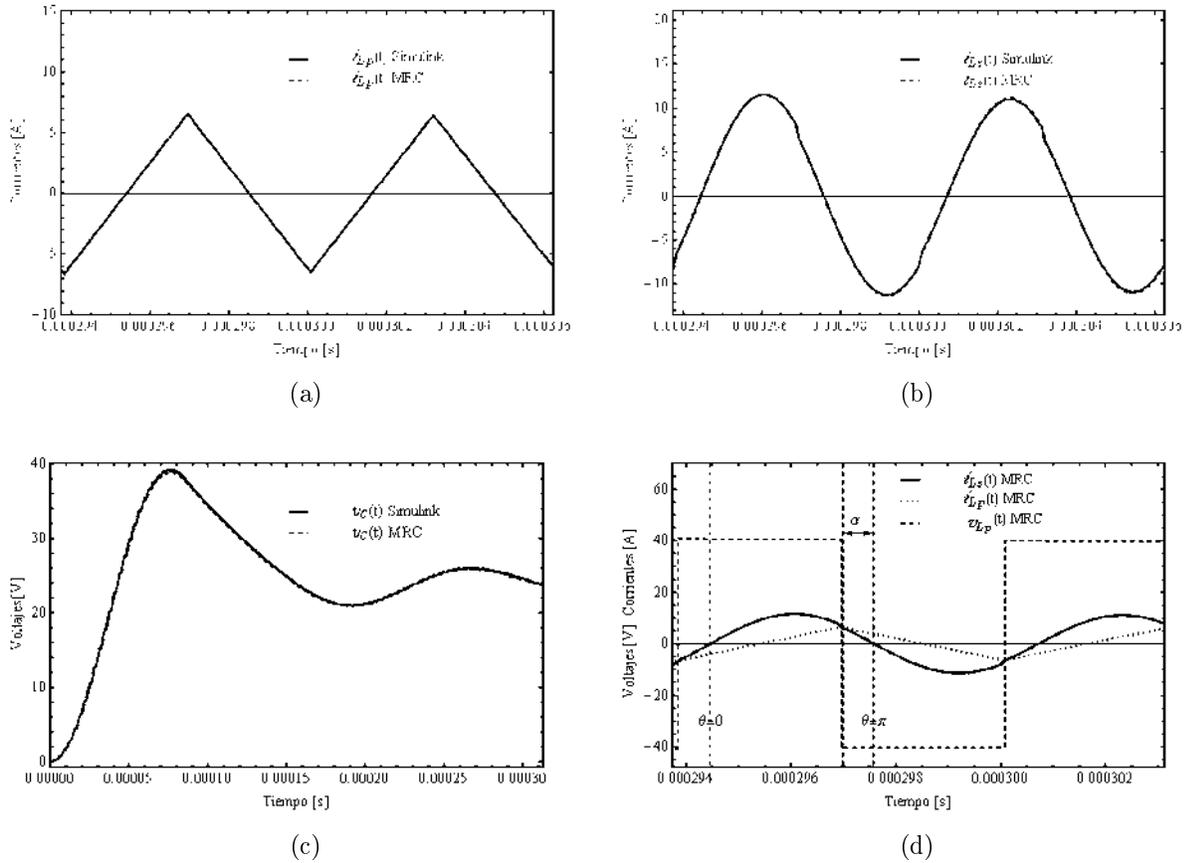


Figura 5.8: Formas de onda del Convertidor Resonante de CD/CD utilizando Simulink y el MRC en el MOC

En la Figura 5.8d, se captura el comportamiento del Convertidor Resonante de CD/CD en el estado estable. El voltaje $v_{Lp}(t)$ está acotado a $\pm n \text{ promedio}(v_C(t))$ para todo el periodo $1/f_s$, y $i_{Ls}(t)$ está atrasado por un ángulo α . En esta condición de operación el voltaje excita el tanque resonante L_s, L_p, C_s y se genera el flujo de corriente $i_{Ls}(t)$ donde la corriente fluye al capacitor C cargándolo y dictando el comportamiento del voltaje de salida $v_C(t)$.

Al inicio del semiciclo negativo del voltaje $v_{Lp}(t)$ y finales del semiciclo negativo del mismo, el Convertidor Reductor de CD/CD experimenta un instante de conmutación donde el Convertidor no es excitado por la fuente de entrada v_{ent} . Si después del periodo

5.5. CÁLCULO DE LA RESPUESTA TRANSITORIA PARA EL CONVERTIDOR RESONANTE CD/CD EN EL MOC Y EL MOD.

de conmutación de apagado $|v_{Lp}(t)|$ es mayor que $\pm n \text{ promedio}(v_C(t))$ el rectificador vuelve a conducir. Durante esta condición de operación se dice que el Convertidor opera en el MOC y $v_{Lp}(t)$ puede ser considerada como una onda cuadrada. Sin embargo para ciertas condiciones de carga o excitación, se puede presentar que el voltaje $|v_{Lp}(t)|$ sea menor que $\pm n \text{ promedio}(v_C(t))$ y el Convertidor Resonante de CD/CD no aporta energía a la carga R_L durante una porción del semiciclo negativo (α) como se muestra en la Figura 5.9d.

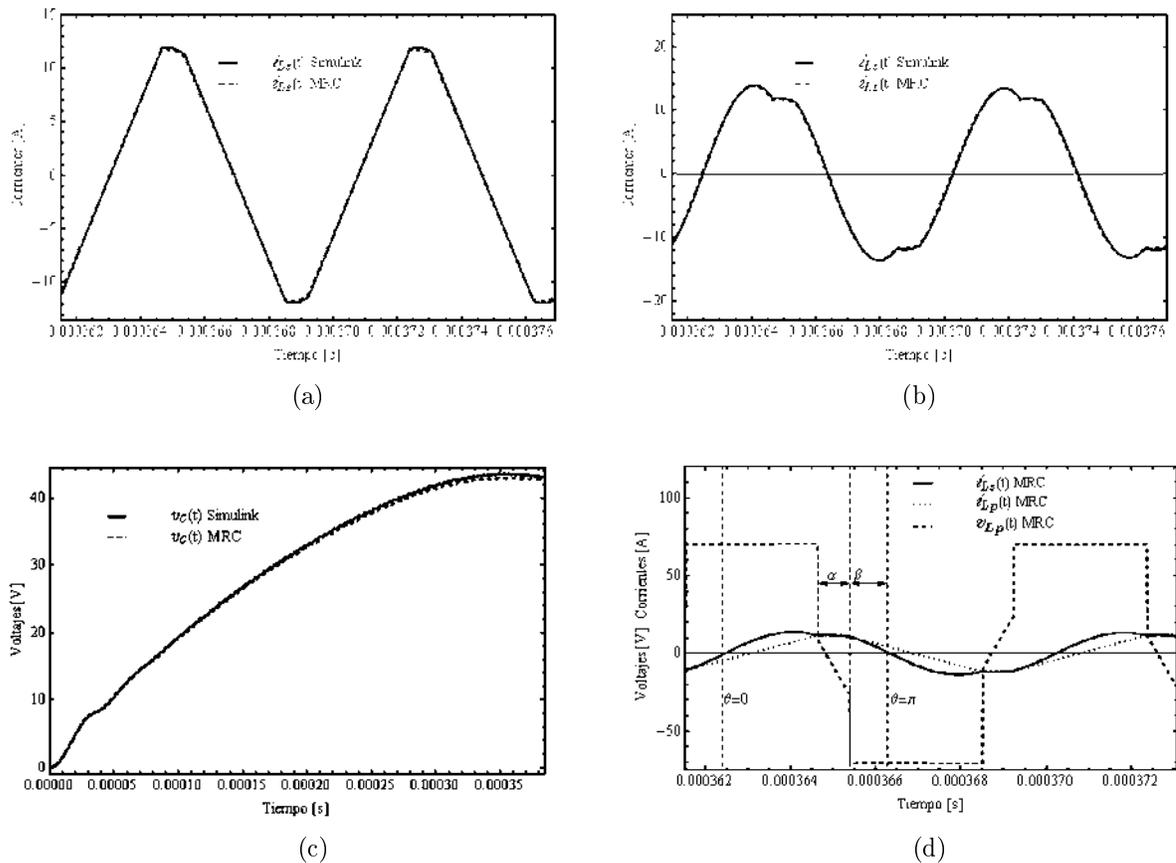


Figura 5.9: Formas de onda del Convertidor Resonante de CD/CD utilizando Simulink y el MRC en el MOD

Durante el “periodo de no conducción ($\alpha + \beta$)” la corriente $i_{Ls}(t)$ fluye a través de L_p , y $v_{Lp}(t)$ toma una característica senoidal. En esta condición de operación el Convertidor Resonante de CD/CD se dice que presenta un MOD [Foster et al, 2008]. Para la generación de las formas de onda en el MOD se utilizaron los parámetros eléctricos presentados en la Tabla 5.2 a una frecuencia de $f_s = 130000 \text{ Hz}$ y una carga $R_L = 6.0 \Omega$. El paso de integración para el cálculo de la respuesta transitoria del Convertidor Resonante de CD/CD utilizado el MRC es de 5.0×10^{-9} y el paso de integración

utilizado en Simulink es de 1.0×10^{-8} . El costo computacional es diferente en ambos esquemas de simulación, en el caso del MRC es de 23.678911 segundos y en Simulink es de 4.2281 segundos para un tiempo de $50/130000$ segundos. Las formas de onda para el Convertidor Resonante de CD/CD obtenidas con el algoritmo de Lemke y el *Ode4* (Runge-Kuta) en Simulink se presentan en las Figuras (5.9a-5.9c). Se pueden obtener formas de onda con un error menor utilizando un paso de integración en Simulink de 1.0×10^{-9} y un paso de integración en el MRC de 5.0×10^{-10} .

Las formas de onda mostradas en la Figura 5.8d y la Figura 5.9d, pueden ser obtenidas utilizando funciones descriptivas [Foster et al, 2008]. Donde en el MOC el ángulo α es calculado analíticamente utilizando parámetros eléctricos y la frecuencia de resonancia f_s del Convertidor, sin embargo en el MOD se requiere resolver un sistema de dos ecuaciones no lineales para calcular los ángulos (α y β). En esta técnica se hace énfasis en diferenciar el MOC y el MOD, y en particular para el Convertidor Resonante de CD/CD las funciones descriptivas son generadas utilizando un modelo equivalente de CA justificado en la interacción no lineal del inductor L_p , la carga y el arreglo de diodos en el lado de CD como una impedancia compleja que actúa como un filtro pasa banda atenuando los armónicos alrededor de la frecuencia de resonancia. En cada modo de operación se definen un conjunto de ecuaciones algebraicas por segmentos que describen el comportamiento del Convertidor. Esta metodología es sencilla de utilizar si los modos de operación son claramente definidos y las funciones descriptivas son válidas, sin embargo en la condición frontera resulta complejo definir la función que describe esta condición de operación así como condiciones de operación anómalas no consideradas en las funciones descriptivas. La ventaja del modelo complementario para el Convertidor Resonante de CD/CD consiste en que pueden ser estudiados diferentes escenarios de operación en un formato unificado.

5.6. Análisis de la Existencia de una Solución en Base a la Matriz M

Los Valores Propios de las matrices M resultantes de la discretización de los modelos complementarios para el Convertidor Resonante y el Convertidor Resonante de CD/CD contienen valores reales e imaginarios. En razón a lo anterior para un análisis correcto de la positividad se utiliza la relación $(M + M^T)/2$. En la tabla 5.3 los Valores Propios para el Convertidor Reductor aseguran que su matriz es indefinida sin embargo el algoritmo de Lemke encuentra una solución para una condición inicial de cero y esto es un

caso particular porque en sentido estricto no existe un resultado teórico que asegure la existencia de una solución cuando se trata de una matriz indefinida lo cual es un indicativo para seguir investigando las propiedades de las matrices y las condiciones que aseguran una solución. En el caso del Convertidor Resonante de CD/CD sus Valores Propios mostrados en la Tabla 5.4 caracterizan una matriz semipositiva definida y una solución de múltiples es obtenida con el algoritmo de Lemke en el MOC y el MOD.

Tabla 5.3: Valores Propios del Convertidor Reductor en el análisis transitorio

Valores Propios
16
-16
0

Tabla 5.4: Valores Propios del Convertidor Reductor de CD/CD en el MOC y el MOD en el análisis transitorio

Valores Propios
0,00315582
0,000199993

5.7. Conclusiones

Se ha mostrado que es posible representar sistemas con interruptores controlados mediante la utilización de restricciones complementarias. Lo cual convierte al MRC en una herramienta con gran potencial para analizar sistemas de EP.

Se ha mostrado que el modelo complementario para el Convertidor Reductor de CD/CD es válido para el MOC y el MOD.

La simulación de los modelos complementarios para los convertidores de EP son muy sensibles a errores cuando se emplean frecuencias de conmutación del orden de los KHz lo cual requiere de un paso de integración muy pequeño para que los resultados sean congruentes con Simulink. Esto no significa que los resultados sean divergentes (contienen un error constante). Se observó que para prácticamente el mismo paso de integración en el MRC y Simulink el esfuerzo computacional es menor en *Matlab*. Sin embargo en el MRC no se han explotado otros métodos de discretización que garanticen menores errores y el propósito en este trabajo no está centrado en tener una metodología de integración que sea más rápida que los métodos de integración de *Matlab*. Una de las incógnitas interesantes que surgen al utilizar el MRC consiste en determinar un paso de

integración que garantice resultados de simulación adecuados sin llevar a cabo varias simulaciones. Es decir con base a que lógica matemática se puede establecer un paso de integración adecuado que represente el mínimo de esfuerzo computacional y el menor error.

Capítulo 6

Conclusiones y Trabajos Futuros

6.1. Conclusiones Generales

- La utilización de los SLCs para modelar procesadores de potencia no controlados en el MRC es una metodología de gran potencial dentro de las técnicas de modelado de convertidores de EP, en el sentido de que la característica no lineal de los diodos puede ser representada en forma natural como una restricción complementaria evitando determinar las topologías válidas dictadas por los procesos de conmutación.
- Aun cuando el MRC está dirigido a representar sistemas de EP con diodos, también se ha mostrado que es posible representar sistemas de EP con interruptores guiados por esquemas de control como el Convertidor Reductor controlado por voltaje. Así también se ha mostrado que si los interruptores pueden ser representados como una función conocida es posible modelar convertidores que constan de diodos e interruptores como SLCs.
- Una vez que es posible representar el conjunto de ecuaciones diferenciales y algebraicas de un sistema de EP como un SLC, el modelo complementario es válido para todos los modos de operación que se puedan presentar en el convertidor de potencia. Para mostrar la validez de los modelos complementarios como sistemas completos se analizaron diferentes sistemas de EP que son válidos en el MOC, el MOD y en la región frontera. Esto significa que los modelos en el MRC son modelos completos y no se requiere una configuración para cada modo de operación lo cual tiene ventajas en términos de simulación. Asimismo se muestra que en el formato de los SLCs se representa la dinámica completa de los convertidores de EP (para los sistemas estudiados) compuesta por eventos continuos y eventos

discretos. De esta forma se muestra que el MRC en relación con metodologías basadas en MCs tiene ventajas en lo que se refiere a modelado y simulación.

- Una ventaja del MRC en relación a los MCs se centra en la selección de la condición inicial para el cálculo del estado estable periódico. En sistemas de EP con un gran número de interruptores y diodos se tiene que establecer una condición inicial factible (lo cual requiere de un conocimiento profundo del comportamiento del sistema de EP para definir los estados de los interruptores) para obtener una solución convergente debido a que en los MCs se requiere resolver un sistema de ecuaciones diferenciales *stiff* y su solución implica la utilización de métodos de integración tipo Newton, los cuales pueden no converger si tienen como punto de partida un condición inicial inadecuada. Por el contrario en el MRC no se requiere una condición inicial como punto de partida para el cálculo del estable periódico y este método es no iterativo. Con la formulación del estado estable se ha mostrado que es posible resolver sistemas de EP que contienen una gran cantidad de diodos.
- En la generación de ecuaciones de estado para representar los rectificadores trifásicos como SLCs se comentan algunas particularidades sobre la problemática que debe atender un algoritmo automatizado. Asimismo se sugiere que el SLC no es un descriptor general para todos los sistemas de EP con diodos, solamente es válido para los casos (al menos los estudiados) que tienen un árbol y un co-árbol normal y algunos casos con árboles y co-árboles no normales que al ser manipulados pueden ser representados en este formato como es el caso del RT. Sin embargo cuando se tiene un RT con un filtro en el lado de CA (hasta el momento no se ha encontrado un representación en el formato de los SLCs) la representación en el formato de los SLCs no es trivial.

6.2. Trabajos Futuros

- Un trabajo a futuro puede ser dirigido a obtener de manera automatizada las ecuaciones algebro-diferenciales de los procesadores de potencia en el formato de los SLCs (lo cual implicar desarrollar un descriptor para sistemas de EP con árboles y co-árboles no normales). Un primer trabajo para generar ecuaciones de estado se presenta en [Mastascusa, 1989] donde el desarrollo matemático es útil para generar en forma automatizada ecuaciones de estado de un circuito que contiene elementos pasivos lineales tales como: resistencias, inductancias, capacitancias, y fuentes de voltaje y corriente independientes. Recientemente en [Frasca et al] se

presenta un desarrollo matemático automatizado para representar ecuaciones de estado para un circuito que contiene elementos pasivos e interruptores ideales. Donde se propone que para árboles y co-árboles no normales es posible transformarlos en árboles y co-árboles normales insertando interruptores ideales abiertos cuando se tienen inductores en el árbol (para generar trayectorias alternas evitando los inductores) e insertando interruptores ideales cerrados cuando se tienen capacitores en el co-árbol (para romper trayectorias cerradas y se pueda incluir los capacitores en el árbol). Sin embargo en términos de un algoritmo esto no resulta trivial sobre todo cuando se tienen sistemas de EP conectados a sistemas de potencia de gran dimensión, en el sentido de que es posible una modificación de la topología de la red causada por una inserción inadecuada de los interruptores electrónicos así como la selección incorrecta de sus estados de operación (encendido o apagado). Esto significa que la generación automatizada de ecuaciones para representar convertidores de potencia es un tópico de investigación.

- El MRC ofrece una alternativa para el análisis y simulación de convertidores de EP controlados. Una área importante de investigación que salta a la vista es la viabilidad del MRC en el diseño óptimo de controladores para los procesadores de potencia lo cual consiste en modelar controladores que efectúen el mínimo de conmutaciones para satisfacer los requerimientos de la carga y un mínimo en pérdidas de energía causadas por las conmutaciones. Asimismo otro aspecto relacionado a optimización es la incorporación en el modelado de otro tipo de restricciones como el valor óptimo de los filtros que garanticen el mínimo de rizado en el lado de CD con una distorsión de corriente en el lado de CA dentro de los requerimientos de distorsión armónica.
- Se ha mostrado que el algoritmo de Lemke es adecuado para resolver sistemas de EP cuando son discretizados utilizando el método de Euler Implícito, sin embargo se pueden explorar otro tipo de algoritmos de discretización de tal forma que se tengan soluciones cada vez más confiables buscando explotar esquemas de solución más eficientes. En este sentido también se puede investigar la posibilidad de incorporar técnicas de procesamiento en paralelo para obtener simulaciones en un menor tiempo de cómputo.

Bibliografia

- [Alexa et al, 2006] Alexa, D., Sîrbu, A., Lazăr, A., “Three-Phase Rectifiers with Near Sinusoidal Input Current and Capacitors Connected on the AC Side”. *IEEE Trans. Ind. Electron.*, vol. 53, no. 5, pp. 1612–1620, Oct. 2006.
- [Bleijs, 2005] Bleijs, J. A.M., “Continuous Conduction Mode Operation of Three-Phase Diode Bridge Rectifier with Constant Load Voltage”. *Proc. Inst. Elect. Eng.*, vol. 152, no. 2, pp. 59–368, Mar. 2005.
- [Brogliato, 2003] Brogliato, B., “Some Perspectives on the Analysis and Control of Complementarity Systems”. *IEEE Transactions On Automatic Control*, vol. 48, no. 6, june 2003.
- [Burdio, Martinez, 1995] Burdio, J. M., Martinez, A., “A Unified Discrete-Time State-Space Model for Switching Converters”. *IEEE Trans. Power Electron.*, vol. 10, no. 6, pp. 694, Nov. 1995.
- [Byrd et al, 2006] Byrd, R. H., Nocedal, J., Waltz, R. A., “KNITRO: An Integrated Package for Nonlinear Optimization” in Large-Scale Nonlinear Optimization, di Pillo, G., Roma, M., eds, pp. 35-59 (2006), Springer-Verlag.
- [Carpinelli et al, 2004] Carpinelli, G., Iacovone, F., Russo, A., Varilone, P., Verde, P., “Analytical Modeling for Harmonic Analysis of Line Current of VSI-fed Drives”. *IEEE Transactions on Power Delivery*, vol.19, no.3, pp. 1212- 1224, July 2004.
- [Camlibel et al, 2003] Camlibel, M. K., Heemels, W., Van Der Schaft, A., Schumacher, J., “Switched Networks and Complementarity”. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications*, vol: 50, n0. 8, pp.1036 - 1046, 2003.

- [Cottle et al, 1997] Cottle, R., Pang, J., Stone, R., “The linear Complementarity Problem”. Boston: Academic Press, 1992.
- [Chua et al, 1987] Chua, L. O., Desoer, C. A., Kuh, E. S., “ Linear and Nonlinear Circuits ”. New York: McGraw-Hill, 1987.
- [Dirske et al, 2008] Dirske, PatS., Ferris, M.C., Munson, T. (2008). The PATH solver [online]. *Disponible en: <http://pages.cs.wisc.edu/ferris/path.html>*.
- [Fackler, Mirand] Fackler, P., Miranda, M., (2011). Lemke’s Algorithm for Solving Linear Complementarity problems [online]. *Disponible en: http://people.sc.fsu.edu/~jburkardt/m_src/lemke/lemke.html*
- [Ferris, Pang, 1997] Ferris, M. C., Pang, J. S., “Engineering and Economic Applications of Complementarity Problems”. *SIAM*, vol. 39, No. 4, pp. 669, December 1997.
- [Foster et al, 2008] Foster, M. P., Gould, C. R., Gilbert, A. J., Stone, D. A., Bingham, C. M., “Analysis of CLL Voltage–Output Resonant Converters Using Describing Functions”. *IEEE Trans. Power Electron.*, vol. 23, no. 4, pp. 1772–1781, 2008.
- [Frasca et al] Frasca, R., Camlibel, M. K., Goknar, Cem I., Iannelli, L., Vasca, F., “Linear Passive Networks With Ideal Switches: Consistent Initial Conditions and State Discontinuities”. *IEEE Transactions on Circuits and Systems* ”. Artículo aceptado para su publicación posterior.
- [W.P.M.H. Heemels, 1999] Heemels, Wilhelmus P.M.H., “Linear Complementarity Systems : a Study in Hybrid Dynamics ”. Ph.D dissertation, Eindhoven University of Technology, The netherlands, 1999,(ISBN 90–386–1690–2).
- [Heemels et al, 2003] Heemels, W. P. M. H., Camlibel, M. K., Van Der Schaft, A. J., Schumacher, J. M., “Modelling, Well-Posedness, and Stability of Switched Electrical Networks”. *Hybrid Systems: Computation and Control* (LectureNotes in Computer Science 2623), Maler, O., Pnuelli, A., eds. Berlin, Germany: Springer-Verlag, 2003, pp. 249-266.
- [Ingber, 1993] Ingber, L., “Simulated Annealing: Practice versus Theory”. *Mathematical Computer Modelling* 18, no. 11 (1993): 29-57.

-
- [Kassakian et al, 2001] Kassakian, J. G., Schlecht, M. F., Verghese, G. C., “Principles of Power Electronics”. Reading, MA: Prentice-Hall, 2001.
- [Lian et al, 2008] Lian, K.L., Perkins, B.K., Lehn, P.W., “Harmonic Analysis of a Three-Phase Diode Bridge Rectifier Based on Sampled-Data Model”. *IEEE Transactions on Power Delivery*, Vol. 23, No. 2, April 2008.
- [Lloyd, 2005] Lloyd, J.E., “Fast Implementation of Lemke’s Algorithm for Rigid Body Contact Simulation”. Robotics and Automation, 2005. ICRA 2005. *Proceedings of the 2005 IEEE International Conference on* , vol., no., pp. 4538- 4543, 18-22 April 2005.
- [Maksimovic et al, 2001] Maksimovic, D., Stankovic, A. M., Thottuvelil, V. J., Verghese, G. C., “Modeling and Simulation of Power Electronic Converters”. *Proc. IEEE*, vol. 89, no. 6, pp. 898–912, Jun. 2001.
- [Mastascusa, 1989] Mastascusa, E. J., “Computer Assisted Network And System Analysis”. John Wiley & Sons, New York, NY, 1989.
- [Mehrotra, 1992] Mehrotra, S., “On the Implementation of a Primal-Dual Interior Point Method”. *SIAM Journal on Optimization* 2 (1992): 575-601.
- [Middlebrook, Cuk, 1976] Middlebrook, R. D., Cuk, S., “A General Unified Approach to Modeling Switching-Converter Power Stages”. *IEEE Power Electronics Specialists Conference Record*, pp. 18–34, 1976.
- [Mohan et al, 1995] Mohan, N., Undeland, Tore M., Robbins, William P., “Power Electronics: Converters, Applications, and Design”. Tercera ed., John Wiley & Sons Ltd, 1995.
- [Murty, Tien, 1997] Murty, Katta G., Tien, Yu F., “Linear Complementarity, Linear and Nonlinear Programming”. Internet Edition, 1997, <http://wwwpersonal.umich.edu/~murty/>.
- [Nelder, Mead, 1965] Nelder, J.A., Mead, R., “A Simplex Method for Function Minimization”. *The Computer Journal* 7 (1965): 308-313.
- [Price, Storn, 1997] Price, K., Storn, R., “Differential Evolution”. *Dr. Dobb’s Journal* 264 (1997): 18-24.

- [M.Rashid, 1993] Rashid, M., “Power Electronics: Circuits, Devices, and Applications”. Segunda ed., Prentice Hall, 1993.
- [Sakui, Fujita, 1994] Sakui, M., Fujita, H., “An Analytical Method for Calculing Harmonic Currents of a Three-Phase Diode Bridge Rectifier with DC Filter”. *IEEE Transactions on Power Electronics*, vol. 9, No. 6, November, 1994.
- [Vasca et al, 2009] Vasca, F., Iannelli, L., Angelone, G., “Steady State Analysis of Power Converters via a Complementarity Approach”. *Proceedings of the European Control Conference 2009*, Budapest, Hungary, August 23–26, 2009.
- [Vasca et al, 2009] Vasca, F., Iannelli, L., Camlibel, M.K., “A New Perspective for Modeling Power Electronics Converters: Complementarity Framework”. *IEEE Transactions on Power Electronics*, vol. 24 n.2, pp. 456 - 468 Feb. 2009.
- [Yang et al, 2002] Yang, B., Lee, F., Zhang, A., Huang, G., “LLC Resonant Converter for Front end DC/DC Conversion”. *Proc. IEEE Applied Power Electronics Conference and Exposition*, Dallas, Texas (USA), March 2002, pp. 1108–1112.
- [Yuan, Opal, 2003] Yuan F., Opal, A., “Computer Methods for Switched Circuits”. *IEEE Trans. Circuits Syst. I, Fundam. Theory Appl.*, vol. 50, no. 8, pp. 1013-1024, Aug. 2003.

Apéndice A

Desarrollo Matemático del Cálculo de Estado Estable en el MRC

Si el conjunto de Ecuaciones (2.1,2.2,2.3) son discretizadas por el método de Euler Implícito y un retenedor de orden cero con un paso de integración h se tiene que:

$$x_k = Ax_{k-1} + Bz_k + Eu_k \quad (\text{A.1})$$

$$w_k = Cx_{k-1} + Dz_k + Fu_k \quad (\text{A.2})$$

$$0 \leq w_k \perp z_k \leq 0$$

donde

$$\begin{aligned} A &= e^{A_c h} \\ B &= A_c^{-1} (e^{A_c h} - I) B_c \\ C &= C_c A \\ D &= D_c + C_c B \\ E &= A_c^{-1} (e^{A_c h} - I) E_c \\ F &= F_c + C_c E \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Sea el sistema de Ecuaciones (A.1,A.2) alimentado por una entrada periódica $\{u_k\}$ de periodo N . Y asumiendo que el sistema es un sistema periódico si $x_{k+N} = x_k \forall k$. La evolución del estado es descrita como

$$\begin{aligned}
 x_1 &= Ax_0 + (Bz_1 + Eu_1) \\
 x_2 &= A(Ax_0 + Bz_1 + Eu_1) + (Bz_2 + Eu_2) \\
 &\vdots \\
 x_N &= A^N x_0 + \sum_{i=1}^N A^{N-i} (Bz_i + Eu_i) = x_0.
 \end{aligned} \tag{A.4}$$

y resolviendo con respecto a x_0 de la Ecuación (A.4)

$$x_0 = \Pi \sum_{i=1}^N A^{N-i} (Bz_i + Eu_i) \tag{A.5}$$

donde Π es una matriz bien definida debido a que la matriz A_c es no singular. La matriz Π satisface las siguientes propiedades

$$\begin{aligned}
 A\Pi &= \Pi A \\
 \Pi A^N &= \Pi - I \\
 \Pi &= (I - A^N)^{-1}
 \end{aligned} \tag{A.6}$$

Desarrollando la Ecuación (A.2) para $k = 1, \dots, N$ se tiene

$$w_1 = Cx_0 + Dz_1 + Fu_1 \tag{A.7}$$

$$w_2 = CAx_0 + CBz_1 + Dz_2 + CEu_1 + Fu_2 \tag{A.8}$$

$$w_3 = CA^2x_0 + CABz_1 + CBz_2 + Dz_3 + CAEu_1 + CEu_2 + Fu_3 \tag{A.9}$$

\vdots

$$w_k = C \left(A^{k-1}x_0 + \sum_{i=1}^{k-1} (A^{k-1-i} (Bz_i + Eu_i)) \right) + Dz_k + Fu_k \tag{A.10}$$

$$\begin{aligned}
 w_N &= CA^{N-1}x_0 + \sum_{i=1}^{N-1} CA^{N-1-i}Bz_i + Dz_N + \sum_{i=1}^{N-1} CA^{N-1-i}Eu_i \\
 &\quad + Fu_N
 \end{aligned} \tag{A.11}$$

y sustituyendo la Ecuación (A.5), en la Ecuación (A.11) resulta

$$\begin{aligned}
 w_k &= CA^{k-1}\Pi(\sum_{i=1}^N A^{N-i} (Bz_i + Eu_i)) \\
 &+ \sum_{i=1}^{k-1} CA^{k-1-i}Bz_i + Dz_k + \sum_{i=1}^{k-1} CA^{k-1-i}Eu_i + Fu_k
 \end{aligned} \tag{A.12}$$

para $k = 1, \dots, N$.

Desarrollando los términos para z_i y u_i y utilizando las propiedades (A.6) .

Para $k = 1$

$$w_1 = C\Pi \sum_{i=1}^N A^{N-i} (Bz_i) + \Pi C \sum_{i=1}^N A^{N-i} (Eu_i) + Dz_1 + Fu_1;$$

evaluando las sumatorias para $i = 1$ resulta

$$C\Pi A^{N-1}Bz_1 + CA^{N-1}Eu_1;$$

evaluando las sumatorias para $i = 2$ resulta

$$C\Pi A^{N-2}Bz_2 + CA^{N-2}Eu_2$$

y agrupando los resultados de las sumatorias para $i = 1$ e $i = 2$ en $w_{k=1}$ se obtiene

$$\begin{aligned} w_1 = & C\Pi A^{N-1}Bz_1 + Dz_1 + C\Pi A^{N-2}Bz_2 + \dots + \\ & C\Pi A^{N-1}Eu_1 + Fu_1 + C\Pi A^{N-2}Eu_2 + \dots \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

Para $k = 2$

$$w_2 = CA\Pi \sum_{i=1}^N A^{N-i}(Bz_i) + CA\Pi \sum_{i=1}^N A^{N-i}(Eu_i) + CBz_1 + Dz_2 + CEu_1 + Fu_2;$$

evaluando las sumatorias para $i = 1$ e incluyendo los términos $CBz_1 + CEu_1$ para ser agrupados resulta

$$CA\Pi A^{N-1}Bz_1 + CA\Pi A^{N-1}Eu_1 + CBz_1 + CEu_1;$$

aplicando la propiedad $A\Pi = \Pi A$

$$C(\Pi A)A^{N-1}(Bz_1) + C(\Pi A)A^{N-1}Eu_1 + CBz_1 + CEu_1;$$

aplicando la propiedad $\Pi A^N = \Pi - I$

$$C(\Pi - I)(Bz_1) + C(\Pi - I)Eu_1 + CBz_1 + CEu_1;$$

agrupando términos resulta

$$(C(\Pi - I)B + CB)z_1 + (C(\Pi - I)Eu_1 + CE)u_1;$$

evaluando las sumatorias para $i = 2$ e incluyendo los términos

$$CA\Pi A^{N-2}(Bz_2) + CA\Pi A^{N-2}(Eu_2);$$

aplicando la propiedad $A\Pi = \Pi A$

$$CA \Pi A^{N-2} (Bz_2) + CA \Pi A^{N-2} (Eu_2)$$

$$C \Pi A^{N-2} (Bz_2) + C \Pi A^{N-2} (Eu_2)$$

$$C \Pi A^{N-1} (Bz_2) + C \Pi A^{N-1} (Eu_2)$$

$$(C \Pi A^{N-1} B) z_2 + (C \Pi A^{N-1} E) u_2$$

y agrupando los resultados de las sumatorias para $i = 1$ e $i = 2$ en $w_{k=2}$ más los términos Dz_2, Fu_2 se obtiene

$$\begin{aligned} w_2 &= (C(\Pi - I)B + CB)z_1 \\ &+ (C \Pi A^{N-1} B)z_2 + Dz_2 + \dots + \\ &+ (C(\Pi - I)E + CE)u_1 \\ &+ (C \Pi A^{N-1} E)u_2 + Fu_2 + \dots \end{aligned} \tag{A.14}$$

y así sucesivamente. Las Ecuaciones (A.13,A.14) junto con las condiciones complementarias $0 \leq w_k \perp z_k \geq 0$ pueden ser escritas como un PLC(q_N, M_N)

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_N \end{pmatrix} = q_N + M_N \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_N \end{pmatrix} \tag{A.15}$$

$$0 \leq w_k \perp z_k \geq 0, k = 1, \dots, N$$

donde

$$M_N = \begin{pmatrix} D & 0 & \dots & 0 \\ 0 & D & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & D \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} C \Pi A^{N-1} B & C \Pi A^{N-2} B & \dots & C \Pi B \\ C \Pi B & C \Pi A^{N-1} B & \dots & C \Pi A B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C \Pi A^{N-2} B & C \Pi A^{N-3} B & \dots & C \Pi A^{N-1} B \end{pmatrix}$$

y $q_N = Pu$ con

$$Pu = \left(\left(\begin{pmatrix} F & 0 & \dots & 0 \\ 0 & F & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & F \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} C\Pi A^{N-1}E & C\Pi A^{N-2}E & \dots & C\Pi E \\ C\Pi E & C\Pi A^{N-1}E & \dots & C\Pi AE \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C\Pi A^{N-2}E & C\Pi A^{N-3}E & \dots & C\Pi A^{N-1}E \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_N \end{pmatrix} \right)$$

Las matrices M_N y P son bloques de matrices circulantes. En consecuencia el PLC(A.15) no puede ser desacoplado en N diferentes problemas complementarios PLC debido a que para cada k todos los componentes de la secuencia z_i desde $i = 1 \dots N$ aparecen en w_k .