



UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN
NICOLÁS DE HIDALGO

**FACULTAD DE INGENIERÍA ELÉCTRICA
DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO**

**“DISEÑO DE OBSERVADORES EN BOND
GRAPH PARA SISTEMAS LTI Y UNA CLASE
DE SISTEMAS NO-LINEALES”**

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE
**MAESTRO EN CIENCIAS EN INGENIERÍA
ELÉCTRICA**

PRESENTA
ING. GERARDO AYALA JAIMES

DIRECTOR DE TESIS
DR. GILBERTO GONZÁLEZ AVALOS

MORELIA, MICHOACÁN

AGOSTO DE 2012



Dedicatorias y agradecimientos...

Le dedico este trabajo a:

Mis padres:

Esperanza y José Luis, quienes siempre creyeron y creen en mí.

A mis hermanos:

Juan Luis y Mario Alberto, que gracias a su confianza, ayuda, apoyo y a su carrilla claro está, la cual ha forjado un carácter fuerte en la vida.

A mis sobrinos:

Paola, Montserrat y Juan Luis, que siempre me inyectaron vitalidad en los momentos cuando más los necesitaba.

A mis grandes amigos:

Salvador, Julián, Joel y a mi queridísima mon amie Yessenia, a todos ellos gracias por sus ánimos para nunca darme por vencido y contar con ellos cuando más se les necesito.

Agradeciendo a:

A mi asesor de tesis:

Dr. Gilberto, por sus conocimientos, animo y ayuda para hacer el presente trabajo de investigación y por su ayuda para hacer el doctorado en Francia.

A mis profesores:

Del posgrado que me entregaron sus conocimientos y nunca me dieron la espalda cuando tuve dudas.

A Conacyt:

Por su apoyo económico.

Publicaciones

Gilberto Gonzalez-A, and Gerardo Jaimes-A, "**Observers Design for Systems Modelled by Bond Graphs with Multivariable Monotone Nonlinearities**". Presented in World Academy of Science, Engineering and Technology (WASET) 2012, Zurich, Switzerland.

Resumen

En el presente trabajo de investigación, se presentan los conceptos básicos de la metodología de Bond Graph, los cuales se basan en los modelos de sistemas dinámicos. Así mismo, se estudian algunas de las características que se pueden obtener de manera casi directa a partir de un modelo bond graph, como la observabilidad y la dependencia de estados.

Por otro lado, se presenta el procedimiento para realizar el diseño de observadores mediante el control clásico en lazo cerrado utilizando la técnica de Bond Graph, entre los cuales se presenta el observador por retroalimentación de estados por medio de ubicación de polos. Se propone el diseño de observadores para un tipo de sistemas no lineales del transformador, basados en el criterio del círculo para lo cual se realizó el diseño del observador del motor de CD y del transformador considerando la saturación magnética.

En cada tema presentado se describen ejemplos con las simulaciones correspondientes para dejar más clara la aplicación y la importancia de ella. Los resultados obtenidos se comprueban mediante las simulaciones 20-SiM, Simnon y MatLab.

Se genera un aporte en el análisis de sistemas no lineales y en el diseño de observadores mediante la metodología de bond graph, dando pie a futuros trabajos relacionados con los observadores no lineales basados y la técnica de bond graph.

Abstract

In this investigation work the basic concept of the bond graph methodology is presented, which is based on dynamic systems, besides some characteristics are given that can be obtained from a bond graph model, like observability and states dependencies.

In addition, the system behavior is analyzed in closed loop using bond graph technique, for example, the state feedback observer by poles placing. A methodology to design a nonlinear observer in a bond graph approach is proposed, the proposed methodology to an electrical transformer and a DC motor including the nonlinear saturation is applied. Nonlinear observers for the transformer and DC motor based on multivariable circle criterion in the physical domain are proposed. In order to show the saturation effects on the transformer and DC motor, simulation results are obtained.

In each chapter, examples are presented with simulations to explain the application and the importance of it. The results obtained are verified by 20-SiM, Simnon and MatLab.

This work generates a contribution on nonlinear observers multivariable circle criterion in the physical domain with a bond graph approach, which allow us to develop future works about it.

Índice general

Publicaciones	ii
Resumen	iii
Abstract	iv
Lista de figuras	vii
Lista de tablas	viii
Lista de abreviaturas y símbolos	ix
1 Introducción	2
1.1 Observadores y bond graph	2
1.2 Hipótesis	3
1.3 Objetivos	3
1.3.1 Objetivo general	3
1.3.2 Objetivos particulares	3
1.4 Justificación	4
1.5 Contribución de la tesis	4
1.6 Metodología	5
1.7 Estado del arte	5
1.8 Aportaciones	6
1.9 Estructura de la tesis	6
2 Modelado en bond graph y observadores	8
2.1 Bond Graph	8
2.1.1 Introducción	8
2.1.2 Componentes básicos de un bond graph	9
2.1.3 Causalidad para los multipuertos	14
2.1.4 Procedimiento para la construcción de sistemas en bond graph.	16
2.1.5 Estructura de unión en sistemas multipuerto[G. González A, 2004]	21
2.1.6 Trayectorias causales	29
2.2 Observadores	31
2.2.1 Observabilidad	31
2.2.2 Observador asintótico de Luenberger [Luenberger, 1971]	33

2.3	Observabilidad en un enfoque de bond graph	35
2.4	Conclusiones del capítulo 2	36
3	Observadores lineales en bond graph	39
3.1	Introducción	39
3.2	Diseño de observadores con variables linealmente independientes	39
3.2.1	Procedimiento para el diseño de observadores enfoque gráfico.	42
3.2.2	Diseños de observadores en bond graph	43
3.3	Diseño de observadores con variables linealmente dependientes	51
3.3.1	Introducción	51
3.3.2	Dependencia lineal de sistemas	52
3.3.3	La causalidad derivativa en un bond graph	52
3.3.4	Diseño de observadores método clásico	53
3.3.5	Ejemplo de observador variables dependientes método bond graph.	55
3.4	Conclusiones del capítulo 3	55
4	Diseño de observadores para una clase de sistemas no lineales	58
4.1	Introducción	58
4.2	No linealidades continuas	59
4.3	No linealidades discontinuas	59
4.3.1	Saturación o limitación	60
4.3.2	Histéresis	61
4.4	Estabilidad absoluta en sistemas no lineales	61
4.5	Criterio del círculo	65
4.6	Criterio de Popov	67
4.7	Diseño de un tipo observadores no lineal: criterio del círculo	68
4.8	Diseño de observadores para sistemas con multivariables no lineales enfoque bond graph.	72
4.8.1	Diseño de un observador del modelo del transformador de doble pierna con nucleo en bond graph	72
4.8.2	Diseño de un observador del modelo del Motor	80
4.9	Conclusiones del capítulo 4	84
5	Conclusiones y trabajos futuros	88
5.1	Conclusiones generales	88
5.2	Trabajos futuros	89
	Bibliografía	90
A	Desigualdades matriciales lineales en teoria de sistemas de control	94
A.1	Desigualdes lineales matriciales	94
A.2	Solución de desigualdades lineales matriciales en MatLab	97
A.2.1	Ejemplo específico de un sistema LMI	97
B	Publicaciones	100
B.1	Observers Design for Systems Modelled by Bond Graphs with Multivariable Monotone Nonlinearities	100

Lista de figuras

2.1	Bond de energía con la representación de las variables generalizadas.	9
2.2	Representación del elemento R.	10
2.3	Representación del elemento C.	11
2.4	Representación del elemento I.	12
2.5	Elemento activo: fuente de esfuerzo.	12
2.6	Elemento activo: fuente de flujo.	12
2.7	Bond Graph de un transformador (a) y un Girador (b).	13
2.8	Unión-0.	13
2.9	Unión-1.	14
2.10	Causalidad en un bond.	14
2.11	a) Causalidad fuentes de flujo y esfuerzo, b) Unión-0 y unión-1, c) y d) Giradores, transformadores, e) causalidad ntegral, f) causalidad derivativa, g) causalidad de la resistencia, h) causalidad de la conductancia.	15
2.12	Elemento C en causalidad integral.	16
2.13	Elemento C en causalidad derivativa.	16
2.14	Equibalencias entre uniones.	17
2.15	Modelo del motor de CD	18
2.16	Motor de CD con identificacion de nodos	18
2.17	Procedimiento para obtener el Bond Graph de un circuito eléctrico.	18
2.18	Procedimiento para obtener el bond graph de un circuito eléctrico.	19
2.19	Sistema hidráulico.	19
2.20	Procedimiento para encontrar el Bond Graph de un sistema hidráulico.	20
2.21	Procedimiento para encontrar el Bond Graph de un sistema hidraulico.	20
2.22	Modelo de suspensión de un carro.	21
2.23	Modelo de suspensión de un carro en bond graph.	22
2.24	Diagrama a Bloques de la Estructura de Unión de un Bond Graph.	22
2.25	Modelo con los enlaces numerados	26
2.26	Trayectoria causal simple.	30
2.27	Trayectoria causal mezclada: A) girador GY, B) elemento R, 1 o C.	30
2.28	Observador de estado en lazo abierto	33
2.29	Observador asintótico de luenberger.	34
3.1	Lazo cerrado con observador en diagrama a bloques	40
3.2	Esquemas de retroalimentación de estado estimado.	42
3.3	Esquema de un motor de CD y su diseño en Bond Graph.	44

3.4	Trayectoria causal para L_a	45
3.5	Modelo del motor de corriente causalidad derivativa.	45
3.6	Observador para el motor de CD.	46
3.7	Sistema hidráulico.	48
3.8	Sistema hidráulico representado en Bond Graph.	49
3.9	Sistema hidraulico representado en Bond Graph causalidad derivativa.	49
3.10	Observador de un sistema hidráulico.	50
3.11	Gráfica del flujo del sistema Lf y de su observador.	51
3.12	Sistema Linealmente Dependiente.	52
3.13	Ejemplo de un circuito eléctrico en causalidad derivativa.	53
3.14	Bond Graph en causalidad derivativa de dos capacitores en paralelo.	53
3.15	Motor CD doble engrane.	54
3.16	Gráfica de la corriente en el inductor $J1$. así como su estado observado, simulado en MatLab	55
3.17	Modelo en bond Graph del motor de CD con doble engranaje.	56
3.18	Gráfica de la corriente en el inductor J. así como su estado observado, simulado en 20Sim.	57
4.1	No linealidad de saturación	60
4.2	No linealidad en la histéresis.	62
4.3	Conexión en retroalimentación de un sistema lineal y una no linealidad estática. . .	62
4.4	Alinealidad de sector A) Global y B) Local.	64
4.5	Gráfica del comportamiento de los estados	72
4.6	Acoplamiento magnético de un transformador de dos piernas	73
4.7	Modelo de un transformador en bond graph.	73
4.8	No linealidad en el transformador	76
4.9	Corrientes en el devanado primario f_2 y secundario. f_6	76
4.10	Observador en Bond Graph para el Transformador en el dominio físico	77
4.11	Corriente en el primario f_2 y f_{35} en el observador.	80
4.12	Corriente en el secundario	81
4.13	Fujo en el núcleo con perturbación.	82
4.14	Observador del motor de CD.	83
4.15	Estado y estado observado x_1	85
4.16	Estado y estado observado x_2	85
A.1	Líneas de contorno de la función $\phi(x)$, las cuales dan una aproximación suave de la forma del conjunto X.	95
A.2	Interfas grafica de MatLab para la solucion de desigualdades natriciales lineales. . .	99

Lista de tablas

2.1	Variables generalizadas para sistemas eléctricos y sistemas mecánicos traslacionales.	10
2.2	Variables generalizadas de sistemas mecánicos rotacionales y sistemas hidráulicos. . .	11
2.3	Tabla guía para completar los vectores generados por los elementos,de amacseimiento .	26
3.1	Valores asignados para las simulaciones del observador hidráulico.	51
3.2	Valores asignados para las simulaciones del observador basado en el motor electro- mecánico	54
4.1	Valores empleados para simular el sistema magnético.	75

Lista de abreviaturas y símbolos 1

$f(t)$	Variable de esfuerzo.
$e(t)$	Variable de flujo.
$p(t)$	Variable de momento.
$q(t)$	Variable de desplazamiento.
R	Elemento resistencia.
C	Elemento capacitor.
I	Elemento inercia.
TF	Elemento transformador.
GY	Elemento girador.
-0	Unión cero.
-1	Unión uno.
S_e	Fuente de esfuerzo.
S_f	Fuente de flujo.
$u(t)$	Vector de entrada del sistema.
$y(t)$	Vector de salida del sistema.
$x(t)$	Vector de estados asociado a elementos en causalidad integral.
$z(t)$	Vector complementario asociado a elementos en causalidad integral.
$x_d(t)$	Vector de estados asociado a elementos en causalidad derivativa.
$z_d(t)$	Vector complementario asociado a elementos en causalidad derivativa.
A, B, C, D	Matrices de estado.
A^T	Matríz transpuesta de A.
A^{-1}	Matríz inversa de A.
LTI	Lineal invariante en el tiempo.
N	Newton, unidad física de Fuerza.
Ω	Ohm, unidad física de resistencia eléctrica.
A	Amper, unidad física de corriente eléctrica.
m	Metros, unidad física de distancia.
s	Segundos, unidad física de tiempo.
H	Henrios, unidad física de inductancia eléctrica.

Lista de abreviaturas y símbolos 2

$P(t)$	Variable de potencia.
J	Momento de inercia.
ϕ_m	Flujo mutuo en el núcleo.
$q(t)$	Variable de desplazamiento.
k	Variable auxiliar.
α_k	Variable auxiliar.
S	Matríz estructura unión.
MIMO	Múltiples estradas múltiples salidas.
t_s	Variable del tiempo.
HG	Ganancias del observador.
Lf	Flujo inherente.
$G(s)$	Función de transferencia.
$\psi(\cdot)$	Elemento no lineal.
GE	Globalmente estable.
GAE	Globalmente asintoticamente estable.
GUAE	Gobalmente uniformemente asintoticamente estable.
UAE	Uniformemente asintoticamente estable.
ERP	Estrictamente real positiva.
RP	Real positiva.
FT	Función de transferencia.
ϕ_{l1}	Flujo magnético en devanado primario.
ϕ_{l2}	Flujo magnético en devanado secundario.
Wb	Unidades del flujo magnético
ω	Variable de la velocidad angular
LMI	Linear Matrix Inequality

Capítulo 1

Introducción

1.1 Observadores y bond graph

En la literatura, el problema general de determinar o reconstruir los estados de un sistema con la disponibilidad de las mediciones de la salida y señal de control, se refiere como un problema de estimación u observación. Por mucho tiempo, se han estudiado los observadores dado que pueden ser usados para aumentar o remplazar sensores en una industria al ser algoritmos que combinan monitoreo de señales con conocimiento del sistema de control y de esta manera producir una señal observada, dicha señal puede ser muy aproximada a la real, menos costosa de producir y más confiable.

La finalidad de reconstruir los estados de un sistema haciendo uso de observadores tiene generalmente muchos usos, por ejemplo, desde el punto de vista de control de calidad es el monitoreo en línea de interés a fin de detectar problemas en los sistemas o bien en el cumplimiento de estándares y a la retroalimentación de los estados estimados a un lazo de control.

Otra finalidad de las aplicaciones de los observadores es la obtención de parámetros que no son posibles de medir directamente como puede ser un flujo magnético, concentraciones de sustancias, tasas de reacción en un reactor químico, coeficiente global de transferencia de calor, entre otros. Algunas de estas variables son estimadas mediante análisis manuales, sin embargo, se apoya en amplios cálculos para la obtención del sistema a observar.

La teoría de bond graph brinda una metodología de análisis que ha venido tomando gran importancia en el diseño, modelado y construcción de sistemas, ya que ésta puede ser aplicada en el estudio de sistemas que presentan diferentes dominios de energía, a través de esta metodología es

posible realizar un análisis estructural de la observabilidad de manera directa del sistema modelado en bond graph simplemente al analizar trayectorias causales.

Trabajando con bond graph se permiten realizar análisis directos sobre aspectos en su comportamiento interno como las relaciones constitutivas en las cuales se pueden analizar sistemas no lineales. La causalidad en los modelos de bond graph es una parte fundamental en la construcción de sistemas ya que permite determinar las posibles interacciones energéticas entre los elementos o subsistemas que conforma a un sistema por medio de las trayectorias causales, así como si los elementos del sistema son dependientes.

1.2 Hipótesis

Es posible formular un método por medio de la metodología de bond graph para diseñar observadores de distintos ordenes, con variables linealmente dependientes e independientes, así como una clase de sistemas no lineales.

1.3 Objetivos

Los objetivos tanto general como particulares del presente trabajo son presentados a continuación.

1.3.1 Objetivo general

El objetivo general de esta investigación es explorar el diseño de observadores utilizando la técnica de bond graph para implementar en los sistemas lineales y en algunas clases de sistemas no-lineales.

1.3.2 Objetivos particulares

- 1.- Diseño de observadores LTI MIMO en bond graph.
- 2.- Diseño de observadores con variables linealmente independientes.
- 3.- Diseño de observadores con variables linealmente dependientes.
- 4.- Diseño de observadores para sistemas con multivariabes no lineales enfoque bond graph.

1.4 Justificación

El diseño e implementación de observadores es utilizado para mejorar la observación de sistemas y puede ser más exacto que algunos sensores o reducir la fase de retraso inherente en el sensor. Los observadores pueden incluso proveer de señales perturbadas que pueden ser usadas para mejorar la respuesta a las perturbaciones, en algunos otros casos los observadores pueden reducir el costo del sistema, aprovechando la metodología de bond graph permite modelar un sistema, dado uno o varios dominios de energía, por ejemplo, hidráulico, eléctrico y mecánico, con lo cual se crea una facilidad en el diseño de sistemas y diseñar directamente su observador. Si es verdad que existen muchas metodologías para el diseño de observadores como; modos deslizantes, modelos difusos, redes neuronales, sin embargo, en este trabajo de investigación se acota para el diseño de sistemas lineales y de un tipo de sistemas no lineales en bond graph.

Actualmente en [C. Sueur, 1991] brinda un aceptable panorama para el diseño de observadores en bond graph, sin embargo, aún falta mucho que estudiar dado que lo incursionado, se enfoca para los sistemas lineales dejando un poco atrás los sistemas no lineales, por lo que con el presente trabajo de investigación se busca tener un avance en el diseño de observadores para una clase de sistemas no-lineales.

1.5 Contribución de la tesis

La contribución de esta tesis consiste en una propuesta para el diseño de observadores lineales invariantes en el tiempo múltiples entradas múltiples salidas, el diseño de observadores con variables linealmente independientes y dependientes, así como el diseño de observadores para sistemas con multivariabes no lineales monotónicas, este último se aplica a un transformador eléctrico y al motor de corriente directa basado en el criterio del círculo multivariable en el dominio físico, se seleccionaron los modelos antes mencionados para poder mostrar el efecto de la saturación en el transformador y en el motor de corriente directa. Los diseños son basados en un enfoque de bond graph.

1.6 Metodología

La metodología de bond graph se basa en el modelado de sistemas, uniendo diferentes dominios físicos permitiendo generalizar sus variables, facilitando la obtención de sus modelos y su solución de acuerdo a las propiedades del bond graph. Algunas de las ventajas que ofrece la metodología de bond graph son la determinación de la controlabilidad y la observabilidad directamente del bond graph, la obtención de la estructura unión que representa la relación que existe entre todos los elementos del sistema en el dominio físico, la obtención de las ecuaciones en variables de estado que determinan el comportamiento dinámico del sistema facilitando el uso de recursos computacionales para la simulación y determinación del sistema estacionario, así como la obtención de las variables dependientes e independientes de un sistema, por mencionar algunas de las herramientas de la metodología de bond graph.

1.7 Estado del arte

Los observadores han sido ampliamente estudiados dado su gran importancia para modelar y reproducir el funcionamiento de sistemas físicos y con ello poder reproducir dichos sistemas, esto los hace de suma relevancia al momento de extraer variables claves del sistema, dichas variables no siempre son de fácil acceso dada la variable a sensar como por ejemplo un flujo magnético en un motor, la reconstrucción de un estado es llamada un observador, [Luenberger, 1996] mostró que existe un estado reconstruido, el cual, en combinación con un vector de error crean la reconstrucción del mismo, siempre y cuando que el sistema sea observable, para sistemas de órdenes elevados son difíciles de obtener algebraicamente, por ejemplo condiciones de observabilidad, condiciones necesarias para el diseño de observadores. Algunos artículos han sido publicados aplicando la metodología de bond graph en la construcción de observadores. La investigación de [G. Dauphin 1999] y [C. Sueur, 1991] propone un control en bond graph usando retroalimentación de estados para sistemas linealmente invariantes en el tiempo multiples estradas multiples salidas. En [C. Pichardo, 1998] utilizando la metodología de bond graph se diseñan observadores para sistemas con multiples entradas multiples salidas presentando una simplificación en la construcción y el cálculo de los observadores. Así como [Rafael. M, 1997] y en muchas otras investigaciones realizadas se estiman los estados de sistemas no lineales mediante álgebra diferencial, lo cual conlleva una ardua tarea al realizar cálculos y encontrar propiedades que hagan óptima la realización del observador. En [Xingzhe, 2003] extienden

el diseño del observador mediante sistemas con multivariantes no lineales bajo dos restricciones, la primera, una desigualdad matricial lineal deberá existir y la segunda, que las funciones no lineales sean monótonas no decreciente a los estados medidos.

1.8 Aportaciones

En este trabajo de investigación se presenta un avance en el diseño de observadores no lineales mediante la metodología de bond graph, basados en el criterio del círculo.

1.9 Estructura de la tesis

El presente capítulo 1 plantea la hipótesis que se confirma en los subsecuentes capítulos, se presenta una breve introducción a la metodología utilizada, se ofrece una vista clara del estado en el cuál se encuentra la investigación en los ámbitos relacionados con los observadores y la metodología en la cual se basa la investigación, se dan a conocer los objetivos y las aportaciones de el trabajo de investigación.

En el segundo capítulo se presenta de manera detallada la metodología y procedimientos que dan forma a la metodología básica de bond graph, así como una explicación de tópicos vitales para la comprensión del trabajo de investigación y una serie de ejemplos para mostrar la técnica de modelado.

En el tercer capítulo se presentan la metodología de bond graph, la cual plantea la viabilidad de realizar modelado de sistemas lineales y no lineales formados por diferentes dominios de energía, como mecánico, hidráulico y eléctrico.

En este presente trabajo de investigación se describe la teoría orientada al observador asintótico de *Luenberger*, la cual brinda un panorama base para dar comienzo con la observabilidad en un enfoque de bond graph.

Finalmente, en el capítulo 4 se realiza una introducción a los sistemas no lineales para después estudiar las distintas no linealidades presentes en los sistemas, posteriormente se enfoca a la no linealidad con la que se va a trabajar, una vez que se tiene ubicado el problema, se trabaja con la metodología del criterio del círculo y se une con la metodología de bond graph para así obtener una técnica para el diseño de observadores no lineales, finalmente se dan dos ejemplos de dicha técnica mostrando la viabilidad de la propuesta.

Capítulo 2

Modelado en bond graph y observadores

2.1 Bond Graph

2.1.1 Introducción

Cuando se modela un sistema físico, mecánico, térmico, hidráulico, etc, se busca que sea fácil de entender para los diseñadores y cuando se está trabajando en equipo, se requiere de un entendimiento profundo del sistema y a su vez que exista una manera simple de interpretar especialmente en la manera de mostrar todos los elementos que el sistema conlleva, por lo cual una representación gráfica ayuda mucho a la mejor apreciación de la planta, si ésta se puede ver más y se presentan menos ecuaciones además de plantear menos formulaciones matemáticas comparadas con la teoría clásica, estas ecuaciones muchas veces, sólo se pueden interpretar por completo con la persona que diseñó la planta, por todo esto se describe en el presente capítulo una metodología gráfica, la cual ayudará a modelar sistemas con mucha facilidad a comparación de interpretaciones matemáticas complejas.

La herramienta de bond graph definida por el profesor Henry M. Paynter del Instituto Tecnológico de Massachusetts (MIT) en 1969 [Paynter, 1961], formalizada por D Karnopp (1983) [Karnopp, 1975], Tomas (1991) [Karnopp, 1999] y Breedveld (1984) [Gawthrop, 1996] y Rosenberg (1990) [Karnopp, 1983] de la Universidad del estado de Michigan elaboró los conceptos para el modelado de sistemas físicos que hoy en día son usados en escuelas e industrias. Este método aporta

características de manera visual como son: orden del sistema, controlabilidad y observabilidad sin necesidad de recurrir al cálculo de matrices inversas o ecuaciones diferenciales.

2.1.2 Componentes básicos de un bond graph

A continuación se describen una serie de componentes básicos de la teoría de bond graph, entre ellos una semi-flecha llamada “Bond” que se emplea para acoplar los puertos de energía de los componentes del sistema, la semi-flecha indica la dirección del flujo de energía entre los puertos al cual están conectados como se muestra en la Figura 2.1.

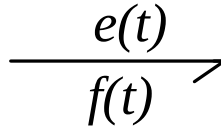


Figura 2.1: Bond de energía con la representación de las variables generalizadas.

Las variables que describen la unión de dos multipuertos que son conectados son llamadas variables de potencia a causa de que el producto de las variables consideradas como funciones del tiempo es la potencia es la potencia instantanea fluyendo entre los dos multipuertos.

Dado que existen interacciones de potencia cuando dos puertos son conectados, es útil clasificar la variedad de las variables de potencia en un esquema universal y describir todos los tipos de multipuerto en un lenguaje común. Las variables de potencia son llamadas esfuerzo $e(t)$ y el flujo $f(t)$. Estas variables son llamadas variables generalizadas debido a que pueden ser utilizadas en todos los dominios de energía. Ejemplos de estos pares de variables son voltaje y corriente para el caso de un sistema eléctrico o fuerza y velocidad para un sistema mecánico. la relacion entre ambas variables está dada por:

$$P(t) \triangleq e(t)f(t) \quad (2.1)$$

donde por definición la multiplicación del esfuerzo y del flujo es la potencia. en sistemas que almacenan energía es necesario definir variables que representen el estado del sistema llamadas variables de energía denominadas momento $p(t)$ o esfuerzo acumulado $e_a(t)$ y desplazamiento $q(t)$ o flujo acumulado $f_a(t)$, están dadas por:

$$p(t) = e_a(t) \triangleq \int^t e(\tau) d\tau \quad (2.2)$$

$$q(t) = f_a(t) \triangleq \int^t f(\tau) d\tau \quad (2.3)$$

Tabla 2.1: Variables generalizadas para sistemas eléctricos y sistemas mecánicos traslacionales.

Variables	General	Eléctrico	Mecánico Traslacional
Esfuerzo	$e(t)$	$v(t)$ Voltaje	$F(t)$ Fuerza
Flujo	$f(t)$	$i(t)$ Corriente	$V(t)$ Velocidad
Momento	$p(t) = \int e(\tau) d\tau$	$\lambda(t)$ Enlace de Flujo	$P_R(t)$ Momento Rotacional
Desplazamiento	$q(t) = \int f(\tau) d\tau$	$q(t)$ Carga	$x(t)$ distancia
Potencia	$P(t) = e(t)f(t)$	$v(t)i(t)$	$F(t)V(t)$
Energía	$E(p) = \int f(p) dp$ $E(q) = \int e(q) dq$	$\int i(\lambda) dp$ $\int e dq$	$\int V(P_R) dp$ $\int F(x) dx$

Elementos Puerto-1 pasivo

Elemento- R . Este es utilizado para modelar al fenómeno físico que relacione la variable de esfuerzo a la variable de flujo del dominio físico que se está considerando. El elemento R transforma la potencia suministrada a él en energía calorífica disipada y se muestra en la Figura 2.2.

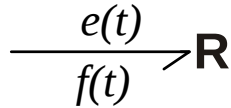

 Figura 2.2: Representación del elemento R .

Tabla 2.2: Variables generalizadas de sistemas mecánicos rotacionales y sistemas hidráulicos.

Variables	Mecánico rotacional	Hidráulico
Esfuerzo	$\tau(t)$ Par	$P_e(t)$ Presión
Flujo	$\omega(t)$ Velocidad angular	$Q(t)$ Caudal
Momento	$H(t)$ Momento angular	$P_P(t)$ Integral de presión
Desplazamiento	$\theta(t)$ Ángulo	$V(t)$ Volumen
Potencia	$\tau(t)\omega(t)$	$P_e(t)V(t)$
Energía	$\int \omega(H)dH$ $\int \tau(\theta)d\theta$	$\int Q(P_P)dP_p$ $\int P_e(V)dV$

Elemento- C El elemento C se utiliza para modelar al fenómeno físico que relaciona la variable de esfuerzo con la variable de desplazamiento de acuerdo al dominio físico. El elemento capacitivo transforma la potencia suministrada en flujo almacenado. En el language de bond graph se representa con un bond de potencia con la letra C , mostrado en la Figura 2.3.

$$\frac{e(t)}{f(t)} \rightarrow \mathbf{C}$$

 Figura 2.3: Representación del elemento C .

Elemento- I El elemento I se utiliza para modelar al fenómeno físico que relacione la variable de flujo con la variable de momento del dominio físico que se esté considerando. Este elemento tiene la característica de transformar la potencia suministrada a él en esfuerzo almacenada, cuya representación se ilustra en la Figura 2.4.

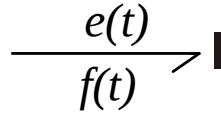


Figura 2.4: Representación del elemento I.

Elementos puerto-1 activos o fuentes

Éstos son los elementos que introducen energía al sistema, existen dos tipos de fuentes, fuente de esfuerzo y flujo, denotadas MSe y MSf respectivamente y su representación se muestra en la Figura 2.5 y 2.6.

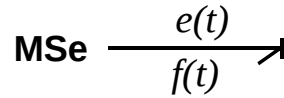


Figura 2.5: Elemento activo: fuente de esfuerzo.

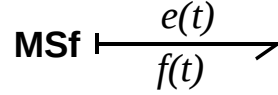


Figura 2.6: Elemento activo: fuente de flujo.

Elementos ideales de puerto-2

Se considera ahora des elementos ideales puerto-2, llamados transformador (TF) y girador (GY), que son sistemas lineales que cambian la relación entre las variables de flujo y esfuerzo. Los bonds que representan a un transformador TF y a un girador GY se muestran en la Figura 2.7, donde n y r son los módulos del transformador y del girador, respectivamente.

Las relaciones de las variables de bond generalizadas para un transformador son:

$$e_1(t) = ne_2(t) \quad (2.4)$$

$$f_1(t) = \frac{1}{n}f_2(t) \quad (2.5)$$

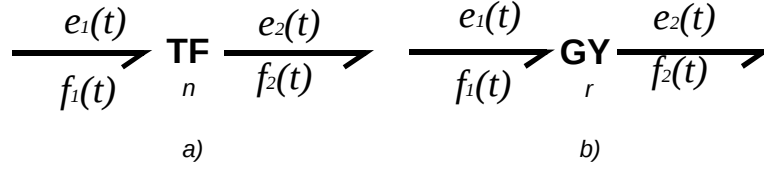


Figura 2.7: Bond Graph de un transformador (a) y un Girador (b).

Las relaciones de las variables de bond generalizadas para un girador son:

$$e_1(t) = r e_2(t) \quad (2.6)$$

$$f_1(t) = \frac{1}{r} f_2(t) \quad (2.7)$$

Elementos de unión, puertos-3

Estos son llamados uniones dado que esa es su función. Estos puertos-3 representan una de las ideas fundamentales del formalismo de bond graph. Representan en forma de multipuerto los dos tipos de conexiones, serie y paralelo. Considerar la unión de flujo, unión-0 o unión de esfuerzo común que representa la conexión en paralelo, este es un elemento multipuerto relacionado por las ecuaciones (2.8) y (2.9), de manera gráfica se ilustra en la Figura 2.8.

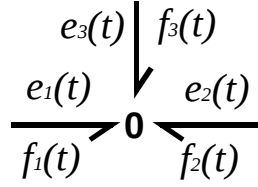


Figura 2.8: Unión-0.

Las relaciones de interconexión que describen la unión-0 están dadas por los siguientes ecuaciones las cuales se toman a partir de las direcciones de los bonds.

$$e_1(t) = e_2(t) = e_3(t) \quad (2.8)$$

$$f_1(t) = f_2(t) + f_3(t) \quad (2.9)$$

El otro elemento de puerto-3, es la unión de esfuerzo, unión-1 o unión de flujo común para la conexión serie, que se muestra en la Figura 2.9.

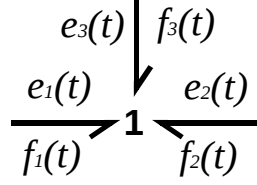


Figura 2.9: Unión-1.

Las relaciones de interconexión para este elemento son:

$$e_1(t) = e_2(t) + e_3(t) \quad (2.10)$$

$$f_1(t) = f_2(t) = f_3(t) \quad (2.11)$$

2.1.3 Causalidad para los multipuertos

El concepto de causalidad se basa en las relaciones de causa y efecto, que organizan las leyes constitutivas de los elementos. Para organizar las leyes constitutivas de componentes en conjuntos de ecuaciones diferenciales es necesario definir relaciones constitutivas de causa y efecto, una marca en un bond llamado trazo causal como se muestra en la Figura 2.10, la cual indica cómo $e(t)$ y $f(t)$ simultáneamente son determinados causalmente en un bond, por consecuencia el trazo causal indicará la dirección del flujo y del esfuerzo.

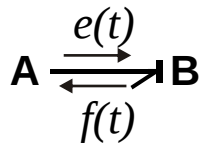


Figura 2.10: Causalidad en un bond.

El trazo causal (es decir, la línea perpendicular a la semiflecha) indica un sentido de entrada-salida para $e(t)$ y $f(t)$ de **A** a **B** en cada puerto de los componentes y el esfuerzo entra en un bond en el mismo sentido que el trazo causal, tal como se muestra en la Figura 2.10.

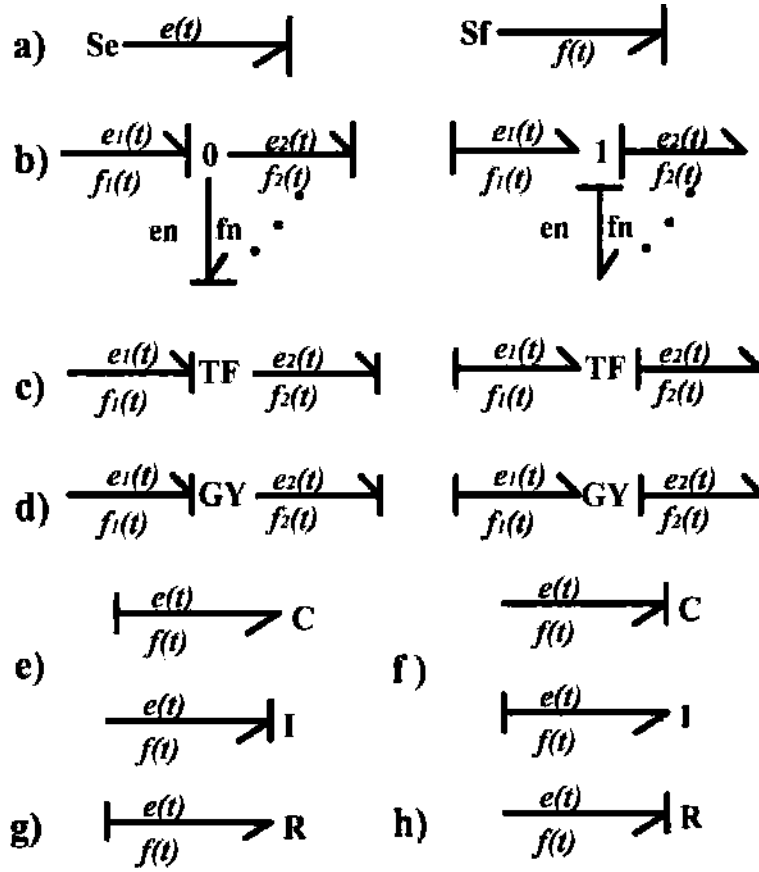


Figura 2.11: a) Causalidad fuentes de flujo y esfuerzo, b) Unión-0 y unión-1, c) y d) Giradores, transformadores, e) causalidad ntegral, f) causalidad derivativa, g) causalidad de la resistencia, h) causalidad de la conductancia.

La Figura 2.11 muestra las reglas causales a designar como: a) el tipo de fuente será la asignación asignada, la cual varia dependiendo el tipo de fuente, después en b) la unión-0 y unión-1 muestran la posible asignación causal si se llegará a tener varios bonds interconectados, c) y d) muestran la asignación causal de los transformadores y giradores, en f) se muestra la causalidad derivativa de los elementos capacitivos e inductivos a su vez de manera inversa se muestra en el inciso e) la causalidad integral de los elementos.

Considerando el elemento- C con una relación constitutiva de $f(t)$ a $e(t)$, es decir, relaciona $e(t)$ a una variable de flujo acumulada $q(t) = \int f(t)dt$. Esto es, $f(t)$ es la entrada a un elemento- C como se muestra en la Figura 2.12, se integra primero para obtener $q(t)$ y entonces $e(t)$ es una salida relacionada a $q(t)$, a esta causalidad en un elemento de almacenamiento se le llama causalidad integral, debido a que la integral de la entrada $f(t)$ se relaciona con la salida $e(t)$, esto es;

$$e(t) \triangleq \frac{1}{C} \int f(t) dt \quad (2.12)$$

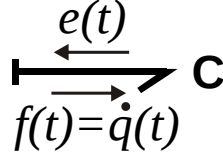


Figura 2.12: Elemento C en causalidad integral.

Cambiando la causalidad, mostrada en la Figura 2.13, se obtiene la misma relación de la ecuación (2.12) planteada con derivadas.

$$f(t) = C \frac{de(t)}{dt} \quad (2.13)$$

A esta causalidad se le llama causalidad derivativa de un elemento de almacenamiento la cual se aprecia en la Figura 2.13.

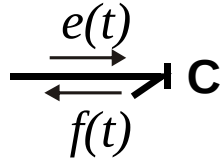


Figura 2.13: Elemento C en causalidad derivativa.

2.1.4 Procedimiento para la construcción de sistemas en bond graph.

El modelado en bond graph se describe como una herramienta para modelar sistemas de diferentes dominios físicos en uno generalizado, es así como se describieron los elementos y las restricciones para ser usados. Sin embargo, aún falta modelar los sistemas en bond graph, para ello se tiene que llevar a cabo una serie de pasos para dicho modelado que a continuación se describen [Gawthrop, 1995][G. González A, 2004].

Procedimiento 1

1. Dibujar una unión-0 para cada cada punto en el esquema donde las trayectorias paralelas coincidan.
2. Dibujar una unión-1 para cada componente del sistema en una trayectoria serie y conectar el componente apropiado de bond graph por un bond en esa unión. La dirección de la semiflecha en cada bond indica la dirección asumida del flujo de potencia, es decir, a partir de fuentes y hacia elementos almacenadores y elementos disipadores.
3. Dibujar bonds entre uniones adyacentes, nuevamente indicando la dirección de flujo de potencia.
4. Remover la unión-0 que representa el punto de referencia y remover todos los bonds conectados a esta unión.
5. Simplificar de acuerdo a la Figura 2.14 según el caso.

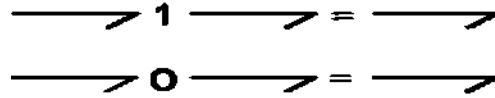


Figura 2.14: Equivalencias entre uniones.

6. A continuación, el Procedimiento 1 se aplica al modelado de sistemas de diferentes dominios.

El primer ejemplo muestra un circuito eléctrico, el segundo ejemplo muestra un sistema mecánico y finalmente, el tercer ejemplo un sistema hidráulico.

A) Sistema eléctrico

El ejemplo de la Figura 2.15 muestra un motor de CD con imán permanente, este modelo ayuda a tener una amplia perspectiva de como modelar circuitos eléctricos y mejor aún, el como modelar máquinas eléctricas. La siguiente nomenclatura es usada V_a , i_a , r_a y L_a denotan el voltaje de armadura, corriente, resistencia e inductancia respectivamente; e es la velocidad voltaje inducida por la velocidad del motor ω ; T_{em} y T_L son el electromagnetismo generado y la carga del torque; θ es la posición angular; J el momento de inercia para todas las masas; b es un coeficiente de fricción.

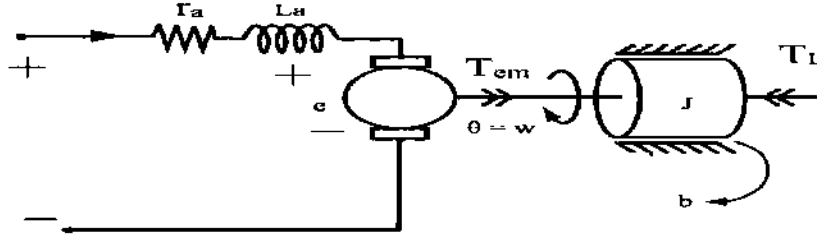


Figura 2.15: Modelo del motor de CD

a. Primero se agrega una unión-0 en cada unión de n elementos así como se le asigna una letra a cada uno de los nodos como se puede mostrar en la Figura 2.16.

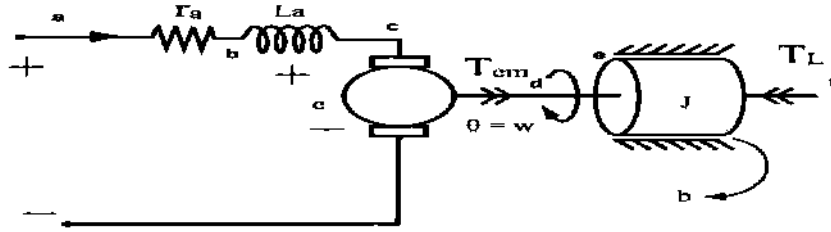


Figura 2.16: Motor de CD con identificación de nodos

b. Los pasos 1, 2, 3 y 4 del procedimiento 1 se ilustran en la Figura 2.17.

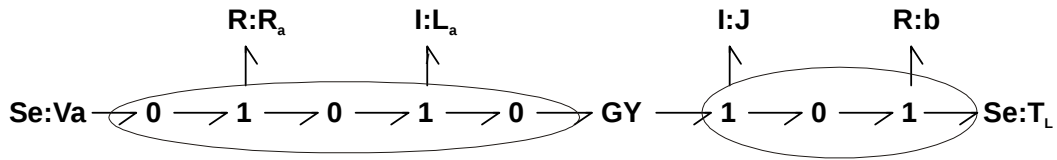


Figura 2.17: Procedimiento para obtener el Bond Graph de un circuito eléctrico.

c. Al reducir los elementos, es decir, aplicando el paso 5 del procedimiento 1 y aplicando su respectiva causalidad como se muestra en la Figura 2.18.

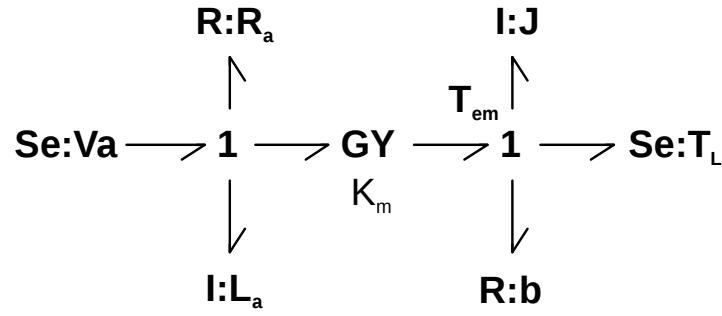


Figura 2.18: Procedimiento para obtener el bond graph de un circuito eléctrico.

B) Sistemas hidráulicos

Los sistemas hidráulicos están caracterizados por alta presión y baja velocidad de fluido. Los sistemas hidráulicos pueden ser tratados como circuitos al tener semejanzas entre ellos por lo cual se siguen los pasos del Procedimiento 1 con los siguientes cambios:

En el paso 1, para cada presión distinta establecer una unión-0.

En el paso 2, se introduce para cada elemento entre el par de uniones-0 usando uniones-1, añadiendo fuentes de presión y de flujo.

Para el paso 4, se definen todas las presiones relativas a una presión de referencia, en este caso normalmente se utiliza la atmósfera y se elimina la unión-0 de referencia y sus bonds.

En la Figura 2.19 se muestra un sistema hidráulico, del cual se obtendrá su bond graph correspondiente aplicando el procedimiento 2.1.

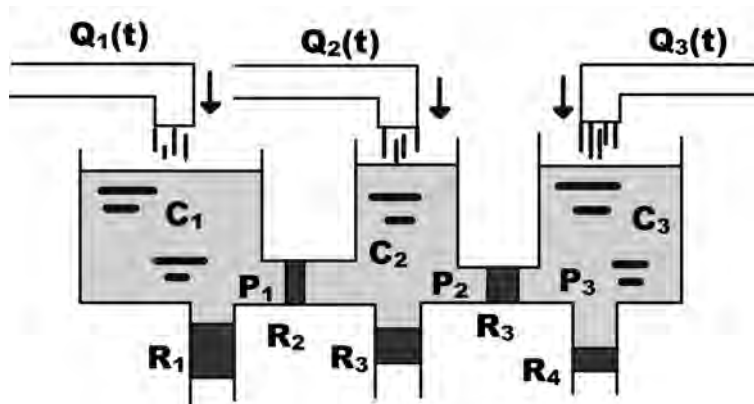


Figura 2.19: Sistema hidráulico.

Aplicando los pasos 1, 2, 3 del procedimiento 1, obtenemos la Figura 2.20.

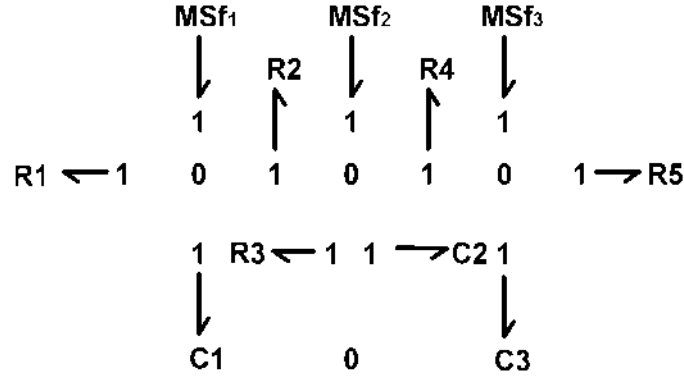


Figura 2.20: Procedimiento para encontrar el Bond Graph de un sistema hidráulico.

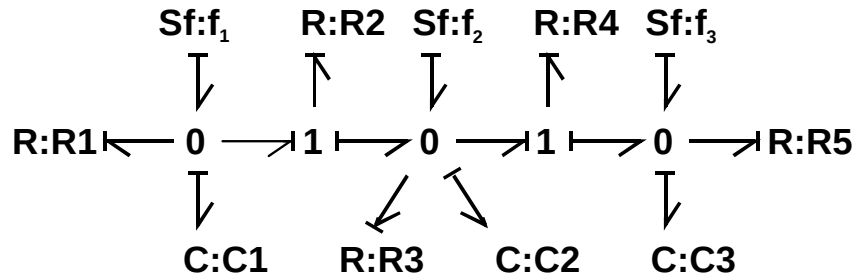


Figura 2.21: Procedimiento para encontrar el Bond Graph de un sistema hidráulico.

Finalmente aplicando el paso 4 por medio de la reducción de bonds y uniones, obtenemos la Figura 2.21.

C) Sistemas mecánicos

El procedimiento de modelado para sistemas mecánicos es muy similar a los modelados anteriormente, por lo tanto, el método sigue el procedimiento 1 realizándose los siguientes cambios:

Para el paso 1, para cada velocidad distinta establecer una unión-1 ya que éstas en los sistemas mecánicos determinan los cambios de velocidad del sistema.

En el paso 2, insertar los elementos de generación de fuerza de puerto-1 entre el par apropiado de uniones-1 empleando uniones-0. Así como también se deberán añadir inercias a sus respectivas uniones-1.

Paso 3, finalmente el nodo seleccionado de tierra es cualquier velocidad cero, para su ilustración del modelado de un sistema mecánico se selecciona el modelo de suspensión de un automóvil mostrado en la Figura 2.22.

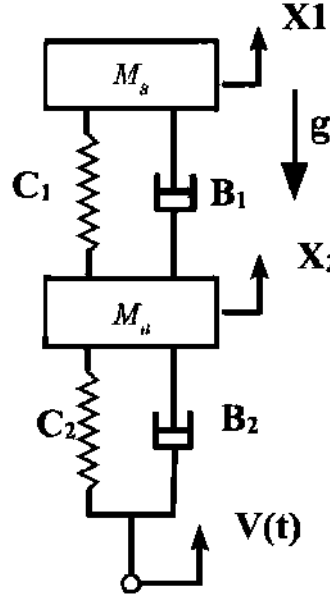


Figura 2.22: Modelo de suspensión de un carro.

Finalmente, el sistema simplificado y agregando las causalidades a los elementos se muestran en la Figura 2.23.

2.1.5 Estructura de unión en sistemas multipuerto[G. González A, 2004]

Para analizar el comportamiento de sistemas es necesario obtener ecuaciones, las cuales permiten mostrar el comportamiento del sistema.

A) Vectores clave o vectores significativos

En un bond graph en forma convencional, todos los bonds pueden ser clasificados en bonds externos, que conectan a los elementos o puertos R , C , I , MS_e y MS_f , y en bonds internos que conectan a uniones 0 , 1 , TF y GY . Así mismo, los bonds externos pueden ser clasificados de acuerdo

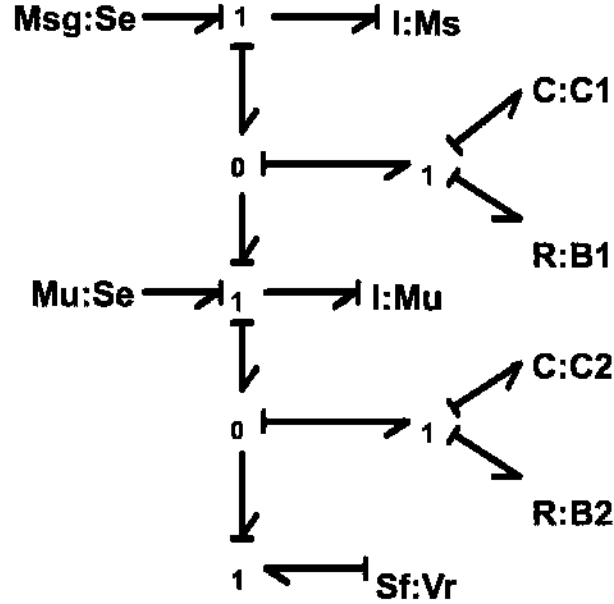


Figura 2.23: Modelo de suspensión de un carro en bond graph.

a su forma de manifestación de energía. En la Figura 2.24 se muestra el diagrama a bloques de la Estructura Unión de un bond graph.

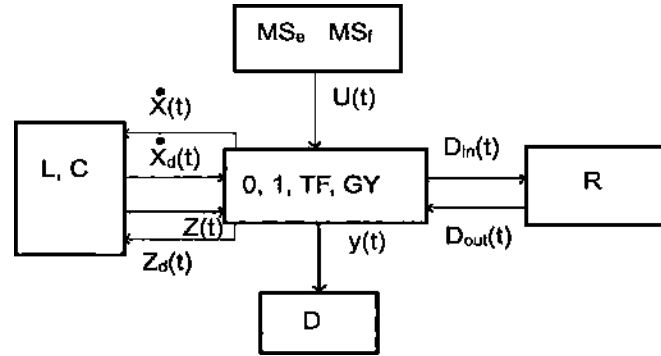


Figura 2.24: Diagrama a Bloques de la Estructura de Unión de un Bond Graph.

En la Figura 2.24, las variables (MS_e, MS_f) , (L, C) y (R) denotan campos de fuente, de almacenamiento y disipación respectivamente, D el detector y $0, 1, TF, GY$ la estructura de unión con transformadores, TF , giradores, GY , uniones-0 y uniones-1.

Los vectores que representan al sistema llamados vectores clave están representados en la

Figura 2.24 , donde $u(t) \in \mathbb{R}^P$ contiene las variables de potencia o los esfuerzos y flujos impuestos por los elementos de las fuentes de la Estructura de Unión. Los estados $x(t) \in \mathbb{R}^n$ donde n denota el numero de elementos almacenadores de energia linealmente dependientes y $x_d(t) \in \mathbb{R}^m$ donde m denota el numero de elementos almacenadores de energia linealmente dependientes los cuales están compuestos por variables de energía, momento generalizado $p(t)$ en elementos I y desplazamiento generalizado $q(t)$ en elementos C en causalidad ; $D_{in}(t) \in \mathbb{R}^r$ y $D_{out}(t) \in \mathbb{R}^r$ son una mezcla de esfuerzos y flujos que muestran los intercambios energéticos entre el campo de disipación y la Estructura Unión.

B) Relaciones de campo y ecuación de estado

Las relaciones de campo no lineales de la Figura 2.24 de almacenamiento de disipación son:

$$z(t) = \Phi_F(x) \quad (2.14)$$

$$z_d(t) = \Phi_{Fd}(x_d) \quad (2.15)$$

$$D_{out}(t) = \Phi_L(D_{in}) \quad (2.16)$$

donde:

Φ_F denota una función que relaciona cada z_i con x_i para $i = 1, \dots, n$.

Φ_{Fd} denota una función que relaciona cada z_{di} con x_{di} para $i = 1, \dots, m$.

Φ_L denota una función que relaciona cada D_{out-i} con D_{in-i} para $i = 1, \dots, M$.

El comportamiento específico de cada elemento específico está descrito por una ley física la cuál es llamada como relación constitutiva. Si las relaciones constitutivas son lineales tenemos:

$$z(t) = Fx(x) \quad (2.17)$$

$$z_d(t) = F_d x_d(x_d) \quad (2.18)$$

$$D_{out}(t) = L * D_{in}(t) \quad (2.19)$$

donde L , F y F_d son matrices reales de dimensión $r \times r$, $n \times m$ y $m \times m$, respectivamente.

Las relaciones de la estructura unión están dadas por:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ D_{in}(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = S \begin{bmatrix} z(t) \\ D_{out}(t) \\ u(t) \\ \dot{x}_d(t) \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

$$z_d(t) = -S_{14}^T z(t) \quad (2.21)$$

donde la estructura de unión está formada por:

$$S = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & 0 \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & 0 \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

Los elementos de S toman valores dentro del conjunto $\{0, \pm 1, \pm n, \pm r\}$ donde n y r son módulos del transformador y girador. La matriz S está particionada de acuerdo a la dimensión de sus vectores clave. Las submatrices S_{ij} tienen las siguientes propiedades:

- B1.- S_{11} y S_{22} son matrices cuadradas antisimétricas.
- B2.- S_{12} es la matriz transpuesta negativa de S_{21} y viceversa.

Las propiedades de B1 y B2 están basadas en el principio de conservación de la energía.

Un sistema lineal invariante en el tiempo (LTI) está representado en variables de estado por:

$$\dot{x}(t) = A_p x(t) + B_p u(t) \quad (2.23)$$

$$y(t) = C_p x(t) + D_p u(t) \quad (2.24)$$

Relacionando (2.20) y (2.21) con (2.23) y (2.24) obtenemos:

$$A_p = E^{-1}(S_{11} + S_{12}MS_{21})F \quad (2.25)$$

$$B_P = E^{-1}(S_{13} + S_{12}MS_{23}) \quad (2.26)$$

$$C_p = (S_{31} + S_{32}MS_{21})F \quad (2.27)$$

$$D_p = S_{33} + S_{32}MS_{23} \quad (2.28)$$

siendo,

$$E = I + S_{14}F_d^{-1}S_{14}^{-1}F \quad (2.29)$$

$$M = (I - LS_{22})^{-1}L \quad (2.30)$$

Las expresiones (2.23) y (2.24) a (2.30) permiten la obtención directa del modelo de un sistema físico de variables de estado, utilizando la representación de bond graph.

C) Obtención del modelo en espacio de estado desde bond graph

A continuación se describe el procedimiento para obtener el modelo en espacio de estado de un sistema.

Precedimiento 2

1. Numerar cada uno de los enlaces existentes en el modelo.
2. Definir la entrada $u(t)$ y $y(t)$.
3. Llenar el vector $D_{in}(t)$ con las variables de potencia que entran a cada elemento de disipación (puerto-1 resistor).
4. Encontrar el vector $D_{out}(t)$ con las variables de potencia que salen de cada elemento de disipación.
5. Formar los vectores $x(t)$, $\dot{x}(t)$, $x_d(t)$, $\dot{x}_d(t)$, $z_d(t)$, $z(t)$ para los elementos (puerto-1 capacitor y puerto-1 inercia), de acuerdo a la Tabla 2.3.
6. Completar la estructura unión.

7. Comprobar las propiedades que las causalidades se cumplan esta quiere decir que no se está violando la ley de conservación de la energía.
8. Obtener las matrices F , F_d y L .
9. Obtener las matrices E y M .
10. Finalmente obtener las matrices A, B, C y D usando sus respectivas de almacenamiento.

Tabla 2.3: Tabla guía para completar los vectores generados por los elementos, de almacenamiento.

Elemento	$x(t)$ y $x_d(t)$	$\dot{x}(t)$ y $\dot{x}_d(t)$	$z_d(t)$ y $z(t)$
I	$P(t)$	e	f
C	$q(t)$	f	e

Ejemplo 1

Una vez obtenido en bond graph del sistema eléctrico mostrado en la Figura 2.25

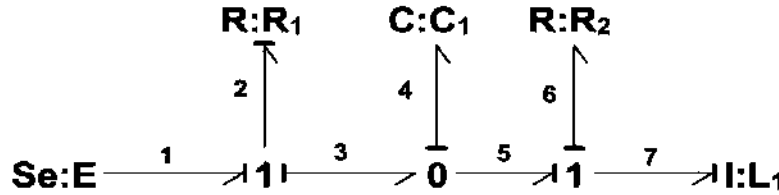


Figura 2.25: Modelo con los enlaces numerados

Ahora se asigna la entrada y la salida del sistema, como entrada se tiene $u(t) = e_1$ y como salida tiene $y(t) = f_7$, los subíndices indican de que enlaces se está hablando. En seguida se completan los vectores $D_{in}(t)$ y $D_{out}(t)$, para esto se puede apreciar en la Figura 2.25 que el esfuerzo e_2 y el flujo f_6 entran hacia los elementos resistivos R_1 y R_2 respectivamente. Por lo tanto:

$$D_{in}(t) = \begin{bmatrix} e_2 \\ f_6 \end{bmatrix}; \quad D_{out}(t) = \begin{bmatrix} f_2 \\ e_6 \end{bmatrix} \quad (2.31)$$

Como quinto paso, se precede a llenar los vectores $x(t)$, $\dot{x}(t)$, $x_d(t)$, $\dot{x}_d(t)$, $z_d(t)$ y $z(t)$ para los elementos de almacenamiento, todo esto usando la información de la Tabla 2.3. En el modelo se tienen dos elementos de almacenamiento, un elemento -C en el enlace 4 y otro un elemento -I en el enlace 7, por lo tanto dichos vectores quedan de la siguiente manera:

$$x(t) = \begin{bmatrix} q_4 \\ p_7 \end{bmatrix}; \quad \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} f_4 \\ e_7 \end{bmatrix}, \quad z(t) = \begin{bmatrix} e_4 \\ f_7 \end{bmatrix} \quad (2.32)$$

Introduciendo los vectores de (2.31) y (2.32) en (2.20) y debido a que no se tienen elementos en causalidad derivativa en bond graph, la matriz de estructura unión queda:

$$\begin{bmatrix} f_4 \\ e_7 \\ e_2 \\ f_6 \\ f_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & 0 \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_4 \\ f_7 \\ e_2 \\ f_6 \\ e_1 \end{bmatrix} \quad (2.33)$$

Ahora se procede a completar la matriz de estructura unión usando las reglas de las uniones -0 y -1 para cada uno de los dos esfuerzos y flujos que se tienen.

$$f_4 = f_3 - f_5 = f_2 - f_7 \quad (2.34)$$

$$e_7 = e_5 - e_6 = e_4 - e_6 \quad (2.35)$$

$$e_2 = e_1 - e_3 = e_1 - e_4 \quad (2.36)$$

$$f_6 = f_5 = f_7 \quad (2.37)$$

Procedemos al llenado de la matriz S ,

$$\begin{bmatrix} f_4 \\ e_7 \\ e_2 \\ f_6 \\ f_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_4 \\ f_7 \\ e_2 \\ f_6 \\ e_1 \end{bmatrix} \quad (2.38)$$

De (2.38) se obtienen las submatrices

$$\begin{aligned}
 S_{11} &= \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} & S_{12} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} & S_{21} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
 S_{21} &= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & S_{22} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & S_{23} &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\
 S_{31} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} & S_{32} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} & S_{33} &= \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{2.39}$$

Hecho lo anterior, se comprueban las propiedades B1 y B2. Se observa que la matriz S_{11} , así como la matriz S_{22} son antisimétricas, también la matriz S_{12} es la matriz transpuesta negativa de S_{21} por lo que se puede continuar con el procedimiento. Se obtienen las matrices L y F usando (2.17) y (2.19), así como los vectores apropiados.

$$\begin{aligned}
 D_{out}(t) &= L * D_{in}(t) \\
 \begin{bmatrix} f_2 \\ e_6 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} & 0 \\ 0 & R_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_2 \\ f_6 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{2.40}$$

$$\begin{aligned}
 z(t) &= Fx(t) \\
 \begin{bmatrix} f_2 \\ e_6 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{1}{C_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_2 \\ f_6 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{2.41}$$

Precediendo al noveno paso, se obtiene la matriz M usando (2.30), ya que no existen elementos en causalidad derivativa, la matriz E es igual a una matriz identidad de $n \times n$.

$$\begin{aligned}
 M &= L(I - S_{22}L)^{-1} \\
 &= \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} & 0 \\ 0 & R_2 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - 0_{2 \times 2}L \right)^{-1} \\
 &= \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} & 0 \\ 0 & R_2 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{2.42}$$

Por último, el décimo paso se calculan las matrices A , B , C y D por media de las ecuaciones (2.25) a (2.28).

$$\begin{aligned}
 A &= E^{-1}(S_{11} + S_{12}MS_{21})F \\
 &= \left(\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} & 0 \\ 0 & R_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \frac{1}{C_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_1} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{C_1 R_1} & -\frac{1}{L_1} \\ \frac{1}{C_1} & -\frac{R_1}{L_1} \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{2.43}$$

$$\begin{aligned}
 B &= S_{13} + S_{12}MS_{23} \\
 &= 0_{2 \times 1} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} & 0 \\ 0 & R_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} \\ 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{2.44}$$

$$\begin{aligned}
 C &= (S_{31} + S_{32}MS_{21})F \\
 &= \left(\begin{bmatrix} 0 & -1 \end{bmatrix} + 0_{1 \times 2}MS_{21} \right) \begin{bmatrix} \frac{1}{C_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_1} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{L_1} \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{2.45}$$

Finalmente, las ecuaciones de estado del sistema eléctrico quedan:

$$\begin{aligned}
 \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\
 \begin{bmatrix} f_4 \\ e_7 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{C_1 R_1} & -\frac{1}{L_1} \\ \frac{1}{C_1} & -\frac{R_1}{L_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_4 \\ p_7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} \\ 0 \end{bmatrix} e_1 \\
 y(t) &= Cx(t) \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{L_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_4 \\ p_7 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{2.46}$$

2.1.6 Trayectorias causales

Muchas de las propiedades de la metodología de bond graph se basan en trayectorias causales lo cual representa una secuencia alternante de bonds y nodos que asemejan un cierto

camino. Este tipo de trayectorias son utilizadas en esta metodología para obtener la observabilidad de los sistemas.

1. Una trayectoria causal de una estructura de unión es una secuencia alternante de bonds y nodos tal que:
 - a) Para una gráfica acausal, es decir, una gráfica que no tiene la causalidad aplicada a sus elementos o bonds, la secuencia se dice que forma una cadena sencilla.
 - b) Todos los nodos en la secuencia tienen una completa y correcta causalidad.
 - c) En cada unión en una trayectoria se tiene una orientación de causalidades opuesta.
2. Una trayectoria causal es simple, si a través de la misma sigue solamente una misma variable, tal como se muestra en la Figura 2.26.

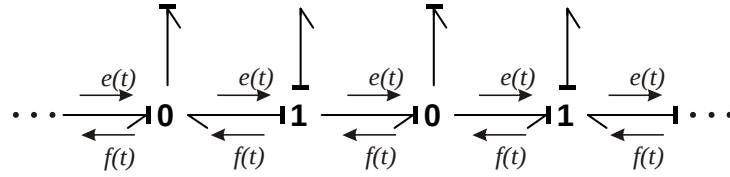


Figura 2.26: Trayectoria causal simple.

3. Una trayectoria causal es mezclada si un cambio de variable es requerido a través de la secuencia causal. Si el cambio se debe a un GY 1) la trayectoria causal es llamada mezclada directa y cuando pasa la trayectoria a través de algún elemento R, C, I. 2) la trayectoria causal es llamada mezclada indirecta. La Figura 2.27 muestra dos trayectorias causales

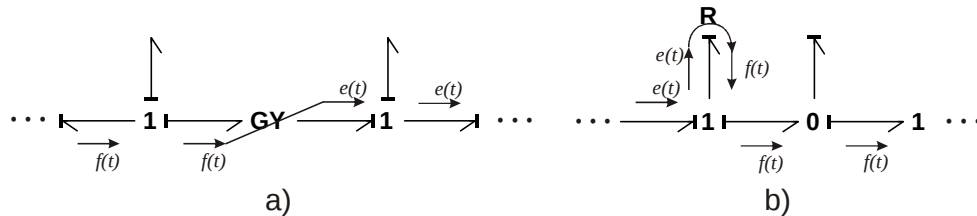


Figura 2.27: Trayectoria causal mezclada: A) girador GY, B) elemento R, 1 o C.

- a) Una trayectoria directa es una trayectoria causal entre una entrada y un detector.

- b) Un *Lazo Causal* es una trayectoria causal sencilla cerrada.
- c) Un *Lazo de Mason* es un lazo causal de la salida de un puerto a la entrada del mismo puerto sin trazar el mismo bond en la misma dirección más de una vez.

2.2 Observadores

2.2.1 Observabilidad

El análisis de observabilidad es de grand importancia principalmente en la técnica del espacio de estado y en la construcción de observadores. Un observador permite estimar el valor de cualquier variable de estado a partir de mediciones en la entrada y en la salida del sistema, es decir, se pueden reconstruir las variables de estado sin necesidad de medirlas directamente. Lo anterior es cierto para cualquier variable de estado observable. Como se analizará enseguida, si una variable de estado no es observable, resultará imposible reconstruirla en base solamente a la mediciones de la entrada y la salida del sistema.

Se dice que el sistema es completamente observable si el estado $x(t_0)$ se determina a partir de la observación de $y(t)$ durante un intervalo de tiempo finito $t_0 \leq t \leq t_1$.

Considérese el sistema sin entradas descrito por:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) \\ y(t) &= Cx(t)\end{aligned}\tag{2.47}$$

donde,

$x(t) \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estado

$y(t) \in \mathbb{R}^m$ es el vector de salidas

A es la matriz $n \times n$ es la matriz de estados

C es la matriz $m \times n$

Por lo tanto, el sistema es completamente observable si todas las transiciones de estado afectan eventualmente a todos los elementos del vector de salida [Katsuhiko, 2006]. Este concepto es de mucha utilidad a la hora de reconstruir sistemas, sin embargo, es necesario optimizar el tiempo t al punto de tener un tiempo deseado de $t_0 = 0$.

Al analizar las condiciones de observabilidad, se considera el sistema sin excitación como el que se obtiene mediante las ecuaciones (2.47). El vector de salida $y(t)$ está dado por:

$$y(t) = Ce^{At}x(0) \quad (2.48)$$

Ahora bien, mediante el Teorema de Cayley-Hamilton [Katsuhiko, 2006], se puede descomponer como,

$$e^{-A\tau} = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k(\tau) A^k \quad (2.49)$$

sustituyendo la expansión de la matriz exponencial (2.48) en (2.49) se obtiene:

$$y(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k(t) CA^k x(0) \quad (2.50)$$

o bien,

$$y(t) = \alpha_0(t)Cx(0) + \alpha_1(t)CAx(0) + \dots + \alpha_{n-1}(t)CA^{n-1}x(0) \quad (2.51)$$

donde α_k , A^k son variables auxiliares para la interpretación de la serie y así llegar a formar una matriz.

$$y(t) = \begin{bmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \dots & \alpha_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} x(0) \quad (2.52)$$

Así, si el sistema es completamente observable, dada la salida $y(t)$ durante un intervalo de tiempo $0 \leq t \leq t_1$, $x(0)$ se determina únicamente a partir de la ecuación (2.51). Se muestra que esto requiere que el rango de la matriz (2.53) de $m \times n$ sea n .

$$\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \quad (2.53)$$

A partir de este análisis, se puede expresar la condición para la observabilidad completa del modo siguiente. El sistema descrito por las ecuaciones (2.47) es completamente observable si y sólo si la matriz $n \times m$, es de rango n , o tiene n vectores columna linealmente independientes. Esta matriz se denomina matriz de observabilidad.

$$\begin{bmatrix} C^T & : & A^T C^T & : & \dots & : & (A^T)^{n-1} C^T \end{bmatrix} \quad (2.54)$$

2.2.2 Observador asintótico de Luenberger [Luenberger, 1971]

La forma de aproximar los estados mediante la medición de la salida es llamado un *observador de estado*. Considerando un sistema LTI dado en la ecuación (2.47) se supone que las variables de estado pueden ser medibles al ser un sistema observable y A , B , C y D son completamente conocidas. Por lo que la problemática aquí es estimar $x(t)$ dado el par $(u(t), y(t))$. Si el sistema cuenta con las características de observabilidad y se conocen las matrices A , B y C podemos duplicar el sistema original y obtenemos el llamado observador en lazo abierto mostrado en la Figura 2.28, el cual servirá como guía para obtener el observador asintótico de Luenberger.

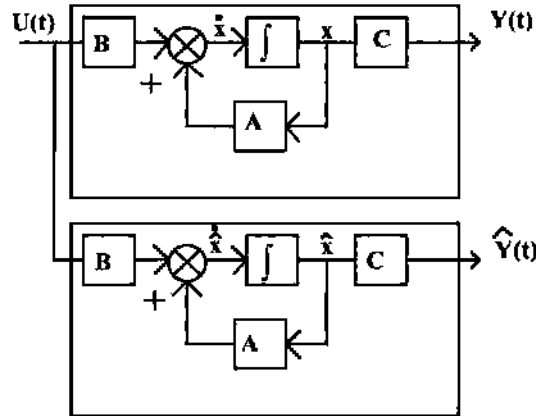


Figura 2.28: Observador de estado en lazo abierto

Ahora bien, si el sistema original mostrado en la ecuación (2.47) y el observador tiene el mismo estado inicial y la misma entrada, la salida $\hat{x}(t)$ del estimador será igual a $x(t)$ para todo t .

Así, la pregunta restante es como encontrar el estado inicial x_0 del sistema y usarlo en el observador. Este problema es resuelto, si el sistema de la Figura 2.29 es observable, es decir, si el sistema (2.47) es observable en t_0 . Un sistema es observable en t_0 , si

existe un tiempo finito $t_1 > t_0$, tal que para cualquier estado x_0 en el tiempo t_0 , el conocimiento de la entrada $u[t_0, t_1]$ y la salida $y[t_0, t_1]$ sobre el intervalo del tiempo $[t_0, t_1]$ es suficiente para determinar el estado x_0 [Chin.T, 1995].

Al utilizar este tipo de observador el estado inicial debe ser calculado cada vez que se use el observador en lazo abierto. Denotándose que en general este tipo de estimadores de variables no es tan factible. Es de notarse que a pesar de tener disponibles la entrada y la salida, solamente se toma la entrada, por lo cual si se llegarán a tomar las dos variables $u(t)$ y $y(t)$ el observador puede ser mejorado, tal y como se muestra a continuación en la Figura 2.29 con el observador asintótico de estado.

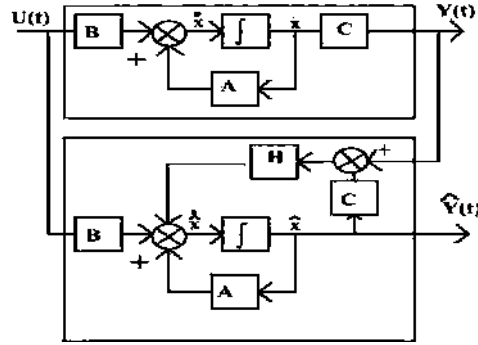


Figura 2.29: Observador asintótico de luenberger.

La salida del sistema $y(t) = Cx(t) - Du(t)$ es comparada con $\hat{y}(t) = C\hat{x}(t) - Du(t)$ y su diferencia multiplicada por la ganancia del observador, $H \in \mathbb{R}^{n \times q}$, como factor de corrección.

El observador de estado asintótico está dado por:

$$\dot{\hat{x}}(t) = (A - HC)\hat{x}(t) + Hy(t) + Bu(t) \quad (2.55)$$

de (2.47) y (2.55) obtenemos,

$$\dot{\tilde{x}}(t) = (A - HC)\tilde{x}(t) \quad (2.56)$$

donde,

$$\tilde{x}(t) \triangleq x(t) - \hat{x}(t) \quad (2.57)$$

dado que los eigenvalores de $(A - HC)$ pueden ser seleccionados para tener la convergencia del estado estimado al estado real, entonces se controla la dinámica de $\tilde{x}(t)$.

2.3 Observabilidad en un enfoque de bond graph

Una de las grandes características de la metodología de bond graph, es el obtener la observabilidad y controlabilidad estructural de sistemas para lo cual se ve a continuación una serie de definiciones y teoremas citados en [C. Sueur, 1991] para la obtención de dichas características.

Definición 2.1 El orden mínimo de un modelo de bond graph, que es igual de dimensión a la matriz de estado, es igual al número de elementos $(n_i)_i$ C e I con causalidad integral en el modelo de bond graph en causalidad integral o BGI.

Definición 2.2 El rango de una matriz A está definido como el rango máximo que esa matriz alcance en función de sus parámetros libres, tomando en cuenta las interrelaciones de los elementos.

Definición 2.3 El Rango estructural q de una matriz de estado A asociado a un modelo en bond graph es igual al número de elementos dinámicos C e I en causalidad integral en el BGD o bond graph en causalidad integral, que aceptan causalidad derivativa en el modelo de BGD o bond graph en causalidad derivativo. Si $(n_i)_i$ representa al número de elementos C e I en causalidad integral y $(n_i)_d$ para el caso de los elementos dinámicos C e I que aceptan causalidad derivativa, se tiene, que:

$$q = (n_i)_i - (n_i)_d \quad (2.58)$$

donde el rango estructural permite determinar la estabilidad asintótica de un sistema dinámico. Lo cual se determina mediante el siguiente teorema:

Teorema 2.1 [Khalil, 1999]. *Una condicion nesesaria y suficiente para que no exista una estabilidad asintótica de un sistema descrito por (2.23) y (2.24), es que el rango de la estructura q de la matriz A sea menor que n . Para el cual existen $n - q$ valores característicos cero de A . Para calcular el rango estructural el cual permite determinar la controlabilidad y la observabilidad estructural de un sistema dinámico representado en bond graph.*

Definición 2.4. La dualización de fuentes consiste en convertir una fuente o detector de esfuerzo a uno de flujo, respectivamente o viceversa.

Definición 2.5. El rango estructural para q_o (observabilidad) de la matriz concatenada $[AC]^T$ asociada con un modelo en bond graph es igual al número de elementos dinámicos C e I en causalidad integral en el BGI que aceptan causalidad derivativa al construir el BGD y cuando se realiza una dualización máxima de detectores. El número de elementos en causalidad integral en el BGI que pertenecen con causalidad integral en el BGD se denotan t_d .

Propiedades 2.1

- * El rango estructural de $[A_p \ B_p]$ es igual a:
- * El rango de la matriz concatenada $S_C = [S_{11} \ S_{12} \ S_{13}]$
- * $n - t_s$

Propiedades 2.2

- * El rango estructural de $([A_p \ C_p])^T$ es igual a:
- * El rango de la matriz conservativo $S_O = [S_{11} \ S_{21} \ S_{31}]^T$
- * $n - t_d$

Las propiedades 2.1 y 2.2 permiten asegurar que el rango estructural es igual al rango de las matrices concatenadas S_C y S_O sólo si el sistema es conservativo de energía. Donde las propiedades de la matriz S (2.22) para sistemas no conservativos no obedecen en los siguientes dos teoremas:

Teorema 2.2 [G. Dauphin 1999]. *El sistema de $([A_p \ B_p])$ es estructuralmente controlable si y sólo si:*

- * *Todos los elementos almacenadores C e I en causalidad integral en el BGI están causalmente conectados con una fuente.*
- * *El rango estructural de $([A_p \ B_p])$ es igual al orden mínimo n .*

Teorema 2.3 [G. Dauphin 1999]. *El sistema de $([A_p \ C_p])^T$ es estructuralmente observable si y sólo si:*

- * *Todos los elementos almacenadores C e I en causalidad integral en el BGI están causalmente conectados con un detector.*
- * *El rango estructural de $([A_p \ C_p])^T$ es igual al orden mínimo n .*

Definición 2.6. El rango estructural q de una matriz de estado A_p asociado a un modelo en bond graph es igual al número de elementos dinámicos C e I en causalidad.

2.4 Conclusiones del capítulo 2

En este segundo capítulo se presenta la metodología de bond graph, la cual plantea la viabilidad de realizar modelado de sistemas lineales, como mecánico, hidráulico y eléctrico. Esta característica se debe a que se trabaja en común como flujo (f) y esfuerzo (e) como lo muestra la tabla 2.1, así como, la obtención de la observabilidad a partir de trazos causales.

Finalmente, en este trabajo de investigación se presenta la teoría orientada al observador asintótico de *Luenberger*, la cual brinda un panorama base para dar comienzo con la observabilidad en un enfoque de bond graph.

Capítulo 3

Observadores lineales en bond graph

3.1 Introducción

El método de bond graph es un método operativo y gráfico que aporta muchas ventajas cuando se usa para diseñar observadores. Mediante el uso gráfico se facilita dicho diseño, el cual consiste en unir el sistema y el observador como si se trataran de bloques. Para analizar un sistema global de este tipo, es esencial conocer una serie de resultados descritos para fundamentar su diseño, así como la reducción de la complejidad de las expresiones matemáticas, además de poder utilizar simuladores de sistemas como el 20-sim para el modelado del mismo.

3.2 Diseño de observadores con variables linealmente independientes

Para el modelado de sistemas es de suma importancia conocer la planta de tal manera que se conozcan todas las variables involucradas, sin embargo, es de mayor importancia saber si algunas de las variables son dependientes o independientes de las otras, en el diseño de sistemas por ejemplo para obtener las ecuaciones que rigen su comportamiento dado un sistema con variables dependientes se requiere de una gran complejidad; sin embargo, con bond graph simplemente es necesario observar que todos los componentes capacitivos o inductivos acepten causalidad derivativa.

Como se muestra en la Figura 3.1 la estructura general propuesta del control por retroalimentación de estado estimado en bond graph. El objetivo de representar el modelo y el observador en diagramas a bloques es obtener el modelo del sistema retroalimentado en términos de la matriz de estructura unión S debido al observador.

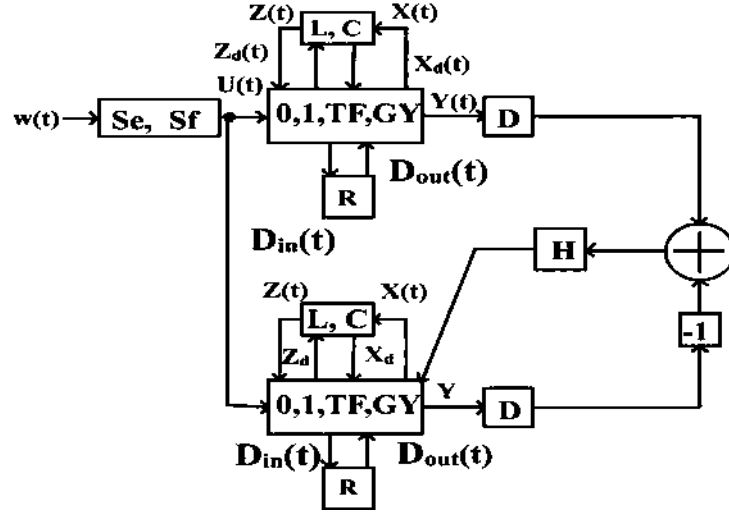


Figura 3.1: Lazo cerrado con observador en diagrama a bloques

El objetivo de presentar el modelo y el observador en diagrama de bloques es obtener el modelo del sistema retroalimentado en términos de la matriz estructura unión S debido a el observador y a la retroalimentación de estados, con el propósito de asignar la ubicación de polos en el dominio físico de un sistema de acuerdo a las ganancias.

* Considere el esquema de control de la Figura 3.1 que satisface las siguientes tres condiciones.

- Condición 1. Las relaciones constitutivas de los elementos que forman los campos de almacenamiento F y disipación L son LTI.
- Condición 2. Las propiedades 2.1 y 2.2 vistas en la sección 2.3 para la matriz estructura unión S se cumplen.
- Condición 3. La asignación de la causalidad integral en el bond graph debe ser causalmente correcta.

Sea la estructura del sistema en lazo cerrado entre el sistema y el observador dado por:

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{x}}(t) \\ \hat{D}_{out}(t) \\ \hat{y}(t) \end{bmatrix} = \hat{S}' \begin{bmatrix} z(t) \\ \hat{D}_{out}(t) \\ w(t) \\ \dot{\hat{x}}_d(t) \end{bmatrix} + \tilde{S} \begin{bmatrix} z(t) \\ D_{out}(t) \\ w(t) \\ \dot{x}_d(t) \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

donde la estructura de unión del sistema reflejada al observador es:

$$\tilde{S} = \begin{bmatrix} \tilde{S}_{11} & \tilde{S}_{12} & 0_{1 \times 2} \\ 0_{2(r+q) \times (n+r+p+m)} \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

Entonces, el modelo del observador en lazo cerrado es:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= \hat{A}_p \hat{x}(t) + \hat{B}_p u(t) + \tilde{S} z(t) \\ \hat{y}(t) &= \hat{C}_p \hat{x}(t) + \hat{D}_p u(t) \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$\hat{A}_p = \hat{E}^{-1} \left(\hat{S}'_{11} + \hat{S}'_{12} M' \hat{S}'_{21} \right) F \hat{x}(t) \quad (3.4)$$

$$\hat{B}_p = \hat{E}^{-1} \left(\hat{S}'_{13} + \hat{S}'_{12} M' \hat{S}'_{23} \right) \quad (3.5)$$

$$\bar{A}_p = \hat{E}^{-1} \left(\hat{S}'_{11} + \hat{S}'_{12} M' \hat{S}'_{21} \right) F \quad (3.6)$$

$$\hat{C}_p = \left(\hat{S}'_{31} + \hat{S}'_{32} M' \hat{S}'_{21} \right) F \quad (3.7)$$

siendo,

$$\hat{M} = L(I - \hat{S}'_{22} L)^{-1} \quad (3.8)$$

$$\hat{E} = I + \hat{S}'_{14} F_d^{-1} \left(\hat{S}'_{14} \right)^T F \quad (3.9)$$

A continuación, se muestran las ganancias del observador.

Teorema 3.1 [G. González A, 2004] *Sea un sistema LTI MIMO que satisface las relaciones constitutivas de los elementos que forman los campos de almacenamiento F y disipación L son LTI. Las propiedades B1 y B2 para la matriz estructura unión S se cumplen. La asignación de la causalidad integral en el bond graph debe ser causalmente correcta.*

1) Si el campo de disipación R está localizado antes que el campo de almacenamiento (L, C) , es decir, si $S_{21} = 0$, $S_{11} \neq 0$ y $S_{31} \neq 0$, entonces, la ganancia gráfica directa para el controlador en el bond graph es:

$$S_{11} = EB_pKF^{-1} \quad (3.10)$$

2) Para el caso donde $S_{11} = S_{31} = 0$ y $S_{21} \neq 0$, entonces, la ganancia gráfica directa para el controlador S_{21} es obtenida igualando los elementos de:

$$S'_{12}M S_{21} = EB_pKF^{-1} \quad (3.11)$$

siendo $E = I + S_{14}F_d^{-1}S_{14}^T$.

Más aún, la ganancia gráfica directa para el observador S_{11} o S_{31} es:

$$\hat{E}^{-1}(\dot{S}_{11} + \dot{S}_{12}M S_{21})F = HC \quad (3.12)$$

siendo $\hat{E} = I + \hat{S}'_{14}F_d^{-1}(\hat{S}'_{14})^T$ y $M = L(I - S_{22})^{-1}$.

3.2.1 Procedimiento para el diseño de observadores enfoque gráfico.

Para realizar el diseño de observadores en bond graph, se presenta una serie de pasos.

Procedimiento 3.1

1. Se realiza una copia del bond graph en lazo abierto.
2. La fuente de entrada al sistema físico y al observador es uno de los dos esquemas de la Figura 3.2, dependiendo del tipo de la fuente de entrada.

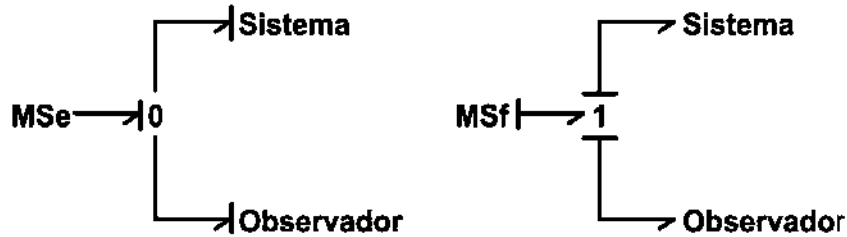


Figura 3.2: Esquemas de retroalimentación de estado estimado.

3. Se identifican las salidas del sistema y del observador.
 - Si la salida es de esfuerzo, agregar un bond activo de esta salida a un detector de esfuerzo, que se conecta a una fuente modulada de esfuerzo mediante otro bond activo.

- Si la salida es de flujo, agregar un bond activo de esta salida a un detector de flujo, que se conecta a una fuente modulada de flujo mediante otro bond activo.
4. La salida del observador debe ser negativa, así, la salida de la fuente del paso 2, llega a una unión-1 para una fuente de flujo y para el caso contrario, después se conecta un bond que entra también a esa unión.
 5. La fuente modulada de la salida del observador del paso 3 se une a través de bonds en una unión-0 para fuentes de flujo y en una unión-1 para fuentes de esfuerzo.
 6. El número de bonds de salida de la unión del paso 4 es igual al número de variables de estado, las cuales son los elementos que almacenan energía en causalidad integral.
 7. Conecta un transformador o girador entre el bond de salida del paso 5 y la variable de estado respectiva del observador.
 8. Se utiliza un transformador para el paso 7 si la salida del sistema del observador son del mismo tipo (esfuerzo o flujo) de la variable de estado, y en caso contrario se utiliza un girador.
 9. Asignar la causalidad a cada uno de los bonds, quedando de tal manera que no exista un conflicto causal entre las uniones -1 y -0.
 10. La ganancia gráfica directa del observador está dada por el ó los módulos del transformador o girador son calculadas por el Teorema 3.1.

A continuación se muestran tres ejemplos de diseño de observadores con variables linealmente dependientes.

3.2.2 Diseños de observadores en bond graph

Para apreciar las distintas condiciones del diseño se observadores, a continuación se diseñan dos sistemas, el primero es el motor eléctrico y el segundo es un sistema hidráulico.

Sistema eléctrico

Primero se considera el sistema en bond graph del motor eléctrico mostrado en la Figura 3.3.

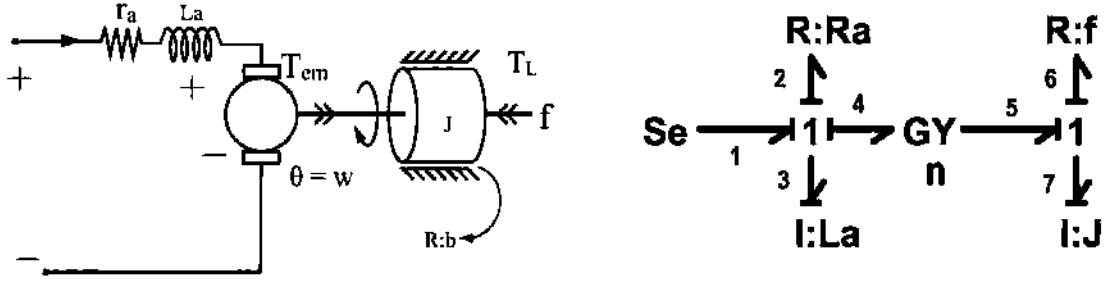


Figura 3.3: Esquema de un motor de CD y su diseño en Bond Graph.

A continuación, se obtienen los vectores claves así llamados en la terminología de bond graph,

$$\begin{aligned}
 x(t) &= \begin{bmatrix} p_3(t) \\ p_7(t) \end{bmatrix} & D_{in}(t) &= \begin{bmatrix} f_2(t) \\ f_6(t) \end{bmatrix} \\
 \dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} e_3(t) \\ e_7(t) \end{bmatrix} & D_{out}(t) &= \begin{bmatrix} e_2(t) \\ e_6(t) \end{bmatrix} \\
 z(t) &= \begin{bmatrix} f_3(t) \\ f_7(t) \end{bmatrix} & y(t) &= f_6(t) \\
 & & u(t) &= e_1(t)
 \end{aligned}$$

Las relaciones construtivas para los elementos son:

$$F = \text{diag} \left\{ \frac{1}{L_a}, \frac{1}{J} \right\} \quad (3.13)$$

$$L = \text{diag} \{ R_a, f \} \quad (3.14)$$

$$F_d = 0 \quad (3.15)$$

La relación del girador de entrada-salida es:

$$\begin{bmatrix} e_4(t) \\ f_4(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & n \\ \frac{1}{n} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_5(t) \\ f_5(t) \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

Para verificar la observabilidad estructural del sistema se analizan las trayectorias causales de modelo en bond graph pero en causalidad integral como se muestra en la la Figura 3.4.

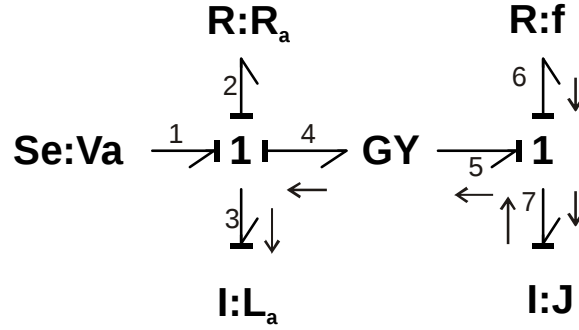


Figura 3.4: Trayectoria causal para L_a .

Donde

$$L_a \Rightarrow \{6 - 7 - 7 - 5 - 4 - 3\}$$

$$L_j \Rightarrow \{6 - 7\}$$

Los elementos L_a , L_J están en causalidad derivativa y el bond graph de la Figura 3.5 es causalmente correcto. Se deduce que los estados son estructuralmente observados, dado que existe una trayectoria entre la salida a cada elemento almacenador de energía.

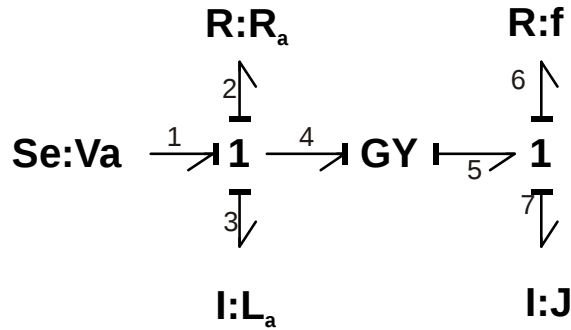


Figura 3.5: Modelo del motor de corriente causalidad derivativa.

Aplicando el procedimiento 3.1, obtenemos el modelo del observador del motor de CD mostrado en la Figura 3.6.

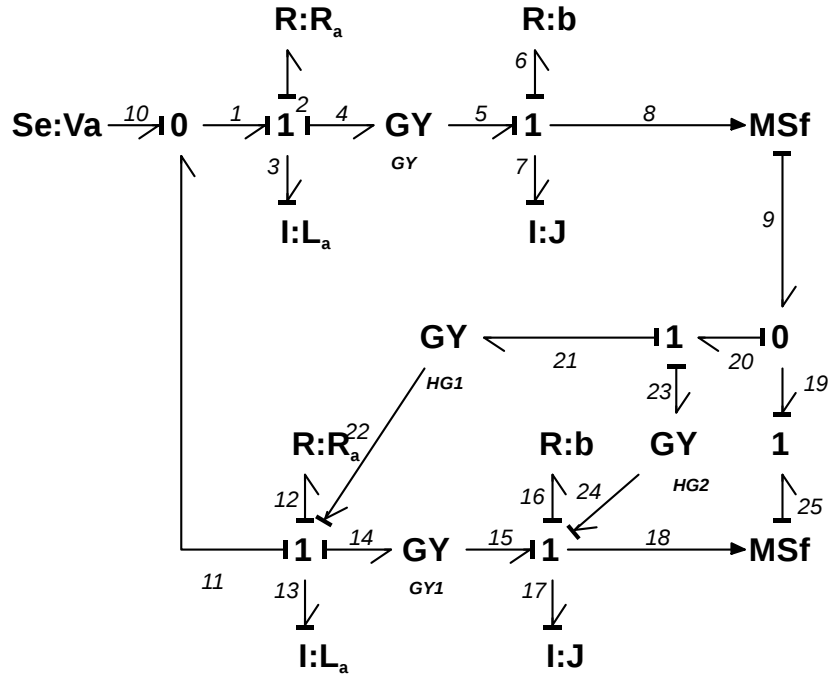


Figura 3.6: Observador para el motor de CD.

La estructura de unión se describe en (3.17), la cual da las distintas submatrices.

$$\begin{aligned}
 S_{11} &= \begin{bmatrix} 0 & -n \\ n & 0 \end{bmatrix} & S_{13} &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} & \hat{S}'_{12} &= \begin{bmatrix} K_{G1} & K_{G2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 S_{31} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} & S_{12} &= -\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & S_{22} = S_{23} = S_{32} = S_{33} = \hat{S}_{21} = \hat{S}_{31} &= 0
 \end{aligned} \tag{3.17}$$

Los elementos de la estructura unión propuesta para el observador está por (3.1), donde:

$$\begin{aligned}
 \hat{S}'_{11} &= \begin{bmatrix} -K_{G1} & -K_{G1} - K_{G2} - n \\ n & -H_{G2} \end{bmatrix} & \dot{S}_{11} &= \begin{bmatrix} 0 & H_{G1} \\ 0 & H_{G2} \end{bmatrix} & \hat{S}'_{12} &= -\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 \hat{S}'_{31} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} & E = \hat{E} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & \hat{S}'_{22} = \hat{S}'_{23} = \hat{S}'_{32} = \hat{S}'_{33} = \hat{S}'_{31} &= 0
 \end{aligned} \tag{3.18}$$

Aplicando el teorema 3.1, de (3.10) obtenemos:

$$\tilde{A}_p = \begin{bmatrix} \frac{K_{G1}}{L_a} & \frac{K_{G2}}{J} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

Al ser $S_{31} = 0$, por lo tanto:

$$\tilde{C}_p = 0 \quad (3.20)$$

Sustituyendo (3.13), (3.14) y (3.16) en (2.25) hasta (2.28), obtenemos el siguiente sistema en lazo cerrado:

$$\begin{aligned} A_p &= \begin{bmatrix} -\frac{R_a}{L_a} & -\frac{n}{J} \\ \frac{n}{L_a} & -\frac{f}{J} \end{bmatrix} & B_P &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ C_p &= \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{J} \end{bmatrix} & D_p &= 0 \end{aligned} \quad (3.21)$$

aplicando las ecuaciones de Luenberger de observador asintótico

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} e_3(t) \\ e_7(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -\frac{R_a}{L_a} & -\frac{n}{J} \\ \frac{n}{L_a} & -\frac{f}{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_3(t) \\ p_7(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} e_{29}(t) - \begin{bmatrix} \frac{K_{G1}}{L_a} & \frac{K_{G2}}{J} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{p}_3(t) \\ \hat{p}_7(t) \end{bmatrix} \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_3(t) \\ p_7(t) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.22)$$

De (3.13), (3.21) y (3.10) la ganancia gráfica directa es:

$$\dot{S}_{11} = \begin{bmatrix} K_{G1} & K_{G2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_1 L_a & K_2 J \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

Utilizando el Teorema 3.1 del modelo del observador en lazo cerrado es:

$$\hat{A}_p = \begin{bmatrix} -\frac{R_a}{L_a} - \frac{K_{G1}}{L_a} & -\frac{n}{J} - \frac{K_{G2}}{J} - \frac{H_{G1}}{J} \\ \frac{n}{L_a} & -\frac{f}{J} - \frac{H_{G2}}{J} \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

De (3.4), se obtienen

$$\bar{A}_p = \begin{bmatrix} 0 & \frac{H_{G1}}{J} \\ 0 & \frac{H_{G2}}{J} \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

Tomando la ecuación (3.6)

$$\hat{C}_p = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{J} \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

De las expresiones anteriores se obtiene el modelo del observador

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \hat{e}_3(t) \\ \hat{e}_7(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -\frac{Ra}{L_a} - \frac{K_{G1}}{L_a} & -\frac{n}{J} - \frac{H_{G2}}{J} - \frac{H_{G1}}{J} \\ \frac{n}{L_a} & -\frac{f}{J} - \frac{H_{G2}}{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{p}_3(t) \\ \hat{p}_7(t) \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} 0 & \frac{H_{G1}}{J} \\ 0 & \frac{H_{G2}}{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_3(t) \\ P_7(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} e_{29}(t) \\ \hat{y}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{p}_3(t) \\ \hat{p}_7(t) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.27)$$

Los polos en lazo cerrado debido al observador son colocados en $P_{1,2} = -9.168 \pm j5.2549$, tenemos $H_1 = 13.33$ y $H_2 = 13.33$ al utilizar la función acker en MatLab.

Sistema hidráulico

A continuación, se muestra un sistema hidráulico controlado por una bomba, dicha bomba maneja un pistón que está conectado a una carga presentada por la masa deslizada por una fricción viscosa cuyo coeficiente es b , el flujo en línea conectado a la bomba y al pistón es descrito por un fluido almacenado en Cf y el flujo inherente Lf .

Se emplea el método de diseño de observadores mediante el enfoque gráfico de bond graph.

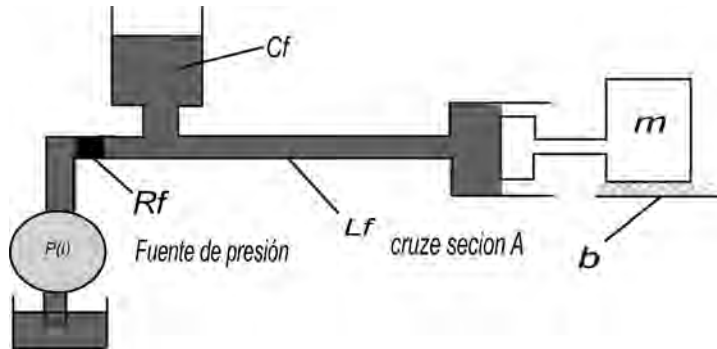


Figura 3.7: Sistema hidráulico.

A partir del modelo hidráulico en bond graph que se ilustra en la Figura 3.8,

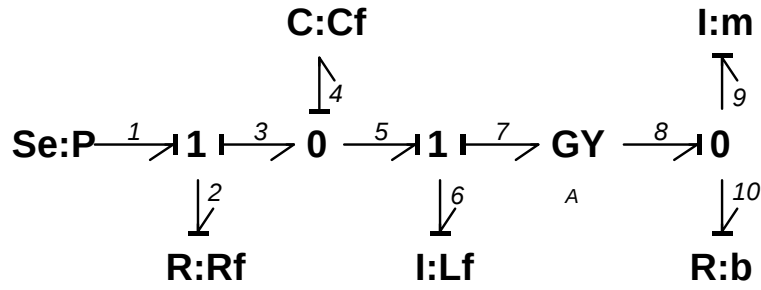


Figura 3.8: Sistema hidráulico representado en Bond Graph.

Del procedimiento 3.1.

Paso 1. Se verifican los estados del sistema que sean observables mediante trayectorias causales lo que significa que deben de existir trayectorias causales desde la salida e_2 hasta los 3 elementos almacenadores de energía Cf , Lf y m .

$$Cf \Rightarrow \{2 - 3 - 4\}$$

$$Lf \Rightarrow \{2 - 3 - 4 - 4 - 5 - 6\}$$

$$m \Rightarrow \{2 - 3 - 4 - 4 - 5 - 6 - 6 - 7 - 8 - 9\}$$

los elementos Cf , Lf y m están en causalidad derivativa y el bond graph de la Figura 3.9 es causalmente correcto. Se deduce que los estados son estructuralmente observados.

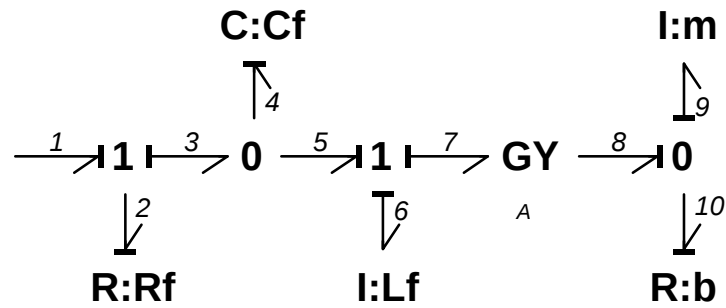


Figura 3.9: Sistema hidraulico representado en Bond Graph causalidad derivativa.

Paso 2. Se realiza una copia del bond graph en lazo abierto, de la fuente de entrada del sistema físico y del observador, como se muestra en los dos esquemas de la Figura 3.2, dependiendo del tipo de la fuente de entrada, para este caso la entrada es esfuerzo por consiguiente se une

mediante una unión-0.

Paso 3. Se identifican las salidas del sistema y del observador. Para este sistema la salida es de flujo por lo que se agrega un bond activo a un detector de flujo, el cual se conecta a una fuente modulada de flujo mediante otro bond activo, tomando en cuenta que la salida del observador debe ser negativa, así, la salida de la fuente llega a una unión-1.

Paso 4. Conectar un transformador por cada bond de salida de la unión-0, para el caso de que la unión sea uno se conectan a un girador.

Paso 5. Asignar la causalidad a cada uno de los bonds, quedando de tal manera que no afecte la causalidad a ninguno de los otros bonds, la ganancia gráfica directa del observador está dada por el o los módulos del transformador o girador.

Paso 6. Para este caso se tiene un conflicto causal por lo que es requerible añadir una union uno como se muestra en la Figura 3.10 paso numero 4. Es llamado canfficro causal porque se deben de respetar las propiedades de la unión -0 la cual es mostrada en el capitulo uno Figura 2.12.

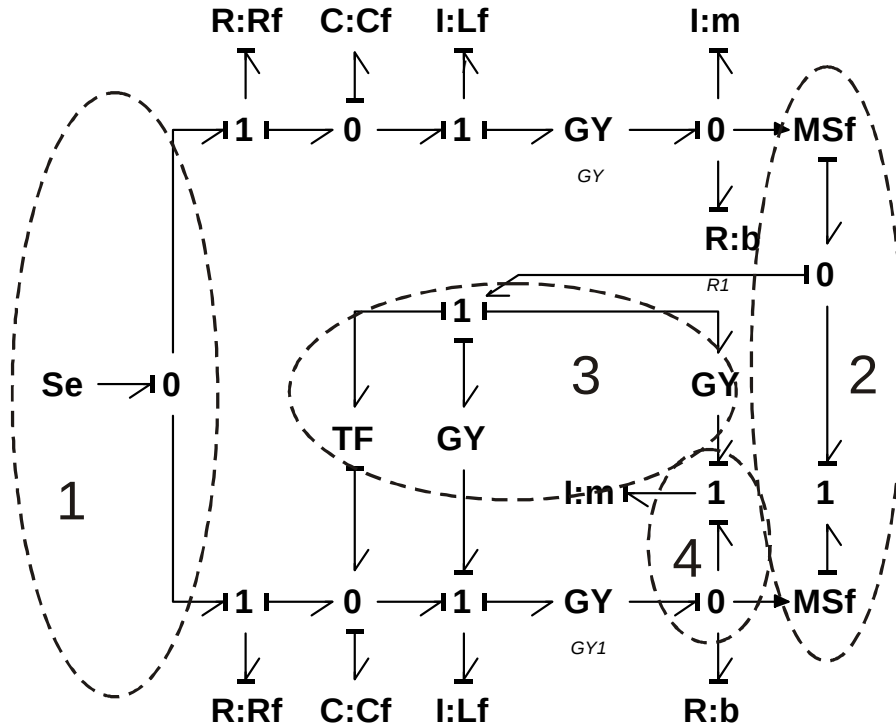


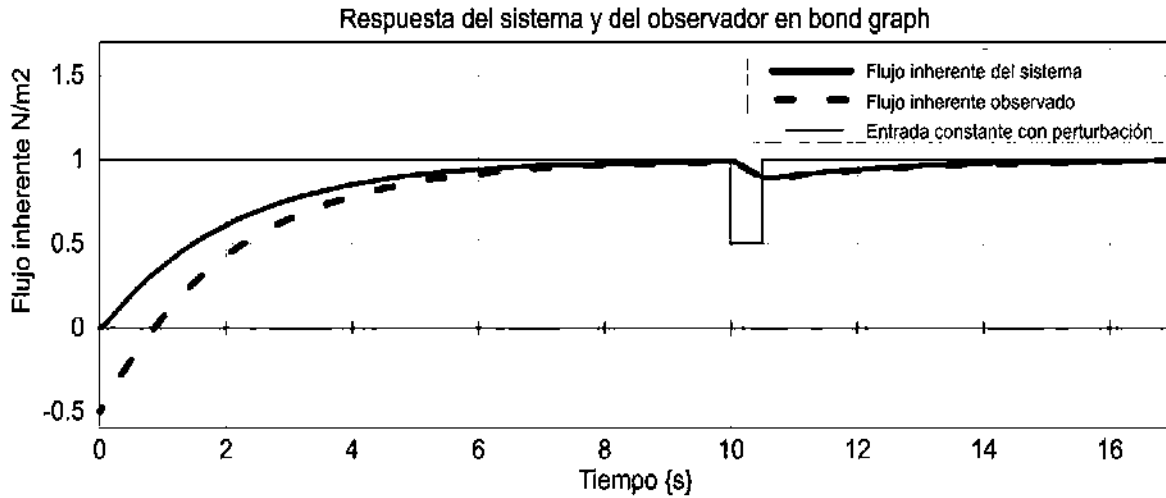
Figura 3.10: Observador de un sistema hidráulico.

La Tabla 3.1 mostrará los valores de las resistencias, capacitancias, inductancias, transformadores y giradores. Los cuales son tomados de investigaciones anteriores en [G. González A, 2002].

Tabla 3.1: Valores asignados para las simulaciones del observador hidráulico.

Rf	Cf	GY	$GY2$	$GY3$	$I1$	$I1o$	I	Io	R	TF
1	0.11	1	0.0013914	0.000966	1	1	0.01	0.01	1	$4.91e - 005$

El cálculo de las ganancias del observador se realizó empleando MatLab bajo el criterio de ackerman y los resultados son apreciables en la siguiente Figura 3.11 la cual aporta el resultado del diseño mediante una gráfica para el observador y como se puede apreciar, éste satisface las condiciones del mismo a pesar de las condiciones iniciales.


 Figura 3.11: Gráfica del flujo del sistema Lf y de su observador.

La gráfica 3.11 muestra el comportamiento del flujo dentro del cruce de la sección A en el sistema hidráulico, así como el flujo observado, para realizar las simulaciones de la Figura 3.11 al flujo observado se le agregó una entrada inicial de -0.5 para poder apreciar la conversión de ambos sistemas.

3.3 Diseño de observadores con variables linealmente dependientes

3.3.1 Introducción

La siguiente parte del trabajo de investigación está relacionada al diseño de observadores bajo la característica de que el sistema a modelar consta de variables dependientes, es decir que un

sólo estado podría depender de dos o más elementos de un sistema. Comúnmente se piensa que el número de elementos que almacenan energía de un sistema corresponde al número de variables de estados de un sistema, lo cual es falso; desafortunadamente para obtener los estados que cuentan con dependencia de varios elementos se requiere de un complejo análisis matemático basado en el enfoque del dominio de tiempo para su análisis. Mediante las técnicas convencionales en sistemas de control clásico se encuentra con la problemática de encontrar los estados dependientes dado que no se ven de manera directa, mediante la metodología de bond graph, este problema es abordado mediante la asignación de las causalidades en el bond graph y el cálculo del rango de la estructura unión.

3.3.2 Dependencia lineal de sistemas

La Figura 3.12 muestra un sistema el cual es dependiente dado que el bond número 9 no acepta causalidad derivativa dado que existiría un conflicto causal y esto se debe a que se debe respetar la propiedad de la union -1 para conservar las leyes de conservacion de la energía.

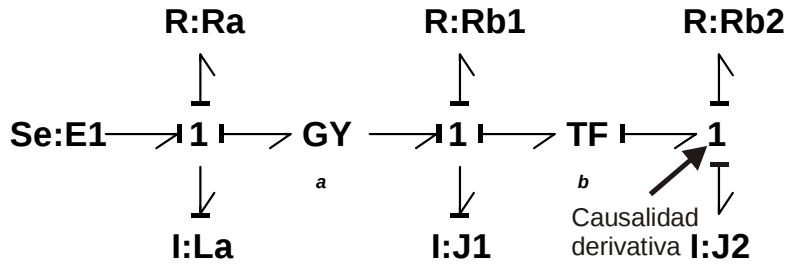


Figura 3.12: Sistema Linealmente Dependiente.

Este tipo de problemas son muy frecuentes en el análisis de sistema, sin embargo, mediante la metodología de bond graph los estados son fáciles de observar.

3.3.3 La causalidad derivativa en un bond graph

La causalidad derivativa se presenta cuando un sistema contiene elementos de almacenamiento de energía que no son dinámicamente independientes, en una asignación de causalidad integral predefinida. Esto se presenta por ejemplo, cuando en un sistema eléctrico, se encuentran dos capacitores en paralelo como se ilustra en la Figura 3.13.

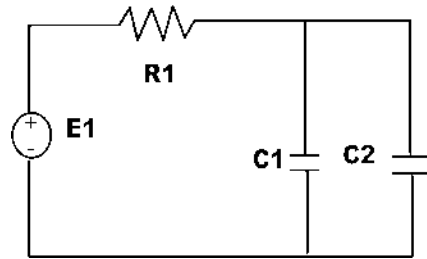


Figura 3.13: Ejemplo de un circuito eléctrico en causalidad derivativa.

Se tienen dos posibles esquemas de bond graph dependiendo si C_1 se le asigna una causalidad integral entonces C_2 tendrá una causalidad derivativa o viceversa, ambos esquemas se muestran en la Figura 3.14.

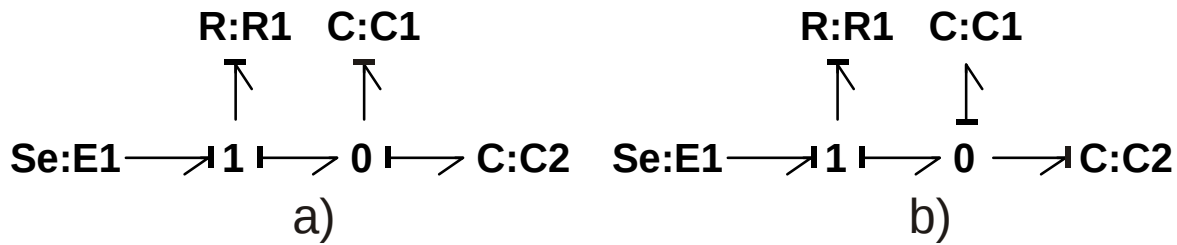


Figura 3.14: Bond Graph en causalidad derivativa de dos capacitores en paralelo.

El número de elementos que almacenan energía en causalidad integral es el número de ecuaciones deferenciales linealmente independientes y el número de ecuaciones diferenciales linealmente dependientes.

3.3.4 Diseño de observadores método clásico

A continuación se realiza el diseño del observador bajo la característica de que los elementos son dependientes, para mostrar lo dicho anteriormente se realiza el diseño del observador del modelo de la Figura 3.12 el cual se obtuvo a partir del motor de C.D acoplado a un engrane mostrado en la Figura 3.15.

El modelo de variables de estado del sistema de la Figura 3.15 bajo los parámetros de la Tabla 3.2.

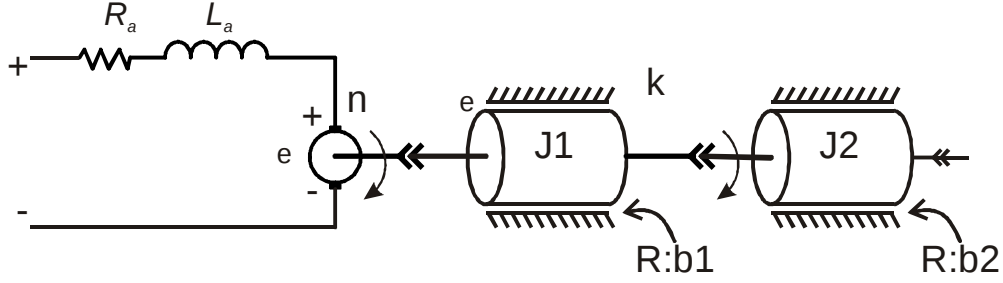


Figura 3.15: Motor CD doble engrane.

Tabla 3.2: Valores asignados para las simulaciones del observador basado en el motor electromecánico

Costante	Gy	$J1$	$J2$	La	Ra	Rb	$Rb2$	TF
10	1	0.001	0.002	0.003	0.1	0.2	2	2

$$A = \begin{bmatrix} -33.33 & -1000 \\ 37.04 & -911.1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

El siguiente análisis se realiza con base en el control clásico donde la salida del sistema $y(t) = Cx(t) - Du(t)$ es comparada con $\hat{y}(t) = C\hat{x}(t) - Du(t)$ y su diferencia multiplicada por la ganancia del observador, $H \in \mathbb{R}^{n \times q}$, como factor de corrección. En base al observador de estado asintótico mostrado en el Capítulo 2 se diseña el siguiente observador por lo que, los eigenvalores de $A - HC$ pueden ser seleccionados para tener la convergencia del estado estimado al estado real, entonces se controla la dinámica de $\tilde{x}(t)$, la Figura 3.16 muestra los resultados obtenidos a partir del análisis anterior y creando un programa en MatLab, donde se proponen como ganancias $H = [1, 1]$.

Como se muestra en la Figura 3.16 el estado observado tiende a seguir el estado del sistema a pesar de la condición inicial $x_o = 0.001$. Como se pudo observar el diseño de observadores mediante el enfoque tradicional de teoría de control es muy fácil y práctico pero tomando en cuenta que se conoce el sistema, es decir, las matrices A , B y C , una de las ventajas que tiene la teoría de bond graph es el poder realizar el diseño del observador a partir del modelo del sistema en bond graph sin tener que encontrar las matrices A , B y C lo cual se mostrara a continuación.

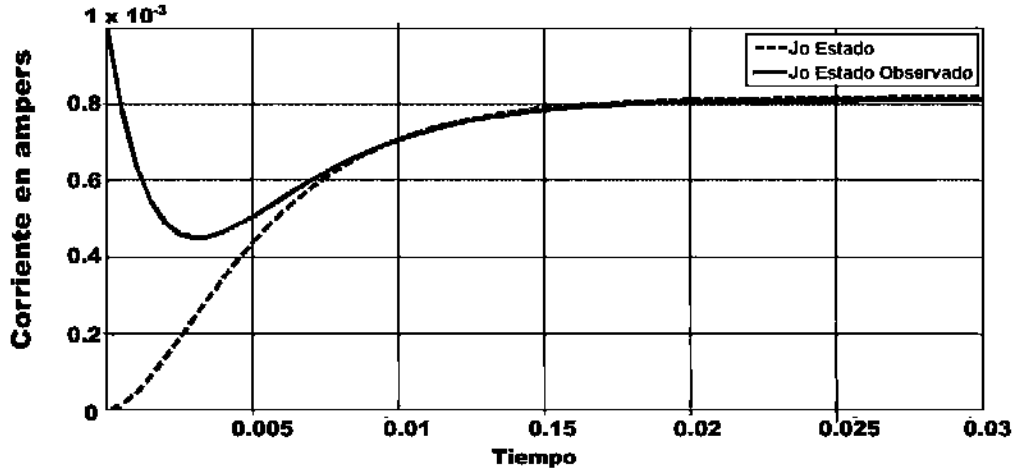


Figura 3.16: Gráfica de la corriente en el inductor $J1$, así como su estado observado, simulado en MatLab

3.3.5 Ejemplo de observador variables dependientes método bond graph.

Para realizar el diseño de observadores mediante variables dependientes simplemente se siguen los pasos del Procedimiento 3.1. Para realizar este diseño se emplea el metodo grafico mostrando una ventaja sobre la tecnica de control clasico dado que se evita pasar por la obtencion de variables de estado y además se observa de manera directa la dependencia lineal existente entre el inductor $J1$ y $J2$, sin embargo, este problema no se ve afectado al retroalimentar los estados, dado que solamente se toman en cuenta los estados con causalidad integral, esto permite diseñar el observador a partir del sistema original dado que es un sistema dependiente.

La Figura 3.17 muestra el diseño del observador mediante el procedimiento 3.1 por el método gráfico, dado que simplemente basta con retroalimentar los estados para el dieño anterior se tomaron las ganancias $H1$ y $H2$ como ganancias unitarias pero éstas pueden ser generadas a partir de la ecuación (3.18).

3.4 Conclusiones del capítulo 3

La gráfica mostrada en la Figura 3.18 contrasta los resultados obtenidos en la gráfica de la Figura 3.16 mostrando la viabilidad de utilizar la técnica de bond graph para el diseño de observadores sin importar la dependencia de los elementos dado que es fácil determinar los elementos

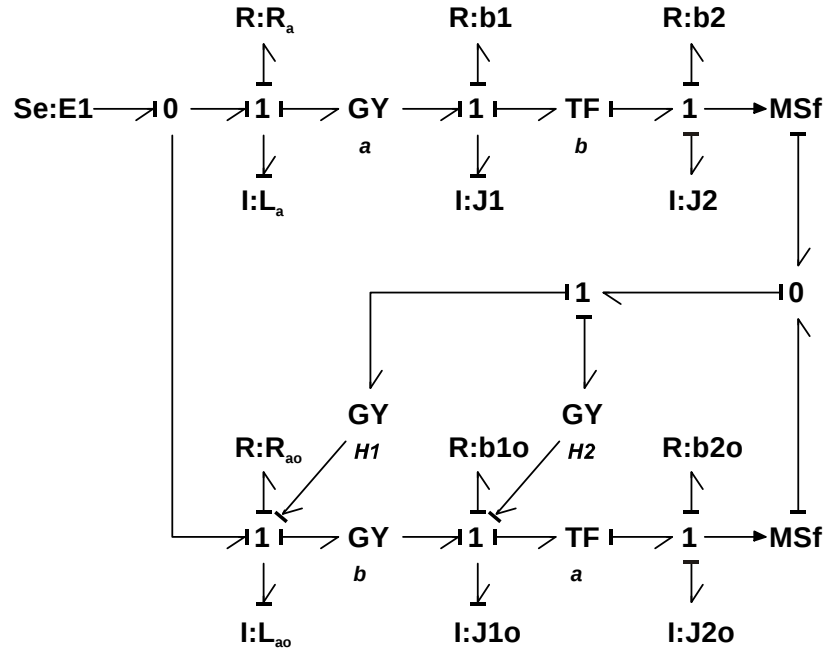


Figura 3.17: Modelo en bond Graph del motor de CD con doble engranaje.

que se encuentran en causalidad derivativa mediante la causalidad y con ello poder realizar la retroalimentación de los estados, la unicalimitante es que nuestro sistema no sea observable es decir que no existan trayectorias causales entre la salida y todos los elementos almacenadores de energía del sistema, otra de las ventajas es que evitas el calculo de las matrices A , B y C .

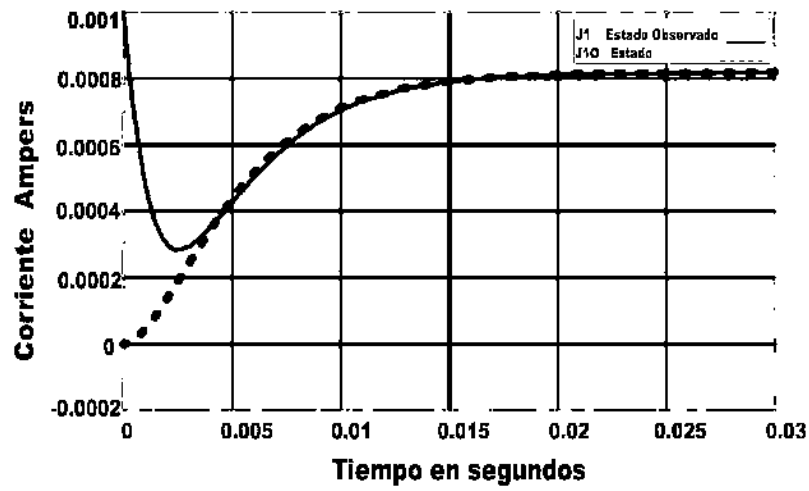


Figura 3.18: Gráfica de la corriente en el inductor J, así como su estado observado, simulado en 20Sim.

Capítulo 4

Diseño de observadores para una clase de sistemas no lineales

4.1 Introducción

La mayoría de los sistemas físicos son no lineales y esto juega un papel central en la teoría de sistemas e ingeniería, por lo tanto, es necesario incursionar en el área no lineal. En esta parte del trabajo de investigación se realizan diseños de observadores no lineales utilizando un enfoque que restringe fuertemente el tipo de sistemas con no linealidades discontinuas o multivaluadas, ya que exige la unicidad de soluciones, para lo cual, las no linealidades deben ser monótonas. Esta es una exigencia muy fuerte, ya que la unicidad de soluciones en sistemas descritos por inclusiones diferenciales es más bien la excepción que la regla.

Una de las características más importantes de los sistemas no lineales, es la dependencia de la respuesta del sistema como; la magnitud y tipo de entrada, además del propio modelo. Por ejemplo, un sistema no lineal puede comportarse de forma completamente distinta en respuesta a entradas escalón de diferentes valores, un claro ejemplo de sistemas no lineales es un péndulo invertido, la fricción, osciladores. Como estos sistemas también, existen sistemas en los cuales no son puramente no lineales donde sólo en algunas variables se ven reflejadas las no linealidades como la saturación, un retraso, una zona muerta o una histéresis, comportamiento sensible al nivel de excitación, criterios tales como sobre-elogación o máximo sobreimpulso en el primer transitorio y el tiempo de establecimiento son dependientes del nivel de excitación y un sistema no lineal puede ser estable en una región de operación e inestable en otra. Así, la estabilidad debe especificarse

como se observa en la vecindad de un punto de operación particular. Para analizar este concepto, la estabilidad se evalúa típicamente en la proximidad de una condición potencialmente estática conocida como un estado de equilibrio. Un modelo no lineal puede tener más de un estado de equilibrio y más de un modo de oscilación [Katsuhiko, 2006].

A continuación, se describen algunos conceptos y teoremas de estabilidad los cuales dan las bases para el diseño de observadores de sistemas con variables no lineales, así como técnicas para el diseño de observadores partiendo del modelo no lineal y no del linealizado. El enfoque común en el diseño de observadores con términos no lineales y con alta ganancia han sido estudiados por *Khalil* así como *Surveyed* en [Khalil, 1999] concluyendo en el diseño de observadores en lazo cerrado, explorado por *Lohmiller* y *Slotine* [W. Slotine, 1998].

4.2 No linealidades continuas

Las no linealidades continuas aparecen en las ecuaciones del sistema modelado en forma de términos senoidales, potencias, exponenciales de una variables, productos de diferentes variables. Un caso particular de sistemas con no linealidades continuas son los sistemas bilineales, que son aquellos en los que los únicos términos no lineales que aparecen en sus ecuaciones de estado son productos de variables de estado con variables de entrada. Las no linealidades continuas se eliminan usualmente de la ecuación diferencial asignando márgenes restringidos a las variables y mediante aproximaciones lineales para representar los coeficientes no lineales. Se reconoce, indudablemente, que la verdadera respuesta no será exactamente la considerada, sin embargo, la diferencia debe ser pequeña en tanto lo sea la perturbación. De interés inmediato es la estabilidad del sistema. Mediante la teoría de *Lyapunov*, puede llegarse a la conclusión de que el empleo de la aproximación lineal de ecuaciones no lineales da un análisis correcto de la estabilidad. Sin embargo, este sólo es válido para pequeñas perturbaciones [W. Slotine, 1991].

4.3 No linealidades discontinuas

Las no linealidades discontinuas o abruptas también se les conoce como no linealidades rápidas, significando con ello que el modo de operar cambia rápidamente comparándolo con el tiempo de respuesta del sistema. A continuación, se presentan las no linealidades discontinuas que más habitualmente se presentan en los sistemas de control como la fricción de *Coulomb* la cual

se ve reflejada en todo sistema físico con movimiento de deslizamiento. Así, por ejemplo, está presente entre las escobillas y el colector de un motor o simplemente en la saturación del núcleo de un transformador, por ejemplo entre engranajes apretados. La fuerza de fricción se modela como una magnitud constante y siempre de dirección opuesta al movimiento, por lo que aparece una discontinuidad en el instante en que se invierte el movimiento [Katsuhiko, 2006]. Una precarga tiene la misma característica que una fricción de Coulomb. La fuerza puede variar de más a menos el valor de la precarga sin producir desplazamiento.

4.3.1 Saturación o limitación

Cuando se incrementa la entrada de un dispositivo físico, a menudo se observa el siguiente fenómeno: cuando la entrada es pequeña, su incremento causa un incremento (frecuentemente proporcional) correspondiente en la salida; pero cuando la entrada alcanza cierto nivel, su incremento posterior produce un incremento pequeño o no produce incremento alguno en la salida. La salida simplemente permanece alrededor de su valor máximo. Cuando esto ocurre, se dice que el dispositivo está en saturación. Como ejemplos tenemos amplificadores de transistor y amplificadores magnéticos. Una no linealidad de saturación es usualmente causada por los límites en el tamaño de los componentes, propiedades de los materiales, potencia disponible. Una típica no linealidad de saturación se representa en la Figura 4.1, donde la línea gruesa es la no linealidad real y la línea fina es una no linealidad de saturación ideal.

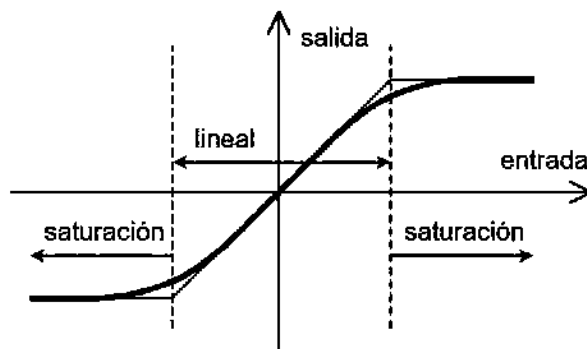


Figura 4.1: No linealidad de saturación

La mayoría de los actuadores presentan características de saturación. Por ejemplo, el par de salida de un servomotor de dos fases no puede incrementarse indefinidamente y tiende a saturarse,

debido a las propiedades del material magnético.

Análogamente, válvulas controladas por servomotor hidráulico se saturan por los máximo y mínimo caudales permitidos. La saturación tiene efectos complicados sobre las prestaciones de un sistema de control. En general, la presencia de saturación tiende a reducir la ganancia del dispositivo (por ejemplo el amplificador) según se incrementa la entrada. Como resultado, si un sistema es inestable en su rango lineal, este comportamiento divergente se puede convertir en una oscilación automantenida, debido a la inhibición creada por el componente de saturación sobre las señales del sistema. Por otro lado, si el sistema es estable en su rango lineal, la saturación tiende a variar la respuesta del sistema, ya que reduce la ganancia efectiva [W. Slotine, 1991].

4.3.2 Histéresis

La histéresis ocurre a menudo en sistemas de transmisión. Es causada por los pequeños espacios que existen en los mecanismos de transmisión. En trenes de engranajes siempre hay pequeños espacios entre un par de engranajes acoplados, debidos a los errores inevitables en fabricación y montaje [W. Slotine, 1991]. La Figura 4.2 muestra una situación típica. Como resultado de los espacios, cuando el engranaje conductor gira un ángulo más pequeño que el espacio b , el engranaje conducido no se mueve en absoluto, que corresponde a la zona muerta (segmento OA en la Figura 4.2); después que se haya establecido el contacto entre los dos engranajes, el engranaje conducido sigue la rotación del engranaje conductor de un modo lineal (segmento AB). Cuando el engranaje conductor gira en sentido contrario una distancia de $2b$, el engranaje conducido vuelve a no moverse, que se corresponde con el segmento BC en la Figura 4.2. Después de restablecerse el contacto entre los dos engranajes, el engranaje conducido sigue la rotación del engranaje conductor en el sentido contrario (segmento CD). Así, si el engranaje conductor tiene movimiento periódico, el engranaje conducido se moverá siguiendo el camino cerrado EBCD. Se hace notar que la altura de B, C, D, E en esta figura depende de la amplitud de la entrada sinusoidal. Para reducir la holgura en engranajes desgastados es preciso un buen ajuste de los dientes y reducción de las excentricidades.

4.4 Estabilidad absoluta en sistemas no lineales

Se considera la estructura de la Figura 4.3, se asume que la entrada externa es $r = 0$ y se estudia el comportamiento del sistema no forzado, representado por:

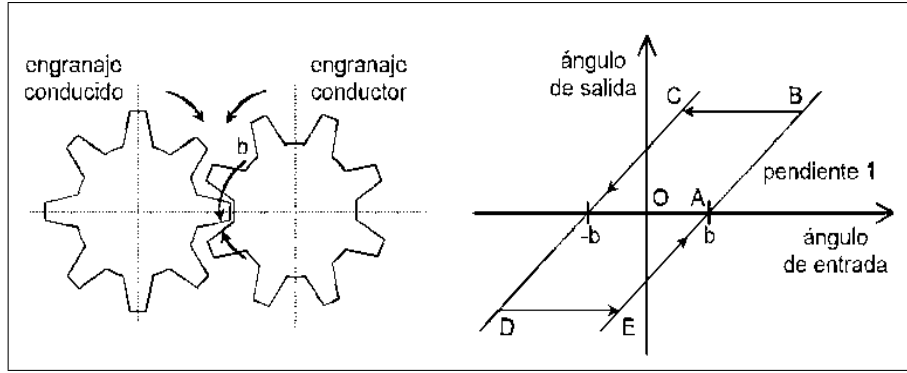


Figura 4.2: No linealidad en la histéresis.

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (4.1)$$

$$y = Cx \quad (4.2)$$

$$u = \psi(t; y) \quad (4.3)$$

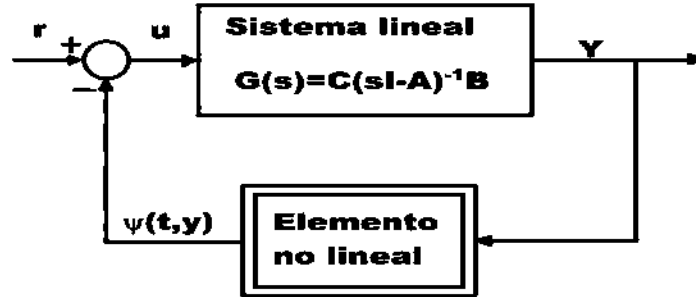


Figura 4.3: Conexión en retroalimentación de un sistema lineal y una no linealidad estática.

donde $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}$, el par (A, B) es controlable, el par (A, C) observable y $\psi : [0, \infty) \times \mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{R}$ es seccionalmente continua en t y localmente Lipchitz en y lo que significa que es una condición mínima para que el sistema no lineal tenga solución, y representa un elemento no lineal sin memoria, posiblemente no estacionario. La función de transferencia del sistema lineal

en lazo abierto está dado por (4.1) y (4.2) se asume estrictamente propia, es decir de grado relativo mayor o igual que uno [Khalil, 1999].

Las hipótesis de controlabilidad y observabilidad aseguran que (A, B, C) sean una realización mínima de $G(s)$, el elemento no lineal $\psi(\cdot, \cdot)$ satisface una condición de sector (o es un elemento no lineal de sector), es decir, existen constantes α , β , a y b (con $\beta > \alpha$ y $a < 0 < b$) tal que;

$$\begin{aligned} \alpha y^2 &\leq y\psi(t, y) \leq \beta y^2 \\ \forall t &\geq 0 \\ \forall y &\in [a, b] \end{aligned} \tag{4.4}$$

si (4.4) tiene magnitudes $y \in (-\infty, \infty)$, es decir que la condición de sector es global, lo cual se ejemplifica en la Figura 4.4. A veces la condición $\leq$ en alguno o ambos de la Ecuación (2.29) es reemplazado por la condición $<$ estricto. Cuando la Figura 4.4 inciso A) es globalmente se suele decir que $\psi(\cdot, \cdot)$ pertenece al sector $[\alpha, \beta]$. Se muestra que la Figura 4.4 implica la desigualdad.

$$\begin{aligned} [\psi(t, y) - \alpha y] [\psi(t, y) - \beta y] &\leq 0 \\ \forall t &\geq 0 \\ \forall y &\in [a, b] \end{aligned} \tag{4.5}$$

Para todos los elementos no lineales que satisfacen la condición de sector mostrado en la Figura 4.4, el origen $x = 0$ es estrictamente positiva del sistema (4.4). Lo que interesa ahora es buscar condiciones que garanticen la estabilidad del origen para toda la clase de elementos no lineales que satisfacen la condición de sector, se muestra que el origen es asintóticamente estable para todo elemento no lineal en el sector.

El problema fue originalmente formulado por *Lure* visto en [Khalil, 1999]. Tradicionalmente, la estabilidad absoluta fue definida para el caso en que el origen es globalmente asintóticamente estable (GAE), por lo tanto se utiliza la frase “estabilidad absoluta” cuando la condición de sector es global y cuando el origen es GAE, en caso contrario se remarca como “estabilidad absoluta con dominio finito”.

Definición 4.1 (Estabilidad Absoluta). Consideremos el sistema (4.1), donde $\psi(\cdot, \cdot)$ satisface la condición de sector sombreado que muestra la Figura 4.4. El sistema es absolutamente

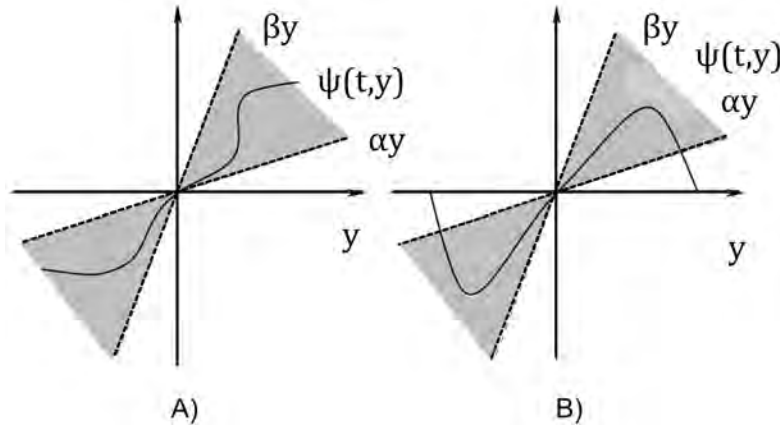


Figura 4.4: Alinealidad de sector A) Global y B) Local.

estable si el origen es globalmente uniformemente asintóticamente estable (GUAE) para todo elemento no lineal en el dado sector. Es absolutamente estable con dominio finito si el origen es uniformemente asintóticamente estable (UAE).

Para investigar la estabilidad asintótica en el origen se consideran dos funciones candidatas de Lyapunov:

$$\begin{aligned} V(x) &= x^T P x & P &= P^T > 0 \\ V(x) &= x^T P x - \eta \int_0^y \beta \psi(\sigma) d\sigma & P &= P^T > 0, \eta \geq 0 \end{aligned} \quad (4.6)$$

La segunda candidata se conoce como función de *Lyapunov* del tipo *Lure* vista en [Khalil, 1999]. Para esta función se asume que es estacionaria y satisface algunas condiciones que aseguran que la integral es definida y es no negativa. En ambos casos se comienza con P sin determinar y se establece una condición bajo la cual existe P tal que la derivada de $V(x)$ sobre las trayectorias del sistema es definida negativa para el elemento no lineal en un dado sector.

Definición 4.2 [Khalil, 1999](Función de Transferencia Real Positiva).

Una función de transferencia racional y propia $Z(s)$ es real positiva (*RP*) si;

- $Z(s)$ es analítica en $\text{Re} > 0$ (semiplano complejo derecho abierto).
- Todo polo imaginario (o sea, en $s = j\omega$) de $Z(s)$ es un polo simple y con residuo no negativo.
- La parte real de $Z(j\omega)$ es no negativa, o sea, $\text{Re } Z(j\omega) \geq 0, \forall \omega \geq 0$ lo que es equivalente a que el diagrama de Nyquist de $Z(j\omega)$ está contenido en el semiplano complejo derecho cerrado.

Una función de transferencia $Z(s)$ es estrictamente real positiva (ERP) si $Z(s - \epsilon)$ es RP para algún $\epsilon > 0$.

Lema 4.1 [Khalil, 1999] (Propiedades de FT ERP). Una función de transferencia $Z(s)$ es ERP (Estrictamente Real Positiva) si y sólo si.

- $Z(s)$ es Hurwitz, o sea, todos sus polos tienen parte real negativa;
- $\operatorname{Re} Z(j\omega) \geq 0, \forall \omega \in R$
- Una de las siguientes dos condiciones se satisface:
 1. $Z(\infty) > 0$.
 2. $Z(\infty) = 0$ y $\lim_{\omega \rightarrow \infty} \omega^2 \operatorname{Re} Z(j\omega) > 0$.

Una función de transferencia $Z(s)$ es ERP si $Z(s - \epsilon)$ es RP para algún $\epsilon > 0$.

Las FT ERP tienen una propiedad muy importante conocida como el Lema Real Positivo o el Lema de Kalman-Yakubovich-Popov.

Lema 4.2 (Kalman-Yakubovich-Popov). Sea $Z(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$ una FT con A Hurwitz, (A, B) controlable y (A, C) observable. Entonces $Z(s)$ es ERP si y sólo si existen matrices $P = P^T > 0$, W y L , y una constante $\epsilon > 0$ tales que.

$$\begin{aligned} PA + A^T P &= -L^T L - \epsilon P \\ PB &= C^T - L^T W \\ W^T W &= D + D^T \end{aligned} \tag{4.7}$$

4.5 Criterio del círculo

Considerando el sistema (4.1), con A Hurwitz y donde $\psi(\cdot, \cdot)$ satisface la condición de sector (4.5) con $\alpha = 0$, o sea

$$\begin{aligned} \psi(t, y) [\psi(t, y) - \beta y] &\leq 0 \\ \forall t &\geq 0 \\ \forall y &\in [a, b] \end{aligned} \tag{4.8}$$

tomando

$$V(x) = x^T P x \quad (4.9)$$

con $P = P^T \geq 0$ a elegir, y se calcula la derivada de $V(x)$ a lo largo de las trayectorias de (4.1):

$$\dot{V}(t, x) = x^T (PA + A^T P)x - 2x^T PB\psi(t, Cx) \quad (4.10)$$

Se Suma $-2\psi(\psi - \beta Cx)$ que es mayor o igual a cero al lado derecho y así lograr una cota superior de $\dot{V}(t, x)$ como se muestra a continuación.

$$\dot{V}(t, x) \leq x^T (PA + A^T P)x - 2x^T PB\psi(t, Cx) - 2\psi(t, Cx)[\psi(t, Cx) - \beta Cx] \quad (4.11)$$

$$\dot{V}(t, x) = x^T (PA + A^T P)x + 2x^T (\beta C^T - PB)\psi(t, Cx) - 2[\psi(t, Cx)]^2 \quad (4.12)$$

Se completa cuadrados para probar que el lado derecho es definido negativo. Para eso, se supone que existen matrices $P = P^T > 0$ y L , y una constante $\epsilon > 0$ tales que

$$PA + A^T P = -L^T L - \epsilon P \quad (4.13)$$

$$PB = \beta C^T - \sqrt{2}L^T \quad (4.14)$$

$$\begin{aligned} \dot{V}(t, x) &\leq -\epsilon x^T P x - x^T L^T L x + 2\sqrt{2}x^T L^T \psi(t, Cx) - 2[\psi(t, Cx)]^2 \\ &= -\epsilon x^T P x - \left[Lx - \sqrt{2}\psi(t, Cx) \right]^2 \\ &\leq -\epsilon x^T P x \end{aligned} \quad (4.15)$$

por lo tanto, se puede probar que $\dot{V}(t, x)$ es definida negativa si es posible encontrar P , L y ϵ que satisfaga (4.13). Usando Kalman-Yakubovich-Popov se observa que esto es sí y sólo sí la función de transferencia es estrictamente real positiva

$$Z(s) = 1 + \beta C(sI - A)^{-1}B = 1 + \beta G(s) \quad (4.16)$$

Lema 4.2.[Khalil, 1999] Se considera el sistema 4.1, donde A es Hurwitz, (A, B) es controlable, (A, C) es observable, y $\psi(\cdot, \cdot)$ satisface la condición de sector 4.8 globalmente, entonces el sistema es absolutamente estable si $Z(s) = 1 + \beta G(s)$ es estrictamente real positiva. Si se satisface la condición de sector 4.5 en un intervalo finito $[a, b]$, entonces la misma condición de $Z(s)$ garantiza que el sistema es absolutamente estable con el dominio finito.

Teorema 4.1.[Khalil, 1999] **Criterio del círculo.** Se considera el sistema 4.1, donde A es Hurwitz, (A, B) es controlable, (A, C) es observable, y $\psi(\cdot, \cdot) \in [\alpha, \beta]$. Entonces el sistema es absolutamente estable si alguna de las siguientes condiciones se satisfase:

- 1.- Si $0 < \alpha < \beta$, el diagrama de Nyquist de $G(j\omega)$ no entra en el disco $D(\alpha, \beta)$ y lo envuelve m veces en sentido antihorario, donde m es el número de polos de $G(s)$ en el semiplano derecho abierto.
- 2.- Si $0 = \alpha < \beta$, $G(s)$ es Hurwitz y el diagrama de Nyquist de $G(j\omega)$ está a la derecha de la recta vertical $\text{Re } s = -\frac{1}{\beta}$.
- 3.- Si $\alpha < 0 < \beta$, $G(s)$ es Hurwitz y el diagrama de Nyquist de $G(j\omega)$ está en el interior del disco $D(\alpha, \beta)$.

4.6 Criterio de Popov

El siguiente criterio muestra muchas características en los sistemas no lineales en las cuales se apoya este trabajo de investigación para validar las funciones y demostrar que son sistemas estables y por consiguiente demostrar que se puede realizar un observador.

Debe de tenerse presente que, en el criterio del círculo las cotas sobre el elemento no lineal son arbitrarias, y abarcan también el caso de no linealidades variantes en el tiempo por otra parte el teorema del círculo que se presentó en la sección anterior asegura estabilidad global exponencial, por lo que se estudiará el criterio de Popov el cual resulta menos conservativo que el teorema del círculo dado que Popov asegura estabilidad global asintótica.

Lema 4.3 [Khalil, 1999] Criterio de Popov. Se considera el sistema (4.1), donde A es Hurwitz, (A, B) es controlable, (A, C) es observable, y $\psi(\cdot)$ es un elemento no lineal estacionario perteneciente al sector $[0, \beta]$. Entonces el sistema es absolutamente estable si existe $\psi(\cdot)$ es absolutamente estable si existe $\eta \geq 0$ que no sea un eigenvalor de A y tal que

$$Z(s) = 1 + (1 + \eta s)\beta G(s) \quad (4.17)$$

es estrictamente real positiva.

4.7 Diseño de un tipo observadores no lineale: criterio del círculo

Un reciente diseño por *Arcak* y [M. Arcak, 2001] han eliminado el crecimiento no lineal de estados y logrando converger los estados estimados con los reales tomando en cuenta dos restricciones: la primera es que debe de existir una desigualdad lineal matricial (LMI por sus siglas en ingles), resoluble para dicho sistema, la cual garantiza que la parte lineal del error del observador sea real positiva, la segunda restricción es que la no linealidad debe ser una función monótona no decreciente de los estados no lineales. En esta parte del capítulo se resaltan las propiedades de [M. Arcak, 2001], donde *Kokotovic* emplea las propiedades necesarias para el diseño de observadores con multivariabes monotonas, la cual debe de satisfacer la ecuación (2.24) para el siguiente sistema.

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax(t) + G\gamma(Hx) + \rho(y, u) \\ y &= Cx\end{aligned}\tag{4.18}$$

$$\frac{\partial \gamma}{\partial u} + \left(\frac{\partial \gamma}{\partial u} \right)^T \geq 0 \forall u \in \mathfrak{U}\tag{4.19}$$

donde $x \in \mathfrak{R}^n$ es el estado, $y \in \mathfrak{R}^r$ es la salida medible, $u \in \mathfrak{R}^m$ es la entrada de control, el par (A, C) es detectable, $\gamma(\cdot)$ y la $\rho(\cdot, \cdot)$ es localmente lipschitz. El estado dependiente no lineal $\gamma(Hx)$ es un vector de r dimension donde cada entrada es una función de una combinacion lineal de los estados.

$$\gamma_i = \gamma_i \left(\sum_{j=1}^n H_{ij} x_j \right), \quad i = 1, \dots, r.\tag{4.20}$$

La multivariable no lineal $\gamma(\cdot)$ debe satisfacer la condición (4.19), mediante el análisis de [M. Arcak, 2001], una principal restricción es que cada $\gamma_i(\cdot)$ sea no decreciente, que es para todo $a, b \in \mathfrak{R}$ esto satisface.

$$(a - b) [\gamma_i(a) - \gamma_i(b)] \geq 0\tag{4.21}$$

$$\dot{\hat{x}}(t) = A_p \hat{x} + L(C\hat{x} - y) + G\gamma(H\hat{x} + K(C\hat{x} - y)) + \varrho(y, u)\tag{4.22}$$

Como se muestra la ecuación (4.22) la principal tarea para el diseño de observadores de esta clase es el cálculo de las matrices $K = \mathbb{R}^{p \times r}$ y $L = \mathbb{R}^n$ para aproximar a cero el error $e = x - \hat{x}$, el cual es mostrado en la ecuación (4.23).

$$\dot{e} = (A + LC)e + G[H\hat{x}(t) + K(C\hat{x}(t) - y(t))] \quad (4.23)$$

donde

$$u \quad = \quad Hx \quad (4.24)$$

$$w \quad = \quad H\hat{x} + K(C\hat{x} - y)$$

Para representar el error del sistema (4.23) como una retroalimentación interconectada a un sistema lineal y tomando en cuenta la variable no lineal, se ve $\gamma(u) - \gamma(w)$ como una función de u y $z := u - w = (H + KC)e$ esto es, un estado dependiente multivariable no lineal en z .

$$\varphi(u, z) := \gamma(u) - \gamma(w) \quad (4.25)$$

Al sustituir la ecuación (4.25), el error del observador (4.23) se reescribe como:

$$\dot{e} \quad = \quad (A + LC)e + G\varphi(u, z) \quad (4.26)$$

$$z \quad = \quad (H + KC)e$$

a continuación se muestra que $\varphi(u, z)$ satisface a un sector multivariable, al hacer uso del Teorema [W.C.Rheinboldt, 2000], y describiendo $\varphi(u, z)$ como;

$$\lambda = \gamma(u) - \gamma(w) = \int_0^1 \left[\frac{\partial \gamma}{\partial u} \right]_{s=u+\lambda(w-u)} (u - w) d\lambda = \int_0^1 \left[\frac{\partial \gamma}{\partial s} \right]_{s=u+\lambda u} z d\lambda \quad (4.27)$$

así, de la propiedad (4.19)

$$z^T \varphi(u, z) = \frac{1}{2} z^T \int_0^1 \left(\left[\frac{\partial \gamma}{\partial s} \right] + \left[\frac{\partial \gamma}{\partial s} \right]^T \right)_{s=u-\lambda z} d\lambda z \geq 0 \quad (4.28)$$

Gracias al sector de esta propiedad es garantizada la estabilidad mediante el criterio del círculo y si el sistema lineal con una entrada $\vartheta = -\varphi(u, z)$ y la salida z es estrictamente real positiva (SRP), si una matriz $P = P^T > 0$, y una constante $\varsigma > 0$ puede ser encontrada mediante

$$\begin{bmatrix} (A + LC)^T + P(A + LC) + \varsigma I & PG + (H + KC)^T \\ G^T P + (H + KC) & 0 \end{bmatrix} \leq 0 \quad (4.29)$$

Así, las ganancias del observador (4.22) consisten en resolver (4.29), que es una desigualdad lineal matricial en $P = P^T > 0$, PL , K y $\varsigma > 0$.

Como se pudo observar mediante el criterio del círculo se pueden validar los sistemas para posteriormente realizar su observador, a continuación se muestra un ejemplo de un sistema no lineal el cual cumple con las características necesarias de estabilidad y de la existencia de la matriz P la cual asegurará que el observador sea viable.

A continuación se muestra un ejemplo de un diseño de observador partiendo de un sistema no lineal, el cual servirá para ejemplificar la manera de descomponer el sistema empleando la descomposición de Lure y el cálculo de ganancias.

Ejemplo. El siguiente caso de estudio muestra un sistema para el cual se requiere realizar el diseño de un observador, el primer paso para desarrollar el análisis es necesario descomponer en matrices (4.31).

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_2 - \frac{1}{3}x_2^3 - x_2x_3^2 \\ \dot{x}_3 &= x_2 - x_3 - \frac{1}{3}x_3^3 - x_3x_2^2 \\ y &= x_1 \end{aligned} \quad (4.30)$$

las matrices del sistema (4.30) son:

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} & G &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, & \gamma(\cdot) &= \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{3}x_2^3 + x_2x_3^2 \\ \frac{1}{3}x_3^3 + x_3x_2^2 \end{bmatrix} \\ C &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} & H &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.31)$$

una vez aislada la parte no lineal se requiere aplicar la propiedad de monotonidad (4.19).

$$\frac{\partial \gamma}{\partial(x_1, x_2, x_3)} + \left(\frac{\partial \gamma}{\partial(x_1, x_2, x_3)} \right)^T = \begin{bmatrix} x_2^2 + x_3^2 & 2x_2x_3 \\ 2x_2x_3 & x_2^2 + x_3^2 \end{bmatrix} \geq 0 \quad \forall v \in \Re$$

Para realizar el diseño del observador es necesario realizar el cálculo de las matrices P , L , y K aplicando (4.29), mediante MATLAB LMI TOOLBOX mostrado en el apéndice A.

$$P = \begin{bmatrix} 10 & -2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} -3 \\ -8 \\ -4 \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{\hat{x}}_1 \\ \dot{\hat{x}}_2 \\ \dot{\hat{x}}_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \\ \hat{x}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 \\ -8 \\ -4 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} - y \right) \\ &+ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{3}x_2^3 + x_2x_3^2 \\ \frac{1}{3}x_3^3 + x_3x_2^2 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \\ \hat{x}_3 \end{bmatrix} + K \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} - y \right) \right) \end{aligned} \quad (4.32)$$

se sustituyen los valores

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}_1 &= \hat{x}_2 - 3(\hat{x}_1 - x_1) \\ \dot{\hat{x}}_2 &= \hat{x}_2 - 8(\hat{x}_1 - x_1) - \frac{1}{3}(x_2 - 2(\hat{x}_1 - x_1))^3 - (\hat{x}_2 - 2(\hat{x}_1 - x_1))(\hat{x}_3 - (\hat{x}_1 - x_1))^2 \\ \dot{\hat{x}}_3 &= \hat{x}_2 - \hat{x}_3 - 4(\hat{x}_1 - x_1) - \frac{1}{3}(\hat{x}_3 - (\hat{x}_1 - x_1))^3 - (\hat{x}_3 - (\hat{x}_1 - x_1))(\hat{x}_2 - 2(\hat{x}_1 - x_1))^2 \end{aligned} \quad (4.33)$$

Las siguientes simulaciones fueron realizadas en el programa SIMNON las cuales muestran el comportamiento de la planta y su observador bajo distintas condiciones iniciales.

Se puede observar que la Figura 4.5 el error existente entre el valor real de la planta y el valor estimado en el observador tiende a cero. En el siguiente ejemplo, se considera el modelo del transformador agregando la saturación magnética lo cual muestra un sistema no lineal visto en las relaciones constitutivas. En este ejemplo se hace apoyo de la metodología de matlab para encontrar la observabilidad del sistema pero en la parte lineal y partiendo de dicha premisa se puede abordar el sistema agregando la parte no lineal.

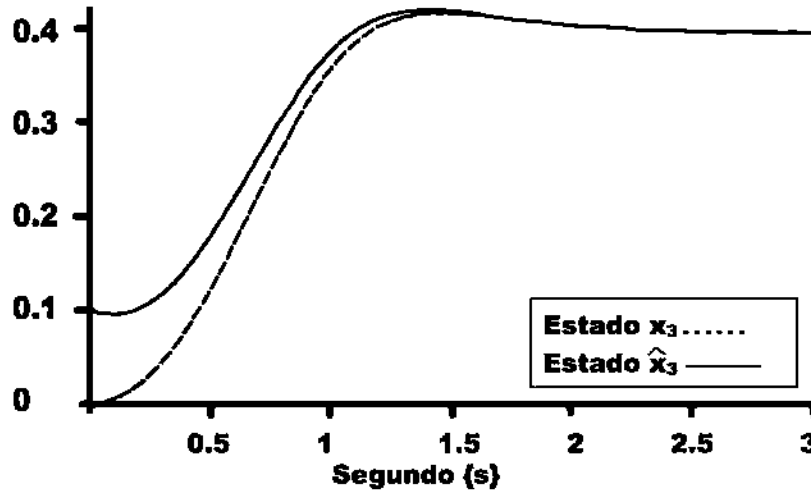


Figura 4.5: Gráfica del comportamiento de los estados

4.8 Diseño de observadores para sistemas con multivariables no lineales enfoque bond graph.

El trabajo mostrado en [M. Arcak, 2001] mostrará la viabilidad del diseño de observadores no lineales para ciertos casos en específico. En esta parte del presente trabajo de investigación se describe el diseño de observadores no lineales bajo las mismas características del diseño de observadores con variables monótonas, sin embargo, en este caso se aplicará para modelos diseñados en bond graph para utilizar todas las bondades de esta metodología.

4.8.1 Diseño de un observador del modelo del transformador de doble pierna con nucleo en bond graph

Ejemplo. La representación de la no linealidad dada por *Steinmetz*, modela el transformador incluyendo la magnetización y la pérdida en el núcleo [Mc Person, 1990]. La Figura 4.6 se muestra la consideración del acople magnético entre el devanado primario y el devanado secundario.

Partiendo del modelo del transformador completo presentado en [McPerson, 1990], donde i_1 , e_1 , i_2 , e_2 , son las corrientes y los voltaje en el devanado primario; ϕ_{i1} , ϕ_{i2} representa el flujo magnético y ϕ_m representa el flujo mutuo en el nucleo.

Una vez obtenido el modelo de la Figura 4.6 se aplica la metodología de bond graph vista en el Capítulo 2 para obtener los vectores claves.

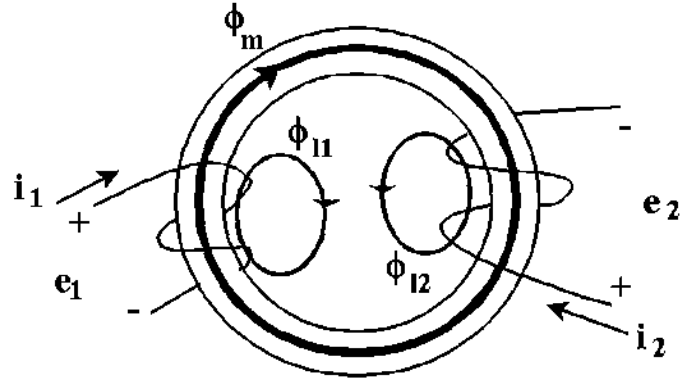


Figura 4.6: Acoplamiento magnético de un transformador de dos piernas

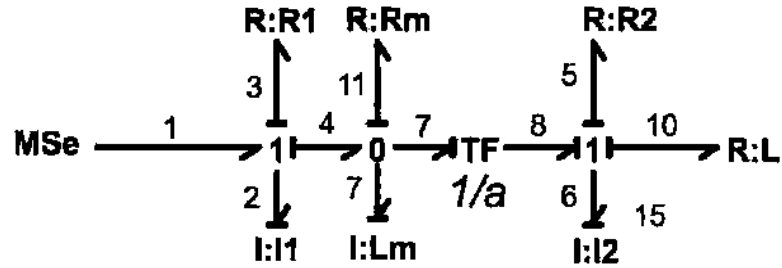


Figura 4.7: Modelo de un transformador en bond graph.

$$x = \begin{bmatrix} p_2 \\ p_6 \\ p_9 \end{bmatrix} \quad \dot{x} = \begin{bmatrix} e_2 \\ e_6 \\ e_9 \end{bmatrix} \quad z = \begin{bmatrix} f_2 \\ f_6 \\ f_9 \end{bmatrix} \quad (4.34)$$

$$Din = \begin{bmatrix} f_3 \\ f_5 \\ f_{11} \end{bmatrix} \quad Dout = \begin{bmatrix} e_3 \\ e_5 \\ e_{11} \end{bmatrix} \quad u = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_{10} \end{bmatrix}$$

$$y = \begin{bmatrix} f_2 \\ f_6 \end{bmatrix} \quad (4.35)$$

así como también las relaciones constitutivas mostradas en la Ecuación (4.36).

$$\begin{aligned} F &= \{R_1, R_2, R_m\} \\ L &= \left\{ \frac{1}{L_{l1}}, \frac{1}{L_{l2}}, \frac{1}{L_m} \right\} \end{aligned} \quad (4.36)$$

las submatrices de la estructura unión se muestran

$$S = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & \frac{1}{a} & -1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & \frac{-1}{a} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad (4.37)$$

Una vez que se obtienen los valores de la estructura unión se presenta el sistema en representación de espacio de estados empleando (4.36) y (4.37) en (2.25) y (2.26).

$$\bar{A}_p = \begin{bmatrix} \frac{-(R_1+R_m)}{L_{l1}} & \frac{-R_m}{aL_{l1}} & \frac{R_m}{L_{l1}} \\ \frac{-R_m}{aL_{l2}} & -\left(\frac{R_1+R_m}{a^2}\right) & \frac{-R}{aL_{l2}} \\ \frac{R_m}{L_m} & \frac{-R_m}{L_m} & \frac{-R_m}{L_m} \end{bmatrix}, \quad \bar{B}_p = \begin{bmatrix} \frac{1}{L_l} & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_{2l}} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.38)$$

El efecto no lineal representado por la saturación o histéresis del modelo del transformador se ve representado en las relaciones constitutivas de la inductancia L_m , la curva de saturación es aproximada con la ecuación (4.39),

$$i_{L_m} = \frac{1}{\beta} \tan\left(\frac{L_m}{\alpha}\right) \quad (4.39)$$

donde $\alpha = 0.3215$ y $\beta = 0.8642$

la manera con la que la magnetización en el inductor es definida se muestra en la ecuación

$$L_m = \frac{d\lambda_m}{di_m} = \frac{\alpha\beta}{1 + \beta^2 i_m^2} \quad (4.40)$$

ahora se sustituye en el diseño del observador presentado por [M. Arcak, 2001] mediante la ecuación (4.22),

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} \frac{-(R_1+R_m)}{aL_{l2}} & \frac{-R_m}{aL_{l1}} & \frac{R_m}{L_{l1}} \\ \frac{-R_m}{aL_{l2}} & -\left(R_2+\frac{R_m}{a^2}\right) & \frac{-R_m}{aL_{l2}} \\ \frac{R_m}{\alpha\beta} & \frac{-R_m}{\alpha\beta a} & \frac{-R_m}{\alpha\beta} \end{bmatrix} \quad (4.41)$$

Al introducir el parámetro no lineal, el diseño del observador no puede ser diseñado mediante la técnica convencion presentada por el control clásico como asignación de polos, por lo que es necesario realizar la descomposición matricial para separar la no linealidad y así obtener el parametro no lineal, como se muestra a continuación,

$$G\gamma(Hz) = \frac{\beta R_m}{\alpha} \left(z_1 z_3^2 + \frac{1}{a} z_2 z_3^2 - z_3^3 \right) \quad (4.42)$$

$$G = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\beta R_m}{\alpha} \end{bmatrix}^T \quad (4.43)$$

$$\gamma(v) = z_1 z_3^2 + \frac{1}{a} z_2 z_3^2 - z_3^3 \quad (4.44)$$

$$v = Hz = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{a} & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} \quad (4.45)$$

por lo tanto, al aplicar

$$\frac{\partial \gamma}{\partial u} + \left(\frac{\partial \gamma}{\partial u} \right)^T = 2z_3^2 \geq 0 \quad \forall v \in \Re \quad (4.46)$$

se valida el diseño para el observador dado que el resultado mostrado indica que la función $2z_3^2$ siempre sera mayor o igual a cero.

Para realizar las simulaciones se emplearon los parámetros de la Tabla 4.1

Tabla 4.1: Valores empleados para simular el sistema magnético.

L_l	L_l	α	β	R_m	R_1	R_2	R_L	a	v_1
11.05Hm	11.05Hm	0.3215	0.8642	4KΩ	5.8Ω	5.8Ω	100Ω	10	120 sin 377t

Al introducir (4.39) al modelo de bond graph el fenomeno no lineal se muestra en la Figura 4.8.

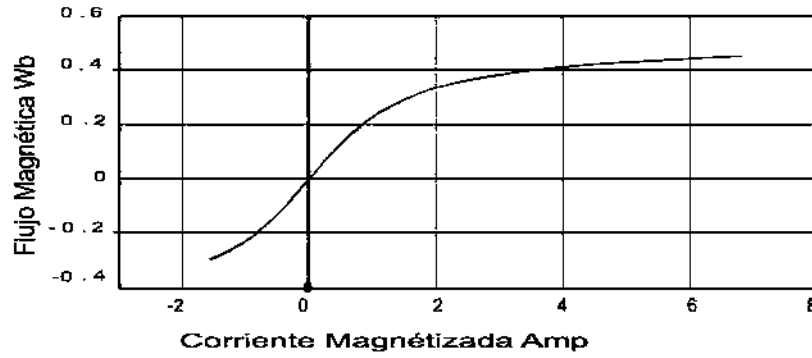


Figura 4.8: No linealidad en el transformador

La corriente en el devanado primario y en el secundario del modelo en bond graph del transformador se muestran en la Figura 4.9,

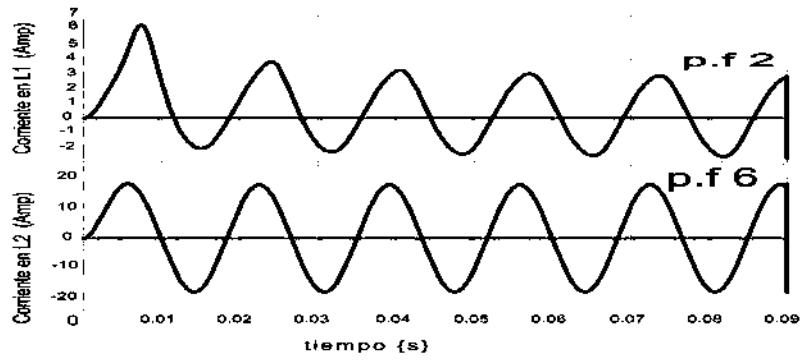


Figura 4.9: Corrientes en el devanado primario f_2 y secundario f_6 .

El diseño del observador usando la metodología de bond graph es viable dado que su no linealidad cumple con la propiedad (4.19) mostrada en la Ecuación (4.46) por lo tanto al aplicar el procedimiento 1, se muestra el modelado en bond graph en la Figura 4.10.

Para mostrar que el bond graph completo de la Figura 4.10 representa un sistema no lineal, se obtiene el modelo matemático. Así, los vectores claves son:

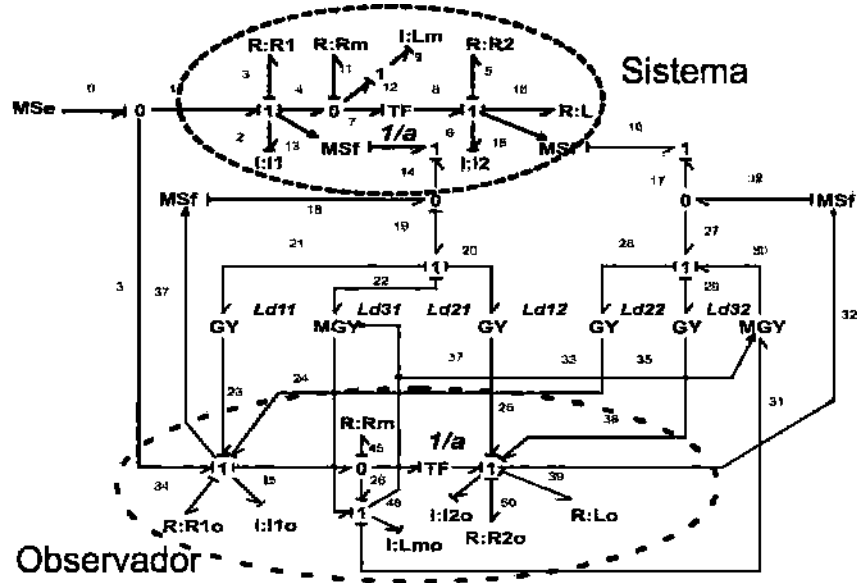


Figura 4.10: Observador en Bond Graph para el Transformador en el dominio físico

$$\begin{aligned}
 \hat{x} &= \begin{bmatrix} p_{35} \\ p_{53} \\ p_{48} \end{bmatrix} & \dot{\hat{x}} &= \begin{bmatrix} e_{35} \\ e_{53} \\ e_{48} \end{bmatrix} & \hat{z} &= \begin{bmatrix} f_{35} \\ f_{53} \\ f_{48} \end{bmatrix} \\
 \hat{D}_{in} &= \begin{bmatrix} f_{34} \\ f_{50} \\ f_{45} \\ f_{39} \end{bmatrix} & \hat{D}_{out} &= \begin{bmatrix} e_{34} \\ e_{50} \\ e_{45} \\ e_{39} \end{bmatrix} & y &= \begin{bmatrix} f_2 \\ f_6 \end{bmatrix} \\
 & & & & \hat{y} &= \begin{bmatrix} f_{35} \\ f_{53} \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{4.47}$$

La estructura unión es;

$$\begin{aligned}
 \hat{S}_{11} &= \begin{bmatrix} Ld_{11} & Ld_{11} & 0 \\ Ld_{21} & Ld_{22} & 0 \\ Ld_{31} & Ld_{32} & 0 \end{bmatrix} & \hat{S}_{13} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 S_{12} &= \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -a^{-1} & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} & \hat{S}_{31} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\
 \hat{S}_{22} &= \hat{S}_{23} = \hat{S}_{32} = \hat{S}_{33} = 0
 \end{aligned} \tag{4.48}$$

La representación en espacio de estado es:

$$\hat{A}_p = \begin{bmatrix} \frac{-R_{11}}{Ll_1} + G_{11} & \frac{-a^{-1}R_m}{Ll_1} + G_{12} & \frac{R_m}{Ll_1} \\ \frac{-a^{-1}R_m}{Ll_2} + G_{21} & \frac{-R_{22}}{Ll_2} + G_{22} & \frac{-a^{-1}R_m}{Ll_2} \\ \frac{R_m}{L_m} + \frac{L_{p31}}{L_m} & \frac{-a^{-1}R_m}{L_m} + \frac{L_{p32}}{L_m} & -\frac{R_m}{L_m} \end{bmatrix} \quad (4.49)$$

$$B_p = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.50)$$

$$\tilde{A}_p = \begin{bmatrix} -G_{11} & -G_{12} & 0 \\ -G_{21} & -G_{22} & 0 \\ -\frac{L_{p31}}{L_m} & \frac{L_{p32}}{L_m} & 0 \end{bmatrix} \quad (4.51)$$

donde

$$\begin{aligned} R_{11} &= R_1 + R_m & R_{22} &= R_2 + R_L + R_m & G_{11} &= \frac{Ld_{11}}{Ll_1} & G_{12} &= \frac{Ld_{12}}{Ll_1} \\ G_{21} &= \frac{Ld_{21}}{Ll_2} & G_{22} &= \frac{Ld_{22}}{Ll_2} & L_{p31} &= (Ld_{31} + K_{d1}L_m) & L_{p32} &= (Ld_{32} + K_{d2}L_m) \end{aligned} \quad (4.52)$$

para verificar que (4.49) es el mismo observador respecto a la (4.22) para la descomposicion de la parte no lineal y así poder obtener las matrices H y G .

$$\dot{\hat{z}}_3 = \frac{R_m}{\alpha\beta}(\hat{z}_1 + a^{-1}\hat{z}_2 - \hat{z}_3) + \frac{\beta R_m}{\alpha}(\hat{z}_1 + a^{-1}\hat{z}_2 - \hat{z}_3)\hat{z}_3^2 + G \quad (4.53)$$

$$G = (Ld_{31} + K_{d1}L_m)\frac{(\hat{z}_1 - z_1)}{L_m} + (Ld_{32} + K_{d2}L_m)\frac{(\hat{z}_2 - z_2)}{L_m} \quad (4.54)$$

$$G = K_1(\hat{z}_1 - z_1) + \frac{\beta}{\alpha}L_{d31}(\hat{z}_1 - z_1)\hat{z}_3^2 + K_2(\hat{z}_2 - z_2) + \frac{\beta}{\alpha}L_{d32}(\hat{z}_2 - z_2)z_3^2 \quad (4.55)$$

$$L = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \\ L_{31} & L_{32} \end{bmatrix}; K = \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \end{bmatrix} \quad (4.56)$$

Por lo tanto, las relaciones entre las ganancias gráficas en el bond graph y las ganancias para el observador son:

$$\begin{aligned}
 L_{d11} &= L_{11}L_{l1} & L_{d12} &= L_{12}L_{l1} & L_{d21} &= L_{21}L_{l2} \\
 L_{d22} &= L_{22}L_{l2} & L_{d31} &= \frac{\alpha}{\beta}L_{31} & L_{d32} &= \frac{\alpha}{\beta}L_{32} \\
 K_{d1} &= K_1 - \frac{L_{31}}{\beta^2} & K_{d2} &= K_2 - \frac{L_{32}}{\beta^2}
 \end{aligned} \tag{4.57}$$

al sustituir por los valores numéricos se obtiene,

$$A = \begin{bmatrix} -362515.83 & -3619909.50 & 361990.95 \\ -3619909.50 & -36208669 & 3619909.50 \\ 14396.75 & 143967.59 & -14396.75 \end{bmatrix} \tag{4.58}$$

$$B = \begin{bmatrix} 90.49 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{4.59}$$

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0.1 & -1 \end{bmatrix}; \quad G = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 10752.09 \end{bmatrix}^T \tag{4.60}$$

La desigualdad matricial lineal LMI debe de ser realizable para garantizar que la propiedad del Teorema del círculo, con una entrada de $v = 100$.

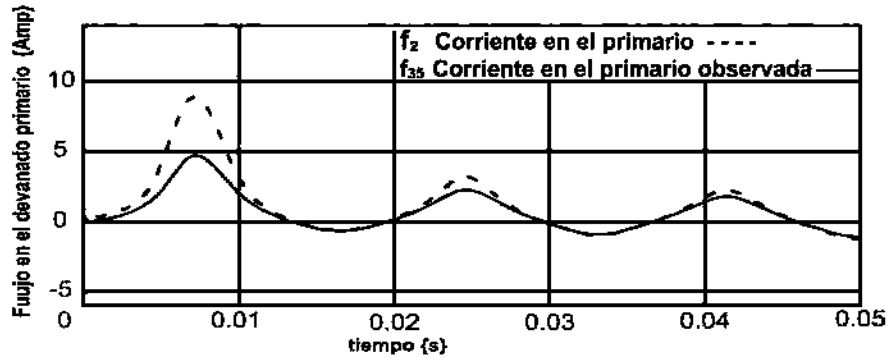
$$P = \begin{bmatrix} 404427 & -404427 & -0.00056 \\ -404427 & 404427 & -0.00836 \\ -0.000566 & -0.000836 & 0.000093 \end{bmatrix} \tag{4.61}$$

$$L = \begin{bmatrix} -104334.8 & -1035963.5 \\ -104334.8 & -1035963.5 \\ -2306330.8 & -22903046.7 \end{bmatrix}; \quad K = \begin{bmatrix} 5.09 \\ 0.79 \end{bmatrix}^T \tag{4.62}$$

El comportamiento del observador es mostrado en las Figuras 4.11 y 4.12. Se muestra que las dos corrientes convergen donde f_2 es la corriente en el devanado primario y es la corriente en el devanado secundario f_{35} .

el comportamiento de los flujos no se asemeja pero se aprecia que el flujo 35 tiende a seguir la señal del sistema original debido al transitorio dadas las condiciones iniciales del observador.

Por lo tanto, la convergencia de los valores con reales respecto a los estimados es mostrada en las gráficas 4.11 y 4.12 las cuales muestran las corrientes en los dos devanados tanto el primario como en el secundario, a pesar de la presencia de la no linealidad causada por la saturación y se aprecia que la convergencia de los estados es alcanzada.


 Figura 4.11: Corriente en el primario f_2 y f_{35} en el observador.

Para comprobar que el diseño del observador funcione se agrega una perturbacion la cual es representada mediante un pulso en $0.02s$ con una duracion de $0.005s$.

Como se puede observar en la Figura 4.13 los dos flujos recorren casi un mismo trayecto y a los 0.02 segundos a la entrada se le agrega una perturbación, en este caso se le agrego un pulso por 0.005 segundos y pese a la perturbación inducida el observador continua siguiendo la trayectoria del sistema original.

4.8.2 Diseño de un observador del modelo del Motor

A diferencia del observador del motor de corriente directa diseñado en el capítulo 3 en este diseño se plantea la no linealidad presente en la inductancia al llegar al punto de saturación.

Los vectores claves y las relaciones constitutivas son dadas por,

$$\begin{aligned}
 x &= \begin{bmatrix} p_3 \\ p_7 \end{bmatrix} & \dot{x} &= \begin{bmatrix} e_3 \\ e_7 \end{bmatrix} & z &= \begin{bmatrix} f_3 \\ f_7 \end{bmatrix} \\
 D_{in} &= \begin{bmatrix} f_2 \\ f_6 \end{bmatrix} & D_{out} &= \begin{bmatrix} e_2 \\ e_6 \end{bmatrix} & u &= e_1 \\
 F &= diag \left\{ \frac{1}{L_q}, \frac{1}{J} \right\} & L &= diag \{ R_a, b \} & y &= f_7
 \end{aligned} \tag{4.63}$$

mientras que la estructura unión es,

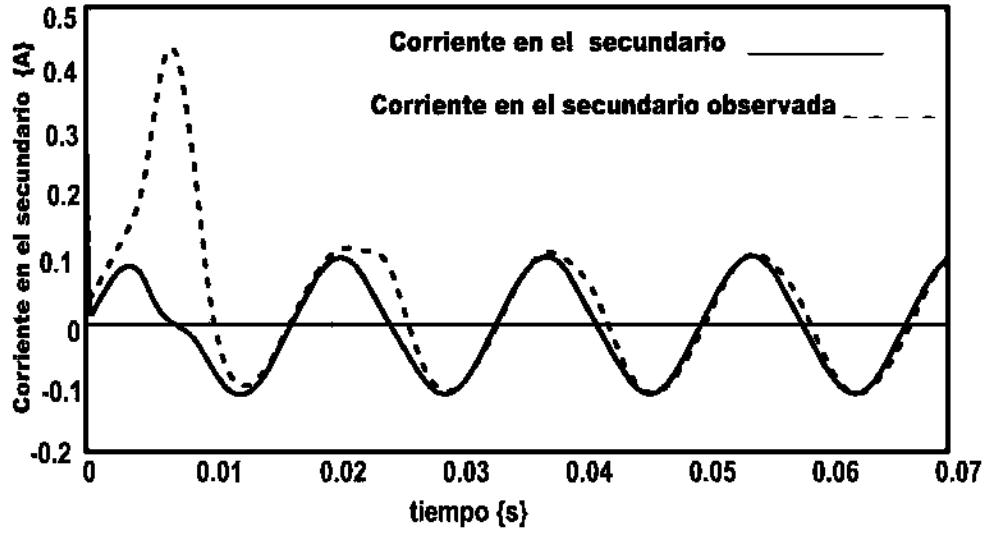


Figura 4.12: Corriente en el secundario

$$S = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -n \\ n & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} & [0] \end{bmatrix} \quad (4.64)$$

La ecuación de estado del motor es,

$$\begin{bmatrix} A_p & B_p \\ C_p & D_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{-R_a}{L_a} & \frac{-n}{J} \\ \frac{n}{L_a} & \frac{-b}{L} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{J} \end{bmatrix} & [0] \end{bmatrix} \quad (4.65)$$

Ahora si se considera la saturación magnética existente en la inductancia L_a mostrada en la ecuación (4.39) de estado es,

$$\bar{A}_p = \begin{bmatrix} \frac{-R_a}{\alpha} & \frac{-n}{J} \\ \frac{n}{L_a} & \frac{-b}{L} \end{bmatrix}; \quad G\gamma(Hz) = \begin{bmatrix} \frac{-R_a\beta}{\alpha}x_1^3 \\ \frac{\beta}{\alpha}x_1^3 \end{bmatrix} \quad (4.66)$$

el vector $G\gamma(Hz)$ debe ser descompuesto para realizar los cálculos correspondientes para el diseño del observador propuesto en (4.22) para sistemas con variables no lineales.

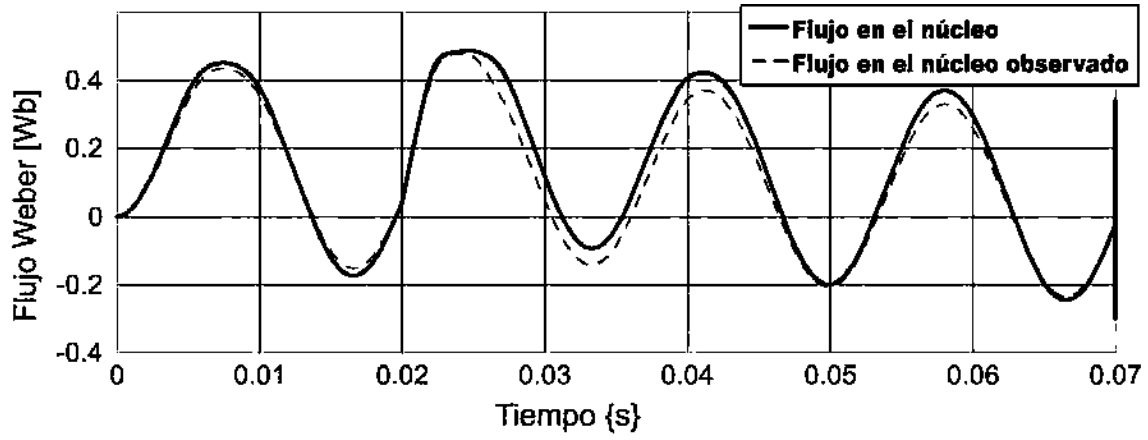
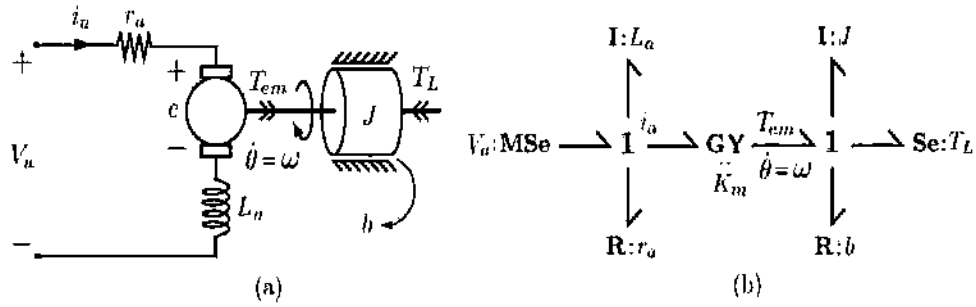


Figura 4.13: Flujo en el núcleo con perturbación.



$$G\gamma(Hz) = \begin{bmatrix} \frac{-1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{-1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{3R_a\beta x_1^2}{\alpha} & 0 \\ \frac{-3\beta x_1^2}{\alpha} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (4.67)$$

mientras tanto

$$\gamma(v) = \begin{bmatrix} -3\frac{R_a\beta}{\alpha}x_1^3 \\ 3\frac{\beta}{\alpha}x_1^3 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad v = Hx \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (4.68)$$

Para comprobar que los estados no lineales llegan a cierta estabilidad absoluta en las variables γ

$$\frac{\partial v(x_1, x_2)}{\partial(x_1, x_2)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.69)$$

Por lo tanto, la propiedad de la Ecuación (4.19) se satisface y es posible realizar el observador del sistema propuesto el cual se muestra en la Figura 4.14.

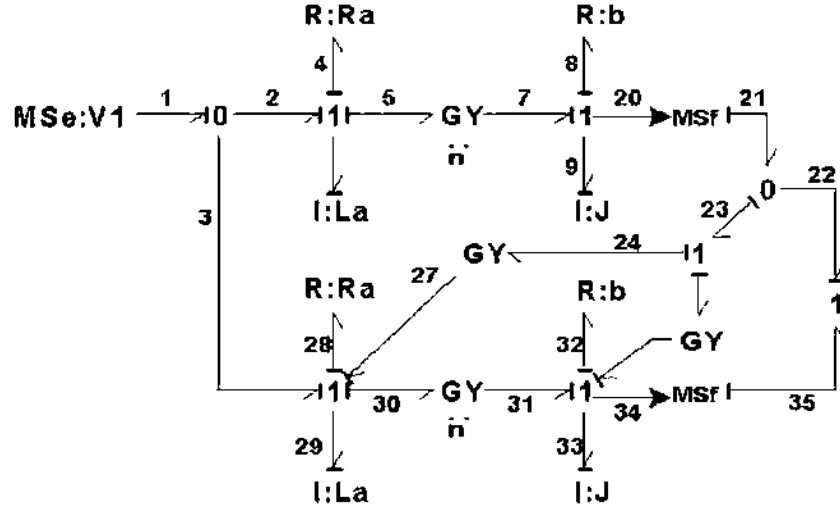


Figura 4.14: Observador del motor de CD.

Los vectores claves para el observador son:

$$\begin{aligned}
 \dot{\hat{x}} &= \begin{bmatrix} p_{29} \\ p_{33} \end{bmatrix} & \hat{x} &= \begin{bmatrix} e_{29} \\ e_{33} \end{bmatrix} & \hat{z} &= \begin{bmatrix} f_{29} \\ f_{33} \end{bmatrix} \\
 \hat{D}_{in} &= \begin{bmatrix} f_{28} \\ f_{32} \end{bmatrix} & \hat{D}_{out} &= \begin{bmatrix} e_{28} \\ e_{32} \end{bmatrix} & u &= e_1 \\
 F &= \text{diag} \left\{ \frac{1}{L_q}, \frac{1}{J} \right\} & F &= \text{diag} \left\{ \frac{1}{L_q}, \frac{1}{J} \right\} & y &= f_{34}
 \end{aligned} \tag{4.70}$$

y la estructura unión de nuestro nuevo sistema es

$$\hat{S} = \begin{bmatrix} \hat{S}_{11} & \hat{S}_{12} & \hat{S}_{13} \\ \hat{S}_{21} & \hat{S}_{22} & \hat{S}_{23} \\ \hat{S}_{31} & \hat{S}_{32} & \hat{S}_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -n - L_1 \\ n & L_2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} & [0] \end{bmatrix} \tag{4.71}$$

$$\tilde{S} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -n - L_1 \\ n & L_2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} & [0] \end{bmatrix} \quad (4.72)$$

de las ecuaciones anteriores se obtiene el siguiente sistema.

$$\dot{\hat{x}} = \begin{bmatrix} 0 & -n - L_1 \\ n & L_2 \end{bmatrix} \hat{x} + \begin{bmatrix} 0 & \frac{L_1}{J} \\ 0 & \frac{L_2}{J} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} e_1 \quad (4.73)$$

si se considera la saturación magnética dada por (4.40) entonces.

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}_1 &= \frac{-R_a}{\alpha\beta} \hat{x}_1 - \frac{n}{J} \hat{x}_2 + \frac{L_1}{J} (\hat{x}_2 - x_2) + \frac{R_a\beta}{\alpha} x_1^2 (\hat{x}_1 + \frac{k_1}{J} (\hat{x}_2 - x_2)) + u \\ \dot{\hat{x}}_2 &= \frac{n}{\alpha\beta} \hat{x}_1 - \frac{f}{J} \hat{x}_2 + \frac{L_2}{J} (\hat{x}_2 - x_2) + \frac{\beta}{\alpha} x_1^2 (\hat{x}_2 + \frac{k_1}{J} (\hat{x}_2 - x_2)) \end{aligned} \quad (4.74)$$

los parámetros de simulación tomados a consideracion son:

$$\begin{aligned} n &= 3 & R_a &= 0.5 & f &= 1.5 & \alpha &= 1 \\ \beta &= 1 & J &= 1.5 & H &= I & G &= \frac{-1}{3} I \\ P &= \text{diag}\{0.56, 0.33\} & L &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}^T & k &= \begin{bmatrix} 0 & -1.33 \end{bmatrix}^T \end{aligned} \quad (4.75)$$

Por lo tanto, los resultados de simulación se muestran en la Figura 4.16 y 4.15.

Se puede apreciar que los dos estados convergen a un tiempo de 0.3 segundos, posteriormente hay una perturbación con una duración de 0.05 segundos la cual genera una alteracion en el estado, sin embargo el estado observado continua siguiendo la trayectoria. De igual manera en la Figura 4.16 se muestra la grafica de las corrientes vistas en el inductor bajo las mismas condiciones de la perturbación de la Figura 4.15.

4.9 Conclusiones del capítulo 4

El diseño de observadores con variables no lineales empleando la metodología de bond graph es propuesto, se utilizaron dos ejemplos para desarrollar los dos observadores, el transformador y

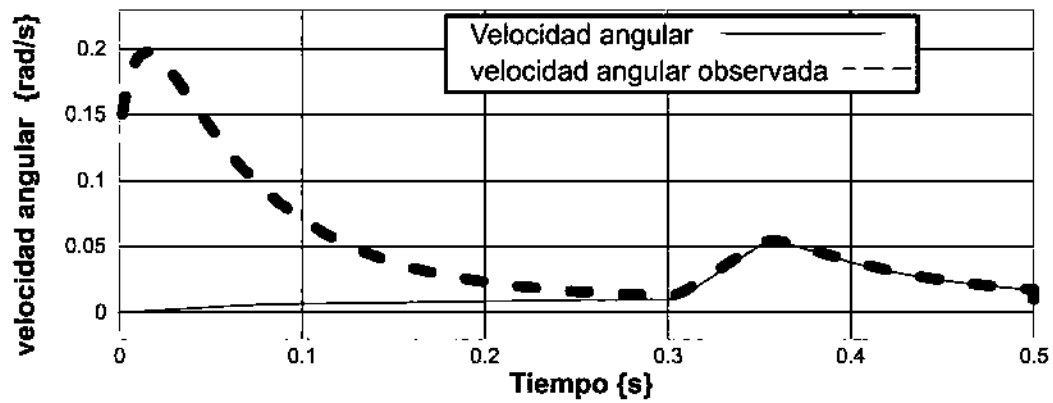


Figura 4.15: Estado y estado observado x_1

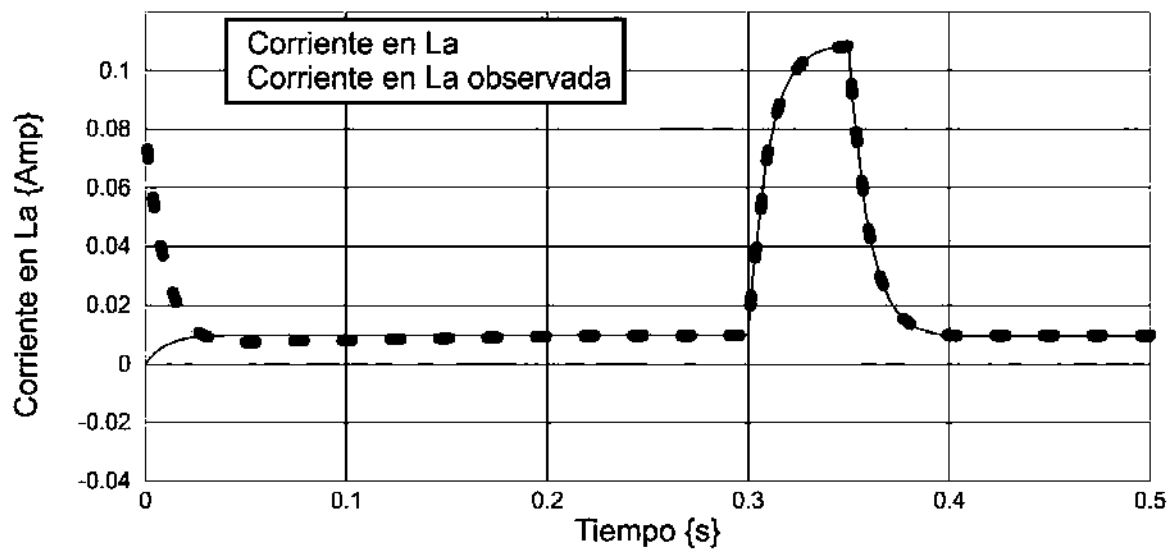


Figura 4.16: Estado y estado observado x_2

el motor de corriente directa incorporando la no linealidad vista en la saturación. Las gráficas y los datos arrojados por las simulaciones muestran la convergencia entre los estados estimados y los estados reales del sistema.

Capítulo 5

Conclusiones y trabajos futuros

5.1 Conclusiones generales

La metodología de bond graph permite trabajar con distintos tipos de energías y así poder obtener un sistema generalizado sin importar que una parte sea eléctrica, mecánico e hidráulico, lo cual facilita el modelado del sistema así como la obtención de características del sistema tales como la observabilidad y el grado relativo del sistema.

Los desarrollos mostrados en esta tesis plantean un enlace entre la técnica de modelado de bond graph, el diseño de observadores lineales y una clase de sistemas no lineales, por lo tanto, se presenta un procedimiento gráfico a través de la teoría de bond graph para la obtención de observadores a partir de una entrada y una salida del sistema.

Mediante el uso de la causalidad en un bond graph se puede determinar de manera directa el grado relativo del sistema y a su vez indicar el número de variables linealmente dependiente de las independientes. Mostrando que la técnica de bond graph es muy eficaz para el análisis de este tipo de propiedades sin tener que desarrollar ecuaciones y mucho menos desarrollar matrices.

La obtención de la observabilidad estructural del sistema es provista a partir del modelo en bond graph sin necesidad de obtener la matriz de observabilidad y posteriormente calcular el rango de dicha matriz lo cual conlleva realizar un gran número de operaciones algebraicas matriciales, en cambio mediante esta metodología solo se realizan trayectorias causales desde la salida del sistema hacia cada elemento almacenador de energía con causalidad derivativa.

El diseño de observadores lineales invariantes en el tiempo es muy práctico desde una perspectiva grafica dado que solo se siguen una serie de procedimientos para el desarrollo del mismo,

si bien hay que tomar en cuenta que para la obtención de las ganancias es requerible la función de transferencia para realizar la retroalimentación y calcular los polos, sin embargo en bond graph se puede realizar la obtención de la función de transferencia a partir del modelo en bond graph, desafortunadamente en este trabajo no se abordó dicho tema por lo cual se requirió solamente a obtener la matriz estructura unión y tomar solamente las sub matrices indicadas para la formación de la matriz A .

Se genera un avance en el diseño de observadores para una clase de sistemas no lineales con un enfoque en bond graph, esto se logra al modelar el observador como lineal, una vez obtenido el modelo lineal se inserta la no linealidad en las relaciones constitutivas para posteriormente hacer la descomposición de l'ouere y realizar el cálculo de las ganancias empleando LMIs.

5.2 Trabajos futuros

Esta tesis abre la posibilidad de trabajar con sistemas no lineales los cuales forman casi la totalidad de los sistemas que actualmente existen.

Nuevos trabajos entre bond graph y los sistemas no lineales y el diseño de observadores pueden continuar la línea de desarrollo propuesta.

Creación de nuevos bloques en 20sim para el tratamiento de sistemas no lineales.

Desarrollo de software para la automatización de trayectorias causales para la determinación de observabilidad sin tener que realizar este análisis manualmente.

Bibliografía

- [Luenberger, 1971] David G. Luenberger, "An Introduction to Observers", Member IEEE, IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. AC-16, No. 6, pp. December 1971
- [Luenberger, 1996] David G. Luenberger, "Observers for Multivariable Systems", Member IEEE, IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. AC-11, No. 2, pp. 190-197, 1996.
- [Luenberger, 1963] David G. Luenberger, "Observing the State of a Linear System", Member IEEE, IEEE Transactions on Military Electronics , Vol.8, pp.74-80, Abril 1963.
- [George E, 2002] George Elis, "Observers in control systems", Academic Press, 2002.
- [Katsuhiko, 2006] Katsuhiko Ogata, "Dinámica de Sistemas", Prentice-Hall, 2006.
- [Chin.T, 1995] Chin-Tsong Cheng, "Linear System Teory and Design", Hdt, Rinehart and Winston, Inc, 1970.
- [Gawthrop, 1995] Peter J, Gawthrop, "Physical Model-based Control: A bond graph Approach", Journal of the Franklin Intititute, Vol. 332B, No3, pp. 285-305, 1995.
- [G. González A, 2004] G. González A., "Tecnicas de Control Basadas en el Dominio Físico para Sistemas LTI MIMO. Aplicacion a la Maquina Sincrona", Tesis de Doctorado, UANL, 2004, pp19-25.
- [G. González A, 2002] Gilberto Gonzalez-A, R. Galindo, "Direct Control in Bond Graph by State Estimated Feedback for MIMO LTI Estimated", Proceedings of the 2002 IEEE International Conference on Control Applications, Scotland, pp. 1183-1188.

- [C. Pichardo, 1998] Cesar Pichardo-Almarza, A. Rahmani, G. Dauphin-Tanguy, M. Delgado, “Using the Bicausality concept to build reduced order observers in linear invariant systems modelled by bond graph”. 1998.
- [Rafael. M, 1997] Rafael Martinez-Guerra, J. De Leon-Morales, “On Nonlinear Observers”, Proceedings of the 1997 IEEE International Conference on Control Applications, pp. 324-328, 1997.
- [Xingzhe, 2003] Xingzhe Fan, M. Arcak, “Observer design for systems with multivariable monotone nonlinearities”, Systems & Control Letters", 50(2003) pp. 319-330.
- [M. Arcak, 2001] M. Arcak and P. Kokotović. Nonlinear observers: A circle criterion design and robustness analysis. Automatica, 37(12):1923-1930, 2001.
- [Borutzky, 2001] Dr. Ing. Wolfgang Borutzky, "Bond Graph Methodology", Springer London Limited 2010.
- [G. Dauphin 1999] G. Dauphin-Tanguy, A Rahamani y C. Sueur, "Bond graph aided design of controlled systems", simulation practice and Theory, Vol. 7, pp. 493-513, 1999.
- [C. Sueur, 1991] C. Sueur, G. Dauphin-Tanguy, "Bond graph approach for structural analysis of MIMO linear systems", Journal of the Franklin Institute, Vol 7, pp. 55-70, 1991
- [Khalil, 1999] H.K. Khalil, High-gain observers in nonlinear feedback control, in: H. Nijmeijer, T.I. Fossen (Eds.), New Directions in Nonlinear Observer Design, Springer, Berlin, 1999, pp. 249–268.
- [W. Slotine, 1998] J. Lohmiller, W. Slotine, On contraction analysis for nonlinear systems, Automatica 34 (1998) 683–696.
- [W. Slotine, 1991] J. E. Slotine and W. Li. “Applied Nonlinear Control”. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1991.
- [Mc Person, 1990] George Mc Person and Robert D. Laramore, An Introduction to Electrical Machines and Transformers, John, Wiley & Sons, 1990.

- [S. Garcia, 2000] S. Garcia, A. Medina and C. Perez, "A state space singlephase transformer model incorporating nonlinear phenomena of magnetic saturation and hysteresis for transient and period steady-state analysis", IEEE Power Engineering Society Summer Meeting, Vol. 4, pp. 2417-2421, July 2000.
- [Boyd, 1994] Boyd, S., El Ghaoui, L., Feron, E., Balakrishnan, V, 1994 "Linear Matrix Inequalities in Systems and Control Theory", SIAM Studies in Applied Mathematics, Vol. 15.
- [Gahinet P, 1994] Gahinet P., Apkarian P, (1994) "A Linear Matrix Inequality Approach to H Control", International Journal of Robust and Nonlinear Control, Vol. 4, pp. 421-448.
- [Gahinet P, 1995] Gahinet P., Nemirovski A., Luab A., Chillali M., 1995 "LMI control toolbox", The MathWorks Inc.
- [Paynter, 1961] Paynter h. M., Analysis and design of Engineering Systems, MIT Press, 1961.
- [Karnopp, 1975] Dean C. Karnopp, Ronald C. Rosenberg, System Dynamics: A Unified Approach, Wiley John and Sons. 1975.
- [Karnopp, 1983] Dean C. Karnopp, Ronald C. Rosenberg, Introduction to Physical Systems Dynamics, Mc. Graw Hill, 1983.
- [Karnopp, 1999] Peter C. Breedveld, Physical Systems Theory in Terms of Bond Graph, Ph. D.
- [Gawthrop, 1996] Peter J. Gawthrop, Lorcan Smith, Metamodelling, Prentice Hall, 1996.
- [W.C.Rheinboldt, 2000] J.M. Ortega, W.C. Rheinboldt, Iterative Solution of Nonlinear Equations in Several Variables, SIAM, Philadelphia, 2000.
- [McPerson, 1990] George McPerson and Robert D. Laramore, An Introduction to Electrical Machines and Transformers, John,Wiley & Sons, 1990.

Apéndice A

Desigualdades matriciales lineales en teoria de sistemas de control

A.1 Desigualdes lineales matriciales

Numerosos avances a lo largo de las últimas décadas han dado como resultado soluciones numéricas a problemas procedentes de la teoría. En primer lugar, el continuo crecimiento en el poder computacional, en segundo lugar, los adelantos en la teoría de optimización generando algoritmos, especializados en optimización convexa.

Los problemas de optimización que involucran Desigualdades Lineales Matriciales (LMI por sus siglas en inglés se define) constituyen una especial y amplia clase de problemas de optimización y estabilidad, primero definimos algunos problemas donde, una desigualdad lineal matricial [Boyd, 1994] es una restricción de la forma:

$$F(x) = F_0 + x_1 F_1 + x_2 F_2 + \dots + x_N F_N < 0 \quad (\text{A.1})$$

donde $x = (x_1, x_2, \dots, x_N)$ es un vector de escalares desconocidos. $F_0, F_1, \dots, F_N$ son matrices simétricas conocidas, mientras que la desigualdad indica la condición de ser definida negativa, es decir, que el mayor autovalor de $F(x)$ es negativo. Una LMI define un problema convexo sobre la variable x , el cual se puede resolver numéricamente con la garantía de encontrar una solución, si existe alguna. Un sistema basado en múltiples LMIs puede ser considerado como un conjunto de LMIs simples, lo que permite que se mantenga la condición de convexidad, es decir, el conjunto $X = \{x \mid f(x) > 0\}$ es convexo; además no necesariamente tiene una frontera suave. Se

define la función:

$$\phi(x) = \begin{cases} \ln \det F(x) & x \in X \\ \infty & x \notin X \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

Esta función tiene la propiedad de ser definida únicamente en X y de tender a infinito cuando se acerca a su frontera. Las curvas de nivel de la función suave de la forma del conjunto factible X . Esta aproximación por líneas de contorno la cual es ilustrada en la Figura A.1.

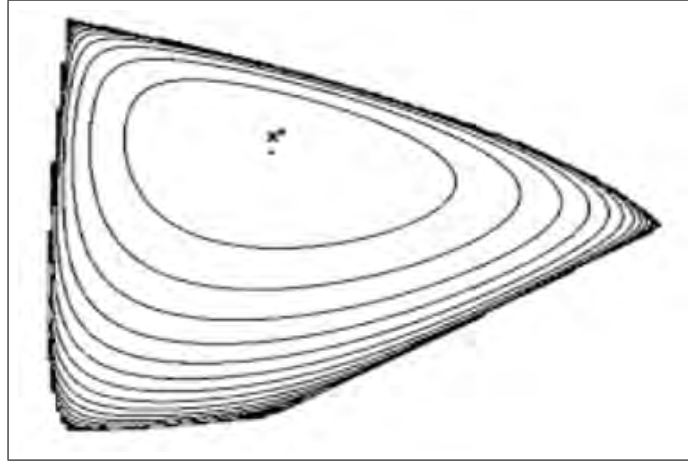


Figura A.1: Líneas de contorno de la función $\phi(x)$, las cuales dan una aproximación suave de la forma del conjunto X .

Múltiples condiciones para el análisis y diseño de sistemas de control se han desarrollado utilizando LMIs en [Gahinet P, 1994]. Criterios de estabilidad asintótica, de minimización de tiempos de respuesta (o ubicación de polos) y de rechazo a perturbaciones basados en normas. Las utilizadas en este trabajo son las relacionadas con la estabilidad asintótica y la ubicación de polos en regiones estables LMI.

El problema de los valores propios es minimizar el valor propio máximo de una matriz de depende de alguna variable, sujeto a una LMI, por ejemplo.

$$\min \quad \lambda \quad (\text{A.3})$$

$$\begin{aligned} \text{sujeto a } \lambda - A(x) &> 0 \\ B(x) &> 0 \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Un problema de valores propios también puede aparecer como un problema semidefinido; es decir, de la forma,

$$\min \quad C^T x \quad (\text{A.5})$$

$$\text{sujeto a } F(x) > 0 \quad (\text{A.6})$$

El problema anterior se puede extender a minimizar el máximo valor generalizado de un par de matrices que dependen de alguna variable sujeto a una LMI. su forma es,

$$\min \quad \lambda$$

$$\text{sujeto a } \lambda B(x) - A(x) > 0 \quad (\text{A.7})$$

$$B(x) > 0$$

$$C(x) > 0$$

Una inclusión diferencial se describe por:

$$\dot{x} \in F(x(t), t), \quad x(0) = x_o \quad (\text{A.8})$$

donde F es una función de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+$ en una familia de subconjuntos de $\mathbb{R}^n$. A cualquier $x : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ que satisface la inclusión diferencial se la llama trayectoria. Es claro que hay muchas trayectorias para una inclusión diferencial dada. Un caso particular de una inclusión diferencial lineal está dada por:

$$\dot{x} \in \{Ax | A \in \Omega\}, \quad x(0) = x_0 \quad (\text{A.9})$$

donde Ω es el conjunto de matrices que se conforma un sistema,

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \in \Omega \quad (\text{A.10})$$

donde el sistema se presenta de la siguiente forma,

$$x = Ax + Bu, \quad x(0) = x_0 \quad (\text{A.11})$$

$$y = Cx + Du$$

Historicamente, las LMIs se han utilizado para el análisis de sistemas dinámicos, la historia comienza en 1890 con *Lyapunov*, él mostró que la ecuación diferencial.

$$\dot{x}(t) = Ax(t) \quad (\text{A.12})$$

es estable sí y sólo sí una matriz definida positiva P que sea:

$$A^T P + P A < 0 \quad (\text{A.13})$$

El requerimiento $P > 0$, $A^T P + P A < 0$ es llamado una desigualdad de *Lyapunov* en P , que es una forma especial de una LMI. *Lyapunov* incluso mostró que esta LMI pudiera ser resuelta, al agregar o seleccionar una matriz cualesquiera $Q = Q^T > 0$ y por lo tanto resolver el sistema lineal $A^T P + P A = -Q$ para la matriz P , esto garantiza que al ser definida positiva el sistema (A.12) es estable.

La condición de estabilidad asintótica [Gahinet P, 1995] puede expresarse como una Desigualdad Lineal Matricial de la forma:

$$\begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & -P A^T - A P \end{pmatrix} > 0 \quad (\text{A.14})$$

cuya solución está asociada a que la LMI dada por la expresión (A.14) sea factible.

A.2 Solución de desigualdades lineales matriciales en MatLab

A.2.1 Ejemplo específico de un sistema LMI

La resolución de las desigualdades matriciales es muy complicada de resolver, por lo cual es conveniente apoyarse en programas, los cuales han apoyado el desarrollo de grandes investigaciones para lograr una gran eficiencia y rendimiento en los tiempos de resolución. El programa con el que se trabajó en el presente proyecto de investigación es MatLab, dado que proporciona información necesaria para la resolución de dichas desigualdades. A continuación se resuelve un tipo de sistema en base a variables de estado establecidas considerando una función de transferencia estable.

$$G(S) = C(sI - A)^{-1}B \quad (\text{A.15})$$

Con cuatro entradas cuatro salidas y seis estados tomando en cuenta la matriz D con la siguiente estructura.

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_2 & d_3 \\ 0 & 0 & d_4 & d_5 \end{pmatrix} \quad (\text{A.16})$$

El siguiente problema mantiene la estabilidad del sistema bajo ciertas incertidumbres, el cual consta de encontrar una matriz D cuya alta ganancia que haga que el cruce de ganancia frecuencia de $D * G(s) * D^{-1}$ sea menor que uno.

Este problema tiene una simple formulación LMI existiendo una adecuado escalamiento D si es posible encontrar dos matrices simétricas $X \in R^{6 \times 6}$ y $S = D^T D \in R^{4 \times 4}$ para que,

$$\begin{pmatrix} A^T X + X A + C^T S C & X B \\ B^T X & -S \end{pmatrix} < 0 \quad (\text{A.17})$$

$$X > 0$$

$$S > 1$$

Para poder solucionar el problema descrito es necesario apoyarse en una serie de instrucciones y comandos dados por MatLab, las cuales solucionan los problemas de encontrar los valores de D dadas las restricciones descritas por (A.17), a continuación se muestran los comandos a escribir en MatLab.

```
setlmis([])
X=lmivar(1,[6 1])
S=lmivar(1,[2 0;2 1])
% 1st LMI
lmiterm([1 1 1 X],1,A,'s')
lmiterm([1 1 1 S],C',C)
lmiterm([1 1 2 X],1,B)
lmiterm([1 2 2 S],-1,1)
% 2nd LMI
lmiterm([-2 1 1 X],1,1)
```



Figura A.2: Interfas grafica de MatLab para la solucion de desigualdades natriciales lineales.

```
% 3rd LMI
lmiterm([-3 1 1 S],1,1)
lmiterm([3 1 1 0],1)
LMISYS = getlmis
```

Donde el comando `lmivar` define dos matrices X y S mientras que el comando `lmiterm` describe los términos de cada LMI, finalmente el comando `getlmis` regresa los resultados obtenidos en `LMISYS`.

Existe otra manera de obtener las líneas de programación utilizando la interfaz gráfica `LMIEDIT` de MatLab, la cual ayuda a la creación de los comandos necesarios para posteriormente realizar la solución de desigualdades lineales matriciales en la ventana principal de MatLab.

Al declarar cada matriz variable (nombre y estructura) en la parte alta de la ventana, esta estructura es especificada por su tipo (S si es cuadrada, R para rectangular y G para cualquier otro tipo de estructura), las LMIs como expresiones para Matlab son descritas en la parte inferior de la ventana y se escriben como una serie de desigualdades a resolver, tomando en cuenta que no se puede especificar más de una desigualdad por línea. Una vez que el sistema LMI es especificado, se crean los comandos y operaciones necesarias para la solución del sistema.

Apéndice B

Publicaciones

B.1 Observers Design for Systems Modelled by Bond Graphs with Multivariable Monotone Nonlinearities

Gilberto Gonzalez-A, and Gerardo Jaimes-A, presented in World Academy of Science, Engineering and Technology (WASET) 2012, Zurich , Switzerland.

Observers Design for Systems Modelled by Bond Graphs with Multivariable Monotone Nonlinearities

Gilberto Gonzalez-A , Gerardo Jaimes-A

Abstract—A methodology to design a nonlinear observer in a bond graph approach is proposed. The class of nonlinear observer with multivariable nonlinearities is considered. A junction structure of the bond graph observer is proposed. The proposed methodology to an electrical transformer and a DC motor including the nonlinear saturation is applied. Nonlinear observers for the transformer and DC motor based on multivariable circle criterion in the physical domain are proposed. In order to show the saturation effects on the transformer and DC motor, simulation results are obtained. Finally, the paper describes that convergence of the estimates to the true states is achieved.

Keywords— Bond graph, nonlinear observer, electrical transformer, nonlinear saturation.

I. INTRODUCTION

BOND graph methodology provides a formal and systematic language for modelling dynamic systems. It incorporates physical assumptions and issues made about system models in an explicit and precise way. In practical engineering, bond graphs are typically used to help generate the differential or the state equations of systems for standard numerical simulation. However, they can also be used for various forms of qualitative reasoning which made no reference to system differential equations at all.

Hence, the bond graph approach has been developed in recent years as a powerful tool for modeling dynamical systems. It essentially focusses on the exchange of energy between the system and its environment and between different elements within the system. It is this energy exchange that determines the dynamics of any system.

The bond graph method is acknowledged to be highly suited for dynamic modelling because of the following reasons: (a) the derivation of system equations can be algorithmized; (b) nonlinear elements are easily modelled.

On the other hand, the principle of observability intuitively establishes the possibility to rebuild the state variables from the measured outputs and given inputs. With observability conditions, the observation problem consists in seeking a state estimation by means of an auxiliary dynamic system, the observer [4]. In [14] presents a new method using bond graph methodology to derive information on structural controllability/observability properties of a system.

Also, some papers have been published applying bond graph to construct an observer. In [5] proposes a control in bond graph using state estimated feedback for MIMO LTI systems. In [6] a bond graph approach to built reduced order observers for LTI systems is described. This approach uses

the bicausality concept to simplify the construction and the calculation of the observer. A bond graph representation of model-based control, which allows the design of controllers in the physical domain is described in [7].

In other wise many papers have been published on observers, for example [8] gives an approach to estimate the state of a nonlinear system from the point of view of differential algebra. However, in [9] and [10] globally convergent observers are designed for a class of systems with multivariable nonlinearities. Also, most of the existing nonlinear observer designs restrict the system to be linear in the unmeasured states.

Thus, the main contribution of this paper is to design an observer in a bond graph approach for systems with multivariable monotone nonlinearities. In this paper a bond graph model of a transformer with two windings is proposed. Also, a basic electromagnetic model for the magnetizing branch of a transformer with two windings in the physical domain is described. This magnetizing branch consists of a resistor and inductance. However, in order to introduce the magnetic saturation a nonlinear function is used.

According with transformers, in [11] a magnetic circuit model of power transformer which takes into account the nonlinear hysteresis phenomenon is analyzed. However, this paper uses a special nonlinear function to introduce the hysteresis. In [13] a bond graph model of a transformer based on a nonlinear conductive magnetic circuit is described. Here, the state space nonlinear magnetic model has to be known. Also, the nonlinear function to armature inductance of a DC motor is applied. Then, an observer for the DC motor is designed.

Section II gives some basic elements of the modelling in bond graph. Section III describes the observers design for a class of nonlinear system with multivariable nonlinearities. A nonlinear observer in the physical domain is presented in section IV. A bond graph model of a transformer with two windings considering the nonlinear core is proposed in section V. In this section, nonlinear observer in the physical domain of the transformer is presented. Section VI, describes a bond graph of a DC motor and the bond graph observer is proposed. Finally, section VII gives the conclusions.

II. MODELLING IN BOND GRAPH

The bond graph methodology allows to model a system in a simple and direct manner. Using fields and junction structures, one may conveniently study systems containing complex multiport components using bond graphs. In fact, bond graphs with fields prove to be a most effective way to handle the modeling of complex multiport systems [2].

Consider the following scheme of a multiport LTI system which includes the key vectors of Fig. 1 [2], [14].

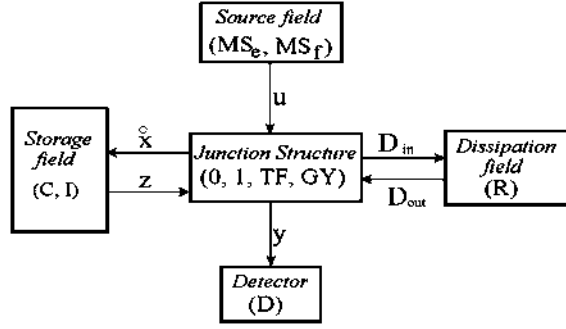


Fig. 1. Key vectors of a bond graph.

In Fig. 1, (MS_e, MS_f) , (C, I) , (R) and (D) denote the source, the energy storage, the energy dissipation and the detector fields, and $(0, 1, TF, GY)$ the junction structure with transformers, TF , and gyrators, GY .

The state $x \in \mathbb{R}^n$ is composed of energy variables p and q associated with I and C elements in integral causality assignment, $u \in \mathbb{R}^p$ denotes the plant input, $y \in \mathbb{R}^q$, the plant output, $z \in \mathbb{R}^n$ the co-energy vector, and $D_{in} \in \mathbb{R}^r$ and $D_{out} \in \mathbb{R}^r$ are a mixture of e and f showing the energy exchanges between the dissipation field and the junction structure.

The relations of the storage and dissipation field are,

$$z(t) = Fx(t) \quad (1)$$

$$D_{out}(t) = LD_{in}(t) \quad (2)$$

The relations of the junction structure are [2], [14],

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ D_{in}(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z(t) \\ D_{out}(t) \\ u(t) \end{bmatrix} \quad (3)$$

The entries of S take values inside the set $\{0, \pm 1, \pm K_t, \pm K_g\}$ where K_t and K_g are transformer and gyrator modules; S_{11} and S_{22} are square skew-symmetric matrices and S_{12} and S_{21} are matrices each other negative transpose. The state equation is,

$$\dot{x}(t) = A_p x(t) + B_p u(t) \quad (4)$$

$$y(t) = C_p x(t) + D_p u(t) \quad (5)$$

where

$$A_p = (S_{11} + S_{12}MS_{21})F \quad (6)$$

$$B_p = S_{13} + S_{12}MS_{23} \quad (7)$$

$$C_p = (S_{31} + S_{32}MS_{21})F \quad (8)$$

$$D_p = S_{33} + S_{32}MS_{23} \quad (9)$$

being

$$M = (I_n - LS_{22})^{-1}L \quad (10)$$

It is very common in electrical power systems to use the electrical current as state variable of this manner taking the derivative of (1) and (4), we have

$$\dot{z}(t) = \bar{A}_p z(t) + \bar{B}_p u(t) \quad (11)$$

$$y = \bar{C}_p z(t) + D_p u(t) \quad (12)$$

where

$$\bar{A}_p = FA_pF^{-1} \quad (13)$$

$$\bar{B}_p = FB_p \quad (14)$$

$$\bar{C}_p = C_pF^{-1} \quad (15)$$

Next section describes the design of an observer for systems with multivariable monotone nonlinearities.

III. A NONLINEAR OBSERVER

This design represents the observer error system as the feedback interconnection of a linear system and a state-dependent sector nonlinearity [9].

Firstly, this observer uses the multivariable nonlinearities $\gamma(\cdot) : \mathbb{R}^l \rightarrow \mathbb{R}^l$ which satisfy a multivariable analog of the monotonicity property:

$$\frac{\partial \gamma}{\partial v} + \left(\frac{\partial \gamma}{\partial v} \right)^T \geq 0 \quad \forall v \in \mathbb{R}^l \quad (16)$$

With this property, the state nonlinearity that arises in the observer error system a multivariable sector condition

For our observer design, we consider the plant

$$\dot{x}(t) = A_p x(t) + G\gamma(Hx(t)) + B_p u(t) \quad (17)$$

$$y(t) = C_p x(t)$$

where $x \in \mathbb{R}^n$ is the state, $y \in \mathbb{R}^q$ is the measured output, $u \in \mathbb{R}^p$ is the control input, and the multivariable nonlinearity $\gamma(\cdot) : \mathbb{R}^l \rightarrow \mathbb{R}^l$ satisfies (16).

With this assumption, our observer has the same form as in [16]:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= A_p \hat{x}(t) + L(C\hat{x}(t) - y(t)) + \\ &G\gamma(H\hat{x}(t) + K(C\hat{x}(t) - y(t))) + B_p u(t) \end{aligned} \quad (18)$$

Our task is to determine the observer matrices $K \in \mathbb{R}^{l \times q}$ and $L \in \mathbb{R}^{n \times q}$ to make the observer error $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ approach zero. From (17) and (18), the dynamics of the observer error $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ are governed by

$$\dot{e}(t) = (A_p + LC_p)e(t) + G[\gamma(v) - \gamma(w)], \quad (19)$$

where

$$v = Hx, \quad w = H\hat{x}(t) + K(C\hat{x}(t) - y(t)) \quad (20)$$

We begin the observer design by representing the observer error system (19) as the feedback interconnection of a linear system and multivariable sector nonlinearity. To this end, we view $\gamma(v) - \gamma(w)$ as a function of v and $z = v - w = (H + KC)e$; that is, a state-dependent multivariable nonlinearity in z :

$$\varphi(v, z) = \gamma(v) - \gamma(w) \quad (21)$$

Substituting (21), we rewrite the observer error system (19) as

$$\dot{e}(t) = (A_p + LC_p)e(t) + G\varphi(v, z) \quad (22)$$

$$z(t) = (H + KC_p)e(t)$$

To show that $\varphi(v, z)$ satisfies a multivariable sector property, we make use the Mean Value Theorem [9], and rewrite $\varphi(v, z)$ as

$$\begin{aligned}\varphi(v, z) &= \gamma(v) - \gamma(w) \\ &= \int_0^1 \left[\frac{\partial \gamma}{\partial s} \right]_{s=v+\lambda(w-v)} (v-w) d\lambda \\ &= \int_0^1 \left[\frac{\partial \gamma}{\partial s} \right]_{s=v-\lambda z} z d\lambda\end{aligned}\quad (23)$$

Thus, from property (16),

$$z^T \varphi(v, z) = \frac{1}{2} z^T \int_0^1 \left(\left[\frac{\partial \gamma}{\partial s} \right] + \left[\frac{\partial \gamma}{\partial s} \right]^T \right)_{s=v-\lambda z} d\lambda z \geq 0 \quad (24)$$

Thanks to this sector property, asymptotic stability is guaranteed from the circle criterion if the linear system with input $\vartheta = -\varphi(v, z)$ and output z is SPR, that is, if a matrix $P = P^T > 0$, and a constant $\varsigma > 0$ can be found such that [9]

$$\begin{bmatrix} (A + LC)^T P + P(A + LC) + \varsigma I & PG + (H + KC)^T \\ G^T P + (H + KC) & 0 \end{bmatrix} \leq 0 \quad (25)$$

Thus, the observer design for system (17) consists on solving (25), which is LMI in $P = P^T \geq 0$, P, L, K and $\varsigma \geq 0$.

Next section presents a general scheme to obtain an observer in the physical domain.

IV. AN OBSERVER BASED ON A BOND GRAPH

A direct graphical technique to obtain the observer of a system represented by bond graph is presented. It is important to note that the magnetizing inductance is a nonlinear function described by (41). Thus, the proposed observer is a nonlinear system. The general structure of the complete system is shown in Fig. 2.

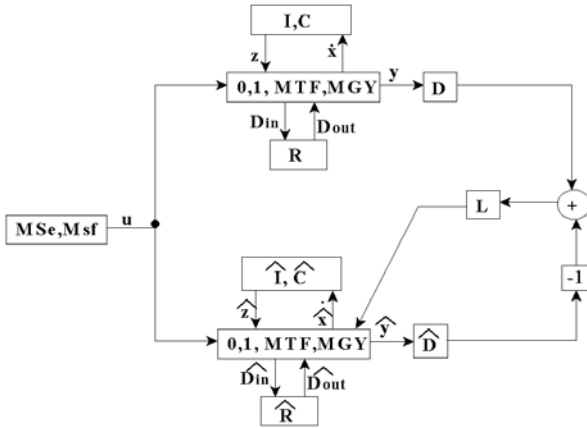


Fig. 2. Block diagram of an observer in the physical domain.

The objective to represent the model and the observer in block diagrams is to obtain the complete system in terms of the junction structure matrices. This let us to know, the change of S due to the observer with the purpose the assign the gains of the observer.

The structure of the observer is given by,

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{x}}(t) \\ \hat{D}_{in}(t) \\ \hat{y}(t) \end{bmatrix} = \hat{S} \begin{bmatrix} \hat{z}(t) \\ \hat{D}_{out}(t) \\ u(t) \end{bmatrix} + \tilde{S} z(t) \quad (26)$$

The state space representation of the observer is,

$$\dot{\hat{x}}(t) = \hat{A}_p \hat{x}(t) + \hat{B}_p u(t) + \tilde{S} F x(t) \quad (27)$$

$$\hat{y}(t) = \hat{C}_p \hat{x}(t) + D_p u(t) \quad (28)$$

where

$$\hat{A}_p = (\hat{S}_{11} + \hat{S}_{12} \hat{M} \hat{S}_{21}) F \quad (29)$$

$$\hat{B}_p = \hat{S}_{13} + \hat{S}_{12} \hat{M} \hat{S}_{23} \quad (30)$$

$$\hat{C}_p = (\hat{S}_{31} + \hat{S}_{32} \hat{M} \hat{S}_{21}) F \quad (31)$$

being

$$\hat{M} = L (I - \hat{S}_{22} L)^{-1} \quad (32)$$

Next section proposes a two windings transformer including the linear and nonlinear core in the physical domain. Also, a nonlinear of the observer is designed.

V. BOND GRAPH OF A TWO WINDINGS TRANSFORMER WITH CORE

Charles P. Steinmetz (1865-1923) developed the circuit model that is universally used for the analysis of iron core transformers at power frequencies [1]. However it is good idea to consider transformers first from the point of view of basic linear circuit theory to better appreciate the Steinmetz model.

Consider the magnetic coupling between the primary and secondary windings of a transformer shown in Fig. 3 [12].

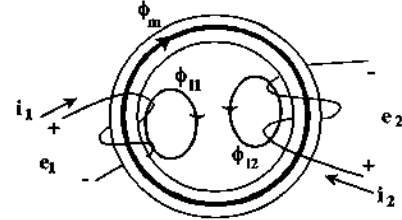


Fig. 3. Magnetic coupling of a two-winding transformer.

The total flux linked by each winding may be divided into two components: a mutual component, ϕ_m , that is common to both windings, and a leakage flux components that links only the winding itself. In terms of these flux components, the total flux by each of the windings can be expressed as, $\phi_1 = \phi_{l1} + \phi_m$ and $\phi_2 = \phi_{l2} + \phi_m$ where ϕ_{l1} and ϕ_{l2} are the leakage flux components of windings 1 and 2, respectively. Assuming that N_1 turns of winding 1 effectively link ϕ_m and ϕ_{l1} , the flux linkage of winding 1 is defined by, $\lambda_1 = N_1 \phi_1 = N_1 (\phi_{l1} + \phi_m)$ the leakage and mutual fluxes can be expressed in terms of the winding currents using the magneto-motive forces (mmfs) and permeances. So, the flux linkage of winding 1 is, $\lambda_1 = N_1 [N_1 i_1 P_{l1} + (N_1 i_1 + N_2 i_2) P_m]$ where $P_{l1} = \frac{\phi_{l1}}{N_1 i_1}$ and $P_m = \frac{\phi_m}{N_1 i_1 + N_2 i_2}$.

Similarly, the flux linkage of winding 2 can be expressed as, $\lambda_2 = N_2 (\phi_{l2} + \phi_m)$ and using mmfs and permeances for this winding, $\lambda_2 = N_2 [N_2 i_2 P_{l2} + (N_1 i_1 + N_2 i_2) P_m]$. The resulting flux linkage equations for the two magnetically coupled windings, expressed in terms of the winding inductances are,

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} \quad (33)$$

where L_{11} and L_{22} are the self-inductances of the windings, and L_{12} and L_{21} are the mutual inductances between them.

Note that the self-inductance of the primary can be divided into two components, the primary leakage inductance, L_{l1} and the primary magnetizing inductance, L_{m1} , which are defined by, $L_{11} = L_{l1} + L_{m1}$ where $L_{l1} = N_1^2 P_{l1}$ and $L_{m1} = N_1^2 i_1 P_m$.

Likewise, for winding 2 $L_{22} = L_{l2} + L_{m2}$ where $L_{l2} = N_2^2 P_{l2}$ and $L_{m2} = N_2^2 i_2 P_m$.

Finally, the mutual inductance is given by, $L_{12} = N_1 N_2 i_2 P_m$ and $L_{21} = N_1 N_2 i_1 P_m$, taking the ratio of L_{m2} a L_{m1} , then $L_{m2} = \left(\frac{N_2}{N_1}\right)^2 L_{m1}$.

The induced voltage in winding 1 is given by, $e_1 = \frac{d\lambda_1}{dt} = L_{11} \frac{di_1}{dt} + L_{12} \frac{di_2}{dt}$ replacing L_{11} by $L_{l1} + L_{m1}$ and $L_{12} i_2$ by $N_2 L_{m1} i_2 / N_1$, we obtain $e_1 = L_{l1} \frac{di_1}{dt} + L_{m1} \frac{d(i_1 + (N_2/N_1) i_2)}{dt}$. Similarly, the induced voltage of winding 2 is written by, $e_2 = L_{l2} \frac{di_2}{dt} + L_{m2} \frac{d(i_2 + (N_1/N_2) i_1)}{dt}$.

Finally, the terminal voltage of a winding is the sum of the induced voltage and the resistive drop in the winding, the complete equations of the two windings are,

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 i_1 \\ r_2 i_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_{l1} + L_{m1} & a^{-1} L_{m1} \\ a L_{m2} & L_{l2} + L_{m2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{di_1}{dt} \\ \frac{di_2}{dt} \end{bmatrix} \quad (34)$$

where $a = N_1/N_2$.

The final concept involved in the Steinmetz transformer model is a scheme for handling the nonlinearity of the core and the core losses. The Steinmetz model approaches the problem of representing core excitation by first dividing it into two parts: magnetization and core losses [1]. In order to consider the core losses of a transformer a bond graph model is presented in Fig. 4.

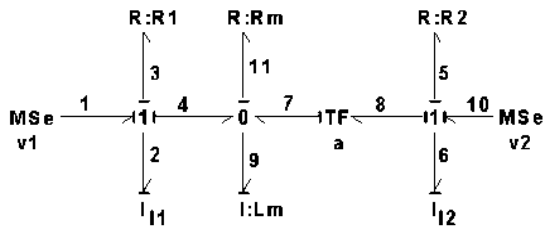


Fig. 4. Bond graph of a complete transformer.

The key vectors of the bond graph of Fig. 4 are,

$$\begin{aligned} x &= \begin{bmatrix} p_2 \\ p_6 \\ p_9 \end{bmatrix}; \dot{x} = \begin{bmatrix} e_2 \\ e_6 \\ e_9 \end{bmatrix}; z = \begin{bmatrix} f_2 \\ f_6 \\ f_9 \end{bmatrix} \\ D_{in} &= \begin{bmatrix} f_3 \\ f_5 \\ f_{11} \end{bmatrix}; D_{out} = \begin{bmatrix} e_3 \\ e_5 \\ e_{11} \end{bmatrix}; u = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_{10} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (35)$$

the constitutive relations of the fields are,

$$L = \text{diag} \{R_1, R_2, R_m\} \quad (36)$$

$$F = \text{diag} \left\{ \frac{1}{L_{l1}}, \frac{1}{L_{l2}}, \frac{1}{L_m} \right\} \quad (37)$$

and the junction structure is given by

$$\begin{aligned} S_{12} &= -S_{12}^T = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & \frac{-1}{a} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; S_{13} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ S_{11} &= S_{22} = S_{23} = 0 \end{aligned} \quad (38)$$

By substituting (36), (37) and (38) into (6) and 7, the state space representation of the transformer is,

$$\begin{aligned} \bar{A}_p &= \begin{bmatrix} \frac{-(R_1+R_m)}{L_{l1}} & \frac{-R_m}{aL_{l1}} & \frac{R_m}{L_{l1}} \\ \frac{-R_m}{aL_{l2}} & \frac{-(R_2+R_m/a^2)}{L_{l2}} & \frac{-R_m}{aL_{l2}} \\ \frac{R_m}{L_m} & \frac{R_m}{aL_m} & \frac{-R_m}{L_m} \end{bmatrix} \\ \bar{B}_p &= \begin{bmatrix} \frac{1}{L_{l1}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_{l2}} & 0 \end{bmatrix}^T \end{aligned} \quad (39)$$

The incorporation of nonlinear effects such as magnetic saturation and hysteresis is achieved in the transformer model with the appropriate modification of the inductance L_m in the bond graph of Fig. 4.

In Fig. 5 the saturation curve is illustrated and this curve is approximated with the equation [15],

$$i_{L_m} = \frac{1}{\beta} \tan \left(\frac{\lambda L_m}{\alpha} \right) \quad (40)$$

where $\alpha = 0.3215$ and $\beta = 0.8642$.

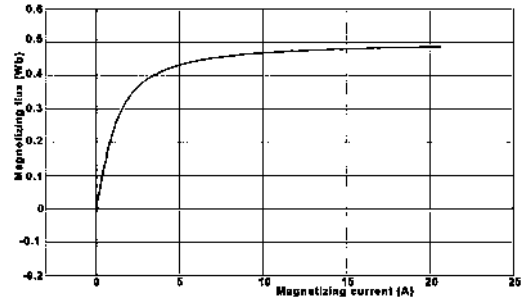


Fig. 5. Saturation curve of equation (40).

In other wise the magnetization inductance of the transformer is defined by

$$L_m = \frac{d\lambda_m}{di_m} = \frac{\alpha\beta}{1 + \beta^2 i_m^2} \quad (41)$$

and substituting into (39) we have

$$\dot{z}(t) = \check{A}z(t) + \bar{B}_p u(t) + G\gamma(Hz(t)) \quad (42)$$

where

$$\begin{aligned} \check{A} &= \begin{bmatrix} \frac{-(R_1+R_m)}{aL_{l2}} & \frac{-R_m}{aL_{l1}} & \frac{R_m}{L_{l1}} \\ \frac{-R_m}{aL_{l2}} & \frac{-(R_2+R_m/a^2)}{L_{l2}} & \frac{-R_m}{aL_{l2}} \\ \frac{R_m}{\alpha\beta} & \frac{R_m}{\alpha\beta a} & \frac{-R_m}{\alpha\beta} \end{bmatrix} \\ G\gamma(Hz) &= \frac{\beta R_m}{\alpha} \left(z_1 z_3^2 + \frac{1}{a} z_2 z_3^2 - z_3^3 \right) \end{aligned} \quad (43)$$

also

$$G = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\beta R_m}{\alpha} \end{bmatrix}^T \quad (45)$$

$$\gamma(v) = z_1 z_3^2 + \frac{1}{a} z_2 z_3^2 - z_3^3 \quad (46)$$

and

$$v = Hz = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{a} & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} \quad (47)$$

therefore

$$\frac{\partial \gamma}{\partial v} + \left(\frac{\partial \gamma}{\partial v} \right)^T = 2z_3^2 \geq 0 \quad \forall v \in \mathbb{R} \quad (48)$$

The numerical values of the parameters of the bond graph of Fig. 4 are $L_{l1} = 11.05mH$, $L_{l2} = 11.05mH$, $\alpha = 0.3215$; $\beta = 0.8642$; $R_1 = 5.8\Omega$, $R_2 = 5.8\Omega$, $R_L = 100\Omega$, $a = 10$, $R_m = 4K\Omega$ and $v_1 = 120 \sin(377t)$. If we introduce (40) to the bond graph model of Fig. 4, the nonlinear phenomena is incorporated. Fig. 6 shows the saturation performance in the bond graph model of the transformer.

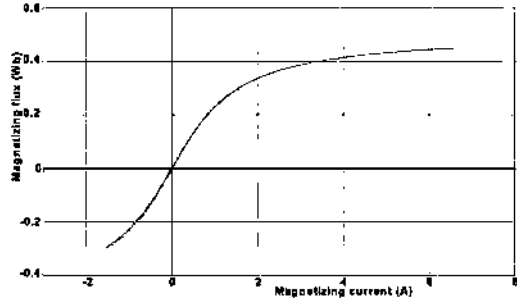


Fig. 6. Nonlinear performance of the transformer of Fig. 4.

The primary and secondary current of the bond graph model of the transformer are shown in Fig. 7. Note that the saturation and hysteresis affects both electrical currents on the electrical transformer.

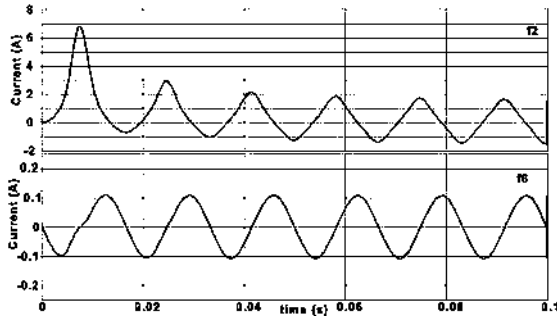


Fig. 7. Primary and secondary current of a transformer with nonlinear core.

The observer design using bond graph allows to know the relation between the plant and the observer in an easy way. From (48) the monotonicity property of the electrical transformer is satisfied. Hence, a nonlinear observer for the transformer can be applied. Fig. 8 shows the modelling in bond graph of the nonlinear observer.

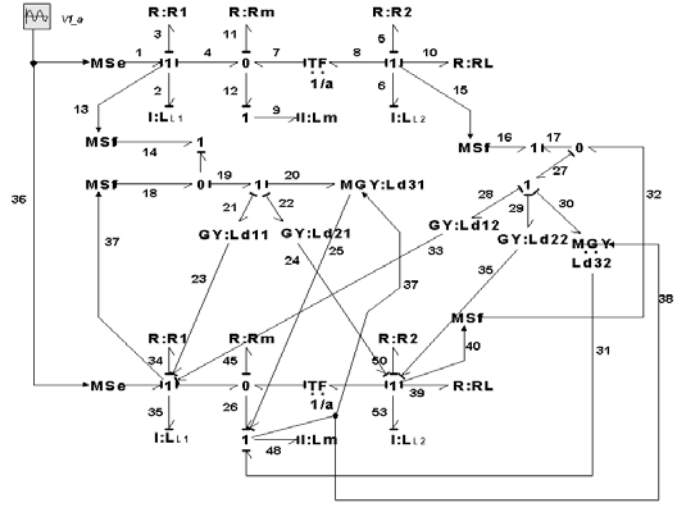


Fig. 8. Observer for the transformer in the physical domain.

The nonlinear section for the observer on the bond graph by using modulated gyrators $MGY:Ld_{31}$ and $MGY:Ld_{32}$ with active bonds 37 and 38 is introduced.

In order to prove that the complete bond graph of Fig. 8 represents a system with multivariable monotone nonlinearities, the mathematical model is obtained. Thus, the key vectors for the transformer is given by (35) and for the observer are,

$$\begin{aligned} \hat{x} &= \begin{bmatrix} p_{35} \\ p_{53} \\ p_{48} \end{bmatrix}; \hat{\dot{x}} = \begin{bmatrix} e_{35} \\ e_{53} \\ e_{48} \end{bmatrix}; \hat{z} = \begin{bmatrix} f_{35} \\ f_{53} \\ f_{48} \end{bmatrix} \\ \hat{D}_{in} &= \begin{bmatrix} f_{34} \\ f_{50} \\ f_{45} \\ f_{39} \end{bmatrix}; \hat{D}_{out} = \begin{bmatrix} e_{34} \\ e_{50} \\ e_{45} \\ e_{39} \end{bmatrix}; y = \begin{bmatrix} f_2 \\ f_6 \\ f_{35} \\ f_{53} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (49)$$

the constitutive relations of the elements are,

$$F = \text{diag} \left\{ \frac{1}{L_{l1}}, \frac{1}{L_{l1}}, \frac{1}{L_m} \right\} \quad (50)$$

$$L = \text{diag} \{ R_1, R_2, R_m, R_L \} \quad (51)$$

and the junction structure is,

$$\begin{aligned} \hat{S}_{11} &= \begin{bmatrix} Ld_{11} & Ld_{12} & 0 \\ Ld_{21} & Ld_{22} & 0 \\ Ld_{31} & Ld_{32} & 0 \end{bmatrix}; \hat{S}_{13} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \hat{S}_{12} &= \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -a^{-1} & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}; \hat{S}_{31} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ \hat{S}_{22} &= \hat{S}_{23} = \hat{S}_{32} = \hat{S}_{33} = 0 \end{aligned} \quad (52)$$

From (29), (30), (50), (51) and (52) the state space representation is,

$$\begin{aligned} \hat{A}_p &= \begin{bmatrix} \frac{-R_{l1}}{L_{l1}} + G_{11} & \frac{-a^{-1}R_m}{L_{l1}} + G_{12} & \frac{R_m}{L_{l1}} \\ \frac{-a^{-1}R_m}{L_{l2}} + G_{21} & \frac{-R_{l2}}{L_{l2}} + G_{22} & \frac{-a^{-1}R_m}{L_{l2}} \\ \frac{R_m}{L_m} + \frac{Lp_{31}}{L_m} & \frac{-a^{-1}R_m}{L_m} + \frac{Lp_{32}}{L_m} & \frac{-R_m}{L_m} \end{bmatrix} \\ B_p &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \tilde{A}_p = \begin{bmatrix} -G_{11} & -G_{12} & 0 \\ -G_{21} & -G_{22} & 0 \\ \frac{-Lp_{31}}{L_m} & \frac{-Lp_{32}}{L_m} & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (53)$$

where $R_{11} = R_1 + R_m$; $R_{22} = R_2 + R_L + R_m$; $G_{11} = Ld_{11}/L_{l1}$; $G_{12} = Ld_{12}/L_{l1}$; $G_{21} = Ld_{21}/L_{l2}$; $G_{22} = Ld_{22}/L_{l2}$; $Lp_{31} = (Ld_{31} + K_{d1}L_m)$; $Lp_{32} = (Ld_{32} + K_{d2}L_m)$

$$\begin{aligned} Lp_{31} &= (Ld_{31} + K_{d1}L_m) \\ Lp_{32} &= (Ld_{32} + K_{d2}L_m) \end{aligned}$$

In order to verify that (53) is the same observer respect (42). By substituting (41) into the third line of $\hat{A}_p$ from (53) we have,

$$\dot{\hat{z}}_3 = \frac{R_m}{\alpha\beta} (\hat{z}_1 + a^{-1}\hat{z}_2 - \hat{z}_3) + \frac{\beta R_m}{\alpha} (\hat{z}_1 + a^{-1}\hat{z}_2 - \hat{z}_3) \hat{z}_3^2 + G \quad (54)$$

where

$$G = (Ld_{31} + K_{d1}L_m) \frac{(\hat{z}_1 - z_1)}{L_m} + (Ld_{32} + K_{d2}L_m) \frac{(\hat{z}_2 - z_2)}{L_m} \quad (55)$$

and using one more time (41) into (55) we obtain,

$$\begin{aligned} G &= K_1 (\hat{z}_1 - z_1) + \frac{\beta}{\alpha} Ld_{31} (\hat{z}_1 - z_1) \hat{z}_3^2 + \\ &K_2 (\hat{z}_2 - z_2) + \frac{\beta}{\alpha} Ld_{32} (\hat{z}_2 - z_2) \hat{z}_3^2 \end{aligned} \quad (56)$$

Finally, from (18) the original observer gains are

$$L = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \\ L_{31} & L_{32} \end{bmatrix}; K = \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \end{bmatrix} \quad (57)$$

Therefore, the relations between the graphical gains in bond graph and the original gains for the observer are: $Ld_{11} = L_{11} \cdot L_{l1}$; $Ld_{12} = L_{12} \cdot L_{l1}$; $Ld_{21} = L_{21} \cdot L_{l2}$; $Ld_{22} = L_{22} \cdot L_{l2}$; $Ld_{31} = \frac{\alpha}{\beta} L_{31}$; $Ld_{32} = \frac{\alpha}{\beta} L_{32}$; $K_{d1} = K_1 - \frac{L_{31}}{\beta^2}$ and $K_{d2} = K_2 - \frac{L_{32}}{\beta^2}$.

By substituting the values of the parameters of the complete system according with (17), we have,

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} -362515.83 & -3619909.502 & 361990.9502 \\ -3619909.502 & -36208669.68 & 3619909.502 \\ 14396.7595 & 143967.595 & -14396.7595 \end{bmatrix} \\ B &= \begin{bmatrix} 90.49 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ H &= \begin{bmatrix} 1 & 0.1 & -1 \end{bmatrix}; G = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 10752.09 \end{bmatrix}^T \end{aligned}$$

The linear matrix inequality LMI must be feasible (25), which guarantees a strict positive real (SPR) property for the linear part of the observer error system, for this system, we obtain

$$\begin{aligned} P &= \begin{bmatrix} 404427 & -404427 & -0.000566 \\ -404427 & 404427.1 & -0.000836 \\ -0.000566 & -0.000836 & 0.000093 \end{bmatrix} \\ L &= \begin{bmatrix} -104334.8 & -1035963.5 \\ -104334.8 & -1035963.5 \\ -2306330.8 & -22903046.7 \end{bmatrix}; K = \begin{bmatrix} 5.09 \\ 0.79 \end{bmatrix}^T \end{aligned}$$

with $v = 100$.

The performance of the electrical transformer with the observer is shown in Fig. 9 and 10. Fig. 9 illustrates the primary current on the transformer, f_2 and on the observer, f_{35} .

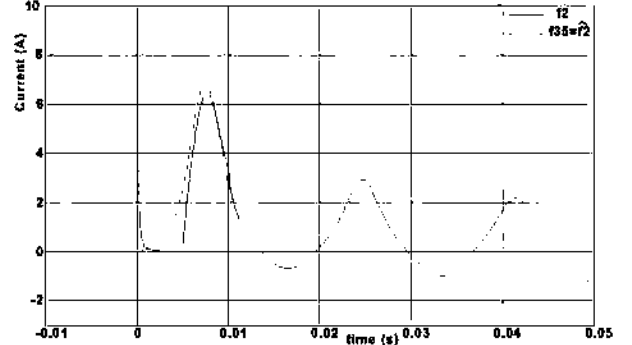


Fig. 9. Primary currents on the transformer and on the observer.

The secondary currents on the transformer, f_6 and on the observer, f_{53} are shown in Fig. 10.

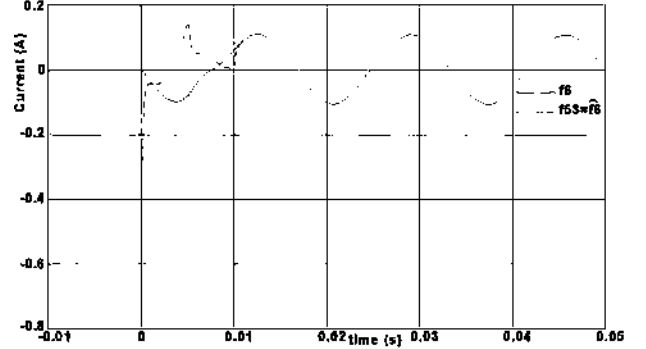


Fig. 10. Secondary currents on the transformer and on the observer.

Therefore, the convergency of the estimates respect the true states of the electrical transformer including nonlinear saturation and hysteresis is guaranteed.

VI. BOND GRAPH OF A DC MOTOR

Of all electric machines the direct (DC) machine is perhaps the most straightforward to analyze. Although a rigorous deviation of the voltage and torque equation is possible it is rather lengthy and little is gained since these relationships may be deduced. The armature coils revolve in a magnetic field established by current flowing in the field winding, which is shown in Fig. 11. We know that voltage is induced in these coils by virtue of this rotation and we can write the field and armature voltage equations as $v_f = r_f i_f + L_f \frac{di_f}{dt}$ and $v_a = w L_{af} i_f + r_a i_a + L_a \frac{di_a}{dt}$ where L_f and L_a are the self inductances of the field and armature windings, respectively. The rotor speed is denoted as w and L_{af} is the mutual inductance between the field and the rotating armature coils. The expression for torque is $T_e = L_{af} i_f i_a$ and the torque and rotor speed are related by $T_e = J \frac{dw}{dt} + fw + T_L$ where J is the inertia of the rotor and in some cases the connected mechanical load, the constant f is a damping coefficient associated with the mechanical rotational system of the machine and mechanical load.

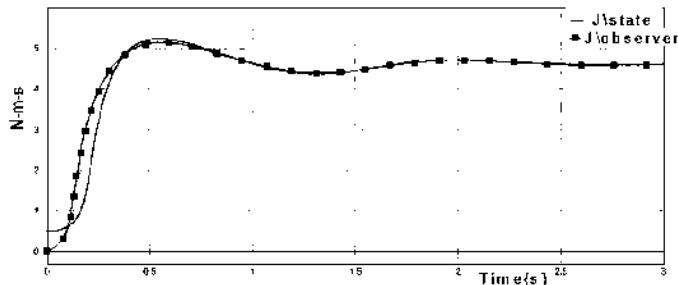


Fig. 14. State and observer of x_1 .

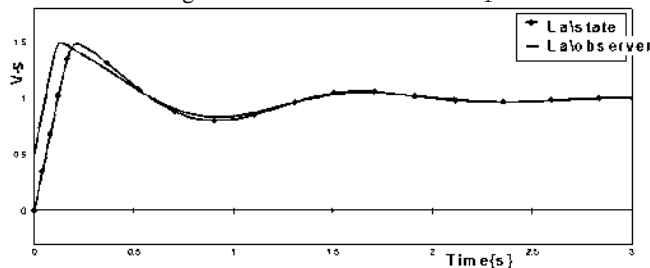


Fig. 15. State and observer of x_2 .

VII. CONCLUSIONS

A bond graph approach to design observers with multivariable nonlinearities is proposed. Hence, models of a power transformer and a DC motor incorporating the nonlinear saturation in the physical domain is presented. In order to prove the results, the graphical simulations are shown. The convergence of the estimates and the states of the transformer by using simulation is described.

REFERENCES

- [1] George McPerson and Robert D. Laramore, *An Introduction to Electrical Machines and Transformers*, John, Wiley & Sons, 1990.
- [2] Dean C. Karnopp, Donald L. Margolis and Ronald C. Rosenberg, *System Dynamics Modeling and Simulation of Mechatronic Systems*, Wiley, John & Sons, 2000.
- [3] P. E. Wellstead, *Physical System Modelling*, Academic Press, London, 1979.
- [4] C. Pichardo-Almarza, A. Rahmani, G. Dauphin-Tanguy, M. Delgado, "High gain observers for non-linear systems modelled by bond graphs", *Proc. IMechE Part I: J. Systems and Control Engineering*, 219(2005) pp. 477-497.
- [5] Gilberto Gonzalez-A, R. Galindo, "Direct Control in Bond Graph by State Estimated Feedback for MIMO LTI Estimated", *Proceedings of the 2002 IEEE International Conference on Control Applications*, Scotland, pp. 1183-1188.
- [6] Cesar Pichardo-Almarza, A. Rahmani, G. Dauphin-Tanguy, M. Delgado, "Using the Bicausality concept to build reduced order observers in linear invariant systems modelled by bond graph",
- [7] Peter J. Gawthrop, "Physical Model-based Control: A Bond Graph Approach", *Journal of the Franklin Institute*, 332B(3), pp. 285-305, 1995.
- [8] Rafael Martinez-Guerra, J. De Leon-Morales, "On Non-linear Observers", *Proceedings of the 1997 IEEE International Conference on Control Applications*, pp. 324-328, 1997.
- [9] Xingzhe Fan, M. Arcak, "Observer design for systems with multivariable monotone nonlinearities", *Systems & Control Letters*, 50(2003) pp. 319-330.

- [10] Xingzhe Fan, M. Arcak, "Nonlinear Observer Design for Systems with Multivariable Monotone Nonlinearities", *Proceedings of the 41st IEEE Conference on Decision and Control*, pp. 684-688, 2002.
- [11] Z. Q. Wu, G. H. Shirkoohi, J. Z. Cao, "Simple dynamic hysteresis modelling of three phase power transformer", *Journal of Magnetism and Magnetic Materials* 160(1996) pp.79-80.
- [12] Chee-Mun Ong, *Dynamic Simulation of Electric Machinery Using MatLab/Simulink*, Prentice-Hall, 1998.
- [13] H. Fraisse, J. P. Masson, F. Marthouret and H. Morel, "Modeling of a Non-Linear Conductive Magnetic Circuit. Part 2: Bond Graph Formulation", *IEEE Transactions on Magnetics* Vol. 31, No. 6, November 1995.
- [14] C. Sueur and G. Dauphin-Tanguy, "Bond graph approach for structural analysis of MIMO linear systems", *Journal of the Franklin Institute*, Vol. 328, No. 1, pp. 55-70, 1991.
- [15] S. Garcia, A. Medina and C. Perez, "A state space single-phase transformer model incorporating nonlinear phenomena of magnetic saturation and hysteresis for transient and period steady-state analysis", *IEEE Power Engineering Society Summer Meeting*, Vol. 4, pp. 2417-2421, July 2000.
- [16] M. Arcak, P. Kokotovic, Nonlinear observers: a circle criterion design and robustness, *Automatica* 37(12) (2001) 1923-1930.