



Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo

Facultad de Ingeniería Eléctrica

División de Estudios de Posgrado

TESIS

**MODELADO Y ANÁLISIS DE SISTEMAS
LINEALES VARIANTES EN EL TIEMPO EN UN
ENFOQUE DE BOND GRAPH**

Que para obtener el título de

**MAESTRÍA EN CIENCIAS EN INGENIERÍA ELÉCTRICA
CON ESPECIALIDAD EN SISTEMAS DE CONTROL**

Presenta

Ing. JOEL ABRAHAM GONZÁLEZ VIEYRA

Director de Tesis

Doctor en Ingeniería

GILBERTO GONZÁLEZ AVALOS

Co-Director de Tesis

Doctor en Ingeniería

ROBERTO TAPÍA SÁNCHEZ

Morelia, Michoacán, Agosto del 2014



MODELADO Y ANÁLISIS DE SISTEMAS LINEALES VARIANTES EN EL TIEMPO EN UN ENFOQUE DE BOND GRAPH

Los Miembros del Jurado de Examen de Grado aprueban
la Tesis de Maestría en Ciencias en Ingeniería Eléctrica de Joel Abraham González Vieyra

Dr. Juan Anzures Marín
Presidente del Jurado

Dr. Gilberto González Ávalos
Director de Tesis

Gilberto González

Dr. Roberto Tapia Sánchez
Co-director

Dr. José Juan Rincón Pasaye
Vocal

Dr. Ignacio Juárez Campos
Revisor Externo

Dr. J. Aurelio Medina Rios
*Jefe de la División de Estudios de Posgrado
de la Facultad de Ingeniería Eléctrica. UMSNH
(Por reconocimiento de firmas).*

UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN NICOLÁS DE HIDALGO
Agosto 2014

“We lay down a fundamental principle of generalization by abstraction:

*The existence of analogies between central features of various theories implies
the existence of a general theory which underlies the particular theories
and unifies them with respect to those central features...”*

Eliakim Hastings Moore

Dedicatoria

El presente trabajo es dedicado a mis padres, mis hermanas y toda mi familia, los cuales siempre han estado presentes en todos los pasos que he dado en mi vida.

A mis amigos y amigas, los cuales he encontrado y que se encuentran en todos los lugares por los que he caminado.

A mis profesores que me han brindado parte de sus conocimientos, y que éstos se han sumado a mi formación.

Agradecimientos

Agradezco a:

Mis padres, Silvia y Joel, por su invaluable amor y ese apoyo incondicional, que me han otorgado sin importar la dificultad y el esfuerzo que represente cualquier reto.

Mis hermanas, Nayeli y Zarahí, por esa tolerancia que me han demostrado tener cuando es requerida y que yo mismo he puesto en práctica.

Mi familia, que siempre se encuentra dispuesta a discutir sobre cualquier tema y de lo cual se puede obtener un buen aprendizaje.

Mis profesores, que siempre estuvieron dispuestos a extender su mano con conocimientos, no sólo para resolver mi problema o duda, sino para señalar el camino por el cual uno mismo puede encontrar esas soluciones.

Y no menos importantes, mis amigos y amigas, aquellos con los que he pasado días inolvidables y en algunas ocasiones interminables, que me han ayudado a pasar tanto tragos amargos como felicidad pura, también esos con los que he pasado la noche más bella o la noche más oscura, esto tratando de resolver cuestiones personales o solo discutiendo sobre temas comunes. También aquellos que me han visto llorar, gritar, enojarme, odiar, sonreír, desvariar, caer, levantarme, amar, etc. A todos ustedes, gracias, por caminar conmigo en esta vida.

Resumen

En el presente trabajo de investigación se describe un estudio sobre sistemas lineales variantes en el tiempo. También se define la metodología de Bond Graph dirigida a este tipo de sistemas.

Se comienza por presentar la metodología de Bond Graph para sistemas lineales invariantes en el tiempo, y describir las características de este enfoque, enseguida se analiza la obtención del modelo matemático a través de la matriz de estructura de unión para el caso invariante en el tiempo.

Una vez hecho lo anterior se describe la metodología para el modelado de sistemas lineales variantes en el tiempo en Bond Graph y la obtención de la matriz de estructura de unión para la determinación del modelo matemático en espacio de estados.

También se estudia algunas definiciones y teoremas acerca de la estabilidad de los sistemas lineales variantes en el tiempo. El estudio está basado en el llamado método directo de Lyapunov, y a partir de este método se logra obtener lemas para la determinación de la estabilidad. Estos lemas están basados principalmente en el método de Bond Graph.

Se presentan varios ejemplos ilustrativos, tanto para comprender el modelado de sistemas lineales variantes en el tiempo en Bond Graph, así como también para definir la estabilidad interna de estos sistemas.

Palabras Clave: Bond Graph, Sistemas LTV, Modelo Matemático, Matriz de Estructura de Unión, Estabilidad.

Abstract

In this research work, the study of linear time-variant systems is described. Also, it will be defined the Bond Graph methodology for these systems.

The research begin by showing the methodology of Bond Graph for Linear Time-Invariant Systems, and explain the features of this approach, then the steps to obtain the mathematical model through Junction-Structure Matrix is analized.

When this is done, the methodology to model linear time-variant systems with Bond Graph methodology is described, and also the way to obtain the junction-structure matrix to determine the Mathematical Model in Space States.

Some definitions and theorems about stability for linear time-variant systems are also studied. This study is based on the called direct method of Lyapunov, and with this method is posible to obtain lemmas to determine stability. These lemmas are mainly based on the Bond Graph method.

Several illustrative examples are showing to explain and understand the modeling of linear time-variant systems on Bond Graph, as well as to define the internal stability of these systems.

Key words: Bond Graph, LTV Systems, Mathematical Model, Junction-Structure Matrix, Stability.

Índice general

Dedicatoria	III
Agradecimientos	IV
Resumen	V
Abstract	VII
Índice de figuras	XI
Índice de tablas	XIII
Lista de Abreviaturas y Símbolos	XIV
1. INTRODUCCIÓN	1
1.1. Introducción	1
1.2. Objetivo	7
1.3. Metodología	7
1.4. Justificación	7
1.5. Estado del Arte	8
1.5.1. Sistemas Lineales Variantes en el Tiempo (Sistemas LTV)	8
1.5.2. Sistemas Lineales Variantes en el Tiempo en Bond Graph	10
1.5.3. Estabilidad	11
1.5.4. Estabilidad en Bond Graph	13
1.6. Contribución	14
1.7. Estructura de la Tesis	14
2. ANTECEDENTES DE BOND GRAPH	17
2.1. Introducción	17
2.2. Bond Graph	18
2.3. Conceptos Básicos de Bond Graph	19
2.4. Elementos Básicos de Bond Graph	21
2.4.1. Elementos pasivos Puerto-1	21
2.4.2. Elementos Activos Puerto-1 (Fuentes)	24

2.4.3.	Elementos Ideales Puerto-2	25
2.4.4.	Detectores	27
2.4.5.	Elementos de Unión (Puertos-3)	27
2.5.	Causalidad	29
2.5.1.	Reglas de Asignación de Causalidad	31
2.6.	Procedimiento para el Modelado de Sistemas	34
2.6.1.	Sistema Eléctrico	35
2.6.2.	Sistema Mecánico	39
2.6.3.	Sistema Hidráulico	39
2.7.	Matriz de Estructura de Unión	40
2.7.1.	Vectores Clave	40
2.7.2.	Relaciones Constitutivas y Ecuación de Estado	41
2.7.3.	Ejemplo Ilustrativo	43
3.	SISTEMAS LTV Y SU MODELADO EN BOND GRAPH	49
3.1.	Introducción	49
3.2.	Modelado de Sistemas LTV en un Enfoque Tradicional	50
3.3.	Modelado de Sistemas LTV en BondGraph	58
3.3.1.	Elementos Básicos	58
3.3.2.	Causalidad para Sistemas LTV	60
3.3.3.	Matriz de Estructura unión para Sistemas LTV	60
3.4.	Ejemplos Ilustrativos para Fines de Estudio	68
4.	ANÁLISIS DE ESTABILIDAD DE SISTEMAS LTV	91
4.1.	Introducción	91
4.2.	Enfoque Tradicional	92
4.2.1.	Estabilidad Entrada-Salida (B.I.B.O.)	92
4.2.2.	Estabilidad Interna	94
4.2.3.	Criterio de Estabilidad de Lyapunov	97
4.3.	Enfoque en Bond Graph	99
4.3.1.	Sistemas en Bond Graph sin Causalidad Derivativa	99
4.3.2.	Sistemas en Bond Graph con Causalidad Derivativa	102
4.4.	Ejemplos Ilustrativos	106
5.	CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES	125
5.1.	Conclusiones	125
5.2.	Recomendaciones	126
	Bibliografía	127
	A. Publicaciones	133

Índice de figuras

1.1. Gráfico de selección de sistemas.	6
2.1. El Bond (enlace).	20
2.2. Representación de un Bond y las variables involucradas.	20
2.3. Representación del elemento R.	22
2.4. Representación del elemento C.	22
2.5. Representación del elemento I.	23
2.6. Tetraedro de estados.	24
2.7. a) Fuente de esfuerzo; b) Fuente de flujo.	24
2.8. a) Fuente Modulada de esfuerzo; b) Fuente Modulada de flujo	25
2.9. Representación del transformador en Bond Graph.	26
2.10. Representación en Bond Graph de un girador (GY).	26
2.11. Representación de los detectores de esfuerzo (der.) y flujo (izq.).	27
2.12. Elemento de Unión 0.	28
2.13. Elemento Unión 1.	29
2.14. Representación del intercambio de potencia.	30
2.15. Representación del trazo causal en un "bond".	30
2.16. Reglas de simplificación.	34
2.17. Circuito Eléctrico.	35
2.18. Denotando los nodos en el circuito eléctrico.	35
2.19. Colocando unión 0 para cada nodo del sistema.	36
2.20. Introducción de los elementos en conjunto con unión 1.	36
2.21. Unión entre elementos siguiendo la dirección de la potencia.	37
2.22. El nodo de referencia (tierra) es retirado.	37
2.23. Aplicación de las reglas de reducción.	37
2.24. Reducción del Bond Graph.	38
2.25. Representación de un sistema eléctrico en Bond Graph acausal.	38
2.26. Modelo en Bond Graph con causalidades asignadas.	39
2.27. Diagrama de bloques de la estructura unión y los vectores clave.	41
3.1. Circuito RLC con elementos variantes en el tiempo.	55
3.2. Diagrama de bloques de la estructura de unión, los vectores clave; tomando en cuenta los elementos variantes en el tiempo.	63

3.3. Bond Graph LTV con fines comparativos.	68
3.4. Respuesta de los Estados y valores obtenidos tras un segundo de simulación utilizando MATLAB.	71
3.5. Estados del sistema en SIMNON; a) Estado $x_1(t)$, b) Estado $x_2(t)$	71
3.6. Ejemplo 3.3 simulado en 20-SIM.	72
3.7. Simulación en 20-SIM.	72
3.8. Representación de un circuito RLC en Bond Graph.	73
3.9. Línea de Transmisión como Sistema LTV.	78
3.10. Bond Graph del sistema de una línea de transmisión.	78
3.11. Sistema compuesto de los dominios eléctrico y mecánico.	82
3.12. Bond Graph de un sistema que tiene causalidad derivativa.	83
4.1. Circuito RLC en Bond Graph.	106
4.2. Simulación de circuito RLC; a) Voltaje en la resistencia, b) Estado $\rho_4(t)$, c) Estado $q_3(t)$, d) Valor de la inductancia $L(t)$	108
4.3. Motor de C.D. con la relación del girador variante en el tiempo.	109
4.4. Bond Graph del Motor de C.D.	109
4.5. Motor de C.D. con relación $\eta(t)$ de forma senoidal	111
4.6. Respuesta de los estados del sistema y la relación del girador. a) Estado $\rho_2(t)$, b) Estado $\rho_6(t)$, c) Valor de la relación $\eta(t)$	112
4.7. Motor de C.D. con relación de girador variante en el tiempo (Diente de Sierra). 113	
4.8. Respuesta de los estados a) $p_2(t)$ y b) $p_6(t)$, y c) El valor de la relación $\eta(t)$. 113	
4.9. Bond Graph con elementos en <i>Causalidad Derivativa</i>	114
4.10. Respuesta de los estados a) $\rho_e(V - s)$, b) $\rho_e(N \cdot m \cdot s)$, c) $\rho_e(N \cdot m \cdot s)$ y las señales de d) $\eta(t)$ y e) $a(t)$	117
4.11. Sistema Eléctrico - Mecánico.	117
4.12. Bond Graph del sistema eléctrico-mecánico.	118
4.13. Señal que define la relación $\eta(t)$	122
4.14. Funciones de los elementos variantes en el tiempo; a) $L_b(H)$, b) $L_a(H)$, c) $J_m(kg \cdot m^2)$, d) $J_e(kg \cdot m^2)$	122
4.15. Respuesta de los estados despues de 0.5 segundos. a) Estado $\rho_4(V - s)$, b) Estado $\rho_8(V - s)$, c) Estado $\rho_{12}(N - m - s)$ y d) Estado $\rho_{15}(N - m - s)$. 123	

Índice de tablas

2.1. Variables generalizadas para diferentes dominios físicos.	21
2.2. Ecuaciones para elemento R.	22
2.3. Ecuaciones para elemento C.	23
2.4. Ecuaciones para elemento I.	24
2.5. Tabla de asignación de causalidades (Parte 1).	32
2.6. Tabla de asignación de causalidades (Parte 2).	33
3.1. Ecuaciones para los elementos R, C e I para sistemas LTV.	58
3.2. Asignación de causalidades para elementos LTV (Parte 1).	61
3.3. Asignación de causalidades para elementos LTV (Parte 2).	62

Lista de Abreviaturas y Símbolos

LTV	Lineal Time-Variant (Lineal Variante en el Tiempo)
LTI	Lineal Time-Invariant (Lineal Invariante en el Tiempo)
$f(t)$	Variable de Flujo
$e(t)$	Variable de Esfuerzo
$p(t)$	Variable de Momento
$q(t)$	Variable de Desplazamiento
$-R$	Elemento R
$-C$	Elemento C
$-I$	Elemento I
TF	Elemento Transformador
GY	Elemento Girador
$-0-$	Unión Cero
$-1-$	Unión Uno
$S_e \rightarrow$	Fuente de Esfuerzo
$S_f \rightarrow$	Fuente de Flujo
$u(t)$	Vector de Entrada del Sistema
$y(t)$	Vector de Salida del Sistema
$x(t)$	Vector de Estados
$A(t), B(t), C(t), D(t)$	Matrices de Estado
$\Phi(t, \tau)$	Matriz de Transición
BGI	Bond Graph Integral
BGD	Bond Graph Derivativo
$S(t)$	Matriz de Estructura Unión
V	Volts, Unidad Física de Potencial Eléctrico
A	Amper, Unidad Física de Corriente Eléctrica
Ω	Ohm, Unidad Física de Resistencia Eléctrica
H	Henrys, Unidad Física de Inductancia Eléctrica
m	Metros, Unidad Física de Distancia
s	Segundos, Unidad Física de Tiempo
Kgs	Kilogramos, Unidad Física de Peso

Capítulo 1

INTRODUCCIÓN

1.1. Introducción

Antes de presentar la clasificación de los sistemas que se trataran en el presente trabajo se comienza dando una definición de “sistema”.

Desafortunadamente, la palabra “sistema” tienen muchos significados, algunos de los cuales no tienen lugar en una discusión científica. Al excluir este tipo de significados se obtiene la siguiente definición:

“Un sistema es un conjunto de objetos, junto con las relaciones entre los objetos y entre sus atributos”. [Arthur D. Hall, 1968]

El estudio y diseño de sistemas físicos puede ser llevado a cabo usando métodos empíricos. Los métodos empíricos pueden ser inviables si los sistemas físicos son complejos, extensos o bastante peligrosos como para realizar experimentos.

En estos casos los métodos analíticos pueden ser indispensables. El estudio analítico de sistemas físicos consiste de cuatro partes: el modelado, el desarrollo de la descripción matemática, el análisis y el diseño.

Los modelos son la simplificación de la realidad. La distinción entre sistemas físicos y los modelos, es básica en la ingeniería. Un ejemplo de modelo es un inductor representado por una inductancia constante. Realmente, la inductancia puede variar dependiendo de la corriente que fluye a través del inductor. Pero estas variaciones pueden ser despreciables

para un rango de valores del estudio analítico.

El modelado es un problema importante, ya que cuando un modelo matemático puede llevarse a cabo correctamente y con confianza, el diseño de un sistema puede tener un rendimiento óptimo, con una reducida necesidad por la experimentación a prueba y error.

El uso de las herramientas matemáticas para resolver problemas se ha hecho muy común en tiempos recientes, una fase crucial es la de traducir el problema de manera correcta desde el mundo físico. La validez de la solución dependerá de la descripción matemática propuesta que modele el sistema real. A la descripción matemática se le llama “modelo matemático”.

A continuación se presentará una clasificación de los sistemas con el objeto de señalar el tipo de sistemas que son de interés para el presente trabajo.

Se comienza la clasificación basándose en el principio de causalidad, el cual establece que todo efecto es siempre resultado de una causa y no al revés, es decir, una causa no puede ser consecuencia de un efecto.

En otras palabras, un sistema es **causal o no-anticipativo**, si estando en reposo no responde antes de que una entrada sea aplicada, o si su salida actual depende de salidas pasadas y su entrada actual, pero no de las entradas o salidas futuras. Un sistema **no-causal** puede predecir o anticipar lo que se le aplicará en un futuro, esto quiere decir que su salida actual dependerá de una entrada futura. Ningún sistema físico tiene esta capacidad. En esta tesis se abordarán los sistemas causales.

De acuerdo a las características dinámicas de los modelos matemáticos existen dos tipos de sistemas:

a) **Dinámicos**

En un sistema dinámico hay almacenamiento de materia, energía e información. Los sistemas dinámicos sirven para entender cómo evolucionan los procesos y son llamados también sistemas con memoria, estos sistemas son representados mediante ecuaciones diferenciales o ecuaciones de diferencias.

b) Estáticos

En un sistema físico estático se dice que la salida producida en un instante determinado depende en forma única de la entrada aplicada en ese mismo instante. Éstos son también conocidos como sistemas algebraicos o sin memoria, y son representados mediante ecuaciones algebraicas.

Se puede decir que los sistemas dinámicos son un área joven de las matemáticas, aunque se remontan a Newton con sus estudios de Mecánica Celeste, y a Henri Poincare, quien inició el estudio cualitativo de las ecuaciones diferenciales. Sin embargo, fue hace apenas unos 40 años que los sistemas dinámicos se establecieron como un área propiamente dicha, gracias al trabajo destacado de matemáticos e ingenieros como: S. Smale, V. Arnold, Lyapunov, etc.

Tomando en cuenta las características de correspondencia entre las entradas y salidas los sistemas pueden clasificarse como:

a) Determinísticos

Estos son en los que la salida actual del sistema está determinada sólo por el valor de la entrada, para dos valores distintos de la entrada, el sistema producirá dos valores de salida distintos.

b) Estocásticos o Sistemas Aleatorios

Son aquellos sistemas donde no es predecible su comportamiento, esto quiere decir, que para una entrada única pueden existir varias salidas, cada una de ellas con una determinada probabilidad de existencia. Estos también son representados por ecuaciones diferenciales, sin embargo, estas ecuaciones incluyen funciones aleatorias y probabilísticas.

En este trabajo sólo se estudiarán los sistemas determinísticos. Éstos a su vez pueden ser clasificados en base a características de sus modelos matemáticos, como sigue:

a) Parámetros Concentrados

Son aquellos en el que sus características físicas se suponen concentradas en núcleos, independientes de cualquier distribución espacial.

b) Parámetros Distribuidos

Son aquellos en el que se tiene en cuenta la distribución espacial de las características físicas, los cuerpos son elásticos y las temperaturas no son uniformes.

Los sistemas que se tratan en el presente trabajo son sistemas con parámetros concentrados. La división correspondiente a éstos sistemas es en base al *principio de superposición*, el cual establece que la salida producida por un sistema el cual es alimentado por la suma de varias entradas, es igual a la suma de las salidas que produce el sistema cuando las entradas son aplicadas individualmente.

- a) **Los sistemas lineales**, son aquellos regidos bajo el principio de superposición, estos son representados por ecuaciones diferenciales o de diferencias ordinarias lineales.
- b) **Los sistemas no lineales** no cumplen con el principio de superposición. Estos son representados por ecuaciones diferenciales o de diferencias ordinarias no lineales.

Los sistemas también se pueden clasificar considerando las características de continuidad de la variable independiente (tiempo) como:

- a) **Sistemas Continuos**, los cuales contienen variables que son dependientes del tiempo continuo (El tiempo puede tomar todos los valores del conjunto de *números reales*), y son representados por *Ecuaciones diferenciales*.
- b) **Sistemas Discretos**, los cuales contienen variables que son funciones dependientes del tiempo discreto (El tiempo sólo puede tomar valores del conjunto de los *números naturales*), y son representados por *Ecuaciones en Diferencias*.

Tomando en cuenta los sistemas continuos para la investigación, y considerando las características del tiempo en cada uno de los parámetros, se obtienen:

a) **Sistemas Invariantes con el Tiempo**

La única función del tiempo que aparece en su modelo matemático es la variable dependiente, se representan con *Ecuaciones Diferenciales con Coeficientes constantes*.

b) **Sistemas Variantes con el Tiempo**

Además de la variable dependiente, sus parámetros presentan características dinámicas; es decir, son funciones del tiempo, y se representan con *Ecuaciones Diferenciales con Coeficientes Variables*.

En la figura 1.1 se muestra en forma gráfica el tipo de sistemas que se tratarán en este trabajo, que son los sistemas lineales variantes en el tiempo, continuos y con parámetros concentrados.

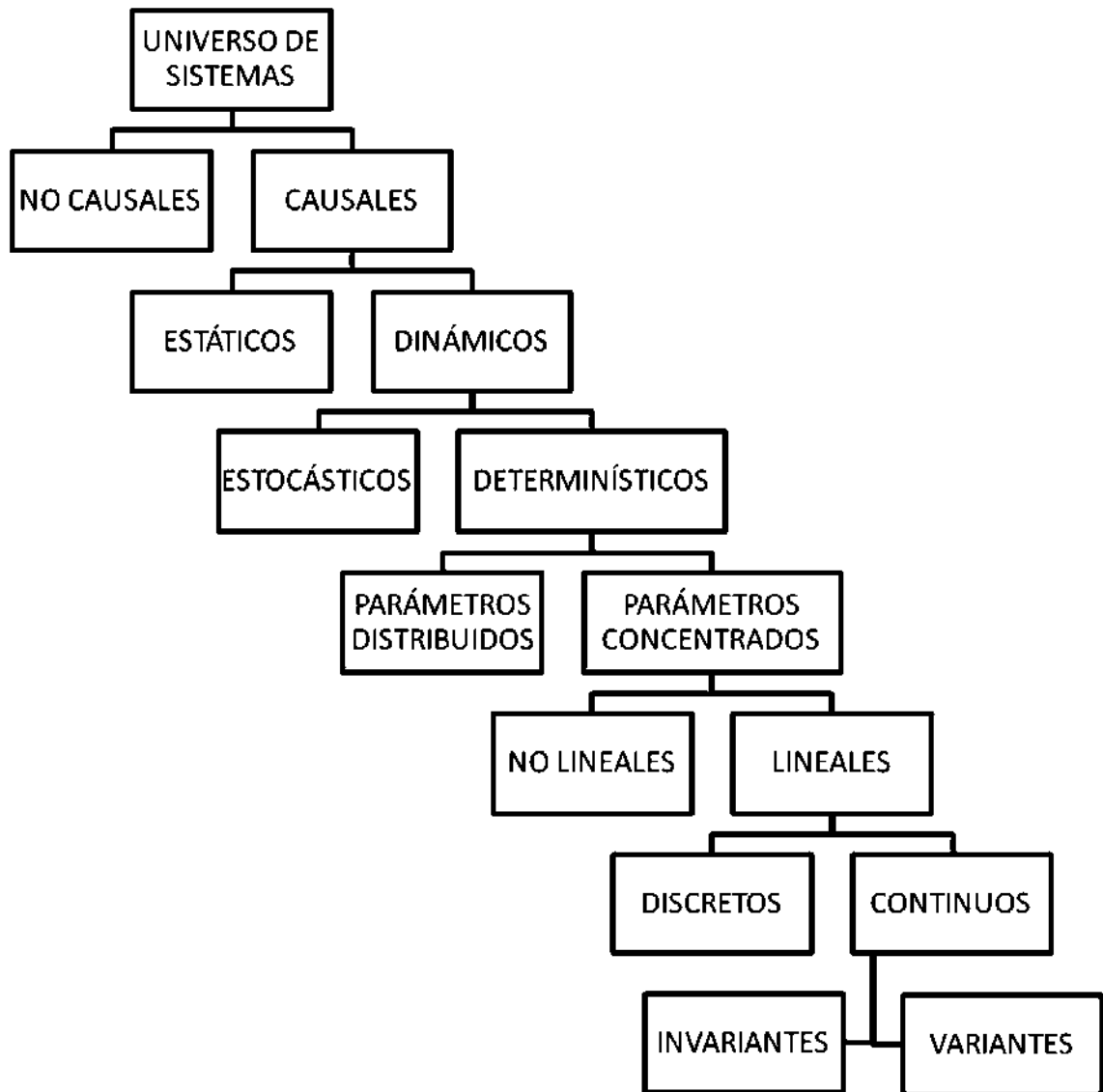


Figura 1.1: Gráfico de selección de sistemas.

1.2. Objetivo

El objetivo de la presente tesis es obtener herramientas necesarias para realizar el modelado y el análisis de Sistemas Lineales Variantes en el Tiempo (LTV) basado en la metodología de Bond Graph. Se toman en cuenta aspectos importantes como lo es la obtención de la Matriz de Estructura de Unión para obtener el Modelo en Ecuaciones de Estado. Así como la búsqueda de condiciones para la estabilidad de sistemas LTV mediante el segundo método de Lyapunov.

1.3. Metodología

Se comienza con una investigación acerca de los sistemas LTV, con el objetivo de obtener las bases necesarias sobre las características de estos sistemas, las áreas de aplicación y trabajos previos sobre ellos.

Después, se revizarán los antecedentes de Bond Graph para tener conocimiento de los trabajos realizados sobre estos sistemas.

Posteriormente, se revizará la metodología para la obtención de la estructura de unión esto para el caso de sistemas LTI y enseguida se extenderá para sistemas LTV.

A continuación se llevará a cabo una investigación sobre estabilidad de sistemas LTV, posteriormente sobre estabilidad desde el punto de vista de Lyapunov, para finalmente obtener una conclusión a cerca de la *Estabilidad para Sistemas LTV modelados en Bond Graph*.

1.4. Justificación

El modelado de Bond Graph es capaz de tomar un sistemas el cual contenga subsistemas en diferentes dominios físicos (eléctrico, mecánico, hidráulico, térmico, etc.) y modelarlo en un solo marco de referencia. También proporciona algunas características a partir de la construcción de la matriz de estructura de unión.

Por su parte, la teoría de los sistemas LTV puede llegar a ser extremadamente difícil, ya que los métodos para un análisis preciso de estos sistemas son pocos y suelen ser de gran dificultad en el momento de su aplicación o también suelen estar limitados a una clase pequeña de sistemas [D'Angelo Henry, 1970].

Tomando en cuenta lo anterior, se propone una metodología para este tipo de sistemas basada en el Modelado de Bond Graph, esto con la finalidad de facilitar el análisis de sistemas LTV.

1.5. Estado del Arte

1.5.1. Sistemas Lineales Variantes en el Tiempo (Sistemas LTV)

Los matemáticos George William Hill y Achille Marie Gaston Floquet realizaron estudios sobre sistemas LVT. George W. Hill trabajo con ecuaciones diferenciales lineales homogéneas con coeficientes periódicos, su trabajo se concreto en la **Ecuación de Hill**, la teoría de la ecuación de Hill trata el problema de la existencia de soluciones periódicas en éste tipo de ecuaciones. Por otra parte, Gaston Floquet trabajo con ecuaciones diferenciales lineales periódicas y creo la **Teoría de Floquet** de la que parten varios teoremas para el análisis de éste tipo de ecuaciones [Wilhelm Magnus, 1966].

Henry D'Angelo llevo a cabo un trabajo con el firme propósito de lograr el tratamiento conjunto de las principales técnicas para el análisis y la síntesis de Sistemas LTV. Este fue el primer trabajo exhaustivo en el análisis y síntesis de Sistemas LTV. La teoría está desarrollada esencialmente desde cero para sistemas generales multivariables usando variables de estado. Hasta el momento de la redacción de su trabajo la teoría de Sistemas LTV había estado dispersa por toda la literatura técnica [D'Angelo Henry, 1970].

Noboru Sugie realizó un trabajo el cual muestra una fórmula general para reducir los valores iniciales de sistemas lineales variables en el tiempo a una función forzada equivalente, la cual es derivada utilizando la representación por diagrama de bloques del sistema [Sugie Noboru, 1970].

Shahriar S, Leonard M. y Paul M. definieron una realización “uniformemente balanceada” para Sistemas LTV, la cual es caracterizada por el hecho de que sus Gramianos de Controlabilidad y Observabilidad son iguales y diagonales. Hicieron notar que los subsistemas de la realización balanceada pueden ser tomados como un modelo reducido, dicho modelo es examinado desde el punto de vista de Estabilidad, Controlabilidad y Observabilidad en su investigación [Shokoohi Shahriar, 1983].

Lian Xie en conjunto con otros dos investigadores llevaron a cabo un trabajo para definir estabilidad robusta en Sistemas LTV a partir del uso de la función cuadrática de Lyapunov definida por partes. Esto usando el llamado procedimiento S y el método de una variable especial de reducción y proporcionando condiciones numéricamente eficientes para la estabilidad robusta asintótica de los Sistemas LTV [Lian Xie, 1995].

En esta sección se mencionan algunos de los trabajos que se han llevado a cabo sobre estos sistemas, comenzaremos con la mención de la teoría de Sistemas LTV, y las relaciones existentes entre ésta y el Algebra lineal, estas pueden ser utilizadas para resolver problemas en algebra lineal [Van Der Veen A.J., 1998].

Geir E Dullerud y Sanjay Lall presentaron un artículo en el cual se diseñan técnicas novedosas para el análisis de Sistemas LTV. Esto los llevó hasta un tratamiento formalmente simple de problemas de control robusto para Sistemas LTV, permitiendo que se usarán métodos restringidos sólo para el uso sobre Sistemas Linealmente Invariantes en el Tiempo [Dullerud E. Geir, 1999].

Henri B. y Bogdan M. llevan a cabo el estudio de las nociones de polos y ceros en el infinito de Sistemas Continuos Lineales Variables en el Tiempo, basándolo en la noción llamada "*Newborn System*", la investigación llevada a cabo por ellos es intrínseca y unifica las definiciones ya antes mencionadas en la literatura para el caso Variantes en el Tiempo [Henri Bourlés, 1999].

F.L.Neerhoff y P. Van Ver Kloet abordaron los Sistemas Generales Lineales Escalares Variantes en el Tiempo. Presentaron las realizaciones canónicas con integradores, multiplicadores y sumadores. Mostraron que las configuraciones para sistemas constantes pueden ser generalizadas para el contexto de variante en el tiempo, esto, reemplazando los convencionales eigenvalores por los eigenvalores dinámicos [Neerhoff F. L., 2002.].

James R. Forbes y Christopher J. Damaren llevaron a cabo una investigación en la que consideraban Sistemas LTV. Abordando varios teoremas los cuales dependen de las matrices en espacio de estados del sistema, se puede identificar cuando un Sistema LTV es puramente pasivo, cuando cuenta con entradas y salidas estrictamente pasivas, o la entrada de estado es estrictamente pasivo la cual es una noción no convencional de pasividad que ellos mismos definen. Dos de los teoremas son parecidos al Lema de Kalman-Yakubovich-Popov. A través de su investigación se muestra que tomando en cuenta una retroalimentación negativa entre una entrada de estado y una salida estrictamente pasiva lineal variante en el tiempo son globalmente asintóticamente estables [R. Forbes James, 2010].

1.5.2. Sistemas Lineales Variantes en el Tiempo en Bond Graph

En 2005, Achir A. y Sueur C. llevaron a cabo un trabajo que abordaba modelos no lineales los cuales eran reescritos como Modelos Variacionales usando diferenciales de Kahler. Estos nuevos modelos son Modelos Lineales Variantes en el Tiempo, así, los modelos Bond Graph no lineales se convierten en Bond Graph Lineales Variantes en el Tiempo y ellos mismos propusieron algunos procedimientos gráficos [Ali Achir, 2005].

El estudio de la estructura infinita de Sistemas LTV modelados en Bond Graph fue propuesto por Andaloussi C., Chalh Z., y Sueur C. Esta investigación propone reglas gráficas sobre un nuevo modelo llamado Anillo Bond Graph. En el artículo es presentado el estudio aplicado en un circuito de un Tiristor, modelo TCSC (Thyristor Controlled Switched Capacitor) usado en electrónica de potencia. [Chafik Andaloussi, 2006.]

En el año 2006, Christophe Sueur y Stefan Lichiardopol llevaron a cabo artícu-

los relacionados con el modelado de Bond Graph. Primeramente, teniendo como objetivo la solución del problema de desacoplo entrada-salida en modelos en Bond Graph Lineales Variantes en el Tiempo, esto lográndose al proponer un procedimiento gráfico para el análisis del modelo y así determinar las matrices de desacoplo [Stefan Lichiardopol, 2006.]. Este mismo problema es abordado con la diferencia de que los modelos estudiados son modelos en Bond Graph no Lineales, el problema es resuelto mediante el uso de los llamados modelos Bond Graph Variacionales [Stefan Lichiardopol, 2006.].

En 2011, Christophe Sueur llevó a cabo la investigación en la cual muestra como el enfoque algebraico puede ser importante para la extensión de procedimientos gráficos clásicos desarrollados en modelos de Bond Graph Invariantes en el Tiempo, esto con el fin de poder solucionar problemas clásicos. La extensión antes mencionada es dirigida a Modelos en Bond Graph Lineales Variantes en el Tiempo [Christophe Sueur, 2011.].

En 2012 Dapeng Yang llevó a cabo un estudio de observadores de entrada y estado para modelos lineales en Bond Graph y prestando especial atención al caso de ceros invariantes los cuales son de importancia para la propiedad de estabilidad en un sistema. Llevando a cabo un ejemplo sobre un sistema con parámetros variantes en el tiempo. Uno de los resultados obtenidos fue el mostrar la importancia del enfoque algebraico para el estudio de ceros invariantes en el caso lineal variante en el tiempo [Dapeng Yang, 2012].

1.5.3. Estabilidad

El concepto de estabilidad juega un papel importante en el análisis y diseño de los sistemas, esto debido a que se aborda la cuestión de lo que sucede con la respuesta de estos sistemas conforme el tiempo va en aumento. Esta respuesta está íntimamente ligada con la estabilidad del sistema.

Los sistemas son diseñados para realizar tareas, si estos no son estables, los sistemas pueden dañarse, saturarse o hasta desintegrarse cuando una entrada, sin importar que tan pequeña, es aplicada. Lo anterior fue mencionado por Chi-Tsong Chen en su libro donde

también se hace mención de la respuesta de Estado-Cero y la respuesta de Entrada-Cero. Existen diferentes definiciones de estabilidad, por ejemplo, la estabilidad Entrada-Acotada Salida-Acotada, por sus siglas en inglés BIBO (Bounded-Input Bounded-output), esta es para la respuesta de estado- cero, también estabilidad Marginal y Asintótica para la respuesta de entrada -cero [Chi-Tsong Chen, 1999].

Wilson J. Rugh hizo énfasis en la extensa literatura existente sobre la teoría de estabilidad, también obsevo como la terminología usada no está completamente generalizada y por lo mismo hay que prestar atención a las definiciones cuando se consultan diferentes fuentes.

La estabilidad interna trata de las propiedades de acotación y comportamiento asintótico de las soluciones de las ecuaciones de estado lineales de entrada-cero.

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) \quad ; \quad x(t_0) = x_0 \quad ; \quad u(t) = 0 \quad (1.1)$$

Si bien los límites en las soluciones podrían ser de interés para t_0 y x_0 fijas, Wilson J. Rugh se enfoca en las propiedades de acotación que se mantienen independientemente de la elección de t_0 ó x_0 .

Se dice que es natural comenzar por la caracterización de la estabilidad de la ecuación de estado lineal (1.1) en términos de las cotas en la matriz de transición $\Phi(t, \tau)$ para $A(t)$. Esto conduce a una ya conocida condición de valores propios cuando $A(t)$ es constante, pero no proporciona una prueba de estabilidad útil para **sistemas variantes en el tiempo** a causa de la dificultad de calcular $\Phi(t, \tau)$ [Wilson J. Rugh, 1996.].

Tomando en cuenta lo anterior podemos mencionar el trabajo hecho por Henry D'Angelo, en el cual menciona que para entender los problemas asociados con determinar si un sistema LTV es estable o no, se logra mejor mediante la revisión de algunos de los conceptos de estabilidad de sistemas LTI, prestando atención a posibles ambigüedades en las definiciones. También se menciona que los conceptos de estabilidad y resonancia suelen ser confundidos. Esto por la posibilidad de relacionarlos, debido a que si un sistema LTI no es resonante implica que el sistema es estable [D'Angelo Henry, 1970].

Henry D'Angelo abordó temas tales como Sistemas Resonantes, Estabilidad Relativa, Estabilidad a Corto-Tiempo, y Criterio de Estabilidad en el Dominio de la Frecuencia, cabe mencionar que todos fueron dirigidos a sistemas LTV.

1.5.4. Estabilidad en Bond Graph

La gran mayoría de los documentos y antecedentes existentes del análisis de estabilidad con un enfoque en Bond Graph, son en su mayoría dirigidas hacia sistemas LTI y la metodología de Bond Graph es usada para obtener el modelo matemático y a partir de éste realizan el análisis de la estabilidad de forma clásica, algunos de los documentos que no caen dentro de esta descripción son mencionados a continuación.

El profesor Sergio Junco, utiliza la aplicación inmediata sobre Bond Graph del segundo método de Lyapunov para sistemas lineales invariantes en el tiempo. La clave del método es seleccionar una función candidata de Lyapunov a partir de los elementos almacenadores de energía del sistema en Bond Graph y esta puede ser evaluada directamente en Bond Graph, sin necesidad de usar ecuaciones de estado [Sergio Junco, 1992.], [Sergio Junco, 2001.].

El prof. Junco realizó también estudios sobre la estabilidad de sistemas no lineales invariantes en el tiempo [Sergio Junco, 1993.]. Este estudio de estabilidad también fue dirigido a una cierta clase de *Bond Graph conmutados* los cuales son un modelado de sistemas físicos conmutados, éste estudio de estabilidad es hecho con herramientas tales como las de Lyapunov aplicadas directamente en el dominio de Bond Graph [Sergio Junco, 2008.].

Otro investigador que ha trabajado con el estudio de la estabilidad es Christophe Sueur que realizó un estudio sobre los problemas clásicos de control, esto con la propiedad de estabilidad sobre modelos de Bond Graph, con un enfoque algebraico. Al final del trabajo se explica la posibilidad de dirigir el estudio a sistemas LTV. Dos puntos clave del estudio realizado por Christophe son el concepto de dualidad y el análisis estructural [Christophe Sueur, 2011].

1.6. Contribución

Con esta investigación se obtienen y demuestran las herramientas necesarias para llevar a cabo el modelado y el análisis de Sistemas LTV, todo esto, a través de la metodología de Bond Graph.

Se contribuye con la obtención de la Matriz de Estructura de Unión para Sistemas LTV para obtener el Modelo Matemático (Ecuaciones en Espacio de Estados), así se podrá realizar un análisis de que tan adyacente es el Modelo Matemático obtenido en Bond Graph con respecto al obtenido de forma directa.

Posteriormente, se investiga sobre la definición de estabilidad de Sistemas LTV mediante el segundo método de Lyapunov.

Una vez determinada la metodología para lograr obtener la Matriz de Estructura de Unión de Sistemas LTV se lleva a cabo la creación de un método para definir las condiciones para la estabilidad de los mismos, todo esto en Bond Graph.

1.7. Estructura de la Tesis

En el primer capítulo se describen los antecedentes históricos relevantes para esta investigación, comenzando con la descripción de donde se encuentran los Sistemas LTV en el Universo de Sistemas, posteriormente se estudia la parte de los Sistemas LTV para darle lugar enseguida a estos sistemas en la metodología de Bond Graph, enseguida se desarrolla un breve antecedente de la estabilidad de estos sistemas, para finalmente hacer notar la forma de trabajo y los objetivos que se pretenden alcanzar.

En el capítulo dos, los antecedentes de la metodología son abordados y descritos de forma ordenada respecto al nivel necesidad que requiere cada parte de esta metodología y así crear un buen modelo de un sistema a analizar, también añadiendo la parte que aborda la obtención del modelo matemático, mediante la matriz de estructura de unión, ya conocida

en la teoría de Bond Graph la cual resulta fundamental para relacionar dos metodologías bastante diferentes.

Los sistemas que se pretenden estudiar serán descritos en el tercer capítulo desde una perspectiva clásica y mostrar la dificultad que conlleva al realizar un análisis de estos sistemas. Posteriormente se tratarán estos sistemas desde la perspectiva de la metodología de Bond Graph, donde también se describe la obtención de la matriz de estructura unión específicamente para este tipo de sistemas, como se aplica a estos y la utilidad que tiene al obtener el modelo matemático de los sistemas LTV a través de esta.

La estabilidad, su estudio previo y algunos antecedentes de su obtención en los sistemas LTV se proponen en el cuarto capítulo, donde también se presenta la estabilidad desde un enfoque de Bond Graph y se comprueba a través de algunos casos de estudio la validez de este tipo de método en la obtención de estabilidad, el cuál también es novedoso.

Finalmente, en el último capítulo se describe el alcance de cada uno de los objetivos y si estos fueron cumplidos y de no ser así describir el avance logrado, también el camino a seguir para terminarlos. También se mencionan algunas ideas que podrían concretarse en trabajos futuros.

Capítulo 2

ANTECEDENTES DE BOND GRAPH

2.1. Introducción

La ciencia y sus métodos proveen respuestas a las interrogantes humanas sobre los sistemas y sus propiedades. Los métodos científicos se basan en la experimentación, que consiste en la realización de ensayos sobre el sistema, en la observación de las reacciones del mismo y en la obtención de leyes dado su comportamiento, expresadas por lo general mediante el lenguaje matemático.

El método experimental no siempre es viable ya que en algunos casos existen factores que limitan o impiden su aplicación. Por ejemplo: costos, riesgos, experimento irrealizable (por inexistencia del sistema o incapacidad humana de experimentar). Una alternativa a la experimentación directa sobre los sistemas es la experimentación sobre su modelo.

2.2. Bond Graph

Bond Graph fue creado por, Henry M. Paynter (1923-2002), profesor del MIT y UT Austin, con la introducción de los bonds en 1959, concluyó en alrededor de una década la mayoría de los conceptos básicos y así los unió en un marco conceptual y con su correspondiente notación.

Esta herramienta fue desarrollada más ampliamente por sus estudiantes, en particular, Dean C. Karnopp, profesor de la UC Davis, y Ronald C. Rosenberg, después profesor de la Michigan State University, que también diseñó la herramienta del primer equipo EN-PORT, el cual apoyaba la simulación de modelos de Bond Graph.

En los años setenta Jan J. van Dixhoorn, profesor de la Universidad de Twente y Jean U. Thoma, profesor de la Universidad de Waterloo, Ontario, fueron los primeros en introducir los Bond Graph en Europa. Estos pioneros en este campo y sus estudiantes han estado difundiendo estas ideas en todo el mundo.

Jan van Dixhoorn presentó un primer prototipo de diagramas de bloques del software basado en TUTSIM. Esto sentó las bases para el desarrollo del software 20-SIM en la Universidad de Twente. También, inició la investigación en modelos más complejos los sistemas físicos, en particular, los sistemas de termo-fluidos.

En las últimas dos décadas, los Bond graphs han sido un tema de investigación o están siendo utilizados en la investigación en muchas universidades de todo el mundo y son parte de los planes de estudio en un número creciente de universidades.

El Prof. H. M. Paynter dió la idea revolucionaria de retratar a los sistemas en términos de los *bonds* de alimentación, que conectan los elementos del sistema físico a las estructuras de cruce. Este intercambio de ser capaces de representar un sistema se llama Bond Graph.

Mediante este enfoque, un sistema físico puede ser representado por los símbolos y las líneas de identificación de las rutas de flujo de potencia. Los elementos de parámetros globalizados de la resistencia, la capacitancia, e inductancia, la conservación de energía por los lazos y las uniones están interconectados de tal manera que resulta en una estructura de red.

Las principales características de Bond Graph son las siguientes:

- Es un lenguaje para la representación de la *transferencia de potencia* dentro de un sistema.
- Es *gráfico*.
- Se basa en el concepto de *analogía*.
- Supone los *parámetros localizados* en el sistema.
- Aparecen de forma explícita las *relaciones de causa y efecto* (causalidad).
- Permite construir de manera sistemática los modelos matemáticos “clásicos”.

2.3. Conceptos Básicos de Bond Graph

La metodología de Bond Graph se basa en el análisis y la caracterización de las transferencias de potencia que ocurren en el sistema [Geneviève Dauphin-Tanguy, 2000.], así como del principio de causa y efecto o causalidad.

En un sistema físico cualquiera, la energía puede almacenarse, disiparse o intercambiarse. Cuando posteriormente se unen dos sistemas, aparece una transferencia de potencia entre ellos, ésta se representa por una semiflecha que corresponde al “enlace” en Bond Graph, un ejemplo de esta semiflecha se encuentra en la figura 2.1.

El enlace lleva dos variables puestas en juego para el cálculo de la potencia, la dirección de la semiflecha corresponde a la dirección positiva de la potencia y a una de estas variables.

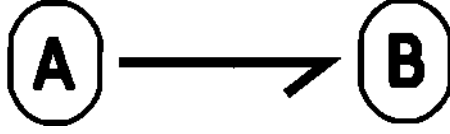


Figura 2.1: El Bond (enlace).

Por otra parte, la potencia intercambiada ($P(t)$) se expresa como el producto de dos variables complementarias. Independientemente del dominio, estas variables son llamadas “variables generalizadas” de esfuerzo ($e(t)$) y de flujo ($f(t)$), así obtenemos la ecuación (2.1):

$$P(t) = e(t)f(t) \quad (2.1)$$

Siendo su representación la mostrada a continuación:

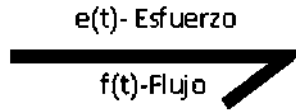


Figura 2.2: Representación de un Bond y las variables involucradas.

Otra variable involucrada es el cambio de energía el cual es calculada por la integración de la potencia ($P(t)$) con respecto del tiempo, así:

$$\Delta E = \int_0^t P(\tau) d\tau = \int_0^t e(\tau) f(\tau) d\tau + E(0) \quad (2.2)$$

De modo que las variables de energía se pueden definir a través de las siguientes integrales:

$$p(t) = \int_0^t e(\tau) d\tau + p(0) \quad (2.3)$$

$$q(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau + q(0) \quad (2.4)$$

Siendo $p(t)$ el momento generalizado y $q(t)$ el desplazamiento generalizado.

Como se ha comentado anteriormente, las variables, esfuerzo y flujo tienen un significado diferente en función del dominio físico al que pertenezca el sistema en estudio.

En la tabla 2.1, puede verse el significado de estas variables en diferentes dominios de energía.

Tabla 2.1: Variables generalizadas para diferentes dominios físicos.

Dominio Físico	Esfuerzo (e)	Flujo (f)	Momento (p)	Desplazamiento (q)
Mécanica de Traslación	Fuerza $f(N)$	Velocidad $V(m/s)$	Momento Lineal $P(N \cdot s)$	Desplazamiento $X(m)$
Mecánica de Rotación	Par $M(N \cdot m)$	Velocidad Angular $w(rad \cdot s)$	Momento Angular $H(N \cdot m \cdot s)$	Angulo $\theta(rad)$
Electricidad	Voltaje $e(V)$	Corriente $i(Amp)$	Flujo Magnetico $F(V \cdot s)$	Carga $Q(c)$
Hidráulica	Presión $p(N/m^2)$	Caudal $Q(m^3/s)$	Momento $P(N \cdot s/m^2)$	Volumen $v(m^3)$
Térmico	Temperatura $T(K)$	Flujo de Entropía $q(w)$		Entropía (Q)

2.4. Elementos Básicos de Bond Graph

2.4.1. Elementos pasivos Puerto-1

Estos elementos son llamados pasivos ya que pueden convertir la energía con la que se alimentan, ya sea disipada en forma de calor o almacenada. Se les llama 1-puerto, ya que se caracterizan por una ley escalar y reciben energía a través de un único enlace. Debido a que la energía es suministrada a los elementos, la semiflecha es orientada hacia el elemento.

Elemento R

Éste es utilizado para modelar al fenómeno físico que relacione la variable de esfuerzo a la variable de flujo del dominio físico que se esté considerando. El elemento R

transforma la potencia suministrada a él en energía térmica disipada y su representación general se muestra en la figura 2.3.



Figura 2.3: Representación del elemento R.

A continuación se muestran las ecuaciones y las variables que son utilizadas para este elemento, esto para algunos de los dominios mencionados en la tabla 2.1.

Tabla 2.2: Ecuaciones para elemento R.

Dominio Físico	Ecuación lineal
Eléctrico	$v(t) = i(t) \cdot R$
Mecánico traslacional	$F(t) = b \cdot V(t)$

Elemento C

El elemento C se utiliza para modelar al fenómeno físico que relacione la variable de esfuerzo con la variable de desplazamiento del dominio físico que se esté considerando. El elemento C transforma la potencia suministrada a él en energía almacenada, y su representación se observa en la figura 2.4.

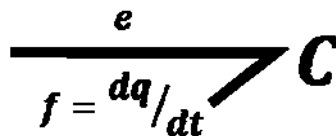


Figura 2.4: Representación del elemento C.

En la tabla 2.3 se muestran se muestran las ecuaciones y las variables que son utilizadas para el elemento C, esto para algunos de los dominios.

Tabla 2.3: Ecuaciones para elemento C.

Dominio Físico	Ecuación lineal
Eléctrico	$v(t) = \frac{1}{C} \int i(t) dt$
Mecánico traslacional	$F(t) = k \int V(t) dt$

Elemento I

El elemento I se utiliza para modelar al fenómeno físico que relacione la variable de flujo con la variable de momento del dominio físico que se está considerando. El elemento I transforma la potencia suministrada a él en energía almacenada, cuya representación se ilustra en la figura 2.5.

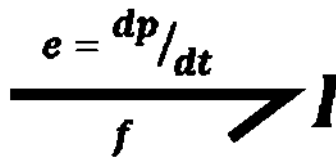


Figura 2.5: Representación del elemento I.

En la tabla 2.4 se muestran las ecuaciones y las variables que son utilizadas para el elemento I, esto para algunos de los dominios mencionados con anterioridad.

En la figura 2.6, se muestra el una forma de relacionar las variables generalizadas, y de importancia en Bond Graph, es el esquema mnemónico llamado tetraedro de estados, en éste se observa la representación de los elementos pasivos puerto-1 (R, C e I).

Tabla 2.4: Ecuaciones para elemento I.

Dominio Físico	Ecuación lineal
Eléctrico	$i(t) = \frac{1}{L} \int v(t) dt$
Mecánico traslacional	$V(t) = \frac{1}{M} \int F(t) dt$

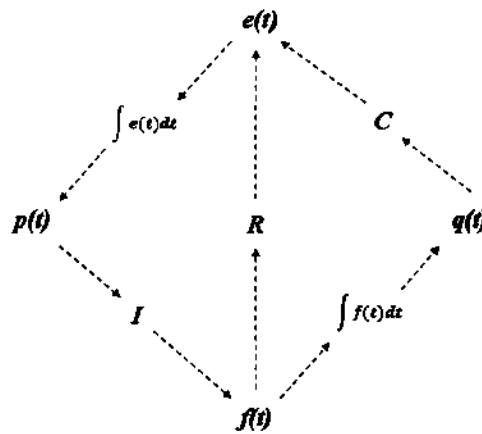


Figura 2.6: Tetraedro de estados.

2.4.2. Elementos Activos Puerto-1 (Fuentes)

Estos son los elementos que suministran energía al sistema, existen dos tipos de fuentes, aquella que otorga esfuerzo (voltaje, presión, fuerza) y la que otorga flujo (corriente, caudal, velocidad), denotadas Se y Sf respectivamente. y su representación se muestra en la figura 2.7.



Figura 2.7: a) Fuente de esfuerzo; b) Fuente de flujo.

La orientación de la semiflecha está definida y representa la salida de la fuente.

Existe una propiedad fundamental que define una fuente en la metodología de Bond Graph la cual es mencionada a continuación:

La variable de esfuerzo o flujo proporcionada por la fuente es considerada independiente de la complementaria.

Si en un mismo sistema existe alguna entrada de control y a su vez entradas de perturbaciones, se puede utilizar la siguiente notación:

- Se o Sf : Entradas constantes no controladas o moduladas por variables externas.
- MSe o MSf : Entradas controladas donde M es por Modulación por alguna variable de control externa, éstas son representadas en la figura 2.8.



Figura 2.8: a) Fuente Modulada de esfuerzo; b) Fuente Modulada de flujo

2.4.3. Elementos Ideales Puerto-2

Transformador (TF)

Este transformador no almacena o disipa energía (conservación de la potencia). Un transformador se encarga de relacionar las variables de flujo-flujo y esfuerzo-esfuerzo. El transformador descrito en Bond Graph (TF) es capaz de representar un transformador eléctrico ideal, un sistema de engranaje, un pistón hidráulico, etc. La representación de este elemento es mostrada en la figura 2.9.

Al existir conservación de la potencia en TF ($e_1 f_1 = e_2 f_2$) se puede encontrar la relación constitutiva, en variables generalizadas, para TF, éstas también permiten definir m , esto en la ecuación (2.5).



Figura 2.9: Representación del transformador en Bond Graph.

$$\begin{aligned} e_1 &= m e_2 \\ f_2 &= m f_1 \end{aligned} \tag{2.5}$$

Si m no es una constante se puede considerar que el transformador es *Modulado* y este será denotado como $\text{MTF}:m(\cdot)$

Girador (GY)

En comparación con el transformador, un girador establece relaciones entre flujo–esfuerzo y esfuerzo–flujo. Al igual que el transformador, éste no almacena o disipa energía. El girador de Bond Graph puede representar giroscopios mecánicos, sensores de efecto Hall, motores de C.D., etc. La figura 2.10 corresponde a la representación de un girador.



Figura 2.10: Representación en Bond Graph de un girador (GY).

Siendo un elemento conservativo de potencia, podemos determinar las relaciones constitutivas de este y definir r , así se obtiene la ecuación 2.6.

$$\begin{aligned} e_1 &= r f_2 \\ e_2 &= r f_1 \end{aligned} \tag{2.6}$$

Si r no es una constante, entonces se dice que el girador está siendo *Modulado*, si es el caso, éste se denotará como $\text{MGY}:r(\cdot)$

2.4.4. Detectores

Este elemento representa sensores o instrumentos de medición, los cuales son supuestos ideales (no consumen potencia).

A pesar de que la potencia no está involucrada, éste es usado como un enlace de información o señal.

Existen dos tipos de detectores los cuales son:

- El detector de esfuerzo (De) el cual representaría un volmetro, sensor de fuerza, sensor de presión, etc.
- El detector de flujo (Df) el cual sería una representación de un medidor de velocidad de flujo (caudal), un tacometro, etc.

Éstos son representados por una flecha clásica, como se muestra en la figura 2.11.



Figura 2.11: Representación de los detectores de esfuerzo (der.) y flujo (izq.).

2.4.5. Elementos de Unión (Puertos-3)

La mañana del 24 de Abril de 1959, fue el día en que Henry M. Paynter tuvo una idea sobre los elementos de unión-0 y unión-1.

Ambas uniones son originadas a partir de dos *generalizaciones radicales*, de la Ley de Corrientes de Kirchhoff (LCK) y la Ley de Voltajes de Kirchhoff (LVK), tomando estas dentro y fuera de los circuitos eléctricos.

El limitado uso de los puertos-3 en casos de estudio con Bond Graph en esa época, difícilmente le hacía justicia al papel que estos elementos desempeñaron para la presentación de los Bond Graphs como una disciplina completa y formal.

Unión-0

Es conocida como unión de flujo ó unión de esfuerzo común. Las relaciones que la caracterizan son:

- > Igualdad de esfuerzos para todos los enlaces que tenga la unión.
- > La suma algebraica de potencias es igual a 0.

Simplificando lo anterior se tiene:

$$e_1 = e_2 = \dots = e_n$$

$$\sum_i a_i f_i = 0 \quad (2.7)$$

donde $a_i = +1$ si la semiflecha tiene dirección hacia la unión-0, de otro modo sería $a_i = -1$.

La forma de describir este elemento esta dada en la figura 2.12.

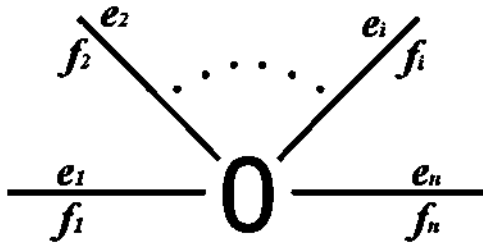


Figura 2.12: Elemento de Unión 0.

Unión-1

Llamada también unión de esfuerzo ó unión de flujo común. Las relaciones que la caracterizan son:

- > Igualdad de flujo para todos los enlaces que tenga la unión.
- > La suma algebraica de las potencias es 0.

Esto se simplifica como:

$$f_1 = f_2 = \dots = f_n$$

$$\sum_i a_i e_i = 0 \quad (2.8)$$

así $a_i = +1$ si la semiflecha apunta a la unión, si no $a_i = -1$.

La representación de esta unión puede ser la mostrada en la figura 2.13.

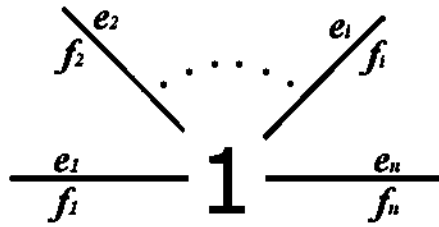


Figura 2.13: Elemento Unión 1.

2.5. Causalidad

En Bond Graph se puede observar la forma en que la potencia se intercambia entre elementos y también permite que aparezcan de forma explícita, las relaciones de causa-efecto y la estructura del cálculo de ecuaciones características asociadas al modelo.

Una forma sencilla de ver la causalidad es observando el intercambio de potencia entre dos subsistemas, y solo podrían existir dos posibles situaciones:

- El subsistema **A** suministra esfuerzo al subsistema **B** y este responda enviando flujo hacia **A**.
- A** envía flujo a **B** y este a su vez suministra esfuerzo a **A**.

Lo anterior puede verse representado en la figura 2.14.

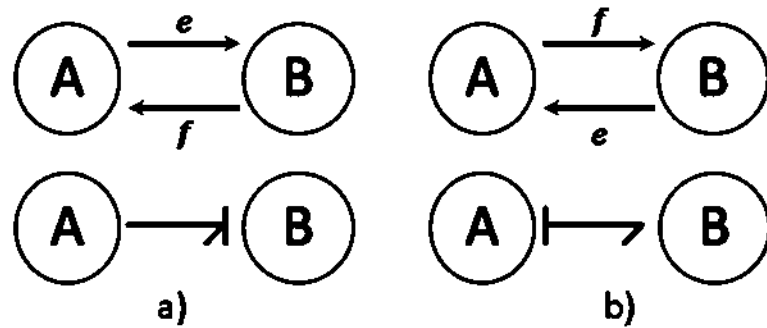


Figura 2.14: Representación del intercambio de potencia.

Para representar estas relaciones de causa-efecto en un modelo de Bond Graph, se coloca una marca en el **bond** (semiflecha) llamada “trazo causal” el cual es una línea horizontal con respecto al **bond**.

El trazo causal se coloca cerca del elemento que recibe el esfuerzo y además el trazo causal es **independiente** del sentido de la semiflecha, como se muestra en la figura 2.15.

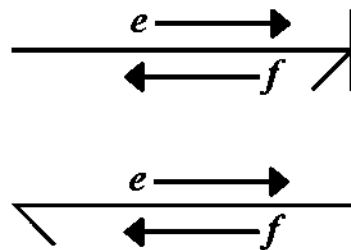


Figura 2.15: Representación del trazo causal en un "bond".

2.5.1. Reglas de Asignación de Causalidad

La asignación de la causalidad no es arbitraria, ésta tiene reglas y un procedimiento ya definido.

A este procedimiento se le conoce como SCAP (Sequential Causality Assignment Procedure) y este es descrito a continuación:

1. Asignar *causalidad necesaria* a las fuentes.
2. Asignar *causalidad integral* a todos los elementos almacenadores de energía ($-I, -C$).
3. Asignar causalidad (*restrictiva*) a todos los elementos de unión 0 y 1, a transformadores (TF) y giradores (GY), tomando en cuenta las restricciones de estos.
4. Asignar *causalidad arbitraria* a los elementos resistivos R , dependiendo de las posibilidades disponibles.
5. Buscar conflictos causales. Si un conflicto aparece, habrá de regresar al paso 2 y modificar la causalidad del elemento C ó I que ocasiona dicho conflicto.

Tomando en consideración el paso 2 y el 5 podemos mencionar que sí el modelo se construye con *causalidad integral*, este recibe el nombre de Bond Graph Integral (BGI).

En caso de que el modelo sea construido con *causalidad derivativa*, el modelo es nombrado Bond Graph Derivativo (BGD).

Es cierto, que no siempre es posible asignar causalidad integral a todos los elementos de un BGI, esto ocurre cuando existe una dependencia lineal entre elementos. Los elementos que permanecen con causalidad derivativa son *linealmente dependientes* de alguno(s) de los elementos con causalidad integral.

De igual forma, en un BGD puede ser que no todos los elementos almacenadores de energía acepten causalidad derivativa, sin embargo, en este caso *no implica dependencia lineal*.

Los tipos de causalidad y los elementos se encuentran descritos en la tabla 2.5 y la tabla 2.6.

Tabla 2.5: Tabla de asignación de causalidades (Parte 1).

Causalidad	Elementos	Ecuación Lineal
Necesaria	$\mathbf{Se} \longrightarrow \nearrow$	e -Impuesta
	$\mathbf{Sf} \vdash \longrightarrow \nearrow$	f -Impuesta
Integral	$\longrightarrow \nearrow \mathbf{I}$	$f_I(t) = \frac{1}{L} \int e_I(t) dt$ $f_I(t) = \frac{\rho_I(t)}{L}$
	$\vdash \longrightarrow \nearrow \mathbf{C}$	$e_c(t) = \frac{1}{C} \int f_c(t) dt$ $e_c(t) = \frac{1}{C} q_c(t)$
Derivativa	$\vdash \longrightarrow \nearrow \mathbf{I}$	$e_I(t) = L \frac{df_I(t)}{dt}$ $\rho_I(t) = L f_I(t)$
	$\longrightarrow \nearrow \mathbf{C}$	$f_c(t) = C \frac{de_I(t)}{dt}$ $q_c(t) = C e_c(t)$
Restrictiva	$\vdash \xrightarrow[e_1]{f_1} \nearrow \mathbf{TF}_m \vdash \xrightarrow[e_2]{f_2} \nearrow$	$e_1 = m e_2 \quad f_2 = m f_1$
	$\xrightarrow[e_1]{f_1} \nearrow \mathbf{TF}_m \xrightarrow[e_2]{f_2} \nearrow$	$e_2 = \frac{1}{m} e_1 \quad f_1 = \frac{1}{m} f_2$

Tabla 2.6: Tabla de asignación de causalidades (Parte 2).

Causalidad	Elemento	Ecuación Lineal
RestRICTIVA		$e_1 = r f_2 \quad e_2 = r f_1$
		$f_1 = \frac{1}{r} e_2 \quad f_2 = \frac{1}{r} e_1$
		$e_1 = e_i; e_2 = e_i; \dots; e_n = e_i$ $a_i f_i = -(a_1 f_1 + a_2 f_2 + \dots + a_n f_n)$
		$f_1 = f_i; f_2 = f_i; \dots; f_n = f_i$ $a_i e_i = -(a_1 e_1 + a_2 e_2 + \dots + a_n e_n)$
Arbitraria		$e_R = R f_R$
		$f_R = e_R / R$

2.6. Procedimiento para el Modelado de Sistemas

En esta sección se presenta un procedimiento general para modelar diferentes sistemas como lo son: eléctricos, mecánicos e hidráulicos, este se puede extender a otro tipo de sistemas físicos, esto a través de los pasos adecuados para ese sistema, los pasos a seguir son los mencionados a continuación:

1. Colocar una unión-0 para cada punto en el esquema donde las trayectorias paralelas coincidan.
2. Colocar una unión-1 para cada componente en una trayectoria serie y conectar el componente apropiado de Bond Graph por un bond en esa unión. La dirección de la semiflecha en cada de bond indica la dirección asumida del flujo de potencia, es decir, a partir de fuentes y hacia elementos almacenadores y disipadores.
3. Colocar bonds entre uniones adyacentes, nuevamente indicando la dirección de flujo de potencia.
4. Remover la unión-0 que representa el punto de *referencia* y remover todos los bonds conectados a esta unión.
5. Simplificar de acuerdo a las reglas de la figura 2.16.

$$\begin{array}{c}
 \overrightarrow{\hspace{1.5cm}} 1 \overrightarrow{\hspace{1.5cm}} = \overrightarrow{\hspace{1.5cm}} \\
 \overrightarrow{\hspace{1.5cm}} 0 \overrightarrow{\hspace{1.5cm}} = \overrightarrow{\hspace{1.5cm}}
 \end{array}$$

Figura 2.16: Reglas de simplificación.

6. Finalmente le es asignada su causalidad a cada elemento respetando las reglas de la misma.

El procedimiento se aplicara al modelado de sistemas eléctricos, mecánicos e hidráulicos con la finalidad de confirmar lo antes mencionado.

2.6.1. Sistema Eléctrico

Tomando en cuenta el procedimiento general y con las siguientes observaciones, se puede construir un modelo en Bond Graph de un sistema eléctrico.

- En el paso 1, para cada cambio de voltaje en el circuito le corresponde una unión-0.
- En el paso 4, la referencia es el nodo de tierra, el cual tiene un voltaje de cero.

A continuación se describirá un breve ejemplo de la aplicación del procedimiento antes mencionado, esto sobre el circuito eléctrico descrito en la figura 2.17.

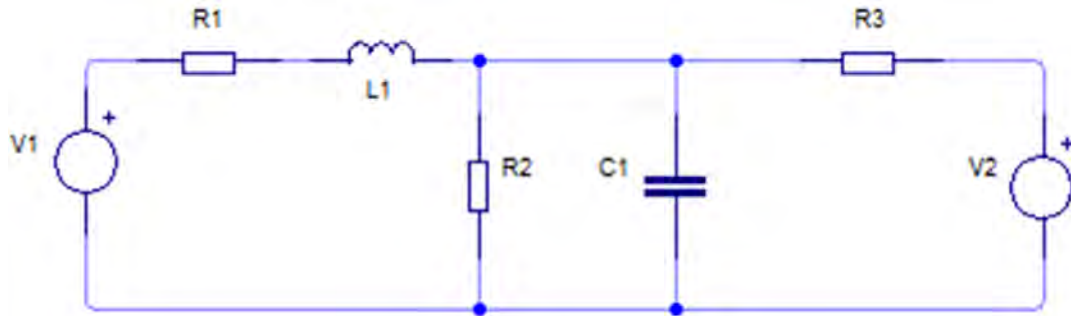


Figura 2.17: Circuito Eléctrico.

Para el paso 1 de este procedimiento podemos observar en las figuras 2.18 y 2.19 como se lleva a cabo.

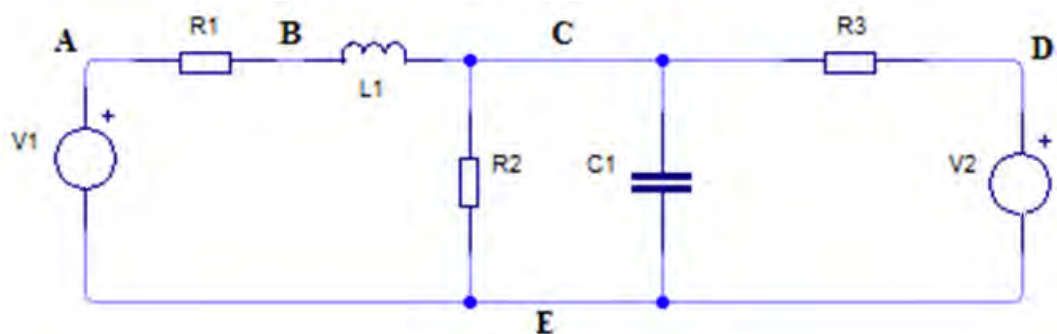


Figura 2.18: Denotando los nodos en el circuito eléctrico.

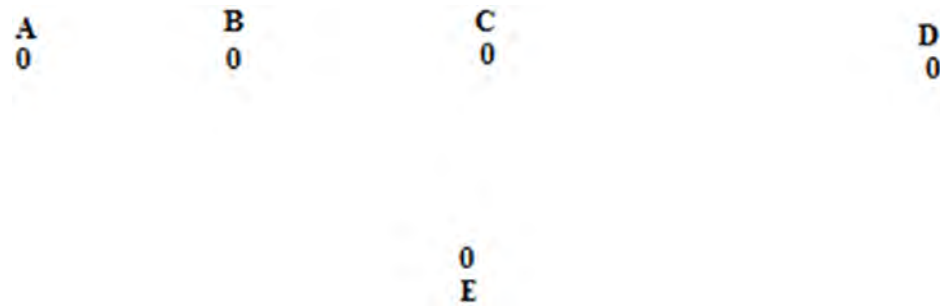


Figura 2.19: Colocando unión 0 para cada nodo del sistema.

En la figura 2.20 se lleva a cabo el paso 2.

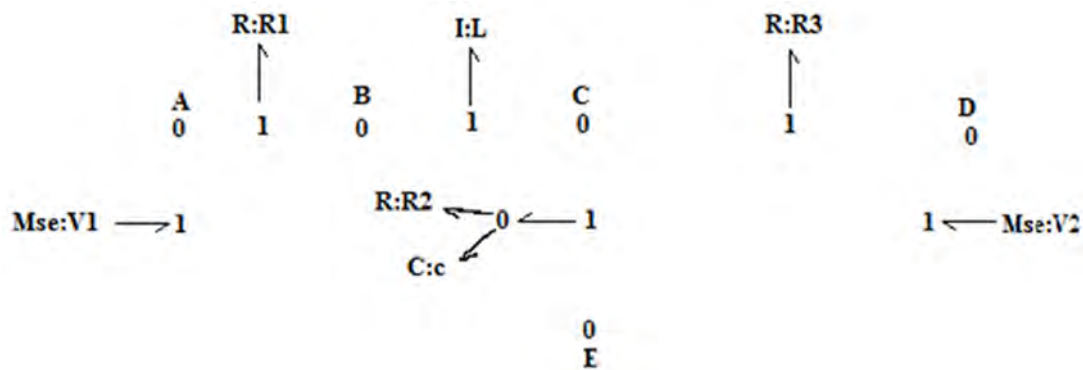


Figura 2.20: Introducción de los elementos en conjunto con unión 1.

El paso 3 es descrito en la figura 2.21.

El paso 4 es representado en la figura 2.22.

En las figuras 2.23 y 2.24 se puede observar la manera de llevar a cabo el paso 5.

Después de realizar los pasos anteriores se obtiene el llamado Bond Graph *acausal* el cual se ilustra en la figura 2.25.

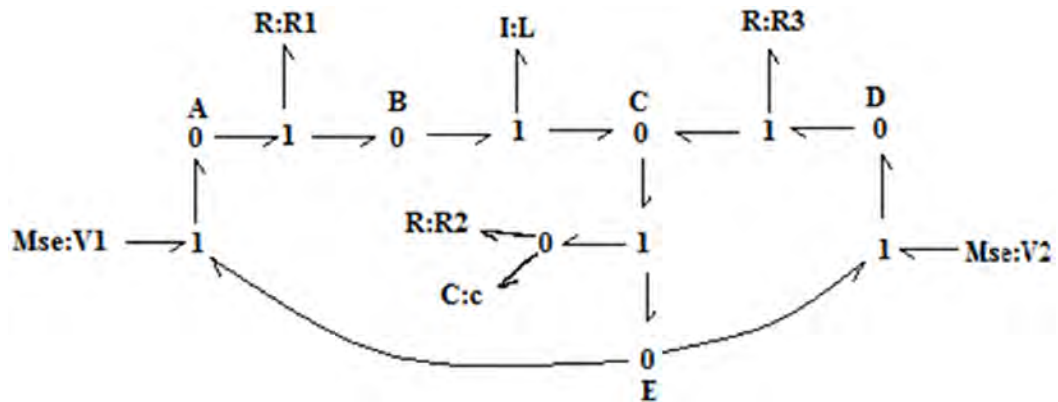


Figura 2.21: Unión entre elementos siguiendo la dirección de la potencia.

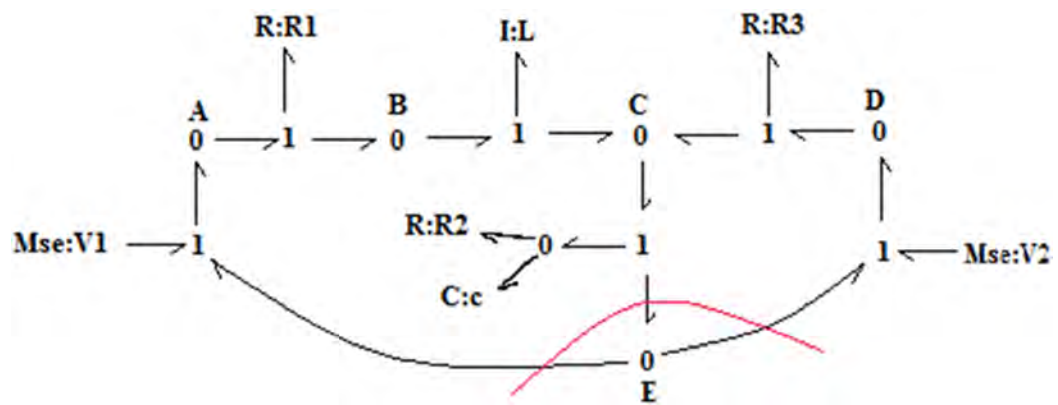


Figura 2.22: El nodo de referencia (tierra) es retirado.

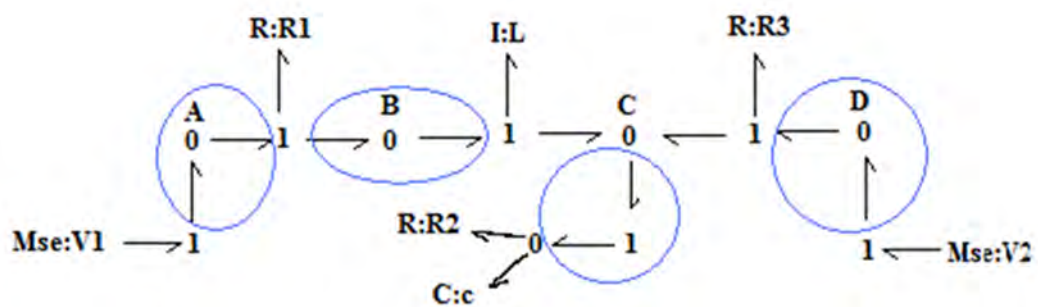


Figura 2.23: Aplicación de las reglas de reducción.

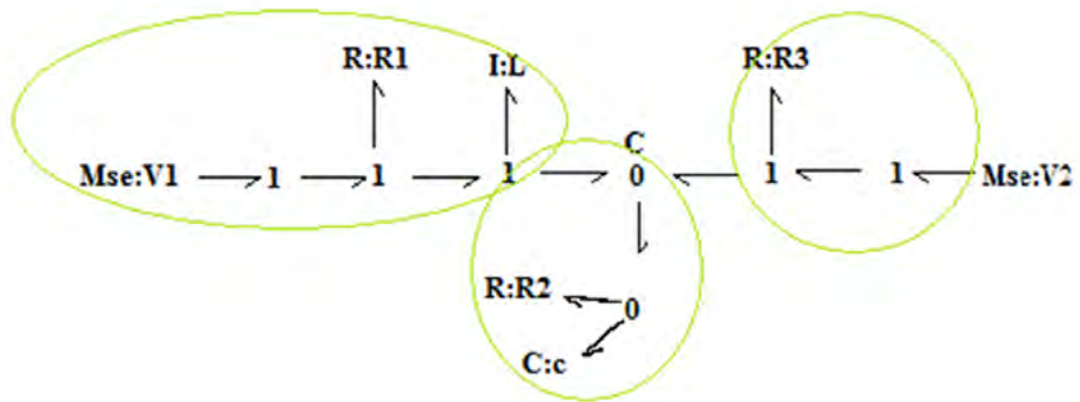


Figura 2.24: Reducción del Bond Graph.

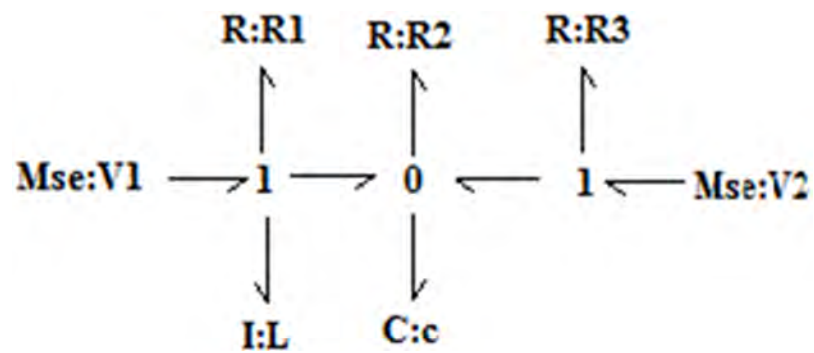


Figura 2.25: Representación de un sistema eléctrico en Bond Graph acausal.

Finalmente, el paso 6 (asignación de causalidad) se observá en la figura 2.26, esto respetando las reglas mencionadas en la sección anterior.

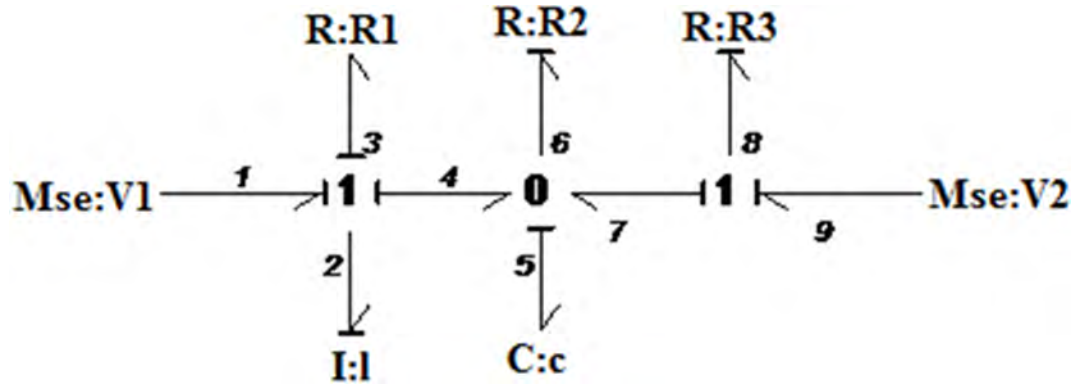


Figura 2.26: Modelo en Bond Graph con causalidades asignadas.

2.6.2. Sistema Mecánico

El procedimiento de modelado para un sistema mecánico traslacional sólo se realiza tomando en cuenta los siguientes puntos, a partir del procedimiento descrito anteriormente:

- En el paso 1, para cada velocidad distinta colocar una unión-1.
- En el paso 2, insertar los elementos de generación de fuerza entre el par apropiado de uniones-1 usando uniones-0. También si existen inercias insertarlas en sus respectivas uniones-1.
- En el paso 4, el nodo de tierra es cualquier velocidad cero.

2.6.3. Sistema Hidráulico

El procedimiento de modelado para un sistema hidráulico se realiza aplicandole los siguientes cambios al procedimiento general:

- En el paso 1, a cada cambio de presión se le asigna una unión-0.

- En el paso 2, insertar los elementos entre el par apropiado de uniones-0 usando uniones-1, añadiendo fuentes de presión y flujo.
- En el paso 4, definir todas las presiones relativas a una presión de referencia (comúnmente la atmosférica), y eliminando la unión-0 de referencia y sus bonds.

2.7. Matriz de Estructura de Unión

Si se sitúa el Bond Graph de un sistema dinámico como un intermediario entre el sistema físico y los modelos matemáticos asociados al sistema. La causalidad del Bond Graph permite escribir de una forma muy estructurada las relaciones que caracterizan la evolución dinámica del sistema y combinar las ecuaciones diferenciales y algebraicas [Geneviève Dauphin-Tanguy, 2000.].

Esta forma estructurada está compuesta de elementos básicos, asociados con los puertos, I , C , R , MSe , MSf . Los elementos TF , GY y las uniones 0 y 1, así estos componen la estructura de unión, el intercambio de energía entre las diferentes partes del sistema dinámico y la propiedad de conservación de la energía.

Esta estructura de unión es denotada en la figura 2.27.

2.7.1. Vectores Clave

En un Bond Graph, los bonds pueden ser clasificados como externos e internos. En la Figura 2.27 se muestra un diagrama para la identificación de los vectores clave de las variables en Bond Graph.

En la Figura 2.27, los vectores clave se encuentran divididos de la siguiente manera: Se, Sf se refiere a las fuentes; C e I es el campo de elementos almacenadores de energía; R es el campo de elementos resistivos o disipadores; el conjunto de elementos de unión está formado por los elementos, 0, 1, TF y GY.

Los estados $x(t)$ y $x_d(t)$ están compuestos de las variables de energía $p(t)$ y $q(t)$ asociados con los elementos C e I , en causalidad integral y derivativa, respectivamente; $u(t)$ representa la entrada de la planta, mientras que $z(t)$ y $z_d(t)$ son los vectores de co-energía

en causalidad integral y derivativa, respectivamente y $D_{in}(t)$ y $D_{out}(t)$ son una combinación de $e(t)$ y $f(t)$ representando los cambios entre el campo de elementos de disipación.

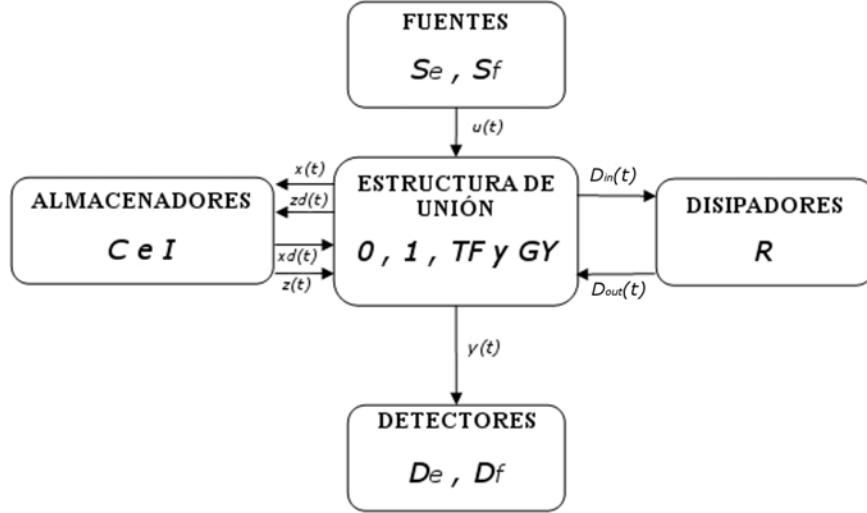


Figura 2.27: Diagrama de bloques de la estructura unión y los vectores clave.

2.7.2. Relaciones Constitutivas y Ecuación de Estado

Las relaciones no lineales de la figura 2.27 de almacenamiento y de disipación son:

$$z(t) = Fx(t) \quad (2.9)$$

$$z_d(t) = F_d x_d(t) \quad (2.10)$$

$$D_{out} = L(D_{in}) \quad (2.11)$$

donde,

- F es una función que relaciona cada z_i con x_i para $i = 1, \dots, n$.
- F_d es una función que relaciona cada z_{di} con x_{di} para $i = 1, \dots, m$.
- L es una función que relaciona cada $D_{out i}$ con $D_{in i}$ para $i = 1, \dots, r$.

Cada uno de los elementos listados anteriormente está descrito por una ley física o *relación constitutiva*.

Estás relaciones constitutivas son conocidas como se describirá más adelante en ejemplos ilustrativos, en la metodología de Bond Graph, L , F F_d son matrices reales de dimensiones $r \times r$, $n \times n$ y $m \times m$, respectivamente.

El modelo matemático de un Bond Graph se obtiene a través de las relaciones que se observan en la estructura unión, y pueden ser escritas como se muestra a continuación:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ D_{in}(t) \\ y(t) \\ z_d(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & 0 \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & 0 \\ S_{41} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z(t) \\ D_{out}(t) \\ u(t) \\ \dot{x}_d(t) \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

Dentro de la ecuación (2.12) podemos observar la conocida *matriz de estructura unión* la cual es definida como “ S ”, y está particionada de acuerdo a la dimensión de sus vectores clave. En el caso de que el sistema analizado sea un sistema conservativo en cuanto a energía, la submatrices S_{ij} tienen las siguientes propiedades:

- ✠ Las matrices S_{11} y S_{22} son matrices antisimétricas.
- ✠ La matriz S_{12} es la transpuesta negativa de la matriz S_{21} .
- ✠ La matriz S_{14} es la transpuesta negativa de la matriz S_{41} .

De la ecuación (2.12) podemos reescribis $z_d(t)$ como (2.13)

$$z_d(t) = -S_{14}^T z(t) \quad (2.13)$$

Se sabe que un sistema LTI que es modelado en espacio de estados de forma matricial es como se muestra a continuación:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (2.14)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \quad (2.15)$$

si a las ecuaciones (2.14) y (2.15) se les relaciona con las ecuaciones (2.12) y (2.13) podemos obtener lo siguiente para las matrices A , B , C , D .

$$A = E^{-1}(S_{11} + S_{12}MS_{21})F \quad (2.16)$$

$$B = E^{-1}(S_{13} + S_{12}MS_{23}) \quad (2.17)$$

$$C = (S_{31} + S_{32}MS_{21})F \quad (2.18)$$

$$D = (S_{33} + S_{32}MS_{23}) \quad (2.19)$$

donde

$$E = I + S_{14}F_d^{-1}S_{14}^TF \quad (2.20)$$

$$M = L(I - LS_{22})^{-1} \quad (2.21)$$

Con las ecuaciones (2.16) a (2.21) se puede obtener de forma directa el Modelo de un Sistema en las Variables de Estado $(x(t))$, utilizando la metodología de Bond Graph aplicada a un sistema.

2.7.3. Ejemplo Ilustrativo

Tomaremos como punto de partida el modelo en Bond Graph del sistema eléctrico representado en la figura 2.26, se determina la Matriz de Estructura Unión y posteriormente se obtienen las matrices A , B , C y D del sistema en variables de estado.

El siguiente paso es encontrar los vectores clave y las relaciones constitutivas:

Vectores Clave

$$u = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_9 \end{bmatrix} \quad x = \begin{bmatrix} p_2 \\ q_5 \end{bmatrix} \quad \dot{x} = \begin{bmatrix} e_2 \\ f_5 \end{bmatrix} \quad z = \begin{bmatrix} f_2 \\ e_5 \end{bmatrix}$$

$$D_{in} = \begin{bmatrix} f_3 \\ e_6 \\ e_8 \end{bmatrix} \quad D_{out} = \begin{bmatrix} e_3 \\ f_6 \\ f_8 \end{bmatrix}$$

Relaciones Constitutivas

De la ecuación (2.9) la incógnita F puede ser definida a partir de $z(t)$ y $x(t)$, quedando de la siguiente forma:

$$z(t) = Fx(t)$$

$$\begin{bmatrix} f_2 \\ e_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{L} & 0 \\ 0 & \frac{1}{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_2 \\ q_5 \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

A partir de la ecuación (2.11) podemos definir L con los vectores claves relacionados obtenidos anteriormente, siendo la ecuación resultante, la mostrada a continuación:

$$D_{out}(t) = LD_{in}(t)$$

$$\begin{bmatrix} e_3 \\ f_6 \\ f_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{R_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{R_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_3 \\ e_6 \\ e_8 \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

Matriz de Estructura Unión

A continuación se considera la ecuación (2.12) y se procede a completar la matriz de estructura unión $S(t)$. La consecuencia de no tener elementos de almacenamiento de energía en *causalidad derivativa* modifica la ecuación (2.12), el resultado de esto se describe a continuación:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ D_{in}(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z(t) \\ D_{out}(t) \\ u(t) \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

Sustituyendo los vectores clave y las ecuaciones (2.22) y (2.23) (relaciones constitutivas) tendremos la siguiente representación:

$$\begin{bmatrix} e_2 \\ f_5 \\ \dots \\ f_3 \\ e_6 \\ e_8 \\ \dots \\ e_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & \vdots & -1 & 0 & 0 & \vdots & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \vdots & 0 & -1 & 1 & \vdots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \cdot & \dots & \dots & \dots & \cdot & \dots & \dots \\ 1 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \vdots & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \vdots & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 1 \\ \dots & \dots & \cdot & \dots & \dots & \dots & \cdot & \dots & \dots \\ 0 & 1 & \vdots & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_2 \\ e_5 \\ \dots \\ e_3 \\ f_6 \\ f_8 \\ \dots \\ e_1 \\ e_9 \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

Haciendo constatar las propiedades de las submatrices de la matriz de estructura unión $S(t)$, las cuales se ilustran enseguida:

✠ S_{11} y S_{22} son matrices cuadradas antisimétricas.

$$S_{11} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad S_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

✠ S_{12} es la transpuesta negativa de S_{21} . (Esto es $a_{ij} = -b_{ji}$ para todo $i, j = 1, 2, 3, \dots, n$).

$$S_{12} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}; \quad S_{21} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$-S_{12}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = S_{21}$$

Ecuaciones de Estado

A continuación se procederá a encontrar las ecuaciones de estado a partir de las ecuaciones (2.16) a (2.21), las cuales a consecuencia de no tener elementos en *causalidad derivativa* quedarán de la siguiente forma:

$$E = I$$

$$M = L(I - LS_{22})^{-1} \quad (2.26)$$

$$A = (S_{11} + S_{12}MS_{21})F \quad (2.27)$$

$$B = (S_{13} + S_{12}MS_{23}) \quad (2.28)$$

$$C = (S_{31} + S_{32}MS_{21})F \quad (2.29)$$

$$D = (S_{33} + S_{32}MS_{23}) \quad (2.30)$$

sustituyendo los elementos correspondientes en cada una de las ecuaciones anteriores tenemos:

$$M = L = \begin{bmatrix} R_1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{R_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{R_3} \end{bmatrix}$$

En la ec.(2.27) se tiene

$$A = \left(\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{R_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{R_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \frac{1}{L} & 0 \\ 0 & \frac{1}{C} \end{bmatrix}$$

quedando:

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{R_1}{L} & -\frac{1}{C} \\ \frac{1}{L} & -\frac{1}{C} \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) \end{bmatrix} \quad (2.31)$$

Realizando de igual manera la sustitución en las ecuaciones (2.28), (2.29) y (2.30):

$$B = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{R_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{R_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right)$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{R_3} \end{bmatrix} \quad (2.32)$$

$$C = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{R_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{R_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \frac{1}{L} & 0 \\ 0 & \frac{1}{C} \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{C} \end{bmatrix} \quad (2.33)$$

$$D = \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{R_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{R_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right)$$

$$D = [0]$$

Así, las ecuaciones de estado descritas en las ecuaciones (2.14) y (2.15) quedan de la siguiente manera:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$\begin{bmatrix} e_2 \\ f_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_1}{L} & -\frac{1}{C} \\ \frac{1}{L} & -\frac{1}{C} \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_2 \\ q_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{R_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_9 \end{bmatrix} \quad (2.34)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

$$f_5 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_2 \\ q_5 \end{bmatrix} \quad (2.35)$$

De esta forma se finaliza la obtención del modelo matemático de un sistema a partir del modelado de Bond Graph.

Capítulo 3

SISTEMAS LTV Y SU MODELADO EN BOND GRAPH

3.1. Introducción

Actualmente, los sistemas suelen ser sistemas físicos que, por naturaleza contienen coeficientes variables o que a pesar de poder estudiarse como Sistemas LTI, simplemente se requiere un *estudio más minucioso* de estos. Los métodos de análisis precisos de estos sistemas son relativamente pocos y normalmente son de gran dificultad en el momento de su aplicación o suelen estar restringidos a una cierta clase de sistemas.

En este capítulo se describe una breve reseña de los métodos tradicionales usados para el modelado de los sistemas LTV.

Posteriormente, se muestra la forma de tratar estos sistemas a través del modelado en Bond Graph, una vez definida ésta, se presentan algunos ejemplos, por medio de los cuales se pretende crear un punto de comparación entre las metodologías.

3.2. Modelado de Sistemas LTV en un Enfoque Tradicional

Actualmente, los métodos para el análisis preciso de un Sistema LTV son relativamente pocos y resultan ser bastante difíciles de aplicar o están limitados a una pequeña clase de sistemas. La dificultad fundamental subyacente en el análisis de estos sistemas se hace evidente cuando uno lleva a cabo una revisión de los métodos comunes para el análisis exacto.

El enfoque clásico para el problema del análisis depende de la determinación de las funciones básicas, y el uso de un procedimiento de integración basado en superposición para determinar la respuesta del sistema a entradas particulares. Las funciones básicas, que comprenden n -soluciones independientes para la ecuación diferencial lineal homogénea de orden- n que caracteriza el sistema, son generalmente difíciles de determinar; no existe un procedimiento general para determinar un conjunto de funciones básicas para una ecuación diferencial lineal arbitraria con coeficientes variantes en el tiempo.

Para sistemas LTV caracterizados por una única ecuación diferencial de orden- n , el enfoque clásico había supuesto la determinación de las funciones básicas como polinomios infinitos y posteriormente usando el método de variación de parámetros para determinar una respuesta específica.

Este método ha sido aplicado de manera satisfactoria, pero sólo a una pequeña clase de sistemas.

Como consecuencia, los sistemas se caracterizan por las siguientes ecuaciones que tienen funciones básicas conocidas:

- Ecuaciones de Besel
- Ecuaciones de Weber
- Ecuaciones de Mathieu
- Ecuaciones de Hipergeométricas
- Ecuaciones de Legendre
- Ecuaciones de Airy
- Ecuaciones de Laguerre

Estas ecuaciones representan sólo una muestra infinitesimal del número infinito de ecuaciones diferenciales LTV posibles.

Para sistemas LTV caracterizados por ecuaciones de estado variantes, un método que involucra un número infinito de integraciones iterativas puede ser usado para generar una “*Matrizat*” o *Matriz Fundamental* como se le conoce actualmente (3.7). La matriz fundamental está implícitamente relacionada con las funciones básicas.

Sin embargo, los diversos métodos para obtener soluciones exactas no son complementarios unos con otros, y la dificultad en la obtención de soluciones exactas con un método es una indicación de que tan difícil será encontrarla con algún otro.

Las ecuaciones características de los sistemas LTV son similares a las de los sistemas LTI con la excepción de que los coeficientes pueden ser funciones del tiempo. Así los sistemas LTV son caracterizados por igual, incluso de un sistema escalar tal como:

$$a_0(t) \frac{d^n x(t)}{dt^n} + \cdots + a_n(t) x(t) = b_0(t) \frac{d^m r(t)}{dt^m} + \cdots + b_m(t) r(t) \quad (3.1)$$

o en el caso multivariable:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1(t)}{dt} &= a_{11}(t)x_1(t) + \cdots + a_{1n}(t)x_n(t) + b_{11}(t)u_1(t) + \cdots + b_{1m}(t)u_m(t) \\ &\vdots \\ \frac{dx_n(t)}{dt} &= a_{n1}(t)x_1(t) + \cdots + a_{nn}(t)x_n(t) + b_{n1}(t)u_1(t) + \cdots + b_{nm}(t)u_m(t) \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} y_1 &= c_{11}(t)x_1(t) + \cdots + c_{1n}(t)x_n(t) + d_{11}(t)u_1(t) + \cdots + d_{1m}(t)u_m(t) \\ &\vdots \\ y_r &= c_{r1}(t)x_1(t) + \cdots + c_{rn}(t)x_n(t) + d_{r1}(t)u_1(t) + \cdots + d_{rm}(t)u_m(t) \end{aligned} \quad (3.3)$$

De cualquier manera, a diferencia del caso de los sistemas LTI, los *métodos generales* para obtener la solución de cualquier sistema LTV, son inexistentes.

Describiendo de forma matricial las ecuaciones (3.2) y (3.3) se obtiene:

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \quad (3.4)$$

$$y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t) \quad (3.5)$$

Las ecuaciones (3.4) y (3.5) también son conocidas como *ecuación de estado lineal* escrita en su forma generalizada. Esta ecuación de estado lineal es llamada variante en el tiempo, si cada entrada de cada elemento de las matrices $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ y $D(t)$, en las ecuaciones antes mencionadas, es una función continua con valores reales definida para todo $t \in (-\infty, \infty)$.

En ocasiones una ecuación de estado LTV resulta directamente de un modelo físico en el cual se tiene interés. También, una ecuación de estado LTV pueden surgir como la linealización de una *ecuación de estado no lineal* con una solución de interés particular.

Retomando la antes mencionada matriz fundamental y tomando en consideración las ecuaciones (3.4) y (3.5), se describirá de forma breve una solución completa para sistemas LTV.

Considerando existencia y unicidad de soluciones de (3.6), es decir, suponiendo que se cumple el teorema 3.3 de [Wilson J. Rugh, 1996.]

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), \quad x(t_0) = x_0 \quad (3.6)$$

donde el tiempo inicial (t_0) y el estado inicial (x_0) son dados, $u(t)$ es continua, e involucrando el uso de las propiedades de la *matriz de transición* ($\Phi(t, \tau)$).

Siendo $\Phi(t, \tau)$ la matriz de transición del sistema (3.6), definida por la serie de *Peano-Baker* y mostrada a continuación:

$$\begin{aligned} \Phi(t, \tau) = & I + \int_{\tau}^t A(\sigma_1) d\sigma_1 + \int_{\tau}^t A(\sigma_1) \int_{\tau}^{\sigma_1} A(\sigma_2) d\sigma_2 d\sigma_1 + \cdots \\ & \cdots + \int_{\tau}^t A(\sigma_1) \int_{\tau}^{\sigma_1} A(\sigma_2) \int_{\tau}^{\sigma_2} A(\sigma_3) d\sigma_3 d\sigma_2 d\sigma_1 + \cdots \end{aligned} \quad (3.7)$$

La solución completa para la ecuación (3.4) es

$$x(t) = \Phi(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^t \Phi(t, \sigma)B(\sigma)u(\sigma)d\sigma, \quad t \geq t_0 \quad (3.8)$$

tomando en cuenta la ecuación de la salida (3.5) y la ecuación (3.8) tenemos:

$$y(t) = C(t)\Phi(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^t C(t)\Phi(t, \sigma)B(\sigma)u(\sigma)d\sigma + D(t)u(t), \quad t \geq t_0 \quad (3.9)$$

Las soluciones tanto para $x(t)$ como para $y(t)$ comprenden dos componentes independientes. La primera depende sólo del estado inicial, mientras que la segunda depende sólo de la señal de entrada. Podemos llamar a la componente de respuesta a causa del estado inicial como *respuesta de entrada cero* y a la componente causada por la señal de entrada como *respuesta de estado cero*. Entonces, la solución completa de las ecuaciones de estado lineales es la suma de ambas respuestas.

A continuación se presentan algunos ejemplos con el objetivo de mostrar la dificultad que conlleva encontrar una solución de los sistemas LTV y el modelarlos en espacio de estados.

Ejemplo 3.1 *Determinar la solución del siguiente sistema LTV.*

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & t \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

$$\text{donde } B(t)u(t) = 0, \quad A(t) = \begin{bmatrix} 0 & t \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad x(t_0) = x_0.$$

Sustituyendo $B(t)u(t)$ en (3.8)

$$\begin{aligned} x(t) &= \Phi(t, t_0)x_0 = x_0 + \int_{t_0}^t A(\sigma_1)d\sigma_1 x_0 + \int_{t_0}^t A(\sigma_1) \int_{t_0}^{\sigma_1} A(\sigma_2)d\sigma_2 d\sigma_1 x_0 + \cdots \\ &\quad \cdots + \int_{t_0}^t A(\sigma_1) \int_{t_0}^{\sigma_1} A(\sigma_2) \int_{t_0}^{\sigma_2} A(\sigma_3)d\sigma_3 d\sigma_2 d\sigma_1 x_0 + \cdots \end{aligned} \quad (3.11)$$

Definiendo

$$\Gamma x(t) = \int_{t_0}^t A(\sigma)x(\sigma)d\sigma \quad (3.12)$$

Sustituyendo (3.12) en (3.11) tenemos que

$$\begin{aligned} x(t) &= \Gamma^0 x_0 + \Gamma^1 x_0 + \Gamma^2 x_0 + \Gamma^3 x_0 + \dots \\ \therefore x(t) &= \sum_{i=0}^{\infty} \Gamma^i x_0 \end{aligned} \quad (3.13)$$

Tomando (3.13) para determinar la solución y obteniendo por separado los parámetros de la sumatoria como se muestran a continuación.

$$\begin{aligned} \Gamma^0 x_0 &= x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \Gamma^1 x_0 &= \int_0^t A(\sigma) x_0 d\sigma = \int_0^t \begin{bmatrix} 0 & \sigma \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} d\sigma = \dots \\ &\dots = \int_0^t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} d\sigma = \begin{bmatrix} 0 \\ t \end{bmatrix} \\ \Gamma^2 x_0 &= \int_0^t \begin{bmatrix} 0 & \sigma \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \sigma \end{bmatrix} d\sigma = \int_0^t \begin{bmatrix} \sigma^2 \\ 0 \end{bmatrix} d\sigma = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}t^3 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \Gamma^3 x_0 &= \int_0^t \begin{bmatrix} 0 & \sigma \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{3}t^3 \\ 0 \end{bmatrix} d\sigma = \int_0^t \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{3}\sigma^3 \end{bmatrix} d\sigma = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{12}t^4 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Después de obtener varios elementos de la sumatoria se obtiene la respuesta:

$$x(t) = \begin{bmatrix} 1 + \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{72}t^6 + \dots \\ 1 + \frac{1}{12}t^4 + \frac{1}{504}t^7 + \dots \end{bmatrix}$$

Sólo en algunos casos estas series infinitas pueden ser expresadas en formas cerradas.

Ejemplo 3.2 Se construirá el Modelo en Espacio de Estados del circuito RLC serie ilustrado en la figura 3.1:

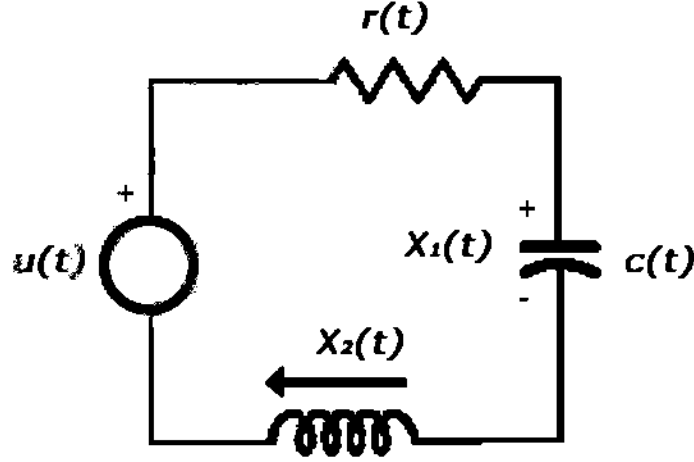


Figura 3.1: Circuito RLC con elementos variantes en el tiempo.

Comenzaremos por definir algunas variables del circuito como lo son:

$$v_r(t) = r(t)i(t) \quad (3.14a)$$

$$q(t) = C(t)v(t) \quad (3.14b)$$

$$\lambda(t) = L(t)i(t) \quad (3.14c)$$

donde $q(t)$ representa la carga en el capacitor y $\lambda(t)$ el flujo en el inductor. Del circuito se conoce que:

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt} = C(t)\frac{dv(t)}{dt} + \frac{dC(t)}{dt}v(t) = C(t)\dot{v}(t) + \dot{C}(t)v(t) \quad (3.15)$$

$$v(t) = \frac{d\lambda(t)}{dt} = L(t)\frac{di(t)}{dt} + \frac{dL(t)}{dt}i(t) = L(t)\dot{i}(t) + \dot{L}(t)i(t) \quad (3.16)$$

Aplicando la Ley de Voltajes de Kirchhoff se obtiene

$$u(t) = v_r(t) + v_C(t) + v_L(t) \quad (3.17)$$

sustituyendo la expresión (3.14a) y la (3.16) en (3.17) se obtiene la siguiente expresión

$$u(t) = r(t)i(t) + v_C(t) + L(t)\dot{i}(t) + \dot{L}(t)i(t) \quad (3.18)$$

Considerando que el circuito es de segundo orden, se pueden definir las variables de estado del circuito como sigue,

$$x_1(t) = v_c(t) \quad ; \quad x_2(t) = i(t)$$

definidas las variables de estado, la expresión (3.15) se reescribe como,

$$x_2(t) = C(t)\dot{x}_1(t) + \dot{C}(t)x_1(t)$$

de donde la variable de estado está dada por

$$\dot{x}_1(t) = -\frac{\dot{C}(t)}{C(t)}x_1(t) + \frac{1}{C(t)}x_2(t) \quad (3.19)$$

y también se reescribe (3.18) como a continuación se muestra

$$u(t) = r(t)x_2(t) + x_1(t) + L(t)\dot{x}_2(t) + \dot{L}(t)x_2(t)$$

por lo tanto se obtiene

$$\dot{x}_2(t) = -\frac{1}{L(t)}x_1(t) - \frac{\left[r(t) + \dot{L}(t)\right]}{L(t)}x_2(t) + \frac{1}{L(t)}u(t) \quad (3.20)$$

Escribiendo de forma matricial las ecuaciones (3.19) y (3.20) se tiene lo siguiente:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\dot{C}(t)}{C(t)} & \frac{1}{C(t)} \\ -\frac{1}{L(t)} & -\frac{\left[r(t) + \dot{L}(t)\right]}{L(t)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L(t)} \end{bmatrix} u(t) \quad (3.21)$$

y tomando en cuenta como salida el voltaje en la resistencia.

$$y(t) = r(t)i(t) = \begin{bmatrix} 0 & r(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

así el sistema estará descrito de la forma tradicional mencionada en las ecuaciones (3.4) y (3.5), donde:

$$A(t) = \begin{bmatrix} -\frac{\dot{C}(t)}{C(t)} & \frac{1}{C(t)} \\ -\frac{1}{L(t)} & -\frac{[r(t)+\dot{L}(t)]}{L(t)} \end{bmatrix} ; \quad B(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L(t)} \end{bmatrix} ; \quad C(t) = \begin{bmatrix} 0 & r(t) \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

Siendo las matrices $A(t)$, $B(t)$ y $C(t)$ en (3.23) las necesarias para el modelo en espacio de estados del circuito *RLC* serie, finalizando de esta forma el ejemplo 3.2.

A continuación se describe una forma sencilla de ver los elementos resistivos, capacitivos e inductivos variantes en el tiempo desde una perspectiva real.

Un switch ideal que abre y cierra de manera periódica se puede representar como una *resistencia LTV*. Este switch repite de forma periódica su apertura y cerrado, y lo realiza alternadamente para diferentes periodos de tiempo. El switch que opera periodicamente es un elemento clave en circuitos conmutados.

En un capacitor, si la relación $q - v$ (carga-voltaje) cambia con el tiempo, *el capacitor se dice variante en el tiempo*. Por ejemplo, supongamos que se varía el espacio entre las placas paralelas del capacitor, esto usando un mecanismo de leva accionado por un motor, haciendo que la capacitancia C del capacitor se convierte en una función del tiempo $C(t)$.

Teniendo un inductor, si la relación $\lambda - i$ (flujo-corriente) varía con el tiempo, *el inductor es llamado variante en el tiempo*. Como ejemplo, suponiendo que se varía el número de vueltas del devanado, esto a través de un conducto deslizante accionado por algun motor, así la inductancia L se vuelve una función del tiempo preescrita como $L(t)$.

Los capacitores e inductores LTV son útiles en el análisis de modelado y el diseño de muchos circuitos de comunicación, como por ejemplo los moduladores, demoduladores, amplificadores paramétricos, etc [Leon O. Chua, 1987.].

3.3. Modelado de Sistemas LTV en BondGraph

3.3.1. Elementos Básicos

Se toma como punto de partida el modelado de sistemas LTI en Bond Graph y éste es modificado para sistemas LTV, obteniendo así la metodología que permite la obtención del modelo matemático a partir del Bond Graph.

Los elementos básicos de la metodología sufren algunos cambios en cuanto a sus relaciones, mientras la representación gráfica se mantiene sin cambio, estos cambios serán descritos a continuación.

Los **elementos pasivos Puerto-1** descritos en el Capítulo 2 mantienen su representación. Mientras tanto, las tablas 2.2, 2.3 y 2.4 que definen las ecuaciones de los elementos se reescriben en la tabla 3.1 para el caso en el que estos elementos dependen del tiempo.

Tabla 3.1: Ecuaciones para los elementos R, C e I para sistemas LTV.

	Dominio Físico	Ecuación lineal
Elementos R	Eléctrico	$v(t) = R(t) \cdot i(t)$
	Mecánico traslacional	$F(t) = b(t) \cdot V(t)$
Elementos C	Eléctrico	$v(t) = \int \frac{i(t)}{C(t)} dt$
	Mecánico traslacional	$F(t) = \int k(t) \cdot V(t) dt$
Elementos I	Eléctrico	$i(t) = \int \frac{v(t)}{L(t)} dt$
	Mecánico traslacional	$V(t) = \int \frac{F(t)}{M(T)} dt$

Los **elementos activos Puerto-1** los cuales son los elementos que suministran energía al sistema, no sufren cambio alguno, se mantienen como se muestran en el Capítulo 2 y su representación se muestra en las figuras 2.7 y 2.8.

Para los **elementos ideales Puerto-2** sólo cabe resaltar algunos conceptos del capítulo 2 los cuales se muestran a continuación.

El transformador descrito en Bond Graph (TF) es representado en la figura 2.9.

Si m no es una *constante* se puede considerar que el transformador es modulado y éste será denotado como MTF: $m(\cdot)$. Así, las relaciones constitutivas del transformador se observan en la ecuación (3.24).

$$\begin{aligned} e_1 &= m(t)e_2 \\ f_2 &= m(t)f_1 \end{aligned} \tag{3.24}$$

En comparación con el transformador, un girador (GY) es representado por la figura 2.10.

Si r no es una *constante*, entonces se diría que el girador esta siendo *Modulado*, si es el caso, este se denotará como MGY: $r(\cdot)$. Podemos determinar las relaciones constitutivas de éste y definir $r(t)$, así se obtiene la ecuación (3.25).

$$\begin{aligned} e_1 &= r(t)f_2 \\ e_2 &= r(t)f_1 \end{aligned} \tag{3.25}$$

Los **elementos de Unión Puerto-3**, los cuales son parte fundamental del modelado en Bond Graph, no sufren ninguna modificación al ser utilizados para modelar sistemas LTV, de esta forma se seguirá usando la descripción para la Unión-0 que son las ecuaciones (2.7) y la figura 2.12 y para la Unión-1 las ecuaciones (2.8) y la figura 2.13.

3.3.2. Causalidad para Sistemas LTV

Ésta seguirá dependiendo del intercambio de potencia entre elementos, se seguirán teniendo las mismas situaciones (figura 2.14), el trazo causal (figura 2.15) y las mismas reglas de asignación de causalidad.

La asignación de causalidad en los elementos es mostrada en las tablas 3.2 y la tabla 3.3.

Por otra parte, en cuanto al procedimiento para el modelado de los sistemas LTV en Bond Graph no se modifica con respecto al visto el Capítulo 2 (Pág.34).

3.3.3. Matriz de Estructura unión para Sistemas LTV

Esta matriz, a pesar de tener relación con la descrita en el capítulo 2, tiene diferencias significativas, y es debido a éste hecho que se realiza una descripción más detallada en esta sección.

Considerando que se tiene el modelo en Bond Graph del sistema a analizar, se comienza por determinar los vectores clave y las relaciones constitutivas.

Vectores Clave

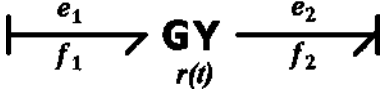
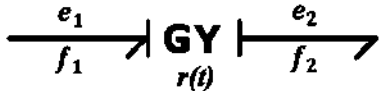
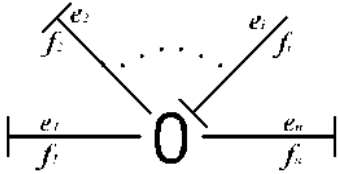
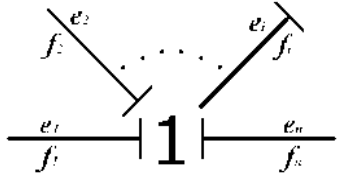
Es conocido que la metodología Bond Graph permite escribir de forma estructurada las relaciones que caracterizan la evolución dinámica del sistema y combinar las ecuaciones diferenciales y algebraicas; esta forma estructurada está compuesta por todos los elementos. Donde los elementos TF y GY , junto con las uniones 0 y 1, componen la llamada *estructura de unión*, donde el intercambio de energía entre las diversas partes del sistema dinámico y la propiedad de conservación de la energía pueden ser observados.

La estructura de unión se puede observar en la figura 3.2. En ésta figura se pueden observar los elementos *R invariantes en el tiempo* y *R variantes en el tiempo* (R_{TI} y R_{TV}); así como los elementos *C invariantes en el tiempo* y *C variantes en el tiempo* (C_{TI} y C_{TV}) y finalmente, los elementos *I invariantes en el tiempo* e *I variantes en el tiempo* (I_{TI} y I_{TV}).

Tabla 3.2: Asignación de causalidades para elementos LTV (Parte 1).

Causalidad	Elementos	Ecuación Lineal
Necesaria	$Se \longrightarrow \nearrow$	e -Impuesta
	$Sf \vdash \longrightarrow \nearrow$	f -Impuesta
Integral	$\longrightarrow \nearrow I$	$f_I(t) = \frac{1}{L(t)} \int e_I(t) dt$ $f_I(t) = \frac{\rho_I(t)}{L(t)}$
	$\vdash \longrightarrow \nearrow C$	$e_c(t) = \frac{1}{C(t)} \int f_c(t) dt$ $e_c(t) = \frac{q_c(t)}{C(t)}$
Derivativa	$\vdash \longrightarrow \nearrow I$	$e_I(t) = \frac{d}{dt} [L(t) \cdot f_I(t)]$ $\rho_I(t) = L(t) f_I(t)$
	$\longrightarrow \nearrow C$	$f_c(t) = \frac{d}{dt} [C(t) \cdot e_I(t)]$ $q_c(t) = C(t) e_c(t)$
Restrictiva	$\vdash \xrightarrow[e_1]{f_1} \text{TF} \xrightarrow[e_2]{f_2} \nearrow$ $m(t)$	$e_1(t) = m(t) e_2(t)$ $f_2(t) = m(t) f_1(t)$
	$\xrightarrow[e_1]{f_1} \nearrow \text{TF} \xrightarrow[e_2]{f_2} \nearrow$ $m(t)$	$e_2(t) = \frac{1}{m(t)} e_1(t)$ $f_1(t) = \frac{1}{m(t)} f_2(t)$

Tabla 3.3: Asignación de causalidades para elementos LTV (Parte 2).

Causalidad	Elemento	Ecuación Lineal
Restictiva		$e_1(t) = r(t)f_2(t)$ $e_2(t) = r(t)f_1(t)$
		$f_1(t) = \frac{1}{r(t)}e_2(t)$ $f_2(t) = \frac{1}{r(t)}e_1(t)$
		$e_1 = e_i; e_2 = e_i; \dots; e_n = e_i$ $a_i f_i = -(a_1 f_1 + a_2 f_2 + \dots + a_n f_n)$
		$f_1 = f_i; f_2 = f_i; \dots; f_n = f_i$ $a_i e_i = -(a_1 e_1 + a_2 e_2 + \dots + a_n e_n)$
Arbitraria		$e_R(t) = R(t)f_R(t)$
		$f_R(t) = e_R(t)/R(t)$

Los estados $x(t)$ y $x_d(t)$ están compuestos de las variables de energía $p(t)$ y $q(t)$ asociados con los elementos C_{TI} , C_{TV} , I_{TI} e I_{TV} , en causalidad integral y derivativa, respectivamente; $u(t)$ representa la entrada de la planta, mientras que $z(t)$ y $z_d(t)$ son los vectores de co-energía en causalidad integral y derivativa, respectivamente y $D_{in}(t)$ y $D_{out}(t)$ son una combinación de $e(t)$ y $f(t)$ representando los cambios entre el campo de elementos de disipación (R_{TI} y R_{TV}).

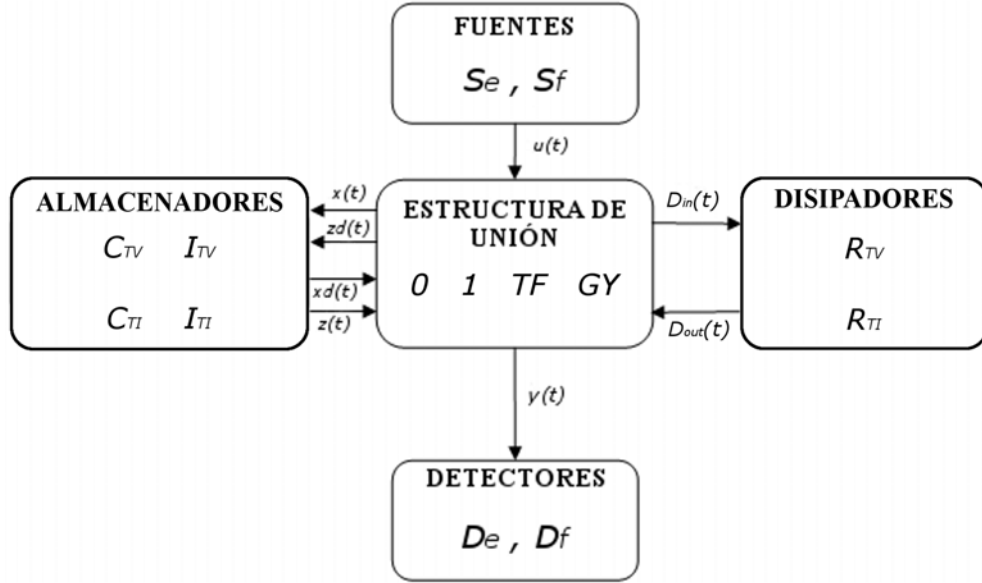


Figura 3.2: Diagrama de bloques de la estructura de unión, los vectores clave; tomando en cuenta los elementos variantes en el tiempo.

Relaciones Constitutivas y Ecuación de Estado

Las relaciones existentes en la figura 3.2 para almacenamiento y para la disipación son:

$$z(t) = F(t)x(t) \quad (3.26)$$

$$z_d(t) = F_d(t)x_d(t) \quad (3.27)$$

$$D_{out}(t) = L(t)D_{in}(t) \quad (3.28)$$

donde,

- $F(t)$ es una función que relaciona cada z_i con x_i para $i = 1, \dots, n$.
- $F_d(t)$ es una función que relaciona cada z_{di} con x_{di} para $i = 1, \dots, m$.
- $L(t)$ es una función que relaciona cada $D_{out\ i}$ con $D_{in\ i}$ para $i = 1, \dots, r$.

Cada uno de los elementos listados anteriormente está descrito por una ley física o *relación constitutiva*.

Éstas relaciones constitutivas son conocidas como se describirá posteriormente en ejemplos ilustrativos, en la metodología de Bond Graph, $L(t)$, $F(t)$, $F_d(t)$ también son matrices reales de dimensiones $r \times r$, $n \times n$ y $m \times m$, respectivamente.

El modelo matemático de un Bond Graph se obtiene a través de las relaciones que se observan en la estructura unión, y pueden ser escritas como se muestra a continuación:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ D_{in}(t) \\ y(t) \\ z_d(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11}(t) & S_{12}(t) & S_{13}(t) & S_{14}(t) \\ S_{21}(t) & S_{22}(t) & S_{23}(t) & 0 \\ S_{31}(t) & S_{32}(t) & S_{33}(t) & 0 \\ S_{41}(t) & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z(t) \\ D_{out}(t) \\ u(t) \\ \dot{x}_d(t) \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

La matriz de estructura unión será definida como " $S(t)$ ", la cual se encuentra particionada de acuerdo a la dimensión de sus vectores clave. En el caso de que el sistema analizado sea un sistema conservativo en cuanto a energía, la submatrices $S_{ij}(t)$ tienen las siguientes propiedades:

- ✠ Las matrices $S_{11}(t)$ y $S_{22}(t)$ son matrices antisimétricas.
- ✠ La matriz $S_{12}(t)$ es la transpuesta negativa de la matriz $S_{21}(t)$.

La representación de un Sistema LTV en espacio de estados esta dada como

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \quad (3.30)$$

$$y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t) \quad (3.31)$$

Relacionando las ecuaciones (3.30) y (3.31) con la ecuación (3.29) podemos llevar a cabo la determinación de las matrices $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ y $D(t)$, apartir de la matriz de estructura unión.

A partir de (3.29) se tiene

$$z_d(t) = S_{41}(t)z(t) \quad (3.32)$$

se sabe de (3.27) que

$$x_d(t) = F_d^{-1}(t)z_d(t) \quad (3.33)$$

sustituyendo las expresiones (3.32) y (3.26).en (3.33) y asumiendo que $F_d^{-1}(t)$ no tendrá singularidades, se tiene

$$x_d(t) = F_d^{-1}(t)z_d(t) = F_d^{-1}(t)S_{41}(t)F(t)x(t) \quad (3.34)$$

si se deriva la expresión (3.34) se obtiene

$$\begin{aligned} \dot{x}_d(t) &= \dot{F}_d^{-1}(t)S_{41}(t)F(t)x(t) + F_d^{-1}(t)\dot{S}_{41}(t)F(t)x(t) + \\ &+ F_d^{-1}(t)S_{41}(t)\dot{F}(t)x(t) + F_d^{-1}(t)S_{41}(t)F(t)\dot{x}(t) \end{aligned} \quad (3.35)$$

A partir de la expresión (3.29) se puede obtener también,

$$D_{in}(t) = S_{21}(t)z(t) + S_{22}(t)D_{out}(t) + S_{23}(t)u(t)$$

sustituyendo (3.26), (3.28) y finalmente reescribiendo.

$$D_{in}(t) = [I - S_{22}(t)L(t)]^{-1} (S_{21}(t)F(t)x(t) + S_{23}(t)u(t)) \quad (3.36)$$

sustituyendo la expresión (3.36) en la (3.28) y considerando que el término $[I - S_{22}(t)L(t)]^{-1}$ no tendrá singularidades, se obtiene

$$D_{out}(t) = L(t)D_{in}(t) = L(t)(I - S_{22}(t)L(t))^{-1}(S_{21}(t)F(t)x(t) + S_{23}(t)u(t)) \quad (3.37)$$

definiendo

$$M(t) = L(t)(I - S_{22}(t)L(t))^{-1} \quad (3.38)$$

(3.37) se puede reescribir como,

$$D_{out}(t) = M(t)S_{21}(t)F(t)x(t) + M(t)S_{23}(t)u(t) \quad (3.39)$$

Finalmente las ecuaciones (3.26), (3.35) y (3.39) son sustituidas en la ecuación (3.40), siendo ésta procedente de (3.29), y que resulta ser

$$\dot{x}(t) = S_{11}(t)z(t) + S_{12}(t)D_{out}(t) + S_{13}(t)u(t) + S_{14}(t)\dot{x}_d(t) \quad (3.40)$$

después de sustituir las ecuaciones mencionadas se tiene la siguiente expresión

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) = & S_{11}(t)F(t)x(t) + S_{12}(t)M(t)S_{21}(t)F(t)x(t) + S_{12}(t)M(t)S_{23}(t)u(t) + \\ & + S_{13}(t)u(t) + S_{14}(t)F_d^{-1}(t)S_{41}(t)F(t)x(t) + \\ & + S_{14}(t)F_d^{-1}(t)\dot{S}_{41}(t)F(t)x(t) + \\ & + S_{14}(t)F_d^{-1}(t)S_{41}(t)\dot{F}(t)x(t) + \\ & + S_{14}(t)F_d^{-1}(t)S_{41}(t)F(t)\dot{x}(t) \end{aligned} \quad (3.41)$$

agrupando términos y reescribiendo la ecuación (3.41) se obtiene

$$\begin{aligned} E(t)\dot{x}(t) = & [S_{11}(t)F(t) + S_{12}(t)M(t)S_{21}(t)F(t) + S_{14}(t)F_d^{-1}(t)S_{41}(t)F(t) + \\ & + S_{14}(t)F_d^{-1}(t)\dot{S}_{41}(t)F(t) + S_{14}(t)F_d^{-1}(t)S_{41}(t)\dot{F}(t)]x(t) + \\ & + [S_{13}(t) + S_{12}(t)M(t)S_{23}(t)]u(t) \end{aligned} \quad (3.42)$$

donde

$$E(t) = I - S_{14}(t)F_d^{-1}(t)S_{41}(t)F(t) \quad (3.43)$$

Recordando a continuación la representación en Espacio de Estados de un Sistema LTV, descrita en las ecuaciones (3.30) y (3.31).

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(t)x(t) + B(t)u(t) \\ y(t) &= C(t)x(t) + D(t)u(t) \end{aligned}$$

Realizando una comparación entre la ecuación (3.30) con la (3.42) podemos obtener las matrices $A(t)$, $B(t)$, las cuales dependerán de elementos de la matriz de estructura unión

y las relaciones constitutivas. Así,

$$\begin{aligned}
 A(t) = & E^{-1}(t) [S_{11}(t) + S_{12}(t)M(t)S_{21}(t)] F(t) + \\
 & + E^{-1}(t)S_{14}(t) \left[F_d^{-1}(t)S_{41}(t) + F_d^{-1}(t)\dot{S}_{41}(t) \right] F(t) + \\
 & + E^{-1}(t)S_{14}(t)F_d^{-1}(t)S_{41}(t)\dot{F}(t)
 \end{aligned} \tag{3.44}$$

de igual forma se tiene,

$$B(t) = E^{-1}(t) [S_{13}(t) + S_{12}(t)M(t)S_{23}(t)] \tag{3.45}$$

Ahora, de la matriz descrita en (3.29) se obtiene $y(t)$ de la siguiente manera

$$y(t) = S_{31}(t)z(t) + S_{32}(t)D_{out}(t) + S_{33}(t)u(t) \tag{3.46}$$

sustituyendo las ecuaciones (3.26) y (3.39), definidas anteriormente, en (3.46) se obtiene (3.47).

$$\begin{aligned}
 y(t) = & S_{31}(t)F(t)x(t) + S_{32}(t)M(t)S_{21}(t)F(t)x(t) + \\
 & + S_{32}(t)M(t)S_{23}(t)u(t) + S_{33}(t)u(t)
 \end{aligned} \tag{3.47}$$

reordenando (3.47) se tiene

$$y(t) = [S_{31}(t) + S_{32}(t)M(t)S_{21}(t)] F(t)x(t) + [S_{33}(t) + S_{32}(t)M(t)S_{23}(t)] u(t) \tag{3.48}$$

al analizar la relación existente entre las ecuaciones (3.31) y (3.48) se definen las matrices $C(t)$ y $D(t)$ para completar el modelo del sistema LTV basado en la metodología de Bond Graph.

$$C(t) = [S_{31}(t) + S_{32}(t)M(t)S_{21}(t)] F(t) \tag{3.49}$$

$$D(t) = S_{33}(t) + S_{32}(t)M(t)S_{23}(t) \tag{3.50}$$

De lo anterior se puede concluir que la metodología Bond Graph apoya a la obtención de la ecuación de estado de un sistema LTV, para posteriormente realizar simulaciones o investigaciones sobre este sistema.

A continuación se presentarán algunos ejemplos que muestran las características de este modelado de una forma dinámica, también se retomarán ejemplos realizados anteriormente, para realizar una comparación entre la metodología clásica y la metodología de Bond Graph.

3.4. Ejemplos Ilustrativos para Fines de Estudio

Ejemplo 3.3 *Partiendo del modelo en Bond Graph de la figura 3.3 se obtendrá su ecuación en espacio de estados.*

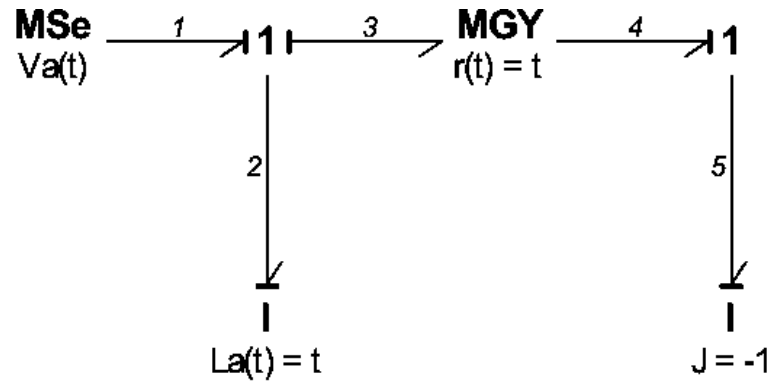


Figura 3.3: Bond Graph LTV con fines comparativos.

Como se mencionó anteriormente, se comienza con la obtención de los vectores clave y a continuación las relaciones constitutivas para obtener la matriz de estructura unión del sistema.

■ Vectores clave:

$$u(t) = [e_1(t)] \quad ; \quad x(t) = \begin{bmatrix} p_2(t) \\ p_5(t) \end{bmatrix} \quad ; \quad \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} e_2(t) \\ e_5(t) \end{bmatrix} \quad ; \quad z(t) = \begin{bmatrix} f_2(t) \\ f_5(t) \end{bmatrix}$$

$$x_d(t) = [0] \quad ; \quad z_d(t) = [0]$$

Los vectores clave $D_{out}(t)$ y $D_{in}(t)$ no se requieren en este ejemplo, debido a que no se cuenta con elementos disipadores de energía.

■ Relaciones constitutivas:

La relación que existe entre los vectores clave $x_d(t)$ y $z_d(t)$, descrita por la matriz $F_d(t)$ no es necesaria, debido a la inexistencia de elementos en causalidad derivativa.

Por otra parte la relación

$$z(t) = F(t)x(t)$$

la cual es

$$\begin{bmatrix} f_2(t) \\ f_5(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{L_a(t)} & 0 \\ 0 & \frac{1}{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_2(t) \\ p_5(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{t} & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_2(t) \\ p_5(t) \end{bmatrix} \quad (3.51)$$

También existe la relación tal que:

$$\begin{aligned} e_3(t) &= t \cdot f_4(t) \\ e_4(t) &= t \cdot f_3(t) \end{aligned} \quad (3.52)$$

Se construirá la matriz de estructura unión, comenzando por escribir la ecuación de estado de un Bond Graph, tomando en cuenta que en este sistema sólo se tiene presente la causalidad integral.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ D_{in}(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11}(t) & S_{12}(t) & S_{13}(t) \\ S_{21}(t) & S_{22}(t) & S_{23}(t) \\ S_{31}(t) & S_{32}(t) & S_{33}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z(t) \\ D_{out}(t) \\ u(t) \end{bmatrix}$$

Sustituyendo los vectores clave y tomando en cuenta que no se tienen detectores (D_e, D_f) .

$$\begin{bmatrix} e_2(t) \\ e_5(t) \\ \dots \\ D_{in}(t) \\ \dots \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -t & \vdots & 0 & \vdots & 1 \\ t & 0 & \vdots & 0 & \vdots & 0 \\ \dots & \dots & \cdot & \dots & \cdot & \dots \\ - & - & \vdots & - & \vdots & - \\ \dots & \dots & \cdot & \dots & \cdot & \dots \\ - & - & \vdots & - & \vdots & - \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_2(t) \\ f_5(t) \\ \dots \\ D_{out}(t) \\ \dots \\ e_1(t) \end{bmatrix} \quad (3.53)$$

A partir de (3.53) se dedujo que la matriz $A(t)$ del modelo matemático estará dada de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} A(t) = S_{11}(t)F(t) &= \begin{bmatrix} 0 & -t \\ t & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{t} & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \\ A(t) &= \begin{bmatrix} 0 & t \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.54)$$

Nótese que la expresión (3.54) es idéntica a la matriz $A(t)$ del ejemplo 3.1. Se emplearon tres plataformas de software, MATLAB, SIMNON y 20-SIM para compararla respuesta de los estados del ejemplo 3.1.

La respuesta obtenida con MATLAB para el ejemplo 3.1. está dada por,

$$x(t) = \begin{bmatrix} 1 + \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{72}t^6 + \dots \\ 1 + \frac{1}{12}t^4 + \frac{1}{504}t^7 + \dots \end{bmatrix}$$

La respuesta en forma gráfica se muestra en la figura 3.4.

La respuesta obtenida mediante SIMNON se aprecia en la figura 3.5. Se observa en la gráfica 3.5 el mismo valor máximo que en la gráfica 3.4.

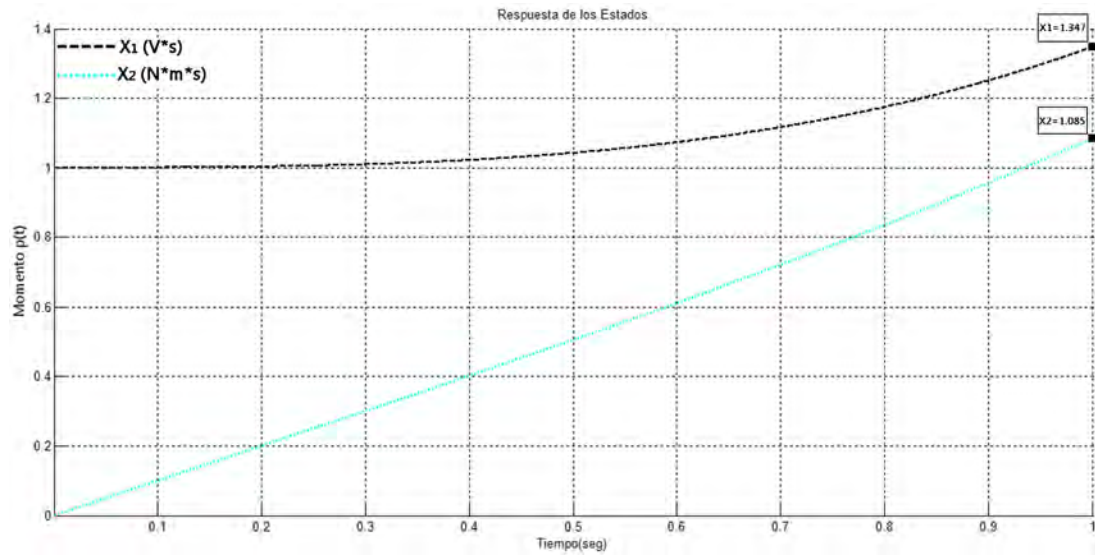


Figura 3.4: Respuesta de los Estados y valores obtenidos tras un segundo de simulación utilizando MATLAB.

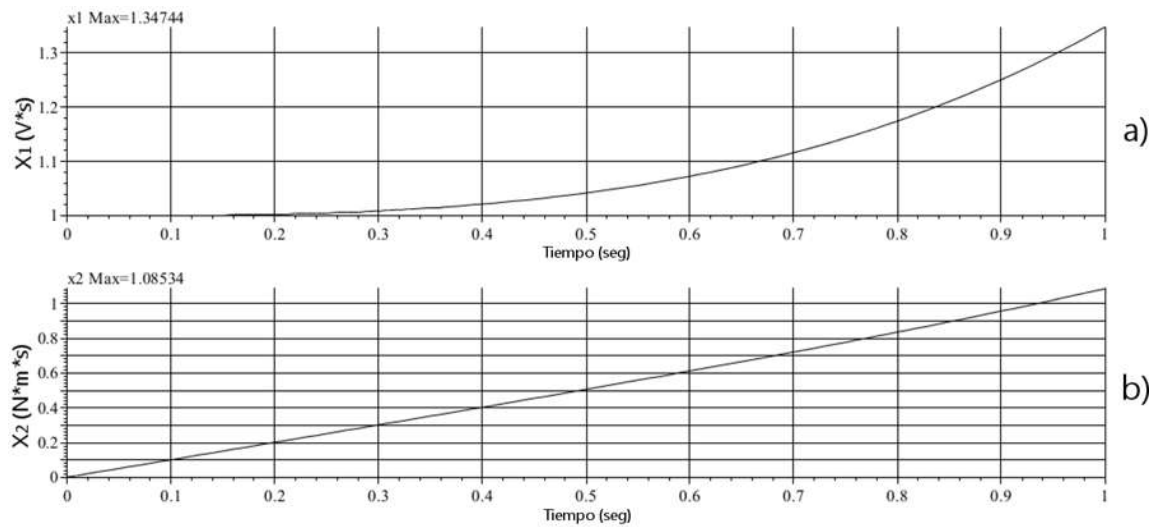


Figura 3.5: Estados del sistema en SIMNON; a) Estado $x_1(t)$, b) Estado $x_2(t)$.

Nótese que el comportamiento de los estados es idéntico lo que corrobora que la simulación de la solución del sistemas concuerda con la simulación de las ecuaciones de estado, y para terminar se mostrará el sistema modelado en Bond Graph (figura 3.3) sobre la plataforma 20-SIM (figura 3.6) y de la misma forma las gráficas de la respuesta de los estados.

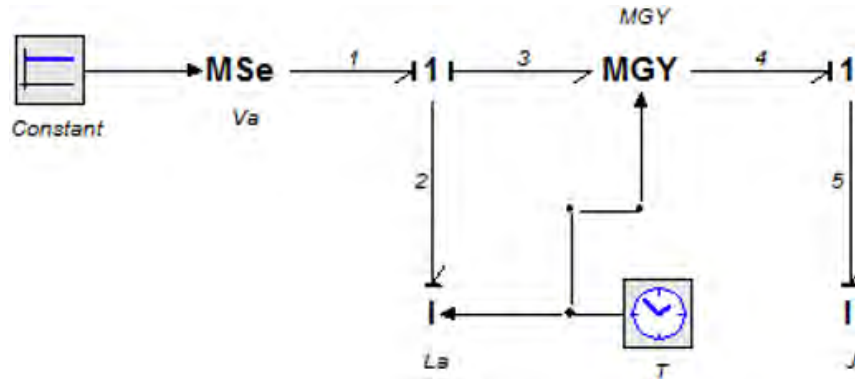


Figura 3.6: Ejemplo 3.3 simulado en 20-SIM.

La gráfica de la respuesta de los estado se muestra en la figura 3.7.

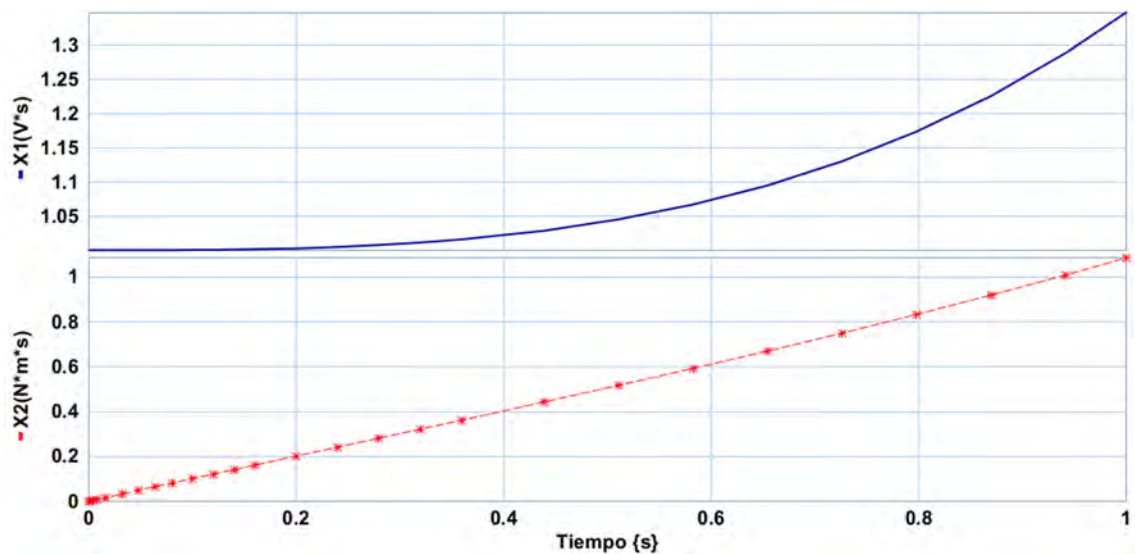


Figura 3.7: Simulación en 20-SIM.

Ejemplo 3.4 *Se obtendrá la representación en espacio de estados del circuito descrito en el ejemplo 3.2, el cual es un circuito RLC representado por la figura 3.1.*

La figura 3.8 muestra la representación del sistema en Bond Graph.

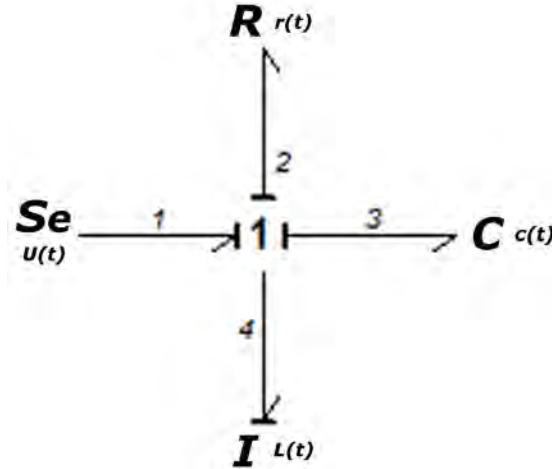


Figura 3.8: Representación de un circuito RLC en Bond Graph.

Los vectores clave son:

$$u(t) = e_1(t) \quad ; \quad D_{in}(t) = f_2(t) \quad ; \quad D_{out}(t) = e_2(t)$$

$$x(t) = \begin{bmatrix} q_3(t) \\ p_4(t) \end{bmatrix} \quad ; \quad \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} f_3(t) \\ e_4(t) \end{bmatrix} \quad ; \quad z(t) = \begin{bmatrix} e_3(t) \\ f_4(t) \end{bmatrix}$$

$$x_d = [0] \quad ; \quad z_d = [0]$$

quedando las relaciones constitutivas de la siguiente manera:

$$z(t) = F(t)x(t)$$

$$\begin{bmatrix} e_3(t) \\ f_4(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{C(t)} & 0 \\ 0 & \frac{1}{L(t)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_3(t) \\ p_4(t) \end{bmatrix} \quad (3.55)$$

también se tiene

$$\begin{aligned} D_{out}(t) &= L(t)D_{in}(t) \\ e_2(t) &= r(t)f_2(t) \end{aligned} \quad (3.56)$$

y la salida se define como $y(t) = e_2(t)$. Así la matriz de estructura de unión, tiene la forma (3.57).

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ D_{in}(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11}(t) & S_{12}(t) & S_{13}(t) \\ S_{21}(t) & S_{22}(t) & S_{23}(t) \\ S_{31}(t) & S_{32}(t) & S_{33}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z(t) \\ D_{out}(t) \\ u(t) \end{bmatrix} \quad (3.57)$$

Siendo (3.58) es el resultado de la contrucción satisfactoria de la matriz de estructura unión.

$$\begin{bmatrix} f_3(t) \\ e_4(t) \\ \dots \\ f_2(t) \\ \dots \\ e_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \vdots & 0 & \vdots & 0 \\ -1 & 0 & \vdots & -1 & \vdots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 1 & \vdots & 0 & \vdots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \vdots & 1 & \vdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_3(t) \\ f_4(t) \\ \dots \\ e_2(t) \\ \dots \\ e_1(t) \end{bmatrix} \quad (3.58)$$

A partir de las ecuaciones (3.55), (3.56) y (3.58) se obtiene el modelo matemático en espacio de estado, comenzando por determinar las matrices $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ y $D(t)$:

Tomando en cuenta que el sistema sólo cuenta con causalidades integrales podemos decir que $E(t) = I$, el primer elemento que tenemos que definir es $M(t)$ y siendo $S_{22}(t) = 0$, tenemos que $M(t) = r(t)$.

$$\begin{aligned}
A(t) &= [S_{11}(t) + S_{12}(t)M(t)S_{21}(t)] F(t) \\
&= \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} r(t) \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} \frac{1}{C(t)} & 0 \\ 0 & \frac{1}{L(t)} \end{bmatrix} \\
A(t) &= \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{L(t)} \\ -\frac{1}{C(t)} & -\frac{r(t)}{L(t)} \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{3.59}$$

$$\begin{aligned}
B(t) &= S_{13}(t) + S_{12}(t)M(t)S_{23}(t) \\
&= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} r(t) [0] \\
B(t) &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{3.60}$$

Para la salida que se proponen tenemos que las matrices $C(t)$ y $D(t)$ se calculan de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
C(t) &= [S_{31}(t) + S_{32}(t)M(t)S_{21}(t)] F(t) \\
&= \begin{bmatrix} r(t) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{C(t)} & 0 \\ 0 & \frac{1}{L(t)} \end{bmatrix} \\
C(t) &= \begin{bmatrix} 0 & \frac{r(t)}{L(t)} \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{3.61}$$

$$D(t) = S_{33}(t) + S_{32}(t)M(t)S_{23}(t) = 0 \tag{3.62}$$

Quedando el modelo matemático como:

$$\begin{bmatrix} f_3(t) \\ e_4(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{L(t)} \\ -\frac{1}{C(t)} & -\frac{r(t)}{L(t)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_3(t) \\ p_4(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} e_1(t) \tag{3.63}$$

$$e_2(t) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{r(t)}{L(t)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_3(t) \\ p_4(t) \end{bmatrix} \tag{3.64}$$

Al comparar las ecuaciones (3.21) y (3.22) obtenidas en el ejemplo 3.2, contra las ecuaciones (3.63) y (3.64) del ejemplo actual podemos observar que no son idénticas a pesar de que provienen del mismo sistema. Esto no es un error creado por el modelado de sistemas en Bond Graph, esto se debe a que las variables de estado no se encuentran en las mismas coordenadas, ya que las variables de estado del ejemplo 3.2 son $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_c(t) \\ i(t) \end{bmatrix}$ y las variables de estado que se están utilizando para el ejemplo basado en el modelado de Bond Graph son $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_3(t) \\ p_4(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_c(t) \\ \lambda_L(t) \end{bmatrix}$.

Se puede realizar un cambio de coordenadas utilizando el vector clave $z(t)$ el cual contiene las variables de estado que se desea tener. Este cambio de coordenadas se lleva a cabo utilizando las matrices conocidas anteriormente, para finalmente obtener una nueva representación en espacio de estados del sistema.

Resumiendo el procedimiento para lo anterior se obtiene:

$$\dot{\bar{z}}(t) = \bar{A}(t)z(t) + \bar{B}(t)u(t) \quad (3.65)$$

donde

$$\bar{A}(t) = \left[\dot{F}(t) + F(t)A(t) \right] F^{-1}(t) \quad (3.66)$$

$$\bar{B}(t) = F(t)B(t) \quad (3.67)$$

También tenemos que:

$$y(t) = \bar{C}(t)z(t) + \bar{D}(t)u(t) \quad (3.68)$$

donde

$$\bar{C}(t) = S_{31}(t) + S_{32}(t)M(t)S_{21}(t) \quad (3.69)$$

$$\bar{D}(t) = S_{32}(t)M(t)S_{23}(t) + S_{33}(t) \quad (3.70)$$

Finalmente sustituyendo los elementos ya conocidos tenemos que:

$$\begin{aligned}\bar{A}(t) &= \left[\begin{bmatrix} -\frac{\dot{C}(t)}{C^2(t)} & 0 \\ 0 & -\frac{\dot{L}(t)}{L^2(t)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{C(t)L(t)} \\ -\frac{1}{C(t)L(t)} & -\frac{r(t)}{L^2(t)} \end{bmatrix} \right] \begin{bmatrix} C(t) & 0 \\ 0 & L(t) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -\frac{\dot{C}(t)}{C^2(t)} & -\frac{1}{C(t)L(t)} \\ -\frac{1}{C(t)L(t)} & -\frac{r(t)+\dot{L}(t)}{L^2(t)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C(t) & 0 \\ 0 & L(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\dot{C}(t)}{C(t)} & -\frac{1}{C(t)} \\ -\frac{1}{L(t)} & -\frac{r(t)+\dot{L}(t)}{L(t)} \end{bmatrix} \quad (3.71)\end{aligned}$$

$$\bar{B}(t) = F(t)B(t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{C(t)} & 0 \\ 0 & \frac{1}{L(t)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L(t)} \end{bmatrix} \quad (3.72)$$

y finalmente

$$\begin{aligned}\bar{C}(t) &= S_{31}(t) + S_{32}(t)M(t)S_{21}(t) \\ &= r(t) \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & r(t) \end{bmatrix} \quad (3.73)\end{aligned}$$

Debido a que $D(t) = 0$ se puede reescribir el sistema de la siguiente manera, dadas las ecuaciones (3.65) y (3.68):

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_3(t) \\ \dot{f}_4(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\dot{C}(t)}{C(t)} & -\frac{1}{C(t)} \\ -\frac{1}{L(t)} & -\frac{r(t)+\dot{L}(t)}{L(t)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_3(t) \\ f_4(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L(t)} \end{bmatrix} e_1(t) \quad (3.74)$$

$$e_2(t) = \begin{bmatrix} 0 & r(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_3(t) \\ f_4(t) \end{bmatrix} \quad (3.75)$$

Así, de esta manera las ecuaciones (3.74) y (3.75) idénticas a las obtenidas de manera tradicional ((3.21) y (3.22)), corroborando que lo obtenido a partir de la metodología de Bond Graph es correcto.

Ejemplo 3.5 Obtener el modelo en espacio de estado para una línea de transmisión la cual está representada por el circuito mostrado en la figura 3.9.

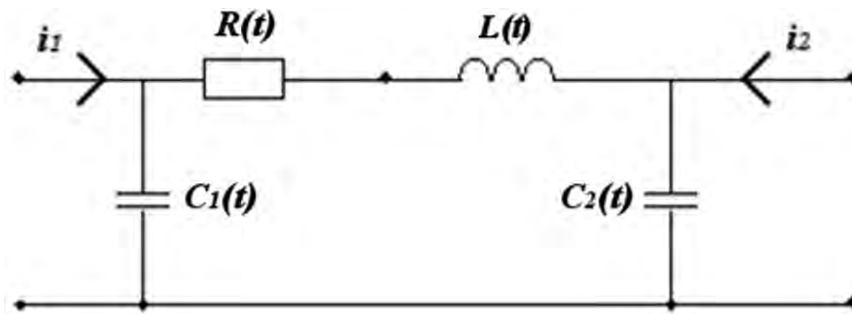


Figura 3.9: Línea de Transmisión como Sistema LTV.

A continuación en la figura 3.10 se muestra el modelo del sistema en Bond Graph y se procede a la obtención de la matriz de estructura unión y el modelo matemático en espacio de estados.

De igual manera, a partir del modelo en Bond Graph (figura 3.10) se obtiene la matriz de estructura de unión y posteriormente el modelo en espacio de estado.

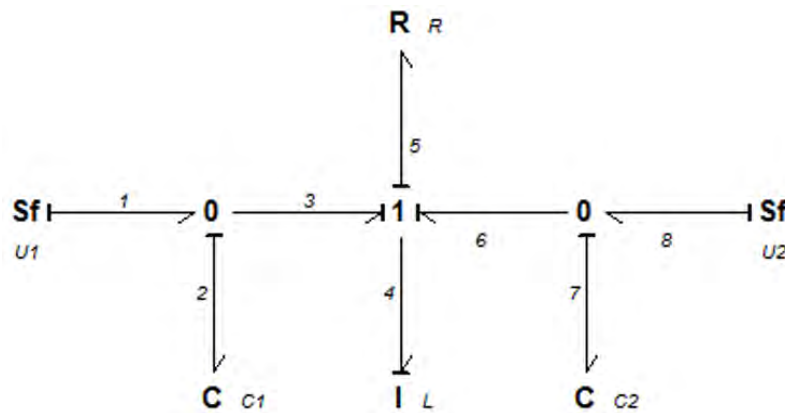


Figura 3.10: Bond Graph del sistema de una línea de transmisión.

■ Vectores Clave

$$u(t) = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_8(t) \end{bmatrix} \quad ; \quad D_{in}(t) = [f_5(t)] \quad ; \quad D_{out}(t) = [e_5(t)]$$

$$x(t) = \begin{bmatrix} p_4(t) \\ q_2(t) \\ q_7(t) \end{bmatrix} \quad ; \quad \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} e_4(t) \\ f_2(t) \\ f_7(t) \end{bmatrix} \quad ; \quad z(t) = \begin{bmatrix} f_4(t) \\ e_2(t) \\ e_7(t) \end{bmatrix}$$

$$x_d = [0] \quad ; \quad z_d = [0]$$

■ Relaciones Constitutivas

Al contar con un elemento de disipación de energía se obtiene la siguiente relación constitutiva

$$\begin{aligned} D_{out}(t) &= L(t)D_{in}(t) \\ e_5(t) &= R(t)f_5(t) \end{aligned} \tag{3.76}$$

y también se tiene

$$z(t) = F(t)x(t)$$

$$\begin{bmatrix} f_4(t) \\ e_2(t) \\ e_7(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{L(t)} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{C_1(t)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{C_2(t)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_4(t) \\ q_2(t) \\ q_7(t) \end{bmatrix} \tag{3.77}$$

Se puede observar que el sistema no tiene elementos en causalidad derivativa por lo tanto la relación $Z_d(t) = F_d(t)x_d(t)$ no existe ya que $F_d(t) = [0]$.

■ Matriz de Estructura Unión

Para este sistema se seleccionan como salidas los voltajes en los capacitores lo cual crea la salida $y(t) = \begin{bmatrix} e_2(t) \\ e_7(t) \end{bmatrix}$.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ D_{in}(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11}(t) & S_{12}(t) & S_{13}(t) \\ S_{21}(t) & S_{22}(t) & S_{23}(t) \\ S_{31}(t) & S_{32}(t) & S_{33}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z(t) \\ D_{out}(t) \\ u(t) \end{bmatrix}$$

Resultando en

$$\begin{bmatrix} e_4(t) \\ f_2(t) \\ f_7(t) \\ \dots \\ f_5(t) \\ \dots \\ e_2(t) \\ e_7(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & \vdots & -1 & \vdots & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & \vdots & 0 & \vdots & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & \vdots & 0 & \vdots & 0 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \cdot & \dots & \cdot & \dots & \dots \\ 1 & 0 & 0 & \vdots & 0 & \vdots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \cdot & \dots & \cdot & \dots & \dots \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 0 & \vdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 0 & \vdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_4(t) \\ e_2(t) \\ e_7(t) \\ \dots \\ e_5(t) \\ \dots \\ f_1(t) \\ f_8(t) \end{bmatrix} \quad (3.78)$$

■ Modelo en Espacio de Estados

$$M(t) = R(t) \quad ; \quad E(t) = I$$

Determinando $A(t)$ y $B(t)$ a partir de (3.78), (3.77) y (3.76).

$$\begin{aligned} A(t) &= [S_{11}(t) + S_{12}(t)M(t)S_{21}(t)] F(t) \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} r(t) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} \frac{1}{L(t)} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{C_1(t)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{C_2(t)} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$A(t) = \begin{bmatrix} -\frac{R(t)}{L(t)} & \frac{1}{C_1(t)} & \frac{1}{C_2(t)} \\ -\frac{1}{L(t)} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{L(t)} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.79)$$

$$\begin{aligned} B(t) &= S_{13}(t) + S_{12}(t)M(t)S_{23}(t) \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} R(t) \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \\ B(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.80)$$

Para las salidas que se propusieron, tenemos que las matrices $C(t)$ y $D(t)$ se calculan de la siguiente manera.

$$\begin{aligned} C(t) &= [S_{31}(t) + S_{32}(t)M(t)S_{21}(t)] F(t) \\ &= \left[\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} R(t) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right] \begin{bmatrix} \frac{1}{L(t)} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{C_1(t)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{C_2(t)} \end{bmatrix} \\ C(t) &= \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{C_1(t)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{C_2(t)} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.81)$$

$$D(t) = S_{33}(t) + S_{32}(t)M(t)S_{23}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.82)$$

Finalmente, el modelo en espacio de estados es descrito en las ecuaciones (3.83) y (3.84), concluyendo así el ejemplo 3.5

$$\begin{bmatrix} e_4(t) \\ f_2(t) \\ f_7(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R(t)}{L(t)} & \frac{1}{C_1(t)} & \frac{1}{C_2(t)} \\ -\frac{1}{L(t)} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{L(t)} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_4(t) \\ q_2(t) \\ q_7(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_8(t) \end{bmatrix} \quad (3.83)$$

$$\begin{bmatrix} e_2(t) \\ e_7(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{C_1(t)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{C_2(t)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_4(t) \\ q_2(t) \\ q_7(t) \end{bmatrix} \quad (3.84)$$

Ejemplo 3.6 *Éste ejemplo aborda un sistema que contiene **dos dominios** diferentes, también se considerará que éste que contiene elementos en **causalidad derivativa** y para este ejemplo se obtendrá su modelo en espacio de estado. El sistema es ilustrado en la figura 3.11.*

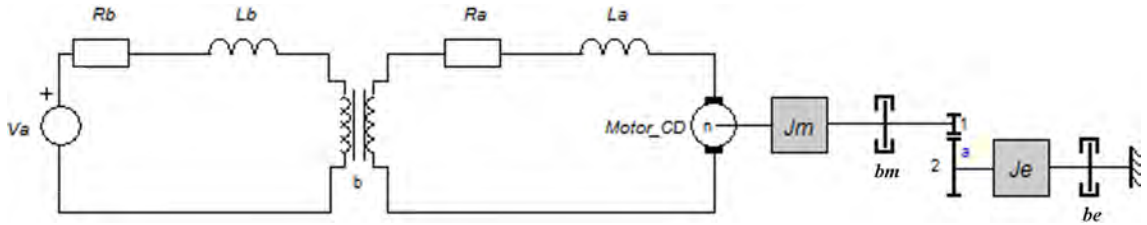


Figura 3.11: Sistema compuesto de los dominios eléctrico y mecánico.

Siendo el modelo del sistema en Bond Graph el mostrado en la figura 3.12, en esta imagen se pueden observar los elementos en causalidad derivativa, los cuales son $L_a(t)$ y $J_e(t)$. De igual manera se pueden observar aquellos elementos que son variantes en el tiempo.

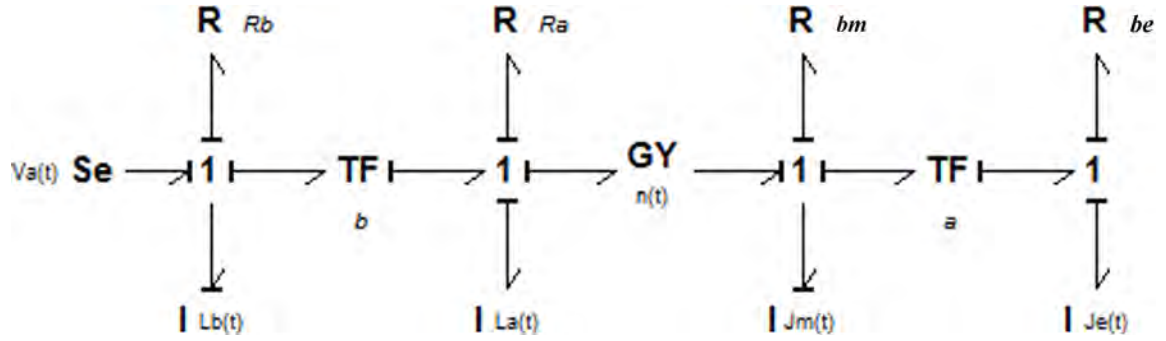


Figura 3.12: Bond Graph de un sistema que tiene causalidad derivativa.

■ Vectores Clave

$$u(t) = [e_1(t)] \quad ; \quad D_{in}(t) = \begin{bmatrix} f_2(t) \\ f_6(t) \\ f_{10}(t) \\ f_{14}(t) \end{bmatrix} \quad ; \quad D_{out}(t) = \begin{bmatrix} e_2(t) \\ e_6(t) \\ e_{10}(t) \\ e_{14}(t) \end{bmatrix}$$

$$x(t) = \begin{bmatrix} p_4(t) \\ p_{12}(t) \end{bmatrix} \quad ; \quad \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} e_4(t) \\ e_{12}(t) \end{bmatrix} \quad ; \quad z(t) = \begin{bmatrix} f_4(t) \\ f_{12}(t) \end{bmatrix}$$

$$x_d(t) = \begin{bmatrix} p_8(t) \\ p_{15}(t) \end{bmatrix} \quad ; \quad \dot{x}_d(t) = \begin{bmatrix} e_8(t) \\ e_{15}(t) \end{bmatrix} \quad ; \quad z_d(t) = \begin{bmatrix} f_8(t) \\ f_{15}(t) \end{bmatrix}$$

■ Relaciones Constitutivas

$$D_{out}(t) = L(t)D_{in}(t)$$

$$\begin{bmatrix} e_2(t) \\ e_6(t) \\ e_{10}(t) \\ e_{14}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_2(t) \\ f_6(t) \\ f_{10}(t) \\ f_{14}(t) \end{bmatrix} \quad (3.85)$$

y también se tiene la siguiente relación para los elementos en causalidad integral y asumiendo que las expresiones $\frac{1}{L_b(t)}$ y $\frac{1}{J_m(t)}$ no tendrán singularidades.

$$z(t) = F(t)x(t)$$

$$\begin{bmatrix} f_4(t) \\ f_{12}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{L_b(t)} & 0 \\ 0 & \frac{1}{J_m(t)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_4(t) \\ p_{12}(t) \end{bmatrix} \quad (3.86)$$

Si se considera que los términos $\frac{1}{L_a(t)}$ y $\frac{1}{J_e(t)}$ no tendrán singularidades, entonces la relación de los elementos en causalidad derivativa es:

$$z_d(t) = F_d(t)x_d(t)$$

$$\begin{bmatrix} f_8(t) \\ f_{15}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{L_a(t)} & 0 \\ 0 & \frac{1}{J_e(t)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_8(t) \\ p_{15}(t) \end{bmatrix} \quad (3.87)$$

Otras relaciones son aquellas que se forman a partir de los elementos descritos como transformadores ($TF: b \rightarrow TF: a$) y giradores ($GY: \eta(t)$), quedando expresadas de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} e_3(t) &= be_5(t) \\ f_5(t) &= bf_3(t) \end{aligned} \quad (3.88)$$

$$\begin{aligned} e_3(t) &= be_5(t) \\ f_5(t) &= bf_3(t) \end{aligned} \quad (3.89)$$

$$\begin{aligned} e_3(t) &= be_5(t) \\ f_5(t) &= bf_3(t) \end{aligned} \quad (3.90)$$

■ Matriz de Estructura de Unión

En este ejemplo no se selecciona alguna salida ($y(t)$).

También se utiliza la matriz de estructura de unión descrita en (3.29), la cual considera elementos en causalidad derivativa y es escrita nuevamente a continuación.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ D_{in}(t) \\ y(t) \\ z_d(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11}(t) & S_{12}(t) & S_{13}(t) & S_{14}(t) \\ S_{21}(t) & S_{22}(t) & S_{23}(t) & 0 \\ S_{31}(t) & S_{32}(t) & S_{33}(t) & 0 \\ S_{41}(t) & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z(t) \\ D_{out}(t) \\ u(t) \\ \dot{x}_d(t) \end{bmatrix}$$

Al sustituir y rescribir la ecuación anterior obtenemos:

$$\begin{bmatrix} e_4(t) \\ e_{12}(t) \\ \dots \\ f_2(t) \\ f_6(t) \\ f_{10}(t) \\ f_{14}(t) \\ \dots \\ y(t) \\ \dots \\ f_8(t) \\ f_{15}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -b\eta(t) & \vdots & -1 & -b & 0 & 0 & \vdots & 1 & \vdots & -b & 0 \\ b\eta(t) & 0 & \vdots & 0 & 0 & -1 & -a & \vdots & 0 & \vdots & 0 & -a \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & \vdots & 0 & 0 \\ b & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & \vdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \vdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & \vdots & 0 & 0 \\ 0 & a & \vdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & \vdots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ - & - & \vdots & - & - & - & - & \vdots & - & \vdots & - & - \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & \vdots & 0 & 0 \\ 0 & a & \vdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & \vdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_4(t) \\ f_{12}(t) \\ \dots \\ e_2(t) \\ e_6(t) \\ e_{10}(t) \\ e_{14}(t) \\ \dots \\ e_1(t) \\ \dots \\ e_8(t) \\ e_{15}(t) \end{bmatrix} \quad (3.91)$$

■ Modelo en Espacio de Estados

Se comienza por determinar $M(t)$ y $E(t)$. Para $M(t)$ se considerará que $S_{22}(t) = 0$

$$M(t) = (L^{-1}(t) - S_{22}(t))^{-1} = L$$

$$M(t) = \begin{bmatrix} R_b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_e \end{bmatrix} \quad (3.92)$$

Ahora $E(t)$.

$$\begin{aligned} E(t) &= I - S_{14}(t)F_d^{-1}(t)S_{41}(t)F(t) \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\frac{b^2 L_a}{L_b} & 0 \\ 0 & -\frac{a^2 J_e}{J_m} \end{bmatrix} \\ E(t) &= \begin{bmatrix} \frac{(b^2 L_a(t) + L_b(t))}{L_b(t)} & 0 \\ 0 & \frac{(a^2 J_e(t) + J_m(t))}{J_m(t)} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.93)$$

Determinando $A(t)$ y $B(t)$ utilizando de (3.85) a (3.93). Para $A(t)$ utilizaremos la ec.3.44 que se muestra a continuación.

$$\begin{aligned} A(t) &= E^{-1}(t) [S_{11}(t) + S_{12}(t)M(t)S_{21}(t)] F(t) + \\ &+ E^{-1}(t)S_{14}(t) \left[F_d^{-1}(t)S_{41}(t) + F_d^{-1}(t)\dot{S}_{41}(t) \right] F(t) + \\ &+ E^{-1}(t)S_{14}(t)F_d^{-1}(t)S_{41}(t)\dot{F}(t) \end{aligned}$$

donde las matrices $E^{-1}(t)$, $\dot{F}_d^{-1}(t)$, $\dot{S}_{41}(t)$, y $\dot{F}(t)$ son definidas a continuación.

$$E^{-1}(t) = \begin{bmatrix} \frac{(b^2 L_a(t) + L_b(t))}{L_b(t)} & 0 \\ 0 & \frac{(a^2 J_e(t) + J_m(t))}{J_m(t)} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{L_b(t)}{(b^2 L_a(t) + L_b(t))} & 0 \\ 0 & \frac{J_m(t)}{(a^2 J_e(t) + J_m(t))} \end{bmatrix} \quad (3.94)$$

$$F_d^{-1}(t) = \begin{bmatrix} \dot{L}_a(t) & 0 \\ 0 & \dot{J}_e(t) \end{bmatrix} \quad (3.95)$$

$$S_{41}(t) = \begin{bmatrix} \frac{d(b)}{dt} & 0 \\ 0 & \frac{d(a)}{dt} \end{bmatrix} = [0] \quad (3.96)$$

$$\dot{F}(t) = \begin{bmatrix} -\frac{\dot{L}_b(t)}{L_b^2(t)} & 0 \\ 0 & -\frac{\dot{J}_m(t)}{J_m^2(t)} \end{bmatrix} \quad (3.97)$$

A partir de las expresiones correspondientes a $F(t)$ de (3.86), $F_d(t)$ de (3.87), $S_{11}(t)$, $S_{12}(t)$, $S_{14}(t)$, $S_{21}(t)$, $S_{41}(t)$, de (3.91), y las definiciones (3.92), (3.94), (3.95), (3.96) y (3.97), se sustituyén en $A(t)$ y se realizan las operaciones apropiadas, así se obtiene la siguiente expresión.

$$\begin{aligned} A(t) = & \begin{bmatrix} -\frac{b^2 R_a + R_b}{(b^2 L_a(t) + L_b(t))} & -\frac{b\eta(t)L_b(t)}{J_m(t)(b^2 L_a(t) + L_b(t))} \\ \frac{b\eta(t)J_m(t)}{L_b(t)(a^2 J_e(t) + J_m(t))} & -\frac{a^2 R_e + R_m}{(b^2 J_e(t) + J_m(t))} \end{bmatrix} + \\ & + \begin{bmatrix} \frac{bL_a(t)}{(b^2 L_a(t) + L_b(t))} & 0 \\ 0 & \frac{aJ_e(t)}{(a^2 J_e(t) + J_m(t))} \end{bmatrix} + \\ & + \begin{bmatrix} \frac{b^2 \dot{L}_b(t)L_a(t)}{L_b(t)(b^2 L_a(t) + L_b(t))} & 0 \\ 0 & \frac{a^2 \dot{J}_m(t)J_e(t)}{J_m(t)(a^2 J_e(t) + J_m(t))} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Realizando la suma de las matrices en la ecuación anterior obtenemos finalmente la matriz $A(t)$ de el sistema LTV con elementos en causalidad derivativa.

$$A(t) = \begin{bmatrix} \frac{b^2 \dot{L}_b(t) \frac{L_a(t)}{L_b(t)} + b\dot{L}_a(t) - b^2 R_a - R_b}{b^2 L_a(t) + L_b(t)} & -\frac{\eta(t)bL_b(t)}{J_m(t)(b^2 L_a(t) + L_b(t))} \\ \frac{\eta(t)bJ_m(t)}{L_b(t)(a^2 J_e(t) + J_m(t))} & \frac{a^2 \dot{J}_m(t) \frac{J_e(t)}{J_m(t)} + a\dot{J}_e(t) - a^2 b_e - b_m}{a^2 J_e(t) + J_m(t)} \end{bmatrix} \quad (3.98)$$

Asumiendo que $[b^2 L_a(t) + L_b(t)] \neq 0$, $J_m(t) [b^2 L_a(t) + L_b(t)] \neq 0$, $L_b(t) [a^2 J_e(t) + J_m(t)] \neq 0$ y $[a^2 J_e(t) + J_m(t)] \neq 0$, entonces la matriz de estado $A(t)$ no tendrá singularidades.

Ahora se continuará con la matriz $B(t)$ y para esto se tomará en cuenta (3.45) la cual es:

$$\begin{aligned}
 B(t) &= E^{-1}(t) [S_{13}(t) + S_{12}(t)M(t)S_{23}(t)] = \dots \\
 &= E^{-1}(t)S_{13}(t) = \begin{bmatrix} \frac{L_b(t)}{(b^2 L_a(t) + L_b(t))} & 0 \\ 0 & \frac{J_m(t)}{(a^2 J_e(t) + J_m(t))} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\
 B(t) &= \begin{bmatrix} \frac{L_b(t)}{(b^2 L_a(t) + L_b(t))} \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3.99}
 \end{aligned}$$

Reduciendo términos semejantes y reescribiendolos como (3.100) y (3.101):

$$\alpha(t) = b^2 L_a(t) + L_b(t) \tag{3.100}$$

$$\beta(t) = a^2 J_e(t) + J_m(t) \tag{3.101}$$

$$\chi(t) = \left[b^2 \dot{L}_b(t) \frac{L_a(t)}{L_b(t)} + b \dot{L}_a(t) - b^2 R_a - R_b \right] \tag{3.102}$$

$$\Upsilon(t) = \left[a^2 \dot{J}_m(t) \frac{J_e(t)}{J_m(t)} + a \dot{J}_e(t) - a^2 b_e - b_m \right] \tag{3.103}$$

Así, la ecuación de estado $\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$ resulta de

$$\begin{bmatrix} e_4(t) \\ e_{12}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\chi(t)}{\alpha(t)} & -\frac{\eta(t)bL_b(t)}{J_m(t)\alpha(t)} \\ \frac{\eta(t)bJ_m(t)}{L_b(t)\beta(t)} & \frac{\Upsilon(t)}{\beta(t)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_4(t) \\ p_{12}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{L_b(t)}{\alpha(t)} \\ 0 \end{bmatrix} [e_1(t)] \tag{3.104}$$

Finalmente, se logran los objetivos del ejemplo, el utilizar la metodología de Bond Graph desarrollada para distintos dominios y la ecuación de estado del sistema LTV.

Se concluye de éste capítulo que es posible la obtención del modelo en Bond Graph de un sistema LTV, así como la construcción de la matriz de estructura de unión y también, la obtención del modelo en espacio de estado, A continuación se aborda la estabilidad de los sistemas LTV y son retomados algunos de los ejemplos presentados en este capítulo.

Capítulo 4

ANÁLISIS DE ESTABILIDAD DE SISTEMAS LTV

4.1. Introducción

El concepto de estabilidad juega un papel muy importante en el análisis y diseño de los sistemas, esto debido a que se aborda la cuestión de que sucede con la respuesta de estos sistemas conforme el tiempo va en aumento.

En este capítulo podremos conocer más acerca de los tipos de estabilidad, podemos mencionar el caso de *estabilidad entrada-salida*, estando ésta enfocada a las relaciones cualitativas entre las señales de entrada y las salida, este tipo de estabilidad no será abordada en la parte del enfoque en Bond Graph.

La *estabilidad interna* es el tipo de estabilidad que se describe en este capítulo desde un enfoque de Bond Graph. La estabilidad interna se enfoca en el comportamiento cualitativo de las soluciones de los sistemas LTV.

Se observa la forma de determinar la estabilidad interna a través del llamado *Método Directo de Lyapunov*.

4.2. Enfoque Tradicional

Los sistemas son diseñados para realizar tareas, si éstos no son estables, los sistemas pueden dañarse, saturarse o hasta desintegrarse cuando una entrada es aplicada. Se define la *estabilidad de Entrada-Acotada Salida-Acotada* por sus siglas en ingles B.I.B.O. (Bounded-Input Bounded-output), esta es para la respuesta de *estado cero*. También se define *estabilidad Marginal y Asintótica* para la respuesta de *entrada cero* [Chi-Tsong Chen, 1999].

El profesor Henry D'Angelo también dedicó parte de su investigación a temas tales como Sistemas Resonantes, Estabilidad Relativa, Estabilidad a Corto-Tiempo, y Criterio de Estabilidad en el Dominio de la Frecuencia, cabe mencionar que todos fueron dirigidos a sistemas LTV [D'Angelo Henry, 1970].

El investigador Wilson J. Rugh hizo énfasis en la extensa literatura existente sobre la teoría de estabilidad, también como la terminología de ésta no es completamente generalizada y hay que prestar atención a las definiciones cuando se consultan diferentes fuentes.

4.2.1. Estabilidad Entrada-Salida (B.I.B.O.)

Tratar de entender los problemas asociados con determinar si un sistema LTV es estable o no, se logra mejor mediante la revisión de algunos de los conceptos de estabilidad de sistemas LTI, prestando atención a posibles ambigüedades en las definiciones. También se menciona que los conceptos de estabilidad y resonancia suelen ser confundidos [D'Angelo Henry, 1970].

Ésta confusión está dada ya que la *estabilidad* y la *no resonancia* son generalmente equivalentes, esto es, si un sistema LTI es *no resonante*, esto implica que el sistema es *estable*. De igual forma si el sistema LTI es estable.

Por otro lado, en los sistemas LTV, la estabilidad y la no-resonancia no son conceptos equivalentes.

Existen varias formas de determinar la estabilidad B.I.B.O. para sistemas LTV a partir de su modelo en variables de estado

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A(t)x(t) + B(t)u(t) \\ y(t) &= C(t)x(t) + D(t)u(t)\end{aligned}\tag{4.1}$$

en la mayoría de los casos de estudio el término $D(t)$ se considera cero. Las diferentes formas de definir la estabilidad entrada-salida involucrarían la *Matriz de Respuesta al Impulso* que puede ser descrita por (4.2) y también pueden ser involucrados los *Gramianos de Controlabilidad y Observabilidad* los cuales pueden ser descritos por (4.3) y (4.4), respectivamente [Panos J. Antsaklis, 2006.].

$$H(t, \tau) = \begin{cases} C(t)\Phi(t, \tau)B(\tau), & t \geq \tau, \\ 0, & t < \tau, \end{cases}\tag{4.2}$$

$$W(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_0, t)B(t)B^T(t)\Phi^T(t_0, t)dt\tag{4.3}$$

$$M(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \Phi^T(t, t_0)C^T(t)C(t)\Phi(t, t_0)dt\tag{4.4}$$

A simple vista podemos observar que para cada una de las ecuaciones anteriores es necesario determinar $\Phi(t, \tau)$ la cual fue descrita en el capítulo tres y su representación es descrita en (3.7) a la cual se le puede llamar *matriz de transición* de la cual ya se sabe la cantidad de trabajo que conlleva el cálculo de ésta.

En este trabajo sólo se considerarán casos de estudio sin entrada, por esta razón presentamos las siguientes definiciones.

4.2.2. Estabilidad Interna

La estabilidad interna se trata de las propiedades de acotación y comportamiento asintótico de las soluciones de ecuaciones de estado lineales de entrada-cero para (4.1), en las cuales la salida $y(t)$ no juega ningún papel y la entrada $u(t)$ es igual a cero (4.5), así el análisis es enfocado en el comportamiento cualitativo de las soluciones del sistema LTV.

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) \quad ; \quad x(t_0) = x_0 \quad ; \quad u(t) = 0 \quad (4.5)$$

Si bien los límites en las soluciones podrían ser de interés para t_0 y x_0 fijas, la literatura se enfoca en las propiedades de acotación que se mantienen independientemente de la elección de t_0 ó x_0 .

Se dice que es natural comenzar por la caracterización de la estabilidad de la ecuación de estado lineal (4.5) en términos de los límites en la matriz de transición $\Phi(t, \tau)$ para $A(t)$. Esto conduce a una ya conocida condición de valores propios cuando $A(t)$ es constante, pero no proporciona una prueba de estabilidad útil para sistemas variantes en el tiempo a causa de la dificultad de calcular $\Phi(t, \tau)$.

En la estabilidad interna se encuentran algunos tipos de estabilidad, tales como la *estabilidad uniforme*, *estabilidad exponencial uniforme* y *estabilidad asintótica uniforme*.

Estabilidad Uniforme

La primera noción de estabilidad involucra los límites de las soluciones de (4.5). Ya que las soluciones son lineales respecto al estado inicial, esto es conveniente al expresar el límite como una forma lineal de la norma del estado inicial.

Definición 4.1 *La ecuación lineal (4.5) es llamada “uniformemente estable” si existe una constante finita positiva “ γ ” tal que para cualquier t_0 y x_0 la solución correspondiente satisface*

$$\|x(t)\| \leq \gamma \|x_0\| \quad ; \quad t \geq t_0 \quad (4.6)$$

Suponiendo $t = t_0$ se observa que γ debe satisfacer $\gamma \geq 1$. [Wilson J. Rugh, 1996.]

El término “uniforme” en la definición se refiere precisamente al hecho de que γ no debe depender de la elección del instante inicial.

Teorema 4.1 *La ecuación de estado lineal (4.5) es uniformemente estable si y solo si existe una constante finita positiva γ tal que*

$$\|\Phi(t, \tau)\| \leq \gamma \quad (4.7)$$

para todo t, τ tal que $t \geq \tau$. [Wilson J. Rugh, 1996.]

Estabilidad Exponencial Uniforme

Ésta implica la estabilidad uniforme, y se impone una condición adicional, ésta es, que todas las soluciones tiendan a cero exponencialmente cuando $t \rightarrow \infty$.

Definición 4.2 *Se dice que la ecuación de estado lineal (4.5) es “uniformemente exponencialmente estable” si existen constantes positivas finitas “ γ ”, λ tal que para cualquier t_0 y x_0 la correspondiente solución satisface*

$$\|x(t)\| = \gamma e^{-\lambda(t-t_0)} \|x_0\| \quad ; \quad t \geq t_0$$

Nuevamente $\gamma \geq 1$ y el término “uniforme” se refiere al hecho de que γ y λ son independientes de t_0 .

Teorema 4.2 *La ecuación de estado lineal (4.5) es “uniformemente exponencialmente estable” si y sólo si existen las constantes γ y λ que sean positivas finitas tales que*

$$\|\Phi(t, \tau)\| \leq \gamma e^{-\lambda(t-\tau)}$$

para todo t, τ tal que $t \geq \tau$. [Wilson J. Rugh, 1996.]

Estabilidad Asintótica Uniforme

Definición 4.3 La ecuación de estado lineal (4.5) es llamada “uniformemente asintóticamente estable” si ésta es uniformemente estable, y si dada cualquier constante positiva δ existe una T positiva tal que para cualquier t_0 y x_0 la correspondiente solución satisface

$$\|x(t)\| \leq \delta \|x_0\| \quad ; \quad t \geq t_0 + T$$

Teorema 4.3 La ecuación de estado lineal (4.5) es uniformemente asintóticamente estable si y sólo si ésta es uniformemente exponencialmente estable. [Wilson J. Rugh, 1996.]

Estabilidad de Corto Tiempo

En el sentido práctico, el concepto de estabilidad de corto tiempo es de hecho más útil que el concepto clásico de estabilidad tan discutido con anterioridad. La estabilidad de corto tiempo se ocupa de determinar si una respuesta del sistema se sitúa dentro de límites especificados en intervalos especificados de tiempo cuando las condiciones iniciales (o salidas) están dentro de los límites especificados. Claramente, este concepto puede ser de mayor utilidad práctica, ya que en muchos sistemas, el intervalo de tiempo operativo aproximado de interés es normalmente conocido por adelantado y, debido a las limitaciones físicas, entradas y salidas mayores que algunos valores finitos son esencialmente “ilimitados”.

- Estabilidad de corto tiempo (Sistemas sin entrada)

Análoga a la definición de la estabilidad clásica se tiene la definición de estabilidad a corto tiempo:

Definición 4.4 El sistema lineal caracterizado por la ecuación (4.5) se dice que es estable de corto tiempo con respecto a ϵ , C , T si

$$x^T(t_0)x(t_0) \leq \epsilon$$

implica que

$$x^T(t)x(t) \leq C$$

en el intervalo $[t_0, t_0 + T]$.

Existe la respuesta de un sistema que es clasificada inestable, pero es estable de corto tiempo. También existe la respuesta de un sistema que es clasificada estable, pero inestable de corto tiempo.

Teorema 4.4 *Una condición suficiente para que una solución del sistema (4.5) sea estable de corto tiempo con respecto de ϵ , C , T es que*

$$\int_{t_0}^t \lambda_m(\tau) d\tau \leq \frac{1}{2} \ln \frac{C}{\epsilon}, \quad t_0 \leq t \leq t_0 + T$$

donde $\lambda_m(t)$ es el valor propio máximo de la matriz simétrica $U(t)$ definida como

$$U(t) \equiv \frac{1}{2} [A(t) + A^T(t)]$$

para cada instante de tiempo t . [D'Angelo Henry, 1970]

4.2.3. Criterio de Estabilidad de Lyapunov

El origen del renombrado “Método Directo de Lyapunov” (Teorema 4.5) para evaluar estabilidad es la noción de que la energía total de un sistema mecánico disipativo no forzado disminuye conforme el estado del sistema evoluciona en el tiempo, por lo tanto, el vector de estado tiende a un valor constante correspondiente a energía cero conforme el tiempo aumenta.

Expresado más generalmente, las propiedades de estabilidad involucran las propiedades de crecimiento de las soluciones de la ecuación de estado, y estas propiedades pueden ser medidas por una función escalar adecuada del vector de estado. El problema es encontrar una función escalar adecuada.

Teorema 4.5 *Sea $x = 0$ un punto de equilibrio para $\dot{x} = f(x)$ y $D \subset \mathbb{R}^n$ un dominio que contiene a $x = 0$. Sea $V: D \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua diferenciable tal que*

$$V(0) = 0 \quad y \quad V(x) > 0 \text{ en } D - \{0\} \quad (4.8)$$

$$\dot{V}(x) \leq 0 \text{ en } D \quad (4.9)$$

entonces, $x = 0$ es estable. Además, si

$$\dot{V}(x) < 0 \text{ en } D - \{0\} \quad (4.10)$$

entonces, $x = 0$ es asintóticamente estable. [Hassan K. Khalil, 2002]

Observese que el teorema 4.5 solo da condiciones suficientes (no necesarias) para la estabilidad.

El método de Lyapunov puede ser extendido a sistemas no-autónomos como

Teorema 4.6 Sea $x = 0$ un punto de equilibrio para $\dot{x} = f(t, x)$ y $D \subset \mathbb{R}^n$ un dominio que contiene a $x = 0$. Sea $V: [0, \infty) \times D \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua diferenciable tal que

$$W_1(x) \leq V(t, x) \leq W_2(x) \quad (4.11)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(t, x) \leq -W_3(x) \quad (4.12)$$

$\forall t \geq 0, \forall x \in D$ donde $W_1(x)$, $W_2(x)$ y $W_3(x)$ son funciones continuas definidas positivas en D . Entonces, $x = 0$ es uniformemente asintóticamente estable. [Hassan K. Khalil, 2002]

Cuando la función $V(t, x)$ no depende explícitamente de t , las condiciones del Teorema 4.6 se reducen a las condiciones del Teorema 4.5.

Para el caso de un sistema LTV como el dado por (4.5) se considera como función escalar $V(t, x)$ la siguiente

$$V(t, x) = \|x(t)\|^2 = x^T(t)x(t) \quad (4.13)$$

la cual no depende explícitamente de t .

Evaluando las condiciones del Teorema 4.5 se observa que la selección de la función $V(t, x)$ dada por (4.13) cumple con la primera condición descrita por (4.8), al evaluar las condiciones (4.9) y (4.10) se obtiene

$$\frac{d}{dt} \|x(t)\|^2 = \dot{x}^T(t)x(t) + x^T(t)\dot{x}(t) = x^T(t) [A^T(t) + A(t)] x(t) \quad (4.14)$$

En este cálculo $\dot{x}(t)$ es reemplazado por $A(t)x(t)$ precisamente porque $x(t)$ es la solución de (4.5).

Evaluando primero para la condición (4.9), la forma cuadrática del lado derecho de (4.14) es “*semidefinida negativa*”, esto es, suponer que la matriz $[A^T(t) + A(t)]$ es “*semidefinida negativa*” para cada t , cumpliendo con la condición de estabilidad.

Ahora, si se busca cumplir con la condición descrita en (4.10), la forma cuadrática de (4.14) es “*definida negativa*”, es decir, la matriz $[A^T(t) + A(t)]$ es “*definida negativa*”, cumpliendo así con la condición para estabilidad asintótica.

4.3. Enfoque en Bond Graph

Este análisis de estabilidad partirá del llamado *método directo de Lyapunov*. Comenzando por recordar las condiciones descritas en (4.5).

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) \quad ; \quad x(t_0) = x_0 \quad ; \quad u(t) = 0 \quad (4.15)$$

Sabemos que para cualquier solución de (4.15), la derivada de la función escalar (4.13) con respecto de t puede ser escrita como (4.14). Suponiendo que el lado derecho de (4.14) es definido negativo se supone que la matriz $[A^T(t) + A(t)]$ es definida negativa para cada t .

Este resultado se tomará como condición suficiente para un tipo de estabilidad asintótica. Esto siendo un hecho de que $[A^T(t) + A(t)]$ es **definida negativa**.

4.3.1. Sistemas en Bond Graph sin Causalidad Derivativa

Comenzaremos por declarar el siguiente lema para la determinación de la estabilidad de Sistemas LTV modelados en Bond Graph con elementos que sólo tienen causalidad integral.

Lema 4.1 *Sea un Sistema Lineal Variante en el Tiempo modelado en Bond Graph cuyos elementos de almacenamiento sólo aceptan una asignación de causalidad integral y la matriz de estructura de unión es definida por*

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ D_{in}(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11}(t) & S_{12}(t) & S_{13}(t) \\ S_{21}(t) & S_{22}(t) & S_{23}(t) \\ S_{31}(t) & S_{32}(t) & S_{33}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z(t) \\ D_{out}(t) \\ u(t) \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

y de las relaciones constitutivas $z(t) = F(t)x(t)$ y $D_{out}(t) = L(t)D_{in}(t)$ de almacenamiento y disipación respectivamente, sean $F(t)$ y $L(t)$ matrices simétricas y definidas positivas.

El sistema es internamente estable, si

$$S_{11}(t) \geq 0, \text{ es decir, } S_{11}(t) \text{ semidefinida positiva para todo } t. \quad (4.17)$$

$$[L^{-1}(t) + S_{22}(t)] \geq 0, \text{ es decir, } [L^{-1}(t) + S_{22}(t)] \text{ semidefinida positiva para todo } t. \quad (4.18)$$

$$[L^{-1}(t) - S_{22}^T(t)] \geq 0, \text{ es decir, } [L^{-1}(t) - S_{22}^T(t)] \text{ semidefinida positiva para todo } t. \quad (4.19)$$

Prueba. Partiendo de la condición $[A^T(t) + A(t)] \leq 0$ se procedera a determinar el signo de la operación $[A^T(t) + A(t)]$ esto sustituyendo la expresión que describe la matriz $A(t)$ en terminos de la matriz de estructura de unión dada por (4.16) la cual fue descrita en el Capítulo 3, se muestra a continuación

$$A(t) = [S_{11}(t) + S_{12}(t)M(t)S_{21}(t)] F(t) \quad (4.20)$$

$$M(t) = L(t) [I - S_{22}(t)L(t)]^{-1} \quad (4.21)$$

Para simplificar la expresión (4.20) reescribimos M como

$$M(t) = [L(t)^{-1} - S_{22}(t)]^{-1} \quad (4.22)$$

sustituyendo (4.22) en (4.20) se obtiene

$$A(t) = [S_{11}(t) + S_{12}(t) (L(t)^{-1} - S_{22}(t))^{-1} S_{21}(t)] F(t) \quad (4.23)$$

Por lo tanto,

$$A^T(t) = F^T(t) \left[S_{11}^T(t) + S_{21}^T(t) \left((L^T(t))^{-1} - S_{22}^T(t) \right)^{-1} S_{12}^T(t) \right] \quad (4.24)$$

Entonces

$$\begin{aligned} [A(t)^T + A(t)] &= F^T(t) \left[S_{11}^T(t) + S_{21}^T(t) \left((L^T(t))^{-1} - S_{22}^T(t) \right)^{-1} S_{12}^T(t) \right] + \\ &\quad + \left[S_{11}(t) + S_{12}(t) (L(t)^{-1} - S_{22}(t))^{-1} S_{21}(t) \right] F(t) \end{aligned} \quad (4.25)$$

para estabilidad se requiere que $[A(t)^T + A(t)] \leq 0$, es decir, desarrollando las operaciones en (4.25) se obtiene

$$\begin{aligned} [A(t)^T + A(t)] &= F(t)S_{11}^T(t) + F(t)S_{21}^T(t) (L^{-1}(t) - S_{22}^T(t))^{-1} S_{12}^T(t) + \\ &\quad + S_{11}(t)F(t) + S_{12}(t) (L^{-1}(t) - S_{22}(t))^{-1} S_{21}(t)F(t) \leq 0 \end{aligned} \quad (4.26)$$

Tomando en cuenta las propiedades de la matriz de estructura de unión dada por (4.16) se tiene que $S_{21}(t) = -S_{12}^T(t)$, con esto se reescribe (4.26) como

$$\begin{aligned} [A(t)^T + A(t)] &= -F(t)S_{11}(t) - F(t)S_{12}(t) (L^{-1}(t) + S_{22}(t))^{-1} S_{12}^T(t) - \\ &\quad - S_{11}^T(t)F(t) - S_{12}(t) (L^{-1}(t) - S_{22}^T(t))^{-1} S_{12}^T(t)F(t) \leq 0 \end{aligned} \quad (4.27)$$

Para que se cumpla (4.27) es suficiente con que cada parte de la sustracción sea positiva, es decir, es suficiente con que:

$$F(t)S_{11}(t) \geq 0 \quad (4.28)$$

$$F(t)S_{12}(t) [L^{-1}(t) + S_{22}(t)]^{-1} S_{12}^T(t) \geq 0 \quad (4.29)$$

$$S_{11}^T(t)F(t) \geq 0 \quad (4.30)$$

$$S_{12}(t) [L^{-1}(t) - S_{22}^T(t)]^{-1} S_{12}^T(t)F(t) \geq 0 \quad (4.31)$$

y tomando en cuenta que $F(t)$ es definida positiva las condiciones anteriores se pueden simplificar como:

$$S_{11}(t) \geq 0 \quad (4.32)$$

$$[L^{-1}(t) + S_{22}(t)] \geq 0 \quad (4.33)$$

$$[L^{-1}(t) - S_{22}^T(t)] \geq 0 \quad (4.34)$$

■

4.3.2. Sistemas en Bond Graph con Causalidad Derivativa

Con el siguiente lema se finaliza el análisis de estabilidad de Sistemas LTV modelados en Bond Graph.

Al realizar el análisis de estabilidad para Sistemas Lineales Variantes en el Tiempo modelados en Bond Graph y considerando que dentro de este modelo existen elementos en Causalidad Derivativa, se obtiene el siguiente lema.

Lema 4.2 *Sea un Sistema Lineal Variante en el Tiempo modelado en Bond Graph cuyos elementos almacenadores de energía pueden tener una asignación de causalidad derivativa y su matriz de estructura de unión es definida por*

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ D_{in}(t) \\ y(t) \\ z_d(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11}(t) & S_{12}(t) & S_{13}(t) & S_{14}(t) \\ S_{21}(t) & S_{22}(t) & S_{23}(t) & 0 \\ S_{31}(t) & S_{32}(t) & S_{33}(t) & 0 \\ S_{41}(t) & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z(t) \\ D_{out}(t) \\ u(t) \\ \dot{x}_d(t) \end{bmatrix} \quad (4.35)$$

y de las relaciones constitutivas $z(t) = F(t)x(t)$, $z_d(t) = F_d(t)x_d(t)$, y $D_{out}(t) = L(t)D_{in}(t)$

de almacenamiento y disipación, y los elementos de almacenamiento pueden tener causalidad derivativa o integral, tal que $F(t)$, $F_d(t)$ y $L(t)$ sean matrices simétricas y definidas positivas. Se dice que el sistema es internamente estable, si

$$S_{11}(t) \geq 0, \text{ es decir, } S_{11}(t) \text{ es semidefinida positiva para todo } t. \quad (4.36)$$

$$[L^{-1}(t) + S_{22}(t)] \geq 0, \text{ es decir, } [L^{-1}(t) + S_{22}(t)] \text{ es semidefinida positiva para todo } t. \quad (4.37)$$

$$[L^{-1}(t) - S_{22}^T(t)] \geq 0, \text{ es decir, } [L^{-1}(t) - S_{22}^T(t)] \text{ es semidefinida positiva para todo } t. \quad (4.38)$$

y que

$$\dot{F}(t) \geq 0; \text{ sea } \dot{F}(t) \text{ semidefinida positiva para todo } t. \quad (4.39)$$

$$\dot{F}_d(t) \geq 0; \text{ sea } \dot{F}_d(t) \text{ semidefinida positiva para todo } t. \quad (4.40)$$

$$\dot{S}_{14}(t)F_d^{-1}(t)S_{14}^T(t) \geq 0; \text{ sea } \dot{S}_{14}(t)F_d^{-1}(t)S_{14}^T(t) \text{ semidefinida positiva para todo } t. \quad (4.41)$$

$$S_{14}(t)F_d^{-1}(t)\dot{S}_{14}^T(t) \geq 0; \text{ sea } S_{14}(t)F_d^{-1}(t)\dot{S}_{14}^T(t) \text{ semidefinida positiva para todo } t. \quad (4.42)$$

Prueba. Partiendo de la condición $[A^T(t) + A(t)] \leq 0$ se procedera a determinar el signo de la operación $[A^T(t) + A(t)]$ esto sustituyendo la expresión (3.44) que describe la matriz $A(t)$ en terminos de la matriz de estructura de unión dada por (4.35) la cual fue descrita en el Capítulo 3, se muestra a continuación

$$A(t) = E^{-1}(t) \left[(S_{11}(t) + S_{12}(t)M(t)S_{21}(t)) F(t) + S_{14}(t) \frac{d}{dt} [F_d^{-1}(t)S_{41}(t)F(t)] \right] \quad (4.43)$$

donde

$$E(t) = I - S_{14}(t)F_d^{-1}(t)S_{41}(t)F(t) \quad (4.44)$$

$$M(t) = (L^{-1}(t) + S_{22}^T(t))^{-1} \quad (4.45)$$

De (4.43) se determinará $A^T(t)$.

$$\begin{aligned} A^T(t) &= \left[(S_{11}(t) + S_{12}(t)M(t)S_{21}(t)) F(t) + S_{14}(t) \frac{d}{dt} [F_d^{-1}(t)S_{41}(t)F(t)] \right]^T E^{-T}(t) \\ &= \left[F^T(t) (S_{11}(t) + S_{12}(t)M(t)S_{21}(t))^T + \left[\frac{d}{dt} (F_d^{-1}(t)S_{41}(t)F(t)) \right]^T S_{14}^T(t) \right] E^{-T}(t) \end{aligned}$$

entonces

$$A^T(t) = \left[F(t) (S_{11}^T(t) + S_{21}^T(t)M^T(t)S_{12}^T(t)) + \frac{d}{dt} (F(t)S_{41}^T(t)F_d^{-1}(t)) S_{14}^T(t) \right] E^{-T}(t) \quad (4.46)$$

donde

$$E^T(t) = I - F(t)S_{41}^T(t)F_d^{-1}(t)S_{14}^T(t) \quad (4.47)$$

$$M^T(t) = (L^{-1}(t) - S_{22}^T(t))^{-1} \quad (4.48)$$

para la estabilidad se requiere que $[A(t)^T + A(t)] \leq 0$, tomando (4.43) y (4.46) para este propósito se obtiene

$$\begin{aligned} [A^T(t) + A(t)] &= \\ &= E^{-1}(t) \left[(S_{11}(t) + S_{12}(t)M(t)S_{21}(t)) F(t) + S_{14}(t) \frac{d}{dt} (F_d^{-1}(t)S_{41}(t)F(t)) \right] + \\ &+ \left[F(t) (S_{11}^T(t) + S_{21}^T(t)M(t)S_{12}^T(t)) + \frac{d}{dt} (F(t)S_{41}^T(t)F_d^{-1}(t)) S_{14}^T(t) \right] E^{-T}(t) \leq 0 \end{aligned}$$

Reescribiendo $[A^T(t) + A(t)]$ se tiene

$$\begin{aligned} [A^T(t) + A(t)] &= E^{-1}(t)S_{11}(t)F(t) + E^{-1}(t)S_{12}(t)M(t)S_{21}(t)F(t) + \\ &+ E^{-1}(t)S_{14}(t) \frac{d}{dt} (F_d^{-1}(t)S_{41}(t)F(t)) + \\ &+ F(t)S_{11}^T(t)E^{-T}(t) + F(t)S_{21}^T(t)M^T(t)S_{12}^T(t)E^{-T}(t) + \\ &+ \frac{d}{dt} (F(t)S_{41}^T(t)F_d^{-1}(t)) S_{14}^T(t)E^{-T}(t) \leq 0 \end{aligned} \quad (4.49)$$

agrupando y rescribiendo la expresión anterior se obtiene:

$$\begin{aligned} [A^T(t) + A(t)] &= -E^{-1}(t)S_{11}^T(t)F(t) - F(t)S_{11}(t)E^{-T}(t) - \\ &- E^{-1}(t)S_{12}(t)M(t)S_{12}^T(t)F(t) - F(t)S_{12}(t)M^T(t)S_{12}^T(t)E^{-T}(t) - \\ &- E^{-1}(t)S_{14}(t) \frac{d}{dt} [F_d^{-1}(t)S_{14}^T(t)F(t)] - \frac{d}{dt} [F(t)S_{14}(t)F_d^{-1}(t)] S_{14}^T(t)E^{-T}(t) \leq 0 \end{aligned} \quad (4.50)$$

Se observa que

$$E(t) = I - S_{14}(t)F_d^{-1}(t)S_{41}(t)F(t) = I + S_{14}(t)F_d^{-1}(t)S_{14}^T(t)F(t) \quad (4.51)$$

$$E^T(t) = I - F(t)S_{41}^T(t)F_d^{-1}(t)S_{14}^T(t) = I + F(t)S_{14}(t)F_d^{-1}(t)S_{14}^T(t) \quad (4.52)$$

al evaluar (4.51) y (4.52) se tiene que $E(t)$ y $E^T(t)$ son **definidos positivos**, esto es debido a que el término $S_{14}(t)F_d^{-1}(t)S_{14}^T(t)$ es **definido positivo**.

Para que se cumpla (4.50) es suficiente con que cada parte de la sustracción sea positiva, es decir, es suficiente con que:

$$S_{11}^T(t)F(t) \geq 0 \quad (4.53)$$

$$F(t)S_{11}(t) \geq 0 \quad (4.54)$$

$$S_{12}(t)M(t)S_{12}^T(t)F(t) \geq 0 \quad (4.55)$$

$$F(t)S_{12}(t)M^T(t)S_{12}^T(t) \geq 0 \quad (4.56)$$

$$S_{14}(t)\frac{d}{dt}[F_d^{-1}(t)S_{14}^T(t)F(t)] \geq 0 \quad (4.57)$$

$$\frac{d}{dt}[F(t)S_{14}(t)F_d^{-1}(t)]S_{14}^T(t) \geq 0 \quad (4.58)$$

tomando en cuenta que $F(t)$ es definida positiva, sustituyendo (4.45), (4.48) y desarrollando las derivadas, las condiciones anteriores se pueden simplificar como:

$$S_{11}(t) \geq 0 \quad (4.59)$$

$$[L^{-1}(t) - S_{22}^T(t)] \geq 0 \quad (4.60)$$

$$[L^{-1}(t) + S_{22}(t)] \geq 0 \quad (4.61)$$

$$\dot{F}_d^{-1}(t) \geq 0 \implies \dot{F}_d(t) \geq 0 \quad (4.62)$$

$$S_{14}(t)F_d^{-1}(t)\dot{S}_{14}^T(t) \geq 0 \quad (4.63)$$

$$\dot{S}_{14}(t)F_d^{-1}(t)S_{14}^T(t) \geq 0 \quad (4.64)$$

$$\dot{F}(t) \geq 0 \quad (4.65)$$

■

4.4. Ejemplos Ilustrativos

Se comenzarán a utilizar en algunos ejemplos los lemas definidos en la sección anterior. En primer lugar se observan ejemplos con el fin de mostrar el uso del lema 4.1 y a continuación de estos se procederá a mostrar los ejemplos que muestran la utilización del lema 4.2.

Ejemplo 4.1 *Comenzando por tomar del ejemplo 3.4 el Bond Graph de un circuito RLC y analizar su estabilidad, el sistema se muestra en la figura 4.1*

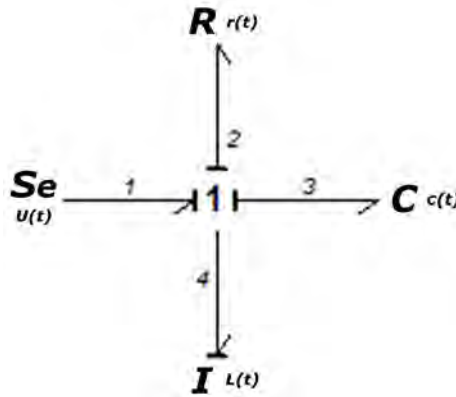


Figura 4.1: Circuito RLC en Bond Graph.

De este ejemplo se tiene que sus relaciones constitutivas son:

$$z(t) = F(t)x(t)$$

$$\begin{bmatrix} e_3(t) \\ f_4(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{C(t)} & 0 \\ 0 & \frac{1}{L(t)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_3(t) \\ p_4(t) \end{bmatrix}$$

también se tiene

$$D_{out}(t) = L(t)D_{in}(t)$$

$$e_2(t) = r(t)f_2(t)$$

donde se observa que las matrices $F(t)$ y $L(t)$ son definidas positivas.

A continuación se determina la matriz de estructura unión del sistema, ya que está es necesaria para el estudio de la estabilidad.

$$\begin{bmatrix} f_3(t) \\ e_4(t) \\ \dots \\ f_2(t) \\ \dots \\ e_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \vdots & 0 & \vdots & 0 \\ -1 & 0 & \vdots & -1 & \vdots & 1 \\ \dots & \dots & . & \dots & . & \dots \\ 0 & 1 & \vdots & 0 & \vdots & 0 \\ \dots & \dots & . & \dots & . & \dots \\ 0 & 0 & \vdots & 1 & \vdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_3(t) \\ f_4(t) \\ \dots \\ e_2(t) \\ \dots \\ e_1(t) \end{bmatrix}$$

Una vez obtenida la matriz de estructura unión procedemos a la aplicación del lema 4.1 ya que el sistema no contiene elementos en causalidad derivativa. Este lema indica que para que un sistema sea internamente estable las matrices $S_{11}(t)$, $[L^{-1}(t) + S_{22}(t)]$ y $[L^{-1}(t) - S_{22}^T(t)]$ deben ser semidefinidas positivas, estas matrices son

$$\begin{aligned} S_{11}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \geq 0 \\ [L^{-1}(t) + S_{22}(t)] &= \left[\frac{1}{r(t)} + [0] \right] = \frac{1}{r(t)} \geq 0 \\ [L^{-1}(t) - S_{22}^T(t)] &= \frac{1}{r(t)} \geq 0 \end{aligned}$$

Éstas cumplen con las condiciones (4.17), (4.18) y (4.19) que se describen en el Lema 4.1, por lo tanto el sistema es estable. Como medio de comprobación se realiza simulación de este sistema con las siguientes condiciones:

- La entrada $u(t)$ es cero.
- La resistencia tiene un valor constante 10 ohms.
- El capacitor tiene un valor de 1 mili-faradio; con un valor inicial de 1 A-s

- El inductor tiene el valor de una función senoidal *positiva* con amplitud de 0,5 Henry, un offset de 0,5001 Henry y una frecuencia angular de $10(\text{rad/s})$.

El comportamiento del sistema durante la simulación se observa en la figura 4.2 en la cual se muestra el comportamiento de los estados, el voltaje en la resistencia y el comportamiento del valor del inductor $L(t)$.

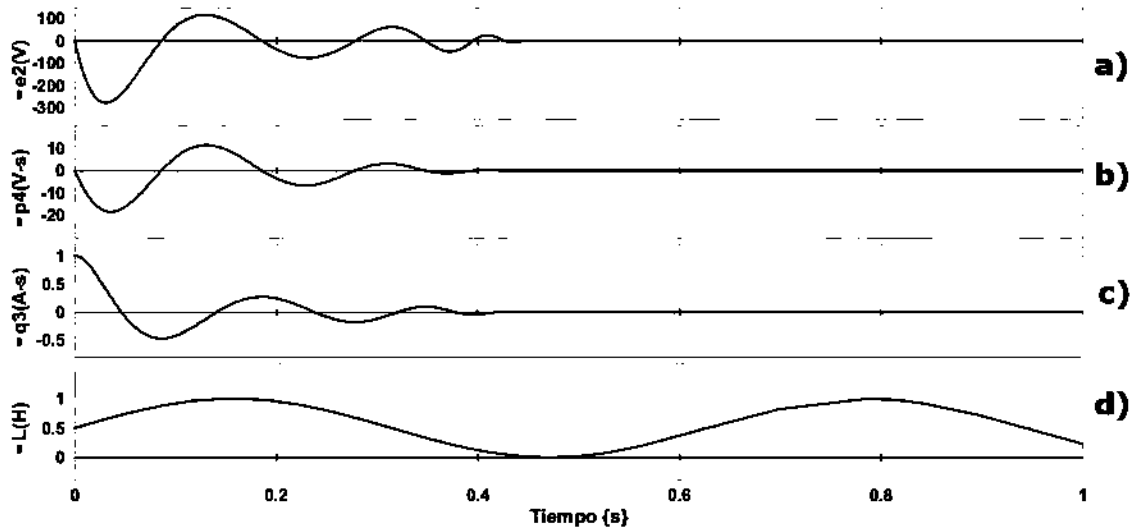


Figura 4.2: Simulación de circuito RLC; a) Voltaje en la resistencia, b) Estado $\rho_4(t)$, c) Estado $q_3(t)$, d) Valor de la inductancia $L(t)$.

Se concluye que la comprobación se a realizado y el sistema se dice estable. Una observación con respecto a éste ejemplo es, el valor de la inductancia nunca es cero a pesar de ser una senoide, si por alguna razón llegará a tener un valor de cero se puede observar que en la matriz $F(t)$ puede existir una división entre cero, la cual no está definida.

Ejemplo 4.2 Analizar la estabilidad de un Motor de C.D. considerando que la relación $\eta(t)$ del Girador (GY) es variante en el tiempo. El sistema es ilustrado en la figura 4.3 y su representación en Bond Graph es mostrada a través de la figura 4.4.

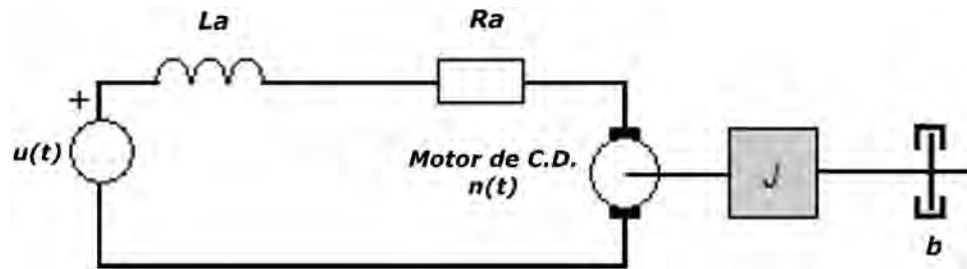


Figura 4.3: Motor de C.D. con la relación del girador variante en el tiempo.

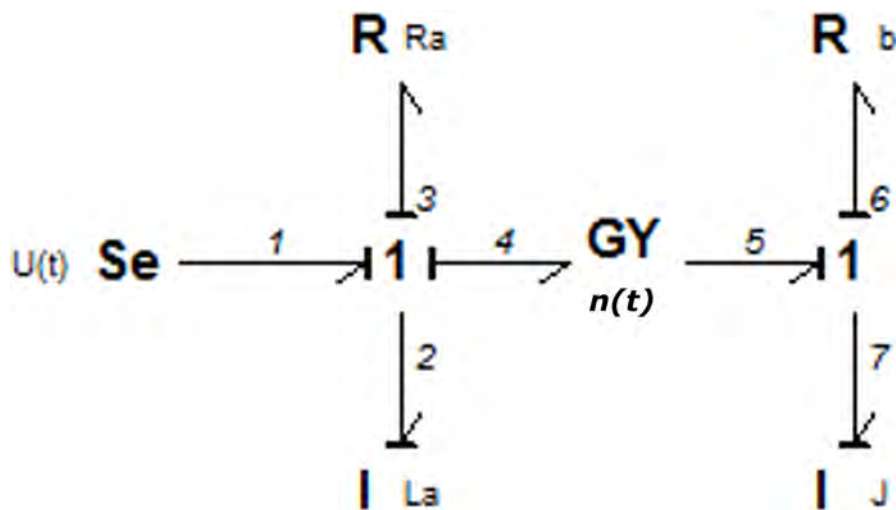


Figura 4.4: Bond Graph del Motor de C.D.

Con el modelo de la figura 4.4 se obtienen los siguientes vectores clave:

$$u(t) = e_1(t) \quad ; \quad x(t) = \begin{bmatrix} p_2(t) \\ p_6(t) \end{bmatrix} \quad ; \quad \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} e_2(t) \\ e_6(t) \end{bmatrix} \quad ; \quad z(t) = \begin{bmatrix} f_2(t) \\ f_6(t) \end{bmatrix}$$

$$D_{in}(t) = \begin{bmatrix} f_3(t) \\ f_7(t) \end{bmatrix} \quad ; \quad D_{out}(t) = \begin{bmatrix} e_3(t) \\ e_7(t) \end{bmatrix}$$

y las relaciones constitutivas son:

$$z(t) = F \cdot x(t)$$

$$\begin{bmatrix} f_2(t) \\ f_6(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{L_a} & 0 \\ 0 & \frac{1}{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_2(t) \\ p_6(t) \end{bmatrix}$$

$$D_{out}(t) = L(t)D_{in}(t)$$

$$\begin{bmatrix} e_3(t) \\ e_7(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_3(t) \\ f_7(t) \end{bmatrix}$$

$$e_4(t) = \eta(t)f_5(t)$$

$$e_5(t) = \eta(t)f_4(t)$$

como resultado la matriz de estructura unión es escrita a continuación.

$$\begin{bmatrix} e_2(t) \\ e_6(t) \\ \dots \\ f_3(t) \\ f_7(t) \\ \dots \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\eta(t) & \vdots & -1 & 0 & \vdots & 1 \\ \eta(t) & 0 & \vdots & 0 & -1 & \vdots & 0 \\ \dots & \dots & \cdot & \dots & \dots & \cdot & \dots \\ 1 & 0 & \vdots & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & \vdots & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ \dots & \dots & \cdot & \dots & \dots & \cdot & \dots \\ - & - & \vdots & - & - & \vdots & - \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_2(t) \\ f_6(t) \\ \dots \\ e_3(t) \\ e_7(t) \\ \dots \\ e_1(t) \end{bmatrix}$$

Aplicando el lema 4.1 y evaluando las condiciones (4.17), (4.18) y (4.19) se tiene

$$S_{11}(t) = \begin{bmatrix} 0 & -\eta(t) \\ \eta(t) & 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad S_{11}(t) \text{ es semidefinida positiva.}$$

$$[L^{-1}(t) + S_{22}(t)] = \begin{bmatrix} R_a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \quad ; \quad [L^{-1}(t) + S_{22}(t)] \text{ es semidefinida positiva.}$$

$$[L^{-1}(t) - S_{22}^T(t)] = \begin{bmatrix} R_a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \quad ; \quad [L^{-1}(t) - S_{22}^T(t)] \text{ es semidefinida positiva.}$$

así, se cumple el lema 4.1 y se concluye que el sistema es estable. Para probar esta afirmación se lleva a cabo la simulación para diferentes funciones de $\eta(t)$.

Los valores elegidos para los elementos son: la entrada $u(t) = 0v$, $L_a = 1H$, $R_a = 10\Omega$, $J_m = 1Kgm^2$, $b = 10\frac{Nm-s}{rad}$, un valor inicial en el inductor L_a de $10(V-s)$ y para la relación de $\eta(t)$ se cambiará por diferentes funciones como se observa a continuación:

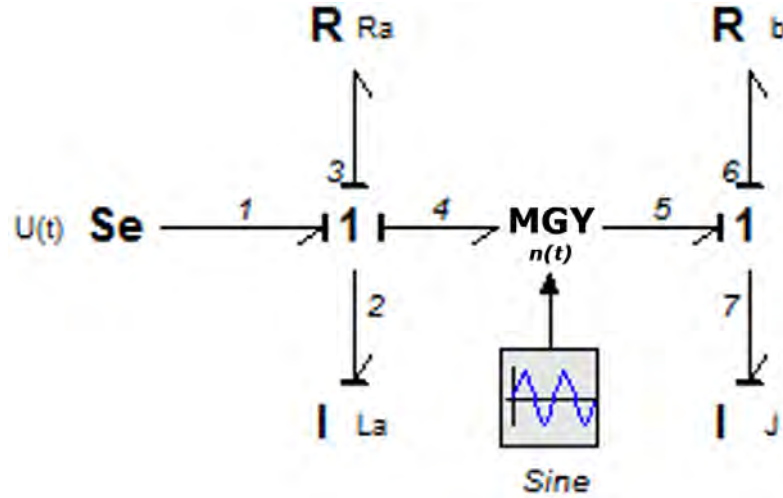


Figura 4.5: Motor de C.D. con relación $\eta(t)$ de forma senoidal

La relación del girador toma una forma senoidal con características tales como, un valor de 10 en amplitud y $\omega = 10\frac{rad}{s}$; para lo cual se obtiene el gráfico mostrado en la figura 4.6 que es la simulación de los estados y el valor de $\eta(t)$.

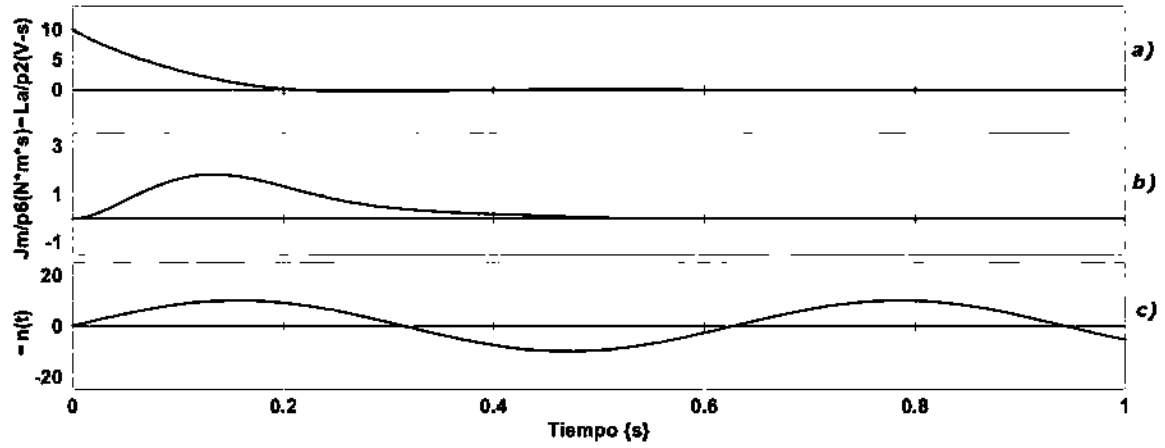


Figura 4.6: Respuesta de los estados del sistema y la relación del girador. a) Estado $\rho_2(t)$, b) Estado $\rho_6(t)$, c) Valor de la relación $\eta(t)$.

A continuación se procederá a cambiar la relación del girador por una función diferente tal como una señal diente de sierra.

En la figura 4.7 se observa que la entrada varía la relación del Girador y en la figura 4.8 se puede apreciar la respuesta de los estados ante tal variación.

Se observa en cada uno de los casos anteriores, que los estados tienen una respuesta que tiende a cero lo cual concuerda con el apartado del criterio de estabilidad de Lyapunov.

Ahora comenzaremos por mostrar aquellos ejemplos de sistemas más complejos y en los cuales algunos de sus elementos tienen causalidad derivativa en Bond Graph.

Ejemplo 4.3 *En éste caso se toma en cuenta el modelo en Bond Graph de la figura 4.9, del cual se obtendrán los vectores clave, relaciones constitutivas y la matriz de estructura unión para analizar su estabilidad.*

Existen varias características del modelo de la figura 4.9 como lo son: el elemento en causalidad derivativa es Je que se encuentra del lado derecho del modelo, también se observa que todos los elementos tanto almacenadores como disipativos son elementos *lineales invariantes en el tiempo* y que los únicos elementos que son LTV son la relación $\eta(t)$ del girador (GY) y la relación $a(t)$ del transformador (TF).

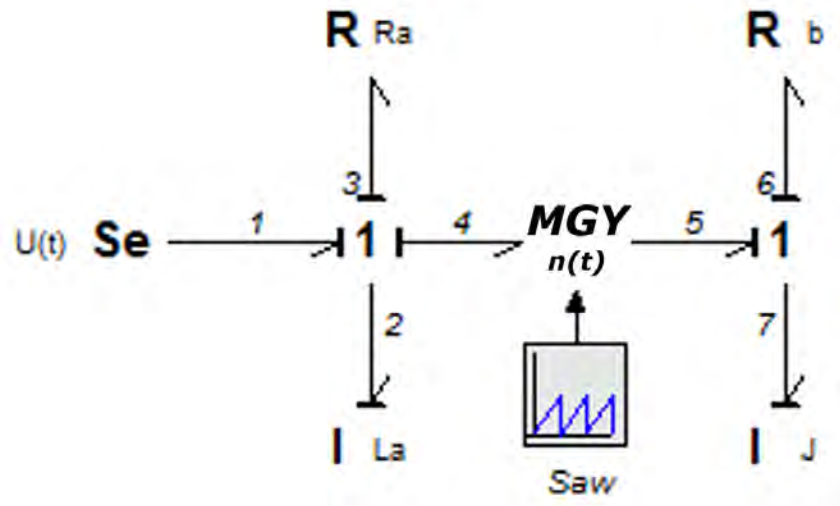


Figura 4.7: Motor de C.D. con relación de girador variante en el tiempo (Diente de Sierra).

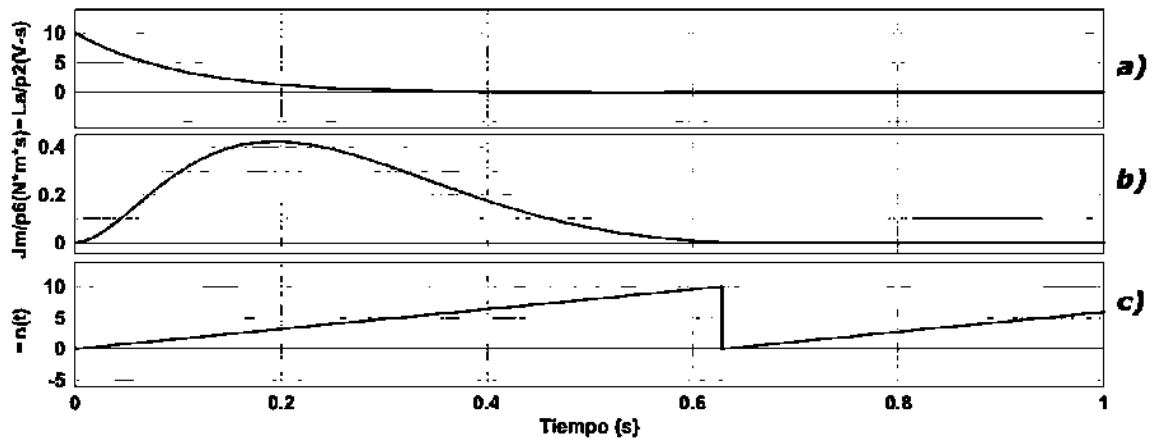
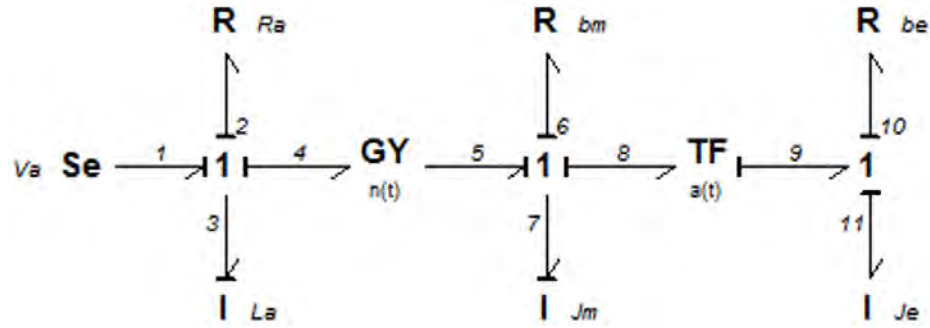


Figura 4.8: Respuesta de los estados a) $p_2(t)$ y b) $p_6(t)$, y c) El valor de la relación $\eta(t)$.

Figura 4.9: Bond Graph con elementos en *Causalidad Derivativa*.

Continuando, se tiene que los vectores clave son:

$$u(t) = e_1(t) \quad ; \quad x(t) = \begin{bmatrix} p_3(t) \\ p_7(t) \end{bmatrix} \quad ; \quad \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} e_3(t) \\ e_7(t) \end{bmatrix} \quad ; \quad z(t) = \begin{bmatrix} f_3(t) \\ f_7(t) \end{bmatrix}$$

$$x_d(t) = p_{11}(t) \quad ; \quad \dot{x}_d(t) = e_{11}(t) \quad ; \quad z_d(t) = f_{11}(t)$$

$$D_{in}(t) = \begin{bmatrix} f_2(t) \\ f_6(t) \\ f_{10}(t) \end{bmatrix} \quad ; \quad D_{out}(t) = \begin{bmatrix} e_2(t) \\ e_6(t) \\ e_{10}(t) \end{bmatrix}$$

y las relaciones constitutivas

$$z(t) = F(t)x(t)$$

$$\begin{bmatrix} f_3(t) \\ f_7(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{L_a} & 0 \\ 0 & \frac{1}{J_m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_3(t) \\ p_7(t) \end{bmatrix}$$

$$z_d(t) = F_d(t)x_d(t)$$

$$f_{11}(t) = \frac{1}{J_e} e_{11}(t)$$

$$D_{out}(t) = L(t)D_{in}(t)$$

$$\begin{bmatrix} e_2(t) \\ e_6(t) \\ e_{10}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_a & 0 & 0 \\ 0 & b_m & 0 \\ 0 & 0 & b_e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_2(t) \\ f_6(t) \\ f_{10}(t) \end{bmatrix}$$

$$e_4(t) = \eta(t)f_5(t)$$

$$e_5(t) = \eta(t)f_4(t)$$

$$e_8(t) = a(t)e_9(t)$$

$$f_9(t) = a(t)f_8(t)$$

La matriz de estructura unión queda de la siguiente manera

$$\begin{bmatrix} e_3(t) \\ e_7(t) \\ \dots \\ f_2(t) \\ f_6(t) \\ f_{10}(t) \\ \dots \\ y(t) \\ \dots \\ f_{11}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\eta(t) & \vdots & -1 & 0 & 0 & \vdots & 1 & \vdots & 0 \\ \eta(t) & 0 & \vdots & 0 & -1 & -a(t) & \vdots & 0 & \vdots & -a(t) \\ \dots & \dots & \cdot & \dots & \dots & \dots & \cdot & \dots & \cdot & \dots \\ 1 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & \vdots & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & a(t) & \vdots & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & \vdots & 0 \\ \dots & \dots & \cdot & \dots & \dots & \dots & \cdot & \dots & \cdot & \dots \\ - & - & \vdots & - & - & - & \vdots & - & \vdots & - \\ \dots & \dots & \cdot & \dots & \dots & \dots & \cdot & \dots & \cdot & \dots \\ 0 & a(t) & \vdots & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_3(t) \\ f_7(t) \\ \dots \\ e_2(t) \\ e_6(t) \\ e_{10}(t) \\ \dots \\ e_1(t) \\ \dots \\ e_{11}(t) \end{bmatrix}$$

Una vez que se obtiene la matriz de estructura unión habrá de determinarse si el sistema es internamente estable esto a través del lema 4.2.

En este lema se requiere cumplir con las siguientes condiciones (4.36), (4.37), (4.38), (4.39), (4.40), (4.41) y (4.42)

donde para este ejemplo tenemos que:

$$\begin{aligned}
 S_{11}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & -\eta(t) \\ \eta(t) & 0 \end{bmatrix} \geq 0 \\
 [L^{-1}(t) + S_{22}(t)] &= \begin{bmatrix} R_a & 0 & 0 \\ 0 & b_m & 0 \\ 0 & 0 & b_e \end{bmatrix} \geq 0 \\
 [L^{-1}(t) - S_{22}^T(t)] &= \begin{bmatrix} R_a & 0 & 0 \\ 0 & b_m & 0 \\ 0 & 0 & b_e \end{bmatrix} \geq 0 \\
 \dot{F}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \geq 0 \quad ; \quad \dot{F}_d(t) = 0 \\
 \dot{S}_{14}(t)F_d^{-1}S_{14}^T(t) &= \begin{bmatrix} 0 \\ -\dot{a}(t) \end{bmatrix} [J_e] \begin{bmatrix} 0 & -a(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \dot{a}(t)J_e a(t) \end{bmatrix} \geq 0 \\
 S_{14}(t)F_d^{-1}\dot{S}_{14}^T(t) &= \begin{bmatrix} 0 \\ -a(t) \end{bmatrix} [J_e] \begin{bmatrix} 0 & -\dot{a}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a(t)J_e \dot{a}(t) \end{bmatrix} \geq 0
 \end{aligned}$$

Se dice que el sistema es *internamente estable* sin importar que tipo de función variante en el tiempo sea definida para $\eta(t)$ y $a(t)$. Para corroborar este hecho se procede a llevar a cabo una simulación, tal que los valores utilizados en simulación son: $V_a(t) = 0V$, $L_a = 1H$, $R_a = 1\Omega$, $J_m = 1Kgm^2$, $b_m = 1\frac{Nm-s}{rad}$, $J_e = 1Kgm^2$, $b_e = 1\frac{Nm-s}{rad}$ y un valor inicial en el inductor L_a de $50(V-s)$.

Para $\eta(t)$ se tiene una función cicloide con una amplitud de 10, iniciando en $t_i = 0s$ y terminando en $t_f = 5s$, ésta se observa en la figura 4.10d.

También en la figura 4.10e se puede observar la función elegida para $a(t)$, que es una señal cuadrada con una amplitud de 50 y una $\omega = 5\frac{rad}{s}$.

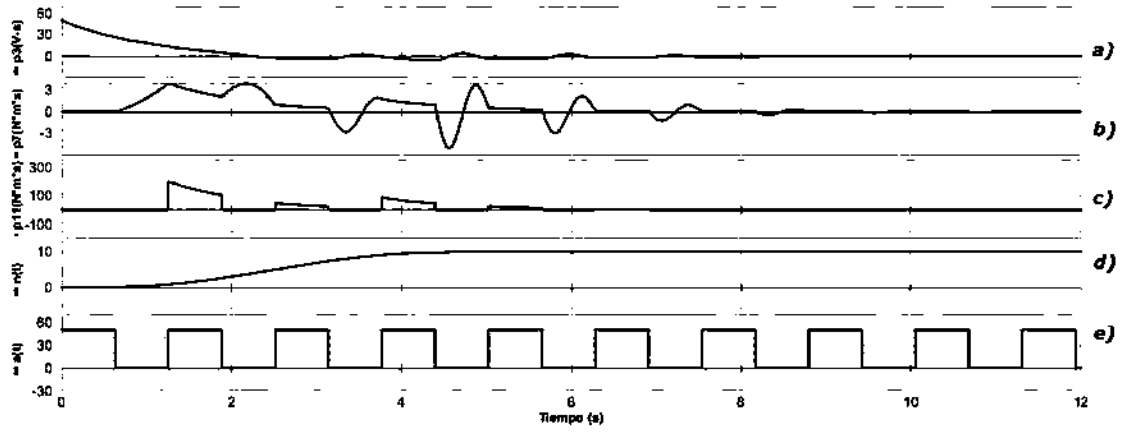


Figura 4.10: Respuesta de los estados a) $\rho_e(V - s)$, b) $\rho_e(N \cdot m \cdot s)$, c) $\rho_e(N \cdot m \cdot s)$ y las señales de d) $\eta(t)$ y e) $a(t)$.

Para finalizar, el siguiente ejemplo 4.4 se toma a partir del ejemplo 3.4 el cual tiene dos elementos I en causalidad derivativa y se suponen todos los elementos almacenadores de energía, variantes en el tiempo.

Ejemplo 4.4 En el ejemplo 3.4 observamos un sistema el cual realiza el manejo de dos dominios distintos y tiene dos elementos en causalidad derivativa, ahora se analizará su estabilidad y su representación es ilustrada en la figura 4.11.

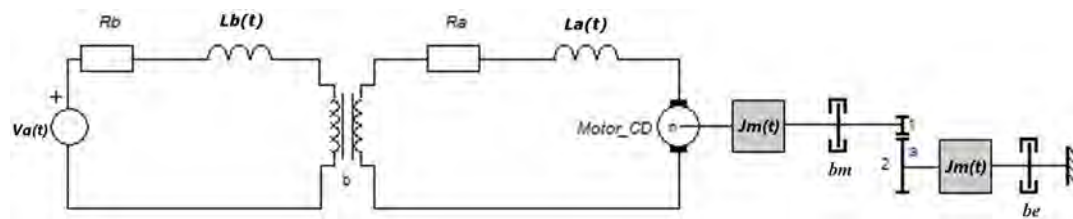


Figura 4.11: Sistema Eléctrico - Mecánico.

Su representación en Bond Graph se muestra en la figura 4.12.

Del ejemplo 3.4 se obtuvieron las siguientes relaciones constitutivas.

$$D_{out}(t) = L(t)D_{in}(t)$$

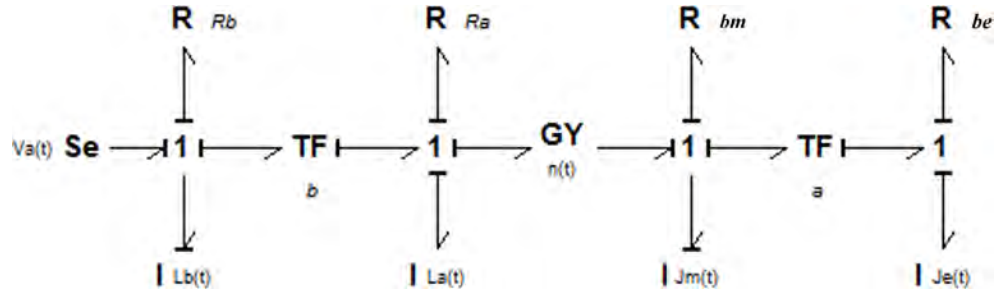


Figura 4.12: Bond Graph del sistema eléctrico-mecánico.

$$\begin{bmatrix} e_2(t) \\ e_6(t) \\ e_{10}(t) \\ e_{14}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_2(t) \\ f_6(t) \\ f_{10}(t) \\ f_{14}(t) \end{bmatrix}$$

La relación para los elementos en causalidad integral.

$$z(t) = F(t)x(t)$$

$$\begin{bmatrix} f_4(t) \\ f_{12}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{L_b(t)} & 0 \\ 0 & \frac{1}{J_m(t)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_4(t) \\ p_{12}(t) \end{bmatrix} \quad (4.66)$$

La relación de los elementos en causalidad derivativa es:

$$z_d(t) = F_d(t)x_d(t)$$

$$\begin{bmatrix} f_8(t) \\ f_{15}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{L_a(t)} & 0 \\ 0 & \frac{1}{J_e(t)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_8(t) \\ p_{15}(t) \end{bmatrix} \quad (4.67)$$

La matriz de estructura unión quedó de la siguiente manera.

$$\begin{bmatrix} e_4(t) \\ e_{12}(t) \\ \dots \\ f_2(t) \\ f_6(t) \\ f_{10}(t) \\ f_{14}(t) \\ \dots \\ y(t) \\ \dots \\ f_8(t) \\ f_{15}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -b\eta(t) & \vdots & -1 & -b & 0 & 0 & \vdots & 1 & \vdots & -b & 0 \\ b\eta(t) & 0 & \vdots & 0 & 0 & -1 & -a & \vdots & 0 & \vdots & 0 & -a \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & \vdots & 0 & 0 \\ b & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & \vdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \vdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & \vdots & 0 & 0 \\ 0 & a & \vdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & \vdots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ - & - & \vdots & - & - & - & - & \vdots & - & \vdots & - & - \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & \vdots & 0 & 0 \\ 0 & a & \vdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & \vdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_4(t) \\ f_{12}(t) \\ \dots \\ e_2(t) \\ e_6(t) \\ e_{10}(t) \\ e_{14}(t) \\ \dots \\ y(t) \\ \dots \\ e_8(t) \\ e_{15}(t) \end{bmatrix} \quad (4.68)$$

De la matriz de estructura unión (4.68) obtenemos las matrices necesarias para el análisis de estabilidad interna, esto considerando el lema 4.2.

$$S_{11}(t) = \begin{bmatrix} 0 & -b\eta(t) \\ b\eta(t) & 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad S_{22}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad S_{14}(t) = \begin{bmatrix} -b & 0 \\ 0 & -a \end{bmatrix}$$

y a su vez también de (4.66) y (4.67) se tiene

$$F(t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{L_b(t)} & 0 \\ 0 & \frac{1}{J_m(t)} \end{bmatrix} \quad ; \quad F_d^{-1}(t) = \begin{bmatrix} L_a(t) & 0 \\ 0 & J_e(t) \end{bmatrix}$$

Recordando el lema 4.2 tenemos que, sí se tiene un Sistema LTV modelado en Bond Graph, con elementos en causalidad derivativa y de las relaciones constitutivas sean $F(t)$, $F_d(t)$ y $L(t)$ matrices simétricas y definidas positivas. Se dice que el sistema es estable, sí se cumplen las condiciones (4.36), (4.37), (4.38), (4.39), (4.40), (4.41) y (4.42)

de los cuales se puede decir,

$$\begin{aligned}
 S_{11}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & -b\eta(t) \\ b\eta(t) & 0 \end{bmatrix} \geq 0 \\
 [L^{-1}(t) + S_{22}(t)] &= \begin{bmatrix} R_b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_e \end{bmatrix} \geq 0 \\
 [L^{-1}(t) - S_{22}^T(t)] &= \begin{bmatrix} R_b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_e \end{bmatrix} \geq 0 \\
 \dot{S}_{14}(t)F_d^{-1}S_{14}^T(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_a(t) & 0 \\ 0 & J_e(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -b & 0 \\ 0 & -a \end{bmatrix} = [0] \\
 S_{14}(t)F_d^{-1}\dot{S}_{14}^T(t) &= \begin{bmatrix} -b & 0 \\ 0 & -a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_a(t) & 0 \\ 0 & J_e(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = [0]
 \end{aligned}$$

sin embargo, para $\dot{F}(t)$ y $F_d^{-1}(t)$ la definición del signo no es evidente, debido a que éstas dependen de funciones que rigen a los elementos almacenadores de energía; por lo tanto la estabilidad está condicionada a cumplir con:

$$\dot{F}(t) = \begin{bmatrix} -\frac{\dot{L}_b(t)}{L_b^2(t)} & 0 \\ 0 & -\frac{\dot{J}_m(t)}{J_m^2(t)} \end{bmatrix} \geq 0 \quad (4.69)$$

$$\dot{F}_d(t) = \begin{bmatrix} -\frac{\dot{L}_a(t)}{L_a^2(t)} & 0 \\ 0 & -\frac{\dot{J}_e(t)}{J_e^2(t)} \end{bmatrix} \geq 0 \quad (4.70)$$

Existen consideraciones que son creadas a partir de (4.69) y (4.70) que son necesarias para definir si el sistema es internamente estable o no.

Analizando (4.69) se observa la existencia de fracciones, por lo tanto se tendrá que cuidar las **divisiones entre cero**, de esta también se observan las derivadas $\dot{L}_b(t)$ y $\dot{J}_m(t)$ las cuales deberán ser **semidefinidas negativas** para cumplir con la condición (4.69).

Por otra parte, el requisito para cumplir con la condición (4.70), es cuidar derivaciones entre cero y que las derivadas $\dot{L}_a(t)$ y $\dot{J}_e(t)$ sean **semidefinidas negativas**.

Una vez definidos los requisitos necesarios, se procede a realizar la simulación de este sistema, asignando valores a los elementos o funciones dependiendo del caso.

- Elementos invariantes en el tiempo

$$R_b = 1\Omega \quad ; \quad R_a = 1\Omega \quad ; \quad b_m = 1 \frac{Nm-s}{rad} \quad ; \quad b_e = 1 \frac{Nm-s}{rad}$$

$$b = 2 \quad ; \quad a = 0,1 \quad ; \quad V_a = 0V$$

- Elementos variantes en el tiempo

$$\eta(t) = 50 + 50 \cos(100 \cdot t)$$

$$L_b(t) = \frac{11}{100} - \left[\frac{1}{10} \cdot e^{(-\frac{2}{3} \cdot t)} \right] H \quad ; \quad L_a(t) = \frac{101}{100} - \left[e^{(-\frac{2}{3} \cdot t)} \right] H$$

$$J_m(t) = \frac{51}{10} - \left[5 \cdot e^{(-\frac{2}{3} \cdot t)} \right] Kgm^2 \quad ; \quad J_e(t) = \frac{101}{10} - \left[10 \cdot e^{(-\frac{2}{3} \cdot t)} \right] Kgm^2$$

Los elementos $L_b(t)$, $L_a(t)$, $J_m(t)$ y $J_e(t)$ fueron elegidos de tal forma que cumplirían con (4.69) y (4.70). Como último dato, el estado $p_4(t)$ tiene un valor inicial de $25V \cdot s$.

En la figura 4.13 se puede observar el comportamiento de la relación $\eta(t)$ y en la figura 4.14 se presenta la evolución de cada uno de los elementos variantes en el tiempo.

En la figura 4.15 se puede observar la respuesta de los estados de los elementos variantes en el tiempo, esto en un tiempo de simulación de 0.5 segundos.

Una vez que se observa la evolución de los estados podemos deducir que cada uno de ellos tiende a cero conforme el tiempo aumenta, así, definimos que **el sistema es estable**.

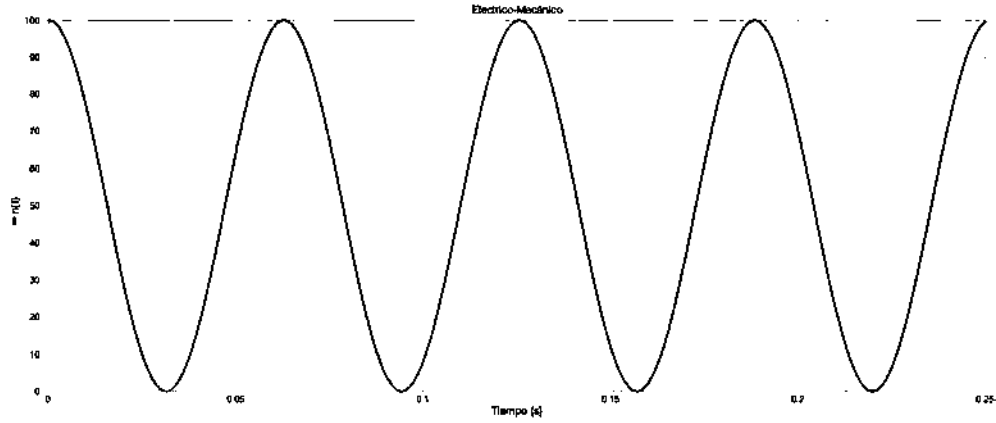


Figura 4.13: Señal que define la relación $\eta(t)$.

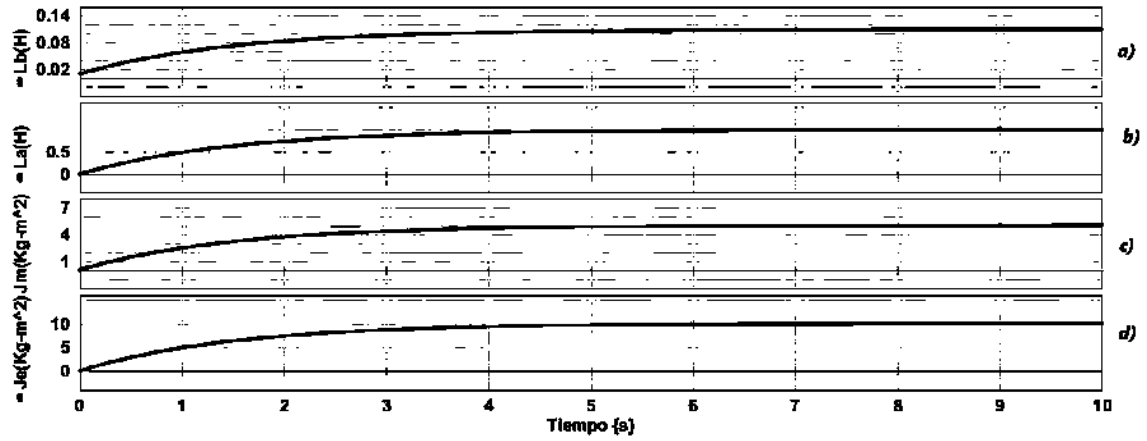


Figura 4.14: Funciones de los elementos variantes en el tiempo; a) $L_b(H)$, b) $L_a(H)$, c) $J_m(kg \cdot m^2)$, d) $J_e(kg \cdot m^2)$.

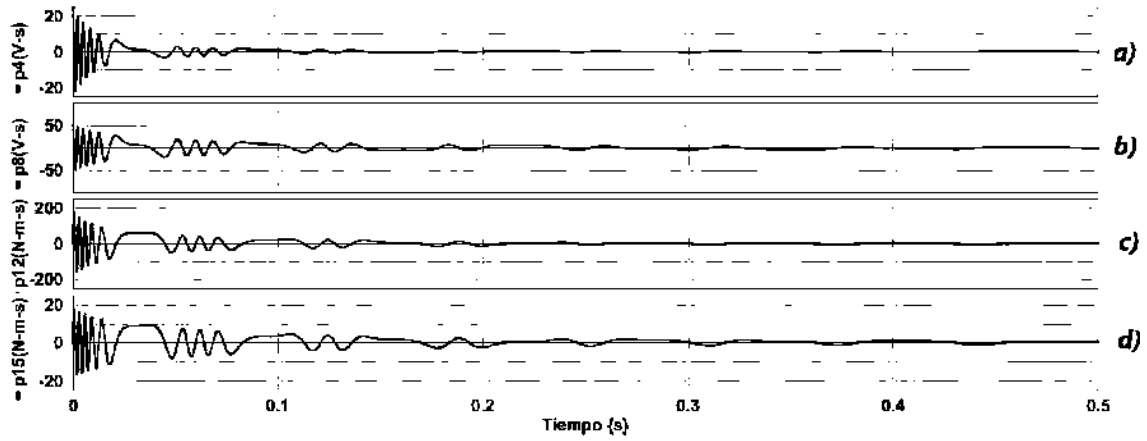


Figura 4.15: Respuesta de los estados despues de 0.5 segundos. a) Estado $\rho_4(V - s)$, b) Estado $\rho_8(V - s)$, c) Estado $\rho_{12}(N - m - s)$ y d) Estado $\rho_{15}(N - m - s)$.

Con este ejemplo se finaliza el cuarto capítulo, del cual se concluye que a través de la metodología de Bond Graph para sistemas LTV se puede determinar la estabilidad de un Sistema, esto debido a los lemas (4.1) y (4.2), que nos dan las condiciones suficientes para estabilidad y los cuales fueron establecidos en apartados anteriores.

Capítulo 5

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

5.1. Conclusiones

En este trabajo se realizó un estudio de la metodología de Bond Graph, y también sobre la Estructura de Unión, procedente de esta metodología, con lo anterior se logró llevar a cabo el modelado de Sistemas Lineales Variantes en el Tiempo en Bond Graph.

Se mostró el método a seguir para la obtención la Matriz de Estructura de Unión de sistemas lineales variantes en el tiempo y se determinó el método a seguir para obtener el Modelo Matemático en Espacio de Estados de estos sistemas.

Se realizó un estudio sobre la estabilidad interna para sistemas lineales variantes en el tiempo con el fin de poder definir ésta a través del método de Bond Graph. El estudio fue hecho principalmente sobre el "Método Directo de Lyapunov".

Posteriormente, se originaron los lemas (4.1) y (4.2), los cuales establecen condiciones de estabilidad de un sistema lineal variante en el tiempo modelado en Bond Graph. Esto se logra, sin la necesidad de involucrar el Modelo Matemático directamente. Se realizó

un estudio del cual se determinó el origen de estos lemas.

Se llevaron a cabo algunos ejemplos, para diferentes casos, tanto para el modelado de sistemas lineales variantes en el tiempo, como para determinar la estabilidad de este tipo de sistemas. Estos ejemplos sirvieron de guía para comprender mejor los métodos descritos en este trabajo.

5.2. Recomendaciones

Este trabajo se presenta como base para iniciar estudios sobre distintos tipos de estabilidad para sistemas lineales variantes en el tiempo tales como Estabilidad Uniforme o Estabilidad Exponencial Uniforme.

También, el presente trabajo se presenta como un punto de partida para analizar la controlabilidad y observabilidad de éstos sistemas a través de la metodología de Bond Graph.

Si se lleva al hecho lo anterior, entonces se podrán diseñar, modelar y analizar controladores y observadores para sistemas lineales variantes en el tiempo.

Esta investigación se presenta como el comienzo para el estudio del modelado y análisis de sistemas no lineales variantes en el tiempo en un enfoque de Bond Graph.

Bibliografía

[Ali Achir, 2005]

Ali Achir, Christopher Sueur, “Non Communicative Ring Bond Graph Application to Flatness”, International Conference on Bond Graph Modeling and Simulation,, 2005.

[Arthur D. Hall, 1968]

Arthur D. Hall, & Robert E. Fagen, "Definition of system.", Organizations 1, 1968.

[Armando F. Sarasola, 2007]

Armando F. Sarasola, Control de los Sistemas Continuos", 2ndEd., Universidad de Oviedo, 2007.

[Chi-Tsong Chen, 1999]

Chi-Tsong Chen, “Linear System Theory and Desing”, 3rdEd., Oxford University Press Inc. 1999.

[Christophe Sueur, 2011]

Christophe Sueur, “Structural Analysis and Duality for Bond Graph Models”, 19th Mediterranean Conference on Control and Automation, Greece, June 20-23, 2011.

[Christophe Sueur, 2011.]

Christophe Sueur, “Structural Analysis and Duality for Bond Graph Models”, 19th Mediterranean Conference on Control and Automation, 20-23 June, 2011.

- [Chafik Andaloussi, 2006.] Chafik Andaloussi, Zakaria Chalh, Christophe Sueur, “Infinite Zero of Linear Time-Varying Bond Graph Models: Grafical Rules”, Proceedings of the 2006 IEEE, International Conference on Control Applications, Germany, Pgs. 2962-2967, October, 2006.
- [D’Angelo Henry, 1970] D’Angelo Henry, “Linear Time-Varying Systems: Analysis and Synthesis”, Allyn and Bacon Inc., Boston, 1970.
- [Dapeng Yang, 2012] Dapeng Yang, Christophe Sueur, “Input and State Observer for LVT Bond Graph Models”, Ecole Centrale de Lille, France, Febrero, 2012.
- [Dullerud E. Geir, 1999] Geir E. Dullerud, Sanjay Lall, “A New Approach for Analysis and Synthesis of Time-Varying Systems”, IEEE Transactions on Automatic Control, Vol.44 No.8, August 1999.
- [Geneviève Dauphin-Tanguy, 2000.] Geneviève Dauphin-Tanguy, “Les Bond Graph”, Hermes Science Publications, Francia 2000.
- [Hassan K. Khalil, 2002] Hassan K. Khalil, "Nonlinear systems", 3rdEd. New Jersey, Prentice Hall, 2002.
- [Henri Bourlés, 1999.] Henri Bourlés, Bogdan Marinescu, “Poles and Zeros at infinity of Linear Time-Varying Systems”, IEEE Transactions on Automatic Control, Vol.44 No.10, Pgs. 1981-1985, October 1999.

-
- [Karnoop D., 1975.] Karnoop Dean, Rosenberg Ronald, “System Dynamics: A Unified Approach”, John Wiley & sons, USA, 1975.
- [Leon O. Chua, 1987.] L. O. Chua, Charles A. Desoer, Ernest S. Kuh, “Linear and Nonlinear Circuits”, Mc. Graw Hill, University of California, Berkley, 1987.
- [Lian Xie, 1995] Lian Xie, Serge L. Shinhkin, Minyue Fu, “Piecewise Lyapunov Functions for Robust Stability of Linear Time Varying Systems”, 34th Conferense on Decision & Control, New Orleans, LA, December, 1995.
- [Neerhoff F. L., 2002.] F. L. Neerhoff, P. var der Kloet, “Canonical Realizations of Linear Time-Varying Systems”, Proceedings MTNS 2002, Notre Dame, Indiana, USA, Agosto, 2002.
- [Panos J. Antsaklis, 2006.] Panos J. Antsaklis, Anthony N. Michel, “Linear Systems”, Birkhäuser, Boston, 2006.
- [R. Ramírez, 1994] Rodríguez Ramírez, Francisco J. “Dinamica de Sistemas”, Ed.Trillas, UNAM, 1994.
- [R. Forbes James, 2010] James Richard Forbes, Christopher John Damaren, “Passive Linear Time-Varying Systems: State-Space Realizations, Stability in Feedback, and Controller Synthesis”, American Control Conference, Baltimore, MD, USA, June-July, 2010.

- [Sergio Junco, 1992.] Sergio Junco, “Equilibrium Computation, Stability Analysis, and Control Synthesis via Lyapunov’s Second Method Directly on Bond-Graphs”, Internal Report, Dept. Electrónica-Universidad Nacional del Rosario, Argentina, 1992.
- [Sergio Junco, 1993.] Sergio Junco, “Stability Analysis and Stabilizing Control Synthesis via Lyapunov’s Second Method Directly on Bond-Graphs on Nonlinear Systems”, Proceedings of IECON’93, pp. 2065-2069, Hawaii, November 17-20, 1993.
- [Sergio Junco, 2001.] Sergio Junco, “Lyapunov Second Method and Feedback Stabilization Directly on Bond Graph”, Proceedings ICBGM, SCS-Simulation Series, 2001.
- [Sergio Junco, 2008.] Sergio Junco, Alejandro Donaire, Ahmed Rahmani, Hicham Hihi, “On the Stability of a Class of Switched Bond Graphs”, Proceedings 22nd ECMS, 2008.
- [Shokoochi Shahriar, 1983.] Shahriar Shokooki, Leonard M. Silverman and Paul M. Van Dooren, “Linear Time-Variable Systems: Balancing and Model Reduction”, IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. AC-28 No.8, Pgs. 810-822, August 1983.
- [Stefan Lichiardopol, 2006.] Stefan Lichiardopol, Christophe Sueur, “Decoupling of Linear Time-Varying Systems with a Bond Graph Approach”, Proceedings 20th European Conference on Modeling and Simulation, 2006.

-
- [Stefan Lichiardopol, 2006.] Stefan Lichiardopol, Christophe Sueur, “Decoupling of Non-Linear Bond Graph Models”, Proceedings of the 2006 IEEE, International Conference on Control Applications, Germany, Pgs. 2237-2242, October 2006.
- [Sugie Noboru, 1970] Sugie Noboru, “Initial Condition Theorem for Linear Time-Varying Systems”, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Pags. 596-597, October 1970.
- [Van Der Veen A.J., 1998.] Dewilde Patrick, Van Der Veen A.J., “Time-Varying Systems and Computations”, Kluwer Academic Publishers, Holanda, 1998.
- [Wilhelm Magnus, 1966] Wilhelm Magnus & Stanley Winkler, "Hill's Equation", Dover publications, Inc., New York, 1966.
- [Wilson J. Rugh, 1996.] Wilson J. Rugh, “Linear System Theory”, 2^{sd}Ed., Prentice Hall Inc., New Jersey, 1996.

Apéndice A

Publicaciones

- ★ **Gilberto González A., Joel A. González V.** “*Linear Time Varying Systems Stability: A Bond Graph Approach*”. **Proceedings of the 33rd IASTED International Conference on Modelling, Identification and Control (MIC 2014)**, Pags.41-47, Innsbruck, Austria, Febrero 17-19, 2014.
- ★ **Gilberto González A., Joel A. González V.** “*Linear Time Varying Systems Stability with Linearly Dependent State Variables in the Physical Domain*”. **19th International Conference on Methods and Models in Automation and robotics**, Miedzyzdroje, Poland, Septiembre 2-5, 2014.



Proceedings of the 33rd IASTED International Conference on

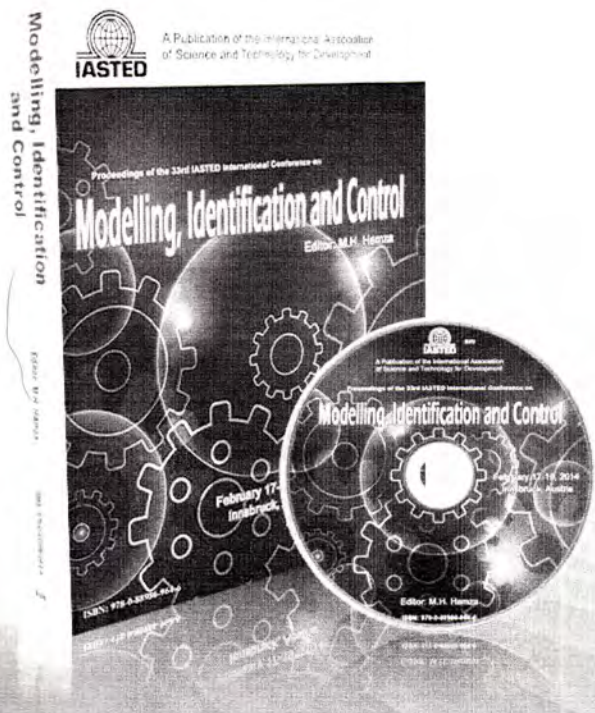
Modelling, Identification and Control

Editor: M.H. Hamza

February 17 – 19, 2014
Innsbruck, Austria

ISBN: 978-0-88986-964-6
809MIC

Start >>



LINEAR TIME VARYING SYSTEMS STABILITY: A BOND GRAPH APPROACH

Gilberto González-A¹ and Joel A. Gonzalez-V²

¹ gilmichga@yahoo.com.mx, ²joelabrahamgv@gmail.com.mx
Faculty of Electrical Engineering University of Michoacan
Mexico

ABSTRACT

A bond graph model of a Linear Time-Varying (LTV) system is presented. This bond graph can have LTV constitutive relations of the fields, and transformer and gyrator LTV modules. Hence, a junction structure and the state variables equation of the bond graph can be obtained. Also, a Lemma to determine the stability conditions of a LTV system based on the corresponding bond graph model is proposed. In order to show the effectiveness of the proposed methodology, two examples are solved.

KEY WORDS

Bond graph, LTV systems, Stability conditions, Lyapunov's direct method.

1 Introduction

Methods for exact analysis of linear time-varying (LTV) systems are relatively few and tend to be either extremely difficult to apply or limited in application to a small class of systems. The fundamental difficulty underlying the analysis of linear time-varying systems becomes apparent when one reviews some of the common methods for exact analysis. For linear time-varying systems characterized by state-variable equations, a method involving an infinite number of iterative integrations can be used to generate the matrix and/or the fundamental matrix as it has been termed recently. The fundamental matrix is implicitly related to the basis functions. However, the various methods for obtaining exact solutions are not complementary to each other and difficulty in obtaining exact solutions with one method is usually sufficient indication that difficulty will be encountered with another [1]. There are some interesting papers related to LTV systems stability: in [2] a necessary and sufficient stability criterion has been established for LTV systems based on a recently developed parallel D-spectrum concept. New proofs to classical results on uniform global exponential stability of multivariable linear time-varying systems are presented in [3]; the results are stated in

terms of a reformulation of the well known concepts of persistency of excitation.

In [4] studies the exponential stability of LTV systems using the recent proposed integral function, by showing the properties of the integral function and applying the Bellman-Gronwall Lemma, a sufficient and necessary condition for the exponential stability of LTV systems is derived.

In [5] a new sufficient condition for the robust stability of linear systems with time-varying polytopic uncertainty is given in terms of linear matrix inequalities: the robust stability condition is assured by means of a parameter dependent Lyapunov function, taking into account bounds on the time derivatives of the uncertain parameters. Some theorems derived by the authors on the stability of multidimensional LTV systems are reported in [6].

The references [2, 3, 4, 5, 6] give the stability analysis based on the properties of the state equations and this paper proposes to obtain the stability conditions in a bond graph approach.

Some interesting papers analyzing LTV systems are described: a state feedback control of slowly-varying linear continuous-time and discrete-time systems with bounded coefficient matrices is studied in terms of the frozen-time approach in [7].

The controllability and the observability of continuous linear time-varying systems with the norm-bounded parameter perturbations are analyzed in [8]. In [9] examines the design of feedback control system for linear time-varying systems. An algebraic rank condition is given for controllability and observability of time varying linear systems in [10]. In [11] has been shown that the notions of time-constant and exponential envelope as classically used to characterize the quality of stability for time-invariant linear differential equations can be extended to the general case of time-varying differential equations. In [12] considers the existence of parameterized Lyapunov functions for the stability and passivity analysis of linear time invariant uncertain systems and demonstrates their application to the stability analysis of a class of linear

time varying systems.

The main features of bond graph modeling techniques are of importance for the design and realization of automatic control systems using modern as distinct from classical methods [13, 14].

In the first place, bond graphs classify all variables as power variables, momenta or displacements. When a set of first order, dynamic state equations are derived from a bond graph in the usual manner, the state variables are invariably energy variables and thus their physical interpretation is straightforward. In [15] presents some techniques for the immediate application on bond graphs of Lyapunov's direct method, in order to analyze stability and to synthesize feedback-stabilizing controllers. In [16] a set of energy-based methods for the computation of equilibria, the analysis of their stability, and the synthesis of stabilizing control laws are presented. In [17] proposes methods enable to solve control problems directly in bond graph domain considering the property of flatness of nonlinear bond graphs, these methods can be used on time varying bond graphs and allows tackling the constraint of non commutativity of such models.

In this paper, the modelling in bond graphs of Linear Time Varying (LTV) systems is presented. The characteristic of this bond graph is to consider LTV constitutive relations of the storage and dissipation fields and transformer and gyrator LTV modules. In order to determine the stability of LTV systems modelled by bond graphs, this paper proposes a Lemma to obtain the stability conditions based on the junction structure matrix of the corresponding bond graph.

Thus, the proposed methodology of this paper, it is not necessary to identify the Lyapunov functions and its derivatives, this is a good advantage respect to [15]. Moreover, this paper does not require to determine the state matrix of the LTV system and the traditional approaches [18, 19, 20, 21] is the beginning to solve the stability problem. In order to apply the proposed methodology, it is necessary to know the bond graph model of the LTV system, if the system does not admit a bond graph representation, this methodology cannot be applied.

Section 2 summarizes a definition, proposition and Theorem of the Lyapunov stability. Section 3 proposes the modelling in bond graph for LTV systems. The stability conditions for a LTV system modelled by bond graphs is presented in Section 4. The proposed methodology is applied to two examples in Section 5. Finally, Section 6 gives the conclusions.

2 Lyapunov Stability Theorem

While the determination of qualitative properties of the solution of LTV systems is relatively simple, the

determination of corresponding properties for linear time-varying systems is very difficult and complicated since it requires the evaluation of the transition system matrix. Several sufficient conditions for the exponential stability of LTV systems given in [18, 19, 20, 21] where the solution of the Lyapunov equation is assumed to be uniformly positive definite. Therefore, finding simple and effective conditions for the qualitative properties of LTV systems has been a topic of long-standing interest.

Let $A \in BC([0, \infty), \mathbb{R}^{n \times n})$. We consider the following unforced LTV system

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t), \quad t \geq 0 \quad (1)$$

where $BC([0, \infty), \mathbb{R}^{n \times n})$ denotes the set of all $n \times n$ matrix functions continuous and bounded on $[0, \infty)$.

Definition. The LTV system (1) is exponentially stable if there exists numbers $N > 0$, $\delta > 0$ such that every solution $x(t)$ of the system with $x(s) = x_0$ satisfies [18, 19, 20, 21]

$$\|x(t)\| \leq N \|x_0\| e^{-\delta(t-s)}, \quad \forall t \geq s \geq 0 \quad (2)$$

It is known that if A is a constant matrix such that the real parts of the eigenvalues are negative or equivalently, if there is a symmetric positive definite solution P of the Lyapunov inequation [18, 19, 20, 21]

$$A^T P + P A < 0 \quad (3)$$

then the system is exponentially stable. In the sequel, we derive a necessary and sufficient condition for the exponential stability of LTV systems in terms of the Lyapunov inequation.

For any $A \in BC([0, \infty), \mathbb{R}^{n \times n})$ we set

$$M_A = \{Q \in M^+ : Q - [A(t) + A^T(t)] \gg 0\} \quad (4)$$

then, the set M_A is nonempty by using the following Proposition.

Proposition. For any matrix $A \in BC([0, \infty), \mathbb{R}^{n \times n})$ there exists $Q \in M_A$ consider the following time-varying Lyapunov inequation [18, 19, 20, 21]

$$\dot{P}(t) + A^T(t)P(t) + P(t)A(t) + Q \leq 0, \quad t \geq 0 \quad (5)$$

Theorem. For any $A \in BC([0, \infty), \mathbb{R}^{n \times n})$, the following two conditions are equivalent, [18, 19, 20, 21]

- i) The system (1) is exponentially stable.
- ii) Lyapunov inequation (5) has a solution $P \in BC([0, \infty), \mathbb{R}^{n \times n})$ for some $Q \in M_A$.

The modeling in bond graph for LTV systems is proposed in the next section.

3 Bond Graph Models of Linear Time Varying Systems

Consider the scheme of a Bond Graph model in an integral causality assignment representing a linear time varying system shown in Fig. 1.

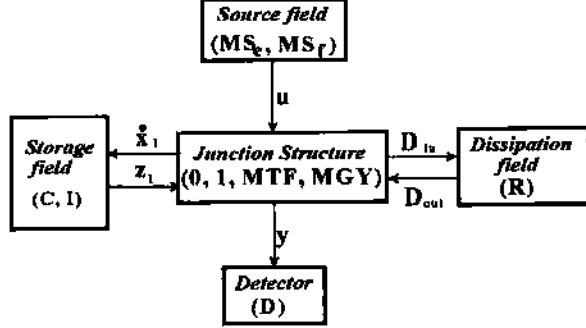


Fig. 1. Junction structure and key vectors of a bond graph.

In Fig. 1, (MS_e, MS_f) , (C, I) and (R) denote the source, the energy storage and the energy dissipation fields. (D) the detector and $(0, 1, MTF, MGY)$ the junction structure with transformers, MTF , and gyrators, MGY .

The state $x(t) \in \mathbb{R}^n$ is composed of energy variables $p(t)$ and $q(t)$ associated with I and C elements in integral causality, $u(t) \in \mathbb{R}^p$ denotes the plant input, $z(t) \in \mathbb{R}^n$ is the co-energy vector and $D_{in}(t) \in \mathbb{R}^r$ and $D_{out}(t) \in \mathbb{R}^r$ are a mixture of $e(t)$ and $f(t)$ showing the energy exchanges between the dissipation field and the junction structure.

The relations of the storage and dissipation fields are given by

$$\dot{z}(t) = F(t)x(t) \quad (6)$$

$$D_{out}(t) = L(t)D_{in}(t) \quad (7)$$

The relations of the junction structure are:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ D_{in}(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = S(t) \begin{bmatrix} z(t) \\ D_{out}(t) \\ u(t) \end{bmatrix} \quad (8)$$

where

$$S(t) = \begin{bmatrix} S_{11}(t) & S_{12}(t) & S_{13}(t) \\ S_{21}(t) & S_{22}(t) & S_{23}(t) \\ S_{31}(t) & S_{32}(t) & S_{33}(t) \end{bmatrix} \quad (9)$$

The entries of $S(t)$ take values inside the set $\{0, \pm 1, \pm f_t(t), \pm f_g(t)\}$ where $f_t(t)$ and $f_g(t)$ are transformer and gyrator modules: these modules can be time functions. Also, the properties $S_{11}(t)$, and $S_{22}(t)$ are square skew-symmetric matrices, and $S_{12}(t)$ and $S_{21}(t)$ are matrices each other negative transpose, respectively.

The state equation of the proposed bond graph for a LTV system is defined by

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \quad (10)$$

$$y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t) \quad (11)$$

where

$$A(t) = [S_{11}(t) + S_{12}(t)M(t)S_{21}(t)]F(t) \quad (12)$$

$$B(t) = S_{13}(t) + S_{12}(t)M(t)S_{23}(t) \quad (13)$$

$$C(t) = [S_{31}(t) + S_{32}(t)M(t)S_{21}(t)]F(t) \quad (14)$$

$$D(t) = S_{33}(t) + S_{32}(t)M(t)S_{23}(t) \quad (15)$$

being

$$M(t) = L(t)[I - S_{22}(t)L(t)]^{-1} \quad (16)$$

It is common to represent the state equation by using the co-energy variables, then a similarity transformation has to be applied. This new system is described by

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= \left[\dot{F}(t)F^{-1}(t) + F(t)A(t)F^{-1}(t) \right] z(t) \\ &\quad + F(t)B(t)u(t) \end{aligned} \quad (17)$$

$$y(t) = C(t)F^{-1}(t)z(t) + D(t)u(t) \quad (18)$$

In the next section, the stability of a LTV system by applying bond graph is presented.

4 Stability in a Bond Graph Approach

Internal stability deals with boundedness properties and asymptotic behaviour (as $t \rightarrow \infty$) of solutions of the zero-input linear state equation

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t), \quad x(t_0) = x_0 \quad (19)$$

The origin of Lyapunov's so-called *direct method* for stability assessment is the notion that total energy of an unforced, dissipative mechanical system decreases as the state of the system evolves in time [18, 19, 20]. Therefore, the state vector approaches a constant value corresponding to zero energy as time increases. Phrased more generally, stability properties involve the growth properties of solutions of the state equation, and these properties can be measured by a suitable (energy-like) scalar function of the state vector. The problem is to find a suitable scalar function.

The main result of this paper is given in the following Lemma to determine the stability conditions for LTV systems modelled by bond graphs.

Lemma. Consider a LTV system modelled by a bond graph in an integral causality assignment whose junction structure is defined by (8) the constitutive relations of the storage and dissipation elements are

LTV, symmetric and positive definite, this system is internally stable, if the submatrices $S_{11}(t)$ and $S_{22}(t)$ are positive semidefinite.

Proof. By considering (19), for any solution $x(t)$ of (19), the derivative of the scalar function

$$\|x(t)\|^2 = x^T(t)x(t) \quad (20)$$

with respect to t can be written as

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|x(t)\|^2 &= \dot{x}^T(t)x(t) + x^T(t)\dot{x}(t) \\ &= x^T(t)[A^T(t) + A(t)]x(t) \end{aligned} \quad (21)$$

suppose that the quadratic form on the right side of (21) is negative definite, that is, suppose the matrix $A^T(t) + A(t)$ is negative definite at each t then the system is internally stable.

We know that the state matrix for a LTV system modelled by a bond graph is given by

$$A(t) = [S_{11}(t) + S_{12}(t)M(t)S_{21}(t)]F(t) \quad (22)$$

and the matrix $M(t)$ defined by (16) can be rewritten as

$$M(t) = [L^{-1}(t) - S_{22}(t)]^{-1} \quad (23)$$

by substituting (23) into (22) we have

$$\begin{aligned} A(t) &= \{S_{12}(t)[L^{-1}(t) - S_{22}(t)]^{-1}S_{21}(t) \\ &\quad + S_{11}(t)\}F(t) \end{aligned} \quad (24)$$

now, it is necessary to represent $A^T(t)$ in terms of the submatrices or the junction structure of the bond graph

$$\begin{aligned} A^T(t) &= \{[S_{12}(t)[L^{-1}(t) - S_{22}(t)]^{-1}S_{21}(t) \\ &\quad + S_{11}(t)]F(t)\}^T \\ &= F^T(t)\{S_{11}^T(t) + \\ &\quad S_{21}^T(t)[(L^T)^{-1} - S_{22}^T(t)]^{-1}\} \end{aligned} \quad (25)$$

determining the properties of

$$A^T(t) + A(t) = \delta(t) \quad (26)$$

by substituting (24) and (25) into (26), we have

$$\begin{aligned} \delta(t) &= F^T(t)S_{21}^T(t)[(L^T)^{-1} - S_{22}^T(t)]^{-1} + \\ &\quad S_{12}(t)[L^{-1}(t) - S_{22}(t)]^{-1}S_{21}(t)F(t) \\ &\quad + F^T(t)S_{11}^T(t) + S_{11}(t)F(t) \end{aligned} \quad (27)$$

the matrices $F(t)$ and $L(t)$ are symmetric and the submatrices $S_{11}(t)$ and $S_{22}(t)$ are antisymmetric then

$$\begin{aligned} F(t) &= F^T(t) \\ L(t) &= L^T(t) \\ S_{11}(t) &= -S_{11}^T(t) \\ S_{22}(t) &= -S_{22}^T(t) \end{aligned}$$

and (27) can be written by

$$\begin{aligned} \delta(t) &= -F(t)S_{11}(t) - S_{11}^T(t)F(t) \\ &\quad - F(t)S_{12}(t)[L^{-1}(t) + S_{22}(t)]^{-1}S_{12}(t) \\ &\quad - S_{12}(t)[L^{-1}(t) + S_{22}^T(t)]^{-1}S_{12}^T(t)F(t) \end{aligned} \quad (28)$$

from (28) we prove that if the submatrices $S_{11}(t)$ and $S_{22}(t)$ are positive semidefinite, the system will be internally stable. ■

The advantage of this Lemma respect to [15] is that it is not necessary to identify the Lyapunov functions of the bond graph. Other stability analysis methods [5, 18, 19, 20, 21] requires to know the state matrix of the LTV system and a good advantage of the proposed Lemma is to determine the stability conditions based on the $S_{11}(t)$ and $S_{22}(t)$ properties of the respective bond graph model.

The next section describes two examples to determine the stability of LTV systems modelled by bond graphs.

5 Examples

1. A simple and interesting case of studio is described in [1] where the space state realization of a system is

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -f_1(t) \\ f_2(t) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (29)$$

then a possible representation of (29) is shown in Fig. 2.

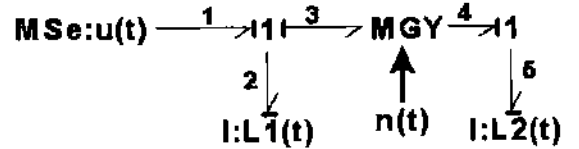


Fig. 2. Bond graph of the realization of (29).

This example does not have dissipation elements and we propose storage elements with LTV constitutive relations. Also, the bond graph contains a gyrator with LTV module.

The key vectors of the bond graph are

$$\begin{aligned} x(t) &= \begin{bmatrix} p_2(t) \\ p_5(t) \end{bmatrix}; \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} e_2(t) \\ e_5(t) \end{bmatrix}; z(t) = \begin{bmatrix} f_2(t) \\ f_5(t) \end{bmatrix} \\ u(t) &= e_1(t) \end{aligned}$$

the constitutive relation is

$$F(t) = \text{diag} \left\{ \frac{1}{L_1(t)}, \frac{1}{L_2(t)} \right\} \quad (30)$$

and the junction structure is given by

$$\begin{bmatrix} e_2(t) \\ e_5(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -n(t) \\ n(t) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_2(t) \\ f_5(t) \\ e_1(t) \end{bmatrix} \quad (31)$$

From (12), (30) and (31) the state matrix is

$$A(t) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{-n(t)}{L_2(t)} \\ \frac{-n(t)}{L_1(t)} & 0 \end{bmatrix} \quad (32)$$

Now, if we apply the proposed Lemma

$$S_{11}(t) = \begin{bmatrix} 0 & -n(t) \\ n(t) & 0 \end{bmatrix} \quad (33)$$

then $S_{11}(t)$ is positive semidefinite and the system is stable.

2. Consider the bond graph of Fig. 3.

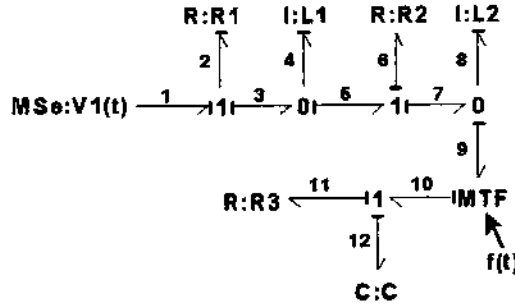


Fig. 3. Bond graph of the example 2.

The storage and dissipation elements of this bond graph model are constants. However, the transformer module is a linear time varying function, $f(t)$, and we have a LTV system.

The key vectors are

$$\begin{aligned} x(t) &= \begin{bmatrix} p_4(t) \\ p_8(t) \\ q_{12}(t) \end{bmatrix}; \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} e_4(t) \\ e_8(t) \\ f_{12}(t) \end{bmatrix} \\ z(t) &= \begin{bmatrix} f_4(t) \\ f_8(t) \\ e_{12}(t) \end{bmatrix}; u(t) = e_1(t) \\ D_{in}(t) &= \begin{bmatrix} f_2(t) \\ e_6(t) \\ f_1(t) \end{bmatrix}; D_{out}(t) = \begin{bmatrix} e_2(t) \\ f_6(t) \\ e_1(t) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

the constitutive relations of the fields are

$$F = \text{diag} \left\{ \frac{1}{L_1}, \frac{1}{L_2}, \frac{1}{C} \right\} \quad (34)$$

$$L = \text{diag} \left\{ R_1, \frac{1}{R_2}, R_3 \right\} \quad (35)$$

and the junction structure is given by

$$S(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & f(t) & 0 & 0 & f(t) & 0 \\ 0 & -f(t) & 0 & 0 & f(t) & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -f(t) & -1 & 0 & -f(t) & 1 \\ 0 & -f(t) & 0 & 0 & f(t) & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (36)$$

By applying the Lemma, the submatrices are

$$\begin{aligned} S_{11}(t) &\geq 0 \\ S_{22}(t) &\geq 0 \end{aligned}$$

then the system is stable.

In order to verify that the system is stable, simulation results by using the 20-Sim software are presented. The numerical parameters of the system are: $R_1 = 2\Omega$, $R_2 = 4\Omega$, $R_3 = 6\Omega$, $L_1 = 0.1H$, $L_2 = 0.2H$, $C_1 = 0.01F$, $V_1(t) = 10V$ and for the transformer module $f(t)$, we consider three cases.

The first case $f(t)$ is a signal generator cycloid that it begins at $t_0 = 0.5s$ until $t_f = 1s$ with a magnitude of 100, the dynamic behaviour of the system is shown Fig. 4.

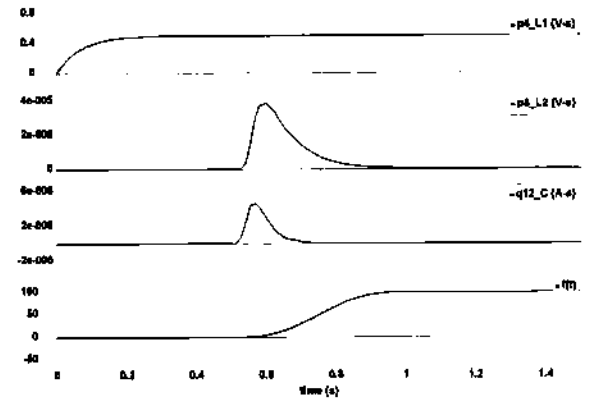


Fig. 4. Performance of the system with a cycloid.

The second case of studio $f(t)$ is a wave generator sine with a frequency of 50 rad/s and its magnitude is 100, Fig. 5 shows the response of the state variables of the system.

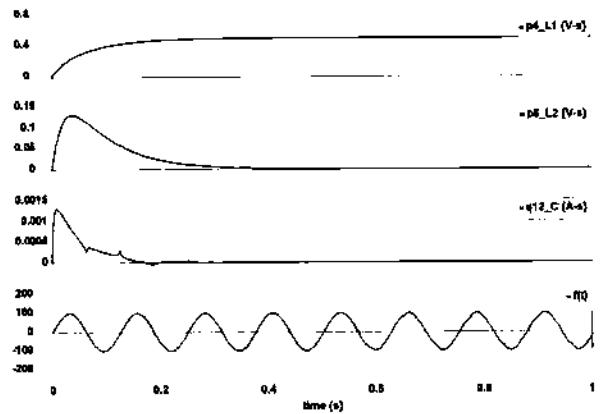


Fig. 5. Performance of the system with a sine wave.

Fig. 6 shows the response of the states which is the final case when the signal $f(t)$ is a wave generator saw.

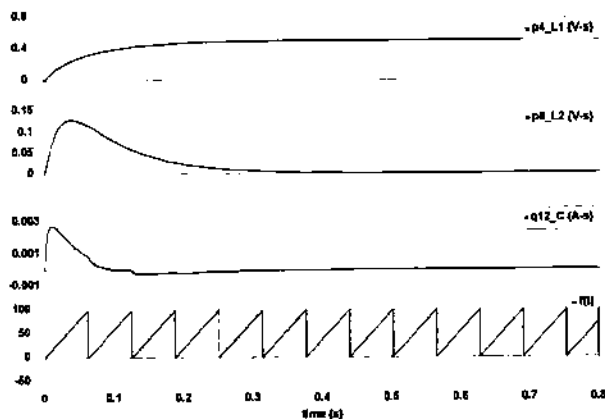


Fig. 6. Performance of the system with a saw wave.

Figs. 4, 5 and 6 show that the LTV system is stable and the dynamic behaviour of the states are similar.

Note that the proposed Lemma permits to determine the stability conditions in a direct way when the LTV system is modelled by bond graphs. However, a disadvantage is that, if the system does not admit a bond graph representation, this methodology cannot be applied.

6 Conclusion

In this paper a bond graph of a Linear Time Varying system is proposed. The bond graphs of this class of systems can have LTV constitutive relations of the storage and dissipation elements and LTV modules of the transformer and gyrator elements. A junction structure of the bond graph representing a LTV system is proposed. The stability conditions of a LTV system by using the submatrices of the junction structure of the corresponding bond graph are presented. Finally, the proposed methodology is applied to determine the stability conditions for two examples.

References

- [1] Henry D'Angelo, "Linear Time-Varying Systems: Analysis and Synthesis", Allyn and Bacon, Boston, 1970.
- [2] J. Jim Zhu, "A Necessary and Sufficient Stability Criterion for Linear Time-Varying Systems", Proceedings of the Twenty-Eighth Southeastern Symposium on System Theory, pp.115-119, 1996.
- [3] Antonio Loria and E. Panteley, "Uniform exponential stability of linear time-varying systems:revisited", Syst. & Contr. Lettr. 2002.
- [4] Yu Yao, D. Sun, V. Balakrishnan and J. Guo, "An Integral Function Approach to the Exponential Stability of Linear Time-Varying Systems", International Journal of Control, Automation and Systems, 10(6):1096-1101, 2012.
- [5] Vinicius F. Montagner and P. L. D. Peres, "A new LMI condition for the robust stability of linear time-varying systems", Proceedings of the 42nd IEEE Conference on Decision and Control, Maui, Hawaii USA, December, 2003.
- [6] S. Pradeep and S. K. Shrivastava, "Some recent results on the stability of linear time varying systems", Sadhana, Vol. 3, Part 3, November 1988, pp. 157-167.
- [7] E. W. Kamen, P. P. Khargonekar and A. Tannenbaum, "Control of Slowly-Varying Linear Systems", IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 34, No. 12, December 1989, pp. 1283-1285.
- [8] Dohyoung Chung, Chan Gook and Jang Gyu Lee, "Robustness of Controllability and Observability of Continuous Linear Time-Varying System with Parameter Perturbations, IEEE Transactions on Automatic Control, Vol 44, No. 10, October 1999, pp. 1919-1923.
- [9] Richard T O'Brien and Pablo A. Iglesias, "Robust Controller Design for Time-Varying Systems", Proceedings of the 37th IEEE Conference on Decision & Control, Tampa, Florida USA, December 1998, pp. 3813-3818.
- [10] Ferenc Sziget, "A Differential-Algebraic Condition for Controllability and Observability of Time Varying Linear Systems", Proceedings of the 31st Conference on Decision and Control, Tucson, Arizona, December 1992, pp. 3088-3090.
- [11] C. D. Johnson, "Quality of Stability for Linear, Time-Varying Systems using an exact Time-Varying Eigenvalue Theory; Part I, IEEE, 1991, pp. 454-460.
- [12] G. Chockalingam, S. Dasgupta, B. D. O. Anderson and M. Fu, "Lyapunov Functions for Uncertain Systems with Applications to the Stability of Time Varying Systems", Proceedings of the 32nd Conference on Decision and Control, San Antonio, Texas, December 1993, pp. 1525-1530.
- [13] Dean C. Karnopp, Donald L. Margolis and Ronald C. Rosenberg, *System Dynamics Modeling and Simulation of Mechatronic Systems*, Wiley, John & Sons, 2000.
- [14] P. E. Wellstead, *Physical System Modelling*, Academic Press, London, 1979.

- [15] Sergio Junco, "Stability Analysis and Stabilizing Control Synthesis via Lyapunov's Second Method Directly on Bond Graphs of Nonlinear Systems", *Proceedings of the International Electronics, Control and Instrumentation*, Vol. 3, pp. 2065-2069, November, 1993.
- [16] Sergio Junco, "Lyapunov Second Method and Feedback Stabilization Directly on Bond Graphs", *Simulation series* 33, 1, pp. 137-144, *International Conference bond graph modelling and simulation*, 2001.
- [17] A. Achir and C. Sueur, "Non commutative ring bond graphs application to flatness", *Simulation series*, 37,1 *International conference on bond graph modelling and simulation*, 2005, pp.59-64.
- [18] Wilson J. Rugh, "Linear System Theory", Prentice Hall, 1996.
- [19] Chi-Tsong Chen "Linear System Theory Design", Holt, Rinehart and Winston, inc. 1970.
- [20] Thomas Kailath, "Linear Systems", Prentice-Hall, 1980.
- [21] Vu N. Phat and V. Jeyakumar, "Lyapunov stability, stabilizability and duality for linear time-varying systems",
- [22] C. Sueur and G. Dauphin-Tanguy, "Bond graph approach for structural analysis of MIMO linear systems", *Journal of the Franklin Institute*, Vol. 328, No. 1, pp. 55-70, 1991.

Linear Time Varying Systems Stability with Linearly Dependent State Variables in the Physical Domain

Gilberto Gonzalez-A and Joel A. Gonzalez-V

Faculty of Electrical Engineering, University of Michoacan
Mexico

Emails: gilmichga@yahoo.com.mx, joelabrahamgv@gmail.com.mx

Abstract—A bond graph model of a Linear Time-Varying (LTV) system is proposed. This bond graph can contain LTV constitutive relations of the fields, and transformer and gyrator LTV modules. Also, the bond graph model can have storage elements in integral and derivative causality assignments, *i.e.* the state variables can be linearly independent or linearly dependent. Then, the corresponding junction structure and the state variables representation of the bond graph can be obtained. Thus, a Lemma to get the stability conditions of a LTV system by using the junction structure of the bond graph is presented. The proposed methodology to determine the stability conditions is applied to two examples.

Keywords: Bond graph, LTV systems, Stability conditions, Lyapunov's direct method.

I. INTRODUCTION

The linear continuous time-varying (LTV) systems has been receiving increasing attention by system and control community, since they appear frequently in practical engineering areas such as aerospace control systems [1]. While important, LTV systems are very hard to investigate despite of the fundamental stability problem. However, numerous important progresses, including but not limited to [2], [3], [4], [5] have been achieved through the effort of researchers. They more or less all rely on the use of a linear time-invariant plant as an approximation of the LTV system and ensuring that the influence of the approximation is not excessive. The main advantage of this frozen time method is the possibility of exploiting the great deal of tools which have been developed for linear time-invariant (LTI) systems [8].

The methods for exact analysis of LTV systems are relatively few and tend to be either extremely difficult to apply or limited in application to a small class of systems. For linear time-varying systems characterized by state-variable equations, a method involving an infinite number of iterative integrations can be used to generate the matrix and/or the fundamental matrix as it has been termed recently. The fundamental matrix is implicitly related to the basis functions. However, the various methods for obtaining exact solutions are not complementary to each other and difficulty in obtaining exact solutions with one method is usually sufficient indication that difficulty will be encountered with another [1]. There are some interesting papers related to LTV systems stability: in [6] a necessary and sufficient stability criterion has been

established for LTV systems based on a recently developed parallel D-spectrum concept. New proofs to classical results on uniform global exponential stability of multivariable linear time-varying systems are presented in [7]; the results are stated in terms of a reformulation of the well known concepts of persistency of excitation.

In [8] studies the exponential stability of LTV systems using the recent proposed integral function, by showing the properties of the integral function and applying the Bellman-Gronwall Lemma, a sufficient and necessary condition for the exponential stability of LTV systems is derived. Some theorems derived by the authors on the stability of multidimensional LTV systems are reported in [9].

The references [6], [7], [8], [9] give the stability analysis based on the properties of the state equations and this paper proposes to obtain the stability conditions in a bond graph approach.

In [10] has been shown that the notions of time-constant and exponential envelope as classically used to characterize the quality of stability for time-invariant linear differential equations can be extended to the general case of time-varying differential equations. In [11] considers the existence of parameterized Lyapunov functions for the stability and passivity analysis of linear time invariant uncertain systems and demonstrates their application to the stability analysis of a class of linear time varying systems.

Bond graph was established by Paynter [12], [13]. The idea was developed by Karnopp [12] and Wellstead [13] how a powerful tool of modeling. The main key of the bond graph methodology is: a model containing the energetic junction structure, *i.e.* the system architecture; different domains are covered and the coupling of subsystems are allowed; the cause of effect relations of each element are obtained graphically and the states variables have a physical meaning.

In the first place, bond graphs classify all variables as power variables, momenta or displacements. When a set of first order, dynamic state equations are derive from a bond graph in the usual manner, the state variables are invariably energy variables and thus their physical interpretation is straightforward. In [14] presents some techniques for the immediate application on bond graphs of Lyapunov's direct method, in order to analyze stability and to synthesize feedback-

stabilizing controllers. In [15] a set of energy-based methods for the computation of equilibria, the analysis of their stability, and the synthesis of stabilizing control laws are presented. In [16] proposes methods enable to solve control problems directly in bond graph domain considering the property of flatness of nonlinear bond graphs, these methods can be used on time varying bond graphs and allows tackling the constraint of non commutativity of such models.

In this paper, the modelling in bond graph for LTV systems is proposed. This bond graph can have LTV constitutive relations of the storage and dissipation fields, and transformer and gyrator LTV module. An integral and derivative causality can be assigned to the corresponding bond graph, *i.e.* the bond graph can have linearly independent and dependent state variables of the LTV system. A Lemma to obtain the stability conditions in a bond graph approach is proposed.

Hence, in this paper is not necessary to determine the Lyapunov functions and its derivatives, this is a good advantage respect to [14]. Also, this paper does not require to get the state matrix of the LTV system and the traditional approaches [17], [18], [19], [20] at the beginning to solve the stability problem.

Section II proposes a bond graph model of LTV systems. Section III gives the definition, proposition and Theorem of the Lyapunov stability. Section IV proposes a Lemma to obtain the stability conditions for a LTV system in the physical domain. The modelling and stability conditions are obtained for two LTV systems in Section V. Finally, Section VI gives the conclusions.

II. BOND GRAPH MODELS OF LINEAR TIME VARYING SYSTEMS

Consider the scheme of a Bond Graph model in an integral causality assignment representing a linear time varying system shown in Fig. 1.

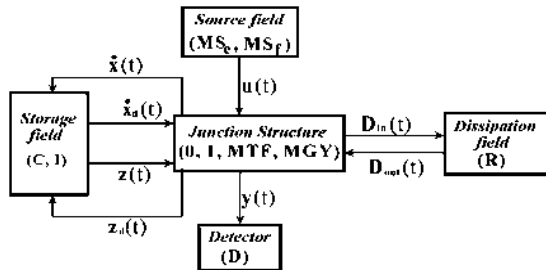


Fig. 1. Junction structure and key vectors of a bond graph.

In Fig. 1, (MS_e, MS_f) , (C, I) and (R) denote the source, the energy storage and the energy dissipation fields, (D) the detector and $(0, I, MTF, MGY)$ the junction structure with transformers, MTF , and gyrators, MGY .

The state $x(t) \in \mathbb{R}^n$ and $x_d(t) \in \mathbb{R}^m$ are composed of energy variables $p(t)$ and $q(t)$ associated with I and C elements in integral and derivative causality, respectively; $u(t) \in \mathbb{R}^p$ denotes the plant input, $z(t) \in \mathbb{R}^n$ and $z_d(t) \in \mathbb{R}^m$ are the co-energy vector in integral and derivative, respectively, and $D_{in}(t) \in \mathbb{R}^r$ and $D_{out}(t) \in \mathbb{R}^r$ are a mixture of $e(t)$ and

$f(t)$ showing the energy exchanges between the dissipation field and the junction structure.

The relations of the storage and dissipation fields are given by

$$z(t) = F(t) x(t) \quad (1)$$

$$z_d(t) = F_d(t) x_d(t) \quad (2)$$

$$D_{out}(t) = L(t) D_{in}(t) \quad (3)$$

The relations of the junction structure are:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ D_{in}(t) \\ y(t) \\ z_d(t) \end{bmatrix} = S(t) \begin{bmatrix} z(t) \\ D_{out}(t) \\ u(t) \\ \dot{x}_d(t) \end{bmatrix} \quad (4)$$

where

$$S(t) = \begin{bmatrix} S_{11}(t) & S_{12}(t) & S_{13}(t) & S_{14}(t) \\ S_{21}(t) & S_{22}(t) & S_{23}(t) & 0 \\ S_{31}(t) & S_{32}(t) & S_{33}(t) & 0 \\ S_{41}(t) & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5)$$

The entries of $S(t)$ take values inside the set $\{0, \pm 1, \pm f_t(t), \pm f_g(t)\}$ where $f_t(t)$ and $f_g(t)$ are transformer and gyrator modules; these modules can be time functions. Also, the properties $S_{11}(t)$, and $S_{22}(t)$ are square skew-symmetric matrices, and $S_{12}(t)$ and $S_{21}(t)$ are matrices each other negative transpose, respectively.

The state equation of the proposed bond graph for a LTV system is defined by

$$\dot{x}(t) = A(t) x(t) + B(t) u(t) \quad (6)$$

$$y(t) = C(t) x(t) + D(t) u(t) \quad (7)$$

where

$$A(t) = E^{-1}(t) [\bar{A}(t) + \hat{A}(t) + \tilde{A}(t)] \quad (8)$$

$$B(t) = E^{-1}(t) [S_{13}(t) + S_{12}(t) M(t) S_{23}(t)] \quad (9)$$

$$C(t) = [S_{31}(t) + S_{32}(t) M(t) S_{21}(t)] F(t) \quad (10)$$

$$D(t) = S_{33}(t) + S_{32}(t) M(t) S_{23}(t) \quad (11)$$

with

$$\bar{A}(t) = [S_{11}(t) + S_{12}(t) M(t) S_{21}(t)] F(t) \quad (12)$$

$$\hat{A}(t) = S_{14}(t) \left[F_d^{-1}(t) \dot{F}_d^{-1}(t) S_{41}(t) + F_d^{-1}(t) \dot{S}_{41}(t) F(t) \right] \quad (13)$$

$$\tilde{A}(t) = S_{14}(t) F_d^{-1}(t) S_{41}(t) \dot{F}(t) \quad (14)$$

$$E(t) = I - S_{14}(t) F_d^{-1}(t) S_{41}(t) F(t) \quad (15)$$

$$M(t) = L(t) [I - S_{22}(t) L(t)]^{-1} \quad (16)$$

The next section describes the basic elements of the Lyapunov stability.

III. LYAPUNOV STABILITY THEOREM

While the determination of qualitative properties of the solution of LTI systems is relatively simple, the determination of corresponding properties for LTV systems is very difficult and complicated since it requires the evaluation of the transition system matrix. Several sufficient conditions for the exponential stability of LTV systems given in [17], [18], [19], [20] where the solution of the Lyapunov equation is assumed to be uniformly positive definite. Therefore, finding simple and effective conditions for the qualitative properties of LTV systems has been a topic of long-standing interest.

Let $A \in BC([0, \infty), \mathbb{R}^{n \times n})$. We consider the unforced LTV system defined by

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t), \quad t \geq 0 \quad (17)$$

where $BC([0, \infty), \mathbb{R}^{n \times n})$ denotes the set of all $n \times n$ matrix functions continuous and bounded on $[0, \infty)$.

Definition. The LTV system (17) is exponentially stable if there exists numbers $N > 0$, $\delta > 0$ such that every solution $x(t)$ of the system with $x(s) = x_0$ satisfies [17], [18], [19], [20]

$$\|x(t)\| \leq N \|x_0\| e^{-\delta(t-s)}, \quad \forall t \geq s \geq 0 \quad (18)$$

It is known that if A is a constant matrix such that the real parts of the eigenvalues are negative or equivalently, if there is a symmetric positive definite solution P of the Lyapunov inequation [17], [18], [19], [20]

$$A^T P + P A < 0 \quad (19)$$

then the system is exponentially stable. In the sequel, we derive a necessary and sufficient condition for the exponential stability of LTV systems in terms of the Lyapunov inequation.

For any $A \in BC([0, \infty), \mathbb{R}^{n \times n})$ we set

$$M_A = \{Q \in M^+ : Q - [A(t) + A^T(t)] \gg 0\} \quad (20)$$

then, the set M_A is nonempty by using the following Proposition.

Proposition. For any matrix $A \in BC([0, \infty), \mathbb{R}^{n \times n})$ there exists $Q \in M_A$ consider the following time-varying Lyapunov inequation [17], [18], [19], [20]

$$\dot{p}(t) + A^T(t)P(t) + P(t)A(t) + Q \leq 0, \quad t \geq 0 \quad (21)$$

Theorem. For any $A \in BC([0, \infty), \mathbb{R}^{n \times n})$, the following two conditions are equivalent, [17], [18], [19], [20]

- i) The system (17) is exponentially stable.
- ii) Lyapunov inequation (21) has a solution $P \in BC([0, \infty), \mathbb{R}^{n \times n})$ for some $Q \in M_A$.

In the next section, the stability of a LTV system by using bond graph is presented.

IV. STABILITY IN A BOND GRAPH APPROACH

Internal stability deals with boundedness properties and asymptotic behavior (as $t \rightarrow \infty$) of solutions of the zero-input linear state equation

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t), \quad x(t_0) = x_0 \quad (22)$$

The origin of Lyapunov's so-called *direct method* for stability assessment is the notion that total energy of an unforced, dissipative mechanical system decreases as the state of the system evolves in time [17], [18], [19]. Therefore, the state vector approaches a constant value corresponding to zero energy as time increases. Phrased more generally, stability properties involve the growth properties of solutions of the state equation, and these properties can be measured by a suitable (energy-like) scalar function of the state vector. The problem is to find a suitable scalar function.

The main result of this paper is described in the following Lemma to obtain the stability conditions for LTV systems in a bond graph approach.

Lemma. Consider a LTV system modelled by a bond graph in an integral causality assignment whose junction structure is defined by (4), the constitutive relations of the storage and dissipation elements are LTV, symmetric and positive definite, and the storage elements can have integral and derivative causality assignment, this system is internally stable, if the submatrices $S_{11}(t)$ and $S_{22}(t)$, and the derivatives $\frac{dF_d(t)}{dt}$, $\frac{dF_d(t)}{dt}$ and $\frac{dS_{14}(t)}{dt} S_{14}^T(t)$ are positive semidefinite.

Proof. By considering (22), for any solution $x(t)$ of (22), the derivative of the scalar function

$$\|x(t)\|^2 = x^T(t)x(t) \quad (23)$$

with respect to t can be written as

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|x(t)\|^2 &= \dot{x}^T(t)x(t) + x^T(t)\dot{x}(t) \\ &= x^T(t)[A^T(t) + A(t)]x(t) \end{aligned} \quad (24)$$

suppose that the quadratic form on the right side of (24) is negative definite, that is, suppose the matrix $A^T(t) + A(t)$ is negative definite at each t then the system is internally stable.

The state matrix for a LTV system modelled by a bond graph with storage elements in an integral and derivative causality assignment is given by

$$\begin{aligned} A(t) &= E^{-1}(t) \{ [S_{11}(t) + S_{12}(t)M(t)S_{21}(t)]F(t) + \\ &\quad S_{14}(t) \frac{d}{dt} [F_d^{-1}(t)S_{41}(t)F(t)] \} \end{aligned} \quad (25)$$

where $E(t) = I - S_{14}(t)F_d^{-1}(t)S_{41}(t)F(t)$ and the matrix $M(t)$ defined by (16) can be rewritten as $M(t) = [L^{-1}(t) - S_{22}(t)]^{-1}$; now, it is necessary to represent $A^T(t)$ in terms of the submatrices of the junction structure of the bond graph

$$\begin{aligned} A^T(t) &= \{ [S_{11}(t) + S_{12}(t)M(t)S_{21}(t)]F(t) \\ &\quad + S_{14}(t) \frac{d}{dt} [F_d^{-1}(t)S_{41}(t)F(t)] \}^T E^{-T} \\ &= \left\{ F^T(t) [S_{11}(t) + S_{12}(t)M(t)S_{21}(t)]^T + \right. \\ &\quad \left. \left[\frac{d}{dt} F_d^{-1}(t)S_{41}(t)F(t) \right]^T S_{14}^T(t) \right\} E^{-T} \end{aligned}$$

$$A^T(t) = \left\{ F^T(t) [S_{11}^T(t) + S_{21}^T(t) M^T(t) S_{12}^T(t)] + \frac{d}{dt} [F^T(t) S_{41}^T(t) F_d^{-T}(t)] S_{14}^T(t) \right\} E^{-T}(t) \quad (26)$$

where $E^T(t) = I - F^T(t) S_{41}^T(t) F_d^{-T}(t) S_{14}^T(t)$ and $M^T(t) = [L^{-T}(t) - S_{22}^T(t)]^{-1}$; the matrices $F(t)$, $F_d(t)$ and $L(t)$ are symmetric: $F(t) = F^T(t)$, $F_d(t) = F_d^T(t)$, $L(t) = L^T(t)$. The equation (26) can be reduced to

$$A^T(t) = \left\{ F(t) [S_{11}^T(t) + S_{21}^T(t) M^T(t) S_{12}^T(t)] + \frac{d}{dt} [F(t) S_{41}^T(t) F_d^{-1}(t)] S_{14}^T(t) \right\} E^{-T}(t) \quad (27)$$

with $E^T(t) = I - F(t) S_{41}^T(t) F_d^{-1}(t) S_{14}^T(t)$ and $M^T(t) = [L^{-1}(t) - S_{22}^T(t)]^{-1}$. In order to determine the properties of

$$A^T(t) + A(t) = \delta(t) \quad (28)$$

by substituting (25) and (27) into (28), we have

$$\begin{aligned} \delta(t) = & E^{-1}(t) S_{11}(t) F(t) + F(t) S_{11}^T(t) E^{-T}(t) \\ & + E^{-1}(t) S_{12}(t) M(t) S_{21}^T(t) F(t) + \\ & E^{-1}(t) S_{14}(t) \frac{d}{dt} [F_d^{-1}(t) S_{41}(t) F(t)] \\ & + F(t) S_{21}^T(t) M^T(t) S_{12}^T(t) E^{-T}(t) \\ & + \frac{d}{dt} [F(t) S_{41}^T(t) F_d^{-1}(t)] S_{14}^T(t) E^{-T}(t) \end{aligned} \quad (29)$$

also, the submatrices $S_{11}(t)$ and $S_{22}(t)$ are antisymmetric: $S_{11}(t) = -S_{11}^T(t)$, $S_{22}(t) = -S_{22}^T(t)$ and $S_{14}(t) = -S_{14}^T(t)$; and (29) can be written by

$$\begin{aligned} \delta(t) = & -E^{-1}(t) S_{11}^T(t) F(t) - F(t) S_{11}(t) E^{-T}(t) \\ & -E^{-1}(t) S_{12}(t) M(t) S_{12}^T(t) F(t) \\ & -F(t) S_{12}(t) M^T(t) S_{12}^T(t) E^{-T}(t) \\ & -E^{-1}(t) S_{14}(t) \frac{d}{dt} [F_d^{-1}(t) S_{14}^T(t) F(t)] \\ & -\frac{d}{dt} [F(t) S_{14}(t) F_d^{-1}(t)] S_{14}^T(t) E^{-T}(t) \end{aligned} \quad (30)$$

with $E(t) = I + S_{14}(t) F_d^{-1}(t) S_{14}^T(t) F(t)$ and $E^T(t) = I + F(t) S_{14}(t) F_d^{-1}(t) S_{14}^T(t)$; the matrices $E(t)$ and $E^T(t)$ are positives due to $S_{14}(t) F_d^{-1}(t) S_{14}^T(t)$ is positive. The matrices $E^{-1}(t) S_{11}^T(t) F(t)$ and $F(t) S_{11}(t) E^{-T}(t)$ will be positive semidefinite if the submatrix $S_{11}(t)$ is $S_{11}(t) \geq 0$ positive semidefinite. Also, the matrices $E^{-1}(t) S_{12}(t) M(t) S_{12}^T(t) F(t)$ and $F(t) S_{12}(t) M^T(t) S_{12}^T(t) E^{-T}(t)$ will be positive semidefinites if the matrices $M(t)$ and $M^T(t)$ are positive semidefinites; and for these matrices $M(t) = [L^{-1}(t) - S_{22}^T(t)]^{-1} = [L^{-1}(t) + S_{22}^T(t)]^{-1}$ and $M^T(t) = [L^{-1}(t) - S_{22}^T(t)]^{-1} = [L^{-1}(t) + S_{22}^T(t)]^{-1}$. Hence, if the submatrix $S_{22}(t) \geq 0$ then $M(t) \geq 0$ and $M^T(t) \geq 0$. The final condition is found for the derivatives terms, $S_{14}(t) \frac{d}{dt} [F_d^{-1}(t) S_{14}^T(t) F(t)] = S_{14}(t) \frac{dF_d^{-1}(t)}{dt} S_{14}^T(t) F(t) + S_{14}(t) F_d^{-1}(t) \frac{dS_{14}^T(t)}{dt} F(t) + S_{14}(t) F_d^{-1}(t) S_{14}^T(t) \frac{dF(t)}{dt}$; $\frac{d}{dt} [F(t) S_{14}(t) F_d^{-1}(t)] S_{14}^T(t) = \frac{dF(t)}{dt} S_{14}(t) F_d^{-1}(t) S_{14}^T(t) + F(t) \frac{dS_{14}(t)}{dt} F_d^{-1}(t) S_{14}^T(t) +$

$F(t) S_{14}(t) \frac{dF_d^{-1}(t)}{dt} S_{14}^T(t)$. Then, the previous derivatives terms will be positive semidefinites if

$$\frac{d}{dt} F_d^{-1}(t) \geq 0; \frac{d}{dt} F(t) \geq 0; \frac{dS_{14}(t)}{dt} S_{14}^T(t) \geq 0 \quad (31)$$

from (29) to (31) with (30) and (28), we prove that the system will be internally stable, if the conditions are satisfied. ■

The advantage of this Lemma respect to [14] is that it is not necessary to identify the Lyapunov functions of the bond graph. Others stability analysis methods [17], [18], [19], [20] requires to know the state matrix of the LTV system and a good advantage of the proposed Lemma is to determine the stability conditions based on the $S_{11}(t)$ and $S_{22}(t)$ properties of the respective bond graph model.

The next section describes two examples to determine the stability of LTV systems modelled by bond graphs.

V. EXAMPLES

1. Consider an electrical system which is shown in Fig. 3, this figure contains an electrical transformer modulated by a time function, $f(t)$ and the bond graph model is shown in Fig. 4.

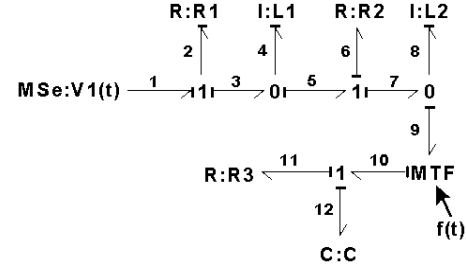


Fig. 4. Bond graph of the example 2.

The storage and dissipation elements of this bond graph model are constants. However, the transformer module is a linear time varying function, $f(t)$, and we have a LTV system.

The key vectors are

$$x(t) = \begin{bmatrix} p_4(t) \\ p_8(t) \\ q_{12}(t) \end{bmatrix}; \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} e_4(t) \\ e_8(t) \\ f_{12}(t) \end{bmatrix}; z(t) = \begin{bmatrix} f_4(t) \\ f_8(t) \\ e_{12}(t) \end{bmatrix}$$

$$D_{in}(t) = \begin{bmatrix} f_2(t) \\ e_6(t) \\ f_1(t) \end{bmatrix}; D_{out}(t) = \begin{bmatrix} e_2(t) \\ f_6(t) \\ e_1(t) \end{bmatrix}; u(t) = e_1(t)$$

the constitutive relations of the fields are

$$F = \text{diag} \left\{ \frac{1}{L_1}, \frac{1}{L_2}, \frac{1}{C} \right\} \quad (32)$$

$$L = \text{diag} \left\{ R_1, \frac{1}{R_2}, R_3 \right\} \quad (33)$$

and the junction structure is given by

$$S(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & f(t) & 0 & 0 & f(t) & 0 \\ 0 & -f(t) & 0 & 0 & f(t) & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -f(t) & -1 & 0 & -f(t) & 1 \\ 0 & -f(t) & 0 & 0 & f(t) & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (34)$$

This bond graph does not contain storage elements in a derivative causality assignment, *i.e.*, the submatrices $S_{14}(t) = S_{41}(t) = 0$ then $E(t) = I$ and $\hat{A}(t) = \tilde{A}(t) = 0$. From (8), (12), (16), (32), (33) and (34), the state matrix is given by

$$A(t) = \begin{bmatrix} -R_1 [R_2 + R_3 f^2(t)] & -R_1 R_3 f^2(t) & R_1 f(t) \\ -R_1 R_3 f^2(t) & -R_3 R_{12} f^2(t) & R_{12} f(t) \\ -R_1 f(t) & -R_{12} f(t) & -f^2(t) \end{bmatrix} \frac{F}{\Delta} \quad (35)$$

where $\Delta = R_1 + R_2 + R_3 f^2(t)$ and $R_{12} = R_1 + R_2$.

From (9), (16), (32), (33) and (34), the input matrix is

$$B(t) = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} R_2 + R_3 f^2(t) & R_3 f^2(t) & f(t) \end{bmatrix}^T \quad (36)$$

By applying the proposed Lemma, the submatrices to know the stability conditions are

$$S_{11}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & f(t) \\ 0 & -f(t) & 0 \end{bmatrix} \quad (37)$$

$$S_{22}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -f(t) \\ 0 & f(t) & 0 \end{bmatrix} \quad (38)$$

these submatrices are positive semidefinites, $S_{11}(t) \geq 0$ and $S_{22}(t) \geq 0$, then the system is stable.

In order to verify that the system is stable, simulation results by using the 20-Sim software are presented. The numerical parameters of the system are: $R_1 = 2\Omega$, $R_2 = 4\Omega$, $R_3 = 6\Omega$, $L_1 = 0.1H$, $L_2 = 0.2H$, $C_1 = 0.01F$, $V_1(t) = 10V$ and for the transformer module $f(t)$, we consider a wave generator sine with a frequency of 50 rad/s and its magnitude is 100, Fig. 5 shows the response of the state variables of the system.

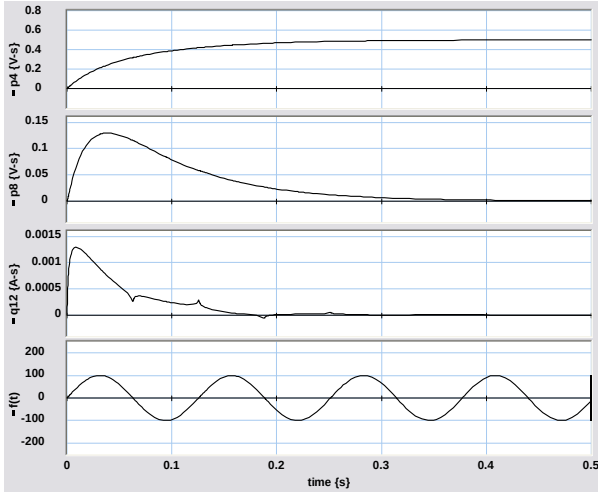


Fig. 5. Performance of the system with a sine wave.

2. Consider the DC motor of Fig. 7. The resistor R_a and inductance L_a are the elements of the armature circuit. The motor has a mechanical load J_e and R_e connected by a mechanical transformer to motor inertia J_m .

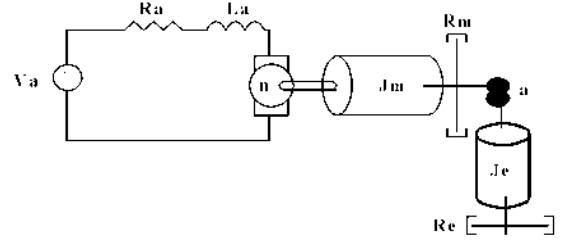


Fig. 6. Motor DC with a load

The bond graph of the DC motor is shown in Fig. 7.

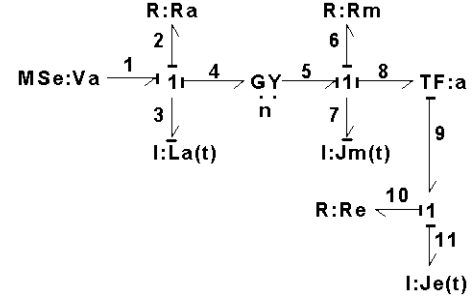


Fig. 7. Bond graph of the DC motor.

The key vectors of the bond graph are

$$x(t) = \begin{bmatrix} p_3 \\ p_7 \end{bmatrix}; \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} e_3 \\ e_7 \end{bmatrix}; z(t) = \begin{bmatrix} f_3 \\ f_7 \end{bmatrix}$$

$$D_{in}(t) = \begin{bmatrix} f_2 \\ f_6 \\ f_{10} \end{bmatrix}; D_{out}(t) = \begin{bmatrix} e_2 \\ e_6 \\ e_{10} \end{bmatrix}$$

$$x_d(t) = p_{11}; \dot{x}_d(t) = e_{11}; z_d(t) = f_{11}; u(t) = e_1$$

the constitutive relations of the dissipation field are

$$L = \text{diag} \{R_a, b_m, b_e\} \quad (39)$$

the constitutive relation for the storage elements are LTV given by

$$F(t) = \text{diag} \left\{ \frac{1}{L_a(t)}, \frac{1}{J_m(t)} \right\} \quad (40)$$

$$F_d(t) = \frac{1}{J_e(t)} \quad (41)$$

and the junction structure of this bond graph is

$$S = \begin{bmatrix} 0 & -n & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ n & 0 & 0 & -1 & -a & 0 & -a \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (42)$$

By applying the proposed Lemma, the matrices $S_{11}(t)$, $S_{22}(t)$ and $\frac{dS_{14}(t)}{dt} S_{14}^T(t)$ are positive semidefinite, *i.e.*,

$$S_{11}(t) = \begin{bmatrix} 0 & -n \\ n & 0 \end{bmatrix} \geq 0; S_{22}(t) \geq 0$$

$$\frac{dS_{14}(t)}{dt} S_{14}^T(t) \geq 0$$

and the final condition is

$$\frac{dF(t)}{dt} = \begin{bmatrix} \frac{-dL_a(t)}{dt} \frac{1}{L_a^2(t)} & 0 \\ 0 & \frac{-dJ_m(t)}{dt} \frac{1}{J_m^2(t)} \end{bmatrix} \geq 0$$

In order to verify that the system is stable, simulation results are presented. Firstly, LTV constitutive relations for the storage elements are defined by: $L_a(t) = 0.2 \arctan(t) + 1$; $J_m(t) = e^{-t} + 1$ and $J_e(t) = 0.3 \frac{t_\Delta - \sin(t_\Delta)}{2\pi}$ where $t_\Delta = 2\pi(t - t_i) / (t_o - t_i)$ with $t_i = 1s$ and $t_o = 3s$. Fig. 8 shows the proposed LTV constitute relations.

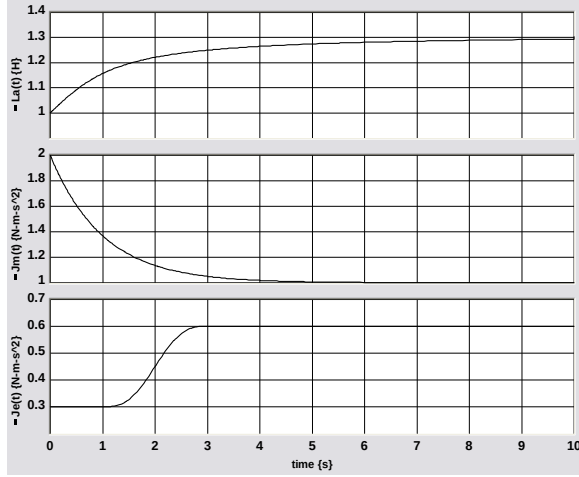


Fig. 8. Constitutive relations of the storage field.

Finally, by using 20-SIM, the performance of the states of the LTV system modelled by bond graph is shown in Fig. 9.

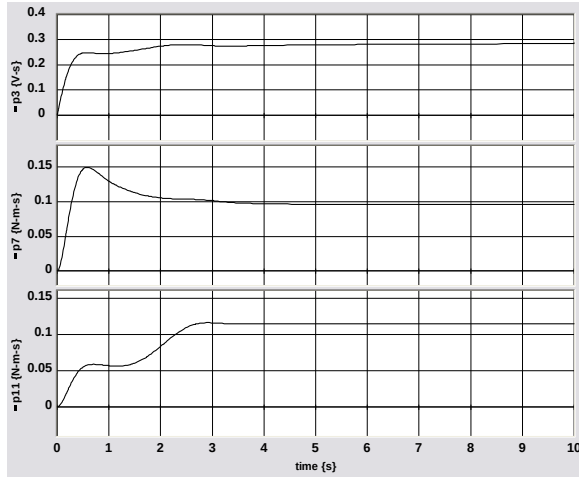


Fig. 9. States of the system.

Note that the proposed Lemma permits to determine the stability conditions in a direct way when the LTV system is modelled by bond graphs. However, a disadvantage is that, if the system does not admit a bond graph representation, this methodology cannot be applied.

VI. CONCLUSIONS

In this paper a bond graph of a Linear Time Varying system is proposed. The bond graphs of this class of systems can

have LTV constitutive relations of the storage and dissipation elements and LTV modules of the transformer and gyrator elements. The bond graph can have storage elements in an integral and derivative causality assignment. In order to know the characteristics of the LTV system, a junction structure of the bond graph is proposed. The stability conditions of a LTV system by using the submatrices of the junction structure of the corresponding bond graph are presented. Finally, the proposed methodology is applied to determine the stability conditions for two examples.

REFERENCES

- [1] Henry D'Angelo, "Linear Time-Varying Systems: Analysis and Synthesis", Allyn and Bacon, Boston, 1970.
- [2] R. Okano, T. Kida and T. Nagashio, "Asymptotic stability of second-order linear time-varying systems", Journal of Guidance, Control and Dynamics, vol. 29, no. 6, pp. 1472-1476, 2006.
- [3] C. A. Desoer, "Slowly varying systems $\dot{x} = A(t)x$ ", IEEE Trans. on Automatic Control, vol. 14 no. 6, pp. 780-781, 1969.
- [4] F. Amato, G. Celenteno and F. Garofalo, "New sufficient conditions for the stability of slowly varying linear systems", IEEE Trans. on Automatic Control, vol. 38, no. 9, pp. 1409-1411, 1993.
- [5] L. Jetto and V. Orsini, "Relaxed conditions for the exponential stability of a class of linear time-varying systems", IEEE Trans. on Automatic Control, vol. 54, no.7, pp. 1580-1585, 2009.
- [6] J. Jim Zhu, "A Necessary and Sufficient Stability Criterion for Linear Time-Varying Systems", Proceedings of the Twenty-Eighth South-eastern Symposium on System Theory, pp. 115-119, 1996.
- [7] Antonio Loria and E. Panteley, "Uniform exponential stability of linear time-varying systems: revisited", Syst. & Contr. Lettr. 2002.
- [8] Yu Yao, D. Sun, V. Balakrishnan and J. Guo, "An Integral Function Approach to the Exponential Stability of Linear Time-Varying Systems", International Journal of Control, Automation and Systems, 10(6):1096-1101, 2012.
- [9] S. Pradeep and S. K. Shrivastava, "Some recent results on the stability of linear time varying systems", Sadhana, Vol. 3, Part 3, November 1988, pp. 157-167.
- [10] C. D. Johnson, "Quality of Stability for Linear, Time-Varying Systems using an exact Time-Varying Eigenvalue Theory; Part I, IEEE, 1991, pp. 454-460.
- [11] G. Chockalingam, S. Dasgupta, B. D. O. Anderson and M. Fu, "Lyapunov Functions for Uncertain Systems with Applications to the Stability of Time Varying Systems", Proceedings of the 32nd Conference on Decision and Control, San Antonio, Texas, December 1993, pp. 1525-1530.
- [12] Dean C. Karnopp, Donald L. Margolis and Ronald C. Rosenberg, System Dynamics Modeling and Simulation of Mechatronic Systems, Wiley, John & Sons, 2000.
- [13] P. E. Wellstead, Physical System Modelling, Academic Press, London, 1979.
- [14] Sergio Junco, "Stability Analysis and Stabilizing Control Synthesis via Lyapunov's Second Method Directly on Bond Graphs of Nonlinear Systems", Proceedings of the International Electronics, Control and Instrumentation, Vol. 3, pp. 2065-2069, November, 1993.
- [15] Sergio Junco, "Lyapunov Second Method and Feedback Stabilization Directly on Bond Graphs", Simulation series 33, 1, pp. 137-144, International Conference bond graph modelling and simulation, 2001.
- [16] A. Achir and C. Sœur, "Non commutative ring bond graphs application to flatness", Simulation series, 37,1 International conference on bond graph modelling and simulation, 2005, pp.59-64.
- [17] Wilson J. Rugh, "Linear System Theory", Prentice Hall, 1996.
- [18] Chi-Tsong Chen "Linear System Theory Design", Holt, Rinehart and Winston, inc. 1970.
- [19] Thomas Kailath, "Linear Systems", Prentice-Hall, 1980.
- [20] Vu N. Phat and V. Jeyakumar, "Lyapunov stability, stabilizability and duality for linear time-varying systems",
- [21] C. Sœur and G. Dauphin-Tanguy, "Bond graph approach for structural analysis of MIMO linear systems", Journal of the Franklin Institute, Vol. 328, No. 1, pp. 55-70, 1991.