



UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN NICOLÁS DE HIDALGO



FACULTAD DE INGENIERÍA ELÉCTRICA
DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO

TESIS

“RETROALIMENTACIÓN DE ESTADO DE SISTEMAS
SINGULAMENTE PERTURBADOS EN UN ENFOQUE DE BOND
GRAPH”

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE
MAESTRO EN CIENCIAS EN INGENIERÍA ELÉCTRICA CON ESPECIALIDAD
EN SISTEMAS DE CONTROL

PRESENTA

ING. MAYRA YADIRA HERRERA CONTRERAS

DIRECTOR DE TESIS

Doctor en Ingeniería

GILBERTO GONZÁLEZ AVALOS

MORELIA, MICHOACAN AGOSTO DE 2014



RETROALIMENTACIÓN DE ESTADO DE SISTEMAS SINGULARMENTE PERTURBADOS EN UN ENFOQUE DE BOND GRAPH

Los Miembros del Jurado de Examen de Grado aprueban
la Tesis de Maestría en Ciencias en Ingeniería Eléctrica de *Mayra Yadira Herrera Contreras*

Dr. Juan Anzures Marín
Presidente del Jurado

Dr. Gilberto González Ávalos
Director de Tesis

Gilberto González

Dr. Roberto Tapia Sánchez
Vocal

Dr. José Juan Rincón Pasaye
Vocal

Dr. Ignacio Juárez Campos
Examinador Externo

Dr. J. Aurelio Medina Rios
*Jefe de la División de Estudios de Posgrado
de la Facultad de Ingeniería Eléctrica. UMSNH
(Por reconocimiento de firmas)*

UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN NICOLÁS DE HIDALGO
Agosto 2014

Agradecimientos

Una página más se escribe en mi vida y esto no hubiera sido posible gracias a Dios, que me ha permitido disfrutar de un nuevo logro.

Gracias a mis padres: Francisquito y Teresita, por su gran apoyo incondicional y paciencia, sobre todo en los momentos de redactar esta tesis.

A mis hermanos: Rodo, Rosy y Paco, que siempre han estado ahí apoyándome en las buenas y malas.

Gracias a ti Migue, por tu amor incondicional y por espíritu ganzo para motivarme día a día.

Y agradezco a mi asesor de tesis, al Dr. Gilberto, que me ha apoyado en mi formación académica. Sobre todo por la paciencia que me ha tenido al aceptar mi manera de trabajar. Pero sobre todo, le doy gracias para motivarme a estudiar la maestría en Ciencia de la Ingeniería Eléctrica.

A Conacyt por hacerme privilegiada con uno de sus apoyos económicos para estudiar la maestría.

Gracias a mis maestros de maestría que han contribuido a mi aprendizaje y formación profesional.

Gracias a Aaron, que me ha ayudado a entender de mejor manera los Sistemas Singularmente Perturbados.

Y sin menos importantes, les agradezco a mis amigos, los cuales formamos un buen ambiente de trabajo: Joel, Gil, Guillermo, Gabriel, Dani, Edgar, Omar, Cande, Marco y Liz.

Resumen

Este trabajo de tesis, propone la construcción del modelo de un sistema singularmente perturbado con retroalimentación de estado en Bond Graph.

Aprovechando la propiedad que tienen los sistemas singularmente perturbados de poderse separar en dos subsistemas de bajo orden: lento y rápido, se ha propuesto dos procedimientos en Bond Graph para el diseño de la retroalimentación de estado en el sistema cuasi-estacionario. Un procedimiento es a través del BGI_{LC} , el cual es el Bond Graph Integral en Lazo Cerrado, por el cual se obtiene el modelo cuasi-estacionario con retroalimentación de estado en Bond Graph con causalidad integral asignada. El segundo y el más directo es a través del $SPBG_{LC}$, el cual es el Bond Graph Singularmente Perturbado en Lazo Cerrado, que permite obtener el modelo cuasi-estacionario con retroalimentación de estado en Bond Graph asignando a los elementos de la dinámica rápida causalidad derivativa con el objetivo de obtener directamente las ecuaciones de estado que rigen a este subsistema. Se presenta también el cálculo de la ganancia G_0 necesaria para que el sistema cuasi-estacionario sea estable.

Asimismo, el modelo reducido rápido con retroalimentación de estado en Bond Graph se obtiene en base a un procedimiento sencillo basado en Bond Graph, y calcular así la ganancia G_2 que permita que este subsistema sea estable.

De tal manera que, usando las ganancias G_0 y G_2 obtenidas en los subsistemas cuasi-estacionario y rápido, se emplean para calcular G_1 . Así, aplicar las ganancias G_1 y G_2 en el sistema singularmente perturbado original para que el sistema en lazo cerrado sea estable.

Lo anterior se aplica a casos de estudio para comprobar su efectividad y consiguiéndose resultados satisfactorios.

Palabras claves: Bond Graph, retroalimentación de estado, sistemas singularmente perturbado.

Abstract

This thesis proposes the construction of modeling singularly perturbed systems with state feedback on Bond Graph.

Taking advantage of the property that have singularly perturbed systems be separable into two subsystems in order: slow and fast, we have proposed two methods in Bond Graph for the design of feedback to the quasi-stationary system. One method is through BGI_{LC} , which is the Bond Graph Integral Closed Loopby, which the quasi-steady-state model with feedback on Bond Graph Integral causality assigned. The second and most direct is through $SPBG_{LC}$, which is the Bond Graph Singularly Perturbed Closed Loop, giving the quasi-steady-state model with feedback on Bond Graph assigning elements with derivative causality fast dynamics the objective of obtaining directly the state equations governing this subsystem. Therefore, the necessary condition for the quasi-stationary state is stable gain G_0 is calculated.

Likewise, the reduced fast with feedback to Bond Graph model is obtained based on a simple procedure based on Bond Graph and to calculate the gain G_2 allow this subsystem is stable.

So that, using G_0 and G_2 gains in quasi-steady and fast subsystems are used to calculate G_1 . So, apply G_1 and G_2 gains in the original singularly perturbed system so that the closed-loop system is stable.

This applies to case studies to prove their effectiveness and achieving satisfactory results.

Key words: Bond Graph, feedback, singularly perturbed systems.

Índice general

Resumen	iv
Abstract	v
Lista de figuras	viii
Lista de tablas	xi
Lista de Abreviaturas y símbolos	xii
Lista de publicaciones	xiv
1 Introducción	1
1.1 Introducción	1
1.2 Objetivo	2
1.3 Metodología	2
1.4 Justificación	3
1.5 Estado del Arte	4
1.6 Aportaciones	8
1.7 Estructura de la Tesis	8
2 Modelado de Sistemas Físicos en Bond Graph	10
2.1 Antecedentes	10
2.2 Conceptos Básicos	12
2.2.1 Puertos 1: Pasivos, Activos o Fuentes	15
2.2.2 Puertos 2: Elementos Ideales	16
2.2.3 Puertos 3: Elementos de Unión	16
2.2.4 Bond Activo	18
2.2.5 Causalidad	19
2.3 Modelado de Algunos Sistemas Físicos	22
2.3.1 Sistema Eléctrico	22
2.3.2 Sistema Mecánico	24

2.3.3	Sistema Hidráulico	27
2.4	Obtención de las variables de estado en Bond Graph	29
2.4.1	Matriz de Estructura de Unión [Karnopp, 1975]	30
2.4.2	Trayectoria Causal y Lazo Causal [Dauphin-Tanguy, 2000]	34
3	Sistemas Singularmente Perturbados	40
3.1	Introducción	40
3.2	Definición y características	41
3.3	Modelado Estándar de Sistemas Singularmente Perturbados	42
3.3.1	Propiedades de Escala de Tiempo del Modelo Estándar	44
3.3.2	Variedades Lenta y Rápida	47
3.3.3	Sistemas Lineales Invariantes en el Tiempo [Gonzalez, 2011]	49
3.4	Modelado de Sistemas Singularmente Perturbados en Bond Graph	50
3.4.1	Modelo Estándar de un Sistema Singularmente Perturbado en Bond Graph	51
3.4.2	Separación de la dinámica Lenta y Rápida en Bond Graph	55
4	Retroalimentación de Estado de Sistemas Singularmente Perturbados	61
4.1	Introducción	61
4.2	Controlabilidad	62
4.3	Retroalimentación de estado estándar para Sistemas Singularmente Perturbados	64
4.4	Retroalimentación de estado en Bond Graph	67
4.4.1	Retroalimentación de estado estándar en Bond Graph	70
4.4.2	Separación de la dinámica lenta y rápida con retroalimentación de estado	74
4.4.3	Caso de estudio	82
5	Conclusiones y Recomendaciones	108
5.1	Conclusiones	108
5.2	Recomendaciones	109
	Bibliografía	111
A	Obtención del modelo en ecuaciones de estado por Trayectoria Causal y Lazo Causal	116
B	Publicaciones	120

Lista de figuras

2.1	Bond con la dirección del esfuerzo $e(t)$ y flujo $f(t)$	12
2.2	Tetraedro de estado	14
2.3	Puerto1- Activo: a) Fuentes de esfuerzo y b) Fuentes de flujo	16
2.4	Representación en Bond Graph de a) un Transformador (TF) y b) un Girador (GY)	16
2.5	Unión 0 para la conexión en paralelo	17
2.6	Unión 1 para la conexión en serie	17
2.7	Símbolo de un bond activo	18
2.8	Bond Graph con un bond activo para a) voltaje y b) corriente	18
2.9	Detectores en Bond Graph para obtener esfuerzo o flujo	19
2.10	Diferentes maneras de expresar la causalidad en un bond	20
2.11	Regla para simplificar los bonds	23
2.12	Circuito Eléctrico	23
2.13	Representación de las uniones 0	23
2.14	Representación de las uniones con los componentes que conforman el circuito	24
2.15	Diagrama con las conexiones adyacentes indicando el punto de referencia	25
2.16	Diagrama sin el punto de referencia y los bonds adyacentes a él.	25
2.17	Reducción del Bond Graph	26
2.18	Bond Graph del circuito eléctrico	26
2.19	Sistema Mecánico de Traslación	27
2.20	Uniones-1 y unionones-0	27
2.21	Modelado del sistema mecánico	28
2.22	Bond Graph del sistema mecánico de traslación	28
2.23	Sistema Hidráulico	29
2.24	Unión-0 y unión-1	29
2.25	Bond Graph con los elementos que conforman al Sistema Hidráulico	30
2.26	Bond Graph del Sistema Hidráulico	30
2.27	Diagrama de la Estructura de Unión de un Bond Graph	31
2.28	Trayectoria Causal Simple a) Esfuerzo y b) Flujo	35
2.29	Trayectoria Causal Mezclada Directa	35
2.30	Trayectoria Causal Mezclada Indirecta	35
2.31	Principales cambios de orientación de bonds	37

2.32	Lazo Causal	37
2.33	Lazos individuales	38
2.34	Bond Graph con dos lazos individuales y disjuntos	39
3.1	Diagrama del modelo de un motor de corriente directa controlado por armadura. . .	44
3.2	Diagrama de bloques de la estructura de unión con las dinámicas separada.	52
3.3	Diagrama de bloques de la estructura de unión propuesta para el Bond Graph Singularmente Perturbado (SPBG)	56
4.1	Retroalimentación de estado compuesto	66
4.2	Retroalimentación de estado en Bond Graph	69
4.3	Retroalimentación de estado mediante la asignación causal integral (BGI)	71
4.4	Retroalimentación de estado mediante el SPBG	75
4.5	Retroalimentación de estado mediante el BGIR	80
4.6	Motor de CD	82
4.7	Bond Graph del Motor de CD con causalidad integral asignada	83
4.8	Bond Graph Integral con trayectorias causales entre la fuente y cada elemento de almacenamiento del Motor de CD	84
4.9	Bond Graph Derivativo del Motor de CD	84
4.10	Modelado en Bond Graph del Motor CD con causalidad integral asignada con retroalimentación de estado	85
4.11	SPBG del Motor de CD	88
4.12	SPBG del Motor de CD con retroalimentación de estado	88
4.13	Modelado de la dinámica rápida del Motor de CD	91
4.14	Modelado de la dinámica rápida del Motor de CD con retroalimentación de estado .	91
4.15	Modelado del Sistema original del Motor de CD con Retroalimentación de estado en Bond Graph	93
4.16	Dinámica lenta (x_1) y dinámica rápida (x_2) del Motor de CD	94
4.17	Circuito RC	94
4.18	Modelado en Bond Graph del Circuito RC	95
4.19	Bond Graph Integral con trayectorias causales entre cada una de las fuentes y cada elemento de almacenamiento del Circuito de RC	96
4.20	Bond Graph Derivativo del Circuito RC	97
4.21	Modelado en Bond Graph del circuito RC con causalidad integral asignada y retroalimentación de estado	97
4.22	SPBG del Circuito RC	100
4.23	SPBG del Circuito de RC con retroalimentación de estado	100
4.24	Modelado de la dinámica rápida del circuito RC	103
4.25	Modelado de la dinámica rápida del Circuito RC con retroalimentación de estado . .	104
4.26	Retroalimentación de estado del sistema original del Circuito RC en Bond Graph . .	106
4.27	Dinámica lenta (x_1) y dinámica rápida (x_{21}, x_{22}) del Circuito RC	107

A.1	Matriz A a) Elementos de la Diagonal y b) con los terminos de a_{nn} indicando el sub-índice que corresponde a cada elemento	117
A.2	Matriz B indicando los sub-índices que corresponden a cada elemento	118
A.3	Matriz C indicando los sub-índices que corresponden a cada elemento	118
A.4	Matriz D indicando los sub-índices que corresponden a cada elemento	119

Lista de tablas

2.1	Variables generalizadas de Sistemas Eléctricos e Hidráulicos	13
2.2	Variables generalizadas de Sistemas Mecánicos de Translación y Mecánicos de Rotación	14
2.3	Elementos pasivos de almacenamiento R, C e I	15
2.4	Causalidad para los multipuertos básicos	20
2.5	Formas Causales para Puertos 1	21
2.6	Conexiones causales y sus transmitancias	38
4.1	Valores de los Elementos que conforman el Motor de CD	83
4.2	Valores de los Elementos que conforman el Circuito RC	95

Lista de Abreviaturas y Símbolos

B	Constante de Damper
K	Contante de Resorte
Ma	Masa
$X(t)$	Desplazamiento
$F(t)$	Fuerza
D	Detectores
R	Resistencia
Q	Gasto
C	Capacitancia
$v(t)$	Voltaje
$i(t)$	Corriente
$e(t)$	Esfuerzo
$f(t)$	flujo
I	Inductor
TF	Transformador
GY	Girador
MSe	Fuente de esfuerzo modulado
MSf	Fuente de flujo modulado
<i>ec.</i>	Ecuación
<i>fig.</i>	Figura
Σ	Sumatoria
<i>MIT</i>	Massachusetts Institute of Technology
<i>IMACS</i>	International Issociation for Matematics and Computers in simulation
$q(t)$	Variable de desplazamiento
$p(t)$	Variable de momento
0	Unión 0
1	Unión 1
$u(t)$	Vector de entrada del sistema
$y(t)$	Vector de salida del sistema
$x(t)$	Vector de estados asociados a elementos en causalidad integral

$z(t)$	Vector complementario asociado a elementos en causalidad integral
$x_d(t)$	Vector de estados asociado a elementos en causalidad derivativa
$z_d(t)$	Vector complementario asociado a elementos en causalidad derivativa
A, B, C, D	Matriz de estado
A^T	Denota la matriz transpuesta de A
A^{-1}	Denota la matriz inversa de A
$SPBG$	Bond Graph Singularmente Pertubado
BGI	Bond Graph con causalidad integral asignada
$BGIR$	Sistema Reducido Rápido en Bond Graph
$SPBG_{LC}$	Bond Graph Singularmente Pertubado en lazo cerrado
BGI_{LC}	Bond Graph con causalidad Integral asignada en lazo cerrado
$BGIR_{LC}$	Sistema Reducido Rápido en Bond Graph en lazo cerrado
LTI	Lineal invariante en el tiempo
N	Newton, unidad física de Fuerza
Ω	Ohm, unidad física de resistencia eléctrica
A	Ampere, unidad física de corriente eléctrica
m	Metros, unidad física de distancia
s	Segundos, unidad física de tiempo
H	Henrys, unidad física de inductancia eléctrica
F	Faradios, unidad Física de carga eléctrica
rad	Radianes, unidad física de velocidad angular
CD	Corriente Directa
$MIMO$	Clasificación de sistemas de múltiples entradas y múltiples salidas
G_0	Ganancia de la dinámica lenta del sistema reducido
G_{0g}	Ganancia de la dinámica lenta del sistema reducido en Bond Graph
G_1	Ganancia de la dinámica lenta del sistema original
G_{1g}	Ganancia de la dinámica lenta del sistema original en Bond Graph
G_2	Ganancia de la dinámica rápida
G_{2g}	Ganancia de la dinámica rápida en Bond Graph
ϵ	Epsilon
$\in$	Pertenencia
$\triangleq$	Por definición
■	Conclusión

Lista de Publicaciones

- Gilberto González-A, Mayra Y. Herrera-C, *The Feedback of a Singularly Perturbed System Modelled by Bond Graphs*, Proceedings of the 33rd IASTED International Conference on Modelling, Identification and Control (MIC 2014), pp. 34-40, February 17-19, 2014, Innsbruck, Austria.

Capítulo 1

Introducción

1.1 Introducción

Desde la década de los 60's, se han realizado investigaciones sobre el análisis de los sistemas singularmente perturbados con el fin de resolver el diseño de retroalimentación de estado (diseño de controladores) de dichos sistemas, ya sea por métodos para reducir el orden del sistema o dejando de lado los modos rápidos.

Los métodos de modelos reducidos han sido investigados en análisis de sistemas de control por muchas décadas y varios métodos han sido sugeridos para determinar aproximaciones de orden inferior. Las técnicas de modelado reducido tienen dos tareas importantes en la solución de problemas de ingeniería de control. Primeramente, un modelo de orden reducido puede convertir los problemas de diseño de control de sistemas grandes a un tamaño manejable. En segundo lugar, se puede lograr la reducción del orden del controlador lo cual permite a los controladores de hardware/software una mayor sencillez [Orbak, 2003].

Los métodos de reducción basado en modelos físicos hacen uso de Bond Graph e información de potencia y nivel de energía, eliminan los elementos que se consideran innecesarios. Los métodos de perturbación singular se utilizan para proporcionar una base para el análisis de la capacidad de control asintótico de sistemas que contienen pequeños elementos “parásitos”.

Una de las ventajas de los sistemas singularmente perturbados es la simplificación de

los cálculos matemáticos debido a que se manipulan los modelos de orden inferior, pero más importante, el número de canales de comunicación necesarios para la implementación del diseño los cuales se reducen considerablemente [Mahmoud and Singh, 1982].

Cuando un sistema tiene la propiedad de múltiples escalas de tiempo, a menudo es justificado y necesario separar dinámicas, para hacer una reducción de orden o para eliminar errores de cálculo debido a la diferencia de los términos de magnitud.

Diversos ejemplos de aplicación pueden ser presentados como: sistemas robóticos con una parte mecánica lenta y una parte electrónica rápida, procesos químicos con diferentes velocidades de reacción, sistemas con sensores y actuadores, sistemas controladores con alta ganancia, diseño de retroalimentación de los amplificadores electrónicos, las plantas de generación de energía hidroeléctrica, modelado de los trenes de laminación en caliente, etc. [Dauphin-Tanguy and Borne, 1985].

1.2 Objetivo

Diseñar un control por retroalimentación estática de estado a partir de Bond Graph para sistemas lineales singularmente perturbados, aprovechando la propiedad que tienen estos sistemas en general de poderse separar en dos sistemas: en un modelo del sistema lento con n valores propios pequeños y un modelo del sistema rápido con m valores propios grandes.

1.3 Metodología

El método de investigación utilizado para el desarrollo de este trabajo es el método inductivo, el cuál permite hablar de una forma particular de un tema, que en este caso son los sistemas singularmente perturbados, hasta llegar a una forma generalizada de la aplicación de las técnicas de Bond Graph a cualquier sistema lineal singularmente perturbado con retroalimentación de estado.

La elaboración de fichas bibliográficas ha sido utilizada como una técnica de investigación, permitiendo recolectar información cronológica de los artículos que dan aportaciones

sobre este tema, así como para realizar anotaciones sobre lemas obtenidos de los libros y también para escribir los procedimientos implementados para el diseño de la retroalimentación de estado en sistemas lineales singularmente perturbados en Bond Graph.

Se aborda la resolución de los ejemplos ilustrativos que son utilizados para el análisis de la retroalimentación de estado para cada uno de los sistemas rápido y lento.

Finalmente, se aprovecharon las herramientas computacionales como Matlab (utilizado para resolver operaciones matriciales), 20-SIM (empleado para observar el comportamiento de las dinámicas: rápida y lenta, de los ejemplos ilustrativos en el enfoque de Bond Graph), y SIMNON (usado para simular los ejemplos ilustrativos en el enfoque tradicional).

1.4 Justificación

A través de la historia se han propuesto enfoques basados en la reducción de los sistema singularmente perturbados, tales como retención de los polos dominantes [Davison, 1966] o dejar de lado los polos rápidos [Rao and Lamda, 1974] para el diseño de controladores para los sistemas singularmente perturbados [O'Reilly, 1979a]. En ambos casos, lo que se logra es una aproximación no muy exacta del sistema ya que al eliminar elementos que intervienen en el comportamiento de éste, lo hacen cercano al sistema original, pero no lo suficiente. Si no se ha tenido suficiente cuidado en el diseño de las ganancias establecidas, se puede tener un sistema singularmente perturbado con retroalimentación de estado de alto orden o en dado caso se puede encontrar que el sistema original ya no es un sistema singularmente perturbado.

De esta forma, surge la necesidad de explorar y aprovechar más a profundidad las herramientas que brinda Bond Graph, pero sobre todo son las pocas aportaciones que existe de investigación en Bond Graph en los sistemas singularmente perturbados; tratando así, con mayor facilidad y exactitud los sistemas singularmente perturbados con retroalimentación de estado con referente a la metodología tradicional conocida.

1.5 Estado del Arte

Algunos de los investigadores han tenido contribuciones importantes con referente a sistemas singularmente perturbados con el único objetivo reducir el sistema, ya sea por métodos como retención de los modos dominantes del sistema o dejando de lado los modos rápidos [O'Reilly, 1979a].

El dejar de lado los modos rápidos ha sido utilizado para obtener un análisis de los sistemas singularmente perturbados que consiste en realizar la eliminación del parámetro ϵ porque es probable que complique el diseño de retroalimentación de estado para los sistemas singularmente perturbados, por lo tanto, hace del sistema de un orden altamente prohibido y la integración numérica de las ecuaciones que los rigen se hacen bastante difíciles.

En esta metodología se encuentra Porter que escribió un artículo en 1974 donde demuestra como los métodos de perturbaciones singulares se utilizan para reducir el diseño de la estabilidad por retroalimentación de estado para una clase de sistemas lineales de $(n + m)$ -ésimo orden mediante un diseño de retroalimentación de estado para una clase asociada al sistema de n -ésimo orden obtenido ignorando elementos “parásitos” que corresponden a la presencia de un pequeño parámetro (ϵ) en las ecuaciones de estado de sistemas de $(n + m)$ -ésimo orden [B. Porter, 1974].

Mientras tanto en el año de 1975, Porter junto con Shenton demostraron que los métodos de perturbaciones singulares son usados para demostrar que las matrices de funciones de transferencia de sistemas lineales contienen pequeños elementos “parásitos” que tienen una estructura distintiva, la cual puede ser explotada en el diseños de controladores para sistemas de esta clase por la aplicación de métodos en el dominio de la frecuencia [B. Porter and A.T. Shenton, 1975b].

En ese mismo año, Porter y Shenton continuaron aprovechando los métodos de perturbaciones singulares utilizándolos para proporcionar una base para el análisis de las características de control asintótico de sistemas lineales multivariables que contienen pequeños elementos “parásitos” y para el diseño de controladores que afectan la asignación de valores propios asintóticos en tales sistemas. La importancia práctica principal del método de

asignación de valor propio asintótico presentado en dicho trabajo radica en el hecho de que el diseño de controladores de retroalimentación para tales sistemas de $(n + m)$ -ésimo orden se reduce efectivamente a la consideración por separado de subsistemas de n -ésimo orden y m -ésimo orden y solamente los últimos subsistemas implican los elementos “parásitos” [B. Porter and A.T Shenton,1975a].

Después en 1977, Porter siguió usando los métodos de perturbaciones singulares para establecer condiciones en que los observadores de orden completo pueden ser diseñados con el fin de reconstruir los vectores de estado de los sistemas lineales multivariados que contienen elementos “parásitos”, y el procedimiento de diseño resultante se ilustró mediante el diseño de un observador de orden completo para un sistema de tercer orden [B. Porter, 1977].

En 1978 S. H. Javid desarrolló el diseño de un control en tiempo óptimo de un sistema no lineal singularmente perturbado en base a la separación del sistema en dos partes: la primera parte depende principalmente de la dinámica de la planta no lineal y la segunda parte depende principalmente de la dinámica rápida del actuador [S. H. Javid, 1978a].

La inquietud de seguir investigando el comportamiento de los sistemas singularmente perturbados llevó a Javid en 1978, a proporcionar un límites superior para la estabilidad del subsistema “rápido” y el sistema de orden completo. Estos límites se encuentran a través de la consideración de los sistemas de orden m y n . Así la estabilidad asintótica de un sistema de orden $(n + m)$ -ésimo orden pueden demostrarse teniendo en cuenta sólo el sistema de orden reducido y el subsistema rápido [S. H. Javid, 1978b].

En el año de 1979, las investigaciones realizadas por O'Reilly lo llevan a proponer las condiciones que se formulan para que un observador compuesto se aproxime a la reconstrucción del estado del sistema singularmente perturbado original, por un observador de orden completo. El observador compuesto se sintetiza a partir de los observadores de orden completo para los dos subsistemas separados en diferentes escalas de tiempo y forma la base de un diseño de observador de orden completo [O'Reilly, 1979a].

Posteriormente en 1982, Mahmoud con otros investigadores desarrollaron un procedimiento de diseño de retroalimentación aproximada para una clase de sistemas dinámicos lineales singularmente perturbados, en esta parte se introducen dos parámetros de perturbación

para tener en cuenta el grado de pequeñez y el grado de amplitud de dos modos de contorno con respecto al modo normal de funcionamiento. El control de retroalimentación aproximado se determina de este modo combinando apropiadamente los controles individuales de los tres modos de escalas de tiempo: lento, medio y rápido. La reducción del orden en el diseño del control se consigue mediante la descomposición de la matriz de Riccati completa en tres matrices candidatas de Riccati [Mahmoud and Singh, 1982].

Por otro lado Silva Madriz y Sastry en 1984 estudiaron la estructura de la escala de tiempo múltiple de los sistemas singularmente perturbados para obtener funciones de transferencia de bajo orden “aproximadas” válidas en diferentes escalas de tiempo. A partir de los resultados anteriores, concluyeron que una función de transferencia es estrictamente positiva si la función de transferencia lenta de orden reducido y la función de transferencia rápida son reales estrictamente positivos. Además, demostraron que una función de transferencia de orden reducido es de carácter real positivo en un plazo de tiempo, y que se conserva sólo si todas las dinámicas de escala de tiempo más rápidas son también reales positivas. Durante esta investigación contribuyeron también a establecer bajo qué condiciones, la parte real positiva de una función de transferencia, sigue siendo una perturbación singular [Silva Madriz and S. S. Sastry, 1984].

Las primeras aportaciones de sistemas singularmente perturbados en Bond Graph fueron realizadas por Dauphin-Tanguy en 1985, donde comprueba que la dinámica rápida y lenta de los modelos en Bond Graph se pueden estimar mediante la determinación de las ganancias de los lazos causales y la noción de un sistema recíproco que, con las técnicas de perturbaciones singulares, pueden obtener una mayor precisión en el comportamiento de una escala de tiempo rápido del sistema [Dauphin-Tanguy and Borne, 1985].

En 1986, S. H. Javid escribe un artículo en el cual toma en cuenta los observadores de los estados lentos de los sistemas singularmente perturbados y propone una expresión para el error del observador en el caso de un control con un número finito de discontinuidades de salto. Si las dinámicas parásitas son mucho “más rápidas” que la dinámica del sistema restante, el error de observación será pequeño en relación con la estimación de estado [S. H. Javid, 1986].

En este mismo año las investigaciones realizadas por Silva Madriz en conjunto con Sas-

try los llevó a proponer bajo qué condiciones un sistema no lineal tiene el mismo comportamiento de escala de tiempo múltiple como el sistema linealizado localmente alrededor de algún punto de equilibrio [Silva Madriz and S.S Sastry, 1986]. Por otro lado S.J. Fu junto con M.E. Sawan proponen la separación de un sistema a escala de dos tiempos en el modo dominante y en el modo parásito para el análisis de errores asintótico de los identificadores y observadores de adaptación. En base a este modelo proponen técnicas diseñadas para un problema de localización de polos y para el diseño de un observador de orden reducido [S. J. Fu and M. E. Sawan, 1986].

En 1991, Sueur y Dauphin-Tanguy decidieron colaborar juntos para dar continuidad al desarrollo de los sistemas singularmente perturbados en Bond Graph, donde proponen dos métodos: analítico y geométrico para la aplicación de un modelo con ecuación de estado, demostrando las ventajas de un modelo en Bond Graph para la simplificación del modelado. Así mismo, estos métodos son implementados en el estudio de las propiedades dinámicas de las redes RC lineales donde se realiza una partición del vector de estado en una parte lenta y una rápida [C. Sueur and Dauphin-Tanguy, 1991].

El detallar el desarrollo de un formalismo basado en el modelado de sistemas de multipuerto en Bond Graph con una formulación singular perturbada corresponde a los trabajos realizados por Zeid y Overholt en el año de 1995. En dicha investigación llegaron a la conclusión que los sistemas multipuerto con deformación, las uniones pueden ser modeladas por una escala a dos tiempos explícita de ecuaciones diferenciales ordinarias, es decir, la forma singularmente perturbada, permitiendo la construcción de un Bond Graph de uniones sin causalidad derivativa [Zeid and Overholt, 1995].

Trabajos más recientes sobre los sistemas singularmente perturbados datan a partir del 2001 con las investigaciones realizadas por Ahmed y Rosenberg donde demuestran como el método de perturbaciones singulares puede ser utilizado para obtener una perspectiva sobre el comportamiento del sistema modificado a escala de dos tiempos, reduciendo el campo de almacenamiento asociado con la causalidad derivativa a una forma equivalente que tenga la causalidad integral, mediante la inserción de elementos parásitos a través de una transformación matricial [Ahmed and Rosenberg, 2001].

Finalmente en el 2003, las investigaciones realizadas por Orbak, le llevaron a proponer un método de reducción del modelo que se basa en la identificación los subsistemas dominantes a través de explotar el concepto de la descomposición de los subsistemas físico utilizando el método de Bond Graph. Estos subsistemas son trasladados o retenidos en base a la información de los procedimientos de descomposición del sistema físico y residuos de expansiones en fracciones parciales para obtener un modelo de orden reducido [Orbak, 2003].

1.6 Aportaciones

En esta tesis se presenta un avance en el desarrollo de la teoría de perturbaciones singulares en conjunto con la metodología en Bond Graph. Al trabajar con la teoría de sistemas singularmente perturbados y la técnica de Bond Graph, se desarrollan procedimientos que son el resultado de aprovechar la propiedad que tienen los sistemas singularmente perturbados de poderse separar en subsistemas de bajo orden: en un subsistema rápido y en un subsistema cuasi-estacionario.

De esta manera, se realiza el diseño de retroalimentación de estado en Bond Graph en cada subsistema lento y rápido en base a procedimientos propuestos en Bond Graph. Consiguiendo de esta manera, la certeza en la obtención de las ecuaciones de estado y de los límites que tendrán que tener los valores de las ganancias G_0 , G_1 y G_2 para garantizar la estabilidad del sistema original.

1.7 Estructura de la Tesis

El presente trabajo titulado “Retroalimentación de Estado de Sistemas Singularmente Perturbados en un enfoque de Bond Graph” se compone de cinco capítulos, estructurados de la siguiente manera.

En el capítulo 1 titulado “Introducción” se presentan los motivos, la metodología utilizada para esta investigación, el objetivo al que se desea llegar y sobre todo, se hace una pequeña reseña histórica sobre las contribuciones referentes a los sistemas singularmente per-

turbados con retroalimentación de estado, tanto en el enfoque tradicional como en el enfoque en Bond Graph. También, se hace mención sobre las aportaciones y la estructuración de esta tesis.

En el siguiente capítulo 2 titulado “Modelado de Sistemas Físicos en Bond Graph”, hace referencia a los antecedentes y conceptos básicos que se requieren en Bond Graph. Así mismo, se explica el modelado de sistemas físicos en el método de Bond Graph como son los sistemas eléctricos, mecánicos e hidráulicos obtenidos por Matriz de Estructura de Unión.

En el capítulo 3 titulado “Sistemas Singularmente Perturbados”, trata brevemente sobre el modelado de los sistemas físicos singularmente perturbados en un enfoque tradicional, obteniendo las ecuaciones que caracterizan a dichos sistemas. Además, se trata de igual manera el enfoque de Bond Graph donde se explica concisamente en que consiste el modelado de sistemas singularmente perturbados por causalidad integral pero también se explica el método por causalidad derivativa asignada llamado también modelo “SPBG”.

El capítulo 4 titulado “Retroalimentación de Estado de Sistemas Singularmente Perturbados”, abarca con detalle el objetivo que se pretende lograr en este trabajo. Primero se describe brevemente el enfoque tradicional para el diseño de controladores posteriormente se describe con detalle el enfoque en Bond Graph para sistemas singularmente perturbados con retroalimentación de estado, y sobre todo describir los pasos para el diseño de la retroalimentación de estado. Esto se realizó para mostrar algunos ejemplos ilustrativos y hacer una comparativa entre el enfoque tradicional y el enfoque de Bond Graph.

Finalmente, en el capítulo 5 “Conclusiones y Recomendaciones” se abordan las deducciones obtenidas durante el desarrollo de esta tesis. Así mismo se proponen recomendaciones para trabajos futuros sobre este tema de Sistemas Singularmente Perturbados con Retroalimentación de Estado.

Capítulo 2

Modelado de Sistemas Físicos en Bond Graph

2.1 Antecedentes

A través del tiempo, teniendo la necesidad de encontrar una mejor manera de dar explicación a los diferentes fenómenos físicos, en el siglo XIX, Lord Kelvin y James Clerk Maxwell observaron que una amplia gama de fenómenos físicos dan lugar a formas similares de las ecuaciones, llevando a la búsqueda de analogías entre el flujo de calor y fuerza eléctrica y entre las líneas de la fuerza y agilidad de fluidos.

Entre los años 1949 y 1950, H.M (Hank) Paynter del MIT (*Massachusetts Institute of Technology*) trabajó en proyectos de ingeniería interdisciplinario que incluye plantas hidroeléctricas, la computación analógica y digital, la dinámica no lineal y control. En base a esta experiencia obtenida señaló que formas similares a las ecuaciones son generadas por los sistemas dinámicos en una amplia variedad de dominios (por ejemplo eléctrica, hidráulica y mecánica), es decir, estos sistemas son análogos. Paynter incorporó la noción de un puerto de energía en su metodología, y por lo tanto el Bond Graph fue desarrollado [Gawthtop, 2007].

Posteriormente, se convirtió en una metodología, junto con Karnopp y Rosenberg en sus libros de texto (1968, 1975, 1983 y 1990), así mismo diseñan la primera herramienta com-

putacional (ENPORT) que soporta simulaciones bajo modelos obtenidos mediante diagramas de Bond Graph.

Los primeros promotores destacados de las técnicas del modelado de bond graph que proponían en ser llevados a la práctica fueron J. Thoma (1975), van Dixhoorn (1982), y Dransfield P. Ellos contribuyeron sustancialmente a la difusión del modelado de Bond Graph en Europa, Australia, Japón, China y la India. Van Dixhoorn fundó una IMACS (*International Association for Mathematics and Computer in Simulation*) el cual tiene un Comité Técnico en el Modelado de Bond Graph presidido por el Sr. J. Thoma por muchos años. Jan van Dixhoorn realiza un rápido prototipo de diagrama de bloques basado en el software TUTSIM, el cual se puede utilizar para ingresar diagramas causales simples de Bond Graph, y ha sido la base para crear más tarde nuevas herramientas para computadoras personales. Esto último sentó las bases para el desarrollo de la tan famosa herramienta computacional, basada en puertos de Bond Graph, 20-Sim de la Universidad de Twente.

Mediante la formulación de Breedveld (1984-1985), de un marco basado en la termodinámica, él desarrolla un Bond Graph donde hace una descripción del modelado para una teoría de sistemas.

Hoy en día, el éxito en el modelado de sistemas dinámicos utilizando Bond Graph se refleja en una serie de conferencias como es la conferencia de IMACS, primer conferencia internacional SCS explícitamente dedicada a los modelos de Bond Graph en 1993 en San Diego, CA., en esta conferencia se invitó a una sesión plenaria para el modelado gráfico de bonds dada por Cellier, en la edición de 1990 segunda parte del libro de texto bien conocido de Karnopp y Rosenberg y el nuevo libro de texto de Jean Thoma que fue publicado también en 1990, se han dado seminarios en la industria, y un número creciente de empresas que utilizan gráficos de bonds, especialmente en Francia.

Por último, pero no menos importante, los modeladores de Bond Graph se organizan en asociaciones nacionales, como el Club de Bond Graph en los Países Bajos, o el Club de Bond Graph en Francia [Borutzky, 1995].

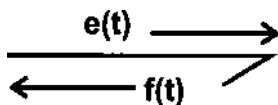


Figura 2.1: Bond con la dirección del esfuerzo $e(t)$ y flujo $f(t)$

2.2 Conceptos Básicos

Bond Graph es una representación de un sistema dinámico donde una colección de componentes interactúan unos con otros a través de puertos de energía. Estos componentes colocados en el sistema describen cómo fluye la potencia a través del sistema.

El componente fundamental de un Bond Graph es el *bond* de energía utilizado para acoplar los puertos de energía de los componentes del sistema.

Un bond es dibujado como un borde con una media flecha como se puede apreciar en la figura 2.1, en la que se puede observar hacia dónde va el esfuerzo $e(t)$ y flujo $f(t)$.

La dirección de esta flecha indica la media dirección positiva del flujo de energía. En principio, la fuente de tensión proporciona una potencia y los demás elementos absorben energía. Las partes principales de un sistema son llamadas *subsistemas* y las partes no reducibles son llamadas *componentes* y básicamente, un subsistema es una parte de un sistema que es modelado como un sistema en sí mismo, donde un componente es modelado como una entidad.

Los lugares en los cuales los subsistemas pueden ser interconectados son llamados *puertos*.

Los sistemas multipuertos son denotados por puertos- n , donde n es el número de puertos. Las variables que describen la unión de dos multipuertos que son conectados son llamadas *variables de potencia*, las cuales son esfuerzo $e(t)$ y flujo $f(t)$. Estas variables también son llamadas variables de bond generalizadas debido a que pueden ser utilizadas en todos los dominios de energía.

En los sistemas que se almacena energía es necesario definir variables que representen el estado del sistema llamados variables de energía denominadas momento $p(t)$ o esfuerzo

Tabla 2.1: Variables generalizadas de Sistemas Eléctricos e Hidráulicos

Variable	General	Eléctrico	Hidráulico
Esfuerzo	$e(t)$	$v(t)$ Voltaje	$P_e(t)$ Presión
Flujo	$f(t)$	$i(t)$ Corriente	$Q(t)$ Caudal
Momento	$p(t) = \int e(t) dt$	$\lambda(t)$ Enlace de Flujo	$P_p(t)$ Integral de presión
Desplazamiento	$q(t) = \int f(t) dt$	$q(t)$ Carga	$V(t)$ Volumen
Potencia	$P(t) = e(t) f(t)$	$v(t) i(t)$	$P_e(t) V(t)$
Energía	$E(p) = \int f(p) dp$ $E(q) = \int e(q) dq$	$\int i(\lambda) d\lambda$ $\int e dq$	$\int Q(P_P) dP_P$ $\int P_e(V) dV$

acumulado $e_a(t)$ y desplazamiento $q(t)$ o flujo acumulado $f_a(t)$, están dadas por:

$$p(t) = e_a(t) \triangleq \int_0^t e(\tau) d\tau \quad (2.1)$$

$$q(t) = f_a(t) \triangleq \int_0^t f(\tau) d\tau \quad (2.2)$$

En la tabla 2.1 se muestran las variables generalizadas para sistemas eléctricos e hidráulicos y en la tabla 2.2 se muestran las variables generalizadas para sistemas mecánicos de traslación y de rotación.

Una forma sencilla de relacionar las variables generalizadas siendo parte importante en Bond Graph es empleando el tetraedro de estados que se muestra en la figura 2.2, donde se tiene la representación de los elementos tanto R como C e I que corresponden a los pasivos y almacenamiento respectivamente [Dauphin-Tanguy, 2000].

Como anteriormente se mencionó los sistemas se interconectan por puertos, los cuales se clasifican en:

- Puerto 1 -Pasivos, Activos o Fuentes
- Puerto 2 -Elementos Ideales
- Puerto 3 -Elementos de Unión

Tabla 2.2: Variables generalizadas de Sistemas Mecánicos de Translación y Mecánicos de Rotación

Variable	General	Mecánico de Traslación	Mecánico de Rotación
Esfuerzo	$e(t)$	$F(t)$ Fuerza	$\tau(t)$ Par
Flujo	$f(t)$	$V(t)$ Velocidad	$\omega(t)$ Velocidad angular
Momento	$p(t) = \int e(t) dt$	$P_R(t)$ Momento rotacional	$H(t)$ Momento angular
Desplazamiento	$q(t) = \int f(t) dt$	$x(t)$ Distancia	$\theta(t)$ Ángulo
Potencia	$P(t) = e(t) f(t)$	$F(t) V(t)$	$\tau(t) \omega(t)$
Energía	$E(p) = \int f(p) dp$ $E(q) = \int e(q) dq$	$\int V(P_R) dP_R$ $\int F(x) dx$	$\int \omega(H) dH$ $\int \tau(\theta) d\theta$

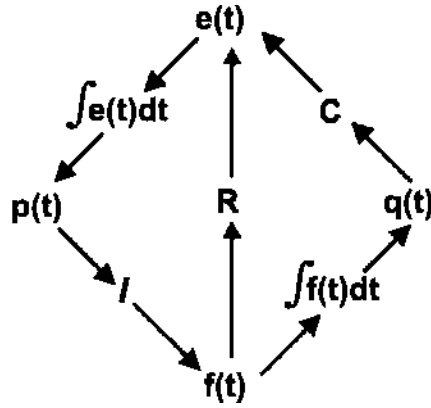


Figura 2.2: Tetraedro de estado

Tabla 2.3: Elementos pasivos de almacenamiento R, C e I

Elemento	Relación	Eléctrico	Mecánico	Hidráulico
R	Lineal	$v(t) = Ri(t)$	$F(t) = bV(t)$	$\Delta P_r(t) = RQ(t)$
	No-Lineal	$v(t) = \varphi(i)$	$F(t) = \varphi(V)$	$\Delta P = \varphi(Q)$
C	Lineal	$v(t) = \frac{1}{C} \int i dt$	$F(t) = k \int V dt$	$P_r(t) = C \int \Delta Q dt$
	No-Lineal	$v(t) = \varphi_c(q)$	$F(t) = \varphi_c(x)$	$P_r(t) = \varphi_c(V)$
I	Lineal	$i(t) = \frac{1}{L} \int v dt$	$V(t) = \frac{1}{M} \int F dt$	$Q(t) = I \int \Delta P_r dt$
	No-Lineal	$i(t) = \varphi_L(\lambda)$	$V(t) = \varphi_L(P)$	$Q(t) = \varphi_L(P_p)$

2.2.1 Puertos 1: Pasivos, Activos o Fuentes

Los elementos pasivos son aquellos que representan disipación de potencia y dos formas de almacenamiento de energía. Se les conoce como Puertos-1 Pasivos a todos aquellos elementos que intercambian potencia en un puerto o elemento sencillo pasivo.

Los elementos gráficos de bonds son los siguientes:

- C : Elemento de almacenamiento para una variable de tipo q , por ejemplo, condensador, resorte, etc.
- I : Elemento de almacenamiento para una variable de tipo p , ejemplo inductor, resorte mecánico, etc.
- R : Resistencia de disipación de energía libre, por ejemplo, resistencia eléctrica, la fricción mecánica, etc.
- SE, SF: Fuentes, por ejemplo, red eléctrica (fuente de tensión), la gravedad (fuente de vigor), la bomba (fuente de flujo).

En la tabla 2.3 se muestran los elementos de disipación R , de almacenamiento de flujo C y de almacenamiento de esfuerzo I , para sistemas eléctricos, sistemas mecánicos y sistemas hidráulicos [Dauphin-Tanguy, 2000].

Los elementos que introducen energía al sistema son llamados fuentes. Existen dos tipos de fuentes:

- Fuentes de esfuerzo moduladas (voltaje, fuerza o presión), la cual se denota como MS_e .



Figura 2.3: Puerto1- Activo: a) Fuentes de esfuerzo y b) Fuentes de flujo

- Fuentes de flujo moduladas (corriente, velocidad o caudal), la cual se denota como MS_f .

En la figura 2.3 se muestra la representación de las fuentes.

2.2.2 Puertos 2: Elementos Ideales

Existen dos elementos ideales del Puerto-2 llamados: transformador (TF) y girador (GY), que son sistemas lineales que cambian la relación entre las variables de flujo y esfuerzo.

- TF: Transformador, por ejemplo, un transformador eléctrico, ruedas dentadas, la palanca, etc.
- GY: Girador, por ejemplo, motor eléctrico, bomba centrífuga. Caracterizándose por tener dos puertos y una relación lineal entre esfuerzo y flujos.

Los Bonds que representan a un transformador TF y a un girador GY se muestra en figura 2.4. Estos elementos juegan un papel muy importante para el modelado de la conversión de potencia de un dominio físico a otro [Dauphin-Tanguy, 2000].



Figura 2.4: Representación en Bond Graph de a) un Transformador (TF) y b) un Girador (GY)

2.2.3 Puertos 3: Elementos de Unión

Este tipo de puertos se llaman uniones ya que sirven para interconectar tres o más puertos de energía dentro de un subsistema, los cuales representan en forma de multipuerto

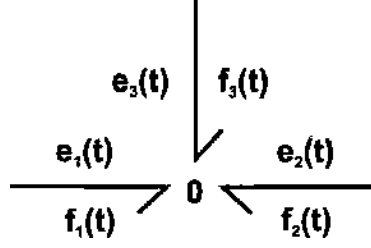


Figura 2.5: Unión 0 para la conexión en paralelo

los dos tipos de conexiones en serie y en paralelo.

La unión de flujo, unión-0 o unión de esfuerzo común es utilizada para la conexión en paralelo (ver figura 2.5). Las relaciones de interconexión que describen una unión de flujo están dadas por:

$$e_1(t) = e_2(t) = e_3(t) \quad (2.3)$$

$$f_1(t) + f_2(t) + f_3(t) = 0 \quad (2.4)$$

De esta manera se observa que los esfuerzos en todos los bonds son siempre iguales y la suma algebraica de los flujos es cero.

El otro elemento del Puerto-3, es la unión de esfuerzo, unión-1 o de flujo común para la conexión en serie (ver figura 2.6). Las relaciones de interconexión para este elemento son:

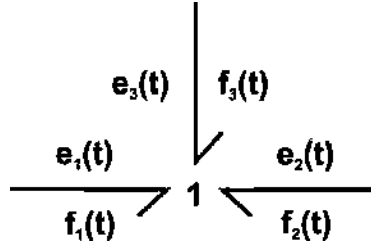


Figura 2.6: Unión 1 para la conexión en serie

$$f_1(t) = f_2(t) = f_3(t) \quad (2.5)$$

$$e_1(t) + e_2(t) + e_3(t) = 0 \quad (2.6)$$

Los puertos de conexión de esfuerzo y flujo pueden extenderse a puertos de 3 o más puertos [Dauphin-Tanguy, 2000].

2.2.4 Bond Activo

Un bond normal tiene dos señales: esfuerzo $e(t)$ y $f(t)$. A diferencia de un bond activo que comunica una de las dos señales posibles en una sola dirección.

Un bond activo se representa por una flecha completa como se muestra en la figura 2.7, indicando un flujo de potencia cero.

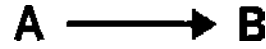


Figura 2.7: Símbolo de un bond activo

Un bond activo se utiliza como una señal en un diagrama a bloques, la cuál conecta a otros sin consumir energía como se ilustra en la Figura 2.8.

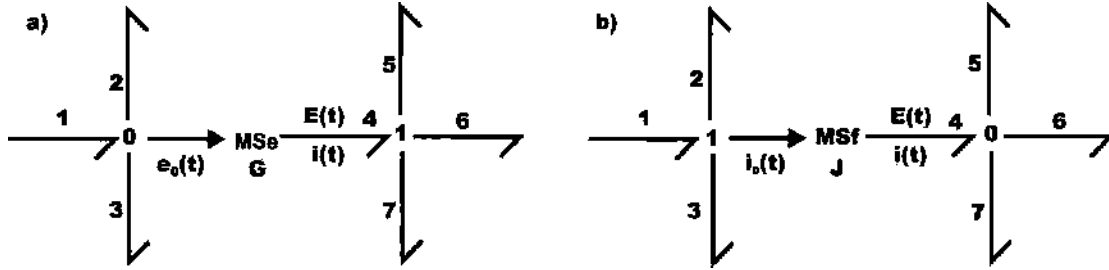


Figura 2.8: Bond Graph con un bond activo para a) voltaje y b) corriente

El bond activo que entra a $MS e$ en la parte a) de la figura 2.8 indica que $E(t)$ es modulada por $e_0(t)$, así, $E(t) = Ge_0(t)$, donde G es la ganancia de voltaje. El bond activo viene de la unión-0, el voltaje $e_0(t)$ es el mismo que e_1 , e_2 y e_3 . Además, el bond activo tiene potencia cero debido a que se considera que la corriente correspondiente a $e_0(t)$ es despreciable. La suma de corrientes en la unión-0, debe ser únicamente i_1 , i_2 e i_3 .

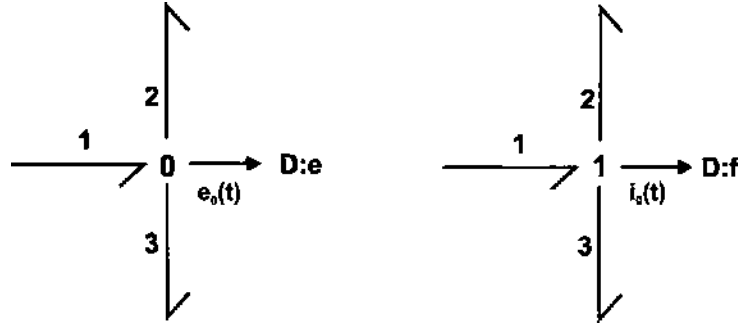


Figura 2.9: Detectores en Bond Graph para obtener esfuerzo o flujo

Lo mismo sucede con la parte b) de la figura 2.8 donde entra al bond activo MSf que indica que $i(t)$ es modulada por $i_0(t)$, donde, $i(t) = Ji_0(t)$ donde J es la ganancia de la corriente. En este caso el bond activo está dado por la unión-1, donde la corriente i_1 , i_2 e i_3 es el mismo que i_1 , i_2 e i_3 . También en esta parte el bond activo tiene potencia cero debido a que se considera que el voltaje corresponde a $i_0(t)$ es despreciable. Así que la suma de los voltajes en la unión-1, debe ser únicamente e_1 , e_2 y e_3 .

Además un bond activo se utiliza para mandar una señal de salida llamado detector (D) (figura 2.9), que dependiendo si se coloca en una unión-0 se obtiene esfuerzo o bien si se coloca en una unión-1 se obtiene flujo [Dauphin-Tanguy, 2000].

2.2.5 Causalidad

Una propiedad muy importante en esta técnica es la causalidad o relación causa-efecto. Las relaciones de causa-efecto para esfuerzos y flujos son representadas en direcciones opuestas. Una marca en un bond, llamada trazo causal ($|$) indica cómo $e(t)$ y $f(t)$ simultáneamente son determinados causalmente en un bond. Las diferentes maneras de expresar la causalidad en un bond se pueden representar como se observa en la figura 2.10.

El trazo causal indica un sentido de entrada-salida para $e(t)$ y $f(t)$ en cada puerto de los dos componentes juntos. El esfuerzo entra en un bond en el mismo sentido del trazo causal y por consecuencia el flujo va en dirección contraria.

Además, se deben cumplir las reglas, las cuales son mostradas en la tabla 2.4

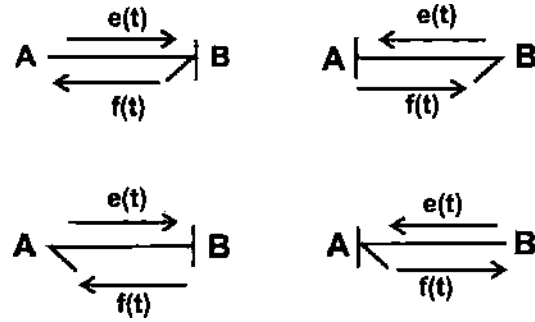


Figura 2.10: Diferentes maneras de expresar la causalidad en un bond

Tabla 2.4: Causalidad para los multipuertos básicos

Causalidad Restrictiva	TF	TF
	GY	GY
	0	0
	1	1
Causalidad Derivativa	I	C
Causalidad Integral	I	C
Causalidad Arbitraria	R	R
Causalidad Necesaria	MS_e	MS_f

Tabla 2.5: Formas Causales para Puertos 1

Elemento	Forma Causal	Relación Causal
Fuente de Esfuerzo	MSe	$e(t) = E(t)$
Fuente de Flujo	MSf	$f(t) = F(t)$
Resistencia	 	$e(t) = \Phi_R[f(t)]$ $f(t) = \Phi_R^{-1}[e(t)]$
Capacitancia	 	$e(t) = \Phi_c^{-1} \left[\int^t f(\tau) d\tau \right]$ $f(t) = \frac{d}{dt} [\Phi_c e(t)]$
Inductancia	 	$f(t) = \Phi_I^{-1} \left[\int^t e(\tau) d\tau \right]$ $e(t) = \frac{d}{dt} [\Phi_I f(t)]$

En la tabla 2.5 se muestran los Puertos 1 con causalidad correspondiente a cada elemento considerado.

Procedimiento 2.1: Para obtener la asignación de causalidad es necesario aplicar las relaciones de causalidad para los multipuertos básicos establecidas en la tabla 2.4 y seguir el siguiente procedimiento en orden estricto:

1. Considerar cualquier MS_e o MS_f y asignar su causalidad requerida e inmediatamente extender las implicaciones causales, usando las restricciones de 0, 1, TF y GY .
2. Asignar causalidad integral a los elementos C e I respetando las restricciones de la tabla 2.4.
3. Escoger cualquier R que no esté asignado y dar una causalidad arbitraria a R . Extender las implicaciones usando 0, 1, TF , y GY .

Se dice que un Bond Graph es *causalmente correcto* cuando no existe conflicto de causalidad entre los elementos y las uniones. Por otro lado, es necesario mencionar que la causalidad derivativa se presenta cuando un sistema contiene elementos de almacenamiento de energía que no son dinámicamente independientes, en una asignación de causalidad integral predefinida.

El número de elementos que almacenan energía en causalidad integral es el número de ecuaciones diferenciales linealmente independientes y el número de elementos almacenadores en causalidad derivativa es el número de ecuaciones diferenciales linealmente dependientes [Dauphin-Tanguy, 2000].

2.3 Modelado de Algunos Sistemas Físicos

El modelado en Bond Graph es una herramienta grafica para el modelado de sistemas de ingeniería, especialmente cuando existen diferentes dominios físicos involucrados. Bond Graph permite construir modelos de sistemas físicos como eléctricos, mecánicos, hidráulicos, etc., utilizando solamente un pequeño conjunto de elementos ideales los cuales fueron mencionados en la sección 2.2.

Mediante la creación de un bond graph, el diseño y análisis de la estructura de un sistema a menudo pueden llevarse a cabo usando sólo lápiz y papel y para esto es necesario seguir un procedimiento estricto para cada uno de los sistemas físicos.

2.3.1 Sistema Eléctrico

Al realizar la representación de sistemas eléctricos en Bond Graph se utiliza el siguiente procedimiento.

Procedimiento 2.2:

1. Dibujar una unión-0 (unión paralelo) para cada corriente distinta en el circuito, es decir, donde las trayectorias paralelas coincidan.
2. Dibujar una unión-1 (unión serie) para los voltajes diferentes en el circuito y conectar el componente apropiado de Bond Graph por un bond en esa unión. La dirección de la semiflecha en cada bond, indica la dirección asumida del flujo de potencia, es decir, a partir de fuentes y hacia elementos almacenadores y elementos disipadores.
3. Dibujar bonds entre uniones adyacentes, nuevamente indicando la dirección de flujo de potencia.



Figura 2.11: Regla para simplificar los bonds

4. Remover el punto de referencia donde el nodo sea tierra, el cual tiene un voltaje de cero.
5. Simplificar la gráfica de acuerdo a las reglas de la figura 2.11.
6. Finalmente se le aplica el Procedimiento 2.1.

Ejemplo 2.1 De la figura 2.12 obtener el modelado por medio de Bond Graph.

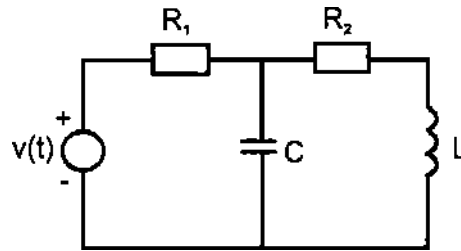


Figura 2.12: Circuito Eléctrico

Solución:

Utilizando el procedimiento 2.2 se realiza lo siguiente:

1. Se dibujan las uniones 0, las cuales representan las uniones en paralelo o los nodos del sistema (fig. 2.13).

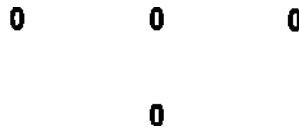


Figura 2.13: Representación de las uniones 0

2. Se dibujan las uniones 1 que representan las uniones en serie, así como también se añaden las conexiones de los componentes que conforman el circuito (figura 2.14).

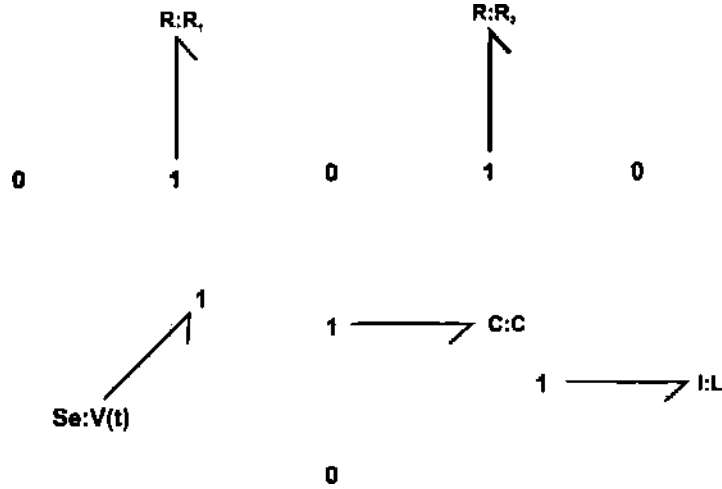


Figura 2.14: Representación de las uniones con los componentes que conforman el circuito

3. Se realizan las conexiones adyacentes indicando la dirección de flujo de potencia e identificando el punto de referencia que es la tierra (figura 2.15).
4. Se remueve el punto de referencia, eliminando los bonds que quedan sueltos apreciados en la figura 2.16.
5. Haciendo uso del paso 5 planteado en el procedimiento 2.2 se obtiene la figura 2.17.
6. Ya tendiendo el Bond Graph reducido se le aplica la asignación de causalidad establecidas en el procedimiento 2.1 apoyadas en tabla 2.4. La figura 2.18 muestra el resultado de la aplicación de estas reglas.

2.3.2 Sistema Mecánico

El procedimiento utilizado para el modelado de sistemas mecánicos es similar al método de construcción para redes eléctricas.

Procedimiento 2.3:

1. Para cada velocidad distinta establecer una unión-1.

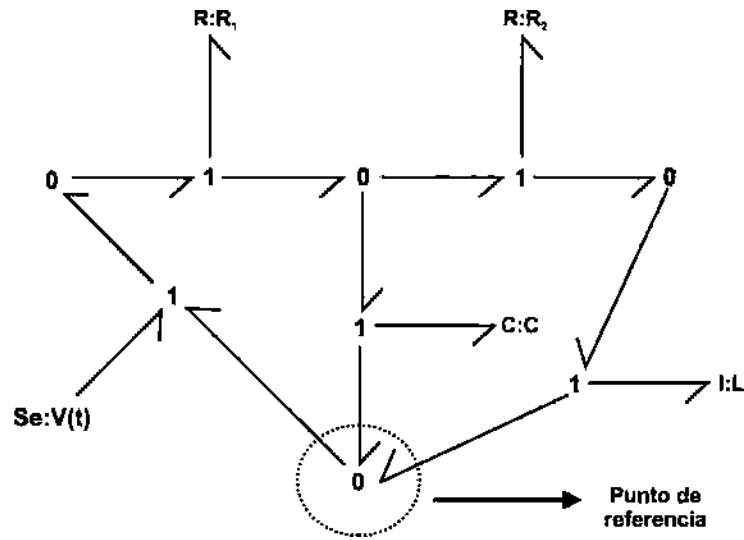


Figura 2.15: Diagrama con las conexiones adyacentes indicando el punto de referencia

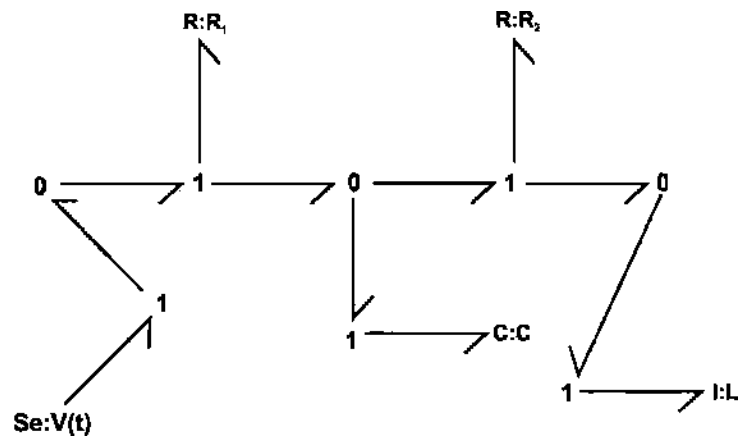


Figura 2.16: Diagrama sin el punto de referencia y los bonds adyacentes a él.

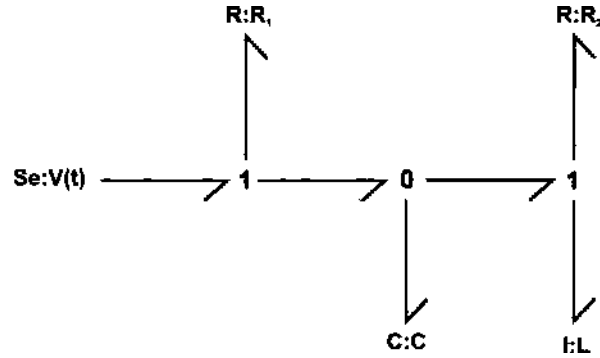


Figura 2.17: Reducción del Bond Graph

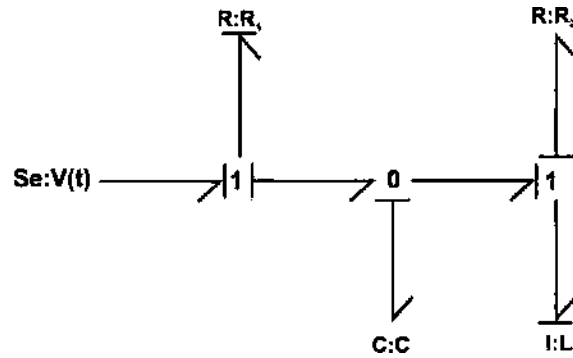


Figura 2.18: Bond Graph del circuito eléctrico

2. Insertar los elementos de generación de fuerzas de puerto-1 entre el par apropiado de uniones-1 usando uniones -0. También, añadir inercias a sus respectivas uniones-1.
3. Dibujar bonds entre uniones adyacentes, nuevamente indicando la dirección de flujo de potencia.
4. Remover la unión-0 que presente el punto de referencia recordando que para este sistema el nodo particular de tierra es cualquier velocidad cero; remover todos los bonds conectados a esta unión.
5. Simplificar el bond de acuerdo a la regla establecida en la figura 2.11.
6. Aplicar la asignación de causalidad descritas en el procedimiento 2.1.

Ejemplo 2.2 De la figura 2.19 obtener el modelado en Bond Graph.

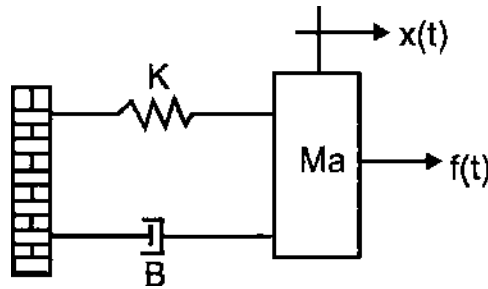


Figura 2.19: Sistema Mécanico de Traslación

Solución:

1. Siguiendo el procedimiento 2.3 se modela el sistema de la figura 2.19 donde se identifican los elementos donde hay velocidades distintas con una unión-1 y además se usan las uniones -0 entre las uniones-1. De esta manera se obtiene la figura 2.20.



Figura 2.20: Uniones-1 y unionones-0

2. Dibujando los bonds adyacentes e identificando las direcciones de flujo de potencia se obtiene la figura 2.21.
3. Finalmente aplicando el paso 4, 5 y 6 se obtiene la figura 2.22.

2.3.3 Sistema Hidráulico

El modelado del sistema hidráulico puede ser tratado como un circuito siempre y cuando el flujo de volumen sea conservativo y el fluido sea cercanamente incompresible. Para ellos se plantea el procedimiento 2.4.

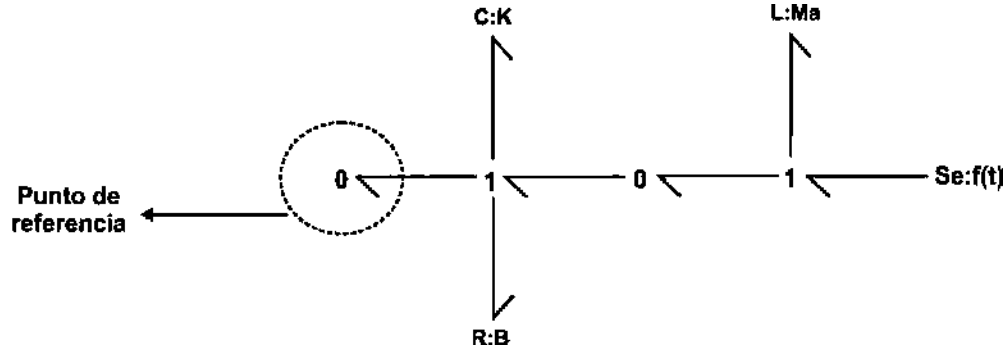


Figura 2.21: Modelado del sistema mecánico

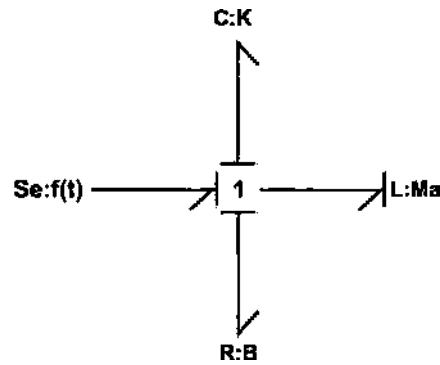


Figura 2.22: Bond Graph del sistema mecánico de traslación

Procedimiento 2.4:

1. Dibujar para cada presión distinta una unión-0, esto indica que la conexión es paralela.
2. Insertar cada elemento entre el par de uniones-0 apropiadas, usando uniones-1 y añadiendo fuentes de presión y de flujo.
3. Dibujar bonds entre uniones adyacentes, indicando la dirección de flujo de potencia.
4. Definir todas las presiones relativas a una presión de referencia (la mayoría de las veces es la atmosférica) y eliminar la unión 0 de referencia y sus bonds adyacentes a éste.
5. Simplificar el bond con la ayuda de la figura 2.11.

6. Aplicar el procedimiento 2.1 el cual trata de la causalidad de los sistemas.

Ejemplo 2.3 *Obtener el Bond Graph de la figura 2.23.*

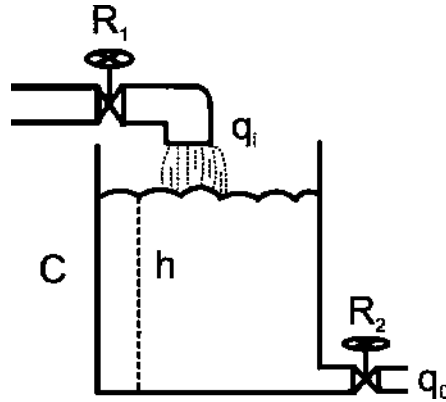


Figura 2.23: Sistema Hidráulico

Solución:

1. Se dibujan las uniones 0-1 donde las conexiones están en serie o bien en paralelo (ver figura 2.24).

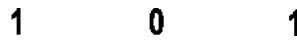


Figura 2.24: Unión-0 y unión-1

2. Se completa el paso 2 colocando los elementos fuentes que conforman el sistema y se aplica el paso 3 y 4 (figura 2.25).
3. Se completa el paso 4 eliminando el punto de referencia. Se aplica inmediatamente el paso 6 al no existir el paso 5, quedando el Bond Graph como se aprecia en la figura 2.26.

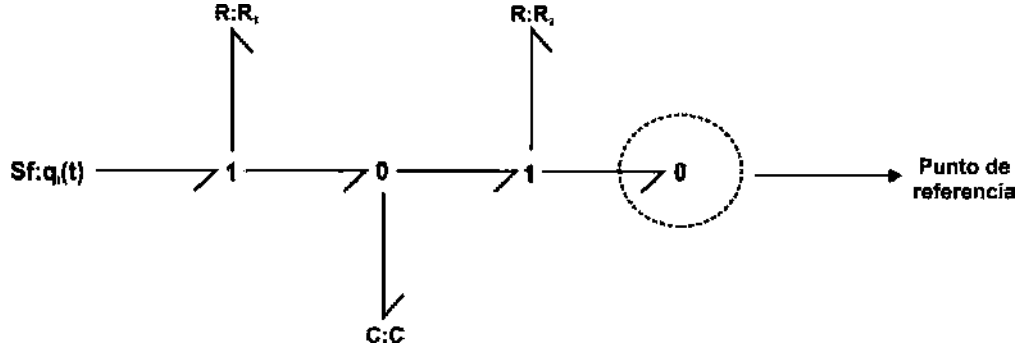


Figura 2.25: Bond Graph con los elementos que conforman al Sistema Hidráulico

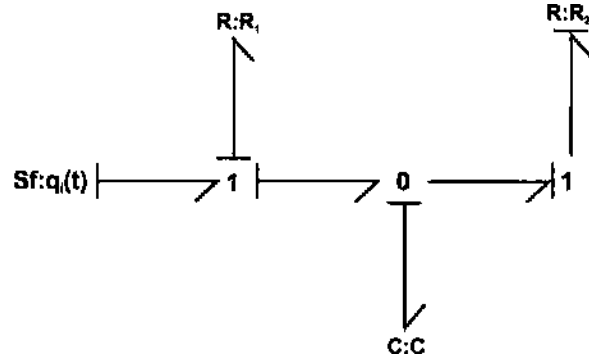


Figura 2.26: Bond Graph del Sistema Hidráulico

2.4 Obtención de las variables de estado en Bond Graph

Bond Graph es una técnica gráfica con dos maneras diferentes de obtener las variables de estado. Estos métodos son a través de la Matriz de Estructura de Unión y por medio de las Trayectoria Causal y Lazo Causal.

2.4.1 Matriz de Estructura de Unión [Karnopp, 1975]

El conjunto de todos los componentes vistos en la sección 2.2 que conforman un bond graph (R , C , I , TF , GY , Se , Sf , 0 y 1) y detectores (D), pueden clasificarse en cinco grupos o campos de acuerdo a su poder o las propiedades de la energía:

- El campo de la disipación de R , en el que se pierde la energía del sistema.

- b) El campo de almacenamiento de C e I , que son la energía conservativa.
- c) El grupo general de conexiones de estructura 0 , 1 , TF y GY , que conserva la energía.
- d) Los campos de origen Se y Sf .
- e) El campo D que es el detector.

Dicha clasificación recibe el nombre de *Estructura de Unión*; su representación gráfica se ilustra en la figura 2.27.

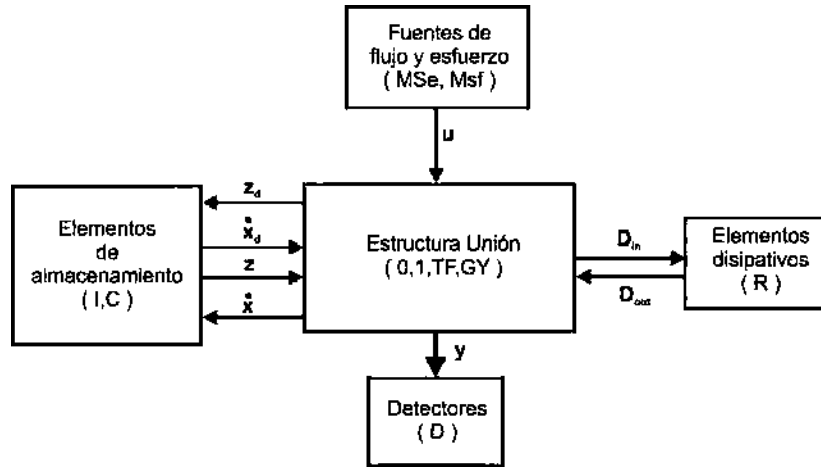


Figura 2.27: Diagrama de la Estructura de Unión de un Bond Graph

Los puntos representan el conjunto de todos los vínculos que unen la estructura de la salida al campo dado. Al vínculo que conecta los campos a la estructura de cruce se llaman *bonds externos* (R , C , I , MSe y MSf), y los bonds que se unen a un elemento de la estructura de unión son llamados *bonds internos* (TF , GY , 0 , 1).

Los vectores asociados en la figura 2.27 se definen como:

x es el vector de estado en causalidad integral (p en I , q en C).

$\dot{x}$ es el vector de las derivadas de x en función del tiempo con causalidad integral.

z es el vector de estado coenergía con causalidad integral (f en I , e en C).

x_d es el vector de estado con causalidad derivativa (p en I , q en C).

$\dot{x}_d$ es el vector de las derivadas de x en función del tiempo con causalidad derivativa.

z_d es el vector de estado de coenergía con causalidad derivativa (f en I , e en C).

u es el vector de la fuente de salida (e en Se , f en Sf).

D_{in} es el vector de entrada al campo R .

D_{out} es el vector de salida del campo R .

Para sistemas lineales con coeficientes constantes, tanto de almacenamiento como de disipación, las limitaciones de campo pueden expresarse en forma matricial.

Para el campo de disipación se expresa de la siguiente manera,

$$D_{out} = LD_{in} \quad (2.7)$$

donde L es una matriz diagonal cuadrada de dimensión igual al número de elementos que conforman el puerto del campo R . Los valores de la diagonal son los parámetros de las R .

Para el campo de almacenamiento con causalidad integral se escribe:

$$z = Fx \quad (2.8)$$

donde F es una matriz cuadrada en forma de diagonal, con dimensiones igual al número de elementos que conforman el puerto del campo C e I . Los valores de la diagonal son los parámetros de C e I .

La relación que tienen los vectores dentro de la estructura de unión, llamada *Matriz de Estructura de Unión* es:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ D_{in} \\ y \end{bmatrix} = S \begin{bmatrix} z \\ D_{out} \\ u \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

donde S es

$$S = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

Los elementos que conforman la matriz S toman valores dentro del conjunto $\{0, \pm 1, \pm n, \pm r\}$ donde n y r son los módulos del transformador y girador.

Las submatrices S_{ij} tienen dos propiedades principales: S_{11} y S_{22} (que es la dimensión de z y la dimensión de D_{out}) son matrices cuadradas antisimétricas y S_{12} (dimensiones x) es

la traspuesta negativa de S_{21} o viceversa. Estas dos propiedades están basadas en el principio de conservación de energía.

La expansión de la ec.(2.9) es:

$$\dot{x} = S_{11}z + S_{12}D_{out} + S_{13}u \quad (2.11)$$

$$D_{in} = S_{21}z + S_{22}D_{out} + S_{23}u \quad (2.12)$$

$$y = S_{31}z + S_{32}D_{out} + S_{33}u \quad (2.13)$$

Tomando la ec. (2.12) y sustituyendo en ella las ecs. (2.7) y (2.8) quedando:

$$D_{in} = S_{21}Fx + S_{22}D_{in} + S_{23}u \quad (2.14)$$

Despejando D_{in} queda:

$$D_{in} = (I - S_{22}L)^{-1} S_{21}Fx + (I - S_{22}L)^{-1} S_{23}u \quad (2.15)$$

Ahora tomamos la ec. (2.11) y se sustituye en ella las ecs. (2.7) y (2.8):

$$\dot{x} = S_{11}Fx + S_{12}LD_{in} + S_{13}u \quad (2.16)$$

Sustituyendo la ec. (2.14) en ec. (2.16) queda:

$$\dot{x} = S_{11}Fx + S_{12}MS_{21}Fx + S_{12}MS_{23}u + S_{13}u \quad (2.17)$$

donde

$$M = L(I - S_{22}L)^{-1} \quad (2.18)$$

Así que:

$$\dot{x} = [S_{11} + S_{12}MS_{21}]Fx + [S_{13} + S_{12}MS_{23}]u \quad (2.19)$$

por lo tanto

$$A = [S_{11} + S_{12}MS_{21}]F \quad (2.20)$$

y

$$B = S_{13} + S_{12}MS_{23} \quad (2.21)$$

Tomando la ec. (2.13) y sustituimos las ecs. (2.7) y (2.8) quedando:

$$y = S_{31}Fx + S_{32}LD_{in} + S_{33}u \quad (2.22)$$

Sustituyendo la ec. (2.14) en la ec. (2.22):

$$y = S_{31}Fx + S_{32}mS_{21}Fx + S_{32}mS_{23}u + S_{33}u \quad (2.23)$$

donde M es la ec. (2.18). La ec. (2.22) al agrupar los términos queda:

$$y = [S_{31} + S_{32}MS_{21}]Fx + [S_{33} + S_{32}MS_{23}]u \quad (2.24)$$

entonces

$$C = [S_{31} + S_{32}MS_{21}]F \quad (2.25)$$

$$D = S_{33} + S_{32}MS_{23} \quad (2.26)$$

2.4.2 Trayectoria Causal y Lazo Causal [Dauphin-Tanguy, 2000]

Un bond graph muestra no sólo estructuras topológicas de un sistema sino también la organización causal, la cual indica las relaciones de causa y efecto, esta estructura causal da la noción de *Trayectoria Causal*.

Una trayectoria causal de una estructura de unión es una secuencia alternante de bonds y nodos tal que:

- Para una gráfica que no tiene la causalidad aplicada a sus elementos o bonds, la secuencia forma una cadena sencilla.
- Todos los nodos en la secuencia tienen una completa y correcta causalidad establecida por medio del procedimiento 2.1.
- Dos bonds de una trayectoria causal tienen en el mismo nodo orientaciones causales opuestas.

Existen 5 tipos de trayectorias causales:

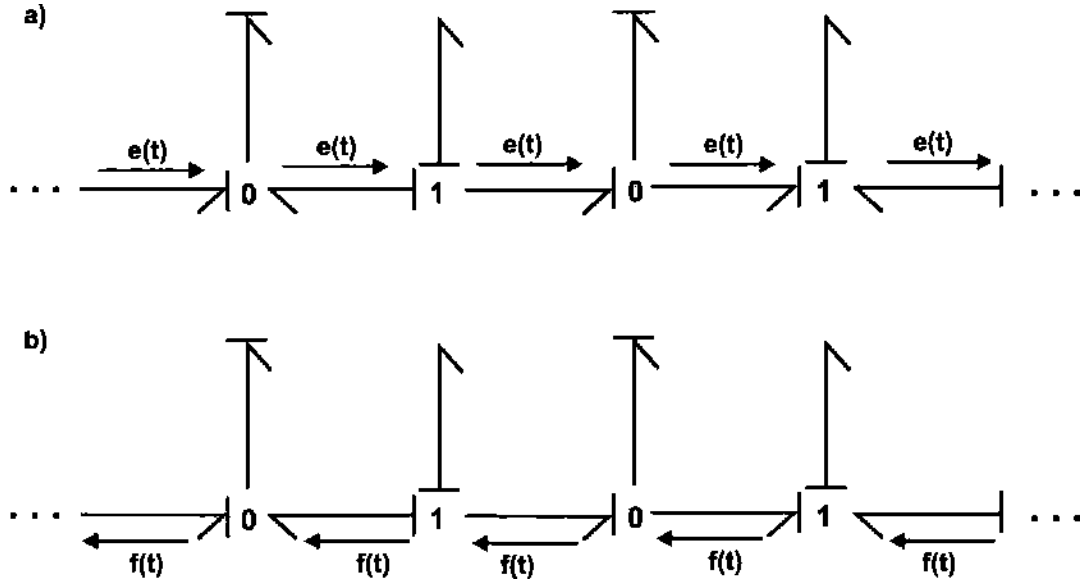


Figura 2.28: Trayectoria Causal Simple a) Esfuerzo y b) Flujo

1. Trayectoria causal simple: es aquella que a través de la misma, sigue solamente una misma variable, ya sea por esfuerzo (figura 2.28-a) o por flujo (figura 2.28-b).
2. Trayectoria causal mezclada directa: es aquella trayectoria donde existe un cambio de variable debido a la presencia de un GY (ver figura 2.29).
3. Trayectoria causal mezclada indirecta: es aquella trayectoria que se da cuando existe un cambio de la trayectoria al pasar a través de algún elemento R , C , o I (ver figura

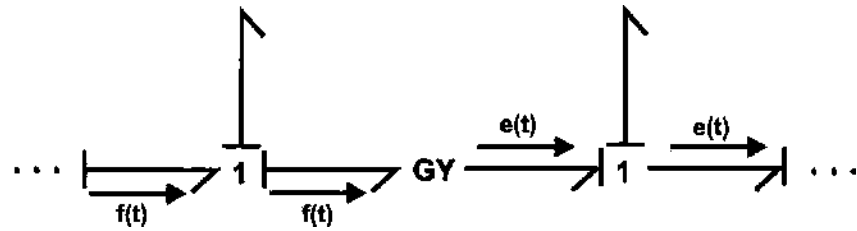


Figura 2.29: Trayectoria Causal Mezclada Directa

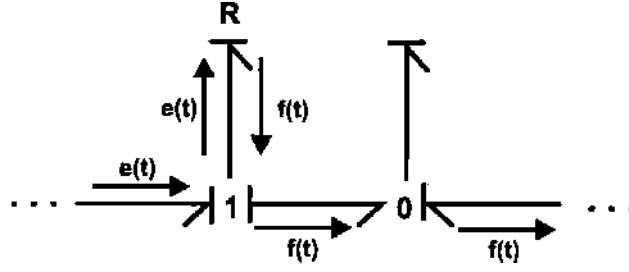


Figura 2.30: Trayectoria Causal Mezclada Indirecta

2.30).

4. Trayectoria causal directa: es una trayectoria causal entre una entrada y un detector (salida).
5. Trayectoria causal indirecta: es una trayectoria que pasa a través de elementos R , C o I , las relaciones constitutivas de estos elementos deben ser tomadas en cuenta.

La función característica de una trayectoria causal está definida como la función la cual enlaza la variable de salida del elemento correspondiente al origen de la trayectoria, a la variable de entrada del elemento formando el fin de la trayectoria.

La función característica, indexada i , para una trayectoria causal directa mezclada o simple es:

$$T_i = (-1)^{n_1+n_0} \prod_{J,k} \left(m_J \text{ ó } \frac{1}{m_J} \right) \left(r_k \text{ ó } \frac{1}{r_k} \right) \quad (2.27)$$

tal que n_0 y n_1 representa el número total de cambios de orientación de los bonds, respectivamente en las uniones—0, mientras se siga la variable de flujo y mientras que en las uniones—1 se siga la variable de esfuerzo. Lo antes mencionado se puede apreciar mejor en la figura 2.31.

m_J , $\frac{1}{m_J}$ y r_k , $\frac{1}{r_k}$ son los módulos de los elementos TF y GY los cuales intervienen en la trayectoria causal, dependiendo de sus causalidades. También es necesario tomar en cuenta las conexiones causales y sus correspondientes transmitancias las cuales se pueden observar en la tabla 2.6.

Un *lazo causal* es una trayectoria causal sencilla cerrada como se puede observar en la

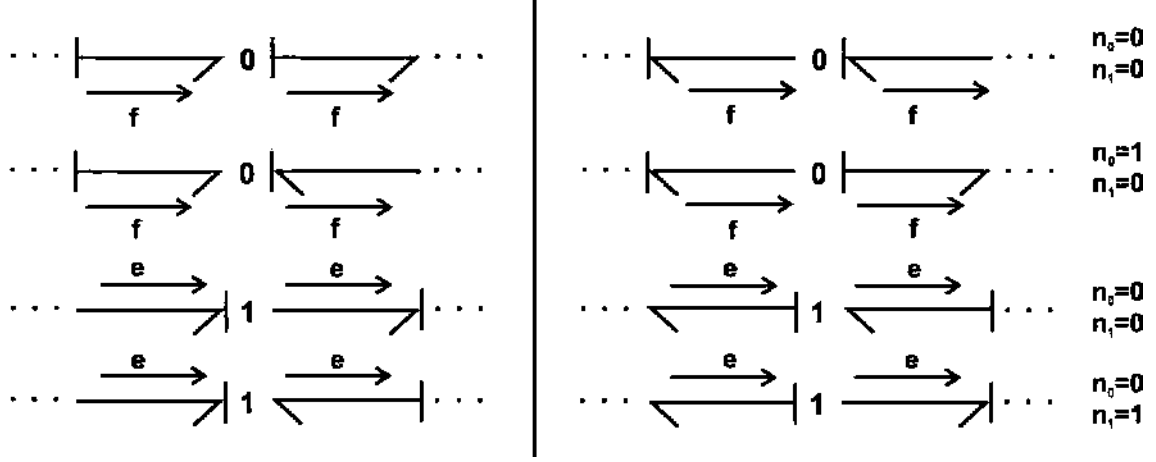


Figura 2.31: Principales cambios de orientación de bonds

figura 2.32, ya que la trayectoria comienza en un elemento almacenamiento pasando por un elemento disipativo y regresa al elemento de almacenamiento de inicio.

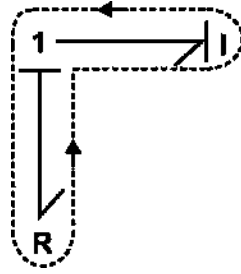


Figura 2.32: Lazo Causal

Un *lazo Mason* es un lazo causal de la salida de un puerto a la entrada del mismo sin trazar el mismo bond en la misma dirección más de una vez.

El polinomio característico está dado por:

$$D(S) = 1 - \sum_J L_{1J}(S) + \sum_K L_{2K}(S) - \sum_I L_{3I}(S) + \dots \quad (2.28)$$

donde $L_{rk}(S)$ es el producto de las ganancias de lazo del K -ésimo conjunto del r -ésimo lazo de Mason, los cuales no se tocan unos con otros.

Tabla 2.6: Conexiones causales y sus transmitancias

Conexión Causal	Transmitancia
$C \swarrow \text{---} 0 \text{---} \nearrow \cdots \text{---} \nearrow R$	$-\frac{1}{RCs}$
$I \swarrow \text{---} 1 \text{---} \nearrow \cdots \text{---} \nearrow R$	$-\frac{R}{Is}$
$I \swarrow \text{---} 1 \text{---} \nearrow \cdots \text{---} \nearrow C$	$-\frac{1}{Cs^2}$
$R_1 \swarrow \text{---} 1 \text{---} \nearrow \cdots \text{---} \nearrow R_2$	$-\frac{R_1}{R_2}$
$C \swarrow \text{---} 0 \text{---} \nearrow \text{TF}_m \text{---} \nearrow \cdots \text{---} \nearrow R$	$-\frac{1}{RCsm^2}$
$C \swarrow \text{---} 0 \text{---} \nearrow \text{GY}_r \text{---} \nearrow \cdots \text{---} \nearrow R$	$-\frac{R}{sCr^2}$

La $L_{iJ}(S)$ ganancia del J^{th} lazo de Mason está definida por:

$$L_{iJ} = (-1)^{n_0+n_1} \prod_{J,k} \left(m_J \text{ ó } \frac{1}{m_J} \right)^2 \left(r_k \text{ ó } \frac{1}{r_k} \right)^2 \prod_h G_h \quad (2.29)$$

n_0 y n_1 representan el número total de cambios de orientación de los bonds, respectivamente en las uniones -0 , al seguir a la variable de flujo; y en las uniones -1 al seguir a la variable de esfuerzo; $\prod_{J,k}$ denota el producto de m_J o $\frac{1}{m_J}$ y r_k ó $\frac{1}{r_k}$ son los módulos de los elementos de TF y GY , los cuales son incluidos en la trayectoria causal, dependiendo de sus causalidades y $\prod_h$ designa el producto de ganancias de los elementos que componen el lazo.

Un *lazo individual* es aquel lazo causal que existe en un Bond Graph formado por un elemento disipativo y un elemento de almacenamiento o dos elementos de almacenamiento (figura 2.33). Los *lazos disjuntos* se forman entre dos o más lazos individuales, los cuales no se tocan entre sí, como se puede observar en la figura 2.34.

Existe un método alternativo para la obtención de las ecuaciones de estado en Bond Graph. Este método es por trayectorias causales y lazos causales, el cual, se presenta en el Apéndice A.

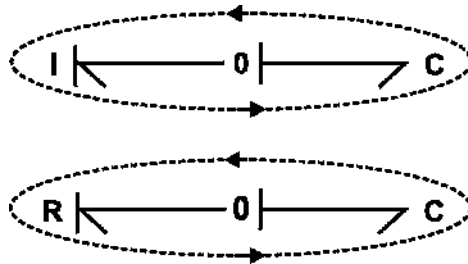


Figura 2.33: Lazos individuales

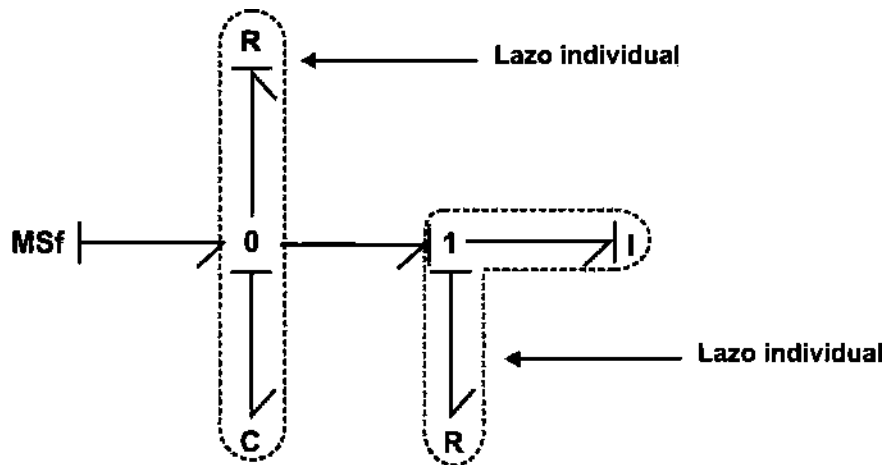


Figura 2.34: Bond Graph con dos lazos individuales y disjuntos

Capítulo 3

Sistemas Singularmente Perturbados

3.1 Introducción

Los problemas de perturbaciones singulares surgen de forma natural en muchos campos de las matemáticas aplicadas, la ingeniería, la dinámica de fluidos, sistemas y circuitos eléctricos y electrónicos, sistemas de energía eléctrica, sistemas aeroespaciales, reactores nucleares, la biología y la ecología. Sin embargo, un ingeniero de control utiliza métodos de perturbaciones singulares para resolver problemas en su campo, el primer problema es el modelado, esto es, como describir matemáticamente el sistema a ser controlado.

El modelado para control es parsimonioso e implícito. Es parsimonioso, debido a que el modelo no debería ser más detallado que lo requerido para el propósito de control específico. Es implícito porque la medida de los detalles necesarios no es conocida antes de que la tarea de control se lleve a cabo.

Los objetivos de control típicos son la regulación y el seguimiento. Estos objetivos son acompañados por la presencia inevitable de perturbaciones desconocidas, variaciones de los parámetros y otras incertidumbres, el sistema de control debe poseer un grado suficiente de robustez o insensibilidad a los efectos externos.

La contribución clave de las técnicas de perturbaciones singulares, a partir del cual otros beneficios siguen, es en el nivel de modelado. Ingenieros de control han estado simplificando sus modelos, antes de que les hubieran dicho que lo que estaban haciendo era una perturbación singular.

Para el ingeniero de control, las perturbaciones singulares legitimizan simplificaciones de modelos dinámicos. Uno de ellos es despreocuparse de pequeñas constantes de tiempo, masas, capacitancias y parámetros parásitos similares, los cuales incrementan el orden dinámico del modelo. Sin embargo, un diseño basado en el modelo simplificado puede resultar en un sistema alejado del desempeño deseado, o incluso en un sistema inestable.

A causa de que la mayoría de los sistemas de control son dinámicos, la descomposición en etapas es requerida por una separación de escalas de tiempo. Típicamente, el modelado reducido representa el fenómeno más lento, el cual en la mayoría de las aplicaciones es dominante. Modelos de capas límite evolucionan en escalas de tiempo rápidas y representan desviaciones del comportamiento lento predefinido. La separación de escalas de tiempo también elimina las dificultades de rigidez y se prepara para una implementación de hardware y de software más eficiente del controlador [Kokotovic, 1986].

3.2 Definición y características

Un sistema en el que la supresión de los parámetros pequeños es responsable de la degeneración de dimensión se denomina un sistema "singularmente perturbado".

Alternativamente, un problema descrito por una ecuación diferencial que implica un pequeño parámetro ϵ se llama un problema de perturbación singular si el orden de la ecuación diferencial es menor para $\epsilon = 0$ que para $\epsilon \neq 0$ (Wasow, 1965). Obviamente, el pequeño parámetro ϵ multiplica las más altas derivadas de la ecuación diferencial. Por el contrario, en un problema normal o regular de perturbación, el parámetro pequeño no es responsable de la reducción en el orden del problema.

Las características importantes de una perturbación singular son:

- i) La perturbación tiene lugar cuando ocurre el cambio de $\epsilon = 0$ a $\epsilon \neq 0$ y por lo tanto, se

describe por una ecuación diferencial con el pequeño parámetro ϵ multiplicando a la derivada de mayor orden.

- ii) La solución de los sistemas singularmente perturbados tiene convergencia no-uniforme
- iii) Existe una capa límite o capa frontera donde la solución cambia rápidamente.
- iv) El proceso de perturbación (en el cambio de $\epsilon = 0$ a $\epsilon \neq 0$) y el proceso de degeneración (en el cambio de $\epsilon \neq 0$ a $\epsilon = 0$) son opuestas en la acción y efecto.
- v) El problema degenerado, también llamado el problema 'imperturbable', es de orden reducido y no puede satisfacer todas las condiciones límite dadas para el problema original, completo, o perturbado.
- vi) El problema singularmente perturbado posee una propiedad a dos escalas de tiempo debido a la presencia simultánea de fenómenos lentos y rápidos, de esta manera se dice que el problema es 'rígido' [Naidu, 1988].

3.3 Modelado Estándar de Sistemas Singularmente Perturbados

El modelado de perturbaciones singulares de sistemas dinámicos de dimensión finita, extensivamente estudiados en la literatura matemática por [Tikhonov, 1948], [Levinson, 1950, Levinson, 1950], [Vasil'eva, 1963], [Wasow, 1965], [Malley, 1971], etc., fue también el primer modelo a ser utilizado en teoría de control y sistemas. Este modelo está en la forma explícita de variables de estado en el cual las derivadas de alguno de los estados son multiplicados por un pequeño escalar positivo ϵ , esto es

$$\dot{x} = f(x, z, \epsilon, t), \quad x(t_0) = x^0, \quad x \in R^n, \quad (3.1)$$

$$\epsilon \dot{z} = g(x, z, \epsilon, t), \quad z(t_0) = z^0, \quad z \in R^m, \quad (3.2)$$

donde f y g se suponen funciones continuamente diferenciables de sus argumentos x , z , ϵ , t . El escalar ϵ representa todos los pequeños parámetros a ser despreciados.

En control y teoría de sistemas, el modelo (3.1), (3.2) es un paso hacia el modelado de orden reducido, un objeto común de ingeniería. La reducción de orden es convertida dentro de una perturbación de parámetros, llamado “singular”. Cuando $\epsilon = 0$, la dimensión del espacio de estado de (3.1), (3.2) reduce $n + m$ a n debido a que la ecuación diferencial (3.2) degenera en la ecuación algebraica o trascendental,

$$0 = g(\bar{x}, \bar{z}, 0, t) \quad (3.3)$$

donde el superíndice barra es utilizado para indicar que las variables pertenecen a un sistema con $\epsilon = 0$. Se diría que el modelo (3.1), (3.2) está en la forma estándar si y solamente si la siguiente hipótesis es satisfecha.

Hipótesis 3.1: *[Kokotovic, 1986] En un dominio de interés (3.3) tiene $k \geq 1$ raíces reales distintas,*

$$\bar{z} = \phi_i(\bar{x}, t), \quad i = 1, 2, \dots, k. \quad (3.4)$$

Esta hipótesis asegura que un buen modelo reducido de dimensión n corresponderá a cada raíz (3.4). Para obtener el modelo i -th reducido, sustituimos (3.4) en (3.1),

$$\dot{\bar{x}} = f(\bar{x}, \phi_i(\bar{x}, t), 0, t), \quad \bar{x}(t_0) = x^0, \quad (3.5)$$

y se mantiene la misma condición inicial para la variable de estado $\bar{x}(t)$ como para $x(t)$. En la secuencia, eliminamos el subíndice i y re-escribimos (3.5) de manera compacta,

$$\dot{\bar{x}} = \bar{f}(\bar{x}, t), \quad \bar{x}(t_0) = x^0. \quad (3.6)$$

Este modelo algunas veces es llamado un modelo de estado cuasi-estacionario, a causa de z , cuya velocidad $\dot{z} = g/\epsilon$ puede ser mayor cuando ϵ es pequeña, puede rápidamente converger a las raíces de (3.3), la cual está en la forma de estado cuasi-estacionario (3.2).

Un modelo común para la mayoría de los motores de CD, mostrado en la figura 3.1, consiste de una ecuación de par mecánico y una ecuación para el transitorio eléctrico en el circuito de armadura,

$$J\dot{\omega} = ki, \quad (3.7)$$

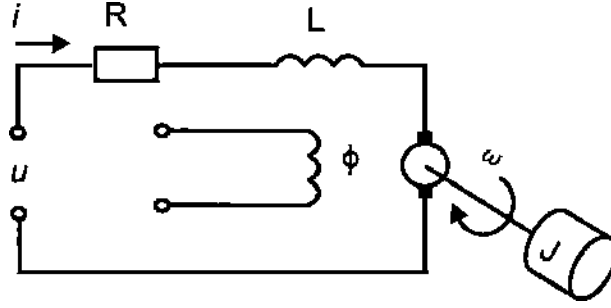


Figura 3.1: Diagrama del modelo de un motor de corriente directa controlado por armadura.

$$L\dot{i} = -k\omega - Ri + u, \quad (3.8)$$

donde i , u , R y L son la corriente de armadura, voltaje, resistencia e inductancia, respectivamente, J es el momento de inercia, ω es la velocidad angular y, ki y $k\omega$ son respectivamente el par y la fuerza contraelectromotriz desarrollada con un flujo de excitación constante ϕ .

En muchos motores de CD la inductancia. L es pequeño y puede jugar el rol del parámetro ϵ . Esto significa que $\omega = x$, $i = z$, y el modelo (3.7), (3.8) está en la forma estándar, (3.1), (3.2), cuando $R \neq 0$. Así que despreciando L , por lo tanto el sistema queda expresado como,

$$0 = -k\bar{\omega} - R\bar{i} + u,$$

para obtener

$$\bar{i} = \frac{u - k\bar{\omega}}{R} \quad (3.9)$$

la cual es la única raíz de la forma (3.4) y sustituyendo en (3.7) el modelo resuelto es,

$$J\dot{\bar{\omega}} = -\frac{k^2}{R}\bar{\omega} + \frac{k}{R}u, \quad (3.10)$$

es el modelo de primer orden comúnmente utilizado del motor de CD en la forma de (3.6) [Kokotovic, 1986].

3.3.1 Propiedades de Escala de Tiempo del Modelo Estándar

Las Perturbaciones Singulares provocan un comportamiento de escala multitiempo de sistemas dinámicos caracterizados por la presencia de ambos transitorios lento y rápido en la

respuesta del sistema a entradas externas.

La respuesta lenta o estado cuasi-estacionario, es aproximado por el modelo reducido (3.6), mientras que la discrepancia entre la respuesta del modelo reducido (3.6) y la del modelo completo (3.1), (3.2) es el transitorio rápido.

Regresando a (3.1)-(3.6) y examinando la variable z , la cual ha sido excluida a partir del modelo reducido (3.6) y sustituido por su estado cuasi-estacionario $\bar{z}$. Por contraste con la variable original z , iniciando en t_0 a partir de z^0 , el estado cuasi-estacionario $\bar{z}$ no es libre de iniciar a partir de z^0 , y puede haber una gran discrepancia entre su valor inicial,

$$\dot{z}(t_0) = \bar{\phi}(\bar{x}(t_0), t_0) \quad (3.11)$$

y la condición inicial pre-escrita z^0 . Por lo tanto, $\bar{z}$ no puede ser una aproximación uniforme de z . Lo mejor que podemos esperar es que se cumpla la aproximación

$$z = \bar{z}(t) + O(\epsilon) \quad (3.12)$$

excluyendo t_0 en el intervalo, esto es, para $t \in [t_1, T]$ donde $t_1 > t_0$. El estado cuasi-estacionario $\bar{x}$, inicia en la condición inicial pre-escrita x^0 , por lo que la aproximación de x por $\bar{x}$ puede ser uniforme, es decir,

$$x = \bar{x}(t) + O(\epsilon), \quad (3.13)$$

en el intervalo $[t_0, T]$ para todo t en el cual $\bar{x}(t)$ existe.

La aproximación (3.12) establece que durante el inicio en el intervalo $[t_0, t_1]$ la variable original z se acerca a $\bar{z}$ y entonces, durante $[t_1, T]$ permanece próxima a $\bar{z}$.

Recordando que la velocidad de z puede ser grande $\dot{z} = g/\epsilon$. De hecho, teniendo el conjunto ϵ igual a cero en (3.2), se puede tener un transitorio instantáneo para cualquier $g \neq 0$. ¿ z escapará al infinito durante este transitorio o convergerá a su estado cuasi-estacionario?.

Para responder esta pregunta, analizaremos $\epsilon \dot{z}$, el cual puede permanecer finito, siempre cuando ϵ tiende a cero y $\dot{z}$ tiende a infinito. Así,

$$\epsilon \frac{dz}{dt} = \frac{dz}{d\tau}, \quad \text{por lo que,} \quad \frac{d\tau}{dt} = \frac{1}{\epsilon} \quad (3.14)$$

y utilizar $\tau = 0$ como valor inicial correspondiente a $t = t_0$, para la nueva variable del tiempo τ , es decir,

$$\tau = \frac{t - t_0}{\epsilon}; \quad \tau = 0 \quad \text{en} \quad t = t_0 \quad (3.15)$$

si ϵ tiende a cero, τ tiende a infinito para un t dado y mayor a t_0 . Por otra parte, mientras z y τ casi cambian instantáneamente, x se mantiene muy cerca de su valor inicial x^0 . Para describir el comportamiento de z como una función de τ , utilizamos la llamada corrección de capa frontera $\hat{z} = z - \bar{z}$ satisfaciendo el sistema de capa frontera,

$$\frac{d \hat{z}}{d\tau} = g(x^0, \hat{z}(\tau) + \bar{z}(t_0), 0, t_0) \quad (3.16)$$

Con la condición inicial $z^0 - \bar{z}(t^0)$, y x^0 , t_0 parámetros definidos. La solución de $\hat{z}(\tau)$ de este problema de valor inicial es utilizado como una corrección de capa de frontera de (3.12) para una aproximación uniforme posible de z ,

$$z = \bar{z}(t) + \hat{z}(t) + O(\epsilon), \quad (3.17)$$

Claramente, $\bar{z}(t)$ es el transitorio lento de z y $\hat{z}(\tau)$ es transitorio rápido de z . Para que la aproximación corregida (3.17) para converja, después de un periodo corto a la aproximación lenta (3.12), el término de corrección $\hat{z}(t)$ debe decaer cuando $\tau \rightarrow \infty$ a una cantidad $O(\epsilon)$. Notar que la escala de tiempo lento t , este decaimiento es rápido a partir de,

$$\frac{d \hat{z}(\tau)}{dt} = \frac{d \hat{z}(\tau)}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} = \frac{1}{\epsilon} \frac{d \hat{z}(\tau)}{d\tau} \quad (3.18)$$

Las propiedades de estabilidad del sistema de capa frontera (3.16) son establecidas en dos hipótesis separadas.

Hipótesis 3.2: *[Kokotovic, 1986] El equilibrio $\hat{z}(\tau) = 0$ de (3.16) es asintóticamente uniformemente estable en x^0 y t_0 , y $z^0 - \bar{z}(t_0)$ pertenece a su dominio de atracción, de manera que $\hat{z}(\tau)$ existe para $\tau > 0$.*

Hipótesis 3.3: *[Kokotovic, 1986] Los valores propios de $\partial g / \partial z$ evaluadas, para $\epsilon = 0$, a lo largo de $\bar{x}(t)$, $\bar{z}(t)$, tienen partes reales menores a un número negativo predefinido, es*

decir,

$$\operatorname{Re} \lambda \left\{ \frac{\partial g}{\partial z} \right\} \leq -c < 0 \quad (3.19)$$

Ambas hipótesis describen una propiedad de estabilidad fuerte del sistema de capa frontera (3.16). De esta manera se propone el siguiente teorema.

Teorema 3.1 [Kokotovic, 1986]

Si las hipótesis 3.2 y 3.3 son satisfechas, entonces la aproximación (3.13), (3.17) es válida para todo $t \in [t_0, T]$ y existe $t_1 > t_0$ tal que (3.2) es válida para todo $t \in [t_1, T]$.

3.3.2 Variedades Lenta y Rápida

El principal objetivo de esta sección es dar un punto de vista geométrico del comportamiento de las dos escalas de tiempo $x(t, \epsilon)$, $z(t, \epsilon)$ como trayectorias en R^{n+m} .

Consideramos una forma más simple del sistemas (3.1), (3.2) dado por,

$$\dot{x} = f(x, z), \quad x \in R^n \quad (3.20)$$

$$\epsilon \dot{z} = g(x, z), \quad z \in R^m \quad (3.21)$$

donde la dependencia de f y g en ϵ y t es eliminada, con esto se considerarán variedades invariantes en el tiempo.

En el espacio de estado de dimensión $(n + m)$ de x y z una variedad de dimensión n , M_ϵ , dependiente del parámetro escalar ϵ , puede ser definido por la expresión,

$$M_\epsilon : z = \phi(x, \epsilon); \quad x \in R^n, \quad z \in R^m \quad (3.22)$$

donde ϕ es asumida a ser una función suficientemente continuamente diferenciable respecto de x y ϵ . Esta expresión reduce la dimensión del espacio de estado de $n + m$ a n , restringiendo el estado a permanecer en M_ϵ .

Para que M_ϵ sea una variedad invariante de (3.20), (3.21) la expresión (3.22) debe cumplir para todo $t > t^*$, si se cumple para $t = t^*$, esto es,

$$z(t^*, \epsilon) = \phi(x(t^*, \epsilon), \epsilon)$$

implica que

$$z(t, \epsilon) = \phi(x(t, \epsilon), \epsilon) \quad \forall t \geq t^* \quad (3.23)$$

Diferenciado esta expresión con respecto a t , obtenemos,

$$\dot{z} = \frac{d}{dt}\phi(x(t, \epsilon), \epsilon) = \frac{\partial \phi}{\partial x} \dot{x} \quad (3.24)$$

Multiplicando (3.24) por ϵ , y sustituyendo $\dot{x}$ y $\dot{z}$ de (3.20), (3.21) y z a partir de (3.22), obtenemos una condición de variedad,

$$\epsilon \frac{\partial \phi}{\partial x} f(x, \phi(x, \epsilon)) = g(x, \phi(x, \epsilon)) \quad (3.25)$$

la cual $\phi(x, \epsilon)$ debe satisfacer para todo x de interés y todo $\epsilon \in [0, \epsilon^*]$, donde ϵ^* es una constante positiva.

Analizando M_ϵ para $\epsilon = 0$, esto es, M_0 definida por (3.25) en $\epsilon = 0$,

$$M_0 : z = \phi(x, 0), \quad 0 = g(x, \phi(x, 0)) \quad (3.26)$$

En (3.26) se reconocen las expresiones (3.3), (3.4) obtenidas formalmente despreciando ϵ en (3.1), (3.2). Pueden existir varias funciones $\phi(x, 0)$ satisfaciendo (3.26) y por lo tanto existirán varias variedades M_0 .

Por la hipótesis 3.1, estas variedades no tienen puntos en común, esto es, no se intersectan y no son tangenciales en el dominio de interés. Para una mejor interpretación de M_0 reescribimos (3.20), (3.21) en la escala de tiempo rápido τ , definida por (3.14), (3.15),

$$\frac{dx}{d\tau} = \epsilon f(x, z), \quad \frac{dz}{d\tau} = g(x, z) \quad (3.27)$$

concluimos que en $\epsilon = 0$ ambos $dx/d\tau$ y $dz/d\tau$ son cero para $z = \phi(x, 0)$. Por lo tanto, M_0 es una variedad de equilibrio de (3.27) en $\epsilon = 0$. Si la hipótesis 3.3 es satisfecha para todo $x, z, \in M_0$ entonces M_0 es una variable estable.

Una consecuencia del Teorema 3.1 es que la existencia de una variedad de equilibrio condicionalmente estable M_0 de (3.27) para $\epsilon = 0$ implica la existencia de una variedad invariante M_ϵ de (3.20), (3.21) satisfaciendo la condición de variedad (3.25) para todo $\epsilon \in [0, \epsilon^*]$ y convergiendo a M_0 cuando $\epsilon \rightarrow 0$,

$$\phi(x, \epsilon) \rightarrow \phi(x, 0), \quad M_\epsilon \rightarrow M_0 \quad \text{cuando} \quad \epsilon \rightarrow 0 \quad (3.28)$$

La desviación de z a partir de M_ϵ está dado por una nueva variable,

$$\eta = z - \phi(x, \epsilon) \quad (3.29)$$

En términos de x y η el sistema (3.20), (3.21) llega a ser,

$$\dot{x} = f(x, \phi(x, \epsilon) + \eta), \quad (3.30)$$

$$\epsilon \dot{\eta} = g(x, \phi(x, \epsilon) + \eta) - \epsilon \frac{\partial \phi}{\partial x} f(x, \phi(x, \epsilon) + \eta), \quad (3.31)$$

La variedad invariante M_ϵ es ahora caracterizada por el hecho de que $\eta = 0$ implica $\dot{\eta} = 0$ para todo x para el cual (3.21) se cumple. Por lo tanto, si $\eta(t_0) = 0$, se requiere resolver,

$$\dot{x} = f(x, \phi(x, \epsilon)), \quad x(t_0) = \dot{x} \quad (3.32)$$

el cual es el modelo lento exacto de (3.20), (3.21) válido para $x, z \in M_\epsilon$. El modelo reducido (3.24) es su aproximación en el cuál $\phi(x, \epsilon)$ es reemplazada por $\phi(x, 0)$. Llamamos M_ϵ una variedad lenta de (3.20), (3.21) tal que la variedad lenta corresponde a un modelo lento (3.32). Para introducir la noción de una variedad rápida examinamos el comportamiento de η en la escala de tiempo rápido τ . Sustituyendo (3.29) en (3.27) y haciendo $\epsilon \rightarrow 0$, se observa que η en $\epsilon = 0$ está definida por el sistema de capa frontera,

$$\frac{d\eta}{d\tau} = g(x^0, \phi(x^0, 0) + \eta), \quad \eta^0 = z^0 - \phi(x_0, 0), \quad (3.33)$$

la cual, ya ha sido encontrada en (3.16). Este sistema describe las trayectorias de x, η , para un x^0 lo cual da una variedad rápida F_x definida por $x = x^0 = \text{constante}$ y rápidamente desciende a una variedad de equilibrio M_0 , para un ϵ dado positivo y pequeño, las variedades rápidas son laminaciones de soluciones rápidamente acercándose a la variedad lenta M_ϵ [Kokotovic, 1986].

3.3.3 Sistemas Lineales Invariantes en el Tiempo [Gonzalez, 2011]

Los Modelos lineales invariantes en el tiempo son de interés en las aproximaciones de pequeña señal o modelos locales para sistemas dinámicos. Considere un sistema LTI para estudiar dos propiedades de escala de tiempo de la siguiente forma,

$$\dot{x} = A_{11}x + A_{12}z + B_1u, \quad x \in R^n \quad (3.34)$$

$$\epsilon \dot{z} = A_{21}x + A_{22}z + B_2u, \quad z \in R^m \quad (3.35)$$

con una salida,

$$y = C_1x + C_2z \quad (3.36)$$

El modelo lento reducido se obtiene mediante el establecimiento de $\epsilon = 0$, ecuación la ecuación (3.35), donde, si A_{22} es no singular, se obtiene

$$\bar{z} = -A_{22}^{-1}A_{21}\bar{x} - A_{22}^{-1}B_2u \quad (3.37)$$

y sustituyendo la ec. (3.37) en la ec. (3.34) obtenemos,

$$\dot{\bar{x}} = (A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})\bar{x} + (B_1 - A_{12}A_{22}^{-1}B_2)u \quad (3.38)$$

3.4 Modelado de Sistemas Singularmente Perturbados en Bond Graph

Un problema fundamental en la teoría de sistemas y control es el modelo matemático de un sistema físico. La representación de los sistemas pueden ser hecho de diversas maneras como matemáticamente, por diagramas de bloques, por modelado mediante Bond Graph, entre otras, y su exactitud depende de la cantidad de parámetros contenidos en el modelo a analizar. Cuando se tiene un sistema con un gran número de parámetros en el modelo es posible separarlo para simplificar su análisis y su control [Kokotovic, 1986]. Así que, cuando un sistema tiene la propiedad de tener múltiples escalas de tiempo, es útil separar las dinámicas para hacer una reducción de orden del sistema, así también para reducir los errores de cálculo debido a los diferentes órdenes de magnitud de los elementos. Esto es importante especialmente en problemas de tiempo real.

El Bond Graph es una herramienta útil para el análisis de sistemas en el caso especial de simplificar el modelado de dos escalas de tiempo en el sistema. Esto se basa en la representación de potencia, que permite la descripción del sistema a través de almacenamiento de energía y elementos disipativos. Bond Graph puede representar una variedad de tipos de

energía, cuya estructura de unión puede dar una valiosa información de las propiedades del sistema físico [Dauphin-Tanguy and Borne, 1985].

La dinámica rápida y lenta de los modelos en Bond Graph se pueden conocer mediante la determinación de las ganancias de lazo causal y contantes de tiempo que dan como resultado un sistema de reciprocidad en Bond Graph del sistema original, logrando así, una estimación de los modelos dinámicos y las variables asociadas al sistema [Dauphin-Tanguy and Borne, 1985], [C. Sueur and Dauphin-Tanguy, 1991].

Así que, conociendo la dinámica lenta y rápida, en Bond Graph se proponen dos métodos para el desacoplamiento de los sistemas singularmente perturbados, uno es mediante el modelado del sistema en Bond Graph con causalidad Integral asignada (BGI) y el segundo es por el Sistema Singularmente Perturbado en Bond Graph (SPBG) en el cual los elementos de almacenamiento de estado rápido tienen causalidad derivativa asignada y para el estado lento mantienen causalidad integral asignada [Gonzalez, 2011].

3.4.1 Modelo Estándar de un Sistema Singularmente Perturbado en Bond Graph

Partiendo de que se tiene un modelo en Bond Graph, el sistema de dos escalas de tiempo está definido por,

$$\dot{x}_1 = A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + B_1u \quad x_1 \in R^n \quad (3.39)$$

$$\epsilon \dot{x}_2 = A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + B_2u \quad x_2 \in R^m \quad (3.40)$$

donde ϵ es una matriz diagonal de la siguiente forma,

$$\epsilon = \begin{bmatrix} \epsilon_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \epsilon_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \epsilon_n \end{bmatrix} \quad (3.41)$$

y $\epsilon_i \cong 0$ para $i=1,\dots,n$ que corresponden a los elementos que conforman a la dinámica rápida.

Así que, haciendo $\epsilon = 0$, se puede obtener el modelo cuasi-estacionario.

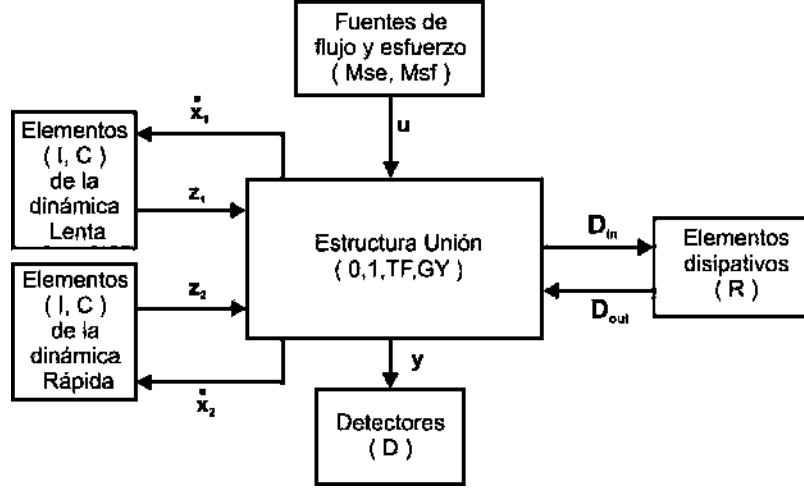


Figura 3.2: Diagrama de bloques de la estructura de unión con las dinámicas separada.

$$A_{21}\bar{x}_1 + A_{22}\bar{x}_2 + B_2u = 0 \quad \Rightarrow \quad A_{22}\bar{x}_2 = -A_{21}\bar{x}_1 - B_2u$$

por lo que, si A_{22}^{-1} existe,

$$\bar{x}_2 = -A_{22}^{-1}(A_{21}\bar{x}_1 + B_2u) = -A_{22}^{-1}A_{21}\bar{x}_1 - A_{22}^{-1}B_2u$$

El esquema de un modelo de Bond Graph con causalidad Integral asignada (BGI) para un sistema que incluye los principales vectores para dos escalas de tiempo se muestra en la figura 3.2, donde (MS_e, MS_f) , (C, I) y (R) denotan la fuente, el almacenamiento de energía y los campos de disipación de energía, (D) el detector y $(0, 1, MTF, MGY)$ la estructura de unión con transformadores TF , y giradores, GY .

Los estados $x_1(t) \in R^n$ y $x_2(t) \in R^m$ se componen de las variables de energía $p(t)$ y $q(t)$ asociada con elementos I y C en la causalidad integral para las variables lentas y rápidas, respectivamente, $u(t) \in R^p$ denota la entrada a la planta, z_1 y z_2 son los vectores de co-energía para variables lentas y rápidas, respectivamente, y $D_{in}(t) \in R^r$ y $D_{out}(t) \in R^r$ son una mezcla de $e(t)$ y $f(t)$ muestran los intercambios de energía entre el campo y la disipación de la estructura de unión [Gonzalez, 2011].

Las relaciones de los campos de almacenamiento y disipación son lineales. Estas rela-

ciones se describen por,

$$z_1 = F_1 x_1 \quad (3.42)$$

$$z_2 = F_2 x_2 \quad (3.43)$$

$$D_{out} = L D_{in} \quad (3.44)$$

Las relaciones de la estructura unión son[Gonzalez, 2011]:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \hline D_{in} \\ \hline y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11}^{11} & S_{11}^{12} & \parallel & S_{12}^{11} & \parallel & S_{13}^{11} \\ S_{11}^{21} & S_{11}^{22} & \parallel & S_{12}^{21} & \parallel & S_{13}^{21} \\ \hline S_{21}^{11} & S_{21}^{12} & \parallel & S_{22} & \parallel & S_{23} \\ \hline S_{31}^{11} & S_{31}^{12} & \parallel & S_{32} & \parallel & S_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \hline D_{out} \\ \hline u \end{bmatrix} \quad (3.45)$$

Las propiedades para la ec. (3.45) son las mismas que se establecen para la ec. (2.10) vistas en la sección 2.4.1.

La expansión de la ec. (3.45) es:

$$\dot{x}_1 = S_{11}^{11} z_1 + S_{11}^{12} z_2 + S_{12}^{11} D_{out} + S_{13}^{11} u \quad (3.46)$$

$$\dot{x}_2 = S_{11}^{21} z_1 + S_{11}^{22} z_2 + S_{12}^{21} D_{out} + S_{13}^{21} u \quad (3.47)$$

$$D_{in} = S_{21}^{11} z_1 + S_{21}^{12} z_2 + S_{22} D_{out} + S_{23} u \quad (3.48)$$

$$y = S_{31}^{11} z_1 + S_{31}^{12} z_2 + S_{32} D_{out} + S_{33} u \quad (3.49)$$

De la ec. (3.44) sustituimos en la ec. (3.48) donde se obtiene:

$$D_{in} = (I - S_{22} L)^{-1} (S_{21}^{11} z_1 + S_{21}^{12} z_2 + S_{23} u) \quad (3.50)$$

Las ecs. (3.44) y(3.50) se sustituyen en el modelo de la dinámica lenta en variables de flujo y esfuerzo que correspondiente a la ec. (3.46). De esta manera obtenemos,

$$\dot{x}_1 = (S_{11}^{11} + S_{12}^{11} M S_{21}^{11}) z_1 + (S_{11}^{12} + S_{12}^{11} M S_{21}^{12}) z_2 + (S_{13}^{11} + S_{12}^{11} M S_{23}) u \quad (3.51)$$

y el valor de M ya fue definida en la ec. (2.18).

En términos de las variables de estado se tiene:

$$\dot{x}_1 = A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + B_1u \quad (3.52)$$

donde

$$A_{11} = (S_{11}^{11} + S_{12}^{11}MS_{21}^{11}) F_1 \quad (3.53)$$

$$A_{12} = (S_{11}^{12} + S_{12}^{11}MS_{21}^{12}) F_2$$

$$B_1 = S_{13}^{11} + S_{12}^{11}MS_{23}$$

Así mismo, las ecs. (3.44) y (3.50) se sustituyen en el modelo de la dinámica rápida en variables de esfuerzo y flujo que corresponde a la ec. (3.47), la cual queda de la siguiente manera,

$$\epsilon \dot{x}_2 = F_2^{-1} (S_{11}^{21} + S_{12}^{21}MS_{21}^{11}) z_1 + F_2^{-1} (S_{11}^{22} + S_{12}^{21}MS_{21}^{12}) z_2 + F_2^{-1} (S_{13}^{21} + S_{12}^{21}MS_{23}) u. \quad (3.54)$$

En términos de las variables de estado:

$$\epsilon \dot{x}_2 = A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + B_2u \quad (3.55)$$

donde

$$A_{21} = F_2^{-1} (S_{11}^{21} + S_{12}^{21}MS_{21}^{11}) F_1 \quad (3.56)$$

$$A_{22} = F_2^{-1} (S_{11}^{22} + S_{12}^{21}MS_{21}^{12}) F_2$$

$$B_2 = F_2^{-1} (S_{13}^{21} + S_{12}^{21}MS_{23})$$

Así que, ϵ es,

$$\epsilon = F_2^{-1} \quad (3.57)$$

De la ec. (3.55) considerando que $\epsilon \rightarrow 0$,

$$\bar{x}_2 = -A_{22}^{-1}A_{21}\bar{x}_1 - A_{22}^{-1}B_2u \quad (3.58)$$

que es la representación de las raíces de la ecuación diferencial.

Ahora sustituyendo la ec. (3.58) en la ec. (3.52) se obtiene la dinámica lenta aproximada,

$$\dot{\bar{x}}_1 = A_0\bar{x}_1 + B_0u \quad (3.59)$$

donde

$$A_0 = A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21} \quad (3.60)$$

$$B_0 = B_1 - A_{12}A_{22}^{-1}B_2$$

Para la ecuación de salida representada en la ec. (3.49), sustituyendo en ella la ec. (3.50) se tiene:

$$y = (S_{31}^{11} + S_{32}MS_{21}^{11})z_1 + (S_{31}^{12} + S_{32}MS_{21}^{12})z_2 + (S_{33} + S_{32}MS_{23})u \quad (3.61)$$

En términos de las variables de estado:

$$y = C_{11}x_1 + C_{12}x_2 + Du \quad (3.62)$$

donde

$$C_{11} = (S_{31}^{11} + S_{32}MS_{12}^{11})F_1 \quad (3.63)$$

$$C_{12} = (S_{31}^{12} + S_{32}MS_{21}^{12})F_2$$

$$D = S_{33} + S_{32}MS_{23}$$

3.4.2 Separación de la dinámica Lenta y Rápida en Bond Graph

En esta sección se obtienen directamente las ecuaciones de estado tanto de la dinámica lenta, a través del modelo de Bond Graph Singularmente Perturbado (SPBG), como de la dinámica rápida por medio del sistema reducido rápido en Bond Graph (BGIR).

Modelo del Estado Cuasi-estacionario en un Bond Graph

El esquema para analizar las propiedades de un sistema singularmente perturbado representado en Bond Graph es llamado Bond Graph Singularmente Perturbado por sus siglas en inglés SPBG (Singularly Perturbated Bond Graph). Este esquema se muestra en la figura 3.3.

De esta manera, el diagrama mostrado en la figura 3.3 indica que los elementos de almacenamiento de la dinámica lenta, tienen una asignación en causalidad integral ($\dot{x}_1, z_1$) y

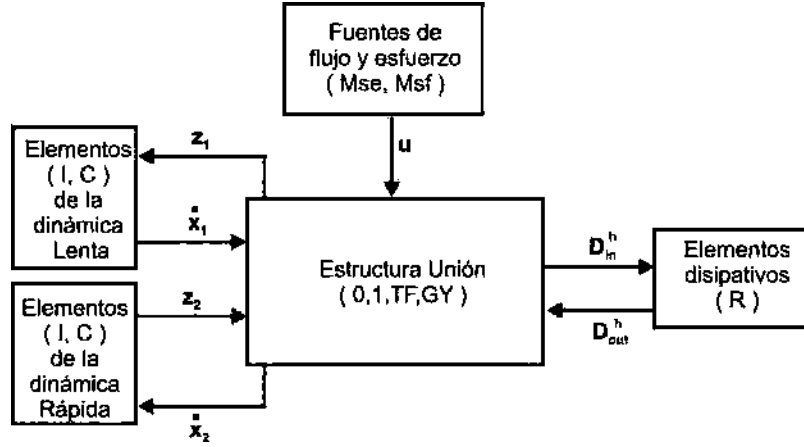


Figura 3.3: Diagrama de bloques de la estructura de unión propuesta para el Bond Graph Singularmente Perturbado (SPBG)

los elementos de almacenamiento de la dinámica rápida, tienen una asignación en causalidad derivativa ($\dot{x}_2$, z_2). La estructura de unión y los principales resultados se presentan en el siguiente Lema [Gonzalez, 2011].

Lema 4.1: [Gonzalez, 2011] *Considerando el esquema de la figura 3.3 . La estructura de unión del sistema está dada por,*

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ z_2 \\ \hline D_{in}^h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{11}^{11} & H_{11}^{12} & \parallel & H_{12}^{11} & \parallel & H_{13}^{11} \\ H_{11}^{21} & H_{11}^{22} & \parallel & H_{12}^{21} & \parallel & H_{13}^{21} \\ \hline H_{21}^{11} & H_{21}^{12} & \parallel & H_{22} & \parallel & H_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ \dot{x}_2 \\ \hline D_{out}^h \\ \hline u \end{bmatrix} \quad (3.64)$$

Esto conduce a las siguiente ecuaciones:

$$\dot{x}_1 = H_{11}^{11} z_1 + H_{11}^{12} \dot{x}_2 + H_{12}^{11} D_{out}^h + H_{13}^{11} u \quad (3.65)$$

$$z_2 = H_{11}^{21} z_1 + H_{11}^{22} \dot{x}_2 + H_{12}^{21} D_{out}^h + H_{13}^{21} u \quad (3.66)$$

$$D_{in}^h = H_{21}^{11} z_1 + H_{21}^{12} \dot{x}_2 + H_{22} D_{out}^h + H_{23} u \quad (3.67)$$

Las relaciones de los campos de almacenamiento y disipación son lineales. Estas relaciones se describen por,

$$z_1 = F_1 x_1 \quad (3.68)$$

$$z_2 = F_2 x_2 \quad (3.69)$$

$$D_{out}^h = L^h D_{in}^h \quad (3.70)$$

De la ec. (3.70) sustituimos en la ec. (3.67) donde se obtiene:

$$D_{in}^h = \left(I - H_{22} L^h \right)^{-1} \left(H_{21}^{11} z_1 + H_{21}^{12} \dot{x}_2 + H_{23} u \right) \quad (3.71)$$

Las ecs. (3.70) y (3.71) se sustituyen en el modelo cuasi-estacionario correspondiente a la ec. (3.65). De esta manera se obtiene,

$$\dot{x}_1 = \left(H_{11}^{11} + H_{12}^{11} Q H_{21}^{11} \right) z_1 + \left(H_{11}^{12} + H_{12}^{11} Q H_{21}^{12} \right) \dot{x}_2 + \left(H_{13}^{11} + H_{12}^{11} Q H_{23} \right) u \quad (3.72)$$

donde

$$Q = L^h \left(I - H_{22} L^h \right)^{-1} \quad (3.73)$$

Así que cuando $\epsilon \rightarrow 0$, se tiene que $\epsilon \dot{x}_2 \rightarrow 0$. Por lo tanto, la ec. (3.72) queda:

$$\dot{x}_1 = \left(H_{11}^{11} + H_{12}^{11} Q H_{21}^{11} \right) z_1 + \left(H_{13}^{11} + H_{12}^{11} Q H_{23} \right) u \quad (3.74)$$

Expresando la ec. (3.74) en variables de estado:

$$\dot{x}_1 = \tilde{A}_0 x_1 + \tilde{B}_0 u \quad (3.75)$$

donde

$$\tilde{A}_0 = \left(H_{11}^{11} + H_{12}^{11} Q H_{21}^{11} \right) F_1 \quad (3.76)$$

$$\tilde{B}_0 = H_{13}^{11} + H_{12}^{11} Q H_{23}$$

De la ec. (3.66) se despeja x_2 , para esto es necesario sustituir las ecuaciones (3.69), (3.70) y (3.71) en ella, por lo tanto, obtenemos lo siguiente:

$$\tilde{x}_2 = F_2^{-1} \left(H_{11}^{21} + H_{12}^{21} Q H_{21}^{11} \right) z_1 + F_2^{-1} \left(H_{11}^{22} + H_{12}^{21} Q H_{21}^{12} \right) \dot{x}_2 + F_2^{-1} \left(H_{13}^{21} + H_{12}^{21} Q H_{23} \right) u \quad (3.77)$$

Se sabe que cuando $\epsilon \rightarrow 0$ se tiene que $\epsilon \dot{x}_2 \rightarrow 0$, entonces la ec. (3.77) queda:

$$\tilde{x}_2 = F_2^{-1} \left(H_{11}^{21} + H_{12}^{21} Q H_{21}^{11} \right) z_1 + F_2^{-1} \left(H_{13}^{21} + H_{12}^{21} Q H_{23} \right) u \quad (3.78)$$

Expresando la ec. (3.79) en variables de estado:

$$\tilde{x}_2 = \tilde{A}_{21}x_1 + \tilde{B}_2u \quad (3.79)$$

donde

$$\tilde{A}_{21} = F_2^{-1} (H_{11}^{21} + H_{12}^{21}QH_{21}^{11}) F_1 \quad (3.80)$$

$$\tilde{B}_2 = F_2^{-1} (H_{13}^{21} + H_{12}^{21}QH_{23})$$

Finalmente se concluye que la ec. (3.75) representa la ecuación del estado cuasi-estacionario, y la ec. (3.79) representa la ecuación algebraica de las raíces reales de la ecuación diferencial de la variable rápida cuando $\epsilon \rightarrow 0$.

Modelo del Sistema Reducido Rápido en Bond Graph (BGIR)

La matriz de estructura de unión que define al modelo reducido de la dinámica rápida en bond graph esta dada por [Gonzalez, 2014],

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_f \\ D_{in}^f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_f \\ D_{out}^f \\ u_f \end{bmatrix} \quad (3.81)$$

Las relaciones de los campos de almacenamiento y disipación son:

$$z_f = F_f x_f \quad (3.82)$$

$$D_{out}^f = L^f D_{in}^f \quad (3.83)$$

Las ecuaciones que conforman la matriz (3.81) son:

$$\dot{x}_f = S_{11} z_f + S_{12} D_{out}^f + S_{13} u_f \quad (3.84)$$

$$D_{in}^f = S_{21} z_f + S_{22} D_{out}^f + S_{23} u_f \quad (3.85)$$

Entonces, sustituyendo la ec. (3.83) en la ec. (3.85) tenemos

$$D_{in}^f(t) = \left(I - S_{22} L^f \right)^{-1} (S_{21} z_f + S_{23} u_f) \quad (3.86)$$

Si se sustituyen las ecs. (3.83) y (3.86) en la ec. (3.84), se obtiene la ecuación del modelo reducido de la dinámica rápida,

$$\dot{x}_f = F_f^{-1}(S_{11} + S_{12}M_fS_{21})z_f + F_f^{-1}(S_{12}M_fS_{23})u_f \quad (3.87)$$

La representación de la ec. (3.87) en variables de estado es

$$\epsilon \dot{x}_f = A_{22}x_f + B_2u_f \quad (3.88)$$

así que

$$A_{22} = F_f^{-1}(S_{11} + S_{12}M_fS_{21})F_f \quad (3.89)$$

$$B_2 = F_f^{-1}(S_{12}M_fS_{23})$$

$$M_f = L^f(I - S_{22}L_f)^{-1}$$

Para poder aplicar todas las ecuación anteriores, es necesario obtener el modelo reducido de la dinámica rápida en Bond Graph. Para esto se utiliza el siguiente procedimiento.

Procedimiento 3.1: [Gonzalez, 2014].

1. Obtener el modelo en Bond Graph del Sistema Físico de un Sistema Singularmente Perturbado.
2. Asignar causalidad integral a todos los elementos C , I ; y a los elementos R , asignarles causalidad según las reglas de causalidad vistas en la sección 2.2.5.
3. Eliminar todos (as):
 - Los elementos C , I que correspondan a la dinámica lenta.
 - Los elementos R conectados causalmente con los elementos C , I que involucren a la dinámica lenta, de manera directa o indirecta a través de otro elemento R .
 - Las fuentes que no tengan ninguna conexión causal con los elementos C , I correspondientes a la dinámica rápida y con los elementos restantes R .

- Los elementos que no tengan ninguna conexión a ningún elemento.
- 4. Obtener el modelo matemático reducido de la dinámica rápida mediante la matriz de estructura unión (3.81) y las ecuaciones (3.88) y (3.89).

Finalmente, haciendo uso del procedimiento anterior, podemos llegar al modelo reducido de la dinámica rápida en lazo abierto en Bond Graph, el cual es parte de la simplicación de un Sistema Singularmente Perturbado. Así que, obteniendo el subsistema cuasi-estacionario y el subsistema rápido reducido en lazo abierto, conseguimos una aproximación muy cercana al sistema original de un Sistema Singularmente Perturbado en lazo abierto, evitando el problema que se presenta de la gran dimensionalidad en dichos sistemas.

Capítulo 4

Retroalimentación de Estado de Sistemas Singularmente Perturbados

4.1 Introducción

Este capítulo describe el diseño de la realimentación lineal de estados para sistemas lineales invariantes en el tiempo deterministas que contienen fenómenos dinámicos tanto lentos y rápidos. Normalmente, cualquier diseño de retroalimentación, sufrirá de mayor dimensionalidad y mal acondicionamiento numérico que resulta de la interacción de los modos dinámicos lentos y rápidos.

En la perturbación singular, o más en general, en el sistema a dos escalas para diseño de retroalimentación, las propiedades de rigidez son aprovechadas para descomponer el sistema original mal condicionado en dos subsistemas en escalas de tiempo separadas. El diseño de la retroalimentación de estados puede entonces proceder para cada subsistema de orden inferior, y los resultados se combinan para producir un control de retroalimentación por estados compuesto para el sistema original. Al mismo tiempo, el control compuesto es requerido para conseguir una aproximación asintótica en el sistema de lazo cerrado que se habría obtenido

si hubiera un controlador de retroalimentación de estado que hubiera sido diseñado sin el uso de los métodos de perturbación singulares.

Una característica de los controladores de retroalimentación de estado compuestos es que no requieren el conocimiento de los parámetros de perturbación singular ϵ . Por lo tanto, son aplicables a los sistemas en los que ϵ representa pequeños parámetros inciertos.

En caso de ser conocido ϵ , las aproximaciones más cercanas del "orden de ϵ^2 " se obtienen usando diseños de control de retroalimentación de estado compuestos basadas en modelos lentos y rápidos corregidos.

Los controladores de retroalimentación de estado son robustos en el sentido de mantener la estabilidad general del sistema, siempre y cuando los modos rápidos desatendidos sean asintóticamente estables. A diferencia de la realimentación de estado, es de fundamental importancia tener en cuenta que, en general, no hay una propiedad de robustez que sea válida para los controladores de realimentación de salida.

4.2 Controlabilidad

El sistema (3.34)-(3.35) expresado matricialmente

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \epsilon \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u, \quad \begin{bmatrix} x(t_0) \\ z(t_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^0 \\ z^0 \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

es controlable si existe un control $u(t)$ que transfiere $x(t)$, $z(t)$ de cualquier estado inicial acotada $x(t_0)$, $z(t_0)$ a cualquier estado terminal acotado $x(T)$, $z(T)$ en un tiempo finito $T-t_0$. La presencia de la estructura a dos escalas de tiempo ofrece la posibilidad de deducir las propiedades de controlabilidad de los sistemas completos (4.1) en términos de las propiedades de controlabilidad de los modelos de orden inferior en la separación de escala de tiempo.

Lema 4.1 [Kokotovic, 1986]

Una condición necesaria y suficiente para el i -ésimo eigenvalor λ_i del sistema sea controlable es que

$$\text{rank} \begin{bmatrix} \lambda_i I_{n+m} - A & B \end{bmatrix} = n + m \quad (4.2)$$

Además, el sistema (4.1) es completamente controlable si y sólo si (4.2) se satisface para todos sus valores propios λ_i , $i = 1, \dots, n + m$. El sistema (4.1) es estabilizable si y sólo si todos sus valores propios con partes reales no negativa son controlables.

En vista del hecho de que esta propiedad no se perderá para las pequeñas perturbaciones de ϵ , se menciona el Teorema 4.1 seguido de dos corolarios: 4.1 y 4.2.

Teorema 4.1 [Kokotovic, 1986]

Sea λ_i^0 el eigenvalor de $A_0 = A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}$ aproximado al eigenvalor lento λ_i de A en (4.1). Si

$$\text{rank} \begin{bmatrix} \lambda_i^0 I_n - A_0 & \vdots & B_0 \end{bmatrix} = n \quad (4.3)$$

donde $B_0 = B_1 - A_{12}A_{11}^{-1}B_2$, entonces existe un $\epsilon^* > 0$ tal que λ_i es controlable para todo $\epsilon \in (0, \epsilon^*]$. Del mismo modo, sea π_j^0 el eigenvalor de A_{22} aproximado al eigenvalor rápido λ_i de A según $\lambda_i = \pi_j/\epsilon$, $i = n + j$.

Si

$$\text{rank} \begin{bmatrix} \pi_i^0 I_m - A_{22} & \vdots & B_2 \end{bmatrix} = m \quad (4.4)$$

entonces existe un $\epsilon^* > 0$ tal que λ_i es controlable para todo $\epsilon \in (0, \epsilon^*]$.

Corolario 4.1 [Kokotovic, 1986]

Si el par (A_0, B_0) y el par (A_{22}, B_2) son cada uno completamente controlables, entonces existe un $\epsilon^* > 0$ de manera que el sistema original (4.1) es completamente controlable para todo $\epsilon \in (0, \epsilon^*]$.

Corolario 4.2 [Kokotovic, 1986]

Si el par (A_0, B_0) y el par (A_{22}, B_2) son cada uno estabilizable, entonces existe un $\epsilon > 0$ de tal manera que el sistema original (4.1) es estabilizable para $\epsilon \in (0, \epsilon^*]$.

Una conclusión de importante práctica es que en lugar de poner a prueba la controlabilidad del par (A, B) dependiente de ϵ del sistema de orden completo (4.1), no hay más

que comprobar controlabilidad de los pares (A_0, B_0) y (A_{22}, B_2) independientes de ϵ de los subsistemas de orden inferior [Kokotovic, 1986].

4.3 Retroalimentación de estado estándar para Sistemas Singularmente Perturbados

Se desea construir un control por retroalimentación de estado para el modelo del sistema singularmente perturbado LTI analizado en la sección 3.3.3:

$$\dot{x} = A_{11}x + A_{12}z + B_1u, \quad x(t_0) = x^0, \quad (4.5)$$

$$\epsilon \dot{z} = A_{21}x + A_{22}z + B_2u, \quad z(t_0) = z^0, \quad (4.6)$$

Preliminarmente a cualquier separación de diseño lento y rápido, el sistema representado por las ecuaciones (4.5) y (4.6), es aproximadamente descompuesto a un modelo de sistema lento con n eigenvalores pequeños y un modelo de sistema rápido con m eigenvalores grandes, como en la sección 3.3.3. El sistema lento de orden n es,

$$\dot{x}_s(t) = A_0x_s(t) + B_0u_s(t), \quad x_s(t_0) = x^0, \quad (4.7)$$

$$z_s(t) = -A_{22}^{-1}(A_{21}x_s(t) + B_2u_s(t)), \quad (4.8)$$

donde,

$$A_0 \triangleq A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}, \quad B_0 \triangleq B_1 - A_{12}A_{22}^{-1}B_2 \quad (4.9)$$

y los vectores x_s , z_s y u_s son las partes lentas de las variables correspondientes x , z y u en el sistema original (4.5) y (4.6). También, el sistema de orden- m es,

$$\epsilon \dot{z}_f(t) = A_{22}z_f(t) + B_2u_f(t), \quad z_f(t_0) = z^0 - z_s(t_0), \quad (4.10)$$

donde $z_f = z - z_s$ y $u_f = u - u_s$ denotan las partes rápidas de las variables correspondientes en las ecuaciones (4.5) y (4.6).

Es apropiado considerar la siguiente descomposición de controles por retroalimentación donde,

$$u_s = G_0x_s + v_s, \quad u_f = G_2z_f + v_f \quad (4.11)$$

son diseñados separadamente para los sistemas lento y rápido (4.7) y (4.10). Un sistema de control compuesto para el sistema completo (4.5), (4.6) puede ser posiblemente tomado como,

$$u_s + u_f = G_0 x_s + G_2 z_f + v_s + v_f \quad (4.12)$$

Sin embargo, un control compuesto realizable requiere que los estados del sistema x_s y z_f sean expresados en términos de los estados del sistema actual x y z . Esto puede ser logrado reemplazando x_s por x y z_f por $z - z_s$, así que el control compuesto (4.12), en vista de (4.8) toma la forma de retroalimentación realizable,

$$\begin{aligned} u &= G_0 x + G_2 [z + A_{22}^{-1} (A_{21} x + B_2 G_0 x)] + v_s + v_f \\ &= G_1 x + G_2 z + v_s + v_f, \end{aligned} \quad (4.13)$$

donde

$$G_1 = (I_r + G_2 A_{22}^{-1} B_2) G_0 + G_2 A_{22}^{-1} A_{21} \quad (4.14)$$

El procedimiento de diseño de arriba es uno descompuesto en el cual las matrices de ganancia G_0 y G_2 son diseñadas separadamente de acuerdo a las especificaciones del desempeño de los modos lentos y rápidos, resultan en la ley de control compuesto físicamente realizable en la ec. (4.13) como es mostrado en la figura 4.1. Se debe a establecer la validez asintótica de este control compuesto de la ec. (4.13), cuando $\epsilon \rightarrow 0$, que es aplicada al sistema (4.5) y (4.6), esto ahora se hace en el teorema siguiente [Kokotovic, 1986].

Teorema 4.2 [Kokotovic, 1986]

Sea G_2 diseñado tal que $\text{Re}\lambda(A_{22} + B_2 G_2) < 0$. Entonces, existe un $\epsilon^ > 0$ tal que si el control compuesto*

$$u = [(I_r + G_2 A_{22}^{-1} B_2) G_0 + G_2 A_{22}^{-1} A_{21}] x + G_2 z \quad (4.15)$$

es aplicado al sistema (4.5), (4.6), el estado y control del sistema en lazo cerrado resultante empezando a partir de cualquier condición inicial acotada x^0 y z^0 son aproximadas de acuerdo a,

$$x(t) = x_s(t) + O(\epsilon), \quad (4.16)$$

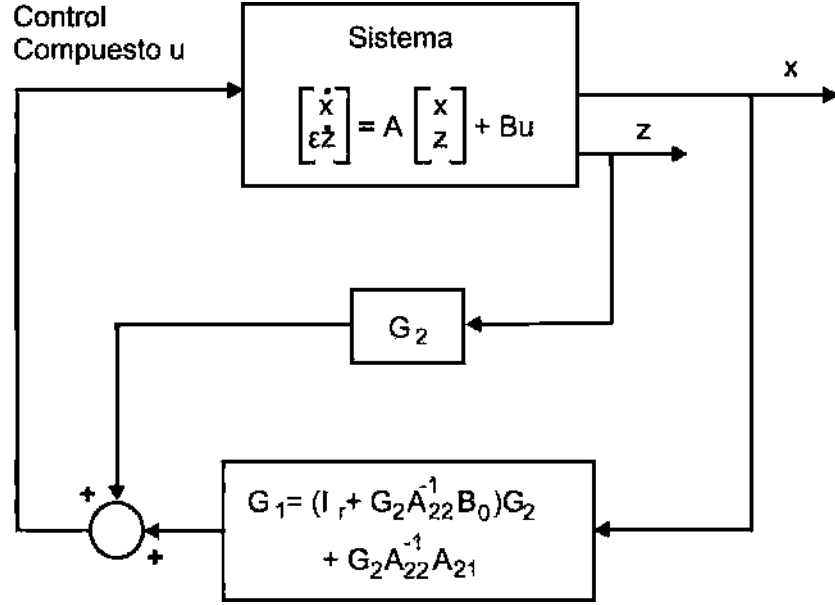


Figura 4.1: Retroalimentación de estado compuesto

$$z(t) = -A_{22}^{-1} (A_{21} + B_2 G_0) x_s(t) + z_f(t) + O(\epsilon), \quad (4.17)$$

$$u(t) = u_s(t) + u_f(t) + O(\epsilon), \quad (4.18)$$

para todo finito $t \geq t_0$ y todo $\epsilon \in [0, \epsilon^*]$. Si además G_0 es diseñado tal que

$\text{Re} \lambda(A_0 + B_0 G_0) < 0$, existe un $\epsilon^* > 0$ tal que el sistema de lazo cerrado es asintóticamente estable y (4.16)-(4.18) se cumplen para todo $\epsilon \in (0, \epsilon^*]$ y $t \in [t_0, \infty)$.

Estabilidad

Lema 4.2: (Klimushev and Krasovskii 1961, Shensa 1971)

En el caso de un sistema gobernado por las ecuaciones de estado

$$\dot{x}_1 = \Gamma_1 x_1 + \Gamma_2 x_2 \quad (4.19)$$

$$\epsilon \dot{x}_2 = \Gamma_3 x_1 + \Gamma_4 x_2$$

sea Γ_4 una matriz Hurwitz. Entonces, si

$$R = \Gamma_1 - \Gamma_2 \Gamma_4^{-1} \Gamma_3 \quad (4.20)$$

es una matriz Hurwitz, existe un $\epsilon_0 > 0$ tal que cada $\epsilon \in (0, \epsilon_0]$ el estado de equilibrio $x_1 = 0, x_2 = 0$ de este sistema es asintóticamente estable [B. Porter, 1974].

En efecto, esto es posible para demostrar el siguiente resultado principal como,

Teorema 4.3 [B. Porter, 1974]

Si A_{22} es una matriz Hurwitz, entonces existe una $\epsilon_0 > 0$ tal que para cada $\epsilon \in (0, \epsilon_0]$ el estado en equilibrio $x_1 = 0$ y $z_2 = 0$ de un sistema en lazo cerrado gobernado por las ecuaciones de estado

$$\dot{x} = (A_{11} + B_1 G_1) x + A_{12} z$$

$$\epsilon \dot{z} = (A_{21} + B_2 G_2) x + A_{22} z$$

es asintóticamente estable.

4.4 Retroalimentación de estado en Bond Graph

En esta sección se desarrolla el diseño de la retroalimentación de estado para sistemas invariantes en el tiempo lineales determinísticos, utilizando el método convencional en Bond Graph y el método SPBG. Cualquier diseño de retroalimentación, en especial los sistemas singularmente perturbados, sufren de una mayor dimensionalidad y mal condicionamientos numérico que resultan de la interacción de los modos de la dinámica lenta y dinámica rápida.

Para evitar este tipo de problemas mencionados anteriormente, la técnica de Bond Graph permite solucionarlos de una manera más fácil, empleando los procedimientos y reglas necesarias para el diseño de la retroalimentación de estado en Sistemas Singularmente Perturbados en Bond Graph.

La implementación de la retroalimentación de estado para la dinámica lenta o rápida correspondiente en Bond Graph es dibujada de acuerdo a la figura 4.2 [Gonzalez, 2014]. En

esta figura, l toma los indicativos 0, 1 ó 2 dependiendo de la ganancia a la que se este refiriendo en la retroalimentación de estado, es decir, 0 para representar a la ganancia de la dinámica lenta, 1 para representar la ganancia del sistema original implicada en la dinámica lenta, y 2 para representar la ganancia de la dinámica rápida tanto para el sistema reducido rápido como en el sistema original.

Así que, si la retroalimentación de estado se implementa en un elemento de:

- Almacenamiento I , y la entrada al sistema es una fuente MSe , entonces la retroalimentación en Bond Graph es como se muestra en la figura 4.2-*a* y su ecuación esta definida por:

$$u = MSe + G_{l\ g} f_5 \quad (4.21)$$

- Almacenamiento I , y la entrada al sistema es una fuente MSf , entonces la retroalimentación en Bond Graph es como se muestra en la figura 4.2-*b* y su ecuación esta definida por:

$$u = MSf + G_{l\ g} f_5 \quad (4.22)$$

- Almacenamiento C , y la entrada al sistema es una fuente MSf , entonces la retroalimentación en Bond Graph es como se muestra en la figura 4.2-*c* y su ecuación esta definida por:

$$u = MSf + \frac{1}{G_{l\ g}} e_5 \quad (4.23)$$

- Almacenamiento C , y la entrada al sistema es una fuente MSe , entonces la retroalimentación en Bond Graph es como se muestra en la figura 4.2-*d* y su ecuación esta definida por:

$$u = MSe + \frac{1}{G_{l\ g}} e_5 \quad (4.24)$$

De esta manera, se hacen las siguientes consideraciones [Gonzalez, 2014]:

1. Para un BGI_{LA} o $SPBG_{LA}$ con retroalimentación de estado, la ganancia G_0 es diseñada tal que $\text{Re } \lambda(A_0 + B_0 G_0) < 0$, donde $G_0 = G_{0g} F_1$.

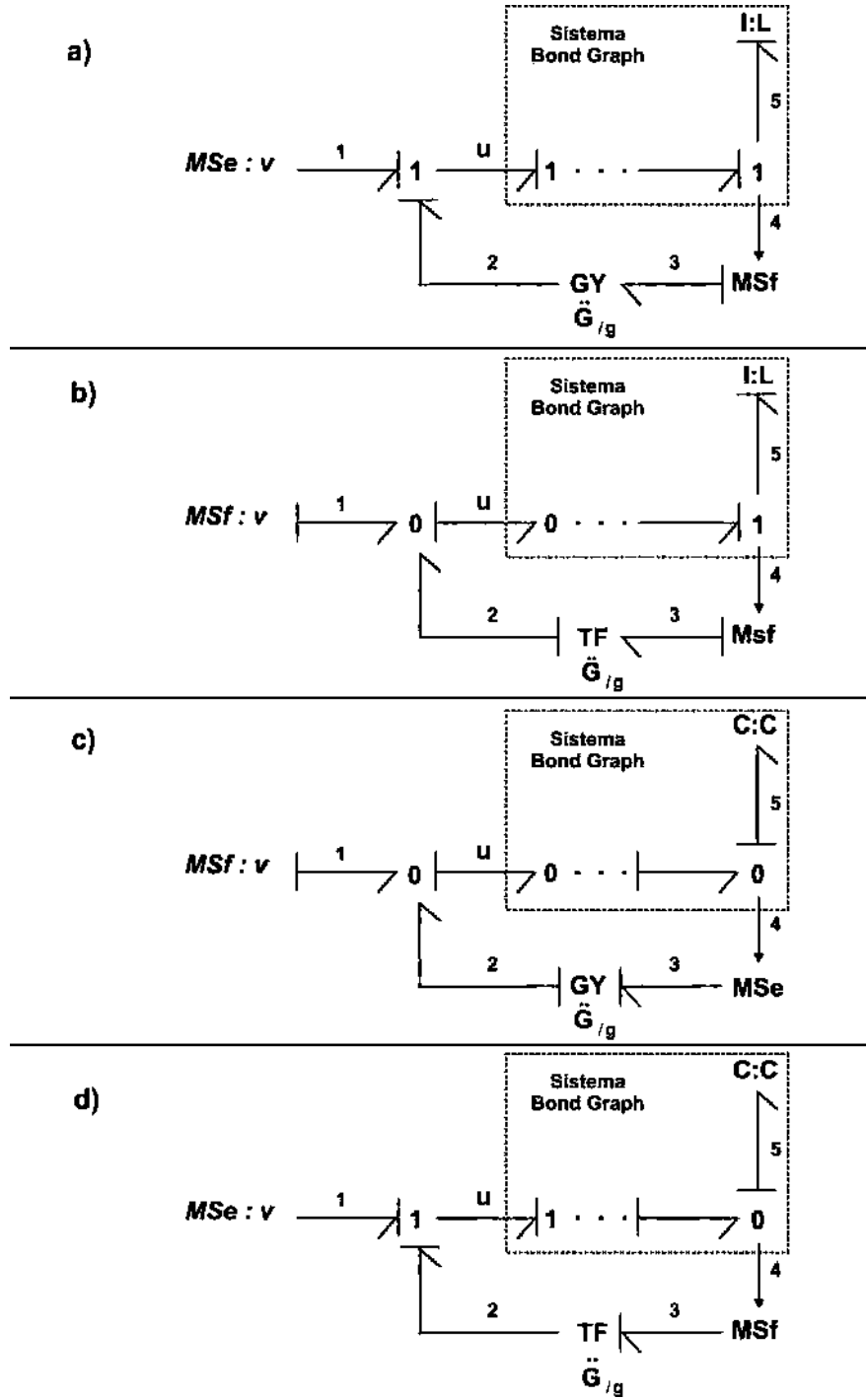


Figura 4.2: Retroalimentación de estado en Bond Graph

2. Para un BGIR_{LA}, la ganancia G_2 es diseñada tal que $\text{Re } \lambda(A_{22} + B_2 G_2) < 0$, donde $G_2 = G_{2g} F_2$.
3. Para el BGI original, la ganancia $G_1 = G_{1g} F_1$
4. A partir de la ec. (4.13) con ec. (4.14) las ganancias del Bond Graph original son obtenidas.

4.4.1 Retroalimentación de estado estándar en Bond Graph

Existen dos maneras de obtener el modelo matemático del sistema cuasi-estacionario aplicando retroalimentación de estado por medio de la causalidad integral asignada (BGI). Lo anterior se puede observar en la figura 4.3, donde se puede observar que en la opción A) se emplea el BGI en lazo cerrado (BGI_{LC}) el cual permite obtener el modelado en Bond Graph del sistema cuasi-estacionario y las ecuaciones de estado en lazo cerrado, mientras que, por la opción B) se emplea el BGI en lazo abierto (BGI_{LA}) en el cual, primero se obtiene el modelado en Bond Graph del sistema cuasi-estacionario y sus ecuaciones de estado en lazo abierto para después aplicar matemáticamente la retroalimentación de estados. A continuación se explica cada una de ellas.

A) BGI_{LC}

Las relaciones de los campos de almacenamiento y disipación son lineales. Estas relaciones se describen de la misma manera que en las ecuaciones (3.42), (3.43) y (3.44).

La matriz de estructura de unión de un sistema estándar con retroalimentación de estado en Bond Graph para un Sistema Singularmente Perturbado se define a continuación [Gonzalez, 2014]:

$$\begin{bmatrix} [\dot{x}_1]^C \\ \dot{x}_2 \\ \hline D_{in} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [S_{11}^{11}]^C & S_{11}^{12} & \parallel & S_{12}^{11} & \parallel & S_{13}^{11} \\ S_{11}^{21} & S_{11}^{22} & \parallel & S_{12}^{21} & \parallel & S_{13}^{21} \\ \hline [S_{21}^{11}]^C & S_{21}^{12} & \parallel & S_{22} & \parallel & S_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [z_1]^C \\ z_2 \\ \hline D_{out} \\ \hline u \end{bmatrix} \quad (4.25)$$

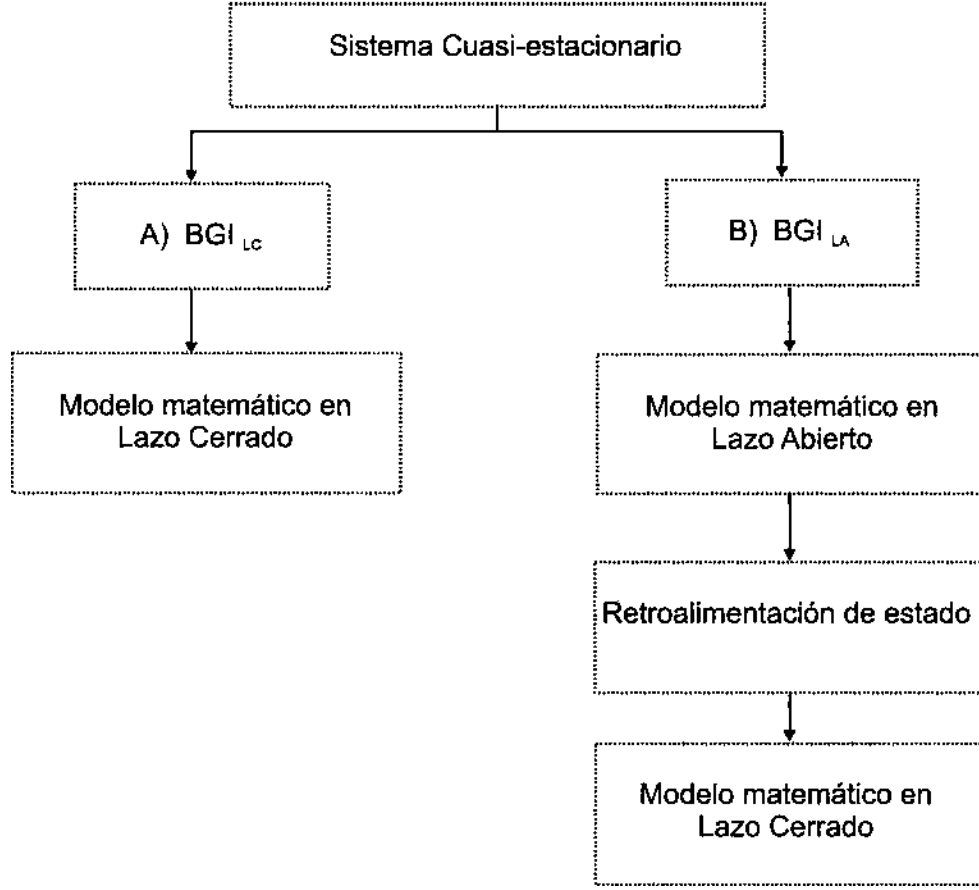


Figura 4.3: Retroalimentación de estado mediante la asignación causal integral (BGI)

La expansión de la ec. (4.25) es:

$$[\dot{x}_1]^C = [S_{11}^{11}]^C [z_1]^C + S_{11}^{12} z_2 + S_{12}^{11} D_{out} + S_{13}^{11} u \quad (4.26)$$

$$\dot{x}_2 = S_{11}^{21} [z_1]^C + S_{11}^{22} z_2 + S_{12}^{21} D_{out} + S_{13}^{21} u \quad (4.27)$$

$$D_{in} = [S_{21}^{11}]^C [z_1]^C + S_{21}^{12} z_2 + S_{22} D_{out} + S_{23} u \quad (4.28)$$

Las relaciones de los campos de almacenamiento y disipación son lineales. Estas relaciones se describen por,

$$[z_1]^C = F_1 x_1 \quad (4.29)$$

$$z_2 = F_2 x_2 \quad (4.30)$$

$$D_{out} = L D_{in} \quad (4.31)$$

De la ec. (4.31) sustituimos en la ec. (4.28) donde se obtiene:

$$D_{in} = (I - S_{22}L)^{-1} \left([S_{21}^{11}]^C [z_1]^C + S_{21}^{12} z_2 + S_{23} u \right) \quad (4.32)$$

Las ecs. (4.31) y (4.32) se sustituyen en el modelo de la dinámica lenta en variables de esfuerzo y flujo que corresponden a la ec. (4.26). De esta manera la ecuación de estado es la siguientes,

$$[\dot{x}_1]^C = [A_{11}]^C x_1 + A_{12} x_2 + B_1 u \quad (4.33)$$

donde

$$[A_{11}]^C = \left([S_{11}^{11}]^C + S_{12}^{11} M [S_{21}^{11}]^C \right) F_1 \quad (4.34)$$

$$A_{12} = \left(S_{11}^{12} + S_{12}^{11} M S_{21}^{12} \right) F_2$$

$$B_1 = S_{13}^{11} + S_{12}^{11} M S_{23}$$

y el valor de M ya fue definida en la ec. (2.18).

Así mismo, las ecs. (4.31) y (4.32) se sustituyen en el modelo de la dinámica rápida en variables de esfuerzo y flujo que corresponde a la ec. (4.27), la cual queda expresada en variables de estado de la siguiente manera,

$$\epsilon \dot{x}_2 = [A_{21}]^C x_1 + A_{22} x_2 + B_2 u. \quad (4.35)$$

donde

$$[A_{21}]^C = F_2^{-1} \left(S_{11}^{21} + S_{12}^{21} M [S_{21}^{11}]^C \right) F_1 \quad (4.36)$$

$$A_{22} = F_2^{-1} \left(S_{11}^{22} + S_{12}^{21} M S_{21}^{12} \right) F_2$$

$$B_2 = F_2^{-1} \left(S_{13}^{21} + S_{12}^{21} M S_{23} \right)$$

y ϵ es una matriz diagonal de valor,

$$\epsilon = F_2^{-1} \quad (4.37)$$

De la ec. (4.35) considerando que $\epsilon \rightarrow 0$ y despejando $\bar{x}_2$ obtenemos,

$$\bar{x}_2 = -A_{22}^{-1} [A_{21}]^C x_1 - A_{22}^{-1} B_2 u \quad (4.38)$$

que es la representación de las raíces de la ecuación diferencial con retroalimentación de estado.

Ahora sustituyendo la ec. (4.38) en la ec. (4.33) obtenemos la dinámica lenta aproximada,

$$[\dot{x}_1]^C = [A_o]^C x_1 + B_0 u \quad (4.39)$$

donde

$$[A_o]^C = [A_{11}]^C - [A_{12}]^C A_{22}^{-1} [A_{21}]^C \quad (4.40)$$

$$B_0 = B_1 - A_{12} A_{22}^{-1} B_2$$

Con el fin de obtener el modelado de un Sistema Singularmente Perturbado con retroalimentación de estado y el sistema cuasi-estacionario, se propone el siguiente procedimiento.

Procedimiento 4.1: Obtención de un Sistema Singularmente Perturbado con retroalimentación de estado por el BGI.

1. Obtener el modelo en bond graph del sistema físico de un sistema singularmente perturbado y asignar causalidad integral a todos los elementos C , I , que conforman a la dinámica lenta como a la rápida. A las fuentes y elementos R asignarles causalidad según las reglas de causalidad vistas en la sección 2.2.5.
2. Realizar el análisis de controlabilidad por trayectorias causales y si el sistema es controlable continuar con este procedimiento.
3. Aplicar retroalimentación de estado, haciendo uso de la figura 4.2:

- 3.1 Si se desea obtener el sistema original con retroalimentación de estado, aplicar la retroalimentación de estado a los elementos C , I , que conforman tanto a la dinámica lenta como a la dinámica rápida.

3.2 Si se desea obtener el sistema cuasi-estacionario, aplicar retroalimentación únicamente a los elementos C , I , que conforman la dinámica lenta.

4. Realizar si es necesario el ajuste de causalidad solamente a los elementos R .
5. Obtener el modelo matemático mediante la matriz de estructura unión (4.25) y las ecuaciones (4.34), (4.36), (4.38), y (4.39).

B) BGI_{LA}

Partiendo de la ec. (3.59) en lazo abierto y aplicándole retroalimentación de estado

$$u = G_o x_1 + v \quad (4.41)$$

entonces,

$$[\dot{x}_1]^C = (A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})x_1 + (B_1 - A_{12}A_{22}^{-1}B_2)(G_o x_1 + v) \quad (4.42)$$

se obtiene

$$[\dot{x}_1]^C = [A_0]^C x_1 + B_0 v \quad (4.43)$$

donde

$$[A_0]^C = ((A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}) + (B_1 - A_{12}A_{22}^{-1}B_2)G_o) \quad (4.44)$$

$$B_0 = B_1 - A_{12}A_{22}^{-1}B_2$$

De esta manera se puede realizar una comparación entre la ec. (4.40) con la ec. (4.44), y obtenemos lo siguiente:

$$[A_{11}]^C - [A_{12}]^C A_{22}^{-1} [A_{21}]^C = ((A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}) + (B_1 - A_{12}A_{22}^{-1}B_2)G_o) \quad (4.45)$$

Se puede observar que el método A) es más fácil y directo obtener la retroalimentación de estado en comparación con el método B) debido a que primero hay que obtener el modelo matemático en lazo abierto y después aplicar retroalimentación de estados algebraica.

4.4.2 Separación de la dinámica lenta y rápida con retroalimentación de estado

En esta sección se obtienen directamente las ecuaciones de estado tanto de la dinámica lenta con retroalimentación de estado, a través del modelado SPBG, como de la dinámica rápida con retroalimentación de estado por medio del BGIR.

Retroalimentación del estado SPBG

Existen dos maneras diferentes a través del SPBG para obtener la ecuación de la dinámica lenta que presenta un sistema singularmente perturbado con retroalimentación de estado. Esto se puede observar en la figura 4.4, la cual muestra la metodología empleando A) el SPBG en lazo cerrado (SPBG_{LC}), es decir, se obtiene el modelado del sistema cuasi-estacionario en Bond Graph y las ecuaciones de estado en lazo cerrado, mientras que, b) en el SPBG en lazo abierto (SPBG_{LA}), se obtiene el modelado del sistema cuasi-estacionario en Bond Graph y las ecuaciones de estado en lazo abierto, para después agregar la retroalimentación de estado matemáticamente. A continuación se muestra lo anterior.

A) SPBG_{LC}

La estructura unión del sistema con retroalimentación de estado cuasi-estacionario está definida por [Gonzalez, 2014],

$$\begin{bmatrix} [\dot{x}_1]^C \\ z_2 \\ \hline D_{in}^h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [H_{11}^{11}]^C & H_{11}^{12} & \parallel & H_{12}^{11} & \parallel & H_{13}^{11} \\ H_{11}^{21} & H_{11}^{22} & \parallel & H_{12}^{21} & \parallel & H_{13}^{21} \\ \hline [H_{21}^{11}]^C & H_{21}^{12} & \parallel & H_{22} & \parallel & H_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [z_1]^C \\ \dot{x}_2 \\ \hline D_{out}^h \\ \hline u \end{bmatrix} \quad (4.46)$$

Esto conduce a las siguientes ecuaciones:

$$[\dot{x}_1]^C = [H_{11}^{11}]^C [z_1]^C + H_{11}^{12} \dot{x}_2 + H_{12}^{11} D_{out}^h + H_{13}^{11} u \quad (4.47)$$

$$z_2(t) = H_{11}^{21} [z_1]^C + H_{11}^{22} \dot{x}_2 + H_{12}^{21} D_{out}^h + H_{13}^{21} u \quad (4.48)$$

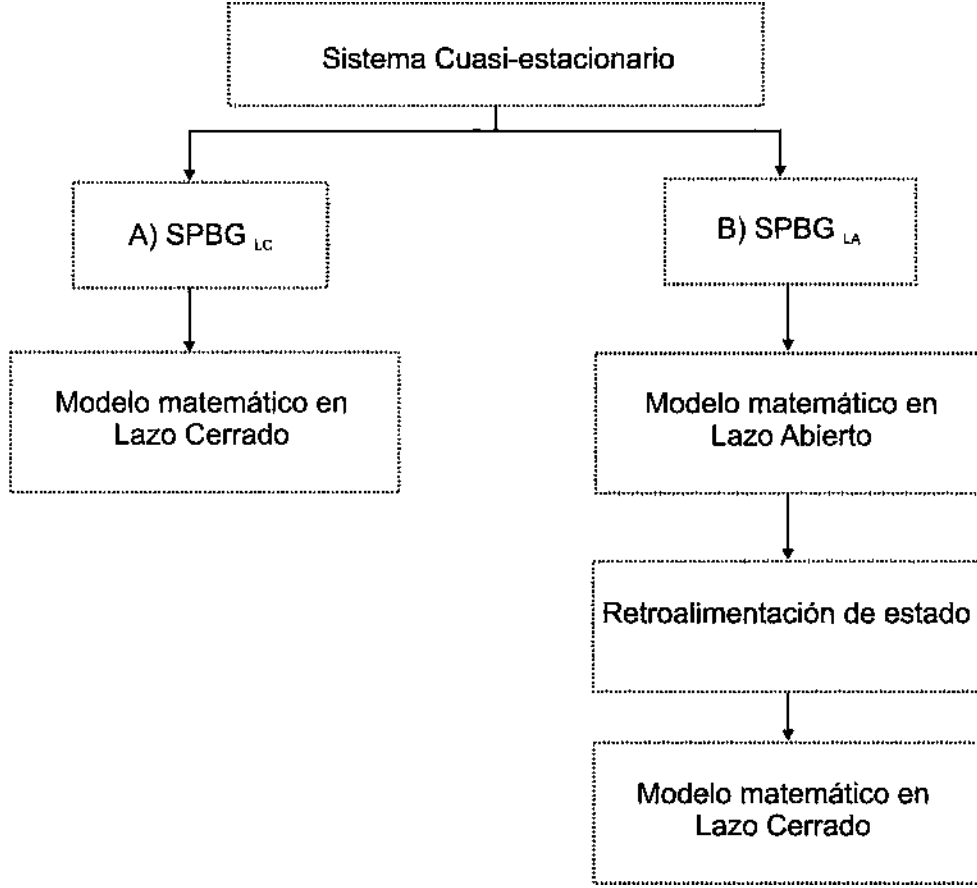


Figura 4.4: Retroalimentación de estado mediante el SPBG

$$D_{in}^h(t) = [H_{21}^{11}]^C [z_1]^C + H_{21}^{12} \dot{x}_2 + H_{22} D_{out}^h + H_{23} u \quad (4.49)$$

Las relaciones de los campos de almacenamiento y disipación son lineales, las cuales se describen por,

$$[\dot{x}_1]^C = F_1 x_1 \quad (4.50)$$

$$z_2 = F_2 x_2 \quad (4.51)$$

$$D_{out}^h = L^h D_{in}^h \quad (4.52)$$

Sustituyendo la ec. (4.52) en la ec. (4.49) se obtiene:

$$D_{in}^h = (I - H_{22} L^h)^{-1} \left([H_{21}^{11}]^C [z_1]^C + H_{21}^{12} \dot{x}_2 + H_{23} u \right) \quad (4.53)$$

Las ecs. (4.52) y (4.53) se sustituye en el modelo cuasi-estacionario que correspondiente a la ec. (4.47). De esta manera se obtiene,

$$[\dot{x}_1]^C = \left([H_{11}^{11}]^C + H_{12}^{11} Q [H_{21}^{11}]^C \right) [z_1]^C + (H_{11}^{12} + H_{12}^{11} Q H_{21}^{12}) \dot{x}_2 + (H_{13}^{11} + H_{12}^{11} Q H_{23}) u \quad (4.54)$$

donde

$$Q = L^h \left(I - H_{22} L^h \right)^{-1} \quad (4.55)$$

Así que cuando $\epsilon \rightarrow 0$, se tiene que $\dot{x} \rightarrow 0$. Por lo tanto, la ec. (4.54) queda:

$$[\dot{x}_1]^C = \left([H_{11}^{11}]^C + H_{12}^{11} Q [H_{21}^{11}]^C \right) [z_1]^C + (H_{13}^{11} + H_{12}^{11} Q H_{23}) u \quad (4.56)$$

Expresando la ec. (4.56) en variables de estado tenemos:

$$[\dot{x}_1]^C = \left[\tilde{A}_0 \right]^C x_1 + \tilde{B}_0 u \quad (4.57)$$

donde

$$\begin{aligned} \left[\tilde{A}_0 \right]^C &= \left([H_{11}^{11}]^C + H_{12}^{11} Q [H_{21}^{11}]^C \right) F_1 \\ \tilde{B}_0 &= H_{13}^{11} + H_{12}^{11} Q H_{23} \end{aligned} \quad (4.58)$$

De la ec. (4.48) se despeja x_2 , y para esto es necesario sustituir las ecuaciones (4.51), (4.52) y (4.53) en ella, por lo tanto, se obtiene lo siguiente:

$$\tilde{x}_2 = F_2^{-1} \left(H_{11}^{21} + H_{12}^{21} Q [H_{21}^{11}]^C \right) [z_1]^C + F_2^{-1} (H_{11}^{22} + H_{12}^{21} Q H_{21}^{12}) \dot{x}_2 + F_2^{-1} (H_{13}^{21} + H_{12}^{21} Q H_{23}) u \quad (4.59)$$

Se sabe que cuando $\epsilon \rightarrow 0$ se tiene que $\dot{x}_2 \rightarrow 0$, entonces la ec. (4.59) queda:

$$\tilde{x}_2 = F_2^{-1} \left(H_{11}^{21} + H_{12}^{21} Q [H_{21}^{11}]^C \right) [z_1]^C + F_2^{-1} (H_{13}^{21} + H_{12}^{21} Q H_{23}) u \quad (4.60)$$

Expresando la ec. (4.60) en variables de estado tenemos:

$$\tilde{x}_2 = \left[\tilde{A}_{21} \right]^C x_1 + \tilde{B}_2 u \quad (4.61)$$

donde

$$\left[\tilde{A}_{21} \right]^C = F_2^{-1} \left(H_{11}^{21} + H_{12}^{21} Q [H_{21}^{11}]^C \right) F_1 \quad (4.62)$$

$$\tilde{B}_2 = F_2^{-1} (H_{13}^{21} + H_{12}^{21} Q H_{23})$$

El modelo del estado cuasi-estacionario puede ser obtenido en un paso, asignando la causalidad derivativa a los elementos que involucran a la dinámica rápida y aplicando el procedimiento 4.2.

Procedimiento 4.2: Obtención del sistema cuasi-estacionario con retroalimentación de estado por SPBG.

1. Obtener el modelo en Bond Graph del Sistema Físico de un Sistema Singularmente Perturbado.
2. Asignar causalidad a los elementos que conforman el Bond Graph de la siguiente manera:
 - A los elementos C , I que conforman la dinámica rápida, asignarles causalidad derivativa.
 - A los elementos C , I que conforman la dinámica lenta, asignarles causalidad integral.
 - A los elementos restantes como: fuentes y elementos R , asignarles causalidad según las reglas de causalidad vistas en la sección 2.2.5.
3. Aplicar retroalimentación de estado a cada uno de los elementos C, I que integran la dinámica lenta, utilizando las reglas establecidas en la figura 4.2.
4. Realizar si es necesario el ajuste de causalidad, solo en los elementos R .
5. Obtener el modelo matemático mediante la matriz de estructura de unión (4.46) y las ecuaciones (4.57), (4.58), (4.61) y (4.62).

B) SPBG _{LA}

Utilizando la ec. (3.75) que representa la dinámica lenta en lazo abierto

$$\dot{x}_1 = \tilde{A}_0 x_1 + \tilde{B}_0 u$$

y sustituyendole la ec. (4.41) que representa la retroalimentación de estado tenemos,

$$[\dot{x}_1]^C = \tilde{A}_0 x_1 + \tilde{B}_0 (G_0 x_1 + v) \quad (4.63)$$

Reduciendo la ec. (4.63), se obtiene

$$[\dot{x}_1]^C = \left[\tilde{A}_0 \right]^C x_1 + \tilde{B}_0 v \quad (4.64)$$

donde

$$\left[\tilde{A}_0 \right]^C = \tilde{A}_0 + \tilde{B}_0 G_0 \quad (4.65)$$

Haciendo una comparativa, la ec. (4.58) y la ec. (4.65) se observa que,

$$\tilde{A}_0 + \tilde{B}_0 G_0 = \left([H_{11}^{11}]^C + H_{12}^{11} Q [H_{21}^{11}]^C \right) F_1 \quad (4.66)$$

Finalmente se concluye que tanto las ecs.(4.39)-(4.43) y (4.57)-(4.64) son las mismas ecuaciones que presenta la ecuación del estado cuasi-estacionario con retroalimentación de estado, pero con la diferencia que son obtenidas por procedimientos diferentes, observando que el mejor método sin tantos pasos es el SPBG_{LA}.

Retroalimentación de Estado del Sistema Reducido Rápido en Bond Graph

La implementación de la retroalimentación de estado para el sistema reducido rápido en Bond Graph (BGIR), se puede realizar de dos manera: una por medio del modelo en Bond Graph con retroalimentación (BGIR_{LC}) o bien, matemáticamente a través del Bond Graph del estado reducido rápido en lazo abierto (BGIR_{LA}), esto se puede observar en la figura 4.5.

A) BGIR_{LC}

La matriz de estructura unión que define al modelo reducido de la dinámica rápida en Bond Graph esta dada por [Gonzalez, 2014],

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_f^C \\ D_{in}^f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11}^C & S_{12} & S_{13} \\ S_{21}^C & S_{22} & S_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_f^C \\ D_{out}^f \\ u_f \end{bmatrix} \quad (4.67)$$

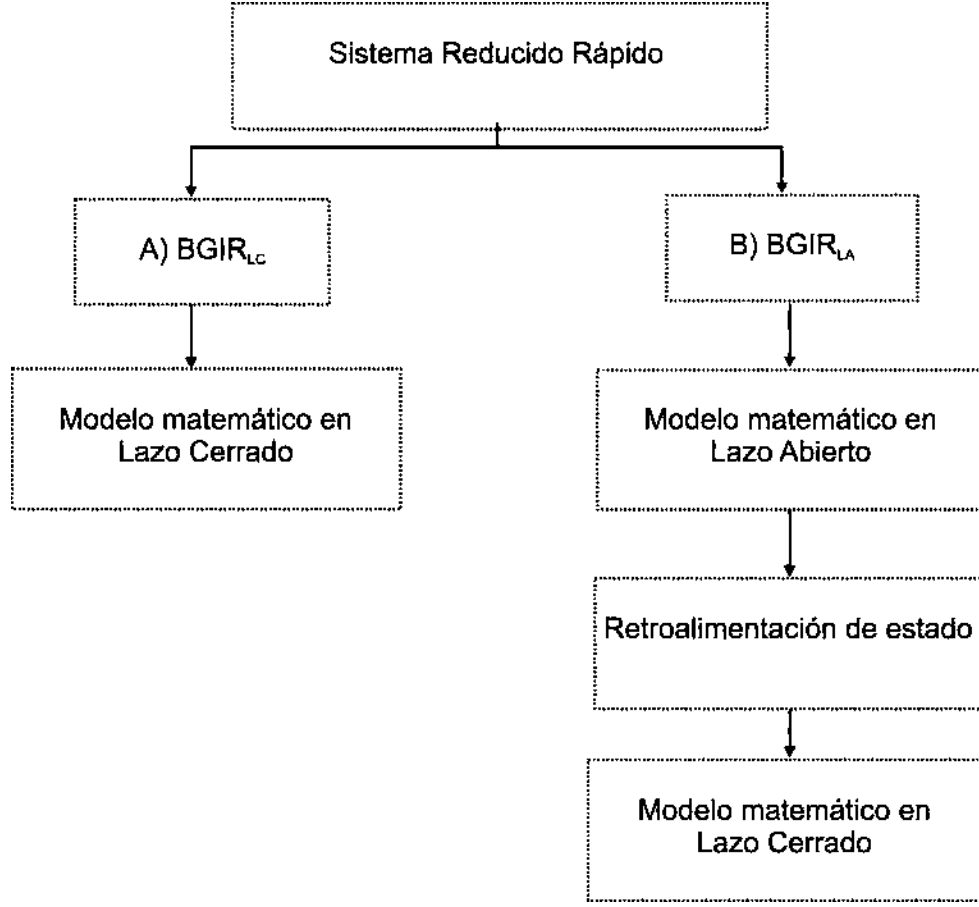


Figura 4.5: Retroalimentación de estado mediante el BGIR

Las relaciones de los campos de almacenamiento y disipación son:

$$z_f^C = F_f x_f^C \quad (4.68)$$

$$D_{out}^f = L^f D_{in}^f \quad (4.69)$$

Las ecuación de que conforman la matriz (4.67) son:

$$\dot{x}_f = S_{11}^C z_f^C + S_{12} D_{out}^f + S_{13} u_f \quad (4.70)$$

$$D_{in}^f = S_{21}^C z_f^C + S_{22} D_{out}^f + S_{23} u_f \quad (4.71)$$

Sustituyendo la ec. (4.69) en la ec. (4.71) se obtiene,

$$D_{in}^f = (I - S_{22}L_f)^{-1} (S_{21}^C z_f^C + S_{23}u_f) \quad (4.72)$$

Y sustituyendo las ecs. (4.69) y (4.72) en la ec. (4.70) tenemos,

$$\dot{x}_f = (S_{11}^C + S_{12}M_fS_{21}^C) z_f^C + (S_{12}^CM_fS_{23}) u_f \quad (4.73)$$

Expresando la ec. (4.73) en variables de estado se tiene,

$$\epsilon \dot{x}_f = A_{22}^C x_f^C + B_2 u_f \quad (4.74)$$

donde

$$A_{22}^C = F_f (S_{11}^C + S_{12}M_fS_{21}^C) F_f \quad (4.75)$$

$$B_2 = F_f (S_{12}^CM_fS_{23})$$

y M_f fue definida en la ec. (3.89).

Es necesario desarrollar el siguiente procedimiento para la implementación de la retroalimentación de estado del sistema reducido rápido, para que posteriormente se puedan aplicar todas las ecuaciones anteriores.

Procedimiento 4.3: Obtención del sistema reducido rápido con retroalimentación en Bond Graph.

1. Obtener el modelo del sistema reducido rápido en Bond Graph descrito en el Procedimiento 3.1.
2. Aplicar retroalimentación de estado a cada uno de los elementos C , I , haciendo uso de las reglas de retroalimentación presentadas en la figura 4.2.
3. Realizar si es necesario el ajuste de causalidad solamente en los elementos R .
4. Obtener el modelo matemático de la retroalimentación de estado del sistema reducido rápido mediante la matriz de estructura unión (4.67) y las ecuaciones (4.74) y (4.75).

B) BGIR_{LA}

Tomando la ec. (3.88) y aplicandole,

$$u = G_2 x_f + v \quad (4.76)$$

entonces tenemos,

$$\dot{x}_f = A_{22}^C x_f + B_2 v \quad (4.77)$$

donde

$$A_{22}^C = A_{22} + B_2 G_2 \quad (4.78)$$

y B_2 ya fue definida en la ec. (3.89).

Haciendo una comparación entre la ec. (4.75) y la ec. (4.78), se puede observar que,

$$A_{22} + B_2 G_2 = (S_{11}^C + S_{12} M_f S_{21}^C) F_f \quad (4.79)$$

4.4.3 Caso de estudio

En esta sección se muestran dos casos de estudio: el Motor de CD y el Circuito RC. En ambos casos, se obtiene el modelo cuasi-estacionario tanto por la metodología del BIG_{LC} y el SPBG_{LC}. Así mismo, se obtiene el modelo reducido rápido en cada caso. Además, se obtienen las ganancias G_0 , y G_2 mediante los sistemas: cuasi-estacionario y reducido rápido, para ser utilizadas en el cálculo de G_1 y así implementar el sistema original con retroalimentación de estado tanto del Motor de CD y el Circuito RC en Bond Graph.

Caso de estudio A: Motor de CD

En la figura 4.6 se presenta el Sistema Físico del Motor de CD, el cual es un Sistema Singularmente Perturbado, con la dinámica lenta y rápida ya conocidas. Donde la dinámica lenta corresponde al elemento J y la dinámica rápida al elemento La [Gonzalez, 2014].

Para que el sistema del Motor de CD siga siendo un sistema singularmente perturbado se eligen los valores de que se muestran en la tabla 4.1,

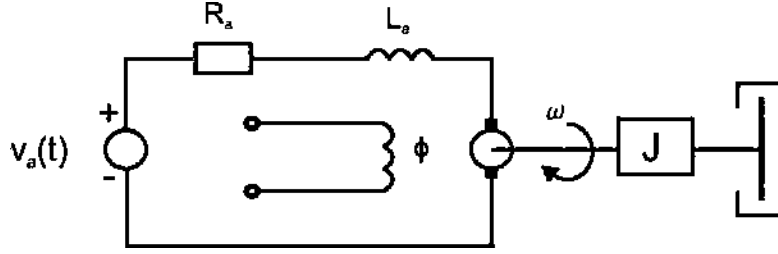


Figura 4.6: Motor de CD

Tabla 4.1: Valores de los Elementos que conforman el Motor de CD

Elementos	Valores
b	$1.2 \text{ } N - m - s$
J	$4 \text{ } N - m - s^2$
La	$0.01 \text{ } H$
n	0.1
Ra	$0.1 \text{ } \Omega$
ϵ	0.01

El modelo cuasi-estacionario del Motor se obtiene de dos manera: BGI_{LC} y $SPBG_{LC}$. Y para obtener el modelo reducido rápido con retrolimentación estado se utiliza el $BGIR_{LC}$.

Obtención de sistema cuasi-estacionario por el BIG_{LC}

Haciendo uso del Procedimiento 4.1, por el cual, se obtiene el modelo del motor en Bond Graph correspondiente al paso 1; el cual se presenta en la figura 4.7, donde se muestra el bond con la causalidad integral asignada a cada uno de los elementos disipativos, y la causalidad correspondiente a los elementos restantes.

Comprobando el paso 2 del Procedimiento 4.1, se realiza el análisis de controlabilidad mediante Bond Graph. Para esto es necesario que se cumplan dos reglas. La primera es que exista una trayectoria causal entre la fuente $Se : Va$ y cada uno de los elementos I en el BGI (figura 4.8). Y la segunda regla es que exista el BGD (Bond Graph Derivativo), tal como se muestra en la figura 4.9 [Dauphin-Tanguy, 2000].

Satisfaciendo lo anterior, se observa que el sistema del Motor de CD es controlable ya

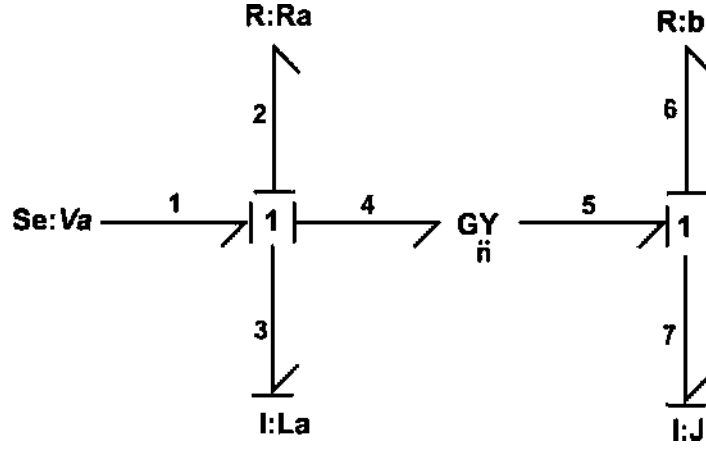


Figura 4.7: Bond Graph del Motor de CD con causalidad integral asignada

que cumple la primera y la segunda regla de controlabilidad en Bond Graph. De esta manera, se comienza con el diseño de la retroalimentación de estado.

Para realizar la separación de la dinámica lenta usando el BGI, se continúa desarrollando los pasos 3.2 y 4 del Procedimiento 4.1, en la figura 4.10 se presenta el modelado en Bond Graph del motor con retroalimentación de estado en la dinámica lenta con causalidad integral asignada.

A continuación se desarrolla el paso 5 correspondiente al Procedimiento 4.1. Las relaciones de los campos de almacenamiento y disipación son:

$$D_{in} = \begin{bmatrix} f_6 \\ f_2 \end{bmatrix}; \quad D_{out} = \begin{bmatrix} e_6 \\ e_2 \end{bmatrix}; \quad u = e_1; \quad L = \begin{bmatrix} b & 0 \\ 0 & Ra \end{bmatrix} \quad (4.80)$$

Los vectores clave para la dinámica lenta,

$$x_1 = p_7; \quad [\dot{x}_1]^C = e_7; \quad [z_1]^C = f_7; \quad F_1 = \frac{1}{J} \quad (4.81)$$

y los vectores clave para la dinámica rápida,

$$x_2 = p_3; \quad \dot{x}_2 = e_3; \quad z_2 = f_3; \quad F_2 = \frac{1}{La} \quad (4.82)$$

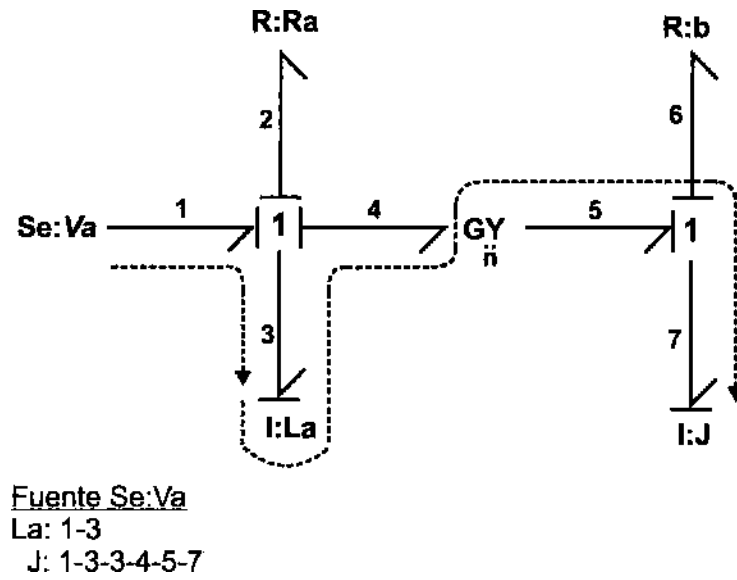


Figura 4.8: Bond Graph Integral con trayectorias causales entre la fuente y cada elemento de almacenamiento del Motor de CD

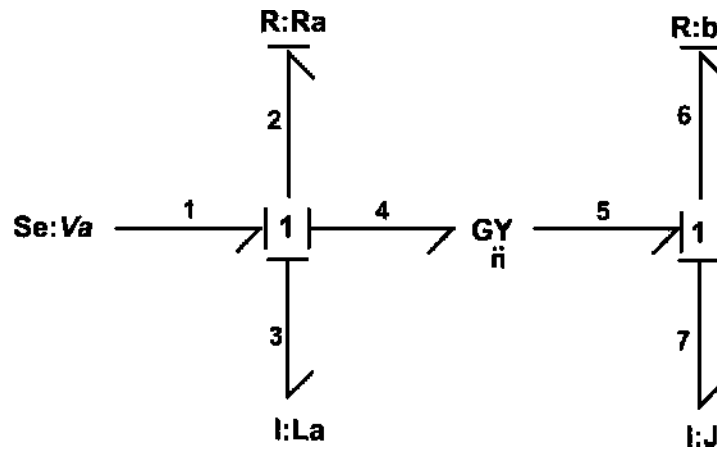


Figura 4.9: Bond Graph Derivativo del Motor de CD

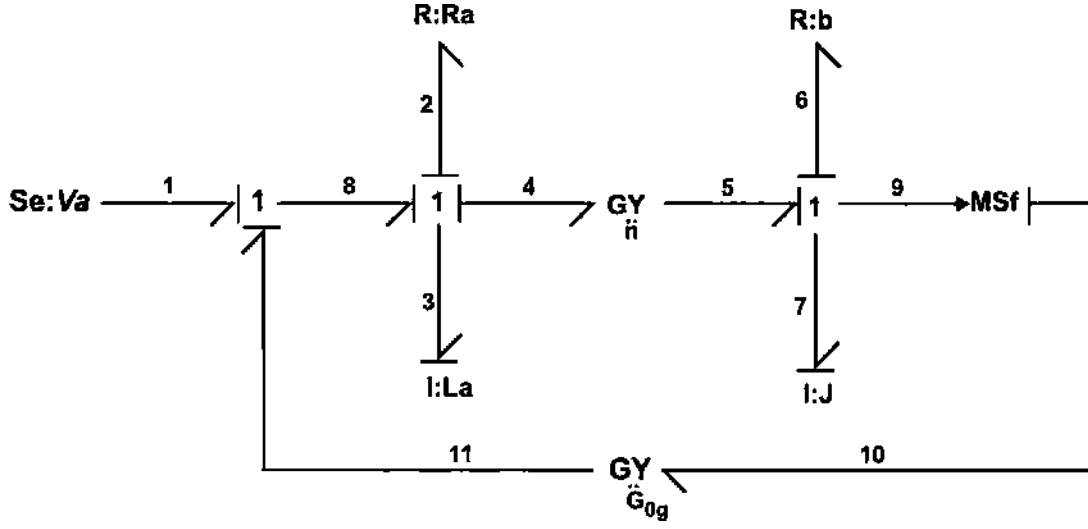


Figura 4.10: Modelado en Bond Graph del Motor CD con causalidad integral asignada con retroalimentación de estado

La matriz de estructura de unión correspondiente a la matriz (4.25), se obtiene,

$$\begin{bmatrix} [e_7]^C \\ \hline e_3 \\ \hline f_6 \\ f_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & n & -1 & 0 & 0 \\ G_{0g} - n & 0 & 0 & -1 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [f_7]^C \\ \hline f_3 \\ \hline e_6 \\ \hline e_2 \\ \hline e_1 \end{bmatrix} \quad (4.83)$$

Sustituyendo el valor de L de la ec. (4.80) y los valores necesarios de la matriz (4.83) en la ec. (2.18), $L = M$ debido a que $S_{22} = 0$. Así que,

$$M = \begin{bmatrix} b & 0 \\ 0 & Ra \end{bmatrix} \quad (4.84)$$

Calculando $[A_{11}]^C$, A_{12} , y B_1 utilizando la ec. (4.34),

$$\begin{aligned} [A_{11}]^C &= -\frac{b}{J} \\ A_{12} &= \frac{n}{La} \end{aligned} \quad (4.85)$$

$$B_1 = 0$$

Ahora, calculando $[A_{21}]^C$, A_{22} , y B_2 utilizando la ec. (4.36)

$$[A_{21}]^C = \frac{G_{0g} - n}{J} \quad (4.86)$$

$$A_{22} = -\frac{Ra}{La}$$

$$B_2 = 1$$

Obteniendo el valor de $[\bar{x}_2]^C$ mediante la ec. (4.38) se le sustituyen los valores obtenidos en la ec. (4.86),

$$[\bar{x}_2]^C = \frac{La(G_{0g} - n)}{JRa}x_1 + \frac{La}{Ra}u \quad (4.87)$$

Sustituyendo las ecs. (4.85) y (4.86) en las ecs. (4.43) y (4.44) para dejarla en términos de x_1 y obtener la ecuación de la dinámica lenta separada,

$$[\dot{x}_1]^C = -\left(\frac{b}{J} + \frac{n^2}{JRa} - \frac{nG_{0g}}{JRa}\right)x_1 + \frac{n}{Ra}u \quad (4.88)$$

donde

$$G_{0g} = JG_0 \quad (4.89)$$

Para calcular la estabilidad de este sistema es necesario tomar en cuenta los valores de las ecs. (4.85) y (4.86) y sustituirlos en la ec. (4.19) que corresponde al lema 4.2. De esta manera se obtiene que,

$$R = -\frac{b}{J} + \frac{nG_{0g}}{RaJ} - \frac{n^2}{RaJ} \quad (4.90)$$

y como R debe ser Hurwitz ($R < 0$)

$$-\frac{b}{J} - \frac{n^2}{JRa} + \frac{nG_{0g}}{JRa} < 0 \quad (4.91)$$

despejando G_{0g}

$$G_{0g} < \frac{bRa}{n} + n \quad (4.92)$$

Despejando G_0 de la ec. (4.89) y sustituyendo en la ec. (4.92) se obtiene,

$$G_0 < \frac{bRa}{Jn} + \frac{n}{J} \quad (4.93)$$

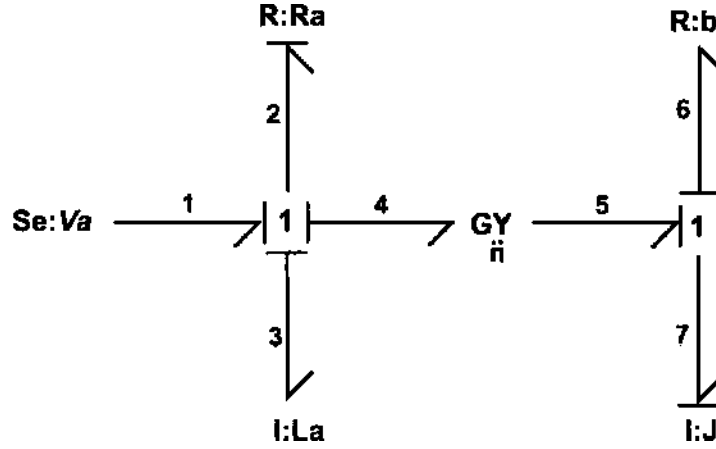


Figura 4.11: SPBG del Motor de CD

Obtención de sistema cuasi-estacionario por el SPBG_{LC}

Para obtener el SPBG_{LC} del Motor de CD visto en la figura 4.6, se hace uso del Procedimiento 4.2. Los pasos 1, 2 y 3 se pueden visualizar en el figura 4.11, que muestra el bond del Motor de CD con causalidad derivativa asignada.

En la figura 4.12 se presenta el modelado en Bond Graph del motor de CD con retroalimentación de estado en el estado de la dinámica lenta, el cual se obtuvo mediante el paso 4 y 5 del procedimiento 4.2.

A continuación se desarrolla el paso 6 correspondiente al Procedimiento 4.2. Las relaciones de los campos de almacenamiento y disipación son:

$$D_{in}^h = \begin{bmatrix} e_3 \\ f_7 \end{bmatrix}; \quad D_{out}^h = \begin{bmatrix} f_3 \\ e_7 \end{bmatrix}; \quad u = e_1; \quad L^h = \begin{bmatrix} \frac{1}{Ra} & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \quad (4.94)$$

Los vectores clave asignados para la dinámica lenta son:

$$x_1 = p_8; \quad [\dot{x}_1]^C = e_8; \quad [z_1]^C = f_8; \quad F_1 = \frac{1}{J} \quad (4.95)$$

y los vectores clave asignados para la dinámica rápida son:

$$x_2 = p_4; \quad \dot{x}_2 = e_4; \quad z_2 = f_4; \quad F_2 = \frac{1}{La} \quad (4.96)$$

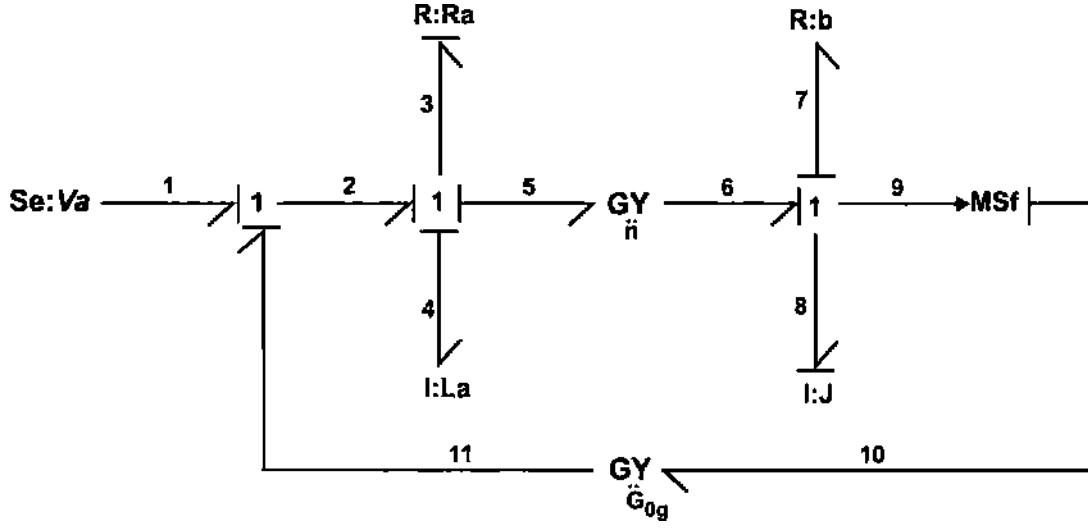


Figura 4.12: SPBG del Motor de CD con retroalimentación de estado

La matriz de estructura unión correspondiente a la matriz (4.46) de la figura 4.12 es,

$$\begin{bmatrix} [e_8]^C \\ f_4 \\ \hline e_3 \\ f_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \parallel & n & -1 & \parallel & 0 \\ 0 & 0 & \parallel & 1 & 0 & \parallel & 0 \\ \hline G_{0g} - n & -1 & \parallel & 0 & 0 & \parallel & 1 \\ 1 & 0 & \parallel & 0 & 0 & \parallel & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [f_8]^C \\ e_4 \\ \hline f_3 \\ e_7 \\ \hline e_1 \end{bmatrix} \quad (4.97)$$

Para calcular Q es necesario sustituir el valor de L^h de la ec. (4.94) y los valores necesarios de la matriz (4.97) en la ec. (4.55), obteniendo

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{Ra} & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \quad (4.98)$$

Calculando $\begin{bmatrix} \tilde{A}_{21} \end{bmatrix}^C$ y $\tilde{B}_2$ mediante la ec. (4.62), se tiene que

$$\begin{bmatrix} \tilde{A}_{21} \end{bmatrix}^C = \frac{La(G_{og} - n)}{Ra} \quad (4.99)$$

$$\tilde{B}_2 = \frac{La}{Ra}$$

Para obtener la ecuación $[\bar{x}_2]^C$, se sustituye la ec. (4.99) en la ec. (4.61)

$$[\bar{x}_2]^C = \frac{La(G_{0g} - n)}{Ra}x_1 + \frac{La}{Ra}u \quad (4.100)$$

Calculando $[\tilde{A}_0]^C$ y $\tilde{B}_0$ mediante la ec. (4.58) se tiene:

$$[\tilde{A}_0]^C = \frac{nG_{0g}}{JRa} - \left(\frac{n^2}{JRa} + \frac{b}{J} \right) \quad (4.101)$$

$$\tilde{B}_0 = \frac{n}{Ra}$$

y sustituyendo los valores de las ecs. (4.95) y (4.101) en la ec. (4.57) se tiene que:

$$[\dot{x}_1]^C = \left[\frac{nk_{0g}}{JRa} - \left(\frac{b}{J} + \frac{n^2}{JRa} \right) \right] x_1 + \frac{n}{Ra}u \quad (4.102)$$

donde

$$G_{0g} = G_0J \quad (4.103)$$

Usando el Teorema 4.3, la matriz $[A_0]^C$ debe ser Hurwitz, entonces

$$-\frac{b}{J} - \frac{n^2}{JRa} + \frac{nG_{0g}}{JRa} < 0 \quad (4.104)$$

despejando k_{0g} de la ec. (4.104)

$$G_{0g} < \frac{bRa}{n} + n \quad (4.105)$$

y sustituyendo G_0 de la ec. (4.103) en la ec. (4.105) y suponiendo que $(J, Ra) > 0$, se obtiene que

$$G_0 < \frac{bRa}{Jn} + \frac{n}{J} \quad (4.106)$$

Obtención del modelo reducido rápido por el BGIR_{LC}

De la figura 4.6 y empleando el Procedimiento 4.3, se respeta el paso 1 donde se obtiene el modelo del sistema reducido rápido del Motor de CD en Bond Graph, el cuál se muestra en la figura 4.13.

Aplicando los pasos 2 y 3, se le coloca retroalimentación de estado a cada uno de los elementos C , I , que en este caso sólo hay un elemento I (ver figura 4.14).

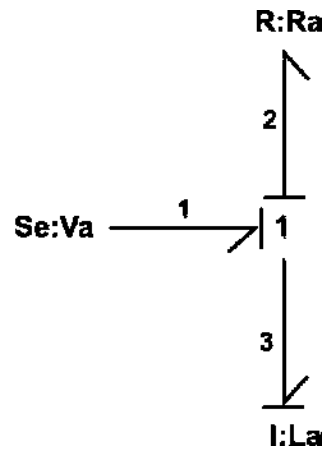


Figura 4.13: Modelado de la dinámica rápida del Motor de CD

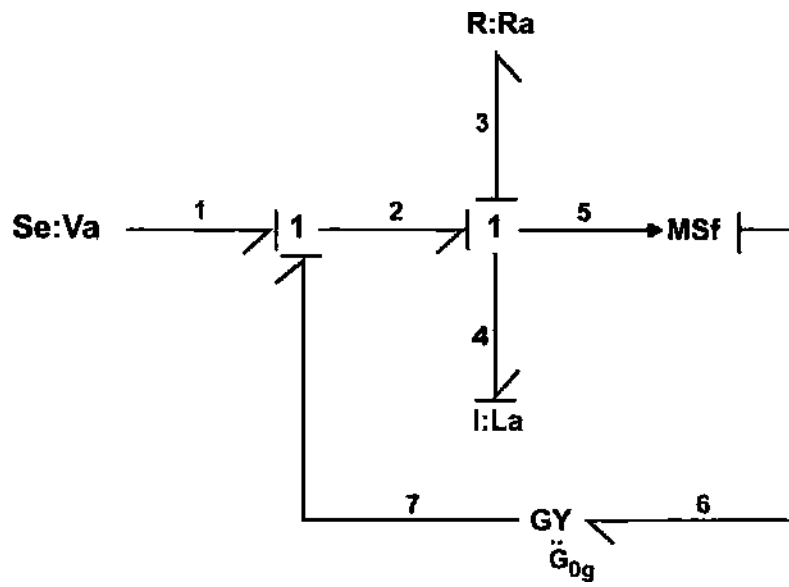


Figura 4.14: Modelado de la dinámica rápida del Motor de CD con retroalimentación de estado

Para obtener el modelo matemático de la retroalimentación de estado del sistema reducido rápido, los datos necesarios son obtenidos de la figura 4.14 y para esto es necesario seguir el paso 4 del Procedimiento 4.3.

Las relaciones de los campos de almacenamiento y disipación son:

$$D_{in}^f = f_3; \quad D_{out}^f = e_3; \quad u_f = e_1; \quad L^f = Ra \quad (4.107)$$

Los vectores clave son:

$$x_f = p_4; \quad \dot{x}_f^C = e_4; \quad z_f^C = f_4; \quad F_f = \frac{1}{La} \quad (4.108)$$

La matriz de estructura de unión que define al modelo reducido de la dinámica rápida en bond graph es,

$$\begin{bmatrix} [e_4]_f^C \\ [f_3]_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{2g} & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [f_4]_f^C \\ [e_3]_f \\ [e_1]_f \end{bmatrix} \quad (4.109)$$

Usando la ec. (3.89), se calcula M_f

$$M_f = Ra \quad (4.110)$$

Calculando A_{22}^C y B_2 mediante la ec. (4.75), se tiene,

$$A_{22}^C = \frac{G_{2g} - Ra}{La} \quad (4.111)$$

$$B_2 = 1$$

Para obtener la ecuación de estado del sistema rápido con retroalimentación de estado se sustituye la ec. (4.111) en la ec. (4.74)

$$La\dot{x} = (G_{2g} - Ra) x + La u \quad (4.112)$$

donde

$$G_{2g} = LaG_2 \quad (4.113)$$

Si la matriz A_{22}^C es Hurwitz entonces,

$$\frac{G_{2g} - Ra}{La} < 0 \quad (4.114)$$

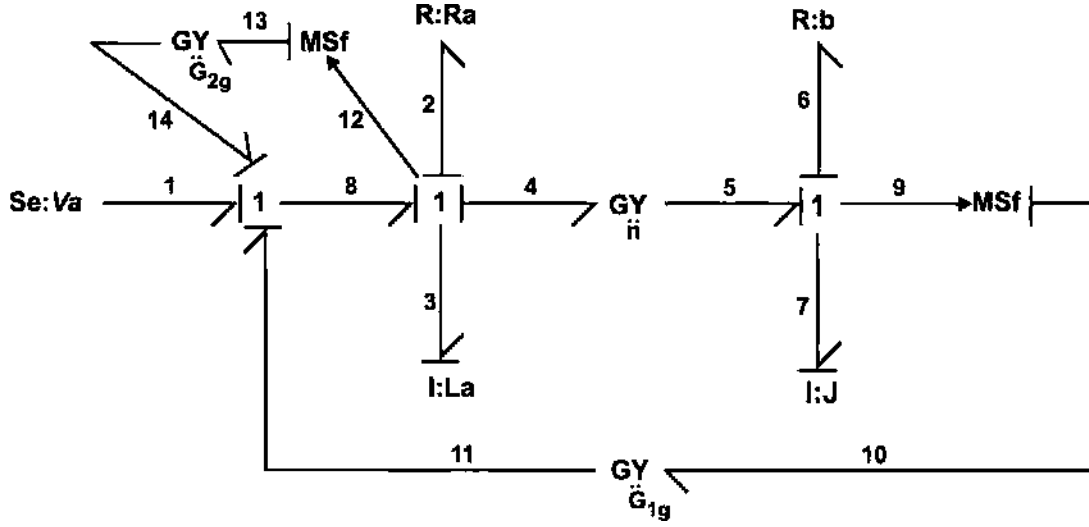


Figura 4.15: Modelado del Sistema original del Motor de CD con Retroalimentación de estado en Bond Graph

Sustituyendo k_{2g} de la ec. (4.113) en la ec. (4.114) y suponiendo que $La > 0$ entonces

$$G_2 < \frac{Ra}{La} \quad (4.115)$$

Finalmente se obtiene la retroalimentación de estado del sistema original en Bond Graph del Motor de CD, el cual se presenta en la figura 4.15. El sistema original se obtiene aplicando el paso 3.2 del procedimiento 4.1, donde se aplica retroalimentación de estado a la dinámica lenta y dinámica rápida.

Para calcular la k_{1g} se hace uso de la ec. (4.14) y recordar que $G_1 = k_{1g}/J$, entonces

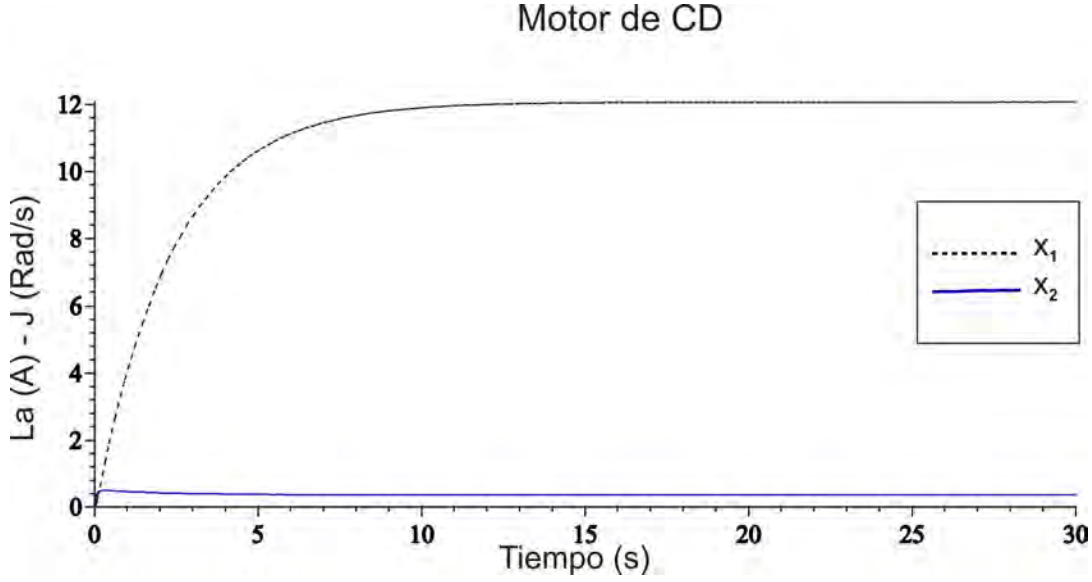
$$G_1 = \left(1 - G_2 \frac{La}{Ra}\right) G_0 + \frac{G_2 Lan}{RaJ} \quad (4.116)$$

La ganancia G_0 , se obtienen sustituyendo los valores de la tabla 4.1 en las ec (4.106),

$$G_0 < 0.325 \quad (4.117)$$

La ganancia G_2 se obtiene sustituyendo los valores de la tabla 4.1 en la ec. (4.115)

$$G_2 < 10 \quad (4.118)$$


 Figura 4.16: Dinámica lenta (x_1) y dinámica rápida (x_2) del Motor de CD

La ganancia G_1 se obtiene utilizando la ec. (4.115) y sustituyendo los valores de la tabla 4.1 y proponiendo $G_0 = -0.1$ y $G_2 = -9.5$, así que:

$$G_1 = -0.21875 \quad (4.119)$$

Utilizando los datos anteriores, en la figura 4.16, se muestra la simulación de la dinámica lenta (x_1) y la dinámica rápida (x_2) del sistema original del Motor de CD en la cual se puede observar que con las ganancias establecidas el sistema original es estable.

Caso de estudio B: Circuito RC

En la figura 4.17 se presenta el Sistema Físico de un Circuito RC, el cual, es un sistema singularmente perturbado con su dinámica rápida y dinámica lenta ya conocidos. La dinámica lenta es el elemento C_1 y la dinámica rápida la conforman C_2 y C_3

Para que el sistema del Circuito RC siga siendo un sistema singularmente perturbado se eligen los valores que se muestran en la tabla 4.2.

El modelo cuasi-estacionario del Circuito RC se obtiene de dos manera: BGI_{LC} y

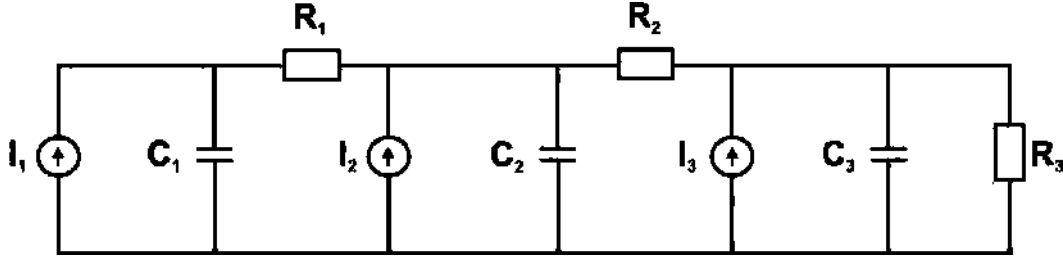


Figura 4.17: Circuito RC

Tabla 4.2: Valores de los Elementos que conforman el Circuito RC

Elementos	Valores
C_1	$1 F$
C_2	$0.001 F$
C_3	$0.001 F$
R_1	5Ω
R_2	1Ω
R_3	0.5Ω
ϵ_1	0.001
ϵ_2	0.001

$SPBG_{LC}$. Y para obtener el modelo reducido rápido con retroalimentación estado se utiliza el $BGIR_{LC}$.

Obtención de sistema cuasi-estacionario por el BIG_{LC}

En la figura 4.18 se presenta el modelado en Bond Graph del circuito RC, el cual se obtuvo mediante el paso 1 del Procedimiento 4.1.

Siguiendo el paso 2 del procedimiento 4.1, se hace el análisis de controlabilidad del Circuito RC en Bond Graph, tal como se muestra en la figura 4.19, donde se puede observar que existen trayectorias causales entre cada una de la fuentes y cada uno de los elementos de almacenamiento C . En la figura 4.20, se muestra que existe el BGD del Circuito RC. De esta manera, al cumplirse las reglas anteriores, se comienza con el diseño de la retroalimentación de estado.

Continuando con los pasos 3.1 y 4 del Procedimiento 4.1 para obtener la dinámica lenta

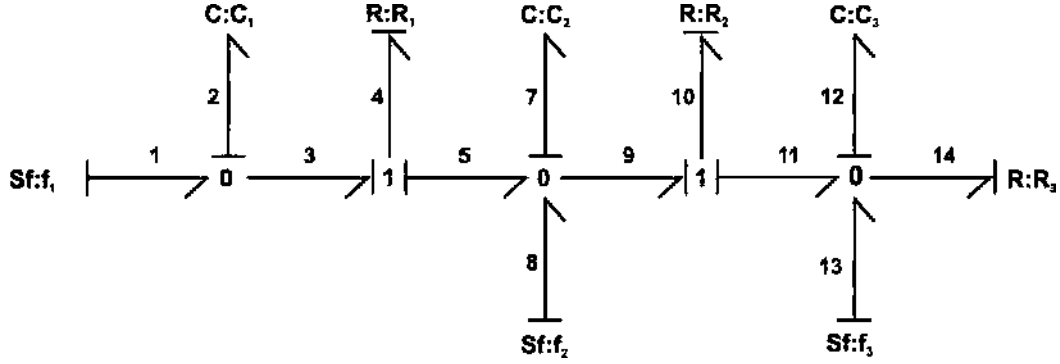


Figura 4.18: Modelado en Bond Graph del Circuito RC

por medio del BGI , se presenta el modelado en Bond Graph del circuito RC con retroalimentación de estado en la figura 4.21, la cual muestra la retroalimentación de estado en la dinámica lenta con causalidad integral asignada.

A continuación se desarrolla el paso 5 correspondiente al Procedimiento 4.1. Las relaciones de los campos de almacenamiento y disipación son:

$$D_{in} = \begin{bmatrix} e_4 \\ e_{10} \\ e_{14} \end{bmatrix}; \quad D_{out} = \begin{bmatrix} f_4 \\ f_{10} \\ f_{14} \end{bmatrix}; \quad u = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_8 \\ f_{13} \end{bmatrix}; \quad L = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{R_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{R_3} \end{bmatrix} \quad (4.120)$$

Los vectores clave correspondientes para la dinámica lenta son:

$$x_1 = q_2; \quad [\dot{x}_1]^C = f_2; \quad [z_1]^C = e_2; \quad F_1 = \frac{1}{C_1} \quad (4.121)$$

y los vectores clave correspondientes para la dinámica rápida son:

$$x_2 = \begin{bmatrix} q_7 \\ q_{12} \end{bmatrix}; \quad \dot{x}_2 = \begin{bmatrix} f_7 \\ f_{12} \end{bmatrix}; \quad z_2 = \begin{bmatrix} e_7 \\ e_{12} \end{bmatrix}; \quad F_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{C_2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{C_3} \end{bmatrix} \quad (4.122)$$

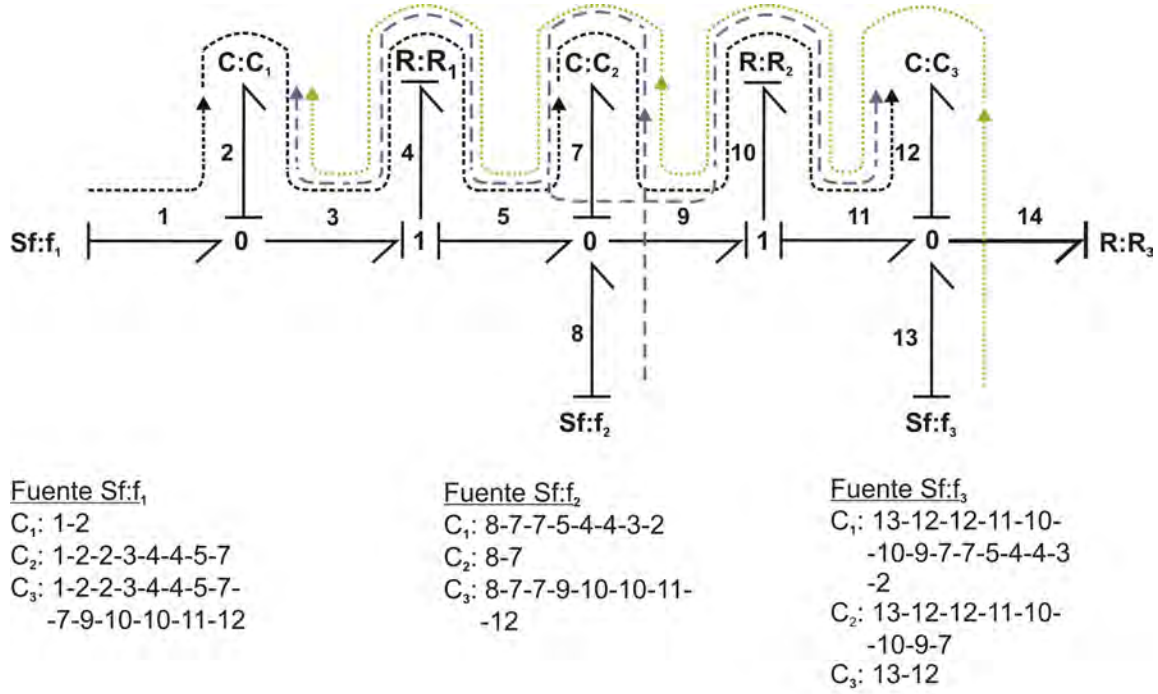


Figura 4.19: Bond Graph Integral con trayectorias causales entre cada una de las fuentes y cada elemento de almacenamiento del Circuito de RC

Usando la matriz de estructura de unión (4.25) se obtiene,

$$\begin{bmatrix} [f_2]^C \\ f_7 \\ f_{12} \\ e_4 \\ e_{10} \\ e_{14} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{0g} & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [e_2]^C \\ e_7 \\ e_{12} \\ f_4 \\ f_{10} \\ f_{14} \\ f_1 \\ f_8 \\ f_{13} \end{bmatrix} \quad (4.123)$$

Sustituyendo el valor de L de la ec. (4.120) y los valores necesarios de la matriz (4.123)

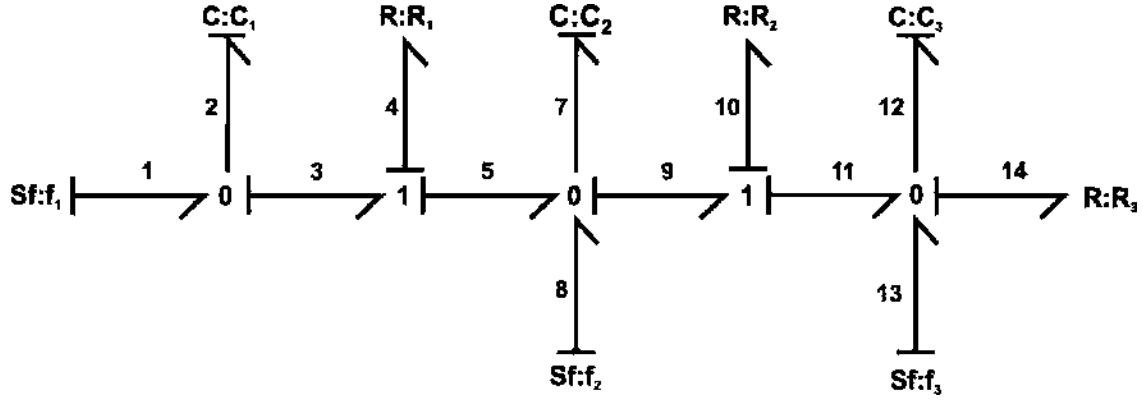


Figura 4.20: Bond Graph Derivativo del Circuito RC

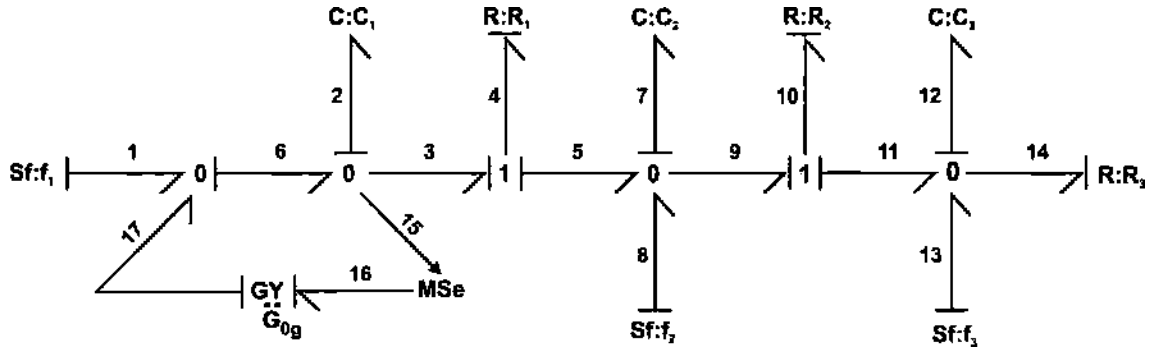


Figura 4.21: Modelado en Bond Graph del circuito RC con causalidad integral asignada y retroalimentación de estado

en la ec. (2.18), $L = M$ debido a que $S_{22} = 0$. Así que,

$$M = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{R_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{R_3} \end{bmatrix} \quad (4.124)$$

Calculando $[A_{11}]^C$, A_{12} , y B_1 utilizando la ec. (4.34), se obtiene

$$[A_{11}]^C = \left(G_{og} - \frac{1}{R_1} \right) \frac{1}{C_1} \quad (4.125)$$

$$A_{12} = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1 C_2} & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ahora, calculando $[A_{21}]^C$, A_{22} , y B_2 utilizando la ec. (4.36),

$$[A_{21}]^C = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1 C_1} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.126)$$

$$A_{22} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{C_2} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) & \frac{1}{R_2 C_3} \\ \frac{1}{R_2 C_2} & -\frac{1}{C_3} \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) \end{bmatrix}$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Obteniendo el valor de $[\bar{x}_2]^C$ mediante la ec. (4.38), se le sustituyen los valores obtenidos en la ec. (4.126),

$$[\bar{x}_2]^C = \begin{bmatrix} \frac{(R_2+R_3)C_2}{(R_1+R_2+R_3)C_1} \\ \frac{R_3 C_3}{R_1+R_2+R_3} \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} 0 & \frac{R_1 C_2 (R_2+R_3)}{R_1+R_2+R_3} & \frac{R_1 R_3 C_2}{R_1+R_2+R_3} \\ 0 & \frac{R_1 R_3 C_2}{R_1+R_2+R_3} & \frac{R_3 C_3 (R_1+R_2)}{R_1+R_2+R_3} \end{bmatrix} u \quad (4.127)$$

Sustituyendo las ecs. (4.125) y (4.126) en las ecs. (4.43) y (4.44) para dejarla en términos de x_1 y obtener la ecuación de la dinámica lenta separada,

$$[\dot{x}_1]^C = \left(\frac{G_{0g}}{C_1} - \frac{1}{C_1 (R_1 + R_2 + R_3)} \right) x_1 + \begin{bmatrix} 1 & \frac{(R_2+R_3)}{R_1+R_2+R_3} & \frac{R_3}{R_1+R_2+R_3} \end{bmatrix} u \quad (4.128)$$

donde

$$G_{0g} = C_1 G_0 \quad (4.129)$$

Para calcular la estabilidad de este sistema es necesario tomar los valores de las ecs. (4.125) y (4.126) y sustituirlos en la ec. (4.19) que corresponde al lema 4.2. De esta manera se obtiene que,

$$R = \frac{G_{0g} (R_1 + R_2 + R_3) - 1}{C (R_1 + R_2 + R_3)} \quad (4.130)$$

Así que R debe ser Hurwitz ($R < 0$)

$$\frac{G_{0g} (R_1 + R_2 + R_3) - 1}{C_1 (R_1 + R_2 + R_3)} < 0 \quad (4.131)$$

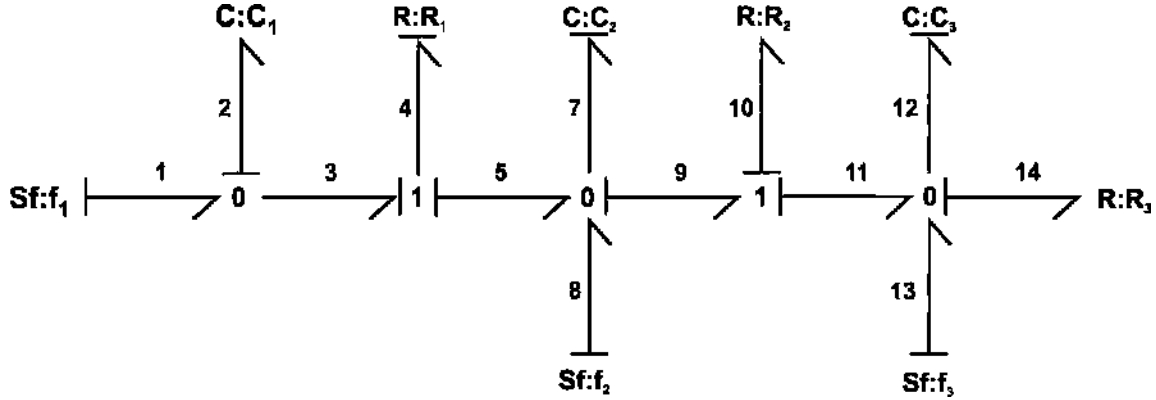


Figura 4.22: SPBG del Circuito RC

Despejando G_{0g} siempre y cuando se considere que $(C_1, R_1, R_2, R_3) > 0$ entonces,

$$G_{0g} < \frac{1}{(R_1 + R_2 + R_3)} \quad (4.132)$$

Finalmente se despeja G_0 de la ec. (4.129) y se sustituye en la ec. (4.132), se obtiene que

$$G_0 < \frac{1}{(R_1 + R_2 + R_3) C_1} \quad (4.133)$$

Obtención de sistema cuasi-estacionario por el SPBG_{LC}

Para conseguir el SPBG del Circuito RC visto en la figura 4.17, se hace uso del Procedimiento 4.2. Los pasos 1, 2 y 3 se pueden visualizar en el figura 4.22 , que muestra el bond del Circuito RC con causalidad derivativa asignada.

En la figura 4.23 se presenta el modelado en Bond Graph del Circuito RC con retroalimentación de estado.

Siguiendo los pasos del Procedimiento 4.2, se desarrolla el paso 6, el cual, los datos siguientes son obtenidos del bond graph visto en la figura 4.23.

Las relaciones de los campos de almacenamiento y disipación son:

$$D_{in}^h = \begin{bmatrix} e_4 \\ f_{10} \\ f_{14} \end{bmatrix}; \quad D_{out}^h = \begin{bmatrix} f_4 \\ e_{10} \\ e_{14} \end{bmatrix}; \quad u = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_8 \\ f_{13} \end{bmatrix}; \quad L^h = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} & 0 & 0 \\ 0 & R_2 & 0 \\ 0 & 0 & R_3 \end{bmatrix} \quad (4.134)$$

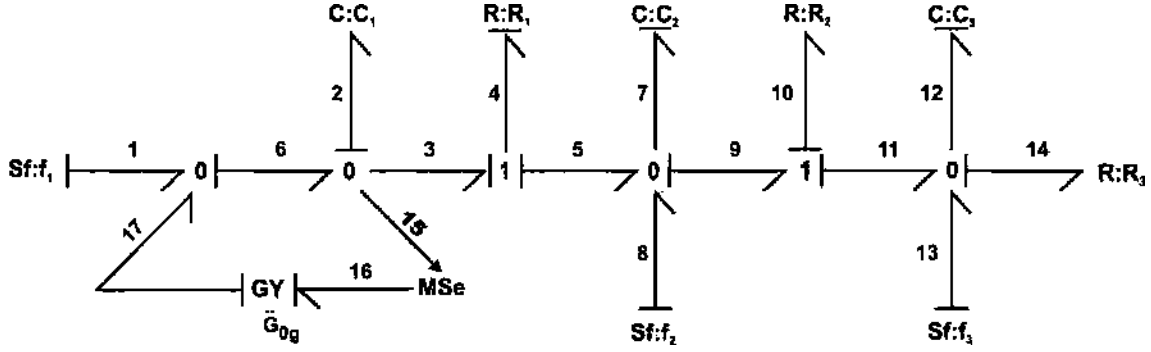


Figura 4.23: SPBG del Circuito de RC con retroalimentación de estado

Los vectores clave para la dinámica lenta son:

$$x_1 = q_2; \quad [\dot{x}_1]^C = f_2; \quad z_1 = e_2; \quad F_1 = \frac{1}{C_1} \quad (4.135)$$

y los vectores clave para la dinámica rápida,

$$x_2 = \begin{bmatrix} q_7 \\ q_{12} \end{bmatrix}; \quad \dot{x}_2 = \begin{bmatrix} f_7 \\ f_{12} \end{bmatrix}; \quad z_2 = \begin{bmatrix} e_7 \\ e_{12} \end{bmatrix}; \quad F_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{C_2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{C_3} \end{bmatrix} \quad (4.136)$$

Usando la estructura presentada en la matriz (4.46), la matriz de estructura unión para este sistema es,

$$\begin{bmatrix} [f_2]^C \\ e_7 \\ e_{12} \\ e_4 \\ f_{10} \\ f_{14} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{0g} & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [e_2]^C \\ f_7 \\ f_{12} \\ f_4 \\ e_{10} \\ e_{14} \\ f_1 \\ f_8 \\ f_{13} \end{bmatrix} \quad (4.137)$$

Para calcular Q es necesario sustituir el valor de L^h de la ec. (4.134) y los valores

necesarios de la matriz (4.137) en la ec. (4.55), obteniendo

$$Q = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} 1 & -R_2 & -R_3 \\ R_2 & (R_1 + R_3) R_2 & -R_2 R_3 \\ R_3 & -R_2 R_3 & (R_1 + R_2) R_3 \end{bmatrix} \quad (4.138)$$

donde

$$\Delta = R_1 + R_2 + R_3 \quad (4.139)$$

Calculando $\begin{bmatrix} \tilde{A}_{21} \end{bmatrix}^C$ y $\tilde{B}_2$ mediante la ec. (4.62), se tiene que

$$\begin{bmatrix} \tilde{A}_{21} \end{bmatrix}^C = \begin{bmatrix} \frac{(R_2+R_3)C_2}{(R_1+R_2+R_3)C_1} \\ \frac{R_3 C_3}{(R_1+R_2+R_3)C_1} \end{bmatrix} \quad (4.140)$$

$$\tilde{B}_2 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{C_2 R_1 (R_2+R_3)}{R_1+R_2+R_3} & \frac{C_2 R_1 R_3}{R_1+R_2+R_3} \\ 0 & \frac{C_3 R_1 R_3}{R_1+R_2+R_3} & \frac{C_3 R_3 (R_1+R_2)}{R_1+R_2+R_3} \end{bmatrix}$$

Para obtener la ecuación $\begin{bmatrix} \bar{x}_2 \end{bmatrix}^C$, se sustituye la ec. (4.140) en la ec. (4.61),

$$\begin{bmatrix} \bar{x}_2 \end{bmatrix}^C = \begin{bmatrix} \frac{(R_2+R_3)C_2}{(R_1+R_2+R_3)C_1} \\ \frac{R_3 C_3}{(R_1+R_2+R_3)C_1} \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} 0 & \frac{C_2 R_1 (R_2+R_3)}{R_1+R_2+R_3} & \frac{C_2 R_1 R_3}{R_1+R_2+R_3} \\ 0 & \frac{C_3 R_1 R_3}{R_1+R_2+R_3} & \frac{C_3 R_3 (R_1+R_2)}{R_1+R_2+R_3} \end{bmatrix} u \quad (4.141)$$

Calculando $\begin{bmatrix} \tilde{A}_0 \end{bmatrix}^C$ y $\tilde{B}_0$ mediante la ec. (4.58) se tiene:

$$\begin{bmatrix} \tilde{A}_0 \end{bmatrix}^C = \frac{1}{C_1 G_{0g}} - \frac{1}{(R_1 + R_2 + R_3) C_1} \quad (4.142)$$

$$\tilde{B}_0 = \begin{bmatrix} 1 & \frac{R_2+R_3}{R_1+R_2+R_3} & \frac{R_3}{R_1+R_2+R_3} \end{bmatrix}$$

Sustituyendo las ecs. (4.135) y (4.142) en la ec. (4.57) se tiene que:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \end{bmatrix}^C = \left(\frac{G_{0g}}{C_1} - \frac{1}{(R_1 + R_2 + R_3) C_1} \right) x_1 + \begin{bmatrix} 1 & \frac{R_2+R_3}{R_1+R_2+R_3} & \frac{R_3}{R_1+R_2+R_3} \end{bmatrix} u \quad (4.143)$$

donde

$$G_{0g} = \frac{1}{G_0 C_1} \quad (4.144)$$

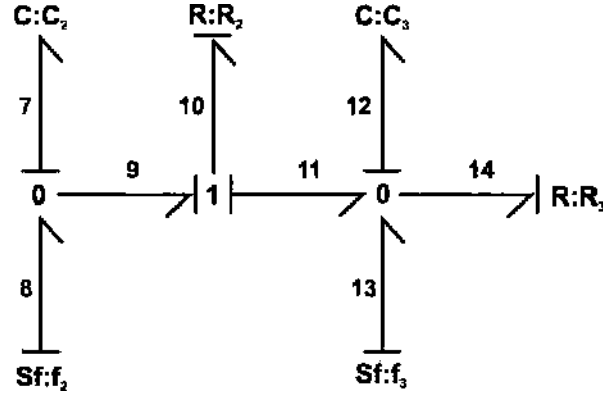


Figura 4.24: Modelado de la dinámica rápida del circuito RC

así que la matriz A_0 debe ser Hurwitz

$$\frac{G_{0g}}{C_1} - \frac{1}{(R_1 + R_2 + R_3)C_1} < 0 \quad (4.145)$$

despejando k_{0g} de la ec. (4.145)

$$G_{0g} < \frac{1}{(R_1 + R_2 + R_3)} \quad (4.146)$$

y sustituyendo G_0 de la ec. (4.144) en la ec. (4.146) y suponiendo que $(C_1, R_1, R_2, R_3) > 0$, se obtiene

$$G_0 < \frac{1}{(R_1 + R_2 + R_3)C_1} \quad (4.147)$$

Obtención de sistema reducido rápido por el BGIR_{LC}

De la figura 4.21 y empleando el Procedimiento 4.3, se considera el paso 1 donde se obtiene el modelo del sistema reducido rápido del Circuito RC en Bond Graph, el cuál se muestra en la figura 4.24.

Aplicando los pasos 2 y 3, se le coloca retroalimentación de estado a cada uno de los elementos C, I que conforman el bond graph de este sistema (ver figura 4.25).

Para obtener el modelo matemático de la retroalimentación de estado del sistema reducido rápido del Circuito RC, los datos necesarios son obtenidos de la figura 4.25 y para esto es necesario seguir el paso 4 del Procedimiento 4.3.

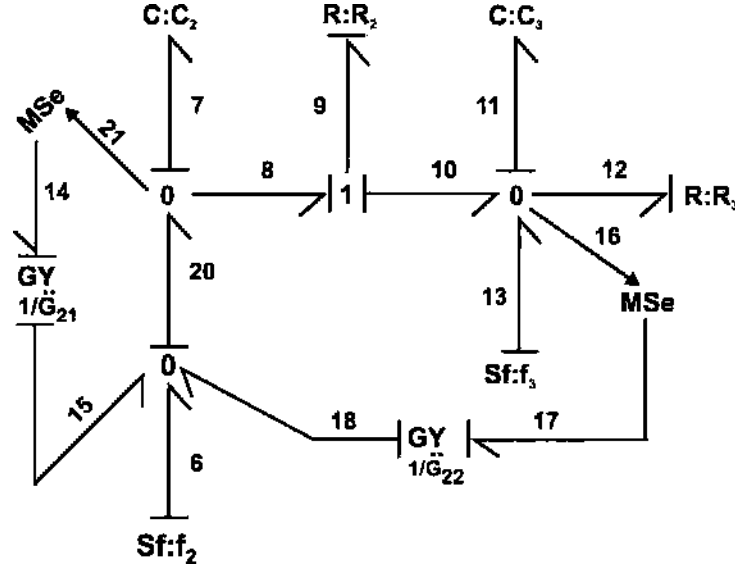


Figura 4.25: Modelado de la dinámica rápida del Circuito RC con retroalimentación de estado

Las relaciones de los campos de almacenamiento y disipación son:

$$D_{in}^f = \begin{bmatrix} e_9 \\ e_{12} \end{bmatrix}; \quad D_{out}^f = \begin{bmatrix} f_9 \\ f_{12} \end{bmatrix}; \quad u_f = \begin{bmatrix} f_6 \\ f_{13} \end{bmatrix}; \quad L^f = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{R_3} \end{bmatrix} \quad (4.148)$$

Los vectores clave son:

$$x_f = \begin{bmatrix} q_7 \\ q_{11} \end{bmatrix}; \quad \dot{x}_f^C = \begin{bmatrix} f_7 \\ f_{11} \end{bmatrix}; \quad z_f^C = \begin{bmatrix} e_7 \\ e_{11} \end{bmatrix}; \quad F_f = \begin{bmatrix} \frac{1}{C_2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{C_3} \end{bmatrix} \quad (4.149)$$

La matriz de estructura unión que define al modelo reducido de la dinámica rápida es,

$$\begin{bmatrix} [f_7]_f^C \\ [f_{11}]_f^C \\ [e_9]_f \\ [e_{12}]_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_2^{21} & G_2^{22} & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [e_7]_f^C \\ [e_{11}]_f^C \\ [f_9]_f \\ [f_{12}]_f \\ [f_6]_f \\ [f_{13}]_f \end{bmatrix} \quad (4.150)$$

Usando la ec. (3.89), se calcula M_f

$$M_f = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{R_3} \end{bmatrix} \quad (4.151)$$

Calculando A_{22}^C y B_2 mediante la ec. (4.75), se tiene que

$$A_{22}^C = \begin{bmatrix} \left(G_2^{21} - \frac{1}{R_2}\right) \frac{1}{C_2} & \left(G_2^{22} - \frac{1}{R_2}\right) \frac{1}{C_2} \\ \frac{1}{R_2 C_2} & -\frac{(R_2+R_3)}{R_2 R_3 C_3} \end{bmatrix} \quad (4.152)$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Para obtener la ecuación de estado del sistema rápido con retroalimentación de estado se sustituye la ec. (4.152) en la ec. (4.74)

$$\begin{bmatrix} C_2 & 0 \\ 0 & C_3 \end{bmatrix} \dot{x} = \begin{bmatrix} G_2^{21} - \frac{1}{R_2} & G_2^{22} - \frac{1}{R_2} \\ \frac{C_3}{R_2 C_2} & -\frac{R_2+R_3}{R_2 R_3} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} C_2 & 0 \\ 0 & C_3 \end{bmatrix} u_f \quad (4.153)$$

Si la matriz A_{22}^C es Hurwitz entonces,

$$\det(I\lambda - A_{22}^C) < 0 \quad (4.154)$$

Sustituyendo el valor de A_{22}^C en la ec. (4.154), se obtiene,

$$\det \begin{bmatrix} \lambda - G_2^{21} + \frac{1}{R_2} & -G_2^{22} + \frac{1}{R_2} \\ -\frac{C_3}{R_2 C_2} & \lambda + \frac{R_2+R_3}{R_2 R_3} \end{bmatrix} < 0 \quad (4.155)$$

Resolviendo la ec. (4.155), se tiene que

$$R_3 R_2 \lambda^2 - (G_2^{21} C_2 R_2 R_3 - R_2 - 2R_2) \lambda - (G_2^{21} (C_2 R_2 + R_3 C_2) + G_2^{22} R_3 C_3 - 1) < 0 \quad (4.156)$$

donde

$$G_2 = G_{2g} F_2 \quad (4.157)$$

entonces

$$\begin{bmatrix} G_2^{21} \\ G_2^{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{G_{2g}^{21}}{C_2} \\ \frac{G_{2g}^{22}}{C_3} \end{bmatrix} \quad (4.158)$$

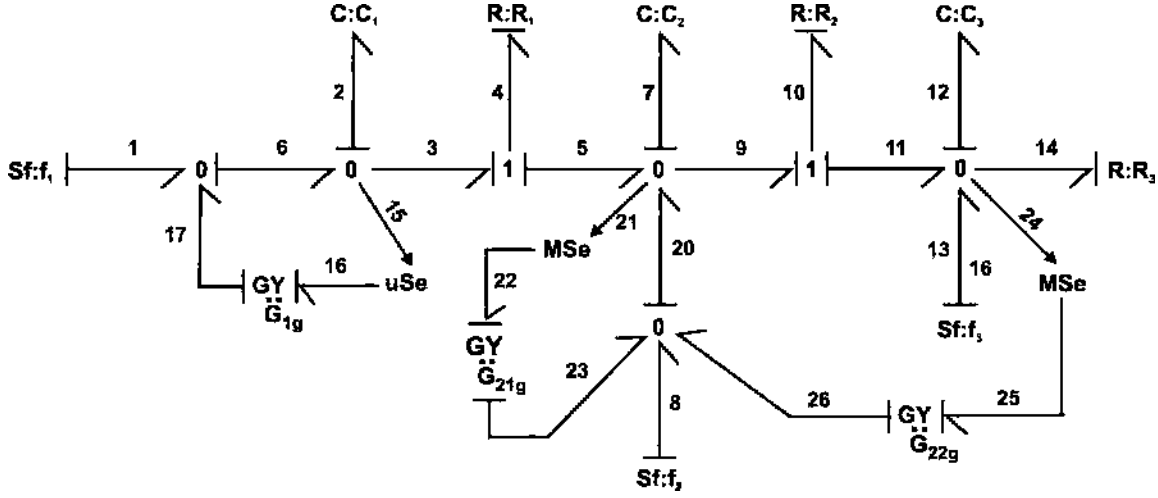


Figura 4.26: Retroalimentación de estado del sistema original del Circuito RC en Bond Graph

Finalmente se obtiene la retroalimentación de estado del sistema original en Bond Graph, el cual, se presenta en la figura 4.26. El sistema original se obtiene aplicando el paso 3.1 del procedimiento 4.1, a la dinámica lenta y la dinámica rápida, que en este caso, son dos elementos que conforman la dinámica rápida. Así mismo, la retroalimentación de estado para esta dinámica rápida, solamente se realiza tomando en cuenta una de las fuentes que influyen directamente con dichos elementos que conforman esta dinámica.

Para calcular la G_1 se hace uso de la ec. (4.14) y recordar que $G_1 = k_{1g}/C_1$, entonces,

$$G_1 = G_0 - \frac{G_2^{21} C_2 (R_2 + R_3)}{C_1 (R_1 + R_2 + R_3)} - \frac{G_2^{22} R_3 C_3}{C_1 (R_1 + R_2 + R_3)} \quad (4.159)$$

Para calcular la ganancia G_0 del Circuito RC, se sustituyen los valores de la tabla 4.2 en las ec (4.147),

$$G_0 < 0.1538 \quad (4.160)$$

La ganancia G_2 se obtiene por ubicación de polos, que para este caso, los ubicamos en $(0.5\lambda + 0.29177)$ y $(2\lambda + 6.8409)$ en el sistema reducido rápido con retroalimentación. Para esto se realiza la comparativa con la ec. (4.156), tomando en cuenta los valores de la tabla

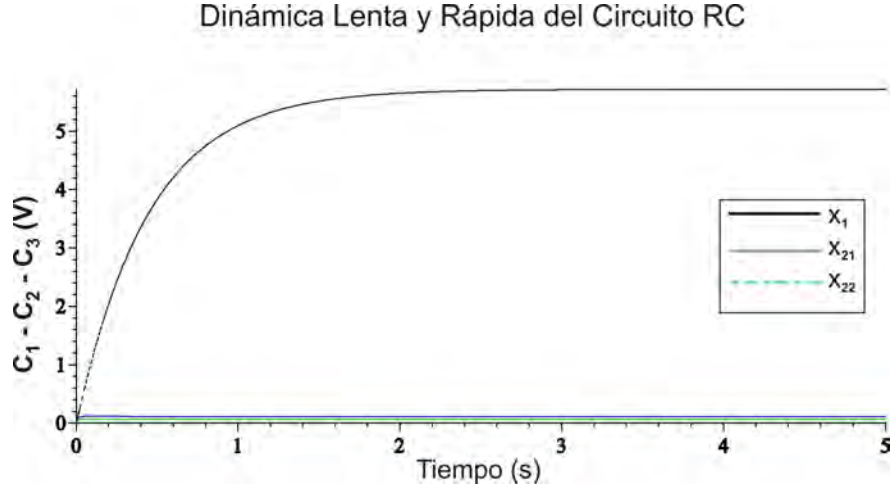


Figura 4.27: Dinámica lenta (x_1) y dinámica rápida (x_{21}, x_{22}) del Circuito RC

4.2. Por lo tanto,

$$\begin{bmatrix} G_2^{21} \\ G_2^{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ -16 \end{bmatrix} \quad (4.161)$$

La ganancia G_1 se obtiene utilizando la ec. (4.159) y sustituyendo los valores de la tabla 4.2 y proponiendo $G_0 = -2$, se obtiene:

$$G_1 = -0.768308 \quad (4.162)$$

Utilizando los datos anteriores, en la figura 4.27, se muestra la simulación de la dinámica lenta (x_1) y la dinámica rápida (x_{21}, x_{22}) del sistema original del Circuito RC, en la cual, se puede observar que con las ganancias establecidas el sistema original es estable.

Capítulo 5

Conclusiones y Recomendaciones

5.1 Conclusiones

En el desarrollo de esta tesis, se aprovechó la propiedad que tienen los sistemas singularmente perturbados de poderse dividir en dos subsistemas de bajo orden: el sistema cuasi-estacionario y el sistema rápido.

De esta manera, se desarrollaron dos metodologías en Bond Graph para la obtención del sistema cuasi-estacionario y una para la obtención del sistema reducido con retroalimentación de estado, partiendo de la suposición que la dinámica lenta y rápida son conocidas.

La primera metodología para la obtención del sistema cuasi-estacionario fue mediante el BGI_{LC} , que consiste en obtener el modelo en Bond Graph del sistema cuasi-estacionario con retroalimentación de estado mediante la causalidad integral asignada a cada uno de los elementos que conforman al sistema original y procedimientos en Bond Graph. De esta manera, se obtuvo la ecuación cuasi-estacionaria en lazo cerrado.

La segunda metodología fue el $SPBG_{LC}$, que consiste en obtener el modelo cuasi-estacionario con retroalimentación de estado en Bond Graph mediante la causalidad derivativa asignada a los elementos de almacenamiento que pertenecen a la dinámica rápida y causalidad integral asignada a los elementos de almacenamiento que conforman a la dinámica lenta del sistema original. De esta manera se obtuvo la ecuación cuasi-estacionaria en lazo cerrado.

La diferencia que existe entre las metodologías, además de la asignación de la causalidad a cada uno de los elementos que conforman al sistema original, es el procedimiento y los pasos algebraicos que existen entre una y otra. En la metodología $SPBG_{LC}$ el procedimiento es más corto en cuanto a pasos algebraicos, por lo cual, la ecuación cuasi-estacionaria se obtiene de manera más directa.

Por otro lado, para la obtención del sistema reducido rápido con retroalimentación de estado, se hace uso de la metodología BGI_{LC} , que consiste en la metodología tradicional en Bond Graph conocida.

Lo anterior fue aplicado a dos casos de estudios, donde en ambos casos se obtuvo el sistema cuasi-estacionario y el modelo reducido rápido en lazo cerrado. En la obtención de la ecuación de estado del sistema cuasi-estacionario se obtuvo la ganancia G_0 y al obtener la ecuación de estado del sistema reducido se obtuvo G_2 , donde ambas ganancias fueron empleadas para calcular G_1 . De esta manera, se implementó el modelo en Bond Graph del sistema original, el cual, requiere de la ganancia G_1 y G_2 para que sea estable. Logrando de esta manera, la estabilidad de los dos casos de estudio.

5.2 Recomendaciones

Esta tesis abre la posibilidad a nuevos trabajos entre Bond Graph y los sistemas singularmente perturbados.

- Una de las posibilidades es diseñar un observador completo para un sistema singularmente perturbado en Bond Graph, usando la propiedad que tienen los sistemas singularmente perturbados de separarse en un subsistema cuasi-estacionario y un sistema reducido rápido. Pudiendo así, implementar el diseño de un observador a cada subsistema lento y rápido para que de esta manera el sistema singularmente perturbado original sea observable.
- Otra posibilidad sería, trabajar en la implementación de una herramienta exclusiva en 20-Sim para sistemas singularmente perturbados, en la cual se pueda obtener directa-

mente el modelo reducido lento y rápido tanto en lazo abierto como en lazo cerrado en Bond Graph, y obtener también las ecuaciones de estado de cada subsistema.

- La implementación de un seguidor en un sistema singularmente perturbado original con retroalimentación de estado y para cada uno de los subsistemas: rápido y lento.
- Finalmente, sería también posible el diseño de la retroalimentación de estado y retroalimentación para los estados estimados de los sistemas singularmente perturbados no lineales en Bond Graph.

Bibliografía

- [Ahmed and Rosenberg, 2001] Ahmed A. Omara and Ronald C. Rosenberg, *Analysis of a Class of Two-Time-Scale Bond Graph Models*, Proc. Int'l Conf. Of Bond Graph Modelling 2001, Vol. 33, pp. 55-61.
- [B. Porter, 1974] Porter B., *Singular perturbation methods in the design of stabilizing feedback controllers for multivariable systems*. Int J. Control 20, 1974, pp.689-692.
- [B. Porter and A.T Shenton,1975a] Porter B. and Shenton A. T., *Singular perturbation methods of asymptotic eigenvalue assignment in multivariable systems*, Int. J. Syst Sci, 6, 1975a, pp. 33-37.
- [B. Porter and A.T. Shenton, 1975b] Porter B. and Shenton A. T., *Singular perturbation analysis of the transfer function matrices of a class of multivariable systems*, Int. J. Control, 21, 1975b, pp.665-660.
- [B. Porter, 1977] Porter B, *Singular perturbation methods in the design of full-order observers for multivariable linear systems*, Int. J. Control 26, 1977, pp.589-594.
- [Borutzky, 1995] W. Borutzky, G Dauphin-Tanguy, and J.U. Thoma, *Advances in bond graph modelling: theory, software,*

- applications, Mathematics and Computers in Simulation*, 1995, pp. 465-475.
- [Broenink, 1999] Jan F. Broenink, *Introduction to Physical Systems Modelling with Bond Graph*, University of Twente, Dept EE, 1999, pp. 1-31.
- [C. Sueur and Dauphin-Tanguy, 1991] C. Sueur and G. Dauphin-Tanguy, *Bond Graph Approach to Multi-time Scale Systems Analysis*, Journal of the Franklin Institute, Vol 328, No. 5/6, pp.1005-1026, 1991.
- [Dauphin-Tanguy, 2000] G. Dauphin-Tanguy, *Les bond graphs*, Hermes Science Publications, 2000.
- [Dauphin-Tanguy and Borne, 1985] G. Dauphin-Tanguy and P. Borne, *Order Reduction of Multi-time Scale Systems Using Bond Graphs, the Reciprocal System and the Singular Perturbation Method*, Journal of the Franklin Institute, Vol. 319, No. 1/2, pp. 157-171, January-February 1985.
- [Davison, 1966] Davison, E. J., *Trans. autom. Control*, IEEE, 1966.
- [Gawthrop, 2007] Peter J. Gawthrop, and Geraint P. Bevan, *Bond-Graph Modeling*, IEEE Control Systems Magazine 2007, pp. 24-44.
- [González, 2004] Gilberto González-A and J. de León, *Linearization in Bond Graph*, 43rd IEEE Conference on Decision and Control (CDC04), Atlantis, Paradise Island, Bahamas, December 2004.
- [González, 2009] Gilberto González-A, and René Galindo, *A Bond Graph Model from a State Space Description of a LTI*

- MIMO System*, 14th International Conference on Methods and Models in Automation and Robotics, 19-21 Agosto, 2009.
- [Gonzalez, 2011] Gilberto Gonzalez-A and Noe Barrera-G (2011), *Quasy Steady State Model Determination using Bond Graph for a Singularly Perturbed LTI System*, 16th International Conference on Methods and Models in Automation and Robotics, MMAR 2011, pp. 194-199, Miedzysdroje, Poland.
- [Gonzalez, 2014] Gilberto González-A, Mayra Y. Herrera-C, *The Feedback of a Singularly Perturbed System Modelled by Bond Graphs*, Proceedings of the 33rd IASTED International Conference on Modelling, Identification and Control (MIC 2014), pp. 34-40, February 17-19, 2014, Innsbruck, Austria.
- [Karnopp, 1975] Karnopp D., Rosenber R., *Systems dynamics: a unified approach*, John Wiley & Sons, 1975.
- [Karnopp, 1991] Dean C. Karnopp and Roland C. Rosenberg, *Introduction to Physical Systems Dynamics*, Mc. Graw Hill, 1983.
- [Kokotovic, 1986] P. V. Kokotovic, H. K. Khalil, J. O'Reilly, *Singular Perturbation Methods in Control: Analysis and Desing*, Academic Press, 1986.
- [Kubiak, 1995] P. Kubiak, A. Azmani, and G. Dauphin-Tanguy, *Determination of state equation for bond graph model with*

- a multiport element*, IEEE International Conference (SMC'95), Vol. 4, pp. 111-115.
- [Levinson, 1950] N. Levinson, *Perturbations of discontinuous solution of non-linear systems of differential equation*, Acta Math, 1950.
- [Mahmoud and Singh, 1982] Mahmoud M. S. Hassan M F and Singh M G (1982), *Approximate feedback design for a class of singularly perturbed systems*, IEE Proc Pt D. 129, pp. 49-56.
- [Malley, 1971] R. E. Malley, *The singularly perturbed linear state regulator problem*, SIAM J. Control, 1971.
- [Naidu, 1988] D. S. Naidu, *Singular Perturbation Methodology in Control Systems*, Peter Peregrinus Ltd., 1988.
- [Orbak, 2003] A. Y. Orbak, O. S. Turkay, E. Eskinat and K. Youcef-Toumi (2003), *Model reduction in the physical domain*, Instn Mech. Engrs, Vol. 217, Part I: J. Systems and Control Engineering, pp. 481-496.
- [O'Reilly, 1979a] O'Reilly J. (1979a), *Full order observers for a class of singularly perturbed linear time-varying systems*, Int. J. Control, 30, pp. 745-756.
- [Rao and Lamda, 1974] Rao, S. V., and Lamda, S. S., *Proc. Instn elect. Engrs*, 1974.
- [S. H. Javid, 1978a] Javid S H (1978a), *The time-optimal control of a class of nonlinear singularly perturbed systems*, J. Franklin Inst., 305, pp.27-37.

- [S. H. Javid, 1978b] Javid S H (1978b), *Uniform asymptotic stability of linear time-varying singularly perturbed systems*, J. Franklin Inst, 305, pp. 27-37.
- [S. H. Javid, 1986] Javid S. H. (1986), *Observing the slow states of singularly perturbed system*, IEEE Trans AC-25, pp. 277-280.
- [S. J. Fu and M. E. Sawan, 1986] Fu S. J. and Sawan M. E. (1986), *On the reduced order model for control system design and analysis*, Int. J. Syst Sci, 17, pp. 319-324.
- [Silva Madriz and S. S. Sastry, 1984] Silva-Madriz R. and Sastry S S (1984), *Input-Output description of linear systems with multiple time-scales*, Int. J. Control, 40, pp. 699-722.
- [Silva Madriz and S.S Sastry, 1986] Silva-Madriz R. and Sastry S. S. (1986) *Multiple time scales for nonlinear systems*, Circuits systems and signal processing, 5, pp. 153-169.
- [Tikhonov, 1948] A. B. Tikhonov, *Systems of differential equations containing a small parameter multiplying the derivative*, Mat, Sb. 1948.
- [Vasil'eva, 1963] A. B. Vasil'eva, *Singularly perturbed systems with an indeterminacy in their degenerate equations*, J. Diff Eqns, 1963.
- [Wasow, 1965] W. Wasow, *Asymptotic Expansions for Ordinary Differential Equations*, Wiley Interscience, New York, 1965
- [Zeid and Overholt, 1995] Ashraf A. Zeid and James L. Overholt (1995), *Singularly Perturbed Formulation: Explicit Modeling of Multibody Systems*, Jornal of the Franklin Intitute, Vol 332B, pp.21-45.

Apéndice A

Obtención del modelo en ecuaciones de estado por Trayectoria Causal y Lazo Causal

Para obtener el modelo en ecuaciones de estado de la forma $\dot{x} = Ax + Bu$ y $y = Cx + Du$ por trayectorias causales y lazos causales, se aplica el siguiente procedimiento [Dauphin-Tanguy, 2000].

Procedimiento A:

1. Identificar el número de elementos de almacenamiento (n) y enumerar cada uno de ellos.
2. Identificar el número de elementos disipativos (m) y enumerar cada uno de ellos.
3. Para obtener los valores correspondientes a la matriz A , se establece relación entre elementos disipativos y elementos de almacenamiento, tomando en cuenta que:
 - 3a. La matriz A será una matriz cuadrada que dependerá del número de elementos de almacenamiento: $A_{n \times n}$.
 - 3b. Los valores de la diagonal (figura A.1-a) de la matriz A serán la suma de los lazos causales individuales que forman un elemento de almacenamiento con cada uno de

los elementos disipativos, recordando que la trayectoria causal establecida sólo se pasa una vez por el elemento disipativo.

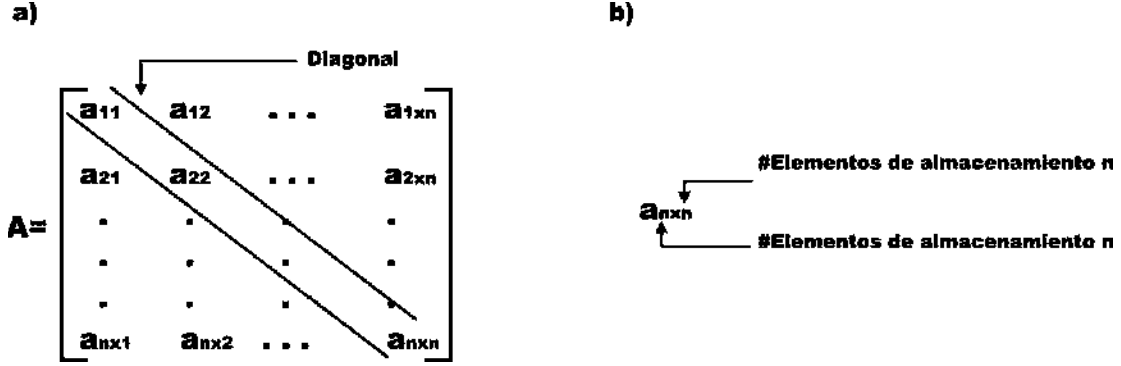


Figura A.1: Matriz A a) Elementos de la Diagonal y b) con los terminos de a_{nn} indicando el sub-índice que corresponde a cada elemento

- 3c. Los valores externos a la diagonal , estas se obtienen a base de trayectorias causales formadas entre un elemento de almacenamiento y otro elemento de almacenamiento. El sub-índice de cada término de la matriz A indica los elementos que conforman la trayectoria causal (figura A.1-b).
- 3d. El signo en cada caso depende de la ec. (2.29).
- 3e. En caso de no existir un lazo causal o una trayectoria causal entre sus elementos, automáticamente el valor correspondiente es 0.
4. La obtención de los valores para la variable B , se tiene a partir de las trayectorias causales establecidas entre las fuentes (f) y elementos de almacenamiento (n), tomando en cuenta:
 - 4a. Al realizar la trayectoria causal pasar solamente por elementos disipativos
 - 4b. El sub-índice de cada término de la matriz B nos indica los elementos que conforman la trayectoria causal (figura A.2).
5. La obtención de los elementos que conforman la matriz C , se obtiene con la relación de los elementos de almacenamiento (n) y detectores (d) por lo cual se toma en cuenta lo siguiente:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_{11} & \mathbf{b}_{12} & \dots & \mathbf{b}_{1xf} \\ \mathbf{b}_{21} & \mathbf{b}_{22} & \dots & \mathbf{b}_{2xf} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{b}_{nx1} & \mathbf{b}_{nx2} & \dots & \mathbf{b}_{nxf} \end{bmatrix}$$

$\downarrow$ #Fuente
 $\uparrow$ #Elementos de almacenamiento

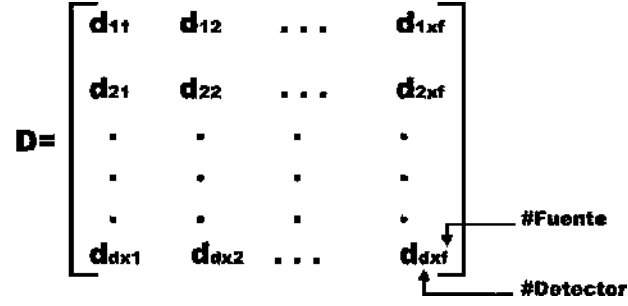
Figura A.2: Matriz B indicando los sub-índices que corresponden a cada elemento

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_{11} & \mathbf{c}_{12} & \dots & \mathbf{c}_{1xn} \\ \mathbf{c}_{21} & \mathbf{c}_{22} & \dots & \mathbf{c}_{2xn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{c}_{dx1} & \mathbf{c}_{dx2} & \dots & \mathbf{c}_{dxn} \end{bmatrix}$$

$\downarrow$ #Elementos de almacenamiento
 $\uparrow$ #Detector

Figura A.3: Matriz C indicando los sub-índices que corresponden a cada elemento

- 5a. La trayectoria causal debe pasar solamente por elementos disipativos.
 - 5b. El sub-índice de cada término de la matriz C indica los elementos que conforman la trayectoria causal (ver figura A.3).
 - 5c. El signo correspondiente a cada elemento se obtiene de utilizar la ec. (2.29).
 - 5d. En caso de no existir trayectoria causal, colocar un 0.
6. Finalmente, para la obtención de los términos de la variable D se establece la relación de las trayectorias entre fuentes (f) y detectores (d) tomando en cuenta los siguientes criterios:
- 6a. Pasar únicamente por elementos disipativos.
 - 6b. El sub-índice de cada término de la matriz D indica los elementos los cuales se hace la relación de la trayectoria causal (ver figura A.4).
 - 6c. El signo correspondiente a cada término se obtiene de la ec. (2.29).


 Figura A.4: Matriz D indicando los sub-índices que corresponden a cada elemento

6d. En caso de no existir trayectorias causales, automáticamente corresponde un 0.

7. En cualquiera de los casos recordar que se encuentra en el dominio de Laplace, así que cada vez que se pase por un elemento de almacenamiento agregar el grado correspondiente a la variable S .

Para la obtención de la Función de Transferencia se aplica la siguiente ecuación:

$$G(S) = \frac{P(I - \Sigma L_{ino})}{\Delta} \quad (A.1)$$

donde

$$\Delta = I - (\Sigma L_{in} - \Sigma L_{2ind} + \Sigma L_{3ind} \dots) \quad (A.2)$$

siendo

P es la trayectoria causal de la fuente (f) al detector (d) permitiendo pasar sólo una vez por el elemento disipativo y elementos de almacenamiento.

L_{ino} son todos aquellos lazos individuales que NO tocan la trayectoria P .

L_{in} todos los lazos individuales que forman el Bond Graph.

L_{2in} aquellos lazos disjuntos formados entre dos lazos individuales.

L_{3in} lazos disjuntos formados entre lazos individuales, etc.

Apéndice B

Publicaciones

En el presente Apéndice se presenta el artículo derivado del presente trabajo, aceptado para su publicación en la *Proceedings of the 33rd IASTED International Conference on Modelling, Identification and Control* que se llevó a cabo del 17 al 19 de febrero del presente año. en la ciudad de Innsbruck, Austria.

THE FEEDBACK OF A SINGULARLY PERTURBED SYSTEM MODELLED BY BOND GRAPHS

Gilberto González-A¹, Mayra Y. Herrera-C²

¹ gilnichga@yahoo.com.mx, ² may_rana_8@hotmail.com.mx

Faculty of Electrical Engineering, University of Michoacan,
Mexico

ABSTRACT

A procedure to build a bond graph of a singularly perturbed system with a state feedback is presented. The gains of the fast and slow dynamics of the system in the physical domain by using reduced bond graphs are determined. Also, the junction structures matrices of the slow and fast bond graphs with the corresponding feedback are proposed. Finally, the proposed procedure is applied to a DC motor.

KEY WORDS

Bond graph, Singular perturbations, State feedback, DC motor.

1 Introduction

A fundamental problem in the theory of systems and control is the mathematical modelling of a physical system. The realistic representation of many systems calls for high-order dynamic equations. The presence of some parasitic parameters, such as small time constants, resistances, inductances, capacitances, moments of inertia, and Reynolds number, is often the source for the increased order and stiffness of these systems. The stiffness, attributed to the simulations occurrence of slow and fast phenomena, gives rise to time scales. The systems in which the suppression of a small parameter is responsible for the degeneration (or reduction) of dimension (or order) of the system are labeled as singularly perturbed systems, which a special representation of the general class of time scale systems [1]. There are several references of singular perturbations methods, some of them are [1], [2] and [3].

A model order reduction is effective to render control design problems to a manageable size when using modern control synthesis methods. Also, the controller order reduction is an interesting research area that enables simpler hardware/software controllers to be obtained [2]. Recent progress in the use of singular perturbation and two-time-scale methods of modeling and design for control system is reviewed in [4].

In [5] singular perturbation methods are used to provide a basis for the analysis of the asymptotic controllability of multivariable linear systems containing small parasitic elements.

Singular perturbation methods used to reduce the design of stabilising feedback controllers with inaccessible states are found in [6]. A two-stage-sliding-mode controller design for a singular perturbation system is investigated in [7]. The problem of output feedback stabilization of linear systems with a singular perturbation model is addressed in [8]. The singular perturbation system with inaccessible states is considered in [9].

We can find some papers applying bond graph to singular perturbations methods. In [10] describes how the bond graph model is a helpful tool for system analysis in the special case of simplifying the modelling of two time scale systems. The fast and slow dynamics of bond graph models can be estimated by determination of causal loop gains. In [11] the notion of a reciprocal system which, with singular perturbations techniques can obtain more accuracy on the fast time scale behavior of the system. In [12] proposes a bond graph methodology to determine the quasi-steady state model for LTI system with singular perturbations by assigning derivative causality to the fast storage elements and the slow storage elements have an integral causality assignment. The analysis of a class of nonlinear systems with singular perturbations in the physical domain is proposed in [13].

In this paper the modelling in bond graph of a singularly perturbed system with the state feedback is proposed. The feedback gains are determined of each reduced bond graph. Hence, a fast reduced bond graph with the feedback is proposed and the quasi steady state model for the slow dynamic with the corresponding feedback is presented. The junction structures of the reduced bond graphs with the feedback are defined.

Thus, the main contribution of this paper is to obtain the feedback gains by using reduced bond graphs for each dynamic.

Section 2 describes the singular perturbation model. The modelling of singularly perturbed system in the physical domain is described in Section 3. In Section 4, a closed loop system with singular perturbations in a bond graph approach is presented. The proposed methodology is applied to a DC motor in Section 5. Finally, Section 6 gives the conclusions.

2 The Standard Singular Perturbation Model

The singular perturbation model of finite dimensional dynamic systems, extensively studied in the mathematical literature by Tikhonov (1948,1952), Levinson (1950), Vasil'eva (1963), Wasow (1965), O'Malley (1971), etc. was also the first model to used in control and systems.

Linear time invariant models are of interest in local or small signal approximations of more realistic nonlinear models of dynamic systems [1, 2]. Consider a LTI system to study two time scale properties of the following form,

$$\dot{\bar{x}}_1 = A_{11}\bar{x}_1 + A_{12}\bar{x}_2 + B_1u, \bar{x}_1 \in \mathbb{R}^n \quad (1)$$

$$\varepsilon \dot{\bar{x}}_2 = A_{21}\bar{x}_1 + A_{22}\bar{x}_2 + B_2u, \bar{x}_2 \in \mathbb{R}^m \quad (2)$$

with output

$$y = C_1\bar{x}_1 + C_2\bar{x}_2 \quad (3)$$

The slow reduced model is obtained by setting $\varepsilon = 0$ in (2) then

$$\bar{x}_2 = -A_{22}^{-1}A_{21}\bar{x}_1 - A_{22}^{-1}B_2u \quad (4)$$

substituting (4) into (1) we have,

$$\dot{\bar{x}}_1 = (A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})\bar{x}_1 + (B_1 - A_{12}A_{22}^{-1}B_2)u \quad (5)$$

2.1 Composite State-Feedback Control

In the singular perturbation or, more generally, the two-time-scale approach to feedback design, these stiffness properties are taken advantage of by decomposing the original ill-conditioned system into two subsystems in separate time scales. State feedback design may then proceed for each lower-order subsystem, and the results combined to yield a composite state feedback control is required to achieve an asymptotic approximation to the closed loop system performance that would have been obtained had a state feedback controller been designed without the use of singular perturbation methods [2].

It is desired to construct a state-feedback control for the singularly perturbed linear time-invariant system model analyzed in the previous subsection. Preliminary to any separation of slow and fast designs, the system (1), (2) is approximately decomposed into a slow system model with n small eigenvalues and a fast system model m large eigenvalues. The n th-order slow system is [2]

$$\dot{\bar{x}}_s = A_0\bar{x}_s + B_0u_s, \bar{x}_s(t_0) = x^0 \quad (6)$$

$$\bar{x}_2 = -A_{22}^{-1}(A_{21}\bar{x}_s + B_2u_s) \quad (7)$$

where

$$A_0 = A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21} \quad (8)$$

$$B_0 = B_1 - A_{12}A_{22}^{-1}B_2 \quad (9)$$

and the vectors $\bar{x}_s$ and u_s are the slow parts of the corresponding variables $\bar{x}_1$ and u in the control system (1), (2). Also, the m th-order fast system is

$$\varepsilon \dot{\bar{x}}_f = A_{22}\bar{x}_f + B_2u_f, \bar{x}_f(t_0) = x^0 - \bar{x}_s(t_0) \quad (10)$$

where $\bar{x}_f = \bar{x} - \bar{x}_s$ and $u_f = u - u_s$ denote the fast parts of the corresponding variables in (1), (2).

It is appropriate to consider the following decomposition of feedback controls where

$$u_s = G_0\bar{x}_s + v_s \quad (11)$$

$$u_f = G_2\bar{x}_f + v_f \quad (12)$$

are separately designed for the slow and fast systems (6) and (10). A composite control for the full system (1), (2) might then plausibly be taken as

$$u_s + u_f = G_0\bar{x}_s + G_2\bar{x}_f + v_s + v_f \quad (13)$$

However, a realizable composite control requires that the system states $\bar{x}_s$ and $\bar{x}_f$ be expressed in terms of the actual system states $\bar{x}_1$ and $\bar{x}_2$. This can be achieved by replacing $\bar{x}_s$ by $\bar{x}_1$ and $\bar{x}_f$ by $\bar{x}_2 - \bar{x}_s$, so that the composite control (13), in view of (7), takes the realizable feedback form [2]

$$\begin{aligned} u(t) &= G_2[\bar{x}_2 + A_{22}^{-1}(A_{21}\bar{x}_1 + B_2G_0\bar{x}_1)] + G_0\bar{x}_1 \\ &= G_1\bar{x}_1 + G_2\bar{x}_2 + v_s + v_f \end{aligned} \quad (14)$$

where

$$G_1 = (I + G_2A_{22}^{-1}B_2)G_0 + G_2A_{22}^{-1}A_{21} \quad (15)$$

In the next section a system with two time scales using a bond graph model is described [12].

3 Modelling in Bond Graph of a Singularly Perturbed System

Consider the following scheme of a Bond Graph model with an Integral causality assignment (BGI) for a system which includes the key vectors of Fig. 1 [12].

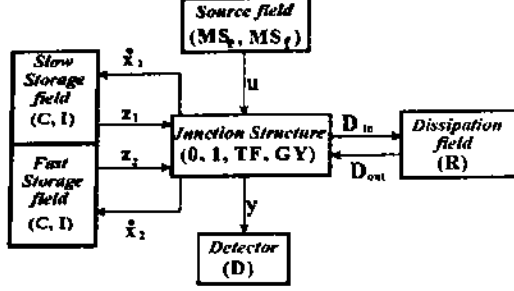


Fig. 1. Junction structure and key vectors of a bond graph.

In Fig. 1, (MS_e, MS_f) , (C, I) and (R) denote the source, the energy storage and the energy dissipation fields, (D) the detector and $(0, 1, TF, GY)$ the junction structure with transformers, TF , and gyrators, GY .

In this junction structure the storage field is divided in two parts: the slow states $x_1(t) \in \mathbb{R}^n$ and fast states $x_2(t) \in \mathbb{R}^m$ both state are associated with the energy variables $p(t)$ for I elements and $q(t)$ for C elements, $u(t) \in \mathbb{R}^p$ denotes the plant input, $z_1(t) \in \mathbb{R}^n$ and $z_2(t) \in \mathbb{R}^m$ co-energy vector for slow and fast variables, respectively, and $D_{in}(t) \in \mathbb{R}^r$ and $D_{out}(t) \in \mathbb{R}^r$ are the relationships between the dissipation field and the junction structure. The constitutive relation for the slow dynamics is

$$z_1 = F_1 x_1 \quad (16)$$

for the fast dynamics is

$$z_2 = F_2 x_2 \quad (17)$$

and for the dissipations elements is

$$D_{out} = L D_{in} \quad (18)$$

The junction structure bond graph in an integral causality assignment is [12]:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ D_{in} \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11}^{11} & S_{11}^{12} & S_{12}^{11} & S_{13}^{11} \\ S_{11}^{21} & S_{11}^{22} & S_{12}^{21} & S_{13}^{21} \\ S_{21}^{11} & S_{21}^{12} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31}^{11} & S_{31}^{12} & S_{32} & S_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ D_{out} \\ u \end{bmatrix} \quad (19)$$

The entries of S take values inside the set $\{0, \pm 1, \pm k_t, \pm k_g\}$ where k_t and k_g are transformer and gyrator modules for the class of nonlinear systems of this paper; these modules are $p(t)$ and/or $q(t)$ associated with I and/or C elements in integral causality, respectively. Also, the properties S_{11}^{11} , S_{11}^{22} and S_{22} are square skew-symmetric matrices, and S_{12}^{11} , S_{12}^{21} , S_{11}^{12} and S_{21}^{11} , S_{21}^{12} , S_{11}^{21} are matrices each other negative transpose, respectively [12].

The matrices for the slow part of the system defined by $\dot{x}_1 = A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + B_1u$ are

$$A_{11} = (S_{11}^{11} + S_{12}^{11}MS_{21}^{11})F_1 \quad (20)$$

$$A_{12} = (S_{11}^{12} + S_{12}^{11}MS_{21}^{12})F_2 \quad (21)$$

$$B_1 = S_{13}^{11} + S_{12}^{11}MS_{23} \quad (22)$$

and the matrices for the fast part defined by $\dot{x}_2 = A_{21}x_2 + A_{22}x_2 + B_2u$ are

$$A_{21} = F_2^{-1}(S_{11}^{21} + S_{12}^{21}MS_{21}^{11})F_1 \quad (23)$$

$$A_{22} = F_2^{-1}(S_{11}^{22} + S_{12}^{21}MS_{21}^{12})F_2 \quad (24)$$

$$B_2 = F_2^{-1}(S_{13}^{21} + S_{12}^{21}MS_{23}) \quad (25)$$

where

$$M = L(I - S_{22}L)^{-1} \quad (26)$$

Finally, the matrices for the output $y = C_1x_1 + C_2x_2$ are,

$$C_1 = (S_{31}^{11} + S_{32}MS_{21}^{11})F_1 \quad (27)$$

$$C_2 = (S_{31}^{12} + S_{32}MS_{21}^{12})F_2 \quad (28)$$

$$D = S_{33} + S_{32}MS_{23} \quad (29)$$

3.1 The Quasi-Steady State Model

A scheme to obtain the quasi-steady state model of a system with singular perturbations in the physical domain is shown in Fig. 2. This junction structure proposes to assign derivative causality for the fast storage elements and the slow storage elements have to maintain the integral causality assignment [12]. This new bond graph is called Singularly Perturbed Bond Graph (SPBG) [12].

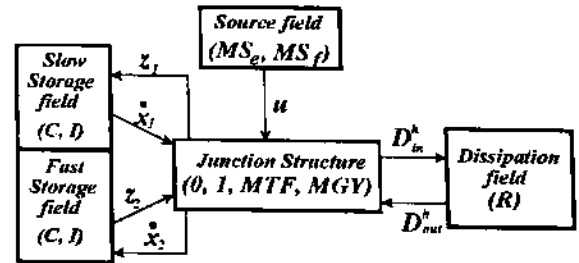


Fig. 2. A junction structure to get the quasi-steady state model.

Note that this SPBG assigns derivative causality for the fast storage elements and the dissipation elements can change their causality too. Hence, the new constitutive relations for the dissipation field is

$$D_{out}^h = L_h D_{in}^h \quad (30)$$

The junction structure of SPBG of Fig. 2 is given by [12]

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \frac{D_{in}^h}{u_s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{11}^{11} & H_{11}^{12} & H_{12}^{11} & H_{13}^{11} \\ H_{21}^{11} & H_{21}^{12} & H_{22}^{11} & H_{23}^{11} \\ H_{11}^{21} & H_{11}^{22} & H_{12}^{21} & H_{13}^{21} \\ H_{21}^{21} & H_{21}^{22} & H_{22}^{21} & H_{23}^{21} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \frac{D_{out}^h}{u_s} \end{bmatrix} \quad (31)$$

The real roots of the form (2) with (31) and (30) are defined by [12]

$$x_2 = \widetilde{A}_{21}x_1 + \widetilde{B}_2u_s \quad (32)$$

where

$$\widetilde{A}_{21} = F_2^{-1} [H_{11}^{21} + H_{12}^{21}QH_{21}^{11}] F_1 \quad (33)$$

$$\widetilde{B}_2 = F_2^{-1} [H_{13}^{21} + H_{12}^{21}QH_{23}^{11}] \quad (34)$$

being

$$Q = [I - L_h H_{22}(x)]^{-1} L_h \quad (35)$$

The quasi-steady state model is given by [12]

$$\dot{\bar{x}}_s = A_0\bar{x}_s + B_0u_s \quad (36)$$

where

$$A_0 = [H_{11}^{11} + H_{12}^{11}QH_{21}^{11}] F_1 \quad (37)$$

$$B_0 = H_{13}^{11} + H_{12}^{11}QH_{23}^{11} \quad (38)$$

3.2 The Fast Reduced Model

For decoupling the fast behaviour, we can apply the following procedure [10]

Procedure 1.

The fast reduced bond graph is deduced from the global one by suppressing:

1. All the C or I elements with large modulus.
2. All the R elements causality connected with these C or I elements directly or indirectly through other R elements.
3. All the input sources having no causal connection with the remaining C , I and R elements.

In the next section a closed loop singularly perturbed system in the physical domain is presented.

4 The Feedback of a Bond Graph with Singular Perturbations

This section is focused on linear feedback design for deterministic linear time invariant systems containing both slow and fast dynamic phenomena in the phys-

ical domain. Normally, any feedback design, like the system it seeks to control, will suffer from the higher dimensionality and ill-conditioning resulting from the interaction of slow and fast dynamic modes.

In order to get the feedback of a singularly perturbed system of the form (14), the following procedure is proposed.

Procedure 2.

1. A bond graph of the system of the fast dynamic is obtained.
2. A fast reduced bond graph with the feedback is determined. Let G_2 be designed such that $\text{Re } \lambda(A_{22} + B_2G_2) < 0$.
3. The SPBG applying the corresponding feedback is obtained. In addition G_0 is designed such that $\text{Re } \lambda(A_0 + B_0G_0) < 0$.
4. From (14) with (15) the gains of the original bond graph is obtained.

The feedback of the fast and slow dynamics are drawn in the corresponding bond graphs according to Fig. 3.

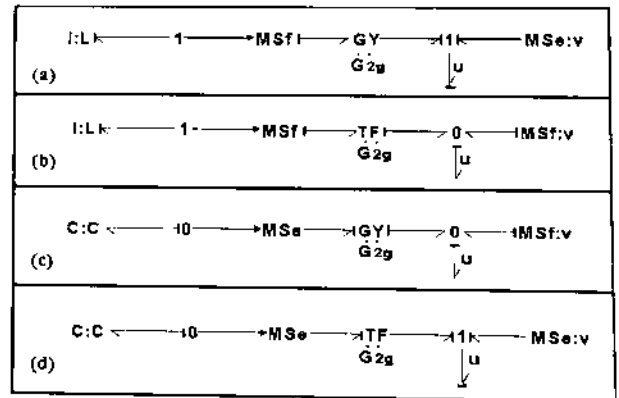


Fig. 3 State feedback in bond graph.

4.1 Junction Structure of the Fast Reduced Bond Graph with the Feedback

Considering the fast reduced system modelled by a bond graph and applying the state feedback, the junction structure is given by

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_f^C \\ \frac{D_{in}^f}{v_f} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11}^C & S_{12} & S_{13} \\ S_{21}^C & S_{22} & S_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_f^C \\ \frac{D_{out}^f}{v_f} \end{bmatrix} \quad (39)$$

with the constitutive relations

$$z_f^C = F_f x_f^C \quad (40)$$

$$D_{out}^f = L_f D_{in}^f \quad (41)$$

and the state equation with the feedback is

$$\dot{x}_f^C = A_{22}^C x_f^C + B_2 v_f \quad (42)$$

where

$$A_{22}^C = (S_{11}^C + S_{12} M_f S_{21}^C) F_f \quad (43)$$

$$B_2 = S_{13} + S_{12} M_f S_{23} \quad (44)$$

being

$$M_f = L_f (I - S_{22} L_f)^{-1} \quad (45)$$

Note the $A_{22}^C = A_{22} + B_2 G_2$ where G_2 is the feedback gain of the fast reduced system.

4.2 Junction Structure of the Quasi-Steady State Model in Bond Graph with the Feedback

The quasi-steady state model of a system modelled by bond graphs can be obtained in a step by assigning the derivative causality to the fast storage elements, then the state feedback of the slow storage elements by using Fig. 3 can be applied. Hence, the junction structure of this new bond graph of the slow dynamic with the feedback is defined by

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_s^C \\ z_2 \\ D_{in}^h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (H_{11}^{11})^C & H_{11}^{12} & H_{12}^{11} & H_{13}^{11} \\ H_{11}^{21} & H_{11}^{22} & H_{12}^{21} & H_{13}^{21} \\ (H_{21}^{11})^C & H_{21}^{12} & H_{22} & H_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_s^C \\ \dot{x}_2 \\ D_{out}^h \\ v_s \end{bmatrix} \quad (46)$$

and the state equation for the slow dynamic with the feedback is

$$\dot{x}_s^C = A_0^C x_s^C + B_0 v_s \quad (47)$$

where

$$A_0^C = [(H_{11}^{11})^C + H_{11}^{12} Q (H_{21}^{11})^C] F_1 \quad (48)$$

Note that $A_0^C = A_0 + B_0 G_0$ where G_0 is the feedback gain of the slow reduced system.

Finally, the feedback gain of the original singularly perturbed system defined by (14) is given by

$$G_1 = \begin{bmatrix} I & G_{2g} F_2^{-1} \widetilde{B}_2 \end{bmatrix} G_{og} F_1^{-1} \quad G_{2g} F_2^{-1} \widetilde{A}_{21} \quad (49)$$

where G_{2g} and G_{og} are the gains into the corresponding bond graphs.

The proposed methodology is applied to DC motor in the next section.

5 Example

A DC motor scheme is shown in Fig. 4. This example is well known that it is an electromechanical system. The electrical part is formed by the resistance R_a , and inductance L_a ; the inertia J , and friction coefficient b , are the elements of the mechanical part of the system

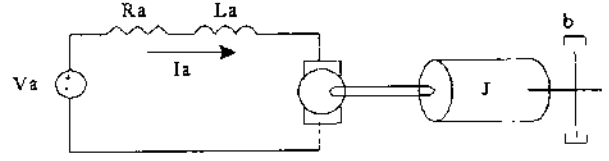


Fig. 4. Scheme of a DC motor.

A bond graph model in an integral causality assignment of the DC motor is shown in Fig. 5.

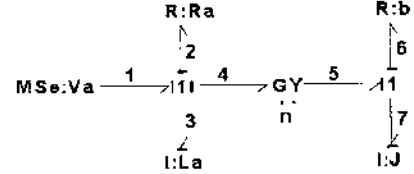


Fig. 5. Bond graph of the DC motor.

The key vectors of the bond graph are

$$D_{in} = \begin{bmatrix} f_2 \\ f_6 \end{bmatrix}; D_{out} = \begin{bmatrix} e_2 \\ e_6 \end{bmatrix}; u = e_1 \quad (50)$$

$$L = \text{diag}\{R_a, b\}$$

for slow state

$$x_1 = p_7; \dot{x}_1 = e_7; z_1 = f_7; F_1 = 1/J \quad (51)$$

and for fast state

$$x_2 = p_3; \dot{x}_2 = e_3; z_2 = f_3; F_1 = 1/L_a \quad (52)$$

By applying the Procedure 2, the fast reduced bond graph is shown in Fig. 6.

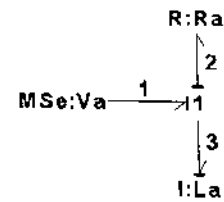


Fig. 6. Fast reduced bond graph.

Now, the fast reduced bond graph with the state feedback is shown in Fig. 7.

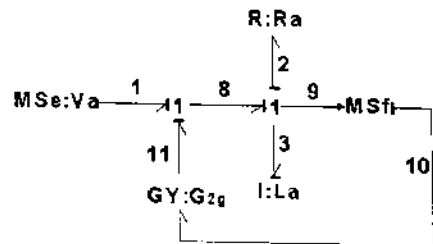


Fig. 7. Fast reduced bond graph with the feedback.

The junction structure is

$$\begin{bmatrix} e_3 \\ f_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{2g} & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_3 \\ e_2 \\ e_1 \end{bmatrix} \quad (53)$$

and from (43), (44), (45), (52) and (53) the state equation is

$$L_a \dot{e}_3^C = (G_{2g} - R_a) p_3^C + L_a e_1 \quad (54)$$

Then G_{2g} be designed such that $\text{Re } \lambda \left(\frac{G_{2g}}{L_a} - \frac{R_a}{L_a} \right) < 0$.

If we assign derivative causality to the fast storage element $I : L_a$ and the bond graph (SPBG) has correct causality on each elements then A_{22} is nonsingular, which is shown in Fig. 8.

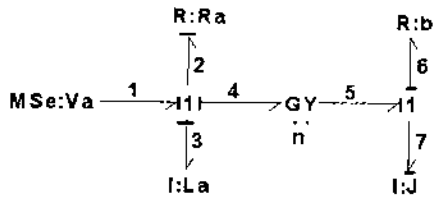


Fig. 8. Quasi-steady state model.

The key vectors and the constitutive relation of the dissipation field for the SPBG are

$$\begin{aligned} D_{in}^h &= [e_2 \ f_6]^T; D_{out}^h = [f_2 \ e_6]^T \\ L_h &= \text{diag} \left\{ \frac{1}{R_a}, b \right\} \end{aligned} \quad (55)$$

Fig. 9 shows the quasi-steady state model with the feedback state.

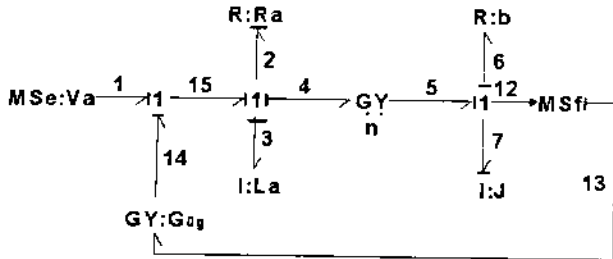


Fig. 9. Quasi-steady state model with the feedback.

The junction structure is

$$\begin{bmatrix} e_7 \\ f_3 \\ e_2 \\ f_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & n & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ G_{0g} - n & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_7 \\ e_3 \\ f_2 \\ e_6 \\ e_1 \end{bmatrix} \quad (56)$$

From (35), (38), (48), (51), (55) and (56), the state equation in a closed loop system is

$$\dot{e}_7^C = \left(\frac{-b}{J} - \frac{n^2}{JR_a} + \frac{nG_{0g}}{JR_a} \right) p_7^C + \frac{n}{R_a} e_1 \quad (57)$$

Then G_{0g} be designed such that $\text{Re } \lambda \left(\frac{-b}{J} - \frac{n^2}{JR_a} + \frac{nG_{0g}}{JR_a} \right) < 0$.

From (15) the gain G_1 is determined by

$$G_1 = (1 - L_a G_{2g}) J G_{0g} + \frac{n^2}{JR_a} G_{2g} \quad (58)$$

Note that the proposed methodology permits to obtain the gain G_1 based on the gains G_0 , G_2 and the properties of the SPBG without determining the inverse of A_{22} matrix.

The state feedback of the original bond graph of the system is shown in Fig. 10.

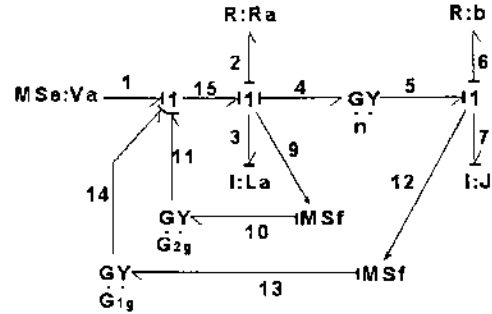


Fig. 10. State feedback of the DC motor.

The gain G_{1g} of the bond graph is $G_{1g} = G_1 \cdot J$. Thus, the gains of the complete system are obtained by the reduced fast bond graph and the singularly perturbed bond graph.

6 Conclusion

In this paper the feedback gains of a singularly perturbed system represented in a bond graph are determined. In order to get these gains, the reduced bond graphs of fast and slow dynamics with their corresponding feedback are proposed. The junction structures of each bond graph of the closed loop singularly perturbed system are presented.

References

- [1] D. Subbaram Naidu and A. J. Calise, "Singular Perturbations and Time Scales in Guidance and Control of Aerospace Systems: A Survey, Journal of Guidance, Control, and Dynamics, Vol. 24, No. 6, Nov-Dec, 2001.
- [2] P.V. Kokotovic, H. K. Khalil and J. O'Reilly, "Singular Perturbation Methods in Control: Analysis and Design", Academic Press, 1986.
- [3] Khalil, "NonLinear Systems".

- [4] Saksena V. R., O'Reilly J. and Kokotovic P. V., "Singular Perturbations and Time-scale Methods in Control Theory: Survey 1976-1983, *Automatica*, Vol. 20, No. 3, pp. 273-293, 1984.
- [5] Porter B and Shenton A. T., "Singular Perturbation methods of asymptotic eigenvalue assignment in the multivariable linear systems", *International Journal of Systems Science*, pp. 33-37, vol. 6, No. 1, 1975.
- [6] Porter B., "Singular perturbation methods in the design of observers and stabilising feedback controllers for multivariable linear systems", *Electronics letters*, Vol. 10, No. 23, pp. 494-495, 1974.
- [7] Li Tzuu-Hseng S., Lin J-L and Kung F.C., "Composite Sliding-Mode Control of Singular Perturbation Systems", *Proceedings of the American Control Conference*, Seattle, Washington, June 1995, pp. 2248-2249.
- [8] Cao L. and Schwartz H. M., "Output feedback stabilization of linear systems with a singular perturbation model", *Proceedings of the American Control Conference*, Anchorage, AK, May 8-10, 2002, pp. 1627-1632.
- [9] Wang M-S, Li T-H and Sun Y-Y, "Sliding-Mode Observers design for singular perturbation systems", *IEEE*, pp. 2347-2352.
- [10] C. Sueur and G. Dauphin-tanguy, "Bond Graph Approach to Multi-time Scale Systems Analysis", *Journal of the Franklin Institute*, Vol. 328, No.5/6, pp. 1005-1026, 1991.
- [11] G. Dauphin-Tanguy, P. Borne and M. Lebrun, "Order Reduction of Multi-Time Scale Systems Using Bond Graphs, the Reciprocal System and the Singular Perturbation Method", *Journal of the Franklin Institute*, Vol. 319, No. 1/2, pp.157-171, January-February 1985.
- [12] Gilberto Gonzalez-A and Noe Barrera-G, "Quasy Steady State Model Determination using Bond Graph for a Singularly Perturbed LTI System", *16th International Conference on Methods and Models in Automation & Robotics*, Miedzyzdroje Poland, pp.194-199, August 2011.
- [13] J. Aaron Padilla and Gilberto Gonzalez-A, "A Quasi-Steady State Model of a Singular Perturbed Synchronous Machine Modelled by Bond Graphs", *Proceedings of the IASTED International Conference Modelling, Identification and Control (MIC 2013)*, February 11-13, 2013 Innsbruck Austria, pp. 318-324.
- [14] Dean C. Karnopp, Donald L. Margolis and Ronald C. Rosenberg, *System Dynamics Modeling and Simulation of Mechatronic Systems*, Wiley, John & Sons, 2000.
- [15] C. Sueur and G. Dauphin-Tanguy, "Bond graph approach for structural analysis of MIMO linear systems", *Journal of the Franklin Institute*, Vol. 328, No. 1, pp. 55-70, 1991.
- [16] G. Dauphin-Tanguy and P. Borne, Order Reduction of Multi-time Scale Systems Using Bond Graphs, the Reciprocal System and Singular Perturbation Method, *Journal of the Franklin Institute*, Vol. 319, No. 1/2, pp. 157-171, 1985.