



UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN  
NICOLÁS DE HIDALGO

FACULTAD DE INGENIERÍA ELÉCTRICA  
DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO

MODELADO Y SIMULACIÓN DE CIRCUITOS  
ELÉCTRICOS MODERNOS EN EL MARCO DE  
REFERENCIA COMPLEMENTARIO

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE

MAESTRO EN CIENCIAS EN INGENIERÍA ELÉCTRICA

PRESENTA

ING. FRANCISCO LÓPEZ CASTILLO

DIRECTOR DE TESIS

DR. J. JESÚS RICO MELGOZA

MORELIA, MICHOACÁN, AGOSTO DEL 2015.





# Agradecimientos

*A mi familia, por su cariño y apoyo incondicional.*

*A mis amigos, especialmente a mis compañeros del Posgrado.*

*A mis maestros.*

*A Edith, por tu apoyo incondicional.*

*A la División de Estudios de Posgrado de la Facultad de Ingeniería Eléctrica.*

*A la Facultad de Ingeniería Eléctrica (FIE).*

*A la Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo.*

*A mi asesor, el dr. J. Jesús Rico Melgoza, por sus consejos, enseñanzas y motivación  
hacia el trabajo.*

*Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT).*



# Dedicatoria

*A mis padres, que sin su cariño y esfuerzo nada me hubiera sido posible.*

*A mis hermanas.*

*A Dios.*



# Resumen

En esta tesis se hace uso del marco de referencia complementario (MRC) para modelar y representar una gran variedad de circuitos eléctricos no lineales existentes en los sistemas eléctricos. Como se conoce, un circuito eléctrico no lineal es una red que cuenta con componentes no lineales como lo son elementos de conmutación (diodos, interruptores, tiristores), transformadores e inductores saturables, resistores no lineales y en general componentes que presentan una característica voltaje-corriente no lineal. En este ámbito, el marco de referencia complementario surge como un esquema de modelado reciente que ha sido propuesto para representar dichos circuitos no lineales mediante la formulación de los denominados sistemas lineales complementarios (SLCs), los cuales linealizan y formulan el problema no lineal mediante un conjunto de ecuaciones álgebra diferenciales con restricciones de complementariedad. En este sentido, el modelado mediante SLCs consta de la interconexión de dos subsistemas principales: un modelo dinámico que incluye la dinámica continua del sistema y un modelo complementario que mediante restricciones complementarias modela directamente las características no lineales de los componentes mediante funciones lineales por segmentos, incluyendo implícitamente los instantes de conmutación de circuitos conmutados, evitando el problema de interconmutación. Además, la representación en SLCs permite el cálculo transitorio y de estado estable de los circuitos no lineales de una manera directa sin procesos iterativos, y en particular para el cálculo de estado estable se presenta la ventaja del no requerimiento previo de una condición inicial, lo cual es novedoso en el análisis de circuitos no lineales. De esta forma, en este trabajo se modelan y simulan los sistemas lineales complementarios (SLCs) de diversos circuitos eléctricos no lineales, como lo son los convertidores CD/CD: elevador, reductor, reductor-elevador y el convertidor Cuk; todos con lazo de control PI. Asimismo, se modelan el rectificador trifásico controlado (RTC) y el dispositivo *FACT FC-TCR*, ambos con control PI, así como un inversor monofásico *PWM* conectado a la red eléctrica y un transformador no lineal.

**Palabras Clave:** Modelado, Circuitos No lineales, Marco Complementario.



# Abstract

In this thesis, the complementarity framework (CF) is used to model and represent several non-linear electrical circuits contained in electrical systems. As it is known, a non-linear electrical circuit is a network which contains non-linear components as switched elements (diodes, switches, thyristors), saturable transformers and inductors, non-linear resistors and in general components which exhibit a non-linear voltage-current characteristic. In this field, the complementarity framework is a recently proposed scheme for modeling these non-linear circuits by means of the formulation of linear complementarity systems (LCSs), which linearize and formulate the non-linear problem by means of a set of differential algebraic equations subject complementarity constraints. On this way, LCSs are composed of two main interconnected subsystems: a dynamical model which includes the continuous dynamic of a system, and a complementarity model which by means of complementarity constraints models directly the non-linear characteristic of the components through piecewise linear functions, including implicitly the switching instants of switched circuits, avoiding the inter-commutation problem. Also, the representation in LCSs allows the solution of transient and steady state of non-linear circuits through a direct way without iterative processes, and particularly the steady state solution presents the advantage of no previous requirement of an initial condition, which is a goal in non-linear circuits analysis. In this manner, in this work the linear complementarity systems (LCSs) of several non-linear electrical circuits are modeled and simulated, such as the DC/DC converters: boost, buck, buck-boost and Cuk converter; all of them with PI control. Also, the LCSs of the controlled three-phase rectifier and FACT controller FC-TCR are modeled and simulated, both with PI control, as well as a single-phase inverter connected to electrical network and a non-linear transformer.



# Índice general

Agradecimientos	III
Dedicatoria	v
Resumen	vii
Abstract	ix
Índice de figuras	xviii
Índice de tablas	xix
Lista de símbolos y abreviaturas	xxi
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Revisión del Estado del arte . . . . .	2
1.1.1. Cálculo Transitorio . . . . .	2
1.1.2. Cálculo de Estado Estable . . . . .	4
1.1.3. Marco de Referencia Complementario . . . . .	5
1.2. Objetivo . . . . .	8
1.3. Justificación . . . . .	9
1.4. Aportaciones . . . . .	9
1.5. Descripción de la Tesis . . . . .	10
1.6. Publicaciones . . . . .	11
<b>2. Sistemas Lineales Complementarios</b>	<b>13</b>
2.1. Introducción . . . . .	13
2.2. Formulación de los Sistemas Lineales Complementarios . . . . .	14
2.3. El Problema Lineal Complementario . . . . .	16
2.4. Algoritmos de Solución de un Problema Lineal Complementario . . . . .	17

2.4.1.	Programación Cuadrática . . . . .	17
2.4.2.	Métodos de Pivoteo . . . . .	18
2.4.3.	Métodos Iterativos . . . . .	20
2.5.	Solución Transitoria de los SLCs . . . . .	21
2.6.	Solución de Estado Estable de los SLCs . . . . .	22
2.6.1.	Formulación Complementaria Clásica . . . . .	22
2.6.2.	Formulación Complementaria Mezclada . . . . .	24
2.7.	Conclusiones . . . . .	25
<b>3.</b>	<b>Modelado de Circuitos y Componentes en el Formato de SLCs</b>	<b>27</b>
3.1.	Introducción . . . . .	27
3.2.	Modelado de Circuitos Eléctricos en SLCs . . . . .	28
3.2.1.	Teoría de Árboles y Co-árboles; Aplicación al Análisis en Variables de Estado . . . . .	29
3.2.2.	Ejemplo Ilustrativo; Modelado Dinámico del Convertidor Elevador	31
3.3.	Modelos Ideales de Dispositivos Electrónicos . . . . .	34
3.3.1.	Dispositivos Electrónicos No Controlados . . . . .	34
3.3.2.	Dispositivos Electrónicos Controlados . . . . .	36
3.4.	Funciones Lineales por Segmentos No Decrecientes . . . . .	43
3.4.1.	Funciones Convexas . . . . .	44
3.4.2.	Funciones Cóncavas . . . . .	46
3.5.	Conclusiones . . . . .	50
<b>4.</b>	<b>Modelado y Simulación de Convertidores CD/CD</b>	<b>51</b>
4.1.	Convertidor Elevador . . . . .	51
4.1.1.	Modelado del Convertidor Elevador en Lazo Abierto . . . . .	52
4.1.2.	Simulación en Lazo Abierto . . . . .	55
4.1.3.	Modelado del Convertidor Elevador con Control PI . . . . .	58
4.1.4.	Simulación con Control de Voltaje . . . . .	60
4.2.	Convertidor Reductor . . . . .	62
4.2.1.	Modelado del Convertidor Reductor con Control PI . . . . .	63
4.2.2.	Simulación con Control de Voltaje . . . . .	65
4.3.	Convertidor Reductor-Elevador . . . . .	67
4.3.1.	Modelado del Convertidor Reductor-Elevador con Control PI . . . . .	68
4.3.2.	Simulación con Control de Voltaje; Operación Reductora . . . . .	69
4.3.3.	Simulación con Control de Voltaje; Operación Elevadora . . . . .	71
4.4.	Convertidor Cuk . . . . .	73

4.4.1.	Modelado del Convertidor Cuk con Control PI . . . . .	74
4.4.2.	Simulación con Control de Voltaje; Operación Reductora . . . . .	75
4.4.3.	Simulación con Control de Voltaje; Operación Elevadora . . . . .	78
4.4.4.	Análisis Armónico de la Corriente de Entrada del Convertidor Cuk	79
4.5.	Conclusiones . . . . .	80
<b>5.</b>	<b>Aplicaciones a Componentes de Sistemas Eléctricos de Potencia</b>	<b>83</b>
5.1.	Rectificador Trifásico Controlado . . . . .	83
5.1.1.	Modelado del Rectificador Trifásico Controlado con Control PI .	84
5.1.2.	Simulación con Control de Voltaje . . . . .	86
5.1.3.	Modelado de un Controlador de Velocidad de Motor de CD . . . . .	89
5.1.4.	Simulación del Controlador de Velocidad de Motor de CD . . . . .	91
5.2.	FC-TCR . . . . .	94
5.2.1.	Modelado del FC-TCR con Control PI . . . . .	95
5.2.2.	Simulación con Control de Voltaje de CA . . . . .	97
5.3.	Inversor Monofásico Conectado a la Red Eléctrica . . . . .	102
5.3.1.	Conmutación PWM Bipolar . . . . .	103
5.3.2.	Diseño del Filtro LCL . . . . .	104
5.3.3.	Ecuaciones de Flujos de Potencia . . . . .	105
5.3.4.	Modelado del Inversor Monofásico . . . . .	105
5.3.5.	Simulación del Inversor Monofásico . . . . .	106
5.4.	Transformador No Lineal . . . . .	110
5.4.1.	Modelado del Transformador No Lineal . . . . .	111
5.4.2.	Simulación del Transformador No lineal . . . . .	115
5.5.	Conclusiones . . . . .	117
<b>6.</b>	<b>Conclusiones y Trabajos Futuros</b>	<b>119</b>
6.1.	Conclusiones Generales . . . . .	119
6.2.	Trabajos Futuros . . . . .	120
<b>A.</b>	<b>Control <i>PWM</i> de Convertidores CD/CD</b>	<b>123</b>
<b>B.</b>	<b>Sistemas Lineales Complementarios de algunos Casos de Estudio</b>	<b>125</b>
B.1.	SLC del Rectificador Trifásico Controlado en Lazo Cerrado . . . . .	125
B.2.	SLC del RTC con Control de Motor de CD . . . . .	129
B.3.	SLC del Inversor Monofásico . . . . .	134

**Bibliografía**

**140**

# Índice de figuras

1.1. Localización de los sistemas lineales complementarios en el modelado de circuitos eléctricos. . . . .	6
2.1. Composición propia de un sistema lineal complementario. . . . .	14
3.1. Topología del convertidor elevador. . . . .	31
3.2. Árbol y co-árbol del convertidor elevador. Ejemplo ilustrativo . . . . .	31
3.3. Formación de lazos del convertidor elevador. . . . .	32
3.4. Formación de conjuntos cortados del convertidor elevador. . . . .	32
3.5. Lazos y conjuntos cortados del convertidor elevador. . . . .	33
3.6. (a) Símbolo del diodo. (b) Característica V-I del diodo ideal. . . . .	35
3.7. Función escalón. . . . .	36
3.8. (a) Símbolo del interruptor unidireccional. (b) Característica $V - I$ del interruptor unidireccional ideal. . . . .	38
3.9. (a) Conjunto antiparalelo interruptor-diodo (b) Característica V-I del conjunto antiparalelo interruptor-diodo. . . . .	40
3.10. (a) Representación del tiristor en el MRC (b) Característica V-I del tiristor ideal. . . . .	42
3.11. Función lineal por segmentos no decreciente. . . . .	43
3.12. (a) Circuito RDF convexo con un punto de quiebre. (b) Característica convexa con un punto de quiebre. . . . .	44
3.13. Árbol y co-árbol del circuito RDF convexo con un punto de quiebre. . . . .	45
3.14. (a) Circuito RDF convexo con múltiples puntos de quiebre. (b) Característica convexa con múltiples puntos de quiebre. . . . .	46
3.15. (a) Circuito RDF cóncavo con un punto de quiebre. (b) Característica cóncava con un punto de quiebre. . . . .	47
3.16. Árbol y co-árbol del circuito RDF cóncavo con un punto de quiebre. . . . .	48

3.17. (a) Circuito RDF cóncavo con múltiples puntos de quiebre. (b) Característica cóncava con múltiples puntos de quiebre. . . . .	49
4.1. Convertidor CD/CD elevador. . . . .	52
4.2. Árbol y co-árbol del convertidor elevador. . . . .	53
4.3. Respuesta transitoria del convertidor elevador en lazo abierto. $i_L(0) = 0A$ . $v_C(0) = 12V$ . . . . .	56
4.4. Estado estable del voltaje de salida del convertidor elevador en lazo abierto.	57
4.5. Estado estable de la corriente $i_L$ del convertidor elevador en lazo abierto.	58
4.6. Convertidor elevador en lazo cerrado. . . . .	59
4.7. Respuesta transitoria del convertidor elevador en lazo cerrado con $v_{ref} = 20V$ . $i_L(0) = 0A$ . $v_C(0) = 15V$ . . . . .	61
4.8. Estado estable del convertidor elevador en lazo cerrado con $v_{ref} = 20V$ .	61
4.9. Convertidor reductor . . . . .	63
4.10. Árbol y co-árbol del convertidor reductor. . . . .	64
4.11. Respuesta transitoria del convertidor reductor en lazo cerrado con $v_{ref} = 8V$ . $i_L(0) = 0A$ . $v_C(0) = 9V$ . . . . .	66
4.12. Estado estable del convertidor reductor en lazo cerrado con $v_{ref} = 8V$ .	66
4.13. Convertidor CD/CD reductor-elevador. . . . .	67
4.14. Árbol y co-árbol del convertidor reductor-elevador. . . . .	68
4.15. Respuesta transitoria del convertidor reductor-elevador en lazo cerrado con $v_{ref} = 8V$ . $i_L(0) = 0A$ . $v_C(0) = 9V$ . . . . .	70
4.16. Estado estable del convertidor reductor-elevador en lazo cerrado con $v_{ref} = 8V$ . . . . .	71
4.17. Respuesta transitoria del convertidor reductor-elevador en lazo cerrado con $V_{ref} = 20V$ . $i_L(0) = 0A$ . $v_C(0) = 12V$ . . . . .	71
4.18. Estado estable del convertidor reductor-elevador en lazo cerrado con $v_{ref} = 20V$ . . . . .	72
4.19. Convertidor CD/CD Cuk. . . . .	73
4.20. Árbol y co-árbol del convertidor Cuk. . . . .	74
4.21. Respuesta transitoria del convertidor Cuk en lazo cerrado con $v_{ref} = 8V$ . (a) Corriente $i_{L_1}$ . (b) Voltaje $v_{C_2}$ . $i_{L_1}(0) = 0A$ . $v_{C_2}(0) = 15V$ . . . . .	77
4.22. Estado estable del convertidor Cuk con $v_{ref} = 8V$ . . . . .	77
4.23. Respuesta transitoria del convertidor Cuk en lazo cerrado con $v_{ref} = 20V$ . (a) Corriente $i_{L_1}$ . (b) Voltaje $v_{C_2}$ . $i_{L_1}(0) = 0A$ . $v_{C_2}(0) = 10V$ . . . . .	78
4.24. Estado estable del convertidor Cuk con $v_{ref} = 20V$ . . . . .	79

4.25. Análisis armónico de la corriente de entrada del convertidor Cuk. . . . .	80
5.1. Rectificador trifásico controlado. . . . .	84
5.2. Árbol y co-árbol del rectificador trifásico controlado. . . . .	85
5.3. Respuesta transitoria de la corriente de línea del RTC con $v_{ref} = 150V$ . . . . .	87
5.4. Respuesta transitoria del voltaje de salida de CD del RTC con $v_{ref} = 150V$ . . . . .	87
5.5. Estado estable del voltaje de salida de CD del RTC con $v_{ref} = 150V$ . . . . .	88
5.6. Análisis armónico del voltaje de salida de CD del RTC con $v_{ref} = 150V$ . . . . .	88
5.7. Estado estable de la corriente de línea del RTC con $v_{ref} = 150V$ . . . . .	89
5.8. Controlador de velocidad de motor de CD basado en RTC. . . . .	90
5.9. (a) Voltaje de referencia. (b) Voltaje de CD en la salida del RTC. . . . .	92
5.10. Respuesta transitoria de la corriente de armadura del motor de CD. . . . .	93
5.11. Respuesta transitoria de la velocidad del motor de CD con $w_{m_{ref}} = 610r.p.m.$ . . . . .	93
5.12. <i>FC-TCR</i> en lazo cerrado. . . . .	94
5.13. Árbol y co-árbol del <i>FC-TCR</i> . . . . .	95
5.14. Respuesta transitoria del voltaje fundamental en el nodo controlado por el <i>FC-TCR</i> . . . . .	98
5.15. (a) Potencia de recepción en el nodo 2. (b) Potencia reactiva consumida por el <i>FC</i> . (c) Potencia reactiva consumida por el <i>TCR</i> . . . . .	99
5.16. Forma de onda de la corriente en el <i>TCR</i> . . . . .	100
5.17. Análisis armónico de la corriente del <i>TCR</i> . . . . .	101
5.18. Forma de onda de voltaje en el nodo controlado por el <i>FC-TCR</i> . . . . .	101
5.19. Inversor monofásico conectado a la red eléctrica. . . . .	102
5.20. (a) Comparación para generar una señal PWM. (b) Señal PWM y su fundamental. . . . .	103
5.21. Árbol y co-árbol del inversor monofásico conectado a la red eléctrica. . . . .	105
5.22. Respuesta transitoria del voltaje en el enlace de CD del inversor monofásico con $v_{ref} = 457V$ . . . . .	107
5.23. Voltaje en el punto de acoplamiento común del inversor monofásico. . . . .	108
5.24. Corriente de entrada a la red eléctrica en el inversor monofásico. . . . .	109
5.25. Potencia suministrada por el inversor a la red eléctrica. . . . .	110
5.26. Transformador no lineal. . . . .	110
5.27. Característica de saturación de un transformador no lineal. . . . .	111
5.28. Árbol y co-árbol del transformador no lineal con operación en vacío. . . . .	111
5.29. Representación lineal por segmentos de un transformador no lineal. . . . .	113

5.30. Aproximación lineal por segmentos de la característica de saturación del transformador de estudio. . . . .	116
5.31. Corriente <i>inrush</i> magnetizante del transformador no lineal. . . . .	116
5.32. Corriente <i>inrush</i> del transformador no lineal en tres intervalos de tiempo.	117
A.1. Control de ancho de pulso. (a) Diagrama de bloques. (b) Comparación de señales. . . . .	123

# Índice de tablas

2.1. Representación canónica en el algoritmo de Lemke. . . . .	19
2.2. Cambio de variable básica en el algoritmo de Lemke. . . . .	19
2.3. Solución del PLC con el algoritmo de Lemke. . . . .	20
4.1. Parámetros eléctricos del convertidor elevador. . . . .	55
4.2. Tiempos de cómputo para la solución del convertidor elevador en lazo abierto. . . . .	58
4.3. Ganancias del controlador PI del convertidor elevador. . . . .	60
4.4. Tiempos de cómputo para la solución del convertidor elevador en lazo cerrado. . . . .	62
4.5. Parámetros del convertidor reductor en lazo cerrado. . . . .	65
4.6. Tiempos de cómputo para la solución del convertidor reductor en lazo cerrado. . . . .	67
4.7. Parámetros del convertidor reductor-elevador en lazo cerrado. . . . .	69
4.8. Tiempos de cómputo para la solución del convertidor reductor-elevador en lazo cerrado. . . . .	73
4.9. Parámetros del convertidor Cuk en lazo cerrado. . . . .	76
4.10. Tiempos de cómputo para la solución del convertidor Cuk en lazo cerrado.	79
5.1. Parámetros del RTC en lazo cerrado. . . . .	86
5.2. Parámetros del motor de CD . . . . .	91
5.3. Parámetros de simulación del <i>FC-TCR</i> . . . . .	98
5.4. Parámetros de simulación del inversor monofásico. . . . .	106
5.5. Parámetros de simulación del transformador no lineal. . . . .	115



# Lista de símbolos y abreviaturas

MRC	Marco de Referencia Complementario
SLC	Sistema Lineal Complementario
PLC	Problema Lineal Complementario
PLCM	Problema Lineal Complementario Mezclado
SEP	Sistema Eléctrico de Potencia
LVK	Ley de Voltaje de Kirchhoff
LCK	Ley de Corriente de Kirchhoff
RDF	Resistencia-Diodo-Fuente
RTC	Rectificador Trifásico Controlado
<i>DE</i>	Dispositivo Electrónico
<i>PWM</i>	Modulación de Ancho de Pulso ( <i>Pulse Width Modulation</i> )
<i>FACTS</i>	Sistemas de Transmisión de Corriente Alterna Flexibles ( <i>Flexible Alternating Current Transmission Systems</i> )
<i>VSC</i>	Convertidor con Fuente de Voltaje ( <i>Voltage Sourced Converter</i> )
<i>UPFC</i>	Controlador de Flujo de Potencia Unificado ( <i>Unified Power Flow Controller</i> )
$(z, w)$	Variables complementarias
$(\lambda, \varphi)$	Variables de entrada y salida del modelo complementario
$\alpha$	Paso de integración
$l$	Lazo
$cc$	Conjunto cortado



# Capítulo 1

## Introducción

En las últimas décadas, la alta penetración de tecnología de electrónica de potencia, y en general la incorporación de una gran variedad de componentes no lineales a los sistemas eléctricos de potencia (SEPs), ha originado una nueva era de transformación en los sistemas eléctricos. La transformación, impulsada principalmente por la incorporación de nuevas configuraciones de electrónica de potencia [Rashid, 1993, Mohan et al., 1995], así como por la integración de los dispositivos *FACTS* [Hingorani and Gyugyi, 2000], ha hecho posible el desarrollo de diversas ventajas técnicas y económicas en la operación de los sistemas eléctricos. En este sentido, la incorporación de nuevas topologías de convertidores de potencia ha hecho posible la conexión segura y confiable de fuentes alternas y renovables de energía, lo cual le ha dado un papel trascendental a este nuevo tipo de tecnología en la operación de los sistemas de potencia modernos. Asimismo, la incorporación de los dispositivos *FACTS* ha posibilitado un control avanzado sobre el flujo de potencia a través de las redes eléctricas, lo cual ha permitido un aumento en la seguridad, confiabilidad, estabilidad y control de los sistemas de potencia. Sin embargo, la inclusión de todo este conjunto de componentes no lineales, aunado a la participación de otras no linealidades como lo son los transformadores e inductores saturables, también ha traído inconvenientes en la operación de los sistemas eléctricos. La principal desventaja es la distorsión armónica generada por estos componentes debido a su comportamiento no lineal y a la operación bajo condición no sinusoidal en la que trabajan [Acha and Madrigal, 2001]. La distorsión armónica generada por estos elementos deforma las formas de onda de voltaje y corriente del SEP, lo cual induce diversos problemas en los sistemas eléctricos, como lo son el mal funcionamiento y deterioro de equipos sensibles a los armónicos, aumento de pérdidas en el sistema de potencia, mala operación de sistemas de protección y control, así como otros problemas. Es por esto que, a partir de los años 80s, se incrementó el interés por modelar estos

componentes y por aproximar modelos adecuados que describan de manera pertinente el comportamiento de estos elementos en los sistemas eléctricos. En este sentido, el marco de referencia complementario (MRC) [Vasca et al., 2009] ha sido recientemente propuesto como un nuevo enfoque de modelado para representar convertidores de potencia y circuitos eléctricos conmutados. Esta perspectiva de modelado presenta algunas ventajas como lo son: el modelado implícito de instantes de conmutación y una formulación matemática que permite la obtención del cálculo transitorio y de estado estable de una manera directa sin procesos iterativos y en especial para el cálculo de estado estable, la posibilidad del no requerimiento previo de una condición inicial, lo cual es novedoso en el análisis de circuitos eléctricos no lineales.

Como se conoce, en los sistemas eléctricos modernos se cuenta con una alta participación de circuitos no lineales, por lo que en esta tesis el término *circuito eléctrico moderno* es simplemente asociado a circuitos eléctricos no lineales que tienen participación en los sistemas eléctricos actuales. De esta forma, en esta tesis se muestra la aplicación del MRC para el modelado de una gran variedad de circuitos eléctricos no lineales que aún no han sido modelados en el MRC, destacando el modelado de una gran variedad de circuitos eléctricos conmutados y proponiendo además la extensión del MRC para el modelado, mediante funciones lineales por segmentos, de componentes no lineales que no precisamente representan elementos conmutados como lo pueden ser, por ejemplo, los transformadores e inductores saturables.

### 1.1. Revisión del Estado del arte

Como se conoce, en el área de sistemas eléctricos existen dos perspectivas de análisis para el estudio de cualquier red eléctrica: análisis de comportamiento transitorio y análisis o cálculo de estado estable. De esta forma, en esta sección se describen algunas generalidades y características de solución de técnicas clásicas en ambas perspectivas de análisis para el estudio de circuitos eléctricos no lineales. Asimismo, se describen generalidades del modelado en el marco de referencia complementario, haciendo hincapié en las ventajas que ofrece esta técnica, y comparando sus características de solución con las técnicas clásicas.

#### 1.1.1. Cálculo Transitorio

En el análisis transitorio, existen diversas técnicas utilizadas para simular el comportamiento de circuitos eléctricos no lineales, entre las que destacan: la solución en el

dominio del tiempo *convencional*, la solución mediante *modelos discretos acompañantes* y la solución mediante *modelos conmutados*.

La solución en el dominio del tiempo *convencional* [Parker and Chua, 1989, Mohan et al., 1994] considera la solución del sistema eléctrico no lineal mediante la formulación de un sistema de ecuaciones diferenciales no lineal. En este sentido, el sistema de ecuaciones diferenciales es resuelto mediante técnicas de integración numérica clásicas, como lo pueden ser la regla trapezoidal o el método de Runge Kutta. La integración numérica implica la solución de un sistema de ecuaciones algebraicas no lineales en cada paso de integración, lo cual regularmente involucra un método iterativo de Newton-Raphson, aumentando considerablemente el tiempo y esfuerzo computacionales. Otra desventaja de este tipo de técnica es la evaluación reiterada de la matriz Jacobiana, la cual debe ser evaluada en múltiples ocasiones en cada paso de integración. Además, en este tipo de solución se requiere la ecuación matemática que describe el comportamiento de los componentes no lineales, lo cual es complicado de describir para algunos elementos de conmutación como lo son diodos, interruptores y tiristores. La solución *convencional* se encuentra normalmente en los denominados *resolvedores de ecuaciones* [Mohan et al., 1995], los cuales obtienen el cálculo requerido por la solución mediante el soporte de funciones y rutinas implementadas en lenguajes de programación (*MATLAB*, *FORTRAN*, *C*, etc), por lo que este tipo de técnica es una herramienta ampliamente utilizada.

Otro tipo de método para el cálculo de la respuesta transitoria es el utilizado en simuladores como *EMTP* [Mayer and Liu, 1995] y *EMTDC* [Manitoba, 2005]. En este tipo de simuladores los componentes lineales y no lineales del sistema eléctrico analizado son formulados mediante *modelos discretos acompañantes* [Chua and Lin, 1975]. En este modelado, las ecuaciones diferenciales de los elementos dinámicos son resueltas mediante la regla de integración trapezoidal, resultando una ecuación de diferencia que puede ser representada mediante un equivalente Norton lineal: un circuito que consta de la conexión paralelo de una resistencia lineal y una fuente de corriente con memoria (que depende del instante de muestreo anterior  $k - 1$ ). A este circuito equivalente Norton se le denomina como *modelo discreto acompañante*. De esta forma, los componentes no lineales son modelados mediante el conjunto paralelo de un *modelo discreto acompañante* y una fuente de corriente de compensación, la cual es calculada punto a punto en base a la característica no lineal del componente. En el caso de los dispositivos de conmutación, en este tipo de soluciones, estos componentes son modelados como resistencias bistables las cuales toman un valor muy pequeño para el caso cerrado (encendido) y un valor muy grande para el caso abierto (apagado). Entre las desventajas de los *modelos discretos acompañantes*, se encuentra la necesidad del cálculo de

los instantes de conmutación para el análisis de circuitos conmutados, requiriendo de una lógica adecuada y de algoritmos de interpolación avanzados para aproximar estos instantes. El cálculo de instantes de conmutación erróneos puede generar problemas de convergencia y errores de exactitud importantes en la solución [Kelper et al., 2002].

Finalmente, otro de los métodos ampliamente utilizado para el cálculo transitorio es el de *modelos conmutados* [Burdio and Martinez, 1995, Shung, 1997, Maksimovic et al., 2001] o espacio de estado conmutado. En este tipo de cálculo, utilizado en simuladores como *SymPowerSystems*, los componentes no lineales son representados mediante sus funciones no lineales características y los dispositivos de conmutación mediante modelos ideales o en su defecto por medio de resistencias biestables. De esta forma, los estados de los dispositivos de conmutación (encendido-apagado) determinan una serie de diferentes modos y topologías del sistema analizado, por lo que dependiendo de las funciones de conmutación y del cálculo de los instantes de conmutación, el modelado discrimina entre diferentes modelos dinámicos no lineales (cada topología y modo representa un modelo dinámico) durante el proceso de integración. La secuencia de modelos dinámicos se encuentra enlazada por medio de las condiciones iniciales y finales respectivas de cada topología, por lo que al igual que en el modelado con *modelos discretos acompañantes*, el cálculo de los instantes de conmutación se vuelve un tema clave para el cómputo adecuado de la solución. En este tipo de técnica también son utilizados los denominados métodos de interpolación para aproximar instantes de conmutación más certeros.

### 1.1.2. Cálculo de Estado Estable

Respecto al análisis de estado estable de circuitos no lineales, el compendio total de técnicas existente en la literatura es muy amplio. Sin embargo, en general puede decirse que todo este conjunto de técnicas, ya sea en el dominio del tiempo, frecuencia o en el dominio híbrido frecuencia-tiempo, transforman el sistema de ecuaciones diferenciales no lineales en un sistema de ecuaciones algebraicas no lineales. En este sentido, el problema algebraico no lineal regularmente requiere un método iterativo de solución. El método iterativo de Newton-Raphson es conocido por ser el método más eficiente y general dada su característica de convergencia cuadrática. Sin embargo, este método también presenta inconvenientes como lo son la evaluación reiterada del Jacobiano y la restricción de convergencia para valores de condición inicial lo suficientemente cercanos a la solución. En general, las técnicas de estado estable están basadas en métodos iterativos de solución y requieren de un valor de condición inicial adecuado. Más aportes sobre las técnicas de estado estable pueden ser revisados en [Medina et al., 2013].

### 1.1.3. Marco de Referencia Complementario

Los sistemas híbridos son una clase de sistemas en los cuales se pueden representar dinámicas continuas y discretas en una forma mezclada [Hemmels, 1999]. En este contexto, los sistemas lineales complementarios (SLCs) son una subclase de los sistemas híbridos en los cuales los eventos continuos y discretos son representados mediante un conjunto de ecuaciones álgebra diferenciales con restricciones de complementariedad [Camlibel et al., 2003, Hemmels, 1999]. En este sentido, los eventos discretos (encendido-apagado) asociados a los dispositivos de conmutación pueden ser incluidos naturalmente mediante la formulación de SLCs.

Los sistemas lineales complementarios representan una extensión dinámica de los denominados problemas lineales complementarios (PLCs) [Cottle et al., 1992, Murty and Tien, 1997], los cuales definen una clase de problemas de desigualdad matemática que está sujeta a restricciones de complementariedad. La restricción de complementariedad clásica indica que un par de variables  $(z, w)$  son complementarias si su producto punto es igual a cero; es decir, si una variable del par  $(z, w)$  tiene valor diferente de cero, la otra variable del conjunto debe ser cero para satisfacer la relación de complementariedad y viceversa. De esta forma, puede verse que la relación complementaria clásica describe de manera natural el comportamiento voltaje-corriente de un interruptor y diodo ideales, en los cuales se presenta un voltaje igual a cero cuando a través de éstos circula una corriente diferente de cero, y viceversa. Este hecho demuestra la relación inherente que existe entre los dispositivos de conmutación y el marco de referencia complementario.

El cálculo transitorio en el marco de referencia complementario está basado en la discretización del SLC que representa al sistema eléctrico analizado. En este sentido, el cálculo de la respuesta transitoria se reduce en resolver un PLC en cada paso de integración discreto [Vasca et al., 2009], lo cual puede realizarse de una manera directa y sin procesos iterativos. Otra ventaja que presenta el modelado en el MRC, es que el modelado en SLCs incluye implícitamente todos los modos y posibles condiciones operativas del sistema analizado, por lo que no se requiere de una lógica adecuada para el cálculo de los instantes de conmutación ni tampoco es necesaria la elección y discriminación entre diferentes modelos dinámicos durante la simulación. De esta forma, el modelado en SLCs permite una representación en espacio de estado única que es válida para todos los modos y posibles condiciones operativas del sistema analizado y que incluye implícitamente el cálculo de los instantes de conmutación, los cuales son formulados internamente mediante restricciones de complementariedad. Otro aspecto importante es que en el MRC también es posible representar características más com-

pletas de componentes no lineales mediante la formulación con funciones lineales por segmentos, las cuales tienen un marco sólido de representación en el MRC y representan una gran herramienta de simplificación para el modelado detallado de una gran variedad de características no lineales en componentes eléctricos [Fujisawa and Kuth, 1972, Stern, 1956].

El cálculo de estado estable en el MRC también sugiere algunas ventajas respecto al cálculo realizado por algunas técnicas clásicas. En este caso, la solución en el MRC está basada en la inclusión de periodicidad y en la discretización del SLC del sistema eléctrico analizado a lo largo de un cierto número de puntos de la solución periódica. Este conjunto de ecuaciones discretas son agrupadas, después de algunas manipulaciones algebraicas, en un único problema lineal complementario, el cual al resolver aproxima la solución de estado estable en todos los puntos de muestreo [Vasca et al., 2009, Vasca et al., 2011]. Las ventajas de este planteamiento en el MRC son que no es necesaria una condición inicial para el cálculo de estado estable y que la solución puede obtenerse de una manera directa (sin procesos iterativos) si se utilizan métodos directos para la solución del PLC. Una de las desventajas quizá, es el manejo de sistemas matriciales de grandes dimensiones cuando el número de puntos de muestreo y variables complementarias es elevado, como suele pasar en estudios que incluyen formulaciones con funciones lineales por segmentos (cada punto de quiebre de la función por segmentos representa el manejo de un par de variables complementarias). Sin embargo, este manejo matricial de grandes dimensiones podría compararse al que se tiene en otras técnicas con la matriz de coeficientes armónicos en el dominio armónico o la matriz exponencial en el método del ciclo límite. La Figura 1.1.3 muestra un mapa conceptual de la revisión que se realizó del estado del arte y la ubicación que podría tener el marco de sistemas lineales complementarios en el modelado de circuitos eléctricos.

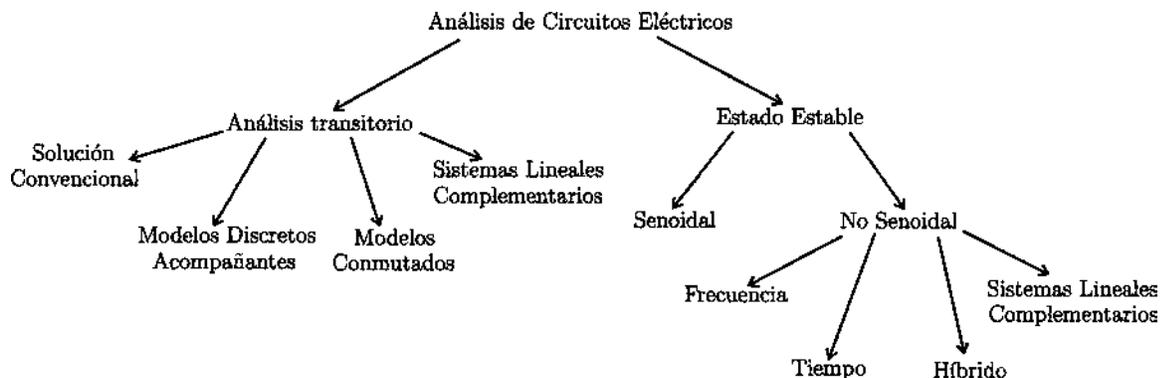


Figura 1.1: Localización de los sistemas lineales complementarios en el modelado de circuitos eléctricos.

Los sistemas lineales complementarios han sido aplicados a sistemas mecánicos, hidráulicos, químicos, biológicos, al diseño de control, entre otras aplicaciones [Brogliato, 2003]. Dentro del estudio de sistemas eléctricos, el marco de referencia complementario fue utilizado por primera vez para el modelado de circuitos lineales con diodos [Hemmels, 1999] y circuitos RDF (circuitos resistencia-diodo-fuente) [Vandenbergue et al., 1989], los cuales pueden ser utilizados para representar funciones lineales por segmentos (*piecewise linear functions*). Posteriormente, en el modelado del MRC se incluyó comportamiento dinámico mediante la formulación de los SLCs en los cuales se incorporó la dinámica híbrida de redes eléctricas conmutadas que incluían inductores y capacitores lineales así como diodos e interruptores ideales [Camilibel et al., 2003, Frasca, 2007]. Estos trabajos fueron los precedentes más importantes de [Vasca et al., 2009], en el cual por primera vez se propuso formalmente al MRC como un nuevo marco de referencia para el modelado de convertidores de potencia y circuitos eléctricos conmutados, incluyendo además un formalismo matemático para representar características más completas de dispositivos electrónicos mediante funciones lineales por segmentos y circuitos RDF. Tiempo después en [Vasca et al., 2011] se presentaron modelos más completos de interruptores, incluyendo el modelo complementario de un interruptor unidireccional ideal y el modelo del conjunto antiparalelo de un interruptor unidireccional y un diodo ideal. Posteriormente, en [Rico et al., 2012, Suárez, 2012] se mostró un mecanismo automatizado para el modelado de circuitos lineales con diodos e interruptores ideales, así como el modelado de convertidores de potencia más completos como el rectificador trifásico no controlado y otros convertidores de potencia de CD/CD controlados. Finalmente, en [Sessa et al., 2014] se mostró un modelado complementario para representar sistemas eléctricos conmutados controlados, en particular se presenta una perspectiva de análisis basada en PLCs mezclados para el cálculo de estado estable de sistemas en lazo cerrado, de los cuales hasta ese entonces la literatura complementaria existente no había podido aproximar su solución.

En este contexto, en este trabajo se presenta la aplicación del MRC para el modelado de sistemas que aún no han sido modelados en el marco de referencia complementario como lo son los convertidores CD/CD reductor-elevador y el convertidor Cuk, el rectificador trifásico controlado y su aplicación al control de motores, el primer dispositivo *FACT* modelado en el MRC como lo es el *FC-TCR*, así como el modelado de un inversor monofásico basado en lógica de conmutación PWM, que representa la topología más utilizada para la conexión de paneles fotovoltaicos. Otro aspecto importante del presente trabajo es que la mayoría de los sistemas simulados presentan algún tipo de control, lo cual muestra la compaginación existente entre el marco de referencia complementario

y la teoría de control. Además, también se presenta un aporte en cuanto al modelado de dispositivos electrónicos, ya que se propone, bajo ciertas consideraciones, la extensión del modelo del interruptor ideal para modelar un tiristor ideal, el cual aún no ha sido modelado en la literatura complementaria. Finalmente se propone el modelado de otras no linealidades existentes en los sistemas eléctricos mediante la aproximación con funciones lineales por segmentos. En este sentido, se presenta la primera aplicación en el MRC para el modelado de una característica no lineal que no representa elementos conmutados, como lo es la característica de saturación de un transformador no lineal.

### 1.2. Objetivo

- El objetivo principal de esta tesis es mostrar la potencialidad que tiene el marco de referencia complementario en lo que respecta al modelado de circuitos eléctricos no lineales. En este sentido, se busca modelar una gran variedad de circuitos eléctricos no lineales existentes en los sistemas eléctricos actuales que aún no han sido modelados en el MRC.
- Proponer la extensión del MRC para el modelado, mediante funciones lineales por segmentos, de componentes no lineales que no precisamente forman parte de elementos conmutados como lo pueden ser, por ejemplo, los transformadores e inductores saturables.
- Ilustrar que el comportamiento transitorio y de estado estable de diversos circuitos eléctricos no lineales puede ser obtenido vía el formato de SLCs y que dichas soluciones pueden ser calculadas de manera directa sin procesos iterativos. Además, ilustrar que en el caso de cálculo de estado estable, el MRC también permite el no requerimiento previo de una condición inicial.
- Ejemplificar que la formación de los SLCs regularmente puede realizarse de una forma metódica y bien automatizada considerando la teoría clásica de análisis de circuitos. En este sentido, mostrar que los SLCs pueden ser obtenidos utilizando la teoría de árboles y el análisis en variables de estado.
- Mostrar que es posible el modelado en el MRC de sistemas eléctricos controlados y de sistemas que presentan variables dinámicas que no precisamente representan comportamientos eléctricos como lo son la dinámica de otros sistemas físicos.

### 1.3. Justificación

La distorsión armónica generada en los sistemas eléctricos por la incorporación creciente de una gran variedad de componentes no lineales ha motivado en las últimas décadas un amplio interés por encontrar modelos adecuados que describan de manera pertinente el comportamiento de estos elementos en los sistemas eléctricos. En la actualidad, existen diversas técnicas que han mostrado ser herramientas útiles y eficaces en el modelado de este tipo de componentes. Sin embargo, lo cierto es que aún estas técnicas presentan algunos inconvenientes, por lo que la exploración de técnicas de simulación más precisas es todavía un tema de interés. En este sentido, el marco de referencia complementario surge como una nueva perspectiva de modelado que sugiere algunas ventajas y aspectos importantes dentro del modelado de circuitos eléctricos no lineales, entre las que se encuentran: una perspectiva de modelado que permite la representación directa de las características no lineales de los componentes, incluyendo para el análisis de circuitos conmutados, el cálculo implícito de los instantes de conmutación. Además, las soluciones transitorias y de estado estable pueden ser calculadas de una forma directa sin procesos iterativos y en particular, para el cálculo de estado estable, también se presenta la ventaja del no requerimiento previo de una condición inicial. Este aspecto podría representar una herramienta muy útil para el cálculo de estado estable de circuitos eléctricos que presentan una alta penetración de componentes no lineales, en los cuales especificar una condición inicial para procesos de solución iterativos representa una tarea complicada. En este sentido, el MRC podría representar una técnica de modelado interesante para aplicaciones a sistemas eléctricos de potencia.

### 1.4. Aportaciones

El principal aporte de esta tesis es el de promover una reciente perspectiva de modelado, como lo es el marco de referencia complementario, para representar una gran variedad de circuitos eléctricos no lineales existentes en los sistemas eléctricos. Además, también se propone la extensión del MRC para el modelado, mediante funciones lineales por segmentos, de características no lineales que no precisamente representan elementos de conmutación, como lo pueden ser los transformadores e inductores saturables.

Otro aporte importante es el de presentar lineamientos generales para la obtención de los SLCs de circuitos no lineales mediante la aplicación de teoría clásica de circuitos como lo son la teoría de árboles y el análisis en variables de estado. Este mecanismo de formulación podría servir para el desarrollo futuro de un mecanismo automatizado

para la obtención de los SLCs y de un software de simulación basado en el MRC.

En lo que respecta al modelado de dispositivos electrónicos en el MRC, en la presente tesis también se propone un modelado complementario para tiristores, los cuales aún no han sido modelados ni simulados en la literatura complementaria. En este sentido, también se muestran las primeras aplicaciones y simulaciones de circuitos eléctricos conmutados con tiristores.

Además, se presentan los modelos complementarios de una gran variedad de circuitos eléctricos no lineales que aún no han sido modelados en el MRC como lo son: los SLCs de los convertidores reductor-elevador y convertidor Cuk, así como los sistemas lineales complementarios del rectificador trifásico controlado, del dispositivo *FACT FC-TCR*, el cual representa el primer controlador *FACT* modelado en el MRC, así como el modelado de un inversor monofásico basado en lógica de conmutación *PWM* y un transformador no lineal. Todas estas aplicaciones, a excepción del transformador no lineal, presentan algoritmos de control, lo cual representa un marco de referencia importante para el análisis y diseño de sistemas de control en el MRC.

## 1.5. Descripción de la Tesis

En el Capítulo 1 se presenta una introducción del presente trabajo. Se describe de manera general el estado del arte en cuanto al modelado de circuitos no lineales y se presenta la literatura existente en el MRC para el modelado de sistemas eléctricos. Se plantean los objetivos, la justificación, las aportaciones y se presentan las publicaciones que se realizaron durante el presente trabajo.

En el Capítulo 2 se presenta el marco teórico que envuelve a los denominados sistemas lineales complementarios. Se muestra el planteamiento, la formulación y algoritmos de solución de la base matemática en la cual se fundamentan los SLCs, el denominado problema lineal complementario. Además, se describen y desarrollan las técnicas de solución para obtener el cálculo transitorio y de estado estable de los SLCs.

En el Capítulo 3 se describe la teoría que envuelve el modelado en SLCs de sistemas eléctricos no lineales en base a la teoría de árboles y al análisis en variables de estado. Se presentan y describen los modelos complementarios de dispositivos electrónicos controlados y no controlados, así como el marco complementario que sirve para representar características no lineales mediante funciones lineales por segmentos no decrecientes.

En el Capítulo 4 se muestra la aplicación del marco de referencia complementario en el modelado de algunos convertidores CD/CD controlados. Se presentan los SLCs con lazo de control PI de los convertidores elevador, reductor, reductor-elevador y del convertidor Cuk. Se describen las ecuaciones características de voltaje de salida y de rizado de estos convertidores, así como algunas características para el diseño de filtros. Se calculan las respuestas transitorias y de estado estable de estos convertidores en base a los SLCs y se comparan y validan los resultados obtenidos con los calculados mediante *SymPowerSystems*.

En el Capítulo 5 se muestra la aplicación del marco de referencia complementario para el modelado de circuitos eléctricos no lineales con aplicaciones a sistemas eléctricos de potencia, como lo son: un rectificador trifásico controlado con control PI y su aplicación al control de motores de CD, un dispositivo *FACT*: el *FC-TCR* con lazo de control PI, un inversor monofásico conectado a la red eléctrica y un transformador no lineal. Se simulan los SLCs de estos convertidores y circuitos no lineales en diferentes escenarios de operación y se analizan y validan los resultados a través de respuestas típicas y análisis armónicos.

En el Capítulo 6 se presentan conclusiones generales y trabajos futuros.

## 1.6. Publicaciones

1. López F., Rico J. "Modelling and analysis of switched networks as mixed lineal complementarity systems". *Power, Electronics and Computing (ROPEC), 2014*, Ixtapa Guerrero, México, del 5 al 7 de noviembre del 2014.



# Capítulo 2

## Sistemas Lineales Complementarios

En este capítulo se presentan y describen las bases teórico matemáticas de los sistemas lineales complementarios (SLCs). Se muestra la formación y composición propia de un SLC en base a dos subsistemas claves: un modelo dinámico que describe la característica continua de un sistema y un modelo complementario que describe la dinámica discreta del sistema. Los SLCs son una extensión dinámica del denominado problema lineal complementario (PLC), que representa la base matemática en la que se fundamentan los SLCs. En este sentido, se presentan preliminares, fundamentos y algunos algoritmos de solución de los PLCs, así como su extensión dinámica para la formulación de los SLCs. Finalmente, se describen algunas técnicas que sirven para simular y computarizar el comportamiento transitorio y de estado estable de los SLCs.

### 2.1. Introducción

Los sistemas lineales complementarios (SLCs) son una clase especial de los denominados sistemas dinámicos híbridos, los cuales incorporan dinámicas de comportamiento continuo y discreto en un sistema mezclado [Hemmels, 1999]. Los sistemas híbridos han sido ampliamente utilizados para modelar fenómenos en diversas áreas, como lo son el área de mecánica, hidráulica, económica, biológica, diseño de control, así como en el estudio de redes eléctricas con elementos de conmutación, entre otras aplicaciones [Brogliato, 2003].

Los sistemas lineales complementarios incorporan dinámicas continuas y discretas en una forma mezclada por medio de un sistema de ecuaciones álgebra diferencial con restricciones de complementariedad, el cual es formulado por la interconexión de dos subsistemas principales: un modelo dinámico lineal que describe la naturaleza continua del sistema y un modelo complementario lineal que incorpora la dinámica discreta del

sistema, tal y como se muestra en la Figura 2.1. De esta forma, el modelo complementario del SLC puede ser utilizado para representar comportamientos no lineales en sistemas eléctricos mediante la inclusión de eventos discretos.

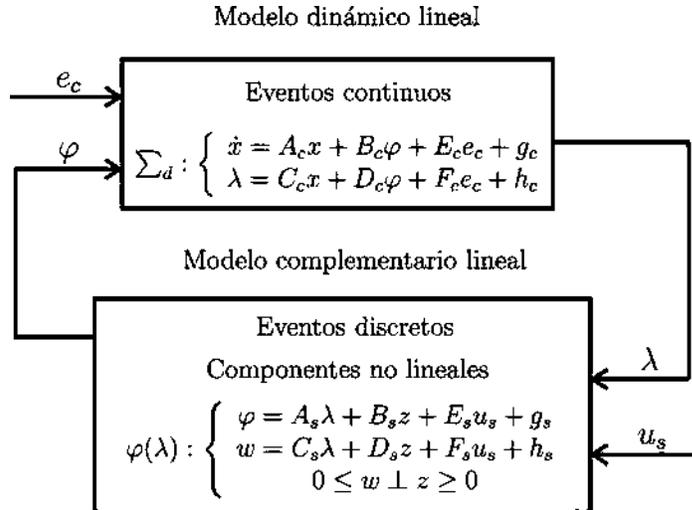


Figura 2.1: Composición propia de un sistema lineal complementario.

## 2.2. Formulación de los Sistemas Lineales Complementarios

Los sistemas lineales complementarios como se mencionó anteriormente, están compuestos por dos subsistemas principales: un modelo dinámico continuo y un modelo complementario con eventos discretos. El modelo dinámico puede definirse formalmente, tal y como se describió en la Figura 2.1, mediante:

$$\dot{x} = A_c x + B_c \varphi + E_c e_c + g_c \quad (2.1a)$$

$$\lambda = C_c x + D_c \varphi + F_c e_c + h_c \quad (2.1b)$$

donde  $x \in \mathfrak{R}^{N_x}$  representa el vector de estado,  $e_c \in \mathfrak{R}^{N_{e_c}}$  el vector de entradas externas del modelo dinámico y  $(\lambda, \varphi) \in \mathfrak{R}^{N_c}$  las variables de salida y entrada respectivas del modelo complementario. Donde  $N_x$  representa el número total de variables dinámicas,  $N_{e_c}$  el número total de entradas exógenas al modelo dinámico y  $N_c$  el número total de componentes y sistemas no lineales modelados en el sistema eléctrico analizado. Además,  $A_c, B_c, C_c, D_c, E_c, F_c$  son matrices constantes de dimensiones adecuadas y  $g_c, h_c$  representan vectores constantes que definen valores fijos resultantes en la formulación del

SLC, como lo pueden ser quizá fuentes de corriente y voltaje constantes fijas.

El modelo lineal complementario puede definirse formalmente mediante:

$$\varphi = A_s \lambda + B_s z + E_s u_s + g_s \quad (2.2a)$$

$$w = C_s \lambda + D_s z + F_s u_s + h_s \quad (2.2b)$$

$$0 \leq w \perp z \geq 0 \quad (2.2c)$$

donde  $(z, w) \in \mathfrak{R}^{N_z}$  representa el número total de variables complementarias del SLC y  $u_s \in \mathfrak{R}^{N_{u_s}}$  el vector de entradas externas del modelo lineal complementario. En el análisis de sistemas eléctricos,  $u_s$  generalmente representa señales de control y de referencia de los componentes no lineales. Asimismo,  $A_s, B_s, C_s, D_s, E_s, F_s$  son matrices constantes de dimensiones adecuadas y  $g_s, h_s$  vectores con valores constantes resultantes de la formulación del modelo complementario. Además, la expresión (2.2c) con  $0 \leq w \perp z \geq 0$  representa la restricción de complementariedad clásica, la cual indica que todos los elementos de las vectores  $(z, w)$  deben ser no negativos (positivos o cero) y que entre las variables  $(z, w)$  existe una relación de complementariedad, denotada por el símbolo  $\perp$ , la cual indica que el producto punto entre  $z$  y  $w$  debe ser cero, es decir:  $z_1 \cdot w_1 = 0, z_2 \cdot w_2 = 0, \dots, z_{N_z} \cdot w_{N_z} = 0$ . De esta forma puede verse que cuando una de las variables del conjunto  $(z_i, w_i)$  presenta un valor positivo, la otra variable debe ser cero para satisfacer la relación de complementariedad. Además, ambas variables pueden ser cero en el mismo instante.

Después de algunas manipulaciones algebraicas para combinar los modelos dinámico y complementario (2.1) y (2.2) respectivamente en un solo sistema, puede definirse el siguiente sistema lineal complementario reducido:

$$\dot{x} = Ax + Bz + Ee + g \quad (2.3a)$$

$$w = Cx + Dz + Fe + h \quad (2.3b)$$

$$0 \leq w \perp z \geq 0 \quad (2.3c)$$

con  $e = \text{col}[e_c, u_s] \in \mathfrak{R}^{N_e}$  representando al vector con el número total de entradas externas al sistema con  $N_e = N_{e_c} + N_{u_s}$  y con las matrices  $A, B, C, D, E, F, g, h$  definidas mediante:

$$A = A_c + B_c(I - A_s D_c)^{-1} A_s C_c \quad (2.4a)$$

$$B = B_c(I - A_s D_c)^{-1} B_s \quad (2.4b)$$

$$E = \left[ B_c(I - A_s D_c)^{-1} A_s F_c + E_c, \quad B_c(I - A_s D_c)^{-1} E_s \right] \quad (2.4c)$$

$$g = B_c(I - A_s D_c)^{-1} (A_s h_c + g_s) + g_c \quad (2.4d)$$

$$C = C_s(C_c + D_c(I - A_s D_c)^{-1}) A_s C_c \quad (2.4e)$$

$$D = C_s(D_c(I - A_s D_c)^{-1} B_s) + D_s \quad (2.4f)$$

$$F = \left[ C_s(D_c(I - A_s D_c)^{-1} A_s F_c + F_c), \quad C_s(I - A_s D_c)^{-1} E_s + F_s \right] \quad (2.4g)$$

$$h = C_s(D_c(I - A_s D_c)^{-1} (A_s h_c + g_s) + h_c) + h_s \quad (2.4h)$$

donde  $I$  es la matriz identidad de dimensiones adecuadas. Note que en (2.3) se han eliminado las variables  $(\lambda, \varphi)$  del sistema lineal complementario. De esta forma el SLC reducido depende únicamente del vector de estado  $x$ , de las variables complementarias  $(z, w)$  y del vector de entradas externas  $e$ . En este contexto y como herramienta de simplificación, de ahora en adelante también a los sistemas en la forma (2.3) se les denominará simplemente como sistemas lineales complementarios (SLCs).

### 2.3. El Problema Lineal Complementario

El problema lineal complementario (PLC) surge como una particularización del problema lineal complementario mezclado (PLCM). El PLCM, de manera general, consiste en encontrar un vector  $z \in \mathfrak{R}^{N_z}$  tal que, dados un vector  $q \in \mathfrak{R}^{N_z}$ , una matriz  $M \in \mathfrak{R}^{N_z \times N_z}$  y vectores  $l, u \in \mathfrak{R}^{N_z} \cup [\infty, -\infty]^r$ , satisfaga las siguientes condiciones:

$$w - v = Mz + q \quad (2.5a)$$

$$0 \leq w \perp (z - l) \geq 0 \quad (2.5b)$$

$$0 \leq v \perp (u - z) \geq 0 \quad (2.5c)$$

donde  $(w, v) \in \mathfrak{R}^{N_z}$  representan vectores auxiliares. Nótese que las operaciones  $(z - l) \geq 0$  y  $(u - z) \geq 0$  en las expresiones (2.5b) y (2.5c) respectivamente, imponen realmente límites inferior  $l$  y superior  $u$  para  $z$ . En este sentido, en el caso  $l = 0$  y  $u = \infty$ , el PLCM se convierte en un PLC clásico, el cual puede ser definido como sigue: dado un

vector  $q \in \Re^{N_z}$  y una matriz  $M \in \Re^{N_z \times N_z}$ , el PLC clásico consiste en encontrar un vector  $z \in \Re^{N_z}$  tal que:

$$z^T(Mz + q) = 0 \tag{2.6a}$$

$$Mz + q \geq 0 \tag{2.6b}$$

$$z \geq 0 \tag{2.6c}$$

problema que puede ser planteado en la forma compacta:

$$w = Mz + q \tag{2.7a}$$

$$0 \leq w \perp z \geq 0 \tag{2.7b}$$

donde  $(z, w)$ , como se mencionó anteriormente, es una pareja de variables complementarias, por lo que  $z \perp w$  implica  $z^T w = 0$ . De esta forma, cuando una variable de la pareja  $(z_i, w_i)$  tiene un valor positivo, la otra debe ser estrictamente cero para satisfacer la relación de complementariedad. Además, ambas variables pueden ser cero al mismo tiempo. Esta restricción complementaria describe de manera natural el comportamiento voltaje-corriente del diodo e interruptor ideales en los circuitos eléctricos.

La teoría del problema lineal complementario indica que cuando la matriz  $M$  en (2.7a) es definida positiva, el PLC (2.7) asociado tiene una solución  $z$  única. En cambio si la matriz  $M$  es semidefinida positiva, el PLC puede tener más de una solución o no tener solución [Cottle et al., 1992]. En este caso, todos los circuitos no lineales modelados en esta tesis presentan matrices  $M$  definidas positivas, por lo que únicamente se presentan soluciones únicas.

## 2.4. Algoritmos de Solución de un Problema Lineal Complementario

En esta sección se presentan algunos algoritmos de solución que sirven para resolver el problema lineal complementario. En general el PLC puede ser resuelto mediante tres perspectivas de solución: procesos iterativos, métodos de pivoteo y mediante su reformulación en otra clase de problemas como lo es un problema de programación cuadrática.

### 2.4.1. Programación Cuadrática

En este tipo de planteamiento se dice que si el problema lineal complementario (2.7) tiene una matriz  $M$  semidefinida positiva, el PLC puede ser planteado como un

problema de programación cuadrática convexo [Murty and Tien, 1997]:

$$\text{Minimizar } z^T(q + Mz) \tag{2.8a}$$

$$\text{sujeto a : } q + Mz \geq 0 \tag{2.8b}$$

$$z_i \geq 0 \tag{2.8c}$$

Al resolver el problema de programación cuadrática (2.8), si la función objetivo resulta  $z^T(q + Mz) \neq 0$ , se dice que el PLC asociado a este problema no tiene solución. En cambio, si la solución del problema de programación cuadrática presenta una condición de optimalidad con  $z^T(q + Mz) = 0$ , entonces se dice que el valor  $z$  encontrado representa una solución del PLC.

En la actualidad existen diversas metodologías que sirven para resolver los problemas de programación cuadrática [Murty and Tien, 1997]. Dentro de los algoritmos computacionales, algunos de los paquetes más importantes son *findminimum* y *knitro* de *Mathematica*, así como las librerías *quadprog* y *fmincon* de *Matlab*.

### 2.4.2. Métodos de Pivoteo

Los métodos de pivoteo son métodos directos para la solución del problema lineal complementario. Se dice que son directos porque son métodos finitos que no requieren procesos iterativos para la solución de los PLCs. Este tipo de métodos está basado en la técnica de pivoteo de Gauss Jordan, la cual es utilizada en el proceso de solución de los PLCs para la eliminación y descomposición matricial. Dentro de los métodos de pivoteo quizá el método más importante es el algoritmo de Lemke [Lloyd, 2005, Cottle et al., 1992].

#### Algoritmo de Lemke

El algoritmo de Lemke está basado en la inclusión de una variable ficticia  $z_0$  dentro de la formulación clásica de los PLCs (2.7):

$$w = Mz + q + z_0 \tag{2.9a}$$

$$0 \leq w \perp z \geq 0 \tag{2.9b}$$

En esta formulación lo que se busca es, en base a un valor inicial de  $z_0$  y a la aplicación de la eliminación de Gauss Jordan, así como de intercambios entre variables básicas y no básicas, encontrar una solución factible de  $z$  que cumpla con la condición  $z_0 = 0$  (con  $z_0 = 0$  en (2.9a) se tiene la formulación clásica del PLC) y el cumplimiento

estricto de la relación de complementariedad, tal y como se muestra en el siguiente ejemplo:

Considere el PLC asociado a:

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}, \quad q = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

Si se parte de un valor inicial  $z_0 = 1$  y se despeja la  $q$ , se tiene la siguiente representación canónica:

Tabla 2.1: Representación canónica en el algoritmo de Lemke.

Base	$w_1$	$w_2$	$z_1$	$z_2$	$z_0$	$q$
$w_1$	1	0	-2	0	-1	-2
$w_2$	0	1	-4	-2	-1	-1

En la Tabla 2.1 puede verse que el elemento más negativo de la columna  $q$  es el elemento asociado al renglón de  $w_1$ , por lo que la nueva variable básica  $z_0$  será el remplazo en la Base de  $w_1$ . Aplicando eliminación de Gauss Jordan y sustituyendo  $z_0$  se tiene:

Tabla 2.2: Cambio de variable básica en el algoritmo de Lemke.

Base	$w_1$	$w_2$	$z_1$	$z_2$	$z_0$	$q$	cociente
$z_0$	-1	0	<b>2</b>	0	1	2	1
$w_2$	-1	1	-2	-2	0	1	

Ésta aún no es una solución factible, dado que  $z_0 \neq 0$ , por lo que se continua con el intercambio de variables básicas. Puesto que en el paso anterior se sustituyó  $w_1$ , la nueva variable básica debe ser su complemento  $z_1$ . De acuerdo a la regla del mínimo cociente ( $q_i/z_{1_i}$ ) positivo, se tiene que el nuevo pivote se ubica en el renglón de  $z_0$ . De esta forma, intercambiando  $z_1$  por  $z_0$  y realizando eliminación de Gauss se tiene:

Tabla 2.3: Solución del PLC con el algoritmo de Lemke.

Base	$w_1$	$w_2$	$z_1$	$z_2$	$z_0$	$q$
$z_1$	$-\frac{1}{2}$	0	1	0	$\frac{1}{2}$	1
$w_2$	-2	1	0	-2	1	3

Ésta es una solución del PLC dado que  $(z_1 = 1, w_2 = 3)$  es una solución factible, por lo que la solución completa del PLC resulta  $(w_1, w_2, z_1, z_2, z_0) = (0, 3, 1, 0, 0)$ . Note que  $z_0 = 0$ .

Más aportes sobre el algoritmo de Lemke pueden ser encontrados en [Cottle et al., 1992, Murty and Tien, 1997]. Además, en [Fackler and Miranda, 2011] se puede descargar la librería *Lemke* de *Matlab*, que es una de las librerías más completas del algoritmo.

### 2.4.3. Métodos Iterativos

Los métodos iterativos, utilizados principalmente para resolver PLCs de grandes dimensiones, son tan eficientes como cualquier otro tipo de técnica. Estos métodos aproximan la solución del PLC mediante la reformulación del problema lineal complementario en un problema de optimización cuadrática, el cual típicamente es resuelto mediante un método iterativo de Newton Raphson que corrige en cada iteración la dirección de convergencia hacia la solución del PLC. La característica de convergencia cuadrática del método Newton permite que el criterio de convergencia pueda ser alcanzado en unas cuantas iteraciones. Uno de los algoritmos computacionales más eficientes en la implementación de este tipo de técnica es la librería *PATH solver* [Dirske and Ferris, 1995], la cual representa además uno de los algoritmos actuales más destacados, si no es que el más importante, en la solución de los problemas lineales complementarios. Es por esto que, en esta tesis todos los PLCs planteados, para la solución de los diferentes sistemas eléctricos modelados, son resueltos con *PATH solver*.

## 2.5. Solución Transitoria de los SLCs

La solución transitoria de un SLC (2.3) puede ser obtenida utilizando diferentes técnicas de discretización. En este caso, si se utiliza la regla de Euler hacia atrás, el sistema continuo (2.3) puede ser reescrito en la forma discreta:

$$x_k = A_d x_{k-1} + B_d z_k + E_d e_k + g_d \quad (2.11a)$$

$$w_k = C x_k + D z_k + F e_k + h \quad (2.11b)$$

$$0 \leq w_k \perp z_k \geq 0 \quad (2.11c)$$

con

$$A_d = [I - \alpha A]^{-1} \quad (2.12a)$$

$$B_d = [I - \alpha A]^{-1} \alpha B \quad (2.12b)$$

$$E_d = [I - \alpha A]^{-1} \alpha E \quad (2.12c)$$

$$g_d = [I - \alpha A]^{-1} \alpha g \quad (2.12d)$$

donde  $\alpha$  es el periodo de muestreo e  $I$  la matriz identidad de dimensiones adecuadas. Sustituyendo  $x_k$  de (2.11a) en (2.11b) se tiene:

$$w_k = [CB_d + D]z_k + C[A_d x_{k-1} + E_d e_k + g_d] + F e_k + h \quad (2.13)$$

expresión que puede ser reescrita en la forma:

$$w_k = M z_k + q_k \quad (2.14a)$$

$$0 \leq w_k \perp z_k \geq 0 \quad (2.14b)$$

donde

$$M = CB_d + D \quad (2.15a)$$

$$q_k = C[A_d x_{k-1} + E_d e_k + g_d] + F e_k + h. \quad (2.15b)$$

Note en (2.15a) que  $M$  es una matriz constante y que  $q_k$  es un vector que depende de los estados conocidos  $x_{k-1}$  y  $e_k$ . De esta forma, al resolver el PLC (2.14) asociado a  $(M, q_k)$  se obtiene el valor de  $z_k$ , el cual puede utilizarse en (2.11a) para aproximar el valor desconocido de  $x_k$ . De esta forma puede verse que utilizando (2.11) puede simularse el comportamiento transitorio del SLC continuo (2.3) mediante la solución de un problema lineal complementario clásico (2.15) para cada paso de integración.

## 2.6. Solución de Estado Estable de los SLCs

En esta sección se presenta una metodología para calcular el estado estable de los SLCs mediante la formulación de un problema lineal complementario. En este sentido, se presenta la formulación de un PLC clásico para la solución de sistemas en lazo abierto y un PLC mezclado para la solución de sistemas en lazo cerrado, los cuales no pueden ser resueltos mediante PLCs clásicos.

### 2.6.1. Formulación Complementaria Clásica

Para el planteamiento de un PLC clásico, considere la condición de periodicidad de una oscilación de estado estable de tiempo continuo en la cual siempre se cumple que  $x(t+T) = x(t) \forall t$ , donde  $T$  representa el periodo de estado estable del sistema. En el caso del modelo discreto (2.11a), por considerar  $N$  muestras de la solución periódica puede ser definido un periodo de muestreo discreto  $T_N = T/N$  y una condición de periodicidad  $x_k = x_{k+N}$ . Con  $k = 0$  se tiene  $x_0 = x_N$ , por lo que es posible formular el siguiente sistema de ecuaciones a lo largo del periodo  $N$ :

$$x_1 - A_d x_N = B_d z_1 + E_d e_1 + g_d \quad (2.16a)$$

$$x_2 - A_d x_1 = B_d z_2 + E_d e_2 + g_d \quad (2.16b)$$

$$\vdots \quad (2.16c)$$

$$x_N - A_d x_{N-1} = B_d z_N + E_d e_N + g_d \quad (2.16d)$$

Por considerar

$$\bar{x} = \text{col}[x_1, x_2, \dots, x_N] \quad (2.17a)$$

$$\bar{z} = \text{col}[z_1, z_2, \dots, z_N] \quad (2.17b)$$

$$\bar{e} = \text{col}[e_1, e_2, \dots, e_N] \quad (2.17c)$$

con  $\bar{x} \in \mathfrak{R}^{N_x \cdot N}$ ,  $\bar{z} \in \mathfrak{R}^{N_z \cdot N}$  y  $\bar{e} \in \mathfrak{R}^{N_e \cdot N}$ , el sistema (2.16) puede ser reescrito en la forma compacta:

$$\bar{A}\bar{x} = \bar{B}\bar{z} + \bar{E}\bar{e} + \bar{g} \quad (2.18)$$

donde

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} I_{N_x} & 0 & \cdots & 0 & -A_d \\ -A_d & I_{N_x} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -A_d & I_{N_x} \end{bmatrix} \quad (2.19a)$$

$$(2.19b)$$

$$\bar{B} = I_N \otimes B_d \quad (2.19c)$$

$$\bar{E} = I_N \otimes E_d \quad (2.19d)$$

$$\bar{g} = 1_N \otimes g_d \quad (2.19e)$$

con  $\otimes$  siendo el producto Kronecker,  $I_N$  la matriz identidad de dimensión  $N$  y  $1_N = \text{col}[1, 1, \dots, 1_N]$ .

Despejando  $\bar{x}$  en (2.18) resulta:

$$\bar{x} = \bar{A}^{-1}[\bar{B}\bar{z} + \bar{E}\bar{e} + \bar{g}] \quad (2.20)$$

que representa, en caso de ser  $A$  invertible, la única solución de (2.18).

De la misma forma que (2.11a), puede extenderse (2.11b) para la solución de estado estable mediante:

$$\bar{w} = \bar{C}\bar{x} + \bar{D}\bar{z} + \bar{F}\bar{e} + \bar{h} \quad (2.21)$$

con

$$\bar{C} = I_N \otimes C \quad (2.22a)$$

$$\bar{D} = I_N \otimes D \quad (2.22b)$$

$$\bar{F} = I_N \otimes F \quad (2.22c)$$

$$\bar{h} = 1_N \otimes h \quad (2.22d)$$

Al sustituir (2.20) en (2.21) se tiene:

$$\bar{w} = \bar{M}\bar{z} + \bar{q} \quad (2.23a)$$

$$0 \leq \bar{w} \perp \bar{z} \geq 0 \quad (2.23b)$$

donde

$$\bar{M} = \bar{C}\bar{A}^{-1}\bar{B} + \bar{D} \quad (2.24a)$$

$$\bar{q} = [\bar{C}\bar{A}^{-1}\bar{E} + \bar{F}]\bar{e} + \bar{C}\bar{A}^{-1}\bar{g} + \bar{h} \quad (2.24b)$$

De esta forma puede verse que el cálculo de estado estable en el MRC se reduce en resolver un problema lineal complementario clásico en la forma (2.23). En este sentido al resolver (2.23) se obtiene el vector  $\bar{z}$ , el cual puede ser sustituido en (2.20) para el cálculo del vector de estado  $\bar{x}$  a lo largo de toda la solución periódica. De esta manera puede verse que la solución de estado estable del SLC puede obtenerse de una manera directa sin procesos iterativos y sin el requerimiento previo de una condición inicial. Afirmaciones que ejemplifican las bondades que presenta el MRC en el cálculo de estado estable.

### 2.6.2. Formulación Complementaria Mezclada

El PLC mezclado (2.5) representa una formulación adicional para computarizar el cálculo de estado estable de sistemas en los cuales la matriz  $A$  en (2.20) es no invertible (sistemas en lazo cerrado) [Sessa et al., 2014]. Para realizar la formulación del PLCM, considere lo siguiente:

Un problema lineal complementario mezclado (2.5) con límite inferior  $l = -\infty$  y superior  $u = \infty$  se define:

$$w - v = Mz + q \quad (2.25a)$$

$$0 \leq w \perp (z - (-\infty)) \geq 0 \quad (2.25b)$$

$$0 \leq v \perp (\infty - z) \geq 0. \quad (2.25c)$$

En este caso las diferencias  $z - (-\infty)$  y  $\infty - z$  son estrictamente positivas, por lo que de acuerdo a (2.25b) y (2.25c),  $w$  y  $v$  deben ser cero para satisfacer la relación de complementariedad. En este sentido, (2.25a) puede reescribirse:

$$0 = Mz + q. \quad (2.26)$$

Por otro lado, el modelo (2.18) puede ser reescrito en la forma (2.26) mediante:

$$0 = M \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{z} \end{bmatrix} + q \quad (2.27)$$

con

$$M = \begin{bmatrix} -\bar{A} & \bar{B} \end{bmatrix} \quad (2.28a)$$

$$q = \bar{E}\bar{e} + \bar{g}. \quad (2.28b)$$

De esta forma puede verse que la inversión de  $A$  en (2.18) no es requerida si se agrupa (2.27) con (2.21) en un solo problema lineal complementario mezclado, en el cual se fijan límites clásicos inferior y superior ( $l_1 = 0$ ,  $u_1 = \infty$ ) para  $\bar{z}$  y límites especiales ( $l_1 = -\infty$ ,  $u_1 = \infty$ ) para  $\bar{x}$  mediante:

$$z = \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{z} \end{bmatrix} \quad (2.29a)$$

$$M = \begin{bmatrix} -\bar{A} & \bar{B} \\ \bar{C} & \bar{D} \end{bmatrix} \quad (2.29b)$$

$$q = \begin{bmatrix} \bar{E} \\ \bar{F} \end{bmatrix} \bar{e} + \begin{bmatrix} \bar{g} \\ \bar{h} \end{bmatrix} \quad (2.29c)$$

$$l = \begin{bmatrix} -\infty \\ 0 \end{bmatrix} \quad u = \begin{bmatrix} \infty \\ \infty \end{bmatrix} \quad (2.29d)$$

De esta forma, al resolver (2.29), se aproxima al mismo tiempo el vector  $\bar{z}$  y el vector de estado  $\bar{x}$ , los cuales contienen la solución de estado estable del SLC. De esta manera puede verse que la solución de estado estable de los SLCs puede aproximarse mediante la formulación de un problema lineal complementario mezclado.

## 2.7. Conclusiones

En este capítulo se mostró que los sistemas lineales complementarios (SLCs) son una clase de sistemas híbridos en los cuales se pueden representar dinámicas continuas y discretas en un solo sistema complementario mezclado. El problema lineal complementario (PLC) es la base matemática en la cual se fundamentan los SLCs, en el cual la restricción complementaria clásica indica que dos variables no negativas cualesquiera son complementarias si su producto punto es cero, es decir si una variable del par presenta un valor positivo, la otra debe ser cero para satisfacer la relación de complementariedad. Este hecho puede utilizarse para modelar idealmente al diodo y al interruptor unidireccional.

Los SLCs están descritos por medio de un conjunto de ecuaciones álgebra diferenciales con restricciones de complementariedad, en el cual se presentan dos subsistemas

claves: un modelo dinámico que representa la dinámica continua del sistema y un modelo complementario que describe el comportamiento discreto del sistema. En lo que respecta al análisis de sistemas eléctricos, se vislumbró que el modelo complementario puede utilizarse además para modelar comportamientos no lineales en redes eléctricas mediante la inclusión de eventos discretos. De esta manera se presentaron técnicas de simulación de los SLCs que pueden servir para la computarización de la respuesta transitoria y de estado estable de los SLCs. En particular se mostró que tanto la solución transitoria como de estado estable pueden realizarse de una manera directa mediante la formulación de problemas lineales complementarios clásicos y mezclados en cada paso de integración para el transitorio y en un único problema lineal complementario para la solución de estado estable. En este sentido, la solución de estado estable en el MRC presenta algunas ventajas como lo es una formulación matemática que puede resolverse de una manera directa sin procesos iterativos y que no requiere de una condición inicial para la solución, lo cual es algo novedoso en el análisis de circuitos no lineales. Finalmente se mostró una formulación complementaria que puede servir para el cálculo de estado estable de sistemas en lazo cerrado, los cuales no pueden resolverse mediante un PLC clásico y son formulados por medio de un problema lineal complementario mezclado.

# Capítulo 3

## Modelado de Circuitos y Componentes en el Formato de SLCs

En este capítulo se presenta el marco teórico que envuelve al modelado de circuitos y componentes no lineales en el formato de sistemas lineales complementarios (SLCs). En este sentido, se muestra que la obtención de los SLCs puede realizarse utilizando técnicas clásicas de análisis de circuitos como lo son la teoría de árboles y el análisis en variables de estado. De esta forma, se presentan y describen algunos lineamientos generales que pueden servir para la formulación automatizada de los SLCs. Asimismo, se presentan los modelos complementarios de los dispositivos de conmutación más importantes en los sistemas eléctricos como lo son diodos, interruptores y tiristores. Finalmente, se presenta un formalismo complementario que puede servir para representar características y funciones no lineales más completas de sistemas y componentes eléctricos mediante la aproximación con funciones lineales por segmentos no decrecientes, las cuales tienen un marco sólido de representación en el MRC.

### 3.1. Introducción

Como se conoce, en la actualidad se cuenta con una alta participación de circuitos eléctricos no lineales. En este sentido, en esta tesis, el término *circuito eléctrico moderno* es utilizado para referirse a cualquier no linealidad presente en los sistemas eléctricos actuales, como lo pueden ser convertidores de electrónica de potencia, circuitos eléctricos conmutados, transformadores e inductores saturables, entre otros elementos.

En materia de modelado, recientemente ha sido propuesto un nuevo marco de referencia para modelar convertidores de potencia y circuitos eléctricos conmutados, el denominado marco de referencia complementario (MRC) [Vasca et al., 2009, Camlibel et al., 2003]. En este esquema de modelado se propone que el comportamiento no lineal de los elementos conmutados sea formulado mediante los denominados sistemas lineales complementarios (SLCs), los cuales, como se describió en el Capítulo 2, están compuestos de dos subsistemas principales: un modelo dinámico que incorpora el comportamiento continuo de un sistema y un modelo complementario que describe la dinámica discreta del sistema. En este sentido, el comportamiento no lineal de los elementos de conmutación es incluido mediante eventos discretos en el modelo lineal complementario del SLC, tal y como se mostró en la Figura 2.1. Asimismo, en esta tesis se propone la extensión del MRC para el modelado de otros componentes no lineales no conmutados, como lo pueden ser los transformadores e inductores saturables, mediante la representación en el modelo complementario de funciones lineales por segmentos no decrecientes, las cuales representan una buena herramienta de modelado de diversos componentes no lineales.

El marco de referencia complementario representa un formalismo natural para la representación de circuitos eléctricos no lineales. En este sentido, el vector  $e$  del SLC (2.3) sirve para representar las diferentes variables de entrada al circuito eléctrico, como lo pueden ser fuentes de voltaje y corriente independientes, señales de control de elementos conmutados, señales de referencia de controladores y en general cualquier variable de entrada externa. Asimismo, el vector  $x$  representa el vector de estado del circuito, en el cual pueden representarse la dinámica de inductores, capacitores, controladores, así como las ecuaciones diferenciales de otros sistemas físicos. En cuanto a las variables  $(\lambda, \varphi)$  del modelo lineal complementario (2.2), estas generalmente describen las variables de voltaje y corriente de los componentes no lineales. Sin embargo, en términos generales, estas variables realmente sirven para modelar, mediante funciones lineales por segmentos, cualquier característica  $\varphi(\lambda)$  no lineal en componentes eléctricos, como lo puede ser por ejemplo la característica de saturación de un transformador no lineal.

## 3.2. Modelado de Circuitos Eléctricos en SLCs

En esta sección se presentan y describen con detalle algunas de las técnicas de análisis que pueden utilizarse para formular los SLCs de los circuitos no lineales. En este sentido, se presenta un formalismo para obtener los SLCs en base a técnicas clásicas de análisis de circuitos como lo son la teoría de árboles y el análisis en variables de estado.

### 3.2.1. Teoría de Árboles y Co-árboles; Aplicación al Análisis en Variables de Estado

El modelado de una red eléctrica moderna en el formato de SLCs puede realizarse utilizando la teoría clásica de análisis de circuitos. En general, el modelado se fundamenta en la aplicación de la técnica conocida como variables de estado, en la cual la solución de toda la red está restringida al conocimiento detallado del comportamiento de las variables dinámicas de la red, generalmente dinámica en capacitores e inductores. Sin embargo, en el contexto de los SLCs, la solución también se encuentra ligada al conocimiento del comportamiento de las denominadas variables complementarias, las cuales son incluidas mediante la representación de las variables de entrada y salida  $(\lambda, \varphi)$  de los modelos complementarios de los SLCs.

En el análisis para la obtención de SLCs, tal y como sucede en la teoría clásica de circuitos, uno de los problemas principales surge al encontrar un sistema de ecuaciones linealmente independiente (LI) que describa en su totalidad el comportamiento de toda la red. Dentro de las técnicas que existen para conseguir tal objetivo, se encuentra la teoría de árboles y co-árboles [Hyatt et al., 2008], que representa una técnica basada en la teoría de grafos que sirve para formar lazos ( $l$ ) y conjuntos cortados ( $ccs$ ) LI de toda la red, los cuales permiten la obtención de un sistema de ecuaciones algebro-diferencial linealmente independiente. De esta forma, en esta tesis se sugiere que la aplicación de la teoría de árboles aplicada a la formulación de SLCs y al análisis en variables de estado deba seguir ciertos lineamientos:

1. **Contruir, si es posible, un árbol y co-árbol normales.** Un árbol se considera normal cuando contiene únicamente fuentes de voltaje (independientes y controladas), capacitores, componentes no lineales y resistores, es decir, la única condición para conseguir un árbol normal es excluir de éste inductores y fuentes controladas e independientes de corriente, los cuales deben ser incluidos en el co-árbol. Un co-árbol normal no debe incluir capacitores y fuentes de voltaje. El número de elementos que debe contener el árbol de cualquier red eléctrica es  $N_{arbol} = N_{nodos} - 1$ .
2. **Asignar variables de corriente y voltaje.** Asignar voltajes referenciados a los capacitores y corrientes con dirección específica a los inductores. Estas variables generalmente representan las variables de estado de la red. En el caso de resistores en el árbol, especificar su voltaje  $v$  como  $Ri$ , y para el caso de resistores en el co-árbol definir su corriente  $i$  como  $v/R$ , donde  $v$  e  $i$  son obtenidos aplicando ley

de voltajes de Kirchhoff (LVK) y ley de corrientes de Kirchhoff (LCK) respectivamente al lazo o  $cc$  correspondiente a  $R$ . Asignar la variable de salida  $\varphi$  como de voltaje para los elementos no lineales ubicados en el árbol, y para los componentes no lineales localizados en el co-árbol especificar su variable de salida  $\varphi$  como de corriente. En el caso de componentes no lineales que no presenten naturalmente variables de salida y entrada como voltaje o corriente, buscar la formulación que se adecúe a esta representación.

3. **Escribir las ecuaciones  $C$ .** Obtener las ecuaciones dinámicas de los capacitores aplicando LCK a los conjuntos cortados ( $ccs$ ) respectivos de cada capacitor.
4. **Escribir las ecuaciones  $L$ .** Usar LVK para obtener las ecuaciones dinámicas de los inductores. Aplicar LVK al lazo formado por cada inductor.
5. **Caso de árbol y co-árbol no normales.** En caso de tener algún capacitor en el co-árbol o algún inductor en el árbol, se dice que la red puede representarse por medio de un sistema de ecuaciones de orden reducido, en el cual el valor del orden es dado mediante la suma total de capacitores e inductores del sistema menos el número de capacitores incluidos en el co-árbol y menos el número de inductores en el árbol. En este caso para la obtención del SLC de orden reducido LI, se sugiere aplicar LVK a los capacitores incluidos en el co-árbol y LCK a los inductores incluidos en el árbol, y derivar estas expresiones y sustituirlas en las ecuaciones de los lazos y  $ccs$  en los cuales aparece la dinámica de estos elementos. Realizar lo mismo para fuentes de corriente y voltaje incluidos en el árbol y co-árbol respectivamente, pero sin derivar.

Cabe señalar que, en el caso de árboles normales, podría extenderse la teoría clásica de análisis de circuitos para la formulación automatizada de los SLCs utilizando la teoría de conectividad de elementos y la formulación automatizada de ecuaciones de estado. En este sentido, deberá cuidarse la incorporación adecuada de los modelos complementarios, tanto de corriente como de voltaje, de los componentes no lineales.

### 3.2.2. Ejemplo Ilustrativo; Modelado Dinámico del Convertidor Elevador

Para ejemplificar la obtención del modelo dinámico del SLC de una red eléctrica que contiene componentes no lineales, considérese el convertidor de potencia elevador mostrado en la Figura 3.1. El convertidor elevador es un convertidor CD/CD caracterizado por elevar el voltaje de alimentación  $v_i$  a un nivel de voltaje  $v_o$  más alto en sus terminales de salida [Mohan et al., 1995]. La topología del convertidor elevador cuenta con dos componentes no lineales: dos dispositivos electrónicos ( $DEs$ ), tal y como se aprecia en la Figura 3.1.

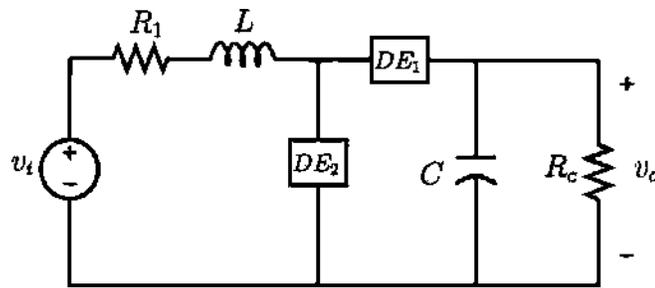


Figura 3.1: Topología del convertidor elevador.

La construcción de un árbol para el análisis del convertidor elevador en el marco de SLCs puede realizarse en base a los lineamientos descritos en la sección 3.2.1. En la topología del convertidor elevador, se pueden construir diversos árboles normales, sin embargo el seleccionado para este modelado es el mostrado en la Figura 3.2, donde también puede verse el co-árbol y el tipo de modelado, en cuanto a variable de salida se refiere, de los dos  $DEs$ .

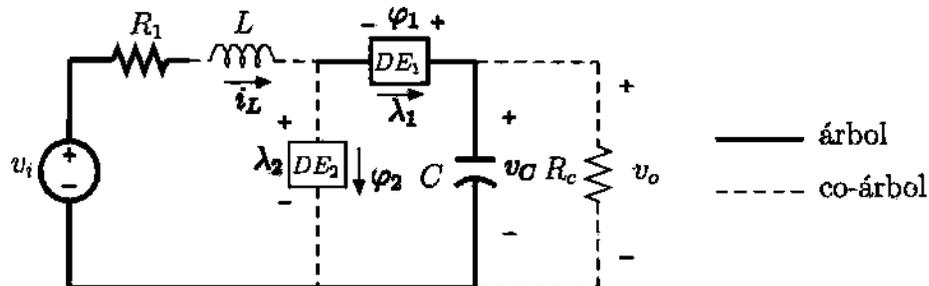


Figura 3.2: Árbol y co-árbol del convertidor elevador. Ejemplo ilustrativo

Note en la Figura 3.2, que de acuerdo a los lineamientos descritos en la sección 3.2.1, el  $DE_1$  contenido en el árbol es modelado con salida  $\varphi_1$  de voltaje, mientras que el  $DE_2$  contenido en el co-árbol es modelado con salida  $\varphi_2$  de corriente.

La Figura 3.3 muestra el procedimiento para formar los lazos  $l$  de los elementos contenidos en el co-árbol. En este caso, la Figura 3.3 muestra el lazo formado por el inductor  $L$  del convertidor elevador. Como se conoce, la formación de lazos mediante la teoría de árboles garantiza la obtención de ecuaciones LI.

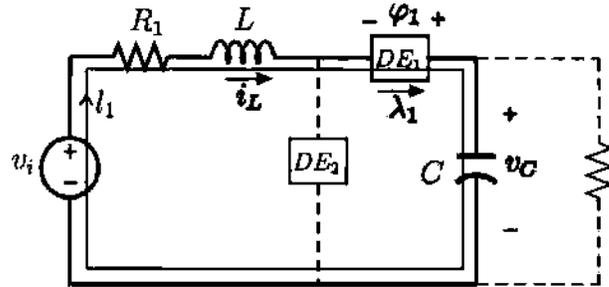


Figura 3.3: Formación de lazos del convertidor elevador.

La Figura 3.4 muestra como deben obtenerse los conjuntos cortados  $ccs$  de los elementos en el árbol. En este caso, en la Figura 3.4 se muestra el  $cc$  correspondiente al capacitor  $C$  del convertidor. La eliminación del  $cc$  genera siempre la división del árbol en dos subconjuntos, los cuales pueden ser analizados como *supernodos* para la obtención de una ecuación (algebraica o diferencial) LI. Cabe señalar que la independencia lineal, en el caso de los  $ccs$ , se restringe a elementos del árbol que no se encuentran conectados en serie, situación en la cual los  $ccs$  de dichos elementos generan la misma ecuación mediante LCK.

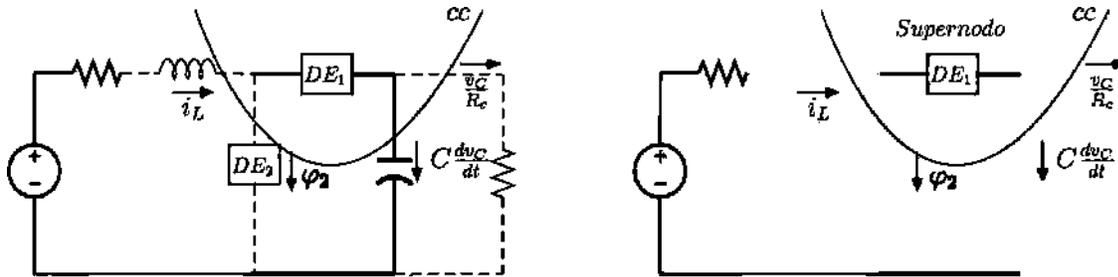


Figura 3.4: Formación de conjuntos cortados del convertidor elevador.

La Figura 3.5 muestra todos los lazos  $l$  y conjuntos cortados  $ccs$  LI obtenidos del convertidor elevador. También se muestran el árbol, el co-árbol, las referencias de las variables de estado y el tipo de modelado (voltaje-corriente) de los  $DEs$ . De este grafo se pueden obtener todo el conjunto de ecuaciones que se requiere para modelar al convertidor elevador en el formato de SLCS.

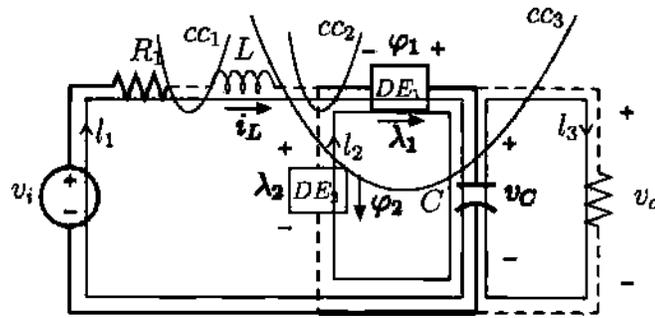


Figura 3.5: Lazos y conjuntos cortados del convertidor elevador.

Aplicando LVK y LCK a los lazos y  $ccs$  mostrados en la Figura 3.5, puede obtenerse el modelo dinámico del convertidor elevador en el formato de SLCs en la forma (2.1), tal y como se muestra a continuación:

Aplicando LVK a  $l_1$

$$v_i = R_1 i_L + L \frac{di_L}{dt} - \varphi_1 + v_C \quad (3.1)$$

y despejando  $\frac{di_L}{dt}$  se obtiene la primer ecuación dinámica del convertidor:

$$\frac{di_L}{dt} = -\frac{R_1}{L} i_L - \frac{v_C}{L} + \frac{\varphi_1}{L} + \frac{v_i}{L}. \quad (3.2)$$

Aplicando LCK a  $cc_3$

$$i_L = \varphi_2 + C \frac{dv_C}{dt} + \frac{v_C}{R_c} \quad (3.3)$$

y despejando  $\frac{dv_C}{dt}$  se obtiene la segunda ecuación dinámica:

$$\frac{dv_C}{dt} = \frac{i_L}{C} - \frac{v_C}{R_c C} - \frac{\varphi_2}{C}. \quad (3.4)$$

Aplicando LCK a  $cc_2$  para obtener la ecuación de  $\lambda_1$  del dispositivo electrónico  $DE_1$ :

$$\lambda_1 = i_L - \varphi_2 \quad (3.5)$$

Aplicando LVK a  $l_2$  para  $\lambda_2$ :

$$\lambda_2 = v_C - \varphi_1 \quad (3.6)$$

De esta forma, el sistema dinámico del SLC del convertidor elevador resulta:

$$\dot{x} = A_c x + B_c \varphi + E_c e_c + g_c \quad (3.7)$$

$$\lambda = C_c x + D_c \varphi + F_c e_c + h_c \quad (3.8)$$

con

$$A_c x = \begin{bmatrix} -R_1/L & -1/L \\ 1/C & -1/R_c C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_L \\ v_C \end{bmatrix}, \quad B_c \varphi = \begin{bmatrix} 1/L & 0 \\ 0 & -1/C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} \quad (3.9a)$$

$$E_c e_c = \begin{bmatrix} 1/L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_i \end{bmatrix}, \quad g_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.9b)$$

$$C_c x = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_L \\ v_C \end{bmatrix}, \quad D_c \varphi = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} \quad (3.9c)$$

$$F_c e_c = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_i \end{bmatrix}, \quad h_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.9d)$$

Note que para finalizar el modelado del SLC del convertidor elevador falta definir el modelo complementario de los dispositivos de conmutación y sustituir este modelo y el modelo dinámico (3.9) en las expresiones (2.4) para poder obtener el SLC reducido en la forma (2.3) y así poder simular la respuesta transitoria y de estado estable del convertidor elevador como se describe en la secciones 2.5 y 2.6.

### 3.3. Modelos Ideales de Dispositivos Electrónicos

En esta sección se presentan los modelos complementarios que sirven para representar la característica ideal de los dispositivos de conmutación más importantes en los sistemas eléctricos como lo son: diodos, interruptores y tiristores. Se presentan los dos tipos de modelado para cada dispositivo electrónico; es decir, un modelo que considera a la variable de salida  $\varphi$  como de voltaje y otro que considera a la variable de salida  $\varphi$  como de corriente. El contar con los dos tipos de modelo facilita la obtención de los SLCs mediante la teoría de árboles.

#### 3.3.1. Dispositivos Electrónicos No Controlados

Un dispositivo electrónico se dice no controlado cuando las condiciones de conducción y no conducción dependen propiamente del dispositivo de potencia; es decir, la característica del dispositivo no permite que sus estados operativos puedan ser controlados mediante una señal de control. El único dispositivo electrónico que cumple esta condición es el denominado diodo de potencia. En este sentido, en esta subsección se presenta el modelo complementario del diodo ideal.

### Diodo Ideal

La característica V-I de un diodo ideal puede ser representada, en una forma natural, por un par de variables complementarias. Considere la característica mostrada en la Figura 3.6(b). Note que si se considera una variable de entrada de voltaje:  $\lambda_d = v_d$ , y una variable de salida de corriente:  $\varphi_d = i_d$ , esta pareja de variables  $(\lambda_d, \varphi_d)$  mantienen una relación complementaria clásica; es decir, cada una de las variables deben ser positivas o cero en cualquier instante de tiempo, y cuando una de éstas es positiva la otra, por el contrario, debe ser cero para satisfacer la relación de complementariedad. Además, ambas variables pueden ser cero en el mismo instante de tiempo.

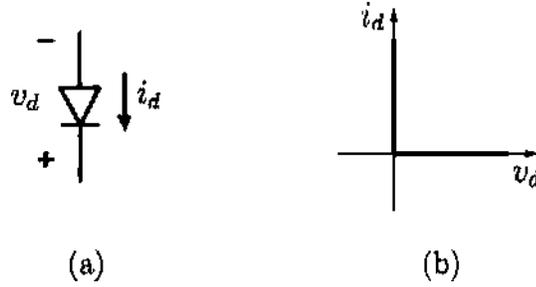


Figura 3.6: (a) Símbolo del diodo. (b) Característica V-I del diodo ideal.

El diodo ideal representa el mejor ejemplo de como los dispositivos electrónicos pueden ser representados en el marco de referencia complementario. Esta característica ideal del diodo puede ser expresada matemáticamente por el siguiente modelo complementario [Camlibel et al., 2003, Vasca et al., 2009]:

$$\varphi_d = z_d \quad (3.10a)$$

$$w_d = \lambda_d \quad (3.10b)$$

$$0 \leq w_d \perp z_d \geq 0 \quad (3.10c)$$

donde  $(z_d, w_d)$  es una pareja de variables complementarias. El sistema (3.10) puede ser expresado formalmente mediante el siguiente modelo complementario en la forma (2.2):

$$A_s = \begin{bmatrix} 0 \\ \end{bmatrix}, \quad B_s = \begin{bmatrix} 1 \\ \end{bmatrix}, \quad E_s = \begin{bmatrix} 0 \\ \end{bmatrix}, \quad g_s = \begin{bmatrix} 0 \\ \end{bmatrix} \quad (3.11a)$$

$$C_s = \begin{bmatrix} 1 \\ \end{bmatrix}, \quad D_s = \begin{bmatrix} 0 \\ \end{bmatrix}, \quad F_s = \begin{bmatrix} 0 \\ \end{bmatrix}, \quad h_s = \begin{bmatrix} 0 \\ \end{bmatrix} \quad (3.11b)$$

El modelo (3.11) también puede ser utilizado para modelar un diodo en el cual la variable de entrada es la corriente y la salida el voltaje con  $\lambda_d = i_d$  y  $\varphi_d = v_d$ .

### 3.3.2. Dispositivos Electrónicos Controlados

En esta sección se muestran los modelos complementarios ideales de los principales dispositivos de conmutación controlados: el interruptor unidireccional y el tiristor.

#### Interruptor Unidireccional Ideal

Los modelos complementarios pueden ser utilizados para representar funciones *set* valuadas. Por ejemplo, considere la siguiente función con  $\Phi_U \geq \Phi_L$ :

$$\varphi(\lambda) = \begin{cases} \{\Phi_L\} & \text{if } \lambda < 0 \\ [\Phi_L, \Phi_U] & \text{if } \lambda = 0 \\ \{\Phi_U\} & \text{if } \lambda > 0 \end{cases} \quad (3.12)$$

La expresión (3.12) describe la función *set* valuada que caracteriza a la función escalón con límites superior e inferior  $\Phi_U$  y  $\Phi_L$ , tal y como se muestra en la Figura 3.7.

Los modelos de complementariedad están basados en un sistema de restricciones, en el cual el valor de la variable de salida  $\varphi$  está restringido y cambia en función del valor de la variable de entrada  $\lambda$  y de las restricciones planteadas en el problema mediante el cumplimiento estricto de la relación de complementariedad  $0 \leq w \perp z \geq 0$ .

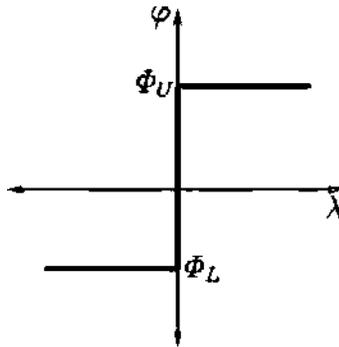


Figura 3.7: Función escalón.

La característica  $(\lambda, \varphi)$  de la función escalón puede ser representada en un formalismo complementario mediante [Vasca et al., 2011]:

$$\varphi = z_2 + \Phi_L \quad (3.13a)$$

$$w_1 = -z_2 + \Phi_U - \Phi_L \quad (3.13b)$$

$$w_2 = z_1 - \lambda \quad (3.13c)$$

$$0 \leq w \perp z \geq 0 \quad (3.13d)$$

El modelo complementario (3.13) que representa a la función escalón puede ser explicado como sigue: en la expresión (3.13c), si  $\lambda < 0$ ,  $w_2$  es estrictamente positiva dado que  $z_1$  es no negativa, por lo tanto y debido a la relación de complementariedad, con  $w_2 > 0$ ,  $z_2$  debe ser cero. Si  $z_2$  es cero, la salida resulta  $\varphi = \Phi_L$ . Por otro lado, si  $\lambda > 0$ , en (3.13c)  $z_1$  debe ser positiva dado que  $w_2$  debe ser estrictamente no negativa. Si  $z_1$  es positiva, de la relación de complementariedad se tiene  $w_1 = 0$ , por lo que en (3.13b) se consigue la igualdad  $z_2 = \Phi_U - \Phi_L$ , lo que implica que la salida resulte en el límite superior  $\varphi = \Phi_U$ . Finalmente, si  $\lambda = 0$ , aparentemente las expresiones (3.13b) y (3.13c) no imponen alguna limitante sobre  $z$ , sin embargo dado que en (3.13b),  $w_1$  debe ser no negativa, en la expresión (3.13b) sí se impone la limitante  $z_2 \leq \Phi_U - \Phi_L$ , por lo que la salida  $\varphi$  puede tomar cualquier valor entre el intervalo  $[\Phi_L, \Phi_U]$ . De esta forma se cumple totalmente la característica de la función escalón (3.12) y el comportamiento descrito en la Figura 3.7.

El modelo complementario (3.13) de la función escalón puede ser representado formalmente:

$$A_s = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}, \quad B_s = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_s = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}, \quad g_s = \begin{bmatrix} \Phi_L \end{bmatrix} \quad (3.14a)$$

$$C_s = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad D_s = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad F_s = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad h_s = \begin{bmatrix} \Phi_U - \Phi_L \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.14b)$$

Con  $\Phi_U = 1$  and  $\Phi_L = 0$ , el modelo (3.13) puede ser utilizado para representar un modelo complementario que describa la característica V-I de un interruptor unidireccional ideal; Figura (3.8)(b). El interruptor unidireccional ideal es caracterizado por tener voltaje cero y cualquier corriente positiva en el estado de conducción, mientras que en estado de bloqueo, presenta en sus terminales cualquier voltaje diferente de cero (positivo o negativo) y corriente igual a cero.

Esta característica ideal del interruptor puede ser expresada en un formalismo complementario [Vasca et al., 2011]:

$$\varphi = z_{s1} - z_{s2} \quad (3.15a)$$

$$w_{s1} = \Lambda_c z_{s4} - \lambda \quad (3.15b)$$

$$w_{s2} = \lambda \quad (3.15c)$$

$$w_{s3} = -z_{s4} + 1 \quad (3.15d)$$

$$w_{s4} = z_{s3} - q_s(u) \quad (3.15e)$$

$$0 \leq w_s \perp z_s \geq 0 \quad (3.15f)$$

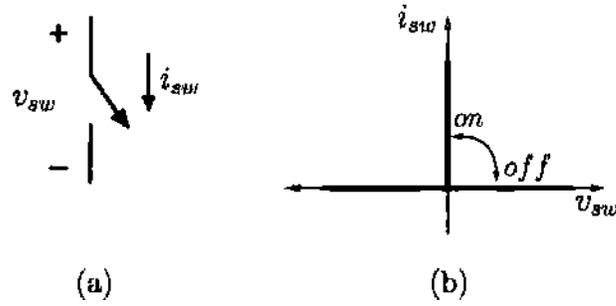


Figura 3.8: (a) Símbolo del interruptor unidireccional. (b) Característica  $V - I$  del interruptor unidireccional ideal.

donde  $\lambda$  es la corriente a través del interruptor y  $\varphi$  el voltaje en el interruptor. El modelo (3.15) puede ser explicado como sigue: si  $q_s(u)$ , que es una entrada externa, es negativa (interruptor *off*), tal y como fue explicado para la función escalón, se tiene  $z_{s4} = \Phi_L = 0$ . Con  $z_{s4} = 0$ , en (3.15b), la corriente  $\lambda$  debe ser cero dado que  $w_{s1}$  es estrictamente no negativa. De esta forma,  $z_{s1}$  y  $z_{s2}$  únicamente mantienen la restricción  $z_s \geq 0$  y el voltaje  $\varphi$  puede tomar cualquier valor positivo o negativo:  $\varphi = z_{s1} - z_{s2}$ . Si  $q_s(u)$  es positiva (interruptor *on*),  $z_{s4} = 1$  y dado que en (3.15b)  $w_{s1}$  debe ser no negativa,  $\lambda$  únicamente puede tomar valores entre el intervalo cerrado  $[0, \Lambda_c]$ . Sin embargo, en términos que tienen sentido y si  $\Lambda_c$  es mucho más grande que la máxima corriente posible que puede circular en el interruptor, entonces  $\lambda$  solo puede tomar valores entre el intervalo abierto  $(0, \Lambda_c)$ . De esta forma resulta  $z_{s1} = z_{s2} = 0$  y el voltaje en el interruptor  $\varphi = 0$ . Con este análisis puede verse que se cumple plenamente la característica mostrada en la Figura 3.8(b).

El modelo (3.15) puede ser expresado formalmente:

$$A_s = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}, \quad B_s = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_s = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}, \quad g_s = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \quad (3.16a)$$

$$C_s = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad D_s = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \Lambda_c \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad F_s = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad h_s = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.16b)$$

El interruptor unidireccional también puede modelarse considerando la variable de salida  $\varphi$  como de corriente. Considere el modelo complementario [Sessa et al., 2014]:

$$\varphi = z_{s1} \quad (3.17a)$$

$$w_{s1} = z_{s2} + \lambda \quad (3.17b)$$

$$w_{s2} = -z_{s1} + \Lambda_c z_{s4} \quad (3.17c)$$

$$w_{s3} = -z_{s4} + 1 \quad (3.17d)$$

$$w_{s4} = z_{s3} - q_s(u) \quad (3.17e)$$

$$0 \leq w_s \perp z_s \geq 0 \quad (3.17f)$$

El modelo (3.17) puede ser explicado como sigue: si  $q_s(u)$  es negativa (interruptor *off*), se tiene  $z_{s4} = \Phi_L = 0$ . Con  $z_{s4} = 0$ , en (3.17c) se impone la restricción  $z_{s1} = 0$  y la corriente  $\varphi = 0$ . Al analizar el voltaje  $\lambda$  en este estado de bloqueo, se tiene en (3.17b)  $\lambda = w_{s1} - z_{s2}$ . Con  $z_{s4} = 0$ , en las expresiones (3.17b) y (3.17c) únicamente se imponen las restricciones  $w_{s1} > 0$  y  $z_{s2} > 0$ , por lo que el voltaje  $\lambda = w_{s1} - z_{s2}$  puede tomar cualquier valor (positivo o negativo) excepto cero. En el caso del interruptor *on*, con  $q_s(u)$  positiva, se tiene  $z_{s4} = \Phi_U = 1$ , por lo que (3.17c) impone la restricción del valor de la corriente entre el intervalo  $[0, \Lambda_c]$ , sin embargo al igual que en el caso del modelo de voltaje y si  $\Lambda_c$  es lo suficientemente grande, en términos reales la corriente solo puede tomar valores positivos entre el intervalo abierto  $(0, \Lambda_c)$ , con lo que se obtiene en (3.17b) y (3.17c) la condición  $w_{s1} = z_{s2} = 0$ , y por lo tanto el voltaje del interruptor  $\lambda = 0$ . De esta forma se demuestra que el modelo (3.17) también cumple con la característica del interruptor unidireccional ideal.

El modelo complementario de corriente (3.17) puede ser expresado mediante el sistema formal de ecuaciones:

$$A_s = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}, \quad B_s = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_s = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}, \quad g_s = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \quad (3.18a)$$

$$C_s = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad D_s = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & \Lambda_c \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad F_s = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad h_s = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.18b)$$

### Interruptor Ideal con Diodo en Antiparalelo

El conjunto de un interruptor con un diodo en antiparalelo es ampliamente utilizado en algunos convertidores de potencia para permitir un proceso de bidireccionalidad de la energía. En este caso la energía puede fluir en ambos sentidos del dispositivo. Esta configuración es especialmente utilizada en rectificadores e inversores.

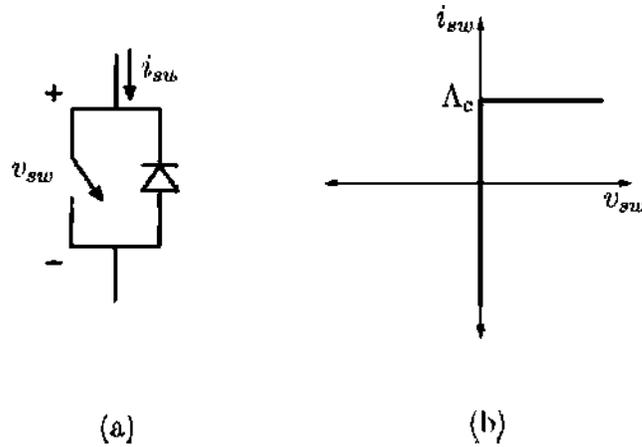


Figura 3.9: (a) Conjunto antiparalelo interruptor-diodo (b) Característica V-I del conjunto antiparalelo interruptor-diodo.

La característica V-I del conjunto interruptor-diodo antiparalelo mostrada en la Figura 3.9(b), puede ser representada en el MRC mediante el siguiente modelo complementario con variable de salida  $\varphi$  de voltaje [Sessa et al., 2014]:

$$\varphi = z_{s1} \tag{3.19a}$$

$$w_{s1} = \Lambda_c z_{s3} - \lambda \tag{3.19b}$$

$$w_{s2} = -z_{s3} + 1 \tag{3.19c}$$

$$w_{s3} = z_{s2} - q_s(u) \tag{3.19d}$$

$$0 \leq w_s \perp z_s \geq 0 \tag{3.19e}$$

Note en (3.19) que (3.19c) y (3.19d) son las mismas expresiones (3.15d) y (3.15e) utilizadas en el modelo del interruptor unidireccional para convertir la entrada  $q_s(u)$  de valores negativos y positivos a  $[0,1]$  respectivamente. Con este preámbulo, el modelo (3.19) puede ser explicado como sigue: si  $q_s(u)$  es negativa (interruptor abierto), la corriente  $\lambda$  únicamente puede ser cero o negativa dada la restricción  $w_{s1} \geq 0$  en (3.19b). En este caso, si  $\lambda$  es negativa,  $w_{s1}$  inherentemente presenta un valor positivo, con lo cual el voltaje de salida  $\varphi = z_{s1}$  es igual a cero. En esta condición con corriente negativa el diodo en antiparalelo se encuentra conduciendo, lo que provoca un voltaje en la rama

igual a cero. Si la corriente  $\lambda$  es igual a cero,  $w_{s1}$  es inherentemente cero, por lo cual el voltaje  $\varphi = z_{s1}$  puede tomar cualquier valor positivo dado que ninguno de los elementos en antiparalelo (interruptor, diodo) conduce. En el caso del interruptor cerrado ( $q_s(u)$  positiva), en (3.19b) la corriente  $\lambda$  puede presentar cualquier valor entre el intervalo  $[0, \Lambda_c]$  para cumplir la restricción  $w_{s1} \geq 0$ . En caso de presentar una corriente  $\lambda$  entre el intervalo  $[0, \Lambda_c)$ , se tiene  $w_{s1} > 0$ , por lo que el voltaje resulta  $\varphi = z_{s1} = 0$ . Cuando  $\lambda = \Lambda_c$  se presenta una condición de saturación y el voltaje  $\varphi = z_{s1} > 0$  dado que  $w_{s1} = 0$ .

El modelo (3.19) puede representarse formalmente en el MRC mediante:

$$A_s = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}, \quad B_s = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_s = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}, \quad g_s = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \quad (3.20a)$$

$$C_s = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad D_s = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \Lambda_c \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad F_s = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad h_s = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.20b)$$

La característica V-I mostrada en la Figura 3.9(b) también puede modelarse con variable de salida  $\varphi$  de corriente, tal y como lo describe el siguiente sistema complementario [Sessa et al., 2014]:

$$\varphi = -z_{s1} + \Lambda_c z_{s3} \quad (3.21a)$$

$$w_{s1} = \lambda \quad (3.21b)$$

$$w_{s2} = -z_{s3} + 1 \quad (3.21c)$$

$$w_{s3} = z_{s2} - q_s(u) \quad (3.21d)$$

$$0 \leq w_s \perp z_s \geq 0 \quad (3.21e)$$

La explicación del modelo (3.21) es como sigue: si el voltaje  $\lambda = 0$  y el interruptor esta cerrado:  $q_s(u)$  positiva y  $z_{s3} = 1$ , dado que la variable  $z_{s1}$  debe ser no negativa, la corriente  $\varphi$  puede tomar cualquier valor entre el intervalo  $(-\infty, \Lambda_c]$ . Caso contrario con voltaje  $\lambda$  positivo (condición de saturación del interruptor),  $z_{s1}$  es igual a cero, con lo cual la corriente, en caso  $q_s(u)$  positiva, únicamente puede tomar el valor saturado de la corriente  $\varphi = \Lambda_c$ . Note que con  $q_s(u)$  negativa,  $w_{s1} = \lambda$  y  $\varphi = -z_{s1}$  describen el modelo complementario de un diodo ideal, lo cual es el caso del conjunto antiparalelo con el interruptor abierto. El modelo (3.21) puede ser expresado formalmente mediante:

$$A_s = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}, \quad B_s = \begin{bmatrix} -1 & 0 & \Lambda_c \end{bmatrix}, \quad E_s = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}, \quad g_s = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \quad (3.22a)$$

$$C_s = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad D_s = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad F_s = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad h_s = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.22b)$$

### Tiristor ideal

El modelo (3.15) puede ser explotado para formar el modelo complementario de un tiristor ideal. Observe en la expresión (3.15a) que el voltaje de salida  $\varphi_s = z_{s1} - z_{s2}$  puede ser visto como la suma de voltajes de un interruptor unidireccional ideal (con bloqueo de voltaje positivo) y un diodo ideal conectados en serie, como se aprecia en la Figura 3.10(a). Esta representación serie puede ser utilizada para modelar tiristores ideales en el marco de referencia complementario. Sin embargo, como puede suponerse, se tiene una restricción en el uso de esta representación: la condición de apertura del interruptor. En este sentido, una vez que el interruptor ha sido disparado, el interruptor solo debe abrirse (para generar las condiciones de un segundo disparo) después de un tiempo lo suficientemente largo para permitir la extinción de su corriente de manera natural. Éste es el único aspecto a considerarse en esta representación.

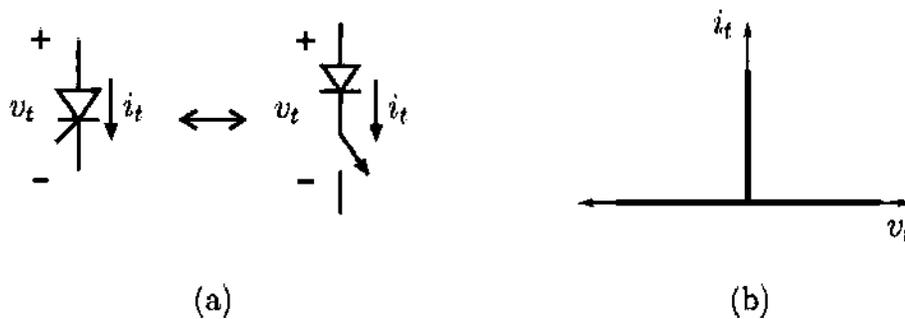


Figura 3.10: (a) Representación del tiristor en el MRC (b) Característica V-I del tiristor ideal.

Además, como es de suponerse, el modelo (3.17) también puede utilizarse para modelar un tiristor ideal en el cual la variable de salida es la corriente. Asimismo, el único aspecto a tomar en cuenta en este modelo es la apertura adecuada del interruptor.

### 3.4. Funciones Lineales por Segmentos No Decrecientes

En esta sección se presenta un formalismo complementario que sirve para representar funciones lineales por segmentos no decrecientes, como la función  $(\lambda, \varphi)$  mostrada en la Figura 3.11. En este sentido, las funciones lineales por segmentos representan una buena herramienta de simplificación para el modelado de una gran variedad de funciones no lineales y componentes eléctricos. El enfoque utilizado para obtener los modelos complementarios que describen este tipo de características por segmentos está basado en el análisis de circuitos resistencia-diodo-fuente (RDF) [Vandenbergue et al., 1989, Vasca et al., 2009]. De esta forma, el planteamiento se centra en el estudio del comportamiento de los denominados resistores concavo y convexo, así como de su formulación matemática mediante la teoría de árboles y la consideración de los modelos complementarios del diodo ideal.

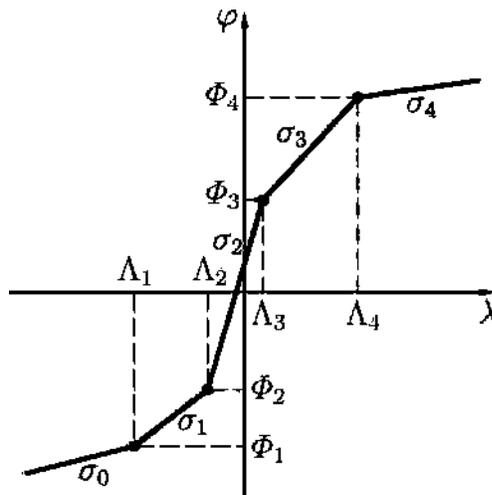


Figura 3.11: Función lineal por segmentos no decreciente.

Como puede verse en la Figura 3.11, una función lineal por segmentos está definida por la pendiente inicial de la función  $\sigma_0$ , la pendiente final  $\sigma_p$  y un conjunto de  $p - 1$  segmentos lineales intermedios que se encuentran conectados mediante un conjunto de  $p$  puntos de quiebre. En estos puntos de quiebre es donde la función lineal por segmentos presenta cambios en su pendiente, de tal forma que se cumple la condición  $\sigma_k \neq \sigma_{k-1}$  para  $k = 1, \dots, p$ . Si el punto de quiebre  $k$  satisface la condición  $\sigma_k > \sigma_{k-1}$  se dice que se trata de un punto de quiebre convexo, y si el punto de quiebre  $k$  satisface la condición  $\sigma_k < \sigma_{k-1}$  se denomina un punto de quiebre concavo.

### 3.4.1. Funciones Convexas

En esta subsección se presentan y describen los modelos complementarios [Vasca et al., 2009] que pueden utilizarse para representar el comportamiento convexo  $(\lambda, \varphi)$  lineal por segmentos. El denominado resistor convexo es el circuito RDF utilizado en este esquema para obtener dichos modelos. Un resistor convexo es un circuito serie compuesto por una resistencia, un diodo y una fuente independiente de voltaje, la cual en conjunto con el diodo le proporciona la propiedad de convexidad al circuito.

#### Característica Convexa con un Punto de Quiebre

En la Figura 3.12 puede verse un circuito RDF que contiene un resistor convexo. Este circuito RDF presenta una relación convexa, lineal por segmentos con un único punto de quiebre entre dos variables del circuito; la corriente total  $\varphi$  y el voltaje de entrada  $\lambda$ . La convexidad en la relación entre  $\varphi$  y  $\lambda$  se debe a la existencia del resistor convexo, en el cual se presenta un punto de quiebre  $\lambda = \Lambda_1$  que aumenta la pendiente  $\sigma = \varphi/\lambda$  con la condición  $\sigma_0 < \sigma_1$ . Este cambio de disminución en la impedancia del circuito se debe a que para valores de voltaje  $\lambda > \Lambda_1$ , el diodo se encuentra polarizado de manera directa, por lo que a la corriente total  $\varphi$  se le suma la corriente que fluye a través de la rama del resistor convexo, aumentando la conductancia total del circuito.

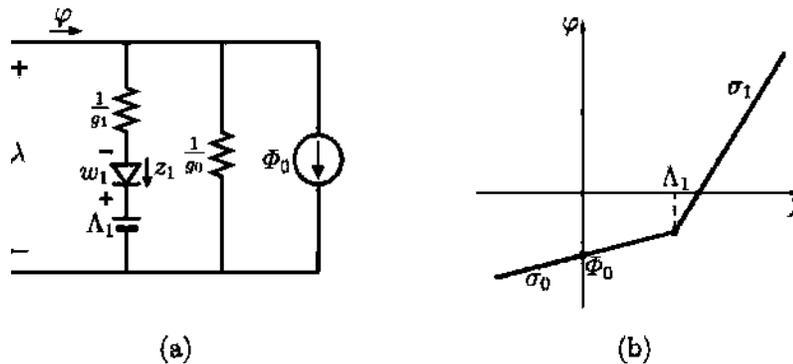


Figura 3.12: (a) Circuito RDF convexo con un punto de quiebre. (b) Característica convexa con un punto de quiebre.

La Figura 3.13 muestra el árbol y el co-árbol elegidos para analizar el circuito RDF convexo. Note que la variable  $\lambda$  forma parte del árbol dado que ésta representa el voltaje de entrada del circuito.

Para obtener el modelo complementario que describe la relación convexa entre el voltaje  $\lambda$  y la corriente  $\varphi$ , basta con aplicar la teoría de árboles para obtener las ecuaciones necesarias que describen dicha relación. Como puede verse, a diferencia del modelado en

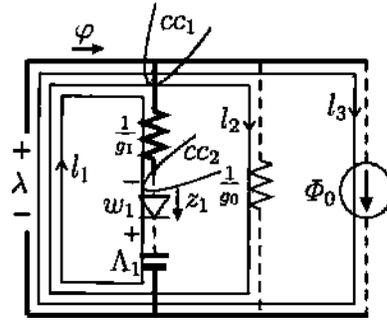


Figura 3.13: Árbol y co-árbol del circuito RDF convexo con un punto de quiebre.

variables de estado, en este caso se desea conocer la relación entre un voltaje de entrada  $\lambda$  y su corriente  $\varphi$ . Para obtener la ecuación algebraica de esta relación convexa, basta con aplicar LCK al  $cc_1$  correspondiente al voltaje de entrada  $\lambda$ , con lo cual se obtiene:

$$\varphi = g_0\lambda + z_1 + \Phi_0 \quad (3.23)$$

La restricción complementaria entre  $z_1$  y  $w_1$  que describe el comportamiento del diodo, el cual además representa al único  $DE$  existente en el circuito, se obtiene aplicando LVK al lazo  $l_1$  formado por dicho diodo dado que es un  $DE$  modelado como de corriente:

$$w_1 = -\lambda + \frac{1}{g_1}z_1 + \Lambda_1 \quad (3.24)$$

Por lo tanto el modelo complementario que describe la relación convexa entre  $\varphi$  y  $\lambda$  del circuito RDF convexo es:

$$\varphi = g_0\lambda + z_1 + \Phi_0 \quad (3.25a)$$

$$w_1 = -\lambda + \frac{1}{g_1}z_1 + \Lambda_1 \quad (3.25b)$$

$$0 \leq z_1 \perp w_1 \geq 0. \quad (3.25c)$$

### Característica Convexa con Múltiples Puntos de Quiebre

La conexión serie de múltiples resistores convexos, como el circuito RDF de la Figura 3.12(a), genera una función lineal por segmentos convexa con múltiples puntos de quiebre entre la relación  $(\lambda, \varphi)$ ; Figura 3.14(b).

En la Figura 3.14(a) también puede distinguirse el árbol y co-árbol construidos para modelar esta relación convexa con múltiples puntos de quiebre en el MRC. Note

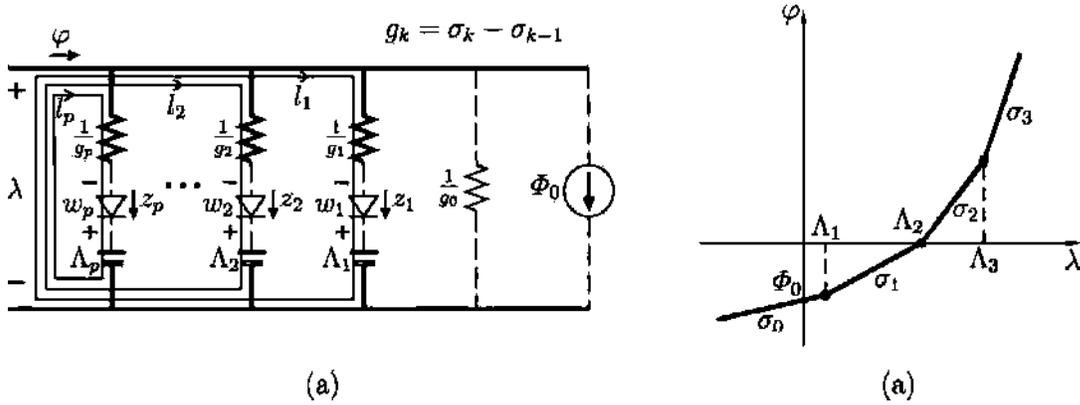


Figura 3.14: (a) Circuito RDF convexo con múltiples puntos de quiebre. (b) Característica convexa con múltiples puntos de quiebre.

que cada resistor convexo puede analizarse tal y como se analizó el circuito con un único punto de quiebre. Cada resistor convexo  $k$  agrega una nueva corriente  $z_k$  a la corriente total del circuito  $\varphi$ . El modelado del voltaje complementario  $w_k$  también presenta una expresión igual en estructura que el caso con un único resistor convexo, por lo que la relación  $(\lambda, \varphi)$  convexa con múltiples puntos de quiebre puede modelarse en el formalismo complementario:

$$\varphi = g_0 \lambda + \sum_{k=1}^p z_k + \Phi_0 \quad (3.26a)$$

$$w_k = -\lambda + \frac{1}{g_k} z_k + \Lambda_k, \quad k = 1, \dots, p. \quad (3.26b)$$

$$0 \leq z_k \perp w_k \geq 0, \quad k = 1, \dots, p. \quad (3.26c)$$

donde  $p$  representa el número total de puntos de quiebre de la función convexa.

### 3.4.2. Funciones Cóncavas

En la presente sección se presenta el formalismo complementario que sirve para representar funciones lineales por segmentos no decrecientes con comportamiento cóncavo. De igual forma que en el caso convexo, se describe la topología del circuito RDF con un único resistor cóncavo y en base a ésta se generaliza la estructura para representar funciones cóncavas con múltiples puntos de quiebre.

### Característica Cóncava con un Punto de Quiebre

En el caso de un resistor cóncavo, se tiene la conexión paralelo de una resistencia, un diodo y una fuente independiente de corriente; Figura 3.15(a). Cuando la corriente total del circuito RDF alcanza el valor de la fuente independiente de corriente se genera un punto de quiebre en la relación  $(\lambda, \varphi)$ , con el aumento de la impedancia total del circuito RDF y la condicionante  $\sigma_{k-1} < \sigma_k$ . Para explicar lo anterior, considere lo siguiente: para valores de  $\lambda < \Lambda_0$ , el diodo se encuentra polarizado en forma directa, por lo que éste conduce la corriente  $\Phi_1$  dado que de manera ideal representa un corto circuito. En esta situación, la resistencia  $r_1$  se encuentra sin flujo de corriente. Conforme el voltaje  $\lambda$  aumenta, la corriente total  $\varphi$  también empieza a incrementarse con una pendiente  $\sigma_1 = 1/r_0$ . Cuando el valor del voltaje  $\lambda$  es igual a  $\Lambda_0$ , el diodo se polariza de manera inversa, sin embargo, éste permanece en conducción hasta que su corriente se extingue de manera natural, momento que ocurre cuando el incremento en  $\varphi$  es tal que se tiene  $\varphi = \Phi_1$ . En este punto de quiebre, el diodo deja de conducir y se presenta una corriente en la resistencia  $r_1$ , aumentando la impedancia en la relación  $(\lambda, \varphi)$ .

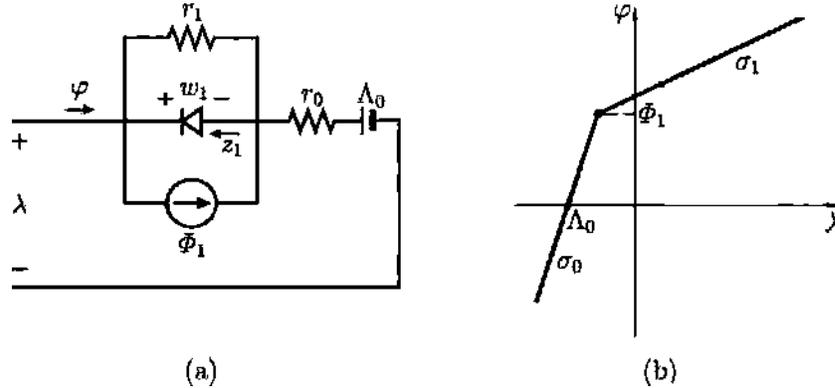


Figura 3.15: (a) Circuito RDF cóncavo con un punto de quiebre. (b) Característica cóncava con un punto de quiebre.

La Figura 3.16 muestra el árbol, el co-árbol, los lazos y los *ccs* del circuito RDF cóncavo con un solo punto de quiebre.

El análisis para obtener el modelo complementario del circuito RDF cóncavo puede hacerse de la misma forma como se realizó para el caso de la relación convexa, es decir, debe aplicarse LCK al  $cc_1$  del voltaje  $\lambda$  y obtenerse la ecuación complementaria del diodo en base al lazo formado por éste.

El voltaje en  $r_1$  puede obtenerse aplicando LVK al lazo  $l_1$ :

$$v_{r_1} = \lambda - r_0\varphi - \Lambda_0 \tag{3.27}$$

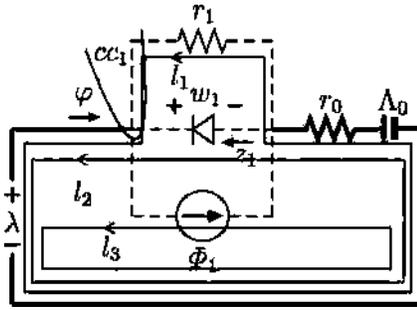


Figura 3.16: Árbol y co-árbol del circuito RDF cóncavo con un punto de quiebre.

por lo tanto, aplicando LCK a  $cc_1$  se obtiene:

$$\varphi = -z_1 + \Phi_1 + \frac{\lambda - r_0\varphi - \Lambda_0}{r_1} \quad (3.28)$$

despejando  $\varphi$

$$\varphi = \frac{1}{r_0 + r_1}(-r_1 z_1 + \lambda + r_1 \Phi_1 - \Lambda_0) \quad (3.29)$$

Aplicando LVK para obtener el voltaje  $w_1$  del diodo, que es el mismo que  $v_{r_1}$ , pero sustituyendo  $\varphi$ :

$$w_1 = \lambda - r_0 \left( \frac{1}{r_1 + r_0} (-r_1 z_1 + \lambda + r_1 \Phi_1 - \Lambda_0) \right) - \Lambda_0 \quad (3.30)$$

simplificando

$$w_1 = \frac{r_1}{r_0 + r_1} (r_0 z_1 + \lambda - r_0 \Phi_1 - \Lambda_0) \quad (3.31)$$

Por lo que el modelo complementario de la relación cóncava  $(\lambda, \varphi)$  con un punto de quiebre resulta:

$$\varphi = \frac{1}{r_0 + r_1} (-r_1 z_1 + \lambda + r_1 \Phi_1 - \Lambda_0) \quad (3.32a)$$

$$w_1 = \frac{r_1}{r_0 + r_1} (r_0 z_1 + \lambda - r_0 \Phi_1 - \Lambda_0) \quad (3.32b)$$

$$0 \leq z_1 \perp w_1 \leq 0. \quad (3.32c)$$

**Característica Cóncava con Múltiples Puntos de Quiebre**

La conexión serie de multiples circuitos RDF como el visto en la Figura 3.15(a), puede generar una función lineal por segmentos cóncava con múltiples puntos de quiebre entre la corriente total  $\varphi$  y el voltaje de entrada  $\lambda$ ; Figura 3.17(b). Note que los puntos de quiebre se inducen cuando la corriente  $\varphi$  alcanza el valor de las diferentes fuentes de corriente contenidas en cada resistor cóncavo, por lo que siempre se cumple  $\Phi_1 < \Phi_2 \dots < \Phi_p$ .

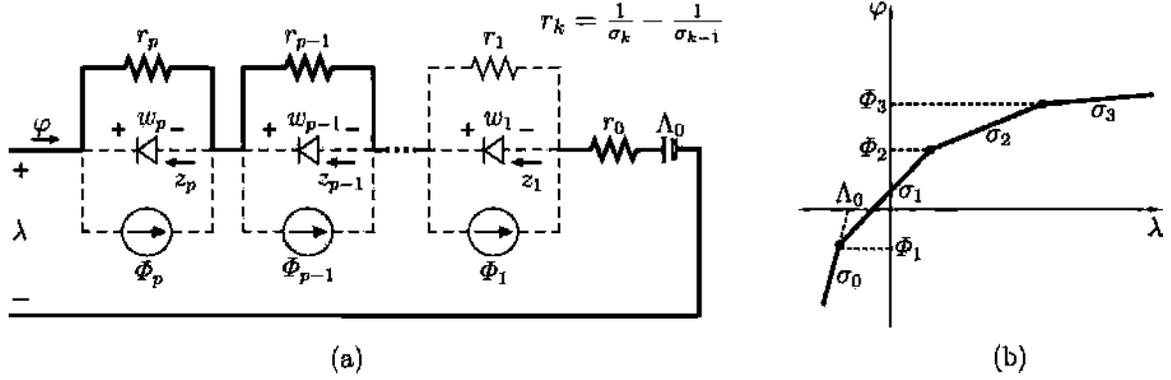


Figura 3.17: (a) Circuito RDF cóncavo con múltiples puntos de quiebre. (b) Característica cóncava con múltiples puntos de quiebre.

De la misma forma que todos los circuitos RDF analizados, el modelo complementario de la característica cóncava con múltiples puntos de quiebre puede obtenerse aplicando LCK y LVK a un árbol adecuado. En la Figura 3.17(a) puede verse un árbol y co-árbol que pueden utilizarse para dicho fin.

Mediante la aplicación de LKC y LVK a este árbol puede obtenerse el siguiente modelo complementario de la característica cóncava con múltiples puntos de quiebre:

$$\varphi = \frac{\lambda - \sum_{k=1}^{k=p} r_k [z_k - \Phi_k] - \Lambda_0}{\sum_{k=0}^{k=p} r_k} \quad (3.33a)$$

$$w_k = r_k \left[ \frac{\lambda - \sum_{k=1}^{k=p} r_k [z_k - \Phi_k] - \Lambda_0}{\sum_{k=0}^{k=p} r_k} \right] + z_k - \Phi_k \quad k = 1, \dots, p. \quad (3.33b)$$

$$0 \leq z_k \perp w_k \geq 0 \quad k = 1, \dots, p. \quad (3.33c)$$

Note que, al igual que en el caso convexo con múltiples puntos de quiebre, cada punto de quiebre  $[\Lambda_k, \Phi_k]$  implica un par de variables complementarias  $(z_k, w_k)$ . De esta forma la formulación de una función lineal por segmentos con múltiples puntos

de quiebre implica el manejo de sistemas matriciales de gran tamaño, lo cual es una desventaja de los SLCs.

Finalmente, cabe señalar que la representación de funciones lineales por segmentos que involucren alternadamente tramos cóncavo y convexos puede realizarse fácilmente al combinar las expresiones (3.26) y (3.33) de manera adecuada.

### 3.5. Conclusiones

En este capítulo se presentó el procedimiento de modelado circuitos eléctricos no lineales en el MRC. En este sentido, se mostró que el modelado de los circuitos no lineales en el formato de SLCs puede realizarse utilizando técnicas de análisis de circuitos tradicionales como lo son la teoría de árboles y el análisis en variables de estado. Se mostró que cuando los circuitos no lineales presentan árboles normales, el modelado en SLCs puede realizarse de una forma automatizada y bien definida, sin embargo también se describió que cuando estos presentan árboles no normales la formulación en SLCs así como con técnicas clásicas no puede realizarse de manera tan directa y se requiere de un análisis más profundo. En esta tesis se presentó una sugerencia de modelado de árboles no normales, sin embargo esta aún carece de generalidad. En la actualidad el modelado de árboles no normales todavía es un motivo de estudio. Además, en el caso de árboles normales, se vislumbró que podría utilizarse y extenderse al MRC la teoría clásica para la formulación de ecuaciones de estado automatizada, lo cual representa uno de los trabajos futuros más importantes del modelado en el MRC. Asimismo, también se mostró que el modelado de componentes en el MRC requiere de modelos complementarios tanto de corriente como de voltaje ya que esto facilita en gran medida el modelado de los SLCs mediante la teoría de árboles. También, en este capítulo, se presentaron los modelos complementarios ideales de dispositivos de conmutación como lo son diodos, interruptores y tiristores, así como un formalismo complementario que sirve para representar características no lineales mediante funciones lineales por segmentos no decrecientes. En el caso del modelo complementario del interruptor ideal, esta formulación podría ser utilizada para representar de manera ideal dispositivos electrónicos como MOSFETs, IGBTs o GTOs. En este sentido, el modelo del tiristor podría extenderse para el modelado del TRIAC. Además, se presentó que el uso de funciones lineales por segmentos implica el manejo de un gran número de variables complementarias, lo cual es una desventaja de los SLCs. El uso de procesamiento en paralelo y el manejo de técnicas de dispersidad podrían representar herramientas importantes en la solución de SLCs de grandes dimensiones.

# Capítulo 4

## Modelado y Simulación de Convertidores CD/CD

En este capítulo se presenta la aplicación del marco de referencia complementario (MRC) para el modelado y solución de algunos convertidores CD/CD en lazo cerrado. En este sentido, se simulan y presentan los sistemas lineales complementarios (SLCs) de los convertidores CD/CD reductor, elevador, reductor-elevador y del convertidor Cuk. Se muestra a manera de ejemplo, el modelado detallado en el MRC del convertidor elevador para ejemplificar de manera clara el procedimiento de modelado en el formato de SLCs. Asimismo, se presentan algunas características especiales de los convertidores como lo son ecuaciones de voltaje de salida, característica de rizado y algunas generalidades para el diseño de filtros. Finalmente, se obtienen las respuestas transitorias y de estado estable de los convertidores en el MRC y se comparan y validan los resultados con los obtenidos mediante *SymPowerSystems*.

### 4.1. Convertidor Elevador

El convertidor elevador es un convertidor CD/CD capaz de producir un voltaje de salida  $v_o$  mayor que el de su entrada  $v_i$ . La configuración típica del convertidor elevador puede ser vista en la Figura 4.1. En esta topología, al igual que otros convertidores CD/CD, el convertidor consta de dos dispositivos de conmutación: un interruptor y un diodo de potencia, y un elemento de almacenamiento de energía: un inductor  $L$ . Este tipo de convertidores generalmente utiliza un filtro capacitivo  $C$  a la salida del circuito para proporcionar una mejor característica de rizado en el voltaje  $v_o$ . El convertidor en este caso alimenta una carga meramente resistiva  $R_c$ .

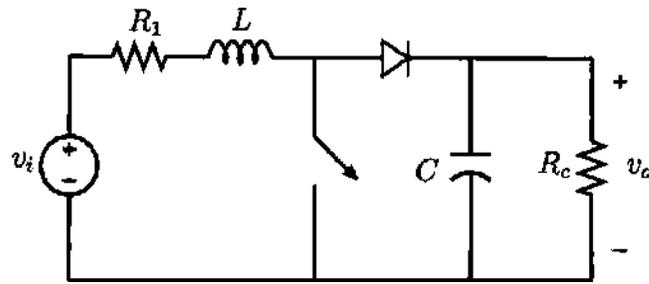


Figura 4.1: Convertidor CD/CD elevador.

El principio de funcionamiento del convertidor elevador se basa en el proceso de conmutación del interruptor, el cual mediante una frecuencia de conmutación  $f_c$  fija y sus modos de operación permite la elevación del voltaje. En este sentido, cuando el interruptor está cerrado, el voltaje de entrada  $v_i$  alimenta y almacena energía en la inductancia  $L$  y bloquea al diodo. Cuando el interruptor se abre, el diodo se polariza directamente y la energía almacenada en el inductor es liberada con una polaridad de tensión que se suma al voltaje de entrada  $v_i$ , alimentando la carga  $R_c$  en un nivel de voltaje superior. Este voltaje de salida está dado por la expresión:

$$v_o = \frac{1}{1 - D_c} v_i \quad (4.1)$$

donde  $D_c$  representa el ciclo de trabajo del interruptor. De esta forma puede verse que el voltaje mínimo que puede tenerse a la salida del convertidor es  $v_i$ .

La ecuación que define el comportamiento de rizado del voltaje de salida del convertidor en estado estable está dada por (4.2), en la cual puede verse que el rizado del convertidor depende directamente del ciclo de trabajo  $D_c$ , e inversamente de la frecuencia de conmutación  $f_c$  y de la constante de tiempo  $R_c C$  [Mohan et al., 1995].

$$\frac{\Delta v_o}{V_o} = \frac{D_c}{f_c R_c C} \quad (4.2)$$

donde  $V_o$  es la componente promedio del voltaje de salida  $v_o$ .

#### 4.1.1. Modelado del Convertidor Elevador en Lazo Abierto

Para el modelado del convertidor elevador, en la sección 3.2.2 se obtuvo el sistema dinámico del convertidor en base al árbol y co-árbol mostrados en la Figura 3.5. En este diagrama de árbol, si se rempazan los símbolos de los dispositivos electrónicos  $DEs$  por los dispositivos de conmutación del convertidor elevador: el interruptor y el diodo de potencia, se obtiene la topología de árbol mostrada en la Figura 4.2.

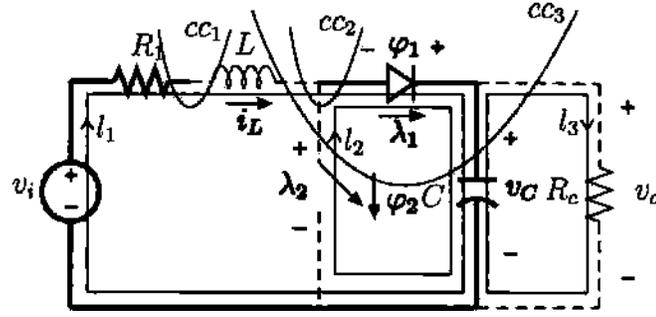


Figura 4.2: Árbol y co-árbol del convertidor elevador.

El modelo dinámico del SLC del convertidor elevador obtenido en la sección 3.2.2 es:

$$\dot{x} = A_c x + B_c \varphi + E_c e_c + g_c \quad (4.3a)$$

$$\lambda = C_c x + D_c \varphi + F_c e_c + h_c \quad (4.3b)$$

donde

$$A_c = \begin{bmatrix} -R_1/L & -1/L \\ 1/C & -1/R_c C \end{bmatrix}, \quad B_c = \begin{bmatrix} 1/L & 0 \\ 0 & -1/C \end{bmatrix} \quad (4.4a)$$

$$E_c = \begin{bmatrix} 1/L \\ 0 \end{bmatrix}, \quad g_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.4b)$$

$$C_c = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D_c = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.4c)$$

$$F_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad h_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.4d)$$

con  $x = [i_L, v_C]^T$ ,  $e_c = [v_i]$  y  $\varphi = [\varphi_1, \varphi_2]^T$ .

De igual forma, los modelos complementarios del diodo (3.11) y del interruptor unidireccional (3.18) pueden ser agrupados en un modelo complementario mediante:

$$\varphi = A_s \lambda + B_s z + E_s u_s + g_s \quad (4.5a)$$

$$w = C_s \lambda + D_s z + F_s u_s + h_s \quad (4.5b)$$

$$0 \leq w \perp z \geq 0 \quad (4.5c)$$

con

$$A_s = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_s = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.6a)$$

$$E_s = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad g_s = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.6b)$$

$$C_s = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_s = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & \Lambda_c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.6c)$$

$$F_s = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad h_s = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.6d)$$

con  $z = [z_d, z_{sw1}, z_{sw2}, z_{sw3}, z_{sw4}]$ ,  $u_s = [u_{sw}]$  y  $\lambda = [\lambda_1, \lambda_2]$ .

De esta forma, si se sustituyen los modelos dinámico (4.4) y complementario (4.6) en las expresiones (2.4), puede obtenerse el siguiente SLC del convertidor elevador en lazo abierto:

$$\dot{x} = Ax + Bz + Ee + g \quad (4.7a)$$

$$w = Cx + Dz + Fe + h \quad (4.7b)$$

$$0 \leq w \perp z \geq 0 \quad (4.7c)$$

donde

$$A = \begin{bmatrix} -R/L & -1/L \\ 1/C & -1/R_c C \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1/L & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/C & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.8a)$$

$$E = \begin{bmatrix} 1/L & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad g = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.8b)$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & \Lambda_c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.8c)$$

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad h = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.8d)$$

con  $x = [i_L, v_C]^T$ ,  $z = [z_d, z_{sw1}, z_{sw2}, z_{sw3}, z_{sw4}]^T$  y  $e = [v_i, u_{sw}]^T$ . Este es el SLC del convertidor elevador en lazo abierto al cual se le pueden aplicar las técnicas descritas en las secciones 2.5 y 2.6 para el cálculo de la respuesta transitoria y de estado estable del convertidor en todas sus posibles condiciones operativas.

### 4.1.2. Simulación en Lazo Abierto

En esta sección se obtiene la respuesta transitoria y de estado estable del convertidor elevador en lazo abierto utilizando el SLC (4.8) obtenido en la sección 4.1.1. En este sentido, para la simulación se consideran los parámetros mostrados en la Tabla 4.1 y un rizado del voltaje de salida igual a 2.5 %. De esta forma y de acuerdo a la expresión de rizado (4.2) del convertidor elevador, se requiere un filtro capacitivo  $C$  igual a 100  $\mu F$  para obtener dicha característica de rizado. De acuerdo a la expresión (4.1) se espera un voltaje de salida próximo a 24 V.

Tabla 4.1: Parámetros eléctricos del convertidor elevador.

$v_i$	12	V
$R_1$	0.1	$\Omega$
$L$	0.1	mH
$C$	100	$\mu F$
$R_c$	20	$\Omega$
$f_c$	10	kHz
$D_c$	50	%

La Figura 4.3 muestra el cálculo del comportamiento transitorio del convertidor elevador en lazo abierto utilizando el MRC. El análisis del comportamiento transitorio es realizado considerando un paso de integración  $\alpha = 5 \times 10^{-7}$ , con 200 puntos de muestreo para cada ciclo de 10 kHz, de los cuales para la respuesta transitoria se calculan los primeros 40 ciclos con condiciones iniciales  $i_L(0) = 0A$  y  $v_C(0) = 12V$  y un tiempo de

cómputo igual a 40.0498 segundos. En la Figura 4.3 también se muestra la comparación entre la solución obtenida en el MRC y la calculada mediante *SimPowerSystems*, la cual considera un solucionador discreto mediante la regla de Euler hacia atrás con el mismo paso de integración utilizado para el SLC y un tiempo de cómputo igual a 6.6168 segundos. Puede verse que el tiempo de cómputo en el MRC es mayor que el que se tuvo con *SymPowerSystems*, sin embargo este tiempo es bastante competitivo si se toma en cuenta que el MRC es un nuevo esquema de modelado que ha sido implementado mediante rutinas simples de programación y que ha utilizado quizá algoritmos de solución (*PATH solver*) que todavía pudieran ser más eficientes y rápidos considerando que las técnicas de solución y el estudio de los PLCs en la actualidad están en pleno desarrollo.

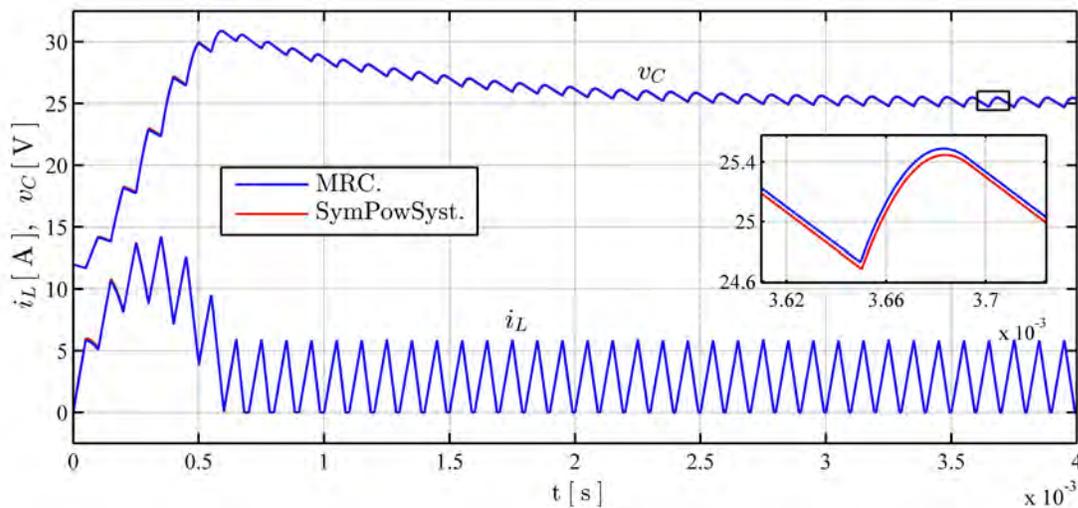


Figura 4.3: Respuesta transitoria del convertidor elevador en lazo abierto.  $i_L(0) = 0A$ .  $v_C(0) = 12V$ .

En la Figura 4.3 también puede verse que se obtiene un alto grado de aproximación entre las soluciones en el MRC y *SimPowerSystems*, validando el modelado y la solución en el MRC. En lo que respecta al voltaje de salida, véase que el convertidor presenta un  $v_o$  que tiende a estabilizarse en un nivel de voltaje mayor que el de su entrada ( $v_i = 12V$ ) con un voltaje de corriente continua próximo a  $25V$ , con lo cual se comprueba la acción elevadora del convertidor y un voltaje de salida cercano a los  $24V$  esperados de manera ideal.

En cuanto al cálculo de estado estable del convertidor, la solución de estado permanente puede realizarse de una manera directa mediante la formulación de un problema lineal complementario clásico como se describe en la sección 2.6. De esta manera, la Fi-

gura 4.4 muestra el cálculo de estado estable obtenido del convertidor elevador mediante la formulación de PLCs con diferente número de muestras y *SimPowerSystems*. Note que conforme el número de muestras aumenta, la solución mediante PLCs se aproxima de una mejor manera a la solución de *SymPowerSystems*. En este sentido, el cálculo obtenido con un PLC de 450 muestras (denotado como m en la Figura) prácticamente se superpone al cálculo realizado por *SymPowerSystems*.

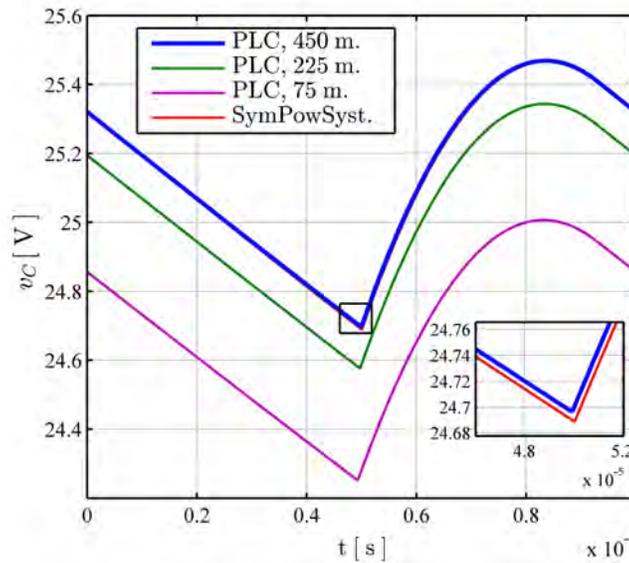


Figura 4.4: Estado estable del voltaje de salida del convertidor elevador en lazo abierto.

El tiempo de cómputo requerido para el cálculo de estado estable mediante el PLC con 450 muestras ( $\alpha = 2.22 \times 10^{-7}$ ) fue 3.1049 segundos, mientras que con *SymPowerSystems* se requirió una simulación transitoria de 200 ciclos y un  $\alpha = 1 \times 10^{-7}$  con un tiempo de cómputo igual a 8.1561 segundos. En este sentido, puede verse que la solución del PLC presenta un tiempo de cómputo menor respecto a la solución de *SymPowerSystems*, dado que esta última fue obtenida mediante la técnica convencional por medio de una simulación transitoria que requirió incluso un paso de integración más pequeño que el PLC y la simulación de un número elevado de ciclos para alcanzar de manera visual el estado estable. De esta forma, el tiempo requerido por el PLC podría considerarse bastante adecuado dado que 3.1049s no es un tiempo muy elevado.

En la Figura 4.4 también puede verse que el rizado en estado estable del voltaje de salida del convertidor es  $\%v_{oriz} = 100(25.48 + 24.7)/25.09 = 3.1\%$ , valor que se aproxima mucho al valor de rizado de diseño igual a 2.5%.

Por otro lado, la Figura 4.5 muestra la solución de estado estable de la corriente  $i_L$  del inductor. Note que para el caso de  $i_L$  se obtiene todavía una mejor exactitud en

las soluciones de los PLCs, en los cuales 75 muestras son suficientes para aproximar un buen instante de discontinuidad de la corriente.

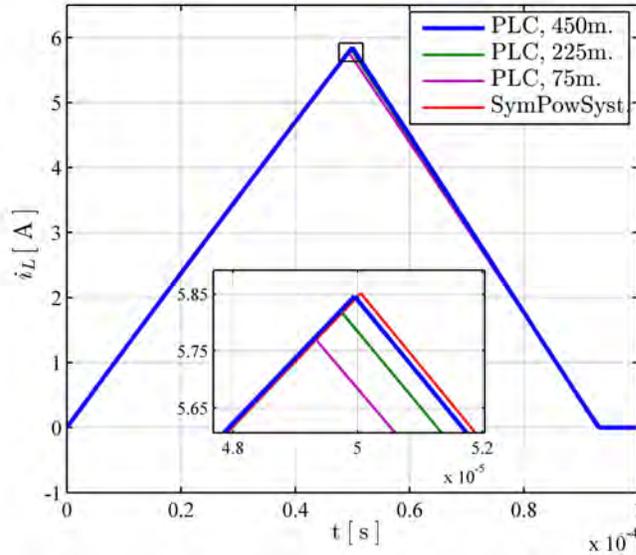


Figura 4.5: Estado estable de la corriente  $i_L$  del convertidor elevador en lazo abierto.

La Tabla 4.2 muestra los tiempos de cómputo y los pasos de integración utilizados para la simulación del convertidor elevador en lazo abierto.

Tabla 4.2: Tiempos de cómputo para la solución del convertidor elevador en lazo abierto.

	Transitorio		Estado estable	
	MRC	<i>SymPowSyst</i>	MRC	<i>SymPowSyst</i>
Tiempo ( <i>seg</i> )	40.0498	6.6168	3.1049	8.1561
$\alpha$ ( <i>seg</i> )	$5 \times 10^{-7}$	$5 \times 10^{-7}$	$2.22 \times 10^{-7}$	$1 \times 10^{-7}$

### 4.1.3. Modelado del Convertidor Elevador con Control PI

La Figura 4.6 muestra la configuración típica de un convertidor elevador controlado. En este caso, el objetivo del controlador PI es ajustar el voltaje de salida  $v_o$  del convertidor a un valor de referencia deseado  $v_{ref}$ . La técnica de control es una técnica de modulación de ancho de pulso *PWM*, descrita en el apéndice A, en la cual el controlador, en base al error existente entre la señal de referencia y la señal medida, ajusta el ciclo de trabajo  $D_c$  del convertidor a fin de aproximar un  $D_c$  que genere un voltaje de

salida muy próximo al voltaje de referencia.

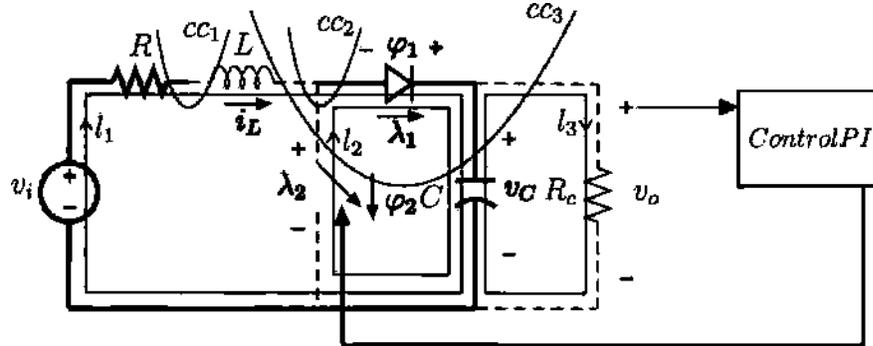


Figura 4.6: Convertidor elevador en lazo cerrado.

De esta manera, el controlador PI incorpora una nueva variable de estado al SLC del convertidor elevador:

$$\frac{dx_c}{dt} = v_{ref} - v_o \quad (4.9)$$

que representa la acción integral del controlador.

En este sentido, la señal de control del interruptor del convertidor deja de ser una señal controlada externamente y se convierte en una variable controlada internamente mediante:

$$u_{sw} = k_i x_c - k_p v_o + k_p v_{ref} - e_{ts} \quad (4.10)$$

donde  $v_o = v_C$  y  $e_{ts}$  es una señal triangular diente de sierra.

Incluyendo la dinámica del controlador (4.9) y sustituyendo la expresión (4.10) que define la lógica de conmutación del interruptor en el SLC (4.8), se obtiene el siguiente SLC del convertidor elevador en lazo cerrado:

$$A = \begin{bmatrix} -R/L & -1/L & 0 \\ 1/C & -1/R_c C & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1/L & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/C & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.11a)$$

$$E = \begin{bmatrix} 1/L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad g = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.11b)$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_p & -k_i \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & \Lambda_c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.11c)$$

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -k_p \end{bmatrix}, \quad h = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.11d)$$

con  $x = [i_L, v_C, x_c]^T$ ,  $z = [z_d, z_{sw1}, z_{sw2}, z_{sw3}, z_{sw4}]^T$  y  $e = [v_i, e_{ts}, v_{ref}]^T$ .

#### 4.1.4. Simulación con Control de Voltaje

La simulación del convertidor elevador en lazo cerrado se realiza considerando los mismos parámetros utilizados para la simulación en lazo abierto pero ahora se considera una característica de rizado en estado estable menor que 1%. En este sentido, si se considera un ciclo de trabajo extremo  $D_c = 0.9$  y un  $v_{ref} = 20V$  se requiere un filtro capacitivo  $C = 450\mu F$  para obtener esta característica de rizado. Las ganancias del controlador PI utilizadas en la simulación pueden ser vistas en la Tabla 4.3.

Tabla 4.3: Ganancias del controlador PI del convertidor elevador.

$k_p$	1.5
$k_i$	2500

La Figura 4.7 muestra el comportamiento transitorio del convertidor elevador en lazo cerrado. Note que la solución calculada mediante el SLC (4.11) se aproxima de muy buena forma a la calculada por *SymPowerSystems*. En lo que respecta al voltaje de salida, véase que el control permite regular el voltaje de salida ( $v_o = v_C$ ) en el valor de referencia deseado igual a 20V. En cuanto a la corriente  $i_L$ , note que en los primeros ciclos de simulación el controlador induce valores de corriente de carga altos en la inductancia para permitir una rápida elevación del voltaje de salida durante las primeras aperturas del interruptor.

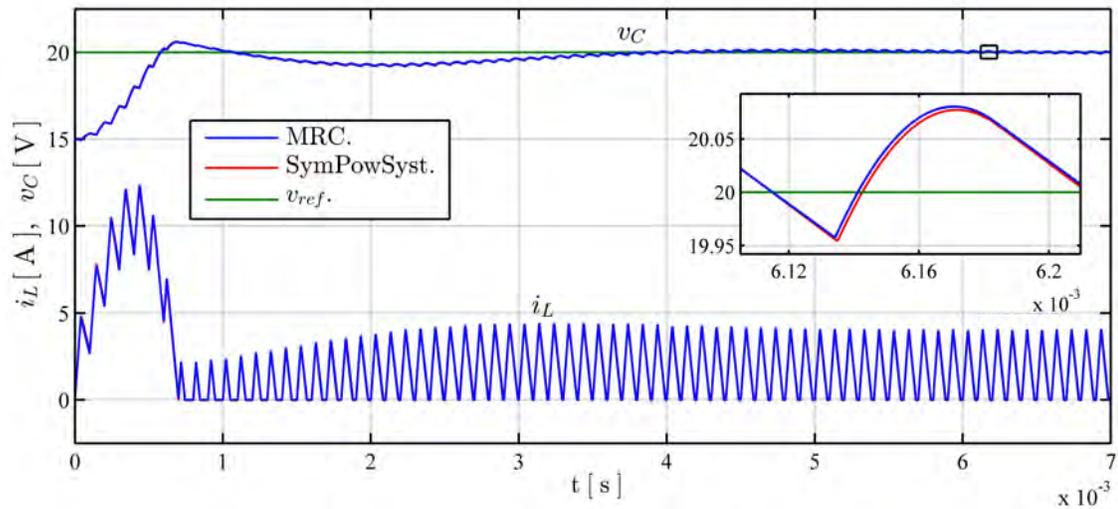


Figura 4.7: Respuesta transitoria del convertidor elevador en lazo cerrado con  $v_{ref} = 20V$ .  $i_L(0) = 0A$ .  $v_C(0) = 15V$ .

La Figura 4.8 muestra el cálculo de estado estable del convertidor elevador en lazo cerrado utilizando un PLC mezclado con 200 muestras. Recordar que la formulación de PLCs mezclados es utilizada para aproximar la solución de estado estable de sistemas eléctricos en lazo cerrado. La solución del PLC mezclado presenta un alto grado de aproximación respecto al cálculo realizado por *SymPowerSystems*.

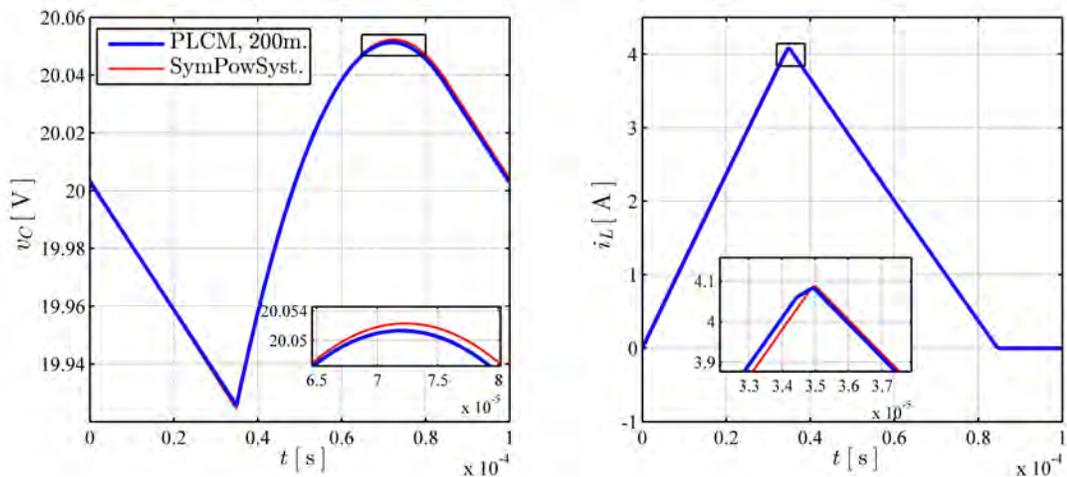


Figura 4.8: Estado estable del convertidor elevador en lazo cerrado con  $v_{ref} = 20V$ .

Note en la Figura 4.8 que el rizado del voltaje de salida  $\%v_{oriz} = 100(20.05 - 19.925)/19.9875 = 0.63\%$  cumple con la característica de diseño, en la cual se determinó un rizado en estado estable menor que  $1\%$ .

En este caso nótese que se obtuvo una mejor predicción del rizado del voltaje de salida que en el caso del convertidor en lazo abierto. Esto es debido a que el control proporciona un voltaje de salida más próximo al voltaje ideal esperado de  $20\text{ V}$ , lo que ocasiona que los cálculos realizados antes y después de la simulación coincidan de mejor forma. Los tiempos de cómputo requeridos para la simulación del convertidor elevador en lazo cerrado pueden ser vistos en la Tabla 4.4.

Tabla 4.4: Tiempos de cómputo para la solución del convertidor elevador en lazo cerrado.

	Transitorio		Estado estable	
	MRC	<i>SymPowSyst</i>	MRC	<i>SymPowSyst</i>
Tiempo (s)	80.1732	7.6031	2.8395	10.5625
$\alpha$ (s)	$5 \times 10^{-7}$	$5 \times 10^{-7}$	$5 \times 10^{-7}$	$1 \times 10^{-7}$

## 4.2. Convertidor Reductor

La Figura 4.9 muestra la topología típica del convertidor CD/CD reductor. En este esquema de circuito, el voltaje de entrada  $v_i$  del convertidor es transformado a un nivel de voltaje más bajo en sus terminales de salida. El principio de funcionamiento es el siguiente: cuando el interruptor está cerrado, el voltaje de entrada  $v_i$  alimenta la carga y almacena cierta energía en la inductancia  $L$  y en el capacitor  $C$ , aumentando un poco el voltaje de salida respecto a su condición inicial; pero a un valor más bajo respecto al voltaje de entrada. Cuando el interruptor se abre, el diodo se polariza directamente y conduce la corriente de la inductancia, la cual al igual que el capacitor se descarga y alimenta de cierta energía a la carga, disminuyendo un poco el voltaje de salida. Cuando el interruptor se cierra, nuevamente el voltaje de salida aumenta a un valor limitado por  $v_i$  y así sucesivamente. En este sentido puede verse que el voltaje de salida  $v_o$  únicamente puede tomar valores de voltaje menores o igual a  $v_i$ .

Otra forma de ver el análisis del voltaje de salida del convertidor reductor es considerar el voltaje en el diodo, en el cual se presenta una señal cuadrada de voltaje con magnitud  $v_i$  y ciclo de trabajo  $D_c$ . En este caso, el filtro pasabajas  $LC$  únicamente filtra

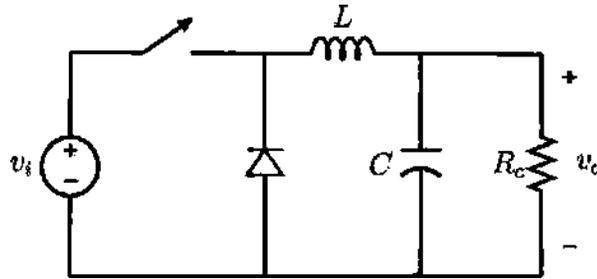


Figura 4.9: Convertidor reductor

los armónicos de dicha señal cuadrada manteniendo su componente promedio, la cual obviamente únicamente puede ser igual o menor que  $v_i$ .

El voltaje de salida del convertidor reductor está dado por:

$$v_o = Dv_i \quad (4.12)$$

De la misma forma, el rizado del convertidor reductor con filtro pasabajas  $LC$  puede ser definido mediante [Mohan et al., 1995]:

$$\frac{\Delta v_o}{V_o} = \frac{\pi^2}{2} (1 - D_c) \left( \frac{f_r}{f_c} \right)^2 \quad (4.13)$$

donde  $f_c$  es la frecuencia de conmutación del convertidor y  $f_r$  la frecuencia de corte del filtro  $LC$  pasabajas. Nótese en la expresión (4.17) que el rizado del convertidor puede ser minimizado si la frecuencia de corte  $f_r$  es elegida para ser mucho menor que la frecuencia de conmutación;  $f_r \ll f_c$ , lo cual permite el diseño de la característica de rizado del convertidor. La frecuencia de corte del filtro  $LC$  pasabajas puede obtenerse mediante [Mohan et al., 1995]:

$$f_r = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \quad (4.14)$$

### 4.2.1. Modelado del Convertidor Reductor con Control PI

La Figura 4.10 muestra la configuración típica de un convertidor reductor en lazo cerrado. En este caso el controlador es utilizado para ajustar el voltaje de salida reducido del convertidor a un valor de referencia deseado. La Figura 4.10 también muestra el árbol y co-árbol utilizados para el modelado del convertidor reductor en el MRC.

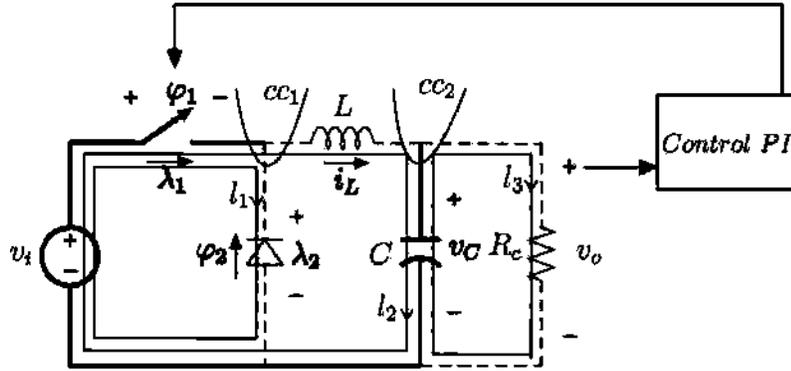


Figura 4.10: Árbol y co-árbol del convertidor reductor.

Al incluir la dinámica del control y obteniendo el modelo dinámico del convertidor al aplicar LCK a  $l_2$  y LVK a  $cc_2$ , así como por sustituir los modelos complementarios de voltaje y corriente (3.16) y (3.11) respectivos del interruptor y diodo ideal, es posible definir el siguiente sistema lineal complementario del convertidor reductor en lazo cerrado:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1/L & 0 \\ 1/C & -1/R_c C & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1/L & 1/L & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.15a)$$

$$E = \begin{bmatrix} 1/L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad g = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.15b)$$

$$C = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_p & -k_i \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \Lambda_c & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.15c)$$

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -k_p \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad h = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.15d)$$

con  $x = [i_L, v_C, x_c]^T$ ,  $z = [z_{sw1}, z_{sw2}, z_{sw3}, z_{sw4}, z_d]^T$  y  $e = [v_i, e_{ts}, v_{ref}]^T$ .

### 4.2.2. Simulación con Control de Voltaje

En esta sección se muestra el comportamiento del convertidor reductor en lazo cerrado. El diseño del filtro  $LC$  se realiza considerando una característica de rizado en estado estable menor al 1% con  $v_{ref} = 8V$  y un ciclo de trabajo extremo  $D_c = 0.1$ . De esta forma, utilizando los parámetros mostrados en la Tabla 4.5, se obtiene un valor de capacitor  $C = 1125 \mu F$  para el filtro. Las ganancias del controlador PI también pueden ser vistas en La Tabla 4.5.

Tabla 4.5: Parámetros del convertidor reductor en lazo cerrado.

$v_i$	12	$V$
$L$	0.1	$mH$
$C$	1125	$\mu F$
$R_c$	10	$\Omega$
$f_c$	10	$kHz$
$k_p$	4	
$k_i$	6000	
$v_{ref}$	8	$V$

La Figura 4.11 muestra el comportamiento transitorio del convertidor reductor. Note que el controlador logra regular y mantener el voltaje de salida en la referencia  $v_{ref} = 8V$ . En cuanto a la corriente  $i_L$ , véase que en los primeros ciclos de simulación el controlador mantiene al interruptor abierto con corriente en el inductor igual a cero para permitir la descarga libre del capacitor y de esta forma reducir el voltaje de salida desde la condición inicial alta. En este sentido, cuando  $v_o$  se ve reducido hasta un valor menor que  $v_{ref}$ , el controlador empieza un proceso de ajuste para encontrar un ciclo de trabajo que proporcione un voltaje de salida muy próximo a  $v_{ref}$ . La Figura también muestra la solución obtenida con *SymPowerSystems*, nótese que se presenta un alto nivel de aproximación entre las soluciones en el MRC y *SymPowerSystemss*

La Figura 4.12 muestra el cálculo de estado estable del convertidor reductor obtenido mediante la solución de un PLC mezclado con 200 muestras y *SymPowerSystems*. Puede verse que la comparación entre las soluciones del PLC y *SymPowerSystems* presenta un muy nivel de aproximación.

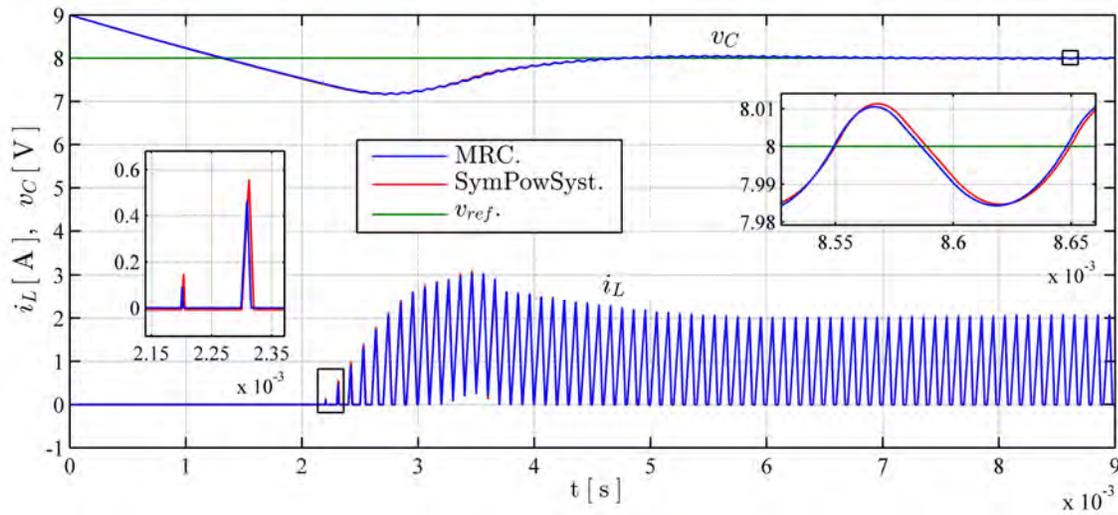


Figura 4.11: Respuesta transitoria del convertidor reductor en lazo cerrado con  $v_{ref} = 8V$ .  $i_L(0) = 0A$ .  $v_C(0) = 9V$ .

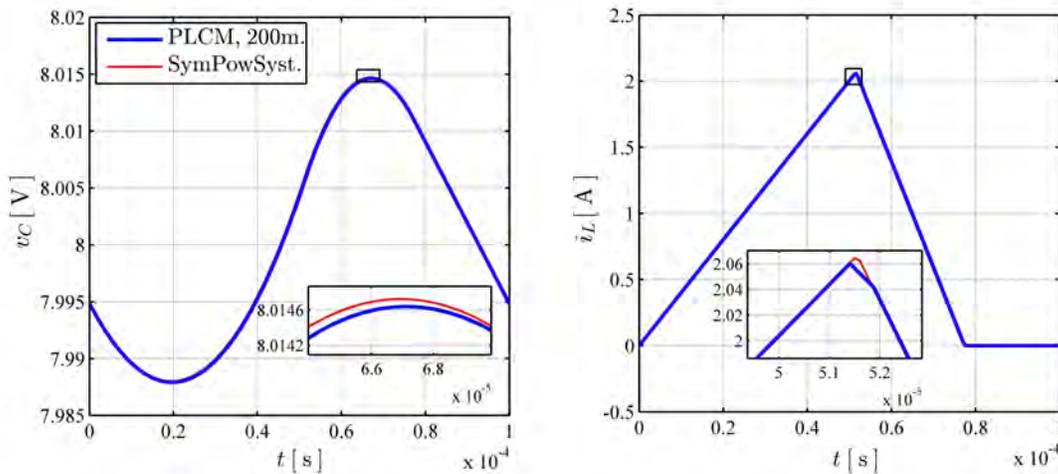


Figura 4.12: Estado estable del convertidor reductor en lazo cerrado con  $v_{ref} = 8V$ .

En la Figura 4.12 también puede verse que el rizado del voltaje de salida  $\%v_{oriz} = 100(8.015 - 7.9875)/8.0013 = 0.34\%$  cumple con la característica de rizado de diseño menor que 1 %.

La Tabla 4.6 muestra los tiempos de cómputo y los pasos de integración utilizados para la simulación del convertidor reductor controlado.

Tabla 4.6: Tiempos de cómputo para la solución del convertidor reductor en lazo cerrado.

	Transitorio		Estado estable	
	MRC	<i>SymPowSyst</i>	MRC	<i>SymPowSyst</i>
Tiempo ( <i>seg</i> )	108.8751	9.8133	2.079	10.044
$\alpha$ ( <i>seg</i> )	$5 \times 10^{-7}$	$5 \times 10^{-7}$	$5 \times 10^{-7}$	$1 \times 10^{-7}$

### 4.3. Convertidor Reductor-Elevador

El convertidor reductor-elevador, como su nombre lo dice, es un convertidor CD/CD capaz de generar un voltaje de salida  $v_o$  reducido o elevado respecto a su voltaje de entrada  $v_i$ . En este esquema, a diferencia de los convertidores reductor y elevador, el convertidor mantiene un voltaje de salida  $v_o$  con una polaridad de referencia negativa respecto a su voltaje de entrada  $v_i$ , tal y como se aprecia en la Figura 4.13.

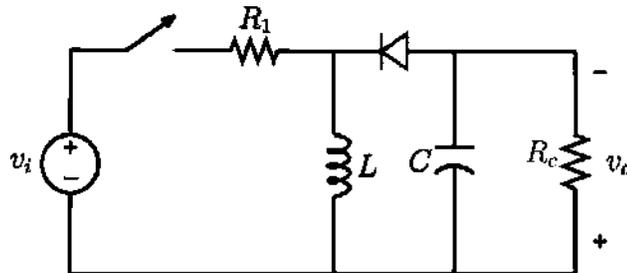


Figura 4.13: Convertidor CD/CD reductor-elevador.

El voltaje de salida del convertidor reductor-elevador en estado estable está dado por [Mohan et al., 1995]:

$$v_o = \frac{D_c}{1 - D_c} v_i \quad (4.16)$$

En (4.16) puede verse que para valores de ciclo de trabajo menores que 0.5, el convertidor genera un voltaje de salida  $v_o$  menor que  $v_i$ , actuando en un modo reductor. En cambio, cuando el convertidor trabaja con ciclos de trabajo mayores que 0.5, el convertidor genera un voltaje de salida mayor que el de su entrada. Para un ciclo de trabajo igual a 0.5, el convertidor de manera ideal genera un voltaje de salida igual a  $v_i$ .

El rizado del voltaje de salida del convertidor reductor-elevador está definido me-

diante [Mohan et al., 1995]:

$$\frac{\Delta v_o}{V_o} = \frac{D_c}{f_c R_c C} \quad (4.17)$$

Note que el rizado, dado que es el mismo filtro utilizado en el convertidor elevador, también depende directamente del ciclo de trabajo  $D_c$  del convertidor e inversamente del valor de la frecuencia de conmutación  $f_c$  y de la constante de tiempo  $R_c C$ .

### 4.3.1. Modelado del Convertidor Reductor-Elevador con Control PI

El modelado del convertidor reductor-elevador en el marco de referencia complementario puede realizarse utilizando el árbol y co-árbol mostrados en la Figura 4.14. En esta distribución de ramas, se describe un árbol con configuración normal, por lo que el orden del SLC a modelar es un sistema de orden pleno; con dos variables de estado definiendo la dinámica del convertidor:  $i_L$  y  $v_C$ , y una variable  $x_c$  describiendo la dinámica del controlador PI.

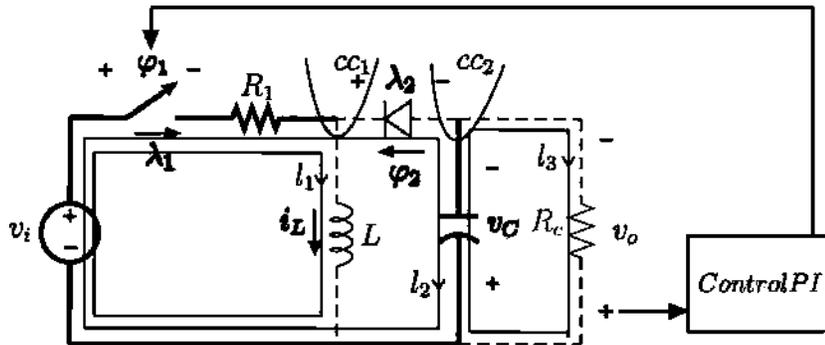


Figura 4.14: Árbol y co-árbol del convertidor reductor-elevador.

Al formular los modelos dinámico y complementario del convertidor reductor-elevador en base al árbol y co-árbol mostrados en la Figura 4.14, es posible obtener el siguiente SLC del convertidor reductor-elevador en lazo cerrado:

$$A = \begin{bmatrix} -R_1/L & 0 & 0 \\ 0 & -1/R_c C & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1/L & 1/L & 0 & 0 & R_1/L \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/C \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.18a)$$

$$E = \begin{bmatrix} 1/L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad g = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.18b)$$

$$C = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_p & -k_i \\ -R_1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \Lambda_c & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & R_1 \end{bmatrix} \quad (4.18c)$$

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -k_p \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad h = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.18d)$$

con las variables  $x = [i_L, v_C, x_c]$ ,  $z = [z_{sw1}, z_{sw2}, z_{sw3}, z_{sw4}, z_d]$  y  $e = [v_i, e_{ts}, v_{ref}]^T$ .

### 4.3.2. Simulación con Control de Voltaje; Operación Reductora

La simulación en lazo cerrado del convertidor reductor-elevador en su modo reductor se realiza considerando un  $v_{ref} = 8V$  y una característica de rizado menor que 2.5%. En este sentido, si se utiliza un ciclo de trabajo extremo  $D_c = 0.99$  y los parámetros mostrados en la Tabla 4.7, se requiere un filtro capacitivo  $C = 396\mu F$  para obtener dicha característica de rizado.

Tabla 4.7: Parámetros del convertidor reductor-elevador en lazo cerrado.

$v_i$	12	$V$
$R_1$	0.01	$\Omega$
$L$	0.2	$mH$
$C$	396	$\mu F$
$R_c$	20	$\Omega$
$f_c$	5	$kHz$
$k_p$	0.5	
$k_i$	500	

La respuesta transitoria del convertidor reductor-elevador con  $V_{ref} = 8V$  puede verse en la Figura 4.15. Nóte que la corriente  $i_L$  del inductor presenta un comportamiento parecido al que se obtuvo en el estudio del convertidor reductor, en el cual el controlador mantiene al interruptor abierto durante los primeros ciclos de simulación para permitir la descarga libre del capacitor y de esta forma reducir el voltaje de salida desde la condición inicial. Nuevamente la solución del SLC presenta un alto grado de aproximación a la solución transitoria calculada por *SymPowerSystems*.

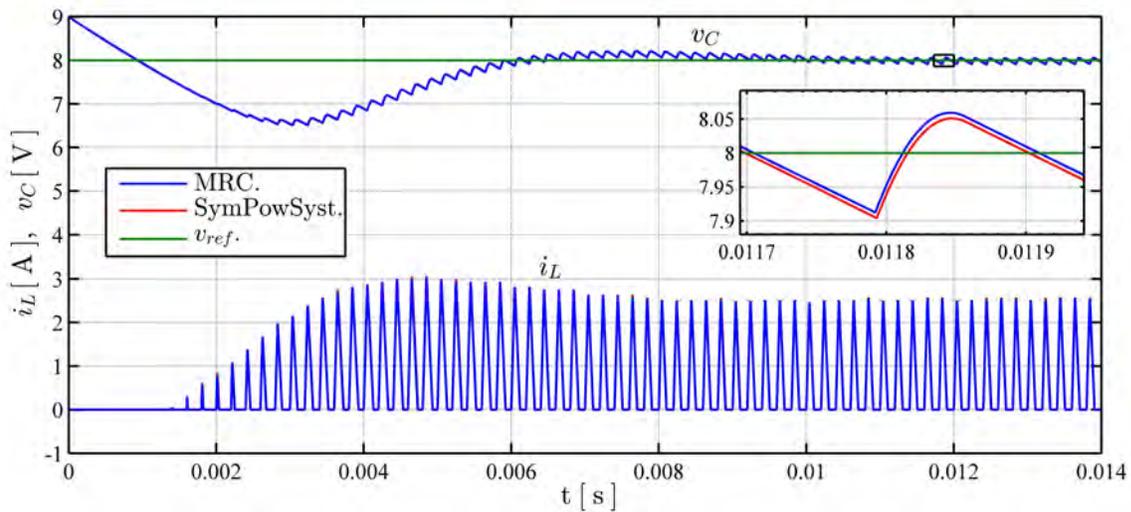


Figura 4.15: Respuesta transitoria del convertidor reductor-elevador en lazo cerrado con  $v_{ref} = 8V$ .  $i_L(0) = 0A$ .  $v_C(0) = 9V$ .

La solución de estado estable del convertidor reductor-elevador puede ser vista en la Figura 4.16. Note que la solución del PLC mezclado se aproxima de muy buena forma a la solución de *SymPowerSystems*. El rizado del voltaje de salida cumple con la característica de rizado de diseño menor que 2.5% con  $\%v_{oriz} = 100(8.064 - 7.92)/7.992 = 1.8\%$ .

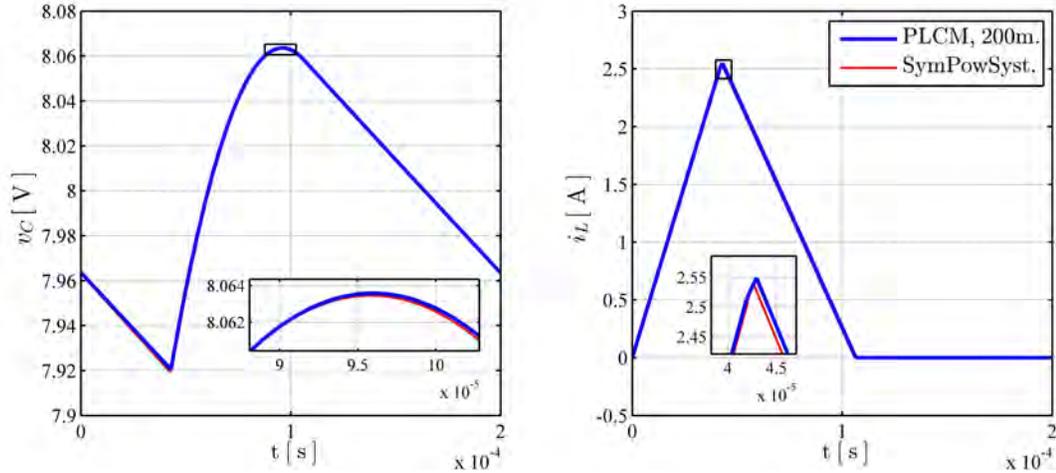


Figura 4.16: Estado estable del convertidor reductor-elevador en lazo cerrado con  $v_{ref} = 8V$ .

### 4.3.3. Simulación con Control de Voltaje; Operación Elevadora

Considerando los mismos parámetros que en el caso reductor, la Figura 4.17 muestra el comportamiento transitorio del convertidor reductor-elevador en modo de operación elevador con un voltaje de referencia  $v_{ref} = 20V$ .

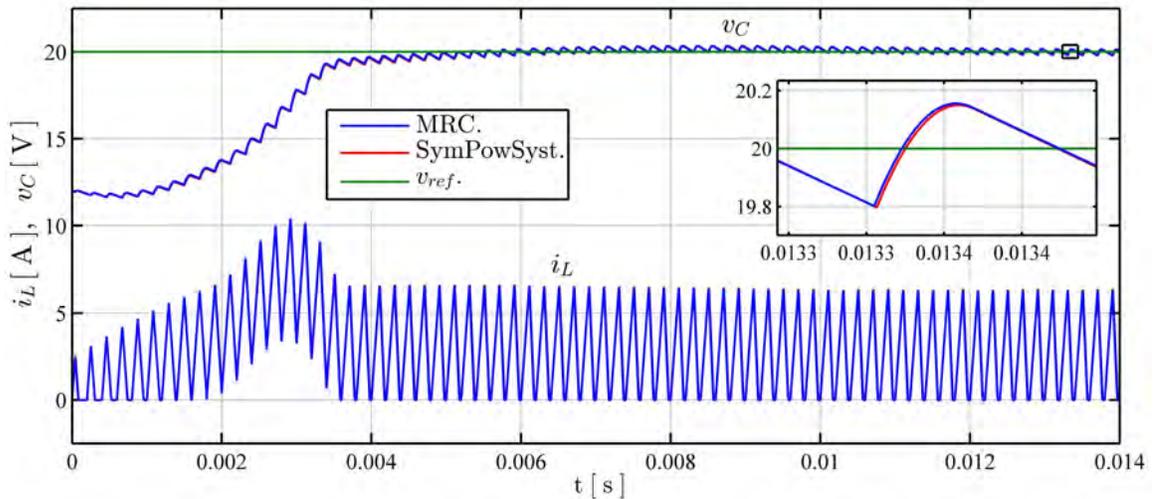


Figura 4.17: Respuesta transitoria del convertidor reductor-elevador en lazo cerrado con  $V_{ref} = 20V$ .  $i_L(0) = 0A$ .  $v_C(0) = 12V$ .

Puede verse en la Figura 4.17 que con una referencia más alta:  $v_{ref} = 20V$ , el con-

vertidor reductor-elevador presenta valores de corriente en el inductor más altos que en el caso reductor. Obviamente entre más alto es el voltaje de salida se requiere una corriente cíclica de carga en el inductor más grande para permitir la elevación del voltaje a un nivel superior. Nótese también que se presenta un intervalo de sobrecorriente en el inductor para permitir la elevación pronunciada del voltaje de salida desde la condición inicial. La solución mediante el SLC nuevamente presenta una gran aproximación al cálculo realizado por *SymPowerSystems*.

La solución de estado estable del convertidor reductor-elevador en su modo elevador puede verse en la Figura 4.18. Note que el rizado en el voltaje de salida cumple con la característica de diseño menor a 2.5% con  $\%v_{oriz} = 100(20.16 - 19.8)/19.98 = 1.8\%$ .

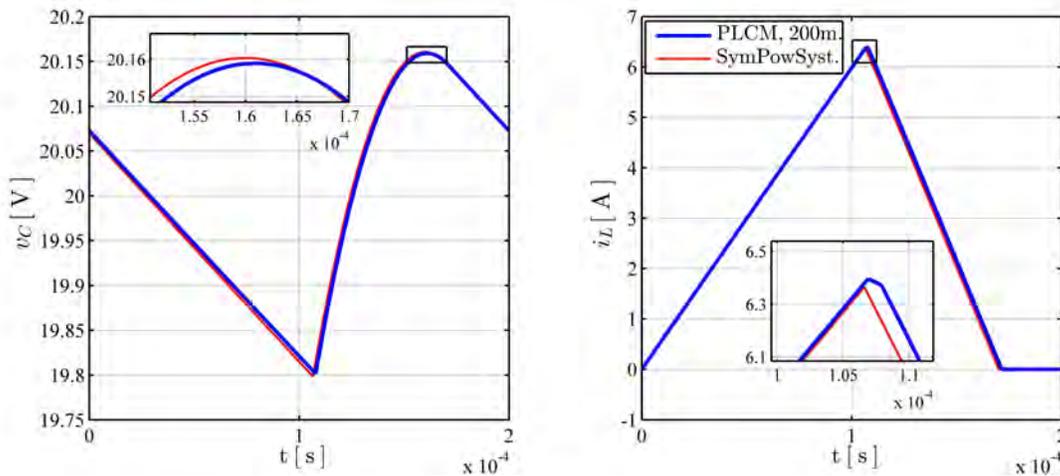


Figura 4.18: Estado estable del convertidor reductor-elevador en lazo cerrado con  $v_{ref} = 20V$ .

Los tiempos de cómputo requeridos para la solución del convertidor reductor-elevador tanto para la operación reductora como la operación elevadora pueden ser vistos en la Tabla 4.8.

Tabla 4.8: Tiempos de cómputo para la solución del convertidor reductor-elevador en lazo cerrado.

Operación Elevadora				
	Transitorio		Estado estable	
	MRC	<i>SymPowSyst</i>	MRC	<i>SymPowSyst</i>
Tiempo ( <i>seg</i> )	121.049	7.3776	2.1292	13.0372
$\alpha$ ( <i>seg</i> )	$1 \times 10^{-6}$	$1 \times 10^{-6}$	$1 \times 10^{-6}$	$2 \times 10^{-7}$
Operación Reductora				
	Transitorio		Estado estable	
	MRC	<i>SymPowSyst</i>	MRC	<i>SymPowSyst</i>
Tiempo ( <i>seg</i> )	87.377641	8.278768	2.3665	13.304592
$\alpha$ ( <i>seg</i> )	$1 \times 10^{-6}$	$1 \times 10^{-6}$	$1 \times 10^{-6}$	$2 \times 10^{-7}$

## 4.4. Convertidor Cuk

El convertidor Cuk, al igual que el convertidor reductor-elevador, puede generar voltajes de salida con referencia negativa más bajos o más altos respecto a su voltaje de entrada  $v_i$ . Sin embargo, en este convertidor, a diferencia del convertidor reductor-elevador, se tienen dos elementos de almacenamiento de energía adicionales: un inductor  $L_2$  y un capacitor  $C_2$  que le proporcionan otras características operativas al convertidor, como lo son una alta continuidad de la corriente de entrada y un mejor control de rizado del voltaje de salida. La corriente continua de entrada del convertidor Cuk le permite un requerimiento de filtrado mucho menor que el que se requiere en el convertidor reductor-elevador.

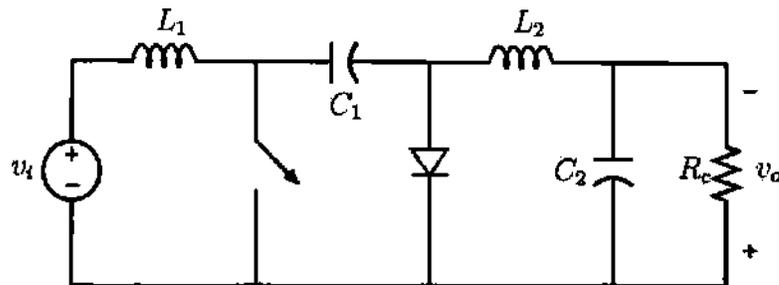


Figura 4.19: Convertidor CD/CD Cuk.

El voltaje de salida del convertidor Cuk está descrito por la misma ecuación que

describe al convertidor reductor-elevador:

$$v_o = \frac{D}{1-D} v_i \quad (4.19)$$

De esta forma, el convertidor Cuk también presenta voltajes de salida menores que  $v_i$  para valores de ciclo de trabajo inferiores a 0.5 y una acción elevadora con valores de ciclo de trabajo mayores que 0.5.

El rizado del convertidor Cuk puede definirse mediante [Rashid, 1993]:

$$\frac{\Delta v_o}{V_o} = \frac{1-D}{8C_2L_2f_c^2} \quad (4.20)$$

Note que, a diferencia del convertidor reductor-elevador, el rizado del convertidor Cuk es independiente del valor de la carga en la salida. En este sentido, el convertidor Cuk presenta una ventaja notable respecto al convertidor reductor-elevador en cuanto aplicaciones que presentan una carga de salida altamente variable.

#### 4.4.1. Modelado del Convertidor Cuk con Control PI

La Figura 4.20 muestra la configuración de árbol utilizada para el modelado del convertidor Cuk en el MRC. Note que se trata de una topología de árbol normal, por lo que el convertidor puede modelarse mediante un SLC de orden pleno.

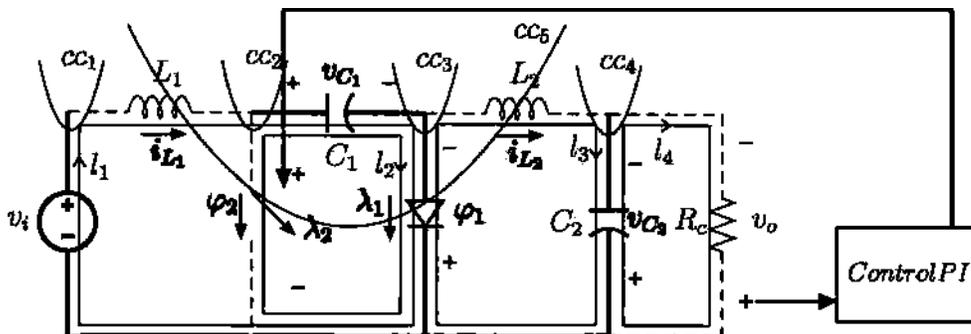


Figura 4.20: Árbol y co-árbol del convertidor Cuk.

En base a la configuración de árbol y al modelado de dispositivos electrónicos descritos en la Figura 4.20, puede obtenerse el siguiente SLC del convertidor Cuk en lazo

cerrado:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1/L_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/L_2 & 0 \\ 1/C_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/C_2 & 0 & -1/R_c C & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1/L_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1/L_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/C_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.21a)$$

$$E = \begin{bmatrix} 1/L_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad g = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.21b)$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_p & -k_i \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & \Lambda_c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.21c)$$

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -k_p \end{bmatrix}, \quad h = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.21d)$$

con las variables  $x = [i_{L_1}, i_{L_2}, v_{C_1}, v_{C_2}, x_c]$ ,  $z = [z_d, z_{sw1}, z_{sw2}, z_{sw3}, z_{sw4}]$  y  $e = [v_i, e_{ts}, v_{ref}]^T$ .

#### 4.4.2. Simulación con Control de Voltaje; Operación Reductora

Con los parámetros mostrados en la Tabla 4.9, la Figura 4.21 muestra la respuesta transitoria del convertidor Cuk considerando un rizado del voltaje de salida menor que 1% y un voltaje de referencia reducido  $v_{ref} = 8V$ . Note que el comportamiento transitorio del convertidor Cuk presenta dos frecuencias de oscilación, una que esta dada por la frecuencia de conmutación del convertidor y otra que representa la oscilación natural del convertidor debido a sus cuatro elementos de almacenamiento de energía.

De esta forma, el convertidor Cuk presenta una oscilación transitoria mucho mayor y de mayor duración que sus similares convertidores CD/CD con dos elementos de almacenamiento de energía.

Tabla 4.9: Parámetros del convertidor Cuk en lazo cerrado.

$v_i$	12	V
$L_1$	0.18	mH
$C_1$	200	$\mu F$
$L_2$	0.15	mH
$C_2$	300	$\mu F$
$R_c$	20	$\Omega$
$f_c$	10	kHz
$k_p$	0.2	
$k_i$	450	

Nótese en la Figura 4.21 que nuevamente la solución transitoria obtenida mediante el SLC presenta un alto nivel de aproximación respecto al cálculo realizado por *SymPowerSystems*.

La Figura 4.22 muestra el cálculo de estado estable del convertidor Cuk en el modo reductor. Note la corriente continua de entrada del convertidor. Esta corriente presenta un menor contenido armónico respecto a su componente promedio que la obtenida en los convertidores con dos elementos de almacenamiento de energía.

Además, nótese que el voltaje de salida cumple con la especificación de rizado de diseño, en el cual se determinó un rizado de estado estable menor al 1% con  $\%_{riz} = 100(8.035 - 7.96)/7.9975 = 0.94\%$ .

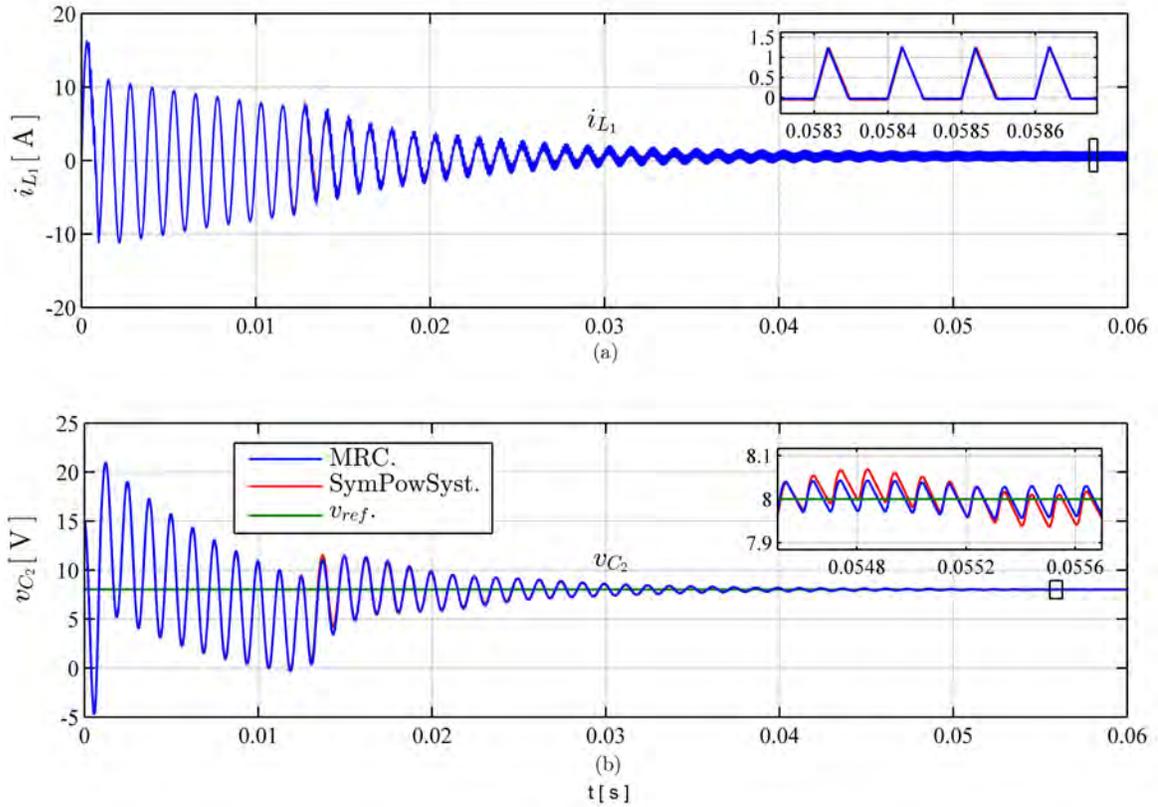


Figura 4.21: Respuesta transitoria del convertidor Cuk en lazo cerrado con  $v_{ref} = 8V$ . (a) Corriente  $i_{L_1}$ . (b) Voltaje  $v_{C_2}$ .  $i_{L_1}(0) = 0A$ .  $v_{C_2}(0) = 15V$ .

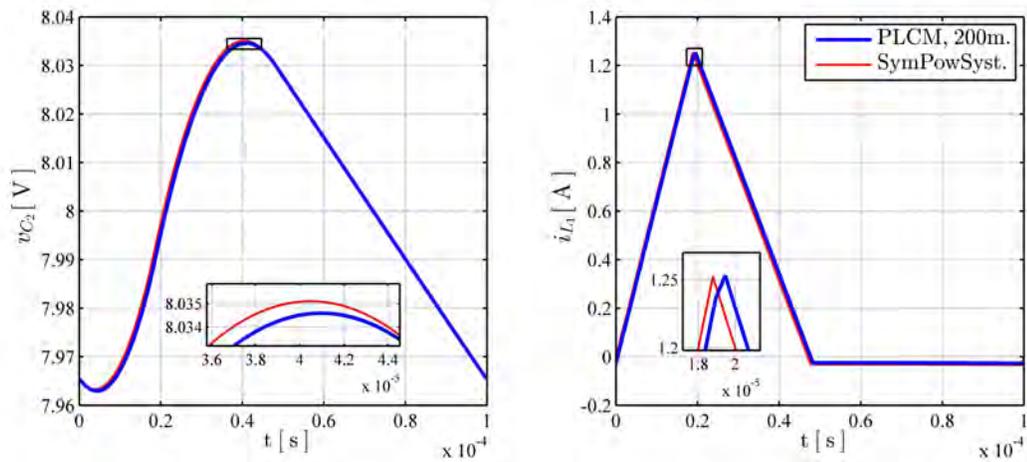


Figura 4.22: Estado estable del convertidor Cuk con  $v_{ref} = 8V$ .

### 4.4.3. Simulación con Control de Voltaje; Operación Elevadora

Utilizando los mismos parámetros que en la simulación reductora, la Figura 4.23 muestra el comportamiento transitorio del convertidor Cuk en modo elevador con un  $v_{ref} = 20V$ . Note que la solución en el MRC presenta un alto nivel de aproximación respecto a la solución de *SymPowerSystems*.

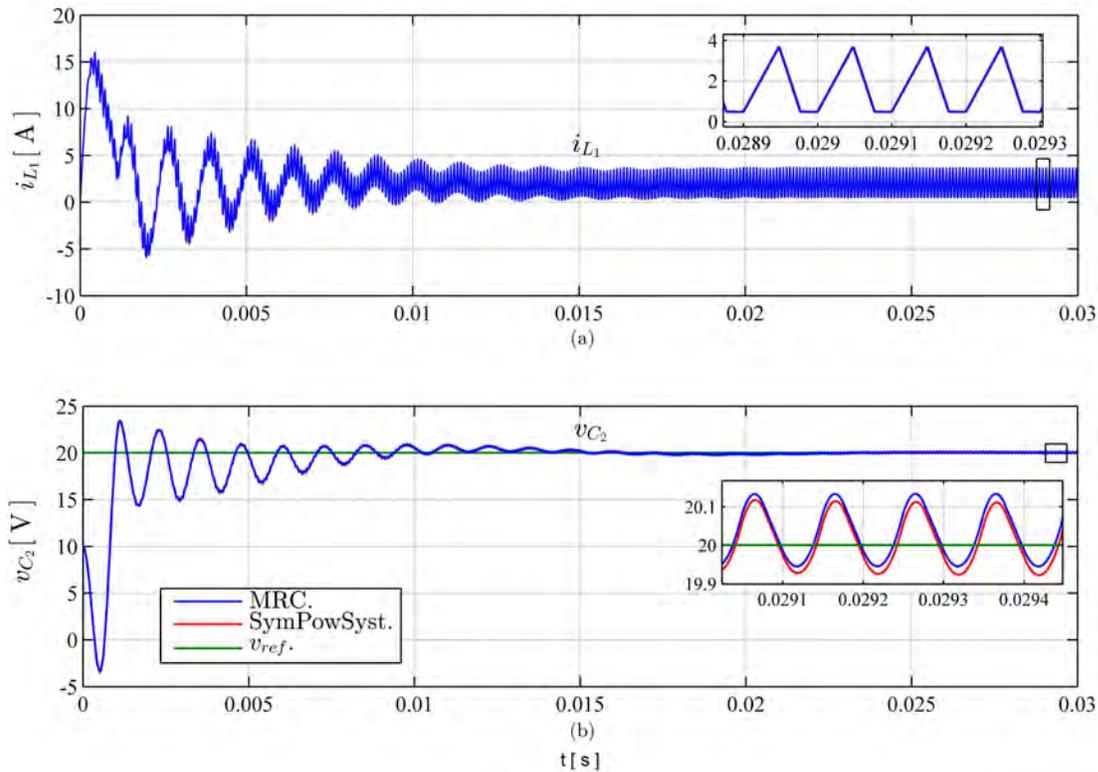


Figura 4.23: Respuesta transitoria del convertidor Cuk en lazo cerrado con  $v_{ref} = 20V$ . (a) Corriente  $i_{L_1}$ . (b) Voltaje  $v_{C_2}$ .  $i_{L_1}(0) = 0A$ .  $v_{C_2}(0) = 10V$ .

La solución de estado estable del convertidor Cuk con  $v_{ref} = 20V$  puede ser vista en la Figura 4.24. El rizado de salida del convertidor cumple con la característica de diseño menor que 1% con  $v_{oriz} \%_{oriz} = 100(20.1 - 19.92)/20.01 = 0.9\%$ .

En la Tabla 4.10 pueden verse los tiempos de cómputo requeridos para la solución del convertidor Cuk tanto para la acción elevadora como la operación reductora.

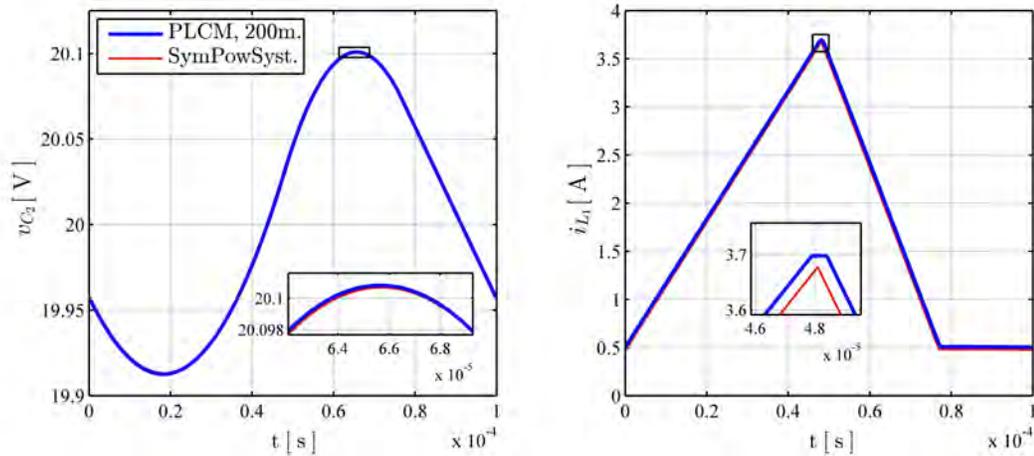


Figura 4.24: Estado estable del convertidor Cuk con  $v_{ref} = 20V$ .

Tabla 4.10: Tiempos de cómputo para la solución del convertidor Cuk en lazo cerrado.

Operación Elevadora				
	Transitorio		Estado estable	
	MRC	<i>SymPowSyst</i>	MRC	<i>SymPowSyst</i>
Tiempo (seg)	937.60157	21.209967	1.971660	46.0044
$\alpha$ (seg)	$1 \times 10^{-6}$	$1 \times 10^{-6}$	$1 \times 10^{-6}$	$2 \times 10^{-7}$
Operación Reductora				
	Transitorio		Estado estable	
	MRC	<i>SymPowSyst</i>	MRC	<i>SymPowSyst</i>
Tiempo (seg)	548.276665	8.278768	1.89228	42.090930
$\alpha$ (seg)	$1 \times 10^{-6}$	$1 \times 10^{-6}$	$1 \times 10^{-6}$	$2 \times 10^{-7}$

#### 4.4.4. Análisis Armónico de la Corriente de Entrada del Convertidor Cuk

En la Figura 4.25 se muestra el análisis armónico de estado estable de la corriente de entrada del convertidor Cuk con un  $v_{ref} = 20V$  mostrada en la Figura 4.24(b).

Note que en la Figura 4.25 también se muestra el análisis armónico de la corriente de entrada del convertidor reductor-elevador con el mismo voltaje de referencia: Figura 4.18(b). En el análisis armónico puede verse que la alta continuidad de la corriente de entrada del convertidor Cuk le permite un menor contenido armónico respecto a su

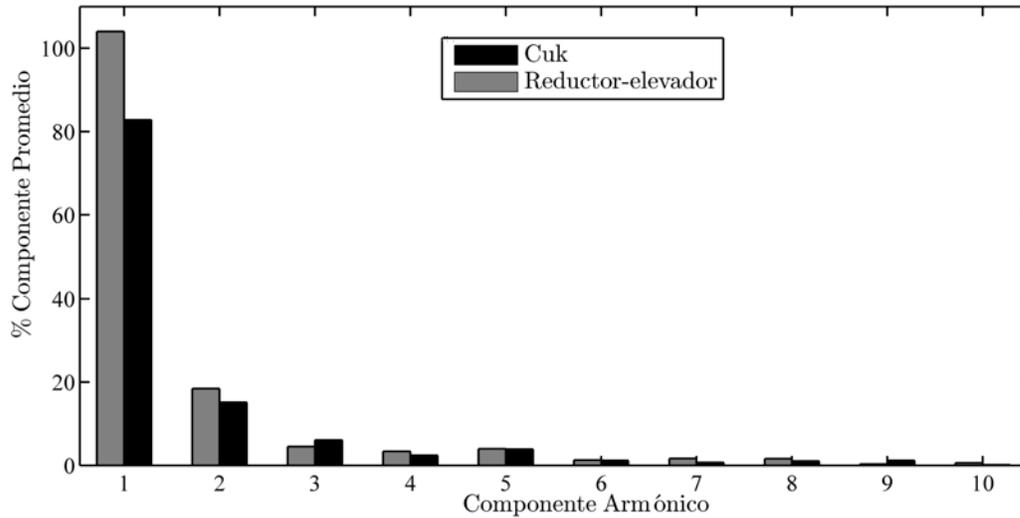


Figura 4.25: Análisis armónico de la corriente de entrada del convertidor Cuk.

componente promedio que la corriente altamente discontinua del convertidor reductor-elevador. Este hecho le posibilita al convertidor Cuk un requerimiento de potencia de filtrado en la entrada mucho menor que su similar convertidor reductor-elevador u otros convertidores CD/CD con alta operación discontinua.

## 4.5. Conclusiones

En este capítulo se validó el modelado en el MRC en cuanto a la representación de convertidores CD/CD con control PI. Se obtuvieron respuestas típicas de los convertidores CD/CD más utilizados como lo son el convertidor elevador, reductor, reductor-elevador y el convertidor Cuk. En este sentido, en todos los casos se obtuvieron respuestas muy aproximadas, casi superpuestas, a las obtenidas con un simulador ampliamente validado como lo es *SymPowerSystems*. Se observó y comprobó una de las propiedades más importantes del modelado en el MRC como lo es el cálculo implícito de los instantes de conmutación, en los cuales prácticamente se observó ninguna diferencia con los obtenidos con *SymPowerSystems*. En cuanto a los tiempos de cómputo, se observó que los obtenidos en el MRC, en el caso del cálculo transitorio, fueron mayores que los requeridos por *SymPowerSystems*, sin embargo también se concluyó que estos tiempos son adecuados dado que la representación en el MRC representa un nuevo esquema de modelado que se encuentra en pleno desarrollo y que sugiere, con el avance de los algoritmos de solución y estudios actuales de los PLCs, una reducción futura del tiempo

y esfuerzo computacionales en cuanto a la solución y tratado de los PLCs. Además, se observó que en algunos convertidores CD/CD, el *SymPowerSystems* presentaba muchos inconvenientes para la simulación de los convertidores mediante el uso de resolvedores continuos, los cuales presentaban muchos problemas de convergencia dada la presencia de elementos de conmutación. En este sentido, el MRC no presenta todo este tipo de problemas dado que modela directamente los instantes de conmutación y representa una técnica discreta que evita los problemas que se presentan en soluciones continuas. En lo que respecta al cálculo de estado estable de los convertidores CD/CD, el MRC presentó resultados muy favorables dado que se obtuvieron soluciones muy aproximadas a las calculadas por *SymPowerSystems* y tiempos de cómputo muy interesantes, del orden de 2 y 3 segundos, los cuales podrían considerarse competitivos respecto a los que se tienen con algunas técnicas actuales. Sin dejar de lado, las ventajas que presenta la formulación de estado estable en el MRC como lo es una formulación directa que puede resolverse sin procesos iterativos y el no requerimiento previo de una condición inicial, lo cual en conjunto, es algo no visto en análisis de sistemas eléctricos no lineales.



# Capítulo 5

## Aplicaciones a Componentes de Sistemas Eléctricos de Potencia

En este capítulo se presenta la aplicación del marco de sistemas lineales complementarios para modelar diversos circuitos eléctricos no lineales contenidos en los SEPs. Se presenta una aplicación a convertidores CA/CD, un dispositivo *FACT*, un convertidor CD/CA y una no linealidad en sistemas de potencia. En específico, en el estudio de convertidores CA/CD se modela al rectificador trifásico controlado y se presenta su aplicación en lazo cerrado a fuentes de CD controladas y al control de motores. En el caso de dispositivos *FACTs* se modela al compensador estático *FC-TCR* en lazo cerrado y se muestra su aplicación para la regulación de voltaje de un nodo de potencia. En el análisis de convertidores CD/CA se muestra el modelado de un inversor monofásico con lógica de conmutación *PWM* conectado a la red eléctrica, ejemplificando la topología típica utilizada en la conexión de sistemas fotovoltaicos. Finalmente, se presenta el modelado de una no linealidad existente en los sistemas de potencia mediante la simulación de un transformador no lineal y se muestra su efecto de saturación en la corriente *Inrush*.

### 5.1. Rectificador Trifásico Controlado

En algunas aplicaciones de los sistemas eléctricos se requiere tener un voltaje de CD controlable para regular diversos procesos. En los convertidores CA/CD, el control del ángulo de disparo del puente de tiristores del rectificador trifásico controlado (RTC) permite una conversión CA/CD regulada, lo cual posibilita un voltaje en el lado de CD controlable. A lo largo de los años el RTC ha sido utilizado en una gran variedad de aplicaciones para el control del flujo de potencia. Sin embargo, actualmente las

aplicaciones del RTC se centran principalmente en controladores de motores de CD, cargadores de baterías, así como en sistemas con gran manejo de potencia como lo pueden ser los sistemas de transmisión de corriente directa en alto voltaje (*HVDC systems*), los cuales transfieren una gran cantidad de potencia entre dos sistemas de CA por medio de un enlace de CD [Mohan et al., 1995].

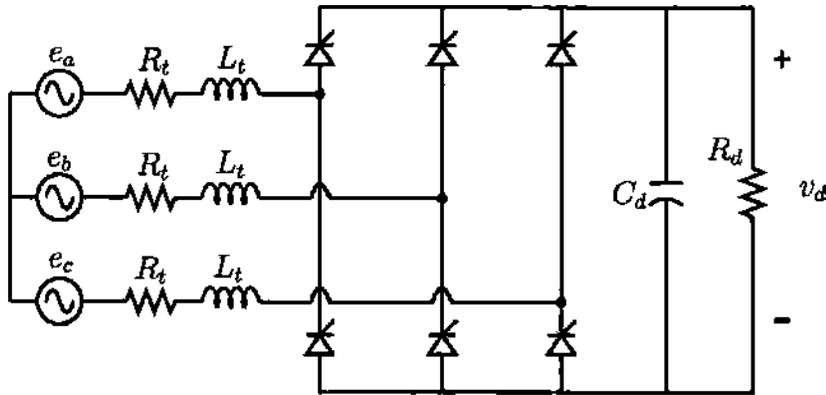


Figura 5.1: Rectificador trifásico controlado.

En los trabajos [Suárez, 2012, Rico et al., 2012] se presentó por primera vez el modelado del rectificador trifásico no controlado en el MRC. En este sentido, con el modelo complementario del tiristor presentado en la sección 3.3.2, estos trabajos pueden ser extendidos al modelado del rectificador trifásico controlado, tal y como se muestra en la presente sección.

### 5.1.1. Modelado del Rectificador Trifásico Controlado con Control PI

En la Figura 5.2 puede verse el árbol y co-árbol seleccionados para obtener el SLC del RTC en lazo cerrado. Nótese que se trata de un árbol y co-árbol con configuración no normal dado que la inductancia de la fuente  $L_s$  ubicada en la fase  $c$  se encuentra en el co-árbol. Esto significa que el modelado en variables de estado, como se mencionó en la sección 3.2.1, puede realizarse considerando un orden del SLC menor al supuesto. En este sentido, la corriente del inductor en la fase  $c$  puede ser modelada en función de las otras variables de estado. De acuerdo a los lineamientos descritos en la sección 3.2.1, la corriente del inductor en la fase  $c$  puede obtenerse aplicando LCK al  $cc_1$  de dicho inductor:

$$i_c = -i_a - i_b \quad (5.1)$$

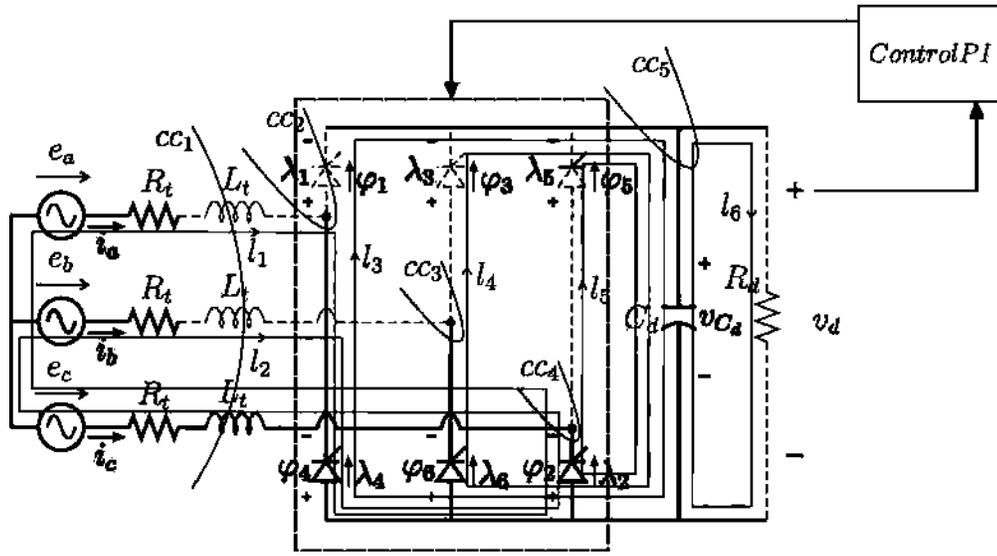


Figura 5.2: Árbol y co-árbol del rectificador trifásico controlado.

La expresión (5.1), según los lineamientos propuestos en la sección 3.2.1, debe derivarse

$$\frac{di_c}{dt} = -\frac{di_a}{dt} - \frac{di_b}{dt} \quad (5.2)$$

y sustituirse en las ecuaciones de los lazos en los que aparece  $\frac{di_c}{dt}$ .

Note además en la Figura 5.2 que, dada la configuración de árbol elegida, el modelo propuesto considera un modelado de los tiristores superiores del puente como elementos con variable de salida  $\varphi$  de corriente, mientras que los tiristores inferiores presentan un modelado con variable de salida  $\varphi$  como de voltaje.

De esta forma al formular los modelos dinámico (incluyendo la sustitución de  $\frac{di_b}{dt}$ ) y complementario del RTC en base a la Figura 5.2, puede obtenerse el SLC del RTC mostrado en el apéndice B.1.

Note que en el SLC (B.1) del RTC, los tiristores son controlados como interruptores de CD con una señal diente de sierra con magnitud mínimo  $v_{ref}$  y un periodo de trabajo de 90 grados (para el RTC de 6 pulsos) que es el rango de disparo del RTC para operar como rectificador. Nótese que debe tenerse un interruptor piloto el cual calcule y controle, en base a la comparación entre la señal del error y la señal diente de sierra, el ángulo de disparo simétrico de los seis tiristores durante cada ciclo de la frecuencia fundamental. En este caso, note que el SLC (B.1) considera una señal diente de sierra para cada tiristor, lo cual es utilizado para prescindir de una lógica adecuada que le asigne a cada tíristor su ángulo de disparo simétrico. En esta lógica, lo único que debe cuidarse es considerar el voltaje en el lado de CD  $v_{C_d}$  y la variable dinámica

del controlador  $x_c$  como constantes durante cada ciclo fundamental. De esta forma, la comparación entre cada diente de sierra y la señal del error (que es constante para cada ciclo) proporciona de manera automática el ángulo de disparo simétrico de cada tiristor. Asimismo, otra consideración que debe tomarse en cuenta para el uso del SLC, es que a diferencia de los tiristores normales, los interruptores una vez que han sido cerrados con el primer disparo deben permanecer cerrados durante los otros 90 grados del segundo disparo para permitir la conducción de una posible corriente continua que pudiera estar circulando por ellos. De esta forma, se asegura el modo de conducción continua y discontinua del RTC, donde el segundo disparo de cada interruptor es controlado por su interruptor complemento que va defasado 60 grados atrás.

### 5.1.2. Simulación con Control de Voltaje

Los parámetros utilizados para simular el RTC en lazo cerrado en el MRC son mostrados en la Tabla 5.1.

Tabla 5.1: Parámetros del RTC en lazo cerrado.

$e_{ab,pico}$	208	V
$f$	60	Hz
$R_t$	0.001	$\Omega$
$L_t$	1	mH
$C_d$	1000	$\mu F$
$R_d$	20	$\Omega$
$kp$	0.2	
$ki$	80	

Utilizando el SLC (B.1) y considerando 600 muestras por ciclo de 60 Hz, así como un voltaje de referencia del controlador en el lado de CD  $v_{ref} = 150V$ , es posible obtener la solución transitoria de la corriente de línea  $i_a$  del RTC mostrada en la Figura 5.3. Note que el comportamiento de la corriente de línea  $i_a$  es un comportamiento típico del RTC con una fuente constante en el lado de CD [Mohan et al., 1995], la cual es una consideración que puede realizarse en este caso dado que se tiene un valor de filtro capacitivo  $C_d$  alto en el lado de corriente directa.

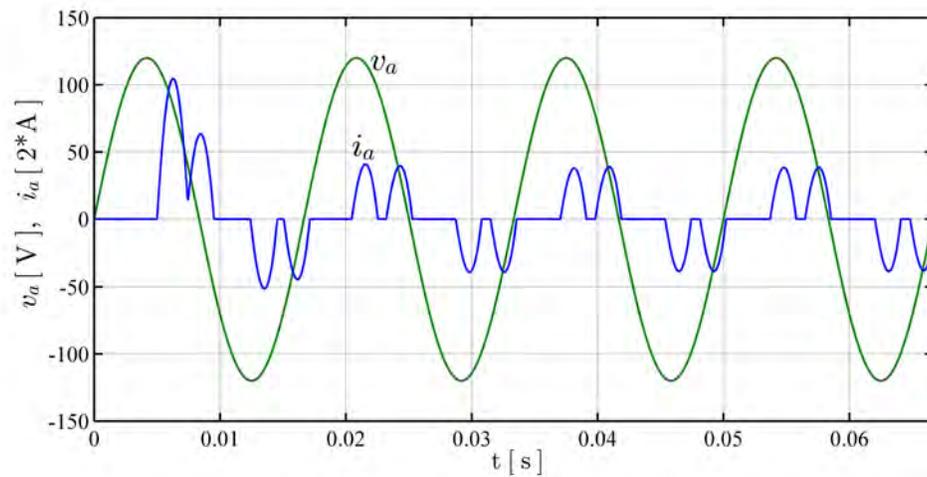


Figura 5.3: Respuesta transitoria de la corriente de línea del RTC con  $v_{ref} = 150V$ .

La Figura 5.4 muestra el comportamiento transitorio del voltaje de CD controlado en la salida del RTC. Note que el control es efectivo para proporcionar un voltaje de salida próximo al de referencia  $v_{ref} = 150V$ .

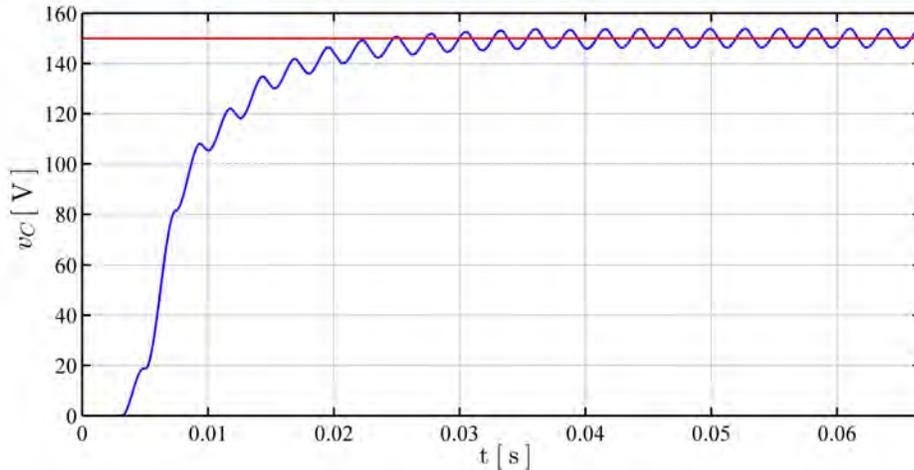


Figura 5.4: Respuesta transitoria del voltaje de salida de CD del RTC con  $v_{ref} = 150V$ .

Con la formulación de un PLC mezclado es posible obtener el estado estable del RTC en lazo cerrado. La Figura 5.5 muestra el cálculo de estado estable del voltaje de CD controlado del RTC obtenido con 300 puntos de muestreo. Note, como era de esperarse, que la frecuencia del voltaje de salida de CD presenta una frecuencia seis veces la frecuencia de línea de CA, lo cual es característico en los rectificadores trifásicos de 6 pulsos [Mohan et al., 1995].

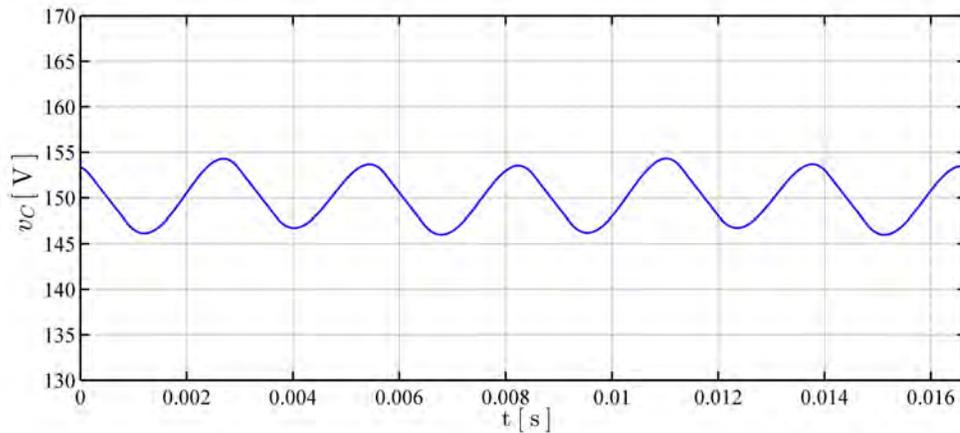


Figura 5.5: Estado estable del voltaje de salida de CD del RTC con  $v_{ref} = 150V$ .

El análisis armónico del voltaje de salida de CD es ilustrado en la Figura 5.5. Note, como era de esperarse, que los componentes armónicos influyentes en el voltaje de salida son los correspondientes a frecuencias múltiplos de 6 veces la frecuencia de línea.

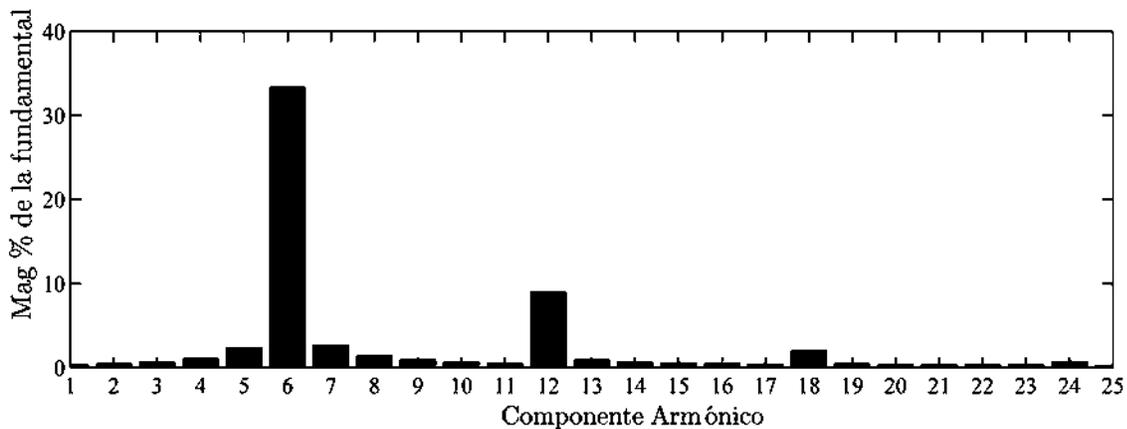


Figura 5.6: Análisis armónico del voltaje de salida de CD del RTC con  $v_{ref} = 150V$ .

La Figura 5.7 muestra la solución de estado estable de la corriente de línea  $i_a$ .

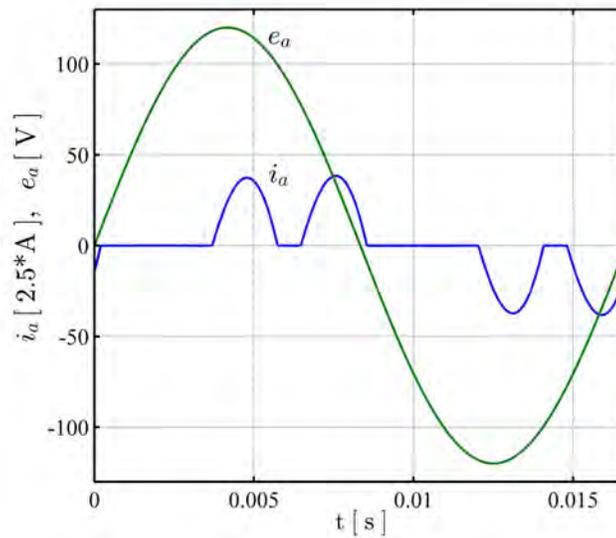


Figura 5.7: Estado estable de la corriente de línea del RTC con  $v_{ref} = 150V$ .

### 5.1.3. Modelado de un Controlador de Velocidad de Motor de CD

Una de las aplicaciones principales del RTC es la que involucra el control de motores de CD. En esta configuración, el voltaje de CD regulable del RTC permite controlar diversas variables de las máquinas de CD como lo pueden ser velocidad, par o corriente en el arranque. Entre las configuraciones más utilizadas para el control de velocidad, se encuentra la configuración de campo fijo con voltaje de armadura variable. En esta configuración, el voltaje de salida de CD controlable del RTC es utilizado para regular el voltaje de alimentación en la armadura del motor de CD y de esta forma obtener un control sobre su velocidad; véase Figura 5.8.

Como se conoce, la velocidad en estado estable de la configuración en derivación del motor de CD esta definida mediante [Nasar, 1981]:

$$w_m = \frac{V_a - \frac{R_a T_m}{k_m I_f}}{k_m I_f} \quad (5.3)$$

donde  $k_m$  es una constante que depende de propiedades físicas y de construcción del motor de CD. De esta forma, de acuerdo a la expresión (5.3), al tener un flujo de campo fijo con  $I_f$  constante y un par de carga  $T_m$  en estado estable también fijo, la única variable que puede cambiar o variar la velocidad es el voltaje de alimentación en la armadura  $V_a$ . En este sentido, con voltajes de alimentación en la armadura bajos, se consiguen velocidades de motor bajas dado que la fuerza contra-electromotriz forzada

en la armadura implica una velocidad de giro baja. Con voltajes de armadura altos, la fuerza contra-electromotriz en la armadura del motor es alta lo que implica velocidades de giro altas.

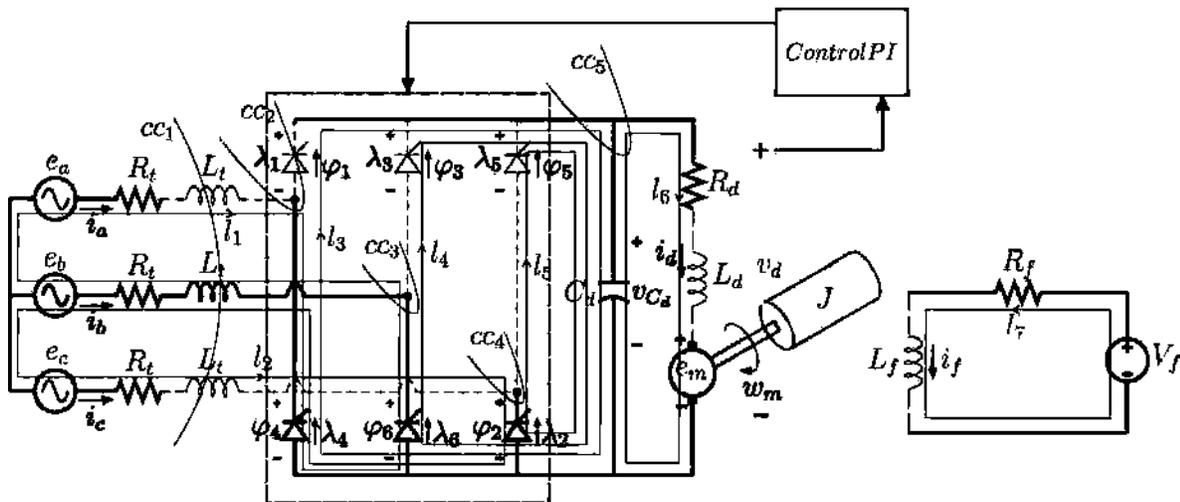


Figura 5.8: Controlador de velocidad de motor de CD basado en RTC.

El torque electromagnético del motor de CD en la configuración en derivación está dada por [Nasar, 1981]:

$$T_e = k_m I_f i_d \quad (5.4)$$

donde  $i_d$  es la corriente de armadura del motor.

En el modelado del RTC con control de motor de CD, el árbol y el co-árbol seleccionados, los cuales son mostrados en la Figura 5.8, son muy similares al RTC modelado en la sección 5.1.1. La única variante en la topología, es el lazo formado por el circuito de armadura del motor, el cual sustituye a la resistencia de carga  $R_c$  por la conexión serie de la resistencia e inductancia de armadura y el voltaje inducido del motor  $e_m$ . En este contexto, la dinámica incluida al RTC en el control de motores de CD, son precisamente las ecuaciones dinámicas que describen el comportamiento del motor: una ecuación diferencial que describe la dinámica del movimiento rotacional del motor y dos ecuaciones diferenciales que describen la dinámica de los devanados de campo y armadura. Sin embargo, en este caso, como se tiene la configuración del motor con excitación de campo separada y fija, es posible descartar la ecuación dinámica del devanado de campo y considerar únicamente la ecuación del devanado de armadura, la cual es obtenida en la Figura 5.8 al aplicar LVK al lazo  $l_6$  formado por el circuito equivalente

de armadura:

$$\frac{di_d}{dt} = -\frac{R_d i_d}{L_d} + \frac{v_C}{L_d} - \frac{k_m i_f w_r}{L_d} \quad (5.5)$$

donde  $k_m i_f w_r = e_m$  es el voltaje interno inducido en la armadura del motor. También la ecuación dinámica de la velocidad rotacional del motor puede definirse mediante:

$$\frac{dw_m}{dt} = \frac{k I_f i_d}{J} - \frac{b w_m}{J} \quad (5.6)$$

donde  $J$  y  $b$  son respectivamente la constante de inercia y el coeficiente de amortiguación del motor.

De esta forma al formular el modelo dinámico y el modelo complementarios en base a la Figura 5.8 y al incluir la dinámica del motor así como la del control del RTC, es posible obtener el SLC (B.2) del controlador de velocidad de motores de CD basado en RTC descrito en el apéndice B.2.

#### 5.1.4. Simulación del Controlador de Velocidad de Motor de CD

Para la simulación del RTC con control de motor de CD, se consideran los mismos parámetros del RTC visto en la sección 5.1.2 pero se incorporan los parámetros eléctricos del motor, los cuales pueden ser vistos en la Tabla 5.2.

Tabla 5.2: Parámetros del motor de CD

$R_d$	0.8	$\Omega$
$L_d$	12	$mH$
$k_m$	1.875	
$b$	0	$N \cdot m \cdot s/rad$
$J$	0.6	$kg \cdot m^2$
$w_{mnom}$	1220	$r.p.m.$
$T_{mnom}$	30.375	$N \cdot m$
$R_f$	240	$V$
$V_f$	240	$V$
$I_f$	1	$A$

La simulación transitoria considera un control de velocidad con arranque en vacío a voltaje reducido para limitar la corriente inicial del motor. De esta forma, para toda

la simulación se considera una velocidad de referencia fija igual a  $610r.p.m.$  para el controlador y una perturbación en el par de carga en el instante igual a  $3s$  que origina que el controlador mantenga dos intervalos de tiempo con voltajes de referencia diferentes para mantener la velocidad constante, como se aprecia en la Figura 5.9. Los voltajes de referencia son calculados por el controlador dependiendo del par de carga y de acuerdo a las expresiones (5.3) y (5.4). La perturbación en el instante igual a  $3s$  contempla un cambio en el par de carga de  $T_m = 0N \cdot m$  a la mitad del torque nominal  $T_m = 15.18N \cdot m$ . La Figura 5.9 también muestra el voltaje de CD que se obtiene a la salida del RTC con el voltaje de referencia ya señalado. Note que el voltaje de salida del RTC presenta un pequeño rizado a lo largo de la simulación, lo cual es característico en este tipo de convertidores con filtro capacitivo en el lado de CD.

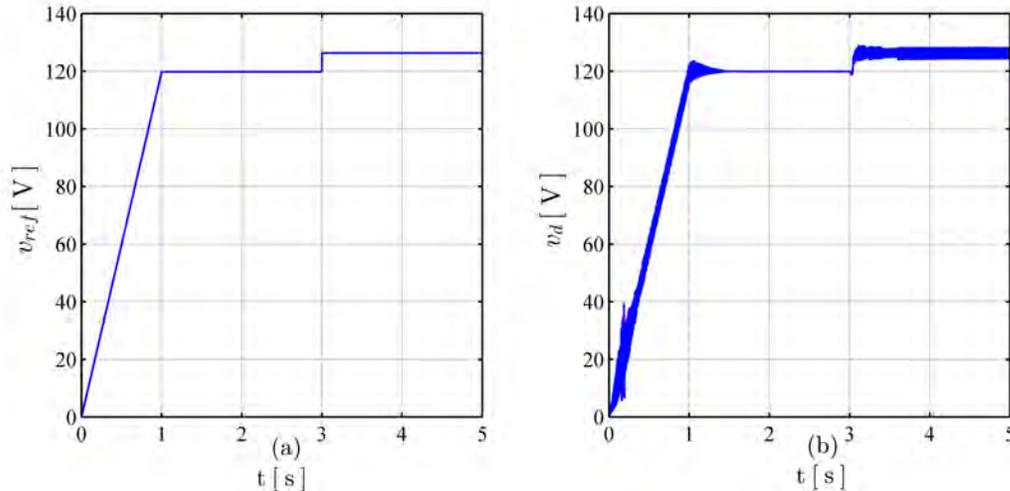


Figura 5.9: (a) Voltaje de referencia. (b) Voltaje de CD en la salida del RTC.

La Figura 5.10 muestra la corriente de armadura del motor obtenida durante la simulación. Nótese que con el arranque a voltaje reducido, la corriente de arranque en la armadura logra ser limitada a valores menores que 2.5 veces la corriente nominal del motor. También puede verse que la corriente en el intervalo de  $1s$  a  $3s$  tiende a ser cero dado que el par de carga en este intervalo de tiempo es cero. Durante el intervalo de  $3s$  a  $5s$ , la corriente tiende a estabilizarse en el valor correspondiente al par de carga final dado por la ecuación de estado estable (5.4).

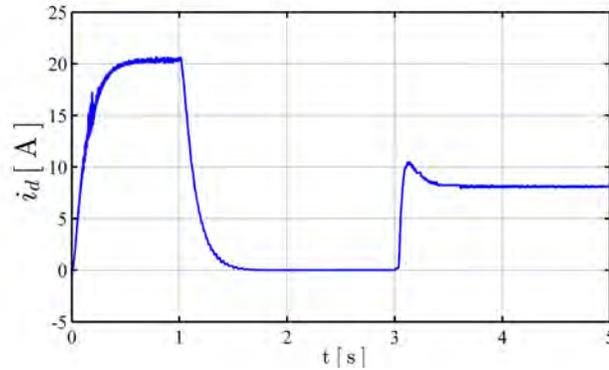


Figura 5.10: Respuesta transitoria de la corriente de armadura del motor de CD.

La Figura 5.11 muestra el comportamiento de la velocidad con una velocidad de referencia  $w_{m_{ref}} = 610 r.p.m.$ . Durante el arranque, la velocidad tiende a crecer suavemente hasta tomar el valor de referencia. En el instante de tiempo de la perturbación, el motor presenta una desaceleración natural debida al aumento de carga. En este instante el controlador empieza a actuar y genera un voltaje de referencia mayor para restarurar la velocidad a la velocidad de referencia.

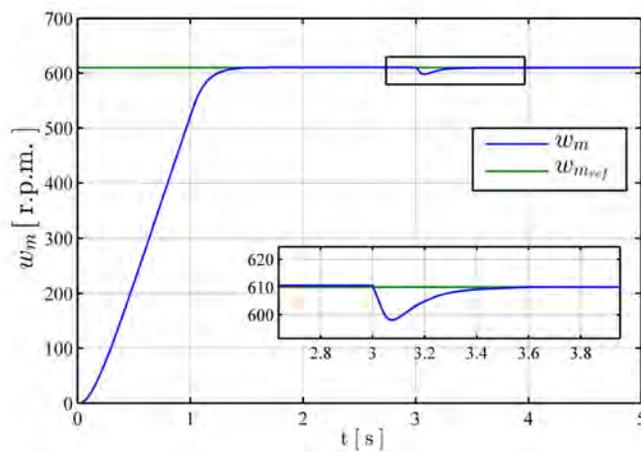


Figura 5.11: Respuesta transitoria de la velocidad del motor de CD con  $w_{m_{ref}} = 610 r.p.m.$

## 5.2. FC-TCR

En esta sección se presenta el modelado y simulación en el MRC de un compensador estático de VARs: el *FC-TCR*. Como se conoce, en los sistemas de potencia, el *FC-TCR* y en general los dispositivos *FACTS* son utilizados principalmente para el control del flujo de potencia en las redes de potencia. Este control entre muchos de sus objetivos, permite principalmente la regulación de voltaje en los nodos del sistema de potencia mediante la inyección o consumo de potencia activa y reactiva. La Figura 5.12 muestra la configuración general de un *FC-TCR* en lazo cerrado para la regulación de voltaje de un nodo ( $V_2$ ) que se encuentra conectado virtualmente mediante un equivalente thevenin a un sistema de potencia ( $V_1$ ).

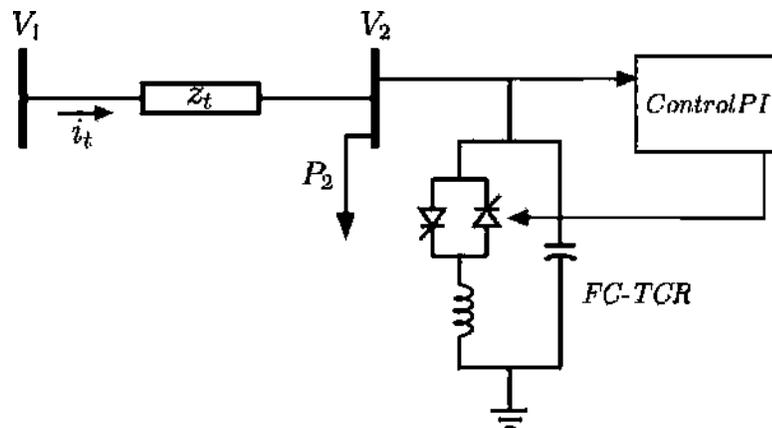


Figura 5.12: *FC-TCR* en lazo cerrado.

El *FC-TCR* únicamente puede inyectar o consumir potencia reactiva del SEP, por lo que su acción de control se centra principalmente en la regulación de magnitud de voltaje. Como se muestra en la Figura 5.12, el sistema en lazo cerrado del *FC-TCR* debe contar con un medidor de voltaje *rms* para medir la magnitud de la componente fundamental del voltaje en el nodo controlado. Nótese que este es un tipo de control diferente a los vistos en secciones anteriores, dado que lo que se controla no es un voltaje de referencia de CD fijo sino la magnitud del voltaje fundamental de una señal de CA. El *FC-TCR* debe contar además con un enganchador de fase que detecte los cruces por cero del voltaje en el nodo controlado para referenciar y controlar el ángulo de disparo de los tiristores [Hingorani and Gyugyi, 2000].

### 5.2.1. Modelado del FC-TCR con Control PI

En la Figura 5.13 puede verse el árbol y co-árbol utilizados para modelar el *FC-TCR* en el MRC. Note que la impedancia  $z_t$  del equivalente thevenin ha sido sustituida por un equivalente  $R - L$  y que la carga  $P_2$  del nodo controlado ha sido remplazada por un equivalente  $R$ . En la Figura 5.13 también se muestran los lazos,  $ccs$  y el modelado del conjunto antiparalelo de tiristores del *TCR*. Nótese que de acuerdo al modelado seleccionado, uno de los tiristores del *TCR* debe modelarse con variable de salida  $\varphi$  de corriente, mientras que el otro tiristor debe modelarse con salida  $\varphi$  de voltaje.

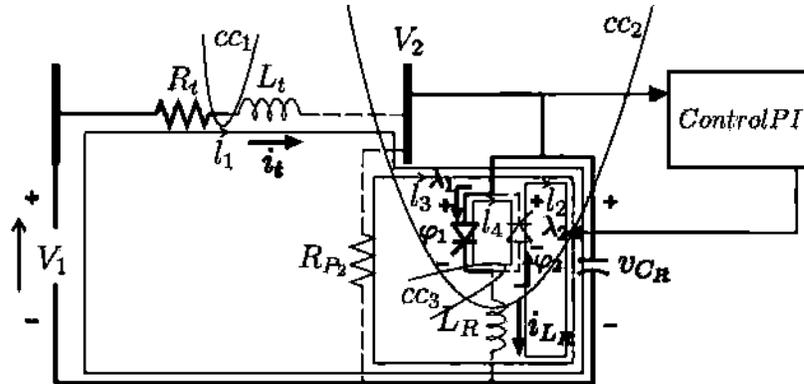


Figura 5.13: Árbol y co-árbol del *FC-TCR*.

Utilizando el árbol y co-árbol mostrados en la Figura 5.13 así como por incluir la dinámica del controlador y los modelos complementarios de los tiristores, es posible obtener el siguiente SLC del *FC-TCR* en lazo cerrado:

$$A = \begin{bmatrix} -R_t/L_t & -1/L_t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/L_R & 0 \\ 1/C_R & -1/C_R & -1/(R_{p2}C_R) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.7a)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1/L_R & 1/L_R & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.7b)$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -k_i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -k_i \end{bmatrix} \quad (5.7c)$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \Lambda_c & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & \Lambda_c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.7d)$$

$$E = \begin{bmatrix} 1/L_t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -k_p & k_p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -k_p & k_p \end{bmatrix} \quad (5.7e)$$

$$g = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad h = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.7f)$$

con  $x = [i_{L_t}, i_{L_R}, v_{C_R}, x_c]^T$ ,  $z = [z_{11}, z_{12}, z_{13}, z_{14}, z_{21}, z_{22}, z_{23}, z_{24}]^T$  y  $e = [V_1, e_{ts1}, e_{ts2}, V_2, V_{ref}]$ , donde  $e_{ts1}$  y  $e_{ts2}$  son las señales diente de sierra de cada tiristor con un pe-

riodo de trabajo de 90 grados (rango neto de disparo del TCR) y defasadas 90 y 180 grados respectivamente respecto al cruce por cero de  $V_2$  en cada ciclo de la frecuencia fundamental. El instante de cruce por cero en cada ciclo es proporcionado por el enganchador de fase del  $FC - TCR$ . El error entre la magnitud fundamental de  $V_2$  y  $V_{ref}$  debe permanecer constante en cada ciclo fundamental al igual que  $x_c$ .

### 5.2.2. Simulación con Control de Voltaje de CA

Para la simulación en lazo cerrado del  $FC-TCR$  se requiere un medidor de voltaje *rms* fundamental y un enganchador de fase que detecte los cruces por cero para referenciar el disparo del TCR. En este sentido, éstos son sistemas que aún no se encuentran modelados en el MRC. Sin embargo, dado que todas las simulaciones realizadas en esta tesis han sido implementadas en *Matlab*, es posible utilizar los modelos y sistemas de *SymPowerSystems* para el cálculo de respuestas transitorias en el MRC de sistemas eléctricos más complejos. En este caso para la simulación del  $FC-TCR$  se utilizaron los modelos del medidor de magnitud *rms* y enganchador de fase de *SymPowerSystems*. Note que esta técnica de simulación no puede ser utilizada de igual manera para el cálculo de estado estable en el MRC dado que todos los modelos y sistemas implicados en los PLCs deben tener una representación en el marco complementario.

En la Tabla 5.2.2 pueden verse los parámetros utilizados para la simulación del  $FC-TCR$ . En este caso se considera una simulación que contempla el control de voltaje en el nodo 2 considerando un voltaje *rms* fundamental de referencia igual a 1 p.u. y dos perturbaciones de voltaje: una disminución (*sag*) y un aumento (*swell*) de voltaje en el nodo de envío del sistema ( $V_1$ ) en los instantes 0.63s y 1.26s respectivamente. De esta forma, inicialmente se considera un voltaje de envío  $V_1 = 1$  p.u. Sin embargo en el instante igual a 0.63s ocurre el *sag* de voltaje en el nodo 1 con una disminución de magnitud de 1 p.u. a 0.97 p.u. De igual forma, en el instante 1.32s ocurre el *swell* de voltaje con un aumento de 0.97 p.u. a 1.03 p.u. en el nodo de envío. En este contexto, se obtiene la respuesta del sistema y se observa la eficacia del controlador para mantener el voltaje en 1 p.u. en el nodo 2.

Tabla 5.3: Parámetros de simulación del *FC-TCR*.

$S_{Base}$	1000	<i>MVA</i>
$V_{Base}$	400	<i>KV</i>
$Q_{FC-TCR}$	100	<i>MVar</i>
$R_t$	0.052	<i>p.u.</i>
$L_t$	0.0014	<i>p.u.</i>
$P_2$	0.1	<i>p.u.</i>
$R_{P_2}$	10	<i>p.u.</i>
$L_R$	0.0133	<i>p.u.</i>
$C_R$	$2.65 \times 10^{-4}$	<i>p.u.</i>
$k_p$	0.1	
$k_i$	20	

La Figura 5.14 muestra el comportamiento obtenido de la magnitud del voltaje fundamental en el nodo 2. Note que el *FC-TCR* controlado permite realizar una acción de control efectiva y mantener una magnitud fundamental de voltaje *rms* en el nodo controlado igual a 1 p.u. Nótese también que en la Figura 5.14 se muestra el voltaje que se obtendría en el nodo 2 en el caso supuesto de que no existiese compensador estático. En esta situación las perturbaciones generarían una disminución y un aumento de voltaje importantes en dicho nodo.

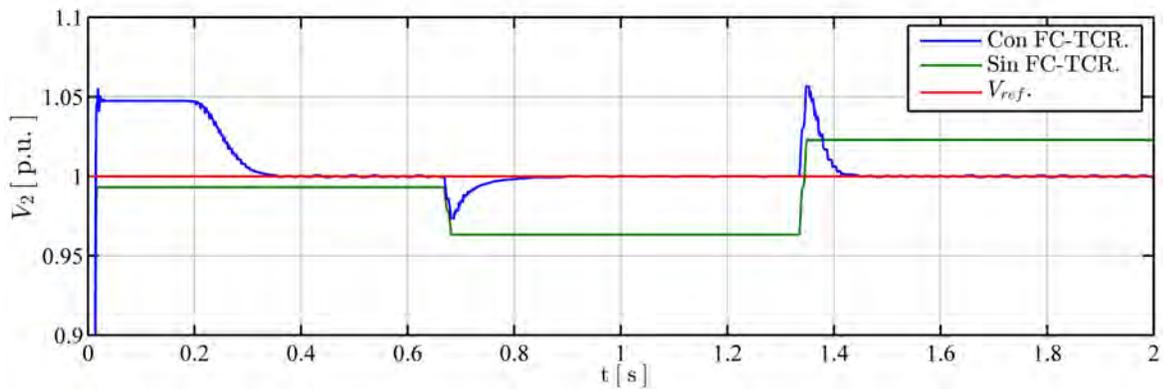


Figura 5.14: Respuesta transitoria del voltaje fundamental en el nodo controlado por el *FC-TCR*.

La Figura 5.15 muestra el comportamiento del flujo de potencia en el nodo controlado. En particular, la Figura 5.15(a) muestra la potencia de recepción suministrada al

nodo 2 por el sistema de potencia. Note que al inicio de la simulación, la red de potencia recibe la potencia reactiva nominal ( $100\text{MVAr}$ ) del *FC-TCR*. Esto es debido a que en este intervalo inicial de simulación, el controlador aún no ejerce una acción de control notoria sobre el *TCR* por lo que éste prácticamente no absorbe potencia del *FC*.

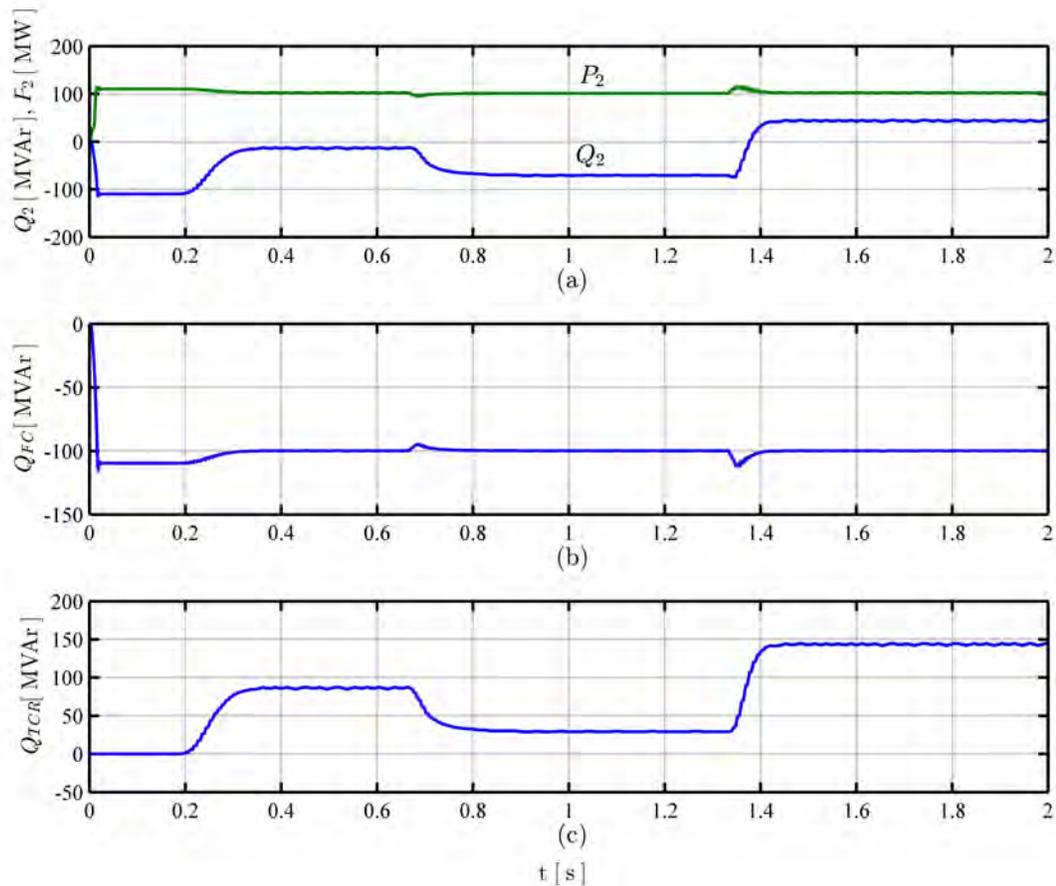


Figura 5.15: (a) Potencia de recepción en el nodo 2. (b) Potencia reactiva consumida por el *FC*. (c) Potencia reactiva consumida por el *TCR*.

En el instante igual a  $0.2\text{s}$ , el controlador presenta una acción de control más pronunciada e inicia una rápida disminución de los reactivos proporcionados a la red de potencia por el compensador estático, estabilizándose la potencia consumida en el nodo 2, entre el intervalo  $0.3\text{s}$  a  $0.63\text{s}$ , en un pequeño valor negativo. Este pequeño valor negativo hace suponer que durante este intervalo de tiempo el compensador únicamente entrega la potencia reactiva necesaria para elevar el voltaje en el nodo 2 debida a la caída natural de voltaje en la impedancia thevenin. En el instante igual a  $0.63\text{s}$  ocurre la primera perturbación en el sistema: un *sag* de voltaje que reduce el voltaje en el nodo de envío de 1 p.u. a 0.97 p.u. En este instante, el controlador empieza a ajustar la

inyección de potencia reactiva necesaria para mitigar el efecto del *sag* y elevar el voltaje en el nodo 2 a 1 p.u. Con esto el nuevo valor estable de la potencia reactiva inyectada por el FC-TCR prácticamente alcanza los 75 MVar, casi la potencia de entrega nominal del *FC-TCR*, como puede verse en la Figura 5.15(a). En el instante igual a 1.32s ocurre la segunda perturbación: un *swell* de voltaje que eleva el voltaje de 0.97 p.u. a 1.03 p.u. en el nodo de envío. Esto genera un nuevo proceso de ajuste para el controlador, en el cual se busca, al contrario del caso del *sag* de voltaje, aproximar la potencia reactiva de consumo por parte del *FC-TCR* para reducir el efecto del *swell* y mantener un voltaje igual a 1 p.u. en el nodo 2. En esta situación note que por primera vez el sistema de potencia entrega potencia reactiva ( $50MVAr_s$ ) al nodo 2 debida a la elevada magnitud del voltaje de envío. En las Figuras 5.15(a) y 5.15(b) también puede verse que debido al control y al sostenimiento de voltaje en un 1 p.u., las potencias  $P_2$  y  $Q_{FC}$  prácticamente se mantienen constantes en  $100MW$  y  $100MVAr$  respectivamente.

En la Figura 5.16 puede verse el comportamiento de la corriente del *TCR* en la etapa final de simulación, cuando existe la perturbación del *swell* de voltaje. Note que la corriente concuerda con la respuesta típica del *TCR*, en la cual se obtiene una corriente rica en armónicos que depende directamente del ángulo de disparo de los tiristores, los cuales mediante su período de conducción determinan la magnitud de la componente fundamental [Acha and Madrigal, 2001].

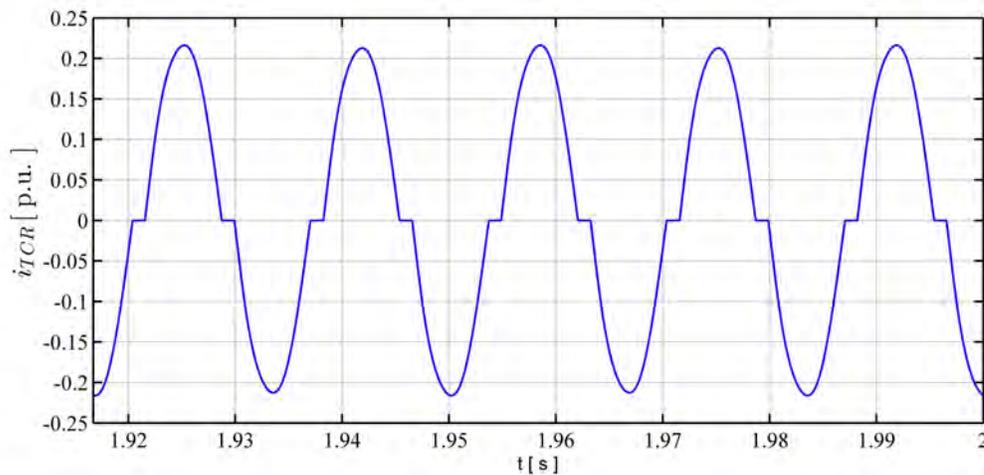


Figura 5.16: Forma de onda de la corriente en el *TCR*.

Para ángulos de disparo cercanos a 90 grados, la componente fundamental tiene una magnitud elevada y la forma de onda de la corriente  $i_{TCR}$  es muy próxima a la fundamental. La magnitud elevada de la fundamental induce un consumo de potencia alto en el *TCR*. Para ángulos de disparo cercanos a 180 grados, la magnitud de la

componente fundamental presenta un valor bajo y se aleja bastante de la forma de onda de la corriente  $i_{TCR}$ , la cual también presenta un valor muy pequeño. La magnitud baja de la componente fundamental genera un consumo de potencia reactiva mínimo.

La Figura 5.17 muestra el análisis armónico de la corriente del TCR mostrada en la Figura 5.16, puede verse que el análisis concuerda con la teoría en la cual los únicos armónicos influyentes en la corriente son los componentes armónicos impares [Acha and Madrigal, 2001].

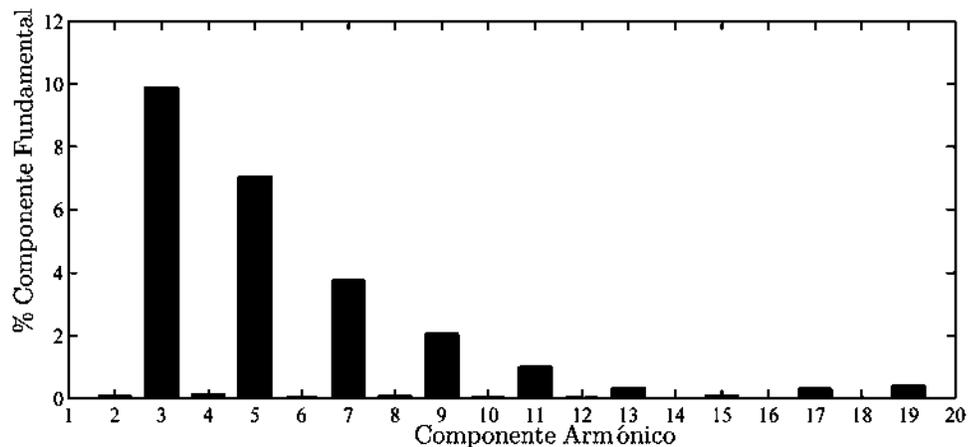


Figura 5.17: Análisis armónico de la corriente del  $TCR$ .

La Figura 5.18 muestra el comportamiento del voltaje en el nodo controlado. Nótese la evidente distorsión armónica generada en el nodo 2 por la conexión del  $FC-TCR$ .

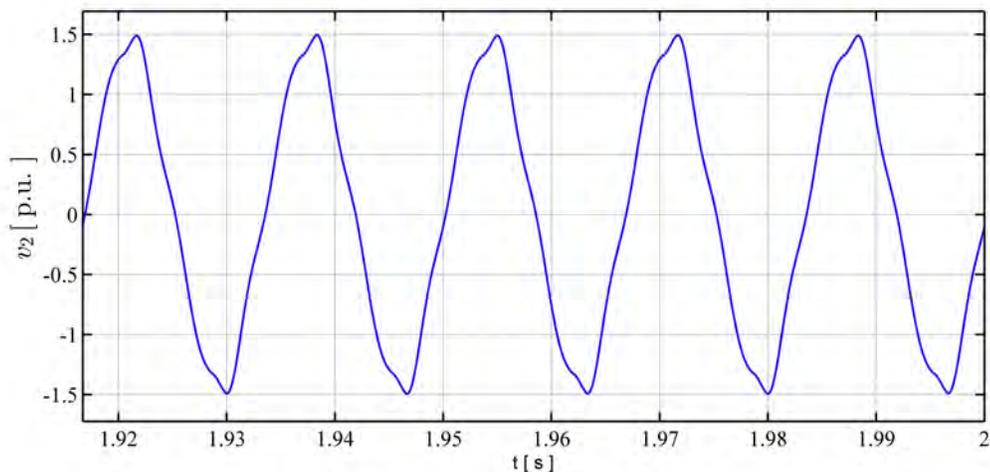


Figura 5.18: Forma de onda de voltaje en el nodo controlado por el  $FC-TCR$ .

### 5.3. Inversor Monofásico Conectado a la Red Eléctrica

Con la incorporación creciente de fuentes renovables de energía a los sistemas de potencia, los convertidores CD/CA se han convertido en una pieza clave en la conexión de una gran variedad de sistemas, en especial en la conexión de sistemas que incorporan fuentes de energía solar como paneles fotovoltaicos y otros sistemas que mediante baterías almacenan grandes cantidades de energía que más tarde es entregada al sistema eléctrico. Entre otras de las aplicaciones de los convertidores CD/CA también se encuentran los sistemas *HVDC*, el control de motores de CA y las denominadas fuentes de potencia ininterrumpibles (*UPS*), las cuales son muy utilizadas en subestaciones, centros de control y en instalaciones donde se requiere una fuente de energía de CA altamente confiable [Mohan et al., 1995].

La Figura 5.19 muestra la conexión típica de un inversor monofásico conectado a la red eléctrica. Esta configuración representa también la configuración más habitual en la conexión de paneles fotovoltaicos al sistema eléctrico.

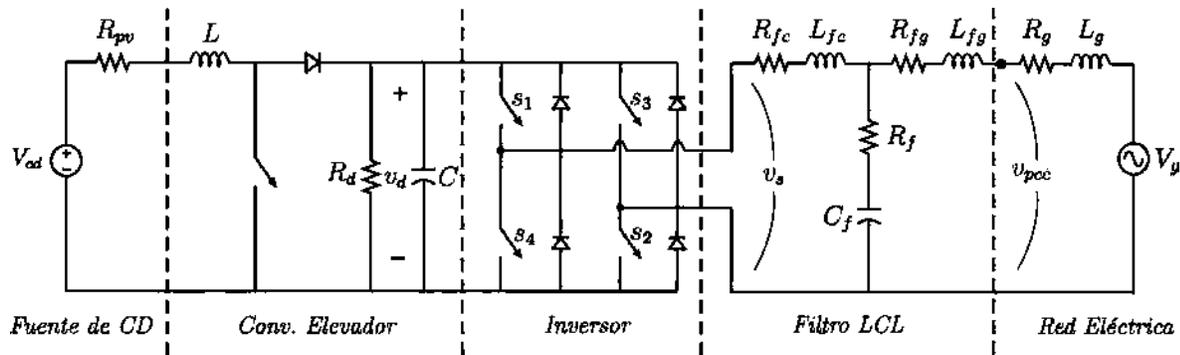


Figura 5.19: Inversor monofásico conectado a la red eléctrica.

Puede verse en la Figura 5.19 que la conexión del inversor monofásico cuenta con un convertidor elevador a la salida de la fuente de CD para regular y elevar el nivel de voltaje de dicha fuente a valores adecuados para su conversión. La inversión se logra en base al proceso de conmutación del puente monofásico de interruptores que mediante una lógica adecuada de conmutación genera la fuente de corriente alterna que ha de entregar potencia eléctrica a la red. Regularmente un filtro de primer o segundo orden es conectado entre el inversor y la red eléctrica para eliminar gran parte del contenido armónico de la fuente de CA generado por el proceso de conmutación del inversor.

### 5.3.1. Conmutación PWM Bipolar

Generalmente, para obtener una buena característica de distorsión armónica en la corriente de entrada a la red eléctrica y en el voltaje del punto de acoplamiento común  $v_{pcc}$ , se incorpora una lógica de conmutación *PWM* para generar menos armónicos en el proceso de conmutación del puente monofásico de interruptores [Mohan et al., 1995]. En este sentido, la señal de conmutación es obtenida mediante la comparación entre una señal triangular ( $v_t$ ) de alta frecuencia ( $f_t$ ) y una señal portadora ( $v_p$ ) de baja frecuencia ( $f_p$ ), tal y como se muestra en la Figura 5.20.

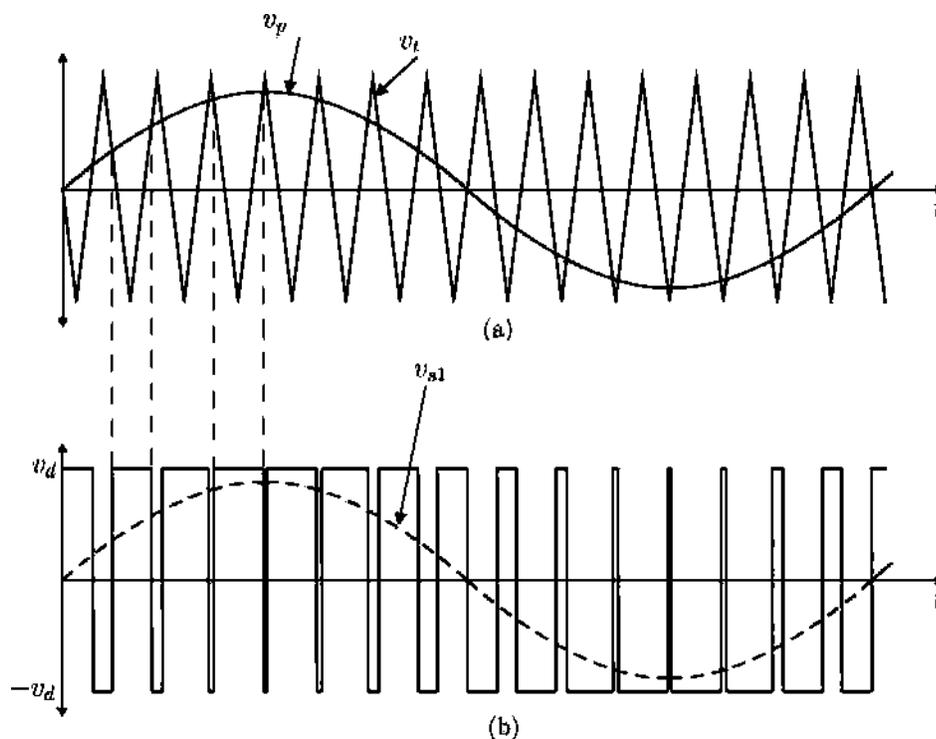


Figura 5.20: (a) Comparación para generar una señal PWM. (b) Señal PWM y su fundamental.

En la Figura 5.20(a) puede verse que cuando la señal portadora es mayor que la señal triangular debe generarse una señal de conmutación en alto que cierre la pareja de interruptores  $s_1$  y  $s_2$ . Por otro lado, cuando la señal portadora presenta un valor menor que la señal triangular, la señal de conmutación debe presentar una señal en bajo que abra esta misma pareja de interruptores. La señal de conmutación de la pareja de interruptores ( $s_3, s_4$ ) es el complemento de la señal de conmutación de ( $s_1, s_2$ ). De esta forma se obtiene una señal de voltaje *PWM* a la salida del puente inversor como la mostrada en la Figura 5.20(b), la cual contiene una componente fundamental  $v_{s1}$  con

magnitud y frecuencia:

$$V_{s1} = m_a V_d \quad (5.8)$$

$$f_{s1} = \frac{f_t}{m_f} \quad (5.9)$$

donde  $m_a$  y  $m_f$  son los índices de modulación de frecuencia y magnitud respectivamente del esquema *PWM*, los cuales se encuentran definidos mediante:

$$m_a = \frac{V_p}{V_t} \quad (5.10)$$

$$m_f = \frac{f_t}{f_p} \quad (5.11)$$

donde  $V_p$  y  $V_t$  son las magnitudes de la señal portadora y la señal triangular respectivamente. La lógica de conmutación *PWM* facilita el control de la potencia entregada por el inversor al sistema eléctrico mediante la variación del índice de modulación de magnitud y mediante el control del ángulo de fase de la señal portadora.

### 5.3.2. Diseño del Filtro LCL

El filtro *LCL* mostrado en la Figura 5.19 es un filtro pasabajas de tercer orden. Este filtro presenta una característica de filtrado con caída de 60 decibeles por decada para frecuencias mayores a la frecuencia de resonancia:

$$w_{res} = \sqrt{\frac{L_{fc}L_{fg}}{L_{fc}L_{fg}C_f}} \quad (5.12)$$

En los inversores, generalmente la frecuencia de resonancia del filtro debe ser ubicada entre 10 veces la frecuencia de la red y la mitad de la frecuencia de conmutación, esto con el objetivo de realizar un filtrado de armónicos adecuado y evitar problemas de resonancia en la parte baja y alta del espectro armónico [Villa, 2011]:

$$w_{res} = 10w_n \leq w_{res} \leq \frac{w_c}{2} \quad (5.13)$$

Además, según estándares internacionales, las inductancias de entrada y salida del filtro deben tener una impedancia menor al 5 % de la potencia de carga nominal para evitar una caída de tensión elevada en el filtro. Asimismo, el valor del capacitor debe limitarse a valores que no excedan el 5 % de compensación de potencia reactiva respecto a la potencia nominal del inversor [Villa, 2011].

### 5.3.3. Ecuaciones de Flujos de Potencia

Las ecuaciones simplificadas del flujo de potencia entre dos fuentes interconectadas mediante una impedancia altamente inductiva, también pueden utilizarse para calcular el flujo de potencia entregada por el inversor a la red eléctrica [Uzunovic, 2001]:

$$P_g = \frac{V_s V_{g_{rms}}}{X_t} \sin(\delta) \quad (5.14)$$

$$Q_g = \frac{V_s V_{g_{rms}} \cos(\delta) - V_{g_{rms}}^2}{X_t} \quad (5.15)$$

donde  $P_g$  y  $Q_g$  son respectivamente las potencias activa y reactiva recibidas por la red eléctrica.  $V_s$  y  $V_{g_{rms}}$  los voltajes *rms* fundamentales en la salida del inversor y de la red,  $\delta$  el ángulo de potencia de  $v_{s1}$  respecto a  $V_g$  y  $X_t$  la reactancia total entre la salida del filtro y la red eléctrica, que corresponde a la reactancia thevenin del sistema eléctrico.

### 5.3.4. Modelado del Inversor Monofásico

El modelado del sistema inversor conectado a la red eléctrica en el MRC puede realizarse utilizando el árbol y co-árbol mostrados en la Figura 5.21. Nótese que se incorporó un control PI en el convertidor elevador del sistema para poder tener un mejor control sobre el voltaje en el enlace de CD.

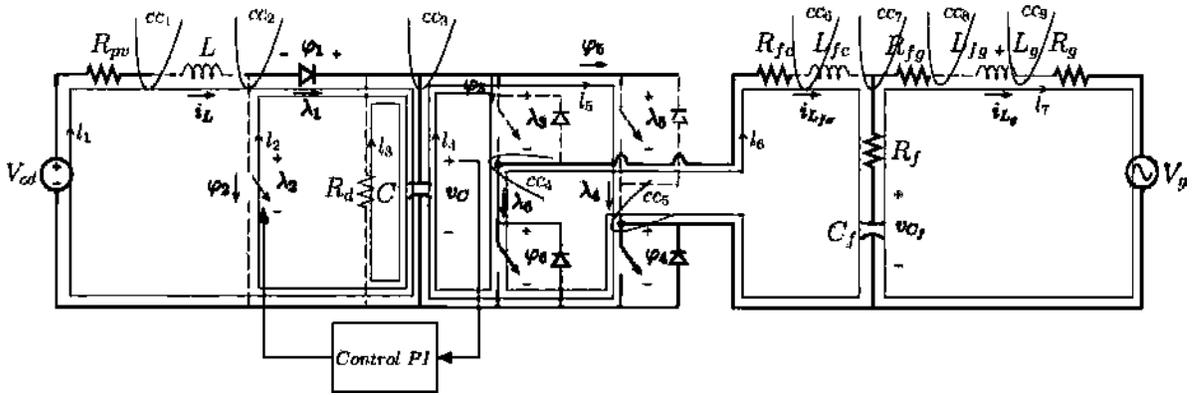


Figura 5.21: Árbol y co-árbol del inversor monofásico conectado a la red eléctrica.

Los modelos complementarios de los interruptores deben considerar los modelos de voltaje y corriente (3.20) y (3.22) del conjunto antiparalelo de un interruptor unidireccional y un diodo ideal.

De esta forma, de acuerdo al modelado ilustrado en la Figura 5.21, es posible obtener el SLC (B.3) del inversor monofásico conectado a la red eléctrica mostrado en el apéndice B.3.

### 5.3.5. Simulación del Inversor Monofásico

El objetivo principal de la conexión de cualquier inversor a una red eléctrica, es el de proporcionar potencia eléctrica al sistema eléctrico con buenos estándares de calidad en cuanto a factor de potencia y distorsión armónica se refiere. En este sentido, la Tabla 5.3.5 muestra los parámetros utilizados para la simulación del sistema inversor.

Tabla 5.4: Parámetros de simulación del inversor monofásico.

$V_{cd}$	360	$V$	$R_{pv}$	1	$\Omega$
$L$	0.9	$mH$	$C$	2200	$\mu F$
$R_d$	20	$\Omega$	$f_{ce}$	5	$kHz$
$k_p$	0.5	$kHz$	$k_i$	400	$kHz$
$f_{PWM}$	5	$kHz$	$L_{fc}$	0.32	$mH$
$R_{fc}$	0.001	$\Omega$	$R_f$	0.04	$\Omega$
$C_f$	120	$\mu F$	$L_{fg}$	0.65	$mH$
$R_{fg}$	0.1	$\Omega$	$L_g$	10	$mH$
$V_{g_{rms}}$	210	$V$	$R_g$	0.1	$\Omega$

En este caso, si se especifica una entrega de potencia real al sistema eléctrico por parte del inversor igual a  $10KW$  con un factor de potencia igual a 0.95 adelante, se requiere una inyección de potencia reactiva hacia el sistema igual a  $3.3KVar$ . Con estos valores de  $P_g$  y  $Q_g$  y de acuerdo a las expresiones (5.14) y (5.15), se requiere una magnitud de voltaje fundamental en el punto de acoplamiento común igual a  $V_{s1} = 457V$  con un ángulo de potencia  $\delta = 33.3$  grados respecto al voltaje de la red eléctrica  $V_g$ . Para obtener una magnitud de voltaje fundamental en el punto de acoplamiento común igual a un valor en específico se requiere una coordinación entre el voltaje en el enlace de CD  $v_d$  y el índice de modulación de magnitud  $m_a$  del proceso de conmutación  $PWM$ . En este caso, si se fija un índice de modulación  $m_a$  igual a 1, se requiere un voltaje en el enlace de CD igual a  $457V$ . Este es el voltaje de referencia que deberá ser especificado en el controlador PI del convertidor elevador para poder entregar la potencia reactiva ya señalada. En este sentido, el ángulo de potencia  $\delta = 33.3$  grados debe ser implementado en el ángulo de fase de la señal portadora del esquema de modulación  $PWM$  para garantizar el flujo de potencia activa especificado.

Con las consideraciones ya señaladas, la Figura 5.22 muestra la respuesta transitoria del voltaje en el enlace de CD  $v_d$ . Note que al inicio de la simulación se considera un intervalo de tiempo muerto en el cual no hay proceso de conmutación  $PWM$  para

permitir la estabilización del voltaje en el enlace de CD mediante el controlador y así establecer las condiciones necesarias para el proceso de conmutación. En el instante igual a  $0.3s$ , ya con el voltaje en el enlace de CD estable en  $457V$ , empieza el proceso de conmutación  $PWM$  en el inversor y la entrega de potencia eléctrica a la red.

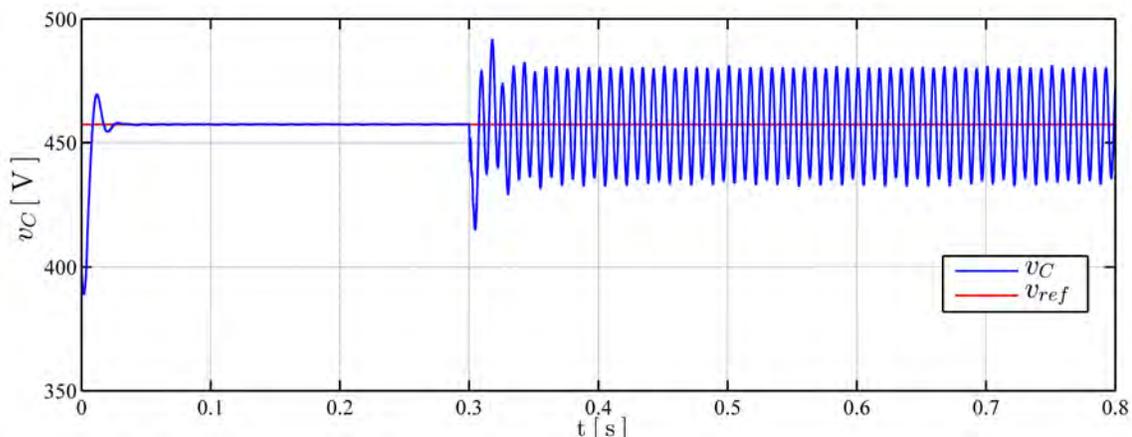


Figura 5.22: Respuesta transitoria del voltaje en el enlace de CD del inversor monofásico con  $v_{ref} = 457V$ .

Note en la Figura 5.22 que durante el intervalo de tiempo en el cual existe conmutación  $PWM$ , el voltaje en el enlace de CD fluctúa de una mayor forma respecto a la respuesta obtenida durante el intervalo inicial sin proceso de conmutación. Esto es debido a la entrega de potencia a la red eléctrica, la cual representa una carga adicional considerable en el lado de CD que dificulta la acción del controlador para mantener al voltaje en el enlace de CD igual a  $457V$ . No obstante, la fluctuación del voltaje no afecta en demasía al proceso de conmutación  $PWM$  para generar la señal de voltaje de CA especificada dado que el contenido armónico de la fluctuación no es muy elevado y su componente promedio permanece en  $457V$ .

La Figura 5.23 muestra el comportamiento del voltaje en el punto de acoplamiento común  $v_{pcc}$ . Note que se presenta una señal senoidal con una pequeña distorsión armónica con  $THD = 4.75\%$ . De esta forma, puede verse que el filtro  $LCL$  funciona de manera adecuada. Además en la Figura 5.23 también puede apreciarse, como era de suponerse, que la señal de voltaje en el  $pcc$  oscila con un valor pico muy próximo a  $457V$ , el cual es el valor de la magnitud del voltaje fundamental del  $v_{pcc}$  considerado en el diseño.

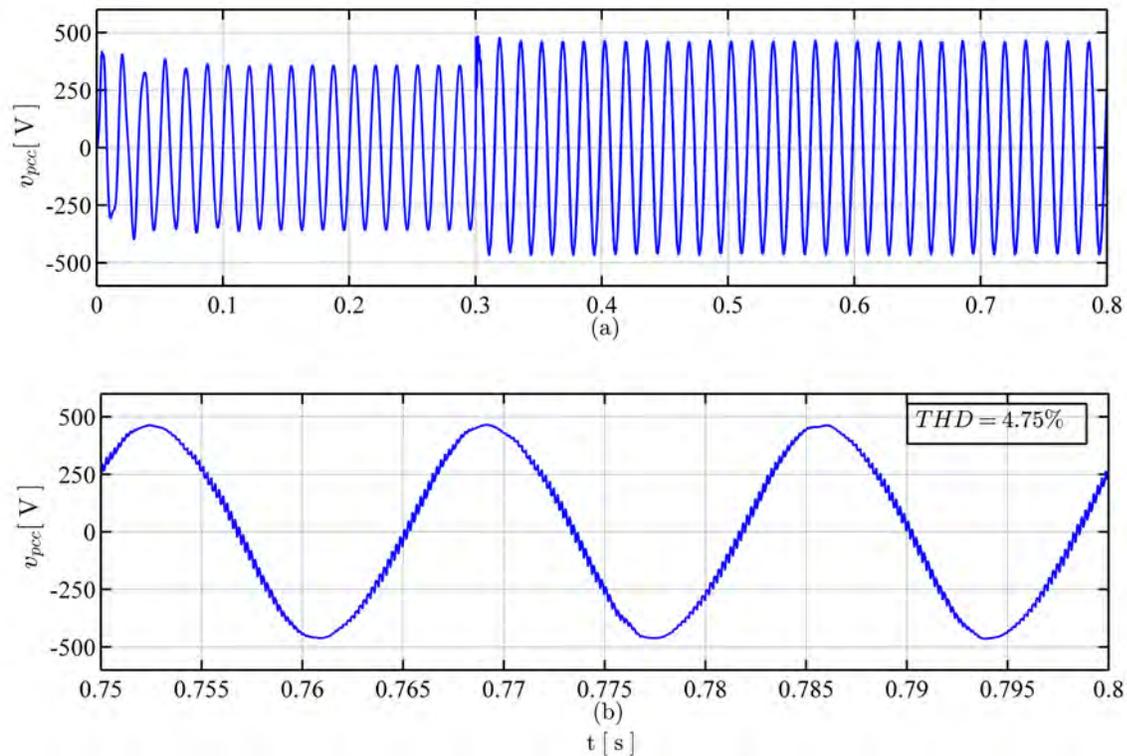


Figura 5.23: Voltaje en el punto de acoplamiento común del inversor monofásico.

La Figura 5.24 muestra el comportamiento de la corriente de entrada a la red eléctrica. Note que la respuesta de la corriente es parecida a la que se tuvo en el  $v_{pcc}$ . Sin embargo, dado que el filtro  $LCL$  es un filtro de corriente, la corriente de entrada a la red presenta todavía una menor distorsión armónica que el  $v_{pcc}$  con un  $THD = 1.41\%$ . Ambos  $THDs$  se encuentran dentro de los estándares de distorsión armónica menores o igual al 5%.

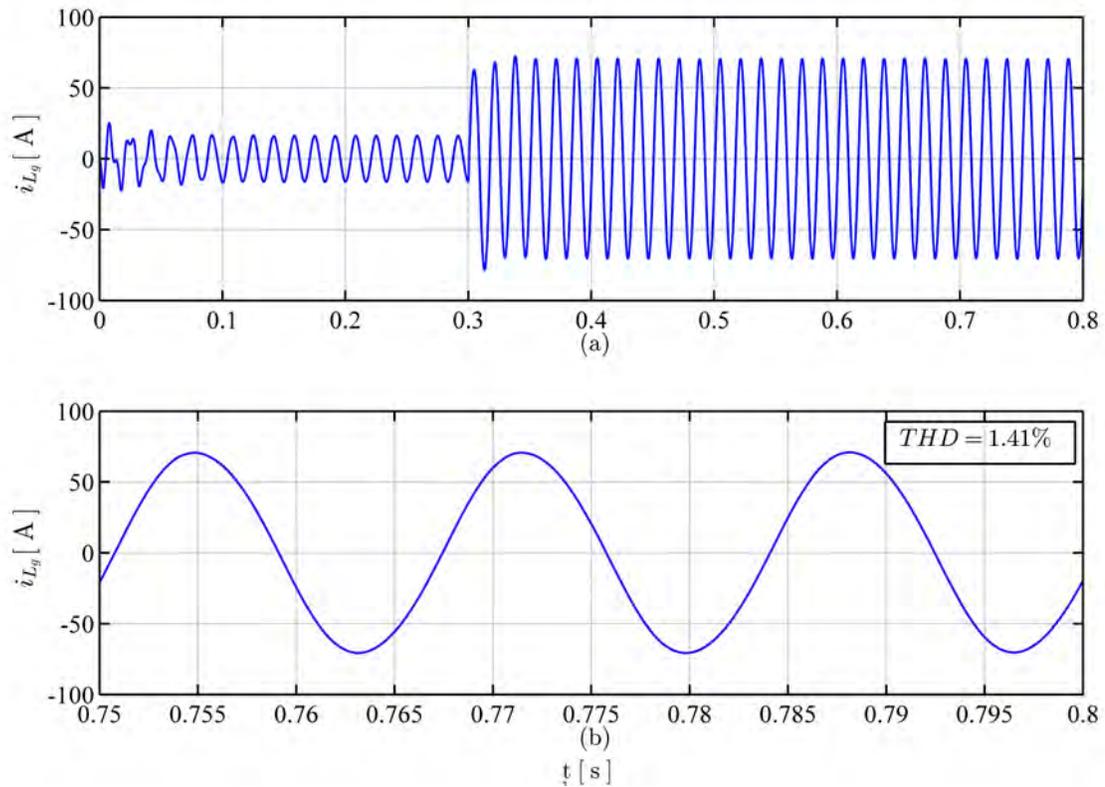


Figura 5.24: Corriente de entrada a la red eléctrica en el inversor monofásico.

En la Figura 5.25 puede verse el comportamiento de la potencia inyectada por el inversor monofásico a la red eléctrica. Note que antes del instante de conmutación del inversor ( $0.3s$ ), la potencia activa entregada a la red es cero mientras que la potencia reactiva presenta un valor igual a  $Q_g = 2.2KVAr$ . Esta potencia reactiva es entregada por el capacitor del filtro  $LCL$ . En el instante de inicio del proceso de conmutación  $PWM$  ( $0.3s$ ), el inversor comienza a entregar potencia activa y reactiva a la red eléctrica, las cuales se estabilizan en  $P_g = 10.1KW$  y  $Q_g = 2.9KVAr$  con un factor de potencia igual a  $f.p. = 0.9612$  adelantado, valores que son muy próximos a los de diseño:  $P_g = 10KW$ ,  $Q_g = 3.3KVAr$  y  $f.p. = 0.95$ , con lo cual se valida y comprueba el procedimiento realizado para la simulación del inversor monofásico.

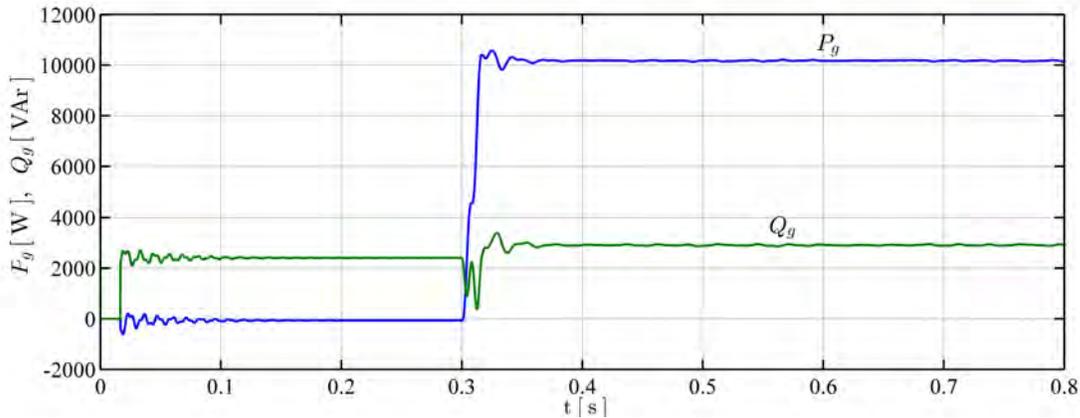


Figura 5.25: Potencia suministrada por el inversor a la red eléctrica.

## 5.4. Transformador No Lineal

La saturación magnética en el núcleo de transformadores e inductores genera una característica no lineal en la relación corriente-flujo magnético de dichos elementos. Este fenómeno a su vez induce un comportamiento no lineal en la relación voltaje-corriente de los elementos, lo cual representa una no linealidad en los sistemas de potencia. En un transformador, la saturación magnética del núcleo se representa mediante una inductancia de magnetización no lineal, tal y como se aprecia en el circuito equivalente mostrado en la Figura 5.26.

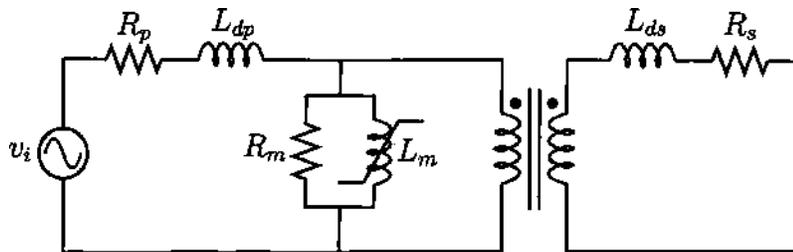


Figura 5.26: Transformador no lineal.

La Figura 5.27 muestra la característica corriente-flujo magnético típica de un transformador no lineal. Nóte la región lineal del transformador y la no linealidad incluida a éste por la saturación de flujo magnético ante la presencia de corrientes de magnetización  $i_m$  altas.

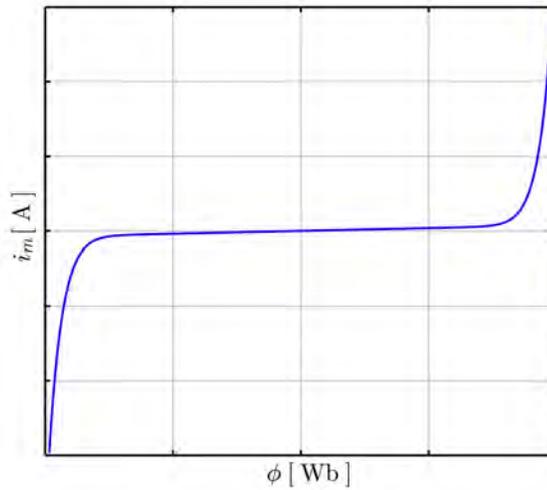


Figura 5.27: Característica de saturación de un transformador no lineal.

### 5.4.1. Modelado del Transformador No Lineal

El circuito equivalente del transformador con operación en vacío puede ser modelado en el MRC mediante la topología de árbol mostrada en la Figura 5.28.

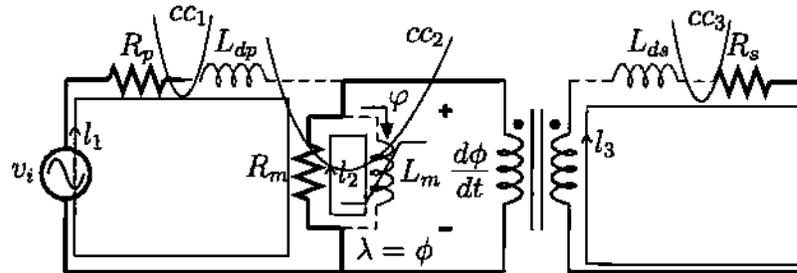


Figura 5.28: Árbol y co-árbol del transformador no lineal con operación en vacío.

Note que a diferencia del modelado de un inductor lineal, el modelado de la inductancia de magnetización no lineal involucra al flujo magnético como variable de estado en vez de su corriente. A continuación se describe el procedimiento de modelado, en base a los lineamientos descritos en la sección 3.2.1, para la representación en el MRC del transformador no lineal:

Al aplicar LVK a  $l_1$  se obtiene la ecuación de estado de la corriente en la inductancia de dispersión primaria:

$$\frac{di_{L_{dp}}}{dt} = \frac{[R_p + R_m]}{L_{dp}} i_{L_{dp}} + \frac{R_m}{L_{dp}} \varphi + \frac{v_i}{L_{dp}} \quad (5.16)$$

Aplicando LVK a  $l_2$  también se tiene:

$$\frac{d\phi}{dt} = v_{R_m} = R_m i_{R_m} \quad (5.17)$$

En este sentido, la corriente en la resistencia de magnetización  $R_m$  puede obtenerse aplicando LCK a  $cc_2$ :

$$i_{R_m} = i_{L_{dp}} - \varphi. \quad (5.18)$$

De esta forma y sustituyendo la ecuación (5.18) en (5.17) se obtiene la ecuación dinámica del flujo magnético en la inductancia de magnetización no lineal:

$$\frac{d\phi}{dt} = R_m i_{L_{dp}} - R_m \varphi. \quad (5.19)$$

Al agrupar (5.16) y (5.19) puede obtenerse el siguiente modelo dinámico del transformador no lineal:

$$A_c = \begin{bmatrix} -\frac{[R_p+R_m]}{L_{dp}} & 0 \\ R_m & 0 \end{bmatrix}, \quad B_c = \begin{bmatrix} \frac{R_m}{L_{dp}} \\ -R_m \end{bmatrix} \quad (5.20a)$$

$$E_c = \begin{bmatrix} \frac{1}{L_{dp}} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad g_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.20b)$$

$$C_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D_c = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \quad (5.21a)$$

$$F_c = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}, \quad h_c = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \quad (5.21b)$$

con  $x = [i_{L_{dp}}, \phi]$ ,  $e = [v_i]$  y  $\varphi$  siendo la corriente en la inductancia de magnetización.

La representación de saturación magnética por medio de funciones lineales por segmentos representa una buena herramienta de simplificación en el modelado de transformadores no lineales [Prusty and Rao, 1980]. En este sentido la característica corriente-flujo magnético mostrada en la Figura 5.27 puede modelarse en el MRC utilizando el marco complementario descrito en la sección 3.4 para representar funciones lineales por segmentos. La Figura 5.29 muestra la aproximación de una característica no lineal de un transformador por medio de una función lineal por segmentos con siete segmentos lineales y seis puntos de quiebre.

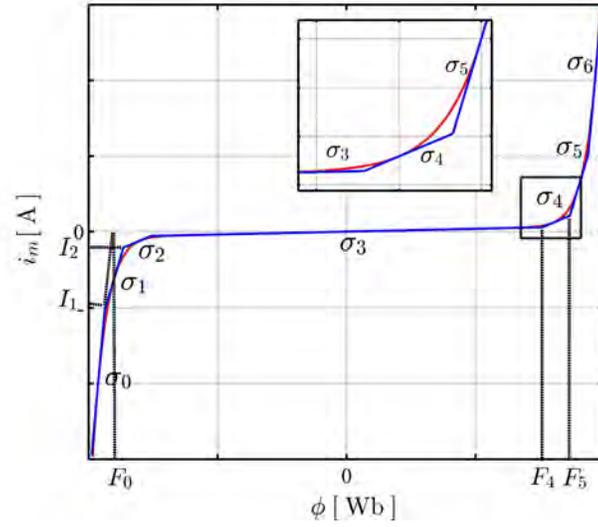


Figura 5.29: Representación lineal por segmentos de un transformador no lineal.

En este sentido, la representación de la función con siete segmentos lineales mostrada en la Figura 5.29 puede representarse en el MRC mediante el modelo complementario:

$$A_s = \begin{bmatrix} 1/r_s \end{bmatrix}, \quad B_s = \begin{bmatrix} -r_1/r_s & -r_2/r_s & -r_3/r_s & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.22a)$$

$$E_s = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}, \quad g_s = \begin{bmatrix} (-F_0 + r_1 I_1 + r_2 I_2 + r_3 I_3)/r_s \end{bmatrix} \quad (5.22b)$$

$$C_s = \begin{bmatrix} r_1/r_s \\ r_2/r_s \\ r_3/r_s \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad D_s = \begin{bmatrix} r_1 - r_1^2/r_s & -r_1 r_2/r_s & -r_1 r_3/r_s & 0 & 0 & 0 \\ -r_2 r_1/r_s & r_2 - r_2^2/r_s & -r_2 r_3/r_s & 0 & 0 & 0 \\ -r_3 r_1/r_s & -r_3 r_2/r_s & r_3 - r_3^2/r_s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/g_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/g_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/g_6 \end{bmatrix} \quad (5.23a)$$

$$F_s = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad h_s = \begin{bmatrix} -r_1 F_0/r_s - r_1 I_1 + (r_1^2 I_1 + r_1 r_2 I_2 + r_1 r_3 I_3)/r_s \\ -r_2 F_0/r_s - r_2 I_2 + (r_2^2 I_2 + r_2 r_1 I_1 + r_2 r_3 I_3)/r_s \\ -r_3 F_0/r_s - r_3 I_3 + (r_3^2 I_3 + r_3 r_1 I_1 + r_3 r_2 I_2)/r_s \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \end{bmatrix} \quad (5.23b)$$

donde  $r_s = r_0 + r_1 + r_2 + r_3$ . Al sustituir los modelos dinámico (5.20) y complementario (5.22) en las expresiones (2.4), puede definirse el siguiente SLC del transformador no lineal:

$$A = \begin{bmatrix} -(R_p + R_m)/L_1 & R_m/(L_1(r_s)) \\ R_m & -R_m/(r_s) \end{bmatrix} \quad (5.24a)$$

$$B = \begin{bmatrix} -(R_m r_1)/(L_{dp} r_s) & -(R_m r_2)/(L_{dp} r_s) & -(R_m r_3)/(L_{dp} r_s) & R_m/L_{dp} & R_m/L_1 & R_m/L_{dp} \\ (R_m r_1)/r_s & (R_m r_2)/r_s & (R_m r_3)/r_s & -R_m & -R_m & -R_m \end{bmatrix} \quad (5.24b)$$

$$E = \begin{bmatrix} 1/L_{dp} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad g = \begin{bmatrix} (R_m(I_1 r_1 - F_0 + I_2 r_2 + I_3 r_3))/(L_{dp} r_s) \\ -(R_m(I_1 r_1 - F_0 + I_2 r_2 + I_3 r_3))/(r_s) \end{bmatrix} \quad (5.24c)$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & r_1/r_s \\ 0 & r_2/r_s \\ 0 & r_3/r_s \\ 0 & -1 \\ 0 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (5.24d)$$

$$D = \begin{bmatrix} r_1 - r_1^2/r_s & -(r_1 r_2)/r_s & -(r_1 r_3)/r_s & 0 & 0 & 0 \\ -(r_1 r_2)/r_s & r_2 - r_2^2/r_s & -(r_2 r_3)/r_s & 0 & 0 & 0 \\ -(r_1 r_3)/r_s & -(r_2 r_3)/r_s & r_3 - r_3^2/r_s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/g_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/g_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/g_6 \end{bmatrix} \quad (5.24e)$$

$$F = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad h = \begin{bmatrix} (I_1 r_1^2 + I_2 r_1 r_2 + I_3 r_1 r_3)/r_s - I_1 r_1 - (F_0 r_1)/r_s \\ (I_2 r_2^2 + I_1 r_1 r_2 + I_3 r_2 r_3)/r_s - I_2 r_2 - (F_0 r_2)/r_s \\ (I_3 r_3^2 + I_1 r_1 r_3 + I_2 r_2 r_3)/r_s - I_3 r_3 - (F_0 r_3)/r_s \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \end{bmatrix} \quad (5.24f)$$

con  $x = [i_{L_{dp}}, \phi]$ ,  $z = [z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6]^T$  y  $e = [v_i]$ .

### 5.4.2. Simulación del Transformador No lineal

La Tabla 5.5 muestra los parámetros utilizados para la simulación del transformador no lineal.

Tabla 5.5: Parámetros de simulación del transformador no lineal.

$v_i$	$110\cos(\omega t - 0.75)$	$V$
$f$	60	$Hz$
$L_{dp}$	0.9	$mH$
$R_p$	0.192	$\Omega$
$R_m$	612.86	$\Omega$

La característica no lineal considerada para el transformador es:

$$i_\phi(t) = 0.7576\phi(t) + 1.03x10^7\phi^{19}(t) \quad (5.25)$$

En este sentido, se consideran los siguientes seis puntos de quiebre y pendientes inicial y final de la función lineal por segmentos:

$$(F_1, I_1) = (-0.4687, -5.1039), \quad (F_2, I_2) = (-0.4328, -1.0518) \quad (5.26a)$$

$$(F_3, I_3) = (-0.3789, -0.2871), \quad (F_2, I_2)(F_4, I_4) = (0.3789, 0.2871) \quad (5.26b)$$

$$(F_5, I_5) = (0.4328, 1.0518), \quad (F_2, I_2)(F_1, I_1) = (-0.4687, -5.1039) \quad (5.26c)$$

$$\sigma_0 = \sigma_6 = 379.4827 \quad (5.26d)$$

Con los parámetros (5.26) se obtiene la función con 7 segmentos lineales mostrada en la Figura 5.30.

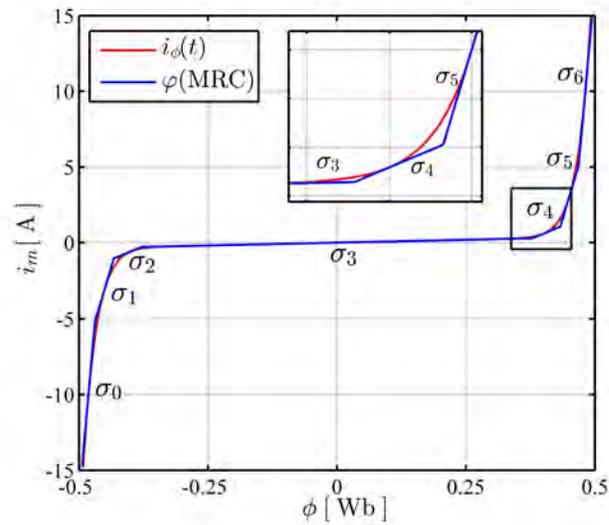


Figura 5.30: Aproximación lineal por segmentos de la característica de saturación del transformador de estudio.

La Figura 5.31 muestra la respuesta transitoria de la corriente *inrush* magnetizante del transformador no lineal. Note que en los primeros ciclos de simulación se presentan valores de sobrecorriente en la corriente de magnetización respecto al valor de corriente en estado estable. Además el tiempo requerido (aproximadamente 3s) para alcanzar dicho estado estable es considerablemente largo. Estas representan las características típicas de comportamiento de la corriente *inrush* en transformadores e inductores no lineales [Acha and Madrigal, 2001].

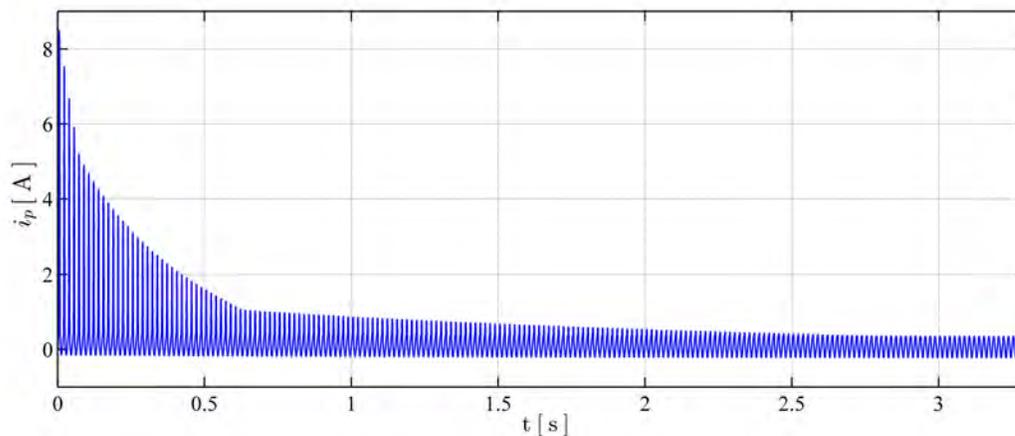


Figura 5.31: Corriente *inrush* magnetizante del transformador no lineal.

La Figura 5.32 muestra la corriente *inrush* del transformador en tres intervalos

de tiempo. Note que en los primeros ciclos de simulación además de presentarse una corriente *inrush* elevada, se presenta una corriente con alto contenido armónico que se va reduciendo gradualmente hasta llegar al estado estable. En la condición de estado estable, el transformador opera en su región lineal por lo que la forma de onda de la corriente alcanza un comportamiento estrictamente senoidal. .

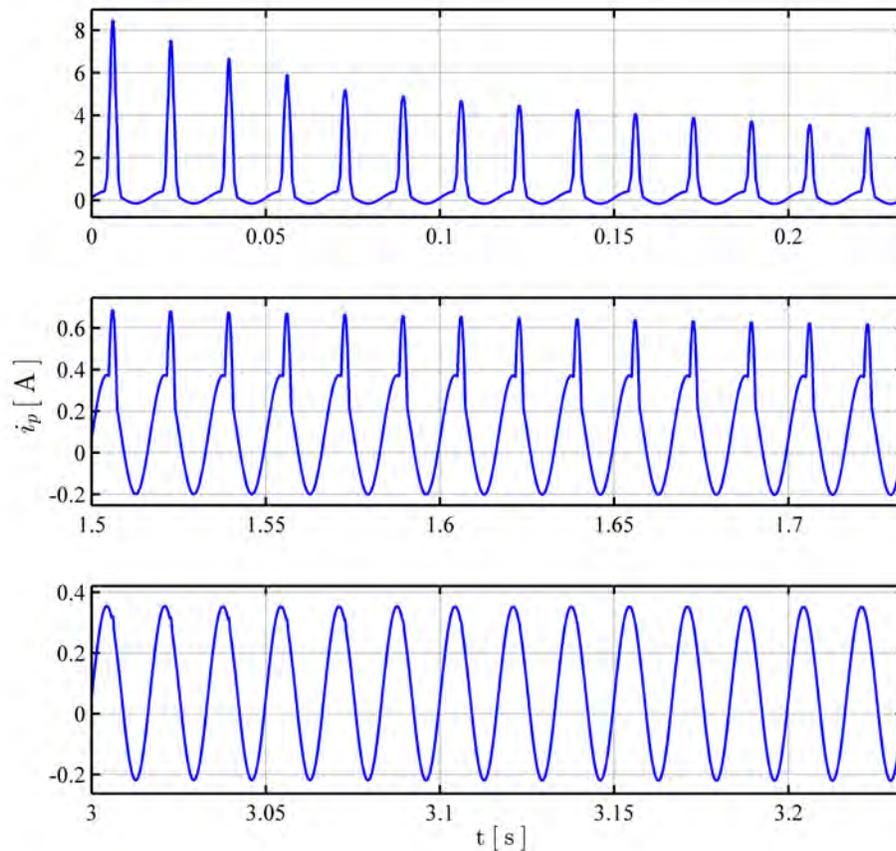


Figura 5.32: Corriente *inrush* del transformador no lineal en tres intervalos de tiempo.

## 5.5. Conclusiones

En este capítulo se realizó el modelado de diversos circuitos eléctricos modernos en el marco de referencia complementario. Se presentaron aplicaciones que aún no habían sido modeladas en el MRC como lo son: el rectificador trifásico controlado (RTC), un compensador estático de VARs: el *FC-TCR*, un inversor monofásico *PWM* conectado a la red eléctrica y un transformador no lineal. En el caso del RTC se obtuvo el SLC

en base al modelo del tiristor propuesto en el capítulo 3, obteniendo muy buenos resultados en la simulación del RTC dado que las respuestas obtenidas fueron respuestas típicas esperadas del convertidor. Se realizó el análisis armónico del voltaje de salida del RTC, verificando que efectivamente los únicos armónicos influyentes en el voltaje de CD son los armónicos múltiplos de seis veces la frecuencia fundamental, validando el modelado complementario. En cuanto a la aplicación del RTC para el control de velocidad del motor de CD, se comprobó un control efectivo y el voltaje de salida de CD controlable del RTC. En el caso del dispositivo *FACT FC-TCR*, se mostró su aplicación en lazo cerrado para la regulación de voltaje de un nodo de potencia. En este sentido, se consideraron diversas fallas en el nodo de envío que tendían a aumentar y a disminuir el voltaje del nodo controlado, verificando la eficacia del *FC-TCR* controlado para mantener, mediante la compensación de potencia reactiva, la magnitud del voltaje fundamental en dicho nodo regulado. En este sentido se validó el modelo del compensador estático mediante el análisis armónico de la corriente en el TCR, en la cual se verificó que los únicos armónicos influyentes en la solución son los componentes impares de la fundamental, validando el modelado en el MRC. Por otro lado, en la verificación del modelo del inversor monofásico se realizó un procedimiento detallado considerando una potencia de entrega específica por parte del inversor al sistema eléctrico. En este sentido se calcularon, en base a las ecuaciones de flujos de potencia simplificadas, la magnitud y el ángulo de potencia  $\delta$  que debía tener la componente fundamental del voltaje de salida *PWM* del inversor para proporcionar esta potencia. Los resultados fueron muy favorables dado que los valores de la potencia y el factor de potencia obtenidos en la simulación fueron muy cercanos a los de diseño, validando el procedimiento y el modelo del inversor. Además, se obtuvieron valores de *THD* muy adecuados en las señales de corriente de entrada al sistema eléctrico y en el voltaje de punto de acoplamiento común, cumpliendo con los estándares de distorsión armónica menores al 5%, comprobando el buen funcionamiento del filtro. Finalmente se modeló un transformador no lineal mediante la aproximación lineal por segmentos de la característica de saturación de la inductancia de magnetización. En este caso se estudió la corriente *inrush* del transformador y se comprobó y validó el modelado en el MRC en base a la obtención de una respuesta característica de la corriente *inrush*, en la cual se observó los valores de sobrecorriente típicos de la corriente magnetización debidos a la energización del transformador, así como el tiempo considerablemente largo para alcanzar el estado estable y el alto contenido armónico de la corriente durante el transitorio.

# Capítulo 6

## Conclusiones y Trabajos Futuros

### 6.1. Conclusiones Generales

El marco de referencia complementario (MRC) ha sido presentado y validado como un nuevo esquema de modelado para representar una gran variedad de circuitos eléctricos no lineales. Se ha mostrado la efectividad que tiene el MRC en cuanto al modelado de circuitos que contienen una gran variedad de elementos de conmutación, electrónica de potencia y otras no linealidades que pueden ser representadas mediante funciones lineales por segmentos no decrecientes.

Se ha mostrado que los SLCs son útiles para formar modelos completos de redes eléctricas conmutadas. En este sentido, los SLCs incluyen implícitamente tanto condiciones de operación continua como discontinua del sistema eléctrico conmutado, por lo que no es necesario el cálculo de los instantes de conmutación, los cuales son calculados internamente en la formulación de los SLCs mediante el planteamiento de restricciones de complementariedad.

El MRC sugiere ser una herramienta poderosa para el cálculo de estado estable de redes eléctricas que contienen diversos componentes no lineales. En este sentido, los PLCs plantean una formulación de estado estable que puede resolverse de una manera directa (sin procesos iterativos) y que no requiere de una condición inicial, lo cual es algo novedoso en el análisis de sistemas de potencia. Los tiempos de cómputo obtenidos en las diferentes soluciones de estado estable fueron alrededor de 2 y 3 segundos, por lo que son tiempos de cómputo interesantes, los cuales quizá podrían competir con algunas técnicas de estado estable actuales.

Los tiempos de cómputo de las soluciones transitorias en el MRC fueron elevados respecto a los obtenidos con *SymPowerSystems*, entre 5 y 7 veces más grandes. Sin embargo, también podría decirse que son adecuados y prometedores dado que el MRC representa un reciente esquema de modelado, en el cual sus algoritmos y técnicas de solución aún son un tema de estudio, lo cual sugiere que con el avance de estas técnicas se tendrá una reducción futura del tiempo y esfuerzo computacional.

Se mostró que técnicas de control tradicionales pueden ser incluidas en el modelado de los SLCs. En este sentido, se presentó un marco de referencia importante en cuanto al modelado de control en el MRC y se vislumbró la posible implementación de técnicas de control más avanzadas en el modelado complementario. Además, también se presentó que es posible la inclusión de la dinámica de otros sistemas físicos en el MRC. En un caso de estudio se incluyó la dinámica rotacional de un motor de CD.

## 6.2. Trabajos Futuros

- Investigar sobre la formulación automatizada de los SLCs en base a la conectividad y topología del circuito. Profundizar sobre la formulación automática de ecuaciones tanto para árboles normales como no normales.
- El cálculo de estado estable de circuitos eléctricos modernos incluyendo optimización de redes eléctricas mediante la formulación del problema lineal complementario con entero mezclado, en el cual aparte de formular el problema lineal complementario puede tenerse la optimización de una función objetivo.
- Investigar sobre la formulación complementaria para representar funciones lineales por segmentos decrecientes así como comportamientos no lineales discontinuos.
- La utilización de otras técnicas de discretización para la solución transitoria y de estado estable de los SLCs.
- Investigar sobre la implementación de técnicas de control más sofisticadas.
- La aplicación del marco de referencia complementario para el modelado de otros circuitos no lineales. En el caso de convertidores CA/CD, modelar rectificadores en modo *switch* o sistemas *HVDC*. En el caso de convertidores CD/CA, modelar inversores trifásicos e implementar otras técnicas de modulación *PWM*. Para los

dispositivos *FACTs*, modelar otros compensadores estáticos trifásicos así como controladores *FACTs* más avanzados de última generación como lo son el *SVC*, *UPFC* y todas las topologías derivadas del *SVC*. En el caso de convertidores CA/CA representar modelos de cicloconvertidores. Para el modelado con funciones lineales por segmentos no decrecientes representar otras no linealidades de sistemas y componentes como pueden ser resistores y capacitores no lineales.



# Apéndice A

## Control *PWM* de Convertidores CD/CD

En el control *PWM* de convertidores CD/CD en modo *switch* con frecuencia de conmutación constante, la señal de conmutación  $u_{sw}$  del convertidor es obtenida por comparar una señal de control (error amplificado) con una señal triangular periódica diente de sierra  $e_{ts}$  de alta frecuencia  $f_c$ , tal y como se muestra en la Figura A.1(b).

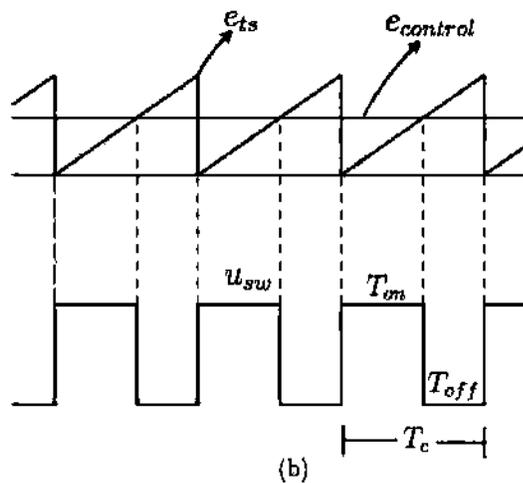
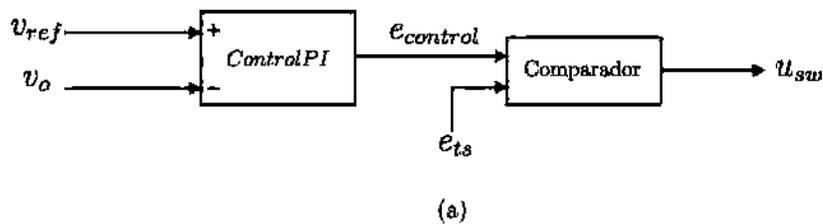


Figura A.1: Control de ancho de pulso. (a) Diagrama de bloques. (b) Comparación de señales.

En este sentido, puede verse que cuando la señal de control  $e_{control}$  es más grande que la señal diente de sierra  $e_{ts}$ , la señal de conmutación  $u_{sw}$  debe tomar un valor en alto que cierre al interruptor del convertidor. En cambio, cuando  $e_{control}$  presenta un valor más bajo que la señal triangular  $e_{ts}$ , la señal de conmutación debe tomar un valor bajo que abra al interruptor. Este esquema solo es válido para los convertidores que presentan voltajes de salida mayores conforme aumenta el ciclo de trabajo.

La señal de control es el error  $e_{error} = v_{ref} - v_o$  amplificado del convertidor. En el caso de amplificación mediante controladores PI, la señal  $e_{control}$  es obtenida mediante la acción proporcional integral del error, lo cual introduce la variable dinámica:

$$\frac{dx_c}{dt} = v_{ref} - v_o \quad (A.1)$$

que representa la integración del error.

De esta forma, la retroalimentación para generar la señal de conmutación  $u_{sw}$  resulta:

$$u_{sw} = sat(k_i x_c - k_p v_o + k_p v_{ref} - e_t) \quad (A.2)$$

En el caso del control de tiristores, la señal triangular diente de sierra debe ser referenciada en el cruce por cero de la señal fundamental y debe abarcar únicamente el periodo de trabajo en el cual el tiristor puede ser disparado. En el caso del modelo implementado en el MRC, debe cuidarse que la señal de control  $e_{control}$  se mantenga constante durante cada ciclo de la señal fundamental para que el tiristor pueda ser controlado como un interruptor.

## Apéndice B

### Sistemas Lineales Complementarios de algunos Casos de Estudio

#### B.1. SLC del Rectificador Trifásico Controlado en Lazo Cerrado

$$A = \begin{bmatrix} \frac{-R_t}{L_t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-R_t}{L_t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-1}{R_c C} & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.1a})$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3L_t} & \frac{-2}{3L_t} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{3L_t} & \frac{1}{3L_t} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{3L_t} & \frac{1}{3L_t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{3L_t} & \frac{1}{3L_t} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3L_t} & \frac{-2}{3L_t} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{3L_t} & \frac{1}{3L_t} & 0 & 0 \\ \frac{1}{C} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{C} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{C} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.1b})$$

$$E = \begin{bmatrix} \frac{2}{3L_t} & \frac{-1}{3L_t} & \frac{-1}{3L_t} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-1}{3L_t} & \frac{2}{3L_t} & \frac{-1}{3L_t} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{B.1c})$$

$$g = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.1d})$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_p & -k_i \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_p & -k_i \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_p & -k_i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_p & -k_i \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_p & -k_i \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_p & -k_i \end{bmatrix} \quad (\text{B.1e})$$



$$F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -k_p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -k_p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -k_p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -k_p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -k_p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -k_p \end{bmatrix} \quad (\text{B.1g})$$

$$h = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.1h})$$

con  $x = [i_a, i_b, v_{cd}, x_c]^T$ ,  $z = [z_{11}, z_{12}, z_{13}, z_{14}, z_{21}, z_{22}, z_{23}, z_{24}, z_{31}, z_{32}, z_{33}, z_{34}, z_{41}, z_{42}, z_{43}, z_{44}, z_{51}, z_{52}, z_{53}, z_{54}, z_{61}, z_{62}, z_{63}, z_{64}]^T$  y  $e = [e_a, e_b, e_c, e_{ts1}, e_{ts2}, e_{ts3}, e_{ts4}, e_{ts5}, e_{ts6}, v_{ref}]$ .

## B.2. SLC del RTC con Control de Motor de CD

$$A = \begin{bmatrix} \frac{-R_t}{L_t} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-R_t}{L_t} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{C_d} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{L_d} & -\frac{R_d}{L_d} & -\frac{k_m I_f}{L_d} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{k_m I_f}{J} & -\frac{b}{J} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.2a})$$

APÉNDICE B. SISTEMAS LINEALES COMPLEMENTARIOS DE ALGUNOS CASOS DE ESTUDIO

---

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3L_t} & \frac{-2}{3L_t} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{3L_t} & \frac{1}{3L_t} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{3L_t} & \frac{1}{3L_t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{3L_t} & \frac{1}{3L_t} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3L_t} & \frac{-2}{3L_t} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{3L_t} & \frac{1}{3L_t} & 0 & 0 \\ \frac{1}{C} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{C} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{C} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.2b})$$

$$E = \begin{bmatrix} \frac{2}{3L_t} & \frac{-1}{3L_t} & \frac{-1}{3L_t} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-1}{3L_t} & \frac{2}{3L_t} & \frac{-1}{3L_t} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{j} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{B.2c})$$

$$g = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.2d})$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k_p & -k_i \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k_p & -k_i \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k_p & -k_i \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k_p & -k_i \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k_p & -k_i \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k_p & -k_i \end{bmatrix} \quad (\text{B.2e})$$





$$h = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.2h})$$

con  $x = [i_a, i_b, v_{cd}, i_d, w_m, x_c]^T$ ,  $z = [z_{11}, z_{12}, z_{13}, z_{14}, z_{21}, z_{22}, z_{23}, z_{24}, z_{31}, z_{32}, z_{33}, z_{34}, z_{41}, z_{42}, z_{43}, z_{44}, z_{51}, z_{52}, z_{53}, z_{54}, z_{61}, z_{62}, z_{63}, z_{64}]^T$  y  $e = [e_a, e_b, e_c, e_{ts1}, e_{ts2}, e_{ts3}, e_{ts4}, e_{ts5}, e_{ts6}, T_m, w_{m_{ref}}]$ .

### B.3. SLC del Inversor Monofásico

$$A = \begin{bmatrix} -R_{pv}/L & -1/L & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/C & -1/(R_c * C) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(R_{fc} + R_d)/L_{fc} & -1/L_{fc} & R_d/L_{fc} & 0 \\ 0 & 0 & 1/Cf & 0 & -1/C & 0 \\ 0 & 0 & R_d/(L_{fg} + L_g) & 1/(L_{fg} + L_g) & -(R_d + R_{fg} + R_g)/(L_{fg} + L_g) & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.3a})$$

$$B = \begin{bmatrix} 1/L & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/C & -\Lambda_c/C & 0 & 1/C & -\Lambda_c/C & 0 & 1/C & -\Lambda_c/C & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/L_{fc} & 0 & 0 & -1/L_{fc} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.3b})$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_p & 0 & 0 & 0 & -k_i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.3c})$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -\Lambda_c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\Lambda_c & 0 & 0 & 0 & 0 & \Lambda_c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\Lambda_c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Lambda_c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.3d})$$



# Bibliografía

- [Acha and Madrigal, 2001] Acha, E. and Madrigal, M. (2001). *Power Systems Harmonics: Computer Modelling and Analysis*. John Wiley and Sons.
- [Brogliato, 2003] Brogliato, B. (2003). Some perspectives on the analysis and control of complementarity systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 48(6):918–935.
- [Burdio and Martinez, 1995] Burdio, J. M. and Martinez, A. (1995). A unified discrete-time state space model for switching converter. *IEEE Transactions on Power Electronics*, 10(6):694–707.
- [Camlibel et al., 2003] Camlibel, M. K., Hemmels, W. P. M. H., der Schaft, A. J. V., and Schumacher, J. M. (2003). Switched networks and complementarity. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental theory and Applications*, 50(8):1036–1046.
- [Chua and Lin, 1975] Chua, L. O. and Lin, P. M. (1975). *Computer Aided Analysis of Electronic Circuits: Algorithms and Computational Techniques*. Prentice Hall.
- [Cottle et al., 1992] Cottle, R. W., Pang, J. S., and Stone, R. E. (1992). *The Linear Complementarity Problem*. Press Academic, Boston, first edition.
- [Dirske and Ferris, 1995] Dirske, S. P. and Ferris, M. C. (1995). The path solver: a non-monotone stabilization scheme for mixed complementary problems. *Optimization Methods and Software*, 5:123–156.
- [Fackler and Miranda, 2011] Fackler, P. and Miranda, M. (2011). Lemke’s algorithm for solving linear complementarity problems [online].
- [Frasca, 2007] Frasca, R. (2007). *Modeling and Simulation of Switched Electrical Networks: A Complementarity Systems Approach*. PhD thesis, University of Sannio, Department of Engineering, Benevento, Italy.

- [Fujisawa and Kuth, 1972] Fujisawa, T. and Kuth, E. S. (1972). Piecewise linear theory of nonlinear networks. *Journal on Applied Mathematics*, 22(2):307–328.
- [Hemmels, 1999] Hemmels, W. P. M. H. (1999). *Linear Complementarity Systems: A Study in Hybrid Dynamics*. PhD thesis, Eindhoven University of Technology, Department of Electrical Engineering.
- [Hingorani and Gyugyi, 2000] Hingorani, N. G. and Gyugyi, L. (2000). *Understanding FACTS: Concepts and Technology of Flexible AC Transmission Systems*. IEEE Press–John Wiley.
- [Hyatt et al., 2008] Hyatt, W., Kemmerly, J., and Durbin, S. (2008). *Análisis de Circuitos en Ingeniería*. McGraw-hill.
- [Kelper et al., 2002] Kelper, B. D., Dessaint, L. A., Haddad, K. A., and Nakra, H. (2002). A comprehensive approach to fixed-step simulation of switched circuits. *IEEE Transactions on Power Electronics*, 17(2):216–224.
- [Lloyd, 2005] Lloyd, J. E. (2005). Fast implementation of lemke’s algorithm for rigid body contact simulation. *Proceedings of the IEEE: Robotics and Automation, ICRA 2005*, pages 4538–4543.
- [Maksimovic et al., 2001] Maksimovic, D., Stankovic, A. M., Thottuvelil, V. J., and Verghese, G. C. (2001). Modeling and simulation of power electronic converters. *Proceedings of the IEEE*, 89(6):898–912.
- [Manitoba, 2005] Manitoba (2005). *Users Guide, A comprehensive Resource for EMTDC*. Manitoba HVDC Research Centre Inc., Winnipeg, Canada.
- [Mayer and Liu, 1995] Mayer, W. S. and Liu, T. H. (1995). *EMTP Rule Book*. Bonneville Power Administration, Portland, USA.
- [Medina et al., 2013] Medina, A., Ramirez, J. S., Ribeiro, P., Xu, W., Lian, K. L., Chang, G. W., Dinavahi, V., and Watson, N. R. (2013). Ieee task force on harmonics modeling and simulation: Harmonic analysis in frequency and time domain. *IEEE Transactions on Power Delivery*, 28(3):1813–1821.
- [Mohan et al., 1994] Mohan, N., Robbins, W. P., Underland, T. M., Nilssen, R., and Mo, O. (1994). Simulation of power electronics and motion control systems-an overview. *Proceedings of the IEEE*, 82(8):1287–1302.

- [Mohan et al., 1995] Mohan, N., Undeland, T. M., and Robbins, W. P. (1995). *Power Electronics: Converters, Application and Design*. John Wiley and Sons, Inc., tercera ed. edition.
- [Murty and Tien, 1997] Murty, K. G. and Tien, F. (1997). Linear complementarity, linear and nonlinear programming. Internet Edition.
- [Nasar, 1981] Nasar, S. A. (1981). *Electric Machines and Electromechanics*. McGraw-Hill.
- [Parker and Chua, 1989] Parker, T. S. and Chua, L. O. (1989). *Practical Numerical Algorithms for Chaotic Systems*. Springer-Verlag, Berlin, Germany.
- [Prusty and Rao, 1980] Prusty, S. and Rao, M. V. S. (1980). A direct piecewise linearized approach to convert rms saturation characteristic to instantaneous saturation curve. *IEEE Transactions on Magnetics*, 16(1):156–160.
- [Rashid, 1993] Rashid, M. (1993). *Power Electronics: Circuits, Devices and Applications*. Prentice Hall, second edition.
- [Rico et al., 2012] Rico, J. J., Pilar, J., Barrera, E., and Madrigal, M. (2012). Modeling and analysis of three-phase diode bridge rectifiers as linear complementarity systems. *Electric Power Components and Systems*, 40(15):1639–1655.
- [Sessa et al., 2014] Sessa, V., Iannelli, L., and Vasca, F. (2014). A complementarity model for closed-loop power converters. *IEEE Transactions on Power Electronics*, 29(12):6821–6835.
- [Shung, 1997] Shung, H. (1997). Simulation of pwm switched regulators using linear output predictions and corrections. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I*, 44(7):636–639.
- [Stern, 1956] Stern, T. E. (1956). *Piecewise-linear network theory*. PhD thesis, MIT Research Laboratory of Electronics, Cambridge.
- [Suárez, 2012] Suárez, J. P. (2012). Modelado y análisis de circuitos lineales con diodos e interruptores ideales en el marco de referencia complementario. Master’s thesis, UMSNH, Facultad de Ingeniería Eléctrica, División de Estudios de Posgrado.
- [Uzunovic, 2001] Uzunovic, E. (2001). *EMTP, Transient Stability and Power Flow Models and Controls of VSC Based FACTS Controllers*. PhD thesis, University of Waterloo: Electrical and Computer Engineering.

- [Vandenbergue et al., 1989] Vandenbergue, L., Moor, B. L. D., and Vandewalle, J. (1989). The generalized linear complementarity problem applied to the complete analysis of resistive piecewise-linear circuits. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, 30(11):1382–1391.
- [Vasca et al., 2011] Vasca, F., Angelone, G., and Giannelli, L. (2011). Linear complementarity models for steady state analysis of pulse-width modulated switched electronic systems. *19th Mediterranean Conference on Control Automation*.
- [Vasca et al., 2009] Vasca, F., Iannelli, L., and Camlibel, M. K. (2009). A new perspective for modeling power electronic converters: complementarity framework. *IEEE Transactions on Power Electronics*, 24(2):456–468.
- [Villa, 2011] Villa, A. (2011). Estudio del filtro lcl aplicado a inversores fotovoltaicos. Technical report, Universidad Carlos III de Madrid: Departamento de Ingeniería.