

**UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN NICOLÁS DE HIDALGO**



**DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO  
FACULTAD DE INGENIERÍA ELÉCTRICA**

**TESIS**

**DISEÑO DE UN OBSERVADOR DIFUSO PARA UNA COLUMNA DE  
DESTILACIÓN BINARIA TIPO BATCH DE 11 PLATOS MODELADA EN  
TAKAGI - SUGENO**

**Que para obtener el Título de  
MAESTRO EN CIENCIAS EN INGENIERÍA ELÉCTRICA**

**Presenta**

**Baldwin Rainiero Cortés Hernández**

**Director de Tesis**

**Doctor en Ciencias en Ingeniería Eléctrica**

**Juan Anzures Marín**



**Morelia, Michoacán, Julio de 2017**





# Agradecimientos

A mis padres Angélica Hernández y Jesús Cortés, que siempre me han apoyado y que han confiado ciegamente en mí, gracias por su valioso apoyo y sustento, porque sin ellos esto no hubiera sido posible.

A mi hermana Carolina Cortés, porque siempre ha sido una gran amiga, gracias por cuidar siempre de mí.

A mi asesor Dr. Juan Anzures Marín, por todas sus enseñanzas, por confiar en mí y por darme la oportunidad de impartir clases.

A mi profesor y amigo M.C. Félix Jiménez, gracias por sus consejos y enseñanzas, dentro y fuera del aula, porque me dio su voto de confianza cuando entré al posgrado.

A mi amigo Gilberto Orozco, por todas las cosas que hemos vivido juntos, por molestarme siempre y nunca darme la razón, gracias por hacerme ver mis errores.

A mis amigos Napoleón Costilla y Carlos Ceja, por acompañarme durante mi estancia en el posgrado.

A mis profesores del posgrado y sinodales Dr. Roberto Tapia, Dr. Fernando Ornelas Téllez y Dr. Antonio Ramos Paz, por todo el conocimiento que compartieron conmigo.

A todos mis compañeros de maestría, porque siempre estaban dispuestos a colaborar conmigo.

A la Dra. Adriana del Carmen Téllez Anguiano, por su valiosa contribución a esta tesis.

A mi compañero del posgrado M.C. Mario Heras por introducirme en el tema de las columnas de destilación.

A todos mis profesores de licenciatura y a mis alumnos, por los conocimientos que intercambiamos.

A mi alma máter la Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo y al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología, por brindarme las herramientas que permitieron que hoy cumpla con esta meta

# **Dedicatoria**

*A mis padres y mi hermana.*

# Resumen

En esta tesis se presenta el diseño de un observador de estados difuso continuo para una columna de destilación binaria de 11 platos, operada en el modo por lotes (*batch*) para una mezcla etanol – agua, la cual está ubicada en las instalaciones del Instituto Tecnológico de Morelia. El observador es utilizado para estimar las fracciones molares de etanol líquido en todos los platos de la columna, por lo que se trata de un observador de orden completo.

Se analiza el modelo no lineal de una columna de destilación basado en el balance del componente ligero y se utiliza un modelo termodinámico para establecer el equilibrio líquido – vapor de la mezcla, la cual es no ideal.

Se obtiene la descripción en espacio de estado del modelo no lineal y se desarrolla el modelo difuso Takagi – Sugeno. Éste es representado por 8 subsistemas lineales que corresponden a puntos de operación con condiciones específicas de la columna, determinados por tres variables: el porcentaje de apertura de la válvula de reflujo, la fracción molar de etanol líquido presente en el hervidor y la fracción molar de etanol líquido en el condensador. Las funciones de membresía utilizadas para evaluar la pertenencia de las premisas en cada una de las reglas del sistema difuso son del tipo trapezoidal, debido a que presentan gran facilidad para modelarlas y han sido ampliamente utilizadas desde la introducción de la lógica difusa.

Con base en el modelo difuso Takagi – Sugeno de la columna de destilación, se diseña un observador de estados difuso continuo, para el cual se utilizan las mismas premisas, funciones de membresía y reglas. El análisis de estabilidad se desarrolla mediante desigualdades lineales matriciales (LMIs) y las ganancias del observador difuso se obtienen al resolver éstas.

Finalmente, la convergencia del observador difuso es comprobada mediante distintas simulaciones, en las que los estados estimados y los estados del modelo no lineal presentan la misma dinámica para entradas de potencia calorífica constante (1000 W) y apertura de la válvula de reflujo desde 0 % hasta 30 %.

**Palabras clave:** *columna, destilación, batch, Takagi-Sugeno, observador.*

# Abstract

In this work, the design of a continuous fuzzy state observer in an 11-plate binary distillation column operated in batch mode for an ethanol – water mixture is presented. The observer is used to estimate the molar fractions of liquid ethanol in all plates of the column, making it a full-order observer.

The non-linear model of a distillation column based on the light component balance is analyzed. A thermodynamic model is used to establish the liquid – vapor equilibrium of the mixture, which is considered as non-ideal.

The space-state representation of the non-linear model is obtained, and the fuzzy Takagi – Sugeno model is developed. This model consists of 12 linear subsystems which correspond to local operation points of the column, determined by two criteria: the reflux percentage and the molar fraction of liquid ethanol in the reboiler. Trapezoidal membership functions are used to evaluate the criteria membership in each of the fuzzy system rules.

Based on the fuzzy Takagi – Sugeno model, a continuous fuzzy state observer is designed, using the same criteria, membership functions and rules. Through the solution of linear matrix inequalities, the observer gains are obtained.

Finally, the convergence of the fuzzy observer is verified by performing different simulations, in which the estimated states and the states of the non-linear model present the same dynamic behavior, with a constant heat power (1000 W) and a degree of openness of the reflux valve from 0 to 30 %

**Keywords:** *batch, distillation, column, Takagi-Sugeno, observer.*

# Contenido

Agradecimientos .....	iii
Dedicatoria.....	iv
Resumen.....	v
Abstract.....	vi
Contenido.....	vii
Lista de Figuras.....	x
Lista de Tablas .....	xiii
Capítulo 1. Introducción .....	1
1.1 Introducción .....	1
1.2 Descripción del Problema .....	2
1.3 Antecedentes .....	2
1.3.1 Control Difuso .....	2
1.3.2 Observadores de Estado.....	3
1.3.3 Modelado de Columnas de Destilación .....	4
1.4 Estado del Arte.....	4
1.4.1 Columnas de Destilación .....	4
1.4.2 Modelado de Columnas de Destilación .....	6
1.4.3 Observadores en Columnas de Destilación .....	8
1.5 Objetivos .....	10
1.5.1 Objetivo General.....	10
1.5.2 Objetivos Particulares.....	10
1.6 Hipótesis .....	10
1.7 Justificación .....	10
1.8 Aportes.....	11
1.9 Metodología .....	12
1.10 Contenido de la Tesis.....	13

1.11 Lista de Publicaciones.....	13
Capítulo 2. Modelo Termodinámico de la Mezcla Etanol – Agua.....	15
2.1 Introducción.....	15
2.2 Diagrama de Equilibrio .....	15
2.3 Volatilidad Relativa.....	17
2.4 Mezcla Azeotrópica.....	20
2.5 Soluciones Ideales .....	21
2.6 Soluciones No Ideales .....	23
2.7 Conclusión.....	25
Capítulo 3. Modelo No Lineal de una Columna de Destilación por Lotes .....	27
3.1 Introducción.....	27
3.2 Descripción Física del Sistema.....	27
3.3 Modelado de una Columna de Destilación Tipo Batch.....	32
3.3.1 Simplificaciones del Modelo.....	33
3.3.2 Modelo del Condensador .....	33
3.3.3 Modelo de los Platos .....	34
3.3.4 Modelo del Hervidor .....	35
3.3.5 Masas Retenidas en la Columna de Destilación.....	36
3.3.6 Tasas de Flujos Molares.....	37
3.3.7 Estimación de Temperatura.....	39
3.3.8 Modelo No Lineal de la Columna Tipo Batch de 11 Platos.....	41
3.4 Simulación del Modelo No Lineal .....	41
3.4.1 Simulación en Reflujo Total .....	43
3.4.2 Simulación en Reflujo Parcial.....	46
3.5 Conclusión.....	50
Capítulo 4. Modelo Difuso Takagi – Sugeno de una Columna de Destilación.....	51
4.1 Introducción.....	51
4.2 Descripción de un Sistema Difuso Takagi – Sugeno .....	52
4.3 Descripción del Modelo No Lineal de la Columna en Espacio de Estado .....	53
4.4 Elección de Premisas y Funciones de Membresía para el Modelo Takagi – Sugeno	56



4.5 Reglas Condicionales del Modelo Takagi – Sugeno .....	61
4.6 Simulación del Modelo Difuso Takagi – Sugeno de la Columna.....	68
4.7 Conclusión .....	75
Capítulo 5. Diseño del Observador Difuso .....	77
5.1 Introducción .....	77
5.2 Descripción Matemática de un Observador Difuso .....	77
5.3 Selección de las Ganancias del Observador Difuso para la Columna .....	79
5.4 Simulación del Observador Difuso para la Columna de Destilación .....	85
5.5 Conclusión .....	95
Capítulo 6. Conclusiones .....	97
6.1 Conclusiones Generales .....	97
6.2 Trabajos Futuros .....	99
Apéndice A. Observabilidad de Subsistemas .....	101
Bibliografía .....	105

# Lista de Figuras

2.1 Diagrama de equilibrio de la mezcla etanol – agua en función de la temperatura a una presión de 1013.25 hPa .....	17
2.2 Diagrama de equilibrio de la mezcla etanol – agua a una presión de 1013.25 hPa .....	18
2.3 Volatilidad relativa de la solución etanol – agua a presión de 1013.25 hPa .....	19
2.4 Coeficiente de actividad de los componentes en la mezcla etanol - agua .....	24
3.1 Diagrama de una columna de destilación de 11 platos .....	28
3.2 Condensador de la columna de destilación .....	30
3.3 Hervidor de la columna de destilación .....	30
3.4 Cuerpo de la columna de destilación compuesto por platos perforados .....	31
3.5 Columna de destilación de 11 platos .....	31
3.6 Dinámica en el condensador .....	33
3.7 Dinámica en los platos .....	35
3.8 Dinámica en el hervidor .....	36
3.9 Interpolación de temperatura a partir de $x_1$ utilizando <i>Curve Fitting</i> de MATLAB®. 40	
3.10 Diagrama de bloques del proceso de simulación del modelo no lineal .....	43
3.11 Entradas del sistema para simulación del modelo no lineal en reflujo total: (a) potencia calorífica en el hervidor; (b) porcentaje de apertura de la válvula de reflujo .....	45
3.12 Dinámica de las concentraciones en los platos del modelo no lineal con potencia constante, reflujo total y concentraciones iniciales iguales a cero .....	45
3.13 Entradas del sistema para simulación del modelo no lineal en reflujo parcial: (a) potencia calorífica en el hervidor; (b) porcentaje de apertura de la válvula de reflujo .....	47
3.14 Dinámica de las concentraciones en los platos del modelo no lineal con potencia constante, apertura de la válvula de reflujo de 30 % y concentraciones iniciales en equilibrio .....	48
3.15 Dinámica de las temperaturas en los platos del modelo no lineal con potencia constante, apertura de la válvula de reflujo de 30 % y concentraciones iniciales en equilibrio .....	49
3.16 Flujo de destilado con potencia constante y apertura de la válvula de reflujo de 30 % .....	49

4.1	Función de membresía triangular con $a = 3, b = 6$ y $c = 8$ .....	57
4.2	Función de membresía trapezoidal con $a = 1, b = 5, c = 7$ y $d = 8$ .....	58
4.3	Funciones de membresía para la concentración molar de etanol líquido en el hervidor .....	60
4.4	Funciones de membresía para la fracción molar de etanol líquido en el condensador ..	60
4.5	Funciones de membresía para el porcentaje de apertura de la válvula de reflujo.....	61
4.6	Diagrama de bloques del proceso de simulación del modelo difuso Takagi-Sugeno ...	69
4.7	Entradas del sistema para simulación del modelo Takagi – Sugeno en reflujo parcial: (a) potencia calorífica en el hervidor; (b) porcentaje de apertura de la válvula de reflujo ...	70
4.8	Dinámica de las concentraciones en los platos del modelo no lineal con potencia constante, apertura de la válvula de reflujo de 20 % y concentraciones iniciales en equilibrio .....	71
4.9	Dinámica de las concentraciones en los platos del modelo Takagi – Sugeno con potencia constante, apertura de la válvula de reflujo de 20 % y concentraciones iniciales en equilibrio .....	72
4.10	Evolución de las ponderaciones de las reglas del modelo Takagi – Sugeno .....	73
4.11	Error entre el modelo no lineal y el modelo Takagi – Sugeno .....	74
4.12	Error relativo entre el modelo no lineal y el modelo Takagi – Sugeno .....	74
5.1	Diagrama de bloques del proceso de simulación del observador difuso Takagi-Sugeno .....	86
5.2	Entradas del sistema para simulación del observador Takagi – Sugeno en reflujo parcial: (a) potencia calorífica en el hervidor; (b) porcentaje de apertura de la válvula de reflujo.....	88
5.3	Dinámica de las concentraciones en los platos del modelo no lineal con potencia constante, apertura de la válvula de reflujo de 20 % y concentraciones iniciales en equilibrio .....	89
5.4	Dinámica de las concentraciones en los platos del observador Takagi – Sugeno con potencia constante, apertura de la válvula de reflujo de 20 % y concentraciones iniciales en equilibrio .....	89
5.5	Acercamiento de la Figura 5.4 .....	90
5.6	Evolución de las ponderaciones de las reglas del modelo Takagi – Sugeno .....	91

5.7 Error entre el modelo no lineal y el observador Takagi – Sugeno ..... 91

5.8 Acercamiento de la Figura 5.7 ..... 92

5.9 Error relativo el modelo no lineal y el observador Takagi – Sugeno..... 93

5.10 Temperatura en los platos del modelo no lineal..... 94

5.11 Temperatura en los platos del observador difuso Takagi – Sugeno..... 94

5.12 Error en las temperaturas de los platos del observador difuso respecto al modelo no lineal ..... 95

# Lista de Tablas

2.1	Propiedades de los componentes en la mezcla a una presión de 1013.25 hPa .....	15
2.2	Equilibrio líquido – vapor de la mezcla etanol – agua a una presión de 1013.25 hPa ..	16
2.3	Constantes de Antoine para el cálculo de la presión de saturación .....	22
3.1	. Masas retenidas en las etapas de la columna de destilación piloto .....	37
3.2	Errores absoluto y relativo al interpolar la temperatura a partir de $x_1$ .....	40
3.3	Parámetros de la simulación del modelo no lineal en reflujo total .....	44
3.4	Parámetros de la simulación del modelo no lineal en reflujo parcial .....	46
4.1	Relación de premisas, variables lingüísticas y funciones de pertenencia para la columna de destilación de 11 platos .....	59
4.2	Puntos de operación de subsistemas del modelo Takagi – Sugeno .....	62
4.3	Parámetros de la simulación del modelo difuso Takagi – Sugeno y del modelo no lineal .....	69
5.1	Traslape de reglas del observador difuso .....	80
5.2	Parámetros de la simulación del observador difuso Takagi-Sugeno y del modelo no lineal .....	87



# Capítulo 1

## Introducción

### 1.1 Introducción

La destilación es el proceso de separación de dos o más componentes de una mezcla utilizando sus propiedades de vaporización y condensación. Destilar es la forma de disociación más utilizada en la industria, siendo las industrias petroquímica (producción de derivados del petróleo) y de alimentos (producción de bebidas alcohólicas) las de mayor importancia. La cantidad de energía utilizada en la industria relacionada con procesos de destilación alcanza el 40% del total empleado, por ello es importante implementar procesos de control que optimicen la energía utilizada (Dejanovic *et al.*, 2010) (Jana, 2016).

Los observadores de estado son herramientas matemáticas utilizadas para estimar variables (estados) no disponibles de un determinado sistema, esto puede deberse a cuatro razones:

1. Se puede necesitar una gran cantidad de sensores para instrumentar completamente el sistema.
2. La instalación de los sensores resulta compleja o peligrosa.
3. Los sensores tienen un alto costo o no están disponibles.
4. Es necesario detener el proceso para obtener la medición del sensor; es decir, el sensado no puede realizarse “en línea”.

El modelado difuso Takagi – Sugeno permite expresar un sistema no lineal como la combinación de un conjunto de subsistemas lineales. Este modelo está descrito por reglas difusas SI – ENTONCES que representan relaciones locales entrada – salida del sistema no lineal. El modelo difuso total del sistema se consigue realizando una suma ponderada de los subsistemas lineales.

## 1.2 Descripción del Problema

Se tiene una columna de destilación fraccionada tipo *batch* con una mezcla binaria de etanol y agua, la cual se compone de 11 platos: 1 condensador, 9 platos intermedios y 1 hervidor.

Las variables principales en una columna de destilación son la concentración molar de los elementos de la mezcla en los platos y la temperatura en cada uno de ellos. La medición de temperatura en línea resulta sencilla, ya que existen numerosos sensores de temperatura a precios accesibles, sin embargo, no existe un sensor de bajo costo capaz de realizar la medición de concentración en línea, es por ello que se requiere el uso de un observador de estados para estimarlas.

Debido a que el modelo que expresa la concentración del elemento más volátil en cada uno de los platos de la columna es no lineal, se desea obtener un conjunto de submodelos lineales, y a partir de éstos, diseñar un observador difuso continuo de estados para estimar las concentraciones y temperaturas en los platos de la columna.

## 1.3 Antecedentes

### 1.3.1 Control Difuso

La lógica difusa fue propuesta por Lofti A. Zadeh de la Universidad de California en Berkeley en un artículo, en el año de 1965. En 1974 se reportó la primera aplicación de lógica difusa en el control de un proceso a escala en un laboratorio (Mamdani & Assilian, 1975). En 1982, el control de los hornos de cemento fue una de las primeras aplicaciones en la industria (Holmbland & Ostergaard, 1982). La primera aplicación comercial se desarrolló en 1987 por *Matsushita Industrial Electric*, una regadera para ducha con control de temperatura (Valvano, 2011). En 1989 se introdujo al mercado la primera lavadora controlada por lógica difusa, también desarrollado por Matsushita (Zadeh L. A., 1996). Desde entonces han surgido un gran número de entornos de diseño asistido por computadora (*CAD, computer-aided design*) en conjunto con circuitos de integración a muy grande escala (*VLSI, Very Large Scale Integration*) para su rápida ejecución. El control difuso es aplicado en varios sistemas en la industria tales como regulación de velocidad en motores y control de temperatura en hornos (Santhanam & Langari, 1994) (Tani & Utashiro, 1994); electrónicos de consumo



como: aspiradoras, lavadoras y refrigeradores (Hirota, 1993) (Bonissone, 1994), operación automática de trenes (Yasunobu & Miyamoto, 1985), sistemas de tráfico (Hellendoorn, 1993), entre otros.

### **1.3.2 Observadores de Estado**

La función de los observadores de estado es determinar variables de un sistema, que de otra manera serían difíciles o imposibles de conocer. Esto con la finalidad de utilizarlas para aplicaciones como control por retroalimentación o monitoreo de estados.

Una de las primeras aproximaciones a un observador de estado, entre la década de 1950 y 1960, consistía en extraer información únicamente de la salida del sistema, y mediante el error entre ésta y la estimada, podían conocerse los estados internos (Radke & Gao, 2006). Aunque este estimador es fácil de implementar, la información es susceptible a perturbaciones y ruido en los sensores.

Para minimizar el error debido a los sensores, se utilizó un estimador que tomaba en cuenta sólo las entradas del sistema. Si el modelo matemático de la planta es preciso, y las entradas y condiciones iniciales están disponibles, las variables internas pueden determinarse únicamente con la entrada (Radke & Gao, 2006). Sin embargo, las condiciones iniciales del sistema no siempre se conocen.

En 1960, Rudolf Kalman formuló un filtro que estimaba los estados internos de un sistema lineal dinámico. Este modelo incluía el análisis de perturbaciones y ruido en los sensores. Originalmente, el filtro de Kalman fue diseñado para sistemas discretos y posteriormente se extendió a sistemas continuos. No obstante, el diseño de este observador es complejo y sus ganancias son variantes en el tiempo (Kalman, 1960), (Kalman & Bucy, 1961).

David Luenberger propuso en 1964 un estimador de estados para un sistema lineal que tomaba mediciones tanto de la entrada como de la salida. El observador de Luenberger puede verse como una simplificación del filtro de Kalman, para el cual las perturbaciones son cero, esto resulta en un modelo de baja complejidad con ganancia constante. Este observador es uno de los más extendidos tanto en la industria como en la investigación (Radke & Gao, 2006), (Luenberger, 1964).

### **1.3.3 Modelado de Columnas de Destilación**

Los primeros trabajos realizados sobre columnas de destilación fraccionada eran usados para predecir las composiciones molares en estado estable, a principios de la década de 1920 (López-Estrada, 2008). En 1925 se publicó uno de los trabajos más importantes para determinar el número de platos requeridos por una columna para lograr una concentración adecuada de destilado, dada una mezcla binaria, el cual es un método gráfico basado en el diagrama de equilibrio líquido – vapor de la mezcla (McCabe & Thiele, 1925).

Para la década de 1950, con la introducción de las computadoras, se desarrollaron modelos más rigurosos para simular el comportamiento dinámico y realizar control. Las contribuciones más importantes en este periodo fueron realizadas por los investigadores de las industrias, Rosenbrock de la compañía John Brown en el Reino Unido (Rosenbrock, 1962), y Rademaker y Rijnsdorp de la compañía Shell en los Países Bajos (Skogestad, 1997).

En (Kim & Friedly, 1974) se desarrolla uno de los primeros modelos lineales con buen grado de predicción del componente ligero en una columna de destilación. En (Skogestad & Morari, 1988) se desarrolla un modelo no lineal basado en el equilibrio líquido – vapor para mezclas binarias para una columna de destilación fraccionada

En (Kister, 1990) se presenta un análisis de las columnas de destilación fraccionada que abarca desde las condiciones de operación hasta la configuración física de los platos. En (Skogestad, 1997) se presenta una recopilación de los trabajos más importantes sobre modelado en columnas de destilación y se analiza el modelo no lineal basado en el balance del componente ligero con sus simplificaciones.

## **1.4 Estado del Arte**

### **1.4.1 Columnas de Destilación**

Debido a la importancia del proceso de destilación, su continuo estudio ha permitido el desarrollo de técnicas para el diseño y optimización de equipos, tales como la columna de destilación, para hacer más eficiente y segura la destilación de mezclas (Escamirosa Torres, 2016).

En (Robinson & Gilliland, 1950) se propone una columna de destilación fraccionada no convencional, en la cual se utiliza un contenedor inmediatamente antes del plato de

alimentación para mantener cercanas las concentraciones entre el plato y el flujo de alimentación. Sin embargo, fue hasta el año de 1992 que se documentó este tipo de columna para la destilación de una mezcla ternaria en la que el componente más pesado se extrae como producto de fondo, el más liviano como destilado en el condensador y el intermedio se extrae utilizando el contenedor ubicado a la mitad de la columna (Hasebe *et al.*, 1992). Posteriormente, en (Hasebe *et al.*, 1995) se generaliza este proceso para la separación de una mezcla de  $n$  componentes utilizando  $n$  contenedores intermedios. En (Skogestad *et al.*, 1996) se compara el desempeño de esta columna no convencional y de una convencional en modo de operación por lotes, donde la primera utiliza menos tiempo para separar la mezcla, es decir; la energía calorífica utilizada en el hervidor es menor en la columna con contenedores intermedios. Sin embargo, la construcción física de esta columna resulta más compleja y está sujeta a las especificaciones de la mezcla a separar, por lo que su uso no está extendido.

En (Dejanovic *et al.*, 2010) se muestra un análisis de una columna de destilación de pared divisoria (DWC – *Dividing Wall Column*), la cual está compuesta de platos divididos verticalmente y acoplados térmicamente. Esta columna puede separar mezclas de 3 o más elementos, dependiendo del número de divisiones. La ventaja que presenta sobre una columna fraccionada convencional es un ahorro en la energía utilizada (hasta un 30 % menos), con la desventaja de requiere una mayor inversión en la construcción y el modelado es altamente complejo. No obstante, un estudio más reciente afirma que no existen diferencias significativas entre una columna convencional tipo *batch* y una DWC operada en modo por lotes (López-Saucedo *et al.*, 2016).

En (Maiti *et al.*, 2011) se propone una columna de destilación tipo *batch* de calor integrado (HIBDC, *Heat Integrated Batch Distillation Column*), la cual está compuesta por un hervidor concéntrico en cuyo interior se encuentra la columna de platos. Se utiliza un compresor entre el hervidor y el plato siguiente para aumentar la temperatura de flujo de vapor, lo que provoca intercambio de calor entre la columna y el hervidor, reduciendo así la potencia calorífica necesaria para vaporizar la mezcla. La reducción de recursos energéticos, en comparación a una columna convencional, es de hasta un 56 %. La desventaja de la HIBDC es la complejidad en su construcción, pues precisa de elementos intercambiadores de calor entre los platos, además de otros elementos como el compresor. Como consecuencia, una columna de calor integrado ocupa mayor espacio que una columna convencional.

En (Jana, 2016) se plantea una HIBDC con pared divisoria, la cual es una columna convencional formada por un hervidor en la parte inferior, un condensador en la parte superior y el cuerpo compuesto de platos entre estos dos elementos. La diferencia radica en que el cuerpo de la columna está dividido verticalmente por una pared de metal, la cual acopla las temperaturas entre ambos lados. Además, se agrega un compresor entre el plato superior de un lado (baja presión) y el plato inferior del otro (alta presión), lo que genera un aumento de la temperatura en este último. Debido a que la pared que divide a ambos lados de la columna es de metal, el lado de alta presión cede calor al de baja presión, disminuyendo la energía calorífica utilizada en el hervidor para vaporizar la mezcla. Esta configuración promete facilitar la construcción de columnas de calor integrado y generar ahorros energéticos de hasta 74 %.

De la revisión de trabajos relacionados con columnas de destilación se concluye que, aunque se han propuesto varias columnas de destilación no convencionales, no se ha demostrado que éstas presenten ventajas determinantes sobre las columnas de destilación convencionales, lo que no justifica la complejidad en su construcción y modelado.

#### **1.4.2 Modelado de Columnas de Destilación**

Los procesos químicos, en especial, cuentan con características indeseables tales como: grandes dimensiones, interacciones entre variables y no linealidades. Éstas dificultan las tareas de modelado por lo que deben tomarse algunas consideraciones que simplifiquen el proceso (Aguilera-González, 2008).

Existen diversos modelos de columnas de destilación por lotes, los cuales están formados por un conjunto de ecuaciones diferenciales y algebraicas basadas en el balance de masa, balance de energía y balance del componente ligero.

En (Oisiovici & Cruz, 2000) se plantea el modelo no lineal de una columna de destilación fraccionada tipo *batch* basado en el balance de componente ligero. Se desarrollan dos modelos: uno para una mezcla binaria y otro para una mezcla multicomponente. El primero se trata de una mezcla etanol – propanol en una columna de 30 platos, lo que resulta en un modelo de 30 ecuaciones diferenciales no lineales; mientras que el segundo se desarrolla para una mezcla etanol – propanol – butanol en una columna de 17 platos, resultando en un conjunto de 34 ecuaciones diferenciales. El objetivo del trabajo es estimar

la concentración líquida de cada componente en los platos de la columna mediante el filtro de Kalman extendido.

En (Yusof *et al.*, 2004) se diseña un modelo Takagi – Sugeno en línea del hervidor de una columna de destilación para predecir la temperatura de la mezcla. El hervidor está compuesto de dos tanques interconectados (uno para calentar la mezcla y otro para almacenarla). El tanque que proporciona la energía calorífica se modela utilizando 16 reglas y el tanque que almacena la mezcla se modela con 27 reglas. El modelo resultante es una excelente aproximación al modelo no lineal del hervidor.

En (Zou *et al.*, 2006) se desarrolla un modelo lineal discreto en espacio de estado basado en el balance de masa del componente ligero y en el diagrama de equilibrio líquido – vapor para una columna de destilación tipo *batch* de 6 platos con una mezcla metanol – agua. La linealización de las ecuaciones no lineales se hace alrededor del punto de operación de reflujo total. La finalidad del trabajo es realizar control predictivo basado en el modelo.

En (Singh & Tyagi, 2011) se propone un modelo lineal de una columna de destilación binaria de 9 platos para una mezcla metanol – agua. El análisis del modelo se realiza con base en funciones de transferencia en el dominio de la frecuencia, donde las salidas son la composición molar en el hervidor y condensador, y las entradas están dadas por el reflujo y el flujo de vapor. El objetivo de este trabajo es utilizar control para mantener la concentración constante tanto en el hervidor como en el condensador y se analiza la respuesta de tres controladores diferentes: difuso, predictivo y PID.

En (López-Saucedo *et al.*, 2016) se desarrolla un modelo no lineal de una columna de destilación tipo *batch* convencional y un modelo de una columna de destilación tipo *batch* con pared divisoria. Ambos modelos toman en cuenta las pérdidas de calor hacia el medio ambiente y la dinámica en los flujos. La finalidad del trabajo es comparar la energía utilizada por ambas columnas para la separación de una mezcla multicomponente metanol – etanol – propanol – butanol y se concluye que no existen diferencias importantes en el gasto energético.

De la revisión de trabajos relacionados con el modelado de columnas de destilación se concluye que el método más utilizado es el del balance del componente ligero, el cual resulta en un conjunto de ecuaciones no lineales que dependen del número de platos de la columna y de la cantidad de componentes en la mezcla.

### 1.4.3 Observadores en Columnas de Destilación

La aplicación de observadores en columnas de destilación, tienen como objetivo común el predecir las concentraciones en una columna de destilación, ya sea para monitoreo o para aplicar control.

En (Targui *et al.*, 2001) se desarrolla un observador de alta ganancia para estimar las concentraciones del componente ligero a partir del modelo no lineal de una columna de destilación continua para una mezcla metanol – etanol. El observador logra converger con los estados alrededor del minuto 20 de simulación, debido a la lenta dinámica que presentan las concentraciones.

En (Perla *et al.*, 2004) se utilizan redes neuronales para estimar las temperaturas en una columna de destilación de 15 platos para una mezcla multicomponente. El objetivo del trabajo es diagnosticar y aislar fallas en los sensores de temperatura.

En (Pan *et al.*, 2009) se diseña un observador de estado basado en el filtro de Kalman extendido con entradas desconocidas para el modelo no lineal de destilación tipo *semi-batch* de 20 platos y una mezcla binaria tolueno – ciclohexano, basado en el balance del componente ligero. El observador es capaz de estimar las concentraciones del elemento ligero en los platos de la columna, la eficiencia en cada plato y el flujo de alimentación.

En (Aguilera-González *et al.* , 2010) se presenta un observador de alta ganancia continuo-discreto para estimar las concentraciones en una columna de destilación tipo *batch* de 12 platos para una mezcla etanol – agua, a partir del modelo no lineal de la columna. El observador es capaz de estimar las concentraciones y temperaturas de todos los platos a partir de únicamente dos mediciones de temperatura, manteniendo un error mínimo.

En (Heras-Cervantes *et al.*, 2013) se analiza el desempeño de dos observadores de alta ganancia: uno con ganancia constante y otro con ganancia reconfigurable, aplicados a una columna de destilación tipo *batch* de 12 platos para una mezcla etanol – agua, utilizando el modelo no lineal basado en el balance del componente ligero. Ambos observadores fueron validados con experimentos reales, presentando estimaciones con errores menores al 1 %; sin embargo, el observador de alta ganancia constante es más adecuado para el sistema de columnas de destilación debido a que resulta más sencillo de implementar que el observador de alta ganancia reconfigurable.

En (Aguilera-González *et al.*, 2013) se desarrolla un modelo lineal de parámetros variables (LPV, *Linear Parameter-Varying*) para una columna de destilación continua de 12 platos con una mezcla etanol – agua. Con base en este modelo, se diseña un observador PI lineal de parámetros variables que estima las concentraciones y temperaturas en los platos a partir de mediciones en las temperaturas del condensador y hervidor, además de estimar también el flujo de alimentación y su concentración. El observador propuesto es validado en un experimento real con excelentes resultados.

En (Heras-Cervantes *et al.*, 2015) se valida un observador de alta ganancia reconfigurable para una columna de destilación tipo *batch* de 12 platos para una mezcla etanol – agua. El modelo de la columna es no lineal y se basa en el balance del componente ligero. La ganancia del observador se ajusta de acuerdo a la dinámica de la planta, por lo que los estados observados convergen más rápido que los de un observador de alta ganancia constante.

En (Kamal-eddine *et al.*, 2016) se obtiene un modelo linealizado de una columna de destilación continua de 22 platos utilizando derivadas parciales y evaluando en el punto de equilibrio. A partir de este modelo se diseña un observador lineal de ganancia constante, donde la ganancia se calcula mediante el método de ubicación de valores propios. El observador estima las concentraciones en todos los platos a partir de mediciones en el condensador y hervidor, sin embargo, existe un error en estado estable debido a los efectos de la linealización.

En (Ortiz-Torres *et al.*, 2016) se diseña un sistema de control tolerante a fallas para el modelo no lineal de una columna de destilación continua de 12 platos con una mezcla etanol – agua. Este sistema se desarrolla a partir de un sistema de detección y análisis de fallas empleando un observador de alta ganancia de orden completo, el cual estima las concentraciones en todos los platos a partir de una sola temperatura medida. Las pruebas en simulación muestran que la ley de control permite que las concentraciones molares líquidas requeridas en los productos destilados sigan la referencia de manera adecuada aun en presencia de fallas.

De la revisión de trabajos relacionados con observadores de estado aplicados a columnas de destilación se concluye que la mayoría de éstos se basan en el modelo no lineal de la columna, obteniendo buenos resultados. Sin embargo, es deseable que un sistema

presente una dinámica lineal, lo cual facilita su análisis y, posteriormente, el diseño de estrategias de control. Es por ello que en esta tesis se presenta un observador difuso Takagi – Sugeno, el cual se compone de un conjunto de observadores lineales.

## **1.5 Objetivos**

### **1.5.1 Objetivo General**

Diseñar un observador difuso para estimar las concentraciones y temperaturas en los platos de una columna de destilación por lotes de 11 platos para una mezcla binaria etanol-agua.

### **1.5.2 Objetivos Particulares**

Formular un modelo termodinámico que permita conocer el equilibrio líquido – vapor de la mezcla etanol – agua.

Obtener el modelo no lineal de la columna de destilación utilizando el método de balance de componente ligero.

A partir del modelo no lineal, obtener el modelo difuso propuesto por Takagi–Sugeno.

Calcular las ganancias del observador difuso mediante la solución de desigualdades matriciales lineales (LMIs).

Simular el observador difuso y evaluar la convergencia de los estados estimados respecto a los estados del modelo no lineal.

## **1.6 Hipótesis**

Es posible estimar las fracciones molares del componente ligero de una mezcla etanol – agua en los platos de una columna de destilación tipo *batch*, mediante un observador difuso diseñado a partir del modelo Takagi – Sugeno de ésta.

## **1.7 Justificación**

El etanol como combustible ha sido utilizado desde la década de 1980, siendo Brasil uno de los primeros países en impulsar su uso. Desde entonces, la producción de etanol con



fin de locomoción es una de las aplicaciones de destilación más utilizadas en el mundo. Las razones por las cuales el etanol ha tenido gran demanda se encuentran en sus propiedades físico-químicas y en que, por ser un compuesto proveniente de materia prima biológica renovable, promete sustentabilidad ambiental (Uyazán & Gil, 2006).

Las columnas de destilación constituyen un porcentaje significativo de la inversión que realizan las plantas de producción de etanol en todo el mundo. Por ello, es importante el disponer de técnicas para modelar columnas de destilación lo más cercano posible a la realidad, y además diseñar, desarrollar e implementar sistemas de monitoreo y de control eficaces, a fin de conseguir un funcionamiento seguro y óptimo de los sistemas de destilación industriales (Aguilera-González, 2008).

Las columnas de destilación fraccionadas se caracterizan por tener una considerable cantidad de variables de estado (temperatura y concentración), las cuales están directamente relacionadas con el número de platos de la columna y la cantidad de componentes en la mezcla a destilar. Los sensores de temperatura son comunes y presentan mediciones de gran exactitud, además de que tienen un costo accesible. Sin embargo, no existen sensores de concentración económicos y confiables capaces de realizar el sensado en línea. Debido a que es crucial conocer la concentración de los componentes de la mezcla en cada uno de los platos para realizar tareas apropiadas de control, es necesario utilizar un observador de estados para estimarlas.

Se han realizado numerosos trabajos de investigación acerca del modelado de columnas de destilación fraccionadas, siendo el balance del componente ligero el más utilizado, el cual resulta en un conjunto de ecuaciones diferenciales no lineales. Al utilizar la técnica propuesta por Takagi – Sugeno se obtiene un grupo de subsistemas lineales locales, los cuales producen conjuntamente una respuesta similar a la del modelo no lineal. La importancia de trabajar con modelos lineales radica en que se han documentado ampliamente a lo largo de la historia del control y presentan una mayor facilidad de diseño para observadores, a diferencia de su contraparte no lineal.

## **1.8 Aportes**

Un aporte importante de este trabajo es el modelado difuso Takagi – Sugeno de una columna de destilación fraccionada tipo *batch*. Si bien existe literatura acerca del control

difuso en columnas de destilación (Frattini Fileti & Pereira Filho, 2002), (Miccio & Cosenza, 2014), (Vasičkaninová & Bakošová, 2016), ésta se encuentra basada en el modelo no lineal de la columna y un controlador difuso.

Sin embargo, el aporte principal es el desarrollo de un observador difuso para la columna de destilación, el cual puede ser utilizado para tareas básicas de control, como el control por retroalimentación de estados, hasta algunas más complejas como el control óptimo. Este observador también puede utilizarse para la detección y análisis de fallas.

## 1.9 Metodología

La metodología utilizada para la elaboración de esta tesis se numera a continuación:

1. **Modelado de columnas de destilación:** se realiza una revisión bibliográfica acerca del modelado de las columnas de destilación, donde se observa que los modelos más utilizados son balance de masa, balance de componente y balance de energía. Se formula un modelo matemático basado en balance del componente ligero de acuerdo a las características físicas de la columna.
2. **Propiedades termodinámicas de la mezcla binaria etanol – agua:** se realiza una revisión bibliográfica de las técnicas de separación de mezclas no ideales, así como las características termodinámicas de esta mezcla en particular.
3. **Simulación del modelo no lineal de la columna de destilación:** se realizan simulaciones sobre el modelo no lineal de la columna de destilación para apreciar el comportamiento de los estados del sistema y de las variables que intervienen en el proceso de destilación.
4. **Modelado Takagi – Sugeno:** en esta etapa se revisa el modelo propuesto por Takagi – Sugeno para representar un sistema no lineal como una combinación de varios subsistemas lineales en puntos de operación específicos, se definen las premisas y funciones de membresía para la derivación de las reglas difusas.
5. **Simulación del modelo Takagi – Sugeno:** se realizan simulaciones sobre el modelo difuso Takagi – Sugeno de la columna de destilación para efectuar comparaciones entre éste y el modelo no lineal.

6. **Diseño de un observador difuso en el modelo Takagi – Sugeno:** mediante la solución de LMIs se diseña un observador de orden completo que estima las concentraciones de líquido en cada uno de los platos a partir de las concentraciones del modelo no lineal.
7. **Simulación del observador difuso:** se llevan a cabo un conjunto de simulaciones al observador, en las cuales se modifican los parámetros de entrada: tasa de reflujo, tiempo de reflujo y potencia calorífica, y se evalúa la respuesta de los estados estimados al ser comparados con los estados del modelo no lineal.

## 1.10 Contenido de la Tesis

El documento está organizado de la siguiente manera:

- En el Capítulo 2 se presenta la descripción física de la columna de destilación, así como su modelo dinámico, el cual está basado en el balance del componente ligero. También en este capítulo se analizan las propiedades termodinámicas de la mezcla etanol – agua.
- En el Capítulo 3 se describe el modelo no lineal de la columna en su representación en espacio de estado, se presentan las reglas del modelo difuso y las funciones de membresía para obtener el modelo Takagi – Sugeno. Finalmente, se muestran varias simulaciones del modelo difuso y se compara con el modelo no lineal.
- En el Capítulo 4 se diseña el observador difuso, desde la descripción matemática hasta la selección de las ganancias por medio de la solución de LMIs. De igual manera, se evalúa el desempeño del observador difuso respecto al modelo no lineal de la columna.
- En el Capítulo 5 se presentan las conclusiones, así como los trabajos futuros que se pueden derivar de la presente tesis.

## 1.11 Lista de Publicaciones

Orozco, G., Cortés, B., Heras, M., Téllez, A., & Anzures, J. (2016). Analysis and comparison of distillation column models considering constant and variable relative volatility. In Power, Electronics and Computing (ROPEC), 2016 IEEE International Autumn Meeting on (pp. 1-6). IEEE.



## Capítulo 2

# Modelo Termodinámico de la Mezcla

## Etanol – Agua

### 2.1 Introducción

En general, en una mezcla binaria se identifican dos componentes: el elemento ligero y el elemento pesado. El elemento ligero es el más volátil, es decir, tiene un punto de ebullición más bajo y es el que se extrae como destilado; en cambio, el elemento pesado tiene un punto de ebullición más alto y puede extraerse como producto de fondo si se requiere. En la Tabla 2.1 se muestran algunas propiedades de los componentes de la mezcla etanol – agua a presión de 1013.25 hPa (valor medio de la presión de la atmósfera terrestre).

Tabla 2.1 Propiedades de los componentes en la mezcla a una presión de 1013.25 hPa

Componente	Punto de ebullición	Masa molar	Densidad
Etanol	78.37 °C	46.06844 g/mol	0.789 g/ml
Agua	100 °C	18.01528 g/mol	1 g/ml

En este caso, el elemento ligero es el etanol debido a que su punto de ebullición es más bajo que el del agua.

### 2.2 Diagrama de Equilibrio

Se dice que una mezcla está en equilibrio químico cuando los productos y reactivos presentan concentraciones que no tienden al cambio con el tiempo (Atkins & Paula, 2006). Generalmente las reacciones que ocurren en la mezcla cuando se alcanza el equilibrio no son cero, sino de la misma magnitud.

Un ejemplo de este proceso puede ser imaginado con un recipiente lleno de agua que se coloca en un cuarto pequeño y se le aplica una fuente de calor. El agua del recipiente se

evapora, y el aire en el cuarto se empieza a saturar del vapor de agua. Finalmente, el aire en el cuarto será completamente saturado y el nivel de agua en el recipiente ya no cambiará. Sin embargo, el agua en el recipiente se sigue evaporando debido a que las moléculas de agua en el aire chocan contra la superficie del agua y se vuelven a condensar. Esto ocurre al mismo ritmo al que el agua se evapora del recipiente, es decir; el ritmo de evaporación es igual al ritmo de condensación (García, 2003).

Un diagrama de equilibrio o diagrama de fase es una gráfica utilizada para mostrar las condiciones a las cuales distintas fases de un compuesto o mezcla se encuentran en equilibrio químico.

La Tabla 2.2 muestra datos del equilibrio líquido – vapor de la mezcla de etanol – agua a una presión de 1013.25 hPa, donde  $x_{\text{eta}}$  representa la fracción molar de etanol líquido en la mezcla, mientras que  $y_{\text{eta}}$  representa la fracción molar de vapor de etanol.

Tabla 2.2 Equilibrio líquido – vapor de la mezcla etanol – agua a una presión de 1013.25 hPa

$x_{\text{eta}}$ (mol/mol)	$y_{\text{eta}}$ (mol/mol)	Temperatura (°C)
0.0000	0.0000	99.99
0.0102	0.1115	96.99
0.0404	0.3014	91.22
0.1704	0.5220	83.41
0.5802	0.6895	79.24
0.7003	0.7531	78.66
0.8940	0.8946	78.16

La Figura 2.1 muestra el diagrama de fase de acuerdo a los datos de la Tabla 2.2. En este tipo de diagrama de fase se grafica la temperatura en función de las concentraciones molares del componente más volátil. Se observa en éste que la fracción molar de vapor de etanol siempre es mayor o igual a la fracción molar de etanol líquido.

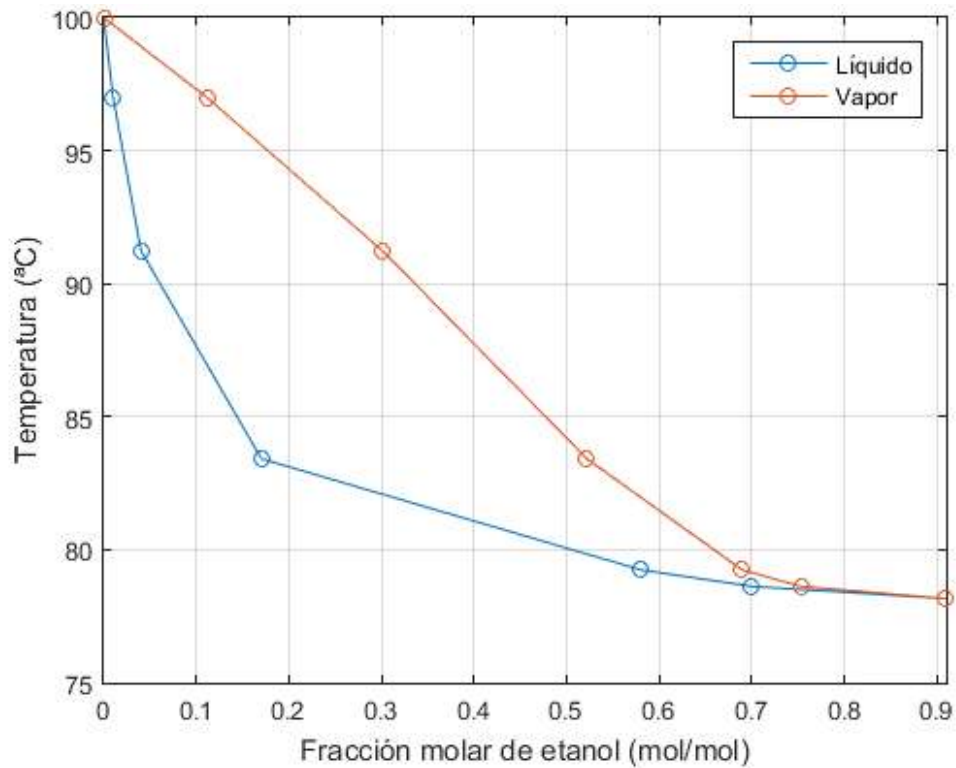


Figura 2.1 Diagrama de equilibrio de la mezcla etanol – agua en función de la temperatura a una presión de 1013.25 hPa

La Figura 2.2 muestra otro tipo de diagrama de fase de la mezcla etanol – agua. En este diagrama se muestra la concentración de etanol en fase de vapor y la concentración de etanol en fase líquida. La línea punteada indica una solución ideal, por lo tanto se observa que la solución etanol - agua no es ideal, lo cual se analizará detalladamente a lo largo de este capítulo.

### 2.3 Volatilidad Relativa

Se denomina volatilidad relativa al factor de separación entre los componentes de una mezcla. Se denota por  $\alpha$  e indica la facilidad o dificultad para separar el componente más volátil del menos volátil en una mezcla binaria.

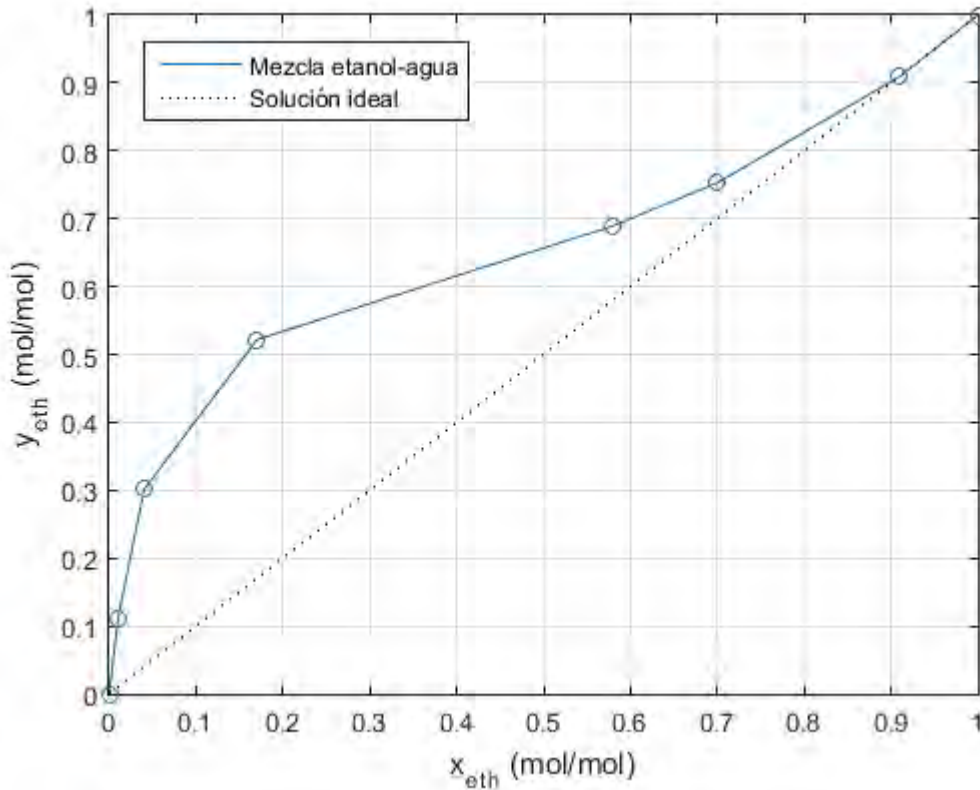


Figura 2.2 Diagrama de equilibrio de la mezcla etanol – agua a una presión de 1013.25 hPa

Matemáticamente se define como:

$$\alpha = \frac{y_1/x_1}{y_2/x_2} \quad (2.1)$$

donde:

$\alpha$  es la volatilidad relativa del componente más volátil respecto al menos volátil.

$y_1$  es la concentración del componente más volátil en la fase de vapor.

$x_1$  es la concentración del componente más volátil en la fase líquida.

$y_2$  es la concentración del componente menos volátil en la fase de vapor.

$x_2$  es la concentración del componente menos volátil en la fase líquida.



Cuando las concentraciones líquidas son iguales, el componente más volátil tiene mayor concentración en la fase de vapor que el menos volátil; es decir,  $\alpha \geq 1$ . Cuanto más alejado esté  $\alpha$  de 1, la separación de ambos componentes se vuelve más sencilla.

Si  $\alpha = 1$ , la destilación sería imposible bajo las condiciones dadas debido a que las composiciones de líquido y vapor son iguales, es decir; la mezcla forma un azeótropo.

Utilizando los datos de la Tabla 2.2 se obtiene la gráfica mostrada en la Figura 2.3, donde se observa que mientras menor sea la concentración líquida de etanol en la mezcla, la volatilidad relativa es mayor, y por lo tanto la separación de la mezcla es más sencilla.

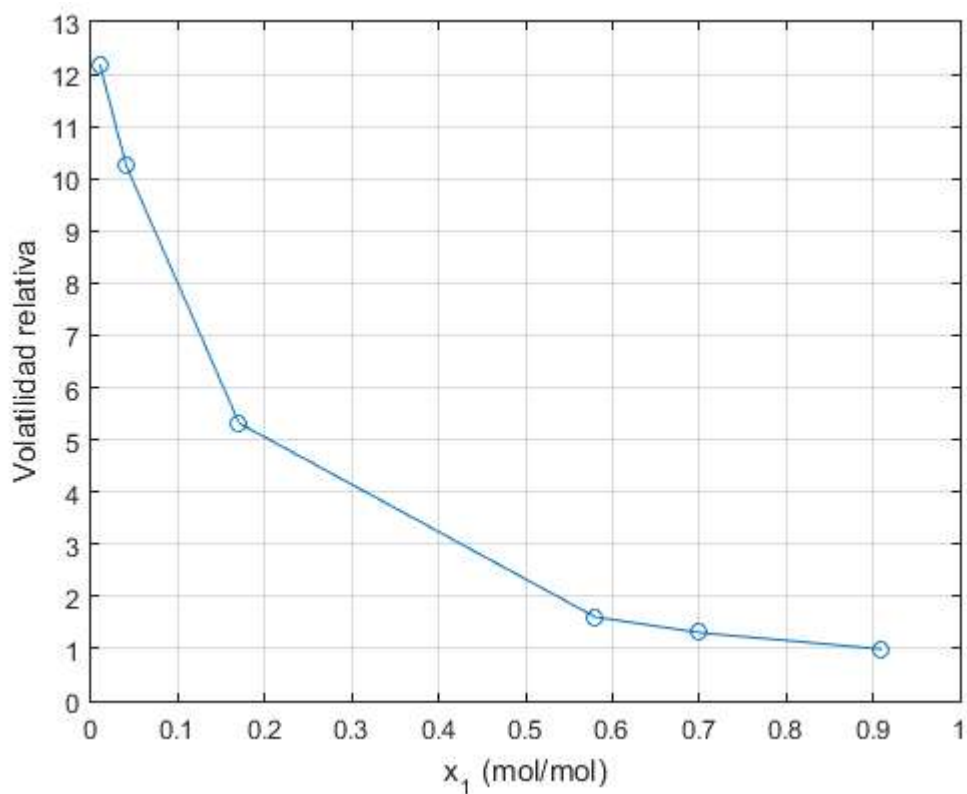


Figura 2.3 Volatilidad relativa de la solución etanol – agua a presión de 1013.25 hPa

Mientras mayor es la concentración de etanol líquido, la volatilidad relativa disminuye, hasta alcanzar el valor de 1, cuando la mezcla forma un azeótropo.

## 2.4 Mezcla Azeotrópica

Una mezcla azeotrópica es aquella en la que las composiciones de líquido y vapor son iguales para todos los componentes; en otras palabras, los componentes hierven a temperatura constante y la mezcla se comporta como si estuviese formada por un solo componente.

Un azeótropo puede hervir a una temperatura superior, intermedia o inferior a la de los constituyentes de la mezcla, permaneciendo el líquido con la misma composición inicial, al igual que el vapor, por lo que no es posible separarlos mediante destilación simple, como en el caso de la columna de destilación.

La mezcla de etanol y agua forma un azeótropo para una concentración del 95.63 % en peso de etanol (Rousseau, 1987), que hierve a una temperatura de 78.2 °C a una presión de 1013.25 hPa. Con los datos de la Tabla 2.1 es posible expresar el azeótropo en concentración volumétrica de etanol (94.52 °GL) o en función de la concentración molar de etanol (0.8953 mol/mol).

Considere, por ejemplo, una mezcla de etanol – agua, con 50 % de etanol y 50 % de agua en peso, que se somete a una destilación simple en la que se evapora el 50 % de la mezcla, obteniéndose dos productos: agua más pura en el fondo (~25 % etanol), y un destilado con una concentración mayor en etanol (~74 %). Si esa mezcla vuelve a destilarse se obtendrá un segundo destilado, con una concentración de etanol de aproximadamente 82 %. Una tercera destilación dará un destilado de un ~87 % de etanol. Sucesivas destilaciones aproximan el destilado a una composición del azeótropo (96 % en peso de etanol), pero nunca a etanol puro. También es posible partir de una mezcla con una composición de etanol mayor que la del azeótropo, lo que volverá a producir un destilado más cercano en composición al azeótropo pero menor a la composición de la mezcla inicial; es decir, el fondo tendrá una mayor composición de etanol que el destilado (Morrison & Boyd, 1992), (Rousseau, 1987).

Si se requiere obtener un destilado con mayor pureza que el azeótropo es necesario recurrir a otra técnica de destilación, denominada destilación azeotrópica (Kister, 1992). El principio de este tipo de destilación se basa en eliminar el azeótropo de la mezcla por la inclusión de otro componente (que después habrá que recolectar por algún medio de separación) o mover el azeótropo de lugar al variar la presión (Treybal, 1981).

## 2.5 Soluciones Ideales

Una solución ideal o mezcla ideal es aquella en la que la entalpía de mezclado es cero, así como lo es el cambio de volumen después de la disolución (Perrot, 1998).

Este tipo de soluciones obedece a la ley de Raoult, la cual establece que la presión de vapor (también denominada presión de saturación) de un componente en una mezcla es proporcional a la presión de vapor del componente puro y su fracción molar (Perrot, 1998).

$$p_i^{sat} = p_i^{sat*} x_i \quad (2.2)$$

donde:

$p_i^{sat}$  es la presión parcial de vapor del componente  $i$  en la mezcla gaseosa (por encima de la solución).

$p_i^{sat*}$  es la presión de vapor del componente puro  $i$ .

$x_i$  es la fracción molar del componente  $i$  en la mezcla líquida.

La ecuación de Antoine permite calcular la presión de saturación de un determinado componente en una mezcla y está definida como (Green & Perry, 2008):

$$\log_{10}(p^{sat*}) = A - \frac{B}{C + T} \quad (2.3)$$

donde:

$p^{sat*}$  es la presión de vapor del componente puro (torr).

$T$  es la temperatura de la mezcla (°C).

$A$ ,  $B$  y  $C$  son constantes para cada componente, ver Tabla 2.3.

De la Tabla 2.3 se observa que el etanol tiene diferentes constantes dependiendo de la temperatura a la que se encuentre. Para el caso de la columna de destilación, el rango de operación está entre los 78 y 100 °C, por lo cual se elige la primera fila de la tabla para el etanol.

Tabla 2.3 Constantes de Antoine para el cálculo de la presión de saturación

Componente	Constantes de Antoine			Rango de temperatura (°C)
	A	B	C	
<b>Etanol</b>	7.58670	1281.590	193.768	78 – 203
<b>Etanol</b>	8.11220	1592.864	226.184	20 – 93
<b>Agua</b>	8.07131	1730.630	233.426	1 – 100

Otra ley rige que el comportamiento de las soluciones ideales es la ley de Dalton (también denominada ley de Dalton de las presiones parciales), la cual establece que en una mezcla de gases no reactivos, la presión total ejercida es igual a la suma de las presiones parciales de cada gas (Silberberg & Amateis, 2015). Matemáticamente se expresa como:

$$p_T = \sum_{i=1}^n p_i \quad (2.4)$$

donde:

$p_T$  es la presión total de la mezcla.

$p_i = p_T y_i$  representa las presión parcial de cada componente.

$y_i$  es la fracción molar del gas  $i$  en la mezcla.

Combinando las Ecuaciones (2.2) y (2.4) se obtiene:

$$p_T = \sum_{i=1}^n p_i^{sat*} x_i \quad (2.5)$$

Reacomodando las Ecuaciones (2.2) y (2.4) se puede estimar la fracción molar de vapor de los componentes en la solución de la siguiente forma:

$$y_i = \frac{p_i^{sat*} x_i}{p_T} \quad (2.6)$$

## 2.6 Soluciones No Ideales

Es necesario introducir el *coeficiente de actividad*, el cual indica la desviación de la mezcla del comportamiento ideal, para ajustar las leyes de Raoult y Dalton a soluciones no ideales.

La ecuación de Van Laar es un modelo de actividad para describir el equilibrio de fases en una mezcla líquida binaria (Green & Perry, 2008). Matemáticamente se expresa como:

$$\begin{aligned}\ln(\gamma_1) &= A_{12} \left( \frac{A_{21}x_2}{A_{12}x_1 + A_{21}x_2} \right)^2 \\ \ln(\gamma_2) &= A_{21} \left( \frac{A_{12}x_1}{A_{12}x_1 + A_{21}x_2} \right)^2\end{aligned}\tag{2.7}$$

donde:

$\gamma_1$  es el coeficiente de actividad del elemento ligero.

$\gamma_2$  es el coeficiente de actividad del elemento pesado.

$A_{12} = 1.6798, A_{21} = 0.9227$  son parámetros constantes de la mezcla etanol – agua.

Si el coeficiente de actividad de los componentes es igual a 1, entonces el modelo pertenece a una solución ideal.

La Figura 2.4 muestra el comportamiento de los coeficientes de actividad de componentes etanol y agua en la mezcla. Se observa que presentan un comportamiento no lineal.

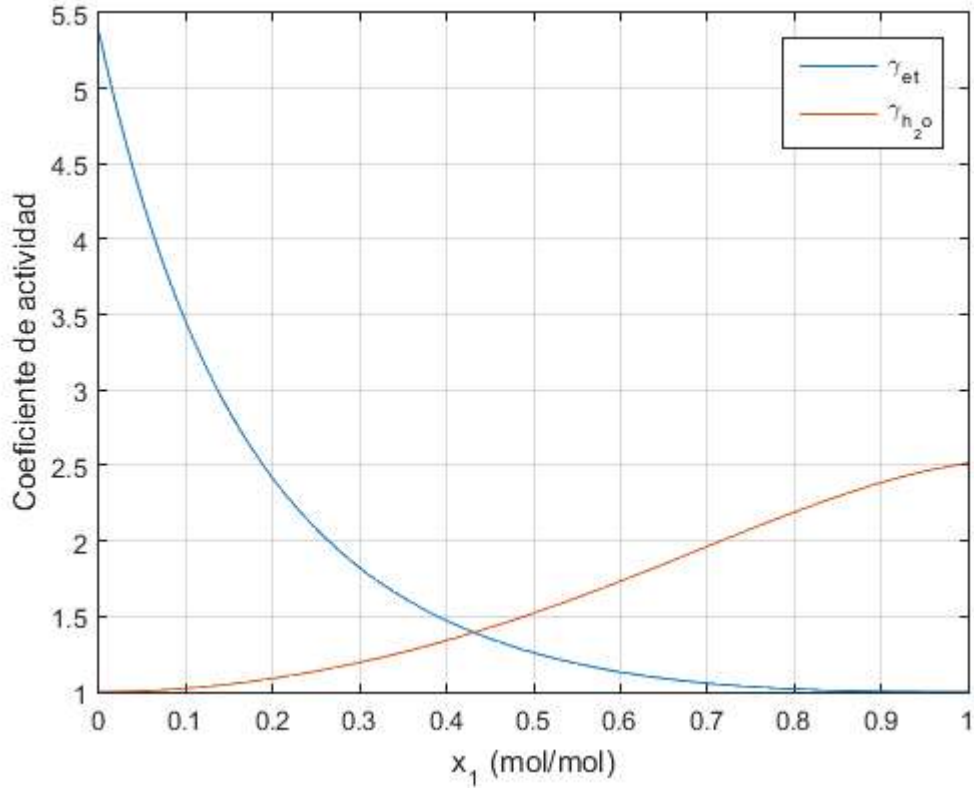


Figura 2.4 Coeficiente de actividad de los componentes en la mezcla etanol - agua

Utilizando el coeficiente de actividad es posible extender las leyes de Raoult y Dalton a soluciones no ideales. Al incluir éste, las Ecuaciones (2.5) y (2.6) se reescriben como:

$$p_T = \sum_{i=1}^n p_i^{sat*} x_i \gamma_i \quad (2.8)$$

$$y_i = \frac{p_i^{sat*} x_i \gamma_i}{p_T} \quad (2.9)$$

donde  $p_i^{sat*}$  se calcula de acuerdo a la Ecuación (2.3).

## 2.7 Conclusión

El diagrama de equilibrio de una mezcla es una representación gráfica de la concentración molar de los componentes de la mezcla de en función de la temperatura. Este tipo de diagramas es útil para predecir la fracción molar de los componentes a partir del conocimiento de la temperatura de la mezcla.

La mezcla etanol – agua es una solución no ideal, por ello es necesario integrar el coeficiente de actividad de los componentes para extender las leyes que rigen el comportamiento de las mezclas ideales a las mezclas no ideales. Éste describe el equilibrio de una mezcla no ideal a partir de la fracción molar de los componentes.

A partir del conocimiento de la temperatura de la mezcla es posible calcular el resto de variables que intervienen en el equilibrio de la mezcla, como lo son: concentración, coeficiente de actividad y presión de saturación de los componentes.





## Capítulo 3

# Modelo No Lineal de una Columna de Destilación por Lotes

### 3.1 Introducción

En este capítulo se presenta el comportamiento dinámico de una columna de destilación fraccionada de 11 platos operada en el modo por lotes, con el objetivo de simular la temperatura y las concentraciones de líquido del componente más volátil en cada plato. Se consideran dos entradas al sistema: el porcentaje de reflujo y la potencia calorífica aplicada en el hervidor.

Un proceso de destilación es relativamente lento, pudiendo demorar varias horas en producir el destilado requerido, dependiendo de las entradas y de la cantidad de producto a destilar. La importancia del modelo matemático es que éste pueda reproducir el comportamiento real del proceso, lo cual presenta las siguientes ventajas:

- Una simulación es significativamente más rápida de realizar.
- Es posible modificar los parámetros de la entrada, o incluso de la propia columna, en cuestión de minutos y sin alterar físicamente la planta.
- Analizar el comportamiento en determinados puntos de operación que no podrían llevarse a cabo de manera física, ya sea por motivos económicos o porque ponen en riesgo la integridad del sistema y de los operadores.

### 3.2 Descripción Física del Sistema

Una columna de fraccionamiento, también llamada columna de platos o columna de platillos, es un sistema que permite realizar una destilación fraccionada, la cual es una técnica que permite realizar una serie completa de destilaciones simples en cada plato (Kister, 1992).

La Figura 3.1 muestra el diagrama de una columna de destilación de 11 platos, donde el plato 1 se asigna al condensador, el plato 11 corresponde al hervidor y los platos intermedios se numeran ascendentemente desde el condensador hasta el hervidor.

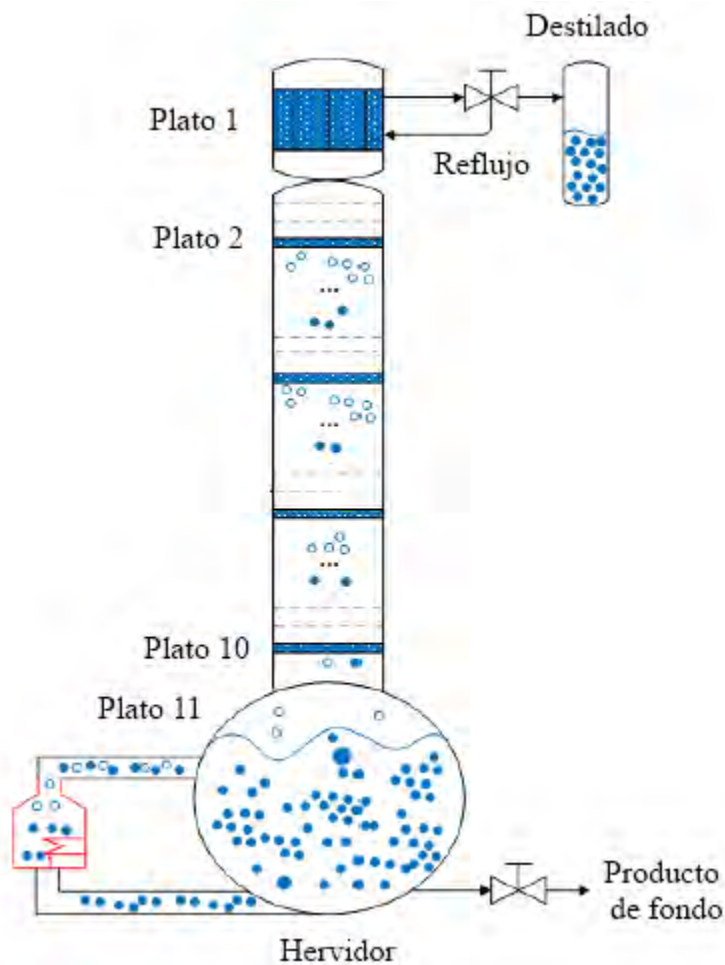


Figura 3.1 Diagrama de una columna de destilación de 11 platos

La función del hervidor es vaporizar parcialmente la mezcla para producir un flujo de vapor que asciende por la columna a través de los platos. El condensador enfría el vapor para regresarlo a su fase líquida. Este líquido puede ser devuelto a la columna como reflujo o extraerse como producto destilado.

El elemento más ligero de la mezcla tiende a concentrarse en la fase de vapor, mientras que el elemento pesado se concentra en la fase líquida. Lo anterior da como resultado que la fase de vapor se enriquezca con el elemento ligero de la mezcla a medida

que el vapor asciende por la columna, mientras que la fase líquida se enriquece del elemento pesado a medida de que el líquido desciende a través de la columna (Green & Perry, 2008).

La fracción molar de los componentes en cada plato de la columna es diferente: la concentración de etanol es mayor en los platos superiores, mientras que la concentración de agua es mayor en los platos cercanos al hervidor.

La Figura 3.2 muestra el condensador de la planta, el cual está ubicado en la parte superior. Está formado de dos tubos cilíndricos concéntricos: un tubo interior por el que circula el vapor que será condensado y uno exterior por el cual circula el líquido de refrigeración. El líquido refrigerante (generalmente agua) tiene que estar en circulación constante para mantener una temperatura que permita el intercambio de calor con el tubo interior. La válvula de reflujo permite que todo o una parte del líquido condensado regrese a la columna para enriquecer la mezcla con el componente ligero y permitir el equilibrio de fases. Esta válvula se comporta como un interruptor; es decir, puede estar totalmente abierta para permitir que todo el destilado regrese a la columna o totalmente cerrada para destilar el máximo volumen posible. Si se requiere utilizar valores intermedios es posible utilizar intervalos de tiempo en el que la válvula se encuentre abierta proporcionales al valor de porcentaje de apertura de ésta.

La Figura 3.3 muestra el hervidor, el cual está ubicado en la parte inferior de la columna. Es común que esté formado por dos tanques separados interconectados entre sí: uno se utiliza para almacenar la mezcla y el otro contiene un resistor eléctrico que proporciona el calor necesario para la vaporización. El tanque que almacena la mezcla tiene una capacidad de 2 litros, y el resistor produce una potencia calorífica que va desde 750 a 1250 W (1000 W en promedio).

El cuerpo de la columna está compuesta por nueve platos de vidrio perforados, lo cual se muestra en la Figura 3.4. El vapor generado en el hervidor asciende a la parte superior de la columna donde se condensa. Este líquido condensado desciende por la columna debido a la gravedad, y una parte de éste queda retenido en cada plato, donde se pone en contacto con el vapor que asciende, calentando el condensado retenido y generando un vapor aún más rico en el componente ligero. Esto tiene como consecuencia una serie completa de evaporaciones y condensaciones parciales en toda la longitud de la columna de fraccionamiento. Estos ciclos de evaporación – condensación equivalen a múltiples destilaciones simples.

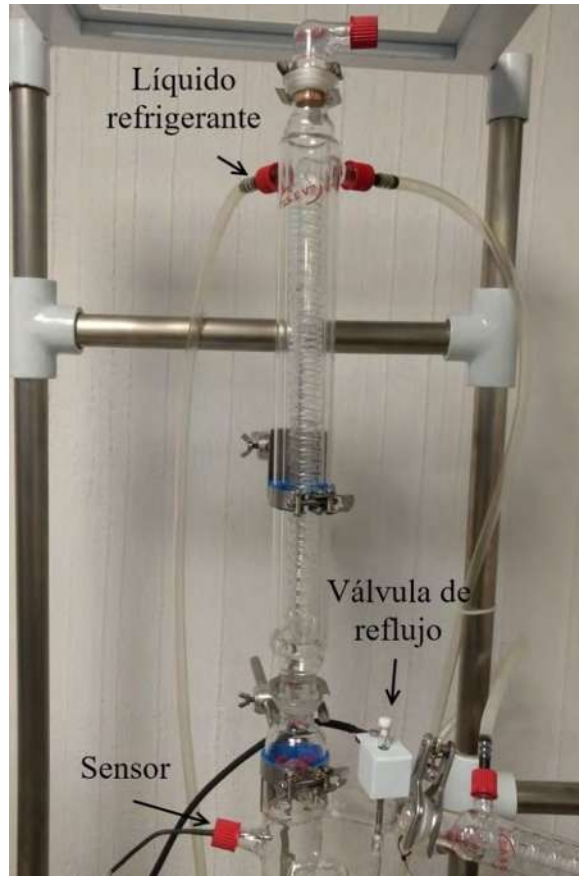


Figura 3.2 Condensador de la columna de destilación



Figura 3.3 Hervidor de la columna de destilación

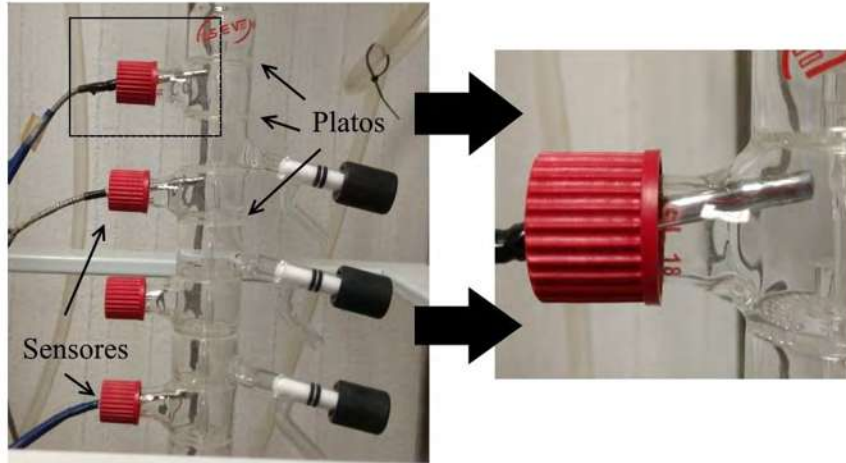


Figura 3.4 Cuerpo de la columna de destilación compuesto por platos perforados



Figura 3.5 Columna de destilación de 11 platos

La Figura 3.5 muestra una fotografía de la planta completa. En el fondo de la imagen se observan los tanques que contienen la mezcla, a la izquierda, y el producto destilado, a la derecha. Estos tanques contienen las soluciones más ricas en el componente pesado y en el componente ligero, respectivamente. También es posible observar la disposición de los sensores de temperatura en los platos 1, 2, 4, 8, 10 y 11. El sensor del plato 10 está parcialmente oculto detrás de la estructura blanca, mientras que el sensor del plato 6 se encontraba desconectado.

### 3.3 Modelado de una Columna de Destilación Tipo Batch

Existen dos clasificaciones generales para un proceso de destilación: por lotes (*batch*) y continua. En la primera se tiene una determinada cantidad de mezcla que se somete al proceso, una vez separada la mezcla, el proceso concluye. En la destilación continua se obtiene un destilado constante debido a que se introduce mezcla nueva a través de un plato de la columna (llamado plato de alimentación).

La mayoría de los centros de producción utilizan procesos continuos debido a que se requiere un destilado constante (como en el caso del petróleo), por ello las columnas de destilación continuas han sido ampliamente estudiadas (Safdarnejad, 2016). En la actualidad, la destilación por lotes ha tenido un auge en las industrias química y farmacéutica, en las que se requiere obtener un destilado con alto grado de pureza a partir de cantidades pequeñas de mezcla. Además, las columnas de destilación por lotes pueden ser utilizadas para obtener diferentes productos con un único equipo, al contrario de las columnas de destilación continua, que son diseñadas para un único proceso (Zhao *et al.*, 2016).

En la literatura existen diversos modelos de columnas de destilación por lotes, los cuales están formados por un conjunto de ecuaciones diferenciales y algebraicas basadas generalmente en tres enfoques: balance de masa, balance de energía y balance del componente ligero (Lopez-Saucedo *et al.*, 2016), (Jana, 2016), (Zhao *et al.*, 2016), (Franco-Ocampo & Franco-Mejía, 2016). El modelo utilizado aquí se basa en el balance de masa y el balance de componente (Aguilera-González A., 2008).

### 3.3.1 Simplificaciones del Modelo

El modelo debe representar el comportamiento dinámico del proceso real. Se establece un compromiso entre la exactitud del modelo y la similitud con la respuesta de la planta.

Dada la complejidad que representa el modelado completo del proceso, se establecen las siguientes consideraciones (Franco-Ocampo & Franco-Mejía, 2016), (Aguilera-González, 2008):

- La solución a destilarse es una mezcla binaria.
- Los flujos molares de vapor y líquido son constantes e iguales en toda la columna.
- La presión dentro de la columna es constante.
- No hay retención de vapor en los platos.
- La retención de líquido en los platos es constante.
- Todo el vapor que llega a la parte superior de la columna se condensa (condensador total).
- La columna es adiabática: no existe transferencia de calor hacia el medio ambiente.

### 3.3.2 Modelo del Condensador

El vapor que sale del plato 2 entra al condensador, donde se condensa totalmente. Este condensado puede utilizarse como destilado o realimentarse al plato 1 para enriquecer la mezcla en la columna, descendiendo al plato 2. En la Figura 3.6 se describe la dinámica en el condensador.

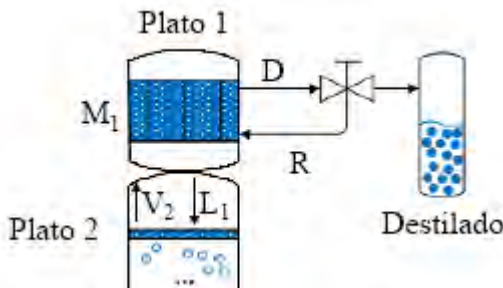


Figura 3.6 Dinámica en el condensador

El balance global de materia en el condensador es:

$$\frac{dM_1}{dt} = V_2 - L_1 - D \quad (3.1)$$

donde:

$M_1$  es la masa retenida en el condensador.

$V_2$  es el flujo de vapor del plato 2 hacia el condensador.

$L_1$  es el flujo de líquido del condensador hacia el plato 2.

$D$  es el flujo del producto destilado.

Con el balance global de materia se obtiene el balance de masa del componente ligero al multiplicar los flujos por las concentraciones del componente ligero (Skogestad, 1997). El balance de masa del componente ligero en el condensador es:

$$\frac{dM_1x_1}{dt} = V_2y_2 - L_1x_1 - Dx_1 \quad (3.2)$$

donde:

$y_2$  es la concentración de vapor de etanol en el plato 2.

$x_1$  es la concentración de etanol líquido en el condensador.

De acuerdo a las simplificaciones del modelo se desprecia la dinámica de las masas retenidas y los flujos de vapor y líquido se consideran constantes e iguales en toda la columna, por lo tanto la forma simplificada de la Ecuación (3.2) es:

$$M_1 \frac{dx_1}{dt} = Vy_2 - Lx_1 - Dx_1 \quad (3.3)$$

### 3.3.3 Modelo de los Platos

Un plato de la columna de destilación recibe un flujo de vapor del plato inferior y un flujo de líquido del plato superior, cediendo a su vez, un flujo de vapor al plato superior y un flujo de líquido al inferior, como se describe en la Figura 3.7.



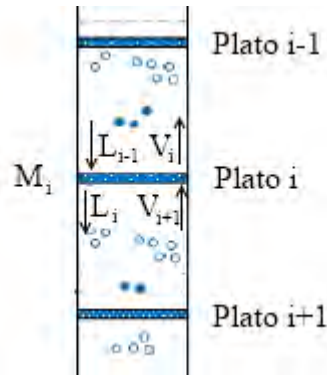


Figura 3.7 Dinámica en los platos

El balance global de materia en el plato  $i$  es:

$$\frac{dM_i}{dt} = V_{i+1} + L_{i-1} - V_i - L_i \quad (3.4)$$

El balance de masa del componente ligero en el plato  $i$  es:

$$\frac{dM_i x_i}{dt} = V_{i+1} y_{i+1} + L_{i-1} x_{i-1} - V_i y_i - L_i x_i \quad (3.5)$$

Utilizando las consideraciones del modelo, la fracción molar del componente ligero en el plato  $i$  es:

$$M_i \frac{dx_i}{dt} = V(y_{i+1} - y_i) + L(x_{i-1} - x_i) \quad (3.6)$$

### 3.3.4 Modelo del Hervidor

El hervidor proporciona calor para vaporizar parcialmente la solución, provocando que el plato superior reciba un flujo de vapor, como se aprecia en la Figura 3.8. Similarmente, este plato cede un flujo líquido al hervidor. La solución en el tanque del hervidor puede extraerse accionando una válvula, a este producto se le conoce como fondo.

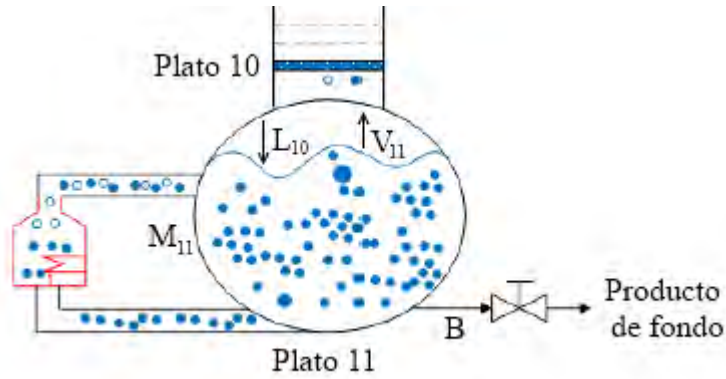


Figura 3.8 Dinámica en el hervidor

El balance global de materia en el hervidor es:

$$\frac{dM_{11}}{dt} = L_{10} - V_{11} - B \quad (3.7)$$

donde:

$B$  es el flujo del producto de fondo.

El balance de masa del componente ligero en el hervidor es:

$$\frac{dM_{11}x_{11}}{dt} = L_{10}x_{10} - V_{11}y_{11} - Bx_{11} \quad (3.8)$$

Utilizando las consideraciones del modelo, la fracción molar del componente ligero en el plato  $i$  es:

$$M_{11} \frac{dx_{11}}{dt} = Lx_{10} - Vy_{11} - Bx_{11} \quad (3.9)$$

### 3.3.5 Masas Retenidas en la Columna de Destilación

Las masas retenidas en los platos de la columna de destilación están directamente relacionadas con la geometría de éstos y con las propiedades de la mezcla a destilar.

El volumen de líquido almacenado en el hervidor es de alrededor de 2 litros en estado estable, compuesto por 1 litro de agua y 1 litro de etanol. Utilizando los datos de la Tabla 2.1

es posible inferir que en 1 litro de agua se tienen 55.5089 moles, mientras que en un litro de etanol existen 17.1266 moles. Por lo tanto, la masa retenida en el hervidor en estado estable es de 72.6355 moles.

Para la masa retenida en los platos es necesario conocer su geometría y se calcula a partir del volumen retenido en éstos. Para la planta piloto se tiene un volumen retenido de 5.6297 ml en cada plato (Escamirosa Torres, 2016). Debido a que la concentración de los componentes varía en cada plato, se toma un promedio de 50 % de volumen de agua y 50 % de volumen de etanol. Así la masa retenida en los platos es de 0.2044 moles.

Finalmente, la masa retenida en el condensador se supone de 10 ml para la planta piloto (Escamirosa Torres, 2016). En esta etapa de la columna se considera una concentración volumétrica de etanol del 94 % (azeótropo de la mezcla). Por lo tanto, la masa retenida en el condensador es de 0.1831 moles.

La Tabla 3.1 muestra las masas retenidas en cada una de las etapas de la columna de destilación piloto a una presión de 1013.25 hPa.

Tabla 3.1 . Masas retenidas en las etapas de la columna de destilación piloto

<b>Etapas de la columna</b>	<b>Masa retenida</b>
Hervidor	72.6355 moles
Platos	0.2044 moles
Condensador	0.1831 moles

### 3.3.6 Tasas de Flujos Molares

En la columna de destilación por lotes existen 4 flujos molares de líquido y vapor:

- $V$ : flujo de vapor
- $L$ : flujo de líquido
- $D$ : flujo de producto destilado
- $B$ : flujo de producto de fondo

Todas las ecuaciones presentadas en esta sección se basan en (Aguilera-González, 2008).

El flujo de vapor  $V$  se produce en el hervidor y se determina de la siguiente manera:

$$V = \frac{Q_B}{H_{eta}^{vap} x_{11} + H_{H_2O}^{vap} (1 - x_{11})} \quad (3.10)$$

donde:

$V$  es la tasa de flujo molar de vapor (mol/s).

$Q_B$  es la potencia calorífica aplicada al hervidor (W).

$H_{eta}^{vap} = 38.6$  kJ/mol, es la entalpía de vaporización del etanol.

$H_{H_2O}^{vap} = 40.65$  kJ/mol, es la entalpía de vaporización del agua.

$x_{11}$  es la concentración de etanol líquido en el hervidor.

El flujo de líquido que desciende por la columna está determinado por la tasa de flujo de vapor y el porcentaje de apertura de la válvula de reflujo:

$$L = V(1 - R) \quad (3.11)$$

donde:

$L$  es la tasa de flujo molar de líquido (mol/s).

$R$  es el porcentaje de apertura de la válvula de reflujo:

El valor de  $R$  puede variar en el rango contenido entre 0 y 1, donde 0 indica que la válvula de destilado se encuentra abierta y todo el condensado es realimentado a la columna, mientras que 1 indica que la válvula se encuentra completamente cerrada y todo el condensado es destilado. Debido a que la válvula de reflujo de la planta piloto es del tipo *on/off*, es necesario promediar el tiempo de apertura de la válvula para obtener valores entre 0 y 1.

El flujo de producto destilado está determinado como:

$$D = V - L \quad (3.12)$$

Finalmente, el flujo de producto de fondo se describe como:

$$B = L - V \quad (3.13)$$

Tanto el flujo de producto destilado  $D$  como el flujo de producto de fondo  $B$  se miden en mol/s.

### 3.3.7 Estimación de Temperatura

Para simular el comportamiento del modelo no lineal es necesario estimar la temperatura a partir de las concentraciones del componente ligero en los platos de la columna. Este proceso es inverso al trabajar con la planta piloto, ya que es necesario estimar la concentración de los platos en función de las temperaturas medidas por los sensores. Esta determinación se debe principalmente a que resulta más sencillo de comprender las condiciones iniciales en el modelo expresadas en fracción molar, que condiciones iniciales expresadas en la temperatura de los platos.

La Tabla 2.2 muestra datos reales de un proceso de destilación, en ella se muestra la concentración de componente en base a temperatura, con lo que es posible encontrar una función que interpole estos datos.

Utilizando la herramienta *Curve Fitting* de MATLAB® se encontró que una función exponencial de segundo grado es una excelente aproximación, como se muestra en la Figura 3.9. La razón de utilizar esta herramienta es la sencillez que presenta, pues sólo se requiere introducir los vectores en el eje de las ordenadas y en el eje de las abscisas y seleccionar de entre un conjunto de funciones preestablecidas (exponencial, sinusoidal, gaussiana, entre otras) para obtener los coeficientes de ésta.

La Ecuación (3.14), representa la interpolación de la temperatura en los platos a partir del vector de concentración de etanol líquido.

$$T = a \cdot \exp(b \cdot x_1) + c \cdot \exp(d \cdot x_1) \quad (3.14)$$

donde:

$$a = 16.53$$

$$b = -15.13$$

$$c = 82.75$$

$$d = -0.06787$$

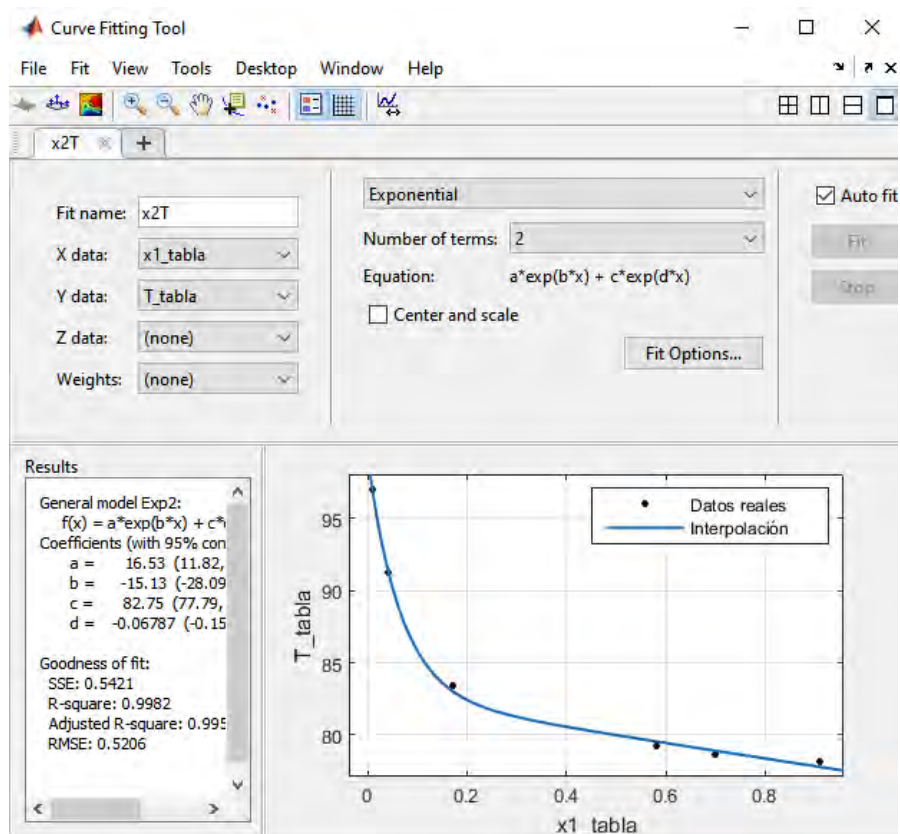


Figura 3.9 Interpolación de temperatura a partir de  $x_1$  utilizando *Curve Fitting* de MATLAB®

En la Tabla 3.2 se muestra la temperatura real y la temperatura aproximada al utilizar una ecuación exponencial de segundo orden. Se aprecia que el error máximo de la estimación es de 0.47 % a una presión de 1013.25 hPa.

Tabla 3.2 Errores absoluto y relativo al interpolar la temperatura a partir de  $x_1$

$x_1$ (mol/mol)	$T_{\text{real}}$ (°C)	$T_{\text{aprox}}$ (°C)	$\text{Error}_{\text{abs}}$ (°C)	$\text{Error}_{\text{relativo}}$ (%)
0.0102	96.99	96.85	0.14	0.144
0.0404	91.22	91.49	0.27	0.295
0.1704	83.41	83.05	0.36	0.431
0.5802	79.24	79.55	0.31	0.391

0.7003	78.62	78.90	0.28	0.356
0.9099	78.16	77.79	0.37	0.473

### 3.3.8 Modelo No Lineal de la Columna Tipo Batch de 11 Platos

Utilizando los modelos del condensador, platos y hervidor, mostrados en las Ecuaciones (3.3), (3.6) y (3.9), respectivamente; las tasas de flujos molares de vapor, líquido, destilado y fondo, Ecuaciones (3.10), (3.11), (3.12) y (3.13), respectivamente; y el modelo que describe la fracción molar de vapor del componente ligero, (2.9), es posible representar el modelo no lineal de la columna de 11 platos mediante la Ecuación (3.15).

$$\begin{aligned}
M_1 \dot{x}_1 &= Vy_2 - Lx_1 - Dx_1 \\
M_2 \dot{x}_2 &= Lx_1 - Lx_2 + Vy_3 - Vy_2 \\
M_3 \dot{x}_3 &= Lx_2 - Lx_3 + Vy_4 - Vy_3 \\
M_4 \dot{x}_4 &= Lx_3 - Lx_4 + Vy_5 - Vy_4 \\
M_5 \dot{x}_5 &= Lx_4 - Lx_5 + Vy_6 - Vy_5 \\
M_6 \dot{x}_6 &= Lx_5 - Lx_6 + Vy_7 - Vy_6 \\
M_7 \dot{x}_7 &= Lx_6 - Lx_7 + Vy_8 - Vy_7 \\
M_8 \dot{x}_8 &= Lx_7 - Lx_8 + Vy_9 - Vy_8 \\
M_9 \dot{x}_9 &= Lx_8 - Lx_9 + Vy_{10} - Vy_9 \\
M_{10} \dot{x}_{10} &= Lx_9 - Lx_{10} + Vy_{11} - Vy_{10} \\
M_{11} \dot{x}_{11} &= Lx_{10} - Vy_{11} - Bx_{11}
\end{aligned} \tag{3.15}$$

### 3.4 Simulación del Modelo No Lineal

El proceso para simular el modelo no lineal se muestra en la Figura 3.10. A continuación se enlista este:

1. Se declaran los elementos constantes del modelo: las masas retenidas en los platos y las constantes de la mezcla etanol – agua, tales como entalpía de vaporización, coeficientes de Antoine, coeficientes de Van Laar, etc.
2. Se propone un vector de concentraciones iniciales en cada uno de los platos.
3. Se definen los vectores de entrada: potencia calorífica y reflujo, los cuales pueden ser constantes durante la simulación o presentar escalones.
4. Se define el tiempo de la simulación en minutos.
5. Se calculan los flujos molares, los cuales dependen del valor de las entradas y de las concentraciones en los platos.
6. Mediante una función exponencial, obtenida a partir del diagrama de fase, se aproxima la temperatura del plato en función de la concentración del elemento líquido más volátil.
7. Con la temperatura de los platos se calculan las presiones de saturación de ambos componentes puros utilizando la Ecuación de Antoine.
8. Se calcula el coeficiente de actividad, que depende de las concentraciones exclusivamente, para introducir la no linealidad de la mezcla en el modelo, utilizando la ecuación de Van Laar.
9. Una vez obtenido el coeficiente de actividad se procede a calcular la presión total de los componentes.
10. Se obtiene la concentración de vapor de etanol.
11. Finalmente, se calcula la derivada del componente líquido de etanol en cada plato y se integra para obtener la fracción molar de etanol líquido.
12. Se repiten los pasos 5 a 11 hasta que se alcance el tiempo de simulación.

A continuación se presenta un par de simulaciones realizadas sobre el modelo no lineal. En la primera de ellas se parte de concentraciones iniciales en los platos y condensador iguales a cero y reflujo total, esto con la finalidad de obtener las concentraciones en estado estable. Posteriormente, se realiza otra simulación en la que se varía el porcentaje de apertura de la válvula para obtener producto destilado.



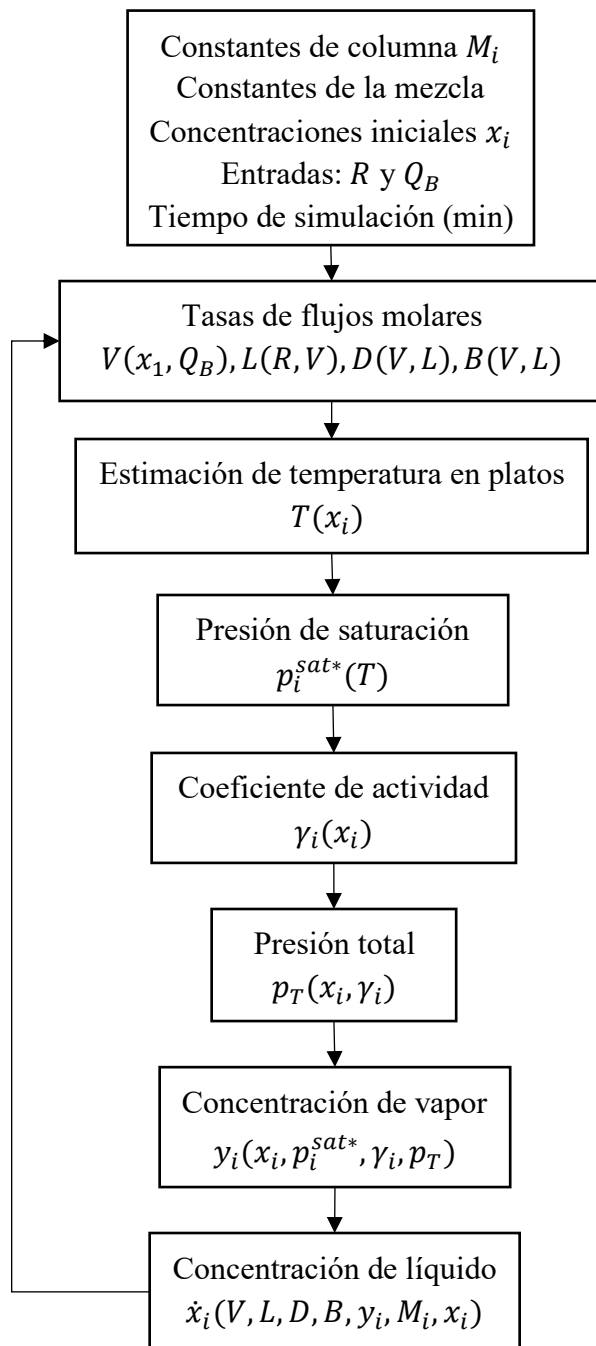


Figura 3.10 Diagrama de bloques del proceso de simulación del modelo no lineal

### 3.4.1 Simulación en Reflujo Total

La operación de la columna en reflujo total (todo el reflujo se realimenta a la columna) permite establecer el equilibrio de los componentes en cada uno de los platos. Es importante mencionar que el modelo no lineal obtenido en esta tesis es válido únicamente en el estado

estable de la columna; es decir, cuando todos los platos de la columna presentan una masa retenida constante. Sin embargo, este proceso es conveniente para conocer la concentración molar máxima que se puede alcanzar en los platos. La Tabla 3.3 muestra los parámetros de esta simulación.

Tabla 3.3 Parámetros de la simulación del modelo no lineal en reflujo total

Vector de masas retenidas	$M = [0.1831, 0.2044, 0.2044, 0.2044, 0.2044, 0.2044, 0.2044, 0.2044, 0.2044, 0.2044, 72.6355]$
Vector de concentraciones iniciales	$x_{1,0} = [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0.2357]$
Presión total de la columna	1013.25 hPa
Potencia calorífica	1000 W
Porcentaje de apertura de la válvula de reflujo	0 %
Tiempo de simulación	20 minutos

Se aprecia en el vector de concentraciones iniciales que el hervidor es el único que es diferente de cero, esto se debe a que la mezcla a destilar se deposita desde el inicio. La concentración molar de etanol de 0.2357 mol/mol corresponde a una mezcla de 1 litro de agua y 1 litro de etanol (2 litros en el tanque del hervidor).

La Figura 3.11a muestra la potencia calorífica aplicada en el hervidor, mientras que la Figura 3.11b muestra el porcentaje de apertura de la válvula de reflujo. Debido a que la válvula se encuentra totalmente cerrada, todo el condensado se realimenta a la columna.

La Figura 3.12 muestra el comportamiento dinámico de las concentraciones en los platos, donde se observa que alrededor del minuto 15 se alcanza el equilibrio de la mezcla en cada uno de ellos.

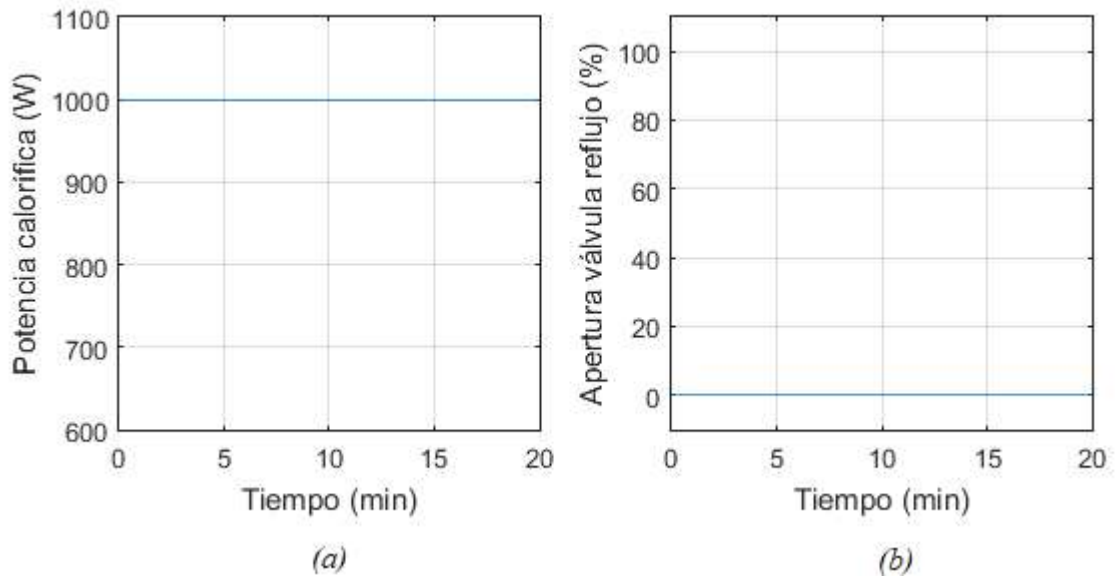


Figura 3.11 Entradas del sistema para simulación del modelo no lineal en reflujo total: (a) potencia calorífica en el hervidor; (b) porcentaje de apertura de la válvula de reflujo

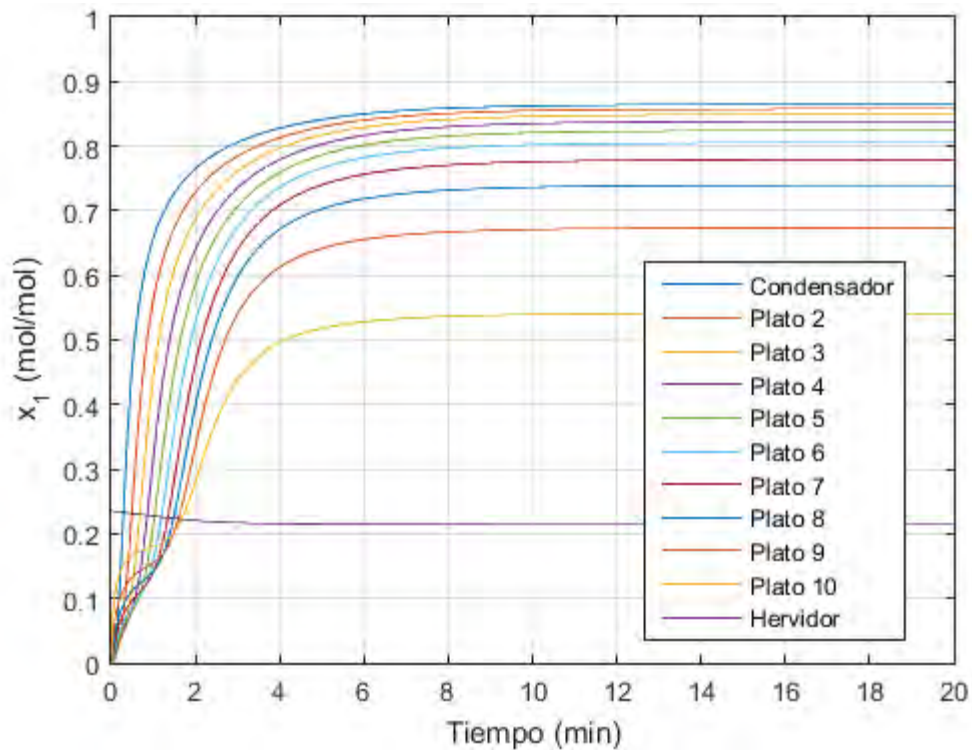


Figura 3.12 Dinámica de las concentraciones en los platos del modelo no lineal con potencia constante, reflujo total y concentraciones iniciales iguales a cero

Es significativo mencionar que el transitorio observado en la Figura 3.12 de ninguna manera es comparable con el transitorio observado en la planta piloto debido a que en la simulación se desprecia el comportamiento dinámico de la retención de masas en los platos; dicho de otra manera, no es posible tener masa retenida en los platos con concentración molar inicial de cero. Sin embargo, este proceso resulta conveniente para conocer la concentración de los platos en el estado estable.

### 3.4.2 Simulación en Reflujo Parcial

La operación de la columna en reflujo parcial (parte del condensado se realimenta a la columna) permite obtener producto destilado. La cantidad del producto destilado (expresado en ml) depende directamente de la potencia calorífica en el hervidor y del porcentaje de apertura de la válvula de reflujo. Debido a que en esta tesis la potencia calorífica permanece constante durante toda la simulación, el porcentaje de apertura de la válvula es la única entrada que afecta la cantidad de producto destilado. La Tabla 3.4 muestra los parámetros de esta simulación.

Tabla 3.4 Parámetros de la simulación del modelo no lineal en reflujo parcial

Vector de masas retenidas	$M = [0.1831, 0.2044, 0.2044, 0.2044, 0.2044, 0.2044, 0.2044, 0.2044, 0.2044, 0.2044, 72.6355]$
Vector de concentraciones iniciales	$x_{1_0} = [0.8651, 0.8582, 0.8497, 0.8390, 0.8252, 0.8067, 0.7809, 0.7422, 0.6784, 0.5520, 0.2357]$
Presión total de la columna	1013.25 hPa
Potencia calorífica	1000 W
Porcentaje de apertura de la válvula de reflujo	30 %
Tiempo de simulación	50 minutos

La concentración molar de etanol líquido en el hervidor (0.2357 mol/mol) corresponde a una mezcla de 1 litro de agua y 1 litro de etanol, mientras que las concentraciones en los platos se obtienen a partir del equilibrio de la mezcla en estado estable.

La Figura 3.13a muestra la potencia calorífica aplicada en el hervidor, mientras que la Figura 3.13b muestra el porcentaje de apertura de la válvula de reflujo. Debido a que la válvula se encuentra parcialmente abierta, una parte del condensado se extrae como destilado y el resto se realimenta a la columna.

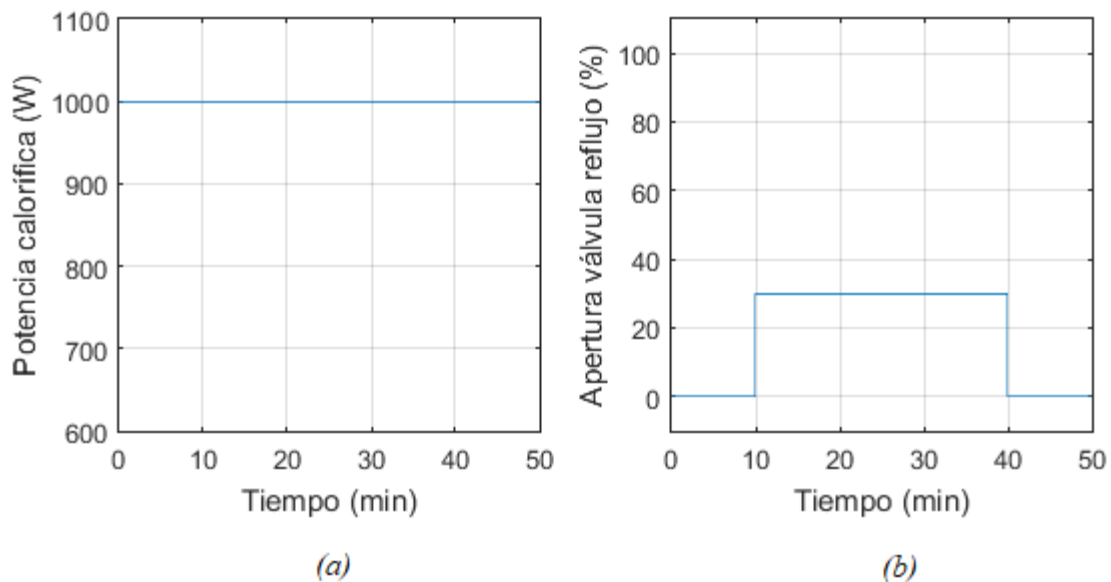


Figura 3.13 Entradas del sistema para simulación del modelo no lineal en reflujo parcial: (a) potencia calorífica en el hervidor; (b) porcentaje de apertura de la válvula de reflujo

Como se comentó anteriormente, la válvula de reflujo de la planta piloto actúa como interruptor *on/off*, por lo que no existe posibilidad alguna de abrirla parcialmente. Sin embargo, es factible promediar el tiempo que la válvula se encuentra abierta, así para un porcentaje de apertura del 30 % podría utilizarse un periodo de 0.3 segundos abierta y un periodo de 0.7 segundos cerrada.

La Figura 3.14 muestra la dinámica de la concentración en los platos de la columna. Durante los primeros 10 minutos de simulación, la columna opera en reflujo total, por lo que las concentraciones se mantienen en estado estable. Del minuto 10 al 40, la válvula de reflujo se abre un 30 %, lo que significa que el 70 % del condensado se reintegra a la columna y el

resto se extrae como destilado. Al ocurrir esto, se observa que las concentraciones en los platos disminuyen, siendo 0.85 la concentración molar promedio en el condensador durante el tiempo que la válvula de reflujo permanece abierta. Nuevamente al minuto 40, la columna opera en reflujo total y las concentraciones vuelven al estado estable.

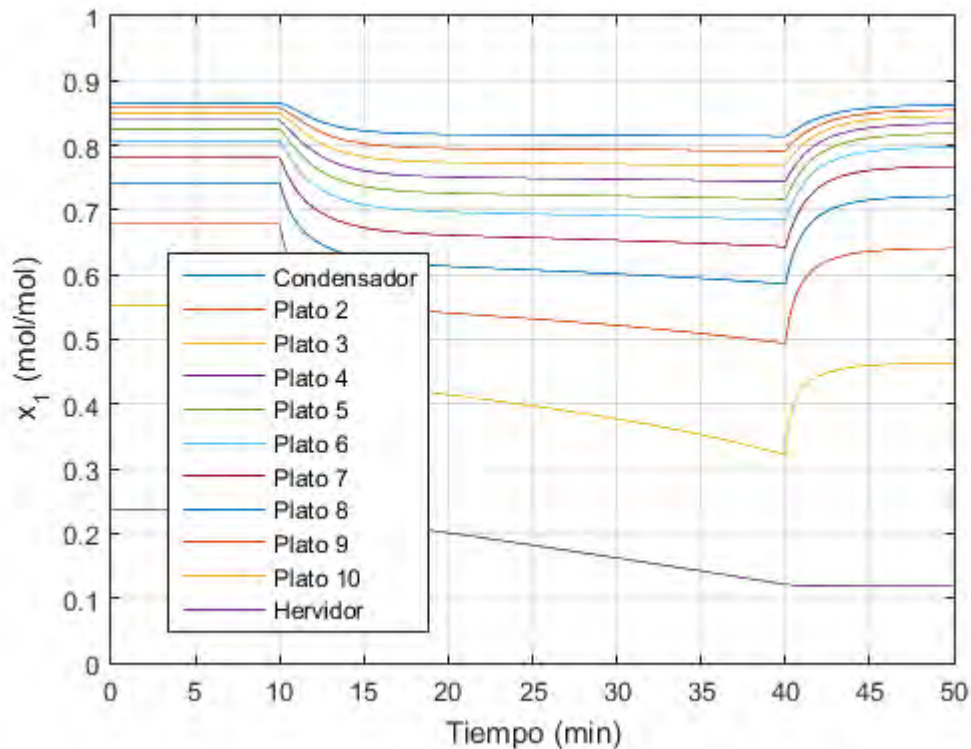


Figura 3.14 Dinámica de las concentraciones en los platos del modelo no lineal con potencia constante, apertura de la válvula de reflujo de 30 % y concentraciones iniciales en equilibrio

La Figura 3.15 muestra el comportamiento de las temperaturas en los platos durante la simulación. Se puede deducir que la temperatura es inversamente proporcional a la concentración molar de etanol líquido; es decir, cuando la temperatura es menor, la concentración de etanol líquido es mayor, y viceversa. Esto se debe a que cuando la mezcla se empobrece del elemento ligero, el punto de ebullición de ésta se acerca gradualmente al punto de ebullición del elemento pesado puro. También se puede observar que la temperatura del hervidor es la más alta, ya que la potencia calorífica se aplica directamente aquí; en cambio, la temperatura en el condensador es la más baja debido a que el vapor que llega aquí debe ceder calor para poder transformarse a estado líquido.

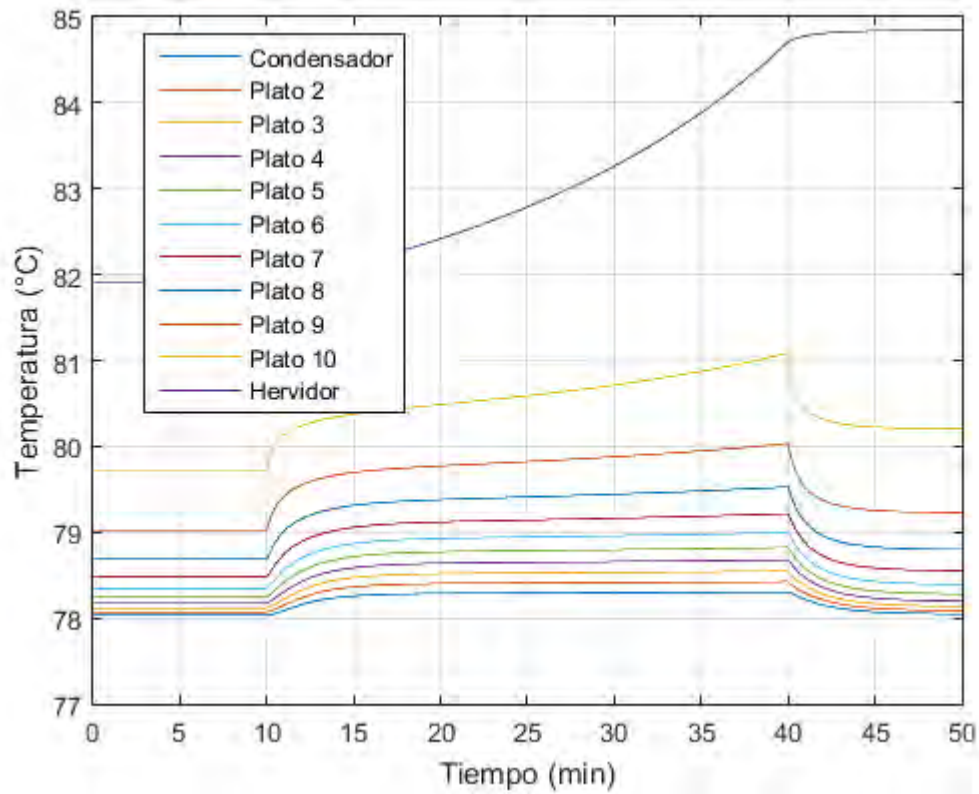


Figura 3.15 Dinámica de las temperaturas en los platos del modelo no lineal con potencia constante, apertura de la válvula de reflujo de 30 % y concentraciones iniciales en equilibrio

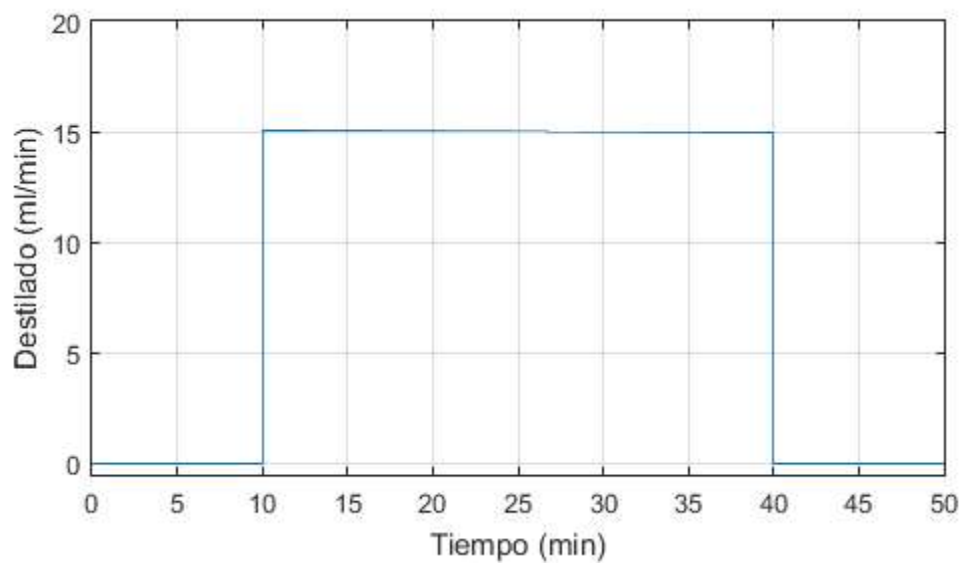


Figura 3.16 Flujo de destilado con potencia constante y apertura de la válvula de reflujo de 30 %

Finalmente, la Figura 3.16 muestra el flujo de producto destilado en ml/min. Resulta evidente que cuando la columna opera en reflujo total no se produce destilado, mientras que al abrir la válvula de reflujo un 30 % se alcanza un flujo de destilado de 15 ml/min (0.45 mol/min). La concentración molar media de este destilado es de alrededor de 0.85 mol/mol, lo que equivale a una concentración volumétrica de etanol del 92 % (concentración en peso de etanol del 93.5 %). El volumen total de destilado durante los 30 minutos que la válvula permanece parcialmente abierta es de 450 ml ().

### 3.5 Conclusión

En el presente capítulo se desarrolló un modelo no lineal que expresa la concentración del elemento más volátil en los platos de una columna de destilación tipo *batch*, así como la temperatura en cada uno de ellos.

Debido a que en un proceso de destilación intervienen una gran cantidad de variables, no es factible obtener un modelo riguroso que involucre cada una de ellas, ya que tanto la complejidad del desarrollo del modelo, como el esfuerzo computacional requerido para simularlo, aumentarían de gran manera. Es por ello se realizan algunas suposiciones que simplifican el modelo, sin afectar de manera significativa la exactitud de éste.

En el modelo desarrollado se tienen dos entradas: potencia calorífica y porcentaje de apertura de la válvula de reflujo. Ambas entradas afectan directamente la cantidad de destilado que se puede obtener, sin embargo, la potencia calorífica no afecta la concentración de los platos en estado estable; es decir, una potencia calorífica de 1000 W produce exactamente la misma concentración en los platos en reflujo total que una potencia de 2000 W.

El porcentaje de apertura de la válvula de reflujo afecta tanto a la cantidad de destilado como a las concentraciones en los platos: a mayor porcentaje de apertura, se produce mayor destilado, pero con el inconveniente de obtener una menor pureza en éste. Si se requiere obtener la mayor cantidad de concentración del componente ligero en el destilado es necesario que la columna opere lo más cercano posible al reflujo total.



## Capítulo 4

# Modelo Difuso Takagi – Sugeno de una Columna de Destilación

### 4.1 Introducción

En la lógica booleana, el valor verdadero de las variables puede tomar el valor de 0 o 1, es decir; pertenecen o no pertenecen al conjunto. En cambio, en la lógica difusa, las variables pueden pertenecer parcialmente a distintos conjuntos. El grado de pertenencia de la variable en el conjunto está determinado por una función continua, que se denomina función de membresía, y puede tomar cualquier valor entre 0 y 1 (Zadeh L. A., 1965).

Supongamos por ejemplo que tenemos un conjunto de personas que intentamos agrupar según su altura, clasificándolas en altas o bajas. La solución que presenta la lógica booleana es definir un umbral de pertenencia (por ejemplo, un valor que todo el mundo considera que de ser alcanzado o superado, la persona en cuestión puede llamarse alta). Si dicho umbral es 1.80 metros, todas las personas que midan 1.80 o más serán altas. Si alguien mide 1.79 metros será una persona baja, aunque la diferencia entre 1.79 y 1.80 metros sea mínima. En cambio, en la lógica difusa, una persona que mide 1.80 metros es una persona alta (perteneció al conjunto de personas altas con grado 1) y una persona que mide 1.60 no es una persona alta (perteneció a personas altas con grado 0), así una persona que mide 1.70 metros es una persona *medianamente* alta (perteneció a personas altas con grado de 0.5).

Los seres humanos utilizamos evaluaciones difusas en muchas situaciones cotidianas, por ejemplo, para describir la temperatura ambiente en una charla informal se emplean términos como “hace *demasiado* frío” o “está un *poco* caluroso el día”.

Las palabras como *medianamente*, *demasiado* o *poco* se denominan **variables lingüísticas** y se utilizan para formar las reglas antecedente – consecuente, por ejemplo:

- SI hace demasiado frío, ENTONCES aumento drásticamente la temperatura del aire acondicionado.

- SI hace poco calor, ENTONCES disminuyo levemente la temperatura del aire acondicionado.

La lógica difusa se utiliza cuando la complejidad del proceso en cuestión es muy alta y no existen modelos matemáticos precisos, para procesos altamente no lineales y cuando se trata con conocimientos heurísticos. Sin embargo, el modelo propuesto por Takagi – Sugeno requiere conocer con certeza el modelo matemático.

## 4.2 Descripción de un Sistema Difuso Takagi – Sugeno

El modelo propuesto por Takagi y Sugeno es descrito por reglas difusas SI-ENTONCES que representan las relaciones lineales de entrada-salida de un sistema no lineal. La principal característica del modelo Takagi – Sugeno es expresar la dinámica local de cada implicación difusa (regla) con un modelo de sistema lineal. El modelo difuso completo del sistema se obtiene al combinar los modelos lineales (Tanaka & Wang, 2001).

La regla  $i$ -ésima de un modelo difuso Takagi – Sugeno para un sistema continuo es la siguiente:

*Regla Modelo  $i$ :*

SI  $z_1(t)$  es  $M_{i1}$  y  $\dots$  y  $z_p(t)$  es  $M_{ip}$ ,

$$\text{ENTONCES } \begin{cases} \dot{x}(t) = A_i x(t) + B_i u(t), \\ y(t) = C_i x(t), \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, r. \quad (4.1)$$

donde:

$M_{ij}$  es el conjunto difuso

$r$  es el número de reglas

$x(t) \in \mathbf{R}^n$  es el vector de estado

$A_i \in \mathbf{R}^{n \times n}$ ,  $B_i \in \mathbf{R}^{n \times m}$ , y  $C_i \in \mathbf{R}^{q \times n}$

$z_1(t), \dots, z_p(t)$  son variables premisa conocidas que pueden ser funciones de las variables de estado, perturbaciones y/o tiempo.

Cada ecuación lineal representada por  $A_i x(t) + B_i u(t)$  es llamada un subsistema. La dinámica y salida de un sistema difuso se describe como:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \sum_{i=1}^r h_i(z)(A_i x + B_i u) \\ y &= \sum_{i=1}^r h_i(z)C_i x, \end{aligned} \tag{4.2}$$

donde:

$z = [z_1 \quad z_2 \quad \dots \quad z_p]$  son las variables premisa.

El grado de pertenencia de  $z$  en la función de membresía  $M_{ij}$  se determina con el producto de las funciones de membresía evaluadas en  $z_j$ , es decir:

$$w_i(z) = \prod_{j=1}^p M_{ij}(z_j) \tag{4.3}$$

Finalmente, el grado de pertenencia de  $z$  en el subsistema  $i$  está determinado por:

$$h_i(z) = \frac{w_i(z)}{\sum_{i=1}^r w_i(z)} \tag{4.4}$$

### 4.3 Descripción del Modelo No Lineal de la Columna en Espacio de Estado

Para utilizar el modelado Takagi – Sugeno, el sistema debe representarse en el espacio de estado, el cual es un modelo matemático de un sistema físico descrito mediante un conjunto de entradas, salidas y variables de estado relacionadas por ecuaciones diferenciales de primer orden, que se combinan en una ecuación diferencial matricial de primer orden. Las variables son expresadas como vectores y las ecuaciones algebraicas se escriben en forma matricial.

La forma de representar un sistema lineal invariante en el tiempo con  $p$  entradas,  $q$  salidas y  $n$  variables de estado es (Chen, 1999):

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax(t) + Bu(t) \\ y &= Cx(t) + Du(t)\end{aligned}\tag{4.5}$$

donde:

$x \in \mathbb{R}^n$  es el vector de estados

$\dot{x} \in \mathbb{R}^n$  es la derivada del vector de estados

$y \in \mathbb{R}^q$  es el vector de salida

$u \in \mathbb{R}^p$  es el vector de entradas o vector de control

$A$  es la matriz de estados,  $\dim(A) = n \times n$

$B$  es la matriz de entrada,  $\dim(B) = n \times p$

$C$  es la matriz de salida,  $\dim(C) = q \times n$

$D$  es la matriz de trayecto directo,  $\dim(D) = q \times p$

Por su parte, un sistema no lineal invariante en el tiempo en espacio de estado puede representarse como:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x) \cdot x(t) + g(x) \cdot u(t) \\ y &= h(x) \cdot x(t)\end{aligned}\tag{4.6}$$

Para el caso de la columna de destilación, se tienen 11 variables de estado (concentración de etanol líquido en cada plato), 2 entradas (potencia calorífica y porcentaje de reflujo) y 11 salidas, las cuales son directamente los estados. Haciendo operaciones algebraicas en el modelo no lineal, Ecuación (3.15), es posible expresar la dinámica en las concentraciones de los platos en espacio de estado mediante la Ecuación (4.7).

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x) \cdot x(t) + g(x) \cdot u(t) \\ y &= h \cdot x(t)\end{aligned}\tag{4.7}$$

La matriz de estados  $f(x)$  del sistema de la columna es:

$$f = \begin{bmatrix} -\frac{L}{M_1} & \frac{Vp_{eta}^{sat*} \gamma_{eta}}{M_1 p_T} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{L}{M_2} & -\left(\frac{L}{M_2} + \frac{Vp_{eta}^{sat*} \gamma_{eta}}{M_2 p_T}\right) & \frac{Vp_{eta}^{sat*} \gamma_{eta}}{M_2 p_T} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{L}{M_3} & -\left(\frac{L}{M_3} + \frac{Vp_{eta}^{sat*} \gamma_{eta}}{M_3 p_T}\right) & \frac{Vp_{eta}^{sat*} \gamma_{eta}}{M_3 p_T} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{L}{M_{10}} & -\left(\frac{L}{M_{10}} + \frac{Vp_{eta}^{sat*} \gamma_{eta}}{M_{10} p_T}\right) & \frac{Vp_{eta}^{sat*} \gamma_{eta}}{M_{10} p_T} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \frac{L}{M_{11}} & -\frac{L}{M_{11}} \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

Esta matriz es dependiente de los estados debido a que los flujos molares ( $L$  y  $V$ ), las presiones ( $p_{eta}^{sat*}$  y  $p_T$ ), y el coeficiente de actividad ( $\gamma_{eta}$ ) dependen directamente de los estados.

La matriz de entradas  $g(x)$  está dada por la Ecuación (4.9).

$$g(x) = \begin{bmatrix} -\frac{Vx_1}{M_1} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{x_{11}(1 - p_{eta}^{sat*} \gamma_{eta})}{M_{11} [H_{eta}^{vap} x_{11} + H_{H_2O}^{vap} (1 - x_{11})] p_T} \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

Finalmente, la matriz de salida  $h$  no depende explícitamente de los estados y está descrita por la Ecuación (4.10).

$$h = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

## 4.4 Elección de Premisas y Funciones de Membresía para el Modelo Takagi – Sugeno

Las funciones de membresía o pertenencia permiten representar gráficamente un conjunto difuso. En el eje de las abscisas se representa el universo en discurso (el rango en el que las premisas pueden variar), mientras que en el eje de las ordenadas se sitúan los grados de pertenencia en el intervalo  $[0,1]$ .

Para definir un conjunto difuso, se puede utilizar cualquier función, sin embargo, hay ciertas funciones que son más frecuentemente usadas debido a su simplicidad matemática, entre ellas podemos mencionar las funciones tipo triangular, trapezoidal y gaussiana. Este proyecto se enfoca al uso de funciones trapezoidales, principalmente por su flexibilidad en el diseño, debido a que éste tipo de función es la única que puede tener un grado de membresía de 1 en un rango amplio del universo del discurso.

La función de pertenencia triangular se define mediante tres parámetros  $\{a, b \text{ y } c\}$  de la siguiente forma:

$$M_{tri}(x; a, b, c) = \left\{ \begin{array}{ll} 0, & x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ \frac{c-x}{c-b}, & b \leq x \leq c \\ 0, & c \leq x \end{array} \right\} \quad (4.11)$$

O de forma compacta:

$$M_{tri}(x; a, b, c) = \max\left(\min\left(\frac{x-a}{b-a}, \frac{c-x}{c-b}\right), 0\right) \quad (4.12)$$

Los parámetros  $a$  y  $c$  determinan la base del triángulo y el parámetro  $b$  define el vértice superior. La Figura 4.1 muestra una función de membresía triangular para  $a = 3, b = 6$  y  $c = 8$ .

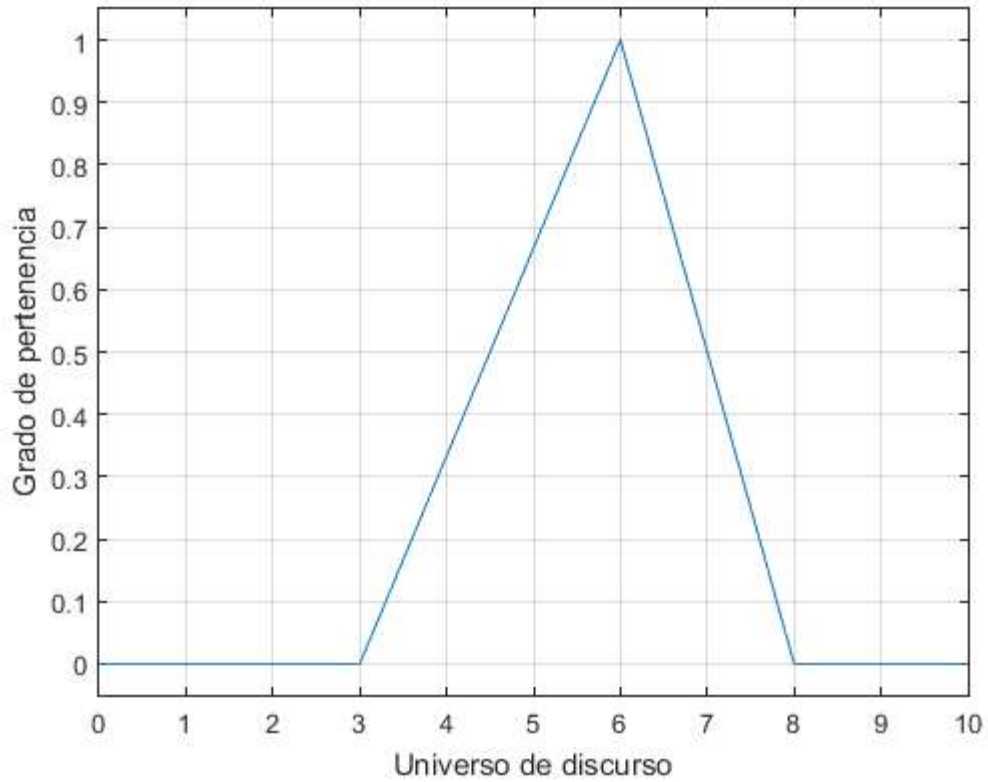


Figura 4.1 Función de membresía triangular con  $a = 3, b = 6$  y  $c = 8$

La función de pertenencia trapezoidal se define mediante cuatro parámetros  $\{a, b, c$  y  $d\}$  de la siguiente forma:

$$M_{trap}(x; a, b, c, d) = \left\{ \begin{array}{ll} 0, & x \leq a \\ \frac{x - a}{b - a}, & a \leq x \leq b \\ 1, & b \leq x \leq c \\ \frac{d - x}{d - c}, & c \leq x \leq d \\ 0, & d \leq x \end{array} \right\} \quad (4.13)$$

O de forma compacta:

$$M_{trap}(x; a, b, c, d) = \max\left(\min\left(\frac{x-a}{b-a}, 1, \frac{d-x}{d-c}\right), 0\right) \quad (4.14)$$

Los parámetros  $a$  y  $d$  determinan la base del trapecio y los parámetros  $b$  y  $c$  definen los vértices superiores. La Figura 4.2 muestra una función de membresía trapezoidal para  $a = 1, b = 5, c = 7$  y  $d = 8$ .

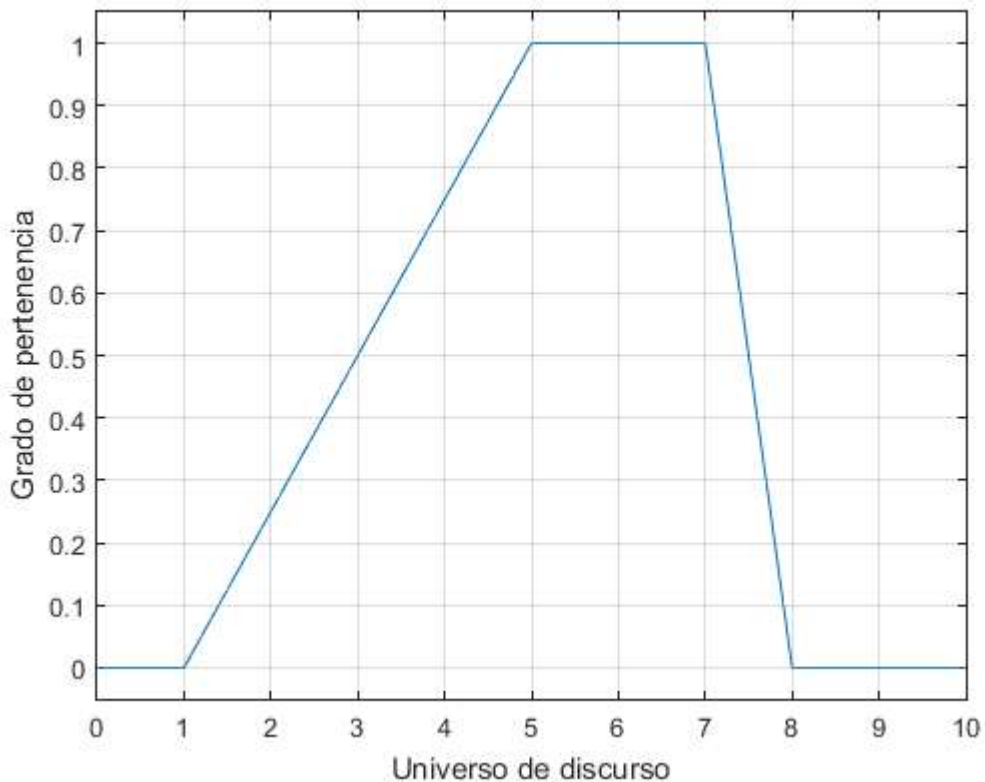


Figura 4.2 Función de membresía trapezoidal con  $a = 1, b = 5, c = 7$  y  $d = 8$

Para el caso de la columna de destilación se determinó utilizar la concentración de etanol líquido en el hervidor ( $x_{11}$ ), la concentración de etanol líquido en el condensador ( $x_1$ ) y el porcentaje de apertura de la válvula de reflujo ( $R$ ) como premisas, debido a que éstas son las variables que determinan mayormente el comportamiento del sistema; y funciones trapezoidales como funciones de pertenencia. La Tabla 4.1 muestra la asociación de las premisas, las variables lingüísticas y su respectiva función de membresía.



Tabla 4.1 Relación de premisas, variables lingüísticas y funciones de pertenencia para la columna de destilación de 11 platos

Premisa	Variable Lingüística	Función de Pertenencia	Parámetros de la Función Trapezoidal
$x_{11}$	Concentración baja	$M_1$	$a = 0.0000$ $b = 0.0000$ $c = 0.0000$ $d = 0.2357$
	Concentración alta	$M_2$	$a = 0.0000$ $b = 0.2357$ $c = 0.2500$ $d = 0.2500$
$x_1$	Concentración baja	$M_3$	$a = 0.8000$ $b = 0.8000$ $c = 0.8000$ $d = 0.8651$
	Concentración alta	$M_4$	$a = 0.8000$ $b = 0.8651$ $c = 0.8700$ $d = 0.8700$
$R$	Válvula totalmente cerrada	$M_5$	$a = 0.00$ $b = 0.00$ $c = 0.00$ $d = 0.30$
	Válvula parcialmente abierta al 30 %	$M_6$	$a = 0.00$ $b = 0.30$ $c = 0.30$ $d = 0.30$

Los parámetros de las funciones trapezoidales se obtienen con los mínimos y máximos valores que las premisas pueden alcanzar, basados en las condiciones de operación mostradas en la Sección 3.4.

En la Figura 4.3 se muestra la gráfica de las funciones trapezoidales para  $x_{11}$ . Es importante observar que la concentración en el hervidor no puede ser mayor a 0.25, de acuerdo a las funciones propuestas. Así para una fracción molar  $x_{11} = 0.15$ , se tienen las siguientes pertenencias:  $M_1(0.15) = 0.3636$  y  $M_2(0.15) = 0.6364$  (note que la suma de ambas funciones de pertenencia es igual a 1). De manera similar, en la Figura 4.4 y Figura 4.5 se muestran las funciones de pertenencia para  $x_1$  y  $R$ , respectivamente, donde el rango

para la concentración molar de etanol líquido en el condensador está entre 0.8 mol/mol y 0.87 mol/mol; y el rango de apertura de la válvula de reflujo se ubica entre 0.0 y 0.3.

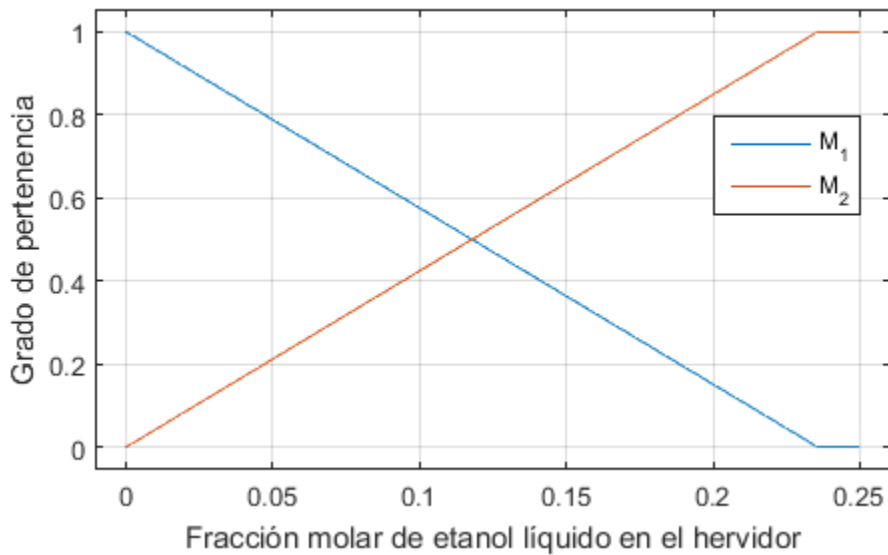


Figura 4.3 Funciones de membresía para la concentración molar de etanol líquido en el hervidor

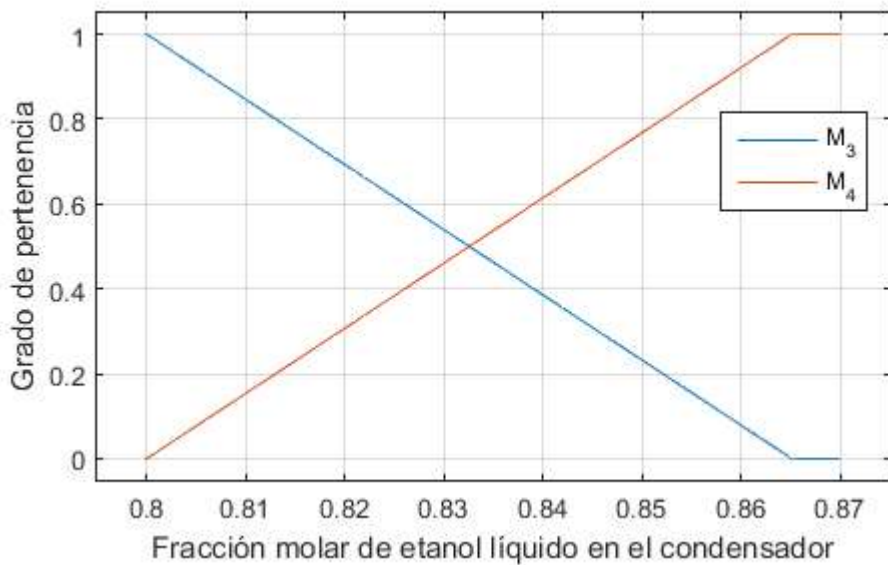


Figura 4.4 Funciones de membresía para la fracción molar de etanol líquido en el condensador

Es conveniente mencionar que cualquier valor fuera del rango de las funciones de membresía propuestas puede causar un funcionamiento incorrecto del modelo, incluso provocar el cierre de la simulación.

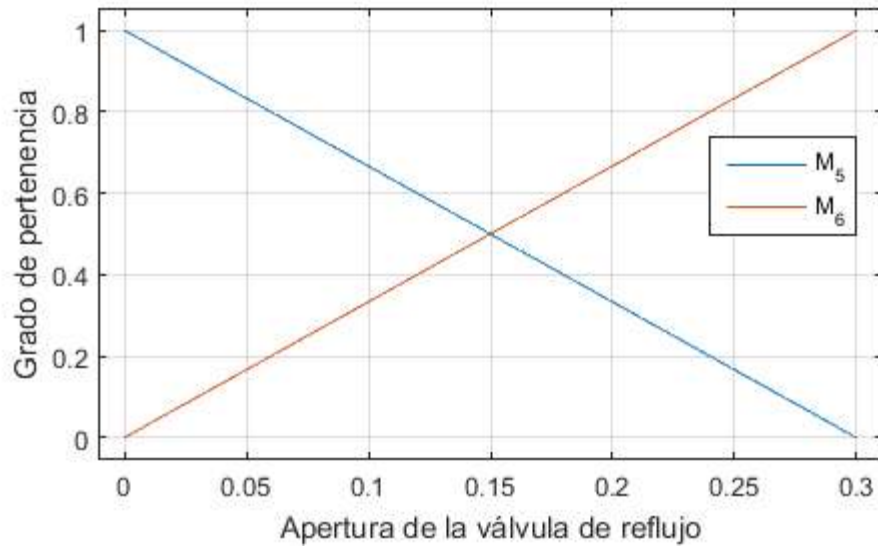


Figura 4.5 Funciones de membresía para el porcentaje de apertura de la válvula de reflujo

#### 4.5 Reglas Condicionales del Modelo Takagi – Sugeno

Una vez que se han definido las premisas, variables lingüísticas y funciones de membresía, es posible definir las reglas condicionales del modelo Takagi – Sugeno. Se tienen 3 premisas con 2 funciones de membresía cada una, por lo tanto es posible realizar 8 combinaciones con ellas, es decir; el modelo Takagi – Sugeno se conformaría con 8 subsistemas.

De acuerdo a la Ecuación (4.1), las reglas son:

- SI  $x_{11}$  es  $M_1$ ,  $x_1$  es  $M_3$  y  $R$  es  $M_5$  ENTONCES  $\dot{x} = A_1x + B_1u$ .
  - SI  $x_{11}$  es  $M_2$ ,  $x_1$  es  $M_3$  y  $R$  es  $M_5$  ENTONCES  $\dot{x} = A_2x + B_2u$ .
  - SI  $x_{11}$  es  $M_1$ ,  $x_1$  es  $M_4$  y  $R$  es  $M_5$  ENTONCES  $\dot{x} = A_3x + B_3u$ .
  - SI  $x_{11}$  es  $M_2$ ,  $x_1$  es  $M_4$  y  $R$  es  $M_5$  ENTONCES  $\dot{x} = A_4x + B_4u$ .
  - SI  $x_{11}$  es  $M_1$ ,  $x_1$  es  $M_3$  y  $R$  es  $M_6$  ENTONCES  $\dot{x} = A_5x + B_5u$ .
  - SI  $x_{11}$  es  $M_2$ ,  $x_1$  es  $M_3$  y  $R$  es  $M_6$  ENTONCES  $\dot{x} = A_6x + B_6u$ .
  - SI  $x_{11}$  es  $M_1$ ,  $x_1$  es  $M_4$  y  $R$  es  $M_6$  ENTONCES  $\dot{x} = A_7x + B_7u$ .
  - SI  $x_{11}$  es  $M_2$ ,  $x_1$  es  $M_4$  y  $R$  es  $M_6$  ENTONCES  $\dot{x} = A_8x + B_8u$ .
- (4.15)

Las matrices  $A_i$  y  $B_i$ , correspondientes a los subsistemas, se obtienen al sustituir puntos de operación específicos del sistema no lineal en las matrices  $f(x)$  y  $g(x)$  del sistema expresado en espacio de estado, Ecuaciones (4.8) y (4.9), respectivamente.

La Tabla 4.2 muestra los puntos de operación de cada regla difusa. Las concentraciones de etanol líquido están expresadas de  $x_1$  hasta  $x_{11}$ .

Tabla 4.2 Puntos de operación de subsistemas del modelo Takagi – Sugeno

<b>Regla</b>	<b>Concentración de etanol líquido en los platos</b>	<b>Apertura de la válvula de reflujo</b>	<b>Potencia calorífica</b>
1	[0.8001,0.7756,0.7481,0.7171,0.6824,0.6428,0.5966,0.5388,0.4541,0.2964,0.1019]	0.0	1000 W
2	[0.8016,0.7776,0.7509,0.7213,0.6886,0.6525,0.6125,0.5668,0.5099,0.4198,0.2352]	0.0	1000 W
3	[0.8651,0.8582,0.8497,0.8390,0.8252,0.8067,0.7809,0.7422 0.6784,0.5520,0.1019]	0.0	1000 W
4	[0.8651,0.8582,0.8497,0.8390,0.8252,0.8067,0.7809,0.74220.6784,0.5520,0.23578]	0.0	1000 W
5	[0.8001,0.7756,0.7481,0.7171,0.6824,0.6428,0.5966,0.5388, 0.4541,0.2964,0.1019]	0.3	1000 W
6	[0.8016,0.7776,0.7509,0.7213,0.6886,0.6525,0.6125,0.5668, 0.5099,0.4198,0.2352]	0.3	1000 W
7	[0.8651,0.8582,0.8497,0.83900.8252,0.8067,0.7809,0.7422 0.6784,0.5520,0.1019]	0.3	1000 W
8	[0.8651,0.8582,0.8497,0.8390,0.8252,0.8067,0.7809,0.7422,0.6784,0.5520,0.23578]	0.3	1000 W

Así, al sustituir los valores de la Tabla 4.2 en el sistema en espacio de estado se obtienen las matrices lineales  $A_i$  y  $B_i$  de cada subsistema:

$$A_1 = \begin{bmatrix} -8.1029 & 8.3900 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 7.2585 & -14.774 & 7.6132 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7.2585 & -14.871 & 7.7440 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7.2585 & -15.002 & 7.9191 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7.2585 & -15.177 & 8.1607 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7.2585 & -15.419 & 8.5073 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7.2585 & -15.765 & 9.0606 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7.2585 & -16.319 & 10.194 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7.2585 & -17.452 & 14.170 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7.2585 & -21.429 & 31.404 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0204 & -0.0204 \end{bmatrix}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} -6.4831 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -6.9240 \times 10^{-6} \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} -8.1580 & 8.4399 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 7.3079 & -14.868 & 7.6542 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7.3079 & -14.962 & 7.7774 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7.3079 & -15.085 & 7.9391 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7.3079 & -15.247 & 8.1522 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7.3079 & -15.460 & 8.4364 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7.3079 & -15.744 & 8.8338 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7.3079 & -16.141 & 9.4619 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7.3079 & -16.769 & 10.875 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7.3079 & -18.183 & 17.154 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0206 & -0.0206 \end{bmatrix}$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} -6.5395 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -6.5168 \times 10^{-6} \end{bmatrix}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} -8.1029 & 8.1676 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 7.2585 & -14.575 & 7.3309 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7.2585 & -14.589 & 7.3510 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7.2585 & -14.609 & 7.3802 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7.2585 & -14.638 & 7.4249 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7.2585 & -14.683 & 7.4988 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7.2585 & -14.757 & 7.6363 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7.2585 & -14.894 & 7.9414 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7.2585 & -15.199 & 8.9209 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7.2585 & -16.179 & 31.404 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0204 & -0.0204 \end{bmatrix}$$

$$B_3 = \begin{bmatrix} -7.0098 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -6.9240 \times 10^{-6} \end{bmatrix}$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} -8.1583 & 8.2234 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 7.3081 & -14.674 & 7.3810 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7.3081 & -14.689 & 7.4013 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7.3081 & -14.709 & 7.4306 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7.3081 & -14.738 & 7.4757 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7.3081 & -14.783 & 7.5501 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7.3081 & -14.858 & 7.6885 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7.3081 & -14.996 & 7.9957 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7.3081 & -15.303 & 8.9818 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7.3081 & -16.289 & 17.121 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0206 & -0.0206 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_4 = \begin{bmatrix} -7.0577 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -6.5109 \times 10^{-6} \end{bmatrix}$$

$$A_5 = \begin{bmatrix} -5.6720 & 8.3900 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5.0810 & -12.596 & 7.6132 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5.0810 & -12.694 & 7.7440 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5.0810 & -12.824 & 7.9191 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5.0810 & -13.000 & 8.1607 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5.0810 & -13.241 & 8.5073 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5.0810 & -13.588 & 9.0606 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5.0810 & -14.141 & 10.1944 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5.0810 & -15.275 & 14.170 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5.0810 & -19.251 & 31.404 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0143 & -0.0143 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_5 = \begin{bmatrix} -6.4831 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -6.9240 \times 10^{-6} \end{bmatrix}$$

$$A_6 = \begin{bmatrix} -5.7106 & 8.4399 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5.1155 & -12.675 & 7.6542 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5.1155 & -12.769 & 7.7774 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5.1155 & -12.893 & 7.9391 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5.1155 & -13.054 & 8.1522 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5.1155 & -13.267 & 8.4364 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5.1155 & -13.551 & 8.8338 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5.1155 & -13.949 & 9.4619 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5.1155 & -14.577 & 10.875 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5.1155 & -15.990 & 17.154 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0144 & -0.0144 \end{bmatrix}$$

$$B_6 = \begin{bmatrix} -6.5395 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -6.5168 \times 10^{-6} \end{bmatrix}$$

$$A_7 = \begin{bmatrix} -5.6720 & 8.1676 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5.0810 & -12.397 & 7.3309 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5.0810 & -12.411 & 7.3510 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5.0810 & -12.432 & 7.3802 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5.0810 & -12.461 & 7.4249 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5.0810 & -12.505 & 7.4988 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5.0810 & -12.579 & 7.6363 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5.0810 & -12.717 & 7.9414 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5.0810 & -13.022 & 8.9209 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5.0810 & -14.001 & 31.404 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0143 & -0.0143 \end{bmatrix}$$

$$B_7 = \begin{bmatrix} -7.0098 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -6.9240 \times 10^{-6} \end{bmatrix}$$

$$A_8 = \begin{bmatrix} -5.7108 & 8.2234 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5.1157 & -12.482 & 7.3810 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5.1157 & -12.496 & 7.4013 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5.1157 & -12.517 & 7.4306 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5.1157 & -12.546 & 7.4757 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5.1157 & -12.591 & 7.5501 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5.1157 & -12.665 & 7.6885 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5.1157 & -12.804 & 7.9957 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5.1157 & -13.111 & 8.9818 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5.1157 & -14.097 & 17.121 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0144 & -0.0144 \end{bmatrix}$$

$$B_8 = \begin{bmatrix} -7.0577 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -6.5109 \times 10^{-6} \end{bmatrix}$$

Las matrices de salida  $C_i$  de cada subsistema son iguales a una matriz identidad de  $11 \times 11$ , debido a que las salidas de cada subsistema son las concentraciones en los platos.

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Los pesos  $w$  se calculan como el producto de las funciones de pertenencia para cada regla, de acuerdo a la Ecuación (4.3). Estos son:

$$\begin{aligned} w_1 &= M_1(x_{11}) \cdot M_3(x_1) \cdot M_5(R) \\ w_2 &= M_2(x_{11}) \cdot M_3(x_1) \cdot M_5(R) \\ w_3 &= M_1(x_{11}) \cdot M_4(x_1) \cdot M_5(R) \\ w_4 &= M_2(x_{11}) \cdot M_4(x_1) \cdot M_5(R) \\ w_5 &= M_1(x_{11}) \cdot M_3(x_1) \cdot M_6(R) \\ w_6 &= M_2(x_{11}) \cdot M_3(x_1) \cdot M_6(R) \\ w_7 &= M_1(x_{11}) \cdot M_4(x_1) \cdot M_6(R) \\ w_8 &= M_2(x_{11}) \cdot M_4(x_1) \cdot M_6(R) \end{aligned} \tag{4.16}$$



Los pesos  $h$  (pesos normalizados) para la defusificación, de acuerdo a la Ecuación (4.4), se calculan como:

$$\begin{aligned}
 h_1 &= w_1/w_t \\
 h_2 &= w_2/w_t \\
 h_3 &= w_3/w_t \\
 h_4 &= w_4/w_t \\
 h_5 &= w_5/w_t \\
 h_6 &= w_6/w_t \\
 h_7 &= w_7/w_t \\
 h_8 &= w_8/w_t
 \end{aligned}
 \tag{4.17}$$

donde:

$$w_t = \sum_{i=1}^8 w_i$$

De las Ecuaciones (4.16) y (4.17) se observa que las siguientes proposiciones son verdaderas:

- $w_i \geq 0 \forall z_i$
- $w_t \neq 0$
- $\sum h_i = 1$

Finalmente, el modelo Takagi – Sugeno de la columna de destilación de 11 platos con 3 premisas y 8 reglas se describe en la Ecuación (4.18).

$$\begin{aligned}
 \dot{x} &= \sum_{i=1}^8 h_i(x_{11}, x_1, R) \cdot (A_i x + B_i u) \\
 y &= Cx
 \end{aligned}
 \tag{4.18}$$

donde:

$C$  es una matriz identidad de dimensión  $11 \times 11$ .

## 4.6 Simulación del Modelo Difuso Takagi – Sugeno de la Columna

El proceso para simular el modelo difuso Takagi – Sugeno se muestra en la Figura

4.6. A continuación se enlista este:

1. Se declaran la matriz de estado y la matriz de entrada de cada uno de los 12 subsistemas, así como las funciones de membresía de las premisas.
2. Se propone un vector de concentraciones iniciales en los platos.
3. Se definen los vectores de entrada: potencia calorífica y reflujo, los cuales pueden ser constantes durante la simulación o presentar escalones.
4. Se define el tiempo de la simulación en minutos.
5. Se calcula el grado de pertenencia de las premisas en las funciones de membresía  $M_i$ .
6. Se calculan los pesos  $w_i$  de las premisas.
7. Se calculan los pesos  $h_i$  de las premisas.
8. Se obtiene la suma ponderada de los subsistemas, la cual equivale a la derivada del componente líquido de etanol en cada plato.
9. Finalmente, se realiza una integración para obtener la fracción molar de etanol líquido.
10. Se repiten los pasos 5 a 9 hasta que se alcance el tiempo de simulación.

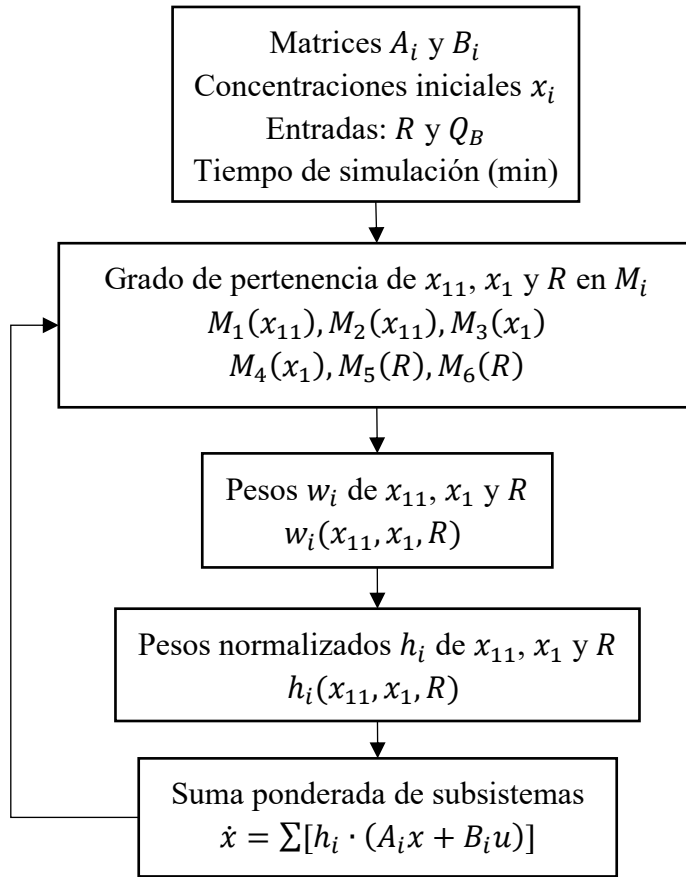


Figura 4.6 Diagrama de bloques del proceso de simulación del modelo difuso Takagi-Sugeno

A continuación se presenta una comparación entre el modelo no lineal y el modelo difuso Takagi-Sugeno. La Tabla 4.3 muestra los parámetros de ambas simulaciones.

Tabla 4.3 Parámetros de la simulación del modelo difuso Takagi – Sugeno y del modelo no lineal

Vector de masas retenidas	$M = [0.1831, 0.2044, 0.2044, 0.2044, 0.2044, 0.2044, 0.2044, 0.2044, 0.2044, 0.2044, 72.6355]$
Vector de concentraciones iniciales	$x_{1_0} = [0.8651, 0.8582, 0.8497, 0.8390, 0.8252, 0.8067, 0.7809, 0.7422, 0.6784, 0.5520, 0.2357]$
Presión total de la columna	1013.25 hPa
Potencia calorífica	1000 W

Porcentaje de apertura de la válvula de reflujo	20 %
Tiempo de simulación	50 minutos

La concentración molar de etanol líquido en el hervidor ( $0.2357 \text{ mol/mol}$ ) corresponde a una mezcla de 1 litro de agua y 1 litro de etanol, mientras que las concentraciones en los platos se obtienen a partir del equilibrio de la mezcla en estado estable.

La Figura 4.7a muestra la potencia calorífica aplicada en el hervidor, mientras que la Figura 4.7b muestra el porcentaje de apertura de la válvula de reflujo. Debido a que la válvula se encuentra parcialmente abierta, una parte del condensado se extrae como destilado y el resto se realimenta a la columna.

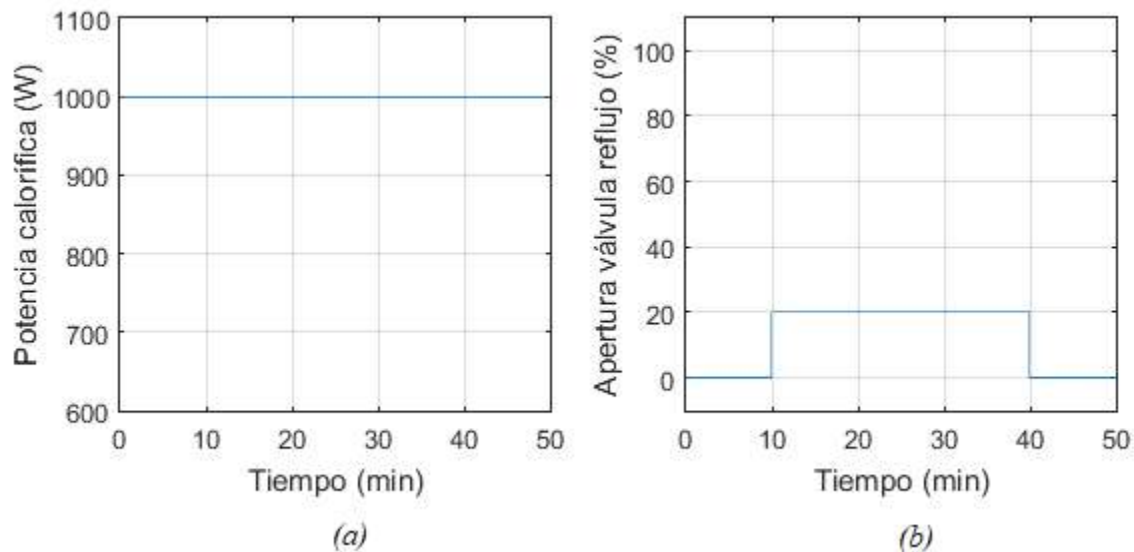


Figura 4.7 Entradas del sistema para simulación del modelo Takagi – Sugeno en reflujo parcial: (a) potencia calorífica en el hervidor; (b) porcentaje de apertura de la válvula de reflujo

La Figura 4.8 muestra la dinámica de la concentración en los platos del modelo no lineal. Durante los primeros 10 minutos de simulación, la columna opera en reflujo total, por lo que las concentraciones se mantienen en estado estable. Del minuto 10 al 40, la válvula de reflujo se abre un 20 %, y se comienza a producir destilado. Al ocurrir esto, se observa que

las concentraciones en los platos disminuyen, siendo 0.85 la concentración molar promedio en el condensador durante el tiempo que la válvula de reflujo permanece abierta. Nuevamente al minuto 40, la columna opera en reflujo total y las concentraciones vuelven al estado estable.

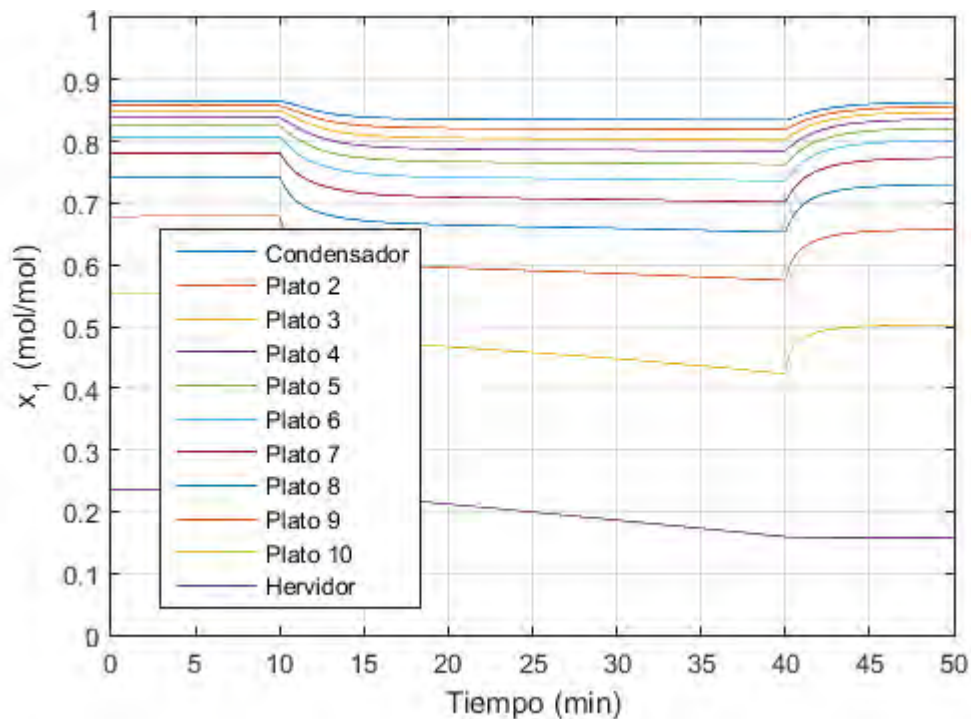


Figura 4.8 Dinámica de las concentraciones en los platos del modelo no lineal con potencia constante, apertura de la válvula de reflujo de 20 % y concentraciones iniciales en equilibrio

En la Figura 4.9 se observa el comportamiento de las concentraciones en los platos del modelo difuso Takagi – Sugeno. Realizando una comparación a simple vista contra el modelo no lineal, se aprecia que la dinámica en las concentraciones de ambos modelos es bastante similar; sin embargo, es necesario obtener una comparación numérica para analizar la exactitud del modelo difuso.

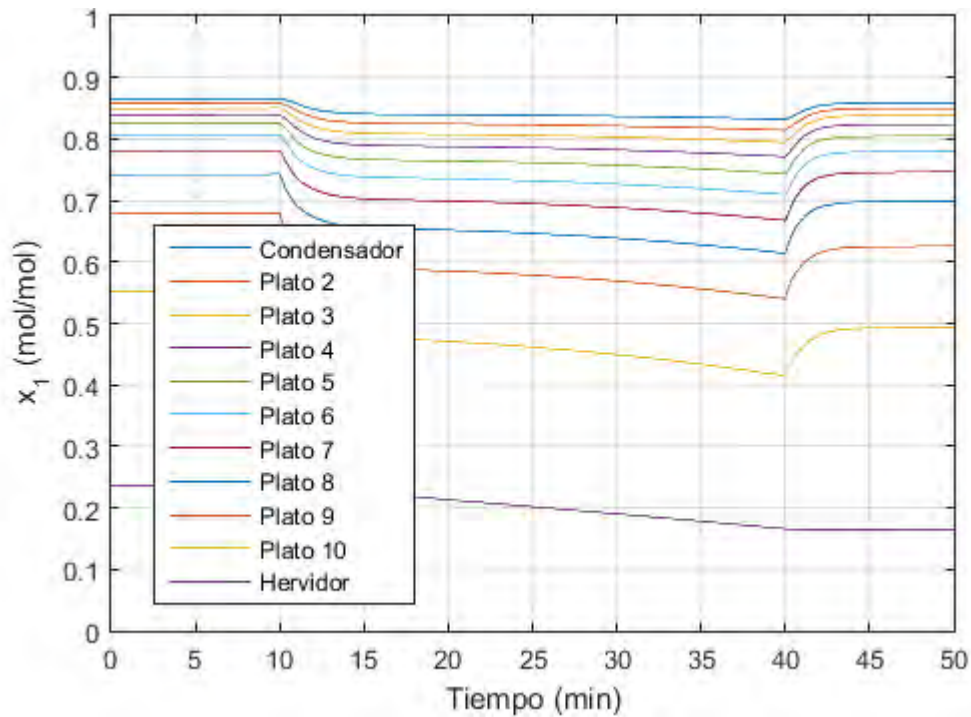


Figura 4.9 Dinámica de las concentraciones en los platos del modelo Takagi – Sugeno con potencia constante, apertura de la válvula de reflujo de 20 % y concentraciones iniciales en equilibrio

El comportamiento del modelo Takagi – Sugeno depende de la combinación lineal ponderada de los subsistemas que se definen en cada regla difusa. La Figura 4.10 muestra cómo evolucionan las ponderaciones de cada regla en el tiempo que dura la simulación. Se puede apreciar que al inicio de la simulación y hasta el minuto 10, la Regla 4 tiene una ponderación de 1, mientras el resto tiene una ponderación de 0; es decir, únicamente la Regla 4 define el comportamiento del sistema en este periodo. Sin embargo, a partir del minuto 10 (cuando se abre la válvula de reflujo un 20 %) se produce una combinación de varias reglas, debido a que la ponderación de éstas depende directamente del valor de las premisas.

Además, de la Figura 4.10 puede derivarse que la suma de las ponderaciones de todas las reglas es siempre igual a 1, lo cual es una condición necesaria en los sistemas difusos.

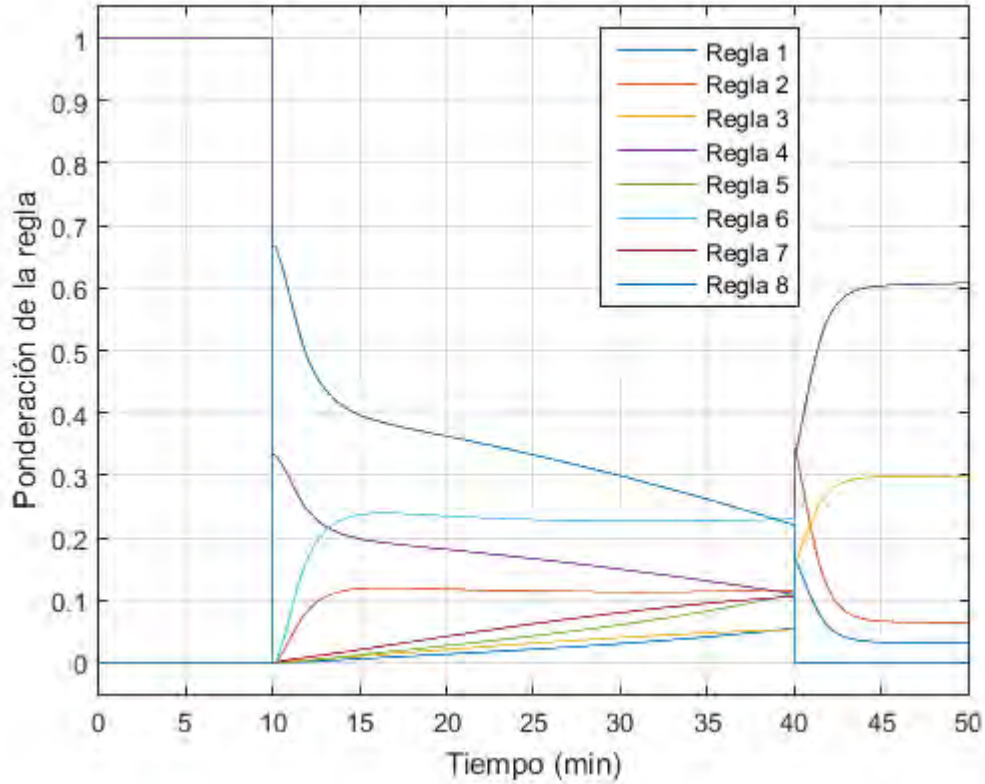


Figura 4.10 Evolución de las ponderaciones de las reglas del modelo Takagi – Sugeno

Para comprobar la exactitud del modelo Takagi – Sugeno, respecto al modelo no lineal, se utilizan los errores absoluto y relativo.

El error absoluto se obtiene como la diferencia en las concentraciones reales (modelo no lineal) y las concentraciones del modelo difuso:

$$\text{Error} = \text{Valor}_{\text{real}} - \text{Valor}_{\text{estimado}} \quad (4.19)$$

Mientras que el error relativo es expresado en porcentaje respecto a la magnitud de las variables:

$$\text{Error}_{\text{relativo}} = \frac{\text{Valor}_{\text{real}} - \text{Valor}_{\text{estimado}}}{\text{Valor}_{\text{real}}} \times 100 \quad (4.20)$$

La Figura 4.11 y Figura 4.12 muestran el error y el error relativo, respectivamente, entre el modelo no lineal y el modelo Takagi – Sugeno.

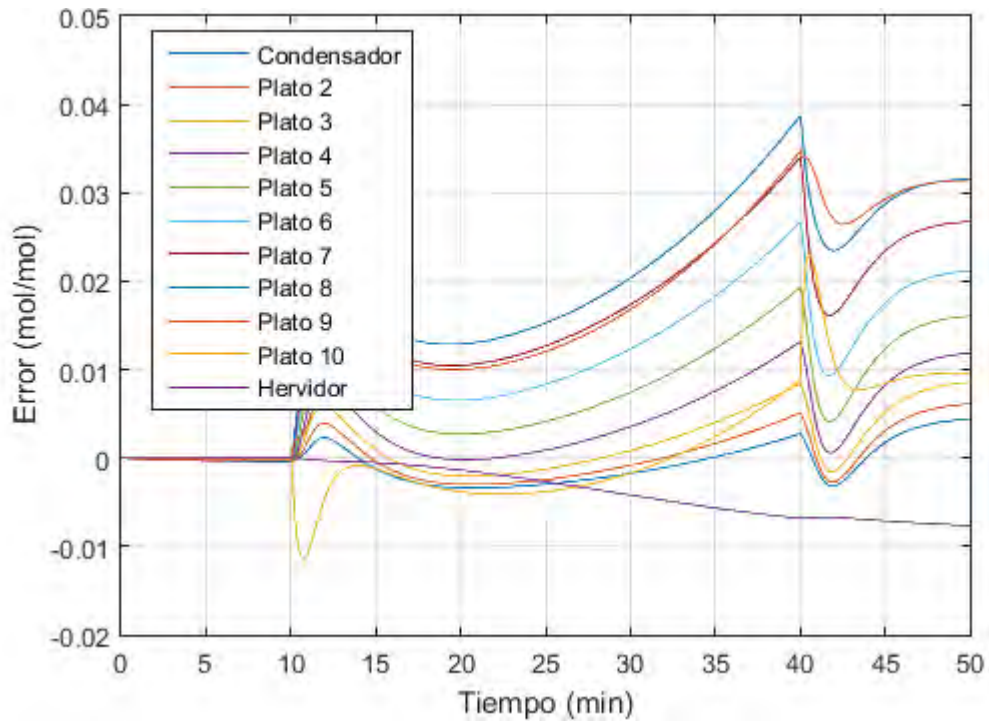


Figura 4.11 Error entre el modelo no lineal y el modelo Takagi – Sugeno

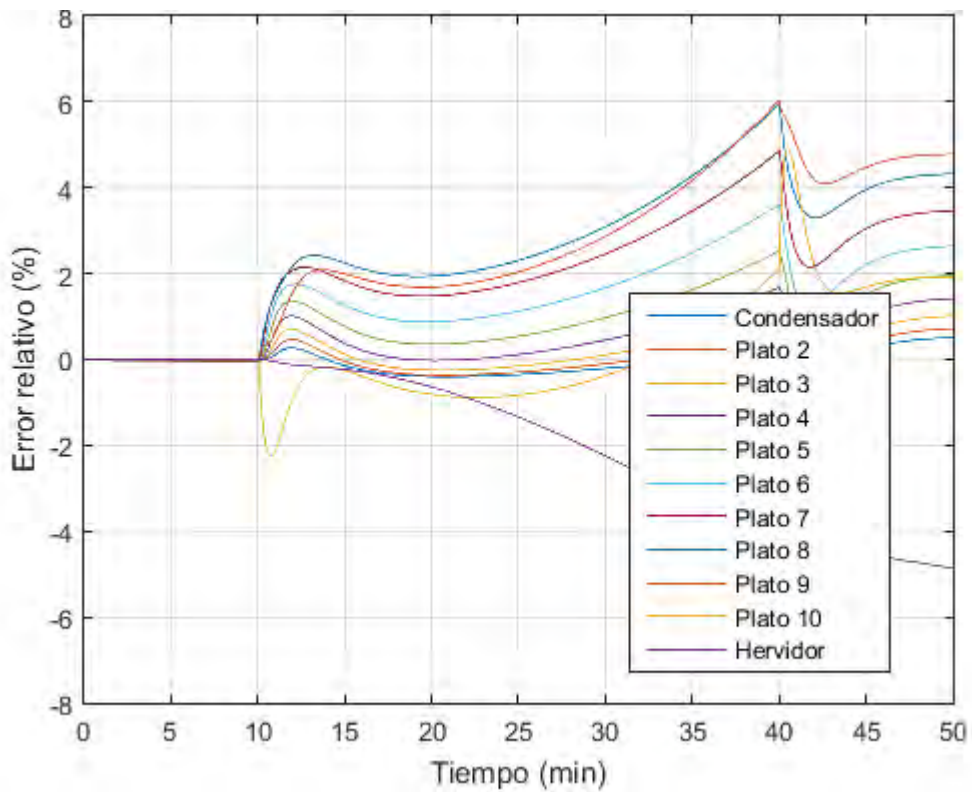


Figura 4.12 Error relativo entre el modelo no lineal y el modelo Takagi – Sugeno



Debido a que ambos modelos parten de las mismas condiciones iniciales, el error al inicio de la simulación es cero. Este error se mantiene durante los primeros 10 minutos que se opera la columna en reflujo total, debido a que las concentraciones se encuentran en estado estable y no cambian. Al abrirse la válvula de reflujo, se observa en la Figura 4.11 que el error comienza a crecer, ya que las concentraciones comienzan a variar por acción del reflujo, lo que provoca que la respuesta del modelo Takagi – Sugeno recaiga no sólo en una regla (como al inicio de la simulación), sino que sea una combinación lineal de todas (como se observa en la Figura 4.10).

Un análisis *a priori* del error absoluto puede llevar a la conclusión que el error en las concentraciones es pequeño (el máximo error es de 0.04 mol/mol); sin embargo, la Figura 4.12 muestra que este error es de 6 % respecto a la magnitud de las mediciones. Este error podría no ser significativo para tareas de monitorización, no obstante podría significar un problema en tareas de control.

## 4.7 Conclusión

Se propone un modelo difuso Takagi – Sugeno de una columna de destilación de 11 platos para una mezcla binaria de etanol y agua, el cual consta de 8 reglas basadas en tres premisas: concentración de etanol líquido en el hervidor, concentración de etanol líquido en el condensador y porcentaje de apertura de la válvula de reflujo. Las funciones de pertenencia utilizadas son del tipo trapezoidal, ya que a pesar de ser muy fáciles de representar, han demostrado tener un buen desempeño desde la introducción de la lógica difusa.

La dinámica del modelo difuso, a simple vista, es muy similar a la dinámica del modelo no lineal; empero, un análisis cuantitativo demuestra que el error relativo entre ambos es de un máximo del 6 % (para las condiciones de operación especificadas). Esto se debe a que al obtener un modelo lineal a partir de uno no lineal, se introducen errores.

Para minimizar los errores por linealización es posible reducir el rango de operación de cada subsistema lineal; es decir, aumentar el número de funciones de membresía para cada premisa. No obstante, la cantidad de reglas del modelo difuso crece exponencialmente con el número de funciones de membresía, por lo que se debe establecer un compromiso entre exactitud y complejidad del diseño.



# Capítulo 5

## Diseño del Observador Difuso

### 5.1 Introducción

Un observador de estado es un sistema que estima las variables internas de un sistema determinado, mediante la medición de la entrada y salida de éste. Generalmente es implementado como *software* en una computadora, por lo que también recibe el nombre de sensor virtual.

Conocer los estados del sistema es necesario para resolver varios problemas de la teoría de control, por ejemplo, estabilizar el sistema utilizando retroalimentación de estados. Sin embargo, los estados de un sistema no siempre pueden ser directamente medidos. Por ello es necesario estimarlos a partir de mediciones de la entrada y la salida.

Se dice que un sistema es observable si, mediante cualquier secuencia de los vectores de estado y de control, el estado actual puede determinarse en un tiempo finito usando solamente las salidas. Para una definición formal de la propiedad de observabilidad consultar el Apéndice B.

Existen 2 tipos de observadores: observadores de orden completo, y observadores de orden reducido u orden mínimo. Los observadores de orden completo, son aquellos utilizados para observar o estimar todos los estados de un sistema, mientras que los de orden reducido son utilizados para observar o estimar sólo algunos estados de un sistema.

En este capítulo se aborda el desarrollo de un observador difuso de orden completo para el sistema de una columna de destilación de 11 platos modelada en Takagi-Sugeno.

### 5.2 Descripción Matemática de un Observador Difuso

Como en todos los observadores, el observador difuso debe satisfacer:

$$x(t) - \hat{x}(t) \rightarrow 0 \quad \text{a medida que } t \rightarrow \infty$$

donde  $\hat{x}(t)$  denota el vector de estados estimados por el observador difuso. Esta condición garantiza que el error en estado estable entre el vector de estados y el vector de estados estimados converja a cero.

Al igual que el modelo propuesto por Takagi y Sugeno, el observador difuso es descrito por reglas SI-ENTONCES que representan las relaciones lineales de entrada-salida de un sistema no lineal, además de incluir también el error multiplicado por una ganancia.

La regla  $i$ -ésima de un observador difuso para un sistema continuo es la siguiente (Tanaka & Wang, 2001):

*Regla Observador  $i$ :*

SI  $z_1(t)$  es  $M_{i1}$  y  $\dots$  y  $z_p(t)$  es  $M_{ip}$ ,

$$\text{ENTONCES } \begin{cases} \hat{x}(t) = A_i \hat{x}(t) + B_i u(t) + K_i (y(t) - \hat{y}(t)), \\ \hat{y}(t) = C_i \hat{x}(t), \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, r. \quad (5.1)$$

donde:

$M_{ij}$  es el conjunto difuso

$r$  es el número de reglas

$\hat{x}(t) \in \mathbf{R}^n$  es el vector de estado estimado

$A_i \in \mathbf{R}^{n \times n}$ ,  $B_i \in \mathbf{R}^{n \times m}$ , y  $C_i \in \mathbf{R}^{q \times n}$

$z_1(t), \dots, z_p(t)$  son variables premisa conocidas que pueden ser funciones de las variables de estado, perturbaciones y/o tiempo.

La dependencia de las premisas en las variables de estado provoca que sea necesario considerar dos casos para el diseño de un observador difuso (Tanaka & Wang, 2001):

- Caso A: Las premisas  $z_i$  **no dependen** de las variables estimadas por el observador difuso.
- Caso B: Las premisas  $z_i$  **dependen** de las variables estimadas por el observador difuso.

En este trabajo se asume que las premisas son directamente medibles en el sistema y **no dependen** de las variables estimadas, es decir; el diseño del observador se basa en el Caso A.

El observador difuso continuo para el Caso A tiene la siguiente forma (Tanaka & Wang, 2001):

$$\begin{aligned}\hat{x} &= \sum_{i=1}^r h_i(z) \cdot [A_i \hat{x} + B_i u + K_i (y - \hat{y})] \\ \hat{y} &= \sum_{i=1}^r h_i(z) \cdot C_i \hat{x}\end{aligned}\tag{5.2}$$

donde:

$z = [z_1 \ z_2 \ \dots \ z_p]$  son las variables premisa.

Los pesos  $h_i$  y  $w_i$  se calculan de manera similar al modelo difuso, mediante las Ecuaciones (4.3) y (4.4). Las matrices  $A_i$  y  $B_i$  son las mismas utilizadas en el capítulo anterior y pueden consultarse en el Apéndice A. Las matrices  $C_i$  son iguales debido a que la salida del sistema es la misma para todos los subsistemas y es representada por una matriz identidad de  $11 \times 11$ . Las premisas, funciones de pertenencia y reglas del observador son equivalentes a las utilizadas en el modelo Takagi – Sugeno y pueden consultarse en el Capítulo 4.

### 5.3 Selección de las Ganancias del Observador Difuso para la Columna

Una vez que se tiene el modelo difuso Takagi – Sugeno, el diseño del observador difuso recae únicamente en encontrar las matrices de ganancia  $K_i$ , sujetas a las siguientes condiciones (Tanaka & Wang, 2001):

$$\begin{aligned}P &> 0 \\ A_i^T P - C_i^T N_i^T + P A_i - N_i C_i &< 0 \\ A_i^T P - C_j^T N_i^T + P A_i - N_i C_j + A_j^T P - C_i^T N_j^T + P A_j - N_j C_i &< 0 \\ i < j \text{ s. t. } h_i \cap h_j &\neq \emptyset\end{aligned}\tag{5.3}$$

donde:

$P$  es una matriz diagonal definida positiva

$A_i, A_j, C_i$  y  $C_j$  corresponden a las matrices de los submodelos

$N_i$  y  $N_j$  son matrices auxiliares

La notación  $i < j$  s. t.  $h_i \cap h_j \neq \emptyset$  indica que la condición debe cumplirse para toda regla  $i < j$ , excepto cuando  $h_i(z) \times h_j(z) = 0$  para toda  $z$ . Note que  $h_i \cap h_j = \emptyset$  si y sólo si la regla  $i$  y la regla  $j$  no se traslapan.

Así, las ganancias  $K_i$  se determinan como:

$$K_i = P^{-1}N_i \quad (5.4)$$

Para calcular las ganancias es necesario especificar cuáles subsistemas tienen traslape entre ellos. Por ejemplo, de acuerdo a la Ecuación (4.16), el peso de la Regla 1 es  $w_1 = M_1 \cdot M_3 \cdot M_5$ . De la Figura 4.3, Figura 4.4 y Figura 4.5 se observa que la función de membresía  $M_1$  tiene traslape con la función  $M_2$ , la función  $M_3$  con la función  $M_4$  y la función  $M_5$  con la función  $M_6$ . De esta manera, la Regla 1 tiene intersecciones con todas las demás reglas que involucren las funciones de membresía  $M_2, M_4$  y  $M_6$ , las cuales son: Regla 2, Regla 3, Regla 4, Regla 5, Regla 6, Regla 7 y Regla 8. Note que la condición en la Ecuación (5.3) indica que  $i < j$ , así las intersecciones de la Regla 2, 3, 4, 5, 6, 7 y 8 no involucran a la Regla 1. La Tabla 5.1 muestra el traslape de las reglas del observador difuso.

Tabla 5.1 Traslape de reglas del observador difuso

Regla	Intersección con Regla
1	2, 3, 4, 5, 6, 7 y 8
2	3, 4, 5, 6, 7 y 8
3	4, 5, 6, 7 y 8
4	5, 6, 7 y 8
5	6, 7 y 8
6	7 y 8
7	8

Por tanto, las desigualdades matriciales lineales que se tienen que resolver para encontrar el valor de las ganancias del observador son:

$$P > 0$$

$$A_1^T P - C^T N_1^T + PA_1 - N_1 C < 0$$

$$A_2^T P - C^T N_2^T + PA_2 - N_2 C < 0$$

$$A_3^T P - C^T N_3^T + PA_3 - N_3 C < 0$$

$$A_4^T P - C^T N_4^T + PA_4 - N_4 C < 0$$

$$A_5^T P - C^T N_5^T + PA_5 - N_5 C < 0$$

$$A_6^T P - C^T N_6^T + PA_6 - N_6 C < 0$$

$$A_7^T P - C^T N_7^T + PA_7 - N_7 C < 0$$

$$A_8^T P - C^T N_8^T + PA_8 - N_8 C < 0$$

$$A_1^T P - C^T N_1^T + PA_1 - N_1 C + A_2^T P - C N_2^T + PA_2 - N_2 C < 0$$

$$A_1^T P - C^T N_1^T + PA_1 - N_1 C + A_3^T P - C N_3^T + PA_3 - N_3 C < 0$$

$$A_1^T P - C^T N_1^T + PA_1 - N_1 C + A_4^T P - C N_4^T + PA_4 - N_4 C < 0$$

$$A_1^T P - C^T N_1^T + PA_1 - N_1 C + A_5^T P - C N_5^T + PA_5 - N_5 C < 0$$

$$A_1^T P - C^T N_1^T + PA_1 - N_1 C + A_6^T P - C N_6^T + PA_6 - N_6 C < 0$$

(5.5)

$$A_1^T P - C^T N_1^T + PA_1 - N_1 C + A_7^T P - C N_7^T + PA_7 - N_7 C < 0$$

$$A_1^T P - C^T N_1^T + PA_1 - N_1 C + A_8^T P - C N_8^T + PA_8 - N_8 C < 0$$

$$A_2^T P - C^T N_2^T + PA_2 - N_2 C + A_3^T P - C N_3^T + PA_3 - N_3 C < 0$$

$$A_2^T P - C^T N_2^T + PA_2 - N_2 C + A_4^T P - C N_4^T + PA_4 - N_4 C < 0$$

$$A_2^T P - C^T N_2^T + PA_2 - N_2 C + A_5^T P - C N_5^T + PA_5 - N_5 C < 0$$

$$A_2^T P - C^T N_2^T + PA_2 - N_2 C + A_6^T P - C N_6^T + PA_6 - N_6 C < 0$$

$$A_2^T P - C^T N_2^T + PA_2 - N_2 C + A_7^T P - C N_7^T + PA_7 - N_7 C < 0$$

$$A_2^T P - C^T N_2^T + PA_2 - N_2 C + A_8^T P - C N_8^T + PA_8 - N_8 C < 0$$

$$A_3^T P - C^T N_3^T + PA_3 - N_3 C + A_4^T P - C N_4^T + PA_4 - N_4 C < 0$$

$$A_3^T P - C^T N_3^T + PA_3 - N_3 C + A_5^T P - C N_5^T + PA_5 - N_5 C < 0$$

$$A_3^T P - C^T N_3^T + PA_3 - N_3 C + A_6^T P - C N_6^T + PA_6 - N_6 C < 0$$

$$A_3^T P - C^T N_3^T + PA_3 - N_3 C + A_7^T P - C N_7^T + PA_7 - N_7 C < 0$$

$$A_3^T P - C^T N_3^T + PA_3 - N_3 C + A_8^T P - C N_8^T + PA_8 - N_8 C < 0$$

$$\begin{aligned}
A_4^T P - C^T N_4^T + P A_4 - N_4 C + A_5^T P - C N_5^T + P A_5 - N_5 C &< 0 \\
A_4^T P - C^T N_4^T + P A_4 - N_4 C + A_6^T P - C N_6^T + P A_6 - N_6 C &< 0 \\
A_4^T P - C^T N_4^T + P A_4 - N_4 C + A_7^T P - C N_7^T + P A_7 - N_7 C &< 0 \\
A_4^T P - C^T N_4^T + P A_4 - N_4 C + A_8^T P - C N_8^T + P A_8 - N_8 C &< 0 \\
A_5^T P - C^T N_5^T + P A_5 - N_5 C + A_6^T P - C N_6^T + P A_6 - N_6 C &< 0 \\
A_5^T P - C^T N_5^T + P A_5 - N_5 C + A_7^T P - C N_7^T + P A_7 - N_7 C &< 0 \\
A_5^T P - C^T N_5^T + P A_5 - N_5 C + A_8^T P - C N_8^T + P A_8 - N_8 C &< 0 \\
A_6^T P - C^T N_6^T + P A_6 - N_6 C + A_7^T P - C N_7^T + P A_7 - N_7 C &< 0 \\
A_6^T P - C^T N_6^T + P A_6 - N_6 C + A_8^T P - C N_8^T + P A_8 - N_8 C &< 0 \\
A_7^T P - C^T N_7^T + P A_7 - N_7 C + A_8^T P - C N_8^T + P A_8 - N_8 C &< 0
\end{aligned} \tag{5.5}$$

donde:

$P$  es una matriz diagonal definida positiva,  $\dim(P) = 11 \times 11$ .

$A_i$  son las matrices de entrada de los submodelos,  $\dim(A_i) = 11 \times 11$ .

$C$  es la matriz de salida de los submodelos (matriz identidad),  $\dim(C) = 11 \times 11$ .

$N_i$  son matrices auxiliares,  $\dim(N_i) = 11 \times 11$ .

Para resolver las desigualdades matriciales lineales se utiliza la herramienta *lmiedit* de MATLAB®. Esta herramienta se encarga de convertir las expresiones algebraicas en código, el cual es ejecutado en un *script*. Así, la matriz  $P$  que satisface (5.5) es:

$$P = \begin{bmatrix}
7.341 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 7.341 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 7.341 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 7.341 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 7.341 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7.341 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7.341 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7.341 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7.341 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7.341 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7.341
\end{bmatrix}$$

la cual se observa es definida positiva.



Las ganancias del observador difuso se calculan como:

$$\begin{aligned}
 K_1 &= P^{-1}N_1 \\
 K_2 &= P^{-1}N_2 \\
 K_3 &= P^{-1}N_3 \\
 K_4 &= P^{-1}N_4 \\
 K_5 &= P^{-1}N_5 \\
 K_6 &= P^{-1}N_6 \\
 K_7 &= P^{-1}N_7 \\
 K_8 &= P^{-1}N_8
 \end{aligned} \tag{5.6}$$

donde:

$$\dim(K_i) = 11 \times 11.$$

De esta manera, las matrices de ganancia para cada regla difusa son:

$$K_1 = \begin{bmatrix} -7.8362 & -1759.1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1774.8 & -14.507 & 19.971 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5.0996 & -14.605 & -3500.4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3515.4 & -14.735 & -3501.6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3516.7 & -14.911 & -1961.3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1976.7 & -15.152 & 2870.4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2854.7 & -15.499 & 3517.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3501.2 & -16.052 & -1749.9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1767.4 & -17.186 & -633.23 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 654.65 & -21.162 & 483.19 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -451.77 & 0.2462 \end{bmatrix}$$

$$K_2 = \begin{bmatrix} -7.8913 & 474.97 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -459.22 & -14.601 & -1748.9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1763.9 & -14.695 & -1302.0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1317.1 & -14.818 & -1086.1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1101.3 & -14.980 & 892.76 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -877.29 & -15.193 & 1987.9 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1972.1 & -15.477 & -859.64 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 875.78 & -15.875 & 666.75 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -649.98 & -16.503 & -642.19 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 660.37 & -17.916 & -1651.6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1668.7 & 0.2461 \end{bmatrix}$$

$$K_3 = \begin{bmatrix} -7.8362 & 912.92 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -897.49 & -14.308 & -1730.9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1745.5 & -14.322 & -1758.8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1773.4 & -14.342 & -661.61 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 676.25 & -14.372 & 2.1204 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 12.563 & -14.416 & -1762.3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1777.1 & -14.490 & -1306.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1321.4 & -14.628 & -214.33 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 229.53 & -14.933 & -772.69 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 788.87 & -15.912 & -1308.9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1340.3 & 0.2462 \end{bmatrix}$$

$$K_4 = \begin{bmatrix} -7.8916 & -636.66 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 652.19 & -14.407 & -1307.1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1321.8 & -14.422 & 1777.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1762.8 & -14.442 & -1090.7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1105.5 & -14.472 & 909.02 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -894.24 & -14.517 & 640.42 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -625.56 & -14.591 & 902.24 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -887.24 & -14.729 & -1100.3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1115.6 & -15.037 & -982.91 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 999.20 & -16.023 & -208.31 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 225.45 & 0.2461 \end{bmatrix}$$

$$K_5 = \begin{bmatrix} -2.9745 & -737.23 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 748.52 & -10.152 & -538.69 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 549.21 & -10.249 & -773.10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 783.75 & -10.380 & 768.43 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -757.61 & -10.555 & 461.41 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -450.35 & -10.797 & -5.1338 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 16.544 & -11.144 & -982.07 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 994.03 & -11.697 & 669.61 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -656.51 & -12.831 & 581.64 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -564.56 & -16.807 & -737.21 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 768.62 & 0.2585 \end{bmatrix}$$

$$K_6 = \begin{bmatrix} -2.9965 & 676.83 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -665.47 & -10.216 & -989.34 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 999.92 & -10.310 & 3.0346 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7.660 & -10.433 & 13.127 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2.2653 & -10.595 & -1534.7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1545.8 & -10.808 & 783.99 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -772.63 & -11.092 & 776.00 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -764.24 & -11.490 & 1656.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1644.1 & -12.118 & -1308.3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1322.1 & -13.531 & 351.52 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -334.36 & 0.2584 \end{bmatrix}$$

$$K_7 = \begin{bmatrix} -2.9745 & -815.03 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 826.11 & -9.9532 & 213.30 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -203.07 & -9.9677 & 230.14 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -219.89 & -9.9878 & -661.52 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 671.80 & -10.016 & -424.52 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 434.84 & -10.061 & 110.04 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -99.638 & -10.135 & 549.97 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -539.43 & -10.273 & -208.58 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 219.42 & -10.578 & -443.71 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 445.53 & -11.557 & -148.94 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 180.35 & 0.2585 \end{bmatrix}$$

$$K_g = \begin{bmatrix} -2.9966 & 122.86 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -111.71 & -10.023 & 63.710 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -53.406 & -10.037 & 152.91 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -142.59 & -10.057 & 56.899 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -46.545 & -10.087 & -4.7985 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 15.197 & -10.132 & -155.65 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 166.12 & -10.206 & -45.751 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 56.363 & -10.345 & 160.36 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -149.45 & -10.652 & 41.278 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -29.373 & -11.638 & 3.3119 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 13.817 & 0.2584 & 0 \end{bmatrix}$$

Finalmente, el observador difuso Takagi - Sugeno de la columna de destilación de 11 platos con 3 premisas y 8 reglas está dado por (5.7).

$$\hat{x} = \sum_{i=1}^{12} h_i(x_{11}, x_1, R) \cdot [A_i \hat{x} + B_i u + K_i (y - \hat{y})] \quad (5.7)$$

$$\hat{y} = C \hat{x}$$

donde:

$y$  es la salida del modelo no lineal (salida real).

$x_{11}$  es la fracción molar real de etanol líquido en el hervidor (modelo no lineal).

$x_1$  es la fracción molar real de etanol líquido en el hervidor (modelo no lineal).

## 5.4 Simulación del Observador Difuso para la Columna de Destilación

El proceso para simular el observador difuso de la columna de destilación de 11 platos se muestra en la Figura 5.1. A continuación se enlista este:

1. Se declaran la matriz de estado, la matriz de entrada y la matriz de ganancia de cada uno de los 12 subsistemas, así como las funciones de membresía de las premisas.
2. Se propone un vector de concentraciones iniciales en los platos.
3. Se definen los vectores de entrada: potencia calorífica y reflujo, los cuales pueden ser constantes durante la simulación o presentar escalones.
4. Se define el tiempo de la simulación en minutos.
5. Se calcula el grado de pertenencia de las premisas en las funciones de membresía  $M_i$ .
6. Se calculan los pesos  $w_i$  de las premisas.

7. Se calculan los pesos  $h_i$  de las premisas.
8. Se calcula el error entre el modelo no lineal (salida real) y el observador difuso (salida estimada).
9. Se obtiene la suma ponderada de los subsistemas, la cual equivale a la derivada del componente líquido de etanol en cada plato.
10. Finalmente, se realiza una integración para obtener la fracción molar de etanol líquido.
11. Se repiten los pasos 5 a 10 hasta que se alcance el tiempo de simulación

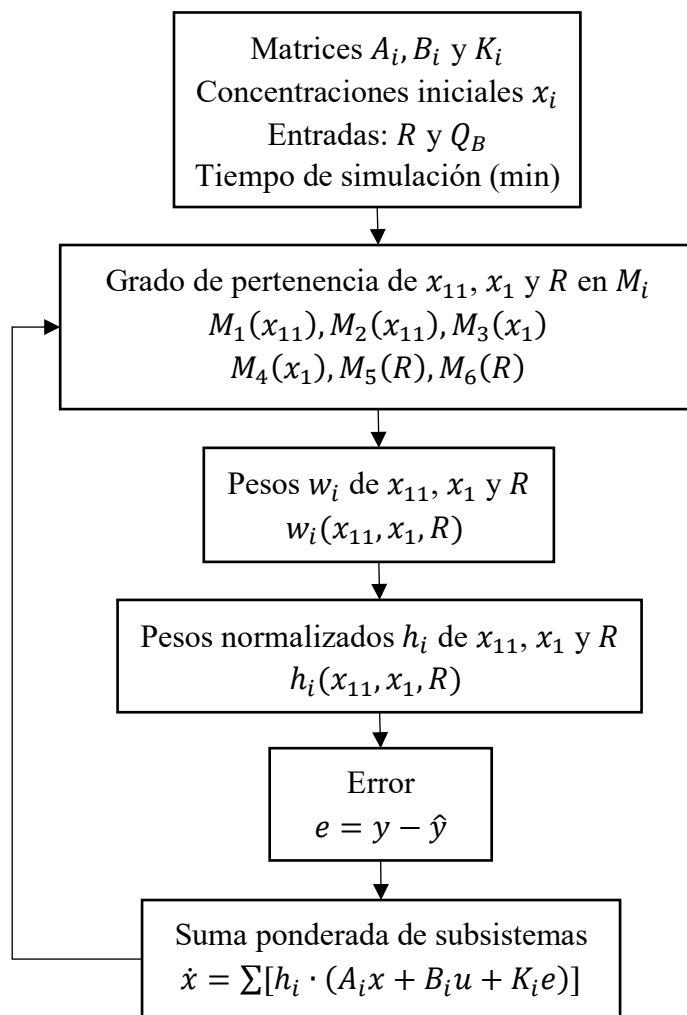


Figura 5.1 Diagrama de bloques del proceso de simulación del observador difuso Takagi-Sugeno

A continuación se presenta una comparación entre el modelo no lineal y el observador difuso Takagi-Sugeno. La Tabla 5.2 muestra los parámetros de ambas simulaciones.

Tabla 5.2 Parámetros de la simulación del observador difuso Takagi-Sugeno y del modelo no lineal

Vector de masas retenidas	$M = [0.1831, 0.2044, 0.2044, 0.2044, 0.2044, 0.2044, 0.2044, 0.2044, 0.2044, 0.2044, 72.6355]$
Vector de concentraciones iniciales	$x_{1_0} = [0.8651, 0.8582, 0.8497, 0.8390, 0.8252, 0.8067, 0.7809, 0.7422, 0.6784, 0.5520, 0.2357]$
Vector de concentraciones iniciales en el observador	$x_{1_{0obs}} = [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]$
Presión total de la columna	1013.25 hPa
Potencia calorífica	1000 W
Porcentaje de apertura de la válvula de reflujo	20 %
Tiempo de simulación	50 minutos

La concentración molar de etanol líquido en el hervidor (0.2357 mol/mol) corresponde a una mezcla de 1 litro de agua y 1 litro de etanol, mientras que las concentraciones en los platos se obtienen a partir del equilibrio de la mezcla en estado estable.

La Figura 5.2a muestra la potencia calorífica aplicada en el hervidor, mientras que la Figura 5.2b muestra el porcentaje de apertura de la válvula de reflujo. Debido a que la válvula se encuentra parcialmente abierta, una parte del condensado se extrae como destilado y el resto se realimenta a la columna.

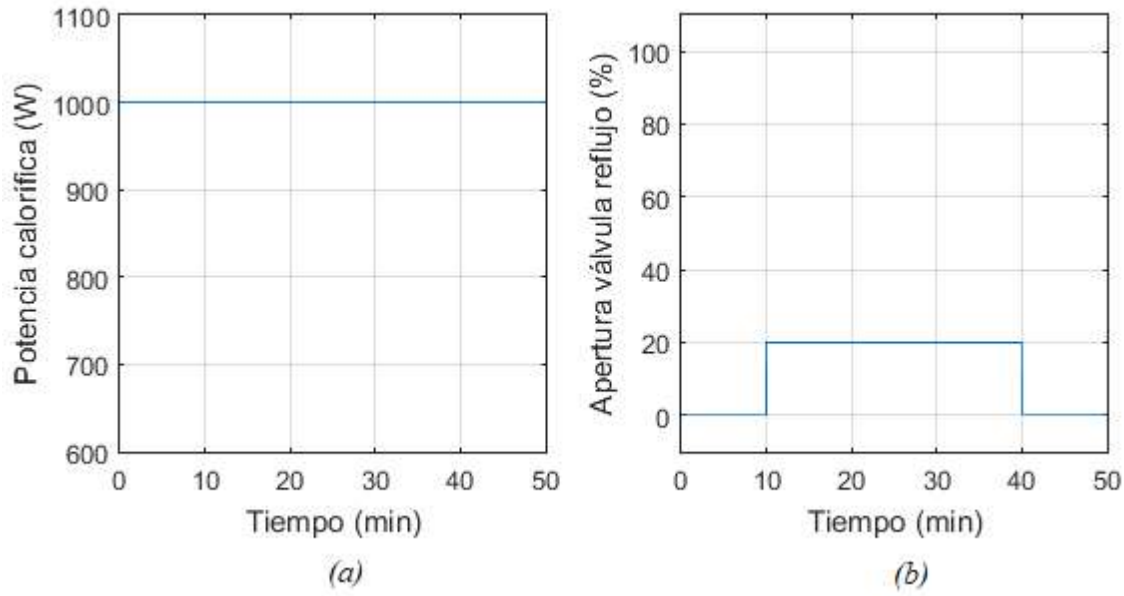


Figura 5.2 Entradas del sistema para simulación del observador Takagi – Sugeno en reflujo parcial: (a) potencia calorífica en el hervidor; (b) porcentaje de apertura de la válvula de reflujo

La Figura 5.3 muestra la dinámica de la concentración en los platos del modelo no lineal. Durante los primeros 10 minutos de simulación, la columna opera en reflujo total, por lo que las concentraciones se mantienen en estado estable. Del minuto 10 al 40, la válvula de reflujo se abre un 20 %, y se comienza a producir destilado. Al ocurrir esto, se observa que las concentraciones en los platos disminuyen, siendo 0.85 la concentración molar promedio en el condensador durante el tiempo que la válvula de reflujo permanece abierta. Nuevamente al minuto 40, la columna opera en reflujo total y las concentraciones vuelven al estado estable.

En la Figura 5.4 se observa el comportamiento de las concentraciones en los platos del observador difuso Takagi – Sugeno. Realizando una comparación a simple vista contra el modelo no lineal, se aprecia que la dinámica en las concentraciones de ambos modelos es bastante similar.

La Figura 5.5 muestra un acercamiento al comportamiento de las concentraciones en los platos del observador, donde se observa que, aproximadamente, al minuto 1 de la simulación, los estados observados convergen con los del modelo no lineal.

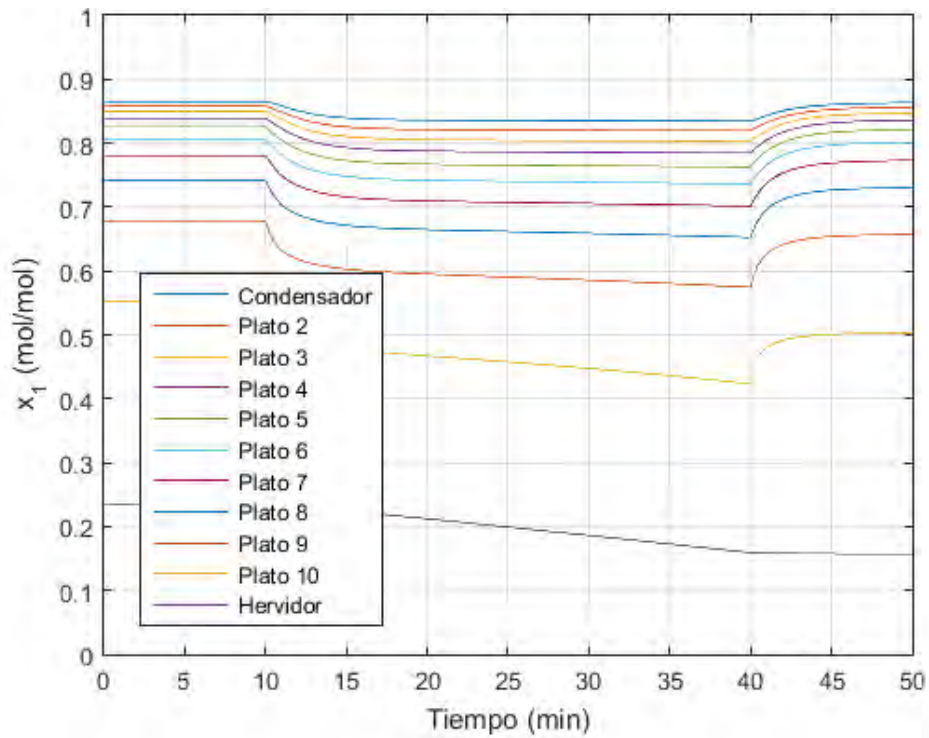


Figura 5.3 Dinámica de las concentraciones en los platos del modelo no lineal con potencia constante, apertura de la válvula de reflujo de 20 % y concentraciones iniciales en equilibrio

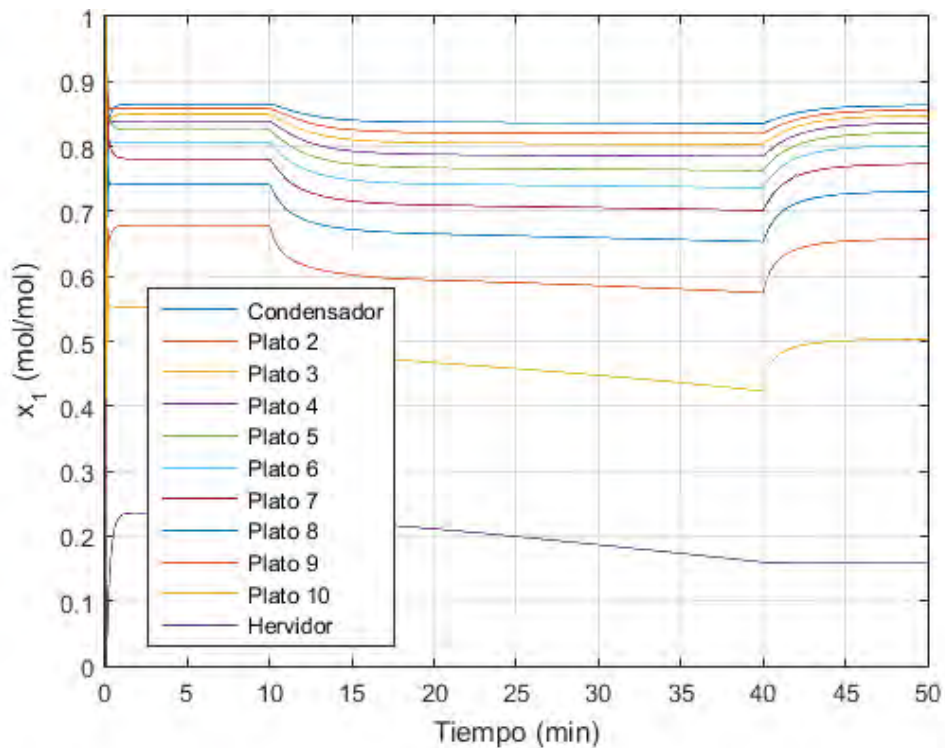


Figura 5.4 Dinámica de las concentraciones en los platos del observador Takagi – Sugeno con potencia constante, apertura de la válvula de reflujo de 20 % y concentraciones iniciales en equilibrio

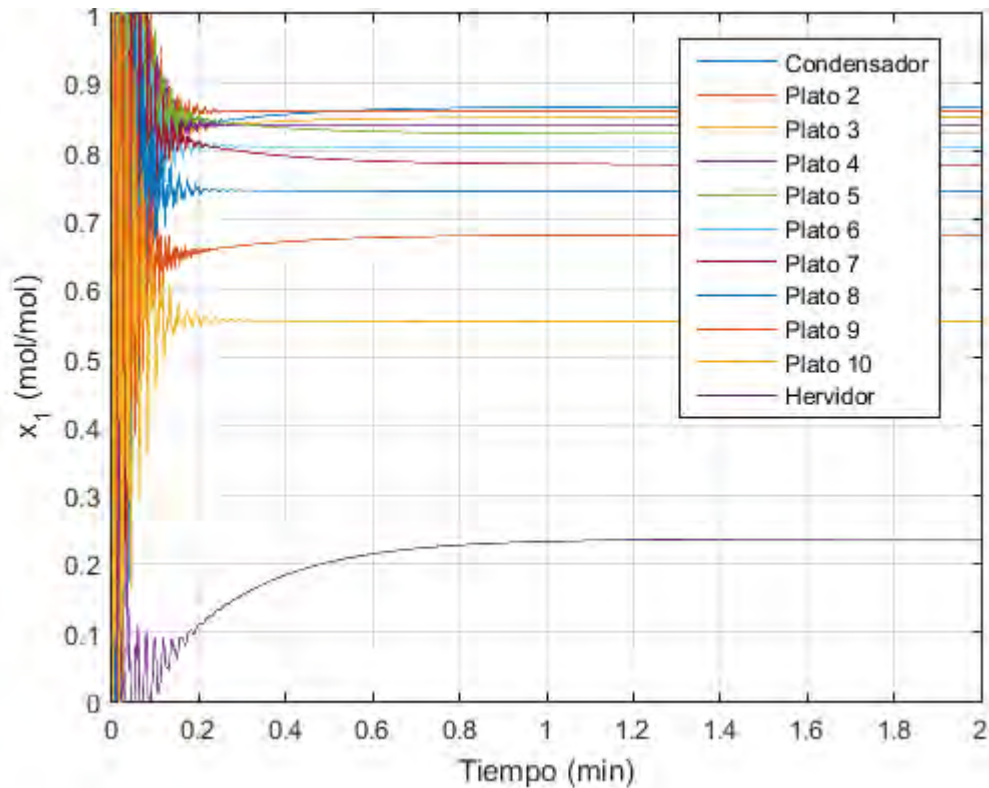


Figura 5.5 Acercamiento de la Figura 5.4

El comportamiento del observador, al igual que el modelo Takagi – Sugeno, depende de la combinación lineal ponderada de los subsistemas que se definen en cada regla difusa. La Figura 5.6 muestra cómo evolucionan las ponderaciones de cada regla en el tiempo que dura la simulación. Se puede apreciar que al inicio de la simulación y hasta el minuto 10, la Regla 4 tiene una ponderación de 1, mientras el resto tiene una ponderación de 0; es decir, únicamente la Regla 4 define el comportamiento del sistema en este periodo. Sin embargo, a partir del minuto 10 (cuando se abre la válvula de reflujo un 20 %) se produce una combinación de varias reglas. Esto se debe a que la ponderación de las reglas depende directamente del valor de las premisas, y éstas últimas varían al abrir la válvula de reflujo.

Además, de la Figura 5.6 puede derivarse que la suma de las ponderaciones de todas las reglas en el observador es siempre igual a 1, lo cual es una condición necesaria en los sistemas difusos, como ocurre con el modelo difuso en la Figura 4.10.



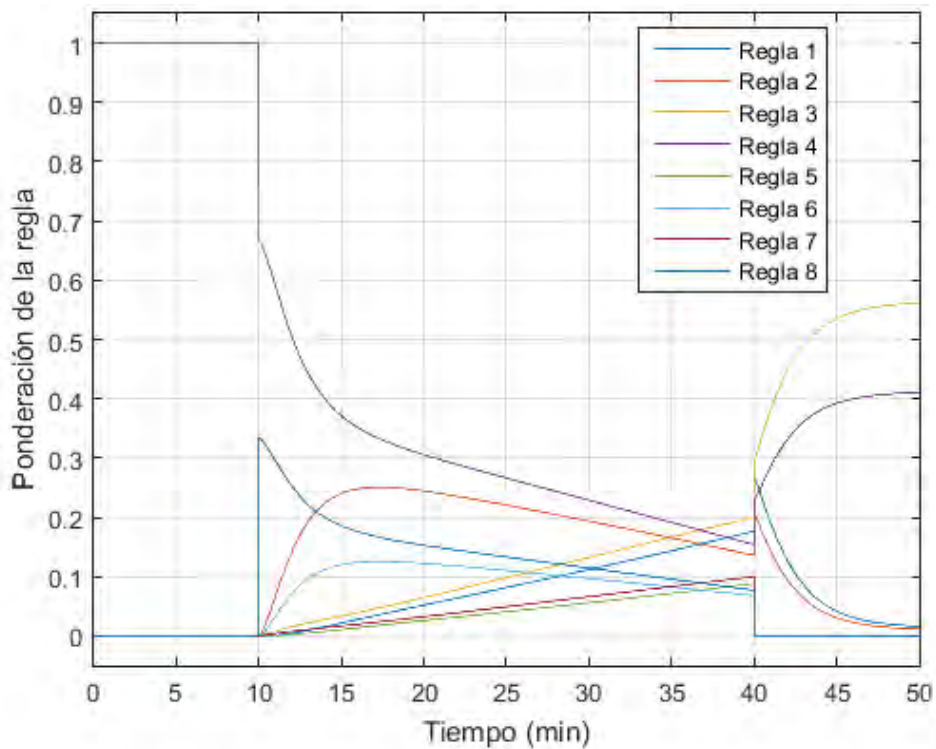


Figura 5.6 Evolución de las ponderaciones de las reglas del modelo Takagi – Sugeno

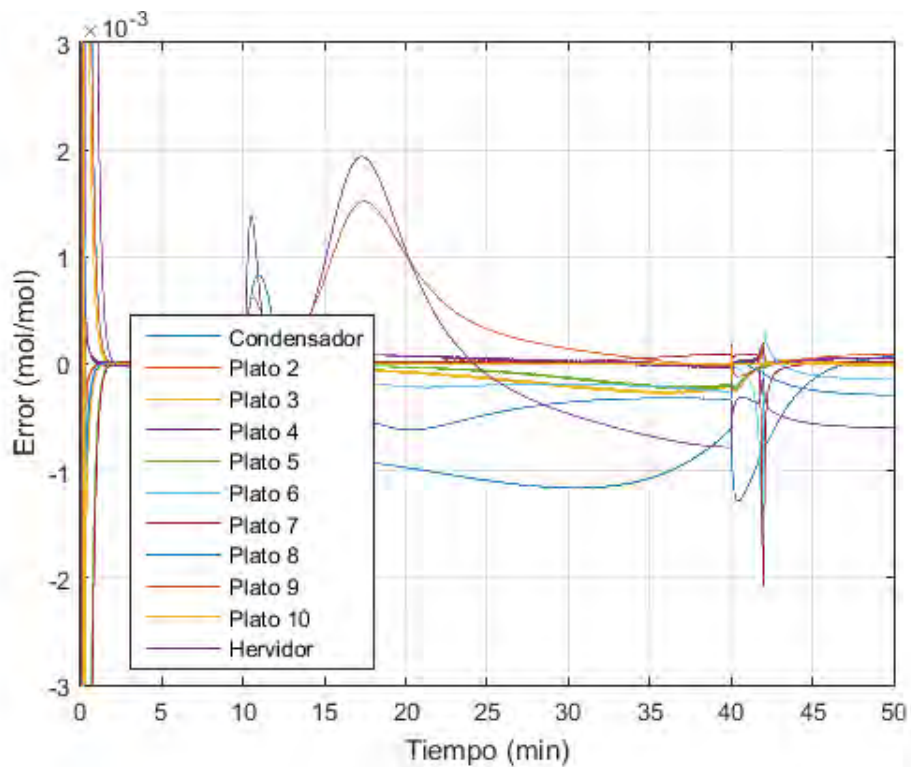


Figura 5.7 Error entre el modelo no lineal y el observador Takagi – Sugeno

La Figura 5.7 muestra el error entre el modelo no lineal y el observador difuso, de acuerdo a la Ecuación (4.19). Debido a que las condiciones iniciales en el observador son iguales a cero, éste presenta un error grande al inicio de la simulación; sin embargo, los estados convergen alrededor del minuto 1, como lo muestra la Figura 5.8.

El error máximo que presenta el observador se encuentra en la concentración en el hervidor, con una magnitud de  $\pm 2 \times 10^{-3}$  mol/mol. Esto se debe a que la apertura de la válvula de reflujo afecta directamente a la concentración del condensador, la cual afecta a su vez a la concentración del Plato 2, y así sucesivamente hasta la concentración del hervidor.

El error relativo, de acuerdo a la Ecuación (4.20), del observador difuso respecto al modelo no lineal se muestra en la Figura 5.9. La magnitud máxima del error relativo es del  $\pm 1$  %, y se presenta nuevamente en la concentración del hervidor. El error relativo en el condensador, el cual es el estado de mayor importancia para realizar tareas de control en la pureza del destilado, es menor al 0.2 %.

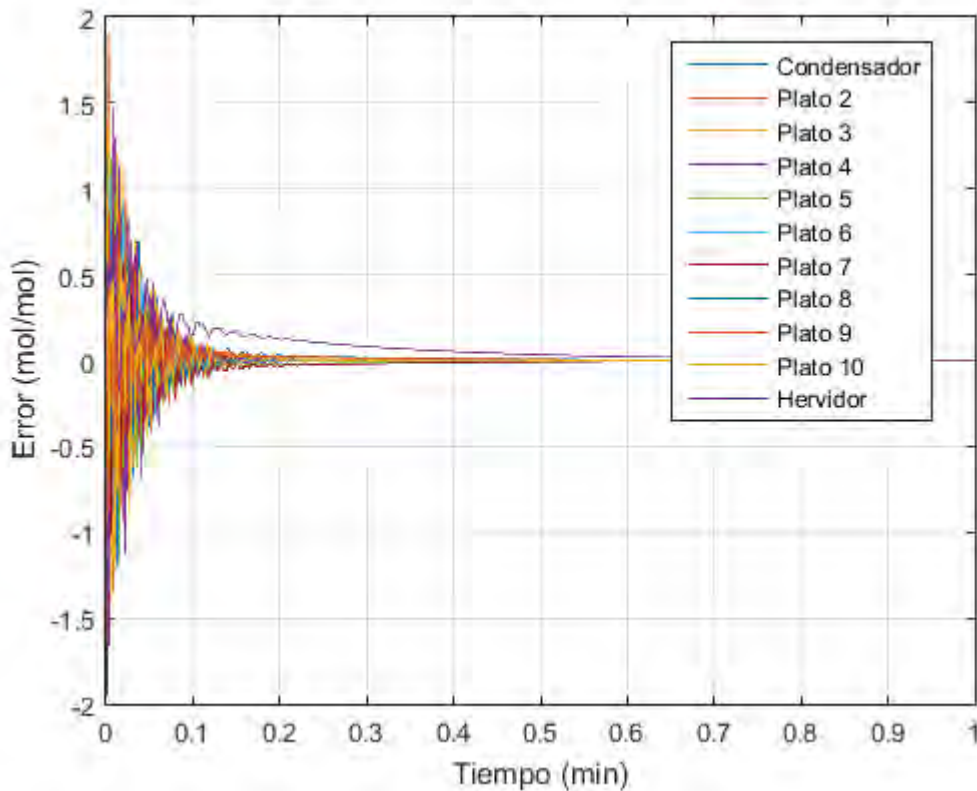


Figura 5.8 Acercamiento de la Figura 5.7

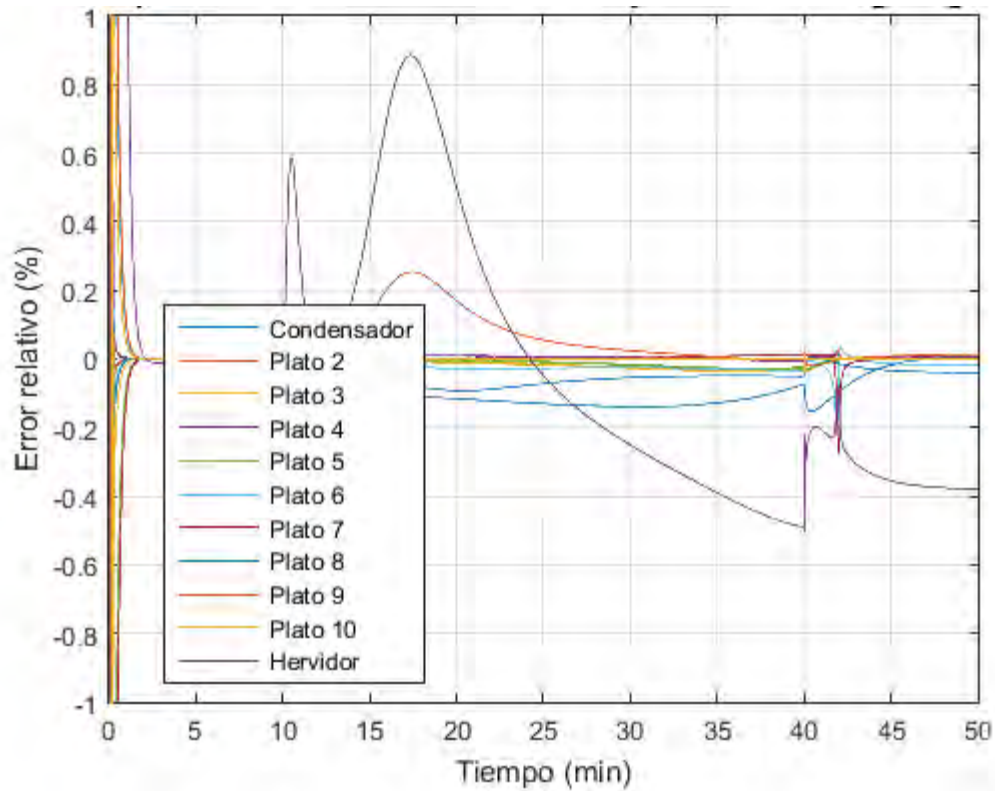


Figura 5.9 Error relativo el modelo no lineal y el observador Takagi – Sugeno

En la Sección 3.3.7, se trata el tema referente a estimar las temperaturas en los platos a partir de la concentración del elemento ligero, como se muestra en la Ecuación (3.14).

La Figura 5.10 y Figura 5.11 muestran la estimación de las temperaturas en los platos de la columna para el modelo no lineal y el observador, respectivamente. Como se mencionó anteriormente, la temperatura en los platos está directamente relacionada con las concentraciones, por lo que al conocer alguna es posible calcular la otra, Se observa que ambas figuras presentan el mismo comportamiento, siendo únicamente distintas al inicio de la simulación, debido a que las concentraciones del observador inician en cero, lo que ocasiona que el cálculo de la temperatura difiera con la del modelo no lineal.

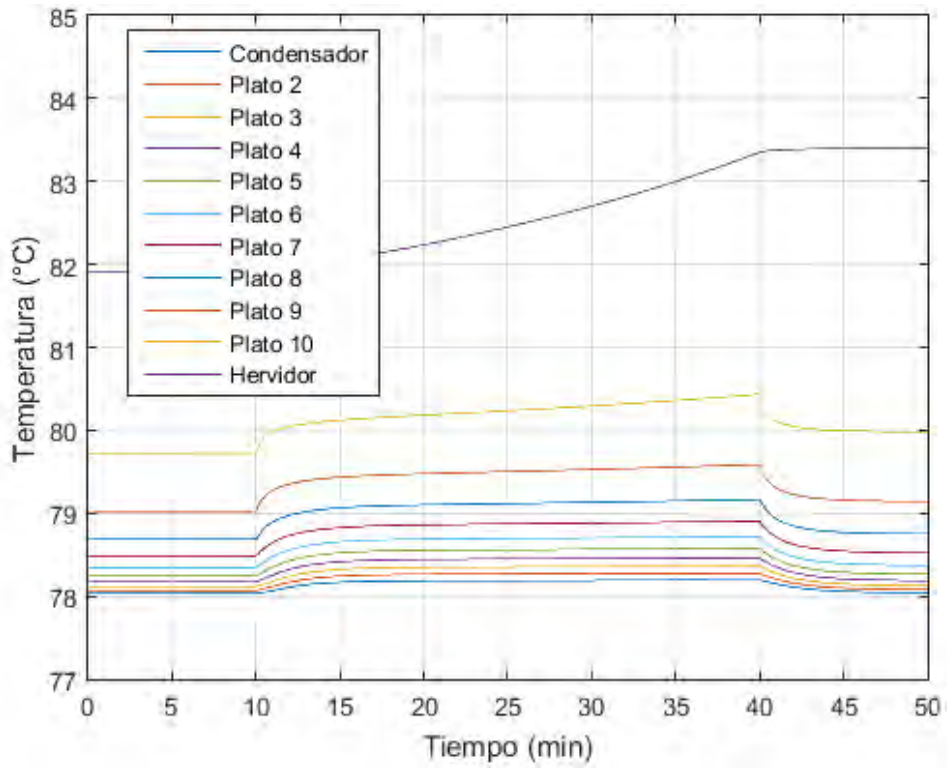


Figura 5.10 Temperatura en los platos del modelo no lineal

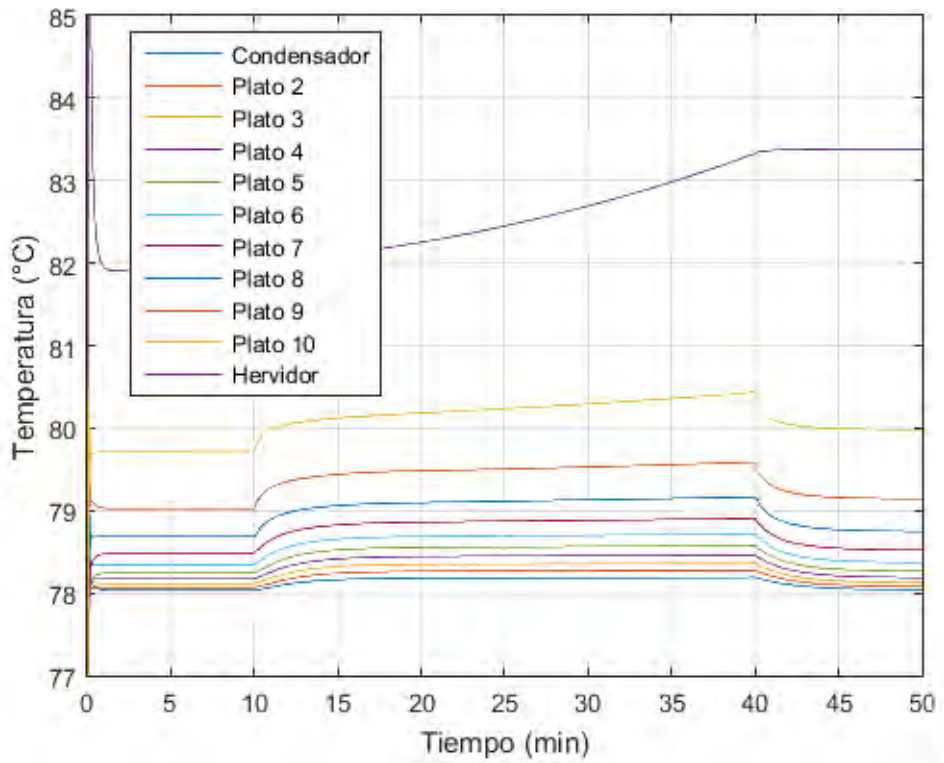


Figura 5.11 Temperatura en los platos del observador difuso Takagi – Sugeno

Finalmente, la Figura 5.12 muestra el error entre la temperatura de los platos del modelo no lineal y del observador difuso. Se observa que una vez que los estados convergen (alrededor del minuto 1 de la simulación, como se observa en la Figura 5.8, las temperaturas presentan un error máximo menor a 0.03 °C, siendo el hervidor el que exhibe una mayor discrepancia.

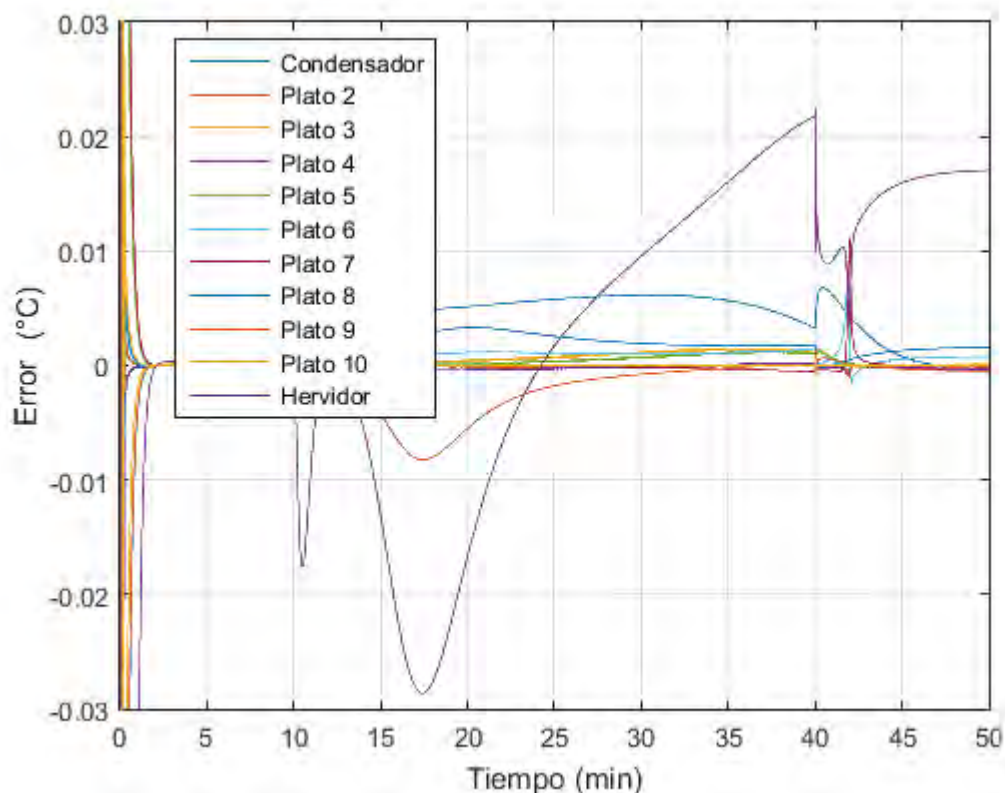


Figura 5.12 Error en las temperaturas de los platos del observador difuso respecto al modelo no lineal

## 5.5 Conclusión

Una vez desarrollado el modelo Takagi – Sugeno de la columna de destilación, el diseño del observador consiste únicamente en encontrar la matriz de ganancia de cada regla difusa, puesto que se utilizan las mismas premisas y funciones de pertenencia. Estas ganancias se obtienen al resolver un conjunto de desigualdades matriciales lineales, en las cuales se encuentra una matriz definida positiva que satisfaga estas desigualdades. Debido a que la solución no es trivial, se utilizan algoritmos iterativos para encontrarla.

El desempeño del observador difuso se evalúa al obtener el error entre los estados estimados y los estados reales (del modelo no lineal), el cual presenta errores máximos de 0.002 mol/mol para la concentración en los platos y de 0.03 °C para la temperatura en los mismos.

El hervidor es el plato de la columna que presenta el mayor error de estimación, posiblemente debido a que al abrir la válvula de reflujo, la concentración en cada uno de los platos superiores afectan directamente a los inferiores, los cuales van acumulando errores en la aproximación. Sin embargo, el condensador es el plato más relevante para las tareas de control, ya que la concentración en este plato es lo que se busca regular.

# Capítulo 6

## Conclusiones

### 6.1 Conclusiones Generales

La importancia de utilizar el modelado Takagi – Sugeno en la columna de destilación radica en que, tanto el análisis de sistemas lineales como el diseño de estrategias de control para éstos, evidencian una mayor simplicidad que su contraparte no lineal.

En esta tesis se presenta el diseño de un observador de estados difuso continuo para una columna de destilación de 11 platos tipo *batch* modelada en Takagi – Sugeno. La función del observador es estimar las fracciones molares del componente ligero de la mezcla etanol – agua a partir del modelo no lineal de la columna.

El modelo no lineal de la columna de destilación se compone de dos partes:

- Modelo termodinámico de la mezcla.
- Balance del componente ligero en cada uno de los platos.

El modelo termodinámico se utiliza para establecer el equilibrio líquido – vapor de la mezcla y a partir de éste se calculan las variables químicas que intervienen en el proceso de destilación, como lo son: presión de saturación, temperatura de la mezcla, fracción molar de vapor y líquido de cada uno de los componentes, entre otros. Debido a que la mezcla es no ideal, se utiliza el coeficiente de actividad propuesto por Johannes van Laar.

El modelo no lineal de la columna está compuesto por los modelos individuales de los platos, los cuales describen la dinámica del componente ligero en cada uno de ellos. Las entradas de la columna son: el porcentaje de reflujo y la potencia calorífica, mientras que las salidas son las concentraciones del elemento ligero en los platos. La potencia calorífica está directamente relacionada con la cantidad de destilado que se produce: a mayor potencia aplicada en el hervidor, mayor es el flujo de destilado; sin embargo, la concentración molar en los platos en estado estable no depende de esta entrada, sino de las propiedades de la mezcla en sí y de las características físicas de la columna. El reflujo está directamente relacionado con la pureza del destilado: a menor porcentaje de apertura en la válvula de

reflujo, mayor es la concentración molar del componente ligero en el destilado, es por ello que es deseable que la columna opere lo más cercano posible a la condición de reflujo total para producir un destilado con la mayor pureza posible.

A partir del modelo no lineal se obtuvo el modelo en espacio de estado, el cual continúa siendo un modelo no lineal; sin embargo, la representación en espacio de estado es necesaria para el modelado difuso propuesto por Takagi – Sugeno.

Las premisas que se determinaron convenientes de utilizar para el modelo difuso son: la concentración del elemento ligero en el hervidor, la concentración del mismo en el condensador y el porcentaje de apertura de la válvula de reflujo. Las razones de elegir éstas son:

- La concentración en el hervidor afecta directamente a la dinámica de todos los platos superiores. Una pobre estimación de esta variable produciría un error acumulativo en cada uno de los platos superiores.
- La concentración en el condensador es la variable más relevante para efectuar tareas de control, puesto que es frecuente que se requiera un destilado con concentración constante.
- El porcentaje de apertura de la válvula de reflujo es una entrada importante que, de la misma manera que el hervidor, afecta la concentración en todos los platos de la columna. Al abrir la válvula, las concentraciones en todos los platos disminuyen, debido a que se comienza a extraer mezcla del sistema como destilado.

Las funciones de membresía utilizadas son funciones trapezoidales, debido principalmente a su simplicidad matemática. Éstas también presentan una característica deseable en un conjunto difuso: pueden permanecer constantes para un rango amplio del universo de discurso, situación que no es posible con otro tipo de funciones como triangulares o gaussianas.

Así, el modelo Takagi – Sugeno de la columna de destilación está compuesto por 8 reglas, que equivalen a 8 subsistemas linealizados localmente en un punto de operación específico. La dinámica del modelo difuso es la suma ponderada de dichos subsistemas, donde la ponderación equivale a la pertenencia de las premisas en dicha regla. Es importante



aclarar que, aunque el modelo Takagi – Sugeno sea la suma de subsistemas lineales, éste sigue teniendo la dinámica de un modelo no lineal.

La respuesta del modelo difuso Takagi – Sugeno es una buena aproximación del modelo no lineal; sin embargo presenta errores de hasta el 6 % para las concentraciones en los platos, lo cual no es satisfactorio para realizar tareas de control.

Para corregir el error del modelo Takagi – Sugeno se propone el diseño un observador difuso, el cual está basado en las mismas 8 reglas que el modelo difuso. Las ganancias del observador se obtienen al resolver un conjunto de desigualdades lineales matriciales.

La convergencia del observador difuso, respecto al modelo no lineal, es muy buena. Se presentan errores menores al 1 % en las concentraciones, y un error máximo de 0.03 °C para las temperaturas.

Tanto concentración molar del componente ligero, como la temperatura en el condensador, son las variables de mayor importancia a la hora de realizar tareas de control. Esto se debe a que, con frecuencia, el objetivo de un proceso de destilación es producir un destilado con concentración constante. El observador difuso presenta errores de estimación en la concentración del condensador menores al 0.2 %, y en la temperatura menores a 0.01 °C, lo cual es suficiente para lograr una estrategia de control eficaz.

Debido a la longitud del documento, no se incluyen otras simulaciones con diferentes parámetros (porcentaje de apertura en la válvula de reflujo, concentración inicial en el hervidor). Sin embargo, se obtienen resultados similares al modificar los parámetros dentro del rango de las funciones de pertenencia propuestas.

## **6.2 Trabajos Futuros**

A continuación se enlistan los posibles trabajos que se pueden derivar a partir de la presente tesis:

- Validar experimentalmente el modelo de observador aquí propuesto.
- Desarrollar un modelo no lineal más complejo, que incluya factores como el cambio de presión dentro la columna, el intercambio del calor con el medio ambiente y la dinámica de los flujos molares y masas retenidas.

- Utilizar un mayor número de premisas y reglas para el modelo difuso Takagi – Sugeno, esto con la intención de mejorar la convergencia del modelo.
- Modificar el observador difuso para calcular las fracciones molares del componente ligero en los platos a partir de las mediciones de temperatura hechas por los sensores. Esto conlleva la modificación del polinomio de interpolación y las ganancias del observador difuso.
- Diseñar un controlador que ajuste el porcentaje de reflujo en el condensador, a fin de obtener un destilado con concentración constante.
- El observador aquí diseñado puede ser utilizado en tareas de diagnóstico de fallas y control tolerante a fallas.

# Apéndice A

## Observabilidad de Subsistemas

De manera informal, la observabilidad estudia la posibilidad de estimar los estados a partir de las salidas. Considere el sistema lineal descrito en espacio de estado con  $n$  variables de estado,  $p$  entradas y  $q$  salidas:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax(t) + Bu(t) \\ y &= Cx(t) + Du(t)\end{aligned}\tag{A.1}$$

donde:

$x \in \mathbb{R}^n$  es el vector de estados

$y \in \mathbb{R}^q$  es el vector de salida

$u \in \mathbb{R}^p$  es el vector de entradas o vector de control

$A$  es la matriz de estados,  $\dim(A) = n \times n$

$B$  es la matriz de entrada,  $\dim(B) = n \times p$

$C$  es la matriz de salida,  $\dim(C) = q \times n$

$D$  es la matriz de transmisión directa,  $\dim(D) = q \times p$

De manera formal, se dice que el sistema descrito en la Ec. (A.1) es **observable** si para una condición inicial desconocida  $x(0)$ , existe un tiempo finito  $t_1 > 0$  para el cual el conocimiento de la entrada  $u$  y de la salida  $y$  en  $[0, t_1]$  es suficiente para determinar el estado inicial  $x(0)$  de forma única. De lo contrario, el sistema es **no observable** (Chen, 1999).

En otras palabras, si un sistema es no observable, no es posible estimar los estados.

Los siguientes enunciados son equivalentes:

1. El par de dimensión  $n$   $(A, C)$  es observable.
2. La matriz de  $n \times n$

$$W_0(t) = \int_0^t e^{A^T \tau} C^T C e^{A \tau} d\tau$$

es no singular para cualquier  $t > 0$ .

3. La matriz de observabilidad de  $nq \times n$

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

es de rango  $n$  (rango columna completo).

4. La matriz de  $(n + q) \times n$

$$\begin{bmatrix} A - \lambda I \\ C \end{bmatrix}$$

tiene rango columna completo para cada valor propio  $\lambda$  de  $A$ .

Para comprobar la observabilidad de los subsistemas del modelo difuso se utilizó la matriz de observabilidad, la cual, para el sistema de la columna de destilación es:

$$\mathcal{O}_i = \begin{bmatrix} C \\ CA_i \\ CA_i^2 \\ CA_i^3 \\ CA_i^4 \\ CA_i^5 \\ CA_i^6 \\ CA_i^7 \\ CA_i^8 \\ CA_i^9 \\ CA_i^{10} \end{bmatrix} \quad (\text{A.2})$$

donde:

$\mathcal{O}_i$  es la matriz de observabilidad del subsistema  $i$ ,  $\dim(\mathcal{O}_i) = 121 \times 11$ .

$C$  es la matriz de salida,  $\dim(C) = 11 \times 11$ .

$A_i$  es la matriz de entrada del subsistema  $i$ ,  $\dim(A_i) = 11 \times 11$ .

Mediante MATLAB® se efectuaron las operaciones matriciales y posteriormente se calculó el rango de cada matriz de observabilidad, siendo los resultados los siguientes:

$$\text{rango}(\mathcal{O}_1) = 11,$$

$$\text{rango}(\mathcal{O}_2) = 11,$$

$$\text{rango}(\mathcal{O}_3) = 11,$$

$$\text{rango}(\mathcal{O}_4) = 11,$$

$$\text{rango}(\mathcal{O}_5) = 11,$$

$$\text{rango}(\mathcal{O}_6) = 11,$$

$$\text{rango}(\mathcal{O}_7) = 11,$$

$$\text{rango}(\mathcal{O}_8) = 11.$$

Por lo tanto se concluye que todos los subsistemas del modelo difuso son **observables**.



# Bibliografía

- Aguilera-González, A. (Agosto de 2008). Observador Continuo-Discreto para la Estimación de Concentraciones en una Columna de Destilación, para la Mezcla Etanol-Agua (Tesis de Maestría). Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico, Cuernavaca, Morelos, México.
- Aguilera-González, A., Astorga-Zaragoza, C. M., Adam-Medina, M., Theilliol, D., Reyes-Reyes, J., & García-Beltrán, C. D. (2013). Singular linear parameter-varying observer for composition estimation in a binary distillation column. *IET Control Theory & Applications*, 411-422.
- Aguilera-González, A., Téllez-Anguiano, A. C., Astorga-Zaragoza, C. M., Juárez-Romero, D., & Quintero-Mármol, E. (2010). Validación Experimental de un Observador de Alta Ganancia Constante Continuo-Discreto para una Columna de Destilación Binaria. *Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial RIAI*, 31-38.
- Atkins, P., & Paula, J. d. (2006). *Atkins' Physical Chemistry* (Octava ed.). Gran Bretaña: Oxford University Press.
- Bonissone, P. (1994). Fuzzy logic controllers: an industrial reality. *Computational Intelligence: Imitating Life*, 316-327.
- Chen, C.-T. (1999). *Linear System Theory and Design*. New York, EEUU, EEUU: Oxford University Press.
- Dejanovic, I., Matijasevic, L., & Olujic, Z. (2010). Dividing wall column - A breakthrough towards sustainable distilling. *Chemical Engineering and Processing*, 49, 559-580.
- Escamirosa Torres, A. (Noviembre de 2016). Estación de monitoreo y control de calidad aplicado a una columna de destilación empleando observadores (Tesis de Maestría), Instituto Tecnológico de Morelia, Morelia, Michoacán, México.
- Franco-Ocampo, D. F., & Franco-Mejía, E. (2016). Emulación de una columna de destilación binaria continua para propósitos de formación en control. *Revista UIS Ingenierías*, 14(2).

- Frattini Fileti, A. M., & Pereira Filho, R. (2002). The Development and Experimental Testing of a Fuzzy Control System for Batch Distillation. *Brazilian Journal of Chemical Engineering*.
- García, J. M. (2003). *Teoría y Ejercicios Prácticos de Dinámica de Sistemas*. Barcelona.
- Green, D. W., & Perry, R. H. (2008). *Perry's Chemical Engineers' Handbook* (Octava ed.). McGraw-Hill.
- Hangos, K. M. (2004). *Analysis and Control of Nonlinear Process Systems*. Springer.
- Hasebe, S., Abdul Aziz, B. B., Hashimoto, I., & Watanabe, T. (1992). Optimal Design and Operation of Complex Batch Distillation Column. *IFAC Workshop on Interactions Between Process Design and Process Control*.
- Hasebe, S., Kurooka, T., & Hashimoto, I. (1995). Comparison of the Separation Performances of a Multi-Effect Batch Distillation System and a Continuous Distillation System. *Preprints IFAC Symposium DYCORDER*, 249-254.
- Hellendoorn, H. (1993). Design and development of fuzzy systems at siemens R&D. *International Conference on Fuzzy Systems*, 1365-1370.
- Heras-Cervantes, M., Téllez-Anguiano, A. C., García Ramírez, M. C., Astorga-Zaragoza, C. M., & Reyes Archundia, E. (2015). Validación experimental de un Observador de Alta Ganancia Reconfigurable para una columna de destilación. *Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial RIAI*, 397-407.
- Heras-Cervantes, M., Téllez-Anguiano, A. C., García Ramírez, M. C., Gutiérrez-Gnecchi, J. A., Fernández-Munoz, O., & Olivares-Peregrino, V. H. (2013). Comparative analysis of high-gain observers applied to a distillation column. *Power, Electronics and Computing (ROPEC), 2013 IEEE International Autumn Meeting*, 1-5.
- Hirota, K. (1993). *Industrial Applications of Fuzzy Technology*. Springer.
- Holmblom, L. P., & Ostergaard, J. J. (1982). Control of a cement kiln by fuzzy logic. *Fuzzy Information and Decision Processes*, 389-399.
- Jana, A. K. (2016). A new divided-wall heat integrated distillation column (HIDiC) for batch processing: Feasibility and analysis. *Applied Energy*, 176, 199-206.
- Kalman, R. E. (1960). A New Approach to Linear Filtering. *Journal of Basic Engineering*, 35-45.



- Kalman, R. E., & Bucy, R. S. (1961). New Results in Linear Filtering and Prediction Theory. *Journal of Basic Engineering*, 95-108.
- Kamal-eddine, R., Najib, B., & Soumia, E. (2016). Full-order observer for large-scale systems applications to industrial process. *Electrical and Information Technologies (ICEIT)*, 2016 International Conference, 319-325.
- Kim, C., & Friedly, J. C. (1974). Approximate dynamic modeling of large staged systems. *Industrial and Engineering Chemistry*, 177-181.
- Kister, H. Z. (1990). *Distillation Operation*. McGraw-Hill.
- Kister, H. Z. (1992). *Distillation Design*. McGraw-Hill.
- López-Estrada, F. R. (Febrero de 2008). *Caracterización y Validación Dinámica de una Planta Piloto de Destilación (Tesis de Maestría)*. Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico, Cuernavaca, Morelos, México.
- López-Saucedo, E. S., Grossmann, I. E., Segovia-Hernández, J. G., & Hernández, S. (2016). Rigorous modeling, simulation and optimization of a conventional and nonconventional batch reactive distillation column: A comparative study of dynamic optimization approaches. *Chemical Engineering Research and Design*, 83-99.
- Luenberger, D. G. (1964). Observing the State of a Linear System. *IEEE Transactions on Military Electronics*, 74-80.
- Maiti, D., Jana, A. K., & Samanta, A. N. (2011). A novel heat integrated batch distillation scheme. *Applied Energy*, 88, 5221-5225.
- Mamdani, E. H., & Assilian, S. (1975). An experiment in linguistic synthesis with a fuzzy logic controller. *International Journal of Man-Machine Studies*, 7, 1-13.
- McCabe, W. L., & Thiele, E. W. (1925). *Graphical Design of Fractionating Columns*. *Industrial and Engineering Chemistry*, 605-611.
- Miccio, M., & Cosenza, B. (2014). Control of a distillation column by type-2 and type-1 fuzzy logic PID controllers. *Journal of Process Control*, 475-484.
- Morrison, R. T., & Boyd, R. N. (1992). *Organic Chemistry*. Prentice Hall.
- Naidu, D. S. (2003). *Optimal Control Systems*. CRC Press.
- Oisiovici, R. M., & Cruz, S. L. (2000). State estimation of batch distillation columns using an extended Kalman filter. *Chemical Engineering Science*, 55, 4667-4680.

- Ortiz-Torres, G., Escobar, R. F., Adam-Medina, M., Astorga-Zaragoza, C. M., & Guerrero-Ramírez, G. V. (2016). Control Tolerante a Fallas Activo en Sensores y Actuadores: Aplicación a una Columna de Destilación. *Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial RIAI*, 67-79.
- Pan, S., Su, H., Li, P., & Gu, Y. (2009). State estimation for batch distillation operations with a novel extended Kalman filter approach. *Decision and Control, 2009 held jointly with the 2009 28th Chinese Control Conference. CDC/CCC 2009. Proceedings of the 48th IEEE Conference*, 1884-1889.
- Perla, R., Mukhopadhyay, S., & Samanta, A. N. (2004). Sensor fault detection and isolation using artificial neural networks. *TENCON 2004. 2004 IEEE Region 10 Conference*, 500, 676-679.
- Perrot, P. (1998). *A to Z of Thermodynamics*. Oxford University Press.
- Radke, A., & Gao, Z. (2006). A Survey of State and Disturbance Observers for Practitioners. *American Control Conference*.
- Robinson, C. S., & Gilliland, E. R. (1950). *Elements of Fractional Distillation* (Cuarta ed.). New York: McGraw-Hill.
- Rosenbrock, H. H. (1962). The control of distillation. *Transactions of the Institution of Chemical Engineers*, 40, 35-53.
- Rousseau, R. W. (1987). *Handbook of Separation Process Technology*. EEUU: John Wiley & Sons.
- Safdarnejad, S. M. (2016). Dynamic Parameter Estimation and Optimization for Batch Distillation. *Computers & Chemical Engineering*, 86, 18-32.
- Santhanam, S., & Langari, R. (1994). Supervisory fuzzy adaptive control of a binary distillation column. *International Conference on Fuzzy Systems*, 1063-1068.
- Silberberg, P., & Amateis, M. (2015). *Chemistry The Molecular Nature of Matter and Change*. McGraw-Hill.
- Singh, A. K., & Tyagi, B. (2011). Comparative performance analysis of Fuzzy Logic Controller for the Composition control of Binary Distillation Column. *Recent Advances in Intelligent Computational Systems (RAICS)*, 515-519.

- Skogestad, S. (1997). Dynamics and Control of Distillation Columns - A Critical Survey. *Modeling, Identification and Control*, 18, 177-217.
- Skogestad, S. (1997). Dynamics and Control of Distillation Columns: A Tutorial Introduction. *Trans. IChemE*, 75.
- Skogestad, S., & Morari, M. (1988). Understanding the Dynamic Behavior of Distillation Columns. *Industrial & Engineering Chemistry Research*, 18, 1848-1862.
- Skogestad, S., Wittgens, B., Sorensen, E., & Litto, R. (1996). Multivessel Batch Distillation. *AIChE Journal*.
- Tanaka, K., & Wang, H. O. (2001). *Fuzzy Control Systems Design and Analysis*. New York: John Wiley & Sons, Inc.
- Tani, T., & Utashiro, M. (1994). Application of practical fuzzy-PID hybrid control system to petrochemical plant. *International Conference on Fuzzy Systems*, 1211-1216.
- Targui, B., Hammouri, H., & Farza, M. (2001). Observer design for a class of multi-output nonlinear systems - Application to a distillation column. *Proceedings of the 40th IEEE Conference on Decision and Control*, 3352-3357.
- Treybal, R. E. (1981). *Mass-Transfer Operations* (Tercera ed.). McGraw-Hill.
- Uyazán, A., & Gil, I. (2006). Producción de alcohol carburante por destilación extractiva: Simulación del proceso con glicerol. *Ingeniería e Investigación*, 26.
- Valvano, J. W. (2011). *Embedded Microcomputer Systems: Real Time Interfacing*. CL-Engineering.
- Vasičkaninová, A., & Bakošová, M. (2016). Fuzzy Control of a Distillation Column. *European Symposium on Computer Aided Process Engineering – ESCAPE 26*.
- Yasunobu, S., & Miyamoto, S. (1985). Automatic train operation system by predictive fuzzy control. *Industrial Applications of Fuzzy Control*, 1-18.
- Yusof, R., Ibrahim, M. F., & Khalid, M. (2004). Fuzzy modelling for reboiler system. *TENCON 2004. 2004 IEEE Region 10 Conference*, 500, 633-636.
- Zadeh, L. A. (1965). Fuzzy Sets. *Information and control*, 338-353.
- Zadeh, L. A. (1996). *Fuzzy sets, fuzzy logic, and fuzzy systems: selected papers by Lotfi A Zadeh*. World Scientific.

- Zhao, J., Wang, B., Bai, P., Guo, X., & Ding, H. (2016). Intermittent feeding batch distillation with liquid exchange between two columns for separation of binary mixtures. *Chemical Engineering and Processing: Process Intensification*, 99, 41-50.
- Zou, Z., Yu, D., Hu, Z., Guo, N., Yu, L., & Feng, W. (2006). State Space Modeling and Predictive Control of a Binary Batch Distillation Column. *Proceedings of the 6th World Congress on Intelligent Control and Automation*.