UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN NICOLÁS DE HIDALGO

FACULTAD DE INGENIERÍA ELÉCTRICA
DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO

DISEÑO, ANÁLISIS Y COMPARACIÓN DE UN OBSERVADOR DIFUSO Y UNO DIFUSO CON MODOS DESLIZANTES PARA UNA COLUMNA DE DESTILACIÓN.

TESIS

Que para obtener el grado de:

MAESTRO EN CIENCIAS EN INGENIERÍA ELÉCTRICA

Presenta:

Gilberto Francisco Orozco Hernández

Director de Tesis:

Doctor en Ciencias en Ingeniería Eléctrica

Juan Anzurez Marín

Morelia, Michoacán, México
Marzo de 2018

DISEÑO, ANÁLISIS Y COMPARACIÓN DE UN OBSERVADOR DIFUSO Y UNO DIFUSO CON MODOS DESLIZANTES PARA UNA COLUMNA DE DESTILACIÓN

Los Miembros del Jurado de Examen de Grado aprueban la **Tesis de Maestría en Ciencias en Ingeniería Eléctrica** de ***Gilberto Francisco Orozco Hernández***

Dr. Roberto Tapia Sánchez
Presidente del Jurado

Dr. Juan Anzurez Marín
Director de Tesis

Dr. Fernando Ornelas Téllez
Vocal

Dr. Antonio Ramos Paz
Vocal

Dra. Adriana del Carmen Téllez Anguiano
Revisor Externo (ITM)

Dr. Félix Calderón Solorio
Jefe de la División de Estudios de Posgrado de la Facultad de Ingeniería Eléctrica. UMSNH.
(Por reconocimiento de firmas)

UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN NICOLÁS DE HIDALGO
Octubre 2017

Dedicatoria

A mis padres,hermanos y amigos

Agradecimientos

A mis padres Raquel Hernández y Paulo Orozco, que siempre me han apoyado y confiado completamente en mí, gracias por su valioso apoyo y sustento, porque sin ellos esto no hubiera sido posible.

A mis hermanos Guadalupe Orozco y Pablo Orozco, por su gran y constante apoyo.

A mi asesor Dr. Juan Anzurez Marín, por todas sus enseñanzas, por brindarme su confianza y por darme la oportunidad de impartir clases.

A la Dra. Adriana del Carmen Téllez Anguiano, por todos sus consejos, su confianza y por su valiosa ayuda para la realización de esta tesis.

A mi amigo Baldwin Cortés, por todas las cosas que hemos vivido juntos durante nuestra formación académica.

A mi amigo Mario Heras, por todos sus consejos, por su gran ayuda en el desarrollo de esta tesis y por su incondicional apoyo.

A mis profesores del posgrado y sinodales Dr. Roberto Tapia, Dr. Fernando Ornelas Téllez y Dr. Antonio Ramos Paz, por todo el conocimiento que compartieron conmigo.

Debo agradecer también al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (Conacyt), por la beca otorgada que hizo posible la realización de esta tesis.

Por ultimo a todos mis compañeros de maestría, porque siempre estaban dispuestos a colaborar conmigo.

Resumen

En esta tesis se presenta el diseño, análisis y comparación de un observador difuso y un observador difuso con modos deslizantes para una columna de destilación de 11 platos operada en modo por lotes (tipo batch), empleando una mezcla binaria de Etanol-Agua; la columna de destilación se encuentra instalada en el Instituto Tecnológico de Morelia.

Primero se obtiene el modelo no lineal que representa la dinámica de las concentraciones molares líquidas del elemento más volátil (etanol). A partir de este modelo no lineal se plantea una representación en espacio de estados, de la cual se deriva un modelo difuso Takagi-Sugeno, el cual es capaz de reproducir la dinámica del modelo no lineal mediante la suma ponderada de distintos subsistemas lineales.

El modelo difuso cuenta con 8 subsistemas determinados por tres variables premisas: el porcentaje de apertura de la válvula de reflujo, la concentración molar líquida del elemento más volátil presente en el hervidor, y la concentración molar líquida del elemento más volátil en el condensador.

A partir del modelo difuso Takagi-Sugeno se diseñó un observador difuso, el cual es utilizado para estimar las concentraciones líquidas del elemento más volátil en los platos de la columna de destilación. Se realiza un análisis de convergencia utilizando desigualdades lineales matriciales (LMIs). Mediante la incorporación de un término de estructura variable o modos deslizantes al observador difuso, se redujo el tiempo de convergencia y el error en estado estable.

Finalmente, se realizan distintas simulaciones para comprobar la convergencia de ambos observadores y la respuesta de estos ante la entrada de perturbaciones al sistema.

Palabras Clave: *Observador difuso*, *Modos deslizantes*, *Columna*, *Destilación*, *Takagi-Sugeno*

Abstract

In this thesis, the design, analysis and comparison of a fuzzy observer and a sliding-mode fuzzy observer for an 11-plate distillation column operated in batch mode is presented. A binary Ethanol-Water mixture is used. The distillation column is installed at the Instituto Tecnológico de Morelia.

First, a nonlinear model which represents the dynamic of liquid molar concentrations of the more volatile element (ethanol) is obtained. From this nonlinear model, a state-space representation is formulated, which is used to derive a fuzzy Takagi-Sugeno model that is capable of reproducing the dynamic of the nonlinear model through the weighted sum of separate linear subsystems.

The fuzzy model consists of 8 subsystems determined by three variables: aperture percentage of the reflux valve, liquid molar concentration of the more volatile element in the boiler, and liquid molar concentration of the more volatile element in the condenser.

From the fuzzy Takagi-Sugeno model, a fuzzy observer was designed, which is used to estimate the liquid concentrations of the more volatile element in the plates of the distillation column. A convergence analysis using linear matrix inequalities (LMIs) is performed. With the incorporation of a variable structure term or sliding modes to the fuzzy observer, the convergence time and the steady-state error were reduced.

Finally, different simulations are carried out to verify the convergence of both observers and their response to disturbances in the system.

Keywords: *Fuzzy observer*, *Sliding modes*, *Column*, *Destilation*, *Takagi-Sugeno*

Contenido

Resumen vii

Abstract ix

Lista de Figuras xv

Lista de Tablas xix

1 Introducción **1**

1.1 Descripción del Problema 1

1.2 Estado del Arte 1

1.3 Objetivos de la Tesis 4

1.3.1 Objetivo General 4

1.3.2 Objetivos Particulares 4

1.4 Justificación 5

1.5 Aportaciones 6

1.6 Descripción de Capítulos 6

1.7 Lista de Publicaciones 7

2 Antecedentes **9**

2.1 Destilación 9

2.1.1 Aplicaciones en la Industria 11

2.1.2 Tipos de Destilación 11

2.2 Columna de Destilación Fraccionada Tipo Batch 17

2.2.1 Resistencia Calefactora 17

2.2.2 Hervidor 17

2.2.3 Condensador 18

2.2.4 Platos Intermedios 18

2.2.5 Reflujo 19

2.2.6 Descripción de un Proceso 19

2.2.7 Modelos de Columnas de Destilación 20
2.3 Modelo Difuso 20
2.3.1 Conjuntos Difusos 21
2.3.2 Modelado Takagi-Sugeno 21
2.3.3 Modelo Takagi-Sugeno 23
2.4 Modos deslizantes 25
2.5 Conclusión 27

3 Modelo de una Columna de Destilación Empleando una Mezcla Binaria 29

3.1 Descripción Física de la Columna de Destilación. 29
3.2 Modelo Matemático 30
3.2.1 Equilibrio de Fases Vapor-Líquido 30
3.2.2 Consideraciones del Sistema 32
3.3 Modelo Basado en Balance de Componente 32
3.3.1 Condensador 32
3.3.2 Platos Intermedios 33
3.3.3 Hervidor 33
3.3.4 Modelo Completo del Sistema 33
3.3.5 Volatilidad Relativa 34
3.3.6 Volatilidad Relativa para Mezclas Ideales 35
3.3.7 Volatilidad Relativa para Mezclas no Ideales 36
3.4 Modelo Difuso de una Columna de Destilación 38
3.4.1 Variables Premisas 39
3.4.2 Reglas Difusas 39
3.5 Conclusión 42

4 Diseño de Observadores y Caso de Estudio 43

4.1 Observadores de Estado 43
4.1.1 Observador Luenberger 44
4.2 Observador Difuso 45
4.3 Observador Difuso con Modos Deslizantes 46
4.3.1 Observador con Modos Deslizantes 46
4.3.2 Observador Difuso con Modos Deslizantes 48
4.4 Caso de Estudio 49

4.4.1 Modelo no Lineal 50
4.4.2 Modelo Difuso Takagi-Sugeno 52
4.4.3 Observador Difuso 55
4.4.4 Observador Difuso con Modos Deslizantes 57
4.5 Simulación 59
4.5.1 Modelo no Lineal 59
4.5.2 Perturbaciones al Sistema. 61
4.5.3 Observador Difuso 62
4.5.4 Observador con Modos Deslizantes 67
4.5.5 Análisis Comparativo de los Observadores 71
4.6 Conclusión 74

5 Conclusiones **77**

5.1 Conclusiones Generales 77
5.2 Trabajos Futuros 79

A Subsistemas y Ganancias **80**

A.1 Subsistemas del Modelo Difuso 80
A.2 Ganancias del Observador Difuso 84
A.3 Ganancias del Observador Difuso con Modos Deslizantes 87

Referencias **91**

Lista de Figuras

2.1 Destilación al vacío. 13

2.2 Destilación extractiva. 14

2.3 Destilación tipo batch para refinacón de petróleo. 16

2.4 Hervidor de columna de destilación tipo batch. 18

2.5 Condensador de columna de destilación tipo batch. 18

2.6 Cuerpo de columna de destilación tipo batch. 19

2.7 Sectores de no linealidad. (a)Sector de no linealidad global, (b)Sector de no linealidad local. 22

2.8 Diseño para un modelo Takagi-Sugeno. 22

2.9 Trayectorias en un SEV. (a)Conmutación a frecuencia infinita, (b)Conmutación a frecuencia finita. 27

3.1 Columna de destilación tipo batch. 30

3.2 Diagrama de equilibrio para una mezcla Etanol-Agua en función de la temperatura a una presion de 1013.25 hPa. 31

3.3 Concepto del equilibrio de fases. 31

3.4 Función de membresía propuesta para las reglas difusas. 40

4.1 Estructura básica de un observador. 44

4.2 Funciones de membresía para las variables premisas. (a)Función de membresía para la concentración en el condensador, (b)Función de membresía para la concentración en el hervidor, (c)Función de membresía para el reflujo. 53

4.3 Señales de entrada al sistema. (a)Señal de reflujo, (b)Señal de potencia calórica. 59

4.4 Concentraciones en estado estable. 60

4.5 Señales de entrada al sistema.(a)Señal de reflujo, (b)Señal de potencia calórica. 60

4.6 Dinámica del modelo no lineal sin perturbaciones. 61

4.7 Producto destilado extraído de la mezcla Etanol-Agua. 61

4.8 Escalón de temperatura, utilizado como perturbación en los sensores. 62

4.9 Simulación del observador difuso. (a)Observador difuso, (b)Acercamiento al plato 2. 62

4.10 Simulación del observador difuso con condiciones iniciales distintas. (a)Observador difuso, (b)Acercamiento al transitorio, (c)Acercamiento al plato 4. 63

4.11 Simulación del observador difuso con una perturbación en la concentración de un plato.(a)Observador difuso, (b)Acercamiento al plato 6. 64

4.12 Simulación del observador difuso con 2 perturbaciones en las concentraciones de los platos. (a)Observador difuso, (b)Acercamiento a los platos 1 y 11. 65

4.13 Simulación del observador difuso con 3 perturbaciones en las concentraciones de los platos. (a)Observador difuso, (b)Acercamiento a los platos 4, 6 y 8 65

4.14 Simulación del observador difuso con 5 perturbaciones en las concentraciones de los platos. (a)Observador difuso, (b)Acercamiento a los platos 2, 4, 6, 8 y 10 66

4.15 Simulación del observador difuso con 7 perturbaciones en las concentraciones de los platos.(a)Observador difuso, (b)Acercamiento a los platos 1, 2, 4, 6, 8, 10 y 11 66

4.16 Simulación del observador difuso con condiciones iniciales distintas. (a)Observador difuso con modos deslizantes, (b)Acercamiento al plato 2. 67

4.17 Simulación del observador difuso con modos deslizantes con condiciones iniciales distintas. (a)Observador difuso con modos deslizantes, (b)Acercamiento al transitorio, (c)Acercamiento al plato 4. 68

4.18 Simulación del observador difuso con modos deslizantes con una perturbación en la concentración de un plato. (a)Observador difuso con modos deslizantes, (b)Acercamiento al plato 6. 69

4.19 Simulación del observador difuso con modos deslizantes con 2 perturbaciones en las concentraciones de los platos. (a)Observador difuso con modos deslizantes, (b)Acercamiento a los platos 1 y 11. 69

4.20 Simulación del observador difuso con modos deslizantes con 3 perturbaciones en las concentraciones de los platos. (a)Observador difuso con modos deslizantes, (b)Acercamiento a los platos 4, 6 y 8. 70

4.21 Simulación del observador difuso con modos deslizantes con 5 perturbaciones en las concentraciones de los platos. (a)Observador difuso con modos deslizantes, (b)Acercamiento a los platos 2, 4, 6, 8 y 10. 70

4.22 Simulación del observador difuso con modos deslizantes con 7 perturbaciones en las concentraciones de los platos. (a)Observador difuso con modos deslizantes, (b)Acercamiento a los platos 1, 2, 4, 6, 8, 10 y 11. 71

Lista de Tablas

3.1 Reglas difusas 41

4.1 Constantes de Antoine. 52

4.2 Masas retenidas en los platos. 52

4.3 Entalpias de la mezcla y presión dentro de la columna. 52

4.4 Máximos y mínimos para las funciones de membresía. 53

4.5 Parámetros para la simulación 59

4.6 Parámetros para las simulaciones. 59

4.7 Condiciones iniciales del observador difuso. 63

4.8 Condiciones iniciales del observador difuso con modos deslizantes. 68

4.9 Tiempos de convergencia con condiciones inicales distintas. 71

4.10 Tiempo de convergencia después de una perturbación. 72

4.11 Comparación de los observadores con condiciones iniciales distintas 72

4.12 Comparación de los observadores sin perturbaciones 72

4.13 Comparación de los observadores con una perturbación en el plato 6. 73

4.14 Comparación de los observadores con dos perturbaciones en los platos 1 y 11 73

4.15 Comparación de los observadores con tres perturbaciones en los platos 4, 6 y 8 74

4.16 Comparación de los observadores con cinco perturbaciones en los platos 2, 4, 6, 8 y 10 74

4.17 Comparación de los observadores con siete perturbaciones en los platos 1, 2, 4, 6, 8, 10 y 11 74

Capítulo 1

Introducción

1.1. Descripción del Problema

Como caso de estudio en la presente tesis se toma una columna de destilación fraccionada tipo batch con una mezcla binaria de Etanol-Agua ubicada en el Instituto Tecnológico de Morelia, la cual se compone de 11 platos: 1 condensador, 9 platos intermedios y 1 hervidor.

En la columna de destilación la concentración molar es difícil de medir ya que los sensores necesarios tienen un precio muy elevado y no son capaces de medir la concentración en línea, para lo cual se propone utilizar un observador de estados para estimar la variable bajo estudio.

Debido a la complejidad del diseño de un observador no lineal para la columna de destilación binaria, en esta tesis se propone utilizar modelos difusos tipo Takagi-Sugeno, lo cual permite utilizar técnicas de diseño para sistemas lineales.

1.2. Estado del Arte

En la literatura se encuentran técnicas de modelado y control aplicadas a columnas de destilación para diferentes objetivos y metodologías como estimadores, observadores, sistemas de detección de fallas, sistemas de control; con la finalidad de mejorar la calidad del producto, la velocidad de operación, la seguridad del usuario, entre otras.

Modelos de Columnas de Destilación

Un modelo es la representación dinámica de un proceso de manera matemática. En el área de control, los procesos son representados en función de modelos, por lo que es necesario conocer y entender su comportamiento. Los procesos químicos, en especial, cuentan con complicadas características como la no linealidad, un gran dimensionamiento y la interacción entre variables dificultando el modelado, por lo que es necesario tomar ciertas consideraciones que simplifiquen el modelo.

A lo largo de los años, en la literatura se han reportado diferentes modelos matemáticos con la finalidad de mejorar la comprensión dinámica de las columnas de destilación. Algunos modelos lineales y no lineales son modelos simples donde la cantidad de variables son pocas y las ecuaciones son de bajo orden, facilitando el diseño e implementación de controladores, así como el uso de herramientas computacionales.

Skogestad en [Skogestad, 1997] presenta un modelo simplificado de una columna de destilación basándose en el equilibrio líquido-vapor para una mezcla binaria, donde modela todos los elementos de la columna como platos del cuerpo de la columna por igual.

El modelo de Cingara y Jovanovic [Cingara *et al.*, 1990] se basa en la existencia de flujos molares de líquido y vapor, internos y externos, que varían en cada plato (estado). Las composiciones del producto de fondo y del producto destilado se estiman usando el modelo dinámico basado en los balances de materia y componente.

Los autores en [Kienle, 2000] presentan un modelo de bajo orden de una destilación multicomponente ideal utilizando la teoría de propagación de ondas no lineales. De la misma forma, los autores en [Balasubramhanya y Doyle Iii, 2000] presentan un modelo de bajo orden para una columna de destilación multicomponente reactiva, además diseñan un control predictivo (MPC) para obtener la mejor calidad del producto destilado.

Los modelos rigurosos son modelos más completos debido a que representan de manera más específica, nivel por nivel o plato por plato, el equilibrio de fases en cada elemento de la columna de destilación (hervidor, condensador, plato). En estos modelos las expresiones matemáticas están determinadas por una serie de ecuaciones diferenciales dadas por los balances de masa del componente ligero o de energía que son dependientes de la aplicación, la estrategia de control o el tipo de operación. Una ventaja importante que se tiene con este tipo de modelado es la alta resolución de la dinámica, pero tiene la desventaja de conjuntar un mayor número de variables y expresiones que dificultan tanto el diseño e implementación de controladores como la simulación.

En [Osuolale y Zhang, 2016] se presenta un modelo basado en redes neuronales con el objetivo de optimizar la eficiencia de energía en una columna de destilación binaria. Los autores en [Lopez-Saucedo *et al.*, 2016] presentan la simulación y optimización de

un modelado riguroso de una columna de destilación reactiva tipo batch convencional y no convencional. Los autores en [Astorga *et al.*, 2006] y [Heras-Cervantes *et al.*, 2015] presentan observadores del alta ganancia para estimar la concentración del componente ligero en una columna de destilación continua utilizando un conjunto de modelos para cada plato de la columna. En [Heras-Cervantes *et al.*, 2013] se presenta una comparación de observadores de alta ganancia para estimar temperaturas y concentraciones en cada plato basados en un modelo no lineal de una columna de destilación con alimentación continua. La representación o identificación paramétrica es otra metodología para estimar ciertos variables de las columnas de destilación como se presenta en [Zhu, 1999] y [Safdarnejad *et al.*, 2016].

El modelado difuso Takagi-Sugeno es una herramienta para el modelado y control de sistemas complejos utilizando el concepto de descomposición de un sistema no lineal en una estructura multi-modelos compuesta por modelos lineales y no necesariamente independientes y de lógica difusa [Johansen y Murray-Smith, 1997]-[Angelov y Filev, 2004], donde la representación del sistema no lineal se logra mediante una sumatoria ponderada de todos los subsistemas. La representación Takagi-Sugeno provee una solución para resolver la problemática en diseño e implementación de estrategias de control para sistemas no lineales, como en [Wang *et al.*, 1995], propone una metodología para diseñar técnicas de control para sistemas representados de la forma Takagi-Sugeno.

Debido a la estrecha relación entre la representación difusa de sistemas no lineales y la teoría de desigualdades matriciales lineales se han desarrollado trabajos basados simultáneamente en ambas técnicas, debido a que permiten encontrar soluciones a los cálculos correspondientes a ganancias de controladores, ganancias de observadores y análisis de estabilidad de Lyapunov [Tanaka y Sugeno, 1992].

Observadores

Entre los trabajos más importantes relacionado con observadores se encuentra [Lopez-Estrada *et al.*, 2015], donde los autores presentan un observador en tiempo discreto del tipo D-LPV como estimador de estados, estimador de fallas para sensores y actuadores, utilizando el enfoque de H_∞ aplicado al error de estimación. El observador es validado en simulación con datos reales de un proceso en una columna de destilación.

En [Quintero-Marmol *et al.*, 1991], los autores presentan un par de observadores Luenberger extendido (orden completo y orden reducido) para estimar las concentraciones de una mezcla multicomponente a partir de mediciones de temperaturas de los platos de una columna de destilación. La ganancia de los observadores son calculadas a partir de la ubicación de los eigenvalores en lazo cerrado utilizando un software matemático. Los resultados presentados son simulaciones para demostrar su desempeño. La problemática presentada es debida a la volatilidad relativa y a las condiciones iniciales del observador.

En [Lang y Gilles, 1990] se presenta un observador no lineal de orden completo para estimar las concentraciones y temperaturas de una columna de destilación. El modelo utilizado, es un modelo no lineal obtenido por el balance de materia en cada plato de la columna, dando como resultado un conjunto de ecuaciones diferenciales de alto orden y con términos no lineales. El observador es validado en simulación para mostrar su comportamiento y su robustez.

Los observadores de alta ganancia también han sido reportados en la literaura. En [Hammouri *et al.*, 2002] se presenta el diseño de un observador de alta ganancia para sistemas con estructura triangular. También se presenta una metodología para el cálculo de la ganancia del observador. Como caso de estudio se tiene a una columna de destilación y se valida en simulación. En [Téllez-Anguiano *et al.*, 2009] se presenta la validación experimental del observador de alta ganancia constante para la estimación de la concentración del componente ligero de la mezcla Etanol-Agua en una columna de destilación. La ventaja que presentan es el cálculo de la ganancia constante a partir de pocos parámetros de las desigualdadades algebraicas de Ricatti. En [Téllez-Anguiano *et al.*, 2012] se presenta la versión continuo-discreta del observador de alta ganancia constante aplicado también en una columna de destilación.

En [Cortés-Hernández, 2017] se presenta el diseño de un observador difuso Takagi-Sugeno para una columna de destilación operada en el modo por lotes (*batch*) para una mezcla Etanol-Agua. El observador es utilizado para estimar las fracciones molares de etanol líquido en todos los platos de la columna, por lo que se trata de un observador de orden completo.

1.3. Objetivos de la Tesis

1.3.1. Objetivo General

Diseñar y realizar un análisis comparativo de los observadores: difuso y difuso con modos deslizantes para estimar la concentración del componente ligero y las temperaturas en los platos de una columna de destilación, empleando una mezcla binaria con la finalidad de seleccionar un observador adecuado para el diseño de sistemas de detección de fallas en sensores.

1.3.2. Objetivos Particulares

- Diseñar y simular un modelo no lineal para una columna de destilación binaria.
- Diseñar un modelo difuso Takagi-Sujeno a partir del modelo no lineal de la columna

de destilación binaria.

- Diseñar y simular un observador difuso Takagi-Sugeno para una columna de destilación binaria.
- Diseñar y simular un observador difuso con modos deslizantes para una columna de destilación binaria.

1.4. Justificación

Actualmente los sistemas físicos y su operación se han hecho cada vez más complejos ya que el número de elementos que los integran suelen aumentar considerablemente debido a la complejidad del proceso que realizan.

Uno de los objetivos de aplicar control a dichos sistemas es garantizar una autonomía con la cual el sistema pueda realizar un proceso sin la supervisión de un operador (ya que algunos procesos suelen ser peligrosos o de una larga duración). Sin embargo, debido a la gran cantidad de elementos que los conforman, alguno de éstos puede dañarse o deteriorarse con el pasar del tiempo y ocasionar que el sistema no realice el proceso de forma debida o incluso pueda dañarse. Cuando esto ocurre se le conoce como falla. Las fallas pueden ocurrir tanto en los propios procesos como en el equipo complementario, como en los sensores, actuadores, sistemas de protección, entre otros.

Aunque el objetivo principal de incluir control automático a un sistema, es garantizar un mejor desempeño y eficiencia, actualmente se ha incluido la tarea de mejorar la seguridad en el funcionamiento del proceso a lo largo de su vida útil al detectar el momento en el que ocurre una falla en algún elemento del sistema.

Una opción para detectar fallas en los sistemas es utilizar redundancia física, es decir, colocar el doble o triple de elementos (sensores o actuadores), y a partir de la información que éstos proveen, detectar si ocurre alguna anomalía a partir de las condiciones reales de operación. Sin embargo esta opción suele ser muy costosa además de aumentar la dimensión física del sistema, por lo que normalmente se opta por reemplazar los sensores o actuadores del sistema por algoritmos que permitan diagnosticar el estado de algunos componentes, lo cual es conocido como redundancia analítica.

En las columnas de destilación se suelen utilizar sensores de temperatura en cada plato, ya que con las mediciones de estos se pueden diseñar observadores de estados para poder estimar de manera indirecta la concentración de líquido o vapor en cada elemento de la columna, esto se realiza ya que los sensores que miden estas variables de manera directa suelen tener precios muy elevados.

Al ocurrir una falla en alguno de estos sensores, los observadores pueden generar resultados erróneos, y en la mayoría de los casos, al estar relacionados directamente con el control del sistema, éste puede hacer que el proceso del sistema opere de manera incorrecta lo cual conlleva a que el producto final pueda no cumplir con los requisitos deseados, por ello es importante poder detectar cualquier falla que ocurra en los sensores de la columna.

1.5. Aportaciones

Un aporte importante de este trabajo es el modelado difuso para una columna de destilación tipo batch ubicada en el Instituto Tecnológico de Morelia. Además de esto, otro de los aportes que se presentan es la implementación de un observador difuso para la estimación de concentraciones molares para la columna de destilación ya que no se cuenta con sensores que puedan medirla de manera directa.

El principal aporte es la incorporación de un término de estructura variable a un observador difuso, lo cual mejora la respuesta del observador, reduciendo el tiempo de convergencia de manera significativa, además de reducir el error en estado estable.

El observador difuso con modos deslizantes puede ser utilizado tanto para tareas de control como para tareas de detección y análisis de fallas.

1.6. Descripción de Capítulos

Esta tesis está organizada de la siguiente forma:

- En el Capítulo 2 se presentan los conceptos generales sobre la destilación, distintos tipos de destilación, la descripción física de una columna de destilación y se presenta una explicación de los modelos difusos.
- En el Capítulo 3 se presenta el desarrollo de un modelo matemático que representa la dinámica de las concentraciones molares líquidas del componente más volátil de la mezcla. Se desarrollan un modelo no lineal y un modelo difuso Takagi-Sugeno.
- En el Capítulo 4 se presenta el diseño de un observador difuso y el diseño de un observador difuso con modos deslizantes a partir del modelo difuso Takagi-Sugeno.
- En el Capítulo 5 se muestra el caso de estudio, los resultados de la simulación de ambos observadores, así como la comparación entre ambos.
- En el Capítulo 6 se presentan las conclusiones y los posibles trabajos futuros.

1.7. Lista de Publicaciones

Orozco,G., Cortés, B., Heras, M., Téllez,A.& Anzures,.J. (2016). Analysis and comparison of distillation column models considering constant and variable relativity. In Power, Electronics and Computing (ROPEC), 2016 IEEE International Autumn Meeting on (pp. 1-6). IEEE.

Capítulo 2

Antecedentes

La destilación es el proceso de separación de líquidos más utilizada en la industria, siendo las industrias petroquímica (producción de derivados del petróleo) y de alimentos (producción de bebidas alcohólicas) las de mayor importancia. Debido al estilo de vida actual de las personas, es imprescindible el uso diario de combustibles derivados del petróleo tanto para el transporte como para la generación de energía.

Además, con el auge de biocombustibles ha crecido la necesidad de desarrollar procesos de destilación que sean económicos, fiables y que la calidad del producto sea la adecuada.

2.1. Destilación

La destilación es un proceso muy antiguo utilizado para la separación física de una mezcla líquida en dos o más productos mediante la aplicación y eliminación de calor para explotar la diferencia de los puntos de ebullición de los elementos [Mujtaba, 2004]. El proceso de destilación ha sido practicado ampliamente por miles de años. En la industria química, la destilación es la tecnología de separación más importante ya que proporciona el mejor y más barato método para separar los componentes de una mezcla líquida.

Cuando se calienta una mezcla líquida de dos materiales volátiles, el vapor que se desprende tendrá una concentración más alta del material más volátil (punto de ebullición más bajo) que el líquido del que se ha desarrollado. Por el contrario, si un vapor se enfría, el material menos volátil (punto de ebullición más alto) tiende a condensarse en una mayor proporción que el material más volátil.

En general, en una mezcla binaria se identifican dos componentes: el elemento ligero

y el elemento pesado. El elemento ligero es el más volátil, es decir, tiene un punto de ebullición más bajo y es el que se extrae como destilado; en cambio, el elemento pesado tiene un punto de ebullición más alto y puede extraerse como producto de fondo si se requiere.

Con el fin de separar una mezcla binaria utilizando el proceso de destilación, debe de existir una diferencia en la volatilidad de los componentes. Cuanto mayor sea esta diferencia, más fácil será separarlos.

La volatilidad relativa es una medida de la facilidad de separación de los componentes en una mezcla líquida. Esto indica la facilidad o dificultad de usar la destilación para separar los componentes más volátiles de los componentes menos volátiles en una mezcla.

La destilación como método de separación presenta ciertas ventajas y desventajas sobre otros métodos de separación.

Ventajas

- En muchos casos la separación de la mezcla es rápida.
- En muchas ocasiones es el único método de separación para ciertas mezclas.
- Puede separar mezclas muy complejas.
- Usualmente no se necesita la adición de componentes extras.
- Los productos que se obtienen son relativamente puros.

Desventajas

- Si los puntos de ebullición de los componentes son muy cercanos, la separación no será muy buena.
- Ciertas mezclas no se pueden calentar porque sufrirían un proceso de descomposición
- Los componentes no se separarán perfectamente si forman una mezcla azeotrópica.
- Para algunas mezclas se necesita un alto costo de energía para alcanzar la evaporación.
- No es recomendable trabajar con sustancias que sean fácilmente reactivas o corrosivas.

2.1.1. Aplicaciones en la Industria

Refinación de petróleo. Cuando el petróleo crudo se extrae éste se conforma de una combinación de muchos hidrocarburos, los cuales hierven a diferentes temperaturas y puede separarse uno del otro por medio de la destilación. Los diversos hidrocarburos se pueden separar o combinar para producir una variedad de productos, tales como gasolina, plásticos, combustible para reactores, fibras sintéticas, crayones, neumáticos y queroseno.

Producción de bebidas alcohólicas. El licor, la cerveza y el vino, en alguna etapa de su fabricación, se someterán a un proceso de destilación para separar el producto líquido final de los granos o frutos de los que se derivan.

Desalinización del agua. El agua potable puede ser suministrada por las plantas de destilación que convierten el agua del océano en agua potable.

2.1.2. Tipos de Destilación

Existen distintos tipos de destilación debido a los distintos tipos de mezclas que se pueden tener, por lo que se utilizan distintas técnicas de destilación. Los autores [del Carmen Téllez-Anguiano *et al.*, 2017] presentan una descripción de las distintas técnicas de destilación, enfatizado el uso de columnas de destilación, para la separación de los componentes de las mezclas.

Destilación Simple

Este tipo de destilación se utiliza para separar mezclas líquidas de dos o más componentes los cuales tienen por lo menos una diferencia de 25°C en sus puntos de ebullición y además estos puntos deben ser inferiores a 150°C a presión atmosférica. Este tipo de destilación se suele utilizar para separar mezclas de Butanol-Etanol o Metanol-Agua.

Destilación Fraccionada

Este tipo de destilación permite la realización de una serie de destilaciones sencillas en una sola operación continua la cual se utiliza para separar mezclas líquidas homogéneas en las cuales la diferencia entre los puntos de ebullición de los componentes es inferior a 25°C. A cada uno de los componentes separados se les denomina fracciones.

Este proceso se utiliza mucho en la industria;no se limita a mezclas binarias (como alcohol y agua), sino que también es muy utilizado para separar mezclas complejas como

las que se encuentran en el petróleo.

La principal diferencia entre la destilación simple y la destilación fraccionada es el uso de una columna de fraccionamiento. La cual permite un mayor contacto entre los vapores que ascienden con el líquido condensado que desciende, por la utilización de diferentes platos. Ello facilita el intercambio de calor entre los vapores (que ceden) y los líquidos (que reciben). Lo que produce un intercambio de masa, donde los líquidos con menor punto de ebullición se convierten en vapor, y los vapores de compuestos con mayor punto de ebullición pasan al estado líquido.

Una desventaja de la destilación fraccionada es que una gran parte (más o menos la mitad) del destilado condensado debe volver a la parte inferior de la torre y eventualmente debe hervirse otra vez, con lo cual hay que suministrar más calor. Por otra parte, el funcionamiento continuo permite grandes ahorros de calor, porque el destilado que sale puede ser utilizado para precalentar el material que entra.

Destilación Azeotrópica.

La destilación azeotrópica se utiliza para fraccionar a un compuesto azeótropo a través de una destilación. Un azeótropo es la propiedad de una mezcla liquida de dos o más elementos, la cual hierve a temperatura constante y actúa como si estuviera formada por solo un componente químico. Un azeótropo puede llegar a ebullir a una temperatura superior, intermedia o inferior que la de los compuestos de la mezcla, permaneciendo la composición que tenían en un inicio, al igual que ocurre con el vapor, con lo que se hace imposible separarlos por destilación.

Una mezcla de Etanol-Agua con un 95,63 % de etanol forma un azeótropo que hierve a unos 78,2°C, siendo esta la temperatura más baja a la cual puede hervir una mezcla con dicha composición a tal presión, mientras que como elementos separados, a una presión de una atmósfera llegan a la ebullición a las temperaturas de 78,4°C y 100°C respectivamente.

En este método se suele añadir otro compuesto a modo de agente para la separación, pero en este caso existe una clara desventaja en el proceso de adicción, pues posteriormente se deberá realizar una segunda separación con la finalidad de deshacerse del compuesto añadido.

Existe otro método, el cambio de presión en la destilación, el cual se basa en que el azeótropo se ve claramente influenciado por las presiones, además de no tener unos valores de concentraciones que puedan destilarse, pero si en el punto exacto en el que los coeficientes de actividad de ambos compuestos de la mezcla se entrecruzan. Cuando el azeótropo sale o salta, se dice que la destilación puede seguir su curso.

Destilación al Vacío

Este tipo de destilación (puede ser sencilla o fraccionada) consiste en reducir la presión de operación para obtener la ebullición a temperaturas bajas, ya que un líquido empieza a hervir cuando su presión de vapor iguala la presión de operación. El montaje es muy parecido a los otros procesos de destilación, con la salvedad de que el conjunto se conecta a una bomba de vacío, lo cual permite destilar líquidos a temperaturas inferiores a su punto de ebullición normal.

Cuanto mayor es el grado de vacío, menor es la temperatura de destilación. Si la destilación se efectúa en un vacío prácticamente perfecto, el proceso se llama destilación molecular. Este proceso se utiliza debido a que muchas mezclas no pueden separarse por destilación a presión atmosférica porque se descomponen antes de alcanzar sus puntos de ebullición normales, otras sustancias tienen puntos de ebullición tan altos que su destilación es difícil o no resulta conveniente. En la industria, este tipo de destilación se usa para purificar vitaminas y otros productos inestables. La Figura 2.1 muestra una columna de destilación fraccionada conectada a una bomba aspiradora, la cual permite la reducción de la presión de operación de la columna.

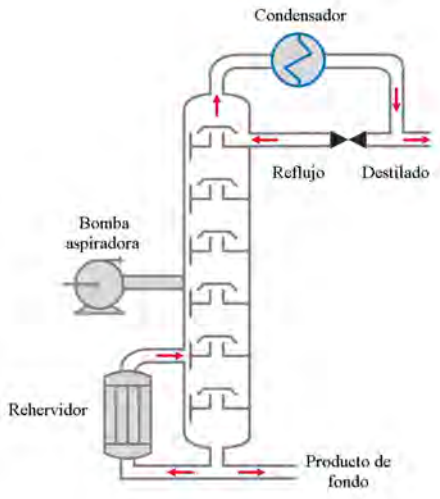


Figura 2.1: Destilación al vacío.

Destilación Extractiva

La destilación extractiva es un método de separación en el que se añade a la mezcla que se va a destilar un agente de separación o solvente, cuya característica principal es que no presenta la formación de azeótropos con ninguno de los componentes de la mezcla a separar. La Figura 2.2 muestra una columna de destilación en la cual se introduce un agente separador para romper el azeotropo de la mezcla.

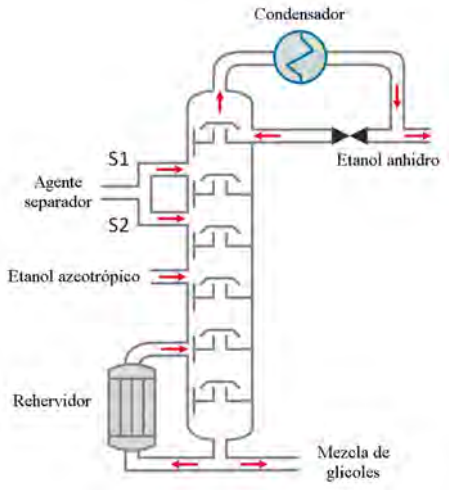


Figura 2.2: Destilación extractiva.

Destilación Destructiva

Este método de destilación consiste en calentar a una temperatura elevada sustancias orgánicas complejas en ausencia de aire para descomponerlas en varios productos, generando una mezcla de productos volátiles que se condensan y recogen. Las aplicaciones más importantes de este proceso son la destilación destructiva de la madera para el carbón de leña, el ácido etanoico, la propanona y el metanol.

Destilación Molecular Centrífuga

Para este tipo de destilación se utiliza una centrifugadora de alta velocidad, o un instrumento llamado vórtice; las fuerzas que separan los componentes más ligeros de los más pesados son miles de veces mayores que las de la gravedad, haciendo la separación más eficaz.

Destilación por Arrastre de Vapor

Es una técnica aplicada en la separación de sustancias poco solubles en agua. La destilación por arrastre de vapor se emplea para separar una sustancia de una mezcla que posee un punto de ebullición muy alto y que se descompone al destilar.

De otra manera, la destilación por arrastre de vapor de agua lleva a cabo la vaporización selectiva del componente volátil de una mezcla formada por éste y otros “no volátiles”. Lo anterior se logra por medio de la inyección de vapor de agua directamente en el seno de la mezcla, denominándose “vapor de arrastre”, pero en realidad su función no es la de “arrastrar” el componente volátil, sino condensarse en el matraz formando otra fase

inmiscible que cederá su calor latente a la mezcla a destilar para lograr su evaporación. En este caso se tendrán la presencia de dos fases insolubles a lo largo de la destilación (orgánica y acuosa), por lo tanto, cada líquido se comportará como si el otro no estuviera presente. Es decir, cada uno de ellos ejercerá su propia presión de vapor y corresponderá a la de un líquido puro a una temperatura de referencia.

Se emplea para purificar sustancias contaminadas por grandes cantidades de impurezas resinosas y para separar de alto punto de ebullición de sólidos que no se arrastran.

Destilación por Cambio de Presión.

Este método de destilación puede ser usado para la separación de mezclas azeotrópicas y se basa en el principio similar de la destilación al vacío, esto es debido a la manipulación de puntos de ebullición por el cambio de presión de la atmósfera a la cual una solución es expuesta.

Destilación por Congelación.

La destilación por congelación es un interesante proceso, pues pudiera considerarse contraria a lo que se conoce como destilación, no en cuanto a sus resultados, sino en cuanto a su proceso, mientras que la destilación "común" basa su principio de separación en las diferencias de los puntos de ebullición de los componentes, la destilación por congelación opera por la diferencia en los puntos de congelación, dicho de otra manera, las fases pueden separarse gracias a que una (o varias) de ellas, se encuentra en estado sólido.

Destilación por Lotes o Batch.

En las destilaciones por lotes, llamadas también batch, se carga al equipo una determinada cantidad de la mezcla de interés para que, durante la operación, uno o más compuestos se vayan separando de la mezcla original [del Carmen Téllez-Anguiano *et al.*, 2017]. Un ejemplo común corresponde a las destilaciones que ocurren en los laboratorios, donde el líquido es vaciado en un recipiente y calentado hasta hervir. El vapor formado se retira continuamente por condensación, este vapor corresponde al compuesto más volátil.

En las separaciones por lotes no hay estado estable y la composición de la carga inicial cambia con el tiempo. Esto trae consigo un incremento en la temperatura del recipiente y decremento en la cantidad de los componentes menos volátiles a medida que avanza la destilación.

Cuando la mezcla está formada por varios componentes, éstos pueden extraerse en distintos puntos a lo largo de la torre. La Figura 2.3 muestra una torre de destilación industrial para petróleo, tienen a menudo 100 placas, con al menos diez fracciones diferentes que son extraídas en los puntos adecuados.

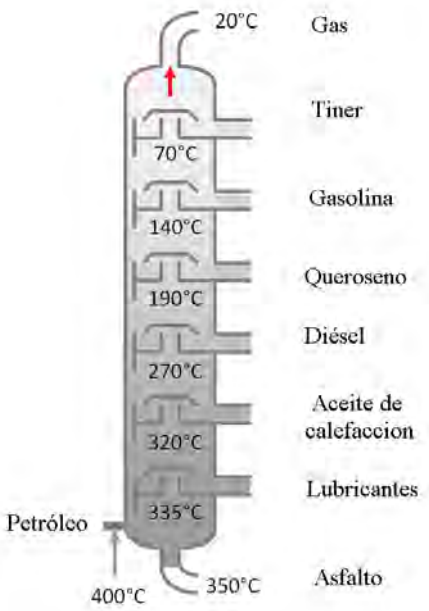


Figura 2.3: Destilación tipo batch para refinacón de petróleo.

Destilación por Membranas.

En este método, las superficies de las membranas están en contacto directo con dos fases líquidas, una solución caliente y una fría. Como ha sido entendido, hay una diferencia de temperaturas pero el equilibrio térmico está bien establecido. Este método está basado en un flujo a contracorriente de un fluido con diferentes temperaturas.

Destilación Reactiva.

La destilación reactiva permite llevar a cabo una transformación química simultáneamente con la separación de los componentes a contracorriente que resultan de ésta y una zona superior e inferior de separación. Además, este tipo de operación permite, en muchos casos, el rompimiento de azeótropos, incrementar la conversión de algunos sistemas reactivos, así como la reducción de costos de inversión y operación al llevar a cabo dos operaciones en un mismo equipo.

Destilación Flash.

La destilación flash o destilación en equilibrio, es una técnica de separación de una sola etapa. Si la mezcla que se desea separar es líquida, se alimenta a un intercambiador de calor donde se aumenta su temperatura y entalpía vaporizando parte de la mezcla, luego la mezcla entra a un volumen suficientemente grande donde el líquido y el vapor se separan. Como el vapor y el líquido están en un estrecho contacto, ocurre que las dos fases se aproximan al equilibrio. Los procesos de separación flash son muy comunes en la industria, particularmente en la refinación de petróleo.

2.2. Columna de Destilación Fraccionada Tipo Batch

La destilación fraccionada utiliza una columna de destilación tipo batch o por lotes donde se tiene una determinada cantidad de mezcla la cual se somete al proceso, una vez separada dicha mezcla, el proceso concluye. La columna está compuesta por N-platos, en cuyos extremos se encuentra un hervidor y un condensador, los platos se numeran de manera ascendente comenzando con el condensador (plato 1), seguido por los platos intermedios (plato 2 a plato $n-1$) hasta llegar al hervidor (plato n) [Aguilera-Gonzáles, 2008].

En la actualidad, la destilación por lotes ha tenido un auge en las industrias química y farmacéutica, en las que se requiere obtener un destilado con alto grado de pureza a partir de cantidades pequeñas de mezcla. Además, las columnas de destilación por lotes pueden ser utilizadas para obtener diferentes productos con un único equipo, al contrario de las columnas de destilación continua, que son diseñadas para un único proceso.

2.2.1. Resistencia Calefactora

Para que la columna funcione es necesaria energía, la cual es proporcionada por el calor que se aplica al hervidor mediante una resistencia eléctrica calefactora.

2.2.2. Hervidor

La Figura 2.4 muestra el hervidor, el cual está situado en la parte más baja de la columna, aquí es donde se almacena la mezcla que se desea separar. Su función es vaporizar parcialmente la mezcla para producir un flujo de vapor que asciende por la columna a través de los platos.

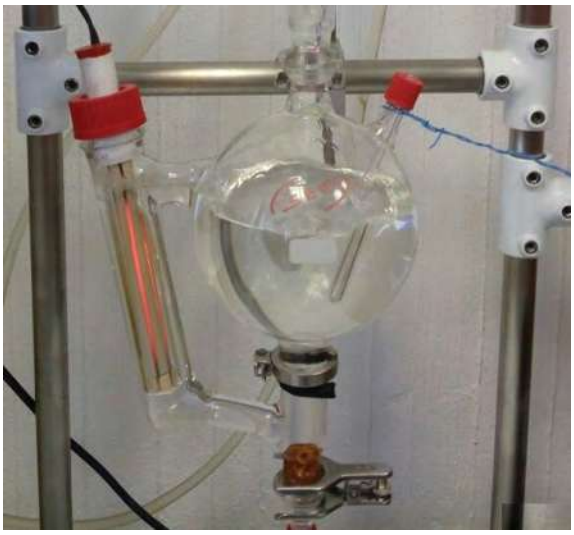


Figura 2.4: Hervidor de columna de destilación tipo batch.

2.2.3. Condensador

La Figura 2.5 muestra el condensador, el cual está ubicado en la parte más alta de la columna y su función es enfriar el vapor para regresarlo a su fase líquida. Parte de este líquido es devuelto a la columna como reflujo para proporcionar un flujo de líquido, el cual desciende a través de los platos, poniéndose en contacto con el vapor; el resto del líquido se extrae como producto destilado.

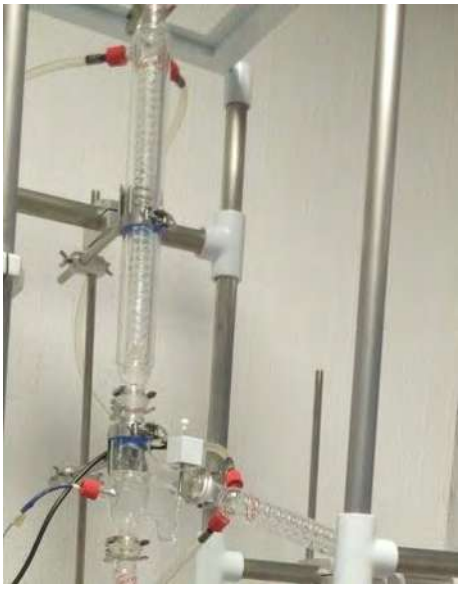


Figura 2.5: Condensador de columna de destilación tipo batch.

2.2.4. Platos Intermedios

El cuerpo principal de la columna se compone de $n-2$ platos, los cuales se muestran en la Figura 2.6, los platos intermedios están perforados para permitir el paso del flujo de

líquido y vapor a través de ellos.

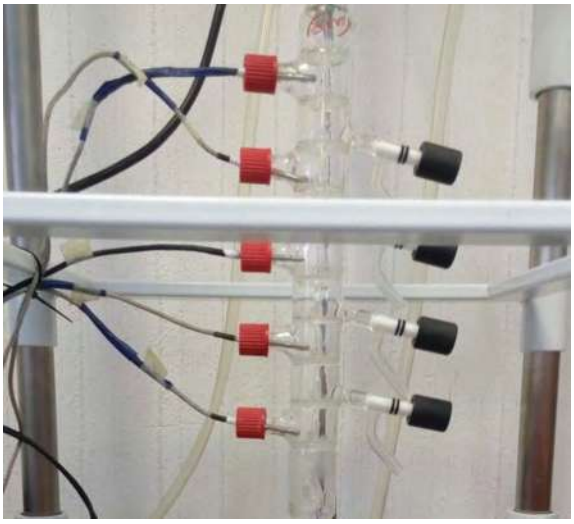


Figura 2.6: Cuerpo de columna de destilación tipo batch.

2.2.5. Reflujo

La principal característica de la destilación rectificada es que se produce un enriquecimiento del vapor con el elemento más volátil. Esto se logra mediante el contacto que existe entre el vapor generado por el hervidor, que asciende a lo largo de la columna, y el líquido que desciende a través del cuerpo de la columna, el cual proviene del condensador. La presencia de un flujo de corriente de reflujo, ya sea una parte del destilado u otra corriente con una composición elevada del componente más volátil, es un requisito imprescindible para el enriquecimiento del vapor.

El reflujo es una señal de entrada que se encuentra en el plato 1 del sistema (condensador), la cual perturba al sistema en estado estable. La función de la señal de reflujo es la de regresar parte del líquido generado en el condensador al cuerpo de la columna para generar una corriente de reflujo y garantizar el enriquecimiento del vapor. Cuando el sistema llega a un estado estable y se tiene el mayor grado de pureza (componente ligero) en el líquido que se genera en el condensador, la señal de reflujo cambia para extraer todo el líquido como producto destilado, con lo que la corriente de reflujo deja de fluir, lo cual altera la dinámica del sistema.

2.2.6. Descripción de un Proceso

El elemento más ligero de la mezcla tiende a concentrarse en la fase de vapor, mientras que el elemento pesado se concentra en la fase líquida. Lo anterior da como resultado que la fase de vapor se enriquezca con el elemento ligero de la mezcla a medida que el vapor asciende por la columna (zona de enriquecimiento o rectificación), mientras que la fase

líquida se enriquece del elemento pesado a medida de que el líquido desciende a través de la columna (zona de empobrecimiento o agotamiento).

2.2.7. Modelos de Columnas de Destilación

Los procesos de destilación son muy lentos, pudiendo demorar varias horas en producir un producto destilado. Un modelo matemático es capaz de reproducir la dinámica de un proceso físico por medio de una simulación, lo cual presenta varias ventajas,

- Una simulación es significativamente más rápida de realizar.
- Es posible modificar las señales de entrada o los parámetros del sistema para observar el comportamiento en diferentes situaciones sin la necesidad de modificar físicamente la planta.
- Analizar el comportamiento en distintos puntos de operación, que en el sistema físico no podrían realizarse, ya sea porque la planta físicamente no lo permite o porque pone en riesgo la integridad del sistema o de los usuarios.
- Permiten el desarrollo de técnicas avanzadas de control.

Los modelos matemáticos pueden ser muy simples o muy complejos, dependiendo de las variables que intervienen en el proceso y de la cantidad de elementos con los que cuente el sistemas físico. Los modelos matemáticos de las columnas de destilación, son modelos muy complejos que presentan muchas no linealidades, ya que además de incluir procesos físicos, incluye procesos químicos.

2.3. Modelo Difuso

Actualmente el desarrollo en el área de técnicas de control se ha centrado en sistemas lineales debido a la gran dificultad de desarrollar técnicas de control para sistemas no lineales, por lo que es deseable que la mayoría los modelos matemáticos sean lineales, desafortunadamente la mayoría de los sistemas reales presentan no linealidades, algunos son fácilmente linealizables en puntos de operación acotados, pero en otros casos no es suficiente trabajar con solo un punto de operación ya que éste no representa la dinámica total del sistema, lo cual dificulta la linealización. Una de las técnicas que permite la aplicación de técnicas lineales a sistemas no lineales es utilizar un modelo difuso, el cual consiste en hacer una suma ponderada del sistema linealizado en distintos puntos de operación.

2.3.1. Conjuntos Difusos

Los conjuntos difusos fueron introducidos por Zadeh como un medio para representar y manipular datos que no son precisos, sino difusos. Los datos precisos son fácilmente clasificados en una clase, mientras que los datos difusos pueden tener solo cierto grado de pertenencia a una clase. En la mayoría de los casos, la clase de los objetos encontrados en el mundo real no tienen criterios de membresía definidos con precisión.

Existen muchas clases imprecisas como "la clase de todos los números reales que son más mayores que 1" o "la clase de mujeres hermosas", o "la clase de hombres altos" las cuales no constituyen clases o conjuntos en el sentido matemático habitual. La "clase de temperatura" es una clase imprecisa, esto se puede ejemplificar suponiendo que se necesita clasificar una cantidad de datos de la temperatura a lo largo de un día, en este caso la temperatura se clasifica como alta cuando sea mayor o igual a 30° y baja para cualquier otro caso, por lo que una temperatura de 30.1° será considerada como una temperatura alta, mientras que una temperatura de 29.9° será considerada como una temperatura baja, en este caso la diferencia es mínima y por otro lado una temperatura de 29.9° no es considerada como una temperatura baja para las personas. Al utilizar conjuntos difusos se puede clasificar de la siguiente manera, si la temperatura es de 30° o mayor será considerada como alta (pertenece al conjunto de temperaturas altas con un grado de pertenecía de 1), si la temperatura es de 10° o inferior no será considerada como temperatura alta (el grado de pertenencia al conjunto de temperaturas altas será de 0), mientras que si la temperatura es de 20° esta se considera como una temperatura "moderadamente" alta (el grado de pertenencia al conjunto de temperaturas altas es de 0.5).

Las palabras como mediano , grande o pequeño se denominan variables lingüísticas y se utilizan para formar reglas difusas, por ejemplo:

- **SI** la temperatura es muy alta, **ENTONCES** aumenta radicalmente la velocidad del ventilador.
- **SI** la temperatura es un poco baja, **ENTONCES** disminuye ligeramente la velocidad del ventilador.

2.3.2. Modelado Takagi-Sugeno

Este método de diseño se basa en representar un sistema no lineal por un modelo conocido como el modelo difuso propuesto por Takagi-Sugeno [Takagi y Sugeno, 1985]. El modelo difuso del sistema se logra por una "combinación" difusa de submodelos lineales.

Sector de no Linealidad

El enfoque utilizado para la construcción de un modelo difuso Takagi-Sugeno utiliza ideas del sector no lineal o aproximación local. El cual está basado en la siguiente idea. Considere un sistema no lineal simple $\dot{x} = f(x(t))$ donde $f(0) = 0$. El objetivo es encontrar un sector global como el que se muestra en la Figura 2.7a, tal que $\dot{x} = f(x(t)) \in [a_1 a_2]x(t)$. Este enfoque garantiza una construcción de un modelo difuso exacto. Sin embargo, a veces es difícil encontrar sectores globales para sistemas no lineales generales. Para estos casos, se puede considerar la no linealidad de un sector local Figura 2.7b. Esto es razonable ya que las variables de los sistemas físicos siempre están delimitadas.

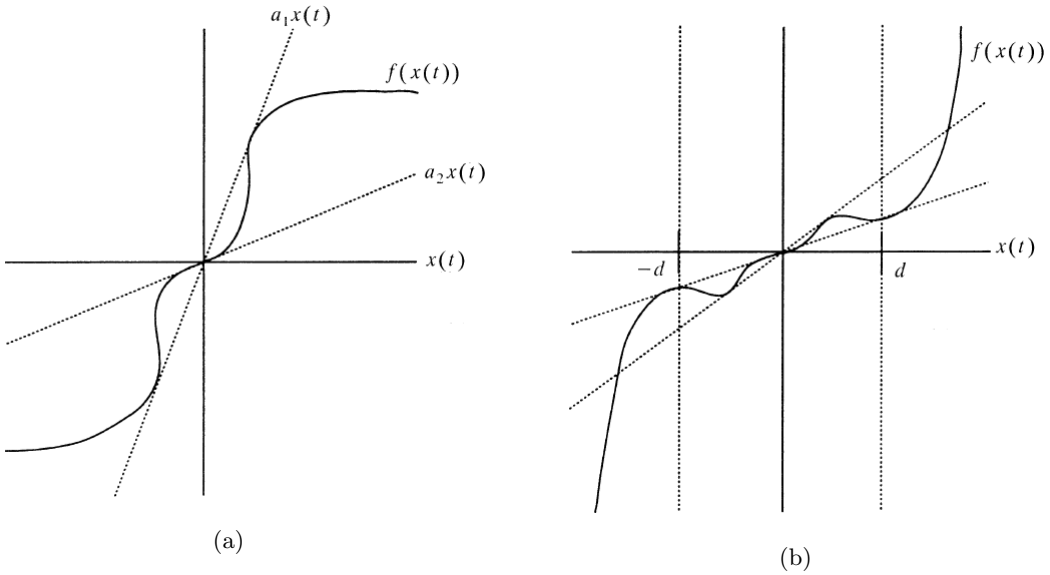


Figura 2.7: Sectores de no linealidad. (a)Sector de no linealidad global, (b)Sector de no linealidad local.

Construcción de un Modelo Difuso Takagi-Sugeno.

Generalmente se utilizan dos planteamientos para la construcción de modelos Takagi-Sugeno representados en la Figura 2.8. Para el primer caso el procedimiento consta básí-

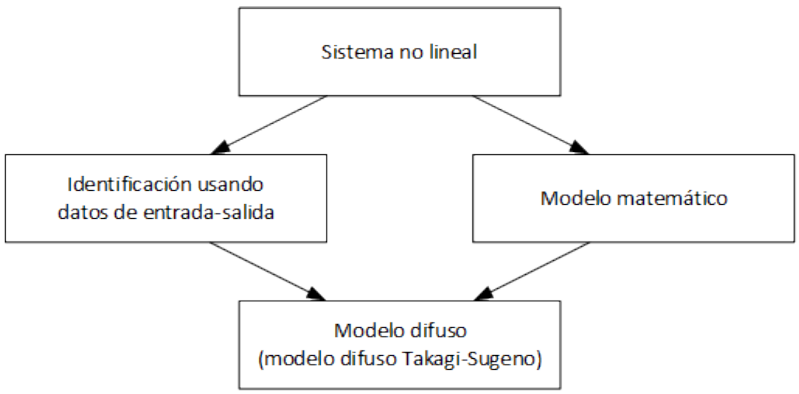


Figura 2.8: Diseño para un modelo Takagi-Sugeno.

camente de dos partes: identificación de la estructura e identificación de parámetros. Este enfoque de identificación para el modelo difuso es adecuado para sistemas que son incapaces o demasiado difíciles de ser representados por modelos matemáticos. Para el segundo caso, se cuenta con el modelo matemático no lineal que representa la dinámica del sistema, éste enfoque deriva un modelo difuso de dicho modelo no lineal.

2.3.3. Modelo Takagi-Sugeno

Se puede demostrar que los modelos difusos Takagi-Sugeno son aproximadores universales.

Consideremos un sistema descrito por:

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \tag{2.1}$$

$$y(t) = h(x(t)) \tag{2.2}$$

Donde $x(t) \in \Re^n$ es el estado del sistema, $u(t) \in \Re^m$ es la señal de entrada y $y(t) \in \Re^m$ es el vector medible de salidas.

El modelo difuso Takagi-Sugeno está descrito por un conjunto de reglas difusas **SI-ENTONCES** (*IF-THEN*), las cuales representan relaciones lineales entrada-salida de un sistema no lineal. La principal característica de un modelo difuso Takagi-Sugeno es la habilidad de expresar la dinámica local de cada implicación (regla) difusa mediante un subsistema lineal [Tanaka y Wang, 2004]. Es posible describir localmente el comportamiento entrada-salida del sistema (2.1)-(2.2) mediante un modelo dinámico difuso Takagi-Sugeno descrito por las siguientes r reglas.

SI $z_1(t)$ es M_i1 y $z_2(t)$ es M_i2...y $z_p(t)$ es M_ip,

$$\textbf{Entonces} = \begin{cases} \dot{x}(t) = A_i x(t) + B_i u(t) \\ y(y) = C_i x(t) \end{cases} \tag{2.3}$$

para $i = 1, 2, .., r$
donde,
M_{ij} es un conjunto difuso.
$x(t)$ es el vector de estados.
$z_1(t)$,$z_2(t)$,...,$z_p(t)$ son variables premisas conocidas.
r es el número de reglas.
p es el número de conjuntos difusos.

Cada ecuación consecutiva lineal representada por $A_i x(t) + B_i u(t)$ se llama "subsistema" y representa un punto de operación del sistema no lineal.

Dado el par $(x(t), u(t))$, el modelo difuso total es obtenido usando un fuzificador tipo *singlentón*, mecanismo de inferencia tipo *producto* y *centro de gravedad* como defuzidicador, resultando la siguiente descripción:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \frac{\sum_{i=1}^{N} w_i(z(t))(A_i x(t) + B_i u(t))}{\sum_{i=1}^{N} w_i(z(t))} \\ &= \sum_{i=1}^{N} h_i(z(t))(A_i x(t) + B_i u(t)) \end{aligned} \tag{2.4}$$

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{\sum_{i=1}^{N} w_i(z(t)) C_i x(t)}{\sum_{i=1}^{N} w_i(z(t))} \\ &= \sum_{i=1}^{N} h_i(z(t)) C_i x(t) \end{aligned} \tag{2.5}$$

donde,

$$z(t) = [z_1(t), z_2(t), ...z_p(t)], \tag{2.6}$$

$$w_i(z(t)) = \prod_{j=1}^{p} M_{ij} z_j(t), \tag{2.7}$$

$$h_i(z(t)) = \frac{w_i(z(t))}{\sum_{i=1}^{N} w_i(z(t))} \tag{2.8}$$

ya que,

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{N} w_i(z(t)) > 0 \\ w_i(z(t)) \geq 0, \ i = 1, 2, ..., N \end{cases}$$

se tiene

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{N} h_i(z(t)) = 1 \\ h_i(z(t)) \geq 0, \ i = 1, 2, ..., N \end{cases}$$

para todo t.
donde,
N es el número de reglas difusas.
p es el número de variables premisas.
$z(t)$ es un vector que contiene las p variables premisas.
$M_{ij}z_j(t)$ es el grado de pertenencia de $z_j(t)$ en M_{ij}.
$w_i(z(t))$ es el peso calculado para cada regla a partir de las funciones de membresía.
h_i es el peso normalizado para cada regla.

Funciones de Membresía

Las funciones de membresía permiten cuantificar, de manera continua, el grado de pertenencia de una variable premisa a un conjunto difuso. De manera gráfica, el eje de las abscisas representa el universo de discurso (el rango en el que las premisas pueden variar), mientras que el eje de las ordenadas muestra el grado de pertenencia en el intervalo [0,1]. Se puede utilizar una función de cualquier tipo para representar un conjunto difuso, sin embargo, existen ciertas funciones que son de uso más frecuente debido a su simplicidad matemática, las más comunes son las funciones de tipo triangular, trapezoidal y gaussiana.

2.4. Modos deslizantes

El término "sistema de estructura variable" (SEV) hizo su primer aparición a finales de la década de 1950 en la URSS (Unión de Repúblicas Socialistas Soviéticas) por Emel'yanov y varios co investigadores. Sin embargo, fue hasta mediados de 1970 que aparece fuera de Rusia con el libro de Itkis [Itkis, 1976] y el artículo de Utkin [Utkin, 1993].

Los SEV se han desarrollado como un método de diseño general para un amplio espectro de tipos de sistemas incluyendo sistemas no lineales, sistemas MIMO, modelos de tiempo discretos, sistemas dimensionales a gran escala e infinitos (Carlo et al., 1988; Hung et al., 1993; Utkin, 1993) . Como su nombre lo indica, los SEV son una clase de sistemas donde la ley de control es cambiada deliberadamente durante el proceso de control de acuerdo a algunas reglas definidas las cuales dependen del estado del sistema.

Un SEV consiste en un conjunto de (dos o más) estructuras o subsistemas continuos y alguna lógica asociada que, dependiendo de los estados del sistema, efectúa la conmutación entre ambos. Como resultado, las acciones de control son funciones discontinuas del estado del sistema, perturbaciones (si son accesibles para la medición) y entradas de referencia. Cada una de tales estructuras tendrá sus propias características y, al conmutar entre ellas, el SEV puede combinar las mismas o, incluso, poseer propiedades nuevas no asociadas a ninguno de los subsistemas. Los SEV están gobernados por (2.9).

Sea un sistema con la forma:

$$\dot{x} = f(x, t, u), x \in \Re^n, u \in \Re^m$$

La ley de control esta dada por:

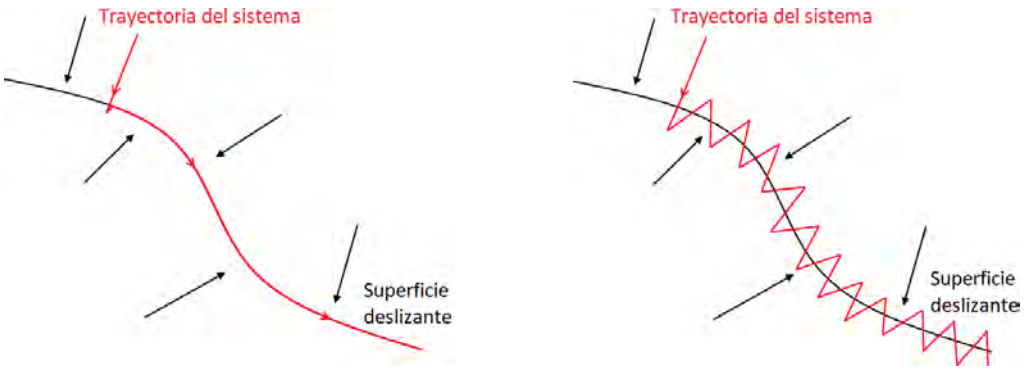
$$u = \begin{cases} u^+(x,t) & \text{si } s(x) > 0 \\ u^-(x,t) & \text{si } s(x) < 0 \end{cases} \tag{2.9}$$

$$s(x)^T = (s_1(x), ..., s_m(x)$$

donde,
f, s, u^+, u^- son funciones continuas.
m es el número de superficies deslizantes.

Una de las maneras más efectivas de realizar un SEV consiste en definir un objetivo de control como una función de estados. Mediante conmutaciones a frecuencia muy alta, idealmente a una frecuencia infinita; se obliga a que las trayectorias del sistema a evolucionar sobre una superficie determinada por una restricción planteada, en el espacio de estados. Este modo de funcionamiento se representa de manera gráfica en la Figura 2.9a, a este modo de operación se le denomina operación por modos deslizantes. La principal característica de los modos deslizantes es su capacidad de generar sistemas de control muy robustos, en muchos casos, resultando en sistemas de control invariantes. Donde, en términos generales, la palabra "invariante"significa que el sistema es completamente insensible a la incertidumbre paramétrica y las perturbaciones externas. Además, la operación en modo deslizante es de orden reducido, quedando fijada tal dinámica por la función de restricción diseñada.

En la implementación física de modos deslizantes, la frecuencia de conmutación no es infinita, en este caso las conmutaciones generan oscilaciones de amplitud finita y alta frecuencia en las trayectorias al evolucionar sobre la superficie deslizante. A este fenómeno se le denomina "efecto de shattering" y constituye el principal defecto de los modos deslizantes. La Figura 2.9b representa de manera gráfica este efecto.



(a) (b)

Figura 2.9: Trayectorias en un SEV. (a)Conmutación a frecuencia infinita, (b)Conmutación a frecuencia finita.

2.5. Conclusión

Conocer los conceptos generales básicos sobre la destilación y los diferentes tipos de destilación que se utilizan actualmente, es importante para utilizar un método de destilación adecuado para una aplicación específica. Para la destilación por lotes es de vital importancia conocer los principios básicos del funcionamiento de una columna de destilación ya que ésta es la base para este tipo de destilación. Se presenta la introducción al modelado difuso propuesto por Takagi-Sugeno, el cual será utilizado para obtener un modelado difuso de la columna de destilación, el cual es necesario para el diseño del observador difuso. Por último se aborda una breve introducción a los sistemas de estructura variable.

Capítulo 3

Modelo de una Columna de Destilación Empleando una Mezcla Binaria

3.1. Descripción Física de la Columna de Destilación.

Una columna de destilación tipo batch o por lotes, mostrada en la Figura 3.1, está compuesta por n-platos, en cuyos extremos se encuentra un hervidor y un condensador, los platos se numeran de manera ascendente comenzando con el condensador (plato 1), seguido por los platos intermedios del cuerpo de la columna (plato 2 a plato $n-1$) hasta llegar al hervidor (plato n). El cuerpo de la columna se compone de $n-2$ platos, los cuales están perforados para permitir el paso del flujo de líquido y vapor a través de ellos.

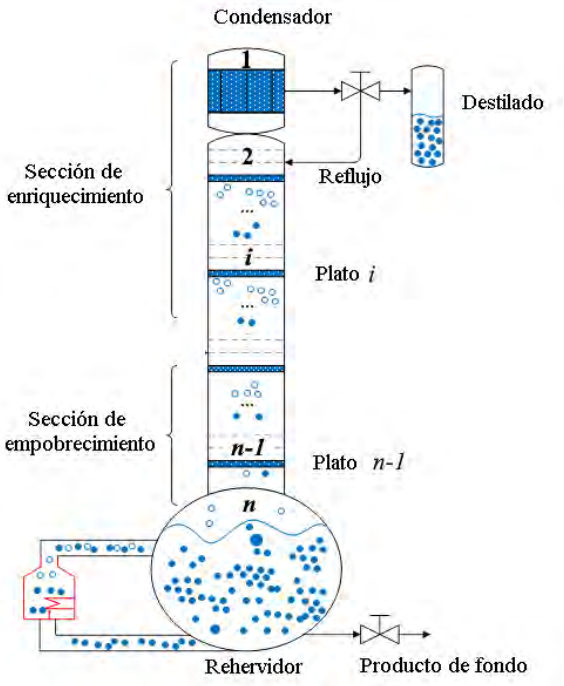


Figura 3.1: Columna de destilación tipo batch.

3.2. Modelo Matemático

El modelo matemático de una columna de destilación consiste en un conjunto de ecuaciones diferenciales, las cuales representan a cada uno de los platos de la columna, empezando por el condensador, seguido de los platos intermedios de la columna y finalizando con el hervidor.
Dicho modelo debe representar el comportamiento dinámico del proceso real.

3.2.1. Equilibrio de Fases Vapor-Líquido

El principio fundamental de la destilación es la existencia de un equilibrio entre las fases líquida y vapor de la mezcla. Se asume que cada etapa se encuentra en equilibrio Vapor-Líquido (VLE por sus siglas en inglés) cuando los productos y reactivos presentan concentraciones que no tienden al cambio con el tiempo [Atkins, 2006]. El diagrama de equilibrio o diagrama de fase es una gráfica utilizada para mostrar las condiciones a las cuales distintas fases de un compuesto o mezcla se encuentran en equilibrio químico. Además el diagrama de fases, Figura 3.2, permite relacionar de manera directa las concentraciones de un plato en función de la temperatura del mismo.

Se supone que cuando una etapa (plato i) de la columna está en EVL, una parte del líquido se envía a la etapa inferior (plato $i-1$) y mientras que una parte del líquido de la etapa superior (plato $i+1$) entra, de igual forma una parte del vapor en esta etapa pasa a la etapa superior, mientras que una parte del vapor de la etapa inferior entra, se

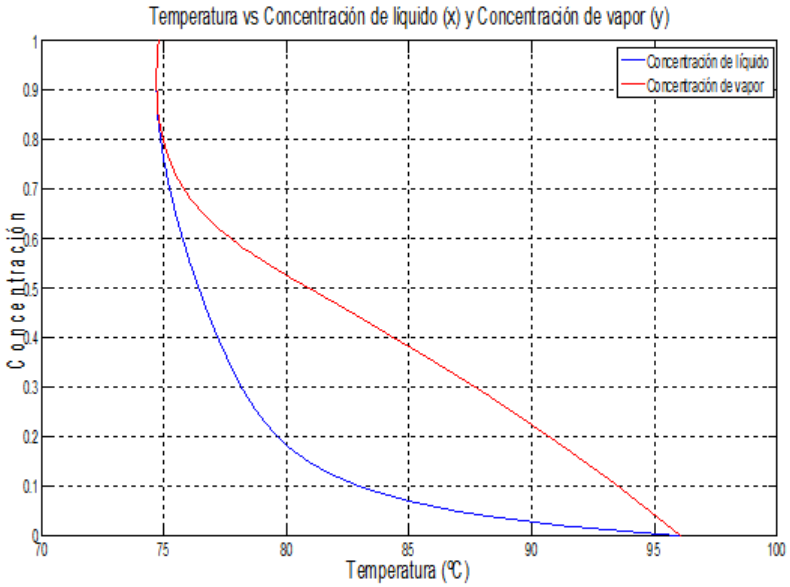


Figura 3.2: Diagrama de equilibrio para una mezcla Etanol-Agua en función de la temperatura a una presion de 1013.25 hPa.

ejemplifica de manera gráfica en la Figura 3.3.

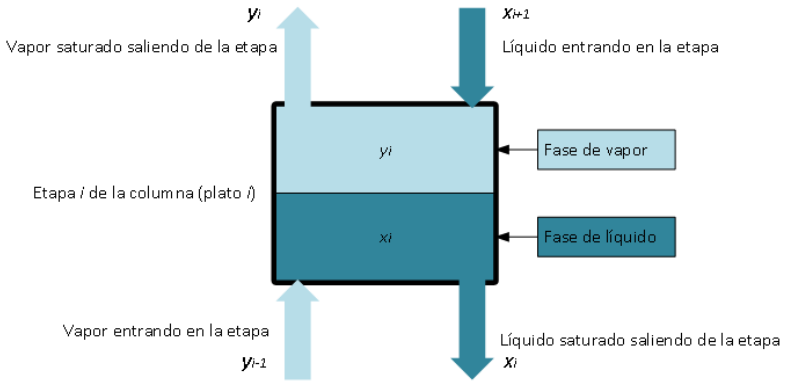


Figura 3.3: Concepto del equilibrio de fases.

Con esto se establece que los cálculos basados en el concepto de VLE (con un número de etapas apropiado) se ajustan de manera correcta a los datos de la mayoría de las columnas reales.

El modelo matemático de una columna de destilación aplicando el principio de conservación se puede expresar de formas distintas, dependiendo de la aplicación:

- Balance de materia.

$$\frac{dM_i}{dt} = V_{i+1} - V_i + L_{i-1} - L_i \tag{3.1}$$

- Balance de componente.

$$\frac{dM_i x_i}{dt} = V(y_{i+1} - y_i) + L(x_{i-1} - x_i) \tag{3.2}$$

donde,
V es el flujo molar del vapor.
L es el flujo molar del líquido.
M_i es la masa retenida en el plato i.
x_i es la concentración de líquido en el plato i.
y_i es la concentración de vapor en el plato i.
i es el número del plato de la columna de destilación.

3.2.2. Consideraciones del Sistema

Debido a que en un proceso de destilación intervienen una gran cantidad de variables, tanto físicas como químicas, la complejidad del modelo aumenta de gran manera, por lo que para simplificar el modelo de la columna de destilación, se realizan las siguientes consideraciones, las cuales no afectan de manera significativa la precisión del modelo.

- Presión constante a lo largo de toda la columna.
- Flujos de entrada y salida de la columna en estado líquido.
- Sin retención de vapor.
- Equilibrio de vapor y líquido en todos los platos.
- Columna de destilación adiabática.
- Alimentación tipo batch.

3.3. Modelo Basado en Balance de Componente

El modelo matemático de la columna de destilación se obtiene a partir de las ecuaciones diferenciales de balance de componente ligero (3.2), donde cada uno de los n-platos es representado por una ecuación diferencial. El modelo completo se obtiene combinando las n ecuaciones diferenciales correspondientes a todos los platos de la columna de destilación.

3.3.1. Condensador

El condensador es numerado como el plato 1. En este plato además de intervenir los flujos molares de vapor y de líquido, se incluye el producto destilado, el cuál es el elemento más volátil que se extrae de la mezcla. La ecuación que representa la dinámica de este plato es:

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{Vy_2 - Lx_1 - Dx_1}{M_1} \tag{3.3}$$

3.3.2. Platos Intermedios

Los platos intermedios representan el cuerpo de la columna el cual se compone por $n-2$ platos, la numeración de estos platos comienza a partir del 2 hasta el plato $n-1$. Utilizando balance por componente ligero las ecuaciones que representan las dinámicas de los platos intermedios son:

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{Vy_{i+1} - Vy_{i-1} + Lx_{i-1} - Lx_i}{M_i} \tag{3.4}$$

con $i = 2, 3, ..., n-1$

3.3.3. Hervidor

El hervidor se numera como el plato n. En este plato también intervienen los flujos molares de vapor y de líquido, pero a diferencia de los demás platos, la ecuación que lo representa tiene una ligera modificación ya que en este plato no entra un flujo de vapor que esté relacionado con la concentración de vapor, ésta se sustituye con la concentración de líquido del plato.

$$\frac{dx_n}{dt} = \frac{Vx_n - Vy_n + Lx_{n-1} - Lx_n}{M_n} \tag{3.5}$$

3.3.4. Modelo Completo del Sistema

El modelo de la columna de destilación se obtiene a partir de las ecuaciones diferenciales de balance de componente más volátil en cada plato de la columna de destilación, por lo que el modelo completo resulta de la combinación de n ecuaciones diferenciales correspondientes a cada uno de los platos de la columna de destilación.

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{Vy_2 - Lx_1 - Dx_1}{M_1}$$

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{Vy_{i+1} - Vy_{i-1} + Lx_{i-1} - Lx_i}{M_i} \tag{3.6}$$

$i = 2, 3, ..., n-1$

$$\frac{dx_n}{dt} = \frac{Vx_n - Vy_n + Lx_{n-1} - Lx_n}{M_n}$$

donde,
V es el flujo molar del vapor.
L es el flujo molar del líquido.
D es el producto destilado.
M_i es la masa retenida en el plato i.
x_i es la concentración de líquido en en el plato i.
y_i es la concentración de vapor en el plato i.
n es el número total del platos de la columna de destilación, y además corresponde al plato del hervidor.

Los flujos molares que intervienen en la dinámica son: flujo molar de vapor (3.7), flujo molar de líquido (3.8) y producto destilado (3.9).

$$V = \frac{Qb}{H_{etha}^{vap} x_n + H_{H2O}^{vap}(1 - x_n)} \tag{3.7}$$

$$L = (1 - Rf)V \tag{3.8}$$

$$D = V - L \tag{3.9}$$

donde,
Qb es la potencia calórica.
Rf es el porcentaje de apertura de la válvula de reflujo.
H_{etha}^{vap} es la entalpía de vaporización del etanol.
H_{H20}^{vap} es la entalpía de vaporización del agua.

3.3.5. Volatilidad Relativa

Con el fin de separar una mezcla binaria utilizando el proceso de destilación, debe de existir una diferencia en la volatilidad de los componentes. Cuanto mayor sea esta diferencia, más fácil será separarlos.

La volatilidad relativa es una medida de la facilidad de separación de los componentes en una mezcla líquida. Esto indica la facilidad o dificultad de usar la destilación para

separar los componentes más volátiles de los componentes menos volátiles en una mezcla. La volatilidad relativa de los componentes i y j se define como (3.10).

$$\alpha_{ij} = \frac{K_i}{K_j} \tag{3.10}$$

donde,

$$K_i = \frac{y_i}{x_i} \tag{3.11}$$

El valor K_i es una medida de la tendencia del componente i a vaporizarse.
y_i es la fracción molar del componente i en fase de vapor.
x_i es la fracción molar del componente i en fase líquida.

Si el valor de K es alto, el componente tiende a concentrarse en el vapor. Si es bajo, tiende a concentrarse en el líquido. Si el valor de K es la unidad, el componente se dividirá por igual entre el vapor y el líquido.

3.3.6. Volatilidad Relativa para Mezclas Ideales

La volatilidad relativa que expresa la relación liquido-vapor para mezclas ideales se describe como:

$$y_i = \frac{\alpha}{1 + (\alpha - 1)x_i} \tag{3.12}$$

donde,
α es la volatilidad relativa.
x_i es la concentración de líquido del componente más volátil.
y_i es la concentración de vapor del componente más volátil.

La volatilidad relativa para mezclas ideales se calcula en base a la ecuación (3.13).

$$ln\alpha \approx \frac{\Delta H^{vap}}{RT_B}\frac{\Delta T_B}{T_B} \tag{3.13}$$

donde,
$\Delta T_B = T_{BH} - T_{BL}$ es la diferencia del punto de ebullición.
$T_B = \sqrt{T_{BL}T_{BH}}$ es el promedio geométrico del punto de ebullición.
$\frac{\Delta H^{vap}}{RT_B}$ típicamente es 13.

3.3.7. Volatilidad Relativa para Mezclas no Ideales

Para mezclas no ideales, la volatilidad relativa variable expresa la relación líquido-vapor.

$$y_i P_T = P_i^{sat} x_i \gamma_i \tag{3.14}$$

donde,
y_i es la concentración de vapor del componente más volátil.
x_i es la concentración de líquido del componente más volátil.
P_T es la presión dentro de la columna.
P_i^{sat} es la presión de saturación de los elementos de la mezcla.
γ_i es el coeficiente de actividad.

El coeficiente de actividad, uno de los elementos de la volatilidad relativa, es un factor de corrección altamente dependiente de la concentración. Uno de los métodos para determinar este coeficiente en cada uno de los componentes de la mezcla se basa en la ecuación de Van Laar (3.15).

$$\begin{aligned} ln(\gamma_1(x)) &= A_{12}\left(\frac{A_{21}(1-x)}{A_{12}x + A_{21}(1-x)}\right)^2 \\ ln(\gamma_2(x)) &= A_{21}\left(\frac{A_{12}x}{A_{12}x + A_{21}(1-x)}\right)^2 \end{aligned} \tag{3.15}$$

donde A_{12} y A_{21} son constantes determinadas por la mezcla binaria.

La ecuación de Antoine (3.16) permite el cálculo de la presión de vapor (también denominada presión de saturación) para un determinado elemento de una mezcla [Green y Perry, 1973].

$$log_{10}(P^{sat}) = A + \frac{B_{eth}}{T + C} \tag{3.16}$$

Despejando y_i en (3.14) para que (3.6) este en función de x_i.

$$y_i = \frac{P_i^{sat} x_i \gamma_i(x_i)}{P_T} \tag{3.17}$$

Para simplicar el modelo se define:

$$G(x_i) = \frac{V P_i^{sat} \gamma_i(x_i)}{P_T} \tag{3.18}$$

Sustituyendo (3.18) en (3.6)

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{G(x_2)x_2 - Lx_1 - Dx_1}{M_1}$$

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{G(x_{i+1})x_{i+1} - G(x_{i-1})x_{i-1} + Lx_{i-1} - Lx_i}{M_i} \tag{3.19}$$

$i = 2, 3, ..., n-1$

$$\frac{dx_n}{dt} = \frac{Vx_n - G(x_n)x_n + Lx_{n-1} - Lx_n}{M_n}$$

A partir de (3.19) es posible expresar el sistema en forma de ecuaciones de estado de la forma:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A(x)x + B(x)u \\ y &= C(x)x \end{aligned} \tag{3.20}$$

Donde el vector de estados x corresponde a las concentraciones liquidas del elemento ligero, y el vector de entradas u está conformado por la potencia calórica Qb y por el porcentaje de apertura de la válvula de reflujo Rf.

El modelo con la forma de ecuaciones de estado (3.20) es importante, ya que a partir de esta representación se obtienen los subsistemas para el modelo Takagi-Sugeno al evaluar los valores máximo y mínimo de las variables premisas, las cuales son las que introducen las no linealidades al sistema.

Las matrices $A(x)$ y $B(x)$ tienen la siguiente forma.

$$A(x) = \begin{bmatrix} \frac{-L}{M_1} & \frac{G(x_2)}{M_1} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \frac{L}{M_2} & \frac{G(x_2)-L}{M_2} & \frac{G(x_3)}{M_2} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{L}{M_3} & \frac{G(x_3)-L}{M_3} & \frac{G(x_4)}{M_3} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{L}{M_{n-1}} & \frac{G(x_{n-1})-L}{M_{n-1}} & \frac{G(x_n)}{M_{n-1}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{L}{M_n} & \frac{-L}{M_n} \end{bmatrix} \tag{3.21}$$

$$B(x) = \begin{bmatrix} \frac{Vx_1}{M_1} & 0 \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{x_n(1-\frac{1}{V}G(x_n))}{(H_{etha}^{vap}x_n+H_{H2O}^{vap}(1-x_n)M_n)} \end{bmatrix} \tag{3.22}$$

Ya que la salida del sistema son los estados, la matriz $C(x)$ no depende de los estados y en concecuencia es una matriz constante (C), el tamaño de esta matriz depende del número de salidas que tenga el sistema.

$$C(x) = C \tag{3.23}$$

3.4. Modelo Difuso de una Columna de Destilación

El modelo de la columna de destilación (3.20) presenta no linealidades tanto en la matriz A como en la matriz B ya que ambas matrices son dependientes de los estados, además cuando el reflujo entra afecta de forma directa a todos los estados del sistema (concentraciones).

Al contar con un modelo matemático de la columna de destilación, éste se utiliza para obtener un modelo difuso Takagi-Sugeno, por lo cual no es necesario hacer la identificación de parámetros usando las entradas y salidas del sistema.

La metodología utilizada [Tanaka y Wang, 2004] para obtener un modelo difuso Takagi-Sugeno consta en seleccionar variables premisas las cuales sean las responsables de generar las no linealidades del sistema y obtener el valor máximo y el mínimo que éstas puedan alcanzar. Estos valores se utilizan para evaluar el sistema (3.20) y obtener un conjunto de subsistemas lineales, a los cuales se les asignará un peso dependiendo del valor de las premisas durante la simulación.

Ya que las matrices $A(x)$ y $B(x)$ del modelo de la columna de destilación cuentan con no linealidades en todos sus elementos diferentes de 0, el número de subsistemas que se necesitan para que la respuesta de este sea igual a la del modelo no lineal crece de manera exponencial. Para reducir el número de ecuaciones se toman solo las variables que tengan mayor relevancia con las no linealidades del sistema.

3.4.1. Variables Premisas

Ya que la señal de reflujo es la que introduce las no linealidades del sistema se toma como una variable premisa para la construcción de las reglas. Por otro lado las concentraciones de los platos $1, 2, ..., n-1$ tienen un comportamiento muy parecido entre sí, por lo que basta con seleccionar una de éstas, se selecciona la concentración del componente más volátil en el plato 1 (condensador) ya que este plato está relacionado directamente con la señal de reflujo. Por último se selecciona la concentración del componente más volátil en el plato n (hervidor) ya que ésta afecta directamente a todas las otras concentraciones de los platos superiores.

Reflujo

El porcentaje de apertura de la válvula de reflujo se selecciona como variable premisa ya que ésta es la que introduce las no linealidades al sistema debido a que ésta afecta de manera directa a todas las concentraciones de los platos.

Concentración en el Condensador

En el condensador (plato 1) es donde se encuentra la variable de entrada del reflujo y además este plato es importante para tener un control de la pureza del producto ya que es donde se obtiene el producto destilado, se selecciona como variable premisa su concentración (x_1).

Concentración en el Hervidor

Se selecciona como variable premisa la concentración de etanol (x_n) en el hervidor ya que en este plato es donde se encuentra la mezcla que desea separar, además de que este plato está relacionado directamente con la potencia calórica (una de las variables de entrada al sistema), la cual es la encargada de proporcionar la energía para calentar la mezcla.

3.4.2. Reglas Difusas

Seleccionando la concentración de líquido en el condensador (x_1), en el hervidor (x_{11}) y el reflujo (Rf) como variables premisas, las funciones de membresía se proponen como funciones trapezoidales.

Funciones de Membresía

Para las variables premisas seleccionadas (*reflujo,concentración en el condensador* y *concentración en el hervidor*) se utiliza una función de membresía del tipo trapezoidal con dos reglas para cada una representada de manera gráfica en la Figura 3.4. Se selecciona este tipo de función debido a que permite un mayor rango en el universo de discurso donde el grado de pertenencia sea de 1, lo cual evita que haya una oscilación cuando los estados se estabilicen.

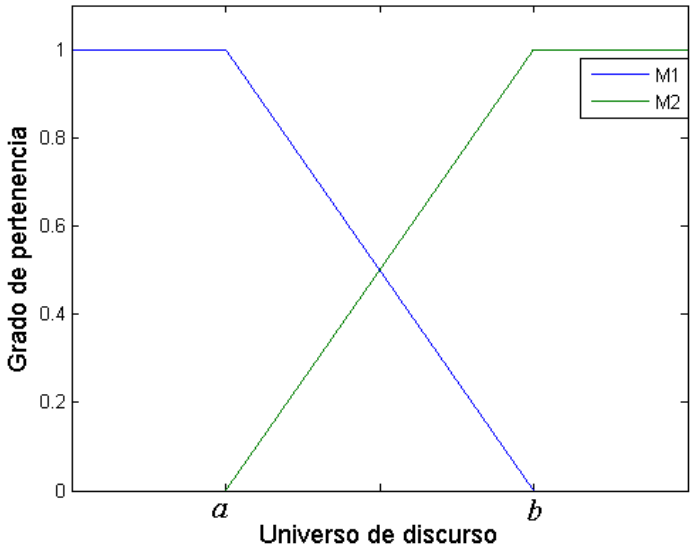


Figura 3.4: Función de membresía propuesta para las reglas difusas.

Las funciones de membresía de tipo trapezoidal se definen como (3.24) y (3.25).

$$M1 = \begin{cases} 1, & x < a \\ \frac{b-x}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 0, & x > b \end{cases} \tag{3.24}$$

$$M2 = \begin{cases} 0, & x < a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 1, & x > b \end{cases} \tag{3.25}$$

El número de subsistemas depende de las combinaciones que las funciones de membresía pueden tener, para el caso de 3 variables premisas con dos reglas cada una, el número de subsistemas es de $2^3 = 8$.

La Tabla 3.1 muestra las combinaciones de las reglas difusas asociadas a los subsistemas $(A_1, B_1, C_1), (A_2, B_2, C_2), ..., (A_8, B_8, C_8)$.

Tabla 3.1: Reglas difusas

	M1		M2	
	$M3$	$M4$	$M3$	$M4$
$M5$	A_1, B_1, C_1	A_2, B_2, C_2	A_3, B_3, C_3	A_4, B_4, C_4
$M6$	A_5, B_5, C_5	A_6, B_6, C_6	A_7, B_7, C_7	A_8, B_8, C_8

Por lo que las reglas difusas son:

SI $z_1(t)$ es $M1$, $z_2(t)$ es $M3$ y $z_3(t)$ es $M5$,

$$\textbf{Entonces} = \begin{cases} \dot{x}(t) = A_1 x(t) + B_1 u(t) \\ y(y) = C_1 x(t) \end{cases}$$

SI $z_1(t)$ es $M1$, $z_2(t)$ es $M3$ y $z_3(t)$ es $M6$,

$$\textbf{Entonces} = \begin{cases} \dot{x}(t) = A_2 x(t) + B_2 u(t) \\ y(y) = C_2 x(t) \end{cases}$$

SI $z_1(t)$ es $M1$, $z_2(t)$ es $M4$ y $z_3(t)$ es $M5$,

$$\textbf{Entonces} = \begin{cases} \dot{x}(t) = A_3 x(t) + B_3 u(t) \\ y(y) = C_3 x(t) \end{cases}$$

SI $z_1(t)$ es $M1$, $z_2(t)$ es $M4$ y $z_3(t)$ es $M6$,

$$\textbf{Entonces} = \begin{cases} \dot{x}(t) = A_4 x(t) + B_4 u(t) \\ y(y) = C_4 x(t) \end{cases}$$

SI $z_1(t)$ es $M2$, $z_2(t)$ es $M3$ y $z_3(t)$ es $M5$,

$$\textbf{Entonces} = \begin{cases} \dot{x}(t) = A_5 x(t) + B_5 u(t) \\ y(y) = C_5 x(t) \end{cases}$$

SI $z_1(t)$ es $M2$, $z_2(t)$ es $M3$ y $z_3(t)$ es $M6$,

$$\textbf{Entonces} = \begin{cases} \dot{x}(t) = A_6 x(t) + B_6 u(t) \\ y(y) = C_6 x(t) \end{cases}$$

SI $z_1(t)$ es $M2$, $z_2(t)$ es $M4$ y $z_3(t)$ es $M5$,

$$\textbf{Entonces} = \begin{cases} \dot{x}(t) = A_7 x(t) + B_7 u(t) \\ y(y) = C_7 x(t) \end{cases}$$

SI $z_1(t)$ es $M2$, $z_2(t)$ es $M4$ y $z_3(t)$ es $M6$,

$$\textbf{Entonces} = \begin{cases} \dot{x}(t) = A_8 x(t) + B_8 u(t) \\ y(y) = C_8 x(t) \end{cases}$$

Con lo que el modelo Takagi-Sugeno de la columna de destilación resulta en (3.26) y (3.27).

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{8} h_i(z(t))[A_i x(t) + B_i u(t)] \tag{3.26}$$

$$y(t) = \sum_{i=1}^{8} h_i(z(t)) C_i x(t) \tag{3.27}$$

3.5. Conclusión

En este capítulo se presentó el modelado no lineal que representa la dinámica de las concentraciones del elemento ligero en una columna de destilación binaria tipo batch, además se presenta la relación química que existe entre los elementos en una mezcla binaria.

Este tipo de sistemas presentan una gran complejidad para ser modelados debido al gran número de variables, tanto físicas como químicas, por esta razón se toman en cuenta ciertas consideraciones para reducir el número de variables, ya que incluirlas todas en el modelo aumenta tanto la complejidad del desarrollo del modelo, como el esfuerzo computacional necesario para hacer una simulación. Estas consideraciones aunque facilitan el desarrollo del modelo eliminando algunas variables, no comprometen de manera significativa la fidelidad del mismo.

A partir del modelo no lineal se propuso un modelo difuso Takagi-Sugeno, el cual permite la implementación de técnicas para sistemas lineales en sistemas no lineales. Para este modelo se propusieron 3 variables premisas (concentración molar en el condensador, concentración molar en el hervidor y porcentaje de apertura de la válvula de reflujo) para la construcción de las reglas difusas.

Capítulo 4

Diseño de Observadores y Caso de Estudio

En algunos sistemas físicos no es posible medir todos los estados del sistema, ya sea porque éstos no son accesibles o porque el sensor necesario para medirlos no es económicamente viable. Una alternativa para estos casos es estimar los estados no medibles por medio de un observador de estados, el cual es un sistema dinámico cuyos estados estimados convergen a los estados del sistema real.

4.1. Observadores de Estado

Los observadores de estados son algoritmos computacionales diseñados para estimar variables de estado las cuales no pueden ser medidas físicamente debido a la falta de sensores apropiados o de sensores de precios muy elevados. Debido a que los observadores de estado pueden estimar las variables de estado de los sistemas son considerados sensores virtuales.

Una de las aplicaciones más importantes para los observadores de estados es el diseño de control, debido a que la implementación de control con retroalimentación de estados de una planta se basa en la suposición de que todos los estados están disponibles para su medición en línea.

En el área de detección de fallas se utiliza redundancia en los sensores, es decir, se coloca más de un sensor en las diferentes etapas del sistema para comparar las mediciones y detectar alguna posible falla. Los observadores son indispensables ya que se utilizan como sensores virtuales, con la ventaja de que se pueden utilizar muchos observadores

sin aumentar el precio ni el tamaño físico del sistema ya que todos éstos se ejecutan en una computadora, mientras que si se usan sensores físicos, además de elevar el precio, aumentan las dimensiones físicas por cada sensor extra que se utilice, por lo que en esta área lo más utilizado son los observadores como generadores de residuos.

4.1.1. Observador Luenberger

El observador de tipo Lunberger es un estimador de estados de un sistema dinámico lineal a partir de las mediciones de la entrada y la salida de dicho sistema.

El principio fundamental en el cual se basa este tipo de observador es generar un sistema "copia" (observador) del sistema original, el cual pueda "medir" (estimar) todos los estados de forma directa. Si el sistema original y el observador son sometidos a la misma entrada, se espera que, a medida que pase el tiempo, el observador se comience a comportar del mismo modo que el sistema original debido a que sus estados internos tienden a parecerse cada vez más. De este modo, los estados del observador se pueden usar como una aproximación de los estados del sistema original. La Figura 4.1 representa de manera gráfica un observador de estados.

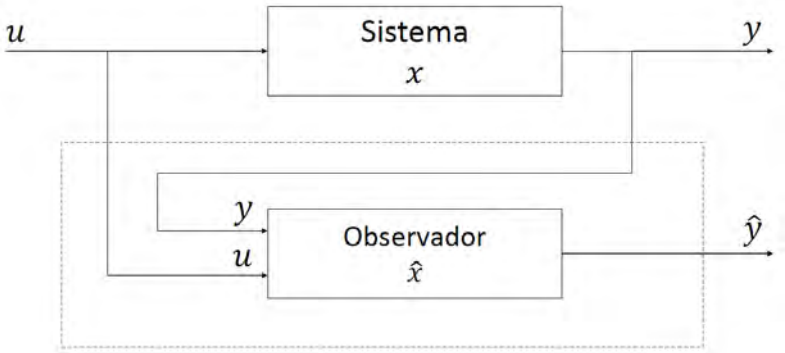


Figura 4.1: Estructura básica de un observador.

Para lograr la convergencia de los estados del observador a los del sistema original, se estimula al observador con una entrada corregida, la cual consiste en la diferencia entre la salida de los dos sistemas multiplicada por una ganancia constante (K). De este modo se modifica la dinámica del sistema copia para que logre estimar los estados del sistema original en un tiempo arbitrariamente pequeño, con lo que el sistema es capaz de observar tanto la entrada del sistema como la diferencia de la salida de ambos para lograr converger más rápido. El valor de la ganancia K se puede calcular con distintos métodos dependiendo de la aplicación, el mas común es por asignación de polos.

Si se cuenta con un sistema obsevable de la forma:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \tag{4.1}$$

$$y(t) = Cx(t) \tag{4.2}$$

El modelo general de un observador tipo Luenberger es:

$$\dot{\widehat{x}}(t) = A\widehat{x}(t) + Bu(t) + K(y - \widehat{y}) \tag{4.3}$$

$$\widehat{y}(t) = C\widehat{x}(t) \tag{4.4}$$

donde,
$\widehat{x}$ es el vector de estados estimados.
$\widehat{y}$ es la salida estimada del observador.
K es una ganancia constante.

4.2. Observador Difuso

Un observador difuso se obtiene a través de la interconectividad difusa de observadores tipo Luenberger lineales locales. Esta técnica utiliza desigualdades de matrices lineales (LMIs por sus siglas en inglés), para asegurar la estabilidad de cada subsistema lineal local.

En esta aproximación no se asume la linealidad de los procesos no lineales con respecto a las entradas, que generalmente se asume para los observadores no lineales convencionales. Las técnicas difusas han demostrado tener una efectividad exitosa en el control de procesos complejos, donde se han presentado resultados teóricos importantes.

Combinando el modelo difuso (3.26) con el observador de tipo Luenberger(4.3) para cada subsistema se obtiene el modelo general del observador difuso.

$$\dot{\widehat{x}}(t) = \sum_{i=1}^{8} h_i(z(t))[A_i\widehat{x}(t) + B_iu(t) + K_i(y(t) - \widehat{y}(t))] \tag{4.5}$$

$$\widehat{y}(t) = \sum_{i=1}^{8} h_i(z(t))C_i\widehat{x}(t) \tag{4.6}$$

Tanaka presenta en [Tanaka y Sugeno, 1992], la demostración de que el observador difuso es estable siempre y cuando se halle una matriz P que satisfaga el siguiente sistema de LMIs.

$$
\begin{gathered}
P > 0 \\
A_i^T P - C_i^T N_i^T + P A_i - N_i C_i < 0 \\
A_i^T P - C_j^T N_i^T + P A_i - N_i C_j + A_j^T P - C_i^T N_j^T + P A_j - N_j C_i < 0 \\
i < j
\end{gathered} \tag{4.7}
$$

Una vez resuelto el sistema de LMIs las ganancias K_i se calculan con:

$$
K_i = P^{-1} N_i \tag{4.8}
$$

4.3. Observador Difuso con Modos Deslizantes

4.3.1. Observador con Modos Deslizantes

Para un sistema de entradas desconocidas con la forma:

$$
\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) + Ed(t) \\
y(t) &= Cx(t)
\end{aligned} \tag{4.9}
$$

donde,
$d(t)$ es el vector de entradas desconocidas el cual usualmente contiene perturbaciones externas o fallas en el sistema.
E es la matriz de distribución de falla.

Se propone el siguiente observador con modos deslizantes

$$
\begin{aligned}
\widehat{\dot{x}}(t) &= A\widehat{x}(t) + Bu(t) + L(y(t) - \widehat{y}(t)) + \varphi(t) \\
\widehat{y}(t) &= C\widehat{x}(t)
\end{aligned} \tag{4.10}
$$

$\varphi(t)$ es el vector discontinuo de modos deslizantes.

Para el análisis de la convergencia se define

$$e(t) = x(t) - \widehat{x}(t) \tag{4.11}$$

La dinámica del error es

$$\begin{aligned}
\dot{e}(t) &= \dot{x}(t) - \dot{\widehat{x}}(t) \\
&= Ax(t) + Bu(t) + Ed(t) - A\widehat{x}(t) - Bu(t) - L(y(t) - \widehat{y}(t)) - \varphi(t) \\
&= A(x(t) - \widehat{x}(t)) + Ed(t) - LC(x(t) - \widehat{x}(t)) - \varphi(t) \\
\dot{e}(t) &= \overline{A}e(t) + Ed(t) - \varphi(t)
\end{aligned} \tag{4.12}$$

donde,

$$\overline{A} = (A - LC)$$

Proponiendo la siguiente función de Lyapunov

$$v(t) = e^T(t)P_{sm}e(t) \tag{4.13}$$

Derivando (4.13), y omitiendo la dependencia del tiempo.

$$\begin{aligned}
\dot{v} &= e^T P_{sm}\dot{e} + \dot{e}^T P_{sm}e \\
\dot{v} &= e^T P_{sm}[\overline{A}e + Ed - \varphi] + [\overline{A}e + Ed - \varphi]^T P_{sm}e \\
\dot{v} &= e^T P_{sm}\overline{A}e + e^T P_{sm}Ed - e^T P_{sm}\varphi + e^T\overline{A}P_{sm}e^T + d^T E^T P_{sm}e - \varphi^T P_{sm}e \\
\dot{v} &= e^T[P_{sm}\overline{A} + \overline{A}^T P_{sm}]e + 2e^T P_{sm}Ed - 2e^T P_{sm}\varphi
\end{aligned} \tag{4.14}$$

Definiendo

$$\gamma = P_{sm}\overline{A} + \overline{A}^T P_{sm} \tag{4.15}$$

Reescribiendo (4.14).

$$\dot{v} = \gamma||e||^2 + 2||e^T P_{sm}||||Ed|| - 2e^T P_{sm}\varphi \tag{4.16}$$

Ya que γ corresponde a una desigualdad de Lyapunov ésta es esdefinida negativa, por lo que el termino $\gamma||e||^2$ es negativo. Para lograr la condición de $\dot{v} < 0$, se propone que φ tenga la siguiente forma

$$\varphi^T = M\frac{e^T P_{sm}}{||e^T P_{sm}||} = Msign(e^T P_{sm}) \tag{4.17}$$

donde,
M es una ganancia constante positiva.
P_{sm} es una matriz definida positiva, la cual debe cumplir la ecuación de Lyapunov.

$$P_{sm}\overline{A} + \overline{A}^T P_{sm} < 0 \tag{4.18}$$

Omitiendo el termino $\gamma||e||^2$ en la ecuación (4.16), ya que este siempre tiene un valor negativo.

$$\begin{aligned} 2||e^T P_{sm}||||Ed|| - 2e^T P_{sm}[M\frac{e^T P_{sm}}{||e^T P_{sm}||}] < 0 \\ 2||e^T P_{sm}||[||Ed|| - M] < 0 \\ ||Ed|| < M \end{aligned} \tag{4.19}$$

Se selecciona un valor de M lo suficientemente grande para satisfacer la condición (4.19).

4.3.2. Observador Difuso con Modos Deslizantes

Utilizando el observador difuso Takagi-sugeno (4.5), es posible la construcción de observadores locales con modos deslizantes para cada subsistema lineal [Anzurez-Marín, 2007]. Donde cada observador está asociado a una regla difusa i dada como:

SI $z_1(t)$ es $M1$ y, ... , y $z_p(t)$ es Mp ,

$$\textbf{Entonces} = \begin{cases} \dot{\widehat{x}}(t) = A_i\widehat{x}(t) + B_i u(t) + K_i(y(t) - \widehat{y}(t)) + \varphi_i(t) \\ \widehat{y}(t) = C_i\widehat{x}(t) \end{cases}$$

El observador completo está dado por la suma ponderada de cada subsistema.

$$\dot{\widehat{x}}(t) = \sum_{i=1}^{N} h_i(z(t))[A_i\widehat{x}(t) + B_i u(t) + K_i C_i(x(t) - \widehat{x}(t)) + \varphi_i(t)] \tag{4.20}$$

$$\widehat{y}(t) = \sum_{i=1}^{N} h_i(z(t)) C_i\widehat{x}(t) \tag{4.21}$$

$\varphi_i(t)$ es el vector discontinuo de modos deslizantes para el subsistema i, el cual tiene la siguiente forma:

$$\varphi(t)_i = M_i sign(P_i e) \tag{4.22}$$

donde,
$M_i > 0$ constante positiva.
$P_i > 0$ así la ecuación de Lyapunov se cumple.
e está definido como el error de estado estimado.

$$e = (x - \widehat{x}) \tag{4.23}$$

La estabilidad del observador completo está demostrada si cada par A_i, C_i es observable y P cumple con la ecuación de Lyapunov.

$$P_i\overline{A_i} + \overline{A_i}^T P_i < 0 \tag{4.24}$$

donde,

$$\overline{A_i} = A_i - K_i C_i \tag{4.25}$$

4.4. Caso de Estudio

El caso de estudio es una columna de destilación binaria tipo batch EDF-1000 de 11 platos. La columna cuenta con las siguientes caracteristicas:

- Un condensador de tipo espiral.
- 9 platos perforados intermedios.
- Un hervidor con capacidad de 2 litros.
- Una resistencia calefactora de 16 ohms 1000 watts.
- 7 sensores de temperatura.
- Una válvula on-off de reflujo.

Los sensores RTD tipo PT100 se utilizan para medir las temperaturas en cada plato, con la finalidad de estimar las concentraciones molares a partir de las mediciones de temperatura y la curva de equilibrio líquido-vapor. Los sensores están ubicados en los platos $1, 2, 4, 6, 8, 10, 11$.

4.4.1. Modelo no Lineal

El modelo no lineal de la columna de destilación para el caso de estudio se obtiene a partir de modelo general (3.6). El modelo consta de 11 ecuaciones diferenciales (una para representar cada plato):

$$
\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt} &= \frac{G(x_2)x_2 - Lx_1 - Dx_1}{M_1} \\
\frac{dx_2}{dt} &= \frac{G(x_3)x_3 - G(x_2)x_2 + Lx_1 - Lx_2}{M_2} \\
\frac{dx_3}{dt} &= \frac{G(x_4)x_4 - G(x_3)x_3 + Lx_2 - Lx_3}{M_3} \\
\frac{dx_4}{dt} &= \frac{G(x_5)x_5 - G(x_4)x_4 + Lx_3 - Lx_4}{M_4} \\
\frac{dx_5}{dt} &= \frac{G(x_6)x_6 - G(x_5)x_5 + Lx_4 - Lx_5}{M_5} \\
\frac{dx_6}{dt} &= \frac{G(x_7)x_7 - G(x_6)x_6 + Lx_5 - Lx_6}{M_6} \\
\frac{dx_7}{dt} &= \frac{G(x_8)x_8 - G(x_7)x_7 + Lx_6 - Lx_7}{M_7} \\
\frac{dx_8}{dt} &= \frac{G(x_9)x_9 - G(x_8)x_8 + Lx_7 - Lx_8}{M_8} \\
\frac{dx_9}{dt} &= \frac{G(x_{10})x_{10} - G(x_9)x_9 + Lx_8 - Lx_9}{M_9} \\
\frac{dx_{10}}{dt} &= \frac{G(x_{11})x_{11} - G(x_{10})x_{10} + Lx_9 - Lx_{10}}{M_{10}} \\
\frac{dx_{11}}{dt} &= \frac{Vx_{11} - G(x_{11})x_{11} + Lx_{10} - Lx_{11}}{M_{11}}
\end{aligned}
\tag{4.26}
$$

donde,
$\frac{dx_1}{dt}$ representa la dinámica de la concentración molar líquida del elemento más volátil en el condensador.
$\frac{dx_2}{dt}, ..., \frac{dx_{10}}{dt}$ representan la dinámica de las concentraciones molares líquidas del elemento más volátil de en los platos intermedios.
$\frac{dx_{11}}{dt}$ representa la dinámica de la concentración molar líquida del elemento más volátil en el hervidor.

Representando el sistema en la forma estandar de ecuaciones de estado (3.20), y sustituyendo el modelo no lineal (4.26) en las matrices $A(x)$ (3.21) y $B(x)$ (3.22).

$$A(x) = \begin{bmatrix} \frac{-L}{M_1} & \frac{G(x_2)}{M_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{L}{M_2} & \frac{G(x_2)-L}{M_2} & \frac{G(x_3)}{M_2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{L}{M_3} & \frac{G(x_3)-L}{M_3} & \frac{G(x_4)}{M_3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{L}{M_4} & \frac{G(x_4)-L}{M_4} & \frac{G(x_5)}{M_4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{L}{M_5} & \frac{G(x_5)-L}{M_5} & \frac{G(x_6)}{M_5} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{L}{M_6} & \frac{G(x_6)-L}{M_6} & \frac{G(x_7)}{M_6} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{L}{M_7} & \frac{G(x_7)-L}{M_7} & \frac{G(x_8)}{M_7} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{L}{M_8} & \frac{G(x_8)-L}{M_8} & \frac{G(x_9)}{M_8} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{L}{M_9} & \frac{G(x_9)-L}{M_9} & \frac{G(x_{10})}{M_9} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{L}{M_{10}} & \frac{G(x_{10})-L}{M_{10}} & \frac{G(x_{11})}{M_{10}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{L}{M_{11}} & \frac{-L}{M_{11}} \end{bmatrix} \tag{4.27}$$

$$B(x) = \begin{bmatrix} \frac{Vx_1}{M_1} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{x_n(1-\frac{1}{V}G(x_n))}{(H_{etha}^{vap}x_n + H_{H2O}^{vap}(1-x_n)M_n)} \end{bmatrix} \tag{4.28}$$

Esta forma es necesaria para obtener los pares de matrices $(A_1, B_1), ..., (A_8, B_8)$ de los subsistemas para el modelo difuso.

Ya que el sistema cuenta con 7 sensores la matriz $C(x) = C$ es:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{4.29}$$

Constantes para una Mezcla de Etanol-Agua

A continuación se muestran los valores de las constantes para una mezcla Etanol-Agua.

La Tabla 4.1 muestra las constantes de Antoine [Green y Perry, 1973] para el cálculo de la presión de saturación a partir de la ecuación de Antoine (3.16). El etanol tiene diferentes constantes dependiendo de la temperatura a la que se encuentre. Para el caso de la columna de destilación, el rango de operación está entre los 78 y 100 °C, por lo cual se eligen los valores correspondientes a este rango.

Tabla 4.1: Constantes de Antoine.

Componente	**A**	**B**	**C**	**Temperatura °C**
Etanol	7.5867	1281.580	193.768	78-203
Etanol	8.11220	1592.864	226.184	20-93
Agua	8.07131	1730.630	233.426	1-100

La Tabla 4.2 muestra el valor de las masas retenidas dentro de los platos de la columna de destilación ubicada en el Instituto Tecnológico de Morelia [Escamirosa-Torres, 2016].

Tabla 4.2: Masas retenidas en los platos.

Plato de la columna	**Símbolo**	**Masa retenida**
Condensador	M_1	0.1831 moles
Platos intermedios	$M_2, ..., M_{10}$	0.2044 moles
Hervidor	M_{11}	72.6355 moles

La Tabla 4.3 muestra las entalpias de vaporización de los elementos de la mezcla y la presión dentro de la columna .

Tabla 4.3: Entalpias de la mezcla y presión dentro de la columna.

Constante	**Simbolo**	**Valor**
Entalpía del etanol	H_{etha}^{vap}	$38.6kJ/mol$
Entalpía del agua	H_{H20}^{vap}	$40.66kJ/mol$
Presión dentro de la columna	P_T	$1013.25hPa$

4.4.2. Modelo Difuso Takagi-Sugeno

A partir del modelo difuso (3.26) se desarrolla el modelo Takagi-Sugeno de la columna de destilación.

El número de subsistemas depende de las variables premisas y las funciones de membresía asociadas a ellas. Se utilizan tres variables premisas con dos reglas difusas asociadas a cada una de ellas, por lo tanto el número de subsistemas es $2^3 = 8$, el modelo difuso es:

$$\dot{\widehat{x}}(t) = \sum_{i=1}^{8} h_i(z(t))[A_i\widehat{x}(t) + B_i u(t)] \tag{4.30}$$

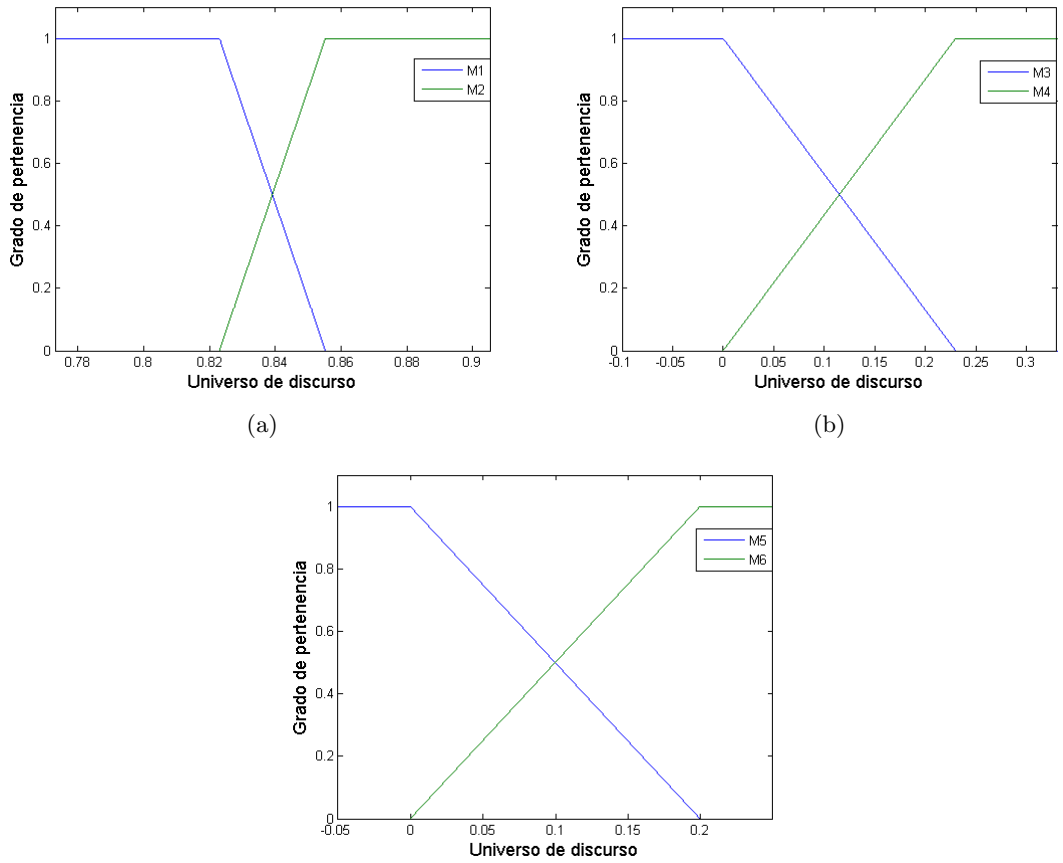
$$\widehat{y}(t) = \sum_{i=1}^{8} h_i(z(t))C_i\widehat{x}(t) \tag{4.31}$$

Con la simulación del modelo no lineal se obtienen los valores máximos y mínimos que las variables premisas pueden alcanzar los cuales se muestran en la Tabla 4.4.

Tabla 4.4: Máximos y mínimos para las funciones de membresía.

Variable premisa	Mínimo (a)	Máximo (b)
Concentración en el condensador x_1	0.8230	0.86
Concentración en el hervidor x_{11}	0	0.23
Porcentaje de apertura en la válvula Rf	0	0.2

Sustituyendo los valores de la Tabla 4.4 en las funciones de membresía (3.24) y (3.25) se obtienen las funciones de la Figura 4.2.



(a) (b)

(c)

Figura 4.2: Funciones de membresía para las variables premisas. (a)Función de membresía para la concentración en el condensador, (b)Función de membresía para la concentración en el hervidor, (c)Función de membresía para el reflujo.

Los pares (A_1, B_1) , (A_2, B_2),...,(A_8, B_8) correspondientes a cada subsistema, se obtienen al evaluar las matrices $A(x)$ (4.27) y $B(x)$ (4.28) con las combinaciones de los valores máximos y mínimos de las variables premisas. Todos los subsistemas tienen la misma salida, por lo tanto $C_1 = C_2 =, ..., = C_8 = C$. En el apéndice A se muestran las matrices (A_1, B_1) , (A_2, B_2),...,(A_8, B_8).

Se demuestra que los pares A_i, C son observables, ya que cumplen con:

$$Rango(O) = Rango\left(\begin{bmatrix} C & CA_i & CA_i^2 & ... & CA_i^{10} & CA_i^{11} \end{bmatrix}^T\right) = 11 \tag{4.32}$$

para $i = 1, 2, ..., 8$, por lo tanto todos los subsistemas son observables.

Los pesos w_i se calculan como el producto de las funciones de pertenencia (2.7) para cada regla, éstos son:

$$\begin{aligned} w_1 &= M1(x_1) * M3(x_{11}) * M5(Rf) \\ w_2 &= M1(x_1) * M3(x_{11}) * M6(Rf) \\ w_3 &= M1(x_1) * M4(x_{11}) * M5(Rf) \\ w_4 &= M1(x_1) * M4(x_{11}) * M6(Rf) \\ w_5 &= M2(x_1) * M3(x_{11}) * M5(Rf) \\ w_6 &= M2(x_1) * M3(x_{11}) * M6(Rf) \\ w_7 &= M2(x_1) * M4(x_{11}) * M5(Rf) \\ w_8 &= M2(x_1) * M4(x_{11}) * M6(Rf) \end{aligned} \tag{4.33}$$

Por lo que los pesos h_i (pesos normalizados (2.8)) son:

$$\begin{aligned} h_1 &= \frac{w_1}{wt} \\ h_2 &= \frac{w_2}{wt} \\ h_3 &= \frac{w_3}{wt} \\ h_4 &= \frac{w_4}{wt} \\ h_5 &= \frac{w_5}{wt} \\ h_6 &= \frac{w_6}{wt} \\ h_7 &= \frac{w_7}{wt} \\ h_8 &= \frac{w_8}{wt} \end{aligned} \tag{4.34}$$

donde,

$$wt = \sum_{i=1}^{N} w_i(z(t))$$

4.4.3. Observador Difuso

A partir del modelo general del observador difuso (4.5) se obtiene el observador difuso para el sistema de 11 platos :

$$\widehat{x}(t) = \sum_{i=1}^{8} h_i(z(t))[A_i\widehat{x}(t) + B_i u(t) + K_i(y(t) - \widehat{y}(t))] \tag{4.35}$$

$$\widehat{y}(t) = \sum_{i=1}^{8} h_i(z(t))C_i\widehat{x}(t) \tag{4.36}$$

Utilizando el sistema de LMIs (4.7) para 8 reglas, se obtiene el sistema de LMIs para el observador difuso. Los LMIs propios de cada función son:

$$\begin{aligned}
A_1^T P - C_1^T N_1^T + PA_1 - N_1C_1 < 0 \\
A_2^T P - C_2^T N_2^T + PA_2 - N_2C_2 < 0 \\
A_3^T P - C_3^T N_3^T + PA_3 - N_3C_3 < 0 \\
A_4^T P - C_4^T N_4^T + PA_4 - N_4C_4 < 0 \\
A_5^T P - C_5^T N_5^T + PA_5 - N_5C_5 < 0 \\
A_6^T P - C_6^T N_6^T + PA_6 - N_6C_6 < 0 \\
A_7^T P - C_7^T N_7^T + PA_7 - N_7C_7 < 0 \\
A_8^T P - C_8^T N_8^T + PA_8 - N_8C_8 < 0
\end{aligned}$$

Las LMIs que representan los traslapes de las funciones de membresía son:

$$A_1^T P - C_2^T N_1^T + PA_1 - N_1 C_2 + A_2^T P - C_1^T N_2^T + PA_2 - N_2 C_1 < 0$$
$$A_1^T P - C_3^T N_1^T + PA_1 - N_1 C_3 + A_3^T P - C_1^T N_3^T + PA_3 - N_3 C_1 < 0$$
$$A_1^T P - C_4^T N_1^T + PA_1 - N_1 C_4 + A_4^T P - C_1^T N_4^T + PA_4 - N_4 C_1 < 0$$
$$A_1^T P - C_5^T N_1^T + PA_1 - N_1 C_5 + A_5^T P - C_1^T N_5^T + PA_5 - N_5 C_1 < 0$$
$$A_1^T P - C_6^T N_1^T + PA_1 - N_1 C_6 + A_6^T P - C_1^T N_6^T + PA_6 - N_6 C_1 < 0$$
$$A_1^T P - C_7^T N_1^T + PA_1 - N_1 C_7 + A_7^T P - C_1^T N_7^T + PA_7 - N_7 C_1 < 0$$
$$A_1^T P - C_8^T N_1^T + PA_1 - N_1 C_8 + A_8^T P - C_1^T N_8^T + PA_8 - N_8 C_1 < 0$$

$$A_2^T P - C_3^T N_2^T + PA_2 - N_2 C_3 + A_3^T P - C_2^T N_3^T + PA_3 - N_3 C_2 < 0$$
$$A_2^T P - C_4^T N_2^T + PA_2 - N_2 C_4 + A_4^T P - C_2^T N_4^T + PA_4 - N_4 C_2 < 0$$
$$A_2^T P - C_5^T N_2^T + PA_2 - N_2 C_5 + A_5^T P - C_2^T N_5^T + PA_5 - N_5 C_2 < 0$$
$$A_2^T P - C_6^T N_2^T + PA_2 - N_2 C_6 + A_6^T P - C_2^T N_6^T + PA_6 - N_6 C_2 < 0$$
$$A_2^T P - C_7^T N_2^T + PA_2 - N_2 C_7 + A_7^T P - C_2^T N_7^T + PA_7 - N_7 C_2 < 0$$
$$A_2^T P - C_8^T N_2^T + PA_2 - N_2 C_8 + A_8^T P - C_2^T N_8^T + PA_8 - N_8 C_2 < 0$$

$$A_3^T P - C_4^T N_3^T + PA_3 - N_3 C_4 + A_4^T P - C_3^T N_4^T + PA_4 - N_4 C_3 < 0$$
$$A_3^T P - C_5^T N_3^T + PA_3 - N_3 C_5 + A_5^T P - C_3^T N_5^T + PA_5 - N_5 C_3 < 0$$
$$A_3^T P - C_6^T N_3^T + PA_3 - N_3 C_6 + A_6^T P - C_3^T N_6^T + PA_6 - N_6 C_3 < 0$$
$$A_3^T P - C_7^T N_3^T + PA_3 - N_3 C_7 + A_7^T P - C_3^T N_7^T + PA_7 - N_7 C_3 < 0$$
$$A_3^T P - C_8^T N_3^T + PA_3 - N_3 C_8 + A_8^T P - C_3^T N_8^T + PA_8 - N_8 C_3 < 0$$

$$A_4^T P - C_5^T N_4^T + PA_4 - N_4 C_5 + A_5^T P - C_4^T N_5^T + PA_5 - N_5 C_4 < 0$$
$$A_4^T P - C_6^T N_4^T + PA_4 - N_4 C_6 + A_6^T P - C_4^T N_6^T + PA_6 - N_6 C_4 < 0$$
$$A_4^T P - C_7^T N_4^T + PA_4 - N_4 C_7 + A_7^T P - C_4^T N_7^T + PA_7 - N_7 C_4 < 0$$
$$A_4^T P - C_8^T N_4^T + PA_4 - N_4 C_8 + A_8^T P - C_4^T N_8^T + PA_8 - N_8 C_4 < 0$$

$$A_5^T P - C_6^T N_5^T + PA_5 - N_5 C_6 + A_6^T P - C_5^T N_6^T + PA_6 - N_6 C_5 < 0$$
$$A_5^T P - C_7^T N_5^T + PA_5 - N_5 C_7 + A_7^T P - C_5^T N_7^T + PA_7 - N_7 C_5 < 0$$
$$A_5^T P - C_8^T N_5^T + PA_5 - N_5 C_8 + A_8^T P - C_5^T N_8^T + PA_8 - N_8 C_5 < 0$$

$$A_6^T P - C_7^T N_6^T + PA_6 - N_6 C_7 + A_7^T P - C_6^T N_7^T + PA_7 - N_7 C_6 < 0$$
$$A_6^T P - C_8^T N_6^T + PA_6 - N_6 C_8 + A_8^T P - C_6^T N_8^T + PA_8 - N_8 C_6 < 0$$

$$A_7^T P - C_8^T N_7^T + P A_7 - N_7 C_8 + A_8^T P - C_7^T N_8^T + P A_8 - N_8 C_7 < 0$$

donde,
A_i es la matriz del subsistema i, la cual tiene una dimensión de $11x11$.
P es una matriz diagonal definida positiva con una dimensión de $11x11$.
C es la matriz de salida de los subsistemas la cual tiene una dimensión de $11x7$.
N_i son matrices auxiliares de dimensión de $7x11$.

El sistema de 36 LMIs se resuleve utilizando la herramineta *lmiedit* de MATLAB®.

Una vez resuelto el sistema de LMIs con $P > 0$ para garantizar la convergencia de cada subsistema se calculan las ganancias K_i (4.8).

$$K_1 = P^{-1} N_1$$
$$K_2 = P^{-1} N_2$$
$$K_3 = P^{-1} N_3$$
$$K_4 = P^{-1} N_4$$
$$K_5 = P^{-1} N_5$$
$$K_6 = P^{-1} N_6$$
$$K_7 = P^{-1} N_7$$
$$K_8 = P^{-1} N_8$$

Los valores numéricos de las ganancias K_i del observador difuso se muestran en el Apéndice A.

4.4.4. Observador Difuso con Modos Deslizantes

A partir del modelo general del observador difuso con modos deslizantes (4.20), se obtiene el observador difuso con modos deslizantes para el sistema de 11 platos:

$$\dot{\widehat{x}}(t) = \sum_{i=1}^{8} h_i(z(t))[A_i \widehat{x}(t) + B_i u(t) + K_i C_i(x(t) - \widehat{x}(t)) + \varphi_i(t)] \tag{4.37}$$

$$\widehat{y}(t) = \sum_{i=1}^{8} h_i(z(t)) C_i \widehat{x}(t) \tag{4.38}$$

El vector discontinuo $\varphi(t)_i$ (4.22) cuenta con 8 elementos, uno para cada subsistema.

$$\varphi(t)_1 = M_1 sign(P_{sm1}e)$$
$$\varphi(t)_2 = M_2 sign(P_{sm2}e)$$
$$\varphi(t)_3 = M_3 sign(P_{sm3}e)$$
$$\varphi(t)_4 = M_4 sign(P_{sm4}e)$$
$$\varphi(t)_5 = M_5 sign(P_{sm5}e)$$
$$\varphi(t)_6 = M_6 sign(P_{sm6}e)$$
$$\varphi(t)_7 = M_7 sign(P_{sm7}e)$$
$$\varphi(t)_8 = M_8 sign(P_{sm8}e)$$

Las ganacias M_i se proponen como $M_1 = M_2 = ... = M_8 = M = 1$, ya que los valores de las concentraciones son inferiores a 1 por lo que una perturbación no puede ser mayor que éstos y se cumple la condición (4.19).

De acuerdo a la ecuación de Lyapunov (4.24) las ganancias P_{smi} deben de cumplir con:

$$P_{sm1}\overline{A_1} + \overline{A_1}^T P_{sm1} < 0$$
$$P_{sm2}\overline{A_2} + \overline{A_2}^T P_{sm2} < 0$$
$$P_{sm3}\overline{A_3} + \overline{A_3}^T P_{sm3} < 0$$
$$P_{sm4}\overline{A_4} + \overline{A_4}^T P_{sm4} < 0$$
$$P_{sm5}\overline{A_5} + \overline{A_5}^T P_{sm5} < 0$$
$$P_{sm6}\overline{A_6} + \overline{A_6}^T P_{sm6} < 0$$
$$P_{sm7}\overline{A_7} + \overline{A_7}^T P_{sm7} < 0$$
$$P_{sm8}\overline{A_8} + \overline{A_8}^T P_{sm8} < 0$$

Esto garantiza la convergencia de los subsistemas. Los valores numéricos de las ganancias P_i del observador difuso con modos deslizantes se muestran en el Apéndice A.

Las ganancias P_{smi} que cumplen con la desigualdad de lyapunov (4.24) se obtienen utilizando la función *lyap* de MATLAB®.

4.5. Simulación

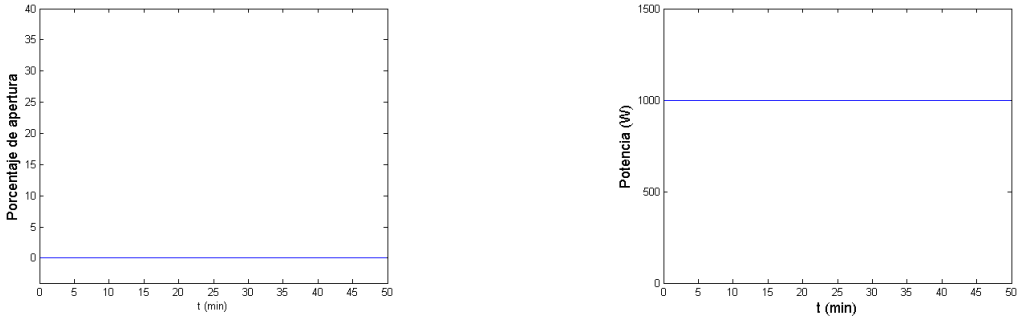
4.5.1. Modelo no Lineal

La simulación del modelo no lineal aplicando una señal de reflujo con valor constante de 0 se utiliza para obtener los valores en estado estable de las concentraciones. Los parámetros que se emplearon para la simulación se muestran en la Tabla 4.5.

Tabla 4.5: Parámetros para la simulación

Condiciones inicales de las concentraciones (x_0)	$[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0.2357]$
Porcentaje de apertura de la válvula de reflujo	0 %
Potencia cálorica	1000 W
Tiempo de simulación	50 minutos

Como señales de entrada al sistema se tienen: una señal de reflujo y una señal de potencia calórica las cuales se muestran en las Figuras 4.3a y 4.3b respectivamente.



(a) (b)

Figura 4.3: Señales de entrada al sistema. (a)Señal de reflujo, (b)Señal de potencia calórica.

El resultado de la simulación del modelo no lineal con condiciones iniciales iguales a 0 se muestran en la Figura 4.4. A partir de estos resultados se obtiene el valor de las concentraciones en estado estable.

La magnitud de la potencia calórica, el porcentaje de apertura de la señal de reflujo y los valores de las concentraciones en estado estable los cuales se utilizan como condiciones iniciales para el resto de las simulaciones se muestran en la Tabla 4.6.

Tabla 4.6: Parámetros para las simulaciones.

Condiciones inicales de las concentraciones (x_0)	$[0.8555, 0.8525, 0.8480, 0.8412,$ $0.8309, 0.8148, 0.7896, 0.7483,$ $0.6767, 0.5369, 0.2300]$
Porcentaje de apertura de la válvula de reflujo	20 %
Potencia cálorica	1000 W
Tiempo de simulación	50 minutos

Las señales de entrada al sistema que se utilizan para las simulaciones son: una señal

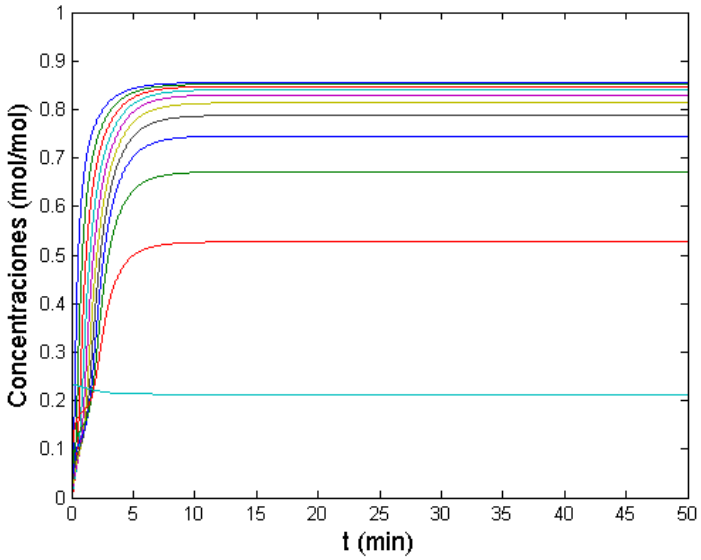
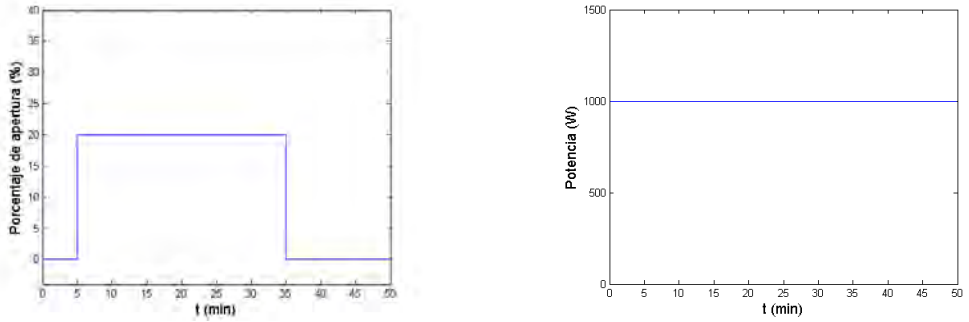


Figura 4.4: Concentraciones en estado estable.

de reflujo con un porcentaje de apertura del 20 % que entra al minuto 5 la cual tiene una duración de 30 minutos, y una señal de potencia calórica, ambas son representadas en las Figuras 4.3a y 4.3b respectivamente.



(a) (b)

Figura 4.5: Señales de entrada al sistema.(a)Señal de reflujo, (b)Señal de potencia calórica.

En la Figura 4.6 se muestra la simulación del modelo no lineal, iniciando en estado estable, al minuto 5 entra el reflujo perturbando a las concentraciones en los platos de la columna de destilación; al minuto 35 se retira el reflujo en la dinámica del proceso y se puede observar un crecimiento exponencial de la concentración en los platos hasta regresar al estado estable.

Se observa que al salir el reflujo y cuando las concentraciones llegan al estado estable, éstas tiene un valor menor a las del estado estable del inicio, esto se debe a que al entrar la señal de reflujo el producto destilado sale del sistema, éste se muestra en la Figura 4.7, y corresponde a etanol con un alto nivel de pureza extraído de la mezcla Etanol-Agua. La concentración molar media de este destilado es de alrededor de 0.855 mol/mol, lo que equivale a una concentración volumétrica de etanol del 92 % (concentración en peso de etanol del 93.5 %).El volumen del destilado que se extrae mientras la válvula permanece

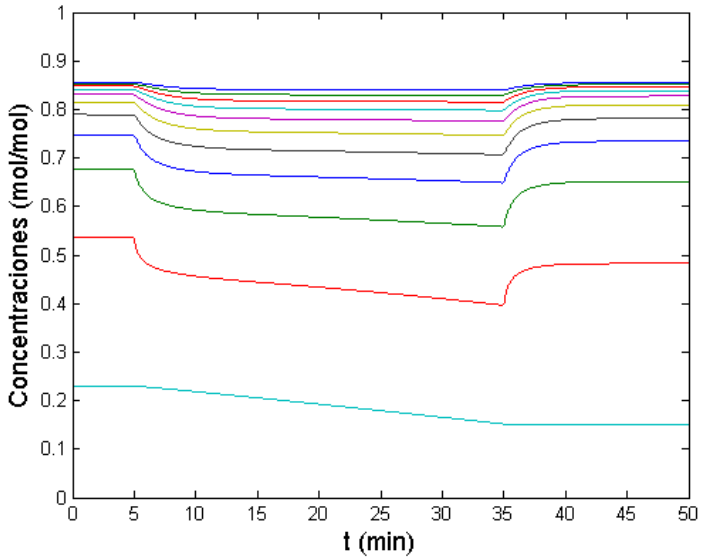


Figura 4.6: Dinámica del modelo no lineal sin perturbaciones.

parcialmente abierta durante 30 minutos es de 450 ml.

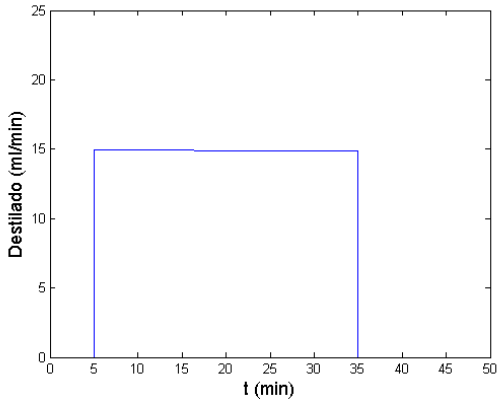


Figura 4.7: Producto destilado extraído de la mezcla Etanol-Agua.

4.5.2. Perturbaciones al Sistema.

Para comprobar la respuesta del sistema ante perturbaciones se utiliza una señal de tipo escalón, la cual representa un cambio brusco de temperatura en uno o varios de los platos de la columna de destilación. El cambio abrupto de temperatura en un solo plato puede representar una falla en uno de los sensores de temperatura. En las simulaciones se agregan estos escalones en los estados del sistema, representados por la expresión $Ed(t)$ en el sistema (4.9). Los escalones tienen la forma que se muestra en la Figura 4.8. Estas perturbaciones no afectan la dinámica del modelo no lineal, pero si afectan de forma directa la dinámica los estados estimados de los observadores.

Se utilizan estas perturbaciones para probar si los observadores son capaces de detectar fallas en sensores.

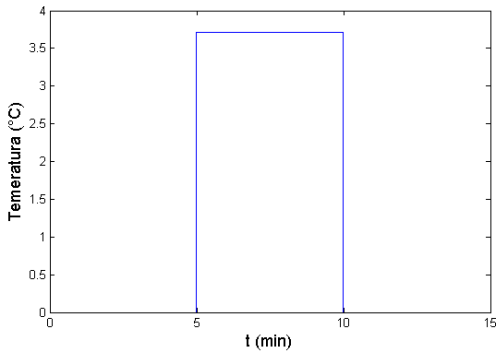
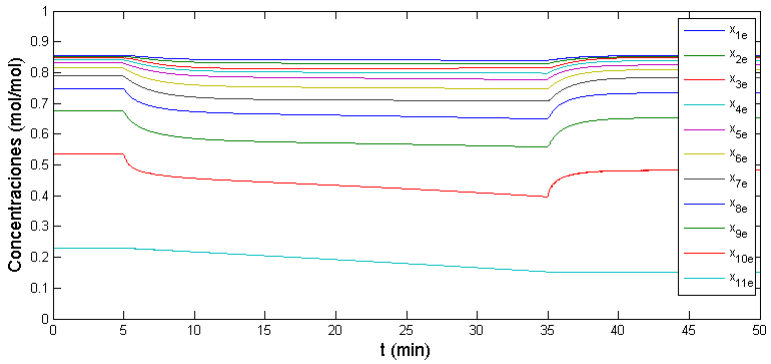


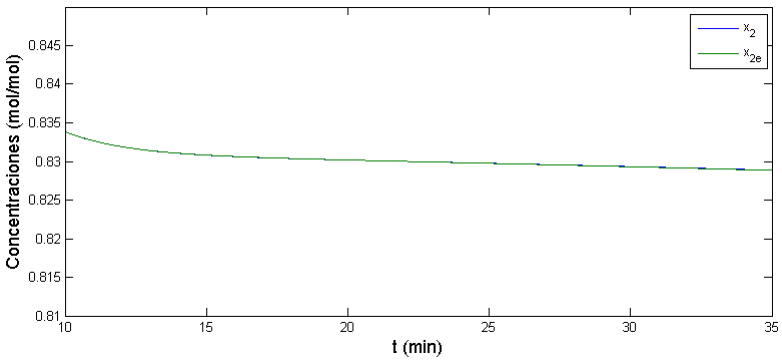
Figura 4.8: Escalón de temperatura, utilizado como perturbación en los sensores.

4.5.3. Observador Difuso

En la Figura 4.9a se muestra el resultado de la simulación del observador difuso con condiciones iniciales en estado estable y sin perturbaciones, en esta simulación se puede observar que para condiciones ideales el observador difuso ofrece muy buenos resultados. En la Figura 4.9b se muestra un acercamiento en la concentración del plato 2 para verificar la convergencia del observador difuso con el modelo no lineal.



(a)



(b)

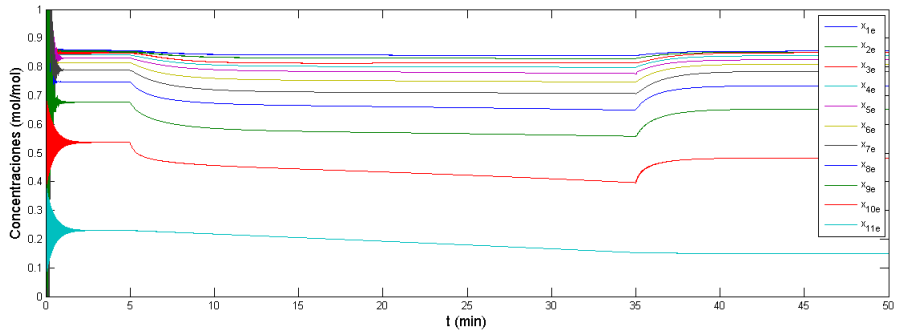
Figura 4.9: Simulación del observador difuso. (a)Observador difuso, (b)Acercamiento al plato 2.

En la Figura 4.10a se muestran los resultados de la simulación del observador difuso, en esta simulación las condiciones iniciales del observador son diferentes a las de mode-

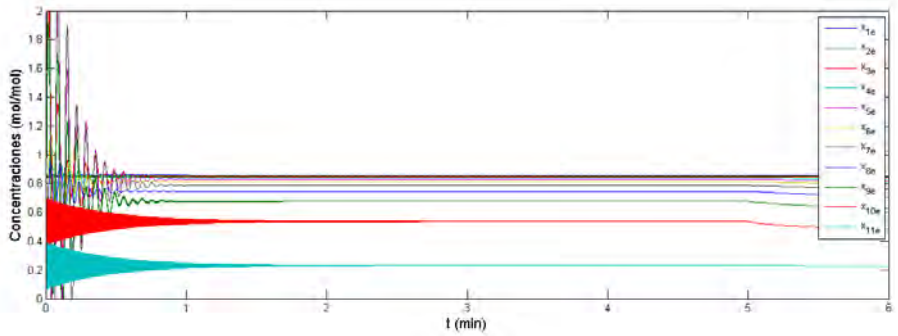
lo no lineal, las cuales se muestran en la Tabla 4.7. En la Figura 4.10b se muestra un acercamiento al transitorio del observador, se observa que los estados estimados tardan aproximadamente 2 minutos y 40 segundos en converger. En la Figura 4.10c se muestra un acercamiento al plato 4 para verificar la convergencia del observador difuso con el modelo no lineal.

Tabla 4.7: Condiciones iniciales del observador difuso.

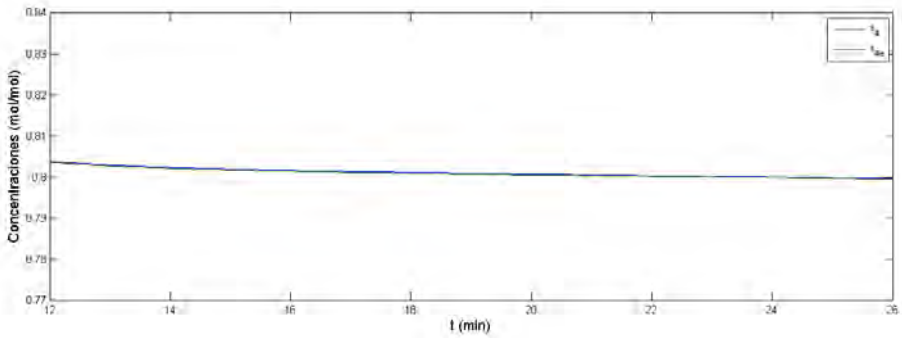
Modelo	[0.8555, 0.8525, 0.8480, 0.8412, 0.8309, 0.8148, 0.7896, 0.7483, 0.6767, 0.5369, 0.2300]
Observador difuso	[0.5133, 0.5115, 0.5088, 0.5047, 0.4985, 0.4889, 0.4738, 0.4490, 0.4060, 0.3221, 0.1380]



(a)



(b)

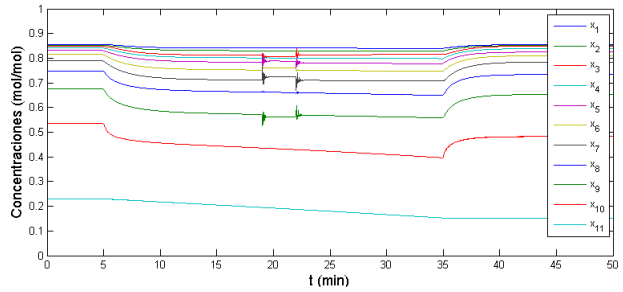


(c)

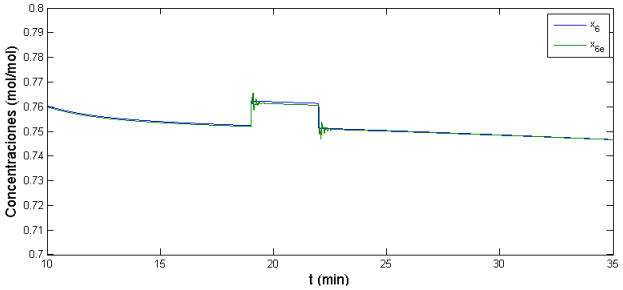
Figura 4.10: Simulación del observador difuso con condiciones iniciales distintas. (a)Observador difuso, (b)Acercamiento al transitorio, (c)Acercamiento al plato 4.

En la Figura 4.11a se muestra el resultado de la simulación del observador difuso, agre-

gando una perturbación en la concentración del plato 6. En la Figura 4.11b se muestra un acercamiento en la concentración del plato 6 para verificar la convergencia del observador difuso.



(a)



(b)

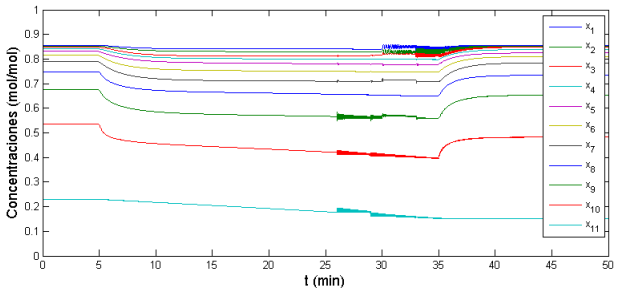
Figura 4.11: Simulación del observador difuso con una perturbación en la concentración de un plato.(a)Observador difuso, (b)Acercamiento al plato 6.

En la Figura 4.12a se muestra el resultado de la simulación del observador difuso, en esta simulación se agregan dos perturbaciones en las concentraciones de los platos 1 y 11. En la Figura 4.12b se muestra un acercamiento en la concentración de los platos 1 y 11 para verificar la convergencia del observador difuso con el modelo no lineal.

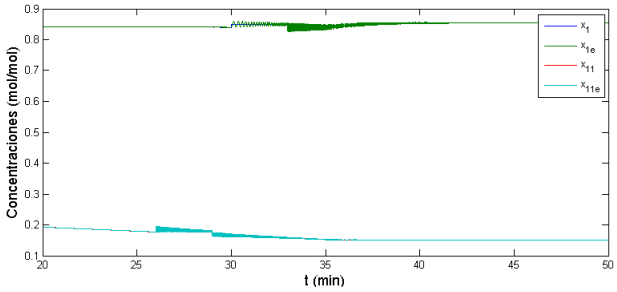
En la Figura 4.13a se muestra el resultado de la simulación del observador difuso, aquí se agregan tres perturbaciones en la concentraciones de los platos 4, 6 y 8 . En la Figura 4.13b se muestra un acercamiento en la concentración de los platos 4, 6 y 8 para verificar la convergencia del observador difuso con el modelo no lineal.

En la Figura 4.14a se muestra el resultado de la simulación del observador difuso, se agregan cinco perturbaciones en las concentraciones de los platos 2, 4, 6, 8 y 10. En la Figura 4.14b se muestra un acercamiento en las concentraciones de los platos 2, 4, 6, 8 y 10 para verificar la convergencia del observador difuso con el modelo no lineal.

En la Figura 4.15a se muestra el resultado de la simulación del observador difuso, se agregan siete perturbaciones en las concentraciones de los platos 1, 2, 4, 6, 8, 10 y 11. En la Figura 4.15b se muestra un acercamiento en la concentración de los platos 1, 2, 4, 6, 8,

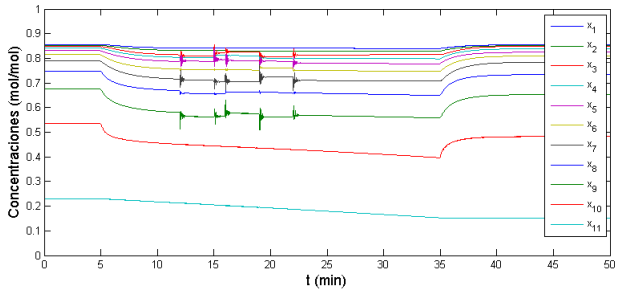


(a)

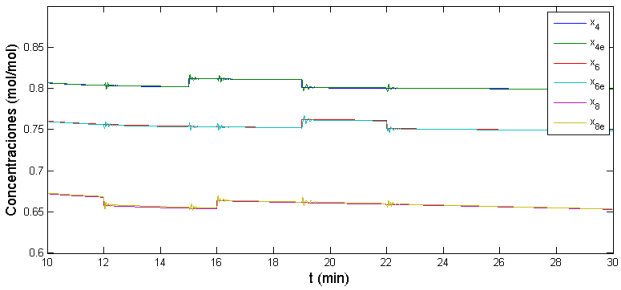


(b)

Figura 4.12: Simulación del observador difuso con 2 perturbaciones en las concentraciones de los platos. (a)Observador difuso, (b)Acercamiento a los platos 1 y 11.



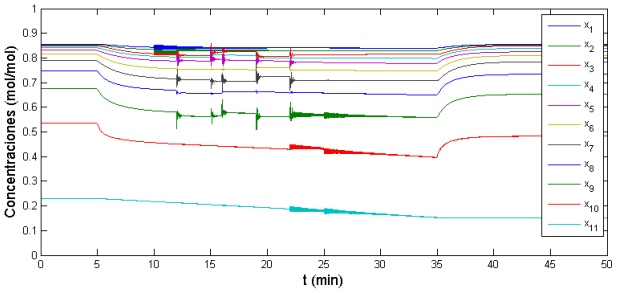
(a)



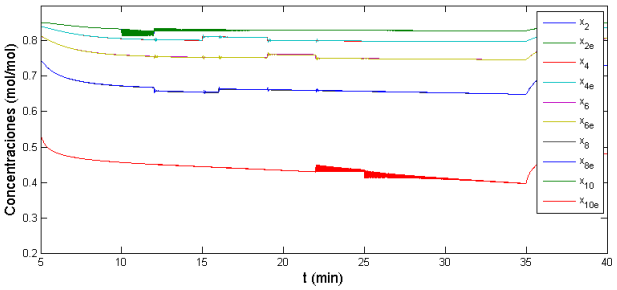
(b)

Figura 4.13: Simulación del observador difuso con 3 perturbaciones en las concentraciones de los platos. (a)Observador difuso, (b)Acercamiento a los platos 4, 6 y 8

10 y 11 para verificar la convergencia del observador difuso.

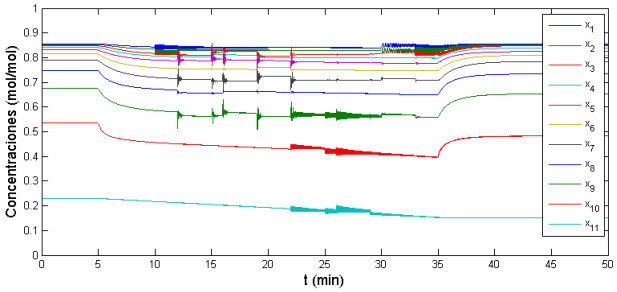


(a)

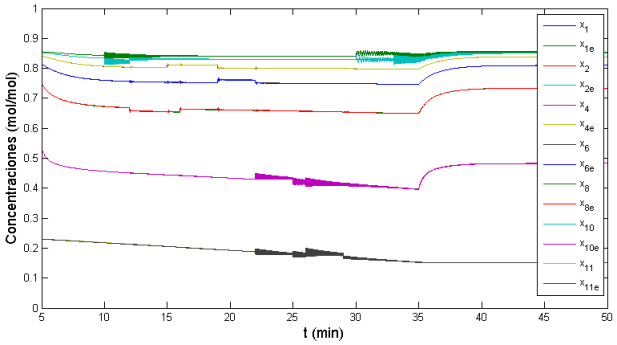


(b)

Figura 4.14: Simulación del observador difuso con 5 perturbaciones en las concentraciones de los platos. (a)Observador difuso, (b)Acercamiento a los platos 2, 4, 6, 8 y 10



(a)

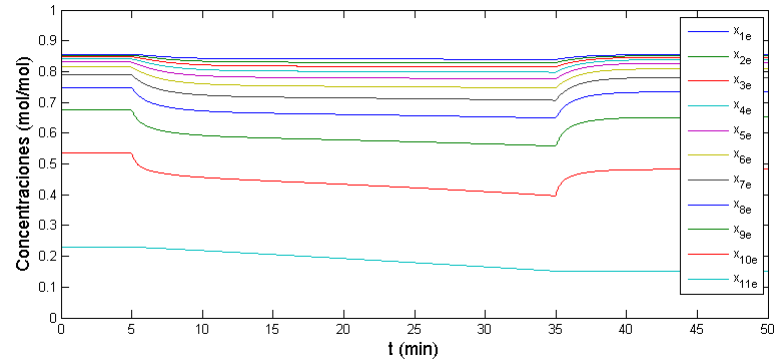


(b)

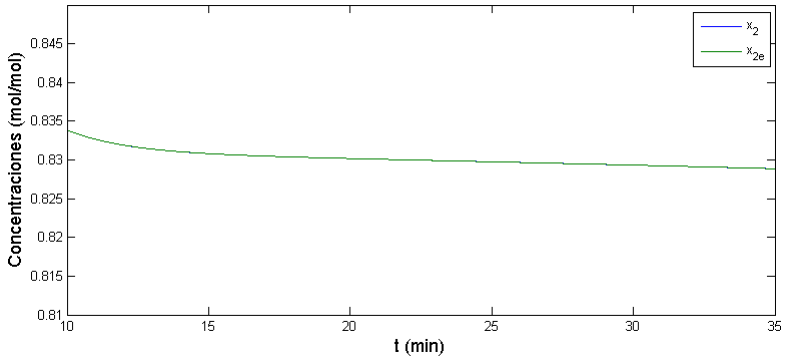
Figura 4.15: Simulación del observador difuso con 7 perturbaciones en las concentraciones de los platos.(a)Observador difuso, (b)Acercamiento a los platos 1, 2, 4, 6, 8, 10 y 11

4.5.4. Observador con Modos Deslizantes

En la Figura 4.16a se muestra el resultado de la simulación del observador difuso con modos deslizantes. En esta simulación con condiciones iniciales ideales y sin perturbaciones en el sistema se puede observar que el observador converge al sistema no lineal. En la Figura 4.16b se muestra un acercamiento en la concentración del plato 2 para verificar la convergencia del observador difuso con modos deslizantes con el modelo no lineal.



(a)



(b)

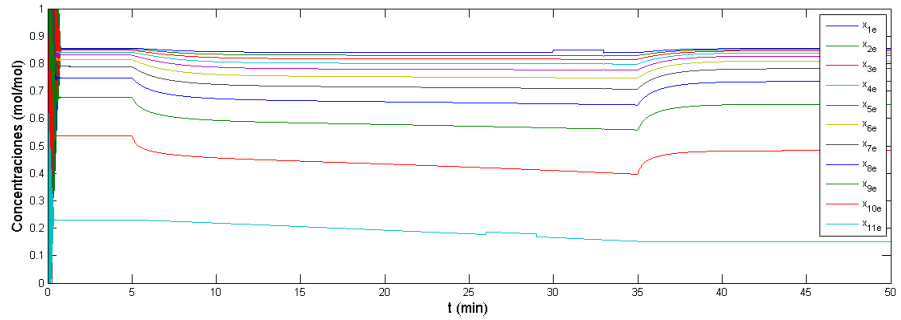
Figura 4.16: Simulación del observador difuso con condiciones iniciales distintas. (a)Observador difuso con modos deslizantes, (b)Acercamiento al plato 2.

En la Figura 4.17a se muestran los resultados de la simulación del observador difuso con modos deslizantes, en esta simulación las condiciones iniciales del observador son distintas a las del modelo no lineal, las cuales se muestran en la Tabla 4.8. En la Figura 4.17b se muestra un acercamiento en el transitorio del observador, aquí se puede observar que los estados estimados tardar aproximadamente 48 segundos en converger. En la Figura 4.17c se muestra un acercamiento a uno de los platos para observar que el estado estimado converge con el estado real del sistema.

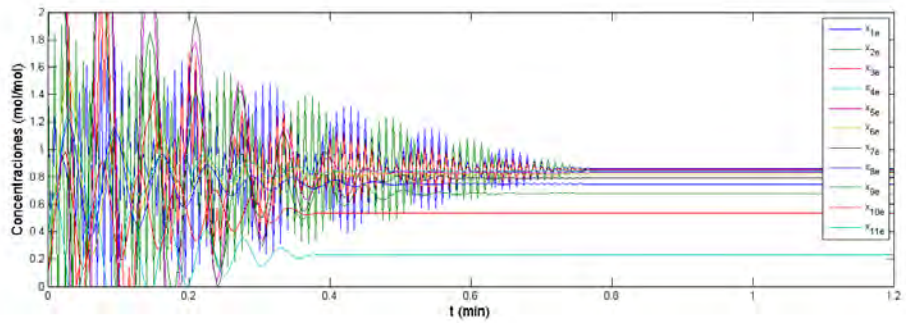
En la Figura 4.18a se muestra el resultado de la simulación del observador difuso con modos deslizantes, en esta simulación se agrega una perturbación en la concentración del plato 6. En la Figura 4.18b se muestra un acercamiento en la concentración del plato 6 para verificar la convergencia del observador difuso con modos deslizantes con el modelo no lineal.

Tabla 4.8: Condiciones iniciales del observador difuso con modos deslizantes.

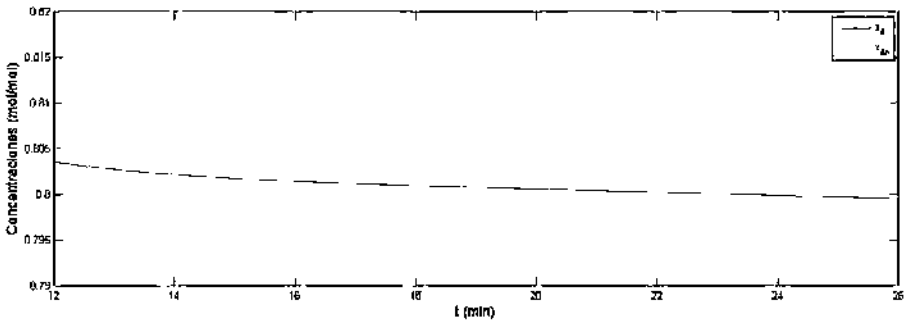
Modelo	$[0.8555, 0.8525, 0.8480, 0.8412,$ $0.8309, 0.8148, 0.7896, 0.7483,$ $0.6767, 0.5369, 0.2300]$
Observador difuso con modos deslizantes	$[0, 0, 0, 0,$ $0, 0, 0, 0,$ $0, 0, 0]$



(a)



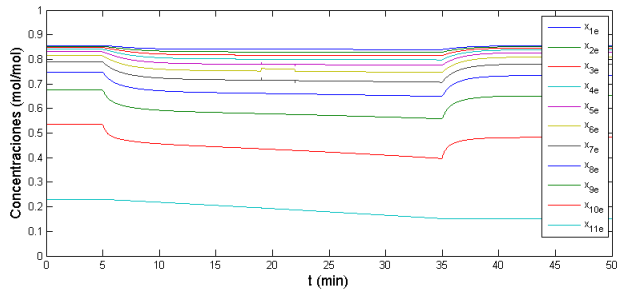
(b)



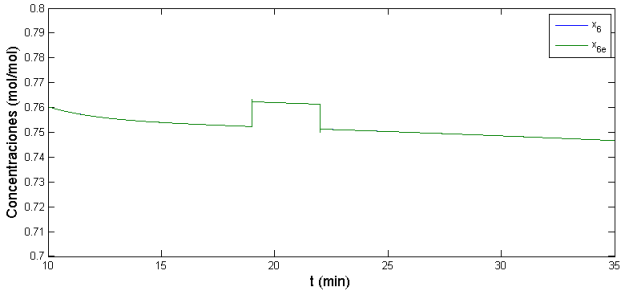
(c)

Figura 4.17: Simulación del observador difuso con modos deslizantes con condiciones iniciales distintas. (a)Observador difuso con modos deslizantes, (b)Acercamiento al transitorio, (c)Acercamiento al plato 4.

En la Figura 4.19a se muestra el resultado de la simulación del observador difuso con modos deslizantes, aquí se agregan dos perturbaciones en la concentraciones de los platos 1 y 11 . En la Figura 4.19b se muestra un acercamiento en las concentraciones de los platos 1 y 11 para verificar la convergencia del observador difuso con modos deslizantes con el modelo no lineal.

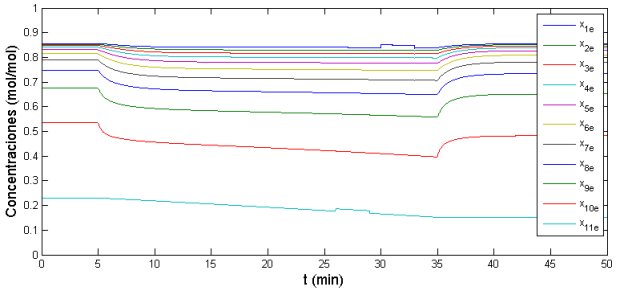


(a)

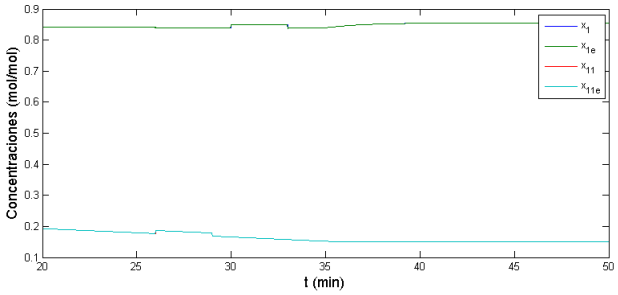


(b)

Figura 4.18: Simulación del observador difuso con modos deslizantes con una perturbación en la concentración de un plato. (a)Observador difuso con modos deslizantes, (b)Acercamiento al plato 6.



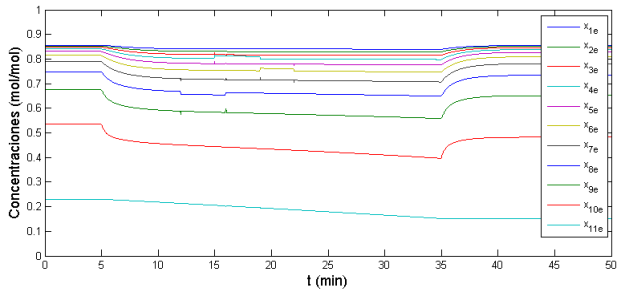
(a)



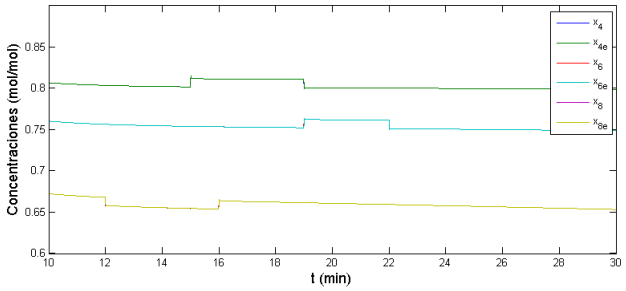
(b)

Figura 4.19: Simulación del observador difuso con modos deslizantes con 2 perturbaciones en las concentraciones de los platos. (a)Observador difuso con modos deslizantes, (b)Acercamiento a los platos 1 y 11.

En la Figura 4.20a se muestra el resultado de la simulación de las concentraciones del observador difuso con modos deslizantes, se agregan tres perturbaciones en las concentraciones de los platos 4, 6 y 8 . En la Figura 4.20b se muestra un acercamiento en la concentración de los platos 4, 6 y 8 para verificar la convergencia del observador difuso con modos deslizantes con el modelo no lineal.



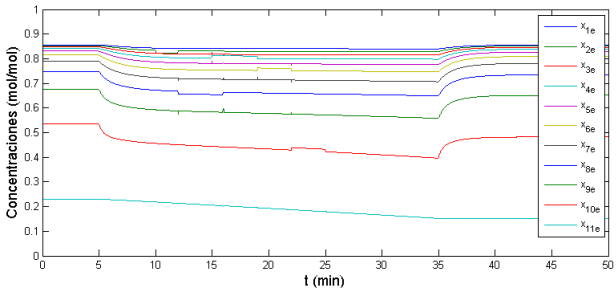
(a)



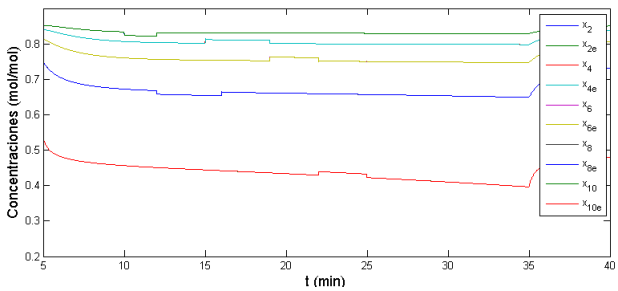
(b)

Figura 4.20: Simulación del observador difuso con modos deslizantes con 3 perturbaciones en las concentraciones de los platos. (a)Observador difuso con modos deslizantes, (b)Acercamiento a los platos 4, 6 y 8.

En la Figura 4.21a se muestra el resultado de la simulación del observador difuso con modos deslizantes, se agregan cinco perturbaciones en las concentraciones de los platos 2, 4, 6, 8 y 10. En la Figura 4.21b se muestra un acercamiento en las concentraciones de los platos 2, 4, 6, 8 y 10 para verificar la convergencia del observador difuso con modos deslizantes con el modelo no lineal.



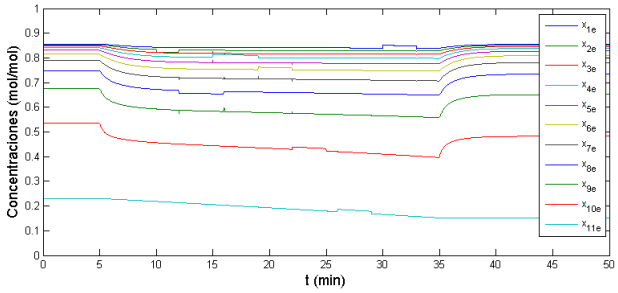
(a)



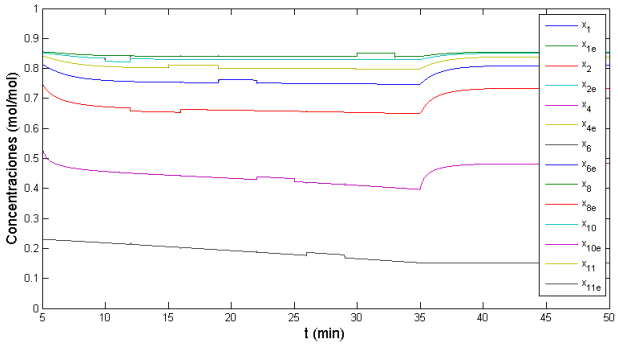
(b)

Figura 4.21: Simulación del observador difuso con modos deslizantes con 5 perturbaciones en las concentraciones de los platos. (a)Observador difuso con modos deslizantes, (b)Acercamiento a los platos 2, 4, 6, 8 y 10.

En la Figura 4.22a se muestra el resultado de la simulación de las concentraciones del observador difuso con modos deslizantes, se agregan siete perturbaciones en las concentraciones de los platos 1, 2, 4, 6, 8, 10 y 11. En la Figura 4.22b se muestra un acercamiento en las concentraciones de los platos 1, 2, 4, 6, 8, 10 y 11 para verificar la convergencia del observador difuso con modos deslizantes con el modelo no lineal.



(a)



(b)

Figura 4.22: Simulación del observador difuso con modos deslizantes con 7 perturbaciones en las concentraciones de los platos. (a)Observador difuso con modos deslizantes, (b)Acercamiento a los platos 1, 2, 4, 6, 8, 10 y 11.

4.5.5. Análisis Comparativo de los Observadores

En la Tabla 4.9 se muestra el tiempo de convergencia cuando los observadores presentan condiciones iniciales distintas a las del modelo no lineal. El tiempo de convergencia del observador difuso es más del doble que el tiempo de convergencia al añadirle modos deslizantes.

Tabla 4.9: Tiempos de convergencia con condiciones inicales distintas.

Observador	Tiempo de convergencia
Difuso	2 *minutos* 40 *segundos*
Difuso con modos deslizantes	45 *segundos*

La Tabla 4.10 muestra el tiempo de convergencia después de entrar una perturbación al modelo no lineal. La diferencia de tiempo es de 23 segundos.

A continuación se muestran los errores absolutos máximos y mínimos para los platos $1, 2, 4, 6, 8, 10$ y 11 de los resultados de las simulaciones, se consideran los errores en estos

Tabla 4.10: Tiempo de convergencia después de una perturbación.

Observador	Tiempo de convergencia
Difuso	24 *segundos*
Difuso con modos deslizantes	1 *segundos*

platos ya que son en éstos se encuentran los sensores en la columna de destilación. Se comparan los errores del observador difuso con el observador difuso con modos deslizantes.

En la Tabla 4.11 se muestran los resultados de la simulación de los observadores con condiciones iniciales distintas a las del sistema no lineal. El observador difuso presenta un error máximo de (205.38 %). Con el observador con modos deslizantes se tiene un error máximo de (197.80 %). Se puede observar que el observador por modos deslizantes tiene menor % de error. En esta simulación los errores son tan elevados ya que el modelo difuso no toma en cuenta el caso de iniciar con condiciones iniciales diferentes a las del estado estable. Aunque el error que se genera es muy grande, éste no afecta al sistema ya que es transitorio y solo ocurre durante el inicio.

Tabla 4.11: Comparación de los observadores con condiciones iniciales distintas

Plato	Observador difuso		Observador difuso con modos deslizantes	
	Error mínimo (%)	Error máximo (%)	Error mínimo (%)	Error máximo (%)
1	$0.1005\text{x}10^{-4}$	125.5357	$0.0656\text{x}10^{-6}$	114.3749
2	$0.0702\text{x}10^{-4}$	127.5361	$0.0713\text{x}10^{-6}$	124.2559
4	$0.0214\text{x}10^{-4}$	85.1568	$0.0083\text{x}10^{-6}$	84.6698
6	$0.0961\text{x}10^{-4}$	90.0260	$0.0225\text{x}10^{-6}$	88.2543
8	$0.0353\text{x}10^{-4}$	86.7155	$0.1047\text{x}10^{-6}$	86.2092
10	$0.0511\text{x}10^{-4}$	88.6891	$0.2290\text{x}10^{-6}$	84.1927
11	$0.6897\text{x}10^{-4}$	205.3898	$0.5564\text{x}10^{-6}$	197.8037

La Tabla 4.12 presenta los resultados de la simulación donde no hay presencia de perturbaciones, se observa que el observador difuso presenta un error máximo de (0.47 %), mientras que el observador con modos deslizantes tiene un error máximo de (0.0041 %). Para esta simulación el error máximo del observador difuso es 100 veces mayor que el error máximo que presenta el observador difuso con modos deslizantes.

Tabla 4.12: Comparación de los observadores sin perturbaciones

Plato	Observador difuso		Observador difuso con modos deslizantes	
	Error mínimo (%)	Error máximo (%)	Error mínimo (%)	Error máximo (%)
1	$0.0101\text{x}10^{-5}$	0.0090	$0.0511\text{x}10^{-6}$	0.0014
2	$0.0003\text{x}10^{-5}$	0.0062	$0.0074\text{x}10^{-6}$	0.0006
4	$0.3001\text{x}10^{-5}$	0.0395	$0.0174\text{x}10^{-6}$	0.0014
6	$0.1681\text{x}10^{-5}$	0.0625	$0.0730\text{x}10^{-6}$	0.0013
8	$0.0174\text{x}10^{-5}$	0.1323	$0.0402\text{x}10^{-6}$	0.0017
10	$0.0000\text{x}10^{-5}$	0.1437	$0.0110\text{x}10^{-6}$	0.0019
11	$0.1196\text{x}10^{-5}$	0.4796	$0.7103\text{x}10^{-6}$	0.0041

En la Tabla 4.13 se muestran los resultados para una simulación en donde existe la presencia de una perturbación en el plato 6. El observador difuso presenta un error

máximo de (1.74 %). Con el observador con modos deslizantes se tiene un error máximo de (1.47 %). El observador con modos deslizantes presenta un menor porcentaje de error que el observador difuso.

Tabla 4.13: Comparación de los observadores con una perturbación en el plato 6.

Plato	Observador difuso		Observador difuso con modos deslizantes	
	Error mínimo (%)	Error máximo (%)	Error mínimo (%)	Error máximo (%)
1	$0.0101x10^{-5}$	0.0331	$0.2036x10^{-7}$	0.0289
2	$0.0003x10^{-5}$	0.0062	$0.0140x10^{-7}$	0.0006
4	$0.3001x10^{-5}$	0.6474	$0.2306x10^{-7}$	0.0586
6	$0.1681x10^{-5}$	1.7496	$0.1599x10^{-7}$	1.4748
8	$0.0174x10^{-5}$	0.7764	$0.0918x10^{-7}$	0.0640
10	$0.0000x10^{-5}$	0.1437	$0.6563x10^{-7}$	0.0032
11	$0.1196x10^{-5}$	0.4796	$0.2561x10^{-7}$	0.2164

En la Tabla 4.14 se muestran los resultados de la simulación de los observadores al introducir dos perturbaciones en los platos 1 y 11. El observador difuso presenta un error máximo de (10.33 %), mientras que el observador con modos deslizantes tiene un error máximo de (5.93 %). Al igual que en los casos anteriores el observador con modos deslizantes presenta un menor error que el observador difuso. En esta simulación se observa que el error alcanza valores considerables, esto se debe al hecho de que las perturbaciones se encuentran en los platos donde se toman las variables premisas.

Tabla 4.14: Comparación de los observadores con dos perturbaciones en los platos 1 y 11

Plato	Observador difuso		Observador difuso con modos deslizantes	
	Error mínimo (%)	Error máximo (%)	Error mínimo (%)	Error máximo (%)
1	$0.0101x10^{-5}$	2.3244	$0.0511x10^{-6}$	1.1904
2	$0.0003x10^{-5}$	1.7101	$0.0244x10^{-6}$	0.2193
4	$0.3001x10^{-5}$	0.0866	$0.0231x10^{-6}$	0.2087
6	$0.1681x10^{-5}$	0.1357	$0.0166x10^{-6}$	0.1010
8	$0.0174x10^{-5}$	0.2862	$0.0402x10^{-6}$	0.2628
10	$0.0000x10^{-5}$	2.1541	$0.0110x10^{-6}$	0.8484
11	$0.1196x10^{-5}$	10.3379	$0.7103x10^{-6}$	5.9305

La Tabla 4.15 muestra los resultados de la simulación al agregaron tres perturbaciones en los platos 4, 6 y 8. En esta simulación el observador difuso presenta un error máximo de (2.12 %), el observador con modos deslizantes tiene un error máximo de (2.03 %). La diferencia del error máximo entre ambos observadores es mínima

En la Tabla 4.16 se presentan los resultados de la simulación de ambos observadores en donde se agregaron cinco perturbaciones en los platos 2, 4, 6, 8 y 10. El observador difuso presenta un error máximo de (5.89 %). Con el observador con modos deslizantes se tiene un error máximo de (2.36 %). Se puede observar que el observador por modos deslizantes tiene menor % de error.

La Tabla 4.17 presenta los resultados de una simulación donde se agregaron perturbaciones en todos los platos que cuentan con un sensor, es decir, se agregó una perturbación

Tabla 4.15: Comparación de los observadores con tres perturbaciones en los platos 4, 6 y 8

Plato	Observador difuso		Observador difuso con modos deslizantes	
	Error mínimo (%)	Error máximo (%)	Error mínimo (%)	Error máximo (%)
1	$0.0101\text{x}10^{-5}$	0.0492	$0.0860\text{x}10^{-6}$	0.1469
2	$0.0003\text{x}10^{-5}$	1.8086	$0.0138\text{x}10^{-6}$	0.1519
4	$0.3001\text{x}10^{-5}$	0.0063	$0.0231\text{x}10^{-6}$	1.5948
6	$0.1681\text{x}10^{-5}$	2.0002	$0.0211\text{x}10^{-6}$	1.5016
8	$0.0174\text{x}10^{-5}$	2.1204	$0.0218\text{x}10^{-6}$	1.5525
10	$0.0000\text{x}10^{-5}$	0.1652	$0.0100\text{x}10^{-6}$	0.3305
11	$0.1196\text{x}10^{-5}$	1.1733	$0.1621\text{x}10^{-6}$	2.0321

Tabla 4.16: Comparación de los observadores con cinco perturbaciones en los platos 2, 4, 6, 8 y 10

Plato	Observador difuso		Observador difuso con modos deslizantes	
	Error mínimo (%)	Error máximo (%)	Error mínimo (%)	Error máximo (%)
1	$0.0101\text{x}10^{-5}$	1.1718	$0.0055\text{x}10^{-6}$	0.3971
2	$0.0003\text{x}10^{-5}$	2.3900	$0.0010\text{x}10^{-6}$	1.2021
4	$0.3001\text{x}10^{-5}$	1.8090	$0.0725\text{x}10^{-6}$	1.5955
6	$0.1681\text{x}10^{-5}$	2.0002	$0.0664\text{x}10^{-6}$	1.5010
8	$0.0174\text{x}10^{-5}$	2.1206	$0.0402\text{x}10^{-6}$	1.5520
10	$0.0000\text{x}10^{-5}$	4.5739	$0.1791\text{x}10^{-6}$	2.3660
11	$0.1196\text{x}10^{-5}$	5.8973	$0.1295\text{x}10^{-6}$	2.0320

en los platos 1, 2, 4, 6, 8, 10 y 11. El observador difuso presenta un error máximo de (13.25 %). Con el observador con modos deslizantes se tiene un error máximo de (5.93 %). Al igual que en el resto de simulaciones se observa que el observador por modos deslizantes tiene menor % de error.

Tabla 4.17: Comparación de los observadores con siete perturbaciones en los platos 1, 2, 4, 6, 8, 10 y 11

Plato	Observador difuso		Observador difuso con modos deslizantes	
	Error mínimo (%)	Error máximo (%)	Error mínimo (%)	Error máximo (%)
1	$0.0101\text{x}10^{-5}$	2.3247	$0.0055\text{x}10^{-6}$	1.1904
2	$0.0003\text{x}10^{-5}$	2.3900	$0.0010\text{x}10^{-6}$	1.2021
4	$0.0932\text{x}10^{-5}$	1.8090	$0.0836\text{x}10^{-6}$	1.5955
6	$0.1681\text{x}10^{-5}$	2.0002	$0.0565\text{x}10^{-6}$	1.5010
8	$0.0174\text{x}10^{-5}$	2.1206	$0.0402\text{x}10^{-6}$	1.5520
10	$0.0000\text{x}10^{-5}$	4.5739	$0.1533\text{x}10^{-6}$	2.3660
11	$0.1196\text{x}10^{-5}$	13.2592	$0.1872\text{x}10^{-6}$	5.9309

4.6. Conclusión

Se presentó el caso de estudio para el cual se desarrolló un modelo no lineal necesario para la construcción de un modelo difuso Takagi-Sugeno, a partir del cual se diseñó un observador difuso para estimar las concentraciones en los platos. Ya que los modelos difusos permiten la implementación de técnicas lineales de control en sistemas no lineales, se agregaron modos deslizantes para mejorar la respuesta del observador difuso.

Se realizaron simulaciones introduciendo perturbaciones al sistema y se compararon los resultados de ambos observadores. El observador difuso presentó errores máximos de 0.4 % en estado estable, al entrar una perturbación el error ascendió hasta un 10 %, el tiempo necesario para converger al sistema después de haber introducido una perturbación en los sensores es de 24 segundos. El observador con modos deslizantes por otro lado tienen errores absolutos mucho menores, llegando a presentar un error máximo en estado estable de 0.004 % y de 10 % al entrar una perturbación al sistema, el tiempo de convergencia después de entrar la perturbación es de 1 segundo lo cual es mucho menor que el tiempo de convergencia del observador difuso.

En la mayoría de las simulaciones el observador difuso con modos deslizantes presentó mejores resultados que el observador difuso. La única desventaja del modelo difuso con modos deslizantes ante el observador difuso, es el tiempo de simulación, el cual fue por lo menos 4 veces más largo.

Se presentó la metodología para el diseñó de un observador difuso a partir de un modelo difuso Takagi-Sugeno para estimar las concentraciones molares del componente ligero en cada plato de una columna de destilación.

Debido a que el observador difuso permite el uso de técnicas lineales para sistemas no lineales, es posible el diseño de un observador con modos deslizantes a partir del observador difuso, el cual mejora la convergencia.

Capítulo 5

Conclusiones

5.1. Conclusiones Generales

El desarrollo del modelo no lineal de la columna de destilación se obtiene de acuerdo al balance de componente ligero o más volátil ya que éste se basa en concentraciones molares, las cuales a través una gráfica de equilibrio Vapor-Líquido para una mezcla específica (en este caso Etanol-Agua), se puede relacionar la concentración en el plato con la temperatura del mismo. Ya que la columna cuenta únicamente con sensores de temperatura, es relativamente sencillo realizar la conversión de temperatura a concentración de componente ligero en los platos.

El modelo representa la dinámica de las concentraciones molares en cada plato del sistema. La principal desventaja de este modelo es que contiene una gran cantidad de no linealidades, debido a que la concentración de cada plato depende tanto de la concentración del plato inferior como la del plato superior, además de que en todos los platos se encuentra presente la concentración del plato del hervidor, y a su vez esta concentración depende de las entradas al sistema (potencia calórica y el porcentaje de apertura de la válvula de reflujo).

A partir del modelo no lineal del sistema se obtiene una representación de un modelo difuso Takagi-Sugeno, el cual tiene como principal característica el permitir implementar técnicas de control lineal en sistemas no lineales, esto es muy útil ya que existen muchas metodologías y técnicas de control en sistemas lineales, en este caso la implementación de modos deslizantes.

El modelo Takagi-Sugeno se basa en una suma ponderada de subsistemas lineales. La cantidad de subsistemas necesarios para que dicho modelo replique el comportamiento del

sistema no lineal de manera exacta depende del número de no linealidades que contenga el sistema no lineal en las matrices de estados, en este caso serían necesarios más de dos mil millones de subsistemas para que el modelo Takagi-Sugeno tenga la misma respuesta que el sistema no lineal.

El desarrollar un modelo con más de dos mil millones de subsistemas no es una idea factible ya que necesitaría de un enorme esfuerzo y se necesitaría de una computadora demasiado potente para realizar una simple simulación de un modelo de dichas características, por esto se optó por reducir el número de variables premisas de 31 a 3 (concentración en el condensador, concentración en el hervidor y porcentaje de apertura de la válvula de reflujo), las cuales se consideraron como las más importantes ya que tienen mayor peso al producir las no linealidades y están relacionadas con las entradas del sistema.

Se redujo el número de subsistemas a uno más fácil de implementar, esto ocasiona que el modelo difuso tenga un rango de operación limitado, y sea muy sensible ante perturbaciones.

A lo largo del desarrollo del modelo se llegaron a probar modelos con hasta dos mil subsistemas, los cuales tardaban más de una hora en realizar la simulación y los resultados seguían sin ser del todo aceptables ante perturbaciones o variaciones en el sistema, por lo cual se optó por utilizar el modelo con únicamente 8 subsistemas el cual funciona para un rango limitado en el cual tiene resultados aceptables.

Aunque es capaz de seguir las perturbaciones que entran al sistema, la respuesta comienza a oscilar y tarda hasta 24 segundos en converger al sistema de nuevo y estabilizarse. Estas oscilaciones se presentan en mayor medida cuando las perturbaciones entran en los platos donde se miden las variables premisas o los platos cercanos a ellos. Tiende a oscilar mucho más cuando las condiciones iniciales del mismo difieren a las de sistema, esto se debe a que el modelo difuso que se obtuvo no contempla este caso en ninguno de los subsistemas, ya que todos los subsistemas se basan en que el sistema comienza en estado estable.

Al agregar modos deslizantes al observador difuso se observó una notable mejora ante la presencia de perturbaciones al sistema, reduciendo drásticamente las oscilaciones que se generaban al entrar una perturbación, además de que también disminuyeron de manera muy significativa las oscilaciones que se producían cuando las condiciones iniciales del observador eran distintas a las del sistema. Por último la convergencia del observador difuso con modos deslizantes era mucho más rápida llegando a reducir el tiempo de convergencia del observador difuso de 2 minutos y 21 segundos a 45 segundos para condiciones iniciales distintas a las del modelo no lineal, además de que reduce el tiempo de convergencia después de que entra una perturbación de 24 segundos a 1 segundo.

El observador difuso con modos deslizantes aunque ofrece mejores resultados que el

observador difuso tanto en convergencia como en tolerancia a perturbaciones tiene una desventaja, la cual es el tiempo de simulación, ya que éste es al menos 4 veces más largo que la simulación del observador difuso, debido a que los procesos de destilación son muy lentos (pueden durar horas), implementar este tipo de observadores en columnas de destilación es posible.

5.2. Trabajos Futuros

A continuación se enlistan posibles trabajos futuros, los cuales pueden derivar de la presente tesis:

1. En caso de requerirse un modelo difuso Takagi-Sugeno más preciso, agregar más variables premisas o incluir más reglas difusas.
2. Diseñar un FDI basado en banco de observadores para detectar fallas en sensores
3. Diseñar control tolerante a fallas para los sensores del sistema basado en observadores.

Apéndice A

Subsistemas y Ganancias

A.1. Subsistemas del Modelo Difuso

En esta sección se muestran los valores númericos de los subsistemas del modelo difuso Takagi-Sugeno.

$$A_1 = \begin{bmatrix} -10.2161 & 10.2560 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6.7847 & -13.5960 & 6.8246 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6.7847 & -13.6093 & 6.8458 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6.7847 & -13.6305 & 6.8792 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6.7847 & -13.6640 & 6.9346 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6.7847 & -13.7194 & 7.0314 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6.7847 & -13.8161 & 7.2176 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6.7847 & -14.0023 & 7.6499 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6.7847 & -14.4347 & 9.1664 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6.7847 & -15.9512 & 21.8497 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0205 & -0.0205 \end{bmatrix}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} -8.7338 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -6.8060e-06 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} -10.2580 & 10.2940 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6.8125 & -13.6400 & 6.8487 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6.8125 & -13.6612 & 6.8676 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6.8125 & -13.6801 & 6.8973 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6.8125 & -13.7099 & 6.9464 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6.8125 & -13.7590 & 7.0302 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6.8125 & -13.8428 & 7.1878 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6.8125 & -14.0004 & 7.5326 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6.8125 & -14.3452 & 8.5850 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6.8125 & -15.3976 & 15.8984 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0206 & -0.0206 \end{bmatrix}$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} -8.7757 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -6.3065e-06 \end{bmatrix}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} -8.2063 & 10.2951 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5.4500 & -12.2872 & 6.8500 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5.4500 & -12.3000 & 6.8695 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5.4500 & -12.3196 & 6.9008 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5.4500 & -12.3508 & 6.9515 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5.4500 & -12.4015 & 7.0397 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5.4500 & -12.4897 & 7.2054 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5.4500 & -12.6554 & 7.5726 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5.4500 & -13.0226 & 8.7090 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5.4500 & -14.1590 & 15.9036 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0164 & -0.0164 \end{bmatrix}$$

$$B_3 = \begin{bmatrix} -8.7746 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -6.3074e-06 \end{bmatrix}$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} -8.2063 & 10.2951 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5.4500 & -12.2872 & 6.8500 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5.4500 & -12.3000 & 6.8695 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5.4500 & -12.3196 & 6.9008 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5.4500 & -12.3508 & 6.9515 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5.4500 & -12.4015 & 7.0397 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5.4500 & -12.4897 & 7.2054 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5.4500 & -12.6554 & 7.5726 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5.4500 & -13.0226 & 8.7090 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5.4500 & -14.1590 & 15.9036 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0164 & -0.0164 \end{bmatrix}$$

$$B_4 = \begin{bmatrix} -8.7746 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -6.3074e-06 \end{bmatrix}$$

$$A_5 = \begin{bmatrix} -10.1972 & 10.4537 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6.7721 & -13.7147 & 7.0212 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6.7721 & -13.7933 & 7.1212 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6.7721 & -13.8933 & 7.2546 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6.7721 & -14.0268 & 7.4440 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6.7721 & -14.2161 & 7.7383 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6.7721 & -14.5105 & 8.2611 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6.7721 & -15.0332 & 9.4287 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6.7721 & -16.2009 & 13.1799 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6.7721 & -19.9520 & 26.6173 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0204 & -0.0204 \end{bmatrix}$$

$$B_5 = \begin{bmatrix} -8.3933 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -6.7735e-06 \end{bmatrix}$$

$$A_6 = \begin{bmatrix} -10.1972 & 10.4537 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6.7721 & -13.7147 & 7.0212 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6.7721 & -13.7933 & 7.1212 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6.7721 & -13.8933 & 7.2546 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6.7721 & -14.0268 & 7.4440 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6.7721 & -14.2161 & 7.7383 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6.7721 & -14.5105 & 8.2611 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6.7721 & -15.0332 & 9.4287 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6.7721 & -16.2009 & 13.1799 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6.7721 & -19.9520 & 26.6173 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0204 & -0.0204 \end{bmatrix}$$

$$B_6 = \begin{bmatrix} -8.3933 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -6.7735e-06 \end{bmatrix}$$

$$A_7 = \begin{bmatrix} -8.2063 & 10.2951 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5.4500 & -12.2872 & 6.8500 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5.4500 & -12.3000 & 6.8695 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5.4500 & -12.3196 & 6.9008 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5.4500 & -12.3508 & 6.9515 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5.4500 & -12.4015 & 7.0397 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5.4500 & -12.4897 & 7.2054 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5.4500 & -12.6554 & 7.5726 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5.4500 & -13.0226 & 8.7090 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5.4500 & -14.1590 & 15.9036 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0164 & -0.0164 \end{bmatrix}$$

$$B_7 = \begin{bmatrix} -8.7746 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -6.3074e-06 \end{bmatrix}$$

$$A_8 = \begin{bmatrix} -8.1578 & 10.4567 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5.4177 & -12.3623 & 7.0238 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5.4177 & -12.4415 & 7.1244 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5.4177 & -12.5422 & 7.2592 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5.4177 & -12.6770 & 7.4505 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5.4177 & -12.8682 & 7.7489 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5.4177 & -13.1666 & 8.2805 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5.4177 & -13.6982 & 9.4752 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5.4177 & -14.8929 & 13.3580 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5.4177 & -18.7757 & 26.6012 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0163 & -0.0163 \end{bmatrix}$$

$$B_8 = \begin{bmatrix} -8.3923 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -6.7740e-06 \end{bmatrix}$$

A.2. Ganancias del Observador Difuso

En esta sección se muestran los valores númericos de las ganancias del observador difuso.

$$K_1 = \begin{bmatrix} -10 & 1109.4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1092.4 & -13.3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 362.7 & 360.7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -13.4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 368.9 & 364.1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -13.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 384.7 & 371.8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -13.8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 448.8 & 401.2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -15.7 & -5007.2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5029.1 & 0.2 \end{bmatrix}$$

$$K_2 = \begin{bmatrix} -10.0 & 663.8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -646.7 & -13.4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 364 & 362.2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -13.4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 369.9 & 365.6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -13.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 384.6 & 373.3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -13.8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 442.1 & 402.2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -15.1 & -2614.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2630.4 & 0.2 \end{bmatrix}$$

$$K_3 = \begin{bmatrix} -7.9 & -233.7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 249.4 & -12.0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 362.7 & 291.1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -12.0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 368.7 & 293.8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -12.1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 383.7 & 300.0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -12.4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 443.02 & 323.6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -13.9 & -771.4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 787.3 & 0.2 \end{bmatrix}$$

$$K_4 = \begin{bmatrix} -8.0 & 1724.8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1709.0 & -12.0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 362.7 & 291.1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -12.1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 368.7 & 293.8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -12.2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 383.8 & 300.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -12.4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 443.0 & 323.6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -13.9 & -437.4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 453.3 & 0.2 \end{bmatrix}$$

$$K_5 = \begin{bmatrix} -9.9 & 238.3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -221.1 & -13.4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 372.9 & 360.3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -13.6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 388.6 & 363.9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -13.9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 422.6 & 372.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -14.7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 551.5 & 404.4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -19.7 & -895.7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 922.4 & 0.2 \end{bmatrix}$$

$$K_6 = \begin{bmatrix} -9.9 & 425.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -408.3 & -13.4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 372.9 & 360.3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -13.6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 388.6 & 363.9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -13.9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 422.6 & 372.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -14.7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 551.5 & 404.4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -19.7 & -653.1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 679.8 & 0.2 \end{bmatrix}$$

$$K_7 = \begin{bmatrix} -7.9 & 218.1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -202.4 & -12.0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 362.7 & 291.1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -12.0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 368.7 & 293.8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -12.1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 383.7 & 300.0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -12.4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 443.0 & 323.6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -13.9 & -756.2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 772.1 & 0.2 \end{bmatrix}$$

$$K_8 = \begin{bmatrix} -7.9 & 112.1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -96.2 & -12.1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 371.7 & 289.6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -12.2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 387.5 & 292.6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -12.6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 421.8 & 299.4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -13.4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 552.9 & 326.4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -18.5 & 31.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4.9 & 0.2 \end{bmatrix}$$

A.3. Ganancias del Observador Difuso con Modos Deslizantes

En esta sección se muestran los valores númericos de las ganancias del observador difuso con modos deslizantes.

$$P_1 = \begin{bmatrix} 1.8922 & 0.0000 & 0.6054 & 0.0004 & -0.0020 & -0.0002 & 0.0031 & 0.0001 & -0.0027 & -0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 1.8960 & -0.0078 & 0.0037 & -0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & -0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & -0.0000 \\ 0.6054 & -0.0078 & 1.5516 & -0.0505 & 0.5254 & 0.0324 & -0.4987 & -0.0143 & 0.4427 & 0.0000 & -0.0006 \\ 0.0004 & 0.0037 & -0.0505 & 0.0382 & -0.0215 & -0.0011 & 0.0188 & 0.0006 & -0.0172 & -0.0000 & 0.0000 \\ -0.0020 & -0.0000 & 0.5254 & -0.0215 & 1.3911 & -0.0300 & 0.4991 & 0.0148 & -0.4370 & -0.0000 & 0.0006 \\ -0.0002 & 0.0000 & 0.0324 & -0.0011 & -0.0300 & 0.0385 & -0.0408 & -0.0010 & 0.0336 & 0.0000 & -0.0000 \\ 0.0031 & 0.0000 & -0.4987 & 0.0188 & 0.4991 & -0.0408 & 1.4551 & -0.0115 & 0.4271 & -0.0000 & -0.0006 \\ 0.0001 & -0.0000 & -0.0143 & 0.0006 & 0.0148 & -0.0010 & -0.0115 & 0.0375 & -0.0539 & 0.0002 & 0.0001 \\ -0.0027 & 0.0000 & 0.4427 & -0.0172 & -0.4370 & 0.0336 & 0.4271 & -0.0539 & 1.6991 & -0.0005 & 0.1532 \\ -0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & -0.0000 & -0.0000 & 0.0000 & -0.0000 & 0.0002 & -0.0005 & 1.9939 & 0.0000 \\ 0.0000 & -0.0000 & -0.0006 & 0.0000 & 0.0006 & -0.0000 & -0.0006 & 0.0001 & 0.1532 & 0.0000 & 1.9937 \end{bmatrix}$$

$$P_2 = \begin{bmatrix} 1.7178 & 0.0001 & 0.9293 & 0.0007 & -0.0000 & -0.0003 & 0.0052 & 0.0002 & -0.0047 & -0.0000 & 0.0000 \\ 0.0001 & 1.7275 & -0.0202 & 0.0097 & -0.0002 & 0.0001 & -0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & -0.0000 & -0.0000 \\ 0.9293 & -0.0202 & 1.8755 & -0.0503 & 0.5202 & 0.0327 & -0.4963 & -0.0147 & 0.4489 & 0.0000 & -0.0012 \\ 0.0007 & 0.0097 & -0.0503 & 0.0383 & -0.0214 & -0.0012 & 0.0188 & 0.0006 & -0.0174 & -0.0000 & 0.0000 \\ -0.0000 & -0.0002 & 0.5202 & -0.0214 & 1.3973 & -0.0304 & 0.4944 & 0.0150 & -0.4440 & -0.0000 & 0.0011 \\ -0.0003 & 0.0001 & 0.0327 & -0.0012 & -0.0304 & 0.0386 & -0.0403 & -0.0011 & 0.0342 & 0.0000 & -0.0001 \\ 0.0052 & -0.0000 & -0.4963 & 0.0188 & 0.4944 & -0.0403 & 1.4580 & -0.0122 & 0.4330 & -0.0000 & -0.0010 \\ 0.0002 & 0.0000 & -0.0147 & 0.0006 & 0.0150 & -0.0011 & -0.0122 & 0.0376 & -0.0541 & 0.0008 & 0.0001 \\ -0.0047 & 0.0000 & 0.4489 & -0.0174 & -0.4440 & 0.0342 & 0.4330 & -0.0541 & 1.7221 & -0.0016 & 0.2917 \\ -0.0000 & -0.0000 & 0.0000 & -0.0000 & -0.0000 & 0.0000 & -0.0000 & 0.0008 & -0.0016 & 1.9780 & 0.0000 \\ 0.0000 & -0.0000 & -0.0012 & 0.0000 & 0.0011 & -0.0001 & -0.0010 & 0.0001 & 0.2917 & 0.0000 & 1.9772 \end{bmatrix}$$

$$P_3 = \begin{bmatrix} 0.9404 & -0.0011 & -1.3752 & -0.0031 & -0.0253 & 0.0007 & -0.0176 & -0.0003 & 0.0115 & 0.0000 & -0.0001 \\ -0.0011 & 0.9790 & -0.0759 & 0.0314 & -0.0051 & 0.0011 & -0.0003 & 0.0000 & 0.0000 & -0.0000 & -0.0000 \\ -1.3752 & -0.0759 & 3.2360 & -0.0428 & 0.8005 & 0.0286 & -0.5682 & -0.0121 & 0.4105 & 0.0000 & -0.0028 \\ -0.0031 & 0.0314 & -0.0428 & 0.0439 & -0.0370 & -0.0013 & 0.0244 & 0.0005 & -0.0179 & 0.0000 & 0.0001 \\ -0.0253 & -0.0051 & 0.8005 & -0.0370 & 1.5544 & -0.0183 & 0.4429 & 0.0100 & -0.3252 & -0.0000 & 0.0023 \\ 0.0007 & 0.0011 & 0.0286 & -0.0013 & -0.0183 & 0.0429 & -0.0554 & -0.0013 & 0.0362 & 0.0000 & -0.0002 \\ -0.0176 & -0.0003 & -0.5682 & 0.0244 & 0.4429 & -0.0554 & 1.8088 & -0.0039 & 0.2416 & -0.0001 & 0.0010 \\ -0.0003 & 0.0000 & -0.0121 & 0.0005 & 0.0100 & -0.0013 & -0.0039 & 0.0417 & -0.0618 & 0.0071 & 0.0006 \\ 0.0115 & 0.0000 & 0.4105 & -0.0179 & -0.3252 & 0.0362 & 0.2416 & -0.0618 & 2.4222 & -0.0127 & 0.7326 \\ 0.0000 & -0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & -0.0000 & 0.0000 & -0.0001 & 0.0071 & -0.0127 & 1.8644 & 0.0000 \\ -0.0001 & -0.0000 & -0.0028 & 0.0001 & 0.0023 & -0.0002 & 0.0010 & 0.0006 & 0.7326 & 0.0000 & 1.8593 \end{bmatrix}$$

$$P_4 = \begin{bmatrix} 1.9582 & 0.0000 & 0.4037 & 0.0002 & -0.0027 & -0.0001 & 0.0023 & 0.0000 & -0.0016 & -0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 1.9599 & -0.0030 & 0.0013 & -0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & -0.0000 & 0.0000 & -0.0000 & -0.0000 \\ 0.4037 & -0.0030 & 1.2224 & -0.0474 & 0.7498 & 0.0288 & -0.5745 & -0.0122 & 0.4129 & 0.0000 & -0.0050 \\ 0.0002 & 0.0013 & -0.0474 & 0.0421 & -0.0335 & -0.0011 & 0.0243 & 0.0005 & -0.0181 & 0.0000 & 0.0002 \\ -0.0027 & -0.0000 & 0.7498 & -0.0335 & 1.5179 & -0.0212 & 0.4593 & 0.0102 & -0.3276 & -0.0000 & 0.0041 \\ -0.0001 & 0.0000 & 0.0288 & -0.0011 & -0.0212 & 0.0425 & -0.0531 & -0.0010 & 0.0363 & 0.0002 & -0.0004 \\ 0.0023 & 0.0000 & -0.5745 & 0.0243 & 0.4593 & -0.0531 & 1.7870 & -0.0059 & 0.2662 & -0.0008 & 0.0091 \\ 0.0000 & -0.0000 & -0.0122 & 0.0005 & 0.0102 & -0.0010 & -0.0059 & 0.0417 & -0.0604 & 0.0188 & 0.0013 \\ -0.0016 & 0.0000 & 0.4129 & -0.0181 & -0.3276 & 0.0363 & 0.2662 & -0.0604 & 2.8947 & -0.0342 & 1.1178 \\ -0.0000 & -0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & -0.0000 & 0.0002 & -0.0008 & 0.0188 & -0.0342 & 1.6344 & 0.0002 \\ 0.0000 & -0.0000 & -0.0050 & 0.0002 & 0.0041 & -0.0004 & 0.0091 & 0.0013 & 1.1178 & 0.0002 & 1.6210 \end{bmatrix}$$

$$P_5 = \begin{bmatrix} 0.7730 & 0.0013 & 1.2561 & 0.0042 & 0.0466 & -0.0006 & 0.0194 & 0.0003 & -0.0110 & -0.0000 & 0.0001 \\ 0.0013 & 0.8117 & -0.0860 & 0.0388 & -0.0090 & 0.0020 & -0.0007 & 0.0001 & -0.0000 & -0.0000 & 0.0000 \\ 1.2561 & -0.0860 & 3.3406 & -0.0399 & 0.6841 & 0.0286 & -0.5041 & -0.0106 & 0.3661 & -0.0000 & -0.0027 \\ 0.0042 & 0.0388 & -0.0399 & 0.0395 & -0.0303 & -0.0012 & 0.0184 & 0.0004 & -0.0147 & 0.0000 & 0.0001 \\ 0.0466 & -0.0090 & 0.6841 & -0.0303 & 1.3210 & -0.0181 & 0.4603 & 0.0119 & -0.3450 & -0.0000 & 0.0025 \\ -0.0006 & 0.0020 & 0.0286 & -0.0012 & -0.0181 & 0.0371 & -0.0476 & -0.0013 & 0.0269 & 0.0000 & -0.0002 \\ 0.0194 & -0.0007 & -0.5041 & 0.0184 & 0.4603 & -0.0476 & 1.4385 & -0.0016 & 0.2698 & -0.0001 & 0.0011 \\ 0.0003 & 0.0001 & -0.0106 & 0.0004 & 0.0119 & -0.0013 & -0.0016 & 0.0353 & -0.0509 & 0.0078 & 0.0005 \\ -0.0110 & -0.0000 & 0.3661 & -0.0147 & -0.3450 & 0.0269 & 0.2698 & -0.0509 & 2.0791 & -0.0139 & 0.7591 \\ -0.0000 & -0.0000 & -0.0000 & 0.0000 & -0.0000 & 0.0000 & -0.0001 & 0.0078 & -0.0139 & 1.8150 & 0.0001 \\ 0.0001 & 0.0000 & -0.0027 & 0.0001 & 0.0025 & -0.0002 & 0.0011 & 0.0005 & 0.7591 & 0.0001 & 1.8094 \end{bmatrix}$$

$$P_6 = \begin{bmatrix} 1.3880 & 0.0004 & 1.2196 & 0.0015 & 0.0085 & -0.0005 & 0.0088 & 0.0002 & -0.0061 & 0.0000 & 0.0001 \\ 0.0004 & 1.4086 & -0.0428 & 0.0200 & -0.0013 & 0.0003 & -0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & -0.0000 & -0.0000 \\ 1.2196 & -0.0428 & 2.2846 & -0.0434 & 0.5987 & 0.0280 & -0.5046 & -0.0103 & 0.3619 & -0.0000 & -0.0036 \\ 0.0015 & 0.0200 & -0.0434 & 0.0370 & -0.0271 & -0.0010 & 0.0182 & 0.0004 & -0.0148 & 0.0000 & 0.0001 \\ 0.0085 & -0.0013 & 0.5987 & -0.0271 & 1.2884 & -0.0202 & 0.4702 & 0.0120 & -0.3419 & -0.0000 & 0.0034 \\ -0.0005 & 0.0003 & 0.0280 & -0.0010 & -0.0202 & 0.0366 & -0.0457 & -0.0010 & 0.0266 & 0.0001 & -0.0003 \\ 0.0088 & -0.0000 & -0.5046 & 0.0182 & 0.4702 & -0.0457 & 1.4189 & -0.0029 & 0.2889 & -0.0004 & 0.0043 \\ 0.0002 & 0.0000 & -0.0103 & 0.0004 & 0.0120 & -0.0010 & -0.0029 & 0.0352 & -0.0500 & 0.0133 & 0.0008 \\ -0.0061 & 0.0000 & 0.3619 & -0.0148 & -0.3419 & 0.0266 & 0.2889 & -0.0500 & 2.2885 & -0.0239 & 0.9552 \\ 0.0000 & -0.0000 & -0.0000 & 0.0000 & -0.0000 & 0.0001 & -0.0004 & 0.0133 & -0.0239 & 1.6816 & 0.0001 \\ 0.0001 & -0.0000 & -0.0036 & 0.0001 & 0.0034 & -0.0003 & 0.0043 & 0.0008 & 0.9552 & 0.0001 & 1.6721 \end{bmatrix}$$

$$P_7 = \begin{bmatrix} 0.7707 & 0.0015 & 1.3267 & 0.0040 & 0.0373 & -0.0007 & 0.0218 & 0.0004 & -0.0133 & -0.0000 & 0.0001 \\ 0.0015 & 0.8144 & -0.0881 & 0.0360 & -0.0083 & 0.0017 & -0.0007 & 0.0001 & -0.0000 & -0.0000 & 0.0000 \\ 1.3267 & -0.0881 & 3.5475 & -0.0410 & 0.8351 & 0.0286 & -0.5649 & -0.0121 & 0.4101 & 0.0000 & -0.0029 \\ 0.0040 & 0.0360 & -0.0410 & 0.0448 & -0.0385 & -0.0014 & 0.0244 & 0.0005 & -0.0179 & 0.0000 & 0.0001 \\ 0.0373 & -0.0083 & 0.8351 & -0.0385 & 1.5727 & -0.0173 & 0.4366 & 0.0099 & -0.3253 & -0.0000 & 0.0023 \\ -0.0007 & 0.0017 & 0.0286 & -0.0014 & -0.0173 & 0.0431 & -0.0561 & -0.0014 & 0.0363 & 0.0000 & -0.0003 \\ 0.0218 & -0.0007 & -0.5649 & 0.0244 & 0.4366 & -0.0561 & 1.8200 & -0.0034 & 0.2352 & -0.0001 & 0.0011 \\ 0.0004 & 0.0001 & -0.0121 & 0.0005 & 0.0099 & -0.0014 & -0.0034 & 0.0419 & -0.0622 & 0.0073 & 0.0006 \\ -0.0133 & -0.0000 & 0.4101 & -0.0179 & -0.3253 & 0.0363 & 0.2352 & -0.0622 & 2.4464 & -0.0131 & 0.7450 \\ -0.0000 & -0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & -0.0000 & 0.0000 & -0.0001 & 0.0073 & -0.0131 & 1.8593 & 0.0000 \\ 0.0001 & 0.0000 & -0.0029 & 0.0001 & 0.0023 & -0.0003 & 0.0011 & 0.0006 & 0.7450 & 0.0000 & 1.8540 \end{bmatrix}$$

$$P_8 = \begin{bmatrix} 0.1898 & 0.0045 & 0.5046 & 0.0175 & 0.1762 & -0.0089 & 0.0030 & 0.0229 & 0.0231 & -0.0353 & 0.0021 \\ 0.0045 & 0.2246 & -0.1276 & 0.0394 & -0.0632 & 0.0097 & -0.0297 & 0.0022 & -0.0183 & 0.0013 & -0.0017 \\ 0.5046 & -0.1276 & 5.7632 & -0.0865 & -0.1316 & 0.2109 & 0.5641 & -0.2844 & -0.1444 & 0.5240 & -0.0309 \\ 0.0175 & 0.0394 & -0.0865 & 0.0599 & -0.0022 & -0.0090 & -0.0304 & 0.0159 & 0.0082 & -0.0275 & 0.0128 \\ 0.1762 & -0.0632 & -0.1316 & -0.0022 & 2.8945 & -0.1239 & -0.3588 & 0.2253 & 0.1393 & -0.3905 & 0.0426 \\ -0.0089 & 0.0097 & 0.2109 & -0.0090 & -0.1239 & 0.0630 & 0.0241 & -0.0337 & -0.0284 & 0.0564 & -0.0258 \\ 0.0030 & -0.0297 & 0.5641 & -0.0304 & -0.3588 & 0.0241 & 2.4112 & -0.1419 & -0.2550 & 0.2801 & -0.0673 \\ 0.0229 & 0.0022 & -0.2844 & 0.0159 & 0.2253 & -0.0337 & -0.1419 & 0.0913 & 0.0307 & -0.0972 & 0.0447 \\ 0.0231 & -0.0183 & -0.1444 & 0.0082 & 0.1393 & -0.0284 & -0.2550 & 0.0307 & 2.2594 & -0.1597 & 0.0913 \\ -0.0353 & 0.0013 & 0.5240 & -0.0275 & -0.3905 & 0.0564 & 0.2801 & -0.0972 & -0.1597 & 0.2154 & -0.0851 \\ 0.0021 & -0.0017 & -0.0309 & 0.0128 & 0.0426 & -0.0258 & -0.0673 & 0.0447 & 0.0913 & -0.0851 & 0.3245 \end{bmatrix}$$

Referencias

[Angelov y Filev, 2004] Angelov, P. P. y Filev, D. P. (2004). An approach to online identification of takagi-sugeno fuzzy models. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B (Cybernetics)*, 34(1):484–498.

[Anzurez-Marín, 2007] Anzurez-Marín, J. (2007). Diagnóstico de fallas en sistemas no lineales usando lógica difusa y observadores con modos deslizantes, doctor in science electrical engineering specialty thesis. *CINVESTAV, Mexico*.

[Astorga *et al.*, 2006] Astorga, C. M., Quintero-Mármol, E., Vela, L. G., y Torres, L. (2006). Observador no lineal para la estimación de concentraciones en un proceso de destilación metanol/etanol. *Información tecnológica*, 17(6):35–41.

[Atkins, 2006] Atkins, P. (2006). Paula j. atkins' physical chemistry.

[Balasubramhanya y Doyle Iii, 2000] Balasubramhanya, L. S. y Doyle Iii, F. J. (2000). Nonlinear model-based control of a batch reactive distillation column. *Journal of Process Control*, 10(2):209–218.

[Cingara *et al.*, 1990] Cingara, A., Jovanovic, M., y Mitrovic, M. (1990). Analytical first-order dynamic model of binary distillation column. *Chemical Engineering Science*, 45(12):3585–3592.

[Green y Perry, 1973] Green, D. W. y Perry, R. H. (1973). *Perry's Chemical Engineers' Handbook/edición Don W. Green y Robert H. Perry.* Número C 660.28 P47 2008.

[Hammouri *et al.*, 2002] Hammouri, H., Targui, B., y Armanet, F. (2002). High gain observer based on a triangular structure. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 12(6):497–518.

[Heras-Cervantes *et al.*, 2013] Heras-Cervantes, M., Tellez-Anguiano, A. C., Ramirez, M. C. G., Gutierrez-Gnecchi, J. A., Fernandez-Munoz, O., y Olivares-Peregrino, V. H. (2013). Comparative analysis of high-gain observers applied to a distillation column. pp. 1–5. IEEE.

[Heras-Cervantes *et al.*, 2015] Heras-Cervantes, M., T.-A. A. C. G.-R. M. C. A.-Z. C. M. y Reyes-Archundia, E. (2015). Validación experimental de un observador de alta ganancia reconfigurable para una columna de destilación. *Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial RIAI*, 12(4):397–407.

[Itkis, 1976] Itkis, U. (1976). *Control systems of variable structure*. Wiley New York.

[Johansen y Murray-Smith, 1997] Johansen, T. A. y Murray-Smith, R. (1997). The operating regime approach to nonlinear modelling and control. *Multiple model approaches to modelling and control*, 1:3–72.

[Kienle, 2000] Kienle, A. (2000). Low-order dynamic models for ideal multicomponent distillation processes using nonlinear wave propagation theory. *Chemical Engineering Science*, 55(10):1817–1828.

[Lang y Gilles, 1990] Lang, L. y Gilles, E. D. (1990). Nonlinear observers for distillation columns. *Computers & chemical engineering*, 14(11):1297–1301.

[Lopez-Estrada *et al.*, 2015] Lopez-Estrada, F.-R., Ponsart, J.-C., Theilliol, D., Astorga-Zaragoza, C. M., y Flores-Montiel, M. (2015). Robust state and fault estimation observer for discrete-time d-lpv systems with unmeasurable gain scheduling functions. application to a binary distillation column. *IFAC-PapersOnLine*, 48(21):1012–1017.

[Lopez-Saucedo *et al.*, 2016] Lopez-Saucedo, E. S., Grossmann, I. E., Segovia-Hernandez, J. G., y Hernández, S. (2016). Rigorous modeling, simulation and optimization of a conventional and nonconventional batch reactive distillation column: A comparative study of dynamic optimization approaches. *Chemical Engineering Research and Design*, 111:83–99.

[Osuolale y Zhang, 2016] Osuolale, F. N. y Zhang, J. (2016). Energy efficiency optimisation for distillation column using artificial neural network models. *Energy*, 106:562–578.

[Quintero-Marmol *et al.*, 1991] Quintero-Marmol, E., Luyben, W. L., y Georgakis, C. (1991). Application of an extended luenberger observer to the control of multicomponent batch distillation. *Industrial & Engineering Chemistry Research*, 30(8):1870–1880.

[Safdarnejad *et al.*, 2016] Safdarnejad, S. M., Gallacher, J. R., y Hedengren, J. D. (2016). Dynamic parameter estimation and optimization for batch distillation. *Computers & Chemical Engineering*, 86:18–32.

[Skogestad, 1997] Skogestad, S. (1997). Dynamics and control of distillation columns: A tutorial introduction. *Chemical Engineering Research and Design*, 75(6):539–562.

[Takagi y Sugeno, 1985] Takagi, T. y Sugeno, M. (1985). Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control. *IEEE transactions on systems, man, and cybernetics*, (1):116–132.

[Tanaka y Sugeno, 1992] Tanaka, K. y Sugeno, M. (1992). Stability analysis and design of fuzzy control systems. *Fuzzy sets and systems*, 45(2):135–156.

[Tanaka y Wang, 2004] Tanaka, K. y Wang, H. O. (2004). *Fuzzy control systems design and analysis: a linear matrix inequality approach*. John Wiley & Sons.

[Téllez-Anguiano *et al.*, 2012] Téllez-Anguiano, A. C., Astorga-Zaragoza, C. M., Alcorta-Garcia, E., Targui, B., Quintero-Marmol, E., Adam-Medina, M., y Olivares-Peregrino, V. H. (2012). Nonlinear continuous-discrete observer application to distillation columns. *International Journal of Innovative Computing, Information and Control*, 8(1).

[Téllez-Anguiano *et al.*, 2009] Téllez-Anguiano, A. C., Astorga-Zaragoza, C. M., Targui, B., Aguilera-González, A., Reyes-Reyes, J., y Adam-Medina, M. (2009). Experimental validation of a high-gain observer for composition estimation in an ethanol-water distillation column. *Asia-Pacific Journal of Chemical Engineering*, 4(6):942–952.

[Utkin, 1993] Utkin, V. I. (1993). Sliding mode control design principles and applications to electric drives. *IEEE transactions on industrial electronics*, 40(1):23–36.

[Wang *et al.*, 1995] Wang, H. O., Tanaka, K., y Griffin, M. (1995). Parallel distributed compensation of nonlinear systems by takagi-sugeno fuzzy model. volumen 2, pp. 531–538. IEEE.

[Zhu, 1999] Zhu, Y. (1999). Distillation column identification for control using wiener model. volumen 5, pp. 3462–3466. IEEE.

[del Carmen Téllez-Anguiano *et al.*, 2017] del Carmen Téllez-Anguiano, A., Heras-Cervantes, M., Anzurez-Marín, J., Chávez-Campos, G. M., y Gnecchi, J. A. G. (2017). Mathematical modelling of batch distillation columns: A comparative analysis of non-linear and fuzzy models. InTech.

[Mujtaba, 2004] Mujtaba, I. M. (2004). *Batch distillation: design and operation*, volumen 3. World Scientific Publishing Company.

[Cortés-Hernández, 2017] Cortés-Hernández, B. R. (2017). Diseño de un observador difuso para una columna de destilación binaria tipo batch de 11 platos modelada en Takagi-Sugeno (Tesis de Maestría). . Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, Morelia, Michoacán, México.

[Escamirosa-Torres, 2016] Escamirosa-Torres, A. (2016). Estación de monitoreo y control de calidad aplicado a una columna de destilación empleando observadores (Tesis de Maestría). . Instituto Tecnológico de Morelia, Morelia, Michoacán, México.

[Aguilera-Gonzáles, 2008] Aguilera-Gonzáles, A. (2008). Observador Continuo-Discreto para la Estimación de Concentraciones en una Columna de Destilación, para la Mezcla Etanol-Agua (Tesis de Maestría). . CENIDET, Cuernavaca, Morelos, México.

.