



Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo
División de Estudios de Posgrado de la Facultad de
Ingeniería Eléctrica

**ANÁLISIS SIMBÓLICO DE SISTEMAS LPV BASADO EN
DIAGRAMAS DE DECISIÓN PARA DETERMINANTES: UNA
APLICACIÓN DE CONTROL PREDICTIVO**

TESIS

Que para obtener el grado de:

MAESTRO EN CIENCIAS EN INGENIERÍA ELÉCTRICA

Presenta:

Ing. Efraín Rodríguez López

Director de tesis:

Dr. J. Jesús Rico Melgoza

Morelia, Michoacán, Abril 2020





ANÁLISIS SIMBÓLICO DE SISTEMAS LPV BASADO EN DIAGRAMAS DE DECISIÓN PARA DETERMINANTES: UNA APLICACIÓN DE CONTROL PREDICTIVO

Los Miembros del Jurado de Examen de Grado aprueban la Tesis de Maestría en Ciencias
en Ingeniería Eléctrica de *Efrain Rodríguez López*

Dr. Fernando Ornelas Téllez
Presidente del Jurado

Dr. J. Jesús Rico Melgoza
Director de Tesis

Dr. Antonio Ramos Paz
Vocal

Dr. José Juan Rincón Pasaye
Vocal

Dr. Manuel Madrigal Martínez
Revisor Externo (Instituto Tecnológico de Morelia)

Dr. Roberto Tapia Sánchez
*Jefe de la División de Estudios de Posgrado
de la Facultad de Ingeniería Eléctrica. UMSNH.
(Por reconocimiento de firmas)*

DEDICATORIA

Agradezco a mis padres, por su amor, trabajo, sacrificio y apoyo en todos estos años, gracias a ustedes he logrado llegar hasta aquí y convertirme en lo que soy. Ha sido un orgullo y privilegio ser su hijo, son los mejores padres.

Agradezco a Dios, por permitirme llegar a esta etapa, y culminar un sueño más.

A mi hermana y su esposo, que siempre confiaron en mí.

Al Dr. J. Jesús Rico Melgoza, por sus consejos, conocimientos, paciencia y su gran amistad que me brindo durante el periodo que trabajamos juntos.

A mi novia, que siempre me ha brindado su apoyo incondicional para culminar mis metas.

Agradezco a mis profesores del posgrado, que me proporcionaron los conocimientos base para realizar este trabajo.

Agradezco a mis amigos, por todos los momentos que pasamos juntos y su amistad incondicional.

A mis sinodales, por sus valiosos consejos para mejorar este trabajo.

Agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT), por el apoyo económico brindado durante el periodo de maestría.

Resumen

En este documento se presenta el desarrollo de soluciones parametrizadas de sistemas lineales de parámetro variante (LPV, por sus siglas en inglés) de gran escala, que permiten llevar a cabo procesos de optimización paramétrica. Estas soluciones se basan en una técnica eficiente de análisis simbólico, llamada diagramas de decisión para determinantes (DDD, por sus siglas en inglés), la cual tradicionalmente representa la expansión de Laplace de un determinante, mediante diagramas de decisión binarias para las operaciones de intercambio de datos comunes en el que el orden de los símbolos juega un papel importante. En este trabajo, los DDDs se logran mediante el método de expansión por capas del determinante (LED, por sus siglas en inglés), el cual resulta en una implementación directa y con mayor eficiencia.

Mediante la metodología del dominio armónico extendido se logra una representación de sistemas LPV de dimensión expandida, la cual abre la posibilidad de aplicar teoría de control, así como realizar análisis de sistemas lineales invariantes con el tiempo. Por lo que es posible transformar los modelos LPV al dominio de la frecuencia (FD, por sus siglas en inglés) y obtener una solución exacta mediante los DDDs. Sin embargo, para regresar al TD es imposible mediante las tablas de transformadas de Laplace. Por lo tanto, las expresiones del FD se transforman al TD utilizando la transformada numérica inversa de Laplace. Logrando de esta manera una solución parametrizada deslizante en el dominio del tiempo discreto.

Para demostrar las capacidades de este enfoque, se realizan ejemplos para validar su aplicación y rápida evaluación, en procesos de optimización paramétrica. Finalmente, como caso particular se presentan funciones de transferencia del modelo conmutado del convertidor elevador, dando lugar a una solución parametrizada suave y fácil de evaluar. Esta solución compacta se utiliza en el proceso de optimización de control predictivo basado en modelo, mitigando de manera considerable el costo computacional en línea que este requiere.

Palabras Clave: EHD, DDD, NILT, MPC, Soluciones parametrizadas.

Abstract

This document presents the development of parameterized solutions of large-scale linear parameter varying (LPV) systems, which allow to carry out parametric optimization processes. These solutions are based on an efficient symbolic analysis technique, called determinant decision diagrams (DDD). Which traditionally represents the Laplace expansion of a determinant, using binary decision diagrams for common data exchange operations in which the order of symbols plays an important role. In this work, DDDs are achieved through the layered expansion of determinant (LED), which results in a more efficient and direct implementation.

Through the extended harmonic domain methodology, a representation of LPV systems of expanded dimension is achieved, which opens the possibility of applying control theory, as well as performing analyzes of linear time invariant systems. Therefore, it is possible to transform LPV models to the frequency domain (FD) and obtain an exact solution using the DDDs. However, to return to the TD it is impossible through the Laplace transform tables. Therefore, expressions in the FD are transformed to the TD using the numerical inverse Laplace transform. Achieving a sliding parameterized solution in the discrete time domain.

In order to demonstrate the capabilities of this approach, examples are made to validate its application and fast evaluation, in parametric optimization processes. Finally, as a particular case, the transfer functions of the switched model of the boost converter are presented, giving rise to a soft and easy to evaluate parameterized solution. This compact solution is used in the model-based predictive control optimization process, considerably mitigating the online computational cost that it requires.

Contenido

Dedicatoria	III
Resumen	V
Abstract	VII
Contenido	IX
Lista de Figuras	XI
Lista de Tablas	XIII
Lista de Símbolos	XIV
1. Introducción	1
1.1. Planteamiento del Problema	2
1.2. Estado del Arte	3
1.3. Objetivos de la Tesis	7
1.3.1. Objetivo General	7
1.3.2. Objetivos Particulares	7
1.4. Justificación	8
1.5. Hipótesis	9
1.6. Metodología	9
1.7. Descripción de Capítulos	10
1.8. Publicaciones	11
2. Análisis Simbólico	12
2.1. El Problema del Análisis Simbólico	13
2.2. Diagramas de Decisión para Determinantes (DDDs)	14
2.3. Expansión por Capas del Determinante	18
2.3.1. Orden de Expansión en LED	22
2.3.2. Complejidad Computacional	25
2.4. Evaluación de un DDD	29
2.5. Matrices de Prueba	31
2.6. Conclusiones del Capítulo	32

3. Dominio Armónico Extendido: Una Formulación LPV	33
3.1. Matemáticas Preliminares: Teoría de Matrices Operacionales para la Serie Trigonométrica de Fourier	34
3.2. Matriz Operacional de Diferenciación	35
3.3. Matriz Operacional de Producto	36
3.4. Representación LPV	38
3.5. Modulación de Ancho de Pulso en EHD	41
3.6. Análisis de Estabilidad en Sistemas LPV	42
3.7. Conclusiones del Capítulo	44
4. Análisis Paramétrico de Sistemas Lineales	45
4.1. Soluciones Generales de Sistemas LTI	46
4.1.1. Solución General en el Dominio del Tiempo	46
4.1.2. Solución en el Dominio de Tiempo Discreto	47
4.1.3. Dominio de la Frecuencia	49
4.2. Soluciones Aproximadas de Sistemas LTI	50
4.2.1. Aproximación de la Matriz de Transición de Estados	50
4.2.2. Transformada Numérica Inversa de Laplace	51
4.2.3. Formulación Numérica	52
4.2.4. Ejemplo	55
4.2.5. Soluciones Parametrizadas de Sistemas Lineales	57
4.2.6. Ejemplo	58
4.3. DDDs para la Solución de Sistemas LPV de Gran Tamaño	61
4.3.1. Ejemplo: Solución Simbólica de Estado Estable de Sistemas LPV	62
4.4. Conclusiones del Capítulo	66
5. Casos de Estudio y Control Predictivo Basado en Modelo	68
5.1. Optimización Paramétrica de Filtro Pasivo Basado en los DDDs	69
5.2. Análisis Simbólico de la Ecuación de Mathieu	77
5.3. Análisis Simbólico del Convertidor Elevador	83
5.4. Control Predictivo Basado en Modelo	95
5.5. MPC para sistemas LPV: Convertidor Elevador	97
5.6. Conclusiones del Capítulo	98
6. Conclusiones y Trabajos Futuros	100
6.1. Conclusiones Generales	100
6.2. Trabajos Futuros	101
Referencias	103

Lista de Figuras

2.1.	Representación de $afhj, aeij, afgk, bcik, adik, aegl, bchl, adhl$ mediante un ZBDD.	16
2.2.	Diagrama de decisión para el determinante de la matriz A de 4×4	18
2.3.	Expansión en capas del determinante de una matriz de 4×4	20
2.4.	Conversión a DDD de una matriz de 4×4	22
2.5.	Orden de expansión <i>grado mínimo</i> de una matriz dispersa de 4×4	24
2.6.	Diagrama de flujo de la construcción de un LED.	26
2.7.	DDD de la matriz de 3×3	27
2.8.	DDD convertido a un dígrafo.	28
3.1.	Señales auxiliares $d(t)$ y β para generar la entrada PWM.	42
3.2.	Parametrización de la señal PWM mediante la serie de Fourier.	43
4.1.	Equivalente monofásico del sistema en estudio.	55
4.2.	Respuesta en el tiempo de $e^{At}[1, 1]$ mediante la NILT y LT.	56
4.3.	Respuesta de la solución parametrizada hipotética para un horizonte de tiempo $\Delta\delta$	58
4.4.	Variación de la amplitud de la corriente de carga.	60
4.5.	Comparación de la evolución en el tiempo del estado v_{C2} a través de la solución parametrizada y la solución numérica.	61
4.6.	Respuesta en el dominio del tiempo de los estados del sistema original.	66
5.1.	DDD convertido a un grafo dirigido del $\det(A)$	73
5.2.	Respuesta del sistema. a) Espectro armónico del voltaje de línea v_{C2_a} sin optimización. b) Comparación de la solución del estado v_{C2_a} sin optimización.	74
5.3.	Respuesta del sistema. a) Espectro armónico del voltaje de línea v_{C2_a} con optimización. b) Solución óptima del estado v_{C2_a}	76
5.4.	Respuesta en el dominio del tiempo de los estados originales del sistema.	79
5.5.	Variación en el tiempo de los parámetros a y b	80
5.6.	Respuesta en el TD de los estados de la ecuación de Mathieu.	81
5.7.	Mapa de estabilidad para la ecuación de Mathieu.	83

5.8. Diagrama simple del convertidor elevador.	84
5.9. Variación del ciclo de trabajo $d(t)$	85
5.10. Respuesta en el dominio del tiempo de un simple convertidor elevador. a) Corriente del convertidor. b) Voltaje del convertidor.	87
5.11. Zoom de la respuesta en el dominio del tiempo de los estados de un simple convertidor elevador. a) Corriente del convertidor. b) Voltaje del convertidor.	88
5.12. Matriz expandida $\mathbb{A}(d(t))$ a través del EHD.	89
5.13. Mapa de estabilidad del convertidor elevador basado en DDDs.	90
5.14. Validación en el TD de las soluciones obtenidas en el FD, para las variables de estado, basadas en los DDDs.	92
5.15. Respuesta libre en el TD del elemento $\Phi_{1,1}$ con diferentes ciclos de trabajo.	93
5.16. Respuesta libre en el TD del elemento $\Phi_{1,1}$ con diferentes ciclos de trabajo para un tiempo de $t_0 = 0$ a un $t_f = 0.000012s$	94
5.17. Respuesta en el TD del estado $i_l(t)$ para diferente valores del ciclo de trabajo.	95
5.18. Respuesta en el TD de un simple convertidor elevador. a) Desempeño de MPC para una referencia variante. b) Variación del ciclo de trabajo contra cambios de referencia.	99

Lista de Tablas

2.1.	Comparación de los tamaños de los DDDs creados mediante un orden de expansión por renglones y el método <i>Greedy-Labeling</i> para matrices llenas de $n \times n$	29
2.2.	Evaluación del DDD de una matriz llena de 3×3	30
2.3.	Comparación del tiempo de CPU para la evaluación del determinante simbólico.	31
2.4.	Comparación del tiempo de CPU para la construcción LED.	32
4.1.	Parámetros hipotéticos.	60
4.2.	Comparación del tiempo de CPU para la evaluación simbólica de A^{-1}	65
5.1.	Parámetros óptimos del filtro de segundo orden.	75
5.2.	Coefficientes de Fourier de la función $s(t)$	84
5.3.	Parámetros de un convertidor elevador simple.	85
5.4.	Tamaño del DDD del $\det(sI - \mathbb{A}(d(t)))$ obtenido mediante dos ordenes de expansión.	90

Lista de Símbolos

Lista de Acrónimos

LPV	Linear Parameter Varying.
DDDs	Determinant Decision Diagrams.
BDDs	Binary Decision Diagrams.
LED	Layered Expansion of Determinant.
EHD	Extended Harmonic Domain.
TD	Time Domain.
LTI	Linear Time Invariant.
FD	Frecuency Domain.
DTD	Discrete Time Domain.
NILT	Numerical Inverse Laplace Transform.
MPC	Model Predictive Control.
SG	Smart Grids.
MPPT	Maximum Power Point Tracking.
CCS-MPC	Continuos-Control-Set Model Predictive Control.
FCS-MPC	Finite-Control-Set Model Predictive Control.
PV	Photovoltaic.
LC	Linear Complementary.
LTP	Linear Time-Periodic.
ZBDD	Zero-supressed Binary Decisio Diagram.
PE	Power Electronic.
LT	Laplace Transform.
ILT	Inverse Laplace Transform.
MFT	Modified Fourier Transform.
FT	Fourier Transform.
FFT	Fast Fourier Transform.
THD	Total Harmonic Distortion.
PLC	Power Line Conditioner.

Lista de Símbolos

P	Periodo fundamental.
Nh	Numero de armónicos.
$\sigma(t)$	Función periódica.
D	Matriz de diferenciación.
S	Matriz de rotación.
A	Matriz característica.
\mathbf{A}	Matriz de coeficientes.
X	Vector de variables de estado.
\mathcal{X}	Vector de variables de co-estado.
F	Función de forzamiento.
\mathbb{F}	Función de forzamiento expandida.
C	Matriz de controlabilidad.
\mathbf{B}	Vector de entradas expandido.
O	Matriz de observabilidad.
\mathbf{C}	Vector de salidas expandido.
T	Periodo de observación.
α	Paso de integración.
s	Frecuencia compleja.
ω	Velocidad angular.
$\sigma(\omega)$	Función ventana.
N	Número de muestras.
$\Delta\omega$	Paso de frecuencia.
Δt	Paso de tiempo.
c	Factor de amortiguamiento.
$\Delta\delta$	Tiempo de predicción.
θ	Parámetro variante.
$H(s)$	Función de transferencia.
$d(t)$	Ciclo de trabajo.
ϕ	Ángulo de desfase.
Φ	Matriz de transición de estados.

Capítulo 1

Introducción

En sus orígenes la red eléctrica fue diseñada como un medio de suministro de energía para hacer funcionar dispositivos analógicos de manera correcta sin importar los diferentes tipos de cargas; no obstante, los equipos digitales actuales, basados en operar a través de microprocesadores, son muy sensibles a cambios en la calidad de la energía: caídas de voltaje, sobrevoltajes y armónicos en el flujo de la corriente alterna; así como la más mínima interrupción de potencia debido principalmente a cargas no lineales tales como: hornos eléctricos, sistemas de tracción eléctrica, soldadoras de arco, etc. Cuando estas interrupciones suceden en menos de un ciclo pueden llegar a afectar las condiciones eléctricas del suministro y ocasionar un mal funcionamiento o daño en los equipos y procesos. Lo anterior, sumado al requerimiento preciso de energía, tiene como consecuencia un sistema ineficiente, el cual consume energía durante la creación, entrega y uso de la electricidad. Por ello, si el sistema no se actualiza y se reconfigura lo antes posible, en un futuro se volverá incompatible.

Adicionalmente, con los cambios rápidos observados en las redes de energía, en su intención de ser más inteligentes, así como la inserción de energías renovables y dispositivos de electrónica de potencia, se requieren nuevos métodos, los cuales mantengan las características de las redes eléctricas inteligentes (SG, por sus siglas en inglés). Así pues, casi todas las posibilidades de hacer que una red eléctrica sea

más inteligente o automatizada se reducen al uso de la teoría de control de alguna u otra manera.

El principal objetivo de las SG es la búsqueda de la máxima eficiencia energética, mientras cumpla con la demanda bajo restricciones operativas. Sin embargo, ésta es una consideración clásica de la teoría de control tradicional y, aunque tiene mucho que ofrecer en tales áreas de aplicación, hay aspectos de estas aplicaciones contemporáneas donde el control clásico no puede aplicarse adecuadamente; en consecuencia, ofrecen la oportunidad de explorar nuevos límites en el diseño de control. De hecho, debido a que el control convencional generalmente se relaciona con la regulación de un solo sistema, de manera que el comportamiento del sistema logre de manera óptima el comportamiento deseado, no puede tratar con múltiples sistemas y objetivos de control; como se requiere en aplicaciones de SG donde el efecto agregado de las acciones de un conjunto de agentes es una variable de considerable interés. Además, el control clásico tiene que ver con el control de los sistemas cuya estructura no varía con el tiempo y, por lo tanto, la variable manipulada debe pasar por una serie de puntos de ajuste, un comportamiento que no puede lograrse mediante los controladores clásicos. En general, en las SG se desea controlar e influir en procesos que pueden ser inciertos y que varían con el tiempo. Empero, muchas acciones en redes inteligentes se vuelven anticipatorias en lugar de reactivas. En este contexto, son necesarias técnicas de control avanzadas que deberán abordar desafíos complejos de manera que sea posible extraer el máximo rendimiento y reducir de manera integral el consumo de energía; de tal manera, es necesario optimizar la operación de la planta para realizar mejoras de rendimiento mientras se mantiene la seguridad de la misma.

1.1. Planteamiento del Problema

En el análisis de sistemas y circuitos complejos, es de interés obtener una solución que describa cada instante de tiempo la dinámica del mismo, la cual esté en función

de sus parámetros simbólicos, y pueda expresarse en forma compacta. Resolver este problema utilizando métodos tradicionales puede resultar muy complicado, o incluso imposible, debido a la gran cantidad de cálculos que se requieren para evaluar los determinantes de las matrices que describen los sistemas, y cuya complejidad puede crecer exponencialmente en función de sus dimensiones. No obstante, de obtenerse dicha solución, puede ser de gran utilidad para fines de análisis, diseño y desarrollo de sistemas control, ya que permiten establecer relaciones claras entre la dinámica del sistema y su modificación mediante el ajuste de los parámetros.

1.2. Estado del Arte

La electrónica de potencia, durante los últimos años, ha tenido un crecimiento considerable debido a diferentes factores: la creciente demanda de energía eléctrica, la inserción de energías renovables, estudios de mercados de energías y algunos requisitos como la mejora de la calidad de la energía, reducción de costos y eficiencia de procesos industriales. En consecuencia, se requieren técnicas de vanguardia, cuyo modelado y control, garanticen la compatibilidad de los recursos renovables con el sistema de energía eléctrica existente. Por ello, el MPC ha demostrado ser una técnica efectiva para la regulación de convertidores de potencia en muchos campos de aplicación [Kouro09]; así como para el seguimiento del punto de máxima potencia [Rodriguez13, Geyer14] (MPPT, por sus siglas en inglés). Las técnicas de MPC para convertidores de potencia se pueden dividir en dos clases principales: MPC de conjunto de control continuo (CCS-MPC, por sus siglas en inglés) y MPC de conjunto de control finito (FCS-MPC, por sus siglas en inglés). En CCS-MPC; la salida del controlador predictivo proporciona las señales de modulación continua que se transforman en los comandos del interruptor empleando moduladores adecuados; por ejemplo la modulación de ancho de pulso (PWM, por sus siglas en inglés). La frecuencia de muestreo del CCS-MPC generalmente se elige como el período de modulación,

y la predicción sobre uno o más períodos se obtiene explotando modelos promediados de los convertidores involucrados en el sistema fotovoltaico (PV, por sus siglas en inglés) [Errouissi16a, Dehghanzadeh18]. El CCS-MPC se ha aplicado a diferentes topologías de convertidores para aplicaciones PV, como el inversor de fuente Z [Sajadian16, Sajadian19], y el convertidor elevador de DC/DC con inversor trifásico [Errouissi16b]. Los escenarios operativos prácticos de los convertidores de potencia conectados a la red generalmente determinan que el convertidor funcione en modos de conducción continua y discontinua; lo cual contribuye a las dificultades para determinar un modelo promedio adecuado válido para todas las condiciones de operación. De facto, MPC requiere la predicción del estado del sistema, donde su evolución depende de la secuencia de configuraciones del circuito, lo cual no es directamente controlable en muchas ocasiones; tal es el caso de los estados de conducción y bloqueo de los diodos [Cheng18].

En FCS-MPC, para sistemas de electrónica de potencia PV, el controlador predictivo selecciona en cada momento de muestreo la configuración óptima a implementarse en el próximo período eligiendo entre el conjunto finito de posibilidades correspondientes a las combinaciones de los estados de los interruptores en el horizonte de predicción [Lashab18]. FCS-MPC también sufre el problema de la posible aparición de modos de conducción discontinua dentro del o los período(s) de muestreo característicos del intervalo de tiempo elegido para la predicción.

Se ha aplicado FCS-MPC para sistemas PV con convertidores flyback de CD/CD [Shadmand14, Metry17] los cuales también se han adoptado para arquitecturas de recolección de energía [Sajadian17], convertidores elevadores de CD/CD [Kakosimos13] y convertidores multinivel [Mosa17]. Para detectar los diferentes modos de los convertidores dentro de un período de control fijo, para la integración del modelo dinámico dentro del horizonte de predicción, se podría usar un período de muestreo más pequeño que el período de control [Fischer11].

En [Morfin-Magaña19], se presentó un enfoque de modelado para el diseño FCS-

MPC de un generador monofásico PV conectado a la red, el cual incluye los convertidores de potencia junto con la celda PV, donde todo el sistema se modela en el marco de complementariedad lineal (LC, por sus siglas en inglés). El modelo LC es capaz de capturar todas las condiciones operativas caracterizadas por modos de conducción continua y discontinua. En [Errouissi16b, Kakosimos11] el MPC se aplicó a configuraciones de sistemas PV similares. Utilizando el marco de LC, en [Morfin-Magaña19] se diseñó un controlador predictivo basado en modelo. El procedimiento de diseño de control da como resultado un programa cuadrático de enteros mixtos y puede resolverse utilizando herramientas comerciales. Los resultados numéricos han demostrado que el FCS-MPC garantiza un seguimiento efectivo de la potencia activa máxima disponible desde el arreglo PV [Morfin-Magaña19]. Al ser un método de control basado en el modelo, ya que se basa en la optimización en línea, MPC es un método popular para el control de sistemas con múltiples variables restringidas, donde las restricciones se manejan explícitamente en el problema de optimización. A pesar de ello, las limitaciones críticas de MPC son su esfuerzo computacional en línea debido a la solución repetitiva de la optimización subyacente. Los valores óptimos de la acción de control se determinan numéricamente a partir de la optimización de MPC sin ningún conocimiento de las leyes de control vigentes. Estas deficiencias pueden superarse mediante el uso de los métodos llamados MPC explícito/multiparamétrico (también conocido como MPC explícito, MPC multiparamétrico o simplemente mp-MPC) [Almer13]. En mp-MPC, el problema de optimización en línea involucrado en MPC tradicional se resuelve con métodos de programación multiparamétricos para derivar los controles óptimos como funciones explícitas de los estados del sistema y las regiones críticas en el espacio de estado donde estas funciones son válidas; así, se deriva una política de control de retroalimentación, la cual describe las leyes de control de gobierno del problema MPC subyacente. La optimización en línea involucrada en MPC puede ser reemplazada por una secuencia de evaluaciones de funciones, reduciendo de esa manera, el esfuerzo computacional en línea. Desde que este método es adecuado para

sistemas de baja dimensión [Sakizlis05], la existencia de tal solución no está garantizada para sistemas de mayor dimensión [Lefebvre17]. Por consiguiente, para sistemas de gran escala, resulta inadecuado.

Para sobrellevar el problema de la dimensión del sistema, en el análisis de sistemas integrados de gran escala, se han desarrollado técnicas elegantes de análisis simbólico avanzado; estas permiten obtener soluciones simbólicas exactas y manejan de manera eficiente el crecimiento exponencial de los sistemas de gran escala. Tales herramientas reciben el nombre de DDDs, las cuales representan, de manera gráfica, la expansión de Laplace del determinante, basado en diagramas de decisión binarios (BDDs, por sus siglas en inglés). Características sobresalientes de estas herramientas se han detallado en diversos trabajos. Explotada la dispersidad y el tipo de matrices en [Shi00] se presenta un orden de expansión heurístico para ordenar vértices DDD de modo que el DDD resultante tenga el número de vértices (llamado su tamaño) igual al número de parámetros simbólicos, logrando así un diagrama con el menor número de vértices posible, para un grupo especial de matrices llamadas matrices banda.

En [Shi98, Shi01a] se presentan métodos eficientes para derivar expresiones simbólicas en un formato expandido en función de la variable de frecuencia compleja s (llamado **s-expanded**), con la cual se representan funciones de transferencia exactas para el modelado conductual de circuitos analógicos.

En [Tan99], se muestra como la cancelación de términos semejantes y la generación de términos dominantes se pueden realizar de manera elegante basados en diagramas de decisión para determinantes. Las implementaciones tradicionales DDD requieren una experiencia sofisticada en el arte de los BDD, con los cuales se representan las operaciones de intercambio de datos comunes en las que el orden de los símbolos para realizar la expansión es de suma importancia. En [Shi10b], se presenta una implementación simple para obtener un DDD basado en la expansión natural por capas del determinante, en la cual no se necesita una paquetería BDD ni un orden de expansión predefinido, y el compartir menores se realiza usando una tabla hash.

Este método recibe el nombre de LED, y no solo simplifica la construcción de un DDD, sino además resulta en una mayor eficiencia. El análisis con DDDs permite el análisis simbólico exacto de grandes sistemas; lo que da lugar al análisis de aplicaciones simbólicas en sistemas de electrónica de potencia. Hasta ahora, los DDDs son la herramienta más eficiente de análisis simbólico, superando el desempeño de software comercial de análisis simbólico [Shi14].

En el presente trabajo se lleva a cabo el desarrollo de soluciones parametrizadas que se basan en modelos LPV de gran escala, junto con otras herramientas numéricas y simbólicas de última generación, tales son el EHD [Rodríguez-Flores19], la linealización de Carleman [Weber18], las matrices operativas [Parand17], transformada numérica de Laplace [Moreno08b] y DDDs [Verhaegen02]; los cuales permiten abordar sistemas de electrónica de potencia de complejidad práctica. Estas soluciones parametrizadas son utilizadas como modelos en procesos de optimización paramétrica. De tal manera que el proceso de optimización de MPC se acelere considerablemente, al reducir el tiempo de cómputo del horizonte de predicción.

1.3. Objetivos de la Tesis

1.3.1. Objetivo General

Lograr soluciones parametrizadas de sistemas LPV de gran escala, mediante técnicas avanzadas de análisis simbólico, con lo cual sea posible utilizarlas en procesos de optimización paramétrica, como es el control predictivo, logrando reducir el esfuerzo computacional que éste requiere.

1.3.2. Objetivos Particulares

- Analizar, comprender y emplear la formulación del dominio armónico extendido (EHD, por sus siglas en inglés) para transformar sistemas periódicos a una

representación LPV.

- Desarrollar herramientas avanzadas de análisis simbólico, que permitan obtener soluciones simbólicas exactas.
- Realizar análisis de estabilidad así como de controlabilidad y observabilidad en sistemas LPV, basados en DDDs.
- Analizar y comprender el control predictivo basado en modelo empleado en sistemas de electrónica de potencia.
- Utilizar las soluciones parametrizadas como modelo de predicción en el MPC, de manera que permita encontrar la entrada óptima que lleve al sistema a una referencia deseada, disminuyendo el costo computacional.

1.4. Justificación

Una revisión al estado del arte ha demostrado que el MPC es una técnica efectiva para el control de convertidores de potencia, sin embargo, una limitante es el gran esfuerzo computacional en línea que éste requiere debido a la solución numérica repetitiva de la optimización. Tal esfuerzo se puede disminuir al utilizar como modelo de predicción soluciones parametrizadas, en las cuales se conservan de manera simbólica parámetros del sistema. Debido a esto, en este trabajo se desarrollan soluciones parametrizadas de modelos LPV de gran escala en el dominio del tiempo (TD, por sus siglas en inglés), derivadas del análisis simbólico, el cual utiliza un enfoque estructural compacto basado en grafos para representar de manera eficiente los términos simbólicos generados. Tales soluciones parametrizadas compactas permiten una rápida evaluación del horizonte de predicción en el MPC, así como otros procesos de optimización paramétrica.

1.5. Hipótesis

Es posible desarrollar soluciones parametrizadas de sistemas LPV de gran escala derivadas del análisis simbólico. Éste tipo de soluciones permitirán llevar a cabo procesos de optimización paramétrica, dando lugar a procesos de diseño, así como desarrollo de control predictivo.

1.6. Metodología

Primero se revisa el estado del arte de las metodologías a implementar. Se investigarán las técnicas avanzadas de análisis simbólico más eficientes; y, posteriormente se desarrollan herramientas simbólicas, las cuales serán validadas con el software Mathematica[®], así como con los trabajos reportados en el estado del arte.

Se analizará e implementará la transformada numérica inversa de Laplace, así como las características adecuadas, para permitir una gran aproximación de la integración numérica. Se obtendrán soluciones parametrizadas de modelos LPV y se utilizarán para realizar procesos de optimización de filtros pasivos, además de soluciones en estado estable simbólicas, las cuales permitan realizar análisis de calidad de la energía, sin la necesidad de recalcular las soluciones de estado estable, basadas en los DDDs.

Se estudiará la formulación del EHD presentada en [Rodriguez-Flores19], para obtener modelos aproximados de la ecuación de Mathieu y del convertidor elevador, en una representación LPV, validando las respuestas obtenidas. Adicionalmente, se realizarán análisis de estabilidad comparándolos con resultados ya presentados, mediante los diagramas de decisión determinantes. Así mismo, se llevarán a cabo análisis de controlabilidad y observabilidad.

Se pondrá en práctica el análisis simbólico de los sistemas LPV obtenidos mediante el EHD; con este se presentarán funciones de transferencia de la ecuación de Mathieu, así como del convertidor elevador. En consecuencia, será posible lograr soluciones

parametrizadas de los mismos. La solución parametrizada del convertidor elevador será utilizada para efectuar MPC, con ello se logrará disminuir la carga computacional que este requiere.

1.7. Descripción de Capítulos

El presente trabajo está organizado en 6 capítulos. En el Capítulo 2 se presenta el análisis simbólico basado en diagramas de decisión determinante, así como los métodos para obtenerlos. Además se presenta una comparación del desempeño con funciones predefinidas de Mathematica[®]. En el Capítulo 3 se describe la metodología del dominio armónico extendido, para transformar sistemas lineales de tiempo periódico (LTP; por sus siglas en inglés) a una representación LPV. Adicionalmente se presenta el enfoque basado en DDDs para realizar análisis delimitados de estabilidad, observabilidad y controlabilidad.

En el Capítulo 4 se analizan las dificultades que implican las soluciones parametrizadas de sistemas lineales, y como estas son sobre llevadas mediante técnicas de análisis simbólico e integración numérica. Adicionalmente, se presentan ejemplos ilustrativos destinados a destacar las principales dificultades. En el Capítulo 5 se presenta los casos de estudio. Primero, para demostrar las capacidades del método propuesto, este enfoque se aplica para la optimización de los parámetros del filtro pasivo de una aplicación típica industrial. Después se presenta el análisis simbólico de la ecuación de Mathiue y del convertidor elevador. Por último, se presenta la aplicación de la solución parametrizada del convertidor elevador en el proceso de MPC.

En el Capítulo 6 se presentan las conclusiones generales de este trabajo, así como posibles trabajos futuros.

1.8. Publicaciones

1. Efraín Rodríguez-López, Serafín Ramos-Paz, J. Jesús Rico-Melgoza and Fernando Ornelas-Tellez. “Parametric Passive-Filter Optimization Based on the Determinant Decision Diagram”. *IEEE International Autumn Meeting on Power, Electronics and Computing ROPEC*, 2019.

Capítulo 2

Análisis Simbólico

En este capítulo se presenta el análisis simbólico mediante los DDD, los cuales representan de manera gráfica la expansión de Laplace del determinante. Estos utilizan como base la paquetería BDD (se encuentra disponible en el lenguaje de programación C++), con la cual se comparten los menores, y un preordenamiento simbólico es de suma importancia, resultando en una representación canónica. La relevancia de los DDD radica en la mitigación eficiente del crecimiento exponencial de las subexpresiones generadas, en el análisis simbólico, la cual ha sido por mucho tiempo el principal problema de este análisis. Por lo tanto, para crear un DDD, en este capítulo se presenta la implementación de LED, en la cual no es necesaria una paquetería BDD. Debido a que el intercambio de menores se implementa mediante una tabla hash, y prefiar un orden de expansión no es necesario. El mecanismo utilizado es una formulación natural de expansión en capas, la cual es análoga a la expansión manual de un determinante. Este método no solo simplifica la construcción del DDD, sino además resulta en una eficiencia mayor [Shi10b]. Por último, se presenta la comparación del tiempo de CPU de los DDDs en comparación con la función *Det* de Mathematica[®] para la evaluación del determinante simbólico de matrices llenas.

2.1. El Problema del Análisis Simbólico

El objetivo principal del análisis simbólico es encontrar soluciones analíticas de las incógnitas de interés, en función de los parámetros del sistema. Esto es, partiendo de un sistema lineal, el cual puede representar un sistema dinámico en el dominio de la frecuencia (FD, por sus siglas en inglés), resolver

$$Ax = b \quad (2.1)$$

donde x es un vector de incógnitas, A es una matriz de $n \times n$ (la cual para el caso dinámico, A puede ser de la forma $(sI - \mathbf{A})$) y b es un vector de forzamiento o fuentes externas. Usando la regla de Cramer [Strang06], las incógnitas x_k se pueden resolver como,

$$x_k = \frac{\det(A_k)}{\det(A)} \quad (2.2)$$

donde A_k es la matriz A , sustituyendo en la k -ésima columna el vector de forzamiento b . De esta manera es posible obtener una función de transferencia de la forma,

$$H(s) = \frac{\sum_i f_i(p_1, p_2, \dots, p_m) s^i}{\sum_j g_j(p_1, p_2, \dots, p_m) s^j} \quad (2.3)$$

donde s representa la variable de frecuencia compleja, las funciones $f_i(p_1, p_2, \dots, p_m)$ y $g_j(p_1, p_2, \dots, p_m)$ son polinomios simbólicos y se pueden obtener en una forma expandida o agrupada. Analizando (2.3), el análisis simbólico se puede dividir de la siguiente forma,

- Análisis simbólico exacto (todos los parámetros permanecen de manera simbólica).
- Análisis numérico-simbólico (donde solo algunos de los parámetros permanecen simbólicos).
- Análisis algebraico (donde solo existe como parámetro la variable compleja "s").

Es importante mencionar que el principal problema del análisis simbólico es el número de términos simbólicos generados, el cual puede crecer exponencialmente con la estructura y tamaño del sistema. Para minimizar este problema, en [Shi00] se propuso un enfoque basado en grafos, llamado DDD.

2.2. Diagramas de Decisión para Determinantes (DDDs)

Para minimizar el problema del crecimiento exponencial del número de términos simbólicos, el enfoque basado en grafos presentado en [Shi00] se basa en las siguientes suposiciones:

- 1) El sistema es disperso.
- 2) Se comparten una gran cantidad de expresiones simbólicas.

Basado en estas suposiciones es posible aplicar una estructura particular de datos llamada diagramas de decisión binaria con cero suprimido (ZBDDs, por sus siglas en inglés) [Yoon04], el cual es una variante de un BDD, lo que lleva a la implementación de un DDD, que trata eficazmente el crecimiento exponencial del problema a un nivel mucho más simple basado en lógica binaria. Lo anterior se logra por la propiedad más importante de un BDD, la canonicidad, es decir, que no existen cofactores iguales, ya que estos se suprimen al re-apuntar la respectiva flecha de decisión al sub-BDD (cofactor) existente. Propiedades, características y ventajas de usar un BDD se reportan en [Shi00]. Por lo tanto, el tamaño de un DDD es extremadamente más pequeño que el número de términos del producto. Por otra parte, cada determinante tiene una representación única, es decir, dado un orden de expansión, la representación es canónica y es susceptible a manipulaciones simbólicas.

En otras palabras, los DDDs son una representación canónica de la expansión de Laplace del determinante, y están representados por un grafo de una sola raíz, acícli-

co, dirigido, con signo, y con dos vértices terminales, llamados **vértice terminal-1** y **vértice terminal-0**. En el grafo, cada vértice no terminal a_i tiene dos bordes salientes, llamados **borde-1** y **borde-0**. Estos vértices no terminales representan el determinante de la matriz D , definida como:

$$D = a_i s(a_i) D_{a_i} + D_{\bar{a}_i} \quad (2.4)$$

donde a_i representa el vértice actual de la expansión, la expresión $a_i s(a_i) D_{a_i}$ representa el cofactor de D , D_{a_i} representa el menor reducido de D , y $D_{\bar{a}_i}$ es el residuo de D . Por otra parte, si a_i es el **vértice terminal-1**, $D = 1$, de otra forma a_i es el **vértice terminal-0**, por lo tanto $D = 0$. El signo del cofactor se denota por $s(a_i)$, el cual se calcula en una fase separada. La regla para determinar el signo se presenta en [Shi00]. Para ejemplificar lo anterior, sea la siguiente matriz A y su determinante representado como

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & e & f \\ 0 & g & h & i \\ 0 & j & k & l \end{vmatrix} = -afhj + aiej + afgk + bcik - adik - aegl - bchl + adhl. \quad (2.5)$$

En la Figura 2.1 se muestra el ZBDD que representa todos los subconjuntos del $\det(A)$, bajo el siguiente ordenamiento de símbolos: $a > b > c > d > e > f > g > h > i > j > k > l$. Cada vértice se etiqueta con la entrada de la matriz con el cual el determinante se expande, y corresponde a los subconjuntos de cada submatriz. Se observa que los subtérminos ik y hl se repiten varias veces, y cada término del producto contiene cuatro de los doce símbolos de la matriz. Cada término del producto corresponde a un **camino-1** en el ZBDD, y el número de **bordes-1** en cada **camino-1** es n . El número total de **caminos-1** es igual al número de términos del producto del determinante simbólico. Los **borde-1** apuntan a cada vértice que representa todos los subconjuntos contenidos en el cofactor de la expansión actual, y los **borde-0** apuntan

a cada vértice que representa todos los subconjuntos contenidos en el residuo. En este ejemplo existen ocho **camino-1**: $afhj, aeij, afgk, bcik, adik, aegl, bchl, adhl$.

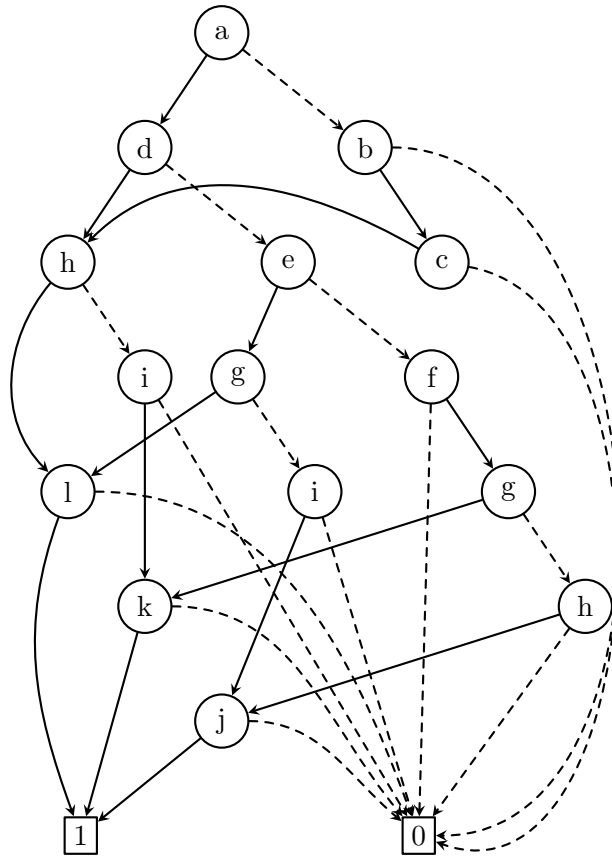


Figura 2.1: Representación de $afhj, aeij, afgk, bcik, adik, aegl, bchl, adhl$ mediante un ZBDD.

Ahora teniendo como base un ZBDD, y la regla del signo [Shi00], en la Figura 2.2 se muestra el DDD de la matriz A . Se observa cómo cada vértice representa un subconjunto de términos simbólicos, de forma anidada, con sus respectivos signos, y cómo se comparten algunos de éstos, para así formar los términos del producto que forman el $\det(A)$ representados en el vértice raíz del grafo denotado por el vértice a . El número de vértices definen el tamaño del DDD representado por $|DDD|$. El problema

principal de un DDD es el orden de expansión, debido a que el tamaño del diagrama y la canonicidad dependen de él. En la mayoría de los casos, para matrices arbitrarias, se desconoce un orden de expansión óptimo. En [Shi00, Quin05], se desarrolla un ordenamiento heurístico eficiente de vértices DDD, para una clase de matrices en especial, llamadas matrices banda, el cual puede llevar al ordenamiento óptimo de vértices, y por ende obtener un DDD con el tamaño mínimo. La implementación de operaciones básicas para el análisis simbólico mediante DDD se reportan en [Shi00, Shi14]. De forma compacta los pasos de construcción de un DDD de la versión inicial [Shi00] se pueden enumerar como:

1. Realizar el análisis del sistema en cuestión.
2. Mediante el algoritmo *Greedy-Labeling*, expandir una vez el determinante, para asignar a cada elemento de la matriz un índice.
3. Mediante el orden indexado, expandir de nuevo el determinante para crear un DDD.
4. Determinar el signo de los vértices escaneando en una fase separa el DDD.
5. Evaluar el DDD para realizar el análisis simbólico.

De lo anterior, se observa que la expansión se realiza dos veces, y además para calcular el signo de cada vértice se realiza en un paso extra, lo cual se puede mejorar al utilizar un esquema hash diferente. Por consiguiente, a continuación, se presenta la expansión en capas del determinante, donde no es necesario una paquetería BDD y un orden explícitamente predefinido de expansión. Además, el signo del cofactor se calcula durante la expansión.

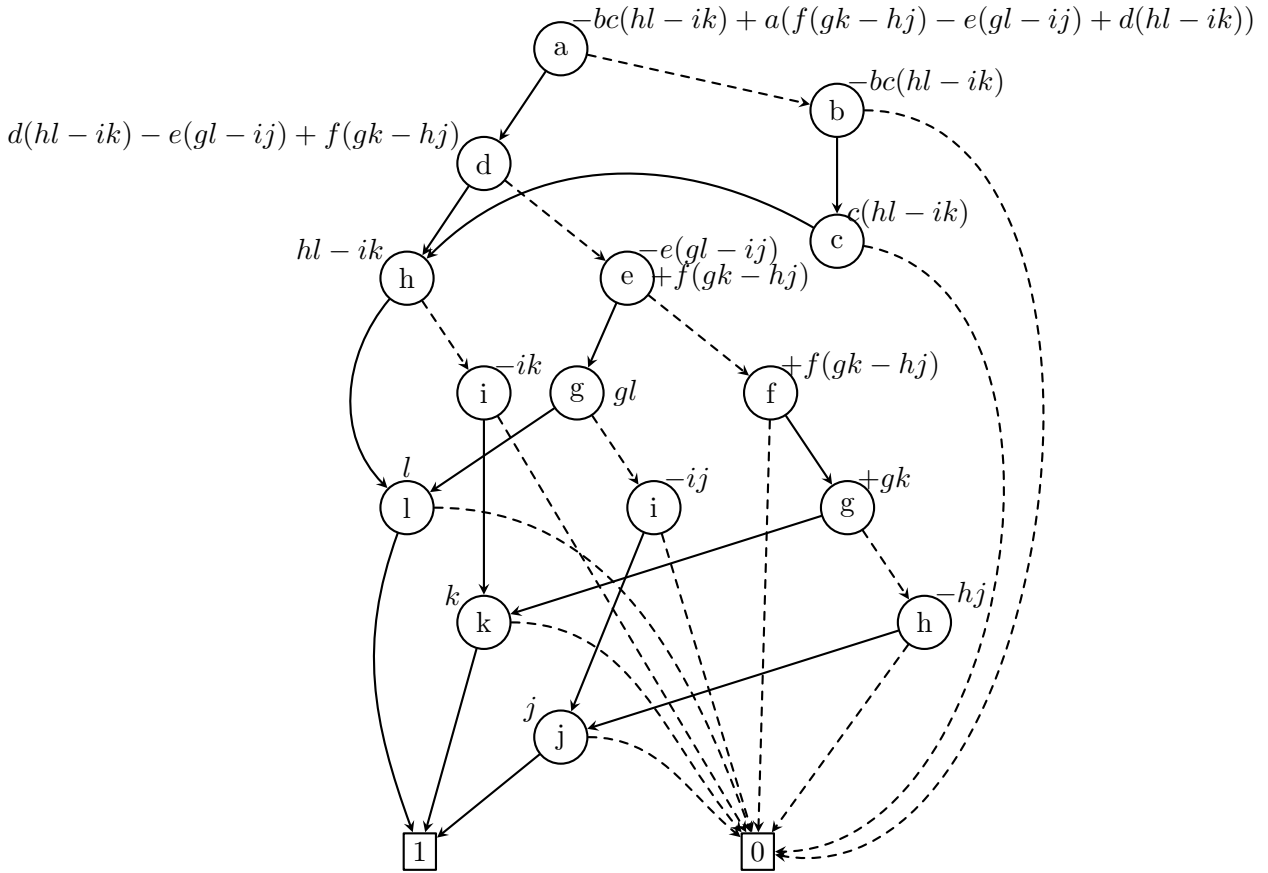


Figura 2.2: Diagrama de decisión para el determinante de la matriz A de 4×4 .

2.3. Expansión por Capas del Determinante

En este trabajo la representación de un DDD se obtiene mediante la expansión por capas del determinante presentada en [Shi10b], donde se demuestra que la eficiencia de una implementación basada en BDD no es necesariamente la mejor, y que una implementación basada en hashing de objetos donde cualquier menor se puede representar únicamente por sus índices de renglón y columna, sin la necesidad de revisar sus entradas, puede superar una implementación basada en lógica BDD, bajo un mismo orden de expansión. Debido a que el principal propósito de un DDD es el análisis simbólico, y la canonicidad no es un factor dominante, la primera versión

DDD se puede mejorar utilizando solo una *Tabla Hash para Menores*, en lugar de una paquetería BDD, así como un orden de expansión más simple, donde la expansión del determinante se realiza seleccionando el renglón o columna con el mínimo número de elementos no cero en el menor actual, este orden de expansión recibe el nombre de *grado mínimo*, donde lo más importante es que no se necesita una fase de preordenamiento, debido a que es inmaterial el orden de los elementos de un segmento, ya que cualquier orden de expansión de estos no cambia el tamaño de un LED. Por lo tanto, los elementos de un segmento se expanden en su orden natural. Para ilustrar lo anterior, a continuación se presenta la expansión por capas del determinante de A , para obtener un DDD, con un orden de expansión por renglones. Sea A la matriz de 4×4

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & o & p \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

tomando el primer renglón $\{a, b, c, d\}$, se crea una cola para guardar todos los elementos del renglón, esta cola se muestra en la Figura 2.3 como la primera capa. Después seleccionando el primer elemento a , y borrando su renglón y columna (cofactor), da lugar a un menor reducido denotado por,

$$M_a = \begin{bmatrix} f & g & h \\ j & k & l \\ n & o & p \end{bmatrix}. \quad (2.7)$$

Después el menor reducido será expandido por su primer renglón, pero primero los elementos del primer renglón se guardan en la segunda cola y se crea un enlace entre los elementos a y f , como se muestra en la Figura 2.3. Continuando con los elementos b, c y d , los siguientes menores reducidos son

$$M_b = \begin{bmatrix} e & g & h \\ i & k & l \\ m & o & p \end{bmatrix} \quad M_c = \begin{bmatrix} e & f & h \\ i & j & l \\ m & n & p \end{bmatrix} \quad M_d = \begin{bmatrix} e & f & g \\ i & j & k \\ m & n & o \end{bmatrix}.$$

De la misma forma, los elementos del primer renglón de cada menor reducido son guardados en la segunda cola y se crean los enlaces apropiados. Y así sucesivamente hasta crear menores de 1×1 , como se observa en la última capa de la Figura 2.3.

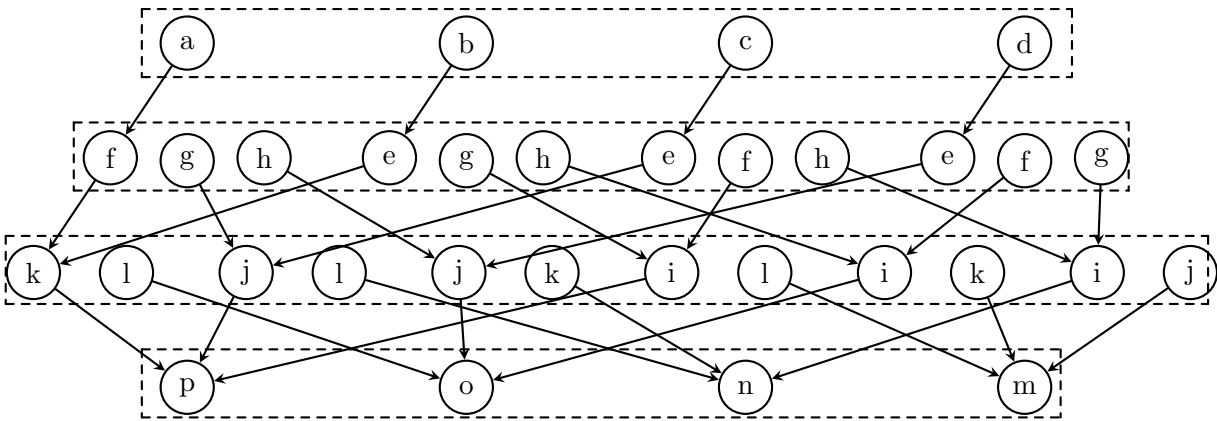


Figura 2.3: Expansión en capas del determinante de una matriz de 4×4

Los elementos en un segmento reciben el nombre de "hermanos", y el primer elemento de un segmento se llama "cabeza del segmento". Los segmentos de cada capa representan los menores reducidos, los cuales son del mismo tamaño. Por lo tanto, en la capa superior, existe un menor de 4×4 , mientras que en la segunda capa hay cuatro segmentos representando cuatro menores de 3×3 . En la tercer capa hay seis menores de 2×2 , de doce que se generarían. Lo mismo pasa con los elementos de la cuarta capa, que al expandir los elementos de la tercer capa, resultarían en seis menores de 1×1 , pero se reducen a cuatro menores denotados por " p ", " o ", " n " y " m ". Lo anterior se debe a la propiedad de compartir menores [Shi10b] como se observa en la Figura 2.3, los segmentos de la tercer capa se comparten por dos segmentos de la capa anterior, y de esta forma los elementos de la cuarta capa se comparten por tres segmentos de la capa anterior. La clave para compartir menores, es mediante el

uso de una *Tabla Hash para Menores* [Shi10b], la cual permite no expandir menores idénticos.

Por ejemplo, los cuatro elementos en la capa superior comparten el mismo menor, el cual es el determinante original, denotado por sus índices de renglón y columna como $M \{\{1, 2, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 4\}\}$ respectivamente. Estos se guardan en la tabla hash. Sus grados de renglón y columna son $(4, 4, 4, 4)$ y $(4, 4, 4, 4)$ respectivamente, los cuales representan el número de elementos no cero. Cuando un menor se tiene que expandir, primero se busca en la tabla hash por sus índices de renglón y columna. Si el menor se encuentra en la tabla hash, no se tiene que volver a expandir. De otra forma, se expande y se guarda en la tabla hash. Por ejemplo, los elementos de la tercer capa al expandir M_a por su primer elemento, resulta en un menor denotado por sus índices de renglón y columna como $M \{\{3, 4\}, \{3, 4\}\}$, y sus grados de renglón y columna son $(2, 2)$ y $(2, 2)$. Debido a que este menor no se ha expandido, se guarda en la tabla hash. Después al expandir M_b por su primer elemento, se tiene el menor $M \{\{3, 4\}, \{3, 4\}\}$, el cuál resulta en un menor previamente expandido, por lo tanto al buscarlo en la tabla hash, se evita la re-expansión.

Mantener los índices de renglón y columna simplifica el cálculo del signo de cada vértice, el cual se determina durante la construcción de LED. Por lo tanto, hace innecesario una fase extra para calcularlo mediante la regla presentada en [Shi00] (paso 4 de la construcción de un DDD). Para ilustrar lo anterior, los signos de los elementos de la primer capa (a, b, c, d) se determinan como $(-1)^{1+1}, (-1)^{1+2}, (-1)^{1+3}$ y $(-1)^{1+4}$ respectivamente. Además guardar los grados de renglón y columna permite la identificación de un menor singular. Un menor es singular cuando el grado de un renglón o columna es cero. Esta identificación permite detener la expansión del menor actual, y continuar con la expansion de los elementos restantes.

Hasta aquí se presenta la creación de un LED, pero este aún no es un DDD. Para convertirlo todas las flechas intercapas se convierten en **borde-1**. En cada segmento se agregan flechas punteadas entre los elementos, las cuales representan los **borde-0**,

y en el último elemento de cada segmento se agrega una flecha punteada al **vértice terminal-0**. Por último, en cada elemento de la última capa se agrega una flecha representando un **borde-1** apuntando al **vértice terminal-1**, como se muestra en la Figura 2.4. Ahora se tiene un DDD completo, con dos vértices terminales, y un vértice raíz, el cual es la cabeza del segmento de la primer capa. En [Shi10b, Shi14] se presentan las propiedades, y teoremas de un LED.

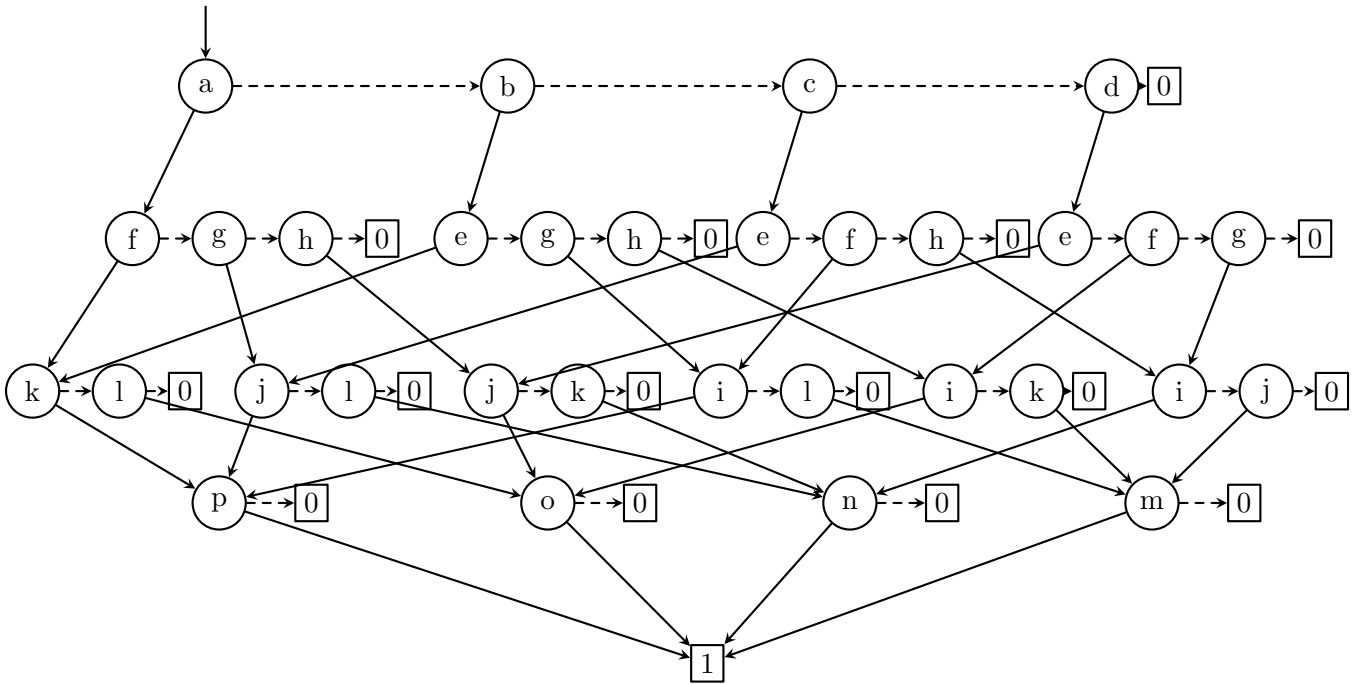


Figura 2.4: Conversión a DDD de una matriz de 4×4

2.3.1. Orden de Expansión en LED

El orden de expansión de un LED es una idea diferente a la presentada en [Shi00], en el cual todos los elementos de la matriz tienen un orden predefinido, para obtener un BDD canónico y asegurar el mínimo número de vértices en el DDD. Pero en el método LED, la expansión se realiza tomando un renglón o una columna durante la expansión. Por lo tanto, los **camino-1** en el DDD podrían tener algunos elementos

que no siguen un orden fijo, es decir, los elementos no están ordenados, lo que conlleva a violar la canonicidad de un BDD. Que no es de suma importancia, ya que para fines de análisis simbólico, la canonicidad no afecta la correcta generación de la expresión simbólica [Shi10b]. En consecuencia el ordenamiento secuencial de los vértices es una idea mucho más fuerte que un orden de expansión. El ordenamiento óptimo de vértices predefinido [Shi00, Quin05], de manera que se obtenga un DDD con el menor número de vértices, para la mayoría de las matrices es aún desconocido [Shi14]. Por consiguiente, en este trabajo dependiendo de la estructura del sistema se utiliza el orden de expansión heurístico *grado mínimo*, así como la expansión natural por renglón/columna. En el orden de expansión *grado mínimo* se realiza una expansión virtual para seleccionar el renglón o columna con el menor número de elementos no cero, y de esta forma reducir el tamaño del DDD. En el siguiente ejemplo se ilustra la forma de realizar la expansión por capas del determinante mediante el orden de expansión *grado mínimo*. Sea A la matriz,

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ b & c & d & 0 \\ 0 & 0 & e & f \\ 0 & 0 & 0 & g \end{bmatrix}. \quad (2.8)$$

Los grados de renglón y columna son $(1, 3, 2, 1)$ y $(2, 1, 2, 2)$ respectivamente. El primer renglón presenta el mínimo número de elementos no cero, por lo tanto, se selecciona para la expansión, y el elemento "a" se guarda en la primera capa. Borrando el renglón y columna, resulta el menor reducido denotado por,

$$M_a = \begin{bmatrix} c & d & 0 \\ 0 & e & f \\ 0 & 0 & g \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

Ahora los grados de renglón y columna que representa el menor M_a están definidos por $(2, 2, 1)$ y $(1, 2, 2)$ respectivamente. Por lo tanto, la primer columna se selecciona

para la expansión, y el elemento "c" se guarda en la segunda capa. Y así sucesivamente hasta terminar. El DDD creado se muestra en la Figura 2.5, el cual solo cuenta con un solo **camino-1** y cuatro vértices no terminales, los cuales generan la expresión, $\det(A) = aceg$. Además de tratar de reducir el número de vértices en un DDD, el

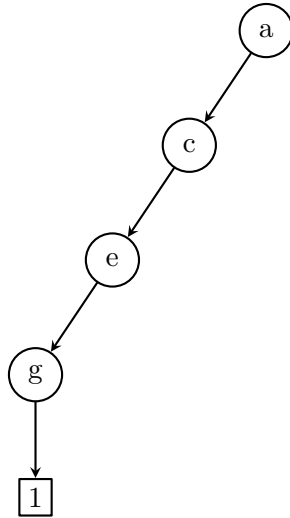


Figura 2.5: Orden de expansión *grado mínimo* de una matriz dispersa de 4×4

orden de expansión de *grado mínimo* permite identificar un menor singular. Cuando un renglón o columna posee un grado cero, significa que el menor es singular, por lo tanto la expansión no se realiza y el elemento seleccionado para expansión se apunta a *Null*. Después cuando el LED se convierte a un DDD, se eliminan los elementos que apuntan a *Null* [Shi14]. En cambio, si el elemento seleccionado apunta a un menor singular, este simplemente no se guarda, y se evita suprimir estos elementos que apuntan a *Null* en la conversión a un DDD.

En la Figura 2.6 se muestra el diagrama de flujo del procedimiento de construcción de un LED. Si el menor reducido es singular, no es necesario seguir con la expansión, debido a que el elemento del segmento estaría apuntando a *Null*, como se indica en [Shi10b], por lo tanto, no es necesario guardarlo, y de esta forma, se evita crear un nuevo vértice. Si el menor reducido es no singular este es *hash*, y se crea un enlace

entre el elemento seleccionado y el menor reducido. Después, dependiendo el orden de expansión, se ponen en cola los elementos del renglón o columna para la siguiente expansión. La expansión termina cuando no existen elementos en la cola para la siguiente expansión.

2.3.2. Complejidad Computacional

La complejidad computacional ha sido por mucho tiempo el principal problema del análisis simbólico. Sin embargo, este problema se mitiga eficientemente mediante el enfoque de los DDD. En los cuales compartir menores y un ordenamiento de vértices son la clave para la atenuación de la complejidad. Debido a que los DDDs están relacionados de manera directa con el crecimiento exponencial en el grafo, una forma natural de medir la complejidad es mediante el tamaño del DDD denotado por $|DDD|$ (el cual indica el número de vértices del grafo, sin contar los vértices terminales.) Por lo tanto, una técnica de análisis simbólico con menor complejidad significa una mayor capacidad para analizar circuitos de gran escala [Shi10a].

Debido a que las matrices llenas de $n \times n$ son los casos más regulares, es posible realizar un análisis de complejidad, dado que una matriz dispersa es un caso especial de una matriz llena de $n \times n$, por lo tanto, es posible diseñar un orden de expansión general para matrices llenas, con el cual lograr una impresionante reducción de la complejidad de un DDD, mientras que para matrices dispersas en general se desconoce un orden de expansión óptimo.

La optimización de un DDD no solo se basa en la canonicidad, sino en una organización regular del DDD, como una construcción basada en LED. Recordando del método LED, la operación implícita "Residuo" genera un menor del mismo tamaño, y los vértices creados por esta operación se guardan en la misma capa. Por otra parte, la operación "Menor" genera un menor con tamaño $n - 1$, y los vértices creados se guardan en la capa precedente. Por lo tanto, para un determinante en general, la primer capa contiene menores de tamaño $n \times n$, la segunda capa contiene menores de

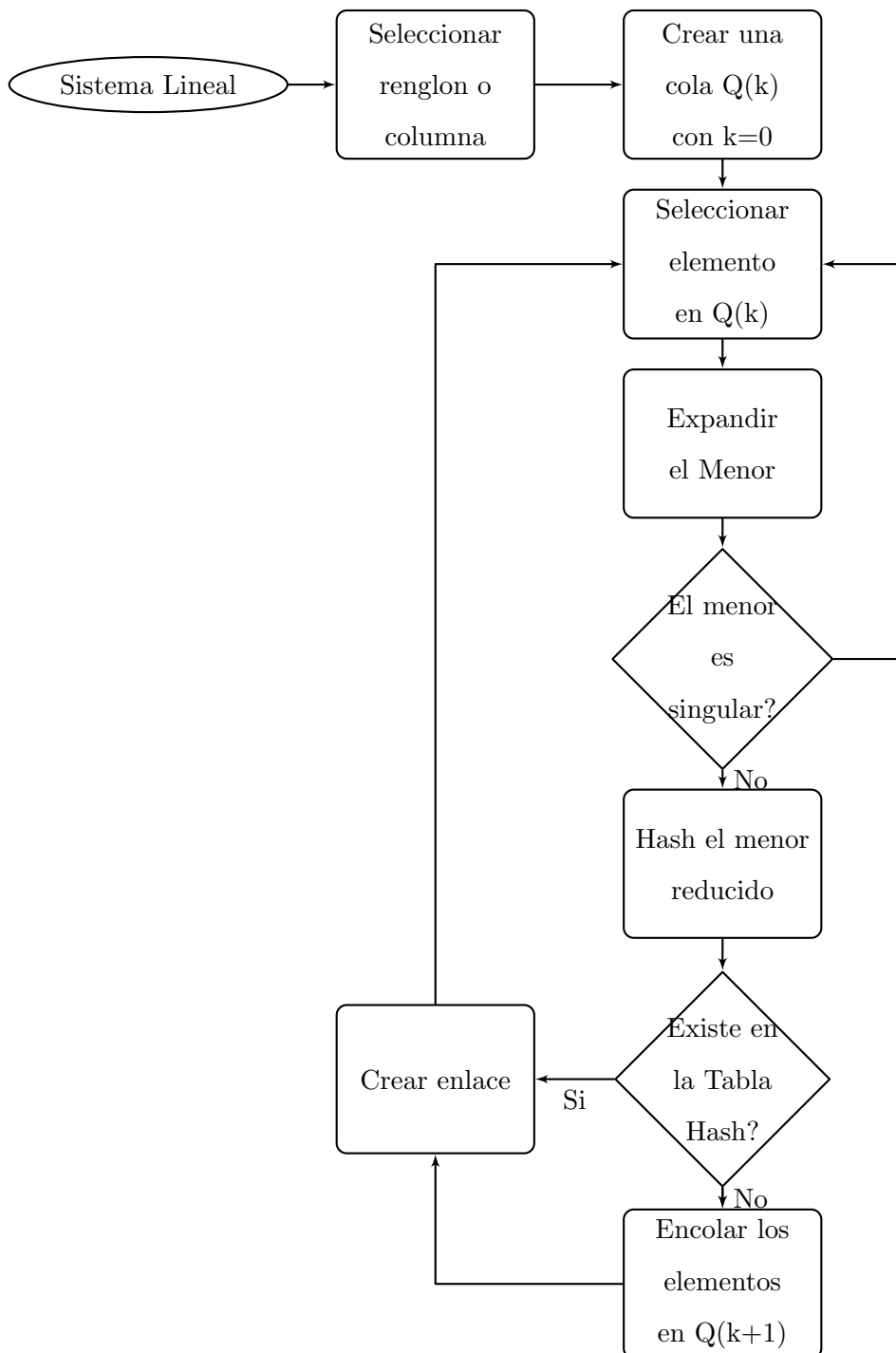


Figura 2.6: Diagrama de flujo de la construcción de un LED.

$(n - 1) \times (n - 1)$, y así sucesivamente hasta tener menores de 1×1 en la última capa.

Para ilustrar la idea de la optimización de un DDD, se utiliza el siguiente ejemplo. Sea el $\det(A)$ denotado por

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} \quad (2.10)$$

Con un orden de expansión por renglones, de izquierda a derecha, comenzando por "a", como se muestra en la Figura 2.7. Para que un símbolo forme parte de un término del producto, el vértice que denota el símbolo debe de estar apuntado por flechas sólidas, esto implica que se ignoran las flechas punteadas para identificar un término del producto. Por lo tanto, un DDD se puede convertir a otro grafo, llamado dígrafo, donde los términos del producto se identifican de forma más clara. Se observa que, los elementos conectados por flechas punteadas son multiplicados por el mismo vértice de la capa anterior, por ejemplo los elementos "e" y "f" de la segunda capa se multiplican por el vértice "a" de la capa anterior. Por lo tanto, es posible agregar de manera explícita una flecha sólida del vértice "a" al vértice "f", y de esta manera eliminar las flechas punteadas. En la Figura 2.8 se ilustra el dígrafo correspondiente de la Figura 2.7, donde se agregaron flechas solidas, y se eliminaron las flechas punteadas.

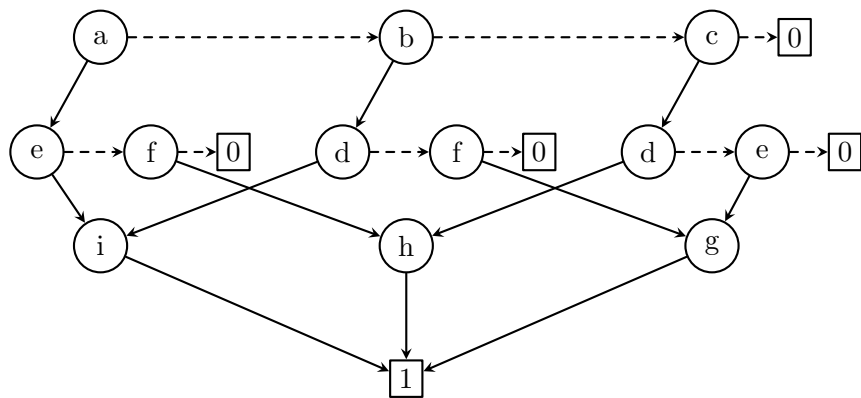


Figura 2.7: DDD de la matriz de 3×3 .

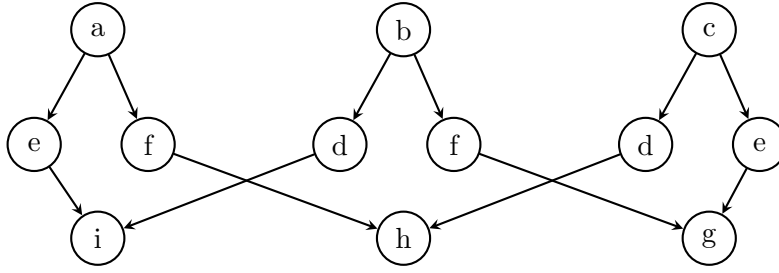


Figura 2.8: DDD convertido a un dígrafo.

Note que los elementos de la primer capa se convierten en nuevas raíces del dígrafo. Además, se observa claramente que los seis **camino-1** desde las raíces hasta los vértices de la última capa, forman los seis términos del determinante expandido final $(aei,afh,bdi,bfg,cdh,ceg)$. Es importante mencionar, que al convertir un DDD a un dígrafo como se ilustra en la Figura 2.8, el tamaño del DDD permanece sin cambios, es decir, no se agregan ni se eliminan vértices del DDD original, y sin importar el orden de los símbolos, el número de **camino**s es invariante. Así que, un dígrafo es una pieza importante para el desarrollo de un argumento para la optimización de un DDD. Por consiguiente, mediante un orden de expansión por renglones (o columnas), el tamaño del DDD para una matriz llena de $n \times n$ [Shi10a] es

$$|DDD(n)| = n \cdot 2^{n-1} \quad (2.11)$$

el cual es el mínimo número de vértices creados, para el ejemplo presentado se tienen $3 \cdot 2^{3-1} = 3 \cdot 2^2 = 12$ vértices. En consecuencia, un orden de expansión por renglón o columna es el óptimo para cualquier matriz llena de $n \times n$ [Shi10a]. Adicionalmente el número total de **camino-1** pasando por todos los vértices es $(n)!$, para el ejemplo, $(3)! = 6$ **camino**s, como ya se había mencionado.

Para concluir con el argumento de la optimización de un DDD, en la Tabla 2.1 presentada en [Shi10a], se muestra para matrices llenas, la comparación entre un orden de expansión por renglones y el heurístico *Greedy-Labeling* presentado en [Shi00], el cual es un orden de expansión óptimo solo para matrices banda. Se observa que el tamaño

de los DDD mediante un orden de expansión por renglones es exactamente igual al obtenido al usar (2.11), el cual es el mínimo número de vértices y por consecuencia, el óptimo. Por otra parte, el crecimiento exponencial en el método *Greedy-Labeling* [Shi10a] es notorio, por consiguiente no es óptimo para matrices llenas y matrices dispersas en general.

Tamaño de la matriz	$ DDD _{Renglon}$	$ DDD _{Greedy}$
2	4	4
3	12	13
4	32	40
5	80	118
6	192	340
7	448	965
8	1,024	2,708
9	2,304	7,535
10	5,120	20,828
11	11,264	57,266
12	24,576	156,764
13	53,248	427,571
14	114,688	1,162,580
15	245,760	3,152,681
16	524,288	8,529,668
17	1,114,112	23,030,492
18	2,359,296	62,072,002

Tabla 2.1: Comparación de los tamaños de los DDDs creados mediante un orden de expansión por renglones y el método *Greedy-Labeling* para matrices llenas de $n \times n$.

2.4. Evaluación de un DDD

Una vez que se obtiene el DDD, la siguiente fase es la evaluación del mismo. En la Tabla 2.2 se muestra la forma en que se realiza la evaluación del DDD obtenido de la

expansión por capas del determinante, con un orden de expansión por renglones; de la matriz llena (2.10). La columna *Índice* representa el orden en el que se expandieron los vértices. Nóte como el orden de expansión por renglones asigna los índices (1, 2, 3) a los vértices (a, b, c) , así como los vértices terminales 1 y 0. La columna *Vértice* denota el vértice con su respectivo signo, de acuerdo al orden de expansión; cada vértice representa la expresión $D(a_i) = a_i s(a_i) D(a_i) + D(\bar{a}_i)$. La columna *Hi* contiene los **borde-1**, y la columna *Low* los **borde-0**. Por último la columna *Valor* contiene las expresiones simbólicas que representa cada vértice en una forma anidada. La evaluación se realiza de abajo hacia arriba comenzando en el índice catorce. Como se observa en la Tabla 2.2, el vértice catorce es el vértice **terminal-0**, y el vértice trece es el vértice **terminal-1**, con valor 0 y 1 respectivamente. El vértice doce representa la operación $g(1) + 0$, de manera similar los vértices once y diez. Después el vértice nueve con el valor $-e(g) + 0$, y así sucesivamente hasta llegar al vértice raíz denotado por a . Aquí se puede apreciar otra perspectiva de como se comparten los menores de acuerdo a la Figura 2.7. Note como el vértice uno contiene de forma anidada las expresiones que denotan de forma exacta el determinante de A .

<i>Índice</i>	<i>Vértice</i>	<i>Hi</i>	<i>Low</i>	<i>Valor</i>
1	a	4	2	$c(-eg + dh) - b(-fg + di) + a(-fh + ei)$
2	$-b$	6	3	$c(-eg + dh) - b(-fg + di)$
3	c	8	14	$c(-eg + dh)$
4	e	10	5	$-fh + ei$
5	$-f$	11	14	$-fh$
6	d	10	7	$-fg + di$
7	$-f$	12	14	$-fg$
8	d	11	9	$-eg + dh$
9	$-e$	12	14	$-eg$
10	i	13	14	i
11	h	13	14	h
12	g	13	14	g
13	1	-	-	1
14	0	-	-	0

Tabla 2.2: Evaluación del DDD de una matriz llena de 3×3 .

2.5. Matrices de Prueba

A continuación, se presenta en la Tabla 2.3 una comparación de la función *Det* de Mathematica[®] contra un DDD creado mediante una implementación LED [Shi10b], para obtener el determinante simbólico de matrices llenas de $n \times n$, con el fin de validar el gran impacto y desempeño notable sobre la función *Det*, dentro del mismo ambiente de Mathematica[®]. Se observa que la función *Det* aún para matrices pequeñas es deficiente, siendo el tiempo de evaluación mayor del que presenta la evaluación del DDD. Note que para matrices llenas de 12×12 en adelante a la función *Det* le es imposible la evaluación del determinante simbólico.

Tamaño de la matriz	DDD	Det de Mathematica [®]
2	0.000052s	0.000072s
3	0.000124s	0.000144s
4	0.000498s	0.000757s
5	0.001371s	0.004119s
6	0.003276s	0.016388s
7	0.009443s	0.047284s
8	0.013862s	0.07165s
9	0.040294s	0.355566s
10	0.169715s	1.36096s
11	0.196358s	8.11009s
12	0.398791s	–
13	0.957991s	–
14	3.71152s	–
15	5.34437s	–
16	11.8295s	–
17	41.0757s	–
18	61.9378s	–

Tabla 2.3: Comparación del tiempo de CPU para la evaluación del determinante simbólico.

Adicionalmente en la Tabla 2.4 se muestra la comparación del tiempo de CPU de

la construcción LED reportada en [Shi10b] y la implementada en este trabajo, en la cual se contempla el tiempo de *hashing*; con el fin de validar un correcto desempeño del algoritmo. Es importante mencionar que el tiempo de CPU reportado en los trabajos previos de DDD no contemplan el tiempo de *hashing* [Shi01b]

Tamaño de la matriz	Tiempo de CPU (s)	
	LED [Shi10b]	LED Mathematica [®]
12	0.4	0.4
13	0.6	0.9
14	1.3	1.8
15	3.0	4.1
16	6.9	8.5
17	21.0	18.7
18	88	42.3

Tabla 2.4: Comparación del tiempo de CPU para la construcción LED.

2.6. Conclusiones del Capítulo

En este capítulo se describió brevemente la teoría de los DDDs para el análisis simbólico, así como la forma de obtener un DDD, mediante la implementación LED, la cual presenta varias ventajas sobre una implementación de la forma tradicional, por ejemplo, que no son necesarios un orden predefinido de expansión, y una paquetería BDD. El signo de los cofactores se calcula durante la expansión, y no en una fase extra. Por otra parte, se presenta la idea general de evaluar un DDD, presentando el caso particular de una matriz llena de 3×3 . Por último, se presenta el desempeño sobresaliente de la evaluación del DDD contra la función predefinida *Det* de Mathematica[®] para obtener el determinante simbólico, así como una comparación del tiempo de CPU de creación de un LED con el presentado inicialmente en [Shi10b], con el fin de validar la implementación.

Capítulo 3

Dominio Armónico Extendido: Una Formulación LPV

En este capítulo se presenta la formulación del EHD. Este es un enfoque que puede incluir naturalmente características importantes en el TD, como las discretas. Esta metodología se presenta en [Rodriguez-Flores19], la cual se deriva simbólicamente, donde los parámetros importantes de los sistemas de electrónica de potencia (PE; por sus siglas en inglés) pueden conservarse de manera simbólica. Esta formulación permite expandir sistemas no lineales o conmutados a una representación de sistemas LPV, así como sistemas LTI, cuando los parámetros simbólicos del sistema se mantienen constantes. De esta forma, se mantiene la posibilidad de aplicar la teoría predominante desarrollada para sistemas LTI, como el análisis simbólico de estabilidad basado en los polos del sistema, así como análisis de controlabilidad y observabilidad, a través de la teoría descrita en el capítulo 2. La formulación del EHD se basa en la linealización de Carleman [Weber18], que conserva las variables de espacio de estado originales en el modelo expandido, dejando el estado original intacto. Además, la formulación no requiere un cambio de coordenadas.

3.1. Matemáticas Preliminares: Teoría de Matrices Operacionales para la Serie Trigonométrica de Fourier

Una función periódica $f(t)$ se puede aproximar por una serie de Fourier como

$$f(t) = a_0 + \sum_{j=1}^{Nh} \left[a_j \cos\left(\frac{j2\pi}{P}t\right) + b_j \sin\left(\frac{j2\pi}{P}t\right) \right], \quad (3.1)$$

donde P es el periodo, Nh son los armónicos a considerar, y a_0, a_j, b_j son los coeficientes de Fourier denotados por

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{P} \int_0^P f(t) dt \\ a_j &= \frac{2}{P} \int_0^P f(t) \cos\left(\frac{j2\pi}{P}t\right) dt, \quad j = 1, \dots, Nh \\ b_j &= \frac{2}{P} \int_0^P f(t) \sin\left(\frac{j2\pi}{P}t\right) dt, \quad j = 1, \dots, Nh \end{aligned} \quad (3.2)$$

para Nh términos. La función (3.1) se puede representar como

$$f(t) = \mathcal{A} \gamma(t) \quad (3.3)$$

donde

$$\mathcal{A} = \left(a_0, \mathbf{a}, \mathbf{b} \right), \quad (3.4)$$

$$\mathbf{a} = \left(a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_{Nh} \right) \quad (3.5)$$

$$\mathbf{b} = \left(b_1 \ b_2 \ \cdots \ b_{Nh} \right) \quad (3.6)$$

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ \cos(\frac{2\pi}{P}t) \\ \vdots \\ \cos(N_h \frac{2\pi}{P}t) \\ \sin(\frac{2\pi}{P}t) \\ \vdots \\ \sin(N_h \frac{2\pi}{P}t) \end{pmatrix}, \quad (3.7)$$

con $\gamma(t) \in \mathbb{R}^{m \times 1}$ para $m = 2N_h + 1$.

3.2. Matriz Operacional de Diferenciación

La matriz operacional de diferenciación resulta de la diferencial del vector función $\gamma(t)$, la cual es una propiedad de las series de Fourier, de modo que para una variable se tiene

$$\frac{d}{dt}\gamma(t) = D\gamma(t) \quad (3.8)$$

donde D es denotado por

$$D = \left(\begin{array}{c|ccc|ccc} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & 0 & \cdots & 0 & -\frac{2\pi}{P} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & -\frac{2\pi N_h}{P} \\ \hline 0 & \frac{2\pi}{P} & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{2\pi N_h}{P} & 0 & \cdots & 0 \end{array} \right). \quad (3.9)$$

De forma general para n variables

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \gamma(t) \\ \gamma(t) \\ \vdots \\ \gamma(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & D & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma(t) \\ \gamma(t) \\ \vdots \\ \gamma(t) \end{pmatrix} \quad (3.10)$$

$$= \mathbb{D} \begin{pmatrix} \gamma(t) \\ \gamma(t) \\ \vdots \\ \gamma(t) \end{pmatrix} \quad (3.11)$$

donde \mathbb{D} es la matriz bloque de diferenciación del sistema general, y $\mathbf{0}$ es una matriz nula de dimensión apropiada.

3.3. Matriz Operacional de Producto

Debido a que $\gamma(t)$ es un vector ortogonal definido por la serie de Fourier, el producto de las matrices $\gamma(t) \gamma^T(t)$, mantiene la identidad [Razzaghi90] cuando se truncan todos los términos con frecuencias mayores que $\frac{2\pi N_h}{P}$, de modo que [Strang06],

$$\gamma(t) \gamma^T(t) \mathcal{A}^T = [\mathcal{A}] \gamma(t) \quad (3.12)$$

donde $[\mathcal{A}]$ es la matriz operacional de producto, la cual se deduce mediante el uso de identidades trigonométricas. La matriz $[\mathcal{A}]$ tiene la forma

$$[\mathcal{A}] = \left(\begin{array}{c|ccc|ccc} a_0 & a_1 & \cdots & a_{N_h} & b_1 & \cdots & b_{N_h} \\ \hline \frac{a_1}{2} & \frac{a_0 - a_2}{2} & \cdots & \frac{a_{N_h-1}}{2} & \frac{b_2}{2} & \cdots & \frac{b_{N_h-1}}{2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{a_{N_h}}{2} & \frac{a_{N_h-1}}{2} & \cdots & a_0 & -\frac{b_{N_h-1}}{2} & \cdots & 0 \\ \hline \frac{b_1}{2} & \frac{a_2}{2} & \cdots & -\frac{b_{N_h-1}}{2} & a_0 - \frac{a_2}{2} & \cdots & \frac{a_{N_h-1}}{2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{b_{N_h}}{2} & \frac{a_{N_h-1}}{2} & \cdots & 0 & a_0 - \frac{a_{N_h-1}}{2} & \cdots & a_0 \end{array} \right) \quad (3.13)$$

Por simplicidad, la matriz $[\mathcal{A}]$, se puede representar como

$$[\mathcal{A}] = \frac{1}{2} (\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2) \quad (3.14)$$

donde \mathcal{A}_1 es una matriz simétrica obtenida como

$$\mathcal{A}_1 = \left(\begin{array}{c|cc} a_0 & \mathbf{a} & \mathbf{b} \\ \hline \mathbf{a}^\top & M_a & M_b \\ \hline \mathbf{b}^\top & -M_b & M_a \end{array} \right) \quad (3.15)$$

con

$$M_a = \begin{pmatrix} 2a_0 & a_1 & \cdots & a_{N_h-1} \\ a_1 & 2a_0 & \cdots & a_{N_h-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N_h-1} & a_{N_h-2} & \cdots & 2a_0 \end{pmatrix} \quad (3.16)$$

$$M_b = \begin{pmatrix} 0 & b_1 & \cdots & b_{N_h-1} \\ -b_1 & 0 & \cdots & b_{N_h-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -b_{N_h-1} & -b_{N_h-2} & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

y \mathcal{A}_2 se define como

$$\mathcal{A}_2 = \left(\begin{array}{c|cc} 0 & \mathbf{a} & \mathbf{b} \\ \hline 0 & -G_a & G_b \\ \hline 0 & G_b & -G_a \end{array} \right) \quad (3.17)$$

con

$$G_a = \begin{pmatrix} a_2 & a_3 & \cdots & 0 \\ a_3 & a_4 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \text{ y } G_b = \begin{pmatrix} b_2 & b_3 & \cdots & 0 \\ b_3 & b_4 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.18)$$

De forma general, para n variables la matriz de coeficientes $[\mathcal{A}]$ se denota por

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} [\mathcal{A}]_{1,1} & [\mathcal{A}]_{1,2} & \cdots & [\mathcal{A}]_{1,n} \\ [\mathcal{A}]_{2,1} & [\mathcal{A}]_{2,2} & \cdots & [\mathcal{A}]_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [\mathcal{A}]_{n,1} & [\mathcal{A}]_{n,2} & \cdots & [\mathcal{A}]_{n,n} \end{pmatrix} \quad (3.19)$$

donde $[\mathcal{A}]_{i,j}$ se refiere a la matriz producto del elemento de la posición (i, j) de la matriz característica del sistema original.

3.4. Representación LPV

Existen varias formas de representar los sistemas conmutados y no lineales en formatos de LPV. En este trabajo, tal representación se logra mediante el EHD, el cual se basa en la linealización de Carleman [Rugh02], donde los productos de los estados y las funciones trigonométricas, se definen en nuevas variables de estado. Para obtener la representación en el EHD, se considera un sistema conmutado de la forma

$$\dot{X}(t) = A(\sigma(t))X(t) + F(t) \quad (3.20)$$

donde $A(\sigma(t))$ es una matriz única en función de $\sigma(t)$, el cual bajo la condición de periodicidad, puede ser escrito como un sistema LTP en su forma general como

$$\dot{X}(t) = A(t)X(t) + F(t) \quad (3.21)$$

donde $A(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es una matriz periódica que cumple la condición de periodicidad definida como

$$A(t + P) = A(t) \quad (3.22)$$

donde P es el período fundamental del sistema.

Las nuevas variables de estado, se obtienen mediante el uso del producto Kronecker, bajo la idea de las linealizaciones de Carleman como

$$[\mathcal{X}(t)] = X(t) \otimes \gamma(t) \quad (3.23)$$

Para cada variable de estado $x_k(t)$, se obtiene un nuevo vector de variables $[\mathcal{X}(t)]_k \in \mathbb{R}^{m \times 1}$ con $m = 2N_h + 1$. Por lo tanto,

$$[\mathcal{X}(t)]_k = x_k(t) \gamma(t) \quad (3.24)$$

$$[\mathcal{X}(t)]_k = \begin{pmatrix} \mathcal{X}_1(t) \\ \mathcal{X}_2(t) \\ \vdots \\ \mathcal{X}_{N_h+1}(t) \\ \mathcal{X}_{N_h+2}(t) \\ \vdots \\ \mathcal{X}_{2N_h+1}(t) \end{pmatrix}_k = \begin{pmatrix} x_k(t) \\ x_k(t) \cos(\omega t) \\ \vdots \\ x_k(t) \cos(N_h \omega t) \\ x_k(t) \sin(\omega t) \\ \vdots \\ x_k(t) \sin(N_h \omega t) \end{pmatrix}. \quad (3.25)$$

Aplicando la aproximación por series de Fourier a la función periódica de (3.21), para una variable se tiene

$$\dot{x}_k(t) = \mathcal{A} \gamma(t) x_k(t) + f_k(t) \quad (3.26)$$

donde $f_k(t)$ es una función escalar correspondiente a la k -ésima posición del vector de forzamiento $F(t)$. De acuerdo a la Sección 3.3, se aprecia que (3.24) mantiene la propiedad de ser ortogonal,

$$[\mathcal{X}(t)]_k^\top = x_k(t) \gamma^\top(t). \quad (3.27)$$

Diferenciando las nuevas variables de estado (3.27) con respecto al tiempo se tiene,

$$[\dot{\mathcal{X}}(t)]_k^\top = \dot{x}_k(t) \gamma^\top(t) + x_k(t) \dot{\gamma}^\top(t). \quad (3.28)$$

Observe que la ecuación transpuesta (3.28) se puede sustituir por (3.26),

$$[\dot{\mathcal{X}}(t)]_k^\top = \mathcal{A} \gamma(t) x_k(t) \gamma^\top(t) + f_k(t) \gamma^\top(t) + x_k(t) \dot{\gamma}^\top(t) \quad (3.29)$$

Regresando el sistema a su base ortogonal original,

$$[\dot{\mathcal{X}}(t)]_k = \gamma(t) \gamma^\top(t) \mathcal{A} x_k(t) + f_k(t) \gamma(t) + \dot{\gamma}(t) x_k(t) \quad (3.30)$$

Sustituyendo para k las ec. (3.12) $\gamma(t) \gamma^\top(t) \mathcal{A} = [\mathcal{A}] \gamma(t)$ y (3.8) $\dot{\gamma}(t) = D \gamma(t)$, en (3.30) se tiene,

$$[\dot{\mathcal{X}}(t)]_k = [\mathcal{A}]_k \gamma(t) x_k(t) + D_k \gamma(t) x_k(t) + f_k(t) \gamma(t). \quad (3.31)$$

Sustituyendo $[\mathcal{X}(t)]_k$, y factorizando,

$$[\dot{\mathcal{X}}(t)]_k = ([\mathcal{A}]_k + D_k) [\mathcal{X}(t)]_k + f_k(t) \gamma(t). \quad (3.32)$$

De forma general para n variables de estado, se tiene

$$\dot{\mathcal{X}}(t) = (\mathbb{A} + \mathbb{D}) \mathcal{X}(t) + F(t) \otimes \gamma(t) \quad (3.33)$$

donde \mathbb{A} y \mathbb{D} están definidas en (3.19) y (3.10), respectivamente. De manera compacta (3.33) se puede escribir como,

$$\dot{\mathcal{X}}(t) = \mathbf{A} \mathcal{X}(t) + \mathbb{F}(t). \quad (3.34)$$

donde $\mathbf{A} = (\mathbb{A} + \mathbb{D})$ y $\mathbb{F}(t) = F(t) \otimes \gamma(t)$. Las nuevas variables de estado se definen

como,

$$\mathcal{X}(t) = \begin{pmatrix} \mathcal{X}_1(t) \\ \mathcal{X}_2(t) \\ \vdots \\ \mathcal{X}_{N_h+1}(t) \\ \mathcal{X}_{N_h+2}(t) \\ \vdots \\ \mathcal{X}_{2N_h+1}(t) \\ \hline \mathcal{X}_{(2N_h+1)+1}(t) \\ \mathcal{X}_{(2N_h+1)+2}(t) \\ \vdots \\ \mathcal{X}_{(k-1)(2N_h+1)+1}(t) \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_1(t) \cos(\omega t) \\ \vdots \\ x_1(t) \cos(N_h \omega t) \\ x_1(t) \sin(\omega t) \\ \vdots \\ x_1(t) \sin(N_h \omega t) \\ \hline x_2(t) \\ x_2(t) \cos(\omega t) \\ \vdots \\ x_k(t) \\ \vdots \end{pmatrix} \quad (3.35)$$

Note que las variables originales del sistema multiplicadas por coeficientes trigonométricos están inmersas en nuevas variables de estado, llamados co-estados. Por lo tanto, las variables de estado del sistema $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ se encuentran a disposición directa en las variables de co-estados $\mathcal{X}_1(t), \mathcal{X}_{(2N_h+1)+1}(t), \dots, \mathcal{X}_{(k-1)(2N_h+1)+1}(t)$ para $k = 1, \dots, n$. La referencia intacta y directa a las variables de estado del sistema permite abordar una gran variedad de problemas de análisis y diseño, en particular el diseño de controladores óptimos.

3.5. Modulación de Ancho de Pulso en EHD

En este trabajo el análisis espectral parametrizado se lleva a cabo para la modulación del seguimiento de borde de una frecuencia constante, donde los coeficientes de Fourier se obtienen en términos de parámetros de modulación. Los convertidores de DC-DC se conmutan mediante la comparación de una señal portadora de frecuencia constante (β) y una referencia que probablemente sea móvil ($d(t)$) [Mohan09], como

se muestra en la Figura 3.1.

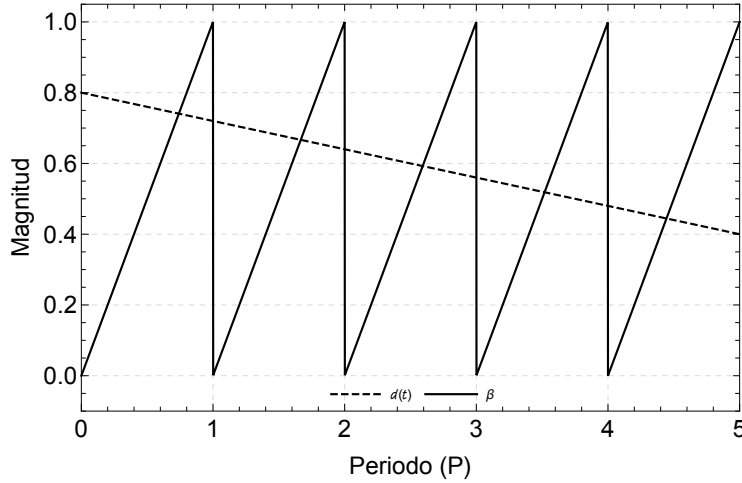


Figura 3.1: Señales auxiliares $d(t)$ y β para generar la entrada PWM.

El contenido espectral de una señal PWM es de suma importancia cuando se definen modelos LPV a través de la metodología EHD. Por lo tanto la señal PWM $\sigma(t)$ se puede parametrizar mediante una serie de coeficientes de Fourier, como

$$\sigma(t) = a_0 + \sum_{i=1}^{Nh} \left[a_i \cos\left(\frac{i2\pi}{P}t\right) + b_i \sin\left(\frac{i2\pi}{P}t\right) \right], \quad (3.36)$$

donde un análisis de Fourier de la onda cuadrada en la Figura 3.2 resulta en

$$\begin{aligned} a_0 &= d(t) \\ a_i &= \frac{\sin(i 2\pi d(t))}{i\pi} \\ b_i &= \frac{2[\sin(i \pi d(t))]^2}{i \pi} \end{aligned} \quad (3.37)$$

En la Figura 3.2 se muestra la aproximación de la señal PWM, para obtener una precisión aceptable, se consideran diez armónicos.

3.6. Análisis de Estabilidad en Sistemas LPV

Los modelos LPV obtenidos mediante el EHD, permiten realizar análisis de estabilidad para sistemas LTI, cuando los parámetros permanecen de manera constante.

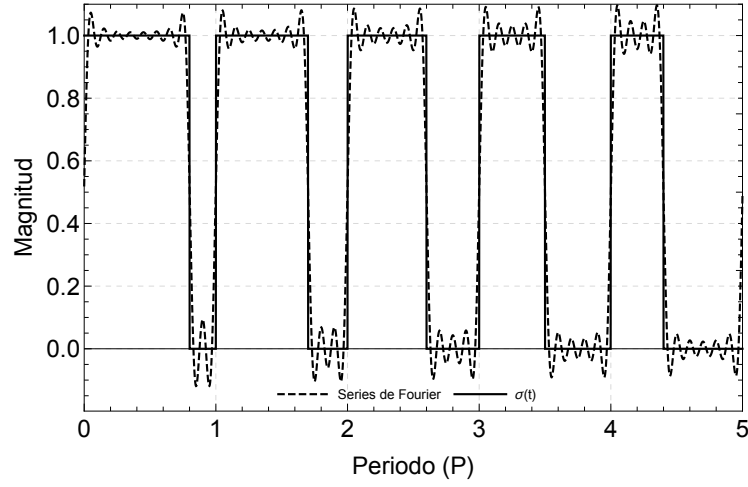


Figura 3.2: Parametrización de la señal PWM mediante la serie de Fourier.

Por lo tanto, en este trabajo el análisis de estabilidad se realiza a través del cálculo de los polos del polinomio característico simbólico denotado por

$$\det(sI - \mathbf{A}) = 0 \quad (3.38)$$

donde \mathbf{A} es la matriz característica del sistema (3.34), y $\det(sI - \mathbf{A})$ se obtiene mediante los DDDs, con lo cual para un valor dado de los parámetros bajo análisis se puede obtener un polinomio expandido en función de s , de la forma

$$a_{n(2N_h+1)}s^{n(2N_h+1)} + a_{n(2N_h+1)-1}s^{n(2N_h+1)-1} + \dots + a_0 = 0 \quad (3.39)$$

donde $a_0, \dots, a_{n(2N_h+1)}$ son los coeficientes simbólicos del polinomio característico, s es la variable de frecuencia compleja, Nh es el orden armónico y n es el orden del sistema original.

Ante una variación de los parámetros simbólicos, el sistema es estable cuando la parte real de los $n(2Nh + 1)$ polos se encuentran en el lado izquierdo del plano complejo, es decir, son menores que cero, de lo contrario se considera el sistema inestable.

3.7. Conclusiones del Capítulo

Se presentó la formulación del EHD [Rodríguez-Flores19] para la representación de sistemas conmutados y no lineales en sistemas LVP en el TD, mediante la linealización de Carleman y las series de Fourier, conservando las variables de estado del sistema original, y sin la necesidad de un cambio de coordenadas. Con lo cual se obtiene, teóricamente, un sistema expandido infinito, que para fines prácticos se trunca en un orden armónico suficiente Nh . Además, se presentó la parametrización de una señal PWM de frecuencia constante, donde los coeficientes de Fourier se obtienen en términos del ciclo de trabajo. De esta forma, se da la posibilidad de la aplicación del análisis simbólico de sistemas LPV. Por último, se presentó un análisis de estabilidad para sistemas LPV, usando los DDDs para obtener el polinomio característico.

Capítulo 4

Análisis Paramétrico de Sistemas Lineales

Analizar circuitos simbólicamente sigue siendo un problema de investigación desafiante, y con el aumento de la complejidad y la dimensionalidad de los problemas, una solución general parametrizada de sistemas de gran escala no es del todo posible, debido al gran esfuerzo computacional que requiere el cómputo de la matriz de transición de estados e^{At} , cuando los parámetros de interés se mantienen simbólicos. Por lo tanto, los analistas han cambiado gradualmente hacia la resolución de dichos problemas utilizando las técnicas numéricas versátiles disponibles, en las cuales, por lo general, se requiere un paso de integración muy pequeño, para la precisión de la integración. Por lo tanto, se necesita una gran cantidad de iteraciones y operaciones en cada paso de integración, sumado a la inestabilidad numérica, que puede convertirse en otra preocupación con los métodos de integración que se aplican ampliamente en el software de simulación actual.

En este capítulo se presenta la conjunción de diferentes metodologías utilizadas para lograr soluciones parametrizadas de sistemas LPV de gran escala en el TD, basadas en los DDDs presentados en la Sección 2.2. Estas soluciones parametrizadas tienen como característica principal conservar de manera simbólica sólo aquellos parámetros

de interés. Por otra parte, la idea de una solución simbólica exacta presentada en la Sección 2.1 se reduce a una solución simbólica, debido a que los modelos LPV son una aproximación del sistema bajo estudio.

4.1. Soluciones Generales de Sistemas LTI

La principal ventaja de transformar los modelos de espacio de estado (3.20) en (3.21), es que se logran modelos LPV suficientemente más simples que admiten diversas técnicas de análisis del sistema, como lo son las técnicas para el análisis de sistemas LTI.

4.1.1. Solución General en el Dominio del Tiempo

Para el caso de sistemas LTI, la representación de espacio de estado es de la forma

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (4.1)$$

donde A y B son matrices de $n \times n$ y $n \times p$ respectivamente. La solución general del sistema excitado por las condiciones iniciales $x(0)$, y la fuente de entrada $u(t)$ [Chen12], se expresan en términos de la matriz de transición de estado e^{At} . Premultiplicando e^{-At} en ambos lados de (4.1), y usando la propiedad de las matrices exponenciales ($\frac{d}{dt}e^{At} = Ae^{At} = e^{At}A$) se tiene

$$e^{-At}\dot{x}(t) = e^{-At}Ax(t) + e^{-At}Bu(t) \quad (4.2)$$

$$e^{-At}\dot{x}(t) - e^{-At}Ax(t) = e^{-At}Bu(t). \quad (4.3)$$

Note que el término de la izquierda se puede factorizar como una derivada, por lo tanto

$$\frac{d}{dt}(e^{-At}x(t)) = e^{-At}Bu(t) \quad (4.4)$$

$$d(e^{-At}x(t)) = e^{-At}Bu(t)dt. \quad (4.5)$$

Integrando ambas partes desde 0 hasta t , se tiene

$$e^{-At}x(\tau)|_{\tau=0}^t = \int_0^t e^{-A\tau}Bu(\tau)d\tau \quad (4.6)$$

$$e^{-At}x(t) - e^0x(0) = \int_0^t e^{-A\tau}Bu(\tau)d\tau. \quad (4.7)$$

Despejando $x(t)$, donde $e^0 = I$, y la inversa de $e^{-At} = e^{At}$

$$e^{-At}x(t) = x(0) + \int_0^t e^{-A\tau}Bu(\tau)d\tau \quad (4.8)$$

$$x(t) = e^{At}x(0) + e^{At} \int_0^t e^{-A\tau}Bu(\tau)d\tau. \quad (4.9)$$

Por último, de las propiedades de los exponentes la solución general de sistemas LTI es

$$x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau \quad (4.10)$$

La solución general (4.10), se puede lograr siempre y cuando los parámetros del sistema se mantengan constantes, donde la expresión obtenida $x(t)$ esté solo en función del tiempo. Pero para fines de interés, una solución parametrizada es el principal objetivo, la cual es posible para sistemas pequeños, pero a medida que crece el sistema, se torna complicado si no que imposible lograr una solución de este tipo. Donde la complejidad recae en la matriz de transición de estado, debido al crecimiento exponencial derivado del cómputo de esta.

4.1.2. Solución en el Dominio de Tiempo Discreto

El sistema en variables de estado (4.1) se puede aproximar como [Chen12]

$$x(t + \alpha) = x(t) + Ax(t)\alpha + Bu(t)\alpha \quad (4.11)$$

donde t se convierte en $t = k\alpha$, con $k = 0, 1, \dots$, entonces se tiene

$$x((k + 1)\alpha) = (I + A\alpha)x(k\alpha) + Bu(k\alpha)\alpha \quad (4.12)$$

donde I es una matriz identidad de dimensiones apropiadas, y α corresponde al paso de integración. Si $u(t)$ es constante por partes, por lo tanto cambia solo para valores de tiempo discreto, de modo que

$$u(t) = u(k\alpha) =: u[k] \quad (4.13)$$

para $k\alpha \leq t < (k+1)\alpha$, con esta entrada la solución sigue siendo (4.10). Calculado para $t = k\alpha$ y $t = (k+1)\alpha$, se tiene

$$x[k] := x(k\alpha) = e^{Ak\alpha}x(0) + \int_0^{k\alpha} e^{A(k\alpha-\tau)}Bu(\tau)d\tau \quad (4.14)$$

$$x[k+1] := x((k+1)\alpha) = e^{A(k+1)\alpha}x(0) + \int_0^{(k+1)\alpha} e^{A((k+1)\alpha-\tau)}Bu(\tau)d\tau \quad (4.15)$$

factorizando (4.15) se tiene

$$x[k+1] = e^{A\alpha} \left[e^{Ak\alpha}x(0) + \int_0^{k\alpha} e^{A(k\alpha-\tau)}Bu(\tau)d\tau \right] + \int_{k\alpha}^{(k+1)\alpha} e^{A(k\alpha+\alpha-\tau)}Bu(\tau)d\tau \quad (4.16)$$

sustituyendo $\beta = k\alpha + \alpha - \tau$, (4.13) y (4.14) en (4.16),

$$x[k+1] = e^{A\alpha}x[k] + \left(\int_0^\alpha e^{A\beta}d\beta \right) Bu[k]. \quad (4.17)$$

Por lo tanto, el modelo en el dominio de tiempo discreto (DTD, por sus siglas en inglés) equivalente a (4.1) para una entrada $u[k]$ constante entre instantes de muestreo es

$$x[k+1] = A_d x[k] + B_d u[k] \quad (4.18)$$

donde

$$A_d = e^{A\alpha} \quad (4.19)$$

$$B_d = \left(\int_0^\alpha e^{A\tau}d\tau \right) B \quad (4.20)$$

4.1.3. Dominio de la Frecuencia

La solución general del sistema (4.1) se puede obtener mediante la transformada de Laplace (LT; por sus siglas en inglés), con la cual el sistema de ecuaciones diferenciales se convierte en ecuaciones algebraicas en el FD, que fácilmente pueden ser manipuladas para obtener la solución. Por lo tanto, aplicando la LT al sistema (4.1), se tiene

$$sX(s) - X(0) = AX(s) + BU(s) \quad (4.21)$$

factorizando términos

$$(sI - A)X(s) = X(0) + BU(s), \quad (4.22)$$

despejando $X(s)$

$$X(s) = (sI - A)^{-1}X(0) + (sI - A)^{-1}BU(s) \quad (4.23)$$

La solución en TD, se lleva a cabo mediante la transformada inversa de Laplace (ILT; por sus siglas en inglés) como

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{(sI - A)^{-1}[X(0) + BU(s)]\} \quad (4.24)$$

Note que, para sistemas grandes el problema sigue siendo el cálculo de la matriz exponencial parametrizada, obtenida mediante la inversa de $(sI - A)$. Para sistemas de gran escala con el software Mathematica[®], mediante sus funciones predefinidas, aún es posible realizar dicho cálculo parametrizado. Las expresiones obtenidas son tan complejas, que realizar la ILT, no es posible. Por lo tanto, se debe recurrir a técnicas de integración numérica que permitan mantener de manera simbólica parámetros de interés

4.2. Soluciones Aproximadas de Sistemas LTI

Para sistemas LPV de gran escala, la matriz de transición es difícil, si no imposible de obtener en términos de funciones estándar parametrizadas, de modo que hay que recurrir a técnicas avanzadas de análisis simbólico, así como de integración numérica que permitan mantener parámetros de manera simbólica.

4.2.1. Aproximación de la Matriz de Transición de Estados

La matriz de transición de estado es el instrumento principal para obtener la solución de sistemas LTI. Esta matriz define la transición de los estados desde un instante t_0 hasta un instante t , por lo cual contiene toda la información sobre el movimiento libre del sistema. Existen varios métodos para calcular la matriz exponencial, ninguno de ellos es computacionalmente eficiente [Moler03]. De forma breve, las formas de calcular la matriz de transición de estado se describen como [Chen12]:

- Usando la metodología de los valores y vectores característicos.
- A través de la forma de Jordan de A . Sea $A = Q\hat{A}Q^{-1}$; entonces

$$e^{At} = Qe^{\hat{A}t}Q^{-1}, \quad (4.25)$$

donde \hat{A} esta en la forma de Jordan.

- Mediante la serie infinita de potencias,

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!}. \quad (4.26)$$

- Utilizando la ILT,

$$e^{At} = \mathcal{L}^{-1}[(sI - A)^{-1}]. \quad (4.27)$$

Adicionalmente, las propiedades de la matriz de transición de estado se mencionan en [Chen12, Ogata10].

Cuando los parámetros del sistema se mantienen constantes, el cálculo de e^{At} siempre es posible, pero se introducen errores por truncamiento. Desde que el interés es obtener soluciones parametrizadas, la forma de obtener e^{At} se lleva a cabo usando la ILT (4.27), donde la inversa de $(sI - A)$ se obtiene mediante los DDDs. Pero el verdadero problema es regresar al dominio del tiempo, es decir, a medida que aumenta el tamaño del sistema, así como el número de parámetros simbólicos, obtener la ILT parametrizada, se torna complicado sino imposible, y en el mejor de los casos da lugar al crecimiento exponencial en las expresiones obtenidas. Por otro lado, las expresiones logradas en la inversa de $(sI - A)$, son tan complejas que no es posible regresar al dominio del tiempo usando las tablas predefinidas en la teoría. Estas expresiones tan complejas son de interés en este trabajo, en donde una aproximación de la matriz de transición se considera mediante la transformada numérica inversa de Laplace (NILT, por sus siglas en inglés), la cual resuelve de manera favorable el problema tan complejo que implica la ILT.

4.2.2. Transformada Numérica Inversa de Laplace

La LT es una herramienta poderosa en el análisis de sistemas de potencia lineales, pero su uso se ha limitado a problemas donde la solución se obtiene haciendo uso de las tablas de transformadas de Laplace. En este trabajo se comprueba que para sistemas de complejidad práctica, es imposible obtener una expresión en el TD de $(sI - A)$ directamente de las tablas de transformación de Laplace, debido a la complejidad de las expresiones obtenidas [Wilcox78]. Esta complejidad se puede superar mediante tratamiento numérico, al crear una relación discreta entre el FD complejo y el TD. Este enfoque discreto introducirá cierto grado de aproximación, pero el error se puede minimizar tanto como se desee. Esta relación discreta recibe el nombre de NILT, introducida en [Wilcox78], y posteriormente aplicada al análisis de transitorios electromagnéticos [Uribe02, Ramirez04]. La transformada numérica de Laplace es la versión mejorada de la transformada de Fourier modificada (MFT; por sus siglas en

inglés), la cual utiliza técnicas de ventana para reducir los errores causados por la discretización y el truncamiento de la señal derivados del uso de la transformada de Fourier (FT; por sus siglas en inglés).

A continuación, se describe de manera breve el procedimiento matemático de la NILT, presentada en [Moreno08a]. La LT se define por las dos integrales recíprocas, definidas como

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt \quad (4.28)$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s)e^{st} ds \quad (4.29)$$

donde la frecuencia compleja esta definida por

$$s = c + j\omega. \quad (4.30)$$

Adicionalmente, las ecuaciones (4.28) y (4.29) se pueden representar como

$$F(s) = \int_0^{\infty} [f(t)e^{-ct}]e^{-j\omega t} dt \quad (4.31)$$

$$f(t) = \frac{e^{ct}}{2j\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(s)e^{j\omega t} d\omega. \quad (4.32)$$

Note que la ecuación (4.31) es equivalente a la MFT [Day65]. Entonces la ILT de $f(t)$ se puede escribir como [Moreno08a]

$$f(t) = Re \left\{ \frac{e^{ct}}{\pi} \int_0^{\infty} F(s)e^{j\omega t} d\omega \right\} \quad (4.33)$$

4.2.3. Formulación Numérica

La formulación numérica de la NILT permite mantener de manera simbólica parámetros de interés. Esta formulación puede utilizar una discretización par, así como una impar. Utilizar un muestreo impar permite lograr un error menor que al utilizar un muestreo par. En este trabajo se utiliza una discretización impar en el

FD con espaciamiento de $2\Delta\omega$, y pasos de tiempo Δt . Por lo tanto, se definen las siguientes funciones

$$f_n \equiv f(n\Delta t), \text{ para } n = 0, 1, \dots, N - 1 \quad (4.34)$$

$$F_{2k+1} \equiv F(c + j(2k + 1)\Delta\omega), \quad k = 0, 1, \dots, N - 1 \quad (4.35)$$

donde N es el número par de muestras, tanto para el TD como para el FD. El período de observación T , el paso de tiempo Δt , y el paso de frecuencia $\Delta\omega$ están definidos como:

$$T = P_0 = \frac{2\pi}{2\Delta\omega} = \frac{\pi}{\Delta\omega} \quad (4.36)$$

$$\Delta t = \frac{T}{N} \quad (4.37)$$

$$\Delta\omega = \frac{\pi}{T}. \quad (4.38)$$

Para escoger los valores adecuados de N , T , y $\Delta\omega$ se tienen diferentes opciones [Wilcox78]. El valor de N está dado en relación con el ancho de banda de $f(t)$, y se calcula usando (4.38). El valor de T es simplemente el tiempo de observación deseado, pero probablemente será necesario descartar los resultados obtenidos para $t > 0.9T$. Por lo que T debe ser ligeramente mayor al tiempo de observación requerido. Por último, $\Delta\omega$ se define directamente por (4.38). Por lo tanto, la ecuación (4.33) se puede aproximar numéricamente por

$$f_n = \frac{e^{cn\Delta t}}{\pi} Re \left\{ 2 \sum_{k=0}^{N-1} F_{2k+1} \sigma_{2k+1} e^{j(2k+1)n\Delta\omega\Delta t} \Delta\omega \right\} \quad (4.39)$$

sustituyendo los valores para N , T , y $\Delta\omega$ se tiene

$$f_n = Re \left\{ C_n \left[\sum_{k=0}^{N-1} F_{2k+1} \sigma_{2k+1} e^{\frac{j2\pi kn}{N}} \right] \right\} \quad (4.40)$$

donde

$$C_n = 2Ne^{cn\Delta t} e^{j\pi n/N} \frac{\Delta\omega}{\pi}. \quad (4.41)$$

Es importante mencionar que existen dos errores incurridos en la NILT, los cuales son:

1. Oscilaciones de Gibbs, debido al truncamiento del rango de integración. Este error se atenúa al introducir una función ventana $\sigma(\omega)$. Se pueden escoger tres funciones ventana, de modo que se logre una precisión sobresaliente a las requeridas por las aplicaciones de ingeniería (en el orden de 10^{-6}) [Moreno08a]. Por lo tanto, en este trabajo se utiliza la ventana de Hanning denotada por

$$\sigma(\omega) = \frac{1}{2} \left(1 + \cos \left(\frac{\pi m}{2N} \right) \right), \quad m = 1, 3, \dots, 2N \quad (4.42)$$

2. Errores de aliasing debido a la discretización de la variable continua ω , los cuales se reducen mediante el factor de amortiguamiento "c" [Wilcox78]. Existen varias formas de calcular este coeficiente, pero en este trabajo se utiliza la propuesta por Wedepohl [Wedepohl83],

$$c = \frac{\ln(N^2)}{T} \quad (4.43)$$

con la cual, el error numérico se puede llevar por debajo de 10^{-6} .

Note que la expresión en corchetes cuadrados de la ecuación (4.40) permite emplear la transformada discreta de Fourier (DFT; por sus siglas en inglés), con la cual se pueden mantener de manera simbólica parámetros del sistema para un tiempo de observación T , dando lugar a las soluciones parametrizadas. Con un tiempo de observación razonable una buena definición de la respuesta en el TD se tiene a partir de $N = 512$ muestras.

4.2.4. Ejemplo

Este ejemplo se utiliza para ilustrar la complejidad que representa obtener la matriz de transición en una representación parametrizada, donde la inversa de $(sI - A)$ se lleva a cabo usando los DDDs. Así mismo se muestra la complejidad de las expresiones obtenidas de forma que no es posible derivar una expresión en el DT mediante las tablas de transformadas de Laplace, de modo que se denota la importancia del uso de la NILT. Considere el circuito equivalente monofásico [Williams91], que consiste en la conexión de una carga industrial a la red eléctrica, acoplada a través de un filtro pasivo y un compensador de línea de alimentación representada por (i_{plc}) como se ve en la Figura 4.1. El sistema en variables de estado es,

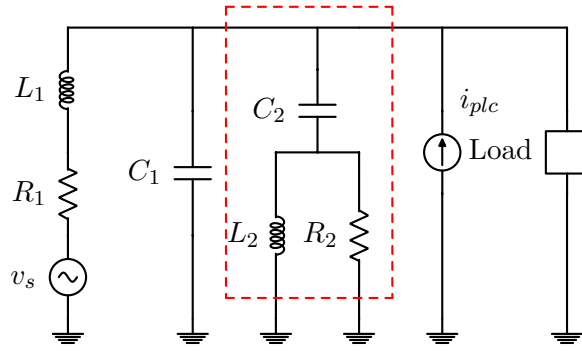


Figura 4.1: Equivalente monofásico del sistema en estudio.

$$\begin{bmatrix} \dot{i}_{L1} \\ \dot{v}_{C1} \\ \dot{v}_{C2} \\ \dot{i}_{L2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_1}{L_1} & -\frac{1}{L_1} & 0 & 0 \\ \frac{1}{C_1} & -\frac{1}{C_1 R_2} & \frac{1}{C_1 R_2} & -\frac{1}{C_1} \\ 0 & \frac{1}{C_2 R_2} & -\frac{1}{C_2 R_2} & \frac{1}{C_2} \\ 0 & \frac{1}{L_2} & -\frac{1}{L_2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{L1} \\ v_{C1} \\ v_{C2} \\ i_{L2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{V_s}{L_1} \\ -\frac{i_{load}}{C_1} + \frac{i_{plc}}{C_1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.44)$$

con $R_1 = 0.057m\Omega$, $L_1 = 0.57mH$, $C_1 = 20\mu F$. Se desea obtener una solución parametrizada, donde permanezcan de manera simbólica los parámetros R_2 , L_2 y C_2 , de forma que sea posible plantear un problema de optimización para minimizar la distorsión armónica de la corriente de línea (caso de estudio 5.1). Para obtener tal

solución, el primer paso es calcular la matriz de transición de estado, usando (4.27). Para demostrar la complejidad de las expresiones, el elemento $(sI - A)^{-1}[1, 1]$ tiene la forma,

$$\frac{\frac{50000s}{L_2} + \frac{s}{C_2L_2} + \frac{50000s^2}{R_2} + \frac{s^2}{C_2R_2} + s^3}{-1754.39 \left(-\frac{50000}{C_2L_2} - \frac{50000s}{C_2R_2} - 50000s^2 \right) + (0.1 + s) \left(\frac{50000s}{L_2} + \frac{s}{C_2L_2} + \frac{50000s^2}{R_2} + \frac{s^2}{C_2R_2} + s^3 \right)} \quad (4.45)$$

Aunque la dimensión del sistema es apenas de 4×4 , note como ya no es posible derivar una expresión mediante las tablas de transformadas de Laplace, debido al grado de la expresión, así como la cantidad de parámetros simbólicos involucrados, los cuales no permiten obtener una expansión por fracciones parciales. Sin embargo, esta dificultad se supera mediante la NILT, manteniendo simbólicos los parámetros de interés (en este caso R_2 , L_2 , C_2), para un tiempo de observación T . Para validar la exactitud de la aproximación mediante la NILT, en la Figura 4.2 se muestra la respuesta en el tiempo del elemento $e^{At}[1, 1]$ a través de la NILT y la LT, manteniendo los parámetros de interés constantes ($R_2 = 5\Omega$, $L_2 = 0.5mH$, $C_2 = 20\mu F$). Note el alto grado de exactitud con $N = 512$ muestras para un tiempo de observación $T = 1/60seg$.

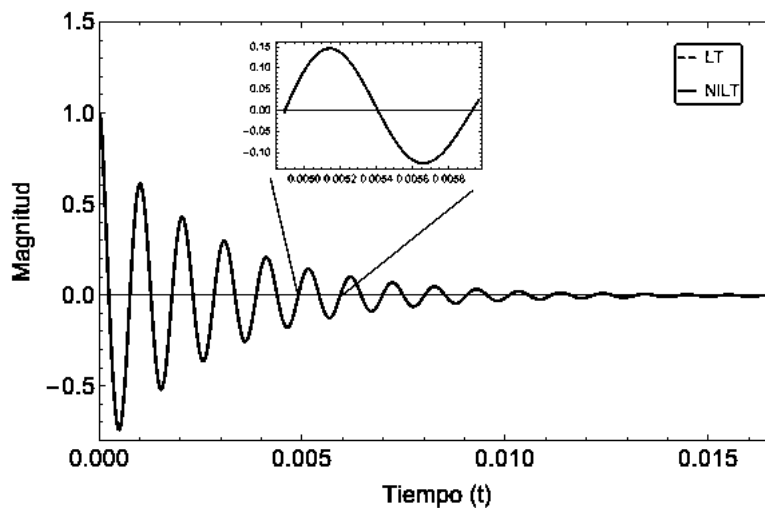


Figura 4.2: Respuesta en el tiempo de $e^{At}[1, 1]$ mediante la NILT y LT.

4.2.5. Soluciones Parametrizadas de Sistemas Lineales

Una solución parametrizada es aquella donde se mantienen de manera simbólica algunos parámetros de interés. Ésta se puede obtener utilizando la ecuación (4.24), donde la inversa de $(sI - A)$ se calcula mediante el método de los determinantes [Strang06] usando los DDDs, de modo que,

$$(sI - A)^{-1} = \frac{adj(sI - A)^T}{det(sI - A)} \quad (4.46)$$

donde $adj(sI - A)$ es la matriz de cofactores de $(sI - A)$. Así como usando la regla de Cramer (2.2), donde la ecuación (4.21) tiene la forma

$$\bar{A}x = b \quad (4.47)$$

con $\bar{A} = (sI - A)$.

Después se obtiene la solución en el FD, en forma de funciones de transferencia, como se muestra en la ecuación (2.3). Ahora, el siguiente paso es regresar al TD, a través de la NILT, con lo cual se logra obtener una solución para un tiempo de observación T . En consecuencia, algunos puntos de la forma de onda se desprecian debido a las oscilaciones de Gibbs, entonces solo se considera como horizonte de predicción el punto $(N/2)$. De esta forma, se obtiene una solución parametrizada deslizante para un período corto de tiempo. Dicha solución es de naturaleza discreta y presenta la siguiente forma,

$$x_n(\Delta\delta, x_{n-1}, p) \quad (4.48)$$

donde x_{n-1} son las condiciones iniciales, importantes para el siguiente punto de operación, p son los parámetros de interés que se mantienen de forma simbólica, y $\Delta\delta$ es el tiempo de predicción definido por

$$\Delta\delta = \Delta t \frac{N}{2} = \frac{T}{N} \frac{N}{2} = \frac{T}{2}. \quad (4.49)$$

Una característica importante es que el tiempo de predicción se debe elegir de tal forma que no se pierda información con respecto al periodo del sistema. Para

ilustrar esta idea, suponga que la respuesta de un sistema escalar hipotético tiene la forma de onda como se muestra en la Figura 4.3. El tiempo de observación se considera de $T = 2\Delta\delta$, pero solo nos interesa el punto $N/2$, con lo cual se asegura una buena precisión. El primer punto x_1 se calcula con las condiciones iniciales, el tiempo correspondiente, y los parámetros deseados. De igual forma se calcula el punto x_2 , y así sucesivamente hasta el tiempo de simulación que se desee. En la práctica, este tipo de soluciones parametrizadas, reduce considerablemente el tiempo de cómputo en comparación con los métodos numéricos tradicionalmente utilizados.

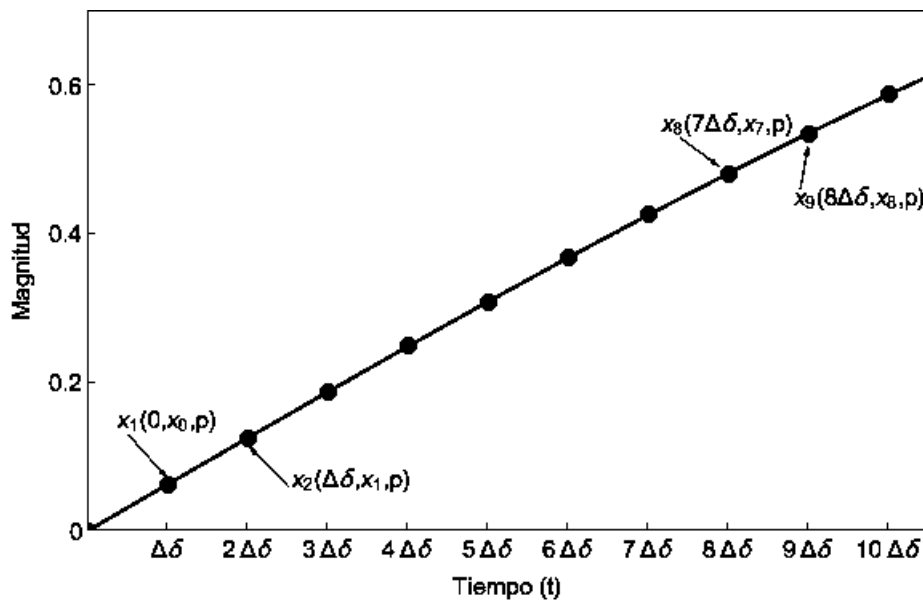


Figura 4.3: Respuesta de la solución parametrizada hipotética para un horizonte de tiempo $\Delta\delta$.

4.2.6. Ejemplo

En este ejemplo se ilustra la idea de las soluciones parametrizadas, así como su desempeño ante una variación de parámetros. En este caso la solución parametrizada se lleva a cabo usando la regla de Cramer (2.2), donde los determinantes involucrados se representan mediante los DDDs. Después usando la NILT, se logra una

solución parametrizada discreta en el TD de la forma (4.48). Retomando el ejemplo 4.2.4. Suponga un punto de operación donde la corriente i_{plc} suministra la carga i_{load} [Williams91] (excepto la componente fundamental de la corriente de carga), donde la corriente i_{load} se aproxima por una fuente de corriente monofásica controlada representada por una serie de Fourier como [Mohan09]

$$\begin{aligned} i_{load} = & a_1 \sin[2\pi 60t + \phi] + \frac{1}{3} a_1 \sin[3(2\pi 60t + \phi)] \\ & + \frac{1}{5} a_1 \sin[5(2\pi 60t + \phi)] + \frac{1}{7} a_1 \sin[7(2\pi 60t + \phi)] \\ & + \frac{1}{11} a_1 \sin[11(2\pi 60t + \phi)]. \end{aligned} \quad (4.50)$$

donde $\phi = 15^\circ$. Usando la regla de Cramer, la solución simbólica en el FD para el estado v_{C2} tiene la forma

$$V_{C2}(s, R_1, L_1, C_1, R_2, L_2, C_2, a_{1,load}, a_{1,plc}) \quad (4.51)$$

después, usando la NILT se obtiene una solución parametrizada discreta en el TD, manteniendo como parámetros simbólicos los coeficientes de la serie de Fourier, tanto de la carga ($a_{1,load}$) como la del plc ($a_{1,plc}$), para un horizonte de tiempo $\Delta\delta$. Esta expresión tiene la forma

$$v_{C2}(\Delta\delta, x_0, a_{1,load}, a_{1,plc}) \quad (4.52)$$

donde x_0 son las condiciones iniciales de las variables de estado. Para validar la precisión de esta solución, los coeficientes de la serie de Fourier se varían con el tiempo como se muestra en la Figura 4.4. Adicionalmente se utilizan parámetros inadecuados, como se muestra en la Tabla 4.1, de manera que se introduzca distorsión armónica en la forma de onda.

En la Figura 4.5, se muestra la comparación entre la solución parametrizada y la solución numérica del estado v_{c2} , con $V_s = 208 \sin(2\pi 60t)$. Como se mencionó en la Sección 4.2.5, se utiliza un horizonte de tiempo de $\Delta\delta = (1/60)/1000$, con un número

$R_1 = 0.7\Omega$	$L_1 = 7mH$	$C_1 = 20\mu F$
$R_2 = 1\Omega$	$L_2 = 10\mu H$	$C_2 = 10\mu F$

Tabla 4.1: Parámetros hipotéticos.

de muestras $Nm = 2048$. Para el primer punto, cuando $\Delta\delta = 0$ la solución del estado v_{C2} es

$$v_{C2,1} = 0.000143561 + 0.423898a_{1,load} - 0.306961a_{1,plc} + 0.456648i_{L1,0} + 0.822346v_{C1,0} + 0.177247v_{C2,0} + 0.295681i_{L2,0} \quad (4.53)$$

donde $i_{L1,0}$, $v_{C1,0}$, $v_{C2,0}$ y $i_{L2,0}$ denotan las condiciones iniciales de cada variable de estado.

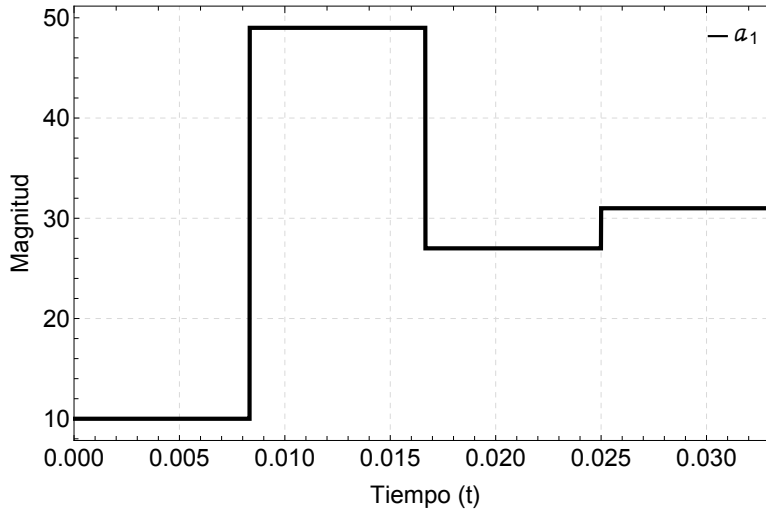


Figura 4.4: Variación de la amplitud de la corriente de carga.

Note como obtener una expresión en función de los coeficientes de Fourier de la corriente de carga, así como los del plc , permite aplicar técnicas de control óptimo. Adicionalmente, una solución como (4.53), permite procesos de optimización paramétrica, donde la distorsión en el voltaje, así como la corriente de línea se minimicen.

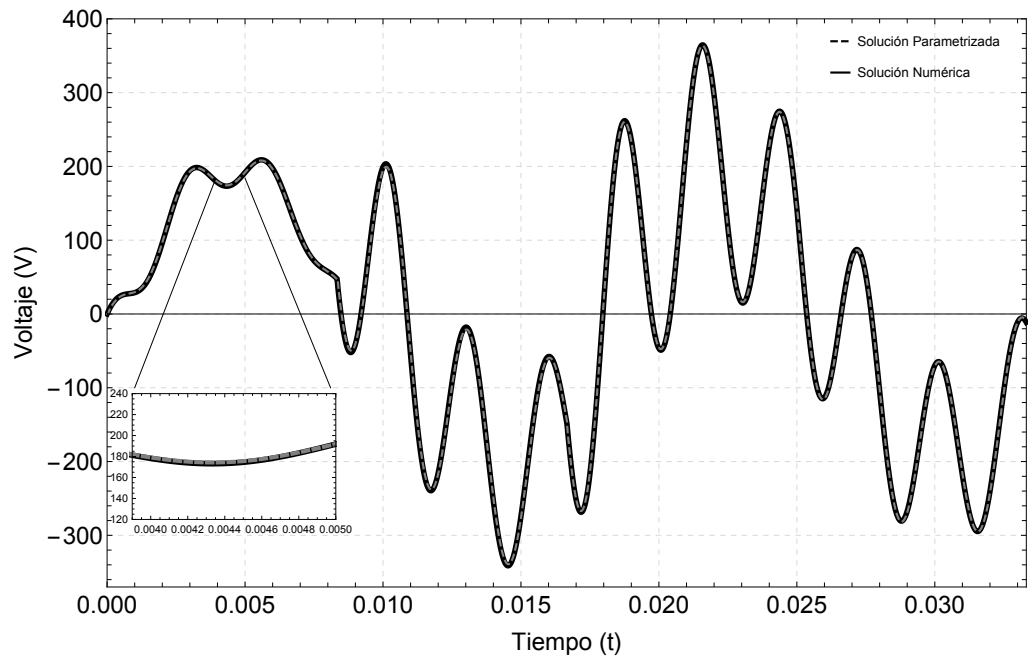


Figura 4.5: Comparación de la evolución en el tiempo del estado v_{C2} a través de la solución parametrizada y la solución numérica.

4.3. DDDs para la Solución de Sistemas LPV de Gran Tamaño

Para el análisis simbólico de sistemas de gran escala, resulta impráctico el uso de funciones predefinidas por el software Mathematica[®], así como Matlab[®]. Debido a que es inviable obtener las soluciones simbólicas mediante (4.46) y (2.2). Sin embargo, cuando aún es posible, las funciones simbólicas obtenidas son inadecuadas, presentando divisiones entre números muy pequeños, así como divisiones entre potencias de la variable de frecuencia compleja "s". En consecuencia, cuando se evalúan por la NILT resulta en divisiones entre cero. Para superar estos problemas, se realiza el análisis simbólico basado en DDDs, los cuales explotan la dispersidad y el intercambio de expresiones de manera canónica, entre otras características sobresalientes. La evaluación de un DDD manipula un número menor de valores derivados, las operacio-

nes efectuadas son multiplicación, resta, y suma de valores con magnitudes menores generalmente, y lo más importante es que no se tienen divisiones. Por lo tanto usar los DDDs permite realizar el análisis simbólico de sistemas LPV.

La solución simbólica en el FD mediante los DDDs, se puede obtener utilizando la regla de Cramer (2.2), donde la solución de cada estado, está dado en forma de función de transferencia, la cual es la relación de dos DDD, que se representan de manera compacta usando un único DDD compartido con dos raíces; esto se conoce como la representación DDD de la función de transferencia [Shi00]. De igual forma, usando la ecuación (4.46), cada posición de $(sI - A)^{-1}$ se puede considerar como una función de transferencia, que resulta en la relación de dos DDD, los cuales, de nuevo, se pueden compactar en un DDD compartido. Por último para regresar al dominio del tiempo, como se mostró en la sección 4.2.2, se logra utilizando la NILT.

Desde que los DDDs permiten obtener expresiones simbólicas en una forma expandida en términos de s como $\sum_i f_i(p_1, p_2, \dots, p_m) s^i$, es posible realizar análisis de estabilidad, mediante los polos del polinomio característico, reduciendo el costo computacional de manera considerable.

Adicionalmente, el análisis simbólico permite obtener soluciones en estado estable, mediante la bien conocida metodología del balance armónico, siempre y cuando se obtenga un conjunto de ecuaciones lineales, donde los DDDs representan la solución del sistema denotado por la ecuación (2.1).

4.3.1. Ejemplo: Solución Simbólica de Estado Estable de Sistemas LPV

Este ejemplo se utiliza para denotar el impacto que tiene el análisis simbólico basado en DDDs en sistemas LPV de gran escala para obtener su solución de estado estable, el cual es un problema de interés en el análisis de sistemas de potencia. El modelo LPV se obtiene a través del balance armónico, y su solución se determina

resolviendo el sistema de ecuaciones algebraicas (2.1) mediante los DDDs. La solución obtenida se dice ser simbólica debido a que conserva todos los parámetros del sistema de manera simbólica. Adicionalmente, se denota la comparación en el tiempo de CPU para la evaluación simbólica de la inversa de la matriz característica.

Se usa un sistema teórico simple de segundo orden, para ilustrar la aplicación de los DDDs, de modo que permita obtener una solución simbólica de estado estable. El modelo LTP en variables de estado es

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ f_1(t) & -\frac{2\pi}{P}\xi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t) \quad (4.54)$$

$$f_1(t) = -a + 2bcos\left(\frac{2\pi}{P}t\right) \quad (4.55)$$

donde P es el periodo y $u(t)$ es una entrada externa (o una perturbación) con comportamiento periódico,

$$u(t) = \sin\left(\frac{2\pi}{P}t\right). \quad (4.56)$$

Se asume que en estado estable periódico, las variables de estado, así como las entradas se pueden representar mediante series trigonométricas. Por lo tanto, la solución periódica de (4.54) se puede representar mediante la aproximación de grado Nh , de la forma

$$x_n(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{Nh} [a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)] \quad (4.57)$$

donde a_0 , a_n y b_n son los coeficientes a determinar. El proceso para obtener los coeficientes de (4.57) es mediante la técnica del balance armónico [Miraftab01]. Para este caso se obtienen un conjunto de ecuaciones algebraicas lineales de la forma $Ax = b$, donde A es una matriz expandida de tamaño $n(2Nh + 1)$, donde Nh define la aproximación armónica, n es el orden del sistema, y x es el vector de incógnitas denotado por los coeficientes $[a_{Nh}, \dots, a_1, a_0, b_1, \dots, b_{Nh}]$ para cada variable de estado, y b es un vector solución obtenido del balance armónico. El nuevo sistema expandido usando $Nh = 3$ es,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3\omega & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\omega & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \omega & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\omega & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2\omega & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -3\omega & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ a & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{b}{2} & 0 & 2\xi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3\omega \\ 0 & a & 0 & 0 & \frac{b}{2} & 0 & -\frac{b}{2} & 0 & 2\xi & 0 & 0 & 0 & 2\omega & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 & 0 & -\frac{b}{2} & 0 & 0 & 0 & 2\xi & 0 & \omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & -\frac{b}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\xi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{b}{2} & 0 & -b & a & 0 & 0 & 0 & 0 & -\omega & 0 & 2\xi & 0 & 0 \\ \frac{b}{2} & 0 & -\frac{b}{2} & 0 & 0 & a & 0 & 0 & -2\omega & 0 & 0 & 0 & 2\xi & 0 \\ 0 & -\frac{b}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & a & -3\omega & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\xi \end{bmatrix} \quad (4.58)$$

$$x = [a_{3,1} \ a_{2,1} \ a_{1,1} \ a_{0,1} \ b_{1,1} \ b_{2,1} \ b_{3,1} \ a_{3,2} \ a_{2,2} \ a_{1,2} \ a_{0,2} \ b_{1,2} \ b_{2,2} \ b_{3,2}]^T$$

$$b = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0]^T \quad (4.59)$$

La solución del sistema se lleva a cabo resolviendo

$$x = A^{-1}b \quad (4.60)$$

donde A^{-1} se calcula de manera similar a la ecuación (4.46), a través de los DDDs. Note como la arquitectura de la matriz A no sigue un patrón de dispersidad uniforme, por lo que obtener el DDD del $\det(A)$ mediante el orden de expansión *grado mínimo* resultaría en un DDD de mayor tamaño. Por lo tanto, usando un orden de expansión

por renglones se tiene un DDD de tamaño $|DDD| = 1011$. Aunque es posible obtener una expresión simbólica exacta de (4.60) mediante la función predefinida *Inverse* de Mathematica[®], la expresión resultante es inadecuada, así como más compleja que la obtenida con los DDDs. Adicionalmente, en la Tabla 4.2 se muestra una comparación del tiempo de CPU para la evaluación simbólica de la inversa de A .

DDD	Inverse de Mathematica [®]
1.48s	7.56s

Tabla 4.2: Comparación del tiempo de CPU para la evaluación simbólica de A^{-1} .

Note como el tiempo de evaluación mediante los DDDs supera en 5 veces el tiempo requerido por la función *inverse* de Mathematica[®].

Para ilustrar la complejidad de los coeficientes simbólicos, el coeficiente $a_{3,1}$ es

$$\begin{aligned}
a_{3,1} = & (4ab^2\xi\omega(3a^2 - 2b^2 - 24a\omega^2 - 12\xi^2\omega^2 + 33\omega^4))/ \\
& (a^7 - 28a^6\omega^2 + a^5(-6b^2 + 56\xi^2\omega^2 + 294\omega^4) + 2a^4(65b^2\omega^2 - 392\xi^2\omega^4 - 722\omega^6) + \\
& a^3(10b^4 + 784\xi^4\omega^4 + 4040\xi^2\omega^6 + 3409\omega^8 - 10b^2(12\xi^2\omega^2 + 101\omega^4)) + \\
& 4b^2\omega^2(5b^4 - 6b^2(8\xi^2\omega^2 + 33\omega^4) + 72(4\xi^4\omega^4 + 13\xi^2\omega^6 + 9\omega^8)) - \\
& 2a^2\omega^2(70b^4 - b^2(668\xi^2\omega^2 + 1739\omega^4) + 36(48\xi^4\omega^4 + 112\xi^2\omega^6 + 49\omega^8)) + \\
& a(-4b^6 + b^4(40\xi^2\omega^2 + 602\omega^4) + 144\omega^6(16\xi^6 + 56\xi^4\omega^2 + 49\xi^2\omega^4 + 9\omega^6) - \\
& 96b^2(4\xi^4\omega^4 + 43\xi^2\omega^6 + 54\omega^8))
\end{aligned} \tag{4.61}$$

El siguiente paso es construir las soluciones simbólicas de estado estable mediante (4.57) para los estados del sistema original. En la Figura 4.6 se ilustra la evolución en el tiempo de $x_1(t)$ y $x_2(t)$ obtenido por la solución numérica de (4.54), con condiciones iniciales igual a cero, así como la solución simbólica (4.57) de estado estable. La respuesta en el tiempo se lleva a cabo usando los valores $\omega = \frac{2\pi}{P}$ con $P = \pi$, $\xi = 0.4$, $a = 2$ y $b = -1$. Se observa que en estado estable, la exactitud de la aproximación es indistinguible a la solución numérica, usando solo $N_h = 3$.

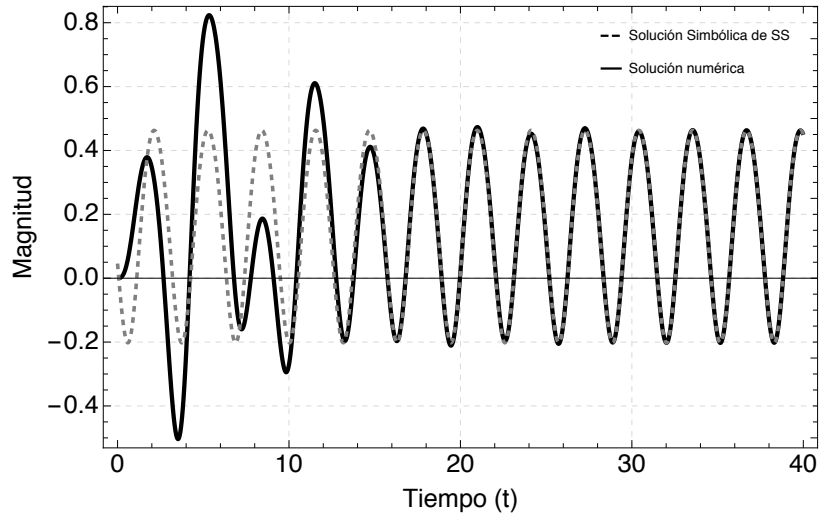
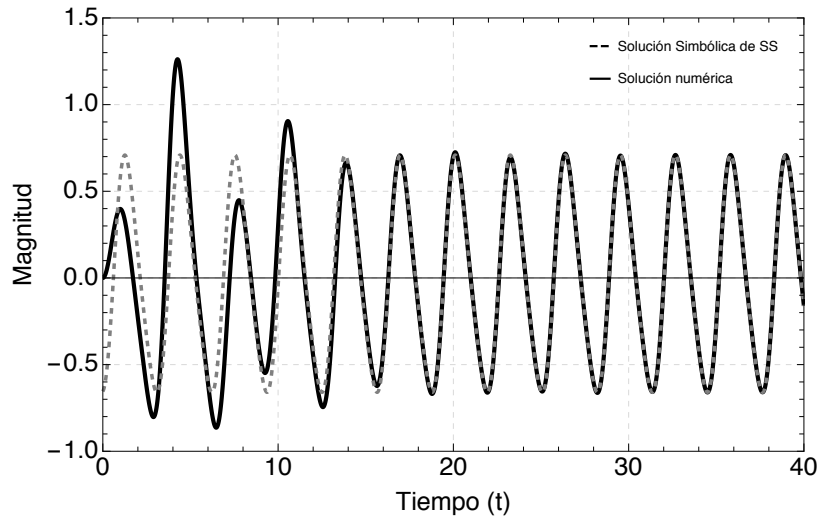
(a) Estado $x_1(t)$ (b) Estado $x_2(t)$

Figura 4.6: Respuesta en el dominio del tiempo de los estados del sistema original.

4.4. Conclusiones del Capítulo

Se demostró que una solución general parametrizada para sistemas LTI de pequeña dimensión es alcanzable. Por otra parte, para sistemas de dimensión pequeña, se demostró que obtener una solución general parametrizada no es posible, debido al gran costo computacional que requiere la matriz de transición de estados e^{At} , cuando

se mantienen de manera simbólica parámetros de interés. El problema anterior se soluciona mediante una aproximación a través de la NILT. En consecuencia se logra una solución parametrizada discreta deslizante para un horizonte de tiempo $\Delta\delta$.

Por último, se mostró como los DDDs aún estando desarrollados en el mismo ambiente de Mathematica, supera el desempeño de sus funciones predefinidas. Logrando la solución simbólica de estado estable de un sistema LPV. Debido a su representación simbólica, permite realizar diferentes estudios sin la necesidad de volver a calcular la solución.

Capítulo 5

Casos de Estudio y Control Predictivo Basado en Modelo

En este capítulo se presentan las soluciones parametrizadas de sistemas LPV, logradas mediante el análisis simbólico basado en los DDDs. Primero se realiza el caso de una aplicación industrial, dando lugar a la optimización paramétrica de un filtro pasivo con el fin de disminuir la distorsión armónica total (THD; por sus siglas en inglés) del voltaje de línea [Rodríguez-López19]. Posteriormente, se presenta la solución parametrizada de la ecuación de Mathieu, así como la aproximación de la matriz de transición de estados parametrizada del modelo conmutado del convertidor elevador. Adicionalmente, explotando las características de las representaciones LPV, se presentan análisis de estabilidad de sistemas LTI, a través de los DDDs. Por último, se introduce la idea básica de MPC, y la aplicación en el convertidor elevador utilizando la solución parametrizada como modelo de predicción en el proceso de optimización de MPC.

5.1. Optimización Paramétrica de Filtro Pasivo Basado en los DDDs

En este caso de estudio se logra la solución parametrizada del sistema trifásico bajo estudio. Debido a la dispersidad que presenta el sistema, mediante los DDDs se logra obtener una solución simbólica en el FD, debido a que todos los parámetros del sistema se conservan de manera simbólica. Después utilizando la NILT se obtiene la solución parametrizada en el TD, la cual conserva de manera simbólica sólo aquellos parámetros de interés. Ésta solución se utiliza en el proceso de optimización paramétrica de filtro pasivo. Éste enfoque permite forzar la respuesta del voltaje de línea a la respuesta deseda, disminuyendo de manera indirecta el THD.

Considere el circuito equivalente monofásico, que consiste en la conexión de una carga industrial a la red eléctrica, acoplada a través de un filtro pasivo y un compensador de línea de alimentación como se ve en la Figura 4.1, donde el objetivo principal del circuito es proporcionar una ruta de baja impedancia para la corriente armónica a través de un filtro pasivo (como se muestra en el cuadro de trazos en la Figura 4.1), la carga está representada por un rectificador trifásico de diodos no controlado (esto se asemeja a una aplicación industrial típica de una carga conectada a la red, que debe cumplir con los requisitos de calidad de energía impuestos por el operador de red), donde la corriente de carga i_{load} se considera balanceada y se aproxima por una fuente de corriente trifásica controlada representada por la siguiente serie de Fourier presentada en [Williams91].

$$\begin{aligned}
 i_{load} = & a_1 \sin[2\pi 60t + \phi] - \frac{1}{5} a_1 \sin[5(2\pi 60t + \phi)] - \frac{1}{7} a_1 \sin[7(2\pi 60t + \phi)] + \\
 & \frac{1}{11} a_1 \sin[11(2\pi 60t + \phi)] + \frac{1}{13} a_1 \sin[13(2\pi 60t + \phi)] - \frac{1}{17} a_1 \sin[17(2\pi 60t + \phi)] \\
 & - \frac{1}{19} a_1 \sin[19(2\pi 60t + \phi)] + \frac{1}{23} a_1 \sin[23(2\pi 60t + \phi)] + \frac{1}{25} a_1 \sin[25(2\pi 60t + \phi)]
 \end{aligned} \tag{5.1}$$

donde a_1 es la amplitud de la corriente armónica, ϕ representa el ángulo de despla-

zamiento entre la componente fundamental de la corriente y el voltaje de la fuente v_s (para este caso $\phi = 15^\circ$). La componente fundamental en fase de la corriente de carga es $i_{load,p}$, esta se define en fase con la fuente de voltaje v_s , y está dada por

$$\begin{aligned} i_{load,1} &= a_1 \sin(2\pi 60t + \phi)A \\ i_{load,p} &= a_1 \cos(\phi) \sin(2\pi 60t)A. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Considerando un punto de operación donde i_{plc} suministra la corriente de carga i_{load} (excepto el armónico de corriente fundamental) [Williams91], el modelo dinámico del sistema propuesto en estudio como se muestra en la Figura 4.1, se calcula en el marco abc aplicando las leyes de Kirchhoff por fase como

$$\begin{aligned} \frac{di_{L1a}}{dt} &= \frac{1}{L_1}(v_{sa} - v_{C1a} - R_1 i_{L1a}) \\ \frac{di_{L1b}}{dt} &= \frac{1}{L_1}(v_{sb} - v_{C1b} - R_1 i_{L1b}) \\ \frac{di_{L1c}}{dt} &= \frac{1}{L_1}(v_{sc} - v_{C1c} - R_1 i_{L1c}) \\ \frac{dv_{C1a}}{dt} &= \frac{i_{L1a}}{C_1} - \frac{i_{L2a}}{C_1} - \frac{v_{C1a} - v_{C2a}}{C_1 R_2} - \frac{i_{loada}}{C_1} + \frac{i_{plca}}{C_1} \\ \frac{dv_{C1b}}{dt} &= \frac{i_{L1b}}{C_1} + \frac{i_{L2b}}{C_1} - \frac{v_{C1b} - v_{C2b}}{C_1 R_2} - \frac{i_{loadb}}{C_1} + \frac{i_{plcb}}{C_1} \\ \frac{dv_{C1c}}{dt} &= \frac{i_{L1c}}{C_1} - \frac{i_{L2c}}{C_1} - \frac{v_{C1c} - v_{C2c}}{C_1 R_2} - \frac{i_{loadc}}{C_1} + \frac{i_{plcc}}{C_1} \\ \frac{dv_{C2a}}{dt} &= \frac{i_{L2a}}{C_2} + \frac{v_{C1a} - v_{C2a}}{C_2 R_2} \\ \frac{dv_{C2b}}{dt} &= \frac{i_{L2b}}{C_2} + \frac{v_{C1b} - v_{C2b}}{C_2 R_2} \\ \frac{dv_{C2c}}{dt} &= \frac{i_{L2c}}{C_2} + \frac{v_{C1c} - v_{C2c}}{C_2 R_2} \\ \frac{di_{L2a}}{dt} &= \frac{v_{C1a}}{L_2} - \frac{v_{C2a}}{L_2} \\ \frac{di_{L2b}}{dt} &= \frac{v_{C1b}}{L_2} - \frac{v_{C2b}}{L_2} \\ \frac{di_{L2c}}{dt} &= \frac{v_{C1c}}{L_2} - \frac{v_{C2c}}{L_2} \end{aligned} \quad (5.3)$$

donde L_1 y R_1 son la inductancia y resistencia de línea equivalentes, respectivamente, v_s es la fuente de voltaje, C_1 es el capacitor de entrada, C_2 , L_2 y R_2 son el capacitor, la inductancia y la resistencia del filtro, respectivamente. El compensador de línea de alimentación (PLC; por sus siglas en inglés) se representa por una fuente de corriente trifásica controlada. Los parámetros de impedancia de línea del sistema se describen en [Williams91]. Se utiliza un capacitor C_1 para minimizar las ondas de alta frecuencia en el voltaje de línea causadas por la conmutación del convertidor PWM. La limitación para elegir el valor de C_1 , es la frecuencia de resonancia de la inductancia L_1 con la capacitancia del filtro. Por lo tanto, C_1 se calcula de modo que se establezca una frecuencia resonante de 1480 Hz (aproximadamente el 25° armónico). Entonces, es posible escribir (5.3) en la representación de espacio de estado como

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + f(t) \\ y(t) &= Cx(t). \end{aligned} \tag{5.4}$$

donde

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{R_1}{L_1} & 0 & 0 & -\frac{1}{L_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{R_1}{L_1} & 0 & 0 & -\frac{1}{L_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{R_1}{L_1} & 0 & 0 & -\frac{1}{L_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{C_1} & 0 & 0 & -\frac{1}{C_1 R_2} & 0 & 0 & \frac{1}{C_1 R_2} & 0 & 0 & -\frac{1}{C_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{C_1} & 0 & 0 & -\frac{1}{C_1 R_2} & 0 & 0 & \frac{1}{C_1 R_2} & 0 & 0 & -\frac{1}{C_1} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{C_1} & 0 & 0 & -\frac{1}{C_1 R_2} & 0 & 0 & \frac{1}{C_1 R_2} & 0 & 0 & -\frac{1}{C_1} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{C_2 R_2} & 0 & 0 & -\frac{1}{C_2 R_2} & 0 & 0 & \frac{1}{C_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{C_2 R_2} & 0 & 0 & -\frac{1}{C_2 R_2} & 0 & 0 & \frac{1}{C_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{C_2 R_2} & 0 & 0 & -\frac{1}{C_2 R_2} & 0 & 0 & \frac{1}{C_2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{L_2} & 0 & 0 & -\frac{1}{L_2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{L_2} & 0 & 0 & -\frac{1}{L_2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{L_2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{L_2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{5.5}$$

$$f(t) = \left[\begin{array}{cccccccccccc} \frac{v_{sa}}{L_1} & \frac{v_{sb}}{L_1} & \frac{v_{sc}}{L_1} & -\frac{i_{loada}}{C_1} + \frac{i_{plca}}{C_1} & -\frac{i_{loadb}}{C_1} + \frac{i_{plcb}}{C_1} & -\frac{i_{loadc}}{C_1} + \frac{i_{plcc}}{C_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]^T \quad (5.6)$$

$$x(t) = \left[\begin{array}{ccccccccccc} i_{L1a} & i_{L1b} & i_{L1c} & v_{C1a} & v_{C1b} & v_{C1c} & v_{C2a} & v_{C2b} & v_{C2c} & i_{L2a} & i_{L2b} & i_{L2c} \end{array} \right]^T \quad (5.7)$$

Después, transformando (5.4) al FD a través de la LT, se tiene

$$sX(s) - X(0) = AX(s) + F(s) \quad (5.8)$$

con $X(0) = 0$, se obtiene la ecuación de interés en el análisis simbólico $\bar{A}x = b$

$$(sI - A)X(s) = F(s). \quad (5.9)$$

donde $(sI - A) = \bar{A}$, y $F(s) = b$. La ecuación (5.9) se resuelve mediante la regla de Cramer, donde el $\det(A)$ se logra mediante el método LED para obtener una representación DDD. Note que la matriz A es de alguna forma dispersa, por ende, el orden de expansión heurístico *grado mínimo*, permite obtener un DDD reducido, logrando un tamaño $|DDD| = 443$. El DDD resultante se puede convertir a una representación de dígrafo (vea Sección 2.3.2) como se muestra en la Figura 5.1, donde los círculos de color naranja representan los vértices raíz, y los círculos pequeños de color verde representan los vértices no terminales del dígrafo. Con este nuevo grafo, funciones predefinidas por Mathematica[®] para el análisis de la teoría de grafos, permiten obtener expresiones simbólicas en una forma expandida en función de la variable compleja s , así como obtener los caminos cortos.

La solución en el FD del estado V_{C2} de la fase a tiene la forma

$$V_{C2a}(s, R_1, L_1, C_1, R_2, L_2, C_2) \quad (5.10)$$

una característica importante de (5.10) es que tanto el denominador como el numerador no contienen divisiones que ocasionen divisiones entre cero al evaluar la variable

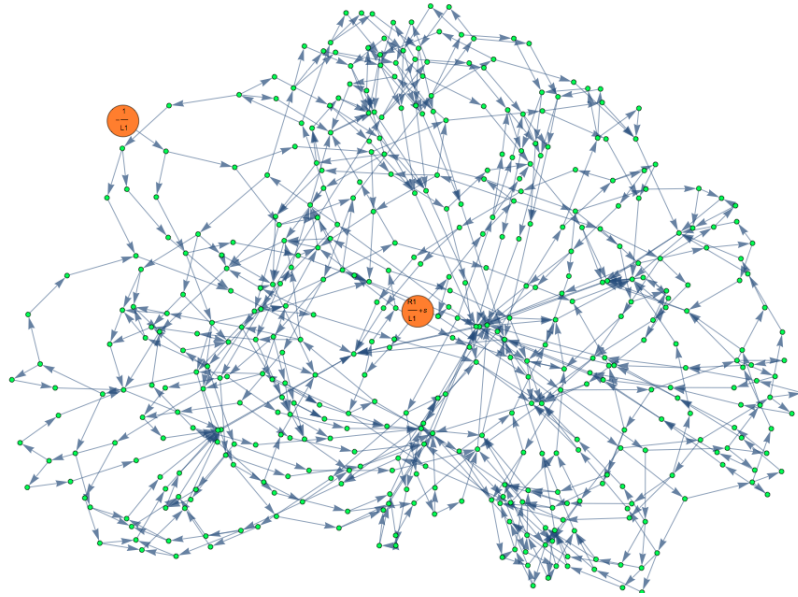


Figura 5.1: DDD convertido a un grafo dirigido del $\det(A)$.

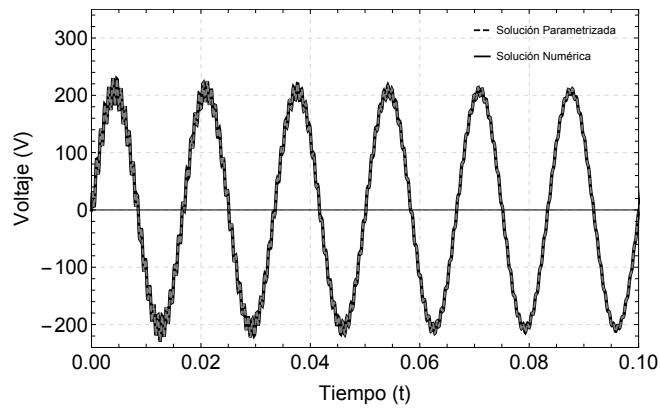
compleja "s". Después usando la NILT se logra la solución parametrizada en función de los parámetros de interés (R_2, L_2, C_2), para cada paso de tiempo $\Delta\delta$. Esta expresión tiene la forma

$$v_{C2_a}(\Delta\delta, R_2, L_2, C_2). \quad (5.11)$$

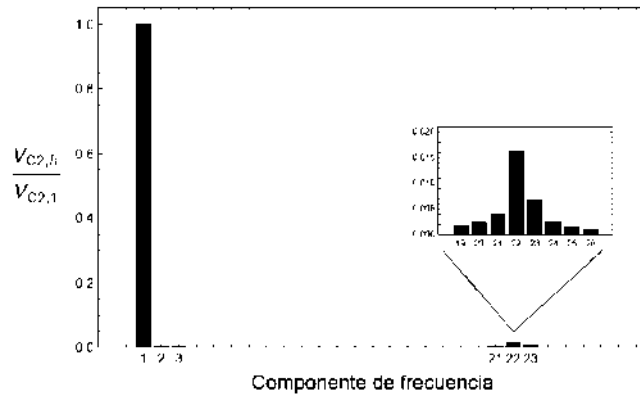
Para validar esta solución, en la Figura 5.2 a) se muestra la comparación de la solución parametrizada (con un número de muestras $Nm = 512$) y la solución numérica del estado v_{C2_a} , sin parámetros óptimos.

Es importante mencionar que al usar parámetros inadecuados en el filtro, se pueden amplificar los armónicos en la respuesta, debido a la frecuencia de resonancia no adecuada, como se aprecia en la Figura 5.2 b). No se desean armónicos de alto orden en el voltaje de línea, lo que hace necesaria la optimización de los parámetros del filtro de segundo orden.

Una vez que se establece la solución parametrizada del voltaje de línea, se usa una de las características sobresalientes de esta, en la que es posible definir el siguiente problema de optimización cuadrático, de forma que se obtengan los parámetros



(a)



(b)

Figura 5.2: Respuesta del sistema. a) Espectro armónico del voltaje de línea v_{C2_a} sin optimización. b) Comparación de la solución del estado v_{C2_a} sin optimización.

óptimos del filtro, y al mismo tiempo cumplir con las restricciones de optimización dadas

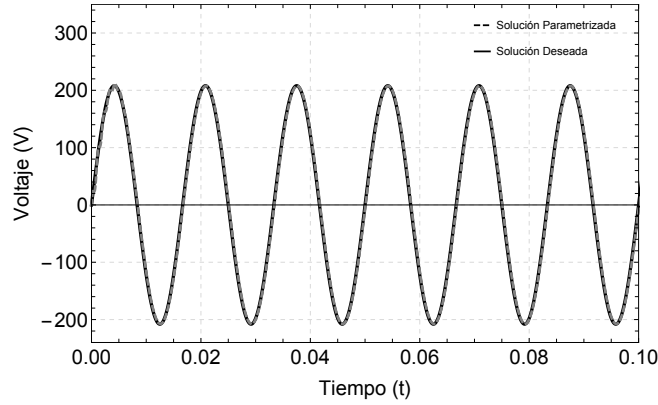
$$\begin{aligned}
 & \text{mín} && \sum_{j=1}^{Nm} [y(j) - \hat{y}(j)]^2 \\
 & \text{sujeto a :} && \frac{1}{2\pi\sqrt{L_2 C_2}} \geq 1500 \\
 & && 1 < R_2 < 15 \\
 & && 0.1 \times 10^{-3} < L_2 < 15 \times 10^{-3} \\
 & && 1 \times 10^{-6} < C_2 < 100 \times 10^{-6}
 \end{aligned} \tag{5.12}$$

donde $y(j)$ es el voltaje de la fuente v_s , muestreado con un paso de tiempo $\Delta\delta$, y $\hat{y}(j)$ es la solución parametrizada (5.11), los límites de los parámetros se establecen en base a los utilizados en [Williams91]. Éste enfoque permite forzar la respuesta del voltaje de línea al voltaje deseado, minimizando de manera indirecta el THD . Es importante mencionar que el procedimiento de optimización solo se lleva a cabo una vez, y se pueden utilizar muchos algoritmos de optimización no lineales disponibles, así como también software. Una de las características más destacadas de este enfoque es que, es posible definir un método de optimización para los parámetros del filtro en términos del contenido armónico de las señales y, al mismo tiempo, cumplir las restricciones físicas para los elementos del filtro mediante la definición de los límites inferiores y superiores. El proceso de optimización se lleva a cabo utilizando el algoritmo Nelder-Mead [Nelder65], el cual es un método de búsqueda directa para encontrar el valor mínimo de una función no lineal de n variables, sin ninguna información derivada. El algoritmo de optimización se implementa mediante el uso de Mathematica[®]. La Tabla 5.1 muestra los parámetros de filtro óptimos obtenidos del proceso de optimización. Después, para validar el resultado de la optimización, la Figura 5.3 a) presenta la

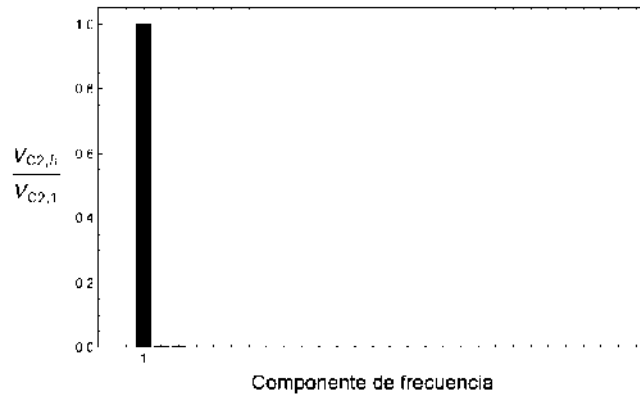
Tabla 5.1: Parámetros óptimos del filtro de segundo orden.

Parámetro	Valor
R_2	5Ω
L_2	$0.5mH$
C_2	$20\mu F$

solución del estado v_{C2a} usando los parámetros optimizados que se muestran en la Tabla 5.1. Observe que el efecto transitorio se ha mitigado y la solución óptima en estado estacionario es la respuesta deseada. Adicionalmente, la distorsión en el voltaje de línea se minimiza, como se muestra en la Figura 5.3 b). Otra forma de evaluar el desempeño del filtro optimizado es mediante el THD del voltaje de línea, definido como [Mohan09],



(a)



(b)

Figura 5.3: Respuesta del sistema. a) Espectro armónico del voltaje de línea v_{C2_a} con optimización. b) Solución óptima del estado v_{C2_a} .

$$THD_{v_{C2_a}} = \frac{\sqrt{\sum_{j \neq 1}^{\infty} V_{C2_a, h}^2}}{V_{C2_a, 1}} \quad (5.13)$$

Para los resultados que se muestran en la Figura 5.2, el $THD_{v_{C2_a}}$ sin optimización del filtro es 2.03552 %. Luego, utilizando los parámetros optimizados, el $THD_{v_{C2_a}}$ se reduce a 0.72645 %, como se aprecia en la Figura 5.3. Además, el THD en la corriente de línea ($THD_{i_{l1_a}}$) con/sin parámetros optimizados es 0.721516 % y 2.47212 %, respectivamente.

5.2. Análisis Simbólico de la Ecuación de Mathieu

En este caso de estudio se presenta la conjunción de las metodologías presentadas en este trabajo para lograr la solución parametrizada del sistema LPV bajo estudio, usando (4.24). La representación LPV se logra utilizando la metodología del EHD presentada en la Sección 3. Mediante los DDDs se obtiene la solución simbólica en el FD, en la cual se mantienen de forma simbólica todos los parámetros del sistema. La solución parametrizada se logra manteniendo de forma simbólica sólo los coeficientes de Fourier, a través de la NILT presentada en la Sección 4.2.2, para un periodo corto de tiempo. La ecuación de Mathieu es un sistema práctico de segundo orden, que puede representar varios sistemas físicos. Su representación LTP tiene la forma (4.54), para obtener su solución parametrizada es necesario llevar el sistema a una representación LPV. Lo anterior se logra utilizando la metodología del EHD. Entonces, el modelo resultante es de la forma (3.34), para $Nh = 3$ se tiene el sistema expandido de orden $2(2(3) + 1) = 14$,

$$\mathbf{A}(\theta) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{2\pi}{P} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{4\pi}{P} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{6\pi}{P} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2\pi}{P} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4\pi}{P} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{6\pi}{P} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -a & 2b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2\xi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b & -a & b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2\xi & 0 & 0 & -\frac{2\pi}{P} & 0 & 0 \\ 0 & b & -a & b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2\xi & 0 & 0 & -\frac{4\pi}{P} & 0 \\ 0 & 0 & b & -a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2\xi & 0 & 0 & -\frac{6\pi}{P} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -a & b & 0 & 0 & \frac{2\pi}{P} & 0 & 0 & -2\xi & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 & b & -a & b & 0 & 0 & \frac{4\pi}{P} & 0 & 0 & -2\xi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b & -a & 0 & 0 & 0 & \frac{6\pi}{P} & 0 & 0 & -2\xi \end{pmatrix} \quad (5.14)$$

donde θ representa los parámetros variantes definidos por los coeficientes de la serie de Fourier, y

$$\mathbb{F}(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ u(t) \\ \cos\left(\frac{2\pi}{P}t\right)u(t) \\ \cos\left(\frac{4\pi}{P}t\right)u(t) \\ \cos\left(\frac{6\pi}{P}t\right)u(t) \\ \sin\left(\frac{2\pi}{P}t\right)u(t) \\ \sin\left(\frac{4\pi}{P}t\right)u(t) \\ \sin\left(\frac{6\pi}{P}t\right)u(t) \end{pmatrix} \quad (5.15)$$

con $\mathbf{0} = (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)^T$.

Para validar el modelo resultante del EHD, en la Figura 5.4 se muestra la evolución en el tiempo de los estados, obtenido por solución numérica del modelo LTP (4.54) y su representación LPV (3.34). Para realizar la simulación se usaron los valores $P = \pi$, $\xi = 0.4$, $a = 2.3$ y $b = 1.3$. Note como la aproximación es tal que no hay diferencia en comparación con la solución numérica del sistema original.

Una vez validado el modelo, éste se transforma al dominio de la frecuencia para así realizar el análisis simbólico. De la ecuación (5.14), note como la dispersidad del sistema es favorable para reducir el tamaño del DDD obtenido mediante el orden de expansión de *grado mínimo*. Por lo tanto, el DDD resultante del $\text{Det}(sI - \mathbf{A}(\theta))$ es de tamaño $|\text{DDD}| = 3181$.

Basado en los DDDs, la solución simbólica en el FD se logra utilizando la ecuación (4.24), donde los DDDs representan las funciones de transferencia simbólicas, definidas como

$$H(s, (\theta)) = (sI - \mathbf{A}(\theta))^{-1}. \quad (5.16)$$

donde $H(s, (\theta))$ es de tamaño $2(2(3) + 1) = 14$, cada posición es de la forma (2.3), y $(sI - A)^{-1}$ se calcula usando (4.46). Para ilustrar esta idea, usando los valores de los parámetros de la simulación de la Figura 5.4, la función de transferencia del elemento

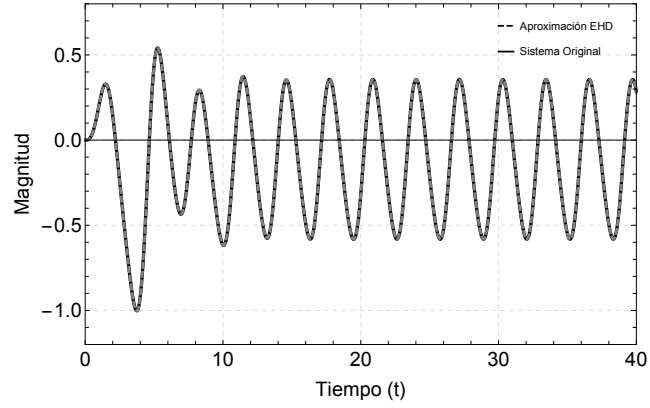
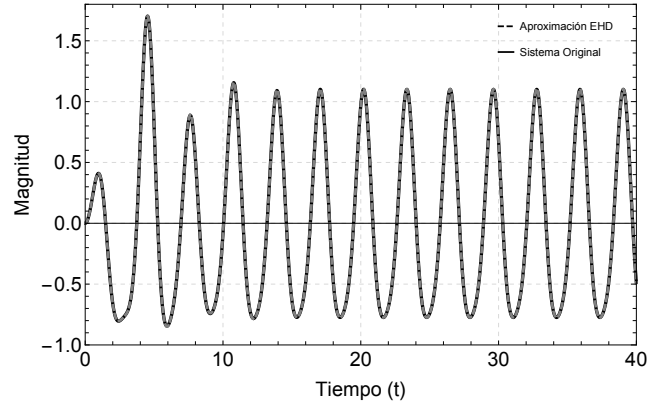
(a) Estado $x_1(t)$ (b) Estado $x_2(t)$

Figura 5.4: Respuesta en el dominio del tiempo de los estados originales del sistema.

[1, 1] de (5.16) es

$$\begin{aligned}
 H(s)[1, 1] = & (939404, +3.33005 \times 10^6 s + 5.89653 \times 10^6 s^2 + 5.31526 \times 10^6 s^3 + \\
 & 2.60578 \times 10^6 s^4 + 1.42782 \times 10^6 s^5 + 383884.s^6 + 147470.s^7 + 23636.s^8 + \\
 & 6807.25s^9 + 621.76s^{10} + 139.24s^{11} + 5.6s^{12} + s^{13}) / (3.91961 \times 10^6 + \\
 & 6.78861 \times 10^6 s + 1.19892 \times 10^7 s^2 + 9.38946 \times 10^6 s^3 + 7.89031 \times 10^6 s^4 + \\
 & 3.21171 \times 10^6 s^5 + 1.71808 \times 10^6 s^6 + 425254.s^7 + 161784.s^8 + 24803.4s^9 + \\
 & 7115.29s^{10} + 632.8s^{11} + 141.54s^{12} + 5.6s^{13} + s^{14})
 \end{aligned}
 \tag{5.17}$$

Desde que el interés es una solución en función de los coeficientes de Fourier en el TD, esta se logra utilizando la NILT. Para un periodo de observación $T = \frac{\pi}{100}$ con un número de muestras $Nm = 1024$, la solución parametrizada para un horizonte de tiempo $\Delta\delta = T/2$ (vea Sección 4.2.5) es de la forma

$$x_n(\Delta\delta, x_{n-1}, a, b). \quad (5.18)$$

Para validar la precisión de (5.18), en la Figura 5.6 se muestra la evolución en el tiempo de los estados del sistema original para una variación de los parámetros (a, b) como se muestra en la Figura 5.5, con $P = \pi$ y $\xi = 0.4$.

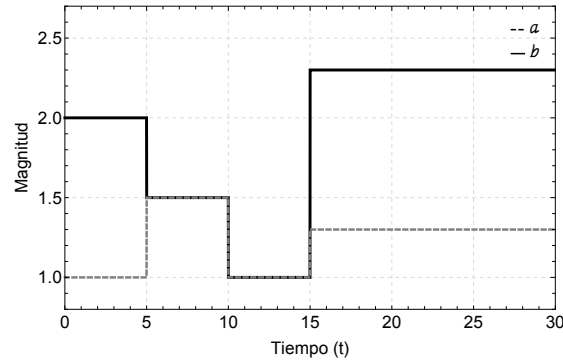


Figura 5.5: Variación en el tiempo de los parámetros a y b .

Es importante resaltar la precisión lograda en la solución parametrizada ante cambios abruptos en los coeficientes de Fourier, manteniendo durante el tiempo de simulación una aproximación prácticamente indistinguible. Una característica sobresaliente del EHD, es que los nuevos estados son encapsulados en función de los estados originales del sistema, por lo tanto la solución parametrizada mantiene de forma simbólica los estados del sistema original multiplicados por coeficientes trigonométricos. Para fines ilustrativos de (5.18), cuando $a = 2.3$ y $b = 1.3$ la solución parametrizada de los

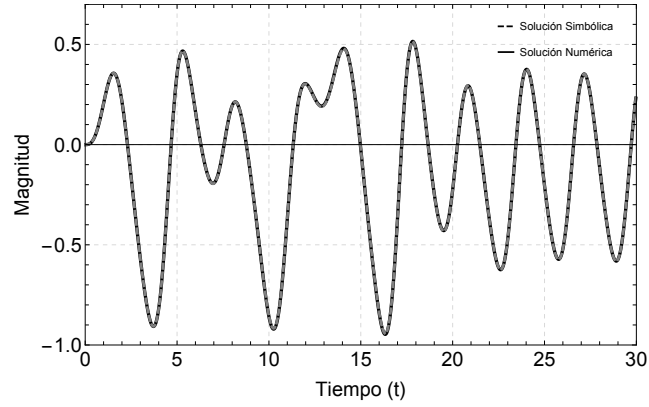
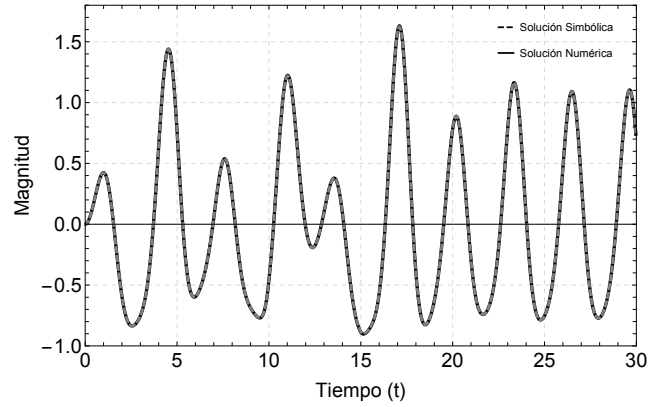
(a) Estado $x_1(t)$ (b) Estado $x_2(t)$

Figura 5.6: Respuesta en el TD de los estados de la ecuación de Mathieu.

estados son de la forma

$$\begin{aligned}
 x_{1,n} = & -4.1218 \times 10^{-11} + 0.9997x_{1,n-1} + 0.01561x_{2,n-1} + 0.00032x_{1,n-1}\cos(2\delta) + \\
 & 1.6686 \times 10^{-6}x_{2,n-1}\cos(2\delta) + 1.2878 \times 10^{-6}\cos(2\delta) + 8.5273 \times 10^{-9}x_{1,n-1}\cos(4\delta) + \\
 & 2.6750 \times 10^{-11}x_{2,n-1}\cos(4\delta) + 8.2471 \times 10^{-11}\cos(4\delta) + 9.1082 \times 10^{-14}x_{1,n-1}\cos(6\delta) + \\
 & 2.0408 \times 10^{-16}x_{2,n-1}\cos(6\delta) + 1.41551 \times 10^{-15}\cos(6\delta) + 1.1159 \times 10^{-20}\cos(8\delta) - \\
 & 6.6958 \times 10^{-6}x_{1,n-1}\cos(\delta)\sin(\delta) - 5.2426 \times 10^{-8}x_{2,n-1}\cos(\delta)\sin(\delta) + 0.0001\sin(2\delta) + \\
 & 7.0086 \times 10^{-14}\cos(4\delta)\sin(2\delta) - 2.1442 \times 10^{-10}x_{1,n-1}\sin(4\delta) \\
 & - 8.41 \times 10^{-13}x_{2,n-1}\sin(4\delta) + 3.2798 \times 10^{-9}\sin(4\delta) - 3.6803 \times 10^{-15}x_{1,n-1}\sin(6\delta) - \\
 & 9.6141 \times 10^{-18}x_{2,n-1}\sin(6\delta) - 1.1111 \times 10^{-17}\sin(6\delta) + 2.002 \times 10^{-19}\sin(8\delta).
 \end{aligned}$$

(5.19)

$$\begin{aligned}
x_{2,n} = & -1.31064 \times 10^{-8} - 0.0359x_{1,n-1} + 0.9872x_{2,n-1} + 3.4753 \times 10^{-11}x_{1,n-1}\cos(6\delta) + \\
& 0.000245678\cos(2\delta) + 2.16832 \times 10^{-6}x_{1,n-1}\cos(4\delta) + 8.50257 \times 10^{-9}x_{1,n-1}\cos(4\delta) + \\
& 2.62256 \times 10^{-8}\cos(4\delta) + (0.0405709x_{1,n-1} + 0.000317979x_{2,n-1})\cos(2\delta) + \\
& 9.08614 \times 10^{-14}x_{2,n-1}\cos(6\delta) + 6.30477 \times 10^{-13}\cos(6\delta) + 6.40862 \times 10^{-18}\cos(8\delta) - \\
& 0.00127734x_{1,n-1}\cos(\delta)\sin(\delta) - 0.0000133x_{2,n-1}\cos(\delta)\sin(\delta) + \\
& 0.0156057\sin(2\delta) + 2.67447 \times 10^{-11}\cos(4\delta)\sin(2\delta) - 6.8184 \times 10^{-8}x_{1,n-1}\sin(4\delta) - \\
& 3.20747 \times 10^{-10}x_{2,n-1}\sin(4\delta) + 8.34 \times 10^{-7}\sin(4\delta) - 1.63921 \times 10^{-12}x_{1,n-1}\sin(6\delta) - \\
& 4.89704 \times 10^{-15}x_{2,n-1}\sin(6\delta) - 5.661 \times 10^{-15}\sin(6\delta) + 1.0195 \times 10^{-16}\sin(8\delta).
\end{aligned} \tag{5.20}$$

Adicionalmente, se usa una de las características sobresalientes de los DDDs en la que no se tiene divisiones entre potencias de s , lo que permite obtener el polinomio característico simbólico, y dar lugar al estudio de estabilidad acotada del sistema expandido, mediante el cálculo de los polos del polinomio. Para ilustrar la potencia de este enfoque, se realiza el mismo estudio de estabilidad realizado en [Collado18], analizando 1000×1000 puntos, para una variación en los parámetros a y b en $[-1, 25]$ y $[-15, 15]$, respectivamente. En la Figura 5.7 se muestran las regiones de estabilidad, donde la región blanca representa la parte estable, y la región negra la parte inestable, con $P = \pi$ y $\xi = 0.2$.

El tiempo de cómputo reportado en [Collado18] para obtener este mapa de estabilidad mediante la técnica de Arnold Tonges, es de más de 20 horas, usando una PC de escritorio Dell core 2 duo 2.8 GHz 4 Gb RAM. Recientemente en [Rodriguez-Flores19] se reportan 2 horas para calcular el mismo mapa de estabilidad, en una MacBook Pro 2009 con Intel core 2 duo 2.66 GHz 4GB de RAM. En este trabajo, el análisis de los polos del polinomio característico basado en DDDs ha sido de escasos 3.38 minutos, realizado en una MacBook Pro 2.5 GHz Intel Core i5 16 GB RAM con macOS High Sierra versión 10.13.6.

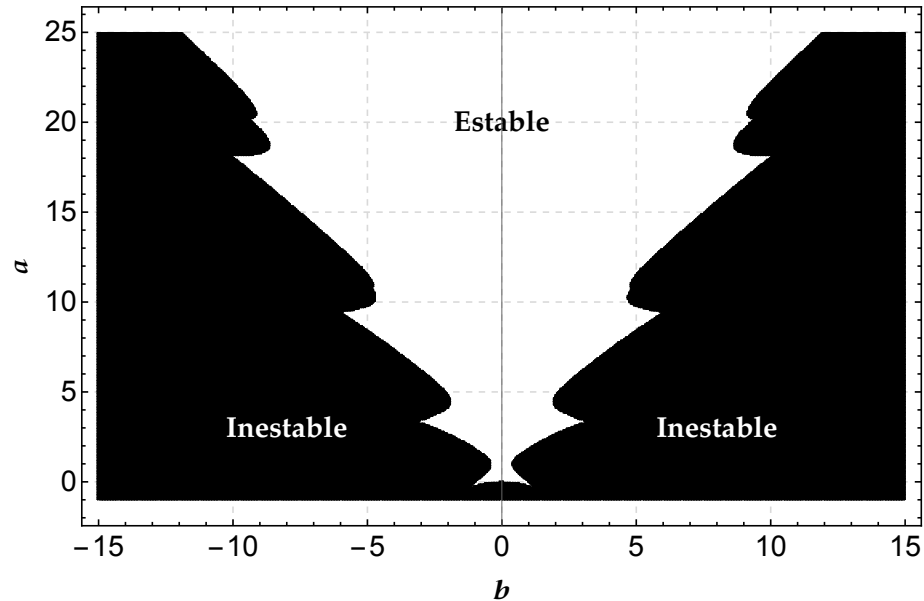


Figura 5.7: Mapa de estabilidad para la ecuación de Mathieu.

5.3. Análisis Simbólico del Convertidor Elevador

En este caso de estudio se presenta de igual forma la conjunción de las metodologías presentadas en este trabajo para obtener funciones de transferencia de la forma (2.3) del modelo conmutado de un convertidor elevador simple, que se muestra en la Figura 5.8; logrado mediante el análisis simbólico. La representación LPV del modelo conmutado del sistema en estudio se obtiene mediante el EHD descrita en la Sección 3. La arquitectura del sistema expandido así como los coeficientes obtenidos dificultan obtener una solución parametrizada en el FD, conservando como parámetro simbólico el ciclo de trabajo ($d(t)$), debido al tamaño de los DDDs obtenidos. Por lo tanto, se realiza el análisis algebraico, resultando en funciones de transferencia, donde sólo se conserva como parámetro simbólico la variable de frecuencia compleja "s", las cuales tienen la forma (2.3). Éstas funciones sólo son posibles a través de los DDDs, las cuales permiten realizar una interpolación parametrizada de la matriz de transición de estados en el TD, dando lugar a la solución parametrizada del modelo conmutado del convertidor elevador, en la cual se conserva la dinámica de los armónicos.

El modelo conmutado de la forma (3.21), donde se considera la resistencia del interruptor, así como la resistencia de la fuente, y la caída de voltaje en el diodo, es

$$A(t) = \begin{pmatrix} \frac{R_i s(t) - R_s - (1-s(t))R_d}{L} & -\frac{1-s(t)}{L} \\ \frac{1-s(t)}{C} & \frac{-1}{C R_L} \end{pmatrix} \quad (5.21)$$

$$f(t) = \begin{pmatrix} \frac{-(1-s(t))V_d + E}{L} \\ 0 \end{pmatrix}$$

donde las variables de estado son $X(t) = [i_L(t) \ v_C(t)]^T$.

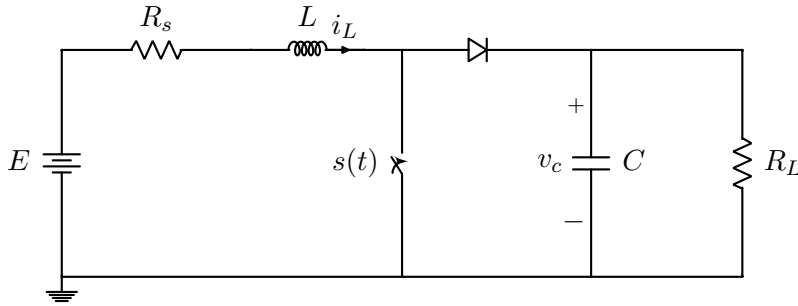


Figura 5.8: Diagrama simple del convertidor elevador.

Coefficientes coseno	Coefficientes seno
$a_0 \rightarrow d(t)$	
$a_1 \rightarrow \frac{\sin(2\pi d(t))}{\pi}$	$b_1 \rightarrow \frac{1 - \cos(2\pi d(t))}{\pi}$
$a_2 \rightarrow \frac{\sin(4\pi d(t))}{2\pi}$	$b_2 \rightarrow \frac{1 - \cos(4\pi d(t))}{2\pi}$
$a_3 \rightarrow \frac{\sin(6\pi d(t))}{3\pi}$	$b_3 \rightarrow \frac{1 - \cos(6\pi d(t))}{3\pi}$

Tabla 5.2: Coeficientes de Fourier de la función $s(t)$.

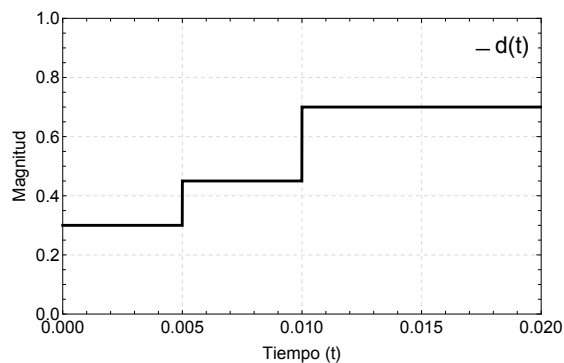
Para llevar a cabo el análisis simbólico se necesita linealizar el sistema (5.21). Para lograr lo anterior, se utiliza la metodología del EHD, mediante la formulación presentada en la Sección 3.5, donde la función de conmutación $s(t)$ se aproxima con $Nh = 3$, como se muestra en la Tabla 5.2. Resultando en un sistema LPV de la forma

Parámetro	Valor
Inductancia, L	$0.2mH$
Capacitancia, C	$0.2mF$
Resistencia de carga, R_L	12.5Ω
Voltaje de entrada, E	$16V$
Caída de voltaje en el diodo, V_d	$0.8V$
Periodo de conmutación, P	$100\mu S$
Resistencia del interruptor, R_i	0.0001Ω
Resistencia del diodo, R_d	0.0001Ω
Resistencia interna de la fuente, R_s	0.1Ω

Tabla 5.3: Parámetros de un convertidor elevador simple.

(3.34), donde la matriz característica del sistema expandido así como la función de forzamiento se definen por (5.22) y (5.23), respectivamente.

Primero, es necesario validar el modelo obtenido, para esto, el ciclo de trabajo se varía como se muestra en la Figura 5.9, iniciando en 30 %, después de 0.005s cambia a un valor de 40 %, y al llegar a 0.01s aumenta a 70 % para mantenerse constante hasta 0.2s. Los parámetros constantes utilizados para la validación del modelo se muestran en la Tabla 5.3. En la Figura 5.10 se muestran las aproximaciones de los estados logrados del sistema original. Las simulaciones muestran la respuesta en el tiempo del convertidor, logrando una aproximación aceptable.

Figura 5.9: Variación del ciclo de trabajo $d(t)$.

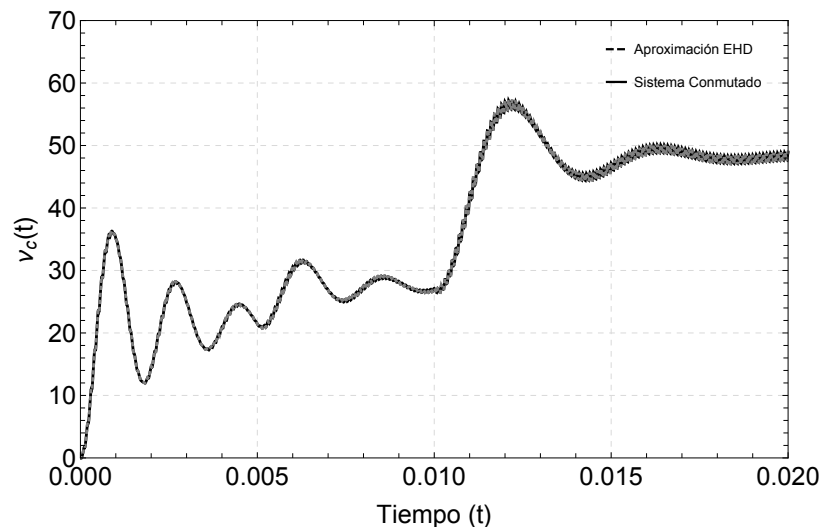
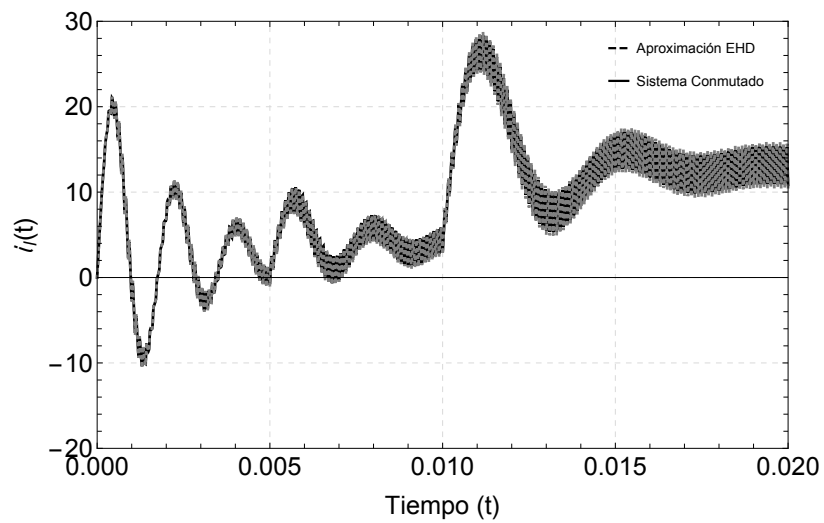
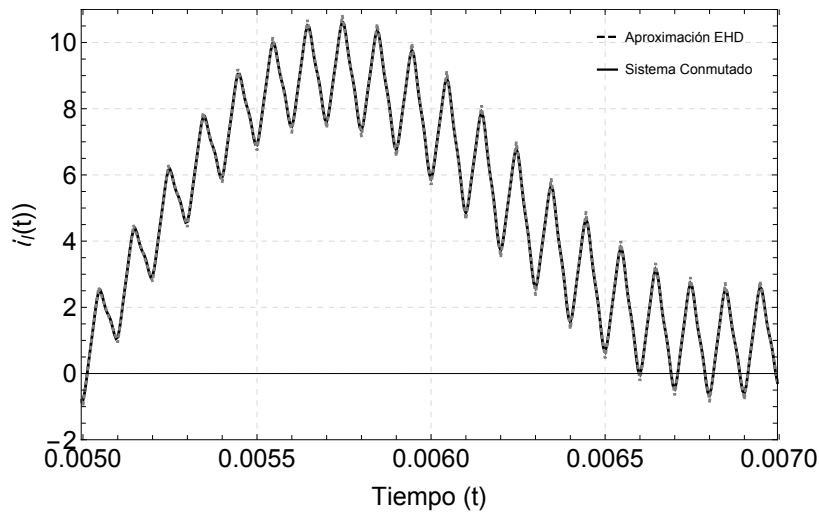
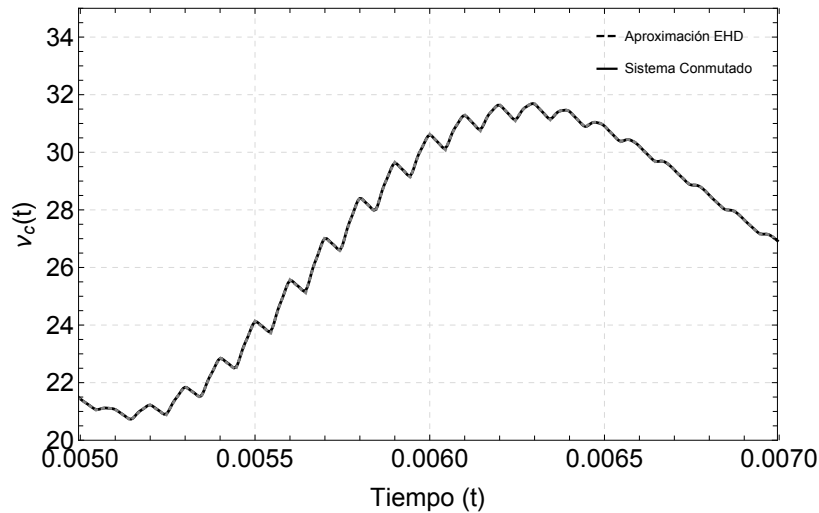


Figura 5.10: Respuesta en el dominio del tiempo de un simple convertidor elevador. a) Corriente del convertidor. b) Voltaje del convertidor.

Adicionalmente se selecciona una ventana de tiempo de la simulación completa para mostrar la precisión de la aproximación, como se muestra en la Figura 5.11, la aproximación obtenida mediante el EHD es tal que no se aprecia una diferencia en comparación con el sistema conmutado.



(a)



(b)

Figura 5.11: Zoom de la respuesta en el dominio del tiempo de los estados de un simple convertidor elevador. a) Corriente del convertidor. b) Voltaje del convertidor.

A continuación se realiza el análisis simbólico del sistema expandido en el marco EHD en el FD. Para esto, se debe tomar en cuenta la estructura de la nueva matriz $\mathbf{A}(\theta)$ (5.22) de dimensión $2(2(3) + 1) = 14$ (3.34), la cual se muestra en la Figura 5.12, donde los cuadros de color negro denotan los elementos no cero, y los elementos

blancos denotan los elementos cero de la matriz. Note que para realizar el análisis simbólico se presentan problemas como la cantidad de elementos no cero, por lo que se considera prácticamente una matriz llena; la dimensión del sistema, así como las funciones no lineales que contienen los elementos de la matriz (vea la Tabla 5.2). De lo anterior, el crecimiento exponencial resulta inminente. En consecuencia, solo es posible llevar a cabo el análisis simbólico algebraico, donde solo se conserva como parámetro la variable compleja "s".

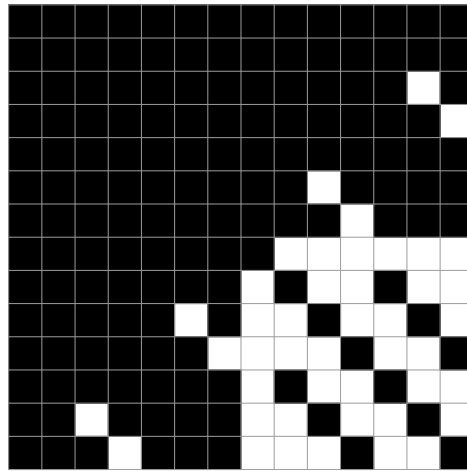


Figura 5.12: Matriz expandida $\mathbb{A}(d(t))$ a través del EHD.

Es importante mencionar que en este paso, la función predefinida *det* de Mathematica[®] le resulta imposible realizar el cálculo del determinante de la matriz $(sI - \mathbb{A}(d(t)))$, de manera que derive una expresión en función de potencias de "s". Este problema se resuelve mediante los DDDs. Por ende, desde que la estructura de la matriz no presenta una dispersidad uniforme, la mejor opción es realizar el orden de expansión por renglones, lo que resulta en un menor número de vértices en comparación con el método de expansión heurístico *grado mínimo*, como se muestra en la Tabla 5.4. Note como realizar la expansión del determinante mediante el orden de expansión heurístico *grado mínimo* resulta en un DDD de tamaño de más de cuatro veces el DDD obtenido por un simple orden de expansión por renglones. Una vez obtenido

Expansión por renglones $ DDD $	Grado mínimo $ DDD $
87,748	361,203

Tabla 5.4: Tamaño del DDD del $\det(sI - \mathbb{A}(d(t)))$ obtenido mediante dos ordenes de expansión.

el DDD que representa el $\det(sI - \mathbb{A}(d(t)))$, es posible realizar un análisis de estabilidad del convertidor elevador, como el presentado en [Rodriguez-Flores19]; en este caso, mediante el cálculo de los $2(2(3) + 1) = 14$ polos del polinomio característico, para una variación del ciclo de trabajo de $[0\%, 100\%]$, como se muestra en la Figura 5.13. Concluyendo que el sistema es globalmente estable para una variación de $d(t) = 0\%, \dots, 100\%$, puesto que la parte real de los polos del polinomio característico se mantienen en el lado izquierdo del plano complejo. Es importante mencionar como la parte real de los polos del polinomio característico se mantienen muy cerca uno de otro.

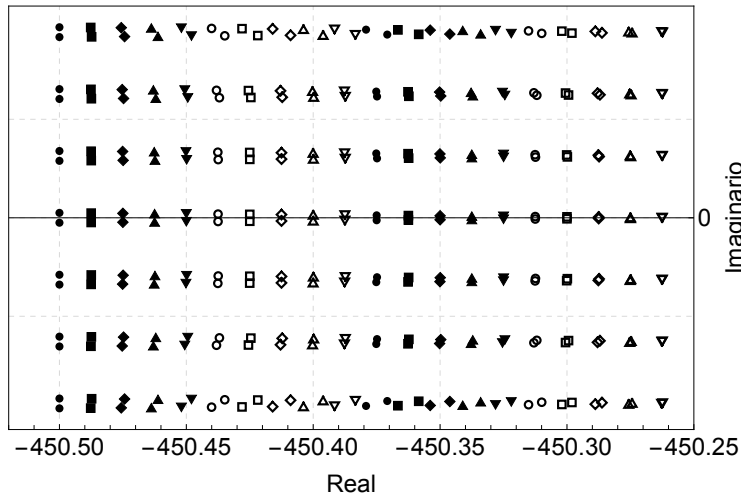


Figura 5.13: Mapa de estabilidad del convertidor elevador basado en DDDs.

Ahora continuando con el análisis simbólico, obtener una expresión en función del ciclo de trabajo $d(t)$ resulta inadecuado, debido a que está inmerso como argumento en funciones trigonométricas (Tabla 5.2), resultando en $(2(3) + 1) = 7$ parámetros

diferentes. Adicionalmente la evaluación de la NILT para obtener la solución en el TD, aumenta la complejidad de la expresión, haciendo inmanejable la simplificación de esta. Sin embargo, a través de los DDDs se logra obtener funciones de transferencia manteniendo como único parámetro la variable s , las cuales se definen como

$$H(s) = (sI - \mathbf{A}(d(t)))^{-1} \quad (5.24)$$

donde $H(s)$ es de tamaño $2(2(3) + 1) = 14$, cada posición es de la forma (2.3), y $(sI - \mathbf{A}(d(t)))^{-1}$ se calcula usando (4.46). Es importante mencionar que (5.24) conserva la dinámica de los armónicos del sistema conmutado. Por ejemplo, para un ciclo de trabajo del 50% la función de transferencia del elemento $[1, 1]$ de $H(s)$ es

$$\begin{aligned} H(s)[1, 1] = & (1.95451 \times 10^{63} + 4.8859 \times 10^{60}s + 4.39963 \times 10^{54}s^2 + 3.38335 \times 10^{51}s^3 + \\ & 1.82425 \times 10^{45}s^4 + 8.2888 \times 10^{41}s^5 + 2.75911 \times 10^{35}s^6 + 8.89608 \times 10^{31}s^7 + \\ & 1.83597 \times 10^{25}s^8 + 4.5873 \times 10^{21}s^9 + 5.424 \times 10^{14}s^{10} + 1.1062 \times 10^{11}s^{11} + \\ & 5804.5s^{12} + s^{13}) / (3.15486 \times 10^{67} + 4.42525 \times 10^{63}s + 4.91561 \times 10^{60}s^2 + \\ & 6.10808 \times 10^{54}s^3 + 3.39224 \times 10^{51}s^4 + 2.24183 \times 10^{45}s^5 + 8.29953 \times 10^{41}s^6 + \\ & 3.20641 \times 10^{35}s^7 + 8.90208 \times 10^{31}s^8 + 2.06626 \times 10^{25}s^9 + 4.58884 \times 10^{21}s^{10} + \\ & 5.97857 \times 10^{14}s^{11} + 1.10634 \times 10^{11}s^{12} + 6305.25s^{13} + s^{14}). \end{aligned} \quad (5.25)$$

De (5.25) observe como el denominador es de orden catorce, mientras que el numerador es de orden trece, debido al procedimiento de la $adj(A)$. Continuando, la solución en el FD para las variables de estado con un ciclo de trabajo del 50%, se logra usando la ecuación (4.23) donde $BU(s)$ es la función de forzamiento $f(t)$ de la ecuación (5.21). Para validar las expresiones obtenidas en el TD mediante la NILT, la Figura 5.14 exhibe la evolución en el tiempo de las variables de estado $i_i(t)$ y $v_c(t)$ en comparación con la respuesta del modelo conmutado. Se observa que las expresiones en el FD, basada en los DDDs, preserva todas las características del sistema original (5.21), con lo cual se valida el desempeño de las herramientas empleadas.

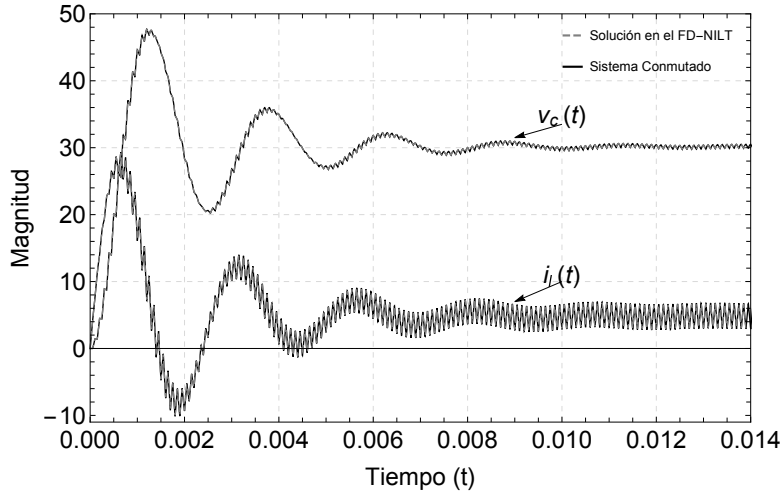


Figura 5.14: Validación en el TD de las soluciones obtenidas en el FD, para las variables de estado, basadas en los DDDs.

Desde que las soluciones parametrizadas son el principal interés, el siguiente paso es obtener la matriz de transición de estados Φ , definida como

$$\Phi = \mathcal{L}^{-1}[H(s)] \quad (5.26)$$

para lo anterior, se explota una característica importante del modelo EHD, donde una variación en el parámetro $d(t)$ presenta una respuesta suave de la matriz de transición de estados en el TD. Por ejemplo, variando el ciclo de trabajo de $d(t) = 0\%, \dots, 100\%$ se obtiene una familia de funciones de transferencia [Vanassche02], para cada elemento en la matriz $H(s)$. Para ilustrar esta idea, la Figura 5.15 exhibe lo que sucede con la respuesta libre del elemento $\Phi_{1,1}$, variando el ciclo de trabajo. Se ve que las funciones difieren cardinalmente en los rangos subamortiguado y sobreamortiguado, donde los rangos para las respuestas están separadas por un valor de 5% en el ciclo de trabajo, para un tiempo de observación de 0.015s que corresponden a 150 ciclos del periodo fundamental, usando $N = 8192$ muestras. Observe que para el caso donde $d(t) = 0\%$ la respuesta del sistema es subamortiguada, presentando oscilaciones, mientras que el valor de $d(t)$ se acerca al 100% las oscilaciones disminuyen gradualmente, presentando una respuesta sobreamortiguada.

Note que para un tiempo corto de observación la respuesta para diferentes valores del ciclo de trabajo es bastante similar. Para ilustrar lo anterior, en la Figura 5.16 se muestra un acercamiento de la Figura 5.15 para un tiempo de $0 - 0.000012s$.

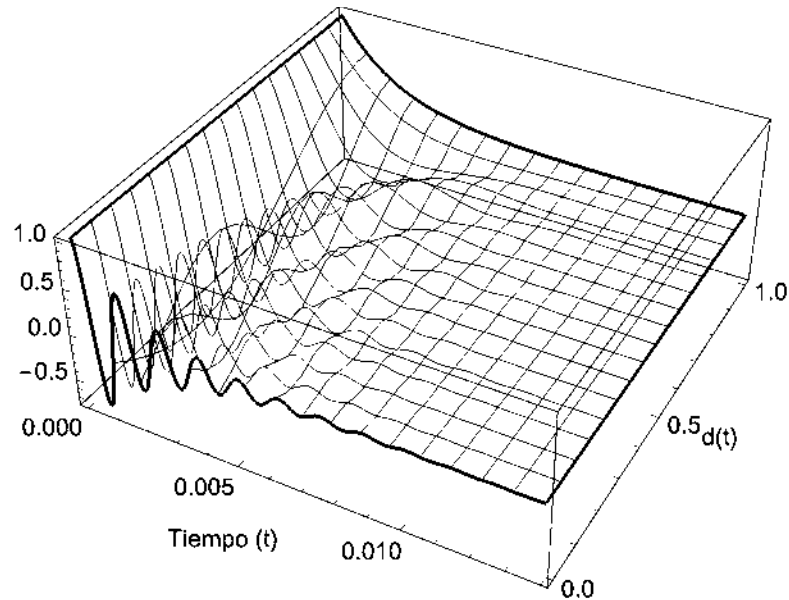


Figura 5.15: Respuesta libre en el TD del elemento $\Phi_{1,1}$ con diferentes ciclos de trabajo.

Esta familia de funciones de transferencia se unifican mediante una interpolación en el TD a través de la NILT, dando lugar a una aproximación de la matriz de transición de estados Φ para un tiempo de observación $T = P/10 = 0.00001s$, donde P corresponde al periodo de conmutación del sistema (vea Tabla 5.3), con $N = 2048$ muestras. La interpolación se realiza usando seis puntos espaciados de tal manera que se eviten las oscilaciones de Gibbs [Wedepohl83], para valores del ciclo de trabajo de $d(t) = 0\%, \dots, 100\%$ con incrementos de 5% , lo que resulta en 21 evaluaciones para el ciclo de trabajo. Con lo cual se obtiene, para cada elemento de la matriz Φ una interpolación respecto al tiempo, para cada variación del $d(t)$. Una vez obtenidas las interpolaciones con respecto al tiempo se realiza la interpolación con respecto a $d(t)$, logrando así obtener el elemento $\Phi_{i,j}$ de la matriz de transición en una forma

parametrizada. Lo mismo se realiza para los elementos restantes de Φ , calculando en total $2(2(3) + 1) \times 2(2(3) + 1) = 196$ interpolaciones en el TD. Una característica de las funciones obtenidas es que solo presentan operaciones como sumas, restas y multiplicaciones, evitando funciones racionales. Para ilustrar el resultado obtenido, para un $d(t) = 50\%$ el elemento $\Phi_{1,1}(d(t))$ tiene la forma

$$\begin{aligned} \Phi_{1,1}(0.5) = & 3.17192 \times 10^{23}t^5 - 6.93842 \times 10^{18}t^4 + 5.74047 \times 10^{13}t^3 - \\ & 2.27693 \times 10^8t^2 - 106.102t + 0.999751. \end{aligned} \quad (5.27)$$

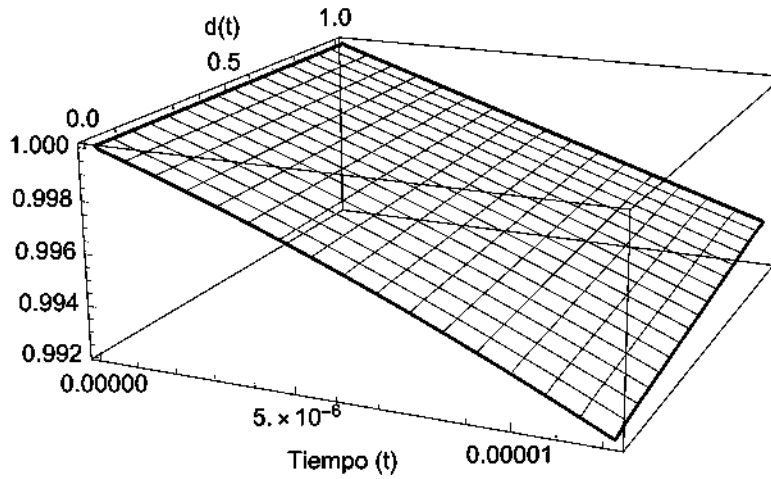


Figura 5.16: Respuesta libre en el TD del elemento $\Phi_{1,1}$ con diferentes ciclos de trabajo para un tiempo de $t_0 = 0$ a un $t_f = 0.000012s$.

Desde que la aproximación obtenida es solo para un tiempo de observación T , la solución parametrizada se lleva acabo en el DTD como se describe en la Sección 4.1.2, de manera que el modelo resultante de la aproximación sea de la forma

$$\mathcal{X}_k = \mathbb{A}_d(d(t))\mathcal{X}_{k-1} + \mathbb{B}_d(d(t))\mathbb{F}(d(t)). \quad (5.28)$$

donde

$$\mathbb{A}_d(d(t)) = \Phi \quad \text{con } t = h$$

y

$$\mathbb{B}_d(d(t)) = \int_0^h \Phi dt$$

con $h = T/2 = P/10/2 = P/20$, logrando una aproximación de veinte puntos para cada ciclo de conmutación.

Para validar las soluciones parametrizadas obtenidas (5.28), en la Figura 5.17 presenta la evolución en el tiempo del estado $i_l(t)$ en comparación con el modelo EHD, donde el ciclo de trabajo toma los valores de 31 %, 67 %, 83 % y 89 % de manera que se destaque el desempeño de la interpolación obtenida, debido a que fue realizada para incrementos en el ciclo de trabajo del 5 %.

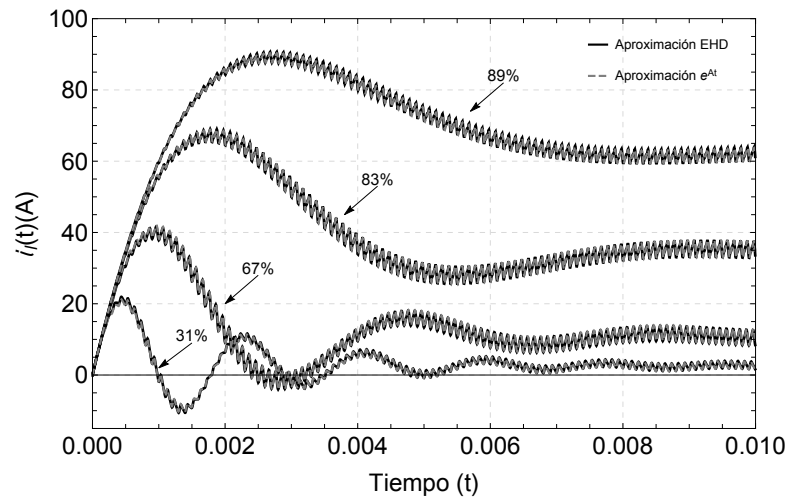


Figura 5.17: Respuesta en el TD del estado $i_l(t)$ para diferente valores del ciclo de trabajo.

5.4. Control Predictivo Basado en Modelo

El control predictivo es un algoritmo de control óptimo, que utiliza un modelo del sistema para predecir las entradas más apropiadas de control, y las futuras respuestas de la planta durante un periodo de tiempo, basadas en un proceso de optimización dinámica. Las entradas de control se predicen para cada paso de integración haciendo

uso del modelo del sistema para un determinado horizonte de predicción, así como los valores conocidos hasta el instante k de los estados. La entrada de control óptima se establece a partir de un proceso iterativo con respecto a la minimización de una función objetivo sujeto a algunas restricciones para mantener el proceso lo más próximo posible a la referencia deseada. En consecuencia, solo se aplica el primer valor de la secuencia de entrada de control óptima.

Para la implementación de MPC, se necesita el modelo del sistema de tiempo discreto, que describe la evolución del estado $x(k)$ [Borrelli17], por lo tanto considere el siguiente sistema LTI de tiempo discreto como

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k). \quad (5.29)$$

Entonces el objetivo de optimización es encontrar el vector de entradas,

$$U_{N_p} = [u(0), \dots, u(N_p - 1)]$$

de forma que la función objetivo se optimice durante un horizonte de predicción N_p . Entonces, de forma general

$$\min_{U_{N_p}} \sum_{k=0}^{N_p-1} q(x(k), u(k)) + p(x(N_p)) \quad (5.30)$$

donde $q(x, u)$ es el costo de etapa y $p(x)$ es el costo terminal, sujeto a algunas restricciones, por ejemplo, restricciones en las variaciones de los estados, así como restricciones en la entrada. Para determinar la solución óptima de U_{N_p} , existe una variedad de software y algoritmos que explotan la estructura del problema de modo que pueden resolverse de forma confiable y eficiente. Por lo tanto, el problema de MPC en convertidores de potencia se puede definir como la determinación de una acción de control apropiada $s(t)$ (señales de conmutación del convertidor) que llevará a las variables del sistema lo más cerca posible al valor de referencia deseado.

5.5. MPC para sistemas LPV: Convertidor Elevador

En esta sección se presenta la aplicación de la solución parametrizada del convertidor elevador (5.28) obtenida en la Sección 5.3, utilizada como modelo de predicción en el proceso de optimización de MPC, descrito en la Sección 5.4. La formulación del problema se presenta en [Morfin-Magaña18], la cual se describe a continuación. Se desea controlar las variables de estado de manera que alcancen la referencia deseada en el menor tiempo posible. Por lo tanto, la entrada de control $d(t)$ se obtiene resolviendo el siguiente problema de optimización cuadrático

$$\begin{aligned} \min_{d(t)} \quad & \sum_{k=1}^{H_p} [\mathcal{X}_k - \hat{\mathcal{X}}_k]^2 \\ \text{sujeto a : } \quad & \mathcal{X}_k = \mathbb{A}_d(d(t))\mathcal{X}_{k-1} + \mathbb{B}_d(d(t))\mathbb{F}(d(t)) \text{ para } k = 1, \dots, H_p \\ & 0.05 < d(t) < 0.95 \end{aligned} \quad (5.31)$$

donde H_p es el horizonte de predicción, y $\hat{\mathcal{X}}_k$ representa la referencia deseada. Este problema de optimización cuadrático se puede resolver por métodos directos como Nelder-Mead, como se presentó en la Sección 5.1. Explotando las características de la solución parametrizada, el horizonte de predicción se considera de $H_p = 60$, de modo que se realice una predicción de tres ciclos de conmutación. El control del voltaje en el convertidor se realiza de manera indirecta, regulando la corriente del inductor, por lo tanto la referencia deseada $\hat{\mathcal{X}}_k$ se obtiene mediante el balance de potencia, de modo que

$$i_{L_{ref}} = \frac{v_{C_{ref}}^2}{R_L \times E} \quad (5.32)$$

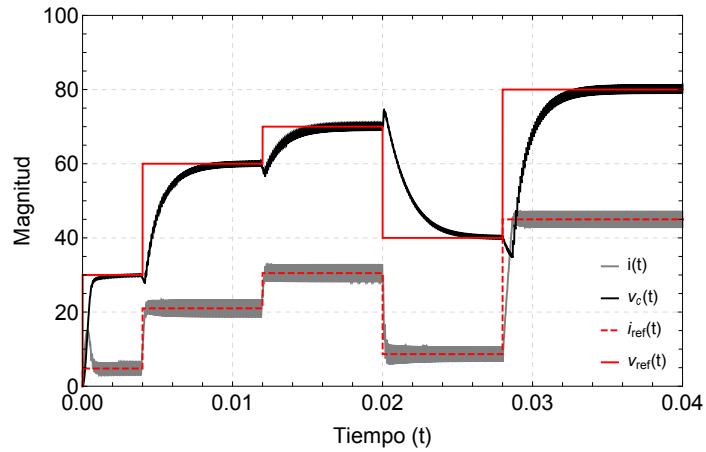
donde R_L y E se consideran valores constantes, los cuales se muestran en la Tabla 5.3, $i_{L_{ref}}$ es la corriente del inductor de referencia, y $v_{C_{ref}}$ es el voltaje deseado en el capacitor. Por lo tanto, la función objetivo se fija como

$$\sum_{k=1}^{H_p} [i_{L_k} - i_{L_{ref_k}}]^2. \quad (5.33)$$

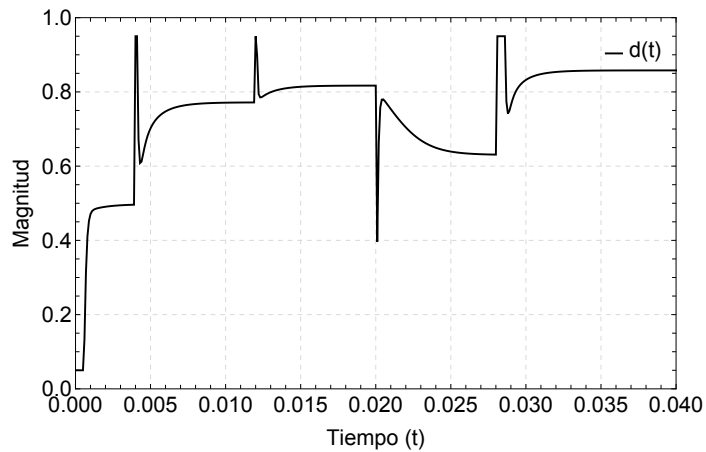
La ejecución del MPC se presenta en la Figura 5.18 a), con un tiempo de simulación de $0.04s$, presentando un comportamiento robusto para una variación abrupta en el voltaje de referencia de $30V - 80V$; representado por la línea continua roja en la Figura 5.18 a). Note el corto tiempo que requiere la corriente del inductor para llegar a la referencia deseada. Adicionalmente en la Figura 5.18 b), se muestra los cambios realizados en el ciclo de trabajo al variar el voltaje de referencia, exhibiendo un comportamiento acorde al voltaje deseado. Se logra la reducción del esfuerzo computacional que requiere el cómputo del horizonte de predicción desde que la solución parametrizada obtenida en la Sección 5.3 presenta una estructura relativamente simple y rápida de evaluar, con la cual predecir un periodo de conmutación solo requiere veinte puntos. Comparando los tiempos de computación para un periodo de conmutación del horizonte de predicción, en la implementación [Morfin-Magaña18] donde $H_p = 100$, se tiene un tiempo de $0.048s$ aproximadamente, mientras que el tiempo que requiere la solución parametrizada es de $0.011s$ aproximadamente, logrando reducir el tiempo de cómputo del horizonte de predicción en más del 400 %.

5.6. Conclusiones del Capítulo

Se logró obtener soluciones parametrizadas de sistemas LPV, derivadas del análisis simbólico. Para la aplicación industrial del acondicionador de potencia de línea, se logró minimizar el contenido armónico del voltaje de línea, mediante la optimización paramétrica de filtro pasivo, basado en los DDDs. Por otra parte, se logró obtener la solución parametrizada de la ecuación de Mathieu, en el marco de referencia del EHD, la cual presenta una aproximación indistinguible al variar los parámetros, así como el estudio de estabilidad, el cuál se mejoró a través de los DDDs, logrando reducir drásticamente el tiempo de computo. Para el convertidor elevador en el EHD, se realizó un estudio similar de estabilidad. Se logró obtener una familia de funciones de transferencia al variar el parámetro $d(t)$ dando lugar a la interpolación de la



(a)



(b)

Figura 5.18: Respuesta en el TD de un simple convertidor elevador. a) Desempeño de MPC para una referencia variante. b) Variación del ciclo de trabajo contra cambios de referencia.

matriz de transición de estados en el TD, basado en los DDDs, con la cuál se lograron las soluciones parametrizadas del convertidor elevador. Por último, la solución parametrizada del convertidor elevador se usó en el proceso de optimización de MPC logrando reducir en un tiempo considerable el esfuerzo computacional del horizonte de predicción.

Capítulo 6

Conclusiones y Trabajos Futuros

Para concluir este trabajo, se presentan a continuación las conclusiones generales y los trabajos futuros propuestos.

6.1. Conclusiones Generales

En este trabajo se lograron obtener soluciones parametrizadas de sistemas LPV de gran escala. Se analizó la formulación del EHD para sistemas conmutados, los cuales se transforman en sistemas LPV. Estas representaciones tienen características sobresalientes importantes, como es la posibilidad de aplicar la teoría de sistemas lineales, lo que da lugar a análisis de estabilidad, así como obtener la evolución dinámica de las variables de estado. Otras características sobresalientes explotadas son la disponibilidad de las variables de estado originales, y la posibilidad de mantener parámetros de interés de manera simbólica. Estas ventajas se utilizaron en el análisis simbólico avanzado basado en los DDDs en el FD. La implementación de ésta herramienta simbólica se llevó a cabo en el software Mathematica[®]. Aunque éste es un software poderoso, con un lenguaje de programación de alto nivel y con gran potencia computacional, su función predefinida *Det* para el cálculo de determinantes se superó en varios aspectos por la implementación de los DDDs. Por otra parte, se logró obtener un desempeño

similar al presentado en [Shi10b], en el cual la implementación se realiza en el lenguaje de programación C++. Si bien, los DDDs son la herramienta simbólica más eficiente hasta ahora, sin embargo depende fuertemente de la aplicación a desarrollar. Se ha demostrado en este trabajo el gran impacto del desempeño que tiene esta herramienta simbólica, permitiendo realizar análisis de estabilidad, así como soluciones parametrizadas de sistemas LPV. Los análisis de estabilidad realizados se basan en el análisis de los polos del polinomio característico, el cual se obtiene a través de los DDDs. Este enfoque demostró un gran desempeño para determinar la estabilidad del caso de estudio presentado de la Ecuación de Mathieu, logrando reducir drásticamente el tiempo de computo.

Las soluciones parametrizadas de sistemas LPV se obtienen de diversos modos presentados en los casos de estudio. De las soluciones parametrizadas logradas se aprecia: (i) son adecuadas y precisas para realizar procesos de optimización paramétrica, (ii) la aproximación lograda de la evolución en el tiempo de las variables de estado originales es tal que resulta indistinguible ante presencia de variación de parámetros, y (iii) se logra reducir drásticamente el tiempo de evaluación. Sin embargo, para el caso del convertidor elevador resulta inadecuado obtener de manera directa la solución parametrizada requerida, por lo tanto se logra una interpolación de la matriz de transición de estados en el TD, con lo cual resulta en una expresión simplificada y compacta, basado en funciones de transferencia que solo los DDDs permiten obtener. Esta solución parametrizada, se emplea en el proceso de MPC, para la evaluación del horizonte de predicción, logrando disminuir drásticamente el tiempo de evaluación del horizonte de predicción requerido en el proceso de optimización de MPC.

6.2. Trabajos Futuros

1. Linealización de los coeficientes del PWM de frecuencia constante, con la intención de reducir el número de parámetros simbólicos.

2. Reducción de circuitos para el análisis simbólico de sistemas electrónica de potencia.
3. Analizar la estimación de expresiones simbólicas de polos y ceros de funciones de transferencia.
4. Desarrollar ordenes de expansión para el tipo de matrices obtenidas del EHD.
5. Desarrollar análisis de pequeña señal en sistemas de potencia, basado en los DDDs.
6. Desarrollar análisis de controlabilidad así como de observabilidad, basado en los DDDs.
7. Continuar con la aplicación del análisis simbólico en sistemas de potencia, basado en DDDs.

Referencias

- [Almer13] Almer, S. y Morari, M. Efficient online solution of multi-parametric mixed-integer quadratic problems. *International Journal of Control*, 86(8):1386–1396, 2013.
- [Borrelli17] Borrelli, F., Bemporad, A., y Morari, M. *Predictive Control for linear and hybrid systems*. Cambridge University Press, 1^a ed., 2017.
- [Chen12] Chen, C.-T. *Linear System Theory and Design*. Oxford University Press, 4^a ed., 2012.
- [Cheng18] Cheng, L., Acuna, P., Aguilera, R. P., Jiang, J., Wei, S., Fletcher, J. E., y Lu, D. D. C. Model predictive control for dc-dc boost converters with reduced-prediction horizon and constant switching frequency. *IEEE Transactions on Power Electronics*, 33(10):9064–9075, 2018.
- [Collado18] Collado, M. J. *New Perspectives and Applications of Modern Control Theory*, cap. Hill Equation: From 1 to 2 Degrees of Freedom, págs. 43–71. Springer, 2018.
- [Day65] Day, S. J., Mullineux, N., y Reed, J. R. Developments in obtaining transient response using fourier transforms. part i: Gibbs

- phenomena and fourier integrals. *Int. J. Elect. Eng. Educ.*, 3:501–506, 1965.
- [Dehghanzadeh18] Dehghanzadeh, A., Farahani, G., Vahedi, H., y Al-Haddad, K. Model predictive control design for dc-dc converters applied to a photovoltaic system. *International Journal of Electrical Power Energy Systems*, 103:537–544, 2018.
- [Errouissi16a] Errouissi, R., Al-Durra, A., y Muyeen, S. M. A robust continuous-time mpc of a dc-dc boost converter interfaced with a grid-connected photovoltaic system. *IEEE Journal of Photovoltaics*, 6(6):1619–1629, Nov 2016.
- [Errouissi16b] Errouissi, R., Muyeen, S. M., Al-Durra, A., y Leng, S. Experimental validation of a robust continuous nonlinear model predictive control based grid-interlinked photovoltaic inverter. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 63(7):4495–4505, 2016.
- [Fischer11] Fischer, C., Mariéthoz, S., y Morari, M. Multisampled hybrid model predictive control for pulse-width modulated systems. *in 50th IEEE Conference on Decision and Control, Orlando, FL, USA*, págs. 3074–3079, Dec 2011.
- [Geyer14] Geyer, T. y Quevedo, D. E. Multistep finite control set model predictive control for power electronics. *IEEE Transactions on Power Electronics*, 29(12):6836–6846, 2014.
- [Kakosimos11] Kakosimos, P. E. y Kladas, A. G. Implementation of photovoltaic array mppt through fixed step predictive control technique. *Renew Energy*, 36:2508–2514, 2011.

- [Kakosimos13] Kakosimos, P. E., Kladas, A. G., y Manias, S. N. Fast photovoltaic system voltage-current-oriented mppt employing a predictive digital current-controlled converter. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 60(12):5673–5685, 2013.
- [Kouro09] Kouro, S., Cortes, P., Ammann, R. V. U., y Rodriguez, J. Model predictive control -a simple and powerful method to control power converters. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 56(6):1826–1838, June 2009.
- [Lashab18] Lashab, A., Sera, D., Guerrero, J. M., Mathe, L., y Bouzid, A. Discrete model-predictive-control-based maximum power point tracking for pv systems: Overview and evaluation. *IEEE Transactions on Power Electronics*, 33(8):7273–7287, Aug 2018.
- [Lefebvre17] Lefebvre, T., De Belie, F., y Crevecoeur, G. Polynomial chaos explicit solution of the optimal control problem in model predictive control. *2017 IEEE International Conference on Advanced Intelligent Mechatronics (AIM)*, Jul 2017.
- [Metry17] Metry, M., Shadmand, M. B., Balog, R. S., y Abu-Rub, H. Mppt of photovoltaic systems using sensorless current-based model predictive control. *IEEE Transactions on Industry Applications*, 53(2):1157–1167, 2017.
- [Miraftab01] Miraftab, V. y Abdipour, A. Harmonic balance analysis of a microwave balanced power amplifier. *Canadian Conference on Electrical and Computer Engineering 2001. Conference Proceedings (Cat. No.01TH8555)*, 2001.
- [Mohan09] Mohan, N., Undeland, T., y Robbins, W. *Electronica de po-*

- tencia, convertidores aplicaciones y diseño*. The McGraw-Hill Companies, Inc., 3^a ed., 2009.
- [Moler03] Moler, C. y Van Loan, C. Nineteen dubious ways to compute the exponential of a matrix, twenty-five years later. *SIAM Review*, 45, 2003.
- [Moreno08a] Moreno, P. y Ramirez, A. Implementation of the numerical laplace transform: A review. *IEEE Transactions on Power Delivery*, 23(4), Oct 2008.
- [Moreno08b] Moreno, P. y Ramirez, A. Implementation of the numerical laplace transform: A review task force on frequency domain methods for emt studies, working group on modeling and analysis of system transients using digital simulation, general systems subcommittee, iee power engineering society. *IEEE Transactions on Power Delivery*, 23(4):2599–2609, Oct 2008.
- [Morfin-Magaña18] Morfin-Magaña, R., Rodriguez-Flores, R., Ramos-Paz, S., Rico-Melgoza, J. J., y Ornelas-Tellez, F. Model predictive control for linear parameter-varying systems. *IEEE International Autumn Meeting on Power, Electronics and Computing ROPEC*, 2018.
- [Morfin-Magaña19] Morfin-Magaña, R., Rico-Melgoza, J. J., Ornelas-Tellez, F., y Vasca, F. Complementarity model of a photovoltaic power electronic system with model predictive control. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Regular Papers*, 66(11):4402–4414, Nov 2019.
- [Mosa17] Mosa, M., Shadmand, M. B., Balog, R. S., , y Rub, H. A. Efficient maximum power point tracking using model predictive

- control for photovoltaic systems under dynamic weather condition. *IET Renewable Power Generation*, 11(11):1401–1409, 2017.
- [Nelder65] Nelder, J. y Mead, R. Simplex for function minimization. *The Computer Journal*, 7(4):308–313, 1965.
- [Ogata10] Ogata, K. *Ingeniería de Control Moderna*. Prentice Hall, Inc, 5^a ed., 2010.
- [Parand17] Parand, K. y Delkhosh, M. Operational matrices to solve non-linear riccati differential equations of arbitrary order. *St. Petersburg Polytechnical University Journal: Physics and Mathematics*, 3(3):242–254, 2017.
- [Quin05] Quin, Z., Tan, X.-D., y Cheng, C. Symbolic analysis and reduction of vlsi circuits. *Kluwer Academic Publishers*, Boston, 2005.
- [Ramirez04] Ramirez, A., Gomez, P., Moreno, P., y Gutierrez, A. Frequency domain analysis of electromagnetic transients through the numerical laplace transform. *presented at the IEEE Generak Meeting, Denver, CO*, Jun. 2004.
- [Razzaghi90] Razzaghi, M. Optimal control of linear time-varying systems via fourier series. *Journal of Optimization Theory and Applications*, Vol. 65(No. 2):375–384, mayo 1990.
- [Rodriguez-Flores19] Rodriguez-Flores, R. Una nueva formulación de dominio armónico extendido en el dominio del tiempo para el análisis de convertidores de potencia, Tesis de Maestría, División de Es-

- tudios de Posgrado de la Facultad de Ingeniería Eléctrica, Feb 2019.
- [Rodriguez-López19] Rodriguez-López, E., Ramos-Paz, S., Rico-Melgoza, J. J., y Ornelas-Tellez, F. Parametric passive-filter optimization based on the determinant decision diagram. *IEEE International Autumn Meeting on Power, Electronics and Computing ROPEC*, 2019.
- [Rodriguez13] Rodriguez, J., Kazmierkowski, M. P., Espinoza, J., Zanchetta, P., Abu-Rub, H., Young, H. A., y Rojas, C. A. State of the art of finite control set model predictive control in power electronics. *IEEE Transactions on Industrial Informatics*, 9(2):1003–1016, May 2013.
- [Rugh02] Rugh, W. *Nonlinear system theory: the volterra/wiener approach*. London: Johns Hopkins University Press, 2002.
- [Sajadian16] Sajadian, S. y Ahmadi, R. Model predictive-based maximum power point tracking for gridtied photovoltaic applications using a z-source inverter. *IEEE Transactions on Power Electronics*, 31(11):7611–7620, 2016.
- [Sajadian17] Sajadian, S. y Ahmadi, R. Distributed maximum power point tracking using model predictive control for photovoltaic energy harvesting architectures based on cascaded power optimizers. *IEEE Journal of Photovoltaics*, 7(3):849–857, 2017.
- [Sajadian19] Sajadian, S., Ahmadi, R., y Zargarzadeh, H. Extremum seeking based model predictive mppt for gridtied z-source inverter for photovoltaic systems. *IEEE Journal of Emerging and Selected Topics in Power Electronics*, to appear, 2019.

- [Sakizlis05] Sakizlis, V., Perkins, J. D., y Pistikopoulos, E. N. Explicit solutions to optimal control problems for constrained continuous-time linear systems. *IEE Proceedings - Control Theory and Applications*, 152(4):443–452, Aug 2005.
- [Shadmand14] Shadmand, M. B., Balog, R. S., y Abu-Rub, H. Model predictive control of pv sources in a smart dc distribution system: Maximum power point tracking and droop control. *IEEE Transactions on Energy Conversion*, 29(4):913–921, 2014.
- [Shi98] Shi, C.-J. y Tan, X. Efficient derivation of exact s-expanded symbolic expressions for behavioral modeling of analog circuits. *Proceedings of the IEEE 1998 Custom Integrated Circuits Conference (Cat. No.98CH36143)*, May 1998.
- [Shi00] Shi, C. J. R. y Tan, X.-D. Canonical symbolic analysis of large analog circuits with determinant decision diagrams. *IEEE Transactions on Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems*, 19(1):1–18, Jan 2000.
- [Shi01a] Shi, C.-J. y Tan, X. Compact representation and efficient generation of s-expanded symbolic network functions for computer-aided analog circuit design. *IEEE Transactions on Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems*, 20(7), Jul 2001.
- [Shi01b] Shi, C.-J. R. y Tang, X.-D. Compact representation and efficient generation of s-expanded symbolic network functions for computer-aided analog circuit design. *IEEE Transactions on Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems*, 20(7), July 2001.

- [Shi10a] Shi, G. Computational complexity analysis of determinant decision diagram. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs*, 57(10):828–832, Oct 2010.
- [Shi10b] Shi, G. A simple implementation of determinant decision diagram. *IEEE/ACM International Conference on Computer-Aided Design (ICCAD)*, págs. 828–832, Nov 2010.
- [Shi14] Shi, G., Sheldon, X., y Tletlo-Cuatle, E. *Advanced Symbolic Analysis for VLSI System Methods and Applications*. Springer, 2014.
- [Strang06] Strang, G. *Linear algebra and its applications*. Thompson learning, 2006.
- [Tan99] Tan, X. y Shi, C.-J. Interpretable symbolic small-signal characterization of large analog circuits using determinant decision diagrams. *Design, Automation and Test in Europe Conference and Exhibition, 1999. Proceedings (Cat. No. PR00078)*, Mar 1999.
- [Uribe02] Uribe, F. A., Naredo, J. L., Moreno, P., y Guardado, L. Electromagnetic transients in underground transmission systems through the numerical laplace transform. *Int. J. Elect. Power Energy Syst.*, 24/3:215–221, Mar. 2002.
- [Vanassche02] Vanassche, P., Gielen, G., y Sansen, W. Symbolic modeling of periodically time-varying systems using harmonic transfer matrices. *IEEE Transactions on Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems*, 21(9), Sep 2002.

- [Verhaegen02] Verhaegen, W. y Gielen, G. G. E. Symbolic determinant decision diagrams and their use for symbolic modeling of linear analog integrated circuits. *Analog Integrated Circuits and Signal Processing*, 31(2):119–130, May 2002.
- [Weber18] Weber, H. y Mathis, W. Analysis and design of non-linear circuits with a self-consistent carleman linearization. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers*, 65(12):4272–4284, Dec 2018.
- [Wedepohl83] Wedepohl, L. M. Power system transients: Errors incurred in the numerical inversion of the laplace transform. *in Proc. 26th Midwest Symp. Circuits Systems*, págs. 174–178, Aug. 1983.
- [Wilcox78] Wilcox, D. J. Numerical laplace transformation and inversion. *Int. J. Elect. Eng. Educ.*, 15:247–265, 1978.
- [Williams91] Williams, S. M. y Hoft, R. G. Adaptive frequency domain control of pwm switched power line conditioner. *IEEE Transactions on Power Electronics*, 6(4):665–670, Oct 1991.
- [Yoon04] Yoon, S. y De Micheli, G. An application of zero-suppressed binary decision diagrams to clustering analysis of dna micro-array data. *En The 26th Annual International Conference of the IEEE Engineering in Medicine and Biology Society*, tomo 2, págs. 2925–2928. Sep. 2004.