



---

---

UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN  
NICOLÁS DE HIDALGO

FACULTAD DE INGENIERÍA ELÉCTRICA

DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO

“MODELADO DE RESPUESTAS  
DINÁMICAS DE SISTEMAS  
USANDO DESCOMPOSICIÓN  
ARMÓNICA: APLICACIÓN A  
SERIES DE TIEMPO”

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MAESTRO EN CIENCIAS EN  
INGENIERÍA ELÉCTRICA

P R E S E N T A :

ING. ÁNGEL AGUSTÍN GARIBO  
MORANTE



ASESOR  
DR. FERNANDO ORNELAS TÉLLEZ

MORELIA, MICHOACÁN, JUNIO DE 2020





## MODELADO DE RESPUESTAS DINÁMICAS DE SISTEMAS USANDO DESCOMPOSICIÓN ARMÓNICA: APLICACIÓN A SERIES DE TIEMPO

Los Miembros del Jurado de Examen de Grado aprueban la **Tesis de Maestría en Ciencias en Ingeniería Eléctrica de Ángel Agustín Garibo Morantes**

Dr. Juan José Flores Romero  
*Presidente del Jurado*

Dr. Fernando Ornelas Téllez  
*Director de Tesis*

Dr. J. Jesús Rico Melgoza  
*Vocal*

J. Jesús Rico Melgoza

Dr. Roberto Tapia Sánchez  
*Vocal*

Dra. Adriana del Carmen Téllez Anguiano  
*Revisor Externo (ITM)*

Dr. Roberto Tapia Sánchez  
*Jefe de la División de Estudios de Posgrado  
de la Facultad de Ingeniería Eléctrica. UMSNH.  
(Por reconocimiento de firmas)*

UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN NICOLÁS DE HIDALGO  
Marzo 2020



Doy gracias y dedico esta tesis a mi futura esposa Gaby y a mi hija la pinchita de Azul, que las amo como a nada en este mundo, doy gracias por su amor y apoyo durante este proceso.

A mis queridos padres Agustín y María, que de ellos aprendí y de ellos soy, pues de cada uno he tomado muchas enseñanzas que han formado a mi persona, sin ellos no estaría en este lugar y momento de mi vida.

A mis hermanas Esmeralda la ñu mayor y a Rosa Isela la ñu mediano, a quienes admiro y quiero mucho, les agradezco por su cariño y apoyo que me han brindado desde niños, y que para ellas soy el ñu pequeño.

A mis suegros, por apoyarnos durante estos últimos años en el cuidado de nuestra hija con mucho amor, abriéndome también las puertas de su casa y confiándome la protección y cuidado de dos hermosos seres.

A mi estimado director de tesis, a quien admiro mucho por su valiosa contribución a la ciencia en México y en el mundo, el Dr. Fernando Ornelas Tellez.

A la Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, donde me formé como ingeniero, y también como humano, y ahora, como Maestro en Ciencias de la ingeniería.

A los ciudadanos mexicanos que confían en la ciencia como medio para poder tener un mejor país, y que a través del Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) se me apoyo económicamente durante la realización de esta tesis.



# Resumen

En este trabajo de tesis se propone e implementa una metodología de descomposición armónica para modelar respuestas de sistemas dinámicos. Los modelos matemáticos presentados son del tipo univariable y multivariable, los cuales se formulan en espacio de estados a partir de un análisis de señales y series de Fourier, lo que constituye una de las características distintivas de este trabajo de tesis, esto es, la obtención de un modelo dinámico en espacio de estados de una señal. Para el modelado, inicialmente se realiza un pre-procesamiento buscando obtener un mejor rendimiento computacional, usando un suavizado de media móvil y un análisis mediante la transformada rápida de Fourier, con el objetivo de conocer y seleccionar el contenido armónico que más contribuye a la representación de las series de tiempo así como para reducir el ruido presente en la señal. Posteriormente, basándose en ese contenido armónico más representativo, se hace una definición de variables, y en consecuencia se formula la estructura del modelo en espacio de estados, que tiene la propiedad de ser un sistema lineal variante en el tiempo, y es usado para el diseño de un observador óptimo de estados (filtro de Kalman-Bucy), que en esta tesis es llamado *observador óptimo de armónicos*. Una vez que el observador converge y los estados se mantienen constantes, se obtienen los parámetros correspondientes a amplitudes y fases del contenido espectral mediante relaciones algebraicas de las variables de estado, y de esta forma se tiene un modelo matemático que representa a las señales. Finalmente, el modelo es utilizado para aplicaciones de pronóstico, en diferentes intervalos de tiempo. Las señales o respuestas a analizar son series de tiempo provenientes de observaciones reales de diferentes variables del clima y de señales bioeléctricas provenientes del cerebro humano. Además, se compara la técnica presentada en este trabajo con otras que se usan para el modelado, como son redes neuronales artificiales, modelos autorregresivos integrados de promedio móvil, y con un modelo propuesto basado en un regresor con polinomios ortogonales. Para los casos de estudio de modelado y pronóstico, y con el fin de evaluar el rendimiento de las metodologías propuestas, se hace un análisis cuantitativo y cualitativo de todas las metodologías presentadas, evaluando diferentes tipos de error, y mostrando ventajas y desventajas de los métodos utilizados.

**Palabras clave:** Sistemas no lineales dinámicos, Modelado matemático, Observador óptimo de armónicos, Filtro de Kalman-Bucy, Identificación de parámetros, Espacio de estados, Regresión polinomial múltiple, Pronóstico, Series de tiempo.





# Abstract

In this thesis work a harmonic decomposition methodology is proposed and implemented to model responses of dynamic systems. The mathematical models presented are of the univariable and multivariable type, which are formulated in a state space based on an analysis of signals and Fourier series, which constitutes one of the distinguishing characteristics of this thesis work, that is, obtaining of a dynamic model in space of states of a signal. For the modeling, a preprocessing is initially carried out seeking to obtain a better computational performance, using a smoothing of moving average and an analysis by means of the fast Fourier transform, with the aim of knowing and selecting the harmonic content that most contributes to the representation of the time series as well as to reduce the noise present in the signal. Subsequently, based on the most representative harmonic content, a definition of variables is made, and consequently the structure of the model in state space is formulated, which has the property of being a time-varying linear system, and is used for the design of an optimal state observer (Kalman-Bucy filter), which in this thesis is called *optimal harmonic observer*. Once the observer converges and the states remain constant, the parameters corresponding to amplitudes and phases of the spectral content are obtained through algebraic relationships of the state variables, and in this way there is a mathematical model that represents the signals. Finally, the model is used for forecasting applications, at different time intervals. The signals or responses to be analyzed are time series from real observations of different climate variables and bioelectrical signals from the human brain. In addition, the technique presented in this work is compared with others that are used for modeling, such as artificial neural networks, integrated autoregressive models of moving average, and with a model also proposed in this thesis, based on a regressor with orthogonal polynomials. For the case studies of modeling and prognosis, and in order to evaluate the performance of the proposed methodologies, a quantitative and qualitative analysis of all the methodologies presented is made, evaluating different types of error, and showing advantages and disadvantages of the methods used.

**Keywords:** Dynamic nonlinear systems, Mathematical modeling, Optimal harmonic observer, Kalman-Bucy filter, Parameter identification, State space representation, Multiple polynomial regression, Forecast, Time series.



# Contenido

Resumen . . . . .	VII
Abstract . . . . .	IX
Índice general . . . . .	X
Lista de Figuras . . . . .	XIII
Lista de Tablas . . . . .	XV
Lista de Acrónimos . . . . .	XVIII
1. Introducción . . . . .	1
1.1. Estado del arte . . . . .	4
1.2. Motivación . . . . .	7
1.3. Hipótesis . . . . .	7
1.4. Objetivos . . . . .	8
1.4.1. Objetivo general . . . . .	8
1.4.2. Objetivos particulares . . . . .	8
1.5. Aportaciones . . . . .	8
1.6. Descripción de los capítulos . . . . .	9
2. Metodologías de modelado existentes para ST y pronóstico . . . . .	11
2.1. Series de tiempo . . . . .	11
2.1.1. Tendencia de una ST . . . . .	12
2.1.2. Métodos de suavizado para series de tiempo . . . . .	13
2.2. Modelado con regresión lineal y polinomial . . . . .	14
2.2.1. Modelado por regresión lineal simple . . . . .	14
2.2.2. Aproximación con polinomios ortogonales de Chebyshev y Legendre . . . . .	15
2.3. Modelado vía RNA . . . . .	19
2.4. Modelos ARIMA . . . . .	22
2.5. Análisis de correlación . . . . .	23
2.6. Pronóstico de una ST y análisis del error . . . . .	25
2.7. Señales EEG . . . . .	26
2.8. Conclusiones del capítulo 2 . . . . .	27
3. Observador óptimo de armónicos vía filtro de Kalman-Bucy . . . . .	29
3.1. Preliminares matemáticos . . . . .	29
3.1.1. Series de Fourier . . . . .	30
3.1.2. Transformada discreta de Fourier . . . . .	31

3.1.3.	Pre-procesamiento de las señales . . . . .	31
3.1.4.	Filtro de Kalman-Bucy . . . . .	32
3.2.	Modelado univariable con el observador óptimo de armónicos vía FKB . . . . .	34
3.3.	Modelado multivariable con el observador óptimo de armónicos vía FKB . . . . .	38
3.4.	Conclusiones del capítulo 3 . . . . .	40
4.	Casos de estudio: modelado y pronóstico . . . . .	41
4.1.	Modelado univariable y pronóstico para ST del clima . . . . .	41
4.1.1.	Modelado vía $O^2A$ univariable . . . . .	42
4.1.2.	Modelado vía RLS y RPS . . . . .	47
4.1.3.	Modelado vía RNA univariable . . . . .	50
4.1.4.	Modelos ARIMA . . . . .	53
4.2.	Modelado multivariable y pronóstico para ST del clima . . . . .	55
4.2.1.	Análisis de correlación para la selección de las variables de los modelos multivariable . . . . .	55
4.2.2.	Modelado vía $O^2A$ multivariable . . . . .	57
4.2.3.	Modelado vía RNA multivariable . . . . .	60
4.3.	Comparación de las diferentes técnicas de modelado presentadas . . . . .	62
4.4.	Modelado de señales EEG vía $O^2A$ . . . . .	63
4.5.	Conclusiones del capítulo 4 . . . . .	66
5.	Conclusiones y trabajo futuro . . . . .	71
5.1.	Conclusión . . . . .	71
5.2.	Trabajo futuro . . . . .	72
5.3.	Publicaciones . . . . .	72
	Referencias . . . . .	73

# Lista de Figuras

1.1. Posibles aplicaciones del trabajo presentado . . . . .	2
1.2. Estructura de la tesis. . . . .	10
2.1. Componentes principales de una ST. . . . .	12
2.2. Polinomios de Chebyshev para grados de 0 a 5 . . . . .	16
2.3. Representación de una neurona real y una neurona artificial. . . . .	20
2.4. Red neuronal de una capa oculta . . . . .	21
2.5. Partes del cerebro y localización de los sentidos . . . . .	26
2.6. Ondas cerebrales EEG . . . . .	28
3.1. Proceso para el modelado con el $O^2A$ y pronóstico de una ST. . . . .	34
4.1. Gráficas del contenido armónico para una ST de temperatura . . . . .	43
4.2. ST de temperatura real vs. ST con 8 armónicos . . . . .	44
4.3. Convergencia del modelo de temperatura con el $O^2A$ . . . . .	45
4.4. Modelo $O^2A$ con 8 armónicos y pronóstico para una ST de temperatura. . . . .	45
4.5. Gráficas del contenido armónico para una ST de velocidad del viento . . . . .	46
4.6. Convergencia del modelo $O^2A$ para la ST de velocidad del viento . . . . .	46
4.7. Modelo $O^2A$ con 8 armónicos y pronóstico para una ST de velocidad del viento	47
4.8. Modelado con RPS de diferente orden para una ST de temperatura . . . . .	48
4.9. Resultados del RPS final de orden 3 para temperatura, modelo y pronóstico a 96 horas. . . . .	49
4.10. Estructura de la RNA para el modelado de una ST de temperatura . . . . .	50
4.11. ST de temperatura; reales, modeladas y pronosticadas. . . . .	51
4.12. ST reales, modeladas y pronosticadas de vel. del viento . . . . .	52
4.13. Resultados de modelos y pronósticos para las ST de temperatura y velocidad del viento. . . . .	53
4.14. Modelo $ARIMA(100, 1, 2)$ y pronóstico para una ST de temperatura . . . . .	54
4.15. Modelado y pronóstico para ST de vel. del viento con el modelo $ARIMA(110, 1, 15)$	55
4.16. Análisis de correlación entre 5 variables físicas del clima. . . . .	56
4.17. Gráficas del contenido armónico para ST de temperatura y humedad . . . . .	58
4.18. Representación individual de cada ST . . . . .	59
4.19. Convergencia del modelo $O^2A$ multivariable . . . . .	60
4.20. Resultados de modelo y pronóstico para el $O^2A$ multivariable . . . . .	60
4.21. Estructura de la RNA para modelar una ST de radiación solar . . . . .	61

---

4.22. Resultados para el modelado y pronóstico multivariable de radiación solar. . . .	61
4.23. Resultados de los modelos para una ST de la temperatura y una ST de vel. del viento . . . . .	68
4.24. Derivaciones estándar de la señal EGG y su modelo con el $O^2A$ . . . . .	69
4.25. Señales EEG para diferentes eventos de movimiento de la mano derecha. . . .	69

# Lista de Tablas

4.1. Correlación en diferentes ST, analizadas en varios intervalos de tiempo o muestras.	57
4.2. Comparación del error de los modelos univariable y multivariable para una ST de temperatura. . . . .	62
4.3. Comparación del error de los modelos univariable para una ST de velocidad del viento. . . . .	63
4.4. Error de pronóstico a diferentes horizontes para una ST de vel. de viento . . . .	63
4.5. Error de pronóstico a diferentes horizontes para una ST de temperatura . . . .	64
4.6. Principales ventajas y desventajas de todos los modelos presentados . . . . .	67





# Lista de Acrónimos

**$O^2A$**  Observador Óptimo de Armónios. 29, 33, 34, 35, 40, 41, 42, 43, 44, 55, 57, 58, 59, 62, 65, 66, 71, 72

**AG** Algoritmo Genético. 5, 7

**ARIMA** Auto Regresive Integrated Movil Average. 3, 5, 11, 22, 27, 41, 63

**BCI** Brain Computer Interface. 6

**CCP** Coeficiente de Correlación de Pearson. 23, 24

**EE** Espacio de Estados. 3, 4, 6, 7, 8, 31, 34, 35, 37, 38, 39, 42, 43, 57, 58, 71

**EEG** Electroencefalograma. 2, 4, 6, 11, 26, 27, 63, 66, 72

**FKB** Filtro de Kalman-Bucy. 32, 33, 71

**LVT** Lineal Variante con el Tiempo. 3, 4, 7, 8, 34, 35, 37, 71

**MAE** Mean Absolute Error. 25, 27, 41, 62

**MAPE** Mean Absolute Error Porcentaje. 25, 26, 27, 41

**MSE** Mean Square Error. 27

**PIB** Produto Interno Bruto. 11

**PM** Promedio Móvil. 13, 32

**RLS** Regresión Lineal Simple. 14, 15, 27

- RMSE** Root Mean Square Error. 25, 26, 27, 41, 62
- RMSPE** Root Mean Square Percentage Error. 25, 41
- RNA** Red Neuronal Artificial. 3, 5, 6, 7, 11, 19, 21, 41, 60, 63
- RPS** Regresión Polinomial Simple. 18, 27
- SARIMA** Seasonal Auto Regresive Integrate Movil Average. 22
- SNLD** Sistemas No Lineales Dinámicos. 4
- ST** Serie de Tiempo. 2, 3, 4, 6, 7, 8, 11, 12, 13, 19, 25, 27, 29, 30, 31, 37, 38, 39, 41, 42, 43, 45, 50, 51, 52, 54, 55, 57, 60, 66, 71, 72
- TDF** Transformada Discreta de Fourier. 3, 16, 29, 31, 32, 42, 45

# Capítulo 1

## Introducción

Muchos de los sistemas dinámicos no lineales suelen tener comportamientos complejos e impredecibles y están presentes en diferentes fenómenos naturales y artificiales [Funaro92], [Isidori13]. El estudio de tales fenómenos es de gran interés, p.e., en las áreas de ingeniería, química, biología, ciencias sociales, medicina, procesos industriales, en el estudio del clima, entre otras. No obstante, el modelado matemático de estos sistemas es un problema desafiante, por ejemplo para fines de análisis y control. Tener un modelo del sistema permite utilizar metodologías conocidas en el área de control [Kirk04], con lo que se puede tomar una decisión basada en el pronóstico de eventos futuros y anticiparse a diferentes escenarios, y con ello se pueden optimizar recursos y evitar diferentes problemas. Hay varias áreas de aplicación con problemáticas que requieren de estos modelos matemáticos, por ejemplo, con la creciente y acertada tendencia de cuidar el medio ambiente, proveer energía eléctrica de forma eficiente contribuye en la disminución de la contaminación. En el caso particular de una microred eléctrica, que su generación es mediante energías renovables como fotovoltaicas o eólicas, factores como el clima son muy relevantes en la intermitencia de esa generación eléctrica, al estar la micro red integrada a la red comercial donde a ciertas horas del día es recomendable inyectar energía y en otras consumirla; además, también se busca generar mayores ganancias para las compañías generadoras, por ello, es de interés conocer la influencia que tienen las variables climáticas para la generación y así saber cuándo almacenar la energía, ya sea en baterías o en otros medios de almacenamiento, y también permite saber cuándo es necesario inyectarla a la

red eléctrica. Por otro lado, en estudios de la medicina, cada vez se utilizan técnicas más sofisticadas de análisis para solucionar algunos de los problemas de salud de forma más eficiente, por ello, resulta de gran interés también en esta área tener modelos matemáticos de varios de los procesos biológicos que ocurren en el cuerpo, como en el caso de las señales provenientes del cerebro [Rodríguez Bermúdez13], que combinado con otras técnicas puede permitir identificar enfermedades, como Parkinson, demencia, epilepsia, etc. [Suárez Revelo17], incluso controlar una dosis óptima de medicamento o ayudar a personas con problemas motrices a controlar mecanismos externos como una silla de rueda o incluso exoesqueletos [Mantilla16].



(a) *El clima y fuentes de energías alternas* (b) *Interfaz cerebro-computadora-máquina*

**Figura 1.1:** Posibles aplicaciones del trabajo presentado

De forma particular, en este documento son analizados sistemas dinámicos, que pueden ser representados por una Serie de Tiempo (ST), concretamente, de variables del clima y señales bioeléctricas por medio de un Electroencefalograma (EEG), para fines de obtener un modelo matemático, y poder pronosticarlas y también analizarlas a diferentes horizontes de tiempo. En general, es difícil poder tener modelos matemáticos que representen a todos estos tipos sistemas, ya que tienen diferentes características, y además, se ven afectados regularmente por incertidumbre y perturbaciones. Así pues, uno de los objetivos principales del modelado matemático es tener una representación lo más precisa posible de la dinámica en un determinado sistema, que describa la relación entre sus variables, y poder utilizar estos modelos en pronóstico, o para el diseño de controladores, o bien, para su análisis con otras técnicas a partir de su modelo matemático [Kirk04].

---

Este trabajo de tesis se centra en el modelado matemático de tipo univariable y multivariable, a través de una representación en Espacio de Estados (EE), basándose en un análisis de series de Fourier, aprovechando algunas de sus características para aplicarlas en la representación o modelado de diferentes ST. El procedimiento resumido para el modelado de las ST es el siguiente, las cuales cabe mencionar son observaciones (muestras) adquiridas por medio de sensores reales. Primero, se realiza un procesamiento de éstas que consta de un sub-muestreo a periodos de tiempo constantes. Después de esto, se realiza un suavizado de las ST conocido como promedio móvil, con esto se busca obtener mejores resultados en las metodologías analizadas lo que conlleva también a menos tiempo de cómputo y mejor eficiencia (menor error en los modelos y pronósticos realizados). Posteriormente, se realiza un análisis armónico utilizando la Transformada Discreta de Fourier (TDF) vista en [Proakis06], con el objetivo de conocer y seleccionar el contenido armónico de las ST que más contribuye a su representación. Después de este procesamiento y análisis, diferentes metodologías de modelado conocidas son aplicadas. Para la presentada en esta tesis, primero, se formula un modelo en EE estructurado a partir del contenido armónico principal, este modelo da como resultado un sistema Lineal Variante con el Tiempo (LVT), el cual es utilizado para el diseño de un Observador Óptimo de Armónicos ( $O^2A$ ) basado en el filtro de Kalman-Bucy como puede verse en [Kalman61], [Bellgardt86], [Simon06] y [Stengel94]. Una vez que los estados del observador convergen, se utilizan propiedades trigonométricas conocidas y se obtienen los parámetros representativos de los armónicos, los cuales son la amplitud y fase. Posteriormente, teniendo el modelo completo en EE con los parámetros fijos, se realiza el pronóstico a diferentes horizontes de tiempo y se evalúa su rendimiento.

Existen muchas otras técnicas de modelado en la literatura con diferentes características, en concreto en este trabajo también se estudian y comparan metodologías existentes basadas en una Red Neuronal Artificial (RNA), modelos autorregresivos integrados de media móvil (Auto Regresive Integrated Movil Average (ARIMA)), y modelos de regresión construidos con polinomios ortogonales, estos últimos con la principal característica o ventaja que los términos de orden superior del polinomio tienen una relación ortogonal con los términos de menor orden, lo que garantiza que los términos de orden superior tengan siempre una aportación mayor en la representación o modelo, que cuando se utilizan polinomios tradicionales o más simples como en [Horn12] y [Burden02].

Resumiendo, este trabajo de tesis presenta una nueva metodología para obtener el modelo en EE de diferentes ST basado en la teoría de Fourier. La representación obtenida resulta en un sistema LVT, para el cual se sintetiza un estimador óptimo de armónicos. El modelo resultante se utiliza para la predicción. Como casos de estudio se modelan y pronostican series temporales de temperatura, humedad y radiación solar. También, se modelan señales del tipo EEG en un intervalo de registro que corresponde al movimiento del brazo derecho de una persona para diferentes movimientos de este. Además, se presenta un análisis cuantitativo y cualitativo, computando diferentes tipos de errores comúnmente utilizados en la literatura, para evaluar las metodologías presentadas respecto a su capacidad del modelo y de pronóstico, en diferentes horizontes de tiempo.

## 1.1. Estado del arte

La identificación de la respuesta de Sistemas No Lineales Dinámicos (SNLD) para fines de pronóstico y control es un tema que durante muchos años ha tenido mucho interés para los investigadores y en la industria, numerosas investigaciones de gran relevancia se han hecho al respecto en la última década, ya que el disponer de modelos fiables permite mejores representaciones de diversos fenómenos de interés y su estudio. Es común hacer representaciones de estos sistemas con modelos lineales, pero en la práctica estos no tienen un buen rendimiento, debido a que la mayoría de los sistemas reales tienen comportamientos no lineales, aunque pueden ser considerados como lineales únicamente alrededor de un punto de operación, pero esta representación lineal se ve afectada al moverse de ese punto o rango, lo cual casi siempre llega a ocurrir. Por ello, para describir de mejor forma el comportamiento del sistema se debe recurrir a modelos no lineales como en [Isidori13] y [Aracil83].

Con el modelado de variables del clima también es posible realizar pronóstico de estas, lo cual es una gran herramienta que proporciona una estimación cuantitativa de la probabilidad de eventos futuros como tormentas, días nublados o soleados. Tener conocimiento de que estos eventos puedan presentarse proporciona ventajas, por ejemplo, en la industria de generación eléctrica con fuentes alternas o limpias como en [Rodríguez08], [Velasco09] y [Potosinos19], es de gran interés saber de estos eventos, pues ello permite anticiparse a la posible generación o no de la energía, ya que muchas de estas fuentes alternas están interconectadas

a la red eléctrica comercial y trabajan en conjunto con otras fuentes no renovables que pueden proveer energía eléctrica de forma casi constante pero generalmente a mayor costo. En estos y otros problemas de pronóstico del clima o demanda de energía eléctrica, varios investigadores han contribuido, algunos de ellos son [Rico03],[Zuniga13],[Murillo03],[Lopez Farias18],[Flores12],[Ghiassi05], [Chen05], [et al], con técnicas muy competitivas, algunas simples y otras más complejas. De hecho, en algunos de estos trabajos mencionados es común el uso de modelos ARIMA y RNA para pronóstico, por ello son incluidos en este trabajo para fines de comparación con las metodologías propuestas. Hay documentos que presentan técnicas de modelado de sistemas e identificación de parámetros como lo son [Walter97], [Worden19], [S. Haykin01], [Ornelas-Tellez10], [Graff17] y [Morfin-Magaña18], por mencionar algunos, en los cuales parten de tener modelos o estructuras matemáticas de las respuestas de algunos sistemas de interés como son variables físicas, el clima. Y sistemas biológicos como en [Ornelas-Tellez15] y [Vega18], en estos se centran en el modelado y la identificación de parámetros, y proponen un modelo que describe el comportamiento de la insulina en la sangre. También existen trabajos que se asemejan a la metodología presentada en esta tesis, en los cuales presentan el modelado matemático de ST a través de la serie de Fourier y otras técnicas, como en el caso de [Rico03], [Falk12], [Lamich17] y [Foley12], en dichas aproximaciones tuvieron buenos resultados. Por otro lado, en [Sanchez04] presentan la aplicación de redes neuronales de perceptrón multicapa recurrentes, a la predicción de demanda de carga eléctrica, su entrenamiento respectivo lo realizan con el filtro extendido de Kalman donde su objetivo fue obtener un horizonte de 24 horas de predicción, utilizando datos del estado de California, EE. UU.

También muchos trabajos recientes implementan modelos con el uso de algoritmos evolutivos, en particular de (Algoritmo Genético (AG)), que se han venido utilizado ampliamente en los últimos años, en trabajos como [Iturbide13], [Rivero Gestal10], [Graff13] y [Graff17] los cuales se basan en el uso de técnicas heurísticas, lo cual puede llegar a convertirse en una desventaja, ya que si bien estos modelos presentan la flexibilidad de no tener que conocer forzosamente mucha de la teoría de modelado existente, lo que puede ahorrar tiempo, al no tener que depender de métodos analíticos matemáticos para su elaboración, pero pueden verse afectados en el sentido de que la persona que los elabore tiene que conocer por experiencia propia algunas de las características de la dinámica del sistema a modelar, lo cual no siempre es fácil e incluso llega a convertirse muchas veces en un proceso de “prueba

y error”, o se puede caer en el error de un sobre ajuste del modelo con diferentes ganancias cuasi arbitrarias.

Por otro lado, para el modelado de señales EEG, han surgido diferentes propuestas en años recientes como en [Rodríguez Bermúdez13] donde se hace el desarrollo de sistemas de interfaz cerebro ordenador o Brain Computer Interface (BCI) por sus siglas en inglés. Además, de otros trabajos con RNA en los cuales son capaces de extraer patrones y detectar parcelas que son muy difíciles de apreciar para los humanos y para otras técnicas computacionales, siendo la facilidad en la implementación de estos métodos lo que ha facilitado su popularidad. Por ejemplo, en [Garrett03] hacen un análisis discriminante lineal y proponen dos clasificadores no lineales (redes neuronales y máquinas de vectores de soporte) aplicados a la clasificación del EEG espontáneo durante cinco tareas mentales, y muestran que los clasificadores no lineales producen resultados de clasificación solo ligeramente mejores. Asimismo, en [Subasi07] utilizan una mezcla de expertos (ME), la cual es una arquitectura de red neuronal modular para el aprendizaje supervisado, las señales de EEG las descomponen en sub-bandas de frecuencia usando la transformada de Wavelet discreta. Finalmente, y aunque la literatura de trabajos relacionados con este tema de tesis es muy amplia, en trabajos como [Simon10], [Nayak15], [Zang17], y en [Ornelas-Tellez19], *et al.* En el último desarrollan un nuevo estimador óptimo de rápida convergencia para determinar en línea los componentes armónicos de una señal variable en el tiempo, que puede usarse para fines de análisis y control; hacen uso del estimador para generar señales de referencia para un sistema de control óptimo con el fin de suprimir los componentes armónicos, con aplicación en la calidad de la energía en los sistemas eléctricos, de esta línea de investigación tiene muchas de sus bases este trabajo de tesis.

La técnica de modelado propuesta en EE (usando la serie Fourier como su base) tiene varias ventajas sobre algunos de los métodos mencionados anteriormente, una de ellas es que permite una representación simple de diferentes ST periódicas, en el caso de estudio de variables del clima, ya que la mayoría de los modelos físicos existentes de algunos de estos fenómenos o variables climáticas son generalmente complejos de utilizar o requieren de tecnología de radar especializada para medir algunas variables complejas como la temperatura atmosférica o del océano, y generalmente son realizados con fines comerciales de pronóstico y no se puede conocer la estructura específica debido a su uso comercial como en [Knievel04],[Meneghini90] y [Berkemeier17]. En este sentido, la técnica de representación con



series de Fourier es efectiva para representar señales periódicas como las del clima o incluso en señales no periódicas pero siendo las primeras más beneficiadas con esta representación según la teoría de Fourier, muchas ST tienen periodicidad en intervalos (por ejemplo, períodos de días y estaciones del año). El modelo en EE resultante como ya se mencionó es LVT y, en consecuencia, tiene la ventaja de ser tratable en el sentido de que es posible aplicar mucha de la teoría de control existente en contraste con los modelos de RNA, o AG mencionados anteriormente, que generalmente son representaciones complejas.

## 1.2. Motivación

En el área de control existe un campo abierto para el modelado de sistemas no lineales, lo cual no siempre resulta en algo sencillo, ya que en la naturaleza y en la mayoría de procesos industriales se presenta una dinámica no lineal, que incluso es susceptible a perturbaciones externas, además de que en muchos de los procesos intervienen más de una variable, y aunque es posible realizar una representación mediante modelos lineales de esos procesos, estos sólo representan al sistema o la dinámica en un pequeño rango de operación. Es de interés en áreas de control disponer de modelos más precisos que representen lo mejor posible el comportamiento de la dinámica de diferentes sistemas en un rango de operación más amplio, y que a estos modelos sea sencillo aplicar métodos conocidos de análisis y diseño de la teoría de control y pronóstico. Por ello se presenta esta metodología basada en un observador óptimo de armónicos vía filtro de Kalman-Bucy que tiene la propiedad de ser inmune a perturbaciones como el ruido. Esta metodología es aplicable para realizar el modelado matemático en espacio de estados para diferentes ST periódicas o incluso con comportamiento no periódico. Cabe mencionar que dicho modelo resultante es LVT, y además mediante esta metodología, es posible realizar el modelo que incluya a una o más variables de un determinado sistema.

## 1.3. Hipótesis

Es posible realizar el modelado de la dinámica de señales, usando un enfoque por descomposición armónica, a través de una representación en espacio de estados basada en la teoría de Fourier, mediante el uso de un observador óptimo de armónicos, que resulte en un sistema o

modelo LVT que pueda ser usado para fines de pronóstico, análisis o control.

## 1.4. Objetivos

### 1.4.1. Objetivo general

Plantear una metodología de modelado en espacio de estados que sea LVT, con bases en la teoría de series de Fourier, para modelar la respuesta dinámica de sistemas, mediante un observador óptimo de estados que presente inmunidad a ciertas perturbaciones externas, y que sea aplicable a fines de pronóstico, análisis y control.

### 1.4.2. Objetivos particulares

Con el fin conseguir el objetivo principal, se presentan los siguientes objetivos particulares.

- Realizar el modelado matemático con una representación en EE, para el caso univariable y multivariable de la respuesta dinámica de señales o series temporales, mediante un observador óptimo de estados vía filtro de Kalman-Bucy.
- Aplicar la técnica de modelado presentada en series de tiempo del clima y de señales bioeléctricas del tipo EEG, con fines de pronóstico y análisis.
- Realizar otra técnica de modelado mediante regresión con polinomios ortogonales de Chebyshev y Legendre.
- Realizar la comparación de la técnica propuesta con otras existentes de modelado y pronóstico.

## 1.5. Aportaciones

Las principales aportaciones que se presentan en este trabajo son el modelado en EE para la respuesta dinámica de sistemas, con énfasis a ST. Particularmente las principales contribuciones son las siguientes:

- Técnica de modelado univariable y multivariable de series de tiempo utilizando un observador óptimo de estados basado en el filtro de Kalman-Bucy resultando en un sistema lineal variante con el tiempo en una representación en espacio de estados.
- Modelado y pronóstico de series de tiempo utilizando un regresor multivariable con polinomios ortogonales de Chebyshev y Legendre.
- Modelado y pronóstico a corto plazo para series temporales del clima utilizando los modelos propuestos y el modelado matemático para señales EEG utilizando un observador de armónicos.
- Comparación cuantitativa y cualitativa del rendimiento de los modelos y el pronóstico otras metodologías basadas en RNA y modelos ARIMA.

## 1.6. Descripción de los capítulos

Este trabajo de tesis está organizado como se describe a continuación.

- **Capítulo 2.** Se introduce la teoría necesaria que fundamenta a las metodologías de modelado matemáticas existentes y a la propuesta, la técnica de modelado por regresión con polinomios ortogonales, teoría resumida de los métodos de modelado a través de RNA y modelos ARIMA.
- **Capítulo 3.** Se describe la técnica de modelado principal de este trabajo, la cual es el observador óptimo de armónicos utilizando el filtro de Kalman Bucy como estimador de estados.
- **Capítulo 4.** Se presentan los resultados de simulaciones para diferentes casos de estudio de modelado de algunas ST provenientes de observaciones en bases de datos reales, tanto para metodología principal presentada como para otras las técnicas existentes. Los casos de estudio son el modelado y pronóstico de ST del clima analizado a diferentes horizontes de tiempo, por último, el modelado de un evento registrado con señales electroencefalográficas.
- **Capítulo 5.** Se presentan las conclusiones generales, así como trabajos futuros que pueden complementar a este trabajo de tesis.

La estructura de esta tesis es resumida en la Figura 1.2.

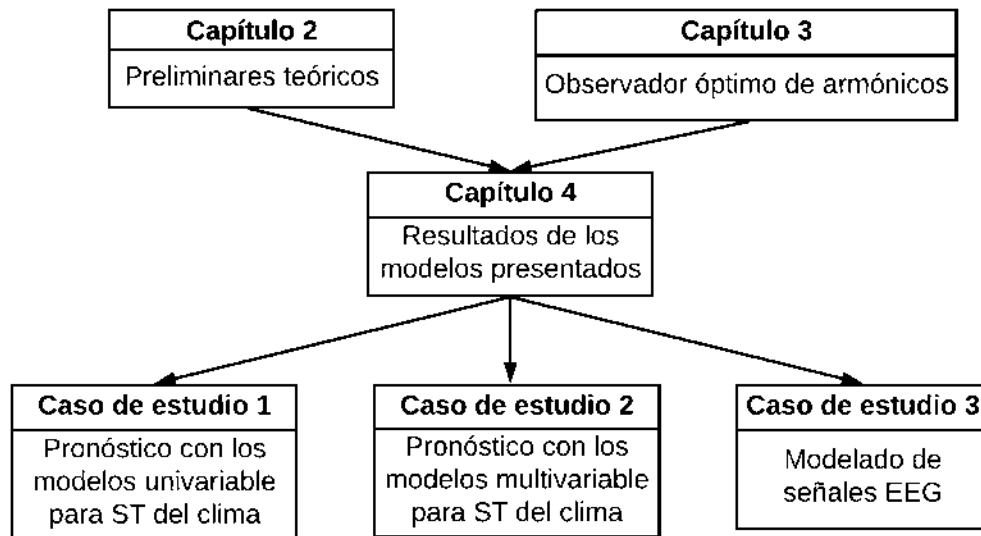


Figura 1.2: Estructura de la tesis.

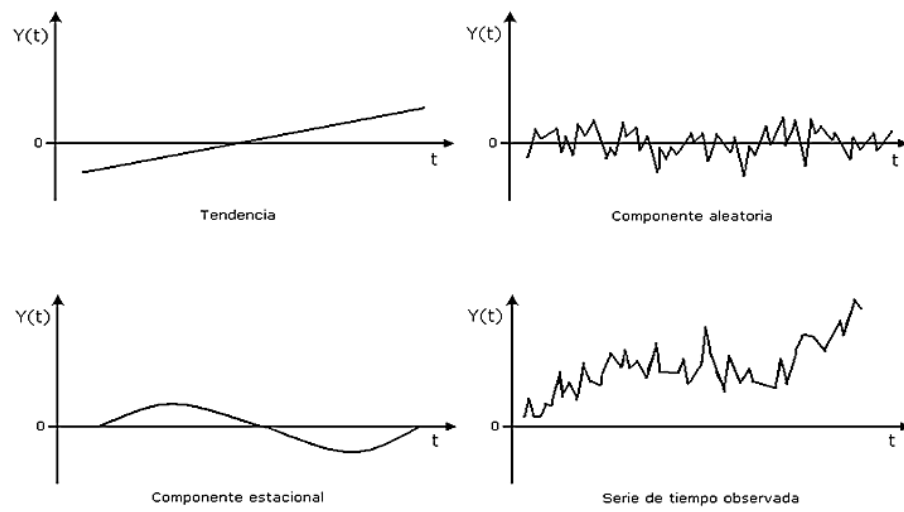
## Capítulo 2

# Metodologías de modelado existentes para ST y pronóstico

En este capítulo se introduce a la teoría de diferentes metodologías de modelado matemático existentes en la literatura e incluidas en esta tesis, las cuales pueden ser utilizadas para modelar una sola variable o más. Algunas de ellas son los modelos de regresión lineal simple y polinomial, el uso de modelos con RNA y modelos ARIMA. También se presentan otros conceptos utilizados en los diferentes casos de estudio presentados a manera de preliminares de lo que es pronóstico, y la definición de diferentes tipos de error utilizados frecuentemente en la literatura y finalmente se incluye una breve introducción a las señales EEG.

### 2.1. Series de tiempo

Serie de Tiempo (ST) es el nombre dado en teoría estadística a una variable observada a intervalos de tiempo regulares (diario, semanal, semestral, anual, entre otros) y puede ser visto más ampliamente en [Falk12]. El término ST se aplica a datos registrados en forma periódica que muestran. Algunos ejemplos son las ventas anuales totales de almacenes, el valor trimestral total de contratos de construcción otorgados, el valor trimestral del Producto Interno Bruto (PIB), o la variación de la temperatura habiente a diferentes horas durante un periodo determinado.



**Figura 2.1:** Componentes principales de una ST.

### 2.1.1. Tendencia de una ST

Una ST puede tener una tendencia lineal o no lineal, las cuales se definen a continuación

1. **Tendencia lineal**, la tendencia de una serie viene dada por el movimiento general a largo plazo de la serie. La tendencia a largo plazo de muchas series de negocios (industriales y comerciales), como ventas, exportaciones y producción, con frecuencia se aproxima a una línea recta. Esta línea de tendencia muestra que algo aumenta o disminuye a un ritmo constante.
2. **Tendencia no lineal**, cuando la ST presenta un comportamiento curvilíneo se dice que este es no lineal. Dentro de las tendencias no lineales que pueden presentarse en una serie se encuentran, la polinomial, logarítmica, exponencial y potencial, entre otras.

Además, se definen cuatro tipos básicos de variación o tendencia de una ST las cuales son la tendencia secular, variación estacional, variación cíclica y variación irregular, estos a su vez pueden tener comportamientos lineales o no lineales y su definición puede encontrarse en [Falk12]. De manera general, en la Figura 2.1 se pueden apreciar algunos de los componentes principales de una ST observada estos son la tendencia, componentes aleatorios y el componente estacional.

### 2.1.2. Métodos de suavizado para series de tiempo

. Existen varios métodos de suavizado para las ST en la literatura, que tienen la finalidad de eliminar componentes no sistemáticas de estas. Algunos de estos son los siguientes:

1. **Promedio Móvil (PM)**, se construye sustituyendo cada valor de una serie por la media obtenida con esa observación y algunos de los valores inmediatamente anteriores. La ecuación para obtener el PM se muestra a continuación

$$\hat{s}_t = \frac{\sum_{i=1}^n (s_i)}{n} \quad (2.1)$$

donde  $\hat{s}_t$  es el PM, que es igual al pronóstico del periodo  $n$ ,  $s(i)$  es la ST en momento  $i$ , y  $n$  es el tamaño de la ventana o periodo. El método de suavizado se utiliza en este documento, pues resulta útil en ST que presenten cambios muy abruptos entre un valor y otro, estos cambios pueden ser provocados por ruido [delaRosa05], o por falta de resolución en un sensor como es caso de analizar una ST del clima ya que es muy común utilizar diferentes sensores para medir las variables como pueden ser la radiación solar, temperatura, velocidad del viento, humedad, presión atmosférica, etc.

2. **Promedios móviles ponderados**, el método consiste en asignar un factor de ponderación distinto para cada dato. Generalmente, a la observación o dato más reciente a partir del que se quiere hacer el pronóstico, se le asigna el mayor peso, y este peso disminuye en los valores de datos más antiguos.

$$\hat{s}_t = \frac{\sum_{i=1}^n (\omega_i s_i)}{\sum_{i=1}^n (\omega_i)} \quad (2.2)$$

donde  $\omega_i$  es la ponderación para el valor observado de la demanda en el periodo  $n$ .

3. **Suavizado exponencial simple**, es una evolución del método de promedio móvil ponderado, en este caso se calcula el promedio de una ST con un mecanismo de auto-corrección que busca ajustar los pronósticos en dirección opuesta a las desviaciones del pasado mediante una corrección que se ve afectada por un coeficiente de suavización.

$$\hat{s}_t = \alpha s_{t-1} + (1 - \alpha) \hat{s}_{t-1} \quad (2.3)$$

donde  $\alpha$  es el factor de suavizado ( $0 < \alpha < 1$ ),  $\hat{s}_t$  el pronóstico del periodo  $t$  y  $s_{t-1}$  es el valor observado del periodo  $t$ .

## 2.2. Modelado con regresión lineal y polinomial

En esta sección se muestran los fundamentos de metodologías de modelado usando regresores del tipo lineal simples o univariantes, y los regresores no lineales o polinomiales, y en particular, el regresor con polinomios de Chebyshev y Legendre.

A continuación se presenta, de forma resumida, el modelado a través de regresión lineal simple.

### 2.2.1. Modelado por regresión lineal simple

La Regresión Lineal Simple (RLS) vista en [Strang93] hace honor a su nombre: es un enfoque muy sencillo para predecir una respuesta cuantitativa y sobre la base de una sola variable predictiva o estimadora llamada  $X$ , donde se supone que hay aproximadamente una relación lineal entre  $X$  e  $Y$ . Matemáticamente, se puede escribir esta relación lineal como

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X. \quad (2.4)$$

Se describe a (2.4) diciendo que se está retrocediendo  $Y$  en  $X$ , y  $\beta_0$  y  $\beta_1$  como dos constantes desconocidas que representan los términos de intersección y pendiente en el modelo lineal. Juntos,  $\beta_0$  y  $\beta_1$  son conocidas como coeficientes o parámetros del modelo. Una vez que son utilizados los datos de entrenamiento para producir las estimaciones  $\hat{\beta}_0$  y  $\hat{\beta}_1$  para los coeficientes del modelo, se puede predecir el comportamiento a futuro de  $Y$  como

$$\hat{y} \approx \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X \quad (2.5)$$

donde  $\hat{y}$  indica una predicción de  $Y$  sobre la base de  $X$ . Aquí se usa un símbolo de sombrero,  $\hat{\phantom{x}}$ , para denotar el valor estimado de un parámetro o coeficiente desconocido. **Estimación de coeficientes.** En la práctica,  $\beta_0$  y  $\beta_1$  son desconocidos. Entonces, antes de que se pueda usar (2.4) para hacer predicciones, se deben usar datos para estimar los coeficientes. Definiendo

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_N, y_N) \quad (2.6)$$

que representan  $N$  pares de observación, cada uno de los cuales consiste en una medida de  $X$  y una medida de  $Y$ . El objetivo es obtener las estimaciones de los coeficientes  $\beta_0$  y  $\beta_1$  de manera que el modelo lineal (2.4) se ajuste bien a los datos disponibles, es decir,  $y_i \approx \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_i$  para



$i = 1, 2, \dots, N$ . Hay varias formas de medir la cercanía. El enfoque más común es el criterio de mínimos cuadrados.

Sea  $\hat{y}_i \approx \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_i$  la estimación de  $Y$  basada en el  $i$ -ésimo valor de  $X$ . Entonces  $e_i = y_i - \hat{y}_i$  representa el  $i$ -ésimo residual; esta es la diferencia entre el  $i$ -ésimo valor de respuesta observado y el  $i$ -ésimo valor de respuesta que se estima por el modelo lineal. Se define la suma residual de cuadrados (SRC) como

$$SRC = e_1^2 + e_2^2 + \dots + e_N^2.$$

El enfoque de mínimos cuadrados elige  $\hat{\beta}_0$  y  $\hat{\beta}_1$  para minimizar la suma residual de cuadrados. Usando algunos cálculos, se puede demostrar que los parámetros son

$$\begin{aligned} \hat{\beta}_1 &= \frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2} \\ \hat{\beta}_0 &= \bar{y} - \hat{\beta}_1 - \bar{x}, \end{aligned} \quad (2.7)$$

donde  $\bar{y} \equiv \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i$  y  $\bar{x} \equiv \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$  son las medias de las muestras. En otras palabras, (2.7) define las estimaciones del coeficiente de mínimos cuadrados para la RLS.

En muchos casos, esa relación lineal puede no mantenerse, y se suelen usar modelos polinomiales univariados, de la forma:

$$Y = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \dots + \beta_p x^p + \epsilon \quad (2.8)$$

donde el  $p$  es el grado del polinomio y los términos de orden superior del polinomio van aumentando de uno en uno.

### 2.2.2. Aproximación con polinomios ortogonales de Chebyshev y Legendre

Diferentes polinomios pueden ser utilizados para aproximar una función determinada, pero unos de los más utilizados debido a su propiedad de ortogonalidad entre sus diferentes términos para un orden superior visto en [Strang93], son los polinomios de Chebyshev presentados por primera vez en 1853 en [Chebyshev53] y de Legendre que aparecieron en [Derrick84], en los cuales se describe como es su estructura para un orden  $p$ .

El polinomio de grado  $p$  de Chebyshev de primer tipo se denota como  $T_p(x)$ , y está dado por

$$T_p(x) = \cos(p \arccos x) \quad (2.9)$$

esto puede parecer una función trigonométrica a primera vista (y de hecho existe una estrecha relación entre los polinomios de Chebyshev y la TDF), sin embargo, (2.9) se puede combinar con identidades trigonométricas para producir expresiones explícitas para  $T_p(x)$ . Los primeros polinomios son:

$$T_0(x) = \cos(0) = 1$$

$$T_1(x) = \cos(\theta) = x$$

el resto de polinomios se obtiene empleando la relación de recurrencia [Chebyshev53]

$$T_{p+1}(x) = \cos((p+1)\theta) = 2xT_p(x) - T_{p-1}(x). \quad (2.10)$$

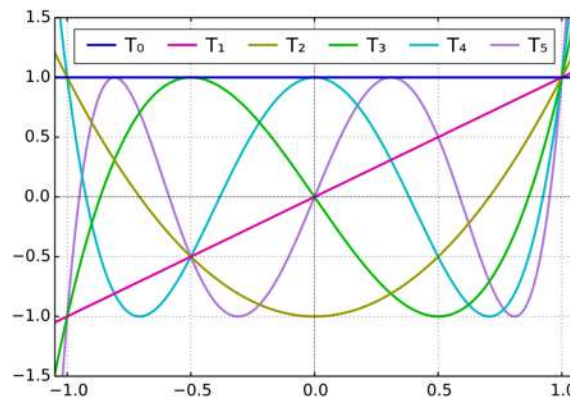
Los polinomios de Chebyshev del primer tipo de grado  $p = 2$  hasta  $p = 4$  son los siguientes

$$T_2(x) = \cos(2\theta) = 2x^2 - 1$$

$$T_3(x) = \cos(3\theta) = 4x^3 - 3x$$

$$T_4(x) = \cos(4\theta) = 8x^4 - 8x^2 + 1,$$

y pueden verse gráficamente en la Figura 2.2, donde se muestra gráficamente a los polinomios



**Figura 2.2:** Polinomios de Chebyshev para grados de 0 a 5

de Chebyshev de grado  $p = 0$  al grado  $p = 5$ . Además, estos polinomios son ortogonales en el intervalo  $[-1,1]$  sobre un peso  $(1 - x^2)^{-1/2}$ , después de este intervalo no son ortogonales, pero mediante una transformación de coordenadas es posible definir polinomios de Chebyshev en

diferentes intervalos . Además, se puede demostrar en [Chebyshev53], que

$$\int_{-1}^1 \frac{T_i(x)T_j(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ \pi/2 & i = j \neq 0 \\ \pi & i = j = 0. \end{cases} \quad (2.11)$$

El polinomio  $T_p(x)$  tiene  $p$  ceros en el intervalo  $[-1, 1]$ , y están ubicados en los puntos

$$x_k = \cos\left(\frac{\pi(k - \frac{1}{2})}{p}\right) \quad \text{con } k = 1, 2, \dots, p \quad (2.12)$$

en este mismo intervalo hay máximos y mínimos (extremos), todos los máximos de un polinomio de grado  $p$  valen uno, es decir,  $T_p(x) = 1$ , mientras que en todos los mínimos valen  $-1$ , o bien,  $T_p(x) = -1$ . Estos límites se pueden apreciar en la Figura 2.2.

Por otro lado, los polinomios de Legendre vistos en [Derrick84] presentan propiedades similares a los polinomios de Chebyshev. Estos se indican por  $L_p(x)$ , donde  $p$  es el orden y  $x$  es el argumento del polinomio que constituye a un conjunto de polinomios ortogonales como soluciones a la siguiente ecuación diferencial, vista en [Derrick84]

$$\frac{d}{dx}[(1-x^2)\frac{dy}{dx}] + p(p+1)y = 0. \quad (2.13)$$

Los polinomios de Legendre de orden cero y de primer orden vienen dados respectivamente por,  $L_0(x) = 1$  y  $L_1(x) = x$ . Los polinomios de orden superior son

$$\begin{aligned} L_2(x) &= \frac{1}{2}(3x^2 - 1) \\ L_3(x) &= \frac{1}{2}(5x^3 - 3x) \\ L_4(x) &= \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3) \\ &\dots \\ L_{p+1}(x) &= \frac{1}{p+1}[(2p+1)xL_p(x) - pL_{p-1}(x)]. \end{aligned} \quad (2.14)$$

$$(2.15)$$

Los polinomios ortogonales son importantes porque aparecen en la teoría de ecuaciones diferenciales, la teoría de espacios de Hilbert visto por primera vez en [Dieudonné66], la teoría de la aproximación de funciones [Cheney09] y la mecánica cuántica, y es precisamente

esta propiedad de ortogonalidad que hace a los polinomios de Chebyshev y Legendre tan útiles en la aproximación polinomial de funciones.

A continuación, se plantea una forma de expresar la Regresión Polinomial Simple (RPS) o de una sola variable, la cual, se define para una forma básica en (2.8). Para la representación de un regresor polinomial con polinomios ortogonales, de Chebyshev, Legendre o cualquier otro tipo, primero, se nombra a  $P_p(x)$  como una combinación lineal de  $p$  funciones base  $\varphi_j(x)$

$$P_p(x) = a_1\varphi_1(x) + a_2\varphi_2(x) + \dots + a_p\varphi_p(x) \quad (2.16)$$

donde  $\varphi_j(x)$  representa al  $j$ -ésimo termino de un polinomio que puede ser planteado como de Chebyshev o de Legendre. Aplicando el método de los mínimos cuadrados, se quiere que la suma  $S$  sea mínima

$$S = \sum_{j=1}^N (P_p(x_j) - y_j)^2 = \sum_{j=1}^N (a_1\varphi_1(x_j) + a_2\varphi_2(x_j) + \dots + a_N\varphi_p(x_j) - y_j)^2$$

la condición del mínimo es

$$\frac{\partial S}{\partial a_i} = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n$$

de lo anterior, se obtienen el siguiente sistema de  $p$  ecuaciones con  $p$  incógnitas

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial S}{\partial a_1} = 0 &\Rightarrow \sum_{j=1}^N \varphi_1(x_j)(a_1\varphi_1(x_j) + a_2\varphi_2(x_j) + \dots + a_p\varphi_p(x_j) - y_j) = 0 \\ \frac{1}{2} \frac{\partial S}{\partial a_2} = 0 &\Rightarrow \sum_{j=1}^N \varphi_2(x_j)(a_1\varphi_1(x_j) + a_2\varphi_2(x_j) + \dots + a_p\varphi_p(x_j) - y_j) = 0 \\ &\vdots \\ \frac{1}{2} \frac{\partial S}{\partial a_p} = 0 &\Rightarrow \sum_{j=1}^N \varphi_p(x_j)(a_1\varphi_1(x_j) + a_2\varphi_2(x_j) + \dots + a_p\varphi_p(x_j) - y_j) = 0 \end{aligned}$$

o bien,

$$\begin{aligned} a_1 \left( \sum_{j=1}^N \varphi_1^2(x_j) \right) + a_2 \left( \sum_{j=1}^N \varphi_1(x_j)\varphi_2(x_j) \right) + \dots + a_p \left( \sum_{j=1}^N \varphi_1(x_j)\varphi_p(x_j) \right) &= \left( \sum_{j=1}^N \varphi_1(x_j)y_j \right) \\ a_1 \left( \sum_{j=1}^N \varphi_2(x_j)\varphi_1(x_j) \right) + a_2 \left( \sum_{j=1}^N \varphi_2^2(x_j) \right) + \dots + a_p \left( \sum_{j=1}^N \varphi_2(x_j)\varphi_p(x_j) \right) &= \left( \sum_{j=1}^N \varphi_2(x_j)y_j \right) \\ &\vdots \\ a_1 \left( \sum_{j=1}^N \varphi_p(x_j)\varphi_1(x_j) \right) + a_2 \left( \sum_{j=1}^N \varphi_p(x_j)\varphi_2(x_j) \right) + \dots + a_p \left( \sum_{j=1}^N \varphi_p^2(x_j) \right) &= \left( \sum_{j=1}^N \varphi_p(x_j)y_j \right) \end{aligned}$$

que se puede expresar de una forma matricial como

$$\begin{pmatrix} \varphi_1(x_1) & \varphi_1(x_2) & \cdots & \varphi_1(x_N) \\ \varphi_2(x_1) & \varphi_2(x_2) & \cdots & \varphi_2(x_N) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_p(x_1) & \varphi_p(x_2) & \cdots & \varphi_p(x_N) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1(x_1) & \varphi_2(x_1) & \cdots & \varphi_p(x_1) \\ \varphi_1(x_2) & \varphi_2(x_2) & \cdots & \varphi_p(x_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_1(x_N) & \varphi_2(x_N) & \cdots & \varphi_p(x_N) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_1(x_1) & \varphi_1(x_2) & \cdots & \varphi_1(x_N) \\ \varphi_2(x_1) & \varphi_2(x_2) & \cdots & \varphi_2(x_N) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_p(x_1) & \varphi_p(x_2) & \cdots & \varphi_p(x_N) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_N \end{pmatrix} \quad (2.17)$$

que tienen la forma  $(V^T V) a = V^T y$ , donde  $V$  es una matriz del tipo Vandermonde [Horn12]  $a$  es el vector de las incógnitas e  $y$  el vector de la salida. Solucionando para este sistema de ecuaciones lineales se obtienen los valores de las incógnitas  $a$ , para de esta manera conocer la forma completa del polinomio (2.16), que será utilizado como modelo matemático para aproximar las ST.

## 2.3. Modelado vía RNA

Las RNA pueden ser vistas en [Rumelhart86], [Graves06], [S. Haykin01] y [Rojas13] como un modelo simplificado que emula el modo en que el cerebro humano procesa la información: de manera simultánea, un número elevado de unidades de procesamiento interconectadas que parecen versiones abstractas de neuronas. Los modelos hechos con el uso de RNA pueden estar conformados de una variable o más. La Figura 2.3 muestra la representación de una neurona real en contraste con una neurona artificial.

Una RNA consta de unidades de procesamiento que se organizan en capas, hay tres partes normalmente en una RNA: una capa de entrada, con unidades que representan los campos de entrada; una o varias capas ocultas; y una capa de salida, con una unidad o unidades que representa el campo o los campos de destino. Las unidades se interconectan con pesos o ponderaciones. Los datos de entrada se presentan en la primera capa, y los valores se propagan desde cada neurona anterior hasta cada neurona de la capa siguiente, al final, se envía un resultado desde la capa de salida. En el primer modelo computacional para neuronas

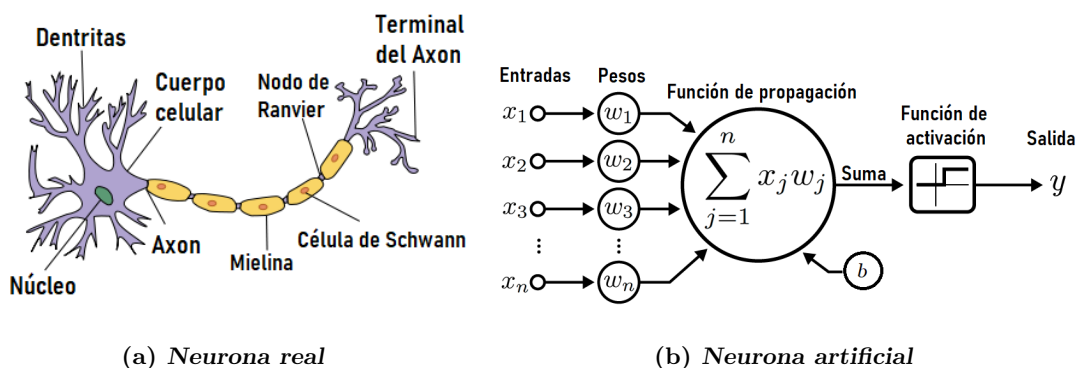


Figura 2.3: Representación de una neurona real y una neurona artificial.

artificiales, propuesto por McCulloch y Pitts [Cowan90], [Zhang99], las salidas son binarias, y la función  $f$  es la función escalonada definida por;

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases} \quad (2.18)$$

tal que la neurona de activación es

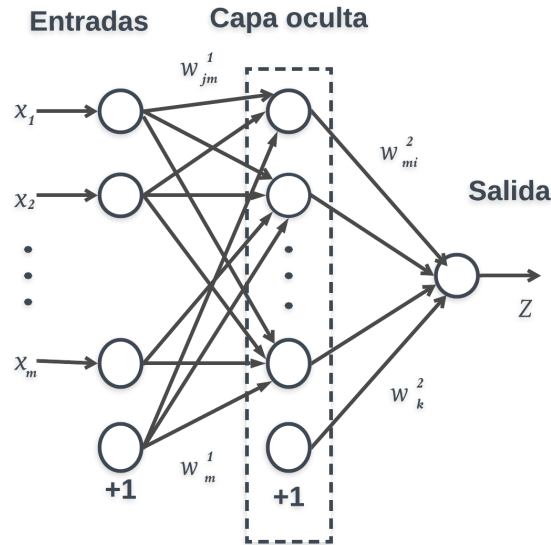
$$y = F\left(\sum_{i=1}^m w_i x_i - b\right) = \begin{cases} 1 & \text{si } \sum_{i=1}^m w_i x_i \leq b \\ 0 & \text{si } \sum_{i=1}^m w_i x_i \geq b \end{cases} \quad (2.19)$$

según la literatura, en [delBrio01], una neurona artificial se caracteriza por los parámetros

$$\theta = (w_1, w_2, \dots, w_m, b, f) \quad (2.20)$$

el bias  $b$ , como se muestra en la Figura 2.3(b), se puede tratar como otro peso agregando un nodo de entrada  $x_0$ , de modo que siempre tome un valor de entrada  $x_0 = +1$  y definiendo  $w_0 = -b$ .

Por ejemplo, la red neuronal de la Figura 2.4 consta de una capa de entrada (capa de nodos de entrada) y una capa de salida que consta de neuronas. Lo que se conoce como Simple Neural Network-Layer, ya que la capa de entrada no contiene neuronas, es decir, no se realizan cálculos en el nodo de entrada, también esta red neuronal simple se llama perceptrón [Rosenblatt61]. Cada neurona tiene una acción interna, según el sesgo o el umbral de activación, lo que da como resultado una función de activación que se aplica a la suma pesada de las señales de entrada para producir una señal de salida. Entonces, cuando las



**Figura 2.4:** Red neuronal de una capa oculta

señales de entrada  $x_1, x_2, x_3, x_m$  llegan a la neurona a través de los enlaces de conexión con su respectivo peso asociado  $w_1, w_2, w_3, w_m$  la entrada resultante a la neurona es llamada la entrada de la red, es la suma pesada  $\sum_{i=1}^m w_i x_i$ .

La red aprende examinando los registros individuales, generando una predicción para cada registro y realizando ajustes a las ponderaciones cuando realiza una predicción incorrecta. Este proceso se repite muchas veces, y la red sigue mejorando sus predicciones hasta haber alcanzado uno o varios criterios de parada. Así pues, las RNA se caracterizan por tres partes fundamentales [delBrio01]: la topología de la red (propagación hacia adelante o recurrente, etc.), la regla de aprendizaje (supervisada, no supervisada, reforzada, etc.) y el tipo de capacitación.

Estrictamente hablando, una red neuronal es una colección de neuronas artificiales, el modelo matemático de una neurona artificial se basa en la siguiente tesis:

1. Las neuronas son unidades elementales en un sistema nervioso en el que se produce el procesamiento de la información.
2. La información viene en forma de señales que pasan a través de las neuronas conectando cadenas.
3. Cada cadena de conexión tiene su propio peso que multiplica las señales transmitidas.

Continuando con los preliminares a diferentes metodologías de modelado, en la siguiente sección se presenta teoría resumida de los modelos ARIMA.

## 2.4. Modelos ARIMA

Los modelos de series temporales pueden tener muchas formas y representar diferentes procesos estocásticos. Hay dos modelos de series temporales lineales ampliamente utilizados en la literatura, los cuales son los modelos autorregresivos (AR) [Box74, Box16] y promedio móvil (MA, por sus siglas en inglés). Combinando estos dos, se obtienen los modelos de media móvil autorregresiva (ARMA) y media móvil integrada autorregresiva (ARIMA) vistos en [Box74, Box16]. El modelo ARIMA y sus diferentes variaciones se basan en el principio Box-Jenkins [Box74], [Box90] y, por lo tanto, estos también se conocen ampliamente como los modelos Box-Jenkins presentados en el año 1976 en [Anderson76]. En los modelos ARIMA, una serie temporal no estacionaria se hace estacionaria mediante la aplicación de diferenciación finita de los puntos de datos. Una representación matemática para un modelo  $ARIMA(p, d, q)$ , usando polinomios de retraso, es la siguiente [McLeod94]:

$$Y_t = -(\Delta^d Y_t - Y_t) + \phi_0 + \sum_{i=1}^p \phi_i \Delta^d Y_{t-i} - \sum_{i=1}^q \theta_i \varepsilon_{t-i} + \varepsilon_t$$

donde  $\Delta^d Y_t$  expresa que sobre la serie original  $Y_t$  se han aplicado  $d$  diferencias. Los parámetros  $p$ ,  $d$  y  $q$  son enteros mayores o iguales a cero y se refieren al orden de las partes autorregresiva, integrada y media móvil del modelo, respectivamente. Los parámetros  $\phi_1, \dots, \phi_p$  también pertenecen a la parte autorregresiva del modelo,  $\theta_1, \dots, \theta_q$  pertenecen a la parte de medias móviles del modelo.  $\phi_0$  es una constante, y  $\varepsilon_t$  es el término de error, también llamado innovación o perturbación estocástica, esta última asociada más a modelos econométricos uni-ecuacionales o de múltiples ecuaciones [Pindyck98].

El modelo ARIMA es para datos no estacionales y no estacionarios. Box y Jenkins generalizaron este modelo para tratar la estacionalidad. Su modelo propuesto se conoce como ARIMA estacional o Seasonal Auto Regresive Integrate Movil Average (SARIMA), por sus siglas en inglés. En este modelo, se utiliza la diferenciación estacional del orden apropiado para eliminar la no estacionariedad de la serie. Pero estos no son tratados en esta tesis, debido a que los horizontes de tiempo de estudio son a corto plazo.



En la siguiente sección se introduce el análisis de correlación como criterio de selección de variables que presenten relación entre sí, para incluir a estas en modelos del tipo multivariable, que se presentan en algunos casos de estudio en el Capítulo 4.

## 2.5. Análisis de correlación

En esta sección se describe el criterio utilizado para seleccionar las variables que estarán presentes en el planteamiento de los modelos que incluyen múltiples variables presentados en esta tesis, para lo cual se parte de analizar el Coeficiente de Correlación de Pearson (CCP), que puede verse en [Martínez Ortega09] y [Cohen14], y que se define más adelante. Para ello, primero es necesario definir a la varianza y la desviación típica marginal, que son medidas utilizadas en áreas de matemáticas y estadística descriptiva.

La **varianza**  $\sigma_N^2$ , se trata de una palabra impulsada por el matemático Ronald Fisher (1890 a 1962) [Fisher90], en teoría de probabilidad, la varianza o variancia [Fisher90], [Walpole07] de una variable aleatoria es una medida de dispersión definida como la esperanza del cuadrado de la desviación de dicha variable respecto a su media, y se calcula con la siguiente expresión

$$\sigma_N^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (y_i - \bar{Y})^2 \quad (2.21)$$

donde  $y_i$  representa a cada dato,  $\bar{Y}$  es la media de los datos y  $N$  el número de datos. Lo que hace la varianza es establecer la variabilidad [Walpole07] de la variable aleatoria. Es importante tener en cuenta que, en ciertos casos, es preferible emplear otras medidas de dispersión ante las características de las distribuciones.

La desviación típica marginal, o **desviación estándar**  $\sigma$  representa la magnitud de la dispersión de variables de intervalo y de razón, y resulta muy útil en el campo de la estadística descriptiva, y para obtenerla, simplemente se parte de la varianza y se calcula su raíz cuadrada. La desviación sirve para analizar el comportamiento de los valores alrededor de su promedio.

Ahora bien, en probabilidad y estadística, la **correlación** [Walpole07], indica la fuerza y dirección de una relación lineal y proporcionalidad entre dos variables estadísticas. Se considera que dos variables cuantitativas están correlacionadas cuando los valores de una

de ellas varían sistemáticamente con respecto a los valores homónimos de la otra: si tenemos dos variables ( $A$  y  $B$ ) existe correlación entre ellas si al disminuir los valores de  $A$  lo hacen también los de  $B$  y viceversa.

Existen diversos coeficientes que miden el grado de correlación, adaptados a la naturaleza de los datos. El más conocido es el CCP que se denotará como  $\gamma$ , introducido en realidad por Francis Galton en [Galton89], es un parámetro que indica si la correlación es débil o fuerte, donde su valor siempre estará entre  $-1$  y  $1$ , y este se obtiene a partir de la siguiente expresión:

$$\gamma = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} \quad (2.22)$$

donde  $\sigma_x$  y  $\sigma_y$  son las desviaciones típicas marginales de cada una de las dos variables  $x$  e  $y$  respectivamente, y  $\sigma_{xy}$  es la covarianza de  $(x, y)$ . Para su interpretación, según los valores de  $\gamma$ , se presentan los siguientes cuatro principales casos:

- $\gamma = 0$ : No existe correlación.
- $\gamma = 1$  ó  $\gamma = -1$ : La correlación es perfecta.
- $\gamma$  próximo a  $1$  o  $-1$ : La correlación es fuerte.
- $\gamma$  cercano a  $0$ : La correlación es débil.

De lo anterior hay diferentes casos intermedios se pueden presentar, por ejemplo un valor  $0.5$  de correlación entre dos variables, que no sería fuerte ni débil, sino media. Así pues, con esta medida es posible realizar el análisis para diferentes variables y en muchas aplicaciones de esta medida se busca seleccionar las que tienen una correlación más fuerte, ya sea positiva (relación directamente proporcional) o negativa (relación inversamente proporcional). En el caso de ST del clima se sabe que la humedad afecta a otras variables como a la temperatura, por mencionar un ejemplo y con este análisis formal de correlación, se tiene una medida cuantitativa de la relación que tienen y esto permite plantear modelos matemáticos multivariable que tengan una mejor aproximación que con los modelos univariable, ya que se alimentan con más información.

En la siguiente sección se incluye un resumen de la teoría de pronóstico que se analizará en el Capítulo 4 como caso de estudio.

## 2.6. Pronóstico de una ST y análisis del error

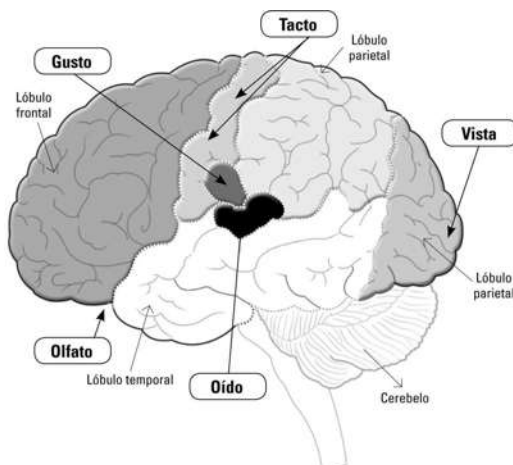
El pronóstico es un proceso de estimación en situaciones de incertidumbre y ha evolucionado hacia la práctica del plan de gestión del consumo de energía, en negocios o clima [Falk12], [Hyndman07], [Kantz03]. El pronóstico es una herramienta que proporciona una estimación cuantitativa o cualitativa de una o varias variables que describen un evento futuro, basado en información actual o pasada [Mauricio13]. Un pronóstico generalmente se clasifica por el horizonte del tiempo que cubre, y depende mucho de la aplicación, pero generalmente se clasifica en tres categorías:

- A corto plazo: un período de hasta un año, pero casi siempre es inferior a 3 meses.
- Mediano plazo: rango de 3 meses a 3 años.
- Largo plazo: 3 años o más.

Este trabajo se centra en pronósticos para el corto plazo, en horizontes de 1, 48 y 96 horas, principalmente para las ST de temperatura y velocidad del viento. Una forma de cuantificar el rendimiento de los diferentes modelos y del pronóstico, es a través de la comparación de la series temporales o señales reales observadas versus los modelos matemáticos y datos pronosticados y se puede hacer mediante la evaluación de diferentes tipos de error, algunos de ellos son el el error absoluto medio o Mean Absolute Error (MAE). La raíz del error cuadrático medio o Root Mean Square Error (RMSE). También es usada como métrica de error a la raíz del error porcentual cuadrático o Root Mean Square Percentage Error (RMSPE). Y el error porcentual absoluto medio o Mean Absolute Error Porcentaje (MAPE). Todas estas abreviaturas de sus siglas en inglés. En la literatura frecuentemente se utiliza el MAE y el MAPE, por ejemplo en [Tayman99], [Zuniga13] y [Lopez Farias18], el primero se calcula de forma sencilla y es muy utilizado en diversas áreas de la ciencia, mientras que el MAPE se utiliza con frecuencia para evaluar modelos y pronóstico, ya que se presenta de forma porcentual al error medio absoluto, lo cual resulta sencilla de interpretar al lector.

Matemáticamente, el MAE se define como

$$MAE = \frac{\sum_{i=1}^N |\hat{y}(i) - s(i)|}{N} \quad (2.23)$$



**Figura 2.5:** Partes del cerebro y localización de los sentidos

donde  $\hat{y}$  representa a la serie de tiempo pronosticada en el instante  $i$ ,  $N$ , es el número de observaciones o muestras, y  $i$  representa al tiempo o instante actual. El error RMSE se define como

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\hat{y}(i) - s(i))^2} \quad (2.24)$$

mientras que error MAPE se calcula en porcentaje como

$$MAPE = \frac{100\%}{N} \sum_{i=1}^N \left| \frac{s(i) - \hat{y}(i)}{s(i)} \right|. \quad (2.25)$$

Finalmente, en la siguiente sección se presenta una breve introducción a las señales electroencefálicas, que también serán caso de estudio en el Capítulo 4.

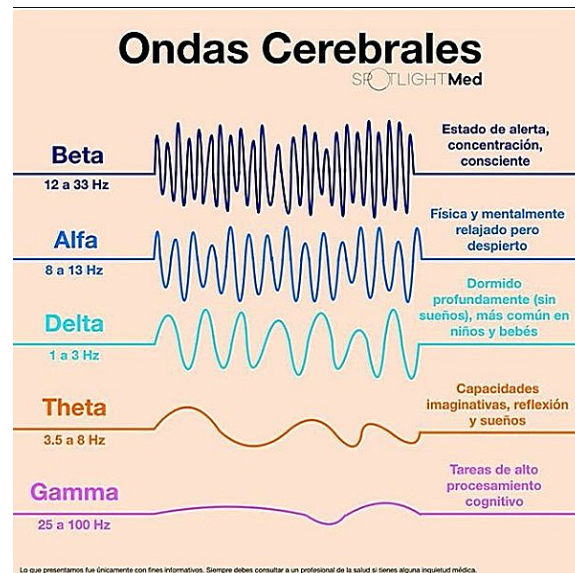
## 2.7. Señales EEG

La información que captamos por los sentidos sigue su camino hacia distintas zonas del cerebro donde se procesa, según su contenido, puede desencadenar un movimiento, permanecer indiferentes, o pasar a la memoria de largo plazo, contribuyendo a la formación de los sentimientos y conceptos del mundo que nos rodea. En la Figura 2.5 se muestra las zonas relacionadas a dónde se ubican los sentidos en el cerebro. Una herramienta que permite estudiar al cerebro se conoce como electroencefalografía, y la gráfica que la representa como Electroencefalograma (EEG), la cual, es una exploración neurofisiológica que se basa en el registro de la actividad

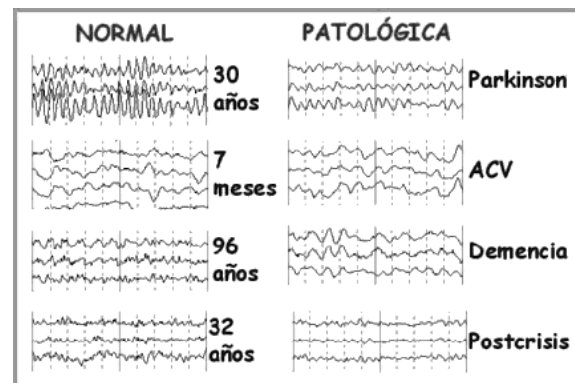
bioeléctrica cerebral en condiciones basales de reposo, en vigilia o sueño, y durante diversas activaciones mediante un equipo de electroencefalografía, las frecuencias en que se presentan estas señales cerebrales se clasifican llamándolas ondas deltha, theta, alpha, betha, y gamma, las cuales se describen a en la Figura 2.6(a) y el ejemplo de una onda característica para diferentes patologías se muestra en la Figura 2.6(b). En este trabajo se analizan señales reales de ondas beta y gamma para su modelado en el Capítulo 4.

## 2.8. Conclusiones del capítulo 2

Este capítulo presentó la teoría preliminar de otras metodologías de modelado secundarias, utilizadas con fines comparativos en esta tesis, que se incluyen de manera resumida, así como algunas definiciones matemáticas. Una de estas metodologías es el RLS, el cual es un enfoque sencillo para predecir una respuesta cuantitativa en base a una sola variable predictora, después se describió el RPS, el cual se formula mediante polinomios de Chebyshev y Legendre, aprovechando su propiedad de ortogonalidad de sus términos de orden mayor, lo cual garantiza más contribución a la representación de sistemas. También, se presentó teoría previa al modelado con uso de RNA, donde se muestra su similitud con una neurona real, se muestran las funciones por la que pasa una entrada o señal hasta llegar a su salida de la neurona. Se incluye también teoría sobre la estructura de modelos ARIMA, los cuales son una combinación de modelos autorregresivos y de promedio o media móvil. Después, se presentó una breve introducción a la teoría de pronóstico de ST y se presentó la definición a algunos de los diferentes tipos de error frecuentemente utilizados, como lo son el MAE, Mean Square Error (MSE), RMSE, MAPE. Por último, se presenta una breve introducción a las señales EEG que serán caso de estudio al final del capítulo 4.



(a) Tipos de ondas cerebrales



(b) EEG en algunas patologías [vitas20]

Figura 2.6: Ondas cerebrales EEG

## Capítulo 3

# Observador óptimo de armónicos vía filtro de Kalman-Bucy

En este capítulo se presenta al Observador Óptimo de Armónicos ( $O^2A$ ) para modelar ST, primero, se incluyen los conceptos preliminares que son la base para esta técnica de modelado. El modelo matemático consiste en tener una representación en EE, estructurada con bases en la teoría de series de Fourier, las ST a modelar pueden ser señales provenientes de un proceso o fenómeno real con la propiedad de presentar periodicidad. Posteriormente, el contenido armónico (amplitudes y fases) se determina a través de un estimador óptimo, conocido como filtro de Kalman-Bucy. Una vez que el estimador converge, el modelo obtenido se utiliza fuera de línea para realizar el pronóstico, o puede ser incluso utilizado con fines de control, para diseño y análisis.

### 3.1. Preliminares matemáticos

En esta sección se presentan los preliminares de la metodología  $O^2A$ , empezando por las Series de Fourier, la TDF, el pre-procesamiento de las ST y una breve introducción al filtro de Kalman-Bucy.

### 3.1.1. Series de Fourier

Las series e integrales de Fourier constituyen un tema clásico del análisis matemático. Desde su aparición en el siglo XVIII en el estudio de las vibraciones de una cuerda, han sido fundamentales para el desarrollo de diferentes análisis en la ciencia. Mostrado por Antoni Zygmund en el prólogo de su libro sobre series trigonométricas [Zygmund02]. Son utilizadas en esta tesis para el modelado con el  $O^2A$ , ya que fueron planteadas para representar señales periódicas, es decir que se repiten cada cierto intervalo de tiempo, tal es el caso de las ST, por lo que su inclusión en el modelo en EE de esta metodología resulta muy conveniente.

**Definición:** Considere una señal periódica  $s(t)$  con el periodo  $T$ , que puede ser aproximada por su serie trigonométrica de Fourier asociada como

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N \left[ a_n \cos \frac{2n\pi}{T}t + b_n \sin \frac{2n\pi}{T}t \right] \quad (3.1)$$

donde  $N \geq 1$  es un número entero (con  $N \rightarrow \infty$ ) que representa el total de armónicos en la señal, y  $a_0$ ,  $a_n$  y  $b_n$  son los coeficientes de Fourier correspondientes [Tolstov62] y se calculan de la siguiente manera [2]:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{T} \int_{-T}^T f(t) dt \\ a_n &= \frac{1}{T} \int_{-T}^T f(t) \cos\left(\frac{n\pi x}{T}\right) dt \\ b_n &= \frac{1}{T} \int_{-T}^T f(t) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{T}\right) dt \\ n &= 1, 2, 3, \dots, N. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Para los propósitos de este trabajo, una representación conveniente de la señal (3.1) se convierte en  $s(t)$

$$s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N A_n \cos(w_n t + \theta_n) \quad (3.3)$$

con  $A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$  y  $\theta_n = \tan^{-1} \frac{b_n}{a_n}$ , siendo  $A_n$  la amplitud de la señal cosinusoidal,  $w_n = \frac{2\pi n}{T}$  la frecuencia angular y  $\theta_n$  la fase [Tolstov62]. Para simplificar, se considera el caso cuando  $a_0 = 0$  y  $N = 1$  en (3.3). Al usar la identidad trigonométrica  $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$ ,



la señal (3.3) resulta en

$$\begin{aligned} s(t) &= A_1 \cos(w_1 t + \theta_1) \\ &= A_1 \cos \theta_1 \cos w_1 t - A_1 \sin \theta_1 \sin w_1 t. \end{aligned} \quad (3.4)$$

La forma (3.4) será utilizada más adelante en la Sección 3.2.

### 3.1.2. Transformada discreta de Fourier

La TDF se usa aquí para determinar las frecuencias armónicas más representativas contenidas en una ST dada. De esta manera, estas frecuencias se seleccionan para construir un modelo en EE. Se pueden ver más detalles sobre la TDF en [Proakis06]. Vale la pena mencionar que la TDF no se usa para crear el modelo de la ST, sino para determinar solo las frecuencias representativas en el diseño del modelo de observador óptimo. La TDF es una representación de dominio de la frecuencia  $X_k$  de una señal con entrada discreta  $x_k$ , definida como

$$\begin{aligned} X_k &= \sum_{j=0}^{Ns-1} x_j e^{-\frac{i2\pi}{N} k j} \\ &= \sum_{j=0}^{Ns-1} x_j [\cos(2\pi k j / Ns) - i \sin(2\pi k j / Ns)] \end{aligned} \quad (3.5)$$

donde  $Ns$  es el número de muestras y  $k$  es el número del armónico, y  $j$  es el instante actual. A partir de  $X_k$  se obtienen los coeficientes de Fourier, y más adelante, a partir de estos coeficientes son considerados solo las frecuencias de los armónicos más representativos o de mayor amplitud para construir el observador.

### 3.1.3. Pre-procesamiento de las señales

Como ya se sabe, una ST es una señal proveniente de un proceso o fenómeno real, con la propiedad de presentar periodicidad, tendencia en intervalos repetitivos, entre otras características cualitativas, por ejemplo, el comportamiento de las variables climáticas como la temperatura, la velocidad del viento, la radiación solar, la humedad, la presión atmosférica, etc.. Debido a que una ST en ocasiones requiere de observaciones perdidas o que hacen falta, o bien, no son tomadas a periodos regulares pero se tiene un registro de cuando fueron medidas,

lo cual con frecuencia suele ocurrir, por ello, es necesario un pre-procesamiento. Por ejemplo, para una aplicación más rápida de la TDF y para que otros algoritmos funcionen más eficientemente. Por otro lado estas señales también se pueden encontrar contaminadas por ruido no deseado que causa un alto contenido de armónicos, por lo cual puede ser necesaria la aplicación de un filtrado o suavizado. En esta tesis se realiza un suavizado mediante el PM, además de un suavizado adicional que consiste en reconstruir a la ST con menos armónicos de su contenido total. Ya introducidos estos conceptos preliminares, en la siguiente sección se muestra la estructura y bases de la metodología propuesta.

### 3.1.4. Filtro de Kalman-Bucy

A fines de la década de 1950, James Follin, A. G. Carlton, James Hanson y Richard Bucy desarrollaron el filtro Kalman de tiempo continuo en un trabajo para el Laboratorio de Física Aplicada Johns Hopkins. Rudolph Kalman desarrolló independientemente el filtro Kalman de tiempo discreto en 1960. En abril de 1960, Kalman y Bucy se dieron cuenta del trabajo del otro y colaboraron en la publicación del filtro Kalman de tiempo continuo en [Kalman61], este filtro a veces se denomina Filtro de Kalman-Bucy (FKB), en el se deriva una ecuación diferencial no lineal del tipo Riccati para la matriz de covarianza del error de filtrado óptimo. La solución de esta ecuación de varianza especifica completamente el filtro óptimo para intervalos de suavizado finitos o infinitos y estadísticas estacionarias o no estacionarias. La ecuación de varianza está estrechamente relacionada con las ecuaciones diferenciales de Hamilton (canónicas) del cálculo de variaciones.

El FKB se puede resumir de la siguiente manera.

1. La dinámica del sistema de tiempo continuo y las ecuaciones de medición se dan como

$$\begin{aligned}
 \dot{x} &= Ax + Bu + v_1(t) \\
 y &= Cx + v_2(t) \\
 v_1 &\sim (0, Q_{v_1}) \\
 v_2 &\sim (0, R_{v_2})
 \end{aligned} \tag{3.6}$$

donde  $u$  es una entrada conocida y  $v_1(t)$  y  $v_2(t)$  son procesos de ruido blanco de tiempo

continuo, además, la covarianza de  $v_1(t)$  y de  $v_2(t)$  son, respectivamente

$$\begin{aligned} E \{v_1(t)v_1^T(\tau)\} &= Q_{v_1}\delta(t-\tau) \\ E \{v_2(t)v_2^T(\tau)\} &= R_{v_2}\delta(t-\tau) \end{aligned} \quad (3.7)$$

donde  $E\{\cdot\}$  representa el valor esperado, y  $\delta(t-\tau)$  es la respuesta de impulso de tiempo continuo, con un valor de  $\infty$  en  $t=\tau$ , un valor de 0 en otras partes y un área de 1, y  $Q_{v_1}$  y  $R_{v_2}$  son matrices no negativas [Simon06].

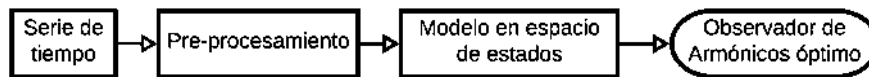
2. Las ecuaciones del FKB dan como resultado [Simon06]

$$\begin{aligned} \hat{x}(0) &= E\{x(0)\} \\ P(0) &= E\{(x(0)-\hat{x}(0))(x(0)-\hat{x}(0))^T\} \\ L &= PC^T R_{v_1}^{-1} \\ \dot{\hat{x}} &= A\hat{x} + Bu + L(y - C\hat{x}) \\ \dot{P} &= -PC^T R_{v_1}^{-1}CP + AP + PA^T + Q_{v_2}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

La gran mayoría de las aplicaciones de filtro de Kalman se implementan en computadoras digitales, por lo que puede parecer superfluo hablar sobre el filtrado de Kalman para mediciones de tiempo continuo, pero además, los estimadores de tiempo continuo en estado estacionario pueden analizarse utilizando conceptos convencionales de dominio de frecuencia, lo que proporciona una ventaja sobre los estimadores de tiempo discreto, como se ve en [Simon06] y [Simon10]. Se hace notar que el filtro de Kalman es el mejor estimador de estado para sistemas dinámicos lineales con ruido gaussiano, en el sentido de minimiza un criterio de mínimos cuadrados [Simon06]. Para sistemas no lineales, en general, no es posible derivar el estimador de estado óptimo en forma cerrada, pero se pueden usar varias modificaciones del filtro de Kalman para estimar el estado, estas modificaciones incluyen el filtro Kalman extendido, el filtro Kalman sin aroma y el filtro de partículas [Mohan M15]. A continuación, se plantea el  $O^2A$ , basado en esta teoría del FKB.

### 3.2. Modelado univariable con el observador óptimo de armónicos vía FKB

Esta sección incluye los conceptos que son base de la metodología de modelado matemático propuesta, primero se describe al  $O^2A$  univariable. La Figura 3.1 muestra el proceso de modelado para ST introducido en esta sección y cuyos resultados son mostrados la Sección 4.1 aplicados a diferentes casos de estudio.



**Figura 3.1:** Proceso para el modelado con el  $O^2A$  y pronóstico de una ST.

Esta metodología de modelado, consta de una representación en EE usando la teoría de series de Fourier como base, la cual tiene varias ventajas sobre otros métodos, una de las cuales que permite una representación simple para ST, además, es efectiva para representar señales que tienen la propiedad de ser periódicas o incluso no periódicas, funcionando mejor con las primeras, cabe mencionar que no queda restringida solo al clima, ya que puede ser utilizada para modelado de otros tipos de señales periódicas como el caso del análisis de redes eléctricas de potencia o señales bioeléctricas que también pueden presentar esta propiedad de periodicidad. El modelo en EE resultante es LVT y, en consecuencia, tiene la ventaja de ser tratable en términos de que es posible utilizar la mayor parte de la teoría de control clásico conocida con fines de diseño de controladores, o realizar diferentes análisis en el dominio del tiempo o de la frecuencia. Además, es importante mencionar que el estimador de estados presentado en esta sección está basado en un filtro de Kalman-Bucy, y este tiene la propiedad de ser robusto frente a los ruidos gaussianos (media cero), lo cual se verá posteriormente.

Para empezar, se requiere lograr una representación EE para (3.4), por lo cual, primero se definen las variables de estado como

$$x_1 = A_1 \cos \theta_1 \quad y \quad x_2 = A_1 \sin \theta_1. \quad (3.9)$$

Entonces (3.4) puede ser representado como

$$\dot{x}_1 = 0 \quad y \quad \dot{x}_2 = 0 \quad (3.10)$$

con condiciones iniciales  $x_1(0) = A_1 \cos \theta_1$ ,  $x_2(0) = A_1 \sin \theta_1$ , y la salida

$$y = C(t) \quad (3.11)$$

donde  $x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}^T$  y  $C(t) = \begin{bmatrix} \cos w_1 t & -\sin w_1 t \end{bmatrix}$ . Así, la señal (3.4) puede ser representada por

$$s(t) = C(t)x \quad (3.12)$$

sujeto a (3.10). Además, por cuestiones prácticas se considera que la señal  $s(t)$  se ve afectada por ruido. Una representación en EE para (3.10) - (3.11) que sea LVT, puede escribirse como

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v_1 \\ y &= C(t)x + v_2 \end{aligned} \quad (3.13)$$

donde  $x \in \mathbf{R}^2$  es el vector de estados,  $y \in \mathbf{R}$  es la salida del sistema correspondiente a  $s(t)$ , y  $v_1 \in \mathbf{R}^2$  y  $v_2 \in \mathbb{R}$  son el proceso y mediciones de ruido, respectivamente, para los cuales se supone lo siguiente:

- **A1.**  $v_1$  y  $v_2$  son ruidos gaussianos de media cero, con covarianza vista en la Ecuación 3.7.
- **A2.** El estado inicial  $x(t_0)$ , los ruidos  $v_1$  y  $v_2$  son procesos no correlacionados.

La suposición A1 implica que los ruidos no están correlacionados instantáneamente y que los datos probabilísticos de ruido los contienen sus matrices de covarianza. Vale la pena señalar que esta suposición es justificable para aplicaciones prácticas, ya que muchos fenómenos físicos corrompidos por el ruido pueden caracterizarse con tales propiedades. La suposición A2 se refiere a los ruidos y la condición inicial son independientes entre sí.

El exosistema o modelo (3.13) modela una señal que varía en el tiempo ya en una representación de EE, para el cual se puede sintetizar un estimador de estados óptimo llamado  $O^2A$  en esta tesis para estimar los estados de (3.13).

De esta manera, para una señal  $s(t)$  afectada por el ruido  $v_1$  y  $v_2$  para la cual su amplitud  $A_1(t)$  y  $\theta_1$  son valores desconocidos, se puede diseñar un estimador de estado óptimo (basado en el filtro Kalman-Bucy) para estimar la señal  $s(t)$ , con filtrado de ruido, y extraer su contenido armónico en línea, y tener un modelo en EE que puede utilizarse para fines de

análisis y control. Además, se pueden conocer los parámetros de amplitud y fase con relaciones trigonométricas sencillas para poderse expresar mediante una serie de Fourier. Basado en la forma de (3.13), el estimador de estado óptimo da como resultado

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}} &= L(y - \hat{y}) \\ &= L(s(t) - \hat{y}) \\ \hat{y} &= C(t)\hat{x}\end{aligned}\tag{3.14}$$

donde  $\hat{x}$  es el estimador de estados,  $\hat{y}$  es la salida estimada de  $y$ , donde  $y$  representa a la ST  $s(t)$ , y  $L$  es la matriz de ganancia del estimador. El estimador es óptimo en el sentido de que la matriz de covarianza del error (diferencia entre  $s(t)$  y  $\hat{y}$ ) se minimiza en el promedio, para más detalles ver [Tolstov62], esto se puede expresar como

$$E \{(x - \hat{x})(x - \hat{x})^T\}\tag{3.15}$$

es minimizado. Tener en cuenta que el modelo del estimador en 3.14 se deriva directamente del sistema (3.13), más un término adicional  $L$  para garantizar la convergencia del estado del observador al estado real del sistema. En [Kalman61] se demuestra que el FKB es uniformemente asintóticamente estable, esto es,  $\hat{x}$  converge a  $x$ , cuando  $t$  tiende al infinito. No es necesario conocer los estados reales del sistema, solo es suficiente con conocer a la  $s(t)$ . Por lo tanto, las componentes de amplitud y fase de la señal  $s(t)$  no son necesarias, ya que el estimador  $\hat{y}$  en (3.14) convergerá a  $s(t)$ , y éstas componentes pueden calcularse luego.

De acuerdo con [Friedland86] y [Stengel94], la matriz de ganancia óptima  $L$  del estimador de estado (3.14) se convierte en

$$\begin{aligned}L &= P_e C^T(t) R_{v_2}^{-1} \\ \dot{P}_e &= Q_{v_1} - P_e C^T(t) R_{v_2}^{-1} C(t) P_e\end{aligned}\tag{3.16}$$

con  $P_e(\hat{x}(0)) = P_{e_0}$ .

Una vez que el estimador ha convergido al sistema real, los valores de  $A_1(t)$  y  $\theta_1$  de  $s(t)$  se pueden determinar a partir de (3.9), realizando los siguientes cálculos:

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{A_1(t) \cos \theta_1}{A_1(t) \sin \theta_1} \implies \theta_1 = \arctan\left(\frac{x_2}{x_1}\right)\tag{3.17}$$

y

$$A_1(t) = \frac{x_1}{\cos \theta_1} \quad \text{ó} \quad A_1(t) = \frac{x_2}{\sin \theta_1}. \quad (3.18)$$

Además, para el caso en que una señal contiene un componente constante, dado en (3.1) como  $a_0/2$ , entonces se puede agregar un estado al exosistema (3.10), definiendolo como  $\dot{x}_0 = 0$ , con la condición inicial  $x_0(0) = a_0/2$ .

Como se observa, la representación del espacio de estado (3.10) - (3.11) para una ST representada con  $s(t)$  es realizada con el objetivo de sintetizar un observador o estimador de estados  $O^2A$ .

El procedimiento anterior se puede generalizar para  $N$  armónicos contenidos en la señal  $s(t)$  en (3.3) y (3.4), notar que cada armónico requiere dos estados (es decir, para  $N = 1$  fueron necesarios declarar  $x_1$  y  $x_2$ ). Por lo tanto, la generalización de la representación en EE de  $s(t)$  para  $N \geq 1$  da como resultado a (que también es LVT)

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v_1 \\ y &= C(t)x + v_2, \end{aligned} \quad (3.19)$$

donde  $x \in \mathbf{R}^2$  es el vector de estados definido como

$$x = \left[ x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4 \quad \cdots \quad x_{2N-1} \quad x_{2N} \right]^T$$

donde  $y \in \mathbf{R}$  la señal de salida correspondiente a  $s(t)$  con  $N$  armónicos, con la matriz de salida

$$C(t) = \left[ \cos w_1 t \quad -\sin w_1 t \quad \cos w_2 t \quad -\sin w_2 t \quad \cdots \quad \cos w_N t \quad -\sin w_N t \right]$$

y  $v_1 \in \mathbf{R}^{2N}$  y  $v_2 \in \mathbf{R}$  son los ruidos que afectan a la señal. La salida del sistema  $y$  en (3.19) puede ser vista como

$$y = \sum_{n=1,3,\dots}^{2N-1} (x_n \cos(\omega_n t) + x_{n+1} \sin(\omega_n t)) + v_2.$$

De esta forma, para el sistema (3.19) se puede sintetizar un estimador de estado óptimo con la forma de (3.14), y de dimensión apropiada, donde  $\hat{y} \rightarrow y$ , o equivalente,  $\hat{y} \rightarrow s(t)$ . La amplitud y la fase dada en (3.17) - (3.18) se pueden generalizar como

$$\theta_1 = \arctan\left(\frac{x_2}{x_1}\right), \quad \theta_2 = \arctan\left(\frac{x_4}{x_3}\right), \dots, \quad \theta_N = \arctan\left(\frac{x_{2N}}{x_{2N-1}}\right) \quad (3.20)$$

y

$$A_1(t) = \frac{x_1}{\cos \theta_1}, A_2(t) = \frac{x_2}{\cos \theta_2}, \dots, A_N(t) = \frac{x_N}{\cos \theta_N}. \quad (3.21)$$

Una extensión de esta metodología para el caso multivariable se presenta en la siguiente sección.

### 3.3. Modelado multivariable con el observador óptimo de armónicos vía FKB

El  $O^2A$  multivariable presentado en esta sección es una generalización del univariable. Para empezar, se definen dos señales o ST como  $s1(t)$  y  $s2(t)$ , que representan a dos variables reales cualesquiera y tienen la forma de (3.3), sabiendo que una ST se puede aproximar como (3.12), entonces las respectivas representaciones en EE, vistas en (3.10) y (3.11), para  $s1(t)$  y  $s2(t)$  son las siguientes

$$\begin{aligned} \dot{x}_{s1} &= v_1 \\ y_{s1} &= C_{s1}(t) x_{s1} + v_2 \end{aligned} \quad (3.22)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_{s2} &= v_3 \\ y_{s2} &= C_{s2}(t) x_{s2} + v_4 \end{aligned} \quad (3.23)$$

además, también se considera que en ambas señales está presente ruido gaussiano, donde  $C_{s1}(t)$ ,  $x_{s1}$ ,  $C_{s2}(t)$  y  $x_{s2}$  respectivamente son

$$C_{s1}(t) = \begin{bmatrix} (\cos w_1 t)_{s1} & (-\sin w_1 t)_{s1} & \cdots & (\cos w_N t)_{s1} & (-\sin w_N t)_{s1} \end{bmatrix},$$

$$x_{s1} = \begin{bmatrix} x_{1s1} & x_{2s1} & \cdots & x_{2N-1s1} & x_{2Ns1} \end{bmatrix}^T,$$

$$C_{s2}(t) = \begin{bmatrix} (\cos w_1 t)_{s2} & (-\sin w_1 t)_{s2} & \cdots & (\cos w_N t)_{s2} & (-\sin w_N t)_{s2} \end{bmatrix}$$

y

$$x_{s2} = \begin{bmatrix} x_{1s2} & x_{2s2} & \cdots & x_{2N-1s2} & x_{2Ns2} \end{bmatrix}^T.$$



Para plantear un modelo en EE multivariable, primero se debe buscar que sus variables estén correlacionadas unas con otras (ver subsección de correlación en 2.5), es decir que la o las variables adicionadas aporten en la representación de una variable de interés. Partiendo de esto, se propone agregar la información a la ST que es de interés modelar, y que esta serie quede representada por una suma de ella misma más otra o más series que estén correlacionadas con ella, y con la consideración de que la ST de interés sea la que mas estados contenga en el modelo en EE.

$$sf = s1 + s2 \quad (3.24)$$

donde  $sf$  es la señal o ST final a modelar, compuesta por dos ST, por lo que su representación en EE, de manera análoga a (3.19), puede escribirse como

$$\begin{aligned} \dot{x}_{sf} &= v_1 + v_3 \\ y_{sf} &= C_{s1}(t)x_{s1} + C_{s2}(t)x_{s2} + v_2 + v_4 \end{aligned} \quad (3.25)$$

o bien, sumando el ruido  $v_{sf1} = v_1 + v_3$  y  $v_{sf2} = v_2 + v_4$

$$\begin{aligned} \dot{x}_{sf} &= v_{sf1} \\ y_{sf} &= C_{s1}(t)x_{s1} + C_{s2}(t)x_{s2} + v_{sf2} \end{aligned} \quad (3.26)$$

entonces generalizando el modelo en EE para dos variables y N armónicos se tiene que su salida esá dada por

$$\begin{aligned} y_{sf} &= x_{1s1}(\cos w_1t)_{s1} + x_{2s1}(-\sin w_1t)_{s1} + \dots + x_{2N-1s1}(\cos w_Nt)_{s1} + x_{2Ns1}(-\sin w_Nt)_{s1} \\ &\quad + x_{1s2}(\cos w_1t)_{s2} + x_{2s2}(-\sin w_1t)_{s2} + \dots + x_{2N-1s2}(\cos w_Nt)_{s2} + x_{2Ns2}(-\sin w_Nt)_{s2} \end{aligned} \quad (3.27)$$

y el estimador de estado óptimo da como resultado

$$\begin{aligned} \hat{\dot{x}} &= L(y - \hat{y}) \\ &= L(sf(t) - \hat{y}_{sf}) \\ \hat{y}_{sf} &= C(t)\hat{x}_{sf} \end{aligned} \quad (3.28)$$

donde  $\hat{y}_{sf}$  es la salida estimada y  $L$  es la matriz de ganancia del estimador y  $\hat{x}_{sf}$  es el estimador de estados o “armónicos”, las componentes armónicas (amplitudes y fases) se estiman a partir de los estados estimados, de manera análoga a (3.20) y (3.21).

### 3.4. Conclusiones del capítulo 3

La metodología de modelado propuesta con el  $O^2A$  multivariable tiene como principales ventajas el tener una representación en EE, y solo requiere de mediciones (muestras) de una ST real o salida  $y$ , y no requiere conocer o tener los estados reales del sistema, pues el observador los estima y a partir de ellos se estima una salida  $\hat{y}$  que aproxima a una ST real.

Otra ventaja es que el modelo se puede usar para aproximar diferentes ST que presenten periodicidad, ya que su estructura se deriva de la teoría de series de Fourier que son muy utilizadas para representar este tipo de ST o señales. Y para tener modelos con mejor aproximación se requiere estructurar el modelo en EE con más armónicos, lo que provoca un incremento en el número de estados a estimar por el  $O^2A$ .

Una de las principales ventajas es que el modelo en EE es lineal con respecto a los estados, y es variante con el tiempo por la incorporación de funciones senos y cosenos. Esta propiedad de ser un modelo LVT lo hace compatible para poder realizar otro tipo de análisis con la teoría de control clásica, en el dominio de la frecuencia o del tiempo haciendo su respectiva transformación. Algunos de estos análisis pueden ser diagramas de Bode o de Niquist, lugar de las raíces o incluso diseño de controladores.

El  $O^2A$  está basado en el filtro de Kalman-Bucy, el cual tiene como una de sus propiedades presentar inmunidad a ruidos gaussianos, por lo que las ST o señales a modelar pudiesen contenerlo y el observador convergería.

En el siguiente capítulo se muestran los resultados para las metodologías presentadas, en aplicación a diferentes casos de estudio.

## Capítulo 4

# Casos de estudio: modelado y pronóstico

En este capítulo se presentan los resultados para el modelado de las ST de temperatura y velocidad del viento, utilizando las metodologías para modelado presentadas en los Capítulos 2 y 3. Para el caso de modelos con una sola variable involucrada, se presentan las metodologías con el uso del  $O^2A$  univariable, modelado con regresión lineal simple y polinomial simple, un modelo basado en RNA y un modelo ARIMA. Para el caso multivariable se analizan el  $O^2A$  multivariable, modelos con regresión polinomial ortogonal múltiple y modelo RNA multivariable. Al final del capítulo se presenta una sección para comparar todas las metodologías mencionadas, analizando errores del tipo MAE, RMSE, MAPE, y RMSPE como criterio de evaluación del modelado de las ST, en horizontes de tiempo de 1, 12, 24 y 96 horas.

### 4.1. Modelado univariable y pronóstico para ST del clima

En esta sección se incluyen resultados para los modelos univariable presentados en esta tesis, los cuales son el modelado con  $O^2A$  univariable, el modelo por regresión polinomial ortogonal simple, modelado con uso de RNA, y por último un modelo ARIMA.

### 4.1.1. Modelado vía $O^2A$ univariable

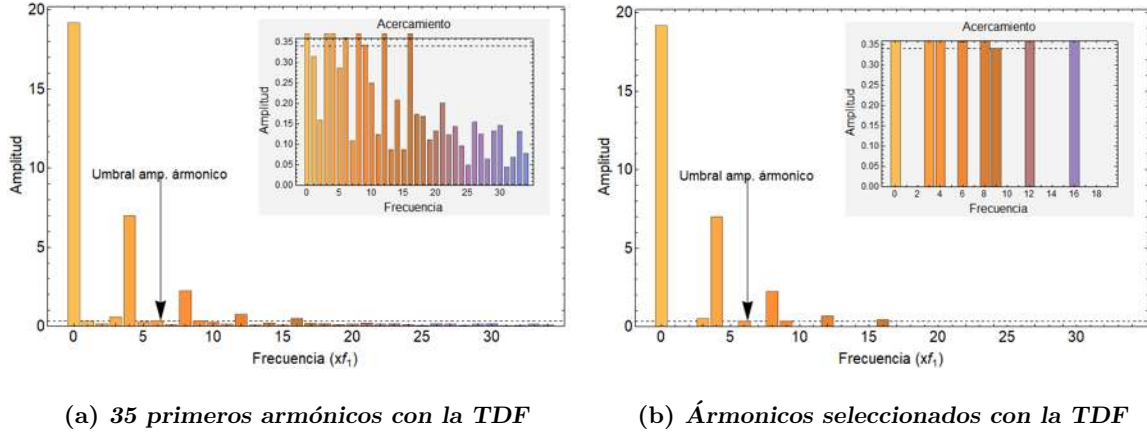
En esta sección se presentan los resultados obtenidos para el modelado aplicando la teoría del  $O^2A$  presentada en el Capítulo 3. En este caso de estudio se modela una ST de temperatura y una de velocidad del viento, con observaciones reales obtenidas de la estación meteorológica ubicada en el edificio de posgrado de Ingeniería Eléctrica de la UMSNH [Baca18], las cuales se encuentran registradas a periodos de 1 minuto.

El proceso seguido es el mostrado en la Figura 3.1. Primeramente se realiza un tratamiento o pre-procesamiento de las muestras, haciendo un remuestreo a periodos exactamente regulares, pues el análisis mediante la TDF requiere que las muestras estén tomadas en periodos de tiempo iguales. Después, se realiza un suavizado por promedio móvil (visto en (2.1)), para ello, se toma un número de muestras  $n = 20$ , y se reducen los efectos de ruido o cambios bruscos en las señales, este pre-procesamiento se repite para todas las metodologías presentadas.

### Resultados para una ST de temperatura

Una vez que se realiza el pre-procesamiento de la ST, se implementa el algoritmo de la TDF, y se seleccionan únicamente 8 armónicos que son menores a un umbral o límite puesto arbitrariamente. Esto se puede observar en la Figura 4.1, donde además se hace un acercamiento a los armónicos que están debajo de dicho umbral, se muestra el total de los armónicos y los que serán utilizados para plantear la estructura del modelo en EE. En la Figura 4.1(a) se muestran los primeros treinta y cinco armónicos antes de la selección, mientras que en la Figura 4.1(b) se muestran únicamente los armónicos más representativos seleccionados. Estos se encuentran en la posición 0, 3, 4, 8, 12, donde el 0 representa a una constante sin frecuencia ni fase, y la frecuencia fundamental de esta señal es  $f_1 = (1/86400)Hz$  que es la frecuencia que tiene un día. Entonces, la ST con esta reducción o selección de sus principales armónicos se puede visualizar en la Figura 4.1. El error absoluto de esta ST con 8 armónicos respecto de la ST real  $S_0(t)$ , se muestra en la Figura 4.2.

Hasta este momento solo se ha realizado el análisis con la TDF, aún sin utilizar el  $O^2A$ , vale la pena señalar que la amplitud y las fases con este análisis no se tienen en cuenta para el modelo de observador, sino solo el valor de las frecuencias contenidas que



**Figura 4.1:** Gráficas del contenido armónico para una ST de temperatura

son significativas, con el objetivo de tener un orden reducido en el diseño del observador. Es importante mencionar que este análisis con la TDF es prescindible y se puede plantear un modelo en EE sin esta información, pero hacer esta selección de frecuencias contribuye a tener un modelo más simple que dependerá solo de los armónicos más significativos. Una vez planteado el modelo en EE, se diseña el observador que se actualiza en línea a partir de los datos reales de la ST, como se describe en (3.14), para obtener los valores actuales de los estados. Ahora bien, recordando la teoría del  $O^2A$ , y partiendo de la representación en EE para la ST, la cual, de forma general se puede expresar como

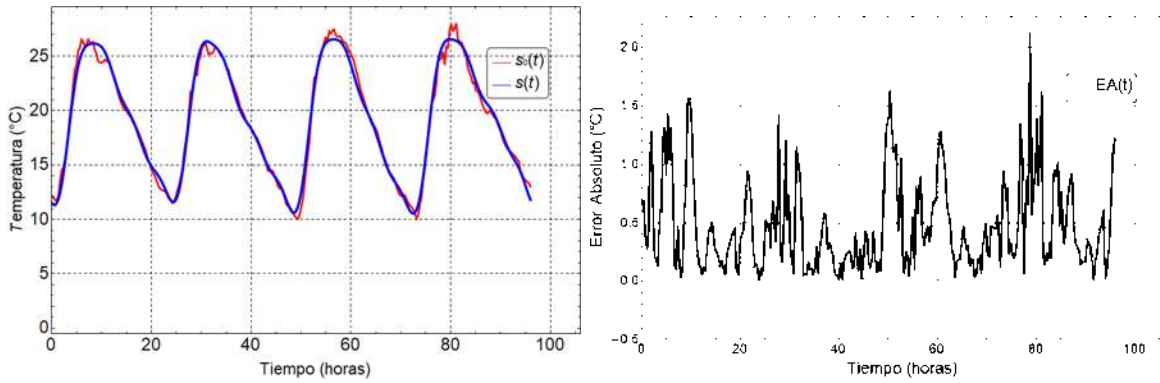
$$\begin{aligned} \dot{x} &= v_1 \\ y &= C(t)x + v_2 \end{aligned} \quad (4.1)$$

donde en este caso particular el sistema en EE está dado por

$$x = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_{15}]^T \quad (4.2)$$

y

$$\begin{aligned} C(t) &= \begin{bmatrix} 1 & \cos(2\pi t/97) & -\sin(2\pi t/97) & \cos(8\pi t/291) & -\sin(8\pi t/291) & \cos 4\pi t/97 \\ -\sin(4\pi t/97) & \cos(16\pi t/291) & -\sin(16\pi t/291) & \cos 6\pi t/97 & -\sin(6\pi t/97) \\ \cos(8\pi t/97) & -\sin(8\pi t/97) & \cos(32\pi t/291) & -\sin(32\pi t/291) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.3)$$



(a) *ST* real  $s_0(t)$  con todos los armónicos y *ST*  $s(t)$  con 8 armónicos (b) Error absoluto de la *ST* con 8 armónicos  $EA(t)$

**Figura 4.2:** *ST* de temperatura real vs. *ST* con 8 armónicos

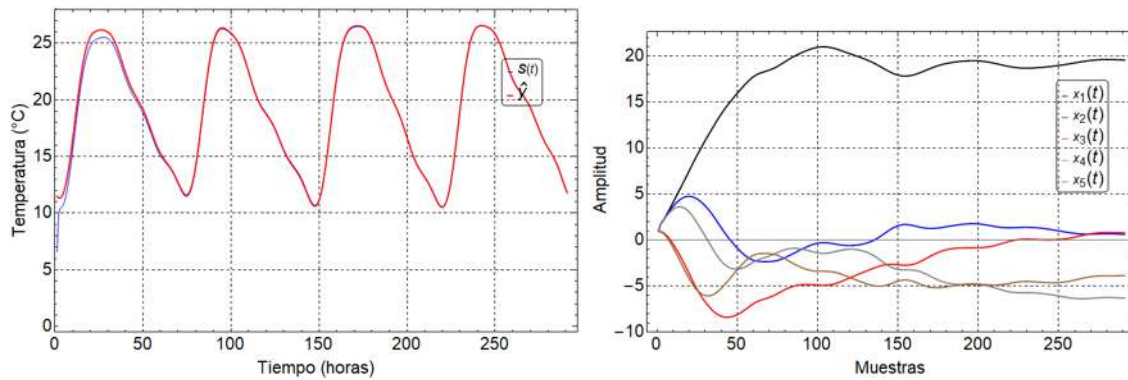
con (4.2) y (4.3) se construye el modelo en EE, el cual es utilizado por el  $O^2A$  presentado en 3.14, y este estima a los estados  $x$ , el cual es óptimo en el sentido de que minimiza el error de la salida real versus la estimada, la estructura del observador es la siguiente

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}} &= L(s(t) - \hat{y}) \\ \hat{y} &= C(t)\hat{x}\end{aligned}$$

donde  $\hat{x}$  es el estimador de estados,  $\hat{y}$  es la salida estimada y  $L$  es la matriz de ganancia del estimador.

El intervalo de captura de observaciones de la *ST* es de 96 horas, que se utiliza como un entrenamiento para adaptar el modelo. Las Figuras 4.3(a) y 4.3(b) muestran la convergencia de la salida del modelo con el  $O^2A$  y de los primeros 5 estados  $x$  del modelo, respectivamente. Para propósitos de pronóstico, una vez que los estados presenten convergencia a un valor, se calculan los parámetros de amplitud y fase utilizando (3.20) y (3.21) y se mantienen fijos. Posteriormente, se evalúa a diferentes tiempos la respuesta de la salida  $\hat{y}$  del modelo en EE, la cual es la siguiente

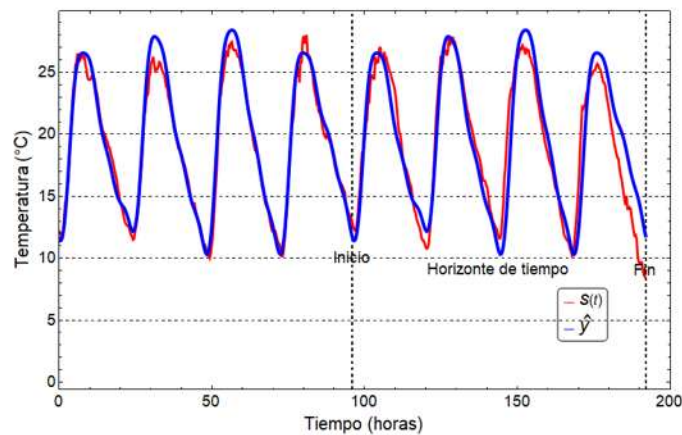
$$\begin{aligned}\hat{y} &= 19.5503 + 0.087441 \cos\left(1.40984 - \frac{6\pi t}{97}\right) + 7.38814 \cos\left(2.59312 - \frac{8\pi t}{291}\right) + 1.00216 \cos\left(\frac{2\pi t}{97} + 0.908376\right) \\ &+ 0.344884 \cos\left(\frac{4\pi t}{97} + 1.91983\right) + 2.2543 \cos\left(\frac{16\pi t}{291} + 2.52667\right) \\ &+ 0.73473 \cos\left(\frac{8\pi t}{97} + 1.92561\right) + 0.52427 \cos\left(\frac{32\pi t}{291} + 1.27989\right)\end{aligned}$$



(a) Convergencia de  $\hat{y}$  a la ST pre-procesada (b) Convergencia de los primeros 5 estados estimados

**Figura 4.3:** Convergencia del modelo de temperatura con el  $O^2A$

El modelo y pronóstico para 96 horas cada uno, se muestra en la Figura 4.4



**Figura 4.4:** Modelo  $O^2A$  con 8 armónicos y pronóstico para una ST de temperatura.

## Resultados para una ST de velocidad del viento

De igual manera que para el ejemplo anterior, se implementa el algoritmo de la TDF, y para esta serie se seleccionan 8 armónicos para representar a la ST. En la Figura 4.5(a), se aprecian todos los primeros 145 armónicos de esta ST, con un acercamiento a los primeros 55, mientras que en la Figura 4.5(b) se puede observar cuales fueron los armónicos seleccionados. En las Figuras 4.6(a) y 4.6(b) se observa la convergencia del modelo estimado, y de los estados,

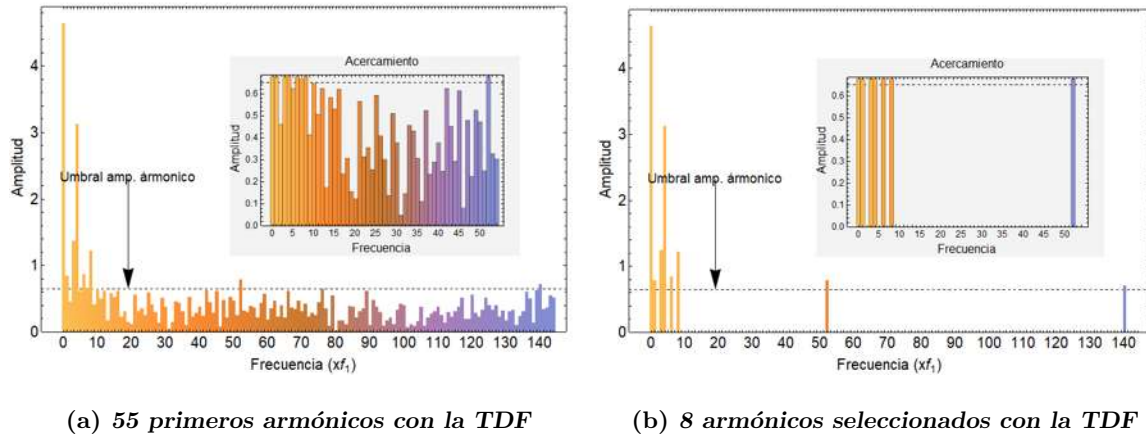


Figura 4.5: Gráficas del contenido armónico para una ST de velocidad del viento

respectivamente. El periodo de adaptación del observador es de 96 horas. Se puede apreciar en este caso que debido a la selección de pocos armónicos para hacer el modelo en EE, la convergencia de los estados varia al rededor de un valor. Se pronostican 96 horas. Para ello,

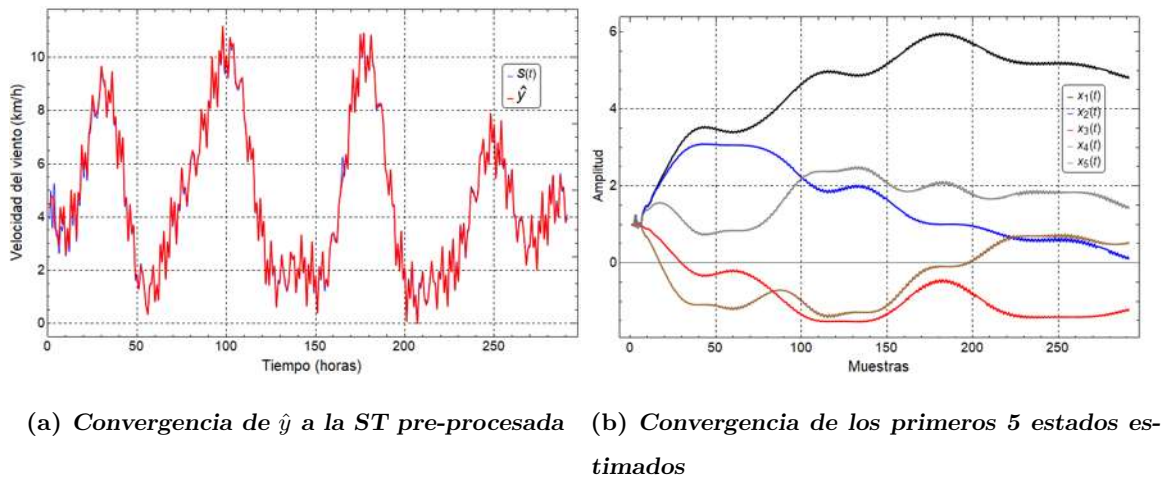
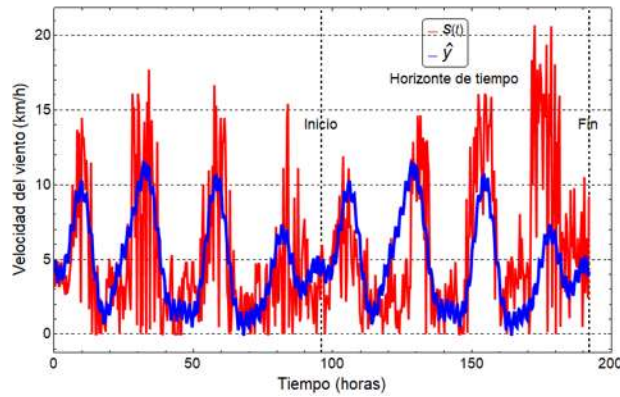


Figura 4.6: Convergencia del modelo  $O^2A$  para la ST de velocidad del viento

se evaluó al modelo utilizando el último valor de los estados a 96 horas de adaptación, cuyos resultados tanto de modelo y pronóstico se pueden observar en la Figura 4.7.

El modelo matemático con este número de armónicos elegido, se presenta a continuación como una serie de Fourier, para ello se calculan las amplitudes y fases a partir de





**Figura 4.7:** Modelo  $O^2A$  con 8 armónicos y pronóstico para una ST de velocidad del viento

(3.20) y (3.21) mediante los estados del modelo en EE, después de 96 horas de adaptación del observador.

$$\begin{aligned} \hat{y} = & 4.80309794 + 0.208365 \cos\left(0.61479 - \frac{280\pi t}{291}\right) + 0.618582 \cos\left(2.71393 - \frac{104\pi t}{291}\right) \\ & + 3.3954 \cos\left(2.45961 - \frac{8\pi t}{291}\right) + 1.21126 \cos\left(1.47821 - \frac{2\pi t}{291}\right) + 1.51795 \cos\left(\frac{2\pi t}{97} + 0.355237\right) \\ & + 0.769082 \cos\left(\frac{4\pi t}{97} + 1.63546\right) + 1.21791 \cos\left(\frac{16\pi t}{291} + 0.829405\right). \end{aligned}$$

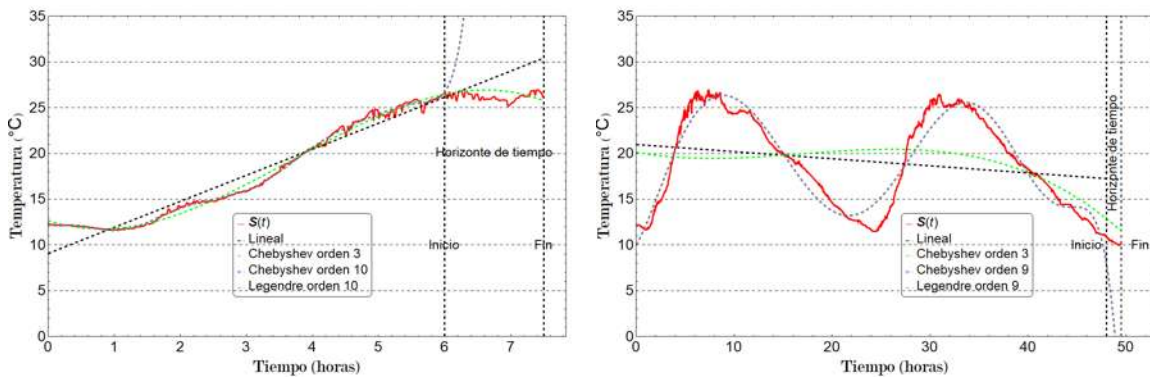
De estos resultados se puede apreciar que, debido a la naturaleza de una ST de velocidad del viento al presentar variaciones muy rápidas, entonces su contenido armónico es muy alto incluso a altas frecuencias. Una representación más precisa se logra aumentando el número de armónicos en la estructura del modelo en EE, lo cual se aprecia en las Tablas 4.2 y 4.5 al final de este capítulo, para el caso de la ST de temperatura con un modelo con 6 armónicos y otro con 8 armónicos.

#### 4.1.2. Modelado vía RLS y RPS

En esta sección se incluyen los resultados para el modelado usando diferentes tipos de regresores, entre los cuales se incluye un RLS, un RPS de Chebyshev y Legendre de noveno orden, un RPS de Chebyshev de tercer orden, y finalmente una propuesta de este trabajo que se asemeja a un modelo o regresor multivariable, para el cual se propone modelar independientemente a dos variables con un RPS, en este caso humedad y temperatura.

Para realizar estos modelos fue necesario hacer una transformación en los dominios

de las funciones de los polinomios de Chebyshev y Legendre, para lograr que estos extiendan su dominio en el que están planteados, que es de  $[-1, 1]$ , a uno más grande definido a partir de los valores extremos de la ST a modelar. Para las ST de humedad y temperatura al hacer esta extensión del dominio y después ser modeladas individualmente, se tiene una buena aproximación en este intervalo donde fueron modeladas. Como se observa en Figuras 4.8(a) y 4.8(b), se modela a la ST de temperatura y se hace un pronóstico de una hora y media, extrapolando el polinomio modelado. Se observa que los regresores con polinomios de Chebyshev y Legendre de noveno y tercer orden tienen buenos resultados para modelar 6 horas, mientras que los regresores con polinomios de noveno orden presentan mejor aproximación para 48 horas de modelado, mientras que en ambos casos el pronóstico no es muy bueno.



(a) Modelado a 6 horas y pronóstico a 1.5 horas (b) Modelado a 48 horas y pronóstico a 1.5 horas

**Figura 4.8:** Modelado con RPS de diferente orden para una ST de temperatura

Para mejorar el pronóstico, se propone hacer una representación polinomial que consiste en una suma ponderada de dos modelos polinomiales hechos con RPS para las ST de temperatura y humedad. Aprovechando la característica de que estas ST tienen correlaciones con símbolo opuesto, por lo que se busca contrarrestar la tendencia al infinito de los polinomios en los extremos al salir de sus dominios, y con ello se tiene una mejor aproximación de la ST modeladas y horizontes más grandes de pronóstico. Para ello, es necesario hacer un ajuste lineal o ponderación a los polinomios. Cabe mencionar que para aplicar esta metodología en el modelado de otras ST se debe tener en cuenta que la correlación entre las ST a utilizar sea

opuesta. A continuación se describe matemáticamente a esta metodología para modelar a una ST de temperatura. Primero, se calcula un RPS para cada ST, resultando en los siguientes polinomios

$$\hat{y}_h = 37.1461699 + 0.117357959x - 0.000652832112x^2 + 8.63968939 * 10^{-7}x^3$$

$$\hat{y}_t = 20.9808561 - 0.0264956195x + 0.000104067322x^2 - 1.1763275 * 10^{-7}x^3$$

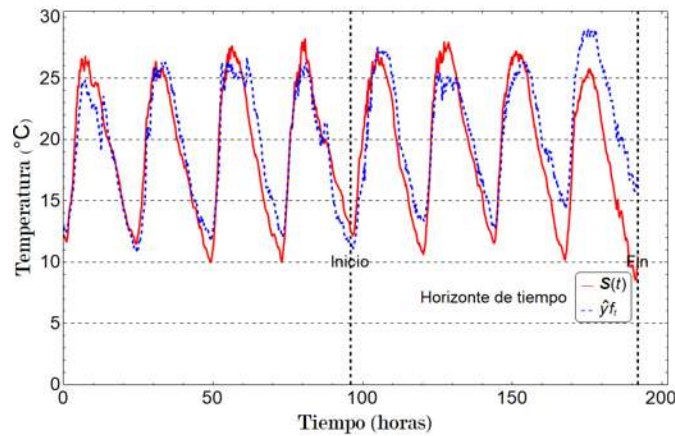
donde  $\hat{y}_h$  y  $\hat{y}_t$  son los modelos con RPS para humedad y temperatura, respectivamente. Haciendo un ajuste lineal para cada modelo, el cual se hace con la aplicación de otro regresor, matemáticamente esto se ve de la siguiente manera

$$\hat{y}f_t = b_0\hat{y}_h + b_1\hat{y}_t$$

donde  $\hat{y}f_t$  representa al modelo final para la ST de temperatura, el cual esta dado por

$$\hat{y}f_t = 6.54000148(20.9808561 - 0.0264956195x + 0.000104067322x^2 - 1.1763275 * 10^{-7}x^3) - 2.75599614(37.1461699 + 0.117357959x - 0.000652832112x^2 + 8.63968939 * 10^{-7}x^3).$$

Los resultados son para 96 horas de modelado y 96 horas pronóstico de una ST de temperatura, y se pueden ver en la Figura 4.9, donde se observa que se anula esa tendencia de



**Figura 4.9:** Resultados del RPS final de orden 3 para temperatura, modelo y pronóstico a 96 horas.

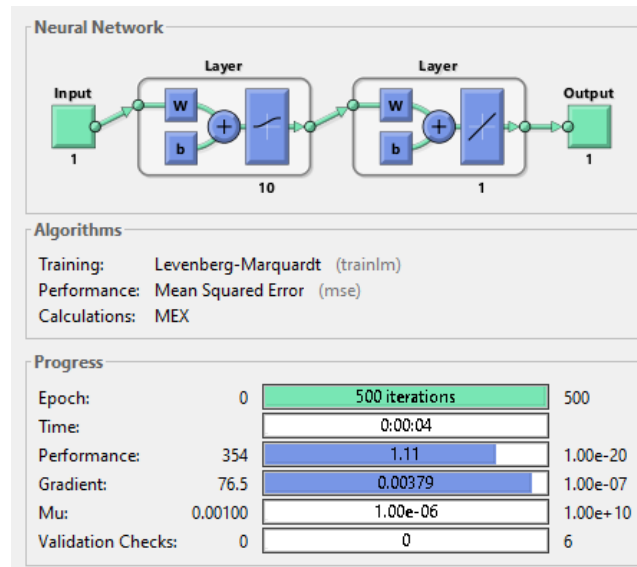
crecer al infinito, y se obtienen buenos resultados tanto para el modelo como para el pronóstico de la ST de temperatura.

### 4.1.3. Modelado vía RNA univariable

Ahora se analizan los resultados de modelar una ST de temperatura para diferentes tiempos de entrenamiento, utilizando una técnica de RNA. Para estructurar la RNA se implementaron bibliotecas existentes en el software *MATLAB*®<sup>®</sup>, utilizando las siguientes funciones para hacer la RNA propuesta; *neff* para estructurarla, *train* para entrenarla, y *sim* para simularla y posteriormente evaluar su rendimiento.

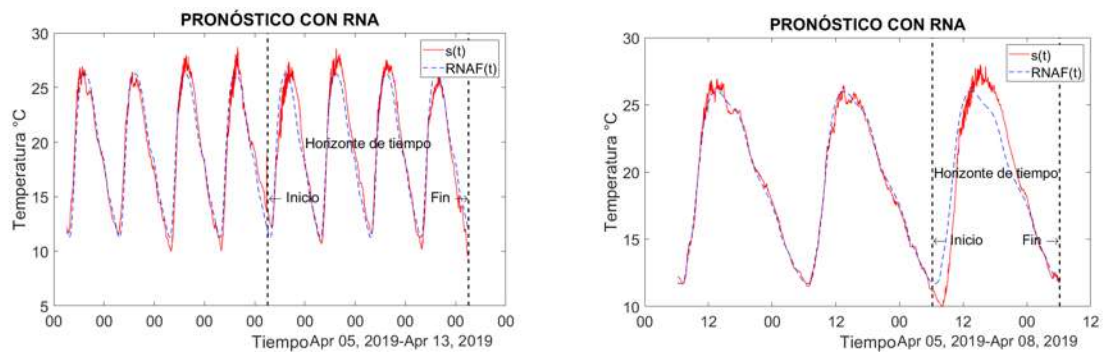
### Resultados para una ST de temperatura

En la Figura 4.10 se puede observar la estructura general que tiene la red propuesta para la ST de temperatura



**Figura 4.10:** Estructura de la RNA para el modelado de una ST de temperatura

Su estructura es la de una red de avance o feed-forward [delBrio01], con 10 neuronas, una capa de entrada y una capa de salida, con un método de entrenamiento de propagación hacia atrás, utilizando el Algoritmo de Levenberg-Marquardt [Gavin11] (LMA, por sus siglas en inglés) también conocido como el método de mínimos cuadrados amortiguados. Esta estructura fue elegida heurísticamente, procurando tener los mejores resultados y lograr un modelo competitivo. El LMA se usa en muchas aplicaciones de software para resolver problemas genéricos de ajuste de curvas. Sin embargo, como ocurre con muchos algoritmos de ajuste,



(a) 96 h. de entrenamiento y 96 h. de pronóstico (b) 48 h. de entrenamiento y 24 h. de pronóstico

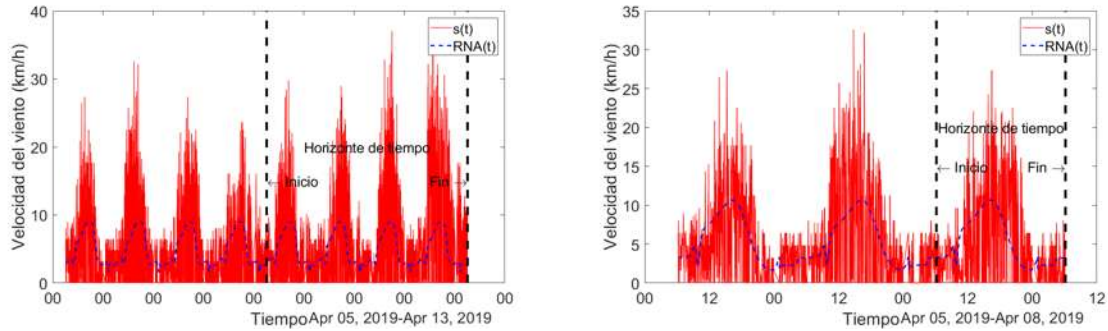
**Figura 4.11:** ST de temperatura; reales, modeladas y pronosticadas.

el GNA solo encuentra un mínimo local, que no es necesariamente el mínimo global. El LMA interpola entre el algoritmo de Gauss-Newton (GNA, por sus siglas en inglés) [Hartley61] y el método de pendiente de gradiente. El LMA es más robusto que el GNA, lo que significa que en muchos casos encuentra una solución incluso si comienza muy lejos del mínimo final, aunque el LMA tiende a ser un poco más lento que el GNA. Además, en las capas de la red se utilizaron funciones de transferencia sigmoidea logarítmica, y para la de salida una función de transferencia lineal.

Ahora bien, en la Figura 4.11 se muestran gráficamente los resultados de modelado y pronóstico para un ST de temperatura. En la Figura 4.11(a) la RNA fue entrenada con 96 horas y se pronosticaron otras 96 horas, mientras que en la Figura 4.11(b) se muestra los resultados de una red entrenada con 48 horas de observaciones y pronosticando 24 horas.

## Resultados para una ST de velocidad del viento

En la Figura 4.12 se muestran gráficamente los resultados de modelado y pronóstico para una ST de velocidad del viento. Para los resultados de la Figura 4.12(a) la RNA fue entrenada con 96 horas y se pronosticaron otras 96 horas, mientras que en la Figura 4.12(b) se muestra los resultados de una red entrenada con 48 horas de observaciones y pronosticando 24 horas.



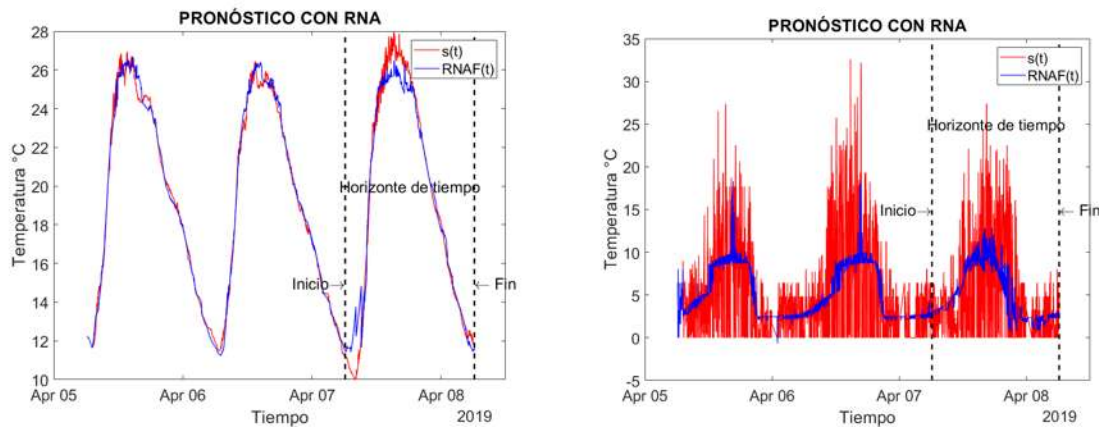
(a) 96 h. de entrenamiento y 96 h. de pronóstico (b) 48 h. de entrenamiento y 24 h. de pronóstico

Figura 4.12: ST reales, modeladas y pronosticadas de vel. del viento

### Resultados para una ST de velocidad del viento con RNA y entradas retardadas en el tiempo

Para esta simulación, la arquitectura de la red también consta de 12 capas ocultas, y se implementó el mismo algoritmo de aprendizaje. En este caso las entradas para entrenar a la red fueron un vector de tiempo y un vector de temperatura en un periodo de tiempo  $t = [t_1, t_2, \dots, t_{k-v}]$ , y la salida de la red fue la temperatura en un periodo de tiempo de  $t = [t_v, t_{v+1}, \dots, t_k]$ . Donde  $t_1$  representa al tiempo inicial y  $t_k$  al tiempo final, y  $v$  representa un número de pasos o muestras, en minutos. Para el pronóstico se evaluó a la red con vectores de entrada de tiempo y de temperatura para un periodo de tiempo  $t = [t_1, t_2, \dots, t_k]$ , teniendo como salida a un vector de temperatura en un periodo de  $t = [t_v, t_{v+1}, \dots, t_{k+v}]$ , donde el pronóstico viene dado de  $t_{k+1}$  hasta  $t_{k+v}$ . En las Figuras 4.13(a) y 4.13(b) se muestran los resultados para las ST de temperatura y velocidad del viento para un tiempo  $t_k = 96$  horas para el modelo y un pronóstico para 96 horas realizado cada hora o cada 60 muestras ( $v = 60$ ).

La ventaja de esta arquitectura es que para horizontes cortos su pronóstico es mejor que la arquitectura anterior. Y una desventaja es que cuando se toman datos o muestras durante 4 días para el modelo, ya no permite horizontes muy grandes de pronóstico a menos que se entrene con más días.



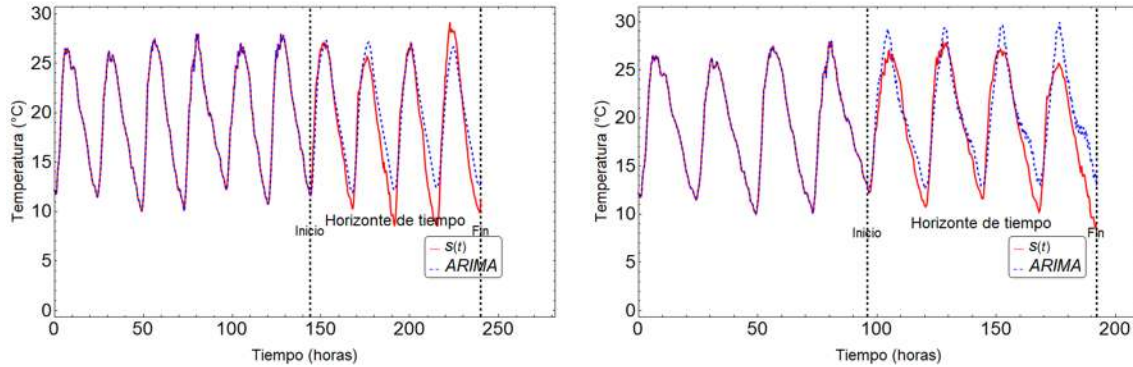
(a) 96 h. de entrenamiento y 96 horas de pronóstico, con  $v=60$  minutos (b) 96 h. de entrenamiento y 96 horas de pronóstico, con  $v=60$  minutos.

**Figura 4.13:** Resultados de modelos y pronósticos para las ST de temperatura y velocidad del viento.

#### 4.1.4. Modelos ARIMA

A continuación, se presentan los resultados para el modelado de ST de temperatura y velocidad del viento. Para ello se utilizó el software *WOLFRAM MATHEMATICA*® y se implementaron la función `TimeSeriesModelFit` para adaptar la ST a un modelos ARIMA a las series mencionadas.

Un modelo ARIMA es un modelo estadístico que utiliza variaciones y regresiones de datos estadísticos con el fin de encontrar patrones para una predicción hacia el futuro. Se trata de un modelo dinámico de series temporales, es decir, las estimaciones futuras vienen explicadas por los datos del pasado y no por variables independientes. El modelo ARIMA necesita identificar los coeficientes y número de regresiones que se utilizarán. Este modelo es muy sensible a la precisión con que se determinen sus coeficientes, y un modelo puede variar para diferentes secciones o rangos de tiempo en que se estudie la misma variable. Para este trabajo los coeficientes fueron elegidos de forma heurísticas buscando los mejores modelos que representen a las ST analizadas.



(a) 144 h para el modelado y 96 h de pronóstico (b) 96 h para el modelado y 96 h de pronóstico

**Figura 4.14:** Modelo  $ARIMA(100, 1, 2)$  y pronóstico para una ST de temperatura

### Resultados para una ST de temperatura

El modelo utilizado para esta ST es el siguiente,

$$ARIMA(p, d, q) = ARIMA(100, 1, 2)$$

es decir, parte autorregresiva del modelo es  $p = 100$ , la parte integrada  $d = 1$ , y la parte de media móvil  $q = 2$ . En la Figura 4.14 se pueden observar gráficamente los resultados para modelado y pronóstico utilizando este modelo propuesto, para diferentes intervalos de tiempo, como se puede apreciar, los modelos son muy cercanos durante las horas de modelado, pero difieren en el pronóstico, y se tienen mejor aproximación con más horas de modelado, en la Figura 4.14(a) se observa esto.

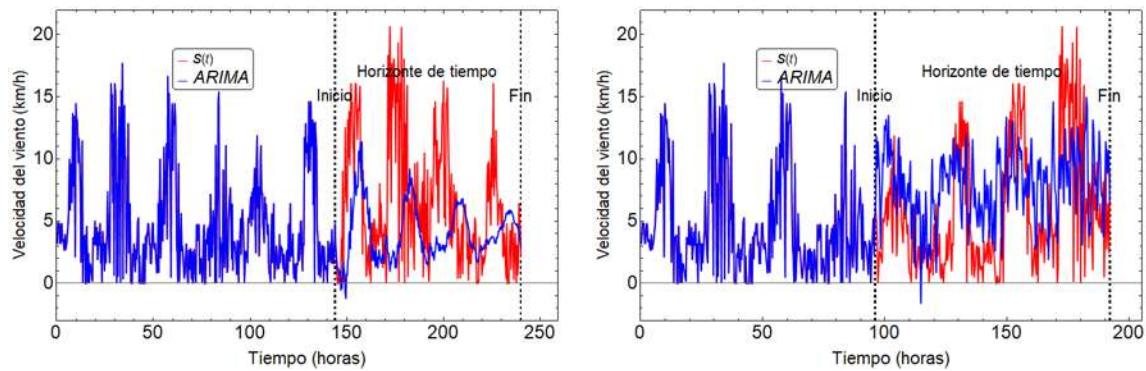
### Resultados para una ST de velocidad del viento

El modelo utilizado para esta ST es el siguiente

$$ARIMA(p, d, q) = ARIMA(110, 1, 15)$$

donde la parte autorregresiva del modelo es  $p = 110$ , la parte integrada  $d = 1$ , y la parte de media móvil  $q = 15$ . En la Figura 4.14 se pueden observar gráficamente los resultados para modelado y pronóstico utilizando este modelo propuesto, para diferentes intervalos de tiempo, como se puede apreciar, los modelos son muy cercanos durante las horas de modelado





(a) 144 h para el modelado y 96 h de pronóstico (b) 96 h para el modelado y 96 h de pronóstico

**Figura 4.15:** Modelado y pronóstico para ST de vel. del viento con el modelo  $ARIMA(110, 1, 15)$

del mismo, pero difieren en el pronóstico, y se tienen mejor aproximación con más horas de modelado, en la Figura 4.15(a) se observa esto. También se observa que debido a las variaciones menos suaves que en el caso de la ST temperatura al modelo  $ARIMA$  de velocidad del viento no tiene buenos resultados para horizontes más grandes, aun modelando con más días.

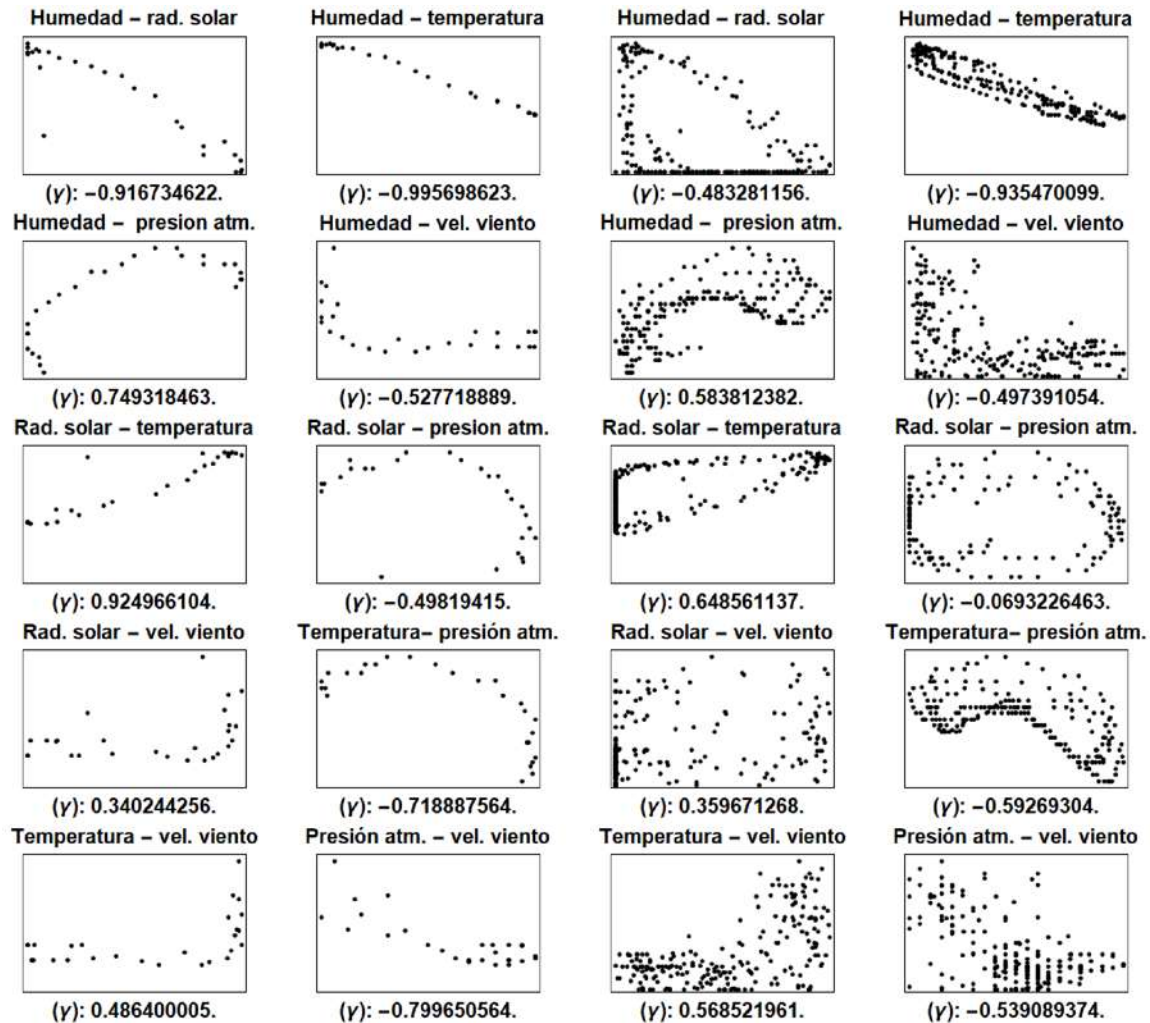
## 4.2. Modelado multivariable y pronóstico para ST del clima

En esta sección se presentan resultados de las técnicas de modelado multivariable con el  $O^2A$ , y un modelo RNA. Para seleccionar cuales variables usar en estos modelos, se realiza un análisis de correlación de Pearson, y bajo este criterio visto en la Subsección 2.5 se seleccionan sólo las variables que estén más correlacionadas, con el fin de tener mejores aproximaciones.

### 4.2.1. Análisis de correlación para la selección de las variables de los modelos multivariable

En esta apartado se analiza el coeficiente de correlación de Pearson  $\gamma$ , visto en la Subsección 2.5. Éste análisis es usado para obtener esta medida estadística para diferentes variables. En el caso particular de ST del clima, se analizan temperatura, radiación solar, presión atmosférica, humedad relativa y velocidad del viento. Para posteriormente, seleccionar las variables que presenten una correlación más fuerte, sin importar que sea positiva o negativa, con el fin de

plantear modelos matemáticos multivariable con las diferentes técnicas presentadas y obtener mejores aproximaciones de las ST modeladas, en lugar de elegir variables con un criterio arbitrario. La Figura 4.16 muestra gráficamente como es la correlación entre las variables del clima antes mencionadas a través del tiempo, en la Figura 4.16(a) se estima para un periodo de tiempo de 12 horas y en la Figura 4.16(b) para 96 horas.



(a) Correlación para 12 horas

(b) Correlación a 96 horas

**Figura 4.16:** Análisis de correlación entre 5 variables físicas del clima.

Además, en la Tabla 4.1 se muestra la correlación de Pearson de las ST analizadas, para diferentes intervalos de tiempo con un suavizado por promedios móviles, por lo tanto, las

**Tabla 4.1:** Correlación en diferentes ST, analizadas en varios intervalos de tiempo o muestras.

VARIABLE	Periodo de tiempo en horas			
	6	12	24	96
Humedad - rad. solar	<b>-0.975769801</b>	<b>-0.916734622</b>	-0.379653285	-0.483281156
Humedad - temperatura	<b>-0.995677824</b>	<b>-0.995698623</b>	<b>-0.951333141</b>	<b>-0.935470099</b>
Humedad - presión atm.	-0.48223204	0.749318463	0.710156638	0.583812382
Humedad - vel. Viento	0.38613798	-0.527718889	-0.428335735	-0.497391054
Rad. solar - temperatura	<b>0.972068616</b>	<b>0.924966104</b>	0.513707999	0.648561137
Rad. solar - presión atm.	0.520232428	-0.49819415	0.152321324	-0.069322646
Rad. solar - vel. Viento	-0.392530123	0.340244256	0.152598203	0.359671268
Temp. - presión atm.	0.440094971	-0.718887564	-0.692307209	-0.59269304
Temperatura - vel. viento	-0.40211841	0.486400005	0.49633881	0.568521961
Presión atm. - vel. viento	-0.047166025	-0.799650564	-0.635492969	-0.539089374

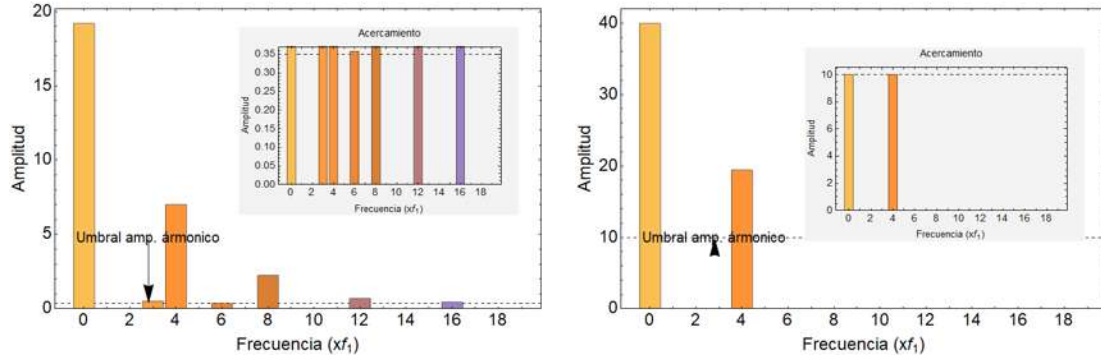
variables con una correlación más fuerte son la humedad con la radiación solar, la humedad con la temperatura, y la radiación solar con la temperatura analizando estas series con muestras de hasta 12 horas, y de ello que son recomendables para hacer modelos multivariable, ya que la integración de estas variables se espera tener mejores aproximaciones.

En las siguientes secciones se plantean los modelos multivariados eligiendo a las variables temperatura y radiación solar, y temperatura y humedad, pues además, también son variables que resultan de interés en diversos estudios.

#### 4.2.2. Modelado vía $O^2A$ multivariable

Basándose en la Sección 3.3, en donde se plantea una extensión al modelado univariable del  $O^2A$ , en esta sección se presentan los resultados para modelado de ST del clima, utilizando las variables de temperatura y humedad ya que tiene una fuerte correlación, por arriba de 0.9, para diferentes rangos de tiempo analizados. Cabe mencionar que pueden seleccionarse variables con correlación negativa, buscando que esta sea fuerte (cercana al valor uno), esto significa que una afecta fuertemente a la otra pero en sentido contrario a sus cambios.

De igual manera que en el caso univariable, el proceso a seguir es el que se muestra en la Figura 3.1. Posterior a tener la ST pre-procesada, se debe plantear un modelo en EE



(a) Armónicos de la ST de temperatura utilizados (b) Armónicos de la ST humedad utilizados

Figura 4.17: Gráficas del contenido armónico para ST de temperatura y humedad

necesario para el  $O^2A$ , en el que la salida representa a la señal de interés a modelar, pero cuyo contenido armónico está compuesto de esa variable y de otra más, aunque es importante recordar que la metodología planteada en la 3.3 se puede extender para más de dos variables. Así pues, en la Figura 4.17 se muestran los armónicos que se eligen de cada variable, pudiéndose aumentar el número de armónicos para plantear el modelo del observador, pero eso conlleva a un mayor tiempo de cómputo, y no siempre garantiza mejores resultados.

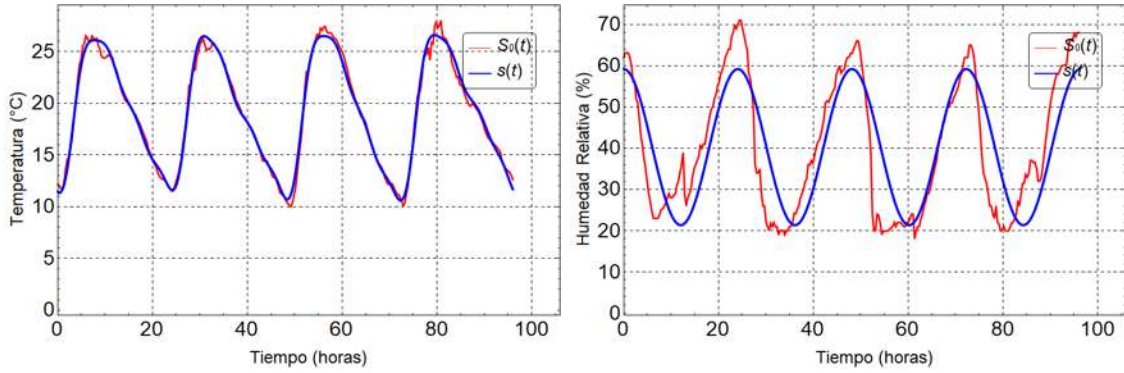
Para representar individualmente a estas ST, si sólo se utilizan los armónicos de la Figura 4.17, las ST de temperatura y humedad se ven como se muestra en las Figuras 4.18(a)-4.18(b). Para plantear la estructura del modelo multivariable en EE, donde  $\hat{y} = C(t)\hat{x}$ , la cual representa a la temperatura, siendo  $C(t)$  y  $\hat{x}$  los siguientes

$$\hat{x} = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_{15}]^T \quad (4.4)$$

y

$$C(t) = \begin{bmatrix} 1 & \cos(2\pi t/97) & -\sin(2\pi t/97) & \cos(8\pi t/291) & -\sin(8\pi t/291) & \cos(4\pi t/97) \\ -\sin(4\pi t/97) & \cos(16\pi t/291) & -\sin(16\pi t/291) & \cos(8\pi t/97) & -\sin(8\pi t/97) & \\ \cos(32\pi t/291) & -\sin(32\pi t/291) & \cos(8\pi t/291) & -\sin(8\pi t/291) & & \end{bmatrix}$$

se puede observar que el modelo resultante contiene sólo 8 armónicos, esto se debe a que uno de los armónicos de la humedad que se seleccionaron corresponde a una constante y para mayor



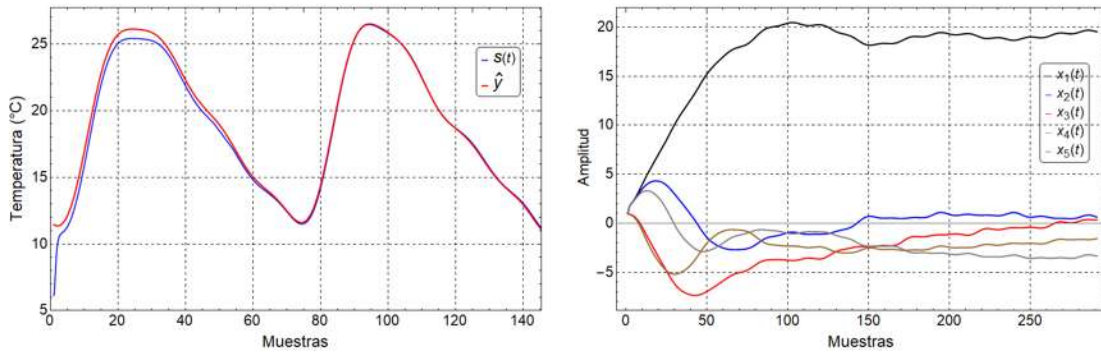
(a) *Reconstrucción de ST de temperatura con 7 armónicos* (b) *Reconstrucción de ST de humedad con 2 armónicos*

**Figura 4.18:** Representación individual de cada ST

simplicidad solo se incluye un armónico constante en el modelo en EE. Ahora bien, aplicando el  $O^2A$  multivariable, la convergencia de los estados del observador se muestra en las Figuras 4.19(a) y 4.19(b) donde la salida  $\hat{y}$  del modelo resultante es el siguiente, que se obtiene cuando los estados  $x$  convergen a un valor constante y calculando sus fases y amplitudes, este modelo es el utilizado para realizar pronóstico

$$\begin{aligned} \hat{y} = & 19.5726 + 3.71376 \cos\left(2.68692 - \frac{8\pi t}{291}\right) + 3.71376 \cos\left(2.68692 - \frac{8\pi t}{291}\right) + 0.755699 \cos\left(\frac{2\pi t}{97} + 0.425676\right) \\ & + 0.43312 \cos\left(\frac{4\pi t}{97} + 1.52262\right) + 0.746334 \cos\left(\frac{8\pi t}{97} + 1.75211\right) + 2.20766 \cos\left(\frac{16\pi t}{291} + 2.48717\right) \\ & + 0.521697 \cos\left(\frac{32\pi t}{291} + 0.932573\right). \end{aligned}$$

Los resultados del modelo y pronóstico de temperatura, tomando 7 armónicos de la propia temperatura y 2 armónicos de humedad se presentan en la Figura 4.20. Como se observa visualmente, los resultados son similares a los obtenidos por el  $O^2A$  univariable. Sin embargo, en la Tablas 4.2 y 4.5 se muestran el análisis del error y se observa que en la mayoría de los casos el modelo  $O^2A$  multivariable obtiene menores errores que el modelo univariable en horizontes de tiempo mayores en la ST de temperatura aún utilizando el mismo número de armónicos.



(a) Convergencia de la ST estimada con la real suavizada (b) Convergencia de los estados del modelo multivariable

Figura 4.19: Convergencia del modelo  $O^2A$  multivariable

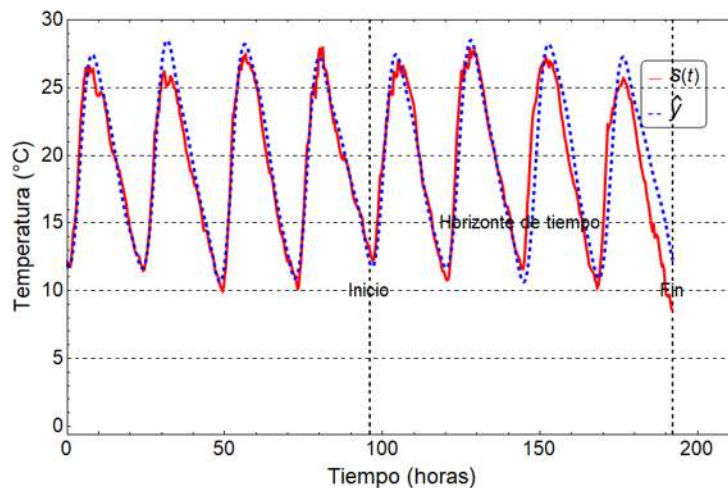


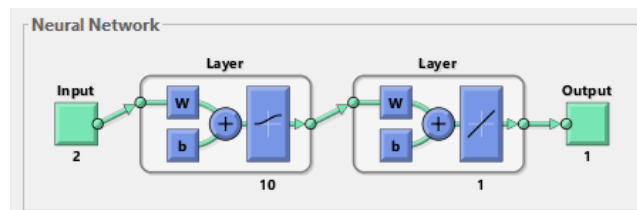
Figura 4.20: Resultados de modelo y pronóstico para el  $O^2A$  multivariable

### 4.2.3. Modelado vía RNA multivariable

A continuación, se presenta un modelo para una ST de radiación solar utilizando a las variables de temperatura, hora, y la misma radiación solar. Se utiliza la técnica de RNA de la Sección 4.1.3 pero ahora con dos entradas para el entrenamiento.

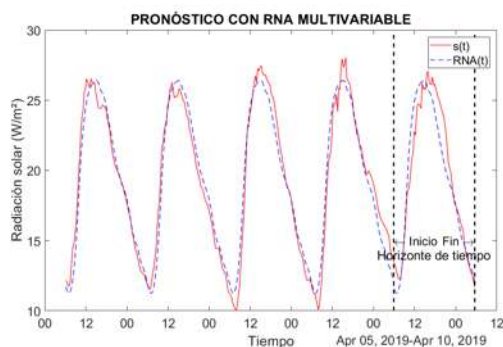
Para este proceso, primero, se realizó un modelo univariable de una ST de temperatura unicamente teniendo observaciones de la hora como variable de entrada y temperatura como variable de salida. Posteriormente, para tener el modelo multivariable de la ST de ra-

diación solar, se utilizan observaciones el modelo previo de la ST de temperatura y la hora como variables de entradas de la RNA, y observaciones de la ST la radiación para la salida. Para fines de pronóstico de la ST de radiación solar no es necesario el conocimiento del valor de temperatura y radiación actuales, únicamente la hora actual y el valor pronosticado por el modelo univariable de la temperatura previo (no es necesario medir la temperatura real actual). La estructura del modelo final con la RNA multivariable se presenta en la Figura 4.21.

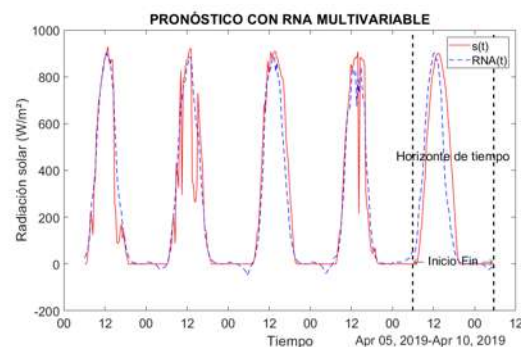


**Figura 4.21:** Estructura de la RNA para modelar una ST de radiación solar

La ST de temperatura modelada con la RNA univariable y su pronóstico para un día, se muestran en la Figura 4.22(a), y la Figura 4.22(b) muestra los resultados del modelo RNA multivariable y el pronóstico de la ST de radiación solar.



(a) RNA univariable ST de temperatura



(b) RNA multivariable ST de radiación solar

**Figura 4.22:** Resultados para el modelado y pronóstico multivariable de radiación solar.

### 4.3. Comparación de las diferentes técnicas de modelado presentadas

En esta sección se presenta una comparación del rendimiento de la metodologías presentadas, evaluando diferentes errores, tanto para los modelos como para el pronóstico a diferentes horizontes.

En la Figura 4.23(a) se observa la comparación de algunos de los modelos realizados para una ST de temperatura. Además, en la Figura 4.23(b) se observa la comparación de los modelos hechos para una ST de velocidad del viento. La Tabla 4.2 muestra la comparación de errores para los diferentes modelos de una ST de temperatura y en la Tabla 4.3 se muestra la comparación de errores MAE Y RMSE de los modelos realizados para la ST de velocidad del viento. En la Tabla 4.4 se muestran los errores de pronóstico para la ST de velocidad del viento, para horizontes de tiempo de 1, 12, 24, y 96 horas. Finalmente, en la Tabla 4.5 se presenta la comparación del pronóstico con estos mismos modelos para la ST de temperatura para los mismo horizontes de tiempo anteriores.

**Tabla 4.2:** Comparación del error de los modelos univariable y multivariable para una ST de temperatura.

MODELOS A 96 HORAS	TIPO DE ERROR			
	MAE	RMSE	MAPE	RMSPE
$O^2A$ temp. univar. (mod. 6 armónicos)	0.7962	1.0267	4.2447	5.4398
$O^2A$ temp. univar. (mod. 8 armónicos)	<b>0.678</b>	<b>0.8821</b>	<b>3.5442</b>	4.5099
$O^2A$ temp. multivar (mod. 7+1*)	0.7184	<b>0.8915</b>	3.661	<b>4.331</b>
RNA temp. univar. (mod. 24 h.)	<b>0.1532</b>	<b>0.2392</b>	<b>0.8124</b>	<b>1.2975</b>
RNA temp. univar. (modelado a 96 h.)	0.869	1.0549	4.9298	6.3127
RNA rad. Solar multivar. (mod. temp. y rad. solar)	48.9216	95.6381	N.C.**	N.C.**
ARIMA temp. univar. (modelado a 96 h.)	$1 \times 10^{-16}$	$1 \times 10^{-16}$	$1 \times 10^{-16}$	$1 \times 10^{-16}$
RPS temp. univar. (modelado a 96 h.)	1.4254	1.7565	8.0472	10.1774

\*7 armónicos de temp. y 1 de hum.

\*\*No Calculado

En el caso de la ST de temperatura, la metodologías de modelado con el  $O^2A$  obtuvo menor error de pronóstico para horizontes mayores. Para horizontes menores, los errores fueron similares que los de los otros modelos, y en algunos casos el mejor modelo fue a través de la RNA implementada. El modelo con el  $O^2A$  para la ST del viento fue mejor en to-



**Tabla 4.3:** Comparación del error de los modelos univariable para una ST de velocidad del viento.

MODELOS A 96 HORAS	TIPO DE ERROR	
	MAE	RMSE
$O^2A$ (mod. 8 armónicos)	2.3044	3.113
ARIMA (110,1,15)	$1 \times 10^{-16}$	$1 \times 10^{-16}$
RNA (96 h. de entrenamiento)	3.5798	4.7215

**Tabla 4.4:** Error de pronóstico a diferentes horizontes para una ST de vel. de viento

PRONÓSTICO	TIPO DE ERROR	
	MAE	RMSE
<b>1 HORA</b>		
$O^2A$ (mod. 8 armónicos)	<b>0.9615</b>	<b>1.2471</b>
ARIMA (110,1,15)	2.2565	3.0158
RNA (96 h. entrenamiento)	2.5813	2.8398
<b>12 HORAS</b>		
$O^2A$ (mod. 8 armónicos)	<b>2.3145</b>	<b>2.8413</b>
ARIMA (110,1,15)	13.6985	16.355
RNA (96 h. entrenamiento)	3.8005	4.957
<b>24 HORAS</b>		
$O^2A$ (mod. 8 armónicos)	<b>2.1225</b>	<b>2.1225</b>
ARIMA (110,1,15)	3.7761	4.5341
RNA (96 h. entrenamiento)	3.155	4.155
<b>96 HORAS</b>		
$O^2A$ (mod. 8 armónicos)	<b>3.3289</b>	<b>4.581</b>
ARIMA (110,1,15)	4.5055	5.3817
RNA (96 h. entrenamiento)	4.3878	5.9073

dos los horizontes de pronóstico, en comparación del modelo con RNA y el modelo ARIMA presentado.

#### 4.4. Modelado de señales EEG vía $O^2A$

A continuación, se presentan los resultados para el modelado de señales EEG las cuales fueron obtenidas de una base de datos pública de [Pakistan19]. Las señales son obtenidas de registros reales correspondientes a un hombre diestro de 21 años sin condiciones médicas conocidas. Estos registros de señales EEG consisten en movimientos aleatorios reales de la mano izquierda y derecha grabados con los ojos cerrados. Cada fila representa un electrodo. El orden de los electrodos es  $FP1, FP2, F3, F4, C3, C4, P3, P4, O1, O2, F7, F8, T3, T4, T5, T6, FZ, CZ$

Tabla 4.5: Error de pronóstico a diferentes horizontes para una ST de temperatura

PRONÓSTICO	TIPO DE ERROR				
	1 HORA	MAE	RMSE	MAPE	RMSPE
$O^2A$ univar. (mod. 6 armónicos)	0.9989	1.0114	7.8708	7.9449	7.9449
$O^2A$ univar. (mod. 8 armónicos)	0.9887	0.9915	7.9215	7.9215	7.9379
$O^2A$ multivar. (mod. 7+1**)	0.9045	0.9066	7.1413	7.1413	7.1486
RNA univar. (mod. 24 h.)	<b>0.4016</b>	<b>0.4209</b>	3.4669	<b>3.6393</b>	<b>3.6393</b>
RNA univar. (modelado a 96 h.)	1.7689	1.7725	13.3204	13.3204	13.3432
ARIMA univar. (mod. a 96 h.)	<b>0.2385</b>	<b>0.3584</b>	1.9464	<b>2.9281</b>	<b>2.9281</b>
ARIMA univar. (mod. a 144 h.)	<b>0.2906</b>	<b>0.441</b>	2.2189	<b>3.331</b>	<b>3.331</b>
RPS univar. (modelado a 96 h.)	0.9874	1.0003	7.9651	8.0611	8.0611
<b>12 HORAS</b>	<b>MAE</b>	<b>RMSE</b>	<b>MAPE</b>	<b>RMSPE</b>	
$O^2A$ univar. (mod. 6 armónicos)	1.1955	1.3916	5.6858	6.4504	6.4504
$O^2A$ univar. (mod. 8 armónicos)	0.9739	<b>1.1063</b>	<b>4.9211</b>	<b>5.6262</b>	<b>5.6262</b>
$O^2A$ multivar. (mod. 7+2**)	<b>0.9867</b>	1.1773	5.2479	6.457	6.457
RNA univar. (mod. 24 h.)	<b>0.6331</b>	<b>0.7698</b>	<b>2.9778</b>	<b>3.4911</b>	<b>3.4911</b>
RNA univar. (modelado a 96 h.)	1.3185	1.6247	6.7806	8.3895	8.3895
RNA rad. Solar multivar. (mod. temp. y rad. solar)	169.1569	208.7137	N.C. **	N.C. **	N.C. **
ARIMA univar. (mod. a 96 h.)	1.4427	1.7289	6.3707	7.4904	7.4904
ARIMA univar. (mod. a 144 h.)	<b>0.8141</b>	<b>1.1235</b>	<b>3.8677</b>	<b>5.6673</b>	<b>5.6673</b>
RPS univar. (modelado a 96 h.)	1.6476	1.9792	8.3325	10.0305	10.0305
<b>24 HORAS</b>	<b>MAE</b>	<b>RMSE</b>	<b>MAPE</b>	<b>RMSPE</b>	
$O^2A$ univar. (mod. 6 armónicos)	1.2722	1.5714	6.4918	7.6384	7.6384
$O^2A$ univar. (mod. 8 armónicos)	1.1183	1.3196	6.015	6.9866	6.9866
$O^2A$ multivar. (mod. 7+2**)	<b>0.8474</b>	<b>1.0469</b>	<b>4.5578</b>	<b>5.5909</b>	<b>5.5909</b>
RNA univar. (mod. 24 h.)	<b>0.5693</b>	<b>0.6931</b>	<b>2.9715</b>	<b>3.5256</b>	<b>3.5256</b>
RNA univar. (modelado a 96 h.)	1.2428	1.6069	6.0975	7.6738	7.6738
RNA rad. Solar multivar. (mod. temp. y rad. solar)	94.6546	151.1245	N.C. **	N.C. **	N.C. **
ARIMA univar. (mod. a 96 h.)	1.5805	1.7991	8.7047	10.321	10.321
ARIMA univar. (mod. a 144 h.)	<b>0.9499</b>	<b>1.1602</b>	<b>5.908</b>	<b>7.7428</b>	<b>7.7428</b>
RPS univar. (modelado a 96 h.)	1.9141	2.1058	10.9587	12.3702	12.3702
<b>96 HORAS</b>	<b>MAE</b>	<b>RMSE</b>	<b>MAPE</b>	<b>RMSPE</b>	
$O^2A$ univar. (mod. 6 armónicos)	1.6365	2.0536	9.7149	13.4722	13.4722
$O^2A$ univar. (mod. 8 armónicos)	1.578	<b>2.0227</b>	9.4017	<b>13.335</b>	<b>13.335</b>
$O^2A$ multivar. (mod. 7+1**)	<b>1.5698</b>	2.1696	<b>9.3963</b>	14.0288	14.0288
RNA univar. (mod. 24 h.)	<b>1.3529</b>	<b>1.7779</b>	<b>7.4171</b>	<b>10.4084</b>	<b>10.4084</b>
RNA univar. (modelado a 96 h.)	<b>1.0237</b>	<b>1.2569</b>	<b>5.4987</b>	<b>6.8681</b>	<b>6.8681</b>
ARIMA univar. (mod. a 96 h.)	1.8899	2.3277	11.8394	16.941	16.941
ARIMA univar. (mod. a 144 h.)	1.7265	2.101	12.036	16.7673	16.7673
RPS univar. (modelado a 96 h.)	2.645	3.1912	16.5946	23.2014	23.2014

\*7 armónicos de temp. y 2 de hum.

\*\*No Calculado

y  $PZ$  vistas en la Figura 4.24(a). La grabación se realizó a  $500Hz$  utilizando el sistema Neurofax® [NIHON KOHDEN19], que utiliza un montaje en cadena [Garza15]. Las líneas de corriente alterna en ese país funcionan a  $50Hz$ . Se eligió modelar las señales del canal  $PZ$  según el estándar de derivaciones en un montaje en cadena que puede ser visto en [Garza15], ya que este canal se encuentra en el centro de la parte del cerebro de la corteza motora o motriz y corresponde a la sección parietal del cerebro donde se registran con mayor intensidad de voltaje las señales [Garza15]. Su ubicación puede ser vista en la Figura 2.5 y 4.24(a). En la Figura 4.24(b) se presenta la respuesta de un modelo con el  $O^2A$  y la señal real EEG correspondiente. Además, se muestran los picos de voltaje que tiene dicha señal y el máximo pico de voltaje  $P300$ , el cual es un potencial evocado que puede ser registrado como una deflexión positiva de voltaje con una latencia de unos  $300ms$ .

Ya que todos los registros corresponden a la misma persona para diferentes movimientos aleatorios de sus manos, se espera tener señales con un contenido armónico similar. Se modelan 4 eventos diferentes de movimiento de la mano derecha. Estos modelos se estructuran en una representación en EE y solo considerando a los 5 armónicos más significativos. Una vez que los estados del  $O^2A$  presentan convergencia a un valor constante, se toman estos valores y se calcula las características de amplitud y fase a partir de ellos. Con esto, se tiene una salida  $\hat{y}$  con parámetros fijos del modelo en EE con una estructura similar a una serie de Fourier. El contenido armónico elegido de los cuatro eventos puede ser visto en las Figuras 4.25(a), 4.25(b), 4.25(c) y 4.25(d). De los 4 modelos calculados, se calcula un modelo promediado para obtener un modelo general de dicho evento, el cual queda de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \hat{y} = & 42.1049 + 105.842 \cos\left(\frac{2\pi t}{857} + 0.739804\right) + 70.8282 \cos\left(\frac{4\pi t}{857} + 2.74538\right) \\ & + 57.0679 \cos\left(3.12013 - \frac{6\pi t}{857}\right) + 42.1049 \cos\left(\frac{8\pi t}{857} + 1.60785\right) + 30.6692 \cos\left(\frac{10\pi t}{857} + 1.57531\right). \end{aligned}$$

Este modelo puede ser utilizado con posteriores fines de análisis matemático, o incluso plantear un controlador a partir de este. Dichas aplicaciones no son tratadas en esta tesis, sin embargo se muestra que el modelado para ST o señales bioeléctricas del tipo EEG es posible mediante el  $O^2A$ .

## 4.5. Conclusiones del capítulo 4

En el caso del modelado y pronóstico de una ST de temperatura, se analizaron los casos univariable y multivariable con el  $O^2A$ , teniendo resultados muy competitivos para la mayoría de los horizontes de pronóstico y es la técnica que entrega un menor error para los horizontes de 96 horas, en comparación con los otros modelos que la mayoría tiene mejores resultados en horizontes mas cortos de alrededor de 24 horas.

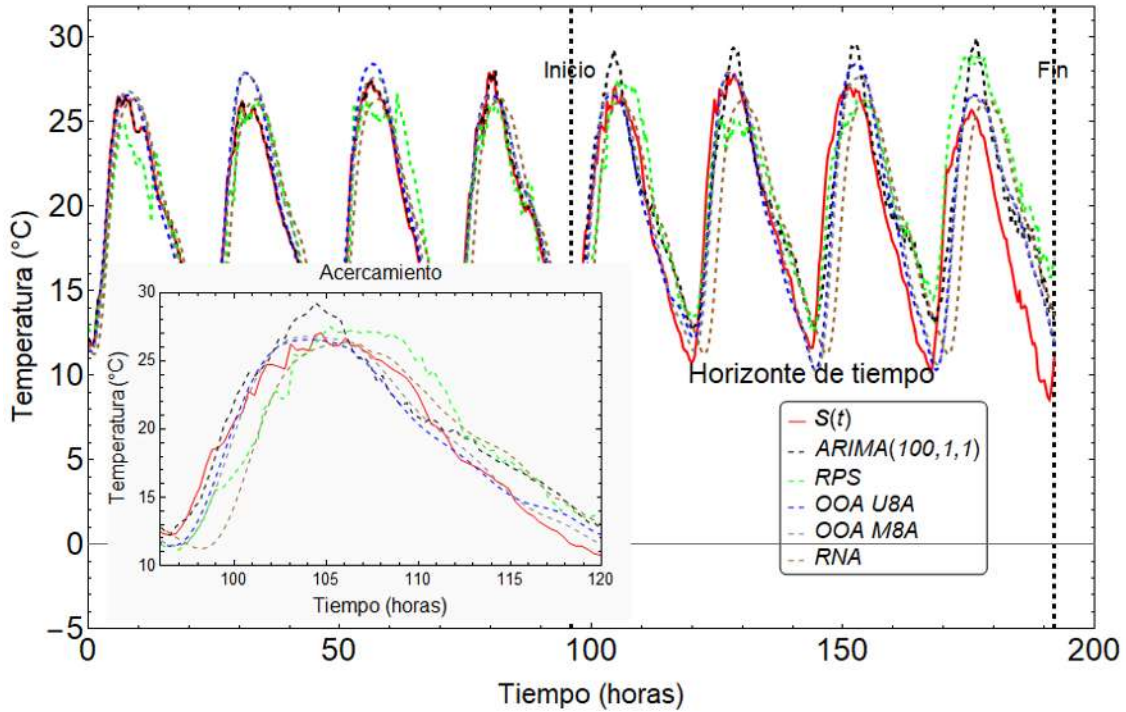
También que la metodología propuesta obtiene menores errores para las ST de la velocidad del viento, las cuales presentan un alto contenido armónico generado por variaciones bruscas y rápidas, y esta metodología fue la que menos errores tuvo de las tres implementadas en el pronóstico de esta ST. La metodología del  $O^2A$  es aplicable a diferentes ST y señales, una prueba de ello es el estudio de las señales EEG realizado, y las diferentes ST del clima modeladas, en el cual, se obtuvieron modelos de forma exitosa, y posteriormente, se llegó a un modelo general o promediado, que puede ser utilizado para otros fines de análisis o control no realizados en este trabajo. Cabe mencionar que las frecuencias de estas señales son mas rápidas que las de ST del clima.

Si bien el propósito de esta tesis no es el pronóstico sino mostrar que la metodología presentada puede modelar a diferentes ST al igual que las otras metodologías ya conocidas. Y que el modelo en EE presentado puede ser aplicado para diferentes propósitos como el pronóstico, donde cabe mencionar que obtuvo buenos resultados en comparación con los otros modelos.

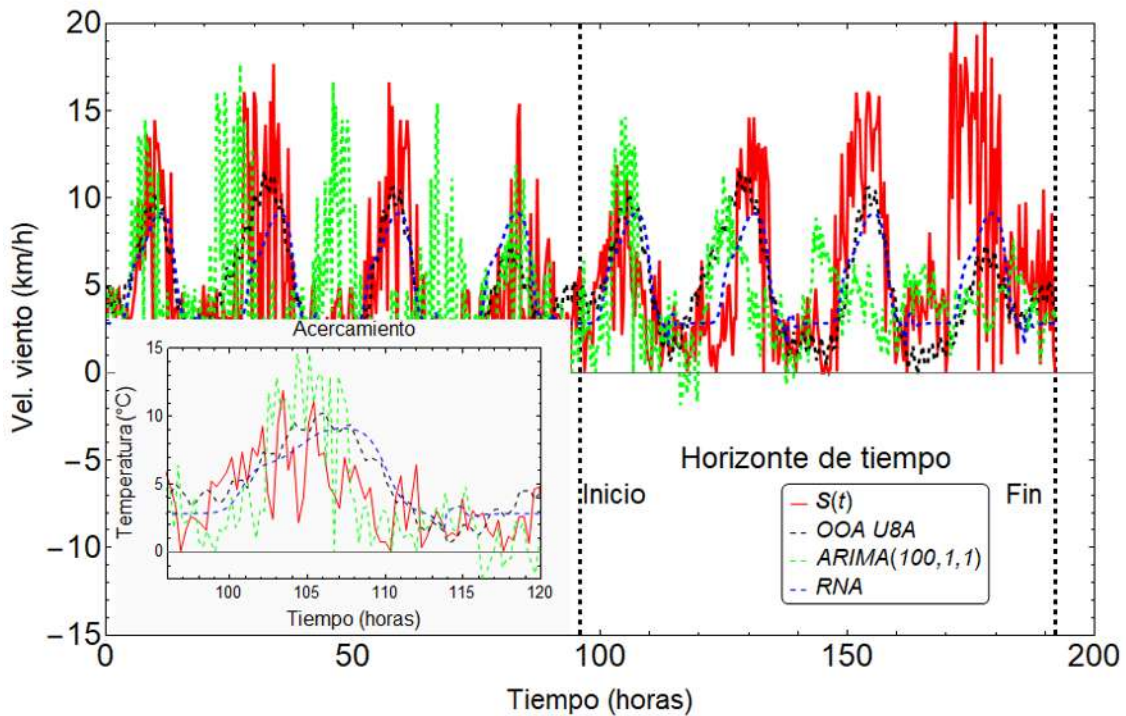
Finalmente, en la Tabla 4.6 se muestran algunas de las principales ventajas y desventajas de todas las metodologías presentadas.

**Tabla 4.6:** Principales ventajas y desventajas de todos los modelos presentados

MODELO	Ventajas	Desventajas
$O^2A$	<ul style="list-style-type: none"> <li>-Modelo en EE, que es LVT.</li> <li>-Buen rendimiento en pronóstico, incluso para horizontes de tiempo grandes.</li> <li>-Es compatible con mucha de la teoría de control clásica existente.</li> <li>-Compatibilidad con diferentes ST periódicas y no periódicas.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>-Su precisión o rendimiento está condicionado a usar mayor contenido armónico.</li> <li>-Mayor uso de armónicos incrementa el tiempo de cómputo.</li> </ul>
RLS	<ul style="list-style-type: none"> <li>-Modelo con una representación muy simple.</li> <li>-Implementable para diferentes ST con diferente tendencia.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>-Útil para aproximar la dinámica en rangos de operación reducidos.</li> <li>-El pronóstico solo es bueno a muy corto plazo, si se modela un intervalo de datos muy corto.</li> </ul>
RPS	<ul style="list-style-type: none"> <li>-Modelo con una estructura simple.</li> <li>-Los términos de mayor orden utilizados en el polinomio aproximador aportan más al modelo que un polinomio simple</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>-Modelos para intervalos de observación mayores requieren de aumentar el grado del polinomio.</li> <li>-El pronóstico es bueno a corto plazo.</li> </ul>
RNA	<ul style="list-style-type: none"> <li>-Buenas aproximaciones tanto en el modelo o entrenamiento, como en el pronóstico.</li> <li>-No requiere tener una estructura o modelo matemático analítico, solo especificar ciertos parámetros de la red.</li> <li>-Permite tener modelos multivariable.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>-Estructura muy compleja para lograr buen rendimiento (múltiples neuronas, capas, etc.).</li> <li>-Puede no converger el modelo a la ST real durante su entrenamiento.</li> <li>-Dependen mucho del método y del tiempo de entrenamiento.</li> </ul>
ARIMA	<ul style="list-style-type: none"> <li>-Buena aproximación del modelo.</li> <li>-Buenos resultados de pronóstico a muy corto y mediano plazo.</li> <li>-Muy compatible con ST.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>-La elección de los parámetros <math>p</math>, <math>d</math> y <math>q</math> puede convertirse en un proceso de prueba y error.</li> <li>-Necesita muchas muestras pasadas.</li> </ul>

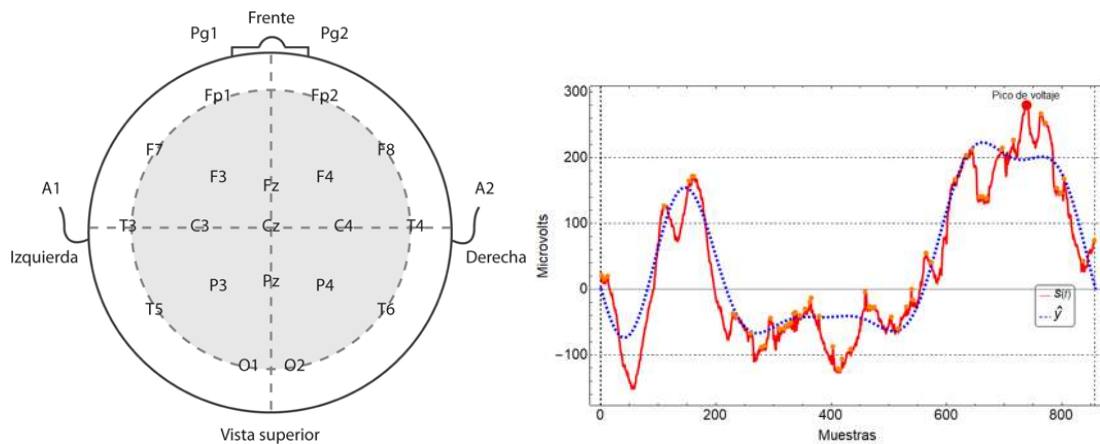


(a) Comparación de diferentes modelos para una ST de temperatura



(b) Comparación de diferentes modelos para una ST de velocidad del viento

Figura 4.23: Resultados de los modelos para una ST de la temperatura y una ST de vel. del viento



(a) Localización de las derivaciones estándar de electrodos para un EEG. (b) Señal EEG real y su modelo con 5 armónicos, y el pico P300

Figura 4.24: Derivaciones estándar de la señal EEG y su modelo con el  $O^2A$

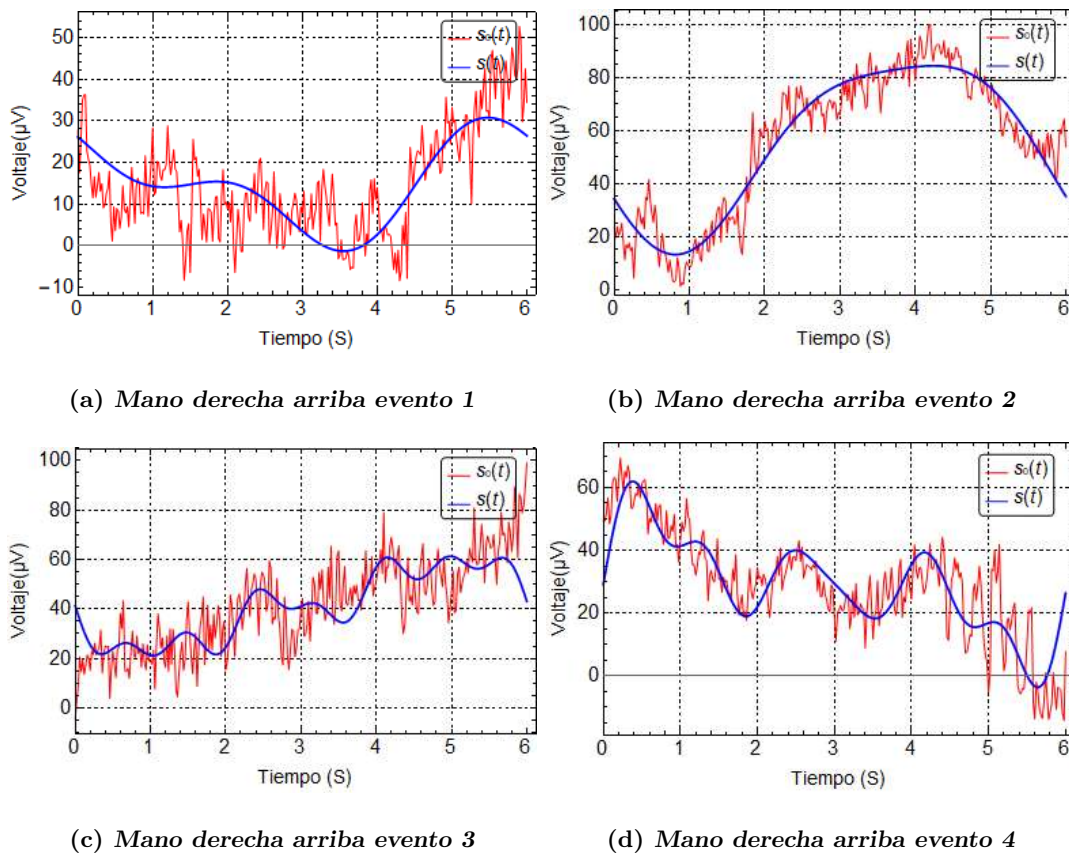


Figura 4.25: Señales EEG para diferentes eventos de movimiento de la mano derecha.





## Capítulo 5

# Conclusiones y trabajo futuro

Este capítulo presenta las conclusiones generales de esta tesis y propuestas de trabajo futuro.

### 5.1. Conclusión

Se logró el objetivo principal de esta tesis, el cual es tener un modelo matemático en una representación en EE, que sirve para el diseño de un estimador de estados nombrado como  $O^2A$  usando un FKB.

Las principales ventajas de esta metodología de modelado de respuestas de sistemas dinámicos es la representación en EE, que además resulta en un modelo o sistema LVT, este tipo de representación hace que el modelo se pueda analizar mediante la teoría de control clásico, ya que haciendo uso del modelo es posible el diseño de controladores, o el análisis en el dominio del tiempo y la frecuencia, además de poder utilizarse para hacer pronóstico. Otra de sus ventajas es que es aplicable a señales de diferentes fenómenos como ST, señales eléctricas de circuitos eléctricos, señales bioeléctricas, ST de estudios financieros, o sociales, etc. También tiene la ventaja de que minimiza el ruido gaussiano, que es una de las principales características del FKB, lo que lo hace ideal para señales contaminadas por ruidos, con la condición de que estos sean gaussianos.

Los resultados para modelar y pronosticar ST del clima con el  $O^2A$  fueron satisfactorios, pues su rendimiento, en términos del error fue bueno en comparación con otras metodologías, ya que en el pronóstico de horizontes de tiempo mayores obtuvo menos error,

para ello se evalúa al modelo del observador en EE, fijando sus variables de estado una vez que presentan tendencia a converger a un valor constante y, posteriormente, se calculan parámetros como las amplitudes y fases.

Es importante mencionar que un análisis de correlación aporta en la formulación de modelos multivariable, al evitar caer en proponer modelos donde se incluyan variables que no mejoren la representación de ST o señales, e incluso puedan empeorarla. En el modelo con el  $O^2A$  multivariable se obtuvieron mejores resultados que en el caso del  $O^2A$  univariable, al considerar a las variables más correlacionadas, ya que se obtuvieron errores menores en el pronóstico.

## 5.2. Trabajo futuro

Como posible trabajo futuro se propone lo siguiente

- Realizar ajustes al planteamiento del  $O^2A$  presentado, haciendo una actualización de los estados estimados de forma periódica, para hacer que los armónicos calculados se conozcan en un periodo de tiempo más corto, es decir, no depender de la convergencia de los estados a un valor constante para obtener un modelo.
- Se propone estudiar más a profundidad las señales EEG, generando un mayor número de modelos para diferentes eventos reales, además de realizar el diseño de un controlador a partir de estos modelos, con miras a una aplicación en tiempo real, como el control óptimo de algún tipo hardware externo o el suministro de medicamento.
- Realizar el estudio y modelado de otras ST provenientes de otros fenómenos reales, además de mejorar el rendimiento computacional del  $O^2A$ , haciendo una mejora en la presentación matricial de las ecuaciones diferenciales del observador.

## 5.3. Publicaciones

“Modeling and Forecast of Time Series by using a Harmonic Decomposition Approach”. Por A. Agustín Garibo-Morante y Fernando Ornelas-Tellez. Publicado en 2019 IEEE International Autumn Meeting on Power, Electronics and Computing (ROPEC 2019). Ixtapa, Mexico.

# Referencias

- [Anderson76] Anderson, O. D. *Time series analysis and forecasting: the Box-Jenkins approach*. Butterworth, 1976.
- [Aracil83] Aracil, J. *Introducción a la dinámica de sistemas*. 1983.
- [Baca18] Baca, L. F. Weather station. <http://148.216.94.40/WeatherStationMonitor/weatherCharts.jsp>, 2018.
- [Bellgardt86] Bellgardt, K. ., Kuhlmann, W., Meyer, H. ., Schäfer, K., y Thoma, M. Application of an extended kalman filter for state estimation of a yeast fermentation. *IEE Proceedings D - Control Theory and Applications*, 133(5):226–234, Sep. 1986.
- [Berkemeier17] Berkemeier, T., Ammann, M., Krieger, U. K., Peter, T., Spichtinger, P., Pöschl, U., Shiraiwa, M., y Huisman, A. J. Monte carlo genetic algorithm (mcga) for model analysis of multiphase chemical kinetics to determine transport and reaction rate coefficients using multiple experimental data sets. *Atmospheric Chemistry and Physics*, 17(12):8021–8029, 2017.
- [Box74] Box, G. E., Jenkins, G. M., y MacGregor, J. F. Some recent advances in forecasting and control. *Journal of the Royal Statistical Society: Series C (Applied Statistics)*, 23(2):158–179, 1974.
- [Box90] Box, G. E. P. y Jenkins, G. *Time Series Analysis, Forecasting and Control*. Holden-Day, Inc., San Francisco, CA, USA, 1990.
- [Box16] Box, B., Jenkins, G., Reinsel, G., y Ljung, G. *Time Series Analysis: Forecasting and Control*, tomo 68. 01 2016.
- [Burden02] Burden, R. L. y Faires, J. D. *Análisis numérico*. Thomson Learning,, 2002.
- [Chebyshev53] Chebyshev, P. L. *Théorie des mécanismes connus sous le nom de parallélogrammes*. Imprimerie de l'Académie impériale des sciences, 1853.
- [Chen05] Chen, Y., Yang, B., Dong, J., y Abraham, A. Time-series forecasting using flexible neural tree model. *Information Sciences*, 174:219–235, 08 2005.
- [Cheney09] Cheney, E. W. y Light, W. A. *A course in approximation theory*, tomo 101. American Mathematical Soc., 2009.

- [Cohen14] Cohen, P., West, S. G., y Aiken, L. S. *Applied multiple regression/correlation analysis for the behavioral sciences*. Psychology Press, 2014.
- [Cowan90] Cowan, J. D. Neural networks: the early days. *En Advances in neural information processing systems*, págs. 828–842. 1990.
- [delaRosa05] de la Rosa, J. J. G. *Procesos de ruido interno en los circuitos electrónicos: técnicas de computación de la estabilidad de la frecuencia*. Universidad de Cádiz, Servicio de Publicaciones, 2005.
- [delBrio01] del Brio, B. M. y Molina, A. S. *Redes neuronales y sistemas borrosos*. Rama, 2001.
- [Derrick84] Derrick, W. R. y Grossman, S. I. Ecuaciones diferenciales con aplicaciones. Inf. téc., 1984.
- [Dieudonné66] Dieudonné, J. *Fundamentos de análisis moderno. I*. Reverté, 1966.
- [Falk12] Falk, M. y other. *A First Course on Time Series Analysis-Examples with SAS*. University of Wuerzburg, Wurzburg, Alemania, 2012.
- [Fisher90] Fisher, R. A. y Bennett, J. H. *Statistical methods, experimental design, and scientific inference*. 04; QA276, F5. 1990.
- [Flores12] Flores, J. J., Graff, M., y Rodriguez, H. Evolutive design of arma and ann models for time series forecasting. *Renewable Energy*, 44:225 – 230, 2012.
- [Foley12] Foley, A., Leahy, P., Marvuglia, A., y Mckeogh, E. Current methods in advances in forecasting of wind power generation. *Renewable Energy*, 37:1–8, 01 2012.
- [Friedland86] Friedland, B. *Control System Design: An Introduction to State-Space Methods*. McGraw-Hill, New York, NY, USA, 1986.
- [Funaro92] Funaro, D. *Polynomial Approximation of Differential Equations*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1ª ed<sup>ón</sup>, 1992.
- [Galton89] Galton, F. I. co-relations and their measurement, chiefly from anthropometric data. *Proceedings of the Royal Society of London*, 45(273-279):135–145, 1889.
- [Garrett03] Garrett, D., Peterson, D. A., Anderson, C. W., y Thaut, M. H. Comparison of linear, nonlinear, and feature selection methods for eeg signal classification. *IEEE Transactions on neural systems and rehabilitation engineering*, 11(2):141–144, 2003.
- [Garza15] Garza, N. E. F. *Manual de laboratorio de fisiología*. McGRAW-HILL INTERAMERICANA EDITORES, CDMX. Mexico, 2015.

- [Gavin11] Gavin, H. The levenberg-marquardt method for nonlinear least squares curve-fitting problems. *Department of Civil and Environmental Engineering, Duke University*, págs. 1–15, 2011.
- [Ghiassi05] Ghiassi, M., Saidane, H., y Zimbra, D. A dynamic artificial neural network model for forecasting time series events. *International Journal of Forecasting*, 21:341–362, 04 2005.
- [Graff13] Graff, M., Peña, R., y Medina, A. Wind speed forecasting using genetic programming. *En 2013 IEEE Congress on Evolutionary Computation*. June 2013.
- [Graff17] Graff, M., Escalante, H. J., Ornelas-Tellez, F., y Tellez, E. S. Time series forecasting with genetic programming. *Natural Computing*, 16(1):165–174, Mar 2017.
- [Graves06] Graves, A., Fernández, S., Gomez, F., y Schmidhuber, J. Connectionist temporal classification: labelling unsegmented sequence data with recurrent neural networks. *En Proceedings of the 23rd international conference on Machine learning*, págs. 369–376. ACM, 2006.
- [Hartley61] Hartley, H. O. The modified gauss-newton method for the fitting of nonlinear regression functions by least squares. *Technometrics*, 3(2):269–280, 1961.
- [Horn12] Horn, R. A. y Johnson, C. R. *Matrix analysis*. Cambridge university press, 2012.
- [Hyndman07] Hyndman, R. J. y Khandakar, Y. *Automatic time series forecasting: the forecast package for R*. MONASH University, Australia, 2007.
- [Isidori13] Isidori, A. *Nonlinear control systems*. Springer Science and Business Media, 1<sup>a</sup> ed<sup>ón</sup>., 2013.
- [Iturbide13] Iturbide, E., Cerda, J., y Graff, M. A comparison between lars and lasso for initialising the time-series forecasting auto-regressive equations. *Procedia Technology*, 7:282 – 288, 2013. 3rd Iberoamerican Conference on Electronics Engineering and Computer Science, CIECC 2013.
- [Kalman61] Kalman, R. y Bucy, R. *En Journal of Basic Engineering*. March 1961.
- [Kantz03] Kantz, H. y Schreiber, T. *Nonlinear Time Series Analysis*. Cambridge University Press, 2<sup>a</sup> ed<sup>ón</sup>., 2003.
- [Kirk04] Kirk, D. E. *Optimal Control Theory: An Introduction*. New York, NY, 1<sup>a</sup> ed<sup>ón</sup>., 2004. ISBN 9780486434841.
- [Knievel04] Knievel, J. C., Ahijevych, D. A., y Manning, K. W. Using temporal modes of rainfall to evaluate the performance of a numerical weather prediction model. *Monthly weather review*, 132(12):2995–3009, 2004.

- [Lamich17] Lamich, M., Balcells, J., Corbalán, M., y Griful, E. Nonlinear loads model for harmonics flow prediction, using multivariate regression. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 64(6):4820–4827, June 2017.
- [Lopez Farias18] Lopez Farias, R., Puig, V., Rodriguez Rangel, H., y Flores, J. J. Multi-model prediction for demand forecast in water distribution networks. *Energies*, 11(3):660, mar. 2018.
- [Mantilla16] Mantilla, J. I. A. y Santa, J. M. Tecnología de asistencia: Exoesqueletos robóticos en rehabilitación. *Movimiento Científico*, 10(2):83–90, 2016.
- [Martínez Ortega09] Martínez Ortega, R. M., Tuya Pendás, L. C., Martínez Ortega, M., Pérez Abreu, A., y Cánovas, A. M. El coeficiente de correlación de los rangos de spearman caracterización. *Revista Habanera de Ciencias Médicas*, 8(2):0–0, 2009.
- [Mauricio13] Mauricio, J. A. *Introduccion al Analisis de Series Temporales*, 1ª ed<sup>ón</sup>., 2013.
- [McLeod94] McLeod, K. H. A. *Time Series Modelling of Water Resources and Environmental Systems, Volume 45*. Elsevier Science, P.O. Box 211, 1000, AE Amsterdam, The Netherland, 1994.
- [Meneghini90] Meneghini, R. y Kozu, T. Spaceborne weather radar. *Norwood, MA, Artech House, 1990, 208 p.*, 1990.
- [Mohan M15] Mohan M, S., Naik, N., Gemson, R., y Ananthasayanam, M. Introduction to the kalman filter and tuning its statistics for near optimal estimates and cramer rao bound. *arXiv preprint arXiv:1503.04313*, 2015.
- [Morfin-Magaña18] Morfin-Magaña, R., Rodriguez-Flores, R., Ramos-Paz, S., Rico-Melgoza, J. J., y Ornelas-Tellez, F. Model predictive control for linear parameter-varying systems. *En 2018 IEEE International Autumn Meeting on Power, Electronics and Computing (ROPEC)*, págs. 1–6. nov 2018.
- [Murillo03] Murillo, J., Trejos, A., y OLAYA, P. C. Estudio del pronóstico de la demanda de energía eléctrica, utilizando modelos de series de tiempo. *Scientia et technica*, 3(23), 2003.
- [Nayak15] Nayak, P. y Sahu, B. A robust extended kalman filter for the estimation of time varying power system harmonics in noise. *En 2015 IEEE Power, Communication and Information Technology Conference (PCITC)*, págs. 635–640. IEEE, 2015.
- [NIHON KOHDEN19] NIHON KOHDEN, C. Sistemas de eeg neurofax: la vision perfecta del cerebro. <https://eu.nihonkohden.com/es/products/neurology/neurofax.html>, 2019.
- [Ornelas-Tellez10] Ornelas-Tellez, F., G. Loukianov, A., N. Sanchez, E., y Bayro Corrochano, E. J. Decentralized neural identification and control for uncertain

- nonlinear systems: Application to planar robot. *Journal of the Franklin Institute*, 347(6):1015 – 1034, 2010. Advances in Nonlinear Observation and Identification for Dynamic Systems.
- [Ornelas-Tellez15] Ornelas-Tellez, F. y Villafuerte, A. *Adaptive Polynomial Identification and Optimal Tracking Control for Nonlinear Systems*, págs. 259–265. 2015.
- [Ornelas-Tellez19] Ornelas-Tellez, F., Rico-Melgoza, J. J., Morfin-Magana, R., y Ramos-Paz, S. Optimal dynamic harmonic extraction and suppression in power conditioning applications. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, págs. 1–1, 2019.
- [Pakistan19] Pakistan, N. Eeg datasets for brain computer interface (bci) research at national university of sciences and technology, pakistan. <https://sites.google.com/site/projectbci/>, 2019.
- [Pindyck98] Pindyck, R. S. y Rubinfeld, D. L. *Econometric models and economic forecasts*, tomo 4. Irwin/McGraw-Hill Boston, 1998.
- [Potosinos19] Potosinos, U. Energía solar fotovoltaica. *Síguenos: revupotosinos Universitarios Potosinos*, pág. 25, 2019.
- [Proakis06] Proakis, J. G. y Manolakis, D. K. *Digital Signal Processing (4th Edition)*. Prentice-Hall, Inc., Upper Saddle River, NJ, USA, 2006.
- [Rico03] Rico, J. J., Madrigal, M., y Acha, E. Dynamic harmonic evolution using the extended harmonic domain. *IEEE Transactions on Power Delivery*, 18(2):587–594, 2003.
- [Rivero Gestal10] Rivero Gestal, M., Rabuñal, D., Dorado, J. R., y Pazos, J. *Introducción a los algoritmos genéticos y la programación genética*. Universidade da Coruña, 2010.
- [Rodríguez Bermúdez13] Rodríguez Bermúdez, G., García Laencina, P. J., Brizion, D., Roca Dorda, J., et al. Adquisición, procesamiento y clasificación de señales eeg para diseño de sistemas bci basados en imaginación de movimiento. 2013.
- [Rodríguez08] Rodríguez, O. *Energía Renovable*. Madrid, 2008.
- [Rojas13] Rojas, R. *Neural networks: a systematic introduction*. Springer Science & Business Media, 2013.
- [Rosenblatt61] Rosenblatt, F. Principles of neurodynamics. perceptrons and the theory of brain mechanisms. Inf. téc., Cornell Aeronautical Lab Inc Buffalo NY, 1961.
- [Rumelhart86] Rumelhart, D. E., Hinton, G. E., y Williams, R. J. Learning representations by back-propagating errors. *nature*, 323(6088):533–536, 1986.

- [S. Haykin01] S. Haykin, S. Kalman filtering and neural networks. 268, 01 2001.
- [Sanchez04] Sanchez, E. N., Alanis, A. Y., y Rico, J. Electric load demand prediction using neural network trained by kalman filtering. *En 2004 IEEE International Joint Conference on Neural Networks (IEEE Cat. No. 04CH37541)*, tomo 4, págs. 2771–2775. IEEE, 2004.
- [Simon06] Simon, D. *Optimal State Estimation: Kalman, H Infinity, and Nonlinear Approaches*. Wiley-Interscience, New York, NY, USA, 2006.
- [Simon10] Simon, D. Kalman filtering with state constraints: a survey of linear and nonlinear algorithms. *IET Control Theory & Applications*, 4(8):1303–1318, 2010.
- [Stengel94] Stengel, R. F. *Optimal Control and Estimation*. Dover Publications, Inc., New York, NY, USA, 1994.
- [Strang93] Strang, G., Strang, G., Strang, G., y Strang, G. *Introduction to linear algebra*, tomo 3. Wellesley-Cambridge Press Wellesley, MA, 1993.
- [Suárez Revelo17] Suárez Revelo, J. X. Protocolo para registro y análisis longitudinal de conectividad funcional de señales eeg en enfermedades neurodegenerativas. 2017.
- [Subasi07] Subasi, A. Eeg signal classification using wavelet feature extraction and a mixture of expert model. *Expert Systems with Applications*, 32(4):1084–1093, 2007.
- [Tayman99] Tayman, J. y Swanson, D. A. On the validity of mape as a measure of population forecast accuracy. *Population Research and Policy Review*, 18(4):299–322, 1999.
- [Tolstov62] Tolstov, G. P. *Fourier Series*. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, NJ, USA, 1962.
- [Vega18] Vega, D. C., Paz, S. R., Ornelas-Tellez, F., y Rico-Melgoza, J. J. System parameters'identification and optimal tracking control for nonlinear systems. *IFAC-PapersOnLine*, 51(13):431 – 436, 2018. 2nd IFAC Conference on Modelling, Identification and Control of Nonlinear Systems MICNON 2018.
- [Velasco09] Velasco, J. G. *Energías renovables*. Reverte, 2009.
- [vitas20] vitas, S. Actividad patológica en el electroencefalograma. <http://neurofisiologiagranada.com/eeg/eeg-activpatologica.htm>, 2020.
- [Walpole07] Walpole, R. E., Myers, R. H., Myers, S. L., y Ye, K. Probabilidad y estadística para ingeniería y ciencias. *Norma*, 162:157, 2007.
- [Walter97] Walter, E. y Pronzato, L. Identification of parametric models. *Communications and control engineering*, 8, 1997.



- [Worden19] Worden, K. *Nonlinearity in structural dynamics: detection, identification and modelling*. CRC Press, 2019.
- [Zang17] Zang, T., Wang, Y., Sun, H., y He, Z. Variable parameter kalman filter based dynamic harmonic state estimation for power systems with wind energy integration. *En 2017 IEEE Conference on Energy Internet and Energy System Integration (EI2)*, págs. 1–5. IEEE, 2017.
- [Zhang99] Zhang, L. y Zhang, B. A geometrical representation of mcculloch-pitts neural model and its applications. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 10(4):925–929, 1999.
- [Zuniga13] Zuniga, G. C., Ornelas-Tellez, F., Rico-Melgoza, J. J., y Sanchez, E. N. Optimizacion basada en pronostico para una micro-red eléctrica inteligente. *En Congreso nacional de control automático*. 2013.
- [Zygmund02] Zygmund, A. *Trigonometric series*, tomo 1. Cambridge university press, 2002.