



UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN NICOLÁS DE HIDALGO

Instituto de Investigaciones Económicas y Empresariales

**ADMINISTRACIÓN DE RIESGO CON CERTIFICADOS
BURSÁTILES RESPALDADOS POR HIPOTECAS (BORHIS).
UNA ALTERNATIVA DE INVERSIÓN PARA INVERSIONISTAS
INSTITUCIONALES EXTRANJEROS**

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:
DOCTOR EN CIENCIAS EN NEGOCIOS INTERNACIONALES

PRESENTA:

LUIS GUILLERMO VILLASEÑOR BÁEZ

ASESOR:

DR. JORGE VICTOR ALCARÁZ VERA

MORELIA, MICHOACÁN, OCTUBRE DE 2011

Agradecimientos

En primer lugar quiero agradecer a todas las personas que me han hecho algún comentario y que me han ayudado a crecer en esta etapa de mi vida, por lo que puedo asegurar que son bastantes.

Nunca imaginé que hubiera matemáticas que explicaran las inquietudes que tenía desde la licenciatura, y fue a través del **Dr. Francisco Venegas Martínez**, quien me mostro los diferentes caminos que las matemáticas muestran, con sus explicaciones en las aulas y en su libro, fui acercándome a este fascinante mundo de las finanzas cuánticas, en el cual tengo mucho camino por recorrer y del que será mi próxima aventura.

Es de especial mención agradecer a **Dr. Oscar Valdemar de la Torre Torres**, ya que con su apoyo desinteresado contribuyó en la obtención de las bases de datos con las que se trabajo la parte cuantitativa, y sobre todo siempre estuvo al pendiente con sus comentarios cuando parecía confundido o desanimado.

Mi director de tesis **Dr. Jorge Víctor Alcaráz Vera**, que jugo un papel muy importante fuera de toda la obligación, siempre estuvo leyendo mis avances una y otra vez, haciendo comentarios muy pertinentes, pero sobre todo, trabajó más allá de su responsabilidad convirtiéndose en mi editor, lo cual lo hace mas admirable.

No se a que fuerzas del destino agradecer a los excelentes sinodales que conforman mi jurado, los nombres de cada uno son símbolos de prestigio para

nuestra universidad y país, mas aún agradecer su paciencia, sus comentarios que abarcan distintos puntos en esta tesis, y a pesar de su escaso tiempo tuvieron el cuidado de darme un apoyo fraternal.

Siempre agradeceré a la institución que me dejó crecer como persona, y sin ninguna condición, que me a dejado el camino libre de mi superación, por lo cual, lo menos que puedo hacer para contribuir a esta confianza es que cada día me supere y sea mejor como profesor, como ciudadano y miembro de familia, gracias Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo.

A mi familia quiero comentarle que la terminación de este trabajo es una responsabilidad de alguien que pretende avanzar en su conocimiento y crecer como persona, por lo que no tiene nada de merito, es una obligación, aún así gracias por su confianza.

INDICE

Introducción.....	8
CAPITULO I.....	13
FUNDAMENTOS DE LA INVESTIGACIÓN.....	13
Planteamiento del Problema.....	13
Descripción del problema.....	15
Preguntas de investigación.....	16
Pregunta general.....	16
Preguntas específicas.....	16
Objetivos de la investigación.....	16
Objetivos generales.....	17
Objetivos específicos.....	17
Hipótesis de la investigación.....	17
Hipótesis general.....	17
Hipótesis específicas.....	18
Identificación de variables.....	18
Instrumentos.....	19
Instrumentos cuantitativos.....	19
Diseño de la investigación.....	19
Justificación.....	21
CAPITULO II.....	31
MARCO TEÓRICO Y CONCEPTUAL DE REFERENCIA.....	31
Antecedentes.....	31
Fractales.....	42
Análisis cualitativo de los mercados.....	48
Teoría tradicional de mercado de capitales.....	48
Revisión de mercados.....	49
Hipótesis de mercados fractales.....	53
Estadística fractal contra Browniano Fraccional.....	55
Proceso de Hurst.....	57
Coeficiente o exponente de Hurst.....	57
Antecedentes del proceso de Hurst.....	57
Rango reescalado (R/S).....	59
Valores del coeficiente de Hurst.....	60
Ciclos periódicos y no periódicos.....	61
El color del ruido y la dimensión fractal.....	63
Determinación del coeficiente de Hurst.....	64
Metodología.....	64
Prueba de significancia del coeficiente de Hurst.....	67
Antecedentes matemáticos del movimiento browniano fraccional.....	68
Movimiento browniano tradicional y movimiento browniano fraccional.....	68
Modelos Econométricos.....	85
Teoría ARIMA.....	86
Modelos Box-Jenkins (ARIMA).....	87
Principios de la modelación ARIMA (BOX-Jenkins 1976).....	88
Modelos ARCH/GARCH.....	89
Métodos de la física estadística.....	91

CAPITULO III.....	93
Metodología empleada en la investigación.....	93
CAPITULO IV.....	138
Análisis y resultados.....	138
Modelo Box-Jenkins (supuesto de normalidad).....	139
Proceso Hurst (fractal).....	140
Exponente de Hurst.....	140
Modelo de Rango Escalado (R/S analysis).....	140
Convergencia de los precios Futuros sobre el precio spot.....	143
CAPITULO V.....	145
Conclusiones.....	145
Anexo 1.....	147
Bibliografía.....	149

Resumen

La importancia de contar con un flujo continuo de divisas para el país es de suma importancia para su desarrollo y uno de los sectores que necesita recursos y puede ser un atractivo para inversionistas institucionales extranjeros es el de la emisión de deuda de créditos hipotecarios.

El presente trabajo evalúa la conveniencia de contar con instrumentos de administración de riesgo (Futuros), sobre certificados bursátiles respaldados por hipotecas (BORHIS) que sean atractivos para la inversión extranjera de largo plazo.

La evaluación para un instrumento que tiene subyacentes implica valorar los mismos y el enfoque propuesto en la presente investigación es el enfoque de valuación fractal, lo que ha permitido tomar en cuenta aspectos que el enfoque normal no contempla.

Summary

The importance of counting on a continuous currency flow for the country is of extreme importance for its development and one of the sectors that needs resources and can be an attractiveness for foreign institutional investors is the one of the emission of debt of mortgage credits.

The present work evaluates the convenience of counting on instruments of risk administration (Future), on stock-exchange certificates endorsed by mortgages (BORHIS) that are attractive for the foreign investment of long term.

The evaluation for an instrument that it has underlying implies to value such and the approach proposed in the present investigation is the estimate approach fractal, which has allowed to take into account aspects that the normal approach does not contemplate.

INTRODUCCIÓN.

El desarrollo de vivienda en México ha visto la evolución, promoción, crecimiento de este sector, así también de la innegable necesidad de vivienda por la población mexicana, y la importancia de entidades gubernamentales como lo son: el Instituto del Fondo Nacional de la Vivienda para los Trabajadores (INFONAVIT), Sociedad Hipotecaria Federal (SHF, antes Fondo de Operación y Financiamiento Bancario a la Vivienda, FOVI), etc., que tienen un papel activo en este sector, en el que no solamente participan entidades tradicionales que regularmente vemos como, constructoras, intermediarios financieros, entidades promotoras de vivienda y el público adquiriente, de lo anterior podemos inferir que estamos en la antesala de un desarrollo del mercado nacional hipotecario más amplio donde surgirán nuevas figuras e instrumentos tantos como la creatividad del sector lo requiera y la diversificación de riesgos lo amerite.

Debido a estas necesidades lo primero que plantea el sector es estar en igualdad de condiciones ante los principales socios comerciales del país, por lo que se desprende que el sector hipotecario del país requiere no tanto como modernizarse sino solamente actualizarse en las figuras y participantes del mercado hipotecario que sus socios comerciales ya tienen desde hace décadas.

De esta manera México se ha dado a la tarea de actualizar al sector hipotecario y lo está haciendo a un ritmo acelerado, pues basta hacer una mirada hacia atrás y veremos la cantidad de nuevas figuras que hace solo cuatro años no

existían, pero aún falta para estar actualizados al nivel de los Estados Unidos de norte America (EU.), que según autores es el pilar de la economía estadounidense y el mercado hipotecario más grande del mundo y por consiguiente el más desarrollado.

Este reto de actualización lleva riesgos en los cuales no se debería incurrir, ya que lo más valioso de esta actualización estriba en no cometer los errores de otros países o simplemente caer en el error de copiar el mercado norteamericano.

El sector hipotecario mexicano se ha dado cuenta de estos desafíos por lo que también ha aprendido de las experiencias de países que si bien no son los más grandes ni los mas desarrollados, sí son dignos de tomar en cuenta por su eficiencia como lo es el mercado hipotecario de Dinamarca.

Para nuestro país la disponibilidad de financiamiento para vivienda debe responder tanto a las diferentes necesidades, preferencias y prioridades de la población, como a la evolución que presenten las familias a lo largo de sus distintos ciclos. Para ello, es indispensable promover una mayor movilidad del patrimonio que permita a los hogares aspirar a mejorar el tamaño y características de su vivienda de acuerdo a su ingreso, capacidad de pago y necesidades específicas en cada etapa de su vida. Asimismo, es necesario fomentar el desarrollo de nuevos instrumentos y opciones de financiamiento que permitan a las empresas del sector conseguir los recursos suficientes para sus proyectos, así como diversificar el riesgo asociado a los mismos.

Desde el año 2003 México da el primer paso en esta actualización que fue el de bursátilizar los carteras de organismos públicos como son el INFONAVIT y la SHF, luego vendrían las emisiones de entidades financieras como son los bancos y las sofoles, todo con el fin de buscar un recurso escaso como lo son los capitales a invertir y que se recuperan en el largo plazo.

Estas emisiones tuvieron mucho éxito ya que son instrumentos muy demandados por los inversionistas institucionales en particular los fondos para el retiro y le dieron al sector la liquidez que se buscaba, ahora el reto, es buscar una estabilidad y/o una certidumbre de estas emisiones, reflejada en su tasa de interés de emisión y sus cotizaciones en el mercado secundario.

En México los mercados financieros están en constante evolución y prueba de ello es la creación del Mercado Mexicano de Derivados, S.A. de C.V. (MexDer) el 15 de diciembre de 1998, dicho mercado ha tenido crecimientos exponenciales, uno de los productos que ofrece este mercado son los “Futuros” y dentro de estos se ofrecen los futuros de divisas, índices, deuda, y acciones.

Por lo que el interés de la presente investigación (problema) es modelar que tan factible es la creación de un instrumento futuro sobre deuda y en caso específico sobre certificados bursátiles respaldados por hipotecas “BORHIS” y que tenga como objetivo único una certidumbre en las tasas de interés, resultando como beneficiario final que el público que adquiera hipotecas goce de una certidumbre en su tasa de hipoteca que le permita una estabilidad en la misma hipoteca, pero sobre todo que nuevos inversionistas hipotecarios

obtengan condiciones similares en cuanto a certidumbre y administración de riesgo, en una bolsa de derivados como el MEXDER, ya que precisamente es aquí donde se señalan ventajas tales como brindar herramientas que permitan controlar riesgos financieros en las empresas y fondos de inversión etc., como lo es la apreciación o depreciación del tipo de cambio, la fluctuación en las tasas de interés (lo que compete a esta investigación), en el precio de las acciones o el Índice de Precios y Cotizaciones (IPC) de la Bolsa Mexicana de Valores.

De esta manera los derivados brindan la posibilidad de fijar hoy un cierto nivel o precio de una variable con fines de cobertura y pagarla en una fecha futura, además de brindar administración de riesgos en proyectos de inversión.

Ante la constante volatilidad de los mercados financieros, así como los riesgos de contagio por la globalización, se hace necesario un mercado de derivados que permita controlar riesgos e incrementar la eficiencia en la administración de portafolios al público inversionista, de aquí surge la hipótesis general de la presente investigación que es: la creación de futuros de bonos hipotecarios como instrumentos de administración de riesgos.

Por lo que respecta a la modelación de un Futuro sobre Certificados Bursátiles respaldados por Hipotecas, es aquí donde intervienen una gran cantidad de variables que tomaremos en cuenta para modelar el Futuro, sobre la base de comprender el subyacente aplicando criterios actuales como Cox-Ingersoll-Ross (CIR), Proceso Hurst, Box Jenkins, etc.

Por lo expuesto anteriormente podemos resumir que el sector de la construcción de vivienda en México presenta una inercia difícil de detener, ya que a lo anterior se suma la evidente necesidad de recursos accesibles al adquiriente, por lo que surge la necesidad de buscar fondeos en los mercados financieros, lo que ha provocado una explosión de emisiones por parte de las entidades públicas y privadas a partir del 2003, de esta manera es muy común ver en los mercados financieros instrumentos novedosos que buscan el fondeo de recursos, y de aquí surge la idea de crear un producto financiero “Futuro” para el sector hipotecario mexicano que sea del interés del público inversionista (inversionistas institucionales), que tenga por objeto una cobertura y administración de riesgo de tasa de interés, logrando estabilidad en fondeos de largo plazo (5, 10 años), por lo que conviene analizar la factibilidad de inversión entre el público inversionista.

En lo que respecta al contenido capítular de la presente investigación se ha estructurado en cinco capítulos donde primeramente hablaremos de la importancia, evolución y futuro del mercado hipotecario mexicano sus problemas y sus retos, en segundo lugar hablaremos de lo que hay detrás del subyacente BORHI, midiendo sus precios en base a las teorías propias para ello, en tercer lugar y de acuerdo al diseño de la investigación propondremos una metodología que nos permita entender el problema de estudio en un ambiente estocástico, para posteriormente (cuarto lugar), presentar un análisis y resultados, y por último (quinto lugar), se presentaran las conclusiones de la presente investigación.

CAPITULO I

FUNDAMENTOS DE LA INVESTIGACIÓN.

Planteamiento del problema.

La administración de riesgos es un tema que cobra importancia en los mercados financieros internacionales¹ por lo que es de especial interés crear productos financieros que simulen tasas de interés a largo plazo (5 años), en especial en los productos hipotecarios, ya que en el caso de nuestro principal socio comercial (E.U.) es un tema ya bastante desarrollado, no así para México restando competitividad a nuestro país, por lo que toca al investigador ir desarrollando estos temas.

El principal desafío de SHF (Sociedad Hipotecaria Federal) es el desarrollar un mercado eficiente para los Certificados Bursátiles Respaldados por Hipotecas (BORHIS), mediante su rol como garante, promoviendo la liquidez, la estandarización de la documentación de los créditos y de los procesos de originación, así como de la administración de las carteras hipotecarias.

De lo anterior toca a la presente investigación dar un siguiente paso que es modelar la administración de riesgos mediante un instrumento financiero derivado futuro que de certidumbre en tasas de interés y que tenga como fin

¹ Podemos decir que desde el siglo XVIII, surge la Administración de Riesgos, con el surgimiento de las primeras bolsas agrícolas en Chicago, E.U. y la operación de Futuros y Opciones.

Hull, John C. *Options, Futures, and other Derivatives*, Sixth Edition Prentice Hall.

último que el beneficiario (adquiriente de hipoteca), tenga certidumbre en la tasa de interés que paga.

La viabilidad de la presente investigación se centra en la importancia de que países como México cuenten con productos derivados, cotizados en una bolsa, ha sido destacada por organismos financieros internacionales como el International Monetary Fund (IMF) y la International Finance Corporation (IFC), quienes han recomendado el establecimiento de mercados de productos derivados listados para promover esquemas de estabilidad macroeconómica y facilitar el control de riesgos en intermediarios financieros y entidades económicas² y para el caso de la presente investigación toca, la creación de un instrumento financiero derivado futuro para certificados bursátiles respaldados por hipotecas como instrumentos de administración de riesgos.

De esta manera la factibilidad de la presente investigación radica en que se cuenta con estadísticas de los instrumentos subyacentes y estadísticas de instrumentos futuros sobre deuda provistas del Mercado Mexicano de Derivados (MexDer), trabajando aproximadamente sobre año y medio a un costo mínimo para el investigador.

Con respecto a la evaluación de las deficiencias en el conocimiento del problema necesitamos conocer:

Como es que el BORHL, puede cumplir con las siguientes características³:

- Ser identificado como una “Clase de Activo”, conocido y aceptado fácilmente por los inversionistas con características:

² Estado Actual de la Vivienda en México 2008, SHF.

³ Ibid., p. 65

- Títulos Calificados “AAA” por al menos dos agencias calificadoras.
- Toma limitada de riesgos en la estructura (“Pass-Through”).
- Cartera con una relación entre deuda - valor de la vivienda promedio (LTV) menor al 65% para créditos denominados en UDIs y del 70% para créditos denominados en pesos, utilizando el Seguro de Crédito a la Vivienda o GPI como sustituto del enganche.
- Enaltecedores de crédito en la estructura: Seguro de Crédito a la Vivienda (SCV) o Garantía de Pago por Incumplimiento (GPI), Garantía de Pago Oportuno (GPO) o Líneas de Crédito parciales (PCG), y Coberturas Totales (Full Wrap), etc.
- “Venta Real” de la cartera.
- Mecánica clara para sustituir al administrador de la cartera, en caso necesario.
- Custodio de expedientes en cada bono.

Por lo que toca a esta investigación indicar si son suficientes los puntos anteriores o faltan algunos mas, de acuerdo a lo investigado o que sugerencias brinda la investigación a fin de proponer nuevos puntos a considerar.

Descripción del problema.

Ante la necesidad de captar recursos de largo plazo del publico inversionista en emisiones de Certificados Bursátiles Hipotecarios, los cuales

forman parte de portafolios de inversión de inversionistas extranjeros institucionales es conveniente contar con instrumentos de administración de riesgo sobre estos certificados, como lo es un “Futuro”, que presente alternativas a diferentes escenarios de tasas de rendimiento y sea una alternativa de inversión para estos inversionistas institucionales, como atracción de recursos del exterior.

Preguntas de la investigación.

Pregunta general.

¿Qué condiciones hacen factible la creación de futuros sobre bonos hipotecarios en México como instrumentos de administración de riesgo?

Preguntas específicas.

1. ¿Qué enfoques permiten una mejor metodología para que los certificados bursátiles respaldados por hipotecas sean el subyacente de un instrumento financiero derivado futuro?
2. ¿Qué elementos incorpora un instrumento futuro sobre certificados bursátiles que administre el riesgo dando certidumbre en la tasa de interés a largo plazo?

Objetivos de la investigación.

De esta manera el objetivo que persigue la presente investigación es determinar que la creación de un instrumento financiero derivado futuro para

certificados bursátiles respaldados por hipotecas (BORHIS), es conveniente para una administración de riesgo en la cartera de inversión de inversionistas extranjeros institucionales que lleve como fin último una certidumbre en la tasa de interés del subyacente.

Objetivos generales.

Demostrar que la creación de instrumentos futuros para certificados bursátiles respaldados por hipotecas (BORHIS) en México, es una alternativa de inversión de inversionistas extranjeros institucionales y dichos instrumentos son sujetos de administración de riesgos.

Objetivos específicos.

1. Investigar si un enfoque no determinista permite una mejor comprensión para la simulación y modelación de tasas de interés hipotecarias en instrumentos futuros hipotecarios en México.
2. Cuantificar y explicar elementos que determinan las causalidades de las tasas de interés involucradas y sus distorsiones, para así tener un mejor comprensión para su simulación y pronóstico.

Hipótesis de la investigación.

Hipótesis general.

Si los futuros sobre bonos hipotecarios se analizan bajo un enfoque no determinista, ¿bajo qué condiciones hacen factible su creación?.

Hipótesis específicas.

1. Bajo un enfoque no determinista se obtiene una mejor comprensión para la simulación y modelación de tasas de interés hipotecarias en instrumentos futuros sobre bonos hipotecarios en México en el largo plazo (3 años).
2. Si el rendimiento en los precios de los bonos hipotecarios en México no siguen un camino aleatorio permite conocer los elementos causales de las tasas de interés de estos instrumentos.

Identificación de variables.

Variables independientes:

- ✓ Tasa de interés de Certificados Bursátiles Respaldados por Hipotecas.
(BORHIS)
- ✓ Precio limpio de los Certificados Bursátiles Respaldados por Hipotecas.
(BORHIS)
- ✓ Rendimiento rezagado de los Certificados Bursátiles Respaldados por Hipotecas. (BORHIS)

Variable dependiente:

- ✓ Rendimiento de los Certificados Bursátiles Respaldados por Hipotecas.
(BORHIS)

Instrumentos.

Instrumentos cuantitativos.

- ✓ Tasas de interés de Certificados Bursátiles Respaldados por Hipotecas (BORHIS)
- ✓ Precio limpio
- ✓ Simulación de Futuros

Diseño de la investigación.

El diseño de la investigación es cuantitativa, experimental. Si tomamos a la tasa forward como un estimador insesgado⁴ podemos construir un modelo que en base a los precios de hoy mas su tasa de interés podamos inferir su precio futuro que es lo que nos interesa de esta manera se presenta un modelo básico de la siguiente forma:

$$\text{Rendimiento} = \text{Rendimiento rezagado}_{t-1} + \text{Precio limpio}_{t-1} + \text{Tasa de interés}_{t-1}$$

donde:

- ✓ Tasa de interés de Certificados Bursátiles Respaldados por Hipotecas (BORHIS), en tiempo $t-1$.
- ✓ Precio limpio de los Certificados Bursátiles Respaldados por Hipotecas (BORHIS), en tiempo $t-1$.

⁴ De acuerdo a la teoría internacional de Fisher.

"Winning Strategy for Currency-Futures Speculation", de Lee R. Thomas, en *Journal of Portfolio Management* (otoño de 1985), pp. 65-69.

- ✓ Rendimiento rezagado de los Certificados Bursátiles Respaldados por Hipotecas (BORHIS), en tiempo $t-1$.

Variable dependiente.

Rendimiento de los Certificados Bursátiles Respaldados por Hipotecas (BORHIS), en tiempo t .



Justificación.

La justificación de la presente investigación se centra en una falta de recursos que entidades oficiales como la Sociedad Hipotecaria Federal (SHF) enfrentan actualmente y que es una realidad que impone el siguiente reto: atender con suficiencia la demanda de créditos hipotecarios en los próximos 20 años y desarrollar mecanismos alternos de financiamiento, para lo que resulta indispensable desarrollar un mercado de bursatilizaciones de hipotecas en el que puedan participar diversos inversionistas institucionales, nacionales y extranjeros.

La conveniencia en la investigación radica en que es oportuna para el mercado financiero mexicano, con una relevancia social en donde el beneficiario final es el adquiriente de hipotecas de cualquier estrato social, implicando en la práctica una certidumbre en la tasa de interés hipotecaria, con un valor teórico del Certificado Bursátil, que permita poner en práctica las recientes teorías de evaluación de riesgos y servir de antecedente metodológico para la creación de otros instrumentos derivados futuros.

¿Por qué es importante entrar al Mercado de Capitales?

El porque se hace la presente investigación y a quién beneficia se describe a continuación. El acceso a una vivienda digna que ayude a mejorar los niveles de bienestar y calidad de vida de la población se ha vuelto un problema por los altos costos de intermediación, el crecimiento poblacional demandante de este satisfactor y las pocas fuentes de financiamiento.

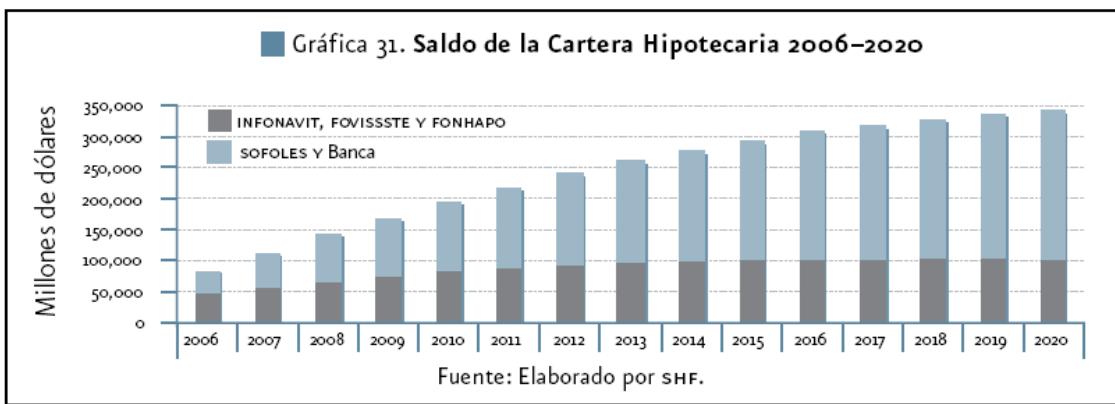
La Sociedad Hipotecaria Federal (SHF) y el Instituto del Fondo Nacional de la Vivienda para los Trabajadores (INFONAVIT) han incursionado en el mercado de capitales buscando cubrir distintos objetivos:

- SHF

En términos con lo dispuesto en el artículo 2 de su Ley Orgánica, tiene por objeto impulsar el desarrollo de los mercados primario y secundario de crédito a la vivienda, mediante el otorgamiento de garantías destinadas a la construcción, adquisición y mejora de la vivienda, preferentemente de interés social; así como incrementar la capacidad productiva y el desarrollo tecnológico, relacionados con la vivienda.

Considerando que en los próximos años todas las familias pudieran obtener financiamiento suficiente para la compra de una vivienda, la cartera hipotecaria de Bancos y Sofoles en México deberá aumentar de USD \$78,734 millones en 2006 (\$869,081 millones de pesos) a USD \$334,619 millones en 2020 (\$3,693,593 millones de pesos). Véase Gráfica 31.⁵

⁵ 72 Estimaciones efectuadas por SHF, Dirección de Estudios Económicos y de Vivienda. Las proyecciones de la cartera hipotecaria se basan en la demanda potencial estimada. Se asume un crecimiento anual del PIB de 3% y un abatimiento decreciente y paulatino del rezago habitacional que en 2005 ascendió a 8.4 millones de hogares. Tipo de cambio fix utilizado = 11.0382 publicado por Banco de México, efectivo para el 31 de diciembre del 2006.



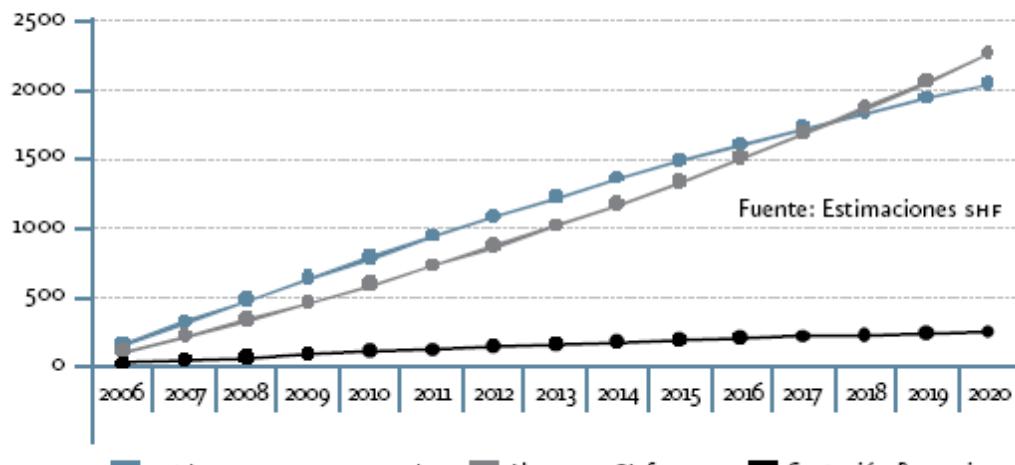
Las estimaciones realizadas por SHF indican que si todo el ahorro captado por la banca comercial se canalizara para financiar el crecimiento de la cartera hipotecaria, éste sería insuficiente para cubrir estas necesidades de recursos.

Asimismo, cabe resaltar que, conforme a la Ley Orgánica de SHF, después del año 2009 esta Institución no podrá otorgar financiamiento.

Respecto a cómo se puede hacer, se argumenta lo siguiente: en el futuro, la mayor parte del ahorro se puede canalizar a través de inversionistas institucionales, quienes sí tendrán los recursos suficientes para atender la demanda de crédito hipotecario en el país. Lo anterior se puede apreciar en la Gráfica 32:

Gráfica 32. Necesidad anual de recursos para la cartera hipotecaria de bancos y sofoles sobre ahorro anual en bancos e inversionistas institucionales

Flujo Acumulado de Crédito Hipotecario Otorgado por el Sector Privado y de Ahorro en Siefores y Bancos Miles de Millones de pesos constantes.



Fuente: Elaborado por SHF, 2006.

Esta realidad impone el siguiente reto: para atender con suficiencia la demanda de créditos hipotecarios en los próximos 20 años y desarrollar mecanismos alternos de financiamiento, resulta indispensable desarrollar un mercado de bursatilizaciones de hipotecas en el que puedan participar diversos inversionistas institucionales, nacionales y extranjeros.

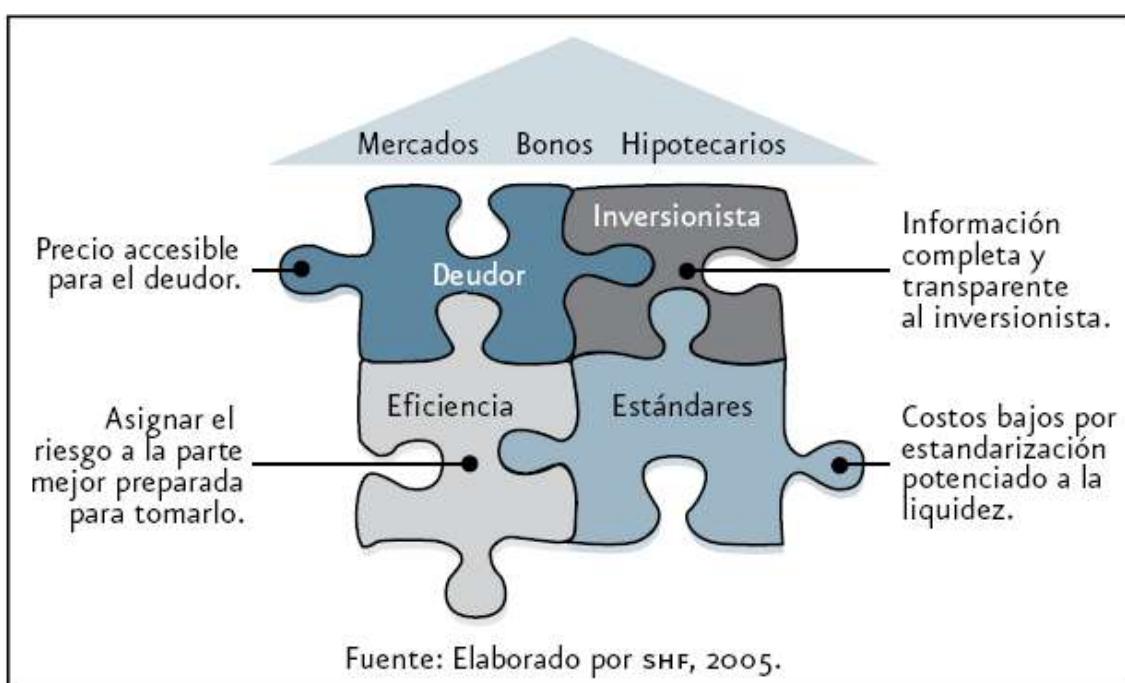
Y el límite de la presente investigación y del mercado en si, es que no se logre la eficiencia esperada, ya que el principal desafío de SHF es el desarrollar un mercado eficiente para los Certificados Bursátiles Respaldados por Hipotecas (BORHIS), mediante su rol como garante y promoviendo la liquidez y la estandarización de la documentación de los créditos y de los procesos de originación y de administración de las carteras hipotecarias.

Al crear y desarrollar un mercado secundario de hipotecas a través de la bursatilización de créditos hipotecarios y emisión de BORHIS en México, se cubren diversos objetivos importantes:

- a) Facilita el acceso a una gran fuente de recursos que permitan el desarrollo de esquemas de financiamiento que apoyen la demanda de créditos hipotecarios en los próximos años (esta fuente de fondeo se obtiene a través de inversionistas nacionales y extranjeros).
- b) Al conectar el mercado primario y el secundario de créditos hipotecarios se propicia una reducción importante en las tasas de interés que pagan los acreditados; logrando de esta manera que más familias mexicanas tengan acceso a una vivienda digna que mejore su nivel de bienestar y calidad de vida.
- c) Los intermediarios financieros participantes logran una especialización en sus funciones que conlleva la creación de nuevos mercados; por ejemplo, habrá intermediarios que compitan solamente por originar cartera, otros que exclusivamente compitan por administrar la cartera hipotecaria, unos más competirán por otorgar los seguros de crédito hipotecario, otros por el otorgamiento de garantía financiera (seguro parcial que se le da a los inversionistas como complemento al pago del principal e intereses del título bursátil) y otros intermediarios que competirán por ser los agentes que estructurarán las emisiones de los títulos bursátiles.

- d) Da profundidad al mercado de deuda de largo plazo por medio de emisiones fungibles, profundas y con liquidez.

- e) Dotar de elementos e información a los reguladores y supervisores bancarios para medir el riesgo inherente a esta actividad, lo que a su vez se traduciría en una mejor regulación prudencial.



Los esfuerzos de SHF para desarrollar el mercado de hipotecas.

Para poder crear y desarrollar un mercado hipotecario en México la SHF llevó a cabo durante los primeros años el análisis de diversos mercados en el mundo (Dinamarca, EU y Canadá, entre otros), y decidió tomar las mejores características de dichos mercados para implantarse en nuestro país (véase Cuadro 15).

Cuadro 15. Características para el desarrollo del mercado en México

Características para el desarrollo del mercado en México	México	Similar a
Las bursatilizaciones se hacen fuera de balance (off-balance)	✓	EE.UU
Las estructuras cuentan con enaltecedores externos (GPI, GPO, etc)	✓	EE.UU
El fondeo de los créditos proviene primordialmente del mercado (y sólo en menor medida de líneas de almacenamiento)	✓	Dinamarca
Existe coincidencia entre las características de los bonos y los créditos que los respaldan (principio de balance)	✓	Dinamarca
No requiere de originadores y administradores de créditos hipotecario sobrecapitalizado y estrictamente regulados	✓	Dinamarca
Existe poca intervención pública en la toma de riesgos	✓	Dinamarca
Poco riesgo de mercado entre la originación del crédito y la bursatilización	✓	Dinamarca
Se transfiere el riesgo de mercado y prepago al inversionista de los títulos bursátiles	✓	Dinamarca / EE.UU
La compra de carteras, estructuración de los títulos y venta en el mercado no está a cargo de empresas públicas	✓	Dinamarca

Fuente: Elaborado por SHF.

PARTE DOS MARCO TEORICO.

- Tasa Forward como un estimador insesgado.
- Futuro (instrumento derivado) como estimador insesgado.
- Subyacente emisión de BORHIS..

Simulación de tasas de interés con el modelo "Mortagage Backed Security (MBS)", simulación de Monte Carlo y el HJM (The Heath, Jarrow and Morton model. Agregando al estudio se proponen métodos estocásticos para mercados financieros incompletos fundamentado en un modelo geométrico Browniano.

- Fractales.
- Análisis cualitativo de los mercados.
- Teoría tradicional del Mercado de Capitales.
- Revisión de mercados.
- Hipótesis de Mercados Fractales.
- Estadística fractal contra Browniano Fraccional.

- Procesos de Hurst.
- Coeficiente o Exponente de Hurst.
- Rango Reescalado.
- Ciclos periódicos y no periódicos.
- Determinación del Coeficiente de Hurst.
- Movimiento Browniano Tradicional y Movimiento Browniano Fraccional.
- Modelo de tasa forward de Heath- Jarrow- Morton para valuar bonos.
- Teorema de Girsanov y valuación de bonos cupón cero.
- Inmunización de flujos de efectivo esperados mediante un portafolio de bonos: duración y convexidad.
- Determinación del valor teórico.
- Estructura de tasas de interés.

PARTE TRES METODO.

Metodología de la investigación.

La necesidad de fortalecer y ampliar el mercado financiero mexicano para la emisión de Certificados Bursátiles Hipotecarios, en ofertas públicas primarias y secundarias contando con la ventaja de un instrumento de administración de riesgo sobre estos certificados, como lo es un “Futuro”, que de certidumbre en tasas de interés y que tenga como fin último que, el beneficiario (adquiriente de hipoteca), tenga certidumbre en la tasa de interés que paga.

Dentro de la literatura especializada se encuentran métodos para valuar el certificado en cuestión tomando en cuenta su prepago y siguiendo las tasas PSA (*Post Specific Allowance Rates*), las cuales son una función lineal escalonada sobre prepago que experimentan estos bonos según un promedio histórico, por lo que de una manera determinista se expondrán los efectos sobre el certificado en el enfoque Box-Jenkins, y bajo un enfoque no determinista que sería el proceso Hurst.

La construcción del marco teórico será sobre la base no determinista (Proceso Hurst) y su comparación con el enfoque determinista (método Box-Jenkins). Para establecer las bases de las condiciones que nos dan los dos métodos y así poder comprender su comportamiento y modelación.

Las series que se manejan provienen de PIP (Proveedor Integral de Precios, S.A. de C.V.), con datos de las 19 emisiones de certificados bursátiles respaldados por hipotecas (BORHIS), con datos diarios del 2008 y 2009, ya que son instrumentos de reciente cotización, dándoles tratamiento en precio limpio y sus respectivos rendimientos, las series están contenidas en bases de datos en Excel para su mayor tratamiento para luego exportarlas al paquete estadístico Eviews 6, donde se manejarán los enfoques determinísticos y para el enfoque no determinístico se tiene contemplado la hoja Excel para procesos Hurst y el paquete computacional MatLab R2009a.

PARTE CUATRO ANÁLISIS Y RESULTADOS.

Modelo propuesto de Futuros hipotecarios mexicanos (BORHIS).

Consideraciones finales, conclusiones y sugerencias.

Glosarios.

Anexos.

Bibliografía.

CAPITULO II

MARCO TEÓRICO Y CONCEPTUAL DE REFERENCIA.

Antecedentes.

De manera inmediata un primer acercamiento a la complejidad lo podemos ver desde las revoluciones teóricas de principios del siglo XX, pero sobre todo a raíz de los hallazgos e invenciones producidos tras la segunda guerra mundial, primero de modo implícito y luego cada vez más explícitamente, la ciencia ha descubierto que la realidad (tanto la natural como la social) es intrínsecamente compleja. Lo mismo en el ámbito de la física y la cosmología que en el de la biología, la ecología y la neurología, la investigación científica ha venido tropezando (muchas veces contra sus propias predicciones) con reiteradas evidencias de que el universo no está construido por entidades simples e indivisibles regidas por leyes universales e inmutables, sino por capas de complejidad creciente que se traducen tejidos de sistemas emergentes cuyo comportamiento entraña regularidades específicas y cambiantes que en definitiva dejan atrás la milenaria postulación de un orden fundamental subyacente a la totalidad de los fenómenos reales y posibles. La acumulación de tales evidencias propició que desde finales de los años setenta en adelante un número creciente de científicos y centros de investigación se dieran a la tarea de promover el advenimiento y cultivo de las ciencias de la complejidad, que en estricto sentido no equivalen a nuevas disciplinas avocadas al estudio de objetos y fenómenos ignorados hasta entonces, sino a teorías y enfoques destinados al tratamiento de los temas y problemas vigentes desde la perspectiva de la complejidad. Con todo, este cambio de perspectiva a redundado en el replanteamiento de conceptos y categorías vertebrales como

los de organización, sistema, causalidad, determinismo, totalidad, convolución, entre otros, a la vez que ha permitido la incorporación positiva de nociones y temas que para la ciencia moderna representaban el límite o el más allá de la racionalidad cognoscitiva, como el desorden, la indeterminación, los procesos no lineales, los atractores extraños, la emergencia, la estructura holística, las estructuras disipativas, etc.

En el terreno de las ciencias sociales la irrupción de la complejidad no ha tenido hasta el momento efectos tan resonantes y controversiales; ello debido principalmente al hecho de que en mayor o menor medida ha prevalecido desde siempre la convicción de que todo lo relacionado con la condición humana es en sí mismo complejo, con independencia de las discriminaciones o fragmentaciones a que se le someta. Sin embargo, hay que tomar en cuenta que desde su nacimiento en el curso de los siglos XVIII y XIX las ciencias sociales adoptaron casi sin excepción el modelo y las directrices de las naturales, sus producciones se desarrollaron bajo la protección del principio de simplicidad que imperaba en éstas, de tal manera que durante mucho tiempo el ideal suscrito por la investigación social consistió en la obtención de un conocimiento determinista y analíticamente manejable fincado en el hallazgo de leyes y regularidades quasi-naturales, tan universales e inalterables como las que gobiernan los procesos físicos. Por lo demás, esta orientación, aunque moderada constantemente por la incidencia del pensamiento crítico, no desapareció del todo con el declive del positivismo y de las escuelas llamadas fiscalistas o científicas que tuvo lugar durante las primeras décadas del siglo XX; con numerosas variantes conceptuales y argumentales, en ocasiones de manera embozada o inadvertida, se mantiene en pie hasta el presente, incluso

registra repuntes notables a raíz de algunos resultados suministrados por campos de influencia ascendente como la cibernetica, la teoría de la información y la inteligencia artificial.

Al interior de la comunidad científica, mientras que según los pronunciamientos de sus promotores la complejidad constituye un hallazgo crucial (o un conjunto creciente de hallazgos) en el marco de las ciencias de la vida que redunda en una transformación radical del conocimiento de la realidad física en su totalidad, y aun del mundo social y de la actividad cognoscitiva⁶, en opinión de sus críticos o de quienes simplemente no comparten el entusiasmo de aquéllos se trata poco más o menos de una moda intelectual de última hora, como las que periódicamente cunden en el horizonte discursivo a partir de las fórmulas o consignas promovidas por algunas corrientes de vanguardia; una visión holística que en aras de poner coto a las concepciones tradicionales de la causalidad y la concepción mecanicista el orden natural desemboca en una doctrina mística o cuasimística del proceso del conocimiento y de la conformación de sus objetos. Entretanto, fuera de la comunidad científica, en el plano de las corrientes de opinión que en cada caso se perfilan en la cultura prevaleciente, la idea de complejidad ciertamente suscita menos reservas y reacciones adversas; ello debido a que en este ámbito no se enfrenta a elaboraciones teóricas sistemáticamente desarrolladas e institucionalmente consagradas como saber positivo, pero sobre todo porque por lo general es

⁶ "La irrupción de las ciencias de la complejidad –escribe H. R. Pagels- es uno de los avances de mayor importancia en la frontera de las ciencias. Es difícil, incluso en la extensión de un libro íntegro, trazar un mapa de toda esa frontera en expansión. (...) Estoy convencido de que las sociedades que dominen las nuevas ciencias de la complejidad y puedan convertir ese conocimiento en productos nuevos y formas de organización social, se convertirán en las superpotencias culturales, económicas y militares del próximo siglo" *Los sueños de la razón*, p. 53-54.

asumida en su acepción más elemental o abstracta, en la que parece como sinónimo de lo complicado, lo confuso o lo difícil de discernir.

Aunque emparentada con el conocimiento biológico por la instrucción académica de su precursor Kauffman (2003), la irrupción inicial de las teorías de la complejidad debe situarse en el campo de las matemáticas y las ciencias formales, específicamente en la teoría general de sistemas de Ludwig von Bertalanffy. A pesar de que en la época de su aparición esta teoría no fue asociada expresamente a la problemática de la complejidad y sólo alcanzó notoriedad en ciertos círculos científicos y filosóficos restringidos, y a pesar asimismo de que a la postre se le llegó a identificar con el movimiento estructuralista que con numerosas variantes gozó de influencia endémica durante los años setenta en diferentes áreas de las ciencias sociales, razón por la cual no fue tomada en cuenta por los iniciadores del pensamiento complejo a mediados de los ochenta, existen al menos dos motivos poderosos para considerarla como el punto de partida de este último Cortes (2009). En primer lugar, como su propia denominación lo indica, esta teoría convierte en referente titular el concepto que indiscutiblemente designa a la entidad nuclear en la que se centra el pensamiento complejo, a saber, el concepto de sistema. En su momento será necesario examinar con el debido detenimiento las implicaciones ontológicas que entraña su adopción y desarrollo metódico; por lo pronto cabe atender al hecho de que los sistemas (independientemente de su procedencia, finalidad y naturaleza particular) son entidades que presentan la propiedad básica que destacan en primer término todas las concepciones de la complejidad: su comportamiento, lo mismo que sus atributos distintivos no son producto de la mera suma de sus partes, de suerte que en cualquier caso

disponen de una configuración holística y no lineal. En segundo lugar, aunque ciertamente los trabajos de Bertalanffy no asumen a la complejidad como tema formal, orientan de manera explícita y directa la teoría de los sistemas. Puede parafrasearse mediante una feliz formulación debida al bien conocido matemático y fundador de la teoría de la información, Warren Weaver.

La física clásica tuvo gran éxito al desarrollar la teoría de la complejidad no organizada. Por ejemplo, el comportamiento de un gas es el resultado de los movimientos desorganizados, e imposibles de seguir aisladamente, de innumerables moléculas; en conjunto lo rigen las leyes de la termodinámica. La teoría de la complejidad no organizada se arraiga a fin de cuentas en las leyes del azar y la probabilidad y en la segunda ley de la termodinámica. En contraste, hoy el problema fundamental es el de la complejidad organizada. Conceptos como los de organización, totalidad, directividad, teleología y diferenciación son ajenos a la física habitual. Sin embargo, asoman a cada paso en las ciencias biológicas, del comportamiento y sociales, y son de veras indispensables para el análisis de organismos vivientes o grupos sociales. De esta manera, un problema fundamental planteado a la ciencia moderna es el de una teoría general de la organización. La teoría general de los sistemas es capaz en principio de dar definiciones exactas de semejantes conceptos y, en casos apropiados, de someterlos a análisis cuantitativo⁷.

Respecto a la llamada complejidad desorganizada, cabe decir que en ese respecto al éxito de la física clásica representó un logro más bien periférico, una respuesta remedial con la que un régimen de conocimiento determinista

⁷ L. von Bertalanffy, *teoría general de los sistemas*, p. 61-62.

buscaba hacer frente a estados de cosas que, a propósito de su densidad y carácter aleatorio, eran refractarios a la descomposición analítica y al aislamiento de unidades simples que pudieran someterse puntualmente a las leyes newtonianas del movimiento. En otras palabras, de cara a los parámetros e ideales epistémicos de la física clásica la mecánica estadística vino a ser una especie de solución de compromiso de la que se echó mano ante la imposibilidad de traducir a relaciones causales uniformes el desorden del comportamiento molecular. No hay que perder de vista lo que las indagaciones historiográficas han mostrado en reiteradas ocasiones: a diferencia de la ciencia contemporánea (la del siglo XX), en el paradigma de la ciencia moderna el caos, la indeterminación y lo contingente no figuraban en rigor como materia de conocimiento, sino como límite de éste, como un obstáculo con el que una y otra vez tropezaban los dispositivos experimentales, los razonamientos y las estrategias de medición y cálculo que dicha ciencia ponía en práctica para dar cumplimiento a los criterios de transparencia, univocidad y predictibilidad irrestricta que definían su proyecto.

La presentación programática Bertalanffy (2006) de la teoría general de sistemas contempla como objetivo primordial de estudio de la complejidad que se registra en las múltiples esferas de la realidad natural y social bajo la forma de sistemas abiertos. Por lo demás, la teoría en cuestión fue eficazmente secundada por varias construcciones matemáticas que surgieron o se consolidaron a mediados del siglo XX, las que mediante esquemas y métodos más o menos concurrentes de abocaron al análisis de la organización en procesos y sistemas dinámicos. Entre ellas sobresalen la cibernetica, la teoría de la información, las matemáticas del caos y la lógica de redes. Más allá de

las aportaciones particulares y la ampliación de horizontes que estas teorías consiguieron para su propio dominio, sus resultados disponen de una relevancia epistemológica extraordinaria por cuanto, a la par de los previstos por Bertalanffy, demuestran ser aplicados a un vasto repertorio de campos y problemas que incluso rebasa las fronteras de la investigación científica propiamente dicha para abarcar temáticas relativas a la administración, la planeación urbanística y la gestión educativa y cultural, entre muchas otras. Se trata de elaboraciones teóricas que con todo derecho pueden elevarse a la categoría de transdisciplinarias (a despecho de los desacuerdos y reticencias que suelen manifestarse por el otorgamiento de la misma), ya que su aplicación pertinente en tantos y tan diversos contextos no es el efecto acumulativo de ocasionales traslados o extensiones interdisciplinarias que por motivo coyunturales o coincidencias fortuitas hayan llegado a ser exitosas, sino que semejante cobertura se hallaba potencialmente implicada en sus planteamientos iniciales en la medida en que sus referentes primarios, como el caso de la organización y los sistemas dinámicos registran una presencia masiva en todos los campos aludidos; de hecho, en la actualidad resulta verdaderamente difícil concebir algún contexto teórico o práctico en el que no tengan cabida o en el que puedan dejarse de lado.

Por supuesto que es muy beneficiosa la extensión de los descubrimientos realizados en un campo del conocimiento a otras áreas, pero cuando se trata, por ejemplo, del comportamiento humano, individual o colectivo, que tiene una complejidad incomparablemente mayor que la de los sistemas físicos, esa

extensión debe hacerse con mucha prudencia, y en general sólo puede tener un carácter de analogía.

Hace cincuenta años, cuando el “caos” comenzó a desarrollarse como materia de estudio, se hablaba de la “ciencia del caos”, que pronto pasó a denominarse “caos determinista”, para diferenciarlo del caos producto del puro azar. Actualmente tiende a afianzarse la palabra “complejidad”, que designa el estudio de los sistemas dinámicos que están en algún punto intermedio entre el orden en el que nada cambia, como puede ser las estructuras cristalinas, y el estado de total desorden o caos como puede ser el de un gas ideal en equilibrio termodinámico.

Cuando el matemático B. Mandelbrot (1987) revisó los trabajos de Gaston Julia, un discípulo de H. Poincaré, sobre cálculos iterativos con números complejos, decidió que éstos indicaban un camino para construir figuras fractales a partir de ecuaciones matemáticas.

El movimiento browniano (MB), así como sus aspectos teóricos (uno de ellos es el estudio fractal a las finanzas) y prácticos, es objeto de numerosos estudios en muchas y muy diversas áreas de las finanzas. Sin lugar a dudas, el movimiento browniano se encuentra implícita o explícitamente en casi toda la teoría financiera en tiempo continuo y en ambientes estocásticos. Para ser más precisos el movimiento browniano ocupa 99% en la teoría de valuación de portafolios y productos derivados en tiempo continuo; el 1% se refiere a detalles sin importancia Venegas (2006).

El movimiento browniano fraccional (MBF) es un proceso más general, que como un caso particular contempla variables con características de independencia y descritas con movimientos brownianos tradicionales. A partir

de este nuevo proceso estocástico y con el uso de bases matemáticas más generales construidas desde un espacio de Hilbert se van recuperando ideas, conceptos y técnicas de las finanzas del mercado Black-Scholes como son: las probabilidades condicionadas, las martingalas y el lema generalizado de It^o.

Con estas herramientas se deduce una forma más general de valuación de derivados y la ecuación Black-Scholes (1973), así como la ecuación general de bonos y la estructura de plazos del modelo de tasas de Vasicek, que tendrían una mayor utilidad en los casos de variables con comportamientos de persistencia Cont (1994).

Esta generalización se extiende al método H-J-B (Hamilton, Jacobi, Bellman) para la determinación consumo óptimo en un proceso browniano fraccional, en donde además del activo subyacente, también se modela la volatilidad con un segundo proceso browniano fraccional independiente del primero. Al final se deduce una ecuación Black-Scholes generalizada para un derivado cuyo subyacente y su volatilidad son modelados por MBF.

El movimiento browniano y el cálculo de It^o son las bases matemáticas sobre las que se han construido varios de los conceptos y resultados de las finanzas y la administración de riesgos actuales. El modelo de Black-Scholes, la valuación de derivados, la estimación de curvas de tasas de interés y la medición de los diferentes tipos de riesgos han sido desarrollados con la ayuda de estos procesos matemáticos y bajo ciertos supuestos sobre las características de las variables financieras y los mercados.

Sin embargo, con el paso de tiempo se ha encontrado y confirmado que algunos de los supuestos financieros y/o matemáticos no se ajustan a la realidad, por lo que se requiere cada vez de teorías más generales que expliquen estas diferencias y que incluyan como casos particulares a las ya existentes.

Un ejemplo que se puede mencionar, es sobre el supuesto del comportamiento gaussiano de los rendimientos de instrumentos financieros. Una modelación con una distribución de tipo normal, debido a sus características, simplifica la valuación de derivados. Sin embargo, en un análisis de rendimientos de las series reales, algunas distribuciones de variables presentan sesgos, mayor curtosis en sus valores centrales o bien colas anchas, e incluso pueden tener distribuciones diferentes de la normal.

Por lo tanto, cada vez se busca utilizar funciones más generales como pueden ser las de Lévy o bien la teoría de valores extremos para realizar mejores valuaciones. De la misma manera, en forma más general, se siguen proponiendo la utilización de distintos procesos estocásticos o teorías, como la de fractales, para buscar una mejor explicación al comportamiento de ciertos fenómenos financieros.

En la literatura sobre el tema de fractales además de los artículos seminales de Hurst (1951) con su estudio de hidrología y su metodología Rango Reescalado (R/S) para la determinación del coeficiente del mismo nombre y de los artículos clásicos de Mandelbrot (1982) y (1968), considerado padre de la geometría fractal. Los libros de Peters (1991) y (1994) son para el presente trabajo una referencia fundamental sobre las ideas, técnicas y conceptos de los mercados

fractales. Su obra resume el estado del arte actual de las teorías de fractales y caos y su relación con los mercados financieros. De forma sencilla aplica estos conceptos matemáticos al análisis de los mercados principalmente de Estados Unidos.

También describe el artículo el trabajo de McCulloch (1985) y (1978) sobre la estadística fractal y en particular la evaluación de opciones con funciones más generales como son las de Lévy (también es recomendable consultar al autor original). Por otra parte, se debe mencionar el trabajo de Palomas Molina (2002) dentro de los primeros antecedentes sobre la aplicación del método (R/S) para la determinación del coeficiente Hurst para el caso de variables financieras de México.

Sobre el tema del Movimiento Browniano Fraccional (MBF) los primeros intentos de recuperar algunas propiedades básicas, como la de no arbitraje, cuando se trabaja con el movimiento browniano fraccional fueron hechos por de Dai and Hayde (1996) y Lin (1995). Debido a que los esfuerzos en esta dirección no pudieron eliminar la presencia de arbitraje, surgió la construcción de una nueva integral a partir del producto Wick y fueron analizadas entre otros por Dasagupta (1998) (2000) y Shryaveev (1998).

Una vez resuelta esta propiedad para procesos brownianos fraccionales con el nuevo formalismo, quienes han tal vez publicado la mayor cantidad de material sobre el movimiento browniano fraccional y su aplicación en las Finanzas son Oksendal (2004) y Hu (2000), además de Duncan y Pasik-Duncan (2002). Estos trabajos se inician desde la definición de la métrica de un espacio de Hilbert y van recuperando varias de las técnicas matemáticas que el modelo

Black-Scholes tradicional utiliza además mediante el uso del producto Wick, las derivadas Malliavin y las integrales Skorohod es posible generalizar entre otros, el teorema de Girsanov, las esperanzas condicionales y lema de It^o para su posterior aplicación en las finanzas. Los artículos de Necula (2002) (1999) presentan una perspectiva diferente de los estudios de Oksendal y Hu y en forma práctica presentan una deducción de la ecuación Black-Scholes a partir de movimientos browniano fraccionales. En otro trabajo relacionado, Rosek (2006) también presenta una deducción alternativa del lema de It^o para el caso fraccional. Por último los trabajos de Giovanni Vasconcelos (2004) presentan un resumen importante el paso de los modelos brownianos clásicos a los brownianos fraccionales y sus implicaciones en los supuestos y resultados.

Fractales.⁸

Antecedentes.

Desde la época de los griegos, cultura occidental siempre ha vivido obsesionada en encontrar y estudiar las formas simétricas y contornos suaves, de tal manera que desde la antigüedad se desarrolló una geometría basada en este tipo de estructuras conocidas como puras.

Platón afirmaba que el mundo, considerado como real, consistía de ese tipo de formas que eran creadas por una fuerza o una entidad llamada -el bien- que ocasionalmente podía ser visualizada a través de la mente. También suponía que el mundo en que vivimos es una copia imperfecta del mundo real y fue

⁸ Basado principalmente en los libros de Peters (1991) y (1994).

creada por una entidad (ordenador supremo) diferente llamada Demiurgo. Esta copia inferior resultaba ser áspera, asimétrica y sujeta a decadencia. Aunque la geometría griega fue formalizada posteriormente por Euclides, Platón reconoció la incapacidad de la misma para describir el mundo, para su forma de pensar, el problema no era la geometría sino nuestro propio mundo.

La geometría fractal es la geometría de Demiurgo, Sametband (1999). A diferencia de la geometría Euclidiana, esta puede utilizar formas ásperas y asimétricas. Los objetos no son variaciones de unas cuantas formas perfectas, sino más bien son de complejidad infinita y entre más cercanas y más cuidadosas sean las revisiones más detalles son revelados.

Si se considera el ejemplo clásico de un pino de navidad, los dibujos realizados por niños, o bien, los logos comerciales de un árbol navideño consisten de un triángulo simétrico que simula las hojas y ramas con una base rectangular angosta que sirve de base de tronco. En la vida real un árbol, y en particular un pino, es una red de ramas, sobre ramas que sucesivamente son cada vez más pequeñas y los troncos no son muy simétricos, ni de contornos suaves, además de considerar que cada pino es diferente.

La geometría euclidiana no puede replicar un pino real, solo se puede crear una aproximación, un pino navideño es un claro ejemplo de que una forma fractal, esta compuesto por una estructura global pero localmente es aleatorio. En general, se sabe cómo es un pino con cierta precisión pero también se sabe que individualmente cada rama es diferente.

Puede pensarse en la geometría euclíadiana como una simplificación del mundo de Demiurgo. En contraste, la geometría fractal está caracterizada por la autosimilaridad y un incremento en complejidad bajo una magnificación. Una de sus intenciones como geometría del espacio y que también se extiende al concepto del tiempo es generar visiones más realistas con el apoyo de las computadoras.

Fractales.

En la actualidad no existe una definición precisa de lo que es un fractal, ni siquiera, Benoit Mandelbrot, el padre de la geometría fractal ha desarrollado una definición precisa y formal, aunque no es demasiado difícil de reconocer cuando se encuentra alguno.

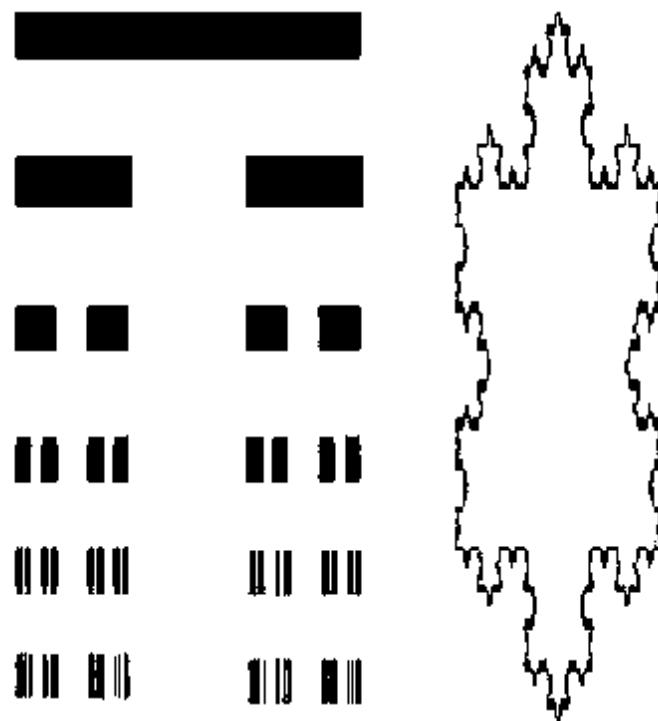
En términos prácticos los fractales tienen ciertas propiedades que son ideales para propósitos de modelación y ciertas características que los hacen medibles. Entre la variedad de definiciones sobre los fractales podemos mencionar son las siguientes:

- a) Son objetos matemáticos que conforman la geometría del Caos.
- b) Proviene del latín que significa roto debido a que se asocia con las discontinuidades de las funciones.
- c) Son objetos matemáticos cuya dimensión es fraccionaria.
- d) Son objetos matemáticos que posee esencialmente dos características: autosimilaridad y dimensión fractal.

La primera y más importante propiedad de los fractales es la autosimilaridad, que significa que todas sus partes están relacionadas de alguna forma con el todo, es decir que cada una de las partes del objeto tienen las características del objeto completo o bien que los detalles o partes más pequeñas tienen una relación estadística con sus propiedades globales, repitiéndose tales detalles de manera infinita. Esta propiedad hace a los fractales invariantes en la escala.

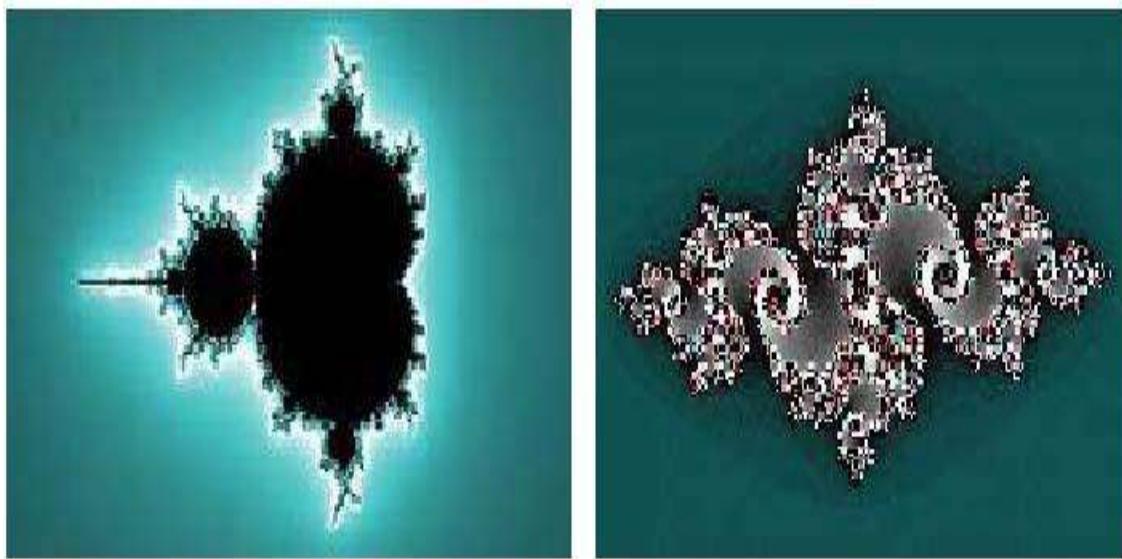
Existen dos tipos muy bien definidos de fractales: los lineales y los no lineales. Los primeros se construyen con un cambio en la variación de escala, es decir los fractales lineales son idénticos hasta aumentar la escala en infinito. Ejemplos de ellos son el conjunto de Cantor, el conjunto von Koch (o copo de nieve)(Gráfica 1.0 a) y el triángulo de Sierpinski.

Gráfica a, Peters (1991).



Por otro lado, los fractales no lineales se generan a partir de distorsiones complejas o no lineales. Ejemplo de ello es el conjunto de Mandelbrot y el conjunto de Julia. (Gráfica b)

Gráfica b, Schifter (2000)



Por otra parte, recordando que la dimensión topológica del conjunto vacío (-1), de un punto (0), de una línea recta (1), de un plano (2) y de una figura en el espacio (3). La dimensión está ligada con los grados de libertad, cuando la dimensión cero solo existe un punto inmóvil, cuando la dimensión 1 tenemos una recta y un grado de libertad, un plano tendría dos grados de libertad y el espacio tiene tres grados de libertad.

La más antigua e importante forma de medir la dimensión fractal es la dimensión Hausdorff, que tiene la ventaja de poder determinar la dimensión de cualquier conjunto, aunque no siempre resulta fácil su implementación computacional.

La dimensión Hausdorff ($\dim_H F$) es el punto critico donde la medida Hausdorff (H^S) de un conjunto F brinca de ∞ a 0. Las medidas de Hausdorff generalizan las ideas de longitud, área y volumen. Se puede verificar que para conjuntos de R^n la medida n – dimensional Hausdorff es salvo una constante de multiplicación el volumen n - dimensional usual.

Buscando una definición más formal de un objeto fractal, podemos decir que es áquel en el que su dimensión fractal de Hausdorff-Besicovtch supera a su dimensión topológica y en general no es un número entero. Por otro lado una definición de dimensión más general y sencilla puede ser la siguiente:

$$S = L^D \quad (2.1)$$

En donde S es la cantidad de segmentos, L es la escala seleccionada de medición y D es la dimensión. También se puede despejar la dimensión que quedaría como:

$$D = \frac{\log S}{\log L} \quad (2.2)$$

Fundamentalmente la mayoría de las definiciones de dimensión tienen la idea de medida a cierta escala. Para cada una de ellas se mide un conjunto, de tal forma, ignore las irregularidades de tamaño menor a la escala y observar como se comporta esa medida cuando la escala se acerca a cero.

Una relación muy importante es la que tiene la dimensión fractal con el exponente Hurst (H) y esta dada de la siguiente forma:

$$D = 2 - H \quad (2.3)$$

Análisis cualitativo de los mercados.

Teoría Tradicional de Mercado de Capitales.

En el mundo de las finanzas, un grupo de analistas se inclinan a pensar que los mercados financieros deberían tener un comportamiento cercano al determinista, mientras que por otra parte hay un grupo que piensa que el comportamiento de ellos es completamente aleatorio. Se abre una tercera posibilidad con los mercados fractales, al considerar que ambas posiciones pueden ser correctas.

Un tipo de análisis conocido como Rango Reescalado (R/S)⁹ es un método utilizado para distinguir series fractales de otro tipo de series de tiempo revelando así su estructura de autosimilaridad.

Es común modelar los procesos financieros con variables independientes de tipo estocástico con una hipótesis de comportamiento de movimiento browniano, en donde cada resultado es independiente del anterior.

El movimiento browniano tiene características deseables de tipo matemático y estadísticamente supone un comportamiento normal de sus funciones de distribución. El desarrollo de la teoría tradicional de mercados de capitales se ha basado durante largo tiempo en las ideas y conceptos de juegos justos, martingalas y movimientos brownianos.

⁹ En la siguiente sección se revisa ampliamente esta metodología

La Hipótesis de Mercados Eficientes (HME) pretende explicar la estructura estadística de los mercados. La teoría presupone que los mercados son -eficientes-, es decir, que los precios actuales reflejan toda la información que pudiera influir en los eventos futuros, además de que los inversionistas reaccionan de forma inmediata a la llegada de nueva información. También la teoría supone que los rendimientos del mercado de cualquier activo se distribuyen normalmente y que todos ellos tienen los mismos horizontes de inversión. Sin embargo, existe evidencia empírica de que los rendimientos en los mercados en general no se comportan de acuerdo a esta distribución.

La Hipótesis de Mercado Fractal (HMF) proporciona una estructura económica y matemática al análisis de los mercados fractales. A través de la hipótesis de mercados fractales es posible entender la existencia de la estructura estadística de autosimilaridad y también la forma de como el riesgo es distribuido entre los inversionistas.

Revisión de mercados.

La HME pretende explicar el comportamiento de los mercados. Bachelier (1900) fue el primero en proponer que los mercados y sus productos pueden ser modelados a través de una caminata aleatoria y mediante el cálculo de probabilidad estándar utilizando una base empírica a su trabajo de investigación.

El supuesto más importante de la HME es que las observaciones necesariamente tienen que ser independientes, o a lo más de memoria corta.

Esto solamente podría ocurrir si los precios se movieran de acuerdo a una caminata aleatoria, un movimiento browniano, o si la mejor estimación del precio futuro es el precio presente, es decir se comporta de acuerdo a una martingala o un juego justo.

El modelo de caminata aleatoria afirma que los cambios en los precios no pueden ser inferidos de cambios de precios pasados, además de que el modelo no considera la información exógena fundamental o económica. Los precios actuales reflejan toda la información disponible y todos los inversionistas tienen igual acceso a ella, por lo tanto los inversionistas en forma agregada no pueden ganarle sistemáticamente al mercado debido a la eficiencia del mismo.

Para justificar la HME con una metodología científica tradicional a partir de información empírica y evidencia estadística el razonamiento hubiera sido el siguiente:

- a) Observar un comportamiento o estructura en un sistema o proceso.
- b) Desarrollar una teoría o modelo para ajustar los hechos conocidos.
- c) Revisar y modificar la teoría vigente para explicar nuevos hechos conocidos.

En el caso de HME la teoría fue desarrollada para justificar el uso de una herramienta estadística que requiere de independencia estadística o memoria de corto plazo. De acuerdo con HME los cambios en los precios deberían estar bien representados por una distribución normal. Pero en la realidad se

encuentran distribuciones de colas pesadas¹⁰ Peters (1991), que frecuentemente son evidencia de un sistema de memoria larga generada por un sistema estocástico no lineal. Si bien la HME se desarrolla en un ambiente matemático más fácil, trabajar una hipótesis de mercado que ajuste los hechos observados y tome en cuenta porque los mercados no se comportan de esa forma.

Otra variable de gran importancia que debería de ser considerada es la liquidez (que es diferente del término de volumen comerciado). Las mayores crisis financieras, de acuerdo con Peters (1992) han ocurrido cuando ha existido una baja liquidez con un alto volumen comerciado. Con esta idea se podría pensar en la liquidez como: volumen comerciado no balanceado.

En el sistema de oferta y demanda de capitales se requiere de liquidez del mercado para asegurar:

- a) El precio obtenido por el inversionista sea lo más cercano a lo que el mercado considera justo.

¹⁰ El fenómeno de las colas pesadas se refiere al que se presenta en una campana de “Gauss” en el que los extremos de la campana o curva deberían estar casi tocando el eje de las “X” y sin embargo hay evidencias que esta forma no se presenta en la realidad, la que permite decir de que, estadísticamente hablando se presenta una leptokurtosis (colas pesadas y pico alto), que como ya hemos dicho, que la distribución de los rendimientos que para este caso es el rendimiento del BORH, tiene un gran debate ampliamente discutido en la cual generalmente se acepta la presencia de leptokurtosis, tal debate se centra en que puede ser peligroso aceptar la teoría de la caminata aleatoria de los rendimientos (random walk theory). La explicación mas común para la existencia de leptokurtosis es que la información muestra grupos no frecuentes, mas que una suave y continua distribución. El mercado reacciona a este grupo no frecuente de información mostrando una cola pesada, porque la distribución de información es leptokurtotica, así también como la distribución en el cambio de los precios. Peters (1991), 36.

- b) Inversionistas con diferentes horizontes de inversión puedan comerciar eficientemente con otro.
- c) No haya pánico o estampidas cuando la oferta y la demanda no estén balanceadas.

En los mercados reales los inversionistas requieren de un mercado líquido y la HME prácticamente no hace referencia al concepto de liquidez, se considera que los precios siempre son justos, independientemente de la liquidez o pensando que siempre habría la posibilidad de tener liquidez.

Por otra parte existe una diferencia entre un mercado estable y un mercado eficiente. Un mercado estable es un mercado líquido y si un mercado es líquido entonces puede considerarse que los precios están cercanos a su valor justo. Cuando hay ausencia de liquidez, los inversionistas participantes estarían deseosos de tomar cualquier precio sea justo o no.

Si toda la información tiene el mismo impacto sobre todos los inversionistas, no debería haber falta de liquidez. Sin embargo, los inversionistas no son homogéneos, algunos deben comerciar para generar utilidades todos los días, otros deben comerciar para utilizar pasivos que están altamente apalancados.

Todos los inversionistas que comercian en el mercado simultáneamente tienen diferentes horizontes de tiempo. Entonces la fuente de liquidez es generada debido a que los inversionistas poseen diferentes horizontes de inversión,

diferente conjunto de información y consecuentemente diferente concepto de precio justo.

En forma de resumen, de los hechos empíricos observados de los mercados, una nueva hipótesis tendría al menos que tratar de explicar porqué las distribuciones de colas pesadas existen cuando hay diferentes horizontes de inversión y porqué en la estructura de plazos de la volatilidad la desviación estándar de los rendimientos se incrementa mas rápido que la raíz cuadrada del tiempo.

Cuando los mercados son considerados estables, HME trabaja relativamente bien. Sin embargo, durante momentos de pánico o estampidas, los modelos dejan de funcionar ya que las HME son modelos de equilibrio.

Hipótesis de Mercados Fractales.

La Hipótesis de Mercados Fractales (HMF) enfatiza la importancia de la liquidez y de los diferentes horizontes de inversión en el comportamiento de los inversionistas. Para que la hipótesis sea tan general como sea posible no se le exigiría ningún requerimiento de tipo estadístico sobre los procesos.

La información por sí misma no tiene un impacto uniforme sobre los precios, esta sería asimilada en forma diferente por los diferentes horizontes de inversión.

En resumen la HMF propone los siguientes puntos 3:

- a) El mercado es estable cuando está constituido de un gran número de horizontes de inversiones, lo cual asegura la liquidez del mercado.
- b) El conjunto de información está más relacionado a la sensibilidad del mercado y a factores técnicos del corto que del largo plazo. Conforme el horizonte de inversión se incrementa, la información de los fundamentales de largo plazo domina. Entonces los cambios en los precios pueden reflejar información importante sólo para ese horizonte de inversión.
- c) Si un evento ocurre que hace cuestionable la validez de la información fundamental, los inversionistas de largo plazo dejarían de participar en el mercado o comenzarían a comerciar basados en el conjunto de información de corto plazo. Cuando todos los horizontes de inversión del mercado se reducen a un mismo nivel, el mercado se vuelve inestable.
- d) Los precios reflejan una combinación de comercio técnico de corto plazo y valuación fundamental de largo plazo. Los cambios en los precios de corto plazo son probablemente más volátiles o ruidosos que los de largo. Las tendencias corto plazo son probablemente resultados del comportamiento colectivo. No hay razón para creer que la longitud de las tendencias de corto plazo está relacionada con las tendencias económicas de largo plazo.

e) Si un título no tiene un vínculo al ciclo económico, entonces no habría tendencia de largo plazo. Por tanto, comercio, liquidez e información dominaran en el corto plazo.

Estadística Fractal contra Browniano Fraccional.

Si bien el modelo Black-Scholes tiene una estructura poderosa y elegante y considera a los mercados como Gaussianos¹¹, completos, eficientes y libres de arbitraje, algunos de los principales aspectos que alejan las variables de los mercados reales con respecto a las del mercado Black-Scholes son los siguientes:

- i) En general los rendimientos de los activos no se distribuyen como una normal teórica sino que con frecuencia las distribuciones de variables reales presentan colas pesadas y curtosis.
- ii) Las series financieras de los subyacentes presentan efectos de memoria larga y por lo tanto los eventos tampoco son completamente independientes.

Del mismo modo la autosimilaridad puede tener diferentes orígenes, si proviene de una alta variabilidad en donde los incrementos son independientes y de colas pesadas su descripción puede realizarse con procesos de Lévy. En cambio si las series tienen la propiedad de una alta dependencia, entonces su modelación debería de ser con movimientos brownianos fraccionales.

¹¹ Las distribuciones normales presentan dos ventajas: pueden considerarse directamente en la teoría de límite central y la suma de normales se distribuye como normal

En el primer caso es posible plantear una solución a través de la construcción de funciones de Lévy con características estables y con la ayuda de sus funciones características es posible modelar distribuciones más generales. En el artículo de McCulloch (1985) y (1978) se muestran algunas características de las funciones de Lévy y el resultado de la estimación del valor de una opción call.

El segundo caso corresponde a series donde sus eventos muestran cierta persistencia, este tipo de problemas pueden planearse a través de una generalización del movimiento browniano conocida como movimiento browniano fraccional con la utilización del coeficiente Hurst. El desarrollo de las siguientes secciones estaría enfocado al planteamiento y solución de este problema.

Gráfica C, Peters (1991)



PROCESOS DE HURST.

Coeficiente o Exponente de Hurst.

Antecedentes del Proceso de Hurst

El primero en estudiar las series fractales fue el científico británico Harold Edwin Hurst (1880-1978). Posteriormente, sus ideas fueron retomadas por Mandelbrot quien colocó su trabajo en un contexto más general bajo el nombre de Análisis de Rango Reescalado (R/S). El R/S es un método estadístico utilizado para evaluar la ocurrencia de eventos poco comunes y es una herramienta ideal para procesos físicos y financieros, aunque no se limita solamente a este tipo de eventos. El parámetro que resulta de un análisis (R/S), el coeficiente o exponente Hurst, es una medida de independencia de las series de tiempo y una manera de distinguir series fractales.

Hurst era constructor de presas en los inicios del Siglo XX y por un tiempo trabajó en el proyecto de la presa del río Nilo. En el momento del diseño de la presa se le presentó un problema interesante de hidrología concerniente en determinar la capacidad de almacenamiento dependiente del flujo que entra al río proveniente de diferentes elementos como lluvias y riachuelos y un flujo controlado de salida del río utilizado primordialmente en el riego.

Con anterioridad, muchos hidrólogos habían supuesto este comportamiento del influjo como un proceso aleatorio, una suposición razonable cuando se trabaja en un ecosistema complejo. Sin embargo, a él no le pareció que se explicara

de forma tan fácil este comportamiento. Él estudió los registros históricos (de 622 D.C. a 1469 D.C.) que mantenían los egipcios y observó que en el proceso, flujos más grandes del promedio eran seguidos por sobre flujos todavía más grandes. Inesperadamente el proceso cambiaba a flujos menores que el promedio y eran seguidos por flujos todavía menores que los anteriores. Parecían ciclos pero cuya longitud no era periódica.

Un análisis estándar revelaba la no existencia de correlación estadísticamente significativa entre las observaciones, por lo que Hurst desarrolló su propia metodología.

Por otra parte Hurst estaba enterado del trabajo de Einstein sobre el movimiento browniano. Este último había encontrado que la distancia que una partícula errática suspendida en un fluido cubre se incrementa con la raíz cuadrada del tiempo, si escribimos esto en forma de ecuación tenemos que:

$$R = T^{0.50} \quad (2.4)$$

Donde R = distancia y T = tiempo.

La ecuación anterior es conocida como regla de un medio y es utilizada principalmente en estadística. En finanzas se utiliza para asumir que la dispersión de los rendimientos se incrementa con la raíz cuadrada del tiempo.

Para aplicar este concepto a series de tiempo que no sean movimientos brownianos, como el de la partícula errática de Einstein, se debería considerar una ecuación que tome en consideración que los componentes de las series de tiempo no son independientes. Hurst al resolver su problema relacionado con la

capacidad de la presa encontró la siguiente ecuación que generaliza la idea anterior que sólo era aplicable a movimientos brownianos (Mandelbrot y Wallis lo probaron en 1969) :

$$(R/S)_n = cn^H \quad (2.5)$$

donde (R/S) se conoce como el estadístico -Rango Reescalado-
 c = constante

n = indicador del valor de la serie de tiempo

H = exponente o coeficiente Hurst

Rango Reescalado (R / S).

R/S tiene media cero y se expresa en términos de la desviación estándar. En general, los valores de R/S se incrementan con n , por el valor de la ley de potencias igual al exponente Hurst, esta es la primera conexión del fenómeno Hurst y la geometría Fractal. Hay que mencionar además que el método R/S es un análisis no paramétrico que no requiere de una distribución específica. Para que una serie pueda ser considerada como fractal, el requisito clave que debe de cumplir es una escala de ley de potencia.

El exponente de Hurt se determina por medio de una regresión lineal de los puntos de $\ln(R/S)_n$ contra $\ln(n)$, como se muestra en la siguiente ecuación:

$$\ln(R/S)_n = \log(c) + H \log(n) \quad (2.6)$$

Si el sistema tuviera la característica de independencia entonces $H = 0.50$. Sin embargo, como resultado de su investigación de la presa del río Nilo encontró

un coeficiente de $H = 0.91$. Si comparamos el ejemplo de la partícula errática de Einstein con un $H = 0.91$ entonces esta última partícula cubriría una distancia mayor que otra con un proceso aleatorio en el mismo periodo.

Mandelbrot demostró empíricamente que en series de tiempo cuyas observaciones son independientes el estadístico (R/S) son asintóticamente proporcional a la raíz cuadrada, es decir si $H = 0.5$ resulta un evento aleatorio puro. Hurst supone como hipótesis nula que el comportamiento de fenómeno sea de una caminata aleatoria o un movimiento browniano, si éste fuera el caso la ecuación del rango reescalado estaría dado por:

$$\log(R/S)_n = 0.5 (\log n + \log \frac{\pi}{2}) \quad (2.7)$$

Valores del Coeficiente Hurst.

Si $H = 0.5$ implica un proceso independiente. Es importante notar que un análisis (R/S) no requiere que el proceso subyacente se distribuya normalmente, sólo independiente. Como el análisis R/S es no paramétrico por lo que pueden considerarse distribuciones otro tipo de distribuciones como la t de student, gamma etc.

Si $0.5 < H \leq 1.0$ implica series de tiempo persistentes, es decir caracterizadas por efectos de memoria de largo plazo. Teóricamente lo que suceda hoy impactaría en el futuro por siempre como por ejemplo cambios semanales de ahora están correlacionados con los cambios semanales futuros. Además se

ha encontrado que las series persistentes son las más comunes encontradas en la naturaleza y en los mercados de capitales y economía.

Si $0.0 \leq H < 0.5$ significa antipersistencia en la serie de tiempo. Un sistema antipersistente cubre menos distancia que uno aleatorio, en el caso de una partícula errática. Para que ocurra debe dar marcha atrás a así mismo con mayor frecuencia que en un proceso aleatorio. Algunos teóricos igualan este comportamiento con un proceso de reversión a la media, que sin embargo asume que el sistema bajo estudio tiene media estable, suposición no tan fácilmente aceptada en este caso.

Ciclos Periódicos y No Periódicos.

La ciencia siempre ha tratado de encontrar ciclos periódicos o regulares debido a la importancia que tenían en la naturaleza los ciclos agrícolas y los eventos celestes. Esta creencia, proveniente también desde los antiguos griegos, creó un modelo de universo basado en el movimiento de los cuerpos en círculos perfectos.

Sin embargo, en la economía y los mercados no hay razones para pensar que los ciclos tienen que ser periódicos. En la Teoría de Caos, los ciclos pueden no ser periódicos y aunque tienen una duración promedio, la duración exacta de ciclos promedio no se conoce. Hurst(1951) fue el primero en notar que un comportamiento periódico de un subyacente puede ser detectado con un análisis R/S.

De acuerdo con Peters (1991) para valores muy grandes de observaciones se esperaría que el exponente H tienda a 0.5 y que el efecto de memoria de largo plazo se disipe. Este comportamiento asintótico de largo plazo nos dice que existen ciclos para los cuales los efectos de tendencia están presentes y a partir de un cierto valor las observaciones son independientes. Estos ciclos no son regulares y se llaman ciclos no periódicos.

En una grafica log / log de un análisis R/S el fin de cada ciclo de frecuencias y el inicio del siguiente puede detectarse visualmente de los breaks y flattening en las gráficas. Pero hay una forma más fácil de ver cuando los breaks en las gráficas log / log ocurren con el objeto de hacer una mejor estimación del ciclo. El siguiente estadístico fue propuesto por Hurst (1951) para probar la estabilidad. Se ha probado empíricamente que este estadístico proporciona una medida más precisa de la longitud del ciclo y trabaja particularmente bien en presencia de ruido.

Tal estadístico se define como:

$$V_n = (R/S)_n n^{1/2} \quad (2.8)$$

Un gráfico del estadístico V_n contra el logaritmo del número de observaciones $\log(n)$ sería plano u horizontal si el proceso fuera independiente y aleatorio. Por otra parte, si el proceso fuera persistente y R/S fuera escalado a una tasa mayor que el cuadrado de la raíz del tiempo ($H > 0.5$) entonces la distribución de puntos en la gráfica tendría pendiente creciente y si estuviéramos hablando de un proceso antipersistentes ($H < 0.5$) la gráfica tendría una pendiente negativa. Graficando V_n en el eje y $\log(n)$ en el eje x, los "breaks" ocurrirían

cuando el estadístico V se aplana, en esos puntos los procesos de memoria larga se han disipado.

Un análisis R/S es capaz de determinar ciclos periódicos, incluso cuando ellos son superpuestos. La potencia real del análisis R/S es encontrar los ciclos no periódicos. Un ciclo no periódico no tiene frecuencia absoluta, en lugar de ello tiene una frecuencia promedio. Aunque nos hemos llegado a acostumbrar sobre las implicaciones de la palabra periódico cada vez que se utiliza la palabra ciclo.

El Color del Ruido y la dimensión fractal.

Si $0 \leq H < 0.5$ se considera que se tiene ruido rosa y esta relacionado con la antipersistencia. El ruido rosa abunda en la naturaleza y está relacionado a procesos de relajación(equilibrio dinámico) y turbulencia.

Si $0.5 < H \leq 1.0$ se tiene un ruido negro. Este ruido aparece en procesos cíclicos de largo plazo, como nivel de ríos, numero de manchas solares y cambios de precios en las bolsas de valores. Y tres efectos están relacionados a este ruido: Efectos Joseph(efectos causados por tendencias y ciclos), Noah (discontinuidades hacia arriba y hacia debajo de las observaciones) y Mirror(de relación entre diferentes tipos de ruido).

A partir del exponente H puede determinarse la dimensión fractal como $D = 2 - H$, un movimiento browniano tiene una dimensión fractal de 1.5. Si $H > 0.5$ la dimensión fractal disminuiría y tendería a acercarse a una recta, en el caso

contrario si $H < 0.5$ la dimensión fractal aumentaría y se acercara a una superficie.

Determinación del Coeficiente de Hurst.

Metodología.

Como se menciono anteriormente, Hurst desarrolló una metodología para el calculo del coeficiente H . Inicialmente su estudio se aplicó al caso del flujo del río Nilo, pero en términos generales puede aplicarse a cualquier serie que se sospeche se comporte como fractal en cualquier otra área de estudio. A continuación se describe en detalle la metodología¹²:

1. Se inicia con una serie de tiempo de tamaño M , pero como nos interesa los rendimientos logarítmicos entonces la serie original se reduce a una nueva serie de tiempo de tamaño $N = M - 1$ donde cada rendimiento esta definido por:

$$N_i = \log \left(\frac{M_{i+1}}{M_i} \right), \quad i = 1, 2, 3, \dots, N. \quad (2.9)$$

2. Se divide este periodo de tiempo N en A subperiodos contiguos de longitud n , tal que $A * n = N$. Se nombra cada uno de los subperiodos o subgrupos I_a , con $a = 1, 2, 3, \dots, A$. Y cada elemento en I_a es etiquetado $N_{k,a}$, tal que $k = 1, 2, 3, \dots, n$: Y para cada subperiodo I_a de longitud n , el valor promedio está definido por la siguiente expresión:

¹² Para mayor información sobre el coeficiente de Hurst o la metodología (R/S) consultar Peters (1994).

$$e_a = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n N_{k,a} \quad (2.10)$$

3. Las diferencias de cada elemento $N_{k,a}$ con respecto a la media e_a para cada subperiodo I_a se van sumando para obtener una la serie de tiempo acumulada ($X_{k,a}$), definida como:

$$X_{k,a} = \sum_{i=1}^k (N_{i,a} - e_a), \quad k = 1, 2, 3, \dots, n. \quad (2.11)$$

4. El rango R_{Ia} se define como la diferencia entre el valor máximo y el valor mínimo de $K_{k,a}$ para cada subperiodo I_a :

$$R_{Ia} = \text{Max} (X_{k,a}) - \text{Min} (X_{k,a}), \quad (2.12)$$

Donde $1 \leq k \leq n$.

5. Por otro lado, se calcula la desviación estándar muestral S_{Ia} de la forma tradicional para cada periodo I_a :

$$S_{Ia} = \left[\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (N_{k,a} - e_a)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (2.13)$$

6. Para cada periodo I_a , su rango R_{Ia} , se normaliza dividiendo por su desviación estándar muestral S_{Ia} correspondiente. Por lo tanto el rango reescalado para cada periodo I_a es igual a R_{Ia} / S_{Ia} . Como tenemos A periodos continuos de longitud n, entonces tomamos el valor promedio R / S para periodos de longitud y que está definido como:

$$(R / S)_n = (1 / A) \sum_{a=1}^A (R_{Ia} / S_{Ia}). \quad (2.14)$$

7. La longitud n o el tamaño del subperiodo se incrementará al siguiente valor posible de tal forma que $\frac{M-1}{n}$ sea un valor entero. Iniciamos con el valor más pequeño de acuerdo a la condición anterior y se repiten los pasos del 1 al 6 se repiten hasta $n = (M - 1) / 2$ utilizando siempre la serie completa (ver grafica D).

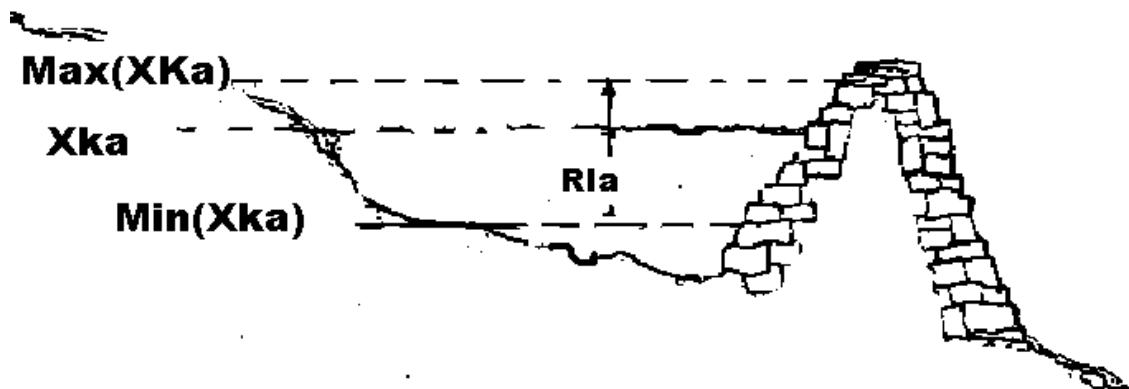
Posteriormente aplicamos una regresión de mínimos cuadrados de $\log(R / S)_n$ contra $\log(n)$. La ordenada al origen es el $\log(c)$ y la pendiente de la ecuación es la estimación del exponente Hurst H .

Gráfica D, Hurst (1951)



La grafica E, muestra la representación de las variables del Rango-Reescalado ($\text{Max}(X_{k,a})$, $\text{Min}(X_{k,a})$, R_{la}) para el caso de un subperiodo de tiempo en el problema original de Hurst de la determinación de los cambios de flujos en la construcción de la presa. El flujo proveniente de riachuelos y lluvia es depositado en una presa. Los valores máximo y mínimo de las acumulación de las diferencias respecto de la media establecen el rango entre el que podría variar el nivel del agua en la presa.

Gráfica E, Hurst (1951)



Prueba de Significancia del Coeficiente de Hurst.

En la sección anterior se ha mencionado los pasos para la determinación del coeficiente Hurst (H) y el comportamiento de los procesos de acuerdo al valor de dicho exponente. Sin embargo, en la práctica es necesario distinguir si un coeficiente de 0.50001 con un cierto número de datos es un considerado un proceso independiente o con tendencia. Para evaluar esto se debe plantear una prueba de significancia sobre los resultados de un análisis (R/S) similar a las pruebas "t" de las regresiones lineales.

Inicialmente Hurst estableció su hipótesis nula sobre una distribución binomial resultado del lanzamiento de volados más tarde Feller llegó a un resultado similar por otro camino. Se supone en la hipótesis nula que $H=0.5$ tiene un comportamiento de caminata aleatoria o de browniano tradicional y por tanto de independencia contra las hipótesis alternativas ($H < > 0.5$) que corresponde a comportamiento persistente o antipersistente de los procesos. Los valores propuestos para el valor esperado y la varianza del coeficiente (H) son¹³:

$$E(R(n)) = (n\pi/2)^{0.5} \quad (2.15)$$

¹³ Consultar Peters (1994) para mayores detalles

$$Var E(R(n)) = (n\pi^2 / 6 - \pi^2 / 2) \quad (2.16)$$

La ecuación anterior fue corregida por Alanis and Lloyd (1976) para la determinación del valor esperado del rango reescalado y después de una corrección empírica (ver Peters) se llega a una ecuación para el valor esperado de H :

$$E(R/S)_n = \left(\frac{n-0.5}{n} \right) \left(\frac{n\pi}{2} \right) \sum_{r=1}^{n-1} \sqrt{\frac{n-r}{r}} \quad (2.17)$$

Debido a que los valores de R/S son normalmente distribuidos, entonces podemos tomar los valores de H como también normalmente distribuidos, en este caso la varianza esperada de exponente Hurst empíricamente se demuestra es:

$$Var(H) = \frac{1}{T} \quad (2.18)$$

Donde T es el número de observaciones de la muestra.

A partir de las ecuaciones (2.17) y (2.18) podemos determinar el nivel de significancia con un estadístico que nos dice cuántas desviaciones estándar se encuentra alejado del valor medio $E(H)$ y el valor obtenido de H en el proceso de Rango – Reescalado.

ANTECEDENTES MATEMÁTICOS DEL MOVIMIENTO BROWNIANO FRACCIONAL.

Movimiento Browniano Tradicional y Movimiento Browniano Fraccional.

El objetivo de la presente sección es proporcionar la justificación y la base técnica matemática para la utilización del movimiento Browniano

Fraccional y la extensión de algunos de los conceptos y teoremas conocidos del movimiento browniano tradicional.

Movimiento Browniano y Cálculo de It^o.

Un movimiento browniano (W_t) en un espacio de probabilidad fijo, con una filtración esta definido por las siguientes propiedades:

- i) $W(0) = 0$
- ii) Si $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n$, entonces $W(t_2) - W(t_1)$, $W(t_3) - W(t_2)$, $W(t_n) - W(t_{n-1})$ son variables aleatorias independientes
- iii) Si $s < t \Rightarrow$ entonces $W(t) - W(s)$ se distribuye como $N(0, t - s)$

En este caso el Movimiento Browniano coincide con el proceso de Wiener.

Pero en general el movimiento browniano es independiente del concepto de filtración y para el proceso Wiener no se requiere independencia en los incrementos. Adicionalmente el movimiento browniano tiene dos propiedades importantes: la autosimilaridad y relación que posee con el ruido Blanco.

Recordemos que la autosimilaridad está definida por la siguiente propiedad:

$$W(at) = a^{1/2}W(t), \forall t \quad (2.19)$$

Esta igualdad es en el sentido de distribución de probabilidad, es decir que $W(at)$ y $a^{1/2}W(t)$ tienen exactamente las mismas distribuciones, en otras palabras, cualquier parte finita de una trayectoria de movimiento browniano cuando es reescalada apropiadamente es indistinguible de la trayectoria del todo. En el lenguaje fractal decimos que la trayectoria del movimiento es una curva fractal de dimensión $D = 2$. Con respecto a la segunda propiedad, la

derivada de un movimiento browniano $(W(t))_{t>0}$ es llamada un proceso de ruido blanco

$$\varphi = \frac{dW}{dt} \quad (2.20)$$

además el ruido blanco satisface los siguientes condiciones:

$$E[\varphi(t)] = 0$$

(2.21)

$$E[\varphi(t)\varphi(t')] = \delta(t-t') \quad (2.22)$$

Por otro lado, se define la integral sobre un proceso Wiener de la manera siguiente:

$$I(t) = \int_0^t g(t') dW(t') \quad (2.23)$$

Esta integral es del tipo Riemann- Stieltj es, y si se toma una partición $[ti]_i^n = 0$ del intervalo $[t, 0]$, consideramos las siguientes sumas:

$$I_n = \sum_{i=0}^n g(t_{i-1}) \Delta W(t_i) = \sum_{i=1}^n g(t_{i-1}) [W(t_i) - W(t_{i-1})] \quad (2.24)$$

Donde $g(t)$ debe ser independiente del siguiente incremento $\Delta W(t)$ del Movimiento Browniano y bajo condiciones apropiadas sobre $g(t)$ es posible mostrar que las sumas I convergen en el sentido media cuadrada. Utilizando la independencia de $g(t)$ que el valor esperado de los incrementos brownianos es cero, se sigue:

$$E[I(t)] = E \left[\int_0^t g(t') dW(t') \right] = 0; \quad (2.25)$$

También la integral estocástica obedece la propiedad de isometría

$$E[U(t)^2] = E \left[\left(\int_0^t g(t') dW(t') \right)^2 \right] = \int_0^t E(g^2(t')) dt' \quad (2.26)$$

Un proceso de gran utilidad para el modelado de activos subyacentes dentro de las finanzas es el conocido como geométrico browniano que es una transformación exponencial del movimiento browniano estándar

$$dS = \mu S dt + \sigma S dW \quad (2.27)$$

Donde μ y σ son constantes y con la condición inicial $S(t)=S_0$. Este proceso se utiliza principalmente para rendimientos de activos.

Movimiento Browniano Fraccional.

El Movimiento Browniano Fraccional (MBF) fue originalmente definido por Kolmogorov en un espacio de Hilbert. Inicialmente fue llamado proceso Wienerhelix y posteriormente Mandelbrot le dio el nombre de movimiento browniano fraccional.

Un MBF (B_H) con parámetro Hurst (H) (definido en el capítulo anterior), $0 < H < 1$ es un proceso Faustiano que se define por las siguientes propiedades:

i) $B_H(0) = 0$

ii) $E[B_H(t)] = 0 \forall t \in R$

iii)

$$C_H(t,s) = [E B_H(s)B_H(t)] = H(2H-1) \int_0^t \int_0^t |t-s|^{2H-2} ds dt = \frac{1}{2} [|s|^{2H} + |t|^{2H} - |s-t|^{2H}]; \forall s, t \in R$$

En particular cuando $s = t$ y $V = 1/2$ entonces $\text{Var}_H(t) = C_H(t, t) = t^{2H}$

El coeficiente Hurst (H) determina el signo de la covarianza entre los eventos pasados y futuros, y dependiendo de su valor se tiene una cierta interpretación:

Si $H = \frac{1}{2}$ y $C_H(t, s) = 0$ entonces $B_H(t)$ coincide con el movimiento browniano

Si $H > \frac{1}{2}$ y $C_H(t, s) > 0$ entonces $B_H(t)$ es persistente en el sentido en que tiene una dependencia a largo plazo

Si $H < \frac{1}{2}$ y $C_H(t, s) < 0$ entonces $B_H(t)$ es antipersistent

Recordemos que los posibles valores de H y sus características habían sido ya revisadas en las secciones 2.1.3 y 2. 1.5.

De la misma forma que el Movimiento Browniano, el MBF tiene la propiedad de auto similitud, que es la propiedad más importante de los sistemas fractales.

El MBF también es auto similar si para cualquier $H \in (0, 1)$ y $\alpha > 0$ (de la misma forma que la ecuación 3.1 del caso browniano tradicional)

$$B_H(\alpha t) = \alpha^H B_H(t), \forall t \quad (2.28)$$

Otra manera de interpretar la persistencia de H tiene que ver con la convergencia del siguiente estadístico ρ_n que puede tener los siguientes casos con ρ_n definido como:

$$\rho_n = E[B_H(1)(B_H(n+1) - B_H(n))]$$

a) Si $\rho_n > 0 \forall n = 1, 2, \dots$, y $\sum_{n=1}^{\infty} \rho_n = \infty$ entonces $H > \frac{1}{2}$ y $B_H(t)$ es persistente o de largo plazo

b) Si $\rho_n < 0 \forall n = 1, 2, \dots$, y $\sum_{n=1}^{\infty} |\rho_n| < \infty$ entonces $H < \frac{1}{2}$ y $B_H(t)$ es anti persistente

En los casos $H \neq \frac{1}{2}$, el MBF no puede ser considerado como un proceso Markoviano, ni como martingala y por tanto no puede ser analizado mediante el cálculo estocástico tradicional. En el artículo de Hu (2000) hace referencia a los trabajos de Dasgupta (2000), Pasik-Duncan (2002) y Shiryaev (1998) en donde entre otras cosas sostienen que la integral de trayectoria definida como una suma de Riemann:

$$\int_0^t \phi(t, w) dB_H(t) \underset{\delta t_k \rightarrow 0}{\lim} \sum_{k=0}^{n-1} \phi(t_k) \cdot (B(t_{k+1}) - B(t_k)) \quad (2.29)$$

Si $0 = t_1 < t_2 < t_3 < \dots < t_n = T$ es una partición de $[0; T]$ y $\delta t_k = t_{k+1} - t_k$, además si el límite existe, en general tiene un valor esperado diferente de cero

$$E \left[\int_0^t \phi(t, w) dB_H(t) \right] \neq 0$$

En consecuencia, con la integral de trayectoria los procesos no son libres de arbitraje, recordemos que a las posibilidades de hacer utilidades libres de riesgo sin dinero inicial es llamado oportunidad de arbitraje o simplemente arbitraje. En un mercado libre de arbitraje cualquier portafolio sin riesgo debe tener rendimientos iguales a la tasa libre de riesgo.

En un nuevo intento por sustituir el problema de arbitraje de las integrales de trayectorias, ahora se considera la integral conocida como Skorohod (Wick-It^o) desarrollada por Duncan, Huand Pasik-Duncan y que se denota por:

$$\int_0^t \phi(t, w) \delta B_H(t) \quad (2.30)$$

Y que también puede definirse en términos de suma de Riemann como sigue:

$$\int_0^t \phi(t, w) dB_H(t) \lim_{\delta t k \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} \phi(t_k) * (B(t_{k+1}) - B(t_k)) \quad (2.31)$$

Donde * denota el producto Wick, entonces si se llega a un valor esperado de cero:

$$E \left[\int_0^t \phi(t, w) \delta B_H(t) \right] = 0 \quad (2.32)$$

Por lo tanto, para poder trabajar con esta integral es necesario desarrollar un cálculo equivalente para poder que considere coeficientes Hurst diferentes de 0.5. Además de demostrar si los procesos son martingalas también es interesante conocer las reglas de operaciones del producto Wick que hacen la diferencia en estas nuevas integrales con las integrales de trayectoria ordinarias.

Revisión del Espacio de Hilbert y Métrica.

Supongamos un coeficiente Hurst (H) constante, talque $\frac{1}{2} \leq H \leq 1$ y definimos una función ϕ de la siguiente manera:

$$\phi H(t, s) = H(2H - 1)|t - s|^{2H-2} \text{ con } t, s \in R \quad (2.33)$$

Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es medible, entonces decimos que $f \in L_1(\mathbb{R})$ (Conjunto de las funciones cuadrado integrables) si:

$$\|f\|_{\mathbb{H}}^2 := \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(s)f(t)\phi(t,s)dsdt < \infty \quad (2.34)$$

Definiendo el producto interior:

$$(f, g)_\phi := \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(s)g(t)\phi(t,s)dsdt \quad f, g \in L_\phi^2(\mathbb{R}) \quad (2.35)$$

Tenemos que $(L_\phi^2(\mathbb{R}), (\cdot, \cdot)_\phi)$ es un espacio de Hilbert. Por otra parte si $f \in L_\phi^2$ se define:

$$\int_R f(t)dB_H(t) = \lim_{m \rightarrow \infty} \int_R f_m(t)dB_H(t) \quad (2.36)$$

En donde

$$f_m(t) = \sum_i a_i^m \mathbf{1}_{[t_i, t_{i+1}]}(t) \quad (2.37a)$$

$$\int_R f(t)dB_H(t) = \sum_i a_i^m (B_H(t_{i+1}) - B_H(t_i)) \quad (2.37b)$$

Principales Lemas y Teoremas.

A continuación se enuncian los lemas y teoremas más sobresalientes que son necesarios para tener una aplicación en las siguientes secciones. Para los interesados en las demostraciones de los Lemas 1, 2 y 3 consultar Hu and Oksendal (2000):

Lema1 (Isometría de Itô).

Si $f \in L_\phi^2(\mathbb{R})$ entonces:

$$E \left(\int_R f(t) dB_H(t) \right)^2 = \|f\|_H^2 \quad (2.38)$$

Y por otra parte si $f \in L^2(\mathbb{R})$ entonces se define

$$\epsilon(f) = \exp \left(\int_R f dB_H - \frac{1}{2} \|f\|_H^2 \right) \quad (2.39)$$

Lema 2.

El span lineal de $(\epsilon(f), f \in L^2(\mathbb{R}))$ es denso en $L^2(\mu)$ donde (μ) es la ley de la probabilidad de B_H .

Consideremos para el lema siguiente los polinomios de Hermite, recordando que están definidos por:

$$h_n(x) = (-1)^n e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^n}{dx^n} \left(e^{\frac{x^2}{2}} \right). \quad (2.40)$$

Se sigue que si $B_H(t)$ es un movimiento browniano fraccional y tenemos que si $f \in L^2(\mathbb{R})$ entonces:

$$(w, f) = \int_R f(t) dB_H(t, w) \quad (2.41)$$

Sea $I = (\mathbb{N}_0^N)$ el conjunto finito de todos los multíndices $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ de enteros no negativos, (N es el conjunto de números $\mathbb{N}_0 = NU\{0\}$, entonces si $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in I$ tenemos lo siguiente:

$$H_\alpha(w) = h_{\alpha_1}(we_1)h_{\alpha_2}(we_2)\dots h_{\alpha_n}(we_n) \quad (2.42)$$

En particular si $e^1 := (1, 0, 0, 0)$ denota el i-ésimo vector unitario

$$H_{e^1}(w) = h_1(\langle w, e_1 \rangle) = \langle w, e_1 \rangle = \int R^{e^1} t dB_H(t)$$

Lema 3 (Teorema de Expansión de Caos Fracción al Wiener-It^o).

Sea $X \in L^2(\mu)$ entonces existe una constante $c_\alpha \in \mathbb{R}$ y $\alpha \in I$ tal que

$$X(w) = \sum_{\alpha \in I} c_\alpha H_\alpha(w) \text{ en } L^2(\mu) \quad (2.43)$$

Además

$$\|X\|_{L^2(\mu)}^2 = \sum_{\alpha \in I} \alpha! c_\alpha^2 \quad (2.44)$$

donde $\alpha! := \alpha_1! \alpha_2! \dots ! \alpha_n$

Definimos $(s)_H^*$ como el conjunto de todas las expansiones formales:

$$G(w) = \sum_{\alpha \in I} c_\alpha H_\alpha(w) \quad (2.45)$$

tales que:

$$\|G\|_{H,-q}^2 = \sum_{\alpha \in I} \alpha! c_\alpha^2 (2N)^{-\alpha q} < \infty \text{ para que alguna } q \in N \quad (2.46)$$

Producto Wick.

Sean $F(w) = \sum_{\alpha \in I} a_\alpha H_\alpha(w) \in (s)_H^*$ y $G(w) = \sum_{\alpha \in I} b_\alpha H_\alpha(w) \in (s)_H^*$ definimos el

producto Wick de F y G por:

$$(f \circ g)(w) = \sum_{\alpha, \beta \in I} a_\alpha b_\beta H_{\alpha+\beta}(w) \quad (2.47)$$

Además si $F, G \in (s)_H^* \Rightarrow F \circ G \in (s)_H^*$

Por otra parte si entonces $f, g \in L^2_{\emptyset}(\mathbb{R})$ entonces:

$$\left(\int R f dB_H \right) \circ \left(\int R g dB_H \right) = \left(\int R f dB_H \right) \left(\int R g dB_H \right) - (f, g)_\theta \quad (2.48)$$

Si $X \in (\mathcal{S})_H^*$ entonces se define su potencia Wick X^{*n} por:

$$X^{*n} = X^\circ X^\circ X^\circ, \dots, X^\circ \text{ (en factores)} \quad (2.49)$$

Y la exponencial Wick se define de la siguiente forma:

$$\exp^\circ(X) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} X^{*n} \quad (2.50)$$

Qué de forma más general se puede tener:

$$\epsilon(f) = \exp^\circ((w, f)) = \exp\left((w, f) - \frac{1}{2}|f|_\theta^2\right) \forall f \in L^2_{\emptyset}(\mathbb{R}) \quad (2.51)$$

Si $f, g \in L^2_{\emptyset}(\mathbb{R})$ tenemos que:

$$\epsilon(f)^\circ \in (\mathcal{G}) = \epsilon(f+g) = \epsilon(f)\epsilon(g)_{\theta - ((f,g))} \quad (2.52)$$

El ruido blanco fraccional $w_H(t)$ en el tiempo (t) se define como:

$$w_H(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \left[\int R e_i(v) \phi(t, v) dv \right] \int R e_i(t) dB_H(t) \quad (2.53)$$

$w_H(t) \in (\mathcal{S})_H^*$ $\forall t$ además si $t \rightarrow B_H(t)$ es diferenciable en $(\mathcal{S})_H^*$ se puede llegar a:

$$\frac{d}{dt} B_H(t) = W_H(t) \text{ en } (\mathcal{S})_H^* \quad (2.54)$$

Qué justifica el nombre de ruido blanco fraccional.

Si $Y: \mathbb{R} \rightarrow (\mathcal{S})_H^*$ es una función tal que $Y(t)^\circ W_H(t)$ es integrable en $(\mathcal{S})_H^*$ entonces definimos la integral de tipo Ito fraccional por

$$\int R Y(t) dB_H(t) = \int R Y(t)^\circ W_H(t) dt \quad (2.55)$$

Movimiento Geométrico Browniano Fraccional.

Consideremos la extensión del movimiento geométrico browniano al caso fraccional con la siguiente ecuación diferencial estocástica fraccional

$$dX(t) = \mu X(t)dt + \sigma X(t)dB_H(t), X(0) = x > 0 \quad (2.56)$$

Donde x, μ y σ son constantes. Reescribiremos la ecuación de la siguiente forma:

$$\frac{dX(t)}{dt} = \mu X(t) + \sigma X(t)^{\circ} dW_H(t) = (\mu + \sigma W(t))^{\circ} X(t) \quad (2.57)$$

Utilizando el cálculo Wick vemos que la solución de la ecuación está dada por:

$$X(t) = x \exp^{\circ}(\mu t + \sigma \int_0^t [W_H(s) ds]) = x \exp^{\circ}(\mu t + \sigma B_H(t)) \quad (2.58)$$

Y al final tenemos que:

$$X(t) = x \exp(\sigma B_H(t) + \mu t - \frac{1}{2} \sigma^2 t^{2H}) \quad (2.59)$$

Sea $L_{\emptyset}^{1,2}(\mathbb{R})$ que denota el complemento del conjunto de todos los procesos adaptados $F_t^{(H)}, f(t) = f(t, w)$ de tal forma que:

$$\|f\|_{L_{\emptyset}^{1,2}(\mathbb{R})}^2 := E_{\mu\emptyset} \left[\int R \int R f(t) f(s) \emptyset(s, t) ds dt \right] + E_{\mu\emptyset} \left[\left(\int R D_S^{\emptyset} f(s) ds \right)^2 \right] < \infty \quad (2.60)$$

Donde D_S^{\emptyset} es la derivada de \emptyset si $D_s F$ es la derivada Malleavin (definida en una sección más adelante) $D_S^{\emptyset} F = \int R \emptyset(s, t) D_t F dt$. Se tiene la siguiente isometría:

$$E \left[\left(\int_R f(t, w) dB_H(t) \right)^2 \right] = \|f\|_{L_0^{1/2}}^2 \quad (2.61)$$

$$E \left[\left(\int_R f(t, w) dB_H(t) \right) \right] = 0 \quad \forall t \in L_0^{1/2}(\mathbb{R}) \quad (2.62)$$

Fórmula Fraccional de Ito.

Supongamos que $X(t)$ sigue el siguiente proceso browniano fraccional

$$dX(t) = \mu(t, w) dt + \sigma(t, w) dB_H(t) \quad \mu, \sigma \in L_0^{1/2} \quad (2.63)$$

Si $f \in C^2(R \times R)$ entonces tenemos (2.64)

$$f(t, X(t)) = (0, X(0)) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial s}(s, X(s)) ds + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(s, X(s)) \mu(s) ds + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(s, X(s)) \sigma(s) dB_H(s) + \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s, X(s)) \sigma(s) dB_H(s)$$

Derivadas Fraccionales.

A partir del conocimiento del espacio $\Omega = S'(R)$ se puede definir la diferenciación con respecto a w .

Sea $F : S'(R) \rightarrow R$ es una función dada y sea $\gamma \in S'(R)$, decimos que F tiene una derivada direccional en la dirección γ si:

$$D_\gamma F = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{F(w + \epsilon \gamma) - F(w)}{\epsilon} \quad (2.65)$$

Existe en $(S)_H^*$, en este caso decimos que $D_\gamma F$ es la derivada direccional de F en la dirección γ .

Decimos que $F : S'(R) \rightarrow R$ es diferenciable si existe un mapeo $\psi : R \rightarrow (S)_H^*$ tal que:

$$\psi(t)\gamma(t) = \psi(t, w)\gamma \quad (2.66)$$

es integrable y

$$D_\gamma F(w) = \int_R \psi(t, w) \gamma(t) dt \quad \forall \gamma \in L^2(R) \quad (2.67)$$

En este caso:

$$D_t F(w) = \frac{dF(t, w)}{dw} := \psi(t, w) \quad (2.68)$$

Ya $D_t F(w)$ se le llama gradiente estocástico o derivada Hida/Malliavian de F en t . La t propuesta y resultados de esta derivada pueden consultarse en Hu and Oksendal(2002) y Duncan, Hu and Pasik-Duncan(2002)

Teorema de Girsanov.

Si se considera un movimiento browniano con tendencia

$$\tilde{W}(t) = \lambda t + W(t) \quad (2.69)$$

Con $0 \leq t \leq T$ y *lambda*, una constante diferente de cero.

$\tilde{W}(t)$ no es martingala y su valor esperado es diferente de cero. Sin embargo, puede existir otra medida de probabilidad $\tilde{\mu}$ con respecto a la cual el proceso $W(t)$ si puede llegar a ser un proceso browniano estándar. Este resultado se conoce como Teorema de Girsanov.

El proceso $\tilde{W}(t)$ dado por la ecuación anterior es un movimiento browniano estándar respecto a la medida de probabilidad $\tilde{\mu}$ definida por:

$$\frac{d\tilde{\mu}}{d\mu} = M_t \quad (2.70)$$

Donde M_t es el proceso

$$M_t = \exp\left(-\lambda W_t - \frac{1}{2} \lambda^2 t\right) = \exp\left(-\lambda W_t + \frac{1}{2} \lambda^2 t\right) \quad (2.71)$$

Para la versión del Teorema de Girsanov con el Movimiento Browniano Fraccional, consideremos $T > 0$ y γ una función continua con $\text{supp } \gamma \subset [0, T]$ y K una función con $\text{supp } \gamma \subset [0, T]$ y K tal que:

$$\langle K, \gamma \rangle_{\theta} = \langle \gamma, f \rangle_{L^2} \forall f \text{ supp } f \subset [0, T] \quad (2.72)$$

Definiendo la medida de probabilidad $\tilde{\mu}$ sobre la σ -álgebra $F_H^T = \sigma(B_H(s), s \leq T)$ por:

$$\frac{d\tilde{\mu}}{d\mu} = \exp(-\langle w, K \rangle) \quad (2.73)$$

Entonces $\tilde{B}(t) = B_H(t) + \int_0^t \gamma_s ds$ es un movimiento browniano fraccional bajo $\tilde{\mu}$, este teorema puede revisarse en Oksendal (2004) para mayor detalle.

Teorema de Expansión de Caos Wiener-Ito en términos de Integrales Iteradas.

Denotemos $L_{\theta}^2(\mathbb{R}^n)$ el espacio de funciones que son simétricas con respecto a sus n variables y $\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2$

Definimos la integral iterada como:

$$I_n(f) = \int R^n f dB_H^{\otimes n}: n! \int s_1 \dots s_n f(s_1, \dots, s_n) dB_H(s_1), \dots, B_H(s_n) \quad (2.74)$$

Sea $X \in L^2(\mu)$ entonces existe un $f_n \in L_{\theta}^2(\mathbb{R}^n)$ tal que:

$$X(w) = \sum_{n=0}^{\infty} I_n(f_n) \in L^2(\mu); f_n \in L_{\theta}^2(\mathbb{R}^n) \quad (2.75)$$

$$\|X\|_{G_k}^2 := \sum_{n=0}^{\infty} n! \|f_n\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 \quad (2.76)$$

Decimos que la expansión formal está dada por:

$$G = \sum_{n=0}^{\infty} \int R^n g_n dB_H^{\otimes n}(t); g_n \in L^2_{\theta}(\mathbb{R}^n)$$

(2.77)

Pertenece al espacio $G_{-q} = G_{-q}[[\mu]_{\theta}]$ si:

$$\|G\|_{G_{-q}}^2 := \sum_{n=0}^{\infty} n! \|g_n\|_{L^2((\mathbb{R})^n)}^{2n} e^{-2qn} < \infty \quad (2.78)$$

Donde se define $G^* = G(\mu_{\theta}) \cup_{q \in N} G_{-q}(\mu_{\theta})$

Expectativas Cuasicondicionales.

Definiciones.

Sea $G = \sum_{n=0}^{\infty} \int R^n g_n dB_H^{\otimes n}$; definimos las expectativas condicionales (o también llamadas cuasi-condicionales) de G con respecto a F_t^H por:

$$\widetilde{E}_t[G] := \widetilde{E}_t[G|F_t^H] = \sum_{n=0}^{\infty} \int R * g_n(s) \mathbf{1}_{0 < s < t}(s) dB_H^{\otimes n}(s) \quad (2.79)$$

A partir de lo anterior se generan los siguientes resultados que obtuvo Necula en su trabajo del (2002):

- a) Sea $F \in G^*$ tenemos que $\widetilde{E}_t[F] \in G^*$
- b) Sea $F, G \in G^*$ tenemos que $\widetilde{E}_t[F \circ G] = \widetilde{E}_t[F] \circ \widetilde{E}_t[G]$
- c) Sea $F \in L^2(\mu), \widetilde{E}_t[F] = F$; si y solo si F es F_t^H medible

Un proceso X_t es adaptado a una filtración $F(t)_{t>0}$ si X_t es F_t medible $\forall t > 0$, X_t genera un flujo de información que está contenida en la trayectoria de X (t) en el tiempo t.

Un proceso estocástico M_t es llamado Martingala respecto a la filtración F_t

con $t > 0$, si

- i) M_t es adaptado a la filtración $F_{t \geq 0}$
- ii) $E[|M_t|] < \infty \forall t \geq 0$
- iii) $E[M_t | F_{t_0}] = M_{t_0} \forall t \geq t_0$ (2.81)

El movimiento browniano es una martingala, otra forma de referirse usualmente a las martingalas es como juego justo. Diremos que un proceso estocástico adaptado $F_t^H M(tw)$ es cuasi martingala si $M(t) \in G^*$, $\widetilde{E}_s[M(t)] = M(s), \forall t > s$ y se siguen los resultados para los brownianos fraccionales, también del trabajo de Necula (2002):

a) $B_H(t)$ es cuasi martingala

b) Sea $F \in L_\theta^2(\mathbb{R})$ y $\epsilon t := \exp\left(\int_0^t f(s) dB_H(s) - \frac{1}{2} |f1_{[t,0]}|^2_\theta\right)$ decimos que $\epsilon(t)$ es cuasi Martingala

c) Sea $F \in L_\theta^1, 2(\mathbb{R})$ y $M(t) := \int_0^t f(s, w) dB_H(s)$ tenemos que $M(t)$ es cuasi Martingala (2.82)

Teorema Fraccional Clark-Ocone.

a) Sea $F \in G^*$ y F es F_t^H medible. Entonces $\widetilde{E}_t[D_t F] \in G^*$ y

$$F(w) = E[F] + \int_0^T \widetilde{E}_t[D_t F] \circ W_H(t)$$

(2.83a)

b) Sea $F \in L^2(\mu)$ y F es F_t^H medible. Entonces $\widetilde{E}_t[D_t F] \in L_\theta^1, 2$ y

$$F(w) = E[F] + \int_0^T \widetilde{E}_t[D_t F] \circ dB_H(t) \quad (2.83b)$$

El teorema anterior, es un resultado del trabajo de Necula (2002)

MODELOS ECONOMÉTRICOS.

Los modelos econométricos son aplicados en la explicación de la estructura del mercado y del funcionamiento del mismo, mediante modelos de regresión simple y múltiple con una variable endógena y modelos de ecuaciones simultáneas con más de una variable endógena.

A continuación se expone una síntesis de los modelos de mayor aplicación:

- i. Curvas de tendencias Vasicek (1977): se basan en observaciones pasadas, se describen como una función del tiempo. Y luego el patrón identificado se utiliza para pronosticar el futuro. Con frecuencia este método se utiliza para el largo plazo con la desventaja que sólo es útil en relaciones lineales.
- ii. Atenuación exponencial: se basa en una suma ponderada de las observaciones pasadas. Los valores dependen de los llamados parámetros de atenuación. Este método es un avance y apoyo al método de series de tiempo. Pero no resuelve el problema de predecir los problemas aleatorios.

Teoría ARIMA.

ARIMA (autorregressive integrated moving average) por sus siglas en inglés son generalizaciones de modelos de simples modelos AR que usan tres herramientas para la modelación de correlación serial en la distribución:

- i. La primera herramienta es la autorregresiva o término AR, este modelo introducido usa solamente el término de primer orden, pero en general se puede usar adicionalmente como el término de orden más alto. Cada término AR corresponde al uso de un valor rezagado de los residuales en la ecuación de pronóstico para los residuales incondicionales. Un modelo autorregresivo de orden p , AR (p) tiene una forma
$$\mu_t = \rho_1 \mu_{t-1} + \rho_2 \mu_{t-2} + \dots + \rho_p \mu_{t-p} + \varepsilon_t.$$
- ii. La segunda herramienta es la integración del término de orden. Cada orden de integración corresponde a la diferenciación de las mismas series de pronóstico. Un componente de primer orden integrado significa que el modelo de pronóstico es diseñado para la primera diferencia de las series originales. Un componente de segundo orden corresponde al uso de segundas diferencias y así sucesivamente.
- iii. La tercera herramienta es el MA o término de promedio móvil. Un modelo de pronóstico de movimiento promedio usa los valores rezagados del pronóstico del error para implementar el pronóstico mismo. Un término de movimiento promedio de primer orden usa el más reciente pronóstico de error, un término de segundo orden usa el error de pronóstico del segundo periodo más reciente y así sucesivamente. Un MA (φ) tiene una forma:

$$v. \quad u_t = \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-2} + \dots + \theta_q \varepsilon_{t-q}.$$

Las especificaciones del autorregresivo y promedio móvil pueden ser combinadas a una forma ARMA (P,q):

$$\mu_t = \rho_1 \mu_{t-1} + \rho_2 \mu_{t-2} + \dots + \rho_p \mu_{t-p} + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-2} + \dots + \theta_q \varepsilon_{t-q}$$

Aunque los economistas típicamente usan modelos ARIMA aplicados a los residuales desde un modelo de regresión, las especificaciones pueden también ser aplicadas a una serie. Este último punto provee un modelo univariable especificando una media condicional de la serie como una constante y midiendo los residuales como diferencias de las series de esta media.

Modelos Box-Jenkins (ARIMA).

Son modelos autorregresivos y de promedios móviles aplicados a los problemas de pronóstico de series de tiempo. No asume ningún patrón particular en los datos históricos de la serie a pronosticar. Utiliza un enfoque iterativo de identificación de un modelo de tipo general, el modelo elegido se verifica contra los datos históricos para ver si describe la serie con precisión.

El modelo se ajusta bien si los residuos entre el modelo de pronóstico y los datos históricos son reducidos, distribuidos de manera aleatoria e independiente. Si el modelo especificado no es satisfactorio, se repite el proceso utilizando otro modelo diseñado para mejorar el original.

Este proceso se repite hasta encontrar un modelo satisfactorio. Se basan en una suma ponderada de las observaciones previas. Este modelo tiene una variada gama de casos, lo que facilita una elección apropiada para casos particulares. Es uno de los métodos más utilizados para predecir problemas que tienen una inercia histórica. Tiene sus limitaciones para predecir problemas de reciente expresión.

Principios de la modelación ARIMA (Box-Jenkins 1976).

Para un pronóstico ARIMA se puede ensamblar un modelo completo de pronóstico usando combinaciones de los tres grandes bloques que describimos anteriormente. El primer paso en la formación de un modelo ARIMA para series de residuales es ver las propiedades de la autocorrelación.

Esta fase del proceso de modelación ARIMA es llamada *identificación* (no confundir con el mismo término usado en la literatura de ecuaciones simultáneas). La naturaleza de la correlación entre los valores corrientes de los residuales y sus valores pasados provee una guía en la selección en la especificación ARIMA.

Las correlaciones son fáciles de interpretar cada una, es el coeficiente de correlación de los valores corrientes de las series con las series rezagadas a un cierto número de periodos. La autocorrelación parcial es un poco más complicada, esta mide la correlación de los valores y el rezago de las series después de tomar en cuenta el poder predictivo de todos los valores de las

series con pequeños rezagos. La parcial autocorrelación para un rezago 6 por ejemplo, mide el poder de la adición predictiva de μ_{t-6} cuando μ_1, \dots, μ_{t-5} están listas en el modelo de predicción. De hecho la parcial autocorrelación es precisamente el coeficiente de regresión de μ_{t-6} en una regresión donde los primeros rezagos son también usados como predictores de μ_t .

Si hay una relación de un rezago distribuido entre la variable dependiente y algunos otros predictores, esta se verá en su correlación cruzada antes de llevar a cabo su estimación.

El siguiente paso es decidir que clase de modelo ARIMA usar. Si la función de autocorrelación dada es una suavización a una tasa geométrica y la autocorrelación parcial fue cero después de un rezago, así un modelo de primer orden es apropiado. Alternativamente, si la autocorrelación fuera cero después de un rezago y la parcial autocorrelación declina geométricamente, un proceso de promedio móvil de primer orden pareciera ser lo apropiado. Si la autocorrelación parece tener un patrón estacional, este pudiera sugerir la presencia de estructura estacional ARMA.

Modelos ARCH / GARCH.

Son modelos derivados de Box Jenkins, estudia las varianzas de los precios. Los modelos ARCH (heterocedasticidad condicional autoregresiva) y GARCH (heterocedasticidad condicional autoregresiva generalizada) son desarrollados para analizar y pronosticar la volatilidad de las series de datos

financieros. Los modelos ARCH/GARCH tratan la heterocedasticidad como una varianza que puede ser modelada.

El modelo ARCH, propuesto por Engle en 1982, permite determinar el mejor promedio prorrteado de los residuales cuadrados pasados para pronosticar la varianza. Este modelo se auto corrige, es decir, conforme se tiene más información, se van calculando los promedios prorrteados de los residuales cuadrados para volver a pronosticar la varianza.

El modelo GARCH toma el promedio actualizado de la varianza incondicional Sánchez (2001), el residual cuadrado de la primera observación y la varianza inicial para calcular la varianza de la segunda observación, proceso que puede repetirse n veces; por lo tanto, una serie de tiempo completa de los pronósticos de la varianza puede ser construida.

Además del EGARCH, se han desarrollado otros modelos GARCH asimétricos, tales como el modelo TARCH (umbral del ARCH) y una comparación de estos modelos.

Los modelos ARCH/GARCH se han aplicado para predecir la volatilidad de los precios del petróleo, ya sean spot o futuros. Se comparan los pronósticos de las volatilidades implícitas e históricas de los precios del petróleo (de noviembre de 1986 a marzo de 1991), generados con los modelos GARCH y EGARCH. Day y Lewis hallaron que las volatilidades implícitas y las volatilidades condicionales del GARCH/EGARCH contribuyen en la información

incremental de la volatilidad. La hipótesis nula que sostiene que las volatilidades implícitas incluyen toda la información contenida en los rendimientos observados, es rechazada; por lo que la hipótesis alternativa que sostiene que la opción de precios no tiene información adicional, es aceptada.

Esto indicaría que un pronóstico compuesto, elaborado usando la volatilidad implícita y el modelo GARCH arrojarían los mejores resultados porque cada uno contribuiría con información única que no contiene el otro. Pero la prueba para la precisión de los pronósticos, basada en el criterio del error, apoya la conclusión de que las volatilidades implícitas por sí mismas son suficientes para que los analistas del mercado pronostiquen la volatilidad a muy corto plazo-hasta dos meses.

Métodos de la física estadística.

Lynch & Allison realizaron un análisis fractal a través de la determinación del exponente de Hurst (H), para determinar cuánto le toma al mercado de futuros del petróleo regresar a su equilibrio después de un incremento repentino en la volatilidad por las transacciones especulativas. Los datos investigados fueron los rangos de las transacciones de especulación realizadas en una década (1989 -1999).

Estos autores encontraron, después de analizar los rangos, que $H = 0.29$ (proceso de ruido blanco es anti-persistencia), por lo que concluyeron que después de un rango de transacciones especulativas excesivamente grande, el

rango de negociaciones del siguiente día tiene una probabilidad de 71 % de ser menor que el valor del día anterior. Esto se interpreta como el hecho de que el mercado está intentando alcanzar su nivel de equilibrio en el rango negociado.

La fluctuación de precios (volatilidad) de las materias primas, como el algodón, se han interpretado, desde el punto clásico de la física estadística, como una distribución de probabilidad de ley de potencia con un exponente α dentro del régimen estable de Lévy ($0 < \alpha < 2$). En contraste, las fluctuaciones de los precios de las acciones han sido interpretadas empleando una distribución de ley de potencia con una α fuera del régimen estable de Lévy, sugiriendo que los precios de las acciones están en una clase de universalidad diferente que los precios spot.

Para comprobar esta posibilidad, se analizó los rendimientos diarios de los precios spot para 29 materias primas en el mercado internacional. Estos investigadores hallaron que las distribuciones de rendimientos para los precios futuros decrecen como leyes de potencia con exponentes $\alpha \sim 3.2$ (significativamente mas grande que $\alpha = 2$, y por lo tanto fuera del dominio del régimen estable de Lévy); mientras que para los precios spot, ellos encontraron $\alpha \sim 2.3$ (lo cual esta marginalmente fuera del régimen de Lévy); es decir, los autores encontraron estadísticamente similitudes entre la dinámica de los mercados de materias primas y la dinámica de los bursátiles Fleming (1965).

CAPITULO III

Metodología empleada en la investigación.

El concepto de distribución normal o Gaussiana, ha sido esencial para el desarrollo de la teoría financiera. Históricamente, los resultados teóricos más conocidos se han obtenido bajo la hipótesis de normalidad. Por supuesto, los precios de un activo no pueden ser normales, simplemente por que éstos son positivos. Sin embargo, el cambio porcentual del precio de un activo, es decir, el rendimiento, puede tomar valores tanto positivos como negativos.

El supuesto de que el precio de un activo sigue una distribución lognormal¹⁴, o que los rendimientos siguen una distribución normal, es más común de lo que se piensa. Sin embargo, si los rendimientos son de alta frecuencia (muy frecuentes), diarios o intradía, casi nunca se encuentra que siguen una distribución normal.

De hecho, dichos rendimientos casi nunca se comportan de acuerdo a distribuciones teóricas comúnmente conocidas. Por ejemplo, las distribuciones empíricas de los rendimientos diarios de varios de los títulos que cotizan en los mercados de capitales presentan, en general, sesgo, exceso de curtosis y colas pesadas (colas gordas o más anchas) y no siempre es posible ajustar una distribución teórica simple a un conjunto de observaciones de mercado.

¹⁴ Los modelos para precios de opciones de tasa de interés en mercados standard establecen el supuesto de que la probabilidad de distribución de una tasa de interés o de alguna otra variable en un punto futuro en el tiempo es lognormal. Estos modelos son ampliamente usados para la valuación de instrumentos tales como caps, opciones de bonos Europeos y opciones de swaps Europeos. No obstante ellos tienen sus limitaciones, ellos no proveen una descripción de cómo cambia la tasa de interés a través del tiempo. Consecuentemente ellos no pueden ser usados para la valuación de derivados de tasas de interés tales como: opciones swaps de estilo americano, bonos callable y notas estructuradas. Ver Hull (2003) para una explicación completa.

En el análisis de rendimientos unimodales de activos cuando se compara una distribución estandarizada empírica con una distribución normal estándar, se observa con frecuencia que la cresta de la distribución empírica es más alta Hull (1987).

Dado que ambas distribuciones tienen la misma desviación estándar, es decir, los mismos puntos de inflexión, entonces las colas de la distribución empírica tienen necesariamente que ser más anchas para compensar el área de la cresta, que en ambos casos tiene que ser igual a uno. La cresta más alta significa que existe una probabilidad más grande de movimientos pequeños que la de una variable aleatoria con distribución normal.

Por otro lado, debido a las colas más gordas (o pesadas) de la distribución empírica, se tiene una mayor probabilidad de que ocurran valores extremos en comparación con la distribución normal. En este caso si la distribución normal se mezcla con una distribución que genere movimientos extremos en el rendimiento del título, se producirán colas más pesadas y se tendría una mejor aproximación a lo observado.

Una serie de tiempo es solamente aleatoria cuando esta influenciada por numerosos eventos que son igualmente probables de ocurrir. En términos estadísticos, se tiene un gran número de grados de libertad. La no aleatoriedad de las series de tiempo reflejarán la no aleatoriedad natural de estas influencias. Los datos se relacionarán, para reflejar las correlaciones inherentes en estas influencias. En otras palabras, la serie de tiempo será fractal.

Una de las características de los objetos fractales es que ellos retienen su dimensionalidad (característica que no tienen los procesos autoregresivos AR), cuando ellos son colocados en una dimensión similar que es más grande que su dimensión fractal. La distribución aleatoria (ruido blanco), no tiene esta característica. Por lo que la dimensión fractal esta determinada por cómo los objetos, o series de tiempo, llenan este espacio. Un objeto fractal llenará este espacio de forma desigual porque estas partes son relacionadas o correlacionadas. Para determinar la dimensión fractal, debemos medir como el objeto se relaciona en este espacio.

Esta dimensión fractal se puede analizar desde la técnica del Rango reescalado (R/S) desarrollada por Hurst y que sé ha aplicado en para el análisis de mercados (Peters 1991, 1994), el cual usa los rendimientos logarítmicos y que se definen de la siguiente manera:

$$S_t = \ln(P_t/P_{(t-1)})$$

Donde S_t = Rendimiento logarítmico en el tiempo t

P_t = Precio en el tiempo t

Para el análisis R/S, el rendimiento logarítmico es más apropiado que el comúnmente usado como el cambio porcentual en los precios. El rango usado en el análisis R/S es la desviación acumulativa desde el promedio, y el rendimiento logarítmico suma el rendimiento acumulado, mientras que el cambio porcentual no lo hace.

Una aplicación de este método lo hace Peters (1991) para analizar el mercado de bonos estadounidenses, y en específico el “*Treasury bond (T-bond)* a 30 años” con observaciones mensuales de enero de 1950 a diciembre de 1989 y también hay estudios similares en los “*Treasury Bill (T-Bill)*” de 3, 6, y 12 meses.

En este capítulo se llevará a cabo la práctica de las procesos teóricos presentados en el capítulo anterior, del cual podemos distinguir dos grandes procesos; el estadístico y el Hurst, todo ello llevado a cabo para las 19 emisoras, con series de precios diarios de los años 2008 y 2009 que cotizan en la Bolsa Mexicana de Valores (BMV) y que se presentan a continuación:

A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z Todas

Tipo de emisora	Certificados Bursátiles BORHIS	
Sector	Todos	
Subsector	Todos	
Ramo	Todos	
Subramo	Todos	

Clave de la emisora	Razón social	Tipo de valor
BACOMCB	BANCO INVEX, S.A., INSTITUCION DE BANCA MULTIPLE, CERTIFICADOS BURSATILES INVEK G.F.	RESPALDADOS POR HIPOTECAS
BNORCB	BANCO INVEX, S.A., INSTITUCION DE BANCA MULTIPLE, CERTIFICADOS BURSATILES INVEK G.F.	RESPALDADOS POR HIPOTECAS
BRHCCB	HSBC MEXICO, S.A., INSTITUCION DE BANCA MULTIPLE, CERTIFICADOS BURSATILES GRUPO FINANCIERO HSBC	RESPALDADOS POR HIPOTECAS
BRHCGCB	THE BANK OF NEW YORK MELLON, S.A. INSTITUCION DE CERTIFICADOS BURSATILES BANCA MULTIPLE	RESPALDADOS POR HIPOTECAS
BRHSCCB	THE BANK OF NEW YORK MELLON, S.A. INSTITUCION DE CERTIFICADOS BURSATILES BANCA MULTIPLE	RESPALDADOS POR HIPOTECAS
CREYCB	BANCO INVEX, S.A., INSTITUCION DE BANCA MULTIPLE, CERTIFICADOS BURSATILES INVEK G.F.	RESPALDADOS POR HIPOTECAS
CREYCCB	THE BANK OF NEW YORK MELLON, S.A. INSTITUCION DE CERTIFICADOS BURSATILES BANCA MULTIPLE	RESPALDADOS POR HIPOTECAS

DBCB	BANK OF AMERICA MEXICO, S.A., INSTITUCION DE BANCA MULTIPLE, GRUPO FINANCIERO BANK OF AMERICA	CERTIFICADOS BURSATILES RESPALDADOS POR HIPOTECAS
FCASACB	BANCO INVEX, S.A., INSTITUCION DE BANCA MULTIPLE, INVEX G.F.	CERTIFICADOS BURSATILES RESPALDADOS POR HIPOTECAS
HICOACB	THE BANK OF NEW YORK MELLON, S.A. INSTITUCION DE BANCA MULTIPLE	CERTIFICADOS BURSATILES RESPALDADOS POR HIPOTECAS
HSBCCB	BANCO INVEX, S.A., INSTITUCION DE BANCA MULTIPLE, INVEX G.F.	CERTIFICADOS BURSATILES RESPALDADOS POR HIPOTECAS
METROCB	BANCO INVEX, S.A., INSTITUCION DE BANCA MULTIPLE, INVEX G.F.	CERTIFICADOS BURSATILES RESPALDADOS POR HIPOTECAS
MFCB	THE BANK OF NEW YORK MELLON, S.A. INSTITUCION DE BANCA MULTIPLE	CERTIFICADOS BURSATILES RESPALDADOS POR HIPOTECAS
MTROCB	BANK OF AMERICA MEXICO, S.A., INSTITUCION DE BANCA MULTIPLE, GRUPO FINANCIERO BANK OF AMERICA	CERTIFICADOS BURSATILES RESPALDADOS POR HIPOTECAS
MTROFCB	BANK OF AMERICA MEXICO, S.A., INSTITUCION DE BANCA MULTIPLE, GRUPO FINANCIERO BANK OF AMERICA	CERTIFICADOS BURSATILES RESPALDADOS POR HIPOTECAS
MXMACCB	THE BANK OF NEW YORK MELLON, S.A. INSTITUCION DE BANCA MULTIPLE	CERTIFICADOS BURSATILES RESPALDADOS POR HIPOTECAS
MXMACFW	HSBC MEXICO, S.A., INSTITUCION DE BANCA MULTIPLE, GRUPO FINANCIERO HSBC	CERTIFICADOS BURSATILES RESPALDADOS POR HIPOTECAS
PATRICB	BANCO INVEX, S.A., INSTITUCION DE BANCA MULTIPLE, INVEX G.F.	CERTIFICADOS BURSATILES RESPALDADOS POR HIPOTECAS
SCOTICB	BANCO INVEX, S.A., INSTITUCION DE BANCA MULTIPLE, INVEX G.F.	CERTIFICADOS BURSATILES RESPALDADOS POR HIPOTECAS

Listado de las 19 emisoras de Certificados Bursátiles respaldados por Hipotecas, que cotizan en la Bolsa Mexicana de Valores. Fuente: www.bmv.com/wb3/wb/BMV/BMV_empresa_emisoras/_rid/177/_mto/3/_url/.... 18/08/2010.

Una vez obtenido la clave de pizarra de las emisoras se obtuvieron las siguientes series de datos de PIP (Proveedor Integral de Precios, S.A. de C.V.), con un vector de precios registrados diariamente desde el 21 de diciembre del 2007 al 5 de agosto del 2009, con los siguientes series: Instrumento, Fecha, Emisora, Precio limpio, Precio Sucio, Rendimiento, Serie, Sobre tasa, Tasa cupón, de los cuales se tomo la serie de Fecha, Precio limpio (por que no esta impactado por los intereses del cupón a la fecha), y Rendimiento. Estas series están en formato Excel y se convirtieron en formatos de trabajo EViews 6, y MATLAB R2010a renombrándolas de la siguiente forma:

Fecha = Fecha.

Precio limpio = Plimpio.

Rendimiento = Rendi.

Series transformadas:

Rplimpio = Rendimiento diario del precio limpio en término porcentual, de acuerdo a la siguiente formula: $\frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}} \times 100$

Plimpio7 = Variable rezagada del precio limpio 7 días.

Plimpio14 = Variable rezagada del precio limpio 14 días.

Plimpio21 = Variable rezagada del precio limpio 21 días.

Plimpio28 = Variable rezagada del precio limpio 28 días.

Con el programa Eviews 6, se obtuvieron los siguientes resultados de la ecuación Plimpio = Plimpio7 + Plimpio14 + Plimpio21 + Plimpio28, con el objeto de ver el tratamiento Box-Jenkins y los histogramas para la variable “Rplimpio” en todas las emisoras con el fin de comprobar gráficamente el supuesto de normalidad y con el programa MATLAB R2010a, se obtuvieron los siguientes resultados al correr la variable “Plimpio” al programa creado (anexo 1) con el fin de calcular el exponente de Hurst utilizando la técnica de análisis de rango escalado (Rescaled Range Analysis, o R/S), y la dimensión fractal.

97BACOMCB07

Dependent Variable: PLIMPIO

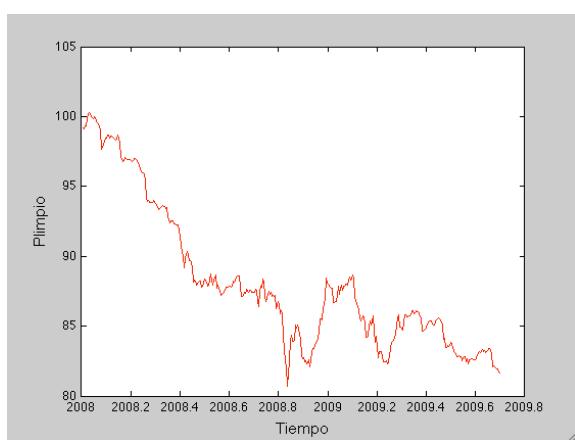
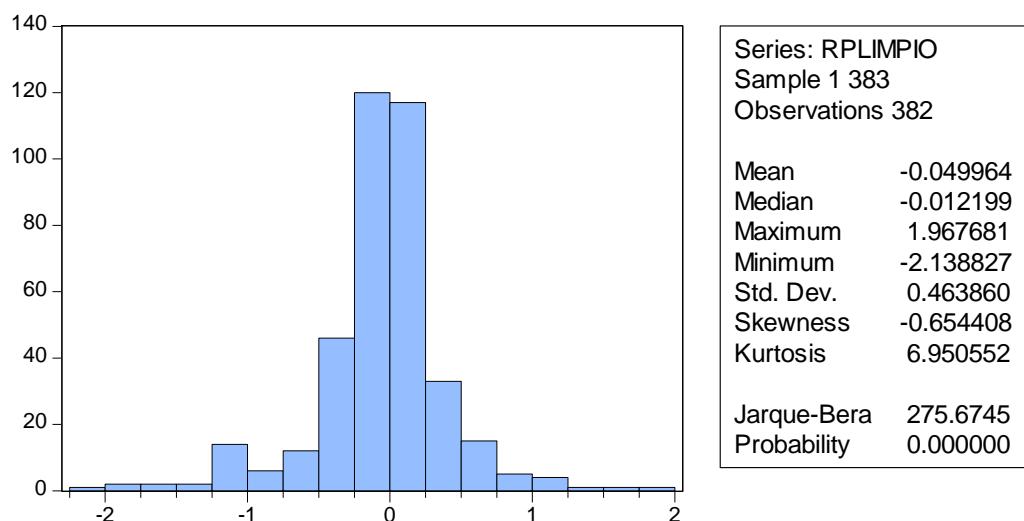
Method: Least Squares

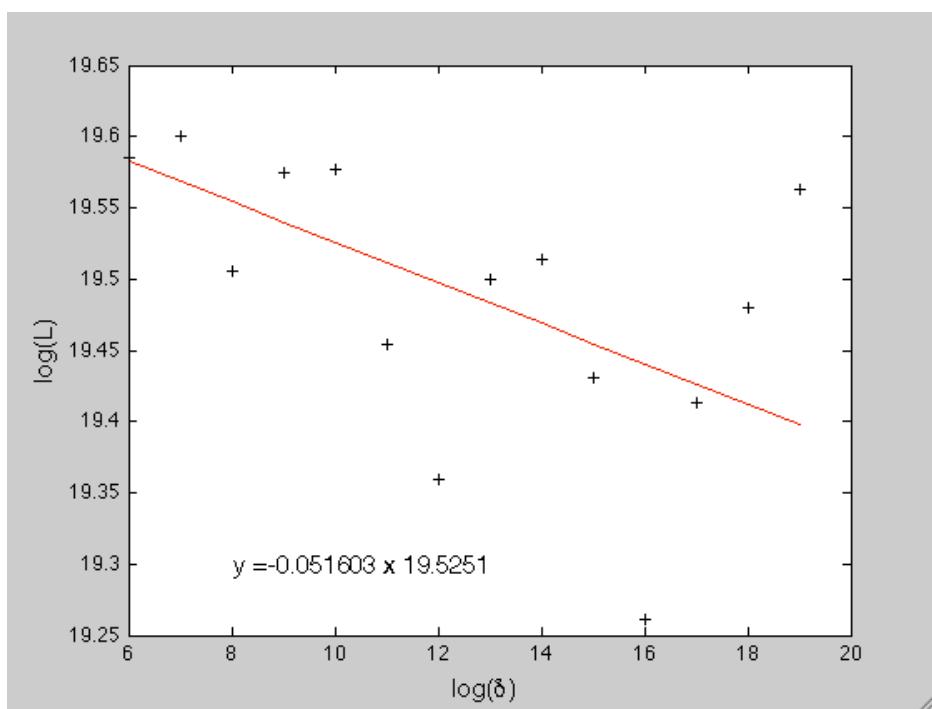
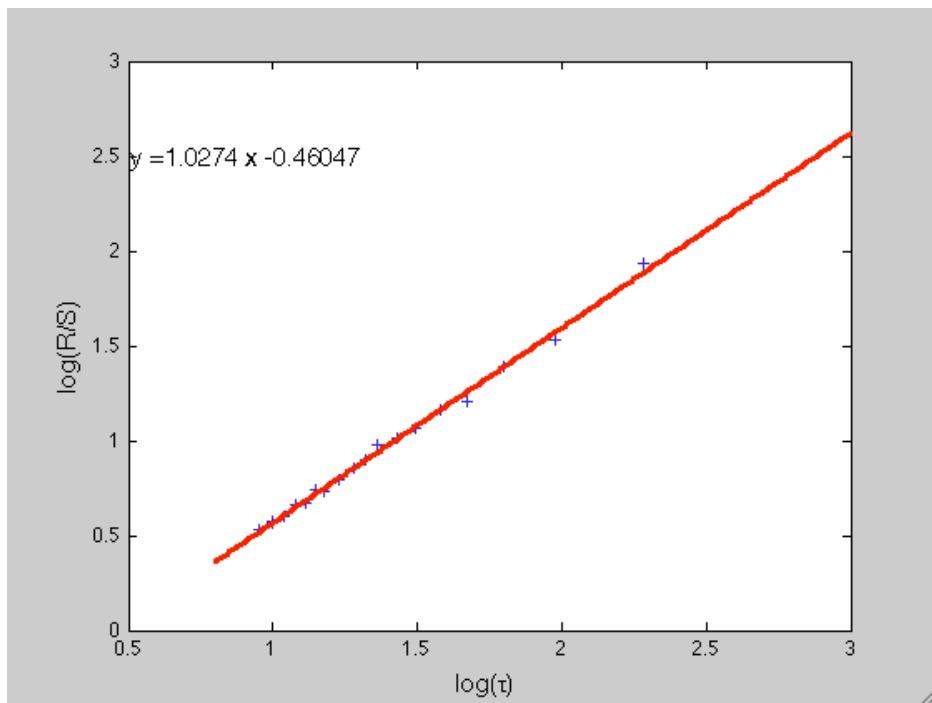
Date: 10/14/09 Time: 23:13

Sample: 1 383

Included observations: 383

	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	3.720346	0.905893	4.106827	0.0000
PLIMPIO7	0.876543	0.050635	17.31098	0.0000
PLIMPIO14	0.015005	0.066885	0.224337	0.8226
PLIMPIO21	0.039052	0.067005	0.582814	0.5604
PLIMPIO28	0.024199	0.049167	0.492174	0.6229
R-squared	0.958458	Mean dependent var	88.13193	
Adjusted R-squared	0.958018	S.D. dependent var	5.116675	
S.E. of regression	1.048377	Akaike info criterion	2.945333	
Sum squared resid	415.4577	Schwarz criterion	2.996873	
Log likelihood	-559.0312	Hannan-Quinn criter.	2.965778	
F-statistic	2180.304	Durbin-Watson stat	0.293899	
Prob(F-statistic)	0.000000			





Elaboración propia.

97BNORCB06

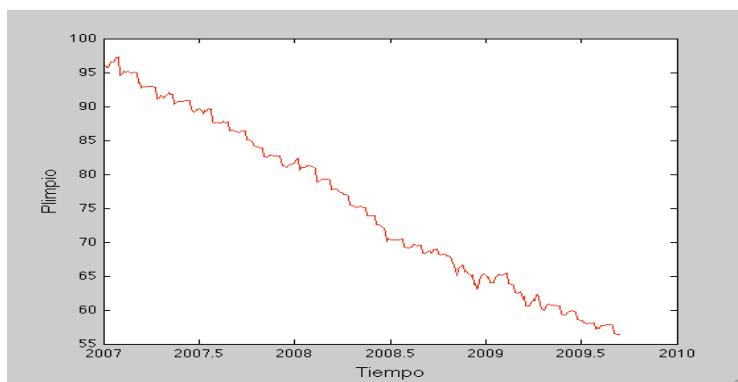
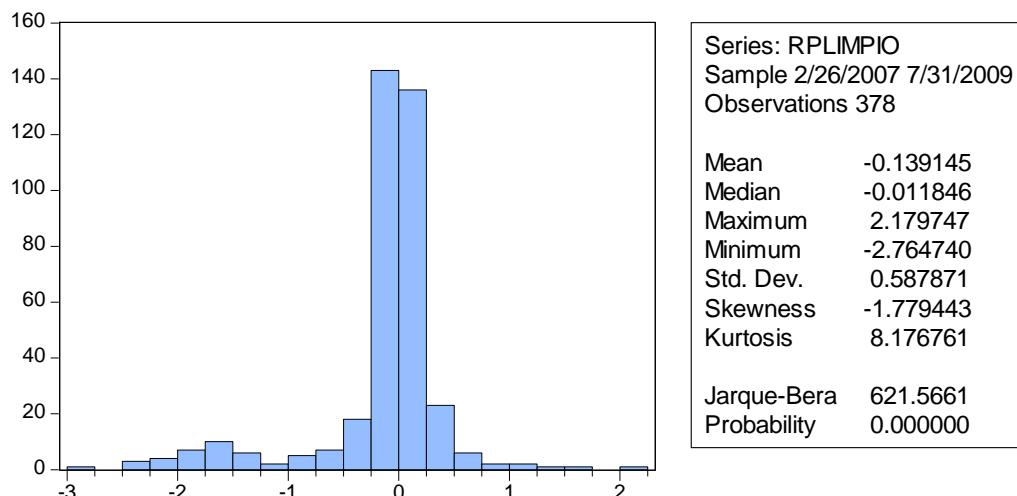
Dependent Variable: PLIMPIO
Method: Least Squares

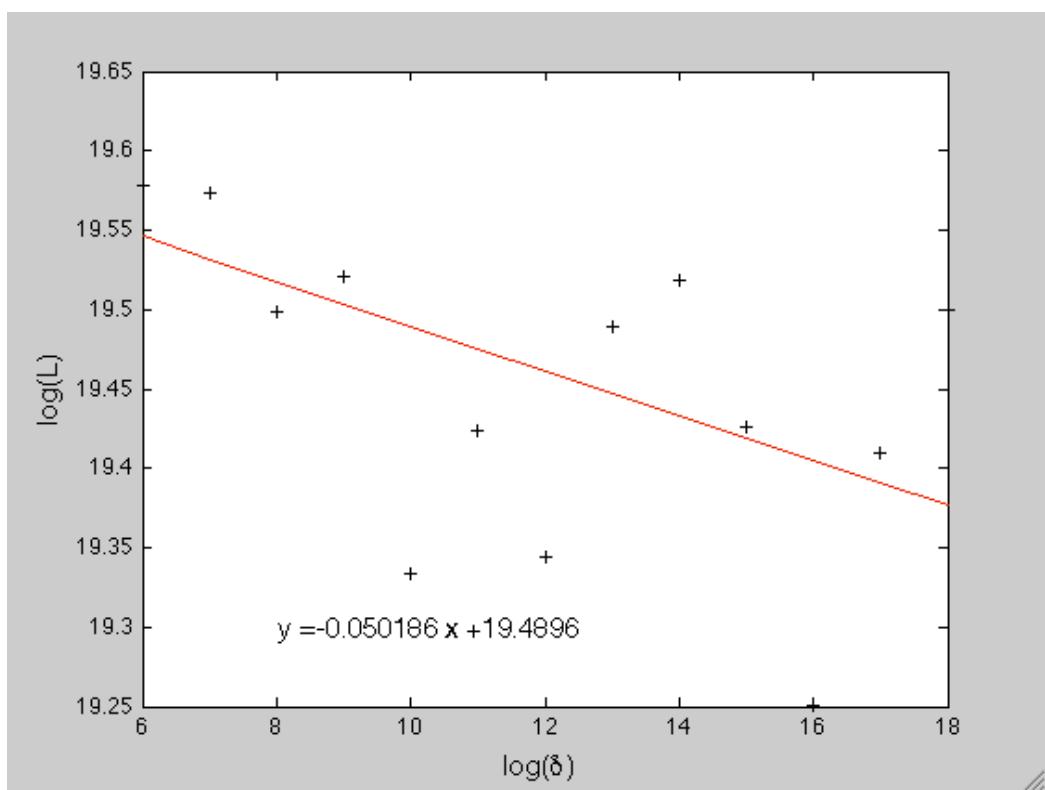
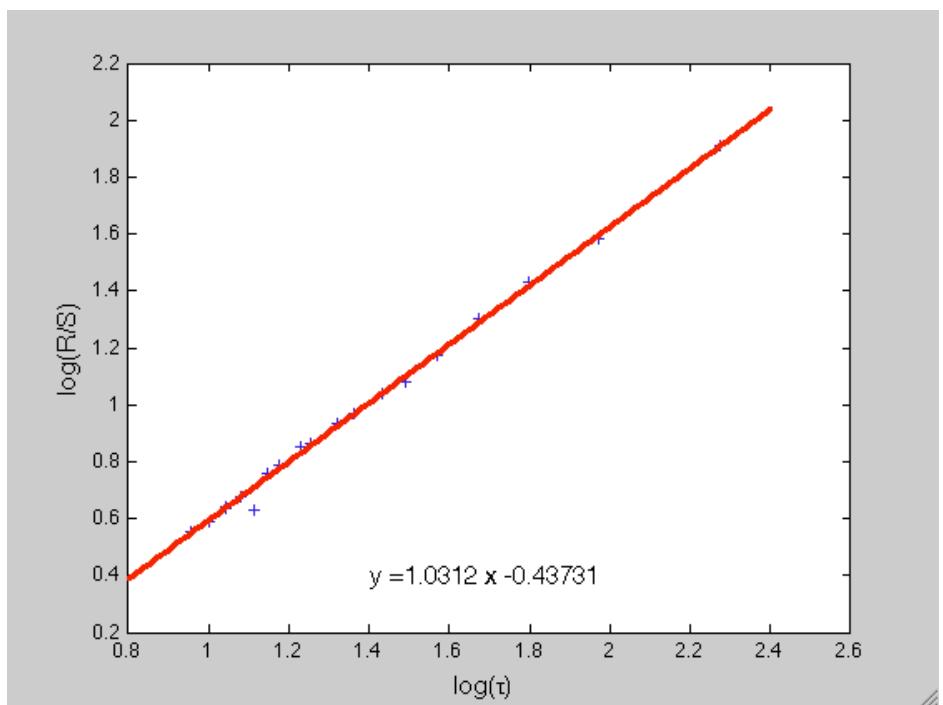
Date: 10/14/09 Time: 23:31

Sample: 2/26/2007 7/31/2009

Included observations: 379

	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	-0.024355	0.262862	-0.092654	0.9262
PLIMPIO7	0.493365	0.053283	9.259343	0.0000
PLIMPIO14	0.437928	0.056283	7.780874	0.0000
PLIMPIO21	0.027607	0.055922	0.493665	0.6218
PLIMPIO28	0.029843	0.050148	0.595094	0.5521
R-squared	0.995802	Mean dependent var	75.45480	
Adjusted R-squared	0.995757	S.D. dependent var	12.26195	
S.E. of regression	0.798739	Akaike info criterion	2.401540	
Sum squared resid	238.6060	Schwarz criterion	2.453486	
Log likelihood	-450.0918	Hannan-Quinn criter.	2.422154	
F-statistic	22177.56	Durbin-Watson stat	0.451958	
Prob(F-statistic)	0.000000			





Elaboración propia.

Dependent Variable: PLIMPIO

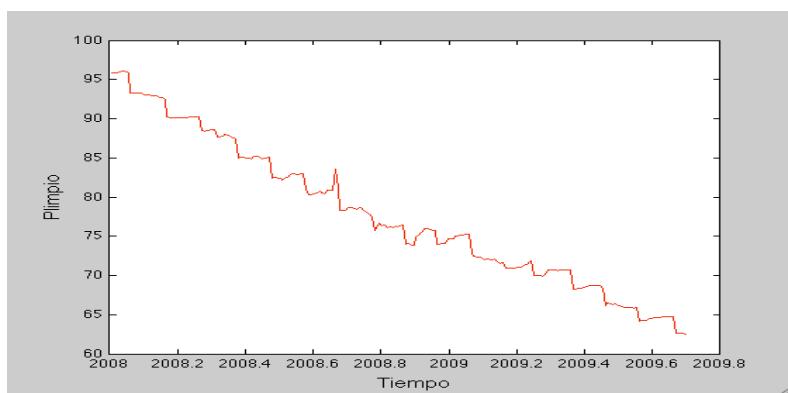
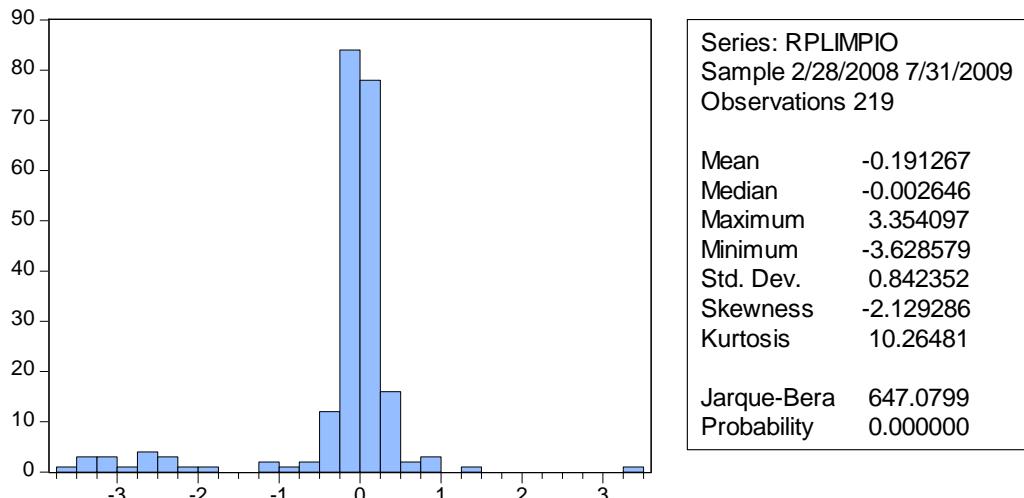
Method: Least Squares

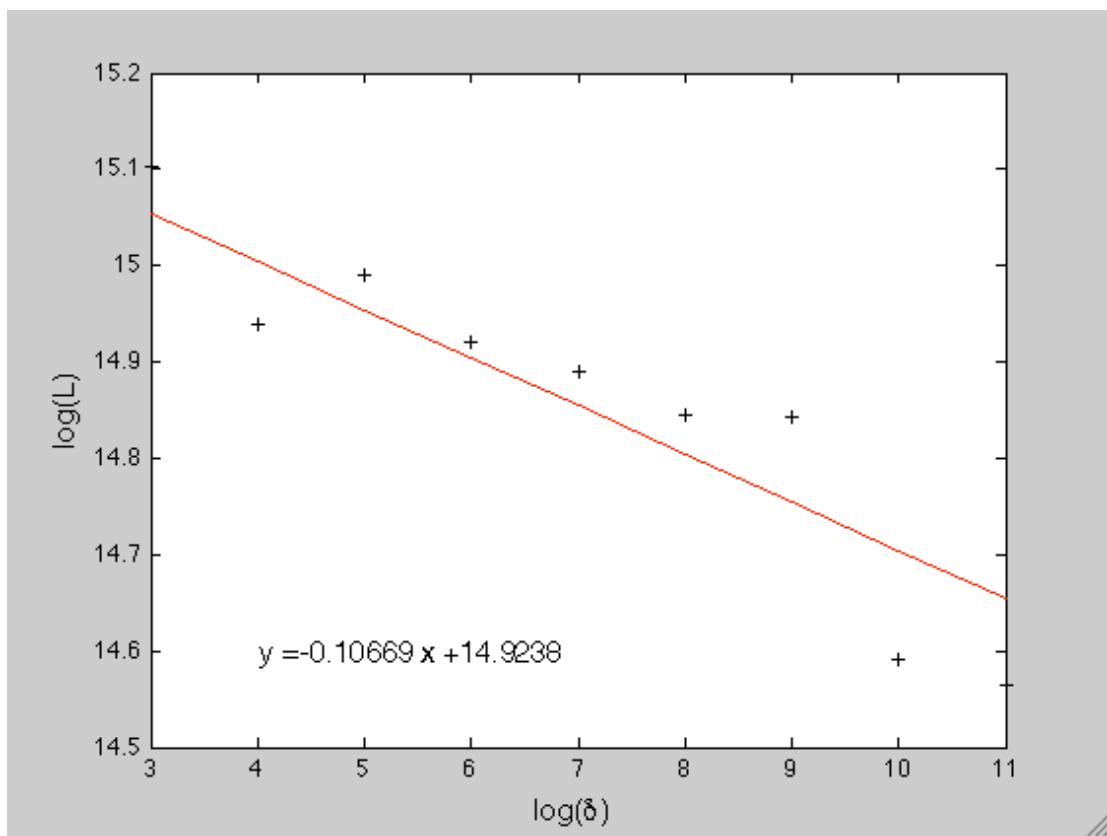
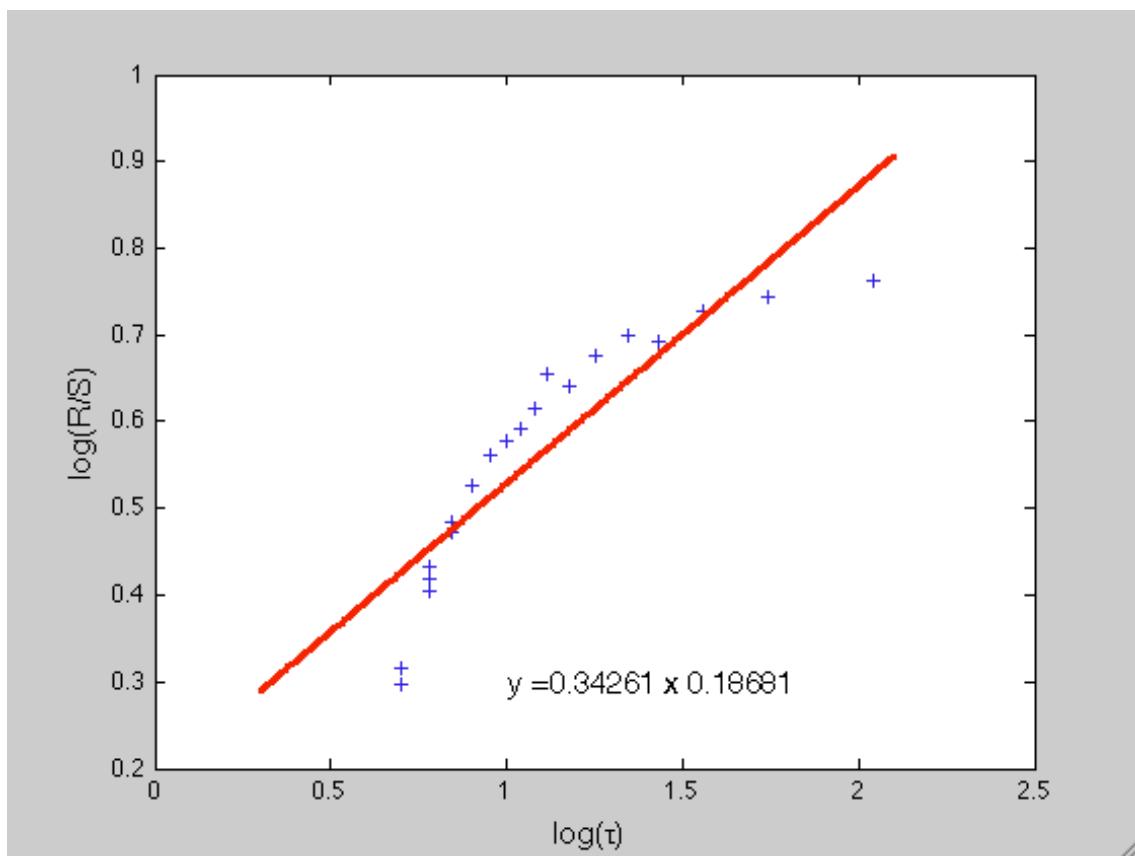
Date: 02/22/10 Time: 07:30

Sample: 2/28/2008 7/31/2009

Included observations: 220

	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	1.369912	0.554046	2.472561	0.0142
PLIMPIO7	0.267392	0.066767	4.004836	0.0001
PLIMPIO14	0.472921	0.064243	7.361455	0.0000
PLIMPIO21	0.397435	0.063091	6.299377	0.0000
PLIMPIO28	-0.172311	0.065260	-2.640389	0.0089
R-squared	0.989333	Mean dependent var	77.68241	
Adjusted R-squared	0.989134	S.D. dependent var	9.202045	
S.E. of regression	0.959207	Akaike info criterion	2.777044	
Sum squared resid	197.8166	Schwarz criterion	2.854172	
Log likelihood	-300.4749	Hannan-Quinn criter.	2.808191	
F-statistic	4985.066	Durbin-Watson stat	0.729188	
Prob(F-statistic)	0.000000			





Elaboración propia.

97BRHCGCB03U

Dependent Variable: PLIMPIO

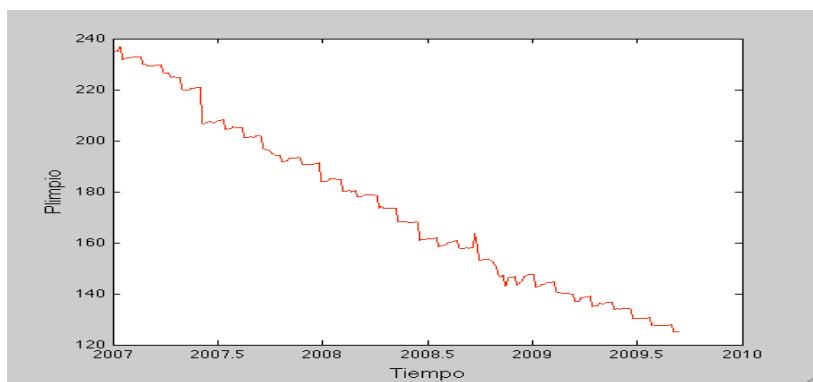
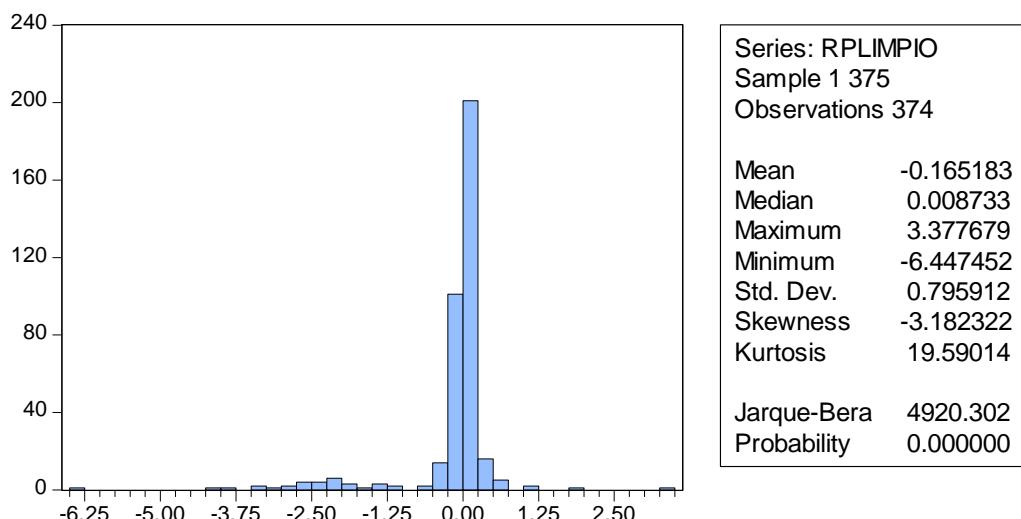
Method: Least Squares

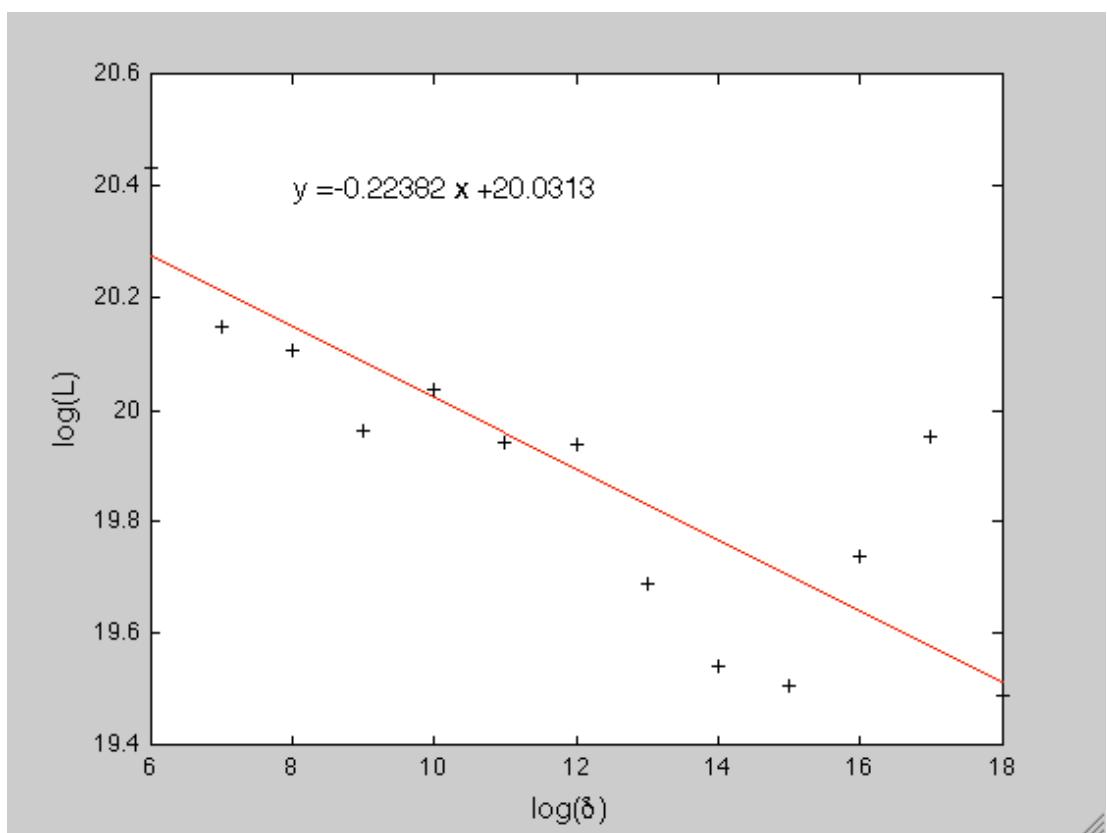
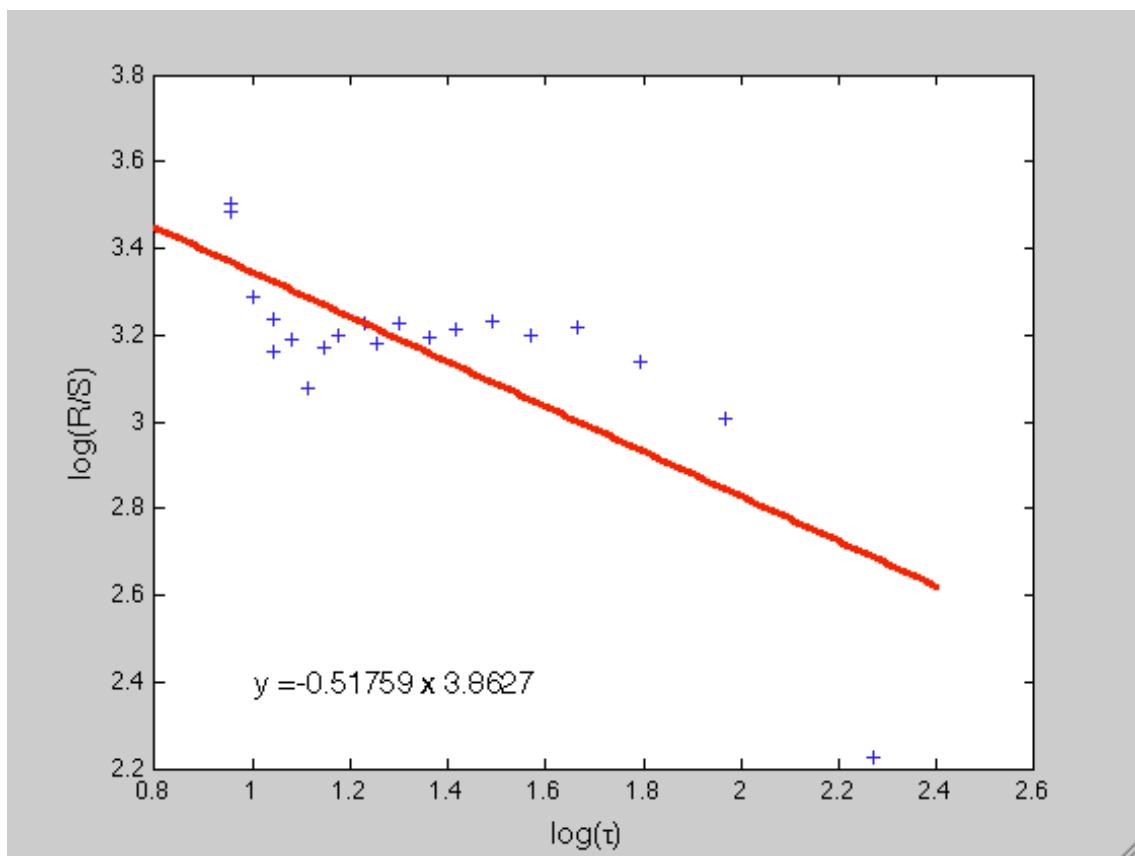
Date: 02/22/10 Time: 08:30

Sample: 1 375

Included observations: 375

	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	0.113525	0.668921	0.169714	0.8653
PLIMPIO7	0.539602	0.050269	10.73420	0.0000
PLIMPIO14	0.326817	0.055360	5.903480	0.0000
PLIMPIO21	0.328548	0.055520	5.917670	0.0000
PLIMPIO28	-0.206955	0.048013	-4.310439	0.0000
R-squared	0.994886	Mean dependent var	174.0692	
Adjusted R-squared	0.994831	S.D. dependent var	32.95645	
S.E. of regression	2.369493	Akaike info criterion	4.576473	
Sum squared resid	2077.364	Schwarz criterion	4.628832	
Log likelihood	-853.0886	Hannan-Quinn criter.	4.597260	
F-statistic	17995.13	Durbin-Watson stat	0.559199	
Prob(F-statistic)	0.000000			





Elaboración propia.

97BRHSCCB05U

Dependent Variable: PLIMPIO

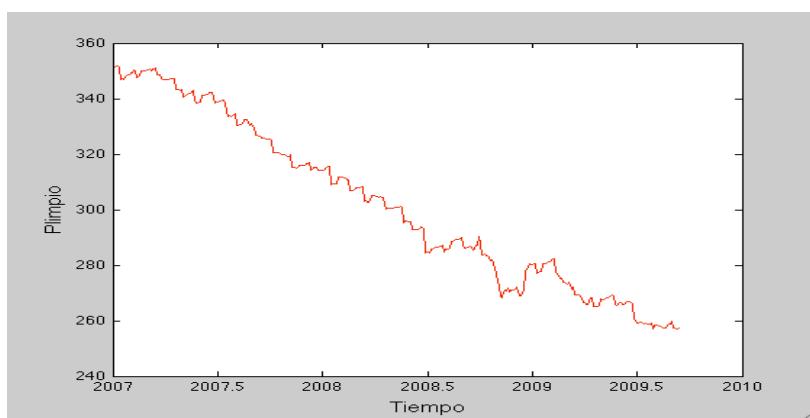
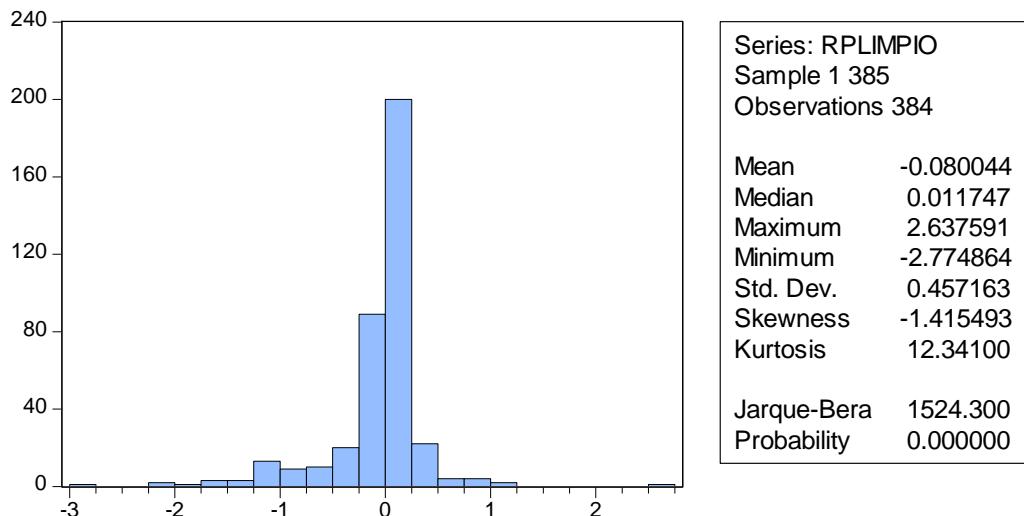
Method: Least Squares

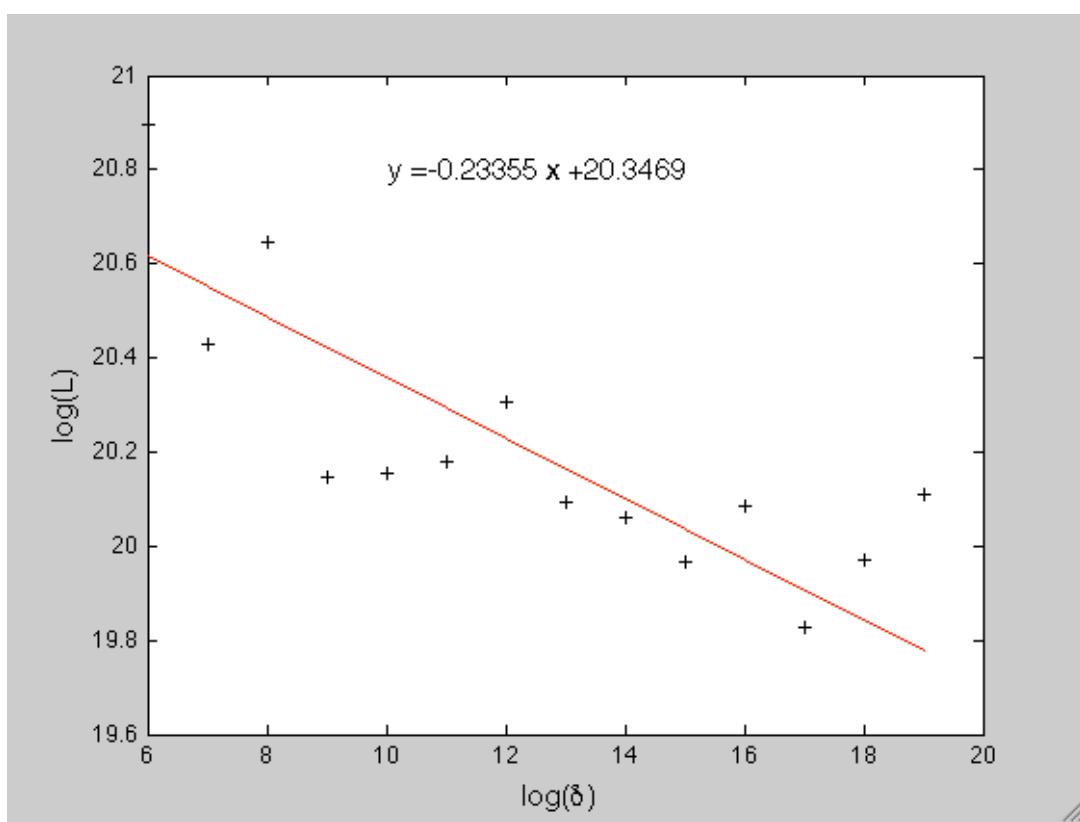
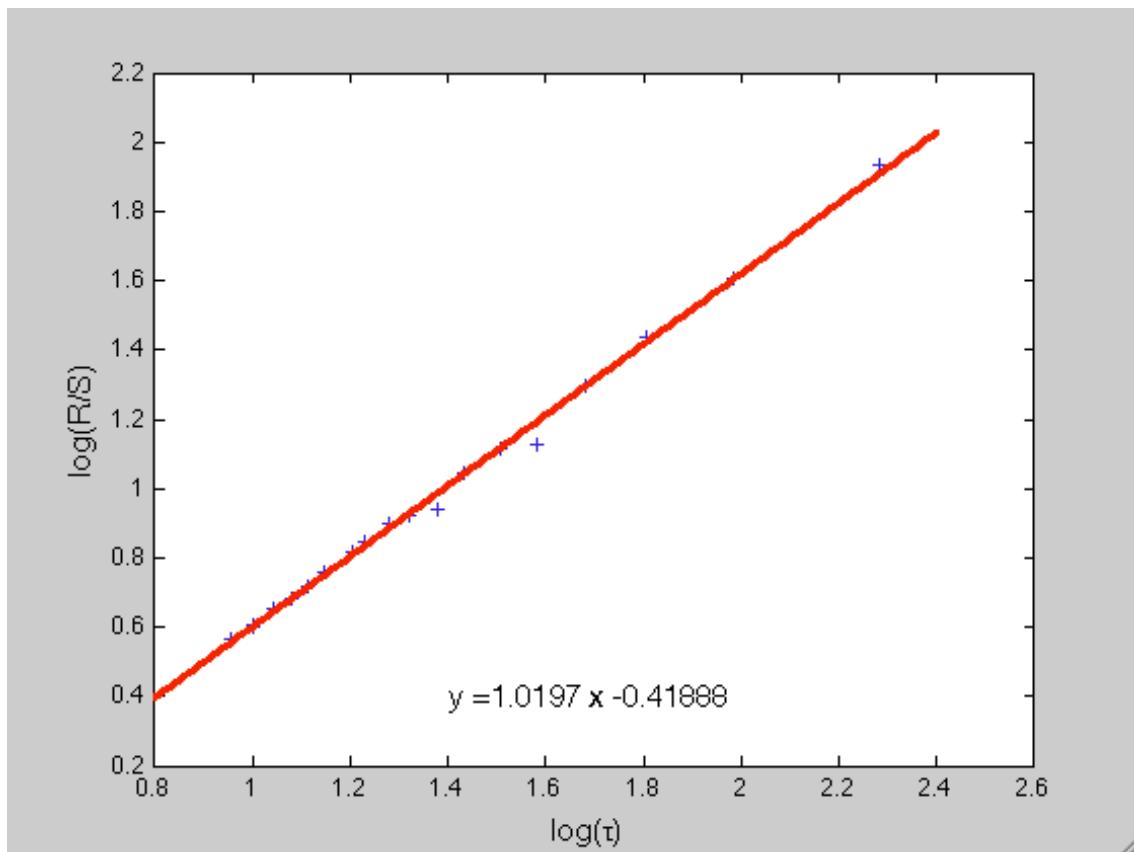
Date: 02/21/10 Time: 21:54

Sample: 1 385

Included observations: 385

	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	1.183229	1.499454	0.789106	0.4305
PLIMPIO7	0.830167	0.049093	16.90994	0.0000
PLIMPIO14	0.089775	0.083956	1.069312	0.2856
PLIMPIO21	0.323090	0.083978	3.847315	0.0001
PLIMPIO28	-0.250708	0.049273	-5.088185	0.0000
R-squared	0.990913	Mean dependent var	301.5994	
Adjusted R-squared	0.990817	S.D. dependent var	29.77805	
S.E. of regression	2.853582	Akaike info criterion	4.947929	
Sum squared resid	3094.313	Schwarz criterion	4.999270	
Log likelihood	-947.4763	Hannan-Quinn criter.	4.968291	
F-statistic	10359.02	Durbin-Watson stat	0.436194	
Prob(F-statistic)	0.000000			





Elaboración propia.

97CREYCB062U

Dependent Variable: PLIMPIO

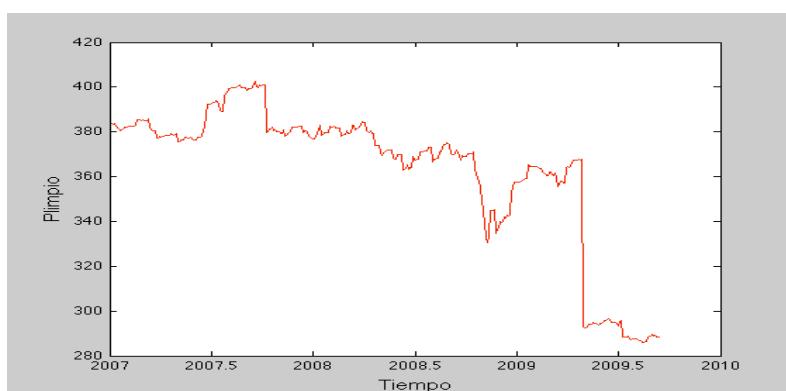
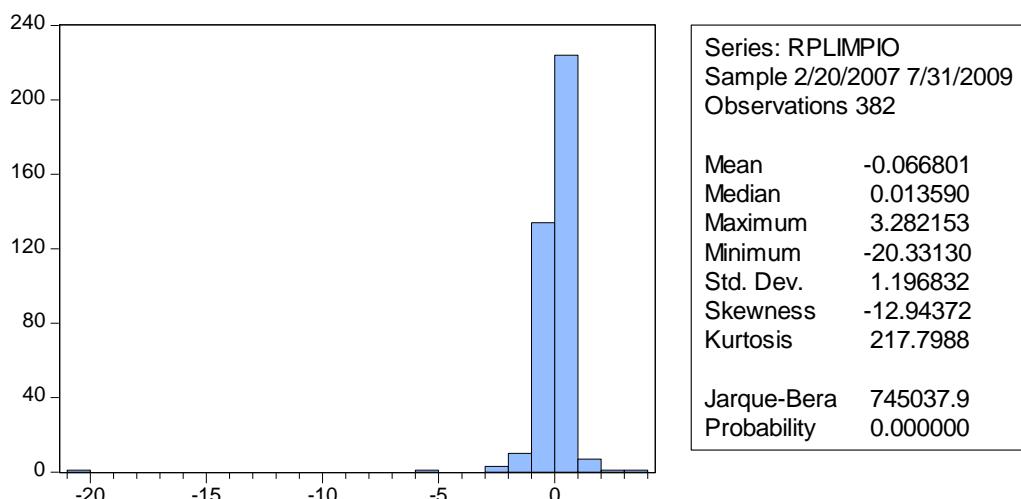
Method: Least Squares

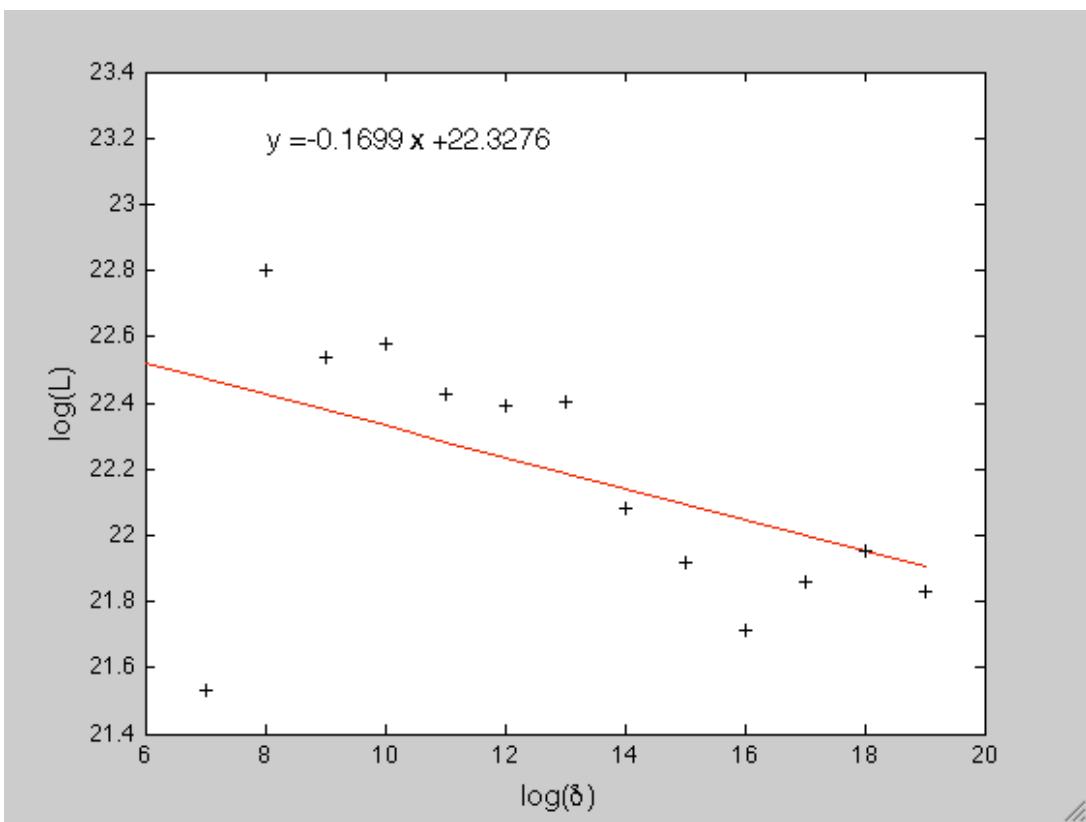
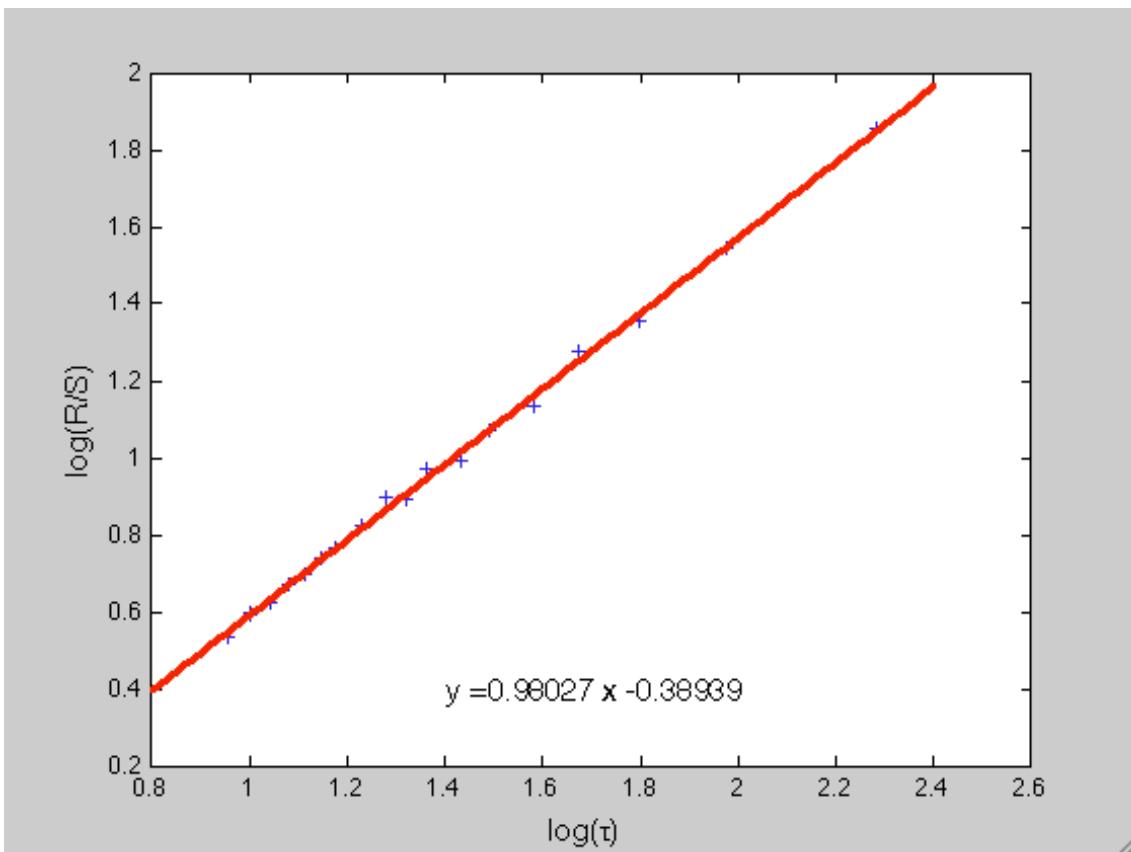
Date: 02/21/10 Time: 23:51

Sample: 2/20/2007 7/31/2009

Included observations: 383

	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	0.097477	6.784995	0.014366	0.9885
PLIMPIO7	0.973253	0.050957	19.09961	0.0000
PLIMPIO14	-0.005102	0.094901	-0.053762	0.9572
PLIMPIO21	-0.066084	0.094909	-0.696292	0.4867
PLIMPIO28	0.093900	0.053613	1.751452	0.0807
R-squared	0.904061	Mean dependent var	362.8995	
Adjusted R-squared	0.903045	S.D. dependent var	31.91391	
S.E. of regression	9.937210	Akaike info criterion	7.443418	
Sum squared resid	37326.80	Schwarz criterion	7.494959	
Log likelihood	-1420.415	Hannan-Quinn criter.	7.463864	
F-statistic	890.4960	Durbin-Watson stat	0.382324	
Prob(F-statistic)	0.000000			





Elaboración propia.

97CREYCCB06U

Dependent Variable: PLIMPIO

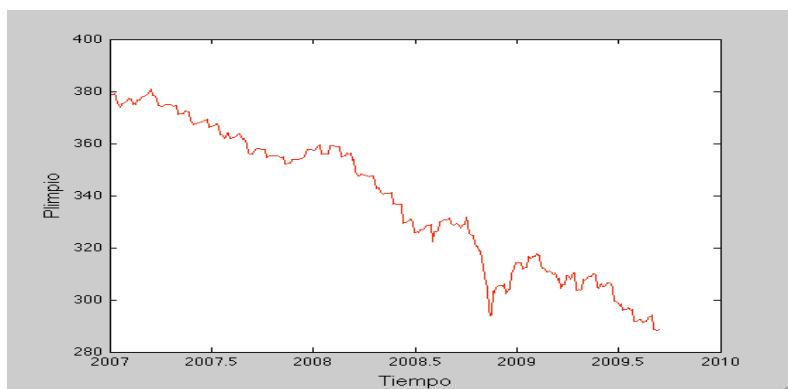
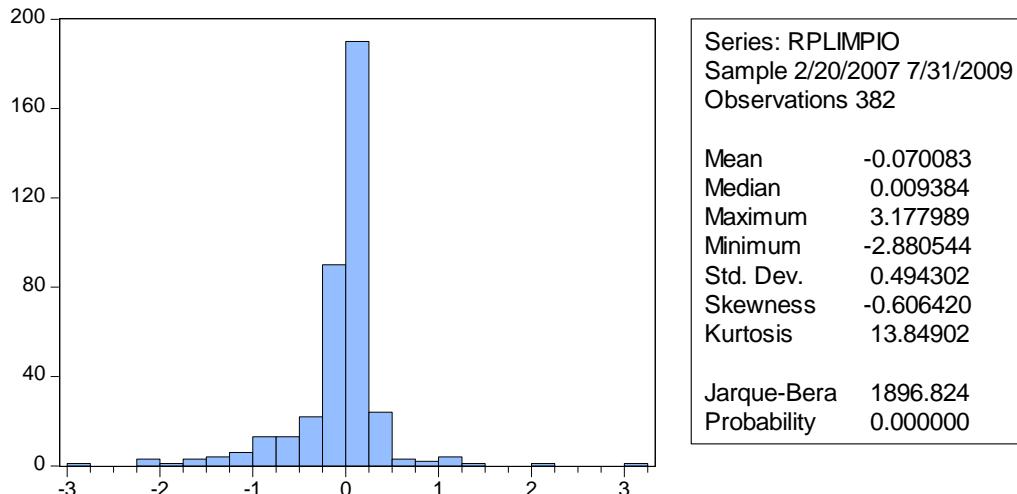
Method: Least Squares

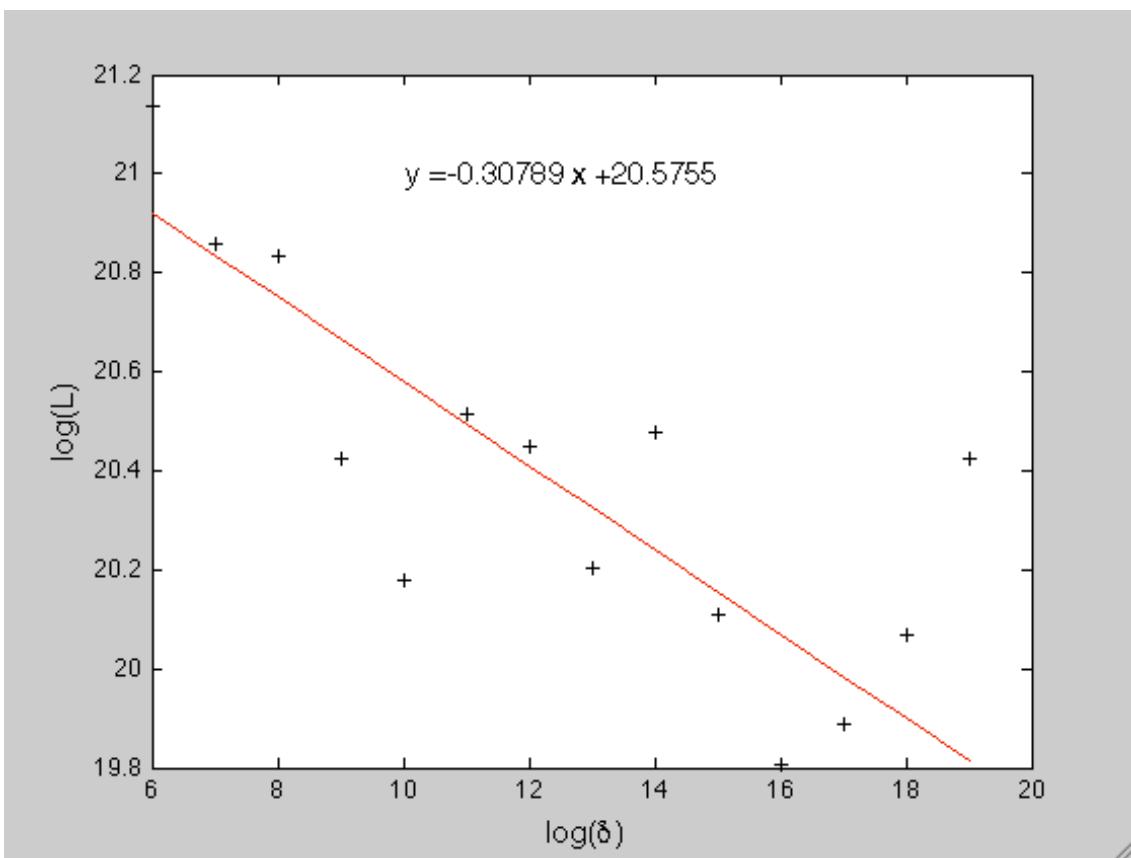
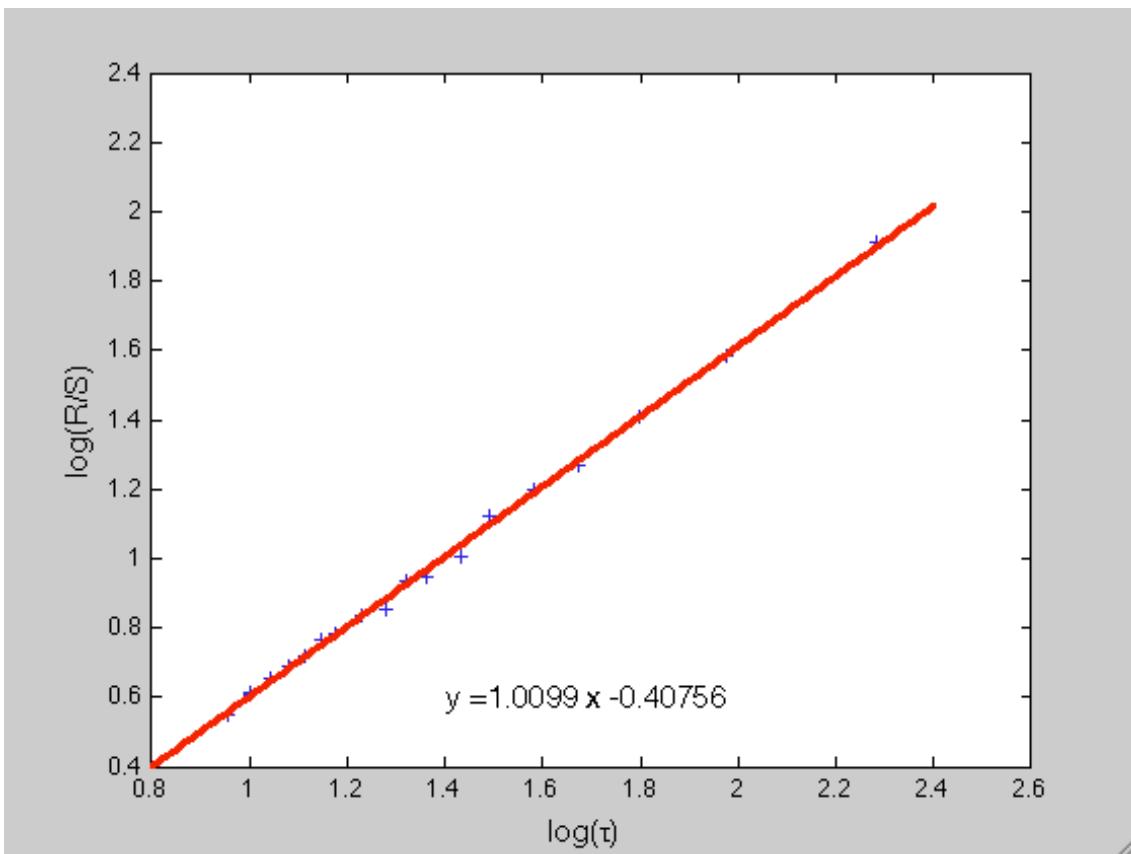
Date: 02/21/10 Time: 23:56

Sample: 2/20/2007 7/31/2009

Included observations: 383

	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	0.259057	2.393343	0.108240	0.9139
PLIMPIO7	0.921835	0.049902	18.47309	0.0000
PLIMPIO14	0.005409	0.094985	0.056947	0.9546
PLIMPIO21	0.318164	0.094980	3.349807	0.0009
PLIMPIO28	-0.249132	0.050256	-4.957287	0.0000
R-squared	0.982510	Mean dependent var	337.9110	
Adjusted R-squared	0.982325	S.D. dependent var	27.43277	
S.E. of regression	3.647105	Akaike info criterion	5.438714	
Sum squared resid	5027.921	Schwarz criterion	5.490255	
Log likelihood	-1036.514	Hannan-Quinn criter.	5.459159	
F-statistic	5308.640	Durbin-Watson stat	0.380791	
Prob(F-statistic)	0.000000			





Elaboración propia.

97DBCB072U

Dependent Variable: PLIMPIO

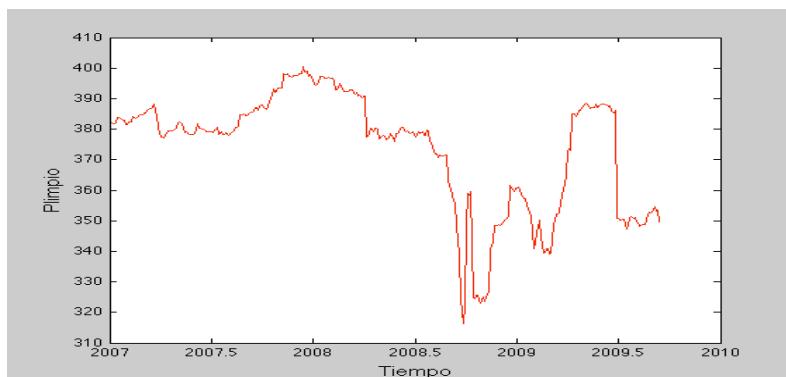
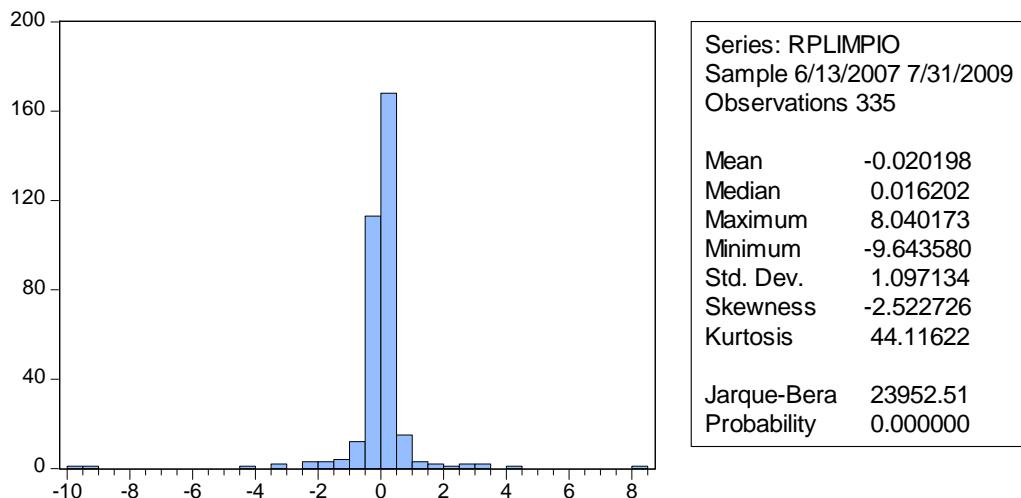
Method: Least Squares

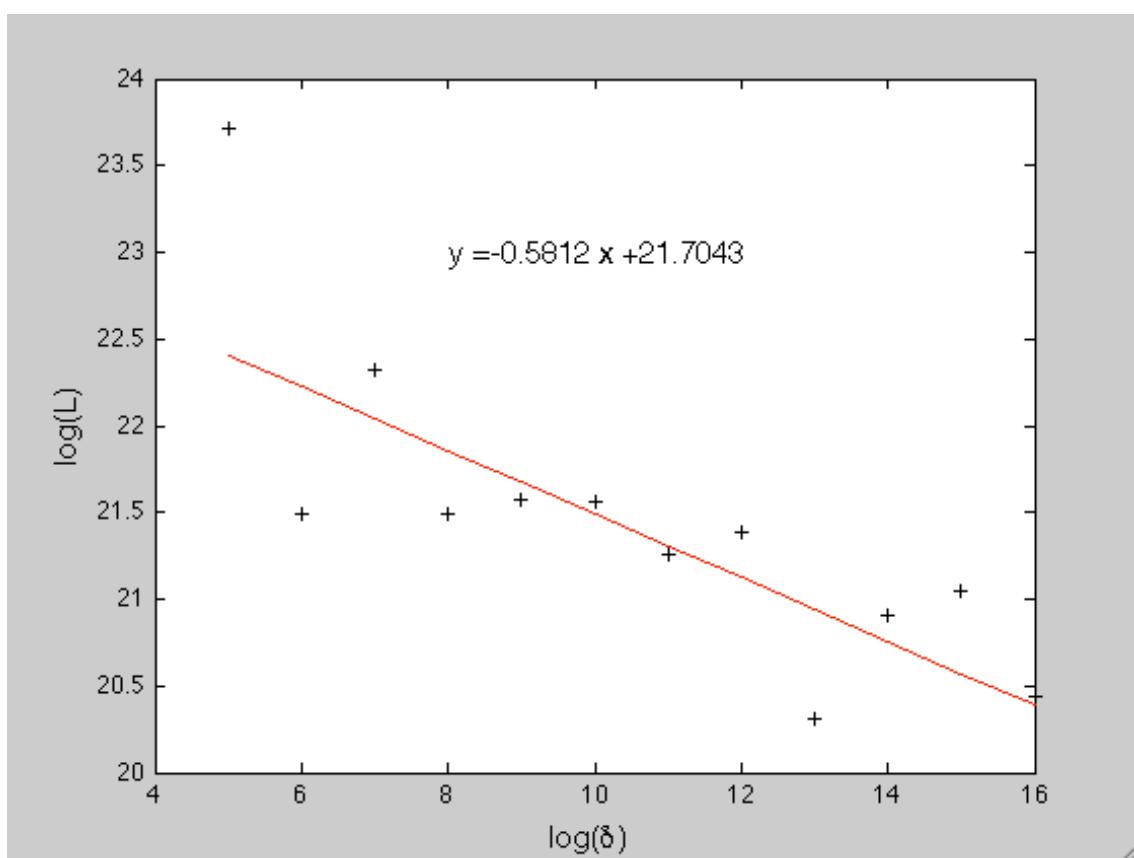
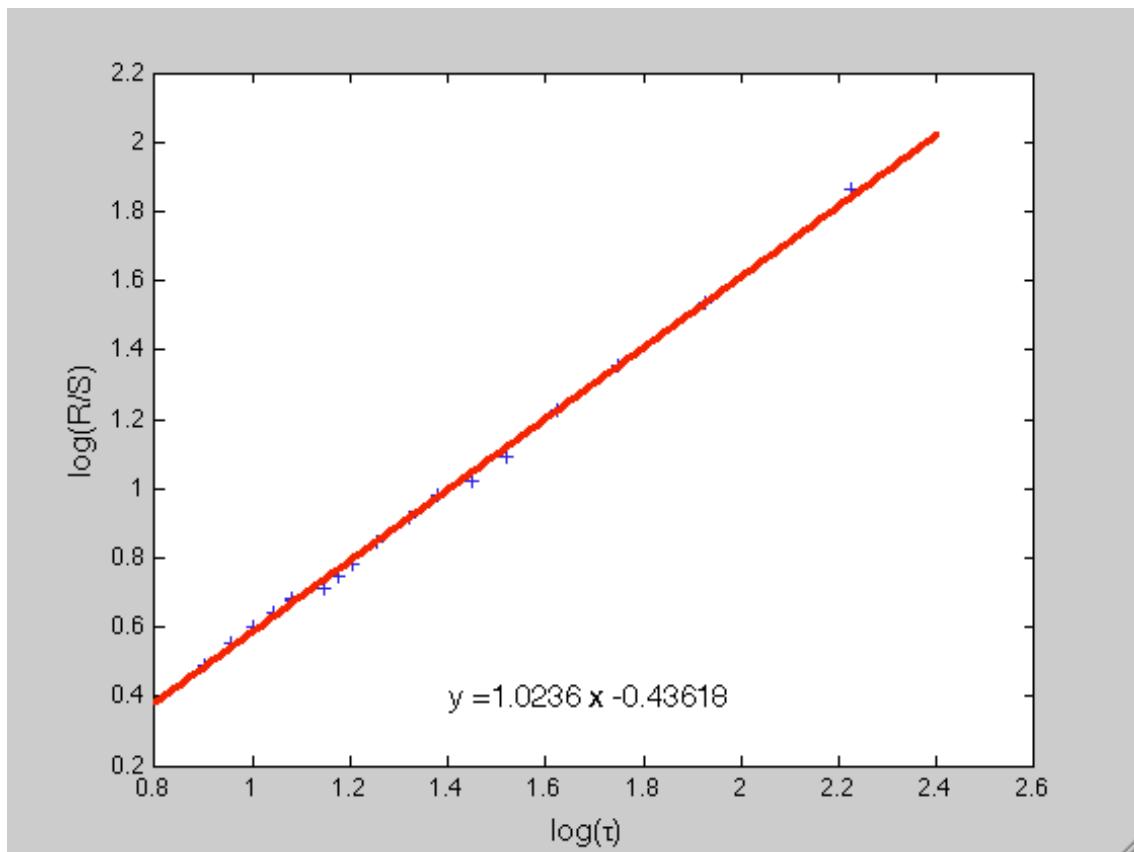
Date: 02/22/10 Time: 00:00

Sample: 6/13/2007 7/31/2009

Included observations: 336

	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	49.55052	11.59165	4.274674	0.0000
PLIMPIO7	0.921261	0.053146	17.33469	0.0000
PLIMPIO14	0.047034	0.072613	0.647740	0.5176
PLIMPIO21	-0.102345	0.067695	-1.511863	0.1315
PLIMPIO28	0.000501	0.045751	0.010942	0.9913
R-squared	0.780189	Mean dependent var	373.6362	
Adjusted R-squared	0.777533	S.D. dependent var	19.02701	
S.E. of regression	8.974357	Akaike info criterion	7.241389	
Sum squared resid	26658.43	Schwarz criterion	7.298191	
Log likelihood	-1211.553	Hannan-Quinn criter.	7.264032	
F-statistic	293.7105	Durbin-Watson stat	0.372507	
Prob(F-statistic)	0.000000			





Elaboración propia.

97FCASACB06U

Dependent Variable: PLIMPIO

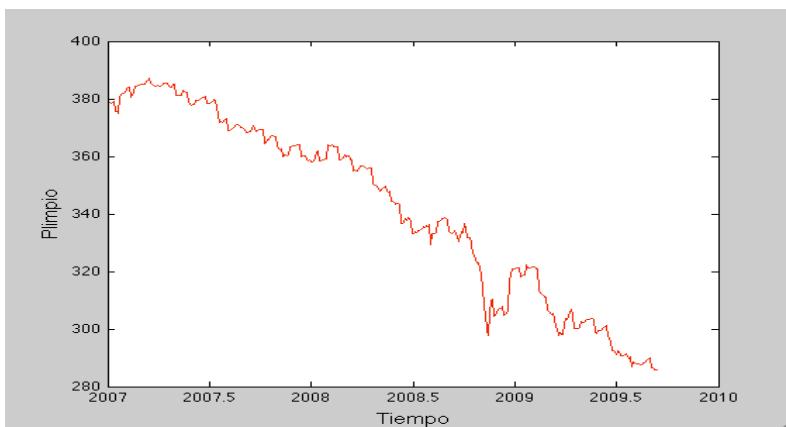
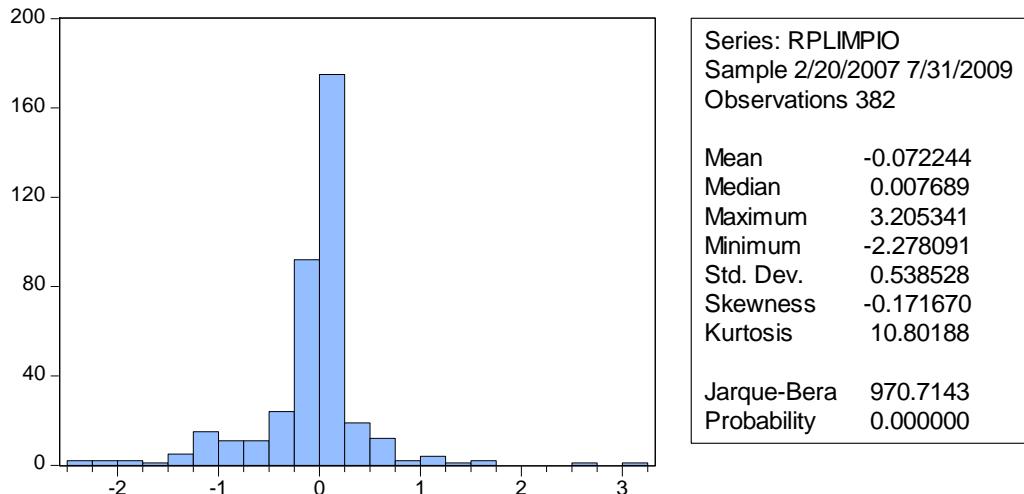
Method: Least Squares

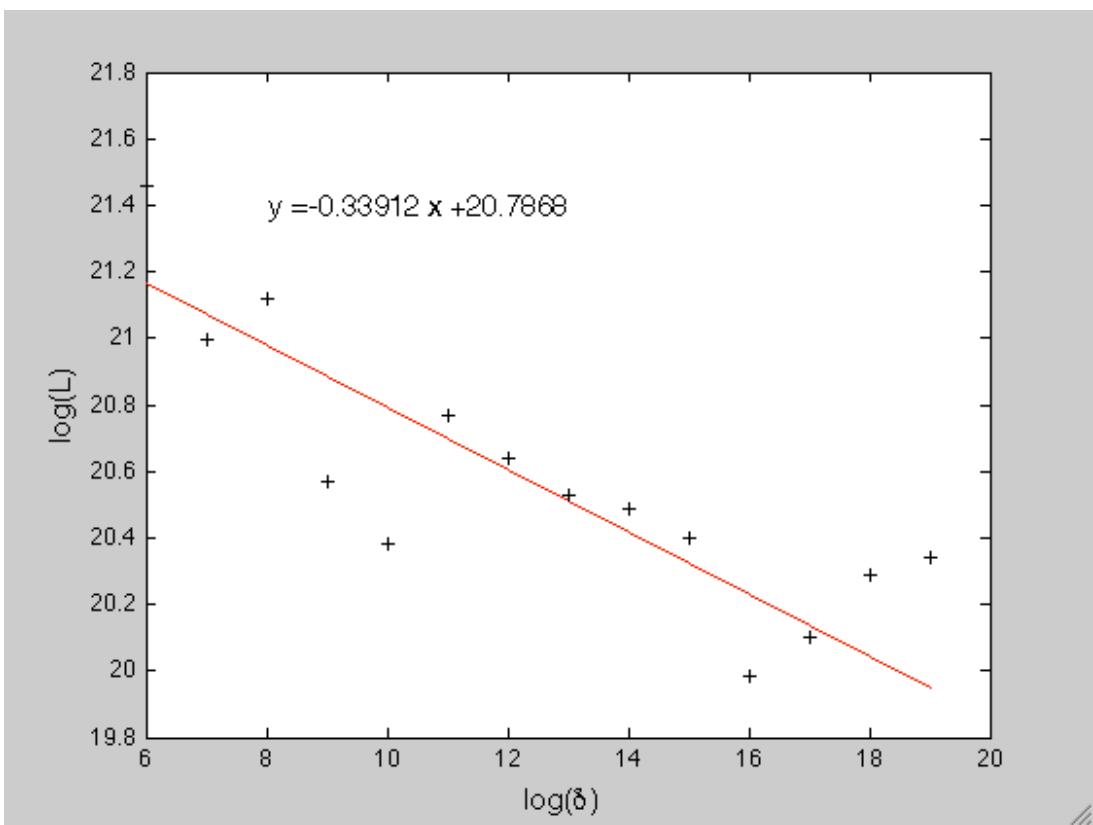
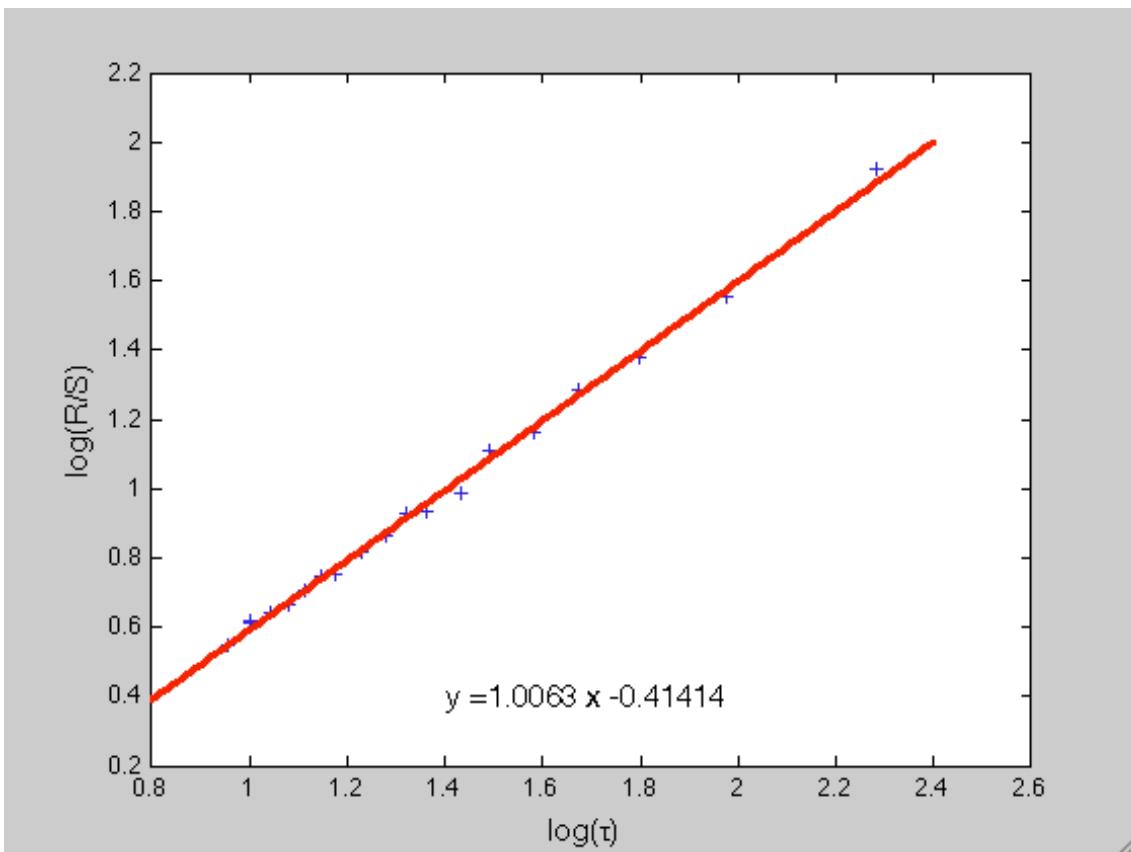
Date: 02/22/10 Time: 00:03

Sample: 2/20/2007 7/31/2009

Included observations: 383

	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	-1.632614	2.502653	-0.652353	0.5146
PLIMPIO7	0.950083	0.050622	18.76810	0.0000
PLIMPIO14	0.076558	0.094171	0.812969	0.4167
PLIMPIO21	0.118450	0.094125	1.258424	0.2090
PLIMPIO28	-0.143473	0.051266	-2.798604	0.0054
R-squared	0.982374	Mean dependent var	342.3672	
Adjusted R-squared	0.982187	S.D. dependent var	31.73610	
S.E. of regression	4.235641	Akaike info criterion	5.737915	
Sum squared resid	6781.567	Schwarz criterion	5.789456	
Log likelihood	-1093.811	Hannan-Quinn criter.	5.758361	
F-statistic	5266.825	Durbin-Watson stat	0.348633	
Prob(F-statistic)	0.000000			





Elaboración propia.

97HICOACB062U

Dependent Variable: PLIMPIO

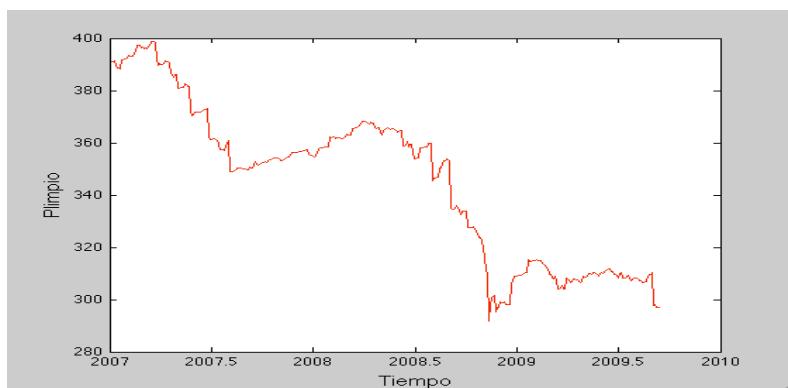
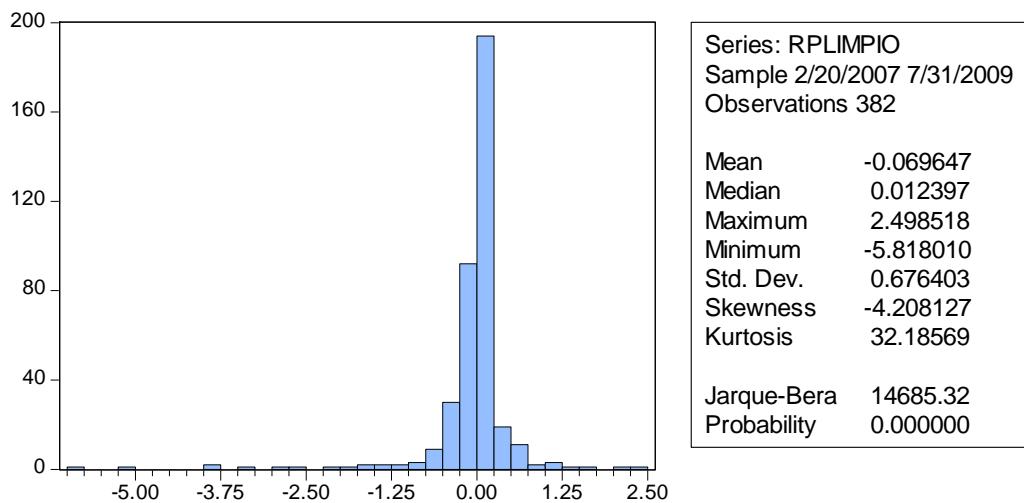
Method: Least Squares

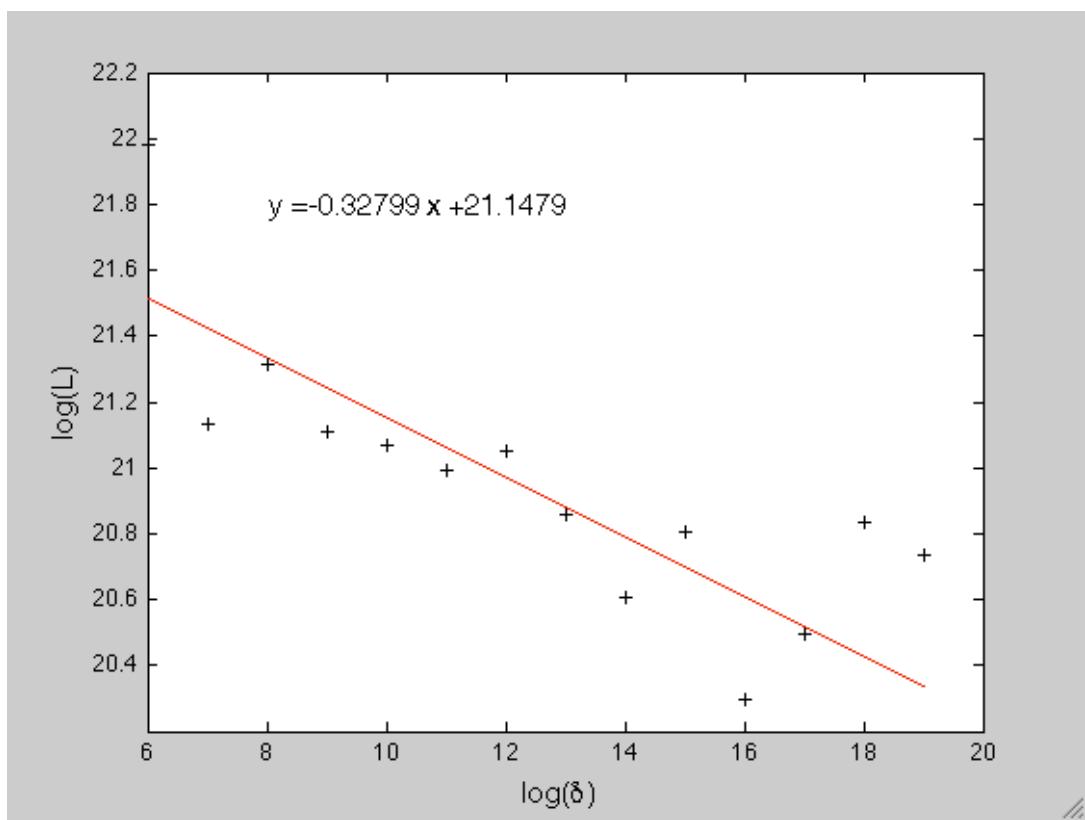
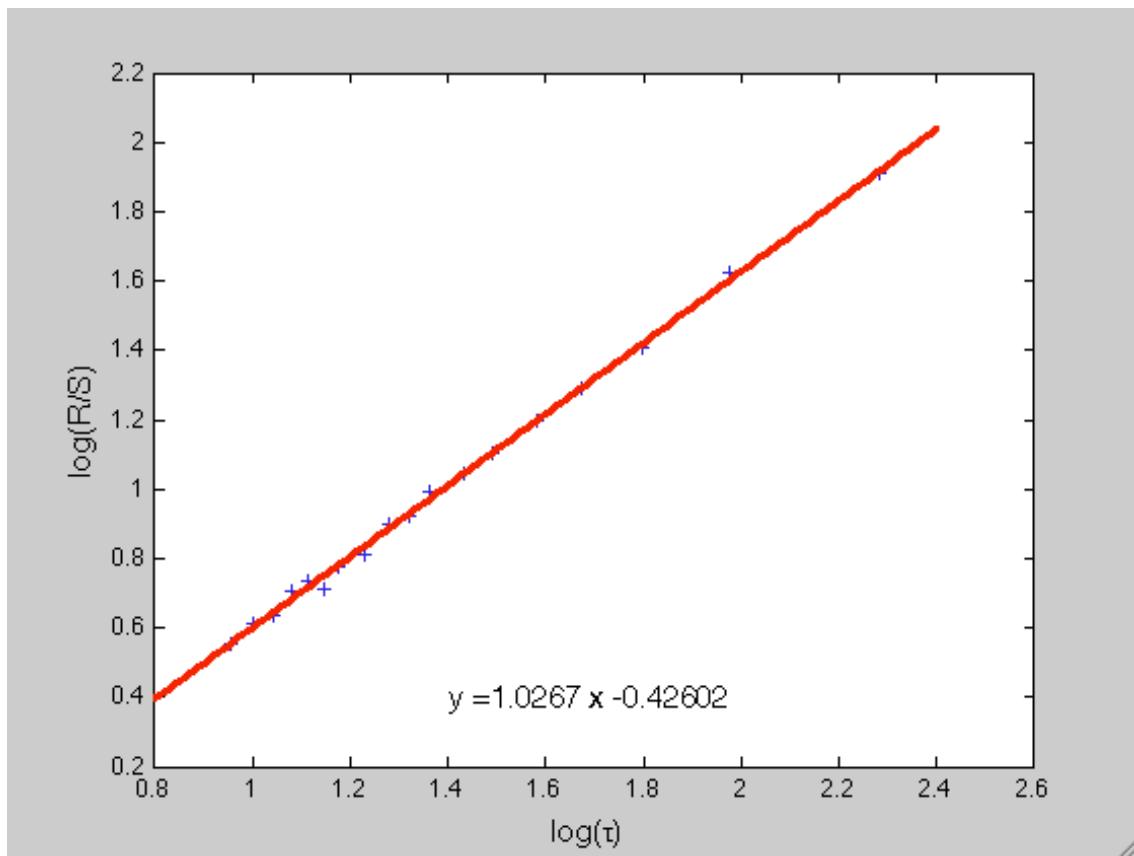
Date: 02/22/10 Time: 00:07

Sample: 2/20/2007 7/31/2009

Included observations: 383

	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	4.731496	2.877382	1.644376	0.1009
PLIMPIO7	0.963442	0.050184	19.19817	0.0000
PLIMPIO14	0.074956	0.091680	0.817580	0.4141
PLIMPIO21	0.259733	0.091742	2.831129	0.0049
PLIMPIO28	-0.314342	0.050329	-6.245738	0.0000
R-squared	0.974845	Mean dependent var	345.2357	
Adjusted R-squared	0.974579	S.D. dependent var	29.95446	
S.E. of regression	4.775963	Akaike info criterion	5.978037	
Sum squared resid	8622.114	Schwarz criterion	6.029578	
Log likelihood	-1139.794	Hannan-Quinn criter.	5.998483	
F-statistic	3662.183	Durbin-Watson stat	0.430140	
Prob(F-statistic)	0.000000			





Elaboración propia.

97HSBCCB07

Dependent Variable: PLIMPIO

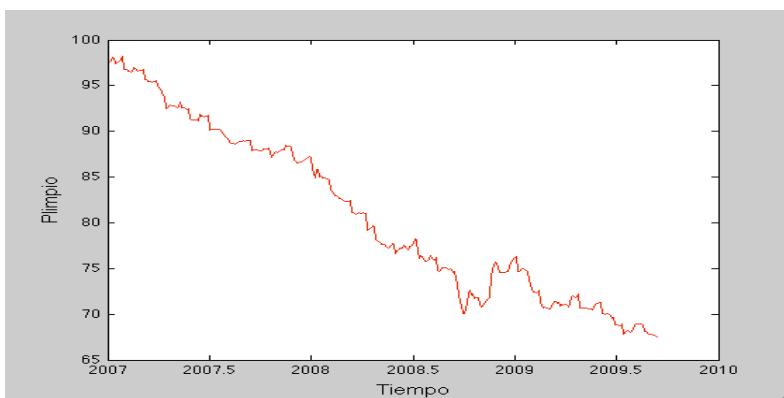
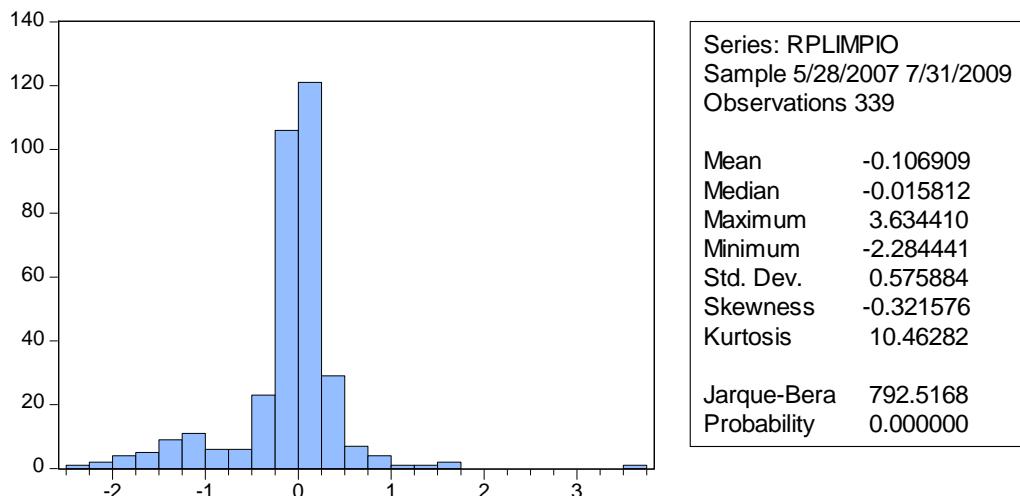
Method: Least Squares

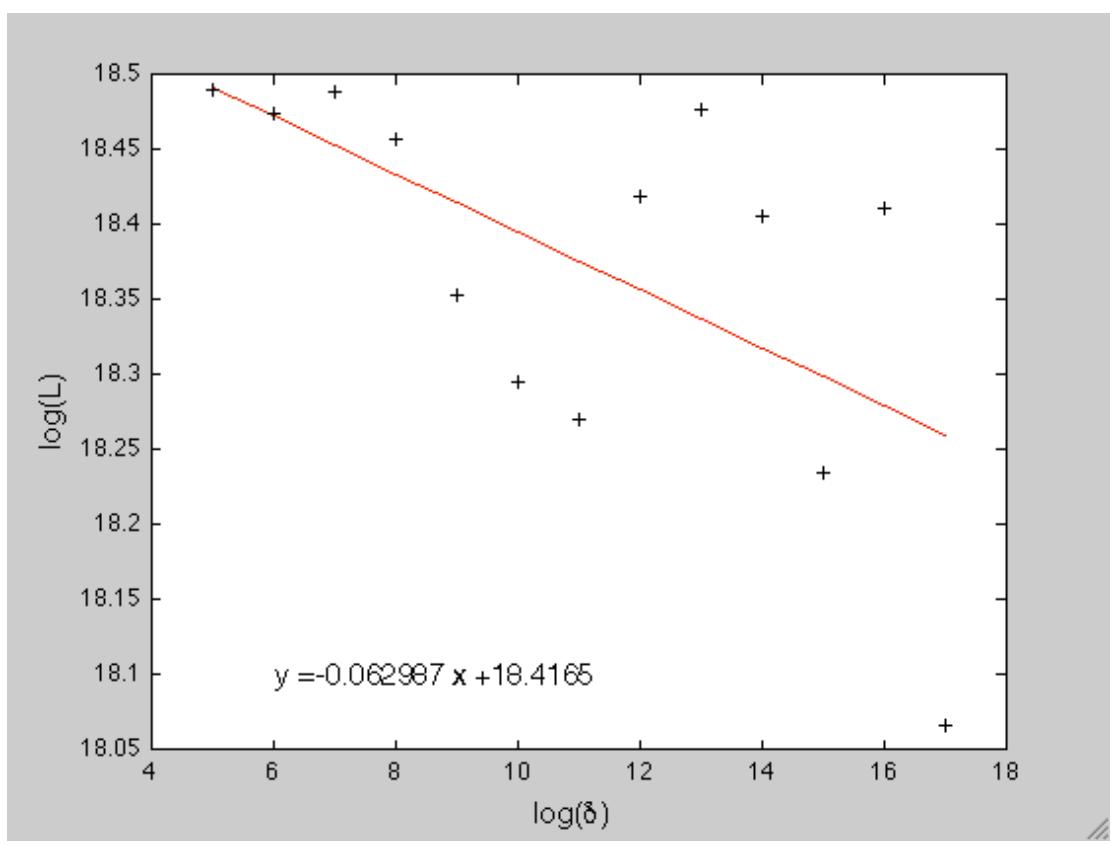
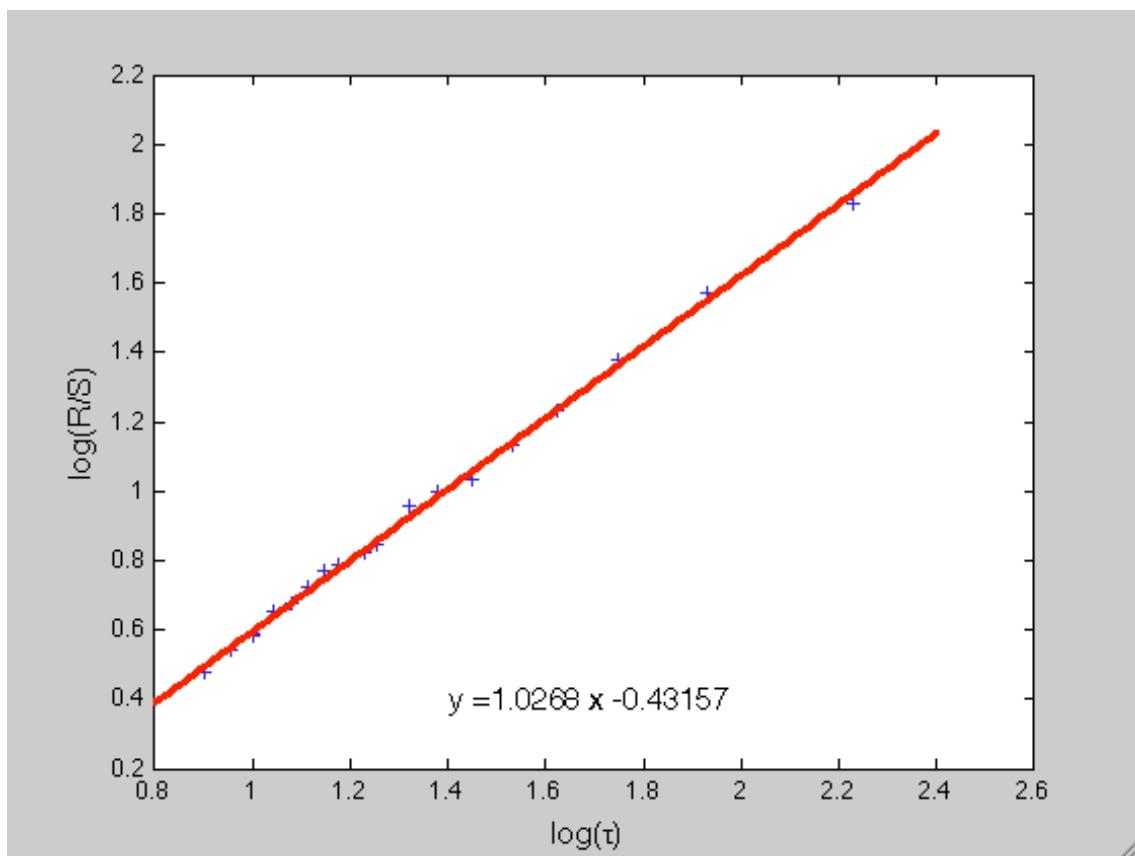
Date: 02/22/10 Time: 00:24

Sample: 5/28/2007 7/31/2009

Included observations: 340

	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	0.710262	0.486419	1.460186	0.1452
PLIMPIO7	0.789061	0.049931	15.80293	0.0000
PLIMPIO14	0.348374	0.064775	5.378252	0.0000
PLIMPIO21	-0.107011	0.068001	-1.573673	0.1165
PLIMPIO28	-0.044779	0.053130	-0.842813	0.3999
R-squared	0.987974	Mean dependent var	80.81518	
Adjusted R-squared	0.987831	S.D. dependent var	9.216750	
S.E. of regression	1.016740	Akaike info criterion	2.885676	
Sum squared resid	346.3096	Schwarz criterion	2.941984	
Log likelihood	-485.5650	Hannan-Quinn criter.	2.908113	
F-statistic	6880.520	Durbin-Watson stat	0.350430	
Prob(F-statistic)	0.000000			





Elaboración propia.

97METROCB04U

Dependent Variable: PLIMPIO

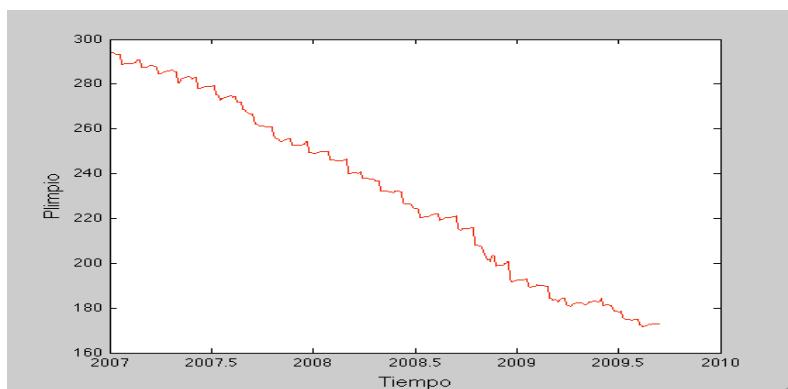
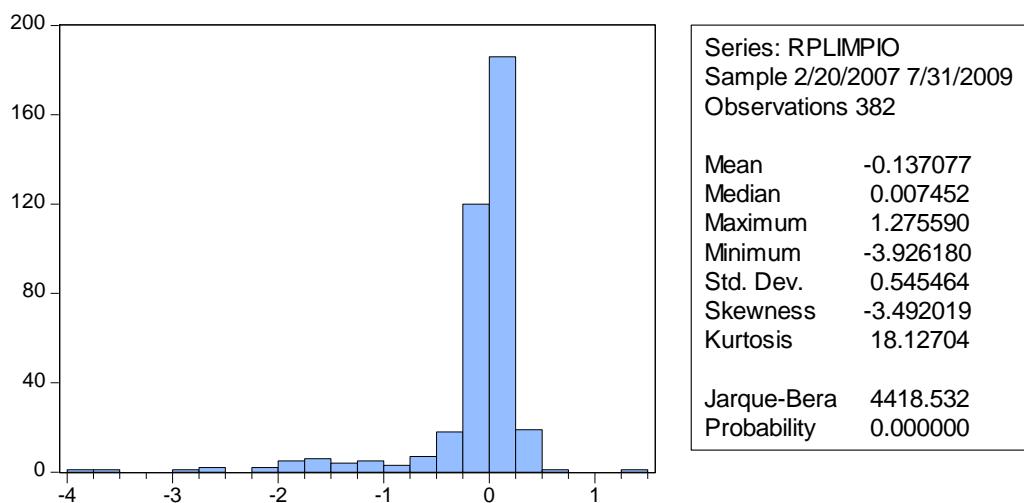
Method: Least Squares

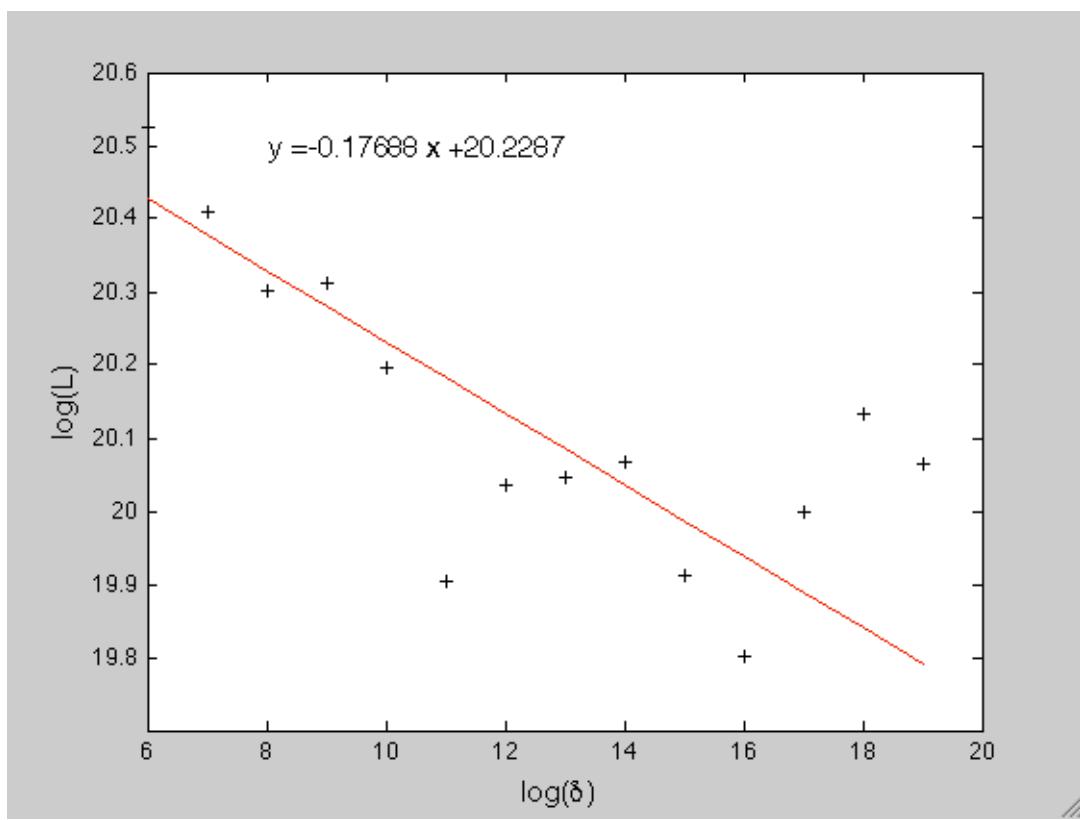
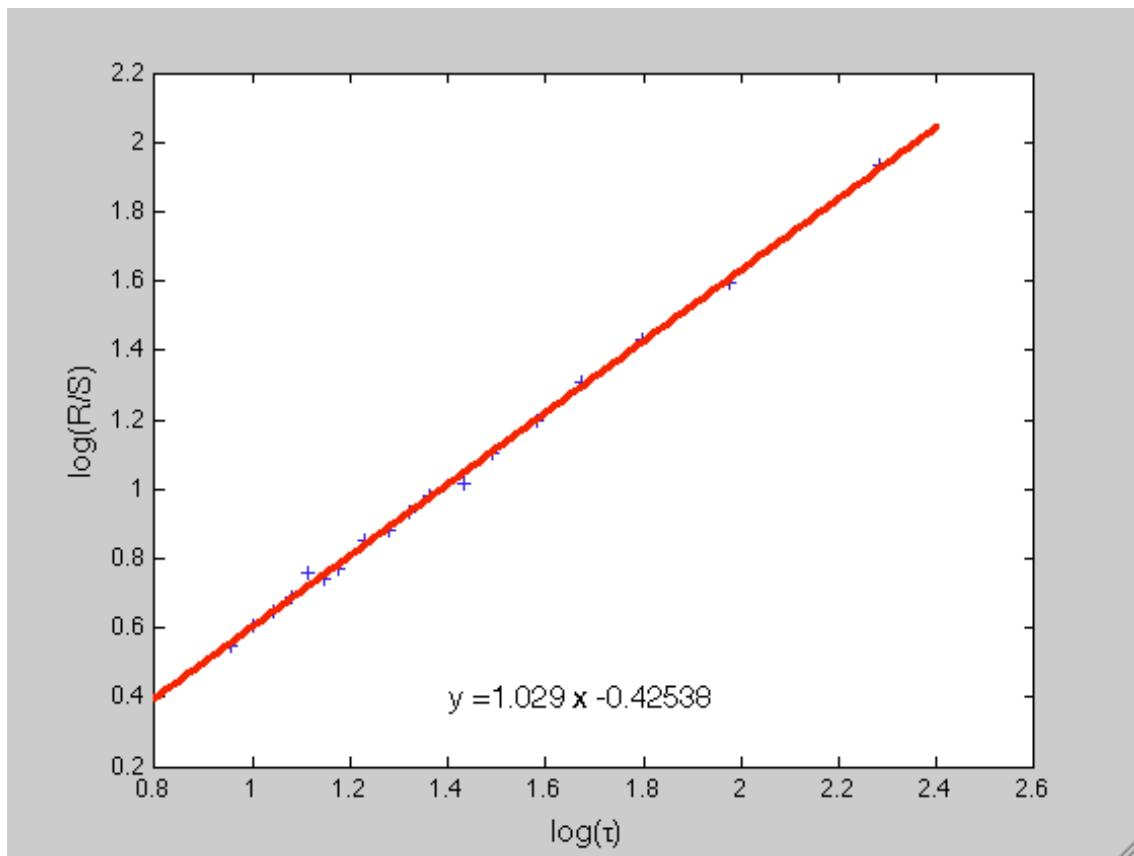
Date: 02/22/10 Time: 00:29

Sample: 2/20/2007 7/31/2009

Included observations: 383

	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	-1.465722	0.708375	-2.069132	0.0392
PLIMPIO7	0.650353	0.050245	12.94357	0.0000
PLIMPIO14	0.195720	0.063011	3.106123	0.0020
PLIMPIO21	0.402289	0.065715	6.121700	0.0000
PLIMPIO28	-0.250507	0.053399	-4.691237	0.0000
R-squared	0.996906	Mean dependent var	231.9799	
Adjusted R-squared	0.996873	S.D. dependent var	38.95949	
S.E. of regression	2.178621	Akaike info criterion	4.408231	
Sum squared resid	1794.136	Schwarz criterion	4.459771	
Log likelihood	-839.1761	Hannan-Quinn criter.	4.428676	
F-statistic	30445.32	Durbin-Watson stat	0.499314	
Prob(F-statistic)	0.000000			





Elaboración propia.

97MFCB05U

Dependent Variable: PLIMPIO

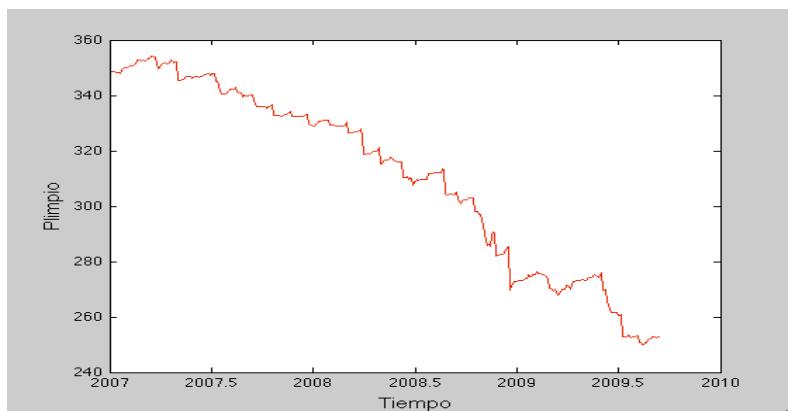
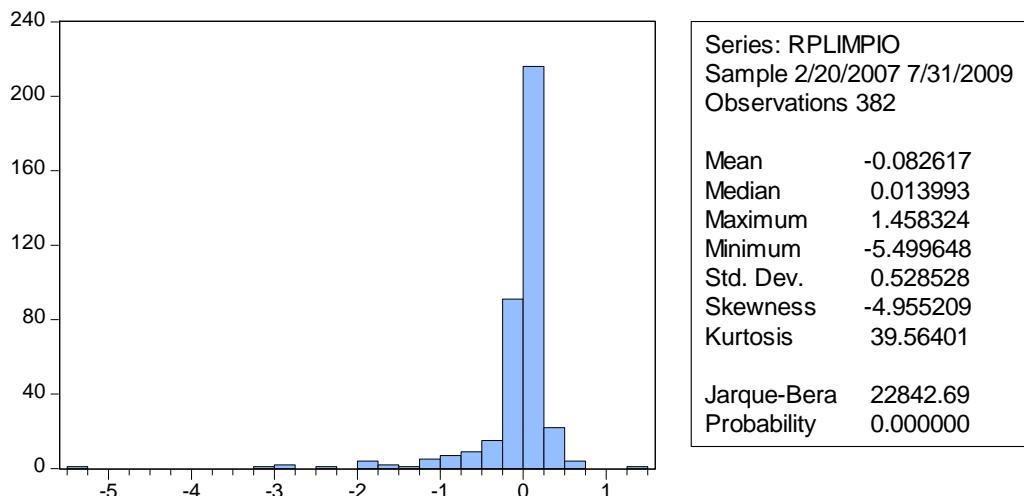
Method: Least Squares

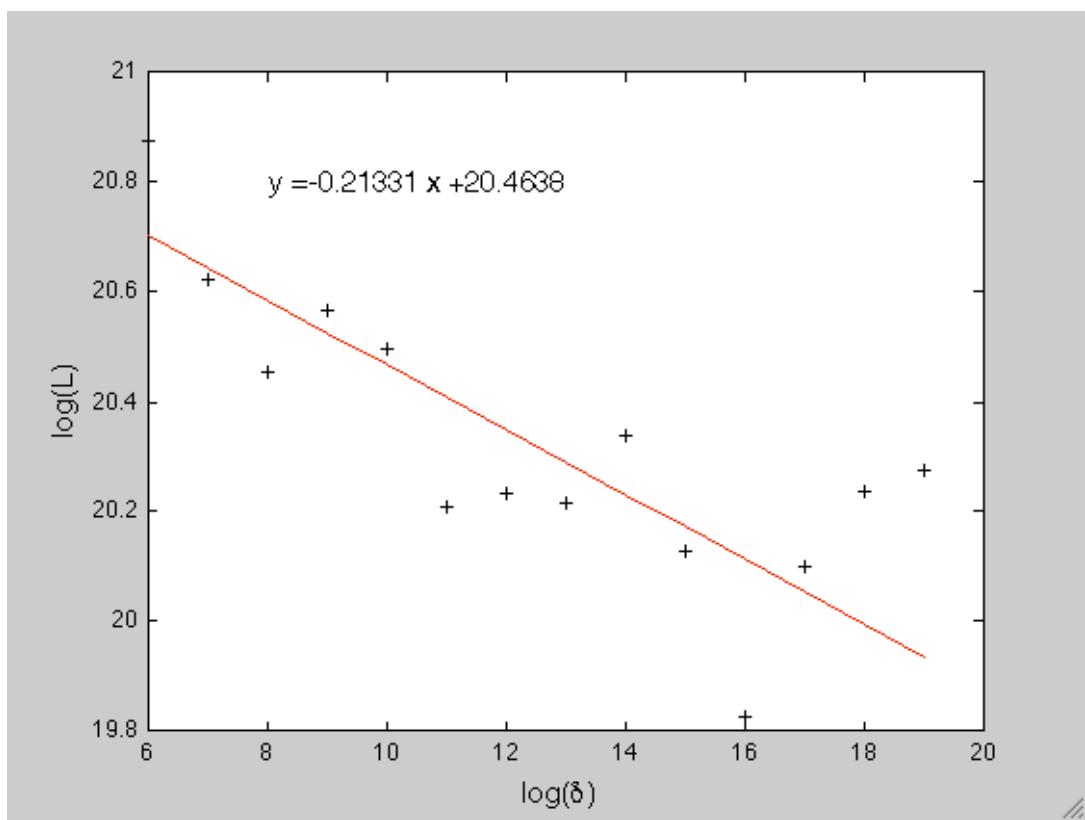
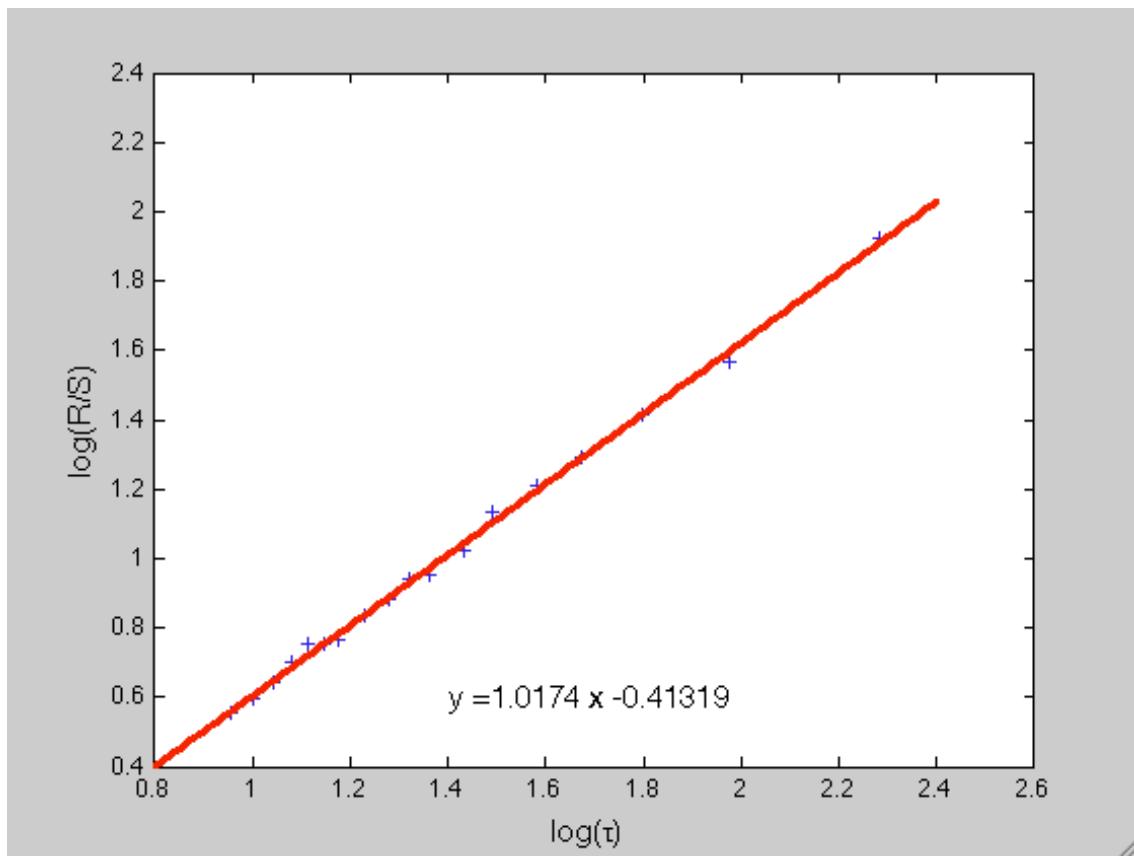
Date: 02/22/10 Time: 00:36

Sample: 2/20/2007 7/31/2009

Included observations: 383

	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	-4.792174	1.728364	-2.772665	0.0058
PLIMPIO7	0.851805	0.050437	16.88865	0.0000
PLIMPIO14	0.266577	0.083658	3.186502	0.0016
PLIMPIO21	-0.118200	0.083769	-1.411031	0.1591
PLIMPIO28	0.010647	0.051617	0.206269	0.8367
R-squared	0.990320	Mean dependent var	310.9312	
Adjusted R-squared	0.990218	S.D. dependent var	32.35264	
S.E. of regression	3.199834	Akaike info criterion	5.177044	
Sum squared resid	3870.319	Schwarz criterion	5.228585	
Log likelihood	-986.4039	Hannan-Quinn criter.	5.197489	
F-statistic	9668.152	Durbin-Watson stat	0.424405	
Prob(F-statistic)	0.000000			





Elaboración propia.

97MTROCB07U

Dependent Variable: PLIMPIO

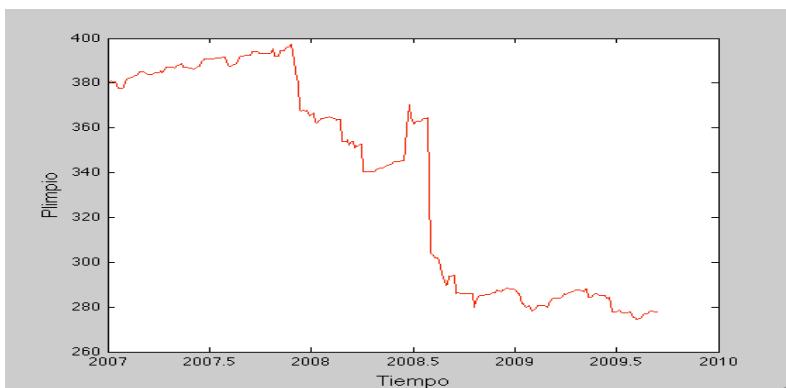
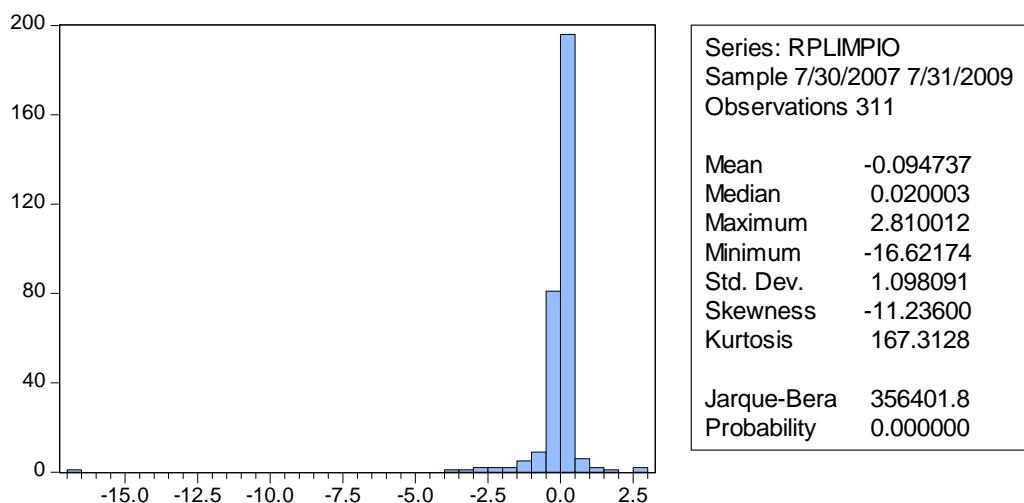
Method: Least Squares

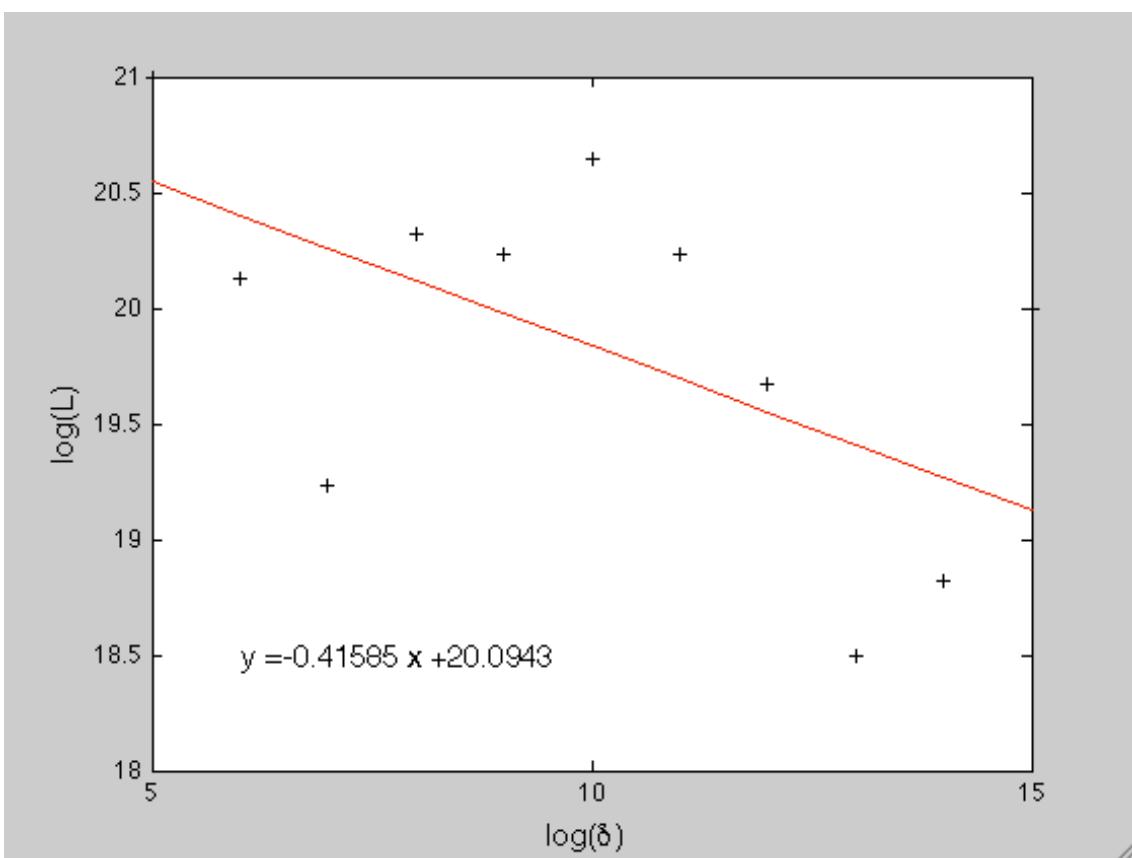
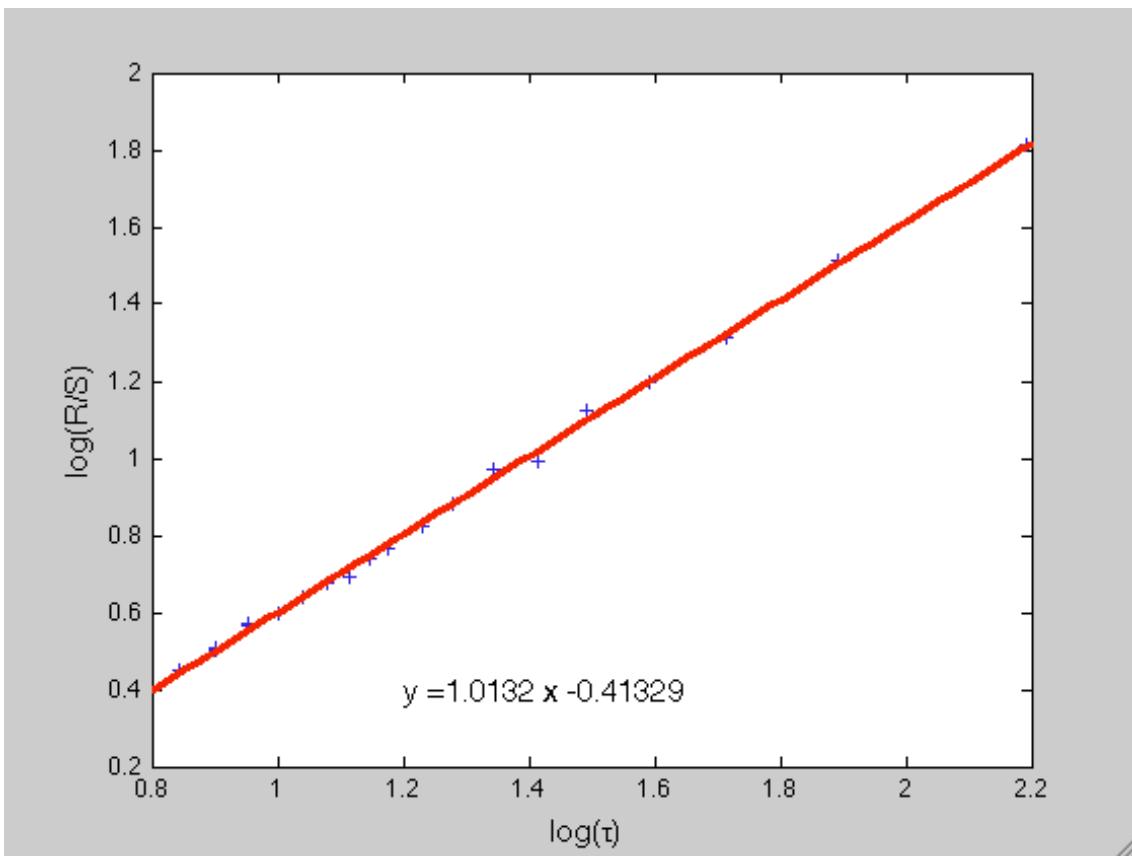
Date: 02/22/10 Time: 00:38

Sample: 7/30/2007 7/31/2009

Included observations: 312

	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	2.120795	3.966539	0.534671	0.5933
PLIMPIO7	1.089638	0.051696	21.07796	0.0000
PLIMPIO14	-0.195921	0.080044	-2.447652	0.0149
PLIMPIO21	0.046664	0.082587	0.565020	0.5725
PLIMPIO28	0.048389	0.056934	0.849919	0.3960
R-squared	0.962991	Mean dependent var	337.2601	
Adjusted R-squared	0.962509	S.D. dependent var	46.75509	
S.E. of regression	9.052968	Akaike info criterion	7.259958	
Sum squared resid	25160.56	Schwarz criterion	7.319942	
Log likelihood	-1127.553	Hannan-Quinn criter.	7.283932	
F-statistic	1997.094	Durbin-Watson stat	0.417941	
Prob(F-statistic)	0.000000			





Elaboración propia.

97MTROFCB08

Dependent Variable: PLIMPIO

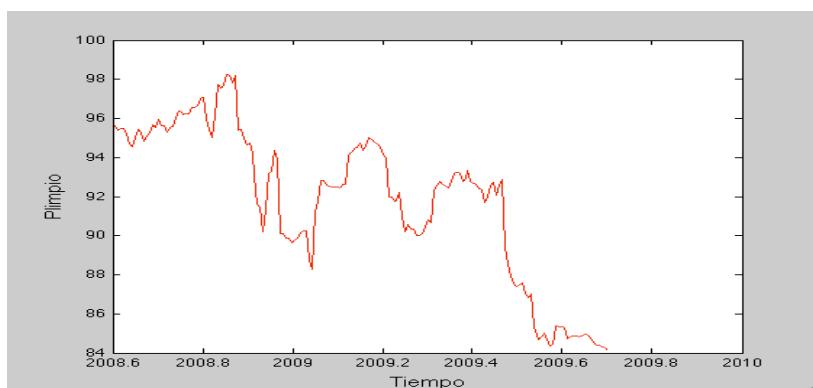
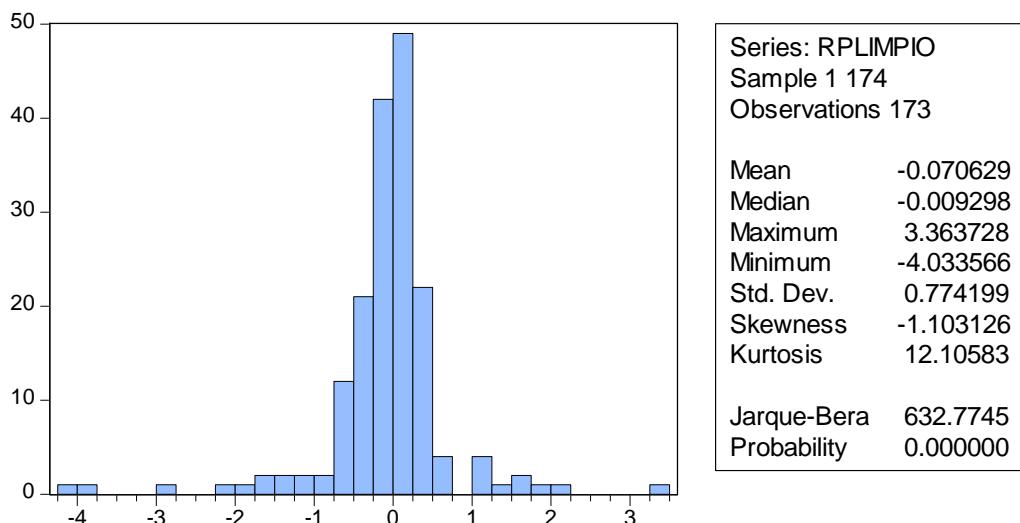
Method: Least Squares

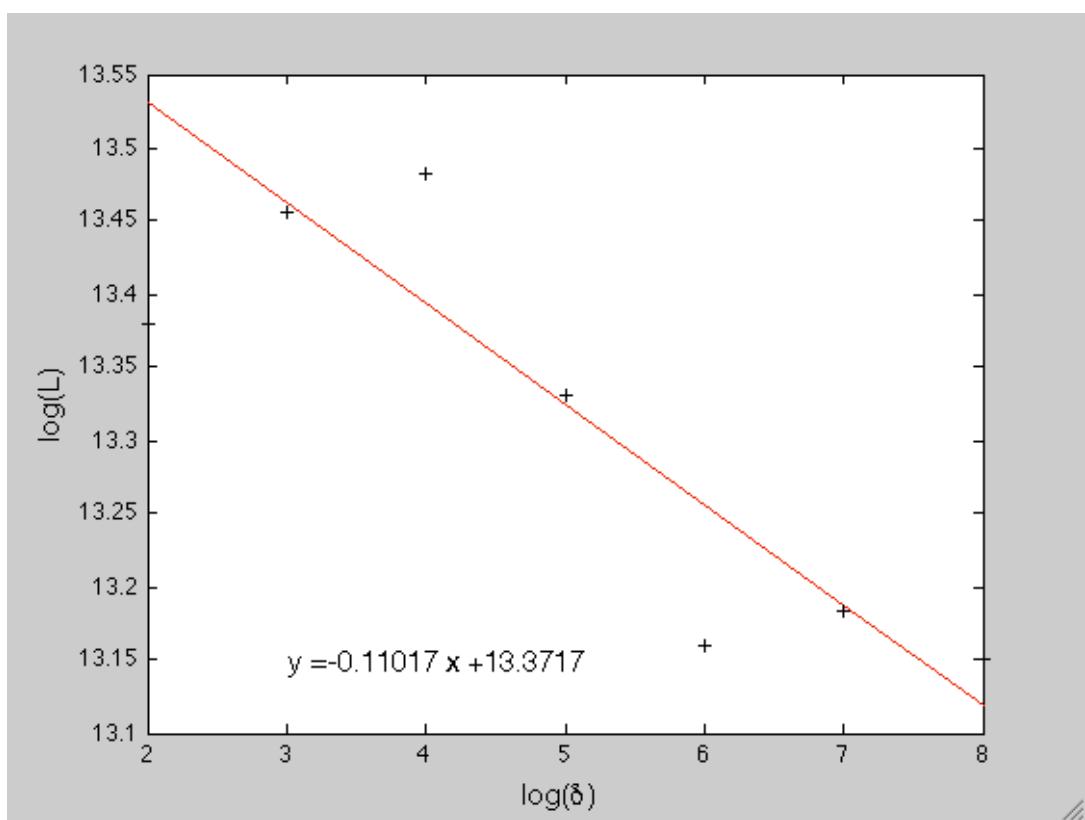
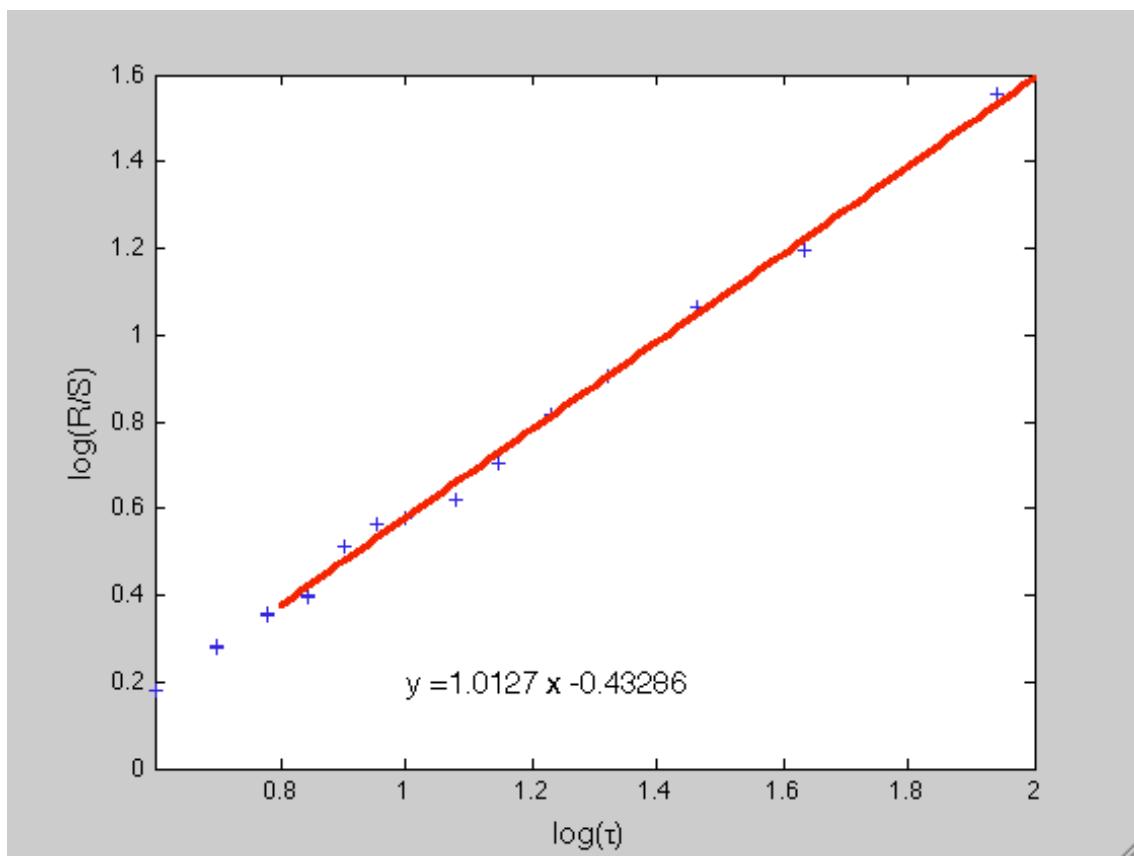
Date: 02/22/10 Time: 00:43

Sample: 1 174

Included observations: 174

	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	7.693889	4.400501	1.748412	0.0822
PLIMPIO7	1.009366	0.086936	11.61050	0.0000
PLIMPIO14	-0.076430	0.115569	-0.661338	0.5093
PLIMPIO21	-0.065982	0.115879	-0.569407	0.5698
PLIMPIO28	0.044811	0.091504	0.489723	0.6250
R-squared	0.762562	Mean dependent var	91.83053	
Adjusted R-squared	0.756942	S.D. dependent var	3.896597	
S.E. of regression	1.921058	Akaike info criterion	4.171944	
Sum squared resid	623.6882	Schwarz criterion	4.262721	
Log likelihood	-357.9591	Hannan-Quinn criter.	4.208769	
F-statistic	135.6911	Durbin-Watson stat	0.289264	
Prob(F-statistic)	0.000000			





Elaboración propia.

97MXMACCB04U

Dependent Variable: PLIMPIO

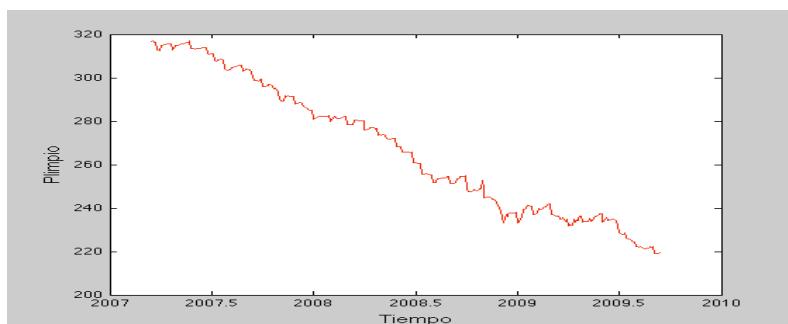
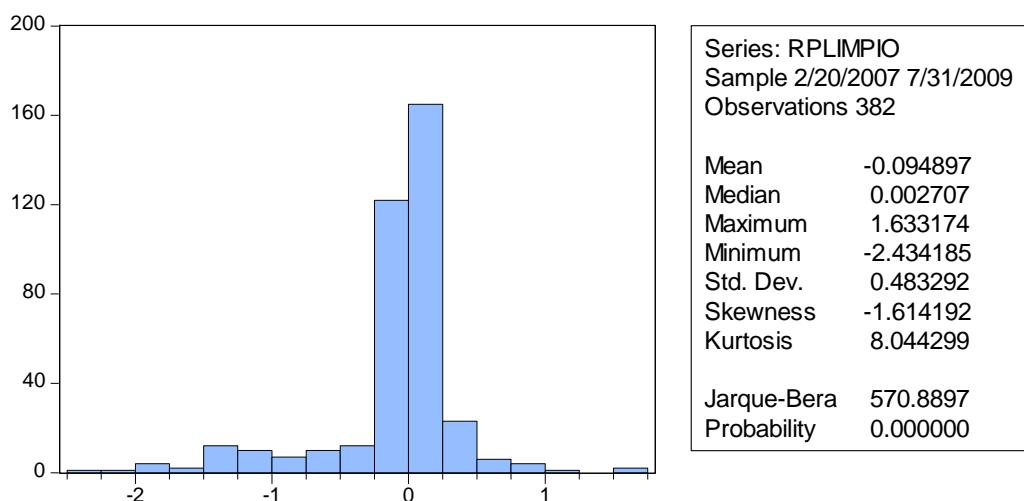
Method: Least Squares

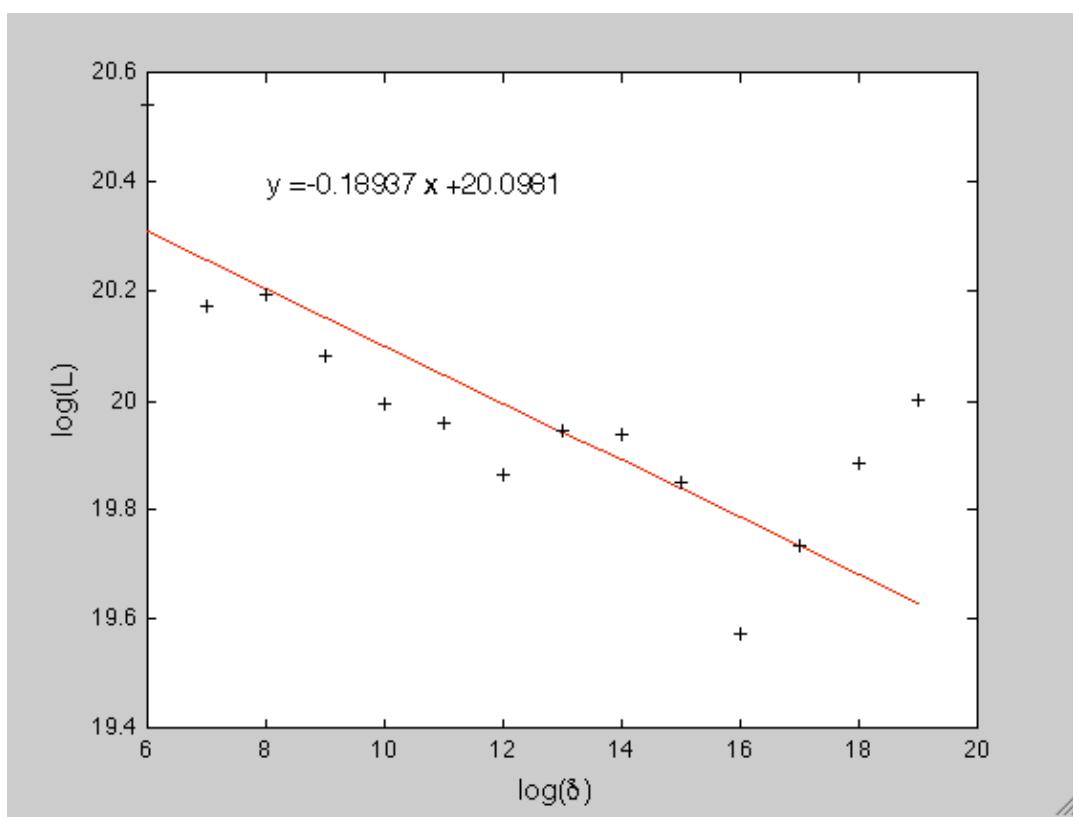
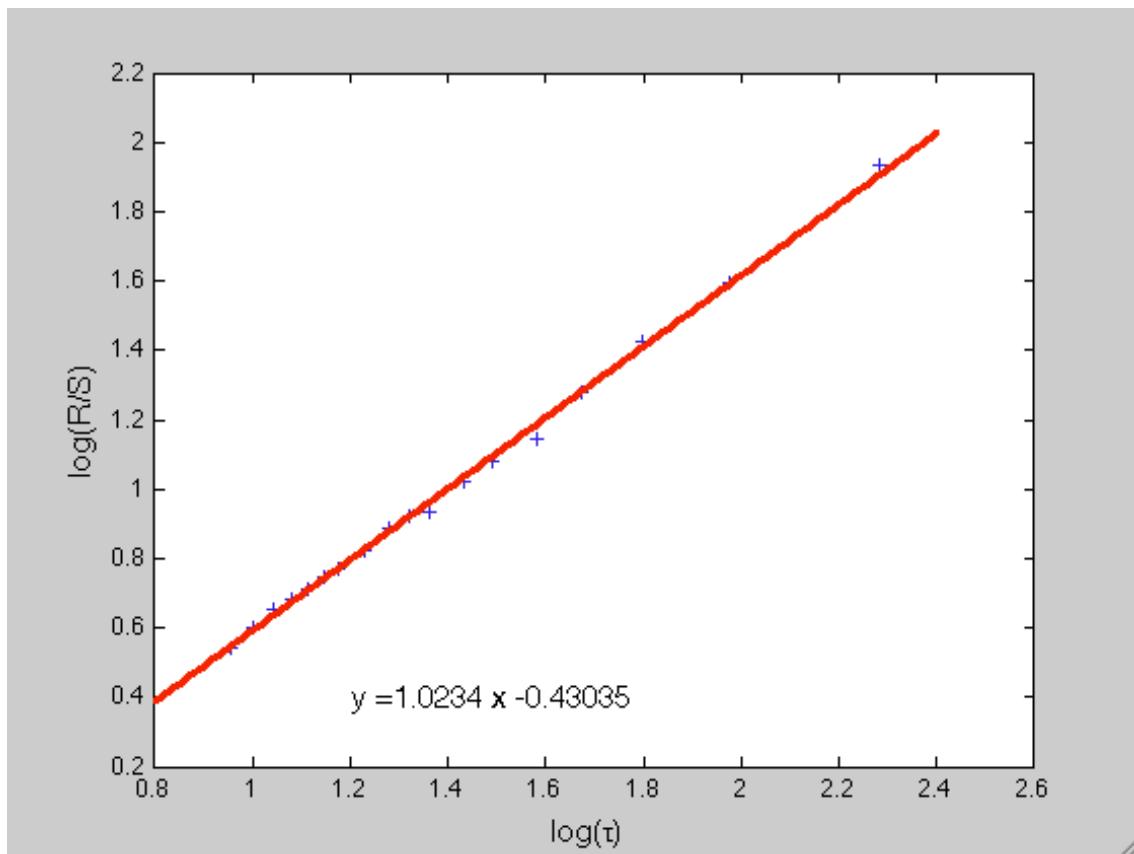
Date: 02/22/10 Time: 06:55

Sample: 2/20/2007 7/31/2009

Included observations: 383

	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	-0.269620	1.090045	-0.247348	0.8048
PLIMPIO7	0.794935	0.047774	16.63945	0.0000
PLIMPIO14	0.037086	0.075311	0.492431	0.6227
PLIMPIO21	0.461334	0.075185	6.135946	0.0000
PLIMPIO28	-0.296931	0.047883	-6.201133	0.0000
R-squared	0.994093	Mean dependent var	267.1607	
Adjusted R-squared	0.994030	S.D. dependent var	30.24473	
S.E. of regression	2.336831	Akaike info criterion	4.548437	
Sum squared resid	2064.174	Schwarz criterion	4.599978	
Log likelihood	-866.0257	Hannan-Quinn criter.	4.568883	
F-statistic	15902.86	Durbin-Watson stat	0.537983	
Prob(F-statistic)	0.000000			





Elaboración propia.

97MXMACFW062U

Dependent Variable: PLIMPIO

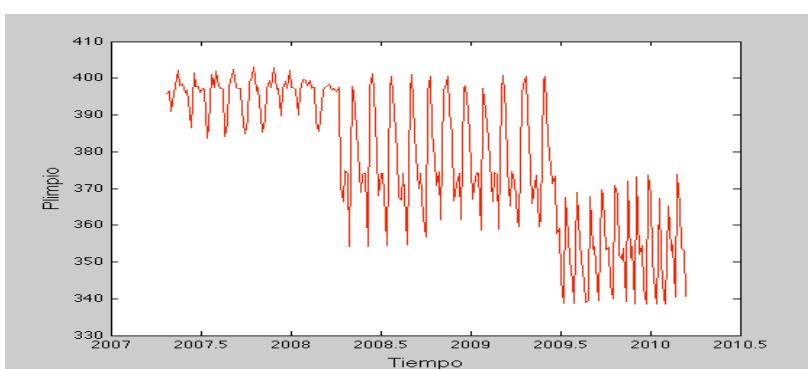
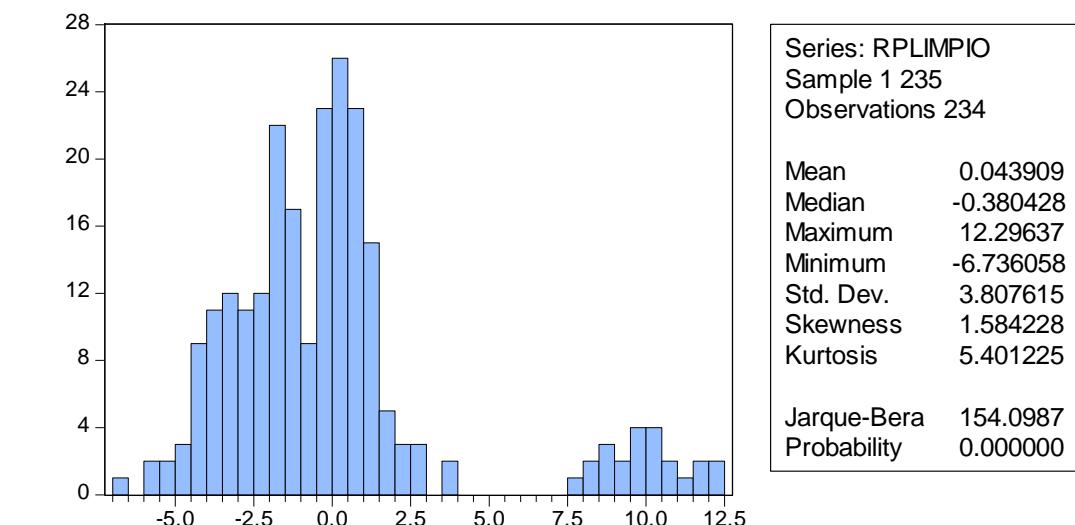
Method: Least Squares

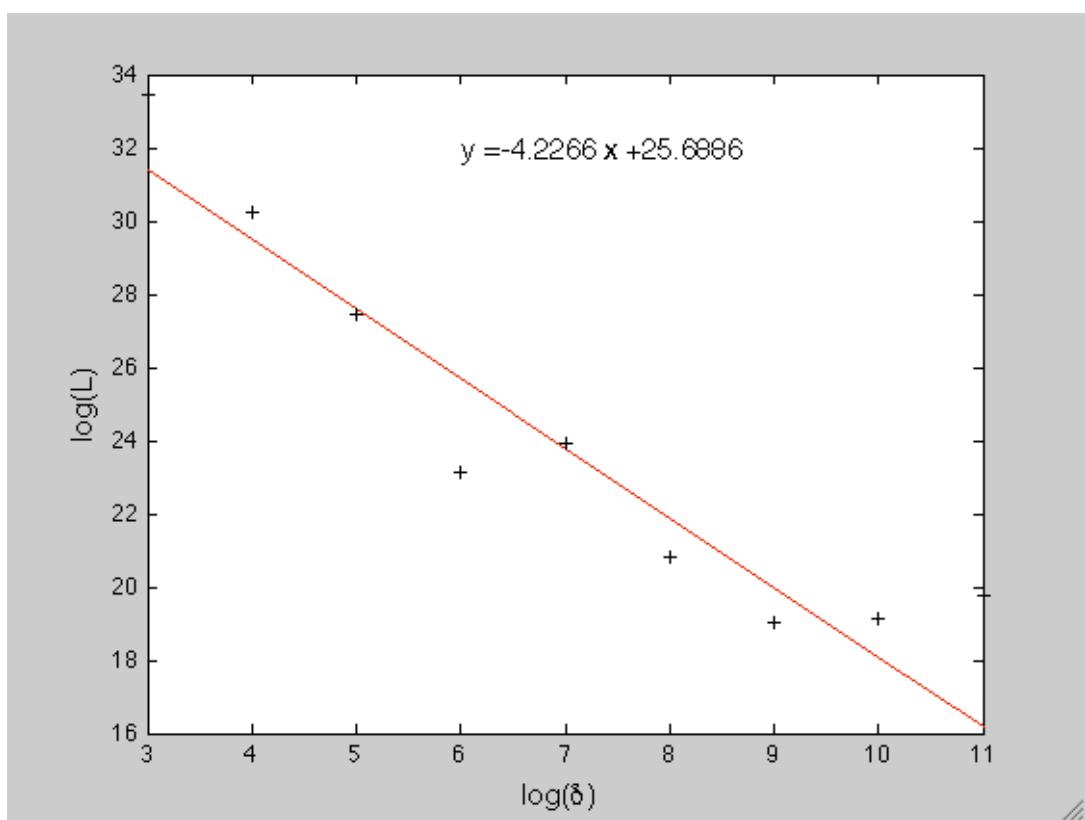
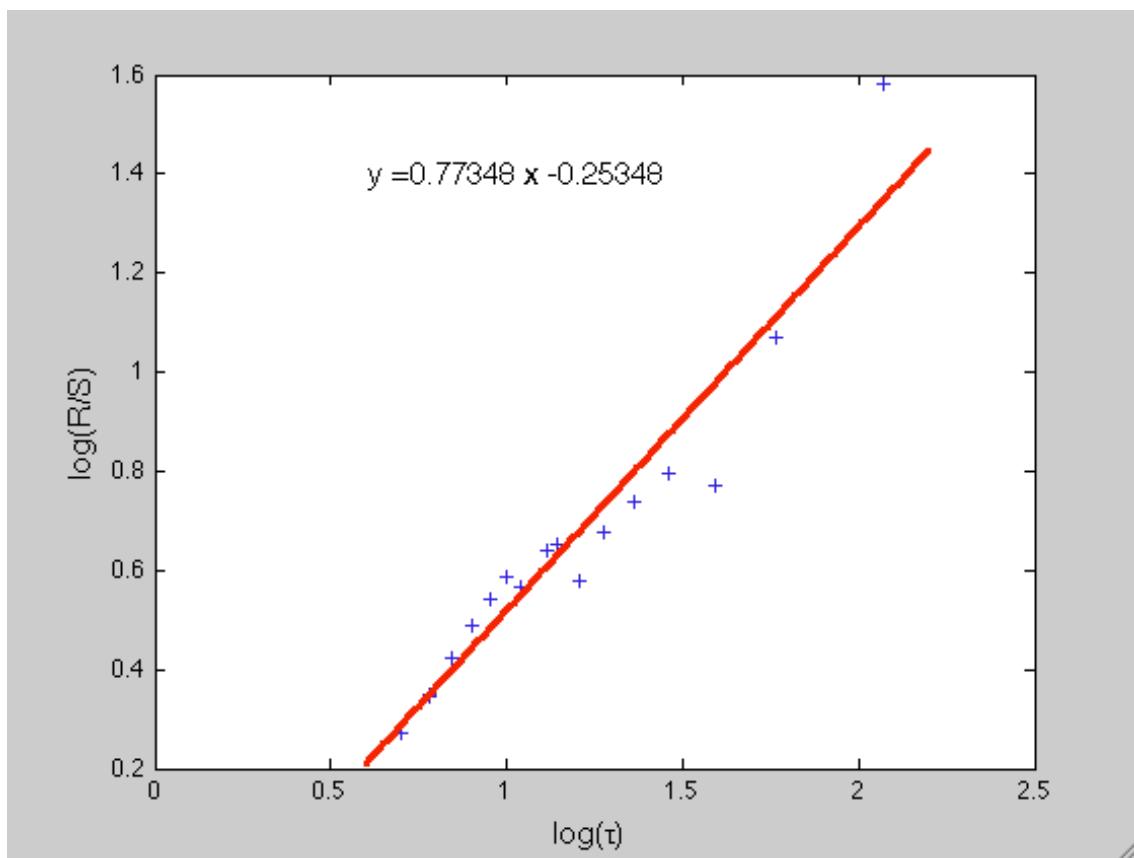
Date: 02/22/10 Time: 07:06

Sample: 1 635

Included observations: 635

	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	192.0598	22.80161	8.423079	0.0000
PLIMPIO7	0.078352	0.039455	1.985893	0.0475
PLIMPIO14	0.198530	0.039646	5.007576	0.0000
PLIMPIO21	0.074671	0.039638	1.883803	0.0601
PLIMPIO28	0.140673	0.039654	3.547470	0.0004
R-squared	0.104751	Mean dependent var	378.5116	
Adjusted R-squared	0.099067	S.D. dependent var	19.43935	
S.E. of regression	18.45134	Akaike info criterion	8.675994	
Sum squared resid	214484.8	Schwarz criterion	8.711062	
Log likelihood	-2749.628	Hannan-Quinn criter.	8.689611	
F-statistic	18.42876	Durbin-Watson stat	2.356095	
Prob(F-statistic)	0.000000			





Elaboración propia.

97PATRICB06U

Dependent Variable: PLIMPIO

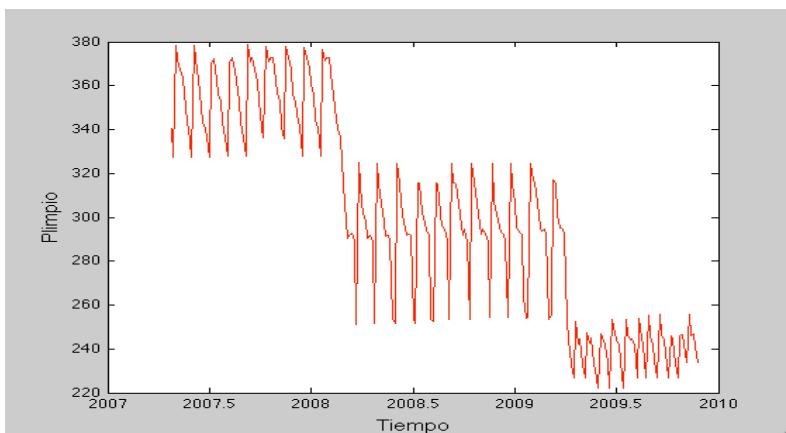
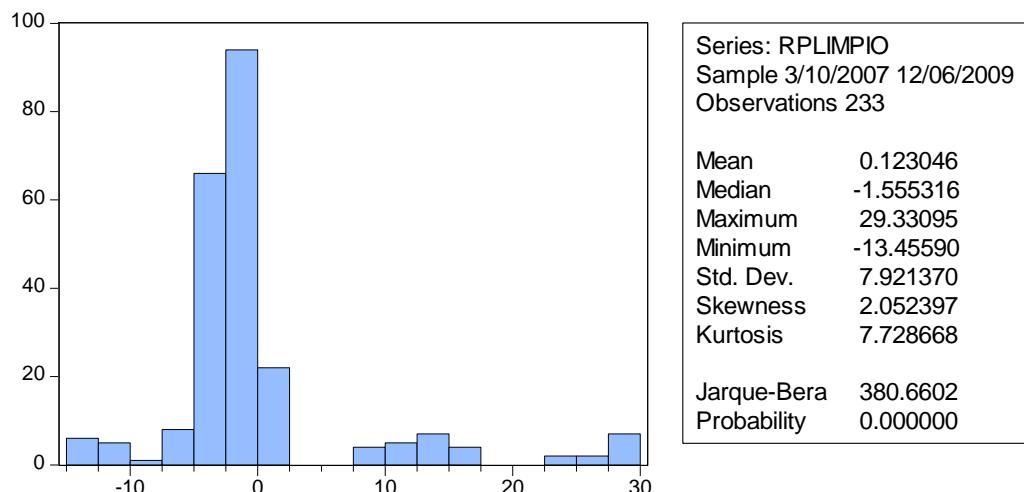
Method: Least Squares

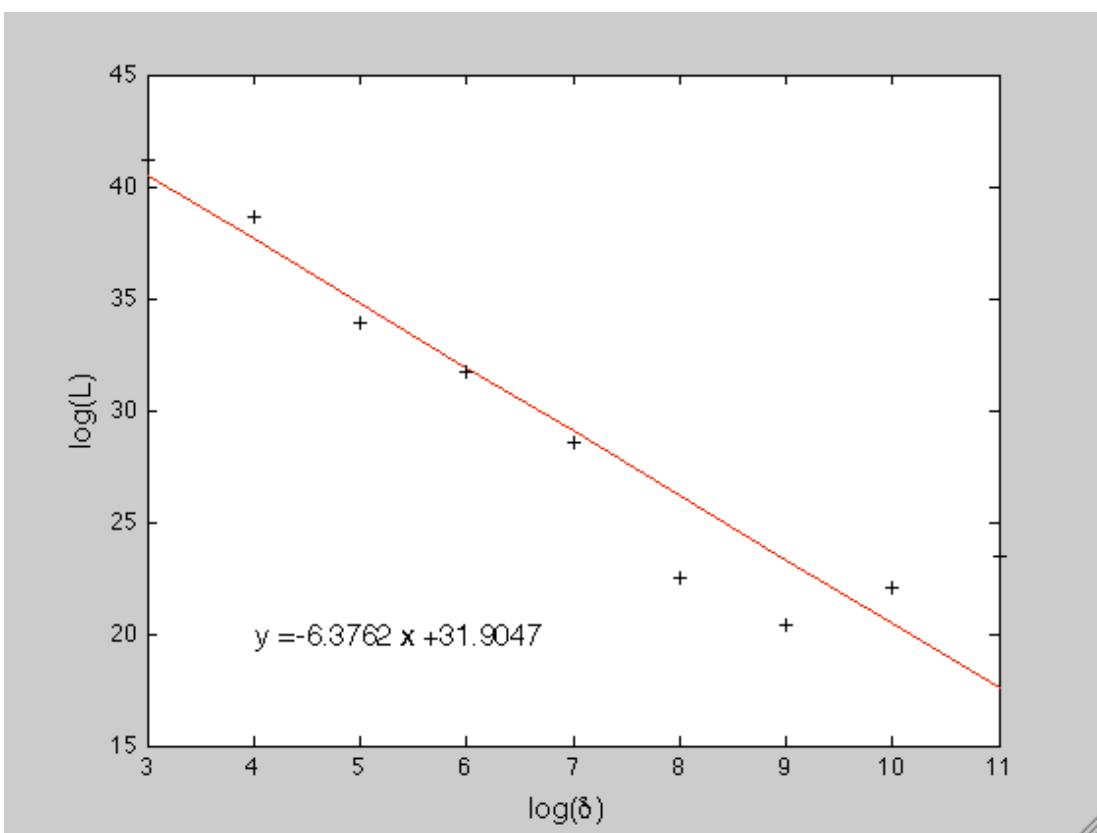
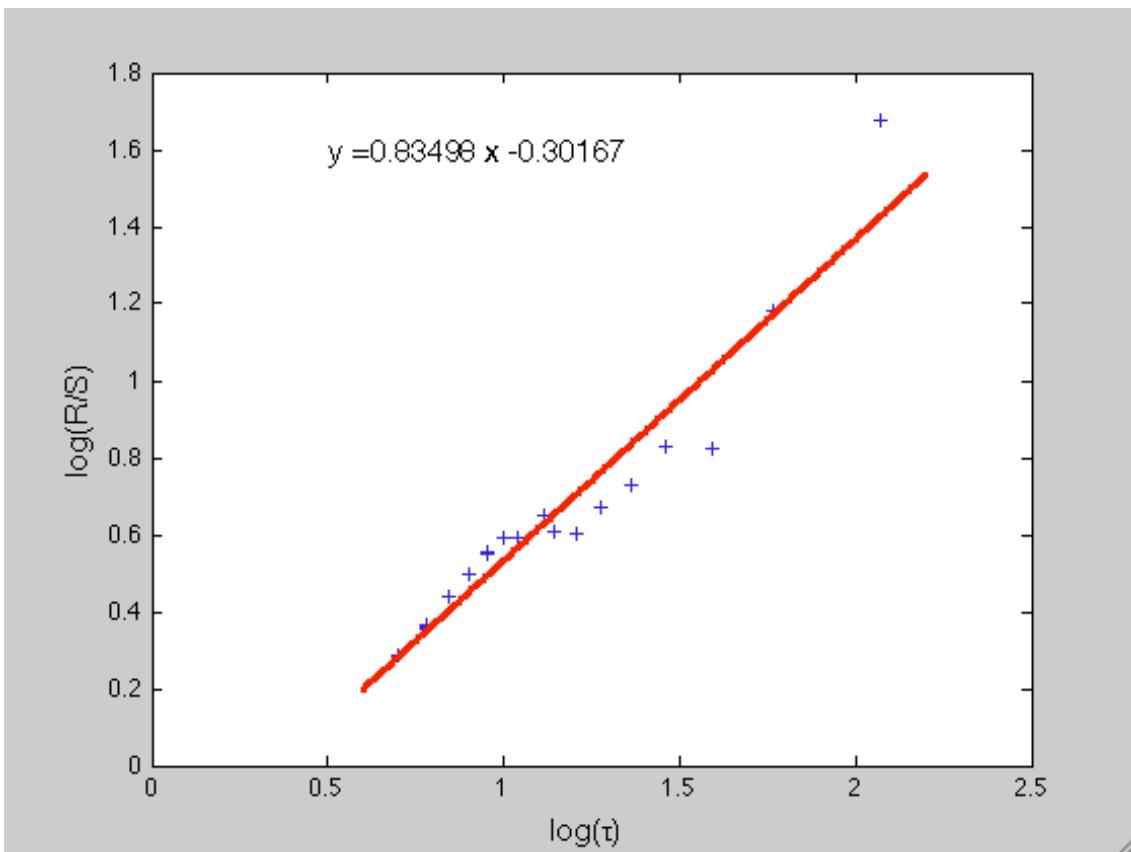
Date: 02/22/10 Time: 07:10

Sample: 1 635

Included observations: 635

	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	126.6889	16.17130	7.834185	0.0000
PLIMPIO7	0.146800	0.039466	3.719704	0.0002
PLIMPIO14	0.224579	0.039910	5.627094	0.0000
PLIMPIO21	0.062759	0.039816	1.576249	0.1155
PLIMPIO28	0.145459	0.039435	3.688565	0.0002
R-squared	0.167888	Mean dependent var	302.7559	
Adjusted R-squared	0.162605	S.D. dependent var	47.83135	
S.E. of regression	43.77013	Akaike info criterion	10.40362	
Sum squared resid	1206969.	Schwarz criterion	10.43869	
Log likelihood	-3298.150	Hannan-Quinn criter.	10.41724	
F-statistic	31.77743	Durbin-Watson stat	2.550621	
Prob(F-statistic)	0.000000			





Elaboración propia.

97SCOTICB08

Dependent Variable: PLIMPIO

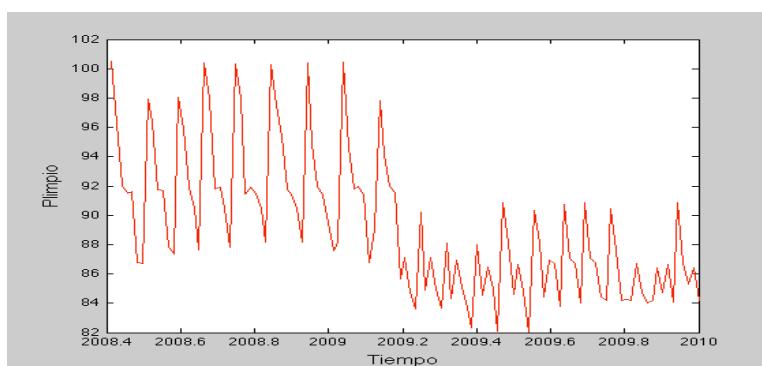
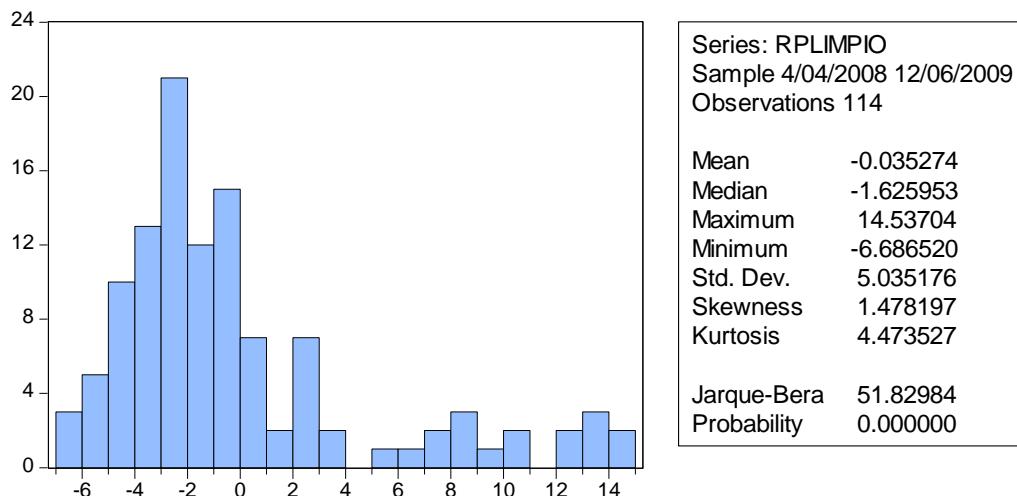
Method: Least Squares

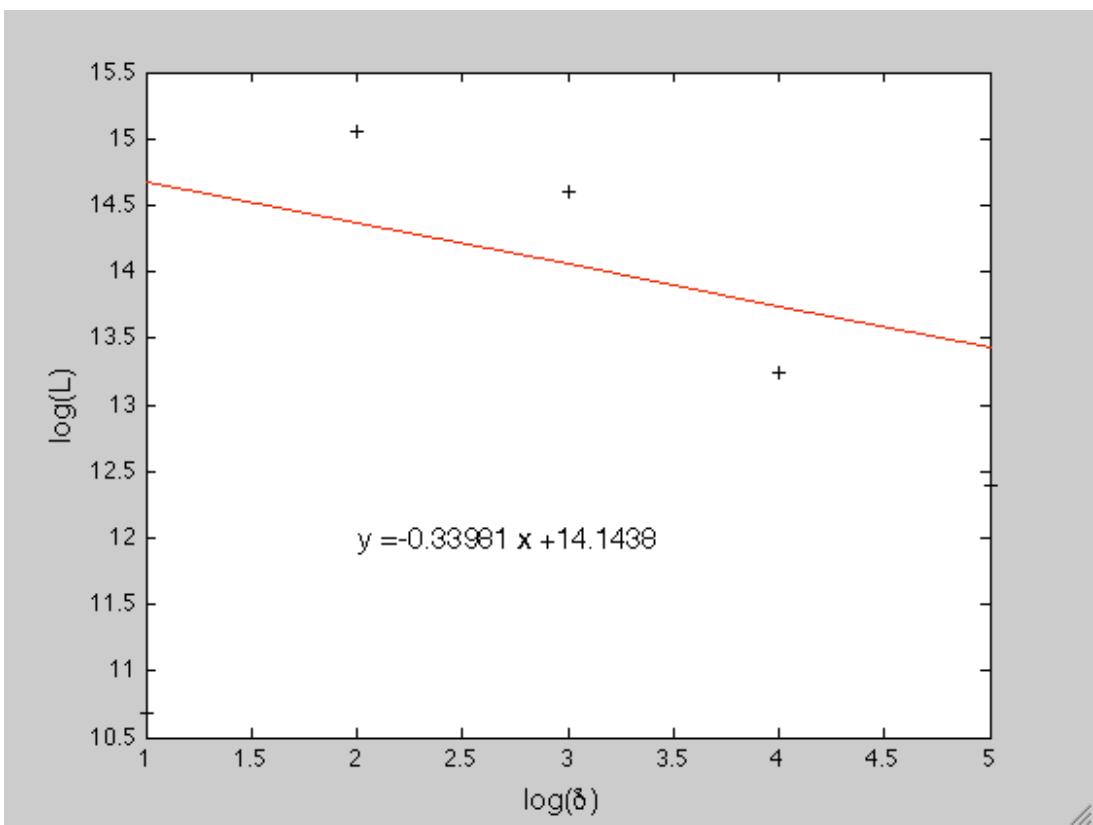
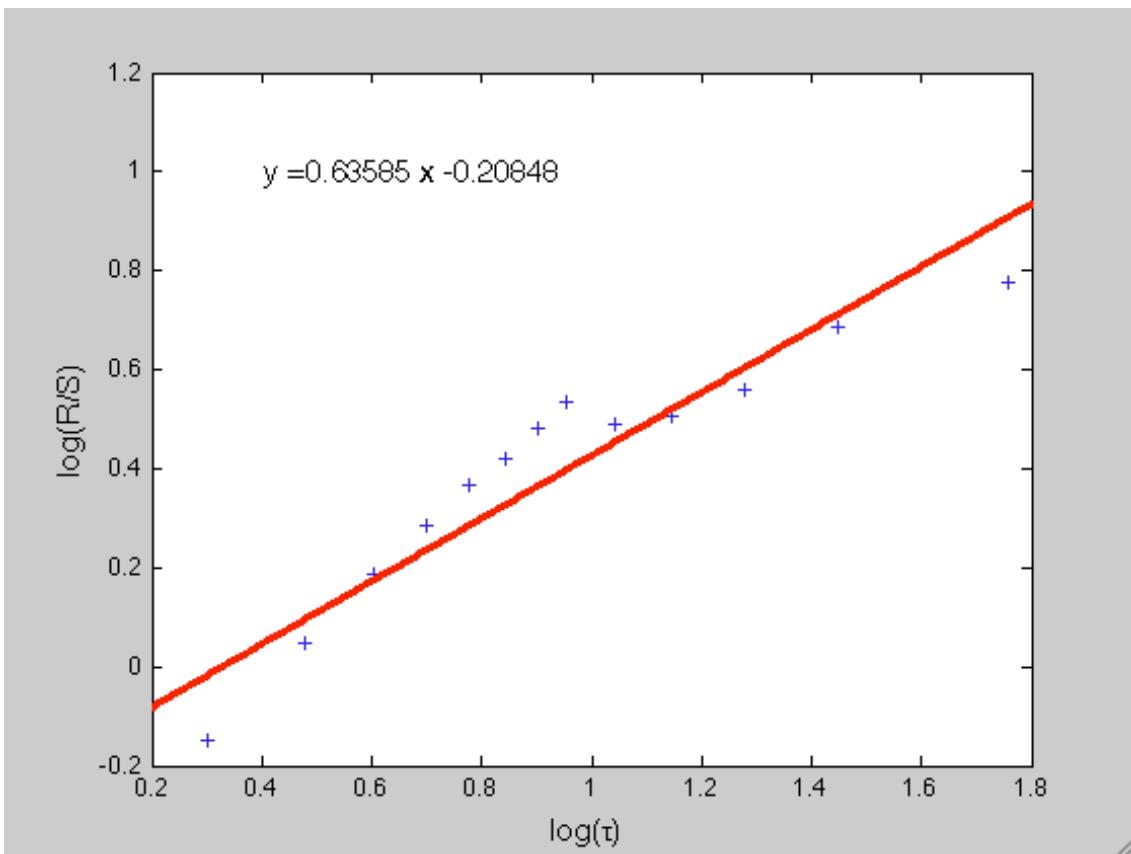
Date: 02/22/10 Time: 07:14

Sample: 1 332

Included observations: 332

	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	58.77876	8.295295	7.085795	0.0000
PLIMPIO7	0.026782	0.055494	0.482617	0.6297
PLIMPIO14	0.198636	0.054754	3.627779	0.0003
PLIMPIO21	0.129130	0.054508	2.369003	0.0184
PLIMPIO28	-0.009757	0.054808	-0.178031	0.8588
R-squared	0.061033	Mean dependent var	89.74157	
Adjusted R-squared	0.049547	S.D. dependent var	4.900382	
S.E. of regression	4.777441	Akaike info criterion	5.980633	
Sum squared resid	7463.428	Schwarz criterion	6.037939	
Log likelihood	-987.7850	Hannan-Quinn criter.	6.003486	
F-statistic	5.313728	Durbin-Watson stat	2.298493	
Prob(F-statistic)	0.000371			





Elaboración propia.

De las las graficas y datos anteriores podemos apreciar los métodos Box-Jenkins (normal) y el proceso Hurst (fractal), que nos permiten contrastar sus resultados, en el siguiente capitulo.

CAPITULO IV

Análisis y resultados.

Modelo clásico de regresión lineal

En el modelo clásico de regresión lineal se plantea un modelo autorregresivos en miras de ser congruente con el modelo Box-Jenkins de la siguiente manera:

$$Y_t = \alpha + \beta_{yt-7} + \beta_{yt-14} + \beta_{yt-21} + \beta_{yt-28} + u_t$$

Obteniendo los siguientes resultados.

Emisora	R ²	Durbin-Watson
97BACOMCB07	.958458	.293899
97BNORCB06	.995802	.451958
97BRHCCB07	.989333	.729188
97BRHCGCB03U	.994886	.559199
97BRHSCCB05U	.990913	.436194
97CREYCB062U	.904061	.382324
97CREYCCB06U	.982510	.380791
97DBCB072U	.780189	.372507
97FCASACB06U	.982374	.348633
97HICOACB062U	.974845	.430140
97HSBCCB07	.987974	.350430
97METROCB04U	.996906	.499314
97MFBCB05U	.990320	.424405
97MTROCB07U	.962991	.417941
97MTROFCB08	.762562	.289264
97MXMACCB04U	.994093	.537983
97MXMACFW062U	.104751	2.356095
97PATRICB06U	.167888	2.550621
97SCOTICB08	.061033	2.298493

En cuanto al coeficiente de determinación (R^2) que mide la bondad de ajuste del modelo el cual va de uno a cero. Uno implica un ajuste perfecto (lo que negaría la parte estocástica del modelo), y cero que el ajuste no es mejor que el valor medio de la variable dependiente, por lo que podemos decir que la mayoría de los modelos presentados cuentan con un buen ajuste de predicción

a la variable dependiente, excepto por Deutsche Bank México, S. A. (97DBCB072U), Metrofinanciera, S.A. de C.V. SOFOM, (97MTROFCB08), GMAC financiera, S.A. de C.V. SOFOL (97MXMACFW062U), Patrimonio, S. A. De C.V. SOFOL (97PATRICB06U), Scotiabank Inverlat, S.A. (97SCOTICB08), las anteriores empresas emisoras están sujetas a revisión con implicaciones negativas por parte de las calificadoras.

En la que respecta al estadístico Durbin-Watson en el cual sus valores oscilan entre 0 y 4, resultando lo siguiente:

Autocorrelación positiva perfecta	$d = 0$
Autocorrelación negativa perfecta	$d = 4$
Ausencia de autocorrelación	$d = 2$

Los valores aceptables de la prueba oscilan entre 1.5 y 2.5. Cabe advertir que la prueba Durbin-Watson no es aplicable si en la parte sistemática encontramos como regresor la variable endógena rezagada Guerrero (2008, p.98), tal advertencia se aplica a nuestro modelo que aplica cuatro rezagos de la variable endógena.

Modelo Box-Jenkins (supuestos de normalidad)

El modelo Box-Jenkins no asume ningún patrón particular en los datos históricos de la serie a pronosticar. Utiliza un enfoque iterativo de identificación de un modelo de tipo general, el modelo elegido se verifica contra los datos históricos para ver si describe la serie con precisión. El modelo se ajusta bien si los residuos entre el modelo de pronóstico y los datos históricos son reducidos de una manera aleatoria e independiente, bajo este enfoque los criterios de

selección son: el criterio de información de Akaike (AIC) y el criterio de Schwarz (SC), el primero (AIC) busca la mejor aproximación a la realidad por lo que es de esperarse resultados debajo de 2 y el segundo criterio (SC) usa argumentos bayesianos por lo que su selección es bajo un enfoque de probabilidad del modelo a la realidad por lo que también es de esperarse resultados debajo de 2 y con el mismo comportamiento anterior es decir $AIC \approx SC$ ¹⁵, aunado a lo anterior agregamos una última prueba a los supuestos de normalidad que es el estadístico de Jarque-Bera (JB), que se utiliza para determinar si los datos se distribuyen como una normal. Esta prueba mide la diferencia –exceso- entre la asimetría y la curtosis del conjunto de datos de interés (RPLIMPIO) respecto a los valores que presenta la distribución normal.

Bajo la hipótesis nula de una normal, el estadístico JB toma el valor máximo de 6 –por lo que valores superiores indican no normalidad¹⁶.

Proceso Hurst (fractal)

La dimensión fractal, describe como un objeto (o serie de tiempo) llena este espacio, es el producto de todos los factores que influencian el sistema que produce el objeto (o serie de tiempo), bajo esta dimensión se espera llegar a una dimensión cercana a 2^{17} .

Exponente de Hurst

Modelo de Rango Escalado (R/S analysis)

¹⁵ Griffiths, William E., Carter Hill R., Judge, Gerorge G. *Learning and practice econometrics*. John Wiley 1993. Pág. 848.

¹⁶ Guerrero de Lizardi, Carlos. *Introducción a la Econometría Aplicada*. Trillas 2008. Pág. 23

¹⁷ Peters, Edgar E. *CHAOS AND ORDER IN THE CAPITAL MARKETS A New View of Cycles, Prices, and Market Volatility*. Second Edition. John Wiley and Sons, Inc. 1996. Pag. 59.

Este modelo arroja un exponente de .5 para un camino aleatorio o ausencia de dependencia.

De esta manera por lo expuesto hasta ahora en este capítulo, estamos en condiciones de mostrar los resultados de los supuestos de normalidad y fractal para las 19 emisoras de Certificados Bursátiles BORHIS, mostrando lo siguiente:

Emisora	AIC	SC	JB
97BACOMCB07	2.945333	2.965778	275.6745
97BNORCB06	2.401540	2.453486	621.5661
97BRHCCB07	2.777044	2.854172	647.0799
97BRHCGCB03U	4.576473	4.628832	4920.302
97BRHSCCB05U	4.947929	4.999270	1524.300
97CREYCB062U	7.443418	7.494959	745037.9
97CREYCCB06U	5.438714	5.490255	1896.824
97DBCB072U	7.241389	7.298191	23952.51
97FCASACB06U	5.737915	5.789456	970.7143
97HICOACB062U	5.978037	6.029578	14685.32
97HSBCCB07	2.885676	2.941984	792.5168
97METROCB04U	4.408231	4.459771	4418.532
97MFBCB05U	5.177044	5.228585	22842.69
97MTROCB07U	7.259958	7.319942	356401.8
97MTROFCB08	4.171944	4.262721	632.7745
97MXMACCB04U	4.548437	4.599978	570.8897
97MXMACFW062U	8.675994	8.711062	154.0987
97PATRICB06U	10.40362	10.43869	380.6602
97SCOTICB08	5.980633	6.037939	51.82984

Bajo el método Box-Jenkins el modelo se ajusta para las emisoras siguientes:

BACOMCB = BBVA Bancomer

BNORCB = Banco Mercantil del Norte

BRHCCB = Hipotecaria Su Casita

HSBCCB = HSBC México, S.A.

De las 19 emisiones estudiadas ninguna pasa el supuesto de normalidad (JB), por lo cual podemos pasar al supuesto fractal (Proceso Hurst), mostrando los siguientes resultados:

Emisora	Exponente de Hurst	Dimensión Fractal
97BACOMCB07	1.0274	0.051603
97BNORCB06	1.0312	0.050186
97BRHCCB07	0.34261	0.10669
97BRHCGCB03U	0.51759	0.22382
97BRHSCCB05U	1.0197	0.23355
97CREYCB062U	0.98027	0.1699
97CREYCCB06U	1.0099	0.30789
97DBCB072U	1.0236	0.5812
97FCASACB06U	1.0063	0.33912
97HICOACB062U	1.0267	0.32799
97HSBCCB07	1.0268	0.062987
97METROCB04U	1.029	0.17688
97MFCCB05U	1.0174	0.21331
97MTROCB07U	1.0132	0.41585
97MTROFCB08	1.0127	0.11017
97MXMACCB04U	1.0234	0.18937
97MXMACFW062U	0.77348	4.2266
97PATRICB06U	0.83498	6.3762
97SCOTICB08	0.63585	0.33981

En cuanto a la dimensión fractal el ajuste no es satisfactorio para ninguna de las emisiones, y en cuanto al exponente de Hurst podemos hacer tres clasificaciones; la primera son aquellos exponentes iguales a .5, de esta manera se puede considerar como una emisión aleatoria y no correlacionada, por lo que los hechos presentes no tienen impacto en los hechos futuros, para lo cual no se tiene alguna serie con este exponente, la segunda clasificación es aquella que presenta un exponente de Hurst entre los valores 0 y 0.5 ($0 \leq H < 0$), este tipo de exponente es un antipersistent o ergódica (sistema dinámico), que también es conocido como “media revertida”, por lo que se entiende que si la serie ha estado subiendo en periodos anteriores es muy probable que en los periodos siguientes baje y viceversa. El fortalecimiento de esta antipersistencia depende de que tan cerca este el exponente a cero. Para esta clasificación solo se tiene la emisión “97BRHCCB07”, de Hipotecaria Su Casita, y la tercera clasificación es donde su presenta un exponente de Hurst entre .5 y 1 ($0.5 < H$

< 1) encontrando persistencia, entendiendo como tal, que si la serie se comporta con tendencia ascendente en periodos previos es de esperarse que en los periodos futuros ésta tendencia continúe, si el exponente es cercano a 0.5 habrá ruido y la serie no tendrá definición, por otro lado el fortalecimiento de la persistencia es cuando el exponente es cercano a 1 así la serie mostrará un movimiento fraccional browniano o un camino aleatorio sesgado Venegas (2006), Wilmott (2005), mostrando la existencia de memoria larga con lo que se desecha definitivamente la existencia de los supuestos de normalidad en que esta fundamentada la teoría financiera y bajo estas condiciones el resto de las emisoras tienen este comportamiento, un comportamiento fractal¹⁸.

Convergencia de los precios Futuros sobre el precio Spot

Cuando el mes de entrega de un contrato futuro se aproxima, los precios futuros convergen en el precio spot del activo subyacente. Cuando este periodo de entrega es alcanzado, los precios futuros son iguales o muy cercanos al precio spot.

Para ver como sucede esto, debemos suponer primero que los precios futuros están por arriba del precio spot durante el periodo de entrega. Así los tomadores de riesgos tendrán una clara oportunidad de arbitraje, por lo siguiente:

- a) Contratos cortos de futuros
- b) Compra del activo
- c) Ejercer la entrega

¹⁸ Ibídem Pág. 100

Lo anterior es valido para llevar a cabo una utilidad de un monto en el cual los precios futuros exceden al precio spot. Los tomadores de riesgos llevarán a cabo esta oportunidad de arbitraje y los precios futuros caerán Kravych (2002), Necula (2002). Supongamos ahora que los precios futuros están por abajo del precio spot durante el periodo de entrega. Las empresas interesadas en adquirir el activo encontrarán un atractivo en tomar contratos de posiciones largas del activo y esperar que la fecha de entrega se lleve a cabo.

El resultado es que los precios futuros son muy cercanos al precio spot durante el periodo de entrega¹⁹.

Para el caso de las emisiones estudiadas se tienen los siguientes precios observados en lapsos de un año.

Emisora	Año 0	Año 1	Año 2	Año 3
97BACOMCB07	99.22	86.80	81.64	
97BNORCB06	96.02	81.03	64.07	56.35
97BRHCCB07	95.82	74.07	62.51	
97BRHCGCB03U	234.96	190.71	142.00	125.09
97BRHSCCB05U	351.30	315.18	277.71	257.27
97CREYCB062U	383.68	380.02	359.29	288.27
97CREYCCB06U	378.77	357.87	312.53	288.43
97DBCB072U	381.97	386.04	351.27	349.72
97FCASACB06U	378.81	360.10	318.85	285.84
97HICOACB062U	391.10	357.23	310.37	297.06
97HSBCCB07	97.58	87.84	74.64	67.52
97METROCB04U	293.96	254.19	192.95	173.07
97MFCB05U	348.46	333.08	273.92	252.74
97MTROCB07U	380.75	391.67	286.43	277.80
97MTROFCB08	95.61	92.65	84.17	
97MXMACCB04U	316.71	282.11	237.57	219.38
97MXMACFW062U	395.85	397.27	357.74	372.85
97PATRICB06U	340.47	336.05	252.70	233.81
97SCOTICB08	100.51	85.65	84.19	

El comportamiento de los precios de las emisiones en el tiempo es lo que hace evidente la necesidad de un instrumento derivado Futuro.

¹⁹ Hull (2003).

CAPITULO V

Conclusiones.

Los resultados presentados en el capítulo anterior muestran la necesidad de seguir generando mayor certidumbre en el inversionista y que esto se convierta en mayor liquidez²⁰, dando lugar al desarrollo de nuevos estudios e instrumentos que tengan por objeto la administración de riesgos del mercado hipotecario mexicano.

La presente investigación se ha desarrollado en una etapa sin precedente en la historia financiera de México, ya que por una parte desde un inicio siempre se advirtió de la necesidad del desarrollo del mercado de hipotecas, y por otra parte éste estudio se realizó en un periodo de crisis hipotecaria en Estados Unidos (nuestro principal socio comercial, “hipotecas subprime”), por lo que se sigue advirtiendo en la revisión de procesos de selección, toma de riesgos, garantías, seguros de crédito, venta real de la cartera, pero sobre todo insistir en la transparencia en dichos procesos.

Desde el punto de vista de las condiciones necesarias para el desarrollo del mercado hipotecario, destaca la solidez del mercado que solo se logra con el tiempo y no siguiendo una moda y específicamente ir edificando estudios que contemplen enfoques no deterministas, ya que estos abren la posibilidad de incorporar factores que distorsionan dicho mercado, además de no sujetarse a la serie de precios en sí, sino buscar la calidad de las observaciones en la serie

²⁰ Recordemos la hipótesis de mercados fractales en la pág. 38

de tiempo (histórico de precios), ya que como se ha demostrado, es este enfoque el que permite analizar de una manera mas amplia las series emitidas en este mercado, para así poder iniciar la operación de instrumentos derivados (Futuros), en un corto plazo (1 año) y posteriormente a un plazo mayor, para que el desarrollo de este mercado sea atractivo para inversionistas institucionales extranjeros, con el conveniente de un flujo de inversión permanente, que permita tener blindajes a especulaciones o volatilidad internacional, dando lugar al surgimiento de nuevos instrumentos de administración de riesgos.

Anexo 1

Programa en Matlab R2010a para el cálculo del exponente de Hurst y dimensión fractal de series de tiempo.

Este programa calcula el exponente de Hurst utilizando la técnica de análisis de rango escalado (Rescaled Range Analysis, o R/S), y la dimensión fractal a partir de calcular la longitud de la serie usando diferentes tamaños de regla (Referencias 1 y 2). Para ver los resultados del programa he utilizado las series de precios diarios de las 19 emisiones para certificados bursátiles respaldados por hipotecas BORHIS para el periodo 2007-2009.

```
clear all
close all
load 97BACOMCB07
s = a;
N = length(s);
fi=figure;
t= 1:N;
T = (4*t/N)+2007;
plot(T,s,'r')
Xlabel('Tiempo','FontSize',12)
Ylabel('Plimpo','FontSize',12)
%
```

Figura 1. Datos diarios de los precios de los BORHIS como función del tiempo para el periodo 2007 – 2009.

Exponente de Hurst

El análisis R/S consiste en escoger un cierto número de escalas, obtener la media del vector, calcular las diferencias de cada valor con respecto a la media y hacer una suma acumulativa de ellas. El rango es la diferencia entre el valor máximo y el valor mínimo de esta suma. Al dividir entre la desviación standard se obtiene R/S lo cual de acuerdo con Hurst, es proporcional a $c t^H$, donde c es una constante (0.5) y t es la escala en cuestión. Así que al graficar $\log(R/S)$ vs t, la pendiente de la recta es H.

```
for i = 1:20;
    m = floor(N/(2^i));
    for j=1:i;
        r = s(1+(j-1)*m:j*m);
        M = mean(r);
        x = (r-M);
        V = cumsum(x);
        R(j) = max(V)-min(V);
        S(j) = std(r);
    end
    tau(i) = m;
    RS(i) = mean(R./S);
End
```

```

f2=figure;
plot(log10(tau),log10(RS),'+')
xlabel('log(\tau)', 'FontSize', 12)
ylabel('log(R/S)', 'FontSize', 12)
hold on
q = polyfit(log10(tau),log10(RS),1);
t = 1.5:.01:3;
y = q(1)*t+(q(2));
plot(t,y,'r','LineWidth',2)
text(2.5,1.5,['y = ' num2str(q(1)), ' x ' num2str(q(2))], 'FontSize', 12)
hold off

```

Figura 2. Grafica del log(τ) versus log(R/S) que representa el análisis de rango reescalado, de donde se extrae el exponente de Hurst.

Más que la dimensión fractal, lo que se calcula aquí es la longitud de una serie utilizando reglas de diferente tamaño. Entre mas pequeña es la regla mas grande es la longitud. Si la serie es fractal, esto es, no una escala característica, $\log(x)$ vs $\log(L)$ es una línea recta cuya pendiente es la dimensión fractal.

A diferencia del análisis anterior, la mejor aproximación se logra a partir de una regla suficientemente corta, por lo que aquí se consideran divisiones entre 20 y 60.

```

ini = 20;
for j=ini:60;
    del = floor(N/j);
    s1 = s(1:del:(N-del));
    s2 = s(del:del:N-1);
    k = j-ini+1;
    L(k) = sum(sqrt(del^2+(s2-s1).^2))^0.5;
    delta(k) = del;
end
f3=figure;
del = (delta - mean(delta))./std(delta);
qd = polyfit(del,L,1);
pd = polyval(qd,del);
plot(delta,pd,'-r',delta,L,'+k')
xlabel('log(\delta)', 'FontSize', 12)
ylabel('log(L)', 'FontSize', 12)
yd = qd(1)*t+qd(2);
text(60,48,['y = ' num2str(qd(1)), ' x + ' num2str(qd(2))], 'FontSize', 12)
H1 = 2-qd(1);
Fraction=(qd(1)-q(1))/q(1);

```

Figura 3. Gráfica de $\log(\delta)$ versus $\log(\text{longitud})$ en donde solo se han tomado escalas pequeñas (entre 70 y 120 días) para los cuales se puede ajustar una línea recta.

BIBLIOGRAFÍA.

- Bertalanffy, Ludwig von (2006) Teoría general de los sistemas, Mexico, FCE.
- Black, F. and M. Scholes (1973) The pricing of Options and corporate liabilities, *Journal of Political Economy*, 81, pp. 637-659.
- Cont. R (1994) Long dependence in financial markets, *Centre de Mathématiques appliquées, Ecole Polytechnique France / Finances Publiques*, 49(2), pp. 282-286.
- Cortés del Moral, Rodolfo (2009) Complejidad y pensamiento crítico, *Universidad de Guanajuato*.
- Dai W. and C. Hayde, (1996) Itô Formula with respect to fractional brownian motion and its application, *J. Appl. Math. Stoch.*, Anal 9, 439-448.
- Dasgupta, A. (1998) Fractional Brownian Motion: Its properties and applications to stochastic integration. *Ph. D. Thesis, Dept. of Statistic, University of Carolina at Chapel Hill*.
- Dasgupta, A. and G. Kallianpur, (2000) Arbitrage opportunities for class of Gladyshev process, *Appl. Math. Optim.*, 41, 3, 377-385.
- Duncan, T. E., Y., Hu and B., Pasik-Duncan (2002) Stochastic Calculus for Fractional Brownian Motion, *SIAM J. Control Optim.*, 38, 582-612.
- Fabozzi, Frank J. (2004) Bond Markets, Analysis and Strategies. *Fourth Edition, Prentice Hall*.
- Fleming, Ostdiek y Whaley, (1965) Predicting Stock Market Volatility: a new measure, *The Journal of Futures Markets* vol(15) 3, 265-302.
- Guerrero de Lizardi, Carlos (2008) Introducción a la Econometría Aplicada. México, Trillas.

- Gihman, I.I., Skorohod, A.V. (1972) Stochastic Differential Equations. Springer-Verlag, Berlin.
- Hu, Y. and B. Oksendal, (2000) Fractional White Noise Calculus and Applications to Finance, *Preprint University of Oslo*.
- Hull, John C. (2003) Options Futures and Other Derivatives, *Fifth Edition, Prentice Hall*.
- Hull, J. and A. White (1987) The Pricing of Options on Assets on Stochastic Volatilities, *The Journal of Finance*, 42(2), pp.281-300.
- Hurst, H. (1951) The long-term storage capacity of reservoirs, *Transactions of American Society Civil Engineer*, 116 - 195.
- Kauffman, Stuart (2003) Investigaciones. Complejidad, autoorganización y nuevas leyes para la biología general, *España, Tusquets*.
- Kravych, Y. (2002) Stock Price Modeling by Long-Memory Process, Overview of the Fractional Brownian Motion Approach, *University of New Wales Sydney Australia*.
- Lin, S. (1995) Stochastic analysis of fractional Brownian, *Stochastics and Stochastic Reports Volume 55*, Issue 1 - 2.
- Mandelbrot, B. (1982) The Fractal Geometry of Nature, NY W.H. Freeman
- Mandelbrot, B. (1987) Los objetos fractales, *Barcelona, Tusquets*.
- Mandelbrot, B. and V. Ness (1968) Fractional Brownian Motions, Fractional Noises and Applications, *SIAM review 10*, 422 - 437.
- McCulloch J. (1985) The value of european Options with Log-Stable Uncertainty, *Working paper*.
- McCulloch J. (1978) The pricing of Short Lived Options when Price Uncertainty is Log-symmetries stable, *Working paper*.

- Necula C. (2002) Modeling and detecting Long Memory in Stock returns, *Academy of Economic Studies, Dissertation Paper.*
- Necula C. (2002) Option Pricing in a Fractional Brownian Motion Environment, *Academy of Economic Studies, Bucharest Romania.*
- Norros, I. , E. Valkeila. , and J. Virtamo (1999) An Elementary approach to a Girsanov Formula and Other Analytical Results on Fractional Brownian Motions, *Bernoulli* 5, 4, 571 – 587.
- Oksendal B. (2004) Fractional Brownian Motion in Finance, *Preprint University of Oslo.*
- Palomas E. (2002) Evidencia e Implicaciones del fenómeno Hurst en el mercado de capitales, *Gaceta de economía*, Año 8, Núm. 15.
- Peters, E. (1991), *Chaos and Order in Capital Markets*, New York: John Wiley and Sons.
- Peters, E. (1994), *Fractal Market Analysis (Applying Chaos Theory to Investment an Economic)*, New York: John Wiley and Sons.
- Rosek, S. and R. (2006) Schobel Risk Preference Based Option Pricing in Fractional Brownian Market, *Preprint Faculty of Economics and Business Administration, University of Tbingen, Germany.*
- Sametband, Moisés José. (1999) Entre el orden y el caos, la complejidad, México FCE, *la ciencia para todos* 167, 14.
- Schifter, Isaac. (2000) La ciencia del caos, México FCE, *la ciencia para todos* 142, 56.
- Shiryayev, A. (1998) On arbitrage and replication for fractal model, *Shiryayev and Sulem editors, Workshop on mathematical finance, INRIA, Paris.*

Sánchez, C. (2001), Valor en Riesgo y otras aproximaciones, *Ed. Valuación, Análisis y Riesgo S.C.*

Vasconcelos G. (2004) A guide walk down wall street: an introduction to econophysics, *Universidade Federal Pernambuc Brasil.*

Vasicek, O. (1977) An equilibrium characterization of term structure, *Journal of Financial Economics*, 5, pp. 177-188.

Venegas, F. (2006) Riesgos Financieros y Económicos, *Thompson.*

Wilmot, P. (2005) Quantitative Finance, *Wiley.*

FUENTES.

Asociación Hipotecaria Mexicana. <http://www.ahm.org.mx/>
Bond Market. <http://www.bloomberg.com/news/bonds/>
Fitchibca. http://www.fitchratings.com/index_fitchratings.cfm
Mexder. <http://www.mexder.com.mx/MEX/paginaprincipal.html>
Standard and Poors. <http://www.standardandpoors.com/home/es/la>