



UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN NICOLÁS DE  
HIDALGO

INSTITUTO DE FÍSICA Y MATEMÁTICAS

ACREACIÓN DE UN FLUIDO PERFECTO CON UN CAMPO  
ESCALAR FANTASMA EN UN HOYO NEGRO

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:  
MAESTRO EN EL ÁREA DE FÍSICA

PRESENTA:

IVÁN MARGARITO ÁLVAREZ RIOS

DIRECTOR DE TESIS:  
DR. JOSÉ ANTONIO GONZÁLEZ CERVERA



MORELIA MICH.

FEBRERO DE 2021



*A mi madre.  
Dedicación*



# Agradecimientos

Agradezco al Dr. José Antonio González Cervera por dirigir este trabajo. Al Dr. Francisco Siddhartha Guzmán Murillo por resolver muchas dudas que se me presentaron a lo largo de la elaboración de este trabajo. Agradezco a el CONACYT por el apoyo económico brindado durante la realización de este proyecto. Agradezco a mi madre y a Daniela por su apoyo y por darme ánimos cada día.

*Morelia MEX., 12 de febrero de 2021*



# Resumen

En este trabajo se presenta el uso de métodos numéricos para el estudio de la dinámica de un fluido perfecto acoplado con un campo escalar fantasma acumulado en un hoyo negro cuya geometría esta descrita por las ecuaciones de Einstein; el proceso de acreación del fluido perfecto produce un aumento del tamaño del hoyo negro caso contrario a el efecto del campo escalar el cual hace que reduzca, por lo que la combinación de ambos procesos puede mantener a un hoyo negro con el mismo tamaño que al tiempo inicial después del proceso de acreación. Con la finalidad de ilustrar cada uno de los procesos por separado se presentan cuatro escenarios: 1) Se evoluciona a las funciones métricas en el vacío con la finalidad de observar cual es el efecto de las condiciones de norma sobre la solución. 2) El proceso de acumulación de materia por un gas ideal en un hoyo negro, por lo que es necesario tener un acoplamiento no-lineal entre la geometría y las ecuaciones de Euler relativistas que describen la dinámica del fluido. 3) Acreación de un campo escalar fantasma en un hoyo negro, al igual que con el gas ideal, en esta parte se tiene un acoplamiento no-lineal entre la geometría y la ecuación de Klein-Gordon que es usada como modelo para describir la energía oscura. 4) El último escenario muestra un nuevo estudio sobre el acoplamiento mínimo de un fluido perfecto con el modelo de energía oscura. Las soluciones encontradas corresponden a sistemas esféricamente simétricos. Para el desarrollo comenzamos en el segundo capítulo introduciendo las ecuaciones necesarias que modelan cada uno de los escenarios mencionados, ya que es un estudio altamente no-lineal se encontraron soluciones aproximadas mediante el uso de método numéricos descritos en el tercer capítulo y así en el cuarto capítulo se presentan los resultados junto a pruebas de convergencia que garantizan la fiabilidad de las soluciones.

Palabras clave: tensor, métrica, hoyo negro, acreación, gas ideal, campo escalar fantasma.





# Abstract

In this work the use of numerical methods is presented for the study of the dynamics of a perfect fluid coupled with a phantom scalar field accumulated in a black hole whose geometry is described by Einstein's equations; the process of accretion of the perfect fluid produces an increase in the size of the black hole, contrary to the effect of the scalar field that causes it to reduce, so the combination of both processes can maintain a black hole with the same size as the initial time after the accretion process. In order to illustrate each of the processes separately, four scenarios are presented: 1) The metric functions are evolved in a vacuum in order to observe what is the effect of the standard conditions on the solution. 2) The process of accumulation of matter by an ideal gas in a black hole, so it is necessary to have a non-linear coupling between the geometry and the relativistic Euler equations that describe the fluid dynamics. 3) Creation of a phantom scalar field in a black hole, as with the ideal gas, in this part there is a non-linear coupling between the geometry and the Klein-Gordon equation that is used as a model to describe the energy dark. 4) The last scenario shows a new study on the minimal coupling of a perfect fluid with the dark energy model. For the development we begin in the second chapter by introducing the necessary equations that model each of the mentioned scenarios, since it is a highly non-linear study, approximate solutions were found through the use of numerical methods described in the third chapter and thus in the fourth chapter present the results together with convergence tests that guarantee the reliability of the solutions.



# Índice general

<b>Agradecimientos</b>	<b>I</b>
<b>Resumen</b>	<b>III</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>3</b>
<b>2. La descomposición 3+1 de las ecuaciones de Einstein</b>	<b>5</b>
2.1. Formalismo 3+1	6
2.2. Formulación ADM y GBSSN	9
2.3. Hidrodinámica Relativista	12
2.4. Campo escalar Fantasma	15
2.5. Acoplamiento mínimo EKG	18
<b>3. Métodos Numéricos</b>	<b>21</b>
3.1. Diferencias Finitas	21
3.2. Volúmenes Finitos	26
3.3. Método de Líneas	27
3.4. Convergencia, consistencia y estabilidad	28
<b>4. Resultados</b>	<b>31</b>
4.1. Evolución de un hoyo negro en el vacío	32
4.2. Acreación de un gas ideal	32
4.3. Acreación por un campo escalar fantasma	36
4.4. Acreación por EKG	40
<b>5. Conclusiones</b>	<b>51</b>
<b>A. Métrica de Schwarzschild en coordenadas isotrópicas</b>	<b>53</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>57</b>



# Índice de figuras

2.1. Foliación del espacio-tiempo $(M, g_{\mu\nu})$ en hipersuperficies $\Sigma_t$ a un tiempo constante $t$ . . . . .	6
3.1. Función discreta $f(x)$ en el dominio discreto uniformemente espaciado con tamaño de malla $\Delta x = (x_{max} - x_{min})/N$ . . . . .	22
3.2. Dominio discreto $\Omega^d$ para un problema de valores iniciales en una dimensión. . . . .	25
3.3. A la derecha se muestra un esquema estable en el que se cumple la condición de <i>Courant–Friedrich–Lewy</i> y a la izquierda uno inestable donde no se cumple. . . . .	26
4.1. Instantáneas de la evolución de la función métrica $g_{rr}$ durante el intervalo de tiempo $[0, 100M]$ . A la izquierda con un desplazamiento nulo y a la derecha con un corrimiento que satisface la condición de norma $\Gamma$ -Driver. . . . .	33
4.2. Localización del horizonte de eventos del hoyo negro mediante la trayectoria de geodésicas y el horizonte aparente en cada instante del tiempo. . . . .	34
4.3. Convergencia de la 2-norma del error de las constricciones hamiltoniana, de momento y la constante $G$ . . . . .	34
4.4. Instantáneas cada $10M$ unidades de tiempo de la densidad de masa en reposo para valores de $A = 2.5 \times 10^{-3}$ , $r_0 = 20$ y $\sigma = 0.5$ para los cuatro escenarios planteados. . . . .	36
4.5. Localización del horizonte aparente (línea punteada) y el horizonte de eventos para los primeros dos casos. . . . .	37
4.6. Horizonte aparente del hoyo negro para los cuatro casos mencionados. . . . .	37
4.7. Convergencia de la 2-norma para las constricciones del sistema utilizando tres resoluciones distintas para los cuatro escenarios. . . . .	38
4.8. Evolución del campo escalar fantasma para un potencial $V = \lambda\phi^2$ para valores de $\lambda = 0$ y $-0.1$ en los instantes de tiempo $t = 0, 50M, 100M$ y $150M$ . . . . .	39
4.9. Localización del horizonte aparente y el horizonte de eventos para el problema no lineal del campo escalar fantasma con potencial $V = \lambda\phi^2$ para valores de $\lambda = 0$ y $-0.1$ . . . . .	40
4.10. Convergencia de la 2-norma de las tres constricciones para los dos escenarios con $\lambda = 0$ y $-0.1$ . . . . .	41
4.11. Perfiles de la densidad de masa en reposo para el PVI EKG comparado con el PVI de Euler. . . . .	42
4.12. Perfiles del campo escalar fantasma para el PVI EKG comparado con el PVI de Euler. . . . .	43
4.13. Horizonte aparente del hoyo negro para la acreación EKG. . . . .	43
4.14. Convergencia de la 2-norma para las constricción en la acreación EKG. . . . .	44

---

4.15. Instantáneas de la densidad de masa en reposo para el acomplamineto mínimo EKG cada $10 M$ unidades de tiempo. . . . .	46
4.16. Perfil del campo escalar fantasma para el caso KG y EKG. . . . .	47
4.17. Localización del horizonte de eventos y el horizonte aparente del hoyo negro en el PVI de EKG. . . . .	48
4.18. Convergencia de la 2-norma de las constricciones de las ecuaciones de Einstein para el PVI de EKG, cuando se tiene un espacio tiempo de Schwarzschild exacto al tiempo inicial. . . . .	49



# Capítulo 1

## Introducción

Los hoyos negros son un tema bastante estudiado en la relatividad general desde hace más de 100 años, los cuales son caracterizados por ser objetos tan compactos que ni siquiera la luz puede escapar de ellos. No fue hasta marzo del 2019 cuando se tuvo la primer observación directa de un hoyo negro supermasivo en el centro de la galaxia elíptica gigante M87 [1] lo cual motiva aún más el estudio de dichos objetos de nuestro universo. Uno de los procesos principales de estudio es el de acumulación de materia y energía en los agujeros negros, así que suponiendo que se satisfaga la condición de energía nula, el área del horizonte solo puede aumentar [7]. Un fluido perfecto de materia ordinaria o también llamada bariónica modelado mediante las ecuaciones de Euler relativistas satisface dicha condición por lo que el proceso de acreación de un fluido perfecto en un agujero negro tiene el efecto de hacer que este aumente su tamaño como se puede ver un estudio detallado para sistemas no-lineales con simetría esférica en [10]. Si dicha condición se viola cosas extrañas suceden; por ejemplo el proceso de acreación de la energía oscura modelada mediante un campo escalar fantasma que satisface la ecuación de Klein-Gordon (KG) en [2, 3] muestra que el horizonte de eventos de un agujero negro reduce su tamaño.

Se estima que cerca del 73 % de la masa del universo esta formada por energía oscura, un 23 % por materia oscura y el 4 % por la materia bariónica, por lo que no debería de sorprender que en todo proceso de acreación contribuyan estas tres fuentes. Así que motivados por [2, 3, 10] y estas estimaciones, en este documento se presenta el estudio no-lineal de acreación de un fluido perfecto acoplado mínimamente con el modelo de energía oscura KG en un hoyo negro para sistemas con simetría esférica.





## Capítulo 2

# La descomposición 3+1 de las ecuaciones de Einstein

Las ecuaciones de Einstein en unidades geometrizadas ( $G = c = 1$ ) son

$$G_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}, \quad (2.1)$$

donde  $G_{\mu\nu} := R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R$  es el tensor de Einstein el cual está relacionado con el tensor de curvatura de Ricci  $R_{\mu\nu}$ , la métrica del espacio-tiempo  $g_{\mu\nu}$ ,  $T_{\mu\nu}$  es el tensor de energía-momento y los índices griegos son etiquetas para las coordenadas locales del espacio-tiempo, es decir,  $x^\mu = x^0, x^1, x^2, x^3$  con  $\mu = 0, 1, 2, 3$ . Estas ecuaciones son un conjunto de 10 ecuaciones en derivadas parciales (EDP) de segundo orden en el tiempo para la métrica  $g_{\mu\nu}$ , describen la dinámica de la geometría del espacio-tiempo para cualquier sistema físico y como esta se acopla con la materia y energía del sistema.

Existen algunas soluciones exactas para las ecuaciones de Einstein (2.1) solo para casos con altos grados de simetrías, por lo tanto para explorar escenarios más realistas la manera en que se resuelven estas ecuaciones es mediante métodos numéricos (cap. 3) entonces para poder aplicarlos es necesario plantear estas ecuaciones como un problema de Cauchy, o también conocido como un problema de valores iniciales (PVI) de este modo se tendría que dar un perfil inicial de  $g_{\mu\nu}$  y  $\partial_t g_{\mu\nu}$  a un tiempo inicial, el problema de intentar hacer esto resulta en que las ecuaciones se encuentran escritas en forma covariante la cual no hace ninguna distinción entre el tiempo y el espacio así que para resolver este problema se han propuesto varios formalismos entre ellos está la descomposición 3+1 el cual hace una foliación del espacio-tiempo permitiendo tener tensores relacionados con  $g_{\mu\nu}$  y  $\partial_t g_{\mu\nu}$  sobre hipersuperficies tridimensionales totalmente espaciales, descritas por una métrica espacial conocida como *curvatura intrínseca* y la dimensión restante describe como estas evolucionan en el tiempo, es decir, que tanto se deforma la hipersuperficie espacial, esta información se obtiene mediante la *curvatura extrínseca*. De esta manera se puede plantear el problema de Cauchy y así permitir la integración numérica.

## 2.1. Formalismo 3+1

Consideremos una variedad  $M$  que describe el espacio-tiempo con métrica  $g_{\mu\nu}$ . Ahora se supone que la variedad puede ser foliada por una familia de hipersuperficies  $\Sigma_t$  que no se cruzan fig. (2.1), las cuales surgen localmente de una función escalar  $t$  que se puede interpretar como una función de tiempo global. A partir de  $t$  se define el campo vectorial  $\Omega^\mu = \nabla^\mu t$  que es normal en todas partes a  $\Sigma_t$ , por lo que es cerrado es decir  $d\Omega = 0$ . La norma de este campo vectorial se define como  $\|\Omega\| = -\alpha^{-2}$ , donde  $\alpha > 0$  se conoce como la función de lapso, así se puede definir el campo vectorial normalizado temporalmente  $n^\mu$  como  $n^\mu = \alpha\Omega^\mu$ . Por lo que  $n^\mu$  se interpreta como la cuadrivelocidad de un observador normal a las hipersuperficies  $\Sigma_t$ .

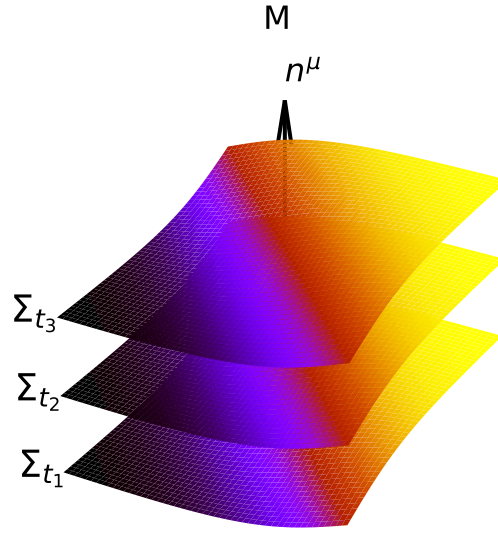


Figura 2.1: Foliación del espacio-tiempo  $(M, g_{\mu\nu})$  en hipersuperficies  $\Sigma_t$  a un tiempo constante  $t$ .

El campo vectorial  $n^\mu$  o bien la 1-forma asociado a este  $n_\mu = g_{\mu\nu}n^\nu$  nos permite distinguir sobre tensores que residen por completo sobre  $\Sigma_t$ . Así decimos que un campo vectorial  $v^\mu$  es completamente espacial, o que reside por completo sobre  $\Sigma_t$  si la proyección con  $n^\mu$  es nula. Además este campo vectorial nos permite definir el siguiente tensor de segundo rango

$$\gamma_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + n_\mu n_\nu, \quad (2.2)$$

De la definición anterior podemos notar las siguientes propiedades del tensor  $\gamma_{\mu\nu}$ :

- (i) Es simétrico es decir  $\gamma_{\mu\nu} = \gamma_{\nu\mu}$ .
- (ii) Es no degenerado, es decir, si  $x^\mu$  y  $y^\nu$  son dos campos vectoriales totalmente espaciales se cumple que  $\gamma_{\mu\nu}x^\mu y^\nu = 0$  si  $x^\mu = 0$  para todo  $y^\nu$ .

Estas dos propiedades definen a  $\gamma_{\mu\nu}$  como una métrica (puede mostrarse que además es positiva definida) sobre  $\Sigma_t$ , para que sea consistente se verifica que  $\gamma_{\mu\nu}$  sea un tensor totalmente espacial

$$n^\mu \gamma_{\mu\nu} = n^\mu g_{\mu\nu} + n^\mu n_\mu n_\nu = n_\nu - n_\nu = 0.$$

Ahora que tenemos la métrica asociada a las hipersuperficies tridimensionales  $\Sigma_t$  se define la métrica inversa como

$$\gamma^{\mu\nu} := g^{\mu\eta} g^{\nu\beta} \gamma_{\eta\beta} = g^{\mu\nu} + n^\mu n^\nu. \quad (2.3)$$

Con estos tensores se obtiene el proyector

$$\gamma^\mu{}_\nu = \gamma^{\mu\eta} \gamma_{\eta\nu} = \delta^\mu{}_\nu + n^\mu n_\nu, \quad (2.4)$$

el cual proyecta cada índice de un tensor sobre  $\Sigma_t$  y el proyector que es normal a ella se define como

$$N^\mu{}_\nu = -n^\mu n_\nu, \quad (2.5)$$

Como  $\gamma_{\mu\nu}$  define una métrica sobre  $\Sigma_t$  existe una única conexión de Levi-Civita que es compatible con ella, es decir existe la derivada covariante  $D_\alpha$  tal que  $D_\alpha \gamma_{\mu\nu} = 0$ . Otra manera de poder definir la derivada covariante  $D_\alpha$  consiste en proyectar todos los índices de la derivada covariante  $\nabla_\mu$  actuando sobre un tensor.

La métrica  $\gamma_{\mu\nu}$  nos da información sobre la *curvatura intrínseca* de  $\Sigma_t$ , sin embargo al estar esta sumergida sobre una variedad de dimensión cuatro, nos falta información sobre la velocidad a la que se deforma. Dicha información nos la da la *curvatura extrínseca*.

Se define la curvatura extrínseca como

$$K_{\mu\nu} := -\gamma_\mu{}^\eta \gamma_\nu{}^\sigma \nabla_\eta n_\sigma, \quad (2.6)$$

La cual se puede reescribir en términos de la métrica  $\gamma_{\mu\nu}$  como

$$K_{\mu\nu} = -\frac{1}{2} \mathcal{L}_n \gamma_{\mu\nu} \quad (2.7)$$

donde  $\mathcal{L}_n$  denota la derivada de Lie a lo largo del campo vectorial  $n^\mu$  y de aquí podemos ver porque decimos que la curvatura extrínseca es la velocidad con la que se deforma la métrica  $\gamma_{\mu\nu}$ . Sin embargo la derivada de Lie a lo largo de  $n^\mu$  no es una derivada de tiempo natural ya que no es dual a la 1-forma  $\Omega_\mu$ , es decir su producto escalar no se encuentra normalizado pero si el del campo vectorial

$$t^\mu = \alpha n^\mu + \beta^\mu, \quad (2.8)$$

para algún vector espacial  $\beta^\mu$  llamado el vector de corrimiento, por lo que podemos reescribir la ec. (2.7) como

$$\mathcal{L}_t \gamma_{\mu\nu} = -2\alpha K_{\mu\nu} + \beta \gamma_{\mu\nu}. \quad (2.9)$$

Con  $\gamma_{\mu\nu}$  y  $K_{\mu\nu}$  se tiene la información necesaria para poder expresar las ecuaciones de Einstein en el formalismo 3+1, basta con tomar las siguientes proyecciones:

(i) Proyección sobre  $\Sigma_t$ :

$$\gamma_{\sigma}^{\mu}\gamma_{\eta}^{\nu}\left(G_{\mu\nu} - 8\pi T_{\mu\nu}\right) = 0, \quad (2.10)$$

(ii) Proyección normal a  $\Sigma_t$ :

$$n^{\mu}n^{\nu}\left(G_{\mu\nu} - 8\pi T_{\mu\nu}\right) = 0, \quad (2.11)$$

(iii) Proyección mixta:

$$\gamma_{\sigma}^{\mu}n^{\nu}\left(G_{\mu\nu} - 8\pi T_{\mu\nu}\right) = 0. \quad (2.12)$$

De la proyección sobre las hipersuperficies espaciales (2.10) da como resultado

$$R + K^2 - K_{\mu\nu}K^{\mu\nu} = 16\pi\rho \quad (2.13)$$

donde  $R$  es el escalar de Ricci asociado a la métrica  $\gamma_{\mu\nu}$ ,  $K := \gamma^{\mu\nu}K_{\mu\nu}$  es la traza de la curvatura extrínseca y  $\rho = n^{\eta}n^{\beta}T_{\eta\beta}$  es la densidad de energía de la materia medida por observadores eulerianos, dicha ecuación no involucra derivadas temporales por lo que en realidad es una constricción de la energía, conocida como *constricción hamiltoniana* que suele reescribirse como

$$H := R + K^2 - K_{\mu\nu}K^{\mu\nu} - 16\pi\rho = 0. \quad (2.14)$$

De la proyección normal a  $\Sigma_t$  (2.11) se obtiene

$$D_{\alpha}K^{\alpha}_{\nu} - D_{\nu}K = 8\pi S_{\nu} \quad (2.15)$$

con  $S_{\mu} := -\gamma_{\mu}^{\eta}n^{\beta}T_{\eta\beta}$  definida como la densidad de momento medida por observadores a lo largo del vector  $n^{\nu}$ , al igual que la constricción hamiltoniana esta ecuación tampoco involucra derivadas temporales, por lo que recibe el nombre de *constricción de momento* y se escribe como

$$M_{\nu} := D_{\alpha}K^{\alpha}_{\nu} - D_{\nu}K - 8\pi S_{\nu} = 0. \quad (2.16)$$

Por último la proyección mixta (2.12) de las ecuaciones de Einstein da como resultado la ecuación de evolución para la curvatura extrínseca,

$$\mathcal{L}_t K_{\mu\nu} = -D_{\mu}D_{\nu}\alpha + \alpha\left(R_{\mu\nu} - 2K_{\mu\alpha}K^{\alpha}_{\nu} + KK_{\mu\nu}\right) - 8\pi\left(S_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\gamma_{\mu\nu}(S - \rho)\right) + \mathcal{L}_{\beta}K_{\mu\nu} \quad (2.17)$$

donde  $S_{\mu\nu} := \gamma_{\mu}^{\eta}\gamma_{\nu}^{\alpha}T_{\eta\alpha}$  se conoce como el tensor de esfuerzos.

De este modo las ecuaciones de constricción (2.14, 2.16) deben satisfacerse desde el tiempo inicial, por lo que son usadas para la construcción de datos iniciales y las ecuaciones de evolución son únicamente (2.17, 2.9), además estas ecuaciones propagan las constricciones, por lo que en cada paso de tiempo se puede verificar que se satisfagan.

## 2.2. Formulación ADM y GBSSN

Hasta ahora tanto las ecuaciones de constricción (2.14,2.16) como las ecuaciones de evolución (2.17,2.9), conocidas como las ecuaciones *Arnowitt-Deser-Misner* (ADM) se encuentran escritas de manera covariante, por lo que se simplifican con una base adecuada, así que tomando como base a  $t^\mu = e^\mu_{(0)} = (1, 0, 0, 0)$  la derivada de Lie  $\mathcal{L}_t$  se reduce a una derivada parcial  $\partial_t$  y los siguientes vectores  $e^\mu_{(i)}$  ( $i = 1, 2, 3$ ) se eligen de tal manera que se satisfaga que sean totalmente espaciales y no dependan del tiempo  $t$  de esta forma se puede encontrar que el vector normal a la hipersuperficie  $\Sigma_t$  se escribe como

$$n^a = (\alpha^{-1}, -\alpha^{-1}\beta^i), \quad (2.18)$$

y la 1-forma asociado a el es

$$n_a = (-\alpha, 0, 0, 0). \quad (2.19)$$

Por lo tanto de la definición de la métrica espacial puede reescribirse a  $g_{\mu\nu}$  como

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\alpha^2 + \beta_i\beta^i & \beta_i \\ \beta_j & \gamma_{ij} \end{pmatrix} \quad (2.20)$$

con  $\beta_i = \gamma_{ij}\beta^j$ . De forma equivalente el elemento de línea en la descomposición 3+1 puede ser escrito como

$$ds^2 = -\alpha^2 dt^2 + \gamma_{ij} (dx^i + \beta^i dt) (dx^j + \beta^j dt) \quad (2.21)$$

Entonces las ecuaciones ADM escritas en esta base se reducen a

$$d_t \gamma_{ij} = -2\alpha K_{ij}, \quad (2.22)$$

$$d_t K_{ij} = -D_i D_j \alpha + \alpha \left( R_{ij} - 2K_{il} K^l_j + K K_{ij} - S_{ij} - \frac{1}{2} \gamma_{ij} (\rho - S) \right), \quad (2.23)$$

$$H = R + K^2 - K_{ij} K^{ij} - 16\pi\rho = 0, \quad (2.24)$$

$$M^i = D_j (K^{ij} - \gamma^{ij} K) - 8\pi S^i = 0, \quad (2.25)$$

donde  $d_t := \partial_t - \mathcal{L}_\beta$ . Para un desarrollo más completo de estas ecuaciones puede verse en [4].

Ahora estas ecuaciones pueden plantearse como un PVI ya que dando la distribución de materia y energía a un tiempo inicial es posible encontrar la geometría adecuada resolviendo las ecuaciones de constricción y así tener tanto la distribución de materia como la geometría a un tiempo inicial, y poder utilizar las ecuaciones de evolución para encontrar la geometría a un tiempo posterior. Sin embargo estas ecuaciones resultan ser inestables, ya que forman un sistema *débilmente hiperbólico*, es decir, no se puede formular un problema *bien planteado* y es muy probable que la implementación numérica se vuelva inestable en

un periodo de tiempo muy corto.

La formulación de *Baumgarte-Stuart-Shapiro-Nakamura* BSSN [4] corrige este problema transformando el sistema débilmente hiperbólico a uno *fuertemente hiperbólico* eligiendo un nuevo conjunto de variables. Primeramente se define la métrica conforme como

$$\bar{\gamma}_{ij} = \psi^{-4} \gamma_{ij} \quad (2.26)$$

donde a  $\psi$  se le conoce como el factor conforme y dicha transformación se conoce como transformación conforme, además el determinante de la métrica conforme es  $\bar{\gamma} = 1$ . Una vez reescalada la métrica, se procede a dividir la curvatura extrínseca en una curvatura sin traza y se transforma conformemente

$$\bar{A}_{ij} = \psi^{-4} \left( K_{ij} - \frac{1}{3} \gamma_{ij} K \right). \quad (2.27)$$

Con la finalidad de evitar segundas derivadas en las ecuaciones de evolución se define la función de conexión conforme o bien el símbolo de Christoffel contraído como

$$\bar{\Gamma}^i = \bar{\gamma}^{ik} \bar{\Gamma}^i_{jk} = -\partial_j \bar{\gamma}^{ij}, \quad (2.28)$$

donde  $\bar{\Gamma}^i_{jk}$  son los símbolos de Christoffel asociados con la métrica conforme  $\bar{\gamma}_{ij}$ . Por lo tanto el nuevo conjunto de ecuaciones de evolución se transforma en

$$\begin{aligned} d_t \bar{\gamma}_{ij} &= -2\alpha \bar{A}_{ij}, \\ d_t \phi &= -\frac{1}{6} \alpha K, \\ d_t \bar{A}_{ij} &= e^{-4\phi} \left[ -D_i D_j \alpha + \alpha R_{ij} + 4\pi \alpha \left( \gamma_{ij} (S - \rho) - 2S_{ij} \right) \right]^{TF} + \alpha \left( K \bar{A}_{ij} - 2\bar{A}_{ik} \bar{A}^k_j \right), \\ d_t K &= -D_i D^i \alpha + \alpha \left( \bar{A}_{ij} \bar{A}^{ij} + \frac{1}{3} K^2 \right) + 4\pi \alpha (\rho + S), \\ \partial_t &= -\partial_j \left( \mathcal{L}_{\beta} \bar{\gamma}^{ij} \right) - 2 \left( \alpha \partial_j \bar{A}^{ij} + \bar{A}^{ij} \partial_j \alpha \right), \end{aligned} \quad (2.29)$$

donde  $\phi$  está definido por  $\psi = e^{\phi}$  y  $TF$  denota la traza libre.

Tanto en la formulación ADM como en la BSSN no se ha dicho nada sobre la función de lapso  $\alpha$  y el vector de corrimiento  $\beta$  ya que estos pueden ser elegidos de manera arbitraria pero de tal forma que garanticen un buen comportamiento en la implementación numérica, en este documento se usará la condición  $1 + \log$  para el lapso y la condición  $\Gamma - Driver$  para el corrimiento,

$$\begin{aligned} \partial_t \alpha &= \beta^i \partial_i \alpha - 2\alpha K, \\ \partial_t \beta^i &= \frac{3}{4} B^i + \beta^j \partial_j \beta^i, \\ \partial_t B^i &= \partial_t \Gamma^i + \beta^j \partial_j B^i - \beta^j \partial_j \Gamma^i - \eta B^i. \end{aligned} \quad (2.30)$$

### Sistema con simetría esférica

El interés en este documento es poder resolver las ecuaciones de Einstein para sistemas esféricamente simétricos, pero las ecuaciones BSSN son válidas únicamente para coordenadas cartesianas por lo que es necesario escribir las ecuaciones generalizadas BSSN (GBSSN) para poder elegir cualquier sistema de coordenadas. La forma general para una métrica en coordenadas esféricas  $(t, r, \theta, \varphi)$  se puede escribir como

$$ds^2 = -\left(\alpha^2 - \frac{g_{rr}}{\chi}\beta^r\beta^r\right)dt^2 + 2\frac{g_{rr}}{\chi}\beta^r dt dr + \frac{1}{\chi}\left(g_{rr}dr^2 + g_{\theta\theta}d\Omega^2\right) \quad (2.31)$$

donde  $d\Omega^2 := d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2$ ,  $\chi$  actúa como un factor conforme,  $\beta^r$  es la componente distinta de cero del vector de corrimiento y  $\alpha$  es la función de lapso como en [5] y las ecuaciones de evolución se escriben como

$$\begin{aligned} \partial_t \chi &= \frac{2}{3}K\alpha\chi + \beta^r\chi', \\ \partial_t g_{rr} &= -2A_{rr}\alpha + \beta^r g'_{rr} + 2g_{rr}\beta^{r'}, \\ \partial_t g_{\theta\theta} &= \frac{A_{rr}g_{\theta\theta}\alpha}{g_{rr}} + \beta^r g'_{\theta\theta}, \\ \partial_t A_{rr} &= -\frac{2\alpha A_{rr}^2}{g_{rr}} + K\alpha A_{rr} + 2\beta^{r'}A_{rr} \\ &\quad + \frac{2\alpha\chi(g'_{rr})^2}{3g_{rr}^2} - \frac{\alpha\chi(g'_{\theta\theta})^2}{3g_{\theta\theta}^2} - \frac{\alpha(\chi')^2}{6\chi} - \frac{2g_{rr}\alpha\chi}{3g_{\theta\theta}} + \beta^r A'_{rr} + \frac{2}{3}g_{rr}\alpha\chi\Gamma^{r'} \\ &\quad - \frac{\alpha\chi g'_{rr}g'_{\theta\theta}}{2g_{rr}g_{\theta\theta}} + \frac{\chi g'_{rr}\alpha'}{3g_{rr}} + \frac{\chi g'_{\theta\theta}\alpha'}{3g_{\theta\theta}} - \frac{\alpha g'_{rr}\chi'}{6g_{rr}} - \frac{\alpha g'_{\theta\theta}\chi'}{6g_{\theta\theta}} - \frac{2\alpha'\chi'}{3} - \frac{\alpha\chi g''_{rr}}{3g_{rr}} \\ &\quad + \frac{\alpha\chi g''_{\theta\theta}}{3g_{\theta\theta}} - \frac{2\chi\alpha''}{3} + \frac{\alpha\chi''}{3} - [\alpha\chi S_{rr}]^{TF}, \\ \partial_t K &= \frac{2\alpha A_{rr}^2}{2g_{rr}^2} + \frac{K^2\alpha}{3} + \beta^r K' + \frac{\chi g'_{rr}\alpha'}{2g_{rr}^2} - \frac{\chi g'_{\theta\theta}\alpha'}{g_{rr}g_{\theta\theta}} + \frac{\alpha'\chi'}{2g_{rr}} - \frac{\chi\alpha''}{g_{rr}} + \frac{1}{2}\alpha(S + \rho), \\ \partial_t \Gamma^r &= \frac{A_{rr}\alpha g'_{\theta\theta}}{g'_{rr}g_{\theta\theta}} + \frac{\beta^{r'}g'_{\theta\theta}}{3A_{rr}\alpha\chi'} + \beta^r\Gamma^{r'} + \frac{A_{rr}\alpha g'_{rr}}{g_{rr}^3} - \frac{4\alpha K'}{3g_{rr}} - \frac{2A_{rr}\alpha'}{g_{rr}^2} - \frac{g'_{rr}\beta^{r'}}{2g_{rr}^2} \\ &\quad - \frac{g'_{rr}g_{\theta\theta}}{3A_{rr}\alpha\chi'} + \frac{g_{rr}g_{\theta\theta}}{\beta^{r'}} - \frac{2\alpha S_r}{g_{rr}}, \end{aligned} \quad (2.32)$$

donde  $\prime$  denota la derivada parcial respecto a  $r$ . Y en este caso las ecuaciones de constricción son



$$\begin{aligned}
H &= -\frac{3A_{rr}^2}{2g_{rr}^2} + \frac{2K^2}{3} - \frac{5(\chi')^2}{2\chi g_{rr}} + \frac{2\chi''}{g_{rr}} + \frac{2\chi}{g_{\theta\theta}} - \frac{2\chi g_{\theta\theta}''}{g_{rr}g_{\theta\theta}} \\
&\quad + \frac{2\chi' g_{\theta\theta}'}{g_{rr}g_{\theta\theta}} + \frac{\chi g_{rr}' g_{\theta\theta}'}{g_{rr}^2 g_{\theta\theta}} - \frac{\chi' g_{rr}'}{g_{rr}^2} + \frac{\chi (g_{\theta\theta}')^2}{2g_{rr}g_{\theta\theta}^2} - 2\rho, \\
M_r &= \frac{A_{rr}'}{g_{rr}} - \frac{2K'}{3} - \frac{3A_{rr}\chi'}{2\chi g_{rr}} + \frac{3A_{rr}g_{\theta\theta}'}{2g_{rr}g_{\theta\theta}} - \frac{A_{rr}g_{rr}'}{g_{rr}^2} - S_r, \\
G^r &= -\frac{g_{rr}'}{2g_{rr}^2} + \Gamma^r + \frac{g_{\theta\theta}'}{g_{rr}g_{\theta\theta}},
\end{aligned} \tag{2.33}$$

donde aparece la tercera restricción ya que  $\Gamma^r$  se promueve a variable dinámica.

Con esto queda definido el PVI para la geometría del espacio-tiempo lo que sigue es utilizar la divergencia libre del tensor de Einstein para encontrar las ecuaciones de evolución de la materia y energía del sistema en cuestión. En las siguientes secciones se presentaran las ecuaciones necesarias para modelar la dinámica de un fluido relativista y un modelo de energía oscura el cual consiste en un campo escalar fantasma que obedece la ecuación de Klein-Gordon. Estos sistemas se utilizarán para estudiar la acreación de un hoyo negro, por lo que estas ecuaciones deben de acoplarse a la dinámica de la geometría del espacio-tiempo por lo que se usará la métrica correspondiente a la descomposición ADM para simplificar los cálculos ya que solo basta con hacer la transformación conforme de la métrica para obtener las expresiones en la formulación GBSSN.

### 2.3. Hidrodinámica Relativista

El tensor de energía momento para un fluido perfecto en un espacio-tiempo con métrica  $g_{\mu\nu}$  es

$$T^{\mu\nu} = \rho_0 h u^\mu u^\nu + p g^{\mu\nu} \tag{2.34}$$

donde  $\rho_0$  es la densidad de masa en reposo,  $h = 1 + e + p/\rho_0$  la entalpía,  $e$  la energía interna específica,  $p$  la presión y  $u^\mu$  es la cuadrivelocidad de un elemento de fluido.

Para observadores eulerianos  $u^\mu = (u^0, u^i)$  con

$$u^0 = \frac{dt}{d\tau} = \frac{W}{\alpha} = \frac{1}{\alpha \sqrt{1 - v^i v_i}}, \quad v^i = \frac{u^i}{u_0} = \frac{u^i}{W} + \frac{\beta^i}{\alpha}, \tag{2.35}$$

donde  $t$  es la coordenada temporal asociada a un elemento de fluido de un sistema de referencia euleriano,  $\tau$  el tiempo propio,  $v^i$  son las componentes de la 3-velocidad de un elemento de fluido y  $W$  es el factor de Lorentz.

Las ecuaciones de la hidrodinámica relativista consisten en la conservación de la masa y la divergencia libre del tensor de energía-momento

$$\nabla_{\mu} (\rho_0 u^{\mu}) = 0, \quad (2.36)$$

$$\nabla_{\mu} T^{\mu\nu} = 0, \quad (2.37)$$

donde  $\nabla_{\mu}$  es la derivada covariante consistente con la métrica  $g_{\mu\nu}$  del espacio-tiempo.

Para expresar este sistema de ecuaciones (2.36,2.37) en el formalismo 3+1, se utiliza primeramente la siguiente expresión de la derivada covariante

$$\nabla_{\mu} \xi^{\mu} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_{\mu} (\sqrt{-g} \xi^{\mu}) \quad (2.38)$$

De este modo solo resta expresar las ecuaciones en términos de la métrica 3+1. La ecuación de conservación de la masa (2.36) al ser una ecuación escalar esta puede expresarse directamente en términos de la métrica, mientras que las ecuaciones de conservación correspondientes a la divergencia libre del tensor de energía-momento, al igual que se hizo con las ecuaciones de Einstein, al ser cantidades vectoriales es necesario proyectar sobre la hipersuperficie  $\Sigma_t$ , la proyección normal y la mixta, dando como resultado el siguiente sistema de ecuaciones

$$\partial_t \mathbf{u} + \partial_i \mathbf{F}^i(\mathbf{u}) = \mathbf{S}(\mathbf{u}) \quad (2.39)$$

donde

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} D \\ J_j \\ \tau \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}^i(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} (\alpha v^i - \beta^i) D \\ (\alpha v^i - \beta^i) J_j + \alpha \sqrt{\gamma} p \delta^i_j \\ (\alpha v^i - \beta^i) \tau + \alpha \sqrt{\gamma} p v^i \end{pmatrix}, \quad \mathbf{S}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \sqrt{\gamma} T^{\mu\nu} g_{\nu\sigma} \Gamma^{\sigma}_{\mu j} \\ \alpha \sqrt{\gamma} (T^{\mu 0} \partial_{\mu} \alpha - \alpha T^{\mu\nu} \Gamma^0_{\mu\nu}) \end{pmatrix} \quad (2.40)$$

donde  $j = 1, 2, 3$  y las cantidades en el vector de estado son definidas como

$$\begin{aligned} D &:= \sqrt{\gamma} \rho_0 W, \\ J_j &:= \sqrt{\gamma} \rho_0 h W^2 v_j, \\ \tau &:= \sqrt{\gamma} (\rho_0 h W^2 - p - \rho_0 W). \end{aligned} \quad (2.41)$$

El sistema (2.39,2.40,2.41) se conoce también como las ecuaciones de Euler relativistas y forman un sistema de cinco ecuaciones en derivadas parciales y contiene seis variables primitivas, por lo que está indeterminado. La manera de cerrar el sistema es mediante la elección de una ecuación de estado, el fluido que consideramos es un gas ideal que obedece la ecuación

$$p = \rho_0 e (\Gamma - 1) \quad (2.42)$$

donde  $\Gamma$  es el índice adiabático. Ahora el interés es modelar escenarios con simetría esférica, así que en estas coordenadas asumimos que la 3-velocidad solo tiene componente radial es decir,  $v^i = (v^r, 0, 0)$ , es conveniente hacer la siguiente definición para sistemas con

simetría esférica, primero se reemplaza  $\sqrt{\gamma} = \sqrt{\gamma_{rr}}\gamma_{\theta\theta} \sin \theta$  por  $\sqrt{\gamma} = \sqrt{\gamma_{rr}}\gamma_{\theta\theta}$ , así las definiciones en (2.41) siguen siendo las mismas pero los vectores de estado, flujos y fuente se transforman en

$$\mathbf{u} = \sin \theta \begin{pmatrix} D \\ J_r \\ 0 \\ 0 \\ \tau \end{pmatrix}, \quad \mathbf{S}(\mathbf{u}) = \sin \theta \begin{pmatrix} 0 \\ S_2 \\ \alpha \sqrt{\gamma} \cot \theta p \\ 0 \\ S_5 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{F}^r(\mathbf{u}) = \sin \theta \begin{pmatrix} (\alpha v^r - \beta^r) D \\ (\alpha v^r - \beta^r) J_r + \alpha \sqrt{\gamma} p \\ 0 \\ 0 \\ (\alpha v^r - \beta^r) \tau + \alpha \sqrt{\gamma} p v^r \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}^\theta(\mathbf{u}) = \sin \theta \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha \sqrt{\gamma} p \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}^\phi = \sin \theta \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \alpha \sqrt{\gamma} p \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.43)$$

Entonces lo siguiente que se debe notar es que  $\partial_\phi \mathbf{F}^\phi = 0$  y que la tercer componente del sistema se reduce a una identidad  $\partial_\theta F_3^\theta = \cos \theta \alpha \sqrt{\gamma} p = S_3$  por último el  $\sin \theta$  que aparece en los vectores restantes puede ser cancelado dejando como resultado final el siguiente sistema

$$\begin{aligned} \partial_t D + \partial_r [(\alpha v^r - \beta^r) D] &= 0, \\ \partial_t J_r + \partial_r [(\alpha v^r - \beta^r) J_r + \alpha \sqrt{\gamma} p] &= S_2, \\ \partial_t \tau + \partial_r [(\alpha v^r - \beta^r) \tau + \alpha \sqrt{\gamma} p v^r] &= S_5, \end{aligned} \quad (2.44)$$

donde las fuentes  $S_2$  y  $S_5$  son

$$\begin{aligned} S_2 &:= \sqrt{\gamma} \left( p \alpha' - h W^2 \rho_0 \alpha' + h v^r W^2 \rho_0 \gamma_{rr} \beta^{r'} + \frac{1}{2} h v^r v^r W^2 \rho_0 \alpha \gamma'_{rr} + \frac{p \alpha \gamma'_{rr}}{2 \gamma_{rr}} + \frac{p \alpha \gamma'_{\theta\theta}}{\gamma_{\theta\theta}} \right), \\ S_5 &:= \sqrt{\gamma} \left( -h v^r W^2 \rho_0 \alpha' + p \beta^{r'} + h v^r v^r W^2 \rho_0 \gamma_{rr} \beta^{r'} + \frac{1}{2} h v^r v^r W^2 \rho_0 \beta^r \gamma'_{rr} \right. \\ &\quad \left. + \frac{p \beta^r \gamma'_{rr}}{2 \gamma_{rr}} + \frac{p \beta^r \gamma_{\theta\theta}'}{\gamma_{\theta\theta}} + \frac{1}{2} h v^r v^r W^2 \rho_0 \dot{\gamma}_{rr} - \frac{p \dot{\gamma}_{rr}}{2 \gamma_{rr}} - \frac{p \dot{\gamma}_{\theta\theta}}{\gamma_{\theta\theta}} \right). \end{aligned} \quad (2.45)$$

El cual se puede escribir nuevamente en forma vectorial como

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{d\mathbf{F}}{d\mathbf{u}} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial r} = \mathbf{S}(\mathbf{u}), \quad (2.46)$$

donde se ha usado la regla de la cadena y los vectores de estado, flujo y fuente son

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} D \\ J_r \\ \tau \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} (\alpha v^r - \beta^r) D \\ (\alpha v^r - \beta^r) J_r + \alpha \sqrt{\gamma} p \\ (\alpha v^r - \beta^r) \tau + \alpha \sqrt{\gamma} p v^r \end{pmatrix}, \quad \mathbf{S} = \begin{pmatrix} 0 \\ S_2 \\ S_5 \end{pmatrix}. \quad (2.47)$$

La manera en resolver el sistema (2.46,2.47) para la parte espacial se hace mediante

el método de volúmenes finitos (3.2) en particular se usa la formula HLLE por lo que es necesario conocer los eigenvalores de la matriz Jacobiana  $\frac{d\mathbf{F}}{d\mathbf{u}}$  los cuales son [6]

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \alpha v^r - \beta^r, \\ \lambda_2 &= \frac{\alpha}{1 - v_r v^r c_s^2} \left[ v^r (1 - c_s^2) + c_s \sqrt{(1 - v_r v^r) [\gamma^{rr} (1 - v_r v^r c_s^2) - v^r v^r (1 + c_s^2)]} \right] - \beta^r, \\ \lambda_5 &= \frac{\alpha}{1 - v_r v^r c_s^2} \left[ v^r (1 - c_s^2) - c_s \sqrt{(1 - v_r v^r) [\gamma^{rr} (1 - v_r v^r c_s^2) - v^r v^r (1 + c_s^2)]} \right] - \beta^r,\end{aligned}\tag{2.48}$$

con  $c_s$  la velocidad del sonido local definida como

$$hc_s^2 = \chi + \left( \frac{p}{\rho_0^2} \right) \kappa, \quad \chi = \frac{\partial p}{\partial \rho_0}, \quad \kappa = \frac{\partial p}{\partial e}.\tag{2.49}$$

Para la ecuación de estado de un gas ideal la expresión anterior se reduce a

$$c_s^2 = \frac{p(\Gamma - 1)\Gamma}{\rho_0(\Gamma - 1) + p\Gamma}.\tag{2.50}$$

Con esto quedan definidas las ecuaciones de evolución de un fluido relativista, pero cuando este se acopla con la dinámica del espacio-tiempo es necesario resolver simultáneamente estas ecuaciones junto a las ecuaciones de Einstein por lo que es necesario conocer las proyecciones del tensor de energía-momento sobre la hipersuperficie  $\Sigma_t$ , la proyección normal a ella y la mixta. En general estas proyecciones son

$$\begin{aligned}\rho &= n^\mu n^\nu T_{\mu\nu} = \rho_0 h W^2 - p, \\ S_i &= -\gamma^{ij} n^\mu T_{\mu j} = \rho_0 h W^2 v_i, \\ S_{ij} &= \gamma_{i\mu} \gamma_{j\nu} T^{\mu\nu} = \rho_0 h W^2 v_i v_j + \gamma_{ij} p, \\ S &= \gamma^{ij} S_{ij}.\end{aligned}\tag{2.51}$$

En el caso particular de sistemas con simétrica esférica estos términos se escriben explícitamente como

$$\begin{aligned}\rho &= \rho_0 h W^2 - p, \\ S_r &= \rho_0 h W^2 \gamma_{rr} v^r, \\ S_{rr} &= \rho_0 h W^2 (\gamma_{rr})^2 (v^r)^2 + \gamma_{rr} p, \\ S_{\theta\theta} &= \gamma_{\theta\theta} p, \\ S_{\phi\phi} &= \sin^2 \theta S_{\theta\theta}, \\ S &= \rho_0 h W^2 \gamma_{rr} (v^r)^2 + 3p.\end{aligned}\tag{2.52}$$

donde al asumir flujo radial se tiene que  $S_\theta = S_\phi = 0$ .

## 2.4. Campo escalar Fantasma

El modelo de campo escalar fantasma se basa en la siguiente densidad lagrangiana,

$$\mathcal{L} = \mathcal{R} + \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\partial^\mu\phi\partial^\nu\phi - V(\phi), \quad (2.53)$$

donde  $\mathcal{R}$ ,  $g_{\mu\nu}$  son los tensores de Ricci y la métrica del espacio-tiempo,  $\phi$  es un campo escalar y  $V(\phi)$  es el potencial. A partir del principio de mínima acción se puede construir el tensor de energía-momento correspondiente a las ecuaciones de Einstein al variar la acción con respecto a la métrica,

$$T_{\mu\nu} = -\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}[-\partial^\alpha\phi\partial_\alpha\phi + 2V], \quad (2.54)$$

Este tensor viola la condición de energía nula,  $T_{\mu\nu}k^\mu k^\nu \leq 0$ , donde  $k^\mu$  es un vector nulo. La implicación inmediata de esta violación es la violación también de la condición de energía débil, lo que a su vez implica que los observadores que siguen trayectorias temporales pueden medir densidades de energía negativas. El hecho de que un campo escalar fantasma viole la condición de energía nula motiva el estudio de posibles implicaciones inusuales en escenarios astrofísicos, debido a que el teorema del aumento de área no aplica en este caso [7].

Las divergencia libre del tensor de Einstein implica que el tensor de energía-momento debe conservarse  $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$ , esto da como resultado la ecuación dinámica que debe satisfacer el campo escalar  $\phi$  la cual se puede expresar mediante la ecuación de Klein-Gordon (KG),

$$\square\phi = \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu[\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\partial_\nu\phi] = -\partial_\phi V, \quad (2.55)$$

donde  $g$  es el determinante de la métrica  $g_{\mu\nu}$  del espacio-tiempo. Para poder resolver la ecuación anterior, numéricamente, es necesario primeramente expresarla en el lenguaje 3+1,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu[\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\partial_\nu\phi] &= \frac{1}{\alpha\sqrt{\gamma}}\left\{\partial_t[\alpha\sqrt{\gamma}g^{0\nu}\partial_\nu\phi] + \partial_i[\alpha\sqrt{\gamma}g^{i\nu}\partial_\nu\phi]\right\} \\ &= \frac{1}{\alpha\sqrt{\gamma}}\left\{\partial_t[\alpha\sqrt{\gamma}(g^{tt}\partial_t\phi + g^{ti}\partial_i\phi)] + \partial_i[\alpha\sqrt{\gamma}(g^{it}\partial_t\phi + g^{ij}\partial_j\phi)]\right\} \\ &= \frac{1}{\alpha\sqrt{\gamma}}\left\{\partial_t[\alpha\sqrt{\gamma}(-\alpha^{-2}\partial_t\phi + \alpha^{-2}\beta^i\partial_i\phi)] + \right. \\ &\quad \left.\partial_i[\alpha\sqrt{\gamma}(\alpha^{-2}\beta^i\partial_t\phi + (\gamma^{jj} - \alpha^{-2}\beta^j\beta^j)\partial_j\phi)]\right\} \\ &= \frac{1}{\alpha\sqrt{\gamma}}\left\{\partial_t\left[\frac{\sqrt{\gamma}}{\alpha}(-\partial_t\phi + \beta^i\partial_i\phi)\right] + \partial_i\left[\frac{\sqrt{\gamma}}{\alpha}(\beta^i\partial_t\phi + (\alpha^2\gamma^{ij} - \beta^i\beta^j)\partial_j\phi)\right]\right\} \end{aligned}$$

De esta manera la ecuación de KG (2.55) se reescribe como

$$\partial_t \left[ \frac{\sqrt{\gamma}}{\alpha} (-\partial_t \phi + \beta^i \partial_i \phi) \right] + \partial_i \left[ \frac{\sqrt{\gamma}}{\alpha} (\beta^i \partial_t \phi + (\alpha^2 \gamma^{ij} - \beta^i \beta^j) \partial_j \phi) \right] = -\alpha \sqrt{\gamma} \partial_\phi V \quad (2.56)$$

Por último para poder integrar la ecuación anterior mediante el método de líneas, el cual se encuentra en el siguiente capítulo, es necesario escribir esta ecuación como un sistema de primer orden en el tiempo, para ello se definen las siguientes variables auxiliares:

$$\begin{aligned} \pi &:= \frac{\sqrt{\gamma}}{\alpha} (\partial_t \phi - \beta^i \partial_i \phi), \\ \psi_i &:= \partial_i \phi. \end{aligned} \quad (2.57)$$

De estas definiciones se obtiene inmediatamente la ecuación de evolución para el campo escalar  $\phi$

$$\partial_t \phi = \frac{\alpha}{\sqrt{\gamma}} \pi + \beta^i \psi_i. \quad (2.58)$$

Y suponiendo que  $\phi$  es al menos de clase  $C^2$ , se obtiene la ecuación que debe satisfacer  $\psi_i$

$$\partial_t \psi_i = \partial_i \left( \frac{\alpha}{\sqrt{\gamma}} \pi + \beta^j \psi_j \right). \quad (2.59)$$

Por último la ecuación para  $\pi$  se obtiene directamente de la ecuación de KG (2.56)

$$\partial_t \pi = \partial_i (\alpha \sqrt{\gamma} \psi^i + \beta^i \pi) + \alpha \sqrt{\gamma} \partial_\phi V. \quad (2.60)$$

donde  $\psi^i := \gamma^{ij} \psi_j$ . De esta forma queda definido el problema de evolución para el campo escalar  $\phi$  como un sistema de primer orden en el tiempo.

Ahora suponiendo que tenemos un sistema con simetría esférica, lo primero que debemos notar es que en la ec. (2.56) se debe reemplazar el término  $\sqrt{\gamma} = \sqrt{\gamma_{rr} \gamma_{\theta\theta}} \sin \theta$  por  $\sqrt{\gamma_{rr}} := \sqrt{\gamma_{rr} \gamma_{\theta\theta}}$  ya que es posible cancelar el término  $\sin \theta$  de ambos lados de la ecuación, de esta forma todas las definiciones anteriores siguen siendo válidas y las ecuaciones de evolución se reducen a

$$\begin{aligned} \partial_t \phi &= \frac{\alpha}{\sqrt{\gamma}} \pi + \beta^r \psi_r, \\ \partial_t \psi_r &= \partial_r \left( \frac{\alpha}{\sqrt{\gamma}} \pi + \beta^r \psi_r \right), \\ \partial_t \pi &= \partial_r \left( \frac{\alpha \sqrt{\gamma}}{\gamma_{rr}} \psi_r + \beta^r \pi \right) + \alpha \sqrt{\gamma} \partial_\phi V. \end{aligned} \quad (2.61)$$

Para poder evolucionar el campo escalar acoplado con la geometría del espacio-tiempo, al igual que en la hidrodinámica relativista es necesario encontrar las proyecciones del tensor de energía-momento  $T_{\mu\nu}$  en la dirección normal a la hipersuperficie  $\Sigma_t$ , la proyección mixta y la proyección sobre  $\Sigma_t$ , dichas proyecciones para el sistema con simetría esférica son

$$\begin{aligned}
\rho &= V - \frac{1}{2} \left( \frac{\pi^2}{\gamma} + \frac{\psi_r^2}{\gamma_{rr}} \right), \\
S_r &= \frac{\pi\psi_r}{\sqrt{\gamma}}, \\
S_\theta &= S_\phi = 0, \\
S_{rr} &= -\frac{1}{2}\psi_r^2 - \frac{1}{2}\gamma_{rr} \left( \frac{\pi^2}{\gamma} + 2V \right), \\
S_{\theta\theta} &= -\frac{1}{2}\gamma_{\theta\theta} \left( \frac{\pi^2}{\gamma} + 2V - \frac{\psi_r^2}{\gamma_{rr}} \right), \\
S_{\phi\phi} &= S_{\theta\theta} \sin^2 \theta.
\end{aligned} \tag{2.62}$$

## 2.5. Acoplamiento mínimo EKG

Considere el tensor de energía-momento

$$T_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}^E + T_{\mu\nu}^{KG} \tag{2.63}$$

donde  $T_{\mu\nu}^E, T_{\mu\nu}^{KG}$  son los tensores de energía-momento de los sistemas para la hidrodinámica relativista y el campo escalar fantasma descritos en las secciones (2.3) y (2.4) respectivamente. Se supondrá un acoplamiento mínimo, de esta manera cada tensor de energía-momento es libre de divergencia y se recuperan las ecuaciones de Euler (2.44) y Klein-Gordon (2.61) las cuales solo interactúan a través de la geometría del espacio-tiempo descritas por las ecuaciones de Einstein en la descomposición 3+1 (2.32), por lo que denominamos a este sistema como *Euler-Klein-Gordon* o más simple EKG.

Nuevamente para poder evolucionar este sistema junto a la geometría es necesario obtener las proyecciones del tensor de energía-momento total,

$$\begin{aligned}
\rho &= \rho^E + \rho^{KG} = n^\mu n^\nu T_{\mu\nu}^E + n^\mu n^\nu T_{\mu\nu}^{KG}, \\
S_i &= S_i^E + S_i^{KG} = \gamma_i^\mu n^\nu T_{\mu\nu}^E + \gamma_i^\mu n^\nu T_{\mu\nu}^{KG}, \\
S_{ij} &= S_{ij}^E + S_{ij}^{KG} = \gamma_i^\mu \gamma_j^\nu T_{\mu\nu}^E + \gamma_i^\mu \gamma_j^\nu T_{\mu\nu}^{KG}
\end{aligned} \tag{2.64}$$

y cada uno de estos términos se encuentran en las secciones anteriores.

En general el acoplamiento de la geometría del espacio-tiempo con cualquier fuente de materia y energía vuelve al sistema de ecuaciones altamente no lineal por lo que no es

posible resolver de manera analítica por lo que es necesario utilizar métodos numéricos para encontrar aproximaciones de dichas soluciones, en el siguiente capítulo se discuten los métodos necesarios para poder evolucionar cada uno de los sistemas presentados en este capítulo.





# Capítulo 3

## Métodos Numéricos

Como se mencionó anteriormente, solo para casos muy particulares las ecuaciones de Einstein tienen algunas soluciones exactas, entonces para poder explorar escenarios más realistas y de interés físico la manera de resolver dichas ecuaciones se hace de forma aproximada, por lo que es necesario usar métodos numéricos. En concreto los métodos numéricos que se presentan en la sección (3.1) se conocen como métodos en diferencias finitas y permiten encontrar aproximaciones a ecuaciones diferenciales, dicha formulación necesita que las funciones sean suaves para admitir series de Taylor esta formulación se aplica para resolver tanto la geometría del espacio-tiempo como la ecuación de Klein-Gordon, estos métodos fallan para las ecuaciones de Euler relativistas ya que la no linealidad de dichas ecuaciones generan ondas de choque, que los métodos en diferencias finitas no pueden manejar, entonces para resolver esto en la sección (3.2) se presenta el esquema de volúmenes finitos el cual es usado para encontrar soluciones débiles, es decir, soluciones de un sistema de ecuaciones diferenciales en su formulación integral. Ambas formulaciones solo se aplican en la parte espacial, ya que el sistema completo que consta del acoplamiento de la geometría con la materia se escribió como un sistema de primer orden en el tiempo con la finalidad de aplicar el método de líneas presentado en la sección (3.3) para poder evolucionar el sistema. Por último siempre se necesita un criterio para saber cuando una solución numérica es aceptable, para ello en la sección (3.4) se discute sobre la convergencia de las soluciones aproximadas.

### 3.1. Diferencias Finitas

La aproximación en diferencias finitas (DF) de una ecuación diferencial ya sea ordinaria o parcial consiste en dos pasos. Primeramente en definir a las funciones y variables en un dominio discreto de puntos del dominio continuo donde se busca una solución de la ecuación y como segundo ingrediente se definen versiones discretas de los operadores diferenciales involucrados en la ecuación diferencial. Los operadores diferenciales que se usan en la relatividad numérica y en la mayoría de las ramas de la física suelen ser derivadas de primer y segundo grado, por lo tanto se construirán versiones discretas únicamente para estos operadores.

Para simplificar el análisis considere inicialmente el caso en una dimensión ya que es análogo en más dimensiones.

Sea  $f : \Omega \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , donde  $\Omega = [x_{min}, x_{max}]$  es el dominio de  $f$ , entonces se define a  $\Omega^d \subset \Omega$  como el dominio discreto que consta de un número finito de elementos, es decir,  $\Omega^d = \{x_0, x_1, \dots, x_N\}$  donde  $x_0 := x_{min}$  y  $x_N := x_{max}$ .

La manera más sencilla de particionar a  $\Omega^d$  es hacerlo uniformemente:

$$x_i = x_{min} + i\Delta x, \quad i = 0, 1, \dots, N, \quad (3.1)$$

donde  $\Delta x = (x_{max} - x_{min})/N$  es la longitud del intervalo  $[x_i, x_{i+1}]$ , o también llamado el tamaño de malla.

Ahora que esta definido un dominio finito de la función como se muestra en la fig. (3.1), lo siguiente es hacer una aproximación de la función  $f$  la cual consiste en hacer una expansión en serie de Taylor.

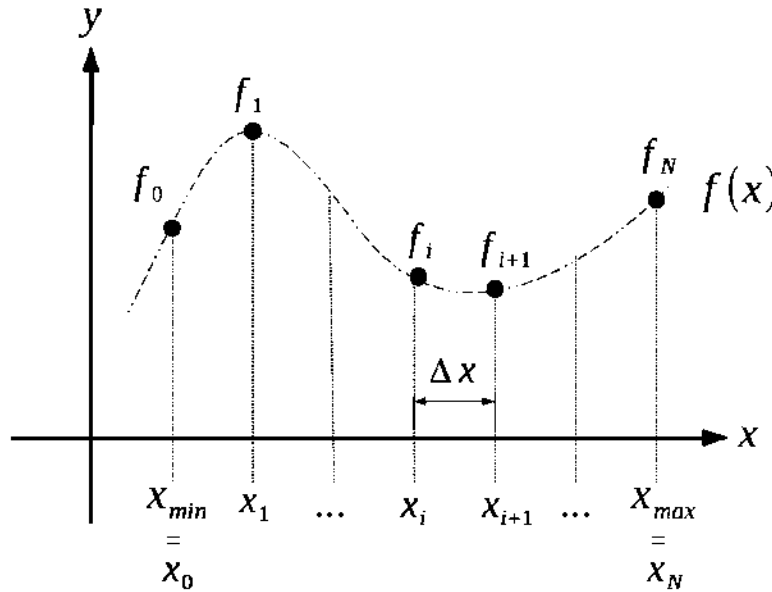


Figura 3.1: Función discreta  $f(x)$  en el dominio discreto uniformemente espaciado con tamaño de malla  $\Delta x = (x_{max} - x_{min})/N$ .

El desarrollo en serie de Taylor para una función  $f$  definida en  $\Omega$  que tiene hasta la  $k$ -ésima derivada centrada en  $x_i$  es

$$f(x) = f(x_i) + \frac{(x - x_i)}{1!} \left. \frac{df}{dx} \right|_{x_i} + \frac{(x - x_i)^2}{2!} \left. \frac{d^2 f}{dx^2} \right|_{x_i} + \dots + \frac{(x - x_i)^k}{k!} \left. \frac{d^k f}{dx^k} \right|_{x_i} + O(x - x_i)^{k+1}, \quad (3.2)$$

donde  $O(x - x_i)^{k+1}$  es el error de truncamiento local de orden  $k + 1$  que se comete al aproximar la función con el polinomio de grado  $k$ . Esta definición es válida para cualquier función  $f$  que sea  $k$  veces diferenciable y es válido para todo punto interior a  $\Omega$ , en particular para

los puntos de  $\Omega^d$ , así se pueden obtener aproximaciones a la primera derivada como sigue.

Considere las expansiones en serie de Taylor alrededor de los puntos  $x = x_i - \Delta x = x_{i-1}$ ,  $x = x_i$  y  $x = x_i + \Delta x = x_{i+1}$  entonces de acuerdo a (3.2) se tienen las siguientes aproximaciones

$$f_{i-1} = f_i - \left. \frac{df}{dx} \right|_{x_i} \Delta x + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2 f}{dx^2} \right|_{x_i} \Delta x^2 - \mathcal{O}(\Delta x)^3, \quad (3.3)$$

$$f_i = f_i, \quad (3.4)$$

$$f_{i+1} = f_i + \left. \frac{df}{dx} \right|_{x_i} \Delta x + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2 f}{dx^2} \right|_{x_i} \Delta x^2 + \mathcal{O}(\Delta x)^3, \quad (3.5)$$

donde  $f_i := f(x_i)$ . Entonces despejando la primer derivada de (3.3) se tiene a primer orden

$$\left. \frac{df}{dx} \right|_{x_i} = \frac{f_i - f_{i-1}}{\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x), \quad (3.6)$$

esta aproximación necesita saber el valor de la función en los puntos  $x_{i-1}$  y  $x_i$  por lo cual recibe el nombre de *diferencias regresivas*. Pero esta aproximación no es la única. Por ejemplo ahora si se despeja nuevamente la primer derivada de (3.5) se tiene nuevamente una nueva aproximación a primer orden,

$$\left. \frac{df}{dx} \right|_{x_i} = \frac{f_{i+1} - f_i}{\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x), \quad (3.7)$$

pero con la diferencia de que ahora se necesita el valor de la función en los puntos  $x_i$  y  $x_{i+1}$  y por esta razón está aproximación se le conoce como *diferencias progresivas*. De acuerdo a las expansiones (3.3,3.4,3.5) aún se puede obtener otra aproximación la cual consiste en tomar la combinación lineal  $(f_{i+1} - f_{i-1})/(2\Delta x)$  de estas expresiones para obtener una aproximación a segundo orden,

$$\left. \frac{df}{dx} \right|_{x_i} = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x)^2, \quad (3.8)$$

la cual es una mejor aproximación a la derivada, ya que conforme  $\Delta x \rightarrow 0$ ,  $\Delta x^2$  lo hace más rápido. Esta aproximación requiere de los puntos  $x_{i-1}$  y  $x_{i+1}$  por lo que se le conoce como *diferencia centrada*.

Estas son las tres aproximaciones posibles mediante las expresiones (3.3,3.4,3.5) para la primer derivada. Para la segunda derivada es posible obtenerla mediante la combinación lineal  $(f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1})/\Delta x^2$  de este modo se tiene

$$\left. \frac{d^2 f}{dx^2} \right|_{x_i} = \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{\Delta x^2} + \mathcal{O}(\Delta x)^2, \quad (3.9)$$

En la práctica no se suelen utilizar aproximaciones en DF a primer orden, pero es muy útil para su explicación. En los resultados que se presentarán se utilizan aproximaciones a segundo orden tanto para las primeras derivadas como para las segundas, para ello solo basta considerar aproximaciones en los puntos  $\{x_{i-3}, x_{i-2}, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}\}$  de este modo se puede verificar que dichas aproximaciones dan como resultado las siguientes expresiones.

Para la primera derivada:

$$\left. \frac{df}{dx} \right|_{x_i} = \frac{f_i - 4f_{i-1} + f_{i-2}}{2\Delta x} + O(\Delta x)^2, \quad (3.10)$$

$$\left. \frac{df}{dx} \right|_{x_i} = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2\Delta x} + O(\Delta x)^2, \quad (3.11)$$

$$\left. \frac{df}{dx} \right|_{x_i} = \frac{-f_i + 4f_{i+1} + f_{i+2}}{2\Delta x} + O(\Delta x)^2. \quad (3.12)$$

Para la segunda derivada:

$$\left. \frac{d^2 f}{dx^2} \right|_{x_i} = \frac{2f_i - 5f_{i-1} + 4f_{i-2} - f_{i-3}}{\Delta x^2} + O(\Delta x)^2, \quad (3.13)$$

$$\left. \frac{d^2 f}{dx^2} \right|_{x_i} = \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{\Delta x^2} + O(\Delta x)^2, \quad (3.14)$$

$$\left. \frac{d^2 f}{dx^2} \right|_{x_i} = \frac{2f_i - 5f_{i+1} + 4f_{i+2} - f_{i+3}}{\Delta x^2} + O(\Delta x)^2. \quad (3.15)$$

Dependiendo del tipo de ecuación que se desea resolver será más útil emplear una aproximación regresiva, central o progresiva.

Para ilustrar el método en DF considere como ejemplo la ecuación de advección lineal como un problema de valores iniciales:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} &= 0, \text{ en } \Omega = [0, t_{max}] \times [x_{min}, x_{max}] \\ u(0, x) &= u_0(x) \\ u(t, x_{min}) &= u_{min}(t), \quad u(t, x_{max}) = u_{max}(t). \end{aligned} \right\} \quad (3.16)$$

Entonces lo primero que debemos hacer es considerar el dominio discreto  $\Omega^d$  el cual se ilustra en la fig.(3.2) que consta de las coordenadas  $(t^n, x_i)$  con  $t^n = n\Delta t$  y  $x_i = x_{min} + i\Delta x$  y la versión discreta de la ecuación de advección a primer orden en el tiempo con la aproximación en diferencias progresivas ya que queremos ir en el sentido creciente del tiempo, y la aproximación para la derivada espacial central a segundo orden, de este modo la aproximación toma la siguiente forma

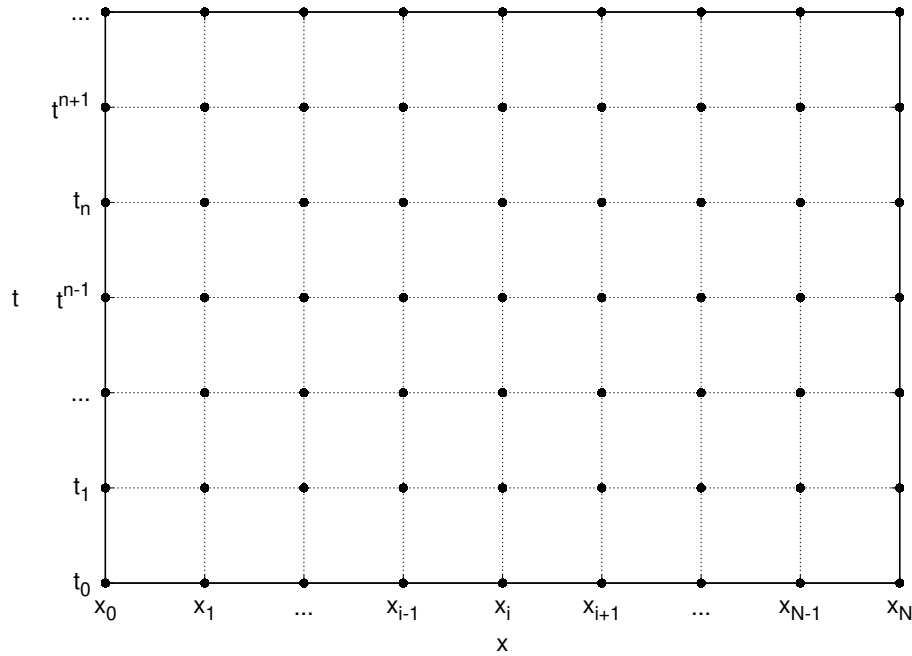


Figura 3.2: Dominio discreto  $\Omega^d$  para un problema de valores iniciales en una dimensión.

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta t, \Delta x^2) = 0 \quad (3.17)$$

donde  $u_i^n \equiv u(t^n, x_i)$ . Despejando  $u_i^{n+1}$  se tiene la siguiente ecuación

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x} (u_{i+1}^n - u_{i-1}^n) + \mathcal{O}(\Delta t, \Delta x^2). \quad (3.18)$$

Esta ecuación nos dice que para conocer una aproximación del valor de la función  $u$  al tiempo  $t^{n+1}$  en el punto  $x_i$  es necesario saber el valor de la función al tiempo  $t^n$  en los puntos  $x_{i-1}$ ,  $x_i$  y  $x_{i+1}$ . Aquí es necesario mencionar que el tamaño de paso de tiempo  $\Delta t$  no puede ser elegido arbitrariamente, ya que se debe satisfacer siempre que

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1 \quad (3.19)$$

la cuál se conoce como la condición de *Courant–Friedrich–Lewy*. En la fig.(3.3) se muestran dos esquemas el de la derecha resulta en un esquema estable y el de la izquierda en uno inestable.

La aproximación en DF suele ser muy utilizada por tres razones principalmente, la primera es que es un método muy fácil de programar, la segunda es que las matemáticas requeridas para su derivación solo requieren series de Taylor lo cual es una herramienta matemática muy básica y la tercera es que se pueden construir métodos con la precisión

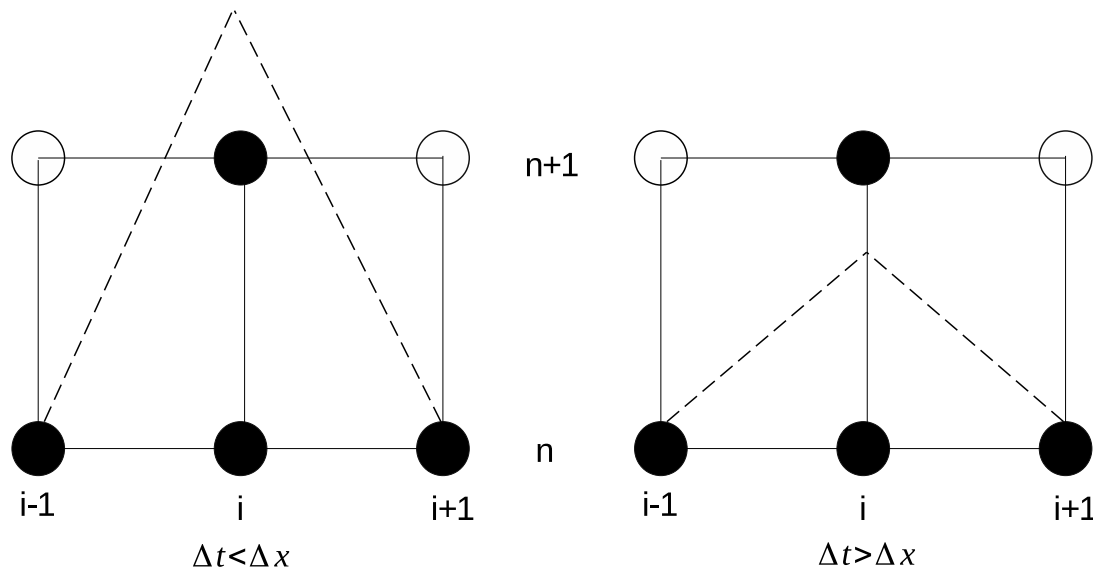


Figura 3.3: A la derecha se muestra un esquema estable en el que se cumple la condición de Courant–Friedrich–Lewy y a la izquierda uno inestable donde no se cumple.

que uno desee, es decir se pueden encontrar aproximaciones de las derivadas a cualquier orden y el único precio a pagar es que entre mayor sea el orden en la aproximación mayor será el número de operaciones de punto flotante. Ahora las desventajas aparecen cuando se tratan de resolver algunos sistemas de ecuaciones no lineales, como lo son las ecuaciones de Euler, ya que estas ecuaciones pueden desarrollar discontinuidades. Y dada la formulación de DF siempre se requiere que las funciones sean suaves por lo tanto están destinados a fallar en este tipo de escenarios, una solución a este problema se resuelve mediante el método de *volúmenes finitos* ya que estos encuentran una aproximación del sistema de EDPs en su formulación *débil*.

## 3.2. Volúmenes Finitos

Como se mencionó en la sección anterior, los métodos en DF no son capaces de poder manejar discontinuidades debido a su formulación. Por lo tanto los métodos en volúmenes finitos (VF) se construyen para resolver este problema. Igual que con DF se tomará el caso unidimensional ya que es análogo en más dimensiones para mallas uniformes.

Considere el siguiente sistema de leyes conservativas,

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{U})}{\partial x} = \mathbf{S}(\mathbf{U}), \quad (3.20)$$

donde  $\mathbf{U}$ ,  $\mathbf{F}$ ,  $\mathbf{S}$  son vectores columna de dimensión  $m$  conocidos como los vectores de estado, flujos y fuentes respectivamente. La formulación integral la podemos encontrar integrando el sistema en el intervalo  $\Omega_i = [x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]$  también llamado volumen de control donde  $x_{i+1/2} = x_i + \frac{1}{2}\Delta x$ , así la ec.(3.20) se transforma en

$$\frac{d}{dt}\bar{\mathbf{U}}_i + \frac{\mathbf{F}_{i+1} - \mathbf{F}_i}{\Delta x} = \bar{\mathbf{S}}_i \quad (3.21)$$

donde

$$\bar{\mathbf{U}}_i := \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \mathbf{U}(t, x) dx, \quad (3.22)$$

$$\bar{\mathbf{S}}_i := \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \mathbf{S}(t, x) dx, \quad (3.23)$$

$$(3.24)$$

son los valores promedio del vector de estado  $\mathbf{U}$  y la fuente  $\mathbf{S}$  en el volumen de control  $\Omega_i$  respectivamente y  $\mathbf{F}_i := \mathbf{F}(\mathbf{U}(x_{i-1/2}))$  es el flujo en el punto  $x_{i-1/2}$ . Esta formulación equivale a un problema de Riemann local y la solución es encontrar una aproximación de  $\mathbf{F}_i$  adecuada [8, 9].

Aquí se usa la aproximación HLLE,

$$\mathbf{F}_i^{HLLE} = \frac{\lambda^+ \mathbf{F}_{i+1} - \lambda^- \mathbf{F}_i + \lambda^+ \lambda^- (\bar{\mathbf{U}}_{i+1} - \bar{\mathbf{U}}_i)}{\lambda^+ - \lambda^-}, \quad (3.25)$$

donde

$$\begin{aligned} \lambda^+ &= \text{máx}(0, \lambda_1^i, \dots, \lambda_m^i, \lambda_1^{i+1}, \dots, \lambda_m^{i+1}) \\ \lambda^- &= \text{mín}(0, \lambda_1^i, \dots, \lambda_m^i, \lambda_1^{i+1}, \dots, \lambda_m^{i+1}) \end{aligned} \quad (3.26)$$

con  $\lambda_j^i, \lambda_j^{i+1}$  los eigenvalores de la matriz jacobiana  $A = \frac{d\mathbf{F}}{d\mathbf{U}}$  en los puntos  $x_{i-1/2}$  y  $x_{i+1/2}$  respectivamente, para calcular los eigenvalores como los flujos  $\mathbf{F}_i$  se supone que cada componente del vector de estados es constante en cada volumen de control  $\Omega_i$ . Con esto la ec.(3.21) se puede reescribir como

$$\frac{d}{dt}\bar{\mathbf{U}}_i = \bar{\mathbf{S}}_i - \frac{\mathbf{F}_{i+1}^{HLLE} - \mathbf{F}_i^{HLLE}}{\Delta x}. \quad (3.27)$$

Ahora hay dos comentarios importantes que se deben señalar el primero es que en ausencia de discontinuidades el método descrito anteriormente coincide con una aproximación en DF a segundo orden con tamaño de malla  $\Delta x/2$ , mientras que en zonas donde se presenten choques el método es de primer orden. La segunda cosa que debemos notar es que la expresión anterior paso de ser un sistema de ecuaciones en derivadas parciales a un sistema de ecuaciones en derivadas ordinarias que en la siguiente sección se explicará como resolver.

### 3.3. Método de Lineas

Los métodos descritos tanto DF y VF se utilizan para discretizar la parte espacial de las ecuaciones. El método de líneas (MoL) permite encontrar una versión discreta de mayor



orden en el tiempo, para ver esto considere la siguiente ecuación diferencial

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \mathcal{L}(u), \quad (3.28)$$

donde  $\mathcal{L}$  es un operador diferencial que solo incluye derivadas espaciales. Entonces podemos reemplazar la ecuación anterior por su versión semi-discreta entonces si denotamos a  $\mathbf{u}$  como el vector columna donde cada entrada  $u_i$  consta de la función  $u$  evaluada en cada punto  $x_i$  del dominio discreto, y  $\mathbf{L}$  la versión discreta del operador  $\mathcal{L}$ , lo primero que debemos notar es que el vector  $\mathbf{u}$  ya no depende del tiempo por lo que la ecuación diferencial parcial se transforma en el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \mathbf{L}\mathbf{u}, \quad (3.29)$$

el cual puede ser resuelto con cualquier integrador para EDOs. Por ejemplo para el método de Euler se tiene

$$\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{u}^n + \Delta t \mathbf{L}\mathbf{u}^n, \quad (3.30)$$

pero las soluciones que se presentarán en el siguiente capítulo son calculadas mediante el método de Runge-Kutta 4

$$\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{u}^n + \frac{\mathbf{k}_1 + 2\mathbf{k}_2 + 2\mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4}{6} \Delta t \quad (3.31)$$

donde

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_1 &= \mathbf{L}(\mathbf{u}^n), \\ \mathbf{k}_2 &= \mathbf{L}\left(\mathbf{u}^n + \frac{1}{2}\mathbf{k}_1\Delta t\right), \\ \mathbf{k}_3 &= \mathbf{L}\left(\mathbf{u}^n + \frac{1}{2}\mathbf{k}_2\Delta t\right), \\ \mathbf{k}_4 &= \mathbf{L}(\mathbf{u}^n + \mathbf{k}_3\Delta t). \end{aligned} \quad (3.32)$$

Entonces con los métodos descritos se utilizan para poder encontrar aproximaciones de las soluciones en el continuo, pero se necesita un criterio para saber cuando estas aproximaciones son aceptables. Una solución aproximada es aceptable cuando esta *converge* a la solución en el continuo.

### 3.4. Convergencia, consistencia y estabilidad

Definimos el error global  $e_i$  como la diferencia entre la solución exacta y la solución aproximada en el punto  $x_i$ , entonces diremos que una solución aproximada tiende a una solución exacta si el error  $\max_i(e_i) \rightarrow 0$  cuando  $\Delta x \rightarrow 0$ .

Un criterio que nos dice si la aproximación calculada es una solución de nuestra ecuación en el límite de resolución infinita (es decir en el límite cuando  $\Delta x$  tienda a cero) es el siguiente.

Sean  $f_1$  y  $f_2$  aproximaciones con orden  $\Delta x^n$  y  $(\Delta x/2)^n$  respectivamente, de la solución exacta  $f_0$ , por lo tanto  $f_0$  puede escribirse como

$$f_0 = f_1 + \epsilon(\Delta x)^n, \quad (3.33)$$

$$f_0 = f_2 + \epsilon(\Delta x/2)^n. \quad (3.34)$$

A partir de estas expresiones podemos obtener la siguiente ecuación

$$\frac{f_0 - f_1}{f_0 - f_2} = 2^n + O(\Delta x^{n+1}) \quad (3.35)$$

Si un método numérico y su implementación en una solución numérica satisface la ecuación anterior se dice que dicha solución converge con orden  $n$  y a  $2^n$  se conoce como factor de convergencia. Esto es de cierta utilidad porque damos un primer criterio para soluciones numéricas sin embargo, este factor que acabamos de definir necesita la solución exacta con la cual en la mayoría de los casos no se cuenta, así que una manera de ampliar este resultado es utilizar una aproximación más, es decir, definiendo a  $f_3$  con orden  $(\Delta x/4)^n$  entonces podemos reescribir nuevamente la solución exacta  $f_0$  en términos de  $f_3$  como

$$f_0 = f_3 + \epsilon(\Delta x/4)^{n+1}, \quad (3.36)$$

Entonces a partir de las expresiones para  $f_0$  en términos de  $f_1$ ,  $f_2$  y  $f_3$  (3.34,3.34,3.36) se obtiene

$$\frac{f_2 - f_1}{f_3 - f_2} = 2^n + O(\Delta x^{n+1}) \quad (3.37)$$

Aquí se tiene de nuevo el factor de convergencia pero sin la necesidad de conocer la solución analítica, así que si se cumple esta condición diremos que la solución autoconverge, y autoconverge al sistema del cual es solución.

Una vez que se sepa que la solución converge (o bien autoconverge) podemos escribir a  $f_0$  a partir de (3.34,3.34) como

$$f_0 = \frac{2^n f_2 - f_1}{2^n - 1} + O(\Delta x^{n+1}) \quad (3.38)$$

esta última expresión permite conocer con una mejor aproximación la solución con soluciones numéricas ya calculadas, y se le conoce como la extrapolación de Richardson. Cabe mencionar que la definición de convergencia esta definida punto a punto sobre el dominio discreto, así que si se quiere ver una convergencia en el tiempo para esto se puede ver que la norma del error entre las soluciones converja, así que se define la  $p$ -norma como

$$\|f\|_p = \sqrt[p]{\int_{x_{min}}^{x_{max}} |f(x)|^p dx}. \quad (3.39)$$

Además un concepto importante es el de estabilidad, diremos que un método numérico

es *estable* si una pequeña perturbación en los datos iniciales solo implica una pequeña perturbación en la solución.

Un método numérico se dice que es *consistente* si al refinar la malla los operadores discretos son equivalentes a los operadores de la ecuación original.

Para problemas en tres dimensiones estas dos últimas propiedades son indispensables ya que gracias al teorema de equivalencia de Lax se sabe que si un esquema numérico es consistente y estable entonces es convergente, ya que hacer pruebas de convergencias en tres dimensiones implica usar demasiada memoria y tiempo computacional que la mayoría de veces es insuficiente, por lo pronto en este documento al ser un problema con simetría esférica es equivalente a un problema en una dimensión y por lo tanto se pueden hacer las pruebas de convergencia directamente.

# Capítulo 4

## Resultados

Los resultados que se presentan en este capítulo fueron construidos bajo las siguientes condiciones:

Dominio numérico. Se define el dominio espacial escalonado, es decir se toma  $r_i = 0.1 + i\Delta r$  con  $i = 0, 1, 2, \dots$  y  $\Delta r = M/25, M/50, M/100$ . Para el dominio temporal se eligió un número de Courant  $CFL = 0.25$ .

Condiciones de frontera. El dominio numérico es un subconjunto del dominio físico por lo que no es necesario implementar condiciones de frontera. Sin embargo dado que algunos factores geométricos divergen en el origen se aplica una técnica llamada excisión sin excisión la cual consiste en multiplicar por un factor de  $(r/(1+r))^4$  a el lado derecho de las ecuaciones de evolución.

Antes de comenzar con las soluciones obtenidas, es necesario obtener algunas propiedades elementales de un hoyo negro para diagnosticar durante su evolución.

### Diagnostico.

Horizonte aparente. Se define como una superficie bidimensional incrustada en la hipersuperficies  $\Sigma_t$ , en la que la expansión  $\Theta$  de las geodésicas nulas salientes es cero [4]. Para un espacio tiempo esféricamente simétrico en la formulación GBSSN se escribe como

$$\Theta = \frac{1}{g_{\theta\theta} \sqrt{\chi g_{rr}}} (\chi g'_{\theta\theta} - g_{\theta\theta} \chi') + 2 \left( \frac{A_{rr}}{2g_{rr}} - \frac{1}{3} K \right). \quad (4.1)$$

Para seguir la evolución del horizonte aparente se calcula en cada paso de tiempo y ubicamos el cero más externo en el radio de coordenadas  $r_{AH}$  y lo expresamos en la coordenada radial  $R = \sqrt{g_{\theta\theta}/\chi}$  evaluado en  $r_{AH}$ .

Horizonte de eventos. Seguimos un paquete de rayos nulos radiales salientes para ubicar aproximadamente el horizonte de sucesos como la superficie que separa los rayos nulos salientes que alcanzan el infinito espacial de los que no lo hacen cuando se lanzan hacia el futuro.

## 4.1. Evolución de un hoyo negro en el vacío

Considere el PVI para las ecuaciones de Einstein en el vacío en la formulación GBSSN (2.32). Con la finalidad de explorar el efecto de las condiciones de norma sobre la evolución de la geometría consideremos dos casos. El primero consiste en tomar un lapso que satisfaga la condición  $1 + \log$  y un corrimiento nulo durante toda la evolución, para el segundo escenario cambiamos la condición del corrimiento por la ec.  $\Gamma - Driver$  (2.30).

*Datos iniciales.* Se tomo una métrica de un hoyo negro de Schwarzschild en coordenadas isotrópicas (ver A),

$$\chi = \left(1 + \frac{M}{2r}\right)^{-4}, \quad g_{rr} = 1, \quad g_{\theta\theta} = r^2, \quad (4.2)$$

donde la masa  $M$  es la misma que la masa ADM del hoyo negro. Para las condiciones de norma se eligen un corrimiento nulo  $\beta^r = B^r = 0$  y un lapso  $\alpha = (1 + M/(2r))^{-2}$ . Además se supone que el espacio descrito en las coordenadas isotrópicas no tiene curvatura por lo que  $A_{rr} = K = 0$ . Por último de la definición para  $\Gamma^r$  se obtiene que  $\Gamma^r = -2/r$ . Así con estos datos es posible verificar que las constricciones (2.33) se satisfacen al tiempo inicial.

En la fig.(4.1) se muestran instantáneas de la función métrica  $g_{rr}$  cada  $10M$  unidades de tiempo. A la izquierda se tiene el perfil de la función métrica  $g_{rr}$  cuando se tiene un corrimiento nulo durante toda la evolución y a la derecha cuando el vector de corrimiento satisface la condición de norma  $\Gamma - Driver$ . Se observa en el primer escenario en el que hay un corrimiento trivial que la función  $g_{rr}$  crece muy rápido; a este efecto se le conoce como estiramiento del corte, lo que hace que se generen grandes gradientes en las variables de evolución y finalmente, lleva a una solución no convergente y una posible explosión del código. La condición de norma  $\Gamma - Driver$  para el vector de corrimiento hace que el crecimiento de la función métrica sea más lento, con lo que se muestra que el uso de una condición de norma adecuada ayuda a garantizar una evolución exitosa durante un intervalo de tiempo más prolongado. En la fig. (4.2) puede verse la localización del horizonte de eventos del hoyo negro, en el cual todas las geodésicas divergen de él, también se muestra la localización del horizonte aparente, el cual podemos ver que en este caso coincide con el horizonte de eventos.

Finalmente para poder asegurar que las soluciones mostradas son aceptables, en la fig. (4.3) se muestra una prueba de convergencia de la 2-norma de las constricciones del sistema.

## 4.2. Acreación de un gas ideal

En esta sección se considera el PVI de la evolución de un fluido ideal relativista (2.44, 2.45) en un espacio-tiempo descrito por las ecuaciones de Einstein en la formulación GBSSN (2.32) con las condiciones de norma  $1 + \log$  para la función de lapso y la condición  $\Gamma - Driver$  (2.30) para el corrimiento.

*Condiciones iniciales.* Primeramente se eligen las condiciones iniciales para las variables primitivas de las ecuaciones de Euler de la siguiente manera

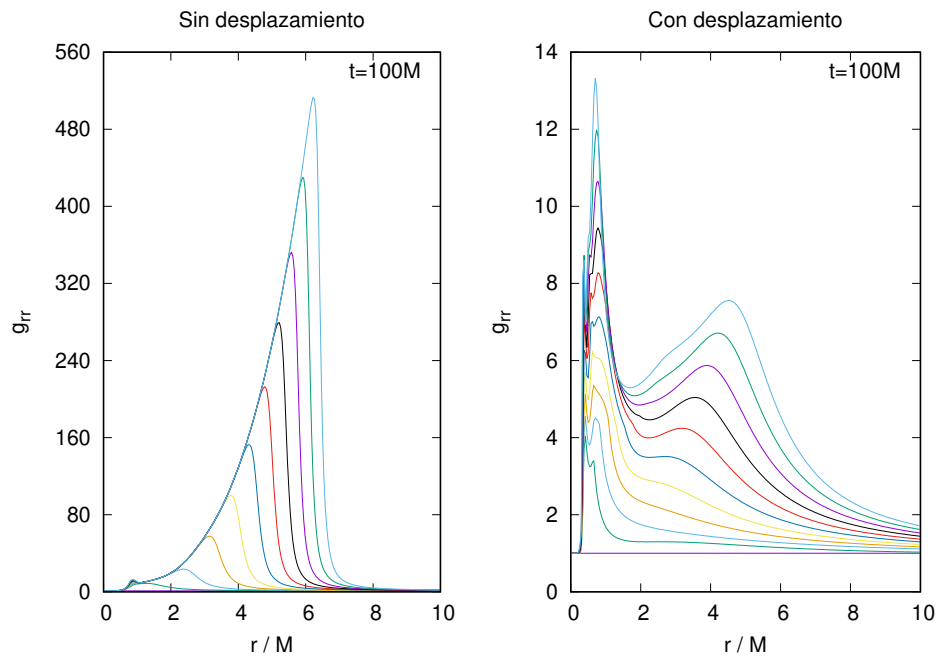


Figura 4.1: Instantáneas de la evolución de la función métrica  $g_{rr}$  durante el intervalo de tiempo  $[0, 100M]$ . A la izquierda con un desplazamiento nulo y a la derecha con un corrimiento que satisface la condición de norma  $\Gamma$ -Driver.

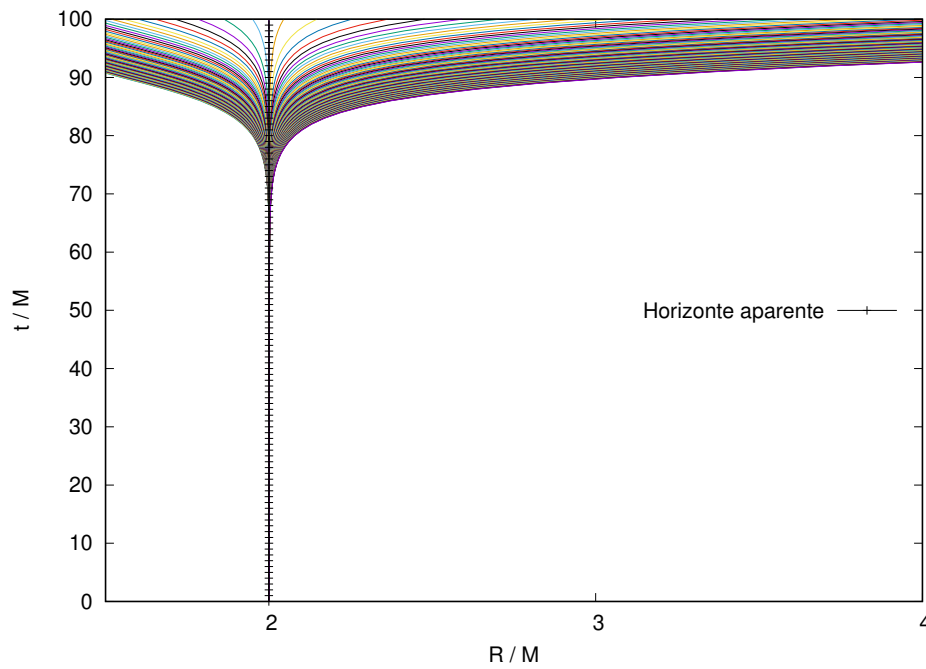


Figura 4.2: Localización del horizonte de eventos del hoyo negro mediante la trayectoria de geodésicas y el horizonte aparente en cada instante del tiempo.

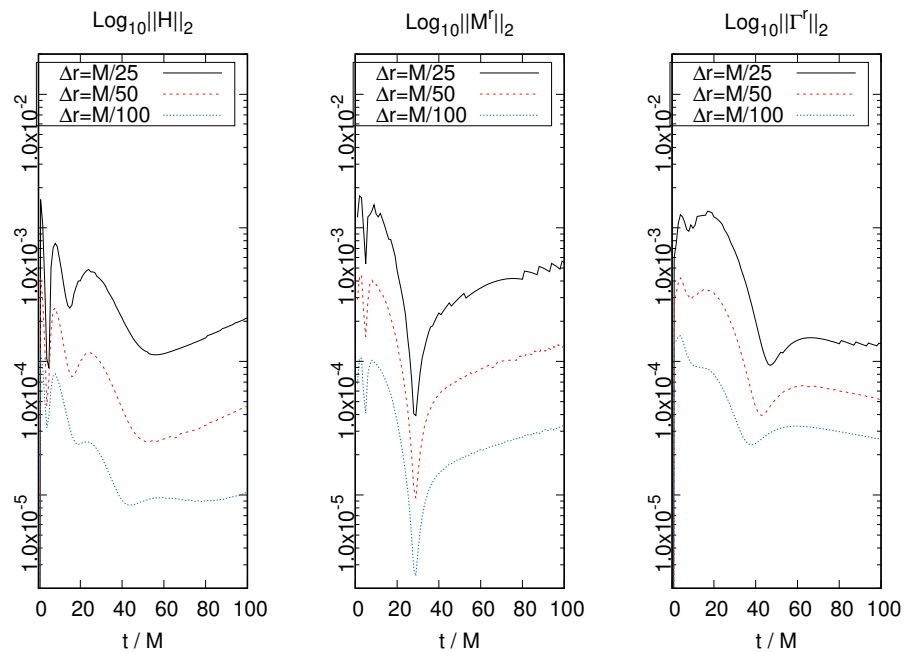


Figura 4.3: Convergencia de la 2-norma del error de las constricciones hamiltoniana, de momento y la constante  $G$ .

$$\begin{aligned}
\rho_0 &= \text{máx} \left\{ A \exp \left( -\frac{(r-r_0)^2}{\sigma^2} \right), \text{floor} \right\}, \\
e &= e_0, \\
v &= \begin{cases} v_0 & \text{si } \rho > \text{floor}, \\ 0 & \text{otro caso.} \end{cases}
\end{aligned} \tag{4.3}$$

donde  $\text{floor} = 10^{-10}$  es un artefacto numérico que actúa como una atmósfera y se mantiene durante toda la evolución con la finalidad de evitar tanto divisiones entre cero como densidades negativas que provocarían que explote el código durante un periodo de tiempo muy corto. Para la ecuación de estado se elige un valor del índice adiabático  $\Gamma = 4/3$ . Una vez fijada la materia se procede a encontrar las condiciones iniciales para la geometría resolviendo las constricciones del sistema (2.33). Suponiendo que tendremos un espacio-tiempo similar al de Schwarzschild en coordenadas isotrópicas se toma como ansatz

$$\chi = \left( 1 + \frac{M}{2r} + u \right)^{-4}, \quad g_{rr} = 1, \quad g_{\theta\theta} = r^2, \quad K = 0. \tag{4.4}$$

la ecuación que debe satisfacer la función  $u$  se obtiene de la restricción hamiltoniana y la componente  $A_{rr}$  se obtiene de la restricción de momento dando como resultado el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden,

$$\begin{aligned}
u' &= w, \\
w' &= -\frac{1}{16}(4\rho + 3A_{rr}^2)\chi^{-5/4} - \frac{2w}{r}, \\
A'_{rr} &= S_r + \frac{3A_{rr}(M - 2r - 2r(2u + 2rw))}{2r^2}\chi^{1/4},
\end{aligned} \tag{4.5}$$

con las condiciones iniciales  $u(0, r_0) = w(0, r_0) = A_{rr}(0, r_0) = 0$  y donde  $\rho$  y  $S_r$  están dados por (2.52). Este sistema de ecuaciones se resuelve con cualquier integrador numérico, en particular aquí se resuelve con el método de Runge-Kutta 4.

Para explorar un poco los parámetros consideramos los siguientes casos:

- (i)  $v_0 = -0.1, e_0 = 0.01$
- (ii)  $v_0 = -0.1, e_0 = 0.1$
- (iii)  $v_0 = -0.2, e_0 = 0.01$
- (iv)  $v_0 = -0.2, e_0 = 0.1$

con  $A = 2.5 \times 10^{-3}$ ,  $\sigma = 0.5$  y  $r_0 = 20$  para los cuatro casos anteriores.

En la fig.(4.4) se muestran instantáneas de la densidad de masa en reposo cada  $10M$  unidades de tiempo para los cuatro escenarios mencionados anteriormente, en los cuales podemos notar primeramente como es de esperar que un fluido con mayor velocidad inicial cae más rápido hacia el hoyo negro, pero también podemos ver que un fluido con mayor



energía interna específica tiende a diluirse más que uno con energía menor. Tanto el horizonte aparente como el de eventos para los dos primeros casos se pueden ver en la fig. (4.5) mientras que en la fig.(4.6) se muestra el crecimiento del horizonte aparente en los cuatro casos mencionados, donde puede verse que para un fluido con mayor velocidad el horizonte aparente crece más rápido y para mayor energía crece más lento. En la fig. (4.7) puede verse que la solución para los cuatro casos converge.

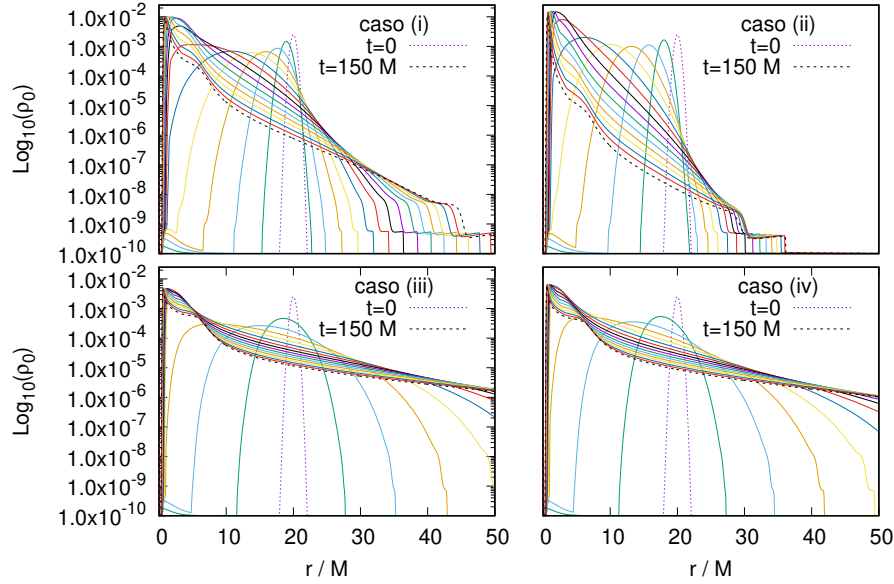


Figura 4.4: Instantáneas cada  $10M$  unidades de tiempo de la densidad de masa en reposo para valores de  $A = 2.5 \times 10^{-3}$ ,  $r_0 = 20$  y  $\sigma = 0.5$  para los cuatro escenarios planteados.

### 4.3. Acreación por un campo escalar fantasma

En esta sección vamos a considerar el PVI para la ecuación de KG escrita como un sistema de primer orden en el tiempo (2.61) en un espacio-tiempo descrito por las ecuaciones de Einstein en la formulación GBSSN (2.32) con condiciones de norma  $1 + \log$  y  $\Gamma$ -Driver para la función de lapso y el corrimiento (2.30).

*Condiciones iniciales.* Al igual que en la sección anterior se elige primero las funciones para la ecuación de KG de la siguiente manera

$$\phi = Ae^{-\left(\frac{r-r_0}{\sigma}\right)^2}. \quad (4.6)$$

Por simplicidad suponemos que los datos son simétricos en el tiempo de tal manera que  $\partial_t \phi = 0$ , por lo que la ecuación de constricción de momento se satisface de manera idéntica. Para las funciones de norma elegimos nuevamente un lapso  $\alpha = (1 + M/(2r))^{-2}$  y un

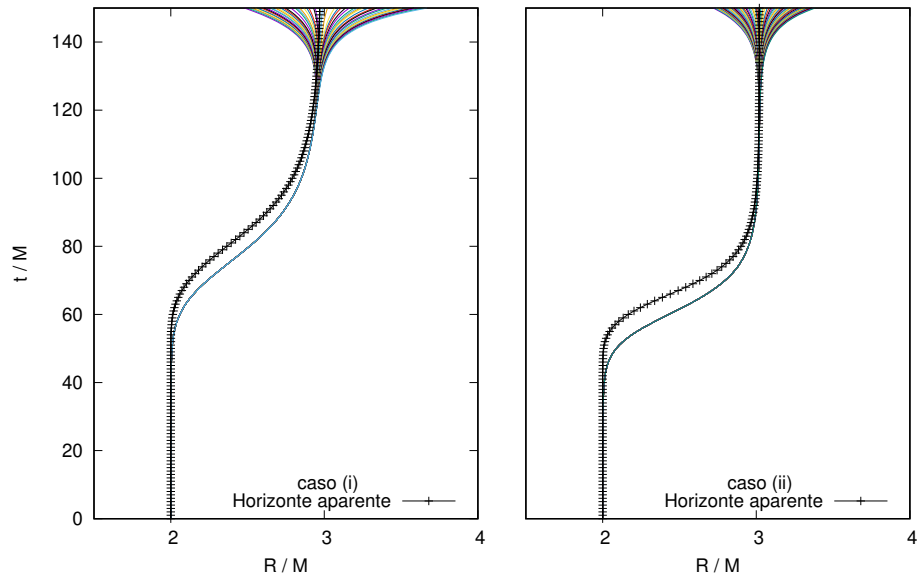


Figura 4.5: Localización del horizonte aparente (línea punteada) y el horizonte de eventos para los primeros dos casos.

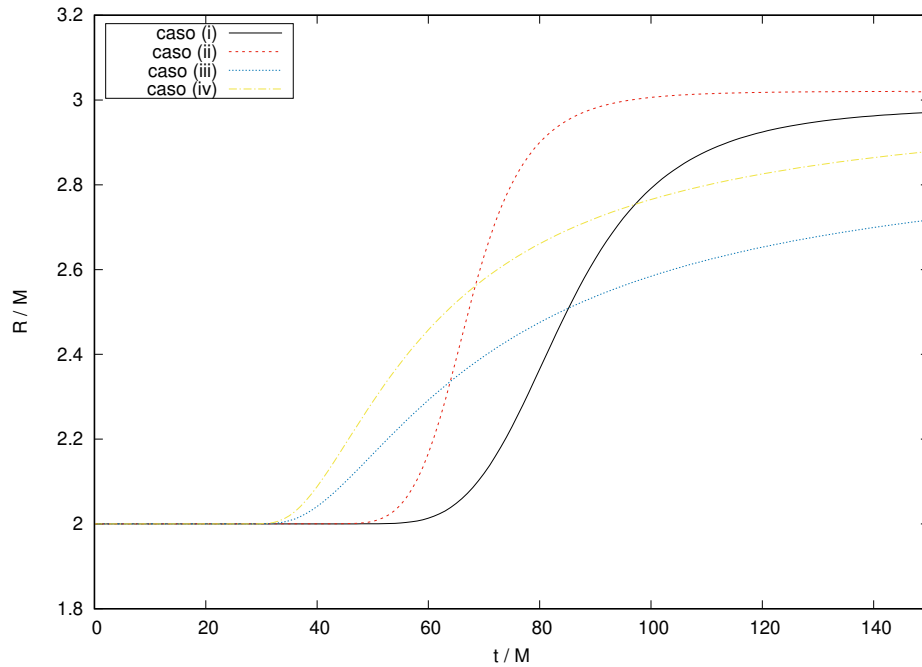


Figura 4.6: Horizonte aparente del hoyo negro para los cuatro casos mencionados.

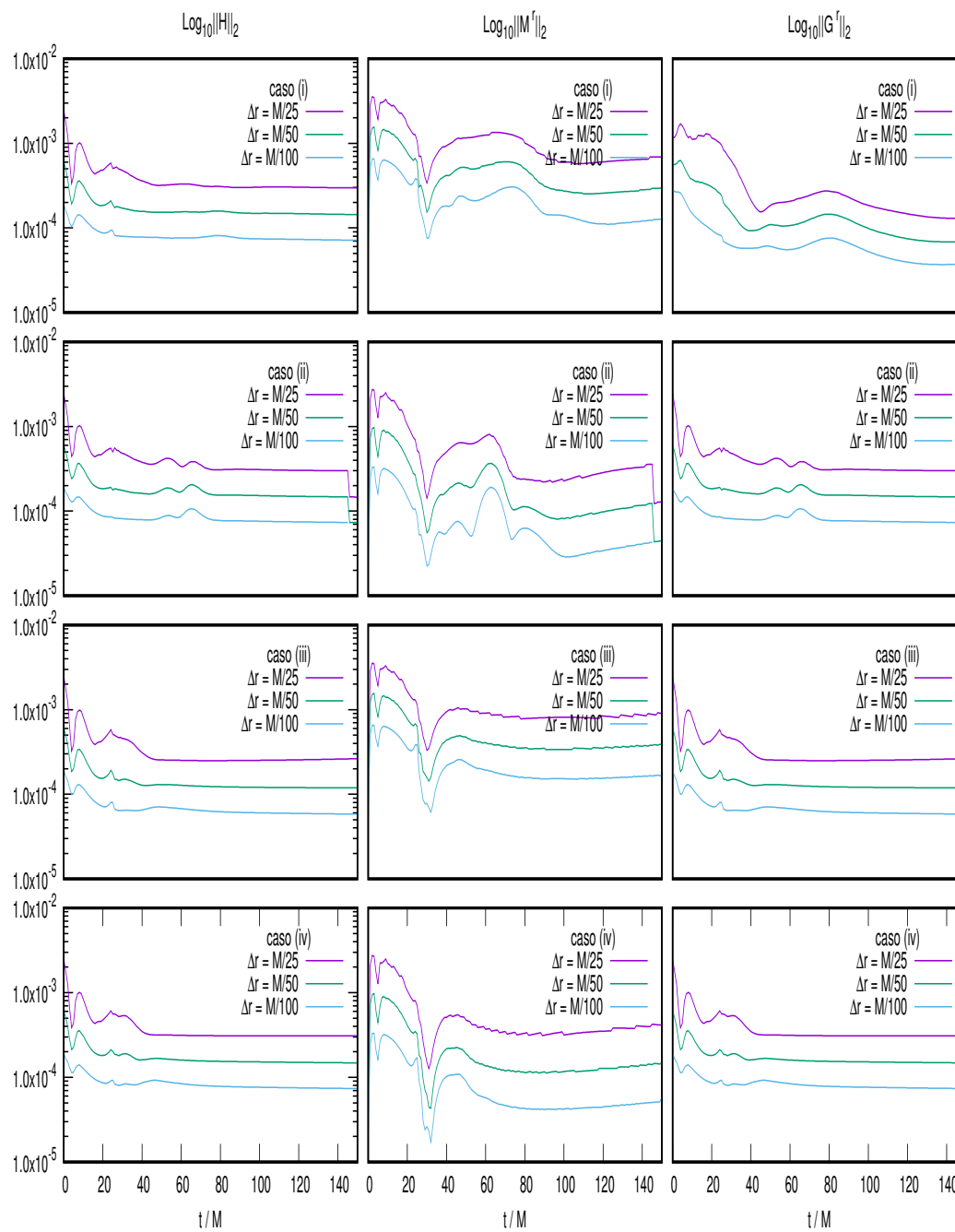


Figura 4.7: Convergencia de la 2-norma para las constricciones del sistema utilizando tres resoluciones distintas para los cuatro escenarios.

corrimiento  $\beta = B = 0$ . De esta manera las funciones auxiliares  $(\psi, \pi)$  son  $\psi = \partial_r \phi$  y  $\pi = 0$ .

Para la geometría se toma nuevamente como ansatz el espacio-tiempo de Schwarzschild en coordenadas isotrópicas como en la ec. (4.4) pero esta vez la restricción hamiltoniana toma la siguiente forma

$$\begin{aligned} u' &= v \\ w' &= \frac{1}{8} (\partial_r \phi)^2 \chi^{-1/4} - \frac{2w}{r} - \frac{V}{4} \chi^{-5/4}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Por último el potencial utilizado es

$$V = \lambda \phi^2. \quad (4.8)$$

Para valores de  $A = 0.25$ ,  $r_0 = 5$  y  $\sigma = 1$  en la fig.(4.8) se muestra el perfil del campo escalar  $\phi$  en los instantes del tiempo  $t = 0, 50M, 100M, 150M$  para valores de  $\lambda = 0$  y  $-0.1$ .

Las trayectorias de las geodésicas para localizar el horizonte de eventos del hoyo negro, así como el horizonte aparente se muestra en la fig.(4.9) a la izquierda se encuentra el caso con  $\lambda = -0.1$  y a la derecha  $\lambda = 0$ .

En la fig.(4.10) puede verse la convergencia de la 2-norma para las tres restricciones del sistema.

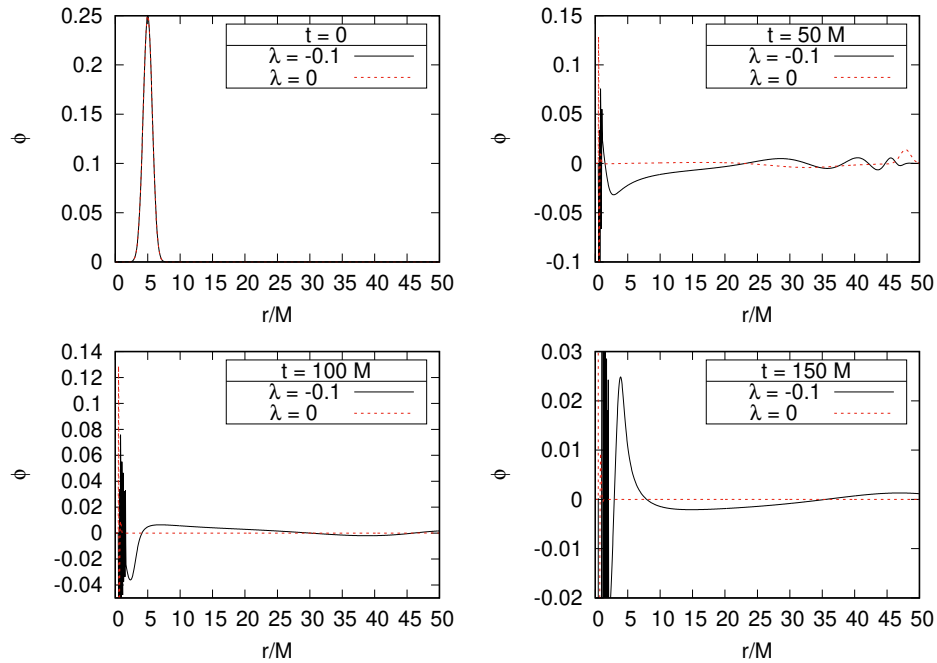


Figura 4.8: Evolución del campo escalar fantasma para un potencial  $V = \lambda \phi^2$  para valores de  $\lambda = 0$  y  $-0.1$  en los instantes de tiempo  $t = 0, 50M, 100M$  y  $150M$ .

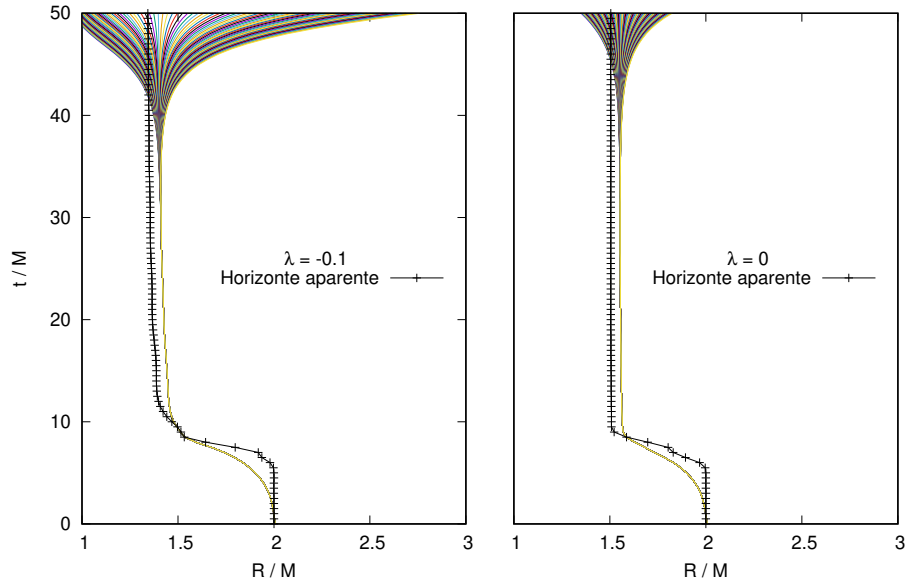


Figura 4.9: Localización del horizonte aparente y el horizonte de eventos para el problema no lineal del campo escalar fantasma con potencial  $V = \lambda\phi^2$  para valores de  $\lambda = 0$  y  $-0.1$ .

## 4.4. Acreación por EKG

Hasta este punto se tienen todos los ingredientes necesarios para poder resolver numéricamente el problema de acoplamiento mínimo de la dinámica de un fluido relativista con la del campo escalar fantasma descritos en un espacio-tiempo que obedece las ecuaciones de Einstein.

### Espacio-tiempo similar a Schwarzschild

Consideremos el caso en el que se tiene un espacio-tiempo similar al de Schwarzschild en coordenadas isotrópicas.

*Condiciones iniciales.* Damos las condiciones tanto para las ecuaciones de Euler como para la ecuación de KG como en las secciones (4.2,4.3) por lo que las constricciones se escriben como en ec.(4.5) para el espacio-tiempo dado por (4.4).

En la fig.(4.11) puede verse la densidad de masa en reposo para los PVI de Euler y EKG, en los cuales se puede observar que el efecto que tiene el campo escalar fantasma sobre la densidad es frenarla, mientras que en la fig.(4.12) el perfil del campo escalar para los casos de KG y EKG.

En la fig.(4.13) se muestra inicialmente como el horizonte aparente disminuye hasta un radio  $R \approx 1.4$  para después aumentar hasta  $R \approx 2.6$  entonces comparando con la fig.(4.6)

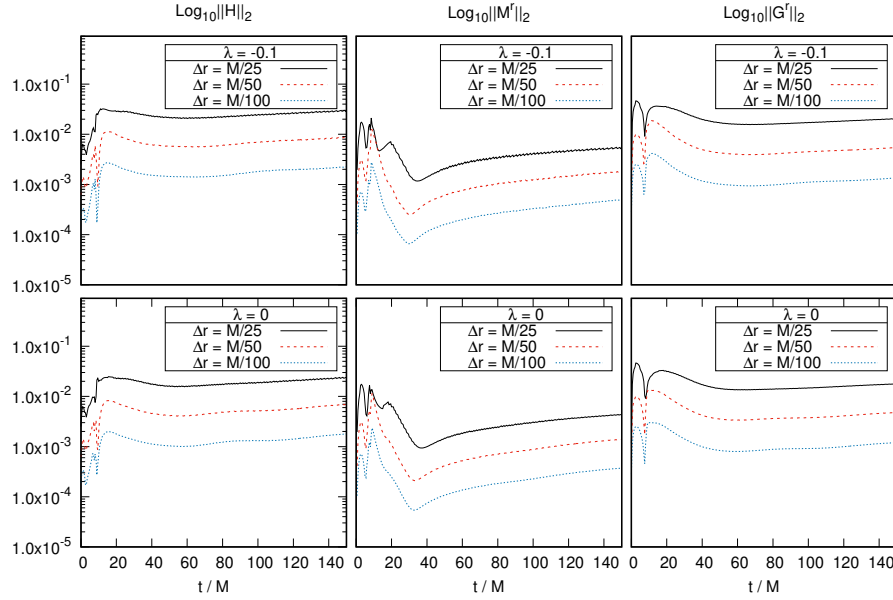


Figura 4.10: Convergencia de la 2-norma de las tres constricciones para los dos escenarios con  $\lambda = 0$  y  $-0.1$ .

donde el radio aumenta hasta  $R \approx 3$ , podemos ver que en la presencia de energía oscura el horizonte aparente crece un 20 % menos que en la ausencia de ella.

## Espacio-tiempo de Schwarzschild

Existen una gran variedad de escenarios que se pueden explorar pero consideraremos ahora uno en el que la geometría del espacio-tiempo es exactamente el de Schwarzschild en coordenadas isotrópicas, así que nuestro PVI para las ecuaciones de Einstein y EKG se define de la siguiente forma.

Condiciones iniciales. Asumimos para las ecuaciones KG un campo escalar como el de la sección anterior

$$\begin{aligned} \phi &= Ae^{-\frac{(r-r_0)^2}{\sigma^2}}, \\ \psi_r &= \partial_r \phi, \\ \pi &= 0. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Ahora para las ecuaciones de Euler tomamos un fluido en reposo, de este modo la constricción de momento se satisface de manera idéntica. También queremos que la constricción hamiltoniana se satisfaga de manera idéntica por lo que imponemos que  $\rho = n^\mu n^\nu T_{\mu\nu} = 0$  esto implica que la distribución de materia es

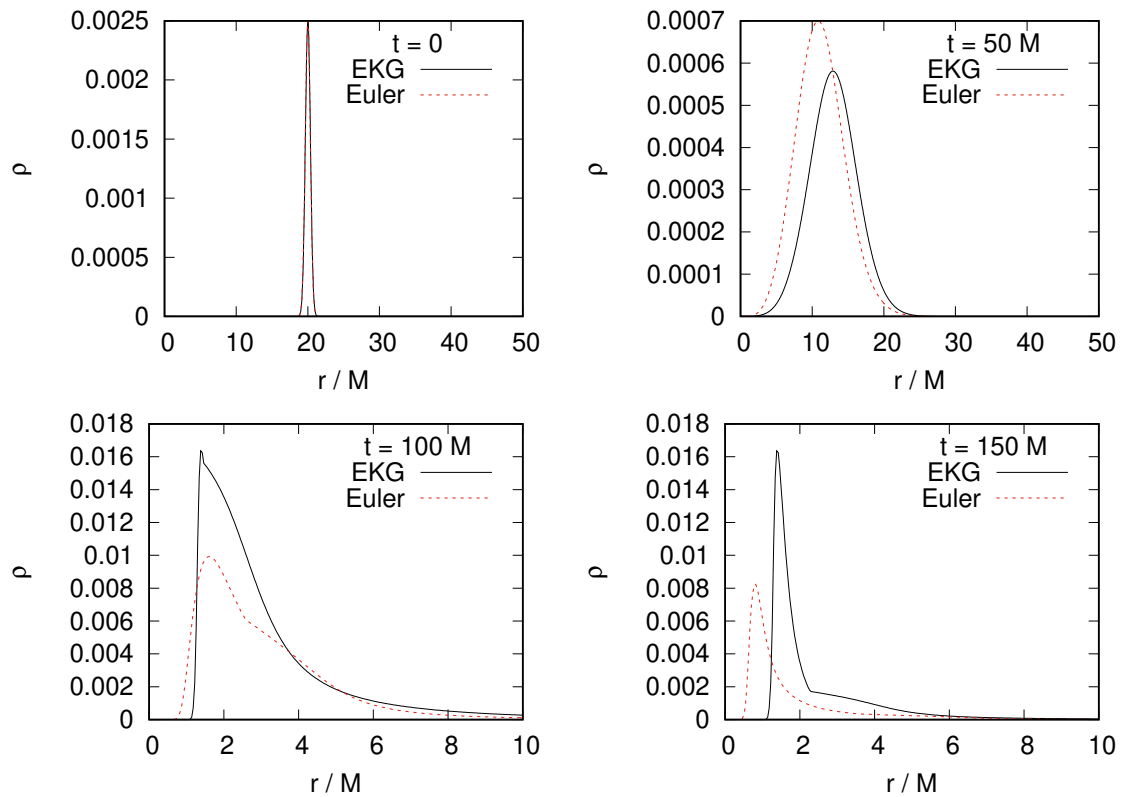


Figura 4.11: Perfiles de la densidad de masa en reposo para el PVI EKG comparado con el PVI de Euler.

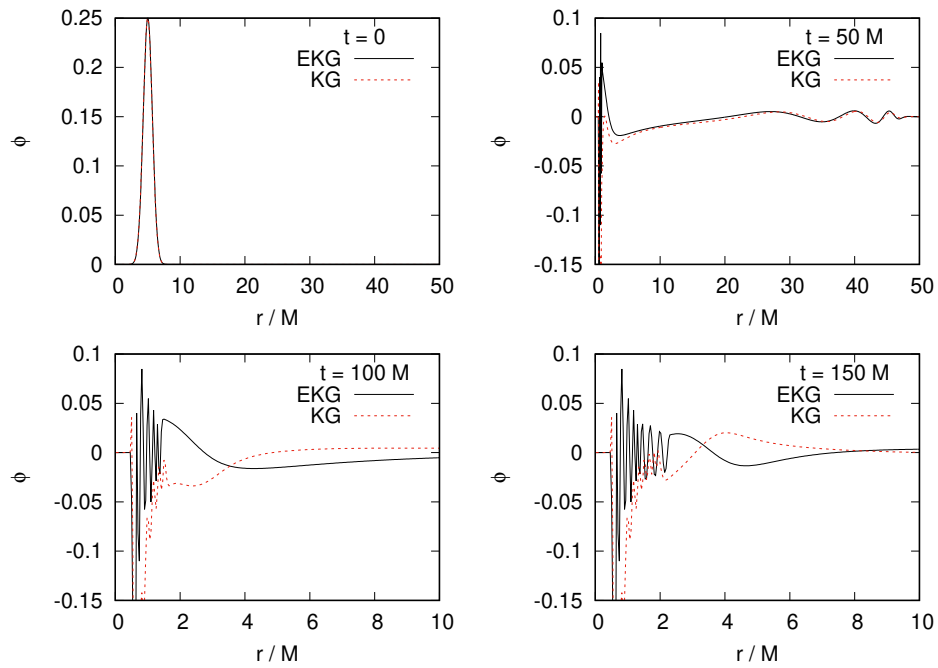


Figura 4.12: Perfiles del campo escalar fantasma para el PVI EKG comparado con el PVI de Euler.

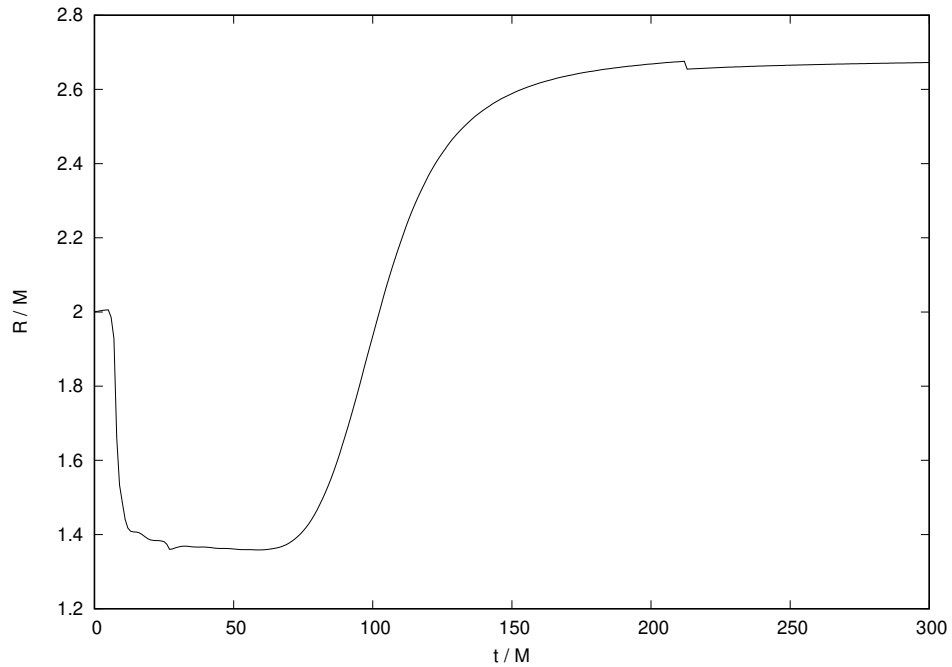


Figura 4.13: Horizonte aparente del hoyo negro para la acreación EKG.



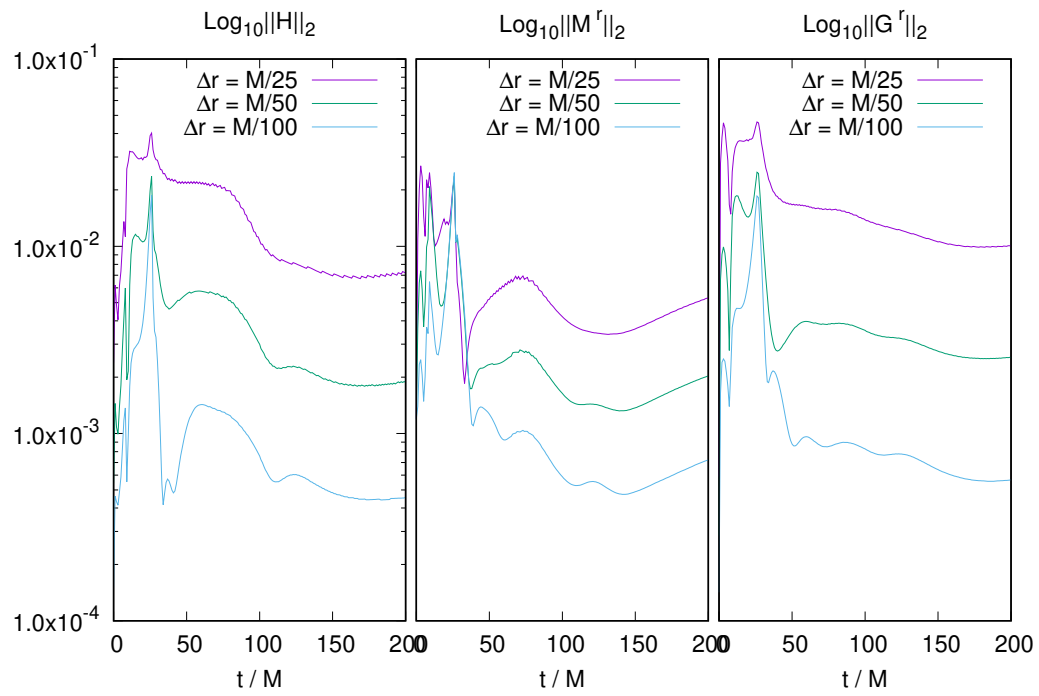


Figura 4.14: Convergencia de la 2-norma para las constricción en la acreación EKG.

$$\rho_0 = \frac{-2g_{rr}\lambda\phi^2 + \chi\psi_r^2}{2(1+e)g_{rr}} \quad (4.10)$$

con  $e_0$  la condición inicial para la energía interna específica y donde se uso el potencial  $V = \lambda\phi^2$ .

Tomando  $A = 0.25$ ,  $r_0 = 5$ ,  $\sigma = 2$ ,  $e_0 = 0.01$ ,  $\lambda = -0.1$  y  $\Gamma = 4/3$  para la ecuación de estado, para la densidad de masa en reposo se obtienen los resultados de la fig. (4.15) donde se muestran instantáneas cada  $10M$  unidades de tiempo, mientras que en el fig. (4.16) se puede ver la comparación del perfil del campo escalar fantasma para la solución KG y EKG y puede verse que al añadir un fluido ideal al espacio-tiempo este hace que el campo escalar oscile con mayor frecuencia.

Como ya hemos visto en el caso de acreación de un gas ideal el horizonte de eventos del hoyo negro aumenta caso contrario a la acreación por un campo escalar fantasma en el cual disminuye por lo tanto en la fig.(4.17) donde se tiene el acoplamiento mínimo EKG puede verse que el efecto del campo escalar hace que inicialmente el hoyo negro disminuya pero la adición de materia a un tiempo posterior recompensa la pérdida de tamaño haciendo que crezca cerca de un 25 % más de su tamaño inicial.

Por último en la fig. (4.17) puede verse que las soluciones mostradas convergen por lo que se garantiza que sean soluciones aceptables.

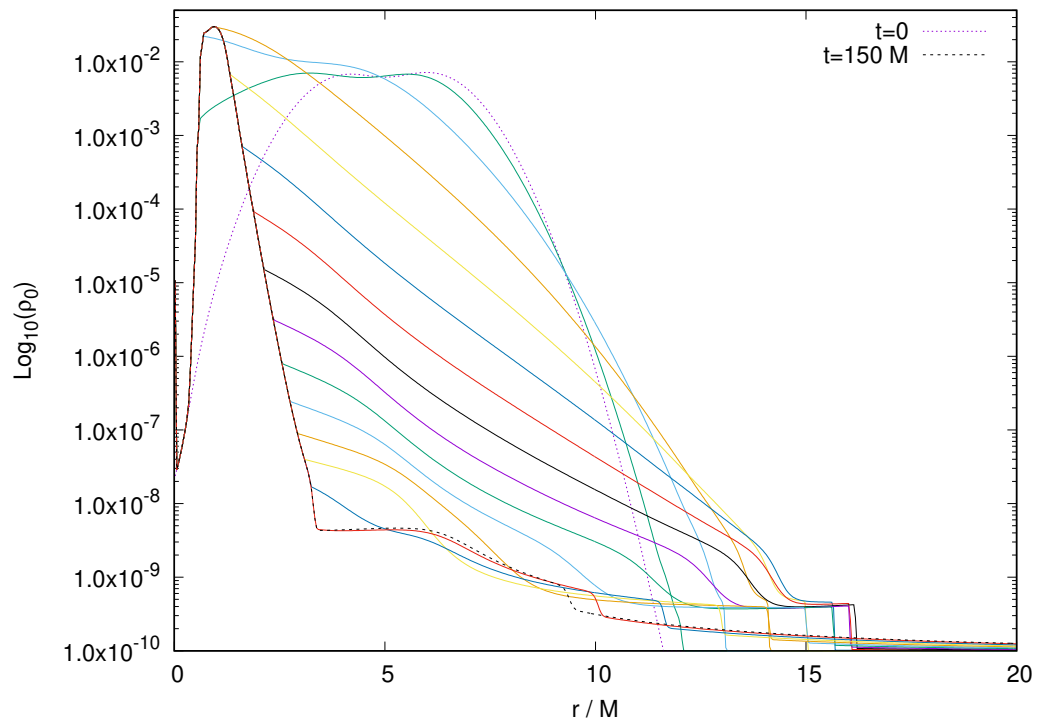


Figura 4.15: Instantáneas de la densidad de masa en reposo para el acomplamineto mínimo EKG cada  $10 M$  unidades de tiempo.

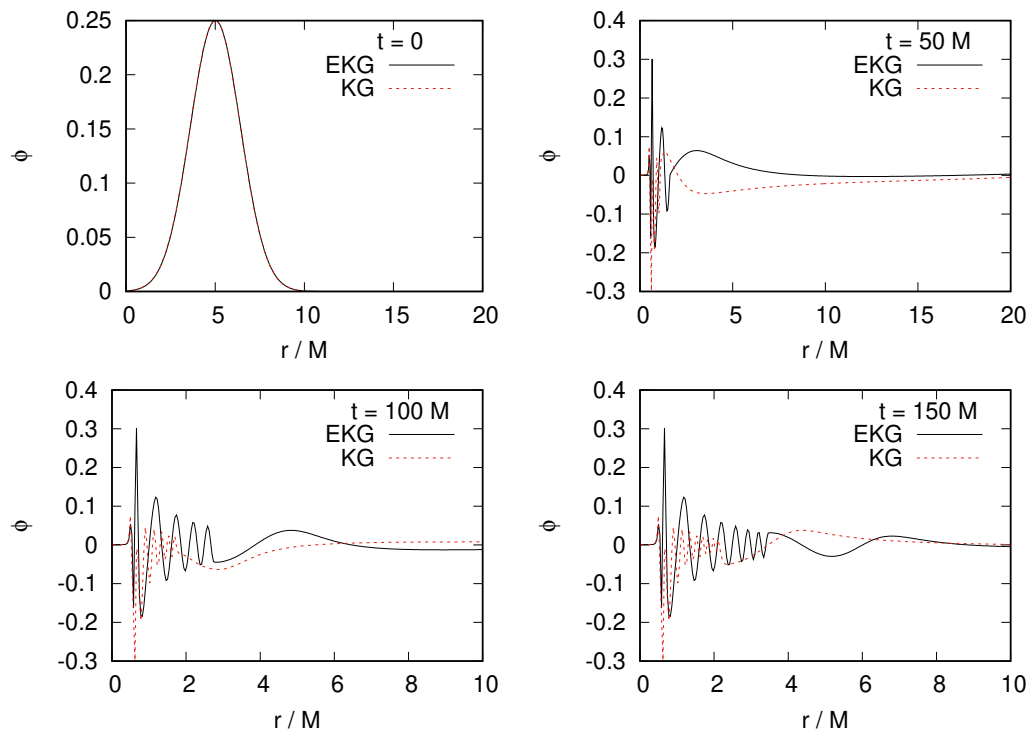


Figura 4.16: Perfil del campo escalar fantasma para el caso KG y EKG.

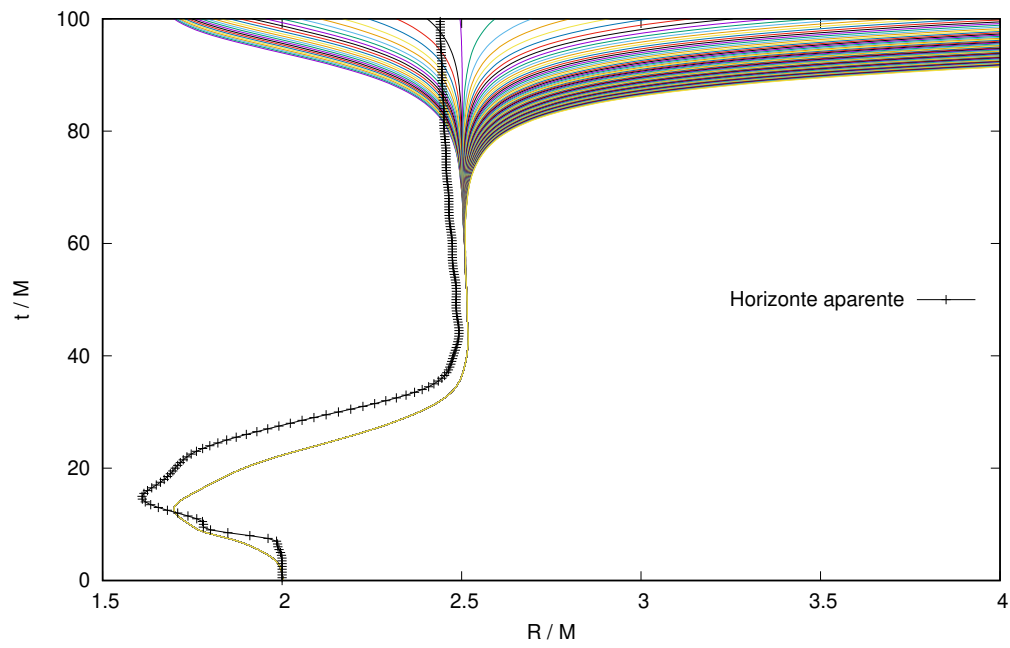


Figura 4.17: Localización del horizonte de eventos y el horizonte aparente del hoyo negro en el PVI de EKG.

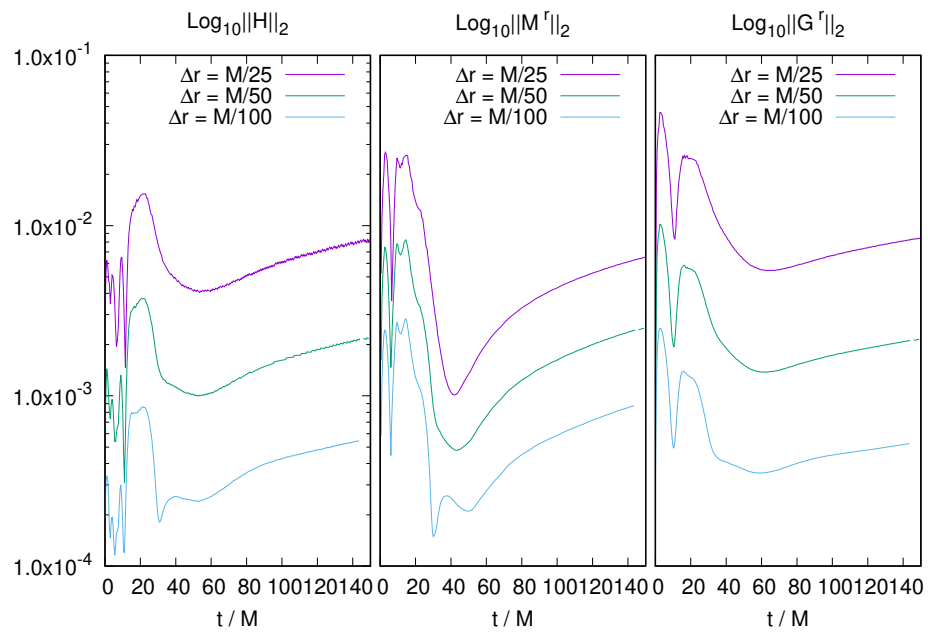


Figura 4.18: Convergencia de la 2-norma de las constricciones de las ecuaciones de Einstein para el PVI de EKG, cuando se tiene un espacio tiempo de Schwartzchild exacto al tiempo inicial.



# Capítulo 5

## Conclusiones

Para ilustrar un poco los escenarios planteados en este documento consideremos una masa inicial del hoyo negro cerca de  $M \approx 4.1 \times 10^6 M_{\odot}$ , como el que se encuentra en el centro de nuestra galaxia.

- *Solución en el vacío.* El primer escenario a explorar fue el más simple de todos pero no por eso menos importante, ya que con este se pudo observar cual es el efecto que tienen las condiciones de norma sobre las soluciones aproximadas y cómo una buena elección ayuda a garantizar una evolución prolongada y garantiza la convergencia.
- *Acreación de un gas ideal.* Si consideramos el primer caso estudiado, podemos ver que el material que cae al hoyo negro comienza a provocar un aumento de su tamaño en aproximadamente 20 minutos, pasados 40 minutos el hoyo negro a consumido todo el material posible y aumentado su tamaño cerca de un 50%. Si se aumenta su velocidad al doble el proceso de crecimiento del horizonte de eventos del hoyo negro disminuye aproximadamente a la mitad.
- *Acreación de un campo escalar fantasma.* Para este escenario el horizonte de eventos disminuye cerca del 25% para ambos casos en un tiempo aproximado de 2.7 minutos, la diferencia radica en que si se tiene un potencial no trivial el campo escalar oscila más que un potencial idénticamente cero.
- *Acreación por EKG.* Para este último PVI todos los escenarios anteriores sirvieron para dos cosas: la primera es ir calibrando el código parte por parte para garantizar una buena implementación, la segunda es poder distinguir los efectos que tienen las soluciones cuando se tiene ya sea sólo el fluido o la energía oscura con el acoplamiento mínimo de ambos. Así en el primer ejemplo considerado para un campo escalar y fluido con soportes compactos el horizonte aparente del hoyo negro aumento cerca de un 35% su tamaño original en un tiempo aproximado de 80 minutos, el doble de tiempo que le tomo al fluido sin campo escalar y redujo un 15% su tamaño comparado con este. En el segundo caso, al exigir que las constricciones del sistema se satisficieran de manera idéntica se pudo recuperar el espacio-tiempo de Schwarzschild de manera exacta al tiempo inicial, sin embargo al tener las componentes del tensor de esfuerzos distintas de cero la geometría evoluciona sin mantener al hoyo negro fijo por lo que en un tiempo aproximado de 1 minuto comienza a disminuir su horizonte de eventos hasta un tiempo de 3 minutos donde la materia ordinaria alcanza



al hoyo negro haciendo que aumente dejando un horizonte de eventos un 20 % más grande después de 14 minutos transcurridos. Si queremos exigir tener un horizonte de eventos fijo deberíamos de tener que todo el tensor de energía-momento se anule, o bien que cada una de las proyecciones lo haga, cosa que no es posible ya que implicaría tener una energía específica del fluido negativa.

# Apéndice A

## Métrica de Schwarzschild en coordenadas isotrópicas

Consideremos la constricción hamiltoniana

$$R + K^2 - K_{ij}K^{ij} = 16\pi\rho, \quad (\text{A.1})$$

tomando la transformación conforme para la métrica,

$$\gamma_{ij} = \psi^4 \bar{\gamma}_{ij} \quad (\text{A.2})$$

la ecuación de constricción hamiltoniana se reescribe como

$$8\bar{D}^i \bar{D}_i \psi - \psi \bar{R} - \psi^5 K^2 + \psi^5 K_{ij}K^{ij} = -16\pi\psi^5 \rho, \quad (\text{A.3})$$

donde  $\bar{R}$  es el escalar de Ricci y  $\bar{D}_i$  es la derivada covariante asociados a la métrica conforme  $\bar{\gamma}_{ij}$ .

Ahora consideremos soluciones en el vacío de modo que  $\rho = 0$  y tomemos un sistema con simetría temporal, por lo que todas las derivadas temporales de  $\gamma_{ij}$  son cero y el intervalo lineal de cuatro dimensiones tiene que ser invariante bajo la inversión temporal,

$$\begin{aligned} ds^2 &= (-\alpha + \beta_i \beta^i) dt^2 + 2\beta_i dx^i dt + \gamma_{ij} dx^i dx^j \\ &= (-\alpha + \beta_i \beta^i) d(-t)^2 + 2\beta_i dx^i d(-t) + \gamma_{ij} dx^i dx^j \\ &= (-\alpha + \beta_i \beta^i) dt^2 - 2\beta_i dx^i dt + \gamma_{ij} dx^i dx^j \end{aligned}$$

lo cual implica que  $\beta^i = 0$  y por la ecuación de evolución para la curvatura intrínseca,

$$\partial_t \gamma_{ij} = -2\alpha K_{ij} + D_i \beta_j + D_j \beta_i \quad (\text{A.4})$$

se obtiene que  $K_{ij} = 0$  entonces  $K = 0$  y la constricción hamiltoniana se reduce a

$$\bar{D}^i \bar{D}_i \psi = \frac{1}{8} \psi \bar{R}, \quad (\text{A.5})$$

además elegimos la métrica conforme como

$$\bar{\gamma}_{ij} = \eta_{ij} \quad (\text{A.6})$$

de esta forma de nuevo se reduce la ecuación de constricción a

$$\bar{D}^2 \psi = 0, \quad (\text{A.7})$$

donde  $\bar{D}^2$  es el operador laplaciano.

Estamos interesados en soluciones asintóticamente planas de modo que la condición de frontera es  $\psi \rightarrow 1$  cuando  $r \rightarrow \infty$ , así, si tomamos las coordenadas cartesianas tenemos que

$$\psi = 1 \quad (\text{A.8})$$

y tomando  $\alpha = 1$  recuperamos el espacio de Minkowski. Pero si tomamos coordenadas esféricas, la solución con simetría esférica se vuelve

$$\psi = 1 + \frac{M}{2r}. \quad (\text{A.9})$$

Tomando el cambio de variable

$$r = \frac{1}{2}(R - M) + \sqrt{R(R - 2M)}, \quad (\text{A.10})$$

se recupera la métrica de Schwarzschild,

$$dl^2 = \left(1 - \frac{2M}{R}\right)^{-1} dR^2 + R^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (\text{A.11})$$

Por lo que el horizonte de eventos localizado en  $R = 2M$  en coordenadas de Schwarzschild se traslada al punto  $r = M/2$  de acuerdo a (A.10) en las llamadas *coordenadas isotrópicas* donde el elemento de línea de la hipersuperficie se escribe como

$$dl^2 = \left(1 + \frac{M}{2r}\right)^4 \left[dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)\right] \quad (\text{A.12})$$

Entonces de acuerdo a la descomposición 3+1 en la formulación GBBSN para sistemas con simetría esférica se tiene que

---

$$\begin{aligned}\chi &= \left(1 + \frac{M}{2r}\right)^{-4}, \\ g_{rr} &= 1, \\ g_{\theta\theta} &= r^2, \\ A_{rr} &= 0, \\ K &= 0.\end{aligned}\tag{A.13}$$



# Bibliografía

- [1] Event Horizon Telescope Collaboration, First M87 Event Horizon Telescope Results. *ApJ*, 875, L1 (2019). *Ibid.* *ApJ*, 875, L2 (2019). *Ibid.* *ApJ*, 875, L3 (2019). *Ibid.* *ApJ*, 875, L4 (2019). *Ibid.* *ApJ*, 875, L5 (2019). *Ibid.* *ApJ*, 875, L6 (2019).
- [2] González, José and Guzmán, F.. (2009). Accretion of phantom scalar field into a black hole. *Physical Review D*. 79. 10.1103/PHYSREVD.79.121501.
- [3] González, José and Guzmán, F.. (2016). Accretion of a Phantom Scalar Field by a Black Hole: restrictions on the field distribution. *Physical Review D*. 94, 104012.
- [4] Baumgarte, T.W. and Shapiro, S.L.. (2010). *Numerical relativity: Solving Einstein's equations on the computer*. Cambridge: Cambridge University Press.
- [5] J. D. Brown, *Classical Quantum Gravity* 25, 205004 (2008).
- [6] F. Banyouls, J. A. Font, J. Ma. Ibañez, L. Ma. Marí, J. A. Miralles. Numerical 3 + 1 General Relativistic Hydrodynamics: A Local Characteristic Approach. *The Astrophysical Journal*, 476, 221-231, (1997). <https://iopscience.iop.org/article/10.1086/303604/pdf>
- [7] S. W. Hawking and G. F. R. Ellis, *The Large Scale Structure of Space Time* (Cambridge University Press, Cambridge, England, 1973).
- [8] E. F. Toro, *Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics*. Springer (1999).
- [9] L. Rezzolla, O. Zanotti. *Relativistic Hydrodynamics*, Oxford 2013
- [10] Francisco S. Guzmán, Iván Alvarez, Alejandro Romero, José A. González. Spherical accretion of a perfect fluid onto a black hole. *Revista Mexicana de Física* (por publicar)