



UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN NICOLAS DE HIDALGO

Facultad de Ingeniería Civil

Maestría en Ingeniería en el

Área de Estructuras

**“METODOLOGÍA DEL MODELO MEMBRANA EN EL CÁLCULO DE
PUENTES DE CONCRETO REFORZADO”**

TESIS

Que para obtener el título de Maestro en Ingeniería presenta:

Ing. Marcos Rodríguez Garduño

Director de tesis:

Dr. Hugo Hernández Barrios

Morelia, Mich.

Mayo 2011

A Dios

A mi esposa Nancy Karina

A mis hijos Nancy Andrea y Marcos

A mi familia

CONTENIDO

	Página
Página de Título	i
Dedicatoria	iii
Contenido	v
Lista de Tablas	xi
Lista de Figuras	Xiii
Simbología	Xvii
1 INTRODUCCIÓN	
1.1 Antecedentes	1
1.2 Objetivos y alcances	4
2 IMPORTANCIA DE LA FUERZA CORTANTE EN EL CONCRETO REFORZADO	
2.1 Regiones Discontinuas en Elementos de Concreto Reforzado	5
2.1.1 Diseño Usando el Modelo Puntal-Tensor	6
2.1.2 Apoyos y Ménsulas	9
2.1.3 Secciones Discontinuas y Aberturas	10
2.1.4 Vigas de Gran Peralte	12
2.1.5 Conclusiones	14
2.2 Ménsulas de Concreto Reforzado	15
2.3 Modelo Armadura para Conexiones Losa-Columna	18
2.3.1 Diagrama de Interacción	19
2.3.2 Interacción entre Puntos de Control	23
2.3.3 Conclusiones	25
2.4 Teoría Modificada del Campo de Compresión	26

2.4.1	Consideraciones de Esfuerzos	26
2.4.2	Consideraciones de Deformación	28
2.4.3	Consideraciones de Equilibrio	32
2.4.4	Relaciones Constitutivas	33
2.4.5	Comportamiento en las Grietas	35
2.4.6	Equilibrio, Compatibilidad y Modelos Constitutivos Combinados	36
2.5	Respuesta de Vigas de Concreto Reforzado Sujetas a Cortante Usando la Teoría Modificada del Campo de Compresión	38
2.5.1	Modelo Analítico	39
2.5.2	Conclusiones	47
3	TEORÍA UNIFICADA DEL MODELO ARMADURA	
3.1	Ductilidad de Vigas de Concreto Doblemente Reforzadas	49
3.1.1	Relación Esfuerzo-Deformación para Concreto Sin Confinar en Vigas con Regiones en Compresión	51
3.1.2	Curvatura a la Primera Fluencia	54
3.1.3	Curvatura Última	55
3.1.4	Cálculo del Factor de Ductilidad de Curvatura	56
3.1.5	Programa M-C.f90	57
3.1.6	Programa ductilidad.f90	60
3.1.7	Conclusiones	61
3.2	Teoría del Modelo Armadura	63
3.2.1	Fundamentos del Modelo Armadura-Plastificado	63
3.2.2	Principio de Transformación	66
3.2.2.1	Transformación de Esfuerzos	66
3.2.2.2	Transformación de Deformaciones	69
3.2.3	Modelo Armadura Plastificado Ángulo-Rotación	72

3.2.3.1	Ecuaciones de Equilibrio y Compatibilidad	72
3.2.3.2	Relación Esfuerzo-Deformación del Concreto en Compresión	73
3.2.3.3	Relación Esfuerzo-Deformación del Concreto en Tensión	73
3.2.3.4	Relación Esfuerzo-Deformación del Acero de Refuerzo Incrustado en el Concreto	74
3.2.4	Modelo Armadura Plastificado Ángulo-Fijo	74
3.2.4.1	Ecuaciones de Equilibrio y Compatibilidad	74
3.2.4.2	Relación Esfuerzo-Deformación del Concreto en Compresión	75
3.2.4.3	Relación Esfuerzo-Deformación del Concreto en Tensión	76
3.2.4.4	Relación Esfuerzo-Deformación del Acero de Refuerzo Incrustado en el Concreto	77
3.2.5	Leyes Constitutivas del Concreto Sujeto a Cortante	77
3.2.6	Programas Membrana1.f90 y Membrana2.f90	79
3.3	Fundamentos del Modelo Membrana-Plastificado	83
3.3.1	Limitaciones del Modelo Armadura-Plastificado, Observaciones Experimentales	83
3.3.2	Deficiencias Teóricas del Modelo Armadura Ángulo-Fijo (FA-STM)	84
3.3.3	Efectos de Poisson y Coeficientes de Hsu/Zhu	85
3.3.4	Matriz de Rigideces de los Materiales	87
3.3.4.1	Matriz de Rigideces del Concreto	87
3.3.4.2	Matriz de Rigideces de las Barras de Acero	88
3.3.5	Deformación Biaxial vs Deformación Uniaxial	91
3.3.6	Módulo de Cortante	92
3.4	Resumen y Aplicación del Modelo Membrana-Plastificado	95
3.4.1	Relaciones Constitutivas de los Materiales Bajo Carga Biaxial	95
3.4.1.1	Relación Esfuerzo-Deformación del Concreto en Compresión	96
3.4.1.2	Relación Esfuerzo-Deformación del Concreto en Tensión	96
3.4.1.3	Relación Esfuerzo-Deformación del Acero Incrustado en el Concreto	97

3.4.1.4	Relación Esfuerzo-Deformación del Concreto Sujeto a Cortante	97
3.4.2	Programa Membrana	98
3.5	Conclusiones	100
4	ESPECIFICACIONES POR CORTANTE AASHTO LFD Y LRFD	
4.1	Introducción	101
4.2	Zonificación de un Nodo	101
4.3	Elementos de un Modelo Puntal-Tensor	106
4.3.1	Puntales	106
4.3.2	Tensores	108
4.3.3	Clasificación de los Nodos y las Zonas Nodales	109
4.4	Especificaciones Estándar AASHTO LFD y LRFD (Factores de Carga y Resistencia)	111
4.4.1	Especificaciones AASHTO LFD	111
4.4.1.1	Diseño por Flexión	111
4.4.1.2	Diseño por Cortante	114
4.4.2	Especificaciones AASHTO LRFD	116
4.4.2.1	Puntal de Compresión	116
4.4.2.2	Puntal de Tensión	117
4.4.2.3	Zonas nodales	119
5	REPARACIÓN DE COLUMNAS CIRCULARES DE PUENTES CON FIBRAS DE POLÍMEROS	
5.1	Justificación	121
5.1.1	Puentes Vehiculares del Estado de Michoacán	122
5.1.2	Puentes Vehiculares del Estado de Guerrero	124
5.2	Introducción	128
5.3	Análisis de Daño	131

5.4	Estados de Daño	131
5.5	Modelos de Confinamiento para Columnas Circulares	134
5.5.1	Revisión de los Modelos de Confinamiento	137
5.6	Modelos de Diseño Propuestos en Diversos Códigos	161
5.6.1	Recomendaciones del ACI 440.2R-02 (2002)	161
5.6.2	Recomendaciones del CALTRANS memo 20-4 (2000)	165
5.6.3	Conclusiones para el refuerzo por carga axial	171
5.7	Diagrama de interacción de Columnas de Concreto Confinadas con FRR	171
5.7.1	Diagramas de interacción Momento – Carga axial	171
5.7.2	Programa MC-IFRP.f90	174
5.8	Refuerzo Sísmico	179
5.8.1	Modelo de Seible (1997)	179
5.9	Conclusiones	190
6	CONCLUSIONES GENERALES	
	Conclusiones generales	191
	Referencias	193

LISTA DE TABLAS

	Pagina	
Tabla 3.1	Valores del factor de esfuerzos principales α cuando la deformación de la fibra extrema del concreto es 0.003	53
Tabla 3.2	Resultados del programa Membrana2.f90	82
Tabla 3.3	Propiedades de los materiales	98
Tabla 3.4	Valores calculados con el programa Membrana3.f90	99
Tabla 4.1	Elementos de un modelo Tensor-Puntal	106
Tabla 5.1	Periodo de construcción y número de puentes por ruta	123
Tabla 5.2	Periodo de construcción y número de puentes por ruta	127
Tabla 5.3	Relación de número de puentes y carga de diseño, por ruta	128
Tabla 5.4	Caracterización visual del estado de daño	132
Tabla 5.5	Parámetros de la respuesta de daño con relación al estado de daño	133
Tabla 5.6	Resumen de modelos de confinamiento basado en esfuerzos	151
Tabla 5.7	Modelos de confinamiento basado en deformación	154
Tabla 5.8	Valores de espesor de FRP calculados con las ecuaciones propuestas en ACI y CALTRANS	168
Tabla 5.9	Columna con deficiencia por cortante (Columna 1)	181
Tabla 5.10	Propiedades de la columna con deficiencia por flexión (ejemplo 3)	182
Tabla 5.11	Propiedades de la columna con deficiencia por flexión (ejemplo 4)	182
Tabla 5.12	Valores del espesor de bandas de FRP de los ejemplos 2, 3 y 4 (cortante)	184
Tabla 5.13	Valores de diseño de los ejemplos 2, 3 y 4	185
Tabla 5.14	Valores del espesor de bandas de FRP de los ejemplos 2, 3 y 4 (flexión)	186
Tabla 5.15	Valores del espesor de bandas de FRP de los ejemplos 3 y 4 (longitud de desarrollo)	187
Tabla 5.16	Resumen del espesor de bandas de FRP de los ejemplos 2,3 y 4	187

LISTA DE FIGURAS

	Página	
Figura 1.1	Elementos panel de estructuras de concreto	2
Figura 2.1	Ejemplos de regiones discontinuas modeladas con puntales de concreto a compresión y tensores de refuerzo en tensión	5
Figura 2.2	Estado de deformación para un elemento membrana	8
Figura 2.3	Modelo puntal-tensor para soportes y ménsulas	9
Figura 2.4	Modelo puntal-tensor e idealización puntal para vigas con variación de sección en los extremos y aberturas	11
Figura 2.5	Modelo puntal-tensor e idealización puntal para vigas de gran peralte	13
Figura 2.6	Geometría, fuerzas y condiciones de equilibrio	16
Figura 2.7	Modelo armadura para bordes de columna	18
Figura 2.8	Diagrama de interacción cortante-momento para bordes de columna	20
Figura 2.9	Puntos de control A y A'	21
Figura 2.10	Puntos de control B y B'	22
Figura 2.11	Puntos de control C y C'	22
Figura 2.12	Puntos de control D y D'	24
Figura 2.13	Eficiencia de las barras para desarrollar momento	24
Figura 2.14	Campo de esfuerzos en el alma de una viga de concreto reforzado sujeta a cortante puro	26
Figura 2.15	Elemento de concreto reforzado sujeta a cortante puro	27
Figura 2.16	Condiciones de compatibilidad para un elemento alma agrietado	29
Figura 2.17	Condiciones de equilibrio para la teoría modificada del campo de compresión	31
Figura 2.18	Relaciones constitutivas para elementos membrana	34

Figura 2.19	Transmisión de las fuerzas de tensión a través de una grieta: (a) Alma de una viga agrietada por cortante, (b) esfuerzos promedio entre grietas y (c) esfuerzos locales en una grieta	35
Figura 2.20	Modelo armadura para vigas de concreto sujetas a cortante	38
Figura 2.21	Condición de esfuerzos y deformaciones principales en un elemento de concreto reforzado	41
Figura 2.22	Relaciones constitutivas para el concreto y el acero de refuerzo	42
Figura 2.23	Sección de viga analizada usando el modelo de bandas; estimaciones de deformación longitudinal y distribución de flujo de cortante	44
Figura 2.24	Diagrama de cuerpo libre para la fibra de concreto k	46
Figura 2.25	Procedimiento de solución de un modelo de análisis de vigas	47
Figura 3.1	Relación momento-curvatura para una sección de viga de concreto doblemente reforzada	50
Figura 3.2	Viga de concreto doblemente reforzada con flexión	50
Figura 3.3	Distribución de esfuerzos y deformaciones para la misma fuerza de compresión en el concreto cuando el refuerzo de tensión alcanza su resistencia de fluencia	51
Figura 3.4	Relación esfuerzo-deformación asumida para concreto sin confinamiento en compresión	53
Figura 3.5	Relación esfuerzo-deformación asumida para concreto sin confinamiento en compresión	53
Figura 3.6	Valor del factor de ductilidad de curvatura usando el programa M-C.f90	58
Figura 3.7	Comportamiento del concreto confinado	59
Figura 3.8	Variación del factor de ductilidad de curvatura ϕ_u/ϕ_y para vigas de concreto reforzado sin confinar	60
Figura 3.9	Elemento membrana de concreto reforzado sujeto a esfuerzos en el plano	64
Figura 3.10	Condiciones de equilibrio para transformación de esfuerzos	67

Figura 3.11	Transformación inversa	68
Figura 3.12	Relaciones geométricas para transformación de deformaciones	70
Figura 3.13	Curva esfuerzo-deformación del concreto en compresión	76
Figura 3.14	Curva esfuerzo-deformación del concreto en tensión	77
Figura 3.15	Curva esfuerzo-deformación del acero de refuerzo	78
Figura 3.16	Curva esfuerzos cortantes-deformación angular del concreto	79
Figura 3.17	Elemento membrana sujeto a esfuerzos normales y cortantes	81
Figura 3.18	Curva Esfuerzo cortante vs Deformación angular	82
Figura 3.19	Sistemas coordenados principales, 2-1 y d-r (σ_1 y σ_2 son los esfuerzos principales aplicados, σ_d y σ_r son los esfuerzos principales del concreto)	93
Figura 3.20	Circulo de Mohr para esfuerzos y deformaciones	95
Figura 3.21	Propiedades del elemento membrana	99
Figura 3.22	Curva τ_{lt} vs γ_{lt}	100
Figura 4.1	Regiones D (Sombreadas) con distribución no-lineal de deformaciones	102
Figura 4.2	Columna con diferentes puntos de carga	103
Figura 4.3	Vigas con discontinuidades	104
Figura 4.4	Viga simplemente soportada	105
Figura 4.5	Ilustración de los diferentes componentes de un modelo puntal-tensor, usando una viga de gran peralte	106
Figura 4.6	Formas geométricas de un puntal	108
Figura 4.7	Clasificación de nodos	109
Figura 4.8	Estado de esfuerzos en un nodo hidrostático y no-hidrostático (Brown et al. 2006)	110
Figura 4.9	Sección rectangular solo con refuerzo de tensión	111
Figura 4.10	Sección rectangular con refuerzo de compresión y tensión	112
Figura 4.11	Influencia de las condiciones de anclaje en el área efectiva de un puntal	118

Figura 5.1	Red carretera libre de peaje de Michoacán	122
Figura 5.2	Número de puentes construidos por década	123
Figura 5.3	Carga viva en el Puente Palo Alto IV	125
Figura 5.4	Distribución de rutas carreteras libre de peaje en el Estado de Guerrero	126
Figura 5.5	número de puentes-década de construcción	127
Figura 5.6	Descripción de los diferentes estados de daño en columnas	133
Figura 5.7	Diagrama de cuerpo libre para el cálculo de fuerzas de confinamiento	135
Figura 5.8	Fallas comunes en columnas presentadas en 1989 durante el sismo de Loma Prieta	136
Figura 5.9	Curva relación de resistencias (f'_{cc}/f'_c) vs relación volumétrica R	158
Figura 5.10	Curva relación de resistencias (f'_{cc}/f'_c), de la ecuación propuesta vs.el valor promedio, en función de la relación volumétrica	159
Figura 5.11	Curva relación de deformaciones (ϵ_{cc}/ϵ_c) vs relación volumétrica R	160
Figura 5.12	Curva del valor promedio superpuesta a la curva de la ecuación propuesta	160
Figura 5.13	Respuesta de la sección bajo carga axial	168
Figura 5.14	Diagramas de interacción de una columna de concreto confinado y una columna de concreto simple	175
Figura 5.15	Diagramas de interacción de una columna de concreto simple, confinada por bandas de FRP y no confinada con bandas de FRP	176
Figura 5.16	Diagramas de interacción de columnas de concreto con presfuerzo y confinadas por bandas de FRP	177
Figura 5.17	Diagramas de interacción de columnas de concreto reforzado y presforzadas, con bandas de FRP y sin bandas de FRP	178

SIMBOLOGÍA

$a_{m\acute{a}x}$,	tamaño máximo del agregado (plg)
α ,	factor de esfuerzos
α ,	ángulo de los esfuerzos principales de compresión en el concreto (eje-d), respecto a las barras de acero longitudinal (eje-l)
α_2 ,	ángulo de los esfuerzos principales de compresión aplicados (eje-2), respecto a las barras de acero longitudinal (eje-l)
A_c ,	área de la sección transversal del concreto
A_{cc} ,	área confinada por el refuerzo transversal
A_f ,	área de la sección transversal de las bandas de FRP
A_g ,	área neta o gruesa
A_h ,	área de la sección transversal de los estribos
A_s ,	área del acero de refuerzo a tensión
A'_s ,	área de refuerzo a compresión
A_{st} ,	área de acero de refuerzo longitudinal
A_{px} ,	es el área total de los tendones longitudinales presforzados
A_{sx} ,	es el área total del refuerzo no presforzado
α_s ,	ángulo entre un tensor y un puntal
α_1 y α_2	son los ángulos del puntal asociado con la barra 1 y 2 en una conexión losa-columna
β ,	ángulo de los esfuerzos principales de compresión respecto a las barras longitudinales de acero (eje-l)
b ,	ancho de la columna
β_1 ,	factor de resistencia del concreto en el ACI 318-83
c ,	profundidad del eje neutro

$cc,$	recubrimiento
$d-$	dirección de los esfuerzos principales de compresión del concreto agrietado
$D, d,$	Diámetro de la sección, diámetro de la sección confinada por los estribos
d y d'	son las distancias a la fibra superior de compresión del refuerzo en tensión y compresión Respectivamente
$d_b,$	diámetro del acero de refuerzo
$d_h,$	diámetro del refuerzo transversal
$d_s,$	diámetro de la columna confinada por los estribos (columnas confinadas por FRP)
$d_s,$	profundidad efectiva de la matriz de refuerzo, medida desde el centro de la matriz a la superficie de compresión de la losa (conexión losa columna)
$[D],$	matriz total de rigidez del material en las coordenadas globales l-t
$[D]^c,$	matriz de rigidez del concreto en las coordenadas globales l-t
$[D]^s,$	matriz de rigidez del acero en las coordenadas globales l-t
$[D_{21}]^c,$	matriz de rigidez del concreto en las coordenadas 2-1
$\zeta,$	coeficiente de plasticidad cuando el coeficiente esfuerzo-plasticidad máximo es igual al coeficiente deformación-plasticidad
$\varepsilon_1,$	deformación principal del concreto en la dirección 1
$\bar{\varepsilon}_1,$	deformación en la dirección 1 cuando el panel está sujeto a carga uniaxial, o sujeto a carga biaxial cuando se asume que los coeficientes Hsu/Zhu son cero
$\varepsilon_{10},$	deformación principal máxima por tensión del concreto agrietado
$\varepsilon_2,$	deformación principal del concreto en la dirección 2
$\bar{\varepsilon}_2,$	deformación en la dirección 2 cuando el panel está sujeto a carga uniaxial, o sujeto a carga biaxial cuando se asume que los coeficientes Hsu/Zhu son cero
$\varepsilon_c,$	deformación longitudinal del concreto
$\varepsilon'_{c0},$	deformación en un cilindro de concreto para un esfuerzo máximo f'_{c0}

- ε_d , deformación a compresión del concreto en la dirección principal d-
- $\bar{\varepsilon}_d$, deformación en la dirección d cuando el panel está sujeto a carga uniaxial o sujeto a carga biaxial asumiendo que los coeficientes Hsu/Zhu son cero
- ε_f , deformación unitaria de las bandas de FRP
- ε_{fu} , deformación última del FRP
- ε_l , deformación principal a tensión del acero longitudinal (eje-l)
- $\bar{\varepsilon}_l$, deformación de las barras de acero (dispersa) en la dirección l cuando se asume que los coeficiente Hsu/Zhu son cero
- ε_n , deformación promedio del acero en la fluencia
- $\bar{\varepsilon}_n$, deformación promedio del acero en la fluencia asumiendo que los coeficiente Hsu/Zhu son cero
- ε_0 , deformación correspondiente a la resistencia máxima de f'_c
- ε_r , deformación a tensión del concreto en la dirección principal r-
- $\bar{\varepsilon}_r$, deformación en la dirección r cuando el panel está sujeto a carga uniaxial, o sujeto a carga biaxial asumiendo que los coeficientes Hsu/Zhu son cero
- ε_s , deformación del acero
- $\bar{\varepsilon}_s$, deformación del acero, $\bar{\varepsilon}_s$ es $\bar{\varepsilon}_l$ o $\bar{\varepsilon}_t$, cuando es aplicado al acero longitudinal y transversal respectivamente
- ε_{sf} , deformación promedio cuando fluye cualquiera de las barras de acero, tomando en cuenta los coeficientes Hsu/Zhu
- ε_t , deformación del acero en dirección transversal
- $\bar{\varepsilon}_t$, deformación del acero en dirección transversal cuando se asume que los coeficiente Hsu/Zhu son cero
- ε_x , deformación en dirección longitudinal

ε_y ,	deformación de fluencia del acero
E_c ,	módulo de elasticidad del concreto
E_f ,	módulo de elasticidad de las bandas de FRP
E_l ,	módulo de confinamiento
E_{eff} ,	módulo de elasticidad efectiva de las bandas de FRP
E_1^c ,	módulo secante del concreto en la dirección 1 cuando el panel está sujeto a carga biaxial
E_2^c ,	módulo secante del concreto en la dirección 2 cuando el panel está sujeto a carga biaxial
E_s ,	módulo de elasticidad del refuerzo
E_l^s ,	módulo secante del acero en la dirección l cuando el panel está sujeto a carga biaxial y tomando en cuenta los coeficientes Hsu/Zhu
E_t^s ,	módulo secante del acero en la dirección t cuando el panel está sujeto a carga biaxial y tomando en cuenta los coeficientes Hsu/Zhu
\bar{E}_d^c ,	módulo secante del concreto en la dirección d cuando el panel está sujeto a carga uniaxial; ó sujeto a carga biaxial asumiendo que los coeficientes Hsu/Zhu son cero
\bar{E}_r^c ,	módulo secante del concreto en la dirección r cuando el panel está sujeto a carga uniaxial; ó sujeto a carga biaxial asumiendo que los coeficientes Hsu/Zhu son cero
\bar{E}_l ,	módulo secante de las barras de acero incrustadas en el concreto en la dirección l cuando los coeficientes Hsu/Zhu se asume que son cero
\bar{E}_t ,	módulo secante de las barras de acero incrustadas en el concreto en la dirección t cuando los coeficientes Hsu/Zhu se asume que son cero
\bar{E}_1^c ,	módulo secante del concreto en la dirección 1 cuando el panel está sujeto a carga uniaxial; ó sujeto a carga biaxial asumiendo que los coeficientes Hsu/Zhu son cero
\bar{E}_2^c ,	módulo secante del concreto en la dirección 2 cuando el panel está sujeto a carga uniaxial; ó sujeto a carga biaxial asumiendo que los coeficientes Hsu/Zhu son cero
f_1 ,	esfuerzo principal de tensión

f_2 ,	esfuerzo principal de compresión
f_c ,	esfuerzo longitudinal de compresión del concreto
f'_{co} ,	resistencia a la compresión del concreto simple
f'_{cc} ,	esfuerzo de confinamiento a la falla
f'_{ccs} ,	esfuerzo de confinamiento por el acero transversal
f_{cr} ,	esfuerzo de agrietamiento del concreto
f_{c2max} ,	es el esfuerzo límite en el puntal a compresión
f_{cx} ,	esfuerzo de compresión longitudinal del concreto
f_f ,	esfuerzo a la tensión de las bandas de FRP
f_h ,	esfuerzo horizontal provisto por el acero transversal
f_l ,	presión de confinamiento lateral en el concreto confinado
f_{le} ,	esfuerzo lateral de confinamiento efectivo
f_{sl} ,	esfuerzo del acero en la dirección longitudinal (eje-l)
f_{st} ,	esfuerzo del acero en la dirección transversal (eje-t)
f_s^* y f_v^* ,	fuerzas de tensión en el refuerzo en dirección longitudinal y transversal
f_s ,	esfuerzo de tensión en el refuerzo
f_{sx} ,	esfuerzos longitudinales del refuerzo
f_y ,	esfuerzo de fluencia del acero de refuerzo
f_{yh} ,	esfuerzo de fluencia del acero transversal
φ ,	factor de reducción
φP_n ,	capacidad axial de la columna
φP_{ini} ,	capacidad de carga teórica inicial
$\varphi P_{dañ}$,	capacidad de carga axial de la columna para el nivel de daño sufrido
ϕ ,	factor de resistencia para barras de refuerzo
ϕ_c ,	factor de resistencia del concreto

ϕ_y ,	curvatura de fluencia
ϕ_u ,	curvatura última
G_{dr}^c ,	módulo secante del concreto sujeto a cortante en las coordenadas d-r
G_{21}^c ,	módulo secante del concreto sujeto a cortante en las coordenadas 2-1
γ_{dr} ,	deformación angular en las coordenadas d-r
γ_{lt} ,	deformación angular en las coordenadas l-t
γ_{21} ,	deformación angular en las coordenadas 2-1
γ_{210} ,	deformación correspondiente al máximo esfuerzo cortante del concreto agrietado
h ,	profundidad de la columna
k ,	factor de profundidad del eje neutro
k_1, k_2 ,	factor efectivo de confinamiento
k_s ,	coeficiente de eficiencia
l ,	dirección de las barras longitudinales de acero
L_p ,	longitud de la articulación plástica
λ ,	es un factor para concreto que varía con su densidad
M_v ,	el momento por cortante
M_f ,	el momento de flexión
M_{yi} ,	momento flexionante
μ_{Δ} ,	factor de ductilidad
n ,	número de bandas de FRP
η ,	índice de refuerzo, tomado como $(\rho_t f_{ty} - \sigma_t) / (\rho_l f_{ly} - \sigma_l)$
η' ,	η o su recíproco cualquiera que sea menor a la unidad
p ,	perímetro de la sección transversal
r-	dirección de los esfuerzos principales de tensión del concreto
ρ_f ,	relación volumétrica del FRP

ρ_g ,	porcentaje de refuerzo grueso
ρ_j ,	relación volumétrica de las bandas de refuerzo
ρ_{px} ,	porcentaje de refuerzo presforzado
ρ_{sx} ,	porcentaje de refuerzo no presforzado
ρ_x, ρ_l ,	porcentaje de refuerzo longitudinal
ρ_v, ρ_t ,	porcentaje de refuerzo transversal
P_u ,	carga axial nominal
ψ_f ,	factor de reducción debido a las láminas de FRP
s ,	espacio horizontal entre estribos
S_{eff} ,	ancho tributario efectivo de las barras de refuerzo
$S_{m\theta}$,	espacio medio de la grieta diagonal
s_x ,	espacio vertical entre el refuerzo longitudinal
σ_d ,	esfuerzos de compresión del concreto en la dirección principal d
σ_l y σ_t ,	esfuerzos normales en las coordenadas l-t
σ_l^c ,	esfuerzos promedio del concreto (a lo largo del eje l)
σ_r ,	esfuerzos de tensión del concreto en la dirección principal r
σ_t^c ,	esfuerzos promedio del concreto (a lo largo del eje t)
σ_x, σ_y y τ_{xy} ,	esfuerzos en las coordenadas arbitrarias x – y
σ_1^c ,	esfuerzos promedio de tensión en el concreto a lo largo del eje 1
σ_2^c ,	esfuerzos promedio de compresión en el concreto a lo largo del eje 2
t ,	dirección de las barras transversales de acero
t_f ,	espesor de las bandas de FRP
$[T]$,	matriz de transformación
τ_{dr} ,	esfuerzos cortantes en coordenadas d-r
τ_{lt} ,	esfuerzos cortantes aplicados en coordenadas l-t

τ_{lt}^c ,	esfuerzos cortantes del concreto agrietado en coordenadas l-t
τ_{ltm} ,	máximo esfuerzo cortante aplicado en coordenadas l-t
τ_{21}^c ,	esfuerzos cortantes del concreto agrietado en coordenadas 2-1
τ_{21m}^c ,	máximo esfuerzo cortante del concreto agrietado en coordenadas 2-1
θ ,	inclinación del puntal de compresión
θ_c ,	inclinación de las deformaciones principales
ν_c ,	coeficiente de Poisson
ν_u ,	relación de Poisson
v ,	esfuerzo cortante medio
V_o ,	demanda por cortante
V_c ,	resistencia a cortante del concreto
V_s ,	esfuerzos a tensión del refuerzo del alma
V_p ,	contribución de la fuerza cortante debida a la carga axial
V_u ,	cortante último
ν_{21} ,	coeficiente Hsu/Zhu (deformación de compresión causada por la deformación de tensión perpendicular)
ν_{21} ,	coeficiente Hsu/Zhu (deformación de tensión causada por la deformación de compresión perpendicular)
w ,	es el ancho de la grieta
2-	dirección de los esfuerzos principales de compresión aplicados
1-	dirección de los esfuerzos principales de tensión aplicados

CAPÍTULO 1

INTRODUCCIÓN

1.1 ANTECEDENTES

Las estructuras de concreto reforzado, por ejemplo: muros de cortante, secciones cajón, vigas, contenedores nucleares, (Fig. 1.1), entre otros, se pueden visualizar como elementos panel de concreto unidos entre sí. El análisis de elementos finitos puede pronosticar el comportamiento de una estructura, si se comprende el comportamiento de sus elementos. En otras palabras, en el diseño de una estructura grande y compleja debe realizarse un modelo analítico que pronostique el comportamiento de sus elementos.

La fuerza cortante es una acción primaria en muchos tipos de estructuras de concreto. Por ejemplo, los muros de cortante, son un tipo de elemento estructural que está sujeto predominantemente a cortante, y se ha demostrado que es uno de los elementos estructurales más efectivos para resistir sismos. Si bien el cortante en el concreto reforzado se ha estudiado por más de cien años, aun existen muchas controversias sobre el mecanismo de falla y las bases del comportamiento en cortante.

El comportamiento en general de un elemento sujeto a cortante es caracterizado por la curva esfuerzos cortantes vs deformaciones angulares. Cuando un elemento de concreto reforzado está sujeto a cortante puro, no falla inmediatamente después de que el concreto alcanza su resistencia a compresión, existe una pequeña rama descendente que produce un aumento de ductilidad.

Pronosticar la curva esfuerzos cortante vs deformación angular de un elemento agrietado sujeto a cortante, especialmente en la rama descendente, es un problema difícil de resolver. Se han propuesto varios modelos para pronosticar la curva ascendente de la curva de respuesta, incluyendo la Teoría Modificada del Campo de Compresión propuesta en la Universidad de Toronto (Vecchio y Collins, 1986) y los dos Modelos Armadura-Plastificada (uno para ángulo-fijo y otro para ángulo-rotación) propuestos por la

Universidad de Houston (Pang y Hsu, 1996; Hsu y Zhang, 1997, Hsu 1993). Sin embargo, ninguno de esos modelos pronostica la rama descendente.

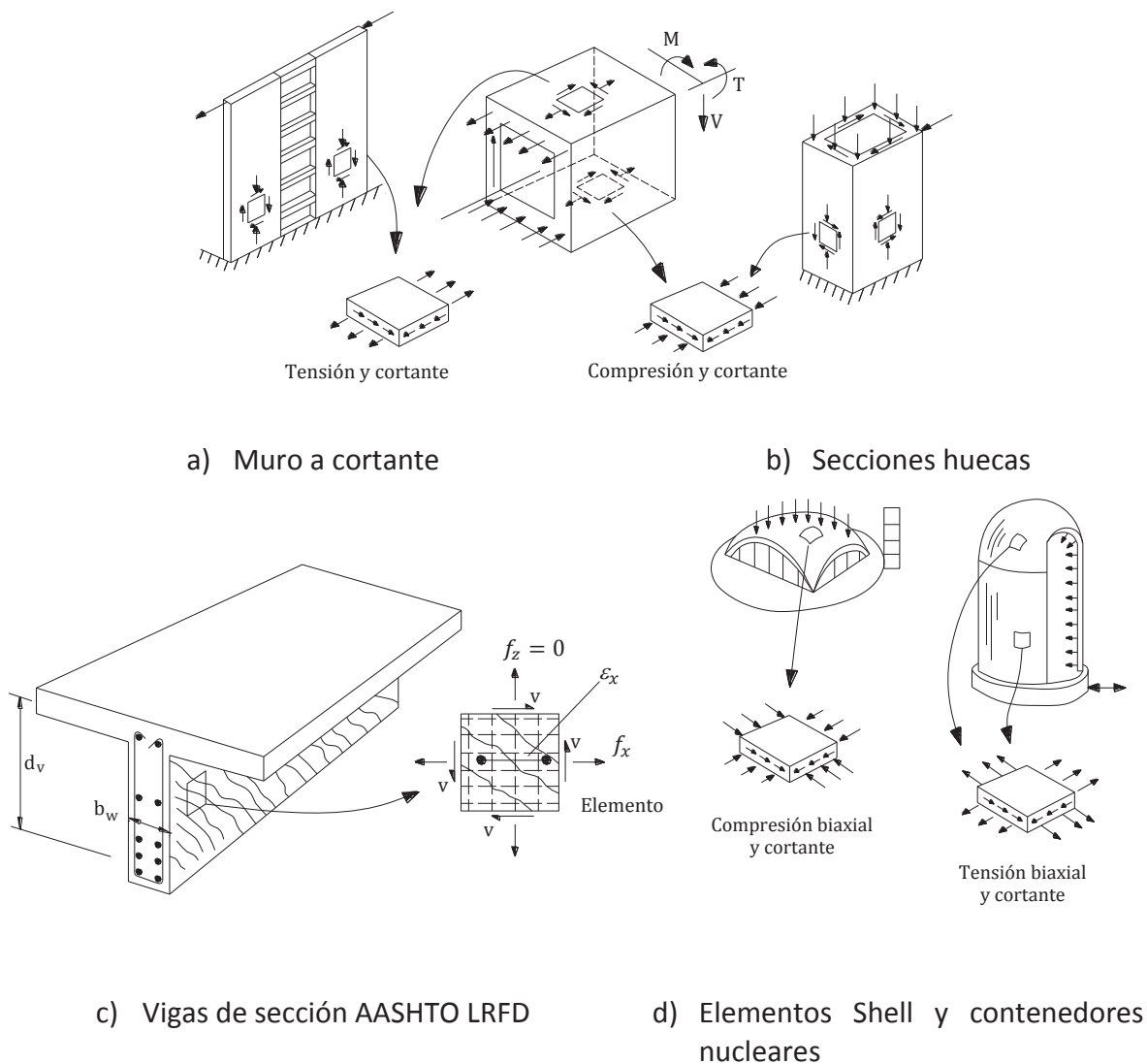


Fig. 1.1 Elementos tipo panel de estructuras de concreto

La rama descendente de la curva de respuesta para cortante puro, es importante para muros de cortante por dos razones: 1) bajo condiciones de sismo severo, la filosofía de diseño es hacer una estructura tan dúctil como sea posible, tal que sean evitados su colapso y la pérdida de vidas. Una rama descendente larga incrementa significativamente la ductilidad y la capacidad de la estructura de absorber energía, incluir esto en los

cálculos es crucial para pronosticar la capacidad de las estructuras y así evitar el colapso. Entender el comportamiento de la rama descendente de la curva de respuesta, ayuda en el diseño de estructuras que no colapsen cuando ocurre un sismo fuerte. 2) cuanto menor sea la rigidez de una estructura, menor será la carga sísmica que soporta la estructura. Después de que el concreto alcanza la resistencia a compresión y llega a la rama de descenso, la rigidez de la estructura disminuye dramáticamente. Con la rápida disminución de la carga sísmica, debido a la pérdida de rigidez, la estructura tiene más probabilidades de escapar del colapso total.

En el trabajo realizado por Hsu y Zhu (2000) se introdujo un nuevo modelo, llamado “softened-membrane model (SMM)”, el cual puede pronosticar y explicar la rama descendente. SMM es una versión generalizada del modelo armadura plastificado ángulo-fijo (FA-STM). El FA-STM desprecia los efectos de Poisson en el pronóstico del comportamiento a cortante. En el caso de materiales continuos, el efecto de Poisson se caracteriza por el módulo de Poisson el cual varía de 0 a 0.5. En el caso de concreto reforzado agrietado, se asume que el módulo de Poisson es cero tanto para FA-STM así como para el modelo armadura plastificado ángulo-rotación (RA-STM).

En un trabajo de investigación propuesto por Hsu, a la Fundación Nacional de Ciencia en 1996, supuso que la incapacidad de los dos modelos armadura-plastificada para pronosticar la rama descendente es causada por la hipótesis que el módulo de Poisson es cero. Así, este grupo de trabajo desarrolló un nuevo modelo, SMM, que toma en cuenta el módulo de Poisson. De pruebas anteriores se encontró que la aplicación del SMM a la rama descendente, requería un módulo de Poisson con un valor del orden de 2.0. Tal módulo de Poisson excede ampliamente el valor de 0.5 para materiales continuos. En otras palabras, si el efecto de Poisson era la explicación, el módulo de Poisson posterior a la fluencia del concreto reforzado agrietado debe ser diferente al módulo de Poisson tradicional para materiales continuos.

Para revisar la validez del nuevo modelo, Hsu y colaboradores probaron una serie de 12 paneles de 1997 a 1999. Como se esperaba, el módulo de Poisson posterior a la fluencia

de 1.9 se encuentra fuera del intervalo de cero a 0.5 para materiales continuos. Para distinguir claramente el módulo de Poisson del concreto reforzado agrietado, de aquel para material continuo, el módulo de Poisson del concreto reforzado agrietado se llamó módulo Hsu/Hzu.

1.2 OBJETIVOS Y ALCANCES

En este trabajo se iniciará revisando la literatura de la analogía del modelo armadura (STM) y del modelo membrana (SMM) del concreto reforzado, cuando está sujeto a fuerzas cortantes en el plano, Hsu (1993,1996, 2000). De esa revisión se desarrollarán dos programas de computadora para evaluar los efectos del cortante sobre el concreto reforzado, tomando como referencia los siguientes modelos:

- Modelo armadura plastificado Ángulo-rotación (RA-STM) y Modelo armadura plastificado Ángulo-fijo (FA-STM)
- Modelo membrana plastificado (SMM)

En el capítulo 4 se hará una recopilación de los requisitos de diseño por cortante que propone el código AASHTO LFD y LRFD, para elementos de concreto reforzado.

En el capítulo 5 se revisará la literatura sobre el refuerzo de columnas circulares con bandas de fibras de polímeros (FRP) y se plantearán las ecuaciones para determinar el espesor de las bandas de FRP en columnas con deficiencia por carga axial o cargas provocadas por sismos. También, se propone una metodología para la reparación de columnas circulares de concreto reforzado, siguiendo esta metodología se desarrolló en lenguaje Fortran un programa de computadora para calcular el espesor de las bandas de FRP que restaura la capacidad de una columna cuando ha sufrido un cierto daño.

El alcance de este trabajo se limita al estudio del concreto reforzado cuando está sujeto a fuerzas axiales, fuerzas de flexión o de cortante, y al estudio de técnicas de reparación de elementos de concreto reforzado que han sufrido algún daño por cargas permanentes o provocadas por sismo.

CAPÍTULO 2

IMPORTANCIA DE LA FUERZA CORTANTE EN EL CONCRETO REFORZADO

2.1 REGIONES DISCONTINUAS EN MIEMBROS DE CONCRETO REFORZADO

Existen muchas condiciones en el diseño de miembros de concreto reforzado donde las discontinuidades son producto de un cambio abrupto en las dimensiones de su sección, presencia de cargas concentradas o reacciones que causan un cambio en el flujo de las fuerzas internas.

Mientras que el análisis lineal de elementos finitos se puede usar para determinar los esfuerzos en el concreto, previo al agrietamiento, este método de análisis no es apropiado para diseñar, dado que puede ocurrir una redistribución de esfuerzos después del agrietamiento.

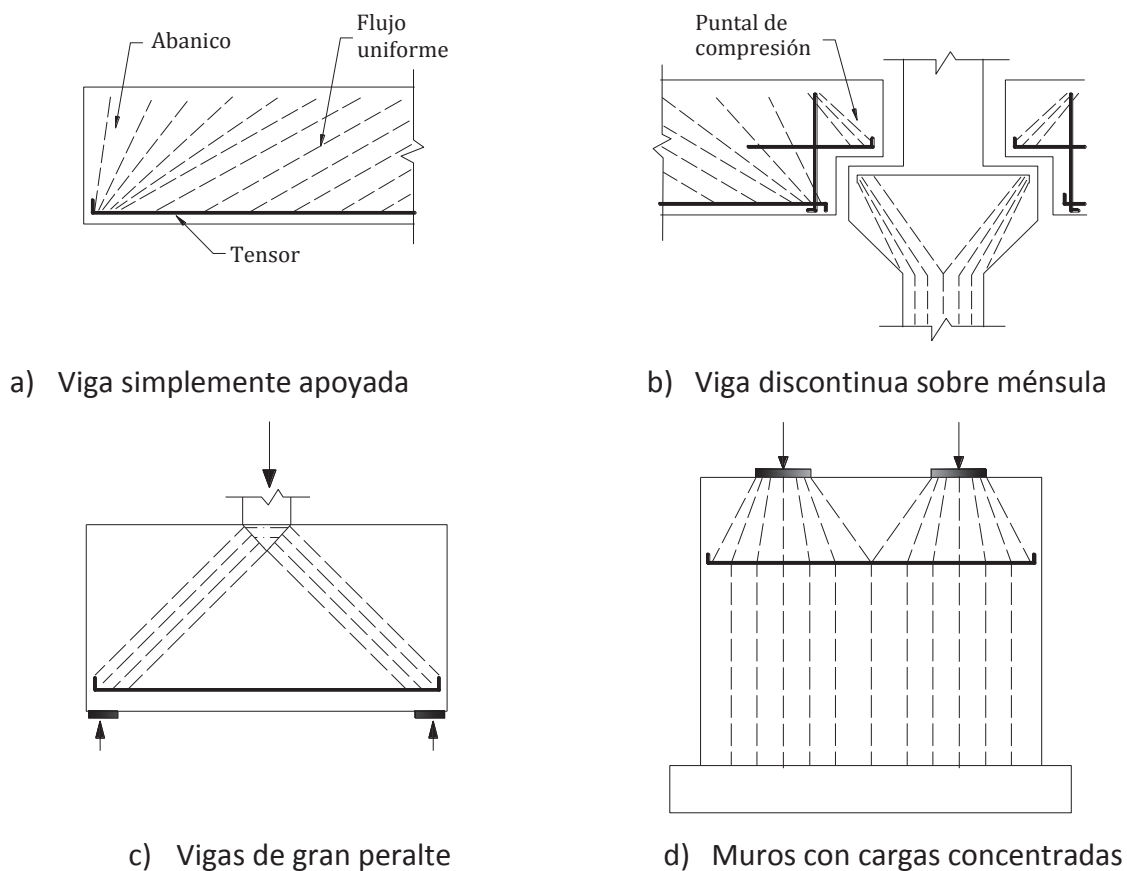
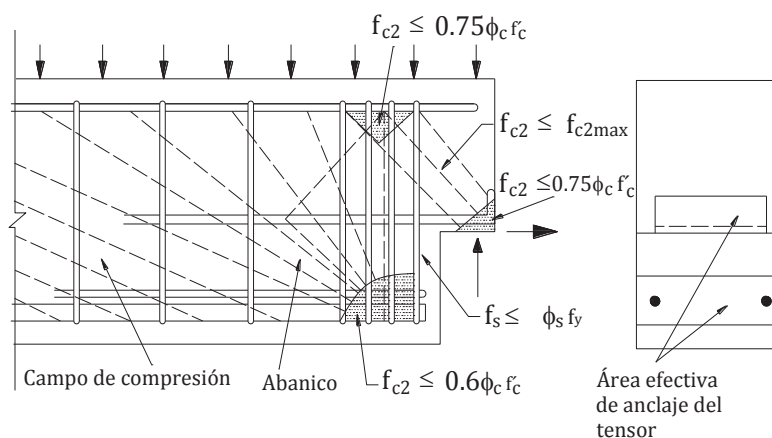
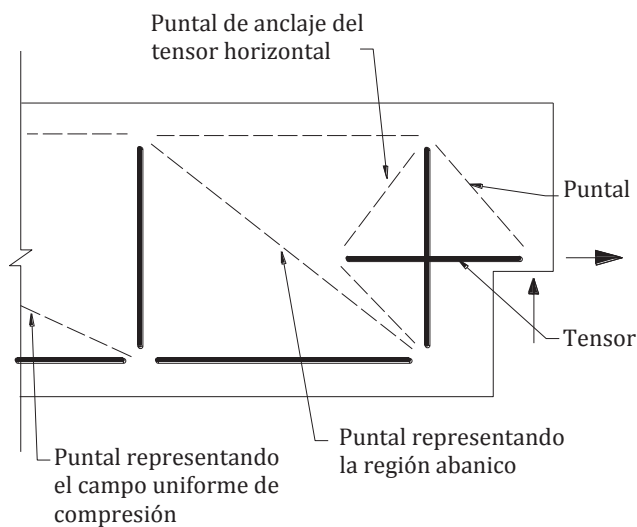


Figura 2.1 Ejemplos de regiones discontinuas modeladas con puntales de concreto a compresión y tensores de refuerzo en tensión



e) Modelo Puntal-Tensor



f) Idealización del modelo armadura

Figura 2.1 Ejemplos de regiones discontinuas modeladas con puntales de concreto a compresión y tensores de refuerzo en tensión (Continuación)

2.1.1 DISEÑO USANDO EL MODELO PUNTAL-TENSOR

El primer paso del diseño es visualizar el flujo de las fuerzas e identificar las regiones de campos constantes, abanicos y la concentración de esfuerzos de compresión en el concreto. Como se observa en la Figura 2.1 (e) y (f), el modelo Puntal-Tensor se compone

de puntales a compresión de concreto y tensores de refuerzo a tensión en las regiones discontinuas de las vigas con cambio de sección. La intersección del puntal y tensor delimitan las zonas nodales del concreto esforzado multidireccionalmente.

Los esfuerzos en la zona nodal están limitados a $0.85\phi_c f'_c$ para las zonas nodales encerradas por puntales de compresión y por áreas de soporte; $0.75\phi_c f'_c$ para zonas nodales interceptadas por los tensores de refuerzo a tensión en una dirección y $0.60\phi_c f'_c$ para zonas nodales interceptadas por tensores de tensión en dos direcciones, donde ϕ_c es el factor de resistencia del material.

La zona nodal debe ser más grande, lo suficiente para asegurar que los esfuerzos sean menores que el esfuerzo límite. Se asume que en cada cara de la zona nodal solo existen esfuerzos de compresión axial uniforme, entonces para el equilibrio deben ser iguales en todas las caras. La geometría de la armadura es determinada colocando los nodos en los puntos de intersección de las fuerzas.

Después de determinar por medio de la estática las fuerzas en los miembros de la armadura, se calcula el área requerida del tensor de refuerzo y la capacidad de los puntales a compresión. El área transversal de un puntal se determina de las dimensiones de las zonas nodales, al final del puntal. El esfuerzo límite en el puntal a compresión se puede derivar calculando ϵ'_c e igualando a 0.002, lo cual resulta

$$f_{c2max} = \frac{\lambda\phi_c f'_c}{0.8 + 170\epsilon_1} \leq \lambda\phi_c f'_c \quad (2.1)$$

donde λ es un factor para concreto de baja densidad, $\lambda = 1$ para densidad normal, 0.85 para concreto estructural de semi-baja densidad, y 0.75 para concreto estructural de baja densidad.

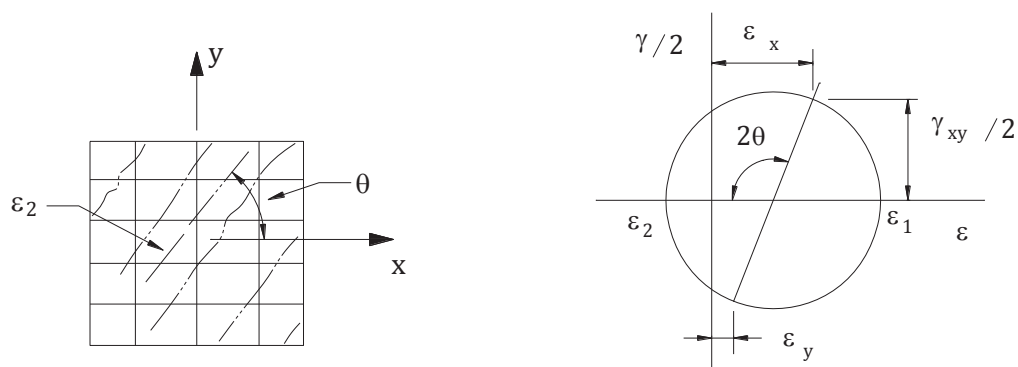


Figura 2.2 Estado de deformación para un elemento membrana

El esfuerzo de compresión máximo de la armadura decrece cuando la deformación principal ϵ_1 se incrementa. La deformación principal ϵ_1 es determinada de la compatibilidad de compresión. Del círculo de mohr para deformaciones, Figura 2.2, si ϵ_x se reemplaza por la deformación ϵ_s en el tensor, si θ se reemplaza por el ángulo α_s entre el tensor y el puntal, y si se supone que la deformación de compresión en el puntal es 0.002, entonces

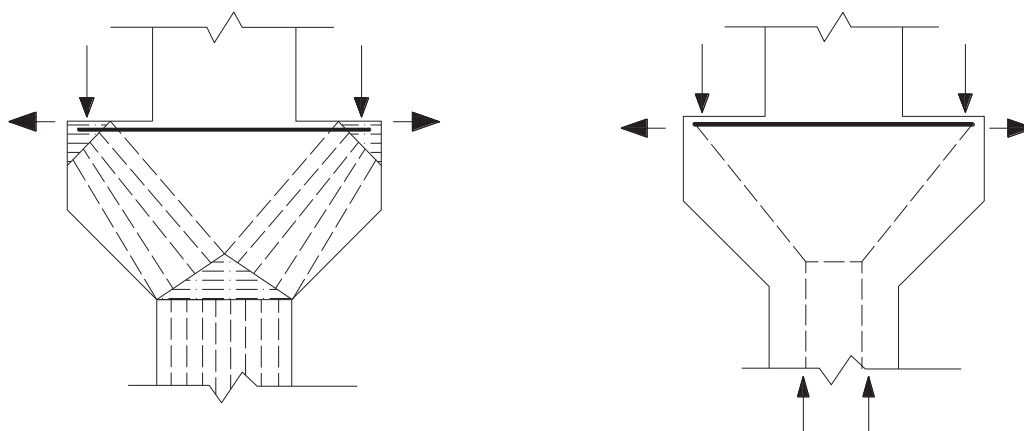
$$\epsilon_1 = \epsilon_s + \frac{\epsilon_s + 0.002}{\tan^2 \alpha_s} \quad (2.2)$$

La deformación en el refuerzo se puede suponer conservadoramente como f_y/E_s . Investigando una región de un puntal de compresión que no tiene refuerzo cruzándolo, el esfuerzo de compresión límite se toma como $\lambda\phi_c f'_c$.

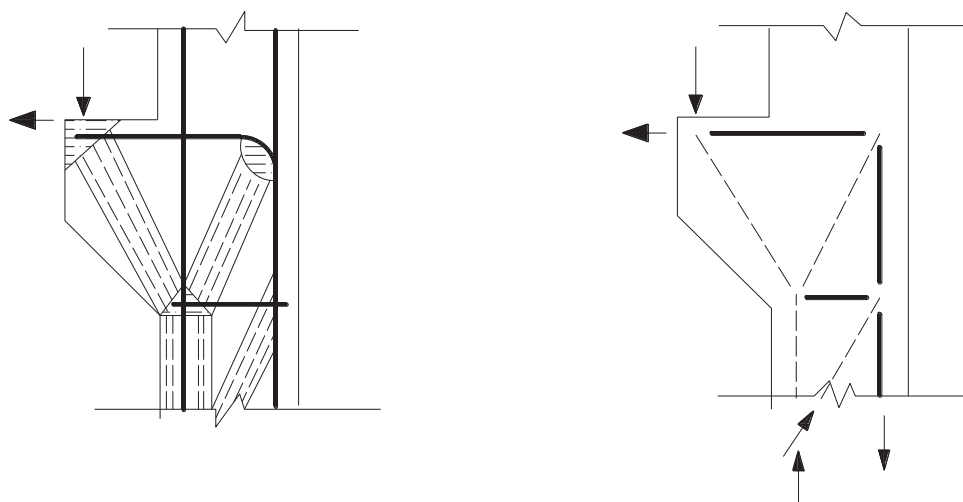
Se debe tener cuidado en proporcionar un adecuado anclaje para los tensores, particularmente donde el tensor es anclado en la zona nodal. Además, el tensor de refuerzo debe ser distribuido sobre un área efectiva de concreto de tal manera que el esfuerzo en la zona nodal sea menor que el esfuerzo límite. El área efectiva de concreto es igual al área de concreto alrededor del tensor de refuerzo y debe tener el mismo centroide.

2.1.2 APOYOS Y MÉNSULAS

Una ménsula doble resiste las cargas por medio del puntal de compresión alimentándose directamente en la columna, ver Figura 2.3a. Se requiere un tensor para resistir las fuerzas fuera de balance en los puntos de carga. La Figura 2.3b ilustra el flujo de las fuerzas en una ménsula simple. La resistencia de esas conexiones depende en gran medida de los detalles de anclaje del tensor de refuerzo.

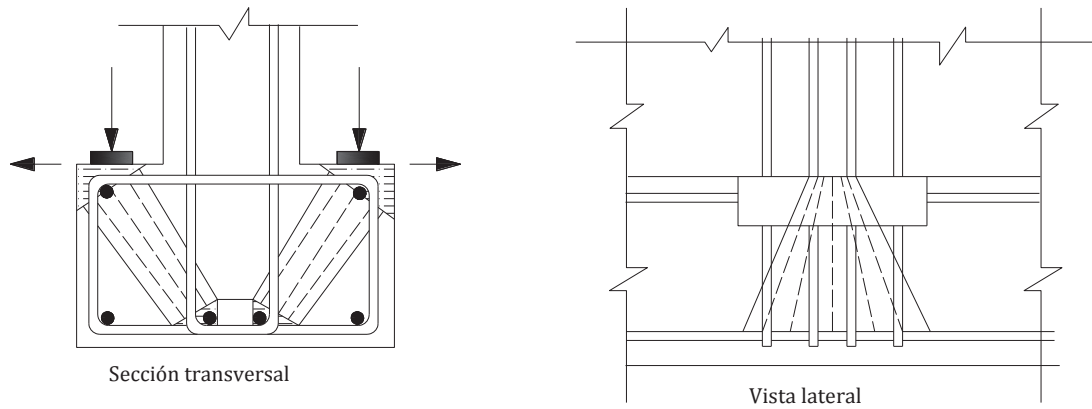


a) Columna con ménsula doble

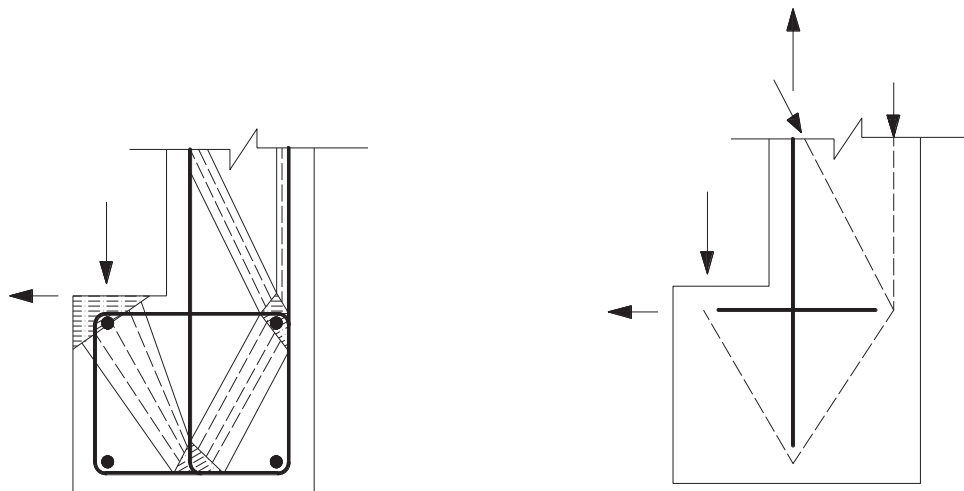


b) Columna con ménsula simple

Figura 2.3 Modelo puntal-tensor para soportes y ménsulas



c) Viga con doble soporte



d) Viga con soporte simple

Figura 2.3 Modelo puntal-tensor para soportes y ménsulas (Continuación)

En la viga con soportes que se muestra en la Figura 2.3c, el gancho de acero transmite la componente vertical del puntal de compresión hacia la parte superior de la viga. Este refuerzo debe ser considerado a parte del refuerzo por cortante y torsión.

2.1.3 SECCIONES DISCONTINUAS Y ABERTURAS

La Figura 2.4 ilustra la aplicación del modelo puntal y tensor para miembros con discontinuidades y miembros con aberturas. El cambio en el flujo de fuerzas, de un campo uniforme de compresión a un abanico, lleva la compresión a la parte inferior del tensor principal de una viga con cambio de sección, se ilustra en la Figura 2.4a. El papel de este

tensor vertical, es transportar la fuerza a la parte superior de la viga, así permite a las fuerzas fluir dentro del soporte por medio de un puntal a compresión.

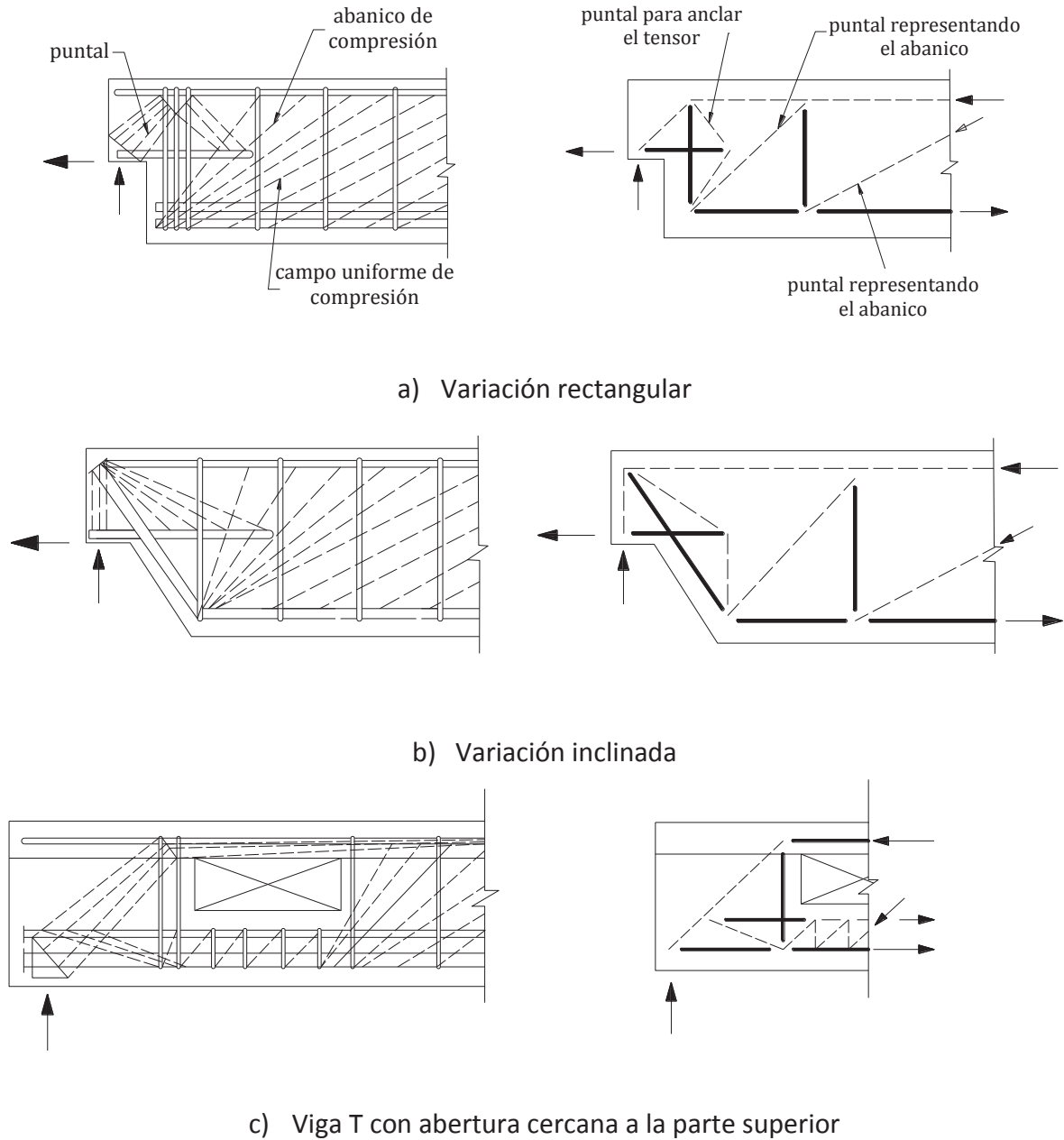


Figura 2.4 Modelo puntal-tensor e idealización puntal para vigas con variación de sección en los extremos y aberturas

Se requieren tensores horizontales para balancear las reacciones de compresión en los ejes exteriores de los apoyos y en la parte inferior del tensor vertical principal.

La Figura 2.4b muestra un modelo puntal y tensor para una viga con un cambio de sección inclinado. El tensor inclinado crea grandes esfuerzos locales en la inclinación y debe ser anclada apropiadamente cerca del soporte de apoyo.

En la figura 2.4c se puede observar la manera en la cual una abertura afecta el flujo de las fuerzas en una viga T uniformemente cargada. El campo uniforme de compresión diagonal se interrumpe por la abertura, causando esfuerzos de cortante más grandes en la sección debajo de la abertura y requiere un incremento en la cantidad de estribos en esta región. Para hacer uso del total de la profundidad de la sección más allá de la abertura, se proporciona un tensor vertical para transportar las fuerzas de cortante a la parte superior de la viga. Este tensor vertical le permite a las fuerzas fluir dentro del área de soporte por medio de un puntal de compresión.

2.1.4 VIGAS DE GRAN PERALTE

La Figura 2.5 ilustra algunos modelos puntal y tensor e idealización de armaduras para algunas vigas de gran peralte. La viga de gran peralte simplemente apoyada es fácilmente modelada con una armadura estáticamente determinada, como se muestra en la Figura 2.5a. El diseño debe asegurar que no ocurra una falla prematura debido a una inadecuada cantidad de refuerzo de tensión, insuficiente anclaje de tensores, agrietamiento de las áreas de apoyo y agrietamiento de los puntales de compresión.

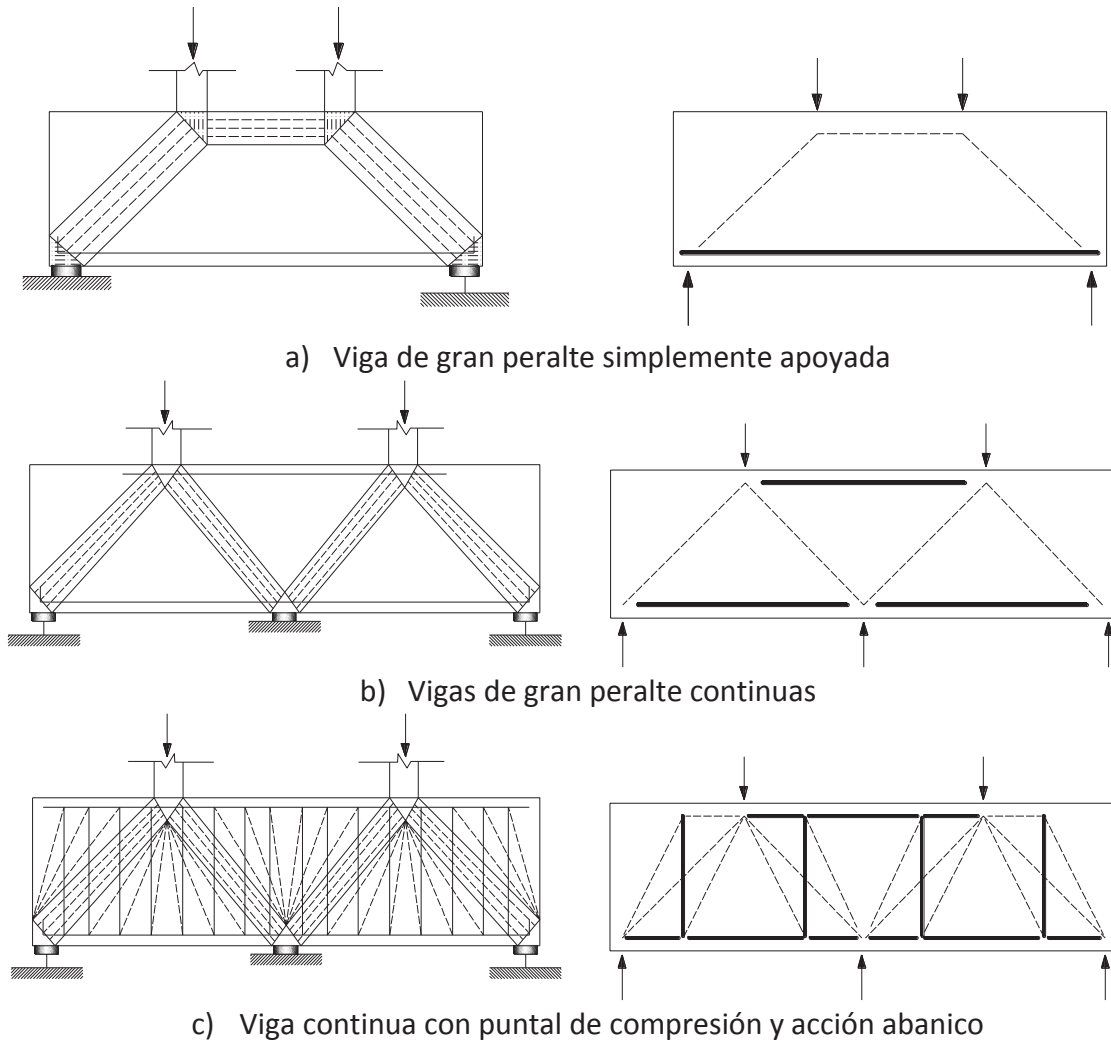


Figura 2.5 Modelo puntal-tensor e idealización puntal para vigas de gran peralte

El modelo puntal-tensor y su idealización armadura estáticamente indeterminada, para vigas continuas de gran peralte, se muestra en la Figura 2.5b y 2.5c. Para resolver las fuerzas de los miembros de la armadura, es necesario considerar la rigidez relativa de los miembros. Si se proporciona una cantidad suficiente de refuerzo transversal en una viga de gran peralte, entonces la carga será transportada por el puntal de compresión y el abanico. La armadura idealizada para cada caso se da en la Figura 2.5c, donde se asume que el refuerzo transversal entre los puntos de carga y las reacciones es modelada como un tensor de tensión simple.

2.1.5 CONCLUSIONES

Los modelos simples puntal tensor presentados proporcionan estimaciones conservadoras de la capacidad última de las regiones discontinuas investigadas. El análisis de elemento finito no lineal proporciona un medio de predicción de la respuesta completa de miembros de concreto reforzado que contienen regiones discontinuas.

Los resultados de pruebas y la predicción usando los modelos puntal-tensor y análisis de elemento finito no-lineal han demostrado la necesidad de considerar las regiones discontinuas:

- a) Desde que la capacidad de ménsulas y vigas con cambio de sección son sensibles a pequeños cambios en la excentricidad de la carga, es necesario modelar cuidadosamente los detalles de los apoyos y áreas de carga.
- b) El concreto no restringido fuera de las áreas de apoyos y los recubrimientos de concreto tienen el potencial de desprenderse y por lo tanto deben ser omitidos en el análisis de las condiciones de falla últimas.
- c) La terminación de las barras de refuerzo origina esfuerzos de adherencia y variación de fuerza a lo largo de la longitud de la barra. En el análisis de elemento finito, esto se considera para reducir el área de acero a lo largo de la longitud de desarrollo.
- d) La capacidad última es sensible a la manera en la cual las zonas nodales son detalladas.

2.2 MÉNSULAS DE CONCRETO REFORZADO

El modelo estructural propuesto está basado en el de Leonhardt y Monning simplificado, usando la aproximación de Steinle. Se asume que el concreto actúa como puntales inclinados entre las grietas. Se han realizado otras consideraciones como las siguientes:

1. Cualquier transferencia de cortante a través de las grietas causadas por la acción de trabazón del agregado o acción de dovela se desprecia.
2. Efectos locales, los cuales son causados por las reacciones y cargas son despreciados.
3. Las condiciones de equilibrio se deben cumplir.
4. La falla ocurre debido al agrietamiento del concreto o a la fluencia del acero.
5. La resistencia a tensión del concreto se desprecia.
6. La resistencia del concreto se supone igual a la resistencia de los cilindros, la deformación máxima del concreto es igual a 0.003.
7. El modelo matemático debe cumplir con la geometría de los miembros, particularmente al refuerzo y su anclaje.

El estado de las fuerzas a la falla se muestra en la Figura 2.6. Esto convierte al concreto en un puntal inclinado. La siguiente ecuación de equilibrio se puede escribir

$$D x = V_u a + N_u \Delta h \quad (2.3)$$

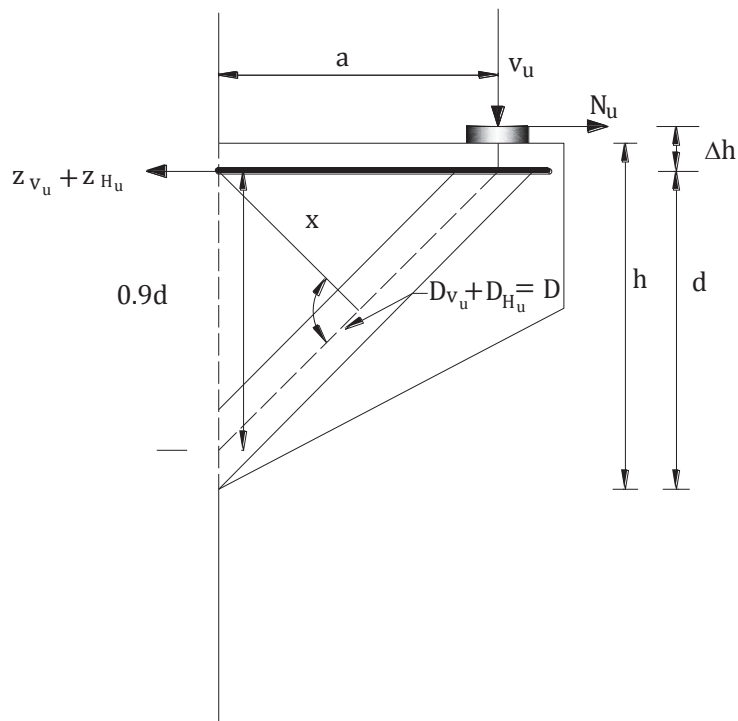


Figura 2.6 Geometría, fuerzas y condiciones de equilibrio

Donde $x = 0.9ad/\sqrt{(0.9)^2 + a^2}$ y D es la fuerza del puntal en compresión y viene a ser $0.25bd(\beta_1 f'_c)$. Donde b es el ancho de la ménsula, d es el peralte efectivo de la ménsula, f'_c es la resistencia a la compresión del concreto y β_1 es el múltiplo de f'_c del ACI 318-83.

Se asume una distribución de esfuerzos rectangular equivalente como se propone en el ACI. De acuerdo con esto, β_1 debe ser tomado como 0.85 para la resistencia f'_c superior a 4000 Psi y se reduce a tasa de 0.05 por cada 1000 Psi que aumente la resistencia, con un límite inferior de 0.65. V_u, N_u son el cortante último de diseño y la fuerza transversal en la ménsula.

Sustituyendo D y x en la ecuación 2.3 se obtiene

$$\frac{bd(f'_c)}{V_u} = \frac{4.45}{\beta_1} \left(1 + \frac{N_u \Delta h}{V_u a} \right) \sqrt{(0.9)^2 + (a/d)^2} \quad (2.4)$$

La ecuación 2.4 puede ser simplificada asumiendo que $\Delta h/a = 0.3$

$$\frac{bd(f'_c)}{V_u} = \frac{4.45}{\beta_1} \left(1 + \frac{0.3N_u}{V_u}\right) \sqrt{(0.9)^2 + (a/d)^2} \quad (2.5)$$

de la variación en la resistencia los valores de N_u/V_u cambian de 0 a 0.2, y se tiene un cambio correspondiente en $bd\sqrt{f'_c}/V_u$ entre 0 y 6%, por lo tanto el término N_u/V_u en la ecuación 2.4 puede ser ignorado

$$\frac{bd(f'_c)}{V_u} = \frac{4.45}{\beta_1} \sqrt{(0.9)^2 + (a/d)^2} \quad (2.6)$$

Niederhoff, Mehmel y Becker, y Stenle han propuesto las siguientes ecuaciones

$$\frac{bd(f'_c)}{V_u} = \frac{2.97}{\beta_1} \left[1 + 0.61 \left(\frac{d}{a}\right)^2\right] \left(\frac{a}{d}\right) \quad (2.7)$$

$$\frac{bd(f'_c)}{V_u} = \frac{2.8}{\beta_1} \left(1 + \frac{a}{d}\right) \quad (2.8)$$

$$\frac{bd(f'_c)}{V_u} = \frac{3.57}{\beta_1} \quad (2.9)$$

2.3 MODELO ARMADURA PARA CONEXIONES LOSA-COLUMNNA

Los elementos del modelo armadura para obtener un diagrama de interacción de capacidad última y para una conexión losa plana-columna, son:

1. Un plano exterior o puntal de cortante que representa al cortante, en la cara frontal de la columna, flexión.
2. Un método para estimar α , el cual se requiere para fijar la geometría de cada puntal de cortante, y
3. Un plano interior o puntal de anclaje, el cual proporciona un mecanismo para incrementar el momento de flexión transferido a la columna.

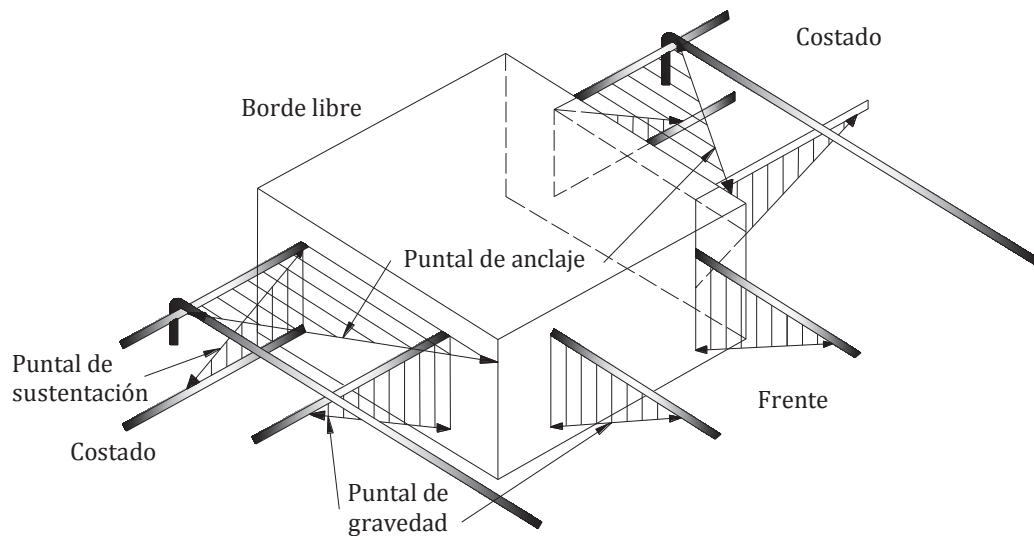


Figura 2.7 Modelo armadura para bordes de columna

Los elementos para una conexión viga-columna son mostrados en la Figura 2.7. El refuerzo de acero que tensa el puntal de compresión a la columna es referido como un puntal de acero A_{st} .

La falla de cada barra-puntal está definida por su geometría y la resistencia de fluencia del acero. Se supone que el puntal de concreto en compresión no falla y su capacidad no

necesita ser considerada. La geometría de un puntal de anclaje se fija localizando su punto final en la intersección de dos barras de refuerzo y la esquina frontal de la columna. La geometría de un puntal de cortante está definida por algunos valores críticos de α , en el cual la componente de la fuerza fuera-de-plano es igual a la capacidad de confinamiento de la losa. Este ángulo se obtiene de la expresión:

$$\tan \alpha = 1.0 - e^{-0.85K}(plg. - lb) \quad (2.10)$$

$$\tan \alpha = 1.0 - e^{-2.25K}(S.I.) \quad (2.11)$$

Donde K es un parámetro dimensional dado como

$$K = \frac{S_{eff} d' \sqrt{f'_c}}{A_{bar} f_y (c/d_s)^{0.25}} \quad (2.12)$$

2.3.1 DIAGRAMA DE INTERACCIÓN

En la Figura 2.8 se muestra esquemáticamente un diagrama de interacción para una conexión borde-columna. Son usados cuatro puntos básicos de control (A, B, C, y D) para construir un diagrama de interacción, cada uno tiene una contraparte inversa (A', B', C' y D') en cada dirección de los vectores de cortante y momento netos.

Los puntos de control A, B, A', y B' marcan los límites de dos tipos distintos de comportamiento de interacción. Entre B y A' y entre B' y A hay un cambio en la orientación del puntal de cortante; unido por el puntal de acero perpendicular al borde libre. Los puntos de control C, D, C', y D' describen las etapas intermedias de la interacción cortante-flexión.

Se calculan tres valores para cualquier punto en el diagrama de interacción, estos son el cortante último V_u , el momento por cortante M_v y el momento de flexión M_f .

El cortante último V_u es la componente neta fuera del plano del puntal de compresión del concreto. La componente horizontal de cada puntal está definida por el campo de fuerzas de su barra de refuerzo dependiente. La componente vertical está limitada por el ángulo del puntal.

Para estimar el momento debido al cortante M_v , se debe asumir que la zona donde cada puntal actúa está relacionada a la columna. Todos los puntales de compresión actúan en algún lugar en el perímetro de la columna. Cualquier puntal de cortante equilibrado por una barra de refuerzo cruzando la cara de la columna se asume que está centrado con esa barra.

Los puntales de cortante desarrollados por el acero localizado entre la cara de la columna y d_s se asume que actúan en la esquina frontal de la columna.

Dada la sobre distribución de puntales de cortante alrededor del perímetro de la columna, es posible calcular el momento debido al cortante, sumando los momentos de la componente vertical del puntal alrededor del eje paralelo al borde libre de la losa.

En general, cualquier acero desarrollado perpendicularmente al borde libre produce momento directo por flexión M_f . Este acero incluye el puntal de acero y cualquier barra perpendicular al borde libre que este unida a la columna. Si este acero es denotado como A_s , entonces M_f puede ser aproximado por la expresión

$$M_f = A_s f_y j d_s \quad (2.13)$$

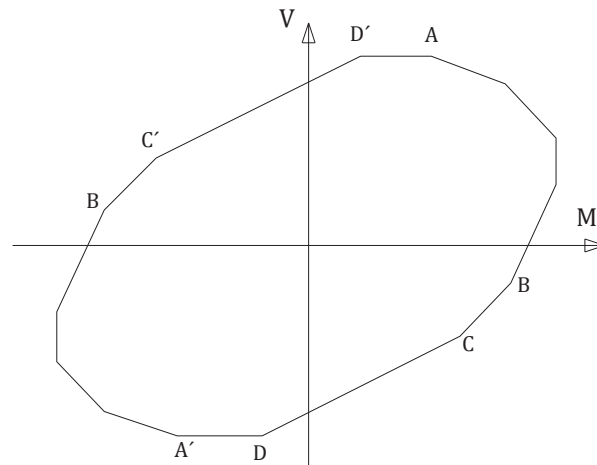


Figura 2.8 Diagrama de interacción cortante-momento para bordes de columna

En el punto A, todo el puntal superior de acero es utilizado para equilibrar los puntales de gravedad. Su contraparte A' ocurre cuando todos los puntales inferiores de acero equilibran a todos los puntales expresados anteriormente. Los puntos A y A' son descritos esquemáticamente en la Figura 2.9. El punto A define la capacidad máxima de cortante de gravedad de la conexión losa-columna.

$$V_u = \sum [A_{st}^T f_y \tan \alpha] \quad (2.14)$$

Dado que solo el puntal de acero está desarrollado en la columna, A_s es igual a A_{st}^T donde

$$M_f = A_{st}^T f_y 0.9d_s \quad (2.15)$$

Bajo momento desbalanceado, la losa intenta rotar en relación a la columna cerca de un eje paralelo al borde libre. La posición de este eje varía con la porción de momento cortante. Los puntos B y B' describen una condición en la cual el eje está localizado en la losa a una distancia d_s del borde libre, significativamente mayor que la dimensión C1 de la columna. Estos puntos son ilustrados en la Figura 2.10.

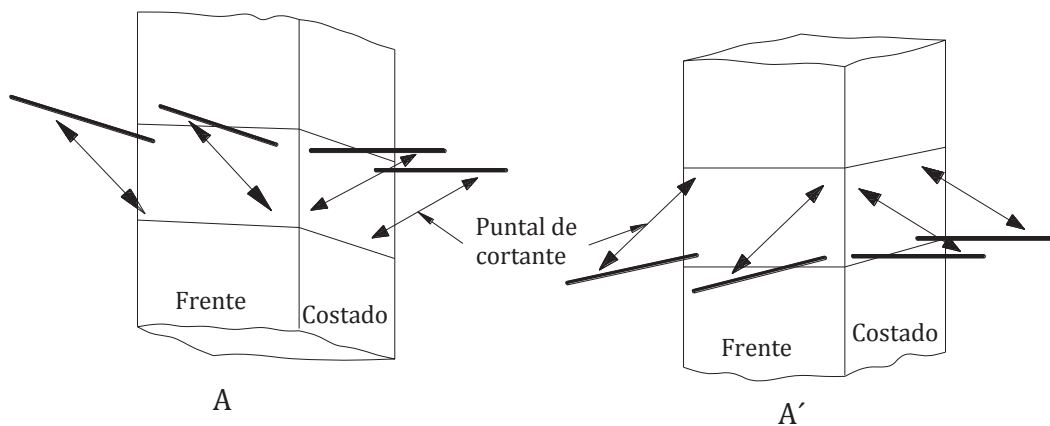


Figura 2.9 Puntos de control A y A'

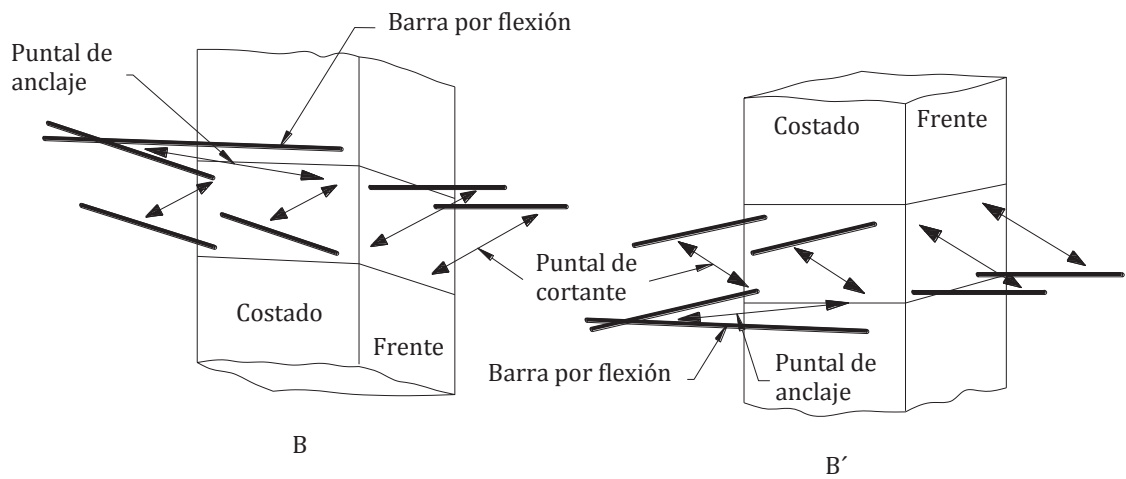


Figura 2.10 Puntos de control B y B'

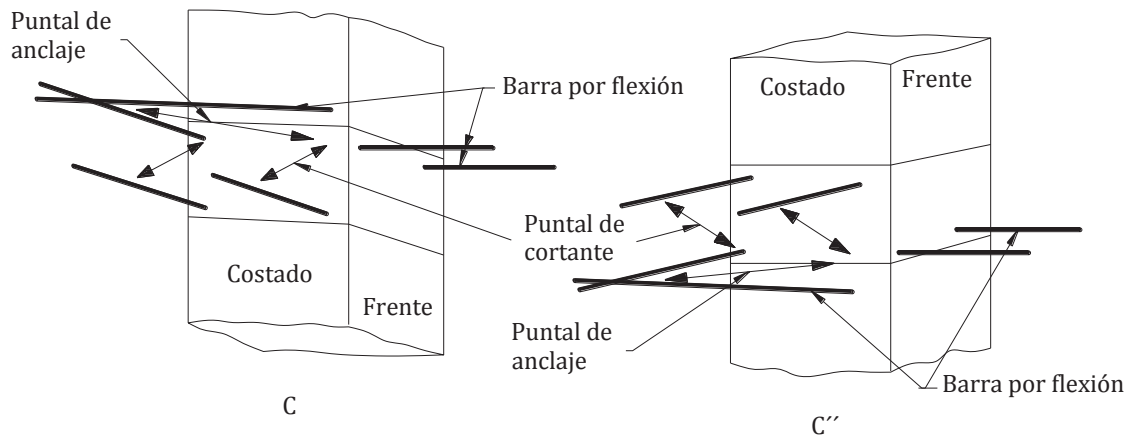


Figura 2.11 Puntos de control C y C'

Durante toda la interacción entre los puntos A y B, la orientación del puntal de cortante, unido por A_{ST}^T , permanece constante. Así, entre los puntos B y A' y entre los puntos B' y A, la orientación de ese puntal de cortante en la cara frontal de la columna esta invertido.

La etapa de flexión (puntos de control C y C') está ilustrada en la Figura 2.11. En esta etapa, el puntal de cortante que estuvo en la cara frontal ha rotado, así que están paralelos a la losa y contribuyen solo a flexión.

La etapa de cortante invertido (puntos de control D y D') es mostrada en la Figura 2.12. Esta etapa es análoga a un puntal simplemente soportado ya que el puntal invertido no está unido por barras inferiores y el puntal de gravedad invertido no está unido por barras superiores.

El procedimiento desarrollado para estimar α no puede ser aplicado al puntal de cortante invertido. Aunque la componente de las fuerzas fuera del plano debería ser confinada por alguna forma de campo de tensión en el concreto, no es muy claro que profundidad del concreto participa.

2.3.2 INTERACCIÓN ENTRE PUNTOS DE CONTROL

Para los puntos B hasta C y D hasta A' y del punto B' hasta C' y D' a A, el diagrama de interacción está definido por interpolación lineal entre los puntos de control. Todo lo que queda es desarrollar la interacción del punto A al B y de los puntos A' a B'.

Considérense los arreglos mostrados en la Figura 2.13. La barra 1 y 3 en la parte superior, la barra 2 está en la parte inferior. α_1 y α_2 son los ángulos del puntal asociado con la barra 1 y 2.

Para la barra 1, una unidad de fuerza-barra ΔF transferida de un puntal de cortante a un puntal de anclaje produce un decremento en cortante ΔV_1 igual a

$$\Delta V_1 = \Delta F \tan \alpha_1 \quad (2.16)$$

El incremento en capacidad de momento ΔM_1 cerca del centroide de la columna es igual a

$$\Delta M_1 = \Delta F e_1/e_2 0.9d_s + \Delta V_1 b \quad (2.17)$$

Para la barra 2, el decremento correspondiente en cortante neto es

$$\Delta V_2 = \Delta F \tan \alpha_2 \quad (2.18)$$

Y el incremento en momento es

$$\Delta M_2 = \Delta V_2(a + b) \quad (2.19)$$

La relación del momento incremental a cortante decreciente para las dos barras es

$$\Delta M_1 / \Delta V_1 = \frac{0.9d_s e_1 / e_2}{\tan \alpha_1} + b \quad (2.20)$$

El término $0.9d_s e_1 / e_2 / \tan \alpha_1$ es el anclaje eficiente de la barra 1. Si es más grande que a , entonces el desarrollo de un puntal de anclaje precederá a la exaltación en la barra 2.

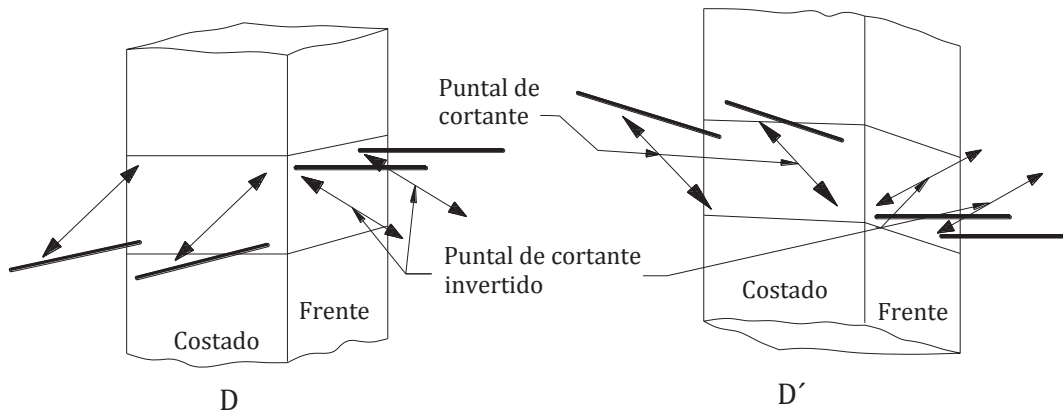


Figura 2.12 Puntos de control D y D'

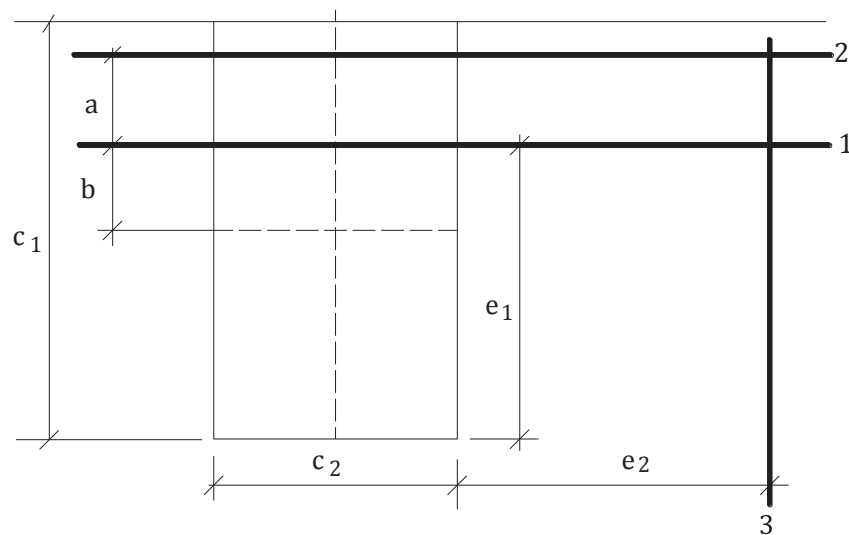


Figura 2.13 Eficiencia de las barras para desarrollar momento

2.3.3 CONCLUSIONES

1. El modelo armadura puede predecir con exactitud la capacidad última de una conexión columna-placa de piso bajo momento y cortante combinados.
2. La suposición de campo de fuerza en barras de tensión pasando a través de columnas da resultados conservadores para losas reforzadas ligeramente (porcentaje del puntal de acero menor que 0.7 por ciento). El excesivo agrietamiento resulta en un endurecimiento por deformación del refuerzo.
3. Se mostró la importancia del recubrimiento adecuado y espacio del acero superior para prevenir la falla.

2.4 TEORÍA MODIFICADA DEL CAMPO DE COMPRESIÓN

La teoría del campo de compresión (CFT) supone que una vez que ocurre el agrietamiento del alma de una viga, los esfuerzos principales de tensión desaparecen. Más tarde la teoría fue modificada para incluir los esfuerzos principales de tensión y dar una descripción más realista del mecanismo de falla por cortante.

2.4.1 CONSIDERACIONES DE ESFUERZOS

La Figura 2.14 muestra el campo de esfuerzos para cortante puro en el alma de una viga de concreto reforzado antes y después del agrietamiento. Se muestra un círculo de Mohr de esfuerzos para cada caso. Si la resistencia a tensión del concreto no es ignorada y soporta parte de las fuerzas de tensión, se usa el estado de esfuerzos de la teoría modificada del campo de compresión para describir el comportamiento.

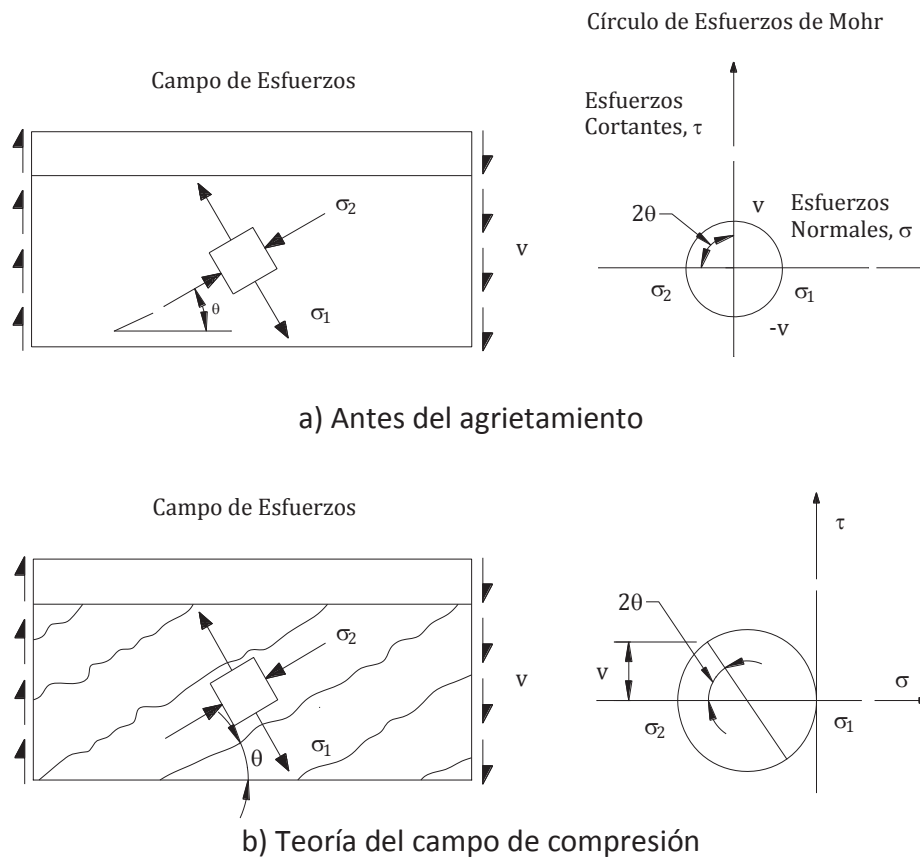
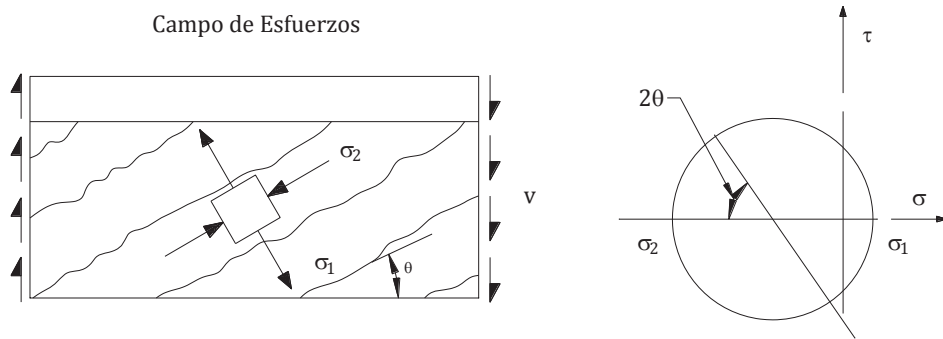
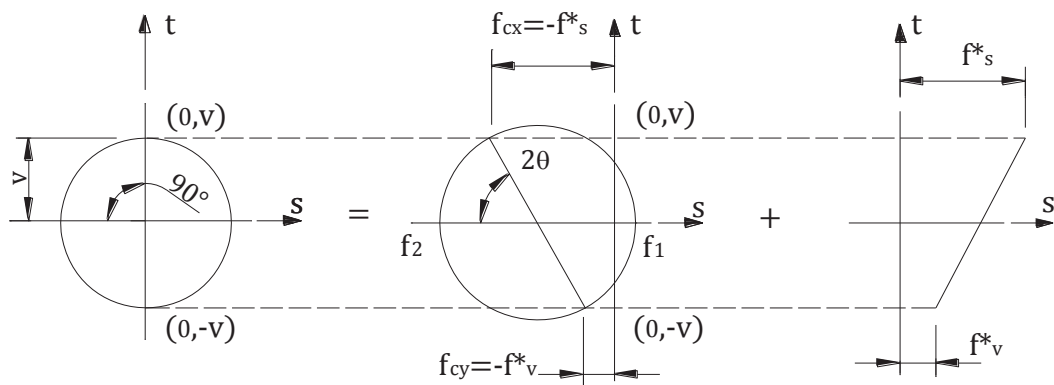
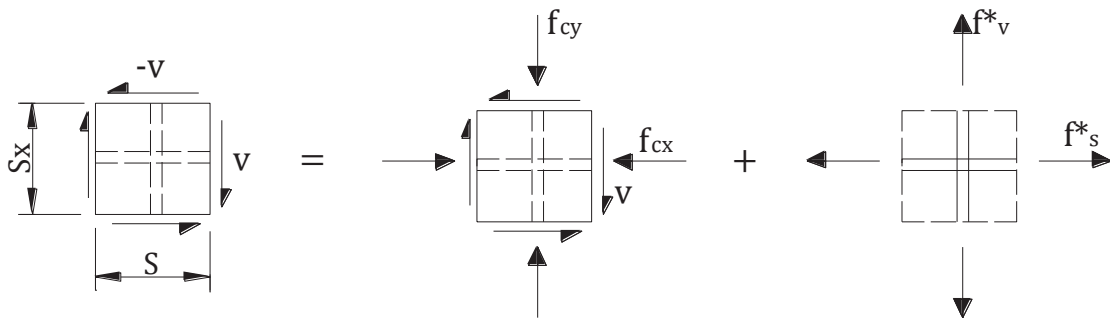


Figura 2.14 Campo de esfuerzos en el alma de una viga de concreto reforzado sujeta a cortante puro



c) Teoría modificada del campo de compresión

Figura 2.14 Campo de esfuerzos en el alma de una viga de concreto reforzado sujeta a cortante puro (Continuación)



a) Concreto reforzado b) Puntal de concreto c) Refuerzo longitudinal

Figura 2.15 Elemento de concreto reforzado sujeta a cortante puro

El círculo de Mohr de esfuerzos, para el puntal de concreto en compresión de la Figura 2.14c, se explica ampliamente en la Fig. 2.15. No hay círculo de esfuerzos para el acero de refuerzo porque es ignorada su resistencia a cortante (acción de dovela). Los esfuerzos de tensión f_s^* y f_v^* son esfuerzos de tensión del pseudo-concreto, que son equivalentes a las fuerzas de tensión en el refuerzo. Por superposición y los diagramas de las figuras 2.15b y 2.15c

$$f_s^* b_v s_x = f_s A_s$$

$$f_s^* = \frac{A_s}{b_v s_x} f_s = \rho_x f_s \quad (2.21)$$

Y

$$f_v^* b_v s = f_v A_v$$

$$f_v^* = \frac{A_v}{b_v s} f_v = \rho_v f_v \quad (2.22)$$

donde s_x es el espacio vertical entre el refuerzo longitudinal y s es el espacio horizontal entre estribos:

$$\rho_x = \frac{A_s}{b_v s_x} \text{ es el porcentaje de refuerzo longitudinal} \quad (2.23)$$

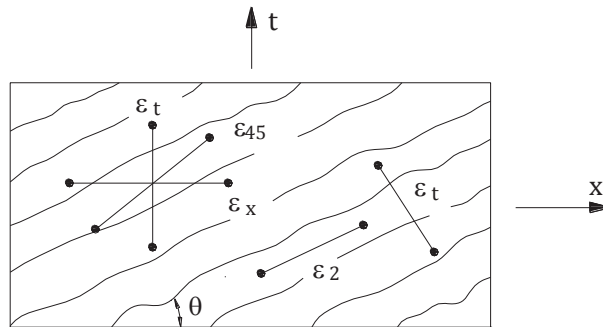
$$\rho_v = \frac{A_v}{b_v s} \text{ es el porcentaje de refuerzo transversal} \quad (2.24)$$

2.4.2 CONSIDERACIONES DE DEFORMACIÓN

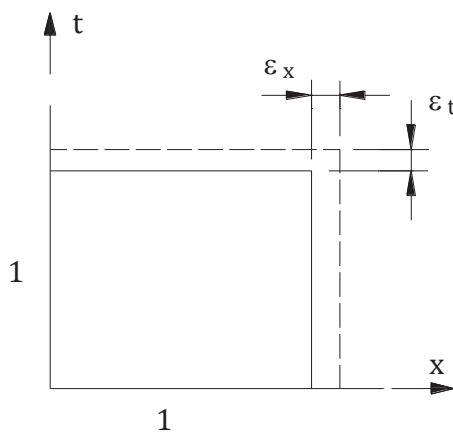
Antes de escribir las ecuaciones de equilibrio para la teoría modificada del campo de compresión, se desarrollan las condiciones de compatibilidad que se basan en un círculo de Mohr para deformaciones. Considere el elemento de concreto reforzado agrietado de la Figura 2.16a, el cual está sujeto a un estado de esfuerzos biaxial y está instrumentado con equipo de medición para registrar las deformaciones en la dirección longitudinal ε_x , transversal ε_t y a $45^\circ \varepsilon_{45}$.

Se puede construir un círculo de Mohr de deformaciones si se conocen las tres deformaciones en un punto y su orientación. Se requiere la relación entre esas

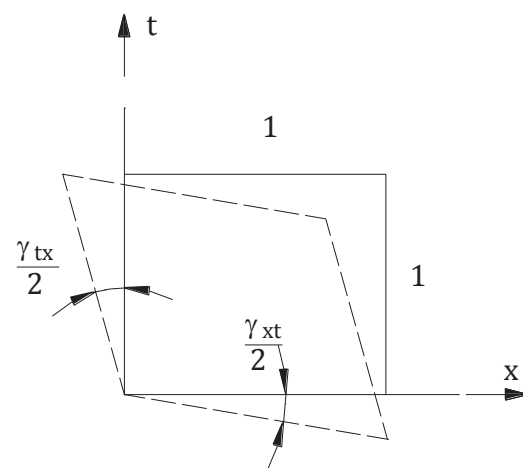
deformaciones y las deformaciones principales ε_1 y ε_2 y el ángulo θ , el cual define la inclinación del puntal de compresión.



a) Deformaciones promedio en un elemento alma agrietado

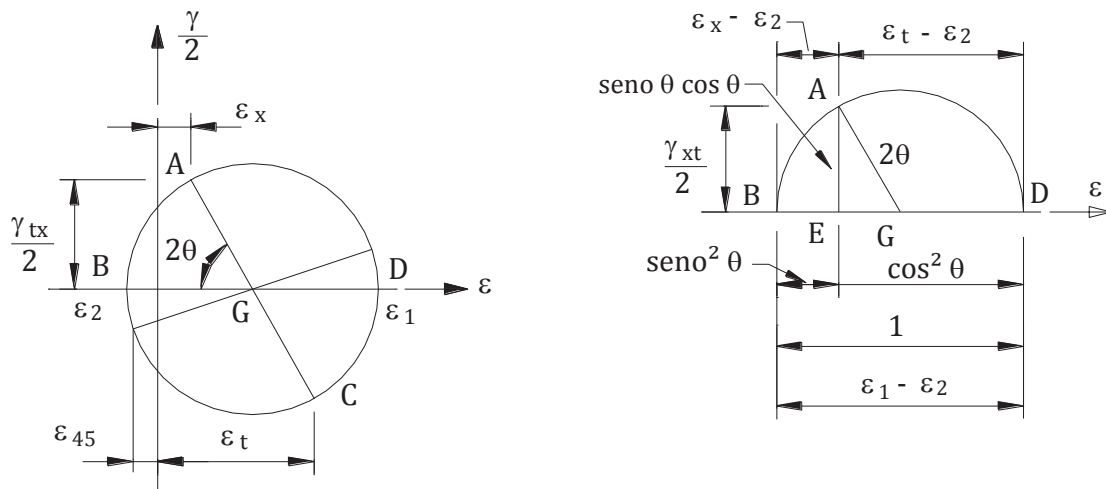


b) Deformaciones normales



c) Deformaciones angulares

Figura 2.16 Condiciones de compatibilidad para un elemento alma agrietado



d) Círculo de Mohr de deformaciones

e) Relaciones geométricas

Figura 2.16 Condiciones de compatibilidad para un elemento alma agrietado
(Continuación)

Primero, el centro del círculo se puede encontrar tomando el promedio, el cual es

$$\frac{\varepsilon_x + \varepsilon_t}{2} = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_3}{2}$$

y la deformación principal es

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_x + \varepsilon_t - \varepsilon_2 \quad (2.25)$$

Usando un diámetro unitario en la Figura 2.16e, el radio es un medio y el segmento de línea vertical AE es

$$AE = \frac{1}{2} \sin 2\theta = \sin \theta \cos \theta$$

el segmento de línea ED está dado por

$$ED = \frac{1}{2} \cos 2\theta + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) + \frac{1}{2} (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = \cos^2 \theta$$

y el segmento de línea BE es

$$BE = 1 - \cos^2 \theta = \sin^2 \theta$$

Para esas relaciones y por triángulos semejantes, se pueden escribir las siguientes tres ecuaciones de compatibilidad:

$$\varepsilon_x - \varepsilon_2 = (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \sin^2 \theta \quad (2.26)$$

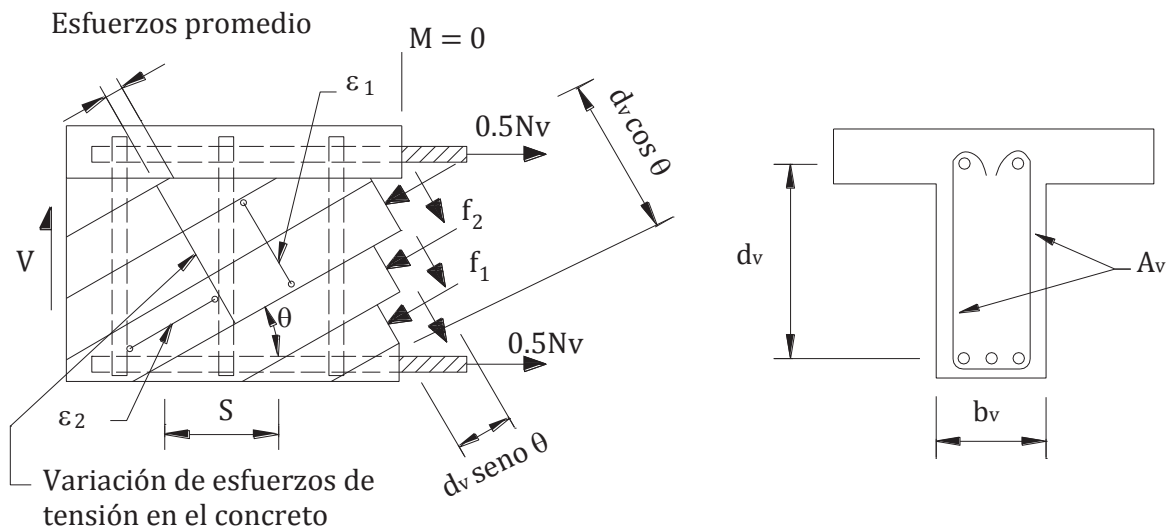
$$\varepsilon_t - \varepsilon_2 = (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \cos^2 \theta \quad (2.27)$$

$$\gamma_{xt} = 2(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \sin \theta \cos \theta \quad (2.28)$$

Dividiendo la ecuación 2.26 por 2.27, resulta

$$\tan^2 \theta = \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_2}{\varepsilon_t - \varepsilon_2} \quad (2.29)$$

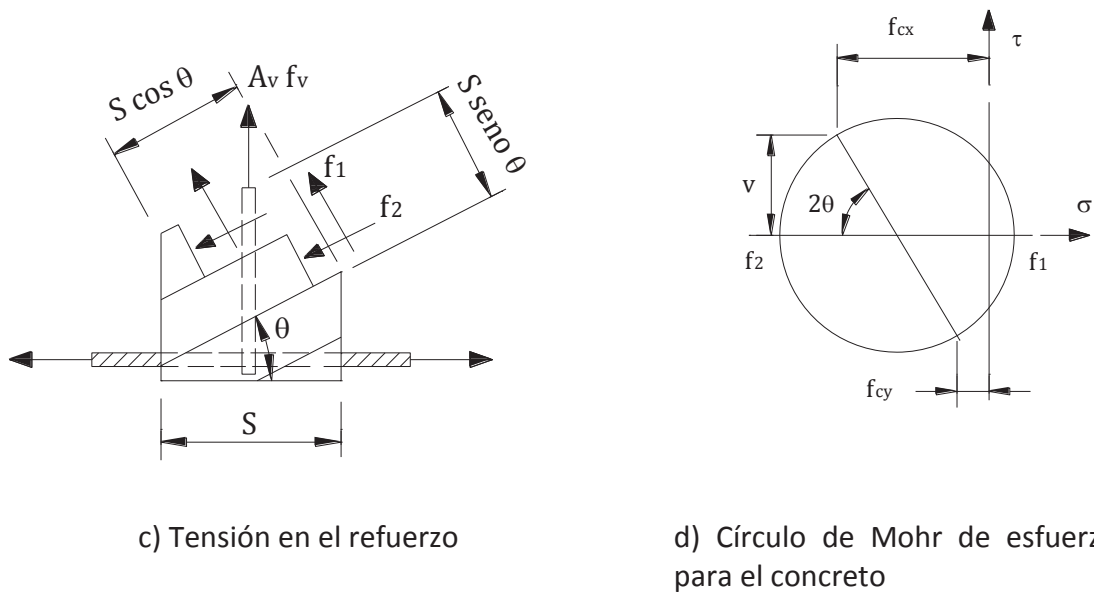
Las condiciones de equilibrio para la teoría modificada de campo de compresión son determinadas considerando el diagrama de cuerpo libre de la Figura 2.17. La distribución de esfuerzos de tensión actual en el puntal de concreto tiene un valor máximo, el cual se hace cero en la grieta.



a) Alma de concreto reforzado agrietada

b) Sección transversal

Figura 2.17 Condiciones de equilibrio para la teoría modificada del campo de compresión



c) Tensión en el refuerzo

d) Círculo de Mohr de esfuerzos para el concreto

Figura 2.17 Condiciones de equilibrio para la teoría modificada del campo de compresión (Continuación)

Del equilibrio de fuerzas en la Figura 2.17a resulta

$$V = f_2 b_v d_v \sin \theta \cos \theta + f_1 b_v d_v \sin \theta \cos \theta$$

de donde el esfuerzo principal de compresión f_2 se puede expresar como

$$f_2 = \frac{v}{\sin \theta \cos \theta} - f_1 \quad (2.30)$$

donde v es el esfuerzo cortante medio

$$v = \frac{V}{b_v d_v} \quad (2.31)$$

2.4.3 CONSIDERACIONES DE EQUILIBRIO

Del equilibrio de fuerzas verticales en la Figura 2.17c, resulta

$$A_v f_v = f_2 s b_v \sin^2 \theta - f_1 s b_v \cos^2 \theta$$

Sustituyendo la ecuación 2.30 para f_2 , y ecuación 2.31 para v y ordenando términos tenemos

$$V = f_1 b_v d_v \cot \theta + \frac{A_v f_v d_v}{s} \cot \theta \quad (2.32)$$

la cual representa la suma de la contribución de la resistencia a cortante del concreto V_c y V_s los esfuerzos a tensión del refuerzo del alma.

Del equilibrio de las fuerzas longitudinales en la Figura 2.17a resulta

$$N_v = f_2 b_v d_v \cos^2 \theta - f_1 b_v d_v \sin^2 \theta$$

Sustituyendo f_2 de la ecuación 2.30 y de la combinación de términos

$$N_v = (v \cot \theta - f_1) b_v d_v \quad (2.33)$$

Si no existe carga axial en el elemento, el refuerzo longitudinal debe resistir la fuerza N_v , que es

$$N_v = A_{sx} f_{sx} + A_{px} f_{px}$$

donde A_{sx} es el área total del refuerzo no presforzado, A_{px} es el área total de los tendones longitudinales presforzados, y f_{sx} y f_{px} son los esfuerzos sobre el área $b_v d_v$ en el refuerzo longitudinal no presforzado y los tendones longitudinales presforzados.

Igualando las dos expresiones de N_v y dividiendo por $b_v d_v$ resulta en

$$\rho_{sx} f_{sx} + \rho_{px} f_{px} = v \cot \theta - f_1$$

donde

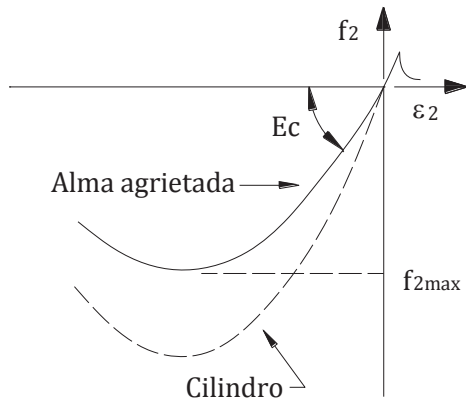
$$\rho_{sx} = \frac{A_{sx}}{b_v d_v} \text{ es el porcentaje de refuerzo no presforzado, y} \quad (2.34)$$

$$\rho_{px} = \frac{A_{px}}{b_v d_v} \text{ es el porcentaje de refuerzo presforzado} \quad (2.35)$$

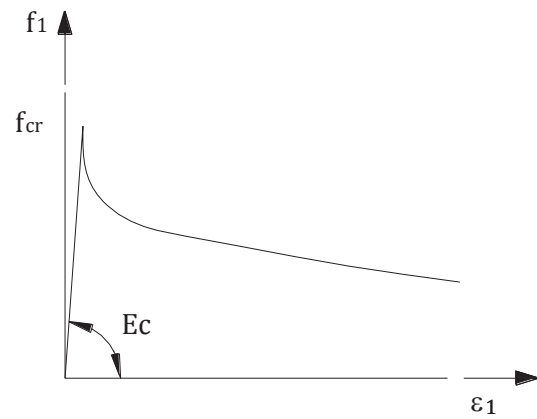
2.4.4 RELACIONES CONSTITUTIVAS

Cumpliendo con el equilibrio de esfuerzos y las condiciones de compatibilidad de deformaciones, solo las relaciones constitutivas junto a los esfuerzos y deformaciones completan la teoría modificada del campo de compresión. La relación esfuerzo-deformación para el concreto en compresión, concreto en tensión, refuerzo no

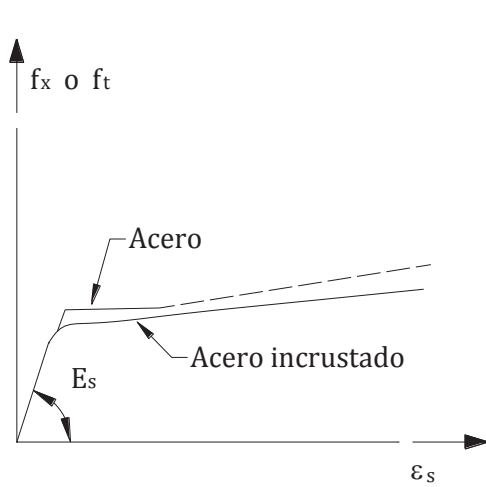
presforzado y refuerzo presforzado son condensadas en la Figura 2.18. En la sección 3.2.3 de este documento se encuentran las ecuaciones de las curvas en la Figura 2.18.



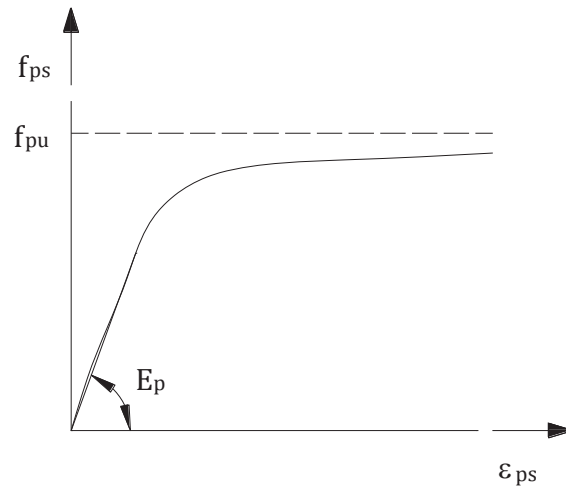
a) Concreto en compresión



b) Concreto en tensión



c) Acero no presforzado



d) Tendones presforzados

Figura 2.18 Relaciones constitutivas para elementos membrana

2.4.5 COMPORTAMIENTO EN LAS GRIETAS

El alma de una viga agrietada diagonalmente se muestra en la Figura 2.19a, con un diagrama de variación de los esfuerzos de tensión, y el esfuerzo principal f_1 relacionado a la deformación principal ε_1 . Para el alma agrietada la deformación principal ε_1 es debida en su mayoría a la abertura de la grieta porque la deformación elástica de tensión es relativamente pequeña,

$$\varepsilon_1 \approx \frac{w}{S_m \theta} \quad (2.36)$$

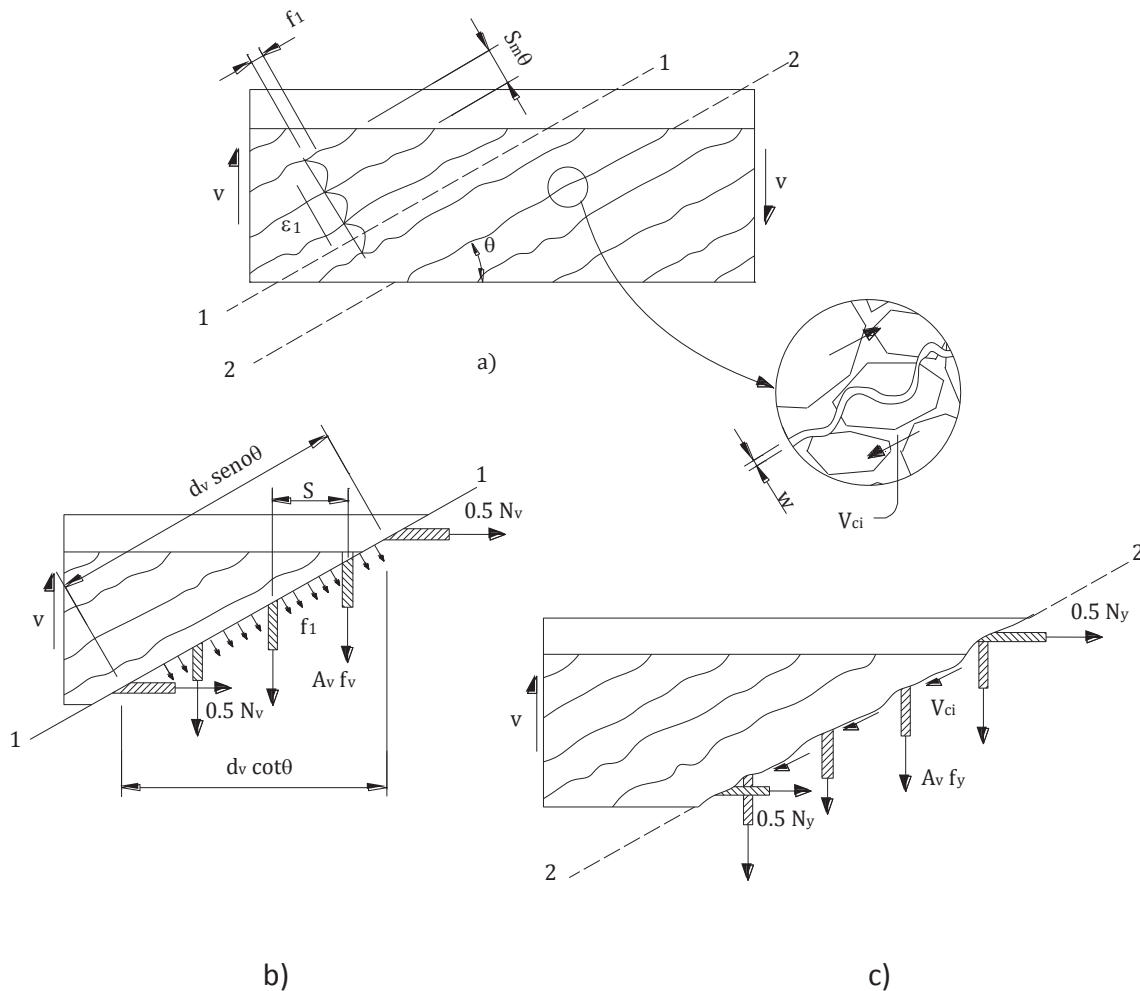


Figura 2.19 Transmisión de las fuerzas de tensión a través de una grieta: (a) Alma de una viga agrietada por cortante, (b) esfuerzos promedio entre grietas y (c) esfuerzos locales en una grieta

donde w es el ancho de la grieta y $S_{m\theta}$ es el espacio medio de la grieta diagonal. Si el ancho de la grieta es muy grande, no será posible transferir el cortante a través de la grieta por el mecanismo de trabazón del agregado.

El mecanismo de trabazón del agregado fue modelado por Walraven (1981), basándose en un análisis estático de las áreas de contacto y la acción de enlace que ocurre entre las caras irregulares de la grieta. Relacionando los resultados experimentales con los del modelo teórico, el mejor resultado se obtuvo con un coeficiente de fricción de 0.4.

Usando datos experimentales Walraven, Vecchio y Collins (1986) dedujeron una relación entre el cortante transmitido a través de una grieta y la resistencia a compresión del concreto. Sus expresiones fueron simplificadas por Collins y Mitchell (1991) quienes recomendaron que el valor límite de v_{ci} sea tomado como

$$v_{ci} \leq \frac{0.0683\sqrt{f'_c}}{0.3 + 24w/(a_{max} + 0.63)} \quad (2.37)$$

Donde w es el ancho de la grieta (plg), $a_{m\acute{a}x}$ es el tamaño máximo del agregado (plg) y f'_c es la resistencia a la compresión del concreto.

2.4.6 EQUILIBRIO, COMPATIBILIDAD Y MODELOS CONSTITUTIVOS COMBINADOS

Los esfuerzos de la Figura 2.19a dentro de un puntal de concreto a compresión, se usaron para desarrollar el equilibrio de las ecuaciones 2.30, 2.32 y 2.33, están representados en la Figura 2.19b. Para una grieta a lo largo de la sección 2-2 de la Figura 2.19a y 2.19c, los esfuerzos de tensión en el concreto desaparecen, el mecanismo de trabazón del agregado esta activo, ocurre la acción de enlace de modo que se deforma el refuerzo y los esfuerzos en el refuerzo incrementan hasta que alcanza su resistencia de fluencia.

Los esfuerzos de la Figura 2.19b y 2.19c deben estar en equilibrio con la fuerza cortante vertical V . Este equilibrio se definirá como

$$A_v f_v \frac{d_v \cot \theta}{s} + f_1 \frac{b_v d_v}{\sin \theta} \cos \theta = A_v f_y \frac{d_v \cot \theta}{s} + v_{ci} \frac{b_v d_v}{\sin \theta} \sin \theta$$

y resolviendo para el esfuerzo principal, se tiene que

$$f_1 \leq v_{ci} \tan \theta + \frac{A_v}{b_v s} (f_y - f_v) \quad (2.38)$$

donde f_1 esta limitado por el valor de v_{ci} de la ecuación 2.37.

Los esfuerzos en la Figura 2.19b y 2.19c deben tener la misma fuerza horizontal, que son

$$N_v + f_1 \frac{b_v d_v}{\sin \theta} \sin \theta = N_y + v_{ci} \frac{b_v d_v}{\sin \theta} \cos \theta$$

Despejando v_{ci} de 2.38, sustituyendo y reordenando términos

$$N_y = N_v + f_1 b_v d_v + \left[f_1 - \frac{A_v}{b_v s} (f_y - f_v) \right] b_v d_v \cot^2 \theta \quad (2.39)$$

en el cual

$$N_y = A_{sx} f_y + A_{px} f_{ps} \quad (2.40)$$

$$N_v = A_{sx} f_{sx} + A_{px} f_{px} \quad (2.41)$$

donde A_{sx} es el área total del refuerzo no presforzado, A_{px} es el área total de los tendones longitudinales presforzados, f_y es el esfuerzo de fluencia del refuerzo no presforzado, f_{ps} es el esfuerzo en el tendón presforzado y f_{sx} y f_{px} son los esfuerzos, sobre el área $b_v d_v$, en el refuerzo longitudinal no preforzado y los tendones longitudinales presforzados. La ecuación 2.39 es una segunda limitación en f_1 que indica que si el refuerzo longitudinal empieza a ceder en la grieta, se ha alcanzado el esfuerzo principal de tensión y no puede ser excedido

$$f_1 \leq \frac{N_y - N_v}{b_v d_v} \sin^2 \theta + \frac{A_v}{b_v s} (f_y - f_v) \cos^2 \theta$$

el cual puede ser escrito en términos de esfuerzos como

$$f_1 \leq [\rho_{sx} (f_y - f_{sx}) + \rho_{px} (f_{ps} - f_{px})] \sin^2 \theta + \rho_v (f_y - f_v) \cos^2 \theta \quad (2.42)$$

donde los porcentajes de refuerzo ρ_{sx} , ρ_{px} y ρ_v están definidos en las ecuaciones 2.34, 2.35 y 2.24, respectivamente.

2.5 RESPUESTA DE VIGAS DE CONCRETO REFORZADO SUJETAS A CORTANTE USANDO LA TEORÍA MODIFICADA DEL CAMPO DE COMPRESIÓN

En la deducción del ángulo de inclinación θ del puntal, Morsch (1920) concluyó que es matemáticamente imposible determinar la pendiente, pero 45° fue una hipótesis conservadora (Figura 2.20). La ecuación para la cantidad de refuerzo transversal requerido, sugerida para la hipótesis de Morsch, es conocida como la ecuación de la armadura para cortante.

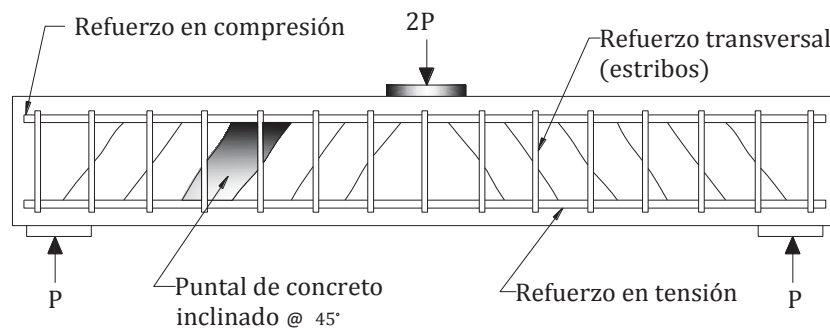


Figura 2.20 Modelo armadura para vigas de concreto sujetas a cortante

La experiencia con la analogía de la armadura, reveló que los resultados de esta teoría fueron bastante conservadores, particularmente para vigas con pequeñas cantidades de refuerzo. Consecutivamente, esto se convirtió en una práctica de diseño aceptada en Norte América, agregando un término de corrección a las ecuaciones de la armadura.

En el código de construcción (ACI 318-83), esta capacidad de cortante adicional es tomada igual al cortante en el comienzo del agrietamiento diagonal y es referida comúnmente a la contribución del concreto.

En años recientes se ha renovado el interés en las investigaciones referentes al comportamiento del concreto reforzado. En particular, se observó que el ángulo de inclinación θ , del puntal de concreto, fue realmente una de las limitaciones de capacidad de deformación que deben ser satisfechas junto con los requerimientos de equilibrio. La suposición que θ fue igual a 45° , fue en general incorrecta. Por lo tanto es cuestionable

que el comportamiento del puntal de concreto, en términos de deformación y resistencia última, sea diferente que el del concreto cargado en compresión uniaxial.

Se han realizado muchas investigaciones y experimentos recientemente en la Universidad de Toronto formulando un modelo más racional. En particular, se llevó a cabo un extenso programa experimental envolviendo las pruebas de paneles de concreto reforzado bajo un estado general de esfuerzos bi-dimensional, incluyendo cortante. De los datos emanados, se desarrolló la teoría modificada del campo de compresión. En este modelo teórico, el concreto agrietado es tratado como un nuevo material con sus propias características esfuerzo-deformación. El equilibrio, compatibilidad y sus relaciones constitutivas son formulados en términos de porcentaje de refuerzo y porcentaje de deformaciones. La variabilidad en el ángulo de inclinación de los puntales y los efectos deformación-plastificación, en la respuesta del concreto, son tomados en cuenta. La teoría resultante es capaz de predecir con exactitud la respuesta de los elementos membrana de concreto reforzado sujetos a cortante en el plano y carga axial.

El concepto de la teoría modificada de compresión puede ser aplicada a el análisis de vigas de concreto reforzado sujetas a cortante, momento y carga axial.

2.5.1 MODELO ANALÍTICO

La teoría modificada de compresión relaciona porcentajes de esfuerzos a porcentajes de deformaciones en un elemento agrietado de concreto reforzado, satisfaciendo condiciones de compatibilidad y equilibrio. Suponiendo que existe un estado único de esfuerzos y deformaciones en un elemento bajo carga, Figura 2.21. Las condiciones de deformación, en el concreto y en el refuerzo, son resumidas en la siguiente relación

$$\tan^2\theta_c = \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_2}{\varepsilon_y - \varepsilon_2} = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_y}{\varepsilon_1 - \varepsilon_x} \quad (2.43)$$

Similarmente, las condiciones de esfuerzos en el concreto son relacionadas como sigue

$$f_{cx} = f_{c1} - v_{cxy}/\tan\theta_c \quad (2.44)$$

$$f_{cy} = f_{c2} - v_{cxy}\tan\theta_c \quad (2.45)$$

y

$$f_{c1} = v_{cxy}(\tan\theta_c + 1/\tan\theta_c) \quad (2.46)$$

Los esfuerzos en el concreto y en el refuerzo deben balancear las fuerzas externas aplicadas a los elementos de concreto.

Consecutivamente son requeridas las relaciones para determinar el promedio de esfuerzos del promedio de deformaciones. Para concreto en compresión, la relación usada es

$$f_{c2} = f_{c2max} \left| 2 \left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon'_c} \right) - \left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon'_c} \right)^2 \right| \quad (2.47)$$

donde

$$\frac{f_{c2max}}{f'_c} = \frac{1}{0.8 - 0.34 \varepsilon_1/\varepsilon'_c} \leq 1.0 \quad (2.48)$$

Para concreto en tensión, previo al agrietamiento, la relación es

$$f_{c1} = E_c \varepsilon_1 \quad (2.49)$$

donde el módulo de elasticidad del concreto se define como

$$E_c \cong \frac{2f'_c}{\varepsilon'_c} \quad (2.50)$$

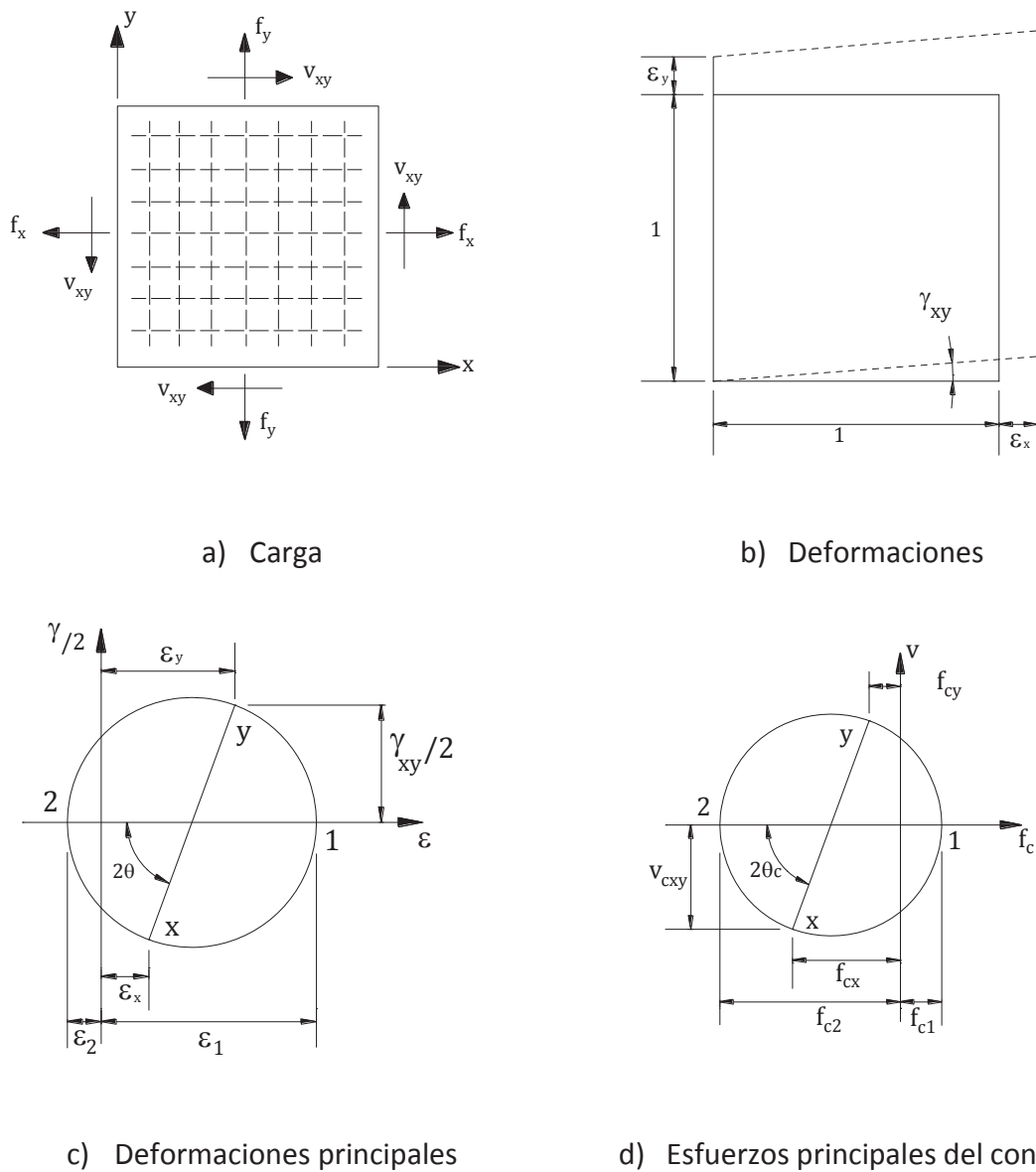


Figura 2.21 Condición de esfuerzos y deformaciones principales en un elemento de concreto reforzado

la relación sugerida para la respuesta después del agrietamiento (i. e. efecto de endurecimiento de tensión) es

$$f_c = \frac{f_{cr}}{1 + \sqrt{200\varepsilon_1}} \quad (2.51)$$

donde para concreto de peso normal, Collins y Mitchell (1991) y Hsu (1993) estimaron que el esfuerzo de agrietamiento del concreto $f_{cr} = 4\sqrt{f'_c}$.

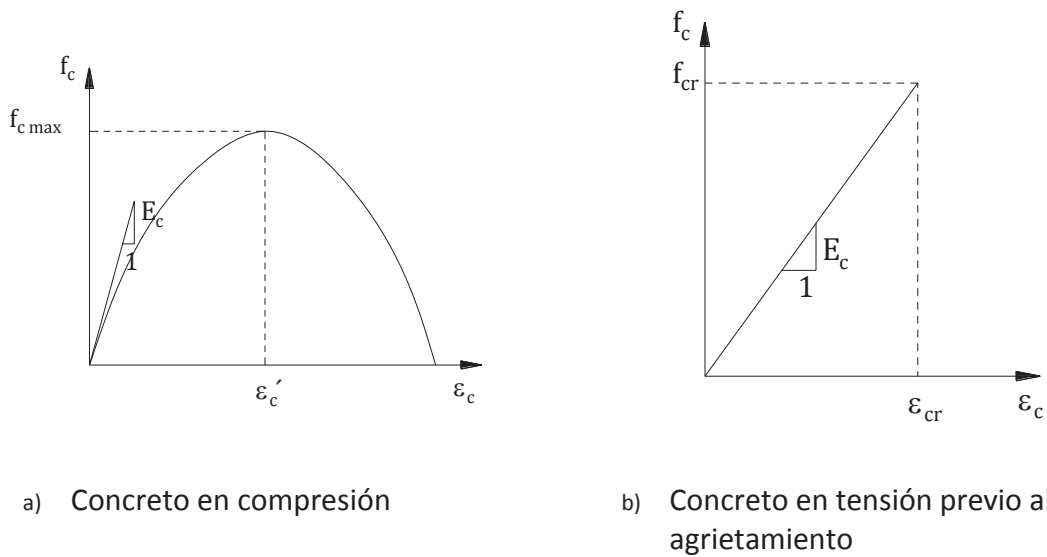
Por lo tanto, se asume que la inclinación de los esfuerzos principales coincide en inicio con el de la deformación principal, que es

$$\theta = \theta_c \quad (2.52)$$

Para el acero de refuerzo, se adopta una relación bilineal esfuerzo-deformación

$$f_s = E_s \varepsilon_s \leq f_y \quad (2.53)$$

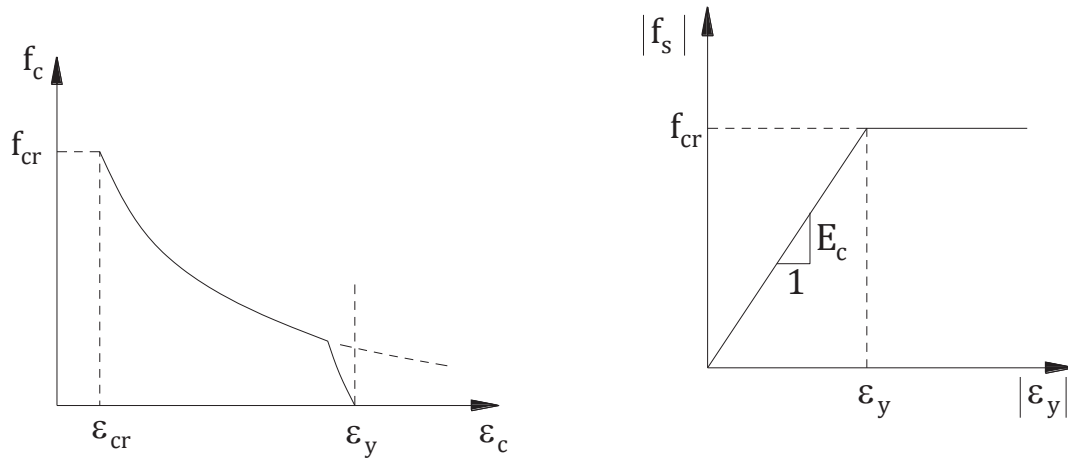
Las relaciones constitutivas son resumidas en la Figura 2.22.



a) Concreto en compresión

b) Concreto en tensión previo al agrietamiento

Figura 2.22 Relaciones constitutivas para el concreto y el acero de refuerzo



c) Concreto en tensión posterior al agrietamiento

d) Acero de refuerzo

Figura 2.22 Relaciones constitutivas para el concreto y el acero de refuerzo (Continuación)

La formulación previa se puede usar en el análisis de vigas de concreto reforzado o presforzado considerando que la viga está compuesta de una serie de bandas de concreto y elementos de acero longitudinal (Figura 2.23). Cada línea de concreto es entonces definida por su ancho individual b , profundidad h , cantidad de refuerzo transversal ρ_y , y la posición relativa a la parte superior de la viga y_c . Los elementos longitudinales de acero son definidos por su área transversal A_s , la pre-deformación inicial Δ_{ep} , su resistencia de fluencia f_{yx} y su posición relativa a la parte superior de la viga y_s . Las propiedades de la viga también pueden incluir la resistencia a compresión del concreto, la deformación máxima del concreto ϵ_c , esfuerzo de fluencia del refuerzo transversal y el módulo de elasticidad del acero E_s .

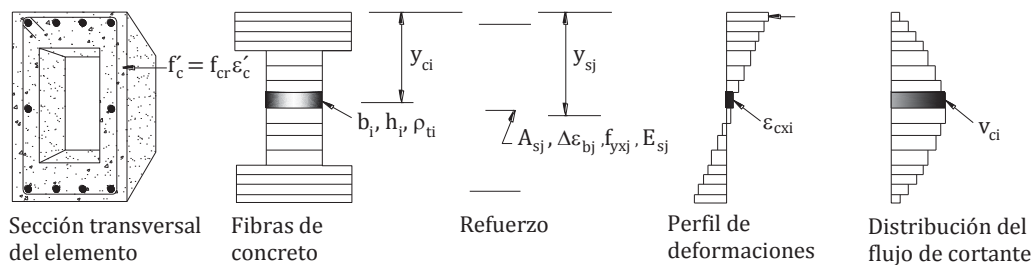


Figura 2.23 Sección de viga analizada usando el modelo de bandas; estimaciones de deformaciones longitudinales y distribución de flujo de cortante

Las bandas de concreto y los elementos de acero longitudinal son analizados individualmente, las condiciones de compatibilidad y equilibrio se deben satisfacer para la sección completa. Así, la deformación longitudinal en cada banda de concreto y las barras de refuerzo se fijarán definiendo la deformación en las fibras superiores e inferiores en la sección.

$$\varepsilon_{xi} = \varepsilon_t + \frac{(\varepsilon_b + \varepsilon_t)}{H} y_i \quad (2.54)$$

Los requisitos de las fuerzas de equilibrio incluyen: (1) un balance de cortante, momento y carga axial actuando en la sección; y (2) equilibrio del cortante horizontal.

El procedimiento analítico requiere que las estimaciones sean hechas de (1) la distribución longitudinal de deformaciones; y (2) la distribución de esfuerzos de cortante a través de la sección.

Los esfuerzos en el refuerzo longitudinal se pueden determinar directamente de las deformaciones longitudinales. Una relación bi-lineal esfuerzo-deformación es adecuada para determinar los esfuerzos longitudinales del acero f_{sx} . El esfuerzo longitudinal en las bandas de concreto son un tanto más difícil de determinar. Dada la deformación longitudinal y los esfuerzos cortantes normales actuando en una banda particular, las condiciones permanentes de esfuerzos y deformaciones se deben determinar de acuerdo a la formulación de la teoría modificada de compresión. El esfuerzo de compresión longitudinal del concreto f_{cx} se encuentra para cada banda.

Para una sección de viga discretizada en “m” bandas de concreto y “n” elementos barra de refuerzo longitudinal, los esfuerzos elementales deben satisfacer las siguientes condiciones

$$\sum_{i=1}^m f_{cxi} b_i h_i + \sum_{j=1}^n f_{sxj} A_{sj} = N \quad (2.55)$$

$$\sum_{i=1}^m f_{cxi} b_i h_i (y_{ci} - \bar{y}) + \sum_{j=1}^n f_{sxj} A_{sj} (y_{sj} - \bar{y}) = M \quad (2.56)$$

$$\sum_{i=1}^m v_{ci} b_i h_i = V \quad (2.57)$$

donde N, M y V son la carga axial, momento y cortante actuando cerca del centroide de la sección.

El problema de determinar la distribución correcta de esfuerzos de cortante se resuelve analizando una segunda sección de la viga, a una pequeña distancia de la primera. Ambas secciones son analizadas para la misma distribución de esfuerzos cortantes, satisfaciendo el equilibrio de la sección en cada caso.

La fuerza de compresión C_i actuando en la cara de la banda de concreto, es determinada primeramente de los esfuerzos de compresión longitudinal del concreto. Si un elemento barra de refuerzo longitudinal está contenido dentro de la línea de concreto, entonces la fuerza en la barra de refuerzo C_{si} se debe incluir también. Así

$$C_i = f_{cxi} b_i h_i + C_{si} \quad (2.58)$$

Ahora, considere el estrato de concreto k mostrado en la Figura 2.24. Las fuerzas de cortante horizontal actuando en la línea F_{k-1} y F_k se determinan como

$$F_{k-1} = \sum_{i=1}^{k-1} (C_{i1} - C_{i2}) \quad (2.59)$$

$$F_k = F_{k-1} + C_{k1} - C_{k2} \quad (2.60)$$

La fuerza cortante normal V_k se puede determinar del equilibrio rotacional de cuerpo libre mostrado en la Figura 2.24 como

$$V_k = \frac{(F_k + F_{k-1}) h_k}{2 S} \quad (2.61)$$

Por lo tanto, el promedio de esfuerzos cortantes actuando en la cara vertical del estrato de concreto k es calculada como

$$v_k = \frac{V_k}{b_k h_k} \quad (2.62)$$

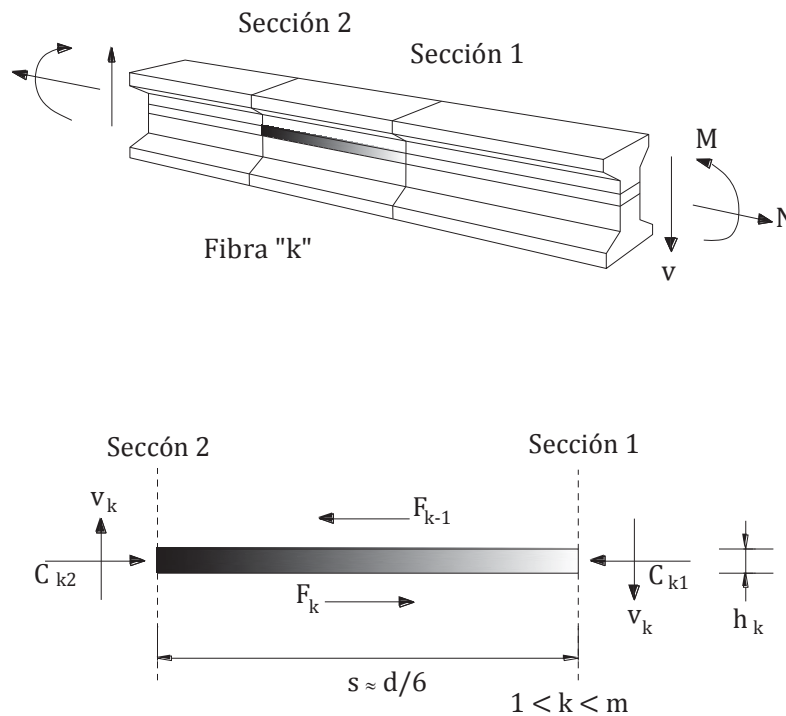


Figura 2.24 Diagrama de cuerpo libre para la fibra de concreto k

El procedimiento analítico se resume en la Figura 2.25.

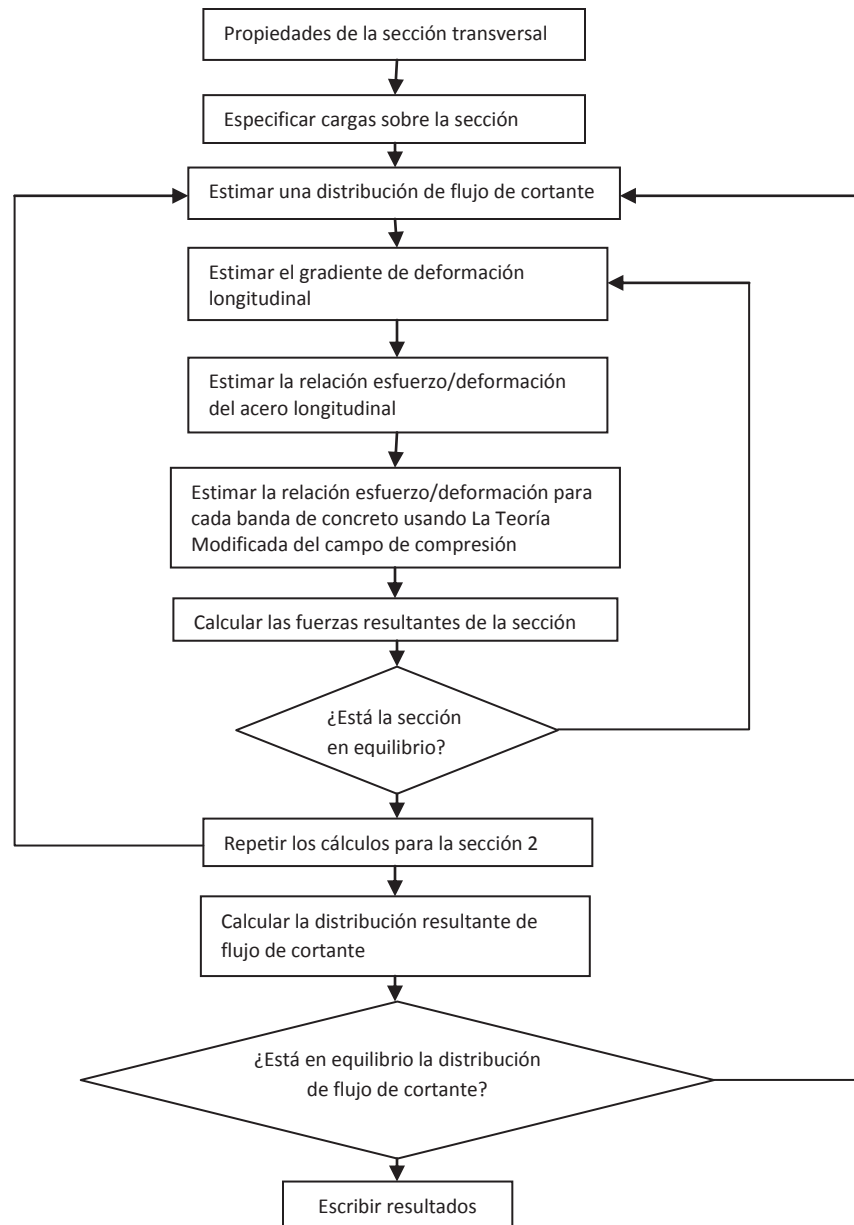


Figura 2.25 Procedimiento de solución de un modelo de análisis de vigas

2.5.2 CONCLUSIONES

La teoría modificada del campo de compresión permite predicciones reales de la respuesta de elementos membrana de concreto reforzados sujetos a cortante en el plano y fuerzas axiales. Esta teoría satisface condiciones generales de compatibilidad y equilibrio mientras se incorporen relaciones constitutivas reales para el concreto agrietado en

tensión y en compresión. Los efectos del endurecimiento por deformación y fluencia por tensión, son factores críticos para determinar la respuesta del concreto sujeto a cortante.

El código ACI toma algunas de las deducciones obtenidas por la Teoría Modificada del Campo de Compresión en el diseño de elementos de concreto reforzado sujetos a fuerzas cortantes, por ejemplo vigas y cabezales de puentes. Sus principales aportaciones son considerar la resistencia a tensión del concreto antes del agrietamiento, cuando se forma el puntal del concreto a compresión, el mecanismo de trabazón del agregado y la contribución del refuerzo transversal. Una de las limitantes de esta teoría es que no considera la rama de descenso de la curva esfuerzos cortantes vs deformación angular, lo cual provoca que no se pueda calcular la ductilidad real en un elemento de concreto reforzado.

CAPÍTULO 3

TEORÍA UNIFICADA DEL MODELO ARMADURA

3.1 DUCTILIDAD DE VIGAS DE CONCRETO DOBLEMENTE REFORZADAS

La posible redistribución de momentos de flexión que puede ser usada en el diseño de estructuras de concreto reforzado, estáticamente indeterminadas, depende de la ductilidad de los miembros en las secciones críticas (articulaciones plásticas), ya que los códigos de construcción permiten alguna redistribución de momentos de flexión los cuales se obtienen realizando un análisis estructural lineal.

La ductilidad en las articulaciones plásticas, en vigas de concreto reforzado, se calcula principalmente de la relación momento-curvatura de las secciones; ya que la ductilidad puede ser definida como la habilidad de experimentar deformaciones sin una substancial reducción de la capacidad de flexión de los miembros.

La ductilidad de una sección es normalmente expresada como el factor de ductilidad de curvatura ϕ_u/ϕ_y , donde ϕ_y es la curvatura cuando el refuerzo de tensión alcanza el esfuerzo de fluencia y ϕ_u es la curvatura última, normalmente definida para concreto sin confinamiento cuando el esfuerzo a compresión del concreto alcanza un valor límite.

La Figura 3.1 muestra una relación típica momento-curvatura para una sección de concreto doblemente reforzada. La Figura 3.2 muestra los diagramas esfuerzo y deformación de secciones de concreto doblemente reforzado en las etapas correspondientes a la primer fluencia y última curvatura.

Para vigas de concreto reforzado, con concreto sin confinamiento, la resistencia a la flexión y la ductilidad principalmente dependen del porcentaje de refuerzo de tensión ρ y del porcentaje de refuerzo de compresión ρ' . La resistencia a compresión del concreto f'_c tiene un efecto significativo menor.

La Figura 3.3 indica que el valor de la profundidad del eje neutro, suponiendo una distribución lineal de los esfuerzos en el concreto, será más pequeño que el valor actual si

la distribución de esfuerzos en el concreto es curva. Park y Paulay (1975) han señalado esta característica.

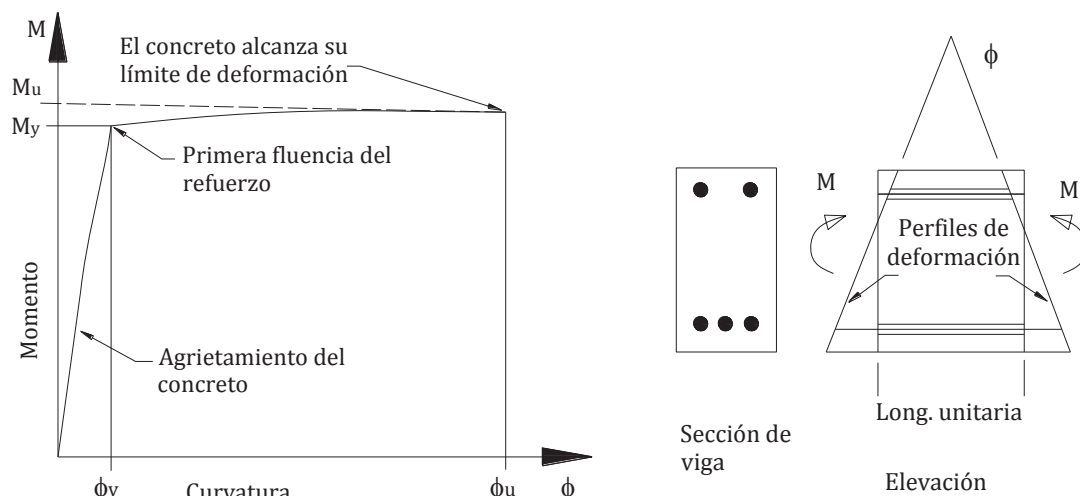


Figura 3.1 Relación momento-curvatura para una sección de viga de concreto doblemente reforzada

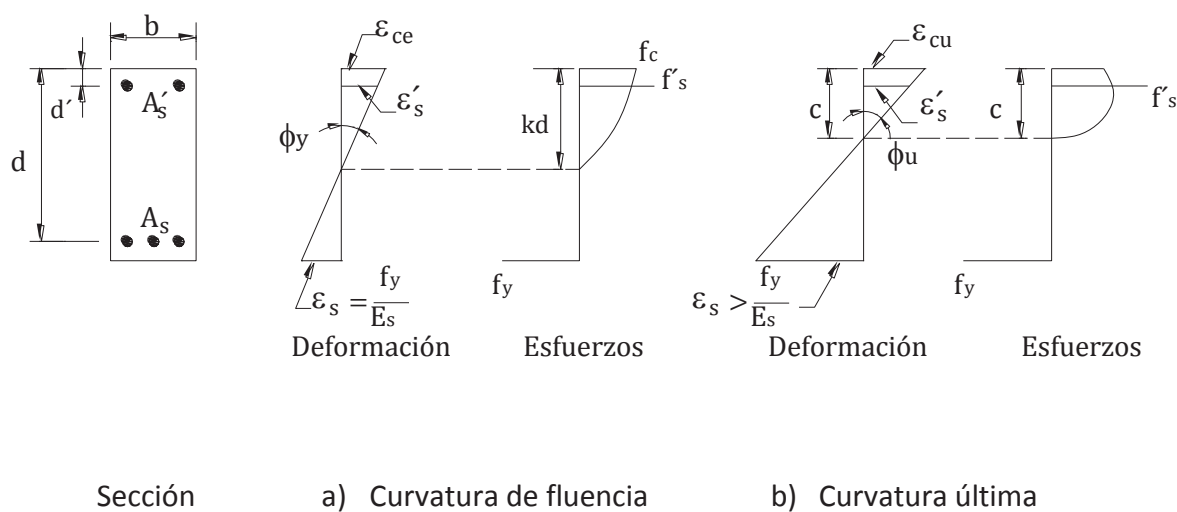
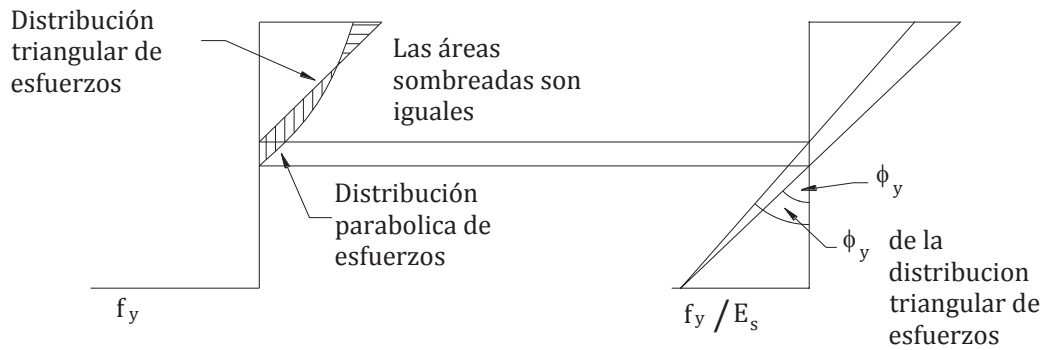


Figura 3.2 Viga de concreto doblemente reforzada con flexión



a) Distribución de esfuerzos

b) Distribución de deformaciones

Figura 3.3 Distribución de esfuerzos y deformaciones para la misma fuerza de compresión en el concreto cuando el refuerzo de tensión alcanza su resistencia de fluencia

3.1.1 RELACIÓN ESFUERZO-DEFORMACIÓN PARA CONCRETO SIN CONFINAR EN VIGAS CON REGIONES EN COMPRESIÓN

Se supondrá que la curva esfuerzo-deformación para concreto sin confinar está representada por una parábola de segundo grado, para la rama ascendente, y una rama de caída lineal, Figura 3.4. La curva esfuerzo-deformación puede ser expresada por la siguiente ecuación, como fue sugerido por Kent y Park (1971).

Región AB, $\varepsilon_c < 0.002$

$$f_c = f'_c \left[\frac{2\varepsilon_c}{0.002} - \left(\frac{\varepsilon_c}{0.002} \right)^2 \right] \quad (3.1)$$

Región BC, $0.002 \leq \varepsilon_c \leq \varepsilon_{20c}$

$$f_c = f'_c [1 - z(\varepsilon_c - 0.002)] \quad (3.2)$$

donde

$$z = \frac{0.5}{\left(\frac{3 + 0.002f'_c}{f'_c - 1000} \right) - 0.002} \quad (3.3)$$

donde f_c es el esfuerzo longitudinal del concreto, psi; ε_c es la deformación longitudinal del concreto; ε_{20c} es la deformación longitudinal del concreto cuando el esfuerzo del concreto se ha reducido a $0.20 f'_c$ y f'_c es la resistencia a la compresión del concreto, psi.

En la Figura 3.5 son mostradas las posibles formas de distribución de esfuerzos del concreto. Para una deformación del concreto ε_{cm} en la fibra extrema de compresión de una sección rectangular, de ancho b y profundidad del eje neutro kd , la fuerza de compresión del concreto está dada por

$$C_c = \alpha f'_c b k d \quad (3.4)$$

El factor de esfuerzos α puede ser determinado para vigas con sección rectangular de la relación esfuerzo-deformación como se muestra a continuación

$$\alpha = \frac{\int_0^{\varepsilon_{cm}} f_c d\varepsilon_c}{f'_c \varepsilon_{cm}} \quad (3.5)$$

Subsecuentemente sustituyendo las ecuaciones 3.1, 3.2 y 3.3 en la ecuación 3.5 y reordenando resulta la siguiente ecuación para α

Cuando $\varepsilon_{cm} < 0.002$

$$\alpha = \frac{\varepsilon_{cm}}{0.002} \left(1 - \frac{\varepsilon_{cm}}{0.006} \right) \quad (3.6)$$

Y cuando $0.002 \leq \varepsilon_{cm} \leq \varepsilon_{20c}$

$$\alpha = \frac{0.004}{3\varepsilon_{cm}} + \left(1 - \frac{0.002}{\varepsilon_{cm}} \right) \left(1 - \frac{z}{2} (\varepsilon_{cm} - 0.002) \right) \quad (3.7)$$

La tabla 3.1 compara los valores de α dados por la ecuación 3.7 y el bloque rectangular de esfuerzos del código ACI cuando $\varepsilon_{cm} = 0.003$. Para el intervalo $3000 \text{ psi} \leq f'_c \leq 5000 \text{ psi}$, la concordancia está dentro del 4% y está dentro del 1% cuando $f'_c = 4000 \text{ psi}$ (27.6 MPa).

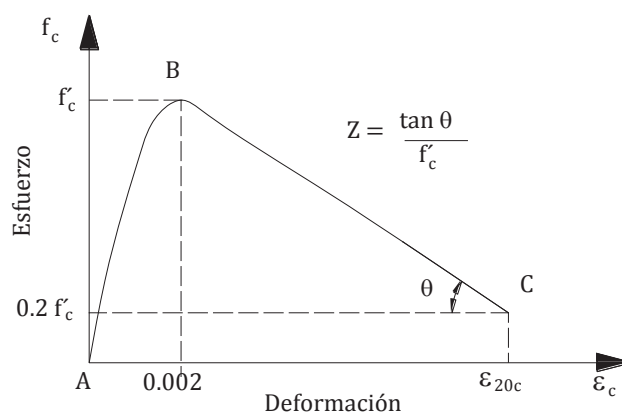


Figura 3.4 Relación esfuerzo-deformación supuesta para concreto sin confinamiento en compresión

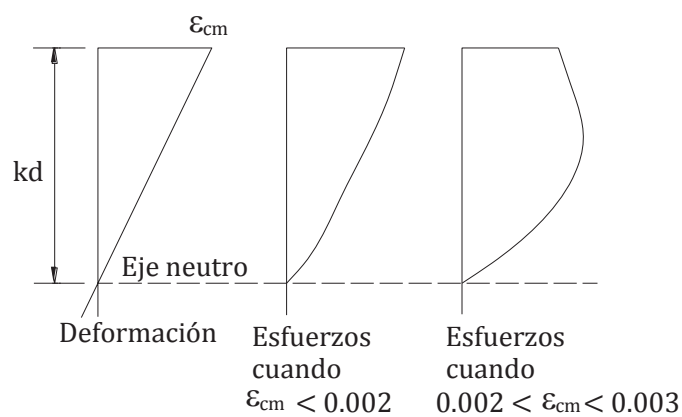


Figura 3.5 Relación esfuerzo-deformación supuesta para concreto sin confinamiento sujeto a compresión

Tabla 3.1 – Valores del factor de esfuerzos principales α cuando la deformación de la fibra extrema del concreto es 0.003

f'_c , psi (Mpa)	3000 (20.7)	4000 (27.6)	5000 (34.5)
α , de Ecuación (3.7)	0.744	0.728	0.711
A , de acuerdo al código ACI	0.723	0.723	0.680

3.1.2 CURVATURA A LA PRIMERA FLUENCIA

La curvatura de fluencia ϕ_y , definida como la curvatura cuando el refuerzo de tensión longitudinal alcanza la deformación de fluencia f_y/E_s , donde f_y es el esfuerzo de fluencia del acero y E_s el módulo de elasticidad del acero, puede ser escrita como

$$\phi_y = \frac{f_y/E_s}{d(1-k)} \quad (3.8)$$

Para un valor dado de deformación de compresión del concreto en la fibra superior ε_{ce} , el factor de profundidad del eje neutro k , a la fluencia del refuerzo de tensión, está dado considerando el diagrama de deformaciones como

$$k = \frac{\varepsilon_{ce}}{(f_y/E_s) + \varepsilon_{ce}} \quad (3.9)$$

Alternativamente, la profundidad del eje neutro puede ser relacionada a las dimensiones de la sección, a los porcentajes de acero, a las resistencias del concreto y del acero considerando el diagrama de deformaciones, y a los requerimientos de equilibrio interno de fuerzas. Del diagrama de deformaciones, la deformación en el refuerzo superior está dado por

$$\varepsilon'_s = \left(\frac{kd - d'}{d - kd} \right) \frac{f_y}{E_s} \quad (3.10)$$

donde d y d' son las distancias a la fibra superior de compresión del refuerzo en tensión y compresión, respectivamente. Por equilibrio de fuerzas longitudinales del concreto y el acero, suponiendo que el refuerzo superior se encuentra en el intervalo elástico

$$\alpha f'_c b k d + \left(\frac{kd - d'}{d - kd} \right) f_y A'_s = f_y A_s \quad (3.11)$$

donde A_s y A'_s son las áreas del refuerzo de tensión y compresión, respectivamente.

La ecuación 3.11 da una ecuación cuadrática para k , la cual resolviendo resulta en

$$k = \left[0.5 + \frac{f_y(\rho' + \rho)}{2\alpha f'_c} \right] - \sqrt{\left[0.5 + \frac{f_y(\rho' + \rho)}{2\alpha f'_c} \right]^2 - \frac{f_y \left(\rho' \frac{d'}{d} + \rho \right)}{\alpha f'_c}} \quad (3.12)$$

Donde $\rho = A_s/bd$

y $\rho' = A'_s/bd$.

Si ϵ'_s se encuentra de la ecuación 3.10, con k de la ecuación 3.12, y es menor que f_y/E_s , el refuerzo superior no está fluyendo en compresión y k está dada por la ecuación 3.12. Si ϵ'_s de la ecuación 3.10 con k de la ecuación 3.12 es mayor que f_y/E_s , el refuerzo superior está fluyendo en compresión y la ecuación 3.11 se transforma en

$$\alpha f'_c b k d + f_y A'_s = f_y A_s \quad (3.13)$$

Y así k está dada por

$$k = \frac{f_y(\rho - \rho')}{\alpha f'_c} \quad (3.14)$$

3.1.3 CURVATURA ÚLTIMA

La curvatura última ϕ_u , definida como la curvatura cuando la deformación en la fibra extrema a compresión del concreto alcanza un valor límite ϵ_{cu} , puede escribirse como

$$\phi_u = \frac{\epsilon_{cu}}{c} \quad (3.15)$$

donde c es la profundidad del eje neutro, y la deformación longitudinal en el refuerzo superior está dada por

$$\epsilon'_s = \left(\frac{c - d'}{c} \right) \epsilon_{cu} \quad (3.16)$$

Por equilibrio de fuerzas longitudinales del concreto y del acero, suponiendo que el refuerzo longitudinal superior permanece en el intervalo elástico

$$\alpha f'_c b c + \left(\frac{c - d'}{c} \right) \varepsilon_{cu} E_s A'_s = f_y A_s \quad (3.17)$$

Por lo tanto

$$\frac{c}{d} = \frac{(f_y \rho - \varepsilon_{cu} E_s \rho') - \sqrt{(f_y \rho - \varepsilon_{cu} E_s \rho')^2 + 4 \alpha f'_c \frac{d'}{d} \varepsilon_{cu} E_s \rho'}}{2 \alpha f'_c} \quad (3.18)$$

Si ε'_s se encuentra de la ecuación 3.16, con c de la ecuación 3.18, está en el intervalo $-f_y/E_s < \varepsilon'_s < f_y/E_s$, el refuerzo superior no está fluyendo en compresión y c/d está dada por la ecuación 3.18. Si ε'_s es mayor que f_y/E_s , el refuerzo superior está fluyendo en compresión y la ecuación 3.17 se transforma en

$$\alpha f'_c b c + f_y A'_s = f_y A_s \quad (3.19)$$

Y así c/d está dada por

$$\frac{c}{d} = \frac{f_y(\rho - \rho')}{\alpha f'_c} \quad (3.20)$$

o alternativamente, si ε'_s es menor que $-f_y/E_s$, el refuerzo superior está fluyendo en tensión y la ecuación 3.19 será

$$\alpha f'_c b c = f_y A_s + f_y A'_s \quad (3.21)$$

Y así c/d está dada por

$$\frac{c}{d} = \frac{f_y(\rho + \rho')}{\alpha f'_c} \quad (3.22)$$

3.1.4 CÁLCULO DEL FACTOR DE DUCTILIDAD DE CURVATURA

De la ecuación 3.1 hasta 3.22 se usaron para deducir la Figura 3.8, la cual muestra el factor de curvatura de ductilidad ϕ_u/ϕ_y trazados contra el porcentaje de acero de tensión para secciones rectangulares de concreto doblemente reforzadas, calculadas para un intervalo de combinaciones prácticas de resistencias de concreto f'_c , esfuerzo de fluencia del acero f_y y la relación del área de acero en compresión contra el área de acero en tensión ρ'/ρ .

El valor para la deformación límite del concreto en compresión en la fibra extrema se tomó como $\varepsilon_c = 0.004$. El valor calculado de la curvatura última depende mucho del valor tomado para la deformación de la fibra extrema. Por lo tanto es prudente tomar un valor mayor a 0.003.

El procedimiento numérico para obtener la ductilidad de curvatura de ϕ_u/ϕ_y contra ρ para una sección dada es el siguiente: Para un valor de ε_{ce} , el factor de profundidad k del eje neutro para la fluencia del refuerzo de tensión, esta dado por la ecuación 3.9. Esto permite el cálculo de la curvatura ϕ_y de la ecuación 3.8. Entonces el factor de esfuerzo medio α para un valor de ε_{ce} se puede encontrar substituyendo $\varepsilon_{cm} = \varepsilon_{ce}$ en la ecuación 3.6 ó 3.7. El valor de ρ asociado con la fluencia del refuerzo de tensión para ese valor de ε_{ce} se puede calcular usando las ecuaciones 3.12 ó 3.14, dependiendo de si el refuerzo superior no está fluyendo o está fluyendo en compresión.

El factor de esfuerzo medio α se determina de $\varepsilon_{cm} = 0.004$ de la ecuación 3.7. Enseguida para calcular la profundidad del eje neutro c en la curvatura última, el valor de α , el valor de ρ previamente calculado, y todos los valores conocidos son substituidos en las ecuaciones 3.18, 3.20 ó 3.22, dependiendo de si el refuerzo superior no ha fluido, fluye en compresión, o fluye en tensión, respectivamente. Esto permite el cálculo de la curvatura última ϕ_u con la ecuación 3.15.

Por lo tanto para un valor de ε_{ce} , el valor de ρ y el valor asociado ϕ_u/ϕ_y se pueden determinar para una sección de viga con $\rho'/\rho, f'_c, y f_y$.

3.1.5 PROGRAMA M-C.f90

En el Apéndice D se describe el programa M-C.f90, este programa calcula el factor de ductilidad de curvatura de una columna de concreto reforzado de sección circular o rectangular confinada por estribos o espirales, a partir de un análisis momento-curvatura. Para determinar la resistencia a compresión y la deformación del concreto confinado se utilizó el modelo constitutivo propuesto por Mander (1988). Además, calcula los valores

para trazar las curvas esfuerzo vs deformación del concreto (f_c vs ϵ_c), carga axial vs deformación del acero longitudinal (P_n vs ϵ_s) y momento vs curvatura (M vs ϕ).

Ejemplo 3.1 Revisar una columna circular con $D=305\text{mm}$ de diámetro, una altura de 2438mm, un recubrimiento del concreto de $cc=19\text{mm}$, un esfuerzo a la compresión para el concreto no confinado de $f'_c=34.45\text{MPa}$, con un módulo de elasticidad $E_c=27,580\text{MPa}$. El acero de refuerzo longitudinal consta de 16 redondos de 9.5 mm de diámetro con un área de 71 mm^2 , lo que da $A_s=1136\text{mm}^2$; el refuerzo transversal está formado por varillas de diámetro $d_h=4.92\text{mm}$, con un área de $A_h=19\text{mm}^2$, y espaciadas a cada $s=32\text{mm}$. El acero tiene un esfuerzo de fluencia de $f_{yh}=420\text{MPa}$.

En la Figura 3.6 se muestran los resultados logrados utilizando el programa M-C.f90, del análisis se obtuvo una ductilidad de curvatura $\mu_\phi = 2.218$ y una profundidad del eje neutro $c = 238.76\text{ mm}$.

```

***Todas las unidades en MPa y mm***
ds = 257.16 mm
pcc = 0.021835
ps = 0.009241
ke = 0.917502
fl = 1.9406 MPa
flp = 1.7805 MPa
fpcc = 45.4556 MPa
ecc = 0.005714 s-1
ecu = 0.030689 s-1

Deformacion de agrietamiento
eci 0.001085 s-1

Momento de fluencia
My = 124091726.906 N-mm

Curvatura de fluencia
Cury = 0.000057949250 rad/mm

Posicion del eje neutro en la fluencia
Yc = 240.810 mm

Espere...

Falla por concreto!

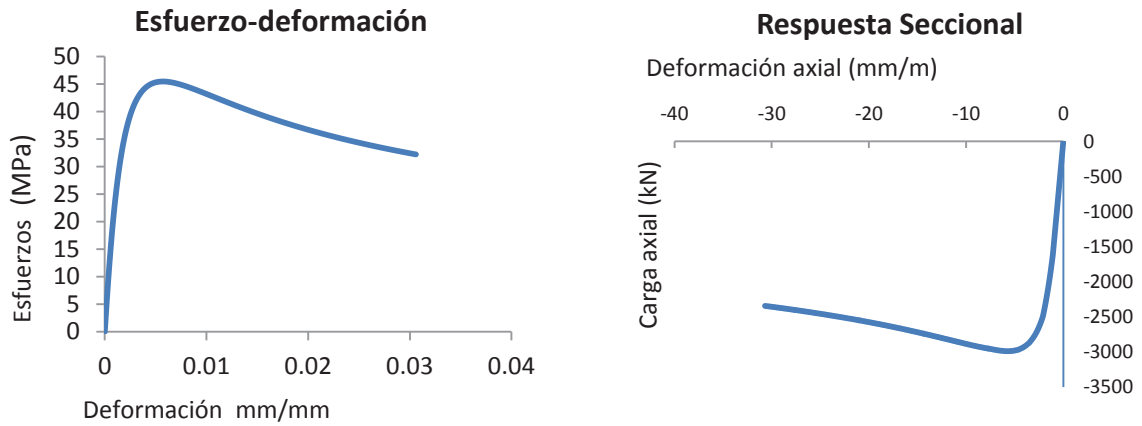
Ductilidad de curvatura
Ductilidad = 2.218

Profundidad del eje neutro
c = 238.760 mm

```

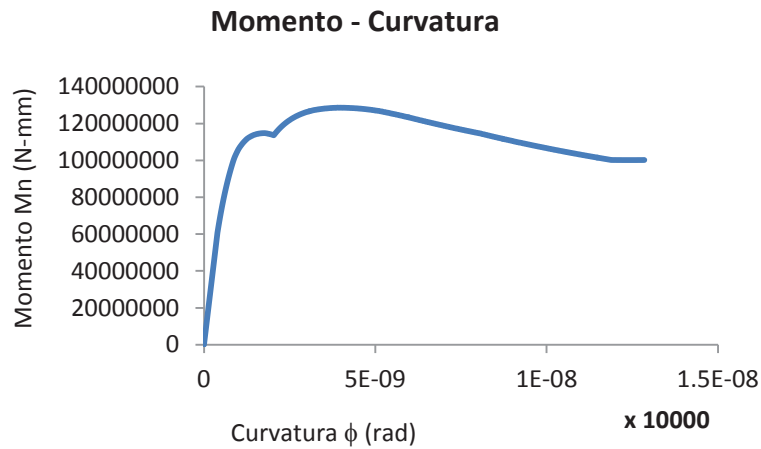
Figura 3.6 Valor del factor de ductilidad de curvatura usando el programa M-C.f90

En la Figura 3.7 se pueden ver las curvas esfuerzo vs deformación del concreto (f_c vs ϵ_c), carga axial vs deformación del acero longitudinal (P_n vs ϵ_s) y momento vs curvatura (M vs ϕ) de la columna analizada en el ejemplo 3.1.



a) Esfuerzo - Deformación

b) Carga axial – deformación del acero



c) Momento -Curvatura

Figura 3.7 Comportamiento del concreto confinado

3.1.6 PROGRAMA ductilidad.f90

Del procedimiento descrito en la sección 3.1.4 se desarrolló en lenguaje Fortran el programa ductilidad.f90, este programa calcula los valores de las curvas de ductilidad de curvatura (ϕ_u/ϕ_y) vs porcentaje de refuerzo de tensión (ρ), utilizando diferentes relaciones volumétricas del acero de refuerzo ρ'/ρ . En el Apéndice E se muestra el diagrama de flujo y la manera de operar ese programa.

Ejemplo 3.2 Calcular el factor de ductilidad de curvatura de una viga de concreto de sección rectangular doblemente reforzada, trazar las curvas para dos resistencias a compresión del concreto $f'_c = 4000$ psi (27.6 MPa) y $f'_c = 5000$ psi (34.5 MPa), y considerar dos esfuerzos de fluencia del acero $f_y = 40000$ psi (276 MPa) y $f_y = 60000$ psi (414 MPa). La relación de la profundidad del acero a compresión a la profundidad del acero a tensión d'/d se supone igual a 0.1, la deformación última del concreto $\epsilon_{cu} = 0.004$ y el módulo de elasticidad del acero $E_s = 29 \times 10^3$ ksi (200000 MPa).

Siguiendo el procedimiento del inciso 3.1.4, se obtienen los valores de las curvas de ductilidad ϕ_u/ϕ_y para diferentes relaciones volumétricas del acero de refuerzo $\rho'/\rho = 0.01, 0.25, 0.50$ y 0.75 . En la Figura 3.8 se muestran las curvas de resultados del programa ductilidad.f90.

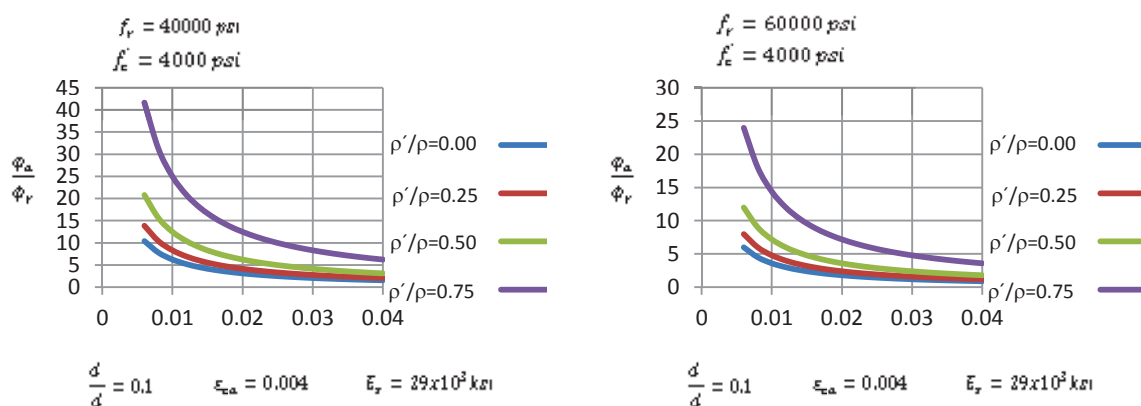


Figura 3.8 Variación del factor de ductilidad de curvatura ϕ_u/ϕ_y en vigas de concreto doblemente reforzadas, usando concreto sin confinar.

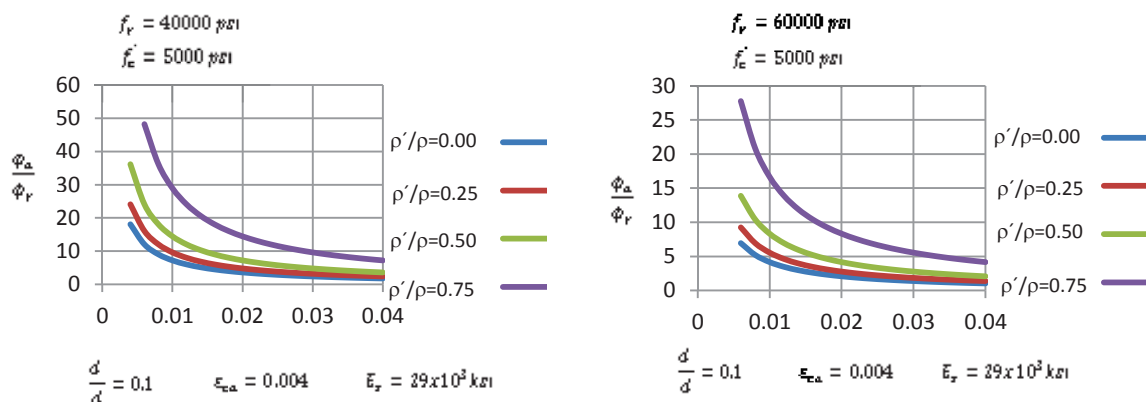


Figura 3.8 Variación del factor de ductilidad de curvatura ϕ_u/ϕ_y en vigas de concreto doblemente reforzadas, usando concreto sin confinar (Continuación).

3.1.7 CONCLUSIONES

La ductilidad disponible de vigas de concreto doblemente reforzadas puede ser fácilmente evaluada usando la teoría de la relación momento-curvatura. La teoría da la curvatura a la primera fluencia ϕ_y tomando en cuenta el comportamiento no lineal del concreto comprimido sin confinar antes y después de la fluencia del refuerzo de tensión. Como se esperaba se encontró que el factor de ductilidad de curvatura se incrementa si el porcentaje de acero de tensión decrece, el porcentaje de acero de compresión se incrementa, el esfuerzo de fluencia del acero se reduce o la resistencia a la compresión del concreto se incrementa.

El análisis de curvatura de secciones de vigas de concreto doblemente reforzadas muestra que el requerimiento general $\rho - \rho' \leq 0.75\rho_b$ asegurará una curvatura de ductilidad $\frac{\phi_u}{\phi_y} \geq 2$ y el requerimiento $\rho - \rho' \leq 0.5\rho_b$ asegurará un $\frac{\phi_u}{\phi_y} \geq 4$, cuando la deformación de compresión en la fibra extrema del concreto ϵ_{ce} se toma como 0.004.

El diseño sísmico del ACI y de los códigos de Nueva Zelanda, para los porcentajes de acero ρ y ρ' en las regiones de potencial formación de articulaciones plásticas, se mostró que resultan en un amplio intervalo de valores mínimos de $\frac{\phi_u}{\phi_y}$, variando entre 3 y 13 con $\epsilon_{ce} = 0.004$. Con esto se podría decir que el porcentaje máximo de acero de tensión

permitido en diseño por sismo es amplio, particularmente para aceros de refuerzo de alta resistencia. Para asegurar un valor de $\frac{\phi_u}{\phi_y} = 8$ con $\epsilon_{cu} = 0.004$ en diseño sísmico, se recomienda que cuando $\rho/\rho' \geq 0.5$ el porcentaje de acero de tensión debería ser

$$\rho \leq k_1 \left(\frac{f'_c + 1000}{4000} \right)$$

Donde $k_1 = 0.023$ para el acero longitudinal con $f_y = 40000 \text{ psi} (276 \text{ MPa})$ y $k_1 = 0.0093$ para refuerzo longitudinal con $f_y = 60000 \text{ psi} (414 \text{ MPa})$. Cuando $\rho/\rho' = 0.75$, ρ puede ser incrementado por 75% cuando $f_y = 40000 \text{ psi} (276 \text{ MPa})$ ó 30% cuando $f_y = 60000 \text{ psi} (414 \text{ MPa})$. La ecuación anterior se derivó de una resistencia a la compresión del concreto en el rango de $3000 \leq f'_c \leq 5000 \text{ psi} (21 \leq f'_c \leq 34 \text{ MPa})$.

3.2 TEORÍA DEL MODELO ARMADURA

3.2.1 FUNDAMENTOS DEL MODELO ARMADURA-PLASTIFICADO

En la Figura 3.9a se muestra un elemento membrana de concreto reforzado sujeto a esfuerzos en el plano. Las direcciones de las barras de acero longitudinal y transversal se designan como ejes l y t respectivamente, constituyendo el sistema de coordenadas $l - t$. Los esfuerzos normales aplicados se designan como σ_l y σ_t , y los esfuerzos cortantes como τ_{lt} . Basándose en los signos de convención del CR (concreto reforzado) para los círculos de Mohr, un esfuerzo cortante positivo es aquel que causa una rotación horaria de un elemento de concreto reforzado (Hsu, 1993).

Los esfuerzos principales para el concreto reforzado se definen como σ_1 y σ_2 , basándose en el sistema de coordenadas 2-1, Figura 3.9d. El ángulo entre la dirección del esfuerzo principal de compresión (Eje-2) y la dirección del acero longitudinal (eje- l), se define como el ángulo-fijo α_2 , ya que este ángulo no cambia cuando los tres esfuerzos en el plano σ_l, σ_t y τ_{lt} , incrementan proporcionalmente. Este ángulo también es llamado el ángulo de la barra de acero, porque define la dirección de las barras de acero con respecto a los esfuerzos principales aplicados.

Los esfuerzos principales en el concreto coinciden con los esfuerzos principales aplicados σ_1 y σ_2 , antes del agrietamiento. Cuando el esfuerzo principal de tensión σ_1 alcanza la resistencia a tensión del concreto, se formaran grietas y el concreto será separado por las grietas formando puntales de concreto en la dirección 2, ver Figura 3.9f. Si el elemento está reforzado con diferentes cantidades de acero en las direcciones l y t , la dirección de los esfuerzos principales en el concreto después del agrietamiento, se desviará de la dirección de los esfuerzos principales aplicados. Las nuevas direcciones de los esfuerzos principales en el concreto, después del agrietamiento, están definidas por el sistema de coordenadas d-r, Figura 3.9e. Por lo tanto, el esfuerzo de compresión principal y el esfuerzo de tensión principal en el concreto agrietado se definen como σ_d y σ_r respectivamente.

El ángulo entre la dirección del esfuerzo principal de compresión (eje-d), en el concreto agrietado, y la dirección del acero longitudinal (eje-l) es definido como ángulo α . El ángulo α depende de la cantidad relativa de esfuerzos en el acero, $\rho_l f_l$ y $\rho_t f_t$ en las direcciones longitudinal y transversal, Figura 3.9c. Cuando el porcentaje de refuerzo en la dirección l y t son iguales, el ángulo de rotación α es igual al ángulo fijo α_2 , $\alpha = \alpha_2$. Cuando los porcentajes de refuerzo son diferentes en las dos direcciones, los dos ángulos son desiguales, $\alpha \neq \alpha_2$. Con el incremento de las cargas externas, las coordenadas d-r rotan con respecto de las coordenadas 2-1 y la desviación entre el ángulo α y el ángulo α_2 aumenta.

El modelo armadura plastificado ángulo-rotación, se basa en la hipótesis que la dirección de las grietas coincide con la dirección de los esfuerzos principales de compresión en el concreto agrietado, Figura 3.9g. La derivación de las ecuaciones de compatibilidad y equilibrio está en función del ángulo de rotación α .

En contraste, el modelo armadura plastificado ángulo-fijo, se basa en la hipótesis que la dirección de las grietas coincide con la dirección principal de compresión (coordenadas 2-1) de los esfuerzos aplicados, Figura 3.9f.

En el modelo armadura de ángulo fijo, todas las ecuaciones se obtienen en función de un ángulo fijo α_2 .

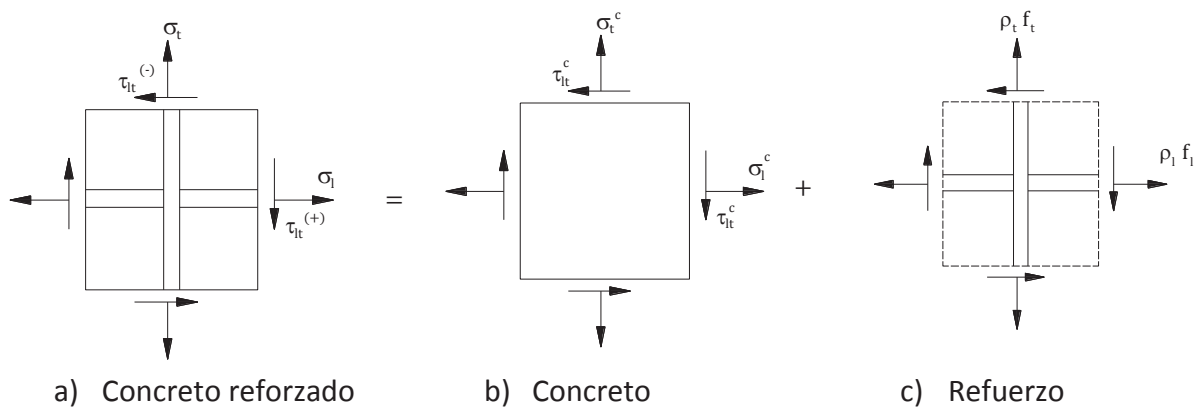


Figura 3.9 Elemento membrana de concreto reforzado sujeto a esfuerzos en el plano

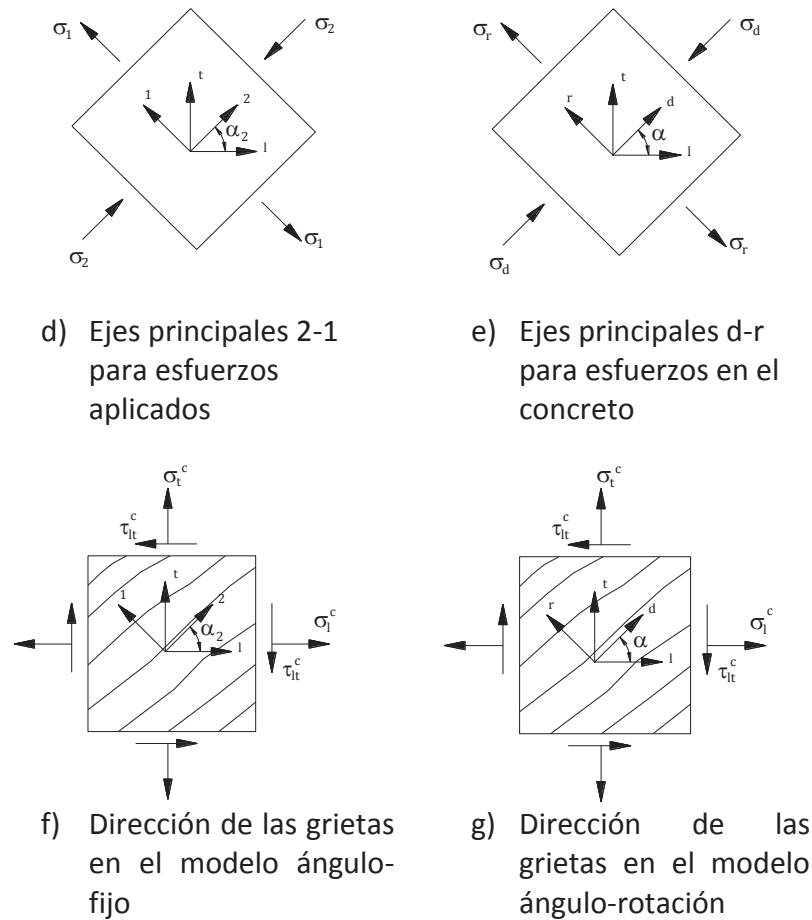


Figura 3.9 Elemento membrana de concreto reforzado sujeto a esfuerzos en el plano
(Continuación)

Las tres componentes de esfuerzos σ_l , σ_t y τ_{lt} mostradas en la Figura 3.9a, son los esfuerzos aplicados a un elemento de concreto reforzado visto como un todo. Los esfuerzos en los puntales de concreto se indican como σ_l^c , σ_t^c y τ_{lt}^c , como se muestra en la Figura 3.9b.

El acero longitudinal y transversal proporciona los esfuerzos relativos de ρ_l y ρ_t , Figura 3.9c. Se considera que el acero de refuerzo sólo toma esfuerzos axiales, despreciando cualquier acción de dovela. Sumando los esfuerzos del concreto y los esfuerzos del acero en las direcciones l y t , y del equilibrio de fuerzas y momentos se obtiene

$$\sigma_l = \sigma_l^c + \rho_l f_l \quad (3.23)$$

$$\sigma_t = \sigma_t^c + \rho_t f_t, y \quad (3.24)$$

$$\tau_{lt} = \tau_{lt}^c \quad (3.25)$$

En las ecuaciones 3.23 a 3.25 los tres esfuerzos del concreto (σ_l^c, σ_t^c y τ_{lt}^c), en las coordenadas $l-t$, pueden ser relacionados a los esfuerzos principales del concreto (σ_d y σ_r), en las coordenadas $d-r$, por medio del ángulo de rotación (Figura 3.9g), o a los esfuerzos del concreto (σ_2^c, σ_1^c y τ_{21}^c) en las coordenadas principales por medio del modelo de ángulo fijo (Figura 3.9f). Para establecer estas relaciones, es necesario entender el principio de transformación de esfuerzos para un elemento membrana. Similarmente, para desarrollar las ecuaciones de compatibilidad usadas en los dos modelos armadura, es necesario también comprender el principio de transformación de deformaciones.

3.2.2 PRINCIPIO DE TRANSFORMACIÓN

3.2.2.1 TRANSFORMACIÓN DE ESFUERZOS

El principio de transformación de esfuerzos se puede obtener del equilibrio de esfuerzos sobre una porción de un elemento membrana con espesor unitario, Figura 3.10. El elemento está sujeto a dos esfuerzos normales en el plano, σ_l y σ_t , y un esfuerzo cortante τ_{lt} , en las coordenadas $l-t$. Es necesario determinar los esfuerzos σ_x y τ_{xy} , en coordenadas arbitrarias $x-y$, donde σ_x representa la resistencia a tensión aun después del agrietamiento. Las coordenadas $x-y$ hacen un ángulo θ con respecto a las coordenadas $l-t$, y el lado BC es normal al eje x. En concordancia con el signo de convenciones del CR, σ_x y τ_{xy} son esfuerzos positivos como se muestra en la figura 3.10. El área del lado BC se toma como unitaria, así el lado AB y AC tienen áreas $\cos \theta$ y $\text{seno } \theta$, respectivamente. El equilibrio de fuerzas en las direcciones l y t requiere que

$$T_l = \sigma_l \cos \theta - \tau_{lt} \sin \theta \quad y \quad (3.26)$$

$$T_t = -\tau_{lt} \cos \theta + \sigma_t \sin \theta, \quad (3.27)$$

donde T_l y T_t son las componentes de los esfuerzos que actúan sobre BC en las direcciones l y t . Los esfuerzos normal y cortante sobre el plano x (plano BC), se obtienen al proyectar T_l y T_t en las direcciones x e y como sigue:

$$\sigma_x = T_l \cos \theta + T_t \sin \theta \quad (3.28)$$

$$\tau_{xy} = -T_t \cos \theta + T_l \sin \theta \quad (3.29)$$

Substituyendo T_l y T_t de las ecuaciones (3.26) y (3.27) en las ecuaciones (3.28) y (3.29), se obtiene

$$\sigma_x = \sigma_l \cos^2 \theta + \sigma_t \sin^2 \theta - 2\tau_{lt} \sin \theta \cos \theta \quad (3.30)$$

$$\tau_{xy} = (\sigma_l - \sigma_t) \sin \theta \cos \theta + \tau_{lt}(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \quad (3.31)$$

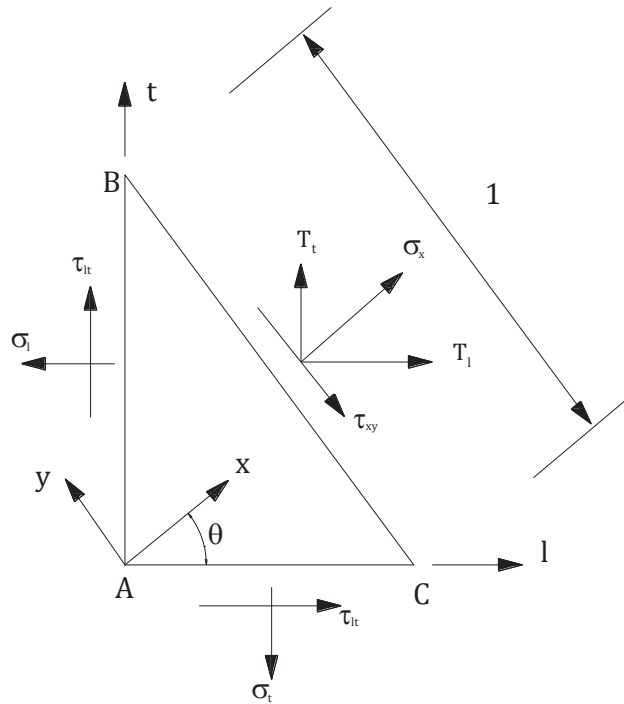


Figura 3.10 Condiciones de equilibrio para transformación de esfuerzos

Los esfuerzos σ_y se pueden obtener al sustituir θ por $\theta + \pi/2$ en la ecuación (3.30) para σ_x ,

$$\sigma_y = \sigma_l \sin^2 \theta + \sigma_t \cos^2 \theta + 2\tau_{lt} \sin \theta \cos \theta \quad (3.32)$$

Las ecuaciones (3.30) a (3.32) se pueden escribir en forma matricial de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & -2 \sin \theta \cos \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & 2 \sin \theta \cos \theta \\ \sin \theta \cos \theta & -\sin \theta \cos \theta & (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_l \\ \sigma_t \\ \tau_{lt} \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

La ecuación (3.33) proporciona las ecuaciones en forma matricial para transformar un conjunto de esfuerzos en coordenadas l-t, a un conjunto de esfuerzos en las coordenadas x-y, Figura 3.11a.

Para invertir el proceso y encontrar la matriz de transformación, que transforme los esfuerzos en las coordenadas x-y a esfuerzos en las coordenadas l-t, es necesario cambiar todos los ángulos θ dentro de la matriz de la ecuación (3.33) por $-\theta$. Se puede observar que todas las funciones trigonométricas permanecen igual, excepto $\sin(-\theta) = -\sin \theta$. Cambiando el signo para los cuatro términos con $\sin \theta$ se obtiene

$$\begin{bmatrix} \sigma_l \\ \sigma_t \\ \tau_{lt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & 2 \sin \theta \cos \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & -2 \sin \theta \cos \theta \\ -\sin \theta \cos \theta & \sin \theta \cos \theta & (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

$$\text{ó} \quad \{\sigma_{lt}\} = [T]\{\sigma_{xy}\} \quad (3.35)$$

La matriz de transformación $[T]$ esta dada por

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & 2 \sin \theta \cos \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & -2 \sin \theta \cos \theta \\ -\sin \theta \cos \theta & \sin \theta \cos \theta & (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

La ecuación (3.34) representa un método racional para transformar esfuerzos en elementos membrana.

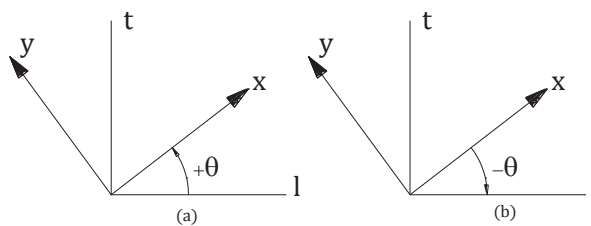


Figura 3.11 Transformación inversa

3.2.2.2 TRANSFORMACIÓN DE DEFORMACIONES

La transformación de deformaciones se puede obtener de las relaciones geométricas (Hsu, 1993), ver Figura 3.12, los ejes x-y han sido rotados en forma anti horaria un ángulo θ con respecto a los ejes l-t. Las tres componentes de deformación en un sistema de coordenadas x-y, ε_x , ε_y y $\gamma_{xy}/2$ se obtienen por medio de una transformación de deformaciones de las componentes de deformación ε_l , ε_t y $\gamma_{lt}/2$ en las coordenadas l-t.

La Figura 3.12a muestra las relaciones geométricas entre las tres componentes de deformación ε_x , ε_y y $\gamma_{xy}/2$ en las coordenadas x-y y las dos deformaciones normales ε_l y ε_t en las coordenadas l-t. Tomando como unitaria la diagonal OA sobre el eje x, la proyección de esta sobre los ejes l y t son $\cos \theta$ y $\sin \theta$, respectivamente. Los desplazamientos a lo largo de los ejes l y t son:

$$AB = \varepsilon_l \cos \theta$$

$$BC = \varepsilon_t \sin \theta$$

Las proyecciones de estos dos desplazamientos sobre el eje x son:

$$AD = \varepsilon_l \cos^2 \theta$$

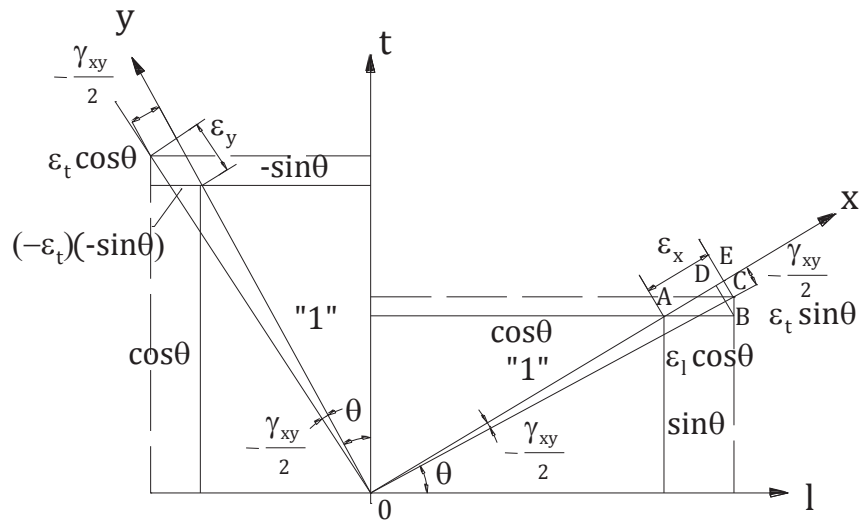
$$DE = \varepsilon_t \sin^2 \theta$$

La suma de estas dos proyecciones de desplazamiento, $AE = \varepsilon_l \cos^2 \theta + \varepsilon_t \sin^2 \theta$, es la deformación ε_x debido ε_t y ε_l , medido desde el origen y con una longitud unitaria OA.

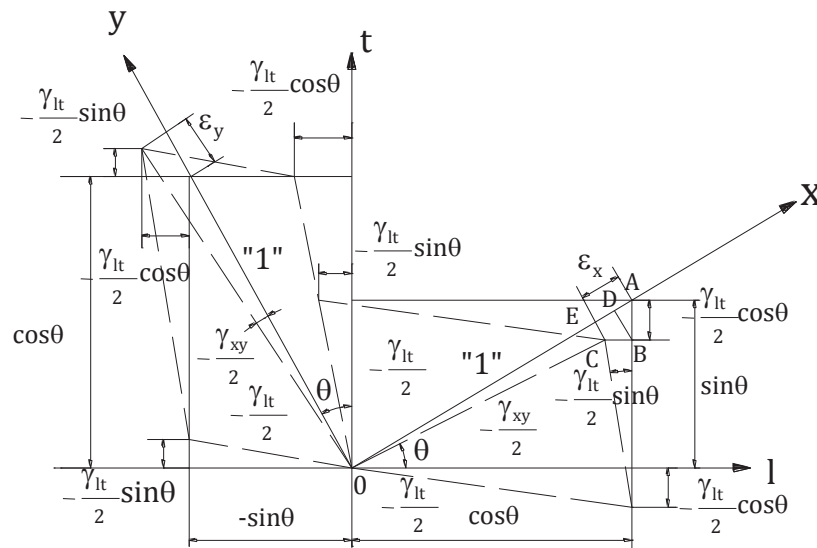
En la Figura 3.12b se muestra la relación geométrica entre las tres componentes de deformación en las coordenadas x-y, ε_x , ε_y y $\gamma_{xy}/2$, y la deformación angular, $\gamma_{lt}/2$, en el sistema coordenado l-t.

Por ejemplo para ε_x , las proyecciones de la diagonal OA, de longitud unitaria, sobre los ejes x son $\cos \theta$ y $\sin \theta$. Para la deformación angular $-\gamma_{lt}/2$, indicada por la línea punteada, el desplazamiento angular AB y BC a lo largo de los ejes l y t son $(-\gamma_{lt}/2) \cos \theta$ y $(-\gamma_{lt}/2) \sin \theta$. Las proyecciones de esos dos desplazamientos AD y DE sobre el eje x son $(-\gamma_{lt}/2) \cos \theta (-\sin \theta)$ y $(-\gamma_{lt}/2) \sin \theta (-\cos \theta)$.

La suma de las dos proyecciones del desplazamiento, $AE = (\gamma_{lt}/2)2 \sin \alpha \cos \alpha$, es la deformación ε_x debido a la deformación angular γ_{lt} .



a) Relaciones geométricas para ε_l y ε_t



b) Relaciones geométricas para transformación de deformaciones

Figura 3.12 Relaciones geométricas para transformación de deformaciones

Sumando la deformación ε_x debido a ε_l y ε_t (Figura 3.12a) y debido a γ_{lt} (Figura 3.12b), el total de ε_x se expresa como

$$\varepsilon_x = \varepsilon_l \cos^2 \theta + \varepsilon_t \sin^2 \theta + \frac{\gamma_{lt}}{2} 2 \sin \theta \cos \theta \quad (3.37)$$

Las ecuaciones para ε_y y $\gamma_{xy}/2$ se pueden obtener en forma similar usando las relaciones geométricas como se muestra en seguida

$$\varepsilon_y = \varepsilon_l \sin^2 \theta + \varepsilon_t \cos^2 \theta - \frac{\gamma_{lt}}{2} 2 \sin \theta \cos \theta \quad (3.38)$$

$$\frac{\gamma_{xy}}{2} = (-\varepsilon_l + \varepsilon_t)(\sin \theta)(\cos \theta) + \left(\frac{\gamma_{lt}}{2}\right)(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \quad (3.39)$$

Las ecuaciones (3.37), (3.38) y (3.39) se pueden arreglar en forma matricial como sigue

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy}/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & 2 \sin \theta \cos \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & -2 \sin \theta \cos \theta \\ -\sin \theta \cos \theta & \sin \theta \cos \theta & (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_l \\ \varepsilon_t \\ \gamma_{lt}/2 \end{bmatrix} \quad (3.40)$$

La ecuación (3.40) se obtiene basándose en el signo de convención básico usando las coordenadas de rotación x-y, y las coordenadas estacionarias l-t. De igual manera a la transformación de esfuerzos, el signo de convenciones básico no es tan conveniente como el signo de convenciones del CR, cuando es aplicado a concreto reforzado. Para usar el signo de convenciones CR, es necesario invertir el signo de γ_{lt} y γ_{tl} en las ecuaciones (3.40),

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy}/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & -2 \sin \theta \cos \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & 2 \sin \theta \cos \theta \\ \sin \theta \cos \theta & -\sin \theta \cos \theta & (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_l \\ \varepsilon_t \\ \gamma_{lt}/2 \end{bmatrix} \quad (3.41)$$

La ecuación (3.41) proporciona la matriz de transformación para deformaciones basándose en el signo de convenciones para CR. Esta matriz transforma un conjunto de deformaciones en las coordenadas l-t a un conjunto de deformaciones en las coordenadas x-y.

Invirtiendo el proceso para encontrar la matriz de transformación, que transforma deformaciones en las coordenadas x-y a deformaciones en las coordenadas l-t, es

necesario cambiar todos los ángulos θ en la matriz de la ecuación (3.41) por $(-\theta)$. Se puede observar que todas las expresiones trigonométricas permanecen iguales, excepto $\sin(-\theta) = -\sin \theta$. Cambiando el signo de los cuatro términos con $\sin \theta$:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_l \\ \varepsilon_t \\ \gamma_{lt}/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2\theta & \sin^2\theta & 2 \sin \theta \cos \theta \\ \sin^2\theta & \cos^2\theta & -2 \sin \theta \cos \theta \\ -\sin \theta \cos \theta & \sin \theta \cos \theta & (\cos^2\theta - \sin^2\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy}/2 \end{bmatrix} \quad (3.42)$$

La matriz de la ecuación (3.42) puede ser expresada en términos de deformaciones angulares, γ_{xy} y γ_{lt} :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_l \\ \varepsilon_t \\ \gamma_{lt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2\theta & \sin^2\theta & \sin \theta \cos \theta \\ \sin^2\theta & \cos^2\theta & -\sin \theta \cos \theta \\ -2\sin \theta \cos \theta & 2 \sin \theta \cos \theta & (\cos^2\theta - \sin^2\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad (3.43)$$

$$\text{ó} \quad \{\varepsilon_{lt}\} = [T]_{\varepsilon} \{\varepsilon_{xy}\} \quad (3.44)$$

La matriz de transformación de deformaciones $[T]_{\varepsilon}$ está dada por

$$[T]_{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \cos^2\theta & \sin^2\theta & \sin \theta \cos \theta \\ \sin^2\theta & \cos^2\theta & -\sin \theta \cos \theta \\ -2\sin \theta \cos \theta & 2 \sin \theta \cos \theta & (\cos^2\theta - \sin^2\theta) \end{bmatrix} \quad (3.45)$$

3.2.3 MODELO ARMADURA PLASTIFICADO ÁNGULO-ROTACIÓN

En el modelo armadura plastificado, la dirección de las grietas está definida por el ángulo de rotación α en las coordenadas principales d-r del concreto, como se observa en la Figura 3.9e.

3.2.3.1 ECUACIONES DE EQUILIBRIO Y COMPATIBILIDAD

Las tres ecuaciones de equilibrio, las cuales relacionan los esfuerzos aplicados (σ_l , σ_t y τ_{lt}) a los esfuerzos internos del refuerzo (f_l y f_t) y del concreto (σ_d y σ_r) en un elemento membrana, se expresan como (Hsu, 1993)

$$\sigma_l = \sigma_d \cos^2\alpha + \sigma_r \sin^2\alpha + \rho_l f_l \quad (3.46)$$

$$\sigma_t = \sigma_d \sin^2\alpha + \sigma_r \cos^2\alpha + \rho_t f_t \quad (3.47)$$

$$y \quad \tau_{lt} = (-\sigma_d + \sigma_r) \sin \alpha \cos \alpha, \quad (3.48)$$

donde σ_r, σ_d son los esfuerzos promedio del concreto en las direcciones r y d respectivamente, ρ_l, ρ_t es el porcentaje de acero en las direcciones l y t, respectivamente, y f_l, f_t son los esfuerzos promedio de las barras de acero en las direcciones l y t.

Las tres ecuaciones de compatibilidad, las cuales representan la relación entre las deformaciones ($\varepsilon_l, \varepsilon_t$ y γ_{lt}) en las coordenadas l-t del refuerzo y las deformaciones (ε_d y ε_r) en las coordenadas d-r de los esfuerzos aplicados, se expresan como

$$\varepsilon_l = \varepsilon_d \cos^2 \alpha + \varepsilon_r \sin^2 \alpha \quad (3.49)$$

$$\varepsilon_t = \varepsilon_d \sin^2 \alpha + \varepsilon_r \cos^2 \alpha \quad (3.50)$$

$$y \quad \frac{\gamma_{lt}}{2} = (-\varepsilon_d + \varepsilon_r) \sin \alpha \cos \alpha, \quad (3.51)$$

donde $\varepsilon_r, \varepsilon_d$ son las deformaciones promedio en las direcciones r y d.

3.2.3.2 RELACIÓN ESFUERZO-DEFORMACIÓN DEL CONCRETO EN COMPRESIÓN

La relación esfuerzo-deformación plastificada del concreto se establece en las coordenadas d-r como sigue (Zhang y Hsu, 1998)

$$\sigma_d = \zeta f'_c \left[2 \left(\frac{\varepsilon_d}{\zeta \varepsilon_o} \right) - \left(\frac{\varepsilon_d}{\zeta \varepsilon_o} \right)^2 \right], \quad \frac{\varepsilon_d}{\zeta \varepsilon_o} \leq 1 \quad (3.52a)$$

$$\text{ó} \quad \sigma_d = \zeta f'_c \left[1 - \left(\frac{\varepsilon_d / \zeta \varepsilon_o - 1}{2 / \zeta - 1} \right)^2 \right], \quad \frac{\varepsilon_d}{\zeta \varepsilon_o} \geq 1 \quad (3.52b)$$

$$\text{donde} \quad \zeta = \frac{5.8}{\sqrt{f'_c}} \frac{1}{\sqrt{(1+400\varepsilon_r)}} \quad (3.53)$$

ζ es el factor de plasticidad.

3.2.3.3 RELACIÓN ESFUERZO-DEFORMACIÓN DEL CONCRETO EN TENSIÓN

La relación esfuerzo deformación del concreto en tensión en las coordenadas d-r es (Belarbi y Hsu, 1994)

$$\sigma_r = E_c \varepsilon_r, \quad \varepsilon_r \leq 0.00008, \quad (3.54)$$

$$\text{ó} \quad \sigma_r = f_{cr} \left(\frac{0.00008}{\varepsilon_r} \right)^{0.4}, \quad \varepsilon_r > 0.00008 \quad (3.55)$$

El módulo de elasticidad del concreto E_c es tomado como $3875\sqrt{f'_c}$ (f'_c y $\sqrt{f'_c}$ en MPa). El esfuerzo de agrietamiento del concreto f_{cr} es tomado como $0.31\sqrt{f'_c}$ (f'_c y $\sqrt{f'_c}$ en MPa).

3.2.3.4 RELACIÓN ESFUERZO-DEFORMACIÓN DEL ACERO DE REFUERZO INCRUSTADO EN EL CONCRETO

La relación esfuerzo-deformación del acero en tensión del concreto reforzado, en las coordenadas l-t, puede ser expresado como (Pang y Hsu, 1995):

$$f_s = E_s \varepsilon_s, \quad \varepsilon_s \leq \varepsilon_n \quad (3.56a)$$

$$f_{sy} = f_y \left[(0.91 - 2B) + (0.02 + 0.25B) \frac{\varepsilon_s}{\varepsilon_y} \right] \left(1 - \frac{2 - \alpha_2/45^\circ}{1000\rho} \right), \quad \varepsilon_s > \varepsilon_n \quad (3.56b)$$

$$\text{donde} \quad \varepsilon_n = \varepsilon_y (0.93 - 2B) \left(1 - \frac{2 - \alpha_2/45^\circ}{1000\rho} \right), \quad (3.57)$$

$$\text{y} \quad B = \frac{1}{\rho} \left(\frac{f_{cr}}{f_y} \right)^{1.5} \quad (3.58)$$

en estas ecuaciones, s es reemplazado por l como subíndice para el acero longitudinal y t para el acero transversal.

3.2.4 MODELO ARMADURA PLASTIFICADO ÁNGULO-FIJO

En el modelo armadura, la dirección de las grietas está definida por el ángulo fijo α_2 en las coordenadas principales 2-1, Figura 3.9d.

3.2.4.1 ECUACIONES DE EQUILIBRIO Y COMPATIBILIDAD

Las tres ecuaciones de equilibrio, donde se relacionan los esfuerzos aplicados (σ_l, σ_t y τ_{lt}) a los esfuerzos internos del refuerzo (f_l y f_t) y del concreto (σ_2^c, σ_1^c y τ_{21}^c), en un elemento membrana, son expresadas como sigue (Pang y Hsu, 1996):

$$\sigma_l = \sigma_2^c \cos^2 \alpha_2 + \sigma_1^c \sin^2 \alpha_2 + \tau_{21}^c 2 \sin \alpha_2 \cos \alpha_2 + \rho_l f_l \quad (3.59)$$

$$\sigma_t = \sigma_2^c \sin^2 \alpha_2 + \sigma_1^c \cos^2 \alpha_2 - \tau_{21}^c 2 \sin \alpha_2 \cos \alpha_2 + \rho_t f_t, \quad (3.60)$$

y

$$\tau_{lt} = (-\sigma_2^c + \sigma_1^c) \sin \alpha_2 \cos \alpha_2 + \tau_{21}^c (\cos^2 \alpha_2 - \sin^2 \alpha_2) \quad (3.61)$$

donde σ_1^c, σ_2^c son los esfuerzos promedio del concreto en las direcciones principales 1 y 2, τ_{21}^c es el esfuerzo cortante promedio del concreto en las coordenadas 2-1.

Las tres ecuaciones de compatibilidad que representan la relación entre las deformaciones del refuerzo, en las coordenadas l-t, y las deformaciones de los esfuerzos aplicados en las coordenadas 2-1, son expresadas como (Pang y Hsu, 1996)

$$\varepsilon_l = \varepsilon_2 \cos^2 \alpha_2 + \varepsilon_1 \sin^2 \alpha_2 + \frac{\gamma_{21}}{2} 2 \sin \alpha_2 \cos \alpha_2 \quad (3.62)$$

$$\varepsilon_t = \varepsilon_2 \sin^2 \alpha_2 + \varepsilon_1 \cos^2 \alpha_2 - \frac{\gamma_{21}}{2} 2 \sin \alpha_2 \cos \alpha_2, \quad (3.63)$$

y

$$\frac{\gamma_{lt}}{2} = (-\varepsilon_2 + \varepsilon_1) \sin \alpha_2 \cos \alpha_2 + \frac{\gamma_{21}}{2} (\cos^2 \alpha_2 - \sin^2 \alpha_2) \quad (3.64)$$

donde $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ es la deformación promedio en la dirección 2-1 y γ_{21} es la deformación angular en las coordenadas 2-1.

3.2.4.2 RELACIÓN ESFUERZO-DEFORMACIÓN DEL CONCRETO EN COMPRESIÓN

Las relaciones esfuerzo-deformación del concreto en compresión son expresadas en las coordenadas 2-1 como (Zhang y Hsu, 1998):

$$\sigma_2^c = \zeta f_c' \left[2 \left(\frac{\varepsilon_2}{\zeta \varepsilon_0} \right) - \left(\frac{\varepsilon_2}{\zeta \varepsilon_0} \right)^2 \right], \quad \frac{\varepsilon_2}{\zeta \varepsilon_0} \leq 1 \quad (3.65a)$$

ó

$$\sigma_2^c = \zeta f_c' \left[1 - \left(\frac{\varepsilon_2 / \zeta \varepsilon_0 - 1}{2 / \zeta - 1} \right)^2 \right], \quad \frac{\varepsilon_2}{\zeta \varepsilon_0} > 1 \quad (3.65b)$$

donde

$$\zeta = \frac{5.8}{\sqrt{f_c'}} \frac{1}{\sqrt{\left(1 + \frac{400 \varepsilon_1}{\eta}\right)}} \leq 0.9 \quad (3.66a)$$

$$\gamma = \frac{\rho_t f_{ty} - \sigma_t}{\rho_l f_{ly} - \sigma_l}, \quad 0.2 < \eta < 5. \quad (3.66b)$$

η' en la ecuación (3.66a) es η ó su recíproco, cualquiera que sea menor a la unidad.

En la Figura 3.13, el coeficiente de plasticidad ζ se escogió constante con un valor de 0.5, esto para mostrar la rama descendente.

3.2.4.3 RELACIÓN ESFUERZO-DEFORMACIÓN PARA EL CONCRETO EN TENSIÓN

La relación esfuerzo-deformación del concreto en tensión en las coordenadas 2-1 es la siguiente (Belarbi y Hsu, 1994):

$$\sigma_1^c = E_c \varepsilon_1, \quad \varepsilon_1 \leq 0.00008, \quad (3.67a)$$

$$\text{ó} \quad \sigma_1^c = f_{cr} \left(\frac{0.00008}{\varepsilon_1} \right)^{0.4}, \quad \varepsilon_1 > 0.00008 \quad (3.67b)$$

El módulo de elasticidad del concreto E_c es tomado como $3875\sqrt{f'_c}$ (f'_c y $\sqrt{f'_c}$ en MPa). El esfuerzo de agrietamiento del concreto f_{cr} es tomado como $0.31\sqrt{f'_c}$ (f'_c y $\sqrt{f'_c}$ en MPa).

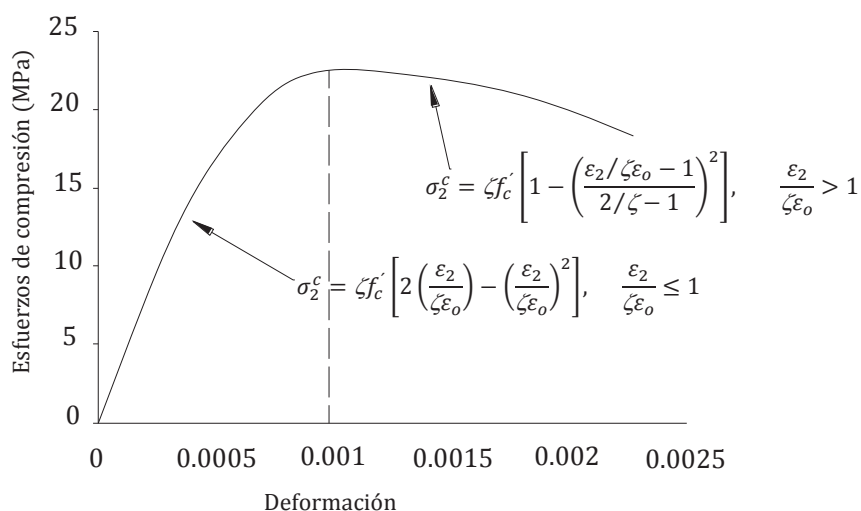


Figura 3.13 Curva esfuerzo-deformación del concreto en compresión

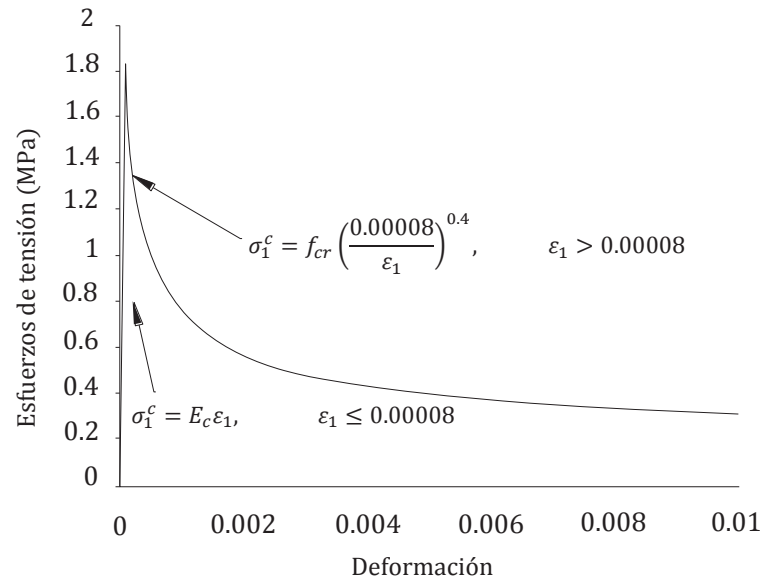


Figura 3.14 Curva esfuerzo-deformación del concreto en tensión

3.2.4.4 RELACIÓN ESFUERZO-DEFORMACIÓN DEL ACERO DE REFUERZO INCRUSTADO EN EL CONCRETO

La relación esfuerzo-deformación del acero sujeto a tensión es la misma que la dada para RA-STM en la sección 3.2.3.4 (Figura 3.15)

3.2.5 LEYES CONSTITUTIVAS DEL CONCRETO SUJETO A CORTANTE

Las leyes constitutivas del concreto sujeto a cortante en las coordenadas 2-1 están dadas por (Figura 3.16)

$$\tau_{21}^c = \tau_{21m}^c \left[1 - \left(1 - \frac{\gamma_{21}}{\gamma_{210}} \right)^6 \right], \quad (3.68)$$

donde τ_{21}^c es el esfuerzo cortante máximo del concreto agrietado y γ_{210} es su correspondiente deformación, τ_{21m}^c y γ_{210} se obtienen en la primera fase de la solución del algoritmo usando las ecuaciones empíricas,

$$\gamma_{210} = -0.85 \varepsilon_{10} (1 - \eta), \quad (3.69)$$

donde ε_{10} es la deformación principal máxima del concreto agrietado sujeto a tensión, y la ecuación de equilibrio,

$$\tau_{21m}^c = \frac{1}{2} [(\sigma_t - \rho_l f'_{ly}) - (\sigma_t - \rho_t f'_{ty})] \sin 2\alpha_2 + \tau_{lm} \cos 2\alpha_2, \quad (3.70)$$

donde τ_{21m}^c es el esfuerzo cortante máximo aplicado en las coordenadas l-t, f'_{ly} es el esfuerzo de fluencia del refuerzo longitudinal dado por la ecuación (3.56), y f'_{ty} es el esfuerzo de fluencia del refuerzo transversal dado por la ecuación (3.56).

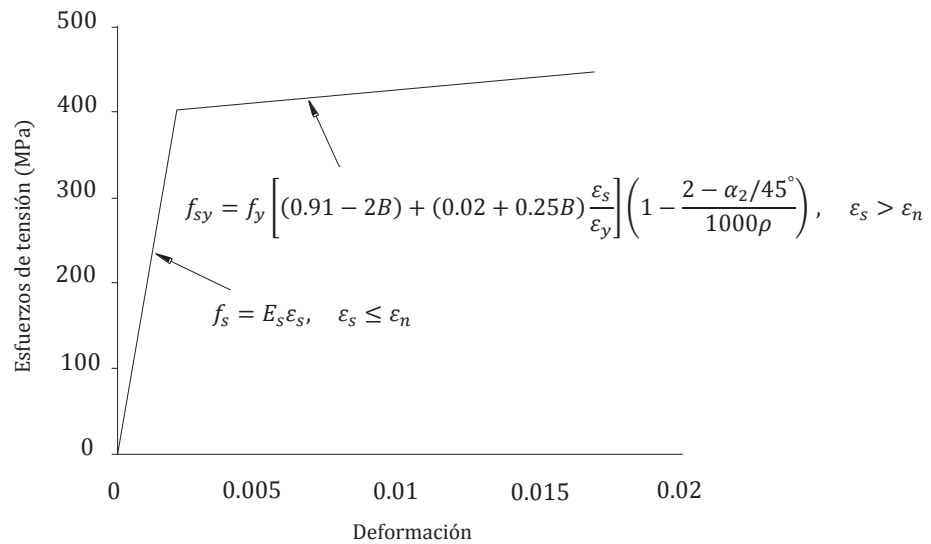


Figura 3.15 Curva esfuerzo-deformación del acero de refuerzo

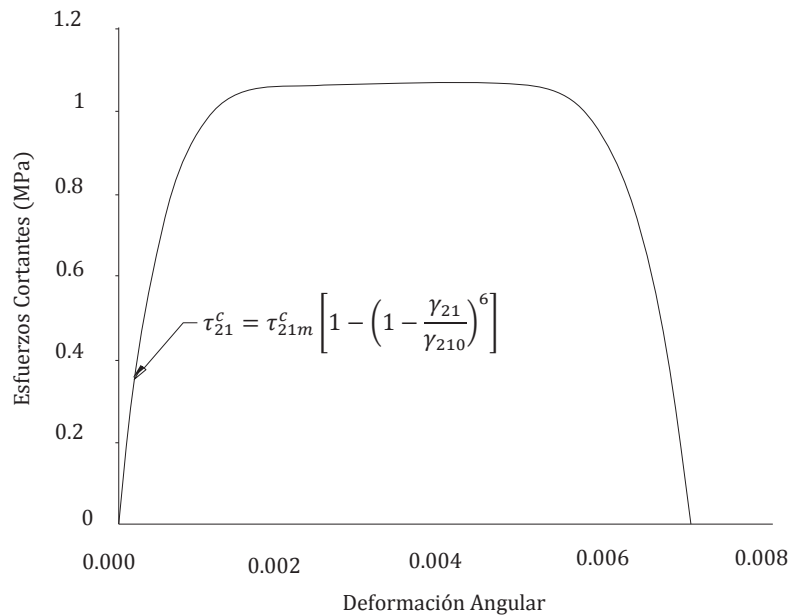


Figura 3.16 Curva esfuerzos cortantes-deformación angular del concreto

3.2.6 PROGRAMAS Membrana1.f90 y Membrana2.f90

El programa Membrana1.f90 evalúa el comportamiento de un elemento membrana por medio del modelo armadura de concreto reforzado, con acero de refuerzo en las direcciones longitudinal y transversal, el cual está sujeto a esfuerzos biaxiales y cortantes. Evalúa también los efectos del cortante sobre el concreto, con la limitante de no predecir la rama descendente de la curva cortante vs deformación angular. El programa membrana1.f90 lee y utiliza datos en el sistema inglés de unidades (plg, ksi).

La razón por la cual los modelos armadura no pueden pronosticar la rama descendente, es porque estas teorías desprecian los efectos de Poisson.

Cuando los esfuerzos de compresión en el concreto σ_2^c alcanzan su máximo y continúan dentro de la rama descendente, como se muestra en la ecuación (3.52b) y la Figura 3.13, los esfuerzos en el acero, f_l y f_t se incrementarán, de acuerdo a la ecuación (3.56b) en la Figura 3.15; esto significa que el equilibrio no se puede satisfacer y no puede existir una rama descendente.

En el Apéndice A se describen las características del programa membrana1.f90, También se evalúa el comportamiento y se muestran los resultados de un elemento membrana sujeto a esfuerzos en las direcciones transversal y longitudinal, utilizando dicho programa.

En el programa Membrana2.f90 el estado de esfuerzos (σ_l, σ_t y τ_{lt}) es expresado en términos de las tres variables de esfuerzos principales (σ_1, S y α_2). Donde σ_1 es el esfuerzo principal de tensión, siempre positivo; $S = \sigma_2/\sigma_1$ es la relación del esfuerzo principal menor al mayor, positivo cuando σ_2 está en tensión, negativo cuando σ_2 esta en compresión y α_2 es el ángulo de orientación o ángulo entre la dirección del esfuerzo principal menor y el eje longitudinal.

Cuando un elemento membrana está sujeto a carga proporcional, el esfuerzo principal σ_1 incrementa mientras las otras dos variables, S y α_2 , permanecen constantes. Sin embargo el conjunto de esfuerzos aplicados, σ_l, σ_t y τ_{lt} , se pueden definir en términos de esfuerzos principales σ_1 como

$$\sigma_l = m_l \sigma_1$$

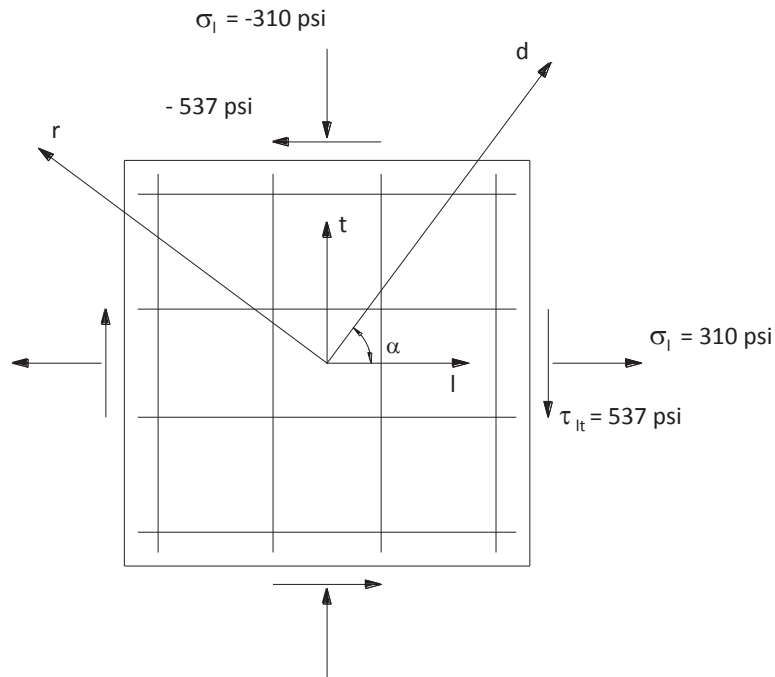
$$\sigma_t = m_t \sigma_1$$

$$\tau_{lt} = m_{lt} \sigma_1$$

Los tres coeficientes (m_l, m_t y m_{lt}) también deben permanecer constantes cuando el esfuerzo principal σ_1 incrementa bajo carga proporcional. El Apéndice B describe las características del programa membrana2.f90.

Ejemplo 3.3 Se diseñó un elemento membrana sin presfuerzo usando el modelo armadura plastificado. Este elemento membrana está sujeto a un conjunto de esfuerzos $\sigma_l = 310 \text{ psi}$ (tensión), $\sigma_t = -310 \text{ psi}$ (compresión) y $\tau_{lt} = 537 \text{ psi}$. Asumiendo que este conjunto de esfuerzos es aplicado de manera proporcional, se puede analizar su comportamiento.

El elemento membrana está reforzado con 1.033% de acero en la dirección longitudinal y transversal, con $f_{ly} = f_{ty} = 60000 \text{ psi}$, $f'_c = 4000 \text{ psi}$, se desprecia la resistencia a tensión del concreto ($\sigma_r = 0$).



CONCRETO:	$f'_c = 4000 \text{ psi}$
ACERO:	$f_{ly} = 60000 \text{ psi}$
	$f_{ty} = 60000 \text{ psi}$
	$E_s = 29000 \text{ ksi}$
	$\rho_l = 1.033\%$
	$\rho_t = 1.033\%$

Figura 3.17 Elemento membrana sujeto a esfuerzos normales y cortantes

Los resultados del análisis usando el programa Membrana2.f90 se muestran en la Tabla 3.2 y la Figura 3.18.

Tabla 3.2 Resultados del programa Membrana2.f90

ε_d	-0.000275	-0.0004	-0.00005	-0.0006	-0.00062
ε_r (Propuesto)	0.00365	0.0085	0.0127	0.0136	0.01365
σ_1 (Propuesto)	536	601	603	604	604
σ_d	-949.92	-1160.92	-1184.45	-1189.47	-1187.46
σ_r	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
ε_r (Revisado)	0.00396	0.00879	0.0130	0.0139	0.0139
ε_l	0.00251	0.00637	0.00934	0.00995	0.00997
ε_t	0.00115	0.00202	0.00316	0.00335	0.00333
τ_{lt}	464.20	520.50	522.23	523.10	523.10
γ_{lt}	0.0034	0.0071	0.0106	0.0114	0.0115

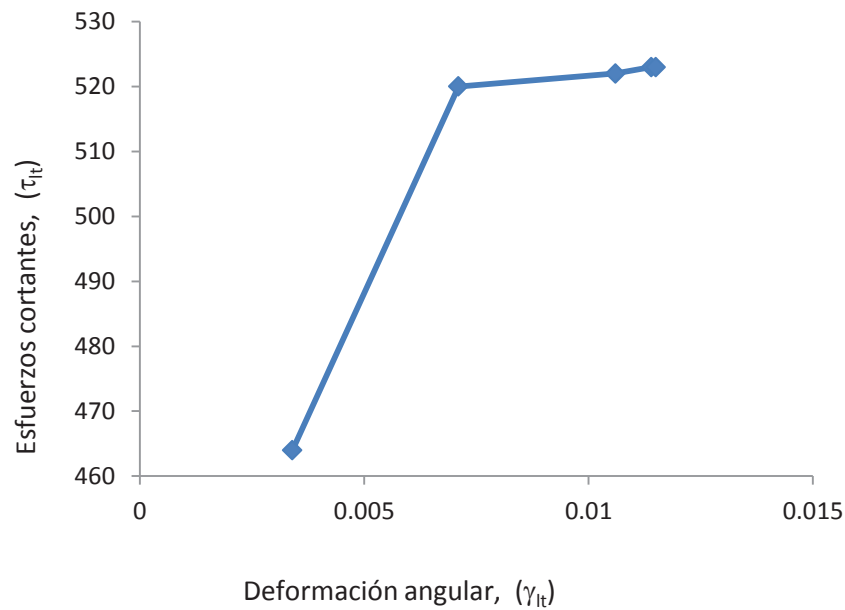


Figura 3.18 Curva Esfuerzo cortante vs Deformación angular

3.3 FUNDAMENTOS DEL MODELO MEMBRANA-PLASTIFICADO

En el modelo armadura ángulo-rotación (RA-STM) y el modelo armadura ángulo-fijo (FA-STM), se desprecian los efectos de Poisson del concreto reforzado. Como resultado, no pueden pronosticar el comportamiento posterior al valor máximo en la curva cortante-deformación angular del concreto reforzado. Para superar estas limitaciones, el modelo membrana-plastificado (SMM) toma en cuenta los efectos de Poisson.

Primero se presentarán las limitaciones de los modelos armadura, recordando las deficiencias de estos para pronosticar las ramas descendentes de las curvas carga-deformación (Sección 3.3.1). Así, se discuten los fundamentos del modelo membrana, incluyendo los efectos de Poisson y el coeficiente de Hsu/Zhu (Sección 3.3.3), la matriz de rigideces de los materiales (Sección 3.3.4), la deformación bi-axial vs Deformación uniaxial (Sección 3.3.5) y las modificaciones a las leyes constitutivas (Sección 3.4).

3.3.1 LIMITACIONES DEL MODELO ARMADURA PLASTIFICADO, OBSERVACIONES EXPERIMENTALES

Durante los pasados 30 años las teorías para pronosticar el comportamiento no-lineal del concreto reforzado sujeto a cortante se han desarrollado hasta un estado donde pueden satisfacer el equilibrio de esfuerzos, la compatibilidad de deformaciones y las leyes constitutivas de los materiales. La teoría del campo de compresión, el RA-STM, y el FA-STM son los tres modelos armadura que se basan en el concepto de agrietamiento y pueden satisfacer los principios de Navier de la mecánica de materiales. Aunque esos modelos son eficientes y pueden pronosticar el comportamiento de la curva carga-deformación de un elemento membrana sujeto a cortante, antes del valor máximo, no pueden explicar la existencia de la curva después del valor máximo (rama descendente) de un elemento membrana de concreto reforzado bajo cortante puro.

3.3.2 DEFICIENCIAS TEÓRICAS DEL MODELO ARMADURA ÁNGULO-FIJO (FA-STM)

Las ecuaciones de equilibrio en las direcciones l y t en FA-STM (Pang y Hsu, 1996) se pueden expresar como:

$$\sigma_l = \sigma_2^c \cos^2 \alpha_2 + \sigma_1^c \sin^2 \alpha_2 + \tau_{21}^c 2 \sin \alpha_2 \cos \alpha_2 + \rho_l f_l \quad (3.71)$$

$$\sigma_t = \sigma_2^c \sin^2 \alpha_2 + \sigma_1^c \cos^2 \alpha_2 - \tau_{21}^c 2 \sin \alpha_2 \cos \alpha_2 + \rho_t f_t, \quad (3.72)$$

donde σ_l, σ_t son los esfuerzos aplicados en las direcciones l y t , respectivamente, σ_1^c, σ_2^c son los esfuerzos promedio del concreto en las direcciones principales 1 y 2, τ_{21}^c es el esfuerzo cortante promedio del concreto en las coordenadas 2-1, α_2 es el ángulo entre las direcciones l y 2, ρ_l, ρ_t es el porcentaje de acero en las direcciones l y t y f_l, f_t son los esfuerzos promedio de las barras de acero en las direcciones l y t .

Bajo cortante puro los esfuerzos aplicados σ_l y σ_t en el lado izquierdo de las ecuaciones (3.71) y (3.72) deberán ser cero. Para un espécimen con el mismo porcentaje de acero en ambas direcciones, el esfuerzo cortante del concreto τ_{21}^c es cero. Después de la fluencia de las barras de acero, los esfuerzos de tensión en el concreto pueden ser despreciados por que su magnitud es muy pequeña comparada con el valor de los esfuerzos en el acero $\rho_l f_l$ y $\rho_t f_t$ y los esfuerzos de compresión en el concreto σ_2^c . Haciendo $\sigma_l = \sigma_t = 0$, y $\tau_{21}^c = 0$, las ecuaciones (3.71) y (3.72) son simplificadas como:

$$\sigma_2^c \cos^2 \alpha_2 + \rho_l f_l = 0 \quad (3.73)$$

$$\sigma_2^c \sin^2 \alpha_2 + \rho_t f_t = 0, \quad (3.74)$$

Las ecuaciones (3.73) y (3.74) muestran que los esfuerzos de compresión del concreto σ_2^c son balanceados por los esfuerzos en el acero $\rho_l f_l$ y $\rho_t f_t$. Cuando los esfuerzos de compresión en el concreto σ_2^c alcanzan su máximo y continúan dentro de la rama descendente como se muestra en la ecuación (3.52b) y la Figura 3.13, los esfuerzos en el acero, f_l y f_t , se incrementarán de acuerdo a la ecuación (3.56b) en la Figura 3.15. Esto significa que el equilibrio no se puede satisfacer y no puede existir una rama descendente.

La razón por la cual los modelos armadura no pueden pronosticar la rama descendente, es porque estas teorías desprecian los efectos de Poisson. Para considerar los efectos Poisson se deberá aumentar a las ecuaciones de equilibrio (3.73) y (3.74), un tercer término relacionado con el coeficiente de Hsu/Zhu.

3.3.3 EFECTOS DE POISSON Y COEFICIENTES DE HSU/ZHU

Hsu y Zhu (2000) desarrollaron un nuevo modelo, el cual toma en cuenta los efectos de Poisson, para modificar el RA-STM y el FA-STM. Cuando esos modelos son usados como base del modelo membrana, no es necesario restablecer las leyes constitutivas del concreto en compresión, tensión y cortante, ó las leyes constitutivas de las barras de acero incrustadas en el concreto.

Para el RA-STM, se asume que las grietas están orientadas en las direcciones principales del concreto (coordenadas d-r), y las relaciones esfuerzo-deformación del concreto son:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_d \\ \sigma_r \\ \tau_{dr} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{E}_d^c & 0 & 0 \\ 0 & \bar{E}_r^c & 0 \\ 0 & 0 & G_{dr}^c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\epsilon}_d \\ \bar{\epsilon}_r \\ \gamma_{dr} \end{Bmatrix} \quad (3.75)$$

Las leyes constitutivas del concreto se basan en las coordenadas principales del concreto d-r. El módulo secante \bar{E}_r^c y \bar{E}_d^c se determinan de la relación esfuerzo-deformación del concreto y fueron establecidas experimentalmente en el RA-STM (Belarbi y Hsu, 1994; Belarbi y Hsu, 1995; Pang y Hsu, 1995).

Para el FA-STM, se asume que las grietas están orientadas en las direcciones principales de los esfuerzos aplicados (coordenadas 2-1). Las relaciones esfuerzo-deformación del concreto son:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_2^c \\ \sigma_1^c \\ \tau_{21}^c \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{E}_2^c & 0 & 0 \\ 0 & \bar{E}_1^c & 0 \\ 0 & 0 & G_{21}^c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\epsilon}_2 \\ \bar{\epsilon}_1 \\ \gamma_{21} \end{Bmatrix} \quad (3.76)$$

Las leyes constitutivas del concreto se basan en las coordenadas principales 2-1 de los esfuerzos aplicados. El módulo secante \bar{E}_2^c, \bar{E}_1^c y G_{21}^c , en la ecuación (3.76) son determinados de la relación esfuerzo-deformación promedio del concreto y se

establecieron experimentalmente en el FA-STM (Pang y Hsu, 1996; Hsu y Zhang, 1997; Zhang y Hsu, 1998).

Para pronosticar la rama descendente, el nuevo SMM debe tener una matriz de rigidez más general que incluya los dos elementos fuera de la diagonal; para representar los efectos de Poisson.

El nuevo modelo SMM está basado en las coordenadas 2-1 por dos razones: Primero, el panel universal donde se realizaron las pruebas solo puede aplicar fuerzas en las direcciones 2-1. Por lo cual, es más conveniente establecer las leyes constitutivas en las coordenadas 2-1. Segundo, la contribución del concreto a la resistencia a cortante se puede pronosticar cuando el nuevo modelo se basa en FA-STM.

La matriz de rigideces del concreto para el nuevo modelo SMM, definido en las coordenadas principales 2-1 es:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_2^c \\ \sigma_1^c \\ \tau_{21}^c \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} E_2^c & \nu_{21}E_2^c & 0 \\ \nu_{12}E_1^c & E_1^c & 0 \\ 0 & 0 & G_{21}^c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_2 \\ \varepsilon_1 \\ \gamma_{21} \end{Bmatrix} \quad (3.77)$$

Los coeficientes ν_{21} y ν_{12} son los ya conocidos coeficientes de Poisson para materiales continuos e isotrópicos. Para concreto reforzado agrietado se asume que tiene la forma de la matriz de rigideces para materiales continuos y ortotrópicos. Esto permite evaluar el comportamiento promedio de este compuesto agrietado. Debido a este concepto, el nombre tradicional de “coeficiente de Poisson” no es el más apropiado para ν_{21} y ν_{12} . Para recalcar esta diferencia, a ν_{21} y ν_{12} se les da un nuevo nombre: los coeficiente de Hsu/Zhu.

La matriz de rigideces para las barras de acero, las cuales forman las coordenadas l-t, es

$$\begin{Bmatrix} \rho_l f_l \\ \rho_t f_t \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_l E_l^s & 0 & 0 \\ 0 & \rho_t E_t^s & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_l \\ \varepsilon_t \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.78)$$

donde el módulo E_l^s y E_t^s deben también tomar en cuenta los coeficientes Hsu/Zhu ν_{21} y ν_{12} debido al concepto “agrietamiento disperso”.

3.3.4 MATRIZ DE RIGIDECESES DE LOS MATERIALES

3.3.4.1 MATRIZ DE RIGIDECESES DEL CONCRETO

De acuerdo a la definición de coeficientes de Hsu/Zhu, que se basan en el concepto “grieta dispersa”, se pueden obtener las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= \bar{\varepsilon}_1 - \nu_{12}\bar{\varepsilon}_2 \\ &= \frac{\sigma_1^c}{\bar{E}_1^c} - \nu_{12}\frac{\sigma_2^c}{\bar{E}_2^c},\end{aligned}\quad (3.79)$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_2 &= \bar{\varepsilon}_2 - \nu_{21}\bar{\varepsilon}_1 \\ &= \frac{\sigma_2^c}{\bar{E}_2^c} - \nu_{21}\frac{\sigma_1^c}{\bar{E}_1^c},\end{aligned}\quad (3.80)$$

donde $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ son las deformaciones promedio (dispersas) en las direcciones 1 y 2, cuando el panel está sujeto a carga biaxial y toma en cuenta los coeficientes de Hsu/Zhu, $\bar{\varepsilon}_1, \bar{\varepsilon}_2$ son las deformaciones promedio en las direcciones 1 y 2, cuando están sujetas a carga uniaxial; o sujetas a carga biaxial asumiendo que los coeficientes de Hsu/Zhu son cero, σ_1^c, σ_2^c son los esfuerzos promedio del concreto en las direcciones 1 y 2, respectivamente, y \bar{E}_1^c, \bar{E}_2^c son los módulos secantes del concreto en las direcciones 1 y 2, respectivamente, cuando el panel está sujeto a carga uniaxial; o sujeto a carga biaxial asumiendo que los coeficientes de Hsu/Zhu son cero.

Resolviendo las ecuaciones (3.79) y (3.80) se obtiene

$$\bar{\varepsilon}_1 = \frac{1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}\varepsilon_1 + \frac{\nu_{12}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}\varepsilon_2, \quad (3.81)$$

$$y \quad \bar{\varepsilon}_2 = \frac{\nu_{21}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}\varepsilon_1 + \frac{1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}\varepsilon_2, \quad (3.82)$$

Sustituyendo $\bar{\varepsilon}_1 = \sigma_1^c/\bar{E}_1^c$ y $\bar{\varepsilon}_2 = \sigma_2^c/\bar{E}_2^c$ en las ecuaciones (3.81) y (3.82) se obtiene

$$\sigma_1^c = \frac{\bar{E}_1^c}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}\varepsilon_1 + \frac{\bar{E}_1^c}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}\nu_{12}\varepsilon_2, \quad (3.83)$$

$$y \quad \sigma_2^c = \frac{\bar{E}_2^c}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}\nu_{21}\varepsilon_1 + \frac{\bar{E}_2^c}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}\varepsilon_2, \quad (3.84)$$

Comparando la ecuación (3.77) con la ecuación (3.83) y (3.84), se obtiene

$$E_1^c = \frac{\bar{\bar{E}}_1^c}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \quad (3.85)$$

$$E_2^c = \frac{\bar{\bar{E}}_2^c}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \quad (3.86)$$

donde E_1^c, E_2^c son los módulos secantes del concreto en las direcciones 1 y 2, respectivamente, cuando el panel está sujeto a carga biaxial y toma en cuenta los coeficientes de Hsu/Zhu.

En general, si $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ y γ_{21} son dadas o medidas, $\bar{\varepsilon}_1$ y $\bar{\varepsilon}_2$ se pueden calcular de las ecuaciones (3.81) y (3.82). Usando $\bar{\varepsilon}_1$ y $\bar{\varepsilon}_2$, el módulo secante \bar{E}_1^c y \bar{E}_2^c se pueden obtener de las leyes constitutivas del concreto (curvas σ_1^c vs $\bar{\varepsilon}_1$ y σ_2^c vs $\bar{\varepsilon}_2$). Así, E_1^c y E_2^c pueden ser calculadas de las ecuaciones (3.85) y (3.86). La relación final esfuerzo-deformación es expresada como

$$\begin{Bmatrix} \sigma_2^c \\ \sigma_1^c \\ \tau_{21}^c \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\bar{\bar{E}}_2^c}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} & \frac{\nu_{21}\bar{E}_2^c}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} & 0 \\ \frac{\nu_{12}\bar{E}_1^c}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} & \frac{\bar{E}_1^c}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} & 0 \\ 0 & 0 & G_{21}^c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_2 \\ \varepsilon_1 \\ \gamma_{21} \end{Bmatrix} \quad (3.87)$$

En la ecuación (3.87) la matriz de rigideces del concreto toma en cuenta los coeficientes de Hsu/Zhu ν_{21} y ν_{12} .

3.3.4.2 MATRIZ DE RIGIDECES DE LAS BARRAS DE ACERO

Del principio de transformación de deformaciones, las ecuaciones de compatibilidad de deformaciones son:

$$\varepsilon_l = \varepsilon_2 \cos^2 \alpha_2 + \varepsilon_1 \sin^2 \alpha_2 + \frac{\gamma_{21}}{2} 2 \sin \alpha_2 \cos \alpha_2 \quad (3.88)$$

$$\varepsilon_t = \varepsilon_2 \sin^2 \alpha_2 + \varepsilon_1 \cos^2 \alpha_2 - \frac{\gamma_{21}}{2} 2 \sin \alpha_2 \cos \alpha_2, \quad (3.89)$$

donde ε_l y ε_t son las deformaciones biaxiales promedio de las barras de acero en la dirección l y t , respectivamente, tomando en cuenta los coeficientes Hsu/Zhu.

Sustituyendo las ecuaciones (3.79) y (3.80) en las ecuaciones (3.88) y (3.89) se obtiene:

$$\varepsilon_l = \bar{\varepsilon}_2 \cos^2 \alpha_2 - \nu_{21} \bar{\varepsilon}_1 \cos^2 \alpha_2 + \bar{\varepsilon}_1 \sin^2 \alpha_2 - \nu_{12} \bar{\varepsilon}_2 \sin^2 \alpha_2 + \frac{\gamma_{21}}{2} 2 \sin \alpha_2 \cos \alpha_2 \quad (3.90)$$

$$\varepsilon_t = \bar{\varepsilon}_2 \sin^2 \alpha_2 - \nu_{21} \bar{\varepsilon}_1 \sin^2 \alpha_2 + \bar{\varepsilon}_1 \cos^2 \alpha_2 - \nu_{12} \bar{\varepsilon}_2 \cos^2 \alpha_2 - \frac{\gamma_{21}}{2} 2 \sin \alpha_2 \cos \alpha_2, \quad (3.91)$$

donde $\bar{\varepsilon}_l$ y $\bar{\varepsilon}_t$ son las deformaciones uniaxiales promedio de las barras de acero en las direcciones l y t , respectivamente. Cuando los coeficientes de Hsu/Zhu se toman como cero en las ecuaciones (3.90) y (3.91) se transforman en:

$$\bar{\varepsilon}_l = \bar{\varepsilon}_2 \cos^2 \alpha_2 + \bar{\varepsilon}_1 \sin^2 \alpha_2 + \frac{\gamma_{21}}{2} 2 \sin \alpha_2 \cos \alpha_2 \quad (3.92)$$

$$\bar{\varepsilon}_t = \bar{\varepsilon}_2 \sin^2 \alpha_2 + \bar{\varepsilon}_1 \cos^2 \alpha_2 - \frac{\gamma_{21}}{2} 2 \sin \alpha_2 \cos \alpha_2, \quad (3.93)$$

Sustituyendo las ecuaciones (3.92) y (3.93) dentro de las ecuaciones (3.90) y (3.91) se obtiene:

$$\varepsilon_l = \bar{\varepsilon}_l - \nu_{21} \bar{\varepsilon}_1 \cos^2 \alpha_2 - \nu_{12} \bar{\varepsilon}_2 \sin^2 \alpha_2 \quad (3.94)$$

$$\varepsilon_t = \bar{\varepsilon}_t - \nu_{21} \bar{\varepsilon}_1 \sin^2 \alpha_2 - \nu_{12} \bar{\varepsilon}_2 \cos^2 \alpha_2. \quad (3.95)$$

Por definición:

$$\bar{\varepsilon}_l = \frac{f_l}{\bar{E}_l}, \quad (3.96)$$

$$\bar{\varepsilon}_t = \frac{f_t}{\bar{E}_t}, \quad (3.97)$$

donde \bar{E}_l y \bar{E}_t son los módulos de elasticidad de las barras de acero incrustadas en el concreto en las direcciones l y t , respectivamente, calculadas de las leyes constitutivas del acero (esfuerzos promedio vs deformaciones promedio), y obtenidas de una carga uniaxial.

Sustituyendo las ecuaciones (3.96) y (3.97) dentro de las ecuaciones (3.94) y (3.95) resulta

$$f_l = \bar{E}_l \varepsilon_l + \bar{E}_l (\nu_{12} \bar{\varepsilon}_2 \sin^2 \alpha_2 + \nu_{21} \bar{\varepsilon}_1 \cos^2 \alpha_2), \quad (3.98)$$

$$f_t = \bar{E}_t \varepsilon_t + \bar{E}_t (\nu_{12} \bar{\varepsilon}_2 \cos^2 \alpha_2 + \nu_{21} \bar{\varepsilon}_1 \sin^2 \alpha_2). \quad (3.99)$$

Sustituyendo $f_l = E_l^S \varepsilon_l$ y $f_t = E_t^S \varepsilon_t$ de la ecuación (3.78) en las ecuaciones (3.98) y (3.99) se obtiene

$$E_l^S \varepsilon_l = \bar{E}_l \varepsilon_l + \bar{E}_l (\nu_{12} \bar{\varepsilon}_2 \sin^2 \alpha_2 + \nu_{21} \bar{\varepsilon}_1 \cos^2 \alpha_2), \quad (3.100)$$

$$E_t^S \varepsilon_t = \bar{E}_t \varepsilon_t + \bar{E}_t (\nu_{12} \bar{\varepsilon}_2 \cos^2 \alpha_2 + \nu_{21} \bar{\varepsilon}_1 \sin^2 \alpha_2). \quad (3.101)$$

Las ecuaciones (3.100) y (3.101) muestran claramente que E_l^S no es igual a \bar{E}_l . \bar{E}_l es el módulo secante de las barras de acero incrustadas en el concreto y obtenido de pruebas uniaxiales, mientras E_l^S es una expresión más general del módulo secante del acero obtenido de deformaciones biaxiales, las cuales toman en cuenta los coeficientes de Hsu/Zhu. $E_l^S \varepsilon_l$ es igual a $\bar{E}_l \varepsilon_l$ si ν_{21} y ν_{12} son despreciadas, como a menudo se supone antes del agrietamiento del concreto. Después del agrietamiento las ecuaciones (3.100) y (3.101) muestran que $E_l^S \varepsilon_l$ será afectado por los valores de los coeficientes de Hsu/Zhu, ν_{21} y ν_{12} , así como a las deformaciones uniaxiales $\bar{\varepsilon}_2$ y $\bar{\varepsilon}_1$.

Sustituyendo las ecuaciones (3.100) y (3.101) dentro de la ecuación (3.78), la relación esfuerzo-deformación de las barras de acero es expresada como

$$\begin{Bmatrix} \rho_l f_l \\ \rho_t f_t \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_l \bar{E}_l & 0 & 0 \\ 0 & \rho_t \bar{E}_t & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_l \\ \varepsilon_t \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \rho_l \bar{E}_l (\nu_{12} \bar{\varepsilon}_2 \sin^2 \alpha_2 + \nu_{21} \bar{\varepsilon}_1 \cos^2 \alpha_2) \\ \rho_t \bar{E}_t (\nu_{12} \bar{\varepsilon}_2 \cos^2 \alpha_2 + \nu_{21} \bar{\varepsilon}_1 \sin^2 \alpha_2) \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.102)$$

La ecuación (3.102) muestra que bajo la condición biaxial los esfuerzos en el acero, en la dirección longitudinal y transversal, están constituidos de dos partes. La primera parte está determinada por las deformaciones de tensión del acero en condición uniaxial, sin tomar en cuenta los coeficientes de Hsu/Zhu. La segunda parte es una función de los dos coeficientes de Hsu/Zhu y de las dos deformaciones uniaxiales de un panel de concreto agrietado. Si los dos coeficientes de Hsu/Zhu se asume que son cero, entonces la segunda

parte desaparecerá y la ecuación (3.102) se reduce a la expresión para esfuerzos del acero bajo condición uniaxial.

3.3.5 DEFORMACIÓN BIAxIAL VS DEFORMACIÓN UNIAxIAL

Las seis ecuaciones básicas de equilibrio y compatibilidad en el SMM son las mismas que para FA-STM, excepto que la deformación en las ecuaciones de compatibilidad representa las deformaciones biaxiales, en lugar de las deformaciones uniaxiales. Dado que la relación entre los esfuerzos, en las ecuaciones de equilibrio, y las deformaciones biaxiales, en las ecuaciones de compatibilidad, depende del patrón de carga de los esfuerzos biaxiales, no hay leyes constitutivas que se puedan determinar directamente de experimentos. Por lo tanto, se puede obtener la relación entre deformaciones uniaxiales, ecuación (3.81) y (3.82), de deformaciones biaxiales del concreto agrietado, así que las deformaciones uniaxiales pueden servir como puente para conectar las deformaciones biaxiales y los esfuerzos en el concreto, ecuación (3.87), y conectar las deformaciones biaxiales y los esfuerzos en el acero, ecuaciones (3.102). Usando las leyes constitutivas se pueden determinar los esfuerzos biaxiales σ_1^c, σ_2^c de las deformaciones uniaxiales $\bar{\varepsilon}_1$ y $\bar{\varepsilon}_2$, ya que esos esfuerzos biaxiales son idénticos a los esfuerzos uniaxiales $\bar{\sigma}_1^c, \bar{\sigma}_2^c$. Esta identidad se puede probar sustituyendo $\bar{E}_2^c = \frac{\bar{\sigma}_2^c}{\bar{\varepsilon}_2}$ en la ecuación (3.87), se obtiene

$$\begin{aligned}\sigma_2^c &= \frac{\bar{\sigma}_2^c \varepsilon_2}{\bar{\varepsilon}_2(1 - \nu_{12}\nu_{21})} + \frac{\bar{\sigma}_2^c \nu_{21} \varepsilon_1}{\bar{\varepsilon}_2(1 - \nu_{12}\nu_{21})}, \\ &= \left(\frac{\bar{\sigma}_2^c}{\bar{\varepsilon}_2} \right) \left(\frac{\varepsilon_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} + \frac{\nu_{21} \varepsilon_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \right)\end{aligned}\quad (3.103)$$

De acuerdo a la ecuación (3.82), el segundo paréntesis en el lado derecho de la ecuación (3.103) es $\bar{\varepsilon}_2$. Entonces

$$\sigma_2^c = \left(\frac{\bar{\sigma}_2^c}{\bar{\varepsilon}_2} \right) \bar{\varepsilon}_2 = \bar{\sigma}_2^c \quad (3.104)$$

De manera similar, $\sigma_1^c = \bar{\sigma}_1^c$.

Los esfuerzos biaxiales f_l y f_t de las ecuaciones (3.96) y (3.97) son determinados de las deformaciones uniaxiales, $\bar{\varepsilon}_l$ y $\bar{\varepsilon}_t$, usando las leyes constitutivas de las barras de acero, son actualmente idénticas a las de los esfuerzos uniaxiales \bar{f}_l y \bar{f}_t . Esta identidad se puede probar como sigue:

Sustituyendo $\bar{E}_l = \frac{\bar{f}_l}{\bar{\varepsilon}_l}$ en la ecuación (3.102), se obtiene

$$f_l = \frac{\bar{f}_l}{\bar{\varepsilon}_l} \varepsilon_l + \frac{\bar{f}_l}{\bar{\varepsilon}_l} (\nu_{12} \bar{\varepsilon}_2 \sin^2 \alpha_2 + \nu_{21} \bar{\varepsilon}_1 \cos^2 \alpha_2),$$

$$f_l = \frac{\bar{f}_l}{\bar{\varepsilon}_l} (\varepsilon_l + \nu_{12} \bar{\varepsilon}_2 \sin^2 \alpha_2 + \nu_{21} \bar{\varepsilon}_1 \cos^2 \alpha_2). \quad (3.105)$$

De acuerdo a la ecuación (3.94), el paréntesis del lado derecho de la ecuación (3.105) es $\bar{\varepsilon}_l$. Así

$$f_l = \frac{\bar{f}_l}{\bar{\varepsilon}_l} \bar{\varepsilon}_l = \bar{f}_l \quad (3.106)$$

de manera similar, $f_t = \bar{f}_t$.

3.3.6 MÓDULO DE CORTANTE

Hsu y Zhu (2000), obtuvieron de las condiciones de compatibilidad y equilibrio un módulo de cortante racional y simple, supusieron que la dirección de los esfuerzos principales del concreto coinciden con la dirección de las deformaciones principales. La derivación empieza con la transformación de esfuerzos en el concreto, de las coordenadas d-r (Figura 3.19b) a las coordenadas 2-1 (Figura 3.19a), a través del ángulo de desviación β (Figura 3.19c).

Las tres ecuaciones básicas de la transformación de esfuerzos son:

$$\sigma_2^c = \sigma_d \cos^2 \beta + \sigma_r \sin^2 \beta, \quad (3.107)$$

$$\sigma_1^c = \sigma_d \sin^2 \beta + \sigma_r \cos^2 \beta, \quad (3.108)$$

y

$$\tau_{21}^c = (-\sigma_d + \sigma_r) \sin \beta \cos \beta, \quad (3.109)$$

donde 2-1: son las coordenadas a lo largo de las direcciones principales de los esfuerzos principales, d-r: son las coordenadas a lo largo de las direcciones principales del concreto agrietado, σ_1^c, σ_2^c son los esfuerzos promedio del concreto en las coordenadas 2-1, τ_{21}^c son los esfuerzos cortantes promedio (dispersos) del concreto en las coordenadas 2-1, σ_d, σ_r esfuerzos principales promedio del concreto en las direcciones d-r, respectivamente y β es el ángulo de desviación entre las coordenadas d-r y las coordenadas 2-1 (Figura 3.19c).

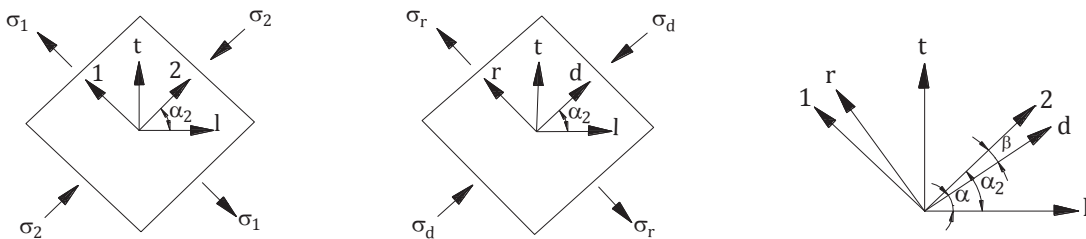
Similarmente, las tres ecuaciones de transformación de deformaciones son:

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_d \cos^2 \beta + \varepsilon_r \sin^2 \beta, \quad (3.110)$$

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_d \sin^2 \beta + \varepsilon_r \cos^2 \beta, \quad (3.111)$$

$$\gamma_{21} = (-\varepsilon_d + \varepsilon_r) \sin \beta \cos \beta, \quad (3.112)$$

donde $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ son las deformaciones promedio (dispersas) en la dirección 1 y 2, γ_{21} es la deformación angular promedio (dispersa) en las coordenadas 2-1, $\varepsilon_r, \varepsilon_d$ son las deformaciones principales promedio en la dirección r y d, respectivamente.



a) Esfuerzos aplicados en las coordenadas 2-1

b) Concreto agrietado en las coordenadas d-r

c) Ángulo de desviación β

Figura 3.19 Sistemas coordenados principales, 2-1 y d-r (σ_1 y σ_2 son los esfuerzos principales aplicados, σ_d y σ_r son los esfuerzos principales del concreto)

Dividiendo la ecuación (3.109) por la ecuación (3.112) se obtiene el módulo secante del cortante como:

$$G_{21}^c = \frac{\tau_{21}^c}{\gamma_{21}} = \frac{(\sigma_r - \sigma_d)}{2(\varepsilon_r - \varepsilon_r)} \quad (3.113)$$

En la ecuación (3.113) G_{21}^c está expresada en función de los esfuerzos y deformaciones principales del concreto.

Restando la ecuación (3.107) a la ecuación (3.108) se obtiene

$$\sigma_1^c - \sigma_2^c = (\sigma_r - \sigma_d)(\cos^2\beta - \sin^2\beta) \quad (3.114)$$

Restando la ecuación (3.110) a la ecuación (3.111) se obtiene

$$\varepsilon_1 - \varepsilon_2 = (\varepsilon_r - \varepsilon_d)(\cos^2\beta - \sin^2\beta) \quad (3.115)$$

Dividiendo la ecuación (3.114) por (3.115) se obtiene

$$\frac{(\sigma_r - \sigma_d)}{(\varepsilon_r - \varepsilon_2)} = \frac{\sigma_1^c - \sigma_2^c}{\varepsilon_1 - \varepsilon_2} \quad (3.116)$$

Igualando la ecuación (3.116) con la ecuación (3.113) se obtiene

$$G_{21}^c = \frac{\sigma_1^c - \sigma_2^c}{2(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)} \quad (3.117)$$

La ecuación (3.117) es la expresión general del módulo secante del cortante para el concreto agrietado en forma dispersa. Esto muestra que las relaciones constitutivas, del concreto en cortante, pueden ser expresadas por las relaciones constitutivas del concreto en tensión (σ_1^c vs. ε_1) y en compresión (σ_2^c vs. ε_2).

La ecuación (3.117) se puede obtener también usando el círculo de Mohr (Figura 3.20). Las siguientes dos ecuaciones, ecuación (3.118) y (3.119), se pueden obtener de la Figura 3.20a y la Figura 3.20b, respectivamente:

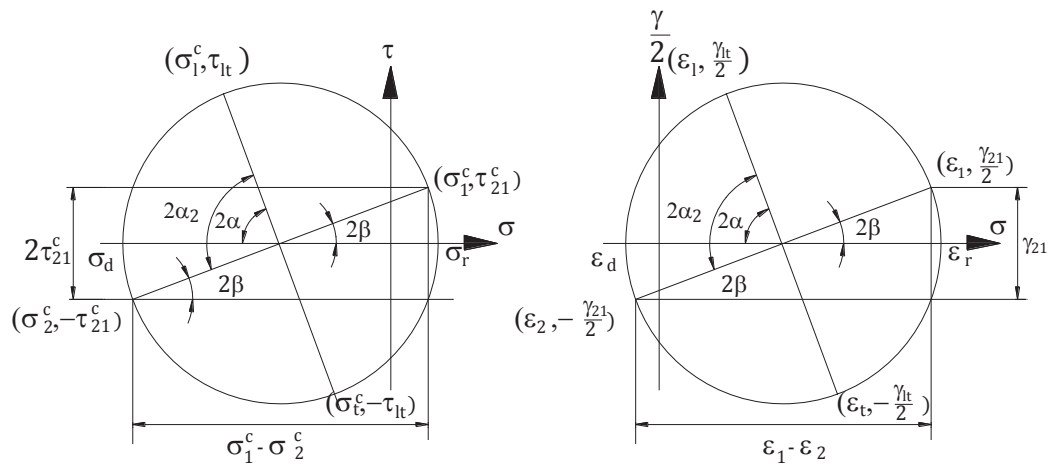
$$\tau_{21}^c = \frac{\sigma_1^c - \sigma_2^c}{2} \tan 2\beta, \quad (3.118)$$

y
$$\gamma_{21} = (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \tan 2\beta. \quad (3.119)$$

dividiendo la ecuación (3.118) por la ecuación (3.119) se obtiene

$$G_{21}^c = \frac{\tau_{21}^c}{\gamma_{21}} = \frac{\sigma_1^c - \sigma_2^c}{2(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)} \quad (3.120)$$

La ecuación (3.120) es igual a la ecuación (3.117).



a) Círculo de Mohr para esfuerzos del concreto agrietado

b) Círculo de Mohr para deformaciones

Figura 3.20 Círculo de Mohr para esfuerzos y deformaciones

3.4 APLICACIÓN DEL MODELO MEMBRANA-PLASTIFICADO

3.4.1 RELACIONES CONSTITUTIVAS DE LOS MATERIALES BAJO CARGA BIAxIAL

Para resolver las seis ecuaciones de equilibrio y compatibilidad, dadas por las ecuaciones (3.59) a (3.64), las relaciones esfuerzo-deformación del concreto y del acero tienen que estar en función de las deformaciones biaxiales ε_1 y ε_2 , en la dirección 2 y 1, y las deformaciones ε_l y ε_t , en la dirección l y t. Ya que el patrón de carga causado por este conjunto de deformaciones no se puede obtener directamente de las pruebas. El puente para establecer una conexión entre estas relaciones constitutivas es el conjunto de deformaciones uniaxiales $\bar{\varepsilon}_1, \bar{\varepsilon}_2, \bar{\varepsilon}_l$ y $\bar{\varepsilon}_t$.

3.4.1.1 RELACIÓN ESFUERZO-DEFORMACIÓN DEL CONCRETO EN COMPRESIÓN

La relación constitutiva de los esfuerzos de compresión en el concreto σ_2^c y la deformación uniaxial $\bar{\varepsilon}_2$ esta dada como sigue:

$$\sigma_2^c = \zeta f_c' \left[2 \left(\frac{\bar{\varepsilon}_2}{\zeta \varepsilon_o} \right) - \left(\frac{\bar{\varepsilon}_2}{\zeta \varepsilon_o} \right)^2 \right], \quad \frac{\bar{\varepsilon}_2}{\zeta \varepsilon_o} \leq 1 \quad (3.121a)$$

ó

$$\sigma_2^c = \zeta f_c' \left[1 - \left(\frac{\bar{\varepsilon}_2 / \zeta \varepsilon_o - 1}{4 / \zeta - 1} \right)^2 \right], \quad \frac{\bar{\varepsilon}_2}{\zeta \varepsilon_o} > 1 \quad (3.121b)$$

donde la constante 4 en la ecuación (3.121b) reemplaza la constante anterior 2 en la ecuación (3.65). Se observa que la deformación de compresión $\bar{\varepsilon}_2$ es una deformación uniaxial, no es la deformación biaxial ε_2 .

donde

$$\zeta = \frac{5.8}{\sqrt{f_c'}} \frac{1}{\sqrt{\left(1 + \frac{400 \bar{\varepsilon}_1}{\eta}\right)}} \leq 0.9 \quad (3.122)$$

y

$$\eta = \frac{\rho_t f_{ty} - \sigma_t}{\rho_l f_{ly} - \sigma_l}, \quad 0.2 < \eta < 5. \quad (3.123)$$

η' en la ecuación (3.122) es η ó su recíproco, cualquiera que sea menor a la unidad. El parámetro η es usado para tomar en cuenta la diferencia de los esfuerzos en las direcciones l y t .

3.4.1.2 RELACIÓN ESFUERZO-DEFORMACIÓN DEL CONCRETO EN TENSIÓN

La relación esfuerzo-deformación del concreto en tensión en las coordenadas 2-1 es la siguiente:

$$\sigma_1^c = E_c \bar{\varepsilon}_1, \quad \bar{\varepsilon}_1 \leq 0.00008, \quad (3.124a)$$

ó

$$\sigma_1^c = f_{cr} \left(\frac{0.00008}{\bar{\varepsilon}_1} \right)^{0.4}, \quad \bar{\varepsilon}_1 > 0.00008 \quad (3.124b)$$

El módulo de elasticidad del concreto E_c es tomado como $3875 \sqrt{f_c'}$ (f_c' y $\sqrt{f_c'}$ en MPa). El esfuerzo de agrietamiento del concreto f_{cr} es tomado como

$0.31\sqrt{f'_c}$ (f'_c y $\sqrt{f'_c}$ en MPa). En estas ecuaciones $\bar{\varepsilon}_1$ es la deformación uniaxial, no es la deformación biaxial ε_1 .

3.4.1.3 RELACIÓN ESFUERZO-DEFORMACIÓN DEL ACERO INCRUSTADO EN EL CONCRETO

La relación esfuerzo-deformación del acero en tensión del concreto reforzado, en las coordenadas l-t, puede ser expresado como (Pang y Hsu, 1995):

$$f_s = E_s \bar{\varepsilon}_s, \quad \bar{\varepsilon}_s \leq \bar{\varepsilon}_n \quad (3.125a)$$

$$f_{sy} = f_y \left[(0.91 - 2B) + (0.02 + 0.25B) \frac{\bar{\varepsilon}_s}{\varepsilon_y} \right], \quad \bar{\varepsilon}_s > \bar{\varepsilon}_n, \quad (3.125b)$$

donde
$$\bar{\varepsilon}_n = \varepsilon_y (0.93 - 2B), \quad (3.126)$$

y
$$B = \frac{1}{\rho} \left(\frac{f_{cr}}{f_y} \right)^{1.5} \quad (3.127)$$

en estas ecuaciones, s es reemplazado por l como subíndice para el acero longitudinal y t para el acero transversal.

3.4.1.4 RELACIÓN ESFUERZO-DEFORMACIÓN DEL CONCRETO SUJETO A CORTANTE

La ecuación para la nueva relación esfuerzos cortantes vs deformación angular (τ_{21}^c vs γ_{21}) es dada por la ecuación (3.120),

$$\tau_{21}^c = \frac{\sigma_1^c - \sigma_2^c}{2(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)} \gamma_{21} \quad (3.128)$$

La ecuación (3.128) muestra que la relación entre los esfuerzos cortantes del concreto y la deformación angular en el modelo membrana-plastificado, es muy diferente del usado en el FA-STM (Pang y Hsu, 1996). El nuevo módulo de cortante depende sólo de las relaciones constitutivas del concreto: esfuerzos de compresión vs deformación de compresión (σ_2^c vs $\bar{\varepsilon}_2$) y esfuerzos de tensión vs deformación de tensión (σ_1^c vs $\bar{\varepsilon}_1$), así como de los coeficientes de Hsu/Zhu.

3.4.2 PROGRAMA Membrana3.f90

El programa Membrana3.f90 evalúa el comportamiento de un elemento membrana de concreto reforzado, el cual está sujeto a esfuerzos en las direcciones longitudinal y transversal (σ_l, σ_t), y esfuerzos cortantes (τ_{lt}). En este programa ya se considera el módulo de Poisson mediante los coeficientes propuestos por Hsu y Zhu (2000). Al ser considerados los coeficientes Hsu/Zhu, el programa es capaz de realizar el análisis y determinar los valores de la rama descendente en la curva Esfuerzo cortante vs Deformación angular (τ_{lt} vs γ_{lt}). En el apéndice C se describe el programa membrana3.f90 y se presenta su diagrama de flujo.

Ejemplo 3.4 Analizar un elemento membrana de concreto reforzado sujeto a cortante puro y evaluar su comportamiento al considerar los efectos de Poisson mediante los coeficientes Hsu/Zsu. Determinar los valores de la curva Esfuerzo cortante vs Deformación angular (τ_{lt} vs γ_{lt}). Las propiedades de los materiales se muestran en la tabla 3.3 y en la Figura 3.21.

Tabla 3.3 Propiedades de los materiales

f'_c (MPa)	ϵ_0	f_{ly} (MPa)	f_{ty} (MPa)	ρ_l	ρ_t	E (MPa)
44.08	0.00235	446.55	462.76	0.01789	0.01193	200000

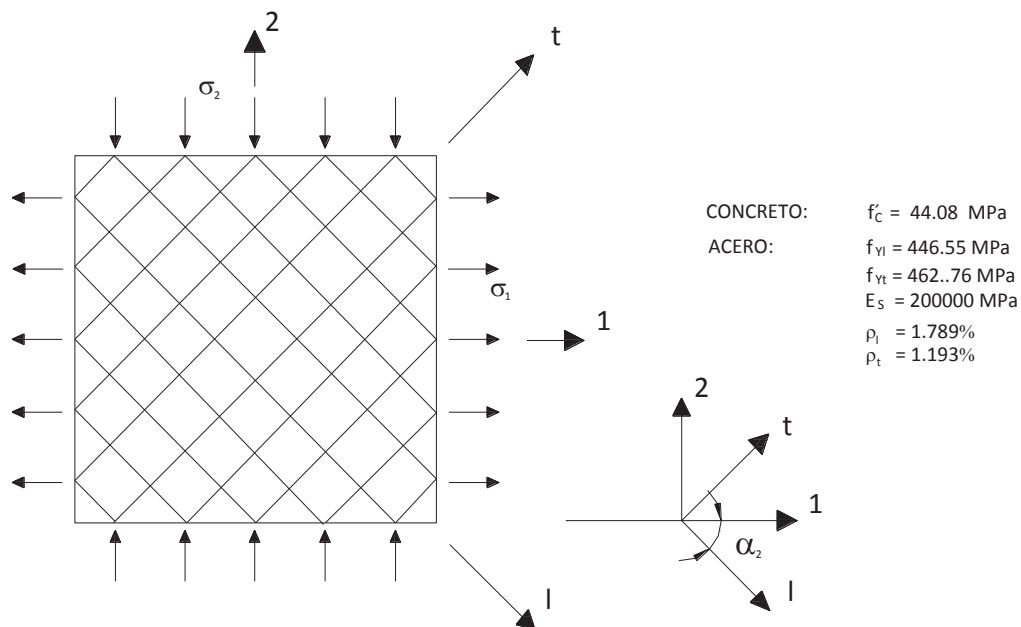


Figura 3.21 Propiedades del elemento membrana

Los resultados obtenidos con el programa Membrana3.f90 se muestran en la Tabla 3.4 y en la Figura 3.22.

Tabla 3.4 Valores calculados con el programa Membrana3.f90

ε_2	-0.00035	-0.00042	-0.00067	-0.00226
ε_1 (Propuesto)	0.004501	0.005789	0.017867	0.020548
γ_{21} (Propuesto)	-0.00034	-0.00099	-0.00278	-0.00335
ε_l	0.001906	0.00219	0.007209	0.007469
ε_t	0.002245	0.003179	0.009988	0.010819
$\bar{\varepsilon}_2$	-0.00035	-0.00042	-0.00067	-0.00226
$\bar{\varepsilon}_1$	0.003836	0.004991	0.016594	0.016254
$\bar{\varepsilon}_l$	0.001573	0.001791	0.006572	0.005322
$\bar{\varepsilon}_t$	0.001913	0.00278	0.009352	0.008672
σ_2^c	-11.348	-12.966	-13.799	-13.631
σ_1^c	0.43769	0.39395	0.24363	0.24566
τ_{21}^c	-0.4130	-1.0651	-1.0530	-1.0191
τ_{lt}	5.893	6.680	7.021	6.938
γ_{lt}	0.00485	0.00621	0.01854	0.02281

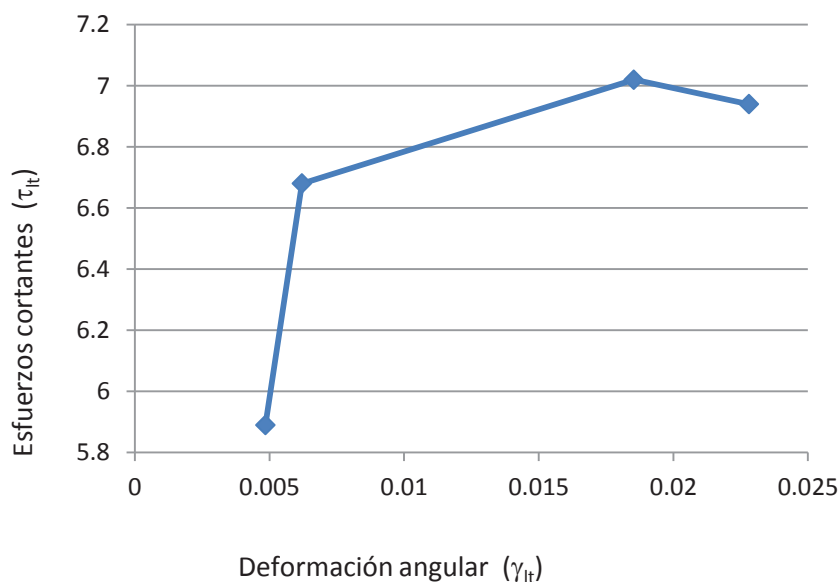


Figura 3.22 Curva τ_{lt} vs γ_{lt}

3.5 CONCLUSIONES

Como se observa en la Figura 3.22 al incluir los coeficientes Hsu/Zhu en el análisis del elemento membrana se pueden calcular los valores de la rama descendente en la curva (τ_{lt} vs γ_{lt}). Determinar la rama descendente es importante como se mencionó en el Capítulo 1, ya que bajo condiciones de sismo severo, la filosofía de diseño es hacer una estructura tan dúctil como sea posible, tal que se eviten su colapso y la pérdida de vidas. Una rama descendente larga incrementa significativamente la ductilidad y la capacidad de la estructura de absorber energía. Además, después de que el concreto alcanza la resistencia a compresión y llega a la rama de descenso, la rigidez de la estructura disminuye dramáticamente. Con la rápida disminución de la carga sísmica, debido a la pérdida de rigidez, la estructura tiene más probabilidades de escapar del colapso total.

CAPÍTULO 4

ESPECIFICACIONES POR CORTANTE AASHTO LFD Y LRFD

4.1 INTRODUCCIÓN

Los modelos Puntal-Tensor han sido empleados como una herramienta muy efectiva para el diseño de estructuras de concreto reforzado. La idea de un Modelo Puntal-Tensor viene del método de la analogía de la armadura introducida por Ritter (1899) y Morsch (1920) a principios de los años 1900 para diseño por cortante. Su modelo empleo un modelo armadura que fue la base de su diseño. El modelo fue usado para idealizar el flujo de fuerzas en una viga agrietada de concreto reforzado.

Todos los elementos de una estructura son diferentes, por lo tanto cuando son sometidos a cortante y flexión experimentan un complejo comportamiento antes de la falla; por lo tanto, cuando se formula un modelo puntal-tensor deben ser considerados en el análisis.

Más tarde, Schlaich, et al (1987) trabajaron en elementos de concreto reforzado de manera tal que el modelo pudiera ser usado para una estructura completa.

El Modelo Puntal-Tensor es una herramienta de diseño y análisis para elementos de concreto reforzado en los cuales se puede suponer que los esfuerzos producidos por la flexión y el cortante son conducidos internamente por medio de una armadura compuesta de puntales a compresión y tensores a tensión.

4.2 ZONIFICACIÓN DE UN ELEMENTO

Primeramente, los elementos estructurales deben ser clasificados por regiones: regiones B, en las cuales la teoría de las vigas puede ser empleada, tienen un estado interno de esfuerzos que puede ser fácilmente deducido de las fuerzas seccionales, por ejemplo flexión, cortante, etcétera y las regiones discontinuas o regiones D (Schlaich et al, 1987), en la Figura 4.1 se exponen algunos ejemplos. Estas dos regiones se distinguen una de la otra por las siguientes características:

- Region-B (B por Bernoulli), en la cual la teoría de la distribución lineal de deformaciones es aplicable. Las regiones B se diseñan en las bases del modelo armadura.
- Regiones D (D de discontinuidad), es referida a abruptos cambios de las cargas y las reacciones; o a la discontinuidad en la geometría de un elemento estructural como agujeros o cambios en la sección transversal. El principio de Saint Venant señala que los esfuerzos debidos a cargas axiales y flexión se acercan a una distribución lineal, a una distancia aproximadamente igual a la altura total del elemento h medida desde la discontinuidad.

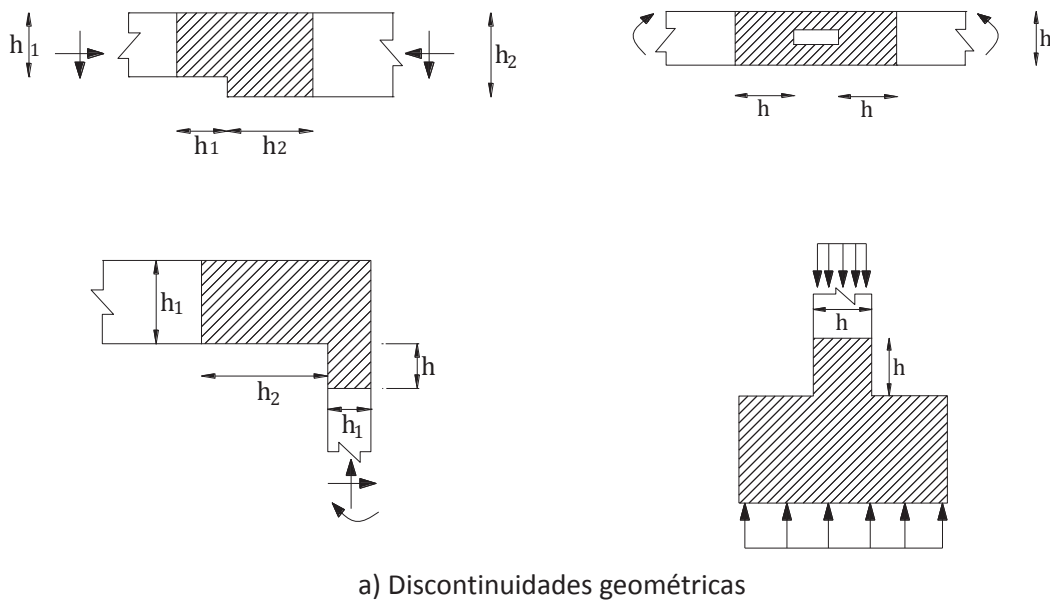
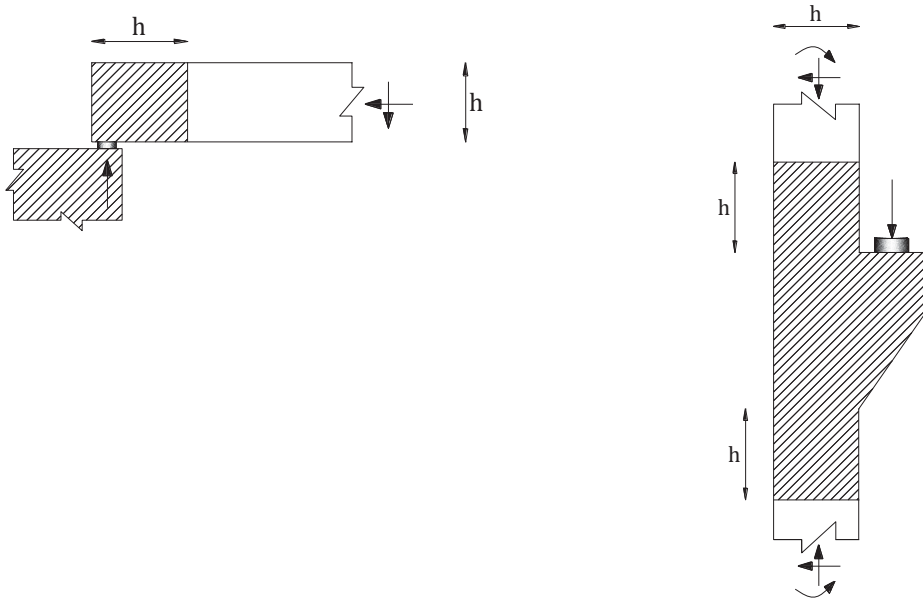


Figura 4.1 Regiones D (Sombreadas) con distribución no-lineal de deformaciones



b) Discontinuidades geométricas y/o estáticas

Figura 4.1 Regiones D (Sombreadas) con distribución no-lineal de deformaciones (Continuación)

Cuando las regiones D no están agrietadas, estas pueden ser analizadas por medio de un método de esfuerzos elásticos, aplicando la Ley de Hook. Sin embargo, si la sección esta agrietada existen pocas aproximaciones de diseño aceptables.

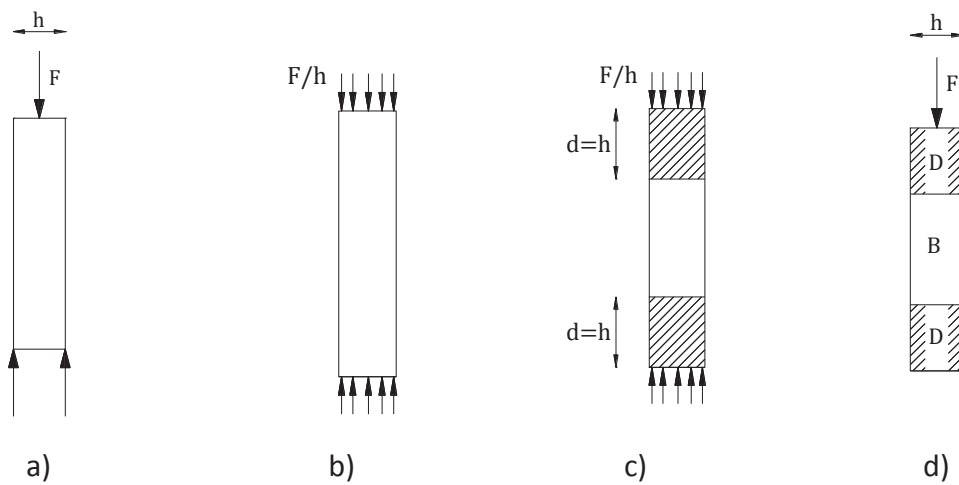


Figura 4.2. Columna con diferentes puntos de carga

Para determinar la división aproximada entre las regiones B y D se propone el siguiente procedimiento (Figura 4.2):

1. Reemplazar la estructura real por una ficticia, la cual está cargada de modo tal que cumple con la hipótesis de Bernoulli y satisface el equilibrio de fuerzas de la sección. Así, se determina una de las regiones B.
2. Seleccionar un estado de equilibrio de esfuerzos (c) el cual, si es superpuesto sobre (b), satisface las condiciones límite reales de (a).
3. Aplicando el principio de Saint-Venant, encontramos que los esfuerzos son despreciables a una distancia h de las fuerzas de equilibrio, la cual es aproximadamente igual a la distancia máxima entre las mismas fuerzas. Esta distancia define el intervalo de las regiones D.

Actualmente se han realizado varios estudios y experimentos para analizar el fenómeno de la falla por cortante de las vigas de concreto reforzado. En los años pasados los códigos de diseño como el ACI (2001) y AASHTO(1996) han adoptado los principios del modelo Puntal-Tensor para el diseño de vigas de gran peralte. La definición de vigas de gran peralte es aplicable a cabezales y vigas de gran peralte (Figura 4.3 y 4.4).

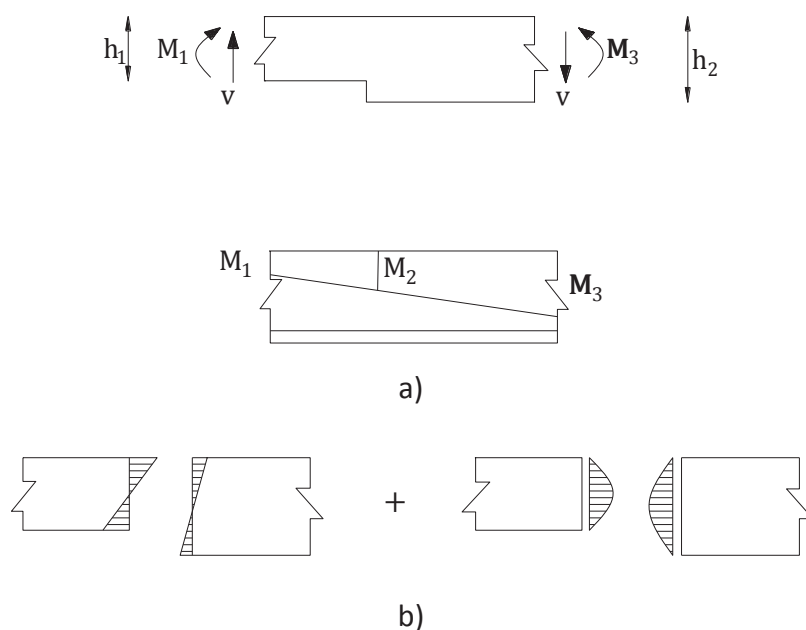
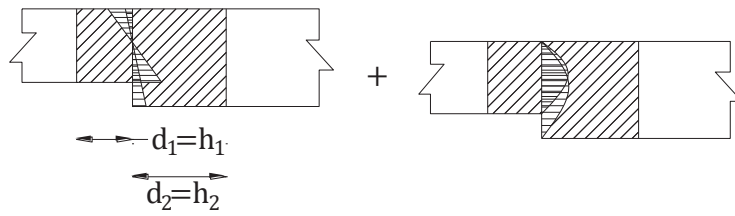
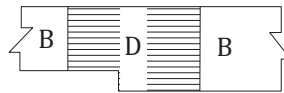


Figura 4.3. Vigas con discontinuidades

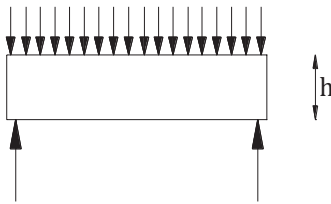


c)

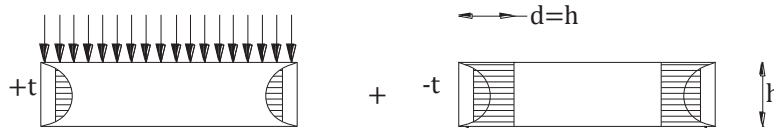


d)

Figura 4.3. Vigas con discontinuidades (Continuación)

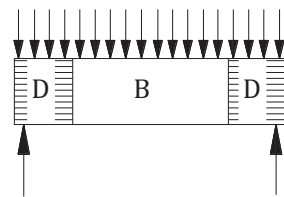


a)



b)

c)



d)

Figura 4.4. Viga simplemente soportada

4.3 ELEMENTOS DE UN MODELO PUNTAL-TENSOR

Como se mencionó anteriormente, un modelo puntal-tensor está compuesto de tres elementos: Puntales, tensores y nodos. Las diferentes zonas se pueden identificar usando una viga de gran peralte, como se muestra en la Figura 4.5.

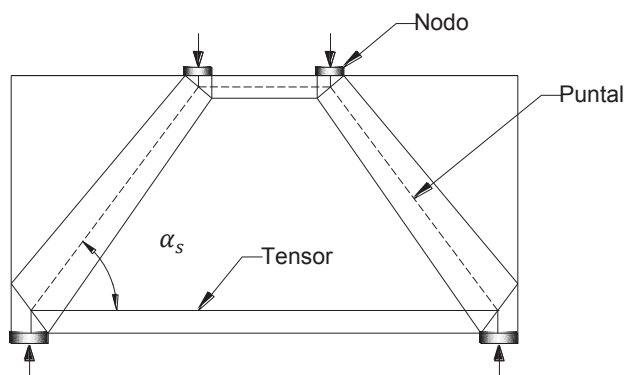


Figura 4.5 Ilustración de los diferentes componentes de un modelo puntal-tensor, usando una viga de gran peralte

Un sistema donde la distribución de esfuerzos en una estructura es idealizada con las siguientes funciones y material:

Tabla 4.1 Elementos de un modelo Tensor-Puntal

Elementos	Función	Material
Puntal	Elemento a compresión	Concreto
Tensor o estribo	Elemento a tensión	Refuerzo
Nodo	Conexión	Concreto

4.3.1 PUNTALES

Muchos investigadores y especificaciones de diseño limitan los esfuerzos de compresión en un puntal al producto de la resistencia a compresión del concreto f'_c y un factor de reducción. El factor de reducción es función de la forma geométrica del puntal. La forma del puntal depende de la trayectoria de las fuerzas de las cuales surge, y de los detalles del tensor de refuerzo al que se conecta. Schlaich y Schäfer (1991) consideran que hay tres formas geométricas para los puntales: Prismáticos, en forma de botella y abanico de

compresión. La Figura 4.6 muestra las tres formas geométricas de un puntal aplicadas a una viga de gran peralte.

Los puntales prismáticos tienen una sección transversal uniforme, son usados para modelar el bloque de esfuerzos de compresión de un elemento viga, esto se puede observar en la Figura 4.6a.

Los puntales en forma de botella se forman cuando las condiciones geométricas al final del puntal están bien definidas, pero el resto del puntal no tiene una configuración definida. La mejor forma de visualizar los puntales en forma de botella es la configuración mostrada en la Figura 4.6b. La trayectoria de los esfuerzos de compresión forma un bulbo, esto causa esfuerzos de tensión transversal que provocan el agrietamiento longitudinal del puntal. Se debe colocar un refuerzo transversal adecuado a lo largo del puntal para evitar la falla prematura, las normas de diseño especifican un mínimo de refuerzo en las zonas diseñadas con un MTP (Modelo Puntal-Tensor).

La mayoría de los puntales tienen forma de abanico de compresión. Los abanicos de compresión se forman cuando los esfuerzos fluyen de un área grande a una mucho más pequeña, se considera que no tienen curvatura y por lo tanto no desarrollan esfuerzos de tensión transversal. Un ejemplo de este tipo de puntal se puede ver en la Figura 4.6c.

Las disposiciones del Modelo Puntal-Tensor de las AASHTO LRFD (1996) Bridge Design Specifications no requieren de la identificación del tipo de puntal para determinar las limitantes de los esfuerzos de compresión.

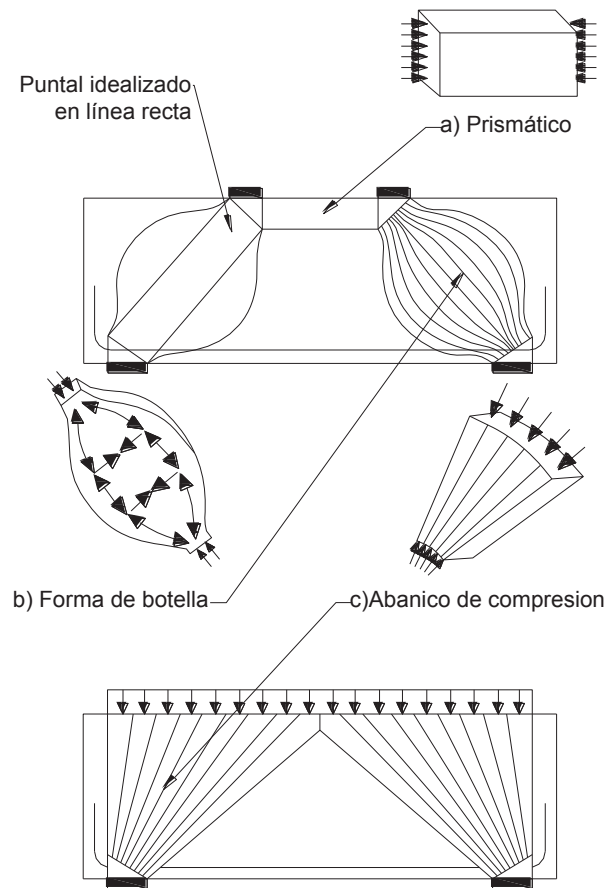


Figura 4.6 Formas geométricas de un puntal

4.3.2 TENSORES

Como ya se menciona anteriormente los tensores en un MTP, son los miembros que están sujetos a fuerzas de tensión. Se considera que la resistencia a tensión del concreto es nula y por lo tanto se desprecia. Sólo al acero de refuerzo o presfuerzo se considera que contribuye a la resistencia a tensión, también, resulta mucho más fácil determinar la capacidad de este sólo elemento. Muchas de las especificaciones de diseño determinan la resistencia de los tensores multiplicando el área de la sección transversal del acero de refuerzo por su resistencia a la fluencia. El diseñador debe tomar en cuenta el correcto anclaje del tensor para asegurar que éste desarrolle su resistencia antes de alcanzar la falla del elemento estructural.

Un tensor no presforzado se considera que alcanza su capacidad cuando la fuerza tiene un valor,

$$T_n = A_s f_y$$

donde f_y es la resistencia de fluencia del acero de refuerzo, A_s es el área del acero de refuerzo y T_n es la fuerza de tensión.

Un segundo término, Δf_p , se incluye cuando el tensor es presforzado.

4.3.3 CLASIFICACIÓN DE LOS NODOS Y LAS ZONAS NODALES

Los nodos son los puntos donde las fuerzas axiales en los puntales y los tensores se interceptan, y las zonas nodales son las regiones alrededor de las áreas de unión en la cual los miembros están conectados. Para equilibrio vertical y horizontal en el nodo, deben estar actuando un mínimo de 3 fuerzas en él (Figura 4.7).

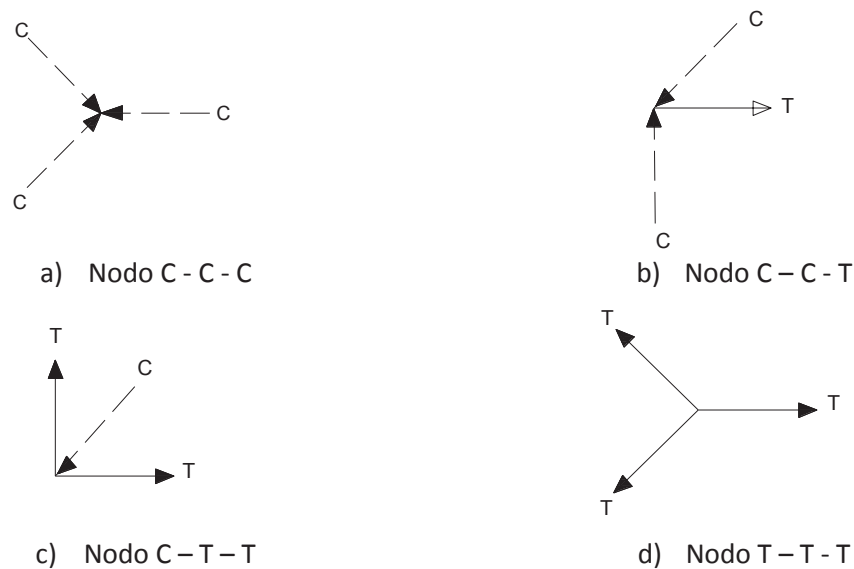


Figura 4.7 Clasificación de nodos

Los nodos se clasifican por el tipo de fuerzas que se unen a él. Los nodos pueden clasificarse como hidrostáticos o no-hidrostáticos. En un nodo hidrostático los esfuerzos actúan en dirección perpendicular a la superficie de sus caras, no existen esfuerzos cortantes actuando en la cara de este tipo de nodos. Sin embargo, obtener nodos hidrostáticos para un MTP es casi imposible y, por esta razón muchos MTP utilizan nodos

no-hidrostáticos. Para los nodos no-hidrostáticos, Schlaich et al. (1987) sugiere que la relación del máximo esfuerzo y el mínimo esfuerzo en la cara de un nodo no debe ser menor que 2. En la Figura 4.8 se muestran ambos tipos de nodos.

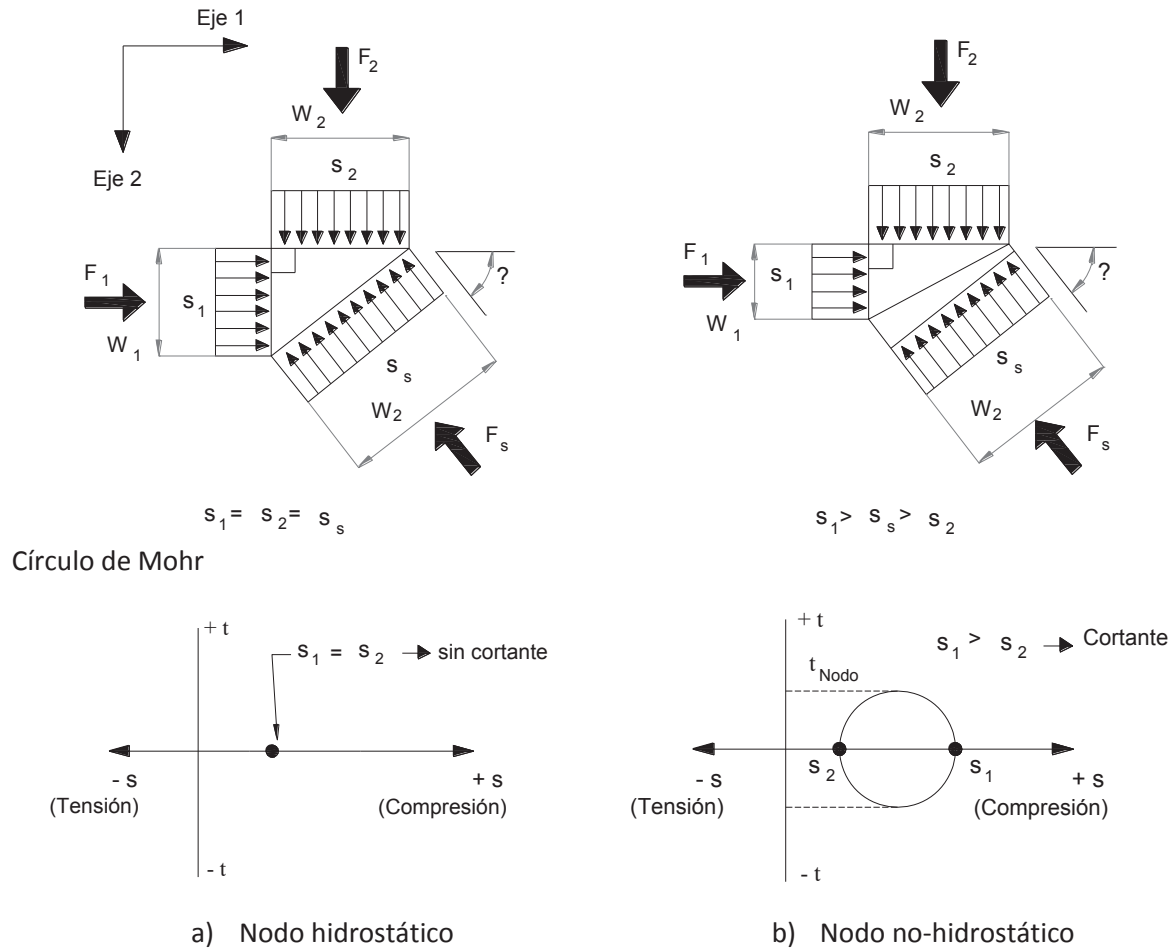


Figura 4.8 Estado de esfuerzos en un nodo hidrostático y no-hidrostatico (Brown et al. 2006)

4.4 ESPECIFICACIONES ESTÁNDAR AASHTO LFD Y LRFD (FACTORES DE CARGA Y RESISTENCIA)

4.4.1 ESPECIFICACIONES AASHTO LFD

4.4.1.1 DISEÑO POR FLEXIÓN

Las especificaciones estándar AASHTO (1996) primero presentan la cantidad máxima de refuerzo para miembros en flexión. El artículo 8.16.3.1.1 afirma que el porcentaje de refuerzo ρ proporcionado no debe de exceder 0.75 del porcentaje ρ_b que produciría la falla balanceada de la sección. El porcentaje de ρ_b para refuerzo de compresión no necesita ser reducido por el factor 0.75. El artículo 8.16.3.1.2 afirma que la condición de falla balanceada existe para una sección transversal cuando el refuerzo de tensión alcanza la deformación correspondiente a su esfuerzo de fluencia, f_y , al igual que el concreto alcanza su deformación última considerada de 0.003.

Las especificaciones estándar AASHTO (1996) siguen el diseño tradicional a flexión en secciones de concreto. En las especificaciones se presentan tres casos: secciones rectangulares sólo con refuerzo de tensión, secciones con alma sólo con refuerzo de tensión y secciones rectangulares con refuerzo de tensión y compresión. Dos casos para diseño de flexión se ilustran en las Figuras 4.9 y 4.10.

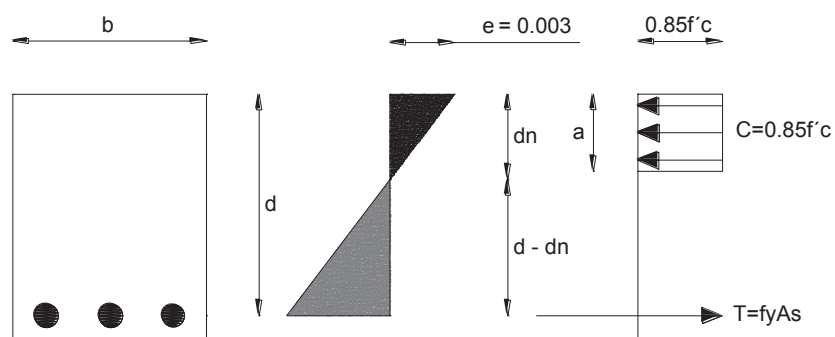


Figura 4.9 Sección rectangular solo con refuerzo de tensión

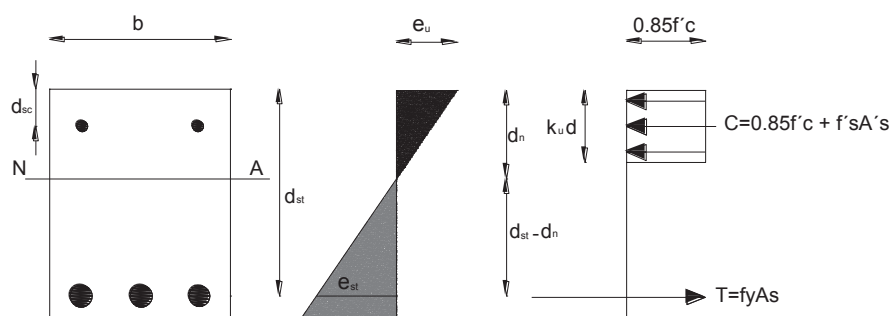


Figura 4.10 Sección rectangular con refuerzo de compresión y tensión

En el artículo 8.16.3.2.1 especifica las ecuaciones para momento resistente, ϕM_n , para secciones rectangulares sólo con refuerzo de tensión:

$$\begin{aligned}\phi M_n &= \phi \left[A_s f_y d \left(1 - 0.6 \frac{\rho f_y}{f'_c} \right) \right] \\ &= \phi \left[A_s f_y \left(d - \frac{a}{2} \right) \right]\end{aligned}\quad (4.1)$$

donde

$$a = \frac{A_s f_y}{0.85 f'_c b} \quad (4.2)$$

El porcentaje de refuerzo balanceado, ρ , esta dado por el artículo 8.16.3.2.2 como:

$$\rho_b = \frac{0.85 \beta_1 f'_c}{f_y} \left(\frac{87000}{87000 + f_y} \right) \quad (4.3)$$

Cuando el espesor de la zona de compresión es igual o mayor que la profundidad del bloque rectangular equivalente de esfuerzos, a , la resistencia del momento de diseño puede ser calculada por:

$$\phi M_n = \phi \left[(A_s - A_{sf}) f_y (d - a/2) + A_{sf} f_y (d - 0.5 h_f) \right] \quad (4.4)$$

donde

$$A_{sf} = \frac{0.85f'_c(b - b_w)h_f}{f_y} \quad (4.5)$$

$$a = \left(\frac{(A_s - A_{sf})f_y}{0.85f'_c b_w} \right) \quad (4.6)$$

y el porcentaje de refuerzo balanceado es:

$$\rho_b = \left(\frac{b_w}{b} \right) \left[\left(\frac{0.85\beta_1 f'_c}{f_y} \right) \left(\frac{87000}{87000 + f_y} \right) + \rho_f \right] \quad (4.7)$$

donde

$$\rho_f = \frac{A_{sf}}{b_w d} \quad (4.8)$$

El artículo 8.16.3.4.1 da las siguientes ecuaciones para el momento resistente, ϕM_n , para secciones rectangulares con refuerzo de tensión y compresión como:

si

$$\left(\frac{A_s - A'_s}{bd} \right) \geq 0.85\beta_1 \left(\frac{f'_c d'}{f_y d} \right) \left(\frac{87000}{87000 - f_y} \right) \quad (4.9)$$

entonces,

$$\phi M_n = \phi [(A_s - A'_s)f_y(d - a/2) + A'_s f_y(d - d')] \quad (4.10)$$

donde

$$a = \frac{(A_s - A'_s)f_y}{0.85f'_c b} \quad (4.11)$$

En el artículo 8.16.3.4.3 especifica que cuando el valor de $(A_s - A'_s)/bd$ sea menor que el requerido por la ec. 4.9, de modo que el esfuerzo en el refuerzo de compresión sea menor que la resistencia de fluencia, f_y , o cuando los efectos de los esfuerzos de compresión sean menores que la resistencia de fluencia, o cuando los efectos del refuerzo

de compresión sean despreciables, la resistencia del momento de diseño puede ser calculada por las ecuaciones del artículo 8.16.3.2.

El artículo 8.16.3.4.3 da el porcentaje de refuerzo balanceado ρ_b para una sección rectangular con refuerzo de compresión como se muestra enseguida:

$$\rho_b = \left[\left(\frac{0.85\beta_1 f'_c}{f_y} \right) \left(\frac{87000}{87000 + f_y} \right) + \rho' \left(\frac{f'_s}{f_y} \right) \right] \quad (4.12)$$

donde

$$f'_s = 87000 \left[1 - \left(\frac{d'}{d} \right) \left(\frac{87000 + f_y}{87000} \right) \right] \leq f_y \quad (4.13)$$

4.4.1.2 DISEÑO POR CORTANTE

El cortante de diseño en las especificaciones estándar se obtiene calculando la contribución tanto del concreto como del acero. Las especificaciones estándar proporcionan las siguientes ecuaciones para el diseño de una sección transversal sujeta a cortante:

$$V_u \leq \phi V_n \quad (4.14)$$

donde V_u es la fuerza cortante factorizada de la sección considerada y V_n es la resistencia a cortante calculada por:

$$V_n = V_c + V_s \quad (4.15)$$

donde V_c es la resistencia a cortante del concreto de acuerdo con el artículo 8.16.6.2, y V_s es la resistencia a cortante del refuerzo de acuerdo con el artículo 8.16.6.3. Cuando sean aplicables los efectos de torsión se deben considerar.

Cuando el miembro de concreto esté sujeto sólo a cortante y flexión, V_c , debe ser calculada por:

$$V_c = \left(1.9 \sqrt{f'_c} + 2500 \rho_w \frac{V_u d}{M_u} \right) b_w d \quad (4.16)$$

ó,

$$V_c = 2\sqrt{f'_c}b_wd \quad (4.17)$$

donde b_w es el ancho del alma y d es la distancia del centroide a la fibra extrema en compresión del refuerzo longitudinal de tensión.

Las Especificaciones Estándar proporcionan las siguientes dos notas para la resistencia a cortante del concreto:

- a) V_c no debe exceder $3.5\sqrt{f'_c}b_wd$ cuando se haga un cálculo más detallado.
- b) La cantidad $V_u d/M_u$ no será más grande que 1.0, donde M_u es el momento factorizado ocurriendo simultáneamente con V_u .

Cuando la fuerza cortante factorizada V_u excede la resistencia a cortante ϕV_c , se debe proporcionar refuerzo de cortante para satisfacer las ecuaciones (4.16) y (4.17), pero no debe ser menor que el valor especificado por el artículo 8.19. Las Especificaciones Estándar proporcionan las ecuaciones para tres casos de refuerzo.

El primero es cuando el refuerzo de cortante es perpendicular al eje del miembro:

$$V_s = \frac{A_v f_y d}{s} \quad (4.18)$$

donde A_v es el área de refuerzo de cortante a una distancia s .

Cuando se usan estribos inclinados:

$$V_s = \frac{A_v f_y (\sin \alpha + \cos \alpha) d}{s} \quad (4.19)$$

Cuando una simple barra o un grupo de barras paralelas todas dobladas a la misma distancia del soporte se usa:

$$V_s = A_v f_y \sin \alpha \leq 3\sqrt{f'_c}b_wd \quad (4.20)$$

Las especificaciones Estándar limitan la resistencia a cortante que el acero puede proporcionar. El artículo 8.16.6.3.9 afirma que la resistencia a cortante V_s no debe ser mayor que:

$$V_s = 8\sqrt{f'_c b_w d} \quad (4.21)$$

4.4.2 ESPECIFICACIONES AASHTO LRFD

Las especificaciones Estándar AASHTO (1988) describen que la estructura y un componente o región, puede ser modelado como la unión de un tensor de acero a tensión y un puntal de concreto a compresión, interconectados en los nodos para formar una armadura que sea capaz de transmitir las cargas aplicadas a los soportes. Para determinar la geometría de la armadura se considerará el ancho del puntal de compresión y el tensor de tensión.

La resistencia factorizada, P_r , deberá satisfacer las limitaciones de fuerza dadas por la siguiente expresión:

$$P_r = \phi P_n \quad (4.22)$$

donde P_n es la resistencia nominal del puntal o del tensor, ϕ es el factor de resistencia para tensión o compresión como se especifica en el artículo 5.5.4.2

4.4.2.1 PUNTAL DE COMPRESIÓN

Las Especificaciones AASHTO LRFD (1996) dan la ecuación de resistencia para puntales comprimidos con o sin refuerzo. La resistencia de un puntal de compresión sin refuerzo se tomará como:

$$P_n = f_{cu} A_{cs} \quad (4.23)$$

donde: P_n es la resistencia nominal de un puntal comprimido, f_{cu} el esfuerzo de compresión límite, como se especifica en el artículo 5.6.3.3.3 (Mpa), A_{cs} el área transversal efectiva del puntal, artículo 5.6.3.3.2 (mm^2)

AASHTO (1988) especifican que si el puntal de compresión contiene refuerzo paralelo al puntal y desarrolla su esfuerzo de fluencia en compresión, la resistencia del puntal se tomará como:

$$P_n = f_{cu}A_{cs} + f_y A_{ss} \quad (4.24)$$

donde A_{ss} es el área del refuerzo en el puntal (mm^2)

El valor de A_{cs} será determinado considerando tanto el área de concreto disponible, como las condiciones de anclaje al final del puntal, en la Figura 4.11 se muestra esta condición.

Cuando un puntal es anclado por el refuerzo, se considera que el área de concreto efectiva se extiende a una distancia de seis diámetros de varilla, como se muestra en la Figura 4.11a.

Como se menciono anteriormente, el puntal presenta un campo de esfuerzos, el cual no deberá exceder la resistencia a compresión del concreto. Las especificaciones AASHTO (1996) proporcionan un límite para los esfuerzos de compresión:

$$f_{cu} = \frac{f'_c}{0.8 + 170\varepsilon_1} \quad (4.25)$$

donde $\varepsilon_1 = \varepsilon_s + (\varepsilon_s + 0.002)\cot^2\alpha_s$, (4.26)

α_s es el ángulo más pequeño entre el puntal de compresión y el tensor ($^\circ$), ε_s la deformación del concreto en la dirección del tensor (mm/mm) y f'_c la resistencia a compresión (Mpa).

4.4.2.2 PUNTAL DE TENSIÓN

Las especificaciones AASHTO (1996) manifiestan, que el tensor de refuerzo deberá ser anclado a la zona nodal por medio de una longitud de empotramiento específica, ganchos o anclaje mecánico. La fuerza de tensión se desarrollará en la cara interna de la zona nodal. La resistencia nominal de una barra de tensión se tomará como:

$$P_n = f_y A_{st} + A_{ps} [f_{pe} f_y] \quad (4.27)$$

donde A_{st} es el área total de acero de refuerzo en el tensor (mm^2), A_{ps} es el área de acero de presfuerzo (mm^2), f_y es la resistencia de fluencia del acero de refuerzo longitudinal (Mpa) y f_{pe} son los esfuerzos en el acero presforzado debido al presfuerzo después de las pérdidas (Mpa).

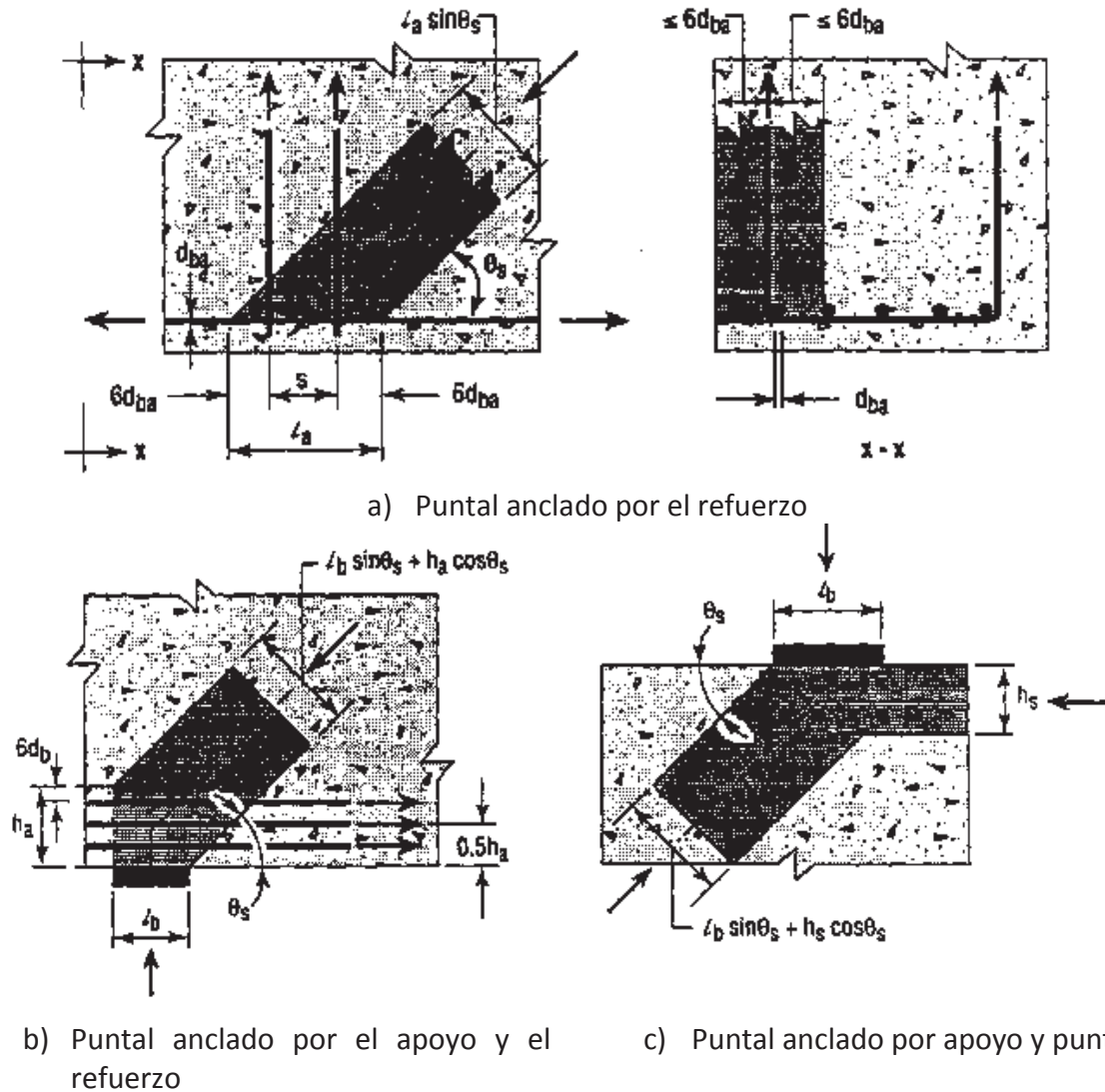


Figura 4.11 Influencia de las condiciones de anclaje en el área efectiva de un puntal

4.4.2.3 ZONAS NODALES

Las especificaciones AASHTO manifiestan que sea proporcionado refuerzo de confinamiento, y su aprobación es apoyada por el análisis y experimentación, los esfuerzos de compresión en la región nodal no deben exceder:

- Para regiones nodales limitadas por puntales de compresión y áreas de apoyo: $0.85f'_c$
- Para regiones nodales ancladas a una dirección: $0.75\Phi f'_c$
- Para regiones nodales anclando un tensor en más de una dirección : $0.65\Phi f'_c$
- Φ el factor de resistencia para apoyos sobre concreto como se especifica en el artículo 5.5.4.2.

Las especificaciones AASHTO (1988) manifiestan que el tensor de refuerzo deberá estar uniformemente distribuido sobre un área efectiva de concreto al menos igual a la fuerza de tensión dividida por el esfuerzo limite especificado aquí.

CAPÍTULO 5

REPARACIÓN DE COLUMNAS CIRCULARES DE PUENTES CON FIBRAS DE POLÍMEROS

5.1 JUSTIFICACIÓN

Es indudable que la infraestructura, particularmente la del transporte, constituye un elemento indispensable para el crecimiento económico, la competitividad y la integración social de un país. En México, La Red Carretera Federal Libre de Peaje tiene una longitud de 45,405.7 km y es atendida por la Secretaría de Comunicaciones y Transportes (SCT) a través de la Dirección General de Conservación de Carreteras (DGCC). Las carreteras Federales libre de peaje no son tan “impresionantes” como el sistema de carreteras de cuota, sin embargo sirven de comunicación de un gran número de comunidades y municipios que también forman parte del territorio mexicano y que contribuyen activamente en el desarrollo económico y social del País. Por esta razón es meritorio que los puentes que forman este sistema se mantengan en buen estado y que después de la ocurrencia de un evento sísmico permanezcan abiertos al tránsito de emergencia. En México las fallas que se han producido en puentes debido a sismos, no han sido tan numerosas y la mayoría de las fallas en la Red Carretera Mexicana y en los puentes urbanos existentes en el Distrito Federal han sido de otro tipo (Hernández y Campos, 2008). Sin embargo el puente Coahuayana, ubicado en el Estado de Colima, tuvo diversos daños como consecuencia del sismo de 1995. Otro caso se produjo en el puente Manzanillo, ubicado en la carretera Colima–Manzanillo, durante el sismo ocurrido en 2003 en Tecomán.

Muchos de los puentes carreteros que se encuentran en la red fueron diseñados durante los años de 1960 a 1970, y posiblemente sin considerar en su diseño la carga sísmica. Lo anterior está relacionado con la década en que la gran mayoría de los puentes de la Red Carretera Libre de peaje fueron construidos y diseñados, además considerando que en la práctica profesional por lo general las cargas y la filosofía de diseño es tomada de las Normas AASHTO (American Association of State Highway and Transportation Officials). Lo anterior, en parte, debido a que no existía una normatividad o sugerencia de diseño de

puentes en México, sino hasta la aparición del Manual de Diseño Sísmico, de la Comisión Federal de Electricidad en 2008.

5.1.1 PUENTES VEHICULARES DEL ESTADO DE MICHOACÁN

El Estado de Michoacán, México, se encuentra ubicado en una de las zonas sísmicas con mayor actividad y es el Estado con mayor número de puentes vehiculares en el País. Cuenta con 473 puentes distribuidos en 12 rutas (Figura 5.1), todas ellas son importantes para el desarrollo económico y social de la región. La ruta 200 tiene un trazo casi paralelo a la costa del Océano Pacífico, en una zona sísmicamente activa, y por ella transita gran cantidad de los productos que ingresan a México por barco en el puerto de Lázaro Cárdenas. La ruta 37 prácticamente comunica el interior del País con dicho puerto, atravesando todo el Estado.



Figura 5.1 Red carretera libre de peaje de Michoacán

En la Tabla 5.1 se muestra la distribución, el número y la década en la que se construyeron los puentes, en cada una de las rutas de la red carretera del Estado.

Tabla 5.1. Periodo de construcción y número de puentes por ruta.

Número total	Ruta	Periodo de construcción (década)							
		1930	1940	1950	1960	1970	1980	1990	2000
38	43						17	10	11
103	200			2	4	83	10	4	
35	51	1		2	28	3			
10	110			8			1	1	
139	126		2	10	10	13	18	73	13
41	37		4	32		1		2	2
35	15	1	16		11	1	1	5	
55	120		41	7	2		4	1	
3	61				3				
3	90				2	1			
5	35					2	1	2	
6	S/N				3	1		2	
473	Total	2	63	62	63	105	52	100	26

En la Figura 5.2 se muestra el número de puentes que se construyeron desde 1930, hasta la década actual. Como se observa 295 puentes (62%) se construyeron antes de la década de los años 80, y fueron diseñados con las recomendaciones de carga y criterios sísmicos de diseño de las Normas AASHO de esa época.

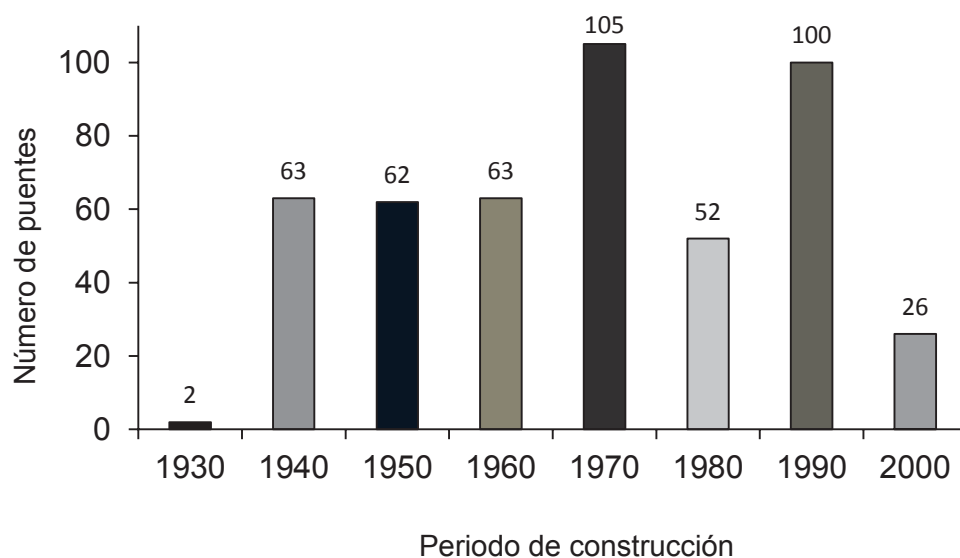


Figure 5.2 Número de puentes construidos por década

La carga de diseño de la mayoría de los puentes de la red carretera libre de peaje de Michoacán fue la carga HS20-44, sin embargo, actualmente circulan vehículos mucho más pesados. Lo anterior ha ocasionado fallas estructurales en algunos puentes, principalmente por cortante en zonas próximas a los apoyos. En la Figura 5.3 se muestra el puente Palo Alto IV, construido en 1965, debido a que las condiciones de carga de servicio se han modificado tiene grietas por cortante en la zona del apoyo.

5.1.2 PUENTES VEHICULARES DEL ESTADO DE GUERRERO

El Estado de Guerrero cuenta con 414 puentes en su red carretera libre de peaje, de los cuales 386 son puentes carreteros, lo que lo convierte en uno de los Estados con mayor número de estructuras de este tipo en la República. Al igual que Michoacán, Guerrero se encuentra en una zona potencialmente sísmica, debido a que en sus costas se han producido algunos de los sismos históricos con mayor intensidad. En el Estado de Guerrero existen siete rutas carreteras en su red libre de cuota distribuidas según su origen-destino en:

1. Iguala-Ciudad Altamirano (ruta 51) con 17 puentes carreteros
2. Chilpanzingo- Acatlán de Osorio (ruta 93) con 28 puentes carreteros
3. Cuernavaca-Chilpanzingo (ruta 95) con 33 puentes carreteros
4. Chilpanzingo-Acapulco (ruta 95) con 55 puentes carreteros
5. Toluca-Ciudad Altamirano (ruta 134) con 14 puentes carreteros
6. Ciudad Altamirano-Zihuatanejo (ruta 134) con 33 puentes carreteros
7. Chilpanzingo-Atoyac (ruta 196) con 8 puentes carreteros.
8. Zihuatanejo-Playa Azul (ruta 200) con 53 puentes carreteros
9. Acapulco-Zihuatanejo (ruta 200) con 92 puentes carreteros
10. Acapulco-Pinotepa Nacional (ruta 200) con 53 puentes carreteros



Puente Palo Alto IV



Carga viva H10



Carga viva HS-15



Carga viva T3-S3

Figure 5.3 Carga viva en el Puente Palo Alto IV

En la Figura 5.4 se muestra la distribución de las Rutas y los ramales que existen en cada una de ellas y su origen y destino. La ruta 200 está formada por tres tramos: Playa Azul (Michoacán)-Zihuatanejo, Zihuatanejo-Acapulco y Acapulco-Pinotepa Nacional (Lím. Oaxaca). Esta ruta es importante para el traslado y distribución de productos de consumo nacional que ingresan al País por el Puerto de Lázaro Cárdenas, Michoacán, además de ser parte de uno de los corredores turísticos más importantes. La ruta 200 corre casi paralela a la costa y tiene un total de 198 puentes carreteros.



Figura 5.4 Distribución de rutas carreteras libre de peaje en el Estado de Guerrero.

La unión del Puerto de Acapulco con el centro del País, es decir, Distrito Federal vía Cuernavaca, se realizaba hasta antes de la construcción de la Autopista del Sol, por la ruta 95 Cuernavaca-Chilpanzingo y Chilpanzingo–Acapulco. Por esta razón la ruta 95 fue y sigue siendo importante para la distribución de productos de consumo del País. La ruta 95 tiene en sus tramos respectivos 88 puentes.

En orden de importancia económica, la ruta 93 que va de la capital del Estado, Chilpanzingo, a Acatlán de Osorio con los límites del Estado de Puebla, tiene 28 puentes carreteros. El comercio interior en el Estado se realiza por la ruta 51, que va de Iguala a Ciudad Altamirano, con un total de 17 puentes carreteros, que además de estar en condiciones símicas adversas también están en una zona montañosa, susceptibles a socavación por las grandes precipitaciones pluviales durante la época de huracanes. No menos importantes son las rutas 134 que va de Toluca a Ciudad Altamirano y de Ciudad Altamirano a Zihuatanejo, con un total de 47 puentes carreteros y la ruta 196 que va de Chilpanzingo a Atoyac, con un total de 8 puentes carreteros.

Tabla 5.2 Periodo de construcción y número de puentes por ruta

Reconstruidos/año	Número total	Ruta	Periodo de construcción (década)								
			1920	1930	1940	1950	1960	1970	1980	1990	2000
4/1990	17	51					11				6
5/2000	28	93					28				
22/1989	88	95	1	1	1	3	53	9	10	6	4
1/1997	47	134					14	33			
1/2003	8	196						7		1	
51/1987	198	200			2	1	123	24	1	31	16
84	386	Total	1	1	3	4	229	73	11	38	26

Como se observa en la Tabla 5.2, en la década de los años 1960 se construyeron 229 puentes carreteros en el Estado de Guerrero, que representan el 58% del total de los puentes que actualmente existen. En la década de los años 1970 se construyeron 73 puentes es decir un 19% del total. Sólo 26 de los puentes existentes de construyeron en la década del 2000. Por la reseña histórica del desarrollo de las Normas AASTHO se podría decir que el 83% (Figura 5.5) de los puentes existentes en la Red libre de peaje de Guerrero, fueron diseñados con las normas anteriores a 1990, y en que en otros países no dieron diseños completamente confiables.

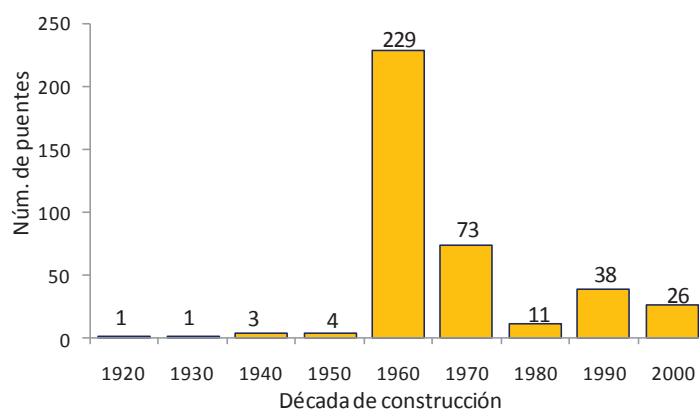


Figura 5.5 Relación número de puentes-década de construcción

Aunado con lo anterior, el poco control de las cargas vivas de diseño y el incremento del tránsito en la red carretera, ha generado que los puentes estén sometidos a cargas vivas diferentes a las del diseño original, ya que como se muestra en la Tabla 5.3, 168 puentes

(44%) fueron diseñadas con una carga H-15, circulando actualmente camiones de mayor peso y ejes sobre ello. En la Tabla 5.3 se muestra el número de puentes por ruta y el tipo de carga de diseño. Se observa que dos de las rutas más importantes, la 200 y la 95, tienen un 22 y 10% respectivamente del total de los puentes en el Estado diseñados con esta carga. Un comentario similar al anterior se puede hacer para los puentes diseñados con las cargas HS-15 y HS-20.

Tabla 5.3 Relación de número de puentes y carga de diseño, por ruta.

Carga de diseño	Ruta 51	Ruta 93	Ruta 95	Ruta 134	Ruta 196	Ruta 200	Suma
H-15	6	22	36	13	7	84	168
HS-15		1	8	33		32	74
HS-20	1		14			3	18
T3-S3	1		18		1	33	53
T3-S2-R4	9	5	12	1		46	73
suma	17	28	88	47	8	198	386

En la Red carretera libre de peaje de Guerrero, se han realizado ampliaciones de la superestructura en algunos de sus puentes, y en muchos de ellos se ha realizado un reforzamiento en la superestructura por medio de tendones presforzados aplicados externamente; se han realizado protecciones contra socavación y sólo en el puente El Cayaco, de la ruta 200 Acapulco-Zihuatanejo, en el año 2008 se reforzó la superestructura con fibra de carbono. Todos los refuerzos estructurales que se han realizado han sido en la superestructura por efecto del incremento de la carga vertical.

5.2 INTRODUCCIÓN

La efectividad del encamisado de elementos de concreto con Fibras de Polímeros, (FRP, Fiber Reinforced Polymers) como refuerzo sísmico, es bien conocida. Sin embargo, ha sido relativamente menos investigada su aplicación para la reparación del daño que puede presentarse en una columna después de un evento sísmico. Saadatmanesh et al. (1997) realizó pruebas experimentales en columnas de concreto reforzado reparando el daño que le produciría una excitación sísmica con encamisado de GFRP (Glass Fiber Reinforced Polymers). Colocó fibra de vidrio unidireccional en una matriz de poliéster que luego fue

colocada alrededor de la sección dañada de columnas de concreto. Las columnas fueron reparadas colocando bandas de FRP de 0.8 mm, el espesor se escogió con base en la cantidad de presión de confinamiento necesaria para retribuirle a la columna las propiedades estándar de diseño. Las columnas reparadas mostraron un importante incremento en el nivel de resistencia y ductilidad obtenido. Las columnas reparadas exhibieron un nivel de ductilidad entre 4 y 6, en lugar de la ductilidad de las columnas originales que tenían un nivel de ductilidad debajo de 1.5. Además las columnas reparadas mostraron una disminución en la velocidad de degradación de la rigidez en cada ciclo, comparada con la degradación de rigidez de las columnas originales, aunque las columnas reparadas mostraron un desplazamiento lateral mucho mayor ante bajos niveles de carga, lo cual es indicativo del daño existente.

Ma y Xiao (1999) investigaron el uso de encamisado de GFRP para reparar columnas de puentes circulares con un detallado pobre en acero. Las columnas fueron diseñadas con las recomendaciones de códigos de diseño hasta antes de 1971 y encontraron que en esas recomendaciones existían deficiencias, principalmente en el detallado y longitudes de traslapes del refuerzo. Las columnas fueron reparadas inyectándoles un epóxico en la zona dañada en donde se formó la articulación plástica y después se les colocaron cinco bandas de GFRP prefabricado con un espesor de cada una de 2.5 mm. Las columnas reparadas mostraron un incremento de ductilidad de 4 a 6. Los resultados de sus pruebas mostraron que la técnica de reparación usada mejora la rigidez, aumenta la ductilidad y la capacidad de absorber energía de las columnas probadas.

Lee et al. (2000) realizaron pruebas experimentales en columnas de concreto reforzado sujetas a una aceleración en la corrosión ambiental por medio de la aplicación de Cloruro de Sodio en la superficie de concreto y una carga eléctrica en el acero de refuerzo. Las columnas se sometieron a diversos ciclos de inmersión. Como resultado de la aceleración de la corrosión se perdió acero de refuerzo, se presentó agrietamiento y escamación en el concreto. Las columnas fueron reparadas usando bandas de fibras de carbono (CFRP) y mostraron un incremento de capacidad de carga del 28% con respecto a las columnas no reparadas y dañadas por la corrosión. Las columnas una vez reparadas se sometieron a

una aceleración en el proceso de corrosión, observándose que el proceso de corrosión disminuyó en un 50%. Además las columnas sujetas a corrosión no mostraron pérdida de rigidez y sólo una pequeña reducción en la ductilidad, comparadas con las columnas reparadas.

Li et al. (2003) probaron ocho columnas circulares de concreto reforzado reparadas con bandas de FRP, las columnas fueron diseñadas conforme a las recomendaciones del ACI 318. Las columnas se sometieron a cargas de tensión hasta que la falla ocurrió. Tres columnas dañadas fueron reparadas usando un recubrimiento de cuatro capas de CFRP adheridas con resina epóxica. Las pruebas mostraron que el encamisado de bandas de FRP incrementó significativamente el esfuerzo a la compresión de las columnas dañadas.

Tastani et al. (2006) probaron un total de 12 columnas cuadradas. Nueve de esas columnas fueron construidas de acuerdo a los estándares de diseño de épocas pasadas con inadecuado refuerzo transversal. Las restantes columnas se diseñaron conforme a la práctica moderna. Las columnas fueron sometidas a cargas de compresión hasta que se desprendió el recubrimiento. Las columnas fueron reparadas usando bandas de GFRP o CFRP de 1 a 2 capas de espesor. Las pruebas experimentales demostraron un incremento en la carga axial en las columnas reparadas cuando fueron comparadas con las columnas de control que no fueron reparadas pero también mostraron un incremento en la capacidad de deformación. En todos los casos, el modo de falla de las columnas fue por medio de la ruptura del encamisado del FRP en las esquinas de las columnas, seguido del pandeo longitudinal del acero de refuerzo de las columnas construidas con los estándares de diseño de anteriores ediciones.

Vosooghi y Saiidi (2008) probaron dos columnas circulares diseñadas para puentes. Las columnas fueron dañadas hasta un nivel de daño 4. En este estado de daño el concreto se aplasta severamente y el acero de refuerzo es visible. Este estado de daño también corresponde a aproximadamente un 8% de desplazamiento lateral. Las columnas fueron reparadas usando un encamisado de fibras de carbono (CFRP), el espesor de diseño se realizó usando las recomendaciones de Caltrans Memo 20-4. Se usaron dos láminas de

CFRP en la región en donde se formó la articulación plástica y una en la zona restante de la columna. Los autores concluyen que la técnica de refuerzo fue adecuada y que se restituyó la resistencia, capacidad de ductilidad y capacidad de deformación lateral, comparadas con las de las columnas originales. El 87% de la rigidez se restituyó.

5.3 ANÁLISIS DE DAÑO

Las actuales recomendaciones de diseño de puentes sugieren el uso del criterio del “no colapso”. Al diseñador se le permite una respuesta no lineal, de lo cual puede resultar una gran cantidad de daño, incluyendo agrietamiento y desprendimiento del concreto, fluencia de las barras de refuerzo y la posibilidad de rotura de algunas varillas de refuerzo. Por lo tanto, después de un evento sísmico una columna de un puente puede estar dañada, pero teóricamente es reparable. La clasificación visual del daño que sufre una columna es el primer paso en el proceso de reparación, dicha clasificación da la pauta para la determinación del estado de la columna y de la técnica de reparación.

5.4 ESTADOS DE DAÑO

Las recomendaciones para reparar estructuras de concreto son dictaminadas principalmente por los siguientes códigos: ACI, “American Concrete Institute”, el “Building Research Establishment”, Ltd. (BRE) y el “Concrete Society and International Concrete Repair Institute”. En el Manual de Reparación de Concreto (ACI, 2001) se establece el procedimiento para realizar la inspección visual del estado de daño y los correspondientes estados de daño. Se establecen cinco estados distintos de daño (Damage States, DS): desde DS-1 al DS-5. El estado de daño DS-1 corresponde a un daño ligero con mínimo agrietamiento, caracterizado por la formación de grietas por flexión y desprendimiento del recubrimiento no visible. El estado de daño DS-2 se caracteriza por tener daño ligero y se presenta con el primer desprendimiento del recubrimiento y son visibles grietas por cortante. El estado de daño DS-3 representa un daño moderado y está asociado a un agrietamiento excesivo y desprendimiento del recubrimiento. El estado de daño DS-4 está representado por un daño severo, en el cual el refuerzo transversal y el longitudinal es visible, se presentan grandes grietas y desprendimiento del concreto. El estado DS-5

corresponde a un daño severo y está asociado con la falla inminente, en él existe una propagación del agrietamiento hacia el núcleo del concreto. En la Tabla 5.4 se establecen las características de cada uno de los estados de daño señalados. Por lo general se consideran dos parámetros que determinan la posibilidad de que una columna sea reparada: (1) las deformaciones del refuerzo longitudinal y (2) las deformaciones en el acero transversal (deformación o abertura de los estribos). Se consideran estos parámetros ya que si el acero de refuerzo está deformado excesivamente, este puede llegar a la rotura y su reparación por medio de bandas o encamisado con FRP no sería adecuada. Por otro lado, si el refuerzo transversal está deformado o se puede decir que ya ha fluido, seguramente existe daño en el núcleo del concreto, razón por la que la reparación con esta técnica tampoco funcionará.

Tabla 5.4 Caracterización visual del estado de daño

Daño	Estado de Daño				
	1 (muy ligero)	2 (ligero)	3 (moderado)	4 (severo)	5 (muy severo)
Ancho de Grietas en el concreto	$< 0.10mm$	$0.10-0.30mm$	$0.30-1.0mm$	$1.0-3.0mm$	$> 5mm$
Oquedades	Poco visible	visible	Huecos de 10 mm de diámetro	Huecos entre 10 y 50 mm de diámetro	Huecos mayores de 50 mm de diámetro
Desprendimiento del recubrimiento	Poco visible	visible	Mayores que el tamaño del agregado	En áreas mayores de 150 mm de sección transversal	En áreas mayores de 150 mm de sección transversal

Los niveles de deformación en las varillas de refuerzo pueden estimarse visualmente, asociándolas a un estado de daño. Si se espera que las barras longitudinales pudieran fluir ya que el agrietamiento es visible, entonces se trata de un estado DS-1. Las barras longitudinales fluyen en este punto debido a la formación de la articulación plástica, por supuesto no se espera que las barras lleguen a la rotura ya que el estado de rotura de ellas no ha sido observado en ninguna de las clasificaciones del daño. De manera similar, si se

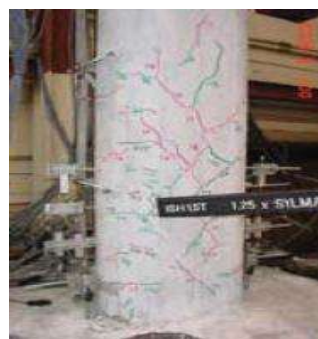
espera que fluyan las varillas del refuerzo transversal una vez que la grieta en el concreto se ha propagado hacia su núcleo, le correspondería un estado de daño DS-5. Si el acero ha fluido, la reparación de la columna por medio de la aplicación de FRP, ya no es posible. En la Figura 5.6 (Slater, 2008) se propone una relación entre los niveles de deformación del acero de refuerzo y el estado de daño al que le correspondería, además si es viable la reparación por medio de bandas de FRP, lo anterior se complementa con lo expuesto en la Tabla 5.5.

Tabla 5.5 Parámetros de la respuesta de daño con relación al estado de daño.

Estado de Daño	Nivel	DS-1	DS-2	DS-3	DS-4	DS-5
Máxima deformación en el acero longitudinal	Límite superior	0.00214	0.0132	0.0194	0.0231	0.0289
	Promedio	0.00917	0.0183	0.0263	0.0348	0.0425
	Límite inferior	0.0162	0.01235	0.0332	0.0466	0.0561
Máxima deformación en el acero transversal (microdeformaciones)	Límite superior	0.000172	0.000419	0.000632	0.00113	0.00143
	Promedio	0.000307	0.000694	0.00108	0.00167	0.00307
	Límite inferior	0.000442	0.000970	0.00152	0.00222	0.00472
¿Reparación con FRP?		No	Si			No

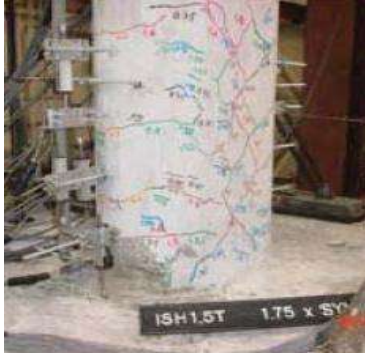


DS-1 Grietas por flexión



DS-2 Grietas por cortante y desprendimiento del recubrimiento

Figura 5.6 Descripción de los diferentes estados de daño en columnas



DS-3 Excesivo agrietamiento y desprendimiento del recubrimiento



DS-4 Acero de refuerzo visible



DS-5 Falla inminente, agrietamiento hacia el núcleo del concreto

Figura 5.6 Descripción de los diferentes estados de daño en columnas (Continuación)

5.5 MODELOS DE CONFINAMIENTO PARA COLUMNAS CIRCULARES

En la literatura aparecen diversos modelos de confinamiento para columnas circulares de concreto reforzado encamisadas con FRP. La columna confinada incrementa su resistencia debido a la restricción pasiva provista por el encamisado, el cual restringe la deformación transversal de la columna. Para una columna circular, la presión de confinamiento lateral provista por bandas de FRP, f_l , puede evaluarse por medio del diagrama de cuerpo libre

de la Figura 5.7.
$$f_l = \frac{2t_f f_f}{D} = \frac{2t_f E_f \epsilon_f}{D}$$

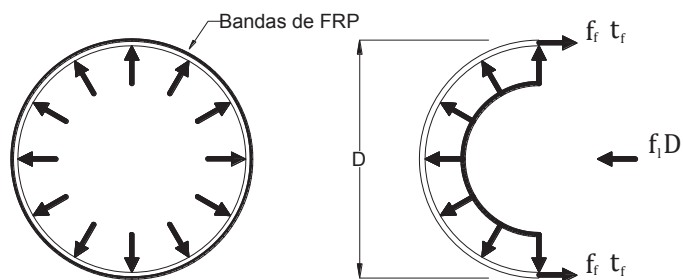


Fig. 5.7 Diagrama de cuerpo libre para el cálculo de fuerzas de confinamiento

De la Figura 5.7 resulta la siguiente relación para el cálculo de la presión de confinamiento lateral provista por bandas de FRP, f_l ,

$$f_l = \frac{2t_f f_f}{D} = \frac{2t_f E_f \varepsilon_f}{D} \quad (5.1)$$

Donde t_f es el espesor de las bandas de FRP de refuerzo, f_f es el esfuerzo a la tensión de las bandas de FRP en la dirección radial y D es el diámetro de la sección confinada de concreto, E_f y ε_f son el módulo de elasticidad y la deformación unitaria de las bandas de FRP en la dirección radial, respectivamente. Ya que el FRP se comporta elásticamente, la presión soportada por las bandas de refuerzo se incrementa proporcionalmente, en contraste con el acero quién provee una presión de confinamiento lateral constante.

El propósito de la reparación sísmica es incrementar la resistencia sísmica de las columnas incrementando la ductilidad de la columna y el esfuerzo axial. Hay cuatro formas principales de falla del encamisado con bandas de FRP: por flexión, por cortante, por longitud de desarrollo y por pandeo longitudinal de las barras.

La falla por flexión ocurre en la articulación plástica cerca del apoyo de la columna, dicha falla puede identificarse por el aplastamiento del concreto, falla del acero de refuerzo transversal y pandeo del acero longitudinal, el cual causa un deterioro de la zona de articulación plástica. Hay una gran deformación asociada con este modo de falla, por

tanto es considerado como un modo de falla dúctil y preferible al modo de falla por cortante. Un encamisado de FRP provee confinamiento para el modo de falla por flexión el cual incrementa el esfuerzo y la deformación última y provee apoyo lateral.

La falla por cortante, en contraste a la falla por flexión, es un modo de falla frágil, y por lo tanto es no deseable. Se caracteriza por la formación de grietas diagonales en la columna y subsecuente rotura del acero de refuerzo transversal. Las fallas por cortante se presentaron en estructuras construidas antes de 1970, lo cual quedo en evidencia en el sismo de San Fernando California, en donde se presentó una gran cantidad de fallas por cortante en columnas con insuficiente acero de refuerzo transversal dando insuficiente confinamiento. El encamisado con bandas de FRP pueden contribuir al esfuerzo por cortante de la columna y por tanto inhibir la falla por cortante.



Falla por cortante



Formación de articulación plástica



Deficiente longitud de desarrollo

Figura 5.8 Fallas comunes en columnas presentadas en 1989 durante el sismo de Loma Prieta.

La falla por insuficiente longitud de desarrollo es resultado de un inadecuado confinamiento en la zona de traslape del acero de refuerzo longitudinal. Por lo general, la región de traslape se presenta cerca de las cabezas de las columnas, donde inicia el refuerzo longitudinal que está anclado a la cimentación. La falla ocurre debido al ensanchamiento de la columna, el cual resulta del desprendimiento del concreto en la zona de traslape. La falla por insuficiente longitud de desarrollo de las varillas longitudinales puede observarse por el desprendimiento del concreto, formación de grietas verticales, rotura del acero de refuerzo transversal y pandeo del acero de refuerzo longitudinal. Similarmente a la falla por flexión, en la falla por insuficiente longitud de desarrollo, se presentan grandes formaciones, por lo que se puede considerar como una falla dúctil y deseable, en comparación con la falla por cortante. El encamisado con bandas de FRP en columnas inhibe la falla por falta de traslape a través de la aplicación de presión de confinamiento en la zona de posible falla, incrementándose la fuerza lateral de confinamiento y previniendo que ocurra el desprendimiento del concreto.

El modo de falla por pandeo lateral del refuerzo longitudinal es considerado como un modo de falla poco común y por lo general no se contempla en muchos códigos de diseño que pueda presentarse.

En Hernández et al. (2009) se encuentran las expresiones y características en las que se desarrollaron los modelos de confinamiento para elementos de concreto reforzado confinados por medio de bandas de FRP. En la Tabla 5.6 se resumen las expresiones propuestas para su cálculo y sus autores.

5.5.1 REVISIÓN DE LOS MODELOS DE CONFINAMIENTO

Richart et al. (1928) realizaron pruebas en cilindros de concreto con refuerzo helicoidal, dichos cilindros fueron sometidos a un confinamiento debido a presión hidrostática. Los resultados mostraron que el efecto del confinamiento incrementa el esfuerzo máximo del concreto y concluyeron que el esfuerzo máximo de confinamiento a la falla del concreto,

f'_{cc} , se puede expresar como una función lineal de la presión lateral de confinamiento, f_l ,

$$f'_{cc} = f'_{co} + k_1 f_l \quad (5.2)$$

Donde f'_{co} es el esfuerzo del concreto sin confinar y k_1 es el coeficiente efectivo de confinamiento, recomendado como $k_1 = 4.10$. Richart, también propuso un modelo para calcular la deformación longitudinales del concreto confinado en la falla, ε_{cc} ,

$$\varepsilon_{cc} = \varepsilon_{co} \left[1 + k_2 \frac{f_l}{f'_{co}} \right] \quad (5.3)$$

Donde $k_2 = 5k_1$ y $\varepsilon_{co} = 0.002$ es la deformación longitudinal en la falla del concreto no confinado.

Fardis y Khalili (1982) fueron los primeros en considerar el efecto del confinamiento del concreto debido al encamisado con FRP. Realizaron pruebas experimentales con cilindros de concreto encamisados con fibra de vidrio (GFRP) y los sometieron a pruebas de compresión. Ellos adoptaron la formula general para el esfuerzo del concreto,

$$f'_{cc} = f'_{co} \left[1 + k_1 \frac{f_l}{f'_{co}} \right] \quad (5.4)$$

Propusieron un valor para el coeficiente de confinamiento, k_1 , de:

$$k_1 = 3.7 \left[\frac{f_l}{f'_{co}} \right]^{-0.14} \quad (5.5)$$

Por lo que propusieron para el cálculo del esfuerzo del concreto confinado,

$$f'_{cc} = f'_{co} + 3.7 \left[\frac{f_l}{f'_{co}} \right]^{0.86} \quad (5.6)$$

Y las deformaciones correspondientes a la falla,

$$\varepsilon_{cc} = \varepsilon_{co} + 0.0005 \left[\frac{E_f t_f}{D f'_{co}} \right] \quad (5.7)$$

Donde E_f es el módulo de elasticidad del material de refuerzo de FRP.

Mander et al. (1988) dedujeron un modelo de confinamiento para el concreto, de pruebas experimentales en 17 cilindros de concreto con diversas relaciones de refuerzo helicoidal, y propusieron la siguiente relación para calcular el esfuerzo de confinamiento del concreto,

$$f'_{cc} = f'_{co} \left[-1.254 + 2.254 \sqrt{1 + 7.94 \frac{f_{le}}{f'_{co}}} - 2 \frac{f_{le}}{f'_{co}} \right] \quad (5.8)$$

Donde f_{le} es el esfuerzo lateral de confinamiento efectivo el cual depende de la cantidad de refuerzo. Mander sugirió considerar $f_{le} = f_l$ ya que el acero de refuerzo no es considerado. La deformación longitudinal del concreto confinado la calcula con,

$$\varepsilon_{cc} = \varepsilon_{co} \left[1 + 5 \left(\frac{f'_{cc}}{f'_{co}} - 1 \right) \right] \quad (5.9)$$

Cusson y Paultre (1995) desarrollaron un modelo con base en 27 prototipos de columnas cuadradas con concreto de alta resistencia y reforzados con acero de refuerzo. Para calcular el esfuerzo a la compresión del concreto confinado, los autores proponen la siguiente expresión:

$$f'_{cc} = f'_{co} \left[1 + 2.1 \left(\frac{f_{le}}{f'_{co}} \right)^{0.70} \right] \quad (5.10)$$

Donde f_{le} es el esfuerzo lateral de confinamiento efectivo el cual depende de la cantidad de refuerzo. Al igual que Mander, consideran que $f_{le} = f_l$. El esfuerzo a la deformación última del concreto confinado usando estribos como refuerzo, puede expresarse como:

$$\varepsilon_{cc} = \varepsilon_{co} + 0.21 \left(\frac{f_{le}}{f'_{co}} \right)^{1.7} \quad (5.11)$$

Karbhari y Gao (1997) desarrollaron dos modelos para predecir el efecto del confinamiento del concreto usando FRP. El primer modelo es empírico, desarrollado al modificar el modelo original de Richart et al. (1928) para considerar el efecto del confinamiento del FRP. Para el esfuerzo a la compresión del concreto confinado proponen,

$$f'_{cc} = f'_{co} \left[1 + 2.1 \left(\frac{f_l}{f'_{co}} \right)^{0.87} \right] \quad (5.12)$$

Y para la deformación última del concreto,

$$\varepsilon_{cc} = \varepsilon_{co} + 0.01 \left(\frac{f_l}{f'_{co}} \right) \quad (5.13)$$

De manera alternativa Karbhari y Gao (1997) propusieron las siguientes expresiones:

$$f'_{cc} = f'_{co} + 3.10 f'_{co} v_c \frac{2t E_f}{D E_c} + \frac{2f_f t_f}{D} \quad (5.14)$$

Donde E_f es el módulo de elasticidad del FRP en la dirección radial del refuerzo y E_c es el módulo de elasticidad del concreto, y para la deformación última,

$$\varepsilon_{cc} = 1 - \frac{1.004 \left[1 - \frac{f'_{co}}{E_{eff}} - 4.1 f'_{co} \nu_c \frac{2t_f}{D} \frac{E_f}{E_c E_{eff}} \right]}{\left[1 + \varepsilon_f \right]^2} \quad (5.15)$$

Donde ν_c es el coeficiente de Poisson, ε_f es la deformación en el encamisado de FRP y E_{eff} es el módulo de elasticidad efectivo del FRP en la dirección radial, el cual se puede calcular con:

$$E_{eff} = \frac{E_f A_f + E_c A_c}{A_f + A_c} \quad (5.16)$$

Donde A_f y A_c son las áreas de la sección transversal de las bandas de FRP y del concreto, respectivamente; supusieron que $\varepsilon_{co} = 0.002$.

Miyauchi et al. (1998) realizaron pruebas experimentales en 10 especímenes de concreto reforzado encamisadas con bandas de carbono (CFRP), usando en sus pruebas una resistencia nominal del concreto de $f'_{co} = 30MPa$ y $f'_{co} = 50MPa$. El modelo de Richart et al. (1928), fue modificado incorporándole el “coeficiente de eficiencia”, k_e , con:

$$f'_{cc} = f'_{co} + 4.1 k_e f_l \quad (5.17)$$

Y por calibración de los datos experimentales proponen $k_e = 0.85$, por lo que:

$$f'_{cc} = f'_{co} + 3.485f_l \quad (5.18)$$

Y para la deformación última del concreto cuando la resistencia nominal del concreto sin confinar es $f'_{co} = 30MPa$, es

$$\varepsilon_{cc} = \varepsilon_{co} + 10.60 \left(\frac{f_l}{f'_{co}} \right)^{0.373} \quad (5.19)$$

Y para $f'_{co} = 50MPa$,

$$\varepsilon_{cc} = \varepsilon_{co} + 10.50 \left(\frac{f_l}{f'_{co}} \right)^{0.525} \quad (5.20)$$

Los autores no proponen expresiones cuando los valores de la resistencia del concreto sin confinar son diferentes a los anteriormente mencionados.

Kono et al. (1998) propusieron un modelo que difiere de los otros modelos de confinamiento, ya que relaciona linealmente la relación de esfuerzos $\frac{f'_{cc}}{f'_{co}}$ con la presión de confinamiento, f_l . Los autores proponen las siguientes ecuaciones,

$$f'_{cc} = f'_{co} + 0.0572f_l f'_{co} \quad (5.21)$$

Y para las deformaciones proponen,

$$\varepsilon_{cc} = \varepsilon_{co} + 0.28 \varepsilon_{co} f_l \quad (5.22)$$

Samaan et al. (1998) realizaron pruebas en 30 cilindros de concreto reforzado encamisados con placas de FRP de varios espesores. Usaron el modelo original propuesto por Richart et al. (1928) para el modelo de concreto reforzado. Con base en los datos experimentales los autores recomiendan un coeficiente de confinamiento de,

$$k_1 = 6 f_l^{-0.30} \quad (5.23)$$

Proponiendo la siguiente expresión,

$$f'_{cc} = f'_{co} + 6 f_l^{0.70} \quad (5.24)$$

La deformación última a la falla la determinaron por medio de un modelo bilineal de la curva esfuerzo-deformación, en donde E_2 es la pendiente de la segunda recta en el modelo. La deformación última la calculan con:

$$\varepsilon_{cc} = \frac{f'_{cc} - f_o}{E_2} \quad (5.25)$$

Donde,

$$f_o = 0.872 f'_{co} + 0.371 f_l + 6.258 \quad (5.26)$$

Y

$$E_2 = 245.61 f'_{co}{}^{0.20} + 1.3456 \frac{E_f t_f}{D} \quad (5.27)$$

Spoelstra y Monti (1999) modificaron el modelo de Mander (1988) para tomar en cuenta el efecto del confinamiento debido al encamisado de FRP. Supusieron que las deformaciones máximas del concreto sin confinar son $\varepsilon_{co} = 0.002$, por lo que:

$$f'_{cc} = f'_{co} \left[0.20 + 3.0 \left(\frac{f_l}{f'_{co}} \right)^{0.50} \right] \quad (5.28)$$

Y para el cálculo de las deformaciones últimas,

$$\varepsilon_{cc} = \varepsilon_{co} \left[2 + 1.25 \frac{E_c}{f'_{co}} \varepsilon_f \left[\frac{f_l}{f'_{co}} \right]^{0.5} \right] \quad (5.29)$$

Donde ε_f es la deformación última de las bandas de FRP.

Toutanji (1999) realizó pruebas en 18 especímenes de concreto reforzado encamisadas con CFRP y GFRP, realizó un análisis de regresión de los datos experimentales y concluyó que el coeficiente de confinamiento es,

$$k_1 = 3.5 \left(\frac{f_l}{f'_{co}} \right)^{-0.15} \quad (5.30)$$

suponiendo como válido el modelo de Richart et al. (1982) concluyo que,

$$f'_{cc} = f'_{co} \left[1.0 + 3.5 \left(\frac{f_l}{f'_{co}} \right)^{0.85} \right] \quad (5.31)$$

Y para la deformación última,

$$\varepsilon_{cc} = \varepsilon_{co} \left[1 + \left[310.57 \varepsilon_f + 1.90 \right] \left(\frac{f'_{cc}}{f'_{co}} - 1 \right) \right] \quad (5.32)$$

Donde ε_f varía del valor de 0.002 (sin confinamiento) al valor último en la falla.

Saafi et al. (1999) propusieron un modelo de confinamiento similar al de Toutanji (1999), excepto los especímenes de prueba fueron elaborados envolviendo a manera de tubo al concreto con las láminas de FRP. Usaron 18 cilindros de concreto reforzados con tubos de CFRP o GFRP, obtuvieron diferentes coeficientes debido a la adherencia entre el concreto y el encamisado por bandas de FRP, proponiendo las siguientes expresiones:

$$f'_{cc} = f'_{co} \left[1.0 + 2.2 \left(\frac{f_l}{f'_{co}} \right)^{0.84} \right] \quad (5.33)$$

y

$$\varepsilon_{cc} = \varepsilon_{co} \left[1 + \left[537.0 \varepsilon_f + 2.60 \right] \left(\frac{f'_{cc}}{f'_{co}} - 1 \right) \right] \quad (5.34)$$

Xiao y Wu (2000) probaron 36 cilindros de concreto reforzado encamisados con CFRP, proponiendo un modelo con la forma,

$$f'_{cc} = \alpha f'_{co} + k_1 f_l \quad (5.35)$$

En donde ajustando los valores de los coeficientes, propusieron la ecuación:

$$f'_{cc} = f'_{co} \left[1.1 + \left[4.1 - 0.75 \left(\frac{(f'_{co})^2 D}{2E_f t_f} \right) \right] \frac{f_l}{f'_{co}} \right] \quad (5.36)$$

Lam y Teng (2002) de los resultados en pruebas experimentales con 200 cilindros de concreto, con diferente diámetro, resistencia y relación de esbeltez, y encamisados con: CFRP, GFRP y AFRP, recomendaron el siguiente modelo para calcular la resistencia del concreto confinado:

$$f'_{cc} = f'_{co} + 2f_l \quad (5.37)$$

Y para el cálculo de la deformación última ajustaron los valores de pruebas de una base de datos de 171 especímenes, proponiendo

$$\varepsilon_{cc} = \varepsilon_{co} \left[2 + k_2 \left(\frac{f_l}{f'_{co}} \right) \right] \quad (5.38)$$

Donde k_2 es un coeficiente que depende del tipo de FRP; para el caso de CFRP, k_2 es de 15.

De Lorenzis y Tepfers (2003) resumieron los resultados de 180 especímenes probados por diversos autores, en ellos incluían especímenes encamisados con CRFP, GRFP y con aramidas, AFRP. Con base en los resultados propusieron dos nuevos modelos para el cálculo del esfuerzo a la compresión del concreto y para la deformación última,

$$\varepsilon_{cc} = \varepsilon_{co} \left[1.0 + c_1 \left(\frac{f_l}{f'_{co}} \right)^{c_2} E_l^{c_3} \right] \quad (5.39)$$

Donde los valores de c_1 , c_2 y c_3 se determinaron minimizando el error asociado con los resultados experimentales. El módulo de confinamiento propuesto por los autores se calcula con:

$$E_l = \frac{2E_f t_f}{D} \quad (5.40)$$

Para el caso de especímenes encamisados con FRP, propusieron la expresión:

$$\varepsilon_{cc} = \varepsilon_{co} \left[1.0 + 26.2 \left(\frac{f_l}{f'_{co}} \right)^{0.80} \left[\frac{E_f t_f}{D} \right]^{-0.148} \right] \quad (5.41)$$

Y para los encamisados por tubos de FRP,

$$\varepsilon_{cc} = \varepsilon_{co} \left[1.0 + 26.2 \left(\frac{f_l}{f'_{co}} \right)^{0.68} \left[\frac{E_f t_f}{D} \right]^{-0.127} \right] \quad (5.42)$$

Wu et al. (2003) compararon los resultados de 200 especímenes de cilindros de concreto confinados con bandas de FRP y por tubos. El conjunto de datos incluía una gran variedad de parámetros diferentes, entre ellos: la resistencia del concreto, tipos de FRP (CFRP, GFRP y AFRP) y esfuerzos de tensión del FRP. Wu et al. (2003) propusieron un conjunto de ecuaciones para calcular el esfuerzo del concreto confinado, f'_{cc} , el cual depende del tipo de encamisado y del método usado para determinar el esfuerzo del FRP, f_f . Para el concreto confinado por bandas de FRP, donde el esfuerzo del FRP se determina por pruebas de tensión, sugirieron el siguiente modelo:

$$f'_{cc} = f'_{co} + 2.0f_l \quad (5.43)$$

Y para el concreto confinado por FRP, donde el refuerzo del FRP está dado por el fabricante,

$$f'_{cc} = f'_{co} + 3.0f_l \quad (5.44)$$

Y para el concreto confinado por tubos de FRP, en donde el esfuerzo del FRP se determina por pruebas experimentales,

$$f'_{cc} = f'_{co} + 2.5f_l \quad (5.45)$$

Para determinar la deformación en el concreto confinado, Wu et al. (2003) recomiendan una relación entre la deformación y la relación de Poisson del concreto confinado,

$$\varepsilon_{cc} = \frac{\varepsilon_f}{\nu_u} \quad (5.46)$$

Donde la relación de Poisson, ν_u , depende del tipo de FRP y de la forma del encamisado, es decir, con bandas o con tubos. De forma general para especímenes encamisados por bandas de FRP,

$$\nu_u = 0.56 \left(\frac{f_l'}{f_{co}'} \right)^{-0.66} \quad (5.47)$$

Y cuando está encamisado por tubos,

$$\nu_u = 0.31 \left(\frac{f_l'}{f_{co}'} \right)^{-0.44} \quad (5.48)$$

Xiao y Wu (2003) analizaron 243 resultados de especímenes que fueron confinadas con nueve diferentes tipos de FRP, incluyendo CFRP y GFRP de diferentes espesores y resistencias del concreto no confinado. Sugieren como base el modelo de Richart et al. (1928), y modificando el modelo anteriormente propuesto por los mismos autores (Xiao y Wu, 2000).

$$f'_{cc} = \alpha f'_{co} + k_1 f_l' \quad (5.49)$$

Con base en los datos experimentales proponen un valor de $\alpha = 1.10$ y la siguiente expresión para k_1 :

$$k_1 = 4.1 - 0.45 \frac{[f_c']^{1.4}}{C_j} \quad (5.50)$$

Resultando la siguiente ecuación para el esfuerzo del concreto confinado:

$$f'_{cc} = f'_{co} \left[1.1 + \left[\frac{f_l}{f'_{co}} \right] \left(4.1 - 0.45 \left(\frac{[f'_{co}]^2}{2E_{f'f}} \right)^{1.40} \right) \right] \quad (5.51)$$

Bisby et al. (2005) analizaron varios modelos basados en pruebas experimentales de un conjunto de 200 especímenes de 20 diferentes autores. El conjunto de datos contenía confinamiento por diferentes FRP (CFRP, GFRP y AFRP), los especímenes variaban en el tamaño y en la resistencia del concreto sin confinar. Con base en los análisis de regresión de los datos sugirieron tres modelos para el cálculo del esfuerzo del concreto confinado, que según los autores todos dan valores correctos,

$$f'_{cc} = f'_{co} \left[1 + 2.425 \frac{f_l}{f'_{co}} \right] \quad (5.52)$$

$$f'_{cc} = f'_{co} \left[1 + 2.217 \left(\frac{f_l}{f'_{co}} \right)^{0.911} \right] \quad (5.53)$$

$$f'_{cc} = f'_{co} \left[1 + 3.587 \left[f_l \right]^{0.84} \right] \quad (5.54)$$

Para el cálculo de la deformación Bisby et al. (2005) recomiendan un modelo que depende del tipo de FRP,

$$\varepsilon_{cc} = \varepsilon_{co} + k_2 \left(\frac{f_l}{f'_{co}} \right) \quad (5.55)$$

Donde $k_2 = 0.0240$, 0.0137 ó 0.0536 , para CFRP, GFRP y AFRP, respectivamente.

Gurlnick y Gunawam (2006) desarrollaron un modelo para el cálculo del esfuerzo del concreto confinado con base en la teoría de esfuerzos de Mohr. De pruebas previas realizadas por los mismos autores clasificaron como un confinamiento pasivo del orden de 2 con respecto a la envolvente del círculo de Mohr, proponiendo la expresión,

$$f'_{cc} = f'_{co} \left[0.616 + \frac{f_l}{f'_{co}} + 1.57 \left(\frac{f_l}{f'_{co}} + 0.06 \right)^{0.50} \right] \quad (5.56)$$

En su modelo supusieron un esfuerzo uniaxial de tensión del concreto de $f'_t \approx 0.06 f'_{co}$ para un intervalo de la resistencia del concreto de 3000 psi y 8000 psi.

Youssef et al. (2007) probando 87 especímenes con láminas de CFRP y GFRP, de 16x32 pulgadas y 30 especímenes de 6x12 pulgadas confinados por bandas de CFRP y GFRP. Las ecuaciones que calibraron son:

$$f'_{cc} = f'_{co} \left[1.0 + 2.109 \left(\frac{f_l}{f'_{co}} \right)^{0.783} \right] \quad (5.57)$$

Y para el cálculo de la deformación última,

$$\varepsilon_{cc} = 0.003368 + 0.259 \left(\frac{f_l}{f'_{co}} \right) \left(\frac{f_f}{E_f} \right)^{0.50} \quad (5.58)$$

Girgin (2009) conjuntando una gran cantidad de datos experimentales de diversas fuentes, incluyendo especímenes confinados con una sola banda. Girgin (2009) primeramente evaluó los datos con el modelo original de Richart et al. (1928) el cual se basa en el criterio de falla de Mohr-Colulomb, proponiendo la siguiente expresión para el coeficiente de confinamiento, k ,

$$k = 2.109 \left(\frac{f_l}{f'_{co}} \right)^{-0.217} \quad (5.59)$$

Por lo que la ecuación para el esfuerzo último del concreto confinado es:

$$f'_{cc} = f'_{co} + 2.109 f'_{co} \left(\frac{f_l}{f'_{co}} \right)^{0.783} \quad (5.60)$$

Girgin (2009) propuso un modelo alternativo, el cual se basa en el criterio de esfuerzos de Hoek-Brown, tal que:

$$f'_{cc} = f_l + \sqrt{s \left[f'_{co} \right]^2 + m f'_{co} f_l} \quad (5.61)$$

Con base en los resultados experimentales $s = 1.0$ y $m = 3.50$.

En las Tablas 5.6 y 5.7 se resumen las expresiones propuestas en los trabajos anteriores, dividiéndose en modelos en función de los esfuerzos y en modelos en función de la deformación.

Tabla 5.6 Resumen de modelos de confinamiento basado en esfuerzos

Autor	Valor de f'_{cc}	
Richart et al. (1928)	$f'_{cc} = f'_{co} + 4.1f_l$	
Fardis y Khalili (1982)	$f'_{cc} = f'_{co} + 3.7 \left(\frac{f_l}{f'_{co}} \right)^{0.86}$	
Mander et al. (1988)	$f'_{cc} = f'_{co} \left[-1.254 - 2 \left(\frac{f_l}{f'_{co}} \right) + 2.254 \left[1 + 7.94 \left(\frac{f_l}{f'_{co}} \right) \right]^{0.5} \right]$	
Cusson y Paultre (1995)	$f'_{cc} = f'_{co} \left[1 + 2.1 \left(\frac{f_l}{f'_{co}} \right)^{0.70} \right]$	
Karbhari y Gao (1997)	$f'_{cc} = f'_{co} \left[1 + 2.1 \left(\frac{f_l}{f'_{co}} \right)^{0.87} \right]$	Expresión empírica
	$f'_{cc} = f'_{co} + 3.1f'_{co} \nu_c \left(\frac{2t_f E_f}{DE_c} \right) + 2 \left(\frac{\sigma_t t_f}{D} \right)$	Análisis simplista
Miyachi et al. (1997)	$f'_{cc} = f'_{co} + 3.485f_l$	
Pilakoutas y Mortazavi (1997)	$f'_{cc} = f'_{co} \left(1.125 + 2.5 \frac{f_l}{f'_{co}} \right)$ para $2 \frac{f_l}{f'_{co}} \geq 0.10$	
	$f'_{cc} = f'_{co} \left(1 + 5 \frac{f_l}{f'_{co}} \right)$ para $2 \frac{f_l}{f'_{co}} < 0.10$	
Kono et al. (1998)	$f'_{cc} = f'_{co} + 0.0572f'_{co}f_l$	
Samaan et al. (1998)	$f'_{cc} = f'_{co} + 6.0(f_l)^{0.70}$	
Spoelstra y Monti (1999)	$f'_{cc} = f'_{co} \left[0.20 + 3.0 \left(\frac{f_l}{f'_{co}} \right)^{0.50} \right]$	

Tabla 5.6 Modelos de confinamiento basado en esfuerzos (continuación)

Autor	Valor de f'_{cc}	
Toutanji (1999)	$f'_{cc} = f'_{co} \left(1 + 3.5 \left(\frac{f_l}{f'_{co}} \right)^{0.85} \right)$	
Saafi et al. (1999)	$f'_{cc} = f'_{co} \left(1 + 2.2 \left(\frac{f_l}{f'_{co}} \right)^{0.84} \right)$	
Xiao y Wu (2000)	$f'_{cc} = f'_{co} \left[1.1 + \left(\frac{f_l}{f'_{co}} \right) \left(4.1 - 0.75 \left(\frac{[f'_{co}]^2 D}{2E_f t_f} \right) \right) \right]$	
Thériaul y Neale (2000)	$f'_{cc} = f'_{co} \left(1 + 2 \frac{f_l}{f'_{co}} \right)$	
Lam y Teng (2002)	$f'_{cc} = f'_{co} + 2.0 f_l$	
De Lorenzis y Tefers (2003)	-----	
Wu et al. (2003)	$f'_{cc} = f'_{co} + 2.0 f_l$ $f'_{cc} = f'_{co} + 3.0 f_l$ $f'_{cc} = f'_{co} + 2.5 f_l$	<p>Cuando el esfuerzo del FRP es determinado experimentalmente</p> <p>Cuando el esfuerzo del FRP está determinado por el fabricante</p> <p>Para tubos donde el esfuerzo del FRP es determinado experimentalmente</p>
Xiao y Wu (2003)	$f'_{cc} = f'_{co} \left[1.1 + \left(\frac{f_l}{f'_{co}} \right) \left(4.1 - 0.45 \left(\frac{[f'_{co}]^2 D}{2E_f t_f} \right)^{1.40} \right) \right]$	
Bisby et al. (2005)	$f'_{cc} = f'_{co} \left[1 + 2.425 \frac{f_l}{f'_{co}} \right]$	

Tabla 5.6 Modelos de confinamiento basado en esfuerzos (continuación)

<p>Bisby et al. (2005)</p>	$f'_{cc} = f'_{co} \left[1 + 2.217 \left(\frac{f_l}{f'_{co}} \right)^{0.911} \right]$ $f'_{cc} = f'_{co} \left[1 + 3.587 [f_l]^{0.84} \right]$
<p>Guralnick y Gunawan (2006)</p>	$f'_{cc} = f'_{co} \left[0.616 + \left(\frac{f_l}{f'_{co}} \right) + 1.57 \left(\frac{f_l}{f'_{co}} + 0.06 \right)^{0.50} \right]$
<p>Youssef et al. (2007)</p>	$f'_{cc} = f'_{co} \left(1 + 2.25 \left(\frac{f_l}{f'_{co}} \right)^{1.25} \right)$
<p>Girgin (2009)</p>	$f'_{cc} = f'_{co} + 2.109 f'_{co} \left(\frac{f_l}{f'_{co}} \right)^{0.783}$ <p>Basado en el modelo de Mohr-Coulomb</p> $f'_{cc} = f_l + \sqrt{[f'_{co}]^2 + 3.5 f'_{co} f_l}$ <p>Basado en el modelo de Hoek-Brown</p>

Tabla 5.7 Modelos de confinamiento basado en deformación

Autor	Valor de ε_{cc}
Richart et al. (1928)	$\varepsilon_{cc} = \varepsilon_{co} \left(1 + 20.5 \frac{f_l}{f'_{co}} \right)$
Fardis y Khalili (1982)	$\varepsilon_{cc} = \varepsilon_{co} + 0.0005 \left(\frac{E_f t_f}{D f'_{co}} \right)$
Mander et al. (1988)	$\varepsilon_{cc} = \varepsilon_{co} \left[1 + 5 \left(\frac{f'_{cc}}{f'_{co}} - 1 \right) \right]$
Cusson y Paultre (1995)	$\varepsilon_{cc} = \varepsilon_{co} + 0.21 \left(\frac{f_l}{f'_{co}} \right)^{1.70}$
Karbhari y Gao (1997)	$\varepsilon_{cc} = \varepsilon_{co} + 0.01 \left(\frac{f_l}{f'_{co}} \right)$ Expresión empírica
	$\varepsilon_{cc} = 1 - \left[\frac{1.004}{(1 + \varepsilon_f)^2} \right] \left[1 - \frac{f'_{co}}{E_{eff}} - 8.2 \frac{t_f E_f f'_{co} v_c}{D E_c E_{eff}} \right]$ Análisis simplista
Miyauchi et al. (1997)	$\varepsilon_{cc} = \varepsilon_{co} + 10.6 \left(\frac{f_l}{f'_{co}} \right)^{0.373}$ Para $f'_{co} = 30MPa$
	$\varepsilon_{cc} = \varepsilon_{co} + 10.5 \left(\frac{f_l}{f'_{co}} \right)^{0.525}$ Para $f'_{co} = 50MPa$
Kono et al. (1998)	$\varepsilon_{cc} = \varepsilon_{co} + 0.28 \varepsilon_{co} f_l$
Samaan et al. (1998)	$\varepsilon_{cc} = \frac{f'_{cc} - f_o}{E_2}$ donde: $f_o = 0.872 f'_{co} + 0.371 f_l + 6.258$ $E_2 = 245.61 \left[f'_{co} \right]^{0.20} + 1.3456 \frac{E_f t_f}{D}$

Tabla 5.7 Modelos de confinamiento basado en deformación (continuación)

Autor	Valor de ε_{cc}
Spoelstra y Monti (1999)	$\varepsilon_{cc} = \varepsilon_{co} \left(2 + 1.25 \frac{E_c}{f'_{co}} \varepsilon_f \left[\frac{f_l}{f'_{co}} \right]^{0.50} \right)$ donde $\varepsilon_{co} = 0.002$
Toutanji (1999)	$\varepsilon_{cc} = \varepsilon_{co} \left[1 + \left(1.90 + 310.57 \varepsilon_f \right) \left(\frac{f'_{cc}}{f'_{co}} - 1 \right) \right]$
Saafi et al. (1999)	$\varepsilon_{cc} = \varepsilon_{co} \left[1 + \left(2.60 + 537 \varepsilon_f \right) \left(\frac{f'_{cc}}{f'_{co}} - 1 \right) \right]$
Xiao y Wu (2000)	-----
Lam y Teng (2002)	$\varepsilon_{cc} = \varepsilon_{co} \left[2 + k_2 \left(\frac{f_l}{f'_{co}} \right) \right]$ donde $k_2 = 15$ para CFRP
De Lorenzis y Tefers (2003)	$\varepsilon_{cc} = \varepsilon_{co} \left[1 + 26.2 \left(\frac{f_l}{f'_{co}} \right)^{0.80} \left[\frac{t_f E_f}{D} \right]^{-0.148} \right]$ Para bandas de FRP
	$\varepsilon_{cc} = \varepsilon_{co} \left[1 + 26.2 \left(\frac{f_l}{f'_{co}} \right)^{0.68} \left[\frac{t_f E_f}{D} \right]^{-0.127} \right]$ Para tubos de FRP
Wu et al. (2003)	$\varepsilon_{cc} = \frac{\varepsilon_f}{\nu_u}$ <p>Para bandas de CFRP, GFRP y AFRP con módulo normal:</p> $\nu_u = 0.56 \left(\frac{f_l}{f'_{co}} \right)^{-0.66}$ <p>Para tubos de GFRP o CFRP:</p> $\nu_u = 0.31 \left(\frac{f_l}{f'_{co}} \right)^{-0.44}$ <p>Para bandas de FRP con módulo alto:</p> $\nu_u = 0.56 k_f \left(\frac{f_l}{f'_{co}} \right)^{-0.66}$ <p>Donde: $k_f = 1.0$ para $E_f \leq 250 \text{GPa}$</p>

Tabla 5.7 Modelos de confinamiento basado en deformación (continuación)

Autor	Valor de ε_{cc}
Wu et al. (2003)	$k_f = \sqrt{\frac{250}{E_f}}$ para $E_f > 250GPa$
Xiao y Wu (2003)	_____
Bisby et al. (2005)	$\varepsilon_{cc} = \varepsilon_{co} + k_2 \left(\frac{f_l}{f'_{co}} \right)$ <p>CFRP: $k_2 = 0.0240$ GFRP: $k_2 = 0.0137$ AFRP: $k_2 = 0.0536$</p>
Guralnick y Gunawan (2006)	_____
Youssef et al. (2007)	$\varepsilon_{cc} = 0.003368 + 0.259 \left(\frac{f_l}{f'_{co}} \right) \left(\frac{f_f}{E_f} \right)^{0.50}$
Girgin (2009)	_____

En la Figura 5.9 se muestran las curvas de los modelos de confinamiento propuestos por diferentes autores, donde la relación volumétrica R se considera como: $R = \frac{f_l}{f'_{co}}$, para graficar las ecuaciones se propuso variar el valor de R en el intervalo de 0 a 3.5, de estos valores se obtuvo un promedio y para representarlo se ha propuesto la siguiente ecuación:

$$f'_{cc} = f'_{co} \left(1 + 2.5 \left(\frac{f_l}{f'_{co}} \right)^{\frac{6}{7}} \right) \quad (5.62)$$

donde, f_l es esfuerzo lateral de confinamiento y f'_{co} es la resistencia a compresión del concreto.

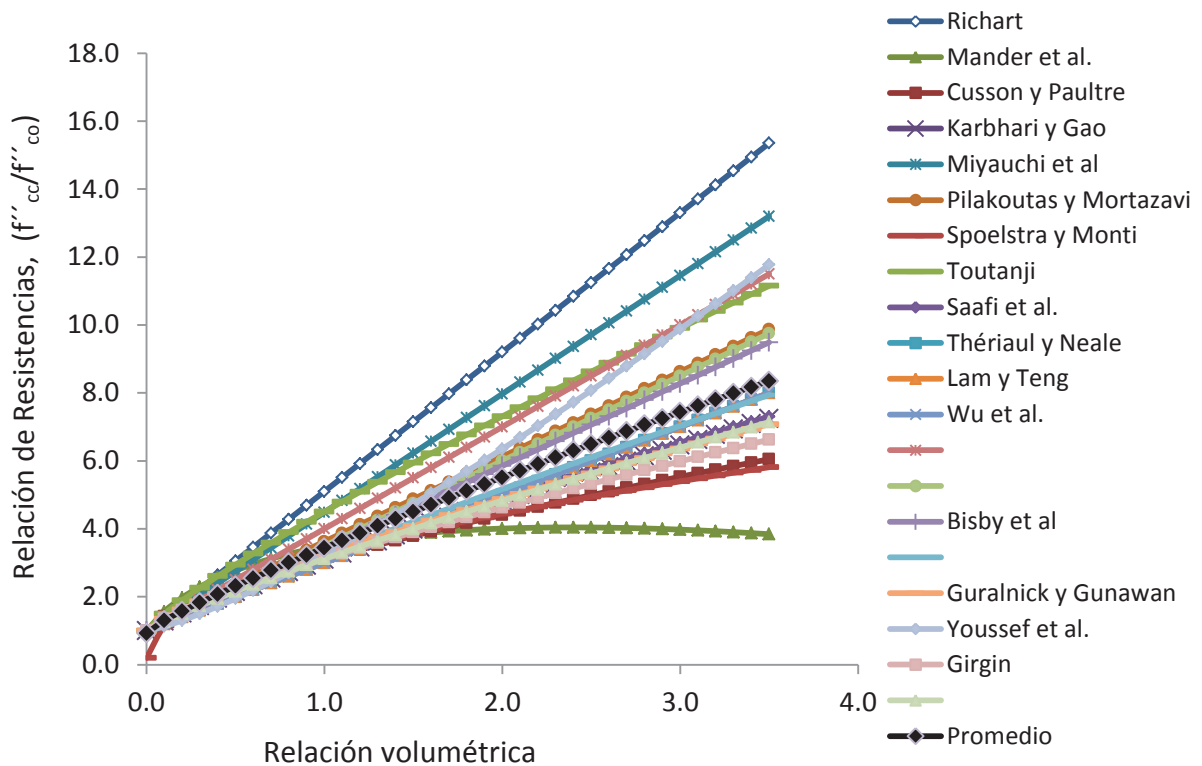


Figura 5.9 Curva relación de resistencias (f'_{cc}/f'_{co}) vs relación volumétrica R

En la Fig. 5.10 se muestra la gráfica de la ecuación propuesta y está superpuesta a la del valor promedio.

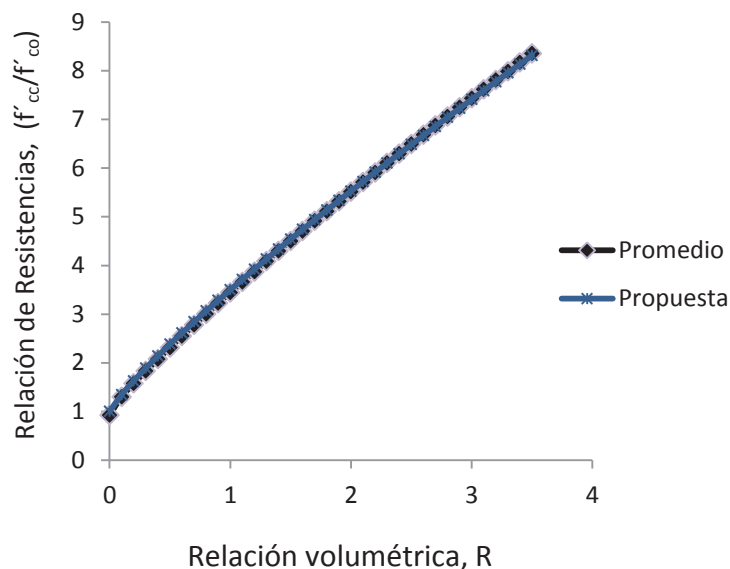


Fig. 5.10 Curva relación de resistencias (f'_{cc}/f'_{co}) , de la ecuación propuesta vs.el valor promedio, en función de la relación volumétrica R

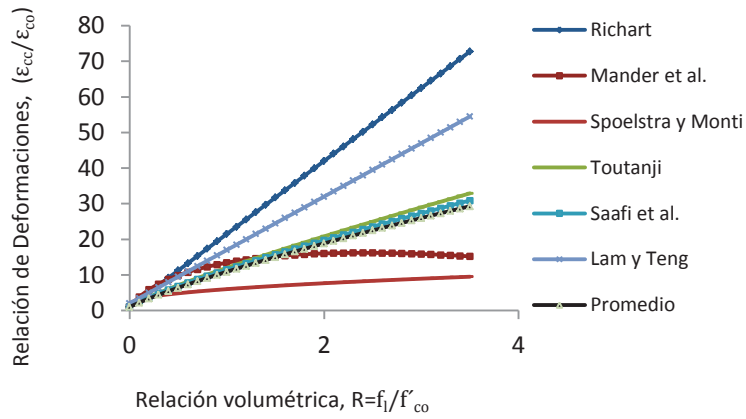
En la Figura 5.11a se muestra las curvas de las ecuaciones de deformación, ϵ_{cc} , propuestas por Richart, Mander et al., Spoelstra y Monti, Toutanji, Saafi et al., Lam y Teng.

Karbhari y Gao, Wu et al., Bisby et al., Youssef et al., proponen ecuaciones con una estructura diferente a las ecuaciones de los autores anteriores, las curvas de las ecuaciones propuestas se muestran en la Figura 5.11b.

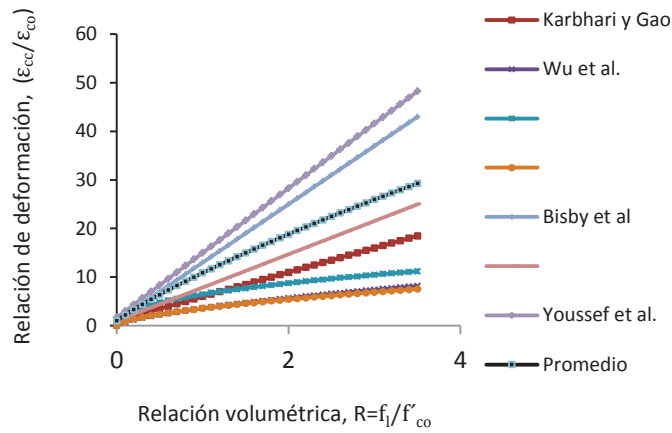
Al igual que para esfuerzos, de las ecuaciones de los diferentes autores se calcula un valor promedio y se propone la ecuación siguiente:

$$\epsilon_{cc} = \epsilon_{co} \left(1 + 9.5 \left(\frac{f_l}{f'_{co}} \right)^{0.87} \right) \quad (5.63)$$

donde ϵ_{co} es la deformación del concreto, f_l es el esfuerzo lateral de confinamiento y f'_{co} es la resistencia a compresión del concreto, ver Figura 5.12.



a) Curvas $\epsilon_{cc}/\epsilon_{co}$ vs f_i/f'_{co}



b) Curvas $\epsilon_{cc}/\epsilon_{co}$ vs f_i/f'_{co}

Figura 5.11 Curva relación de deformaciones (ϵ_{cc}/ϵ_c) vs relación volumétrica R

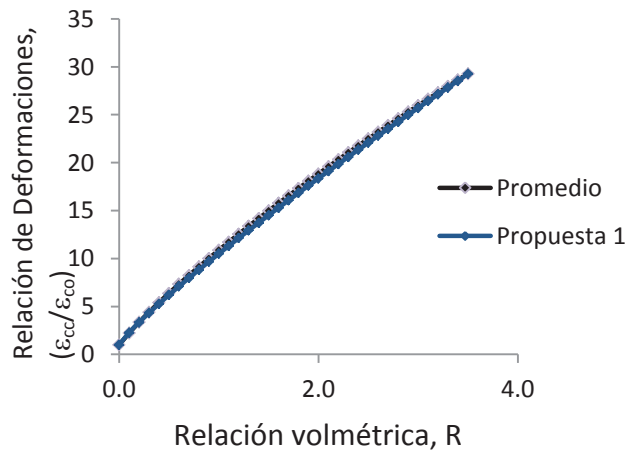


Figura 5.12 Curva del valor promedio superpuesta a la curva de la ecuación propuesta

5.6 MODELOS DE DISEÑO PROPUESTOS EN DIVERSOS CÓDIGOS

Actualmente hay pocos reglamentos o códigos de diseño en donde se establezcan las recomendaciones para realizar reparaciones de elementos de concreto reforzado dañados por eventos sísmicos usando materiales de FRP. Entre estos códigos se encuentran: el ISIS Canada Network of Center of Excellence (2001); el ACI 440.2 R-02 (2002); Caltrans 20-04 (2000) y el Concrete Society Technical Report (2004). En este trabajo se revisaran los comentarios y sugerencia propuestos en el ACI 440.2 R-02 (2002) y en Caltrans 20-04 (2000).

5.6.1 RECOMENDACIONES DEL ACI 440.2R-02 (2002)

El ACI 440.2R-02 (2002) sugiere el uso del modelo originalmente propuesto por Mander et al. (1988) pero ligeramente modificado para tomar en cuenta el comportamiento lineal elástico del FRP. El modelo de confinamiento para calcular el esfuerzo del concreto confinado, f'_{cc} , es.

$$f'_{cc} = f'_{co} \left[2.25 \sqrt{1 + 7.9 \frac{f_l}{f'_{co}}} - 2 \frac{f_l}{f'_{co}} - 1.25 \right] \quad (5.64)$$

Donde f'_{co} es el esfuerzo del concreto sin confinar y f_l es la presión de confinamiento, la cual se define como:

$$f_l = \frac{k_s \rho_f \varepsilon_f E_f}{2} \quad (5.65)$$

Donde k_s es el coeficiente de eficiencia, el cual depende de la geometría de la columna.

Para una columna circular $k_s = 1.0$; ε_f está definido como el valor menor de 0.004 ó

0.75 ε_{fu} , donde ε_{fu} es la deformación última del FRP.

Este límite en la deformación se escogió para evitar pérdida de acoplamiento con el agregado del concreto y se definió experimentalmente en pruebas de carga axial, por lo que es una aproximación para el caso de flexocompresión inducidas por fuerzas sísmicas. La relación volumétrica del FRP es igual a,

$$\rho_f = \frac{4t_f}{D} \quad (5.66)$$

Tal que la ecuación (5.65) se puede escribir:

$$f_l = \frac{2 k_s t_f \varepsilon_f E_f}{D} \quad (5.66a)$$

Y el incremento en la capacidad de la carga axial de la columna se expresa como,

$$\varphi P_n = k_e \varphi \left[0.85 \psi_f f'_{cc} (A_g - A_{st}) + f_y A_{st} \right] \quad (5.67)$$

Donde $k_e = 0.85$ para columnas con refuerzo en espiral y $k_e = 0.80$ para columnas con estribos; P_n es la carga axial nominal, $\varphi = 0.75$ es el factor de reducción. Además existe un factor de reducción adicional, $\psi_f = 0.95$, debido a las láminas de FRP; A_{st} es el área de acero de refuerzo longitudinal y f_y es el esfuerzo de fluencia del acero.

La ecuación (5.67) sólo considera un esfuerzo por el incremento de la carga axial en la columna, para el caso de reparación en zonas sísmicas el ACI 440, sugiere el modelo de Mander et al. (1998) para la deformación de confinamiento, ε_{cc} ,

$$\varepsilon_{cc} = \frac{1.71 \left[5f'_{cc} - 4f'_{co} \right]}{E_c} \quad (5.68)$$

Donde E_c es el módulo de elasticidad del concreto.

Como se muestra en la Tabla 5.4 cada estado de daño, de DS-1 al DS-5 tiene asociado un intervalo de deformaciones para el refuerzo transversal y longitudinal. Cada valor de

deformación puede asociarse con la capacidad axial de la columna por medio de un análisis seccional. La capacidad axial para un cierto nivel de deformación puede ser comparada con la capacidad original teórica de la columna antes del daño, la cual se puede determinar usando la expresión propuesta por el ACI 318 (2008):

$$\varphi P_n = 0.80\varphi \left[0.85 \left(f'_c A_g + f'_{ccs} A_{cc} \right) + f_y A_s \right] \quad (5.69)$$

Donde φP_n es la capacidad axial de la columna, φ es el factor de reducción del refuerzo transversal, el cual es igual a 0.75 para anillos cerrados, A_g es el área neta o gruesa de la sección de la columna, A_{cc} es el área confinada por el refuerzo transversal, f_y es el esfuerzo de fluencia del acero longitudinal, A_s es el área del refuerzo transversal y f'_{ccs} es el esfuerzo del concreto confinado por el acero transversal y puede determinarse por medio de la expresión de Richart et al. (1928),

$$f'_{ccs} = f'_c + 4.1f_l \quad (5.70)$$

Donde f_l es la presión de confinamiento debida al acero transversal,

$$f_l = \frac{2A_h f_{sy}}{d_s} \quad (5.71)$$

Donde A_h es el área de la sección transversal de los estribos, f_{sy} es el esfuerzo de fluencia del acero transversal, d es el diámetro de la columna que es confinado por los estribos, la cual es igual al diámetro de la sección gruesa, D , menos dos veces el recubrimiento de concreto, cc , menos dos veces el diámetro de las varillas que forman los estribos, d_h . El espaciamiento de los estribos está representado por s .

La pérdida de capacidad axial para cada estado de daño es simplemente la capacidad axial teórica calculada inicialmente con la ecuación (5.69) menos la capacidad axial que tendría la columna para el nivel de deformación del daño correspondiente, obtenido de un análisis seccional.

Con la pérdida de la capacidad axial de la columna para cierto estado de daño, se calcula el espesor de la banda de confinamiento de FRP necesaria para restaurar la capacidad inicial a compresión de la columna. El efecto del confinamiento del FRP debe sumarse a la ecuación para calcular la capacidad axial de la columna, de manera que:

$$\varphi P_n = 0.80\varphi \left[0.85 \left(f'_c A_g + f'_{ccs} A_{cc} + f'_{cc} A_g \right) \right] \quad (5.72)$$

El efecto del refuerzo longitudinal, $f_y A_s$, se desprecia ya que para las deformaciones del estado de daño DS-1 el acero ya fluye.

Conociendo la pérdida de capacidad axial que ha sufrido la columna, se puede calcular el espesor necesario de FRP necesario para restaurarla. El esfuerzo de confinamiento del concreto debido al FRP se calcula con:

$$f'_{cc} = \frac{\varphi P_{ini} - \varphi P_{dañ}}{(0.8\varphi) 0.85 A_g} \quad (5.73)$$

Donde φP_{ini} es la capacidad de carga teórica inicial de la columna y $\varphi P_{dañ}$ es la capacidad de carga axial de la columna para el nivel de daño sufrido, y se obtiene de un análisis seccional de la columna para el estado de deformación del daño considerado.

El espesor de la banda de FRP se calcula de:

$$t_f = \frac{D \rho_f}{4} \quad (5.74)$$

Donde:

$$\rho_f = \frac{2f_l}{k_s \varepsilon_f E_f} \quad (5.75)$$

Para aplicar (5.75) es necesario conocer f_l , la cual se puede determinar con cualquiera de los modelos de esfuerzos de confinamiento en función de f_l .

La ecuación (5.74) se puede escribir:

$$t_f = \frac{D}{2} \frac{f_l}{k_s \varepsilon_f E_f} \quad (5.76)$$

5.6.2 RECOMENDACIONES DEL CALTRANS MEMO 20-4 (2000)

El código Caltrans Memo 20-4 (2000) recomienda que se evite la falla por flexión, por lo que sugiere un esfuerzo de confinamiento, $f_l = 2068 \text{ kPa}$ y una deformación de dilatación radial de $\varepsilon_{cc} = 0.004$ en la zona de formación de la articulación plástica. Estos límites se determinaron experimentalmente y corresponden a una ductilidad de desplazamiento de $\mu = 6$. En zonas fuera de la articulación plástica se recomienda considerar, $f_l = 1034 \text{ kPa}$ y $\varepsilon_{cc} = 0.004$. El espesor de la placa de FRP se calcula con:

$$2 t_f E_f \varepsilon_{cc} = f_l D \quad (5.77)$$

Donde E_f es el módulo de elasticidad del FRP multiplicado por un factor de reducción de 0.90, es decir:

$$t_f = \frac{f_l D}{2(0.90)E_f \varepsilon_{cc}} \quad (5.78)$$

La metodología propuesta se basa en limitar la presión de confinamiento pero no considera el modo de falla de la columna.

Ejemplo 5.1: Revisar una columna circular con deficiencia por carga axial

En este apartado se aplicarán las expresiones propuestas por el ACI 440.2R-02 y por el Caltrans Memo 20-4 (2000), para el cálculo del espesor del refuerzo de FRP y revisando la capacidad axial de una columna circular con $D = 305 \text{ mm}$ de diámetro, una altura de

2438mm, un recubrimiento del concreto de $cc = 19mm$, un esfuerzo a la compresión para el concreto no confinado de $f'_c = 34.45MPa$, con un módulo de elasticidad $E_c = 27,580MPa$. La columna está encamisada con FRP que tiene las siguientes propiedades: Módulo de elasticidad: $E_f = 59.36GPa$, esfuerzo último: $f_f = 752MPa$;

tal que la deformación última del FRP es: $\varepsilon_{fu} = \frac{f_f}{E_f} = 0.01266mm$. El acero de refuerzo

longitudinal consta de 16 redondos de 9.5 mm de diámetro con un área de $71 mm^2$, lo que da $A_s = 1136mm^2$; el refuerzo transversal está formado por varillas de diámetro $d_h = 4.92mm$, con un área de $A_h = 19mm^2$, y espaciadas a cada $s = 32mm$. El acero tiene un esfuerzo de fluencia de $f_{yh} = 420MPa$.

La columna de este ejemplo fue probada experimentalmente y reparada por Vossoghi y Saiidi (2008), quienes usaron las expresiones del Caltrans Memo 20-4 (2000) para la reparación y concluyeron que el espesor de diseño de 2.03 mm efectivamente restauró el esfuerzo por carga axial de la columna dañada, concluyendo que el 87% de la rigidez de la columna se restauró.

SOLUCIÓN

Se calcula el diámetro de la columna que es confinado por los estribos:

$$d_s = D - 2cc - 2d_h$$

$$d_s = 305 - 2(19) - 2(4.92) = 257.16mm$$

Área de la sección transversal de los estribos, A_h :

$$A_h = \frac{\pi(d_h)^2}{4} = \frac{\pi(4.92)^2}{4} = 19.01mm^2$$

Presión de confinamiento provisto por los estribos:

$$f_h = \frac{2A_h f_{yh}}{d_s} = \frac{2(19.01\text{mm}^2)(420\text{MPa})}{(257.16\text{mm})32\text{mm}} = 1.9405\text{MPa}$$

Se considera que:

$$f_h \approx f_l = 1.9405\text{MPa}$$

Esfuerzo del concreto confinado por el acero transversal f'_{ccs}

$$f'_{ccs} = f'_c + 4.1f_l$$

Área neta de concreto:

$$A_g = \frac{\pi D^2}{4} = \frac{\pi (305\text{mm})^2}{4} = 73,062\text{mm}^2 \approx 73,062 \times 10^{-6} \text{m}^2$$

Área confinada por el refuerzo transversal, A_{cc} ,

$$A_{cc} = \frac{\pi (d_s)^2}{4} = \frac{\pi (257.16\text{mm})^2}{4} = 51,940\text{mm}^2 \approx 51,940 \times 10^{-6} \text{m}^2$$

Capacidad de carga inicial de la columna:

$$\varphi P_n = 0.80\varphi \left[0.85 \left(f'_c A_g + f'_{ccs} A_{cc} \right) + f_y A_s \right]$$

Donde para estribos circulares $\varphi = 0.75$, y los datos antes obtenidos:

$$0.85 \left(f'_c A_g + f'_{ccs} A_{cc} \right) = 0.85 \left[(34.45)(0.073\ 062) + (42.41)(0.051\ 940) \right] = 4.01180$$

$$f_y A_s = (420) \left(1136 \times 10^{-6} \right) = 0.47712$$

Sustituyendo,

$$\varphi P_{ini} = 0.80(0.75)[4.01180 + 0.47712] = 2,693.4kN$$

Con:

$$f'_{cc} = \frac{\varphi P_{ini} - \varphi P_{dañ}}{(0.8\varphi)0.85A_g}$$

Diagrama seccional de la columna:

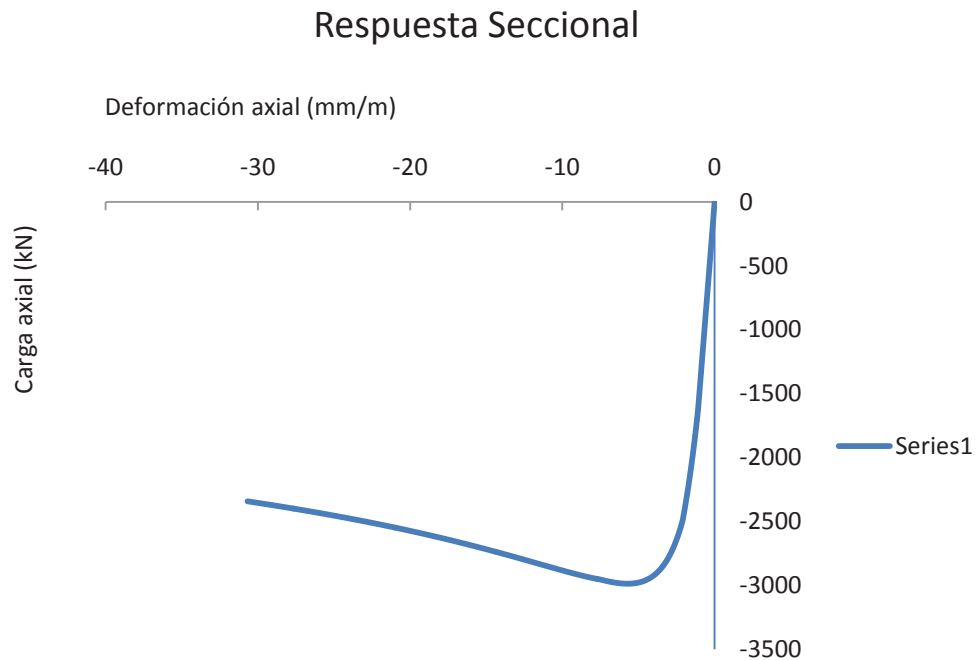


Fig. 5.13 Respuesta de la sección bajo carga axial

Para cada nivel de daño se obtiene la deformación promedio (tabla 5.5) y la carga axial que le corresponde. Por ejemplo para DS-4 la deformación del acero longitudinal es 0.0348 y para el transversal 0.00167, usando estas deformaciones y con el programa M-

C.f90 se obtiene la nueva carga axial asociada al daño DS-4, obteniéndose 52 kN. Entonces de la ecuación (5.73), se tiene:

$$f'_{cc} = \frac{2,693.4kN - 52kN}{(0.8)(0.75)0.85(7.306 \times 10^{-2})} = 70.88MPa$$

Teniendo este valor se calcula el esfuerzo de confinamiento f_l del concreto debido al FRP de las ecuaciones de todos los modelos, por ejemplo con:

$$f'_{cc} = f'_{co} \left[2.25 \sqrt{1 + 7.9 \frac{f_l}{f'_{co}}} - 2 \frac{f_l}{f'_{co}} - 1.25 \right]$$

Donde el esfuerzo del concreto sin confinar $f'_{co} \approx f'_c$

Y se procede a calcular el espesor con la formula:

$$t_f = \frac{2Df_l}{4 k_s \varepsilon_f E_f}$$

Para una columna circular $k_s = 1.0$; ε_f está definido como el valor menor de 0.0004 ó $0.75 \varepsilon_{fu}$, donde ε_{fu} es la deformación última del FRP, $\varepsilon_{fu} = 0.01266mm$; rige $\varepsilon_f = 0.0004$.

Además calcular el espesor con la fórmula propuesta por CALTRANS

$$t_f = \frac{f_l D}{2(0.90)E_f \varepsilon_{cc}}$$

Con $\varepsilon_{cc} = 0.004$

El espesor de bandas de FRP calculado con las ecuaciones que proponen ACI y CALTRANS se muestra en la tabla 5.8. Los valores del esfuerzo lateral de confinamiento f_l se determinaron de los modelos de confinamiento (f'_{cc}) propuestos en la sección 5.5.1. En el análisis seccional se comprobó que la columna tiene una pérdida de capacidad axial de 52

kN, por lo tanto, el espesor de bandas de FRP calculado asegura que la columna recupere su capacidad axial después de ser reparada.

Tabla 5.8 Valores de espesor de FRP calculados con las ecuaciones propuestas en ACI y CALTRANS

Autor	f_{ccs}	ϕP_{ini}	f_{cc}	f_l	f_{cca}	t_f (ACI)	t_f (CALTRANS)
Richart et al. (1928)	42.4	2693.2	70.9	8.9	70.9	5.7	6.3
Fardis y Khalili (1982)	45.2	2767.0	72.9	8.5	72.9	5.5	6.1
Mander et al. (1988)	46.3	2797.3	73.7	8.6	73.7	5.5	6.1
Cusson y Paultre (1995)	44.1	2738.3	72.1	13.6	72.1	8.7	9.7
Karbhari y Gao (1997)	40.4	2639.4	69.4	14.9	69.4	9.6	10.7
Miyauchi et al. (1997)	41.2	2661.6	70.0	10.2	70.0	6.6	7.3
Pilakoutas y Mortazavi (1997)	43.6	2725.1	71.7	13.2	71.7	8.5	9.4
Kono et al. (1998)	38.3	2583.8	67.9	17.0	67.9	10.9	12.1
Samaan et al. (1998)	44.0	2735.3	72.0	13.7	72.0	8.8	9.8
Spoelstra y Monti (1999)	31.4	2402.2	63.1	10.2	63.1	6.5	7.3
Toutanji (1999)	44.9	2759.5	72.7	8.9	72.7	5.7	6.4
Saafi et al. (1999)	41.2	2661.7	70.0	14.0	70.0	9.0	10.0
Xiao y Wu (2000)						0.0	0.0
Thériaul y Neale (2000)	38.3	2585.3	68.0	16.8	68.0	10.8	12.0
Lam y Teng (2002)	38.3	2585.3	68.0	16.8	68.0	10.8	12.0
	38.3	2585.3	68.0	16.8	68.0	10.8	12.0
Wu et al. (2003)	40.3	2636.7	69.4	11.7	69.4	7.5	8.3
	39.3	2611.0	68.7	13.7	68.7	8.8	9.8
Xiao y Wu (2003)						0.0	0.0
	39.2	2607.1	68.6	14.1	68.6	9.0	10.0
Bisby et al. (2005)	40.0	2629.7	69.2	14.5	69.2	9.3	10.4
	250.1	8195.2	218.5	1.6	218.5	1.0	1.1
Guralnick y Gunawan (2006)	41.6	2672.1	70.3	12.1	68.1	7.8	8.7
Youssef et al. (2007)	36.6	2538.8	66.7	17.1	66.7	11.0	12.2
Girgin (2009)	42.1	2684.9	70.7	14.2	70.7	9.1	10.1
	39.6	2619.8	68.9	14.6	68.9	9.4	10.4
PROPUESTA	41.8	2676.3	70.4	12.4	70.4	8.0	8.9

5.6.3 CONCLUSIONES PARA EL REFUERZO POR CARGA AXIAL

La tabla 5.8 contiene los valores de espesor de bandas de fibra (FRP) para una columna circular con deficiencia por carga axial. Los espesores de FRP más grandes se obtuvieron cuando se emplean las ecuaciones propuestas por Kono et al. (1998), Thériault y Neale (2000), Lam y Teng (2002) y Wu et al. (2003) y el menor espesor de FRP se obtuvo con la ecuación propuesta por Bisby et al. (2005). Cuando se emplea la ecuación propuesta en ACI la mayoría de los espesores de bandas de FRP que se obtuvieron, sin considerar los anteriores, están dentro del intervalo de 5.5 a 9.6 mm y cuando se emplea la ecuación propuesta en CALTRANS están en el intervalo de 6.1 a 10.7 mm. Si se emplea la ecuación 5.62 se obtiene un espesor igual a 8 y 8.9 mm para ACI y CALTRANS respectivamente, estos valores representan en forma aproximada un promedio.

5.7 DIAGRAMAS DE INTERACCIÓN DE COLUMNAS DE CONCRETO REFORZADO CONFINADAS CON FRP

5.7.1 DIAGRAMAS DE INTERACCIÓN MOMENTO-CARGA AXIAL

Las columnas de concreto reforzado en muchos casos se diseñan para soportar tanto carga axial como momentos de flexión. Por tal motivo es necesario construir diagramas de interacción carga axial-momento de flexión (P-M) para visualizar las combinaciones de carga axial y momentos de flexión que las columnas pueden soportar.

Para construir un diagrama de interacción P-M para una columna se necesitan conocer las propiedades geométricas de la sección, las propiedades mecánicas del refuerzo, cantidades y posición, y la resistencia del concreto f'_c . Es necesario conocer el valor de la deformación última del concreto ε_{cu} , tomada como 0.003 de acuerdo con ACI 318-99, se usa el bloque rectangular de esfuerzos para representar la relación no-lineal esfuerzo-deformación del concreto en la zona de compresión. Es necesario conocer primero la condición balanceada de deformación para obtener el valor de P_b y e_b , que corresponden a esa condición balanceada. La condición balanceada se obtiene ajustando la deformación

en el concreto a 0.003 y la deformación en el acero igual a $\varepsilon_{sy} = f_y/E_s$. Consecutivamente, escogiendo diferentes valores de excentricidad, e , mayores o menores que e_b , se pueden encontrar diferentes puntos del diagrama de interacción en la zona de tensión o compresión.

Curvas experimentales de interacción para columnas confinadas con FRP no se han obtenido, la causa principal es porque son pruebas difíciles de realizar y su demanda y aplicación no es alta. En ACI 440.2R-02 no se aborda directamente el tema para columnas confinadas con FRP cargadas excéntricamente. Sin embargo, haciendo algunas simplificaciones, el diagrama de interacción teórico de una columna confinada con FRP se puede construir usando las ecuaciones presentadas en ACI 440.2R-02.

Suposición 1. Los efectos de confinamiento de FRP aplican a la resistencia a compresión del concreto independientemente de la extensión de la zona de compresión. Así, de la misma manera en la cual se construye un diagrama de interacción para una columna de concreto reforzado se puede construir para una columna confinada con FRP, solo reemplazando el valor de f'_c por f'_{cc} dado por la ecuación de Mander(1988). Se supone que ψ_f es 1.0 cuando se calculan los puntos sobre el diagrama de interacción de la capacidad axial nominal y la capacidad de momento nominal (excepto para $P_{n(máx)}$). Si se desea se puede suponer un valor conservador de $\psi_f = 0.85$.

Suposición 2. Para una columna circular encamisada con FRP se puede usar la deformación máxima del concreto en compresión para determinar la profundidad del eje neutro en la sección. La ecuación de deformación en ACI 440.2R-02, para concreto confinado está dada como

$$\varepsilon'_{cc} = \frac{1.71(5f'_{cc} - 4f'_c)}{E_c}$$

donde E_c es el módulo de elasticidad del concreto no agrietado.

Basado en las dos suposiciones anteriores y usando la deformación máxima del concreto confinado, ε'_{cc} , y el esfuerzo máximo del concreto confinado, f'_{cc} de la ecuación 5.64 a 5.66, se puede obtener el diagrama de interacción P-M de la misma manera que para una columna de concreto no-confinado.

Para una columna cuadrada o rectangular, la deformación máxima disponible del concreto confinado se puede determinar de la misma manera que para una columna circular, con f'_{cc} de la ecuación 5.64 y 5.65, ε_f está definido como el valor menor de 0.004 ó $0.75 \varepsilon_{fu}$, donde ε_{fu} es la deformación última del FRP. El porcentaje de refuerzo para columnas rectangulares se puede encontrar de

$$\rho_f = \frac{2nt_f(b+h)}{bh} \quad (5.79)$$

donde h y b son la profundidad y ancho de la columna, n es el número de bandas de FRP. Para columnas no circulares en ACI 440.2R-02 se señala que no se permite incremento en la resistencia debido al encamisado de FRP; sin embargo, permite incremento en la deformación máxima del concreto.

El factor de eficiencia para columnas cuadradas y rectangulares deberá determinarse de la geometría, la relación de aspecto y la configuración del acero de refuerzo. Restrepo y De Vino (1996) proponen la siguiente ecuación

$$k_s = 1 - \frac{(b-2r)^2 + (h-2r)^2}{3bh(1-\rho_g)} \quad (5.80)$$

Donde r es el radio de la esquina y $\rho_g = (A_s + A'_s)/A_g$ es el porcentaje de refuerzo grueso. Los efectos de confinamiento del encamisado de FRP se deberán despreciar en secciones rectangulares cuando la relación de aspecto $b/h > 1.5$ o cuando las dimensiones, b o h , sean mayores de 36 pulgadas (900 mm).

Es importante recordar que la resistencia a compresión de una columna confinada es solo un paso intermedio para el cálculo de la deformación ϵ'_{cc} , esta resistencia confinada no debe ser usada para determinar cualquier aumento en la resistencia de la columna. Por lo tanto, de acuerdo a ACI 440.2R-02, se puede determinar una curva de interacción P-M para columnas rectangulares confinadas con FRP, utilizando solamente la suposición 2.

5.7.2 PROGRAMA MC-IFRP.f90

El programa MC-IFRP.f90 realiza un análisis seccional de una columna circular o rectangular, el manual de este programa se encuentra en el apéndice F. Tiene la opción de analizar una columna circular con deficiencia por carga axial y determinar el espesor de FRP necesario para que la columna recupere una capacidad de carga axial y su ductilidad; además, los valores para trazar el diagrama de interacción Carga axial-Momento (P-M) de la columna reparada con FRP.

Ejemplo 5.2: Construcción de diagramas de interacción carga-momento para una columna de concreto reforzado, confinada con FRP, la cual posee cables de presfuerzo.

Construir los diagramas de interacción (P-M) para una columna rectangular de concreto reforzado que tiene la siguiente geometría: ancho $b=350$ mm y un peralte $h=350$ mm, las esquinas están redondeadas con un radio $r=25.4$ mm. La resistencia a compresión del concreto es $f'_c = 44.13$ MPa. Para la columna confinada con FRPs, considerar que está confinada por 2 bandas de FRP de espesor $t_f = 0.33$ mm, un esfuerzo $f_f = 752$ MPa, un módulo de elasticidad $E_f = 59360$ MPa y $\epsilon_{fu} = 0.01266$.

La columna está presforzada con 4 cables que en total tienen un área de 206 mm², los cables tienen un módulo de elasticidad de 186326 MPa y una deformación de fluencia $\epsilon_{py} = 0.0052$. La deformación en el concreto bajo la carga de presfuerzo efectiva es $\epsilon_{ce} = 0.0005$.

Solución

Caso 1: Considerar una columna sin bandas de FRP, con refuerzo transversal y sin refuerzo transversal.

Se considera que la columna esta reforzada con 8 varillas del no. 8 y están distribuidas en forma uniforme. Para confinar la columna se utilizaron estribos de 12.7 mm de diámetro, en cada dirección posee 3 ramas, y están separados a cada 100 mm. El concreto confinado tiene una resistencia a la compresión $f'_{cc} = 66.5 \text{ MPa}$.

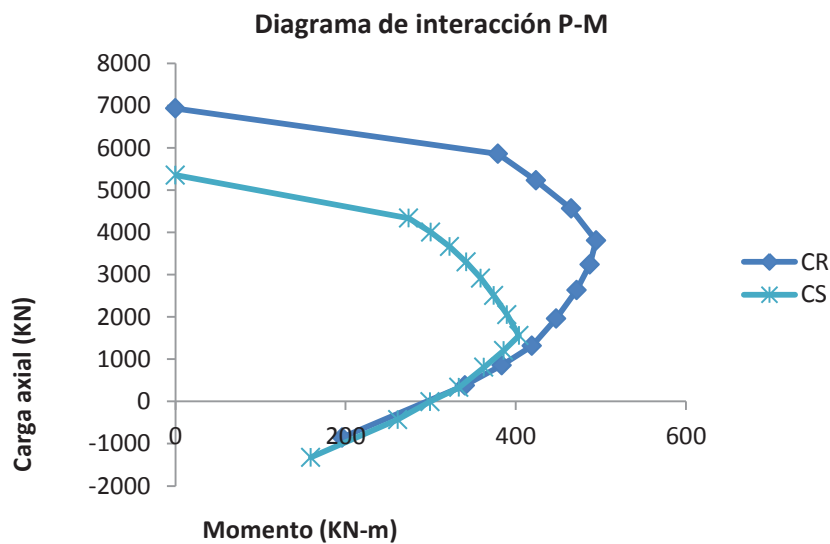


Figura 5 .14 Diagramas de interacción de una columna de concreto confinado y una columna de concreto sin confinamiento

En la Figura se observa que la columna confinada tiene una capacidad mayor para soportar carga axial y su capacidad a flexión es mayor para un gran intervalo de valores de P. Si se supusiera que se les aplica a ambas columnas una carga P de igual magnitud, se puede deducir que la columna confinada requiere una excentricidad mayor para provocar la falla, o si se aplica con la misma excentricidad requiere de una carga mayor para que falle.

Caso 2: Columna de concreto reforzado, sin refuerzo transversal y confinada con bandas de FRP.

Esta columna no posee refuerzo transversal, el refuerzo longitudinal consta de 8 varillas del no. 8, en la Figura 5.15 se muestran los diagramas de interacción de la columna sin bandas de FRP y con bandas de FRP.

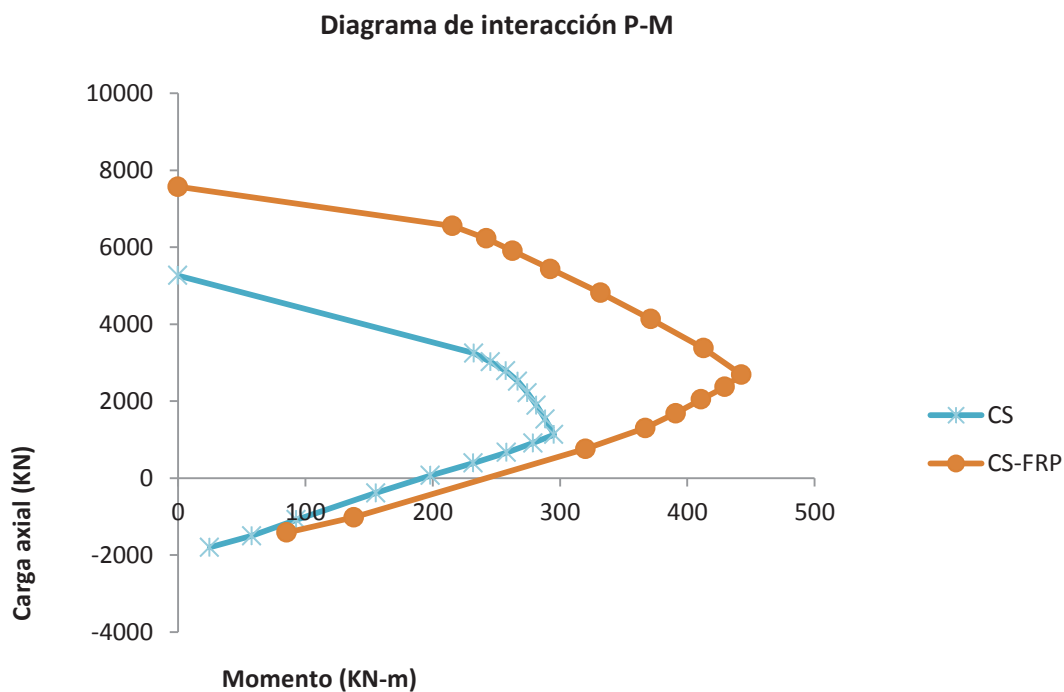


Figura 5.15 Diagramas de interacción de una columna de concreto sin refuerzo transversal, con bandas de FRP y sin bandas de FRP

Se puede ver en la Figura que cuando se agregan bandas de FRP a la columna, esta aumenta su capacidad para soportar carga axial y su capacidad a flexión.

Caso 3: Primero considerar que la columna es de concreto confinado, posee cables de presfuerzo y confinada por bandas de FRP, segundo considerar que la columna no está confinada por estribos, posee cables de presfuerzo y está confinada por bandas de FRP.

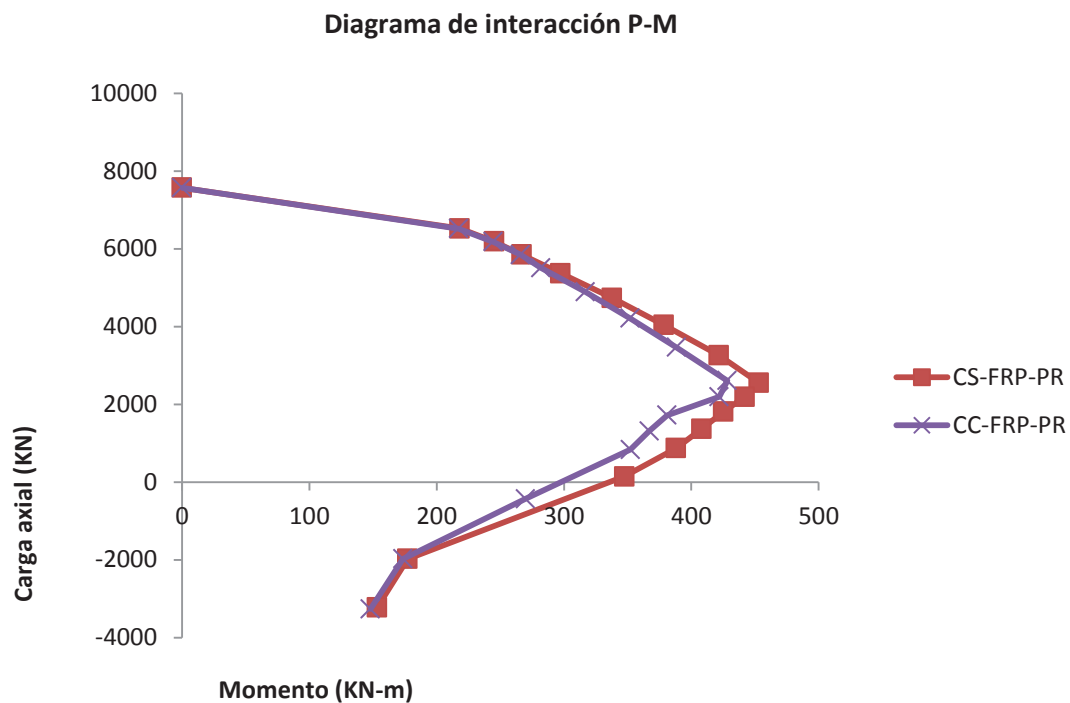


Figura 5.16 Diagramas de interacción de columnas de concreto con presfuerzo y confinadas por bandas de FRP

El efecto del refuerzo transversal de confinamiento no influye significativamente en una columna presforzada si se compara con una columna no confinada con estribos, ambas columnas están confinadas con bandas de FRP. Su capacidad de soportar carga axial y flexión son muy parecidas.

Caso 4: Columna de concreto reforzado con refuerzo transversal, columna de concreto reforzado sin refuerzo transversal, ambas confinadas con bandas de FRP.

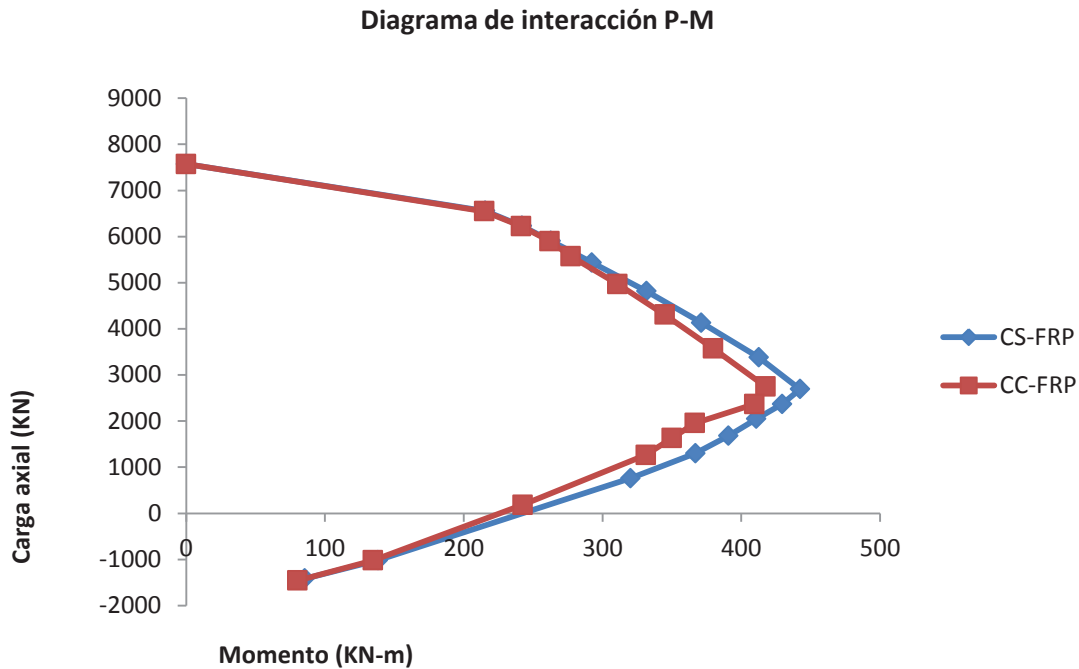


Figura 5.17 Diagramas de interacción de columnas de concreto reforzado y presforzadas, con bandas de FRP y sin bandas de FRP

Como se observa en la figura, la columna sin estribos tiene una capacidad teórica mayor que la columna con estribos. Esto se debe a que se supone que su resistencia es uniforme en toda la sección y no ocurre así en la columna confinada con estribos, ya que su núcleo confinado por los estribos tiene una resistencia menor que la del confinamiento de las bandas. En una columna con estribos cuando los esfuerzos en el núcleo confinado superan la resistencia de confinamiento f'_{cc} , entonces la columna se comporta como una columna sin refuerzo transversal y empieza a trabajar el confinamiento de las bandas de FRP.

5.8 REFUERZO SÍSMICO

5.8.1 MODELO DE SEIBLE (1997)

El modelo propuesto por Seible et al. (1997) y Karbhari (2005) difiere de los anteriormente mencionados debido a que considera el cálculo del espesor del refuerzo para cada modo posible de falla de la columna por separado:

(a) Para el modo de falla por cortante sugiere que el espesor se calcula con:

$$t_j = \frac{\frac{V_o}{\phi_v} - (V_c + V_s + V_p)}{0.004 \left(\frac{\pi}{2} \right) E_f D} \quad (5.81)$$

Donde V_o es la demanda por cortante en la zona de articulación plástica de la columna obtenida de un análisis por flexión lateral, $\phi_v = 0.85$ es el factor de reducción de resistencia por cortante; V_c es el cortante resistente que toma el concreto; V_s es la capacidad de cortante que toman el refuerzo transversal, y V_p es la contribución a la fuerza cortante por carga axial.

La demanda de cortante, V_o , se calcula con el momento flexionante, M_{yi} , por lo que la demanda por cortante es expresada como:

$$V_o = \frac{1.5M_{yi}}{H} \quad (5.82)$$

donde H es la altura de la columna.

La contribución por fuerza cortante del concreto se puede calcular con:

$$V_c = k \sqrt{f'_{co}} A_e \quad (5.83)$$

Donde $k = 0.50$ en la zona de articulación plástica y $k = 3.0$ fuera de ella, y A_e es el área efectiva, la cual puede considerarse como el 80% del área gruesa de la columna. Sin embargo, para columnas dañadas se puede despreciar la contribución de la fuerza cortante que toma el concreto, debido a la formación de grandes grietas y a la pérdida de adherencia entre el agregado del concreto.

La contribución de la fuerza cortante debida al refuerzo transversal se calcula con:

$$V_s = \frac{\pi A_h f_y D' \cot \theta}{2s} \quad (5.8)$$

Donde A_h es el área del acero transversal y θ es el ángulo de la grieta por cortante, la cual en forma conservadora se considera de $\theta = 45^\circ$, s es el espaciamiento entre los estribos del refuerzo transversal y D' es el diámetro efectivo, el cual es igual al diámetro total, D , menos dos veces el recubrimiento del concreto, cc , menos el diámetro de las varillas del refuerzo, d_h , es decir,

$$D' = D - 2cc - d_h \quad (5.85)$$

La contribución de la fuerza cortante debida a la carga axial se determina con:

$$V_p = \frac{P(D-c)}{H} \quad (5.86)$$

Donde P es la carga axial aplicada y c es la profundidad del eje neutro.

El espesor del refuerzo por cortante se aplica en una longitud de la columna, L_v , es medido en los extremos superior e inferior de la cabeza de la columna, y es igual a 1.5 veces el diámetro de la columna.

(b) Para el modo de falla por flexión, el espesor del refuerzo en la zona de la formación de la articulación plástica se calcula con:

$$t_j = 0.09 \frac{D(\varepsilon_{cu} - 0.004) f'_{cc}}{\varphi_f f_f \varepsilon_f} \quad (5.87)$$

Donde $\varphi_f = 0.90$ es el factor por reducción por resistencia; conservadoramente se supone que $f'_{cc} = 1.5f'_{co}$ y la deformación última del concreto que depende del nivel de confinamiento se calcula con:

$$\varepsilon_{cu} = 0.004 + \frac{2.8\rho_j f_f \varepsilon_f}{f'_{cc}} \quad (5.88)$$

Donde ρ_j es la relación volumétrica de las bandas de refuerzo; y ε_{cu} puede calcularse con:

$$\varepsilon_{cu} = \Phi_u c_u \quad (5.89)$$

Donde c_u es la profundidad del eje neutro y Φ_u es la curvatura última de la sección y se obtiene de la ecuación que representa el factor de ductilidad:

$$\mu_\Delta = 1 + 3 \frac{L_p}{L} \left(\frac{\Phi_u}{\Phi_y} - 1 \right) \left(1 - 0.5 \frac{L_p}{L} \right) \quad (5.90)$$

Donde Φ_y es la curvatura de la sección y L_p es la longitud de la articulación plástica determinada con:

$$L_p = 0.08L + 0.022f_y d_b \quad (5.91)$$

El espesor requerido para el refuerzo por flexión se aplica en la región de la formación de la articulación plástica, diferenciándose dos zonas: (a) la región de articulación principal

considerada igual o mayor a $0.5D$ ó $L/8$; y (b) la región de articulación secundaria considerada como la mayor de D ó $L/4$ y el espesor de las láminas de refuerzo es: $t_j/2$.

(c) Para prevenir el modo de falla por escasa longitud de desarrollo del acero de refuerzo sugiere colocar un refuerzo con un espesor de la lámina de:

$$t_j = 500 \frac{D(f_l - f_h)}{E_f} \quad (5.92)$$

Donde f_h es el esfuerzo horizontal provisto por el acero de refuerzo transversal para una deformación del 0.10% y se calcula con:

$$f_h = \frac{0.002A_h E_s}{s D} \quad (5.93)$$

Y f_l es la presión de confinamiento lateral calculada con,

$$f_l = \frac{A_s f_y}{\left[\frac{p}{2n} + 2(d_b + cc) \right] L_s} \quad (5.94)$$

Donde p es el perímetro de la sección transversal de la columna en la zona de escasa longitud de desarrollo, n es el número de varillas traslapadas a lo largo de p ; A_s es el área de una varilla principal del refuerzo de la columna; cc es el recubrimiento del refuerzo principal y d_b es el diámetro del acero de refuerzo principal. La longitud en la cual se aplica el refuerzo por escasa longitud de desarrollo, L_s debe ser mayor que la misma longitud de desarrollo del acero de refuerzo.

Ejemplo 5.3: ejemplos de aplicación de las columnas 1, 2 y 3

En Seible e Innamorato (1995) se reportan pruebas experimentales en una columna de concreto que presentaba deficiencias de refuerzo por cortante (Columna 1) y que fue reforzada colocándole bandas de fibra de carbón (FRP). En Seible et al. (1995) se reporta una columna deficiente en flexión (Columna 2) con escasa longitud de desarrollo y que fue reforzada por bandas de fibra de carbón (FRP).

En la Tabla 5.9 se muestran las propiedades y la carga de la columna deficiente por cortante considerada como columna 1; y en la Tabla 5.10 las propiedades y la carga de la columna deficiente por flexión (Columna 2).

En ambas columnas se utilizaron bandas de FRP con un módulo de elasticidad de $E_f = 124.1 \text{ GPa}$, esfuerzo último de $f_f = 1.31 \text{ GPa}$ y con una deformación última de

$$\varepsilon_f = \frac{f_f}{E_f} = \frac{1.31 \text{ GPa}}{124.1 \text{ GPa}} = 0.0106 \approx 1.10\%.$$

Tabla 5.9 Columna con deficiencia por cortante (Columna 1)

Propiedades de la sección	Altura de la columna, H	2.438 m
	Diámetro de la columna, D	0.61 m
	Recubrimiento, cc	20.32 mm
	Esfuerzo de diseño, f'_c	34.45 MPa
Refuerzo longitudinal (grado 40)	Diámetro de las varillas, d_b (26 en total)	19 mm
	Área de las varillas, A_s	284 mm ²
	Esfuerzo de fluencia, f_y	303.4 MPa
Refuerzo transversal (grado 40)	Diámetro de las varillas, d_h	6.35 mm
	Área de las varillas, A_h	31.7 mm ²
	Espaciamiento, s	127 mm
Propiedades de la carga	Carga axial, P	591.6 kN
	Momento resistente, M_{yi}	646.7 kN m
	Curvatura de fluencia, Φ_y	0.005984 1/m
	Profundidad del eje neutro, c_u	152.4 mm

Tabla 5.10 Propiedades de la columna con deficiencia por flexión (Columna 2).

Propiedades de la sección	Altura de la columna, H	3.658 m
	Diámetro de la columna, D	0.61 m
	Recubrimiento, cc	19.05 mm
	Esfuerzo de diseño, f'_c	34.45 MPa
Refuerzo longitudinal (grado 40)	Diámetro de las varillas, d_b (26 en total)	19 mm
	Área de las varillas, A_s	284 mm ²
	Esfuerzo de fluencia, f_y	303.4 MPa
Refuerzo transversal (grado 40)	Diámetro de las varillas, d_h	6.35 mm
	Área de las varillas, A_h	31.7 mm ²
	Espaciamiento, s	127 mm
Propiedades de la carga	Carga axial, P	1800 kN
	Momento resistente, M_{yi}	518.6 kN m
	Curvatura de fluencia, Φ_y	0.008196 1/m
	Profundidad del eje neutro, c_u	136.4 mm

Tabla 5.11 Propiedades de la columna con deficiencia por flexión (Columna 3).

Propiedades de la sección	Altura de la columna, H	3.658 m
	Diámetro de la columna, D	0.61 m
	Recubrimiento, cc	19.00 mm
	Esfuerzo de diseño, f'_c	34.45 MPa
Refuerzo longitudinal (grado 40)	Diámetro de las varillas, d_b (26 en total)	19 mm
	Área de las varillas, A_s	284 mm ²
	Esfuerzo de fluencia, f_y	303.16 MPa
Refuerzo transversal (grado 40)	Diámetro de las varillas, d_h	6.35 mm
	Área de las varillas, A_h	31.7 mm ²
	Espaciamiento, s	127 mm
Propiedades de la carga	Carga axial, P	1780 kN
	Momento resistente, M_{yi}	815 kN m
	Curvatura de fluencia, Φ_y	0.006339 1/m
	Profundidad del eje neutro, c_u	211 mm

Como el ACI 440.2R incorpora en el proceso de refuerzo sísmico, tanto el modelo constitutivo en función de esfuerzos, f'_{cc} , como el modelo en función de las deformaciones, ε_{cc} , se utilizará el proceso sugerido con los modelos descritos anteriormente: Se supondrá que se requiere una ductilidad $\mu_{\Delta} = 8$ y de 10, como es usual en columnas de concreto reforzado para puentes.

APLICANDO LAS EXPRESIONES DE SEIBLE (1997)

a) Refuerzo por cortante

La demanda de cortante, V_o , se calcula con el momento flexionante, M_{yi} , por lo que:

$$V_o = \frac{1.5M_{yi}}{H} \quad (5.95)$$

Donde H es la altura de la columna.

La contribución por fuerza cortante del concreto se puede despreciar:

$$V_c = 0 \quad (5.96)$$

Se calcula D' es el diámetro efectivo, el cual es igual al diámetro total, D , menos dos veces el recubrimiento del concreto, cc , menos el diámetro de las varillas del refuerzo, d_h , es decir,

$$D' = D - 2cc - d_h \quad (5.97)$$

La contribución de la fuerza cortante debida al refuerzo transversal se calcula con:

$$V_s = \frac{\pi A_h f_y D' \cot \theta}{2s} \quad (5.98)$$

Donde A_h es el área del acero transversal y θ es el ángulo de la grieta por cortante, la cual en forma conservadora se considera de $\theta = 45^\circ$, s es el espaciamiento del refuerzo transversal.

La contribución de la fuerza cortante debida a la carga axial se determina con:

$$V_p = \frac{P(D-c)}{H} \quad (5.99)$$

Donde P es la carga axial aplicada y c es la profundidad del eje neutro.

El espesor se calcula con:

$$t_j = \frac{\frac{V_o}{\phi_v} - (V_c + V_s + V_p)}{0.004 \left(\frac{\pi}{2} \right) E_f D} \quad (5.100)$$

Donde $\phi_v = 0.85$ es el factor de reducción de resistencia por cortante;

Tabla 5.12 Valores del espesor de bandas de FRP de las columnas 1,2 y 3

Columna	M_{yi} (kN m)	V_o (kN)	P (kN)	D'	V_s	V_p	t_{ji}
				mm	kN	kN	mm
Columna 1	646.7	397.888	591.6	563.010	66.909	111.040	0.6
Columna 2	518.6	212.657	1800.0	565.550	67.211	233.045	0
Columna 3	815.0	334.199	1780.0	565.650	67.223	194.155	0.3

El espesor del refuerzo por cortante se aplica en una longitud de la columna, L_v , es medido en los extremos superior e inferior de la cabeza de la columna, y es igual a 1.5 veces el diámetro de la columna, y es igual a 1.5 veces el diámetro de la columna.

Como se puede ver en la Tabla 5.12 la columna 1 tiene problemas por cortante, por lo cual requiere de un espesor mayor de FRP. La columna 2 no necesita ser reparada si se considera este criterio.

b) Refuerzo por flexión en la articulación plástica

Se considera como válida la ecuación para el cálculo de longitud de la articulación plástica

L_p para doble curvatura, es decir: $L = H/2$

Se tiene que:

$$L_p = 0.08 \left[\frac{H}{2} \right] + 0.022 f_y d_b$$

Para calcular la ductilidad de curvatura de la ecuación (5.90)

$$\mu_{\Delta} = 1 + 3 \frac{L_p}{L} \left(\frac{\Phi_u}{\Phi_y} - 1 \right) \left(1 - 0.5 \frac{L_p}{L} \right)$$

Se despeja,

$$\frac{\Phi_u}{\Phi_y} = \mu_{\Phi} = 1 + \frac{\mu_{\Delta} - 1}{3 \left(1 - 0.5 \frac{2L_p}{H} \right) \frac{2L_p}{H}}$$

Y la deformación de confinamiento se calcula con:

$$\varepsilon_{cc} = \mu_{\Phi} \Phi_y c_u$$

Donde los valores de Φ_y y de c_u están dados en las Tablas 5.9, 5.10 y 5.11, para cada ejemplo en particula

Tabla 5.13 Valores de diseño de las columnas 1, 2 y 3

Columna	Lp (mm)	μ_{Φ}		Φ_y 1/m	cu (mm)	ε_{cc} (mm/m)	
		$\mu_{\Delta} = 8$	$\mu_{\Delta} = 10$			$\mu_{\Delta} = 8$	$\mu_{\Delta} = 10$
Columna 1	321.9	19.92	25.33	0.005984	152.4	0.01817	0.02310
Columna 2	419.5	22.59	28.75	0.008196	136.4	0.02525	0.03214
Columna 3	419.4	22.59	28.76	0.006339	211.0	0.03022	0.03847

Para el refuerzo por flexión se consideran los valores de las Tablas 5.9, 5.10 y 5.11. El espesor del refuerzo en la zona de la formación de la articulación plástica se calcula con:

$$t_j = 0.09 \frac{D(\varepsilon_{cu} - 0.004) f'_{cc}}{\varphi_f f_f \varepsilon_f} \quad (5.101)$$

Donde $\varphi_f = 0.90$ es el factor por reducción por resistencia; conservadoramente se supone que $f'_{cc} = 1.5f'_{co}$; con $f_f = 1.31 \text{ GPa}$ y con una deformación última de $\varepsilon_f = 0.0106$.

Tabla 5.14 Valores del espesor de bandas de FRP de las columnas 1,2 y 3

Columna	ε_{cu} (mm/m)		t_{j1} (mm)	t_{j2} (mm)	t_{j1} (mm)	t_{j2} (mm)
	$\mu_\Delta = 8$	$\mu_\Delta = 10$	$\mu_\Delta = 8$		$\mu_\Delta = 10$	
Columna 1	0.01817	0.02310	3.2	1.6	4.4	2.2
Columna 2	0.02525	0.03214	4.9	2.4	6.4	3.2
Columna 3	0.03022	0.03847	6.0	3.0	7.9	3.9

La columna 1 no tiene problemas por flexión, el espesor de FRPs para esta columna es el menor que para las columnas 2 y 3, se puede ver en la tabla 5.14 que a mayor ductilidad, mayor es el espesor de FRPs necesario para restaurar la capacidad necesaria en la columna. La columna 3 es la más afectada por este tipo de falla.

c) Refuerzo por longitud de desarrollo

La columna 1 no tiene problemas por longitud de desarrollo, la columna 2, tiene: $L_s = 381 \text{ mm}$, perímetro de la columna, $p = 3.208 \times 10^3 \text{ mm}$, número de varillas longitudinales, $n = 26$, $A_s = 284 \text{ mm}^2$, por lo que la presión de confinamiento requerida es:

$$f_l = \frac{A_s f_y}{\left[\frac{p}{2n} + 2(d_b + cc) \right] L_s}$$

Y el esfuerzo horizontal provisto por el acero de refuerzo transversal se calcula con:

$$f_h = \frac{0.002A_h E_s}{s D}$$

El espesor de la lámina se calcula con:

$$t_j = 500 \frac{D(f_l - f_h)}{E_f}$$

Tabla 5.15 Valores del espesor de bandas de FRP de las columnas 2 y 3

Columna	f_l	f_h	t_j
	(Mpa)	(Mpa)	(mm)
Columna 2	2.08	0.164	4.72
Columna 3	2.09	0.164	4.73

La Tabla 5.15 muestra los valores del espesor de FRPs en la zona de articulación plástica de las columnas 2 y 3, el espesor necesario de FRPs para restaurar su capacidad es casi igual en ambos casos.

El resumen de los espesores de bandas de FRP para confinamiento de las columnas 1, 2 y 3 se presenta en la tabla 5.16.

Tabla 5.16 Resumen del espesor de bandas de FRP de las columnas 1,2 y 3

Columna	Lvi	tvi	Lc1	tc1	Lc2	tc2	Ls	ts
	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm
Columna 1	915	0.6	304.75	3.2	304.75	1.6	-	-
Columna 2	915	0	457.25	4.9	457.25	2.4	381	4.72
Columna 3	915	0.3	457.25	6.0	457.25	3.0	381	4.73

5.9 CONCLUSIONES

El refuerzo y reparación de estructuras por medio de Fibras de Polímeros (FRP, Fiber Reinforced Polymers) se ha incrementado en los últimos años. Para el caso de columnas que han sufrido algún tipo de daño durante un evento sísmico la aplicación de los FRP es una alternativa rápida y eficaz. En este trabajo se estudia la aplicación de bandas de FRP para la reparación del daño de columnas circulares que presentan algún tipo de daño pos sísmico. Primeramente se identifica visualmente el estado de daño que presenta la columna, según el Manual de Reparación de Estructuras de Concreto (ACI, 2005). Una vez que el estado de daño se ha especificado se determina la posibilidad de realizar su reparación por medio de bandas de FRPs, si es viable la reparación, se especifica un procedimiento simplificado de aplicación rápida para el cálculo del espesor y tipo de FRP que debe usarse como reparación de emergencia de columnas circulares de puentes.

Se incluye una revisión de los modelos de confinamiento existentes en la literatura (Richart, et al., Fardis y Khalili, Mander et al., Cusson y Pautre, Karbhari y Gao, Kono, Miyauchi et al., Samaan et al.). Se evalúan las diversas ecuaciones de diseño para determinar el procedimiento más simple para el cálculo del espesor de las bandas de FRP que servirán de opción de reparación de columnas circulares de puentes vehiculares, entre estas están las propuestas por el ACI 440.2R-02, Caltrans Memo 20-4 y por Karbahari (2005).

CAPÍTULO 6

CONCLUSIONES GENERALES

El estudio de los efectos de la fuerza cortante sobre el concreto reforzado es de gran importancia, ya que nos permite conocer el comportamiento de las estructuras bajo este tipo de fuerza. Cuando se calculan la rama ascendente y la rama descendente de la curva de respuesta, se puede obtener un valor más realista de la ductilidad de un elemento de concreto reforzado.

Se evaluó las técnicas de reparación con fibras de polímeros (FRP), de elementos estructurales que han sufrido algún daño provocado por cargas estáticas ó dinámicas. Cuando se tiene conocimiento de estas técnicas, esto nos permite repararlas, evitar su colapso y mantener su funcionalidad.

De los resultados que se obtuvieron en este trabajo se concluye lo siguiente:

1. La teoría modificada del campo de compresión permite predicciones reales de la respuesta de elementos membrana de concreto reforzados sujetos a cortante y fuerzas axiales. Esta teoría satisface las condiciones generales de compatibilidad del concreto agrietado, mientras se incorporen las relaciones constitutivas de los materiales.
2. La ductilidad de vigas de concreto reforzado puede ser evaluada mediante la relación momento-curvatura. Se encontró que el factor de ductilidad de curvatura se incrementa si el porcentaje de acero de tensión decrece, el porcentaje de acero de compresión se incrementa, el esfuerzo de fluencia del acero se reduce o la resistencia a la compresión del concreto se incrementa.
3. Un análisis de elemento finito no-lineal es un medio para predecir la respuesta de un elemento de concreto reforzado con regiones discontinuas.
4. Cuando se incluyeron los coeficientes Hsu/Zhu en la matriz de rigidez de los materiales se dedujo que estos coeficientes deben tener un valor cercano a 2 para poder calcular la rama de descenso en la curva de respuesta (Hsu 2000); incluir la

rama de descenso en el análisis de una estructura de concreto reforzado aumenta el valor de la ductilidad y su capacidad de absorber energía.

5. La reparación y refuerzo de estructuras por medio de Fibras de Polímeros ha incrementado en los últimos años, esta es una alternativa rápida y eficaz de aplicar en columnas que han sufrido daño durante un evento sísmico.
6. Las técnicas de reparación, para columnas circulares con un cierto estado de daño, que se describieron en el capítulo 5 nos permiten obtener el espesor de bandas de FRP necesario para restaurar la capacidad de columnas con deficiencia por carga axial, flexión, cortante y longitud de desarrollo.
7. En los diagramas de interacción P-M de una columna confinada por bandas de FRP, se puede observar que el confinamiento de las bandas produce un aumento en la capacidad de carga axial y en la capacidad de flexión.
8. Se recomienda realizar un trabajo donde se aplique de manera practica la Teoría del Modelo Membrana, con el fin comprobar los efectos del cortante sobre elementos de concreto reforzado o presforzado.
9. Como continuación de este trabajo se recomienda estudiar las técnicas de reparación sobre elementos de concreto presforzado.
10. Se recomienda estudiar el comportamiento del concreto reforzado sujeto a cortante y torsión, junto con el análisis de elemento finito no-lineal.

REFERENCIAS

AASHTO LFD Standard Specifications, Sixteenth Edition, American Association of State Highway and Transportation Officials, Washington, D.C., 1996.

AASHTO LRFD Bridge Design Specification, *Second Edition*, American Association of State Highway and Transportation Officials, Washington, D.C., 1988.

ACI-440.2R Committee, (2002), "**Guide for the design and construction of externally bonded FRP systems for strengthening concrete structures**", ACI 440, Detroit.

ACI 318-08 (2008), "**Building code requirements for structural concrete**", ACI, Farmington Hill, MI.

Bank Laurence C., "**Composites for Construction**" (Structural Design with FRP Materials), John Wiley & Sons, Hoboken, New Jersey, 2006,316-358.

Concrete Society, (2004), "**Design guidance for strengthening concrete structures using fiber composite material**", Technical Rep. No 55, Crowthorne, UK.

Cook William D., and Mitchel Denis, "**Studies of Disturbed Regions near Discontinuities in Reinforced Concrete Members**", ACI Structural Journal, Technical Paper, Title 85-S23, 1988, 206-216.

Cusson, D. and Paultre, P., (1995), "**Stress-strain model for confined high-strength concrete**", J. Struct. Eng., 121 (3), 468-477.

Fradis, M. N. and Khalili, H. H., (1982), "**FRP encased concrete as a structural material**", Mag. of Concrete Res., 34 (131), 191-202.

Hsu Thomas T. C., "**Unified Theory of Reinforced Concrete**", CRC Press inc., Boca Ratón, Florida, 1993, 193-253.

Karbhari, V. M., y Gao, Y., (1997), "**Composite jacketed concrete under uniaxial compression-verification of simple design equations**", J. Mater. Civ. Eng., 9(4), 185-193.

Lam, L. y Teng, J. G., (2002), "**FRP strengthened RC structures**", West Sussex, England, John Wiley and Sons, Inc.

Lee, C., Bonacci, J. F., Thomas, M. D., Maalej, M. Khajehpour, S., Hearn, N., Pantazopoulou, S. and Sheikh, S., (2000), "**Accelerated corrosion and repair of reinforced concrete columns using carbon fiber reinforced polymer sheets**", Can. J. Civ. Eng., 27, 941-948.

Li, G. Kidane, S., Pang, S. S., Helms, J. E. and Stubblefield, M. A., (2003), "**Investigation into FRP repair RC columns**", Comp. Struct., 62, 83-89.

Ma, R. and Xiao, Y., (1999), "**Seismic retrofit and repair of circular bridge columns with advanced composite materials**", Earth. Spect. 15(4), 747-764.

Mander, J. B., Priestley, M. J. N., and Park, R. J. T., (1988), "**Theoretical stress-strain model for confined concrete**", J. Struct. Eng., 114(8), 1804-1826.

Miyauchi, K., Nishibayashi, S., and Inoue, S., (1998), "**Estimation of strengthening effects with carbon fiber sheet for concrete columns**", Proc., 3rd Int. Symp. On Non Metallic (FRP) Reinforcement for Concrete Structures, Japan Concrete Institute, Vol. 1, 217-224.

Morsch (1920) "**Der Eisenbetonbau-Seine Theorie und Anwendung**" (Reinforced Concrete Construction-Theory and Application) 5th Ed., Witter, Stuttgart, V.1 Part 1, 1920, Part 2, 1922.

Park R. and Paulay Thomas, "**Reinforced Concrete Structures**", John Wiley & Sons, New York, 1975.

Park R. and Ruitong Dai, "**Ductility of Doubly Reinforced Concrete Beam Sections**", ACI Structural Journal, Technical Report, Title no. 85-S24, 1988, 217-225.

Pilakoutas K. and Mortazavi A., A, (1997), "**Ductility through external confinement of RC members with FRP**", Non-metallic (FRP) reinforcement for concrete structures, Japan Concrete Institute, Tokyo, I, 225-232.

Ritter (1899) "**The Hennebique Design Method**" (Die Bauweise Hennebique).

Richart, F. E., Brandtzaeg, A. and Brown, R. L., (1928), "**A study of the failure of concrete under combined compressive stresses**".

Saadatmanesh, H., Ehsani, M. R., and Jin, L., (1997), "**Repair of earthquake damage RC columns with FRP wraps**", ACI Struct. J., 94(2), 206-211.

Saafi, M., Toutanji, H. A., y Zongjin, L., (1999), "**Behavior of concrete columns confined with fiber reinforced polymer tubes**", ACI Mater. J., 96(4), 500-509.

Samaan, M., Mirmiran, A., y Shahawy, M., (1998), "**Model of concrete confined by fiber composites**", J. Struct. Engrg., 124(9), 1025-1031.

Schlaich, J, Schafer, K & Jennewein, M, (1987) "**Toward a consistent design of structural concrete**", Prestressed Concrete Institute Journal, Vol 32, No.3, May-June, pp 74-150'.

Schlaich, J. and Schafer, K., "**Design and Detailing of Structural Concrete Using Strut-and-Tie Models**", The Structural Engineer, Vol 69, No.6 March 1991, pp. 113-125.

Simmonds Sidney H. and Alexander Scott D. B., "**Truss Model for Edge Column-Slab Connections**", ACI Structural Journal, Technical Paper, Title no. 84-S32, 1987, 296-303.

Solanki Himat and Sabnis Gajanan M., "**Reinforced Concrete Corbels – Simplified**", ACI Structural Journal, Technical Paper, Title no. 84-S45, 1987, 428-432.

Spoelstra, M. R., y Monti, G., (1999), "**FRP confined concrete model**", J. Comps. Constr., 3(3), 143-150.

Tastani, S. P., Pantazopoulou, S. J., Zdoumba, D., Plakantaras, V. y Akritidis, E., (2006), "**Limitations of FRP jacketing in confining old-type reinforced concrete members in axial compression**", J. Mater. Civ. Eng., 10(1), 52-57.

Thériault M., Neale K. W., (2004), "**Fiber-Reinforced Polymer-Confined Circular Concrete Columns: Investigation of Size and Slenderness Effects**", Journal of Composites for Construction, ASCE, July-August, Vol. 8. No. 4, 323-331.

Toutanji, H., (1999), "**Stress-strain characteristics of concrete columns externally confined with advanced fiber composite sheet**", ACI Mater. J., 96(3), 397-404.

Vecchio Frank J. and Collins Michael P., "**Predicting the Response of Reinforced Concrete Beams Subjected to Shear Using Modified Compression Field Theory**", ACI Structural Journal, Technical Paper, 1988, 258-268.

Vosooghi, A. y Saiid Saiid, M., (2008), "**Emergency repair of damage bridge columns using fiber reinforced polymer (FRP) materials**", Progress report to Caltrans.

Xiao, Y., y Wu, H., (2000), "**Compressive behavior of concrete confined by carbon fiber composite jackets**", J. Mater. Civ. Eng., 12(2), 139-146.

Youssef, M. N., Feng, M. Q., Mosallam, A. S., (2007), "**Stress-strain model for concrete confined by FRP composites**", Comp. Part B, 38, 614-628.

(2005), "**Using Composites in seismic retrofit applications**", VM Karbhari; Aerospace Report No. ATR-2005(7796)-2