



**Universidad Michoacana  
de San Nicolás de Hidalgo**

**Facultad de Ingeniería Mecánica**

---

**Cinemática del Robot Manipulador  
Helicoidal RPSP**

**Tesis**

**Que para obtener el grado de:**

**Maestro en Ciencias en Ingeniería Mecánica**

**Presenta:**

**Ing. Oracio García Lara**

**Asesor:**

**Dr. Ignacio Juárez Campos**

---

**Morelia Michoacán**

**Octubre de 2005**

## **Agradecimientos**

### **A mi esposa: Ángela Ruiz Pérez**

Por todo el apoyo que me brindó, su comprensión y el tiempo dedicado para que yo pudiera realizar estos estudios.

### **A mis hijos: Juan Manuel y Andrés García Ruiz**

Por su invaluable ayuda en muchas actividades, permitiéndome dedicarle tiempo al presente trabajo.

### **A mis padres: Abelardo García Cisneros y Epifanía Lara Vargas**

Por brindarme siempre su incondicional apoyo para salir adelante.

### **A mi maestro y amigo: Dr. Ignacio Juárez Campos**

Por asesorarme en este trabajo, e iniciarme en el campo de la investigación.

### **A mis sinodales: M. en C. Hugo C. Gutiérrez Sánchez, M. en I. Miguel Ángel Vega González, Dr. Amadeo Sánchez Castillo y Dr. Gildardo Solorio Díaz**

Por su importante contribución en la revisión de este trabajo.

**A la Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo**

Por ofrecerme la oportunidad de ingresar en estos estudios.

**A todos mis maestros, familiares y amigos**

Que de alguna manera contribuyeron a que fuera posible la culminación de esta etapa en mi formación profesional.

**Índice general**

<b>Nomenclatura</b>	<b>v</b>
<b>Resumen</b>	<b>vii</b>
<b>Objetivos</b>	<b>ix</b>
<b>Definición del problema</b>	<b>x</b>
<b>Establecimiento de Hipótesis</b>	<b>xi</b>
<b>Capítulo 1 Introducción</b>	
<b>1.1 Antecedentes</b>	<b>3</b>
<b>1.2 Organización de la tesis</b>	<b>7</b>
<b>1.3 Revisión bibliográfica</b>	<b>8</b>
<b>1.4 Estado del arte</b>	<b>15</b>
<b>Capítulo 2 Modelado Matemático</b>	
<b>2.1 Síntesis de mecanismos de tornillo</b>	<b>17</b>
<b>2.2 Descripción de la arquitectura RPSP</b>	<b>23</b>
<b>2.3 Cinemática directa del manipulador RPSP</b>	<b>26</b>
<b>2.3.1 Descripción espacial del manipulador</b>	<b>27</b>
<b>2.4 Cinemática inversa</b>	<b>41</b>
<b>2.4.1 Definición vectorial del mecanismo</b>	<b>41</b>
<b>2.4.2 Evaluación de las variables articulares del                   eslabonamiento posicionador</b>	<b>53</b>
<b>2.4.3 Evaluación de las variables articulares del</b>	

<b>eslabonamiento orientador</b>	<b>57</b>
<b>2.4.4 Evaluación de las variables articulares del</b> <b>eslabonamiento de tornillo</b>	<b>65</b>
<b>Capítulo 3 Generación de trayectoria</b>	
<b>3.1 Perfil de trayectoria</b>	<b>70</b>
<b>3.1.1 Perfil de trayectoria de grado 5</b>	<b>73</b>
<b>3.1.2 Perfil de trayectoria octal</b>	<b>77</b>
<b>3.2 Lugar geométrico de la trayectoria</b>	<b>88</b>
<b>3.2.1 Desplazamiento general del tornillo</b>	<b>88</b>
<b>3.2.2 Transformación de tornillo</b>	<b>92</b>
<b>Capítulo 4 Simulación</b>	
<b>4.1 Introducción</b>	<b>102</b>
<b>4.2 Descripción de la tarea</b>	<b>103</b>
<b>Capítulo 5 Conclusiones</b>	
<b>Conclusiones</b>	<b>127</b>
<b>5.1 Trabajo futuro</b>	<b>130</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>131</b>

## Nomenclatura

RPSP	Denominación por el tipo de juntas que conforman al robot manipulador, estas siglas son de; <b>R</b> otational, <b>P</b> rismatic <b>S</b> pherical y <b>P</b> rismatic.
P, Q y R	Son tres puntos no colineales, pertenecientes al cuerpo a transportar, en las condiciones de inicio se acompañan por un subíndice 1 y en condiciones finales por un subíndice 2. Con tres puntos no colineales es suficiente para definir la posición y orientación de un objeto.
DOF	Referente a los grados de libertad por sus siglas en inglés.
{i}	Se emplea esta nomenclatura para referirse a los sistema ortonormales de referencias, en este caso i.
$\hat{x}_i, \hat{y}_i$ y $\hat{z}_i$	Esta nomenclatura es para definir los vectores unitarios que están en los ejes de los sistemas de referencias.
$\theta_1$	Valor de la primera variable articular.
$d_2$	Valor de la segunda variable articular.
$\theta_3, \theta_4$ y $\theta_5$	Son los valores de las variables articulares 3, 4 y 5, se corresponden con las juntas rotacionales cuyos ejes de rotación concurren en un punto y por ello pueden representarse por una junta esférica.
H	Altura del centro de la junta esférica.
$d_6$	Valor de la sexta variable articular.
$L_b$	Longitud entre la junta prismática del eslabonamiento de tornillo y el órgano terminal.
$T_i^{i-1}$	Representa la transformación homogénea entre las juntas adyacentes i e i-1

$R_i^{i-1}$	Representa la rotación de la junta i con respecto de la junta i-1.
$\overline{O}_i^{i-1}$	Representa al vector de posición que define el origen de la junta i con respecto de la junta i-1.
$\hat{e}$	Eje de giro del tornillo de Rodrigues.
$\overline{S}_{\perp\hat{e}}$	Es el vector que define la posición del eje de giro del tornillo de Rodrigues. Por definición es perpendicular a $\hat{e}$ .
$\phi$	Ángulo de giro del tornillo de Rodrigues, necesario para llegar de la posición inicial a la final.
$d$	Avance del tornillo de Rodrigues.
$L_c$	Es la distancia necesaria que debe desplazarse el eje de giro del eslabonamiento de tornillo, en relación con el eje de giro del tornillo de Rodrigues, para alcanzar la pieza de trabajo y ejecutar la tarea.
${}^0\overline{WP}$	Es el vector que define la posición del objeto de trabajo con respecto de {0}.
$\hat{e}_m$	Eje de giro del mecanismo o eslabonamiento de tornillo.
$d_t$	Distancia total del desplazamiento.
$t_0$ y $t_f$	Tiempos correspondientes al inicio y final del desplazamiento.
$v_{\max}$	Velocidad máxima.
$\acute{indice}_m$	Parámetro de control sobre el perfil de octavo grado.
$\otimes$	Representa la operación de producto cruz.
$Rot(\hat{z}, \theta)$	Simboliza una rotación alrededor del eje indicado con el ángulo que se indica.

## Resumen

En la actualidad, existen algunos mecanismos de tornillo encargados del desarrollo de tareas en el transporte de objetos. El algoritmo matemático al que obedecen estos mecanismos fue planteado por el economista y matemático francés Benjamín Rodrigues Olinde (Burdeos, 1794-París, 1851). Rodrigues, como matemático, estudió las líneas de curvaturas de una superficie (fórmulas de Rodrigues, 1815) e introdujo la representación esférica en la teoría de las superficies.

Las ecuaciones de Rodrigues para el desplazamiento general de un tornillo, se aplican actualmente en mecanismos que desarrollan tareas de tomar y dejar un objeto desde una posición y orientación inicial hasta una posición y orientación final, siguiendo una trayectoria helicoidal. Estos mecanismos, una vez manufacturados pueden desarrollar dicha actividad sin la posibilidad de adaptarse a nuevas condiciones.

El presente trabajo, emplea las ecuaciones de Rodrigues para desarrollar el análisis cinemático de un robot manipulador helicoidal, (se denomina helicoidal por la trayectoria que sigue el objeto a transportar, debido a que el algoritmo matemático es el correspondiente a un tornillo del cual sus partes describen helicoides, cuando éste rota y se desplaza), de seis grados de libertad, denominado RPSP (Por el tipo de juntas que lo conforman, **R**otational, **P**rismatic, **S**pherical y **P**rismatic, por sus siglas en inglés). Este robot posee seis articulaciones, las cuales se pueden clasificar en tres conjuntos de eslabonamientos con las siguientes características:



Primer eslabonamiento, éste consta de una junta rotacional y una prismática; tiene la función de poner en la posición adecuada al resto de articulaciones, que se encuentran montadas sobre la prismática de este primer eslabonamiento, para que se logre hacer coincidir al eje del mecanismo de tornillo con el eje del tornillo de Rodrigues o en su caso, si es necesario, hacer coincidir al eje del mecanismo de tornillo a lo largo de líneas paralelas al eje del tornillo de Rodrigues.

Segundo eslabonamiento, éste consta de dos articulaciones rotacionales encima de las cuales se encuentra el tercer eslabonamiento. El segundo eslabonamiento se encarga de orientar al eje del eslabonamiento de tornillo de manera adecuada.

Tercer eslabonamiento, llamado eslabonamiento de tornillo, consta de una articulación rotacional y una prismática, la rotación y el desplazamiento de estas dos articulaciones en forma sincronizada pueden llevar al trazo de una trayectoria helicoidal.

El análisis cinemático, parte de la premisa de que son conocidos dos puntos de la trayectoria de un objeto, así como de la orientación del mismo en cada uno de esos puntos, por ende, son conocidos también los parámetros que resultan de aplicar las ecuaciones generales de Rodrigues para el desplazamiento general de un tornillo.

## Objetivos

### Principales

Realizar la Síntesis y la Cinemática directa e inversa de un Robot Manipulador Helicoidal de seis grados de libertad, cuyas características principales son:

1. Capacidad para transportar un objeto a partir de tres puntos coordinados no colineales, pertenecientes al cuerpo rígido a transportar, en las condiciones de inicio y final del desplazamiento, empleando en ello las ecuaciones de Rodrigues para el desplazamiento general de un tornillo.
2. Posibilidad de adaptar sus articulaciones al cambiar los parámetros del movimiento helicoidal para el objeto a desplazar.

### Secundarios

Se pretende demostrar que:

1. Es posible sustituir los actuales mecanismos de tornillo, rígidos, empleados para el transporte de objetos en trayectorias helicoidales, por un manipulador RPSP de seis grados de libertad.

## 2. Definición del problema

Actualmente, los mecanismos basados en las “Ecuaciones de Rodrigues para el desplazamiento general de un tornillo”, se caracterizan por la rigidez en su desempeño, puesto que una vez construidos no es posible modificar los parámetros que regulan su movimiento.

Es muy común la implementación de estos mecanismos para el transporte de una pieza de trabajo, cuya posición y orientación se pueden definir por tres puntos coordenados, no colineales, denominados P, Q y R. Para definir la posición y orientación iniciales de la pieza de trabajo, a estos puntos se les pone el subíndice 1 quedando como  $P_1$ ,  $Q_1$  y  $R_1$ . Para definir la posición y orientación finales de la pieza de trabajo, a estos puntos se les pone el subíndice 2 quedando como  $P_2$ ,  $Q_2$  y  $R_2$ . Como estos mecanismos funcionan de manera parecida a un tornillo, la trayectoria del objeto a transportar de la posición y orientación iniciales, a la posición y orientación finales genera una helicoides, por tal motivo, al robot manipulador en estudio se le denominó helicoidal.

Los actuales mecanismos de tornillo se caracterizan por la rigidez en su desempeño, se pretende sustituirlos por un robot manipulador que sea capaz de posicionar y orientar al eslabonamiento que realiza el movimiento helicoidal, además de estar en condiciones de adaptarse al cambio de las condiciones iniciales y/o finales del objeto a desplazar.

Se pretende que el robot esté en capacidad de trasladar al objeto de trabajo, apoyándose en el principio del tornillo de Rodrigues, sin que esto implique que no tenga capacidad para desarrollar movimientos diferentes.

Considerando, que las líneas de producción requieren de flexibilidad y que los distintos mecanismos que intervienen en un proceso se adapten a la posibilidad de cambios en el mismo, es evidente la necesidad de sustituir los actuales mecanismos de tornillo, por robots manipuladores capaces de cumplir con las mismas tareas y que además posean la flexibilidad de adaptarse a las condiciones iniciales y/o finales de tareas nuevas.

Los robots tienen la ventaja de ser programables, de tal manera que, mediante cambios en su programación pueden realizar diferentes actividades sin requerir sustitución o modificaciones que requieran reemplazo parcial del mecanismo para llevar a cabo una nueva tarea.

### **Establecimiento de Hipótesis**

1. Si se tiene un Robot Manipulador Helicoidal con articulaciones RPSP, basado en el Principio del Tornillo de Rodrigues, entonces, éste deberá ser capaz de transportar un objeto, desde una posición inicial a una posición final, definidas por tres puntos no colineales, con respecto a un sistema hortonormal. Sin embargo, la trayectoria seguida, que no es el objetivo que se persigue, será del tipo helicoidal por el principio del desplazamiento general del tornillo de Rodrigues.

2. Si se tiene el robot cuya arquitectura es RPSP, entonces éste deberá ser capaz de posicionar y orientar al eslabonamiento de tornillo si las condiciones de la tarea así lo requieren.
  
3. Si se tiene el robot RPSP cuya cinemática está sustentada en las ecuaciones generales del desplazamiento de un tornillo, formuladas por Rodrigues, entonces, el manipulador deberá ser capaz de adaptarse y comportarse siguiendo los parámetros del desplazamiento helicoidal.

## **Introducción**

Benjamín Olinde Rodrigues (1795-1851), planteó las ecuaciones para el desplazamiento general de un tornillo, estas ecuaciones son analizadas en el tema “*3.2.1 Desplazamiento general del tornillo*” y se han utilizado en gran cantidad de mecanismos. Un tornillo común tiene como característica principal una rosca que embona en una tuerca, de esta manera, si consideramos una tuerca fija en la cual se encuentra roscado un tornillo, al girar éste, se tendrá como consecuencia la rotación del mismo y también un desplazamiento a lo largo de su eje.

Al soldarle al tornillo el extremo de una barra, es claro que al realizar una rotación de éste con su consecuente desplazamiento, también la barra rotará y se desplazará describiendo una trayectoria helicoidal como cualquier punto correspondiente al tornillo. Si el otro extremo de la barra se emplea para sujetar un objeto rígido, éste también rotará y se desplazará al hacerlo el tornillo, *describiendo por consecuencia una trayectoria helicoidal*.

Mecanismos como el que se describe, son utilizados para el transporte de objetos. Estableciendo un sistema de referencias fijo, se puede definir la posición del objeto que se transporta mediante las coordenadas de un punto, correspondiente a su cuerpo, también podemos definir su posición y orientación si conocemos de él tres puntos no colineales. Es evidente que al rotar y desplazarse el tornillo, la posición y la orientación del objeto definidas por los puntos P, Q y R cambian, existiendo una

estrecha relación entre los puntos  $P_1$ ,  $Q_1$  y  $R_1$  con los puntos  $P_2$ ,  $Q_2$  y  $R_2$ , donde los subíndices 1 y 2 se refieren a P, Q y R en sus condiciones de inicio y final respectivamente, del desplazamiento ocasionado por la rotación y el desplazamiento del mecanismo de tornillo.

No encontrando evidencia de que existan robots que incluyan estos mecanismos como parte de su arquitectura, se planteó como trabajo de tesis encontrar la síntesis y posteriormente el análisis cinemático de un robot manipulador que incluyera un eslabonamiento con las características del mecanismo descrito y los eslabonamientos necesarios que permitan posicionarlo y orientarlo y con ello proveerle de la capacidad de adaptación ante la posibilidad de que cambien las características del desplazamiento de la pieza a transportar.

En los trabajos preliminares de la investigación, se encontró la síntesis de más de una arquitectura con las características deseadas, escogiéndose de entre ellas la arquitectura RPRRRP para efecto de presentar esta tesis.

La nomenclatura RPRRRP, es asignada considerando el tipo de juntas que conforman a la cadena cinemática del robot, siendo R el indicativo de que se está empleando una junta del tipo rotacional, que gira alrededor de un eje y P el indicativo de que se esta empleando una junta del tipo prismática, que se desliza a lo largo de una barra. Para el caso en que se encuentran tres juntas rotacionales adyacentes, en que sus ejes de rotación son coincidentes en un punto, se puede emplear como nomenclatura una S que reemplaza a RRR, de esta manera podemos referirnos al robot manipulador RPRRRP como RPSP (Rotacional, Prismatic,

Spheric, Prismatic) de la denominación Spheric podemos referirnos a **S** como la junta esférica del robot.

La tesis que se presenta, aborda como tema de estudio a un robot cuya actividad planteada es la transferencia de materiales, este dispositivo, tiene como finalidad transportar un objeto de un sitio a otro considerando las posiciones y orientaciones deseadas.

Para determinar el movimiento al cual será sometida una pieza a manipular, es necesario conocer de ella algunos puntos, para el caso que se aborda, se tienen considerados como conocidos tres puntos, no colineales, que definen su posición y orientación antes del desplazamiento, de la misma manera, se consideran conocidos los mismos tres puntos al final del desplazamiento, entendiéndose con ello que el robot manipulador que se analiza posee la capacidad no sólo de mover sino también de orientar los objetos que transporta.

## **1.1 Antecedentes**

Las articulaciones de un robot, suelen controlarse mediante motores eléctricos, apoyados por un análisis de los movimientos necesarios de sus articulaciones es posible llevar un objeto a la posición deseada mediante un proceso conocido como cinemática inversa.

Los robots comúnmente se emplean en tareas repetitivas y monótonas, pudiendo realizar éstas con alta precisión durante las 24 horas del día, también se



emplean en actividades peligrosas para el ser humano, el desarrollo de actividades en espacios de alto riesgo y lugares a los cuales el hombre no puede llegar.

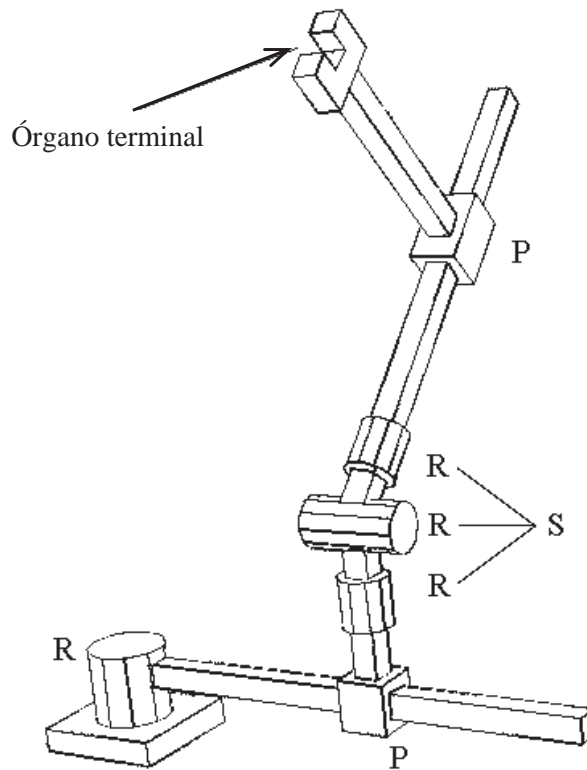
Un movimiento helicoidal puede analizarse a partir de un movimiento de tornillo, el cual requiere de cuatro parámetros necesarios. La fórmula de Rodrigues para el desplazamiento general de un tornillo, consiste en determinar estos cuatro parámetros a partir de la posición de tres puntos no colineales, pertenecientes al objeto a desplazar a través de una trayectoria en forma de hélice, considerando la posición y orientación iniciales y finales del objeto de trabajo [1], [2], [3], [4].

Considerando que en los actuales mecanismos de tornillo, fijos, basados en la fórmula general de Rodrigues para el desplazamiento general de un tornillo, es necesario reemplazar todo el mecanismo al cambiar las condiciones de operación, se tiene en ellos una gran desventaja. Por lo tanto, se emprende la búsqueda de un robot manipulador que ejecute la tarea de tomar y dejar objetos desde una posición y orientación iniciales a una posición y orientación finales, pero que se adapte fácilmente en caso de existir cambios en las condiciones iniciales y/o finales de la tarea. Es decir, un mecanismo reprogramable en su tarea de manipulación de objetos, con capacidad de reacomodarse adoptando una nueva posición, orientación y características de desplazamiento para ejecutar una nueva tarea sin que sea necesario su reemplazo.

El desplazamiento helicoidal de un objeto, puede definirse como el desplazamiento de dicho objeto a lo largo de una curva trazada en la superficie de un cilindro, la rosca de un tornillo tiene forma de hélice, de tal manera que al roscar un tornillo, cualquier punto de su cuerpo describe una curva llamada hélice. Por tal

motivo, se plantea un robot manipulador cuyo arreglo de eslabones provean al objeto de trabajo este tipo de desplazamiento.

Se propone para realizar esta tarea un robot manipulador helicoidal del tipo RPSP como el mostrado en la figura 1.1, (Por sus siglas en ingles de; **R**otational, **P**rismatic, **S**pherical y **P**rismatic), de seis grados de libertad, que se requieren para dotarle la flexibilidad necesaria, para orientar y posicionar al eslabonamiento de tornillo conforme cambien las posiciones inicial y final en las que se manipula la pieza de trabajo.



*Figura 1.1 Robot manipulador RPSP.*

En la figura 1.1 se muestra el manipulador helicoidal RPSP que se propone en este trabajo, satisface las características mencionadas tal como se demuestra en los siguientes capítulos. Posee capacidad para proporcionar los cuatro parámetros necesarios conforme a lo establecido por la fórmula general de Rodrigues para el desplazamiento de un tornillo [3], [4], [5], los parámetros son:

1. Ángulo de rotación del desplazamiento alrededor del eje del tornillo.
2. Eje de giro del tornillo.
3. Traslación a lo largo del tornillo.
4. Vector de posición que define el punto geométrico por donde pasa el eje de giro del tornillo.

El manipulador RPSP mostrado en la figura 1.1, está dotado de cuatro articulaciones de rotación y dos prismáticas. Organizadas por pares, las primeras dos (Rotacional y Prismática) forman un eslabonamiento que le permite posicionar al tornillo, las siguientes (Rotacional y Rotacional) forman un eslabonamiento capaz de orientar al tornillo y las últimas (Rotacional y Prismática) conforman el eslabonamiento del tornillo.

Cuando tres articulaciones rotacionales se encuentran adyacentes en una cadena cinemática y sus ejes de rotación son concurrentes en un punto, es común referirse a ellas como una articulación esférica. En este caso, el manipulador RPSP contiene una articulación de este tipo denominada S, los ejes de estas articulaciones rotacionales se intersectan en el punto central de una esfera imaginaria formada por las articulaciones mencionadas.

## 1.2 Organización de la tesis

Este trabajo de tesis se organiza de la siguiente manera:

Al principio se definen los objetivos del presente trabajo y se define el problema a resolver, también se hace el establecimiento de la hipótesis.

Capítulo 1, contiene un compendio de los antecedentes, en relación al tema de tesis, describe la organización de la misma y presenta la revisión bibliográfica que se llevó a cabo, también encontramos el estado del arte.

Capítulo 2, contiene la descripción del robot manipulador que se aborda en este trabajo de tesis, mediante la síntesis y la descripción espacial del robot. También presenta la cinemática directa y la obtención de las distintas variables articulares que posee la arquitectura RPSP mediante la cinemática inversa.

Capítulo 3, describe la generación de trayectoria basada en un polinomio de octavo grado cuyo índice de control lo restringe al de quinto grado [6].

Capítulo 4, contando ya con la cinemática directa e inversa del manipulador y con la generación de trayectoria, este capítulo presenta la simulación correspondiente.

Finalmente, se abordan en el capítulo 5 las conclusiones.

### 1.3 Revisión bibliográfica

Poco se encontró sobre mecanismos de tornillos, sin embargo, además de este trabajo de tesis, una investigación más amplia concerniente con robots de arquitectura helicoidal, ha arrojado algunos artículos en los que se plantean manipuladores, con la capacidad de adaptarse a cambios en las condiciones de la tarea a realizar. Entre los trabajos más representativos del tema, podemos mencionar sobre algunos de ellos lo siguiente.

- 1 Bottema, O. And Roth, B. *Theoretical Kinematics*. 1990. Dover Publications.

Este libro presenta un análisis detallado sobre las conocidas ecuaciones de Rodrigues, denominándolas “*Fórmulas para el desplazamiento general de un tornillo*”, presentadas en el tema **3.2.1 Desplazamiento general del tornillo**. Estas ecuaciones explican la manera en que un punto rota alrededor de un eje al mismo tiempo que se desplaza generando trayectorias helicoidales, tal como ocurre con un tornillo común.

- 2 Byungmoon Kim and Jarek Rossignac. *Collision Prediction for Polyhedra under Screw Motions*. GVU Center and College of Computing. Georgia Institute of Technology. June 16-20, 2003 .

Los autores de este trabajo, abordan la predicción de colisiones entre objetos rígidos cuya trayectoria es helicoidal, establece que un claro dominio del espacio-tiempo puede llevar a la clara comprobación de que

un par de objetos no chocarán. Para determinar la posible colisión de los objetos se requiere resolver las intersecciones entre las geometrías de trayectoria. En este trabajo se propone una estrategia de predicción de colisión mediante la aproximación de los movimientos relativos entre los objetos por una sucesión de segmentos de movimiento de tornillo. Definiendo cada objeto por la posición relativa y su orientación durante el transcurso del movimiento.

- 3 Juárez Campos, Ignacio y Juárez Campos, Beatriz. *Síntesis Evolutiva de un Mecanismo de Tornillo*. Noveno congreso de la Sociedad Mexicana de Ingenieros Mecánicos (SOMIM), Instituto Tecnológico de Veracruz, Veracruz, Ver, México. Septiembre 2-6 de 2003.

Los autores de este trabajo, abordan la aplicación de algoritmos genéticos para encontrar los parámetros de un mecanismo de tornillo, conductor de un cuerpo rígido, del cual se conocen la posición y orientación tanto inicial como final del objeto transportado. Un objeto puede ser descrito por tres puntos no colineales de tal manera que se requieren seis puntos como datos para el diseño del mecanismo. Los parámetros de dicho mecanismo son el eje y el ángulo de giro, el lugar por donde pasa el eje de giro y el desplazamiento lineal dependiente del desplazamiento angular que experimenta el cuerpo.

- 4 Mavroidis, C. *Completely Specified Displacement of a Rigid Body and Their Application in the Direct Kinematics of In-Parallel Mechanisms*. ASME Design Technical Conferences. 1998. Atlanta, GA.

Este trabajo muestra la forma de determinar los parámetros del Tornillo de Rodrigues, cuando son conocidas las distancias de traslación de seis puntos pertenecientes al cuerpo rígido que se traslada.

- 5 Juárez Campos, Ignacio. *Artificial Life-based Search Technique on the Solution of Singular Configuration Concerning Screw Parameters in Helicoidal Robots*. Proceedings of the 10th International Symposium on Artificial Life and Robotics (AROB 10th 2005). Oita University, Air Force Office Research. Asian Office of Aerospace Research and Development (AFOSR/AOARD), Beppu, Oita, Japan. February 4-6, 2005.

Este trabajo, trata sobre la búsqueda de singularidades en robots helicoidales de la familia **SBMF6 (Screw-Based Manipulator Family having 6 DOF)**, cuya arquitectura obedece a un arreglo de seis grados de libertad, utilizando una técnica de búsqueda artificial denominada algoritmos genéticos. Esta técnica de búsqueda de la cinemática inversa, se presenta como una alternativa a la cinemática inversa obtenida mediante ecuaciones cerradas que presentan singularidades para ciertas configuraciones de las cadenas cinemáticas.

- 6 Juárez Campos, Ignacio; García Lara, Oracio y Juárez Campos, Beatriz. *The Inverse Kinematics of the RPSP Screw-Based Robot Manipulator*. The 4th International Conference on the Advanced Mechatronics (ICAM' 04). October 3-5, 2004. Asahikawa, Japan, pp 143-148.

Este trabajo incluye la cinemática inversa de un robot manipulador de seis grados de libertad, con una arquitectura definida como RPSP, perteneciente a la familia **SBMF6 (Screw-Based Manipulator Family having 6 DOF)**. Dicho manipulador, ejecuta la tarea de llevar un objeto de un lugar a otro tomando como información seis puntos que definen la posición y orientación inicial y final del objeto a desplazar, considerando para tal efecto las ecuaciones de Rodrigues para el desplazamiento general de un tornillo. Este artículo presenta la cinemática inversa atendiendo solamente la posición de las articulaciones y excluye las velocidades y aceleraciones correspondientes.

Cabe destacar que este artículo es producto inicial de la investigación concerniente a esta tesis, en la cual si se abordan las velocidades y aceleraciones de las articulaciones.

- 7 Juárez Campos, Ignacio; García Lara, Oracio y Juárez Campos, Beatriz. *Trajectory Planning for the PPSP Helicoidal Robot Manipulator*. International Symposium on Robotics and Automation 2004. August 25-27, 2004. Querétaro, Qro, México, pp 287-294.

Este trabajo aborda el análisis de un mecanismo de la familia **SBMF6**, en cuanto a la trayectoria que sigue dicho manipulador durante su desempeño. Este manipulador se basa en el bien conocido mecanismo de Rodrigues para el desplazamiento general de un tornillo.



- 8 Juárez Campos, Ignacio; Juárez Campos, Beatriz; García Lara, Oracio y Ramírez Méndez, Margarita. *The Inverse Kinematics of The PPSP Helicoidal Robot Manipulator*. Proceedings of the Tenth IASTED International Conference on Robotics and Applications. August 23-25, 2004. Honolulu, Hawaii, USA, pp 22-27.

Este trabajo presenta la cinemática inversa de un robot manipulador helicoidal, de seis grados de libertad, con una arquitectura correspondiente a una cadena cinemática abierta, denominada PPSP y perteneciente a la familia **SBMF6 (Screw-Based Manipulator Family having 6 DOF)**. La tarea que se plantea que ejecute el robot PPSP, es la de llevar un objeto de un lugar a otro, ejerciendo el control sobre la posición y orientación que guarda durante el transcurso del tiempo, empleando en ello como información seis puntos que definen la posición y orientación inicial y final del objeto a desplazar, Por tal motivo, apoyan el análisis de la cinemática inversa, en las ecuaciones de Rodrigues para el desplazamiento general de un tornillo.

- 9 Juárez Campos, Ignacio; García Lara, Oracio y Juárez Campos, Beatriz. *The Inverse Kinematics of The SPRP Screw-Based Manipulator*. Proceedings of the Tenth IASTED International Conference on Robotics and Applications. August 23-25, 2004. Honolulu, Hawaii, USA, pp 34-40.

Los autores, presentan la cinemática inversa de un robot manipulador denominado SPRP, de seis grados de libertad, perteneciente a la familia

**SBMF6 (Screw-Based Manipulator Family having 6 DOF)**. Este robot manipulador helicoidal, también está en capacidad de ejecutar la tarea de llevar un objeto de un lugar a otro, teniendo como información seis puntos que definen la posición y orientación iniciales y finales del objeto a desplazar, considerando como base las ecuaciones de Rodrigues para el desplazamiento general de un tornillo, obtienen las ecuaciones gobernantes de las variables articulares del manipulador.

- 10 Juárez Campos, Ignacio; García Lara, Oracio. *The Redundant SPRPP Manipulator*. Proceedings of the IASTED International Conference on Robotics And Applications, RA 2005, October 31 - November 2 , 2005 Cambridge, USA.

Este trabajo incluye el análisis cinemático de un robot manipulador de siete grados de libertad, con una arquitectura definida como *SPRPP* perteneciente a la familia *SBMF7* (Screw-Based Manipulator Family Having 7 DOF). Dicho manipulador ejecuta la tarea de llevar un objeto de un lugar a otro, tomando como información seis puntos que definen las posiciones y orientaciones iniciales y finales del objeto a desplazar, considerando para tal efecto las ecuaciones de Rodrigues para el desplazamiento general de un tornillo.

- 11 Juárez Campos, Ignacio; García Lara, Oracio. *Joint space modeling of the RRSP Screw-Based Robot Manipulator*. 17th IMACS World Congress, Scientific Computation, Applied Mathematics and Simulation. Paris, France. July 11-15, 2005.

La investigación examina la cinemática inversa de un robot manipulador de 6 grados de libertad, que posee la estructura RRSP. Esta cadena cinemática, dedicada a operaciones “tomar y dejar” (pick and place), está diseñada de acuerdo al teorema de Chasles cuyos parámetros de tornillo, cuando las posiciones y orientaciones iniciales y finales de tres puntos no colineales de un cuerpo rígido son dados, ha sido resuelto por Rodrigues. La pieza de trabajo va de una configuración inicial a una final a través de una trayectoria tipo espiral y el manipulador adapta su postura a esa y a cualquier otra condición de la tarea. Para encontrar las configuraciones de tornillo adecuados, este artículo desarrolla y presenta la cinemática inversa en términos de las coordenadas operacionales.

- 12 Juárez Campos, Ignacio; *The Redundant RRSPP Manipulator Belonging to the SBMF7 Family and its Comparison with the non-redundant RRSP Manipulator*. 17th IMACS World Congress, Scientific Computation, Applied Mathematics and Simulation. Paris, France. July 11-15, 2005.

La familia SBMF7, es un conjunto que contiene una clase de cadenas cinemáticas espaciales, abiertas, llamadas manipuladores helicoidales o manipuladores basados en tornillo que tienen 7 grados de libertad. Esa familia posee las arquitecturas PPSPP, RRSPP, RPSPP y SPRPP. Este artículo presenta las principales características que tienen que ver con el arreglo RRSPP y su correspondiente cinemática inversa.

## 1.4 Estado del arte

Como se vio en la revisión bibliográfica concerniente con los trabajos más cercanos al tema tratado, casi todos ellos son producto de la investigación denominada “Optimización de Sistemas Mecánicos” que se lleva a cabo en la Facultad de Ingeniería Mecánica de la Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo. Estos trabajos, conforman el estado del arte dado que es lo más reciente que se ha publicado y han sido presentados básicamente en congresos internacionales como:

- The 4<sup>th</sup> International Conference on The Advanced Mechatronics, celebrada en Asahikawa, Japón en octubre de 2004 y organizada por The Japan Society of Mechanical Engineering.
- The 10<sup>th</sup> IASTED International Conference on Robotics and Applications, celebrada en Hawaii, USA en agosto de 2004 y organizada por The International Association of Science and Technology for Development (IASTED).
- The 11<sup>th</sup> IASTED International Conference on Robotics and Applications, a celebrarse en la ciudad de Cambridge, USA, en octubre-noviembre de 2005 y organizada por The International Association of Science and Technology for Development (IASTED).

- The 10<sup>th</sup> International Symposium on Artificial life and Robotics, celebrada en la ciudad de Beppu, Japón en febrero de 2005 y organizada por The Oita University y la Fuerza Aérea de los EEUU con base en Japón.
- The 17<sup>th</sup> IMACS World Congress Scientific Computation, Applied Mathematics and simulation, celebrada en la ciudad de París, Francia y organizado por Ecole Centrale de Lille.

Estos congresos aceptan únicamente artículos de alta calidad y son sometidos a una rigurosa evaluación que garantiza su originalidad.

La investigación bibliográfica previa a la publicación de estos artículos, no ha encontrado arquitecturas de robots manipuladores helicoidales. Este hecho, aunado a la aceptación de los artículos mencionados en la comunidad científica, permite afirmar que el estudio de los manipuladores con arquitectura helicoidal llevada a cabo en la Facultad de Ingeniería Mecánica de la UMSNH es original.

## **Introducción**

En este capítulo, se presenta la cinemática directa y la cinemática inversa de un manipulador helicoidal cuya estructura está definida como RPSP. Cinemática es la parte de la física que estudia el movimiento de los cuerpos, sin interesarse por las causas que originan dicho movimiento, de tal manera que, bajo este esquema se aborda la cinemática, interesándonos la descripción espacial del movimiento de las articulaciones que conforman al robot manipulador RPSP como una función del tiempo. [4].

La cadena cinemática RPSP provee un movimiento en forma de espiral y semeja al bien conocido mecanismo de tornillo, el cual es un mecanismo serial basado en la fórmula de Rodrigues y teorema de Chasles que describen el desplazamiento general de tornillo. [2].

### **2.1 Síntesis de mecanismos de tornillo**

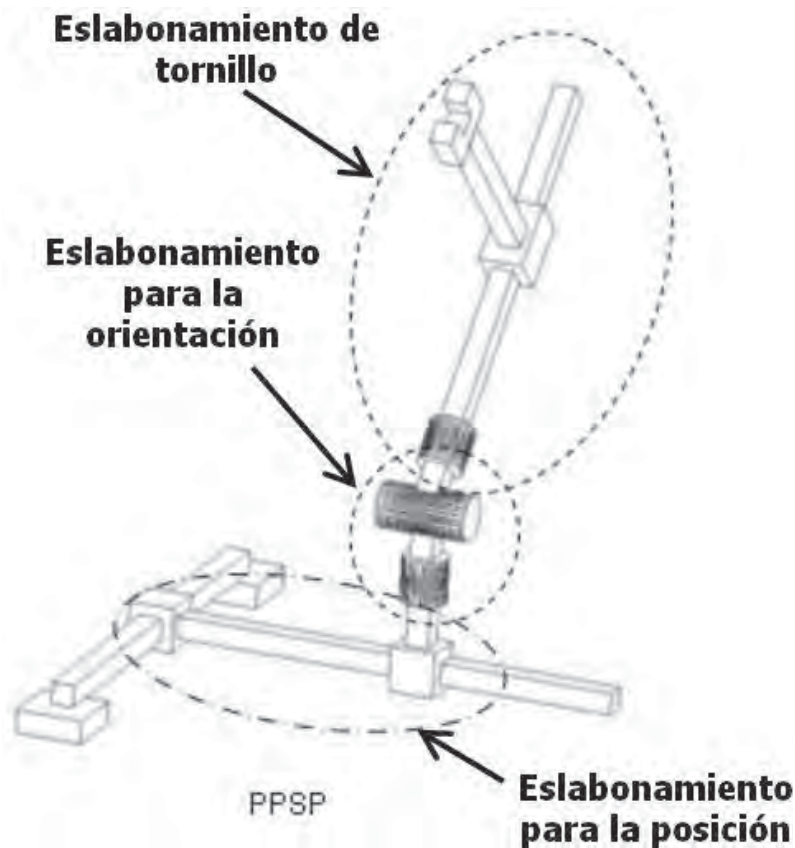
La búsqueda de robots manipuladores, que posean como característica proporcionar un arreglo de tornillo flexible, con capacidad de cumplir con la tarea de llevar un objeto de una posición a otra a través de una trayectoria helicoidal, ha llevado a determinar una tabla de arreglos de articulaciones rotacionales y prismáticas, cuyos eslabonamientos finales corresponden al llamado *eslabonamiento de tornillo*. Algunos de los arreglos contenidos en la tabla 2.1, han llevado al

desarrollo de la síntesis del mecanismo y en algunos de ellos a la cinemática inversa de los mismos. Cabe hacer notar que algunos casos no tienen la capacidad de posicionar y orientar al eslabonamiento de tornillo, como ocurre con el arreglo PPPRP (renglón número 15).

*Tabla 2.1 Posibles combinaciones con seis grados de libertad entre eslabones prismáticos y rotacionales, que satisfacen como tercer eslabonamiento el correspondiente a uno de tornillo.*

00	R	R	R	R	R	P
01	R	R	R	P	R	P
02	R	R	P	R	R	P
03	R	R	P	P	R	P
04	R	P	R	R	R	P
05	R	P	R	P	R	P
06	R	P	P	R	R	P
07	R	P	P	P	R	P
08	P	R	R	R	R	P
09	P	R	R	P	R	P
10	P	R	P	R	R	P
11	P	R	P	P	R	P
12	P	P	R	R	R	P
13	P	P	R	P	R	P
14	P	P	P	R	R	P
15	P	P	P	P	R	P

Estas cadenas cinemáticas son capaces de efectuar movimientos en forma de hélice, cada una de ellas posee su propia cinemática y dinámica particular. Proporcionan, los cuatro parámetros necesarios para satisfacer la Fórmula General de Rodrigues para el desplazamiento general de un tornillo, ecuaciones (3.58) a la (3.65). Sin embargo, algunos de los arreglos mostrados tienen limitaciones en cuanto a la flexibilidad que se persigue. A continuación se muestran algunas cadenas cinemáticas sintetizadas en la tabla 2.1.



*Figura 2.1 Robot manipulador helicoidal PPSP.*



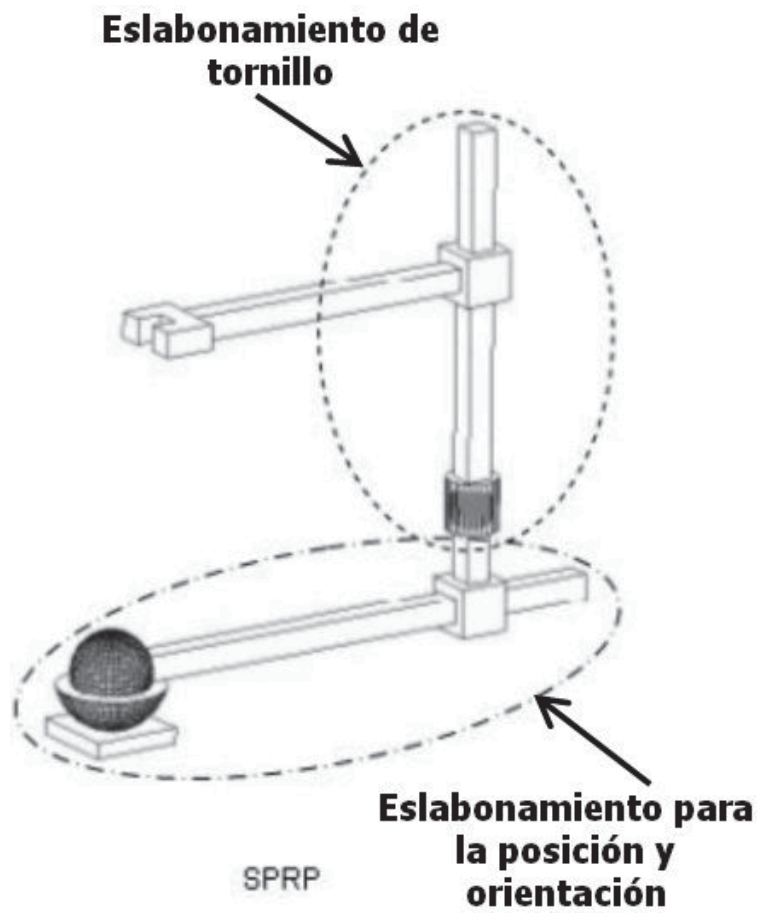


Figura 2.2 Robot manipulador helicoidal SPRP.

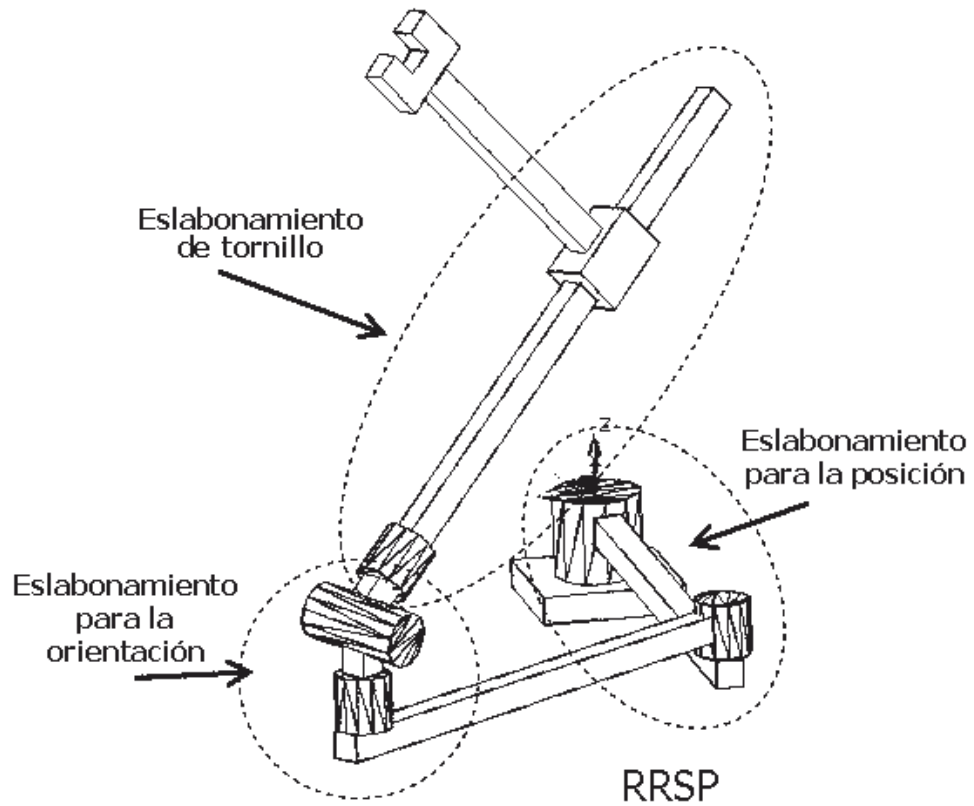
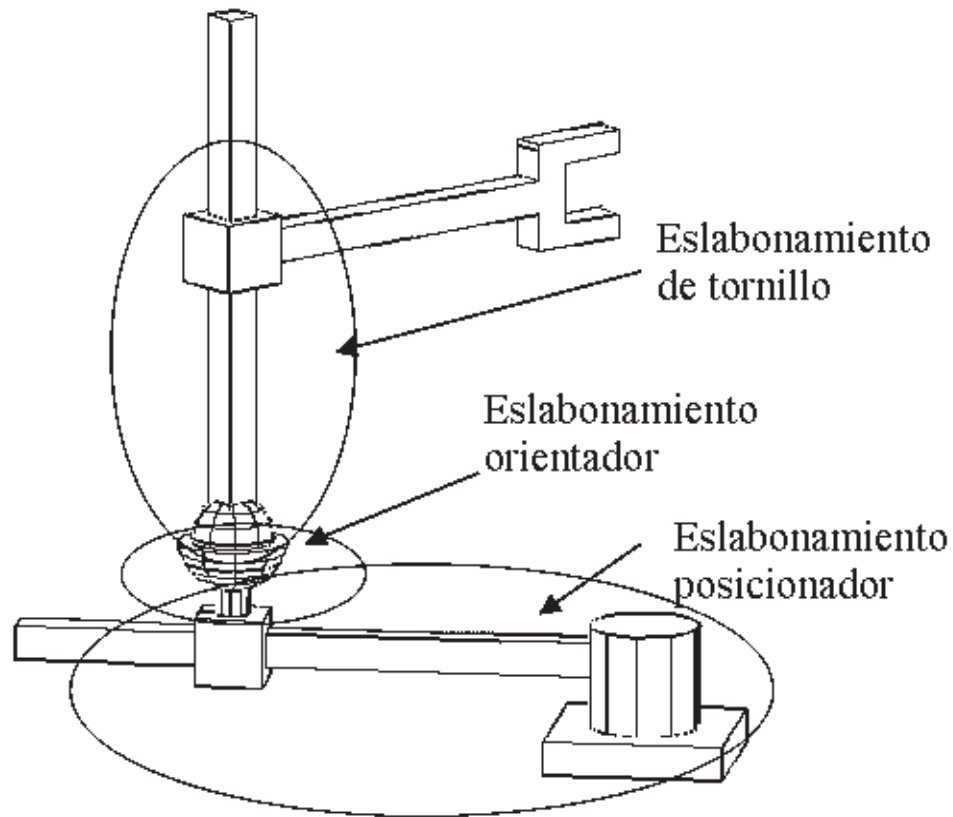


Figura 2.3 Robot manipulador helicoidal RRSP.



*Figura 2.4 Robot manipulador helicoidal RPSP.*

Las figuras 2.1, 2.2, 2.3 y 2.4 representan manipuladores helicoidales que pertenecen a la familia denominada SBMF6 (Screw-Based Manipulator Family having 6 DOF) [5], [6], y poseen algunas características en común; algunas de éstas son:

- 1.- Son manipuladores del tipo helicoidal.
- 2.- Poseen seis grados de libertad.

- 3.- Poseen capacidad de adaptación cuando la tarea cambia.
- 4.- Estas cadenas cinemáticas proveen un movimiento en espiral.
- 5.- Están basados en la Fórmula de Rodrigues y Teorema de Chasles que describen el desplazamiento general de un tornillo.

## 2.2 Descripción de la arquitectura RPSP

El manipulador de arquitectura RPSP, mostrado en la figura 2.4, está constituido por un conjunto de cuerpos rígidos conectados entre si por medio de juntas [2], [7]. El arreglo de eslabones y pares cinemáticos empleados, permiten en este manipulador un análisis que considera tres eslabonamientos que son:

1. Eslabonamiento para la posición.
2. Eslabonamiento para la orientación.
3. Eslabonamiento de tornillo.

El tercer eslabonamiento que se menciona, permite al manipulador un comportamiento igual al de cualquier mecanismo basado en las ecuaciones generales de Rodrigues para el desplazamiento general de un tornillo [2], [7]. Los eslabonamientos uno y dos, están encargados de colocar en la posición y orientación adecuados al eslabonamiento de tornillo dependiendo de las características de la tarea a realizar, [2], [4], [7]. Es importante señalar, que el eje del eslabonamiento de tornillo no necesariamente coincide con el eje del tornillo del mecanismo.

La arquitectura del robot helicoidal RPSP mostrada en la figura 2.5, tiene seis grados de libertad, que le permiten orientar y posicionar al eslabonamiento de

tornillo para ejecutar la tarea de transportar una pieza de trabajo desde una posición y orientación iniciales a una posición y orientación finales, si estas condiciones cambian, el robot es capaz de adaptarse a las nuevas condiciones haciendo un reacomodo en sus eslabonamientos y obteniendo los nuevos parámetros del mecanismo de tornillo, [2], [7]. Es por esta razón, que se propone a este robot para cumplir con los objetivos planteados en este trabajo.



*Figura 2.5 Eslabonamientos del manipulador helicoidal RPSP.*

La fórmula general de Rodrigues para el desplazamiento de un tornillo, provee los cuatro parámetros necesarios que definen a un mecanismo capaz de generar un movimiento helicoidal [1],[2], [3], [4]. El robot manipulador helicoidal RPSP satisface la fórmula general de Rodrigues para el desplazamiento de un tornillo [2].

El conjunto de tres articulaciones de rotación cuyos ejes concurren en un punto, proveen de un movimiento esférico al manipulador, es práctica común el diseño de manipuladores con articulaciones esféricas [4], [8]. En total, el manipulador propuesto posee cuatro articulaciones de rotación y dos articulaciones prismáticas, representando al arreglo RPRRRP correspondiente a la fila 04 de la tabla 2.1. y que se describen en la tabla 2.2

*Tabla 2.2 Descripción de las articulaciones que conforman al manipulador RPSP.*

Articulación		Tipo	Descripción
<b>R</b>		Rotacional	Eslabonamiento para la posición.
<b>p</b>		Prismática	
<b>S</b>	R	Rotacional	Eslabonamiento para la orientación.
	R	Rotacional	
	R	Rotacional	Eslabonamiento de tornillo
<b>P</b>		Prismática	

### 2.3 Cinemática directa del manipulador RPSP

La cinemática directa de este mecanismo, se emplea cuando se requiere de evaluar la posición y orientación del órgano terminal respecto de un sistema de referencias fijo, conocidos los valores de las variables que determinan el comportamiento cinemático de cada una de las articulaciones y los parámetros geométricos de los elementos del robot.

Es decir, encontrar una función que defina el posicionamiento y orientación del órgano terminal cuando conocemos el comportamiento de las variables articulares, de tal manera que:

$$X = F(\theta) \in R^n \quad (2.1)$$

Siendo

$X$  La variable que representa el espacio en que opera el manipulador, ofreciendo las condiciones de posición y orientación del órgano terminal.

$\theta$  Nos representa al vector de las variables articulares del manipulador en estudio.

$F(\theta)$  Es la regla matemática que relaciona  $\theta$  con  $X$

$R^n$  Representa el espacio vectorial donde  $n$  es el número de variables independientes.

### **2.3.1 Descripción espacial del manipulador RPSP**

Dentro de la cinemática directa, la descripción espacial permite establecer con claridad cual es la posición y orientación que se tiene entre juntas adyacentes, se consideran conocidos los valores de las variables articulares, a partir de los cuales es posible encontrar el estado que guarda el órgano terminal. La figura 2.6, ilustra la descripción espacial del manipulador empleando en ello un conjunto de sistemas de referencias que permiten establecer las ecuaciones de transformación homogéneas, que son las que conforman la cinemática directa del robot manipulador.

Tomando un sistema de referencias fijo, se puede describir para cada una de las articulaciones la posición y orientación que guardan con respecto a este sistema de referencias. El manipulador se compone básicamente de un conjunto de articulaciones de rotación y prismáticas, de las cuales resulta indispensable evaluar durante el análisis su descripción espacial con respecto a un sistema de referencias fijo.

Un robot articulado puede describirse mediante el método de Denavit Hartenberg, este método, representa una forma de asignación de sistemas de referencia entre eslabones de un robot manipulador, definiendo cuatro magnitudes asociadas a cada articulación.



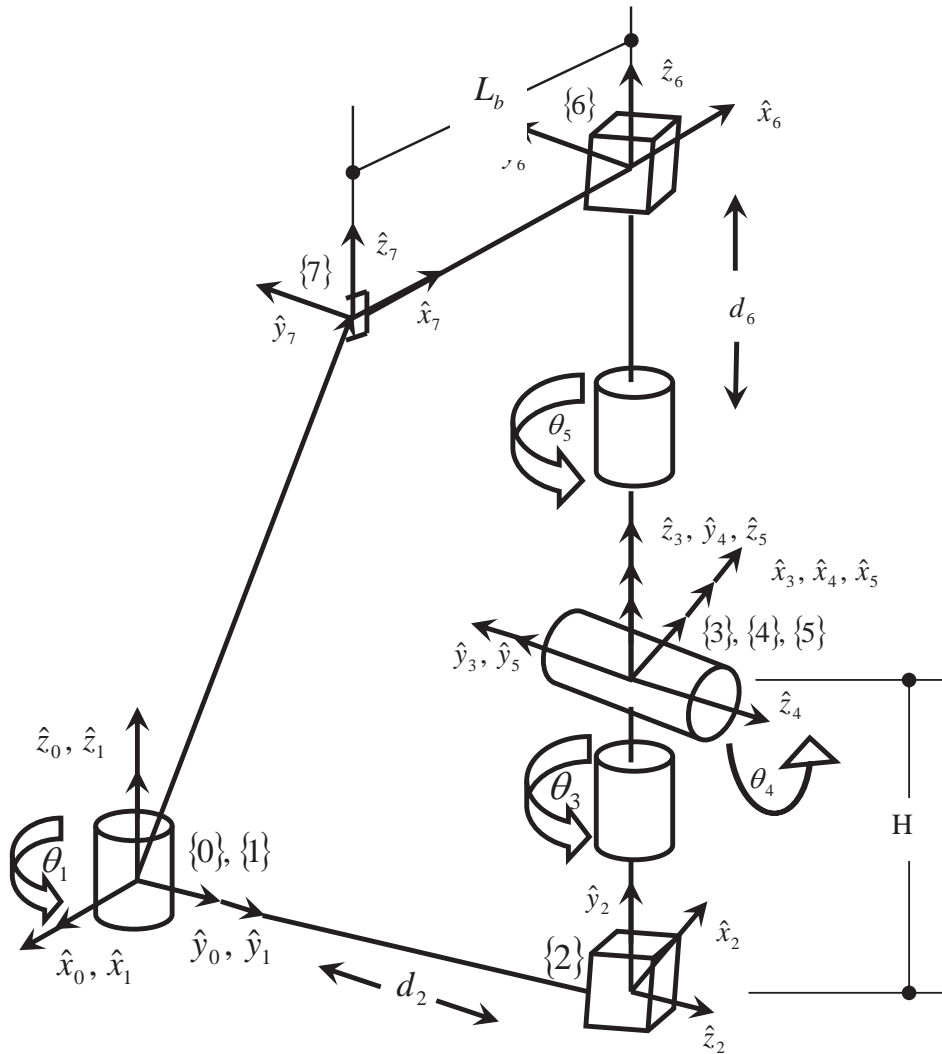


Figura 2.6 Descripción espacial del eslabonamiento.

Una de estas magnitudes es la variable de la articulación y las restantes son parámetros fijos para cada eslabón. Estos parámetros, permiten definir una representación de las relaciones de traslación y rotación entre los enlaces adyacentes

[8], [9], mediante matrices de transformación Homogéneas de orden 4 que definen la descripción espacial entre sistemas de referencias. [10], [11].

En la figura 2.6 se observa el conjunto de sistemas de referencias necesarios para la descripción espacial de las articulaciones del robot manipulador RPSP, en esta figura, el sistema de referencia cero es considerado fijo y el sistema de referencia siete identifica al órgano terminal en el cual se encuentra la pieza de trabajo.

Quedando definidos los sistemas de referencias que identifican la posición y orientación, figura 2.6, para cada uno de los eslabones correspondientes a la cadena cinemática del robot manipulador helicoidal RPSP. Utilizando el método de Denavit Hartenberg, se puede elaborar una tabla de información, (tabla 2.3), que contenga los siguientes aspectos:

- $i$  Variable que nos representa el número de articulación.
- $a_{i-1}$  Se define así a la variable que representa a la magnitud del vector situado sobre la línea más corta entre los ejes  $i-1$  e  $i$ . El sentido de este vector apunta al eje  $i$ .
- $\alpha_{i-1}$  Esta variable, define al ángulo empleado en llevar al positivo del eje  $i-1$  al positivo del eje  $i$  alrededor del vector  $a_{i-1}$  según la regla de la mano derecha.
- $d_i$  Define la posición del eslabón  $i$  respecto al  $i-1$ . Su magnitud es la distancia entre los cortes de  $a_{i-1}$  con  $i$  y de  $a_i$  con  $i$ , su dirección es la misma que la dirección de la articulación  $i$  y su sentido define al positivo

del eje  $i$ .

$\theta_i$  Es el ángulo empleado en llevar la prolongación de  $a_{i-1}$  hasta la proyección de  $a_i$  en el punto en que  $a_{i-1}$  corta al eje  $i$ , este ángulo es medido alrededor de  $d_i$  según la regla de la mano derecha.

*Tabla 2.3: Parámetros de Denavit-Hartenberg del manipulador RPSP que contiene cuatro articulaciones de rotación y dos articulaciones prismáticas.*

$i$	$a_{i-1}$	$\alpha_{i-1}$	$d_i$	$\theta_i$
1	0	$0^\circ$	0	$\theta_1$
2	0	$90^\circ$	$d_2$	$180^\circ$
3	0	$-90^\circ$	H	$\theta_3$
4	0	$90^\circ$	0	$\theta_4$
5	0	$-90^\circ$	0	$\theta_5$
6	0	$0^\circ$	$d_6$	$180^\circ$
7	Lb	$0^\circ$	L <sub>b</sub>	$0^\circ$

En la Tabla 2.3 se muestran los parámetros de Denavit-Hartenberg del manipulador RPSP, que contiene cuatro articulaciones de rotación y dos articulaciones prismáticas, donde:  $\theta_1$ ,  $d_2$ ,  $\theta_3$ ,  $\theta_4$ ,  $\theta_5$  y  $d_6$  representan a las seis variables de articulación, H representa la altura del punto en que convergen los ejes de rotación de las articulaciones {3}, {4} y {5} y L<sub>b</sub> la longitud entre la junta prismática del eslabonamiento de tornillo y el órgano terminal, tal como se muestra en la figura 2.6.

A continuación se presentan las matrices de transformación correspondientes a los sistemas coordenados de eslabonamiento.

Articulación uno (rotacional).

La transformación homogénea del sistema de referencias {1} con respecto del {0}, es una matriz en la que se define como están rotados los ejes del sistema {1} con respecto del {0} y como esta el origen de {1} con {0}.

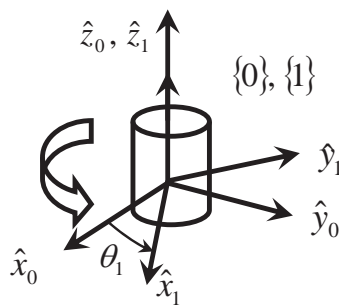


Figura 2.7 Rotación de {1} con respecto de {0}.

La figura 2.7 muestra una rotación de magnitud  $\theta_1$ , este es el valor de la primera variable articular, alrededor del eje  $\hat{z}_0$ , definida como  $R_1^0$ . Esta rotación tiene una representación matricial de tres por tres como ilustra la ecuación (2.3), la primera columna nos muestra como es la proyección de  $\hat{x}_1$  sobre los ejes  $\hat{x}_0$ ,  $\hat{y}_0$  y  $\hat{z}_0$  la segunda y tercera columna muestran las proyecciones de  $\hat{y}_1$  y  $\hat{z}_1$  sobre los ejes  $\hat{x}_0$ ,  $\hat{y}_0$  y  $\hat{z}_0$ .

La ecuación (2.2) nos describe en forma abreviada la transformación del sistema de referencias {1} con respecto del {0}, es decir, describe como están rotados los ejes del sistema {1} con respecto del {0} y también, donde está el origen de {1} con respecto del {0} mediante un vector de posición denominado  $\bar{O}_1^0$ .

$$T_1^0 = \begin{bmatrix} R_1^0 & \bar{O}_1^0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

Donde la rotación de {1} con respecto del {0} es

$$R_1^0 = \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 & 0 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

El vector que define la posición del origen de {1} con respecto del origen de {0}, para este caso, como son coincidentes estos orígenes, tiene una magnitud de cero.

$$\bar{O}_1^0 = (0 \ 0 \ 0)^T \quad (2.4)$$

Mediante las sustituciones correspondientes de las ecuaciones 2.3 y 2.4 en la ecuación (2.2) se llega a la ecuación (2.5)

$$T_1^0 = \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 & 0 & 0 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

Articulación dos (prismática).

Se define la transformación homogénea del sistema de referencias {2} con respecto del {1} como

$$T_2^1 = \begin{bmatrix} R_2^1 & \bar{O}_2^1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

Donde la rotación de {2} con respecto del {1} es

$$R_2^1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

El vector que define la posición del origen de {2} con respecto del origen de {1} se define como  $\bar{O}_2^1$ , en este caso, la junta prismática representada por el cubo de la figura 2.8, se desplaza a lo largo de una barra que se encuentra fija y colineal con el eje  $\hat{y}_1$ , por tal motivo, las componentes del vector  $\bar{O}_2^1$  en {1} son ; cero en  $\hat{x}_1$ ,  $d_2$  a lo largo de  $\hat{y}_1$  y cero en  $\hat{z}_1$ . De tal manera que  $d_2$  es la distancia entre la junta rotacional y la prismática y su magnitud define el valor de la segunda variable articular.

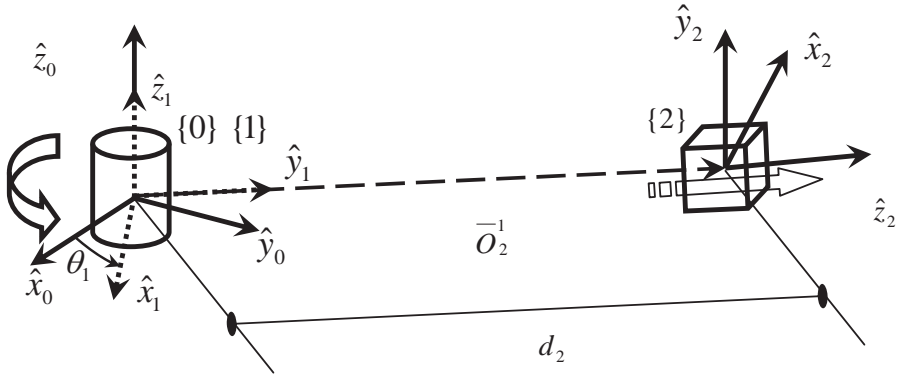


Figura 2.8 Representación espacial del eslabonamiento posicionador.

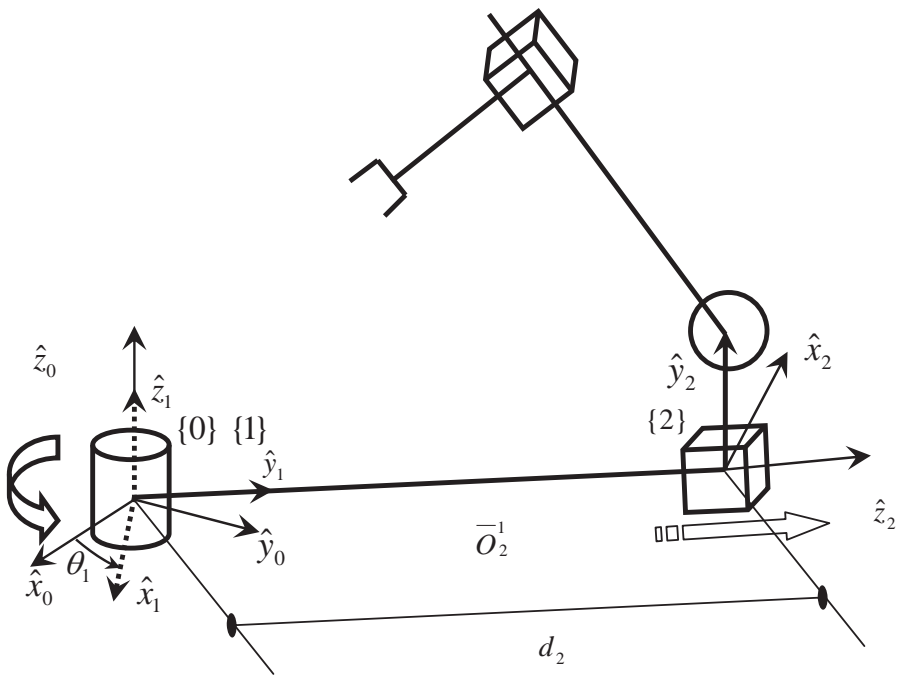


Figura 2.9 Representación espacial del manipulador completo, sobre la figura 2.8, en donde el círculo representa al conjunto de tres articulaciones rotacionales.

La ecuación 2.8 define al vector que identifica la posición del origen de {2} con respecto al origen de {1}.

$$\bar{O}_2^1 = (0 \quad d_2 \quad 0)^T \quad (2.8)$$

Mediante las sustituciones correspondientes se llega a

$$T_2^1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

Matrices de transformación correspondientes a las articulaciones del eslabonamiento de orientación

Articulación tres (rotacional).

Se define la transformación homogénea del sistema de referencias {3} con respecto del {2} como

$$T_3^2 = \begin{bmatrix} R_3^2 & \bar{O}_3^2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

Donde la rotación de {3} con respecto del {2} es



$$R_3^2 = \begin{bmatrix} \cos\theta_3 & -\sin\theta_3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ \sin\theta_3 & \cos\theta_3 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

El vector que define la posición del origen de {3} con respecto del origen de {2} se define como

$$\bar{O}_3^2 = (0 \quad H \quad 0)^T \quad (2.12)$$

Donde H nos representa la altura respecto del plano  $\hat{x}_0, \hat{y}_0$ , del punto en que convergen los tres ejes de rotación correspondientes a las juntas rotacionales que conforman la junta esférica. H es un parámetro de diseño a proponer.

Mediante las sustituciones correspondientes se llega a

$$T_3^2 = \begin{bmatrix} \cos\theta_3 & -\sin\theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & H \\ -\sin\theta_3 & -\cos\theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

Articulación cuatro (rotacional).

Se define la transformación homogénea del sistema de referencias {4} con respecto del {3} como

$$T_4^3 = \begin{bmatrix} R_4^3 & \bar{O}_4^3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

Donde la rotación de {4} con respecto del {3} es

$$R_4^3 = \begin{bmatrix} \cos\theta_4 & -\sin\theta_4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ \sin\theta_4 & \cos\theta_4 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

El vector que define la posición del origen de {4} con respecto del origen de {3} se define como

$$\bar{O}_4^3 = (0 \ 0 \ 0)^T \quad (2.16)$$

Mediante las sustituciones correspondientes se llega a

$$T_4^3 = \begin{bmatrix} \cos\theta_4 & -\sin\theta_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ \sin\theta_4 & \cos\theta_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

Matrices de transformación correspondientes a las articulaciones del eslabonamiento de tornillo.

Articulación cinco (rotacional).

Se define la transformación homogénea del sistema de referencias {5} con respecto del {4} como

$$T_5^4 = \begin{bmatrix} R_5^4 & \bar{O}_5^4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

Donde la rotación de {5} con respecto del {4} es

$$R_5^4 = \begin{bmatrix} \cos\theta_5 & -\sin\theta_5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\sin\theta_5 & -\cos\theta_5 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

El vector que define la posición del origen de {5} con respecto del origen de {4} se define como

$$\bar{O}_5^4 = (0 \ 0 \ 0)^T \quad (2.20)$$

Mediante las sustituciones correspondientes se llega a

$$T_5^4 = \begin{bmatrix} \cos\theta_5 & -\sin\theta_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta_5 & -\cos\theta_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

Articulación seis (prismática).

Se define la transformación homogénea del sistema de referencias {6} con respecto del {5} como

$$T_6^5 = \begin{bmatrix} R_6^5 & \bar{O}_6^5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

Donde la rotación de {6} con respecto del {5} es

$$R_6^5 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

El vector que define la posición del origen de {6} con respecto del origen de {5}, se ilustra en la figura 2.6 como el vector existente entre la junta prismática del eslabonamiento de tornillo y el punto de intersección de la junta esférica y queda definido como

$$\bar{O}_6^5 = (0 \ 0 \ d_6)^T \quad (2.24)$$

Mediante las sustituciones correspondientes se llega a

$$T_6^5 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

Matriz de transformación correspondiente al órgano terminal del manipulador.

Se define la transformación homogénea del sistema de referencias {7} con respecto del {6} como

$$T_7^6 = \begin{bmatrix} R_7^6 & \bar{O}_7^6 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

Donde la rotación de {7} con respecto del {6} es

$$R_7^6 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

El vector que define la posición del origen de {7} con respecto del origen de {6} se define como

$$\bar{O}_7^6 = (L_b \quad 0 \quad 0)^T \quad (2.28)$$

Mediante las sustituciones correspondientes se llega a

$$T_7^6 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & L_b \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

La transformación que define la posición y orientación del órgano terminal en relación con el sistema de referencias fijo  $\{0\}$ , queda definido por:

$$T_7^0 = T_1^0 T_2^1 T_3^2 T_4^3 T_5^4 T_6^5 T_7^6 \quad (2.30)$$

## 2.4 Cinemática inversa

La cinemática inversa, tiene por objetivo encontrar los valores de las variables correspondientes a cada una de las articulaciones, de cada eslabonamiento del robot manipulador RPSP, considerando conocidas la posición y orientación del objeto de trabajo, así como también los parámetros que se conocen a partir de las ecuaciones generales de Rodrigues para el desplazamiento general de un tornillo que son las indicadas en la tabla 2.4

*Tabla 2.4 Parámetros del tornillo de Rodrigues.*

Parámetro	Definición del parámetro
$\hat{e}$	Eje de giro del tornillo
$\bar{S}_{\perp e}$	Vector perpendicular al eje de giro del tornillo
$\phi$	Ángulo de giro del tornillo
$d$	Paso del tornillo

### 2.4.1 Definición vectorial del mecanismo

Dentro de la cinemática inversa, la definición vectorial del mecanismo nos permite conocer los valores de las variables articulares. Se cuenta para ello, con la información necesaria sobre la posición y orientación que guarda el órgano terminal.

Para evaluar la cinemática inversa del manipulador RPSP, se tienen algunos vectores conocidos, como son; el vector que define la posición del órgano terminal, el vector que define al eje de giro del tornillo, el vector que define la posición del eje de giro del tornillo, estos vectores se emplean en la búsqueda de otros que nos permitan identificar la manera en que está posicionado el tornillo para posteriormente evaluar la posición y orientación de cada una de las articulaciones.

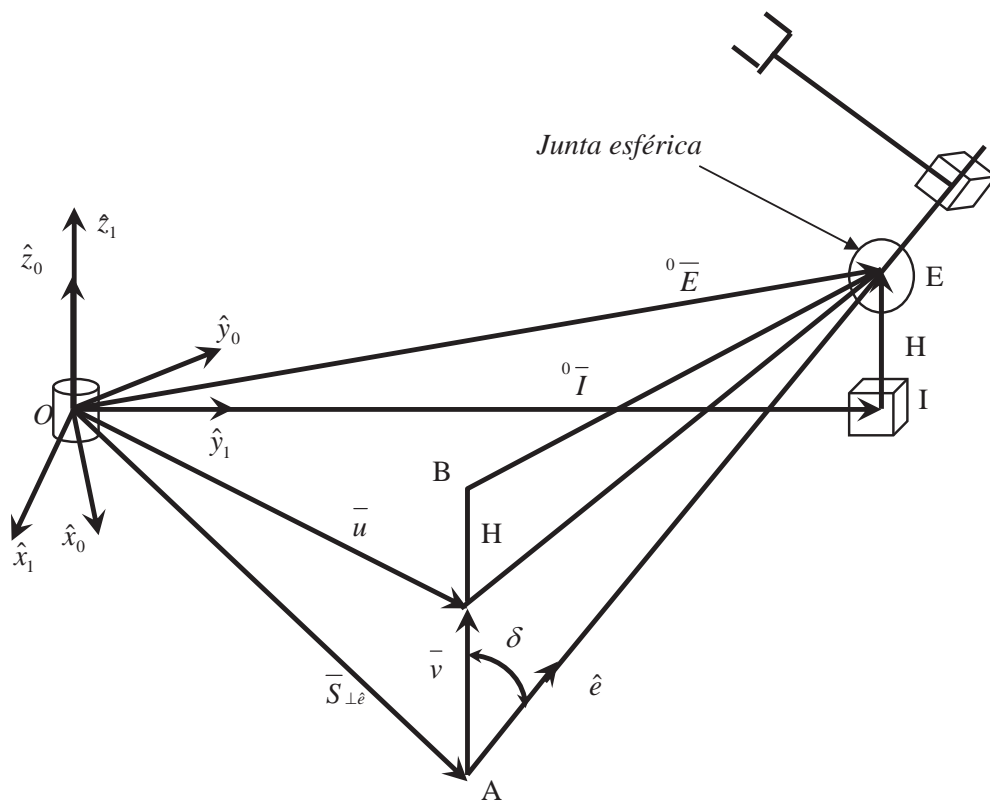


Figura 2.10 Análisis vectorial para determinar la posición de la articulación esférica.

Iniciamos el análisis apoyados en la figura 2.10 en la cual se tienen como información en función de las ecuaciones generales de Rodrigues los vectores  $\vec{S}_{\perp e}$  y  $\vec{e}$ , también se considera conocido el valor de  $H$  que nos representa la altura del

punto E, en que concurren los ejes de rotación de las juntas que conforman a la articulación esférica, respecto al plano  $\hat{x}_0 \hat{y}_0$ . Por lo tanto, el punto E representa las coordenadas del centro de la junta esférica respecto al origen.

Considerando que:

$$\bar{S}_{\perp e} = (S_{\perp e} x \quad S_{\perp e} y \quad S_{\perp e} z)^T \quad (2.31)$$

Siendo el vector  $\bar{u}$  su proyección en el plano  $\hat{x}_0 \hat{y}_0$ , entonces  $\bar{u}$  queda definido como:

$$\bar{u} = (S_{\perp e} x \quad S_{\perp e} y \quad 0)^T \quad (2.32)$$

Entonces, de estos dos vectores definidos por las ecuaciones (2.31) y (2.32).

$$\bar{v} = \bar{u} - \bar{S}_{\perp e} \quad (2.33)$$

Al establecer  ${}^0\bar{E}$  como el vector de posición del centro de la esfera con respecto al origen y a  ${}^0\bar{I}$  como su proyección sobre el plano  $\hat{x}_0 \hat{y}_0$ , nos interesa conocer al vector  ${}^0\bar{E}$ . Para ello, siendo el triangulo ABE un triángulo rectángulo como el que se muestra en la figura 2.11 se evalúa el ángulo  $\delta$ .



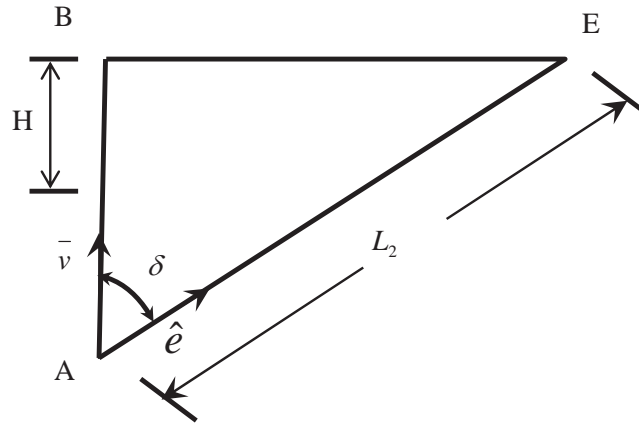


Figura 2.11 Triángulo ABE para evaluar al ángulo  $\delta$ .

Se puede apreciar de la figura 2.11 que es posible relacionar las características de este triángulo de la siguiente manera

$$\bar{v} \bullet \hat{e} = \bar{v}^T \hat{e} = \|\bar{v}\| \|\hat{e}\| \text{Cos} \delta \quad (2.34)$$

Por lo tanto

$$\delta = \text{Cos}^{-1} \left( \frac{\bar{v}^T \hat{e}}{\|\bar{v}\|} \right) \quad (2.35)$$

También podemos evaluar la longitud  $L_2$  mostrada en la figura 2.11 considerando que

$$L2 = \frac{\|v\| + H}{\cos\delta} \quad (2.36)$$

Es importante aclarar que el vector que define la posición de E respecto de A, en la figura 2.11, resulta de multiplicar el escalar L2 por el vector  $\hat{e}$  de la siguiente manera:

$$\bar{L}_2 = L2\hat{e} \quad (2.37)$$

De la figura 2.12 se aprecia que el vector que define al centro de la esfera con respecto al origen queda como

$${}^0\bar{E} = \bar{S}_{\perp e} + L2\hat{e} \quad (2.38)$$

Se sabe que el eje de giro del tornillo pasa por los puntos A, E y F, indicados en la figura 2.12 en donde

A.- Es la intersección entre  $\bar{S}_{\perp e}$  y  $\hat{e}$ .

E.- Es el centro de la junta esférica.

F.- Es el punto central de la prismática del eslabonamiento de tornillo.

La figura 2.12 muestra los elementos necesarios para evaluar la distancia entre el centro de la esfera y la junta prismática del eslabonamiento de tornillo que se localiza en el punto F.

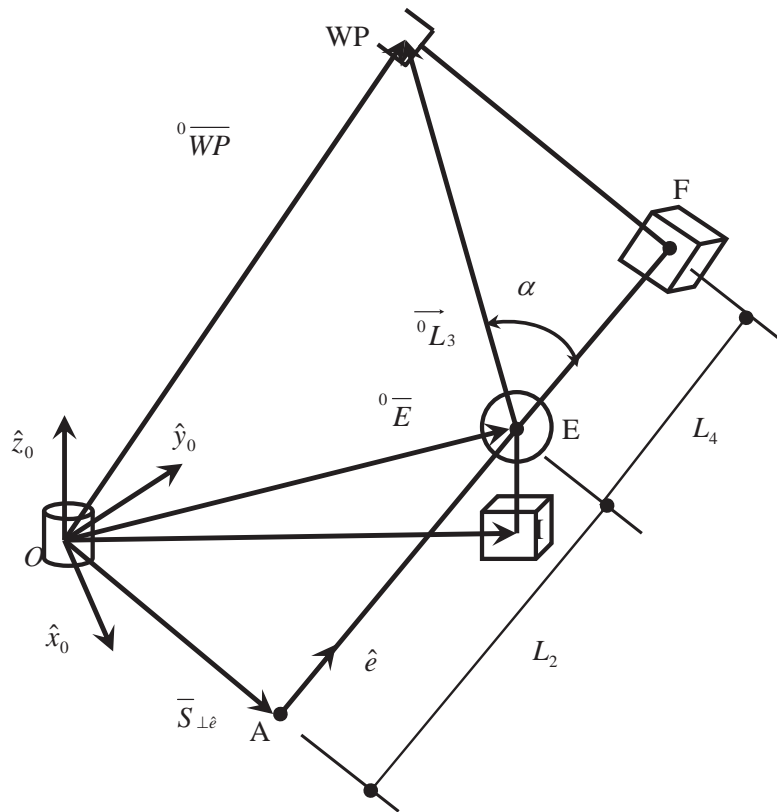


Figura 2.12 Elementos necesarios para evaluar la posición de la prismática correspondiente al eslabonamiento de tornillo.

Nótese de la figura 2.12 que se puede definir al vector

$${}^0\bar{L}_3 = {}^0\bar{WP} - {}^0\bar{E} \quad (2.39)$$

Cuya norma es

$$L_3 = \|\overline{WP} - \overline{E}\| \quad (2.40)$$

Considerando en la figura 2.12 el triángulo rectángulo formado por los puntos E, F y WP en que conocemos a los vectores  $\overline{L}_3$  y  $\hat{e}$  podemos evaluar al ángulo existente entre ellos como

$${}^0\overline{L}_3^T \hat{e} = L_3 \cos \alpha \quad (2.41)$$

$$\alpha = \cos^{-1} \left( \frac{{}^0\overline{L}_3^T \hat{e}}{L_3} \right) \quad (2.42)$$

De donde

$$L_4 = L_3 \cos \alpha \quad (2.43)$$

Además,

$$\overline{L}_4 = L_4 \hat{e} \quad (2.44)$$

Se puede apreciar también, en la figura 2.12, que el vector de posición que va del origen al punto F está dado por

$${}^0\overline{F} = {}^0\overline{E} + \overline{L}_4 \quad (2.45)$$

En la figura 2.12, la longitud desde el punto F al WP (siendo éste último el punto en el cual se encuentra la pieza de trabajo), es la que se precisa en el caso particular en que el eje del mecanismo de tornillo coincide con el eje de tornillo de Rodrigues, sin embargo, éste es sólo un caso particular. Para aquellos casos en que la longitud del brazo  $L_b$ , donde el brazo va desde el punto F al WP, sea diferente a la longitud entre F y WP, el robot manipulador debe ser capaz de posicionarse y orientarse en forma adecuada para tomar la pieza y efectuar la tarea correspondiente, para ello, es necesario el reacomodo de sus articulaciones.

El eslabonamiento de posicionamiento, que incluye la primera articulación rotacional y la primera junta prismática, se reacomoda en la posición adecuada generando un desplazamiento del punto E en un plano paralelo al  $\hat{x}_0 \hat{y}_0$ . El eslabonamiento de orientación, que incluye a las primeras dos articulaciones de la junta esférica, mantiene al eje de giro del eslabonamiento de tornillo sobre un eje paralelo al eje de giro del tornillo de Rodrigues, indicando esto con líneas punteadas en la figura 2.13.

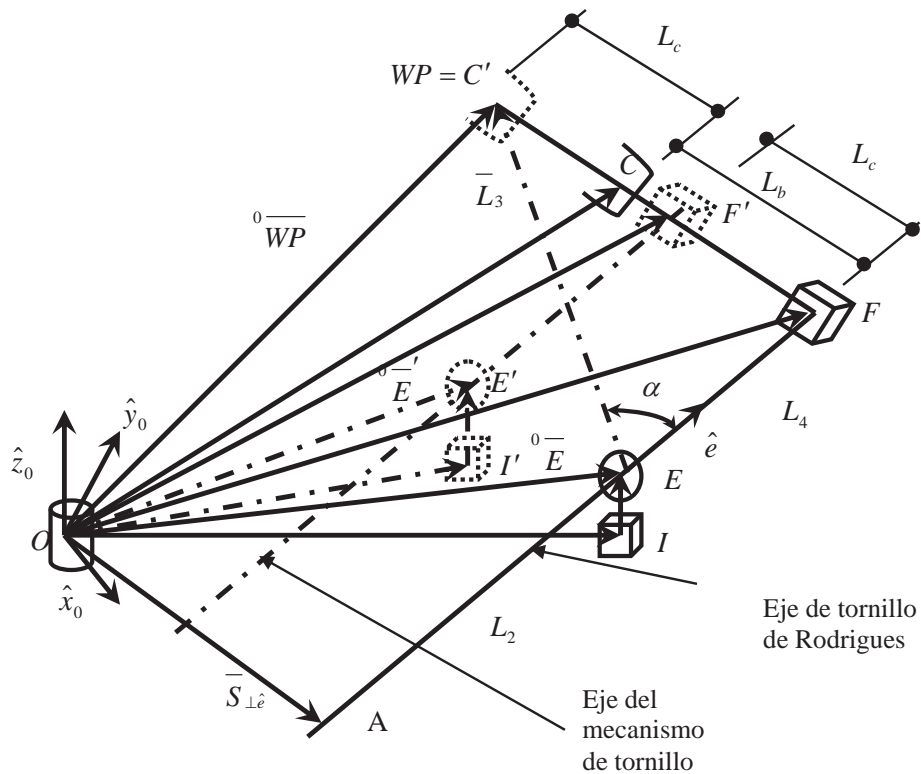


Figura 2.13 Desplazamiento del eje del eslabonamiento de tornillo en forma paralela al eje de tornillo de Rodrigues.

En la figura 2.13, haciendo énfasis en que la línea  $E'$  a  $F'$  es el eje del eslabonamiento de tornillo y que es paralela a la línea  $E$  a  $F$ , que es el eje de giro evaluado con las fórmulas de Rodrigues para el desplazamiento general de un tornillo, nótese que si  $WP = C'$ , entonces, la distancia de  $C$  a  $C'$  que es igual a la distancia de  $F$  a  $F'$ , que es la que se requiere desplazar el eje del mecanismo del tornillo respecto al eje de giro del tornillo de Rodrigues.

La distancia del punto F al punto C es la longitud del brazo del mecanismo, que en adelante denominaremos  $L_b$  y que, al igual que H nos representa un valor conocido.

Haciendo referencia al triángulo formado por los puntos O, F y WP, de la figura 2.13, podemos evaluar al vector unitario  $\hat{L}_b$  como sigue:

$$\hat{L}_b = \frac{{}^0\overline{WP} - \overline{F}}{\|{}^0\overline{WP} - \overline{F}\|} \quad (2.46)$$

El vector que une al origen con el punto C está dado por

$${}^0\overline{C} = {}^0\overline{F} + L_b \hat{L}_b \quad (2.47)$$

La distancia entre los puntos C y  $C'$  está dada por

$$L_c = \|{}^0\overline{WP} - {}^0\overline{C}\| \quad (2.48)$$

Como ya se mencionó, la distancia entre C y  $C'$  es la misma que la existente entre F y  $F'$  por lo tanto:

$${}^0\overline{F}' = {}^0\overline{F} + L_c \hat{L}_b \quad (2.49)$$

Sustrayendo de la figura 2.13 los elementos necesarios para determinar el vector  ${}^0\overline{E}'$  se puede representar en la figura 2.14 a dicho vector, considerando

además que, por definición del álgebra vectorial, se puede representar al vector unitario  $\hat{e}$  a lo largo de la línea  $E'$  a  $F'$ .

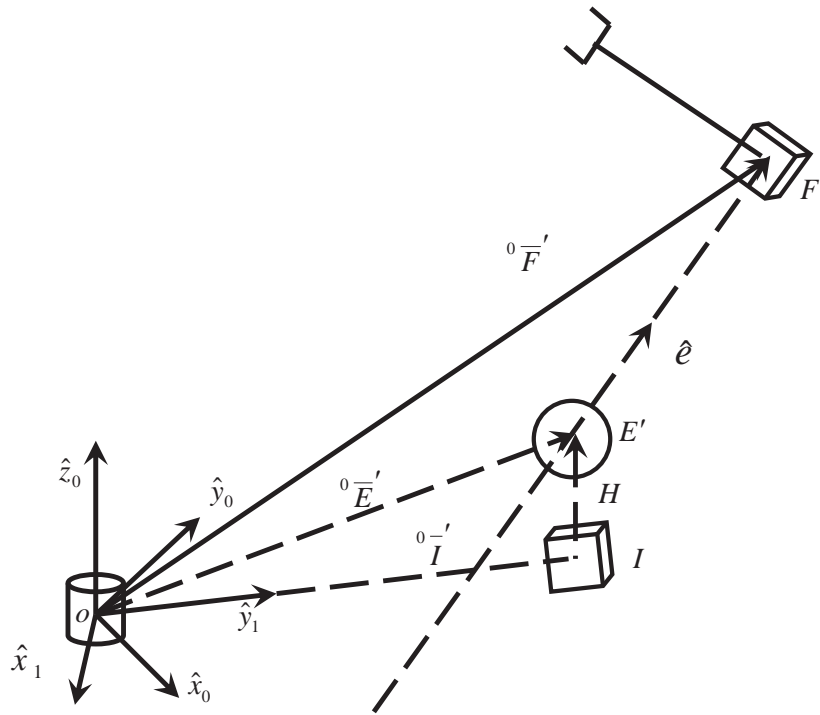


Figura 2.14 Evaluación del vector  ${}^0\bar{E}'$  que va del origen al centro de la junta esférica.

Los puntos  $E'$  y  $F'$  de la figura 2.14 corresponden a una línea recta, a la cual, por ser paralela al eje del tornillo se puede representar en ella al vector unitario  $\hat{e}$ . Teniendo como objetivo determinar al vector  ${}^0\bar{E}'$  y considerando que:

$${}^0\bar{F}' = \begin{pmatrix} {}^0F'_x & {}^0F'_y & {}^0F'_z \end{pmatrix}^T \quad (2.50)$$

Donde,



${}^0F'_x$ ,  ${}^0F'_y$  y  ${}^0F'_z$  son las componentes rectangulares que representan a las coordenadas de  $F'$  y además:

$${}^0\bar{E}' = ({}^0E'_x \quad {}^0E'_y \quad {}^0E'_z)^T \quad (2.51)$$

Donde,

${}^0E'_x$ ,  ${}^0E'_y$  y  ${}^0E'_z$  son las componentes rectangulares que representan a las coordenadas de  $E'$

Sabemos que  ${}^0E'_z = H$ , puesto que la altura del centro de la esfera no cambia respecto del plano  $\hat{x}_0 \hat{y}_0$  al desplazarse el eje del eslabonamiento de tornillo con un cambio de valor en las primeras variables de articulación.

De la figura 2.14, empleando el criterio de parametrización de una línea recta [13], se aprecia que es posible evaluar los escalares que definen las coordenadas del punto  $E'$  de la siguiente manera

$$\frac{{}^0F'_x - {}^0E'_x}{e_x} = \frac{{}^0F'_y - {}^0E'_y}{e_y} = \frac{{}^0F'_z - {}^0E'_z}{e_z} \quad (2.52)$$

Donde,

$$\hat{e} = (e_x \quad e_y \quad e_z)^T \quad (2.53)$$

Las incógnitas son entonces  ${}^0E'_x$  y  ${}^0E'_y$  que se pueden determinar de la siguiente manera:

$${}^0E'_x = -\left(\frac{{}^0F'_z - {}^0E'_z}{e_z}\right)e_x + {}^0F'_x \quad (2.54)$$

Igualmente

$${}^0E'_y = -\left(\frac{{}^0F'_z - {}^0E'_z}{e_z}\right)e_y + {}^0F'_y \quad (2.55)$$

Quedando así definido el vector que va del origen al centro de la esfera, para los casos en que ésta deba recorrerse y adaptarse a una nueva posición que permita llevar a cabo la tarea planteada.

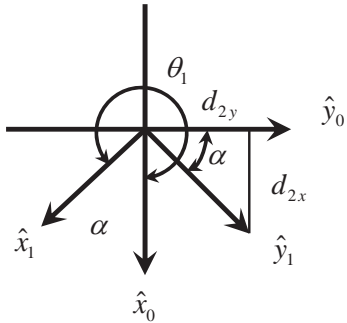
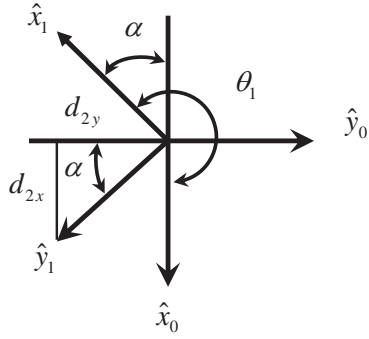
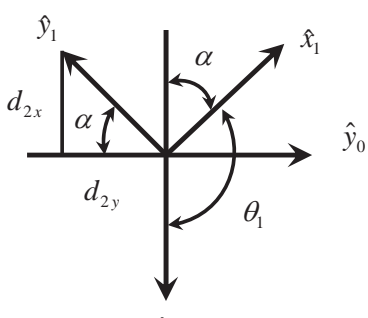
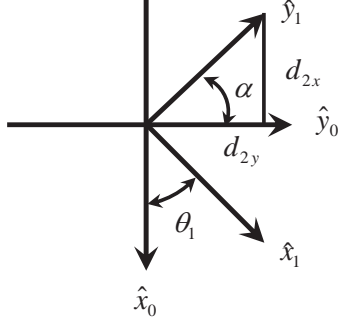
#### **2.4.2 Evaluación de las variables articulares del eslabonamiento posicionador**

Las variables articulares del eslabonamiento posicionador son: una del tipo rotacional que se denominará como  $\theta_1$  y otra del tipo prismática que se denominará como  $d_2$ , ambas son posibles de determinar en función de los vectores con que ya se cuenta y que a su vez están en función de los parámetros del tornillo de Rodrigues.

#### **Evaluación de $\theta_1$**

El ángulo  $\theta_1$  es el existente entre el eje  $\hat{x}_0$  y el eje  $\hat{x}_1$  tal como ilustra la figura 2.9. Para poder evaluarlo contamos con las componentes del vector  $\bar{d}_2$ , definido en la ecuación (2.61), que está en la misma dirección y sentido que  $\hat{y}_1$ . Son cuatro los cuadrantes en los que puede estar el vector  $\bar{d}_2$  y para cada uno de ellos tenemos condiciones para evaluar al ángulo  $\theta_1$  que resulta de girar al sistema de referencias de la junta rotacional alrededor de  $\hat{z}_1$  en sentido contrario a las manecillas del reloj.

Tabla 2.5 Casos del ángulo de la primera rotacional, evaluando  $\alpha$  según la ecuación (2.60).

 <p>Caso 1 <math>\theta_1 = 2\pi - \alpha</math> (2.56)</p>	 <p>Caso 2 <math>\theta_1 = \pi - \alpha</math> (2.57)</p>
 <p>Caso 3 <math>\theta_1 = \pi - \alpha</math> (2.58)</p>	 <p>Caso 4 <math>\theta_1 = -\alpha</math> (2.59)</p>

Para los casos de la tabla 2.3, obsérvese que:

$$\alpha = \operatorname{Tg}^{-1} \frac{d_{2x}}{d_{2y}} \quad (2.60)$$

Cuando la ecuación (2.60) nos da como resultado un valor negativo para  $\alpha$ , como es el caso de las ecuaciones (2.57) y (2.59), el signo negativo que antecede al valor de  $\alpha$  multiplicado por el valor negativo de  $\alpha$  nos da por consecuencia un valor positivo.

### **Evaluación de $d_2$**

La variable articular  $d_2$  nos representa la distancia existente entre el origen del sistema de referencias correspondiente a la primera junta rotacional y el origen de la primera junta prismática, ambas, corresponden al eslabonamiento que sirve para posicionar al robot manipulador RPSP. En la figura 2.14, se aprecia que si  ${}^0\bar{I}'$  es la proyección de  ${}^0\bar{E}'$  sobre el plano  $\hat{x}_0 \hat{y}_0$ , entonces

$$\bar{d}_2 = {}^0\bar{I}' = \begin{pmatrix} {}^0E'_x & {}^0E'_y & 0 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} d_{2x} & d_{2y} & 0 \end{pmatrix}^T \quad (2.61)$$

Como la junta prismática del eslabonamiento posicionador está justo bajo la junta esférica, entonces la magnitud del vector  ${}^0\bar{I}'$  es el valor de la variable articular  $d_2$  y se determina como:

$$d_2 = \|{}^0\bar{I}'\| \quad (2.62)$$

### 2.4.3 Evaluación de las variables articulares del eslabonamiento orientador

Evaluación de  $\theta_3$

El ángulo  $\theta_3$  es el existente entre los ejes  $\hat{x}_2$  y  $\hat{x}_3$ , como se ilustra en la figura 2.15, para evaluar su valor es necesario considerar la rotación de los sistemas de referencias de la primera y segunda rotacional del eslabonamiento encargado de orientar al eslabonamiento del mecanismo de tornillo. Para quedar entonces como ilustra la figura 2.15.

Cabe señalar que independientemente de los valores de las variables articulares, que en la figura 2.15,  $\hat{y}_2$  estará siempre perpendicular al plano  $\hat{x}_0, \hat{y}_0$  al igual que  $\hat{z}_3$ . El ángulo  $\theta_3$ , es el originado al rotar la primera junta rotacional del eslabonamiento que sirve para orientar al eslabonamiento de tornillo y se mide desde  $\hat{x}_2$  a  $\hat{x}_3$ , como se indica en la figura 2.15. Al rotar la segunda junta rotacional de este eslabonamiento se aprecia el ángulo  $\theta_4$ , lo cual origina la proyección de  $\hat{y}_4$  sobre el plano  $\hat{x}_2 \hat{z}_2$ .

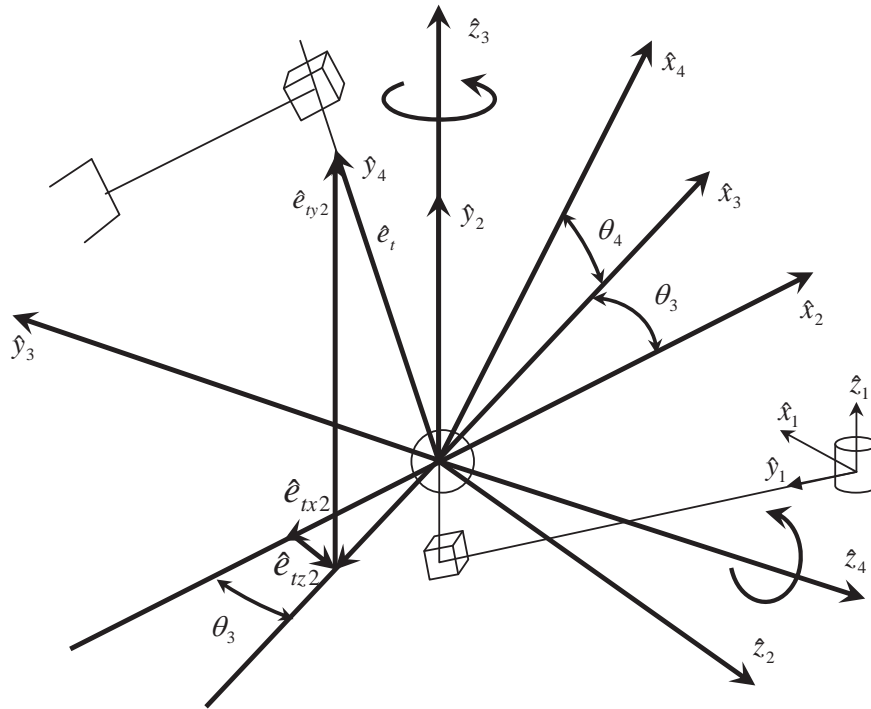


Figura 2.15 Vistas auxiliares para evaluar  $\theta_3$ .

Al igual que en todo momento  $\hat{y}_3 = -\hat{z}_4$ , así también, en todo momento  $\hat{y}_4 = \hat{e}_i$ , por lo tanto, la proyección de  $\hat{y}_4$  sobre el plano  $\hat{x}_2-\hat{z}_2$  es la misma que la proyección de  $\hat{e}_i$  sobre el plano  $\hat{x}_2-\hat{z}_2$ . De tal manera que es posible obtener las proyecciones en el sistema de referencias  $\{2\}$  del vector que define al eje del mecanismo de tornillo de acuerdo con la siguiente ecuación.

$${}^2\hat{e}_m = R_1^2 R_0^1 \hat{e}_m \quad (2.63)$$

Donde

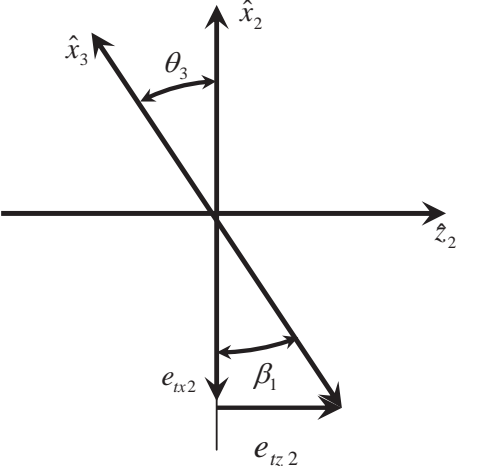
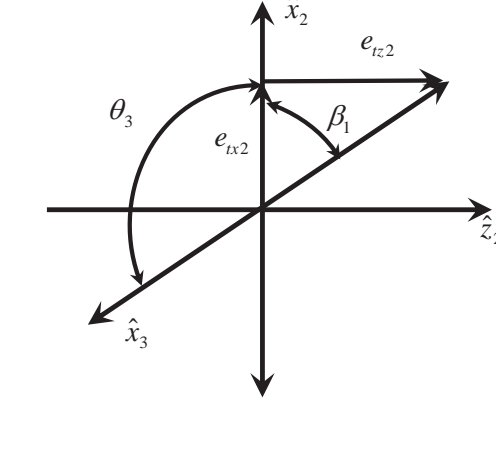
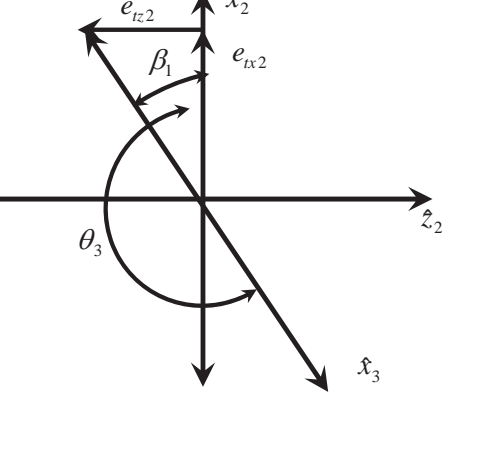
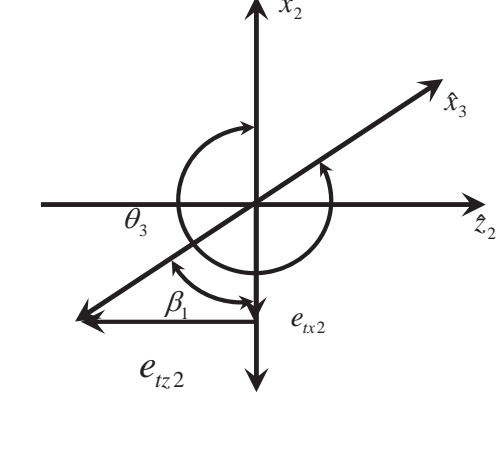
$${}^2\hat{e}_m = (e_{tx2} \quad e_{ty2} \quad e_{tz2})^T \quad (2.64)$$

De la figura 2.15 se aprecia que

$$\theta_3 = \text{Tg}^{-1}\left(\frac{e_{tz2}}{e_{tx2}}\right) \quad (2.65)$$

Sin embargo, la función trigonométrica empleada requiere de un análisis detallado en cada uno de los cuadrantes como se ilustra en la tabla 2.6

Tabla 2.6 Casos de  $\theta_3$  considerando la ecuación (2.70).

 <p><math>\theta_3 = -\beta_1</math> (2.66)</p>	 <p><math>\theta_3 = \pi - \beta_1</math> (2.67)</p>
 <p><math>\theta_3 = \pi + \beta_1</math> (2.68)</p>	 <p><math>\theta_3 = 2\pi - \beta_1</math> (2.69)</p>

De la tabla 2.4 tenemos que:



$$\beta_1 = Tg^{-1} \begin{pmatrix} e_{tz2} \\ e_{tx2} \end{pmatrix} \quad (2.70)$$

### Evaluación de $\theta_4$

El ángulo  $\theta_4$  es el existente entre los ejes  $\hat{x}_4$  y  $\hat{x}_3$  como ilustra la figura 2.16, para evaluar su valor es necesario considerar la rotación de los sistemas de referencias de la primera y segunda rotacionales del eslabonamiento encargado de orientar al eslabonamiento del mecanismo de tornillo. Para quedar entonces como se ve en la figura 2.16

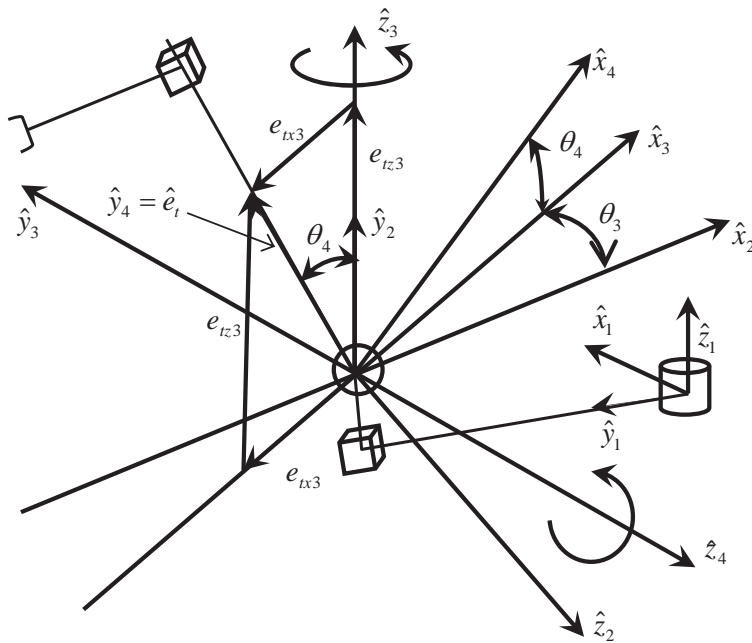


Figura 2.16 Vistas auxiliares para evaluar  $\theta_4$ .

En la figura 2.16, cabe resaltar algunas consideraciones muy importantes que son:

1. Al rotar la segunda rotacional del eslabonamiento orientador, se genera un ángulo  $\theta_4$  entre el eje  $\hat{x}_4$  y el eje  $\hat{x}_3$ .
2. También se forma un ángulo de valor  $\theta_4$  entre el eje  $\hat{y}_4$  y el eje  $\hat{z}_3$ .
3. El eje  $\hat{y}_4$  es igual al eje del eslabonamiento de tornillo, que a su vez es igual al eje de giro del tornillo.
4. Tomando en cuenta la consideración tres y pudiendo evaluar al eje de giro del tornillo en el sistema  $\{3\}$ , las proyecciones de éste sobre los ejes del sistema de referencias  $\{3\}$  nos permiten evaluar a  $\theta_4$ .

Por lo tanto:

$$\hat{y}_4 = {}^0\hat{e}_t \quad (2.71)$$

Si medimos en el sistema  $\{3\}$  al eje del tornillo de Rodrigues entonces:

$${}^3\hat{e}_t = R_2^3 R_1^2 R_0^{10} \hat{e}_t \quad (2.72)$$

Extrayendo sus componentes tendremos:

$${}^3\hat{e}_t = (e_{tx3} \quad e_{ty3} \quad e_{tz3})^T \quad (2.73)$$

De la figura 2.16 se aprecia que:

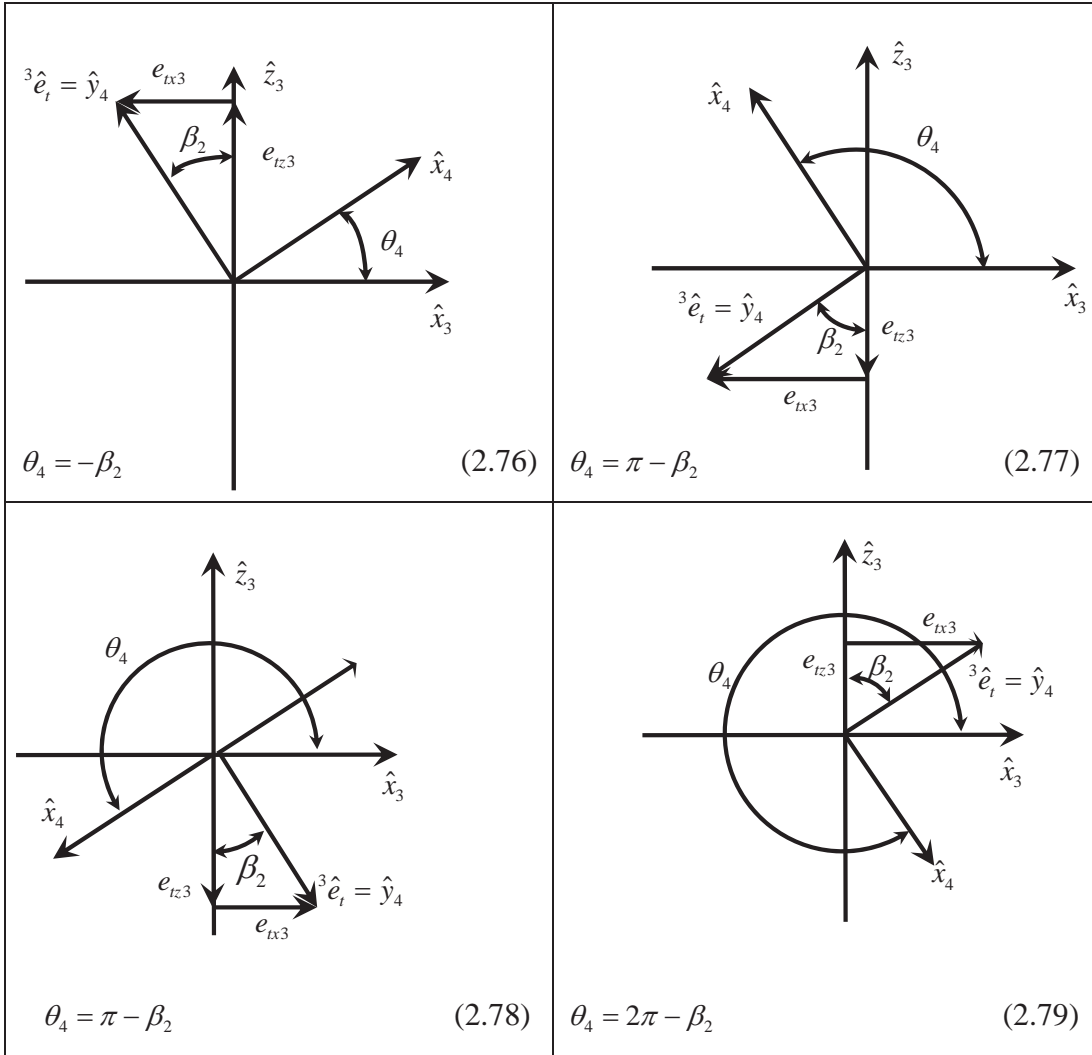
$$\theta_4 = \text{Tg}^{-1}\left(\frac{e_{tx3}}{e_{tz3}}\right) \quad (2.74)$$

Sin embargo, considerando que en cada cuadrante la función tangente debe ser analizada, en la tabla 2.7 consideramos que:

$$\beta_2 = \text{Tg}^{-1}\left(\frac{e_{tx3}}{e_{tz3}}\right) \quad (2.75)$$

En la tabla 2.7 se deben observar, de acuerdo a la ley de los signos, cual es el valor que se tiene de  $\beta_2$ . Las ilustraciones están consideradas con una vista desde el eje  $\hat{z}_4$  saliendo del plano y rotando en sentido contrario a las manecillas del reloj.

Tabla 2.7 Consideraciones para evaluar  $\theta_4$ .



### 2.4.4 Evaluación de las variables articulares del eslabonamiento de tornillo

#### Evaluación de $\theta_5$

El ángulo  $\theta_5$  es el existente entre los ejes  $\hat{x}_4$  y  $\hat{x}_5$ , para este caso, de la ecuación (2.46) se evaluó al vector  $\hat{L}_b$ , el cual es opuesto en todo momento a  $\hat{x}_5$ , esto es debido a que la junta prismática del eslabonamiento de tornillo no rota con respecto de la junta rotacional del eslabonamiento de tornillo, de tal manera que:

$$\hat{x}_5 = -\hat{L}_b \quad (2.80)$$

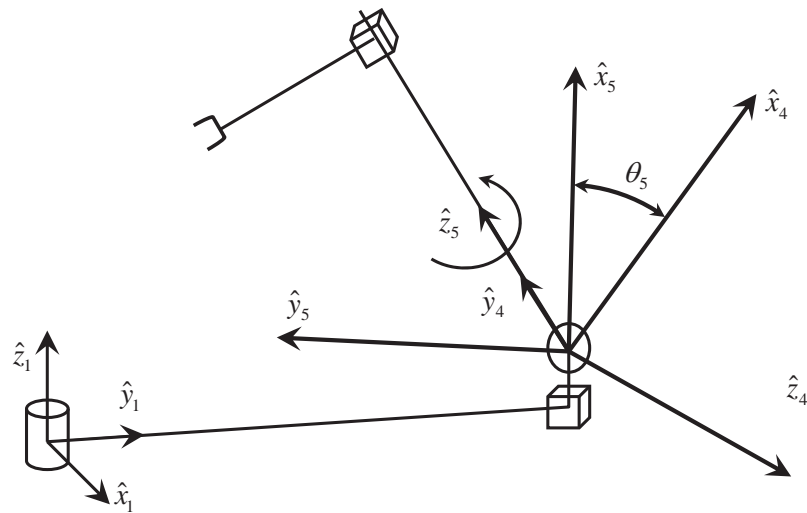


Figura 2.17 Visualización de  $\theta_5$  al rotar  $\{5\}$  respecto de  $\{4\}$ .

Evidentemente podemos evaluar a  $\hat{x}_5$  en el sistema de referencias  $\{4\}$  tomando en cuenta que:

$${}^4\hat{x}_5 = -{}^4\hat{L}_b = -R_3^4 R_2^3 R_1^2 R_0^1 \hat{L}_b \quad (2.81)$$

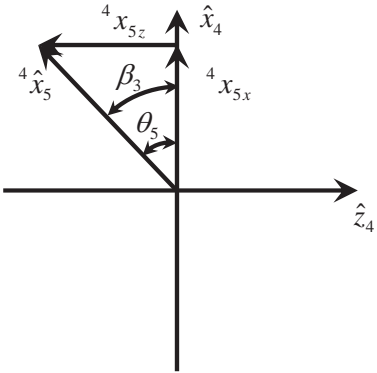
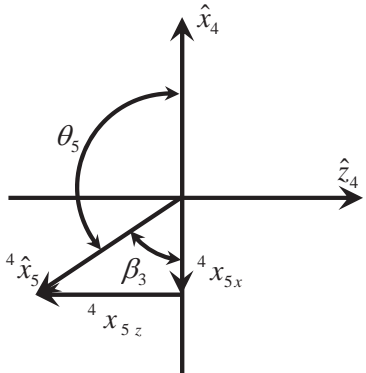
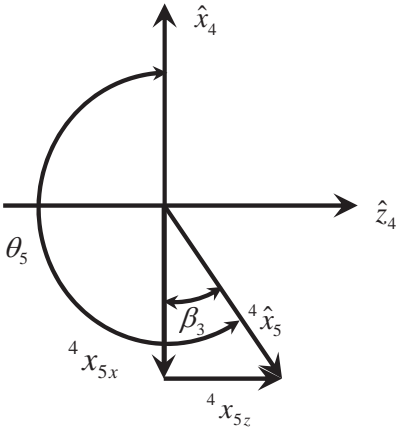
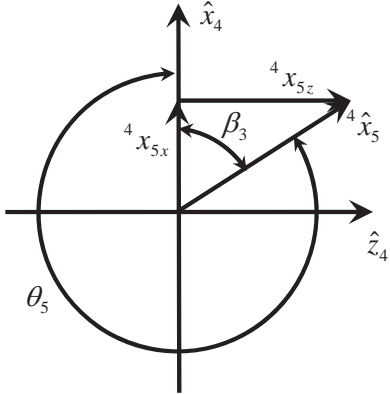
Es importante resaltar que  ${}^4\hat{x}_5$  tendrá en el sistema de referencias  $\{4\}$  sus componentes que podemos asignar como:

$${}^4\hat{x}_5 = \begin{pmatrix} {}^4x_{5x} & {}^4x_{5y} & {}^4x_{5z} \end{pmatrix}^T \quad (2.82)$$

Estas componentes son útiles para evaluar  $\theta_5$  si consideramos que en la tabla 2.8 se de fine a:

$$\beta_3 = \text{Tg}^{-1} \left( \frac{{}^4x_{5z}}{{}^4x_{5x}} \right) \quad (2.83)$$

Tabla 2.8 Casos de evaluación de  $\theta_5$ .

 <p><math>\theta_5 = -\beta_3</math> (2.84)</p>	 <p><math>\theta_5 = \pi - \beta_3</math> (2.85)</p>
 <p><math>\theta_5 = \pi - \beta_3</math> (2.86)</p>	 <p><math>\theta_5 = 2\pi - \beta_3</math> (2.87)</p>

Evaluación de  $d_6$

La distancia  $d_6$  es la existente entre el origen de  $\{5\}$  y el origen de  $\{6\}$ , esta distancia está evaluada en el análisis vectorial y se tiene como la distancia entre  $E'$  y  $F'$  de la figura 2.14, por lo tanto:

$$d_6 = \|\bar{F}' - \bar{E}'\| \quad (2.88)$$



## Capítulo 3

### Generación de trayectoria

#### Introducción

El problema de generación de trayectorias se plantea normalmente en el espacio articular, en cuyo caso se trata de especificar la posición, la velocidad y la aceleración para cada una de las articulaciones. [9]

Resulta de vital importancia, el estudio de la generación de trayectoria del manipulador RPSP. Este robot manipulador tiene como objetivo el transportar un objeto desde una posición y orientación iniciales, hasta una posición y orientación finales, la línea por la cual se puede definir la ruta seguida por el objeto, se denomina trayectoria del mismo. De tal manera que el cambio de posición del objeto de trabajo desde un punto a otro a lo largo de la trayectoria, se puede dar mediante un diferencial de tiempo, por tal motivo, se puede definir la trayectoria como la evolución de la posición, velocidad y aceleración del objeto de trabajo en función del tiempo.

Para analizar la generación de la trayectoria se consideran dos aspectos muy importantes que son:

1. El perfil de trayectoria.
2. El lugar geométrico de la trayectoria.

Ambos aspectos son tema de estudio en el presente capítulo.

### 3.1. Perfil de Trayectoria

Para el análisis del perfil de trayectoria, es importante hacer las siguientes consideraciones.

1. Se conoce la posición y orientación del objeto de trabajo al inicio del desplazamiento.
2. En un tiempo  $t = 0$  el objeto parte del reposo desde su posición inicial, es decir, no presenta velocidad ni aceleración en el momento en que es tomado por el robot RPSP.
3. Para el intervalo de tiempo desde  $t = t_0$  hasta  $t = t_f$  el objeto asume valores de velocidad y aceleración en tal forma que no existen cambios bruscos de pendiente en las gráficas representativas de estos valores en relación con el tiempo.
4. Una vez en la posición final, el objeto de trabajo está nuevamente en condiciones de reposo.
5. Durante el desplazamiento consideramos que transcurre un tiempo  $t = t_f$  y se lleva a cabo el recorrido de una distancia  $d = dt$

Se analizan en este capítulo dos perfiles de trayectoria que son:

1. Perfil de trayectoria de quinto grado.
2. Perfil de trayectoria de octavo grado.

Entre los perfiles de trayectoria que se analizan, el polinomio de octavo grado incluye de manera implícita al polinomio de quinto grado, es importante considerar que la generación de trayectoria es una función importante del sistema de control de un robot. [9]. Por ello, se debe tener en cuenta que en términos generales, las trayectorias deben ser suaves, esto significa restricciones sobre las derivadas, se exige que al menos la primera derivada sea continua y si se desea que más derivadas sean continuas, se recomienda incrementar el grado del polinomio [9].

El empleo de un polinomio de octavo grado como perfil de trayectoria se justifica por permitir un mayor control en la suavidad de la trayectoria [6]. Lo anterior también se evidencia en el siguiente párrafo, extraído de la bibliografía consultada:

*The motions undergone by robotic mechanical system should be, as rule, as smooth, as possible; i.e., abrupt changes in position, velocity and acceleration should be avoided. Indeed, abrupt motions require unlimited amounts of power to be implemented, which the motors cannot supply because of their physical limitations[13].*

El párrafo anterior insiste en la importancia de funciones suaves, que garanticen de mejor manera la continuidad de la posición, velocidad y aceleración de las articulaciones del robot.

Resulta interesante la comparación entre los polinomios de alto grado, como el perfil octal, con los perfiles más ampliamente utilizados como lo son los splines cúbicos.

Cuando las consideraciones de la variación de curvatura son importantes, se aborda el empleo de las funciones spline, de las cuales, la curva spline más sencilla es la cúbica [9].

Los splines cúbicos son la función polinomial de menor grado que permite continuidad en velocidad y aceleración, por lo tanto, se reduce la cantidad de cálculos necesarios y la posibilidad de inestabilidad numérica. [9],

Es importante señalar que a pesar de que los splines cúbicos tienen la ventaja de producir menos inestabilidades numéricas y se asegura la continuidad de la aceleración, las curvas de aceleración que se generan para un polinomio de octavo grado son más suaves que las correspondientes a su spline cúbico [6], [9].

Sin embargo, la utilización de un polinomio de grado elevado para interpolar los puntos nudos dados puede no ser satisfactoria. Es difícil encontrar sus extremos y tienden a tener movimientos extraños [10], [11].

Aún y cuando los libros de texto mencionan los inconvenientes que presentan los polinomios de alto grado, la revisión bibliográfica reciente [6], justifica el uso de un perfil de octavo grado y presenta las siguientes reflexiones:

- *Existe una familia universal de polinomios de octavo grado que incluyen polinomios de menor grado (al de quinto grado), que tampoco tiene discontinuidades en su trayectoria.*
- *La elección correcta de un índice de control dentro de un cierto rango, puede controlar la velocidad máxima que alcance el robot y conseguir operar de manera adecuada con este polinomio, sin que se presenten inestabilidades.*
- *Debido al grado de éstos, se garantiza la continuidad en la posición, velocidad y aceleración para cada articulación.*

### 3.1.1 Perfil de trayectoria de grado 5

Este perfil de trayectoria está definido por un polinomio de quinto grado que incluye seis coeficientes que son representativos de las condiciones temporales. El polinomio representa la posición, y su primera y segunda derivadas representan la velocidad y la aceleración, respectivamente.

$$p(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3 + a_4t^4 + a_5t^5 \quad (3.1)$$

$$v(t) = a_1 + 2a_2t + 3a_3t^2 + 4a_4t^3 + 5a_5t^4 \quad (3.2)$$

$$a(t) = 2a_2 + 6a_3t + 12a_4t^2 + 20a_5t^3 \quad (3.3)$$

Para determinar el valor de cada uno de los coeficientes es importante tomar en cuenta que el movimiento parte del reposo y llega a la posición final en donde quedará en reposo, por lo tanto:

1. Para un tiempo  $t=t_0$  la posición, velocidad y aceleración son iguales a cero.
2. Para un tiempo  $t=t_f$  la posición es la distancia recorrida que denominaremos  $d_i$  y la velocidad y la aceleración son iguales a cero.

Para tiempo  $t=t_0$

$$p(t_0) = 0 \quad (3.4)$$

$$v(t_0) = 0 \quad (3.5)$$

$$a(t_0) = 0 \quad (3.6)$$

Para  $t = t_f$

$$p(t_f) = d_i \quad (3.7)$$

$$v(t_f) = 0 \quad (3.8)$$

$$a(t_f) = 0 \quad (3.9)$$

Observando las ecuaciones 3.4 a la 3.6 en las que la posición, velocidad y aceleración son cero para un tiempo  $t=0$ , podemos decir entonces que:

$$a_0 = 0 \quad (3.10)$$

$$a_1 = 0 \quad (3.11)$$

$$a_2 = 0 \quad (3.12)$$

Para el caso en que  $t = t_f$  al sustituir los valores encontrados en (3.10) a (3.12), tenemos de manera simplificada un conjunto de ecuaciones como se muestra en (3.1)' a (3.3)', formulando así un conjunto de tres ecuaciones con tres incógnitas.

$$p(t_f) = a_3 t^3 + a_4 t^4 + a_5 t^5 = d_i \quad (3.1)'$$

$$v(t_f) = 3a_3 t^2 + 4a_4 t^3 + 5a_5 t^4 = 0 \quad (3.2)'$$

$$a(t_f) = 6a_3 t + 12a_4 t^2 + 20a_5 t^3 = 0 \quad (3.3)'$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones obtenemos el resto de coeficientes como señalan las ecuaciones siguientes.

$$a_3 = 10d_t \left( \frac{1}{t_f} \right)^3 \quad (3.13)$$

$$a_4 = -15d_t \left( \frac{1}{t_f} \right)^4 \quad (3.14)$$

$$a_5 = 6d_t \left( \frac{1}{t_f} \right)^5 \quad (3.15)$$

Sustituyendo las ecuaciones (3.13) – (3.15) en la ecuación (3.1), tenemos:

$$p(t) = 10d_t \left( \frac{1}{t_f} \right)^3 t^3 - 15d_t \left( \frac{1}{t_f} \right)^4 t^4 + 6d_t \left( \frac{1}{t_f} \right)^5 t^5 \quad (3.16)$$

Factorizando  $d_t$  en (3.16), obtenemos el perfil de posición para un polinomio de quinto grado definido por la Ec. (3.16)'

$$p(t) = d_t \left[ 10 \left( \frac{1}{t_f} \right)^3 t^3 - 15 \left( \frac{1}{t_f} \right)^4 t^4 + 6 \left( \frac{1}{t_f} \right)^5 t^5 \right] \quad (3.16)'$$



El perfil de velocidad para un polinomio de quinto grado, queda definido por la ecuación (3.17):

$$v(t) = d_t \left[ 30 \frac{t^2}{t_f^3} - 60 \frac{t^3}{t_f^4} + 30 \frac{t^4}{t_f^5} \right] \quad (3.17)$$

El perfil de aceleración para un polinomio de quinto grado, queda definido por la ecuación (3.18):

$$a(t) = d_t \left[ 60 \frac{t}{t_f^3} - 180 \frac{t^2}{t_f^4} + 120 \frac{t^3}{t_f^5} \right] \quad (3.18)$$

### 3.1.2 Perfil de Trayectoria Octal

Este perfil de trayectoria está definido por un polinomio de octavo grado que incluye nueve coeficientes que son representativos de las condiciones temporales. El polinomio representa la posición, y su primera y segunda derivadas representan la velocidad y la aceleración, respectivamente.

$$p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + a_4 t^4 + a_5 t^5 + a_6 t^6 + a_7 t^7 + a_8 t^8 \quad (3.19)$$

$$v(t) = a_1 + 2a_2 t + 3a_3 t^2 + 4a_4 t^3 + 5a_5 t^4 + 6a_6 t^5 + 7a_7 t^6 + 8a_8 t^7 \quad (3.20)$$

$$a(t) = 2a_2 + 6a_3 t + 12a_4 t^2 + 20a_5 t^3 + 30a_6 t^4 + 42a_7 t^5 + 56a_8 t^6 \quad (3.21)$$

Para determinar el valor de cada uno de los coeficientes es importante tomar en cuenta que el movimiento parte del reposo y llega a la posición final en donde quedará en reposo, por lo tanto:

1. Para un tiempo  $t=t_0$  la posición, velocidad y aceleración son iguales a cero.
2. Para un tiempo  $t=t_f/2$  la posición es la mitad de la distancia recorrida que denominaremos  $d_t/2$ , la velocidad es la máxima,  $v_{\max}$ , y la aceleración es igual a cero.
3. Para un tiempo  $t=t_f$  la posición es la distancia recorrida que denominaremos  $d_t$  y la velocidad y la aceleración son iguales a cero.

Para tiempo  $t=t_0$

$$p(t_0) = 0 \quad (3.22)$$

$$v(t_0) = 0 \quad (3.23)$$

$$a(t_0) = 0 \quad (3.24)$$

Para  $t = \frac{t_f}{2}$

$$p\left(\frac{t_f}{2}\right) = \frac{d_t}{2} \quad (3.25)$$

$$v\left(\frac{t_f}{2}\right) = v_{\max} \quad (3.26)$$

$$a\left(\frac{t_f}{2}\right) = 0 \quad (3.27)$$

Para  $t = t_f$

$$p(t_f) = d_i \quad (3.28)$$

$$v(t_f) = 0 \quad (3.29)$$

$$a(t_f) = 0 \quad (3.30)$$

De las ecuaciones 3.22 a la 3.24, al igualar con las ecuaciones 3.19 a la 3.21, para un tiempo  $t=0$ , tenemos que:

$$a_0 = 0 \quad (3.31)$$

$$a_1 = 0 \quad (3.32)$$

$$a_2 = 0 \quad (3.33)$$

Sustituyendo estos valores en las ecuaciones 3.19 a 3.21 y simplificando, nos quedan como:

$$p(t) = a_3 t^3 + a_4 t^4 + a_5 t^5 + a_6 t^6 + a_7 t^7 + a_8 t^8 \quad (3.34)$$

$$v(t) = 3a_3 t^2 + 4a_4 t^3 + 5a_5 t^4 + 6a_6 t^5 + 7a_7 t^6 + 8a_8 t^7 \quad (3.35)$$

$$a(t) = 6a_3 t + 12a_4 t^2 + 20a_5 t^3 + 30a_6 t^4 + 42a_7 t^5 + 56a_8 t^6 \quad (3.36)$$

Al sustituir en las ecuaciones (3.34) a la (3.36), para un tiempo de  $t = \frac{t_f}{2}$ ,

obtenemos las ecuaciones

$$p\left(\frac{t_f}{2}\right) = a_3 \left(\frac{t_f}{2}\right)^3 + a_4 \left(\frac{t_f}{2}\right)^4 + a_5 \left(\frac{t_f}{2}\right)^5 + a_6 \left(\frac{t_f}{2}\right)^6 + a_7 \left(\frac{t_f}{2}\right)^7 + a_8 \left(\frac{t_f}{2}\right)^8 \quad (3.37)$$

$$v\left(\frac{t_f}{2}\right) = 3a_3 \left(\frac{t_f}{2}\right)^2 + 4a_4 \left(\frac{t_f}{2}\right)^3 + 5a_5 \left(\frac{t_f}{2}\right)^4 + 6a_6 \left(\frac{t_f}{2}\right)^5 + 7a_7 \left(\frac{t_f}{2}\right)^6 + 8a_8 \left(\frac{t_f}{2}\right)^7 \quad (3.38)$$

$$a\left(\frac{t_f}{2}\right) = 6a_3 \left(\frac{t_f}{2}\right) + 12a_4 \left(\frac{t_f}{2}\right)^2 + 20a_5 \left(\frac{t_f}{2}\right)^3 + 30a_6 \left(\frac{t_f}{2}\right)^4 + 42a_7 \left(\frac{t_f}{2}\right)^5 + 56a_8 \left(\frac{t_f}{2}\right)^6 \quad (3.39)$$

Al sustituir en las ecuaciones (3.34) a la (3.36), para un tiempo de  $t = t_f$ , obtenemos las ecuaciones

$$p(t_f) = a_3(t_f)^3 + a_4(t_f)^4 + a_5(t_f)^5 + a_6(t_f)^6 + a_7(t_f)^7 + a_8(t_f)^8 \quad (3.40)$$

$$v(t_f) = 3a_3(t_f)^2 + 4a_4(t_f)^3 + 5a_5(t_f)^4 + 6a_6(t_f)^5 + 7a_7(t_f)^6 + 8a_8(t_f)^7 \quad (3.41)$$

$$a(t_f) = 6a_3(t_f) + 12a_4(t_f)^2 + 20a_5(t_f)^3 + 30a_6(t_f)^4 + 42a_7(t_f)^5 + 56a_8(t_f)^6 \quad (3.42)$$

De las ecuaciones (3.37) a la (3.42), tenemos un total de seis ecuaciones con seis incógnitas en las cuales las restricciones señaladas de (3.25) a la (3.30), son valederas y nos llevan a determinar el resto de coeficientes como se indican en las ecuaciones (3.43) a la (3.48).

$$a_3 = \frac{70dt}{t_f^3} - \frac{32v_{\max}}{t_f^2} \quad (3.43)$$

$$a_4 = -\frac{315dt}{t_f^4} + \frac{160v_{\max}}{t_f^3} \quad (3.44)$$

$$a_5 = \frac{546dt}{t_f^5} - \frac{288v_{\max}}{t_f^4} \quad (3.45)$$

$$a_6 = -\frac{420dt}{t_f^6} + \frac{224v_{\max}}{t_f^5} \quad (3.46)$$

$$a_7 = \frac{120dt}{t_f^7} - \frac{64v_{\max}}{t_f^6} \quad (3.47)$$

$$a_8 = 0 \quad (3.48)$$

Sustituyendo los valores obtenidos en las ecuaciones (3.43) a la (3.48), en la ecuación (3.34) y arreglando la ecuación resultante tenemos entonces a la ecuación (3.49)

$$p(t) = \left( \frac{70dt}{t_f^3} - \frac{32v_{\max}}{t_f^2} \right) t^3 + \left( -\frac{315dt}{t_f^4} + \frac{160v_{\max}}{t_f^3} \right) t^4 + \left( \frac{546dt}{t_f^5} - \frac{288v_{\max}}{t_f^4} \right) t^5 + \left( -\frac{420dt}{t_f^6} + \frac{224v_{\max}}{t_f^5} \right) t^6 + \left( \frac{120dt}{t_f^7} - \frac{64v_{\max}}{t_f^6} \right) t^7 \quad (3.49)$$

Factorizando  $d_t$  y  $v_{\max}$  en la ecuación (3.49), se obtiene (3.50), que representa el perfil de la posición para el caso en que se utiliza un polinomio de octavo grado.

$$p(t) = d_t \left[ \left( \frac{70}{t_f^3} \right) t^3 + \left( -\frac{315}{t_f^4} \right) t^4 + \left( \frac{546}{t_f^5} \right) t^5 + \left( -\frac{420}{t_f^6} \right) t^6 + \left( \frac{120}{t_f^7} \right) t^7 \right] + v_{\max} \left[ \left( -\frac{32}{t_f^2} \right) t^3 + \left( \frac{160}{t_f^3} \right) t^4 + \left( -\frac{288}{t_f^4} \right) t^5 + \left( \frac{224}{t_f^5} \right) t^6 + \left( -\frac{64}{t_f^6} \right) t^7 \right] \quad (3.50)$$

Para obtener el perfil de velocidad, es necesario derivar la ecuación (3.50) dando así origen a (3.51),

$$v(t) = d_t \left[ \left( \frac{210}{t_f^3} \right) t^2 + \left( -\frac{1260}{t_f^4} \right) t^3 + \left( \frac{2730}{t_f^5} \right) t^4 + \left( -\frac{2520}{t_f^6} \right) t^5 + \left( \frac{840}{t_f^7} \right) t^6 \right] + v_{\max} \left[ \left( -\frac{96}{t_f^2} \right) t^2 + \left( \frac{640}{t_f^3} \right) t^3 + \left( -\frac{1440}{t_f^4} \right) t^4 + \left( \frac{1344}{t_f^5} \right) t^5 + \left( -\frac{448}{t_f^6} \right) t^6 \right] \quad (3.51)$$

### Parámetro de control *índice\_m*

Bajo ciertas condiciones de movimiento, para perfiles de quinto y octavo grado, la velocidad máxima ocurre justo en el instante  $t_f/2$ , [6]. Imponiendo esta restricción en la ecuación (3.17) que describe el perfil de velocidad para un polinomio de quinto grado, tenemos entonces como resultado la ecuación (3.52).

$$v\left(\frac{t_f}{2}\right) = v_{\max} = d_t \left[ 30 \frac{\left(\frac{t_f}{2}\right)^2}{t_f^3} - 60 \frac{\left(\frac{t_f}{2}\right)^3}{t_f^4} + 30 \frac{\left(\frac{t_f}{2}\right)^4}{t_f^5} \right] \quad (3.52)$$

$$v\left(\frac{t_f}{2}\right) = v_{\max} = d_t \left[ 30 \frac{t_f^2}{4t_f^3} - 60 \frac{t_f^3}{8t_f^4} + 30 \frac{t_f^4}{16t_f^5} \right] \quad (3.53)$$

De la ecuación (3.53) se desprende que

$$v_{\max} = \left(\frac{30}{16}\right) \frac{dt}{t_f} \quad (3.54)$$

$$v_{\max} = 1.785 \left(\frac{dt}{t_f}\right) \quad (3.55)$$

Sustituyendo en la ecuación (3.50), ecuación que define el perfil de posición para un polinomio de octavo grado, el valor obtenido para  $v_{\max}$  en (3.54)

$$p(t) = d_t \left[ \left(\frac{70}{t_f^3}\right) t^3 + \left(-\frac{315}{t_f^4}\right) t^4 + \left(\frac{546}{t_f^5}\right) t^5 + \left(-\frac{420}{t_f^6}\right) t^6 + \left(\frac{120}{t_f^7}\right) t^7 \right] + \left(\frac{30}{16} \frac{d_t}{t_f}\right) \left[ \left(-\frac{32}{t_f^2}\right) t^3 + \left(\frac{160}{t_f^3}\right) t^4 + \left(-\frac{288}{t_f^4}\right) t^5 + \left(\frac{224}{t_f^5}\right) t^6 + \left(-\frac{64}{t_f^6}\right) t^7 \right] \quad (3.50)'$$

$$p(t) = d_t \left[ \left(\frac{70}{t_f^3}\right) t^3 + \left(-\frac{315}{t_f^4}\right) t^4 + \left(\frac{546}{t_f^5}\right) t^5 + \left(-\frac{420}{t_f^6}\right) t^6 + \left(\frac{120}{t_f^7}\right) t^7 \right] + \left[ \left(-\frac{(30)d_t 2}{t_f^3}\right) t^3 + \left(\frac{(30)d_t 10}{t_f^4}\right) t^4 + \left(-\frac{(30)d_t 18}{t_f^5}\right) t^5 + \left(\frac{(30)d_t 14}{t_f^6}\right) t^6 + \left(-\frac{(30)d_t 4}{t_f^7}\right) t^7 \right] \quad (3.50)''$$

Resulta muy evidente que al simplificar más la ecuación (3.50)'', llegamos nuevamente a la ecuación (3.16)' que es la que nos describe el perfil de trayectoria de quinto grado.



$$p(t) = d_t \left[ 10 \left( \frac{1}{t_f} \right)^3 t^3 - 15 \left( \frac{1}{t_f} \right)^4 t^4 + 6 \left( \frac{1}{t_f} \right)^5 t^5 \right] \quad (3.16)'$$

Con este ejercicio se demuestra que el perfil de trayectoria definido por un polinomio de quinto grado pertenece a la familia universal de polinomios de octavo grado [6].

Si expresamos la ecuación (3.55) como (3.56),

$$v_{\max} = \text{indice\_}m \left( \frac{dt}{t_f} \right) \quad (3.56)$$

Donde *índice\_m* es un parámetro de control adimensional [6], entonces, sustituyendo el valor de  $v_{\max}$  indicado en (3.56), podemos representar la ecuación (3.50) que corresponde al perfil de posición de un polinomio de grado ocho como (3.57)

$$p(t) = d_t \left[ \left( \frac{70}{t_f^3} \right) t^3 + \left( -\frac{315}{t_f^4} \right) t^4 + \left( \frac{546}{t_f^5} \right) t^5 + \left( -\frac{420}{t_f^6} \right) t^6 + \left( \frac{120}{t_f^7} \right) t^7 \right] + \text{indice\_}m \left( \frac{dt}{t_f} \right) \left[ \left( -\frac{32}{t_f^2} \right) t^3 + \left( \frac{160}{t_f^3} \right) t^4 + \left( -\frac{288}{t_f^4} \right) t^5 + \left( \frac{224}{t_f^5} \right) t^6 + \left( -\frac{64}{t_f^6} \right) t^7 \right] \quad (3.57)$$

Como ya quedó demostrado, la ecuación (3.57) puede representarnos al perfil de posición del polinomio de quinto grado con el adecuado valor del *índice\_m*.

Para condiciones adecuadas del perfil de trayectoria, el valor del parámetro adimensional  $\text{índice}_m$  oscila dentro del rango  $[1.458334, 2.1875]$ , [6].

Cuando el parámetro de control es  $\text{índice}_m = 1.458334$ , la pendiente de la curvatura de velocidad generada, tiene un comportamiento muy brusco al inicio y fin del recorrido.

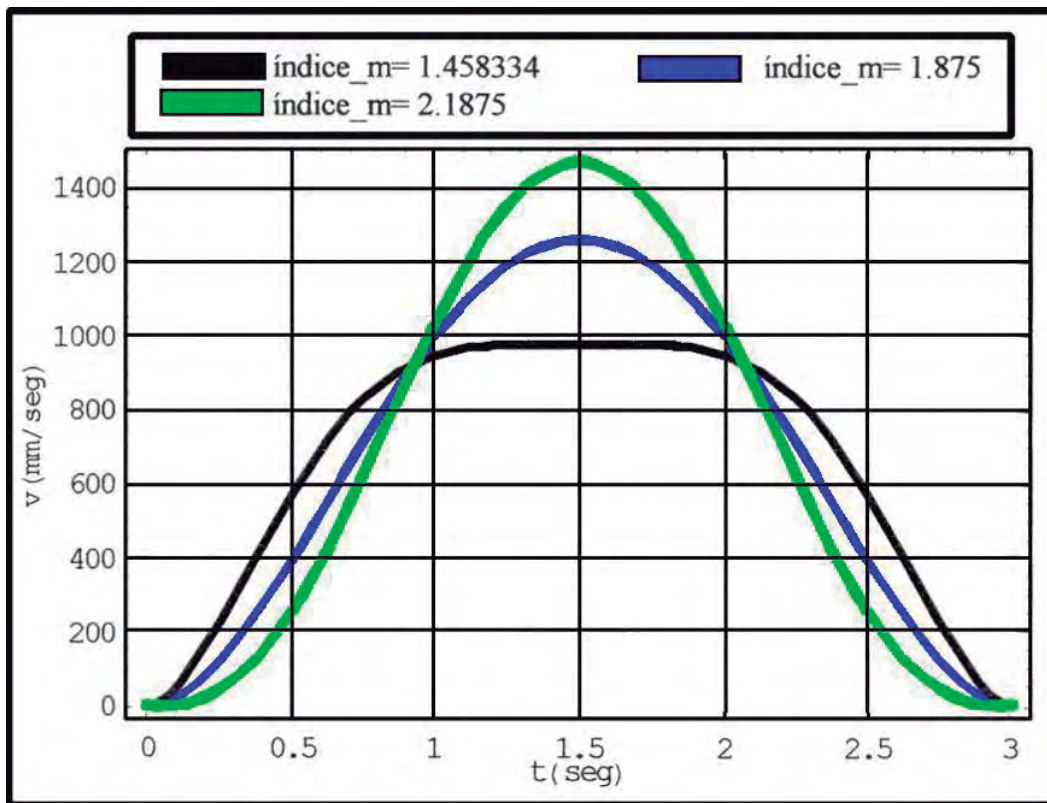


Figura 3.1 Perfiles de velocidad para tres valores del  $\text{índice}_m$ .

En la figura 3.1, se muestran los perfiles de velocidades correspondientes a los índices citados, nótese que si el parámetro de control  $\text{índice}_m = 2.1875$  la curva

es muy suave al inicio y fin del recorrido, y la máxima velocidad es alcanzada en todos los casos en el instante  $t_f / 2$ , [6].

### **3.2 Lugar geométrico de la trayectoria.**

Si unimos mediante líneas todos los puntos cartesianos por donde pasa el objeto transportado por el órgano terminal del manipulador RPSP, tendremos entonces definida la geometría de su trayectoria. El manipulador RPSP transporta desde una posición y orientación iniciales en que el objeto se encuentra en reposo hasta una posición y orientación finales en donde dejará al objeto en reposo. Emplea en ello la formulación del tornillo de Rodríguez para el desplazamiento general del tornillo por lo cual el lugar geométrico de la trayectoria tiene forma helicoidal.

Cuándo el órgano terminal cambia de una posición a otra en un pequeño diferencial de tiempo, resulta evidente que el vector de posición, que define al objeto de trabajo respecto al origen, tiene a su vez un cambio, resultando de esto una *transformación de tornillo* que es capaz de transformar cualquier vector de posición de acuerdo al movimiento del robot manipulador helicoidal RPSP.

#### **3.2.1 Desplazamiento general del tornillo**

Los parámetros del diseño ilustrados en la figura 3.2 se obtienen teniendo como información tres puntos al inicio del desplazamiento, que describen la posición y orientación de la pieza de trabajo, y esos tres puntos describen también la posición y orientación al final del desplazamiento. [1], [2], [3], [8].

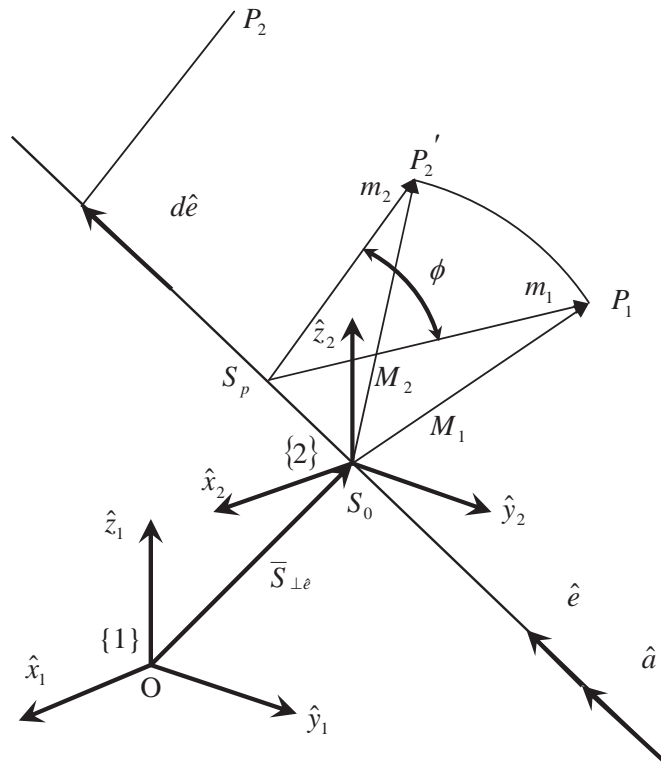


Fig. 3.2 Representación esquemática de los parámetros de diseño de un tornillo de Rodríguez.

Refiriéndose a la figura 3.2, nótese la existencia de dos sistemas de referencia, cuyos orígenes están unidos entre sí por un vector denominado  $\bar{S}_{\perp e}$ , que a su vez se intercepta en forma perpendicular al vector  $\hat{e}$ . En la figura 3.2 se ilustra a  $\hat{e}$  como colineal con el eje de giro del tornillo, cuyo sentido indica hacia donde avanza el tornillo.

De la misma manera,  $P_1$  representa un punto cuyas coordenadas en relación con el sistema de referencias  $\{2\}$ , quedan definidas por el vector  $M_1$  en un tiempo

$t$ . Un instante después, habiendo girado el tornillo un ángulo  $\phi$ , el punto en cuestión se encuentra ahora en la posición  $P_2'$ , cuyas coordenadas en  $\{2\}$ , quedan definidas por el vector  $M_2$  y su desplazamiento a lo largo del eje de giro queda definido por la magnitud del vector  $\overline{S_p S_0}$ , de tal manera que; para un valor de  $\phi = 360$  se ha tenido un desplazamiento de  $P_2' - P_2 = d\hat{e}$ , evidenciando que  $d\hat{e}$  es la magnitud del paso.

Cabe aclarar que;  $\hat{e}$ ,  $\phi$ ,  $\overline{S_{\perp\hat{e}}}$  y  $d_{\hat{e}}$  están en función de  $P_1, Q_1, R_1, P_2, Q_2$  y  $R_2$ . Donde, los subíndices uno representan tres puntos coordenados no colineales, del objeto, al inicio del desplazamiento y el subíndice dos, al final del desplazamiento.

En general, Rodríguez establece el siguiente conjunto de ecuaciones, donde  $\otimes$  representa el producto cruz, conocidas como “Ecuaciones de Rodríguez para el desplazamiento general del tornillo”.

$$(P_2 - P_1) = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\hat{e} \otimes (P_1 + P_2 - 2\overline{OS_o}) + d\hat{e} \quad (3.58)$$

$$(Q_2 - Q_1) = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\hat{e} \otimes (Q_1 + Q_2 - 2\overline{OS_o}) + d\hat{e} \quad (3.59)$$

$$(R_2 - R_1) = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\hat{e} \otimes (R_1 + R_2 - 2\overline{OS_o}) + d\hat{e} \quad (3.60)$$

Nótese que;  $\overline{OS}_0 = \overline{S}_{\perp e}$  y que las incógnitas son:  $\hat{e}$ ,  $\phi$ ,  $\overline{S}_{\perp \hat{e}}$  y  $d\hat{e}$  que representan el eje de giro del tornillo, el ángulo de giro, vector de posición perpendicular a  $e$ , y el paso del tornillo. Para estas incógnitas, se establecen mediante el algoritmo de Rodríguez las siguientes ecuaciones que determinan sus valores.

Sea  $\overline{a}$  un vector colineal con el eje de giro  $\hat{e}$ , entonces:

$$\overline{a} = \frac{[(R_2 - Q_2) - (R_1 - Q_1)] \otimes [(P_2 - Q_2) - (P_1 - Q_1)]}{[(R_2 - Q_2) - (R_1 - Q_1)]^T [(P_2 - Q_2) - (P_1 - Q_1)]} \quad (3.61)$$

$$\hat{e} = \hat{a} = \frac{1}{\|\overline{a}\|} \overline{a} \quad (3.62)$$

$$\phi = 2 \tan^{-1} \|\overline{a}\| \quad (3.63)$$

$$d = \hat{e}^T (P_2 - P_1) \quad (3.64)$$

$$\overline{S}_{\perp \hat{e}} = \left( \frac{\hat{e} \otimes (P_2 - P_1) - \hat{e}^T (P_2 - P_1) \tan\left(\frac{\phi}{2}\right) + \tan\left(\frac{\phi}{2}\right) (P_1 + P_2)}{2 \tan\left(\frac{\phi}{2}\right)} \right) \quad (3.65)$$

Aplicando las ecuaciones anteriores, es posible diseñar un mecanismo para el transporte de objetos siguiendo una trayectoria helicoidal.

### 3.2.2. Transformación de Tornillo

#### Parametrización del tornillo de Rodrigues

Para el movimiento del mecanismo de tornillo con la consecuente rotación y traslación de la pieza de trabajo, cuya posición está definida por el vector  ${}^0\bar{P}_{wp}$  al sistema coordenado fijo, se hace necesario establecer un conjunto de sistemas de referencias que explican el desarrollo del movimiento durante el transcurso del tiempo.

De la figura 3.3 cabe resaltar las siguientes consideraciones

1. El sistema de referencias {0} y el sistema de referencias {1} son fijos durante el transcurso del tiempo.
2. Los sistemas de referencias {1}, {2} y {3}, tal como se muestran en la figura 3.3, tienen su origen en la intersección del vector  $\bar{S}_{\perp e}$  con el vector  $\hat{e}$  cuando el tiempo es igual a cero y no existe rotación entre ellos.
3. Los sistemas de referencias {2} y {3}, rotan, respecto del sistema de referencias {1}, con el transcurso del tiempo, alrededor de  $\hat{e}$ .

- El sistema de referencias {3}, además de rotar, se desplaza a lo largo del eje de giro, dándose de esta manera una rotación de Gibbs acompañada de un desplazamiento.

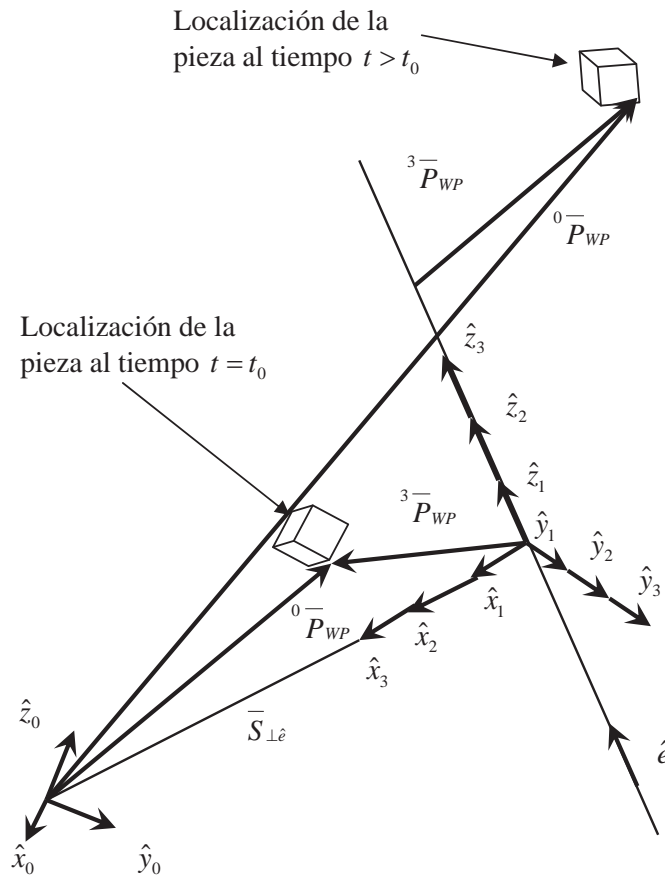


Figura 3.3 Conjunto de sistemas de ejes de referencias necesarios para la parametrización del tornillo de Rodrigues.



Teniendo en cuenta las consideraciones anteriores, la posición y orientación de los sistemas de referencias mostrados en la figura 3.3, pueden definirse matemáticamente mediante las siguientes ecuaciones.

$${}^0\{1\} = \{R_1^0; \bar{S}_{\perp \hat{e}}\} \quad (3.66)$$

$${}^1\{2\} = \{Rot(z, \theta); \bar{0}\} \quad (3.67)$$

$${}^2\{3\} = \{I_{3 \times 3}; d\hat{z}\} \quad (3.68)$$

La rotación de uno con respecto de cero, en la cual se escoge  $\hat{x}_1$  en la misma dirección pero de sentido opuesto a  $\bar{S}_{\perp \hat{e}}$  y  $\hat{z}_1 = \hat{e}$  (recuérdese que  $\bar{S}_{\perp \hat{e}}$  es perpendicular al eje de giro), queda definida de la siguiente manera:

$$R_1^0 = \begin{pmatrix} {}^0\hat{x}_1 & {}^0\hat{y}_1 & {}^0\hat{z}_1 \end{pmatrix} \quad (3.69)$$

Donde

$${}^0\hat{x}_1 = -\frac{\bar{S}_{\perp \hat{e}}}{\|\bar{S}_{\perp \hat{e}}\|} \quad (3.70)$$

$${}^0\hat{z}_1 = {}^0\hat{e} \quad (3.71)$$

Por lo tanto, como es una terna ortonormal derecha, podemos saber que:

$${}^0\hat{y}_1 = {}^0\hat{e} \otimes \left( -\frac{\bar{S}_{\perp\hat{e}}}{\|\bar{S}_{\perp\hat{e}}\|} \right) \quad (3.72)$$

Ahora bien, los vectores  ${}^0\bar{P}_{wp}$  y  ${}^3\bar{P}_{wp}$  hacen referencia del mismo punto del cuerpo a transportar pero referidos a los sistemas {0} y {3} de la figura 3.3, respectivamente. Cabe recordar que  ${}^0\bar{P}_{wp}$  es un dato conocido. Sin embargo, durante la ejecución de una tarea, el objeto a transportar permanece fijo respecto al sistema de referencias {3} y se puede describir respecto de éste mediante el vector  ${}^3\bar{P}_{wp}$ , siendo éste:

$${}^3\bar{P}_{wp} = T_2^3 T_1^2 T_0^1 {}^0\bar{P}_{wp} \quad (3.73)$$

Cuando el tiempo es igual a cero, los sistemas de referencias {1}, {2} y {3} coinciden totalmente en sus orígenes y en ambos casos su rotación queda definida por la matriz identidad dado que en  $\theta = 0$  aún no existe rotación. Por lo tanto:

$${}^3\bar{P}_{wp} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \left( -\frac{\bar{S}_{\perp\hat{e}}}{\|\bar{S}_{\perp\hat{e}}\|} \right)_x & \left( \hat{e} \otimes \left( -\frac{\bar{S}_{\perp\hat{e}}}{\|\bar{S}_{\perp\hat{e}}\|} \right) \right)_x & \hat{e}_x & \bar{S}_{\perp\hat{e}x} \\ \left( -\frac{\bar{S}_{\perp\hat{e}}}{\|\bar{S}_{\perp\hat{e}}\|} \right)_y & \left( \hat{e} \otimes \left( -\frac{\bar{S}_{\perp\hat{e}}}{\|\bar{S}_{\perp\hat{e}}\|} \right) \right)_y & \hat{e}_y & \bar{S}_{\perp\hat{e}y} \\ \left( -\frac{\bar{S}_{\perp\hat{e}}}{\|\bar{S}_{\perp\hat{e}}\|} \right)_z & \left( \hat{e} \otimes \left( -\frac{\bar{S}_{\perp\hat{e}}}{\|\bar{S}_{\perp\hat{e}}\|} \right) \right)_z & \hat{e}_z & \bar{S}_{\perp\hat{e}z} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} {}^0\bar{P}_{wpx} \\ {}^0\bar{P}_{wpy} \\ {}^0\bar{P}_{wpz} \\ 1 \end{pmatrix} \quad (3.74)$$

Cuando  $\text{Cos}\theta = 1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{Cos}\theta & -\text{Sen}\theta & 0 & 0 \\ \text{Sen}\theta & \text{Cos}\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \quad (3.75)$$

Entonces

$${}^3\bar{P}_{wp} = \begin{pmatrix} \left( -\frac{\bar{S}_{\perp\hat{e}}}{\|\bar{S}_{\perp\hat{e}}\|} \right)_x & \left( \hat{e} \otimes \left( -\frac{\bar{S}_{\perp\hat{e}}}{\|\bar{S}_{\perp\hat{e}}\|} \right) \right)_x & \hat{e}_x & \bar{S}_{\perp\hat{e}x} \\ \left( -\frac{\bar{S}_{\perp\hat{e}}}{\|\bar{S}_{\perp\hat{e}}\|} \right)_y & \left( \hat{e} \otimes \left( -\frac{\bar{S}_{\perp\hat{e}}}{\|\bar{S}_{\perp\hat{e}}\|} \right) \right)_y & \hat{e}_y & \bar{S}_{\perp\hat{e}y} \\ \left( -\frac{\bar{S}_{\perp\hat{e}}}{\|\bar{S}_{\perp\hat{e}}\|} \right)_z & \left( \hat{e} \otimes \left( -\frac{\bar{S}_{\perp\hat{e}}}{\|\bar{S}_{\perp\hat{e}}\|} \right) \right)_z & \hat{e}_z & \bar{S}_{\perp\hat{e}z} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} {}^0\bar{P}_{wpx} \\ {}^0\bar{P}_{wpy} \\ {}^0\bar{P}_{wpz} \\ 1 \end{pmatrix} \quad (3.76)$$

Se puede concluir que para un tiempo  $t$  igual con cero

$${}^3\bar{P}_{wp(t=0)} = T_0^{10} \bar{P}_{wp} \quad (3.77)$$

De la ecuación anterior, si el cuerpo de trabajo permanece fijo al sistema de referencias  $\{3\}$  durante el transcurso del tiempo, es decir, si  ${}^3\bar{P}_{wp}$  no cambia respecto de  $\{3\}$ , entonces:

$${}^3\bar{P}_{wp(t=0)} = {}^3\bar{P}_{wp(t>0)} \quad (3.78)$$

Por lo tanto, para referir desde {3} hasta {0} para cualquier tiempo t mayor que cero tenemos entonces que:

$${}^0\bar{P}_{wp} = T_1^0 T_2^1 T_3^2 {}^3\bar{P}_{wp(t=0)} \quad (3.79)$$

O bien sustituyendo el valor de  ${}^3\bar{P}_{wp(t=0)}$  tenemos

$${}^0\bar{P}_{wp} = T_1^0 T_2^1 T_3^2 T_0^{10} \bar{P}_{wp} \quad (3.80)$$

En esta ecuación sustituimos los valores correspondientes que son, de acuerdo con el análisis de la figura 3.3, los siguientes:

$$T_1^0 = \begin{pmatrix} \left( \begin{array}{c} \frac{\bar{S}_{\perp\hat{e}}}{\|\bar{S}_{\perp\hat{e}}\|} \\ \frac{\bar{S}_{\perp\hat{e}}}{\|\bar{S}_{\perp\hat{e}}\|} \end{array} \right)_x & \left( \hat{e} \otimes \left( -\frac{\bar{S}_{\perp\hat{e}}}{\|\bar{S}_{\perp\hat{e}}\|} \right) \right)_x & \hat{e}_x & \bar{S}_{\perp\hat{e}x} \\ \left( \begin{array}{c} \frac{\bar{S}_{\perp\hat{e}}}{\|\bar{S}_{\perp\hat{e}}\|} \\ \frac{\bar{S}_{\perp\hat{e}}}{\|\bar{S}_{\perp\hat{e}}\|} \end{array} \right)_y & \left( \hat{e} \otimes \left( -\frac{\bar{S}_{\perp\hat{e}}}{\|\bar{S}_{\perp\hat{e}}\|} \right) \right)_y & \hat{e}_y & \bar{S}_{\perp\hat{e}y} \\ \left( \begin{array}{c} \frac{\bar{S}_{\perp\hat{e}}}{\|\bar{S}_{\perp\hat{e}}\|} \\ \frac{\bar{S}_{\perp\hat{e}}}{\|\bar{S}_{\perp\hat{e}}\|} \end{array} \right)_z & \left( \hat{e} \otimes \left( -\frac{\bar{S}_{\perp\hat{e}}}{\|\bar{S}_{\perp\hat{e}}\|} \right) \right)_z & \hat{e}_z & \bar{S}_{\perp\hat{e}z} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.81)$$

$$T_2^1 = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.82)$$

$$T_3^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.83)$$

$$T_0^1 = \begin{pmatrix} \left( -\frac{\bar{S}_{\perp\hat{e}}}{\|\bar{S}_{\perp\hat{e}}\|} \right)_x & \left( \hat{e} \otimes \left( -\frac{\bar{S}_{\perp\hat{e}}}{\|\bar{S}_{\perp\hat{e}}\|} \right) \right)_x & \hat{e}_x & \bar{S}_{\perp\hat{e}x} \\ \left( -\frac{\bar{S}_{\perp\hat{e}}}{\|\bar{S}_{\perp\hat{e}}\|} \right)_y & \left( \hat{e} \otimes \left( -\frac{\bar{S}_{\perp\hat{e}}}{\|\bar{S}_{\perp\hat{e}}\|} \right) \right)_y & \hat{e}_y & \bar{S}_{\perp\hat{e}y} \\ \left( -\frac{\bar{S}_{\perp\hat{e}}}{\|\bar{S}_{\perp\hat{e}}\|} \right)_z & \left( \hat{e} \otimes \left( -\frac{\bar{S}_{\perp\hat{e}}}{\|\bar{S}_{\perp\hat{e}}\|} \right) \right)_z & \hat{e}_z & \bar{S}_{\perp\hat{e}z} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \quad (3.84)$$

$${}^0\bar{P}_{wp} = \begin{pmatrix} {}^0\bar{P}_{wp x} \\ {}^0\bar{P}_{wp y} \\ {}^0\bar{P}_{wp z} \\ 1 \end{pmatrix} \quad (3.85)$$

Cuando el tiempo cambia, también cambian los valores de  $\theta$ , que es la rotación de {2} y {3} con respecto de {1} y al mismo tiempo cambia  $d$ , que es la distancia que {3} sube separándose de {2}. Se puede emplear un polinomio de quinto grado que relacione estas dos variables en la forma siguiente:

$$\theta = u\theta_{Rod} \quad (3.86)$$

$$d = ud_{Rod} \quad (3.87)$$

Donde:

$$u = 10\left(\frac{t}{t_f}\right)^3 - 15\left(\frac{t}{t_f}\right)^4 + 6\left(\frac{t}{t_f}\right)^5 \quad (3.88)$$

$\theta_{Rod}$  Es el ángulo de rotación necesario para llegar de la posición inicial a la final, evaluado con las ecuaciones de Rodrigues y

$d_{Rod}$  Es el avance necesario del mecanismo de tornillo, evaluado con las ecuaciones de Rodrigues.

Haciendo las sustituciones correspondientes

$$\theta = \left[ 10\left(\frac{t}{t_f}\right)^3 - 15\left(\frac{t}{t_f}\right)^4 + 6\left(\frac{t}{t_f}\right)^5 \right] \theta_{Rod} \quad (3.89)$$

$$d = \left[ 10\left(\frac{t}{t_f}\right)^3 - 15\left(\frac{t}{t_f}\right)^4 + 6\left(\frac{t}{t_f}\right)^5 \right] d_{Rod} \quad (3.90)$$

Cabe señalar que;

$$t \in [0, t_f] \quad (3.91)$$

Empleando estas herramientas podemos conocer con precisión la posición y orientación del objeto de trabajo para cualquier valor de  $t$  y por consecuencia, mediante la cinemática inversa ya analizada, los valores de todas las variables articulares del robot manipulador RPSP.

#### **4.1. Introducción**

Durante el desempeño del robot manipulador helicoidal RPSP puede ser que todas o algunas de sus articulaciones se encuentren en movimiento, desempeñando actividad encaminada al cumplimiento de la tarea a realizar. La afirmación anterior, es consecuencia del caso particular en que la distancia entre la junta prismática del eslabonamiento de tornillo y el órgano terminal, es justo la que se precisa para que el centro de la articulación esférica coincida con el eje de tornillo de Rodrigues durante el desempeño de la tarea; en este caso, una vez alineado el eje del eslabonamiento de tornillo, con el eje de giro de tornillo de Rodrigues, solamente se requiere de la actividad del eslabonamiento de tornillo, quedando estáticos los eslabonamientos de posición y orientación.

Durante la simulación del robot helicoidal RPSP, se presenta para cada una de las articulaciones la historia respecto al tiempo de su posición, velocidad y aceleración, empleando en ello los resultados obtenidos durante el estudio de comportamiento cinemático del manipulador.

Se abordan dos casos para mostrar la simulación que son:

1. El caso particular en que coincide el eje de tornillo de Rodrigues con el eje del eslabonamiento de tornillo, (este último no requiere desplazarse durante la ejecución de la tarea). En este caso, sólo el eslabonamiento de tornillo estará en actividad durante la ejecución de la tarea.



2. El caso en que no coincide el eje de tornillo de Rodrigues con el eje del eslabonamiento de tornillo, (este último requiere desplazarse durante la ejecución de la tarea a líneas paralelas al eje de tornillo de Rodrigues). En este caso, los tres eslabonamientos están en actividad durante la ejecución de la tarea.

#### 4.2 Descripción de la tarea

El Manipulador helicoidal RPSP en la etapa de simulación, considera que el centro de la esfera se encuentra sobre el plano  $\hat{x}, \hat{y}$  a una altura  $H$  como se muestra en la figura 2.10. Se hicieron simulaciones variando la distancia entre la junta prismática del eslabonamiento de tornillo y el órgano terminal, ilustrando dos ejemplos representativos en el presente trabajo

#### Tarea

Se definen tres puntos de la pieza de trabajo, que aportan como información la posición y orientación de la misma al inicio del desplazamiento. Uno de esos tres puntos se denomina  $WP$  y es el que se toma para definir al vector que va del sistema de referencias fijo al órgano terminal del manipulador. Considerando un tiempo de proceso de 10 segundos y un polinomio de octavo grado cuyo  $\text{índice}_m = 1.875$ . Este perfil de velocidad se muestra en la figura 3.1 y sustituido en la ecuación 3.57 nos demuestra que se llega a un polinomio de quinto grado.

La tabla 4.1 muestra las coordenadas de los seis puntos que se toman como información para la ejecución de la tarea, estos puntos representan las coordenadas

operacionales. Quedan definidas la posición y orientación al inicio como al final de la ejecución de la tarea con los puntos  $P_1$ ,  $Q_1$ ,  $R_1$ ,  $P_2$ ,  $Q_2$ , y  $R_2$  mostrados en la tabla 4.1. En función de estos puntos, la tabla 4.2 muestra como información los parámetros del tornillo de Rodrigues. Se considera al objeto de trabajo en estado de reposo al momento en que lo toma el robot y al momento en que lo deja.

*Tabla 4.1 Espacio Operacional.*

Pieza de Trabajo	Coordenadas
$P_1$	(6, 6, 5)
$Q_1$	(6, 5, 6)
$R_1$	(5, 6, 5)
$P_2$	(4.51802, 7.50854, -6.80025)
$Q_2$	(4.55744, 8.51729, -5.80987)
$R_2$	(3.53397, 7.40498, -6.65561)
Punto WP	(6, 6, 5)

Empleando la información de la tabla 4.1, se determinó que los cuatro parámetros del Tornillo de Rodrigues para el proceso de simulación son los mostrados en la tabla 4.2

Tabla 4.2 Parámetros del Tornillo de Rodrigues.

Parámetros del tornillo	Valor del parámetro
$\phi$	1.58544 Radianes
$\hat{e}$	$\begin{pmatrix} -0.992109 \\ 0.0200607 \\ 0.123762 \end{pmatrix}$
$\bar{S}_{\perp \hat{e}}$	$\begin{pmatrix} -0.102061 \\ 0.999598 \\ -0.980171 \end{pmatrix}$
$d$	0.0401214

### Simulación para el Caso 1

Comportamiento de las variables articulares del manipulador helicoidal RPSP, cuando  $L_b=5.61361$  y  $H=1.5$  sobre el plano  $\hat{x}_0, \hat{y}_0$

Cabe hacer notar que para estas condiciones, el eje del mecanismo de tornillo coincide con el eje de tornillo de Rodrigues. Por lo tanto, únicamente están en movimiento las variables articulares correspondientes al eslabonamiento de tornillo.

*Tabla 4.3 Valores de las variables articulares al inicio y al final del desplazamiento.*

Variable articular	para t=0 seg	para t=10seg
$\theta_1$	0.696117 rad	0.696117 rad
$d_2$	10.4638 long	10.4638 long
$\theta_3$	5.43045 rad	5.43045 rad
$\theta_4$	1.71812 rad	1.71812 rad
$\theta_5$	2.8443 rad	0.113035 rad
$d_6$	12.0994 long	12.3084 long

En la tabla 4.3 se evidencia con los resultados proporcionados durante la simulación en Mathematica 4.0, que es correcta la suposición de que las variables  $\theta_1$ ,  $d_2$ ,  $\theta_3$  y  $\theta_4$  permanecen constantes cuando coincide el eje del mecanismo de tornillo con el eje de Rodrigues. Por lo cual se presentan únicamente las gráficas de comportamiento de las variables articulares  $\theta_5$  y  $d_6$ , que corresponden al eslabonamiento de tornillo, gráficas 4.1 - 4.6.

A continuación se muestran algunas figuras, en las que se observa, como va cambiando de posición el manipulador, al ejecutar la tarea señalada en la tabla 4.1 en un tiempo de 10 segundos con veinte intervalos de 0.5 segundos.

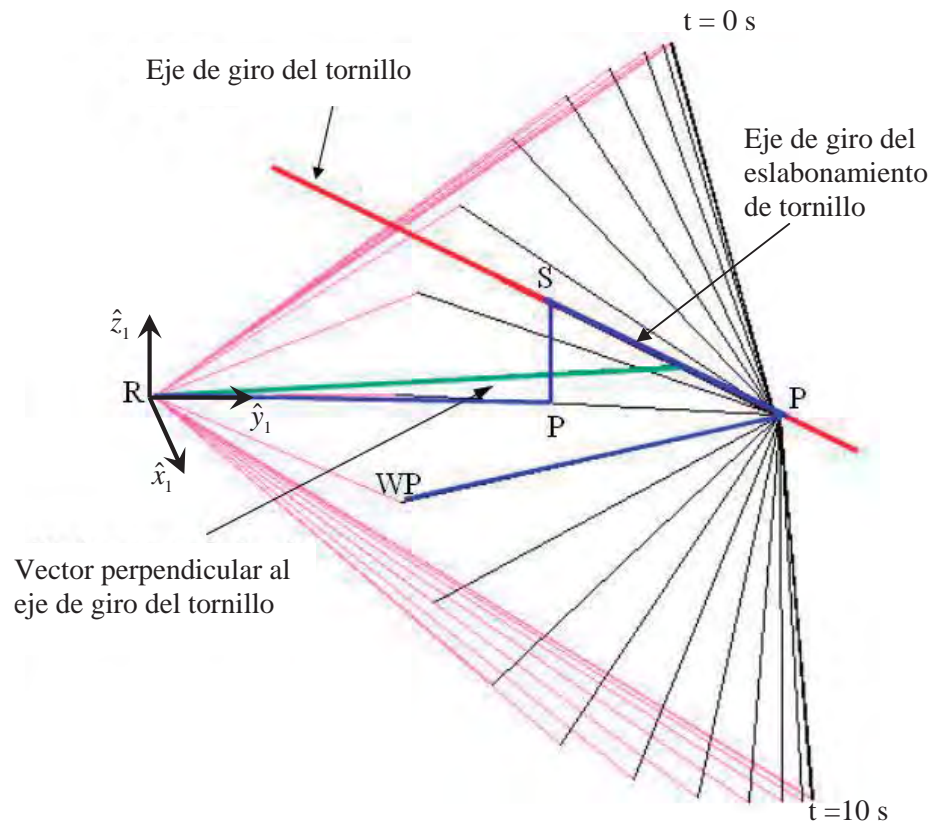


Figura 4.1 Perspectiva que muestra el desempeño del manipulador RPSP cuando coincide el eje del mecanismo con el del tornillo.

Se define como desempeño del manipulador a la manera en que este cambia de posición durante el transcurso del tiempo al ejecutar una tarea.

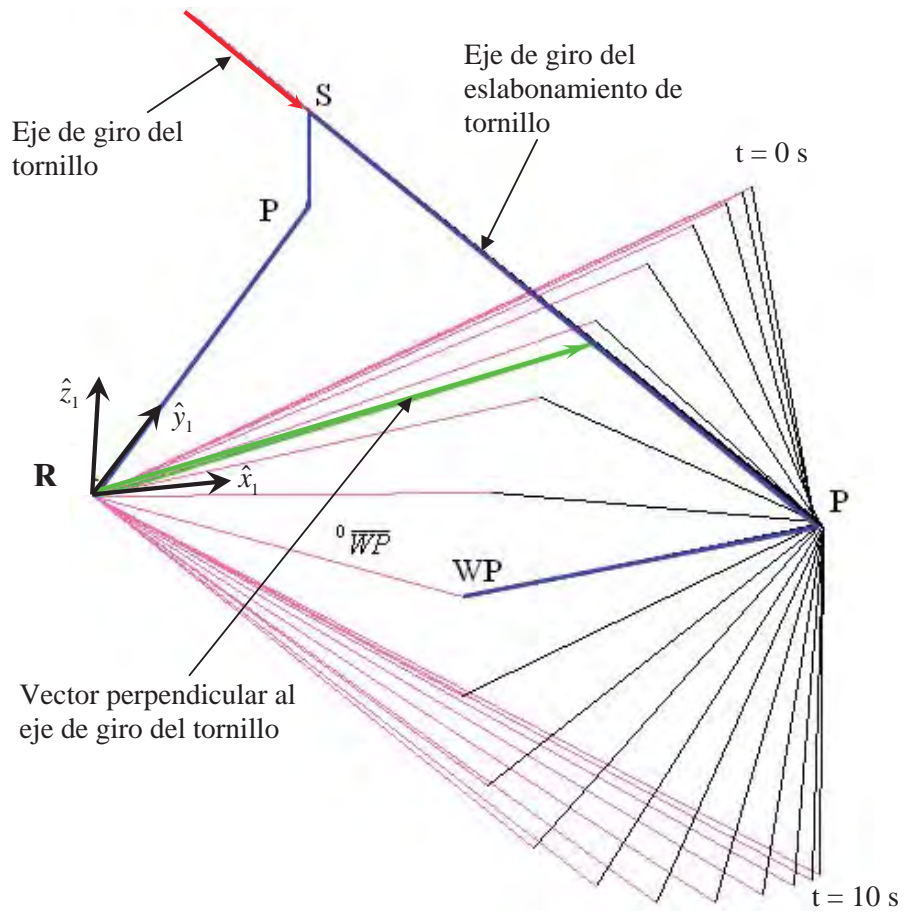


Figura 4.2 Otra perspectiva del RPSP mostrando el desempeño cuando coincide el eje del mecanismo con el del tornillo.

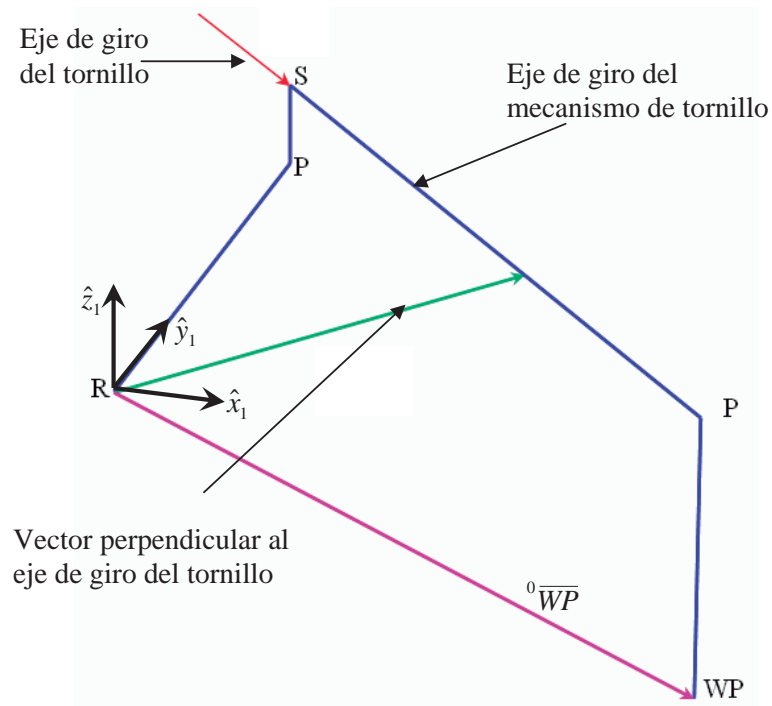
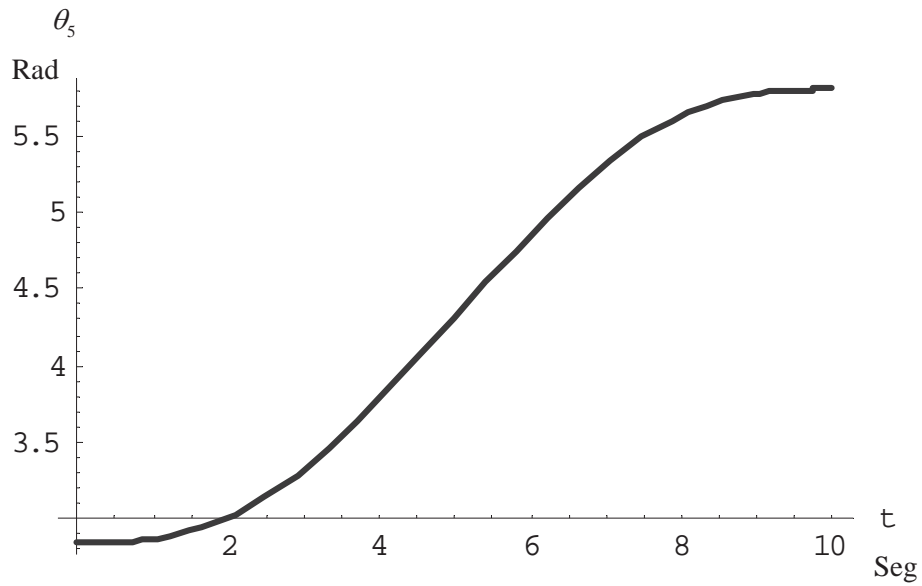
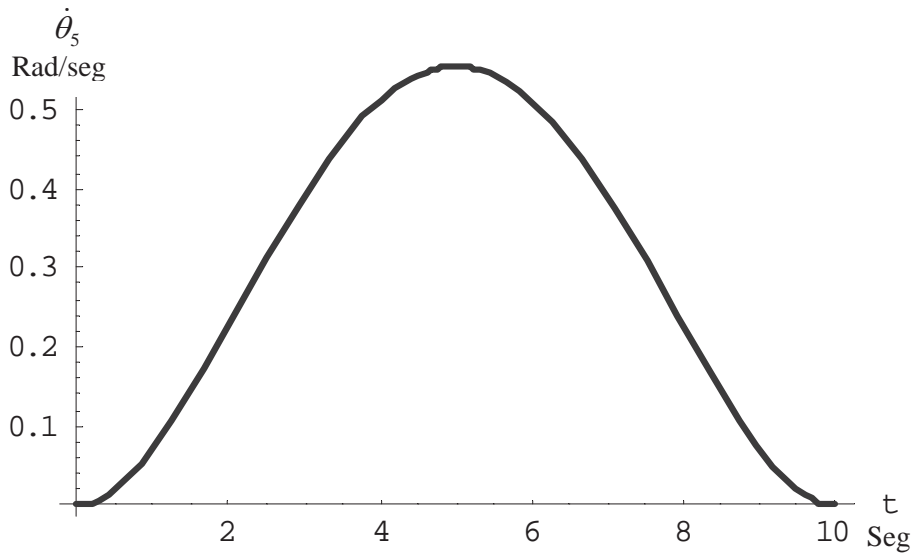


Figura 4.3 Ilustración que muestra como el eje del eslabonamiento de tornillo coincide con el eje de de tornillo de Rodrigues cuando  $L_b=5.61361$  que es la distancia requerida entre la junta prismática del eslabonamiento de tornillo y el órgano terminal.

Comportamiento de la variable articular correspondiente a la junta rotacional del eslabonamiento de tornillo,

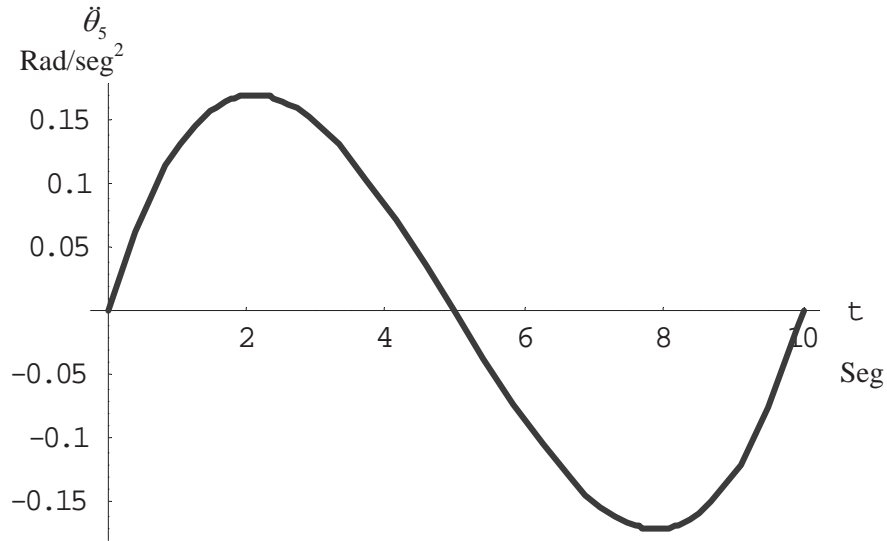


Gráfica 4.1 Muestra la posición de  $\theta_5$ , durante el transcurso del tiempo.



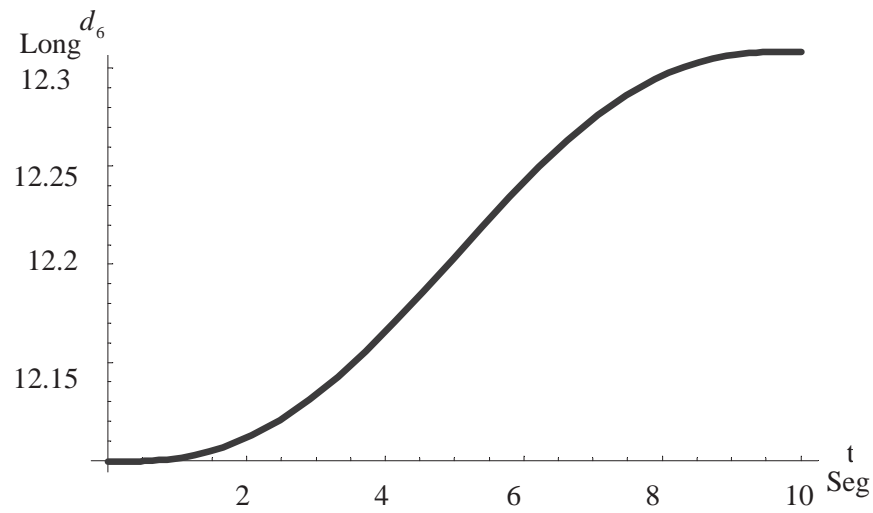
Gráfica 4.2 Muestra la velocidad de  $\theta_5$ , durante el transcurso del tiempo.



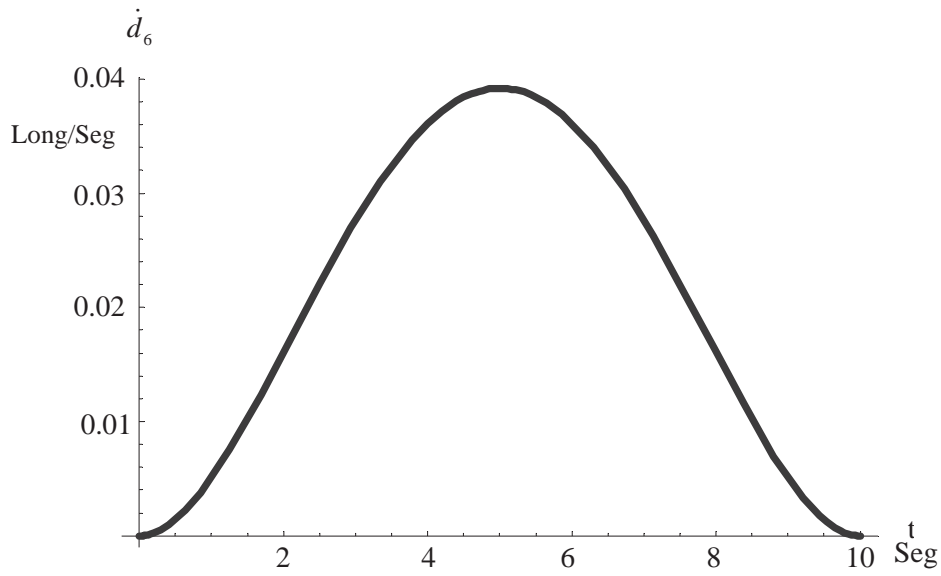


Gráfica 4.3 Muestra la aceleración de  $\theta_5$  durante el transcurso del tiempo.

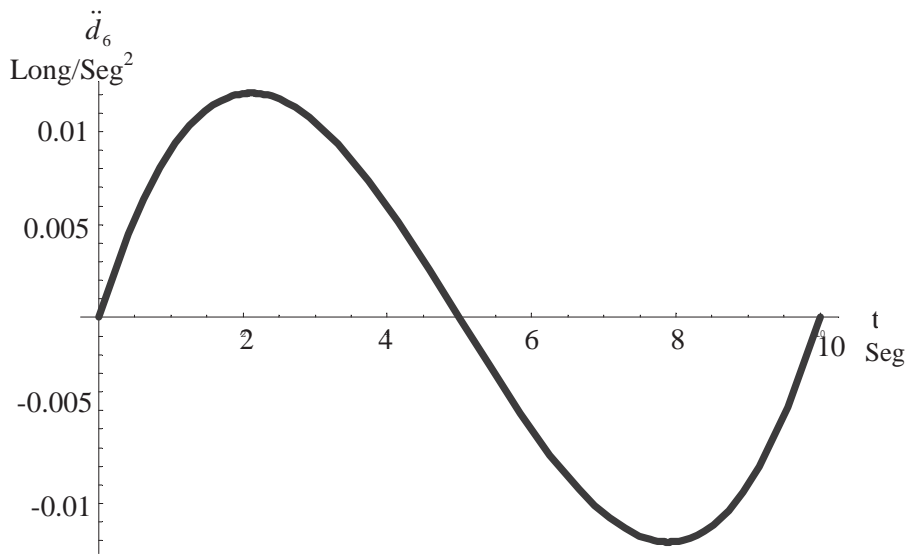
Comportamiento de la variable articular  $d_6$  correspondiente a la junta prismática del eslabonamiento de tornillo



Gráfica 4.4 Muestra la posición de  $d_6$  durante el transcurso del tiempo.



Gráfica 4.5 Muestra la velocidad de  $d_6$  durante el transcurso del tiempo.



Gráfica 4.6 Muestra la aceleración de  $d_6$  durante el transcurso del tiempo.

**Simulación para el Caso 2**

Comportamiento de las variables articulares del manipulador helicoidal RPSP, cuando  $L_b=5$  y  $H=1.5$  sobre el plano  $x_0, y_0$

Cabe hacer notar que para estas condiciones el eje del mecanismo de tornillo no coincide con el eje de tornillo de Rodrigues. Por lo tanto, están en movimiento los tres eslabonamientos del manipulador.

Tabla 4.4 Muestra los valores de las variables articulares en los tiempos  $t=0$  y  $t=10$  segundos.

Variable articular	para $t=0$ seg	para $t=10$ seg
$\theta_1$	0.696121 rad	0.340165 rad
$d_2$	8.22199 long	13.6012 long
$\theta_3$	5.43046 rad	5.0745 rad
$\theta_4$	1.71812 rad	1.71812 rad
$\theta_5$	2.8443 rad	0.053903 rad
$d_6$	8.17063 long	16.4068 long

En la tabla 4.4 se aprecia que la segunda articulación del eslabonamiento posicionador tiene tanto al inicio como al final de la ejecución de la tarea el valor de  $\theta_4 = 1.71812$  radianes. Esto se debe a que en todo momento existe paralelismo entre el eje del eslabonamiento de tornillo (orientación) y el eje del tornillo de Rodrigues.

A continuación se muestran algunas vistas de la historia del desempeño del manipulador, ejecutando la tarea señalada en la tabla 4.1 en un tiempo de 10 segundos, con veinte intervalos de 0.5 segundos. Para este caso en que no coinciden el eje del eslabonamiento de tornillo con el eje de giro del tornillo de Rodrigues

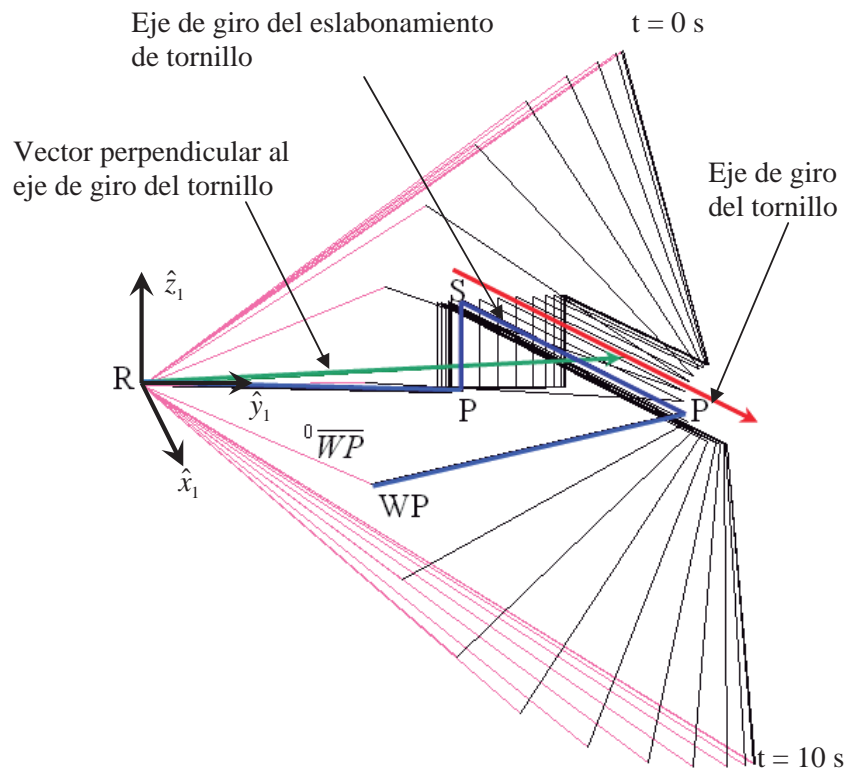


Figura 4.4 Perspectiva de desempeño del manipulador helicoidal cuando no son coincidentes el eje del eslabonamiento de tornillo con el eje de tornillo de Rodrigues.

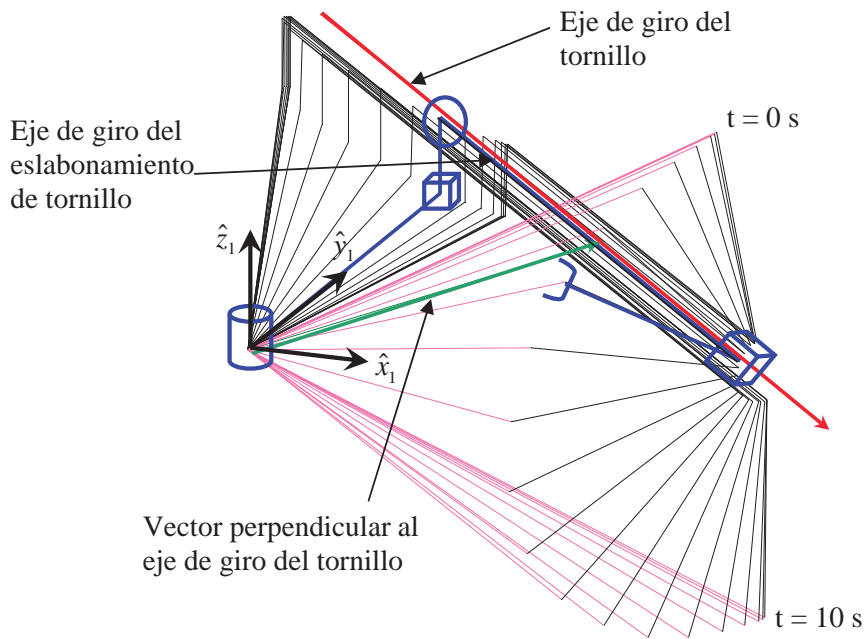


Figura 4.4 Otra perspectiva de desempeño del manipulador helicoidal para el caso 2.

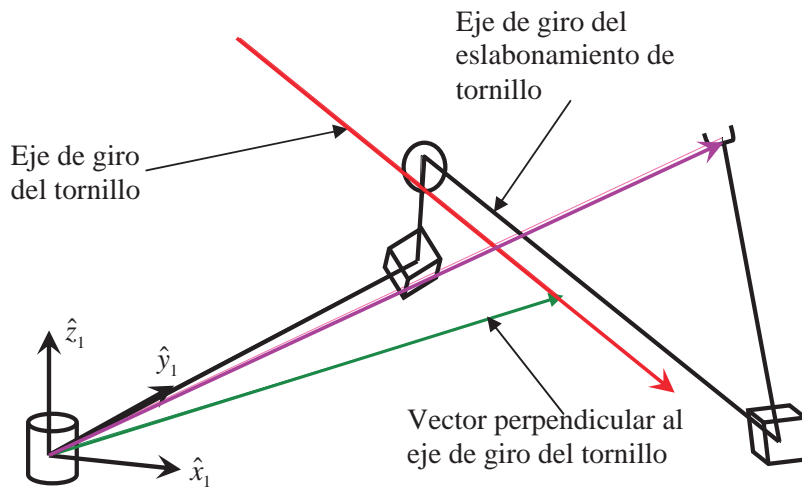


Figura 4.5 Ilustra el desfazamiento entre el eje del eslabonamiento de tornillo y el eje de tornillo de Rodrigues al inicio de la tarea.

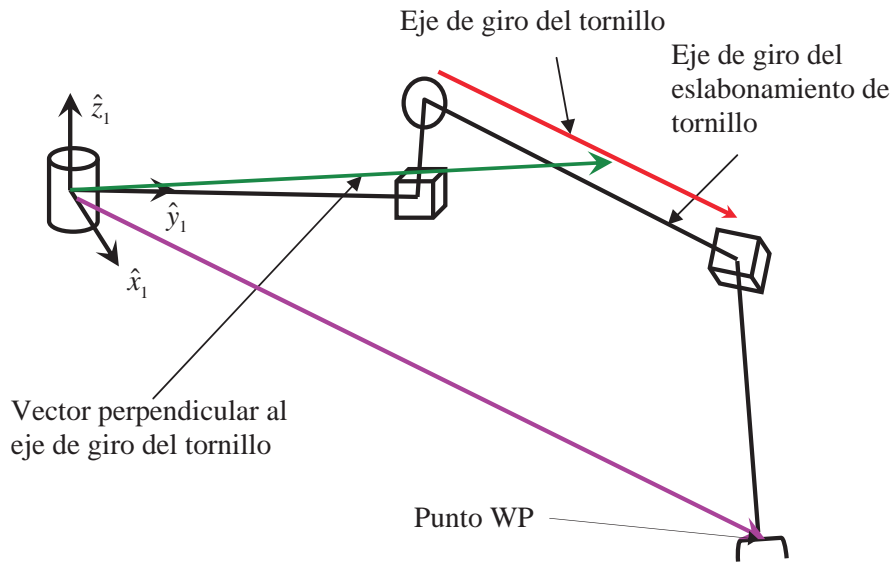
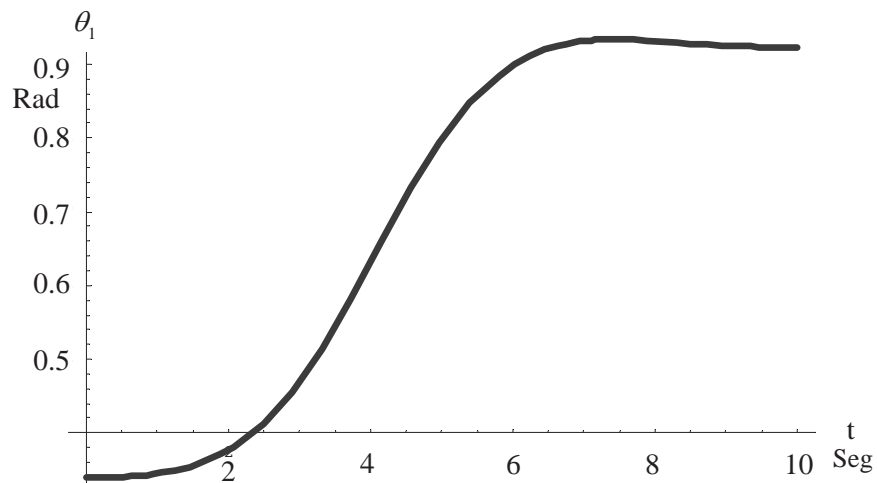
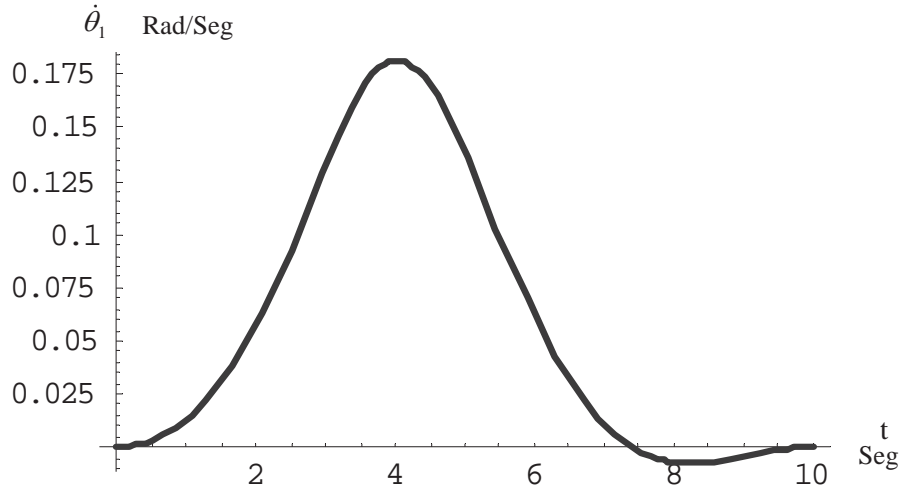


Figura 4.6 Ilustra el desfazamiento entre el eje del eslabonamiento de tornillo y el eje de tornillo de Rodrigues al final de la tarea.

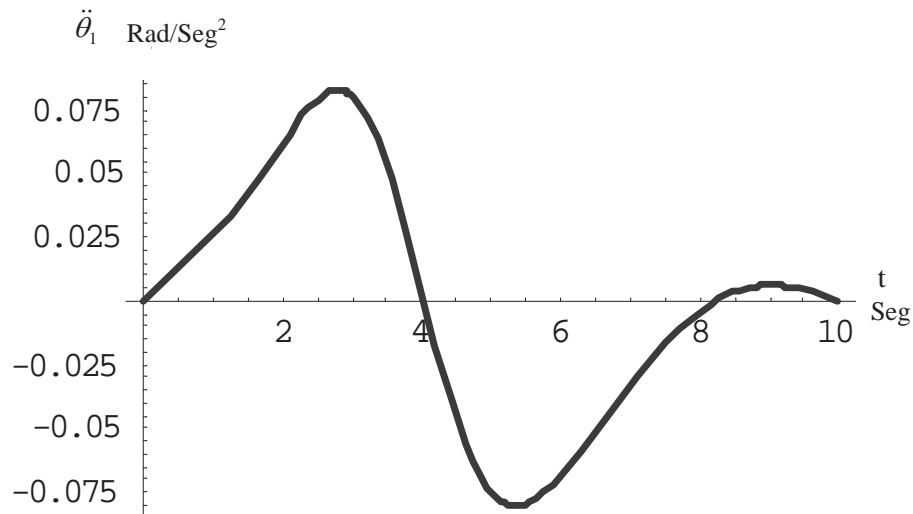
Comportamiento de la variable articular  $\theta_1$ .



Gráfica 4.7 Muestra la posición de  $\theta_1$  durante el transcurso del tiempo.

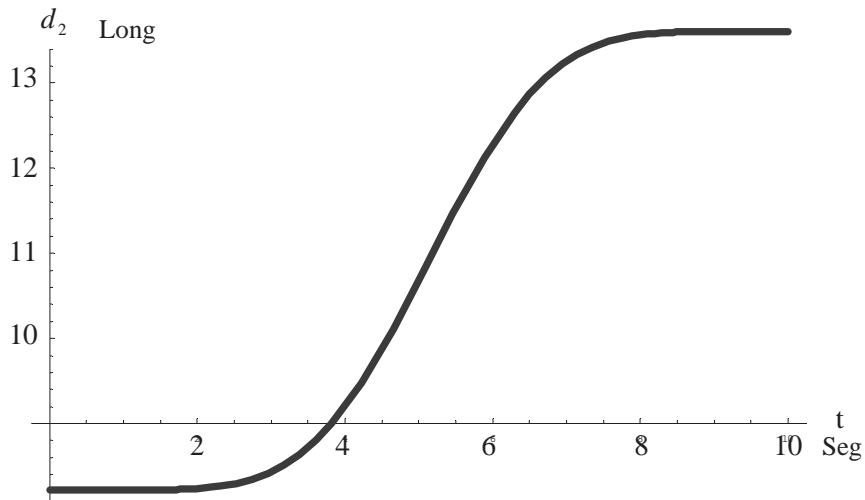


Gráfica 4.8 Muestra la velocidad de  $\theta_1$  durante el transcurso del tiempo.

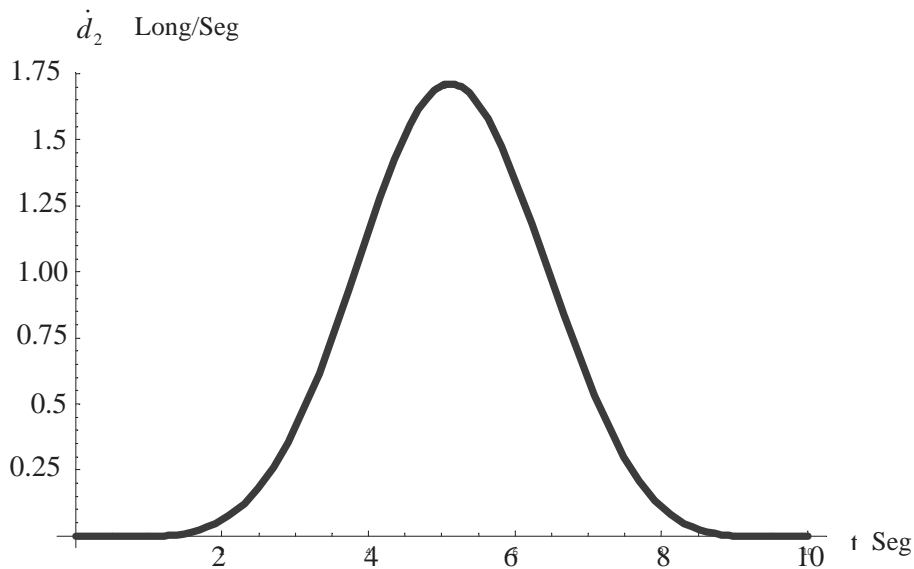


Gráfica 4.9 Muestra la aceleración de  $\theta_1$  durante el transcurso del tiempo.

Comportamiento de la variable articular  $d_2$  correspondiente a la junta prismática del eslabonamiento posicionador.

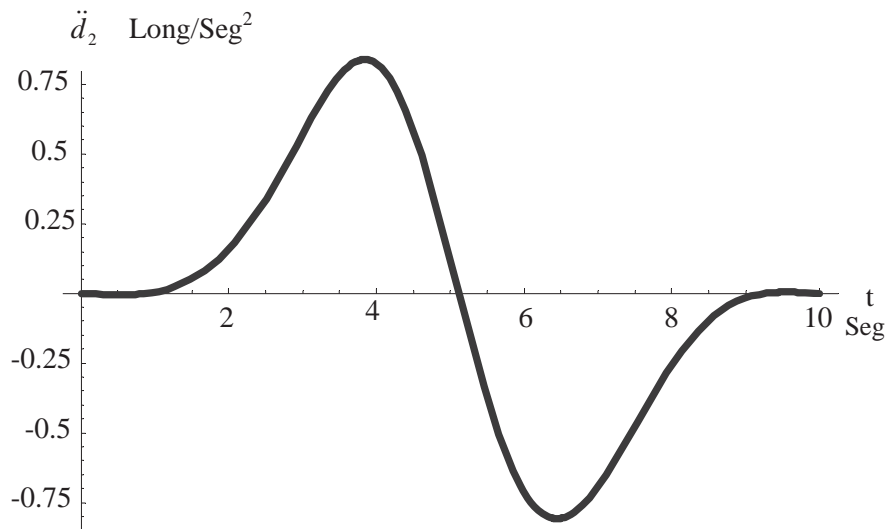


Gráfica 4.10 Muestra la posición de  $d_2$  durante el transcurso del tiempo.

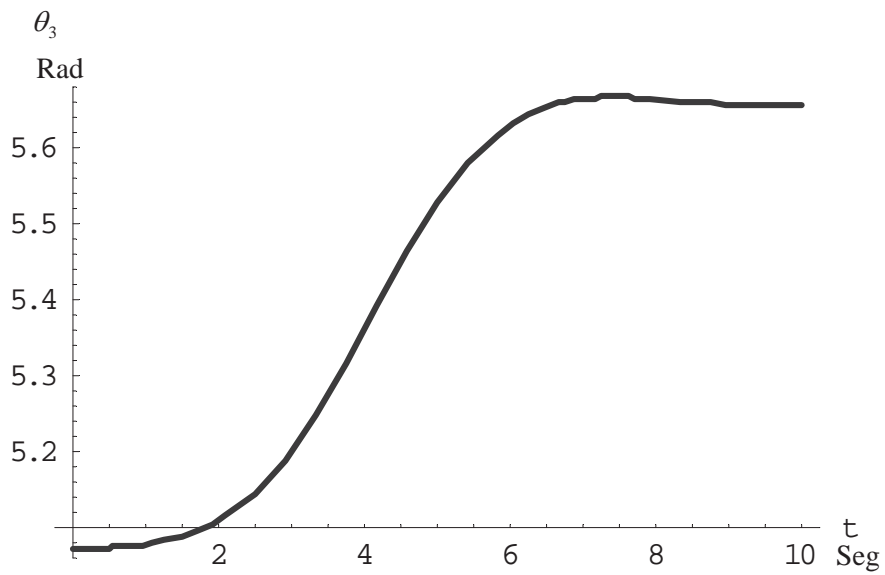


Gráfica 4.11 Muestra la velocidad de  $d_2$  durante el transcurso del tiempo.

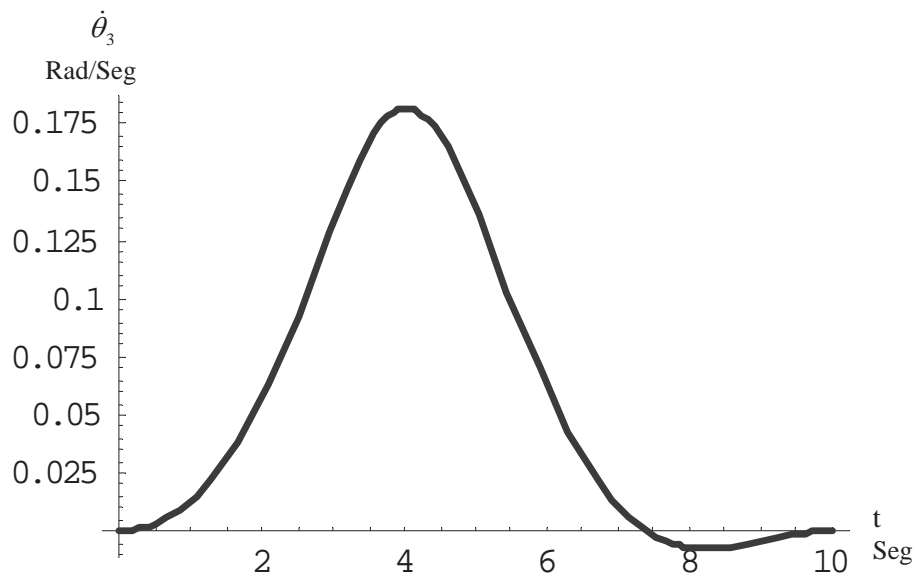




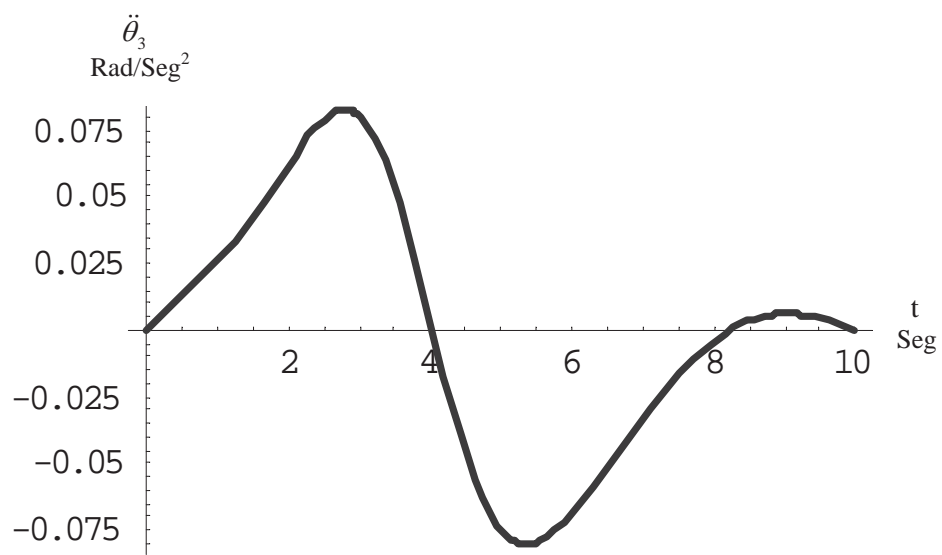
Gráfica 4.12 Muestra la aceleración de  $d_2$  durante el transcurso del tiempo.



Gráfica 4.13 Muestra la posición de  $\theta_3$  durante el transcurso del tiempo.



Gráfica 4.14 Muestra la velocidad de  $\theta_3$  durante el transcurso del tiempo.



Gráfica 4.15 Muestra la aceleración de  $\theta_3$  durante el transcurso del tiempo.

La figura 4.6 presenta dos posiciones diferentes del manipulador durante la ejecución de una tarea. Los ángulos de 90 grados son medidos desde el eje y1 al eje x2 y los ángulos de 22 grados son medidos desde las posiciones iniciales a las finales de los ángulos en análisis.

Debido al comportamiento señalado en la figura 4.6, las gráficas de velocidad y aceleración de  $\theta_1$  y de  $\theta_3$  son iguales y la gráfica correspondiente a su posición tan solo están desfasadas una de otra, pues sus valores iniciales si son diferentes.

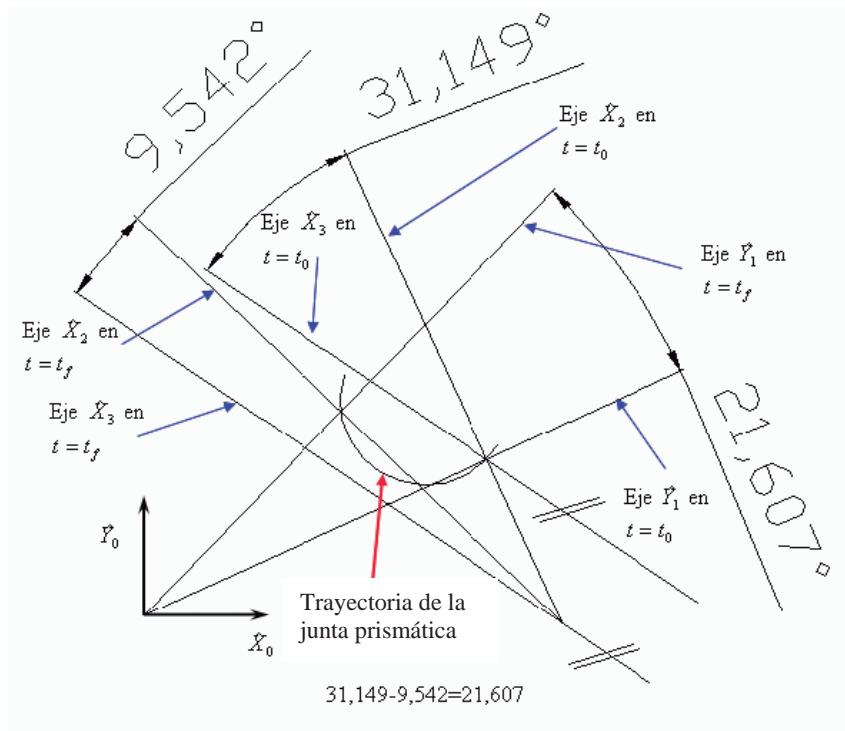
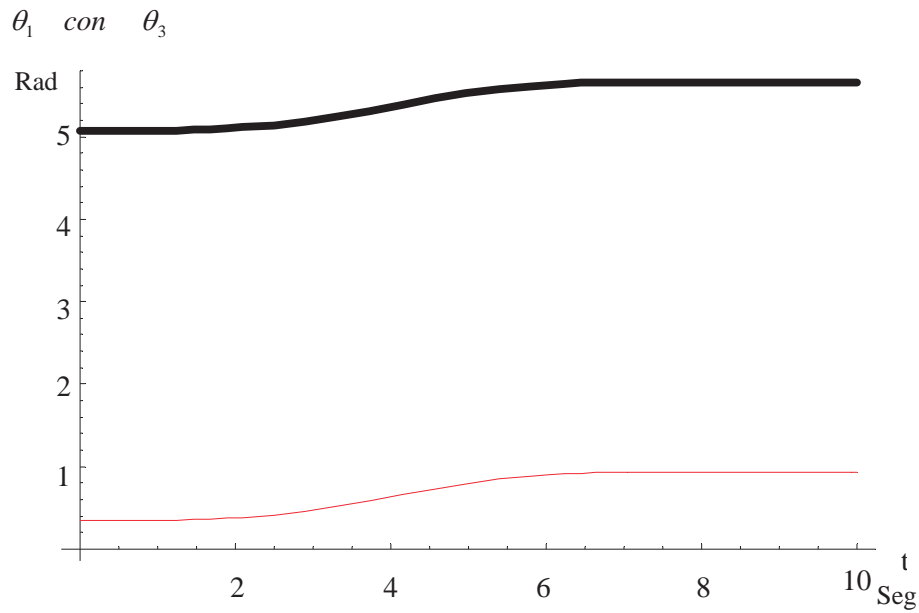


Figura 4.6 Análisis comparativo del incremento de los ángulos  $\theta_1$  y  $\theta_3$  de una posición inicial a una posición final.

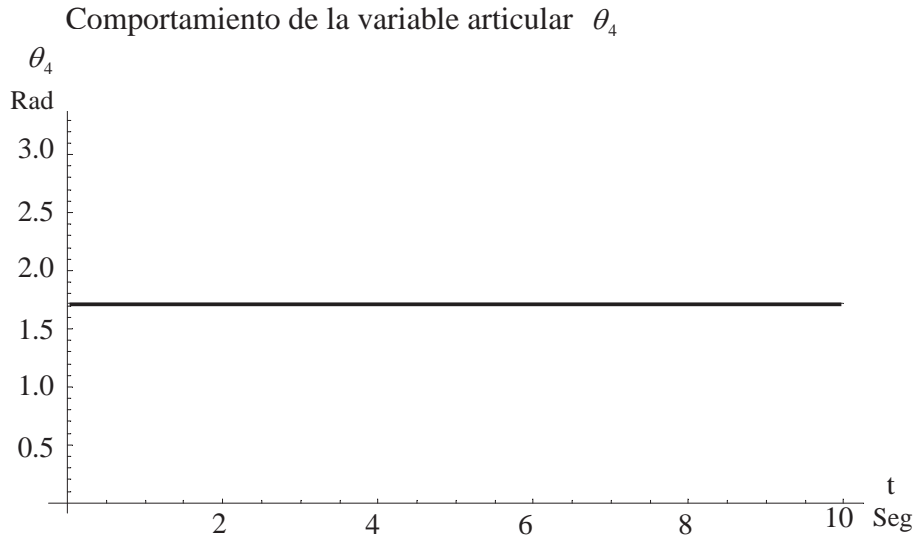
En la figura 1.1 se ilustra como la junta prismática correspondiente al eslabonamiento posicionador se desliza a lo largo de una barra fija a la junta rotacional del mismo eslabonamiento. El eje  $\hat{Y}_1$  es coincidente en todo momento con la barra antes mencionada y se encuentra perpendicular al eje  $\hat{X}_2$ , tal como se muestra en la figura 4.6. El ángulo  $\theta_1$  se define como el existente entre los ejes  $\hat{X}_0$  y  $\hat{X}_1$ , que es igual al ángulo que rota la junta rotacional del eslabonamiento posicionador. En la figura 2.15 se ilustra la posición que guarda  $\hat{X}_3$  con respecto a  $\hat{X}_2$ , además de ilustrar como la proyección del eje del mecanismo de tornillo cae sobre el eje  $\hat{X}_3$ , por ello las líneas que se muestran paralelas en la figura 4.6 además de representarnos al eje del mecanismo de tornillo también nos representa al eje  $\hat{X}_3$ .

El ángulo  $\theta_3$  se define como el existente entre los ejes  $\hat{X}_2$  y  $\hat{X}_3$  y durante la ejecución de la tarea la variación de  $\theta_1$  es igual a la variación de  $\theta_3$ . Esto, se ilustra en la figura 4.6 en donde se aprecia que:

1. Para un tiempo  $t = t_0$  los ejes  $\hat{X}_2$  y  $\hat{X}_3$  se encuentran a un ángulo de 31.149 grados.
2. Para un tiempo  $t = t_f$  los ejes  $\hat{X}_2$  y  $\hat{X}_3$  se encuentran a un ángulo de 9.542 grados.
3. Durante el intervalo de tiempo existente desde  $t = t_0$  a  $t = t_f$  el ángulo  $\theta_1$  y el ángulo  $\theta_3$  tienen la misma variación de 21.607 grados.

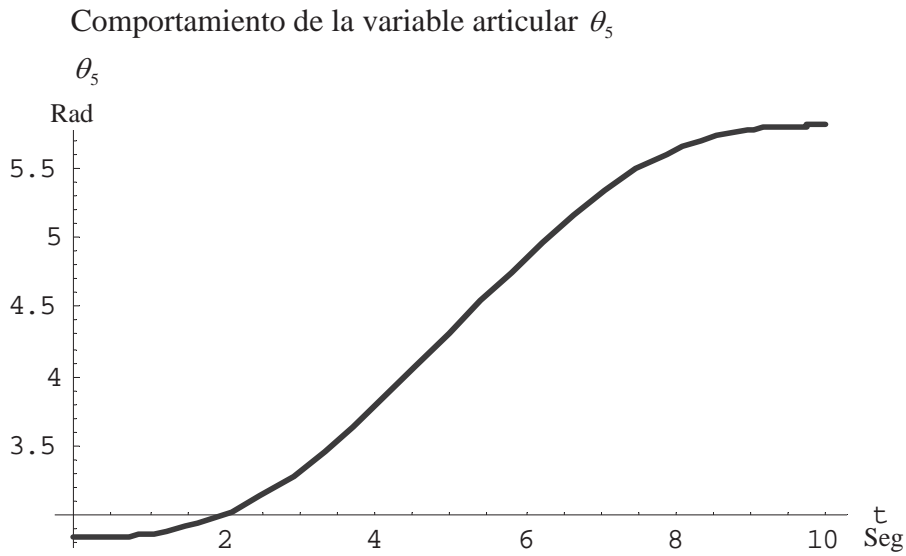


Gráfica 4.16 Comparación de la posición de  $\theta_1$  con respecto de  $\theta_3$ .

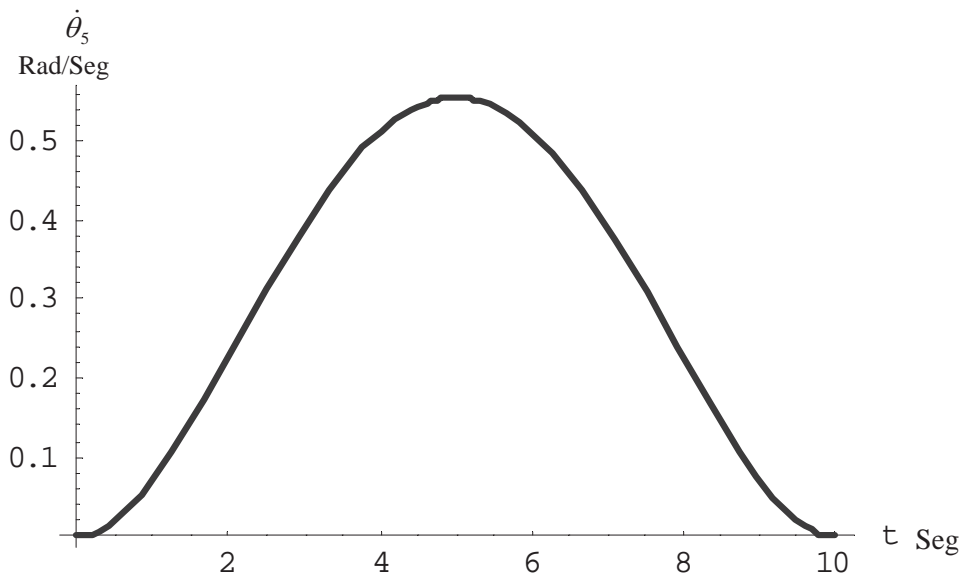


Gráfica 4.17 Comportamiento de la posición de  $\theta_4$  durante el transcurso del tiempo.

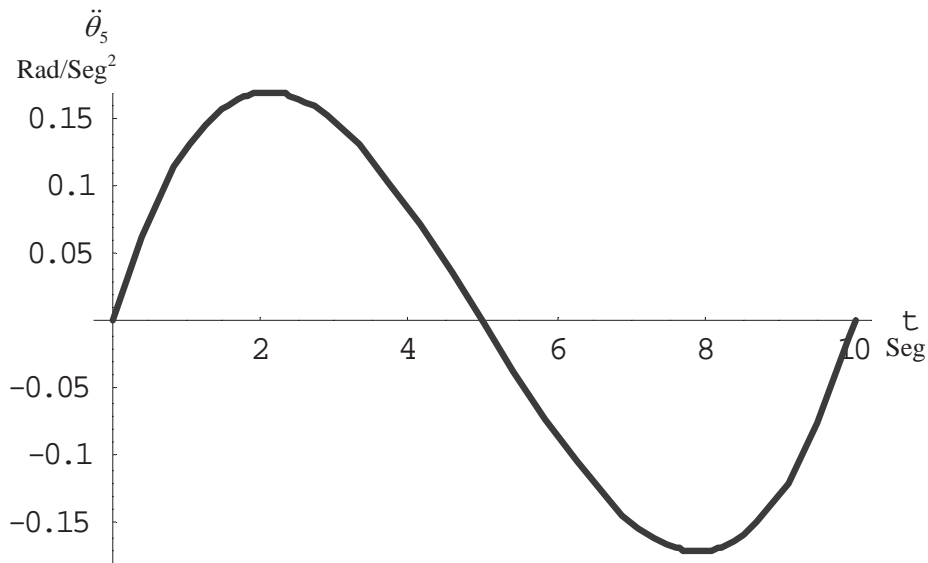
Como  $\theta_4$  se mantiene constante, su velocidad y su aceleración son inexistentes.



Gráfica 4.18 Comportamiento de la posición de  $\theta_5$  durante el transcurso del tiempo.

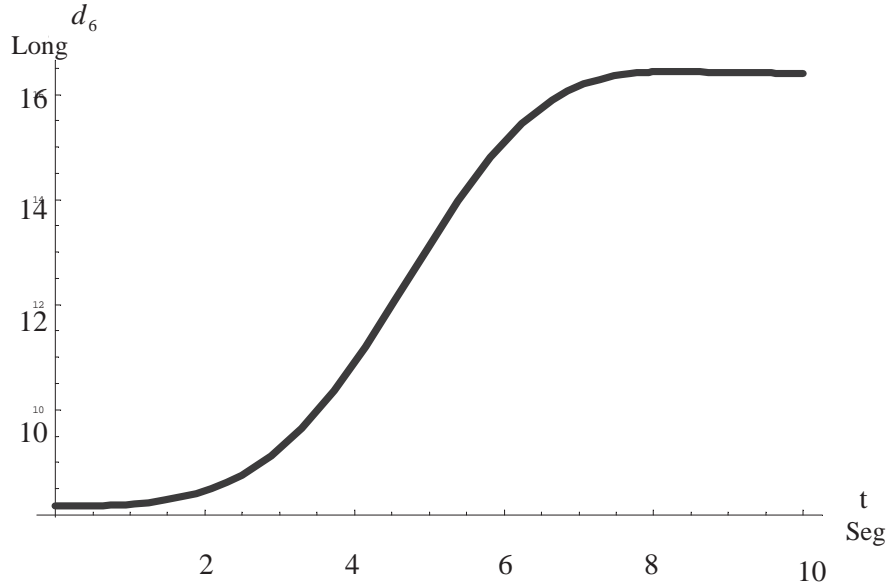


Gráfica 4.19 Comportamiento de la velocidad de  $\theta_5$  durante el transcurso del tiempo.

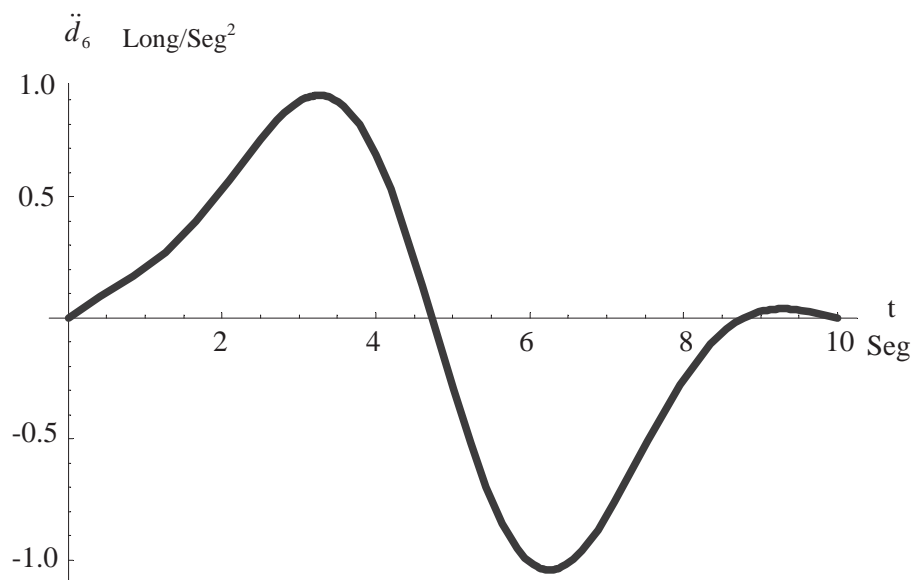
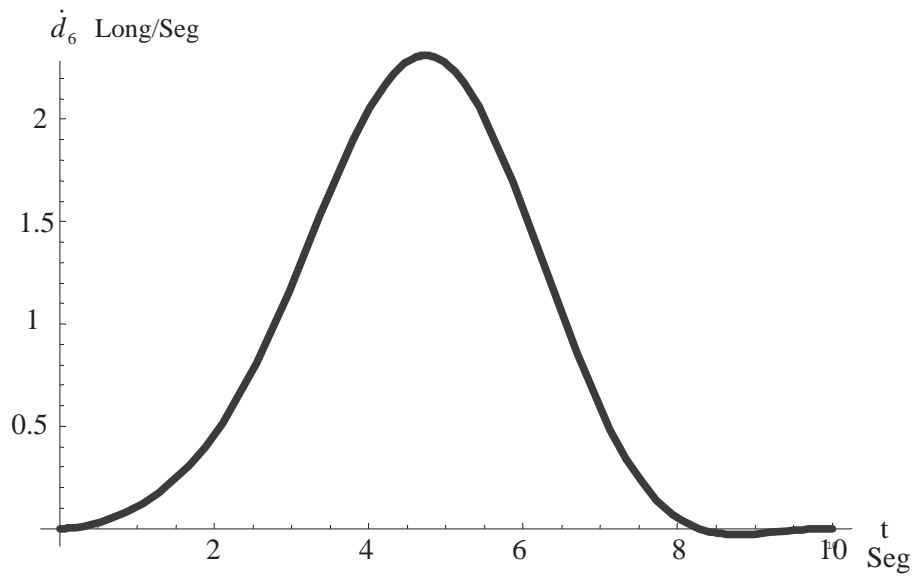


Gráfica 4.20 Comportamiento de la aceleración de  $\theta_5$  durante el transcurso del tiempo.

Comportamiento de la variable articular  $d_6$ .



Gráfica 4.21 Comportamiento de la posición de  $d_6$  durante el transcurso del tiempo





## **Conclusiones**

Considerando los resultados que arroja el presente trabajo, respecto a los objetivos principales, se puede afirmar que:

1. Se realizó con éxito la síntesis y el análisis de la cinemática directa e inversa del robot manipulador helicoidal RPSP de seis grados de libertad y en cuanto a las características planteadas se puede decir que:
  - a. El Robot Manipulador Helicoidal RPSP, cuyo algoritmo matemático emplea la formulación de Rodrigues para el desplazamiento general de un tornillo, posee la capacidad para transportar un objeto siguiendo una trayectoria helicoidal, a partir de tres puntos pertenecientes a la pieza de trabajo, no colineales, conocidos al inicio y esos tres puntos conocidos al final del desplazamiento, que determinan en todo momento la posición y orientación del objeto a transportar.
  - b. A diferencia del mecanismo de tornillo tradicional, el Robot Manipulador Helicoidal RPSP posee capacidad para adaptar su estructura mecánica a nuevas condiciones iniciales y/o finales que le sean planteadas.

Respecto de los objetivos secundarios podemos señalar lo siguiente:

1. Se empleó con éxito las ecuaciones generales de Rodrigues para el desplazamiento general de un tornillo en la cinemática inversa del Robot Manipulador Helicoidal RPSP.
2. Quedó demostrado que el manipulador RPSP puede desarrollar las tareas que ejecutan los actuales mecanismos de tornillos, (cuyo desempeño es rígido), y que además posee capacidad de posicionar y orientar al eslabonamiento de tornillo, si es que cambian las condiciones de posición y orientación del objeto a transportar.

Las ecuaciones obtenidas para cada una de las variables articulares se validaron mediante una simulación por computadora, mostrando la evolución durante el transcurso del tiempo para cada una de ellas. Para ello se utilizó un perfil de trayectoria de octavo grado, en el cual se hizo variar un parámetro en función del tiempo, desde 0 (cero) hasta 1 (uno), correspondientes a los tiempos inicial y final.

**Respecto a las hipótesis planteadas**

1. Un Robot Manipulador Helicoidal RPSP, basado en el Principio del Tornillo de Rodrigues, deberá ser capaz de transportar un objeto, desde una posición inicial a una posición final, definidas por tres puntos con respecto a un sistema hortonormal. Sin embargo, la trayectoria seguida, que no es el objetivo que se persigue, será del tipo helicoidal por el principio del desplazamiento general del tornillo de Rodrigues.

Conclusión sobre esta hipótesis: es verdadera.

2. El Robot RPSP, deberá ser capaz de posicionar y orientar al eslabonamiento de tornillo si las condiciones de la tarea cambian, por tal motivo, el Robot contará con tres eslabonamientos.

Conclusión sobre esta hipótesis: es verdadera.

3. El Robot RPSP, deberá proporcionar, mediante la cinemática analizada en el capítulo 2, los parámetros del desplazamiento general del tornillo de Rodrigues de acuerdo a las necesidades de manipulación.

Conclusión sobre esta hipótesis: es verdadera.

### 5.1 Trabajo Futuro

Como ya se ha mencionado, la capacidad de los robots para adaptarse a los distintos procesos de las líneas de producción y el abatimiento de costos en la generación de productos, conduce obligatoriamente al estudio de trayectorias geométricas no helicoidales ejecutadas por el robot manipulador RPSP.

Un trabajo futuro sobre planeación de trayectorias en relación con el manipulador RPSP, llevaría a demostrar una gran versatilidad y adaptación a condiciones de trabajo insospechadas.

Cabe sospechar que estando definida la trayectoria a seguir, no helicoidal, el Robot Manipulador RPSP sea capaz de encontrar entre puntos adyacentes, conocidos, el conjunto de parámetros de tornillo correspondientes a la trayectoria entre dichos puntos, así como también la correspondiente transformación del tornillo que le provea de la información necesaria para transformar al vector de posición durante el transcurso del tiempo.

**Bibliografía.**

- [1] Bottema, O. And Roth, B. Theoretical Kinematics. 1990. Dover Publications.
  
- [2] Juárez Campos, Ignacio; García Lara, Oracio y Juárez Campos Beatriz. The Inverse Kinematics of the RPSP Screw-Based Robot Manipulator. The 4<sup>th</sup> International Conference on the Advanced Mechatronics (ICAM 04). October 3-5, 2004. Asahikawa, Japan. Pp 143-148
  
- [3] Juárez Campos, Ignacio y Juárez Campos Beatriz. Síntesis Evolutiva de un Mecanismo de Tornillo. Noveno Congreso de la Sociedad Mexicana de Ingenieros Mecánicos (SOMIM), Instituto Tecnológico de Veracruz, Veracruz, Ver, México. Septiembre 2-6 de 2003.
  
- [4] Ricardo Javier Peón Escalante. Análisis dinámico de un manipulador helicoidal PPSP. Tesis de Maestría, Fac. de Ingeniería, UNAM. Diciembre 2004.
  
- [5] Juárez Campos, Ignacio. *Artificial Life-based Search Technique on the Solution of Singular Configuration Concerning Screw Parameters in Helicoidal Robots*. Proceedings of the 10th International Symposium on Artificial Life and Robotics (AROB 10th 2005). Oita University, Air Force Office Research. Asian Office of Aerospace Research and Development (AFOSR/AOARD), Beppu, Oita, Japan. February 4-6, 2005.

- [6] Juárez Campos, Ignacio. “Sobre las Regiones Geométricas Articulares y su Aplicación en el Mejoramiento del Desempeño de un Manipulador Mediante Estrategias Evolutivas”. Tesis de Doctorado, División de Estudios de Posgrado, UNAM, Agosto 2003. 360 p.
  
- [7] Juárez Campos, Ignacio; Juárez Campos, Beatriz; García Lara, Oracio. *The Redundant RPSPP Manipulator*. 17th IMACS World Congress, Scientific Computation, Applied Mathematics and Simulation. Paris, France. July 11-15, 2005.
  
- [8] Spong, Mark W. y Vidyasar M. Robot Dynamics and Control. 1989. John Wiley and Sons.
  
- [9] Aníbal Ollero Baturone. Robótica manipuladores y robots móviles. 2001 marcombo.
  
- [10] Fu, K. S., González, R. C. y Lee, C.S.G. Robótica: Control, detección, visión e inteligencia. 1988. McGraw-Hill.
  
- [11] Craig, John J. Introduction to Robotics Mechanics and Control. 1986. Addison-Wesley.
  
- [12] Larson Hostetler Edwards. “Cálculo” Volumen 1 Sexta edición Ed. Mc. Graw Hill

- [13] Angeles, Jorge. Fundamentals of Robotic Mechanical System. 1997  
Springer