



UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN NICOLÁS DE HIDALGO

FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA

ANÁLISIS DE CARGAS DINÁMICAS EN REDUCTORES CICLOIDALES DE BAJA Y MEDIANA POTENCIA.

Tesis presentada a la Facultad de Ingeniería Mecánica
para obtener el grado de:

Maestro en Ciencias en Ingeniería Mecánica

Presenta:

Ing. José Alejandro Chávez Cortés

Asesor de tesis:

Dr. Juan Felipe Soriano Peña

Morelia, Mich., febrero del 2018



ANÁLISIS DE CARGAS DINÁMICAS EN REDUCTORES CICLOIDALES DE BAJA Y MEDIANA POTENCIA.

Maestría en Ciencias en Ingeniería Mecánica

Facultad de Ingeniería Mecánica

U. M. S. N. H.

Agradecimientos

Este trabajo es dedicado y agradecido a las siguientes instituciones, familiares y amigos que colaboraron para que pudiera ser realizada esta tesis y obtener el grado de Maestro en Ciencias en Ingeniería Mecánica:

- A la Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo por el apoyo económico mostrado durante la investigación, sobre todo a la Facultad de Ingeniería Mecánica y a los profesores que imparten en la institución mi más grande agradecimiento, por guiarme por el camino correcto y llegar hasta donde estoy ahora.
- A mi asesor mi más grande agradecimiento, por su guía, ayuda y colaboración importante en la elaboración del presente trabajo tanto en la parte académica como económica.
- A mi familia, sobre todo a mis padres y hermanos, mi más grande agradecimiento por guiarme a lo largo de mi vida, darme lo mejor, apoyarme en todo momento tanto emocional como económicamente y enseñarme que puedo llegar hasta donde me lo proponga, siempre utilizado la vía correcta.
- A mi mesa de sinodales, gracias por apoyarme, mostrándome los detalles y correcciones que realice en este trabajo de investigación para mejorarlo.
- A mis amigos en general, gracias por el apoyo moral, por su amistad y ayuda durante este tiempo.

Resumen

Los reductores de velocidad tienen un papel muy importante cuando es necesario transmitir movimiento rotatorio de un punto a otro, es decir, que se requiere este movimiento rotativo con una velocidad, posición y par de torsión específico, además, de tener una buena precisión al momento de transferir el movimiento.

Existen diferentes tipos de reductores de velocidad, los cuales tienen diferentes características técnicas, que se adaptan a los diferentes tipos de entorno que se tienen en la industria; pero cuando se tiene la necesidad de reducir la velocidad de salida, para ser utilizada en sistemas con alta precisión de movimiento, uno de los reductores de velocidad que cumple con este requisito, además de su tamaño compacto, funcionamiento silencioso, equilibrio dinámico, alta capacidad de carga y alta eficiencia es el reductor cicloidal.

Este tipo de reductores de velocidad constan básicamente, de un engrane con perfil cicloidal accionado por un eje excéntrico que rueda dentro de un anillo con rodillos, de tal manera que el engrane gira a una velocidad reducida en sentido opuesto al eje excéntrico.

Uno de los desafíos que se presentan es debido a que todavía no se tiene un conocimiento exacto de cómo se transfieren las cargas que se generan dentro de las partes móviles de este reductor. Actualmente se cuenta con estudios particulares, pero no se tiene una metodología establecida para el análisis de las cargas dinámicas dentro de estos mecanismos.

El presente trabajo, muestra una metodología que ayuda a determinar las cargas dinámicas internas del reductor y la distribución de fuerzas que actúan en él, además, del estudio que relaciona estas cargas y los parámetros geométricos seleccionados, mostrando finalmente la influencia de estas cargas en el diseño y esfuerzos de contacto presentes en el reductor cicloidal en cualquier momento de su funcionamiento. Se presentan los parámetros geométricos más significativos de un reductor cicloidal y la cinemática, además del diseño de las piezas que lo componen.

Palabras clave: reductor cicloidal, fuerzas de contacto, esfuerzos de contacto, SolidWorks, engrane cicloidal.

Abstract

The speed reducers have a very important role when is necessary to transmit rotary movement from one point to another, it means, that this rotary movement is required with a specific speed, position and torque specific, in addition, to have a good precision at the moment to transfer the movement.

There are different types of speed reducers, which have different technical characteristics, which adapt to the different types of environment in the industry; but when there is a need to reduce the output speed, to be use in systems with high precision of movement, one of the speed reducers that satisfy this requirement, beside its compact size, silent operation, dynamic balance, high capacity load and high efficiency is the cycloidal reducer.

This type of speed reducers basically consists of a gear with a cycloidal profile driven by an eccentric shaft that rolls inside a ring with rollers, in such a way that the gear rotates at a reduced speed in the opposite direction to the eccentric axis.

One of the challenges that arise is that we still do not have an exact knowledge of how the loads that are generated within the moving parts of this reducer are transferred. Currently there are private studies, but there is no established methodology for analyzing the dynamic loads within these mechanisms.

The present work shows a methodology that helps to determine the internal dynamic loads of the reducer and the distribution of forces that act in it, in addition, of the study that relates these loads and the selected geometrical parameters, finally showing the influence of these loads in the design and contact efforts present in the cycloidal reducer at any time of its operation. The most significant geometrical parameters of a cycloidal reducer and the kinematics are presented, as well as the design of the parts that compose it.

Keywords: cycloidal reducer, contact forces, contact stress, SolidWorks, cycloidal gear.

Contenido

Agradecimientos	i
Resumen	ii
Abstract	iii
Índice de Figuras	vi
Índice de Tablas	viii
Glosario	ix
Nomenclatura	xi
Capítulo 1. Introducción.	1
1.1 Planteamiento del problema.....	2
1.2 Justificación	2
1.3 Hipótesis	3
1.4 Objetivos.....	3
1.4.1 Objetivo General	3
1.4.2 Objetivos Específicos	3
Capítulo 2. Antecedentes	4
2.1 Introducción.....	4
2.1.1 Aplicaciones	5
2.1.2 Ventajas	6
2.1.3 Desventajas	6
2.2 Antecedentes.....	7
Capítulo 3. Metodología de diseño.	9
3.1 Círculos primitivos y sistema de coordenadas.....	9
3.2 Ecuación de engranaje	10
3.3 Perfil del engrane cicloidal	11
3.4 Parámetros geométricos fundamentales.....	13
3.5 Diseño de los orificios y el espesor del disco cicloidal	15
3.6 Determinación de la posición de contacto	18
3.6.1 Relaciones cinemáticas.....	18
3.6.2 Centro instantáneo de rotación	18
3.6.3 Ángulo de presión.....	20
3.6.4 Ángulo de contacto.....	21
3.7 Cargas de contacto	23
3.8 Esfuerzos de contacto	24

3.8.1	Curvatura del engrane cicloidal.....	24
3.8.2	Ecuaciones de esfuerzo.....	25
3.9	Diagrama de flujo para programación	27
Capítulo 4. Análisis de resultados.		28
4.1	Parametrización en SolidWorks.....	28
4.1.1	Datos de diseño.....	28
	Parametrización del engrane cicloidal	28
4.2	Simulación de movimiento	31
4.3	Posición de las fuerzas de contacto.....	32
4.4	Resultados de fuerzas y esfuerzos de contacto	36
4.5	Manufactura de un modelo de reductor cicloidal	49
Capítulo 5. Conclusiones y recomendaciones		51
5.1	Conclusiones.....	51
5.2	Recomendaciones y/o trabajos futuros	51
Referencias		52
Anexos.....		54

Índice de Figuras

Figura 2.1. Partes principales del reductor cicloidal.	5
Figura 2.2. Aplicaciones más representativas del reductor cicloidal, (F.J. Rubio, 2010).	5
Figura 3. 1. Círculos primitivos y sistema de coordenadas, (Chen, Fang, Li, & Wang, 2008).	9
Figura 3. 2. Diámetros de los rodillos y orificios del engrane cicloidal.....	15
Figura 3. 3. Fuerza $F_s max$ actuando en los rodillos de salida.	15
Figura 3. 4. Espesor del engrane cicloidal.....	16
Figura 3. 5. Movimiento del engrane cicloidal, rotación y traslación.....	18
Figura 3. 6. Centro instantáneo de rotación: (a) definición (Hibbeler, 2010); (b) relaciones geométricas del reductor.	19
Figura 3. 7. Líneas de contacto y círculo de centro instantáneo de rotación.....	20
Figura 3. 8. Angulo de presión y relaciones geométricas.....	21
Figura 3. 9. Ángulo y vector de contacto.	22
Figura 3. 10. Fuerza de contacto.	23
Figura 3. 11. Contacto entre dos cilindros, (Richard G. Budynas, 2015).	25
Figura 3. 12. Diagrama de flujo para desarrollar la metodología de diseño.	27
Figura 4. 1. Parametrización de la curva cicloide.	29
Figura 4. 2. Renderizado del engrane cicloidal (a).....	29
Figura 4. 3. Serie de engranes cicloidales: (a) $Z_g=11$; (b) $Z_g=18$; (c) $Z_g=39$	30
Figura 4. 4. Reductor cicloidal: (a) vista explosionada; (b) ensamble.	31
Figura 4. 5. Posiciones obtenidas por la simulación de movimiento.	31
Figura 4. 6. Plano CAD 2D mostrando los contactos del engrane cicloidal.	32
Figura 4. 7. Plano CAD del reductor (a).	33
Figura 4. 8. Plano CAD del reductor (b)	33
Figura 4. 9. Plano CAD del reductor (c).	34
Figura 4. 10. Plano CAD del reductor (d).	35
Figura 4. 11. Gráfica de distribución de fuerzas de contacto, reductor (a).	36
Figura 4. 12. Gráfica de distribución de fuerzas de contacto forma radial, reductor (a).	37

Figura 4. 13. Gráfica de distribución de esfuerzo cortante máximo, reductor (a).....	38
Figura 4. 14. Gráfica de distribución de esfuerzo cortante máximo forma radial, reductor (a).....	38
Figura 4. 15. Gráfica de distribución de esfuerzo normal en eje X, reductor (a).	39
Figura 4. 16. Gráfica de distribución de esfuerzo normal en eje X forma radial, reductor (a).....	39
Figura 4. 17. Gráfica de distribución de esfuerzo normal en eje Y, reductor (a).	40
Figura 4. 18. Gráfica de distribución de esfuerzo normal en eje Y forma radial, reductor (a).....	40
Figura 4. 19. Gráfica de distribución de esfuerzo normal en eje Z, reductor (a).	41
Figura 4. 20. Gráfica de distribución de esfuerzo normal en eje Z forma radial, reductor (a).....	41
Figura 4. 21. Gráfica de distribución de fuerzas de contacto, reductor (b).	42
Figura 4. 22. Gráfica de distribución de fuerzas de contacto forma radial, reductor (b).	43
Figura 4. 23. Gráfica de distribución de esfuerzo cortante máximo, reductor (b).	44
Figura 4. 24. Gráfica de distribución de esfuerzo cortante máximo forma radial, reductor (b).	44
Figura 4. 25. Gráfica de distribución de esfuerzo normal en eje X, reductor (b).....	45
Figura 4. 26. Gráfica de distribución de esfuerzo normal en eje X forma radial, reductor (b).	45
Figura 4. 27. Gráfica de distribución de esfuerzo normal en eje Y, reductor (b).....	46
Figura 4. 28. Gráfica de distribución de esfuerzo normal en eje Y forma radial, reductor (b).	46
Figura 4. 29. Gráfica de distribución de esfuerzo normal en eje Z, reductor (b).	47
Figura 4. 30. Gráfica de distribución de esfuerzo normal en eje Z forma radial, reductor (b).	47
Figura 4. 31. Manufactura de familia de engranes cicloidales parametrizados.....	49
Figura 4. 32. Modelado de reductor cicloidal	49
Figura 4. 33. Piezas manufacturadas de reductor cicloidal	50
Figura 4. 34. Modelo de reductor cicloidal final	50

Índice de Tablas

Tabla 3. 1. Parámetros geométricos fundamentales del engrane cicloidal y la rueda rodillo.	14
Tabla 4. 1. Datos utilizados para la parametrización de diferentes reductores cicloidales.	28
Tabla 4. 2. Resultados obtenidos de la parametrización del engrane cicloidal.	30
Tabla 4. 3. Ejemplos de la determinación de la posición de contacto.	32
Tabla 4. 4. Resultados para el reductor (a).	32
Tabla 4. 5. Resultados para el reductor (b).	33
Tabla 4. 6. Resultados para el reductor (c).	34
Tabla 4. 7. Resultados para el reductor (d).	35
Tabla 4. 8. Datos de diseño para 2 reductores diferentes.	36

Glosario

Adendum	Distancia medida desde el círculo primitivo del engrane hasta la cabeza del mismo.
Ángulo de presión	Ángulo de desviación en un contacto entre dos sólidos, tal como el que se da en un mecanismo de leva o de engranaje. Equivale al ángulo entre la dirección de la fuerza de contacto (normal común en el caso sin rozamiento) y la dirección de la velocidad en el sólido conducido.
Centro instantáneo de rotación	Punto del cuerpo o de prolongación en el que la velocidad instantánea del cuerpo es nula.
Cicloide	curva descrita por un punto de la circunferencia, cuando esta rueda sin resbalar sobre una recta.
Cinemática	Parte de la mecánica que trata del movimiento en sus condiciones de espacio y tiempo, sin tener en cuenta las causas que lo producen.
Círculo Primitivo	Círculo según la cual se realiza la tangencia teórica del engranaje a lo largo de la cual engranan los dientes.
Curvatura	cantidad por la cual un objeto geométrico dentro de un espacio euclídeo se desvía de ser plano, o lineal.
Engranaje	Par de ruedas que disponen de unos elementos salientes denominados “dientes”, que encajan entre sí, transmitiendo el movimiento circular.
Engrane	Mecanismo utilizado para transmitir potencia mecánica de un elemento a otro, mediante movimientos giratorios o alternativos.
Epicycloide	Curva generada por la trayectoria de un punto perteneciente a una circunferencia (generatriz) que rueda, sin deslizamiento, por el exterior de otra circunferencia (directriz).
Esfuerzo	Resistencia interna que ofrece un área (sección) del material del que este hecho, al haberle aplicado una fuerza externa.

Hipocicloide	Trayectoria descrita por un punto situado sobre una circunferencia generatriz que rueda sin deslizar por el interior de otra circunferencia directriz, sin deslizamiento.
Modulo	Característica de magnitud que se define como la relación entre la medida del diámetro primitivo expresado en milímetros y el número de dientes.
Módulo de Young	Parámetro que caracteriza el comportamiento de un material elástico, según la dirección en la que se aplica una fuerza.
Parametrización	Permite representar una curva o superficie en el plano o en el espacio, mediante valores que recorren un intervalo de números reales, mediante una variable, llamada parámetro, considerando cada coordenada de un punto como una función dependiente del parámetro.
Paso	Longitud de la circunferencia primitiva correspondiente a un diente y un hueco consecutivos.
Precisión	Capacidad de un instrumento o equipo de dar el mismo resultado en mediciones diferentes realizadas en las mismas condiciones o de dar el resultado deseado con exactitud.
Relación de Poisson	Constante elástica que proporciona una medida del estrechamiento de sección de un prisma de material elástico lineal e isótropo cuando se estira longitudinalmente y se adelgaza en las direcciones perpendiculares a la de estiramiento.
Vector	Magnitud física definida en un sistema de referencia que se caracteriza por tener magnitud, dirección y sentido.

Nomenclatura

Símbolo	Descripción
R_z	Radio del círculo de distribución de los dientes (rodillos).
r_z	Radio del diente (rodillo).
Z_b	Número de dientes de la rueda de rodillos.
Z_g	Número de dientes del engrane cicloidal.
e	Excentricidad de la leva del eje de entrada.
θ_a	Rotación del engrane cicloidal.
θ_b	Rotación de la rueda de rodillos.
$\Sigma^{(1)}$	Perfil del rodillo.
θ	Ángulo paramétrico del rodillo.
n_1	Normal del perfil del rodillo
v_1	Velocidad relativa de los puntos conjugados entre el rodillo y el engrane cicloidal.
λ	Coefficiente cinemático.
i_{gb}^H	Razón entre el giro del engrane cicloidal y la rueda de rodillos.
$\Sigma^{(2)}$	Perfil del engrane cicloidal.
M_{21}	Matriz de transformación de $O_b x_{1b} y_{1b}$ a $O_g x_{2a} y_{2a}$
φ	Ángulo paramétrico del engrane cicloidal.
P_{tb}	Paso de la rueda de rodillos.
r_b	Radio del círculo primitivo de la rueda de rodillos.
P_{tg}	Paso del engrane cicloidal.
m	Módulo.
φ_0	Ángulo entre el eje de simetría y el punto de partida de un diente cicloidal.
φ_a	Ángulo del adendum

rc	Relación de contacto.
r_g	Radio del círculo primitivo del engrane cicloidal.
d'_p	Diámetro del eje de los rodillos de salida.
d_p	Diámetro de los bujes de los rodillos de salida.
d_w	Diámetro de los orificios del engrane cicloidal.
$F_{s\ max}$	Fuerza máxima actuando en los rodillos de salida.
T_s	Torque de salida.
Z_w	Número de orificios del engrane cicloidal.
r_w	Radio de distribución de los orificios del engrane cicloidal.
σ_F	Máximo esfuerzo de flexión en un rodillo.
L	Palanca del momento de flexión.
W	Módulo de sección en un rodillo.
B	Espesor del engrane cicloidal.
σ_b	Esfuerzo último a la tensión.
th_p	Espesor del buje de salida.
ϕ_1	Ángulo de rotación del eje de entrada.
ϕ_2	Ángulo de rotación del engrane cicloidal.
r_t	Relación de transmisión.
CI_g	Centro instantáneo de rotación medido desde el origen del engrane cicloidal.
CI_b	Centro instantáneo de rotación medido desde el origen de la rueda de rodillos.
α	Ángulo de presión
d_i	Distancia que une el centro instantáneo de rotación y el centro del rodillo.
i	i -ésimo rodillo deseado para el cálculo.
φ_c	Ángulo de contacto.
d_{cd}	Vector de posición de contacto.

T_e	Torque de entrada
F_i	Fuerza normal en el i-ésimo rodillo.
δ_i	Ángulo entre el eje y_b y el vector d_{cd}
f_c	Factor de carga.
ρ	Curvatura del engrane cicloidal
R	Radio de curvatura del engrane cicloidal.
b	Semiancho del área de contacto.
ν	Relación de Poisson.
E	Módulo de Young.
d_1	Diámetro del perfil del rodillo
d_2	Diámetro del perfil del engrane cicloidal.
P_{max}	Presión máxima.
τ_{max}	Esfuerzo cortante máximo.
σ	Esfuerzo normal.
z	Profundidad del contacto.

Capítulo 1. Introducción.

Actualmente se tienen trabajos de investigación acerca de los reductores cicloidales, los cuales incluyen la geometría, la superficie del diente conjugado, características de engranaje, análisis estático, entre otros. Sin embargo, no se cuenta con una metodología clara y completa sobre el diseño de un reductor cicloidal, así como análisis de cargas dinámicas y relaciones de estas con sus características geométricas más significativas.

La presente tesis muestra un estudio completo de los reductores cicloidales, desde la construcción de la geometría hasta el análisis de las cargas de contacto que se generan dentro de él, lo cual deja un aporte al estudio de este mecanismo, obteniendo relaciones que simplifican su diseño.

El presente trabajo está estructurado en 5 capítulos, los cuales se describen a continuación:

El capítulo 1, aborda las principales premisas de investigación, así mismo, incluyendo la justificación del trabajo, la hipótesis y los objetivos, general y particulares, que sirve como base para el desarrollo de este trabajo de investigación.

Dentro del capítulo 2 se establece una breve descripción histórica de los reductores cicloidales, además de su funcionamiento, partes principales, aplicaciones sus ventajas y desventajas. También, se expone el estado de arte actual en el desarrollo tecnológico de este tipo de sistemas mecánicos.

En el capítulo 3 se plasma la metodología de diseño usada en este trabajo, además de la generación de la geometría y los parámetros fundamentales de los reductores cicloidales, la distribución de contactos, fuerzas y esfuerzos generados durante su funcionamiento, adicionalmente se presenta un diagrama de flujo utilizado en la programación para la obtención de resultados de manera sistemática.

En el capítulo 4, se pueden observar los resultados obtenidos de este trabajo, la parametrización realizada en el software CAD SolidWorks®, el análisis de movimiento, la distribución de los puntos de contacto, el comportamiento de las fuerzas internas del reductor y esfuerzos en cualquier instante de su funcionamiento.

Finalmente, en el capítulo 5 se muestran las conclusiones obtenidas a lo largo de esta investigación, así como recomendaciones y trabajo futuro.

1.1 Planteamiento del problema

Con el avance de la ciencia y la tecnología, se han desarrollado a la par los sistemas mecánicos y sobre todo los encargados de transformar una forma de energía en otra, como es el caso de los motores, ya sean eléctricos, de combustión interna, etc., esto debido a que se necesitan grandes potencias de trabajo en sistemas de pequeñas dimensiones, lo que induce la demanda de fuerza, velocidad y sobre todo potencia, es decir, la energía necesaria para que los sistemas funcionen, actualmente los sistemas motores tienen un problema de suministro de fuerza y, por lo general, giran a altas velocidades, de este modo son necesarios equipos reductores de grandes relaciones de transmisión y capacidades de carga.

Los reductores cicloidales, tienen como ventajas que transmiten altos pares de torsión en pequeños espacios, debido a la distribución de la carga en varios puntos de transmisión, además son capaces de brindar relaciones de transmisión muy altas, esto unido a lo anteriormente explicado, hacen que cada día se incremente la demanda de estos sistemas de transmisión mecánica.

Actualmente, el análisis de cargas dinámicas en los reductores cicloidales no cuenta con un conocimiento exacto, además de que se realiza el estudio para un pequeño número de casos y no en forma general.

1.2 Justificación

Debido a la gran demanda que tienen los reductores cicloidales en la industria, el análisis de las cargas en los reductores cicloidales es un aspecto que ocupa a muchos profesionales del tema en la actualidad, pero por encima de todos, las cargas dinámicas revisten gran interés en el estudio, debido a su influencia sobre los elementos en contacto que conforman el sistema.

Para poder estudiar las cargas dinámicas que aparecen durante su funcionamiento, se partirá de diseñar transmisiones cicloidales de bajas (debajo de 100 kW) y medianas (entre 100 y 500 kW) potencias, lo que servirá de base para trabajos posteriores de diseño y construcción de dichos sistemas de transmisión.

Al desarrollar este trabajo de investigación, se pretende establecer una relación entre las cargas dinámicas y los parámetros geométricos de los reductores cicloidales, lo que permite diseñar este tipo de sistemas mecánicos, no solo partiendo de parámetros geométricos, sino que se puede predecir el comportamiento interno, mejorando de esta forma elementos claves del mecanismo, y por lo tanto aumentando su desempeño, también se podrá establecer un límite de funcionalidad en el sistema.

1.3 Hipótesis

Es posible analizar el comportamiento de las cargas dinámicas en reductores cicloidales y establecer relaciones entre ellas y sus características geométricas, permitiendo establecer dependencias que faciliten sus usos en el diseño de este tipo de reductor, de forma tal que se logren mejoras en los mismos, en cuanto a su capacidad de carga y eficiencia.

1.4 Objetivos

1.4.1 Objetivo General

Determinar las cargas dinámicas en reductores cicloidales de pequeñas y medianas capacidades de carga y la relación que existe entre estas y sus parámetros geométricos, a partir de diseños típicos, permitiendo mejorarlos en diseños posteriores.

1.4.2 Objetivos Específicos

1. Estudiar y generar la geometría de reductores cicloidales típicos, permitiendo crear familias o series de estos reductores en tiempos cortos.
2. Obtener la cinemática y la transmisión de cargas en los engranajes cicloidales permitiendo así el análisis de la relación existente entre los parámetros geométricos y las características de movimiento.
3. Diseñar engranajes cicloidales de bajas y medianas potencias, realizando un profundo estudio de sus cargas dinámicas y la relación de estas con los parámetros geométricos más significativos del reductor cicloidal.
4. Generar expresiones de dependencia entre los valores de las cargas dinámicas y los parámetros geométricos del engranaje cicloidal.

Capítulo 2. Antecedentes.

2.1 Introducción.

Los reductores de engranes se utilizan en toda clase de sistemas mecánicos y máquinas, desde abrelatas hasta portaaviones. Siempre que se requiere cambiar la velocidad y/o par de torsión de un dispositivo rotatorio, con valores constantes, se emplea un reductor de engranes.

Los tipos de reductores de engranes más comunes se basan en engranes rectos, helicoidales, cónicos, de tornillo sin fin y epicicloides, además estos reductores pueden ser de ejes paralelos, cruzados, concurrentes o planetarios, estos últimos llamados de ejes móviles. Los reductores de ejes móviles tienen varias ventajas sobre los convencionales, entre las cuales está la relación de transmisión más alta en una carcasa más pequeña (Norton, 2013).

Dentro de los reductores de ejes móviles se encuentran los cicloidales, Fig. 2.1. El reductor cicloidal consiste básicamente en un engrane con perfil cicloidal accionado por un eje excéntrico que rueda dentro de un anillo con rodillos, de tal manera que el engrane gira a una velocidad reducida en sentido opuesto al eje excéntrico, ver Fig. 2.1, desarrollado inicialmente por el ingeniero alemán Lorenz Konrad Braren en el año 1931, basándose en el funcionamiento del obturador de las cámaras fotográficas, el concepto se basa en una leva de engrane cuyo perfil describe una curva del tipo cicloide (F.J. Rubio, 2010).

Los reductores cicloidales son ampliamente utilizados en muchas industrias, tales como la minería, metalurgia, química, textil, militar, electrónica, etc., debido a su gran relación de transmisión, tamaño compacto, alta capacidad de carga y alta eficiencia, además de su gran precisión ya que la mitad de sus dientes están en contacto simultáneamente, además cuenta con alta resistencia a la torsión ya que no hay elementos flexibles, tiene funcionamiento silencioso, equilibrio dinámico, y no necesita mucho mantenimiento (Hong-Sen Yan, 2002; S.V. Thube, 2012).

El reductor de velocidad sólo tiene tres partes móviles:

- El eje de entrada. Parte de alta velocidad con una leva y un conjunto de cojinete de rodillo.
- El engrane cicloidal. El alma del reductor cicloidal, el cual experimenta traslación y rotación simultáneamente.
- El eje de salida. Parte de baja velocidad, compuesta por ejes móviles que se desplazan gracias al engrane cicloidal.

Las demás partes son fijas; las partes principales se muestran en la Fig. 2.1.

La acción de rodamiento progresiva y pareja de los discos cicloidales eliminan la fricción y los puntos de presión de los engranajes convencionales. Todos los componentes que transmiten el par de torsión ruedan y están dispuestos en forma simétrica alrededor del eje para una operación equilibrada.

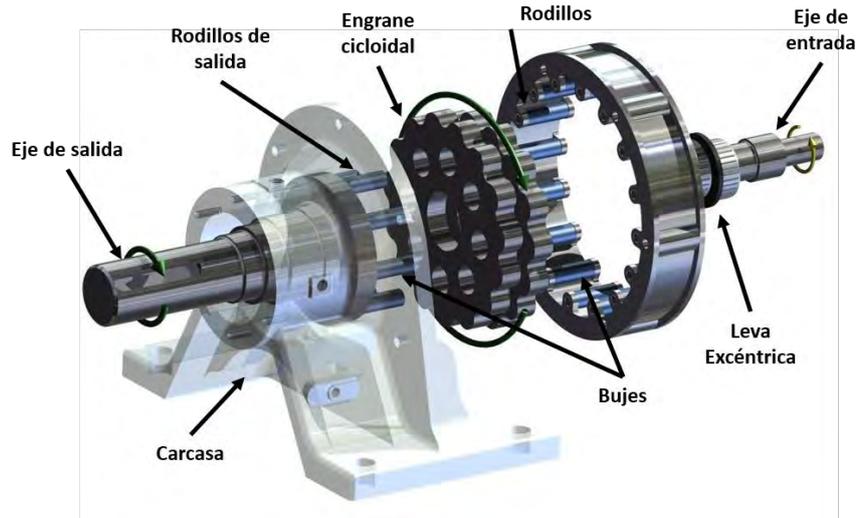


Figura 2.1. Partes principales del reductor cicloidal.

2.1.1 Aplicaciones

Las aplicaciones, Fig. 2.2, son bastas entre las que se encuentran:

- **Robótica:** operaciones de precisión, con inercia reducida gran rigidez y gran capacidad de sobrecarga.
- **Industria de la madera:** reductores para accionamiento del transportador, gran capacidad de sobrecarga, funcionamiento sin mantenimiento y seguridad.
- **Industria alimenticia:** control de agitadores
- **Industria aeroespacial y telecomunicaciones:** movimiento de antenas de telecomunicaciones y microscopios.
- **Tratamiento de mezclas (soluciones):** control de centrifugadoras de decantación.
- **Maquinaria de construcción**
- **Otras:** industria alimentaria, industria textil, industria química, minería, metalurgia, militar, electrónica.



Figura 2.2. Aplicaciones más representativas del reductor cicloidal, (F.J. Rubio, 2010).

2.1.2 Ventajas

Las ventajas del sistema residen en no utilizar un sistema dentado convencional y por tanto se presentan menos los inconvenientes asociados a este tipo de engranajes (roturas, sobrecargas, ruido, vibraciones, etc.). Algunas de las ventajas más importantes que ofrece este tipo de reductores se pueden resumir en los siguientes puntos:

- **Construcción compacta y ligera.** Para muchas aplicaciones la falta de espacio es una variable de diseño principal, como es el caso de los robots. En comparación con las transmisiones convencionales, este tipo de reductores son más ligeros y compactos.
- **Grandes relaciones de reducción.** Por lo general es lo que más se busca en un engranaje, este reductor maneja grandes relaciones desde un solo engrane.
- **Gran rendimiento.** Al no haber pérdidas por fricción (no hay fricción por deslizamiento) el rendimiento se mejora.
- **Gran capacidad para absorber sobrecargas.** Son varias las secciones que hacen contacto con rodillos de esa forma, la carga se distribuye en varios puntos del engrane y permite una carga de impacto de hasta el 500% del par nominal, por lo que son aconsejables cuando existen sobrecargas en el sistema.
- **Funcionamiento silencioso.** Al eliminar los dientes de engranajes que continuamente engranan y desengranan se elimina el ruido producido (solo existe rodamiento).
- **Interferencia.** Los engranajes convencionales tienen el problema de interferencia (que consiste básicamente en que los engranes se traban), esto debido a la forma de sus dientes, el reductor cicloidal elimina este problema debido a la forma del engrane cicloidal.
- **Fácil mantenimiento, fiabilidad y longevidad.** Las bajas pérdidas por fricción y una distribución compensada de la carga protegen a los reductores cicloidales contra el desgaste, que unido al uso de materiales robustos y de mínimo mantenimiento contribuyen a la fiabilidad y longevidad del producto. Por tanto, desde el punto de vista económico, la larga vida en servicio hace de estos reductores una inversión rentable.

2.1.3 Desventajas

Desbalance. El movimiento orbital del engrane de potencia, conlleva una fuerza centrífuga de desbalance, cuya neutralización con masas rotatorias complica el diseño e introduce pérdidas de energía.

Manufactura precisa. Las piezas del reductor cicloidal debe tener una alta precisión para evitar reacciones negativas durante el funcionamiento como estabilidad, ruido y vibración.

2.2 Antecedentes.

En 1931 nacen los reductores ciclooidales, basados en el funcionamiento del obturador para cámaras fotográficas, donde el ingeniero alemán Lorenz Konrad Braren ideó este tipo de engranajes planetarios. En 1932 en la feria de Leipzig, Lorenz Konrad Braren dio a conocer su nuevo reductor al cual lo nombró como “Cyclo”. Sumitomo Heavy Industries Ltd., una de las mayores empresas de ingeniería mecánica en Japón solicitó la licencia para la construcción de este engranaje y 5 años después en 1937 comenzó su producción en serie denominado “Cyclo Drive”, el cual se volvió líder en el mercado japonés, para el año 1994 se extendió por todo Europa (F.J. Rubio, 2010).

Actualmente, se ha hecho un gran trabajo de investigación acerca de los reductores ciclooidales, que incluyen la superficie del diente conjugado, características de engranaje, análisis dinámico, entre otros.

Litvin et al., derivó las ecuaciones y el perfil de diente conjugado para la unidad de cicloide, y también hizo la investigación sobre la característica de contacto de los dientes, tales como las singularidades de la superficie y la línea de contacto (Faydor L. Litvin, 1994), (F.L. Litvin*, 1997).

Ta-Shi Lai, presentó un modelo matemático y el procedimiento para diseñar el engrane planetario epicicloidal de una unidad cicloidal en base a la transformación de coordenadas, la teoría de envoltura y las teorías de superficies conjugadas, además desarrolla un programa para resolver las ecuaciones de engranaje y las superficies conjugadas. También estudió los procedimientos de diseño y el método de mecanizado del engrane epicicloidal (Lai, 2005).

Joong-Ho Shin et al., propuso una forma sencilla y exacta para el diseño del perfil del lóbulo del engrane cicloidal, el cual es la parte principal de un reductor cicloidal, por medio del principio de centro velocidad instantánea en el mecanismo general de contacto y la transformación de coordenadas homogénea (Shin & Kwon, 2006).

Chen et al., estableció la ecuación de engranaje para pequeñas diferencias de dientes en engranajes planetarios y la ecuación universal del perfil conjugado en base a los pasadores cilíndricos y el movimiento dado. Además, proporcionó las condiciones correctas de engranaje de acuerdo con la geometría diferencial y la geometría del engrane (Chen et al., 2008).

También derivó la ecuación de perfil de los dientes y la línea de engranaje, así como la fórmula de la curvatura normal inducida de un nuevo reductor cicloidal con líneas de contacto doble entre un par de dientes, basándose en la teoría de transformación y la geometría del engranaje (Chen, Zhong, Liu, Li, & Fang, 2012).

Yu Hong-Liu et al., realizó un análisis llamado método de la matriz de flexibilidad non-hertz (NHFMM) para el contacto del diente para la modificación del perfil del diente del engrane de pasadores, esto para resolver el problema de la falta de contacto para reductores cicloidales de alta resistencia (Hong-Liu, Jin-hua, Xin, & Ping, 2013).

Chiu-Fan Hsieh, propuso un nuevo diseño de transmisión para reductores de velocidad excéntricos que difiere de las usadas por los reductores de velocidad cicloidales tradicionales. Construyó un modelo de análisis dinámico que utilizó para probar la viabilidad de dos tipos de placa impulsora, sus resultados de esfuerzo muestran la inviabilidad de la placa de transmisión cruzada frente a la viabilidad de la placa de disco redondo. De igual manera hizo un análisis cinemático que generó evidencia de que el diseño del perfil del diente del engrane también afecta la transmisión de la máquina y puede conducir a la vibración y a la fluctuación de la tensión (Hsieh, 2014).

Chiu-Fan Hsieh, también comenta que las características dinámicas de estos diseños con diferencias pequeñas entre dientes siguen sin estar claros. Construye un modelo de análisis dinámico del sistema de un reductor cicloidal con una pequeña diferencia de los dientes, indicó los parámetros apropiados de diseño que pueden mejorar las deficiencias de diseños tradicionales como la alta velocidad de onda de salida, las fluctuaciones de tensión irregular y la distribución de esfuerzos (Hsieh, 2015).

Shuting Li, utilizó el software AutoCAD para llevar a cabo el diseño, parámetros de engranaje y dimensiones estructurales de los reductores de engranajes cicloidales de manera muy sencilla. También presenta un nuevo modelo mecánico y el método de elemento finito (FEM) para llevar a cabo el análisis de contacto del engranaje cargado de los reductores cicloidales, con el fin de resolver cálculos de fuerza y evaluar problemas de los reductores (Li, 2014).

Anamaria Dăscălescu et al., presentó que existe variación de las reacciones que actúan en el engrane satélite, en función del número de dientes del rodillo y los lóbulos en el engrane, y en el ángulo de posición del primer diente del engranaje del rodillo en relación con la línea de centros del centroide (Anamaria Dăscălescu, 2015).

Capítulo 3. Metodología de diseño.

3.1 Círculos primitivos y sistema de coordenadas

Para construir la geometría del engranaje cicloidal se propone el siguiente esquema, donde se pueden observar los círculos primitivos de la rueda de rodillos y el engrane cicloidal, así como el sistema de coordenadas, mostrado en la Fig. 3.1.

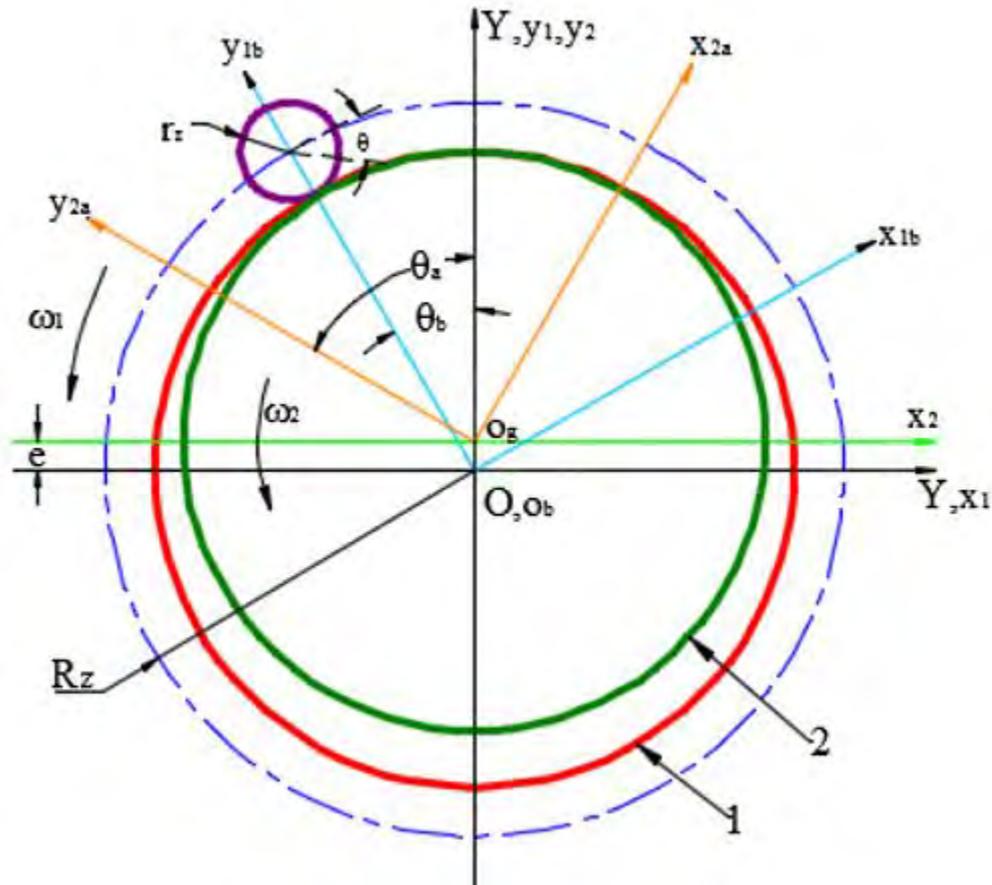


Figura 3. 1. Círculos primitivos y sistema de coordenadas, (Chen, Fang, Li, & Wang, 2008).

Los elementos 1 y 2 representan los círculos primitivos de la rueda de rodillos y del engrane cicloidal, respectivamente, a los cuales se unen rígidamente los sistemas de coordenadas móviles $O_b x_1 y_1$ y $O_g x_2 y_2$. El sistema de coordenadas fijo OXY es conectado con el centro de la rueda de rodillos y la posición de los ejes X y x_1 son coincidentes, mientras que x_2 es paralelo con X , llamando R_z al radio del círculo de distribución de los dientes (rodillos) y r_z al radio del diente (rodillo).

Tomando los números de dientes de la rueda de rodillos Z_b y del engrane cicloidal Z_g y la distancia entre centros del engrane cicloidal e (excentricidad de la leva del eje de entrada), se realiza el diseño del reductor. Mediante el empleo del concepto de mecanismo inverso se realiza la síntesis del mecanismo. Cuando el engrane cicloidal rota un ángulo θ_a antihorario alrededor del eje z_2 , la rueda de rodillos rotará un ángulo θ_b respecto al eje z_1 con el mismo sentido, pero de acuerdo a la relación de transmisión (Chen et al., 2008; José Chávez, 2017c).

3.2 Ecuación de engranaje

El perfil del rodillo en el sistema de coordenadas $O_b x_{1b} y_{1b}$ se puede obtener con la siguiente expresión, (Chen et al., 2008):

$$\Sigma^{(1)} = x_1 \mathbf{i}_1 + y_1 \mathbf{j}_1 = r_z \cos \theta \mathbf{i}_1 + (r_z \sin \theta + R_z) \mathbf{j}_1 \quad (3.1)$$

Donde θ es el ángulo paramétrico del rodillo.

De acuerdo con la cinemática, de la geometría del engrane, la ecuación vectorial de engranaje está dada como:

$$\Phi(\theta, \theta_b) = \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{v}_1^{(12)} = 0 \quad (3.2)$$

Donde \mathbf{n}_1 representa la normal del perfil del rodillo, sus componentes en los ejes coordenados x_1 y y_1 son:

$$\begin{cases} \mathbf{n}_{x1} = \frac{dy_1}{d\theta} = r_z \cos \theta \\ \mathbf{n}_{y1} = -\frac{dx_1}{d\theta} = r_z \sin \theta \end{cases} \quad (3.3)$$

Por otro lado, $\mathbf{v}_1^{(12)}$ representa la velocidad relativa de los puntos conjugados entre el rodillo y el engrane cicloidal, el cual se determina de la siguiente forma:

$$\mathbf{v}_1^{(12)} = \mathbf{v}_1^{(1)} - \mathbf{v}_1^{(2)} = (\boldsymbol{\omega}^{(1)} - \boldsymbol{\omega}_1^{(2)}) \times \Sigma^{(1)} + \boldsymbol{\omega}^{(2)} \times \mathbf{e} \quad (3.4)$$

Donde:

$$\begin{cases} \mathbf{v}_1^{(1)} = \boldsymbol{\omega}^{(1)} \times \Sigma^{(1)} \\ \mathbf{v}_1^{(2)} = \boldsymbol{\omega}_1^{(2)} \times \Sigma^{(1)} + \mathbf{e} \times \boldsymbol{\omega}^{(2)} \\ \boldsymbol{\omega}^{(1)} = \omega_1 \mathbf{k}_1 \\ \boldsymbol{\omega}_1^{(2)} = \boldsymbol{\omega}^{(2)} = \omega_2 \mathbf{k}_1 \end{cases} \quad (3.5)$$

\mathbf{i} , \mathbf{j} y \mathbf{k} son los vectores unitarios de los ejes x_1 , y_1 y z_1 respectivamente.

Sustituyendo las expresiones correspondientes en la ecuación (3.2) la ecuación de engranaje es obtenida como, (Chen et al., 2008):

$$\Phi(\theta, \theta_b) = \lambda \cos(\theta + \theta_b) - \cos \theta = 0 \quad (3.6)$$

Donde λ es un coeficiente cinemático.

$$\lambda = \frac{e i_{gb}^H}{[R_z(i_{gb}^H - 1)]} \quad (3.7)$$

Además:

$$i_{gb}^H = \frac{\theta_a}{\theta_b} = \frac{Z_b}{Z_g} \quad (3.8)$$

3.3 Perfil del engrane cicloidal

En el sistema coordenado $O_g x_{2a} y_{2a}$, el perfil $\Sigma^{(2)}$ del engrane cicloidal, conjugado al perfil del rodillo $\Sigma^{(1)}$, está determinado por el conjunto de ecuaciones siguientes, (Chen et al., 2008):

$$\begin{cases} \Sigma^{(2)} = M_{21}\Sigma^{(1)} \\ \phi(\theta, \theta_b) = 0 \end{cases} \quad (3.9)$$

Donde $M_{21} = M_{20}M_{01}$, la cual es la matriz de transformación de $O_b x_{1b} y_{1b}$ a $O_g x_{2a} y_{2a}$

La matriz de transformación de $O_b x_{1b} y_{1b}$ a OXY puede ser expresada como:

$$M_{01} = \begin{bmatrix} \cos \theta_b & -\sin \theta_b & 0 \\ \sin \theta_b & \cos \theta_b & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

Mientras que la matriz de transformación de OXY a $O_g x_{2a} y_{2a}$ puede ser expresada como:

$$M_{20} = \begin{bmatrix} \cos \theta_a & \sin \theta_a & -e \sin \theta_a \\ -\sin \theta_a & \cos \theta_a & -e \cos \theta_a \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

Tomando la siguiente relación:

$$\theta_a - \theta_b = \varphi \quad (3.12)$$

se obtiene que:

$$\begin{cases} \theta_a = \frac{Z_b \varphi}{Z_b - Z_g} \\ \theta_b = \frac{Z_g \varphi}{Z_b - Z_g} \end{cases} \quad (3.13)$$

Entonces la matriz de transformación M_{21} puede ser escrita como, (Chen et al., 2008):

$$M_{21} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & -e \sin \left[\frac{Z_b \varphi}{Z_b - Z_g} \right] \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & -e \cos \left[\frac{Z_b \varphi}{Z_b - Z_g} \right] \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

Además, utilizando funciones trigonométricas, la solución a la ecuación (3.6) es:

$$\begin{cases} \sin \theta = \pm \frac{(\lambda \cos \theta_b - 1)}{\sqrt{1 + \lambda^2 - 2\lambda \cos \theta_b}} \\ \cos \theta = \pm \frac{(\lambda \sin \theta_b)}{\sqrt{1 + \lambda^2 - 2\lambda \cos \theta_b}} \end{cases} \quad (3.15)$$

Sustituyendo las ecuaciones (3.1), (3.14) y (3.15) dentro de la ecuación (3.9) se obtiene la ecuación general del perfil del engrane cicloidal $\Sigma^{(2)}$, (Chen et al., 2008):

$$\begin{cases} x_2 = R_z \sin \varphi - e \sin \left[\frac{Z_b \varphi}{Z_b - Z_g} \right] + r_z \cos \beta \\ y_2 = R_z \cos \varphi - e \cos \left[\frac{Z_b \varphi}{Z_b - Z_g} \right] - r_z \sin \beta \end{cases} \quad (3.16)$$

Donde:

$$\begin{cases} \cos \beta = \pm \frac{\left\{ \lambda \sin \left[\frac{Z_b \varphi}{Z_b - Z_g} \right] - \sin \varphi \right\}}{\sqrt{1 + \lambda^2 - 2\lambda \cos \left[\frac{Z_g \varphi}{Z_b - Z_g} \right]}} \\ \sin \beta = \pm \frac{\left\{ -\lambda \cos \left[\frac{Z_b \varphi}{Z_b - Z_g} \right] + \cos \varphi \right\}}{\sqrt{1 + \lambda^2 - 2\lambda \cos \left[\frac{Z_g \varphi}{Z_b - Z_g} \right]}} \end{cases} \quad (3.17)$$

Cuando la diferencia entre número de rodillos y lóbulos es igual a 1 (de ahora en adelante se tomará esta relación), la ecuación puede reducirse de la siguiente forma:

$$\begin{cases} x_2 = R_z \sin \varphi - e \sin [Z_b \varphi] + r_z \cos \beta \\ y_2 = R_z \cos \varphi - e \cos [Z_b \varphi] - r_z \sin \beta \end{cases} \quad (3.18)$$

Donde:

$$\begin{cases} \cos \beta = \pm \frac{\{\lambda \sin [Z_b \varphi] - \sin \varphi\}}{\sqrt{1 + \lambda^2 - 2\lambda \cos [Z_g \varphi]}} \\ \sin \beta = \pm \frac{\{-\lambda \cos [Z_b \varphi] + \cos \varphi\}}{\sqrt{1 + \lambda^2 - 2\lambda \cos [Z_g \varphi]}} \end{cases} \quad (3.19)$$

Si $r_z = 0$ la cicloide teórica es obtenida. Cuando el número de dientes de la rueda rodillo es más grande que los del engrane cicloidal, la ecuación (3.19) toma "signo positivo", haciendo una epicicloide acortada. En caso contrario, toma "signo negativo" haciendo una hipocicloide.

Con el método anterior se obtiene la ecuación cicloidal conjugada acortada, el cual se llama método envolvente. Este método general es para generar cicloides acortadas, ya sea para epicicloides o hipocicloides (Chen et al., 2008).

3.4 Parámetros geométricos fundamentales

De acuerdo a las definiciones de engranajes se sabe que el paso de la rueda de rodillos es:

$$P_{tb} = \frac{2\pi r_b}{Z_b} \quad (3.20)$$

y de acuerdo con:

$$\lambda = \frac{r_b}{R_z} \quad (3.21)$$

se tiene que:

$$P_{tb} = \frac{2\pi r_b}{Z_b} = \frac{2\pi \lambda R_z}{Z_b} \quad (3.22)$$

Para el caso del engrane cicloidal, el paso es:

$$P_{tg} = 2\pi e = \frac{2\pi \lambda R_z}{Z_e} \quad (3.23)$$

por lo tanto:

$$P_{tg} = P_{tb} \quad (3.24)$$

Los pasos de los dos engranes son equivalentes, el engrane cicloidal y la rueda rodillo pueden engranar correctamente y continuamente.

De la ecuación (3.7) se obtiene la relación de la excentricidad:

$$e = \frac{\lambda R_z}{Z_b} \quad (3.25)$$

Así también, el módulo se define como:

$$m = \frac{P_{tb}}{\pi} = \frac{P_{tg}}{\pi} = \frac{2\pi e}{\pi} = 2e \quad (3.26)$$

Los dos lados del perfil del engranaje cicloidal deben ser simétricos para garantizar una transmisión uniforme en ambas direcciones. El ángulo entre el eje de simetría y el punto de partida de un diente cicloidal es:

$$\varphi_0 = \frac{\pi}{Z_g} \quad (3.27)$$

La ecuación del eje de simetría se establece en $y = kx$ su pendiente se determina por:

$$k = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \varphi_0\right) = \cot \varphi_0 \quad (3.28)$$

y entonces se tiene:

$$y = x \cot\left(\frac{\pi}{Z_g}\right) \quad (3.29)$$

Sustituyendo las ecuaciones (3.18) y (3.19) en la ecuación del eje simétrico (3.29), se obtiene (Chen et al., 2008):

$$R_z \cos \varphi_a - e \cos[Z_b \varphi_a] - \left\{ \pm r_z \frac{\{-\lambda \cos[Z_b \varphi_a] + \cos \varphi_a\}}{\sqrt{1 + \lambda^2 - 2\lambda \cos[Z_g \varphi_a]}} \right\} \quad (3.30)$$

$$= \left\{ R_z \sin \varphi_a - e \sin[Z_b \varphi_a] \pm r_z \frac{\{\lambda \sin[Z_b \varphi_a] - \sin \varphi_a\}}{\sqrt{1 + \lambda^2 - 2\lambda \cos[Z_g \varphi_a]}} \right\} \cdot \cot\left(\frac{\pi}{Z_g}\right)$$

El φ correspondiente al punto de intersección del eje simétrico y del perfil cicloidal (es decir, el adendum del engrane cicloidal) puede ser obtenido resolviendo la ecuación (3.30), el cual es representado por φ_a , de esta manera un lado del perfil de un diente cicloidal puede ser obtenido solo haciendo $\varphi \in [0, \varphi_a]$ en la ecuación del perfil cicloidal. Entonces de acuerdo con su simetría, el perfil de ambos lados del lóbulo cicloidal se puede producir.

La relación de contacto del engranaje de rueda de rodillos de la cicloide puede definirse como: el número de dientes que participan simultáneamente en el engranaje cuando un lado del lóbulo cicloidal entra en contacto desde el adendum hasta el dedendum. De esta manera cuando el número de diferencia entre la rueda de rodillos y el engrane cicloidal es 1:

$$rc = \frac{Z_b}{2} \quad (3.31)$$

De acuerdo con lo anterior, las ecuaciones para determinar las relaciones entre los parámetros geométricos fundamentales del engrane cicloidal y la rueda de rodillos para una diferencia de dientes igual a 1 se dan en la Tabla 3.1.

Tabla 3.1. Parámetros geométricos fundamentales del engrane cicloidal y la rueda rodillo.

Nombre	Símbolo	Ecuación
Coefficiente de acortamiento	λ	$\lambda = \frac{r_b}{R_z} = \frac{e Z_b}{R_z}$
Radio del círculo primitivo de la rueda de rodillos	r_b	$r_b = \lambda R_z = e Z_b$
Radio del círculo primitivo del engrane cicloidal	r_g	$r_g = \frac{Z_g}{Z_b} r_b = e Z_g = \lambda R_z \frac{Z_g}{Z_b}$
Excentricidad	e	$e = r_b - r_g = \frac{\lambda R_z}{Z_b}$
Relación de Trasmisión	r_t	$r_t = Z_g$
Módulo	m	$m = 2e$
Relación de Contacto	rc	$rc = \frac{Z_b}{2}$

3.5 Diseño de los orificios y el espesor del disco cicloidal

En la Fig. 3.2 se muestran los diámetros d'_p (diámetro del eje de los rodillos de salida), d_p (diámetro de los bujes de los rodillos de salida) y d_w (diámetro de los orificios del engrane cicloidal), así como su ubicación.

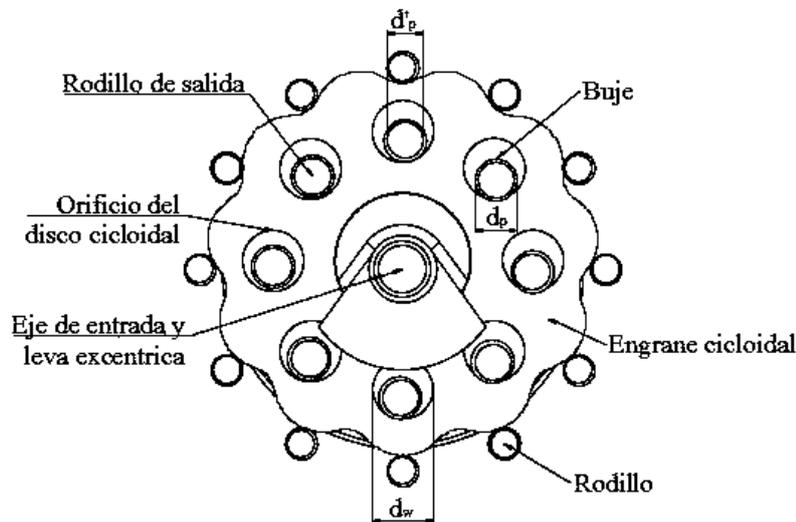


Figura 3. 2. Diámetros de los rodillos y orificios del engrane cicloidal.

Los diámetros de los orificios en el perfil del engrane cicloidal son de gran importancia debido a que, es ahí, donde se generan grandes esfuerzos de contacto al transmitir las cargas durante el movimiento, para calcular el diámetro, es preciso determinar la fuerza $F_{s\ max}$ (actuando en los rodillos Fig. 3.3) y debe ser tomada en consideración según la ec. (3.33).

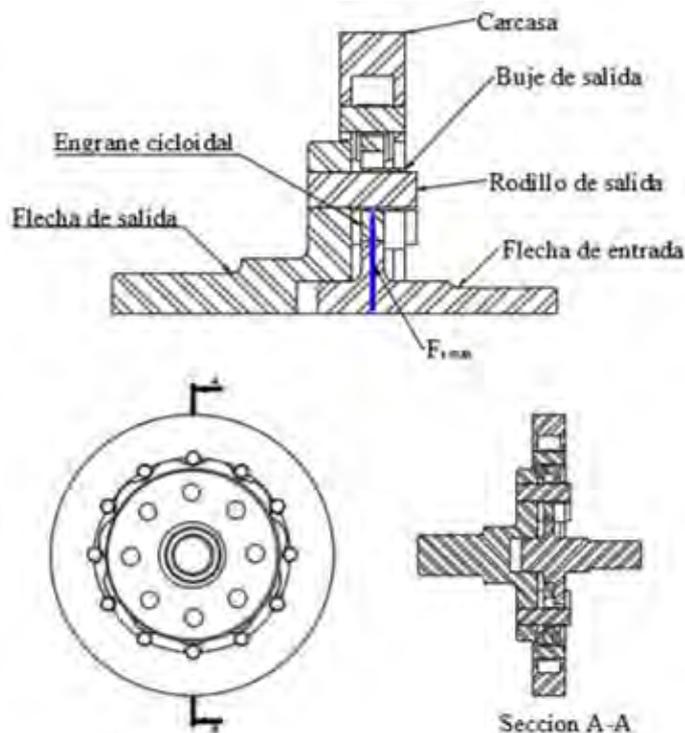


Figura 3. 3. Fuerza $F_{s\ max}$ actuando en los rodillos de salida.

La fuerza se obtiene con la ec. (3.32), (Borisov, 2012):

$$F_{s \max} = \frac{4.8 T_s}{Z_w r_w} \quad (3.32)$$

donde r_w es el radio de distribución de los orificios. Tomando el máximo esfuerzo de flexión en un rodillo:

$$\sigma_F = \frac{F_{s \max} L}{W} \quad (3.33)$$

donde con W es designado el módulo de sección:

$$W = \frac{\pi d_p^3}{32} \quad (3.34)$$

y L como la palanca del momento de flexión asociado a la fuerza $F_{s \max}$ del rodillo, entonces para un solo disco cicloidal es:

$$L = 0.5 B \quad (3.35)$$

en el que, B es el espesor del engrane cicloidal. La Fig. 3.4 muestra la sección del rodillo y del disco cicloidal.

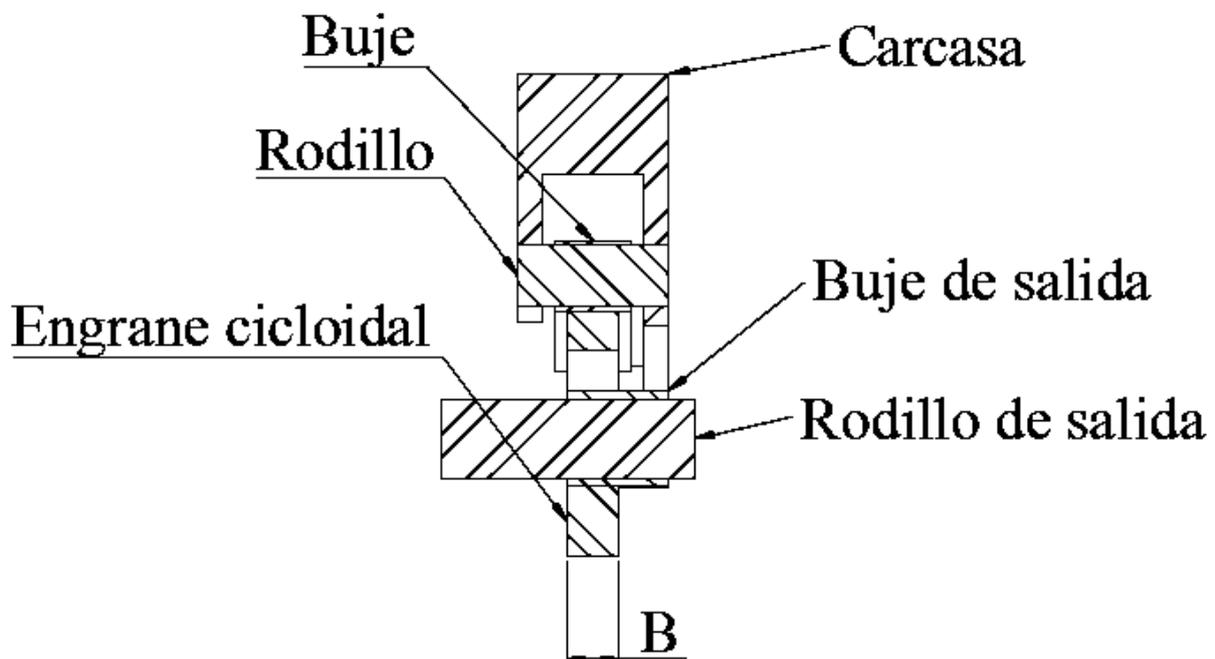


Figura 3. 4. Espesor del engrane cicloidal.

Considerando que B debe cumplir la recomendación siguiente:

$$0.1 R_z \leq B \leq 0.2 R_z \quad (3.36)$$

Para calcular los rodillos, de la flecha de salida, es necesario conocer el esfuerzo de flexión límite σ_F , el cual puede obtenerse de la ec. (3.37) (Borisov, 2012):

$$\sigma_F = 0.43 \sigma_b \quad (3.37)$$

Con σ_b aquí designado como el esfuerzo último a la tensión. La ecuación para el diámetro de los rodillos de salida es:

$$d'_p \geq 3.85 \sqrt[3]{\frac{T_s B}{Z_w r_w \sigma_b}} \quad (3.38)$$

Donde T_s es el torque de salida. Cuando el diámetro d'_p es determinado, d_p puede calcularse fácilmente al agregar el espesor del buje (th_p) ubicado sobre el rodillo de salida.

$$d_p = d'_p + 2th_p \quad (3.39)$$

Toda vez calculado d_p , el orificio del engrane d_w se calcula utilizando la ecuación siguiente:

$$d_w = d_p + 2e \quad (3.40)$$

3.6 Determinación de la posición de contacto

Para determinar la posición de contacto es preciso definir primero el movimiento que realiza el reductor cicloidal.

3.6.1 Relaciones cinemáticas

Cuando el engrane cicloidal está en funcionamiento realiza dos tipos de movimiento simultáneamente, mostrados en la Fig. 3.5:

1. **Traslación:** el centro del engrane cicloidal se traslada a lo largo del círculo formado por la excentricidad en el centro de la rueda de rodillos, este movimiento es transmitido por la rotación de la leva excéntrica.
2. **Rotación:** el engrane cicloidal rota alrededor de su centro, dicha rotación es transmitida de acuerdo a la relación de transmisión, es decir, si el eje de entrada gira un ángulo ϕ_1 entonces el engrane cicloidal girara un ángulo $\phi_2 = \phi_1/r_t$

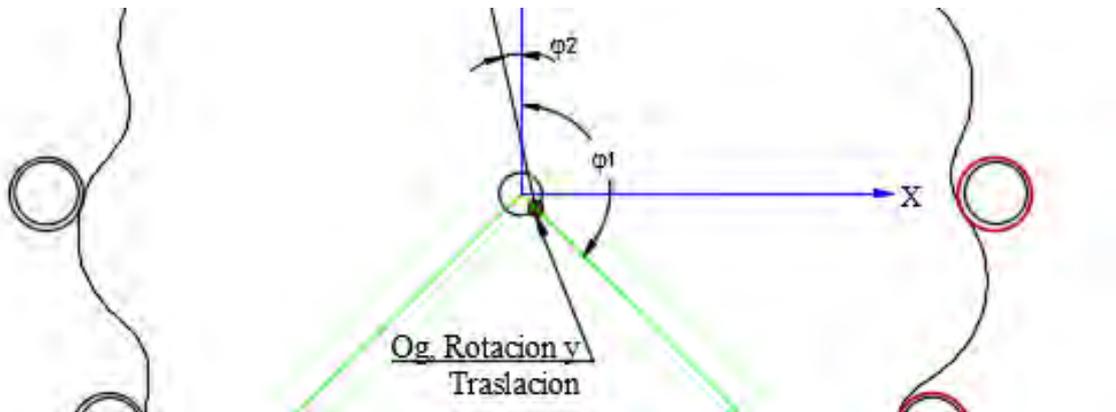


Figura 3. 5. Movimiento del engrane cicloidal, rotación y traslación.

3.6.2 Centro instantáneo de rotación

De acuerdo a la definición de centro instantáneo de rotación, Fig. 3.6(a) y relaciones geométricas mostradas en la Fig. 3.6(b), el centro instantáneo de rotación estará ubicado en la intersección de la línea formada por los centros del engrane cicloidal y la rueda de rodillos y la línea formada por el centro del rodillo y el punto de contacto con el engrane cicloidal, es decir la intersección que forman las líneas perpendiculares de las velocidades del engrane cicloidal (Hibbeler, 2010).

Utilizando el principio del centro instantáneo de rotación tenemos que:

$$v_g = e \cdot \omega_1 \quad (3.41)$$

$$v_g = CI_g \cdot \omega_2 \quad (3.42)$$

$$CI_g = e \cdot \frac{\omega_1}{\omega_2} = e \cdot r_t \quad (3.43)$$

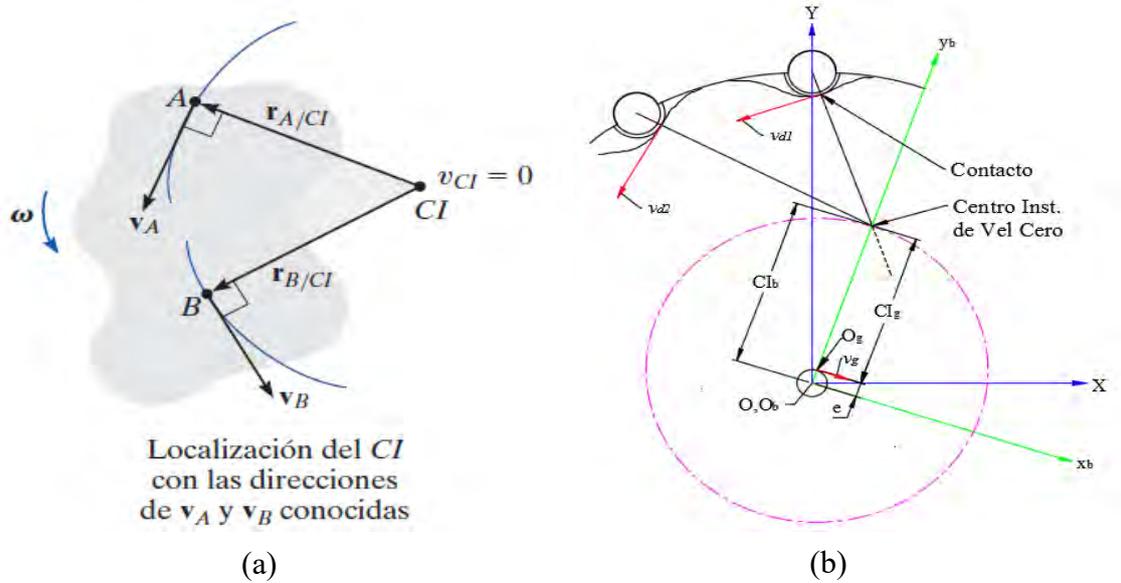


Figura 3. 6. Centro instantáneo de rotación: (a) definición (Hibbeler, 2010); (b) relaciones geométricas del reductor.

Para la diferencia entre los rodillos y los lóbulos del engrane cicloidal igual a 1 $r_t = Z_g$, entonces:

$$CI_g = e \cdot Z_g \tag{3.44}$$

El centro instantáneo de rotación medido desde el origen de los rodillos será:

$$CI_b = e \cdot Z_g + e = e \cdot (1 + Z_g) = e \cdot Z_b \tag{3.45}$$

Es decir, para cada instante se puede medir el centro instantáneo de rotación desde diferentes referencias, además se observa que la razón entre CI_b y CI_g es i_{gb}^H .

La línea de contacto de cada uno de los rodillos que se encuentran en contacto pasara por el centro instantáneo de rotación para cada instante. Además, se observa que dicho punto de intersección con la línea de centros genera un círculo sobre el centro del engrane cicloidal con radio igual a $IC_g = e \cdot Z_g$. El arreglo de las líneas de contacto se muestra en la Fig. 3.7.

Los rodillos que se encontrarán en contacto serán los contenidos en los primeros 180° a partir de la línea generada por los centros del engrane cicloidal y la rueda de rodillos y por el centro instantáneo de rotación. Si el giro de la flecha de entrada es horario el ángulo será positivo, si es antihorario el ángulo se medirá negativo.

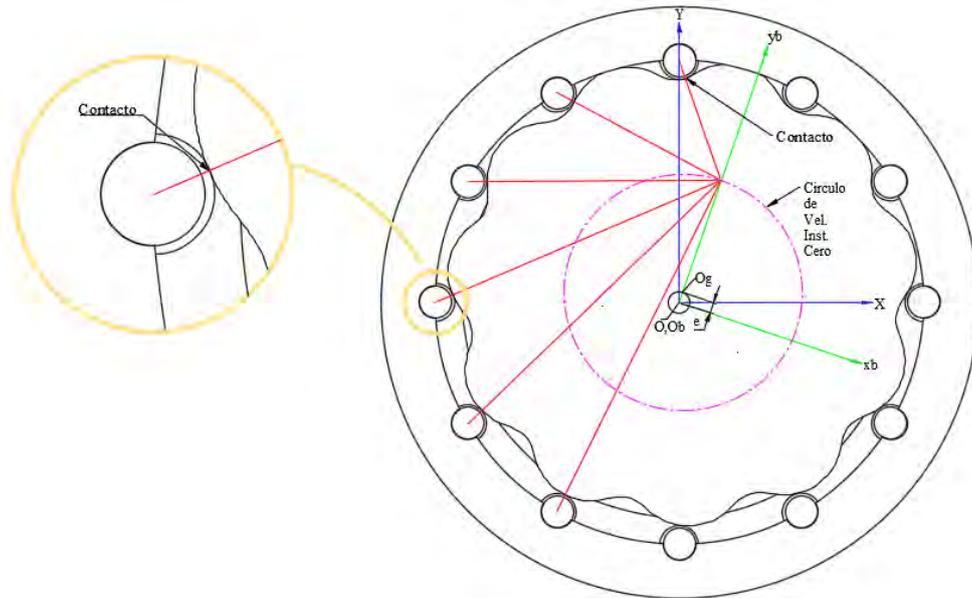


Figura 3. 7. Líneas de contacto y círculo de centro instantáneo de rotación.

3.6.3 Ángulo de presión

Una vez obtenido el centro instantáneo de rotación se puede determinar el ángulo de presión, Fig. 3.8, que será igual a:

$$\alpha = \text{Cos}^{-1} \left(\frac{R_z^2 + d_i^2 - CI_b^2}{2 R_z d_i} \right) \quad (3.46)$$

donde:

$$d_i = \sqrt{R_z^2 + CI_b^2 - 2 R_z CI_b \text{Cos} \left[\frac{2\pi}{Z_b} (i - 1) + \phi_1 \right]} \quad (3.47)$$

donde:

d_i es la distancia que une el centro instantáneo de rotación y el centro del rodillo.

i es el rodillo deseado para el cálculo.

ϕ_1 es el giro del eje de entrada.

La medición del ángulo de presión se realiza desde la línea que une el centro O_b y el centro del rodillo hacia la línea que se genera con el centro CI y el punto de contacto. Dicho ángulo será positivo para los rodillos en contacto cuando el eje de entrada gire en sentido horario, cuando el eje de entrada gire en sentido antihorario el ángulo será negativo.

$$d_c = \sqrt{R_z^2 + r_z^2 - 2 R_z r_z \cos[\alpha]} \quad (3.52)$$

Cuando el eje de entrada gira un ángulo ϕ_1 , el engrane cicloidal girará en sentido contrario al eje de entrada un ángulo ϕ_2 , la suma de estos dos ángulos se determina a través de la siguiente ecuación.

$$\psi = \phi_1 + \phi_2 = \phi_1 \left(\frac{Z_b}{Z_g} \right) \quad (3.53)$$

Se puede observar, en la Fig. 3.9, que el contacto existe en la mitad de los rodillos del reductor cicloidal iniciando estos desde el eje y_b en sentido contrario al giro de la flecha de entrada, de esta manera, cuando el giro de la flecha de entrada es en sentido horario, los rodillos en contacto serán la primera mitad en sentido antihorario, contando a partir del eje y_b , si el giro de la flecha de entrada es en sentido antihorario los rodillos se cuentan en sentido horario (José Chávez, 2017b).

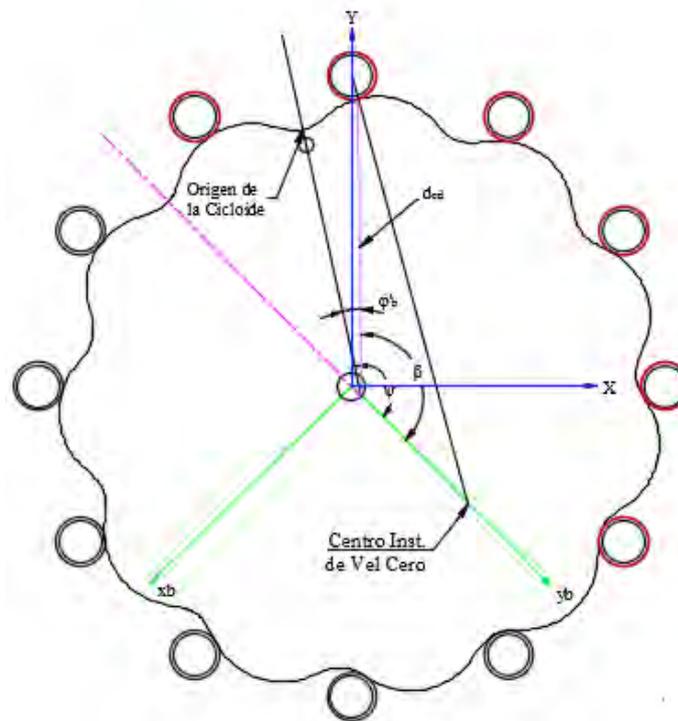


Figura 3. 9. Ángulo y vector de contacto.

Ahora utilizando las ecuaciones paramétricas de construcción para la cicloide (3.18) y (3.19) se pueden encontrar los puntos de contacto para cada rodillo.

Otra manera de encontrar dicha posición es utilizando el vector de posición d_{cd} , el ángulo φ_c y las funciones trigonométricas.

$$\begin{cases} x_2 = -d_{cd} \sin[\varphi_c] \\ y_2 = d_{cd} \cos[\varphi_c] \end{cases} \quad (3.54)$$

3.7 Cargas de contacto

Una vez determinada la distribución de fuerzas en el engrane cicloidal se puede observar que las líneas de acción de todas las fuerzas pasan por el centro instantáneo de rotación, entonces, de la Fig. 3.10 se analiza que el producto cruz de la suma de todas las fuerzas que interactúan en el engrane cicloidal y el centro instantáneo de rotación CI_b es igual al torque de entrada T_e al sistema.

$$CI_b \times \sum_{i=1}^{Z_b/2} F_{ix} = T_e \quad \rightarrow \quad CI_b \cdot \sum_{i=1}^{Z_b/2} F_i \text{Sen}(\delta_i) = T_e \quad (3.55)$$

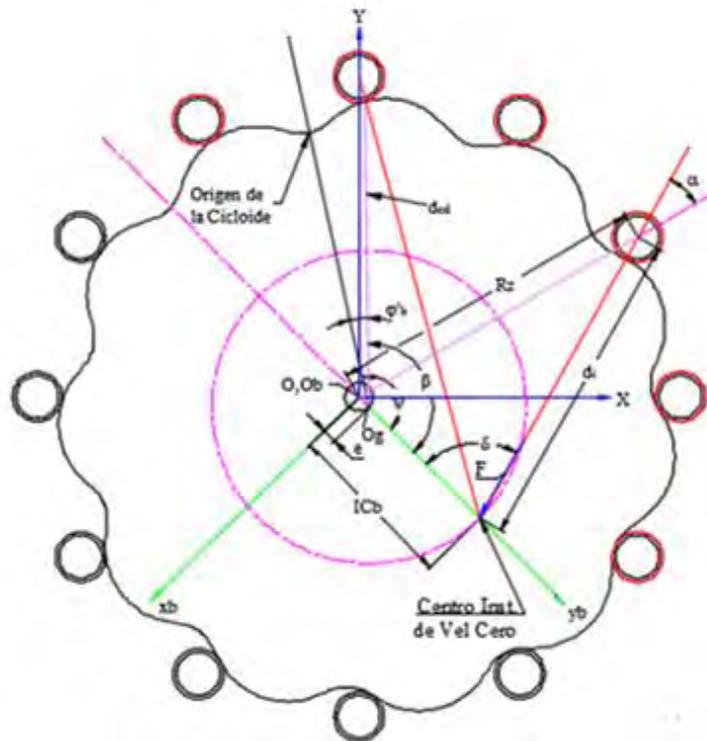


Figura 3. 10. Fuerza de contacto.

Para determinar F_i se debe desarrollar el producto interno, para poder despejar la variable deseada. Al desarrollar todo el análisis matemático se obtiene (José Chávez, 2017a):

$$F_i = \frac{T_e \text{Sen}(\delta_i)}{CI_b \sum_{i=1}^{Z_b/2} \text{Sen}^2(\delta_i)} \quad (3.56)$$

Donde:

$$\delta_i = \pi \left(1 - \frac{2}{Z_b} (i - 1) \right) - (\phi_1 + \alpha) \quad (3.57)$$

Se puede definir un factor de carga como la carga aplicada en un rodillo sobre el promedio de la carga, de esta manera se puede determinar el factor con la siguiente fórmula (Shyi-Jeng Tsai, 2015).

$$f_c = \frac{Z_b F_i}{2 \sum_{i=1}^{Z_b/2} F_i} \quad (3.58)$$

3.8 Esfuerzos de contacto

Cuando dos cuerpos con superficies curvas se presionan entre sí, el contacto puntual o lineal cambia a un área de contacto, y los esfuerzos que se desarrollan en los dos cuerpos son tridimensionales. Los problemas del esfuerzo de contacto se originan en el contacto de una rueda y un riel, en el árbol de levas y los balancines, en los dientes de engranes acoplados y en la acción de los cojinetes de bolas. Las fallas usuales se ven como grietas, picaduras o escamado en la superficie del material.

El caso más general del esfuerzo de contacto ocurre cuando cada cuerpo en contacto tiene un radio de curvatura doble; es decir, cuando el radio del plano de rodamiento es diferente del radio de un plano perpendicular y ambos planos pasan por el eje de la fuerza de contacto. Para determinar los esfuerzos de contacto, es necesario obtener la curvatura del engrane cicloidal para obtener el radio en el punto deseado donde se requiere calcular el esfuerzo (Richard G. Budynas, 2015).

3.8.1 Curvatura del engrane cicloidal

La ecuación de curvatura es la siguiente:

$$\rho = \frac{x'(\varphi) y''(\varphi) - y'(\varphi) x''(\varphi)}{[(x'(\varphi))^2 + (y'(\varphi))^2]^{\frac{3}{2}}} \quad (3.59)$$

Sabemos, del análisis geométrico realizado, que las ecuaciones (3.18) y (3.19) sirven para formar la curva paramétrica del engrane cicloidal. Derivar esas ecuaciones se tornaría algo complejo, pero de la geometría se puede observar que las ecuaciones:

$$\begin{cases} x_{ct} = R_z \sin \varphi - e \sin[Z_e \varphi] \\ y_{ct} = R_z \cos \varphi - e \cos[Z_e \varphi] \end{cases} \quad (3.60)$$

darán una curva equidistante mayor al radio del rodillo, por lo que se pueden derivar estas ecuaciones y al obtener el resultado restar el radio del rodillo, obteniendo la ecuación del radio de curvatura de la siguiente manera:

$$R = \frac{[(x_{ct}'(\varphi))^2 + (y_{ct}'(\varphi))^2]^{\frac{3}{2}}}{x_{ct}'(\varphi) y_{ct}''(\varphi) - y_{ct}'(\varphi) x_{ct}''(\varphi)} - r_z \quad (3.61)$$

Desarrollando el análisis diferencial se obtiene lo siguiente:

$$R = R_z \left[\frac{(1 + \lambda^2 - 2\lambda \cos(Z_g \varphi))^{3/2}}{1 + Z_b \lambda^2 - \lambda (1 + Z_b) \cos(Z_g \varphi)} \right] - r_z \quad (3.62)$$

3.8.2 Ecuaciones de esfuerzo

Cuando se tienen dos cilindros en contacto de longitud l y diámetros $d_1 = 2r_1$ y $d_2 = 2R$, como se muestra en la Fig. 3.11, el área de contacto es un rectángulo angosto de ancho $2b$ y longitud B , y la distribución de la presión es elíptica entonces, el semiancho b está dado por la ecuación (Richard G. Budynas, 2015):

$$b = \sqrt{\frac{2F_i}{\pi B} \frac{\frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2}}{\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2}}} \quad (3.63)$$

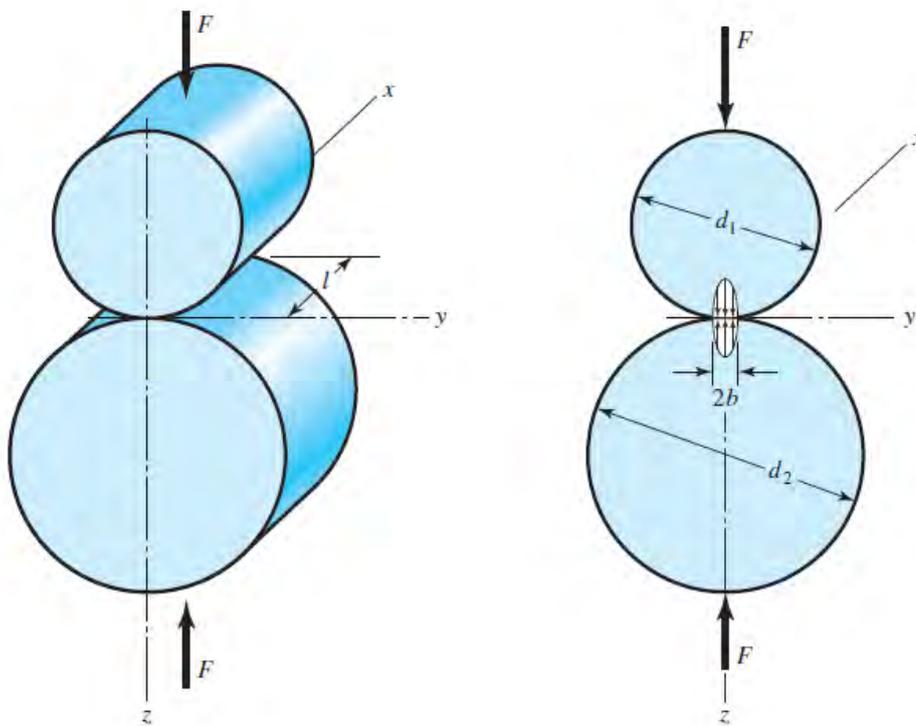


Figura 3. 11. Contacto entre dos cilindros, (Richard G. Budynas, 2015).

La presión máxima es:

$$P_{max} = \frac{2F}{\pi b B} \quad (3.64)$$

Las ecuaciones también se aplican en el contacto de un cilindro y una superficie cilíndrica interna; en este caso, d se hace negativa para la superficie interna. Para fines de diseño se tiene que el esfuerzo cortante máximo sucede en $z/b = 0.786$ siendo este igual a:

$$\tau_{max} = 0.3 P_{max} \quad (3.65)$$

El estado de esfuerzo en el eje z está dado por las ecuaciones (Richard G. Budynas, 2015):

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_x = -2\nu P_{max} \left(\sqrt{1 + \frac{z^2}{b^2}} - \left| \frac{z}{b} \right| \right) \\ \sigma_y = -P_{max} \left(\frac{1 + 2\frac{z^2}{b^2}}{\sqrt{1 + \frac{z^2}{b^2}}} - 2 \left| \frac{z}{b} \right| \right) \\ \sigma_3 = \sigma_z = \frac{-P_{max}}{\sqrt{1 + \frac{z^2}{b^2}}} \end{array} \right. \quad (3.66)$$

3.9 Diagrama de flujo para programación

La metodología antes presentada se resume en el siguiente diagrama de flujo mostrado en la Fig. 3.12, el cual se utilizó para programar todo el procedimiento y de esta manera obtener los resultados de manera más fácil y rápida.

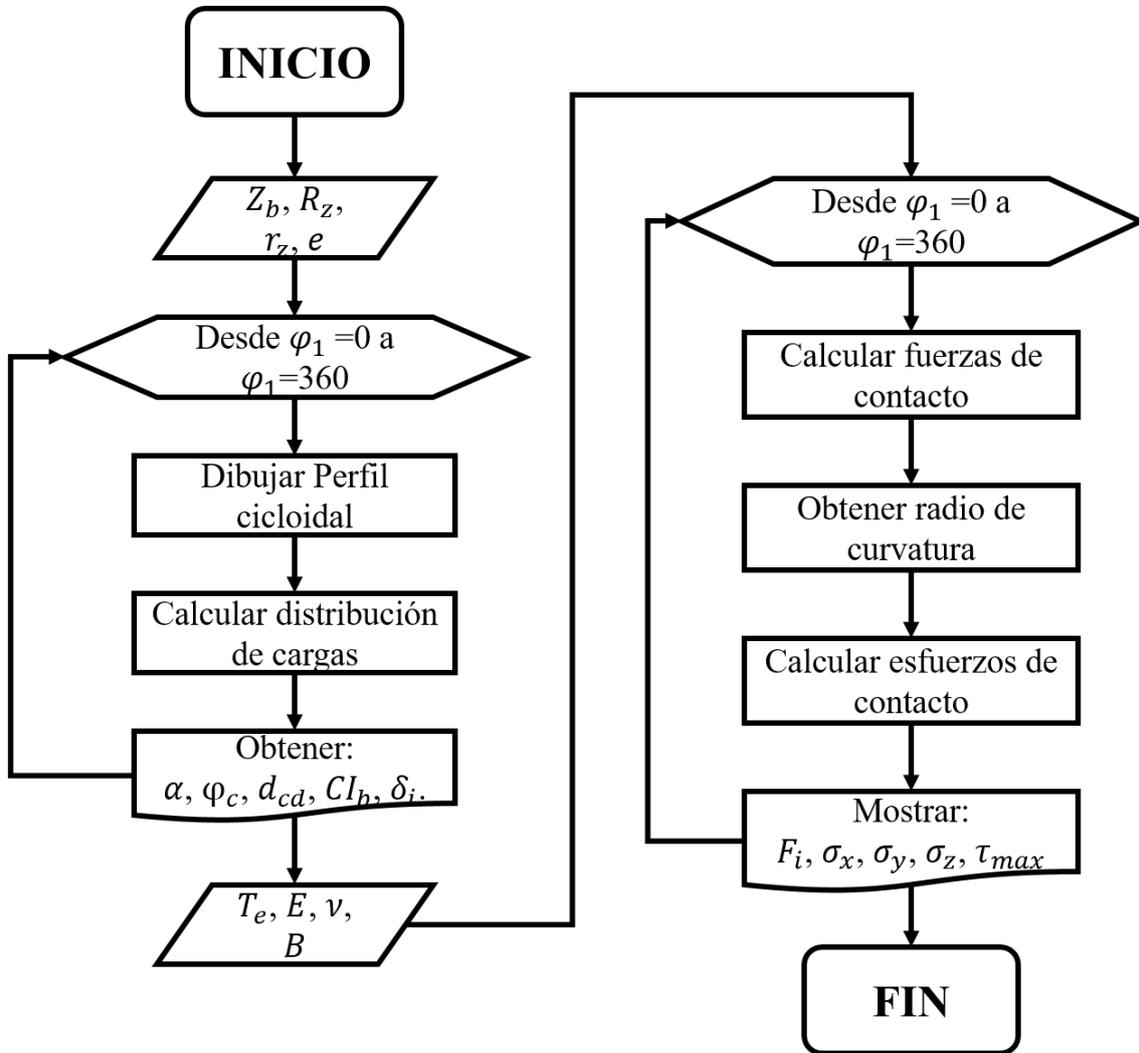


Figura 3. 12. Diagrama de flujo para desarrollar la metodología de diseño.

Después de realizar la metodología hasta la distribución de cargas, se debe realizar una sumatoria de todos los valores con el ángulo δ_i para después poder calcular la magnitud de las fuerzas de contacto.

Capítulo 4. Análisis de resultados.

4.1 Parametrización en SolidWorks

Se utiliza el software SolidWorks para generar los modelos de los reductores cicloidales, al igual que la metodología de diseño vista anteriormente lo que permitirá generar los planos correspondientes para su análisis posterior.

4.1.1 Datos de diseño

Para construir en primera instancia el engrane cicloidal, que es el alma de los reductores cicloidales, es necesario tener los números de dientes de la rueda de rodillos y del engrane cicloidal, el radio de la rueda de rodillos, el radio del rodillo, la excentricidad y calcular el diámetro del eje de salida. Se muestra en la Tabla 4.1 la entrada de datos introducidos al software SolidWorks.

Tabla 4. 1. Datos utilizados para la parametrización de diferentes reductores cicloidales.

Variables	Reductor		
	(a)	(b)	(c)
Z_b	12	19	40
Z_g	11	18	39
R_z	90 mm	110 mm	162.5 mm
r_z	7 mm	6 mm	4 mm
e	4 mm	5 mm	3.5 mm
t_{ph}	1.5 mm	1.5 mm	1.5 mm
Z_w	8	8	16
r_w	55 mm	65 mm	95 mm
σ_b	320 MPa	320 MPa	320 MPa
T_s	8 kN·m	16 kN·m	20 kN·m

Parametrización del engrane cicloidal

Una vez ingresados los datos fundamentales para la construcción del engrane cicloidal se procede a utilizar el sistema de ecuaciones paramétricas (3.18) y (3.19). Cabe mencionar que el software no permite realizar curvas paramétricas cerradas, por lo que se deben construir dos curvas conducidas por ecuación y después fusionarlas para obtener el resultado deseado mostrado en la Fig. 4.1.

Una vez realizado el croquis se realiza una extrusión, y se generan las demás operaciones necesarias para obtener el engrane cicloidal, los orificios y el espesor del engrane se calculan con las ecuaciones mostradas en el capítulo 3, la Fig.4.6 muestra el engrane cicloidal final para los datos de reductor (a).

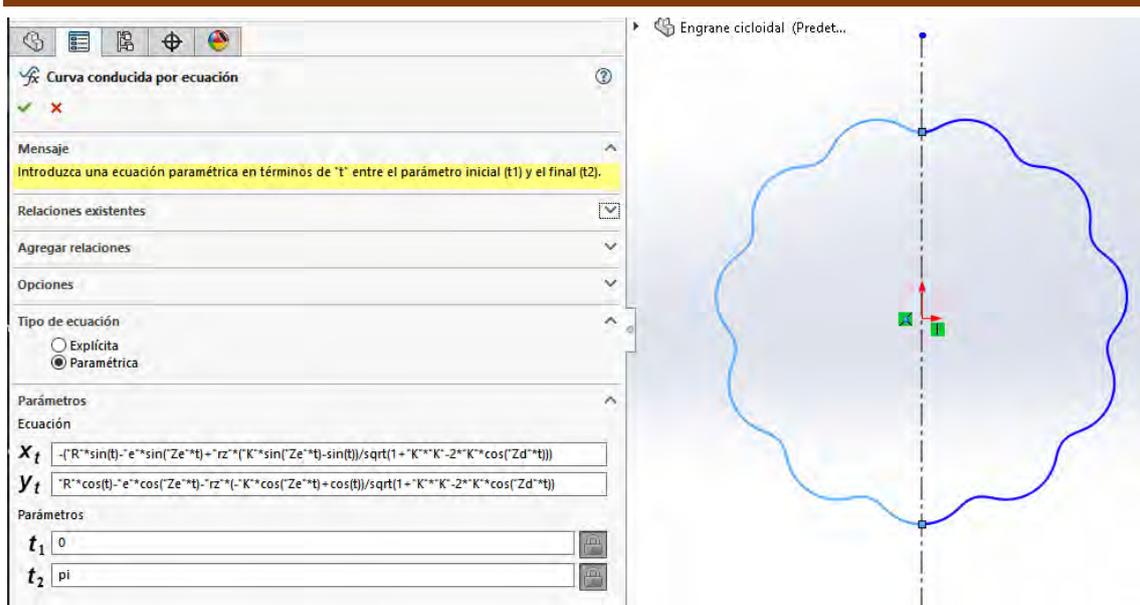


Figura 4. 1. Parametrización de la curva cicloide.

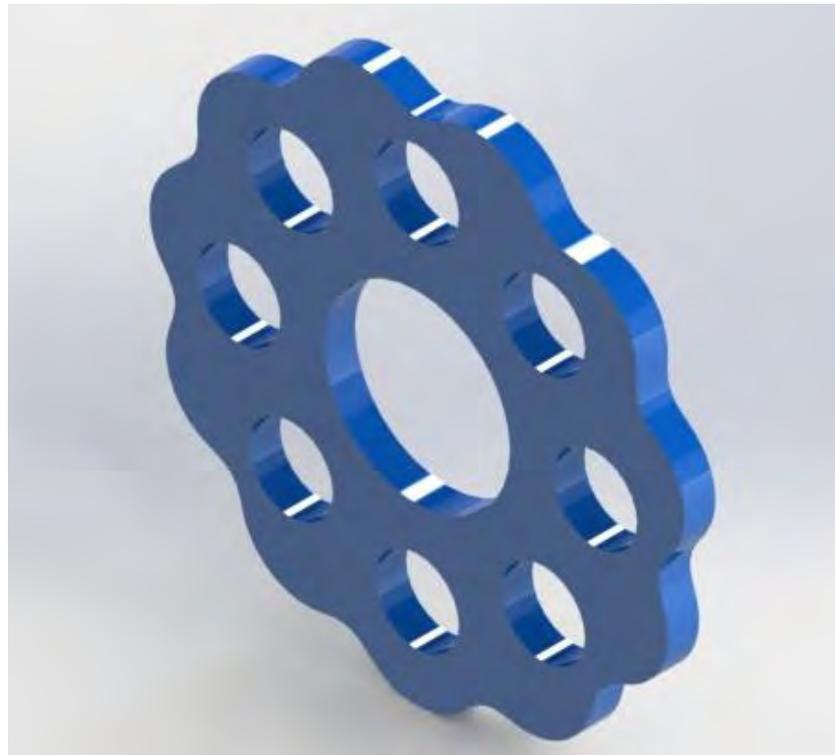


Figura 4. 2. Renderizado del engrane cicloidal (a).

Si alguno de los parámetros es modificado, el engrane cicloidal se modifica pudiéndose generar una serie de engranes cicloidales y por consiguiente reductores cicloidales como sean necesarios.

Al utilizar la metodología realizada en el capítulo 3 se obtienen los siguientes resultados mostrados en la Tabla 4.2.

Tabla 4. 2. Resultados obtenidos de la parametrización del engrane cicloidal.

Resultados	Reductor		
	(a)	(b)	(c)
$B = 0.1R_z$	9 mm	11 mm	16 mm
d'_p	16 mm	20 mm	19 mm
d_p	19 mm	23 mm	22 mm
d_w	27 mm	33 mm	29 mm
i	12:1	19:1	40:1 mm
λ	0.533	0.863	0.861

Tomando los datos de entrada para los 3 reductores cicloidales y utilizando las ecuaciones paramétricas (3.18) y (3.19) se obtienen las variantes de los engranes cicloidales mostradas en la Figs. 4.3(a)-(c) desarrollados en el software antes mencionado.

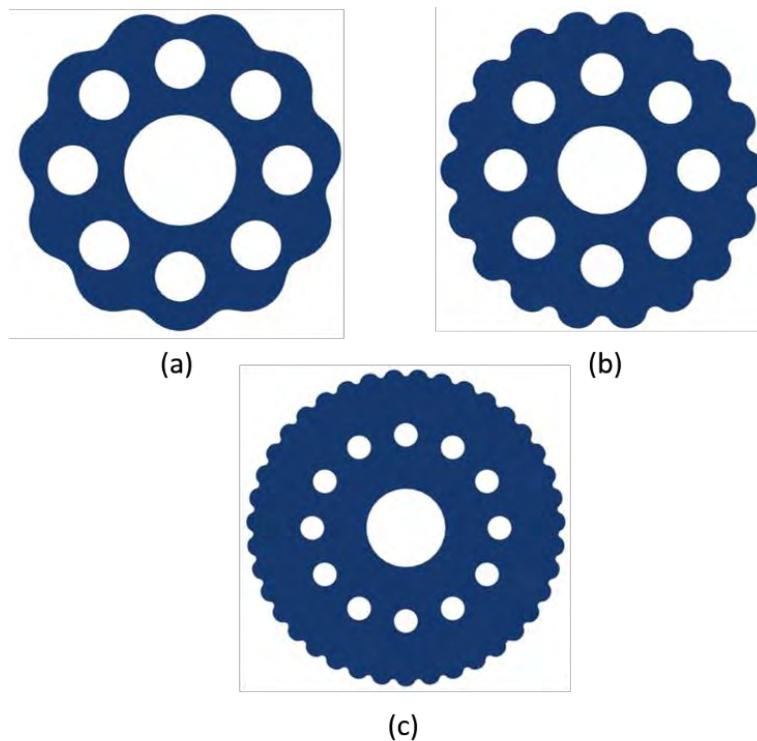


Figura 4. 3. Serie de engranes cicloidales: (a) $Z_g=11$; (b) $Z_g=18$; (c) $Z_g=39$.

Para modelar las demás piezas del reductor cicloidal se utilizan los datos de diseño, de esta manera se puede obtener el reductor cicloidal integrado por sus piezas principales, las cuales son: el eje de entrada, la carcasa con los rodillos, el engrane cicloidal y el eje de salida. En la Fig. 4.4(a) se muestran todas las partes del reductor cicloidal, generadas gracias a la metodología de diseño y al software SolidWorks.

Además, se muestra en la Fig. 4.4(b) el reductor cicloidal ensamblado, demostrando que la metodología de diseño es congruente para generar series de reductores cicloidales con una diferencia de dientes pequeña; cuando se modifica una variable en las ecuaciones también lo hace el reductor cicloidal.

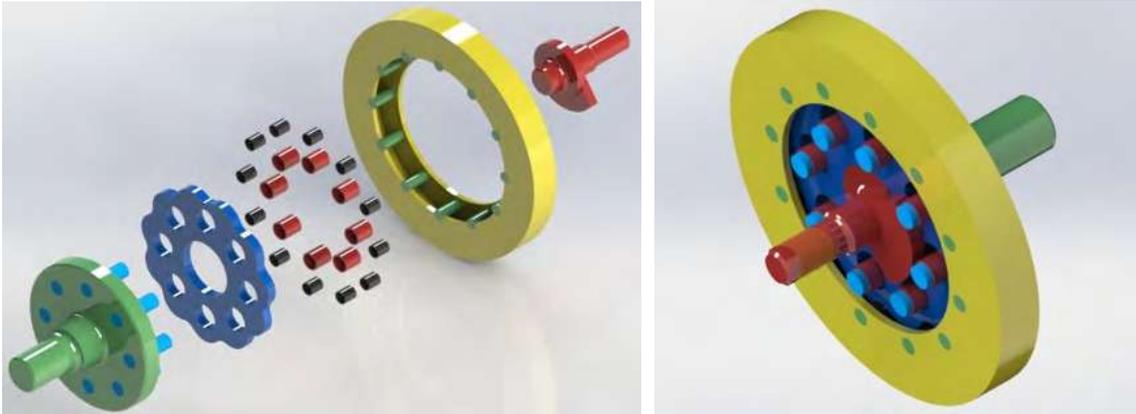


Figura 4. 4. Reductor cicloidal: (a) vista explosionada; (b) ensamble.

4.2 Simulación de movimiento

Utilizando el análisis de movimiento de SolidWorks, se puede obtener el funcionamiento del reductor cicloidal, además de que es posible determinar la posición exacta del mecanismo a cualquier ángulo de rotación del eje de entrada.

Para poder realizar el análisis de movimiento se debe tomar la restricción de contacto entre sólidos de los siguientes conjuntos de piezas:

1. El eje de entrada y el engrane cicloidal.
2. El engrane cicloidal y los bujes de los rodillos.
3. Los bujes y los rodillos.
4. Los rodillos y la carcasa.

Además, se debe proporcionar una velocidad de entrada y/o un torque. Una vez ingresado las condiciones se procede a calcular el movimiento del reductor cicloidal, obteniendo las diferentes posiciones del engrane cicloidal durante el engranaje, en la Fig. 4.5 se muestran algunas posiciones obtenidas.

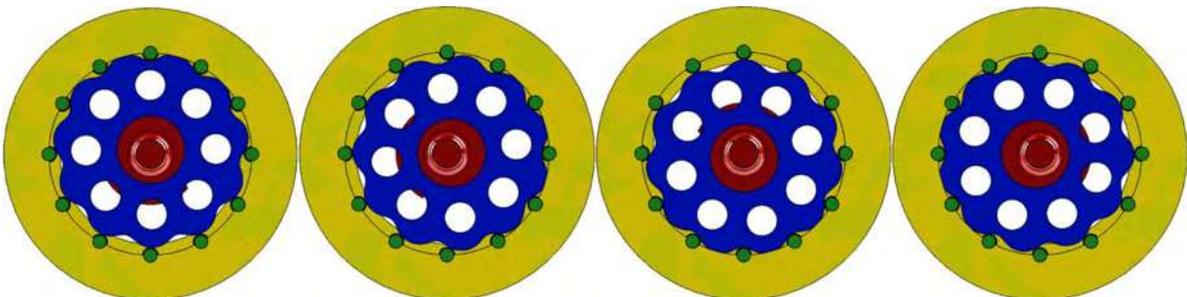


Figura 4. 5. Posiciones obtenidas por la simulación de movimiento.

Una vez obtenida la simulación de movimiento, se obtuvieron planos CAD que se utilizaron para su análisis geométrico en el capítulo 3 La Fig. 4.6 muestra un plano en 2D utilizado para determinar las posiciones de contacto.

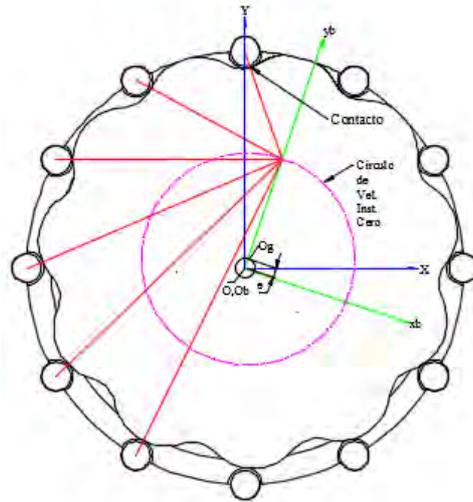


Figura 4. 6. Plano CAD 2D mostrando los contactos del engrane cicloidal.

4.3 Posición de las fuerzas de contacto

Se analizan 4 ejemplos para validar la metodología generada para determinar la posición de las fuerzas de contacto. La Tabla 4.3 muestra los datos de entrada.

Tabla 4. 3. Ejemplos de la determinación de la posición de contacto.

Datos	Reductor			
	(a)	(b)	(c)	(d)
Z_b	12	12	40	40
Z_g	11	11	39	39
R_z	90 mm	90 mm	162.5 mm	162.5 mm
r_z	7 mm	7 mm	4 mm	4 mm
e	4 mm	4 mm	3 mm	3 mm
ϕ_1	0°	135.5°	0°	243.2°

Utilizando el programa realizado y el dibujo CAD para validar, se obtienen los siguientes resultados mostrados en las Tablas 4.4-4.7 y las Figs. 4.7-4.10.

Tabla 4. 4. Resultados para el reductor (a).

Resultados	Reductor (a)				
	α	φ	x_2	y_2	
Rodillos en contacto	1	0°	0°	0	79 mm
	2	26.36°	29.21°	-38.58 mm	70.99 mm
	3	32.2°	59.81°	-70.96 mm	41.49 mm
	4	28.07°	90.48°	-83.51 mm	-1.27 mm
	5	20.03°	120.72°	-72.57 mm	-44.33 mm
	6	10.34°	150.49°	-41.83 mm	-75.62 mm

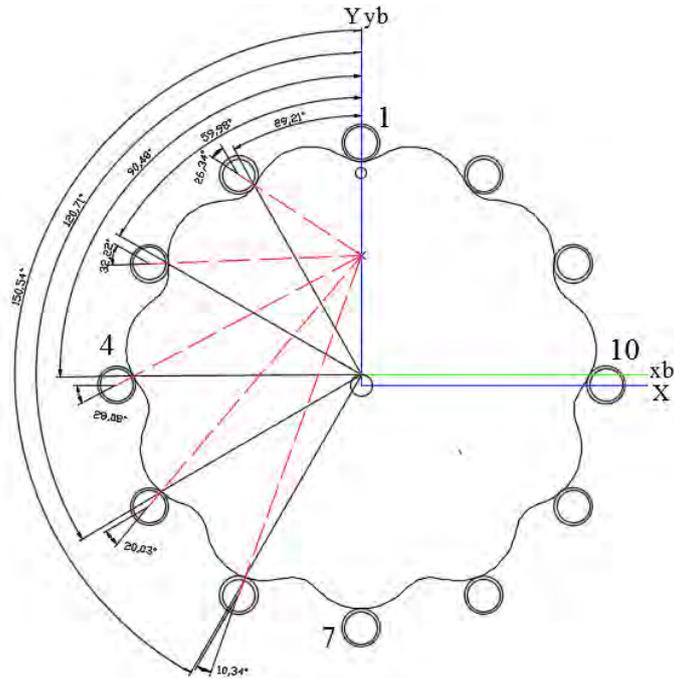


Figura 4. 7. Plano CAD del reductor (a).

Tabla 4. 5. Resultados para el reductor (b).

Resultados	Reductor (b)				
	α	φ	x_2	y_2	
Rodillos en contacto	1	15.16°	-11.67°	16.34 mm	84.24 mm
	2	5.04°	17.94°	-27.19 mm	82.49 mm
	9	16.32°	-132.97°	57.67 mm	-55.19 mm
	10	31.27°	-102.87°	79.40 mm	-18.73 mm
	11	30.80°	-72.12°	78.79 mm	25.65 mm
	12	24.23°	-41.65°	55.36 mm	63.56 mm

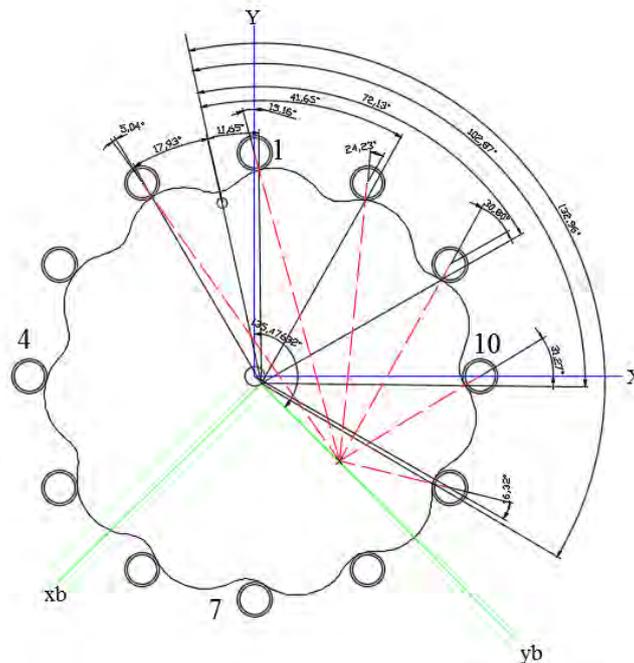


Figura 4. 8. Plano CAD del reductor (b)

Tabla 4. 6. Resultados para el reductor (c).

Resultados	Reductor (c)				
	α	φ	x_2	y_2	
1	0°	0°	0	151 mm	
2	42.12°	7.20°	-17.35 mm	155.26 mm	
3	55.84°	15.95°	-41.71 mm	150.97 mm	
4	59.29°	25.05°	-65.29 mm	142.51 mm	
5	59.11°	34.23°	-87.27 mm	130.26 mm	
6	57.32°	43.43°	-107.03 mm	114.62 mm	
7	54.69°	52.64°	-124.03 mm	96.00 mm	
8	51.58°	61.84°	-137.83 mm	74.92 mm	
9	48.15°	71.03°	-148.07 mm	51.91 mm	
10	44.52°	80.21°	-154.52 mm	27.57 mm	
11	40.75°	89.37°	-157.01 mm	2.54 mm	
12	36.87°	98.51°	-155.49 mm	-22.54 mm	
13	32.91°	107.63°	-150.02 mm	-47.03 mm	
14	28.89°	116.73°	-140.75 mm	-70.32 mm	
15	24.83°	125.81°	-127.92 mm	-91.82 mm	
16	20.74°	134.87°	-111.89 mm	-110.98 mm	
17	16.62°	143.92°	-93.05 mm	-127.35 mm	
18	12.48°	152.95°	-71.89 mm	-140.51 mm	
19	8.33°	161.97°	-48.94 mm	-150.15 mm	
20	4.16°	170.99°	-24.78 mm	-156.03 mm	

**Rodillos
en
contacto**

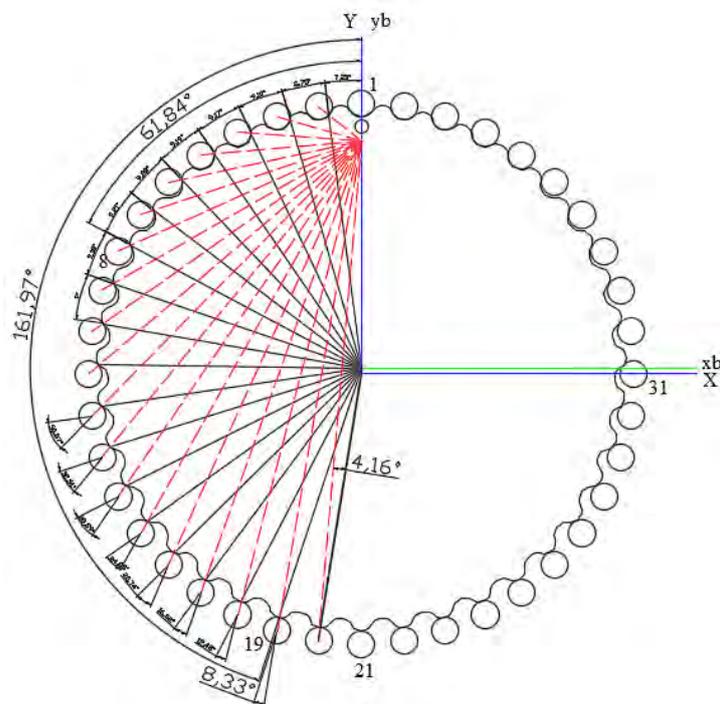


Figura 4. 9. Plano CAD del reductor (c).

Tabla 4. 7. Resultados para el reductor (d).

Resultados	Reductor (d)			
	α	φ	x_2	y_2
14	1.33°	-249.3°	-142.32 mm	-51.51 mm
15	42.68°	-242.05°	-139.04 mm	-71.27 mm
16	56.00°	-233.29°	-126.38 mm	-92.53 mm
17	59.31°	-224.18°	-110.10 mm	-111.58 mm
18	59.08°	-215.00°	-90.85 mm	-127.79 mm
19	57.27°	-205.80°	-69.22 mm	-140.72 mm
20	54.63°	-196.59°	-45.79 mm	-150.01 mm
21	51.50°	-187.39°	-21.18 mm	-155.44 mm
22	48.07°	-178.20°	3.97 mm	-156.86 mm
23	44.43°	-169.02°	29.01 mm	-154.26 mm
24	40.66°	-159.86°	53.30 mm	-147.71 mm
25	36.77°	-150.72°	76.21 mm	-137.40 mm
26	32.81°	-141.61°	97.17 mm	-123.60 mm
27	28.79°	-132.51°	115.66 mm	-106.67 mm
28	24.73°	-123.43°	131.21 mm	-87.06 mm
29	20.64°	-114.37°	143.45 mm	-65.27 mm
30	16.52°	-105.32°	152.07 mm	-41.85 mm
31	12.38°	-96.29°	156.87 mm	-17.40 mm
32	8.23°	-87.26°	157.75 mm	7.47 mm
33	4.07°	-78.25°	154.68 mm	32.15 mm

**Rodillos
en
contacto**

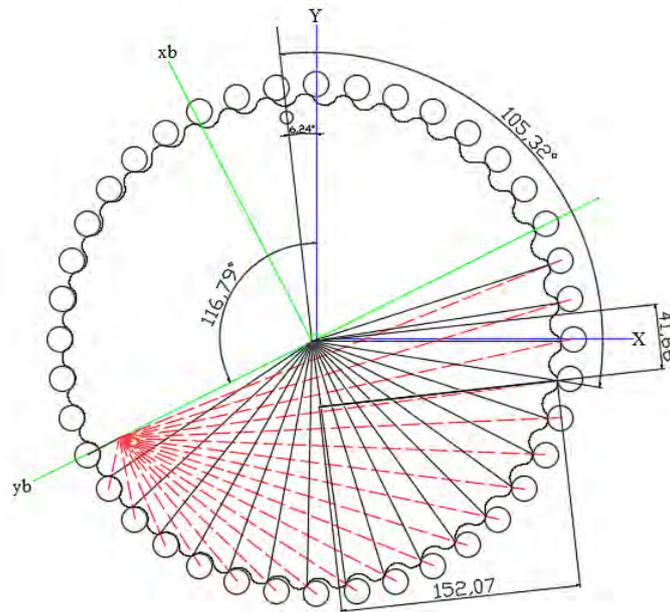


Figura 4. 10. Plano CAD del reductor (d).

Se observa que en la Fig. 4.10 generada, aparece el ángulo conjugado de ϕ_1 mostrado en la Tabla de datos.

4.4 Resultados de fuerzas y esfuerzos de contacto

Una vez desarrollada la metodología se pueden analizar diferentes reductores. Se muestran los datos de entrada para dos reductores diferentes en la Tabla 4.8.

Tabla 4. 8. Datos de diseño para 2 reductores diferentes.

Datos	Reductor	
	(a)	(b)
Z_b	12	40
Z_g	11	39
R_z	90 mm	162.5 mm
r_z	7 mm	4 mm
e	4 mm	3 mm
ϕ_1	0°-360°	0°-360°
t	15 mm	15 mm
T_e	40 000 N · mm	500 000 N · mm
E	200 N/mm ²	200 N/mm ²
ν	0.3	0.3

Los resultados de la distribución de las fuerzas de contacto para el reductor (a) se muestran en las Figs. 4.11 y 4.12.

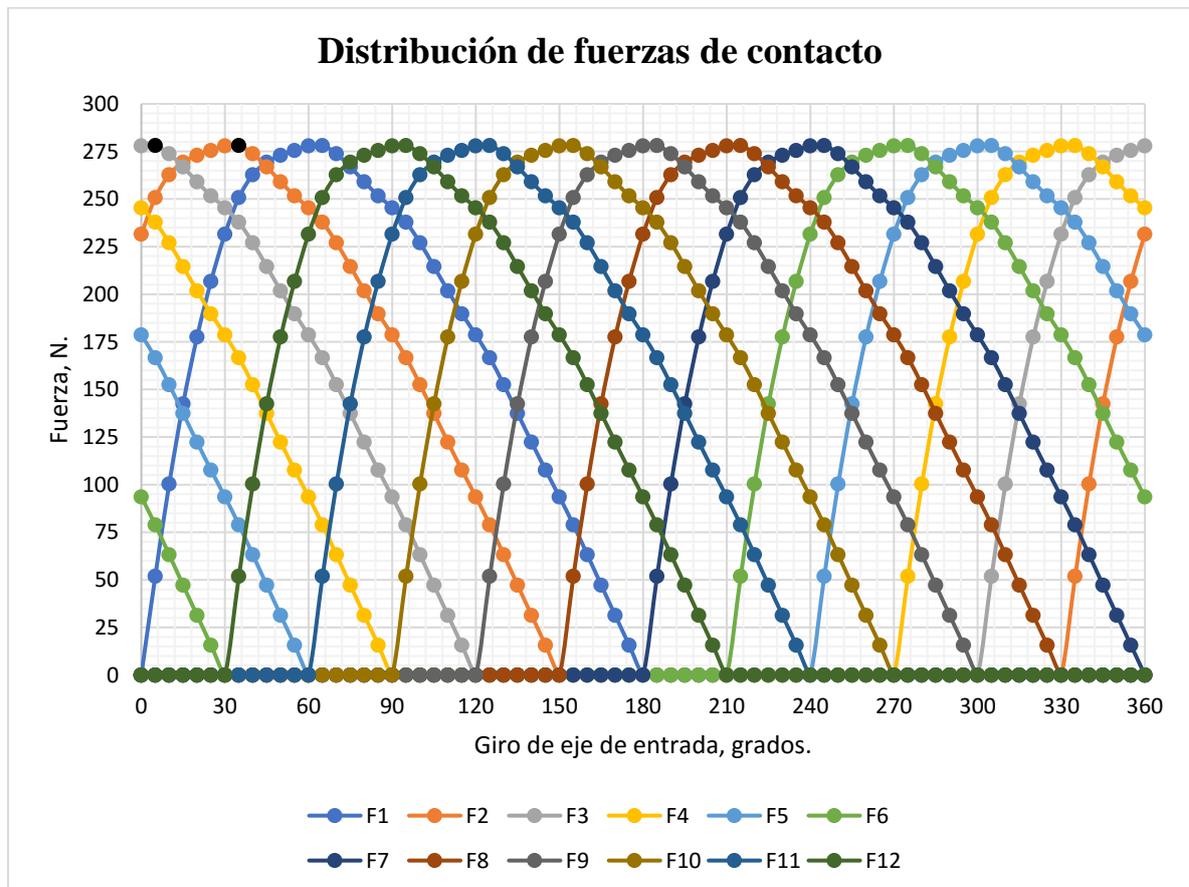


Figura 4. 11. Gráfica de distribución de fuerzas de contacto, reductor (a).

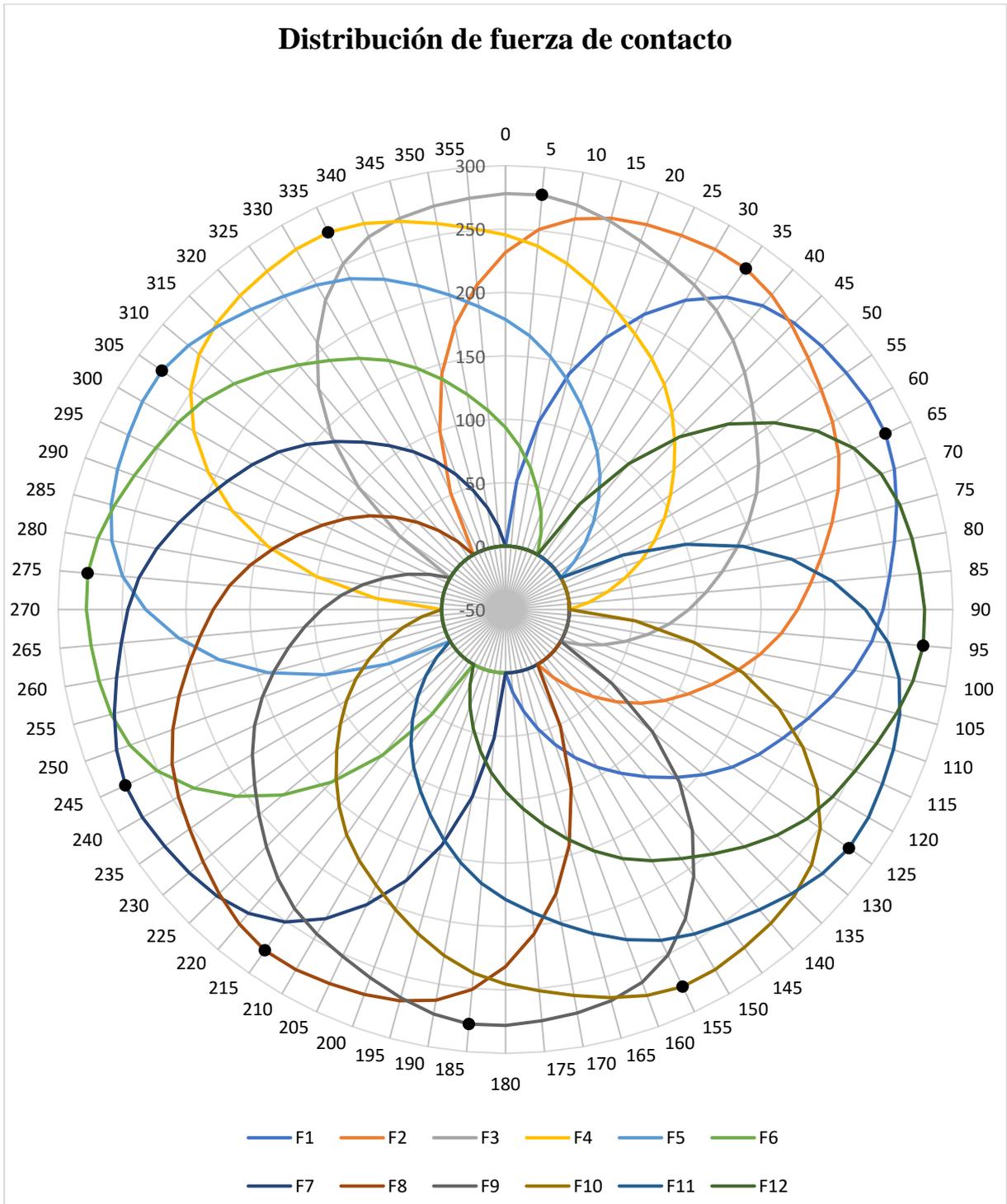


Figura 4. 12. Gráfica de distribución de fuerzas de contacto forma radial, reductor (a).

Como se observa en las Figs. 4.11 y 4.12, las fuerzas de contacto se desfazan 30 grados una con respecto a la siguientes, de igual manera se puede observar que la carga máxima ocurre cada 30 grados, teniendo esta un valor de 278.11 N para los datos de entrada.

Los esfuerzos normales y cortantes se muestran en las Figs. 4.13-4.20.

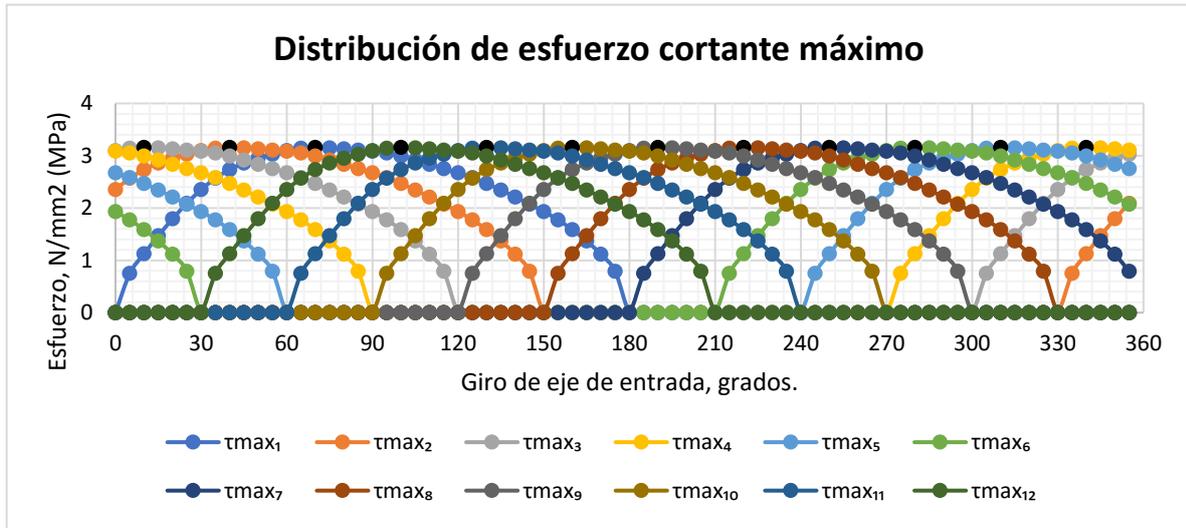


Figura 4. 13. Gráfica de distribución de esfuerzo cortante máximo, reductor (a).

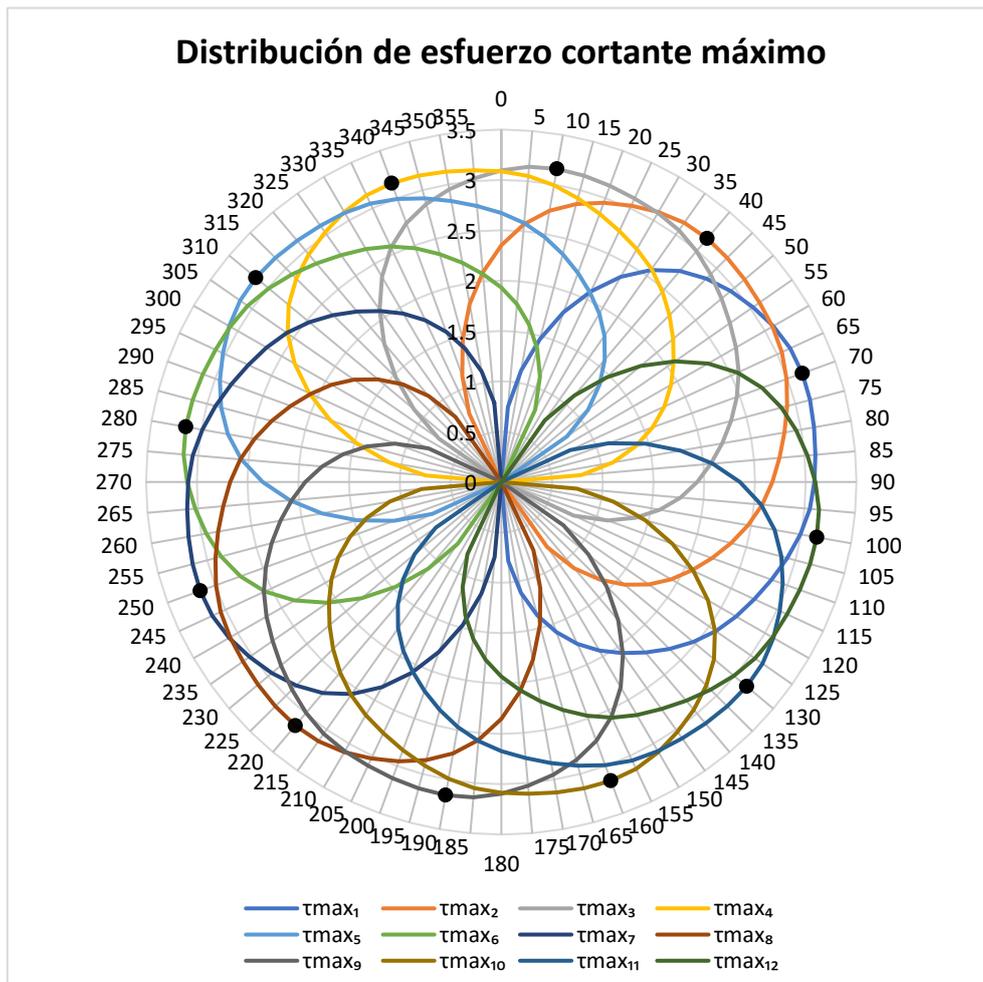


Figura 4. 14. Gráfica de distribución de esfuerzo cortante máximo forma radial, reductor (a).

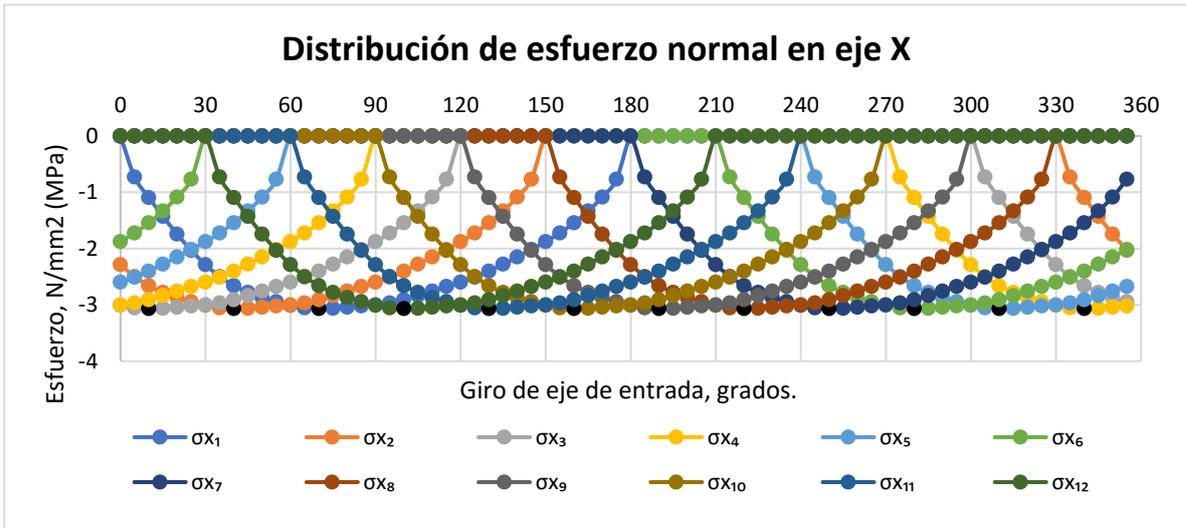


Figura 4. 15. Gráfica de distribución de esfuerzo normal en eje X, reductor (a).

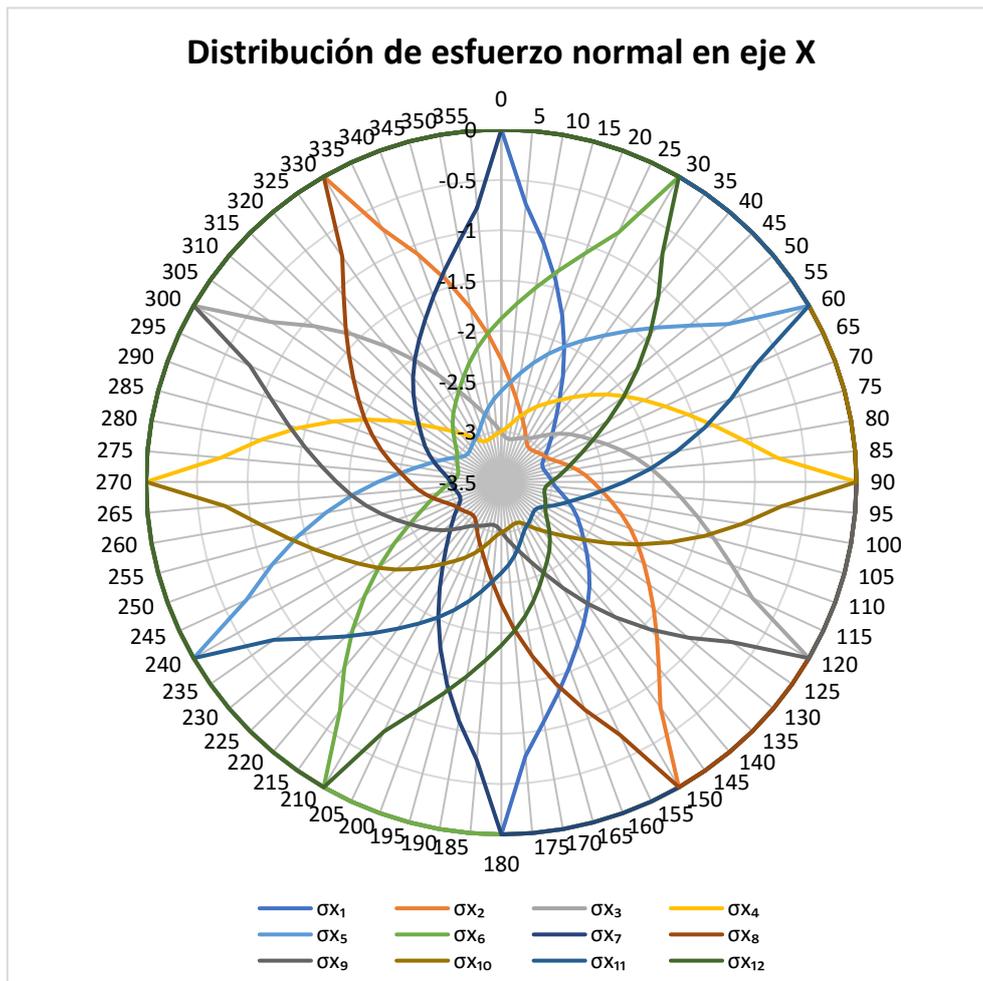


Figura 4. 16. Gráfica de distribución de esfuerzo normal en eje X forma radial, reductor (a).

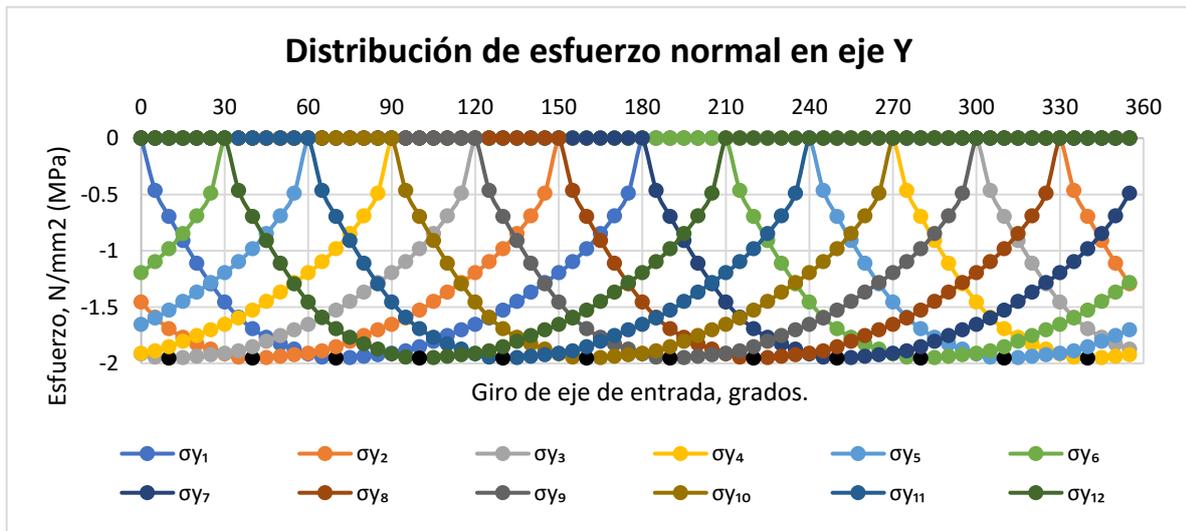


Figura 4. 17. Gráfica de distribución de esfuerzo normal en eje Y, reductor (a).

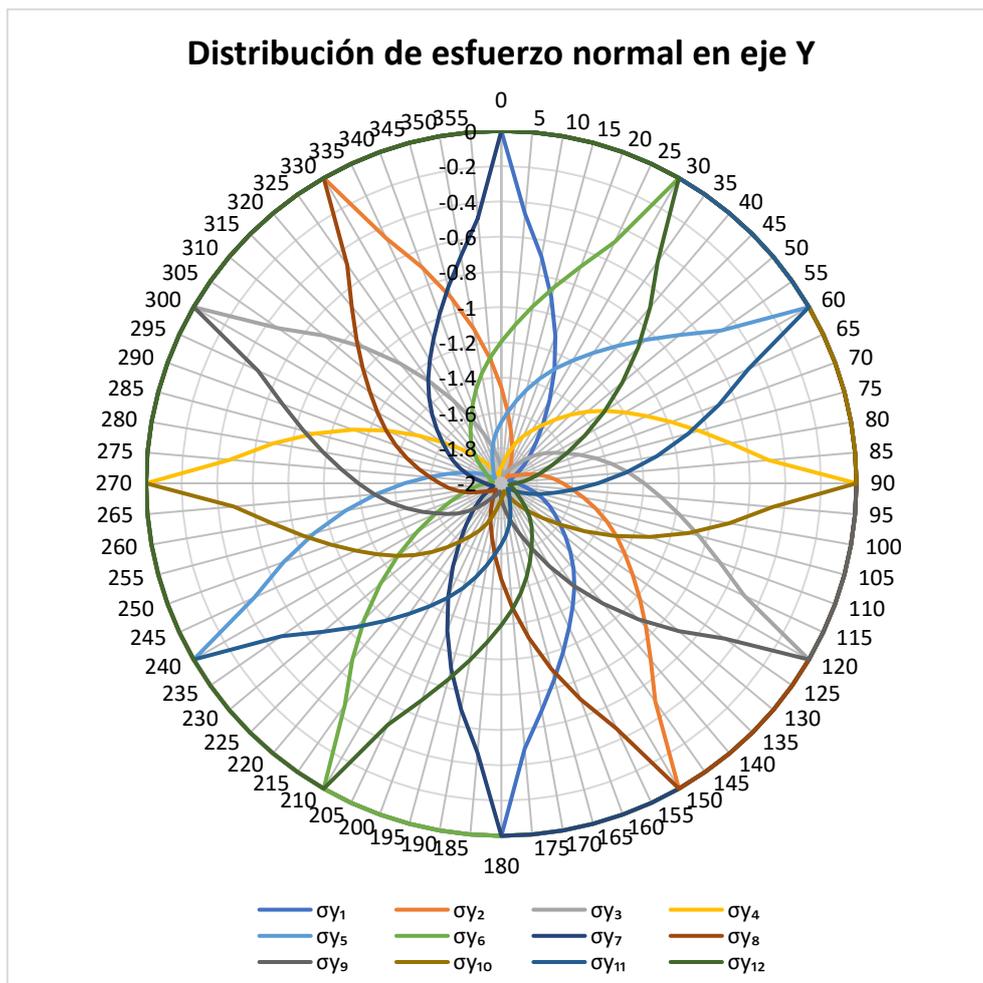


Figura 4. 18. Gráfica de distribución de esfuerzo normal en eje Y forma radial, reductor (a).

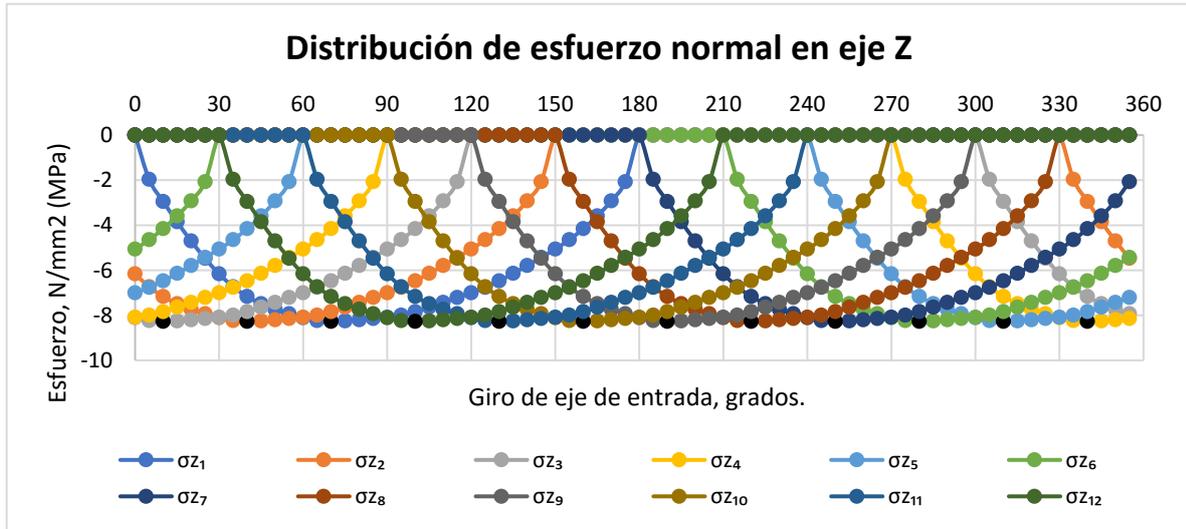


Figura 4. 19. Gráfica de distribución de esfuerzo normal en eje Z, reductor (a).

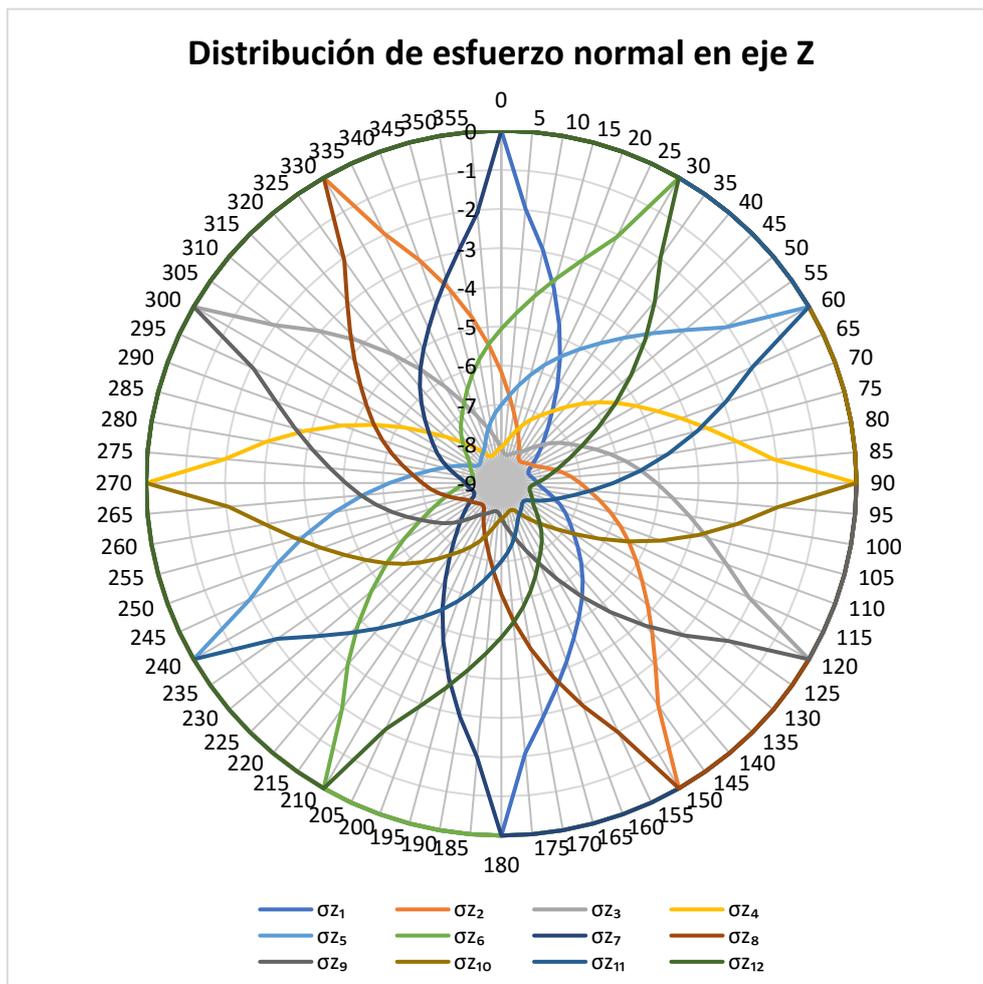


Figura 4. 20. Gráfica de distribución de esfuerzo normal en eje Z forma radial, reductor (a).

Se puede observar que los esfuerzos, de igual manera, se desfasan 30 grados uno respecto al siguiente y el esfuerzo más grande sucede cada 30 grados, pero no donde se encuentra la fuerza máxima, esto debido a que mientras gira el disco cicloidal la curvatura varía, lo que afecta al semiancho b y por consiguiente al área donde se aplica la carga, los esfuerzos más grandes suceden con 5 grados de desfase respecto a la fuerza máxima generada en el instante dado.

Se realizan los mismos pasos para el segundo reductor, obteniendo los siguientes resultados para la distribución de fuerzas, mostrado en las Figs. 4.21 y 4.22.

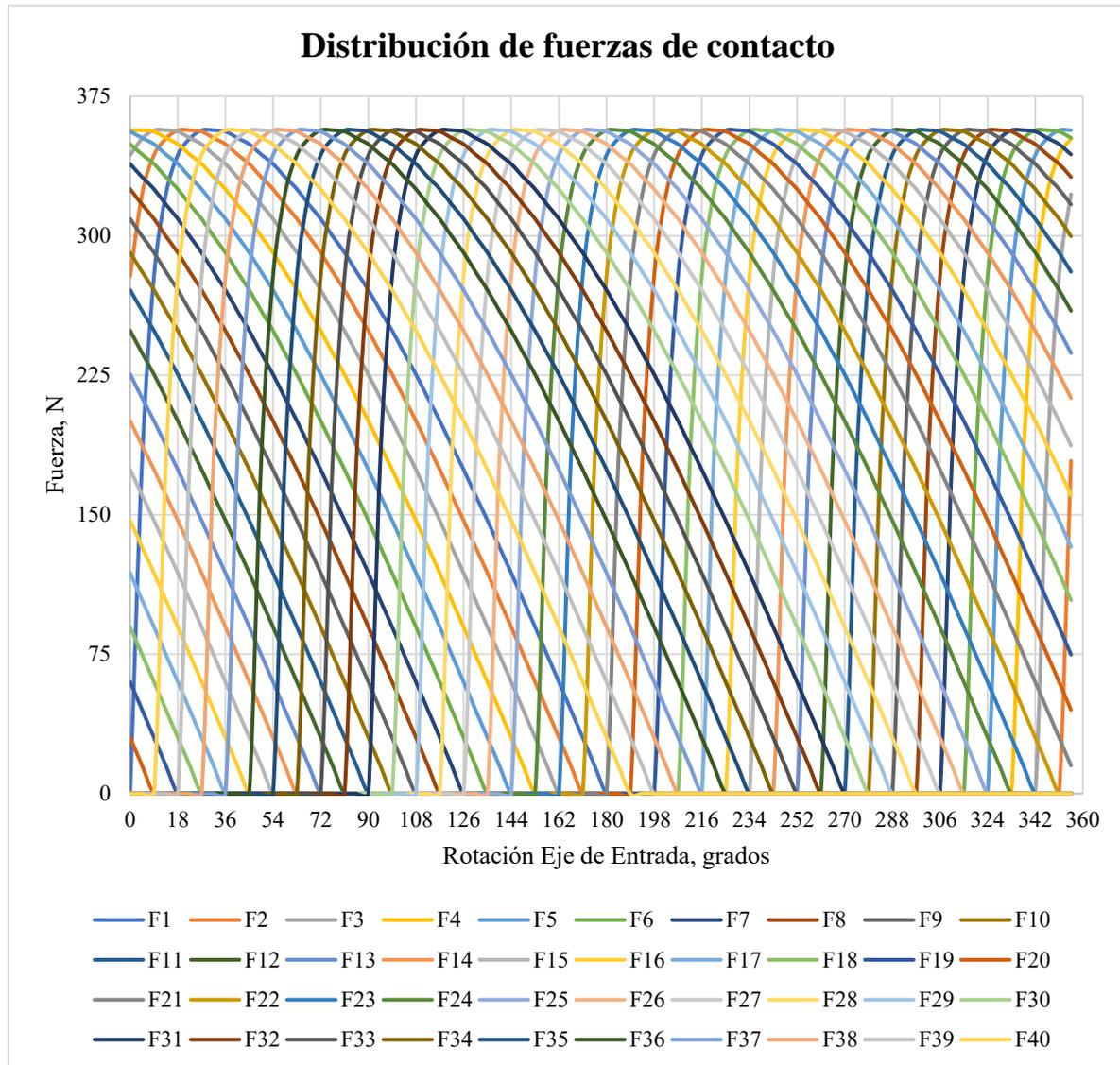


Figura 4. 21. Gráfica de distribución de fuerzas de contacto, reductor (b).

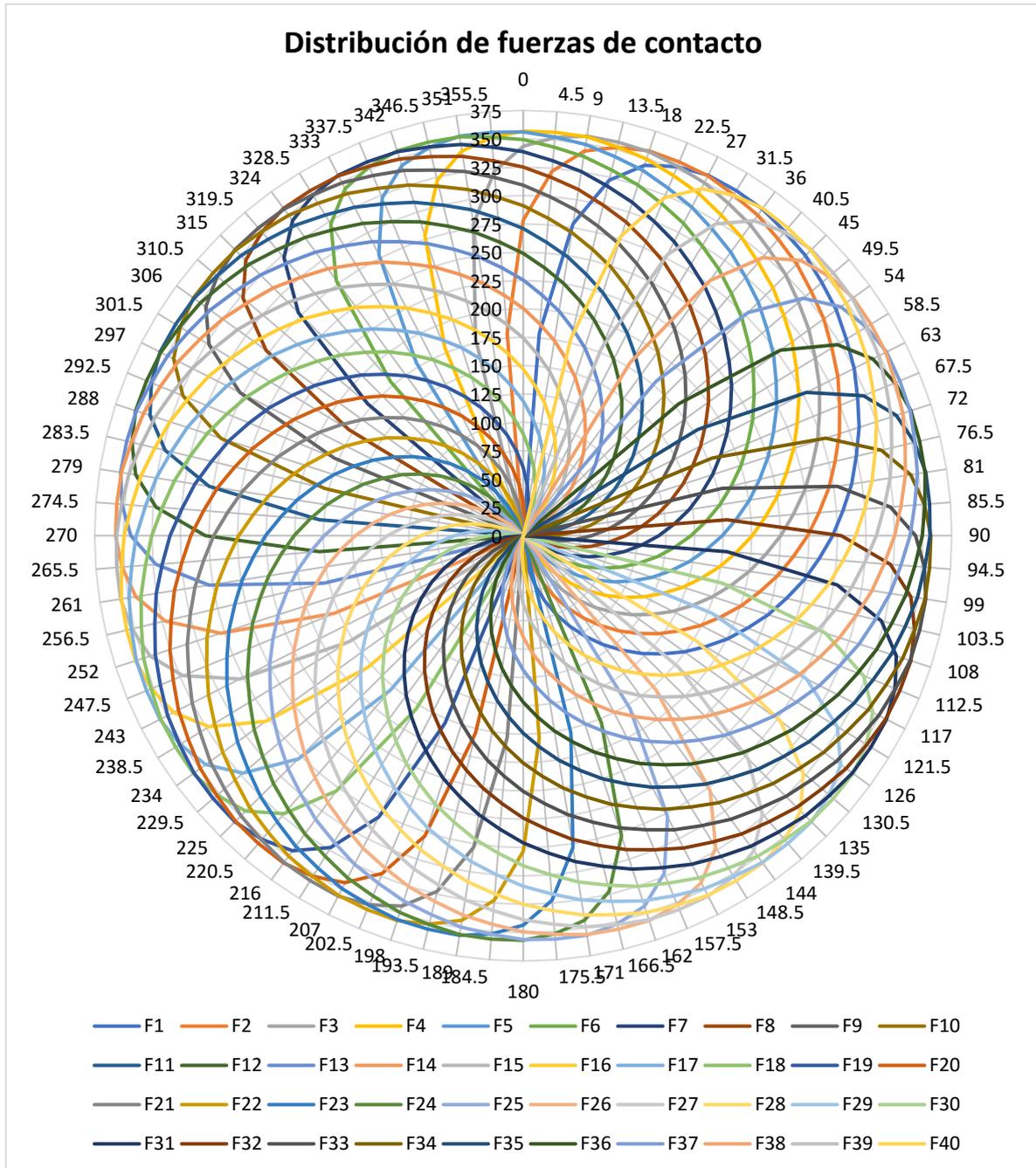


Figura 4. 22. Gráfica de distribución de fuerzas de contacto forma radial, reductor (b).

Las dos Gráficas muestran que el comportamiento es similar al reductor de 12 pines, con la diferencia de que las fuerzas se encuentran desfasadas ahora 9 grados, de esta manera se tiene una máxima carga cada 9 grados durante el movimiento del reductor cicloidal. La máxima carga registrada es de 356.77 N para los datos ingresados.

De igual manera las gráficas de esfuerzos normales y cortante máximo se muestran en las gráficas 4.23-4.30.

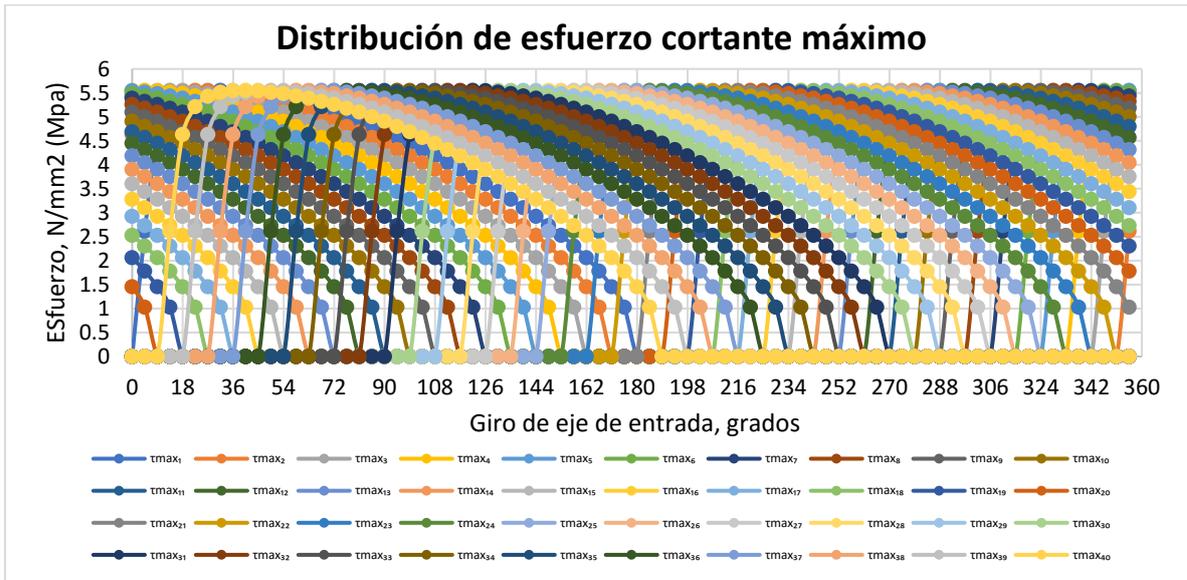


Figura 4. 23. Gráfica de distribución de esfuerzo cortante máximo, reductor (b).

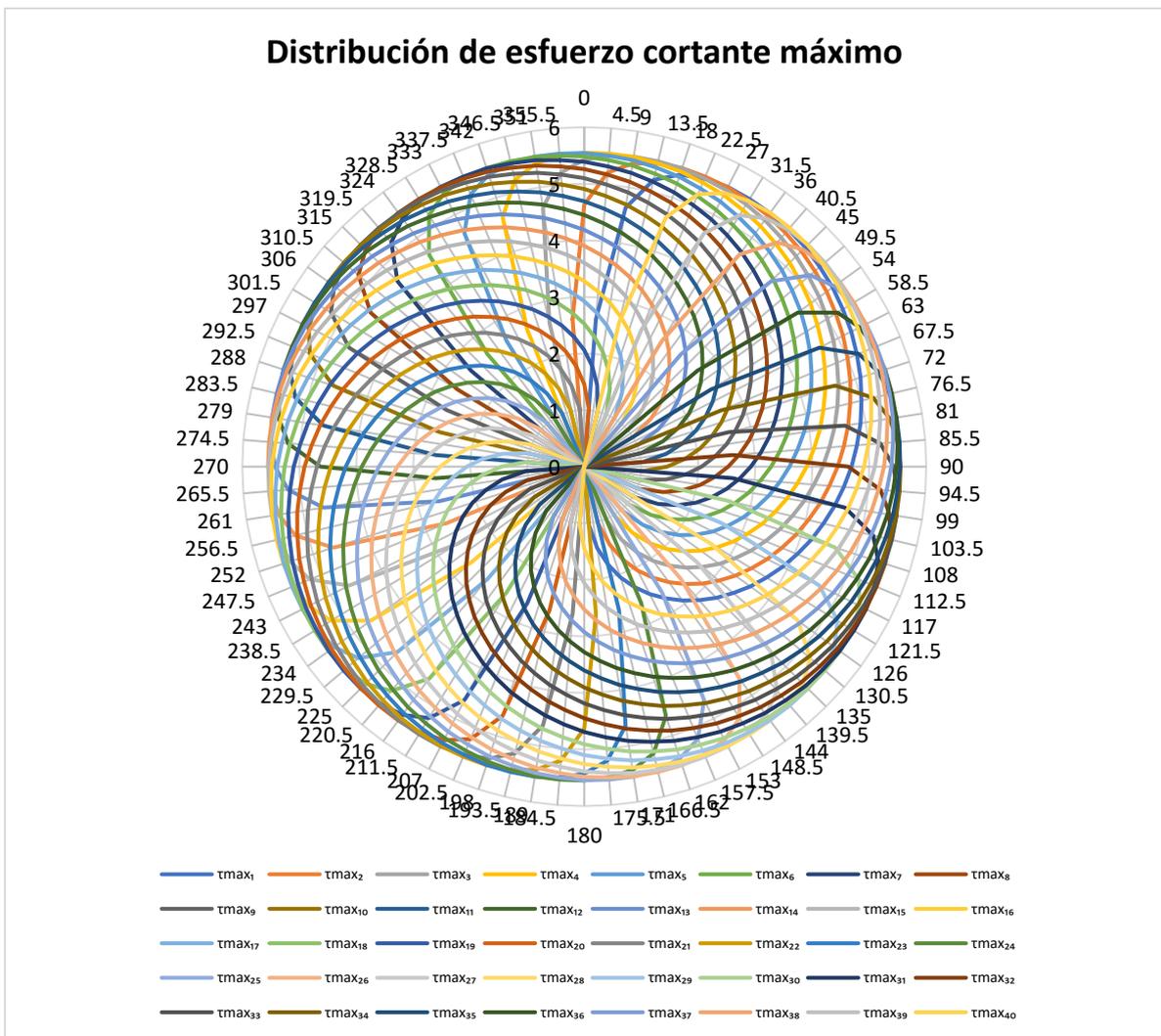


Figura 4. 24. Gráfica de distribución de esfuerzo cortante máximo forma radial, reductor (b).

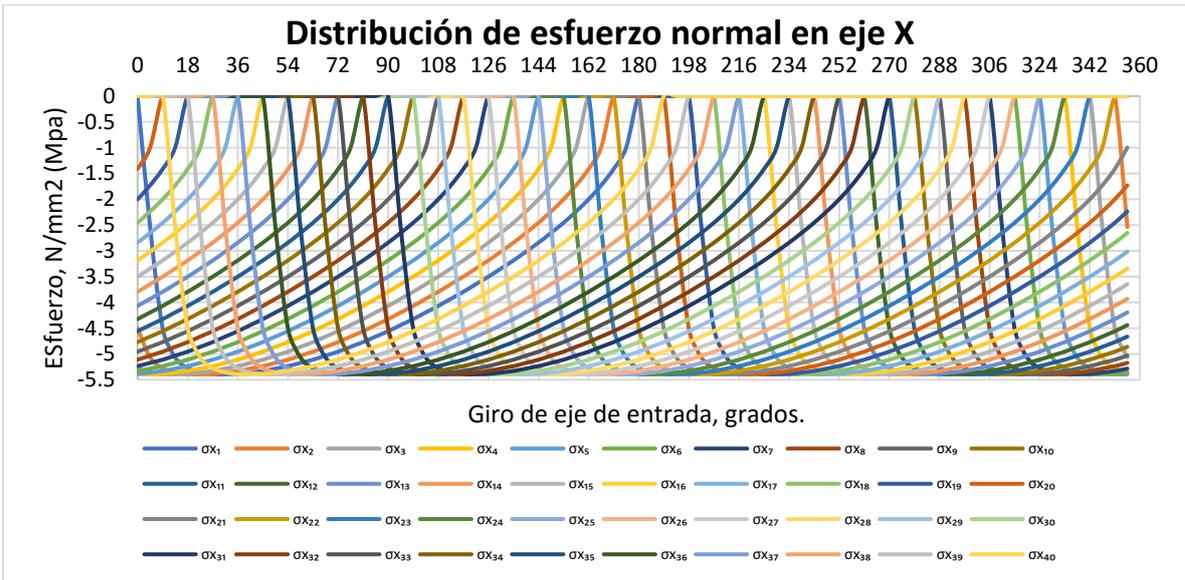


Figura 4. 25. Gráfica de distribución de esfuerzo normal en eje X, reductor (b).

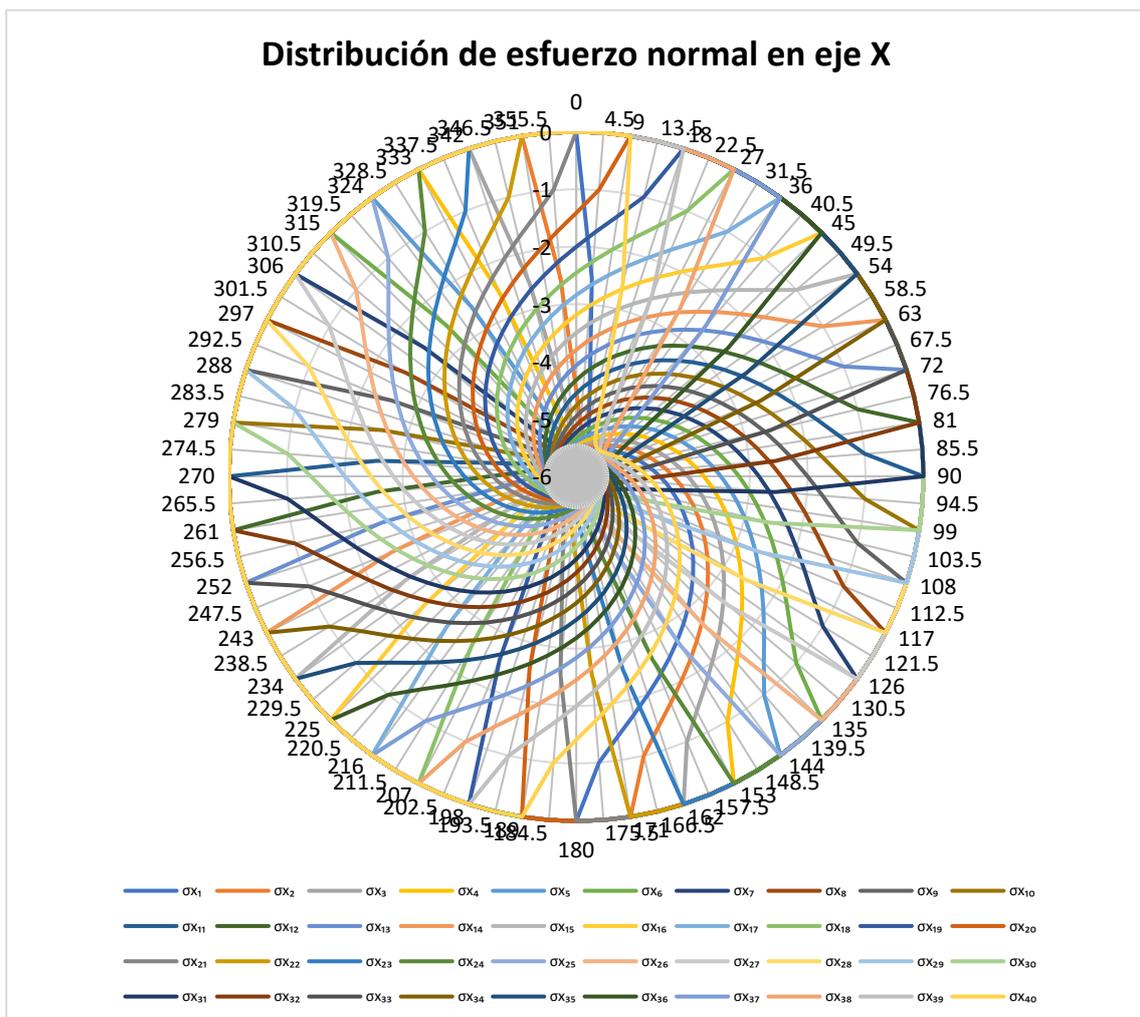


Figura 4. 26. Gráfica de distribución de esfuerzo normal en eje X forma radial, reductor (b).

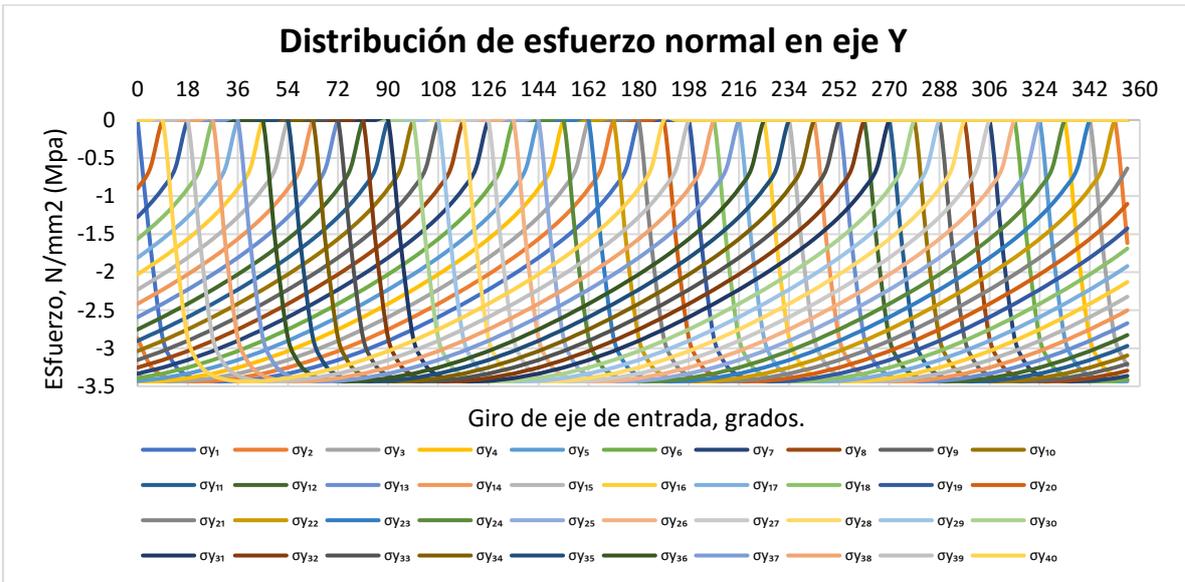


Figura 4. 27. Gráfica de distribución de esfuerzo normal en eje Y, reductor (b).

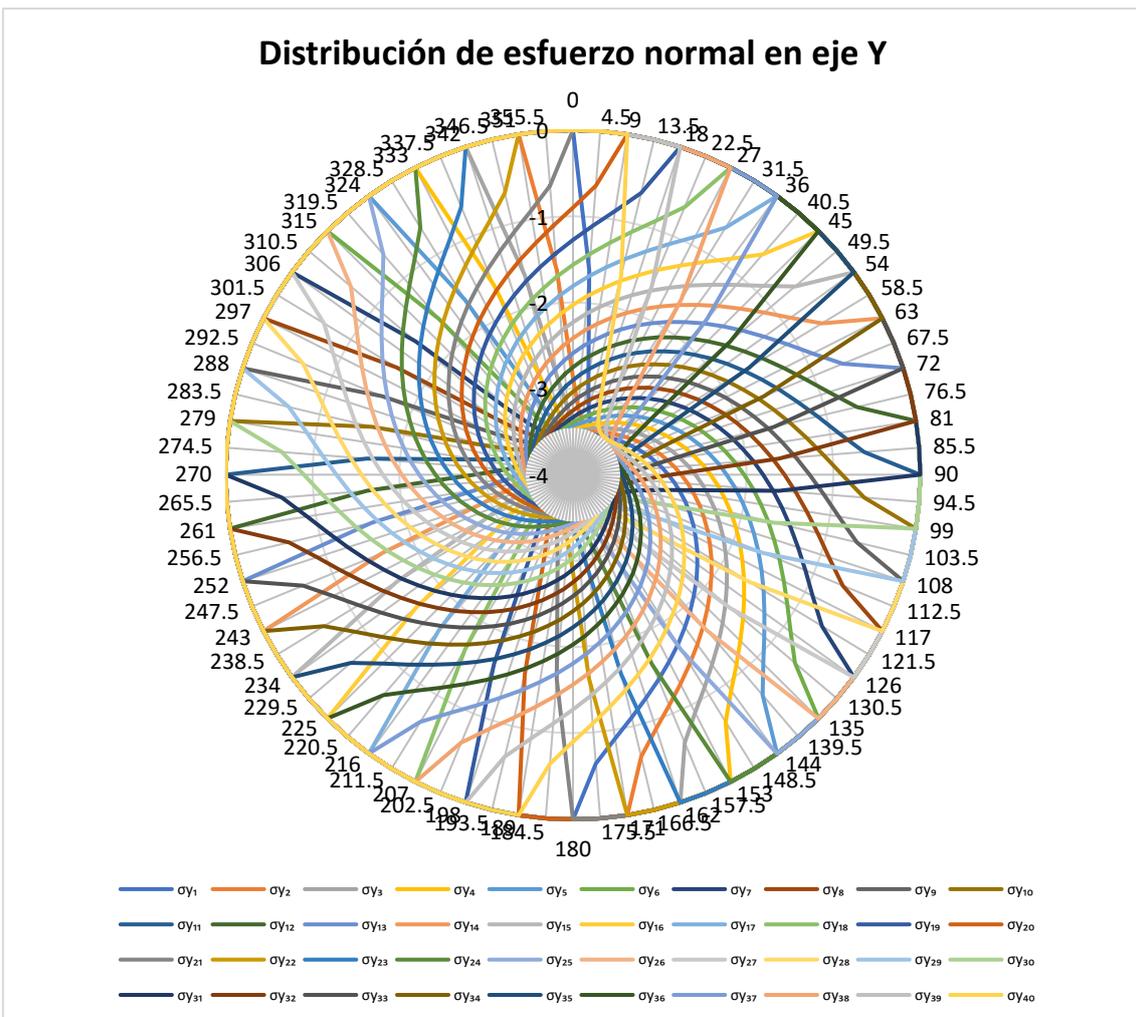


Figura 4. 28. Gráfica de distribución de esfuerzo normal en eje Y forma radial, reductor (b).

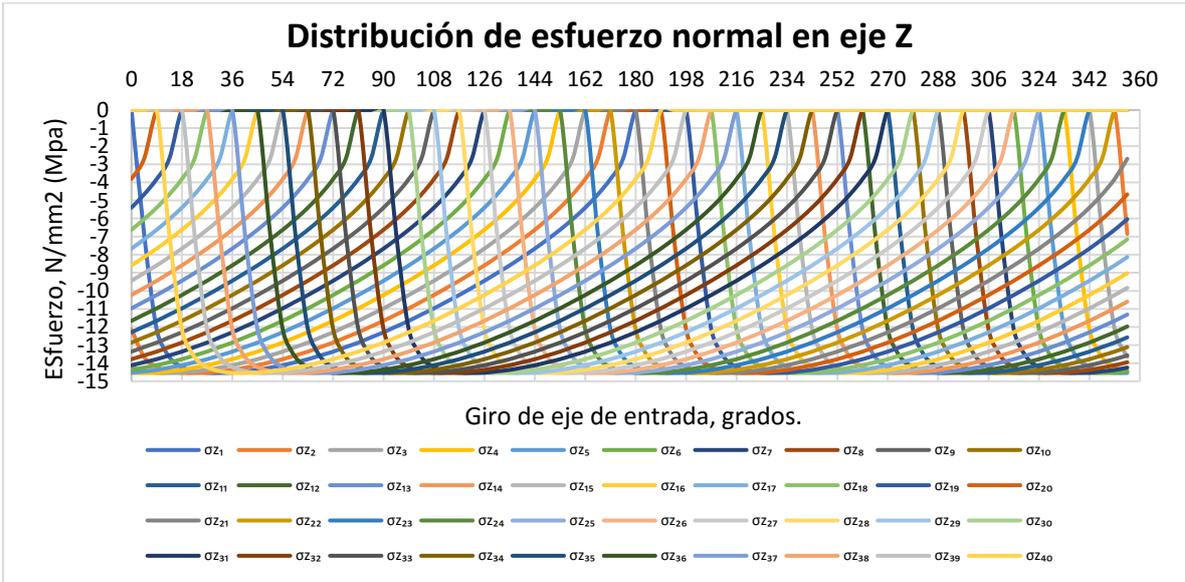


Figura 4. 29. Gráfica de distribución de esfuerzo normal en eje Z, reductor (b).

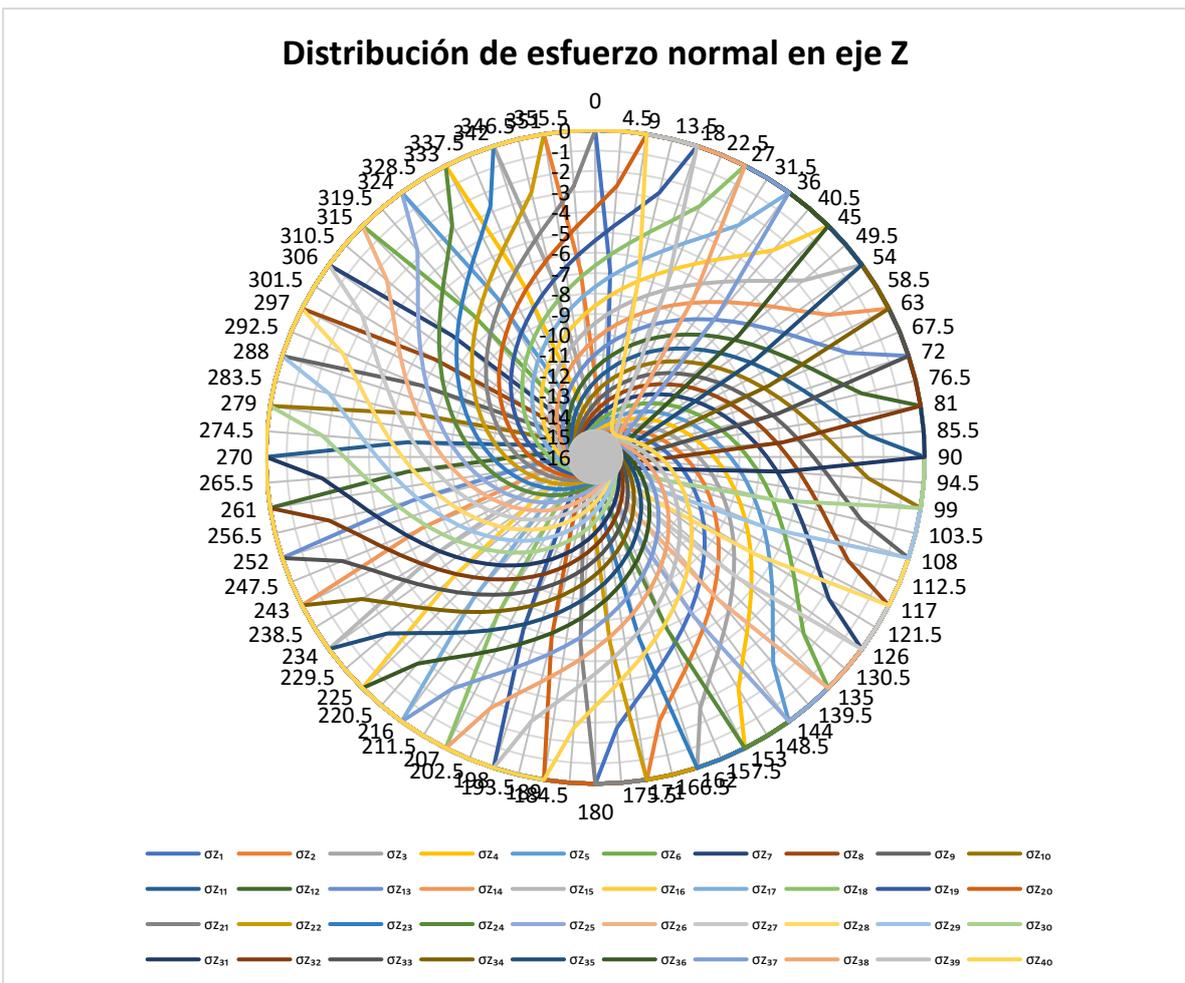


Figura 4. 30. Gráfica de distribución de esfuerzo normal en eje Z forma radial, reductor (b).

Se puede observar en las gráficas anteriores que el comportamiento del reductor (b) es similar al del reductor (a), de igual manera se puede apreciar que los esfuerzos más grandes suceden donde se encuentra la fuerza máxima, esto debido a que el cambio de la curvatura en el reductor (b) no es tan pronunciado como en el reductor (a).

Los valores máximos de esfuerzos obtenidos para el reductor (a) con los datos de diseño proporcionados son los siguientes:

- $\tau_{max} = 3.16 \text{ MPa}$
- $\sigma_x = -3.07 \text{ MPa}$
- $\sigma_y = -1.95 \text{ MPa}$
- $\sigma_z = -8.27 \text{ MPa}$

Los valores máximos de esfuerzos obtenidos para el reductor (b) con los datos de diseño proporcionados son los siguientes:

- $\tau_{max} = 5.55 \text{ MPa}$
- $\sigma_x = -5.39 \text{ MPa}$
- $\sigma_y = -3.43 \text{ MPa}$
- $\sigma_z = -14.54 \text{ MPa}$

El signo negativo de los esfuerzos normales se debe a que son de compresión. De igual manera se observa que el máximo esfuerzo normal se genera en el eje Z. Los esfuerzos máximos son más pequeños que el esfuerzo a la flexión del acero utilizado, por lo tanto, el reductor no fallará y el torque de salida será considerable para aplicaciones robustas. Lo más interesante que se resalta en los resultados es que estos se comportan de manera cicloidal, lo que deja en consideración que debe existir una ecuación que genere el comportamiento tanto de las fuerzas como de los esfuerzos.

4.5 Manufactura de un modelo de reductor cicloidal

Una vez desarrollada la generación de la geometría y el análisis de cargas dinámicas se procedió a la manufactura de un modelo de reductor cicloidal, pudiendo generar una familia de estos al poder modificar la relación de transmisión, cambiando el engrane cicloidal y el número de rodillos. Se manufacturaron 2 engranes cicloidales diferentes, Fig. 4.31, el material utilizado para ambos fue acrílico, fabricado por el proceso de corte laser, con lo cual se pudo generar la geometría con una precisión considerable.



Figura 4. 31. Manufactura de familia de engranes cicloidales parametrizados

El diseño y modelado de las piezas se desarrolló en el software CAD SolidWorks®, en la Fig. 4.32 se muestra el resultado del modelado, siendo un aproximado de 50 piezas modeladas. Algunos de los planos más importantes se muestran en los anexos.

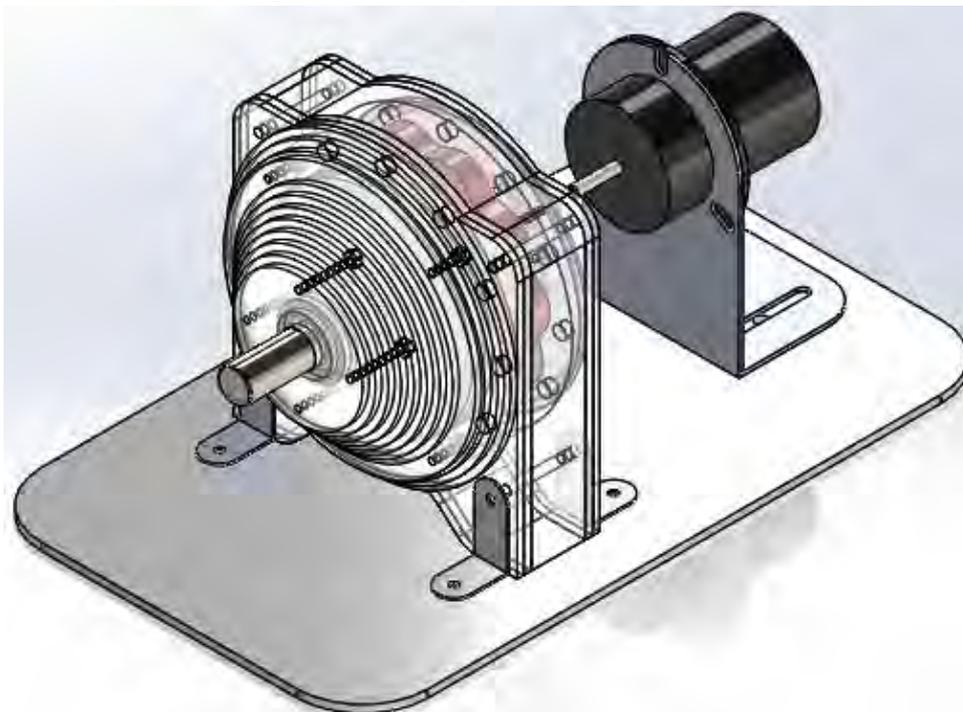


Figura 4. 32. Modelado de reductor cicloidal

Las piezas manufacturadas se realizaron en acrílico, en el proceso de corte laser, y acero inoxidable, utilizando el torneado para la generación de ejes y rodillos, además de utilizar rodamientos, seguros y tornillería, en la Fig. 4.33 se muestran las piezas manufacturadas.



Figura 4. 33. Piezas manufacturadas de reductor cicloidal

El modelo terminado incluye un motor de 12v, una batería de 12v y un PWM (variador de frecuencia) para regular la velocidad del motor. La Fig. 4.34 muestra el resultado final de la construcción del modelo del reductor cicloidal. Los resultados obtenidos en el modelo fueron los esperados, tanto en movimiento, reducción y fuerza. Con este modelo se demuestra que la metodología utilizada es basta y suficiente para manufacturar familias de reductores cicloidales,

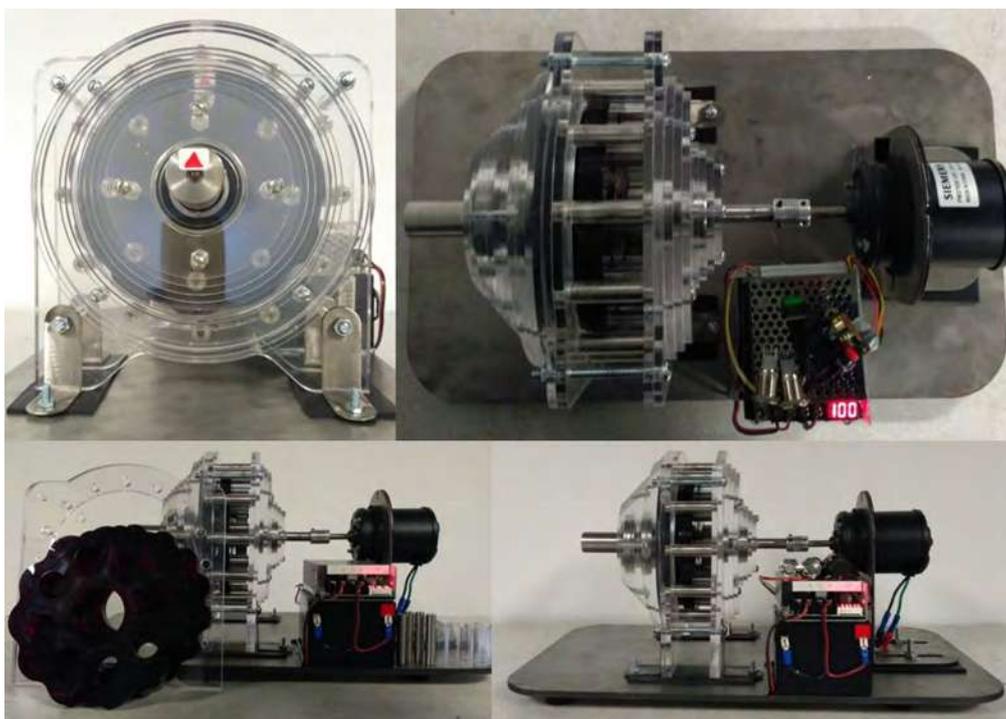


Figura 4. 34. Modelo de reductor cicloidal final

Capítulo 5. Conclusiones y recomendaciones

5.1 Conclusiones

Como conclusiones derivadas del presente trabajo de tesis, se pueden mencionar las siguientes:

- La metodología mostrada es suficiente y válida para analizar el comportamiento de las cargas dinámicas en reductores cicloidales y establecer relaciones entre ellas y sus características geométricas, permitiendo establecer dependencias que facilitan sus usos en diseños posteriores, de forma tal que se logren mejoras en los mismos, en cuanto a su capacidad de carga y eficiencia.
- Se puede observar que el desfase de la distribución de cargas y esfuerzos sucede siempre con una separación igual a $2\pi/Z_b$, de forma similar, la carga máxima y los esfuerzos cortantes y normales máximos suceden con este desfase. Además, se encuentra que cada 360° de giro en el eje de entrada el comportamiento será el mismo, el cual se llevará a cabo mientras que el engrane cicloidal gira $2\pi/Z_g$.
- Los esfuerzos máximos pueden variar de posición en cada instante, esto debido a los cambios de curvatura en el engrane cicloidal, de igual manera existen dos puntos de inflexión en cada giro completo del eje de entrada, estos se pueden encontrar igualando la ecuación de curvatura a cero, en ese punto la ecuación de esfuerzo de contacto se comporta como un cilindro y una superficie plana.
- Para el diseño del reductor cicloidal se puede usar la metodología propuesta, basta con conocer los datos técnicos del motor y de la máquina donde se utilizará. Por ello este trabajo servirá para construir reductores cicloidales de manera más metodológica.
- Gracias a la metodología establecida se desarrolló el diseño, manufactura y construcción de una familia de reductores cicloidales, dicho modelo es capaz de modificarse para generar cuatro diferentes relaciones de transmisión, comprobando que es posible diseñar cualquier familia de reductores.

5.2 Recomendaciones y/o trabajos futuros

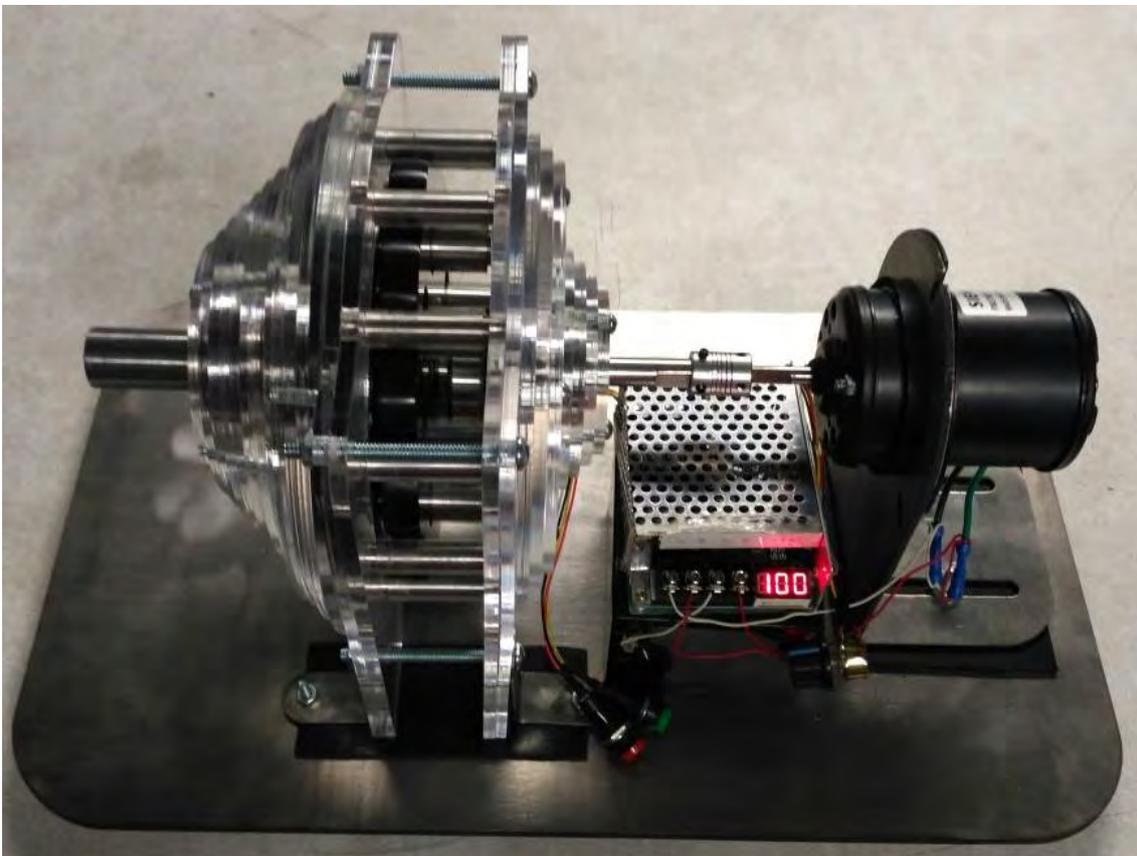
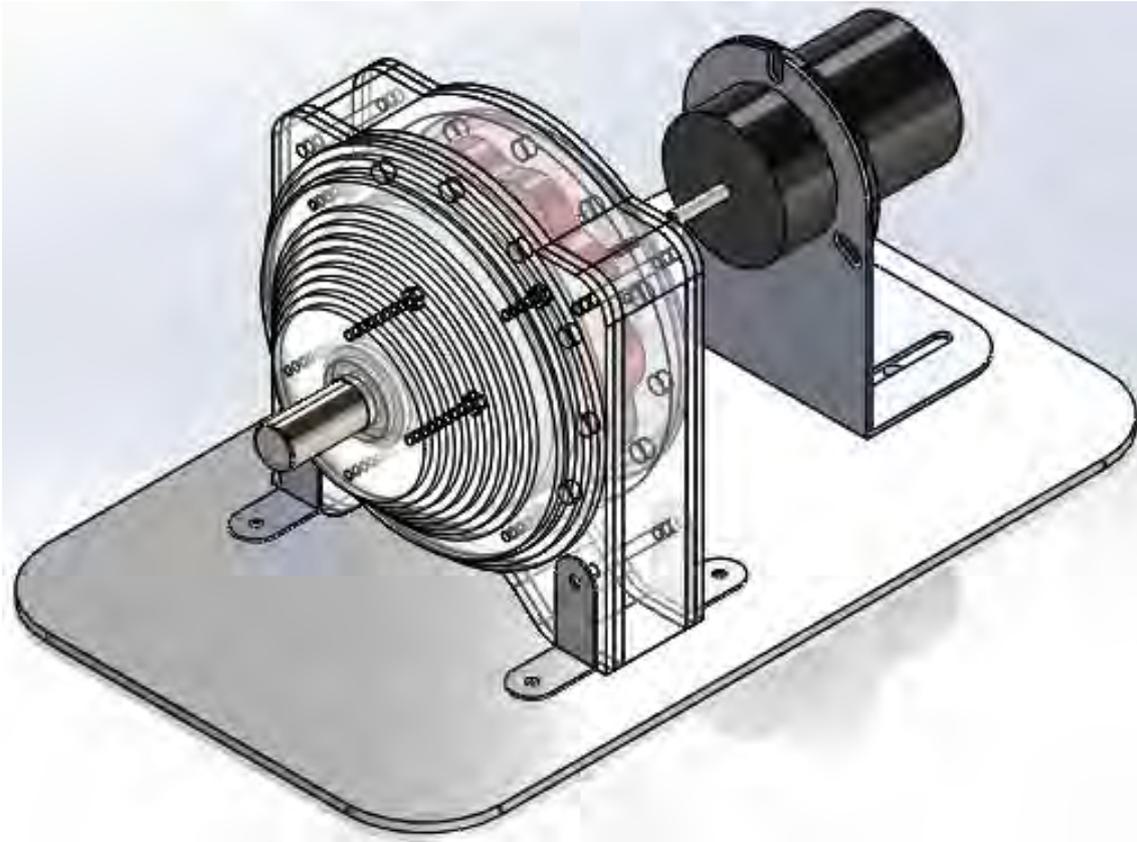
- Manufacturar una familia de reductores cicloidales.
- Hacer pruebas a los reductores cicloidales para validar la metodología.
- Encontrar expresiones aún más simples que permitan conocer el comportamiento de las cargas dinámicas en reductores cicloidales, así como de los esfuerzos.

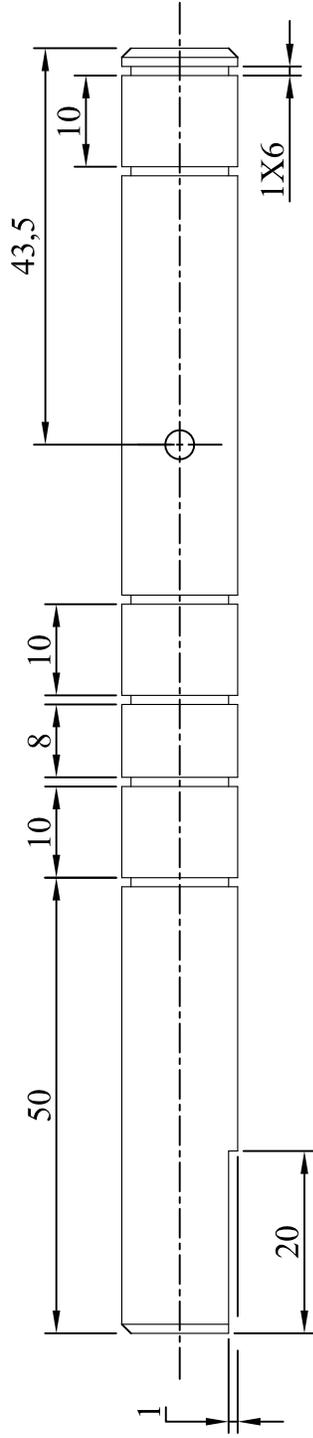
Referencias

- Anamaria Dăscălescu, I. C. (2015). The study of the reactions variation on the cycloid reducer satellite gear depending on the number of the roller teeth in gearing. *Annals of the University of Petroșani, Mechanical Engineering*.
- Borisov, P. (2012). Design of a Planetary-Cyclo-Drive Speed Reducer Cycloid Stage , Geometry , Element Analyses.
- Chen, B., Fang, T., Li, C., & Wang, S. (2008). Gear geometry of cycloid drives. *Science in China Series E: Technological Sciences*, 51(5), 598-610. doi: 10.1007/s11431-008-0055-3
- Chen, B., Zhong, H., Liu, J., Li, C., & Fang, T. (2012). Generation and investigation of a new cycloid drive with double contact. *Mechanism and Machine Theory*, 49, 270-283. doi: 10.1016/j.mechmachtheory.2011.10.001
- F.J. Rubio, F. J. V., J.L. Suñer, V. Mata. (2010). Tren de engranajes planetarios tipo Cyclo. *XVIII CONGRESO NACIONAL DE INGENIERÍA MECÁNICA*.
- F.L. Litvin*, A. M. E., M. De Donno. (1997). Computerized determination of singularities and envelopes to families of contact lines on gear tooth surfaces.
- Faydor L. Litvin, P.-H. F. (1994). Computerized design and generation of cycloidal gearings. *Elsevier Science Ltd*, 31, 891-911.
- Hibbeler, R. C. (2010). Dinamica 12 Edicion.
- Hong-Liu, Y., Jin-hua, Y., Xin, H., & Ping, S. (2013). Study on teeth profile modification of cycloid reducer based on non-Hertz elastic contact analysis. *Mechanics Research Communications*, 48, 87-92. doi: 10.1016/j.mechrescom.2012.12.007
- Hong-Sen Yan, T.-S. L. (2002). Geometry design of an elementary planetary gear train with cylindrical tooth-profile. *Mechanism and Machine Theory*.
- Hsieh, C.-F. (2014). The effect on dynamics of using a new transmission design for eccentric speed reducers. *Mechanism and Machine Theory*, 80, 1-16. doi: 10.1016/j.mechmachtheory.2014.04.020
- Hsieh, C.-F. (2015). Traditional versus improved designs for cycloidal speed reducers with a small tooth difference: The effect on dynamics. *Mechanism and Machine Theory*, 86, 15-35. doi: 10.1016/j.mechmachtheory.2014.11.013
- José Chávez, e. a. (2017a). Análisis de la magnitud y distribución de las fuerzas dinámicas dentro de un reductor cicloidal. *12 Congreso Estatal de Ciencia, Tecnología e Innovación*.

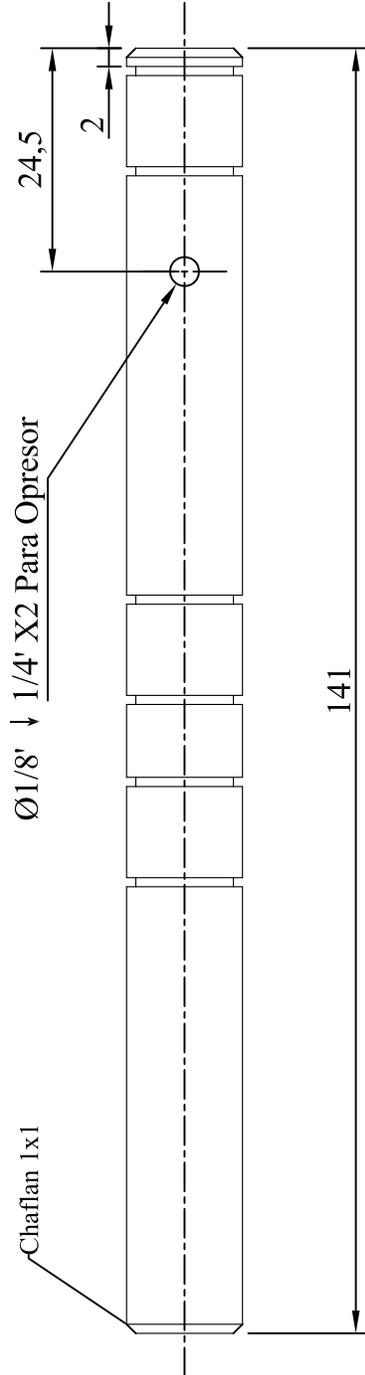
- José Chávez, e. a. (2017b). Determinación de la distribución y posición de las fuerzas de contacto durante el funcionamiento de reductores cicloidales. *Memorias del Congreso Internacional de Investigación Academia Journals Celaya 2017*, 9, 1193-1198.
- José Chávez, e. a. (2017c). Diseño parametrizado de serie de reductores cicloidales. *Memorias del XXIII Congreso Internacional Anual de la SOMIM*, 7.
- Lai, T.-S. (2005). Design and machining of the epicycloid planet gear of cycloid drives. *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 28(7-8), 665-670. doi: 10.1007/s00170-004-2423-x
- Li, S. (2014). Design and strength analysis methods of the trochoidal gear reducers. *Mechanism and Machine Theory*, 81, 140-154. doi: 10.1016/j.mechmachtheory.2014.07.001
- Norton, R. L. (2013). Diseño de Maquinaria Síntesis y Análisis de Maquinas y Mecanismos 5 edición.
- Richard G. Budynas, J. K. N. (2015). Shigley's Mechanical Engineering Design 10 Edition.
- S.V. Thube, T. R. B. (2012). Dynamic Analysis of a Cycloidal Gearbox Using Finite Element Method.
- Shin, J.-H., & Kwon, S.-M. (2006). On the lobe profile design in a cycloid reducer using instant velocity center. *Mechanism and Machine Theory*, 41(5), 596-616. doi: 10.1016/j.mechmachtheory.2005.08.001
- Shyi-Jeng Tsai, C.-H. H., Hsian-Yu Yeh and Wei-Jhen Huang. (2015). Loaded Tooth Contact Analysis of Cycloid Planetary Gear Drives. *The 14th IFToMM World Congress, Taipei, Taiwan*. doi: 10.6567/IFToMM.14TH.WC.OS6.014

Anexos

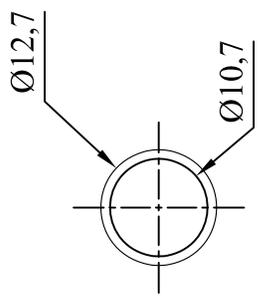
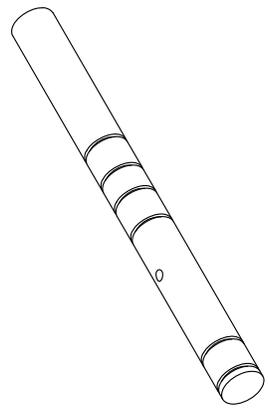




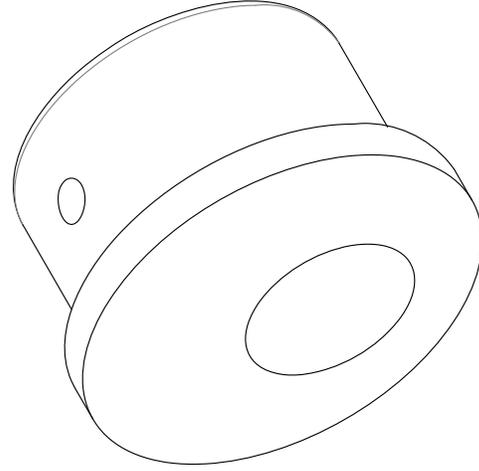
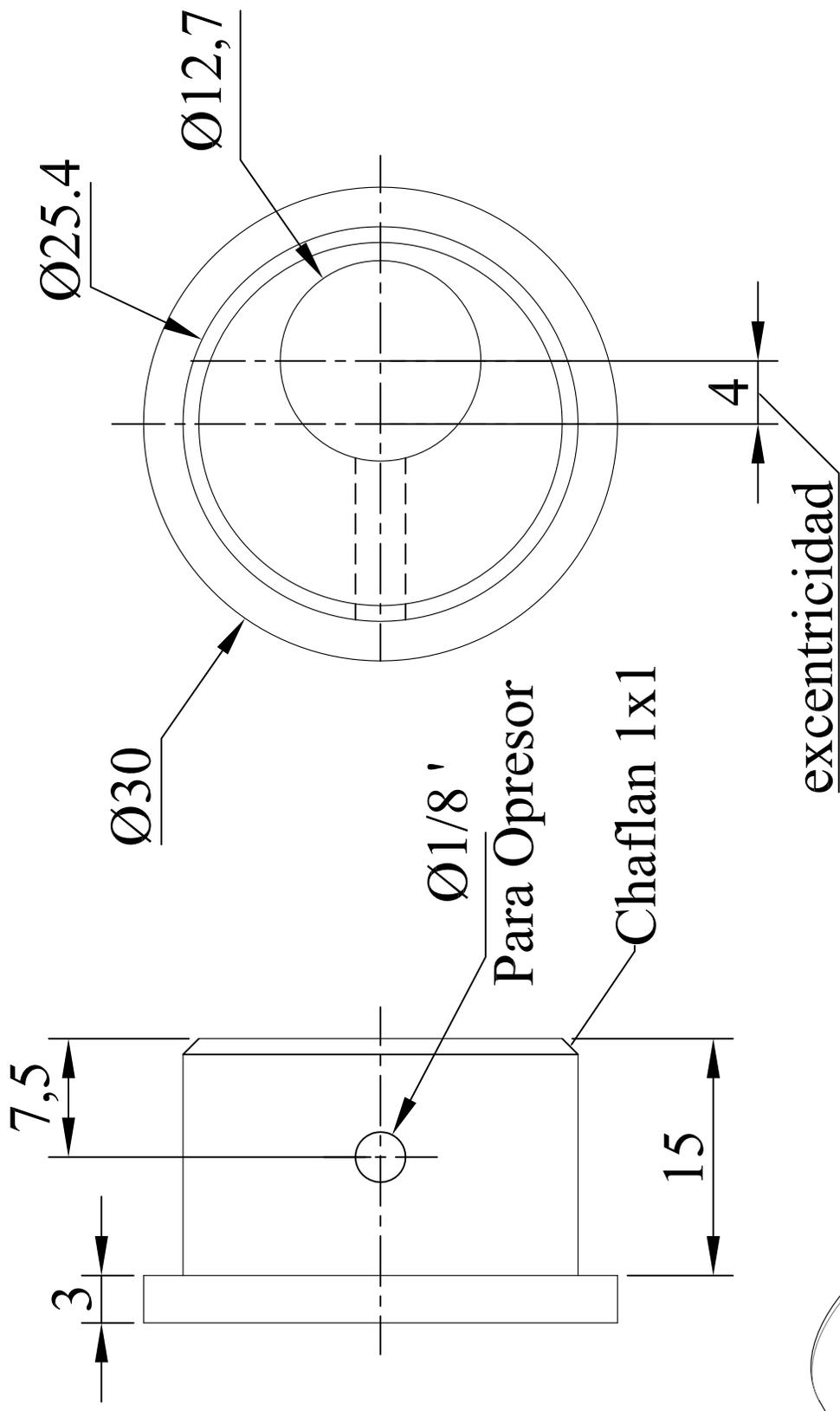
Ajustar a Balero de 1/2 in



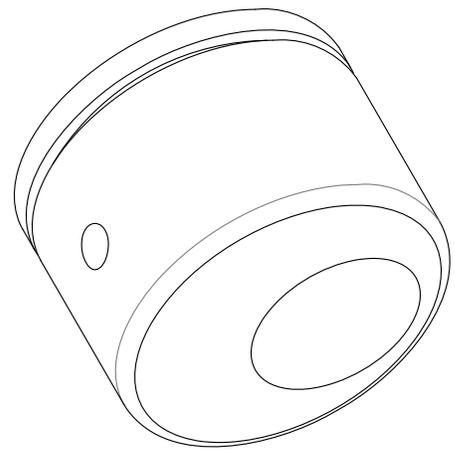
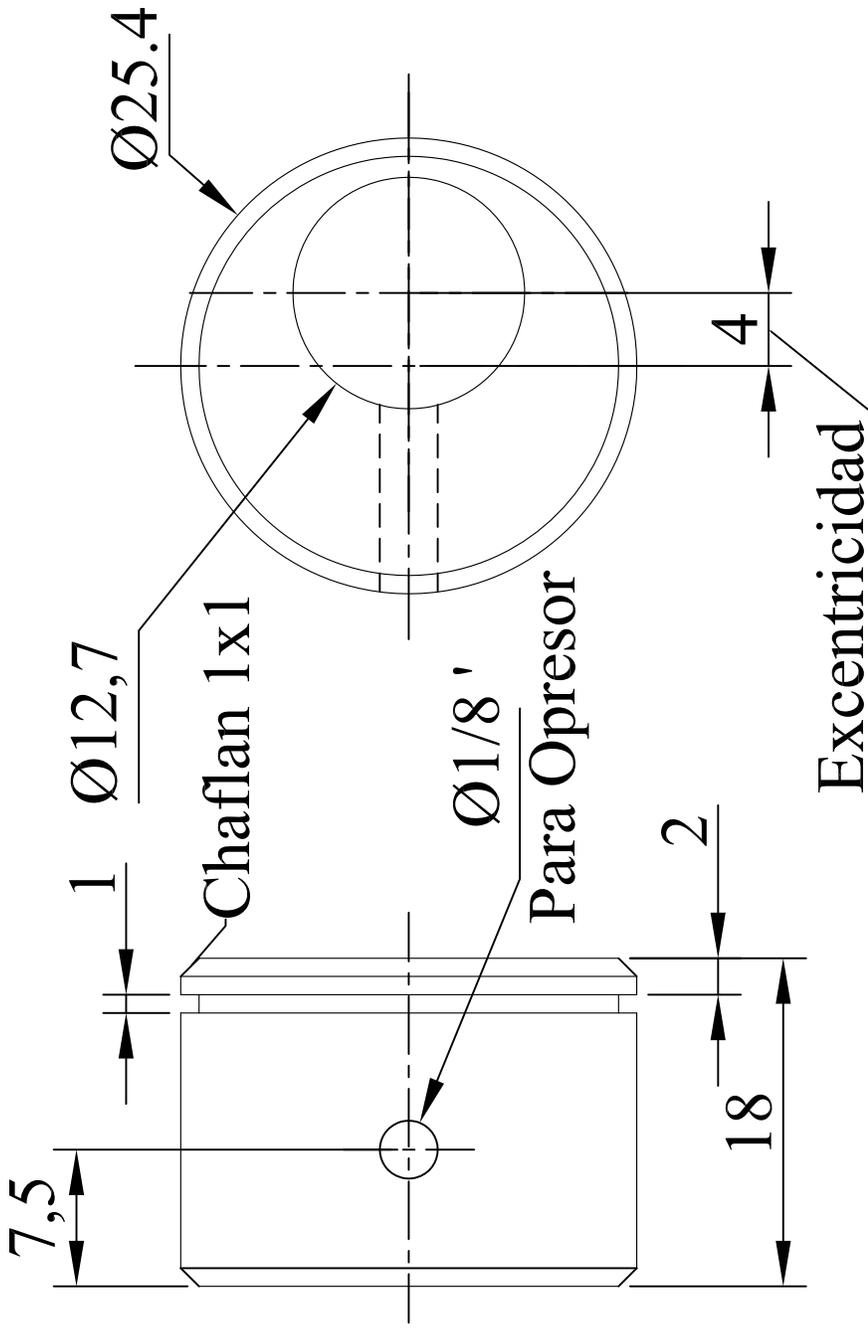
Ø1/8' ↓ 1/4' X2 Para Opresor



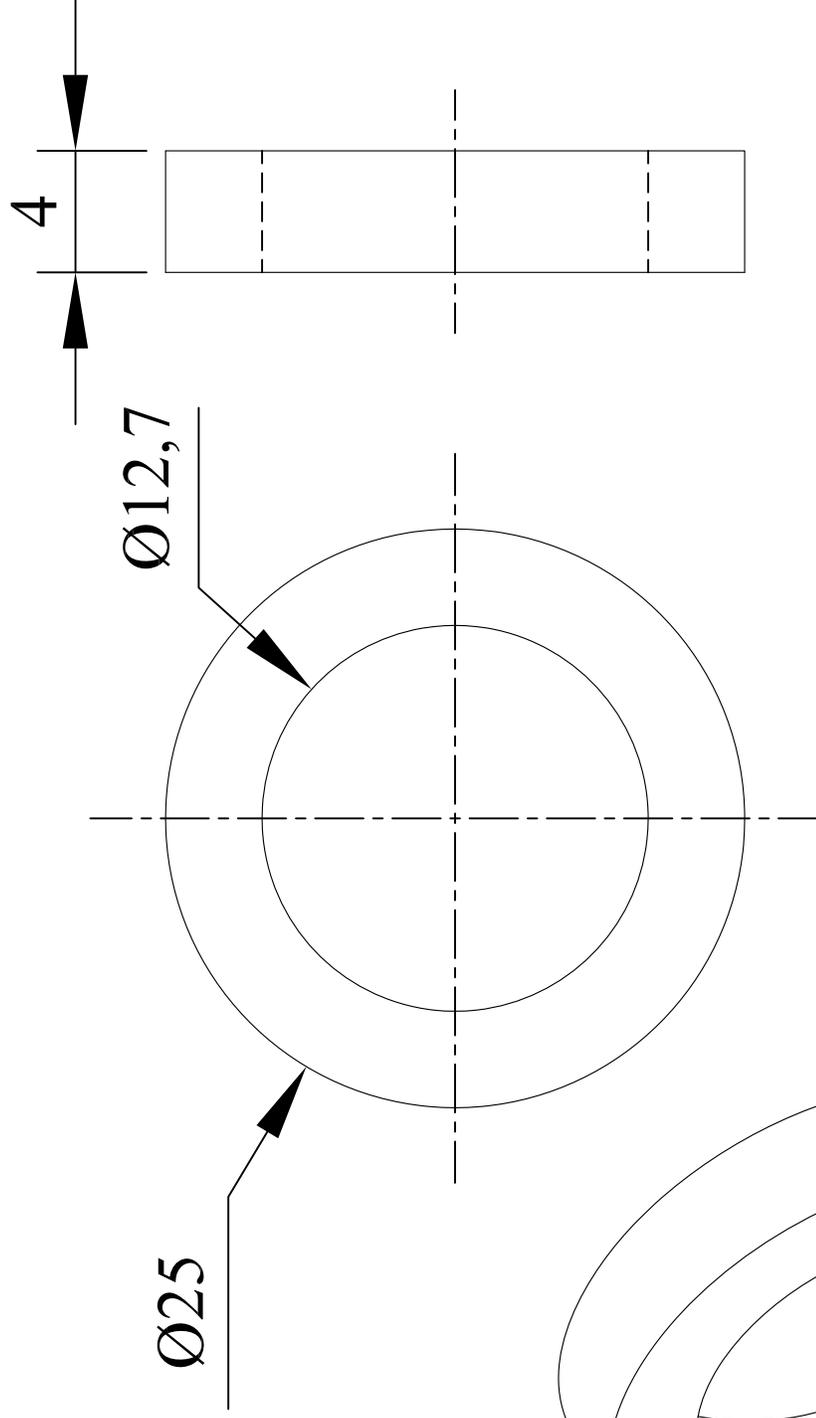
	
Dibujado:	Nombre: Ing. José Alejandro Chávez Cortés
Comprobado:	Ing. José Alejandro Chávez Cortés
Conjunto:	Flecha de Entrada
Título:	Eje
Notas:	Material: acero inoxidable
Fecha:	23/11/17
Fecha:	23/11/17
Escala:	mm
Cotas:	mm
No. Plano:	A-001



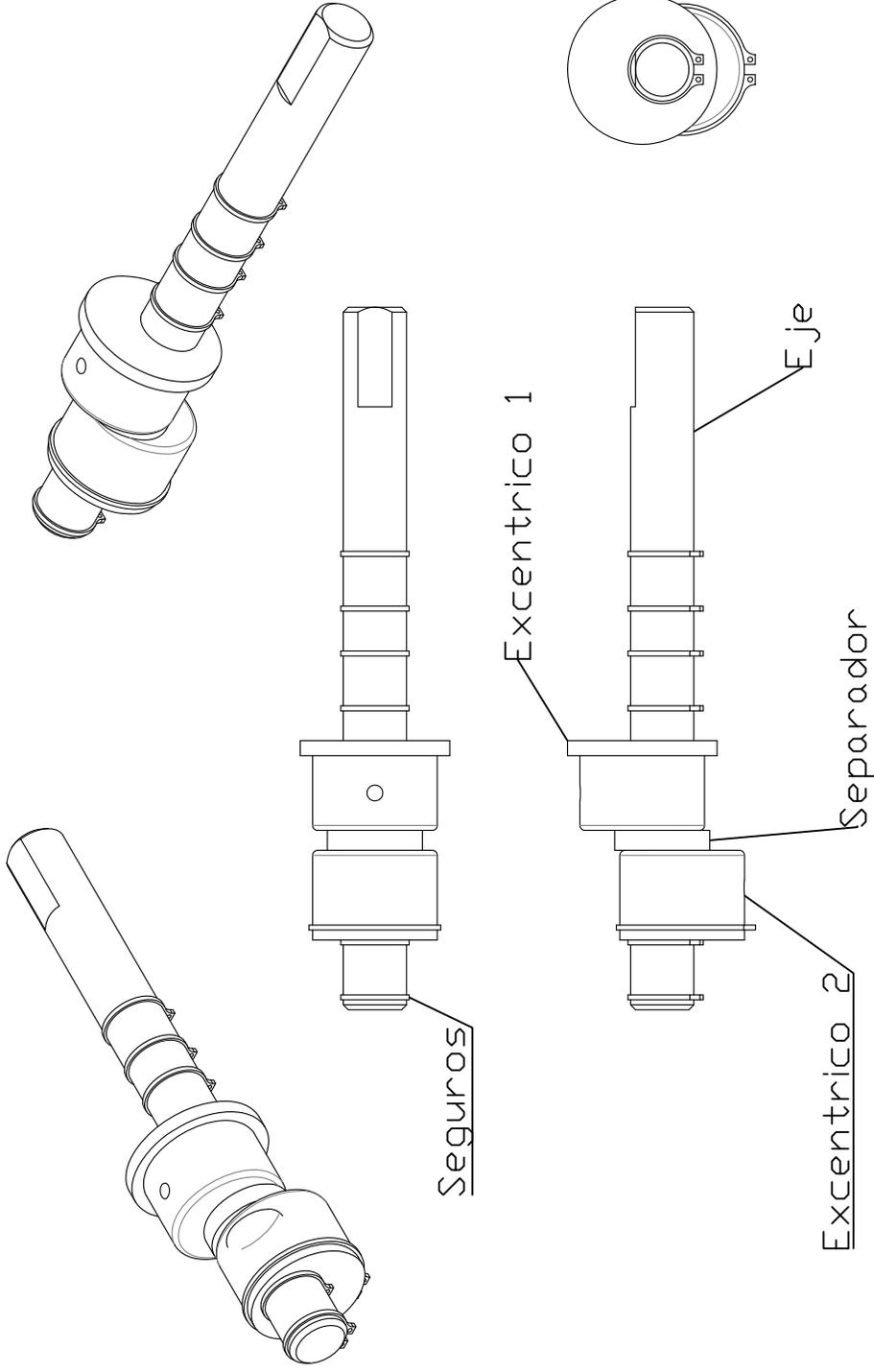
		Nombre: Ing. José Alejandro Chávez Cortés	
Dibujado: 23/11/17	Fecha: 23/11/17		
Comprobado: 23/11/17	Nombre: Ing. José Alejandro Chávez Cortés		
Conjunto: Flecha de Entrada		Escala:	
Título: Excentricidad 1		Cotas: mm	
Notas: Material. acero inoxidable		No. Plano: A-002	



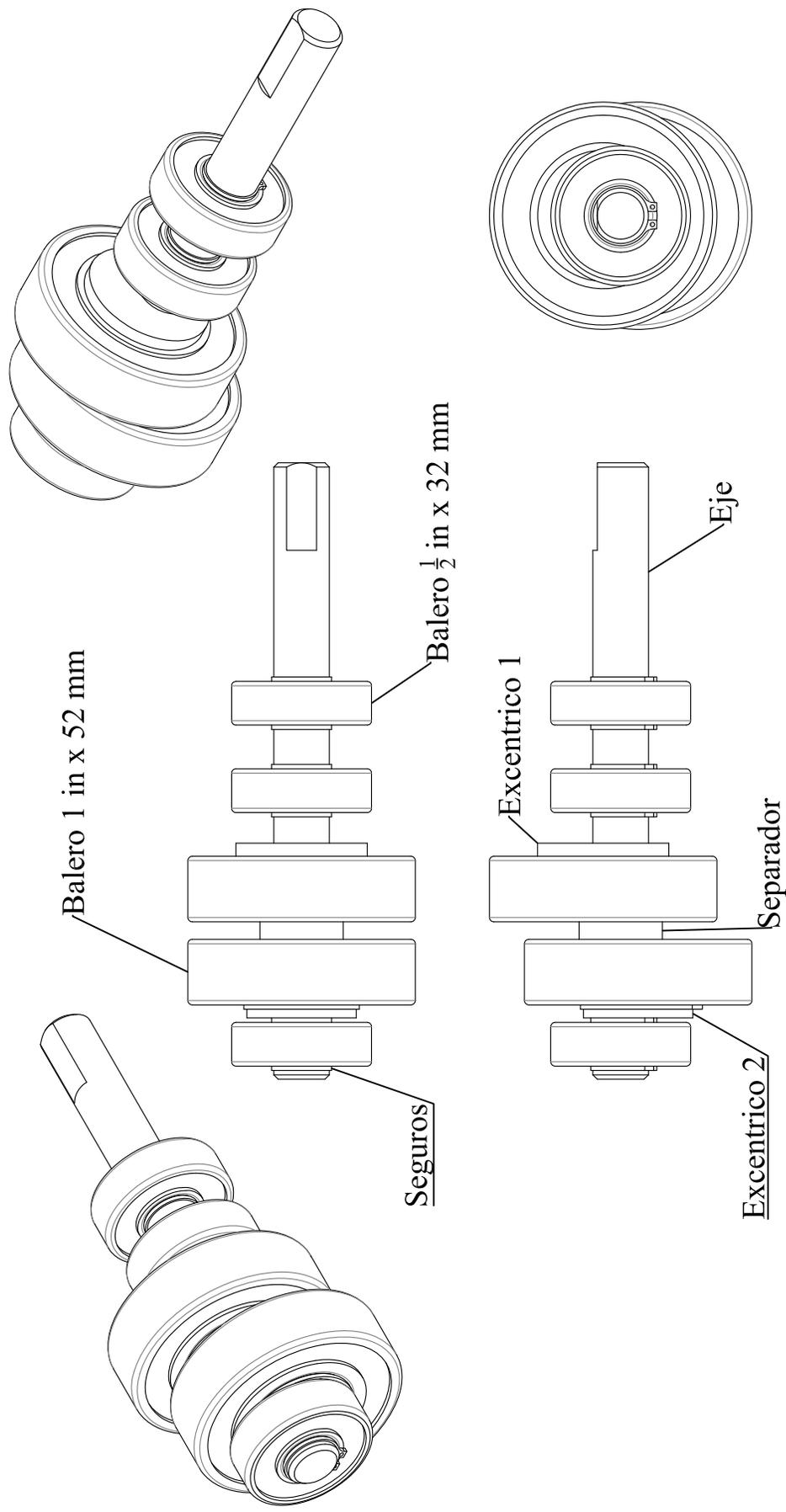
	Fecha:	Nombre:	
Dibujado:	23/11/17	Ing. José Alejandro Chávez Cortés	
Comprobado:	23/11/17	Ing. José Alejandro Chávez Cortés	Escala:
Conjunto:	Flecha de Entrada		Cotas:
Título:	Excentricidad 2		mm
Notas:	Material: acero inoxidable		No. Plano:
			A-003



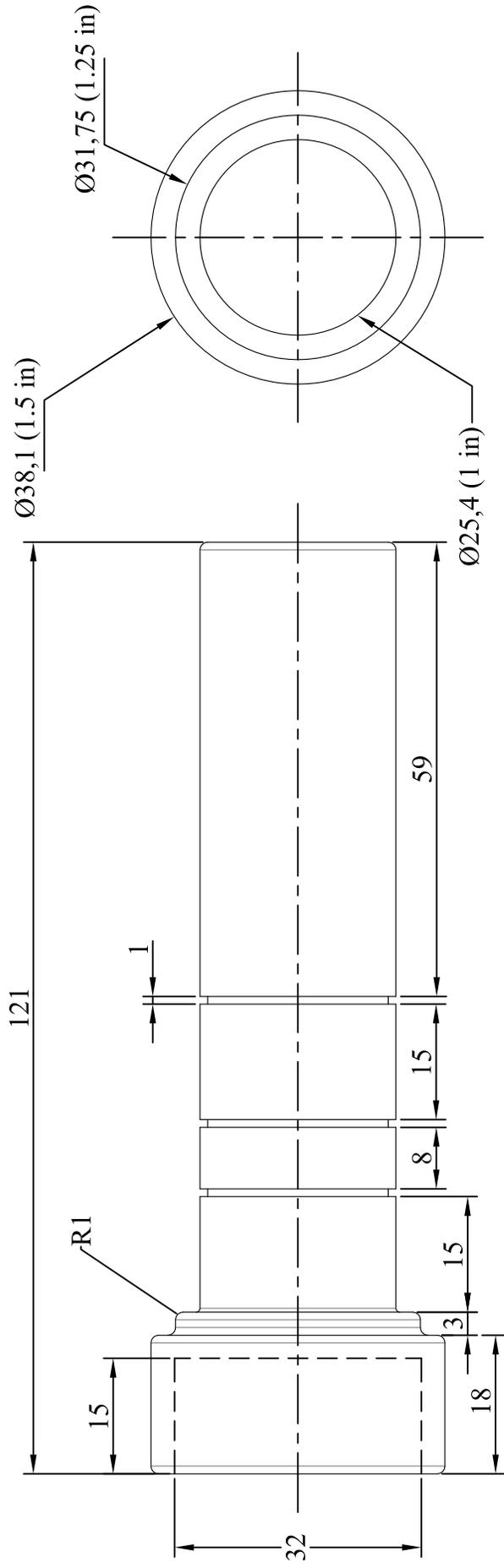
	Fecha:	Nombre:	
Dibujado:	23/11/17	Ing. José Alejandro Chávez Cortés	
Comprobado:	23/11/17	Ing. José Alejandro Chávez Cortés	Escala:
Conjunto:	Flecha de Entrada		Cotas:
Título:	Separador Excéntricos		mm
Notas:	Material: acero inoxidable		No. Plano: A-004



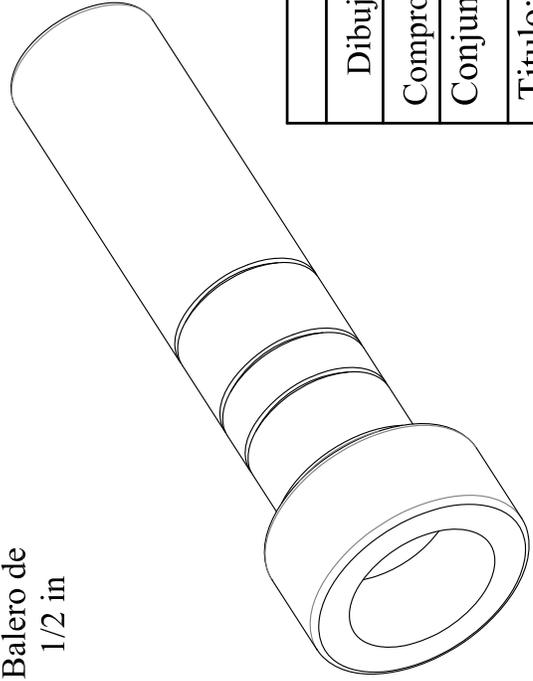
						
Dibujado:	23/11/17	Nombre:	Ing. José Alejandro Chávez Cortés			
Comprobado:	23/11/17		Ing. José Alejandro Chávez Cortés		Escala:	
Conjunto:	Flecha de Entrada					
Título:	Ensamble sin Baleros					Cotas:
Notas:						mm
					No. Plano:	A-005



		Nombre: Ing. José Alejandro Chávez Cortés	
Dibujado: 23/11/17	Fecha: 23/11/17		
Comprobado: 23/11/17	Nombre: Ing. José Alejandro Chávez Cortés		
Conjunto: Flecha de Entrada			
Titulo: Ensamble con Baleros			
Notas:			
Escala:		mm	
Cotas:		mm	
No. Plano:		A-006	

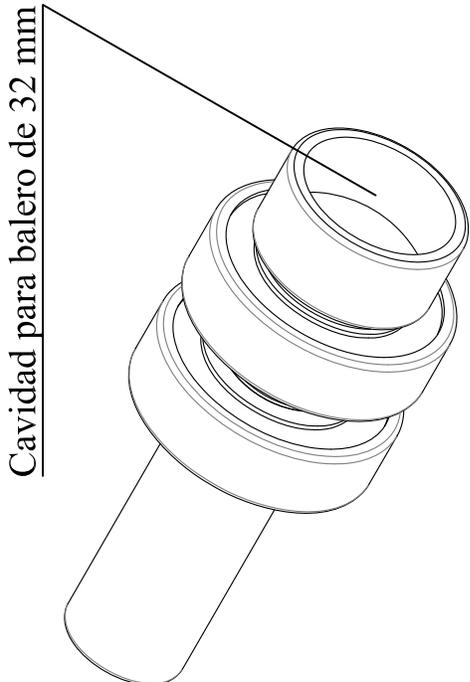
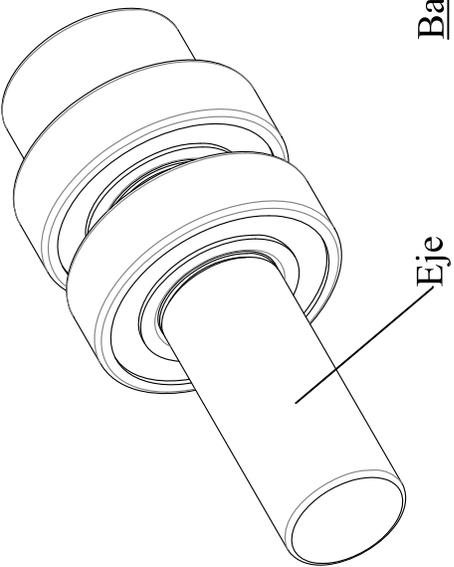


Ajustar a
Balero de
1/2 in

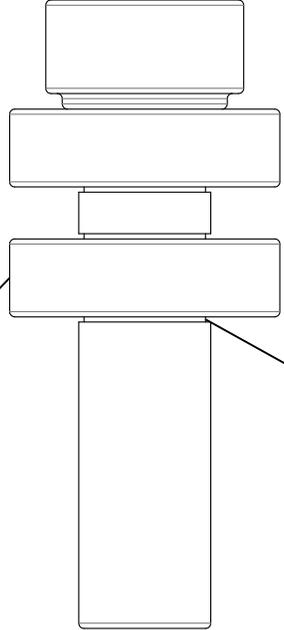
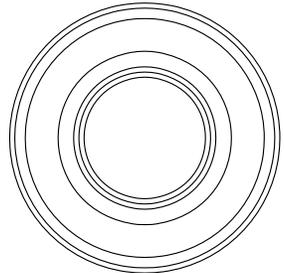


Dibujado:		Nombre:	
23/11/17		Ing. José Alejandro Chávez Cortés	
Comprobado:		Escala:	
23/11/17		Cotas:	
Conjunto:		No. Plano:	
Flecha de Salida		B-001	
Titulo:		Eje	
Notas:		Material: acero inoxidable	





Balero 1 in x 52 mm

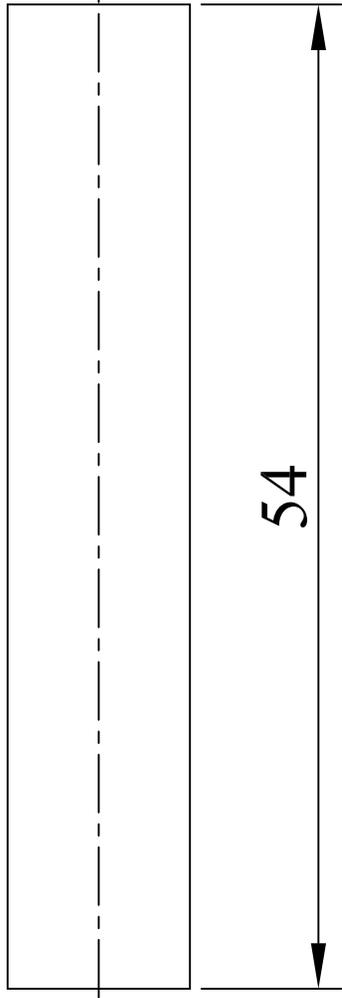
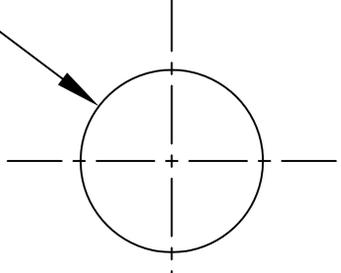


Seguros

	Fecha:	Nombre:
Dibujado:	23/11/17	Ing. José Alejandro Chávez Cortés
Comprobado:	23/11/17	Ing. José Alejandro Chávez Cortés
Conjunto:	Flecha de Salida	
Título:	Ensamble Con Baleros	
Notas:		
		Escala:
		Cotas: mm
		No. Plano: B-002



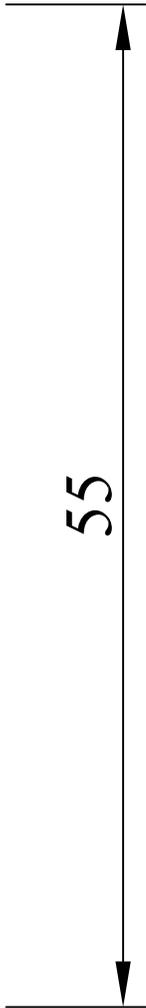
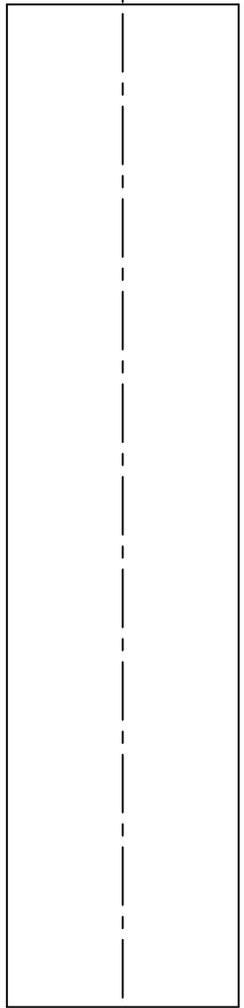
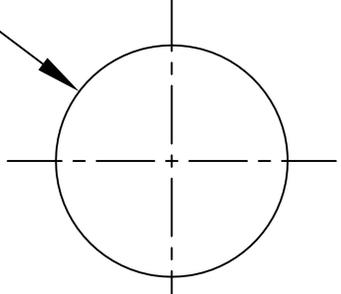
Ø10



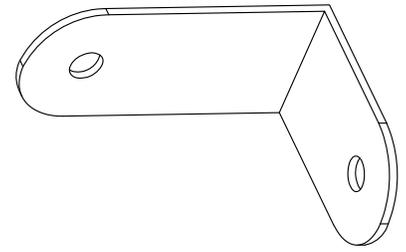
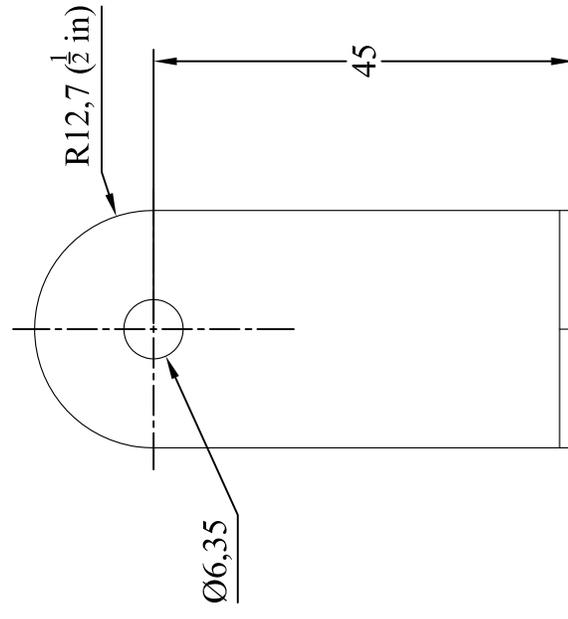
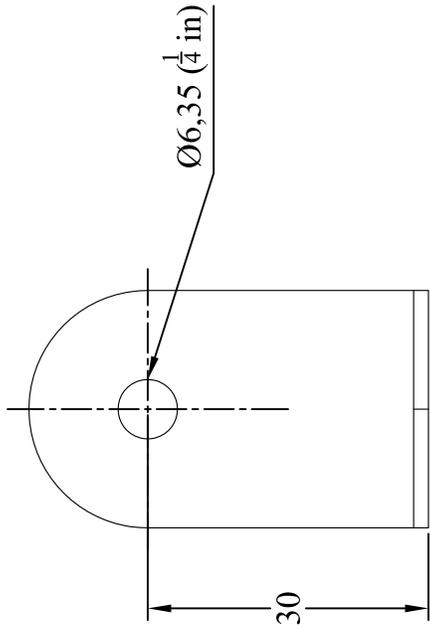
54

	Fecha:	Nombre:	
Dibujado:	23/11/17	Ing. José Alejandro Chávez Cortés	
Comprobado:	23/11/17	Ing. José Alejandro Chávez Cortés	Escala:
Conjunto:	Pines		Cotas: mm
Título:	Pin para engrane		No. Plano: C-001
Notas:	Material: acero inoxidable (16 piezas)		

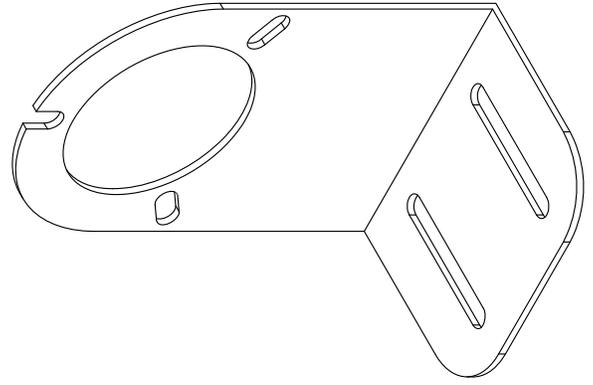
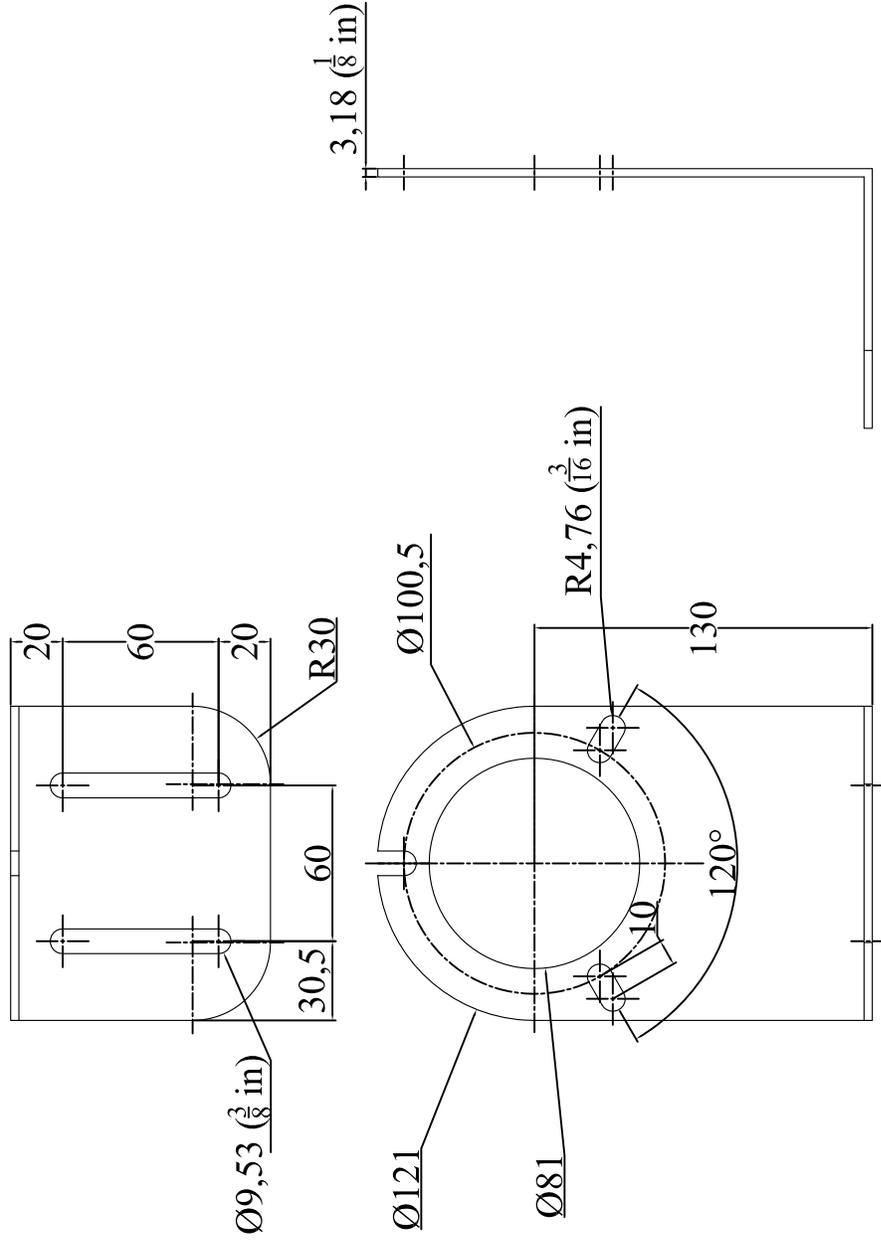
Ø12,7



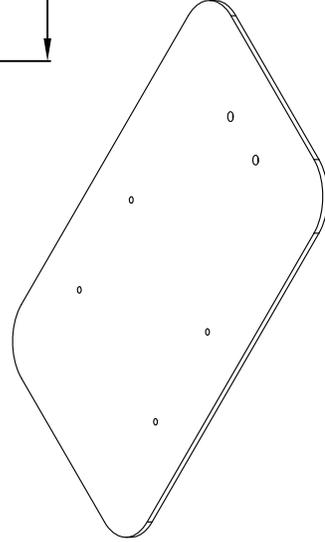
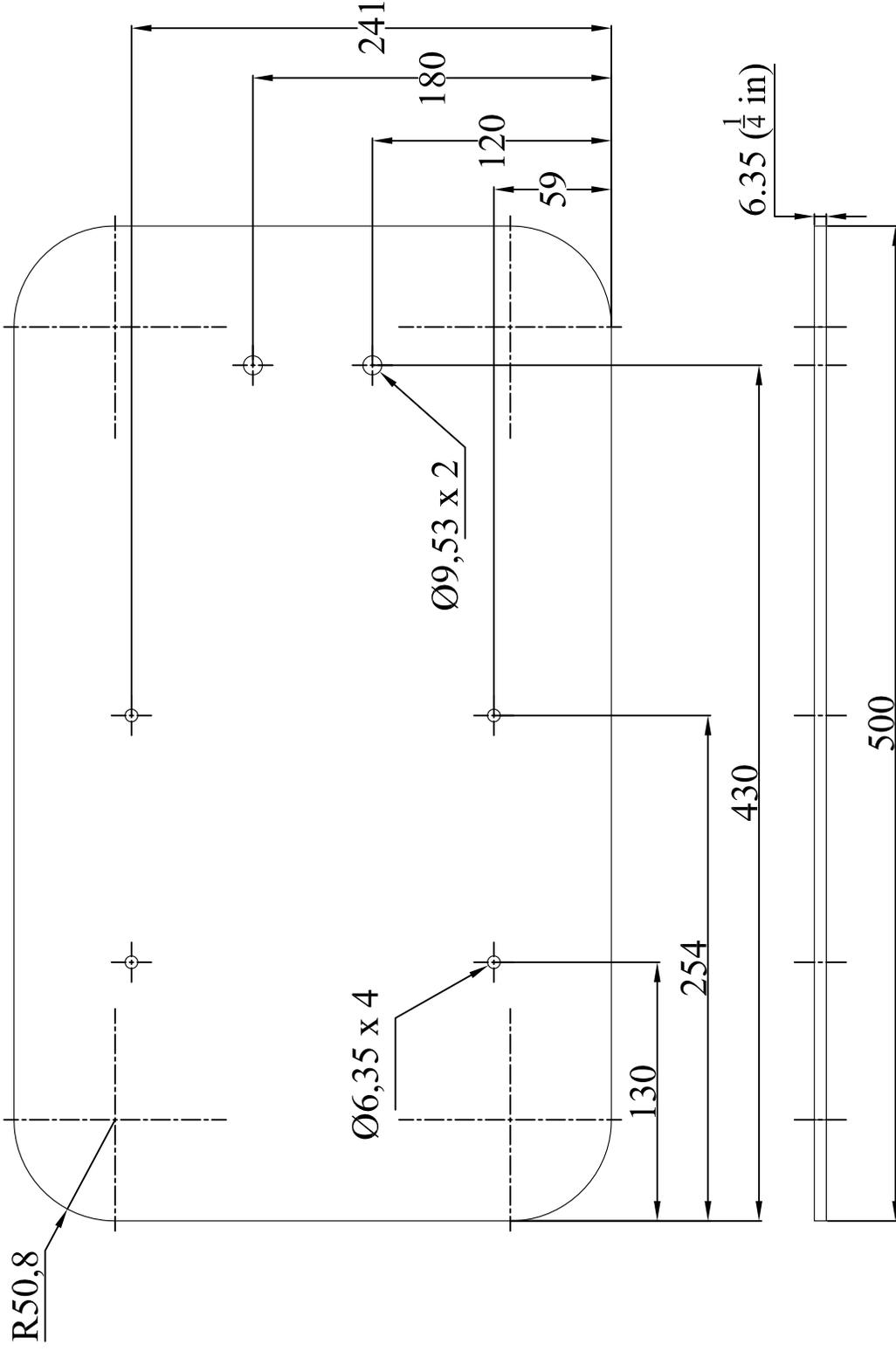
	Fecha:	Nombre:	
Dibujado:	23/11/17	Ing. José Alejandro Chávez Cortés	
Comprobado:	23/11/17	Ing. José Alejandro Chávez Cortés	Escala:
Conjunto:	Pines		Cotas:
Título:	Pin Salida		mm
Notas:	Material: acero inoxidable (8 piezas)		No. Plano: C-002



Dibujado:	23/11/17	Nombre:	Ing. José Alejandro Chávez Cortés
Comprobado:	23/11/17		Ing. José Alejandro Chávez Cortés
Conjunto:		Soportes	
Titulo:		Orejas	
Notas:		Material: acero Inoxidable	
		Escala:	
		Cotas:	mm
		No. Plano:	D-001

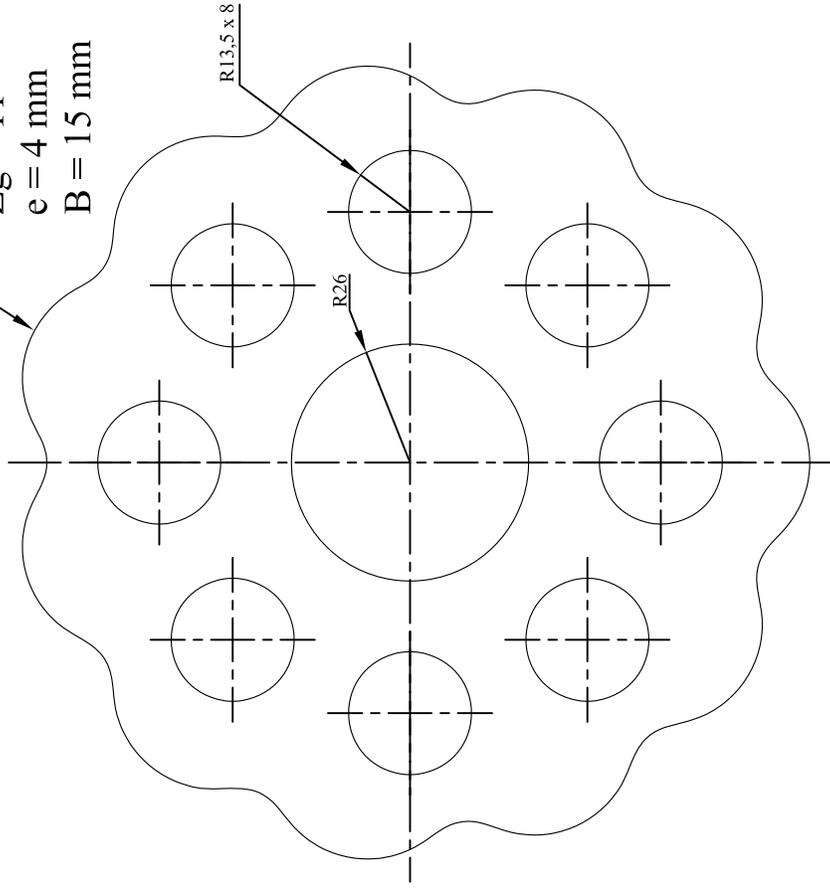


	
Dibujado:	Nombre: Ing. José Alejandro Chávez Cortés
Comprobado:	Ing. José Alejandro Chávez Cortés
Conjunto:	Soportes
Título:	Soporte Motor
Notas:	Material: acero inoxidable
Fecha:	Escala:
23/11/17	
23/11/17	Cotas: mm
	No. Plano: D-002

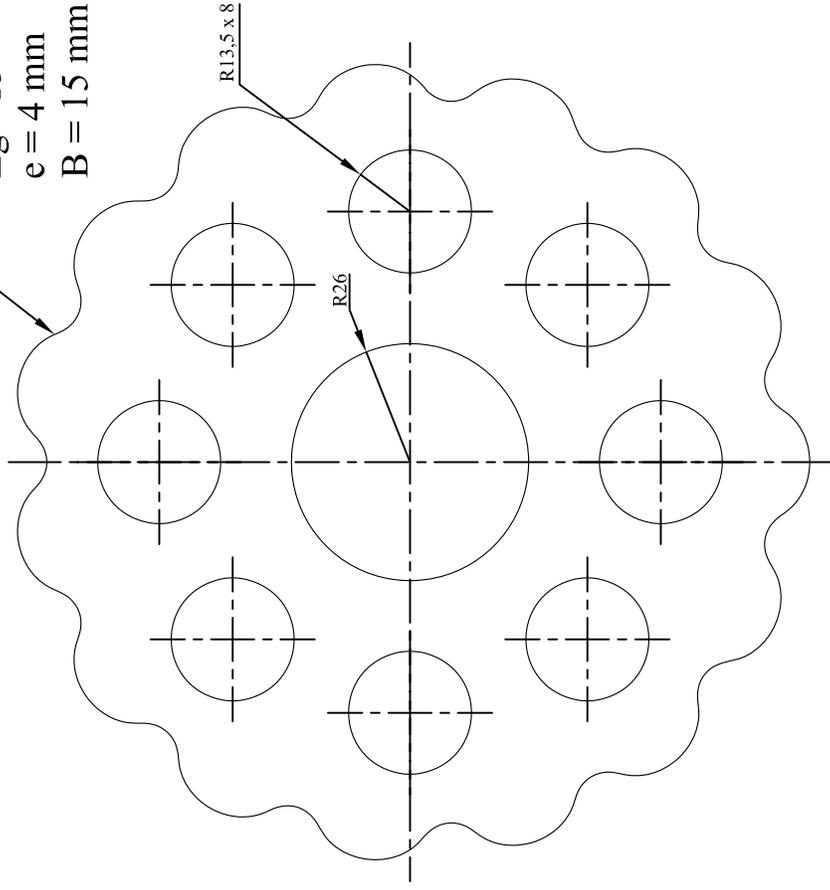


	
Dibujado:	Nombre:
23/11/17	Ing. José Alejandro Chávez Cortés
Comprobado:	Ing. José Alejandro Chávez Cortés
Conjunto: Soportes	
Título: Base	
Escala:	
Cotas: mm	
Notas: Material: acero inoxidable	
No. Plano: D-003	

$Rz = 90 \text{ mm}$
 $r_z = 6.35 \text{ mm}$
 $Zb = 12$
 $Zg = 11$
 $e = 4 \text{ mm}$
 $B = 15 \text{ mm}$

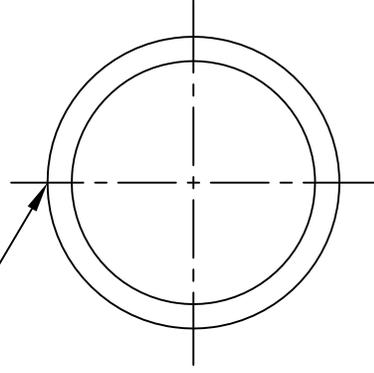


$Rz = 90 \text{ mm}$
 $r_z = 6.35 \text{ mm}$
 $Zb = 16$
 $Zg = 15$
 $e = 4 \text{ mm}$
 $B = 15 \text{ mm}$

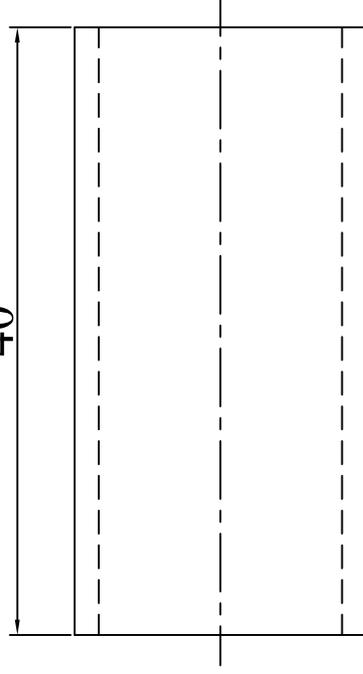


			
Dibujado:	23/11/17	Nombre:	Ing. José Alejandro Chávez Cortés
Comprobado:	23/11/17		Ing. José Alejandro Chávez Cortés
Conjunto:	Transmisión		
Título:	Engranajes Cicloidales 11 y 15 Lobulos		
Notas:	Material: acrílico		Escala: Cotas: mm No. Plano: E-001

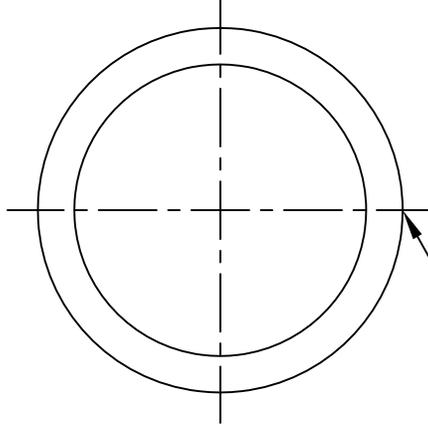
12.7 x 1



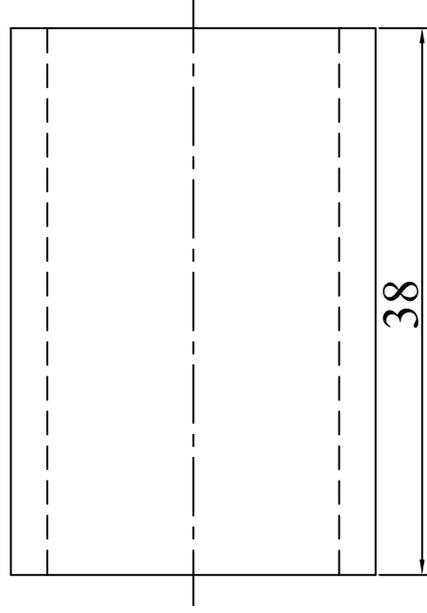
40



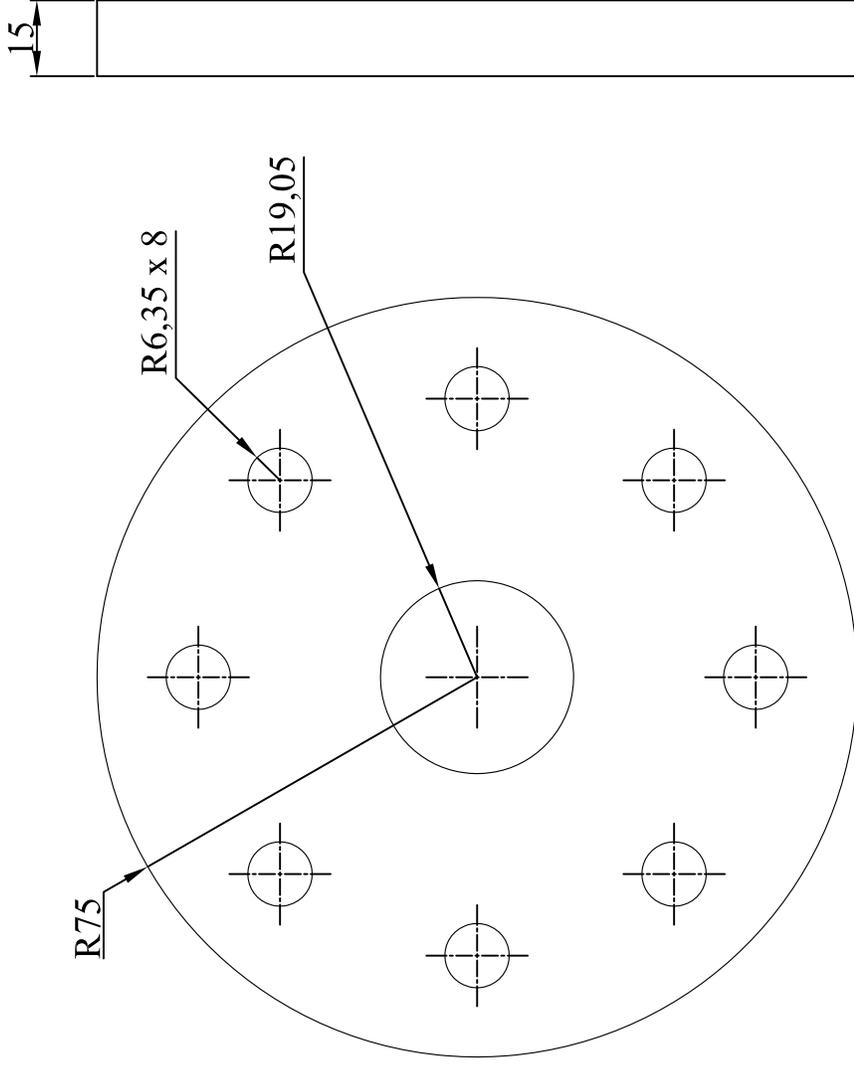
19.0 x 3



38



	Fecha:	Nombre:	
Dibujado:	23/11/17	Ing. José Alejandro Chávez Cortés	
Comprobado:	23/11/17	Ing. José Alejandro Chávez Cortés	Escala:
Conjunto:	Transmisión		Cotas: mm
Título:	Bujes de pines de entrada y salida		No. Plano: E-002
Notas:	Material: acrílico		



	Fecha:	Nombre:	
Dibujado:	23/11/17	Ing. José Alejandro Chávez Cortés	
Comprobado:	23/11/17	Ing. José Alejandro Chávez Cortés	Escala:
Conjunto:	Transmisión		Cotas:
Título:	Disco para rodillos móviles		mm
Notas:	Material: acrílico		No. Plano: E-003