



**Universidad Michoacana de San
Nicolás de Hidalgo**



**Modelado y simulación del Efecto final de un
robot manipulador en enfoque de Bond Graph.**

TESIS

**QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
MAESTRO EN INGENIERIA MECANICA.**

PRESENTA:

INGENIERO. HIPÓLITO MAGDIEL VENEGAS MONTAÑO

ASESOR:

DOCTOR. GILBERTO GONZÁLES AVALOS



Morelia, Michoacán octubre 2020

Agradecimiento a CONACYT:

Agradeciendo de manera amplia y cordialmente al Consejo Nacional de Ciencia y tecnología (CONACYT), por brindarme el apoyo necesario para concluir satisfactoriamente el programa impartido por el Posgrado de Ingeniería Mecánica y posibilitarme en la obtención del grado como maestro en ciencias de la Ingeniería Mecánica. Agradezco que gracias a su apoyo me he superado personalmente e intelectualmente.

Debido a que el conocimiento nos lleva por senderos donde la sabiduría puede derribar muros, donde esos muros pueden ser personales o laborales, es por eso que el conocimiento siempre se encuentra en evolución, para ayudarnos a superarnos a nivel personal, laborar y elevar nuestra sabiduría, por tal hecho siempre es bueno abrirnos a los nuevos conocimientos sin miedo a que sean inútiles o pérdida de tiempo, verlo en el sentido de enriquecerse de conocimiento encontrando refuerzos a los conocimientos previamente adquiridos.

Esta tesis es dedicada a mis **Padres**, por apoyarme en las decisiones que he tomado, a mi esposa **Lucia Murillo** que siempre me ha alentado a seguir adelante, rompiendo esos muros personales, a mis **Suegros** que con pláticas y apoyo me han ayudado en el camino de la investigación, a mi asesor **Gilberto Avalos** por brindarme el conocimiento necesario para llevar a cabo esta tesis, por su apoyo y su manera de lograr que sea un buen investigador, agradeciendo al **Posgrado de Mecánica** por adoptarme como alumno brindándome esta oportunidad de crecer académicamente, al igual que el apoyo y la guía de sus miembros **Administrativos**.

ÍNDICE DE CONTENIDO:

1. INTRODUCCIÓN.....	9
1.1 La importancia de los robots.....	9
1.2 Objetivo.....	11
1.3 Justificación.....	11
1.4 Hipótesis.....	13
1.5 Metodología.....	13
1.6 Estado del arte.....	14
1.7 Contribución.....	18
1.8 Estructura de la tesis.....	19
2. ROBOT MANIPULADOR.....	22
2.1 ¿Qué es un Robot Manipulador?.....	23
2.2 Composición de un Robot Manipulador.....	27
2.3 Tipos de Robot Manipulador.....	32
2.3.1 Robot manipuladores industriales.....	32
2.3.2 Robot manipuladores usados en medicina.....	35
2.3.3 Robot manipuladores para el uso de residuos.....	37
2.4. Cinemática de un Robot Manipulador.....	39
2.4.1 Cinemática directa.....	40
2.4.2 Matriz de rotación.....	40
2.4.3 Cinemática inversa.....	46
2.5 Formulación del Lagrangeano.....	47
3. ¿QUE ES BOND GRAPH?.....	57
3.1 Elementos que conforman el modelado en Bond Graph.....	58
3.1.1. Semiflechas llamadas Bond.....	59
3.1.2. Puertos.....	61

a) Puertos 1. (Elementos básicos o pasivos).....	61
b) Puertos 2. (Elementos ideales).....	64
c) Puertos 3. (Uniones).....	66
d) Puerto 1 activos. (Fuentes).....	67
3.2 Causalidad para los diversos tipos de energía.....	69
3.3 Modelado en Bond Graph en sistema mecánico y eléctrico.....	70
a) Ejemplo en sistema eléctrico.....	70
b) Ejemplo en sistema mecánico.....	72
3.4 Ecuación de estado.....	73
3.5 Ejemplos de la obtención de la ecuación de estado.....	77
a) Ecuación de estado en sistema eléctrico.....	77
b) Ecuación de estado en sistema mecánico.....	84
3.6 Software 20-SIM.....	87
4. EFECTOR FINAL, MODELADO Y SIMULACIÓN EN BOND GRAPH Y EULER LAGRANGE.....	92
4.1 Tipos de efectores finales.....	94
a) Efectores finales tipo pinza.....	94
b) Efector final de un solo dedo (Tareas específicas).....	95
c) Efector final de tres dedos de sujeción.....	97
d) Selección de efector final.....	98
4.2 Modelo Euler -Lagrange y Bond Graph de un efector final compuesto por un eslabón por lado.....	100
a) Modelado Euler - Lagrange un eslabón.....	100
b) Modelado Euler - Lagrange de un efector final compuesto por un eslabón por lado.....	102
c) Modelo en Bond Graph para un eslabón.....	105
d) Modelo en Bond Graph de un efector final de un eslabón por lado.....	110

4.3 Modelado Euler -Lagrange y Bond Graph de un efector final compuesto por dos eslabones.....	123
a) Modelado Euler - Lagrange de un efector final compuesto por dos eslabones.....	123
b) Modelado en Bond Graph de un efector final compuesto por dos eslabones.....	129
c) Simulación de un efector final compuesto por dos eslabones.....	136
4.4 Modelo Euler - Lagrange a partir de un modelo de Bond Graph.....	145
a) Análisis de un péndulo simple, obteniendo Euler - Lagrange de modelo en Bond Graph.....	145
b) Análisis de un efector final compuesto por un eslabón por lado, obteniendo Euler Lagrange de modelo en Bond Graph.....	153
5. CONCLUSIONES.....	159
6. BIBLIOGRAFIA.....	162

RESUMEN

La robótica es un campo relativamente nuevo de la tecnología moderna que cruza las fronteras de las ingenierías tradicionales.

Para comprender la complejidad de los robots y sus aplicaciones, se requiere del conocimiento de la ingeniería industrial, de las ciencias computacionales, de la economía y las matemáticas entre otras.

Nuevas disciplinas de la ingeniería, tales como la ingeniería de manufactura, la ingeniería de aplicaciones y la ingeniería del conocimiento están empezando a emerger para tratar con la complejidad del campo de la robótica y el área más grande de automatización de las industrias. Dentro de pocos años es posible que la ingeniería de la robótica sea una disciplina especializada.

Un robot industrial es un manipulador de uso general controlado por computadora, y que consiste en algunos elementos rígidos conectados en serie, mediante articulaciones prismáticas o de revolución. El final de la cadena está fijo a una base soporte, mientras el otro extremo está libre y equipado con una herramienta llamada efector final o Gripper según sea la comodidad.

El efector final o Gripper es una herramienta encargada de interactuar directamente con el entorno del robot, depende principalmente de la tarea que realiza nuestro robot manipulador, ya que se encuentran clasificados en funciones como:

- sujeción
- operación
- manipulación

- montaje
- o casos especiales como el enfoque en la medicina.

En estos tipos de efectores finales, podemos implementar el uso del sistema de modelado en el Dominio Físico (Bond Graph), que es una metodología con un enfoque de modelado basado en transferencia de potencia, unificando el simbolismo para fenómenos de diversos dominios físicos.

Henry Paynter en 1961 presentó la Teoría de Bond Graph como una metodología abstracta general para modelar sistemas físicos. El marco de referencia de esta teoría se denomina dominio físico, ya que son principalmente elementos los que se modelan, además, que estos sistemas físicos pueden estar formados por diferentes tipos de energía.

Bond Graph es una poderosa herramienta de representación de sistemas en el dominio físico, de la cual una variedad de modelos matemáticos pueden ser derivados.

ABSTRACT

Robotics is a relatively new field in modern technology that emerges from within the limits of traditional engineering.

To understand the complexity of Robotics, it is required the knowledge of Industrial Engineering, Computational Science, Economy, Math, among other sciences.

Therefore, new disciplines related to engineering are being needed, such as Manufacturing, Application Engineering, and Engineering of knowledge. These sciences are beginning to emerge to deal with the complexity of Robotics and automatization of factories. Within a couple of years Robotics Engineering may become a specialized science.

An industrial robot is a manipulator of general used controlled by a computer,

it consist of solid elements connected in a series, thanks to plasmatic or revolutionary articulations. The end of the chain is fixed to a support base, while the other part of the chain is free and equipped with a tool called Gripper.

The Gripper is a tool that directly interacts with the robot's environment, it mainly depends of the task that the robot performs and they are classified by their function as:

- Subjection,
- Operation,
- Handling,
- Mounting,
- Or special cases as in medicine.

In those kinds of Grippers, the usage of the modeling system in Physical Domain (Bond Graph), which is an abstract methodology focuses in modeling based in power transfer, can be implemented to unify the symbolism for diverse phenomena in physical surroundings.

In 1961, Henry Paynter presented the Bond Graph Theory as a general abstract methodology to model physical systems. The framework of this Theory is called the physical domain, since they are mainly elements that are modeled, moreover, these physical systems can be formed by different energy sources.

Bond Graph is a powerful tool to represent systems of physical domain, in which a variety of mathematical models can be derived.

Palabras clave : Bond Graph, modelado, efector final, robot manipulador, 20-sim.

Capítulo 1

Introducción

1.1. La importancia de los Robots

Conforme las industrias han evolucionando al transcurrir del tiempo, la robótica se ha echo presente cada vez con más regularidad y más tecnología en las diferentes industrias, esto es debido a que ciertas empresas han recurrido a la automatización, que es la manera en que los procesos se realizan de manera continua, eficiente y cada vez en menos tiempo y está automatización se ha logrado gracias a la integración de los robots manipuladores, los cuales son un dispositivo o una herramineta utilizada para manipular objetos o materiales sin contacto físico.

Existen diversos tipos de Robots Manipuladores, ya que la geometría de estos depende directamente de la tarea que se le sea asignada, por lo que podemos decir que gracias a la implementación de los Robots Manipuladores se pueden realizar varias tareas de manera automatizada ya que su geometría suele ser variable y sustituible logrando que

un solo Robot Manipulador pueda realizar varias tareas solo intercambiando algunos de sus componentes, este tipo de robots han sustituido en algunas áreas la mano de obra humana, siendo estos robots de gran importancia a la hora de realizar tareas de gran riesgo, o de esfuerzo sobrehumano, cabe mencionar que existen robots que son mandados al espacio o el fondo del mar por lo que son herramientas tanto para mejorar los procesos, como la investigación que no sería cosa fácil para los humanos.

En la actualidad la Robótica ha ido más allá del ámbito laboral o industrial, en estudios recientes se ha recurrido a la manipulación de robots y a la programación de los mismos con enfoque a la educación y al aprendizaje, esto es posible a través del manejo de herramientas de software y hardware, como prototipos robóticos y programas especializados con fines pedagógicos (Guzman, 2012). Es correcto decir que la robótica es una ciencia multidisciplinaria, que comprende desde las matemáticas, mecánica, eléctrica, ciencias que ayudan a desarrollar y resolver problemas, por lo que el estudio de la robotica aparte de ser una ciencia de reciente generación, está apoya al ingeniero a superarse a sí mismo modificando modelos existentes, innovando con nuevos prototipos, por lo que podemos decir que mientras la tecnología no deje de avanzar estos robots existentes pueden ser mejorados logrando así una mejora continua y una fuente de trabajo futura.

Como último punto los robots se han integrado a la vida del ser humano, comenzando por el área industrial, el área médica, continuando por medios de entretenimiento como juguetes o últimamente como dispositivos para el hogar, no cabe duda que cada vez es mayor la importancia de estos robots manipuladores, en todas sus formas y variantes.

1.2. Objetivos

Como objetivos de nuestra investigación nos planteamos los siguientes:

- 1) Seleccionar tipo de estructura del efector final así como su función.
- 2) Modelar un efector final de dos eslabones con el método Euler – Lagrange.
- 3) Modelar el efector final compuesto por dos eslabones de robots manipuladores representados en Bond Graph linealizados.
- 4) Demostrar que Bond Graph puede ser un método elegible para el estudio de un efector final.

1.3. Justificación

Dependiendo de la estructura de un efector final, se le puede otorgar mayor versatilidad a un robot manipulador, mientras mayor sea esta versatilidad, la elaboración del efector final puede llegar a ser más costoso, así como su fabricación puede llegar a ser muy diferente a la de un robot manipulador, por lo que la metodología propuesta presenta ventajas importantes para el modelado y análisis de efectores finales utilizando Bond Graph.

- 1) El enfoque basado en flujo de potencia proporciona una estructura natural para el desarrollo de los modelos en estos sistemas.
- 2) La terminología unificada de dominio físico del efector final basada en la analogía de efectos físicos permite desarrollar y aplicar herramientas en un contexto diferente.
- 3) La representación gráfica permite visualizar directamente los flujos de energía y permite detectar relaciones causa-efecto entre variables de nuestro sistema.

4) Por su característica gráfica proporciona flexibilidad para agregar al modelo aspectos no considerados en una iteración previa del modelo sin tener que partir de cero.

5) Una forma sistematizada para generar las ecuaciones diferenciales que describen el sistema directamente de su representación gráfica en Bond Graph.

6) Se tienen herramientas sólidas para el análisis de propiedades estructurales para el control.

Mediante un Bond Graph se pueden estudiar directamente algunas características importantes de un sistema, por ejemplo, observabilidad estructural, controlabilidad estructural, determinación directa de la respuesta de estado estacionario, linealización de una clase de sistemas no-lineales, inversión de sistemas, representación de espacio de estado, etc. Obteniendo resultados previos adecuados a las funciones del robot manipulador antes de la decisión de llevarlo a un estado físico. El modelo propuesto otorga un primer acercamiento al comportamiento de un efector final, así como muestra la aplicación de Bond Graph para este tipo de sistemas.

Esta clase de estudio beneficiara aquellos estudiantes y diseñadores que deseen implementar nuevas técnicas de modelado a sistemas mecánicos, en específico a robots manipuladores teniendo como nueva opción a Bond Graph, debido a la versatilidad que otorga Bond Graph puede beneficiar aquellos estudios relacionados con un efector final, tal como los sistemas electricos, hidráulica etc.

1.4. Hipótesis

Se puede llegar a conseguir el modelo matemático de un efecto final por medio de Bond Graph, ya que este se cataloga como un sistema mecánico, y en Bond Graph es posible llevar estos tipos de sistemas en forma gráfica y por medio del modelo en semiflechas llamados Bond.

Debido a que Bond Graph nos proporciona gran versatilidad a la hora de llevar un sistema a su modelo matemático, podemos decir que es posible conseguir el modelo matemático de nuestro sistema de efecto final, debido a que se trata de un sistema mecánico, al encontrarse bajo cargas ya sean de esfuerzo o de flujo de potencia, siendo esta la principal característica de Bond Graph.

1.5. Metodología

En la **figura 1.1** podemos observar la metodología propuesta para llevar a cabo el modelado de un efecto final compuesto por dos eslabones, a su vez el modelo dinámico en enfoque Euler – Lagrange, para terminar con la simulación del efecto final llevado con anterioridad en modelo de Bond Graph.

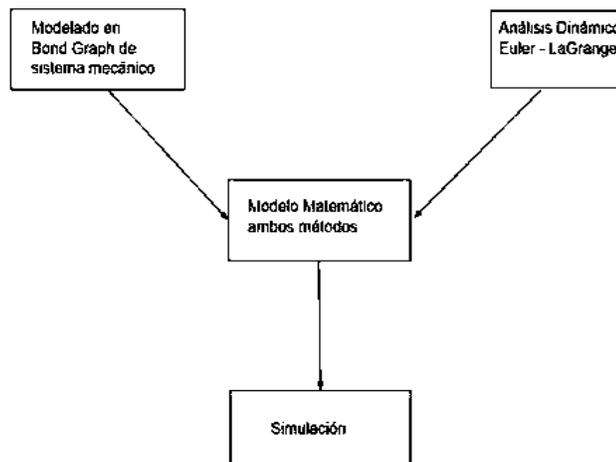


Figura 1.1 Metodología.

1.6. Estado del arte

El estado del arte está dividido en dos partes principales como se muestra en la **tabla 1.1**, estas partes son Bond Graph y efector final, por lo que se mencionan algunos artículos relacionados con estos temas principalmente.

Tabla 1.1 Temas relacionados.

Bond Graph		
Año	Autor	Concepto clave
2015	Alexandru I. Gal, Luige Vladareanu, Radu I. Munteanu	SLIDING MOTION CONTROL WITH BOND GRAPH MODELING APPLIED ON A ROBOT LEG
2008	Gilberto Gonzales Avalos	Modelado de Sistemas en el Dominio Físico
2007	P.M. Pathak, Amit Kumar, N. Sukavanam	Bond Graph Modeling of Planar Two Links Flexible Space Robot
2007	PETER J. GAWTHROP and GERAINT P. BEVAN	A TUTORIAL INTRODUCTION FOR CONTROL ENGINEERS
1998	Carlos Vera Álvarez	INTRODUCCION A LA TECNICA DE BOND GRAPH EN LA DINAMICA FERROVIARIA
1998	Jinhee Jang, Changsoo Han	Proposition of a Modeling Method for Constrained Mechanical Systems Based on the Vector Bond Graph
1992	Ashaf Zeid, Chih-Hung Chung	Bond Graph Modeling of Multibod3, Systems: a Library, of Three-dimensional Joints
1992	C. Sueur ad G. Dauphin-Tanguy	Bond-graph Modelling of Flexible Robots: the Residual FlexibiliQ
1991	P. J. GAWTHROP	BOND GRAPHS: A REPRESENTATION FOR MECHATRONIC SYSTEMS
Efector final		
2013	Vladimir Prada a, Oscar Avilés, Mauricio Mauleudoux	Diseño de un efector final de tres dedos para agarre óptimo
2012	Carloa Raúl del villar Santos	Diseño y construcción de un Gripper experimental para instrumento quirúrgico de corte adampatoal Robot Mitsubishi
2009	Chiara Lanni, Marco Ceccarelli	An Optimization Problem Algorithm for Kinematic Design of Mechanisms for Two-Finger Grippers
2007	Ing. José Galvan Ramírez, Dr. Emmanuel Merchán Cruz	Diseño de un efector final tipo pinza de 8 grados de libertad.
2005	Aviles S. Oscar F. Simanca, Pedro Leon,	DEDOS PARA "GRIPPERS" ROBÓTICOS - REVISIÓN BIBLIOGRÁFICA

Debido a que se ha mencionado que Bond Graph es un método que puede ser adaptado a sistemas Mecánicos, y electricos, se mencionan algunas investigaciones que han implementado esta metodología en las diferentes ramas antes mencionadas.

En el artículo escrito por Alexandru Gal, muestran como han utilizado el modelado en Bond Graph para el control de deslizamiento de una pierna robótica de dos grados de libertad, permitiendo conocer el tiempo en que la pierna regresa al punto de partida y conocer los posibles errores al momento de la movilidad de dicha pierna, tomando la simulación en Bond Graph debido a que los robots son considerados como sistemas no lineales por lo que puede causar incertidumbre en los resultados con cierto margen de error, los cuales pueden ser reducidos utilizando el modelado en Bond Graph basándose en el flujo y el esfuerzo (Alexandru Gal, 2015).

El Doctor Gilberto Gonzales Ávalos presenta las bases para el modelado en Bond Graph, sus principios, sus características más importantes y su implementación como lo es en la ecuación de estado, observabilidad, controlabilidad y realización de sistemas, sirviendo como manual para los interesados en comenzar en la modelación y simulación en Bond Graph (Avalos, 2008).

En el artículo escrito por P.M. Pathak, donde presenta la metodología para analizar el movimiento dinámico de un robot espacial flexible en Bond Graph, donde se considera las vibraciones presentes en el movimiento dinámico, la movilidad en cuerpos rígidos y de pequeñas vibraciones elásticas en cuerpos flexibles (P.M. Pathak, 2007).

La publicación en la revista de control de la IEEE, Peter J. Gawthrop indica las similitudes de los sistemas tratándose de flujo y esfuerzo siendo las bases del método de modelado en Bond Graph, aportando una introducción sobre cómo establecer estos puntos en los Bond en los diferentes dominios tanto eléctricos como mecánicos aportando ejemplos del modelado (Gawthrop, 2007).

En el artículo escrito por Carlos Vera Álvarez el cual nos describe brevemente de lo que se trata Bond Graph, para posteriormente implementarlo en los Bogies o cajas donde se transportan las personas o los objetos de carga, mostrando los grados de libertad que se encuentran al unir estos Bogies, también es implementado el modelado en Bond Graph en la suspensión de los Bogies y en los rieles mismos, mostrando la flexibilidad de utilizar Bond Graph (Álvarez, 1998).

El artículo escrito por Jinhee Jang y Changsoo Han, presentan la introducción de una nueva representación de uniones mecánicas usando la terminología de Bond Graph como vector Bond Graph proporcionando un modelo gráfico donde la potencia es conservativa y la ley de la conservación de la energía es considerada para todos los elementos (Jang, 1998).

Uno de los pioneros en el modelado en Bond Graph Dean Karnopp presenta uno de los métodos en causalidad derivativa en los sistemas mecánicos con elementos rígidos que contienen elementos inerciales, para calcular su ecuación de estado se debe incluir manipulación algebraica, es aquí donde se agregan transformadores que puedan amenorar estas ecuaciones algebraicas (Karnopp, 1992).

El artículo escrito por Ashaf Zeid donde se brinda los detalles de modelar mecanismos que se encuentran en un espacio dado y un sistema de múltiples cuerpos usando el método de Karnopp – Margolis, utilizando la librería de conexiones en tres dimensiones (Zeid, 1992).

El autor P. J. Gawthrop presenta un tutorial de introducción para el uso de bond Graph en sistemas mecatrónicos, brinda 4 ejemplos, culminando en el ejemplo de un brazo robótico de dos eslabones mostrando que Bond Graph brinda las bases para simular posteriormente en software lo que es un sistema mecatrónico (Gawthrop, 1990).

En el artículo escrito por Vladimir Prada, donde se diseña un efector final de agarre compuesto por tres dedos con dos grados de libertad por dedo, donde se muestra la descripción matemática cinética que describe el campo de trabajo, una vez obtenido el campo de trabajo, muestran los posibles puntos finales del efector final con los objetos a ser sujetados (Prada, 2013).

En la tesis escrita por Carlos Raúl del villar Santos donde se diseña un efector final enfocado a las tareas de corte quirúrgico, logrando esto adaptando el bisturí al efector final y a su vez el efector final al robot Mitsubishi que es un robot especializado para trabajar en áreas pequeñas pero de gran precisión (Santos, 2012).

En el artículo escrito por Chiara Lanni, donde se analizan efectores finales compuestos por dos dedos de sujeción y se propone la formulación de una nueva optimización por medio del uso de las características fundamentales de mecanismos de sujeción como lo son la sujeción, el mecanismo de agarre, la aceleración y la velocidad con respecto del área impuesta (Lanni, 2009).

En el artículo escrito por José Galván Ramírez, donde presentan la elaboración de un efector final desde su diseño mecánico hasta su control electrónico, aportando un gran contenido sobre la temática de robots (Galván, 2007).

En el artículo escrito por Aviles S, donde se hace una revisión del estado del arte en el desarrollo de dedos mecánicos articulados para el desarrollo de Grippers, a su vez el estudio de transmisión de movimiento y los actuadores requeridos para cada modelo (Aviles, 2005).

1.7. Contribución

Al llevar a cabo el modelado de un efector final de dos eslabones por lado en Bond Graph, se demuestra que se puede considerar al modelado en Bond Graph como una herramienta para el estudio de los sistemas robóticos, ya que no es necesario su construcción o elaboración en físico, al realizar este modelado y obtener su ecuación de estado, esta ecuación puede ser simulada en los software recientes o ya sea en el software 20 sim, para así poder observar el comportamiento de nuestro sistema, en este caso un efector final de dos eslabones por lado.

Una de las ventajas de realizar este estudio es dejar la base de lo que es la ecuación de estado del efector final, para posteriormente si se desea añadir algún actuador extra, un sensor, o cualquier aditamento extra a la geometría del efector, pueda ser agregado sin necesidad de realizar el análisis completo o si se desea manipular la geometría del efector mismo, pueda ser manipulado desde el software sin la necesidad de gastar material y sin comenzar el análisis desde cero.

Al ser la base de Bond Graph el flujo de potencia, puede ser utilizado para diversos sistemas, por lo que, al tratarse de un efector final que es un sistema mecánico, pudiese ser adjuntado a un sistema eléctrico sin la necesidad de llevar un análisis con un método diferente, por lo que al tratar de juntar un sistema mecánico en este caso el efector final a un sistema eléctrico como un controlador se consideraría cómodo el utilizar el mismo análisis con el que se encuentra familiarizado, ahorrando tiempo en la elaboración del modelo final.

Bond Graph, permite obtener una simulación de manera rápida en comparación con otros métodos, tales como Euler-Lagrange, cinemática directa e inversa donde se llega a la necesidad de utilizar ecuaciones algebraicas que puedan generar errores por su complejidad, variando de esa manera los resultados obtenidos, Bond Graph amenora esos errores basándose en la naturaleza del comportamiento del sistema.

1.8. Estructura de la tesis

1.8.1. Capítulo 1

En el presente capítulo consiste en la introducción al proyecto Modelado y Simulación de un efector final de un robot manipulador en Bond Graph, donde se explica la importancia en la actualidad de los robots manipuladores, de que se trata el modelado en bond Graph, mencionando los objetivos, la justificación y la manera en que llegaremos a los resultados partiendo de un sistema mecánico el cual será el efector final, se mencionan artículos o tesis que se encuentran relacionados con Bond Graph y lo que es un efector final dejando como primer acercamiento de lo que tratara el proyecto, se describen las contribu-

ciones al usar Bond Graph para el modelado y la simulación de un efector final y una breve descripción de cada capítulo.

1.8.2. Capítulo 2

El capítulo 2 está basado en su mayoría en los Robots manipuladores, una breve reseña de donde surgieron estas máquinas, los elementos que la integran, sus diferentes funciones y características, los tipos existentes de robots manipuladores, así como los estudios comúnmente utilizados para el análisis de movimiento como lo son la cinemática directa e inversa, agregando el análisis de la formulación del Lagrangeano que es el estudio para sistemas dinámicos también conocido como Euler – Lagrange.

1.8.3. Capítulo 3

El siguiente capítulo está dedicado a la introducción en Bond Graph, donde se describe la función de esta herramienta gráfica, se mencionan las áreas de aplicación y la manera en que puede ser aplicada. El capítulo contiene la descripción de los elementos que integran el análisis en Bond Graph desde los elementos de disipación y almacenamiento, sus uniones o puertos y la manera en que pueden ser conectados. El capítulo contiene ejemplos de sistemas mecánicos y sistemas eléctricos que son modelados en Bond Graph para obtener su ecuación de estado y posteriormente ser simulados en el software 20 sim.

1.8.4. Capítulo 4

El capítulo 4, está compuesto por una leve introducción de lo que son los efectores finales, como están compuestos, que tipo de efectores finales existen así como las funciones de cada uno de ellos. Se realiza el análisis de Euler - Lagrange para un eslabón, un efector final compuesto de un eslabón por lado y un efector final compuesto por dos eslabones por lado. Se realiza el modelado en Bond Graph y la obtención de la ecuación de estado para un eslabón, un efector final compuesto por un eslabón por lado y un efector final compuesto por dos eslabones por lado, para finalizar con el modelo Euler lagrange a partir de un Bond Graph.

Capítulo 2

Robot Manipulador

Durante cientos de años atrás, los pueblos y sus gentes han tratado de construir mecanismos que imiten partes del cuerpo humano (Torres, 2002), por esta razón han llegado a ser tan importantes los robots, ya que se les a otorgado tareas a realizar desde sencillas, básicas, hasta específicas y pesadas, que facilitarán al trabajador en tareas repetitivas o de gran riesgo. En la actualidad se encuentra un campo de estudio dedicada a realizar este tipo de investigaciones, llamada Mecatrónica, que es el conjunto de especialidades como ingeniería industrial, ingeniería mecánica, e ingeniería eléctrica, por lo que la elaboración de robots se espera que se incremente considerablemente en las próximas décadas. La Enciclopedia Británica dice que: un dispositivo Robot es un mecanismo instrumentado que se usa en la ciencia e industria para sustituir al ser humano o el diccionario de la Lengua Española de la Real Academia que define al robot como: ingenio electrónico que puede ejecutar automáticamente operaciones o movimientos muy variados (Torres, 2002), por lo que nos deja que un robot no solo es de apariencia humana, si no que puede ser un dispositivo,

dentro de una industria que lleva a cabo una tarea en específico que se repite una y otra vez facilitando o remplazando la mano de obra humana. En este capítulo nos basaremos en lo que es un robot manipulador, que tipo de Robots podemos encontrar, a su vez como estan constituidos y por que los llamamos sistemas mecánicos.

2.1. ¿Qué es un Robot Manipulador?

Para poder conocer un Robot Manipulador, primero debemos saber a que nos referimos con un sistema mecánico, un sistema mecánico es aquel sistema que está conformado por elementos mecánicos y a su vez estos elementos mecánicos son considerados dispositivos convertidores de movimiento, por ejemplo: un movimiento lineal se puede convertir en un movimiento rotacional, un movimiento en una dirección, se puede convertir en otro movimiento en otra dirección en ángulo recto con respecto del primer movimiento, un movimiento lineal alterno en uno rotacional (W.Bolton, 2006), como es mostrado en el ejemplo de la **figura 2.1**.

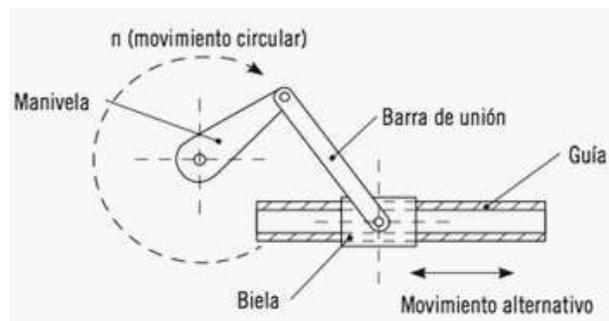


Figura.2.1. Ejemplo de un sistema mecánico, manivela, biela, corredera.

Existen diferentes tipos de elementos mecánicos, sin embargo, para nuestro estudio podemos mencionar que un Robot Manipulador puede estar constituido por elementos, como

engranes, que se utilizan para transferir velocidades y torques, los eslabones que son los componentes que logran la movilidad del robot manipulador, así como soportar las cargas a la hora de sujetar objetos, el número de eslabones depende de la geometría del robot, estos eslabones se encuentran conectados a los servomotores que generan el movimiento angular y a su vez están conectados a otros eslabones para aumentar su alcance y su volumen de trabajo en la **figura 2.2** se puede observar un sistema mecánico convencional de un Robot Manipulador.

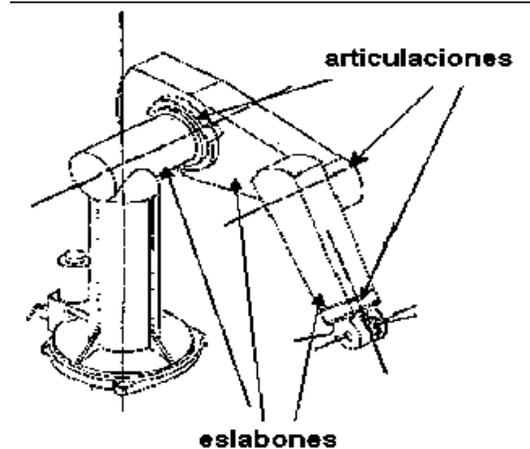


Figura.2.2. Sistema Mecánico convencional de un Robot Manipulador.

Una vez que sabemos que es un sistema mecánico, podemos decir que el conjunto de estos elementos mecánicos que convierten el movimiento, al encontrarse bajo funcionamiento de motores y cargas debidas a estos movimientos, podemos considerar nuestro sistema mecánico como una máquina la cual la Federación Internacional para la promoción de la Ciencia de Máquinas y Mecanismos (IFToMM) define máquina, como un sistema mecánico que realiza una tarea específica, transfiere potencia, transmite fuerzas y/o transforma movimientos (Cajun, 2008). No podemos hablar de un sistema mecánico sin hablar de los

grados de libertad, que es definida como el número de variables necesario y suficiente que define de forma única la posición y la orientación de todos los eslabones de la cadena (Cajun, 2008), en otras palabras podemos decir que los grados de libertad, es el cómo se pueden mover los eslabones en cada uno de sus ejes, mientras más movilidad en sus ejes tengan, más grados de libertad tendrá, a su vez su complejidad aumentará, ya que para el estudio de sistemas mecánicos se busca reducir los grados de libertad para llevar a cabo su estudio, por lo que existe el acoplamiento de eslabones o piezas, si tenemos un eslabón o una pieza en el espacio tendrá 6 grados de libertad, los tres de traslación (eje x,y,z) a su vez los de rotación (eje x,y,z), pero si este es acoplado en alguno de sus ejes, los grados pueden ser deducidos a solo uno dependiendo de la fijación y la estructura deseada, tal y como se muestran en las **figuras 2.3**.

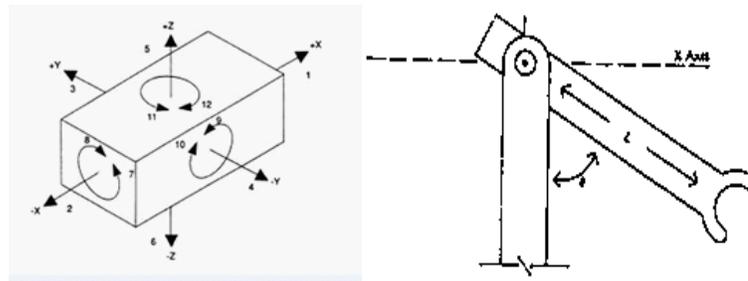


Figura 2.3 Objeto en el espacio (izquierda) y un eslabón sujeto a otro (derecha) con un solo grado de libertad.

Un sistema mecánico, puede ser puesto en funcionamiento de manera mecánica, donde sólo se transfiere la velocidad de un objeto a otro de manera manual, como lo son las palancas o de modo eléctrico, donde un elemento electromecánico puede ser controlado con un voltaje y una corriente de entrada produciendo movimiento.

El sistema mecánico de un Robot Manipulador se encuentra constituido por servomotores, los cuales como se mencionó dependiendo del voltaje de entrada logran un movimiento, por lo que para saber que tanto voltaje se necesita para lograr este movimiento o una velocidad de salida, se necesita de un sistema de control (W.Bolton, 2006), donde se busca una salida o una velocidad adecuada para nuestro sistema mecánico, pero si en algún momento el voltaje se excede o la velocidad sobre pasa la velocidad deseada, se implementan sensores para corregir este margen entre la salida y la entrada para entregarnos una salida adecuada y así no alterar el funcionamiento de nuestro Robot Manipulador.

Podemos llegar a que un Robot Manipulador, es un sistema mecánico, que ha sido diseñado para realizar una tarea específica, donde se busca que sus grados de libertad sean los mínimos sin alterar el funcionamiento o la realización de su tarea, que su composición mecánica puede ser desde engranes que transmiten movimiento, eslabones para soportar cargas, o bases de fijación que nos reducirán los grados de libertad, pero a su vez tienen una composición eléctrica, como los servomotores, actuadores, o sensores dependiendo de la tarea a realizar, logrando así un Robot Manipulador controlable y reprogramable.

Existen diferentes definiciones de lo que es un Robot Manipulador las cuales mencionaremos algunas a continuación:

Según la Asociación de industrias Robóticas (RIA) un Robot Manipulador puede ser multifuncional, reprogramable, capaz de mover materias, piezas, herramientas, o dispositivos especiales, según trayectorias variables, programables para realizar tareas diversas. (Barrientos, 1999).

Un Robot Manipulador puede ser controlado por computadora, que consiste en algunos elementos rígidos conectados en serie mediante articulaciones prismáticas o de revolución. (H., The elements of theses, 2002).

Un Robot Manipulador es un dispositivo reprogramable capaz de realizar una amplia variedad de aplicaciones (Craig, 2012).

Los Robot Manipuladores, se utilizan cada vez más en las industrias, por eso son comúnmente llamados Robots Industriales, donde sus procesos son repetitivos, como lo son las armadoras de automóviles, ensambladoras, algunas papeleras, empacadoras etc. La estructura de estos Robot Manipuladores puede llegar a ser muy compleja, así como su control y programación, por ende las nuevas generaciones se han dedicado a la optimización de estos robots, logrando el cometido de elaborar las tareas de una forma efectiva, aminorando los tiempos, aminorando la mano de obra humana, aumentando la productividad con los menores errores posibles.

2.2. Composición de un Robot Manipulador

La composición de un Robot Manipulador, puede ser muy variada según sean sus especificaciones, la tarea a realizar y el área de trabajo, sin mencionar algunos otros aspectos como el capital y la rentabilidad. Para poder llamarse un Robot Manipulador, necesita como mínimo los siguientes componentes (Madrigal, 2004):

a) El brazo, donde se presenta el movimiento, las articulaciones deseadas, los eslabones en serie, está compuesto en su parte mecánica por engranes, poleas, eslabones,

cadena así como un sinfín de aditamentos, su parte eléctrica que son los actuadores como los servomotores o componentes hidráulicos y por último los sensores de posición.

b) El controlador, que comúnmente es un microprocesador, donde se reciben las señales de los sensores de posición enviando una señal de salida a la fuente de potencia para evaluar si existe un correcto funcionamiento.

c) Unidad convertora de potencia que alimenta los motores en la **figura 2.4** se muestra un Robot Manipulador junto con su sistema de control.

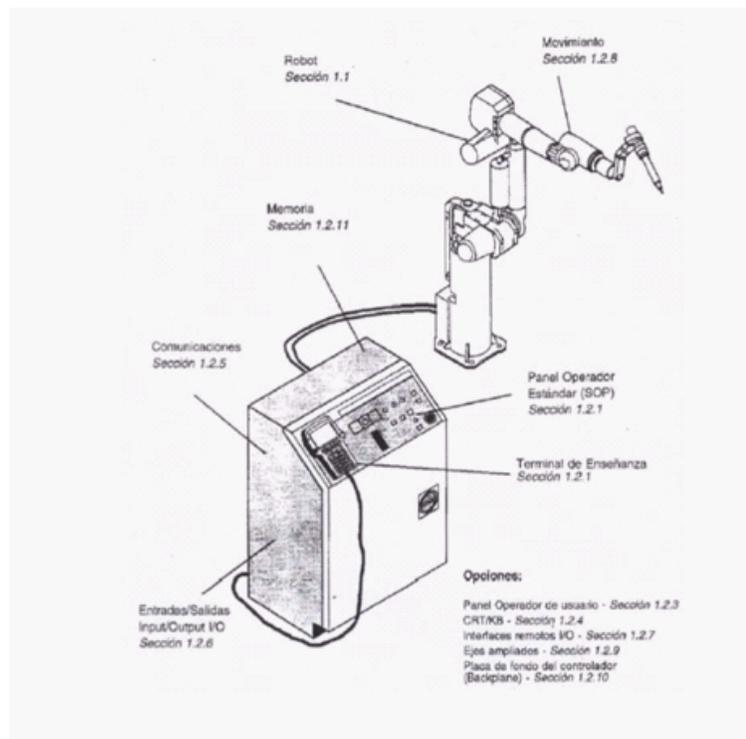


Figura 2.4. Sistema de control de un Robot Manipulador.

Los eslabones se encuentran conectados por uniones las cuales se muestran en la **figura 2.5**, estas uniones pueden ofrecer una movilidad de desplazamiento, de giro o una combinación de ambas, a su vez estas uniones son los movimientos que puede hacer un eslabón con respecto a otro, uno posterior o anterior, a este movimiento se le denomina

grado de libertad, para saber la cantidad de grados de libertad que tendrá nuestro Robot Manipulador se tiene que llevar a cabo la suma de los grados de libertad que encontramos en cada eslabón o unión.

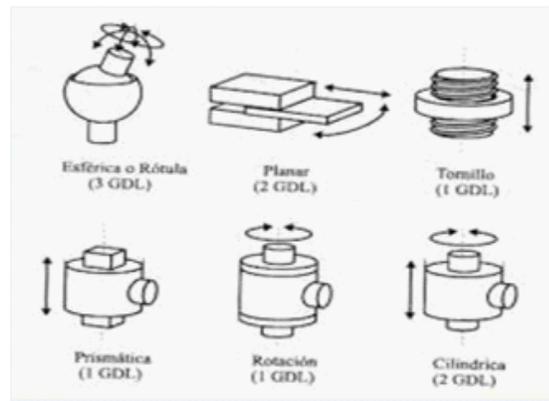


Figura 2.5. Tipos de uniones.

Para lograr que un Robot Manipulador logre posicionarse de cualquier modo en el espacio, se requieren al menos seis grados de libertad, ya que se requieren seis parámetros, tres para definir la posición y tres para su orientación (Barrientos, 1999). Sin embargo existen tareas y acciones donde no son necesarios los seis grados de libertad, donde pueden utilizarse una gran variedad de estructuras que conforman un Robot Manipulador donde las más usadas están mostradas en la **figura 2.6** en algunos casos muy específicos donde el Robot Manipulador ocupa más de seis grados de libertad, ya sea debido a obstáculos que debe evitar o extras como un riel de desplazamiento se dice que el robot es redundante.

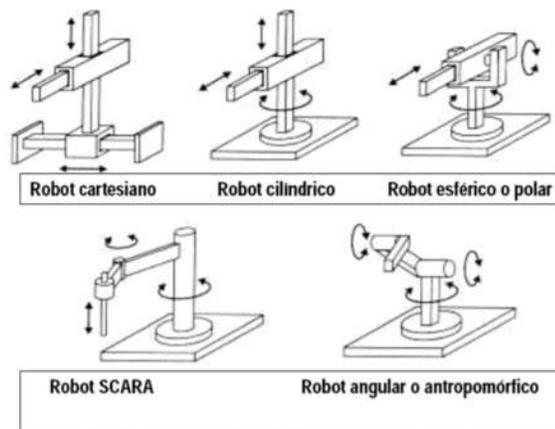


Figura.2.6. Composiciones más usadas en la industria de Robot Manipulador.

Para lograr la movilidad de estos Robots Manipuladores se requieren los actuadores, que son los elementos que generan las fuerzas o pares necesarios para animar la estructura mecánica (Baturone, 2007). Estos actuadores pueden ser de tipo mecánico, hidráulico, neumático o de tipo eléctrico, o también llamados servomotores que son motores de corriente continua. Dependiendo de la estructura y de la tarea a realizar, estos actuadores pueden variar significativamente, ya que dependen directamente del tamaño deseado del Robot Manipulador, de la fuerza o torque que se desea obtener en dicha tarea, la controlabilidad, el volumen y peso que se desea obtener, al final con todos los componentes ya armados en un solo objeto, la velocidad con que se llevara la tarea o la velocidad con que trabajaran estos actuadores, el costo del Robot Manipulador finalizado, así como el mantenimiento del mismo.

Un actuador neumático es aquel dispositivo que utiliza el aire comprimido como energía, logrando mover pistones dentro de la cámara, para lograr la presión necesaria para transmitir esa fuerza a un movimiento mecánico, el trabajo a realizar de un actuador

neumático puede ser de tipo lineal o rotativo, el movimiento lineal se obtiene por medio de cilindros de émbolo, los cuales al colocarse en diferentes ángulos se les considera actuadores de tipo piñón o cremallera logrando el movimiento rotativo, incluso existen actuadores que logran ambos movimientos en conjunto a este tipo de actuadores se les conoce como actuadores especiales (Manuel Jesús Escalera Tornero, 2013).

Un actuador hidráulico es aquel sistema que utiliza la compresión de algún fluido no compresible que por lo general se trata de aceites, para el movimiento lineal de un pistón, estos dispositivos se dividen en dos tipos de simple efecto el cual solo ejerce carrera en un solo sentido del desplazamiento del pistón y doble efecto que ejerce presión en ambos sentidos tanto de entrada como de salida, este tipo de actuadores es comúnmente utilizado en las industrias y los mecanismos automatizados (Méndez, 2012).

Los actuadores eléctricos, han sido utilizados con mayor periodicidad, debido a su sencillez a la precisión que se puede obtener con este tipo de actuadores, pero mayormente por el control que se puede ejercer en ellos, existen tres tipos de actuadores eléctricos los cuales son: Motores a pasos, Motores de corriente alterna y Motores de corriente continua.

Existen Robots Manipuladores de tipo industrial, donde debido al tamaño, su estructura mecánica cambia considerablemente, ya que se agregan componentes como lo es una transmisión, la cual su funcionamiento principal es el de variar las velocidades, tal y como lo hacen las cajas de velocidades en los automóviles, o también se agregan reductores de velocidades, esto para lograr la precisión a la hora de trasladarse por el área de trabajo. (K.S. Fu, 2001).

2.3. Tipos de Robot Manipulador

Existe una gran diversidad de robot manipuladores, conforme avanza la tecnología podemos encontrar este tipo de robot con mayor rendimiento, geometrías modernas, funciones únicas, por lo que se decidió dividir a los robot manipuladores en tres tipos, Robot Manipuladores usados en las industrias, en la medicina y como robot manipuladores de residuos, existen robot que son usados como entretenimiento y otros utilizados para realizar tareas lo más parecidas a un humano, tareas que requieren de pies, manos y cierta programación para llevarla a cabo, sin embargo, en este trabajo no se tomarán debido a que ya se concederán robot humanoides.

2.3.1. Robot Manipuladores industriales

Los Robot Manipuladores de índole industrial, son considerados aquellos robot que realizan tareas en un periodo de tiempo el cual es mínimo a comparación de llevarse a cabo por personas, o también llamada la elaboración echa a mano, por lo que este tipo de robots cuenta con tecnología que permite llevar a cabo las tareas o actividades dentro de una industria de manera segura, eficiente y programable para así poder cumplir con los ciclos de trabajo repetitivos, entre los tipos de robot manipuladores industriales se encuentran los robot soldadores por arco, los cuales se muestran en la **figura 2.7**, su función principal es llevar a cabo la unión de piezas de metal o materiales derivados el ejemplo más conocido es la unión o la soldadura del chasis en las armadoras automotrices.



Figura 2.7. Robots Manipuladores diseñados para soldadura industrial.

Una de las características de estos Robot manipuladores es sin dudar su tamaño y peso, ya que por lo general realizan su tarea o actividad en el mismo lugar o en un área de trabajo reducida, un ejemplo más de estas actividades son la carga y descarga de materiales pesados, por lo que en la **figura 2.8** se muestra un Robot Manipulador, para carga y descarga de objetos, como se puede observar su efector final es intercambiable, esto para poder tomar diferentes objetos de geometría variable, estos robots como puede notarse son de geometría robusta, debido a que es preferible tener el punto de equilibrio lo más cercano a la base y lograr un equilibrio al tomar los objetos.



Figura 2.8. Robot Manipulador de carga y descarga de objetos.

Existen Robot Manipuladores de carga y descarga pero a diferencia de los antes mencionados estos robots pueden encontrarse sujetos de un riel en el techo de la industria, permitiendo un aumento del área de trabajo, este tipo de robots cuentan con aditamentos que aumentan los grados de libertad logrando una mayor manipulación de los objetos que puede sujetar, por lo que este tipo de robot también se les conoce como Robots armadores o manipuladores a secas, en la **figura 2.9** podemos observar un ejemplo de este tipo de robots, sin embargo, uno de los más conocidos se encuentra una vez más en el área automotriz, el cual se encarga de unir las piezas de gran volumen a la carrocería del automóvil.



Figura 2.9 Robot Manipulador o Robot Armador.

Existen otro tipo de Robot Manipuladores los cuales su tarea principal es pintar, este tipo de robot pueden moverse libremente en un área específica, llevando a cabo su tarea principal, en un entorno libre de humedad y de polvo, por lo general este tipo de robot se encuentran cubiertos, logrando llevar a cabo su tarea sin comprometer su funcionamiento debido a la pintura o humedad que pueda crear el rocío de la pintura en la **figura 2.10** se muestra un ejemplo de lo que es un Robot Manipulador capaz de pintar.



Figura 2.10 Robot Manipulador roció de pintura.

2.3.2. Robot Manipulador usados en medicina

Los Robot Manipuladores, dedicados a la medicina son parecidos a los Robot Manipuladores industriales, sin embargo, lo que los hace únicos para este tipo de actividades es su efector final o también llamado Gripper, esta herramienta colocada al final del robot es la encargada de llevar a cabo las cirugías, los cortes, las visiones dentro del cuerpo y así varias tareas que realiza el doctor, sin embargo una de los propósitos de estos robot no es el de suplantar al doctor en sí, más bien es una gran ayuda al poder realizar las operaciones a distancia, por medio de monitores, mandos a distancia que facilitan la interacción robot paciente.

En la **figura 2.11** se muestra un Robot Manipulador dedicado a la medicina, (Barreintos, 2008) el cual gracias a su geometría logra emitir rayos Gamma con los cuales se atacan tumores, dejando fuera al doctor de esa radiación y concentrándola en el problema, este robot aparte de poder trasladarse por el entorno del quirófano, imita la respiración del paciente para lograr los cortes o la concentración de los rayos Gamma con el rango más bajo de fallo.



Figura 2.11 Robot manipulador CyberKnife.

Uno de los Robot manipuladores más mencionados en el área de la medicina es el llamado Da Vinci, el cual es un Robot Manipulador multifuncional mostrado en la **figura 2.12**, este robot ha cambiado drásticamente la interacción del robot con el paciente, ya que cuenta con varias articulaciones para facilitar la manipulación de herramientas quirúrgicas, siendo también estas articulaciones la herramienta misma, conteniendo efectores finales o Grippers intercambiables, este tipo de robot puede ser manipulado a distancia desde un monitor, o bien puede ser presencial por parte del cirujano.



Figura 2.12 Robot Manipulador Da Vinci.

Existiendo también Robot Manipuladores para el uso de asistencia para personas discapacitadas, este tipo de Robots ayuda a la persona con alguna deficiencia física, propor-

cionando la capacidad de tomar objetos, poder moverlos o el simple hecho de poder abrir puertas, este tipo de Robot Manipuladores tienen un brazo de ciertos grados de libertad, contando con un efector final diseñado para las funciones primordiales de sujeción de objetos, así como la capacidad de abarcar el área deseada bajo las limitaciones del entorno. El Robot Manipulador para asistencia de personas se muestra en la **figura 2.13** cabe mencionar que se encuentra ensamblado a una silla de ruedas y su función primordial es auxiliar a la persona afectada a realizar sus actividades diarias.



Figura 2.13. Robot Manipulador asistencial.

2.3.3. Robot Manipuladores para el uso de residuos

En el área de la ingeniería química, es útil la aplicación de este tipo de Robot Manipuladores, por qué permiten la interacción con químicos peligrosos a distancia, sin verse afectadas vidas humanas y la manipulación de tejidos o sustancias donde la actividad debe ser cíclica, que con la ayuda del robot no es necesaria la permanencia del doctor o la persona responsable, en la **figura 2.14** podemos observar un ejemplo de estos robot, el robot que lleva el nombre de Mahoro, ha sido diseñado para manipulación de químicos importantes, así como su la reproducción de ciertas sustancias las cuales puede ser replicadas gracias a

la programación del robot sus componentes como escaners y sus brazos de siete grados de libertad cada uno, podemos decir que cada brazo representa un Robot manipulador, sin embargo no es considerado un robot androide debido a sus efectores finales, suelen ser más simples que una mano humana.



Figura 2.14. Mahoro, Robot Manipulador de químicos farmacéuticos.

Tomando en cuenta el avance tecnológico, podemos mencionar otro tipo de Robot Manipuladores, este tipo es de recolección de residuos pero extraterrestre, no son muy comunes debido a sus elevados costos, pero son considerados Robot Manipuladores de exploración mandados a la luna, Marte o terrestre en las profundidades de los mares, este tipo de robot además de contar con un mecanismo de transporte sofisticado, cuenta con brazos capaces de tomar objetos a cierta área de distancia de su cuerpo, esto quiere decir que el brazo debe ser versátil para poder tomar objetos en un área de trabajo libre y con obstáculos, a su vez el brazo debe ser capaz de regresar a un punto en específico donde se guarda dicho residuo o elemento. En la **figura 2.15** se observa uno de los prototipos mandados a Marte por exploración.



Figura 2.15. Prototipo exploración Marte.

2.4. Cinemática de un robot manipulador

El modelo cinemático estudia el movimiento (geometría del movimiento) del robot respecto a un sistema de coordenadas de referencia fijo con respecto del tiempo, sin considerar las fuerzas o momentos que originan dicho movimiento, (Andueza Luis, 2008), la cinemática permite conocer el espacio o punto final en que un robot puede operar, así conocemos sus limitaciones y sus alcances, esto se logra con los parámetros de sus elementos que lo componen, como lo son los eslabones y la herramienta final llamada efector final. Dicho en otras palabras la cinemática de un robot manipulador permite conocer la posición y la orientación del extremo final de nuestro robot manipulador, que para nuestro caso la posición y orientación del efector final, sin embargo, hay que conocer los parámetros de ensamble, como lo son los eslabones, sus ángulos, sus coordenadas etc.

La cinemática puede ser llevada a cabo de dos maneras, cinemática directa donde intervienen directamente las componentes de un robot manipulador para conocer su posición y orientación final y cinemática inversa que parte de una posición y orientación final y sirve para conocer la trayectoria o movimientos que realizara el robot por medio de ecuaciones para alcanzar dicha posición.

2.4.1. Cinemática directa

En cinemática directa se ven incluidos los estudios de algebra y cálculos matriciales, para representar y describir la localización de un objeto en el espacio tridimensional respecto a un sistema de coordenadas fijo, el objetivo del análisis de la cinemática directa es determinar el efecto acumulativo del conjunto entero de las variables de unión (Avalos, 2008), considerando estas variables como los componentes físicos que integran un robot manipulador (eslabones), donde al estar ensamblados unos con otros por medio de articulaciones lo podemos llamar como cadena cinemática, dejando como sistema de coordenadas la base de estas uniones, donde comienza el robot o dicho de manera física la base de nuestro robot manipulador.

El problema cinemático directo se reduce a encontrar una matriz de transformación que relaciona el sistema de coordenadas ligado al cuerpo al sistema de coordenadas de referencia (K.S. Fu, 2001), por lo que se puede decir que la matriz de rotación que describe las operaciones del eje de coordenadas del cuerpo con respecto a las coordenadas de referencia es una matriz de 3×3 , las cuales se amplían al agregar las coordenadas de traslación del sistema quedando una matriz de 4×4 llamada matriz de rotación homogénea. Estas representaciones fueron utilizadas por primera vez por Denavit y Hartenberg en 1955 la cual proporciona la ventaja de universalidad algorítmica para derivar las ecuaciones cinemáticas de un brazo.

2.4.2. Matriz de rotación

La matriz de 3×3 es también llamada matriz de rotación, la cual se puede definir como una matriz de transformación que opera sobre un vector de posición en un espacio

euclídeo tridimensional y transforma sus coordenadas expresadas en un sistema de coordenadas rotado $OUVW$, (Sistema ligado al cuerpo) a un sistema de coordenadas de referencia $OXYZ$. (K.S. Fu, 2001), como se observa en la **figura 2.16** las coordenadas fijas son las coordenadas $OXYZ$, se podría decir que son las coordenadas ancladas al espacio tridimensional, mientras que las coordenadas $OUVW$ son las coordenadas que se encuentran ancladas al cuerpo y son las coordenadas que pueden rotar con respecto de las coordenadas fijas $OXYZ$, por lo que podemos decir que ambas coordenadas tienen como origen O .

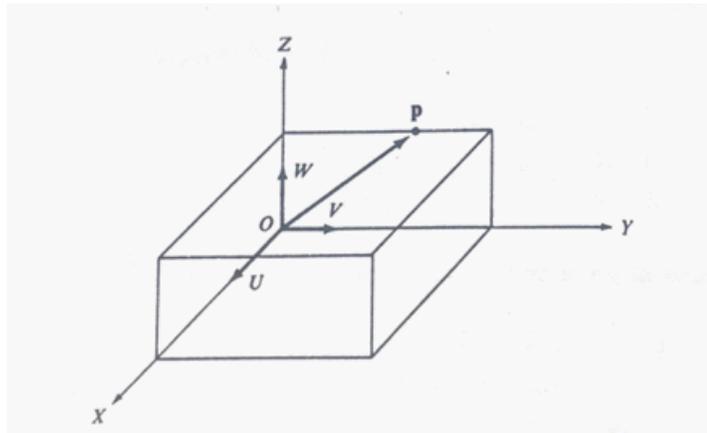


Figura 2.16 Sistema de coordenadas anclado al espacio de referencia y anclado al cuerpo.

En la **figura 2.16** se observa un punto P en cual diremos que se encuentra en reposo y es un punto fijo, para obtener sus coordenadas con respecto de ambos sistemas de coordenadas se dice que los vectores unitarios de cada sistema son (i_x, j_y, k_z) y (i_u, j_v, k_w) con respecto de $OXYZ$ y $OUVW$ respectivamente, por lo que las coordenadas para nuestro punto P serán:

$$P_{uvw} = (P_u, P_v, P_w)^T \quad \text{y} \quad P_{xyz} = (P_x, P_y, P_z)^T \quad (2.1)$$

Donde P_{uvw} y P_{xyz} son las coordenadas del punto P , pero con diferente punto de referencia en este caso con referencia a las coordenadas $OUVW$ y $OXYZ$ respectivamente,

lo que se busca es una matriz R de 3×3 que transformará las coordenadas de P_{uvw} con respecto al sistema de coordenadas $OXYZ$ después de haber rotado en el sistema $OUVW$, por lo que se obtiene la ecuación:

$$P_{xyz} = RP_{uvw} \quad (2.2)$$

Al girarse nuestro punto P se puede decir que hemos girado nuestro sistema anclado al cuerpo $OUVW$, por lo que al ser girado encontramos un nuevo punto P rotado el cual es:

$$P_{uvw} = p_u i_u + p_v j_v + p_w k_w \quad (2.3)$$

Utilizando la definición de producto escalar y la ecuación (2.3), obtenemos las coordenadas p_x, p_y y p_z que representan las componentes del punto P ha lo largo de los ejes OX, OY y OZ .

$$p_x = i_x \cdot p = i_x \cdot i_u p_u + i_x \cdot j_v p_v + i_x \cdot k_w p_w \quad (2.4)$$

$$p_y = j_y \cdot p = j_y \cdot i_u p_u + j_y \cdot j_v p_v + j_y \cdot k_w p_w$$

$$p_z = k_z \cdot p = k_z \cdot i_u p_u + k_z \cdot j_v p_v + k_z \cdot k_w p_w$$

Expresado en forma matricial

$$\begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_x \cdot i_u & i_x \cdot j_v & i_x \cdot k_w \\ j_y \cdot i_u & j_y \cdot j_v & j_y \cdot k_w \\ k_z \cdot i_u & k_z \cdot j_v & k_z \cdot k_w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_u \\ p_v \\ p_w \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

donde se puede observar que la matriz de transformación generalizada es:

$$R = \begin{bmatrix} i_x \cdot i_u & i_x \cdot j_v & i_x \cdot k_w \\ j_y \cdot i_u & j_y \cdot j_v & j_y \cdot k_w \\ k_z \cdot i_u & k_z \cdot j_v & k_z \cdot k_w \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

La razón por la que la matriz de transformación es considerada es debido a que se busca una matriz de rotación, que represente la rotación del eje de coordenadas $OUVW$ con respecto a cada posición del eje de coordenadas fijo OX, OY y OZ , esto quiere decir que si rotamos los ejes de coordenadas $OUVW$ un ángulo θ con respecto de la posición OX , las coordenadas del punto $P_{uvw} = (p_u, p_v, p_w)^T$ con respecto del eje anclado al cuerpo $OUVW$, pero cambiaran sus coordenadas con respecto del eje anclado $(p_x, p_y, p_z)^T$ por lo que la matriz de transformación necesaria $R_{x,\theta}$ o también llamada matriz de rotación con respecto al eje de coordenadas OX con un ángulo θ , por lo que usando la ecuación anterior obtenemos que:

$$P_{uvw} = R_{x,\theta} P_{xyz} \quad (2.7)$$

En la **figura 2.17**, podemos observar los diferentes grados con los que se rota el sistema de coordenadas $OUVW$ con respecto de nuestro sistema de coordenadas fijo $OXYZ$ por lo cual se obtienen las matrices de rotación $R_{x,\theta}, R_{y,\beta}, R_{z,\gamma}$.

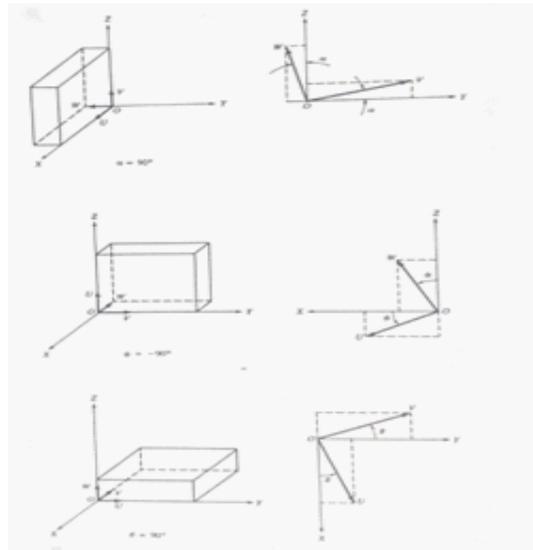


Figura 2.17 Diferentes posiciones rotadas.

Las matrices de rotación con respecto de los ejes OX , OY y OZ quedan representadas de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 R_{x,\theta} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \text{Cos}\theta & -\text{Sen}\theta \\ 0 & \text{Sen}\theta & \text{Cos}\theta \end{bmatrix} \\
 R_{y,\beta} &= \begin{bmatrix} \text{Cos}\beta & 0 & \text{Sen}\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\text{Sen}\beta & 0 & \text{Cos}\beta \end{bmatrix} \\
 R_{z,\gamma} &= \begin{bmatrix} \text{Cos}\gamma & -\text{Sen}\gamma & 0 \\ \text{Sen}\gamma & \text{Cos}\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{2.8}$$

Ejemplo del uso de la matriz de rotación. Dado dos puntos arbitrarios, sean $A = (4,6,7)$ y un punto $B = (7,9,1)$, con respecto al eje de rotación anclado al cuerpo, determinar los puntos A_{xyz} y B_{xyz} después de ser rotado 60 grados respecto al eje y.

Soluciones:

$$A_{xyz} = R_{y,\beta} A_{uvw} \quad ; \quad B_{xyz} = R_{y,\beta} B_{uvw}$$

$$A_{xyz} = \begin{bmatrix} \text{Cos}(60) & 0 & \text{Sen}(60) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\text{Sen}(60) & 0 & \text{Cos}(60) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$B_{xyz} = \begin{bmatrix} \text{Cos}(60) & 0 & \text{Sen}(60) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\text{Sen}(60) & 0 & \text{Cos}(60) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 9 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$A_{xyz} = \begin{bmatrix} 0,5(4) + 0(6) + 0,86(7) \\ 0(4) + 1(6) + 0(7) \\ -0,86(4) + 0(6) + 0,5(7) \end{bmatrix}$$

$$B_{xyz} = \begin{bmatrix} 0,5(7) + 0(9) + 0,86(1) \\ 0(7) + 1(9) + 0(1) \\ -0,86(7) + 0(9) + 0,5(1) \end{bmatrix}$$

$$A_{xyz} = \begin{bmatrix} 8,02 \\ 6 \\ 0,06 \end{bmatrix} \quad ; \quad B_{xyz} = \begin{bmatrix} 1,16 \\ 9 \\ -5,89 \end{bmatrix}$$

2.4.3. Cinemática inversa

El robot ideal está compuesto por seis grados de libertad, logrando una movilidad adecuada del efector final en un área determinada, si el robot manipulador contuviese menos grados de libertad se dice que el robot manipulador se encuentra limitado en posiciones y orientaciones, por otro lado si el robot manipulador contuviese más de seis grados de libertad se dice que habrá redundancia, por lo que existirá un infinito número de posibilidades para alcanzar una posición y orientación del efector final (G., 2005).

Con el fin de controlar la posición y la orientación del efector final de un robot para alcanzar un objeto en un área determinada, es importante la cinemática inversa, o dicho de otra manera conociendo la posición, así como la orientación del efector final de un brazo de seis ejes, el número de articulaciones y el número de elementos que lo componen, se busca encontrar los ángulos de articulaciones correspondientes $q = (q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6)^T$ del robot de manera que pueda posicionarse acorde con el área deseada para tomar el objeto (K.S. Fu, 2001).

La cinemática inversa puede ser resuelta por diversos métodos como el álgebra de tornillo, matrices duales, métodos geométricos y a partir de la transformación de matriz homogénea (Romero, 2011)

2.5. Formulación del Lagrangeano.

Para llevar a cabo el análisis dinámico de un sistema, se toman las leyes de movimiento de Newton, las cuales lo describen en un plano inercial de referencia, si este plano contiene coordenadas cartesianas y el sistema no está sujeto a restricciones externas, las ecuaciones de movimiento son usualmente directamente obtenidas, si alguna de estas condiciones no son conocidas, entonces las ecuaciones de movimiento serán posiblemente difíciles de formular y resolver.

Este problema es usualmente simplificado por el uso de coordenadas generalizadas, las cuales permiten calcular las ecuaciones de movimiento, que de alguna forma son igualmente aceptables para todas las coordenadas, estas coordenadas generalizadas toman ventajas de las restricciones de un sistema dinámico, sin embargo, la existencia de estas restricciones causan dos dificultades las cuales son:

-Las coordenadas del sistema dinámico son conectadas por las ecuaciones de restricción, por lo que no son independientes.

-Las fuerzas de las restricciones son usualmente muy complejas o desconocidas.

Debido a estas dificultades las ecuaciones de movimiento serían muy difíciles de describir o desarrollar por lo que se han desarrollado formulaciones alternativas de la teoría Newtoniana. Se describirán lo que son las coordenadas generalizadas, los grados de libertad y lo que son las restricciones holonómicas.

a) Coordenadas generalizadas

Las coordenadas generalizadas es aquel conjunto conveniente de parámetros o cantidades que pueden ser utilizadas para especificar la configuración o el estado de un sistema,

o también dicho las cantidades que pueden ser observadas que cambian con el movimiento del sistema y estas cantidades no deben ser necesariamente cantidades geométricas. Las coordenadas generalizadas quedan de la siguiente manera q_1, q_2, \dots, q_n .

b) Grados de libertad

Suele ser la característica más importante de un sistema mecánico, los grados de libertad indican el número de coordenadas independientes, y estos dependen del movimiento de nuestro sistema por lo que los grados de libertad definen la configuración o estado del sistema. Las coordenadas cartesianas son x_1, x_2, \dots, x_n .

c) Restricciones Holonómicas

Cuando en un sistema dinámico no es permitido la movilidad libre por las tres dimensiones, se dice que el sistema está sujeto a restricciones, supongamos que la configuración de un sistema dinámico es especificado por las n coordenada generalizadas q_1, q_2, \dots, q_n donde las condiciones de restricción impuestas en el movimiento del sistema pueden ser expresadas como ecuaciones conectando las coordenadas del sistema dinámico y el tiempo como se muestra a continuación

$$f_j(q_1, q_2, \dots, q_n, t) = 0 \quad \text{con } j = 1, 2, 3, \dots, k \quad (2.9)$$

Entonces las restricciones se dicen ser Holonómicas, un ejemplo de esta restricción holonómica, es el deslizamiento de un disco en un alambre circular de radio a en el plano xy , por lo que la ecuación de restricción es la siguiente:

$$x^2 + y^2 = a^2 \quad (2.10)$$

Como se habla de un sistema dinámico donde existen fuentes externas, un ejemplo de este tipo de fuentes externas es el trabajo, sin embargo, como se está utilizando un sistema de coordenadas generalizadas, no podemos llevar a cabo el análisis de la forma cotidiana a lo que entra en consideración el principio de D'Alembert y el trabajo virtual.

Considerando el sistema de la **figura 2.19** donde se muestra un sistema de partículas y suponiendo su comportamiento al movimiento de una con respecto de otra.

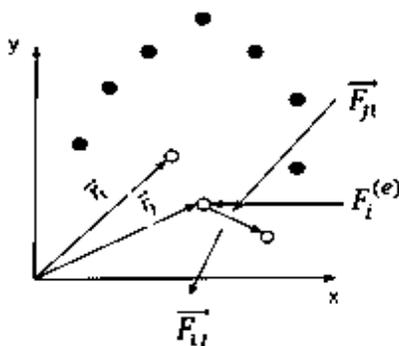


Figura 2.19 Comportamiento de un sistema de partículas.

D'Alembert parte de la segunda ley de Newton donde la suma de las fuerzas aplicadas a un objeto son directamente proporcionales a la masa m y a su aceleración r , para lo cual se le es aplicada a la partícula en movimiento quedando la fórmula mostrada a continuación:

$$\sum_j (F_{ji}) + F_i^{(e)} = m_i \ddot{r}_i \quad (2.14)$$

donde la fuerza externa actuando sobre la partícula i debido a fuentes externas al sistema está representada por $F_i^{(e)}$ y la fuerza interna sobre la partícula i debido a la partícula J

está representada por F_{ji} , la sumatoria de cada fuerza externa e interna de las partículas i y aplicada a la ecuación (2.14) obtenemos:

$$\sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} (F_{ji}) + \sum_i F_i^{(e)} = \sum_i m_i \ddot{r}_i \quad (2.15)$$

Como $F_{ii} = 0$, de acuerdo con la tercera ley de Newton que indica que a toda fuerza aplicada se tiene una reacción en sentido contrario con la misma intensidad por lo que para nuestro sistema de partículas $\vec{F}_{iJ} = -\vec{F}_{Ji}$ por lo que la ecuación anterior es reducida a la ecuación siguiente:

$$\sum_i F_i^{(e)} = \sum_i m_i \ddot{r}_i \quad (2.16)$$

La ecuación (2.16) no describe totalmente el movimiento de la partícula i , por lo que es necesario tomar en cuenta las restricciones de movimiento, o también llamadas las restricciones externas al sistema que también hemos llamado restricciones Holonómicas que para este caso al tratarse de un cuerpo rígido $r_{ij} = \text{constante}$, ahora bien si consideramos que la fuerza externa $F_i^{(e)}$ está formada por la fuerza externa aplicada expresada como $F_i^{(a)}$ y la fuerza externa aplicada debido a la consideración de las restricciones de movimiento expresada como F_i por lo que la ecuación (2.16) se modifica a la expresada a continuación:

$$\sum_i (F_i^{(a)} + F_i) = \sum_i m_i \ddot{r}_i \quad (2.17)$$

Como sabemos el trabajo que realiza un sistema es debido a la fuerza aplicada que se multiplica por su desplazamiento, para nuestro sistema de partículas el desplazamiento

se considera infinitesimal δr_i y el trabajo realizado se considera como trabajo virtual el cual está expresado en la siguiente ecuación:

$$W = \sum_i F_i^{(e)} \cdot \delta r_i \quad (2.18)$$

El principio del trabajo virtual indica que para que un sistema se encuentre en equilibrio, es decir, $\sum_i F_i^{(e)} \cdot \delta r_i = 0$ requiere que para algún desplazamiento virtual arbitrario δr_i , el trabajo virtual de la fuerza de restricción desaparece, así como el trabajo virtual de la fuerza externa aplicada $F_i^{(e)}$ también desaparece, por lo que la ecuación (2.18) en equilibrio toma la forma siguiente:

$$\sum_i \left(F_i^{(a)} + F_i \right) \cdot \delta r_i = 0 \quad (2.19)$$

Para los sistemas para los cuales las fuerzas de restricción no realizan trabajo alguno la ecuación (2.19) queda expresada de la siguiente manera.

$$\sum_i \left(F_i^{(a)} \right) \cdot \delta r_i = 0 \quad (2.20)$$

Por lo que el principio de D'Alembert de la ecuación $F_i^{(e)} = F_i^{(a)} + r_i = \dot{P}_i$ despejando $F_i^{(a)}$ y acomodando términos queda de la siguiente manera.

$$\sum_i \left(F_i^{(e)} - \dot{P}_i \right) \cdot \delta r_i = 0 \quad (2.21)$$

Para llegar a las ecuaciones de Euler – Lagrange tomamos el principio de D'Alembert que es la ecuación antes mostrada, la cual si se encuentra en función de las coordenadas r_i o desplazamientos virtuales se expresa por:

$$\sum_i \left(\vec{F}_i^{(a)} - \dot{P}_i \right) \cdot \delta \vec{r}_i = 0 \quad (2.22)$$

La ecuación (2.22) también se puede expresar por medio de las coordenadas generalizadas q_J ; $J = 1, 2, 3, \dots, n$ la cual queda mostrada en la ecuación siguiente:

$$\sum_i \left(F_i^{(a)} - \dot{P}_i \right) \sum_j \frac{\delta r_i}{\delta q_J} = \sum_J \left(Q_J - \sum_i \dot{P}_i \frac{\delta r_i}{\delta q_J} \right) \cdot \delta q_J \quad (2.23)$$

Donde la fuerza generalizada representada por Q_J es representada en la ecuación siguiente:

$$Q_J = \sum_i F_i^{(a)} \cdot \frac{\delta r_i}{\delta q_J} \quad (2.24)$$

Podemos observar que el trabajo virtual considerado P_i puede descomponerse en la masa por la aceleración quedando de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \sum_i m_i \ddot{r}_i \cdot \frac{\delta r_i}{\delta q_J} &= \sum_i \left[m_i \ddot{r}_i \cdot \frac{\delta r_i}{\delta q_J} + m_i \dot{r}_i \frac{d}{dt} \frac{\delta r_i}{\delta q_J} - m_i \dot{r}_i \frac{d}{dt} \frac{\delta r_i}{\delta q_J} \right] \\ &= \sum_i \left[\frac{d}{dt} \left(m_i \dot{r}_i \cdot \frac{\delta r_i}{\delta q_J} \right) - m_i \dot{r}_i \frac{d}{dt} \frac{\delta r_i}{\delta q_J} \right] \end{aligned} \quad (2.25)$$

Como la forma de las coordenadas generalizadas son de la forma $r_i(q_1, q_2, \dots, q_n, t)$ podemos decir que

$$\begin{aligned} \dot{r}_i &= \frac{d \vec{r}_i}{dt} \sum_J \frac{\delta \vec{r}_i}{\delta q_J} + \frac{\delta \vec{r}_i}{\delta t} \\ &= \frac{\delta r_i}{\delta q_1} \dot{q}_1 + \frac{\delta r_i}{\delta q_2} \dot{q}_2 + \dots + \frac{\delta r_i}{\delta q_n} \dot{q}_n + \frac{\delta r_i}{\delta t} \end{aligned} \quad (2.26)$$

Se puede observar una particularidad la cual se muestra en la siguiente ecuación:

$$\frac{\delta \dot{r}_i}{\delta q_i} = \frac{\delta r_i}{\delta q_1}; \frac{\delta \dot{r}_i}{\delta q_2} = \frac{\delta r_i}{\delta q_2}; \dots, \frac{\delta \dot{r}_i}{\delta q_n} = \frac{\delta r_i}{\delta q_n} \quad (2.27)$$

De esta particularidad llegamos a la forma general la cual se muestra en la ecuación siguiente:

$$\frac{\delta \dot{r}_i}{\delta q_J} = \frac{\delta \vec{r}_i}{\delta q_J} \quad (2.28)$$

De la ecuación del trabajo virtual (2.25) podemos mover la relación diferencial de las coordenadas generalizadas para así obtener parámetros conocidos en este caso la energía cinética mostrada en la ecuación siguiente:

$$\sum_i m_i \ddot{r}_i \cdot \frac{\delta r_i}{\delta q_J} = \left[\frac{d}{dt} \frac{\delta}{\delta q_J} \frac{m_i \dot{r}_i \dot{r}_i}{2} - \frac{\delta}{\delta q_J} \frac{m_i \dot{r}_i \dot{r}_i}{2} \right] \quad (2.29)$$

La ecuación (2.29) al reducir términos y quedando T como la energía cinética, quedando expresada de la siguiente manera:

$$\sum_i m_i \ddot{r}_i \cdot \frac{\delta r_i}{\delta q_J} = \left[\frac{d}{dt} \frac{\delta T}{\delta q_J} - \frac{\delta T}{\delta q_J} \right] \quad (2.30)$$

con T dada por:

$$T = \frac{1}{2} \sum_i m_i \dot{r}_i^2 = \frac{1}{2} \sum_i m_i \left(\frac{\delta r_i}{\delta q_J} \dot{q}_J + \frac{\delta m_i}{\delta t} \right)^2 \quad (2.31)$$

Por lo que al sustituir la ecuación (2.30) donde obtenemos la energía cinética en la ecuación (2.25) del trabajo virtual obtenemos

$$\sum_J \left(Q_J - \frac{d}{dt} \frac{\delta T}{\delta \dot{q}_J} - \frac{\delta T}{\delta q_J} \right) \cdot dq_J \quad (2.32)$$

Donde al tratarse de restricciones Holonómicas, por lo que todos los dq_J son linealmente independientes, por lo tanto, nuestra ecuación (2.32) toma la forma de

$$Q_J - \frac{d}{dt} \frac{\delta T}{\delta \dot{q}_J} - \frac{\delta T}{\delta q_J} = 0$$

o más conocida cómo:

$$\frac{d}{dt} \frac{\delta T}{\delta \dot{q}_J} - \frac{\delta T}{\delta q_J} = Q_J \quad (2.33)$$

En caso de que las restricciones externas o Holonómicas sean derivables de una función potencial tal que:

$$F_i^{(a)} = - \frac{\delta v(r_1, r_2, \dots)}{\delta r_1} \quad (2.34)$$

Ahora la fuerza generalizada Q_J de la ecuación (2.24) es expresada de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} Q_J &= \sum_i \left(- \frac{\delta v}{\delta r_i} \right) \cdot \left(\frac{\delta r_i}{\delta q_J} \right) = - \left(\frac{\delta v}{\delta r_1} \cdot \frac{\delta r_1}{\delta q_1} + \frac{\delta v}{\delta r_2} \cdot \frac{\delta r_2}{\delta q_2} \dots \right) \\ Q_J &= - \frac{\delta v(r_1, r_2, \dots)}{\delta q_J} \end{aligned} \quad (2.35)$$

Como $v(q_J)$ solamente $\frac{\delta v}{\delta \dot{q}_J} = 0$, entonces nuestra ecuación (2.35) queda de la siguiente forma:

$$\frac{d}{dt} \frac{\delta L}{\delta \dot{q}_J} - \frac{\delta L}{\delta q_J} = 0 \quad (2.36)$$

Donde L es la diferencia de la energía cinética y la energía potencial $L = T - v$ también es llamada la función Lagrangeana del sistema en caso de que se tengan fuerzas externas T_J no derivables de una función de potencia, Q_J puede dividirse en las que si son y en T_J , como es el caso de las fuerzas de fricción. Por lo que el modelo de Euler – Lagrange queda representada de la forma conocida y aceptada como:

$$\frac{d}{dt} \frac{\delta L}{\delta \dot{q}_J} - \frac{\delta L}{\delta q_J} = T_J \quad (2.37)$$

Capítulo 3

¿Que es Bond Graph ?

Bond Graph es una herramienta de modelado que fue definida por Paynter en 1961, pero fue formalizada por Karnopp en 1983, Rosenberg en 1990 y Breedveld en 1984, se encuentra entre un sistema físico y los modelos matemáticos asociados (Avalos, 2008). Bond Graph es una herramienta de tipo gráfica, la cual representa un sistema dinámico, donde se encuentran elementos de energía o un flujo de potencia, estos elementos pueden ser de almacenamiento de disipación o de intercambio de energía entre sistemas o subsistemas según sea el caso, ya que Bond Graph tiene la particularidad de modelar subsistemas independientemente para posteriormente ser ensamblados en un sistema global, por ejemplo en un Robot manipulador, que cuenta con varios subsistemas, ya sean eléctricos o mecánicos, pueden ser estudiados y modelados independientemente, como en nuestro caso que se busca modelar el efector final.

El propósito general de esta metodología, es la representación de cualquier sistema energético en donde estén involucrados distintos dominios o campos de variada naturaleza energética (Álvarez), por lo que podemos mencionar que la herramienta de modelado en Bond Graph puede ser aplicada en dominios mecánicos, eléctricos, hidráulicos, neumáticos y térmicos debido a que es una técnica que se basa en los elementos principales, donde se encuentra una concentración de energía o un flujo de esta.

Contando con un software de modelado llamado 20sim, Bond Graph ofrece una gran versatilidad a la hora de obtener, modelos matemáticos, sistemas controlados, modelos de sistemas eléctricos por medio de diagramas de circuitos o modelos de sistemas mecánicos por medio de los diagramas de bloques entre otros, siendo una herramienta gráfica que cuenta con la tecnología necesaria para llevar a cabo los estudios y la resolución de problemas.

3.1. Elementos que conforman el modelado en Bond Graph

Los elementos que conforman el modelo en Bond Graph, se basan en la naturaleza del modelo, que es el flujo en cada sistema o subsistema, como lo son para un sistema eléctrico las resistencias y los condensadores que son elementos que almacenan o disipan energía así como para un sistema mecánico lo son los resortes, amortiguadores y bombas que suministran energía al sistema. En Bond Graph la representación del flujo de energía en los sistemas es por medio de semiflechas llamadas Bond, así como los elementos de disipación y almacenamiento son representados como elementos I, C, R , los cuales se describirán a continuación.

3.1.1. Semiflechas llamadas Bond

Bond Graph especifica el flujo de energía en un sistema, la cual es representada por una semiflecha llamada bond, esta semiflecha representa la conexión entre los elementos que intercambian energía en la forma de dos variables fundamentales esfuerzo y flujo en función del tiempo, ya que el producto de estas dos variables da el resultado de la potencia de la energía instantánea mostrado en la ecuación (3.1), a su vez esta semiflecha indica la dirección del flujo de energía entre los puertos. Como se muestra en la **figura 3.1**. Mientras exista un flujo de energía en la unión de dos o más subsistemas de diferente dominio, es realmente útil clasificar estas variables de energía en una variable universal que describa esta energía en todos los tipos de uniones a lo cual se llamaron esfuerzo $e(t)$ y flujo $f(t)$. A estas variables de potencia, también son llamados variables de bond generalizadas debido a que también pueden ser utilizadas en todos los dominios de energía (Avalos, 2008), como se mencionó con anterioridad, Bond Graph puede llevar a cabo el modelado de diferentes tipos de dominios, de ahí su versatilidad, donde tomando estas variables generalizadas llegamos a la **Tabla 3.1** donde se muestran las variables que integran un sistema mecánico, sistema eléctrico y un sistema mecánico de rotación.

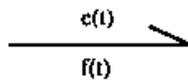


Figura 3.1. Un bond mostrando dirección de flujo de energía así como las variables de flujo y esfuerzo

Tabla 3.1 Variables generalizadas en diferentes sistemas

Variables Generalizadas	Mecánica de traslación	Electricidad	Mecánica de rotación
Flujo $f(t)$	Velocidad	Intencidad	Velocidad angular
Esfuerzo $e(t)$	Fuerza	Voltaje	Par
Momento $p(t)$	Momento cinético	Flujo	Momento angular
Desplazamiento $q(t)$	Desplazamiento	Carga	Angulo

La expresión para la potencia de la energía instantánea es la siguiente:

$$P(t) = e(t)f(t) \quad (3.1)$$

Para un sistema dinámico nos encontramos con dos tipos de variables de gran importancia que describen este sistema, estas variables son llamadas variables de energía y se trata del momento $p(t)$ y el desplazamiento $q(t)$ en su forma general. (Dean C. Karnopp, 2012). El momento está definido por la integral del esfuerzo, expresado de la siguiente manera:

$$p(t) = \int_{t_0}^t e(t)dt = p_0 + \int_{t_0}^t e(t)dt \quad (3.2)$$

De igual manera para el desplazamiento, que es la integral del flujo expresado de la siguiente manera:

$$q(t) = \int_{t_0}^t f(t)dt = q_0 + \int_{t_0}^t f(t)dt \quad (3.3)$$

Otra forma en que se encuentran estas ecuaciones, es en la forma de diferencial, en lugar de la de integración, quedando expresadas de la siguiente manera:

$$\frac{dp(t)}{dt} = e(t), \quad dp = edt \quad (3.4)$$

$$\frac{dq(t)}{dt} = f(t), \quad dq = f(t)dt \quad (3.5)$$

Quedando expresada la energía que entra o sale de cada puerto en un determinado tiempo de la siguiente manera:

$$E(t) = \int_{t_0}^t P(t) = \int_{t_0}^t e(t)f(t) \quad (3.6)$$

Es por eso que estas variables son consideradas variables de energía, debido a que podemos sustituir las ecuaciones (3.4) y (3.5) en la ecuación de la energía (3.6), quedando la energía en relación al esfuerzo $e(t)$ y desplazamiento $q(t)$ así como en relación del flujo $f(t)$ con el momento $p(t)$ expresado de la siguiente manera:

$$E(t) = \int_{t_0}^t e(t)dq = \int_{t_0}^t f(t)dp \quad (3.7)$$

3.1.2. Puertos

A la unión entre subsistemas por donde se desplaza el flujo de energía o existe almacenamiento y disipación de la misma es llamado puertos, estos puertos pueden ser llamados puerto1, puerto2 hasta puerto n , esto depende directamente del número de subsistemas o componentes interconectados y donde n es el número de puertos. Existen tres tipos de puertos los cuales son:

- a) Puerto-1 (Elementos básicos o pasivos).

Existen tres tipos de elementos básicos, también llamados elementos pasivos, los cuales son los elementos que ya no son reducibles en un sistema y pueden ser tomados como entidad, a su vez son los elementos que reciben energía del sistema y estos son los encargados de disipar dicha energía o almacenarla según sea la naturaleza del elemento, de esta cualidad es que se dice que pueden ser de almacenamiento de energía como lo son el elemento C que almacena la energía potencial (almacenamiento de flujo), el elemento I

que almacena la energía cinética (almacenamiento de esfuerzo) y el elemento disipador de energía el elemento R . los cuales se describen a continuación.

Elemento C. Es un elemento de almacenamiento de energía potencial, el cual está caracterizado por la relación constitutiva que relaciona el esfuerzo $e(t)$ con el desplazamiento $q(t)$, ejemplos de este elemento en los distintos dominios pueden ser los capacitores en eléctrica, resortes en mecánica o acumuladores en neumática como se muestra en la **figura 3.2** así como la **tabla 3.2** muestra la relación de esfuerzo con el desplazamiento de cada dominio.

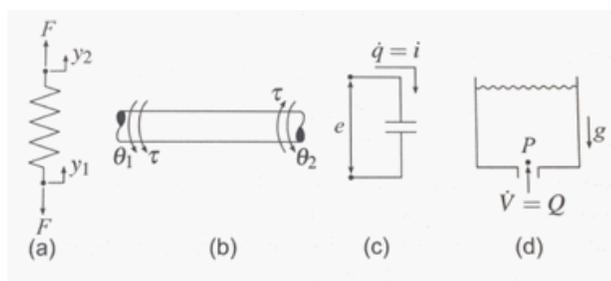


Figura 3.2. Representación del elemento C en los diferentes dominios: a) Mecánico, b) Rotacional, c) Eléctrico, d) Hidráulico.

Tabla 3.2. Relación esfuerzo con el desplazamiento en los diferentes dominios.

DOMINIO	MECÁNICO	ROTACIONAL	ELÉCTRICO	HÍDRAULICO
RELACIÓN ESFUERZO/DESPLAZAMIENTO	$F = k(y_2 - y_1)$	$\tau = k(\theta_2 - \theta_1)$	$e = q/c$	$C_f = A/pg$

Donde k es la rigidez del resorte.

Elemento I. Es un elemento de almacenamiento de energía cinética, el cual está caracterizado por la relación constitutiva que relaciona directamente el momento (p) con el flujo (f), algunos ejemplos de estos elementos son los generadores en dominios eléc-

tricos o la fuerza de excitación en dominios mecánicos, se muestran en la **figura 3.3** los ejemplos de estos elementos así como las relaciones en la **tabla 3.3**.

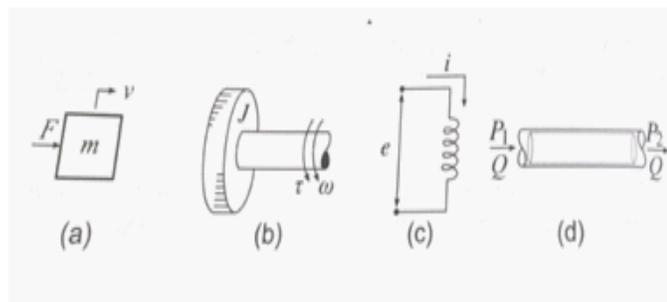


Figura 3.3. Representación del elemento I en los diferentes dominios: a) Mecánico, b) Rotacional, c) Eléctrico, d) Hidráulico.

Tabla 3.3. Relación momento y flujo de los diferentes dominios.

Dominio	Mecánico	Rotacional	Eléctrico	Hidráulico
Relación momento/ flujo	$p = mv = \int F dt$	$h = J\omega = \int \tau dt$	$I = P/f$	$\zeta = \int \Delta P dt$

Elemento R. Es un elemento de disipación de energía, el cual está caracterizado por la relación constitutiva que relaciona el esfuerzo (e) y el flujo (f), algunos ejemplos de ese elemento son la resistencia en un sistema eléctrico y un amortiguador en un sistema mecánico así como las pérdidas en un sistema hidráulico, algunos ejemplos se muestran en la **figura 3.4** así como la **tabla 3.4** que muestra las relaciones.

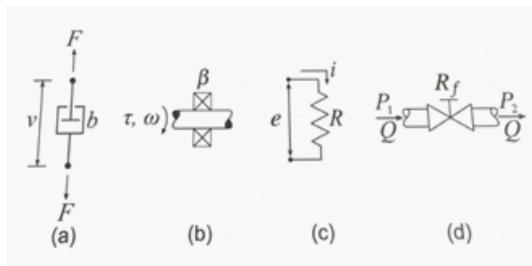
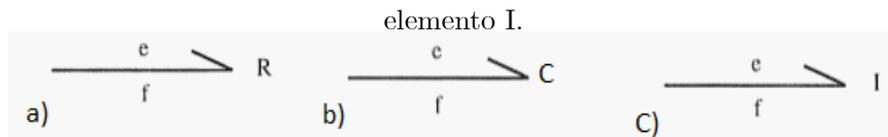


Figura 3.4. Representación del elemento R en los diferentes dominios: a) Mecánico, b) Rotacional, c) Eléctrico, d) Hidráulico.

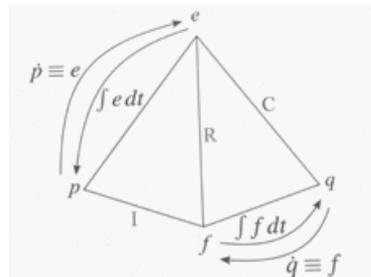
Tabla 3.4. Relación de esfuerzo y flujo de los diferentes dominios.

Dominio	Mecánico	Rotacional	Eléctrico	Hidráulico
Relacion esfuerzo y flujo	$F_b = b v$	$\tau = \beta \omega$	$e = i R$	$R_f = \Delta P / Q$

En la **figura 3.5** se muestra como son representados los elementos pasivos en un modelado de Bond Graph, comenzando de izquierda a derecha, a) elemento R, b) elemento C, c)

**Figura 3.5** Representación en Bond Graph de los elementos pasivos R, C, I.

Un tetraedro de estado modificado mostrado en la **figura 3.6**, muestra cómo se encuentran relacionados los puertos, en donde dependiendo de la dirección que tomemos, debemos integrar o derivar, si nos recorremos hacia la derecha o en contra de las manecillas del reloj nos encontramos de la forma de integral, así si nos movemos a favor de las manecillas del reloj nos encontramos en la forma de derivación.

**Figura 3.6.** Tetraedro de estado, mostrado con flechas el flujo de integración, siendo a la inversa el flujo de derivación.

b) Puerto 2 (elementos ideales).

Los elementos puerto 2 o también llamados elementos ideales, son aquellos elementos que cambian la relación entre las variables de esfuerzo $e(t)$ y las variables de flujo $f(t)$.

Estos elementos se caracterizan por estar constituidos por dos Bond, que significa la representación del flujo de potencia y la transmisión desde la entrada a la salida, mostrándonos que es la misma potencia que entra a la que sale agregando el módulo de transformación que es la relación que existe entre los esfuerzos o los flujos dependiendo del elemento como se muestra en la ecuación (3.8) donde se expresa el balance de energía ideal para un puerto 2.

$$e_1 f_1 = e_2 f_2 \quad (3.8)$$

Existen dos tipos de estos elementos los cuales son:

Transformadores. Un Transformador es representado en Bond Graph como se muestra en la **figura 3.7**, donde m es llamado módulo de transformación y es la relación que existe entre los esfuerzos e indica que el esfuerzo de entrada es proporcional al de la salida, al despejar f_1 de la ecuación (3.8) y dejando $m = e_2/e_1$ obtenemos la ecuación (3.9). Ejemplos de un transformador en los diferentes dominios son mostrador en la **figura 3.8**.

$$\frac{e_1}{f_1} \rightrightarrows \text{TF} \frac{m}{f_2} \rightrightarrows e_2$$

Figura 3.7. Representación de un Transformador en Bond Graph.

De acuerdo con un transformador la relación de flujos queda de la siguiente manera:

$$f_1 = m f_2 \quad (3.9)$$

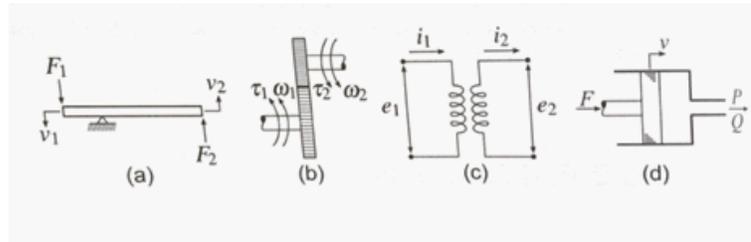


Figura 3.8. Ejemplos de transformadores en los diferentes dominios, a) Mecánico, b) Rotacional, c) Eléctrico, d) Hidráulico.

Giradores. Un Girador es representado en Bond Graph como se muestra en la **figura 3.9**, donde r es llamado módulo de transformación y es la relación que existe entre el esfuerzo de entrada y el flujo de salida, al despejar f_1 de la ecuación (3.8) y dejando $r = e_1/f_2$ obtenemos la ecuación (3.10). Mostrando algunos ejemplos en la **figura 3.10** de los diferentes tipos de giradores para cada dominio.

$$\frac{e_1}{f_1} \xrightarrow{\mathbf{GY}} \frac{e_2}{f_2} \xrightarrow{\mathbf{r}}$$

Figura 3.9. Representación de un Girador en Bond Graph.

De acuerdo con la relación de flujo de entrada con el esfuerzo de salida la ecuación de un Girador queda de la siguiente manera:

$$f_1 = r e_2 \quad (3.10)$$

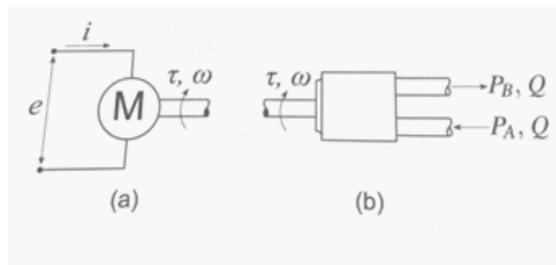


Figura 3.10. Representación de giradores.

c) Puertos3 (Uniones).

Los puertos3 o también llamados uniones, son aquellos que como su nombre lo indica, son los encargados de la interconexión entre tres o más puertos existentes en un sistema, estos puertos son los responsables de aplicar la ley de la conservación de la energía, estos puertos se clasifican en dos tipos los cuales son:

Puertos unión 0 (de esfuerzo común). Esta unión esta mostrada en la **figura 3.11**, tiene como particularidad que el esfuerzo es el mismo en los bond de energía, lo cual se indica en la ecuación (3.11) a continuación descrita.

$$e_1 = e_2 = e_3 \quad (3.11)$$

Donde al aplicar la ley de la conservación de la energía obtenemos:

$$f_1 + f_2 + f_3 = 0 \quad (3.12)$$

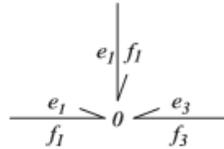


Figura 3.11. Puerto unión 0.

Puerto unión 1 (de flujo común). Esta unión mostrada en la **figura 3.12**, tiene como particularidad que el flujo es el mismo en los bond de energía, lo cual se indica en la ecuación (3.13) a continuación descrita.

$$f_1 = f_2 = f_3 \quad (3.13)$$

Al aplicar la ley de la conservación de la energía obtenemos:

$$e_1 + e_2 + e_3 = 0 \quad (3.14)$$

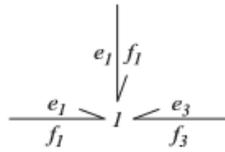


Figura 3.12. Puerto unión 1.

d) Puerto 1 Activo (fuentes).

La fuente o puerto 1 activo es un dispositivo que al ser conectado a un sistema o subsistemas, logra un flujo de energía, en sistemas eléctricos nos referimos a las baterías (fuentes de poder), mientras que en un sistema mecánico nos referimos a la fuerza, esta fuente es la que energiza o transfiere la fuerza a nuestros componentes de donde se derivan las variables de flujo y esfuerzo. Existen dos tipos de fuentes mencionadas a continuación:

Fuente de flujo (s_f) indica que la energía que fluye hacia nuestro sistema es de tipo de flujo, donde el valor del esfuerzo depende de la energía administrada al sistema y la energía de flujo ideal es independiente de la energía administrada ejemplos de este tipo de fuentes son el velocidad, la corriente o el caudal, es representada en Bond Graph como se muestra en la **figura 3.13**.

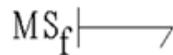


Figura 3.13. Fuente de flujo representada en Bond Graph.

Fuente de esfuerzo (s_e). El flujo de energía hacia nuestro sistema es de tipo de esfuerzo, donde el valor del flujo depende de la energía administrada hacia el sistema y no puede ser controlada por la fuente, para un flujo de esfuerzo ideal la energía de esfuerzo no puede ser alterada por las pérdidas de energía de la fuente, algunos ejemplos de esta fuente

son el voltaje, la fuerza y la presión, es representada en Bond Graph como se muestra en la **figura 3.14**.

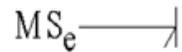


Figura 3.14. Fuente de esfuerzo representada en Bond Graph.

3.2. Causalidad para los diversos puertos de energía

La causalidad es la relación que existe entre los puertos (causa y efecto), como se mencionó con anterioridad para conservar las leyes constitutivas, a lo cual la representación de causa y efecto o flujo y esfuerzo son representadas en direcciones opuestas, en bond Graph se añade a la semiflecha una marca distintiva, llamada trazo causal, el cual indica la dirección del esfuerzo quedando el flujo en dirección contraria. A continuación se muestran ejemplos en la **figura 3.15** de los trazos causales en los diferentes Bond Graph (Avalos, 2008) donde se puede apreciar la marca causal, que es a donde siempre se dirige el esfuerzo y a su opuesto de la marca causal el flujo.

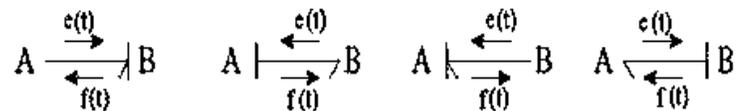


Figura 3.15. Causalidad en un Bond.

Existen diferentes representaciones de los trazos causales y esto depende de los elemento (I, C, R) así como si se encuentra en causal integral o causal derivativa. Las opciones que sean de forma integral o derivativa está relacionada con el tetraedro de estado

mostrado en la **figura 3.6** a lo cual para que se cumpla la relación constitutiva obtenemos la **tabla 3.5** donde indica las reglas o leyes que se deben cumplir para cada elemento

Tabla 3.5. Reglas para cada elemento.

Causalidad Necesaria	MS_e	MS_f
	$\begin{array}{c} \text{--- TF ---} \\ \text{--- GY ---} \end{array}$	$\begin{array}{c} \text{--- TF ---} \\ \text{--- GY ---} \end{array}$
Causalidad Restrictiva	$\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} 0 \end{array}$	$\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} 0 \end{array}$
	$\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} 1 \end{array}$	$\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} 1 \end{array}$
Causalidad Integral	$\text{---} I$	$\text{---} C$
Causalidad Derivativa	$\text{---} I$	$\text{---} C$
Causalidad Arbitraria	$\text{---} R$	$\text{---} R$

3.3. Ejemplos de modelado en Bond Graph

A continuación se presentan algunos ejemplos para poder observar la implementación del procedimiento de Bond Graph en sistemas eléctricos y mecánicos, considerando estos de mayor relevancia en consideración del trabajo realizado, ya que el efector final puede ser la unión de estos dos sistemas en cuestión.

a) Ejemplo sistema eléctrico. Considerando un sistema eléctrico como el mostrado en la **figura 3.16**, el primer paso a realizar, es colocar una unión 0 donde existan nodos de conexión, y una unión 1 donde se encuentren los elementos de almacenamiento o de disipación.

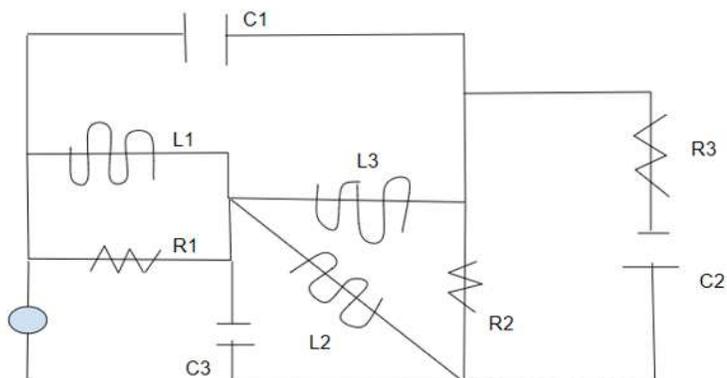


Figura 3.16. Ejemplo de un sistema eléctrico.

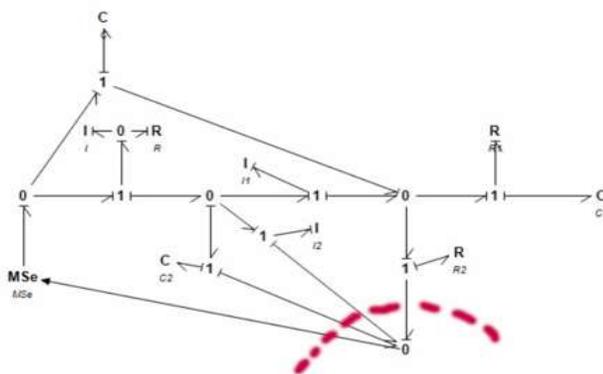


Figura 3.17. Bond Graph del sistema eléctrico de la **figura 3.16**.

En la **figura 3.17** se muestra el modelo en Bond Graph de un sistema eléctrico, la línea punteada de color roja indica que esa parte puede ser eliminada, para posteriormente realizar reducciones con las condiciones mostradas en la **figura 3.18**.

$$\begin{array}{c} \text{---}1\text{---} \\ \text{---}0\text{---} \end{array} = \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{---}0\text{---} \\ \text{---}1\text{---} \end{array} = \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array}$$

Figura 3.18. Condiciones de reducción para modelos Bond Graph.

Quedando el modelo en Bond Graph de un sistema eléctrico con las reducciones correspondientes mostrado en la **figura 3.19**, donde se puede observar la implementación

de la causalidad, quedando los elementos de disipación y almacenamiento con causalidad integral sin quebrantar alguna restricción mostrada en la **tabla 3.5**.

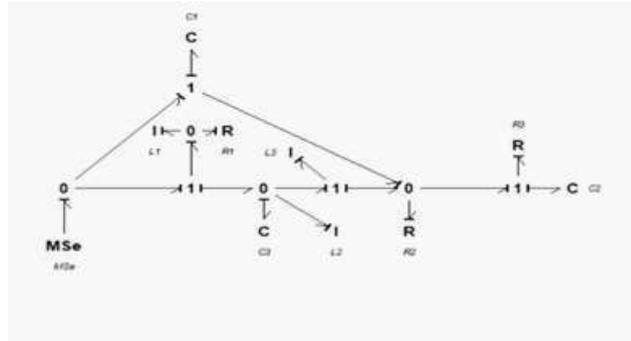


Figura 3.19. Modelo en Bond Graph de un sistema eléctrico.

b) Sistemas mecánicos. Para sistemas mecánicos es el mismo procedimiento, sin embargo, se dan dos pequeños casos, se coloca uniones uno donde exista presencia de velocidad, o un cambio de está, dejando como uniones 0 donde se encuentran los elementos de almacenamiento y de disipación de energía en la **figura 3.20** se muestra un sistema mecánico.

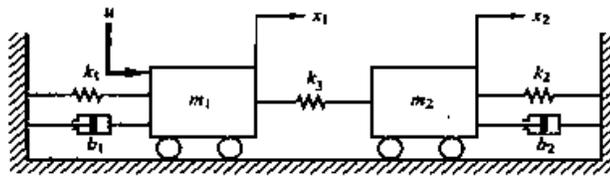


Figura 3.20. Sistema mecánico.

El modelo en Bond Graph queda de acuerdo a la **figura 3.21**.

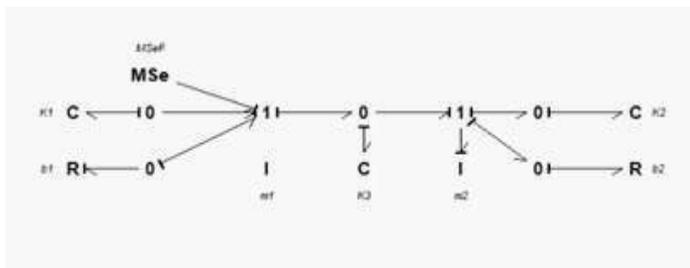


Figura 3.21. Modelo en Bond Graph de un sistema mecánico mostrado en la **figura 3.20.**

En la **figura 3.21** se observa el modelo en Bond Graph de un sistema mecánico, donde se aprecia que los resortes k son considerados como elementos C, los amortiguamientos son tomados como elementos R y las masas son elementos I, y es de esperarse debido a su comportamiento de almacenamiento de energía o la disipación de la misma, en la **figura 3.22** se muestra el modelo en Bond Graph con las reducciones y causalidad aplicadas.

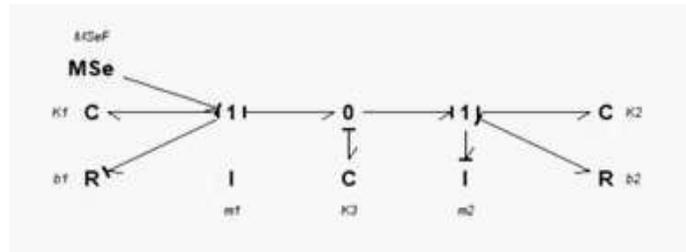


Figura 3.22. Modelo en Bond Graph de sistema mecánico.

3.4. Ecuación de estado

La ecuación de estado permite conocer el comportamiento de un sistema, a su vez describe si un sistema es observable y controlable ante las variables que lo componen. Para encontrar la solución matemática en este caso la ecuación de estado es necesario conocer cómo se comportan las variables o en nuestro caso, en terminos de Bond Graph los elementos de disipación y/o de almacenamiento, para esto se tiene l siguiente diagrama llamado estructura unión, donde se encuentran los Bond externos que conectan a los diferentes puertos o elementos, R, C, I, MS_e , MS_f y los Bond Internos que son conectados a los puertos

o elementos 0, 1, TF y GY de esta manera se puede observar el diagrama de la estructura unión mostrada en la **figura 3.23**.

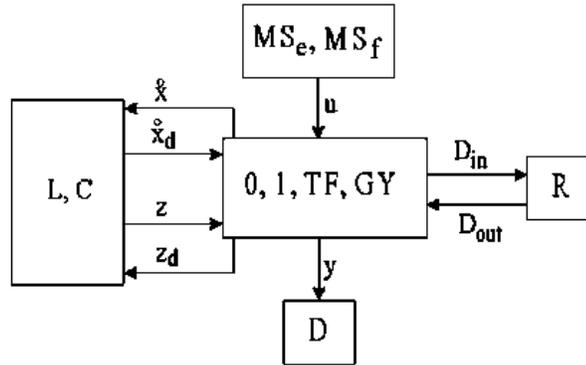


Figura 3.23. Diagrama de bloques de la estructura unión de un Bond Graph.

Los elementos MS_e , MS_f , L , C , R , denotan los campos de fuente, es donde se encuentra un flujo o un almacenamiento de energía, D es el detector, 0, 1, TF y GY son las uniones entre los elementos antes mencionados, siendo TF , transformadores, GY , giradores y respectivamente uniones 0 y 1.

Los vectores que interactúan con el sistema son llamados vectores clave en los cuales podemos observar a $u(t)$ que es donde se encuentran las variables de potencia o los esfuerzos de flujo impuestos por los elementos de fuentes hacia nuestra estructura unión, los estados $x(t)$ y $xd(t)$ están compuestos de energía, para los elementos I el momento generalizado $p(t)$ y para los elementos C desplazamiento generalizado $q(t)$ donde se pueden encontrar de manera integral o derivativa según sea el caso, los vectores $z(t)$ y $zd(t)$ son variables de co-energía representadas de manera derivativa e integral según sea el caso, los vectores $D_{in}(t)$ y $D_{out}(t)$ son una mezcla de flujos y esfuerzos que muestran como es el intercambio de energía entre el campo de disipación y la estructura unión. Se puede determinar la relación

de campo constitutiva no lineal de almacenamiento y disipación como se muestra en las ecuaciones (3.15),(3.16) y (3.17). mostradas a continuación:

$$z(t) = Fx(t) \quad (3.15)$$

$$z_d(t) = F_dx_d(t) \quad (3.16)$$

$$D_{out}(t) = LD_{in}(t) \quad (3.17)$$

Donde F es la relación de la salida z con la entrada x en su forma de integral, F_d es la relación de la salida z_d con la entrada x_d en su forma de derivada y L es la relación que existe entre D_{out} y D_{in} , a su vez son matrices de $r \times r$, $n \times n$, $m \times m$, respectivamente, por lo que la relación de la estructura unión queda de la siguiente manera mostrada en la matriz (3.18)

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ D_{in}(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = S \begin{bmatrix} z(t) \\ D_{out}(t) \\ u(t) \\ x_d(t) \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

Donde S es la representación de una matriz llamada matriz unión la cual es representada como se muestra en la matriz (3.19).

$$\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & 0 \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & 0 \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

Las componentes de la matriz S puede tomar valores dentro del conjunto $(0, \pm 1, \pm n, \pm r)$ donde n y r representan los valores cuando se encuentra en nuestro sistema un transformador o un girador respectivamente, la matriz S tiene ciertas propiedades basadas en la conservación de la energía las cuales nos dicen que:

S_{11} y S_{22} son matrices cuadradas antisimétricas.

S_{12} es la matriz traspuesta negativa de la matriz S_{21} y viceversa.

De esta forma obtenemos la ecuación de estado de la forma $\dot{x} = Ax + Bu$. Calculamos A y B partiendo de la estructura unión (3.20).

$$\begin{bmatrix} x \\ D_{in} \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ D_{out} \\ u \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

Partimos de la ecuación (3.21) para llegar a la ecuación (3.22) sustituyendo la ecuación (3.17) y realizando las operaciones pertinentes.

$$D_{in} = zS_{21} + D_{out}S_{22} + S_{23} \quad (3.21)$$

$$D_{in} = (I - S_{22}L)^{-1}(S_{21}z + S_{23}u) \quad (3.22)$$

Se realiza la misma operación para x , obteniendo la ecuación (3.23) y sustituyendo la ecuación (3.17) y (3.22), obteniendopor la ecuación de estado (3.24).

$$x = zS_{11} + D_{out}S_{12} + S_{13}u \quad (3.23)$$

$$\dot{x} = [S_{11} + S_{12}MS_{21}]Fx + [S_{13} + S_{12}MS_{23}]u \quad (3.24)$$

Donde:

$$A = [S_{11} + S_{12}MS_{21}]$$

$$B = [S_{13} + S_{12}MS_{23}]$$

Obteniendo la ecuación simplificada de la ecuación de estado:

$$\dot{x} = AFx + Bu \quad (3.25)$$

3.5. Ejemplos de obtención de la ecuación de estado.

Se consideran los ejemplos anteriores donde se obtiene los Bond Graph de un sistema eléctrico y un sistema mecánico para calcular la ecuación de estado de cada uno de ellos.

- a) Calcular la ecuación de estado de un sistema eléctrico desde un modelo en Bond Graph mostrado en la **figura 3.24**.

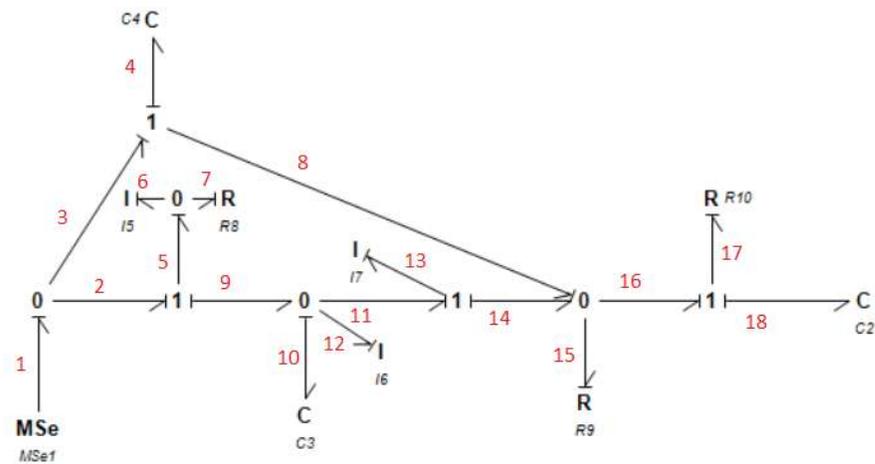


Figura 3.24. Modelo en Bond Graph de un sistema eléctrico.

Paso 1. Enumerar los Bonds comenzando por la fuente de energía MS_e para posteriormente determinar los elementos que conforman x, \dot{x}, z , siendo estos los elementos de almacenamiento I y C , o bien dicho de otra forma los momentos generalizados y desplazamientos generalizados, posteriormente se derivan de acuerdo al tetraedro de estado de la **figura 3.6**, y así obtener las matrices \dot{x} y z mostradas en la ecuación (3.26).

$$x = \begin{bmatrix} p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ q_5 \\ q_6 \\ q_7 \end{bmatrix}, \dot{x} = \begin{bmatrix} e_2 \\ e_3 \\ e_4 \\ f_5 \\ f_6 \\ f_7 \end{bmatrix}, z = \begin{bmatrix} f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ e_5 \\ e_6 \\ e_7 \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

Tanto D_{in} y D_{out} son matrices donde hay disipación de potencia la cual puede ser de causalidad derivativa o causalidad integral las matrices (3.27) se muestran a continuación.

$$D_{in} = \begin{bmatrix} e_8 \\ e_9 \\ e_{10} \end{bmatrix}, D_{out} = \begin{bmatrix} f_8 \\ f_9 \\ f_{10} \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

Las matrices (3.28) diagonales L y F son matrices que contienen los elementos de disipación y almacenamiento, respectivamente.

$$L = \begin{bmatrix} 1/R_7 & 0 & 0 \\ 0 & 1/R_8 & 0 \\ 0 & 0 & 1/R_9 \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} L_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & L_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & L_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_7 \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

Se calcula la matriz S la cual se obtiene por medio de la ley de la conservación de la energía en cada nodo, considerando que para uniones 0 el esfuerzo es el mismo y para uniones 1 el esfuerzo es una sumatoria o resta según sea el caso, en caso del flujo es lo contrario para uniones 1 es el mismo flujo y para uniones 0 es una diferencia, se realiza el balance para cada elemento para calcular la matriz S como se muestra en la estructura union en la ecuación (3.29) una vez calculada podemos observar que se cumplen las condiciones de la matriz unión antes mencionadas, en la ecuación (3.31)

$$\begin{matrix} \dot{x} \\ D_{in} \end{matrix} \begin{bmatrix} e_2 \\ e_3 \\ e_4 \\ f_5 \\ f_6 \\ f_7 \\ e_8 \\ e_9 \\ e_{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ e_5 \\ e_6 \\ e_7 \\ f_8 \\ f_9 \\ f_{10} \\ e_1 \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

-Balance del elemento e_2 .

Comenzamos en una unión 0 por lo que el esfuerzo es el mismo así que pasamos al elemento 1 donde hay una diferencia de esfuerzo quedando la ecuación (3.30) como:

$$e_2 = e_1 - e_6 \quad (3.30)$$

Se realiza la misma operación para cada elemento hasta obtener la matriz de estructura de unión mostrada en la ecuación (3.31).

$$\begin{array}{c} \dot{x} \\ D_{in} \end{array} \begin{bmatrix} e_2 \\ e_3 \\ e_4 \\ f_5 \\ f_6 \\ f_7 \\ e_8 \\ e_9 \\ e_{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ e_5 \\ e_6 \\ e_7 \\ f_8 \\ f_9 \\ f_{10} \\ e_1 \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

Se puede observar que se cumplen las condiciones antes mencionadas:

S_{11} y S_{22} son matrices cuadradas antisimétricas.

S_{12} es la matriz traspuesta negativa de la matriz S_{21} y viceversa.

Paso 2. Una vez calculada la matriz unión obteniendo las matrices que la complementan se puede calcular la ecuación de estado con la ecuación (3.24) donde para este caso en particular como la matriz cuadrada S_{22} es igual con 0 por lo tanto el valor de M será igual a la matriz diagonal L .

Calculando A , de la ecuación (3.32)

$$A = [S_{11} + S_{12}MS_{21}] \quad (3.32)$$

$$\begin{aligned}
A = & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \\
& + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/R_7 & 0 & 0 \\ 0 & 1/R_8 & 0 \\ 0 & 0 & 1/R_9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \\
A = & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -\frac{1}{R_8} - \frac{1}{R_9} & 0 & -\frac{1}{R_9} \\ 1 & -1 & -1 & 0 & -\frac{1}{R_7} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{R_9} & 0 & -\frac{1}{R_9} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Calculando B de la ecuación (3.33)

$$B = [S_{13} + S_{12}MS_{23}] \quad (3.33)$$

$$B = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/R_7 & 0 & 0 \\ 0 & 1/R_8 & 0 \\ 0 & 0 & 1/R_9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ \\ B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ \frac{1}{R_8} + \frac{1}{R_9} \\ \frac{1}{R_7} \\ \frac{1}{R_9} \end{bmatrix}$$

Paso 3. Calculando la ecuación de estado una vez encontradas las matrices A y B, y multiplicando la matriz A por la matriz diagonal F.se substituyen en la ecuación de estado (3.24)

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -C_6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_5 & C_6 & 0 \\ 0 & 0 & -L_4 & -C_5(\frac{1}{R_8} + \frac{1}{R_9}) & 0 & -\frac{C_7}{R_9} \\ 0 & -L_3 & -L_4 & 0 & -\frac{C_6}{R_7} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{C_5}{R_9} & 0 & -\frac{C_7}{R_9} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ \frac{1}{R_8} + \frac{1}{R_9} \\ \frac{1}{R_7} \\ \frac{1}{R_9} \end{bmatrix} u$$

b) Calcular la ecuación de estado de un sistema mecánico desde un modelo en Bond Graph mostrado en la **figura 3.25**.

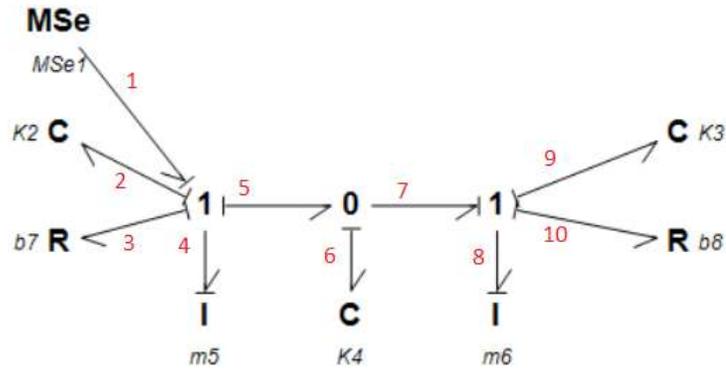


Figura 3.25. Modelo de un sistema mecánico en Bond Graph.

Paso 1. Colocar y determinar los elementos x , \dot{x} , z , D_{in} , D_{out} , así como las matrices diagonales L y F .

$$x = \begin{bmatrix} p_2 \\ p_3 \\ q_4 \\ q_5 \\ q_6 \end{bmatrix}, \dot{x} = \begin{bmatrix} e_2 \\ e_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \end{bmatrix}, z = \begin{bmatrix} f_2 \\ f_3 \\ e_4 \\ e_5 \\ e_6 \end{bmatrix};$$

$$D_{in} = \begin{bmatrix} f_7 \\ f_8 \end{bmatrix}, D_{out} = \begin{bmatrix} e_7 \\ e_8 \end{bmatrix}$$

Recordando que en la matriz F nuestros elementos L son proporcionales a la masa (m) y los elementos C son proporcionales a K por las características de actuar como resorte.

$$L = \begin{bmatrix} R_7 & 0 \\ 0 & R_8 \end{bmatrix}; \quad F = \begin{bmatrix} m_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k_6 \end{bmatrix}$$

Obteniendo la matriz unión mostrada en la ecuación (3.34)

$$D_{in} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ e_2 \\ e_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \\ f_7 \\ f_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_2 \\ f_3 \\ e_4 \\ e_5 \\ e_6 \\ e_7 \\ e_8 \\ e_1 \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

Se puede observar que se cumplen las condiciones antes mencionadas:

S_{11} y S_{22} son matrices cuadradas antisimétricas.

S_{12} es la matriz traspuesta negativa de la matriz S_{21} y viceversa.

Paso 2 Calculando la matriz A con $M = L$.

$$A = [S_{11} + S_{12}MS_{21}]$$

$$A = \begin{bmatrix} -R_7 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -R_8 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Calculando la matriz B .

$$B = [S_{13} + S_{12}MS_{23}]$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Paso 3. Calculando la ecuación de estado 3.24 una vez encontradas las matrices A

y B , y multiplicando la matriz A por la matriz diagonal F , obtenemos

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -R_7m_2 & 0 & -k_4 & 0 & -k_6 \\ 0 & -R_8m_3 & 0 & -k_5 & k_6 \\ m_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ m_2 & -m_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

3.6. Software 20-SIM

20 sim es un software que permite simular y modelar de una manera gráfica sistemas eléctricos, mecánicos, hidráulicos, entre otros sistemas, este programa se ejecuta bajo Microsoft Windows y es desarrollado por Controllab. 20 Sim soporta totalmente el modelo gráfico por lo que podemos simular lo que ahora conocemos como modelos en Bond Graph, desde los componentes llamados bond hasta las estructuras que se componen por puertos y elementos de disipación y almacenamiento como los antes mencionados en la **figura 3.24** y **3.25**, este tipo de modelos pueden ser simulados y analizados de una manera intuitiva y fácil para los diferentes dominios físicos en sistemas dinámicos, logrando crear sistemas de control para dichos modelos. Se presentan ejemplos de dichos modelos realizados en el software 20 sim, tomando dichos ejemplos realizados previamente.

En la **figura 3.26**, se ilustra el editor de 20 Sim, donde se puede observar del lado izquierdo la biblioteca de elementos, estos elementos pueden ser los antes mencionados, elementos de almacenamiento o de disipación, los cuales pueden ser los elementos R , GY , I , C dependiendo el que vallamos a ocupar, a su vez tenemos los puertos 1 y 0 para llevar a cabo las conexiones adecuadas, esto lo logramos arrastrando los elementos del lado izquierdo hacia nuestra área de trabajo la parte cuadrículada del lado derecho como puede observarse en la figura antes mencionada, se han arrastrado algunos elementos como ejemplos, sin embargo en la **Figura 3.27** se han agregado los elementos adecuados que componen el Bond Graph del sistema eléctrico, una vez colocados la unión se realiza con el comando que se encuentra encerrado en un cuadro rojo o bien con el tabulador del teclado.

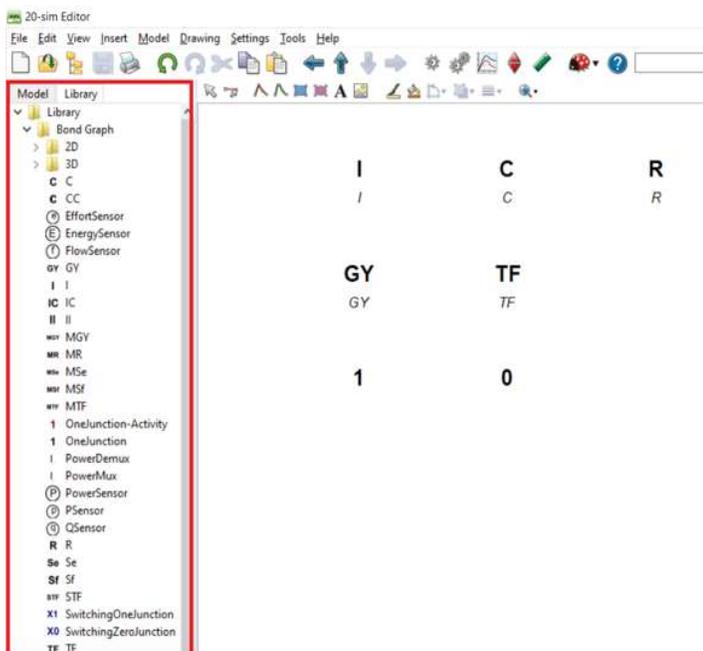


Figura 3.26 Editor del software 20 Sim, con la biblioteca abierta en Bond Graph.

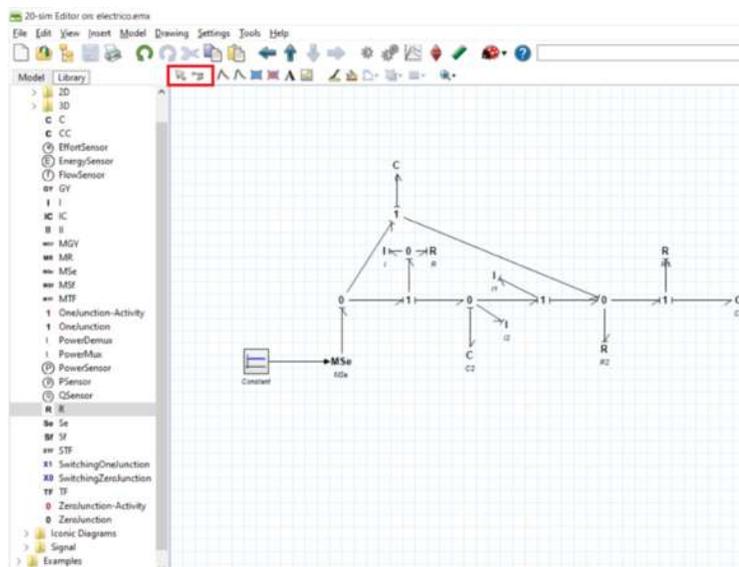


Figura 3.27. Modelado de un sistema eléctrico en Bond Graph.

El programa 20 Sim permite modelar un sistema eléctrico y observar su comportamiento por medio de una gráfica, la cual podemos elegir los valores de las variables

iniciales, una vez tomados los parámetros, la variable a simular, y el tiempo de simulación obtenemos una gráfica como la que se muestra en la **figura 3.28** la cual se ha simulado la variable I , la cual se trata de un elemento de almacenamiento por lo que era de esperarse que su gráfica fuese en ascenso, ya que el flujo de energía al pasar por este elemento lo enriquece por el tiempo que esta fuente esté conectada, al simular un elemento R ocurre lo contrario, hay una caída de energía hasta encontrar un equilibrio o llegar a cero lo cual tiene sentido al tratarse de un elemento de disipación mostrado en la **figura 3.29**.

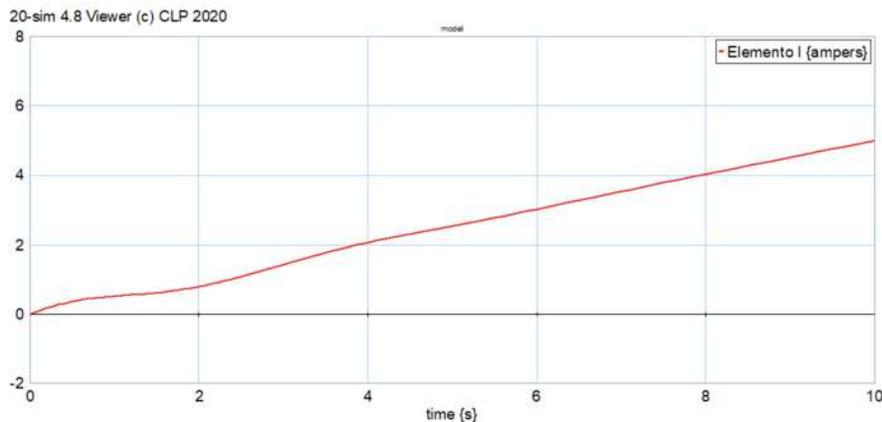


Figura 3.28 Gráfica de un elemento I .

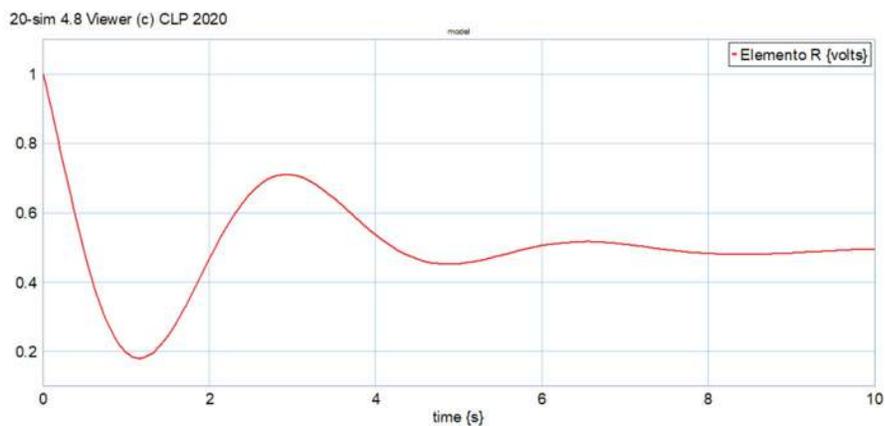


Figura 29 Gráfica de un elemento R .

Al modelar un sistema mecánico, se realiza de la misma manera que el sistema eléctrico por lo que en la **figura 3.30** podemos observar el sistema mecánico realizado en el software 20-sim, así como en la **figura 3.31** podemos observar la simulación de sus elementos o resorte así como en la **figura 3.32** observamos la simulación de los elementos amortiguadores.

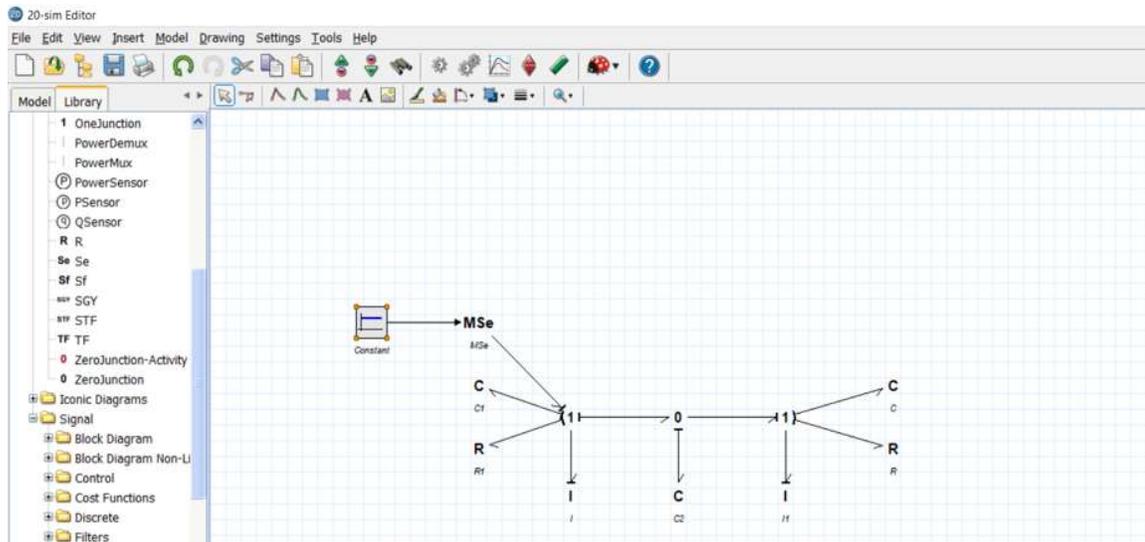


Figura 3.30 Modelo en Bond Graph de un sistema mecánico en 20-sim.

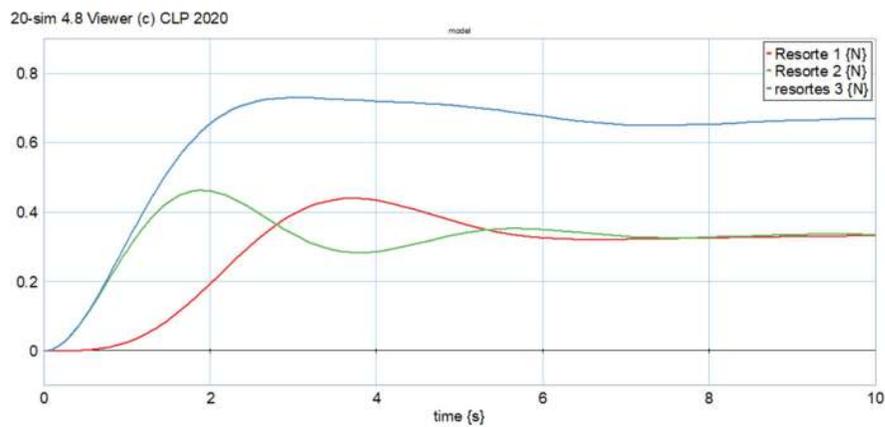


Figura 3.31 Simulación en 20-sim de resortes.

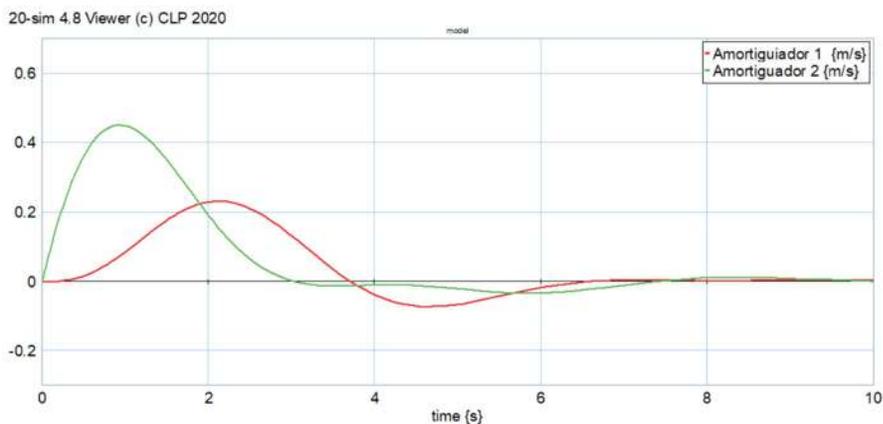


Figura 3.32 Simulación en 20 sim de amortiguadores.

En la **figura 3.32** podemos observar el comportamiento de los elementos de almacenamiento o resortes, se puede observar que como el movimiento de los vagones es hacia la derecha, la mayor tensión la presenta el primer resorte, seguido por el de en medio y el último el de la derecha, así como en la **figura 3.33** donde actúan los amortiguadores, el primer amortiguador pegado a la fuente de potencia es el de mayor magnitud seguido por el colocado a la derecha, dejando así una visión de cómo se comportaría nuestro sistema al colocar una fuente de potencia al costado izquierdo.

Capítulo 4

Efecto final, modelado y simulación en Bond Graph y Euler Lagrange.

La tecnología de los robots ha ido en ascenso considerablemente, una de las áreas donde se puede observar este crecimiento es en el área industrial, donde encontramos una extensa variedad de modelos de robots manipuladores, sin embargo, la diferencia que hace únicos a cada modelo, es el efecto final, que es la herramienta con la que pueden cumplir su función primordial, realizando una comparación con los seres humanos la herramienta efecto final sería las manos, las cuales los seres humanos y uno que otro animal, utilizan para realizar ciertas tareas particulares, siendo la más común, la sujeción y desplazamiento de objetos, entonces, podemos decir que un efecto final es aquella herramienta que se encuentra al final de los eslabones que conforman un robot manipulador que le permiten realizar alguna

actividad con su entorno, dicho de otra manera es la herramienta electromecánica diseñada para una actividad en particular de manera automatizada.

Existen varios tipos de efectores finales, desde los más modernos como lo son los efectores finales destinados a robot humanoides, siendo estos de geometría compleja, ya que deben realizar funciones que un ser humano lograría con naturalidad, teniendo una apariencia similar a una mano humana, estos pueden variar dependiendo de los grados de libertad, los cuales dependerán de los números de dedos con los que se pretende llevar a cabo una tarea en específico, contando también con los efectores finales de geometría sencilla, o también llamados efectores tipo pinza, el cual su funcionamiento se resume a la sujeción de objetos, logrando un traslado de los mismos o simplemente su manipulación en el mismo espacio, sin embargo, para este estudio se optó por un efector final de dos dedos de sujeción ya que se pretende mostrar la implementación de Bond Graph en el área de robótica industrial, donde su función principal será la de sujetar ciertos objetos con características específicas, poder trasladarlos en un espacio dado y soltar para posicionar.

El diseño de un efector final puede ser muy costoso (Budiarsa, 2015) debido a las especificaciones requeridas, entre ellas podemos encontrar la geometría donde a parte de su forma física, podemos encontrar diferentes tipos de materiales con lo que se puede desarrollar un efector final, esto dependerá de la tarea a realizar ya sea que se vea bajo cargas muy grandes pensando en un material metálico o bien si pensamos en una tarea donde no intervenga el calor y las piezas sean livianas podemos pensar en algún polímero, su función, complejidad, componentes eléctricos y mecánicos, por lo que es necesario llevar a cabo varios prototipos en su forma física, lo cual puede incrementar considerablemente el costo de un

robot manipulador, siendo entonces la simulación una tarea esencial para la construcción de un efector final, en nuestro caso un modelo y una simulación en Bond Graph, para así lograr un acercamiento a las especificaciones requeridas, simulando de manera dinámica dicho efector final.

Un robot industrial debe ser capaz de realizar cualquier tarea repetitiva en una línea de producción (Aguilar Velasco Casandra, 2007) por lo que su simulación debe ser la más acercada a la realidad.

4.1. Tipos de efectores finales

Existen diferentes tipos de efectores finales, esto depende directamente de la tarea por la cual fueron diseñados, a continuación se mencionan algunos tipos de efectores finales y sus funciones, esto, para aclarar las dudas sobre ¿Qué es un efector final, ¿ para qué nos sirve un efector final, ¿ por qué son tan complejos algunos tipos, y sobre todo si es una buena idea implementar Bond Graph para este tipo de sistemas.

a) Efectores finales tipo pinza.

Los efectores finales diseñados para la sujeción, son aquellos que llevan a cabo su tarea por medio de la manipulación de objetos, logrando trasladarlos a otro espacio o simplemente para impedir el movimiento del objeto, para lograr esta sujeción existe un sinnúmero de modelos, desde una geometría sencilla, hasta una con mayor complejidad, dando lugar a los efectores tipo pinza mostrados en la **figuras 4.1** donde se muestran diferentes tipos de efectores finales tipo pinza (dos dedos).

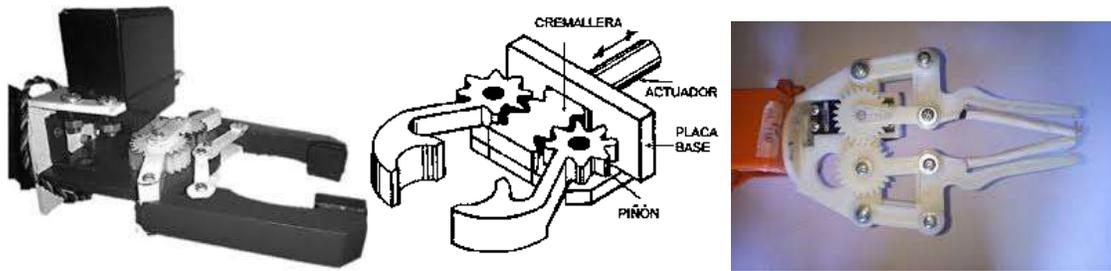


Figura 4.1. Ejemplos de efectores finales tipo pinza.

Como se puede observar, los efectores finales tipo pinza, suelen ser muy variados, esto es debido a su geometría con la que son diseñados, a su vez esta geometría depende del objeto u objetos a ser tomados, sujetados, o simplemente tomados, como se puede observar en las **figuras 4.1** los efectores finales diferencian uno del otro en la forma de sus dedos, o el área que se pretende dejar entre dedos para así el objeto pueda ocupar ese espacio con facilidad, un ejemplo de lo dicho, nombrando el primer efector de izquierda a derecha, el cual su geometría indica que puede tomar objetos en forma de bloque, ya que el área entre dedos así no lo indica, mientras que el efector número tres nombrado de izquierda a derecha, su geometría indica que puede sujetar botellas o cualquier objeto con un centro, como puede ser el caso de valeros. Este tipo de efectores suelen ser de geometría sencilla, como se puede observar en las figuras antes mencionadas, están conformados por engranes, que son los que permiten el abrir y cerrar de los dedos y como entrada de potencia encontramos lo que son los motores DC o servomotores, en algunos otros caso la entrada de potencia depende de los actuadores como la imagen mostrada al centro.

b) Efector final de un dedo (de tarea específica).

Este tipo de efectores son de gran utilidad en el área industrial, sin embargo, el efector final, pasa a ser solo una herramienta ya existente, que puede ser intercambiada,

algunos ejemplos de este tipo de efectores son los utilizados para soldar mostrado en la **figura 4.2**. Donde el efector final pasa a ser sólo una punta, que al entrar en contacto con lámina provoca un corto circuito, logrando así la unión de estas láminas, también es llamado soldadura por puntos.



Figura 4.2. Efector final de función de soldador.

Una aplicación más, es en el área de las ensambladoras automotrices, la cual es la función de pintar, donde la herramienta de salida o efector final, pasa a ser la boquilla de donde el robot manipulador rocía la carrocería del vehículo indicado logrando un acabo esperado, en la **figura 4.3** se muestra el robot manipulador con efector final de boquilla para pintar.



Figura 4.3 Efector final de boquilla para pintar.

c) Efector final de tres dedos de sujeción.

Las tareas a realizar por efectores finales se ha visto en el problema de desarrollar efectores finales más complejos para realizar tareas con objetos de geometrías y pesos variables, por lo que se ha tomado como ejemplo la geometría de una mano humana (Prada, 2014) llegando a los efectores de tres dedos, este tipo de efectores finales son más complejos, tanto su geometría como su configuración requieren de mayor trabajo, se ha tomado como ejemplo la mano humana ya que esta permite lograr sujetar cualquier objeto, de configuración variable, desde geometrías sencillas como lo son cubos y esferas, hasta las geometrías complejas que están conformadas por relieves, picos o desniveles.

Cabe mencionar que la complejidad de estos efectores finales es debido a la función que se desea realizar quedando el área de medicina como prioridad, como podemos encontrar prótesis u operaciones a distancia comandadas por un médico que no se encuentra directamente con el paciente, el cual realiza la operación por medio de un robot manipulador de geometría específica, siendo este robot manipulado a distancia. En la **figura 4.4** se observa un efector final similar a una mano humana consta de 5 dedos el cual le permite al efector final ser versátil a la hora de interactuar con objetos o realizar tareas.



Figura 4.4. Efector final simulando una mano humana

d) Selección de efector final

Existen diversos tipos de efectores finales, sin embargo, se optó por escoger un efector final tipo pinza, este tipo de efectores es comúnmente utilizado en la comunidad estudiantil debido a su función que es la de tomar y soltar objetos, la cual puede ser utilizada para procesos dentro de una industria o de modo didáctico en la construcción de juguetes o robots móviles en competencias de construcción de robots dedicados a diferentes tareas, se pretende demostrar la implementación de Bond Graph para este tipo de sistemas mecánicos, como primer diseño tenemos el mostrado en la **figura 4.5** donde se muestra un efector final tipo pinza compuesto por un eslabón por lado, diseñado en un software llamado Solid Works donde se puede apreciar su función principal que es la de tomar y soltar objetos.

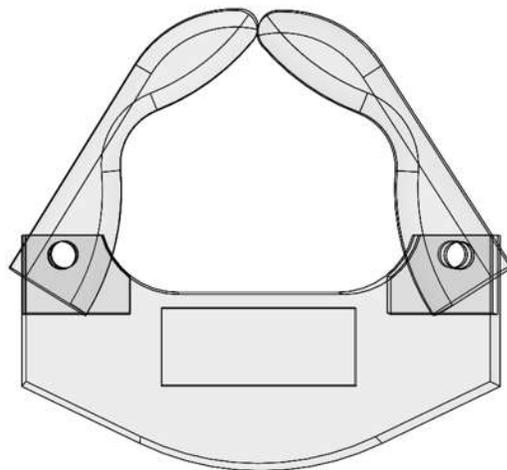


Figura 4.5 Modelo en 3D de efector final compuesto por un eslabón por lado.

El efector mostrado en la **figura 4.5** fue diseñado para poder tener una idea clara de lo que se está modelando en Bond Graph ya que una de las cualidades de Bond Graph es que no se necesita llevar el modelo a un estado físico, sin embargo, esto no quiere decir

que no se ocupe de ello, hay que tener una idea clara de lo que se va a modelar en Bond Graph y parece pertinente tener un modelo por lo menos en papel o mejor aún diseñado en 3D como es el caso donde se muestra el efector final compuesto de un eslabón por lado y un efector final compuesto de dos eslabones por lado mostrado en la **figura 4.6** donde se puede observar la implementación de dos eslabones uno por lado para que el efector final tipo pinza pueda tener mayor alcance, esta adición es pertinente debido a que al llevarlo al modelo en Bond Graph podemos observar su comportamiento y a su vez podemos familiarizarnos con la metodología que ofrece Bond Graph.

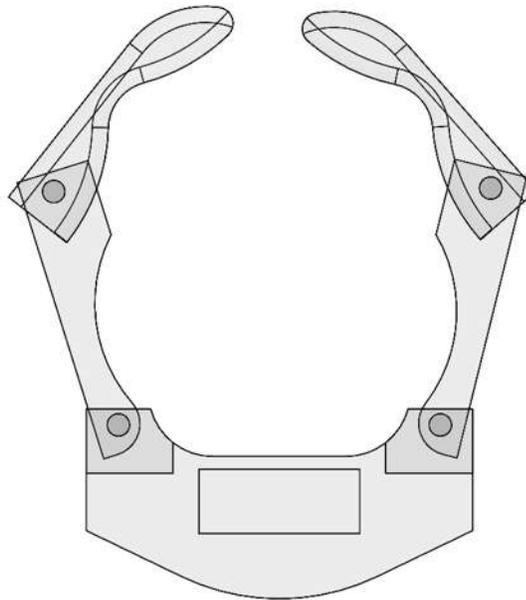


Figura 4.6 Modelo en 3D de efector final compuesto por un dos eslabones por lado.

4.2. Modelado Euler – Lagrange y Bond Graph de un efector final compuesto por un eslabón por lado

Se propone analizar un efector final compuesto por un eslabón, utilizando el método Euler-Lagrange y el método de simulación Bond Graph, obteniendo por ambos métodos la ecuación de estado, para posteriormente hacer una comparativa de ambos resultados, cabe mencionar que se realiza el mismo análisis para un efector final compuesto por dos eslabones quedando este como nuestro efector final propuesto.

a) Modelado Euler - Lagrange un eslabón.

En la **figura 4.7** se muestra el esquema de un solo eslabón el cual está compuesto por l_1 que es la longitud del eslabón, θ_1 siendo el ángulo que puede moverse dicho eslabón y τ_1 siendo el torque generado por el motor o servomotor.

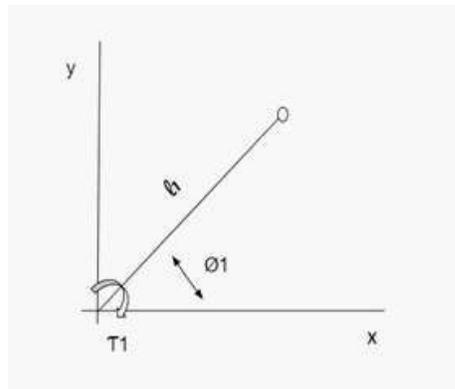


Figura 4.7. Esquema de efector final compuesto por un eslabón.

El análisis por medio de Euler-Lagrange indica que se debe calcular la energía cinética y la energía potencial del sistema, ecuaciones (4.1) y (4.2), respectivamente por lo que se debe calcular la velocidad partiendo del vector posición \vec{r} ecuación (4.3) que es el

punto extremo de nuestro eslabón, de ese punto se parte encontrando los componentes de dicho vector ecuación (4.4):

$$T_1 = \frac{1}{2}m_1\vec{V}_1^2 \quad (4.1)$$

$$V_1 = m_1gl_1 \cos \theta_1 \quad (4.2)$$

$$\vec{r} = x_i + y_j \quad (4.3)$$

$$\vec{r} = (l_1 \cos \theta_1)i + (l_1 \sin \theta_1)j \quad (4.4)$$

Al derivar con respecto del tiempo el vector posición \vec{r} obtenemos el vector velocidad \vec{V} el cual permite encontrar la energía cinética al ser elevado al cuadrado y ser sustituido en la ecuación (4.1).

$$\frac{d\vec{r}_1}{dt} = \vec{V}_1 = (-l_1 \sin \theta_1 \dot{\theta}_1)i + (l_1 \cos \theta_1 \dot{\theta}_1)j \quad (4.5)$$

$$\vec{V}_1^2 = l_1^2 \sin^2 \theta_1 \dot{\theta}_1^2 + l_1^2 \cos^2 \theta_1 \dot{\theta}_1^2 = l_1^2 \dot{\theta}_1^2 \quad (4.6)$$

$$T_1 = \frac{1}{2}m_1 l_1^2 \dot{\theta}_1^2 \quad (4.7)$$

El Lagrangeano indica que es la resta de la energía cinética (4.7) y la energía potencial (4.2) por lo que la ecuación (4.8) muestra la resta de ambas energías.

$$L = \frac{1}{2}m_1l_1^2\dot{\theta}_1^2 - m_1gl_1 \cos \theta_1 \quad (4.8)$$

La ecuación del Euler-Lagrange (4.9) para calcular el torque se expresa de la siguiente manera:

$$\tau_1 = \frac{d}{dt} \frac{\delta L}{\delta \dot{\theta}} - \frac{\delta L}{\delta \theta} \quad (4.9)$$

Donde:

$$\frac{\delta L}{\delta \dot{\theta}} = m_1l_1^2\dot{\theta}_1$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\delta L}{\delta \dot{\theta}} = m_1l_1^2\ddot{\theta}_1$$

$$\frac{\delta L}{\delta \theta} = -m_1gl_1 \sin \theta_1$$

Al sustituir en la ecuación (4.9) obtenemos el torque generado en un eslabón, debido a la interacción con algún actuador, motor o servomotor, mostrando el resultado en la ecuación (4.10) mostrada a continuación.

$$\tau_1 = m_1l_1^2\ddot{\theta}_1 + m_1gl_1 \sin \theta_1 \quad (4.10)$$

b) Modelo Euler - Lagrange de un efector final compuesto por un eslabón por lado.

Para lograr la simulación de lo que es un efector final debemos tomar en cuenta la parte derecha de nuestro efector final, como se muestra en la **figura 4.8** podemos observar la composición que tiene de un eslabón por lado, se ha realizado el modelado del eslabón izquierdo por lo que se resolverá para el lado derecho, sin embargo se deben tomar algunos cambios para llevar a cabo este análisis.

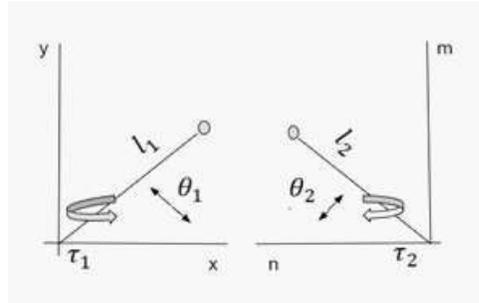


Figura 4.8. Esquema de un efector final de un eslabón por articulación.

Uno de los cambios a realizar es tomar en cuenta un nuevo sistema de coordenadas por lo cual tendremos las coordenadas n y m , l_2 representa la longitud del segundo eslabón, τ_2 es el torque que logra el movimiento del eslabón y θ_2 es el ángulo con el cual se desplazara, para llevar el análisis Euler – Lagrange se debe considerar de nueva cuenta la energía cinética y la energía potencial de las ecuaciones (4.11) y (4.12) , calculando la velocidad con el vector posición \vec{r} ecuación (4.13) que representa el punto final de nuestro segundo eslabón o bien las componentes del punto final mostradas en la ecuación (4.14).

$$T_2 = \frac{1}{2}m_2\vec{V}_2^2 \quad (4.11)$$

$$V_2 = m_2gl_2 \cos \theta_2 \quad (4.12)$$

$$\vec{r} = m_i + n_j \quad (4.13)$$

$$\vec{r} = (l_2 \cos \theta_2)i + (l_2 \sin \theta_2)j \quad (4.14)$$

Al derivar con respecto del tiempo el vector posición \vec{r} obtenemos el vector velocidad \vec{V}_2 el cual nos permite encontrar la energía cinética al ser elevado al cuadrado y ser sustituido en la ecuación (4.11).

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{V}_2 = (l_2 \sin \theta_2 \dot{\theta}_2)i + (l_2 \cos \theta_2 \dot{\theta}_2)j \quad (4.15)$$

$$\vec{V}_2^2 = l_2^2 \sin^2 \theta_2 \dot{\theta}_2^2 + l_2^2 \cos^2 \theta_2 \dot{\theta}_2^2 = l_2^2 \dot{\theta}_2^2 \quad (4.16)$$

$$T_2 = \frac{1}{2} m_2 l_2^2 \dot{\theta}_2^2 \quad (4.17)$$

El Lagrangeano indica que es la resta de la energía cinética y la energía potencial por lo que la ecuación (4.18) determina la resta de ambas energías.

$$L_2 = \frac{1}{2} m_2 l_2^2 \dot{\theta}_2^2 - m_2 g l_2 \cos \theta_2 \quad (4.18)$$

La ecuación del Euler-Lagrange para calcular el torque se expresa de la siguiente manera:

$$\tau_2 = \frac{d}{dt} \frac{\delta L_2}{\delta \dot{\theta}_2} - \frac{\delta L_2}{\delta \theta_2} \quad (4.19)$$

Donde:

$$\frac{\delta L_2}{\delta \dot{\theta}_2} = m_2 l_2^2 \dot{\theta}_2$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\delta L_2}{\delta \dot{\theta}_2} = m_2 l_2^2 \ddot{\theta}_2$$

$$\frac{\delta L_2}{\delta \theta_2} = -m_2 g l_2 \sin \theta_2$$

Al sustituir en la ecuación los valores obtenidos en la ecuación (4.19) se obtiene el torque generado en el segundo eslabón, ecuación (4.20) debido a la interacción con algún actuador, motor o servomotor que sea implementado en la base de nuestro efector final.

$$\tau_2 = m_2 l_2^2 \ddot{\theta}_2 + m_2 g l_2 \sin \theta_2 \quad (4.20)$$

Por lo que el arreglo de ambos eslabones de manera matricial queda expresado de la siguiente manera en la ecuación (4.21)

$$\begin{bmatrix} m_1 l_1^2 & 0 \\ 0 & m_2 l_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m_1 g l_1 \sin \theta_1 \\ m_2 g l_2 \sin \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

c) Modelado en Bond Graph para un eslabón.

Para llevar a cabo el estudio en modelado en Bond Graph el esquema cambia al de la **figura 4.9** donde se muestran v_y, v_x que son las velocidades en el origen, V_y, V_x las velocidades en el punto final y \dot{x}, \dot{y} que son las velocidades en el punto medio del eslabón así como θ el ángulo de movimiento.

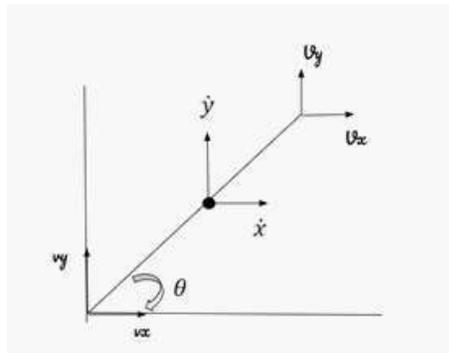


Figura 4.9 Esquema de un eslabón que compone un efector final.

Para el modelado en Bond Graph, se tiene que recordar que se colocan uniones 1 en donde se encuentre un cambio de velocidad y uniones 0 en donde se encuentre algún elemento de disipación o almacenamiento, por lo que nuestro Bond Graph de un efector final compuesto por un eslabón se muestra en la **figura 4.10**, donde la primer columna se trata de las componentes iniciales y finales en el eje x , así como las reacciones debidas al movimiento de inercia, la columna del centro se trata del ángulo en sus componentes iniciales y finales, donde $Se : Fa$ es la entrada de energía, en nuestro caso al tratarse de un efector final, puede tratarse de un servomotor, la tercer columna es similar a la primera solo que esta es debido a las componentes en el eje y , sus reacciones debido al momento de inercia y en esta se agrega la fuerza de gravedad la cual es $Se : Se_5$.

Se agrega al modelo un elemento MTF que es un Bond multipuerto, el cual permite hacer conexión entre los diversos puntos, encontrando relaciones entre sus componentes que nos permiten poder observar cómo se comporta el sistema, en otras palabras nos permite observar cómo se comporta el sistema dependiendo del ángulo, los elementos mostrados en el modelo como $Se : v_a, Sf : vx, Sf : vy, Se : Fx, Se : Fy$, sus valores son 0 debido a que no hay otras fuerzas o cargas que afecten nuestro eslabón, sin embargo para su estudio se toman en consideración por posibles cambios en la estructura del modelo.

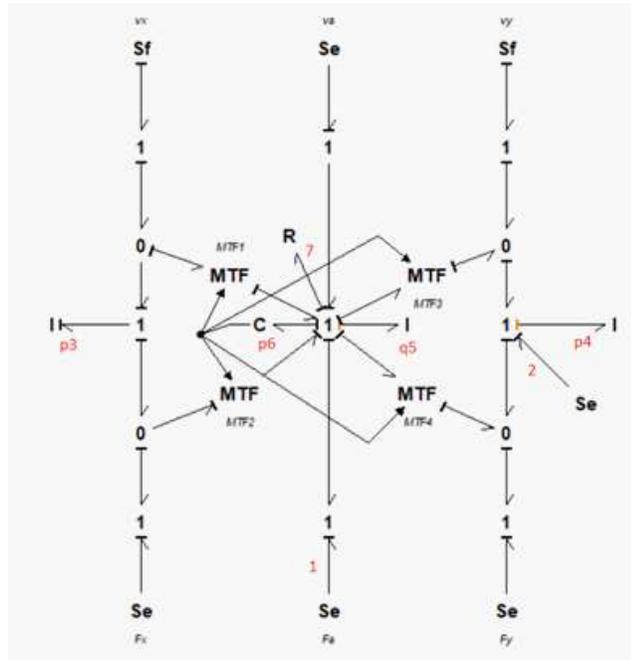


Figura 4.10. Modelo en Bond Graph de un eslabón que compone un efector final.

Para el análisis de Bond Graph para este modelo en particular es necesario tomar en cuenta los elementos de disipación y almacenamiento en su forma causal integral y derivativa, ya que para este modelo en particular se encuentra integrado por ambos elementos, por lo que su estructura unión se muestra en la ecuación (4.22), mostrando la relación de los elementos de entrada y salida.

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ D_{in} \\ z_d \end{bmatrix} = [S] \begin{bmatrix} z \\ D_{out} \\ u \\ \dot{x}_d \end{bmatrix} \tag{4.22}$$

Los elementos que se encuentran con causalidad integral son el momento de inercia J_1 colocado en el Bond 19 y C_1 que es la reacción al motor o la rigidez del material al

evitar doblarse o torcerse colocado en el Bond 18, los elementos restantes se encuentran el causalidad derivativa por lo que nuestros elementos quedan de la siguiente manera mostrados en las matrices (4.23), x, \dot{x}, z son elementos de causalidad integral, x_d, \dot{x}_d, z_d , elementos de causalidad derivativa, D_{in}, D_{out} , elementos de disipación, F, F_d , son matrices diagonales de los elementos de almacenamiento con causalidad integral y derivativa respectivamente, L la matriz diagonal de los elementos de disipación.

$$\begin{aligned}
 x &= \begin{bmatrix} q_5 \\ p_6 \end{bmatrix} & \dot{x} &= \begin{bmatrix} f_5 \\ e_6 \end{bmatrix} & z &= \begin{bmatrix} e_5 \\ f_6 \end{bmatrix} \\
 x_d &= \begin{bmatrix} p_3 \\ p_4 \end{bmatrix} & \dot{x}_d &= \begin{bmatrix} e_3 \\ e_4 \end{bmatrix} & z_d &= \begin{bmatrix} f_3 \\ f_4 \end{bmatrix} \\
 D_{in} &= [f_7] & D_{out} &= [e_7] \\
 F &= \begin{bmatrix} C_5 & 0 \\ 0 & J_6 \end{bmatrix} & F_d &= \begin{bmatrix} I_3 & 0 \\ 0 & I_4 \end{bmatrix} & L &= [R_{7u}]
 \end{aligned} \tag{4.23}$$

La matriz unión S se obtiene a partir de la conservación de la energía sin embargo para el multipuerto MTF se deben tener ciertas consideraciones tales que como se trata de un movimiento angular, por lo que al tratarse del principio de la conservación de la energía la propia energía se transfiere de la siguiente manera:

Relaciones de entrada y salida de energía en un elemento MTF .

$$\begin{aligned}
 f_{21} &= f_{11} = f_{32} \cos \theta \\
 f_{20} &= f_7 = f_{32} \sin \theta \\
 e_{32} &= (e_{21} + e_{11}) \cos \theta - (e_{20} + e_7) \sin \theta
 \end{aligned} \tag{4.24}$$

La estructura unión queda mostrada en la siguiente ecuación (4.25) cumpliendo con las condiciones

S_{11} y S_{22} son matrices cuadradas antisimétricas.

S_{12} es la matriz traspuesta negativa de la matriz S_{21} y viceversa.

$$\begin{bmatrix} f_5 \\ e_6 \\ f_7 \\ f_3 \\ f_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & -Sen\theta & -2Cos\theta & 2Sen\theta & 1 & Cos\theta & -Sen\theta \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -Cos\theta & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -Sen\theta & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_5 \\ f_6 \\ e_7 \\ f_8 \\ f_9 \\ e_1 \\ e_2 \\ e_{10} \\ e_{11} \\ e_{12} \\ e_3 \\ e_4 \end{bmatrix}$$

(4.25)

Dónde:

$$S_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad S_{12} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \quad S_{13} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -Sen\theta & -2Cos\theta & 2Sen\theta & 1 \end{bmatrix}$$

$$S_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \quad S_{22} = 0 \quad S_{23} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Por lo que se calcula A y B para llegar a la ecuación de estado de la forma $\dot{x} = Ax + Bu$.

$$A = (S_{11} + S_{12}MS_{21})F \quad (4.26)$$

Con

$$M = L(I - S_{22})^{-1} \quad (4.27)$$

Obtenemos

$$A = \begin{bmatrix} 0 & C_6 \\ -J_5 & -C_6 R_7 \end{bmatrix} \quad (4.28)$$

$$B = S_{13} + S_{12} M S_{23} \quad (4.29)$$

Obtenemos

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -Sen\theta & -2Cos\theta & 2Sen\theta & 1 \end{bmatrix} \quad (4.30)$$

Por lo tanto la ecuación de estado es:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & C_6 \\ -J_5 & -C_6 R_7 \end{bmatrix} \mathbf{x} \quad (4.31)$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -Sen\theta & -2Cos\theta & 2Sen\theta & 1 \end{bmatrix} \mathbf{u} \quad (4.32)$$

d) Modelo en Bond Graph de un efector final de un eslabón por lado.

El modelado para un efector final de dos dedos, un eslabón por lado como se muestra en la **figura 4.11** donde se observa el esquema de los dedos o eslabones que componen la pinza, como se puede observar tiene las mismas componentes, sin embargo, podría decirse que la única diferencia es la polaridad con la que entra a nuestro sistema el

torque generado por el servomotor, mientras que en el eslabón del lado izquierdo se considera positivo, en el eslabón del lado derecho se considera negativo, esto es con la finalidad de que su movimiento sea opuesto, logrando así el movimiento deseado de abrir y cerrar, o tomar y soltar objetos.

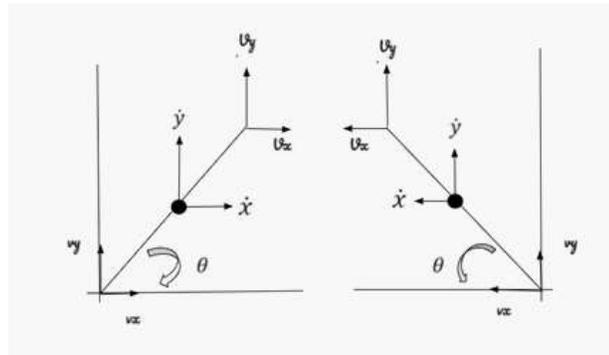


Figura 4.11 Esquema del efector final compuesto por un eslabón por lado.

El modelo en Bond Graph queda mostrado en la **figura 4.12** donde se puede observar el Bond Graph para cada eslabón, sin embargo, se hicieron algunas modificaciones, por ejemplo se unieron los elementos de disipación R ya que podemos hacer una sumatoria de estos elementos, colocando la resultante en el punto medio del eslabón, los elementos multipuerto MTF se encuentran de la manera tradicional, posteriormente se dará un ejemplo de la reducción de este tipo de elementos multipuertos, como el movimiento de la pinza o efector final depende directamente del torque generado por el servomotor al recibir un flujo de voltaje, se busca que sólo sea conectado un motor que genere este movimiento de abrir y cerrar en el efector final, por lo que se agregan las uniones mostradas en el recuadro rojo para así poder utilizar sólo una semiflecha o bond de energía (potencia) siendo de polaridad positiva en el eslabón izquierdo y siendo de polaridad negativa en el eslabón derecho.

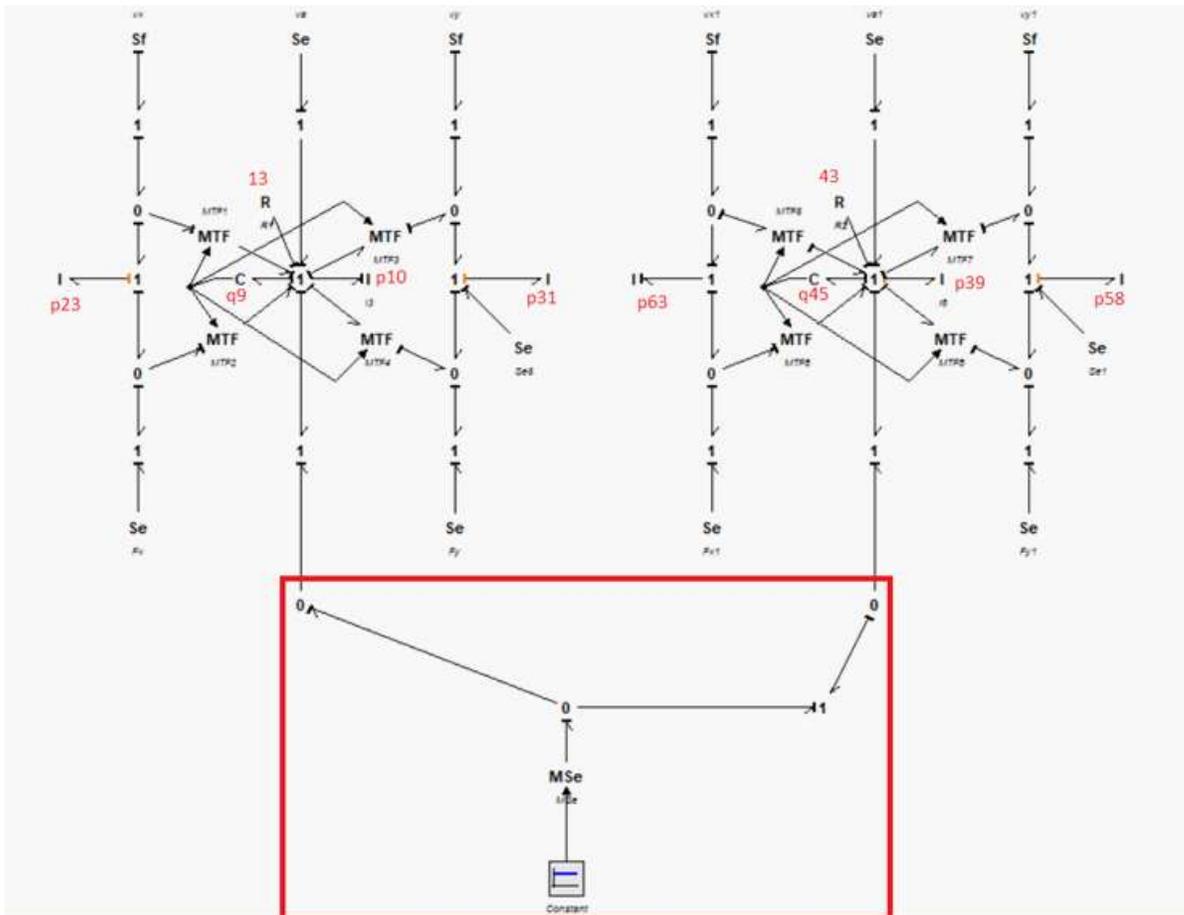


Figura 4.12 Bond Graph de un efector final compuesto por un eslabón de cada lado, donde se muestra en el recuadro rojo el arreglo para usar un solo motor o actuador.

Partiendo de los elementos de disipación y almacenamiento de energía que para este caso son los siguientes:

$$\begin{aligned}
 x &= \begin{bmatrix} p_{10} \\ p_{39} \\ q_9 \\ q_{45} \end{bmatrix}; \dot{x} = \begin{bmatrix} e_{10} \\ e_{39} \\ f_9 \\ f_{45} \end{bmatrix}; z = \begin{bmatrix} f_{10} \\ f_{39} \\ e_9 \\ e_{45} \end{bmatrix} \\
 xd &= \begin{bmatrix} p_{23} \\ p_{31} \\ p_{63} \\ p_{58} \end{bmatrix}; \dot{xd} = \begin{bmatrix} f_{23} \\ f_{31} \\ e_{63} \\ e_{58} \end{bmatrix}; zd = \begin{bmatrix} e_{23} \\ e_{31} \\ f_{63} \\ f_{58} \end{bmatrix} \\
 D_{in} &= \begin{bmatrix} f_{13} \\ f_{43} \end{bmatrix}; D_{out} = \begin{bmatrix} e_{13} \\ e_{43} \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{4.33}$$

Por lo que las matrices diagonales compuestas por los elementos de disipación y almacenamiento quedan de la siguiente manera:

$$F = \begin{bmatrix} I_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_2 \end{bmatrix}; Fd = \begin{bmatrix} I_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_6 \end{bmatrix}; L = \begin{bmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & R_2 \end{bmatrix} \tag{4.34}$$

Se debe considerar todas las entradas o salidas de energía, como por ejemplo la gravedad que es una entrada de esfuerzo, o la entrada del motor que es considerada una entrada de esfuerzo, sin embargo, hay energías en este caso esfuerzos y flujos que valen cero, como podría tratarse de un peso extra al final de los esalbones o una entrada de

voltaje extra, por lo que los elementos S_f y S_e de ambos eslabones tienen un valor de 0, sin embargo deben ser tomados en cuenta para un análisis más completo ya que con el modelo completo se pueden agregar estas energías cuando llegasen a tener un valor sin afectar a nuestro sistema, por lo que las energías a considerar son las gravedades de cada eslabón, la entrada de voltaje al sistema los elementos de disipación y almacenamiento de ambos eslabones y los elementos que pudiesen ser considerados en un futuro que por el momento tienen valor 0 siendo un total de 19 elementos los cuales se colocan en nuestra estructura unión ecuación (4.22) para calcular la matriz unión y obtener la ecuación de estado, de la forma, $\dot{x} = Ax + Bu$. por lo que se muestran las matrices que conforman la matriz unión por comodidad ya que el arreglo completo es muy extenso.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{S}_{11} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \mathbf{S}_{12} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \mathbf{S}_{13} = \begin{bmatrix} -1 & 2\text{Sen}\theta & -2\text{Sen}\theta & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 2\text{Cos}\theta \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 S_{21} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}; S_{22} = [0]; S_{23} = [0] \\
 S_{31} &= \begin{bmatrix} -\text{Cos}\theta & 0 & 0 & 0 \\ \text{Sen}\theta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\text{Cos}\theta & 0 & 0 \\ 0 & \text{Sen}\theta & 0 & 0 \end{bmatrix}; S_{32} = [0]; S_{33} = [0]
 \end{aligned} \tag{4.35}$$

S_{11} y S_{22} son matrices cuadradas antisimétricas.

S_{12} es la matriz traspuesta negativa de la matriz S_{21} y viceversa.

Quedando de esta forma las matrices A y B así como la ecuación de estado como se muestran a continuación.

$$A = S_{11} + S_{12}MS_{21} \quad , \text{con } M = L(I - S_{22})^{-1} \quad \text{como } S_{22} = 0 \quad M = L$$

$$A = \begin{bmatrix} -I_3R_1 & 0 & -C_1 & 0 \\ 0 & -I_6R_2 & 0 & -C_2 \\ I_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_6 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.36)$$

$$B = S_{13} + S_{12}MS_{23}$$

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 2Cos\theta & -2Sen\theta & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 2Cos\theta \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.37)$$

Ecuación de estado:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -I_3R_1 & 0 & -C_1 & 0 \\ 0 & -I_6R_2 & 0 & -C_2 \\ I_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_6 & 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} -1 & 2Cos\theta & -2Sen\theta & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 2Cos\theta \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} u \quad (4.38)$$

e) Simulación de un efector final compuesto por un eslabón por lado en el software 20 – Sim.

Para simular el efector final compuesto por un eslabón por lado, como primer paso es elaborar el Bond Graph en el software 20 – Sim, con la ayuda de la biblioteca de Bond Graph la cual se muestra en un recuadro en rojo, la cual nos ayudara a construir el modelo en Bond Graph mostrado en la **figura 4.13**.

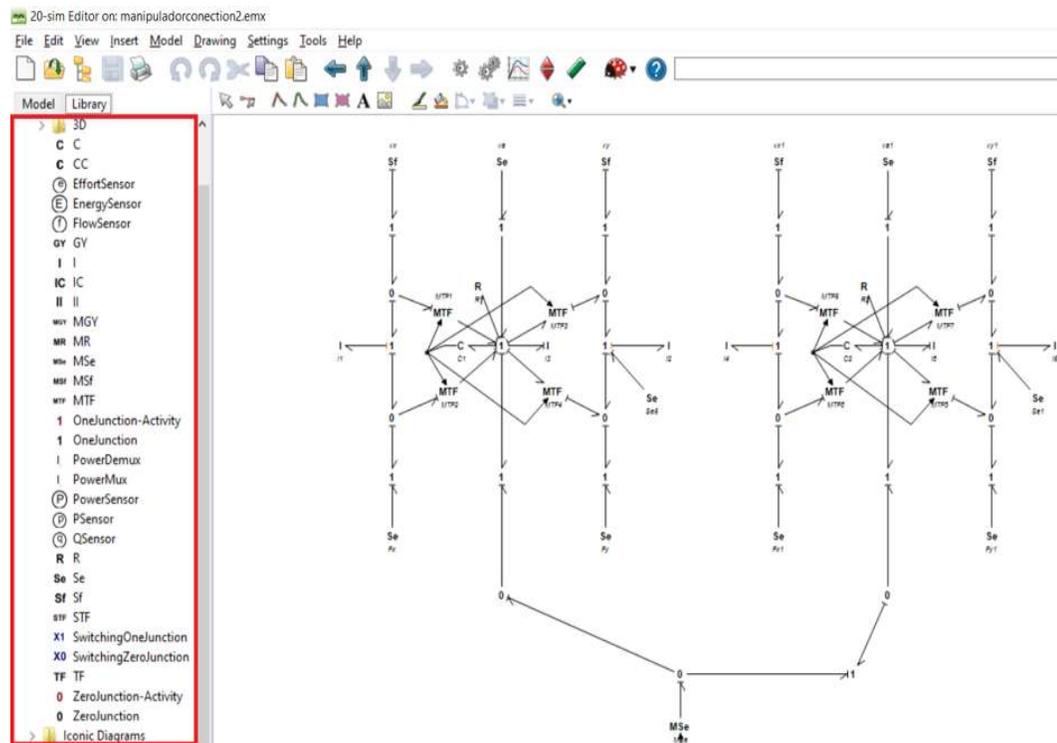


Figura 4.13. Modelo en Bond Graph de efector final.

Una vez que hemos realizado el modelo en el software 20-Sim y verificando que las conexiones se encuentren de manera correcta, esto quiere decir que no se encuentre ningún error a la de hora de copilar el modelo en Bond Graph, se pueden agregar valores a cada elemento, sin embargo, para suponer valores se sabe que existen efectores finales muy livianos como los realizados con la ayuda de una impresora 3D que pueden llegar a pesar menos de $1kg$ de peso por lo que se ha adoptado por un valor intermedio de 500 gramos para cada eslabón, con una longitud de 10 cm y una entrada de voltaje de $4,5\text{ v}$, la fuerza

de gravedad como $9,81 \frac{m}{s^2}$, por eslabón, las demás energías serían 0 ya que no se encuentra alguna fuerza o masa actuando al final ni al principio del eslabón únicamente la gravedad y la fuerza del motor, el elemento de disipación R adoptara el valor 0,5 ya que se trata de que se observe el comportamiento antes de llegar a su estabilidad siendo este elemento primordial para que eso suceda.

La **figura 4.14** muestra el comportamiento de los elementos de almacenamiento, en este caso I_3 , I_6 , C_1 y C_2 con respecto del tiempo transcurrido de un minuto, se observa como la fricción C_1 y C_2 alcanza un valor de 1,5 antes de volverse constante, esto es debido a los elementos de disipación mientras R aumente su valor los elementos C llegaran a su punto constante en valores más pequeños, mientras que los momentos de inercia comienzan en 0 al recibir la potencia o pulsaciones de está en valores antes mencionados de $4,5v$ alcanzando valor de 1 hasta regresar a su punto de reposo en 0 esto quiere decir que hubo una apertura total de la pinza y un cierre total en 5 segundos, para poder analizar el comportamiento, manipularemos los valores de la forma siguiente:

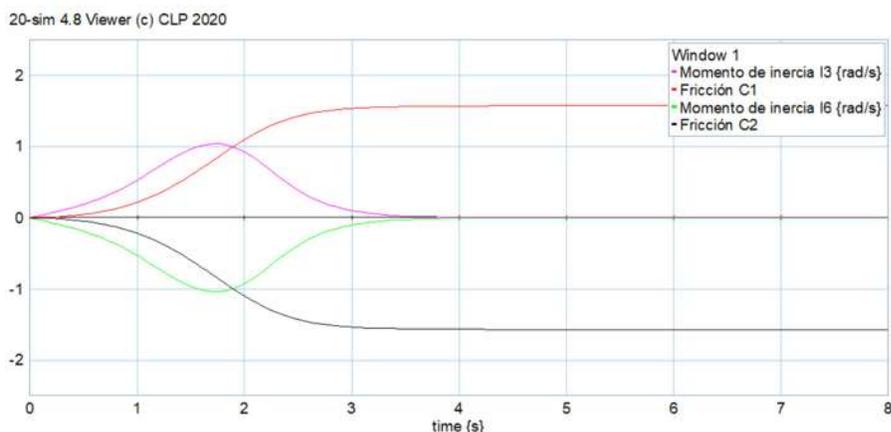


Figura 4.14 Gráficas de los momentos de inercia (I_3 y I_6) y la fricción (C_1 y C_2).

En las **Figuras 4.15, 4.16, 4.17, 4.18** elevando considerablemente la potencia a valores de 15, 30, 45, 60v dejando el mismo peso y longitud.

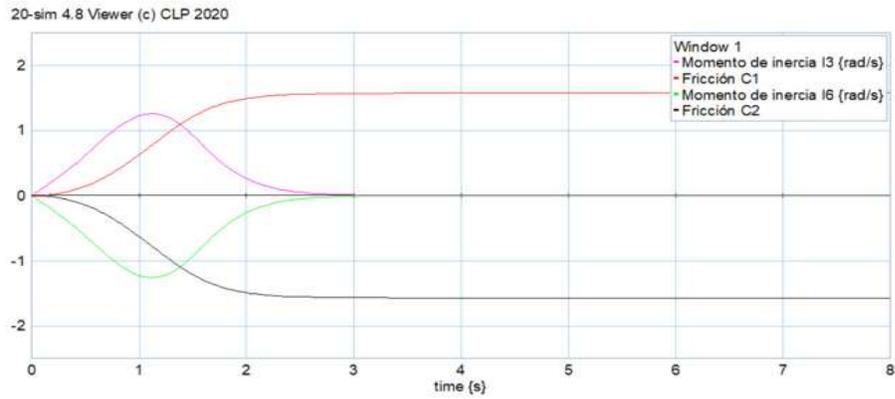


Figura 4.15. Simulación elevada a 15v.

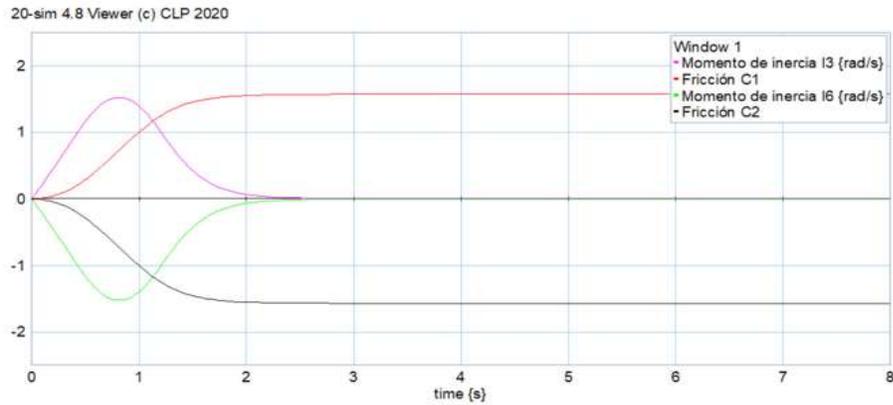


Figura 4.16 Simulación elevada a 30v.

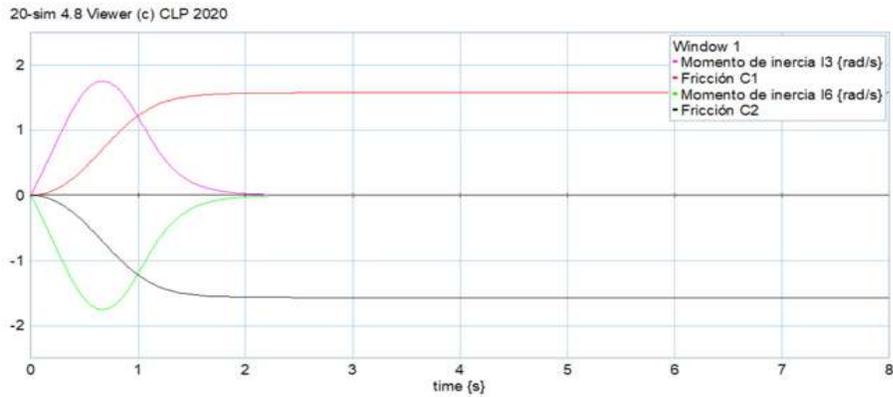


Figura 4.17 Simulación elevada a 45v

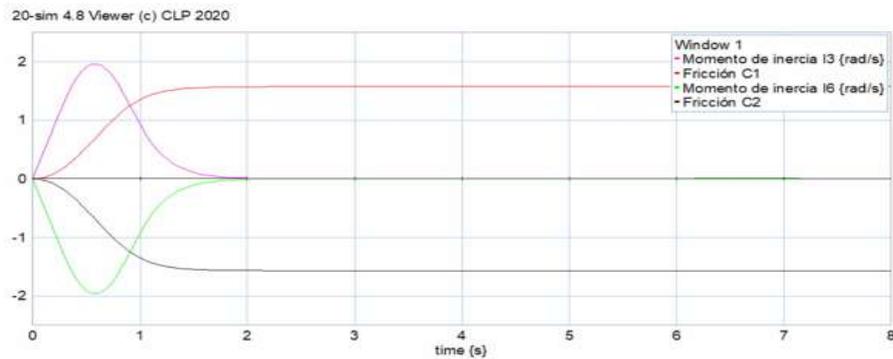


Figura 4.18 Simulación elevada a 60v.

Lo que se observa al elevar la potencia es un incremento en el momento de inercia, mientras más potencia sea suministrada al sistema más grande será el momento de inercia, por lo que también se puede observar que el tiempo de apertura o cierre del efector final se llevará a cabo en un tiempo menor, la fricción no tiene cambio alguno ya que sigue afectando a nuestro sistema de la misma forma y magnitud.

Figuras 4.19, 4.20, 4.21, 4.22 donde se eleva el peso de los eslabones, dejando una potencia de 4,5v y longitud de 5cm.

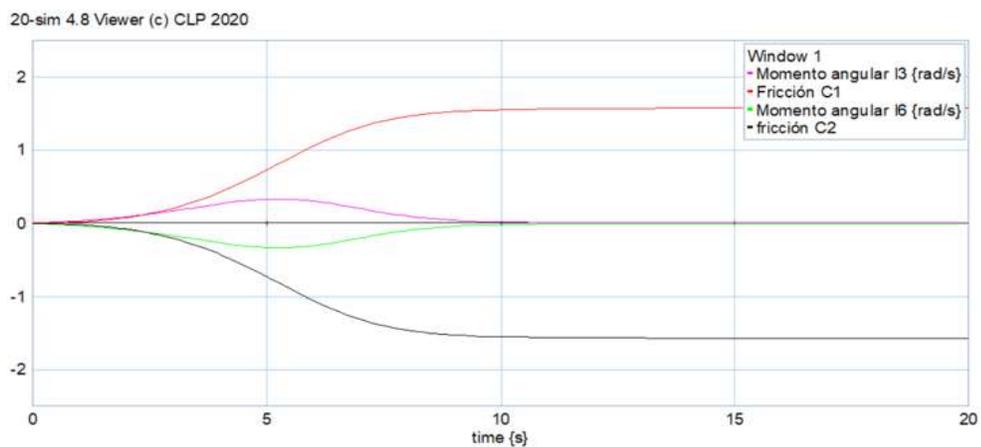


Figura 4.19 Simulación 5kg de peso

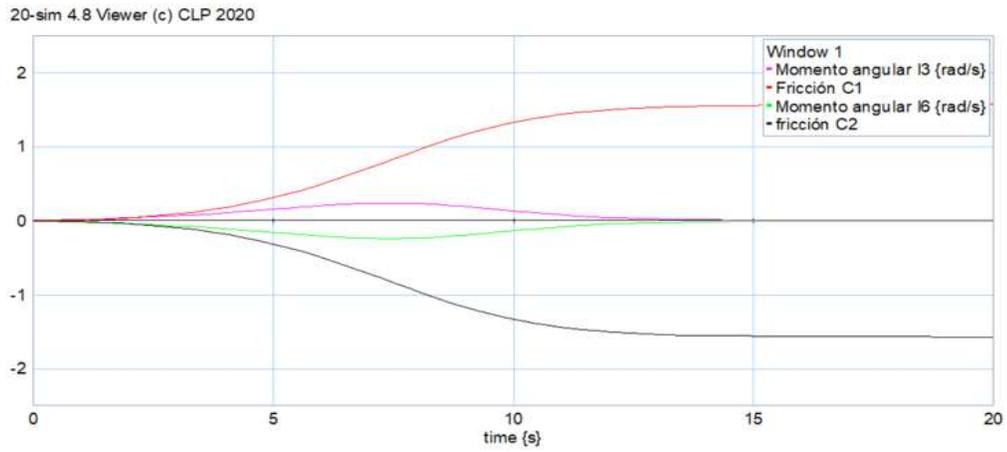


Figura 4.20 Simulación 10kg de peso.

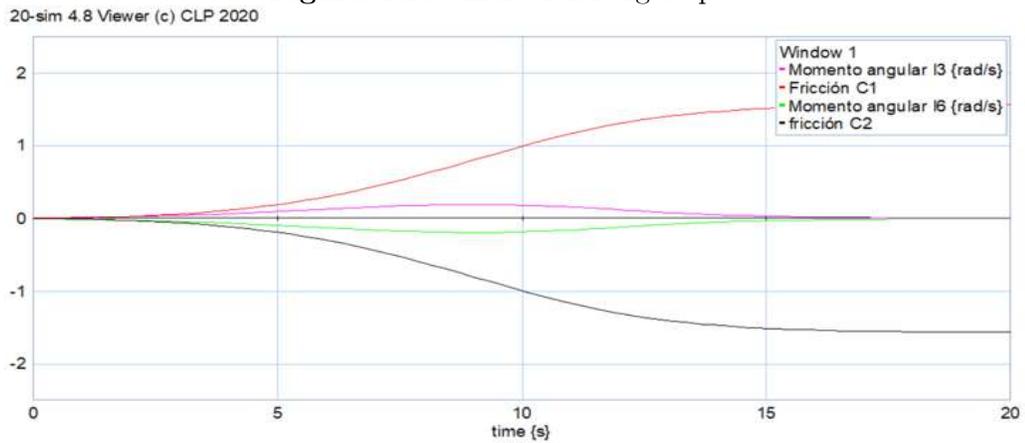


Figura 4.21 Simulación 15kg de peso.

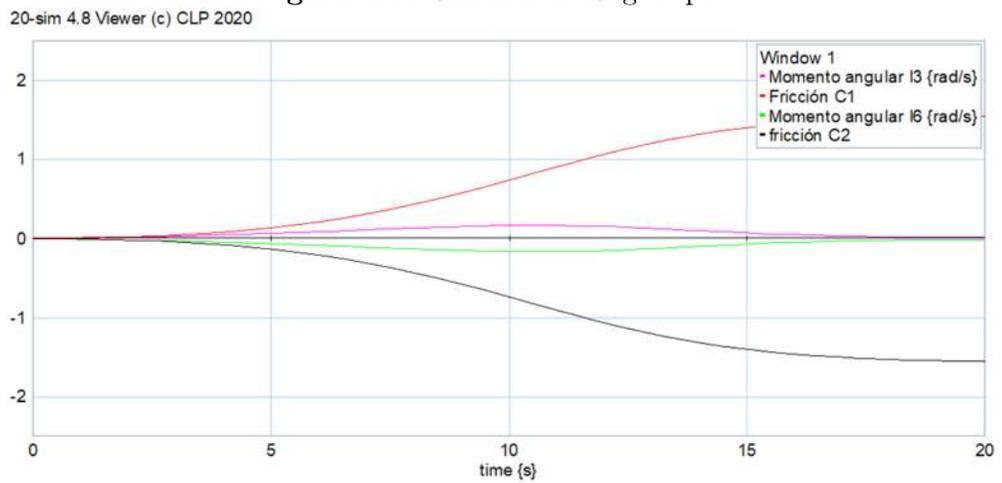


Figura 4.22 Simulación 20kg de peso.

Podemos observar en las figuras anteriores que la manipular el peso de los eslabones disminuimos el momento de inercia, a los cual puede ser lógico ya que no hemos cambiado la potencia, por lo que si el momento de inercia disminuye el tiempo en que el efector final cierre o abra será mayor con respecto del peso de cada eslabón observando en cada grafica un aumento en el tiempo de ciclo.

En las **Figuras 4.23, 4.24, 4.25, 4.26** se ha aumentado la longitud del eslabón a medidas de 15, 30, 45 y 60cm dejando la potencia inicial de 4.5v y un peso de 0.5kg.

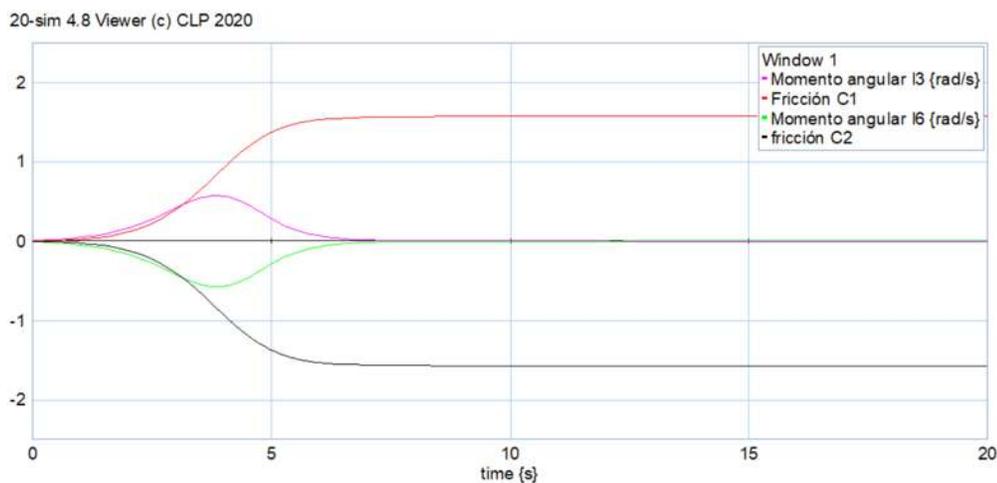


Figura 4.23 Simulacion 15cm de longitud

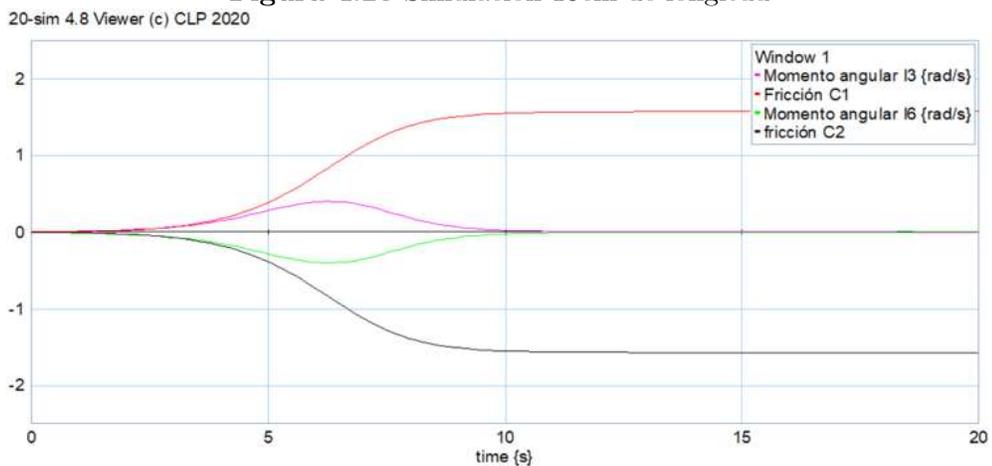


Figura 4.24 Simulacion 30cm de longitud

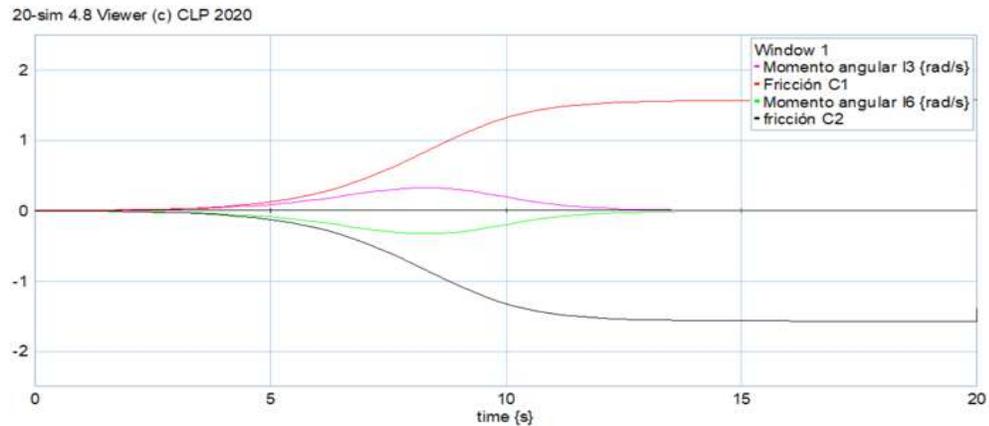


Figura 4.25 Simulación 45cm de longitud

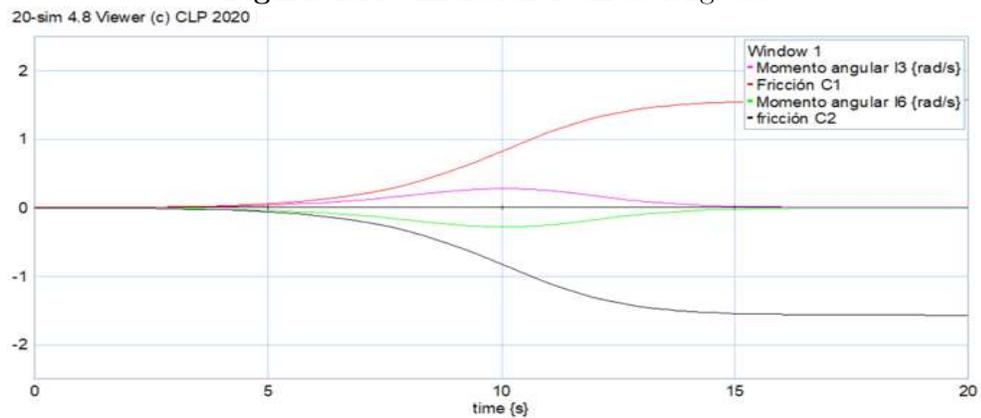


Figura 4.26 Simulación 60cm de longitud

Se observa en las figuras anteriores un comportamiento similar al aumentar el peso, donde al aumentar la longitud la magnitud de los momentos de inercia disminuyen y aumenta el tiempo de ciclo.

Por lo que podemos decir que se pueden manipular estas variables hasta alcanzar los resultados esperados o un acercamiento a los mismos, esto quiere decir que si queremos un efector final con especificaciones particulares con un tiempo de ciclo determinado se puede conocer un acercamiento de cuanta potencia será requerida para lograr ese tiempo, o el peso requerido para que el momento de inercia sea suficiente para terminar el ciclo en

ese tiempo predispuesto, por dar un ejemplo ya que podrían existir miles de iteraciones y configuraciones, así podemos apreciar una de las ventajas de simular en Bond Graph ya que no se requiere el modelo en físico ni comenzar los análisis desde el principio.

4.3. Modelado Euler – Lagrange y Bond Graph de un efector final compuesto por dos eslabones por lado

Se propone analizar un efector final compuesto por dos eslabones por lado, dos del lado izquierdo y dos del lado derecho utilizando el método Euler-Lagrange y el método de simulación Bond Graph, obteniendo por ambos métodos la ecuación de estado, para posteriormente hacer una comparativa de ambos resultados.

a) Modelado Euler – Lagrange de un efector final de dos eslabones por lado.

En la **figura 4.27** se muestra el esquema de un efector final, el cual está compuesto por dos eslabones por lado donde l_1, l_2, l_3, l_4 son la longitud de dichos eslabones, $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$ siendo los ángulos que pueden moverse dichos eslabones y τ_1, τ_2 siendo el torque generado por el motor o servomotor.

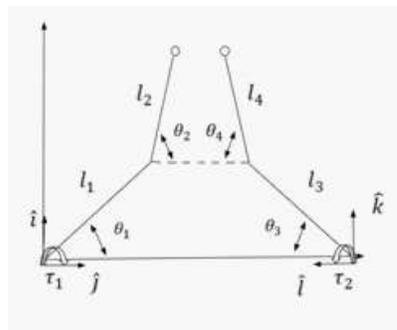


Figura 4.27. Esquema de un efector final compuesto por dos eslabones por lado.

Apoyándonos en el subíndice 4.1 en el inciso a) donde obtuvimos la ecuación general por medio del método Euler Lagrange calculamos las componentes de cada eje de los eslabones 1 y 3 obteniendo el vector posición mostrado en la ecuación (4.39).

$$\vec{r}_{1,3} = x_{i,l} + y_{j,k} \quad (4.39)$$

Con coordenadas

$$\begin{aligned} x_1 &= l_1 \text{Cos}\theta_1 & x_3 &= -l_3 \text{Cos}\theta_3 \\ y_1 &= l_1 \text{Sen}\theta_1 & y_3 &= l_3 \text{Sen}\theta_3 \end{aligned} \quad (4.40)$$

Sustituyendo las coordenadas (4.40) en la ecuación (4.39) obtenemos:

$$\vec{r}_{1,3} = (l_1 \text{Cos}\theta_1)i, (-l_3 \text{Cos}\theta_3)l + (l_1 \text{Sen}\theta_1)j, (l_3 \text{Sen}\theta_3)k \quad (4.41)$$

Al derivar con respecto del tiempo el vector posición $\vec{r}_{1,3}$ obtenemos el vector velocidad $\vec{v}_{1,3}$ el cual nos permite encontrar la energía cinética al ser elevado al cuadrado y ser sustituido en la ecuación de la energía cinética (4.1).obteniendo la ecuacion (4.44) y la energía potencial mostrada en la ecuación (4.45)

$$\dot{r}_{1,3} = \vec{v}_{1,3} = (-l_1 \text{Sen}\theta_1 \dot{\theta}_1)i, (-l_3 \text{Sen}\theta_3 \dot{\theta}_3)l + (l_1 \text{Cos}\theta_1 \dot{\theta}_1)j, (l_3 \text{Cos}\theta_3 \dot{\theta}_3)k \quad (4.42)$$

$$\vec{v}_{1,3}^2 = l_1^2 \text{Sen}^2 \theta_1 \dot{\theta}_1^2 + l_3^2 \text{Sen}^2 \theta_3 \dot{\theta}_3^2 + l_1^2 \text{Cos}^2 \theta_1 \dot{\theta}_1^2 + l_3^2 \text{Cos}^2 \theta_3 \dot{\theta}_3^2 = l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + l_3^2 \dot{\theta}_3^2 \quad (4.43)$$

$$T_{1,3} = \frac{1}{2}(l_1^2 \dot{\theta}_1^2 m_1 + l_3^2 \dot{\theta}_3^2 m_3) \quad (4.44)$$

$$V_{1,3} = m_1 g l_1 \text{Sen}\theta_1 + m_3 g l_3 \text{Sen}\theta_3 \quad (4.45)$$

Para los eslabones 2 y 4 se calculan las componentes para cada vector siendo el vector $\vec{r}_{2,4A}$ el vector que parte del origen y termina en la punta del eslabón 2 y el eslabón 4 sus componentes se muestran a continuación.

$$\vec{r}_{2,4A} = (l_2 \text{Cos}\theta_2)i, (-l_4 \text{Cos}\theta_4)l + (l_2 \text{Sen}\theta_2)j, (l_4 \text{Sen}\theta_4)k \quad (4.46)$$

$$\vec{r}_{2,4} = \vec{r}_{1,3} + \vec{r}_{2,4A} = (l_1 \text{Cos}\theta_1)i, (-l_3 \text{Cos}\theta_3)l \quad (4.47)$$

$$+(l_1 \text{Sen}\theta_1)j, (l_3 \text{Sen}\theta_3)k + \vec{r}_{2,4A}$$

$$\vec{r}_{2,4} = (l_1 \text{Cos}\theta_1 + l_2 \text{Cos}\theta_2)i, (-l_3 \text{Cos}\theta_3 - l_4 \text{Cos}\theta_4)l \quad (4.48)$$

$$+(l_1 \text{Sen}\theta_1 + l_2 \text{Sen}\theta_2)j, (l_3 \text{Sen}\theta_3 + l_4 \text{Sen}\theta_4)k$$

Al derivar con respecto del tiempo el vector posición $\vec{r}_{2,4}$ obtenemos el vector velocidad $\vec{v}_{2,4}$ el cual nos permite encontrar la energía cinética al ser elevado al cuadrado y ser sustituido en la ecuación de la energía cinética (4.1) obteniendo la ecuación (4.51) y la energía potencial mostrada en la ecuación (4.52)

$$\dot{\vec{r}}_{2,4} = \vec{v}_{2,4} = (-l_1 \text{Sen}\theta_1 - l_2 \text{Sen}\theta_2)i, (l_3 \text{Sen}\theta_3 + l_4 \text{Sen}\theta_4)l \quad (4.49)$$

$$+(l_1 \text{Cos}\theta_1 + l_2 \text{Cos}\theta_2)j, (l_3 \text{Cos}\theta_3 + l_4 \text{Cos}\theta_4)k$$

$$\vec{v}_{2,4}^2 = l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + 2l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 (\text{Sen}\theta_1 \text{Sen}\theta_2 + \text{Cos}\theta_1 \text{Cos}\theta_2) \quad (4.50)$$

$$+ l_3^2 \dot{\theta}_3^2 + l_4^2 \dot{\theta}_4^2 + 2l_3 l_4 \dot{\theta}_3 \dot{\theta}_4 (\text{Sen}\theta_3 \text{Sen}\theta_4 + \text{Cos}\theta_3 \text{Cos}\theta_4)$$

$$T_{2,4} = \frac{1}{2} m_2 [l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + 2l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 (\text{Sen}\theta_1 \text{Sen}\theta_2 + \text{Cos}\theta_1 \text{Cos}\theta_2)] \quad (4.51)$$

$$+ \frac{1}{2} m_4 [l_3^2 \dot{\theta}_3^2 + l_4^2 \dot{\theta}_4^2 + 2l_3 l_4 \dot{\theta}_3 \dot{\theta}_4 (\text{Sen}\theta_3 \text{Sen}\theta_4 + \text{Cos}\theta_3 \text{Cos}\theta_4)]$$

$$V_{2,4} = m_2 g (l_1 \text{Sen}\theta_1 + l_2 \text{Sen}\theta_2) + m_4 g (l_3 \text{Sen}\theta_3 + l_4 \text{Sen}\theta_4) \quad (4.52)$$

La ecuación del Lagrangeano está representada por $L = T - V$ por lo que se debe realizar una sumatoria de las energías cinéticas $T_{1,3}$ con $T_{2,4}$ así como las energías potenciales $V_{1,3}$ con $V_{2,4}$ obteniendo las ecuaciones (4.53) (4.54) respectivamente y el lagrangeano tal.

$$\begin{aligned}
 T_T &= T_{1,3} + T_{2,4} \\
 &= \frac{1}{2}m_1\dot{l}_1^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}m_2[l_1^2\dot{\theta}_1^2 + l_2^2\dot{\theta}_2^2 + 2l_1l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2(\text{Sen}\theta_1\text{Sen}\theta_2 + \text{Cos}\theta_1\text{Cos}\theta_2)] \quad (4.53) \\
 &\quad + \frac{1}{2}m_3l_3^2\dot{\theta}_3^2 + \frac{1}{2}m_4[l_3^2\dot{\theta}_3^2 + l_4^2\dot{\theta}_4^2 + 2l_3l_4\dot{\theta}_3\dot{\theta}_4(\text{Sen}\theta_3\text{Sen}\theta_4 + \text{Cos}\theta_3\text{Cos}\theta_4)]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 V_T &= V_{1,3} + V_{2,4} \\
 &= m_1gl_1\text{Sen}\theta_1 + m_2g(l_1\text{Sen}\theta_1 + l_2\text{Sen}\theta_2) + m_3gl_3\text{Sen}\theta_3 \quad (4.54) \\
 &\quad + m_4g(l_3\text{Sen}\theta_3 + l_4\text{Sen}\theta_4)
 \end{aligned}$$

$$L = T - V$$

$$\begin{aligned}
 L &= \frac{1}{2}m_1\dot{l}_1^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}m_2[l_1^2\dot{\theta}_1^2 + l_2^2\dot{\theta}_2^2 + 2l_1l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2(\text{Sen}\theta_1\text{Sen}\theta_2 + \text{Cos}\theta_1\text{Cos}\theta_2)] \\
 &\quad - m_1gl_1\text{Sen}\theta_1 - m_2g(l_1\text{Sen}\theta_1 + l_2\text{Sen}\theta_2) \\
 &\quad + \frac{1}{2}m_3l_3^2\dot{\theta}_3^2 + \frac{1}{2}m_4[l_3^2\dot{\theta}_3^2 + l_4^2\dot{\theta}_4^2 + 2l_3l_4\dot{\theta}_3\dot{\theta}_4(\text{Sen}\theta_3\text{Sen}\theta_4 + \text{Cos}\theta_3\text{Cos}\theta_4)] \quad (4.55) \\
 &\quad - m_3gl_3\text{Sen}\theta_3 - m_4g(l_3\text{Sen}\theta_3 + l_4\text{Sen}\theta_4)
 \end{aligned}$$

La ecuación del Euler-Lagrange (4.9) para calcular el torque se expresa de la siguiente manera:

$$\tau_1 = \frac{d}{dt} \frac{\delta L}{\delta \dot{\theta}} - \frac{\delta L}{\delta \theta}$$

Donde por comodidad se han separado los resultados por eslabones:

$$\frac{\delta L}{\delta \dot{\theta}_1} = m_1 l_1^2 \dot{\theta}_1 + m_2 l_1^2 \dot{\theta}_1 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_2 \text{Cos}(\theta_1 - \theta_2) \quad (4.56)$$

$$\frac{\delta L}{\delta \dot{\theta}_3} = m_3 l_3^2 \dot{\theta}_3 + m_4 l_3 l_4 \dot{\theta}_4 \text{Cos}(\theta_3 - \theta_4) \quad (4.57)$$

$$\frac{\delta L}{\delta \dot{\theta}_2} = m_2 l_2^2 \dot{\theta}_2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \text{Cos}(\theta_1 - \theta_2) \quad (4.58)$$

$$\frac{\delta L}{\delta \dot{\theta}_4} = m_4 l_4^2 \dot{\theta}_4 + m_4 l_3 l_4 \dot{\theta}_3 \text{Cos}(\theta_3 - \theta_4) \quad (4.59)$$

$$\frac{\delta L}{\delta \theta_1} = m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \text{Sen}(\theta_2 - \theta_1) - m_1 g l_1 \text{Cos} \theta_1 - m_2 g l_1 \text{Cos} \theta_1 \quad (4.60)$$

$$\frac{\delta L}{\delta \theta_3} = m_4 l_3 l_4 \dot{\theta}_3 \dot{\theta}_4 \text{Sen}(\theta_4 - \theta_3) - m_3 g l_3 \text{Cos} \theta_3 - m_4 g l_3 \text{Cos} \theta_3 \quad (4.61)$$

$$\frac{\delta L}{\delta \theta_2} = m_1 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \text{Sen}(\theta_1 - \theta_2) - m_2 g l_2 \text{Sen} \theta_2 \quad (4.62)$$

$$\frac{\delta L}{\delta \theta_4} = m_4 l_3 l_4 \dot{\theta}_3 \dot{\theta}_4 \text{Sen}(\theta_3 - \theta_4) - m_4 g l_4 \text{Sen} \theta_4 \quad (4.63)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\delta L}{\delta \dot{\theta}_1} &= m_1 l_1^2 \ddot{\theta}_1 + m_2 l_1^2 \ddot{\theta}_1 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \text{Cos} \theta_1 \text{Sen} \theta_2 + m_2 l_1 l_2 \text{Sen} \theta_1 \text{Cos} \theta_2 \dot{\theta}_2^2 \\ &\quad + m_2 l_1 l_2 \text{Sen} \theta_1 \text{Sen} \theta_2 \ddot{\theta}_2 + m_2 l_1 l_2 (-\text{Sen} \theta_1 \text{Cos} \theta_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 - \text{Cos} \theta_1 \text{Sen} \theta_2 \dot{\theta}_2^2 \\ &\quad + \text{Cos} \theta_1 \text{Cos} \theta_2 \ddot{\theta}_2) \end{aligned} \quad (4.64)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\delta L}{\delta \dot{\theta}_3} &= m_3 l_3^2 \ddot{\theta}_3 + m_4 l_3^2 \ddot{\theta}_3 + m_4 l_3 l_4 (\text{Cos} \theta_3 \text{Sen} \theta_4 \dot{\theta}_3 \dot{\theta}_4 + \text{Sen} \theta_3 \text{Cos} \theta_4 \dot{\theta}_4^2 \\ &\quad + \text{Sen} \theta_3 \text{Sen} \theta_4 \ddot{\theta}_4) + m_4 l_3 l_4 (-\text{Sen} \theta_3 \text{Cos} \theta_4 \dot{\theta}_3 \dot{\theta}_4 - \text{Cos} \theta_3 \text{Sen} \theta_4 \dot{\theta}_4^2 \\ &\quad + \text{Cos} \theta_3 \text{Sen} \theta_4 \ddot{\theta}_4 + \text{Cos} \theta_3 \text{Cos} \theta_4 \ddot{\theta}_4) \end{aligned} \quad (4.65)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\delta L}{\delta \dot{\theta}_2} &= m_2 l_2^2 \ddot{\theta}_2 + m_2 l_1 l_2 (\text{Cos} \theta_1 \text{Sen} \theta_2 \dot{\theta}_1^2 + \text{Sen} \theta_1 \text{Cos} \theta_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + \text{Sen} \theta_1 \text{Sen} \theta_2 \ddot{\theta}_1) \\ &\quad + m_2 l_1 l_2 (-\text{Sen} \theta_1 \text{Cos} \theta_2 \dot{\theta}_1 - \text{Cos} \theta_1 \text{Sen} \theta_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + \text{Cos} \theta_1 \text{Cos} \theta_2 \ddot{\theta}_1) \end{aligned} \quad (4.66)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\delta L}{\delta \dot{\theta}_4} &= m_4 l_4^2 \ddot{\theta}_4 + m_4 l_3 l_4 (\text{Cos} \theta_3 \text{Sen} \theta_4 \dot{\theta}_3^2 + \text{Sen} \theta_3 \text{Cos} \theta_4 \dot{\theta}_3 \dot{\theta}_4 + \text{Sen} \theta_3 \text{Sen} \theta_4 \ddot{\theta}_3) \\ &\quad + m_4 l_3 l_4 (-\text{Sen} \theta_3 \text{Cos} \theta_4 \dot{\theta}_3 - \text{Cos} \theta_3 \text{Sen} \theta_4 \dot{\theta}_3 \dot{\theta}_4 + \text{Cos} \theta_3 \text{Cos} \theta_4 \ddot{\theta}_3) \end{aligned} \quad (4.67)$$

Al sustituir desde la ecuacione (4.56) a la ecuación (4.67) en la ecuación Euler-Lagrange obtenemos los torques correspondientes a cada uno de los eslabones, los cuales son

$$\begin{aligned} \tau_1 = & (m_1l_1^2 + m_2l_1^2)\ddot{\theta}_1 + [m_2l_1l_2\text{Cos}(\theta_1 - \theta_2)]\ddot{\theta}_2 \\ & + [m_2l_1l_2\text{Sen}(\theta_1 - \theta_2)]\dot{\theta}_2^2 + m_2gl_2\text{Sen}\theta_2 \end{aligned} \quad (4.68)$$

$$\begin{aligned} -\tau_3 = & (m_3l_3^2 + m_4l_4^2)\ddot{\theta}_3 + [m_4l_3l_4\text{Cos}(\theta_3 - \theta_4)]\ddot{\theta}_4 \\ & + [m_4l_3l_4\text{Sen}(\theta_3 - \theta_4)]\dot{\theta}_4^2 + m_4gl_4\text{Sen}\theta_4 \end{aligned} \quad (4.69)$$

$$\begin{aligned} \tau_2 = & m_2l_2^2\ddot{\theta}_2 + [m_2l_1l_2\text{Cos}(\theta_1 - \theta_2)]\ddot{\theta}_1 \\ & + [m_2l_1l_2\text{Sen}(\theta_1 - \theta_2)]\dot{\theta}_1^2 + m_2gl_2\text{Sen}\theta_2 \end{aligned} \quad (4.70)$$

$$\begin{aligned} -\tau_4 = & m_4l_4^2\ddot{\theta}_4 + [m_4l_3l_4\text{Cos}(\theta_3 - \theta_4)]\ddot{\theta}_3 \\ & + [m_4l_3l_4\text{Sen}(\theta_3 - \theta_4)]\dot{\theta}_3^2 + m_4gl_4\text{Sen}\theta_4 \end{aligned} \quad (4.71)$$

Quedando en su forma mtricial (4.72).reduciendo terminos como $m_2l_1l_2\text{Cos}(\theta_1 - \theta_2) = K$, $m_4l_3l_4\text{Sen}(\theta_3 - \theta_4) = L$, $m_2l_1l_2\text{Sen}(\theta_1 - \theta_2) = M$, $m_4l_3l_4\text{Sen}(\theta_3 - \theta_4) = N$.

$$\begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \\ \tau_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_1l_1^2 + m_2l_2^2 & K & 0 & 0 \\ K & m_2l_2^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_3l_3^2 + m_4l_4^2 & L \\ 0 & 0 & L & m_4l_4^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \\ \ddot{\theta}_3 \\ \ddot{\theta}_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & M & 0 & 0 \\ M & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N \\ 0 & 0 & N & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1^2 \\ \dot{\theta}_2^2 \\ \dot{\theta}_3^2 \\ \dot{\theta}_4^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m_2gl_2\text{Sen}\theta_2 \\ m_4gl_4\text{Sen}\theta_4 \\ m_2gl_2\text{Sen}\theta_2 \\ m_4l_4\text{Sen}\theta_4 \end{bmatrix} \quad (4.72)$$

b) Modelado en Bond Graph de un efector final de dos eslabones por lado.

En la **figura 4.28** se muestra el esquema de un efector final, el cual está compuesto por dos eslabones por lado donde $\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3, \dot{x}_4, \dot{y}_1, \dot{y}_2, \dot{y}_3, \dot{y}_4$, representan la velocidad en el centro de masa, $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$, siendo los ángulos de desplazamiento de dichos eslabones.

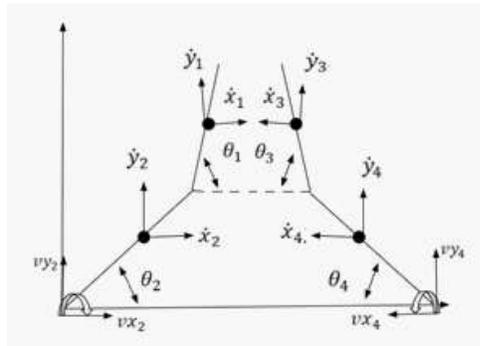


Figura 4.28 Esquema de un efector final compuesto por dos eslabones por lado.

Para llevar a cabo el modelado de un efector final compuesto por dos eslabones por lado en Bond Graph, se debe llevar a cabo ciertas modificaciones, comenzando por la colocación de un puerto1 para cada eslabón en donde estos se unen, así como la colocación de dos servomotores extras en la misma unión para lograr la movilidad de los eslabones añadidos, en la **figura 4.29** se muestra el modelo en Bond Graph para un efector final compuesto por dos eslabones por lado.

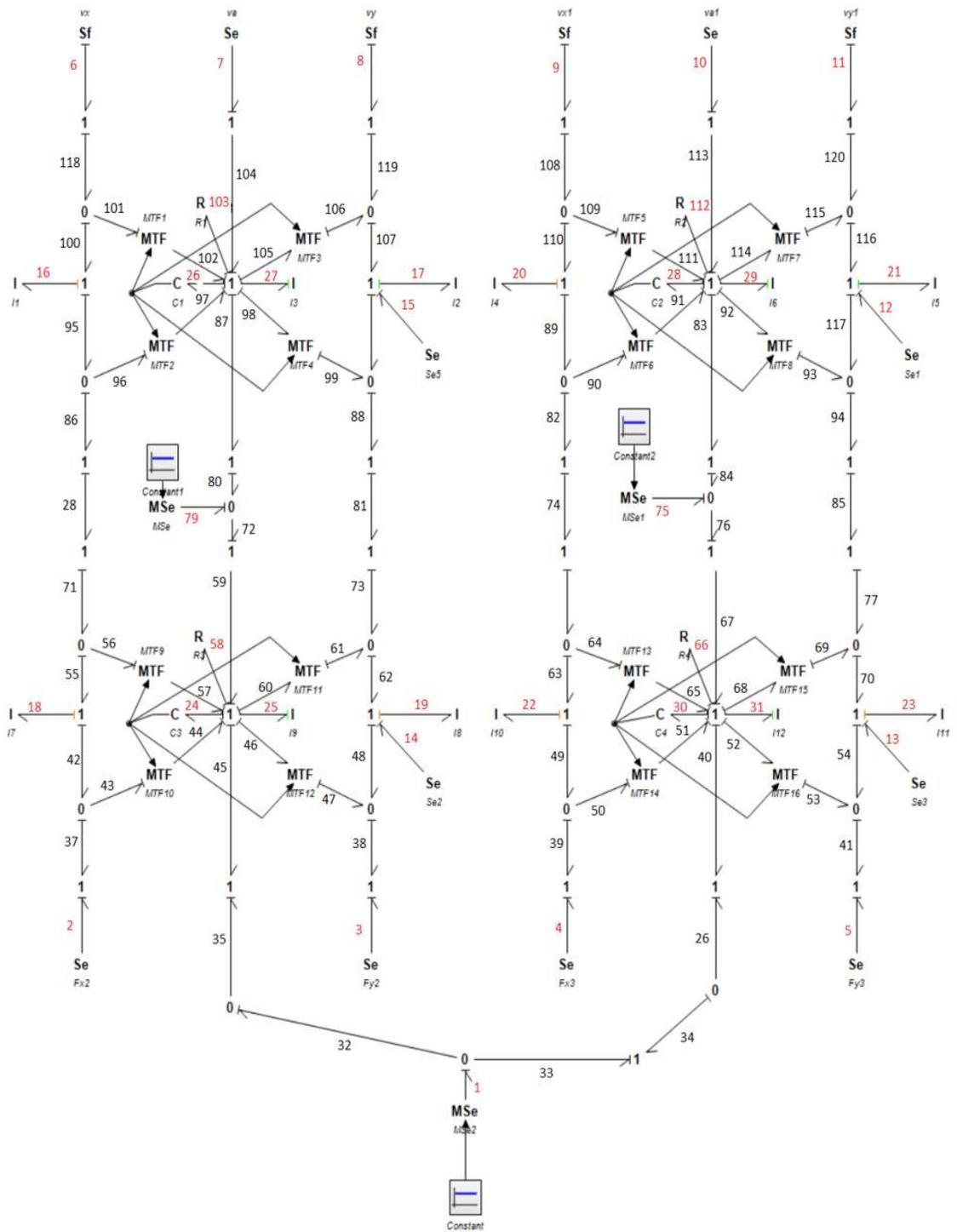


Figura 4.29 Bond Graph de un efector final compuesto por dos eslabones por lado.

Para este caso los elementos de disipación y almacenamiento son mostrados a continuación:

$$\begin{aligned}
 x &= \begin{bmatrix} q_{26} \\ q_{24} \\ q_{28} \\ q_{30} \\ p_{27} \\ p_{25} \\ p_{29} \\ p_{32} \end{bmatrix} ; \quad \dot{x} = \begin{bmatrix} f_{26} \\ f_{24} \\ f_{28} \\ f_{30} \\ e_{27} \\ e_{25} \\ e_{29} \\ e_{32} \end{bmatrix} ; \quad z = \begin{bmatrix} e_{26} \\ e_{24} \\ e_{28} \\ e_{30} \\ f_{27} \\ f_{25} \\ f_{29} \\ f_{32} \end{bmatrix} \\
 xd &= \begin{bmatrix} p_{16} \\ p_{17} \\ p_{18} \\ p_{19} \\ p_{20} \\ p_{21} \\ p_{22} \\ p_{23} \end{bmatrix} ; \quad \dot{xd} = \begin{bmatrix} e_{16} \\ e_{17} \\ e_{18} \\ e_{19} \\ e_{20} \\ e_{21} \\ e_{22} \\ e_{23} \end{bmatrix} ; \quad zd = \begin{bmatrix} f_{16} \\ f_{17} \\ f_{18} \\ f_{19} \\ f_{20} \\ f_{21} \\ f_{22} \\ f_{23} \end{bmatrix} \\
 D_{in} &= \begin{bmatrix} f_{103} \\ f_{58} \\ f_{112} \\ f_{66} \end{bmatrix} ; \quad D_{out} = \begin{bmatrix} e_{103} \\ e_{58} \\ e_{112} \\ e_{66} \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{4.73}$$

Por lo que las matrices diagonales compuestas por los elementos de disipación y almacenamiento quedan de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 F &= \begin{bmatrix} C_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & J_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & J_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & J_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & J_4 \end{bmatrix} ; Fd = \begin{bmatrix} I_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_8 \end{bmatrix} \\
 L &= \begin{bmatrix} R_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_4 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{4.74}$$

Se debe considerar todas las entradas o salidas de energía, como por ejemplo la gravedad que es una entrada de esfuerzo a cada uno de los eslabones, o la entrada del motor que es considerada una entrada de esfuerzo, para este caso los motores o servomotores se consideran tres ya que se ha agregado uno por cada eslabón superior, sin embargo, hay energías en este caso esfuerzos y flujos que valen cero, sin embargo deben ser tomados para un análisis más completo ya que con el modelo completo se pueden agregar estas energías cuando llegasen a tener un valor sin afectar a nuestro sistema, por lo que las energías a

considerar son los extremos de nuestro eje x , los extremos del eje y la gravedad para cada eslabón y la energía de entrada de cada servomotor siendo un total de 17 elementos los cuales se colocan en nuestra estructura unión para calcular la matriz unión y obtener la ecuación de estado, por lo que se muestran las matrices que conforman la matriz unión por comodidad ya que el arreglo completo es muy extenso.

$$S_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad S_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$S_{13} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2\cos\theta & 0 & 0 & 2\sin\theta & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\sin\theta & \sin\theta & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2\cos\theta & 2\sin\theta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin\theta & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\cos\theta & 2\sin\theta & 0 & 1 & \sin\theta & 2\sin\theta & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 2\cos\theta & 2\sin\theta & 0 & 0 & 0 & -\sin\theta & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$S_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad S_{22} = [0]; \quad S_{23} = [0]$$

S_{11} y S_{22} son matrices cuadradas antisimétricas.

S_{12} es la matriz traspuesta negativa de la matriz S_{21} y viceversa.

Quedando de esta forma las matrices A y B así como la ecuación de estado como se muestran a continuación.

$$A = S_{11} + S_{12}MS_{21} \quad , \text{con } M = L(I - S_{22})^{-1} \quad \text{como } S_{22} = 0 \quad M = L$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & J_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & J_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & J_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & J_4 \\ -C_1 & 0 & 0 & 0 & -J_1R_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -C_2 & 0 & 0 & 0 & -J_2R_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -C_3 & 0 & 0 & 0 & -J_3R_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -C_4 & 0 & 0 & 0 & -J_4R_4 \end{bmatrix}$$

$B = S_{13} + S_{12}MS_{23}$, como $S_{23} = 0$ por lo que $B = S_{13}$.

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2\text{Cos}\theta & 0 & 0 & 2\text{Sen}\theta & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\text{Sen}\theta & \text{Sen}\theta & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2\text{Cos}\theta & 2\text{Sen}\theta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\text{Sen}\theta & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\text{Cos}\theta & 2\text{Sen}\theta & 0 & 1 & \text{Sen}\theta & 2\text{Sen}\theta & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 2\text{Cos}\theta & 2\text{Sen}\theta & 0 & 0 & 0 & -\text{Sen}\theta & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La ecuación de estado para un efector final de dos eslabones por lado se muestra a continuación

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & J_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & J_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & J_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & J_4 \\ -C_1 & 0 & 0 & 0 & -J_1R_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -C_2 & 0 & 0 & 0 & -J_2R_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -C_3 & 0 & 0 & 0 & -J_3R_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -C_4 & 0 & 0 & 0 & -J_4R_4 \end{bmatrix} x$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2\text{Cos}\theta & 0 & 0 & 2\text{Sen}\theta & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\text{Sen}\theta & \text{Sen}\theta & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2\text{Cos}\theta & 2\text{Sen}\theta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\text{Sen}\theta & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\text{Cos}\theta & 2\text{Sen}\theta & 0 & 1 & \text{Sen}\theta & 2\text{Sen}\theta & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 2\text{Cos}\theta & 2\text{Sen}\theta & 0 & 0 & 0 & -\text{Sen}\theta & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} u$$

(4.75)

c) Simulación de un efector final compuesto por dos eslabones.

Al llevar a cabo la simulación de un efector final compuesto de dos eslabones por lado, se pensaría que obtendríamos el mismo resultado que para un efector final compuesto de un eslabón por lado, sin embargo, se tuvo que considerar que la implementación de dos motores al sistema crearía ciertas diferencias como por ejemplo las polaridades de los eslabones, que si tomamos la **figura 4.30** donde se muestra el esquema de un efector final en 3D compuesto de dos eslabones por lado, podemos observar que para que la pinza abra la polaridad del eslabón 1 debe ser contraria al eslabón 2 y a su vez el eslabón 2 debe tener la misma polaridad que el eslabón 3 y el eslabón 1 debe tener la misma polaridad que el eslabón 4, esto para lograr una apertura en forma de rombo.

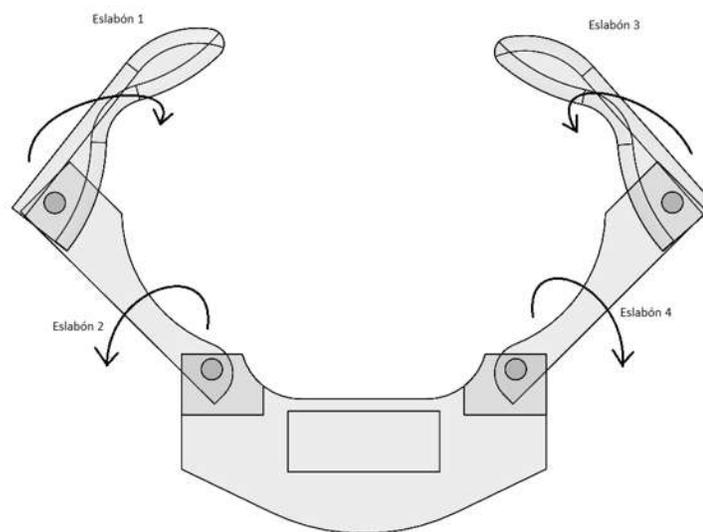


Figura 4.30 Polaridades de los eslabones.

Para llevar a cabo la simulación se han tomado los mismos valores de un efector final compuesto por un eslabón por lado refiriendonos al peso y lo largo de cada eslabón que son $0,5kg$ y $5cm$ respectivamente, la gravedad $9,81\frac{m}{s^2}$, sin embargo, después de llevar

a cabo varias simulaciones se pudo observar que el voltaje aplicado a cada servomotor que mueve los eslabones principales debía ser de mayor potencia en diferencia a los siguientes dos servomotores, lo cual suena lógico ya que el peso que movera el servomotor principal es la suma de ambos eslabones, superior e inferior por lo que se agregaron valores de $10v$ para el servomotor principal y $4v$ para los segundos servomotores, la gráfica arrojada por el software 20 – sim se muestra en la **figura 4.31** donde se puede apreciar lo que se comentaba con anterioridad sobre la polaridad de cada eslabón, la polaridad del eslabón 1 debe ser contraria al eslabón 2 y a su vez el eslabón 2 debe tener la misma polaridad que el eslabón 3 y el eslabón 1 debe tener la misma polaridad que el eslabón 4, a su vez observamos que los eslabones superiores por la naturaleza del efector final sufre un retardo al ir en contra del movimiento de los eslabones primarios por lo que en la grafica se puede apreciar una curva con un segundo de retardo.

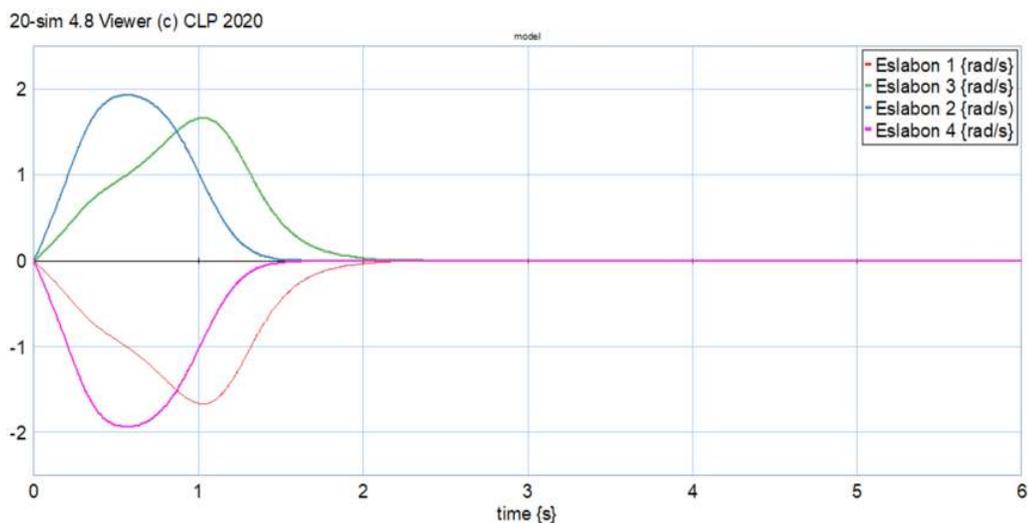


Figura 4.31 Gráfica de un efector final compuesto por dos eslabones por lado.

Para poder observar el comportamiento del efector final compuesto por dos eslabones por lado,, podemos variar el voltaje aplicado a los servomotores de entrada, sin embargo, nos encontramos con tres motores que trabajan a diferentes potencias por lo que variaremos el voltaje del servomotor principal donde se observa su comportamiento en las **figuras 4.32, 4.33, 4.34 y 4.35.**

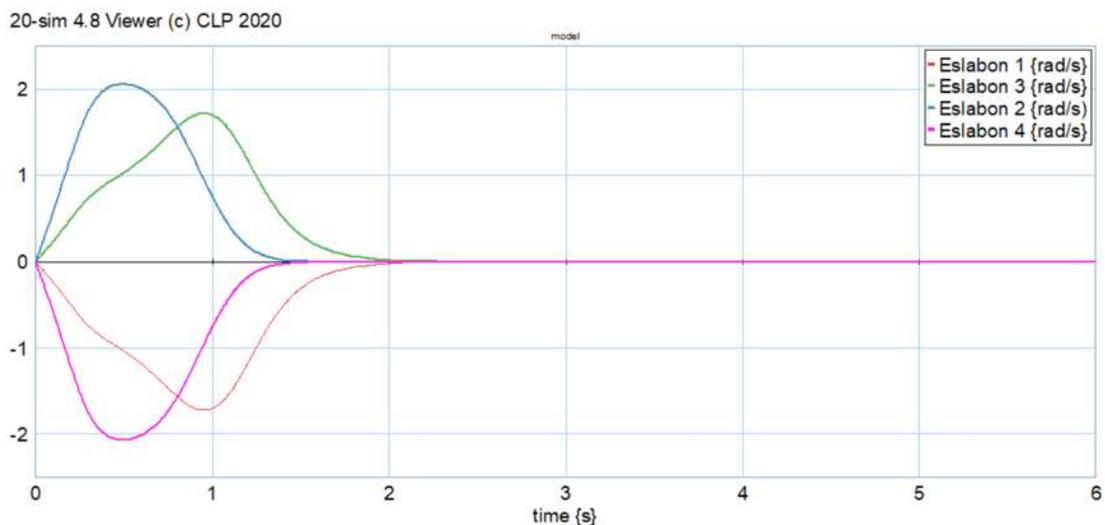


Figura 4.32 Gráfica con un voltaje de 15v en servomotor principal.

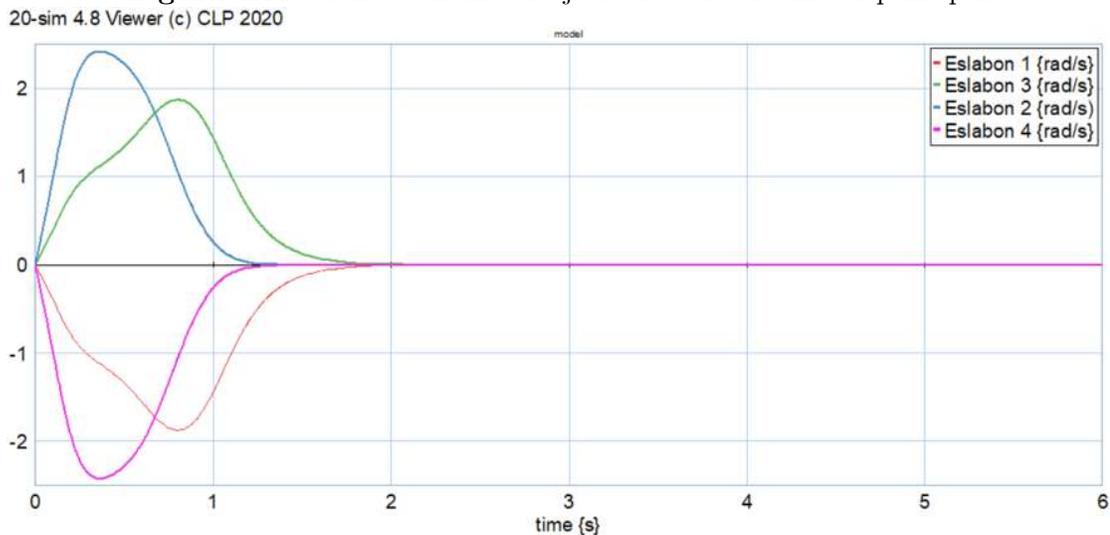


Figura 4.33 Gráfica con voltaje de 30v en servomotor principal.

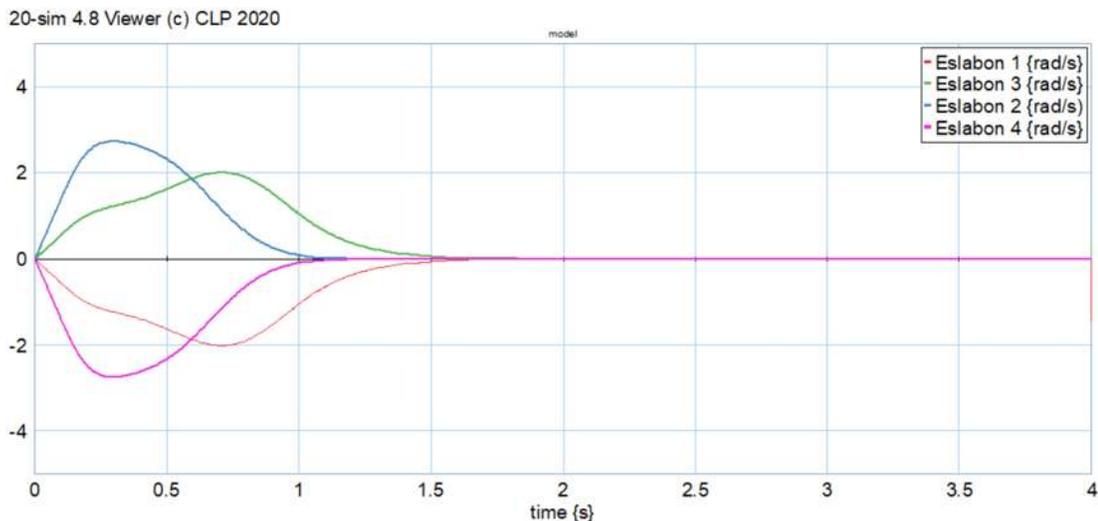


Figura 4.34 Gráfica con voltaje de 45v en servomotor principal.

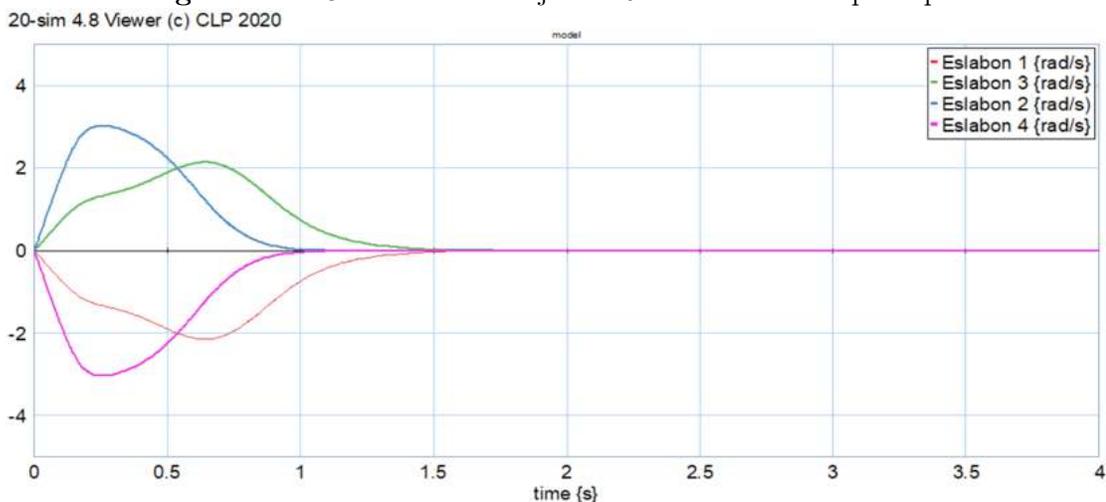


Figura 4.35 Gráfica con voltaje de 60v en servomotor principal.

Se puede observar un comportamiento parecido al efector final compuesto por un eslabón donde la magnitud del momento angular aumenta logrando un cierre y una apertura del efector final en los eslabones principales en menos tiempo, sin embargo, aumentaremos los valores de los siguientes eslabones recordando que este voltaje es menor al voltaje del motor principal dejando los eslabones principales con la potencia principal de 15v logrando

observar su comportamiento donde se observa el aumento en la magnitud del momento angular y la reducción del tiempo para estos eslabones colocados al final de la cadena el comportamiento se observa en las **figuras 4.36, 4.37, y 4.48.**

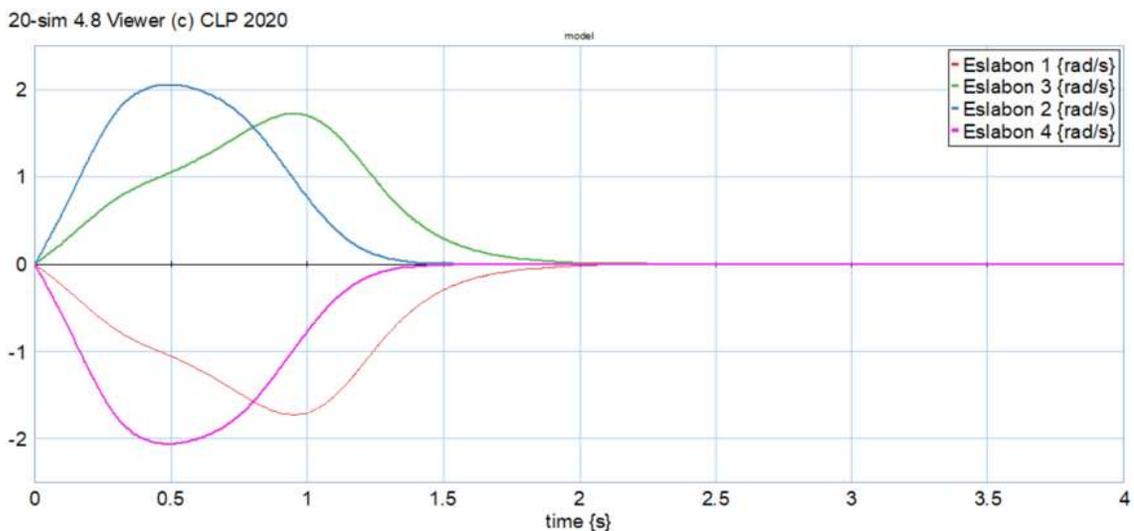


Figura 4.36 Gráfica con voltaje de 8v en servomotores superiores.

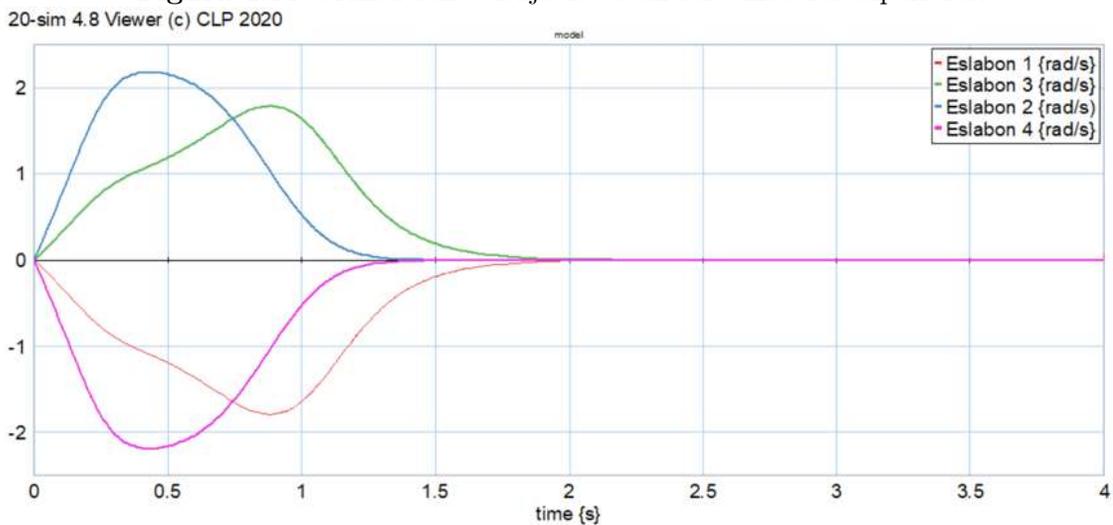


Figura 4.37 Gráfica con voltaje de 12v en servomotores superiores.

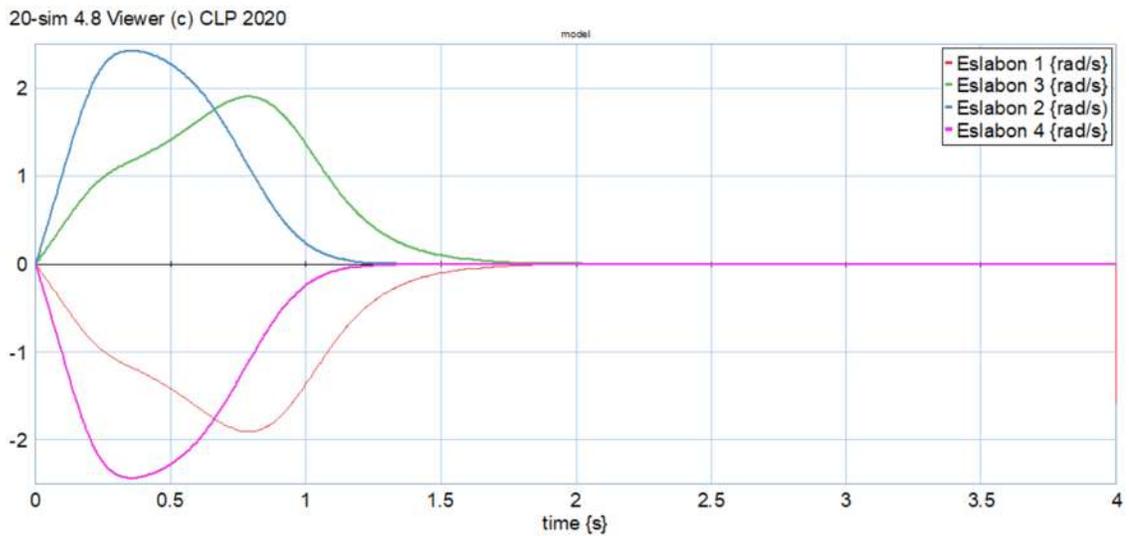


Figura 4.38 Gráfica con voltaje de 16v en servomotores superiores

Al simular no se puede dejar de lado la longitud de los eslabones, que hasta el momento han sido de la misma longitud, por lo que las **figuras 4.39, 4.40, 4.41 y 4.42** nos muestran el comportamiento al manipular la longitud comenzando por los eslabones superiores.

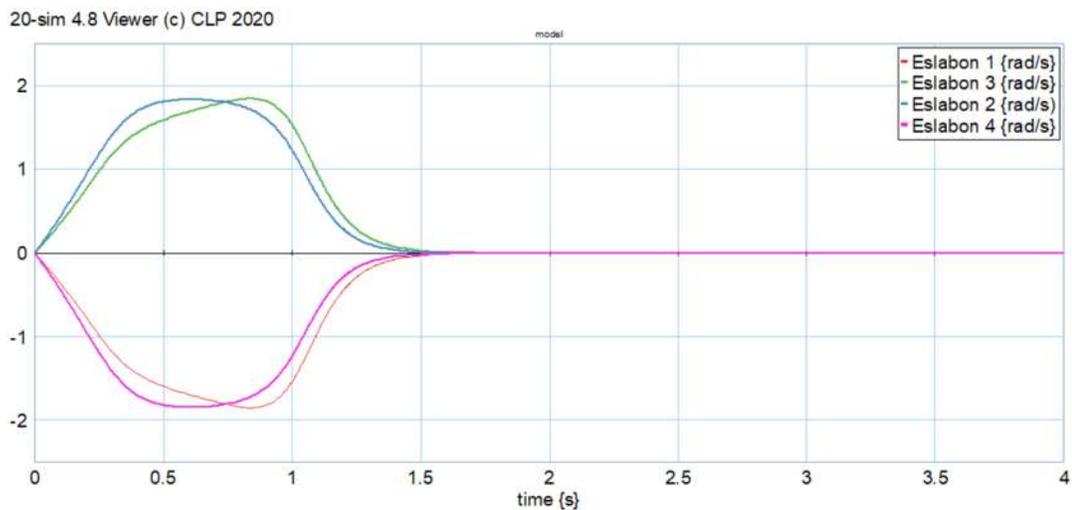


Figura 4.39 Eslabones superiores por mitad de su longitud.

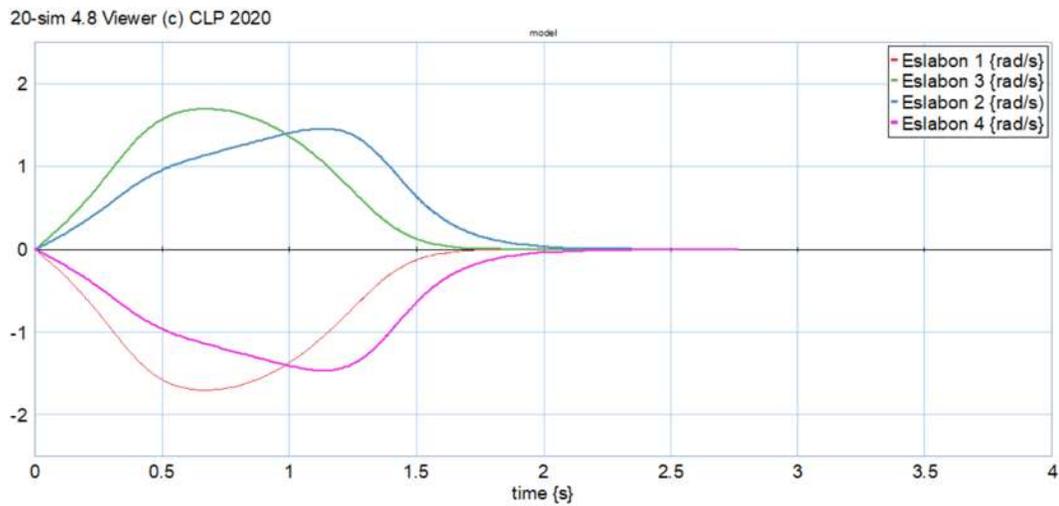


Figura 4.40 Eslabones superiores de 1/4 de su longitud.

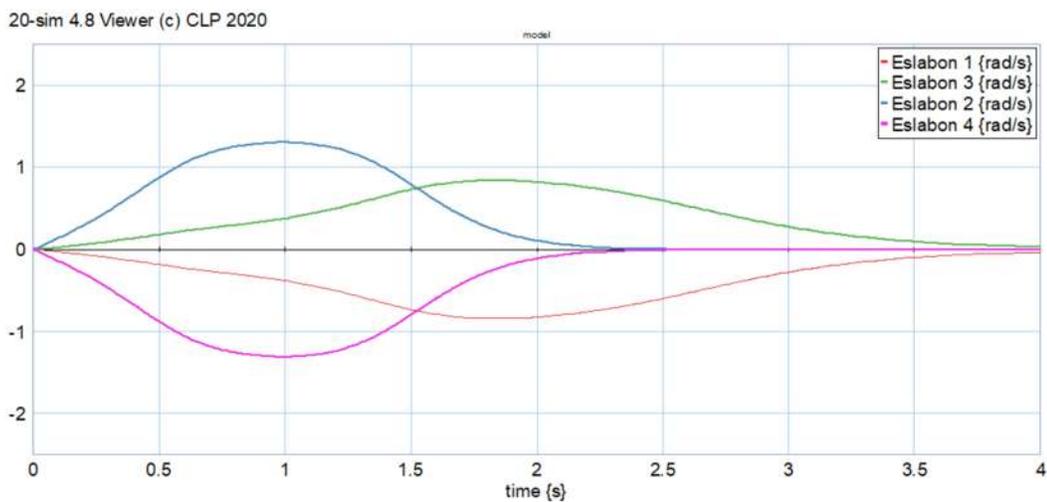


Figura 4.41 Eslabones superiores de 20cm.

En la **figura 4.39** se observa que al disminuir por mitad la longitud de los eslabones superiores, la magnitud del momento angular se aproxima a los valores de los eslabones inferiores, mientras que en la **figura 4.40** se observa que al disminuir la longitud de los eslabones superiores la magnitud del momento angular rebasa la magnitud de los eslabones inferiores, esto nos indica que cerrara o abrirá más rápidamente los eslabones superiores

que los inferiores, nótese la disminución en el tiempo para los eslabones superiores, esto podría ser un problema para el diseñador o una cualidad buscada dependiendo de la tarea a realizar el efector final, en la **figura 4.41** se aumentó la longitud por lo que ahora la magnitud de los eslabones superiores es menor y con más tiempo de cierre o apertura, por lo que también podría generar problemas o cualidad según el diseñador.

En la **figura 4.42** se puede observar los elementos de almacenamiento C_1, C_2, C_3, C_4 los cuales representan la fricción que para nuestro efector final podría tratarse del rozamiento entre los materiales, o si existe algún valor la fricción del rodamiento, que se encuentra en nuestro sistema, o bien se logra observar que conforme el tiempo transcurre la fricción aumenta hasta alcanza un equilibrio, esto nos indica el comportamiento de la fricción cuando la pinza comienza a moverse hasta un paro total o un cierre, donde la fricción alcanza su equilibrio.

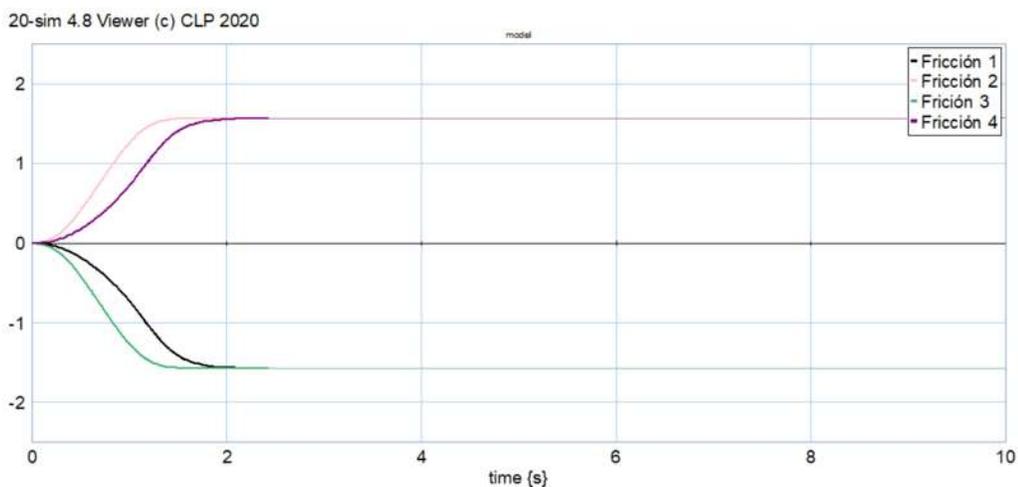


Figura 4.42 Elementos de almacenamiento C_1, C_2, C_3, C_4 .

En las **figuras 4.43, 4.44** se pueden observar los eslabones superiores de la pinza con sus respectivas fricciones, así como en la **figura 4.45** se puede observar el efector final

de dos eslabones con sus respectivas fricciones.

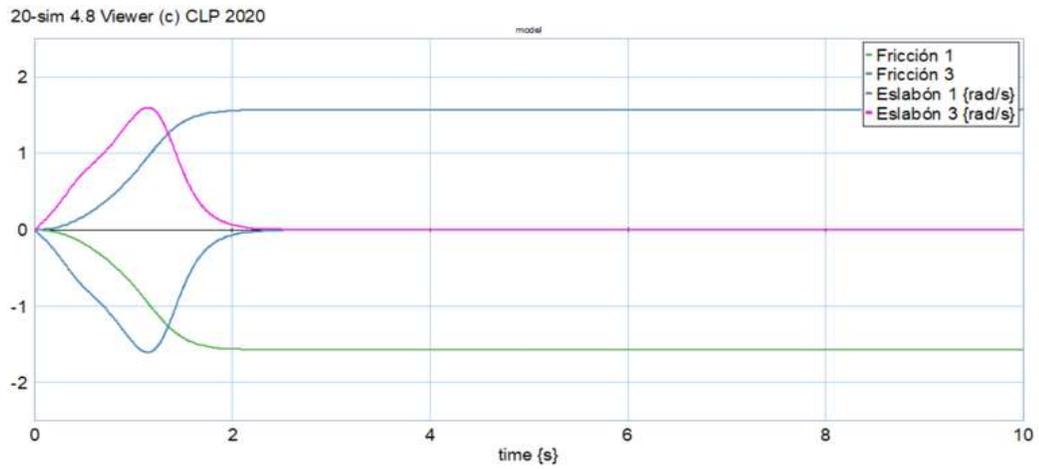


Figura 4.43. Eslabones superiores con sus respectivas fricciones.

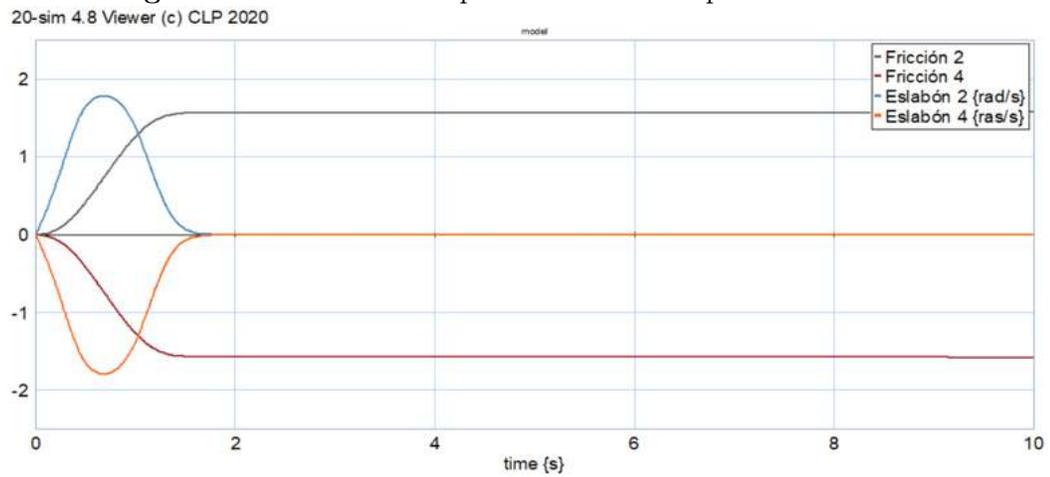


Figura 4.44. Eslabones inferiores con sus respectivas fricciones.

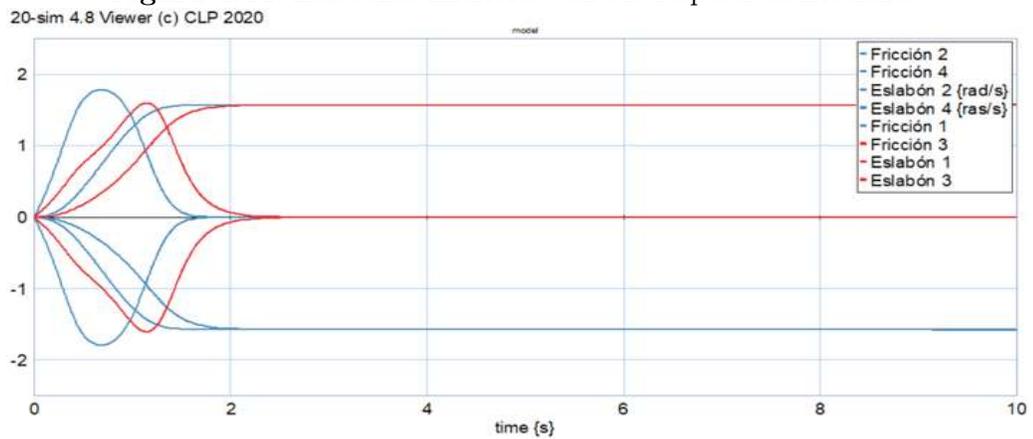


Figura 4.45. Efecto final de dos eslabones con sus respectivas fricciones.

4.4. Modelo Euler - Lagrange a partir de un modelo de Bond Graph

Como se ha mostrado en los puntos anteriores, se ha observado el análisis de un efecto final por medio de Bond Graph y el análisis de Euler-Lagrange, compuesto por un eslabón por lado o dos eslabones, sin embargo, en este punto se comprueba que los resultados para la ecuación que caracteriza su comportamiento para ambos análisis es la misma, para lo cual es importante mencionar ya que se pretende mostrar que Bond Graph es un método relativamente nuevo que puede ser utilizado en este tipo de sistemas mecánicos obteniendo los mismos resultados que de la forma tradicional, el análisis se llevó a cabo en un péndulo y un eslabón previamente realizado en el punto 4.2 inciso a).

a) Análisis de un péndulo simple, obteniendo Euler – Lagrange de modelo en Bond Graph.

En la **figura 4.46** se muestra el esquema de un péndulo que oscila entre el tercer y cuarto cuadrante con una longitud l y un ángulo θ donde el péndulo tiene una masa m .

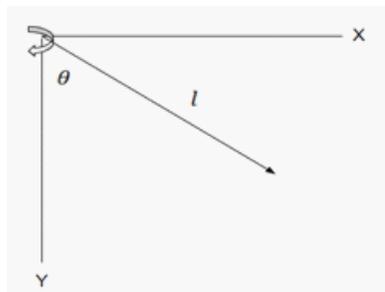


Figura 4.46 Esquema de un péndulo simple.

Calculando las componentes con respecto del ángulo θ y sus respectivas velocidades $\dot{\theta}$ entonces:

$$\begin{aligned}x &= l\text{Cos}\theta; & \dot{x} &= l\dot{\theta}\text{Sen}\theta \\y &= -l\text{Sen}\theta; & \dot{y} &= l\dot{\theta}\text{Cos}\theta\end{aligned}$$

Como $L = T - V$, energía cinética menos la energía potencial entonces:

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 \quad (4.76)$$

$$V = -mgl\text{Cos}\theta \quad (4.77)$$

$$L = T - V = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + mgl\text{Cos}\theta \quad (4.78)$$

La ecuación del Lagrangeano queda como:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} &= \tau \\ \tau &= ml^2\ddot{\theta} + mgl\text{Sen}\theta\end{aligned} \quad (4.79)$$

Una vez obtenida la ecuación del troque por medio de Euler – Lagrange para un péndulo simple, se realiza el modelo de Bond Graph para el mismo, el cual es similar para un eslabón sin embargo en el péndulo la energía de entrada que nos importa conocer es la va que es donde esta sujetado al techo o base donde se encuentra oscilando. La **figura 4.47** nos muestra el modelo Bond Graph para un péndulo simple.

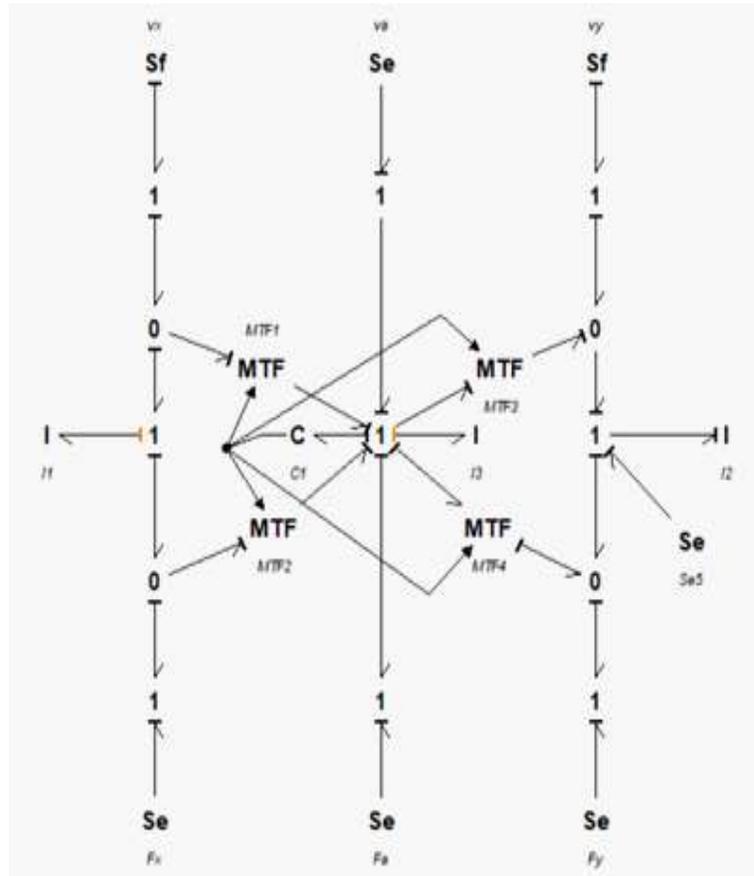


Figura 4.47 Modelo en Bond Graph para un péndulo simple.

Los elementos de disipación y almacenamiento son los siguientes:

$$\begin{aligned}
 x &= \begin{bmatrix} q_{14} \\ p_{25} \end{bmatrix}; \dot{x} = \begin{bmatrix} f_{14} \\ e_{25} \end{bmatrix}; z = \begin{bmatrix} e_{14} \\ f_{25} \end{bmatrix} \\
 xd &= \begin{bmatrix} p_7 \\ p_{21} \end{bmatrix}; \dot{xd} = \begin{bmatrix} e_7 \\ e_{21} \end{bmatrix}; zd = \begin{bmatrix} f_7 \\ f_{21} \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{4.80}$$

$$F = \text{diag} \left\{ \frac{1}{C}, \frac{1}{J} \right\}; Fd = \text{diag} \left\{ \frac{1}{mx}, \frac{1}{my} \right\}; u = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_3 \\ e_2 \\ e_{11} \\ e_{17} \\ e_{18} \\ e_{29} \end{bmatrix}$$

Para llegar a la ecuación de torque por medio de la modelación en Bond Graph la matriz unión queda de la siguiente manera mostrada en la matriz (4.81) donde ahora se observa que dependiendo de los elementos de disipación y almacenamiento llegamos a la energía de entrada o flujo de potencia, que para nuestro sistema mecánico se trata del torque y la matriz desarrollada (4.82).

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ zd \end{bmatrix} = [S] \begin{bmatrix} z \\ u \\ \dot{xd} \end{bmatrix} \tag{4.81}$$

$$\begin{bmatrix} f_{14} \\ e_{25} \\ f_7 \\ f_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2l^2 \cos \theta & 1 & -2l^2 \sin \theta & l \sin \theta & l \cos \theta & -l \sin \theta \\ 0 & -\cos \theta & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sin \theta & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{14} \\ f_{21} \\ f_1 \\ f_3 \\ e_2 \\ e_{11} \\ e_{17} \\ e_{18} \\ e_{29} \\ e_7 \\ e_{21} \end{bmatrix} \quad (4.82)$$

Dónde:

$$\begin{aligned}
 S_{11} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}; S_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2l^2 \cos \theta & 1 & -2l^2 \sin \theta & l \sin \theta \end{bmatrix}; \\
 S_{13} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ l \cos \theta & -l \sin \theta \end{bmatrix}; S_{21} = \begin{bmatrix} 0 & -\cos \theta \\ 0 & \sin \theta \end{bmatrix}; S_{22} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \\
 S_{23} &= [0]
 \end{aligned}$$

Calculando A, B, H que son las componentes de nuestra ecuación 4.83:

$$\dot{x} = Ax + Bu + H\dot{u} \quad (4.83)$$

Donde:

$$A = E^{-1} (S_{11} + S_{12}MS_{21}) F \quad (4.84)$$

$$B = E^{-1} (S_{13} + S_{12}MS_{23}) \quad (4.85)$$

$$H = E^{-1} - S_{14}Fd^{-1}S_{41} \quad (4.86)$$

$$E = I - S_{14}Fd^{-1}S_{41}F \quad (4.87)$$

Al no encontrarse elementos de disipación en el péndulo simple, esto debido a que se considera despreciable la resistencia del aire con el péndulo y M al tratarse del comportamiento de los elementos de disipación con respecto al sistema se considera 0 por lo que las ecuaciones se reducen considerablemente. Otro punto considerable para mencionar, es en el cálculo de E , donde se observa que S_{14} y S_{41} no existen en nuestra matriz unión por lo que nos indica los límites de nuestra matriz unión tomando los valores de S_{13} y S_{21} así mismo tomamos el lugar correspondiente de S_{43} como S_{23} .

Sustituyendo las matrices correspondientes obtenemos los siguientes resultados:

$$\begin{aligned}
 E &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ l\text{Cos}\theta & -l\text{Sen}\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} mx & 0 \\ 0 & my \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -l\text{Cos}\theta \\ 0 & l\text{Sen}\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{C} & 0 \\ 0 & \frac{1}{J} \end{bmatrix} \\
 E &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{l^2m+J}{J} \end{bmatrix} \tag{4.88}
 \end{aligned}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{l^2m+J}{J} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{C} & 0 \\ 0 & \frac{1}{J} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{J} \\ -\frac{J}{c(l^2m+J)} & 0 \end{bmatrix} \tag{4.89}$$

$$\begin{aligned}
 B &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{l^2m+J}{J} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2l^2\text{Cos}\theta & 1 & -2l^2\text{Sen}\theta & l\text{Sen}\theta \end{bmatrix} \\
 B &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{J}{l^2m+J} & \frac{2l^2J\text{Cos}\theta}{l^2m+J} & \frac{J}{l^2m+J} & -\frac{2l^2J\text{Sen}\theta}{l^2m+J} & \frac{Jl\text{Sen}\theta}{l^2m+J} \end{bmatrix} \tag{4.90}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{l^2 m + J}{J} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ l \cos \theta & -l \sin \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} mx & 0 \\ 0 & my \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
H &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{mx l J \cos \theta}{l^2 m + J} & -\frac{my l J \sin \theta}{l^2 m + J} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.91)
\end{aligned}$$

Al sustituir (4.89), (4.90), (4.91) en (4.83) se obtiene

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{J} \\ -\frac{J}{c(l^2 m + J)} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{14} \\ p_{25} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{J}{l^2 m + J} & \frac{J l \sin \theta}{l^2 m + J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_2 \\ e_{29} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{e}_2 \\ \dot{e}_{29} \end{bmatrix} \quad (4.92)$$

Podemos observar que la matriz B puede reducirse debido a que solo tenemos entrada de energía en los Bond e_2 que es el torque que se busca y e_{29} que es el Bond que nos representa la gravedad las demás por ende tendrían un valor 0 y debido a eso H al multiplicar la energía tomaría el valor de 0

Por definición $z = Fx$ al derivar con respecto del tiempo obtendríamos $\dot{z} = F\dot{x}$ la cual podemos sustituir (4.92) y obtener la ecuación (4.93)

$$\dot{z} = F \left(Ax + Bu + H\dot{u} \right) \quad (4.93)$$

Al sustituir las matrices (4.89), (4.90), (4.91) obtenemos la ecuación (4.93) resuelta mostrada a continuación.

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_{19} \\ \dot{f}_{25} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{C} & 0 \\ 0 & \frac{1}{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{J} \\ -\frac{J}{c(l^2 m + J)} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{14} \\ p_{25} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{C} & 0 \\ 0 & \frac{1}{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{J}{l^2 m + J} & \frac{J l \sin \theta}{l^2 m + J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_2 \\ e_{29} \end{bmatrix} \quad (4.94)$$

Al calcular la mutiplicación de matrices solo para el elemento \dot{f}_{25} obtenemos:

$$\dot{f}_{25} = -\frac{1}{C(l^2m + J)}q_{14} + \frac{1}{l^2m + J}e_2 + \frac{lSen\theta}{l^2m + J}e_{29} \quad (4.95)$$

Al despejar e_2 al tratarse de nuestro torque que entra al sistema por algún accionamiento en la ecuación (4.95) obtenemos:

$$e_2 = (l^2m + J)\dot{f}_{25} + \frac{q_{14}}{C} - lSen\theta e_{29} \quad (4.96)$$

Donde \dot{f}_{25} al ser el Bond que representa el momento de inercia o el movimiento angular puede ser representado como $\dot{f}_{25} = \ddot{\theta}$ así como e_{29} representa la fuerza de gravedad que afecta la masa o bien el peso por lo que es representada como $e_{29} = -mg$, c es un valor muy pequeño o nulo debido a que se trata de una estructura rígida por lo que podemos despreciar su deformación así como también podemos despreciar J ya que se trata del momento de inercia y debido a que es de magnitudes muy pequeñas al no encontrarnos con grandes revoluciones por minuto podemos de igual manera despreciarla quedando la ecuación (4.96) como:

$$e_2 = l^2m\ddot{\theta} + mglSen\theta$$

Se trata de la misma ecuación obtenida de Euler – Lagrange la cual tiene sentido ya que en el estudio de Euler – Lagrange no son tomadas en cuenta las variables de deformación de material ni el momento de inercia al no ser considerables sin embargo si se necesitan ser tomadas o que llegasen a ser de grandes magnitudes Euler – Lagrange no sería el estudio correspondiente y Bond Graph quedaría como opción de estudio.

b) Análisis de un efector final compuesto por un eslabón por lado, obteniendo Euler – Lagrange de modelo en Bond Graph.

En el subíndice 4.2 inciso b, se calculó el análisis matemático Euler-Lagrange para un efector final compuesto por un eslabón por lado, el cual se obtuvo el toque para cada eslabón quedando las ecuaciones como:

$$\begin{aligned}\tau_1 &= m_1 l_1^2 \ddot{\theta}_1 + m_1 g l_1 \sin \theta_1 \\ -\tau_2 &= m_2 l_2^2 \ddot{\theta}_2 + m_2 g l_2 \sin \theta_2\end{aligned}$$

Para obtener la ecuación Euler – Lagrange del método Bond Graph, debemos calcular la matriz unión del efector final compuesto por un eslabón, pero esta vez la estructura cambia, como se menciona en el inciso a), ya que ahora llegaremos a obtener el torque en base a los elementos de salida que se ven afectados por este torque a lo cual la estructura de la matriz unión queda como se muestra en la ecuación (4.97) y en la ecuación (4.98) podemos observar la matriz unión con sus componentes $S_{11}, S_{12}, \dots, etc.$

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ zd \end{bmatrix} = [S] \begin{bmatrix} z \\ u \\ \dot{x}d \end{bmatrix} \quad (4.97)$$

$$\begin{aligned}
S_{11} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}; S_{13} = \begin{bmatrix} l_1 \cos \theta_1 & -l_1 \cos \theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l_2 \cos \theta_2 & -l_2 \sin \theta_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.98) \\
S_{12} &= \begin{bmatrix} 1 & -2l_1^2 \cos \theta_1 & 2l_1^2 \sin \theta_1 & 0 & 0 & l_1 \sin \theta_1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -2l_2^2 \cos \theta_2 & 2l_2^2 & 0 & l_2 \sin \theta_2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \\
S_{21} &= \begin{bmatrix} -l_1 \cos \theta_1 & 0 & 0 & 0 \\ l_1 \sin \theta_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -l_2 \cos \theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & l_2 \sin \theta_2 & 0 & 0 \end{bmatrix}; S_{23} = [0]; \\
S_{22} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Calculando A, B, H que son las componentes de nuestra ecuación (4.83)

$$\dot{x} = Ax + Bu + H\dot{u} \quad (4.80)$$

Donde:

$$A = E^{-1} (S_{11} + S_{12}MS_{21}) F \quad (4.81)$$

$$B = E^{-1} (S_{13} + S_{12}MS_{23}) \quad (4.82)$$

$$H = E^{-1} - S_{14}Fd^{-1}S_{41} \quad (4.83)$$

$$E = I - S_{14}Fd^{-1}S_{41}F \quad (4.84)$$

Al no encontrarse elementos de disipación en el efector final compuesto por un eslabón por lado, esto debido a que se considera despreciable la resistencia del aire con el efector final y M al tratarse del comportamiento de los elementos de disipación con respecto al sistema se considera 0 por lo que las ecuaciones se reducen considerablemente. Otro punto considerable para mencionar, es en el cálculo de E , donde se observa que S_{14} y S_{41} no existen en nuestra matriz unión por lo que nos indica los límites de nuestra matriz unión tomando los valores de S_{13} y S_{21} así mismo tomamos el lugar correspondiente de S_{43} como S_{23} .

Sustituyendo las matrices correspondientes obtenemos los siguientes resultados:

$$E^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{C_1}{m_1 l_1^2 + C_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{J_1}{m_2 l_2^2 + J_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.99)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{C_1}{m_1 l_1^2 + C_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{J_1}{m_2 l_2^2 + J_1} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.100)$$

Al reducir la matriz B con respecto a la entrada de potencia y la matriz H quedan las matrices como:

$$B = \begin{bmatrix} \frac{C_1}{m_1 l_1^2 + C_1} & \frac{C_1}{m_1 l_1^2 + C_1} & C_1 l_1 \frac{\sin \theta_1}{m_1 l_1^2 + C_1} & 0 \\ -\frac{J_1}{m_2 l_2^2 + J_1} & -\frac{J_1}{m_2 l_2^2 + J_1} & 0 & J_1 l_2 \frac{\sin \theta_2}{m_2 l_2^2 + J_1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.101)$$

$$H = [0]$$

Al sustituir las matrices (4.100) (4.101) en la ecuación (4.93) y ser llevando a cabo la multiplicación AXF y BXF se obtiene la siguiente ecuación de matrices (4.102), este arreglo tiene en particular que se han colocado dos entradas de potencia e_1 , esto es debido a que solo existe un servomotor y es debido al arreglo de Bonds que logra un torque de polaridad diferente para cada eslabón. Un segundo punto es que para minimizar la matriz se a tomado como $K = m_1 l_1^2 + C_1$ y $L = m_2 l_2^2 + J_1$.

$$\begin{bmatrix} \dot{f}_{10} \\ \dot{f}_{29} \\ \dot{e}_9 \\ \dot{e}_{45} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{C_1}{C_2 K} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{J_1}{J_2 L} \\ \frac{1}{C_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{J_1} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{10} \\ p_{29} \\ q_9 \\ q_{45} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{K} & \frac{C_1}{J_1 K} & \frac{C_1 l_1 \sin \theta_1}{C_2 l_1 K} & 0 \\ -\frac{1}{C_1 L} & -\frac{1}{L} & 0 & \frac{J_1 l_2 \sin \theta_2}{J_2 l_2 L} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_1 \\ e_{33} \\ e_{59} \end{bmatrix} \quad (4.102)$$

Por lo que al despejar \dot{f}_{10} y \dot{f}_{29} obtenemos las ecuaciones (4.103) y (4.104).

$$\dot{f}_{10} = -\frac{C_1}{C_2} \frac{1}{m_1 l_1^2 + C_1} q_9 + \frac{1}{m_1 l_1^2 + C_1} e_1 + \frac{C_1}{C_2} \frac{l_1 \sin \theta_1}{m_1 l_1^2 + C_1} e_{33} \quad (4.103)$$

$$\dot{f}_{29} = -\frac{J_1}{J_2} \frac{1}{m_2 l_2^2 + J_1} q_{45} - \frac{1}{m_2 l_2^2 + J_1} e_1 + \frac{J_1}{J_2} \frac{l_2 \sin \theta_2}{m_2 l_2^2 + J_1} e_{59} \quad (4.104)$$

Comó la entrada de potencia es la del servomotor y solo existe un servomotor se despeja de ambas ecuaciones(4.105) (4.106) e_1 logrando ver como una es polaridad positiva y la otra polaridad negativa, indicando como entrar a nuestro sistema mecánico.

$$-e_1 = -\frac{C_1}{C_2} q_9 + \frac{C_1}{C_2} l_1 \sin \theta_1 e_{33} - (m_1 l_1^2 + C_1) \dot{f}_{10} \quad (4.105)$$

$$e_1 = -\frac{J_1}{J_2} q_{45} + \frac{J_1}{J_2} l_2 \sin \theta_2 e_{59} - (m_2 l_2^2 + J_1) \dot{f}_{29} \quad (4.106)$$

Donde \dot{f}_{10} y \dot{f}_{29} al ser el Bond que representa el momento de inercia o el movimiento angular puede ser representado como $\dot{f}_{10} = \ddot{\theta}_1$ y $\dot{f}_{29} = \ddot{\theta}_2$ así como e_{33} y e_{59} representa la fuerza de gravedad que afecta la masa o bien el peso por lo que es representada como $e_{33} = -m_1 g$, y $e_{59} = -m_2 g$, C_1 y C_2 son un valor muy pequeño o nulo debido a que se trata de una estructura rígida por lo que podemos despreciar su deformación así como también podemos despreciar J_1 y J_2 ya que se trata del momento de inercia y debido a que es de

magnitudes muy pequeñas al no encontrarnos con grandes revoluciones por minuto podemos de igual manera despreciarla quedando las ecuaciones (4.107) y (4.108)

$$e_1 = m_1 l_1^2 \ddot{\theta}_1 + m_1 g l_1 \sin \theta_1 \quad (4.107)$$

$$-e_1 = m_2 l_2^2 \ddot{\theta}_2 + m_2 g l_2 \sin \theta_2 \quad (4.108)$$

Al hacer la comparativa de los resultados obtenidos por el método Euler - Lagrange y Bond Graph se puede apreciar que podemos obtener el modelo matemático por ambos métodos, ya que los resultados han sido coincidentes por lo que podemos decir que al calcular la ecuación de estado por medio del análisis y modelado en Bond Graph logra ser un método eficiente, novedoso y que podemos obtener los resultados convenientes debido a que se pueden obtener los mismos resultados que con el método conocido.

Capítulo 5

Conclusiones

5.1. Efector final

Al hablar de robótica no podemos dejar a un lado los métodos existentes para el estudio de los mismos, tales como cinemática directa, cinemática inversa, denavit – hartenberg así como Euler – Lagrange, pero no sólo es la robótica si no los efectores finales que son pieza esencial en el trabajo de los robots manipuladores, por lo que se ha comprendido que esta herramienta debe ser diseñada a conciencia tomando en cuenta los parámetros que la afectan directamente, por ejemplo la tarea que va a diseñar, la cantidad de eslabones o dedos, el peso del objeto que se va a trasladar, la potencia de los servomotores y la geometría que se requiere para su instalación en el robot manipulador.

Dejando en claro que podemos basarnos en diseños elaborados en Solid Works o cualquier otro software para darnos una idea de cómo queremos que funcione nuestro efector final o como sería la geometría deseada del mismo, por lo que podemos decir que los softwares de diseño suelen ser una de las principales opciones para llevar a cabo la elaboración de

efectores finales o de robots manipuladores, sin embargo, después de tener lo que llamamos la geometría del diseño podemos continuar con el análisis con la implementación de Bond Graph que nos ayudara a reforzar esa geometría o conocer el comportamiento del efector previamente diseñado, sin embargo, no es plenamente necesario conocer la geometría para llevar a cabo el análisis en Bond Graph, se podría decir que podemos partir de una idea y Bond Graph nos reforzaría esa idea o no la refutaría para incluir algunos aspectos que no se habían considerado.

5.2. Bond Graph

Al llevar a cabo el análisis de un efector final en Bond Graph, se observó la metodología utilizada para llegar a la simulación de sistemas mecatrónicos, logrando así poder ver el comportamiento dinámico de los elementos de almacenamiento de energía y sus interacciones, de dichos modelos es posible obtener las ecuaciones del modelado con otros metodos como el de Euler - Lagrange. por lo cual en conclusión se observó que cada metodología tiene su grado de dificultad y no por eso se pretende dejar a Bond Graph como la metodología perfecta, sin embargo al tratarse de una metodología aparentemente nueva se puede apreciar que nos ofrece un poco más al modelar sistemas mecatrónicos, esto puede apreciarse al momento de llegar al torque o la ecuación matemática obtenida donde nos ofrece parámetros como el momento de inercia y la deformación si se tratase de algún material flexible, que por el método Euler – Lagrange tambien es posible agragar detalles como los obtenidos en Bond Graph pero eso implica mayor complejidad de las ecuaciones y de las formas de solución. Al contar Bond Graph con la apertura de añadir entradas de esfuerzo

o flujo tales como los eslabones, resortes, o amortiguadores sin la necesidad de comenzar de cero, esta apertura que ofrece Bond Graph es devida a su metodología generalizada la cual simplifica su análisis y el desarrollo de las ecuaciones de manera inmediata.

La versatilidad de Bond Graph puede motivar a nuevos investigadores a crear nuevas y mejoradas estructuras en la robótica de los manipuladores, ya que como herramienta simplifica la labor de obtener las ecuaciones en sistemas muy complejos que incluyan diversos componentes como actuadores y controladores.

Bibliografía

- 1.- Antonio Barrientos, Robótica en medicina, Universidad Politécnica de Madrid, 2008.
- 2.- Antonio Barrientos, Luis Felipe Peñin, Carlos Balaguer, Rafael Aracil. Fundamentos de Robótica. McGrawHill. 1999.
- 3.- Aníbal Ollero Baturone, Robótica Manipuladores y robots móviles. Alfaomega. 2007.
- 4.- Alexandru Gal , Luige Vladareanu y Radu Munteanu. SLIDING MOTION CONTROL WITH BOND GRAPH MODELING APPLIED ON A ROBOT LEG. Bucarest, 2015.
- 5.- Ashaf Zeid y Chih – Hung Chung. Bond Graph Modeling of Multibody, Systems: a Library, of Three-dimensional Joints. Mechanical Engineering Department, Wayne State University, Detroit, 1992.
- 6.- Aviles S., Oscar F., Simanca, Pedro Leon Calle T., Gabriel. Dedos para Grippers Roboticos – Revisión Bibliográfica. Scientia et Technica Año XI, No 27, Abril 2005.
- 7.- Carlos Vera Álvarez. INTRODUCCION A LA TECNICA DE BOND GRAPH EN LA DINAMICA FERROVIARIA. INSIA (Instituto Universitario de Investigación del Automóvil), 1998.
- 8.- Carlos S. López Cajún, Marco Ceccarelli. Fundamentos cinemáticos para el diseño y optimización de maquinaria. Trillas. 2008.
- 9.- Carlos Raúl del villar Santos. Diseño y Construcción de un Gripper experimental para instrumento quirúrgico de corte adaptado al robot Mitsubishi RV – M1. Instituto

Politécnico Nacional, 2012.

10.- Chiara Lanni y Marco Ceccarelli. An Optimization Problem Algorithm for Kinematic Design of Mechanisms for Two-Finger Grippers. The Open Mechanical Engineering Journal, 2009.

11.- Dean C. Karnopp, Donald L. Margolis, Ronald C. Rosenberg, System Dynamics, Modeling Simulation, and control of Mechatronic System, Wiley fifth edition, 2012.

12.- Dean Karnopp. An Approach to Derivative Causality in Bond Graph Models of Mechanical Systems. Department of Mechanical, Aeronautical and Materials Engineering, The University of California, Davis, C. 1992

12.- Fernando Torres, Jorge Pamares, Pablo Gil, Santiago T. Puente, Rafael Aracil. Robots y Sistemas Sensoriales. Prentice Hall. 2002.

14.- Flor Ángela Bravo y Alejandro Forero Guzman, LA ROBÓTICA COMO UN RECURSO PARA FACILITAR EL APRENDIZAJE, Universidad de salamanca, 2012.

15.- Gilberto González Avalos, modelado de sistemas en el Dominio Físico, 2008.

16.- Javier A. Kypuros. System Dynamics and Control with Bond Graph Modeling. CRC Press Taylor and Francis Group.2013.

17.- Jinhee Jang y Changsoo Han. Proposition of a Modeling Method for Constrained Mechanical Systems Based on the Vector Bond Grap. Department of Precision Mechanical Engineering, University of Hanyang, Seoul, South Korea, 1998.

18.- John J. Craig. Robótica. Pearson, 2012.

19.- José Galván Ramírez y Emmanuel Merchán Cruz. Diseño de un efector final tipo pinza de 8 grados de libertad. Instituto Politécnico Nacional, 2007.

20.- José Luis Piero Loli Méndez, Modelación y simulación de un actuador Hidráulico para un simulador de marcha normal, Pontificia Universidad católica del Perú, Facultad de ciencias e ingeniería, 2012.

21.- Manuel Jesús Escalera Tornero, Antonio José Rodríguez Fernández, Actuadores neumáticos, 5º Ingeniería Industrial

22- Perry H. The elements of theses. 2002.

23.- Peter J. Gawthrop y Geraint P. Bevan. A TUTORIAL INTRODUCTION FOR CONTROL ENGINEERS. IEEE control systems magazine, 2007.

24.- Peter J. Gawthrop, BOND GRAPH: A REPRESENTATION FOR MECHATRONIC SYSTEM, control group department of mechanical engineering, the university Glasgow, 1990.

25.- P.M. Pathak, Amit Kumar y N. Sukavanam. Bond Graph Modeling of Planar Two Links Flexible Space Robot. 13th National Conference on Mechanisms and Machines. 2007.

26.- Rafael Iñigo Madrigal, Enric Vidal, Idiarte. Robots Industriales Manipuladores. Alfaomega. 2004.

27.- Vladimir Prada, Oscar Avilés y Mauricio Mauledoux. Design of a three-finger end effector for optimal grip. Universidad Nacional de Colombia Medellín, Colombia. 2013.

28.- W. Bolton. Sistemas de control electrónico en la ingeniería mecánica y eléctrica. Alfaomega.2006.

Fuentes de información.

29.- <https://prezi.com/ds5isczpueke/robotica-efector-final/>

30.- https://www.fceia.unr.edu.ar/dsf/files/A_IntroBG.PDF

31.- [https://books.google.com.mx/books?id=cULVDQAAQBAJ&pg=PT34&dq=clasificacion+de+efectores+finales&hl=es&sa=X&ved=](https://books.google.com.mx/books?id=cULVDQAAQBAJ&pg=PT34&dq=clasificacion+de+efectores+finales&hl=es&sa=X&ved=0ahUKEwiS0aalpKTjAhWMlp4KHfrmAEsQ6AEIMDAB#v=onepage&q=clasificacion%20de%20efectores%20finales&f=false)

[0ahUKEwiS0aalpKTjAhWMlp4KHfrmAEsQ6AEIMDAB#v=](https://books.google.com.mx/books?id=cULVDQAAQBAJ&pg=PT34&dq=clasificacion+de+efectores+finales&hl=es&sa=X&ved=0ahUKEwiS0aalpKTjAhWMlp4KHfrmAEsQ6AEIMDAB#v=onepage&q=clasificacion%20de%20efectores%20finales&f=false)

[onepage&q=clasificacion %20de %20efectores %20finales&f=false](https://books.google.com.mx/books?id=cULVDQAAQBAJ&pg=PT34&dq=clasificacion+de+efectores+finales&hl=es&sa=X&ved=0ahUKEwiS0aalpKTjAhWMlp4KHfrmAEsQ6AEIMDAB#v=onepage&q=clasificacion%20de%20efectores%20finales&f=false)

32.- <http://132.248.9.195/ptd2009/junio/0645379/Index.html>

33.- [http://www.scielo.org.za/scielo.php?script=sci_arttext&pid=](http://www.scielo.org.za/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S2224-78902018000100011&lang=es)

[S2224-78902018000100011&lang=es](http://www.scielo.org.za/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S2224-78902018000100011&lang=es)

34.- [https://groups.csail.mit.edu/drl/journal_club/papers/](https://groups.csail.mit.edu/drl/journal_club/papers/Samantaray__2001__www.bondgraphs.com_about.pdf)

[Samantaray __2001 __www.bondgraphs.com_about.pdf](https://groups.csail.mit.edu/drl/journal_club/papers/Samantaray__2001__www.bondgraphs.com_about.pdf)

35.- <https://www.20sim.com/>

Anexos

MODELADO DE UN EFECTOR FINAL PLANAR PARA UN ROBOT MANIPULADOR EN BOND GRAPH

Hipólito Magdiel Venegas Montaña¹, Gilberto González Ávalos²

Resumen— En el presente artículo se propone analizar el balance energético de un sistema modelado en bond graph. La plataforma de modelado de bond graph determina un modelo gráfico del sistema, a partir del cual se pueden obtener, la ecuación en espacio de estado, funciones de transferencia, estado estacionario, controlabilidad, observabilidad y estabilidad estructural, así como el diseño de controladores. Así mismo, mediante bond graph se puede modelar sistemas que contengan diversos dominios de energía (eléctrico, mecánico, magnético, hidráulico y térmico). El balance de potencia propuesto tiene la ventaja de aun cuando existe el bond activo que se utiliza como señal ya sea para incrementar el esfuerzo, flujo o la potencia, el balance de potencia se cumple y el sistema es conservativo de potencia, lo cual no sucedía con los otros balances mencionados por la razón de que no se cumplían las propiedades de sistema conservativo de potencia.

Palabras clave—Bond graph, modelado, efector final, robot manipulador.

Introducción

La industria de la robótica se desarrolló originalmente para complementar o reemplazar a los humanos haciendo sobre todo trabajos peligrosos o repetitivos. Se utilizan en aplicaciones como: líneas de montaje automatizadas, observación zonas de radiación, cirugía mínimamente evasiva y exploración espacial. Brazos robóticos industriales modernos sobresalen sobre los humanos en muchas tareas. Las primeras pinzas o efector final se desarrollaron por primera vez para aplicaciones industriales. Son comúnmente definidas como pinzas utilizadas para fines de producción en masa que se montan en una plataforma estacionaria. Las pinzas industriales se pueden estudiar a través de diferentes aspectos, como condición geométrica de agarre, posición y orientación del agarre, equilibrio del objeto agarrado y dinámica de condiciones.

Modelado de Sistemas en Bond Graph

Antecedentes

El modelado de Bond Graph fue debido a Henry Paynter en los años 1959 y 1961, él incorpora la noción de puerto de energía en su metodología, posteriormente es formalizada por Karnopp y Rosenberg en los años 1983 y 1990, (Karnopp & Rosenberg, 1975). Los promotores destacados del modelado de Bond Graph fueron J. Thoma en el año 1975 y Breedveld en el año 1984, (Karnopp, 1990).

El modelado en Bond Graph es una herramienta gráfica para el representar sistemas de ingeniería, especialmente cuando existen diferentes dominios físicos involucrados. Bond Graph permite obtener modelos de sistemas físicos como eléctricos, mecánicos, hidráulicos, etc., utilizando solamente un pequeño conjunto de elementos. A continuación, se da una introducción de los elementos y conceptos básicos del modelado en Bond Graph.

Conceptos básicos

Bond Graph es una representación gráfica de un sistema dinámico físico. El componente fundamental en el sistema llamado bond de energía, describe cómo fluye la potencia a través de puertos de energía. Un bond es dibujado como una semiflecha como se ilustra en la Figura 1.

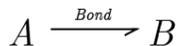


Figura 1. Bond.

¹Hipólito Magdiel Venegas Montaña, Ingeniero Mecánico es estudiante de Maestría en Ciencias en Ingeniería Mecánica en la Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, Morelia, Michoacán. 0468633k@gmail.com (autor corresponsal)

²Gilberto González Ávalos, Doctorado en Ingeniería eléctrica, es profesor de Maestría en Ciencias en Ingeniería Mecánica en la Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, Morelia, Michoacán. gilmichga@yahoo.com.mx

Las variables que describen la unión de dos puertos son llamadas variables de potencia, las cuales son esfuerzo $e(t)$ y flujo $f(t)$. Estas variables también son llamadas variables de bond generalizadas debido a que pueden ser utilizadas en todos los dominios de energía (ver Tabla 1).

Variable	Sistema mecánico		Sistema eléctrico	Sistema hidráulico
	Traslación	Rotación		
Esfuerzo $e(t)$	Fuerza F	Torque τ	Voltaje e	Presión P
Flujo $f(t)$	Velocidad V	Velocidad angular ω	Corriente i	Caudal Q

Tabla 1. Variables generalizadas para sistemas eléctricos, mecánicos e hidráulicos.

La causalidad es una propiedad muy importante en esta metodología, indicando la relación causa-efecto. Las relaciones de causa-efecto para esfuerzos y flujos son representadas en direcciones opuestas. Una marca en un bond, llamada trazo causal (barra vertical al inicio o fin de un bond) indica como esfuerzo $e(t)$ y un flujo $f(t)$ son determinados causalmente en un bond (ver Figura 2).

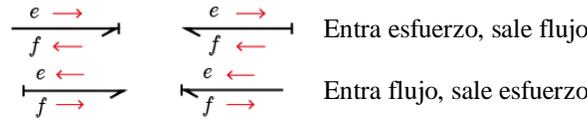


Figura 2. Causalidad en esfuerzo y flujo.

Los elementos que forman un Bond Graph se clasifican en cinco campos como se muestra en la Figura 3:

- El campo disipativo R .
- El campo de almacenamiento C e I .
- El campo de interconexiones de la estructura $0, 1, TF$ y GY .
- El campo fuente s_e y s_f .
- El campo de detección D_e .

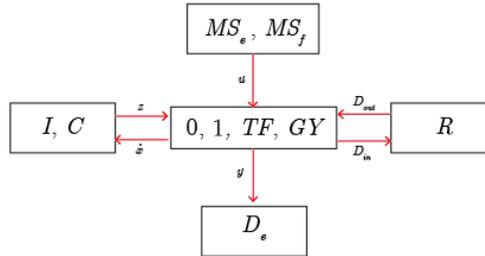


Figura 3. Diagrama de la estructura de unión.

Al vínculo que conecta los campos a la estructura de cruce con los campos fuente, campos de disipación y campos de almacenamiento se llaman bonds externos y los bonds que se unen a un elemento de la estructura de unión $0, 1, TF$ y GY , son llamados bonds internos. Los vectores claves asociados al diagrama de la Figura 3, son:

- x es el vector de estado (p en I , q en C).
- \dot{x} es el vector de derivadas de x en función del tiempo.
- z es el vector de coenergía (f en I , e en C).
- u es el vector de la fuente de salidas (e en s_e , f en s_f).
- D_{in} es el vector de entrada al campo R .
- D_{out} es el vector de salida al campo R .
- y es el vector de salida.

Las relaciones constitutivas de los campos de almacenamiento y disipación son $z = Fx$ y $D_{out} = L D_{in}$. La relación que tienen los vectores dentro de la estructura de unión, llamada matriz de estructura de unión es (Sueur & Dauphin-Tanguy, 1991):

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ D_{in} \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ D_{out} \\ u \end{pmatrix} \quad (1)$$

Los elementos que conforman la matriz toman valores dentro del conjunto $\{0, \pm 1, \pm n, \pm r\}$ donde n y r son los módulos de transformadores y giradores, s_{11} y s_{22} son antisimétricas y $s_{12} = -s_{21}^T$. La dinámica del sistema en ecuación de estado está dada por:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \quad (2)$$

Donde cada matriz, se relaciona con las submatrices de la matriz de estructura de unión por:

$$\begin{aligned} A &= (s_{11} + s_{12}M s_{21})F & B &= (s_{13} + s_{12}M s_{21}) \\ C &= (s_{31} + s_{32}M s_{21})F & D &= (s_{33} + s_{32}M s_{23}) \end{aligned} \quad (3)$$

La matriz M tiene la siguiente forma $M = L(I - s_{22}L)^{-1}$, que describe los lazos algebraicos del sistema.

Modelado de un Efector Final en Bond Graph

Efector final es aquella herramienta que se encuentra al final de los eslabones que conforman un robot manipulador que le permiten realizar alguna actividad con su entorno, dicho de otra manera es la herramienta electromecánica diseñada para una actividad en particular de manera automatizada. El modelado para un efector final de dos dedos, un eslabón por lado como se muestra en la figura 4 donde se observa el esquema de los dedos o eslabones que componen el efector final, a su vez se muestra el modelo 3D de dicha composición, se observa que para el eslabón izquierdo la energía en forma de potencia entra con polaridad positiva, mientras que en el eslabón del lado derecho entra con polaridad negativa, logrando así el movimiento deseado de abrir y cerrar.

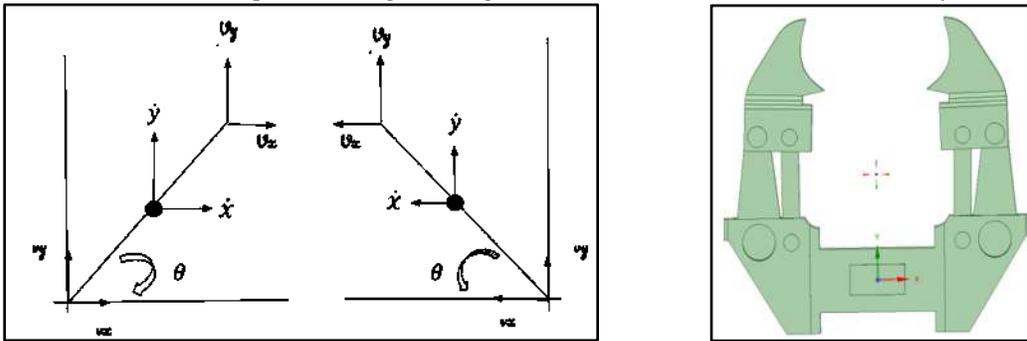


Figura 4. Izquierda: Esquema de componentes a diferentes polaridades. Derecho: modelo 3D.

En la figura 5 se muestra el Bond Graph correspondiente al efector final, contiene los elementos de almacenamiento y disipación correspondientes, así como un arreglo de Bond en la parte inferior para poder unificar el cambio de potencia para cada uno de los eslabones.

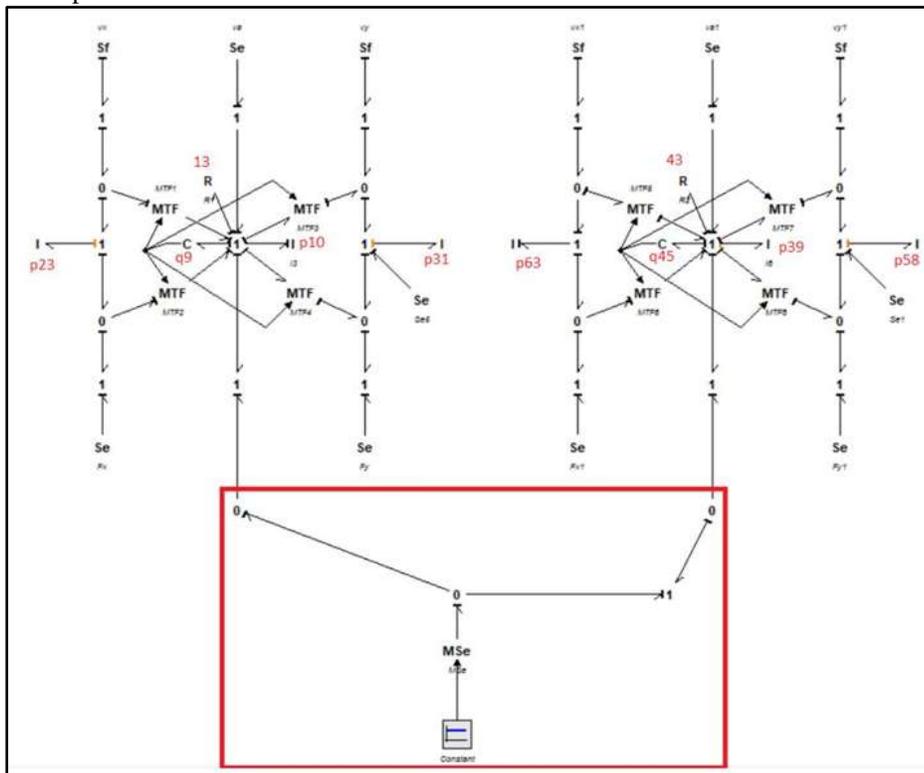


Figura 5. Modelo en Bond Graph de un efector final.

Los elementos de disipación, almacenamiento y la relación constitutiva entre ellas se muestra a continuación.

$$\begin{aligned}
 x &= \begin{bmatrix} p_{10} \\ p_{39} \\ q_9 \\ q_{45} \end{bmatrix} ; \quad \dot{x} = \begin{bmatrix} e_{10} \\ e_{39} \\ f_9 \\ f_{45} \end{bmatrix} ; \quad z = \begin{bmatrix} f_{10} \\ f_{39} \\ e_9 \\ e_{45} \end{bmatrix} ; \quad F = \begin{bmatrix} I_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_2 \end{bmatrix} \\
 x_d &= \begin{bmatrix} p_{23} \\ p_{31} \\ p_{63} \\ p_{58} \end{bmatrix} ; \quad \dot{x}_d = \begin{bmatrix} e_{23} \\ e_{31} \\ e_{63} \\ e_{58} \end{bmatrix} ; \quad z = \begin{bmatrix} f_{23} \\ f_{31} \\ f_{63} \\ f_{58} \end{bmatrix} ; \quad F_d = \begin{bmatrix} I_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_6 \end{bmatrix} \\
 D_{in} &= \begin{bmatrix} f_{13} \\ f_{43} \end{bmatrix} ; \quad D_{out} = \begin{bmatrix} e_{13} \\ e_{43} \end{bmatrix} ; \quad L = \begin{bmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & R_2 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{4}$$

La estructura de la matriz unión del modelo Bond Graph integral es:

$$\begin{aligned}
 S_{11} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} ; \quad S_{12} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} ; \quad S_{13} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \sin \theta & -2 \sin \theta & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \cos \theta \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 S_{21} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} ; \quad S_{22} = [0] ; \quad S_{23} = [0] \\
 S_{31} &= \begin{bmatrix} -\cos \theta & 0 & 0 & 0 \\ \sin \theta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & \sin \theta & 0 & 0 \end{bmatrix} ; \quad S_{32} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} ; \quad S_{33} = [0]
 \end{aligned} \tag{5}$$

Al sustituir las matrices de la estructura unión en las ecuaciones mostradas en el punto número (3) obtenemos las matrices A y B así como la ecuación de estado al sustituir en las ecuaciones del punto (2).

$$\begin{aligned}
 A &= \begin{bmatrix} -I_3 R_1 & 0 & -C_1 & 0 \\ 0 & -I_6 R_2 & 0 & -C_2 \\ I_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_6 & 0 & 0 \end{bmatrix} ; \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \cos \theta & -2 \sin \theta & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \cos \theta \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 \dot{x} &= \begin{bmatrix} -I_3 R_1 & 0 & -C_1 & 0 \\ 0 & -I_6 R_2 & 0 & -C_2 \\ I_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_6 & 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} -1 & 2 \cos \theta & -2 \sin \theta & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \cos \theta \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} u
 \end{aligned} \tag{6}$$

Simulación de un Efecto Final en Bond Graph

Para llevar a cabo la simulación del efecto final, tomamos como base el modelo en Bond Graph, al introducirlo al software de simulación, el cual permite conocer su comportamiento al variar una o más variables con respecto del tiempo, conociendo así la manera en que los elementos de disipación o de almacenamiento antes descritos se comportan dentro del sistema mecánico, en la figura 6 podemos observar el modelo de Bond Graph al ser reproducido en el software de simulación con la ayuda de la librería de Bond Graph mostrada en la parte izquierda.

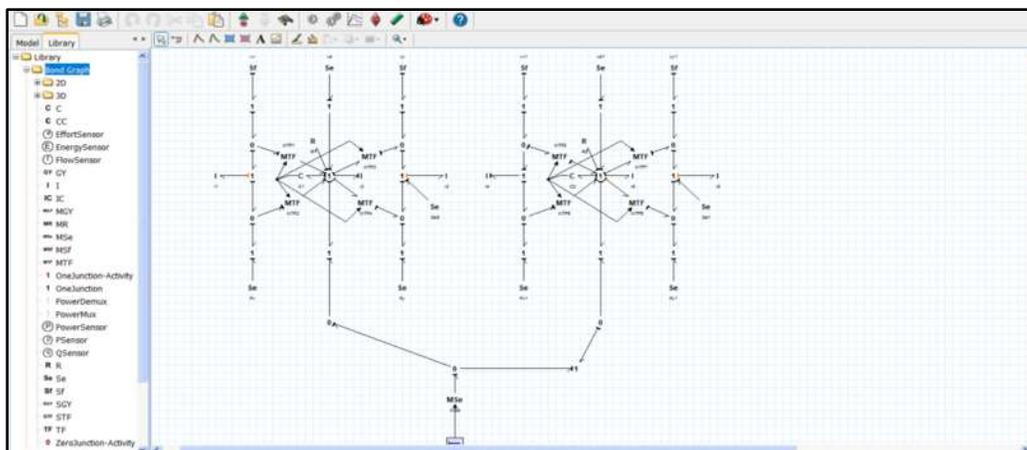


Figura 6. Captura de pantalla software de simulación con Bond Graph del efector final.

En el software de simulación, se asignan los valores iniciales de los elementos de disipación o de almacenamiento, de igual manera se asigna la potencia o la energía que entra al sistema, en la figura 7 podemos observar las diferentes graficas del comportamiento del momento de inercia (I3, I6) y la reacción del servomotor (C9, C45) al variar el tiempo.

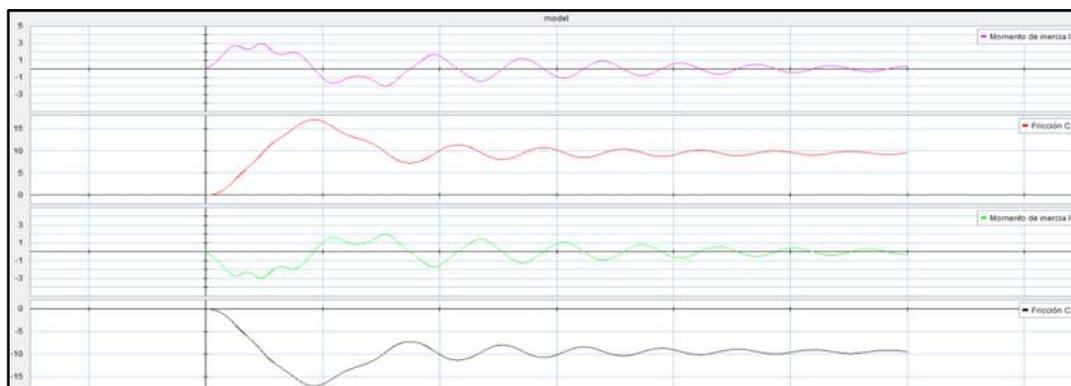


Figura 7. Graficas del momento de inercia y la reacción para cada eslabón.

En la figura 8 podemos observar las gráficas antes mencionadas, en un solo cuadro, logrando apreciar el comportamiento del efector final, al ser simulado con la ayuda del modelo en Bond Graph, se observa que existe una variación en el momento de inercia y la reacción del servomotor, la cual conforme el tiempo va disminuyendo, debido al elemento de disipación R el cual podemos decir es la fricción que se opone al giro del servomotor hasta que la potencia deje de ser suministrada.

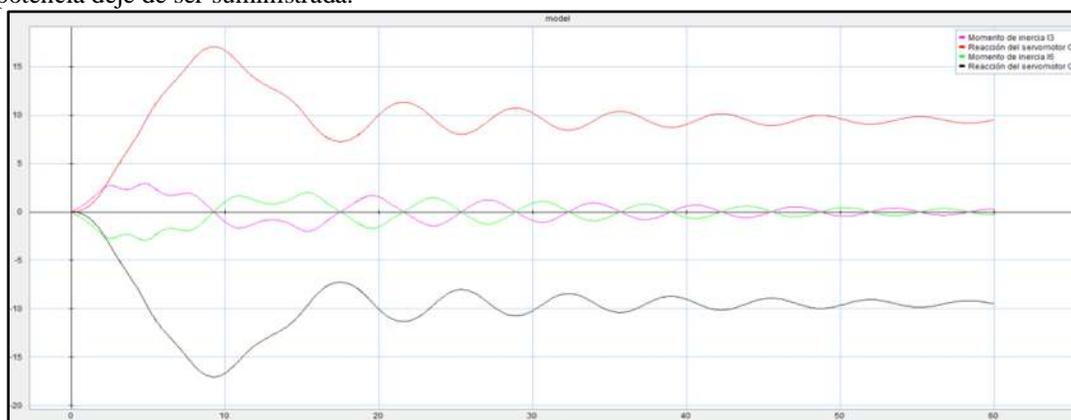


Figura 8. Grafica en conjunto de los momentos y reacciones del servomotor.

Conclusiones

La utilización de Bond Graph para este tipo de sistemas mecánicos parece ser conveniente, debido a que podemos simular el comportamiento de un efector final sin que éste sea llevado a un estado físico, tomando como ventaja de la utilización de Bond Graph que este tipo de simulación no depende de la geometría del efector final, por lo que podemos comenzar el estudio sin antes conocer la estructura del robot manipulador donde se implantara el efector final estudiado, tomando como punto más importante, que en la actualidad el área de robótica ha incrementado significativamente, así mismo la manera de abordar el estudio de dicha rama, por lo que se considera a bond Graph una forma innovadora de realizar el modelado y la simulación de este tipo de sistemas mecánicos.

Recomendaciones

Al tratarse Bond Graph de un método versátil, ya que puede ser aplicado a diferentes ramas de la ingeniería, sería interesante abordar el tema de los circuitos electrónicos que contiene un robot manipulador, así como la conexión que existe entre el robot manipulador y un efector final, logrando un modelo en Bond Graph híbrido entre las conexiones mecánicas y las eléctricas.

Referencias

- González Avalos, G. (2012). *Analysis of loading effect of systems in a bond graph approach with application to a synchronous machine*. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part I: Journal of Systems and Control Engineering 226.
- Karnopp, D. (1990). *Bond graph models for electrochemical energy storage: electrical, chemical and thermal effects*. Journal of the Franklin Institute 327.
- Karnopp, D., & Rosenberg, R. (1975). *Systems dynamics: a unified approach*. John Wiley & Sons.
- Rosenberg, R., & Karnopp, D. (1983). *Introduction to physical system dynamics*. McGraw-Hill, Inc.
- Sueur, C., & Dauphin-Tanguy, G. (1991). *Bond graph approach for structural analysis of MIMO linear systems* (Vol. 328). Journal of the franklin institute.

Diseño y análisis de diferentes tipos de Gripper, bajo cargas ejercidas por servomotores que lo integran.

Ing. Hipólito Magdiel Venegas Montaña¹, Dr. Víctor López Garza² y
Dr. Gilberto González Aválos³

Resumen— Al elaborar los diferentes tipos de Gripper, el diseñador se encuentra bajo ciertas limitantes, como lo es la experimentación bajo cargas que afectan al Gripper de manera directa, ya que si esta carga sobrepasa la carga permitida, el Gripper será no funcional y nos encontraremos bajo el problema de elaborarlo de nueva cuenta, gastando dinero, tiempo y esfuerzo. El software de elemento finito, permite diseñar la geometría del Gripper, así, como manipular las cargas que se encuentran directamente sobre estos, por lo que se ha llevado el análisis de cuatro diferentes estructuras de Gripper, compuestas por cuatro diferentes materiales cada una y las diferentes cargas que ejercen los servomotores sobre estos diseños, los resultados obtenidos se espera sirvan de referencia para los diseñadores de este tipo de elementos mecánicos, quienes pueden observar la deformación y la concentración de esfuerzos para cada Gripper con su respectivo material.

Palabras clave—Gripper, deformación total, máxima concentración de esfuerzos, elemento finito, simulación.

Introducción

Al encontrarse las industrias bajo una necesidad más demandante en cuanto a la calidad de sus productos y el tiempo de elaborarlos, estas han optado por la automatización dentro de sus áreas de trabajo, introduciendo lo que ahora conocemos como Robots [1]. Un robot es considerado como aquella máquina, la cual está destinada a realizar un trabajo en específico, dicho trabajo puede ser físico, como el realizar movimiento de objetos, o de índole mental, al cual nos referimos a los cálculos, una cualidad que tiene dichos robot es la de realizar dichas tareas imitando al cuerpo humano, por lo que las tareas llevadas a cabo en el área industrial pueden ser realizadas con mayor seguridad y eficiencia. [2], por lo que podemos decir que los robots son trabajadores que realizan las tareas de manera automatizada, imitando a las personas. En la actualidad los robot que laboran en el área industrial son llamados Robots Manipuladores, los cuales aún mantienen ciertas similitudes con los seres humanos, como son las articulaciones o brazos robóticos, sin embargo estos Robot Manipuladores no ocupan de un operador, por lo que se considera que el trabajo o la actividad es automatizada.

Un Robot Manipulador está compuesto por un sistema mecánico el cual otorga la movilidad del brazo, este sistema mecánico depende de los grados de libertad y el número de eslabones [3], sin embargo cuentan con una herramienta la cual consideramos importante, ya que la tarea dependerá directamente de la geometría de está, la herramienta mencionada lleva el nombre de Gripper o efector final. Un Gripper, como se mencionó, es la herramienta esencial de un Robot manipulador, que se encuentra adaptada al final de este y su función depende de la geometría con la que se allá desarrollado, también descrito por el Dr. Shane Farritor quien nos dice que es importante realizar diseños que tengan arquitectura abierta o que sean modulares con el fin de que estos sean de fácil adaptabilidad [4], por lo que existen una gran variedad de Gripper.

Debido a la gran variedad de Gripper el diseñador se ha encontrado con ciertas limitantes, donde las más importantes de estas es la geometría y la carga que afecta directamente el Gripper, las desventajas se hacen presentes al terminar el diseño de un Gripper, llevándolo a un estado físico, sin embargo el problema se hace presente al momento de que el Gripper no cumpla con las expectativas, su función, o simplemente que no sea capaz de resistir las cargas que se le aplican con el motor al momento de ser instalado, por lo que se debe considerar rectificar el diseño o en el peor de los casos comenzar desde el principio, por lo cual el diseño suele ser muy costoso [5].

El software de elemento finito, es un programa que ha contribuido al mundo de los diseñadores, ya que permite llevar a cabo simulaciones de diseños de tipo mecánico, eléctrico, termodinámicos, de flujo de energía, etc.

Obteniendo resultados con base en nuestros diseños de manera profesional y lo más acertadas posibles [6]. El software de elemento finito nos permite tener un primer acercamiento a los resultados deseados, sin llevar a estado

¹ Ing. Hipólito Magdiel Venegas Montaña es estudiante del posgrado en Ciencias de la Ingeniería Mecánica de la Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, Morelia, Michoacán, México. 0468633k@umich.mx (**Autor corresponsal**)

² El Dr. Víctor López Garza es Profesor Investigador en la Facultad de Ingeniería Mecánica de la Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, Morelia, Michoacán, México. nepesh@hotmail.com

³ El Dr. Gilberto González Aválos es Profesor Investigador en la Facultad de Ingeniería Mecánica de la Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, Morelia, Michoacán, México. gilmichga@yahoo.com

físico los diseños, por lo que se puede tener un ahorro monetario, en este artículo se han tomado el diseño de cuatro Gripper diseñados para la sujeción de objetos, que están integrados por dos dedos o eslabones, se obtendrán resultados como lo son las deformaciones máximas al encontrarse bajo la carga que ejerce el servomotor en el Gripper, así como las cargas máximas debidas al servomotor, tomando en cuenta los valores de 0.7 – 1.6 N.mm, como el par torsor del servomotor avanzando a medida de 0.1 obteniendo 10 diferentes resultados, para cada material los cuales son: materiales plásticos, PLA, ABS, PET y PBT que son materiales comúnmente utilizados en impresoras 3D.

Diseños propuestos

Los diseños que se han tomado tienen la misma tarea sujetar y soltar objetos, sin embargo su geometría es variable y está compuesta por dos dedos únicamente. Los diseños han sido tomados del libro[7].

Debido a su geometría, el Gripper mostrado en la **figura 1**, podría tratarse de un Gripper elaborado para tomar tubos, los cuales podemos encontrar en el área de tratamiento de químicos por dar un ejemplo.

El Gripper mostrado en la **figura 2** cuenta en la punta de cada dedo con un aditamento que ayuda con la tarea designada, la cual puede ser el agarre de tubos más grandes o que el objeto tengan cierta geometría angular, estos aditamentos pueden ser de diversas geometrías sin embargo para el análisis en software de elemento finito la diferencia en resultados según la punta puede ser despreciable.

En el diseño de Gripper mostrado en la **figura 3**, podemos observar que la estructura ha cambiado, cuenta con dos dedos sin embargo no contiene el aditamento de la punta, podemos observar que el eslabón es el que tiene la forma redonda, podemos decir que este Gripper también tiene la cualidad de agarrar objetos redondos, sin embargo este Gripper funciona de forma invertida, el servomotor vence unos resortes para poder abrir la garra, al dejar de administrar la corriente al servomotor pierde su torque logrando que la garra se cierre.

El último Gripper mostrado en la **figura 4** consta de dos eslabones por lado, lo cual hacen más resistente al Gripper al tomar objetos, este Gripper puede ser el más laborioso al encontrarse con un sistema mecánico más sofisticado a la hora de la transmisión de potencia, este Gripper puede tomar objetos con gran fuerza como laminas, esferas u objetos que entren en su área de apertura.

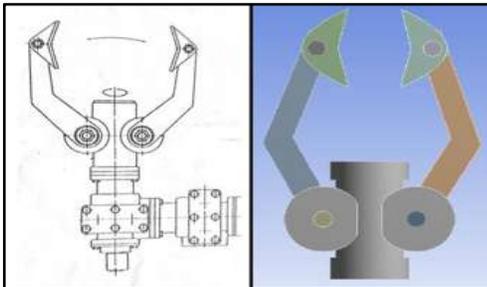


Figura 1. Boceto y diseño en software de elemento finito de Gripper 1, con apertura máxima de 15cm, apertura mínima 4cm, diámetro de base de 4.2cm, largo totalmente cerrado de 18cm.

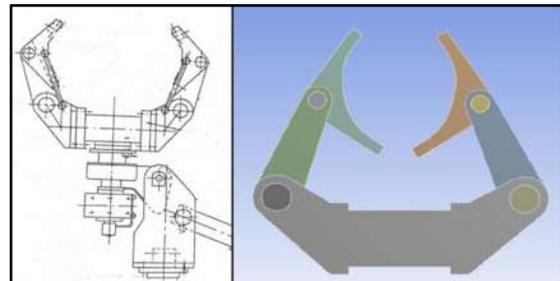


Figura 2. Boceto y diseño en software de elemento finito de Gripper 2, con apertura máxima de 18cm, apertura mínima de 5cm, base de 15 X 5cm, largo totalmente cerrado 12.5cm.

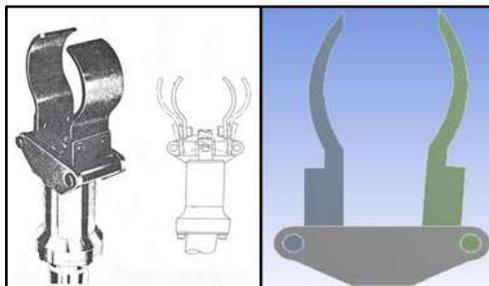


Figura 3. Boceto y diseño en software de elemento finito de Gripper 3, con apertura máxima de 15cm, apertura mínima 5cm, base de 10 X 6cm, largo totalmente cerrado de 16cm.

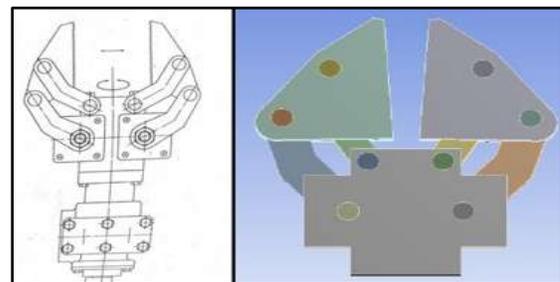


Figura 4. Boceto y diseño en software de elemento finito de Gripper 4, con apertura máxima de 5 a 7 cm, apertura mínima 5mm, base de 9 X 5 cm, largo totalmente cerrado 14cm.

Parámetros que afectan al Gripper

Los Gripper se encuentran bajo cargas dinámicas, estas cargas dinámicas pueden ser el par torsor que ejerce el servomotor sobre los ejes donde se encuentra conectado, en las **figuras 5** se puede observar cómo están colocados los pares en cada diseño de Gripper.

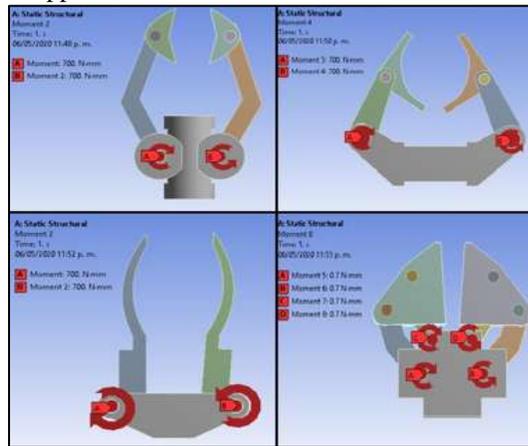


Figura 5. Par torsor aplicado a los diferentes Gripper.

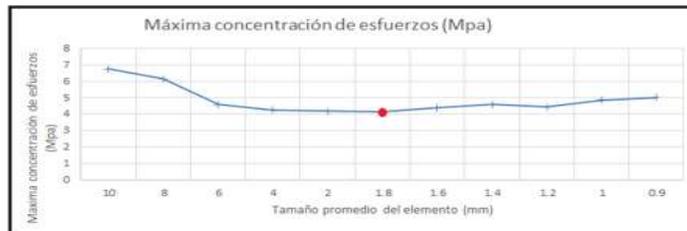
Sin embargo al momento de cerrar el Gripper se encuentra con la tercera ley de Newton a toda acción corresponde una reacción, a lo cual se tienen en el Gripper las fuerzas de reacción del objeto que se sujeta, provocando una deformación en el diseño, así como un esfuerzo máximo que afecta el área de contacto del Gripper, estos parámetros se toman como variables en el software de elemento finito tales como la deformación total, máximo esfuerzo y máxima tensión Von Mises.

Convergencia

Para la obtención de correctos resultados se debe de cumplir con dos variables que nos ofrece el software de elemento finito, las cuales son la malla y la convergencia, donde la malla depende directamente de la convergencia, a su vez la convergencia depende de los datos obtenidos a diferentes densidades de malla (tamaño de malla), así donde comienza la convergencia en la **gráfica 1**, máxima concentración de esfuerzos, es donde se toma el tamaño de malla para las iteraciones con diferentes par torsores, esto debido a que en ese punto se encuentra una variación mínima de cambio en el esfuerzo máximo, así para el Gripper 1 después de simular con una variación en la densidad de malla de 0.9mm a 10mm se obtiene la **tabla 1**, se observa la convergencia a partir del tamaño de malla en 1.8mm, donde la variación de los resultados de ese punto en adelante es un promedio de 3.72%.

Tamaño promedio del elemento (mm)	Deformación total (mm)	Máxima concentración de esfuerzos (Mpa)	Tensión de Von mises (Mpa)
10	0.28191	6.76	13.588
8	0.23709	6.1411	14.303
6	0.27994	4.5919	8.2665
4	0.077834	4.2482	7.2673
2	0.13398	4.1804	7.515
1.8	0.064458	4.1477	6.9486
1.6	0.063327	4.3803	7.7708
1.4	0.062278	4.5871	8.2839
1.2	0.062792	4.4392	7.8114
1	0.097107	4.872	8.7741
0.9	0.061862	5.0134	7.6203

Tabla 1. Resultados al simular Gripper 1 con una densidad de malla de 0.9 a 10mm.



Gráfica 1. Convergencia para selección de malla.

En la **figura 6** del lado izquierdo podemos observar la malla generada por el software de elemento finito en el Gripper 1 con un total de nodos de 245650 y 121788 elementos mientras que del lado derecho observamos la simulación de la máxima tensión Von Mises, se obtuvieron los resultados para cada uno de los Gripper sin embargo en las **figuras 7,8 y 9** se muestra la malla obtenida y la máxima tensión Von mises para los Gripper 2,3 y 4 respectivamente ya que el procedimiento realizado fue el mismo.

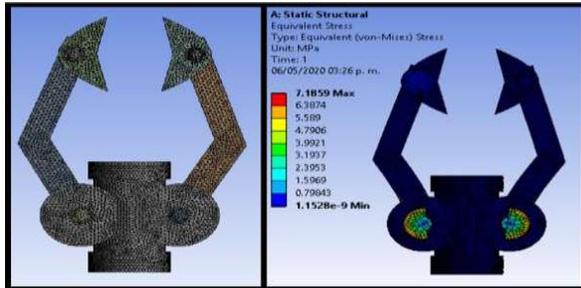


Figura 6. Izquierda: densidad de malla de 1.8mm, nodos 245 650 y elementos 121 788, derecha: máxima tensión Von Mises.

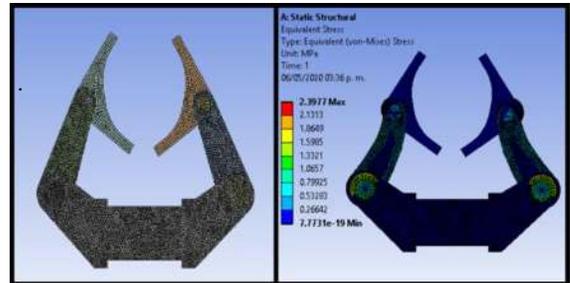


Figura 7. Izquierda: densidad de malla de 1.5mm, nodos 280 090 y elementos 143 583, derecha: máxima tensión Von Mises.

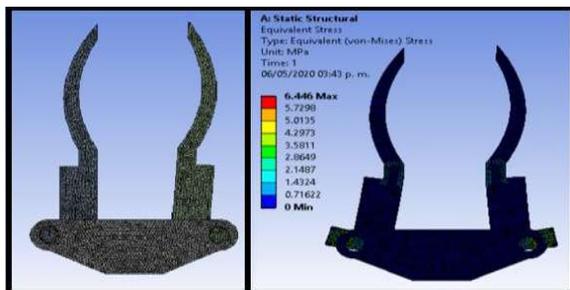


Figura 8. Izquierda: densidad de malla 1.5mm, nodos 283 439 y elementos 163 174, derecha: máxima tensión Von Mises.

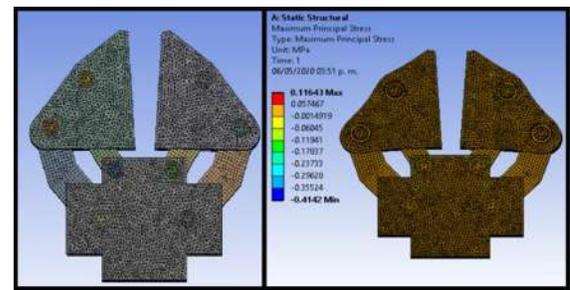
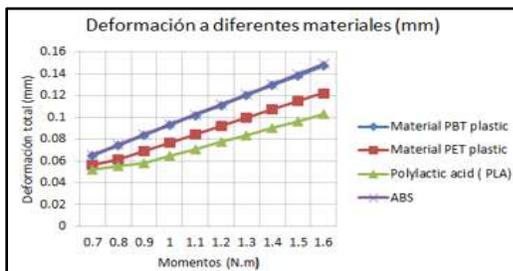


Figura 9. Izquierda: densidad de malla 2mm, nodos 308 271 y elementos 149 795, derecha: máxima tensión Von Mises

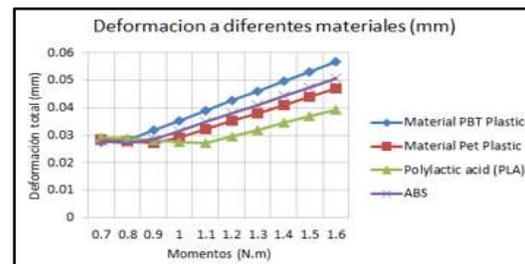
Resultados

A continuación se muestran los resultados después de llevar a cabo las iteraciones con los diferentes valores de par torsor, desde 0.7 a 1.6 N.mm que es la carga generada por un servomotor de tamaño estándar.

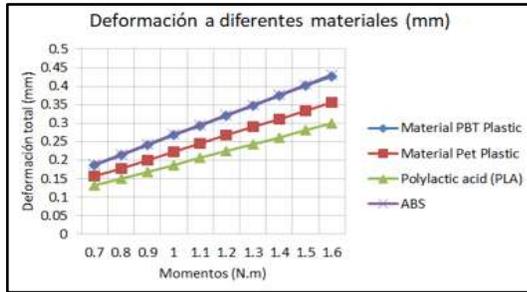
En las **gráficas 2 a 5** se muestran los resultados de la deformación total, donde se aprecia que conforme el par torsor aumenta, la deformación así también lo hace, sin embargo podemos apreciar que el material con el que sufren menos deformación es el Polylactic Acid (PLA), seguido por el material Pet y por último el PBT plastic y ABS. Las gráficas también nos muestran como resultado que la composición de la estructura del Gripper 4 es más resistente a la deformación, ya que las deformaciones obtenidas son casi insignificantes, seguido por el Gripper 2, Gripper 1 para finalizar tenemos la estructura del Gripper 3 con mayores deformaciones.



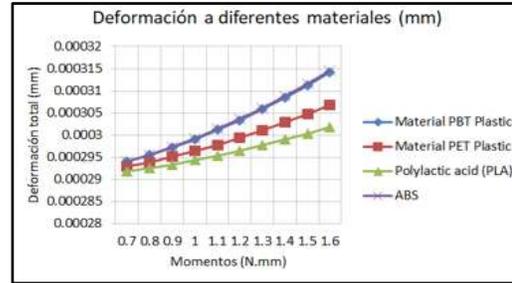
Grafica 2. Deformación total Griper 1 a diferentes materiales.



Grafica 3. Deformación total Griper 2 a diferentes materiales.

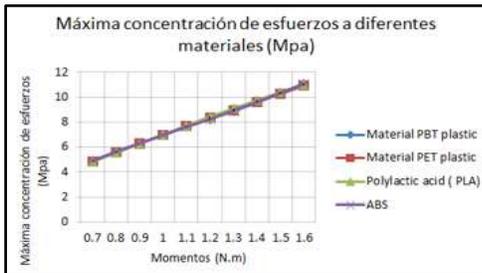


Grafica 4. Deformación total Griper 3 a diferentes materiales.

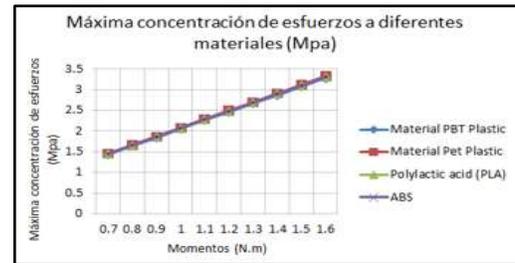


Grafica 5. Deformación total Griper 4 a diferentes materiales.

Las **gráficas 6 a 9** nos muestran la máxima concentración de esfuerzos en los diferentes Gripper conforme el material, sin embargo se observa que en los primeros tres Gripper no hay un cambio significativo en la concentración de esfuerzos, lo que nos deja con el Gripper 4, el cual muestra que el material PBT plastic y ABS en este tipo de estructura presenta baja concentración de esfuerzos, así como el material Polyactic Acid (PLA) muestra la mayor concentración de esfuerzos. Las **Gráficas 10 a 13** muestran las tensiones de Von Mises en los diferentes Gripper conforme el material, sin embargo obtenemos los mismos resultados que obtuvimos para la máxima concentración de esfuerzos.



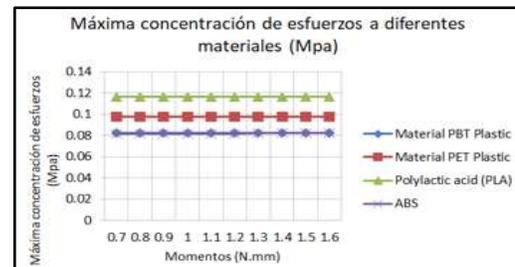
Grafica 6. Máxima concentración de esfuerzos Gripper 1 a diferentes materiales.



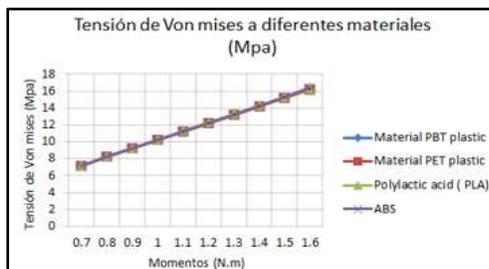
Grafica 7. Máxima concentración de esfuerzos Gripper 2 a diferentes materiales.



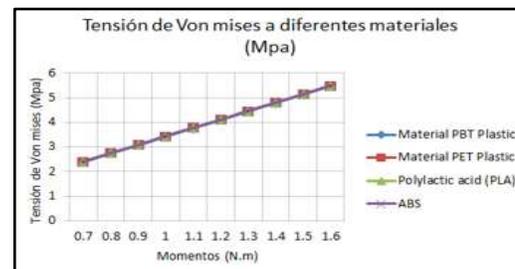
Grafica 8. Máxima concentración de esfuerzos Gripper 3 a diferentes materiales.



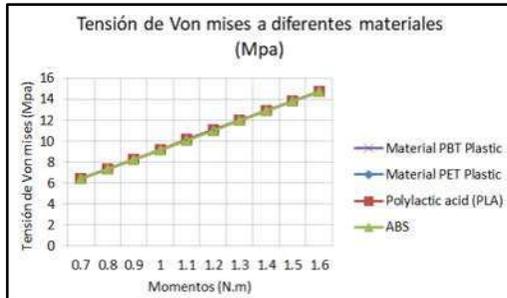
Grafica 9. Máxima concentración de esfuerzos Gripper 4 a diferentes materiales.



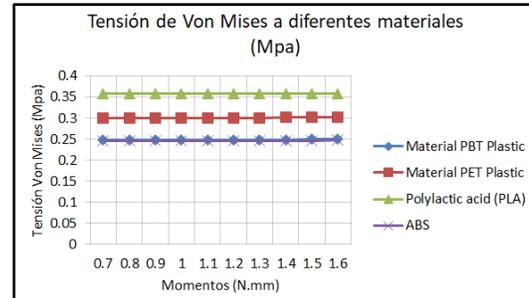
Grafica 10. Tensión de Von Mises en Gripper 1 a diferentes materiales.



Grafica 11. Tensión de Von Mises en Gripper 2 a diferentes materiales.



Grafica 12. Tensión de Von Mises en Gripper 3 a diferentes materiales.



Grafica 13. Tensión de Von Mises en Gripper 4 a diferentes materiales.

Conclusiones

Los resultados demuestran que la deformación de la pinza es lo más notorio a la hora de transmitirle fuerzas de acción y reacción, disminuyendo considerablemente en el Gripper 4, se puede decir que para este tipo de Gripper donde su función es sujetar y soltar objetos el material indicado es el Poly-lactic Acid (PLA) que presenta bajas deformaciones en los diferentes tipos de Gripper.

Queda abierta la posibilidad de aumentar el par torsor simulando la colocación de servomotores de gran tamaño, sin embargo sería ideal cambiar el material por metales, mientras tanto se ha podido demostrar que el software de elemento finito nos muestra un primer acercamiento del comportamiento de este estilo de Gripper, mostrando la amplitud de esta área de trabajo.

Recomendaciones

Esta área aun es inmensa, el estudio sería más completo si se agregaran de 3 dedos, 4 dedos hasta llegar a una mano humana podríamos tener un manual detallado del comportamiento de los Gripper a diferentes materiales.

Referencias

- [1]K.S. FU , R.C. Gonzales, C.S.G Lee. *ROBÓTICA, control, detección, vision e inteligencia*. Mc.Graw-Hill 1989
- [2]Aníbal Ollero Baturone. *ROBOTICA, Manipuladores y robot móviles*. Marcobombo 2001
- [3]W.Bolton. *Sistemas de control electrónico en sistemas mecánicos y eléctricos*. Alfaomega, 2006
- [4]Oscar F. Aviles, Pedro Leon Simianca, Gabriel Calle T. *Dedos para "Gripper" Robóticos*. Scientia et technica año XI, No.27, abril 2005
- [5]Budiarsa, W.Widhiada T.G.T Nindhia and N, *Robust Control for the motion five finger robot Gripper*, Indonesia, University of Udayana, 2015
- [6]Xiaolin Chen, Yijun Liu, *Finite Element Modeling and Simulation with ANSYS WorkBench*, Taylor and Francis Group 2015.
- [7] Ichiro Kato, *Mano mecánica ilustrada* ,Universidad de Waseda.