



# UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN NICOLÁS DE HIDALGO

## DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO DE LA FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA

“Modelado Matemático y en Bond Graph de Sistemas  
Físicos Equivalentes”

### TESIS

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

**Maestro en Ciencias en Ingeniería Mecánica**

PRESENTA:

**I.E. Aldo Jesús Parente Rodríguez**

ASESOR:

**Dr. Gilberto González Ávalos**

COASESOR:

**Dr. Luis Béjar Gómez**

**MORELIA, MICH. JUNIO DEL 2021**



*Dedicado a  
mi familia y amigos*

# AGRADECIMIENTOS

Quiero agradecer a mis padres y a mi hermano que me han apoyado en cada momento de infinita alegría y que han estado a mi lado en cada logro académico, alentándome cuando estoy en los peores momentos y disfrutando conmigo en los mejores. No existe forma en la cual pueda pagarles todo ese esfuerzo que hicieron para que yo pueda tener éste logro, siguiendo el ejemplo de ustedes para mejorar como ser humano.

También agradezco enormemente a mi asesor, el Dr. Gilberto por toda la confianza y el apoyo que me ha brindado; que más allá de lo académica he aprendido diferentes virtudes que me han ayudado para interactuar de mejor manera en mi círculo social.

Le agradezco de la misma manera a mi coasesor, el Dr. Luis Béjar por aceptarme en su grupo de trabajo y por involucrarme paulatinamente entre la comunidad de Ingeniería Mecánica, donde he aprendido bastante.

Agradezco a todo el personal y a los profesores que tuve el gusto de conocer en la Facultad de Ingeniería Mecánica cuyo trato fue siempre de amabilidad, orientándome hasta en la más tonta de mis preguntas.

A mis compañeros del posgrado Luis, Flav y Valde, por el apoyo que me brindaron como compañeros y por el tiempo que compartimos como amigos. Fue un gusto haber cumplido éste objetivo con ustedes como apoyo.

A los amigos de siempre; Itzel Fabián, Maynor Sorrenti, Pepe del Toro, Javi Guerrero, Poncho Alcaraz y Hec Medina porque han sido la mejor influencia que se puede pedir. He contado con ustedes siempre y no hubiera logrado esto sin su apoyo, su tiempo y su esfuerzo.

Finalmente agradezco a dos personas que han marcado mi vida académica, Carlos Manuel y Heriberto ya que tuve el gusto de ser alumno de ambos y definitivamente han dejado un ideal donde la motivación para seguir aprendiendo es para intentar ayudar cuando se tiene la posibilidad.

# RESUMEN

La obtención de sistemas equivalentes ha resultado de mucha ayuda en la experimentación de ciertos dominios físicos, ya que se pueden emular sistemas cuya experimentación resulta complicada ya sea por las condiciones del experimento, costos elevados o porque ponen en riesgo la seguridad del personal encargado. En un principio, obtener sistemas equivalentes no era sencillo debido a que se debían obtener las ecuaciones del sistema que se quería estudiar (con la metodología propia de ese sistema), y luego obtener las ecuaciones del sistema equivalente en otro dominio físico (con la metodología utilizada en dicho dominio físico) y comparar ambas para corroborar que efectivamente coincidan.

Es por esto que en este trabajo de tesis se describe la obtención de sistemas físicos equivalentes a partir de una metodología llamada Bond Graph. Se pretende tomar un elemento fundamental en la electrónica y emular su comportamiento en el dominio mecánico, sin embargo, es importante recalcar que la metodología propuesta tiene más aplicaciones en el campo de la ingeniería, como la detección de errores en plantas de producción, obtener las características en los modelos de control automatizado, representar de forma simple y concreta subsistemas que son parte de un sistema más grande, etc.

Esta técnica consiste en obtener un diagrama con un enfoque generalizado, es decir, que se puede utilizar para cualquier dominio físico, y del cual se obtienen las ecuaciones para estudiar su comportamiento. Una vez obtenido el diagrama y las ecuaciones de un sistema en particular, el esquema se puede analizar bajo la lupa de cualquier dominio físico, ya que el mismo diagrama indica qué elementos tiene y de qué manera están conectados entre sí. Esto facilita demasiado la obtención del sistema equivalente porque sólo se debe obtener un modelo y sus ecuaciones para, de ahí, reconstruir el mismo sistema, pero en el/los otros dominios físicos.

# PALABRAS CLAVE

Amplificador operacional, sistemas generalizados, dominios físicos, amplificador mecánico, espacio de estados.

# ABSTRACT

Obtaining equivalent systems has been very helpful in experimenting with certain physical domains, as systems whose experimentation is complicated either by the conditions of the experiment, high costs or because they jeopardize the safety of the personnel in charge can be emulated. Initially, obtaining equivalent systems was not easy because the equations of the system to be studied (with the methodology of that system) had to be obtained, and then obtaining the equations of the equivalent system in another physical domain (with the methodology used in that physical domain) and comparing both to verify that they match.

As a result, this thesis dissertation describes obtaining equivalent physical systems from a methodology called Bond Graph. It is intended to take a fundamental element in electronics and emulate its behavior in the mechanical domain, however, it is important to emphasize that the proposed methodology has more applications in the field of engineering, such as error detection in production plants, obtaining the characteristics in automated control models, simply and concretely representing subsystems that are part of a larger system, etc.

This technique consists of acquisition a diagram with a generalized approach, that is, that can be used for any physical domain, and from which the equations are obtained to study their behavior. Once the diagram and equations of a particular system have been obtained, the schema can be analyzed under the magnifying glass of any physical domain, since the same diagram indicates what elements it has and how they are connected. This makes it straightforward to obtain the equivalent system because you only have to get one model and its equations to, from there, rebuild the same system, but in the other physical domains.

# KEYWORDS

Operational Amplifier, generalized systems, physical domains, mechanical amplifier, state space.

# ÍNDICE

AGRADECIMIENTOS .....	III
RESUMEN .....	IV
PALABRAS CLAVE .....	IV
ABSTRACT .....	V
KEYWORDS .....	V
ÍNDICE .....	VI
LISTA DE FIGURAS .....	IX
LISTA DE TABLAS .....	XII
<b>1. CAPÍTULO 1: INTRODUCCIÓN .....</b>	<b>1</b>
1.1. SISTEMAS EQUIVALENTES .....	1
1.1.1. <i>Sistemas Físicos</i> .....	1
1.1.2. <i>Control de Procesos</i> .....	1
1.1.2.1. Control en Lazo Cerrado y en Lazo Abierto .....	2
1.1.3. <i>Modelado de Sistemas</i> .....	3
1.1.3.1. Modelos Matemáticos .....	4
1.1.3.2. Elaboración de un Modelo .....	5
1.1.3.3. Validación del Modelo .....	5
1.1.4. <i>Aplicaciones</i> .....	5
1.1.4.1. Sistemas Mecánicos .....	6
1.1.4.2. Ejemplos de Sistemas Mecánicos .....	7
1.1.4.3. Sistemas Eléctricos .....	10
1.1.4.4. Ejemplos de Sistemas Eléctricos .....	11
1.1.5. <i>Sistemas Equivalentes</i> .....	12
1.2. OBJETIVOS .....	14
1.2.1. <i>Objetivo General</i> .....	14
1.2.2. <i>Objetivos Específicos</i> .....	14
1.3. JUSTIFICACIÓN .....	14
1.4. METODOLOGÍA .....	15
1.5. ESTADO DEL ARTE .....	15
1.6. CONTRIBUCIÓN .....	17
1.7. CONTENIDO DE LA TESIS .....	17
<b>2. CAPÍTULO 2: MODELADO DE SISTEMAS EN BOND GRAPH .....</b>	<b>19</b>
2.1. INTRODUCCIÓN .....	19
2.2. GENERALIDAD DE BOND GRAPH .....	19
2.3. COMPONENTES BÁSICOS PARA EL MODELADO EN BOND GRAPH .....	21
2.3.1. <i>PUERTOS</i> .....	21
2.3.1.1. PUERTOS-1 .....	21
2.3.1.2. PUERTOS-2 .....	24

2.3.1.3. PUERTOS-3 .....	25
2.3.2. <i>BOND ACTIVO</i> .....	27
2.3.3. <i>DETECTORES</i> .....	27
2.3.4. <i>CAUSALIDAD</i> .....	27
2.3.4.1. CAUSALIDAD NECESARIA.....	28
2.3.4.2. CAUSALIDAD INTEGRAL Y DERIVATIVA .....	28
2.3.4.3. CAUSALIDAD RESTRICTIVA .....	29
2.3.4.4. CAUSALIDAD ARBITRARIA .....	31
2.4. METODOLOGÍA PARA MODELAR EN BOND GRAPH.....	31
2.4.1. <i>METODOLOGÍA GENERAL PARA OBTENER EL DIAGRAMA EN BOND GRAPH</i> .....	31
2.4.2. <i>METODOLOGÍA PARA OBTENER EL DIAGRAMA EN BOND GRAPH DE SISTEMAS MECÁNICOS</i> .....	32
2.4.2.1. EJEMPLO DEL SISTEMA MASA-RESORTE CON FRICCIÓN .....	33
2.4.3. <i>METODOLOGÍA PARA OBTENER EL DIAGRAMA EN BOND GRAPH DE SISTEMAS ELÉCTRICOS</i> .....	37
2.4.3.1. EJEMPLO DEL SISTEMAS RLC.....	37
2.4.4. <i>SISTEMAS EQUIVALENTES EN BOND GRAPH</i> .....	40
2.5. OBTENCIÓN DEL MODELO MATEMÁTICO .....	41
2.5.1. <i>VECTORES CLAVE</i> .....	42
2.5.2. <i>RELACIONES CONSTITUTIVAS</i> .....	43
2.5.3. <i>MATRIZ DE ESTRUCTURA UNIÓN</i> .....	44
2.5.4. <i>OBTENCIÓN DEL ESPACIO DE ESTADOS</i> .....	45
2.5.5. <i>EJEMPLO DEL SISTEMA MASA-RESORTE CON FRICCIÓN</i> .....	46
<b>3. CAPÍTULO 3: EL AMPLIFICADOR OPERACIONAL .....</b>	<b>49</b>
3.1. INTRODUCCIÓN.....	49
3.1.1. <i>DESARROLLO Y CONSTRUCCIÓN DEL AMPLIFICADOR OPERACIONAL EN CIRCUITOS INTEGRADOS</i> .....	49
3.1.2. <i>LOS AMPLIFICADORES OPERACIONALES ESPECIALIZADOS</i> .....	50
3.1.3. <i>PARÁMETROS IMPORTANTES DE LOS AMPLIFICADORES OPERACIONALES</i> .....	51
3.1.4. <i>CARACTERÍSTICAS INTERNAS DEL AMPLIFICADOR OPERACIONAL</i> .....	52
3.1.4.1. AMPLIFICADOR OPERACIONAL IDEAL .....	52
3.1.4.2. AMPLIFICADOR OPERACIONAL REAL.....	53
3.2. DESCRIPCIÓN Y CONFIGURACIÓN DEL AMPLIFICADOR OPERACIONAL.....	53
3.2.1. <i>AMPLIFICADOR OPERACIONAL EN LAZO ABIERTO</i> .....	54
3.2.2. <i>AMPLIFICADOR OPERACIONAL EN LAZO CERRADO</i> .....	54
3.2.3. <i>APLICACIONES GENERALES DE LOS AMPLIFICADORES OPERACIONALES</i> .....	56
<b>4. CAPÍTULO 4: SISTEMAS EQUIVALENTES DEL AMPLIFICADOR OPERACIONAL.....</b>	<b>57</b>
4.1. INTRODUCCIÓN.....	57
4.2. MODELADO EN BOND GRAPH DEL AMPLIFICADOR OPERACIONAL.....	57
4.2.1. <i>AMPLIFICADOR NO-INVERSOR</i> .....	62
4.2.1.1. MODELADO EN BOND GRAPH DEL AMPLIFICADOR NO-INVERSOR .....	64
4.2.1.2. SISTEMA EQUIVALENTE DEL AMPLIFICADOR NO-INVERSOR EN EL DOMINIO MECÁNICO/HIDRÁULICO.....	64
4.2.1.3. ESPACIO DE ESTADOS DEL EQUIVALENTE HIDRÁULICO/MECÁNICO.....	66
4.2.2. <i>SEGUIDOR DE VOLTAJE (BUFFER)</i> .....	70
4.2.2.1. MODELADO EN BOND GRAPH DEL SEGUIDOR DE VOLTAJE.....	72
4.2.2.2. SISTEMA EQUIVALENTE DEL BUFFER EN EL DOMINIO MECÁNICO/HIDRÁULICO.....	73
4.2.2.3. ESPACIO DE ESTADOS DEL EQUIVALENTE HIDRÁULICO/MECÁNICO.....	74
4.3. OTROS CIRCUITOS CON AMPLIFICADOR OPERACIONAL DE INTERÉS .....	77
4.3.1. <i>AMPLIFICADOR INVERSOR</i> .....	77

4.3.1.1. MODELADO EN BOND GRAPH DEL AMPLIFICADOR INVERSOR.....	79
4.3.2. <i>AMPLIFICADOR DIFERENCIAL</i> .....	84
4.3.2.2. MODELADO EN BOND GRAPH DEL AMPLIFICADOR DIFERENCIAL .....	88
4.4. COMENTARIOS FINALES .....	93
<b>5. CAPÍTULO 5: CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES .....</b>	<b>94</b>
5.1. CONCLUSIONES .....	94
5.1.1. <i>RESUMEN DE LA INVESTIGACIÓN</i> .....	94
5.1.2. <i>CONCLUSIONES FINALES</i> .....	95
5.2. RECOMENDACIONES .....	95
5.3. TRABAJOS FUTUROS.....	96
<b>BIBLIOGRAFÍA .....</b>	<b>97</b>
<b>APÉNDICE A .....</b>	<b>99</b>
ARTÍCULO PUBLICADO .....	99



# LISTA DE FIGURAS

<b>FIGURA 1:</b> DIAGRAMA DE BLOQUES DE UN SISTEMA DE CONTROL EN LAZO CERRADO.....	2
<b>FIGURA 2:</b> DIAGRAMA DE BLOQUES DE UN SISTEMA DE CONTROL EN LAZO ABIERTO.....	3
<b>FIGURA 3:</b> DIAGRAMA DEL SISTEMA MASA-RESORTE.....	8
<b>FIGURA 4:</b> SISTEMA MASA-RESORTE CON FRICCIÓN.....	8
<b>FIGURA 5:</b> SISTEMA ROTACIONAL CON FRICCIÓN.....	9
<b>FIGURA 6:</b> CIRCUITO RC.....	11
<b>FIGURA 7:</b> CIRCUITO RLC.....	12
<b>FIGURA 8:</b> SISTEMAS EQUIVALENTES (MECÁNICO Y ELÉCTRICO).....	13
<b>FIGURA 9:</b> ESTRUCTURA DE LA METODOLOGÍA.....	15
<b>FIGURA 10:</b> BOND CON SUS VARIABLES DE ENERGÍA.....	20
<b>FIGURA 11:</b> TETRAEDRO DE ESTADO.....	22
<b>FIGURA 12:</b> PUERTOS-1.....	23
<b>FIGURA 13:</b> PUERTOS-2.....	25
<b>FIGURA 14:</b> DISTRIBUCIÓN DE LA UNIÓN-1.....	25
<b>FIGURA 15:</b> DISTRIBUCIÓN DE LA UNIÓN-0.....	26
<b>FIGURA 16:</b> BOND ACTIVO.....	27
<b>FIGURA 17:</b> REPRESENTACIÓN DE LA CAUSALIDAD EN UN BOND.....	28
<b>FIGURA 18:</b> CAUSALIDAD NECESARIA.....	28
<b>FIGURA 19:</b> CAUSALIDAD INTEGRAL DE ELEMENTOS C.....	29
<b>FIGURA 20:</b> CAUSALIDAD INTEGRAL DE ELEMENTOS I.....	29
<b>FIGURA 21:</b> CAUSALIDAD DERIVATIVA DE LOS ELEMENTOS C.....	29
<b>FIGURA 22:</b> CAUSALIDAD DERIVATIVA DE LOS ELEMENTOS I.....	29
<b>FIGURA 23:</b> CAUSALIDAD DE LOS TRANSFORMADORES.....	30
<b>FIGURA 24:</b> CAUSALIDAD DE LOS GIRADORES.....	30
<b>FIGURA 25:</b> CAUSALIDAD DE LAS UNIONES-0 Y UNIONES-1.....	30
<b>FIGURA 26:</b> CAUSALIDAD DE ELEMENTOS R.....	31
<b>FIGURA 27:</b> EQUIVALENCIAS DE BONDS.....	32
<b>FIGURA 28:</b> EJEMPLO SISTEMA MASA-RESORTE CON FRICCIÓN.....	33
<b>FIGURA 29:</b> PASO 1 DEL BOND GRAPH MECÁNICO.....	33
<b>FIGURA 30:</b> PASO 2 DEL BOND GRAPH MECÁNICO.....	34
<b>FIGURA 31:</b> PASO 3 DEL BOND GRAPH MECÁNICO.....	34
<b>FIGURA 32:</b> PASO 4 DEL BOND GRAPH MECÁNICO.....	34
<b>FIGURA 33:</b> PASO 5 DEL BOND GRAPH MECÁNICO.....	35
<b>FIGURA 34:</b> PASO 6 DEL BOND GRAPH MECÁNICO.....	35
<b>FIGURA 35:</b> PASO 7 DEL BOND GRAPH MECÁNICO.....	35
<b>FIGURA 36:</b> PASO 8 DEL BOND GRAPH MECÁNICO.....	36
<b>FIGURA 37:</b> BOND GRAPH DEL SISTEMA MASA-RESORTE CON FRICCIÓN.....	36
<b>FIGURA 38:</b> EJEMPLO SISTEMA RLC.....	38
<b>FIGURA 39:</b> PASO 1 DEL BOND GRAPH ELÉCTRICO.....	38
<b>FIGURA 40:</b> PASO 3 DEL BOND GRAPH ELÉCTRICO.....	38
<b>FIGURA 41:</b> PASO 4 DEL BOND GRAPH ELÉCTRICO.....	38
<b>FIGURA 42:</b> PASO 5 DEL BOND GRAPH ELÉCTRICO.....	39
<b>FIGURA 43:</b> PASO 6 DEL BOND GRAPH ELÉCTRICO.....	39
<b>FIGURA 44:</b> PASO 7 DEL BOND GRAPH ELÉCTRICO.....	39

<b>FIGURA 45:</b> BOND GRAPH DEL SISTEMA RLC. ....	40
<b>FIGURA 46:</b> BOND GRAPH DEL SISTEMA MASA-RESORTE CON FRICCIÓN. ....	40
<b>FIGURA 47:</b> COMPARATIVA DEL BOND GRAPH DE AMBOS SISTEMAS. ....	41
<b>FIGURA 48:</b> DIAGRAMA DE BOND GRAPH NUMERADO. ....	41
<b>FIGURA 49:</b> DIAGRAMA DE LA ESTRUCTURA DE UNIÓN. ....	42
<b>FIGURA 50:</b> MATRIZ DE ESTRUCTURA UNIÓN CON ELEMENTOS EN CAUSALIDAD DERIVATIVA. ....	44
<b>FIGURA 51:</b> MATRIZ DE ESTRUCTURA UNIÓN PARA ELEMENTOS EN CAUSALIDAD INTEGRAL. ....	44
<b>FIGURA 52:</b> ENCAPSULADO DEL AMPLIFICADOR OPERACIONAL 741. ....	50
<b>FIGURA 53:</b> COMPONENTES INTERNOS DEL AMPLIFICADOR OPERACIONAL. ....	52
<b>FIGURA 54:</b> TERMINALES DEL AMPLIFICADOR OPERACIONAL. ....	53
<b>FIGURA 55:</b> AMPLIFICADOR OPERACIONAL EN LAZO ABIERTO. ....	54
<b>FIGURA 56:</b> AMPLIFICADOR NO-INVERSOR EN LAZO CERRADO. ....	55
<b>FIGURA 57:</b> AMPLIFICADOR OPERACIONAL SECCIONADO. ....	58
<b>FIGURA 58:</b> SECCIÓN DE ENTRADA Y SALIDA. ....	58
<b>FIGURA 59:</b> BOND GRAPH DE LA SECCIÓN DE ENTRADA. ....	59
<b>FIGURA 60:</b> PRIMERA REDUCCIÓN DEL DIAGRAMA DE LA SECCIÓN DE ENTRADA. ....	59
<b>FIGURA 61:</b> SEGUNDA REDUCCIÓN DEL DIAGRAMA DE LA SECCIÓN DE ENTRADA. ....	59
<b>FIGURA 62:</b> DIAGRAMA REDUCIDO DE LA SECCIÓN DE ENTRADA. ....	60
<b>FIGURA 63:</b> BOND GRAPH DE LA SECCIÓN DE SALIDA. ....	60
<b>FIGURA 64:</b> PRIMERA REDUCCIÓN DEL DIAGRAMA DE LA SECCIÓN DE SALIDA. ....	60
<b>FIGURA 65:</b> SEGUNDA REDUCCIÓN DEL DIAGRAMA DE LA SECCIÓN DE SALIDA. ....	61
<b>FIGURA 66:</b> DIAGRAMA REDUCIDO DE LA SECCIÓN DE SALIDA. ....	61
<b>FIGURA 67:</b> MODELO EN BOND GRAPH DEL AMPLIFICADOR OPERACIONAL SIN CAUSALIDAD. ....	61
<b>FIGURA 68:</b> DIAGRAMA EN BOND GRAPH DEL AMPLIFICADOR OPERACIONAL CON CAUSALIDAD. ....	62
<b>FIGURA 69:</b> AMPLIFICADOR NO-INVERSOR. ....	62
<b>FIGURA 70:</b> DIVISOR DE VOLTAJE DEL AMPLIFICADOR NO-INVERSOR. ....	63
<b>FIGURA 71:</b> ESQUEMA COMPLETO DEL AMPLIFICADOR NO-INVERSOR. ....	64
<b>FIGURA 72:</b> MODELO EN BOND GRAPH DEL AMPLIFICADOR NO-INVERSOR. ....	64
<b>FIGURA 73:</b> AMPLIFICADOR NO-INVERSOR EQUIVALENTE CON VÁLVULAS AJUSTABLES. ....	65
<b>FIGURA 74:</b> AMPLIFICADOR NO-INVERSOR EQUIVALENTE CON RESISTENCIAS FIJAS. ....	66
<b>FIGURA 75:</b> BOND GRAPH DEL SISTEMA EQUIVALENTE CON NUMERACIÓN. ....	66
<b>FIGURA 76:</b> ORIGEN DEL SEGUIDOR DE VOLTAJE. ....	71
<b>FIGURA 77:</b> SEGUIDOR DE VOLTAJE CON AMPLIFICADOR OPERACIONAL. ....	71
<b>FIGURA 78:</b> ESQUEMA COMPLETO DEL SEGUIDOR DE VOLTAJE. ....	72
<b>FIGURA 79:</b> DIAGRAMA EN BOND GRAPH DEL SEGUIDOR DE VOLTAJE. ....	73
<b>FIGURA 80:</b> MODELO EQUIVALENTE DEL BUFFER. ....	73
<b>FIGURA 81:</b> CIRCUITO DEL AMPLIFICADOR INVERSOR. ....	77
<b>FIGURA 82:</b> FLUJO DE CORRIENTE EN EL AMPLIFICADOR INVERSOR. ....	78
<b>FIGURA 83:</b> ESQUEMA COMPLETO DEL AMPLIFICADOR INVERSOR. ....	79
<b>FIGURA 84:</b> PRIMER PASO DEL MODELO EN BOND GRAPH DEL AMPLIFICADOR INVERSOR. ....	79
<b>FIGURA 85:</b> DIAGRAMA EN BOND GRAPH DEL AMPLIFICADOR INVERSOR. ....	80
<b>FIGURA 86:</b> MODELO EN BOND GRAPH (NUMERADO) DEL AMPLIFICADOR INVERSOR. ....	80
<b>FIGURA 87:</b> AMPLIFICADOR DIFERENCIAL. ....	85
<b>FIGURA 88:</b> REDUCCIÓN DEL AMPLIFICADOR DIFERENCIAL POR SUPERPOSICIÓN. ....	85
<b>FIGURA 89:</b> ANÁLISIS DEL AMPLIFICADOR DIFERENCIAL POR SUPERPOSICIÓN. ....	86
<b>FIGURA 90:</b> CIRCUITO MODIFICADO DEL AMPLIFICADOR DIFERENCIAL. ....	88

<b>FIGURA 91:</b> ESQUEMA COMPLETO DEL AMPLIFICADOR DIFERENCIAL.....	88
<b>FIGURA 92:</b> ESQUEMA BASE DEL AMPLIFICADOR INVERSOR. ....	88
<b>FIGURA 93:</b> DIAGRAMA DEL DIVISOR DE VOLTAJE EN LA ENTRADA NO-INVERSORA. ....	89
<b>FIGURA 94:</b> BOND GRAPH DEL AMPLIFICADOR DIFERENCIAL.....	89
<b>FIGURA 95:</b> BOND GRAPH NUMERADO DEL AMPLIFICADOR DIFERENCIAL. ....	89

# LISTA DE TABLAS

<b>TABLA 1:</b> EQUIVALENCIAS DEL SISTEMA MECÁNICO Y EL SISTEMA ELÉCTRICO.....	13
<b>TABLA 2:</b> VARIABLES GENERALIZADAS .....	20
<b>TABLA 3:</b> ELEMENTOS PASIVOS R. ....	22
<b>TABLA 4:</b> ELEMENTOS PASIVOS C.....	22
<b>TABLA 5:</b> ELEMENTOS PASIVOS I.....	22
<b>TABLA 6:</b> PUERTOS-1 ACTIVOS. ....	23
<b>TABLA 7:</b> RELACIÓN ENTRE LAS UNIONES Y LOS DOMINIOS FÍSICOS.....	26
<b>TABLA 8:</b> TABLA PARA FORMAR LOS VECTORES CLAVE. ....	43
<b>TABLA 9:</b> ELEMENTOS EQUIVALENTES DEL DOMINIO MECÁNICO E HIDRÁULICO.....	65

# CAPÍTULO 1:

## INTRODUCCIÓN

### 1.1. Sistemas Equivalentes

#### 1.1.1. Sistemas Físicos

Un sistema físico se puede describir como un conjunto de objetos o entidades materiales las cuales interactúan a través de conexiones cuyo modelo matemático es del tipo causal. Todos los sistemas físicos se caracterizan por tres cosas fundamentales:

- **Ocupar un lugar en el espacio y en el tiempo:**

Esto quiere decir que ocurre en un lugar específico y en un momento dado.

- **Tener un estado físico definido sujeto a evolución temporal:**

Se refiere a que, si las condiciones iniciales cambian, sus características también lo hacen.

- **Poderle asociar una magnitud física llamada energía:**

Dicha energía puede presentarse en cualquier forma (luz, calor, sonido, electricidad, etc.).

Si se proporciona una descripción física de los objetos o entidades materiales (masa, momento angular, velocidad, posición, etc.) se puede calcular su comportamiento conforme pasa el tiempo.

La palabra “*sistema*” hace referencia a una porción del universo físico elegido para su análisis. Todo lo que está fuera del sistema se le conoce como *entorno*, el cual se omite en el análisis dejando únicamente los efectos dentro del sistema. A la línea que divide el sistema del entorno se le conoce como *frontera*, la cual es imaginaria y de elección libre, generalmente hecha para que el análisis del sistema sea lo más simple posible.

#### 1.1.2. Control de Procesos

A grandes rasgos, el concepto de “*control*” se puede simplificar diciendo que es la selección de elementos, dispositivos o parámetros que, al aplicarlos sobre un sistema, éste se comporte de una manera deseada. El control de procesos se puede descomponer en tres partes: la primera es aquella que se puede modificar y se denomina como *entrada*, otra que debe tener las características

deseadas conocida como *salida*, y una tercera conocida como planta la cual relaciona la entrada y la salida. El control automático de procesos ha jugado un papel vital en el avance de la ciencia y de la ingeniería ya que resulta esencial en operaciones industriales como el control de presión, temperatura, humedad, viscosidad y flujo dentro de las industrias de transformación.

Los avances en la teoría y práctica del control automático brindan medios para lograr el funcionamiento óptimo de sistemas dinámicos, mejorar productividad, liberarse de la monotonía de muchas operaciones manuales rutinarias y la generación de dispositivos que alejan de todo riesgo al ser humano. Quizá la cualidad más característica de la ingeniería de control sea la oportunidad de controlar máquinas y procesos industriales y económicos en beneficio de la sociedad. [1]

### 1.1.2.1. Control en Lazo Cerrado y en Lazo Abierto

Respecto a la entrada y salida del sistema, existen dos tipos de control; control en lazo cerrado y control en lazo abierto. Antes de definirlos es importante describir el término *retroalimentación*, que se refiere a la propiedad que tienen los sistemas para que la salida sea comparada con la entrada o con cualquier componente del sistema, de tal manera que pueda establecerse la acción de control apropiada entre la entrada y la salida.

Básicamente se dice que existe una retroalimentación cuando la señal de salida es utilizada por algún proceso dentro del esquema de control.

- **CONTROL EN LAZO CERRADO**

En los sistemas de control de lazo cerrado, la salida o señal controlada, debe ser retroalimentada y comparada con la entrada de referencia para que se envíe una señal actuante o acción de control que es proporcional a la diferencia entre la entrada y la salida a través del sistema.

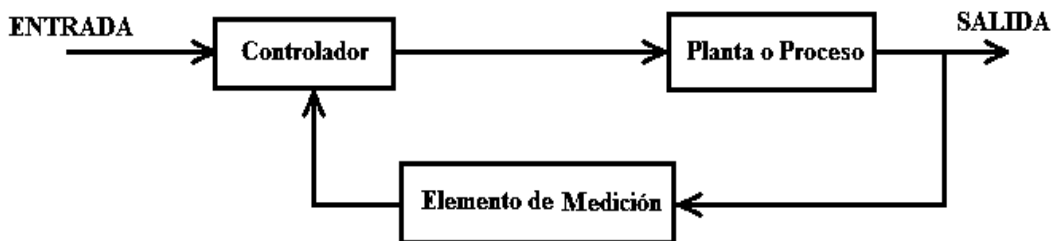


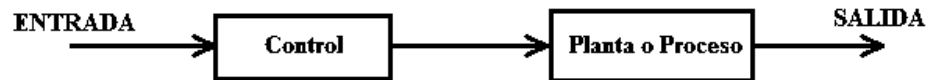
Figura 1: Diagrama de bloques de un sistema de Control en Lazo Cerrado.

La diferencia entre la señal de entrada y la señal de salida se denomina *error*, y la acción de control tratará de reducirlo hasta alcanzar la estabilidad. Cabe mencionar que el error siempre estará presente en mayor o menor medida conforme pase el tiempo, y su detección y corrección dependerá de las características del sistema de control.

- **CONTROL EN LAZO ABIERTO**

Los sistemas de control en lazo abierto son sistemas donde la salida no tiene efecto sobre la acción de control, ni se retroalimenta para compararla con la entrada. Estos sistemas suelen ser económicos, aunque inexactos y muestran problemas cuando se someten a perturbaciones, por lo que se recomienda que se utilicen únicamente cuando se tiene la seguridad que no existirá alguna perturbación que lo pueda afectar.

Un ejemplo típico de los sistemas en lazo abierto es una máquina con ciclo de lavado, enjuague y secado donde las variables de entrada y salida son el grado de suciedad con que entra la ropa y el grado de limpieza con el que sale, respectivamente. Al final del ciclo de trabajo de la máquina, esta entrega la ropa con cierto nivel de limpieza sin saber dicho nivel de limpieza con precisión. Sin embargo, si un operador observa el resultado final y no cumple con un nivel deseado de limpieza, éste someterá a la ropa a otro ciclo en la máquina hasta obtener un resultado particular y es aquí donde el sistema deja de ser de lazo abierto.



**Figura 2:** Diagrama de bloques de un sistema de Control en Lazo abierto.

Generalmente, cuando se tienen procesos en cadena lo ideal es utilizar ambos tipos de sistema según lo requiera la etapa del proceso, con la finalidad de economizar sin afectar la producción o la operación.

- **REQUERIMIENTOS PARA UN PROYECTO DE SISTEMA DE CONTROL**

Para realizar satisfactoriamente un proyecto de control automático, es preferible que cumpla con las dos condiciones siguientes:

1. Cualquier sistema de control debe ser estable. La velocidad de respuesta debe ser razonablemente rápida y debe presentar amortiguamiento razonable.
2. Un sistema de control debe tener la capacidad de reducir los errores (diferencia entre la salida y la referencia) a un valor muy cercano a cero. [2]

### 1.1.3. Modelado de Sistemas

Los modelos matemáticos constituyen un medio de trabajo imprescindible para el especialista en técnica de control de procesos. Es posible realizar un modelo del proceso a regular, de su entorno y de sus leyes de control. No existe un modelo único, sino una serie de modelos. Los modelos más sencillos investigan a priori el comportamiento, los más complejos reproducen el comportamiento del sistema real con máxima fidelidad.

Luego existe una solución de compromiso entre elegir el modelo más sencillo, que implica una simplificación excesiva, con el riesgo de fracaso técnico y el modelo más complejo, que significa una complicación inadecuada, con el riesgo de fracaso económico.

### 1.1.3.1. Modelos Matemáticos

Para diseñar el modelo de un sistema se debe empezar a partir de una predicción de su funcionamiento antes que el sistema pueda diseñarse en detalle. La predicción se basa en una descripción matemática de las características dinámicas del sistema. A esta descripción matemática se la llama modelo matemático. Normalmente el modelo matemático se trata de una serie de ecuaciones diferenciales que describen el comportamiento del sistema construyendo así, un modelo teórico. [1]

La clasificación general se presenta como sistemas lineales y no lineales, y sistemas dinámicos y estáticos:

- **Sistemas Lineales**

Para éstos sistemas, como lo dice su nombre, las ecuaciones que describen el modelo son lineales y se les aplica el principio de superposición, es decir, si se tienen dos entradas se analizarán sus respuestas individualmente y la salida será la suma de ambas respuestas.

- **Sistema No Lineal**

En éste tipo de sistemas no se aplica el principio de superposición. Generalmente, la dificultad matemática es mayor comparado con los sistemas lineales por lo que suele hacerse una aproximación a modelos matemáticos lineales para facilitar su estudio.

- **Sistemas Dinámicos**

Un sistema dinámico es aquél en el cual los “efectos” actuales (salidas) son el resultado de causas actuales y previas (entradas). En esta definición se introduce la noción de causa y efecto, que muchas veces se utiliza para describir los fenómenos de ingeniería.

- **Sistemas Estáticos**

Un sistema estático es aquél en el que los efectos actuales (salidas) dependen solo de las causas actuales (entradas). En virtud de esta definición un sistema cuya salida cambia con el tiempo puede describirse como estático, siempre y cuando las entradas cambien en forma semejante.

Se debe tener en cuenta que la escala de tiempo con la que se perciben los sistemas puede provocar una gran diferencia. Si se tiene cualquier sistema, es posible elegir una escala de tiempo lo bastante pequeña como para que el retardo inherente entre la entrada y la salida se convierta en algo apreciable, dando la impresión de que el sistema sea dinámico aparentemente.



### 1.1.3.2. Elaboración de un Modelo

Al aplicar las leyes físicas a un modelo, es posible desarrollar un modelo matemático que describa al sistema, formando un modelo teórico. A veces es imposible desarrollar un modelo teórico, entonces se somete al sistema a un conjunto de entradas conocidas y se miden sus salidas, obteniéndose así un modelo experimental.

Es decir, se calcula el modelo a partir de las relaciones entrada-salida. Ningún modelo matemático puede representar al sistema con precisión. Siempre involucra suposiciones y aproximaciones. El procedimiento que se debe seguir para la formación de un modelo se describe ordenadamente en los siguientes puntos:

1. Dibujar un diagrama esquemático del sistema y definir las variables.
2. Utilizando leyes físicas, escribir ecuaciones para cada componente, combinándolas de acuerdo al diagrama del sistema.
3. Una vez que se relacionan las ecuaciones, se obtiene el modelo a partir de las mismas.
4. Se debe verificar la validez del modelo. Para esto, la predicción del funcionamiento que se obtiene al resolver las ecuaciones, se compara con los resultados experimentales. Si el experimento se aleja de la predicción se debe modificar el modelo y repetir el proceso de tal manera que los resultados sean lo más parecido posible.

Durante el proceso de elaboración de un modelo, se podrán desprestigiar aspectos físicos que no sean de suma importancia para el sistema. La idea de utilizar las características indispensables de estudio, es reducir la complejidad del modelo.

### 1.1.3.3. Validación del Modelo

Es importante que, tanto el análisis teórico como el análisis experimental coincidan (con debidas tolerancias) y de ser así, se puede validar el modelo. Los métodos pueden ser:

- Analizar la respuesta del modelo mediante señales de entrada (escalón, impulso, etc.).
- Análisis de polos y ceros del sistema.
- Calcular determinadas relaciones estadísticas.
- Investigar las variaciones de aquellas magnitudes que sean especialmente sensibles a cambios en los parámetros del modelo. [2]

### 1.1.4. Aplicaciones

Para definir los modelos, se necesitan las leyes físicas correspondientes y así representarlos ya sean eléctricos, hidráulicos, mecánicos, etc. Lo que se pretende es encontrar analogías para poder, a partir de éstas y sin tener conocimiento del funcionamiento de cada sistema en particular, determinar su modelo matemático.

### 1.1.4.1. Sistemas Mecánicos

Para caracterizar y modelar sistemas mecánicos, es necesaria la implementación de leyes que representen la dinámica mecánica. A continuación, se dan algunas definiciones para poder determinar los modelos correspondientes a los sistemas mecánicos:

- **Masa (Kg)**

La masa de un cuerpo es la cantidad de materia que contiene. Es la propiedad que da su inercia, o sea, su resistencia a parar y arrancar.

- **Fuerza (N)**

Causa que tiende a producir un cambio en el movimiento de un cuerpo sobre el que actúa.

- **Par o Momento de Fuerza (Nm)**

Causa que tiende a producir un cambio en el movimiento rotacional de un cuerpo (es el producto de la fuerza por la distancia perpendicular desde un punto de rotación a la línea de acción de la fuerza).

- **Momento de Inercia ( $kgm^2$ )**

Significa la resistencia que ofrece un cuerpo a su aceleración angular.

$$J = \int r^2 dm$$

Donde “r” es la distancia del eje de rotación hasta “dm”.

- **Desplazamiento (m)**

El desplazamiento es un cambio de posición de un punto a otro de referencia.

- **Velocidad (m/s)**

La velocidad es la derivada de la posición respecto del tiempo.

$$v = \frac{dx}{dt} = \dot{x}$$

- **Aceleración ( $m/s^2$ )**

La aceleración es la derivada de la velocidad respecto del tiempo.

$$a = \frac{dv}{dt} = \dot{v} = \ddot{x}$$

- **Desplazamiento Angular (rad)**

El desplazamiento angular se mide en radianes y se mide en sentido contrario a las agujas del reloj.

- **Velocidad Angular (*rad/seg*)**

La velocidad angular es la derivada de la posición angular respecto del tiempo.

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}$$

- **Aceleración Angular (*rad/seg<sup>2</sup>*)**

La aceleración angular es la derivada de la velocidad angular respecto del tiempo.

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \dot{\omega} = \ddot{\theta}$$

- **Primera Ley de Newton**

La cantidad de movimiento total en un sistema es constante en ausencia de fuerzas externas.

$$mv = \text{constante} \quad (\text{Movimiento traslacional})$$

$$J\omega = \text{constante} \quad (\text{Movimiento rotacional})$$

- **Segunda Ley de Newton**

La aceleración sobre un cuerpo es proporcional a la fuerza que actúa sobre el mismo e inversamente proporcional a su masa.

$$\sum F = ma \quad (\text{Movimiento traslacional})$$

$$\sum T = J\alpha \quad (\text{Movimiento rotacional})$$

- **Tercera Ley de Newton**

A toda acción se opone una reacción de igual magnitud. Elementos de inercia:

Masa (Movimiento traslacional)

Momento de Inercia (Movimiento rotacional)

#### 1.1.4.2. Ejemplos de Sistemas Mecánicos

La mecánica clásica (newtoniana) se ocupa de describir fenómenos asociados con el movimiento de los cuerpos. Por este motivo, en los sistemas mecánicos se tendrán habitualmente como variables descriptivas las posiciones, velocidades y aceleraciones. A continuación, se verán tres ejemplos de sistemas mecánicos donde aparecen fenómenos de elasticidad y fricción.

## EJEMPLO 1: Sistema masa-resorte

La figura 3 describe la aplicación de una fuerza ( $F(t)$ ) sobre una masa-resorte ( $m$  y  $k$ ) que provoca un desplazamiento ( $x(t)$ ) ignorando la fricción.

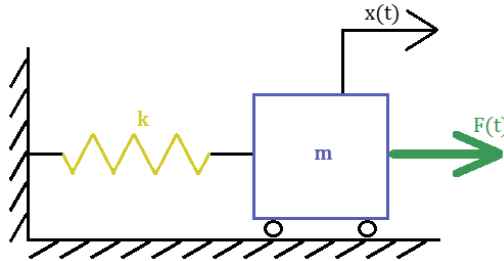


Figura 3: Diagrama del sistema masa-resorte.

Puede representarse mediante el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\sum \text{Fuerzas} = (\text{masa})(\text{aceleración})$$

La fuerza del resorte ( $f_{\text{resorte}}$ ) será proporcional al desplazamiento ( $x$ ) y a la constante elástica ( $k$ ) del resorte.

$$f_{\text{resorte}} = kx$$

$$F - f_{\text{resorte}} = ma$$

$$F = ma + kx$$

$$F = m\ddot{x} + kx \quad (1)$$

La resolución de la ecuación (1) representa el modelo matemático del problema.

## EJEMPLO 2: Sistema masa-resorte con fricción

En el caso del sistema de la figura 4, ahora se introduce un coeficiente de rozamiento ( $b$ ) entre el bloque de masa ( $m$ ) y el piso.

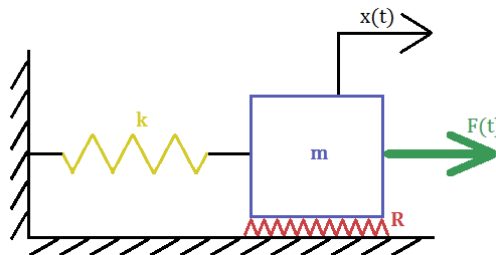


Figura 4: Sistema masa-resorte con fricción

En el caso de la fuerza de fricción, una hipótesis habitual es representar la misma como una fuerza que se opone al movimiento cuya magnitud se relaciona con la velocidad:

$$f_{fricción} = bv_{fricción}$$

Por lo tanto, la sumatoria de fuerzas es:

$$F - f_{resorte} - f_{fricción} = ma$$

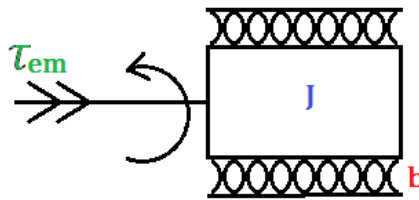
$$F = ma + kx + bv_{fricción}$$

$$F = m\ddot{x} + b\dot{x} + kx \quad (2)$$

Para éste caso, la resolución de la ecuación (2) será el modelo matemático del sistema.

### EJEMPLO 3: Sistema Rotacional con Fricción

En éste ejemplo se estudiará un sistema mecánico rotacional. El esquema, que se puede observar en la **figura 5**, posee una masa de inercia ( $J$ ) solidaria a un eje.



**Figura 5:** Sistema rotacional con fricción

A dicho eje se le aplica un torque de entrada ( $\tau_{em}$ ) que hace girar a la masa en sentido horario. En este caso también se considera que existe un torque que se opone al movimiento debido a la fricción lineal ( $b$ ):

$$\tau_{fricción} = b\omega$$

Por lo cual, la sumatoria de torques del sistema es la siguiente:

$$\tau_{em} - \tau_{fricción} = J\alpha$$

$$\tau_{em} = J\alpha + b\omega$$

$$\tau_{em} = J\ddot{\theta} + b\dot{\theta} \quad (3)$$

De tal manera que la resolución del sistema está dada por la ecuación (3), ecuación que representa al modelo teórico de este problema.

### 1.1.4.3. Sistemas Eléctricos

En los sistemas eléctricos encontramos como variables descriptivas principales a las tensiones y corrientes. La teoría de circuitos caracteriza los fenómenos asociándolos a dipolos que vinculan estática o dinámicamente tensiones y corrientes. Las leyes de la electricidad que servirán para desarrollar modelos de sistemas eléctricos se describen a continuación:

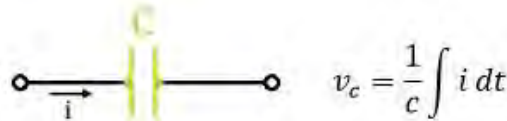
- **Ley de Ohm**

Basado en la ley de Ohm, la teoría de circuitos representa el fenómeno de disipación de energía mediante un dipolo (resistencia) que establece una relación entre la tensión y corriente.



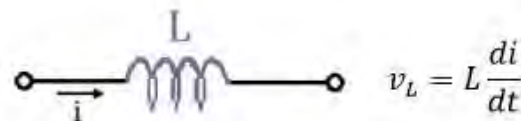
- **Ley de Coulomb**

Otros fenómenos fundamentales de estos sistemas son la acumulación de energía en forma de campo eléctrico. Este es descrito por la ley de Coulomb, de la cual se deducen las relaciones que describen el fenómeno de capacitancia.



- **Leyes de Faraday y Ampere**

Alrededor de una carga en movimiento (corriente) existe una región de influencia que se llama campo magnético. La variación del campo magnético con respecto al tiempo, induce una fuerza electromotriz en el circuito. Las relaciones entre las variables asociadas al fenómeno de almacenamiento de energía en el campo magnético pueden deducirse de las leyes de Faraday y de Ampere. El fenómeno, que la teoría de circuitos caracteriza mediante la inductancia, puede describirse a partir de la siguiente ecuación.



- **Leyes de Kirchhoff**

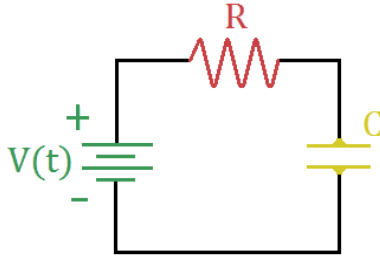
Por último, se encuentran relaciones asociadas a la estructura de los circuitos eléctricos. Estas no son otras que las leyes de Kirchhoff de voltaje y corriente. Éstas establecen respectivamente que la suma de las tensiones en una malla cerrada es igual a cero y que la suma de las corrientes entrantes a un nudo es también nula.

### 1.1.4.4. Ejemplos de Sistemas Eléctricos

Basado en las leyes anteriores, se analizará dos sistemas eléctricos y la construcción de su modelo matemático.

#### EJEMPLO 1: Sistema RC

El sistema a estudiar se muestra en la **figura 6**. Consta de una resistencia ( $R$ ) y un capacitor ( $C$ ) en serie, a los cuales se le aplica una tensión de entrada ( $V[t]$ ).



**Figura 6:** Circuito RC

De acuerdo a las leyes de voltaje de Kirchhoff, la suma de los voltajes en la malla será nula:

$$\sum V = 0$$

Por lo tanto se tiene que:  $V(t) = iR + \frac{1}{C} \int i dt$

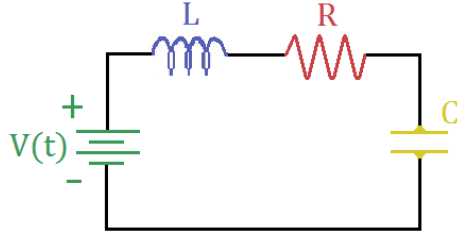
Si se considera la corriente como un flujo de carga, entonces se tiene que  $i = \frac{dq}{dt} = \dot{q}$ , se obtiene la ecuación (4):

$$V(t) = \dot{q}R + \frac{q}{C} \quad (4)$$

Esta ecuación describe la dinámica del sistema y permite representar la evolución de la corriente respecto al tiempo. Notar que, inicialmente se consideró al capacitor descargado, en el caso de que éste hubiese estado cargado se tendría que haber considerado dicha carga como condición inicial de la integral.

#### EJEMPLO 2: Sistema RLC

El sistema a estudiar se puede observar en la **figura 7**. La única diferencia al anterior es que ahora se agregó una inductancia ( $L$ ) en serie.



**Figura 7:** Circuito RLC

De acuerdo a la ley de voltajes de Kirchoff, la suma de cada voltaje en la malla será cero:

$$\sum V = 0$$

De tal manera que:  $V(t) = L \frac{di}{dt} + iR + \frac{1}{C} \int i dt$

Tomando en cuenta que la corriente es un flujo de carga, entonces  $i = \frac{dq}{dt} = \dot{q}$ , obteniendo la ecuación (5):

$$V(t) = L\ddot{q} + \dot{q}R + \frac{q}{C} \quad (5)$$

Observar que, en este caso a diferencia del anterior, la carga aparece en la ecuación con derivada doble ( $\ddot{q}$ ). Esto será clave para futuros análisis de la evolución de la corriente respecto al tiempo.

En el caso de las inductancias no se consideran magnetizaciones iniciales ya que lo que interesa es la variación del flujo magnético respecto del tiempo ( $L \frac{di}{dt}$ ). En la práctica dichas aproximaciones se limitan a la característica lineal de la inductancia. [1]

### 1.1.5. Sistemas Equivalentes

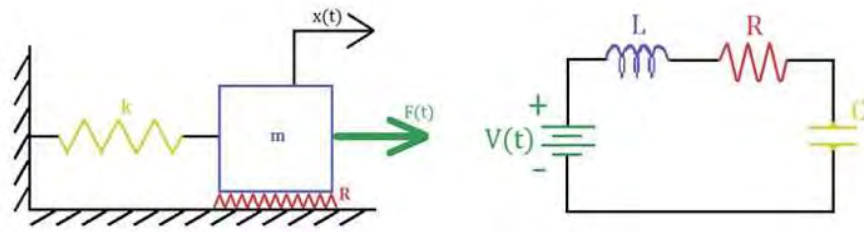
Los sistemas que pueden representarse mediante el mismo modelo matemático, pero que son diferentes físicamente se llaman *sistemas equivalentes* o análogos. De tal manera que los sistemas equivalentes se describen mediante las mismas ecuaciones o conjuntos de ecuaciones diferenciales.

El concepto de sistema equivalente es muy útil en la práctica por las siguientes razones:

- La solución de la ecuación que describe un sistema físico puede aplicarse directamente al sistema análogo en otro campo.
- Puesto que un tipo de sistema puede ser más fácil de manejar experimentalmente que otro, en lugar de construir y estudiar un sistema mecánico (o hidráulico, neumático, etc.), se puede construir y estudiar su análogo eléctrico, dado que éstos son más fáciles de tratar experimentalmente.



Observando los ejemplos de los anteriores apartados, concretamente la **figura 4** y la **figura 7**, se puede observar la similitud de sus modelos matemáticos:



**Figura 8:** Sistemas equivalentes (mecánico y eléctrico).

Sistema Masa-Resorte con fricción	Circuito RLC
$F = m\ddot{x} + b\dot{x} + kx$	$V(t) = L\ddot{q} + \dot{q}R + \frac{q}{C}$

En el caso de los sistemas mecánicos, el resorte y la masa se comportan como elementos almacenadores de energía mientras que la fricción disipa energía.

En los sistemas eléctricos los elementos almacenadores de energía son el capacitor y la inductancia (energía en forma de campo eléctrico y magnético respectivamente). La resistencia es claramente un elemento que disipa energía por efecto Joule. Haciendo un análisis más detallado de la analogía entre las ecuaciones que rigen los sistemas mecánicos y las ecuaciones que rigen los sistemas eléctricos se puede construir la siguiente tabla:

**Tabla 1:** Equivalencias del sistema mecánico y el sistema eléctrico.

MECÁNICO		ELÉCTRICO
TRASLACIONAL	ROTACIONAL	
Fuerza [ $F(t)$ ]	Torque [ $\tau$ ]	Voltaje [ $V(t)$ ]
Desplazamiento [ $x(t)$ ]	Angulo [ $\theta(t)$ ]	Carga [ $q(t)$ ]
Velocidad [ $v(t)$ ]	Velocidad Angular [ $\omega(t)$ ]	Corriente [ $i(t)$ ]
Masa [ $m$ ]	Inercia [ $J$ ]	Inductancia [ $L$ ]
Fricción [ $b$ ]	-----	Resistencia [ $R$ ]
Constante Elástica [ $k$ ]	-----	Capacitancia [ $C$ ]

## 1.2. Objetivos

### 1.2.1. Objetivo General

El objetivo general es tomar un sistema físico de un dominio en particular y modelarlo con la metodología en Bond Graph, de la cual se obtendrá su sistema equivalente con la intención de analizar la viabilidad de la metodología para construir dichos sistemas de manera eficiente.

### 1.2.2. Objetivos Específicos

- Modelar un sistema físico del dominio eléctrico en Bond Graph.
- Determinar sistemas físicos equivalentes.
- Obtener el modelo matemático.

## 1.3. Justificación

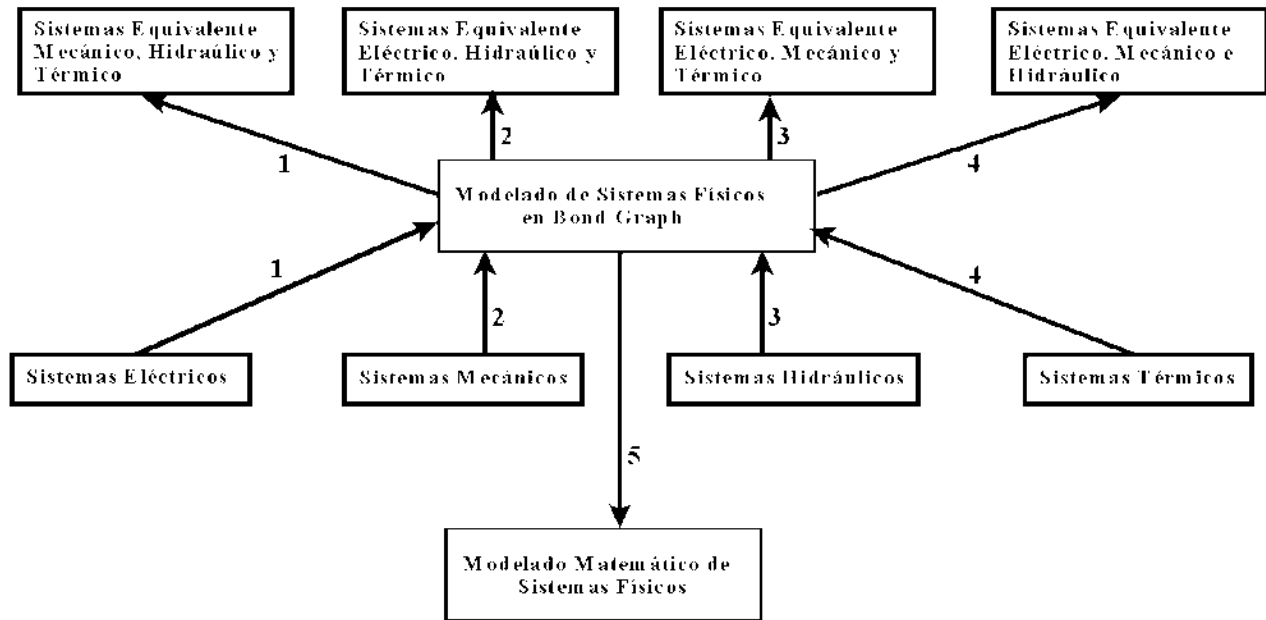
La metodología propuesta presenta ventajas importantes para el modelado y análisis de sistemas físicos:

- El enfoque basado en flujo de potencia proporciona una estructura natural para el desarrollo de los modelos en estos sistemas. También permite dividir en subsistemas para componentes en dominios físicos diferentes sin alterar la naturaleza del modelo.
- La terminología unificada para los diversos dominios físicos basada en la analogía de efectos físicos permite desarrollar y aplicar herramientas en un contexto diferente.
- La representación gráfica permite visualizar directamente los flujos de energía y permite detectar relaciones causa-efecto entre variables y subsistemas.
- Por su característica gráfica proporciona flexibilidad para agregar al modelo aspectos no considerados en una iteración previa del modelo sin tener que partir de cero.
- Una forma sistematizada para generar las ecuaciones diferenciales que describen el sistema directamente de su representación gráfica en Bond Graph.
- Una estructura sólida para el análisis de las propiedades de control del sistema.

Mediante un Bond Graph se puede estudiar directamente algunas características importantes de un sistema, por ejemplo, **observabilidad estructural**, **controlabilidad estructural**, determinación directa de la **respuesta de estado estacionario**, **linealización** de una clase de sistemas no-lineales, **inversión de sistemas**, representación de **espacio de estado**, etc [3]. Estas son algunas de las muchas ventajas para utilizar el modelado en Bond Graph.

## 1.4. Metodología

En la **figura 9** se ilustra la metodología propuesta para alcanzar los objetivos de éste proyecto:



**Figura 9:** Estructura de la metodología

La metodología que se plantea en el presente trabajo de tesis, consiste de aprender el modelado de sistemas físicos a través del modelado en Bond Graph. Después, se tienen casos de estudio de sistemas eléctricos y, a través de Bond Graph, obtener los sistemas equivalentes (Mecánico, Hidráulico y Térmico), lo cual se indica como trayectoria 1 en la figura anterior. A partir de sistemas mecánicos, se determinan sus sistemas equivalentes (Eléctrico, Hidráulico y Térmico) a partir del Bond Graph obtenido. Sistemas Hidráulicos modelados en Bond Graph determinan sistemas equivalentes (Eléctricos, Mecánicos y Térmicos). Posteriormente, de sistemas térmicos se obtienen sistemas equivalentes (Eléctricos, Mecánicos e Hidráulicos) basados en modelos en Bond Graph.

Con la finalidad de comprobar el comportamiento de los sistemas físicos y sus equivalentes, se propone obtener el modelo matemático de sistemas modelados en Bond Graph, determinando las ecuaciones diferenciales completas de los sistemas.

## 1.5. Estado del Arte

El modelado en Bond Graph representa un enfoque unificado para el modelado y manipulación de sistemas dinámicos de ingeniería que permite obtener sus ecuaciones de estado y conocer sus propiedades de observabilidad, controlabilidad y dependencia lineal de sus elementos, basado en una representación gráfica y la generalización de los conceptos de variable de flujo y esfuerzo.

Por los años 60's, Henry Paynter incorporó la idea de un “puerto de energía” en su metodología, lo que dio origen al desarrollo de la técnica llamada Bond Graph. Ya en los años 80's y principios de los 90's se formalizó la técnica de Bond Graph gracias a Karnopp y Rosenberg.

En el año 1982, Peter C. Breedveld introduce un nuevo marco utilizando los conceptos de Bond Graph para eliminar la distancia estructural en el dominio térmico de la teoría de sistemas físicos, donde muestra que no existe una inercia térmica aislada, ya que es inconsistente con la segunda ley de la termodinámica. Utilizó Bond Graph termodinámicos que son resultado de la síntesis de los métodos utilizados en la termodinámica y en la mecánica. Con éstos modelos en Bond Graph, Peter intentó con éxito adaptar la mecánica a un nuevo sistema de representación (Bond Graph termodinámico), basado en una forma generalizada de termodinámica. [4]

En 1990, Karnopp Dean estudia los modelos en Bond Graph para la cinética química, donde se extiende a los sistemas electroquímicos. Aunque se puede considerar que muchos sistemas electroquímicos funcionan en un entorno de temperatura constante, los sistemas de almacenamiento de alta energía como las baterías de vehículos eléctricos, experimentan cambios radicales en la temperatura durante su funcionamiento. Es así que, los modelos en Bond Graph también son eléctricos. Es por esto que, los Bond Graph electroquímico-térmico son modelos que refieren a los componentes eléctricos y mecánicos de un sistema general como puede ser un vehículo eléctrico. [5]

En el año 2004, Yu B y Van Paassen estudian los modelos dinámicos de los sistemas de calefacción, ventilación y aire acondicionado de edificios, trabajo que sería útil para el desarrollo del controlador, la implementación y la detección y diagnóstico de fallas. Analizaron que cada aplicación tiene requisitos diferentes para hacer sus modelos, por lo que se podía aplicar diferentes enfoques de modelado. Decidieron atacar el modelo matemático desde dos enfoques diferentes, el Simulink en bloques y el modelado en Bond Graph. Concluyeron documentando las ventajas y desventajas de ambas técnicas. [6]

En el año 2008, Cuijpers muestra una representación completa de diferentes aspectos del comportamiento de modelos físicos, que deben basarse en principios físicos como la conservación de la energía y la continuidad de la potencia. Sin embargo, los componentes físicos suelen modelarse mejor como partes continuas con cambios discretos, lo que conduce a una violación de los principios de continuidad. El modelado en Bond Graph facilita una estructura de modelo dinámica, dando como resultado el Bond Graph Híbrido. [7]

J. L. Baldiño en el 2009, utilizó la metodología de Bond Graph para modelar flujos de fluidos incompresibles con efectos viscosos y térmicos. El modelo resultante muestra el acoplamiento entre los dominios de energía térmica y mecánica a través de la disipación viscosa. Todo tipo de condiciones de contorno se manejan de manera consistente y se pueden representar como esfuerzo generalizado o fuentes de flujo. De aquí, se deriva un procedimiento para la asignación de causalidad para el gráfico resultante, que satisface el segundo principio de la termodinámica. [8]

## 1.6. Contribución

Este trabajo pretende realizar el análisis en Bond Graph de un sistema físico funcional (como un amplificador operacional, un filtro eléctrico, etc.) para obtener su modelo gráfico y matemático. Posterior a esto, a partir del modelo en Bond Graph encontrar su equivalente en los otros sistemas físicos para observar las similitudes que existen entre éstos. Una vez realizado dicho análisis, la intención es elaborar un dispositivo con las mismas características que el dispositivo estudiado pero aplicado en las diferentes áreas de conocimiento aprovechando las características del modelado en Bond Graph.

Para ejemplificar lo mencionado anteriormente, suponer que se tiene un sistema eléctrico y se estudia un dispositivo que logre controlar la corriente ( $i[t]$ ) del sistema. Una vez realizado el modelo en Bond Graph se puede obtener la equivalencia en un sistema mecánico y desarrollar un controlador que regule la velocidad ( $v[t]$ ) en un sistema mecánico traslacional, o la velocidad angular ( $\omega[t]$ ) en un sistema mecánico rotacional.

## 1.7. Contenido de la Tesis

La tesis se conforma de cuatro capítulos los cuales dan forma a éste trabajo. A continuación, se describe cada capítulo respecto a su contenido:

### **CAPÍTULO 1: INTRODUCCIÓN**

El primer capítulo presenta una breve introducción a los sistemas físicos y la equivalencia que existe entre algunos de ellos. Además, se indaga en la historia y cómo ha sido el avance en el estudio de dichos sistemas. También se describe el objetivo de realizar éste trabajo, así como los motivos y los medios por los cuáles se llega al resultado del mismo.

### **CAPÍTULO 2: MODELADO DE SISTEMAS EN BOND GRAPH**

En el segundo capítulo del presente trabajo se aborda la técnica de Bond Graph, describiendo sus elementos básicos y dando una breve explicación del proceso para poder construir un modelo en Bond Graph.

### **CAPÍTULO 3: EL AMPLIFICADOR OPERACIONAL**

Este capítulo aborda la información general del amplificador operacional como elemento de estudio para intentar recrear su análogo mecánico. Se especifica la importancia de dicho elemento dentro del campo de la eléctrica y electrónica esperando un resultado semejante en el campo mecánico, además de la incorporación del amplificador en esquemas de control automatizado.

## **CAPÍTULO 4: SISTEMAS EQUIVALENTES DEL AMPLIFICADOR OPERACIONAL**

En este cuarto capítulo se analizan las dos configuraciones del amplificador operacional y se obtienen los diagramas en Bond Graph para proponer un sistema con funciones semejantes, pero en otro dominio físico. Dichas configuraciones son el buffer y el amplificador no-inversor de los cuales se propondrá un modelo mecánico/hidráulico de ambas configuraciones y a partir de ahí, obtener las ecuaciones en espacio de estados que representa el comportamiento de los sistemas.

## **CAPÍTULO 5: CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES**

El capítulo final concluye la investigación y se hacen observaciones sobre el presente trabajo y posibles trabajos futuros.

# CAPÍTULO 2:

## MODELADO DE SISTEMAS EN BOND GRAPH

### 2.1. INTRODUCCIÓN

Un modelo es una descripción matemática de la realidad. Existen diferentes tipos de modelos que, dependiendo de su aplicación, la forma y complejidad cambiará. Cuando se intenta producir dispositivos para realizar tareas específicas, difícilmente se recurre a la experimentación como primera medida ya que, de ser así, el gasto económico para el desarrollo sería enorme. Es por esto que se recurre a obtener un modelo matemático que describa el fenómeno a estudiar y poder experimentar con dicho modelo a través de software o técnicas que a lo largo del tiempo han evolucionado para entender el fenómeno de mejor manera y así poder construir el dispositivo con la menor inversión posible.

El modelo matemático en cuestión es una representación abstracta del sistema físico, aunque tienen fuertes similitudes. Dicho modelo representa únicamente a las propiedades esenciales o primordiales del fenómeno de interés. Debido a esa simplificación, existe una cantidad de trabajo que se puede realizar agregando complejidad a los modelos teniendo en cuenta que, un modelo excesivamente complejo y detallado puede contener parámetros casi imposibles de estimar o que analizarlos sería muy difícil.

Por otro lado, un modelo que fue excesivamente simplificado puede no contener características que son fundamentales para el desarrollo o estudio de ese sistema. [9]

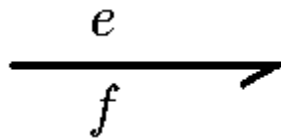
### 2.2. GENERALIDAD DE BOND GRAPH

Cuando se habla de Bond Graph, se está hablando de una representación gráfica de un sistema físico dinámico que permite obtener su representación en espacio de estados. Tiene un gran parecido con los diagramas de bloques, sin embargo, las conexiones entre los elementos del Bond Graph representan el intercambio de energía en ambas direcciones, contrario a los diagramas de bloques que sólo representan el movimiento de la información en un solo sentido.

Bond Graph tiene la peculiaridad de analizar los elementos y el flujo de energía de manera generalizada, es decir, la manipulación de sus elementos está dado en un enfoque unificado por lo que puede utilizarse para cualquier sistema físico (mecánico, eléctrico, térmico, hidráulico, químico, etc.) e incluso hacer una combinación de varios.

Como se mencionó antes, el gráfico de Bond Graph permite obtener la representación en espacio de estados y, una vez obtenido, se pueden determinar las propiedades más importantes del sistema como la controlabilidad, observabilidad y dependencia lineal de sus elementos.

Un diagrama de Bond Graph tiene como elemento fundamental al *bond* de energía, que es el encargado de unir a los elementos que integran el gráfico. El bond es representado como una semiflecha que indica la dirección en la que fluye la energía entre los elementos que ésta semiflecha conecta. Cada bond representa el flujo instantaneo de energía o potencia, flujo que se denota mediante un par de variables denominadas *variables generalizadas* cuyo producto es la potencia instantanea en ese bond. Dichas variables son el flujo y el esfuerzo.



**Figura 10:** Bond con sus variables de energía.

La **tabla 2** muestra las variables generalizadas y su interpretación en diferentes sistemas físicos:

**Tabla 2:** Variables Generalizadas

TIPO DE SISTEMA	VARIABLES GENERALES	
	ESFUERZO $e(t)$	FLUJO $f(t)$
Eléctrico	Voltaje	Corriente
Mecánico Traslacional	Fuerza	Velocidad
Mecánico Rotacional	Par	Velocidad Angular
Hidráulico	Presión	Caudal

La relación entre las variables de esfuerzo y flujo existe análogamente en todos los sistemas dinámicos y pueden utilizarse para cualquier dominio de energía. Dicha relación que existe con las variables de flujo y esfuerzo es la potencia y se expresa de la siguiente forma:

$$P(t) = e(t)f(t)$$

Esta potencia está definida para todos los sistemas dinámicos y es un punto importante en la metodología del Bond Graph, ya que es debido a ésta generalización por lo que se puede analizar sistemas combinados que suelen ser muy complejos.



En sistemas que almacenan energía, es importante definir las variables que representen el estado del sistema. Estas son llamadas *variables de energía* como el momento ( $p[t]$ ) o esfuerzo acumulado ( $e_a[t]$ ), y desplazamiento ( $q[t]$ ) o flujo acumulado ( $f_a[t]$ ). Estas variables están definidas como:

$$p(t) = e_a(t) = \int^t e(\tau) d\tau$$

$$q(t) = f_a(t) = \int^t f(\tau) d\tau$$

Otra característica importante es la causalidad. En el gráfico se representa como una barra perpendicular que se encuentra en uno de los extremos de cada bond y cuya ubicación tiene reglas que serán mencionadas más adelante. En términos generales, la causalidad explica la relación matemática entre el esfuerzo y el flujo.

## 2.3. COMPONENTES BÁSICOS PARA EL MODELADO EN BOND GRAPH

Cuando se modela un sistema, es necesario dividirlo en partes más pequeñas que puedan ser modeladas y estudiadas experimentalmente para después ensamblarlas al modelo completo. Estas partes son llamadas subsistemas, mientras que aquellas partes que no son reducibles se llaman componentes y, básicamente, un subsistema a su vez se modela como un sistema en sí mismo donde un componente es analizado como una entidad.

### 2.3.1. PUERTOS

Los lugares donde los subsistemas pueden ser interconectados, son lugares por donde la energía puede fluir; dichos lugares son llamados puertos.

#### 2.3.1.1. PUERTOS-1

Existen dos tipos de puerto-1 con los que se debe interactuar, los llamados *puertos-1 pasivos* y los *puertos-1 activos*.

- **PUERTOS-1 PASIVOS**

Los puertos-1 pasivos son aquellos elementos que consideraremos ideales y representan disipación de potencia o almacenamiento de energía que puede darse en dos formas (almacenamiento de flujo y almacenamiento de esfuerzo).

A los elementos de disipación se les indicará con la letra **R**, mientras que a aquellos que almacenan flujo se les asignará la letra **C**, finalmente, a los elementos que almacenan esfuerzo se les representará con la letra **I**.

Las siguientes tablas (**tabla 3**, **tabla 4** y **tabla 5**) muestra los elementos correspondientes a los puertos-1 pasivos en tres dominios diferentes a modo de ejemplo. [9]

**Tabla 3:** Elementos pasivos R.

RELACIÓN	ELÉCTRICO	MECÁNICO	HIDRÁULICO
LINEAL	$v(t) = Ri(t)$	$F(t) = bV(t)$	$\Delta P_r(t) = RQ(t)$
NO LINEAL	$v = \varphi(i)$	$F = \varphi(V)$	$\Delta P = \varphi(Q)$

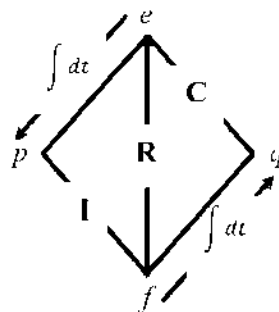
**Tabla 4:** Elementos pasivos C.

RELACIÓN	ELÉCTRICO	MECÁNICO	HIDRÁULICO
LINEAL	$v(t) = \frac{1}{C} \int i dt$	$F(t) = K \int V dt$	$P_r(t) = C \int \Delta dt$
NO LINEAL	$v(t) = \varphi(q)$	$F(t) = \varphi(x)$	$P_r = \varphi(V)$

**Tabla 5:** Elementos pasivos I.

RELACIÓN	ELÉCTRICO	MECÁNICO	HIDRÁULICO
LINEAL	$i(t) = \frac{1}{L} \int v dt$	$V(t) = \frac{1}{M} \int F dt$	$Q(t) = I \int \Delta P_r dt$
NO LINEAL	$i(t) = \varphi(\lambda)$	$V(t) = \varphi(P)$	$Q(t) = \varphi(P_p)$

La **figura 11** muestra el esquema mnemónico llamado *tetraedro de estado*, en el cual se observa cómo se relacionan las variables generalizadas con los puertos-1 pasivos:



**Figura 11:** Tetraedro de estado.

Se observa que las variables  $e$ ,  $f$ ,  $p$  y  $q$  están ubicadas en los vértices. Los ejes que conectan éstos vértices tienen un significado especial, por ejemplo, el eje que conecta al vértice  $e$  con el vértice  $p$  y el eje que conecta a  $f$  con  $q$ , tienen el símbolo de integración ya que  $p$  es la integral de  $e$ , mientras que  $q$  es la integral de  $f$ . Los otros tres ejes con la etiqueta  $I$ ,  $R$  y  $C$  muestran los tres elementos del puerto-1 pasivos y a su vez muestran las variables que relacionan las tres leyes constitutivas. [10]

- **PUERTOS-1 ACTIVOS**

Los puertos-1 activos (también llamados *fuentes*) son aquellos que suministran energía al sistema. Existen dos tipos de fuente, las fuentes de esfuerzo y las fuentes de flujo que se denotan por las siglas  $MS_e$  y  $MS_f$  respectivamente. La siguiente tabla (tabla 6) muestra ejemplos de dichas fuentes para diferentes dominios físicos.

Tabla 6: Puertos-1 Activos.

PUERTO-1 ACTIVO		DOMINIO		
		ELÉCTRICO	MECÁNICO	HIDRÁULICO
FUENTE DE ESFUERZO	$MS_e$	Voltaje	Fuerza	Presión
FUENTE DE FLUJO	$MS_f$	Corriente	Velocidad	Caudal

Desde luego, en el mundo real es muy difícil encontrar algún elemento que cumpla con las condiciones ideales que propone la técnica de Bond Graph, es por esto que a las fuentes suelen agregarse elementos que proporcionen un modelo más apegado a las condiciones reales.

- **DIAGRAMAS DE USO PARA LOS PUERTOS-1**

La figura 12 se muestra la forma en que se utilizan éstos elementos de puerto-1 acompañados de su semiflecha (bond).

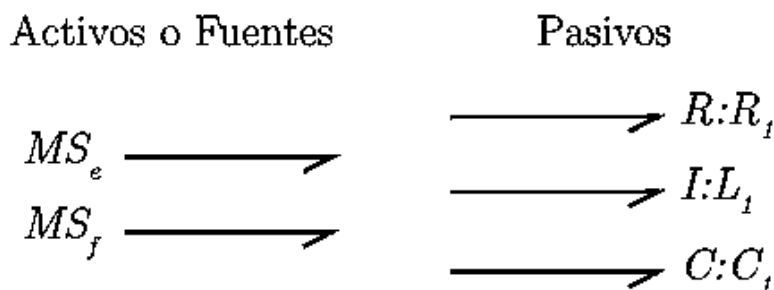


Figura 12: Puertos-1.

Se puede apreciar que los **puertos-1 activos** se colocan al inicio del bond, ya que son elementos que brindan energía. Por otro lado, los **puertos-1 pasivos** se encuentran al final de la semiflecha debido a que son elementos que consumen o almacenan energía.

### 2.3.1.2. PUERTOS-2

Muchos sistemas dinámicos presentan elementos que pueden realizar cambios en las variables de esfuerzo y flujo, pero conservando la potencia. En Bond Graph se pueden implementar dos tipos de elementos ideales de dos puertos que cumplen con las características anteriores y que, de acuerdo a cómo realizan ese cambio en las variables de potencia se denominan *giradores* o *transformadores*.

- **TRANSFORMADORES**

Estos elementos pueden amplificar o reducir las variables de flujo y esfuerzo, pero se debe tener en cuenta que existe una relación inversamente proporcional entre ellas, es decir, si se amplifica flujo se reduce el esfuerzo o viceversa. Los transformadores cumplen con las siguientes expresiones matemáticas:

$$e_1(t) = n e_2(t)$$

$$f_1(t) = \frac{1}{n} f_2(t)$$

$$e_1(t)f_1(t) = e_2(t)f_2(t)$$

Donde ***n*** es llamado *módulo del transformador*. Además, se puede observar que la potencia entendida como el producto entre el esfuerzo y el flujo, se mantiene constante entre la entrada y la salida del transformador.

- **GIRADORES**

Al igual que en los transformadores, en los elementos denominados *giradores*, se amplifican o reducen las variables de esfuerzo y flujo manteniendo la potencia constante entre la entrada y la salida del sistema, pero existe una gran diferencia entre los giradores y los transformadores. Tal diferencia radica en que los giradores relacionan flujos de entrada con esfuerzos de salida y esfuerzos de entrada con flujos de salida, mientras que los transformadores relacionan flujos de entrada y salida, y esfuerzos de entrada y salida. Las siguientes ecuaciones describen el comportamiento de los giradores:

$$e_1(t) = r f_2(t)$$

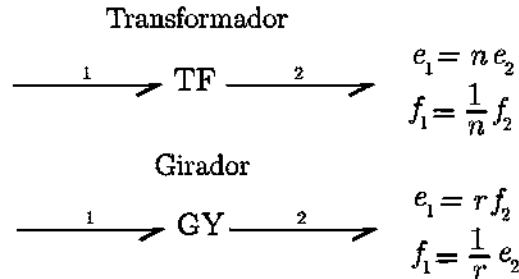
$$f_1(t) = \frac{1}{r} e_2(t)$$

$$e_1(t)f_1(t) = e_2(t)f_2(t)$$

Donde  $r$  se denomina *módulo del girador*, designado por esa letra debido a la similitud con las leyes de los elementos resistivos; pero mientras un elemento resistivo disipa potencia, el girador la conserva. Según las ecuaciones, el módulo del girador posee unidades de esfuerzo dividido por flujo, aunque esto no siempre es así ya que puede presentarse el caso de ser adimensional.

- **DIAGRAMAS DE USO PARA LOS PUERTOS-2**

La siguiente imagen (**figura 13**) muestra cómo se incorporan los transformadores y giradores en los diagramas de Bond Graph y las ecuaciones que los relacionan.



**Figura 13:** Puertos-2.

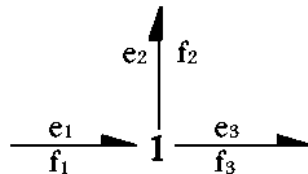
Estos elementos son muy importantes ya que son éstos los que permiten el cambio de potencia entre un sistema físico y otro.

### 2.3.1.3. PUERTOS-3

Los puertos-3 son llamados *puertos de unión* y son la base en la elaboración de modelos de Bond Graph. Estos puertos son importantes ya que en ellos se definen las ecuaciones de la conservación de la energía. Dichas uniones se utilizan para conectar tres o más puertos de energía dentro de un subsistema y representan los dos tipos de conexión existentes en gran cantidad de sistemas dinámicos, la conexión en serie y la conexión en paralelo. Los dos tipos de unión se llaman **unión-1** y **unión-0** y cada una se caracteriza por mantener alguna de las dos variables generalizadas (esfuerzo y flujo) constante, mientras la otra se distribuye entre los puertos de tal manera que deben cumplirse las leyes de conservación de la energía.

- **UNIÓN-1**

Es la unión de flujo común y balance de esfuerzos, característica principal de aquellos puertos del subsistema que están conectados en serie. La **figura 14** muestra la representación gráfica de este tipo de uniones:



**Figura 14:** Distribución de la unión-1.

Nótese que  $e_1$  entra a la unión-1 mientras que  $e_2$  y  $e_3$  salen de la unión-1, de tal manera que satisface las siguientes igualdades:

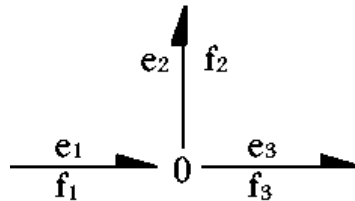
$$f_1 = f_2 = f_3$$

$$e_1 - e_2 - e_3 = 0$$

De esta manera se satisface la conservación de la energía. Por otro lado, al tratarse de una unión cuyos elementos están conectados en serie, el flujo en los tres puertos es el mismo.

- **UNIÓN-0**

La *unión-0* es utilizada en Bond Graph para enlazar aquellos puertos del subsistema que poseen esfuerzo común y balance de flujos, característica que es propia de los elementos conectados en paralelo. En la **figura 15** se ilustra la representación gráfica de las uniones-0:



**Figura 15:** Distribución de la unión-0.

En la imagen se puede apreciar la conexión en paralelo de tres puertos, donde  $f_1$  entra a la unión-0, mientras que  $f_2$  y  $f_3$  salen de dicha unión. Por lo tanto, se satisfacen las siguientes igualdades:

$$e_1 = e_2 = e_3$$

$$f_1 - f_2 - f_3 = 0$$

Así, el balance de flujos mantiene las propiedades de conservación de energía y, al tratarse de una unión cuyos puertos están conectados en paralelo, el esfuerzo es el mismo en los tres elementos.

- **RELACIÓN ENTRE LAS UNIONES-0 Y UNIONES-1 EN DIFERENTES SISTEMAS FÍSICOS**

En la siguiente tabla se ordena la relación que existe entre las uniones antes mencionadas con las variables energéticas de tres sistemas físicos diferentes.

**Tabla 7:** Relación entre las uniones y los dominios físicos.

TIPOS DE UNIÓN	DOMINIOS		
	ELÉCTRICO	MECÁNICO	HIDRÁULICO
UNIÓN-0	Voltaje Común	Fuerza Común	Presión Común
UNIÓN-1	Corriente Común	Velocidad Común	Caudal Común

Es importante mencionar que la orientación de los Bonds suele colocarse de manera arbitraria siempre y cuando no se vea afectada la propiedad de conservación de energía. De tal manera que las ecuaciones en la distribución de flujo para las uniones-0 y para la distribución de los esfuerzos para las uniones-1, cambiarán dependiendo de la orientación de los bonds. Este es un detalle que, de no plantearse de forma adecuada, traerá eventualidades en pasos posteriores dentro del proceso de modelado.

### 2.3.2. BOND ACTIVO

Un bond activo se representa por una flecha completa (a diferencia de un bond que es una semiflecha) y se utiliza para comunicar sólo una de las dos variables generalizadas (flujo o esfuerzo) en una sola dirección. Tiene la característica de que, a través de un bond activo pasa una señal de potencia cero, es decir, el enlace no consume energía por lo que implementarlos no afecta el balance energético del sistema.

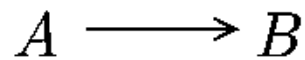


Figura 16: Bond Activo.

La **figura 16** muestra la forma en que se implementa un bond activo que va de un punto A, a un punto B. Generalmente se utilizan los bonds activos para conectar detectores en uno o varios puntos del sistema ya que éstos no consumen energía. Otro ejemplo común es utilizarlos para la modulación de algunas fuentes.

### 2.3.3. DETECTORES

Los *detectores* son elementos implementados en la simulación de los modelos en Bond Graph y sirven para analizar alguna de las variables de potencia. En términos generales, existen dos tipos de detectores, de flujo y de esfuerzo. Los detectores van acompañados de un bond activo entre el detector y el punto del diagrama que se desea analizar. Si el detector se conecta en una unión-0, quiere decir que se desea medir la variable de esfuerzo mientras que, si se conecta en una unión-1, entonces se estará midiendo la variable de flujo.

### 2.3.4. CAUSALIDAD

Para organizar las ecuaciones de las leyes constitutivas de los elementos de un sistema dinámico y sus relaciones, es necesario realizar decisiones del tipo causa-efecto en las ecuaciones que definen el estado del sistema modelado. Estas relaciones de causa-efecto para esfuerzos y flujos son representadas en direcciones opuestas. Para identificar la causalidad, en Bond Graph se hace uso de una pequeña barra vertical en uno de los extremos de cada bond; esta marca lleva por nombre *trazo causal*.

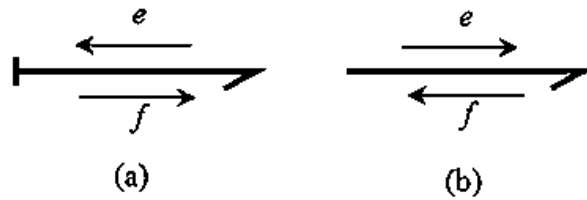


Figura 17: Representación de la causalidad en un bond.

En la figura anterior se observa que el trazo causal puede ubicarse al comienzo del bond [(a)] o al final de la semiflecha [(b)]. Obsérvese también que, en cualquiera de ambos casos el esfuerzo entra al trazo causal mientras que el flujo sale del mismo.

La ubicación del trazo causal siempre dependerá del tipo de elementos que une el bond y serán descritos a continuación.

### 2.3.4.1. CAUSALIDAD NECESARIA

Este tipo de causalidad se asigna únicamente a los puertos-1 activos (fuentes) y tienen prioridad a la hora de realizar el modelo en Bond Graph.

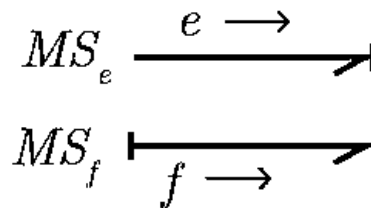


Figura 18: Causalidad necesaria.

En la figura anterior se puede observar cómo se aplica la causalidad necesaria a los dos tipos de fuente. Se puede observar que en la fuente de esfuerzo la causalidad se encuentra en la punta del bond ya que el esfuerzo siempre entra al trazo causal.

Por otra parte, en la fuente de flujo se nota que el trazo causal se ubica al comienzo del bond porque el flujo siempre sale del trazo causal.

### 2.3.4.2. CAUSALIDAD INTEGRAL Y DERIVATIVA

La causalidad integral y derivativa es un tipo de causalidad que únicamente se asigna a los puertos-1 pasivos que almacenan energía, es decir, a los elementos **C** y a los elementos **I**. Para facilitar el proceso del modelado en Bond Graph es preferible que todos los elementos tengan causalidad integral, sin embargo, habrá modelos en los que esto no es posible por lo que es importante analizar también la causalidad derivativa.



- CAUSALIDAD INTEGRAL

La *causalidad integral* se asigna a los elementos que almacenan energía bajo el criterio de las siguientes ecuaciones:

$$\begin{array}{c} e \leftarrow \\ \hline f \rightarrow \end{array} C:C_1$$

$$q = Ce \quad f = \frac{dq}{dt}$$

$$e = \frac{1}{C}q = \frac{1}{C} \int f dt$$

Figura 19: Causalidad integral de elementos C.

$$\begin{array}{c} e \rightarrow \\ \hline f \leftarrow \end{array} I:L_1$$

$$p = Lf \quad e = \frac{dp}{dt}$$

$$f = \frac{1}{L}p = \frac{1}{L} \int e dt$$

Figura 20: Causalidad integral de elementos I.

Se puede resumir que, para asignar causalidad integral para los elementos **C**, el trazo causal se ubica en el comienzo del bond. A su vez, para asignar causalidad integral a los elementos **I**, el trazo causal se ubica al final del bond.

- CAUSALIDAD DERIVATIVA

Para facilitar el modelado en Bond Graph es recomendable que todos los elementos de almacenamiento tengan causalidad integral, sin embargo, algunos modelos no lo permiten. La *causalidad derivativa* se presenta cuando el trazo causal queda de forma inversa a la causalidad integral. La causalidad derivativa se asigna bajo las siguientes ecuaciones:

$$\begin{array}{c} e \rightarrow \\ \hline f \leftarrow \end{array} C:C_1$$

$$e = \frac{dp}{dt} \quad p = Lf$$

$$e = L \frac{df}{dt}$$

Figura 21: Causalidad derivativa de los elementos C.

$$\begin{array}{c} e \leftarrow \\ \hline f \rightarrow \end{array} I:L_1$$

$$f = \frac{dq}{dt} \quad q = Ce$$

$$f = C \frac{de}{dt}$$

Figura 22: Causalidad derivativa de los elementos I.

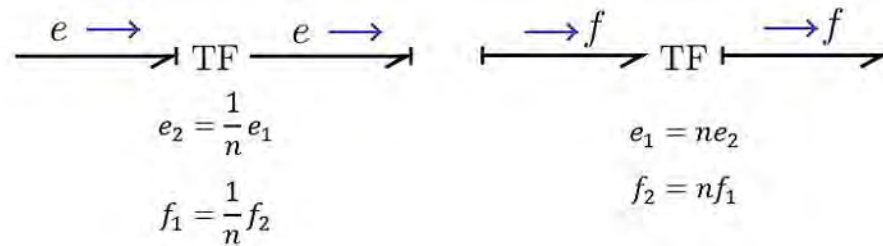
Entonces, se dice que los elementos **C** tienen causalidad derivativa cuando el trazo causal se encuentra en la punta del bond mientras que para los elementos **I**, su trazo causal se encuentra al inicio del bond.

### 2.3.4.3. CAUSALIDAD RESTRICTIVA

La *causalidad restrictiva* es exclusiva para los puertos-2 (giradores y transformadores) y puertos-3 (uniones-1 y uniones-0).

- **TRANSFORMADORES Y GIRADORES**

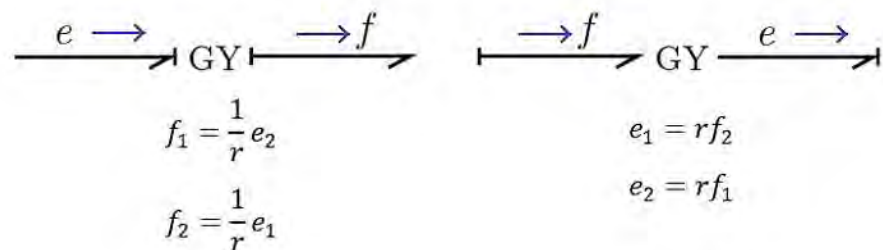
Los transformadores están limitados a dos posibilidades de causalidad, mismas que se muestran en la siguiente imagen (**figura 23**) junto a sus ecuaciones correspondientes:



**Figura 23:** Causalidad de los transformadores.

Se puede notar que los transformadores pueden tener su trazo caudal en las puntas de los bonds o, de lo contrario, en los comienzos de los mismos.

Por su parte, con los giradores sucede algo parecido. También se encuentran limitados a dos posibles modos de causalidad las cuales se pueden ver en la **figura 24** junto con sus ecuaciones:

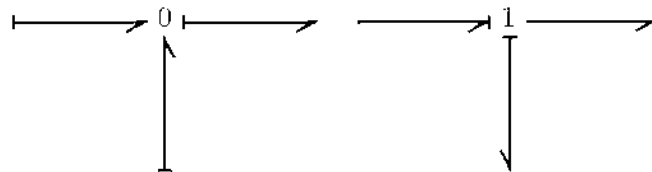


**Figura 24:** Causalidad de los giradores.

Con los giradores se deben tener los trazos causales invertidos, es decir, uno en la punta del bond y el otro en la base o, de lo contrario, uno en la base del bond y el otro en la punta.

- **UNIONES-1 Y UNIONES-0**

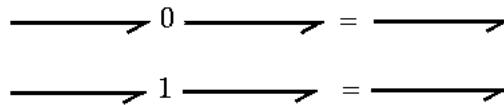
Las uniones-1 y las uniones-0 también tienen una norma restrictiva en el acomodo de los trazos causales de los elementos que están conectados a éstos puertos. La **figura 25** muestra cómo es dicha restricción:



**Figura 25:** Causalidad de las uniones-0 y uniones-1.

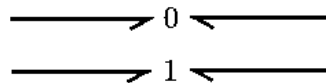


3. Conectar los elementos que involucran a esa unión mediante los bonds, considerando que la dirección de la semiflecha debe ser congruente con el flujo de energía, partiendo de las fuentes hacia los demás elementos.
4. Se elimina la unión-0 que se tomará como referencia junto con los bonds que se encuentran conectados a éste.
5. Se simplifica el diagrama tomando en cuenta las siguientes equivalencias:



**Figura 27:** Equivalencias de bonds.

Se debe tener la precaución de no simplificar las uniones cuando los bond están encontrados:



6. Una vez que se ha simplificado, se debe asignar la causalidad a todos los bonds del diagrama siguiendo las reglas que se mencionaron en apartados anteriores.

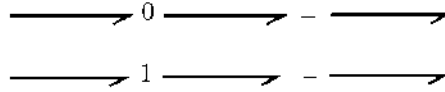
## 2.4.2. METODOLOGÍA PARA OBTENER EL DIAGRAMA EN BOND GRAPH DE SISTEMAS MECÁNICOS

En los sistemas mecánicos es más sencillo identificar las velocidades de cada uno de los elementos que lo componen y sus relaciones, en lugar de considerar las fuerzas que se presentan en el mismo. Cuando se tiene un sistema mecánico lo más sencillo es identificar las velocidades de cada elemento y sus relaciones, en lugar de considerar las fuerzas que se presentan en el sistema.

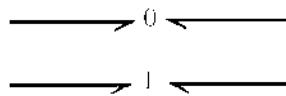
Es por esto que el proceso para modelar sistemas mecánicos se basa en la identificación de las velocidades presentes en el sistema sin descuidar el análisis de fuerzas. El procedimiento se puede resumir en los siguientes pasos:

1. Se determinan todas las velocidades existentes en el sistema, incluyendo las velocidades relativas y se coloca una unión-1 a cada una de ellas.
2. Se identifican las fuentes de velocidad y/o de fuerza, colocando un enlace a su unión correspondiente.
3. Se identifican los elementos transformadores y/o giradores y se colocan entre las uniones uno correspondientes. Las uniones uno restantes se enlazarán a través de uniones cero.
4. Se identifican los elementos resistivos y capacitivos del sistema. Si se tienen establecidas velocidades relativas que correspondan a éste tipo de elementos, se asignan a dichas uniones uno a través de un enlace. En caso de tener elementos de éste tipo que no corresponden a las velocidades relativas, estos se ubicarán entre las dos uniones uno, por medio de una unión cero de la cual se enlazará cada elemento.

5. Se determinarán las inercias del sistema y se conectarán con sus respectivas uniones uno.
6. Observando la dirección del flujo de potencia en el sistema y de acuerdo a ésta, los enlaces se convertirán en bonds respetando el sentido correspondiente a cada elemento.
7. Se eliminan las velocidades de referencia.
8. El gráfico resultante se simplifica utilizando las reglas de los bonds:



Teniendo particular cuidado en no simplificar aquellas uniones cuyos bonds están encontrado.



9. El último paso es asignar la causalidad de todos los bonds en el diagrama.

### 2.4.2.1. EJEMPLO DEL SISTEMA MASA-RESORTE CON FRICCIÓN

A continuación, se muestra el esquemático de uno de los sistemas más simples del dominio mecánico, el sistema masa-resorte con fricción, mismo que servirá para ejemplificar el proceso de modelado en Bond Graph.

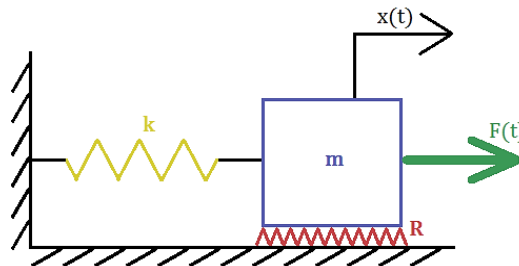


Figura 28: Ejemplo sistema masa-resorte con fricción.

#### • PASO 1:

Se dibuja una unión-1 por cada punto de velocidad existente en el sistema, ya sea relativa o absoluta. En la **figura 29** se puede observar que se han colocado las cuatro uniones-1 y se ha colocado una pequeña marca para indicar a qué velocidad representa, siendo  $V_{ref}$  la referencia,  $V_k$  es la velocidad asociada al resorte,  $V_m$  es la velocidad de la masa y  $V_b$  es la velocidad asociada al efecto de fricción.

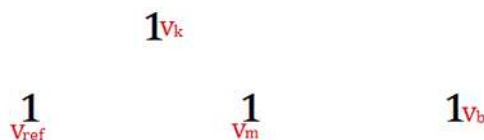
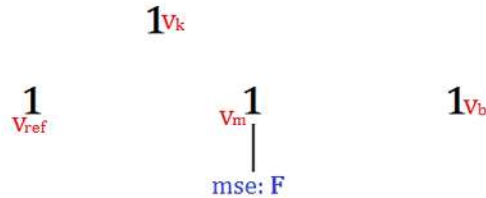


Figura 29: Paso 1 del Bond Graph mecánico.

- **PASO 2:**

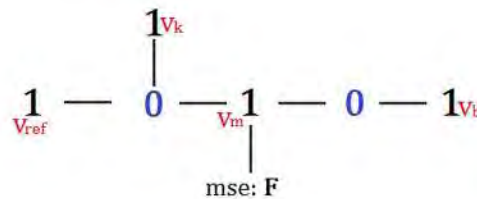
El segundo paso es ubicar las fuentes de esfuerzo y flujo, enlazándolas a los puntos de acción. En este caso, sólo se tiene una fuente de esfuerzo correspondiente a la fuerza que se ejerce sobre la masa.



**Figura 30:** Paso 2 del Bond Graph mecánico.

- **PASO 3:**

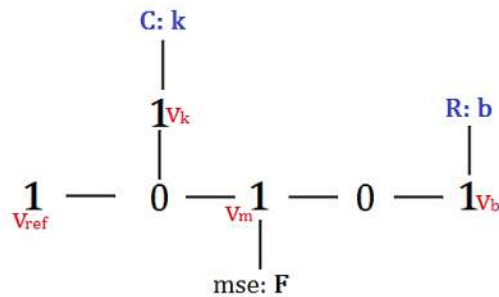
Una vez ubicadas las fuentes se deben colocar los elementos de transformación (giradores y transformadores) y posteriormente colocar uniones-0 para enlazar a las uniones-1 restantes. El ejemplo que se está utilizando no contiene elementos de transformación, por lo tanto, solo resta enlazar las uniones-1 por medio de uniones-0 siguiendo la lógica del sistema.



**Figura 31:** Paso 3 del Bond Graph mecánico.

- **PASO 4:**

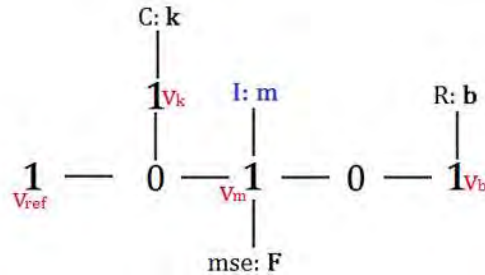
En este paso, es necesario colocar todos los elementos resistivos y capacitivos del sistema ya sea a sus respectivas uniones de velocidad relativa (unión-1) o en su defecto, de existir elementos de este tipo que no se asocian a una velocidad, se colocarán por medio de una unión-0. El sistema que se está analizando tiene un elemento capacitivo y otro resistivo los cuales si se asocian a una velocidad relativa.



**Figura 32:** Paso 4 del Bond Graph mecánico.

- **PASO 5:**

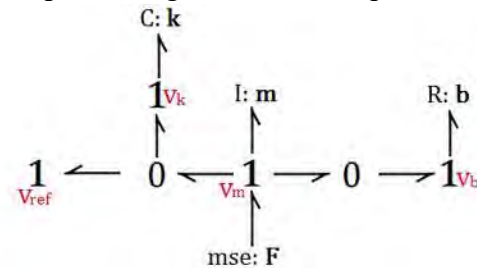
El siguiente paso es asociar los elementos de inercia a sus respectivas uniones de velocidad. Como el sistema sólo tiene un elemento de inercia (que es la masa), entonces se relaciona a su unión de velocidad a través de un enlace.



**Figura 33:** Paso 5 del Bond Graph mecánico.

- **PASO 6:**

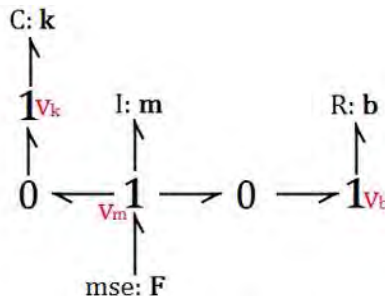
El sexto paso es identificar las direcciones del flujo de potencia entre los elementos del sistema y sustituir los enlaces por bonds cuya dirección estará determinada por dicho flujo. Se recomienda comenzar por las fuentes ya que de ahí parte el flujo, luego a los elementos de transformación, posteriormente a los elementos de almacenamiento y disipación de energía para finalizar con los enlaces intermedios los cuales se puede asignar el sentido que más convenga.



**Figura 34:** Paso 6 del Bond Graph mecánico.

- **PASO 7:**

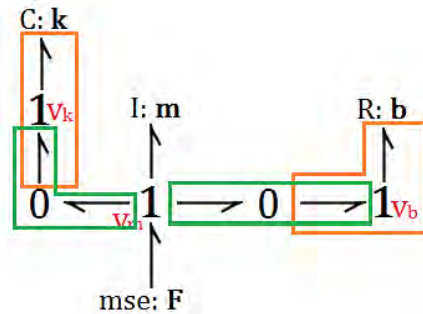
Este paso únicamente involucra eliminar las referencias.



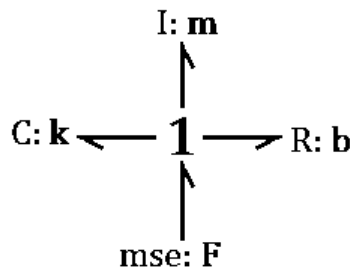
**Figura 35:** Paso 7 del Bond Graph mecánico.

- **PASO 8:**

Una vez eliminadas las referencias, el siguiente paso es reducir el diagrama de Bond Graph utilizando las reglas de los bonds que permite reducir aquellas uniones que quedan flotando siempre y cuando la dirección de los bonds sea en el mismo sentido. Para este ejemplo se pueden reducir primero las uniones uno (encerradas en los recuadros amarillos) y después las uniones cero (encerradas por los recuadros verdes).



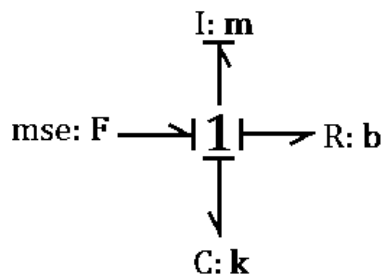
Es así que el diagrama resultante corresponde al mostrado en la siguiente imagen (**figura 36**).



**Figura 36:** Paso 8 del Bond Graph mecánico.

- **PASO 9:**

Para finalizar el diagrama en Bond Graph de este sistema mecánico, es indispensable colocar la causalidad a los bonds, la cual se representa por una barra perpendicular al bond, siguiendo un orden. Primero debe colocarse a las fuentes (causalidad necesaria), siguiendo con los elementos de almacenamiento (causalidad integral o derivativa), después a los elementos transformadores (giradores y transformadores) para finalizar con los elementos de disipación (causalidad arbitraria).



**Figura 37:** Bond Graph del sistema masa-resorte con fricción.



Se puede observar que existe un cambio de posición de los elementos entre la imagen del paso 9 y la imagen del paso 8, y se realizó únicamente con el objetivo de hacer más estético al diagrama sin alterar su funcionalidad.

### 2.4.3. METODOLOGÍA PARA OBTENER EL DIAGRAMA EN BOND GRAPH DE SISTEMAS ELÉCTRICOS

Así como ya se vio que en los sistemas mecánicos se comienza dibujando uniones-1 en los puntos de velocidades absolutas y relativas por ser sencillos de ubicar, en los sistemas eléctricos resulta muy práctico comenzar por los puntos donde existen voltajes en común ya que son los más evidentes y generalmente se encuentra en las uniones físicas de los elementos del circuito. De tal manera que se debe partir de la identificación de dichos puntos de voltaje y se comenzará el diagrama en Bond Graph dibujando uniones-0 (esfuerzo común) en los puntos mencionados.

El procedimiento consta de tantos pasos que se enlistarán a continuación:

1. Colocar una unión-0 en cada nodo que interconecta uno o varios elementos incluyendo el voltaje de referencia (tierra).
2. En caso de existir elementos de transformación (giradores y/o transformadores), éstos se deben enlazar entre dos uniones-1 formando un conjunto, mismo que deberá estar ubicado entre las uniones-0 correspondientes.
3. Se identifican las fuentes (voltaje y/o corriente) y los elementos de almacenamiento y disipación (resistencias, capacitores e inductancias) para colocarlas entre las uniones-0 por medio de una unión-1 que enlazará a cada elemento.
4. Deben enlazarse todas las uniones restantes siguiendo el orden natural del circuito.
5. Se describe el flujo de potencia sustituyendo los enlaces por bonds cuya dirección respetará la lógica del circuito.
6. Se eliminan las uniones-0 de referencia (tierras).
7. Se simplifica el gráfico resultante aplicando las propiedades de los bonds.

$$\begin{array}{c} \longrightarrow 0 \longrightarrow = \longrightarrow \\ \longrightarrow 1 \longrightarrow = \longrightarrow \end{array}$$

8. Se asigna la causalidad a los bonds de cada elemento y a los bonds que interconectan a éstos.

#### 2.4.3.1. EJEMPLO DEL SISTEMAS RLC

La **figura 38** muestra el circuito RLC que se utilizará para ejemplificar la metodología de Bond Graph en el dominio eléctrico. El circuito en cuestión se compone de cuatro elementos que son una fuente de voltaje, una resistencia, una inductancia y un capacitor conectados todos en serie.

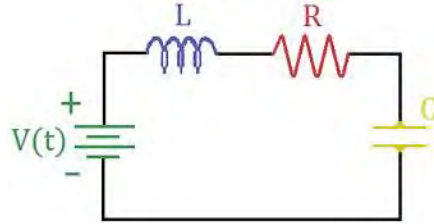


Figura 38: Ejemplo sistema RLC.

- **PASO 1:**

Se dibujan las uniones-0 en cada nodo que interconectan a los elementos del sistema.

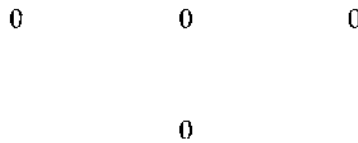


Figura 39: Paso 1 del Bond Graph eléctrico.

- **PASO 2:**

Se deben colocar los elementos de transformación (giradores y transformadores). Debido a que el sistema no contiene elementos de transformación, éste paso se debe pasar.

- **PASO 3:**

En este paso se deben identificar las fuentes y las resistencias, capacitores e inductancias colocando una unión-1 en la posición de cada elemento enlazando la unión-1 con el elemento.

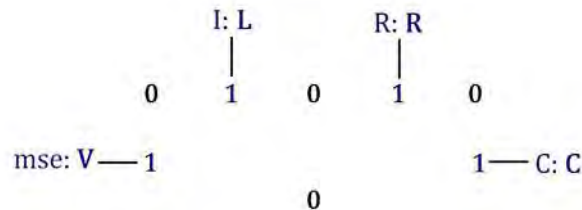


Figura 40: Paso 3 del Bond Graph eléctrico.

- **PASO 4:**

Se observa que ya no hay elementos por colocar, entonces se procede a enlazar todas las uniones restantes cuidando la lógica del circuito.

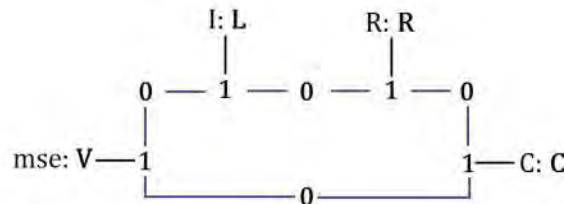
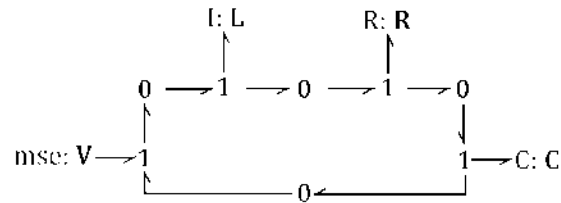


Figura 41: Paso 4 del Bond Graph eléctrico.

- **PASO 5:**

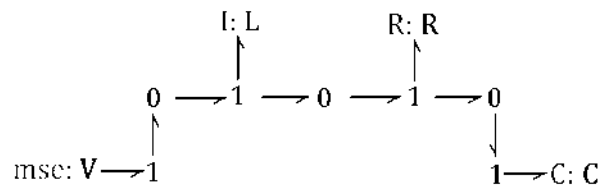
En este paso, se cambian los enlaces por bonds considerando el sentido del flujo de potencia.



**Figura 42:** Paso 5 del Bond Graph eléctrico.

- **PASO 6:**

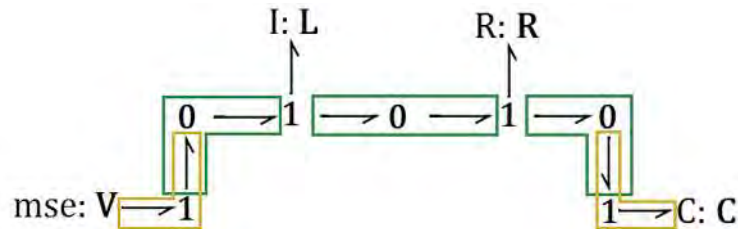
El sexto paso es eliminar la unión de referencia que generalmente es el polo negativo de la fuente.



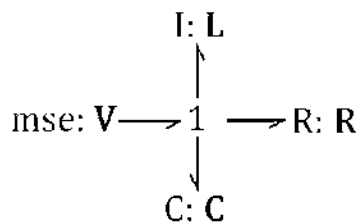
**Figura 43:** Paso 6 del Bond Graph eléctrico.

- **PASO 7:**

El penúltimo paso es reducir el diagrama aplicando las propiedades de los bonds. En la figura se muestra dentro de los recuadros amarillos las uniones uno que se pueden reducir, y dentro de los recuadros verdes las uniones cero que se pueden reducir.



Es así que el modelo reducido queda como se muestra en la siguiente figura:

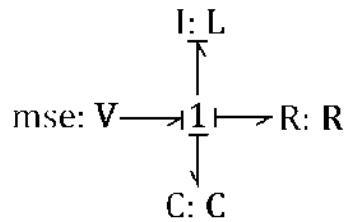


**Figura 44:** Paso 7 del Bond Graph eléctrico.

- **Paso 8:**

Finalmente, se le asigna la causalidad a los bonds del diagrama reducido. Para incorporarla al diagrama es necesario seguir el orden recomendado para no evitar problemas futuros.

Se comienza trazando la causalidad necesaria (fuentes), después se traza la causalidad integral y/o derivativa (elementos capacitivos e inductivos), continuando con la causalidad restrictiva (transformadores y/o giradores) y finalizar con la causalidad arbitraria (elementos resistivos).



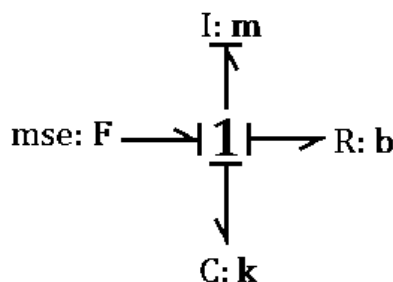
**Figura 45:** Bond Graph del sistema RLC.

#### 2.4.4. SISTEMAS EQUIVALENTES EN BOND GRAPH

En los apartados anteriores se explicó a grandes rasgos la metodología general para elaborar un diagrama en Bond Graph para cualquier dominio físico y se ejemplificó el proceso para un sistema mecánico y otro eléctrico, sistemas en apariencia muy diferentes, pero guardan ciertas similitudes. De éstos mismos ejemplos ya se dedujo en el capítulo uno (apartado 1.1.5.) que el sistema masa-resorte con fricción (del dominio mecánico) es equivalente con el sistema RLC (del dominio eléctrico) ya que sus ecuaciones diferenciales son idénticas.

Es por eso que se han utilizado los mismos sistemas para ejemplificar la metodología de Bond Graph en ambos dominios y demostrar que con esta metodología no sólo son iguales matemáticamente, ya que también se obtiene el mismo diagrama en Bond Graph a pesar de ser dominios diferentes. Esto representa una ventaja muy importante al determinar sistemas equivalentes entre todo el espectro de dominios físicos ya que existen dominios en los cuales obtener el modelo matemático por medio de las técnicas propias del dominio resulta muy complejo. Otra gran ventaja es, que una vez que se obtiene el gráfico en Bond Graph se pueden obtener las ecuaciones correspondientes a cada sistema de una forma sencilla comparado con las técnicas habituales (diagramas de cuerpo libre, superposición, análisis de mallas, etc.).

Si se observa la **figura 46** que corresponde al diagrama en Bond Graph del sistema mecánico masa-resorte con fricción, se pueden distinguir los elementos que componen a ese sistema y gracias a la generalización de esta metodología, ya se puede saber qué tipo de elementos se requieren para construir su sistema equivalente dentro de los demás dominios físicos.



**Figura 46:** Bond Graph del sistema masa-resorte con fricción.

Es así como se puede deducir que, si se quisiera obtener el sistema equivalente en el dominio eléctrico del ejemplo anterior, bastará con cambiar la masa por un inductor, la fricción por una resistencia, el resorte por un capacitor y la fuerza por una fuente de voltaje. Para demostrarlo basta con comparar ambos diagramas en Bond Graph que ya se obtuvieron por separado (el sistema masa-resorte con fricción y el sistema RLC) y ver que efectivamente son iguales.

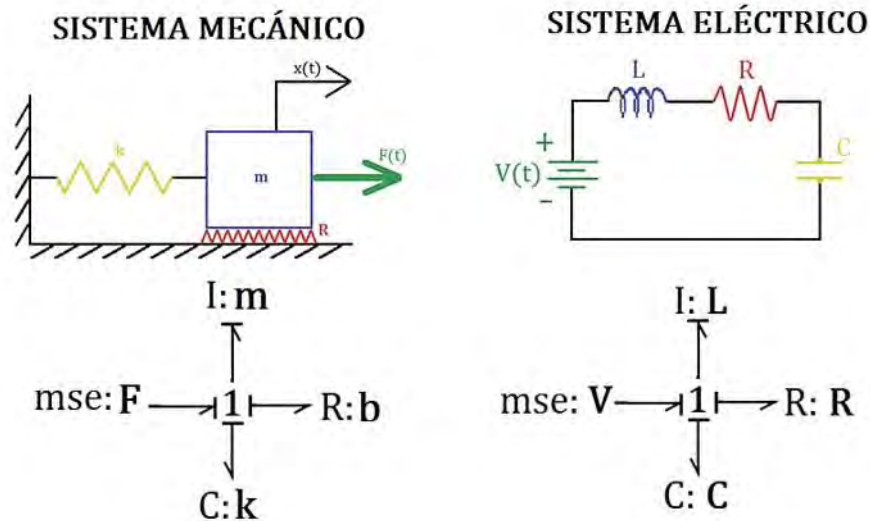


Figura 47: Comparativa del Bond Graph de ambos sistemas.

## 2.5. OBTENCIÓN DEL MODELO MATEMÁTICO

Una vez que se obtiene el diagrama en Bond Graph, el siguiente paso es obtener las ecuaciones que determinan el comportamiento del sistema que se está estudiando. En los siguientes apartados se describirá brevemente los conceptos necesarios para lograr extraer el modelo matemático, para ello se recurrirá al ejemplo del sistema masa-resorte con fricción cuyo diagrama ya se obtuvo anteriormente. Antes de comenzar con los conceptos principales involucrados en la obtención del modelo matemático, se debe preparar el diagrama enumerando todos y cada uno de los bonds en él. La numeración de los bonds es aleatoria o del gusto de la persona que está modelando, con la única condición de no repetir algún número en dos o más bonds. Es así que, tomando el ejemplo ya mencionado, se optó por numerar a los bonds del diagrama de la siguiente manera:

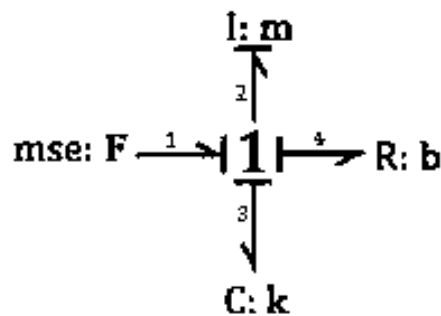


Figura 48: Diagrama de Bond Graph numerado.

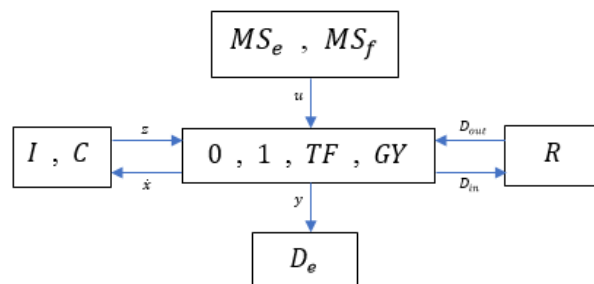
Una vez que se ha numerado el diagrama se puede continuar con la obtención de las ecuaciones, las cuales culminarán en una representación en espacio de estados. Esta representación tiene gran ventaja sobre las técnicas de control clásico porque un modo compacto y facilita el análisis del sistema cuando se tiene múltiples entradas y salidas, tanto lineales como no-lineales. Una representación en espacio de estados es un modelo matemático conformado por un conjunto de entradas, salidas y variables de estado (que en conjunto se llamarán vector de entrada, vector de salida y vector de estados respectivamente) relacionadas entre sí por ecuaciones diferenciales (en el dominio del tiempo) que pueden ser de cualquier orden, que combinadas forman una **ecuación diferencial matricial** de primer orden.

Por otro lado, se llamarán variables de estado al subconjunto más pequeño de variables con las cuales se puede determinar su estado dinámico completo en un determinado instante. El número mínimo de dichas variables de estado suele ser igual al orden de la ecuación diferencial del sistema, mismo que es determinado por la cantidad de elementos de almacenamiento que tiene ese sistema.

### 2.5.1. VECTORES CLAVE

En un Bond Graph, los bonds se pueden clasificar en internos y externos. Los internos son aquellos pertenecientes a los elementos de unión y de transformación (uniones-0, uniones-1, transformadores y giradores), mientras que los bonds externos son aquellos pertenecientes a los elementos de almacenamiento, de disipación, de generación de energía y detectores (fuentes, elementos capacitivos, elementos inerciales y elementos resistivos).

El diagrama de la **figura 49** muestra la distribución de los elementos en cinco campos y la relación que existe entre ellos.



**Figura 49:** Diagrama de la estructura de unión.

A estas relaciones se les conoce como *vectores clave* que son:

- $\mathbf{x}$ , es el vector de estado relacionado a los elementos de almacenamiento ( $\mathbf{I}$  y  $\mathbf{C}$ ).
- $\dot{\mathbf{x}}$ , es el vector de derivadas referentes a los elementos de almacenamiento ( $\mathbf{I}$  y  $\mathbf{C}$ ).
- $\mathbf{z}$ , es el vector de estado de coenergía debido a los elementos de almacenamiento ( $\mathbf{I}$  y  $\mathbf{C}$ ).
- $\mathbf{u}$ , es el vector de entradas relacionado con las fuentes ( $\mathbf{MS}_e$  y  $\mathbf{MS}_f$ ).
- $\mathbf{D}_{in}$ , es el vector de entrada debido a los elementos de disipación ( $\mathbf{R}$ ).

- $D_{out}$ , es el vector de salida de los elementos de disipación ( $R$ ).
- $y$ , es el vector de salida referente a los detectores ( $D_e$ ).

Lo anterior se presenta para el caso de los elementos en causalidad integral, sin embargo, de existir elementos en causalidad derivativa se presentarán los siguientes casos:

- $x_d$ , es el vector de estado de los elementos  $I$  y  $C$  en causalidad derivativa.
- $\dot{x}_d$ , es el vector de derivadas relacionado a los elementos  $I$  y  $C$  en causalidad derivativa.
- $z_d$ , es el vector de estado de coenergía referente a los elementos  $I$  y  $C$ .

La formación de los vectores se realizará tomando como base las siguientes tablas:

**Tabla 8:** Tabla para formar los vectores clave.

	$I$	$C$
$x$	$p$	$q$

Vector de estado

	$I$	$C$
$\dot{x}$	$e$	$f$

Vector de derivadas

	$I$	$C$
$z$	$f$	$e$

Vector de estado de coenergía

## 2.5.2. RELACIONES CONSTITUTIVAS

Las relaciones constitutivas se obtienen de las siguientes ecuaciones:

- Para elementos con causalidad integral:

$$z = Fx$$

Donde  $F$  es una matriz cuadrada diagonal cuyos elementos serán el inverso de los parámetros de los elementos  $I$  y  $C$ .

- Para elementos con causalidad derivativa:

$$z_d = F_d x_d$$

Donde  $F_d$  es una matriz cuadrada diagonal cuyos elementos serán el inverso de los parámetros de los elementos  $I$  y  $C$  con causalidad derivativa.

- Para elementos de disipación de energía:

$$D_{out} = L D_{in}$$

Donde  $L$  debe ser una matriz cuadrada diagonal cuyos elementos serán el inverso del parámetro del elemento  $R$  si la causalidad se encuentra en la punta del bond, o únicamente el parámetro si la causalidad se encuentra en la base del bond.

### 2.5.3. MATRIZ DE ESTRUCTURA UNIÓN

Se le llama matriz de estructura unión a la relación que existe entre los vectores y los elementos de unión del diagrama de la **figura 49** y se determina de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ D_{in} \\ y \\ Z_d \end{pmatrix} = [S] \begin{pmatrix} Z \\ D_{out} \\ u \\ \dot{x}_d \end{pmatrix}$$

A su vez, la matriz  $[S]$  se compone de diversas submatrices:

$$S = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & 0 \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & 0 \\ S_{41} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

De tal modo que la expresión final se puede escribir como:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ D_{in} \\ y \\ Z_d \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & 0 \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & 0 \\ S_{41} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} Z \\ D_{out} \\ u \\ \dot{x}_d \end{pmatrix}$$

**Figura 50:** Matriz de estructura unión con elementos en causalidad derivativa.

Sin embargo, la matriz anterior contempla también a los elementos con causalidad derivativa que, aunque se lleguen a presentar casos, lo ideal es que en el sistema estudiado sólo aparezcan elementos con causalidad integral. Es así que, si todos los elementos en el sistema tienen causalidad integral (caso deseado) se puede reducir la matriz estructura unión a la siguiente:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ D_{in} \\ y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} Z \\ D_{out} \\ u \end{pmatrix}$$

**Figura 51:** Matriz de estructura unión para elementos en causalidad integral.

Los elementos que conforman a la matriz  $[S]$  y sus submatrices, toman valores de  $\pm \mathbf{1}$ ,  $\mathbf{0}$ ,  $\pm \mathbf{r}$  y  $\pm \mathbf{n}$ ; donde  $\mathbf{r}$  y  $\mathbf{n}$  son los módulos del girador y del transformador respectivamente. Existen dos propiedades dentro de la matriz  $[S]$  que se deben de cumplir. Esas propiedades son las siguientes:

- $S_{11}$  y  $S_{22}$  deben ser matrices cuadradas antisimétricas.
- $S_{12}$  debe ser la transpuesta negativa de  $S_{21}$  o viceversa.



Ambas propiedades están basadas en el principio de conservación de energía y son muy importantes ya que, si se construye la matriz de estructura unión y no cumple con estas, debe existir algún error mientras se realizaba y se tendrá que revisar una vez más el proceso de construcción.

## 2.5.4. OBTENCIÓN DEL ESPACIO DE ESTADOS

La teoría clásica de control consiste en estudiar las propiedades de los sistemas a partir de su comportamiento entrada-salida. La teoría moderna enfatiza en el concepto de estado del sistema. Un estado del sistema en un instante dado, es el valor de una variable interna del sistema del sistema que describen la evolución del mismo conforme pasa el tiempo. En la teoría de control, generalmente se utilizan las *funciones de transferencia* para llegar al espacio de estados mediante un proceso que podría resultar complejo, sin embargo, al trabajar con la metodología de Bond Graph permite llegar al espacio de estados de forma directa, convirtiéndolo en una gran opción para analizar sistemas de control.

El proceso para obtener el espacio de estados con Bond Graph, comienza con el desarrollo de la matriz de estructura unión que ya se obtuvo previamente.

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ D_{in} \\ y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} Z \\ D_{out} \\ u \end{pmatrix}$$

Si se desarrollan los elementos que componen a la matriz de estructura unión se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$\dot{x} = s_{11}Z + s_{12}D_{out} + s_{13}u$$

$$D_{in} = s_{21}Z + s_{22}D_{out} + s_{23}u$$

$$y = s_{31}Z + s_{32}D_{out} + s_{33}u$$

Realizando una serie de despejes y sustituciones entre las ecuaciones anteriores junto a las expresiones  $\mathbf{z} = \mathbf{F}\mathbf{x}$  y  $\mathbf{D}_{out} = \mathbf{L}\mathbf{D}_{in}$ , se puede llegar al espacio de estados con dos expresiones de la siguiente forma:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u$$

$$y = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}u$$

Donde  $\mathbf{A}$  (matriz de estados),  $\mathbf{B}$  (matriz de entradas),  $\mathbf{C}$  (matriz de salidas desde los estados) y  $\mathbf{D}$  (matriz de salidas desde las entradas) son matrices que acompañan a los vectores de estados y a los vectores de entradas y son elementos que se deben obtener utilizando las siguientes ecuaciones:

$$A = (s_{11} + s_{12}\mathbf{M}s_{21})F \quad B = (s_{13} + s_{12}\mathbf{M}s_{23})$$

$$C = (s_{31} + s_{32}\mathbf{M}s_{21})F \quad D = (s_{33} + s_{32}\mathbf{M}s_{23})$$

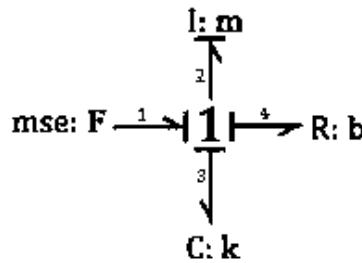
De estas expresiones, el único elemento desconocido es la matriz  $\mathbf{M}$ , ya que tanto la matriz  $\mathbf{F}$  como las submatrices de  $[\mathbf{S}]$  son conocidas. Para obtener la matriz que se desconoce ( $\mathbf{M}$ ) se emplea la siguiente expresión:

$$\mathbf{M} = \mathbf{L}(\mathbf{I} - s_{22}\mathbf{L})^{-1}$$

Ya con el modelo en espacio de estados se pueden obtener propiedades del sistema como observabilidad, controlabilidad y si sus elementos tienen dependencia lineal.

### 2.5.5. EJEMPLO DEL SISTEMA MASA-RESORTE CON FRICCIÓN

Se ejemplificará la obtención del modelo matemático aprovechando el diagrama en Bond Graph del sistema masa-resorte con fricción que ya se obtuvo previamente. El diagrama a utilizar se aprecia en la figura, donde ya se observa que está preparado con la numeración de los bonds.



- ESTABLECER LOS VECTORES CLAVE

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} p_2 \\ q_3 \end{bmatrix} \quad \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} e_2 \\ f_3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{z} = \begin{bmatrix} f_2 \\ e_3 \end{bmatrix} \quad D_{in} = [f_4] \quad D_{out} = [e_4] \quad \mathbf{u} = [e_1]$$

- CONSTRUIR LAS RELACIONES CONSTITUTIVAS

$$\mathbf{z} = \mathbf{F}\mathbf{x} \longrightarrow \begin{bmatrix} f_2 \\ e_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/m & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1/k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_2 \\ q_3 \end{bmatrix}$$

$$D_{out} = \mathbf{L}D_{in} \longrightarrow [e_4] = [\mathbf{R}_3][f_4]$$

- CONSTRUIR LA MATRIZ DE ESTRUCTURA UNIÓN

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ D_{in} \\ \mathbf{y} \end{pmatrix} = [\mathbf{S}] \begin{pmatrix} \mathbf{z} \\ D_{out} \\ \mathbf{u} \end{pmatrix}$$

Para construir la matriz de estructura unión es necesario llenar los campos de la matriz  $[\mathbf{S}]$  relacionando los elementos de los vectores entre sí apoyados por el diagrama.

Recordando que en las uniones-1 el flujo es el mismo para cada elemento conectado, mientras que el esfuerzo es la suma de los que entran menos los que salen. Caso contrario en las uniones-0, donde el esfuerzo es el mismo en cada elemento y el flujo será la suma de los que entran menos los que salen.

$$\begin{bmatrix} e_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_2 \\ e_3 \\ e_4 \\ e_1 \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} e_2 &= e_1 - e_4 - e_3 \\ f_3 &= f_2 \\ f_4 &= f_2 \end{aligned}$$

Es así que la matriz de estructura unión queda de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} e_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_2 \\ e_3 \\ e_4 \\ e_1 \end{bmatrix}$$

De modo que las submatrices formadas son:

$$s_{11} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad s_{12} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad s_{13} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad s_{21} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad s_{22} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}; \quad s_{23} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

- **COMPROBAR QUE SE CUMPLAN LAS PROPIEDADES**

Para verificar que no se cometieron errores al construir la matriz de estructura unión, se verifican las siguientes propiedades:

1.  $s_{11}$  y  $s_{22}$  deben ser antisimétrica.
2. Se debe cumplir la siguiente relación  $s_{12} = -s_{21}^T$ .

Ambas condiciones se cumplen por tanto se puede continuar con el proceso.

- **OBTENER LA MATRIZ  $M$**

Antes de determinar las matrices que conforman al modelo en espacio de estados, es importante obtener la matriz  $M$  que se utilizará más adelante.

$$M = L(I - s_{22}L)^{-1}$$

Debido a que la submatriz  $s_{22}$  es cero, la ecuación se reduce a:

$$M = L$$

Entonces:

$$M = [R_3]$$

- **OBTENER LA MATRIZ A Y B**

Ya se tiene todo para determinar las matrices A y B que componen al espacio de estados. Se comenzará por obtener la matriz A utilizando la siguiente expresión:

$$A = (s_{11} + s_{12}M s_{21})F$$

$$A = \left( \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} [R_3] \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 1/m & 0 \\ 0 & 1/k \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} -R_3/m & -1/K \\ 1/m & 0 \end{bmatrix}$$

Para obtener la matriz B se tiene la siguiente expresión:

$$B = \left( \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} [R_3] \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \right) \longrightarrow B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- **MODELO EN ESPACIO DE ESTADOS**

Finalmente, ya con las matrices se procede a construir el modelo matemático en espacio de estados.

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -R_3/m & -1/K \\ 1/m & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

# CAPÍTULO 3:

## EL AMPLIFICADOR OPERACIONAL

### 3.1. INTRODUCCIÓN

Uno de los dispositivos electrónicos de mayor versatilidad en aplicaciones lineales es el amplificador operacional el cual posee gran popularidad debido a su bajo costo, a que es fácil de utilizar y además cumple con diferentes tareas con sólo cambiar el arreglo de los elementos que lo rodean al realizar un circuito. Una gran ventaja es, que puede ser utilizado en circuitos de mucha utilidad sin la necesidad de conocer a grandes rasgos su estructura interna.

Se atribuye la invención y distribución del amplificador operacional a George Philbrick quien intervino en el diseño de un amplificador operacional con un solo tubo de vacío y lo introdujo al mercado en 1948, los cuales estaban destinados fundamentalmente a las computadoras analógicas. En aquella época, la palabra “operacional” hacía referencia a las operaciones matemáticas y se utilizaban en circuitos capaces de sumar, restar, multiplicar e incluso resolver ecuaciones diferenciales. [11]

En apartados posteriores, se explicará el uso actual de los amplificadores operacionales que, aunque parece que está perdiendo auge debido a las tarjetas electrónicas programables, existen etapas en procesos donde son elementos muy importantes. Es por esto que surge un interés por intentar replicar el comportamiento de este tipo de elementos, pero en otras áreas de la ingeniería.

#### 3.1.1. DESARROLLO Y CONSTRUCCIÓN DEL AMPLIFICADOR OPERACIONAL EN CIRCUITOS INTEGRADOS

Entre los años 1964 y 1967, Fairchild desarrolló los amplificadores operacionales en circuitos integrados con las marcas 702, 709 y 741; mientras que el grupo de National Semiconductor introdujo el 101/301. Dichos amplificadores de circuito integrado revolucionaron algunas áreas de la electrónica por su pequeño tamaño y bajos costos.

Sin embargo, lo más importante es que redujeron drásticamente el trabajo de diseño de circuitos ya que, en vez de la difícil tarea de realizar un amplificador con transistores, los diseñadores podían utilizar del amplificador operacional y unas cuantas resistencias para construir un excelente amplificador.



**Figura 52:** Encapsulado del amplificador operacional 741.

A medida que la tecnología de fabricación adquirió mayor precisión, se realizaron mejoras notables a los amplificadores operacionales en dos aspectos:

### **1. IMPLEMENTACIÓN DE DIVERSOS TIPOS DE TRANSISTORES**

Algunos transistores de unión bipolar (BJT) fueron sustituidos por transistores de efecto de campo (JFET). Estos transistores en la entrada del amplificador operacional toman corrientes muy pequeñas y permiten que los voltajes de entrada varíen entre los límites de la fuente de alimentación. Por otro lado, los transistores de semiconductor de óxido metálico (transistor MOS) ubicados en los circuitos de salida, permiten que la salida se aproxime a milivolts de los límites de la fuente de poder.

### **2. IMPLEMENTACIÓN DE VARIOS AMPLIFICADORES OPERACIONALES EN EL MISMO ENCAPSULADO**

La segunda innovación fundamental fue la invención de los encapsulados de doble y cuádruple amplificador. En el mismo encapsulado de catorce terminales, ocupado por un solo amplificador operacional, los diseñadores fabricaban cuatro individuales, los cuales comparten la misma fuente de poder. [11]

### **3.1.2. LOS AMPLIFICADORES OPERACIONALES ESPECIALIZADOS**

Con el paso del tiempo los amplificadores operacionales (considerados de propósito general) fueron rediseñados para optimizarlos o incorporar ciertas características específicas. Surgen entonces los circuitos integrados de función específica que contienen más de un amplificador operacional, entre otras cosas, para realizar tareas mucho más complejas. Los amplificadores especializados tienen una cantidad importante de aplicaciones incluso, a través de la investigación y la necesidad de reducir el tamaño de las tecnologías, se siguen desarrollando circuitos integrados para tareas específicas como:

- Capacidad de alta corriente, alto voltaje o ambas.
- Módulos para sonar de emisión y recepción.

- Amplificadores múltiples.
- Amplificadores de ganancia programable.
- Instrumentación y control automotriz.
- Circuitos integrados para comunicaciones.
- Circuitos integrados de radio, audio y video.

### 3.1.3. PARÁMETROS IMPORTANTES DE LOS AMPLIFICADORES OPERACIONALES

Para entender de mejor manera el funcionamiento de un amplificador operacional, es importante mencionar los conceptos básicos que se encuentran implícitos al utilizar un amplificador operacional.

- **IMPEDANCIA DE ENTRADA:**

Es la resistencia que existe entre las dos entradas del amplificador.

- **IMPEDANCIA DE SALIDA:**

Es la resistencia que se presenta a la salida del amplificador operacional.

- **GANANCIA EN LAZO ABIERTO:**

Es la ganancia de voltaje propia de la fabricación del amplificador operacional en ausencia de una retroalimentación. Puede expresarse en unidades naturales (volt/volt) o en unidades logarítmicas llamadas decibeles (dB). El valor de esta ganancia suele estar entre los 100,000 v/v y los 1,000,000 v/v.

- **VOLTAJE EN MODO COMÚN:**

Es el valor promedio de voltaje aplicado entre ambas entradas del amplificador operacional.

- **VOLTAJE OFFSET DE ENTRADA:**

Es la diferencia de voltaje entre las entradas del amplificador operacional, cuyo valor hace que su salida sea cero volts.

- **CORRIENTE OFFSET DE ENTRADA:**

Es la diferencia de corriente entre ambas entradas del amplificador, cuyo valor hace que la corriente de salida sea cero ampers.

- **VOLTAJE DE ENTRADA DIFERENCIAL:**

Es la diferencia máxima de voltaje que existe entre ambas entradas del amplificador operacional para que el mismo opere dentro de las especificaciones sin saturarse.

- **CORRIENTE DE POLARIZACIÓN:**

Corresponde al valor medio de corriente que circula por las entradas del amplificador operacional en ausencia de señales de entrada, es decir, que se forma por la alimentación del amplificador operacional en las terminales  $V_{s+}$  y  $V_{s-}$ . [12]

### 3.1.4. CARACTERÍSTICAS INTERNAS DEL AMPLIFICADOR OPERACIONAL

Cuando se habla del diseño de dispositivos mecánicos, eléctricos, electrónicos, entre otros, siempre se toca el tema de los sistemas ideales ya que sientan las bases de lo que se pretende. Sin embargo, los sistemas ideales nunca se alcanzan, pero fomentan la mejora constante de dichos sistemas.

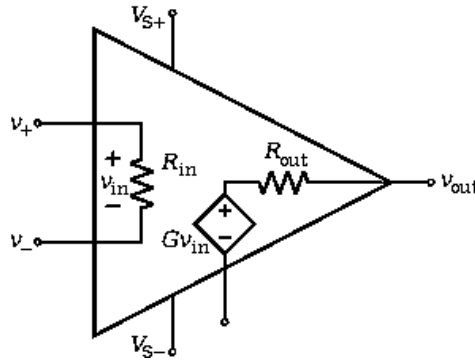


Figura 53: Componentes internos del amplificador operacional.

La **figura 53** muestra el esquema de un amplificador operacional con su estructura interna, así como las terminales de conexión (mismas que se mencionarán más adelante). La nomenclatura de sus elementos internos es:

- $R_{in}$  es la resistencia interna del amplificador operacional.
- $R_{out}$  es la resistencia de salida del amplificador operacional.
- $Gv_{in}$  es la ganancia interna del amplificador operacional.
- $V_{in}$  es la caída de voltaje en la resistencia interna del amplificador operacional

Estos elementos son muy importantes para poder analizar el comportamiento matemático del amplificador operacional, es por ello que a continuación se mencionan las características deseadas (*amplificador ideal*) en los elementos internos, así como las características prácticas (*amplificador real*) del amplificador operacional.

#### 3.1.4.1. AMPLIFICADOR OPERACIONAL IDEAL

- Resistencia de entrada infinita.
- Resistencia nula de salida.
- Ganancia infinita en lazo abierto.
- Insensibilidad a la temperatura.
- Ancho de banda infinito y sin desplazamiento de fase.
- Inmunidad al ruido.
- Corriente nula de entrada.

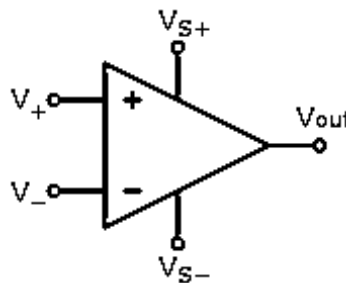


### 3.1.4.2. AMPLIFICADOR OPERACIONAL REAL

- Alta ganancia en lazo abierto.
- Resistencia de entrada que va de los 0.3 M $\Omega$  en adelante.
- Poseen una resistencia de salida.
- Existe una corriente de entrada que generalmente es de 10  $\eta A$  en circuitos de tecnología bipolar.
- Presencia de alteraciones por temperatura.
- Ancho de banda limitado a las características del material o del diseño. [11]

## 3.2. DESCRIPCIÓN Y CONFIGURACIÓN DEL AMPLIFICADOR OPERACIONAL

Básicamente, un amplificador operacional es un dispositivo electrónico que trabaja con corriente directa. Dicho dispositivo posee dos entradas y una salida donde, el diferencial de potencia de ambas entradas es considerablemente menor comparado con el de la salida. Debido a su versatilidad, son utilizados ampliamente tanto en electrónica analógica como en electrónica digital, ya que permite realizar operaciones con las señales introducidas que van desde sumas y restas, hasta operaciones más complejas como integrar o derivar. La **figura 54** muestra la simbología y nomenclatura con la que se describe un amplificador operacional junto a las terminales que lo componen.



**Figura 54:** Terminales del amplificador operacional.

La nomenclatura presentada en la imagen, corresponde a la siguiente:

- $V_+$  : Entrada no inversora (positiva).
- $V_-$  : Entrada inversora (negativa).
- $V_{out}$  : Terminal de salida.
- $V_{S+}$  : Terminal de alimentación positiva.
- $V_{S-}$  : Terminal de alimentación negativa.

Los amplificadores operacionales tienen un comportamiento específico según sea el caso.

### 3.2.1. AMPLIFICADOR OPERACIONAL EN LAZO ABIERTO

Cuando no existe una retroalimentación en la salida del dispositivo se denomina *lazo abierto*. El resultado será la resta entre ambas entradas que se multiplicará por un valor determinado llamado *ganancia* que generalmente es muy grande, del orden de 100,000 veces, por lo que una pequeña diferencia entre el voltaje de ambas entradas hace que la salida sea un valor cercano al voltaje de alimentación. El amplificador operacional se satura cuando el voltaje de salida iguala o supera al voltaje de alimentación, es decir, el dispositivo no puede entregar una tensión mayor a la de alimentación.

La magnitud de la ganancia no está controlada debido al proceso de fabricación, por lo que utilizar un amplificador operacional en lazo abierto resulta impráctico para realizar un amplificador diferencial.

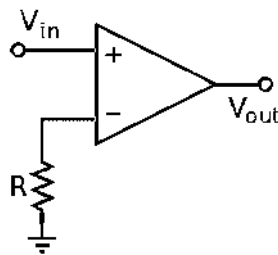


Figura 55: Amplificador operacional en lazo abierto.

Cuando se conecta la entrada inversora (-) a tierra ( $0v$ ) ya sea directamente o a través de una resistencia (**figura 55**), y se aplica voltaje positivo a la entrada no inversora (+), la salida será el voltaje máximo de la alimentación positiva; por otro lado, si el voltaje que se introduce en la entrada no inversora es negativo, la salida será el valor de voltaje negativo de alimentación. Al no existir realimentación, el amplificador operacional actuará como un comparador comportándose de la siguiente manera:

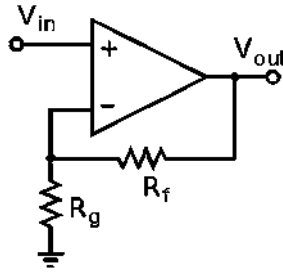
$$V_{in} > 0 \Rightarrow V_{out} = V_{s+}$$

$$V_{in} < 0 \Rightarrow V_{out} = V_{s-}$$

### 3.2.2. AMPLIFICADOR OPERACIONAL EN LAZO CERRADO

Cuando se desea tener un comportamiento predecible a la salida, se utiliza una retroalimentación negativa que involucra una conexión a través de un resistor entre la salida y la entrada inversora.

Al utilizar este tipo de arreglo, se dice que el amplificador operacional está en lazo cerrado ya que parte de la tensión a la salida se reingresa a la entrada inversora, y cuya consecuencia es que la ganancia se reduzca considerablemente debido a que ésta será determinada por la red de alimentación y no por las características internas del dispositivo.



**Figura 56:** Amplificador no-inversor en lazo cerrado.

La **figura 56** muestra un arreglo de amplificador no inversor, el cual contiene a las dos resistencias  $R_g$  y  $R_f$ , las cuales determinarán el valor de la ganancia en lazo cerrado. Analizando superficialmente el circuito, se puede observar que la corriente que pasa por la resistencia  $R_g$  es:

$$i = \frac{V_-}{R_g}$$

Sin embargo, cuando un amplificador operacional no se satura (operación en modo lineal) la diferencia de tensión entre las dos entradas es insignificante, por lo que:

$$V_{in} \cong V_-$$

Como los voltajes en las entradas son prácticamente iguales, la corriente que circula por la resistencia  $R_g$  se puede escribir en términos del voltaje de entrada:

$$i = \frac{V_{in}}{R_g}$$

Continuando con el análisis y recordando que el amplificador operacional tiene una ganancia en la entrada que es muy alta, la corriente circulará a través de  $R_f$  por tratarse de un valor resistivo menor al de la impedancia de entrada del propio amplificador. Pero la red que forma la resistencia  $R_f$  y  $R_g$  es un divisor de voltaje cuya expresión matemática está dada por:

$$V_{out} = V_{in} + i \cdot R_f$$

Sustituyendo el valor de la corriente, se obtiene la siguiente expresión:

$$V_{out} = V_{in} + \frac{V_{in}}{R_g} \cdot R_f \quad \rightarrow \quad V_{out} = V_{in} \left( 1 + \frac{R_f}{R_g} \right)$$

Como resultado, la ganancia en lazo cerrado se define como:

$$K = \frac{V_{out}}{V_{in}} = \left( 1 + \frac{R_f}{R_g} \right)$$

### 3.2.3. APLICACIONES GENERALES DE LOS AMPLIFICADORES OPERACIONALES

Los amplificadores operacionales, además de amplificar una señal (o en general llevar un intervalo adecuado para procesamiento y análisis), tienen muchos otros usos como:

- **ACONDICIONAMIENTO DE SEÑALES:**

Aumenta su potencia e intensidad para que la señal no sufra distorsión o atenuación por el proceso de medición, sobre todo si la impedancia de entrada del circuito sensor no es suficientemente alta; esto se logra garantizando que la señal a medir tenga un nivel mínimo de potencia entregada.

- **ACOPLAMIENTO DE IMPEDANCIAS:**

Aunque puede considerarse parte del acondicionamiento, se enfoca más al aislamiento de circuitos.

- **FILTROS ACTIVOS:**

Se pueden realizar diferentes tipos de filtros de señales como, filtros pasa altas, filtros pasa bajas, filtros pasa banda y filtros rechaza banda.

- **CIRCUITOS OSCILADORES:**

Se pueden implementar en generadores de pulsos y formas de onda.

- **PROCESAMIENTO ANALÓGICO DE SEÑALES:**

Comparadores, sumadores, integradores, derivadores, elementos de retardo, cambios de fase, rectificadores, etc.

- **PROCESAMIENTO LÓGICO DE SEÑALES:**

En ciertas aplicaciones se obtiene el mismo efecto que las compuertas lógicas digitales, entregando ya sea un valor de voltaje cero (falso) o de saturación (verdadero).

- **SOLUCIONES ANALÓGICAS:**

Se puede obtener la solución analógica de ecuaciones integro-diferenciales incluidas las no lineales, entre otras. [13]

# CAPÍTULO 4:

## SISTEMAS EQUIVALENTES DEL AMPLIFICADOR OPERACIONAL

### 4.1. INTRODUCCIÓN

Dentro de los diferentes dominios físicos existen sistemas (o subsistemas) que son fundamentales en cada área de estudio. El amplificador operacional forma parte de una serie de estos sistemas fundamentales dentro del campo de la electrónica por su versatilidad, la facilidad de manejo y los bajos costos que estos implican. En el capítulo anterior se analizaron las características internas del amplificador operacional y su implementación dentro de algunos circuitos básicos, pero también se enfatizó en los motivos que lo convierten en un dispositivo tan utilizado.

En este capítulo se realizará el modelo en Bond Graph del amplificador operacional y los circuitos básicos que se pueden realizar con éste. Se aprovechará la capacidad que tiene la metodología en Bond Graph para generalizar el modelo de estos sistemas con la finalidad de implementarlos como sistemas equivalentes en otros dominios físicos, concretamente en el dominio mecánico. Aquí surgen dos cuestionamientos:

- Obteniendo el modelo en Bond Graph del amplificador operacional, ¿se podrá emular su funcionamiento en el dominio mecánico?
- De ser así, ¿tendrá la misma versatilidad el amplificador operacional mecánico respecto a su homólogo electrónico?

### 4.2. MODELADO EN BOND GRAPH DEL AMPLIFICADOR OPERACIONAL

La estructura interna del amplificador operacional está compuesta principalmente por transistores y resistores los cuales interactúan para darle características específicas al amplificador operacional. Como ya se explicó en capítulos anteriores, se puede simplificar el análisis únicamente por la funcionalidad y sus características sin entrar en gran detalle a la circuitería interna del dispositivo.

Lo anterior es una ventaja ya que se puede visualizar al amplificador operacional como un bloque de ciertas características con dos entradas y una salida.

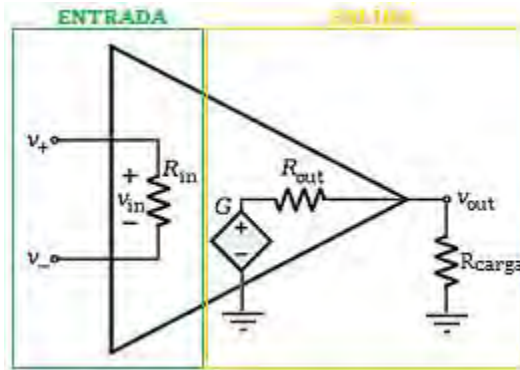


Figura 57: Amplificador operacional seccionado.

De esta manera se puede seccionar al bloque en dos, una sección de entrada y otra de salida, tal como se muestra en la **figura 57**. Es importante mencionar que las terminales que alimentan al amplificador operacional tienen la función de polarizar los transistores internos del dispositivo y que, por conservación de la energía, la señal de salida no puede ser mayor a la alimentación del mismo amplificador. Por tal motivo, la alimentación del amplificador operacional no influye directamente en la funcionalidad, pero se puede manipular como un limitador de señal, por tal motivo y para evitar confusión en el circuito se ha decidido quitar la alimentación del amplificador en el proceso de modelado.

La siguiente imagen (**figura 58**) muestra la versión simplificada del amplificador operacional dividida en dos secciones, la sección de entrada (recuadro verde) y la sección de salida (recuadro amarillo).

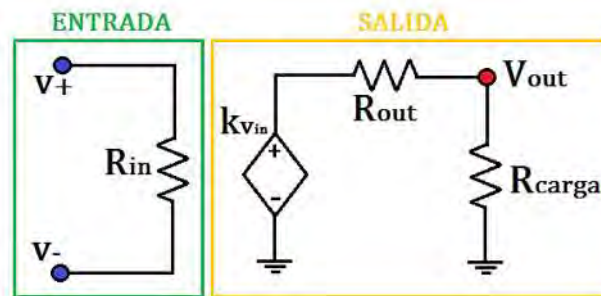


Figura 58: Sección de entrada y salida.

El modelado en Bond Graph se realizará primero sobre la sección de entrada, luego se realizará el análisis en la sección de salida y finalmente se unirán ambos diagramas para unificar ambas partes y obtener el modelo completo del amplificador operacional.

- **SECCIÓN DE ENTRADA**

Se puede observar que la entrada del amplificador operacional simplificado se compone de tres elementos. Aquí se encuentra la entrada no-inversora ( $V_+$ ), la entrada inversora ( $V_-$ ) y la resistencia de entrada ( $R_{in}$ ).

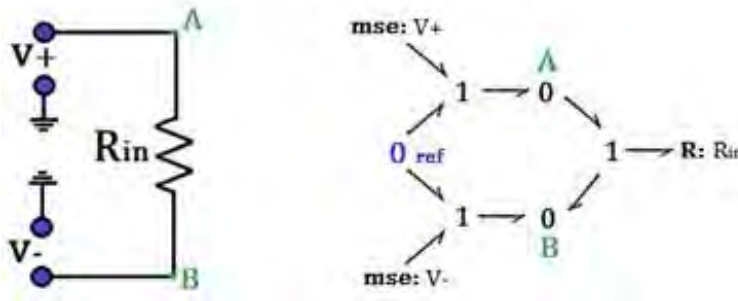


Figura 59: Bond Graph de la sección de entrada.

La **figura 59** muestra el cambio del circuito de entrada al diagrama en Bond Graph, mismo que puede ser reducido para obtener un modelo compacto. Para hacer la reducción, primero se debe eliminar la unión de referencia:

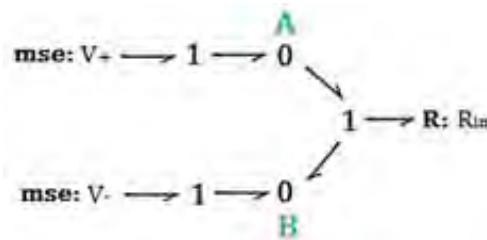


Figura 60: Primera reducción del diagrama de la sección de entrada.

De la **figura 60**, se pueden reducir las uniones-1 de las fuentes aplicando la propiedad de los bonds:

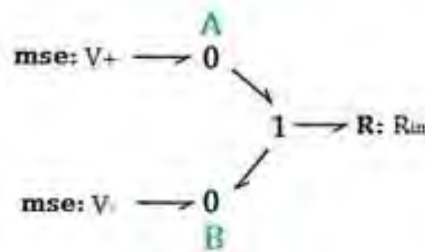


Figura 61: Segunda reducción del diagrama de la sección de entrada.

En el punto A y B se observan dos uniones-0 de las cuales sólo se puede reducir la del punto A ya que, recordando la propiedad de los bonds, únicamente se pueden reducir si el sentido de los bonds es el mismo.

De ésta manera, el circuito de entrada se reduce de la siguiente forma:

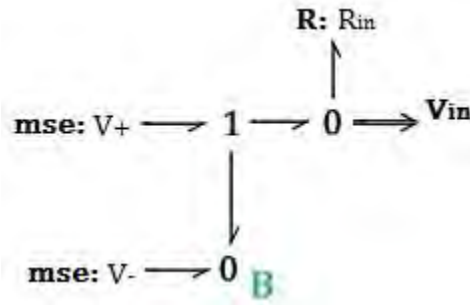


Figura 62: Diagrama reducido de la sección de entrada.

• SECCIÓN DE SALIDA

Para la sección de salida se tienen tres elementos, una fuente dependiente ( $KV_{in}$ ), la resistencia de salida ( $R_{out}$ ) y una resistencia de carga ( $R_{carga}$ ) que representa al circuito que alimenta el amplificador operacional.

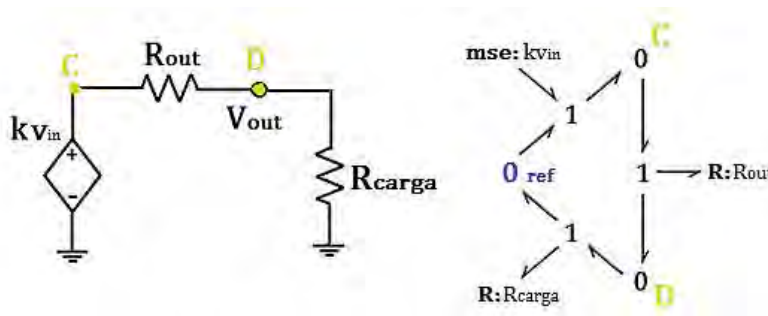


Figura 63: Bond Graph de la sección de salida.

La figura 63 muestra el cambio del circuito de salida del amplificador operacional al modelo en Bond Graph utilizando la metodología explicada en el capítulo 2, donde primero se colocan las uniones-0 y uniones-1 con sus respectivos elementos. El siguiente paso es eliminar la unión-0 de referencia:

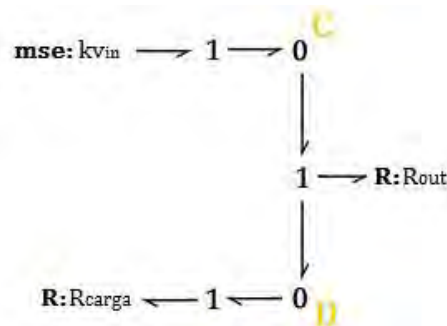
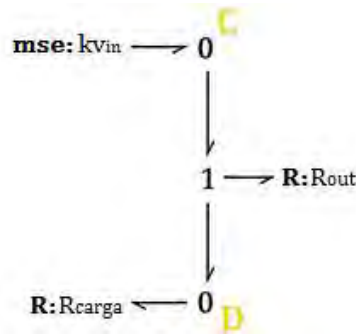


Figura 64: Primera reducción del diagrama de la sección de salida.

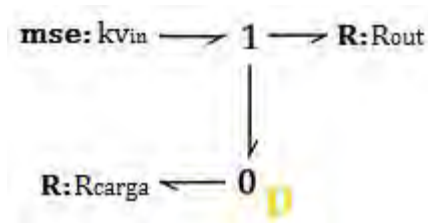


Del esquema anterior (**figura 64**) se puede observar que existe la posibilidad de reducir el diagrama en las uniones-1 de la fuente dependiente ( $KV_{in}$ ) y la resistencia de carga ( $R_{carga}$ ), aplicando las propiedades de los bonds:



**Figura 65:** Segunda reducción del diagrama de la sección de salida.

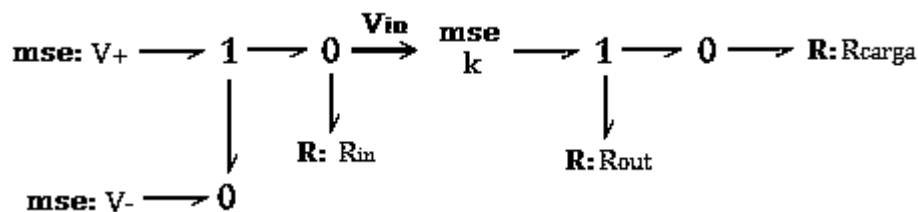
En el punto C y D existen dos uniones-0 que se pueden reducir, sin embargo, sólo se reducirá la del punto C. Esto se debe a que existe un nodo donde se conectan el amplificador operacional y la carga; ese nodo es la unión-0 del punto D la cual, si bien se puede reducir, más adelante se utilizará en la retroalimentación de los circuitos amplificadores. De tal manera que el circuito se puede reducir de la siguiente manera:



**Figura 66:** Diagrama reducido de la sección de salida.

- **MODELO COMPLETO DEL AMPLIFICADOR OPERACIONAL EN BOND GRAPH**

Una vez que se obtuvo el modelo en Bond Graph de la sección de entrada y salida del amplificador operacional, el siguiente paso es juntar ambos diagramas para formar el modelo completo.



**Figura 67:** Modelo en Bond Graph del amplificador operacional sin causalidad.

El último paso es asignar la causalidad a cada bond respetando las reglas que dicta la metodología (explicadas en el **capítulo 2**), dando prioridad a las fuentes, luego a las uniones y finalmente a los elementos resistivos.

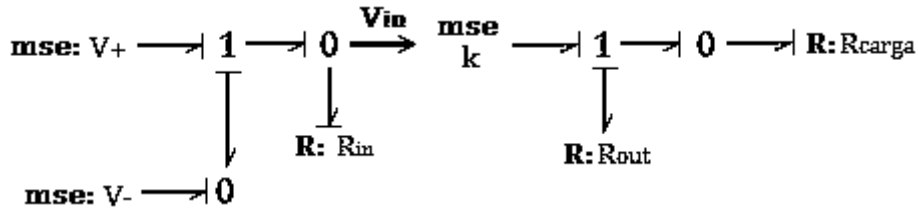


Figura 68: Diagrama en Bond Graph del amplificador operacional con causalidad.

Así culmina la elaboración del modelo en Bond Graph del amplificador operacional como dispositivo (figura 68). Gracias a que la técnica lo permite, éste modelo será la base para elaborar los circuitos basados en el amplificador operacional explicados en el capítulo 3, únicamente agregando los elementos correspondientes.

#### 4.2.1. AMPLIFICADOR NO-INVERSOR

Ya se tiene el modelo en Bond Graph del amplificador operacional como un bloque elemental el cual puede ser utilizado en diferentes configuraciones. Una de las posibilidades más factibles para poder emular en el dominio mecánico es la configuración de amplificador no-inversor debido a las prestaciones que el circuito brinda. El *amplificador no-inversor* es una configuración de los amplificadores operacionales muy típica en la que su función principal es multiplicar la señal de entrada por una ganancia, lo que lo hace sumamente útil en aplicaciones de adquisición de datos.

En la figura 69 se puede observar el circuito correspondiente a un amplificador no inversor, donde se muestra cómo la señal de entrada ( $V_{in}$ ) se conecta directamente en la terminal no inversora (+) del amplificador operacional. Así mismo, una parte de la señal se regresa a la entrada inversora (-) pasando por una resistencia que en el diagrama se muestra como  $R_f$ , mientras que la otra parte de la señal pasa por la resistencia  $R_i$ . Es esa porción de la señal de retroalimentación la que determinará la ganancia en el amplificador no-inversor. [14]

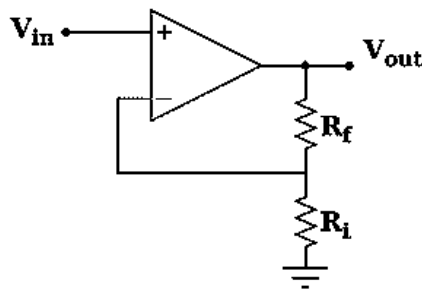


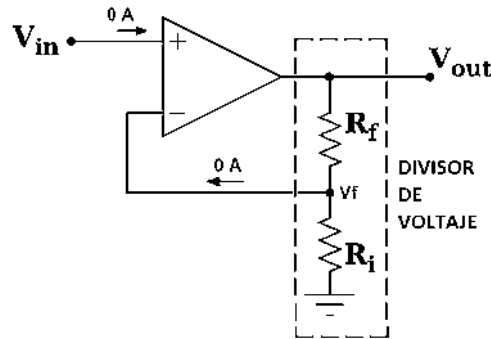
Figura 69: Amplificador no-inversor.

Para obtener la ecuación que determinará la ganancia del amplificador no-inversor, se deben tener dos consideraciones:

- La diferencia de tensión entre ambas entradas del amplificador es nula ( $0v$ ) debido a la configuración en lazo cerrado.

- La corriente es nula (0A) en las terminales del amplificador, ya que se tiene una ganancia de entrada infinita.

Tomando en cuenta las consideraciones anteriores y la siguiente imagen (**figura 70**), se puede hacer un análisis para obtener la ecuación que determinará el valor de la ganancia en el amplificador no-inversor.



**Figura 70:** Divisor de voltaje del amplificador no-inversor.

Como la tensión en las terminales de entrada es la misma, se tiene que:

$$V_{in} = V_f$$

También se conoce que por la terminal inversora circulan 0A, por lo que se puede calcular el voltaje  $V_f$  utilizando la fórmula del divisor de voltaje formado por las resistencias  $R_f$  y  $R_i$ :

$$V_f = V_{out} \frac{R_i}{R_i + R_f}$$

Retomando que el voltaje en las terminales es el mismo, se puede expresar como:

$$V_f = V_{out} \frac{R_i}{R_i + R_f} = V_{in}$$

Para finalmente reacomodar la expresión:

$$K = \frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{R_i + R_f}{R_i} = \frac{R_f}{R_i} + 1$$

De tal forma que la ganancia se puede controlar mediante los valores adecuados de las resistencias, considerando también la suma de ese uno constante el cual no se puede modificar.

### 4.2.1.1. MODELADO EN BOND GRAPH DEL AMPLIFICADOR NO-INVERSOR

La siguiente figura muestra el esquema interno y externo del circuito amplificador no-inversor.

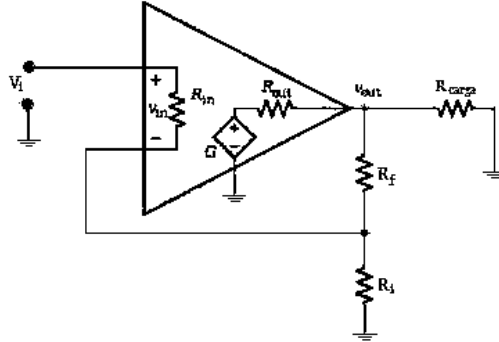


Figura 71: Esquema completo del amplificador no-inversor.

Se puede observar que la señal entrará por la terminal no-inversora del amplificador operacional, además de que existe una retroalimentación con dos resistencias formando un divisor de voltaje. Es por esto que, lo primero que se debe hacer para obtener el modelo en Bond Graph es, del modelo del amplificador operacional base, modificarlo para eliminar la entrada de la terminal inversora y agregar los elementos resistivos dentro de la retroalimentación.

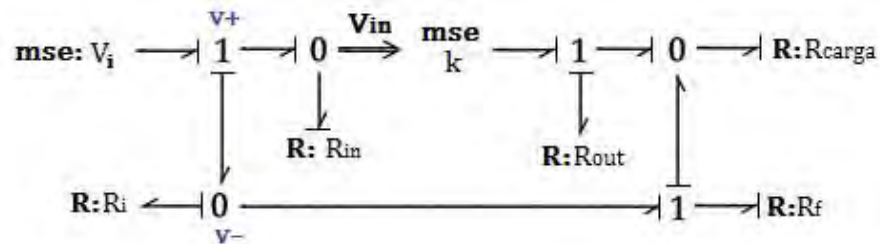


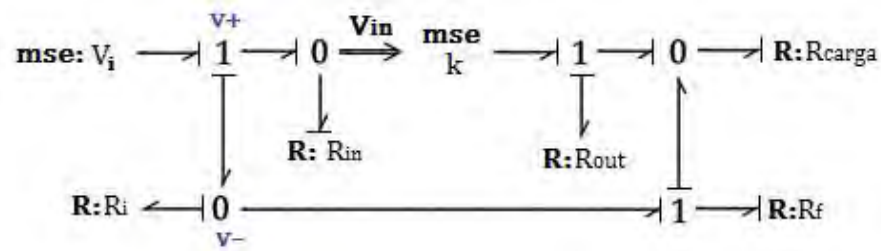
Figura 72: Modelo en Bond Graph del amplificador no-inversor.

De tal manera que, la **figura 72** muestra el diagrama sin la entrada de la terminal inversora ( $v_-$ ), substituyéndola por el elemento resistivo  $R_i$  enlazado a una unión-1 donde se encuentra la otra resistencia  $R_f$ , terminando la retroalimentación con un bond que une lo anterior a la unión-0 correspondiente a la salida del amplificador operacional.

### 4.2.1.2. SISTEMA EQUIVALENTE DEL AMPLIFICADOR NO-INVERSOR EN EL DOMINIO MECÁNICO/HIDRÁULICO

Para construir el modelo mecánico/hidráulico del amplificador no-inversor es importante analizar los elementos que el diagrama en Bond Graph establece, así como el tipo de conexión que existe entre estos. Por lo tanto, se hará uso del diagrama obtenido del amplificador no-inversor (correspondiente a la **figura 72**) para proponer un sistema de otro dominio físico.

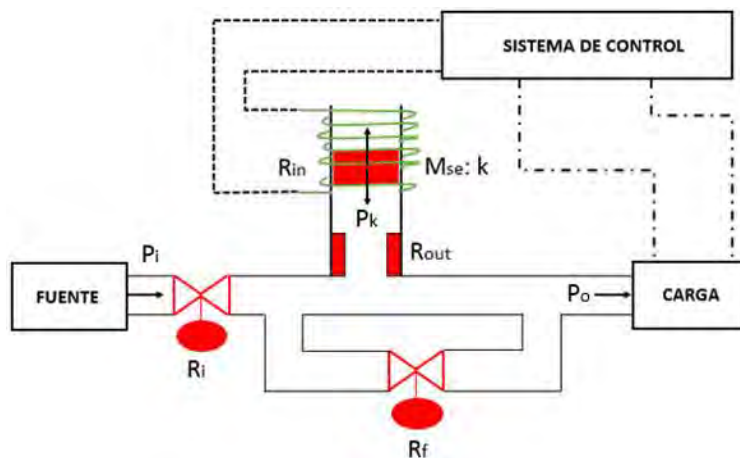
El primer paso es construir el modelo hidráulico/mecánico a partir de los elementos que componen el diagrama en Bond Graph. La **tabla 9** ayudará a elegir los elementos en el dominio físico que se desea.



**Tabla 9:** Elementos equivalentes del dominio mecánico e hidráulico.

BOND GRAPH	MECÁNICO	HIDRÁULICO
<b>R</b>	Amortiguador	Válvula
	Fricción	Fricción
<b>I</b>	Masa	Inercia del Fluido
<b>C</b>	Resorte	Tanque
<b><i>Ms<sub>e</sub></i></b>	Fuerza	Presión
<b><i>Ms<sub>f</sub></i></b>	Velocidad	Caudal

Seguindo los elementos del sistema, se tienen cuatro resistencias y la carga, la cual puede ilustrarse como una caja donde se puede considerar como una etapa posterior. Además cuenta con una fuente de esfuerzo y un transformador con ganancia  $k$ , misma que debe cambiar respecto a las condiciones de la variable de esfuerzo (presión) considerando los efectos resistivos de  $R_f$  y  $R_i$ , acto que generaría un control de la variable de esfuerzo. El modelo propuesto (**figura 73**) se trata de un sistema hidráulico compuesto por una fuente de presión (variable correspondiente al esfuerzo en los sistemas hidráulicos), misma que puede tratarse de una bomba, un compresor o una etapa anterior a la carga.



**Figura 73:** Amplificador no-inversor equivalente con válvulas ajustables.

Como transformador se ha propuesto un émbolo móvil que podría ser controlado como un electroimán, o como un pistón controlable el cual tendría un movimiento traslacional el cual podría aumentar o aliviar la presión en el sistema. Dicho émbolo móvil tiene una resistencia de fricción ( $R_{in}$ ) presente en su superficie y la tubería, misma que se desea muy alta para contrarrestar la presión que obliga al émbolo a subir. La acción del émbolo se realizaría de manera controlada considerando las válvulas  $R_i$  y  $R_f$  las cuales pueden ser modificadas para alterar el aumento o disminución de presión ligada a la ejercida por el émbolo.

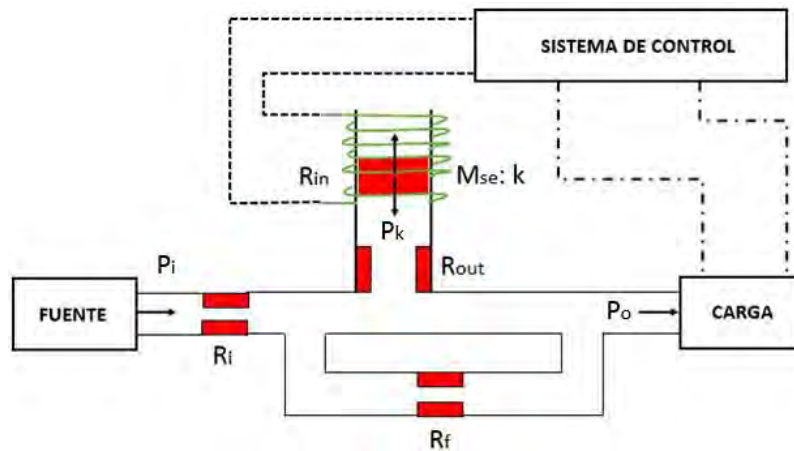


Figura 74: Amplificador no-inversor equivalente con resistencias fijas.

A su vez, las resistencias en el sistema también se pueden representar como resistencias propias del aumento o disminución en el diámetro de las tuberías y tomar valores fijos tal como se muestra en la figura 74.

#### 4.2.1.3. ESPACIO DE ESTADOS DEL EQUIVALENTE HIDRÁULICO/MECÁNICO

Finalmente, para obtener el espacio de estados del sistema equivalente, lo primero que se debe hacer es numerar todos los bonds del diagrama en Bond Graph del sistema (figura 75) con la precaución de no repetir ningún número. Es importante revisar el diagrama y verificar que tanto la causalidad, como la numeración de los bonds sean correctas, de ser así, se procede con la obtención del espacio de estados.

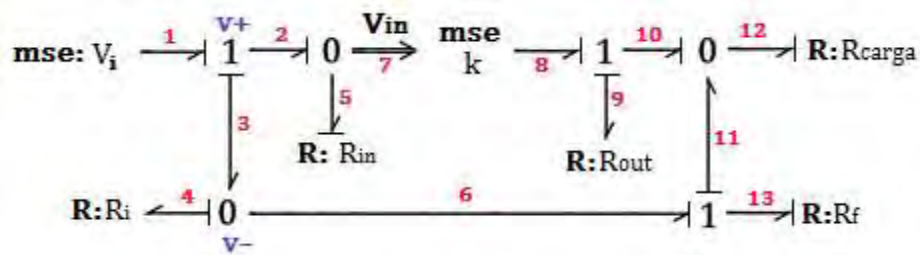


Figura 75: Bond Graph del sistema equivalente con numeración.

- ESTABLECER LOS VECTORES CLAVE

Dado que el modelo de estudio no contiene elementos de almacenamiento de energía, los vectores  $\dot{x}$ ,  $x$  y  $z$  (correspondientes a la interacción entre este tipo de elementos), son nulos.

$$\dot{x} = [0] \quad ; \quad x = [0] \quad ; \quad z = [0]$$

Al tratarse de un sistema que contiene únicamente elementos de disipación de energía (resistivos) sus vectores clave están determinados por:

$$D_{in} = \begin{bmatrix} f_4 \\ e_5 \\ f_9 \\ e_{12} \\ e_{13} \end{bmatrix} \quad ; \quad D_{out} = \begin{bmatrix} e_4 \\ f_5 \\ e_9 \\ f_{12} \\ f_{13} \end{bmatrix}$$

Por último, los vectores correspondientes a las entradas y salidas del sistema:

$$u = [e_1] \quad ; \quad y = [e_{12}]$$

- DEFINIR LAS RELACIONES CONSTITUTIVAS

Con lo anterior, es posible crear las matrices de las relaciones constitutivas  $F$  y  $L$ . Es importante mencionar que la matriz  $F$  es nula ya que el sistema carece de elementos de almacenamiento de energía, motivo por el cual se obtendrá únicamente la matriz  $L$ .

$$\begin{bmatrix} e_4 \\ f_5 \\ e_9 \\ f_{12} \\ f_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/R_{in} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_{out} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/R_{carga} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/R_f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_4 \\ e_5 \\ f_9 \\ e_{12} \\ e_{13} \end{bmatrix} \quad \therefore \quad L = \begin{bmatrix} R_i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/R_{in} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_{out} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/R_{carga} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/R_f \end{bmatrix}$$

- CONSTRUIR LA MATRIZ DE ESTRUCTURA UNIÓN

El siguiente paso es construir la matriz de estructura unión, la cual tiene la siguiente estructura:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ D_{in} \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ D_{out} \\ u \end{bmatrix}$$

Donde las submatrices  $S_{11}$ ,  $S_{12}$ ,  $S_{13}$ ,  $S_{21}$  y  $S_{31}$  son nulas debido a que los vectores clave  $\dot{x}$  y  $z$  son nulos. Es así que la matriz de estructura unión queda de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ f_4 \\ e_5 \\ f_9 \\ e_{12} \\ e_{13} \\ e_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/k & -(k+1)/k & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1/k & 0 & -1 & 0 & 0 & 1/k \\ 0 & (k+1)/k & 0 & 1 & 0 & 0 & -1/k \\ 0 & -1/k & 0 & -1 & 0 & 0 & 1/k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ e_4 \\ f_5 \\ e_9 \\ f_{12} \\ f_{13} \\ e_1 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, la distribución de las submatrices restantes queda de la siguiente manera:

$$S_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \frac{1}{k} & -\frac{k+1}{k} \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ -\frac{1}{k} & 0 & -1 & 0 & 0 \\ \frac{k+1}{k} & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} ; S_{23} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1/k \\ -1/k \end{bmatrix}$$

$$S_{32} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{k} & 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} ; S_{33} = [1/k]$$

• **OBTENER LA ECUACIÓN EN EL ESPACIO DE ESTADOS**

Con las submatrices de  $S$  se podrán realizar los cálculos correspondientes para obtener el espacio de estados cuya forma es:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx + Du$$

De la cual se puede deducir que las matrices  $A$ ,  $B$  y  $C$  son nulas debido a que corresponden a la relación con los elementos de almacenamiento de energía, mismos del cual carece el sistema que se está estudiando. Es por esto que la ecuación en espacio de estados se reduce a la forma:

$$y = Du \quad \text{donde} \quad D = (s_{33} + s_{32}M s_{23}) \quad \text{con} \quad M = L(I - s_{22}L)^{-1}$$

$$M = \begin{bmatrix} R_i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/R_{im} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_{out} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/R_{carga} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/R_f \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \frac{1}{k} & -\frac{k+1}{k} \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ -\frac{1}{k} & 0 & -1 & 0 & 0 \\ \frac{k+1}{k} & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} R_i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/R_{im} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_{out} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/R_{carga} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/R_f \end{bmatrix}^{-1}$$

Debido a que el resultado es extenso, se colocarán los elementos de la matriz  $M$  resultante con sus respectivas ecuaciones fuera de la matriz.

$$M = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} & M_{14} & M_{15} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} & M_{24} & M_{25} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} & M_{34} & M_{35} \\ M_{41} & M_{42} & M_{43} & M_{44} & M_{45} \\ M_{51} & M_{52} & M_{53} & M_{54} & M_{55} \end{bmatrix}$$

$$M_{11} = \frac{k^2 R_i R_{in} (R_{carga} R_f + R_{carga} R_{out} + R_f R_{out})}{k^2 [R_{carga} [R_{in} (R_f + R_i + R_{out}) + R_i (R_f + R_{out})] + R_{out} [R_f (R_i + R_{in}) + R_{in} R_i] + R_i [R_{in} (2k R_{carga} + R_f + R_{carga})]}$$

$$M_{21} = \frac{-k^2 R_i (R_{carga} R_f + R_{carga} R_{out} + R_f R_{out})}{k^2 [R_{carga} [R_{in} (R_f + R_i + R_{out}) + R_i (R_f + R_{out})] + R_{out} [R_f (R_i + R_{in}) + R_{in} R_i] + R_i [R_{in} (2k R_{carga} + R_f + R_{carga})]}$$



$$M_{31} = \frac{-kR_{out}R_iR_{in}[R_f + R_c + kR_c]}{k^2[R_{carga}[R_{in}(R_f + R_i + R_{out}) + R_i(R_f + R_{out})] + R_{out}[R_f(R_i + R_{in}) + R_{in}R_i] + R_i[R_{in}(2kR_{carga} + R_f + R_{carga})]}$$

$$M_{41} = \frac{-kR_iR_{in}(R_f - R_{out}k)}{k^2[R_{carga}[R_{in}(R_f + R_i + R_{out}) + R_i(R_f + R_{out})] + R_{out}[R_f(R_i + R_{in}) + R_{in}R_i] + R_iR_{in}[2kR_{carga} + R_f + R_{carga}]}$$

$$M_{51} = \frac{kR_iR_{in}(R_{carga} + kR_{carga} + kR_{out})}{k^2[R_{carga}[R_{in}(R_f + R_i + R_{out}) + R_i(R_f + R_{out})] + R_{out}[R_f(R_i + R_{in}) + R_{in}R_i] + R_iR_{in}[2kR_{carga} + R_f + R_{carga}]}$$

$$M_{12} = \frac{k^2R_i(R_{carga}R_f + R_{carga}R_{out} + R_fR_{out})}{k^2[R_{carga}[R_{in}(R_f + R_i + R_{out}) + R_i(R_f + R_{out})] + R_{out}[R_f(R_i + R_{in}) + R_{in}R_i] + R_i[R_{in}(2kR_{carga} + R_f + R_{carga})]}$$

$$M_{22} = \frac{k^2[R_{carga}[R_{in}(R_f + R_i + R_{out}) + R_{out}(R_f + R_i)] + R_i(2kR_{carga} + R_f + R_{carga})}{k^2[R_{carga}[R_{in}(R_f + R_i + R_{out}) + R_i(R_f + R_{out})] + R_{out}[R_f(R_i + R_{in}) + R_{in}R_i] + R_i[R_{in}(2kR_{carga} + R_f + R_{carga})]}$$

$$M_{32} = \frac{-kR_{out}R_i(R_{carga} + R_f + kR_{carga})}{k^2[R_{carga}[R_{in}(R_f + R_i + R_{out}) + R_i(R_f + R_{out})] + R_{out}[R_f(R_i + R_{in}) + R_{in}R_i] + R_i[R_{in}(2kR_{carga} + R_f + R_{carga})]}$$

$$M_{42} = \frac{-kR_i(R_f - kR_{out})}{k^2[R_{carga}[R_{in}(R_f + R_i + R_{out}) + R_i(R_f + R_{out})] + R_{out}[R_f(R_i + R_{in}) + R_{in}R_i] + R_iR_{in}[2kR_{carga} + R_f + R_{carga}]}$$

$$M_{52} = \frac{kR_i(R_{carga} + kR_{carga} + kR_{out})}{k^2[R_{carga}[R_{in}(R_f + R_i + R_{out}) + R_i(R_f + R_{out})] + R_{out}[R_f(R_i + R_{in}) + R_{in}R_i] + R_iR_{in}[2kR_{carga} + R_f + R_{carga}]}$$

$$M_{13} = \frac{-kR_iR_{in}R_{out}(R_{carga} + R_f + kR_{carga})}{k^2[R_{carga}[R_{in}(R_f + R_i + R_{out}) + R_i(R_f + R_{out})] + R_{out}[R_f(R_i + R_{in}) + R_{in}R_i] + R_i[R_{in}(2kR_{carga} + R_f + R_{carga})]}$$

$$M_{23} = \frac{R_{out} \left[ k^2 (R_{carga}(R_fR_i + R_fR_{in} + R_iR_{in})) + R_iR_{carga}R_{in}(2k + 1) + R_fR_iR_{in} \right]}{k^2[R_{carga}[R_{in}(R_f + R_i + R_{out}) + R_i(R_f + R_{out})] + R_{out}[R_f(R_i + R_{in}) + R_{in}R_i] + R_i[R_{in}(2kR_{carga} + R_f + R_{carga})]}$$

$$M_{33} = \frac{R_{out}[k^2(R_f + R_i + R_{in}) + R_f(1 + 2k) + R_{carga}]}{k^2[R_{carga}[R_{in}(R_f + R_i + R_{out}) + R_i(R_f + R_{out})] + R_{out}[R_f(R_i + R_{in}) + R_{in}R_i] + R_i[R_{in}(2kR_{carga} + R_f + R_{carga})]}$$

$$M_{43} = \frac{-kR_{out}[k(R_{in}R_i + R_{in}R_f + R_iR_f) + R_iR_{in}]}{k^2[R_{carga}[R_{in}(R_f + R_i + R_{out}) + R_i(R_f + R_{out})] + R_{out}[R_f(R_i + R_{in}) + R_{in}R_i] + R_iR_{in}[2kR_{carga} + R_f + R_{carga}]}$$

$$M_{53} = \frac{kR_o(kR_{carga}R_i - R_{in}R_i + kR_{carga}R_{in})}{k^2[R_{carga}[R_{in}(R_f + R_i + R_{out}) + R_i(R_f + R_{out})] + R_{out}[R_f(R_i + R_{in}) + R_{in}R_i] + R_iR_{in}[2kR_{carga} + R_f + R_{carga}]}$$

$$M_{14} = \frac{kR_{in}R_i(R_f - kR_{out})}{k^2[R_{carga}[R_{in}(R_f + R_i + R_{out}) + R_i(R_f + R_{out})] + R_{out}[R_f(R_i + R_{in}) + R_{in}R_i] + R_i[R_{in}(2kR_{carga} + R_f + R_{carga})]}$$

$$M_{24} = \frac{-kR_i(R_f - kR_{out})}{k^2[R_{carga}[R_{in}(R_f + R_i + R_{out}) + R_i(R_f + R_{out})] + R_{out}[R_f(R_i + R_{in}) + R_{in}R_i] + R_i[R_{in}(2kR_{carga} + R_f + R_{carga})]}$$

$$M_{34} = \frac{kR_{out}[k(R_iR_{in} + R_{in}R_f + R_iR_f) + R_iR_{in}]}{k^2[R_{carga}[R_{in}(R_f + R_i + R_{out}) + R_i(R_f + R_{out})] + R_{out}[R_f(R_i + R_{in}) + R_{in}R_i] + R_i[R_{in}(2kR_{carga} + R_f + R_{carga})]}$$

$$M_{44} = \frac{k^2[R_{in}(R_{out} + R_i + R_f) + R_i(R_f + R_{out})] + R_i R_{in}(2k + 1)}{k^2[R_{carga}[R_{in}(R_f + R_i + R_{out}) + R_i(R_f + R_{out})] + R_{out}[R_f(R_i + R_{in}) + R_{in}R_i] + R_i R_{in}[2kR_{carga} + R_f + R_{carga}]}$$

$$M_{54} = \frac{k^2(R_{out}R_{in} + R_iR_{out}) + R_i R_{in}(2k + 1)}{k^2[R_{carga}[R_{in}(R_f + R_i + R_{out}) + R_i(R_f + R_{out})] + R_{out}[R_f(R_i + R_{in}) + R_{in}R_i] + R_i R_{in}[2kR_{carga} + R_f + R_{carga}]}$$

$$M_{15} = \frac{-kR_i R_{in}(R_{carga} + kR_{carga} + kR_{out})}{k^2[R_{carga}[R_{in}(R_f + R_i + R_{out}) + R_i(R_f + R_{out})] + R_{out}[R_f(R_i + R_{in}) + R_{in}R_i] + R_i[R_{in}(2kR_{carga} + R_f + R_{carga})]}$$

$$M_{25} = \frac{kR_i(R_{carga} + kR_{carga} + kR_{out})}{k^2[R_{carga}[R_{in}(R_f + R_i + R_{out}) + R_i(R_f + R_{out})] + R_{out}[R_f(R_i + R_{in}) + R_{in}R_i] + R_i[R_{in}(2kR_{carga} + R_f + R_{carga})]}$$

$$M_{35} = \frac{-kR_{out}[(kR_i R_{carga} - kR_{in}R_{carga}) + R_i R_{in}]}{k^2[R_{carga}[R_{in}(R_f + R_i + R_{out}) + R_i(R_f + R_{out})] + R_{out}[R_f(R_i + R_{in}) + R_{in}R_i] + R_i R_{in}[2kR_{carga} + R_f + R_{carga}]}$$

$$M_{45} = \frac{k^2(R_i R_{out} + R_{in}R_{out}) + R_i R_{in}(k + 1)}{k^2[R_{carga}[R_{in}(R_f + R_i + R_{out}) + R_i(R_f + R_{out})] + R_{out}[R_f(R_i + R_{in}) + R_{in}R_i] + R_i R_{in}[2kR_{carga} + R_f + R_{carga}]}$$

$$M_{55} = \frac{k^2(R_{carga}R_i + R_{carga}R_{in} + R_i R_{out} + R_{in}R_{out}) + R_i R_{in}}{k^2[R_{carga}[R_{in}(R_f + R_i + R_{out}) + R_i(R_f + R_{out})] + R_{out}[R_f(R_i + R_{in}) + R_{in}R_i] + R_i R_{in}[2kR_{carga} + R_f + R_{carga}]}$$

Una vez determinada la matriz  $M$ , se puede determinar la matriz  $D$  que formará parte del espacio de estados del sistema.

$$D = [1/k] + \begin{bmatrix} -\frac{1}{k} & 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} [M] \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1/k \\ -1/k \end{bmatrix}$$

Realizando las operaciones anteriores, se tiene que la matriz  $D$  es:

$$D = \frac{k^2 R_{in} R_f + k(R_{out} R_i + R_f R_{out}) + R_{out} R_f}{k^2 [R_{carga}(R_f + R_i + R_{in}) + R_f(R_i + R_{in} + R_{out}) + R_{out}(R_i + R_{in})] + R_{out}[R_f(2k + 1) + R_{carga}]}$$

Finalmente, el espacio de estados se muestra a continuación:

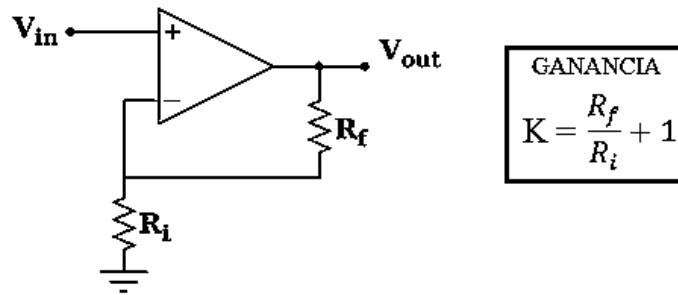
$$\mathbf{y} = \left\{ \frac{k^2 R_{in} R_f + k(R_{out} R_i + R_f R_{out}) + R_{out} R_f}{k^2 [R_{carga}(R_f + R_i + R_{in}) + R_f(R_i + R_{in} + R_{out}) + R_{out}(R_i + R_{in})] + R_{out}[R_f(2k + 1) + R_{carga}]} \right\} \mathbf{u}$$

Donde  $\mathbf{y}$  es la salida del sistema y  $\mathbf{u}$  es la entrada del mismo. Por lo tanto, el espacio de estados obtenido representa el comportamiento tanto del amplificador no-inversor, como del sistema equivalente que se propone.

#### 4.2.2. SEGUIDOR DE VOLTAJE (BUFFER)

Otra configuración del amplificador operacional que de suma utilidad es el *seguidor de voltaje* o también conocido como *buffer*. El buffer es un circuito cuya ganancia de voltaje es unitaria y su funcionamiento proviene de la modificación del amplificador no-inversor.

La **figura 76** rescata el diagrama del amplificador no-inversor, el cual se compone de dos resistencias ( $R_i$  y  $R_f$ ), y la señal de entrada está directamente sobre la entrada no inversora del amplificador.

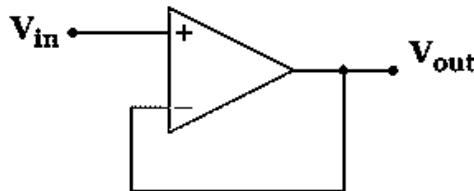


**Figura 76:** Origen del Seguidor de Voltaje.

También se puede observar la ecuación que determina la ganancia del amplificador no inversor, la cual depende completamente de las dos resistencias que componen al circuito. Suponiendo que la resistencia  $R_f$  es cero ( $R_f = 0$ ) y que la resistencia  $R_i$  tienda a infinito ( $R_i \rightarrow \infty$ ), la ecuación de la ganancia se modifica de tal manera que la ganancia se hace unitaria:

$$K = \frac{R_f}{R_i} + 1 \longrightarrow K = 1$$

Con estos cambios, el circuito resultante se muestra en la siguiente figura:



**Figura 77:** Seguidor de Voltaje con Amplificador Operacional.

Dicho arreglo implica que la señal de salida es igual a la señal de entrada:

$$V_{in} = V_{out}$$

Este comportamiento parecería inicialmente inútil, pero tiene características que ayudan a resolver problemas de acoplamiento de impedancias.

- Al utilizar un amplificador operacional como buffer, la impedancia de entrada es muy alta, casi infinita.
- La impedancia de salida es muy baja, de algunos ohmios únicamente.

Al tener una impedancia muy alta, no representa una carga al circuito donde proviene la señal, mientras que, el tener una impedancia muy baja en la salida permite entregar una cantidad suficiente de corriente al circuito que recibirá la señal, características que lo convierten en un elemento muy importante para aislar una sección de un circuito a otra. [15]

Este tipo de buffers suelen ser muy comunes en las siguientes aplicaciones:

- **EN CIRCUITOS DE MUESTREO Y RETENCIÓN DE DATOS:**

Se utilizan para evitar errores en la información que se va guardando en el proceso de obtención de muestras de una señal y, la retención de esos datos. Mientras más fidedignas sean las muestras capturadas, la reconstrucción de las señales mejora considerablemente.

- **EN CIRCUITOS LÓGICOS:**

Los circuitos lógicos son aquellos que trabajan con señales binarias, es decir, señales en alto las cuales suelen ser efectuadas por pulsos de 5 volts (1 lógico) y señales en bajo que son interpretadas, generalmente, por la ausencia de voltaje. Sin embargo, existe un umbral de voltaje en donde el circuito que interpreta la señal binaria puede errar y mandar una señal en bajo cuando en realidad era una señal en alto, fenómeno que se observa cuando el voltaje del 1 lógico se reduce. Para evitar este efecto, se puede implementar un seguidor de voltaje ya que, al no representar una carga en la señal, el voltaje entre ambas etapas se mantiene sin afectar el código binario.

- **EN FILTROS ACTIVOS:**

Los seguidores de voltaje también pueden ser utilizados en filtros de varias etapas. Suelen incluirse justo en medio de cada etapa para aislarlas entre sí y evitar en la medida de lo posible el ingreso de señales parásitas en el circuito final.

#### 4.2.2.1. MODELADO EN BOND GRAPH DEL SEGUIDOR DE VOLTAJE

El seguidor de voltaje es el circuito más básico que se puede realizar con amplificadores operacionales. Se logra cuando se conecta únicamente la salida con la entrada inversora del amplificador operacional y su funcionamiento es muy simple, la señal de entrada es la misma que la señal de salida. También se puede analizar como un amplificador de ganancia unitaria y su funcionalidad tiene que ver más con sus características que con su operatividad. En el **capítulo 3** se explica con más detalle en qué consiste su aplicación y por qué es un elemento indispensable cuando se tienen sistemas separados en etapas. La **figura 78** muestra el esquemático del circuito seguidor de voltaje (también llamado buffer) y cómo relaciona la parte externa con los componentes internos del amplificador operacional.

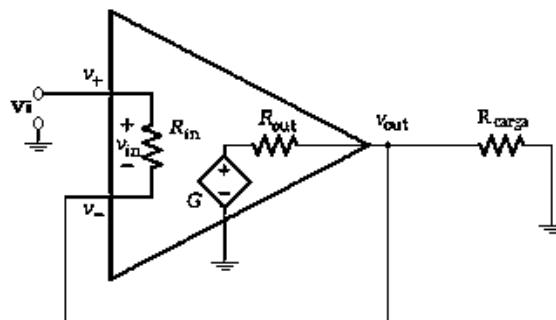
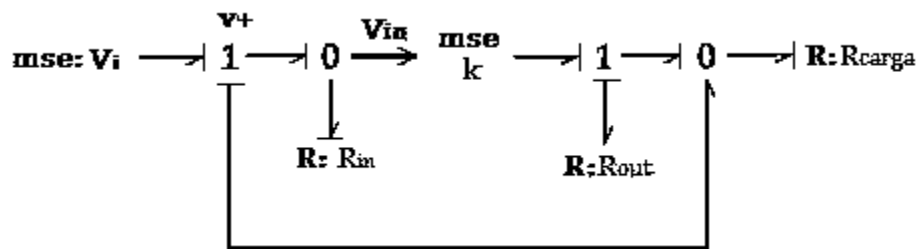


Figura 78: Esquema completo del seguidor de voltaje.

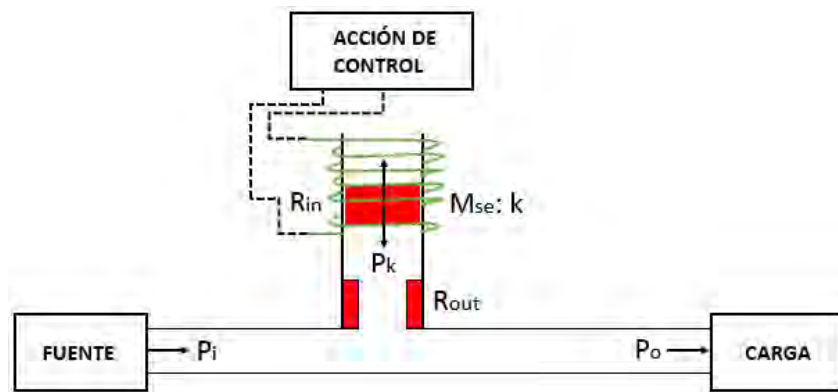
Para obtener su modelo en Bond Graph, se utilizará como base el que se obtuvo del amplificador operacional y se modificará de tal manera que su representación corresponda con el seguidor de voltaje. Se observa que el circuito tiene una conexión entre la salida y la entrada inversora del amplificador, misma que en Bond Graph equivaldría a eliminar la entrada inversora, y conectar desde la unión-1 de la entrada no-inversora ( $V_+$ ) hasta la unión-0 que se encuentra en la salida. Dichos cambios se pueden observar en la **figura 79**.



**Figura 79:** Diagrama en Bond Graph del seguidor de voltaje.

#### 4.2.2.2. SISTEMA EQUIVALENTE DEL BUFFER EN EL DOMINIO MECÁNICO/HIDRÁULICO

Se propondrá un sistema hidráulico/mecánico basado en el diagrama en Bond Graph del buffer, mismo que se puede observar en la **figura 79**. Debido a que el buffer se obtiene a partir del amplificador no-inversor (que se analizó con anterioridad) el diseño debería ser muy parecido, donde la única diferencia debe ser la desaparición de las resistencias de control  $R_i$  y  $R_f$ . Es así que se propone el siguiente modelo hidráulico/mecánico de un buffer.



**Figura 80:** Modelo equivalente del buffer.

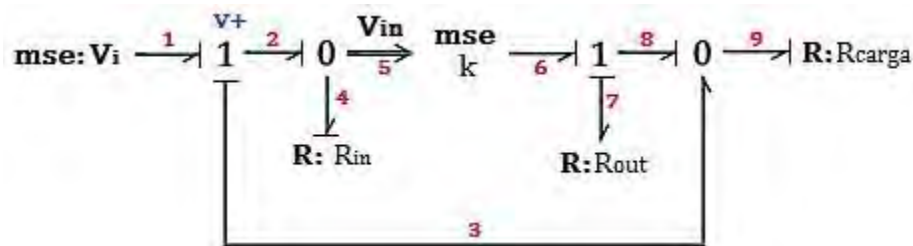
En un buffer electrónico, el objetivo es que la variable de esfuerzo (voltaje) de entrada se mantenga a la salida gracias a que la ganancia del amplificador es unitaria. Dicho efecto debe ser proporcionado sin someter a un esfuerzo mayor a la fuente, es decir, que la fuente se mantenga trabajando constantemente sin requerirle mayor o menor esfuerzo, es ahí donde el amplificador funciona entre la etapa de la fuente y la etapa de la carga protegiendo el sistema que suministra la energía.

Del modelo propuesto se pueden hacer varias observaciones, la primera es que la ganancia se podría mantener constante si el émbolo no se mueve, es decir, generaría la misma presión durante todo el proceso aliviando a la fuente en caso de suceder una falla. Esto se puede deducir como una protección que se encuentra entre la fuente y la carga.

También se puede observar que el control de la ganancia en el émbolo ya no depende de la carga ya que no se requiere modificar la variable de esfuerzo sino, por el contrario, mantenerla estable y constante durante el proceso de trabajo. Por supuesto, el análisis completo del modelo que aquí se propone tendría que ser más exhaustivo, sin embargo, el modelo en Bond Graph permite agregar otros elementos que pudieran ser necesarios para el sistema.

### 4.2.2.3. ESPACIO DE ESTADOS DEL EQUIVALENTE HIDRÁULICO/MECÁNICO

A continuación, se obtendrán las ecuaciones en espacio de estados a partir del modelo matemático con la intención de obtener su comportamiento. La siguiente figura (misma de la **figura 81**) muestra el diagrama en Bond Graph del Buffer, que será la base para obtener el espacio de estados del prototipo propuesto.



Para comenzar a realizar el proceso de extracción de las ecuaciones es importante que se verifique que la causalidad en todos los elementos está correctamente localizada y que todos los bonds del sistema estén numerados correctamente, es decir, que no existan números repetidos o que falte algún bond por numerar. Siguiendo la metodología explicada en el **capítulo 2** se tiene:

- ESTABLECER LOS VECTORES CLAVE

En el diagrama en Bond Graph del buffer, se puede observar que no contiene elementos de almacenamiento de energía, por lo que los vectores  $\mathbf{x}$ ,  $\dot{\mathbf{x}}$  y  $\mathbf{z}$  son cero.

$$\mathbf{x} = [\mathbf{0}] \quad ; \quad \dot{\mathbf{x}} = [\mathbf{0}] \quad ; \quad \mathbf{z} = [\mathbf{0}]$$

Por otro lado, al contener únicamente elementos disipadores de energía, los *vectores clave* asociados se muestran a continuación.

$$D_{in} = \begin{bmatrix} e_4 \\ f_7 \\ e_9 \end{bmatrix} \quad ; \quad D_{out} = \begin{bmatrix} f_4 \\ e_7 \\ f_9 \end{bmatrix}$$

Finalmente, los *vectores clave* asociados a la entrada y salida del sistema son los siguientes.

$$u = [e_1] ; y = [e_9]$$

- **DEFINIR LAS RELACIONES CONSTITUTIVAS**

Las relaciones constitutivas son aquellas que corresponden a las ecuaciones individuales de los elementos de almacenamiento y su interacción con los mismos (matriz  $F$ ), así como la interacción entre los elementos resistivos con sus ecuaciones individuales (matriz  $L$ ).

$$D_{out} = LD_{in} ; z = Fx$$

Donde  $F$  es una matriz diagonal con las ecuaciones de los elementos de almacenamiento de energía y  $L$  es una matriz diagonal con los elementos de disipación de energía. Debido a que no existen elementos de almacenamiento en el sistema, la matriz  $F = [0]$ , mientras que la matriz  $L$  se puede formar de la siguiente manera.

$$\begin{bmatrix} f_4 \\ e_7 \\ f_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/R_{in} & 0 & 0 \\ 0 & R_{out} & 0 \\ 0 & 0 & 1/R_{carga} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_4 \\ f_7 \\ e_9 \end{bmatrix} \quad \therefore L = \begin{bmatrix} 1/R_{in} & 0 & 0 \\ 0 & R_{out} & 0 \\ 0 & 0 & 1/R_{carga} \end{bmatrix}$$

- **CONSTRUIR LA MATRIZ DE ESTRUCTURA UNIÓN**

El siguiente paso es obtener la matriz de estructura unión utilizando los vectores y relaciones obtenidos en los pasos anteriores. Para construir dicha matriz se tiene:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ D_{in} \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ D_{out} \\ u \end{bmatrix}$$

Es importante recordar que no se tienen elementos de almacenamiento de energía, motivo por el cual las submatrices  $S_{11}$ ,  $S_{12}$ ,  $S_{13}$ ,  $S_{21}$  y  $S_{31}$  son nulas, dando a pie a que la matriz de estructura unión sea:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ e_4 \\ f_7 \\ e_9 \\ e_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/(1+k) & 0 & 1/(1+k) \\ 0 & -1/(1+k) & 0 & 1/(1+k) & 0 \\ 0 & 0 & -1/(1+k) & 0 & k/(1+k) \\ 0 & 0 & -1/(1+k) & 0 & k/(1+k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ f_4 \\ e_7 \\ f_9 \\ e_1 \end{bmatrix}$$

Es así que la distribución de las submatrices restantes de  $S$  queden definidas de la siguiente manera:

$$S_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 1/(1+k) & 0 \\ -1/(1+k) & 0 & 1/(1+k) \\ 0 & -1/(1+k) & 0 \end{bmatrix} \quad S_{23} = \begin{bmatrix} 1/(1+k) \\ 0 \\ k/(1+k) \end{bmatrix}$$

$$S_{32} = [0 \quad -1/(1+k) \quad 0] \quad S_{33} = [k/(1+k)]$$

• **OBTENER LA ECUACIÓN EN EL ESPACIO DE ESTADOS**

Con las submatrices  $\mathbf{S}$  definidas se puede comenzar la obtención de la ecuación en espacio de estados cuya forma se muestra a continuación.

$$\dot{x} = \mathbf{A}x + \mathbf{B}u$$

$$y = \mathbf{C}x + \mathbf{D}u$$

Es fácil notar que las matrices  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$  dependen de los elementos de almacenamiento, por lo que dichas matrices serán nulas, cosa que se puede observar si se intentan obtener:

$$\mathbf{A} = (s_{11} + s_{12}\mathbf{M} s_{21})\mathbf{F} \quad \mathbf{B} = (s_{13} + s_{12}\mathbf{M} s_{23})$$

Debido a que  $\mathbf{S}_{11} = [\mathbf{0}]$ ,  $\mathbf{S}_{12} = [\mathbf{0}]$  y  $\mathbf{F} = [\mathbf{0}]$ , la matriz  $\mathbf{A}$  es nula. Por otro lado, debido a que  $\mathbf{S}_{13} = [\mathbf{0}]$  y  $\mathbf{S}_{12} = [\mathbf{0}]$ , la matriz  $\mathbf{B}$  también será nula. Sin embargo, las matrices  $\mathbf{C}$  y  $\mathbf{D}$  son matrices que dependen de la salida del sistema, la matriz  $\mathbf{C}$  respecto a los elementos de almacenamiento (que se puede deducir que dicha matriz también será nula) y la matriz  $\mathbf{D}$  respecto a la entrada del sistema. Es así que se obtienen dichas matrices con las siguientes ecuaciones:

$$\mathbf{C} = (s_{31} + s_{32}\mathbf{M} s_{21})\mathbf{F} \quad \mathbf{D} = (s_{33} + s_{32}\mathbf{M} s_{23})$$

La matriz  $\mathbf{C}$  es nula debido a que  $\mathbf{S}_{31} = [\mathbf{0}]$ ,  $\mathbf{S}_{21} = [\mathbf{0}]$  y  $\mathbf{F} = [\mathbf{0}]$ , mientras que, para obtener la matriz  $\mathbf{D}$  es necesario determinar la matriz  $\mathbf{M}$  la cual tiene la forma:

$$\mathbf{M} = L(I - s_{22}L)^{-1}$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1/R_{in} & 0 & 0 \\ 0 & R_{out} & 0 \\ 0 & 0 & 1/R_{carga} \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1/(1+k) & 0 \\ -1/(1+k) & 0 & 1/(1+k) \\ 0 & -1/(1+k) & 0 \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} 1/R_{in} & 0 & 0 \\ 0 & R_{out} & 0 \\ 0 & 0 & 1/R_{carga} \end{bmatrix}^{-1}$$

Por lo que, la matriz resultante es:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \frac{(k+1)^2 R_{carga} + R_{out}}{(k+1)R_{in}R_{carga} + R_{out}(R_{in} + R_{carga})} & \frac{(k+1)R_{out}R_{carga}}{(k+1)R_{in}R_{carga} + R_{out}(R_{in} + R_{carga})} & \frac{R_{out}}{(k+1)R_{in}R_{carga} + R_{out}(R_{in} + R_{carga})} \\ \frac{-(k+1)R_{out}R_{carga}}{(k+1)R_{in}R_{carga} + R_{out}(R_{in} + R_{carga})} & \frac{(k+1)^2 R_{in}R_{out}R_{carga}}{(k+1)R_{in}R_{carga} + R_{out}(R_{in} + R_{carga})} & \frac{(k+1)R_{in}R_{out}}{(k+1)R_{in}R_{carga} + R_{out}(R_{in} + R_{carga})} \\ \frac{R_{out}}{(k+1)R_{in}R_{carga} + R_{out}(R_{in} + R_{carga})} & \frac{-(k+1)R_{in}R_{out}}{(k+1)R_{in}R_{carga} + R_{out}(R_{in} + R_{carga})} & \frac{(k+1)^2 R_{in} + R_{out}}{(k+1)R_{in}R_{carga} + R_{out}(R_{in} + R_{carga})} \end{bmatrix}$$

Una vez que se ha desarrollado la matriz  $\mathbf{M}$ , se puede obtener la matriz  $\mathbf{D}$ :

$$\mathbf{D} = [k/(1+k)] + [0 \quad -1/(1+k) \quad 0]\mathbf{M} \begin{bmatrix} 1/(1+k) \\ 0 \\ k/(1+k) \end{bmatrix}$$

Dando como resultado:

$$\mathbf{D} = \frac{k}{k+1} + \frac{R_{out}(R_{carga} - kR_{in})}{(k+1)[(k+1)^2 R_{in}R_{carga} + R_{out}(R_{in} + R_{carga})]}$$



Finalmente, el espacio de estados se resume a:

$$\mathbf{y} = \left\{ \frac{k}{k+1} + \frac{R_{out}(R_{carga} - kR_{in})}{(k+1)[(k+1)^2 R_{in} R_{carga} + R_{out}(R_{in} + R_{carga})]} \right\} \mathbf{u}$$

Donde  $\mathbf{y}$  es la salida (o salidas) del sistema y  $\mathbf{u}$  es la entrada (o entradas) del mismo.

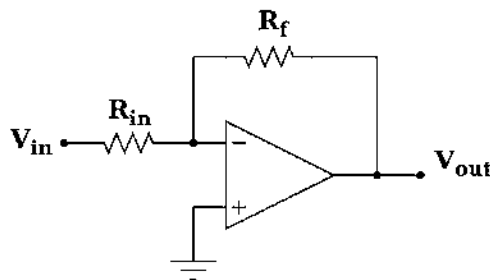
## 4.3. OTROS CIRCUITOS CON AMPLIFICADOR OPERACIONAL DE INTERÉS

Además de las dos configuraciones que se mencionaron antes, existen otras dos que son de mucha ayuda en el diseño de sistemas algebraicos, es decir, aquellos sistemas que suman o restan señales o variables. Las configuraciones en cuestión son el amplificador inversor y el amplificador diferencial, los cuales se utilizarán como ejemplo para demostrar que la metodología en Bond Graph permite extraer las ecuaciones del sistema, y dejar tanto diagrama de los elementos generalizados, como las ecuaciones que definen a dicho sistema, preparados para únicamente ser implementados en otros dominios.

Esta característica de Bond Graph es importante, ya que el tiempo que se requiere para encontrar los sistemas equivalentes se reduce considerablemente.

### 4.3.1. AMPLIFICADOR INVERSOR

El *amplificador inversor* es un circuito en lazo cerrado o de retroalimentación negativa, ya que se devuelve una pequeña parte de la salida a la entrada inversora (−) del amplificador operacional. Se denomina amplificador inversor debido a que la señal de salida está desfasada 180° con relación a la de entrada. La **figura 81** muestra el circuito de un amplificador inversor, donde se puede observar que la señal de entrada ( $V_{in}$ ) se aplica a través de una resistencia ( $R_{in}$ ) en la terminal inversora del amplificador, mientras que en la salida existe la retroalimentación antes mencionada mediante una resistencia ( $R_f$ ).



**Figura 81:** Circuito del Amplificador Inversor.

Por otro lado, la terminal no inversora (+) se conecta directamente a tierra ya que idealmente se tiene una impedancia de entrada infinita y teóricamente no existe flujo de corriente en ninguna de las dos terminales de entrada, lo que significa que no hay una caída de voltaje entre ambas entradas.

Sin embargo, en la práctica suele colocarse una resistencia entre la terminal no inversora y tierra para mejorar las características del amplificador real. [14]

Obtener las ecuaciones del amplificador inversor es relativamente sencillo si se analiza con la idea de la ausencia de voltaje entre ambas terminales de entrada.

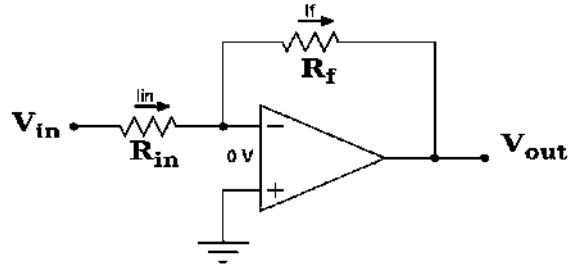


Figura 82: Flujo de corriente en el amplificador inversor.

Ya se mencionó que, al tener una impedancia de entrada infinita, no circulará corriente en las terminales de entrada del amplificador operacional por lo que la corriente que circula por las resistencias  $R_{in}$  y  $R_f$  es la misma:

$$I_{in} = I_f$$

Tomando en cuenta que en la entrada inversora se tiene un voltaje nulo ( $0v$ ), la caída de tensión en  $R_{in}$  es el propio voltaje de entrada  $V_{in}$ . Aplicando la ley de Ohm se tiene:

$$I_{in} = \frac{V_{in}}{R_{in}}$$

De igual manera, la caída de voltaje en la resistencia  $R_f$  será el voltaje en la salida  $-V_{out}$ :

$$I_f = \frac{-V_{out}}{R_f}$$

Retomando que la corriente que circula en ambas resistencias es la misma, se puede deducir que:

$$\frac{V_{in}}{R_{in}} = \frac{-V_{out}}{R_f}$$

Reacomodando la igualdad se obtiene la ganancia en lazo cerrado que es:

$$K = \frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{-R_f}{R_{in}}$$

Donde  $K$  es la ganancia del amplificador inversor y se puede observar que dicha ganancia puede ser controlada a través de los elementos externos, en este caso, las resistencias. El signo negativo implica el desfase de  $180^\circ$  en la señal de salida respecto a la de entrada.

#### 4.3.1.1. MODELADO EN BOND GRAPH DEL AMPLIFICADOR INVERSOR

La principal función del amplificador inversor es desfazar la señal de salida  $180^\circ$  respecto a la señal de entrada, además de aumentar o reducir la amplitud de la señal dependiendo del valor de resistencias que se utilizan. La siguiente figura muestra el esquemático del amplificador inversor y se puede apreciar cómo interactúan los elementos externos con los elementos internos del amplificador operacional.

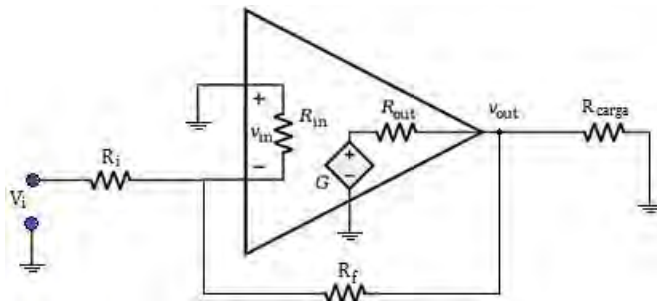


Figura 83: Esquema completo del amplificador inversor.

Tomando como base el modelo en Bond Graph del amplificador operacional, se puede modificar para obtener el modelo específico del amplificador inversor.

Lo primero es eliminar la entrada no-inversora para obtener el gráfico de la figura 84.

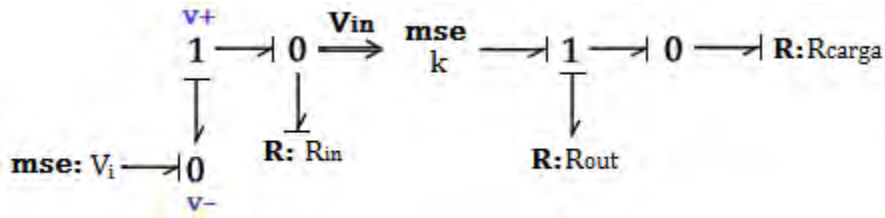


Figura 84: Primer paso del modelo en Bond Graph del amplificador inversor.

El siguiente paso es agregar la resistencia que se encuentra entre la señal de entrada ( $mse: V_i$ ) y la unión-0 correspondiente a la entrada inversora ( $v_-$ ) del amplificador operacional. Como la resistencia y la señal de entrada se encuentran en serie, se conectan ambas a una unión-1 la cual estará enlazada con la unión-0 que corresponde a la entrada inversora ( $v_-$ ).



Sin embargo, si existen elementos de disipación de energía en el modelo, lo que genera los siguientes vectores clave:

$$D_{in} = \begin{bmatrix} f_2 \\ e_7 \\ f_{10} \\ e_{13} \\ e_{14} \end{bmatrix} ; \quad D_{out} = \begin{bmatrix} e_2 \\ f_7 \\ e_{10} \\ f_{13} \\ f_{14} \end{bmatrix}$$

Finalmente, los vectores asociados a las entradas y salidas son los siguientes:

$$u = [e_1] \quad ; \quad y = [e_{13}]$$

### • DEFINIR LAS RELACIONES CONSTITUTIVAS

Con los vectores  $D_{in}$  y  $D_{out}$  construidos, se pueden obtener las relaciones constitutivas definidas por las matrices  $F$  (matriz que relaciona a los elementos de almacenamiento de energía) y  $L$  (matriz que relaciona a los elementos de disipación de energía). Debido a que el modelo carece de elementos de almacenamiento de energía se descarta la presencia de la matriz  $F$ , por lo que se debe obtener únicamente la matriz  $L$ . Dada la ecuación  $D_{out} = LD_{in}$  se tiene:

$$\begin{bmatrix} e_2 \\ f_7 \\ e_{10} \\ f_{13} \\ f_{14} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/R_{in} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_{out} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/R_{carga} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/R_f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_2 \\ e_7 \\ f_{10} \\ e_{13} \\ e_{14} \end{bmatrix} \quad \therefore \quad L = \begin{bmatrix} R_i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/R_{in} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_{out} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/R_{carga} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/R_f \end{bmatrix}$$

### • CONSTRUIR LA MATRIZ DE ESTRUCTURA UNIÓN

A continuación, se obtendrá la matriz de estructura unión con los *vectores clave* que se han obtenido, recordando que la estructura de la matriz está dada por:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ D_{in} \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ D_{out} \\ u \end{bmatrix}$$

Considerando que el sistema estudiado no contiene elementos de almacenamiento de energía, las submatrices  $S_{11}$ ,  $S_{12}$ ,  $S_{13}$ ,  $S_{21}$  y  $S_{31}$  serán nulas, por lo tanto la matriz de estructura unión se representa como:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ f_2 \\ e_7 \\ f_{10} \\ e_{13} \\ e_{14} \\ e_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1/k & k+1/k & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1/k & 0 & -1 & 0 & 0 & -1/k \\ 0 & -(k+1)/1 & 0 & 1 & 0 & 0 & k+1/k \\ 0 & 1/k & 0 & -1 & 0 & 0 & -1/k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ e_2 \\ f_7 \\ e_{10} \\ f_{13} \\ f_{14} \\ e_1 \end{bmatrix}$$

De tal forma que la distribución de las submatrices restantes de  $S$  quedan como:

$$S_{22} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & -1/k & k + 1/k \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1/k & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -(k+1)/1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad S_{23} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ -1/k \\ k + 1/k \end{bmatrix}$$

$$S_{32} = [1/k \quad 0 \quad -1 \quad 0 \quad 0]$$

• **OBTENER LA ECUACIÓN EN EL ESPACIO DE ESTADOS**

Con la ayuda de las submatrices de  $S$  bien definidas se puede construir el espacio de estados del sistema, recordando que la forma es:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx + Du$$

Sin embargo, al tratarse de un sistema que no contiene elementos de almacenamiento de energía, las matrices  $A$ ,  $B$  y  $C$  son nulas y el sistema se reduce a:

$$y = Du \quad \text{donde} \quad D = (s_{33} + s_{32}M s_{23})$$

Para obtener la matriz  $D$  es necesario obtener la matriz  $M$ , misma que se puede determinar con la siguiente expresión:

$$M = L(I - s_{22}L)^{-1}$$

$$M = \begin{bmatrix} R_i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/R_{in} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_{out} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/R_{carga} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/R_f \end{bmatrix} \left\{ \left[ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & -1/k & k + 1/k \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1/k & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -(k+1)/1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right] \begin{bmatrix} R_i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/R_{in} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_{out} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/R_{carga} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/R_f \end{bmatrix} \right\}^{-1}$$

El resultado es tanto extenso, es por esto que se colocará la matriz  $M$  con los elementos que la componen y posteriormente se colocará la expresión matemática correspondiente a cada elemento de la matriz. Es así que la resultante es:

$$M = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} & M_{14} & M_{15} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} & M_{24} & M_{25} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} & M_{34} & M_{35} \\ M_{41} & M_{42} & M_{43} & M_{44} & M_{45} \\ M_{51} & M_{52} & M_{53} & M_{54} & M_{55} \end{bmatrix}$$

Donde, las ecuaciones de cada elemento de la matriz se presentan a continuación:

$$M_{11} = \frac{k^2 R_i R_{in} (R_{carga} R_f + R_{carga} R_{out} + R_f R_{out})}{k^2 [R_{carga} [R_{in} (R_f + R_i + R_{out}) + R_i (R_f + R_{out})] + R_{out} [R_f (R_i + R_{in}) + R_{in} R_i] + R_i [R_{in} (2k R_{carga} + R_f + R_{carga})]}$$

$$M_{21} = \frac{k^2 R_i (R_{carga} R_f + R_{carga} R_{out} + R_f R_{out})}{k^2 [R_{carga} [R_{in} (R_f + R_i + R_{out}) + R_i (R_f + R_{out})] + R_{out} [R_f (R_i + R_{in}) + R_{in} R_i] + R_i [R_{in} (2k R_{carga} + R_f + R_{carga})]}$$

$$M_{31} = \frac{k R_{out} R_i R_{in} [R_f + R_c + k R_c]}{k^2 [R_{carga} [R_{in} (R_f + R_i + R_{out}) + R_i (R_f + R_{out})] + R_{out} [R_f (R_i + R_{in}) + R_{in} R_i] + R_i [R_{in} (2k R_{carga} + R_f + R_{carga})]}$$

$$M_{41} = \frac{k R_i R_{in} (R_f - R_{out} k)}{k^2 [R_{carga} [R_{in} (R_f + R_i + R_{out}) + R_i (R_f + R_{out})] + R_{out} [R_f (R_i + R_{in}) + R_{in} R_i] + R_i R_{in} [2k R_{carga} + R_f + R_{carga}]}$$

$$M_{51} = \frac{-k R_i R_{in} (R_{carga} + k R_{carga} + k R_{out})}{k^2 [R_{carga} [R_{in} (R_f + R_i + R_{out}) + R_i (R_f + R_{out})] + R_{out} [R_f (R_i + R_{in}) + R_{in} R_i] + R_i R_{in} [2k R_{carga} + R_f + R_{carga}]}$$

$$M_{12} = \frac{-k^2 R_i (R_{carga} R_f + R_{carga} R_{out} + R_f R_{out})}{k^2 [R_{carga} [R_{in} (R_f + R_i + R_{out}) + R_i (R_f + R_{out})] + R_{out} [R_f (R_i + R_{in}) + R_{in} R_i] + R_i [R_{in} (2k R_{carga} + R_f + R_{carga})]}$$

$$M_{22} = \frac{k^2 [R_{carga} [R_{in} (R_f + R_i + R_{out}) + R_{out} (R_f + R_i)]] + R_i (2k R_{carga} + R_f + R_{carga})}{k^2 [R_{carga} [R_{in} (R_f + R_i + R_{out}) + R_i (R_f + R_{out})] + R_{out} [R_f (R_i + R_{in}) + R_{in} R_i] + R_i [R_{in} (2k R_{carga} + R_f + R_{carga})]}$$

$$M_{32} = \frac{-k R_{out} R_i (R_{carga} + R_f + k R_{carga})}{k^2 [R_{carga} [R_{in} (R_f + R_i + R_{out}) + R_i (R_f + R_{out})] + R_{out} [R_f (R_i + R_{in}) + R_{in} R_i] + R_i [R_{in} (2k R_{carga} + R_f + R_{carga})]}$$

$$M_{42} = \frac{-k R_i (R_f - k R_{out})}{k^2 [R_{carga} [R_{in} (R_f + R_i + R_{out}) + R_i (R_f + R_{out})] + R_{out} [R_f (R_i + R_{in}) + R_{in} R_i] + R_i R_{in} [2k R_{carga} + R_f + R_{carga}]}$$

$$M_{52} = \frac{k R_i (R_{carga} + k R_{carga} + k R_{out})}{k^2 [R_{carga} [R_{in} (R_f + R_i + R_{out}) + R_i (R_f + R_{out})] + R_{out} [R_f (R_i + R_{in}) + R_{in} R_i] + R_i R_{in} [2k R_{carga} + R_f + R_{carga}]}$$

$$M_{13} = \frac{k R_i R_{in} R_{out} (R_{carga} + R_f + k R_{carga})}{k^2 [R_{carga} [R_{in} (R_f + R_i + R_{out}) + R_i (R_f + R_{out})] + R_{out} [R_f (R_i + R_{in}) + R_{in} R_i] + R_i [R_{in} (2k R_{carga} + R_f + R_{carga})]}$$

$$M_{23} = \frac{R_{out} [k^2 (R_{carga} (R_f R_i + R_f R_{in} + R_i R_{in})) + R_i R_{carga} R_{in} (2k + 1) + R_f R_i R_{in}]}{k^2 [R_{carga} [R_{in} (R_f + R_i + R_{out}) + R_i (R_f + R_{out})] + R_{out} [R_f (R_i + R_{in}) + R_{in} R_i] + R_i [R_{in} (2k R_{carga} + R_f + R_{carga})]}$$

$$M_{33} = \frac{R_{out} [k^2 (R_f + R_i + R_{in}) + R_f (1 + 2k) + R_{carga}]}{k^2 [R_{carga} [R_{in} (R_f + R_i + R_{out}) + R_i (R_f + R_{out})] + R_{out} [R_f (R_i + R_{in}) + R_{in} R_i] + R_i [R_{in} (2k R_{carga} + R_f + R_{carga})]}$$

$$M_{43} = \frac{-k R_{out} [k (R_{in} R_i + R_{in} R_f + R_i R_f) + R_i R_{in}]}{k^2 [R_{carga} [R_{in} (R_f + R_i + R_{out}) + R_i (R_f + R_{out})] + R_{out} [R_f (R_i + R_{in}) + R_{in} R_i] + R_i R_{in} [2k R_{carga} + R_f + R_{carga}]}$$

$$M_{53} = \frac{k R_o (k R_{carga} R_i - R_{in} R_i + k R_{carga} R_{in})}{k^2 [R_{carga} [R_{in} (R_f + R_i + R_{out}) + R_i (R_f + R_{out})] + R_{out} [R_f (R_i + R_{in}) + R_{in} R_i] + R_i R_{in} [2k R_{carga} + R_f + R_{carga}]}$$

$$M_{14} = \frac{-k R_{in} R_i (R_f - k R_{out})}{k^2 [R_{carga} [R_{in} (R_f + R_i + R_{out}) + R_i (R_f + R_{out})] + R_{out} [R_f (R_i + R_{in}) + R_{in} R_i] + R_i [R_{in} (2k R_{carga} + R_f + R_{carga})]}$$

$$M_{24} = \frac{-k R_i (R_f - k R_{out})}{k^2 [R_{carga} [R_{in} (R_f + R_i + R_{out}) + R_i (R_f + R_{out})] + R_{out} [R_f (R_i + R_{in}) + R_{in} R_i] + R_i [R_{in} (2k R_{carga} + R_f + R_{carga})]}$$

$$M_{34} = \frac{kR_{out}[k(R_iR_{in} + R_{in}R_f + R_iR_f) + R_iR_{in}]}{k^2[R_{carga}[R_{in}(R_f + R_i + R_{out}) + R_i(R_f + R_{out})] + R_{out}[R_f(R_i + R_{in}) + R_{in}R_i] + R_i[R_{in}(2kR_{carga} + R_f + R_{carga})]}$$

$$M_{44} = \frac{k^2[R_{in}(R_{out} + R_i + R_f) + R_i(R_f + R_{out})] + R_iR_{in}(2k + 1)}{k^2[R_{carga}[R_{in}(R_f + R_i + R_{out}) + R_i(R_f + R_{out})] + R_{out}[R_f(R_i + R_{in}) + R_{in}R_i] + R_iR_{in}[2kR_{carga} + R_f + R_{carga}]}$$

$$M_{54} = \frac{k^2(R_{out}R_{in} + R_iR_{out}) + R_iR_{in}(2k + 1)}{k^2[R_{carga}[R_{in}(R_f + R_i + R_{out}) + R_i(R_f + R_{out})] + R_{out}[R_f(R_i + R_{in}) + R_{in}R_i] + R_iR_{in}[2kR_{carga} + R_f + R_{carga}]}$$

$$M_{15} = \frac{kR_iR_{in}(R_{carga} + kR_{carga} + kR_{out})}{k^2[R_{carga}[R_{in}(R_f + R_i + R_{out}) + R_i(R_f + R_{out})] + R_{out}[R_f(R_i + R_{in}) + R_{in}R_i] + R_i[R_{in}(2kR_{carga} + R_f + R_{carga})]}$$

$$M_{25} = \frac{kR_i(R_{carga} + kR_{carga} + kR_{out})}{k^2[R_{carga}[R_{in}(R_f + R_i + R_{out}) + R_i(R_f + R_{out})] + R_{out}[R_f(R_i + R_{in}) + R_{in}R_i] + R_i[R_{in}(2kR_{carga} + R_f + R_{carga})]}$$

$$M_{35} = \frac{-kR_{out}[(kR_iR_{carga} - kR_{in}R_{carga}) + R_iR_{in}]}{k^2[R_{carga}[R_{in}(R_f + R_i + R_{out}) + R_i(R_f + R_{out})] + R_{out}[R_f(R_i + R_{in}) + R_{in}R_i] + R_i[R_{in}(2kR_{carga} + R_f + R_{carga})]}$$

$$M_{45} = \frac{k^2(R_iR_{out} + R_{in}R_{out}) + R_iR_{in}(k + 1)}{k^2[R_{carga}[R_{in}(R_f + R_i + R_{out}) + R_i(R_f + R_{out})] + R_{out}[R_f(R_i + R_{in}) + R_{in}R_i] + R_iR_{in}[2kR_{carga} + R_f + R_{carga}]}$$

$$M_{55} = \frac{k^2(R_{carga}R_i + R_{carga}R_{in} + R_iR_{out} + R_{in}R_{out}) + R_iR_{in}}{k^2[R_{carga}[R_{in}(R_f + R_i + R_{out}) + R_i(R_f + R_{out})] + R_{out}[R_f(R_i + R_{in}) + R_{in}R_i] + R_iR_{in}[2kR_{carga} + R_f + R_{carga}]}$$

Finalizado el desarrollo de la matriz  $\mathbf{M}$ , se procede a obtener la matriz  $\mathbf{D}$  como se muestra a continuación:

$$D = [-1/k] + [1/k \quad 0 \quad -1 \quad 0 \quad 0][M] \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ -1/k \\ (K + 1)/k \end{bmatrix}$$

Obteniendo el siguiente resultado:

$$D = \frac{-kR_{carga}R_{in}(R_f - kR_{out})}{k^2[R_{carga}[R_{in}(R_f + R_i + R_{out}) + R_i(R_f + R_{out})] + R_{out}[R_f(R_i + R_{in}) + R_{in}R_i] + R_i[R_{in}(2kR_{carga} + R_f + R_{carga})]}$$

Por último, el espacio de estados queda conformado de la siguiente manera:

$$\mathbf{y} = \left\{ \frac{-kR_{carga}R_{in}(R_f - kR_{out})}{k^2[R_{carga}[R_{in}(R_f + R_i + R_{out}) + R_i(R_f + R_{out})] + R_{out}[R_f(R_i + R_{in}) + R_{in}R_i] + R_i[R_{in}(2kR_{carga} + R_f + R_{carga})]} \right\} \mathbf{u}$$

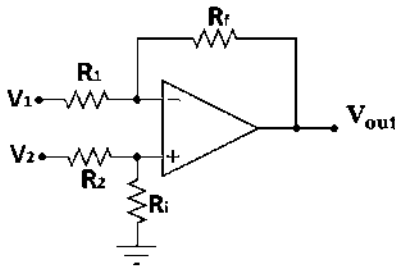
Donde  $\mathbf{y}$  corresponde a las entradas y  $\mathbf{u}$  a las salidas.

### 4.3.2. AMPLIFICADOR DIFERENCIAL

A diferencia del amplificador inversor y el amplificador no-inversor que sólo tienen una entrada para la señal, el *amplificador diferencial* posee dos entradas. La función principal de éste circuito es *restar* las dos señales que se introducirán al amplificador en función de una ganancia controlada.



La operación de resta que efectúa el dispositivo se observa a la salida del mismo y el orden de la resta será la señal que ingresa a la entrada no inversora menos la señal que se ingresa a la entrada inversora. La **figura 87** muestra el esquema con los componentes del amplificador diferencial donde pareciera la combinación de un amplificador inversor y un amplificador no-inversor que, a grandes rasgos, tienen prestaciones similares; sin embargo, el amplificador diferencial tiene una característica llamada *rechazo al ruido común* que se refiere al ruido generado por las condiciones atmosféricas o señales parásitas que se encuentren cerca de este dispositivo. [15]

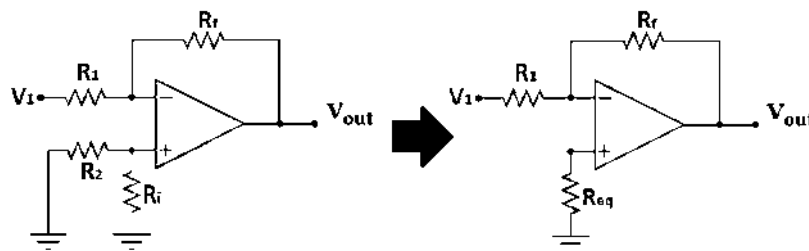


**Figura 87:** Amplificador diferencial.

Para analizar las ecuaciones que reflejan el comportamiento del amplificador diferencial, es importante recordar que se trata de un circuito lineal, por lo que se puede realizar una inspección aplicando el principio de *superposición*. Dicho principio dicta que se puede analizar la relación entre la salida y cada entrada por separado, y al final, la salida total será la suma de ambos resultados. Teniendo eso en cuenta, se puede analizar el circuito separándolo en dos partes ya que se tienen dos entradas.

### 1. Anulando la Entrada $V_2$ :

Para anular la entrada de la señal  $V_2$  se debe conectar directamente a tierra, lo que ocasiona que el voltaje en ese punto sea nulo ( $V_2 = 0$ ). Una vez que se conecta a tierra, se obtiene un arreglo en paralelo que involucra a las resistencias  $R_2$  y  $R_i$ .



**Figura 88:** Reducción del Amplificador Diferencial por Superposición.

La **figura 88** muestra en su lado izquierdo, el arreglo en paralelo mencionado, derivado de anular la entrada  $V_2$ . Así mismo, también muestra en su lado derecho la reducción de las resistencias  $R_2$  y  $R_i$  en una resistencia equivalente ( $R_{eq}$ ). El resultado de la simplificación del arreglo en paralelo es la obtención de un amplificador inversor en donde la resistencia  $R_{eq}$  no afecta, ya que entre la entrada inversora (-) y la entrada no inversora (+) existe una diferencia de potencia de  $0v$ , por lo que no existe un flujo de corriente sobre la resistencia  $R_{eq}$ .

De esta manera, ya se conoce la ecuación que determina el comportamiento del amplificador inversor por el análisis previo:

$$\frac{V_{out}}{V_1} = -\frac{R_f}{R_1}$$

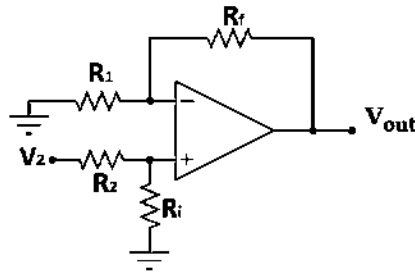
Como la variable de interés es el voltaje de salida ( $V_{out}$ ), se puede despejar para obtener la expresión:

$$V_{o1} = -\frac{R_f}{R_1}V_1$$

Esta ecuación forma parte del resultado final, por eso se le ha llamado  $V_{o1}$  a la variable de salida.

## 2. Anulando la entrada $V_1$ :

Siguiendo con el proceso de superposición, se procede a mandar la entrada  $V_1$  directo a tierra ( $0v$ ) y analizar el circuito resultante. La siguiente figura muestra dicho circuito y se puede observar que tiene similitud con el amplificador no-inversor, aunque con una diferencia significativa.



**Figura 89:** Análisis del Amplificador Diferencial por Superposición.

La diferencia se puede notar en la entrada no inversora (+), ya que en este caso, se observa un arreglo de resistencia ( $R_2$  y  $R_i$ ) entre la entrada positiva del amplificador operacional y la entrada de la señal  $V_2$  que no existe en el amplificador no-inversor. Recordando la ecuación del amplificador no-inversor, se tiene que:

$$\frac{V_{out}}{V_+} = \frac{R_f}{R_1} + 1$$

Como la variable de interés es el voltaje de salida, se despeja  $V_{out}$  de la ecuación y se obtiene:

$$V_{out} = \left[ \frac{R_f}{R_1} + 1 \right] V_+$$

Pero se debe obtener el voltaje  $V_+$  correspondiente al voltaje que se encuentra en la entrada no inversora del amplificador.

Observando la figura se puede notar que el arreglo de resistencias formado por  $R_2$  y  $R_i$  es un divisor de voltaje, cuya ecuación está determinada por:

$$V_+ = \left[ \frac{R_i}{R_2 + R_i} \right] V_2$$

Sustituyendo lo anterior en la ecuación del amplificador no-inversor se tiene:

$$V_{out} = \left[ \frac{R_f}{R_1} + 1 \right] \left[ \frac{R_i}{R_2 + R_i} \right] V_2$$

La expresión anterior también se puede expresar como:

$$V_{out} = \left[ \frac{R_f + R_1}{R_1} \right] \left[ \frac{R_i}{R_2 + R_i} \right] V_2$$

Esta última expresión puede simplificarse mucho si  $R_2 = R_1$  y  $R_i = R_f$  conservando la nomenclatura para que correspondan en la suma final:

$$V_{out} = \frac{(R_f + R_1)}{R_1} \frac{R_f}{(R_1 + R_f)} V_2$$

Eliminando los factores en común se obtiene la expresión que se necesita para obtener el voltaje de salida total:

$$V_{o2} = \frac{R_f}{R_1} V_2$$

Se ha nombrado  $V_{o2}$  a la variable de salida de la ecuación anterior para completar el principio de superposición. Ya con ambas ecuaciones individuales, la suma de ambas dará como resultado la ecuación que relaciona a las dos entradas con la salida:

$$V_{out} = V_{o1} + V_{o2}$$

Sustituyendo las dos ecuaciones obtenidas:

$$V_{out} = \frac{-R_f}{R_1} V_1 + \frac{R_f}{R_1} V_2$$

Reordenando y agrupando los términos en común, finalmente se obtiene la ecuación que determina el comportamiento del amplificador diferencial:

$$V_{out} = \frac{R_f}{R_1} (V_2 - V_1)$$

Donde se puede notar que la ganancia será controlada por los valores de las resistencias  $R_f$  y  $R_1$  cuyo circuito correspondiente se describe en la **figura 90**.

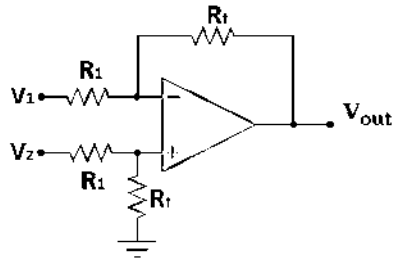


Figura 90: Circuito Modificado del Amplificador Diferencial.

Es en ésta imagen donde se corrige el cambio de resistencias ( $R_2 = R_1$  y  $R_i = R_f$ ) utilizado para simplificar en su totalidad el análisis matemático.

### 4.3.2.2. MODELADO EN BOND GRAPH DEL AMPLIFICADOR DIFERENCIAL

Se puede decir que el circuito amplificador diferencial se logra con la unión del amplificador inversor y del no-inversor, ya que en este tipo de circuitos se tienen dos entradas de señal, es decir, el amplificador diferencial se alimentará con una señal en la entrada no inversora, y otra señal en la entrada inversora. La siguiente imagen muestra el esquemático interno y externo del circuito en cuestión.

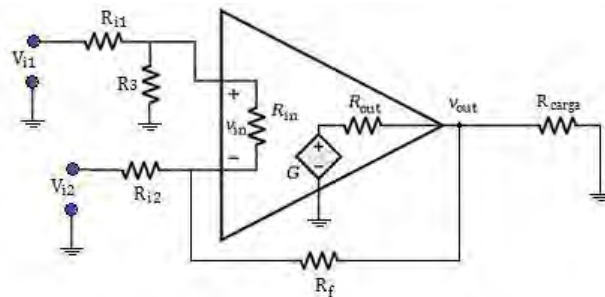


Figura 91: Esquema completo del amplificador diferencial.

Para obtener el diagrama en Bond Graph del amplificador diferencia, se tomará como base al amplificador inversor cuyo diagrama corresponde a la figura 92.

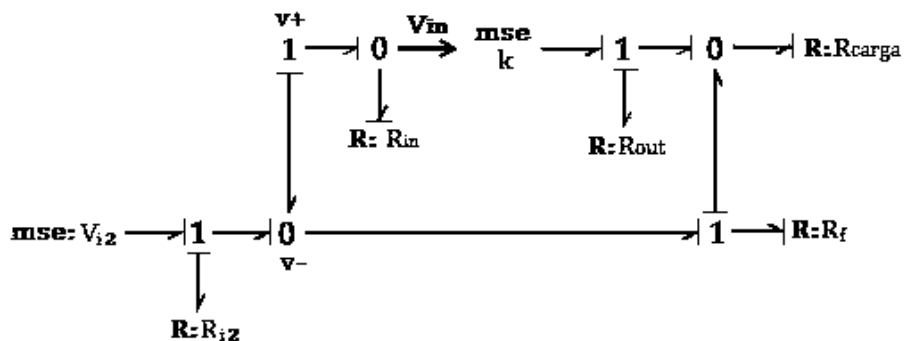


Figura 92: Esquema base del amplificador inversor.

En el apartado 3.3.3. del capítulo 3, se comprobó que el amplificador diferencial es la combinación del amplificador inversor, con la adición de un par de resistencias que forman un divisor de voltaje (como en el amplificador no-inversor) en la entrada no-inversora del amplificador operacional. A éste arreglo de resistencias se incorpora la entrada de señal  $mse: V_{i1}$ , por lo que el esquema se puede representar mediante Bond Graph como:

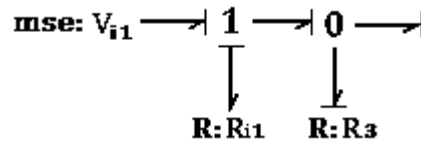


Figura 93: Diagrama del divisor de voltaje en la entrada no-inversora.

Es así que el diagrama en Bond Graph del amplificador diferencial se puede completar añadiendo la parte del diagrama mostrado en la figura 93, conectándolo en la unión-1 correspondiente a la entrada no-inversora ( $v_+$ ).

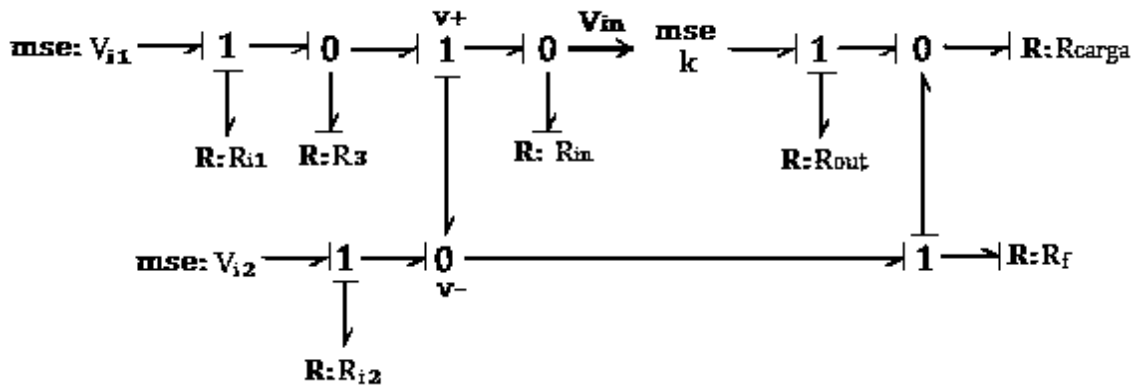


Figura 94: Bond Graph del amplificador diferencial.

Es así que la figura 94 muestra el diagrama en Bond Graph completo del amplificador diferencial, con sus dos entradas de señal  $mse: v_{i1}$  y  $mse: v_{i2}$  las cuales se someterán a una resta aritmética de señales. La figura 95 muestra el diagrama en bond Graph del amplificador inversor con los bonds numerados, listo para obtener su modelo matemático en espacio de estados.

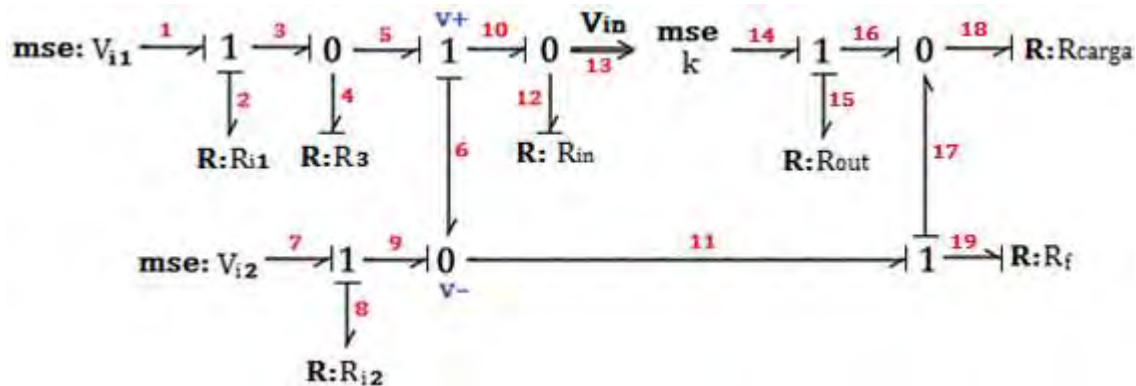


Figura 95: Bond Graph numerado del amplificador diferencial.

El diagrama que se muestra está preparado para comenzar a obtener las ecuaciones en espacio de estados con la metodología expuesta en el **capítulo 2**, para esto se ha revisado que la causalidad y la numeración de los bonds se encuentren colocados correctamente.

También es importante mencionar que el amplificador diferencial desarrolla su funcionamiento de mejor manera cuando los elementos resistivos  $R_{i1} = R_{i2}$  y  $R_3 = R_f$ .

- **ESTABLECER LOS VECTORES CLAVE**

Debido a que este sistema no contiene elementos de almacenamiento de energía, se tiene que los vectores clave  $\dot{x}$ ,  $x$  y  $z$  son nulos.

$$\dot{x} = [0] \quad ; \quad x = [0] \quad ; \quad z = [0]$$

Es así que sólo queda obtener los vectores clave relacionados a los elementos de disipación de energía que están distribuidos de la siguiente manera:

$$D_{in} = \begin{bmatrix} f_2 \\ e_4 \\ f_8 \\ e_{12} \\ f_{15} \\ e_{18} \\ e_{19} \end{bmatrix} \quad ; \quad D_{out} = \begin{bmatrix} e_2 \\ f_4 \\ e_8 \\ f_{12} \\ e_{15} \\ f_{18} \\ f_{19} \end{bmatrix}$$

Finalmente, los vectores relacionados a las entradas y salidas del sistema se muestran a continuación:

$$u = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_7 \end{bmatrix} \quad ; \quad y = [e_{18}]$$

- **DEFINIR LAS RELACIONES CONSTITUTIVAS**

Se tienen dos matrices que forman las relaciones constitutivas, la matriz  $F$  que relaciona a los elementos de almacenamiento de energía, y la matriz  $L$  que relaciona a los elementos de disipación de energía. Con lo anterior es fácil deducir que la matriz  $F$  es nula al no existir elementos de almacenamiento de energía en el sistema, mientras que la matriz  $L$  se obtiene de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} e_2 \\ f_4 \\ e_8 \\ f_{12} \\ e_{15} \\ f_{18} \\ f_{19} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/R_f & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/R_{in} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & R_{out} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/R_{carga} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/R_f & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_2 \\ e_4 \\ f_8 \\ e_{12} \\ f_{15} \\ e_{18} \\ e_{19} \end{bmatrix} \quad \therefore \quad L = \begin{bmatrix} R_i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/R_f & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/R_{in} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & R_{out} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/R_{carga} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/R_f & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/R_f \end{bmatrix}$$

- **CONSTRUIR LA MATRIZ DE ESTRUCTURA UNIÓN**

Recordando que la matriz de estructura unión tiene la siguiente distribución:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ D_{in} \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ D_{out} \\ u \end{bmatrix}$$

De la ecuación anterior es fácil percatarse que las submatrices  $S_{11}$ ,  $S_{12}$ ,  $S_{13}$ ,  $S_{21}$  y  $S_{31}$  son nulas debido a la ausencia de elementos de almacenamiento de energía en el sistema. De tal manera que la matriz de estructura unión se compone de los siguientes elementos:

$\begin{bmatrix} 0 \\ f_2 \\ e_4 \\ f_8 \\ e_{12} \\ f_{15} \\ e_{18} \\ e_{19} \\ e_{18} \end{bmatrix}$	$=$	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%; text-align: center;"> <tr style="background-color: #d9ead3;"> <td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td> </tr> <tr> <td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>1/k</td><td>-1/k</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td> </tr> <tr> <td>0</td><td>-1</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td> </tr> <tr> <td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>-1</td><td>0</td><td>-1/k</td><td>(k+1)/k</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td> </tr> <tr> <td>0</td><td>-1</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>-1</td><td>0</td><td>0</td> </tr> <tr> <td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>-1</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td> </tr> <tr> <td>0</td><td>-1/k</td><td>0</td><td>1/k</td><td>0</td><td>-1</td><td>0</td><td>0</td><td>1/k</td><td>-1/k</td><td>0</td><td>0</td> </tr> <tr> <td>0</td><td>1/k</td><td>0</td><td>-(k+1)/k</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>-1/k</td><td>(k+1)/k</td><td>0</td><td>0</td> </tr> <tr style="background-color: #fff2cc;"> <td>0</td><td>-1/k</td><td>0</td><td>1/k</td><td>0</td><td>-1</td><td>0</td><td>0</td><td>1/k</td><td>-1/k</td><td>0</td><td>0</td> </tr> </table>	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	1/k	-1/k	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	-1/k	(k+1)/k	0	0	0	0	0	-1	0	1	0	0	0	0	1	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-1	0	0	0	0	0	-1/k	0	1/k	0	-1	0	0	1/k	-1/k	0	0	0	1/k	0	-(k+1)/k	0	1	0	0	-1/k	(k+1)/k	0	0	0	-1/k	0	1/k	0	-1	0	0	1/k	-1/k	0	0	$\begin{bmatrix} 0 \\ e_2 \\ f_4 \\ e_8 \\ f_{12} \\ e_{15} \\ f_{18} \\ f_{19} \\ e_1 \\ e_7 \end{bmatrix}$
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0																																																																																																				
0	0	1	0	1	0	1/k	-1/k	0	0	0	0																																																																																																				
0	-1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0																																																																																																				
0	0	0	0	-1	0	-1/k	(k+1)/k	0	0	0	0																																																																																																				
0	-1	0	1	0	0	0	0	1	-1	0	0																																																																																																				
0	0	0	0	0	0	1	-1	0	0	0	0																																																																																																				
0	-1/k	0	1/k	0	-1	0	0	1/k	-1/k	0	0																																																																																																				
0	1/k	0	-(k+1)/k	0	1	0	0	-1/k	(k+1)/k	0	0																																																																																																				
0	-1/k	0	1/k	0	-1	0	0	1/k	-1/k	0	0																																																																																																				

Es así que las submatrices restantes están definidas como:

$$S_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1/k & -1/k \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1/k & (k+1)/k \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1/k & 0 & 1/k & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1/k & 0 & -(k+1)/k & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad S_{23} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 0 \\ 1/k & -1/k \\ -1/k & (k+1)/k \end{bmatrix}$$

$$S_{32} = [-1/k \quad 0 \quad 1/k \quad 0 \quad -1 \quad 0 \quad 0] \quad ; \quad S_{33} = [1/k \quad -1/k]$$

- **OBTENER LA ECUACIÓN EN EL ESPACIO DE ESTADOS**

Una vez que se estableció la matriz de estructura unión con todos sus elementos, se procede a obtener las ecuaciones en espacio de estado que representan el comportamiento del sistema que se está estudiando. Recordando que el espacio de estados tiene la forma:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du \end{aligned}$$

Se puede deducir que las matrices  $A$ ,  $B$  y  $C$  son nulas ya que no existen elementos de almacenamiento de energía, por lo que únicamente se debe determinar la matriz  $D$  con la expresión:

$$y = Du \quad \text{donde} \quad D = (s_{33} + s_{32}M s_{23}) \quad \text{con} \quad M = L(I - s_{22}L)^{-1}$$

$$M = \begin{bmatrix} R_i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/R_f & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/R_{in} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & R_{out} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/R_{carga} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/R_f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1/k & -1/k \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1/k & (k+1)/k \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1/k & 0 & 1/k & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1/k & 0 & -(k+1)/k & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_f & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/R_f & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/R_{in} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & R_{out} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/R_{carga} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/R_f \end{bmatrix}^{-1}$$

$$M = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} & M_{14} & M_{15} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} & M_{24} & M_{25} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} & M_{34} & M_{35} \\ M_{41} & M_{42} & M_{43} & M_{44} & M_{45} \\ M_{51} & M_{52} & M_{53} & M_{54} & M_{55} \end{bmatrix}$$

Debido a que los elementos de la matriz  $M$  son ecuaciones muy extensas, resultado de la combinación de siete elementos resistivos, se procederá a obtener la matriz  $D$  que conforma el espacio de estados como se observa a continuación:

$$D = [1/k \quad -1/k] + [-1/k \quad 0 \quad 1/k \quad 0 \quad -1 \quad 0 \quad 0][M] \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 0 \\ 1/k & -1/k \\ -1/k & (k+1)/k \end{bmatrix}$$

Resolviendo las operaciones pertinentes, se tiene que el resultado de la matriz  $D$  es:

$$D = \frac{R_f \{ R_{carga} [R_{in} (R_i + k(R_f + R_i + 2R_{out})) + k^2 R_i R_{out}] + 2k R_{out} [R_{in} (R_f + R_i)] \}}{k^2 \{ R_f [R_{carga} (a) + R_{out} (b)] + R_{carga} R_i (c) + R_i R_{out} (d) \} + R_{in} \{ e \} + 2k R_{carga} R_i R_{in} (R_f + R_i)}$$

Con:

$$\begin{aligned} a &= R_{in} (R_f + 1) + R_i (R_i + R_{out} + 2R_f) \\ b &= R_i (R_{carga} + R_f + R_i + R_{in}) + (R_i + R_{in}) (R_{carga} + R_f) \\ c &= (R_f + R_{out}) (R_i + R_{in}) + R_i R_{in} \\ d &= R_f (R_i + R_{in}) + R_i R_{in} \\ e &= R_f [(2R_i) (R_{carga} + R_f + 1) + R_i^2 (R_{carga} R_f)] \end{aligned}$$

Para concluir, se sustituye la matriz  $D$  obtenida y se sustituye en la ecuación de estados.

$$y = \left\{ \frac{R_f R_{in} [R_{carga} R_i (K^2 R_{out} + k + 1) + 2k R_{out} (R_{carga} + R_f + R_i) + k^2 R_f R_{carga}]}{k^2 \{ R_f [R_{carga} (a) + R_{out} (b)] + R_{carga} R_i (c) + R_i R_{out} (d) \} + R_{in} \{ e \} + 2k R_{carga} R_i R_{in} (R_f + R_i)} \right\} u$$

De tal manera que la ecuación anterior determina el comportamiento del sistema propuesto.



## 4.4. COMENTARIOS FINALES

El modelado en Bond Graph que se realizó en este cuarto capítulo, esclareció dudas respecto a la posibilidad de obtener sistemas equivalentes. Una de esas dudas era la posibilidad de elaborar un dispositivo a partir del diagrama en Bond Graph obtenido de un elemento existente en otro dominio físico, lo cual es posible. También se esclarece la posibilidad de obtener el modelo matemático a partir del diagrama en Bond Graph con la intención de que cada dominio físico lo interprete basado en sus elementos específicos, convirtiendo al diagrama y a las ecuaciones en un sistema generalizado.

Finalmente, relacionando los comentarios anteriores, se puede establecer que la metodología propuesta para obtener sistemas equivalentes puede ser utilizada para reconstruir sistemas complejos de experimentar, en otros dominios y experimentar sobre estos con mayor seguridad, en este caso, es mucho más cómodo, sencillo y barato experimentar con el amplificador operacional electrónico, que experimentar con el amplificador operacional mecánico/hidráulico que se propone en este trabajo.

Otro aspecto importante para explicar es lo extenso de las ecuaciones obtenidas a partir de los modelos en Bond Graph de los equivalentes mecánicos/hidráulicos, ya que parecieran muy distantes respecto a las ecuaciones de los sistemas electrónicos. Esto se debe a que en los amplificadores operacionales electrónicos poseen características ideales bien definidas como la resistencia interna de entrada infinita, la resistencia interna de salida es nula y un valor muy alto de ganancia en lazo abierto, lo que reduce la complejidad de las ecuaciones en gran medida. Sin embargo, es preferente realizar el análisis completo de los sistemas y al final otorgar valores dentro de los rangos posibles en cada dominio físico, lo que evitaría despreciar efectos particulares de cada sistema equivalente.

# CAPÍTULO 5:

## CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

### 5.1. CONCLUSIONES

#### 5.1.1. RESUMEN DE LA INVESTIGACIÓN

En el **capítulo 1** se describe la importancia que tienen los sistemas equivalentes al momento de experimentar, ya que existen dominios físicos donde obtener modelos matemáticos suelen ser complejos y ni hablar de la experimentación, en donde surgen problemas derivados de la difícil implementación de sus elementos, los prolongados tiempos que puede tomar observar una variable, el costo elevado de los elementos o de los instrumentos e incluso el riesgo al que se someten las personas que realizan el experimento. Algunos ejemplos de estos dominios son los sistemas mecánicos, hidráulicos, térmicos y químicos, donde se sustituye la experimentación por la simulación con software complejos y con requisitos a veces exigentes, sin embargo, existen otros dominios donde la experimentación se puede hacer por etapas y a escalas menores. El mejor caso es el dominio eléctrico/electrónico, cuyos elementos suelen ser baratos, fáciles de conectar, generalmente no requiere equipo especializado y además se pueden utilizar variables como el voltaje y la corriente a una escala menor obteniendo los mismos resultados con su debida escala.

Bond Graph es una metodología que por el momento no es tan utilizada, pero se ha sacado provecho en áreas como detección de problemas en sistemas complejos, solución de sistemas donde se pueden incorporar elementos sin la necesidad de reescribir todo el modelo, o en sistemas que combinan elementos de diferentes dominios físicos aprovechando la generalidad de la metodología (sistemas electromecánicos, sistemas químico-térmicos, etc). Sin embargo, y a pesar de su gran utilidad, se ha explorado muy poco la posibilidad de obtener sistemas equivalentes ya sea para crear nuevos dispositivos o para experimentar sistemas de dominios complejos en otros sistemas más amigables.

## 5.1.2. CONCLUSIONES FINALES

En este trabajo se propuso implementar la metodología en Bond Graph para analizar la viabilidad de obtener sistemas equivalentes a través del diagrama obtenido. Para esto, se utilizó al amplificador operacional (dominio eléctrico) para obtener su equivalente mecánico/hidráulico y obtener el espacio de estados. El objetivo de obtener el modelo en Bond Graph del amplificador operacional y obtener su sistema equivalente se logró a través de un modelo propuesto en el dominio mecánico/hidráulico. Además, se obtuvo en dos configuraciones diferentes de las cuales se obtuvieron sus espacios de estado.

También se pudo observar durante el modelado en Bond Graph, que el objetivo de obtener sistemas equivalentes con el diagrama en Bond Graph es un éxito, pues se logró únicamente reemplazando los elementos que el diagrama propone, con elementos del sistema equivalente, recalando que debe existir coherencia entre los elementos utilizados. Esto es un paso importante en la experimentación de sistemas ya que como se ha mencionado antes, se corrobora que se puede utilizar al Bond Graph como una herramienta multidisciplinaria con la cual emular sistemas es relativamente sencillo comparada con las técnicas tradicionales de cada dominio físico.

Finalmente, otro objetivo consolidado fue que, al analizar las configuraciones de los amplificadores operacionales, se observó que también es viable agregar o quitar elementos en el diagrama en Bond Graph y a partir de ahí reescribir las ecuaciones sin la necesidad de realizar todo el análisis desde el principio. Esto se ve en el capítulo 4, donde al diagrama en Bond Graph del amplificador operacional base se le fueron agregando elementos para recrear el modelo de varias configuraciones. Además, en ese mismo capítulo se analizó la posibilidad de obtener las ecuaciones directamente del Bond Graph, lo que implica que, si se quiere replicar en otro dominio físico, únicamente se requiere de cambiar los elementos generalizados por elementos propios del dominio que se quiera replicar, y ver al diagrama y las ecuaciones de estado como un patrón “**emulable**”.

## 5.2. RECOMENDACIONES

La recomendación principal es darle a la metodología en Bond Graph más apertura y mayor difusión como una alternativa al modelado de sistemas. Esta es, sin duda, una metodología que poco a poco eliminará la barrera entre los diferentes dominios físicos y cuyas prestaciones incrementarán con el tiempo.

También me queda claro que la combinación de áreas de trabajo no sólo facilita la elaboración de nuevos sistemas, sino que enriquece el área de oportunidades trabajando en conjunto. Es por esto que, la recomendación al construir un modelo equivalente, es importante que alguien especializado en cada área lo analice y complementar la visión del que propone el modelo.

## 5.3. TRABAJOS FUTUROS

Basado en lo mencionado anteriormente, resulta interesantes investigar sobre la experimentación de un sistema mecánico, emulándolo en un sistema eléctrico y comparar los resultados experimentales. Se podría comenzar con un sistema mecánico, térmico, hidráulico o químico del cual ya se conozca su comportamiento, obtener su diagrama en Bond Graph, extraer las ecuaciones de estado, y simularlo en el dominio eléctrico/electrónico para comparar los resultados.

Otra posibilidad que surge es la de tomar otros sistemas de suma importancia en otro dominio físico y seguir proponiendo modelos con la intención de analizar la posibilidad de implementarlo en un futuro.

# BIBLIOGRAFÍA

- [1] C. P. Martín Crespo, *Introducción al Modelado de Sistemas Físicos*, 2002.
- [2] K. Ogata, *Ingeniería de Control Moderno*, 2010.
- [3] C. S. a. G. Dauphin-Tanguy, *Bond Graph approach to multi-time scale systems analysis*, 1991.
- [4] P. C. Breedveld, «Thermodynamic Bond Graphs and the problem of thermal inertance,» *Journal of the Franklin Institute*, 1982.
- [5] K. Dean, «Bond Graph models for electrochemical energy store: electrical, chemical and thermal effects,» *Journal of the Franklin institute*, 1990.
- [6] Y. B. a. V. Paassen, «Simulink and Bond Graph modeling of an airconditioned room,» *Simulation modelling practice and theory*, 2004.
- [7] J. F. B. a. P. J. M. P. J. Cuijpers, *Constitutive hybrid processes: a process-algebraic semantics for hybrid Bond Graphs*, 2008.
- [8] J. L. Baldiño, *Galerkin finite element method for incompressible thermofluid flows framed within the Bond Graph theory*, 2009.
- [9] G. G. Ávalos, «Modelado de sistemas en el dominio físico,» 2008.
- [10] W. F. J. A. Olith Antonio Ardila Jaimes, *Fundamentos para la aplicación computacional del método Bond Graph en sistemas de potencia fluida.*, Bucaramanga: Universidad Industrial de Santander, 1998.
- [11] F. F. D. Robert F. Coughlin, *Amplificadores Operacionales y Circuitos Integrados Lineales*, Prentice-Hall Hispanoamericana, 2000.
- [12] A. P. Junior, *Amplificadores Operacionales y Filtros Activos*, Madrid: McGraw-Hill.
- [13] J. M. Flores, «Amplificadores Operacionales,» UNAM, Ciudad de México, 2013.
- [14] A. C. Galeano, «Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura,» 2001. [En línea]. Available:

<https://www.fceia.unr.edu.ar/eca2/Files/Apuntes/Amplificadores%20Operacionales.pdf>.  
[Último acceso: 20 Diciembre 2020].

[15] J. M. Flores, «Amplificadores Operacionales,» Universidad Autónoma de México, Ciudad de México, 2013.

# APÉNDICE A

## ARTÍCULO PUBLICADO

*En este **apéndice A** se anexa el artículo realizado durante el periodo de Maestría, mismo que se relaciona directamente con el trabajo aquí propuesto.*

# MODELADO DE SISTEMAS EQUIVALENTES EN BOND GRAPH

Ing. Aldo Jesús Parente Rodríguez<sup>1</sup>, Dr. Gilberto González Avalos<sup>2</sup> y Dr. Luis Béjar Gómez<sup>3</sup>

**Resumen**—En el presente artículo se describe la obtención de sistemas físicos equivalentes a partir de un modelo en Bond Graph. La plataforma de modelado de Bond Graph determina un modelo gráfico del sistema, a partir del cual se pueden obtener, la realización en espacio de estado, funciones de transferencia, estado estacionario, controlabilidad, observabilidad y estabilidad estructural, así como el diseño de controladores. Así mismo, mediante Bond Graph se puede modelar sistemas que contengan diversos dominios de energía (eléctrico, mecánico, magnético, hidráulico y térmico). Por lo tanto, dado un sistema físico se puede obtener los otros sistemas físicos a través de Bond Graph de una manera sencilla y directa definiendo la misma ecuación de estado para estos sistemas equivalentes.

**Palabras Clave**—Bond Graph, modelado, sistemas equivalentes, sistemas físicos, espacio de estados.

## Introducción

Bond Graph describe un enfoque gráfico al modelado de sistemas. Una de las características principales es la representación de las interacciones energéticas entre sistemas y/o componentes por una línea sencilla. Puede representar muchos tipos de energía describiendo el flujo de la potencia a través del sistema. (Thomas J., 2000)

Los puntos importantes de la metodología de Bond Graph son: la arquitectura del sistema; se cubren diferentes dominios de energía; las relaciones de causa-efecto de cada elemento se obtienen gráficamente y las variables de estado tienen un significado físico. (Wong H., 1996)

Se dice que dos sistemas son equivalentes si el conjunto de soluciones para las variables externas es la misma para ambos sistemas. Existen muchos artículos sobre sistemas equivalentes, por ejemplo, en sistemas eléctricos se tienen equivalentes de Thevenin y Norton (S., 2000). En la referencia (M., 1988) se dan las propiedades de dos sistemas equivalentes y se propone un algoritmo para transformar un sistema dado en su forma general, a un sistema en su forma de espacio de estados mínima. También, en (Artenstein M., 2008) se describe la construcción de un modelo equivalente del sistema de potencia argentino para ser usado en el estudio del fenómeno dinámico del sistema uruguayo.

En este artículo se obtienen los modelos de sistemas físicos equivalentes partiendo de un modelo en Bond Graph dado en un sistema físico (eléctrico, mecánico o hidráulico), y entonces se obtienen los sistemas equivalentes respecto al sistema físico original. El modelo matemático descrito en espacio de estados se obtiene a partir del modelo generalizado en Bond Graph, lo que garantiza que los sistemas obtenidos para los otros dominios de energía sean equivalentes.

## Modelado de Sistemas en Bond Graph

La metodología de Bond Graph fue desarrollada en 1961 por Paynter, Karnopp y Rosenberg. Dicha metodología está basada en el intercambio de potencia en un sistema, la cual suele ser el producto de una variable de esfuerzo y una variable de flujo. Este intercambio toma lugar en los *bonds*, representado por una simple línea como se ilustra en la figura 1. (Thomas J., 2000)

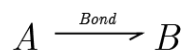


Figura 1. Bond.

El modelado en Bond Graph es una herramienta gráfica para representar sistemas de ingeniería, especialmente cuando existen diferentes dominios de energía. Bond Graph permite modelar sistemas físicos en los diferentes dominios o combinaciones de estos, utilizando únicamente un pequeño conjunto de elementos. Las variables que describen la unión de dos puertos son las variables de potencia que, en Bond Graph, son denominadas variables

---

<sup>1</sup> Ing. Aldo Jesús Parente Rodríguez es Ingeniero en Electrónica y estudiante de Maestría en Ciencias en Ingeniería Mecánica de la Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, Morelia, Michoacán. [aldoparente@umich.mx](mailto:aldoparente@umich.mx) (autor correspondiente)

<sup>2</sup> Dr. Gilberto González Avalos es Doctor en Ingeniería Eléctrica y profesor de Maestría en Ciencias en Ingeniería Mecánica de la Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, Morelia, Michoacán. [gilmichga@yahoo.com.mx](mailto:gilmichga@yahoo.com.mx)

<sup>3</sup> Dr. Luis Béjar Gómez es Doctor en Ingeniería en Materiales y profesor de Maestría en Ciencias en Ingeniería Mecánica de la Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, Morelia, Michoacán. [luis.bejar@umich.mx](mailto:luis.bejar@umich.mx)



generalizadas ya que se encuentran en todos los dominios físicos (ver Cuadro 1), las cuales son esfuerzo  $e(t)$  y flujo  $f(t)$ .

VARIABLE	SISTEMA MECÁNICO		SISTEMA ELÉCTRICO	SISTEMA HIDRÁULICO
	TRASLACIÓN	ROTACIÓN		
Esfuerzo [ $e(t)$ ]	Fuerza [ $F$ ]	Torque [ $\tau$ ]	Voltaje [ $e$ ]	Presión [ $P$ ]
Flujo [ $f(t)$ ]	Velocidad [ $V$ ]	Velocidad angular [ $\omega$ ]	Corriente [ $i$ ]	Caudal [ $Q$ ]

Cuadro 1. Variables generalizadas para sistemas mecánicos, eléctricos e hidráulicos.

En orden de obtener los conjuntos de ecuaciones de un sistema modelado en Bond Graph, se requieren las relaciones constitutivas de los elementos. Estas relaciones pueden ser dinámicas o algebraicas dependiendo del elemento y de la asignación causa-efecto del mismo. En Bond Graph, el trazo causal determina la dirección del flujo de energía como se muestra en la figura 2.

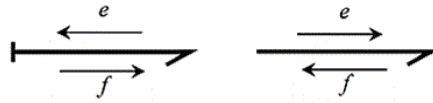


Figura 2. Bond causal.

Los elementos físicos básicos para la construcción de un modelo en Bond Graph se describen a continuación (Wong H., 1996):

- *Puertos-1 activos o fuentes.* Se denotan con la nomenclatura  $MS_e$  y  $MS_f$  para las fuentes de esfuerzo y las fuentes de flujo, respectivamente. Poseen un trazo causal único mostrado en la figura 3.



Figura 3. Fuentes de potencia.

- *Puertos-1 pasivos.* Se trata de dos tipos de elementos de almacenamiento de energía (capacitivos e inerciales) y un tercero correspondiente a los elementos de disipación de energía (resistivos).
  - ❖ Los elementos capacitivos e inerciales pueden tener dos tipos de causalidad; causalidad integral o causalidad derivativa tal como se muestra en la figura 4 y figura 5 respectivamente.

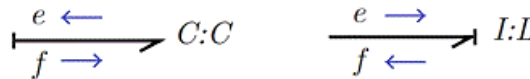


Figura 4. Elementos capacitivos e inerciales con causalidad integral.



Figura 5. Elementos capacitivos e inerciales con causalidad derivativa.

- ❖ Los elementos de disipación de energía (resistivos) pueden tener el trazo causal en cualquier extremo sin alterar la obtención de las ecuaciones. Por lo tanto, la causalidad de estos elementos es arbitraria como se muestra en la figura 6.

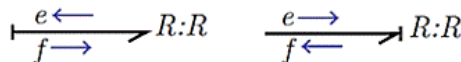


Figura 6. Elementos resistivos con causalidad arbitraria.

- *Puertos-2.* Representan a los transformadores y giradores cuya nomenclatura es  $TF$  y  $GY$  respectivamente. En la figura 7 se muestran las posibilidades para colocar el trazo causal.



Figura 7. Transformadores y giradores con causalidad restrictiva.

- *Puertos-3.* También llamadas uniones-0 y uniones-1, son las que determinan las diferentes conexiones entre los elementos físicos y corresponden a las conexiones en paralelo (unión-0) y conexiones en serie (unión-1). La figura 8 muestra ambos tipos de unión y la distribución de los bonds.

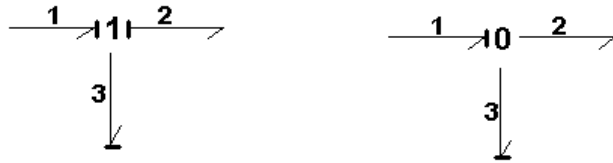


Figura 8. Uniones 1 y 0.

El procedimiento para construir un modelo en Bond Graph se puede resumir en los siguientes pasos:

1. Identificar las variables en el dominio de energía de acuerdo a la tabla 1.
2. Aplicar una unión para cada variable, una unión-0 para variables de esfuerzo y unión-1 para variables de flujo.
3. Conectar elementos inerciales a uniones-1, y los elementos capacitivos a las uniones-0.
4. Enlazar estas uniones aplicando los transformadores, giradores y elementos resistivos de acuerdo al sistema de estudio.
5. Conectar las fuentes (puertos-1 activos) a las uniones propias.
6. Determinar los nodos de tierra, es decir, uniones donde el flujo y el esfuerzo es nulo, tal que todos los bonds conectados a ellos puedan ser removidos.
7. Simplificar el modelo reemplazando cualquier puerto-2 de uniones 0 o 1, los cuales pasan la potencia por simples bonds de acuerdo a la Figura 9.



Figura 9. Reducción de bonds.

### Ecuación de estados a partir de un modelo en Bond Graph

Utilizando elementos físicos y estructuras de unión, uno puede analizar sistemas conteniendo componentes multipuerto complejos aplicando Bond Graph. Considerar un modelo de Bond Graph con una asignación de causalidad integral de un sistema como se muestra en la Figura 10.

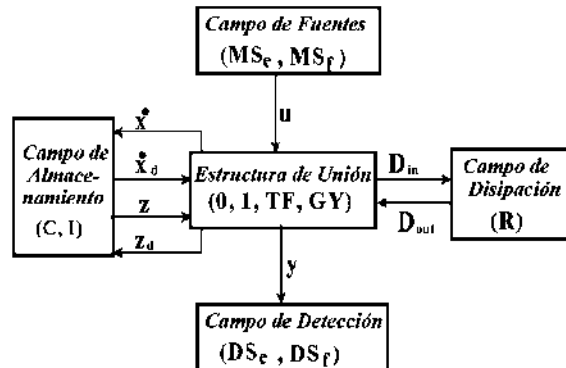


Figura 10. Bond Graph con asignación de causalidad integral.

A estas relaciones se les conoce como vectores clave que son:

- $x$ , es el vector de estado relacionado a los elementos de almacenamiento ( $I$  y  $C$ ).
- $\dot{x}$ , es el vector de derivadas referentes a los elementos de almacenamiento ( $I$  y  $C$ ).
- $z$ , es el vector de estado de coenergía debido a los elementos de almacenamiento ( $I$  y  $C$ ).
- $u$ , es el vector de entradas relacionado con las fuentes ( $MS_e$  y  $MS_f$ ).
- $D_{in}$ , es el vector de entrada debido a los elementos de disipación ( $R$ ).
- $D_{out}$ , es el vector de salida de los elementos de disipación ( $R$ ).
- $y$ , es el vector de salida referente a los detectores ( $D_e$ ).

Las relaciones constitutivas de los campos de almacenamiento están dadas por:

$$Z(t) = Fx(t) \quad \text{Ecuación 1}$$

$$D_{out}(t) = LD_{in}(t) \quad \text{Ecuación 2}$$

La relación entrada-salida de la figura 10 pueden ser escritas por:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ D_{in}(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z(t) \\ D_{out}(t) \\ u(t) \end{bmatrix} \quad \text{Ecuación 3}$$

A esta matriz se le conoce como de estructura de unión, de la cual se obtiene la ecuación de estados descrita por:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned} \quad \text{Ecuación 4}$$

Donde:

$$A = (S_{11} + S_{12}MS_{21})F \quad \text{Ecuación 5}$$

$$B = S_{13} + S_{12}MS_{23} \quad \text{Ecuación 6}$$

$$C = (S_{31} + S_{32}MS_{21})F \quad \text{Ecuación 7}$$

$$D = S_{33} + S_{32}MS_{23} \quad \text{Ecuación 8}$$

Con

$$M = (I - LS_{22})^{-1}L \quad \text{Ecuación 9}$$

La ecuación 5 y la ecuación 8 son muy importantes ya que a partir del modelo en Bond Graph de cualquier sistema, se puede obtener el espacio de estados de dicho sistema. (Sueur C.)

### Sistemas Equivalentes a partir de Bond Graph

En esta sección se obtienen sistemas equivalentes utilizando el modelo en Bond Graph lo cual puede ser ilustrado en la figura 11.

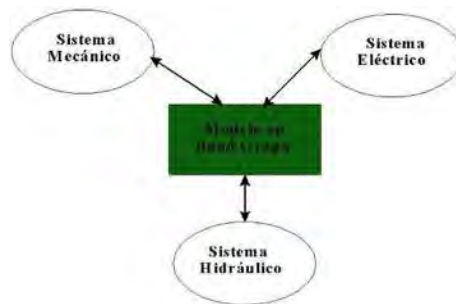


Figura 11. Sistemas equivalentes en Bond Graph.

De acuerdo a la figura 11, la propuesta es partir de un sistema físico, que puede ser un sistema eléctrico, mecánico o hidráulico, obtener su modelo en Bond Graph para obtener los sistemas equivalentes y, a su vez, a partir de dicho modelo obtener el modelo matemático el cual representará el comportamiento de cualquiera de los sistemas equivalentes.

### Caso de estudio

Considerando el sistema mecánico que se observa en la figura 12.

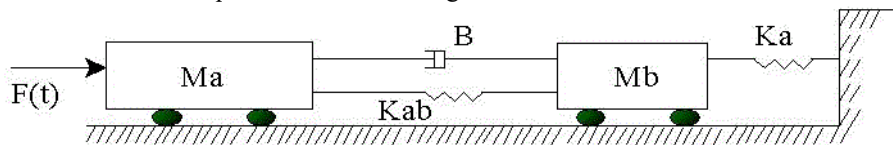


Figura 12. Sistema mecánico.

En este sistema se tienen cuatro elementos de almacenamiento de energía, dos son elementos inerciales (masas I:Ma y I:Mb) y dos elementos capacitivos (resortes C:Kab y C:Ka). También existe un elemento de disipación (R:B) y una fuente de suministro de fuerza (MSe:F(t)). El Bond Graph asociado a este sistema se muestra en la figura 13.

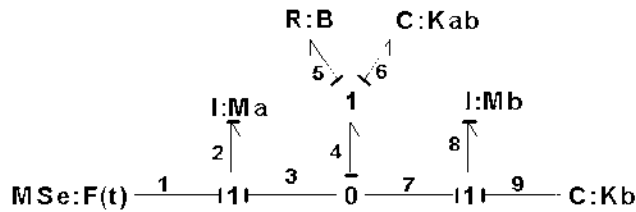


Figura 13. Bond Graph del sistema mecánico.

Los vectores clave en Bond Graph son:

$$x = \begin{bmatrix} p_2 \\ q_6 \\ p_8 \\ q_9 \end{bmatrix}; \dot{x} = \begin{bmatrix} e_2 \\ f_6 \\ e_8 \\ f_9 \end{bmatrix}; z = \begin{bmatrix} f \\ e_6 \\ f_8 \\ e_9 \end{bmatrix}; D_{in} = f_5; D_{out} = e_5; u = e_1$$

Con las relaciones constitutivas:

$$F = \text{diag} \left\{ \frac{1}{M_a}, \frac{1}{K_{ab}}, \frac{1}{M_b}, \frac{1}{K_b} \right\} \quad \text{Ecuación 10}$$

$$L = B \quad \text{Ecuación 11}$$

Y la estructura de unión está definida por:

$$\begin{bmatrix} e_2 \\ f_6 \\ e_8 \\ f_9 \\ f_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_2 \\ e_6 \\ f_8 \\ e_9 \\ e_1 \end{bmatrix} \quad \text{Ecuación 12}$$

Utilizando de la ecuación 5 a la 8 con la ecuación 10 a 12, el modelo en espacio de estados está dada por:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -B/M_a & -1/K_{ab} & B/M_b & 0 \\ 1/M_a & 0 & -1/M_b & 0 \\ B/M_a & 1/K_{ab} & -B/M_b & -1/K_b \\ 0 & 0 & 1/M_b & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u \quad \text{Ecuación 13}$$

A partir del bond graph, el sistema eléctrico equivalente puede ser construido como se ilustra en la Figura 14. Los bonds (8, 9), y (5, 6) están conectados a una unión 1 (conexión serie), estos elementos están conectados a los bonds (4, 7) y a su vez a una unión 0 (conexión paralelo). Finalmente, los bonds 1, 2 y 3 están conectados a una unión 1, donde el bond 3 es el sistema equivalente de los bonds 4 y 7. Por lo tanto, se construye el sistema eléctrico y de una manera similar el sistema hidráulico.

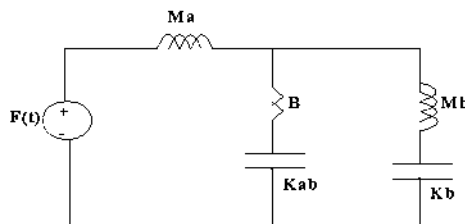


Figura 14. Sistema eléctrico equivalente.

El sistema hidráulico equivalente se muestra en la figura 15.

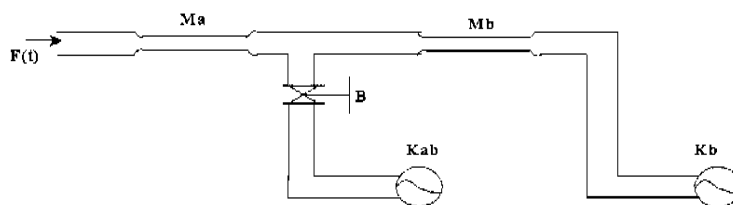


Figura 15. Sistema hidráulico equivalente.

Considerando los siguientes valores numéricos de los parámetros del sistema:  $M_a = 10\text{kg}$ ,  $M_b = 2\text{kg}$ ,  $K_{ab} = 0.5\text{N/m}$ ,  $K_b = 0.1\text{N/m}$ ,  $B = 15\text{N-s/m}$  y  $F(t) = 10\text{N}$ , los resultados de simulación se presentan en la

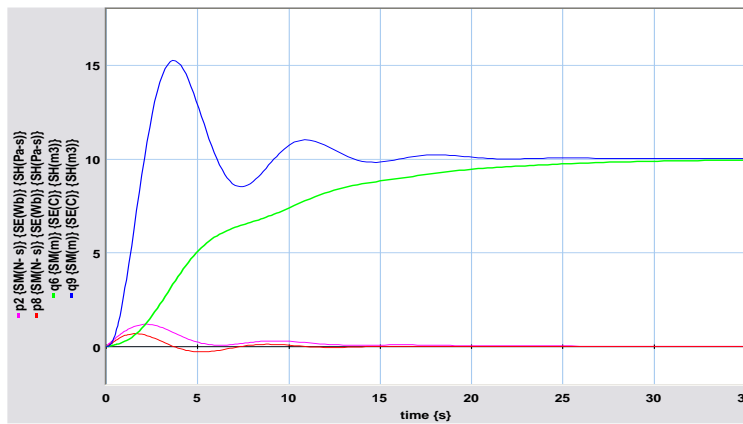


Figura 16.

Figura 16. Comportamiento de las variables de estado.

En la figura 16, las variables de estado del modelo en Bond Graph son  $p_2$ ,  $p_8$ ,  $q_6$  y  $q_9$ , que determinan las variables físicas de los sistemas mecánico (SM), eléctrico (SE) e hidráulico (SH).

### Conclusiones

En este artículo la construcción de sistemas equivalentes a partir del modelo en Bond Graph de uno de ellos ha sido presentado. Así, la utilización de variables generalizadas de potencia y energía, de elementos de almacenamiento y de disipación en un Bond Graph comprueba que este modelo es un enfoque unificado de modelado de sistemas y que de una manera sencilla se pueden obtener sistemas eléctricos, mecánicos e hidráulicos equivalentes. Se construyen los sistemas equivalentes de un sistema mecánico como caso de estudio partiendo del Bond Graph, así como el espacio de estado que representa al mismo.

### Referencias

- Artenstein M., G. A. (2008). Equivalent model of the Argentinian electric power system for stability analysis of the Uruguayan network. IEEE Transmission and Distribution Conference and Exposition Latin America, 1-5.
- M., S. J. (1988). Transformation of Linear Systems Under External Equivalence . En Linear Algebra and It's Application (págs. 102:1-33).
- S., N. U. (2000). Control Systems Engineering. Wiley.
- Sueur C., D.-T. (s.f.). Bond Graph Approach for structural analysis of MIMO linear systems. Journal of the Franklin Institute , 328.
- Thomas J., B. O. (2000). Modelling and Simulation in Thermal and Chemical Engineering A Bond Graph Approach. Springer.
- Wong H., L. D. (1996). Intelligent Supervisory Control a Qualitative Bond Graph Reasonin Aproach. World Scientific Publishing.

## CONGRESO INTERNACIONAL DE INVESTIGACIÓN ACADEMIA JOURNALS MORELIA 2021

# CERTIFICADO

otorgado a

**Ing. Aldo Jesús Parente Rodríguez**  
**Dr. Gilberto González Avalos**  
**Dr. Luis Béjar Gómez**

por su artículo titulado

**Modelado de Sistemas Equivalentes en Bond Graph**

(Artículo No. MOR090)

La ponencia de este artículo fue presentada en el congreso que tuvo como sede la Universidad Nova Spainia de Morelia, Michoacán, México los días 12 al 14 de mayo de 2021. El artículo en extenso ha sido publicado en las siguientes modalidades: (1) en el portal de Internet *AcademiaJournals.com*, con [ISSN 1946-5351](https://doi.org/10.24018/ajournal.13.4.2021.1), Vol. 13, No. 4, 2021 online e indización en la base de datos [Fuente Académica Plus de EBSCOHost](https://www.ebscohost.com) de Ipswich, Massachusetts y (2) en el libro electrónico intitulado *Trabajos de Investigación en la Educación Superior - Morelia 2021*, mismo que tiene asignado el [ISBN 978-1-939982-65-0](https://doi.org/10.24018/ajournal.13.4.2021.1).



Rector Gilberto Agatón Cuevas  
Universidad Nova Spainia



Dr. Rafael Moras  
Director, Academia Journals



Dr. Pedro López Eiroá  
Director General, PYSEIP

