



# Progresos Recientes en Termodinámica Irreversible de Fluidos Relativistas

**TESIS**

Que Presenta

**José Félix Salazar Rodríguez**

Para obtener el Grado de

**Doctor en Ciencias en el Área de Física**

**Asesor: Dr. Thomas Zannias**

Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo

Instituto de Física y Matemáticas (IFM)

Morelia, Michoacán

Septiembre, 2021

A little learning is a dangerous thing; Drink deep, or taste not the Pierian spring: There shallow draughts intoxicate the brain, And drinking largely sobers us again.

Alexander Pope

Fatiga mucho la imaginación el ejercitarse en el entendimiento.

René Descartes

# Agradecimientos

Agradezco a mi esposa Karina por el gran apoyo que me ha brindado en esta etapa, sus palabras siempre traen consuelo y aliento a la vez. A mi hijo Leonardo quien representa una motivación enorme en mi vida. A mis padres y hermanos quienes están pendientes de mi familia.

Un agradecimiento especial a mi asesor, el profesor Dr. Thomas Zannias. Entre muchas cualidades y virtudes que puedo resaltar de él, me gustaría apuntar las siguientes: Su búsqueda continua por un entendimiento profundo de la física, sus clases que son iluminadoras, su constante esfuerzo por inculcarme el espíritu de la investigación y fuera del ámbito académico su carácter noble y amigable. A cambio, hice mi mejor esfuerzo en cada momento y traté de corresponder su amistad.

Agradezco al grupo de gravitación del instituto. Las reuniones fueron siempre enriquecedoras en todo sentido. A los profesores y compañeros con quienes compartí excelentes momentos. Espero haber contribuido en ellos aunque fuese un poco de todo lo que contribuyeron en mí.

A mis revisores y sinodales, los profesores Dr. Francisco Astorga, Dr. Ulises Nuca-mendi, Dr. Olivier Sarbach y al Dr. Luca Tessieri, por su disponibilidad y apoyo en todo momento y quienes me brindaron soporte en la última etapa de mi trabajo. Un agradecimiento particular al Dr. Olivier con quien tuve la fortuna de compartir más tiempo, a quien admiro y respeto mucho por su calidez, profesionalismo y dedicación.

A todo el personal del instituto y compañeros en general, mi agradecimiento también es para ellos.

Por último pero no menos importante, agradezco a CONACyT<sup>3</sup>. Sin el apoyo brindado, es posible que nunca hubiese llegado a este punto.

---

<sup>3</sup>Convocatoria: 291236

Número de Apoyo: 481350

# Resumen

Esta tesis es una revisión del progreso hecho en las últimas décadas en el desarrollo de la termodinámica de medios continuos relativistas con énfasis en fluidos relativistas. Empezamos con una formulación breve de la primera y la segunda ley de la termodinámica por medios relativistas que se propagan en un espacio-tiempo de fondo cuatridimensional suave  $(M, g)$ .

En seguida, por propósitos de coherencia y completez, comenzamos con una breve descripción de las leyes de balance para medios continuos clásicos (newtonianos) e introducimos la termodinámica clásica irreversible (TCI) junto con el postulado de equilibrio local. Tangencialmente, tocamos el programa de la termodinámica racional (TR), la desigualdad de Clausius-Duhem, la teoría de las relaciones constitutivas, la emergencia del principio de entropía y su papel en la descripción de la termodinámica fuera del equilibrio de medios continuos. Discutimos también la idea fundamental que introdujo Müller en el año de 1967 sobre la entropía de estados fuera del equilibrio y el nacimiento de las teorías extendidas de termodinámica irreversible como la teoría irreversible extendida (TIE) y la teoría irreversible racional extendida (TIRE). Esta última teoría dio nacimiento a la idea de que los sistemas de ecuaciones simétricos-hiperbólicos son los sistemas favorables para la descripción de la termodinámica fuera del equilibrio de medios continuos clásicos. Después de dar una breve introducción de los fluidos relativistas, introducimos la teoría transitoria de Israel-Stewart y discutimos en detalle la estructura del flujo de entropía que esta teoría asigna a estados cercanos al equilibrio de fluidos relativistas. En el contexto de la aproximación hidrodinámica que postuló Israel y Stewart, derivamos las ecuaciones fenomenológicas de la teoría y discutimos algunas de sus predicciones.

Más aún, introducimos la teoría de Liu-Müller-Ruggeri que describe la termodinámica irreversible de estados de fluidos relativistas simples y esta teoría tiene la propiedad característica que bajo elecciones particulares de las funciones constitutivas, las ecuaciones dinámicas constituyen un sistema simétrico-hiperbólico/-causal. Identificamos los estados de equilibrio en el contexto de esta teoría, y por estados cercanos al equilibrio comparamos sus predicciones con la teoría transitoria. Por el hecho de que en la teoría de Liu-Müller-Ruggeri los estados de los fluidos relativistas simples se caracterizan por 14-variables que satisfacen 15-ecuaciones dinámicas, contiene un número menor de funciones libres en comparación de la teoría transitoria.

---

También analizamos la clase de los fluidos disipativos relativistas del tipo divergente, teoría desarrollada en los años 1990 por Pennisi, Geroch y Lindblom. Veremos que los estados de estos fluidos están determinados a través de la función generadora y el tensor de disipación ambos funciones de 14-variables referidas como los multiplicadores de Lagrange. Estos multiplicadores satisfacen un sistema de ecuaciones cuasi-lineales manifiestamente simétrico determinado por la función generadora y el tensor de disipación. Pero por elecciones particulares de la función generadora el sistema es simétrico-hiperbólico/causal.

En suma, los esfuerzos contemporáneos de los relativistas y termodinamistas están enfocados en desarrollar teorías cuyas ecuaciones dinámicas constituyen un conjunto simétrico-hiperbólico y preferiblemente causal de ecuaciones. Por diseño, estas teorías eliminan la propagación de las perturbaciones con velocidad infinita, una condición necesaria para la viabilidad de la teoría.

Aunque es justo decir que un progreso sustancial se ha realizado en el dominio de la termodinámica irreversible de medios continuos clásicos y muchas predicciones de las teorías extendidas (como (TIE) o (TIRE)) han sido puestas bajo escrutinio experimental, a nivel relativista la situación es diferente. Aunque el tiempo invertido intentando desarrollar una teoría sensible (o teorías) de termodinámica irreversible de fluidos relativistas (o medios continuos) es relativamente corto, grandes pasos en la dirección correcta han sido dados. Sin embargo, como veremos en este trabajo, carecemos de una teoría exitosa de disipación relativista.

**Palabras Clave:** *Termodinámica Fuera del Equilibrio, Relatividad General, Entropía, Segunda Ley, Fluidos.*

# Abstract

This thesis is a review of the progress made in recent decades in the development of thermodynamics of relativistic continuous media with emphasis on relativistic fluids. We begin with a brief formulation of the first and second law of thermodynamics of relativistic means propagating in a soft four-dimensional space-time background  $(M, g)$ .

Then, for purposes of coherence and completeness, we begin with a brief description of the laws of balance for classical continuous media (Newtonian) and introduce the classical irreversible thermodynamics (CIT) together with the postulate of local equilibrium. Tangentially, we touch on the program of rational thermodynamics (RT), the inequality of Clausius-Duhem, the theory of constitutive relations, the emergence of the principle of entropy and its role in the description of thermodynamics outside the equilibrium of continuous means. We also discussed the fundamental idea that Müller introduced in 1967 on the entropy of states out of equilibrium and the birth of extended theories of irreversible thermodynamics such as extended irreversible theory (EIT) and the Rational Extended Irreversible Theory (REIT). The latter theory gave rise to the idea that systems of hyperbolic-symmetric equations are favorable systems for the description of thermodynamics outside the equilibrium of classical continuous means.

After giving a brief introduction to relativistic fluids, we introduced the Israel-Stewart transient theory and discussed in detail the structure of the entropic flow that this theory assigns to states close to the equilibrium of relativistic fluids. In the context of the hydrodynamic approach postulated by Israel and Stewart, we derived the phenomenological equations from the theory and discussed some of its predictions.

Moreover, we introduce the Liu-Müller-Ruggeri theory which describes the irreversible thermodynamics of simple relativistic fluid states and this theory has the characteristic property that under particular choices of constituent functions, dynamic equations constitute a symmetric-hyperbolic/causal system. We identify equilibrium states in the context of this theory, and by states close to the equilibrium we compare their predictions with the transient theory. By the fact that in the Liu-Müller-Ruggeri theory the states of simple relativistic fluids are characterized by 14-variables satisfying 15-dynamic equations, it contains a smaller number of free functions compared to the transient theory.

We also analyzed the kind of dissipative relativistic fluids of the divergent type, a theory developed in the 1990s by Pennisi, Geroch and Lindblom. We will see that the states of these fluids are determined through the generating function and the dissipation tensor both functions of 14-variables referred to as the Lagrange multipliers. These multipliers satisfy a system of quasi-linear equations manifestly symmetrical determined by the generating function and the dissipation tensor. But by particular choices of generating function the system is symmetric-hyperbolic/causal.

In sum, the contemporary efforts of relativists and thermodynamists are focused on developing theories whose dynamic equations constitute a symmetric-hyperbolic and preferably causal set of equations. By design, these theories eliminate the propagation of perturbations with infinite velocity, a necessary condition for the theory's viability.

Although it is fair to say that substantial progress has been made in the domain of the irreversible thermodynamics of classical continuous media and many predictions of extended theories (such as (EIT) or (REIT)) have been put under experimental scrutiny, at relativistic level, the situation is different. Although the time spent trying to develop a sensitive theory (or theories) of irreversible thermodynamics of relativistic fluids (or continuous media) is relatively short, great steps in the right direction have been taken. However, as we will see in this work, we lack a successful theory of relativistic dissipation.

**Key Words:** *Thermodynamics out of Equilibrium, General Relativity, Entropy, Second Law, Fluids.*

# Contenido

<b>Agradecimientos</b>	<b>III</b>
<b>Resumen</b>	<b>IV</b>
<b>Abstract</b>	<b>VI</b>
<b>Notación</b>	<b>2</b>
<b>1 Introducción</b>	<b>3</b>
1.1 La primera ley de la termodinámica por medios relativistas . . . . .	7
1.2 La segunda ley de la termodinámica por medios relativistas . . . . .	13
1.3 Sobre la validez de la hipótesis de equilibrio termodinámico local . . . . .	17
1.4 El contenido de esta tesis . . . . .	18
<b>2 Termodinámica irreversible de fluidos simples clásicos</b>	<b>23</b>
2.1 Mecánica de medios continuos clásicos . . . . .	23
2.1.1 Cinemática . . . . .	23
2.2 Leyes de balance . . . . .	26
2.2.1 Conservación de masa . . . . .	27
2.2.2 Conservación de momento lineal . . . . .	28
2.2.3 La primera ley de la termodinámica para medios continuos . . . . .	29
2.3 La segunda ley de la termodinámica, el principio de entropía . . . . .	32
2.3.1 Termodinámica clásica irreversible (TCI) . . . . .	35
2.3.2 Termodinámica irreversible extendida (TIE) . . . . .	39
2.3.3 Termodinámica irreversible racional extendida (TIRE), una introducción breve . . . . .	44
<b>3 La teoría transitoria de Israel-Stewart</b>	<b>47</b>
3.1 Medios continuos en espacios-tiempos arbitrarios . . . . .	47
3.2 Equilibrio termodinámico global en la teoría transitoria . . . . .	51
3.3 Termodinámica transitoria . . . . .	55
3.3.1 Teorías de primer orden: Eckart y Landau-Lifshitz . . . . .	69
3.3.2 Teoría de segundo orden: La aproximación hidrodinámica . . . . .	72
3.3.3 La estructura de las ecuaciones fenomenológicas . . . . .	85
3.4 El estatus de la teoría transitoria . . . . .	89

---

<b>Apéndice del capítulo 3</b>	<b>91</b>
3.5 Sobre estados cercanos al equilibrio . . . . .	91
3.6 Demostración de los teoremas 2, 3 y 4 . . . . .	93
3.6.1 Demostración del teorema 2 . . . . .	95
3.6.2 Demostración del teorema 3 . . . . .	97
3.6.3 Demostración del teorema 4 . . . . .	97
<b>4 La teoría de Liu-Müller-Ruggeri</b>	<b>99</b>
4.1 Descripción de la teoría de Liu-Müller-Ruggeri . . . . .	99
4.2 Relaciones constitutivas y los principios de Relatividad y de Entropía	102
4.3 Estados de equilibrio en la teoría de Liu-Müller-Ruggeri . . . . .	107
4.4 Predicciones de la teoría de Liu-Müller-Ruggeri . . . . .	111
<b>5 Fluidos relativistas del tipo divergente</b>	<b>113</b>
5.1 Ejemplos de fluidos del tipo divergente . . . . .	117
5.1.1 Fluidos perfectos . . . . .	117
5.1.2 Estados de equilibrio . . . . .	119
5.1.3 Teoría de Eckart como una teoría del tipo divergente . . . . .	121
5.2 El «post era de Pennisi-Geroch-Lindblom» . . . . .	126
<b>Apéndice del capítulo 5</b>	<b>129</b>
<b>Conclusiones</b>	<b>136</b>
<b>Referencias</b>	<b>144</b>

# Notación

## Tensores

- ( ): Simetrización e.g.  $T_{(\alpha\beta)} = \frac{1}{2}(T_{\alpha\beta} + T_{\beta\alpha})$   
[ ]: Anti-Simetrización e.g.  $T_{[\alpha\beta]} = \frac{1}{2}(T_{\alpha\beta} - T_{\beta\alpha})$   
 $\delta^\alpha_\beta$ : Delta de Kronecker (+1 si  $\alpha = \beta$ , 0 si  $\alpha \neq \beta$ )  
 $\equiv$ : Igualdad por definición

## Espacio-Tiempo

- $(M, g)$ :  $M$  Variedad,  $g$  métrica lorentziana  
 $(- + + +)$ : Signatura

## Índices

- $a, b, c, \dots = 1, 2, 3$ : Índices Latinos  
 $\alpha, \beta, \gamma, \dots = 0, 1, 2, 3$ : Índices Griegos

## Derivadas

- $\nabla_X$ : Derivada Covariante  
 $\frac{D}{dt}$ : Derivada Convectiva

# 1 Introducción

Empezamos esta tesis dando primero una introducción sobre los retos que uno encuentra en el estudio de la mecánica y la termodinámica de medios continuos relativistas con énfasis en medios que son fluidos relativistas. Los retos están estancados en la descripción termodinámica de estos medios y no tanto en sus propiedades mecánicas o hidrodinámicas y como veremos, un tema al que continuamente nos enfrentamos consiste en delimitar la frontera en donde la mecánica o hidrodinámica de los medios termina y empieza el dominio de la termodinámica. Esta frontera es borrosa y bastante sutil a definir.

Recordamos que las leyes que describen las propiedades termodinámicas de los medios continuos (newtonianos) se conocían desde muchos años antes del establecimiento de la física relativista. Con la llegada de la teoría de la relatividad especial en 1905 y después con la llegada de relatividad general a finales de 1915, estas leyes – y todas las leyes físicas hasta ese momento conocidas – tuvieron que modificarse para volverse compatibles con el requisito de la covarianza de Poincaré o covarianza general. Este reto, atrajo la atención de varios físicos líderes de la época incluyendo a Einstein, Planck, Pauli, entre otros, y estos intentos tempranos tuvieron un éxito parcial ya que hasta el día de hoy existen desacuerdos y confusión. Basta con recordar la «controversia de Planck-Ott» al respecto de la definición y propiedades de transformación de la temperatura relativista, así como también la «controversia de Abraham-Minkowski» concerniente con la definición de estrés y momento en un medio polarizado.

En esta tesis, el desarrollo de la termodinámica de medios continuos relativistas lo haremos desde el punto de vista moderno que esta brevemente expuesto en los libros de textos e.g. Misner-Thorne-Wheeler (MTW) [73] o Shapiro-Teukolsky [100]. En este enfoque moderno, los observadores locales<sup>1</sup> y sus mediciones sobre el medio continuo bajo consideración, juegan un papel prominente. Son los vehículos

---

<sup>1</sup>En esta tesis, la definición de un observador local es lo que usamos en relatividad general i.e. una trayectoria temporal, suave, dirigida hacia el futuro y en general estos observadores para cada evento a lo largo de su trayectoria llevan un sistema de coordenadas local al respecto del cual realizan mediciones sobre el estado del medio. Debido a los propósitos de esta tesis, nos interesan las familias de estos observadores, los cuales especificamos a través de las curvas integrales de un campo de 4-velocidad  $u^\alpha$  i.e. un campo vectorial suave, no singular dirigido a futuro y normalizado según  $g(u, u) = -1$ .

para desarrollar las propiedades termodinámicas de los medios y parece que el empleo de ellos es obligatorio debido a que bajo los principios de relatividad general no existe una clase de observadores privilegiados, por ejemplo, la clase de observadores inerciales globales en física prerrelativista o los observadores inerciales globales en el marco de relatividad especial. Señalamos que el empleo de los observadores locales no es suficiente para la descripción de la termodinámica de medios relativistas pero en combinación con el postulado de equilibrio local, el cual enunciamos en seguida, y las ecuaciones dinámicas que describen al medio ofrecen una herramienta capaz de desarrollar la termodinámica de estos medios. De acuerdo con estas líneas, en esta tesis tomaremos una acción doble. Por un lado, nos enfocamos en la descripción de la dinámica de medios relativistas y como veremos a lo largo de este trabajo, la última tendencia entre los relativistas y termodinámicos es a emplear sistemas simétricos - hiperbólicos y causales. Pero por el otro lado, ponemos esfuerzos en desarrollar herramientas que en combinación con las ecuaciones dinámicas apoyen en tener un entendimiento profundo sobre las propiedades termodinámicas del medio. Con estos motivos en mente, en este capítulo empezamos introduciendo algunos conceptos que serán útiles en la descripción de la termodinámica de medios continuos percibidos por observadores locales y dejamos las consideraciones sobre la naturaleza de las ecuaciones dinámicas para los capítulos próximos.

Un principio que juega un papel importante en el desarrollo de la termodinámica es el postulado de equilibrio local. Tal principio desde nuestro punto de vista es obligatorio<sup>2</sup> y conecta las mediciones que realizan observadores locales con los principios de termodinámica. Sujeto a que la hipótesis del continuo por el medio bajo consideración es válida, este principio en términos simples afirma que las variables termodinámicas medidas por un observador local en su marco en un evento  $p$  satisfacen las mismas relaciones como si el medio estuviera en un estado de equilibrio global<sup>3</sup>.

Como veremos en las secciones próximas, el postulado del equilibrio local tiene poder predictivo<sup>4</sup>. Primeramente implica que localmente las variables termodinámi-

---

<sup>2</sup>En realidad no tenemos una idea de como desarrollar la termodinámica de medios relativistas sin apelar a este principio y tampoco conocemos una manera alternativa (o trabajo de investigación) que resulte en un desarrollo de la termodinámica de dichos medios sin apelar de este principio. Por ejemplo, una examinación de la formulación de la primera ley de la termodinámica para un fluido perfecto simple presentada en las páginas (561 – 562) de la ref. MTW [73], pueden ver que efectivamente hacen uso de este principio.

<sup>3</sup>Mencionamos aquí que el principio no dice nada sobre la entropía física del estado actual y este es un punto clave que usaremos en el desarrollo de esta tesis.

<sup>4</sup>Es interesante mencionar aquí, que este principio parece ser la imagen espejo («the mirror image» en inglés) de la propiedad característica de una geometría riemanniana, lorentziana o semi-riemanniana  $(N, g)$  en el siguiente sentido: Para el caso de una geometría, para cada

cas medidas por observadores locales no son independientes sino que satisfacen relaciones que dictan la condición que en una vecindad alrededor del evento  $p$ , el estado del medio se considera como un estado de equilibrio. Si por ejemplo, el medio fuera un fluido simple relativista y  $(\rho(p), n(p), s(p))$  fueran las densidades de masa-energía, de partículas y de entropía respectivamente medidas por un observador local en el evento  $p$  al interior del fluido, el principio afirma que estas variables están restringidas. Según la formulación de Gibbs de termodinámica en equilibrio, necesariamente  $(\rho(p), n(p), s(p))$  satisfacen una ecuación de estado («equilibrium equation of state» en inglés) de la forma  $s(p) = s(\rho(p), n(p))$  y por supuesto como veremos en las secciones próximas también otras relaciones. Como mostraremos, este postulado nos lleva a una formulación (local) de la primera ley de la termodinámica por medios relativistas y nos da pistas para formular la segunda ley de la termodinámica por tales medios.

Antes de que entremos en los detalles que nos conducen a la formulación relativista de la primera ley, hacemos algunos comentarios acerca de la naturaleza de las clases de observadores locales que frecuentemente empleamos en esta tesis. Como veremos, la elección depende de la situación física. Por ejemplo, para el caso en que el medio sea un fluido perfecto simple, es natural y ventajoso (pero no es necesario), emplear la clase de los observadores que se co-mueven con los elementos de fluido i.e. la 4-velocidad  $u^\alpha$  de estos observadores coincide con la 4-velocidad del fluido. Pero en otras ocasiones, es preferible elegir otra clase de observadores. Como veremos más adelante, un fluido simple pero disipativo define de manera natural más de una clase de observadores preferidos. Por ejemplo, existe la clase de observadores definidos por el campo vectorial de la 4-velocidad  $u_E^\alpha$  que corresponde con el único vector temporal<sup>5</sup>, dirigido a futuro, eigenvector del tensor de energía-momento y este  $u_E^\alpha$  define la clase de los observadores en reposo en el marco de energía (o marco de Landau-Lifshitz). Otra elección de observadores viene tomando la 4-velocidad  $u_N^\alpha$  definida por  $J^\alpha = nu_N^\alpha$  en donde  $J^\alpha$  es la 4-corriente temporal de partículas y  $n$  la densidad de partículas medida en el marco definido por  $u_N^\alpha$ . Tal  $u_N^\alpha$  define el marco de partículas (o marco de Eckart).

---

$p \in (N, g)$  a través de transformaciones de coordenadas, localmente siempre podemos reducir la métrica  $g$  en  $p$  a la forma plana (aunque no la curvatura de  $g$ ), similarmente, al interior de un medio e irrespectivo de su estado actual, localmente el estado parece para los observadores locales como un estado en equilibrio. Si empujamos esta analogía al extremo, concluimos que la producción de entropía juega un papel análogo al de la curvatura de  $g$ . Mencionamos aquí, que hay trabajos en donde se geometrizan la termodinámica de medios continuos, véase por ejemplo [87, 88].

<sup>5</sup>Como veremos en el capítulo 3, la existencia de este vector impone restricciones sobre la naturaleza del fluido.

Aunque las elecciones de los campos de 4-velocidades  $(u_E^\alpha, u_N^\alpha)$  están bien motivados y frecuentemente usaremos esta clase de observadores en el desarrollo de esta tesis, desde nuestro punto de vista es simplemente una elección particular de entre una infinita clase de observadores (o marcos de referencia) que podemos emplear para el desarrollo de la termodinámica del medio. De hecho, la teoría transitoria de Israel-Stewart [50], la cual desarrollamos en detalle en el capítulo 3, para cada  $p$  al interior de la región ocupada por un fluido simple, se define un cono formado por  $(u_E^\alpha, u_N^\alpha)$  tal que cada  $u^\alpha$  al interior de este cono se puede usar como un marco de referencia admisible<sup>6</sup> por esta teoría.

Mencionamos aquí en breve, que la teoría de Liu, Müller y Ruggeri que desarrollamos en el capítulo 4, proyecta a las ecuaciones dinámicas en el marco de Eckart y la interpretación de la teoría viene a través de las mediciones que realizan observadores en reposo al respecto de este marco. La teoría de Pennisi y Geroch-Lindblom que describe fluidos relativistas del tipo divergente y que desarrollamos en detalle en el capítulo 5, hace también uso del marco de Eckart. De las tres teorías que describen la termodinámica de fluidos relativistas, solo la teoría transitoria analiza con detalles finos la covarianza<sup>7</sup> de las ecuaciones fenomenológicas correspondientes. Como veremos en más detalle en el capítulo 3, la teoría por diseño exhibe una «libertad de norma» en el sentido que las ecuaciones fenomenológicas se quedan en forma invariante bajo cambios particulares de marcos que discutimos con detalle en el capítulo 3. Pero esta invarianza viene bajo la suposición fuerte que el estado del fluido es cercano al equilibrio, un término que analizamos en el capítulo 3 y en el apéndice de ese capítulo.

Las otras dos teorías, es decir, la teoría de Liu-Müller-Ruggeri y la teoría de Pennisi, y Geroch-Lindblom aunque emplean sistemas de ecuaciones dinámicas que son ecuaciones tensoriales y por lo tanto válidas para cada marco, al final la interpretación física de la teoría resultante hace uso de las mediciones realizadas por observadores locales y específicamente observadores en reposo en el marco de Eckart. Aunque en la teoría de Liu-Müller-Ruggeri analizan estados del fluido cercanos a estados de equilibrio y derivan la estructura de las ecuaciones fenomenológicas en el marco de Eckart, hasta donde sabemos la covarianza de la teoría bajo cambio de marco es todavía un problema abierto. Como veremos en el capítulo 5, el mismo comentario se aplica también a la teoría de fluidos relativistas del tipo divergente.

Con estos comentarios en mente, en las secciones próximas desarrollamos la primera y la segunda ley de la termodinámica por medios relativistas, aunque el

<sup>6</sup>El término «marcos de referencia admisibles» será definido a lo largo de la teoría transitoria.

<sup>7</sup>Aquí el término covarianza se refiere al compartamiento de las ecuaciones fenomenológicas bajo cambio de observador local (ó lo que es equivalente bajo cambio del marco correspondiente).

énfasis será sobre fluidos relativistas. Por eso, empezamos asumiendo que al interior del medio hemos fijado un campo de velocidad  $u^\alpha$  que identifica la clase de los observadores locales que hacen las mediciones sobre este medio. A través de las mediciones de ellos, construimos la forma relativista de la primera y la segunda ley por este medio. No consideramos en esta sección, la covarianza de estas dos leyes bajo cambio de 4-velocidad  $u^\alpha$  o equivalentemente bajo cambio de marco. Dicho problema lo consideramos en capítulos próximos.

## 1.1. La primera ley de la termodinámica por medios relativistas

De acuerdo con el plan de la sección anterior, empezamos esta sección asumiendo que en un espacio-tiempo<sup>8</sup>  $(M, g)$  se propaga un medio continuo, por ejemplo, un fluido simple que tiene la propiedad que para cada evento  $p$  al interior de este medio está definida una 4-velocidad  $u^\alpha$  temporal dirigida a futuro y normalizada de acuerdo a  $g(u, u) = u_\alpha u^\alpha = -1$ .

Sea que en  $p$  y relativamente al marco definido por la 4-velocidad  $u^\alpha$ , consideramos un elemento de 3-volumen espacial  $V$  infinitesimal, en el plano tipo espacio, ortogonal a  $u^\alpha(p)$ . Sean  $(n, \rho)$  la densidad del número de partículas y la densidad de masa-energía<sup>9</sup> medidas por el observador co-móvil con esta  $u^\alpha$ , tal que  $N = nV$  y  $U = \rho V$  representan el número total de partículas y la masa-energía total al interior de  $V$ . El postulado de equilibrio termodinámico local en el presente contexto, afirma que:

*Por un  $V$  lo suficientemente pequeño, las variables termodinámicas definidas al interior de  $V$ , satisfacen las mismas relaciones termodinámicas como si el sistema estuviera en un estado de equilibrio termodinámico global.*

Aceptando esta hipótesis, el hecho de que al interior del volumen  $V$ , el fluido (o más general el medio) se encuentra en un estado de equilibrio, nos permite

<sup>8</sup>Estamos asumiendo que  $(M, g)$  denota una variedad  $C^\infty$ , 4-dimensional equipada con una métrica lorentziana  $g$ , orientable en el tiempo.

<sup>9</sup>Se debe de tener en mente que todas las variables termodinámicas referidas a continuación son *locales* y debemos indicar explícitamente su dependencia sobre  $p$  ó sobre el conjunto de coordenadas locales i.e. deberíamos escribir las cantidades de la forma  $n(p), \rho(p), \dots$  ó equivalentemente  $n(x^a), \rho(x^a), \dots$  en donde  $x^a$  es un sistema de coordenadas locales alrededor de  $p$ , pero por simplicidad omitimos esta dependencia.

introducir la densidad de entropía  $s$  en  $p$ , tal que  $S = sV$  es la entropía total en  $V$ . Adicionalmente, en  $p$  las variables  $(n, \rho, s)$  (al menos para fluidos) satisfacen una ecuación<sup>10</sup> de estado en equilibrio de la forma  $s = s(\rho, n)$  y basándose en esta ecuación, introducimos las variables intensivas como la temperatura  $T$ , la presión  $P$  y el potencial químico relativista  $\mu$ . Por la hipótesis de la validez del equilibrio local, las variables  $(U, S, N, T, P, \mu, \text{etc.})$  satisfacen las leyes de la termodinámica usuales por estados de equilibrio espacialmente homogéneos. En particular, la primera ley de la termodinámica toma la forma:

$$dU = dQ - PdV + \mu dN, \quad (1.1.1)$$

en donde  $dQ$  representa la cantidad de calor que entra al volumen  $V$ , mientras  $PdV$  y  $\mu dN$  se interpretan como el trabajo hecho por el (sobre el) sistema para expandir (o contraer) a  $V$  y el trabajo hecho para agregar (o sustraer) partículas sobre el sistema.

Para una mezcla de fluidos que involucra a  $n$  especies diferentes de partículas, introducimos  $n$ -potenciales químicos  $\mu_i$   $i \in \{1, 2, \dots, n\}$  y denotamos por  $N_i$  al número total de partículas del tipo  $i$  en  $V$ . Por esta mezcla, en la primera ley (1.1.1), reemplazamos el término  $\mu dN$  por  $\sum_{i=1}^n \mu_i dN_i$ .

Debido a que el sistema al interior de  $V$  se considera en equilibrio (mecánico, térmico, químico), tenemos la libertad de emplear el lenguaje familiar de la termodinámica en equilibrio como: transformaciones reversibles, irreversibles, cuasi-estáticas, variables extensivas e intensivas, etc., teniendo siempre en cuenta que las consideraciones son estrictamente locales.

En acuerdo con estas consideraciones, sea ahora que una cantidad de calor infinitesimal  $dQ$  es inyectada reversiblemente al interior de  $V$ , entonces  $dQ = TdS$ , y para esta transformación reversible, la primera ley (1.1.1) se convierte en la relación de Gibbs

$$dU = TdS - PdV + \mu dN. \quad (1.1.2)$$

La propiedad de escalamiento de las variables extensivas  $(U, S, V, N)$  en la fórmula (1.1.2) conduce a la expresión

<sup>10</sup>El lector puede preguntarse sobre la necesidad de este  $s = s(\rho, n)$  y de su origen. En realidad, esta función es un regalo del postulado de equilibrio termodinámico local que nosotros hemos empleado. Debido a que el sistema parece estar en equilibrio termodinámico global, la hipótesis  $s = s(\rho, n)$  es una manifestación de la suposición central de la formulación de Gibbs del equilibrio termodinámico (para una introducción de esta formulación véase el capítulo 2 en [11]). Según la hipótesis central de Gibbs, la entropía  $S$  de los estados de equilibrio es una función de las variables extensivas del sistema.

$$U = TS - PV + \mu N, \quad (1.1.3)$$

la cual implica a su vez, que las variables intensivas  $(T, P, \mu)$  satisfacen la relación de Gibbs-Duhem:

$$SdT - VdP + Nd\mu = 0. \quad (1.1.4)$$

Dividiendo (1.1.3, 1.1.4) por  $V$ , resulta en

$$\rho = Ts - P + \mu n, \quad sdT - dP + nd\mu = 0. \quad (1.1.5)$$

Diferenciando la primera relación y tomando en cuenta la segunda expresión de arriba, obtenemos que:

$$d\rho = Tds + \mu dn, \quad (1.1.6)$$

y por lo tanto, el conocimiento de la ecuación de estado en equilibrio  $\rho = \rho(s, n)$  (o equivalentemente  $s = s(\rho, n)$ ) por este fluido, determina la temperatura (local) y el potencial químico (local) medidos por el observador  $u^\alpha$  en el evento  $p$  a través de la diferenciación i.e.

$$T = \left. \frac{\partial \rho}{\partial s} \right|_n, \quad \mu = \left. \frac{\partial \rho}{\partial n} \right|_s. \quad (1.1.7)$$

Para una mezcla de fluidos que involucra a  $n$  especies, un análisis similar nos conduce a

$$d\rho = Tds + \sum_{i=1}^n \mu_i dn_i, \quad (1.1.8)$$

la cual extiende (1.1.6) al caso de una mezcla de fluidos.

*Interpretamos a la relación (1.1.6) (o su extensión (1.1.8)), como la primera ley de la termodinámica por fluidos simples (o mezcla de fluidos) relativistas.* De su deducción, se sigue que (1.1.6) (o la correspondiente (1.1.8)) es una relación local pero mucho más importante para las necesidades de esta tesis es la dependencia de la primera ley del marco («frame dependance» en inglés). Llegamos a la forma de la primera ley por fluidos simples escrita en (1.1.6) (o (1.1.8) por una mezcla) asumiendo la existencia implícita del observador con 4-velocidad  $u^\alpha(p)$ , el cual al respecto de su marco asigna las variables  $(\rho, T, s, \mu, n)$ , etc., en el evento  $p$  están bien definidas y casi homogéneas al interior del volumen  $V$ . Como veremos

en los próximos capítulos, la dependencia de la primera ley del marco juega un papel crucial en la interpretación de la termodinámica de fluidos relativistas (o más general, de medios continuos relativistas). En particular como veremos en el capítulo 3, la belleza de la termodinámica transitoria de Israel-Stewart [50] se encuentra en la invarianza de la primera ley bajo un cambio particular de marco que analizamos con detalle en el capítulo 3.

Frecuentemente es conveniente expresar la primera ley<sup>11</sup> (1.1.6) apelando a la «descripción por partícula». Para esta descripción notamos que:

$$U = \rho V = \frac{\rho N}{n}, \quad PdV = Pd\left(\frac{N}{n}\right) \quad (1.1.9)$$

e introducimos la entropía por partícula  $\hat{s}$  vía

$$s = \frac{S}{V} = \frac{Sn}{N} = \hat{s}n, \quad \hat{s} = \frac{S}{N}. \quad (1.1.10)$$

En términos de estas nuevas variables, (1.1.2) se reduce a

$$d\left(\frac{\rho N}{n}\right) = -Pd\left(\frac{N}{n}\right) + Td(\hat{s}N) + \mu dN, \quad (1.1.11)$$

y para cualquier transformación que mantenga el número total de partículas  $N$  al interior de  $V$  fijo, la primera ley toma la forma equivalente:

$$d\rho = \frac{\rho + P}{n}dn + nTd\hat{s}, \quad (1.1.12)$$

de donde concluimos que:

$$P(n, \hat{s}) = n \left( \frac{\partial \rho}{\partial n} \right)_{\hat{s}} - \rho, \quad T(n, \hat{s}) = \frac{1}{n} \left( \frac{\partial \rho}{\partial \hat{s}} \right)_n. \quad (1.1.13)$$

Otra forma conveniente de expresar la primera ley (1.1.6), viene una vez que introducimos la energía interna  $e$  por partícula dada por

$$\rho = n(m + e), \quad (1.1.14)$$

en donde hemos introducido una escala de masa  $m$ , la densidad de masa en reposo como  $nm$  y la energía interna por partícula  $ne$ . Reescribiendo (1.1.11) por

<sup>11</sup>Por simplicidad, restringimos nuestra atención a fluidos simples. La extensión del análisis que sigue al caso de una mezcla, es fácil de lograr.

transformaciones que mantengan el número total de partículas  $N$  fijo y apelando a (1.1.14), se obtiene:

$$de = -Pd\hat{V} + Td\hat{s}, \quad \hat{V} = \frac{1}{n}, \quad \longleftrightarrow \quad d\hat{s} = \frac{1}{T}de + \frac{P}{T}d\hat{V}. \quad (1.1.15)$$

Si sustituimos (1.1.14) en (1.1.5)<sub>1</sub>, encontramos que el potencial químico relativista por partícula  $\mu$  tiene la forma<sup>12</sup>

$$\mu = m + e + P\hat{V} - T\hat{s}, \quad \longleftrightarrow \quad \mu n = \rho + P - Ts, \quad (1.1.16)$$

en donde en la fórmula para  $\mu n$ , la entropía por partícula  $\hat{s}$  y el volumen específico  $\hat{V}$  han sido eliminados. Si en (1.1.15), eliminamos  $(\hat{s}, \hat{V}, e)$  en favor de  $(s, \rho, n)$  y usamos las relaciones de arriba regresamos a (1.1.6).

Debido a las necesidades de este trabajo, introducimos en este punto el potencial térmico (relativista)  $\Theta$  y la temperatura inversa  $\beta$  vía<sup>13</sup>

$$\Theta = \frac{\mu}{T}, \quad \beta = \frac{1}{T}, \quad (1.1.17)$$

y en términos de estas variables tenemos

$$s = \beta(\rho + P) - \Theta n, \quad ds = \beta d\rho - \Theta dn. \quad (1.1.18)$$

Por una mezcla, estas dos relaciones toman la forma

$$s = \beta(\rho + P) - \sum_{A=1}^n \Theta_A n_A, \quad ds = \beta d\rho - \sum_{A=1}^n \Theta_A dn_A. \quad (1.1.19)$$

Validez de (1.1.18) (o (1.1.19) por una mezcla) implica la siguiente identidad importante la cual fué originalmente derivada por primera vez por W. Israel en [49],

$$d(sX) = \beta d(\rho X) - \Theta d(nX) + \beta P dX, \quad (1.1.20)$$

<sup>12</sup>El potencial químico clásico  $\mu_{cl}$  está definido a través de  $\mu_{cl} = e + P\hat{V} - T\hat{s}$ , mientras que el potencial químico relativista toma en cuenta la masa en reposo y esta definido como:  
 $\mu = mc^2 + \mu_{cl}$ .

<sup>13</sup>Nótese que cuando la constante de Boltzmann  $k$  y la velocidad de luz  $c$  tienen las unidades físicas,  $\Theta$  y  $\beta$  se definen según:  $\Theta = \frac{\mu}{kT}$  y  $\beta = \frac{c^2}{kT}$ .

$$d(sX) = \beta d(\rho X) - \sum_{A=1}^n \Theta_A d(n_A X) + \beta P dX, \quad (1.1.21)$$

en donde  $X$  es una función suave arbitraria. La validez de estas identidades puede verse expandiendo, por ejemplo, ambos lados de (1.1.20) dando

$$X [ds - \beta d\rho + \Theta dn] = [-s + \beta(\rho + P) - \Theta n] dX, \quad (1.1.22)$$

mostrando que (1.1.20) es consecuencia de (1.1.18). Con un razonamiento similar uno puede mostrar también validez de (1.1.21).

Las identidades (1.1.20, 1.1.21) serán extremadamente útiles para el desarrollo y la interpretación de la teoría transitoria de Israel-Stewart. Por el momento vale la pena notar que las identidades tienen validez general en el siguiente sentido: que sean válidas depende de asumir la primera ley (local) y de la propiedad de escalamiento (1.1.3), y son independientes de la naturaleza del estado del fluido de fondo. También nótese que las variables  $(s, \rho, n, P)$  que entran en (1.1.20) son las variables termodinámicas locales medidas por un observador arbitrario en el evento  $p$ , y esta propiedad resultará muy útil más adelante.

Aunque nuestra deducción de la primera ley de la termodinámica asume que el medio bajo consideración es un fluido simple a través de un razonamiento similar, y asumiendo la validez del postulado de equilibrio local podemos formular la primera ley por otros tipos de medios. Por estos medios, esperamos que la densidad de energía local  $\rho$  en general puede depender además de la densidad de entropía  $s$ , de otros campos como por ejemplo de la tensión (en el caso de medios elásticos), de campos eléctricos ó magnéticos, etc., y en tal escenario la relación (1.1.6) (ó más precisamente (1.1.1)), tendrá una estructura diferente<sup>14</sup>.

Con este comentario, terminamos un pequeño resumen al respecto de la forma de la primera ley de la termodinámica por medios continuos relativistas y a continuación entramos en el aspecto central de esta tesis, que consiste en la noción de la entropía y en la estructura de la segunda ley de la termodinámica por medios relativistas.

---

<sup>14</sup>Uno espera que las variaciones  $d\rho$  en la densidad de energía en el evento  $p$  sean inducidas por variaciones infinitesimales de las variables extensivas que describen el medio.

## 1.2. La segunda ley de la termodinámica por medios relativistas

Como hemos visto en la sección anterior, el postulado de equilibrio local nos permite introducir a la densidad de «entropía»  $s$  a través del estado de equilibrio que mide un observador con 4-velocidad  $u^\alpha$  en el evento  $p$ . Tal densidad escalar  $s$  tiene la propiedad de que  $S = sV$  es la «entropía» total en  $V$ . Sin embargo, como ya hemos mencionado tanto  $s$  como  $S$  son cantidades formales, i.e. fuera del caso especial en donde el medio es un fluido perfecto, no existen argumentos físicos para interpretar a  $(s, S)$  como la densidad de entropía física y la entropía física total dentro de  $V$ , que corresponden con el estado actual del fluido de fondo.

Aún así, es instructivo examinar la evolución de la «entropía» total  $S = sV$  mientras es transportada en el tiempo a lo largo de las líneas de flujo, i.e. a lo largo de las curvas integrales de  $u^\alpha$ . Se sigue entonces que

$$\begin{aligned}
 \frac{dS}{d\tau} &= u^\alpha \nabla_\alpha (sV) \\
 &= (u^\alpha \nabla_\alpha s) V + s (u^\alpha \nabla_\alpha V) \\
 &= (u^\alpha \nabla_\alpha s) V + s (\nabla_\alpha u^\alpha) V \\
 &= \nabla_\alpha (s u^\alpha) V \\
 &= (\nabla_\alpha S^\alpha) V,
 \end{aligned} \tag{1.2.1}$$

y esta fórmula sugiere que cuando  $\nabla_\alpha S^\alpha \geq 0$  entonces  $S = sV$  no disminuye mientras es transportada en el tiempo a lo largo de las líneas de flujo.

Esta propiedad, sugiere asignar por estados arbitrarios de un fluido (ó más general para cualquiera medio continuo relativista) el vector de flujo de entropía  $S^\alpha$  que por el momento se considera arbitrario con la excepción de que satisface  $\nabla_\alpha S^\alpha \geq 0$ . Esta restricción afirma que para dos hipersuperficies arbitrarias  $\Sigma_{t_1}, \Sigma_{t_2}$  tipo espacio no intersectantes que atraviesan un espacio-tiempo asintóticamente plano, con  $\Sigma_{t_2}$  al futuro de  $\Sigma_{t_1}$ , la entropía total  $S(t)$  definida por

$$S(t) \equiv \int_{\Sigma_t} S^\alpha d\Sigma_\alpha, \tag{1.2.2}$$

satisface que  $S(t_2) \geq S(t_1)$ . En esta tesis y por consenso general entre los relativistas, aceptamos que la desigualdad  $\nabla_\alpha S^\alpha \geq 0$  implementa la segunda ley<sup>15</sup>

<sup>15</sup>Recordamos que dentro de la termodinámica en equilibrio estándar, la segunda ley aparece

por estados arbitrarios de medios relativistas. El flujo de entropía  $S^\alpha$  que introducimos, tiene la propiedad de que un observador arbitrario con 4-velocidad  $\hat{u}^\alpha$ , asigna una densidad de entropía dada por:  $s(\hat{u}) = -\hat{u}_\alpha S^\alpha$ .

Tocamos ahora un punto clave de la termodinámica de medios continuos relativistas. El 4-vector de flujo de entropía  $S^\alpha$  que acabamos de introducir, no tiene ninguna conexión con los atributos del medio bajo consideración, por ejemplo, con el tensor  $T^{\alpha\beta}$  de energía-momento ó con las posibles corrientes de partículas  $J_A^\alpha$ , esfuerzos, campos electromagnéticos, etc. De hecho, como se hará claro más adelante:

*La relación entre  $S^\alpha$  y las variables que especifican el estado del fluido (o el estado de un medio continuo relativista) es el tema central de la termodinámica fuera del equilibrio por medios continuos clásicos ó relativistas, y la naturaleza de esta relación será el enfoque central de esta tesis.*

Para ver el significado de esta relación, consideramos el caso particular de un fluido simple relativista caracterizado por la propiedad de que el flujo de entropía física  $S^\alpha$  tiene la forma de Tolman, es decir,  $S^\alpha$  está dado por  $S^\alpha = su^\alpha$  en donde por el momento la 4-velocidad  $u^\alpha$  es de los observadores locales y  $s$  es la densidad de «entropía» medida en sus marcos. La aplicación de la relación de Gibbs (1.1.18) implica

$$\begin{aligned} \nabla_\alpha S^\alpha &= \nabla_\alpha (su^\alpha) = u^\alpha \nabla_\alpha s + s \nabla_\alpha u^\alpha & s &= s(\rho, n) \\ &= \left[ \frac{\partial s}{\partial \rho} \dot{\rho} + \frac{\partial s}{\partial n} \dot{n} \right] + s \nabla_\alpha u^\alpha, & & (1.2.3) \\ &= \left[ \frac{1}{T} \dot{\rho} - \Theta \dot{n} + s \nabla_\alpha u^\alpha \right], \end{aligned}$$

en donde  $\cdot$  significa diferenciación a lo largo de las líneas de flujo (curvas integrales de  $u^\alpha$ ). En el caso en que el medio es un fluido perfecto simple, identificamos a  $u^\alpha$

---

en el contexto de la transformación de calor en trabajo y está enunciada a través de la forma de Kelvin-Planck ó de Clausius (para una discusión relevante véase la ref. [47]). La desigualdad de Clausius nos permite introducir a la entropía  $S$  como una función de estado con la propiedad de que para cualquier sistema aislado,  $S$  no decrece hacia adelante en el tiempo. Aquí vemos que en el dominio relativista, la segunda ley se implementa introduciendo el flujo de entropía  $S^\alpha$  y se debe tener en mente que esta variable primaria  $S^\alpha$ , es distinta del flujo de «entropía»  $su^\alpha$ , a veces referida como entropía de Tolman, que surge a través del postulado de equilibrio local. Pero como veremos más adelante por estados muy especiales, la entropía de Tolman  $su^\alpha$  se aproxima a la entropía verdadera  $S^\alpha$ .

con la 4-velocidad del fluido, entonces las leyes de balance ( $\nabla_\alpha J^\alpha = \nabla_\alpha T^{\alpha\beta} = 0$ ) nos dan:

$$\nabla_\alpha J^\alpha = 0 \implies u^\alpha \nabla_\alpha n + n \nabla_\alpha u^\alpha = 0, \quad (1.2.4)$$

$$\nabla_\alpha T^{\alpha\beta} = 0 \implies u^\alpha \nabla_\alpha \rho + (\rho + P) \nabla_\alpha u^\alpha = 0, \quad (\rho + P) u^\alpha \nabla_\alpha u^\beta + \Delta^{\alpha\beta} \nabla_\alpha P = 0, \quad (1.2.5)$$

con el proyector asociado a la 4-velocidad  $u^\alpha$ , dado por:

$$\Delta^{\alpha\beta} = g^{\alpha\beta} + u^\alpha u^\beta.$$

Estas relaciones en combinación de  $s = \beta(\rho + P) - \Theta n$  que derivamos anteriormente (véase (1.1.18)) implican que el término entre corchetes cuadrados en la tercera línea de (1.2.3) es nulo. Por lo tanto, la evolución de los estados de fluidos perfectos no generan entropía, en el sentido de que la entropía total  $S(t) = \int_{\Sigma_t} S^\alpha d\Sigma_\alpha$  a través de una hipersuperficie tipo espacio  $\Sigma_t$  permanece constante i.e. es independiente de  $\Sigma_t$ . En un estado de equilibrio termodinámico global se espera que la entropía total  $S(t)$  sea máxima y por lo tanto las variaciones a primer orden  $\delta S(t)$  inducidas por pequeñas perturbaciones  $\delta T^{\alpha\beta}, \delta J^\alpha$  al respecto de una configuración de fondo son nulas a primer orden. Apelando a la relación de Gibbs covariante, se sigue que el potencial térmico  $\Theta$  es uniforme (constante) y el 4-vector de temperatura inversa  $\beta^\alpha$  es un campo de Killing temporal, condiciones que veremos más adelante en el capítulo 3.

Sea ahora que postulamos por un fluido, que el flujo de entropía  $S^\alpha$  tiene la forma:

$$S^\alpha = s u^\alpha + \hat{\beta} h^\alpha + \hat{\theta} n^\alpha, \quad (1.2.6)$$

en donde  $(\hat{\beta}, \hat{\theta})$  son coeficientes por el momento arbitrarios mientras que  $(h^\alpha, n^\alpha)$  representan el flujo de energía (por definición ortogonal a  $u^\alpha$ ) y el flujo «drift» (también ortogonal a  $u^\alpha$ ) de partículas relativo al marco definido por  $u^\alpha$  (recordamos que  $u^\alpha$  es arbitrario). Este  $S^\alpha$  es compatible con la segunda ley (i.e.  $\nabla_\alpha S^\alpha \geq 0$ ) sujeto a que  $(u^\alpha, h^\alpha, n^\alpha)$  estén restringidos. Como veremos más adelante, la condición  $\nabla_\alpha S^\alpha \geq 0$ , combinada con las leyes de balance nos conducen a ecuaciones fenomenológicas por los campos  $(u^\alpha, h^\alpha, n^\alpha)$  que aparecen en (1.2.6). Mencionamos por adelantado que en el caso de que el medio sea un fluido relativista simple, la forma del flujo  $S^\alpha$  en (1.2.6), define la clase de teorías referidas como teorías de primer orden (para una introducción de esta clase de teorías véase [45] y la sección 3.3.1 de esta tesis). Por esta clase de teorías, mencionamos aquí que la naturaleza de los estados de equilibrio i.e. estados que obedecen  $\nabla_\alpha S^\alpha = 0$ ,

fuerón identificados en [45].

Es interesante mencionar que la termodinámica transitoria que vamos a desarrollar más adelante viene generalizando la expresión para  $S^\alpha$  escrita en (1.2.6). Esta generalización consiste en aceptar que las contribuciones de segundo orden en la desviación del estado de equilibrio entran en la definición del flujo  $S^\alpha$ . Al demandar que la entropía extendida  $S^\alpha$  satisfaga la segunda ley  $\nabla_\alpha S^\alpha \geq 0$ , acoplada con la estructura de las leyes de balance  $\nabla_\alpha T^{\alpha\beta} = \nabla_\alpha J^\alpha = 0$ , nos conduce directamente a la obtención de ecuaciones fenomenológicas por la teoría transitoria. En esta descripción breve de la teoría transitoria dejamos asuntos sin considerar, como el tema de la covarianza de la teoría bajo cambio de 4-velocidad  $u^\alpha$ , asunto que necesita ser examinado y esto lo haremos con más calma más adelante.

Por último, como una aplicación del formalismo que hemos desarrollado en estas secciones, damos una formulación covariante de la termodinámica que describe estados de un fluido perfecto. Contrario al desarrollo hecho hasta este momento, la formulación covariante de la termodinámica por un fluido perfecto tiene la propiedad de que las relaciones termodinámicas por estados arbitrarios no hacen referencia a ningún marco en reposo ó cantidades definidas relativas a tal marco. Para construir esta formulación, sea  $u^\alpha$  la única 4-velocidad hidrodinámica definida por el fluido perfecto y sea  $\Delta^\alpha_\beta = \delta^\alpha_\beta + u^\alpha u_\beta$  el tensor de proyección asociado a tal  $u^\alpha$ . Claramente, relativo al marco en reposo  $u^\alpha = \delta^\alpha_0$ , el tensor de proyección esta dado por  $\Delta^\alpha_\beta = \text{diag}(0, 1, 1, 1)$  mientras que las componentes del tensor de energía-momento  $T_{\alpha\beta}$  tomadas relativas al marco en reposo definido por  $u^\alpha$  tienen la forma

$$T_{\alpha\beta} = \text{diag}(\rho, P, P, P) \quad \longleftrightarrow \quad T_{\alpha\beta} = \rho u_\alpha u_\beta + P \Delta_{\alpha\beta}, \quad (1.2.7)$$

y la corriente de partículas  $J^\alpha$  y de entropía  $S^\alpha$  estan dadas por

$$J^\alpha = n u^\alpha, \quad S^\alpha = s u^\alpha. \quad (1.2.8)$$

Regresando a la identidad (1.1.20) y tomando  $X = u^\alpha$ , se sigue que

$$dS^\alpha = -\Theta dJ^\alpha - \beta_\beta T^{\alpha\beta}, \quad (1.2.9)$$

en donde hemos usado  $\rho u^\alpha = -u_\beta T^{\alpha\beta}$  e introducido  $\beta_\alpha = \beta u_\alpha = \frac{u_\alpha}{T}$  (tomando aquí a  $c = k = 1$  en la definición de  $\beta$  dada en (1.1.17)). Más aún, la relación (1.1.18), implica que el vector de entropía  $S^\alpha = s u^\alpha$  satisface la relación lineal

$$S^\alpha = P\beta^\alpha - \Theta J^\alpha - \beta_\beta T^{\alpha\beta}. \quad (1.2.10)$$

Esta relación, en combinación con (1.2.9) incorporan la termodinámica de un fluido perfecto simple. Son las versiones covariantes de las relaciones (1.1.18), pero con la gran diferencia que las fórmulas (1.2.9, 1.2.10) no hacen referencia a ningún marco en reposo. La relación (1.2.9) es la relación de Gibbs covariante que encontraremos en el capítulo 3.

### 1.3. Sobre la validez de la hipótesis de equilibrio termodinámico local

En esta sección regresamos brevemente para ofrecer algunos comentarios sobre la hipótesis del equilibrio termodinámico local, que hemos enunciado en la sección 1.1. Como hemos mencionado, esta hipótesis juega un papel importante en el desarrollo de esta tesis y sentimos que es importante ofrecer algunos comentarios adicionales acerca de su validez.

Hemos empezando la sección 1.1 asumiendo que al interior de la región del espacio-tiempo ocupado por el fluido, hemos fijado un campo de velocidad  $u^\alpha$  que identifica la clase de los observadores locales que hacen las mediciones sobre este medio y este campo  $u^\alpha$  determina una colección continua de marcos de referencia («local rest frames» en inglés) al interior del fluido. Para un evento  $p$  al interior del fluido y relativamente al marco definido por la 4-velocidad  $u^\alpha$ , hemos considerando un elemento de 3-volumen espacial  $V$  infinitesimal, en el plano tipo espacio ortogonal a  $u^\alpha(p)$ .

Implícitamente hemos asumido que este volumen  $V$  se considera lo suficiente grande de manera que constituye un sistema termodinámico en el sentido que las fluctuaciones de las variables extensivas como la densidad del número de partículas  $n$  y la densidad de masa-energía  $\rho$ , etc., medidas por el observador son despreciables. Además se supone que las variables extensivas tampoco cambian apreciablemente en la escala de longitud que caracteriza a  $V$  de manera que se justifica la homogeneidad espacial de las variables extensivas. Bajo estas suposiciones, hay sentido en contemplar la validez o mejor a considerar fluidos que cumplen con el requisito de validez del postulado de equilibrio termodinámico local y en los últimos dos capítulos, hemos discutido las consecuencias de esta hipótesis.

Pero sea que ahora en el mismo evento  $p$ , consideramos otro marco en reposo asociado con distinta 4-velocidad  $\hat{u}^\alpha$  y sea  $\hat{V}$  el 3-volumen espacial y  $(\hat{\rho}, \hat{n})$  la

densidad del número de partículas y la densidad de masa-energía medida relativamente al nuevo marco. Como discutiremos con más detalles en el capítulo 3 (en particular véase el apéndice de ese capítulo), sujeto a que la magnitud  $v$  de la tres velocidad  $\vec{v}$  de  $\hat{u}^\alpha$  al respecto de  $u^\alpha$  satisface que  $\epsilon = \frac{v}{c} \ll 1$ , el estado de equilibrio termodinámico local se cada invariante, es decir, si prevalece al respecto de  $u^\alpha$  también prevalece al respecto de  $\hat{u}^\alpha$ .

Pero de relevancia aquí, es la escala del parámetro  $\epsilon$  que apenas hemos definido. Como veremos en más detalles en el capítulo 3, las variables primarias por un fluido relativista ofrecen la posibilidad de definir de forma invariante este parámetro. En particular, estados de un fluido relativista que satisfacen la condición  $\epsilon \ll 1$  son referidos como estados cercanos al equilibrio y como veremos la teoría transitoria tiene como finalidad analizar esta clase de estados.

En suma, de aquí en adelante y sin otro aviso, en la descripción de fluidos relativistas apelamos al postulado de equilibrio termodinámico local y se asumen estados cercanos al equilibrio en donde la hipótesis del equilibrio local es válida al respecto de un marco. Por construcción del parámetro  $\epsilon$ , se sigue entonces que el equilibrio termodinámico local es válido para todos los marcos sujetos a que la 4-velocidad  $u^\alpha$  se restrinja al interior de un «cono».

## 1.4. El contenido de esta tesis

Nos tomamos ahora el tiempo para dar un breve resumen del contenido de este trabajo. Esta tesis, adicionalmente a este capítulo introductorio, contiene otros cuatro capítulos y una conclusión. Además se han incluido dos apéndices anexados en los capítulos 3 y 5 respectivamente.

En el capítulo 2, damos una introducción breve de la física de medios continuos, clásicos, newtonianos y tocamos algunas de las teorías de termodinámica fuera del equilibrio por estos medios que se han desarrollado desde que la termodinámica de estos medios apareció como una disciplina de la física.

Comenzamos el capítulo recordando al lector algunos aspectos cinemáticos de medios continuos y en seguida nos centramos en la estructura de las leyes de balance para la masa, momento lineal y energía total. Este enfoque nos permite notar que estas leyes en general fallan en constituir un sistema cerrado de ecuaciones, y por lo tanto reconocer la necesidad de introducir relaciones constitutivas y las teorías alrededor de estas relaciones. En este punto entramos en el territorio de la termodinámica y en la sección 2.3 señalamos la importancia que tiene la segunda ley de la termodinámica en la cerradura de las ecuaciones dinámicas. En este capítulo también aprovechamos la oportunidad para dar una vista panorámica sobre las

distintas maneras en que la segunda ley de la termodinámica se ha implementado en la descripción de medios clásicos.

Empezamos entonces en la sección 2.3, con una discusión sobre la manera en que la segunda ley se implementa dentro de la termodinámica racional (TR), dando la oportunidad de introducir la desigualdad de Clausius-Duhem. Esta discusión nos prepara para dar una introducción del principio de entropía y vemos aquí el papel que este principio juega como regla de selección de relaciones constitutivas apropiadas. Analizamos también en la sección 2.3.1 brevemente la termodinámica irreversible clásica (TCI), y aquí, discutimos de nueva cuenta el postulado de equilibrio local, y señalamos como tal postulado dentro del contexto de la teoría (TCI) implementa la segunda ley<sup>16</sup>.

A continuación, en las secciones 2.3.2, 2.3.3 damos una introducción breve de la descripción de las teorías de termodinámica fuera del equilibrio que llevan el adjetivo extendida (*extended*), un adjetivo que nació después de la sugerencia fundamental de Müller en 1967 sobre la naturaleza de la entropía por estados fuera del equilibrio. En este contexto introducimos la teoría de termodinámica irreversible extendida referida en este escrito por (TIE) en donde vemos de manera concreta como la hipótesis de Müller asigna entropía por estados fuera del equilibrio. La otra teoría termodinámica extendida que tocamos en este capítulo es la teoría referida como teoría irreversible racional extendida (TIRE) la cual desarrollamos en breve en la última sección 2.3.3. En esta última sección, empezamos a darnos cuenta, que los sistemas de ecuaciones apropiados para la descripción de la termodinámica fuera del equilibrio de medios continuos apunta en la dirección de sistemas de ecuaciones que son simétricos-hiperbólicos. Dichos sistemas de ecuaciones remueven la propagación infinita de las perturbaciones por el flujo de calor, estrés, etc. que plagan al sistema Fourier-Navier-Stokes.

En el capítulo 3, cambiamos el tema. El enfoque de este capítulo y de aquí en adelante corresponde al estudio de la termodinámica de medios continuos dentro del régimen relativista. Aunque nuestra discusión es general, sin embargo, restringimos nuestra atención a fluidos simples relativistas ó a una mezcla de fluidos simples relativistas. El capítulo esta exclusivamente dedicado al desarrollo de la termodinámica transitoria («transient thermodynamics» en inglés) de Israel-Stewart [49], [50].

El camino para desarrollar esta teoría es largo. En la sección 3.2 empezamos identificando una clase de estados del fluido particulares los cuales en el contexto de la

---

<sup>16</sup>Es importante diferenciar el papel que tiene el postulado de equilibrio local en la formulación de la primera ley de la termodinámica en la sección 1.1 y su papel para implementar la segunda ley dentro de la termodinámica clásica irreversible (TCI)

teoría transitoria son referidos como estados en equilibrio termodinámico global (ó local), dos términos que discutimos en detalle en esa sección. La sección 3.3 contiene el material clave en que esta basada la teoría transitoria. En esta sección definimos el flujo de entropía  $S^\alpha$  por estados de fluido cercano al equilibrio, y su relación con otros atributos del fluido bajo consideración. Muchas propiedades importantes de estos estados son discutidas en esta sección con el enfoque particular en la descripción de la libertad de norma al respecto de la elección de los marcos de referencia que caracterizan a la teoría transitoria. También basándose en la estructura del flujo de entropía  $S^\alpha$  recuperamos como un límite particular, las teorías de primer orden que incluyen como casos particulares a la teoría de Eckart y a la teoría de Landau-Lifshitz. En la sección 3.3.2 nos enfocamos en el desarrollo de la teoría de segundo orden (i.e. de la termodinámica transitoria) y en esta sección definimos la aproximación hidrodinámica de la teoría transitoria. También obtenemos las ecuaciones fenomenológicas y tocamos el tema de la invarianza de las cantidades termodinámicas (ó dicho más propiamente, la invarianza de la teoría) bajo cambio de marco en reposo. Terminamos este capítulo discutiendo los puntos a favor de la teoría transitoria pero también mencionamos los puntos débiles en donde esta teoría necesita más trabajo.

El apéndice de este capítulo, sirve para aclarar algunos puntos sutiles y espinosos que se encuentran durante el desarrollo de la teoría. Primero aclaramos en términos precisos a que nos referimos por estados «cercaños» al equilibrio y más importante como identificamos esta clase de estados. Veremos en este apéndice, que la teoría nos permite definir en el espacio tangente para cada evento en la región ocupado por el fluido, un cono y con la ayuda de este cono identificamos a los estados del fluido que estan cercaños al equilibrio. La existencia de este cono, nos permitirá también introducir una familia de observadores y marcos de referencias referidos como marcos de referencias «admisibles» y a sus vez veremos que los marcos de referencias admisibles están relacionados a través de transformaciones particulares que conectan las 4-velocidades que definen estos marcos. Tal conjunto de transformaciones inducen variaciones sobre las variables termodinámicas implicando que se transforman de una manera particular bajo cambio de marco. Estas leyes de transformación nos llevan a establecer que la teoría transitoria exhibe una «libertad de norma» en el sentido que las ecuaciones fenomenológicas se quedan en forma invariante bajo cambios particulares de marcos que discutimos con detalle en el capítulo 3.

En el capítulo 4, discutimos una nueva teoría de termodinámica fuera del equilibrio que describe estados de fluidos simples relativistas. Esta teoría fué desarrollada por Liu, Müller y Ruggeri en [66, 77] y es una extensión de la termodinámica irreversible racional extendida (TIRE) que desarrollamos en la sección 2.3.3. En esta

teoría las variables dinámicas consisten de las 4 componentes de la corriente de partículas  $J^\alpha$  y de las 10 componentes del tensor de energía-momento  $T^{\alpha\beta}$  los cuales satisfacen las leyes de conservación  $\nabla_\alpha J^\alpha = \nabla_\alpha T^{\alpha\beta} = 0$ , pero adicionalmente la teoría postula una nueva ecuación inhomogénea que involucra a la divergencia de un campo tensorial  $A^{\alpha\beta\gamma}$  que esta acoplada con el tensor de disipación  $I^{\beta\gamma}$  i.e un campo tensorial de segundo order simétrico y sin traza.

Las leyes de balance son aumentadas por la inclusión del flujo de entropía  $S^\alpha$  cuya divergencia es semi positiva. En esta teoría, los campos  $(A^{\alpha\beta\gamma}, I^{\beta\gamma}, S^\alpha)$  y la producción de entropía  $\sigma$  se consideran como funciones constitutivas que dependen de las 14 variables básicas  $(J^\alpha, T^{\alpha\beta})$  y como veremos las funciones constitutivas están restringidas apelando a: el principio de entropía, la invarianza de las ecuaciones dinámicas bajo cambio de coordenadas y al requisito de que las ecuaciones dinámicas deban constituir un sistema simétrico - hiperbólico. Los autores toman ventaja del principio de entropía introduciendo a los multiplicadores de Lagrange y al menos por estados cercanos de equilibrio, estos multiplicadores están ligados a las mediciones que hacen los observadores locales en el marco de Eckart.

Como veremos en este capítulo, la teoría es bastante involucrada, pero al menos por estados cercanos de equilibrio los autores muestran que las ecuaciones fenomenológicas contienen solo tres funciones arbitrarias. En la última sección, hacemos una comparación entre esta teoría con la teoría transitoria y discutimos las ventajas de cada una.

Por último, en el capítulo 5 estudiamos una modificación ligera de la teoría de Liu, Müller y Ruggeri que fué desarrollada por Pennisi [84] e independientemente por Geroch y Lindblom [34]. La teoría describe la termodinámica de una clase particular de fluidos relativistas referidos como fluidos de tipo divergente y al inicio del capítulo definimos precisamente esta clase de fluidos. Como veremos en las secciones 5.1.1, 5.1.2, 5.1.3 la hidrodinámica y la termodinámica de fluidos del tipo divergente están especificadas a través del conocimiento de la función generadora  $\chi$  y el tensor de disipación  $I^{\alpha\beta}$  y ambos de estos campos son funciones de los multiplicadores de Lagrange.

Como veremos en más detalle, en el formalismo de Pennisi [84] y de Geroch-Lindblom [34], cuanto estos multiplicadores se consideran como las variables dinámicas satisfacen un sistema de ecuaciones cuasi-lineales simétricas determinado por la función generadora  $\chi$  y el tensor de disipación  $I^{\alpha\beta}$ . Debido a que  $\chi$  es una función libre, veremos que por elecciones particulares de la función generadora  $\chi$  se obtienen sistemas simétricos-hiperbólicos/causales por los multiplicadores de Lagrange. En la sección 5.1.1 damos un ejemplo de una función generadora  $\chi$  la cual genera estados de un fluido perfecto y en la sección 5.1.3 damos una discusión sobre la teoría de Eckart y su propiedad particular a ser como una teoría que

describe fluidos relativistas del tipo divergente. La naturaleza particular de estos fluidos es discutida en detalle en la sección 5.2.

Este capítulo esta acompañado de un apéndice en el cual tocamos el tema de la implementación del principio de entropía a través del método de Boillat-Ruggeri (BR). Como discutimos en detalle aquí, la implementación del principio de entropía a través del método de Boillat-Ruggeri consiste en asumir que el sistema está descrito por  $n$  leyes de balance acompañadas por una ley de entropía y la clave de esta innovación esta en eliminar a las variables básicas en favor de las nuevas variables que corresponden con los multiplicadores de Lagrange, cuya existencia se basa en el trabajo de Friedrichs [31, 32] sobre sistemas sobredeterminados de leyes de conservación.

## 2 Termodinámica irreversible de fluidos simples clásicos

En el capítulo anterior hemos dado una primera vista de la forma de la primera y la segunda ley de la termodinámica por medios continuos relativistas con énfasis en medios que son fluidos simples relativistas. Como hemos discutido, la primera ley de la termodinámica tiene la característica de ser una ley local en donde la parte prominente involucra a las mediciones que hace un observador sobre el medio bajo consideración. También hemos discutido el concepto de flujo de entropía por un medio relativista y en términos de este flujo, hemos formulado la segunda ley de la termodinámica. Hemos señalado que la relación entre el flujo de entropía con otros atributos del medio bajo consideración, es un punto que necesita más análisis.

En este capítulo, nos enfocamos en la manera en que la termodinámica entra en la descripción de medios continuos y por razones pedagógicas nos centramos primero en el estudio de medios continuos clásicos<sup>1</sup>. Nuestro enfoque consiste en estudiar la dinámica de estos medios y como veremos más adelante, este problema tiene dos componentes: la primera componente involucra a la hidrodinámica mientras que la segunda componente involucra a la parte termodinámica. En esta última parte, tendremos la oportunidad de introducir el concepto de relaciones constitutivas y el principio de entropía.

### 2.1. Mecánica de medios continuos clásicos

#### 2.1.1. Cinemática

Empezamos esta sección discutiendo primero algunos aspectos cinemáticos del medio el cual tomamos como un fluido simple. Sin embargo, por razones de ge-

---

<sup>1</sup>Por medios continuos clásicos nos referimos a medios que se propagan en el espacio Euclideo  $(\mathbb{R}^3, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ , en la presencia de un tiempo absoluto newtoniano. Por simplicidad, nosotros consideramos al medio como un fluido simple clásico, pero muchos de los conceptos que veremos se generalizan a medios arbitrarios.

neralidad, hablaremos de un medio continuo debido a que la descripción que a continuación bosquejamos es válida para medios más generales y no solo por fluidos. Específicamente, empezamos con un medio continuo eléctricamente neutro que a  $t = 0$ , ocupa un conjunto acotado, abierto  $U$  del espacio Euclideo<sup>2</sup>  $\mathbb{R}^3$  con frontera suave  $\partial U$ . La cinemática del medio esta descrita por una familia uni-parámetrica de mapas parametrizados por un parámetro continuo  $t > 0$  que interpretamos como tiempo y definidas como

$$\phi_t : U \rightarrow \phi_t(U) \equiv U_t \subseteq \mathbb{R}^3, \vec{X} \mapsto \phi_t(\vec{X}) \equiv \phi(t, \vec{X}), \quad (2.1.1)$$

tales que para todo  $t > 0$ ,  $\phi_t$  es uno a uno, suryectivo y es de clase  $C^k$  y su inversa  $\phi_t^{-1}$  también es de clase<sup>3</sup>  $C^k$ . Como consecuencia, los conjuntos  $\phi_t(U)$  y  $U = \phi_0(U)$  son biyectivos, e interpretamos a la familia de imagenes  $\phi_t(U) \equiv U_t$ ,  $t > 0$ , como la evolución al tiempo  $t$  de la distribución inicial  $U \equiv \phi_0(U)$ .

Coordenadas locales  $\vec{X} = (X^1, X^2, X^3)$  sobre  $U$  sirven como etiquetas lagrangianas para los elementos del medio en el siguiente sentido: Para un  $\vec{X}$  fijo, el conjunto:

$$\{\phi(t, \vec{X}), t \geq 0\}, \quad (2.1.2)$$

describe una trayectoria suave que traza el elemento de fluido etiquetado inicialmente por la tripleta  $\vec{X} = (X^1, X^2, X^3)$  en  $U$ . Por construcción, a lo largo de esta trayectoria, las coordenadas  $\vec{X}$  se mantienen fijas y la velocidad  $\vec{V}(t, \vec{X})$  y la aceleración  $g(t, \vec{X})$  de este elemento del medio están definidas por

$$\vec{V}(t, \vec{X}) = \frac{\partial \phi(t, \vec{X})}{\partial t}, \quad g(t, \vec{X}) = \frac{\partial^2 \phi(t, \vec{X})}{\partial t^2} = \frac{\partial \vec{V}(t, \vec{X})}{\partial t}. \quad (2.1.3)$$

La velocidad euleriana  $\vec{u}(t, \vec{x})$  esta definida<sup>4</sup> por

$$\vec{u}(t, \vec{x}) = \vec{V}(t, \vec{X}) \Big|_{\vec{X}=\phi_t^{-1}(\vec{x})}, \quad (2.1.4)$$

y por la regla de la cadena, se sigue que

<sup>2</sup>Recordemos que las consideraciones en este capítulo estan restringidas a medios continuos clásicos.

<sup>3</sup>Dicho más formalmente, la colección  $\phi_t, t \geq 0$  representa una familia uni-parámetrica de difeomorfismos entre  $U$  y  $\phi_t(U)$ .

<sup>4</sup>En esta definición  $\vec{x} = (x^1, x^2, x^3)$  denotan coordenadas cartesianas globales del espacio de fondo  $\mathbb{R}^3$ .

$$\left. \frac{\partial \vec{V}(t, \vec{X})}{\partial t} \right|_{\vec{X}=\phi_t^{-1}(\vec{x})} = \frac{\partial \vec{u}(t, \phi_t(t, \vec{x}))}{\partial t} = \frac{\partial \vec{u}(t, \vec{x})}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \vec{u}(t, \vec{x}), \quad (2.1.5)$$

lo cual indica que la «aceleración» lagrangiana y la «aceleración» euleriana están relacionadas a través de:

$$g(t, \vec{X}) = \frac{\partial \vec{u}(t, \vec{x})}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \vec{u}(t, \vec{x}). \quad (2.1.6)$$

La descripción lagrangiana y euleriana del medio implican que para cualquier función  $Q(t, \vec{X})$ , asociamos su contraparte  $q(t, \vec{x})$  de acuerdo a

$$q(t, \vec{x}) = Q(t, \vec{X}) \Big|_{\vec{X}=\phi^{-1}(t, \vec{x})}, \quad (2.1.7)$$

y apelando nuevamente a la regla de la cadena, tenemos que:

$$\frac{\partial Q(t, \vec{X})}{\partial t} = \frac{Dq}{dt} \equiv \frac{\partial q(t, \vec{x})}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla q(t, \vec{x}). \quad (2.1.8)$$

En esta definición, las coordenadas lagrangianas  $(t, \vec{X})$  y las coordenadas eulerianas  $(t, \vec{x})$  están relacionadas vía  $(t, \vec{x}) = (t, \phi(t, \vec{X}))$ . De (2.1.8) se sigue que el operador

$$\frac{D}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla, \quad (2.1.9)$$

actuando sobre escalares, diferencia a lo largo de las líneas de flujo del campo de velocidades y frecuentemente lo denotamos con un punto encima de una cantidad. Por ejemplo, para un  $f(t, \vec{x})$  lo suficientemente suave, empleamos la notación:

$$\dot{f} \equiv \frac{Df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla f. \quad (2.1.10)$$

A continuación discutimos dos aspectos importantes que caracterizan a los medios continuos. Uno de ellos es la noción de estrés, que describe las fuerzas internas generadas por el medio en sí mismo. De acuerdo al principio de estrés de Cauchy, para cualquier elemento de superficie centrada en  $\vec{x}$  con vector normal  $\vec{n}$  que se encuentra dentro del medio, la fuerza  $\vec{t}(t, \vec{x}, \vec{n})$  que el medio genera a  $(t, \vec{x})$  depende en general del tiempo  $t$ , el punto espacial  $\vec{x} = \phi(t, \vec{X})$  y el vector normal  $\vec{n}$ . Extendemos esta definición para todos los puntos interiores del medio, generando un campo «vectorial»  $\vec{t}(t, \vec{x}, \vec{n})$ , referido como el campo vectorial de estrés de Cauchy y como veremos juega un rol importante en la estructura de las leyes

dinámicas que describen la evolución del medio.

El otro atributo importante que caracteriza a los medios continuos, es la propiedad de que tales medios pueden conducir calor. Este fenómeno de conducción de calor está descrito por la función referida como flujo de calor  $h(t, \vec{x}, \vec{n})$  la cual determina la tasa de conducción de calor a través de cualquier elemento de superficie centrado en  $\vec{x}$  con vector normal  $\vec{n}$  a tiempo  $t$ . Más adelante, veremos que la primera ley de la termodinámica requiere la existencia de un campo vectorial  $\vec{q}(t, \vec{x})$ , referido como el campo vectorial de flujo de calor, relacionado con la función flujo de calor  $h(t, \vec{x}, \vec{n})$  vía

$$h(t, \vec{x}, \vec{n}) = \vec{q}(t, \vec{x}) \cdot \vec{n}. \quad (2.1.11)$$

Con la introducción de la noción de estrés de Cauchy y la descripción de la conducción del calor ahora estamos listos para definir las leyes de balance por un medio continuo clásico.

## 2.2. Leyes de balance

Como ya mencionamos previamente, la dinámica de medios continuos a grosso modo está dividida en una parte «hidrodinámica» y en una parte «termodinámica». La primera parte, está descrita a través de las leyes de balance i.e. relaciones que involucran a las variables dinámicas que describen al medio. Dentro del contexto de física newtoniana, estas leyes incorporan a los siguientes principios:

- a) La masa no se crea ni se destruye,
- b) La segunda ley de Newton es válida. En el presente contexto, esta ley afirma que la tasa de cambio del momento lineal sobre cualquier región del medio es igual a la fuerza total que actúa sobre esta región,
- c) La energía no se crea ni se destruye,
- d) La entropía nunca disminuye hacia el futuro.

### 2.2.1. Conservación de masa

Sea ahora un medio continuo descrito por la familia  $\phi_t$ ,  $t > 0$ . A este medio asignamos la función de densidad de masa  $\rho(t, \vec{x})$  que tiene la siguiente propiedad: para cada  $\phi_t(\hat{U})$ , la cantidad  $m(t) = \int_{\phi_t(\hat{U})} \rho(\vec{x}, t) dV$  es la masa total del medio al interior<sup>5</sup> de  $\phi_t(\hat{U})$ . Decimos que esta  $\rho(t, \vec{x})$  incorpora el principio de conservación de masa, siempre que

$$\frac{d}{dt} m(t) = \frac{d}{dt} \int_{\phi_t(\hat{U})} \rho(\vec{x}, t) dV(t) = 0. \quad (2.2.1)$$

Esta condición acoplada con el teorema de transporte conducen al siguiente teorema fácilmente verificable:

**Teorema 1** *Sea  $\phi_t$ ,  $t > 0$  un movimiento y sea  $\rho(t, \vec{x})$  la densidad de masa por este medio, entonces los siguientes enunciados son equivalentes:*

1) *La conservación de masa es válida.*

2)  $\rho(t, \vec{x}) J(t, \vec{X}) = \rho_0(\vec{X}),$

3) *La ecuación de continuidad es válida:*

$$\frac{D\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \vec{u} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) = 0. \quad (2.2.2)$$

en donde  $\rho_0(\vec{X})$  es la densidad de masa a  $t = 0$  y

$$J(t, \vec{X}) = \det \left( \frac{\partial \phi_t^i}{\partial X^j} \right)$$

es el Jacobiano de la familia de mapas:

$$\phi_t : U \rightarrow \phi_t(U) : \vec{X} \rightarrow \phi_t(\vec{X}) \equiv (\phi_t^1(\vec{X}), \phi_t^2(\vec{X}), \phi_t^3(\vec{X})).$$

La demostración de este teorema puede por ejemplo encontrarse en el libro [70]. Más adelante haremos uso de este teorema en varios lugares.

<sup>5</sup>De aquí en adelante y sin más avisos, el símbolo  $\phi_t(\hat{U})$  representa la evolución de un conjunto abierto  $\hat{U}$  de  $U$  bajo la acción de las mapas  $\phi_t$ .

## 2.2.2. Conservación de momento lineal

Junto con la conservación de masa, viene también la conservación de momento lineal. Bajo las mismas condiciones como en el teorema 1, la conservación de momento lineal está descrita por la siguiente definición:

**Definición 1** *Para un movimiento  $\phi_t$ ,  $t > 0$  de un medio continuo caracterizado por la densidad de masa  $\rho(t, \vec{x})$ , vector de estrés de Cauchy  $\vec{t}(t, \vec{x}, \vec{n})$  y bajo la suposición de que el medio se encuentre en un campo externo  $\vec{b}(t, \vec{x})$ , el balance de momento lineal se satisface si para cada  $\phi_t(\hat{U})$ , la siguiente relación integral es válida*

$$\frac{d}{dt} \int_{\phi_t(\hat{U})} \rho(t, \vec{x}) \vec{u}(t, \vec{x}) dV = \int_{\phi_t(\hat{U})} \rho(t, \vec{x}) \vec{b}(t, \vec{x}) dV + \int_{\partial\phi_t(\hat{U})} \vec{t}(t, \vec{x}, \hat{n}) dA, \quad (2.2.3)$$

en donde  $\partial\phi_t(\hat{U})$  denota la frontera de  $\phi_t(\hat{U})$ ,  $dA$  denota el elemento de superficie de  $\partial\phi_t(\hat{U})$  y el vector de estrés  $\vec{t}(t, \vec{x}, \hat{n})$  está evaluado sobre la frontera  $\partial\phi_t(\hat{U})$  con normal  $\hat{n}$ .

Al observar (2.2.3), nos convencemos de que esta expresión no es nada más que la segunda ley de Newton: el cambio de momento lineal al interior de  $\phi_t(\hat{U})$ , es el resultado de la fuerza generada por el campo externo (primer término del lado derecho de (2.2.3)) más la fuerza de estrés de Cauchy (segundo término del lado derecho en (2.2.3)).

Nótese que (2.2.3) es una expresión integral, pero bajo condiciones particulares puede reducirse a una forma local. Para ello, sujeto a que (2.2.3) se cumpla para cada  $\phi_t(\hat{U})$ , y algunas restricciones sobre la suavidad del movimiento  $\phi_t$ ,  $t > 0$  y sobre el vector de Cauchy  $\vec{t}(t, \vec{x}, \vec{n})$  se satisfagan, se puede mostrar<sup>6</sup> que existe un único campo tensorial tipo  $(2, 0)$  referido como el tensor de estrés de Cauchy y denotado como  $\sigma(t, \vec{x})$ , tal que las componentes de  $\vec{t}(t, \vec{x}, \vec{n})$  pueden ser escritas de la forma:

$$t^a(t, \vec{x}, \vec{n}) = \sigma^{ab}(t, \vec{x}) g_{bc} n^c = \sigma^a_c n^c, \quad a, b, c \in (1, 2, 3), \quad (2.2.4)$$

en donde  $g_{ab}$  denotan las componentes de la métrica Euclidiana de  $\mathbb{R}^3$ ,  $\sigma^{ab}$  denotan las componentes del tensor de estrés de Cauchy y  $n^a$  representan el vector normal a la superficie  $\partial\phi_t(\hat{U})$ .

Con la representación de  $\vec{t}(t, \vec{x}, \vec{n})$  dada en (2.2.4), asumiendo conservación de

<sup>6</sup>Detalles de la derivación (que no es simple) se pueden encontrar en el libro [70].

masa y apelando al teorema de la divergencia se sigue que (2.2.3) implica la ley de conservación local del momento lineal, escrita como

$$\rho \dot{\vec{u}}(\vec{x}, t) = \nabla \cdot \sigma + \rho \vec{b}, \quad (\nabla \cdot \sigma)^a = \frac{\partial \sigma^{ab}}{\partial x^b}, \quad a, b \in (1, 2, 3), \quad (2.2.5)$$

en donde la significad de  $\dot{\vec{u}}(t, \vec{x})$  la hemos expilcado en (2.1.10).

Nótese que esta ley relativamente a un sistema de coordenadas cartesianas toma la forma:

$$\rho \left( \frac{\partial u^a}{\partial t} + u^b \frac{\partial u^a}{\partial x^b} \right) = \frac{\partial \sigma^{ab}}{\partial x^b} + \rho b^a, \quad a, b \in \{1, 2, 3\}. \quad (2.2.6)$$

Mirando a estas ecuaciones, se ve que poseen un carácter formal en el siguiente sentido. No constituye un sistema de ecuaciones cerrado. Adquieren un significado matematico bien definido cuando se especifica la dependencia de  $\sigma(t, \vec{x})$  sobre las características que describe el movimiento del fluido y regresaremos a este punto central más adelante.

### 2.2.3. La primera ley de la termodinámica para medios continuos

Como hemos mencionado al inicio de este capítulo, los medios continuos en general permiten la conducción de calor y como consecuencia de esta propiedad, la formulación de la conservación de energía total necesita un tratamiento especial. En breve, para escribir esta ley, necesitamos introducir nuevas variables. Más allá de la densidad de masa  $\rho(t, \vec{x})$ , el tensor de estrés  $\sigma(t, \vec{x})$  y el campo externo por unidad de masa  $\vec{b}(t, \vec{x})$ , el conjunto de variables, es extendido por la inclusión de

- a) La energía interna por unidad de masa  $e(t, \vec{x})$ ,
- b) El vector flujo de calor  $\vec{q}(t, \vec{x})$ , tal que  $h(t, \vec{x}, \vec{n}) = -\vec{q}(t, \vec{x}) \cdot \vec{n} = -g_{ab} q^a(t, \vec{x}) n^b$ ,
- c) Un suministro de calor por unidad de masa  $Q(t, \vec{x})$ .

Con estas nuevas variables, consideramos también la energía cinética  $T(t)$  y la energía interna  $U(t)$  para cualquier  $\phi_t(\hat{U})$ ,  $t > 0$  están dadas por

$$T(t) = \int_{\phi_t(\hat{U})} \frac{u^2}{2} dm, \quad U(t) = \int_{\phi_t(\hat{U})} e dm, \quad dm = \rho dV(t), \quad (2.2.7)$$

y en términos de estas variables, ahora tenemos la siguiente definición que expresa el balance de energía total.

**Definición 2** Para un movimiento  $\phi_t$ ,  $t > 0$  el estado del medio definida por  $\rho(t, \vec{x})$ ,  $\vec{u}(t, \vec{x})$ ,  $e(t, \vec{x})$ ,  $h(t, \vec{x}, \vec{n})$ ,  $Q(t, \vec{x})$  obedece el principio de balance de energía siempre que para cada  $\phi_t(\hat{U})$  tengamos la relación:

$$\frac{d}{dt} \int_{\phi_t(\hat{U})} \left( \frac{u^2}{2} + e \right) dm = \int_{\phi_t(\hat{U})} (\vec{u} \cdot \vec{b} + Q) dm + \int_{\partial\phi_t(\hat{U})} (\vec{u} \cdot \vec{t} + h) da. \quad (2.2.8)$$

Esta relación afirma que dentro de cualquier región  $\phi_t(\hat{U})$ , la tasa de cambio de la energía total (= energía cinética total + energía interna total) se debe al trabajo hecho por la fuerza externa  $\vec{b}$  combinada con el trabajo que hizo el vector de estrés  $\vec{t}$  sobre  $\partial\phi_t(\hat{U})$  aumentada por la cantidad de calor que cruza la frontera  $\partial\phi_t(\hat{U})$  ó a la cantidad de calor suministrada a  $\phi_t(\hat{U})$  por un agente externo.

Como en el caso de la ley de balance por el momento lineal, aquí también la ley (2.2.8) da nacimiento a una ley de conservación local cuando la función flujo de calor  $h(t, \vec{x}, \vec{n})$  y el campo de estrés de Cauchy  $\vec{t}(t, \vec{x}, \vec{n})$  están escritos en términos del vector flujo de calor  $\vec{q}(t, \vec{x})$  y el tensor de estrés de Cauchy  $\sigma(t, \vec{x})$ . Bajo estas condiciones y aplicando el teorema de la divergencia a (2.2.8), obtenemos la siguiente ley local

$$\rho \frac{D}{dt} \left( \frac{u^2}{2} + e \right) = \rho(\vec{u} \cdot \vec{b} + Q) + \nabla \cdot (\sigma \cdot \vec{u} - \vec{q}), \quad \nabla \cdot (\sigma \cdot \vec{u}) = \frac{\partial(\sigma^a_b u^b)}{\partial x^a}. \quad (2.2.9)$$

Combinando esta ley local con (2.2.5), obtenemos

$$\rho \frac{De}{dt} = \rho Q - \nabla \cdot \vec{q} + \sigma : \nabla \vec{u}, \quad \sigma : \nabla \vec{u} = \sigma^{ab} u_{a,b}, \quad (2.2.10)$$

que describe la manera en que la energía  $e$  varía mientras es transportada a lo largo de las líneas de flujo del campo de velocidades.

Para extraer información de la estructura de las leyes de balance que hemos derivado, vamos a asumir que para un medio, el tensor de Cauchy  $\sigma(t, \vec{x})$  es espacialmente isotrópico, es decir, tiene la forma particular:

$$\sigma^{ab}(t, \vec{x}) = -P(t, \vec{x})g^{ab}, \quad a, b \in \{1, 2, 3\}. \quad (2.2.11)$$

Para tal medio, la ley de momento lineal (2.2.5) implica que

$$\rho \dot{\vec{u}}(t, \vec{x}) = -\nabla P(t, \vec{x}) + \rho \vec{b}(t, \vec{x}), \quad (2.2.12)$$

que reconocemos como la ecuación de Euler, en donde  $P(t, \vec{x})$  representa la presión.

Para un medio arbitrario, el tensor de estrés de Cauchy  $\sigma(t, \vec{x})$  frecuentemente se descompone de acuerdo a

$$\sigma^{ab} = -Pg^{ab} - \hat{\sigma}^{ab}, \quad \hat{\sigma}^{ab} = P^v g^{ab} + \sigma_{(v)}^{ab}, \quad \sigma_{(v)}^{ab} g_{ab} = 0, \quad (2.2.13)$$

en donde  $P$  es la presión termodinámica,  $P^v$  es la presión viscosa, mientras que la parte sin traza  $\sigma_{(v)}^{ab}$  representa el estrés viscoso<sup>7</sup>. En vista de esta división, la ecuación de evolución de la energía interna  $e$  en (2.2.10), toma la forma equivalente

$$\rho \dot{e} = \rho Q - \nabla \cdot \vec{q} - (P + P^v) \nabla \cdot \vec{u} - \sigma_{(v)}^{ab} u_{(t)ab}, \quad (2.2.14)$$

en donde  $u_{(t)ab}$  representa la parte simétrica sin traza de  $u_{a,b}$  definida a través de la descomposición  $u_{a,b} = \frac{1}{2}(u_{a,b} + u_{b,a}) + \frac{1}{2}(u_{a,b} - u_{b,a}) = u_{(a,b)} + u_{[a,b]}$  tal que

$$u_{(a,b)} = \left( \frac{1}{3} \nabla^c u_c \right) g_{ab} + \frac{1}{2} \left( u_{a,b} + u_{b,a} - \left[ \frac{2}{3} (\nabla^c u_c) g_{ab} \right] \right) = \left( \frac{1}{3} \nabla^c u_c \right) g_{ab} + u_{(t)ab}. \quad (2.2.15)$$

Para un uso posterior, introducimos el volumen específico  $v(t, \vec{x}) = \frac{1}{\rho(t, \vec{x})}$ , el cual satisface como consecuencia de la ecuación de continuidad que

$$\rho \dot{v} \equiv \rho \frac{D}{dt} \left( \frac{1}{\rho} \right) = \rho \left[ -\frac{1}{\rho^2} \frac{D\rho}{dt} \right] = -\frac{1}{\rho} \dot{\rho} = \nabla_a u^a, \quad (2.2.16)$$

una fórmula que será útil más adelante.

Las leyes de balance que hemos discutido arriba, son aplicables para un gran número de medios continuos (clásicos). Pero una revisión crítica de estas leyes, revela que fallan en formar un sistema cerrado de ecuaciones y esta propiedad

<sup>7</sup>Aquí nace un punto bastante sutil: ¿como uno distingue en principio entre la presión termodinámica  $P$ , de la presión  $P^v$  que nace del estrés viscoso? Como veremos más adelante, esta sutileza re-aparece en la descripción de fluidos relativistas y analizaremos este punto con detalle en el capítulo próximo. En breve, mencionamos aquí que la resolución a esta pregunta la ofrece la estructura de la primera ley de la termodinámica. La presión  $P$  esta asociada con el trabajo realizado en un proceso isentrópico.

es un problema que ocupa el estudio de medios continuos. Como es bien conocido, la cerradura se logra mediante la especificación de relaciones constitutivas. A primera instancia, estas relaciones son relaciones funcionales entre variables que describen el medio y su empleo tiene como finalidad cerrar el sistema de ecuaciones dinámicas.

Por ejemplo, por el caso de un fluido viscoso que permite la conducción de calor, las relaciones constitutivas intentan especificar la dependencia funcional del tensor de estrés de Cauchy  $\sigma(t, \vec{x})$ , el vector flujo de calor  $\vec{q}(t, \vec{x})$  y la energía interna  $e(t, \vec{x})$  de entre un conjunto de variables de fluido adecuadas, frecuentemente referidas como variables básicas. Por este ejemplo, el conjunto de variables básicas consiste en la densidad de masa, la velocidad, la temperatura (y tal vez de sus derivadas). La asignación de las relaciones constitutivas que describen a un medio, es un problema bastante importante y delicado. Para proporcionarlas, ciertas reglas se aplican y en esta etapa la entropía y la segunda ley juegan un papel central. A continuación discutiremos la conexión entre las leyes de balance y la termodinámica, en este punto cruzamos la frontera en donde la «hidrodinámica» termina y la termodinámica empieza.

### **2.3. La segunda ley de la termodinámica, el principio de entropía**

Aunque la derivación de las leyes de balance en las secciones previas estuvo libre de cualquier ambigüedad, el asunto se complica considerablemente una vez que entramos en la tarea sutil de asignar entropía a estados arbitrarios de medios continuos. De hecho, es justo afirmar que excepto por estados que describen equilibrio termodinámico, no existe una receta universalmente aceptada para asignar entropía por estados fuera del equilibrio por medios continuos. Como también hemos señalado en el capítulo introductorio de esta tesis, las posibles elecciones de la entropía fuera de equilibrio y la implementación de la segunda ley de la termodinámica serán el tema central de esta tesis.

En las siguientes secciones introduciremos la termodinámica clásica irreversible (TCI), y en esta teoría el postulado de equilibrio termodinámico local determina la entropía por estados fuera del equilibrio, después introducimos la termodinámica irreversible extendida (TIE) y aquí el postulado de Müller determina la entropía por estados cercanos al equilibrio, mientras que en la termodinámica irreversible racional extendida (TIRE), las relaciones constitutivas determinan la entropía por estados afuera del equilibrio.

Por razones de presentación, es más conveniente comenzar discutiendo el problema de como asignar entropía y la manera de implementar la segunda ley dentro del marco de la termodinámica racional (TR) (para una introducción de esta teoría véanse [21, 54, 79, 102]). Esta teoría mantiene a las leyes de balance para medios continuos derivadas previamente, pero introduce dos funciones adicionales:

a) La entropía por unidad de masa  $s(t, \vec{x})$ ,

b) La temperatura local  $T(t, \vec{x})$

Mencionamos aquí que dentro del contexto de (TR), la temperatura local  $T(t, \vec{x})$  es considerada como un elemento absoluto y la teoría implementa la segunda ley de la termodinámica vía la desigualdad de Clausius-Duhem de acuerdo a la definición:

**Definición 3** Para un movimiento  $\phi_t$ ,  $t > 0$ , el estado de un medio continuo descrito por  $\rho(t, \vec{x})$ ,  $e(t, \vec{x})$ ,  $h(t, \vec{x}, \vec{n})$ ,  $Q(t, \vec{x})$ ,  $s(t, \vec{x})$ ,  $T(t, \vec{x})$ , satisface la segunda ley de termodinámica, si la tasa de producción de entropía al interior de cualquier  $\phi_t(\hat{U})$ , i.e.

$$\frac{d}{dt} \int_{\phi_t(\hat{U})} s(\vec{x}, t) dm, \quad (2.3.1)$$

satisface la desigualdad integral de Clausius-Duhem

$$\frac{d}{dt} \int_{\phi_t(\hat{U})} s dm \geq \int_{\phi_t(\hat{U})} \frac{Q}{T} dm + \int_{\partial\phi_t(\hat{U})} \frac{h}{T} da. \quad (2.3.2)$$

Entonces en la termodinámica racional, la tasa de incremento de la entropía en  $\phi_t(\hat{U})$ , es mayor (ó igual) a la entropía generada por el calor suministrado a  $\phi_t(\hat{U})$  y la entropía generada por el flujo de calor a través de la frontera  $\partial\phi_t(\hat{U})$ . Para estados, sujetos a  $Q(t, \vec{x}) = h(t, \vec{x}) = 0$ , la desigualdad implica

$$\frac{d}{dt} \int_{\phi_t(\hat{U})} s(\vec{x}, t) dm = \frac{d}{dt} \int_{\phi_t(\hat{U})} \rho(\vec{x}, t) s(\vec{x}, t) dV \geq 0, \quad (2.3.3)$$

i.e. la entropía no puede disminuir hacia el futuro.

La desigualdad de Clausius-Duhem puede ser expresada en forma local siempre que uno utilice el vector flujo de calor  $\vec{q}(t, \vec{x})$  vía  $h(t, \vec{x}, \vec{n}) = -\vec{q}(t, \vec{x}) \cdot \vec{n} =$

$-g_{ab}q^a(t, \vec{x})n^b$  en donde  $\vec{n}$  representa el vector normal al elemento de superficie  $\partial\phi_t(\hat{U})$  que apunta hacia fuera. En este caso, la desigualdad de Clausius-Duhem (2.3.2) se reduce a la forma

$$\rho \frac{Ds}{dt} \geq \frac{Q\rho}{T} - \nabla \cdot \left( \frac{\vec{q}}{T} \right) \iff \frac{\partial(\rho s)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho s \vec{u} + \frac{\vec{q}}{T}) \geq \frac{Q\rho}{T}, \quad (2.3.4)$$

que es la formulación local de la segunda ley dentro de esta teoría. Mencionamos aquí que en el contexto de la termodinámica racional, la entropía  $s$  es considerada como una función constitutiva i.e.  $s$  depende de un conjunto de variables básicas<sup>8</sup>.

Coleman y Noll [20] en la década de 1960, fueron los primeros en sugerir una versión limitada de lo que hoy en día es referido como el principio de entropía. Ellos sugirieron que la dependencia de la densidad de entropía  $s$  sobre un conjunto de variables básicas debe ser asignada de tal manera que la segunda ley de la termodinámica (2.3.4), debe satisfacerse a lo largo de cualquier proceso termodinámico arbitrario<sup>9</sup>. Müller [75, 76] en los años 1970, refinó el enfoque del principio de entropía formulado por Coleman-Noll y este refinamiento sentó las bases de la versión moderna del principio de entropía. Específicamente, Müller postula que para cualquier medio, existe una cantidad escalar aditiva, la densidad de entropía  $s$  y un vector de flujo de entropía  $\vec{J}$ , tal que en la ausencia de cualquier fuente de calor  $Q(t, \vec{x})$ , estos  $s$  y  $\vec{J}$ , satisfacen la desigualdad de entropía

$$\frac{\partial(\rho s)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho s \vec{u} + \vec{J}) \geq 0. \quad (2.3.5)$$

Más aún, Müller postuló que  $s$  y  $\vec{J}$  son considerados como funciones constitutivas y esto introduce un grado adicional de flexibilidad en la formulación de la segunda ley<sup>10</sup>. En esta versión moderna, el principio de entropía afirma que la dependencia de  $s$  y  $\vec{J}$  (o más generalmente cualquier función constitutiva) sobre las variables básicas deben de elegirse de tal manera que cada solución a las leyes de balance satisfaga la desigualdad de entropía escrita en (2.3.5).

<sup>8</sup>Como hemos visto en la introducción, el flujo de entropía  $S^\alpha$  no puede relacionarse de una manera obvia con las propiedades del medio. Aquí en TR, la teoría solo asume la existencia de  $s$ , pero no nos dice nada sobre la relación que guarda tal  $s$  con el medio bajo consideración.

<sup>9</sup>En el lenguaje de los termodinámicos, un proceso termodinámico es cualquier solución a las ecuaciones de balance.

<sup>10</sup>Vale la pena notar que la desigualdad de entropía en (2.3.5), no hace ninguna referencia a la noción de temperatura. Como es bien conocido, por estados fuera del equilibrio, la noción de temperatura es un concepto sutil.

Hoy en día, la desigualdad de entropía y el principio de entropía refinados por Müller se encuentran en el corazón de la descripción de la termodinámica de medios continuos clásicos (y como veremos más adelante permanece así en la teoría de medios continuos relativistas). Sin embargo, implementar el principio de entropía es un asunto delicado.

*¿Existe un procedimiento sistemático para escoger la forma correcta de las relaciones constitutivas de modo que se mantenga válido el principio de entropía?*

Desde finales de 1960 hasta hoy en día, se han inventado varios procedimientos para implementar el principio de entropía y aquí mencionamos algunos: El procedimiento de Coleman-Noll [20, 22], el procedimiento de Müller [75, 76], el procedimiento de Liu [64] y el procedimiento desarrollado por Boillat-Ruggeri y colaboradores véase [8–10, 91, 92]. En esta tesis, aplicamos el principio de entropía apelando al procedimiento de Liu, modificado por Ruggeri y colaboradores. Con el fin de facilitar las cosas, daremos un apéndice en el capítulo 5, en el que describimos las características básicas del procedimiento de Boillat-Ruggeri.

Terminamos esta sección, mencionando que la desigualdad de entropía (2.3.5), puede ser escrita en la forma equivalente

$$\rho \dot{s} + \nabla \cdot \vec{J} = \sigma, \quad (2.3.6)$$

en donde el escalar  $\sigma$  se interpreta como la producción de entropía por unidad de volumen por unidad de tiempo y la restricción  $\sigma \geq 0$  implementa la segunda ley de la termodinámica. La desigualdad de entropía en la forma (2.3.6) será usada más adelante.

### 2.3.1. Termodinámica clásica irreversible (TCI)

En esta sección introducimos la primera teoría de termodinámica irreversible que describe medios continuos clásicos, y esta teoría sugiere una manera específica de asignar entropía por estados fuera del equilibrio. La teoría fue iniciada hace varios años atrás por Onsager [80, 81] y Eckart [25, 26] y es referida hoy en día como termodinámica clásica irreversible (TCI). Esta teoría mantiene las leyes de balance para la masa, momento lineal y energía total introducidas anteriormente pero la manera en que se asigna entropía por estados fuera de equilibrio viene a través del postulado de equilibrio termodinámico local apropiadamente extendido. Recordamos que un medio se encuentra en un estado de equilibrio local, si para cualquier punto  $(t, \vec{x})$  al interior del medio, podemos introducir una celda lo

suficientemente pequeña tal que la celda por sí sola la podamos considerar como un subsistema termodinámico que satisface la siguiente propiedad:

*Dentro de esta celda, las variables termodinámicas obedecen las mismas relaciones termodinámicas como si el subsistema estuviera en un estado de equilibrio termodinámico global.*

En el capítulo introductorio de esta tesis, hemos apelando a este principio para formular la primera ley de la termodinámica por medios relativistas. Pero como hemos mencionado previamente, diferenciamos el papel que tiene el postulado de equilibrio local en la formulación de la primera ley de la termodinámica en la sección 1.1 y su papel en la termodinámica clásica irreversible (TCI). En el contexto de la TCI el postulado hace afirmaciones sobre la naturaleza de la entropía física del estado. Específicamente, afirma que la dependencia de la entropía física sobre las variables termodinámicas esta fijada y esta forma funcional es la misma que encontramos por estados en equilibrio termodinámico global. Por razones de ilustración, apelamos a este principio para estudiar brevemente estados de un fluido simple viscoso, conductor de calor dentro del marco de TCI.

Sea entonces un fluido simple que ocupa una región  $U \subset \mathbb{R}^3$  y sea que el fluido se encuentra en un estado en donde el equilibrio local es válido. Para tal estado y para cualquier  $(t, \vec{x})$  al interior del fluido, la densidad de entropía  $s(t, \vec{x})$  depende únicamente de la energía interna por unidad de masa  $e(t, \vec{x})$  y del volumen específico  $v(t, \vec{x}) = \frac{1}{\rho(t, \vec{x})}$ , y más aún  $s(t, \vec{x}), e(t, \vec{x}), v(t, \vec{x})$  satisfacen

$$T(t, \vec{x}) ds(t, \vec{x}) = de(t, \vec{x}) + P(t, \vec{x}) d\left(\frac{1}{\rho(t, \vec{x})}\right), \quad (2.3.7)$$

que es la relación de Gibbs en equilibrio (con la gran diferencia de que ahora las variables termodinámicas tienen dependencia temporal y espacial i.e. dependen de  $(t, \vec{x})$ ). Aceptando esta relación, se sigue que la evolución de  $s(t, \vec{x})$  a lo largo de las líneas de flujo obedece

$$T \frac{Ds}{dt} = \frac{De}{dt} + P \frac{D}{dt} \left(\frac{1}{\rho}\right), \quad \frac{D}{dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \vec{u}(t, \vec{x}) \cdot \nabla, \quad (2.3.8)$$

mientras que por dos elementos de fluido cercanos en  $(t, \vec{x})$  y  $(t, \vec{x} + d\vec{x})$ , la entropía  $s(t, \vec{x})$  satisface

$$T \nabla s(t, \vec{x}) = \nabla e(t, \vec{x}) + P \nabla \left(\frac{1}{\rho(t, \vec{x})}\right), \quad (2.3.9)$$

en donde  $\nabla$  representa el operador gradiente sobre el espacio Euclideo  $(\mathbb{R}^3, \langle | \rangle)$ .

Escribimos (2.3.8) en la forma

$$\rho \dot{s} = \frac{\rho}{T} \dot{e} + \frac{P\rho}{T} \dot{v}, \quad \dot{s} = \frac{\partial s}{\partial t} + u^a \nabla_a s, \quad v = \frac{1}{\rho}, \quad (2.3.10)$$

y usando (2.2.14 - 2.2.16), obtenemos

$$\rho \dot{s} = \frac{\rho}{T} Q - \nabla \cdot \left( \frac{\vec{q}}{T} \right) - \frac{\vec{q} \cdot \nabla T}{T^2} - \frac{P^v}{T} \nabla_a u^a - \frac{1}{T} \sigma_{(v)}^{ij} u_{(t)ij}, \quad (2.3.11)$$

observando el lado derecho de (2.3.11), vemos que puede ser escrito en la forma:

$$\rho \dot{s} + \nabla \cdot \vec{J}_E = \sigma, \quad (2.3.12)$$

$$\vec{J}_E = \frac{\vec{q}}{T}, \quad \sigma = \frac{\rho}{T} Q - \frac{\vec{q} \cdot \nabla T}{T^2} - \frac{P^v}{T} \nabla_a u^a - \frac{1}{T} \sigma_{(v)}^{ij} u_{ij}^{(t)}, \quad (2.3.13)$$

en donde interpretamos a  $\vec{J}_E$  como el vector flujo de entropía, mientras que  $\sigma$  es la producción de entropía por unidad de volumen por unidad de tiempo<sup>11</sup>.

Cuando  $Q = 0$ , entonces (2.3.12, 2.3.13) muestran que la evolución temporal de los estados de los fluidos caracterizados por  $\vec{q} = P^v = \sigma_{(v)}^{ij} = 0$  no generan entropía. Para tales estados, las leyes de balance muestran que estamos tratando con hidrodinámica euleriana y estos estados pueden ser vistos como estados de equilibrio dentro del espacio de todos los estados que describen fluidos viscosos conductores de calor.

Sin embargo, para estados caracterizados por un flujo de calor y estrés de Cauchy no nulo, la fórmula (2.3.13) muestra que su evolución genera entropía. Una mirada a (2.3.12), muestra que la segunda ley se satisface siempre que  $\sigma$  en (2.3.13) sea semi-positiva definitiva<sup>12</sup>. Si introducimos  $\vec{x}$  y  $\vec{\eta}$  por la colección de flujos y fuerzas respectivamente, es decir

$$\vec{x} \equiv (\vec{q}, P^v, \sigma_{(v)}^{ij}), \quad \vec{\eta} \equiv \left( -\frac{\nabla T}{T^2}, \quad -\frac{\nabla_a u^a}{T}, \quad -\frac{u_{(t)ij}}{T} \right) \quad (2.3.14)$$

<sup>11</sup>Es común referirse a  $(\vec{q}, P^v, \sigma_{(v)}^{ij})$  en (2.3.13), como los flujos disipativos mientras que a los términos correspondientes

$$\frac{\nabla T}{T^2}, \quad \frac{\nabla_a u^a}{T} \quad \text{y} \quad \frac{u_{(t)ij}}{T}$$

se les refiere como fuerzas termodinámicas.

<sup>12</sup>Vemos a (2.3.15 - 2.3.17) como relaciones constitutivas, las cuales fijan al flujo de calor y al estrés de Cauchy. En este caso las variables básicas son  $T$ ,  $u^a$  y sus gradientes.

entonces  $\sigma$  en (2.3.13) puede ser escrita como  $\sigma = \vec{x} \cdot \vec{\eta}$  la cual es una forma muy suggestiva. El requisito del carácter semi-positivo de  $\sigma$ , puede ser entendido desde un número de maneras distintas. En general los flujos  $\vec{x}$  pueden depender arbitrariamente de las fuerzas  $\vec{\eta}$  y variables que describen el flujo. Pero hechos observacionales y estudios en física estadística confirman que una relación lineal entre los flujos y las fuerzas que describen el flujo, es adecuada para la descripción de una gran clase de fenómenos físicos. Restringiéndonos de aquí en adelante en esta tesis a la validez de esta relación lineal, entonces el carácter semi-positivo de  $\sigma$  es válido cuando las siguientes relaciones lineales entre flujos y las fuerzas se cumplen<sup>13</sup> :

$$\vec{q} = -\mu_1 \frac{\nabla T}{T^2}, \quad (2.3.15)$$

$$P^v = -\mu_0 \frac{\nabla_a u^a}{T}, \quad (2.3.16)$$

$$\sigma_{(v)}^{ab} = -\mu_2 \frac{u_{(t)ab}}{T}, \quad (2.3.17)$$

en donde los coeficientes  $\mu_1, \mu_0, \mu_2$  son en general dependientes de la temperatura y estan sujetos a las restricciones:  $\mu_1 \geq 0$ ,  $\mu_0 \geq 0$  y  $\mu_2 \geq 0$ . Introduciendo los coeficientes de conductividad térmica  $k$ , viscosidad volumétrica (bulk viscosity)  $\zeta$  y viscosidad de cizallamiento (shear viscosity)  $\eta$  vía

$$\mu_1 = kT^2, \quad \mu_0 = \zeta T, \quad \mu_2 = 2\eta T, \quad (2.3.18)$$

entonces, (2.3.15 - 2.3.17) toman la forma

$$\vec{q} = -k\nabla T, \quad P^v = -\zeta\nabla_a u^a, \quad \sigma_{(v)}^{ab} = -2\eta u_{(t)ab}, \quad (2.3.19)$$

que son las formas estándar de las relaciones constitutivas de Fourier y Navier-Stokes conocidas tiempo atrás.

<sup>13</sup>Mencionamos en este punto que relaciones no lineales entre los flujos y las fuerzas nos conducen a relaciones constitutivas no lineales. Uno puede lograr que  $\sigma$  sea semi-positivo definido y relaciones constitutivas no lineales tomando  $\vec{\eta} = M\vec{x}$  con  $M$  una matriz positiva. Aunque este análisis es muy útil, en esta tesis no entramos en esta dirección. Para una introducción y referencias adicionales al respecto de este tema recomendamos a lector [54] y referencias citadas en este libro.

La teoría de Fourier-Navier-Stokes<sup>14</sup> de un fluido viscoso, conductor de calor es la teoría estándar para describir fluidos de laboratorio y astrofísicos<sup>15</sup>. Como una teoría continua, es confiable cuando nos restringimos a escalas de longitud mayores que ciertas escalas microscópicas (por ejemplo, el camino libre medio para el caso de un gas). Por otro lado, se conocía desde hacía mucho tiempo atrás, que como consecuencia de la estructura de las relaciones constitutivas en (2.3.19), el sistema de Fourier-Navier-Stokes predice que las señales térmicas y viscosas se propagan con velocidad infinita y esta propiedad insatisfactoria motiva la búsqueda de teorías alternativas que describen la termodinámica de un fluido viscoso, conductor de calor.

Un gran número de teorías alternativas se han presentado después de que Müller en 1967 [74] introdujera una nueva hipótesis sobre la entropía de estados afuera de equilibrio que a continuación discutimos.

### 2.3.2. Termodinámica irreversible extendida (TIE)

Müller en 1967 [74], sugirió que para un fluido simple, viscoso, conductor de calor, la entropía por estados fuera de equilibrio difiere drásticamente de lo predicho por el postulado de equilibrio local en el contexto de (TCI). Para estados cercanos al equilibrio, Müller [74] postuló que la entropía recibe contribuciones cuadráticas de los flujos  $(\vec{q}, P^v, \sigma_{(v)}^{ab})$  que aparecen en las leyes de balance. Específicamente, él asignó a tales estados una entropía generalizada  $s_{ge}(t, \vec{x})$  que tiene la forma

$$s_{ge}(\vec{x}, t) = s_{lep}(e, v) + a\vec{q} \cdot \vec{q} + b(P^v)^2 + c\sigma_{(v)}^{ab}\sigma_{(v)ab}, \quad (2.3.20)$$

en donde  $s_{lep}(t, \vec{x})$  es la densidad de entropía asignada por el postulado de equilibrio local y  $(a, b, c)$  son funciones suaves de  $(e, v)$ . Notablemente, esta hipótesis da una teoría que remueve los problemas que el sistema de Fourier-Navier-Stokes posee. Apelando a (2.3.20), un nuevo conjunto de relaciones constitutivas se derivan con una estructura diferente de la predicha por (TCI). Estas nuevas relaciones constitutivas, son el elemento crucial para obtener un conjunto de ecuaciones dinámicas para el sistema Fourier-Navier-Stokes que predicen propagación finita

<sup>14</sup>Aclaremos aquí que por el sistema (ó teoría de) Fourier-Navier-Stokes entendemos al sistema de leyes de balance por un fluido viscoso que conduce calor, aumentado con la entropía que viene apelando al postulado de equilibrio local en el contexto de (TCI).

<sup>15</sup>Aunque en esta sección, aplicamos los principios de (TCI) por estados de un fluido viscoso, conductor de calor, sin embargo, (TCI) puede ser usada para describir estados para una mezcla de fluidos ó estados de otros sistemas físicos (para una introducción véanse las referencias [24, 38, 39, 54, 72]).

para el calor y las ondas de cizallamiento (shear waves).

Debido a la conexión entre el postulado de Müller con el desarrollo de la termodinámica transitoria de fluidos relativistas, abajo, tratamos brevemente estados para un fluido simple, viscoso, conductor de calor bajo la hipótesis de Müller. En este punto tomamos la oportunidad de introducir una nueva teoría referida como termodinámica irreversible extendida la cual denotamos de aquí en adelante como (TIE)<sup>16</sup>. De acuerdo a esta teoría, para cualquier estado arbitrario del fluido, y de acuerdo al postulado de Müller, uno asigna una entropía generalizada  $s_{ge}(t, \vec{x})$  que es una función suave de  $(e, v, \vec{q}, P^v, \sigma_{(v)}^{ab})$  i.e.  $s_{ge} = s_{ge}(e, v, \vec{q}, P^v, \sigma_{(v)}^{ab})$ . Para estados cercanos al equilibrio, una expansión en serie de  $s_{ge}(e, v, \vec{q}, P^v, \sigma_{(v)}^{ab})$  alrededor de  $s_{ge}(e, v, 0, 0, 0)$  da (2.3.20) y la teoría resultante condujo a las conclusiones de Müller, mientras que por estados lejos del equilibrio esta  $s_{ge}(e, v, \vec{q}, P^v, \sigma_{(v)}^{ab})$  puede ser expandida en serie alrededor de un estado afuera de equilibrio de fondo.

En esta sección usamos (TIE), para describir estados de un fluido conductor viscoso y por esto sea  $(e, v, \vec{q}, P^v, \sigma_{(v)}^{ab})$  un estado de fondo y sea  $e + de, v + dv, \vec{q} + d\vec{q}, P^v + dP^v, \sigma_{(v)}^{ab} + d\sigma_{(v)}^{ab}$  un «estado cercano no equilibrado». La diferencia entre las entropías generalizadas de estos dos estados al menos formalmente, puede ser escrita de la forma

$$ds = \frac{\partial s}{\partial e} de + \frac{\partial s}{\partial v} dv + \frac{\partial s}{\partial q^a} dq^a + \frac{\partial s}{\partial P^v} dP^v + \frac{\partial s}{\partial \sigma_{(v)}^{ab}} d\sigma_{(v)}^{ab}, \quad a, b \in \{1, 2, 3\}, \quad (2.3.21)$$

en donde por conveniencia de notación, escribiremos  $s$  en vez de  $s_{ge}(e, v, \vec{q}, P^v, \sigma_{(v)}^{ab})$ , suma sobre los índices  $(a, b)$  se entiende y las derivadas parciales de  $s$  con respecto a  $e$  se toman manteniendo  $(v, \vec{q}, P^v, \sigma_{(v)}^{\alpha\beta})$  fijas (restricciones similares ocurren para las otras derivadas). La relación (2.3.21) dentro de la (TIE) se interpreta como una «relación de Gibbs generalizada» e introduce formalmente una temperatura absoluta por estados afuera del equilibrio  $\Theta$  vía

$$\Theta^{-1}(e, v, \vec{q}, P^v, \sigma_{(v)}^{ij}) = \left( \frac{\partial s}{\partial e} \right), \quad (2.3.22)$$

<sup>16</sup>Recordamos nuevamente al lector, que en esta tesis, el término (TIE) representa a la teoría que asigna una entropía a estados fuera del equilibrio que dependen explícitamente de los flujos que aparecen en las leyes de balance. La evolución dinámica de esta entropía se obtiene mediante la imposición de la segunda ley de la termodinámica combinada con una versión extendida de la relación de Gibbs y esta nueva teoría (TIE), es discutida por ejemplo en [53, 54]. Sin embargo, frecuentemente en la literatura, (TIE) representan teorías fuera del equilibrio, que de una u otra forma están basadas en la noción de una entropía extendida cuya forma esta motivada en gran parte por la idea original de Müller. Para una descripción de tales teorías véanse [6, 19].

y también por los mismos estados una presión  $\pi$  vía

$$\frac{1}{\Theta}\pi(e, v, \vec{q}, P^v, \sigma_{(v)}^{ab}) = \left(\frac{\partial s}{\partial v}\right). \quad (2.3.23)$$

Las otras derivadas parciales restantes en (2.3.21), se expresan por

$$\frac{\partial s}{\partial q^a} = -va_{10}q^a, \quad a \in \{1, 2, 3\}, \quad (2.3.24)$$

$$\frac{\partial s}{\partial P^v} = -va_{00}P^v, \quad (2.3.25)$$

$$\frac{\partial s}{\partial \sigma_{(u)}^{ab}} = -va_{21}\sigma_{(v)}^{ab}, \quad a, b \in \{1, 2, 3\}, \quad (2.3.26)$$

en donde las funciones escalares ( $a_{10}, a_{00}, a_{21}$ ) dependen en general de  $(e, v, \vec{q}, P^v, \sigma_{(v)}^{ab})$ . Con esta notación, la relación de Gibbs generalizada (2.3.8) toma la forma

$$ds = \frac{1}{\Theta}de + \frac{\pi}{\Theta}dv - va_{00}P^v dP^v - va_{10}\vec{q} \cdot d\vec{q} - va_{21}\sigma_{(v)}^{ab}d\sigma_{(v)}^{ab}, \quad (2.3.27)$$

lo cual implica que la evolución de la entropía generalizada a lo largo de las líneas de flujo esta gobernada por

$$\dot{s} = \frac{1}{\Theta}\dot{e} + \frac{\pi}{\Theta}\dot{v} - va_{00}P^v\dot{P}^v - va_{10}\vec{q} \cdot \dot{\vec{q}} - va_{21}\sigma_{(v)}^{ab}\dot{\sigma}_{(v)}^{ab}. \quad (2.3.28)$$

Multiplicando esta ecuación por  $\rho$  y usando (2.2.14 - 2.2.16) bajo la suposición que  $Q = 0$ , se encuentra

$$\rho\dot{s} = -\frac{1}{\Theta}\nabla_a q^a - \frac{P^v}{\Theta}\nabla_a u^a - \frac{1}{\Theta}\sigma^{ab}u_{(t)ab} - a_{00}P^v\dot{P}^v - a_{10}\vec{q} \cdot \dot{\vec{q}} - a_{21}\sigma_{(v)}^{ab}\dot{\sigma}_{(v)}^{ab}, \quad (2.3.29)$$

en donde  $u_{(t)ab}$  representa la parte simétrica sin traza de  $u_{a,b}$  y como antes  $\sigma_{(v)}^{ab}$  es la parte simétrica sin traza del tensor de estrés  $\sigma^{ab}$ . Ignorando por el momento los problemas conceptuales relacionados con el significado físico de la temperatura absoluta  $\Theta$ , la presión termodinámica  $\pi$ , así como también las derivadas parciales restantes en la relación de Gibbs generalizada, la ecuación de evolución para  $\dot{s}$  en (2.3.29) puede ser escrita en la forma  $\rho\dot{s} + \nabla \cdot \vec{J} = \sigma$ , en donde la restricción  $\sigma \geq 0$  impone la validez de la segunda ley. El flujo de entropía  $\vec{J}$  en esta teoría, es considerado como una función constitutiva y para estados isotrópicos,  $\vec{J}$  tiene la estructura (véase [53, 54])

$$\vec{J} = \frac{\vec{q}}{\Theta} + \beta' P^v \vec{q} + \beta'' \sigma_{(v)} \cdot \vec{q}, \quad \sigma_{(v)} \cdot \vec{q} = \sigma_{(v)}^{ab} q_b, \quad (2.3.30)$$

en donde  $\beta'$  y  $\beta''$  son coeficientes no especificados que dependen de  $e$  y  $v$ . Por esta elección de  $\vec{J}$ , la producción de entropía  $\sigma$  toma la forma

$$\sigma = \vec{q} \cdot \vec{X}_1 + P^v X_0 + \sigma_{(v)}^{ab} X_{(2)ab}, \quad (2.3.31)$$

con

$$\vec{X}_1 = \nabla \Theta^{-1} + \nabla_a \cdot (\beta'' \sigma_{(v)}^{ab}) + \nabla(\beta' P^v) - a_{10} \dot{\vec{q}}, \quad (2.3.32)$$

$$X_0 = -\Theta^{-1} \nabla_i u^i - a_{00} \dot{P}^v + \beta' \nabla_a q^a, \quad (2.3.33)$$

$$X_{(2)ab} = -\Theta^{-1} u_{(t)ab} - a_{21} \dot{\sigma}_{(v)ab} + \beta'' (\partial_a q_b)_{st}, \quad (2.3.34)$$

en donde  $(\partial_a q_b)_{st}$  representa la parte simétrica sin traza del tensor  $\partial_b q_a$ . Se sigue de (2.3.31), que la segunda ley se cumple (i.e.  $\sigma$  es semi-positiva definitiva) siempre que

$$\vec{X}_1 = \mu_1 \vec{q}, \quad X_0 = \mu_0 P^v, \quad X_{(2)ab} = \mu_2 \sigma_{(v)ab}, \quad (2.3.35)$$

en donde  $\mu_1 \geq 0, \mu_0 \geq 0, \mu_2 \geq 0$ , son nuevos coeficientes fenomenológicos que pueden depender de  $(e, v)$ . Combinando (2.3.35) con (2.3.32-2.3.34), uno obtiene un conjunto de relaciones constitutivas para esta teoría que son estructuralmente diferentes de aquellas construidas dentro del marco de (TCI) (comparar (2.3.35) con (2.3.19)).

Para comprender mejor estas relaciones, en primera instancia se desprecian en (2.3.35) términos cuadráticos en los flujos y productos de flujos así como también gradientes temporales de  $e$  y  $v$ . Bajo estas simplificaciones, (2.3.35) combinado con (2.3.31-2.3.33) da

$$\nabla \Theta^{-1} + \beta'' \nabla_a \cdot (\sigma_{(v)}^{ab}) + \beta' \nabla(P^v) - a_{10} \dot{\vec{q}} = \mu_1 \vec{q}, \quad (2.3.36)$$

$$-\Theta^{-1} \nabla_\alpha u^\alpha - a_{00} \dot{P}^v + \beta' \nabla_\alpha q^\alpha = \mu_0 P^v, \quad (2.3.37)$$

$$-\Theta^{-1} u_{(t)ab} - a_{21} \dot{\sigma}_{(v)ab} + \beta'' (\partial_a q_b)_{st} = \mu_2 \sigma_{(v)ab}. \quad (2.3.38)$$

Para estados estacionarios y espacialmente homogéneos, los gradientes espaciales y temporales de los flujos son cero y por lo tanto

$$\mu_1 \vec{q} = \nabla \Theta^{-1}, \quad \mu_0 P^v = -\Theta^{-1} \nabla_a u^a, \quad \mu_2 \sigma_{(v)ab} = -\Theta^{-1} u_{(t)ab}. \quad (2.3.39)$$

Al comparar estas relaciones con las fórmulas estándares de Navier-Stokes en (2.3.19), se fijan los parámetros  $\mu_0, \mu_1, \mu_2$  a los valores

$$\mu_1 = (kT)^{-1}, \quad \mu_0 = (\zeta T)^{-1}, \quad \mu_2 = (2\eta T)^{-1}, \quad (2.3.40)$$

en donde  $(k, \zeta, \eta)$  representan los coeficientes de conductividad térmica, viscosidad de volumen (bulk viscosity) y viscosidad de cizallamiento (shear viscosity) e identificamos a  $\Theta$  con la temperatura en equilibrio local  $T$ . Dejando a un lado los detalles e introduciendo tiempos de relajación  $(\tau_0, \tau_1, \tau_2)$  vía

$$a_{10} = \tau_1 (\kappa T^2)^{-1}, \quad (2.3.41)$$

$$a_{00} = \tau_0 (\zeta T)^{-1}, \quad (2.3.42)$$

$$a_{21} = \tau_2 (2\eta T)^{-1}, \quad (2.3.43)$$

las ecuaciones de evolución linealizadas (2.3.36-2.3.38) toman la forma

$$\tau_1 \dot{\vec{q}} = -(\vec{q} + \kappa \nabla T) + \beta'' \kappa T^2 \nabla \cdot \sigma_{(v)ab} + \beta' \kappa T^2 \nabla P^v, \quad (2.3.44)$$

$$\tau_0 \dot{P}^v = -(P^v + \zeta \nabla \cdot \vec{u}) + \beta' \zeta T \nabla \cdot \vec{q}, \quad (2.3.45)$$

$$\tau_2 \dot{\sigma}_{(v)ab} = -(\sigma_{(v)ab} + 2\eta u_{(t)ab}) + 2\beta'' \eta T (\nabla \vec{q})_{st}, \quad (2.3.46)$$

y estas ecuaciones en el límite en donde  $\beta'$  y  $\beta''$  se anulan, se reduce a las ecuaciones de Maxwell-Cattaneo (MC) (para una introducción y discusión de las ecuaciones de (MC) véase [17, 18, 54])

$$\tau_1 \dot{\vec{q}} + \vec{q} = -\kappa \nabla T, \quad (2.3.47)$$

$$\tau_0 \dot{P}^v + P^v = -\zeta \nabla \cdot \vec{u}, \quad (2.3.48)$$

$$\tau_2 \dot{\sigma}_{(t)ab} + \sigma_{(t)ab} = -2\eta u_{(t)ab}. \quad (2.3.49)$$

Las ecuaciones de evolución temporales para los flujos  $(\vec{q}, P^v, \sigma_{(v)}^{ab})$  mostrados en (2.3.44-2.3.46) son una de las implicaciones de (TIE) cuando esta teoría es aplicada a estados espacialmente homogéneos. Estas ecuaciones de evolución combinada con las leyes de balance da un sistema cerrado de ecuaciones que son muy diferentes que las predichas por (TCI).

Uno de los problemas abiertos en (TIE) es si o no, esta teoría predice propagación finita para las perturbaciones de calor y viscosidad alrededor de una solución de fondo. De acuerdo a la referencia [54] pág. 85, parece que esta teoría pasa este requisito sujeta a que la entropía generalizada  $s_{ge} = s_{ge}(e, v, \vec{q}, P^v, \sigma_{(v)}^{ab})$  sea una función cóncava de sus argumentos, es decir, es una función que tiene la propiedad de que la segunda variación  $\delta^2 s_{ge}$  de  $s_{ge}$  evaluada sobre el estado de fondo es negativo definitivo. Más aún, se enuncia en [54], que cuando la entropía generalizada  $s_{ge}$  sea una función cóncava de sus argumentos, entonces esta propiedad de  $s_{ge}$  es equivalente a la naturaleza simétrica-hiperbólica de las ecuaciones dinámicas.

### 2.3.3. Termodinámica irreversible racional extendida (TIRE), una introducción breve

La hipótesis original de Müller [74], la cual proporcionaba la noción de entropía generalizada discutida al comienzo de la sección previa, así como también muchas de las teorías que surgen de esta idea, han sido puestas bajo escrutinio teórico y experimental. Estos estudios muestran que una comparación entre las predicciones de estas teorías extendidas con el sistema de Fourier-Navier-Stokes revelan signos de preocupación. En [4, 69], la estructura de ondas de choques bajo la idea original de Müller fué investigada y comparada con la estructura predicha por la teoría de Fourier-Navier-Stokes. Se encontró que la estructura regular de choques existe únicamente para números de Mach lo suficientemente pequeños y esta predicción condujo a cuestionar el concepto de entropía extendida. Esta crisis, condujo a Liu, Müller y Ruggeri a desarrollar una nueva teoría que trata con fluidos clásicos, referida como Termodinámica Irreversible Racional Extendida abreviada como (TIRE).

En breve, esta teoría usa a los momentos de la ecuación de Boltzmann no relativista para un gas monoatómico clásico truncados en algún número entero  $N$ . Usando estos momentos y empleando la función de distribución de Grad para los 13-momentos, Müller y Liu en [65] derivaron ecuaciones para el flujo de calor  $q^i$  y las componentes del tensor de estrés de Cauchy  $\sigma^{ij}$  para un gas monoatómico diluido clásico. Notaron que estas ecuaciones toman la forma de las leyes de balance

i.e. ecuaciones de la forma

$$\partial_\alpha \vec{F}^\alpha(\vec{u}) = \vec{f}(\vec{u}), \quad \alpha \in \{0, 1, 2, 3\}, \quad (2.3.50)$$

en donde

$$\begin{aligned} \vec{F}^0 &= (F_1^0, F_2^0, \dots, F_n^0)^T, \quad \vec{F}^1 = (F_1^1, F_2^1, \dots, F_1^0)^T, \text{ etc,} \\ \vec{u}(t, \vec{x}) &= (u_1(t, \vec{x}), u_2(t, \vec{x}), \dots, u_n(t, \vec{x}))^T \end{aligned} \quad (2.3.51)$$

y T quiere decir transpuesta (para más detalles sobre el sistema (2.3.50) véase el apéndice al final del capítulo 5).

Los resultados de Müller y Liu en [65] actuarán como estímulo para el desarrollo de la nueva teoría que referimos como (TIRE). Dentro de esta teoría, los momentos de la ecuación de Boltzmann son tratados como ecuaciones fenomenológicas que describen a fluidos viscosos, conductores de calor cuyas ecuaciones dinámicas satisfacen ecuaciones análogas a (2.3.50). Esta es la hipótesis central que subyace a (TIRE) y a primera vista, parece que esta teoría trata con gases diluidos. Sin embargo, este no es el caso. Se debe tener en mente que el problema de cierre de los  $N$  momentos dentro de (TIRE) involucra el principio de entropía y otros métodos de la mecánica de medios continuos. En particular, la segunda ley de la termodinámica se incorpora como una nueva ecuación la cual junto con las leyes de balance (2.3.50) conducen a un sistema simétrico-hiperbólico (para más detalles sobre el nacimiento de este sistema, véase el apéndice del capítulo 5. En la sesión próxima, discutimos algunas implicaciones físicas de este clase de sistemas.). La naturaleza simétrico-hiperbólica de las ecuaciones dinámicas dentro de (TIRE) se debe comparar con la naturaleza parabólica de las ecuaciones dinámicas que caracterizan por ejemplo al sistema de Fourier-Navier-Stokes.

En resumen, la idea original de Müller de una entropía extendida eventualmente actuó como un vehículo en donde los sistemas simétricos hiperbólicos entraron en la termodinámica de medios continuos. El estado actual de (TIRE), esta bien ilustrado tomando una frase<sup>17</sup> de la sección introductoria en [77]

<sup>17</sup>Hay un comentario al respecto del título del libro [77]. El término termodinámica racional no debe ser confundido con la teoría de termodinámica racional (TR) introducida en [21, 79, 102]. Los autores en [77], explican el título de su libro en la sección introductoria como sigue: «Rational Extended Thermodynamics. The literature is full of papers referring to extended thermodynamics which, however, are devoid of rational methodology and mathematical cohesion. The epithet rational in the present title is chosen so as to emphasize the systematic procedure which the book espouses, a procedure typical for a deductive science».

*... la estructura de ondas de choque calculadas en termodinámica extendida... es peor que la estructura de ondas de choque en la termodinámica ordinaria; y de nueva cuenta: muchos momentos son necesarios para acomodar las cosas... Cuando suficientes momentos son utilizados para describir el estado, TIRE conduce a un acuerdo perfecto entre teoría y experimento.*

Terminamos este capítulo indicando al lector que el desarrollo de (TIRE), puede verse como el más reciente avance en el desarrollo de teorías irreversibles de medios continuos clásicos. La característica central de esta nueva etapa cae en la naturaleza de las ecuaciones dinámicas. La nueva tendencia por parte de los termodinámicos, es la realización que sistemas simétricos-hiperbólicos deben tener una conexión profunda con la termodinámica irreversible de medios continuos. Como veremos en los próximos capítulos, esta tendencia se mantiene a nivel relativista.

# 3 La teoría transitoria de Israel-Stewart

## 3.1. Medios continuos en espacios-tiempos arbitrarios

Como hemos visto en el capítulo anterior, la termodinámica irreversible de medios continuos clásicos tomó rumbo con dirección hacia donde la dinámica y termodinámica de medios continuos clásicos están descritos por sistemas de ecuaciones que forman sistemas de ecuaciones simétricos - hiperbólicos. En este capítulo, veremos que esta tendencia se retoma pero ahora para medios continuos relativistas. Para ver como nació esta nueva tendencia, damos una breve introducción de algunos aspectos termodinámicos de medios continuos relativistas que se propagan en un espacio-tiempo  $(M, g)$  suave arbitrario.

La termodinámica de medios continuos relativistas ha sido tema de muchas investigaciones [14–16, 27, 55, 56, 59, 101], cubriendo asuntos como equilibrio termodinámico, la formulación de la segunda ley de la termodinámica, aspectos relacionados con la termodinámica irreversible por fluidos simples relativistas, sólidos elásticos, etc. Sin embargo, el objetivo de este y de los siguientes capítulos consiste en discutir los progresos en las últimas décadas sobre el desarrollo de teorías viables de termodinámica irreversible de medios relativistas que predicen propagación finita de las perturbaciones alrededor de una solución de fondo y que admiten estados de equilibrio estables. En términos matemáticos, el objetivo es introducir teorías de termodinámica de medios relativistas que estén descritas por ecuaciones dinámicas que constituyen un sistema simétrico - hiperbólico y causal. Recordamos que un sistema simétrico - hiperbólico tiene la propiedad notable que el problema de Cauchy está bien planteado y esta propiedad implica la existencia, unicidad y dependencia continua de soluciones a través del dato inicial<sup>1</sup>. En particular la dependencia continua de soluciones del dato inicial implica que «cambios peque-

---

<sup>1</sup>Para una discusión sobre el problema de Cauchy por sistemas de ecuaciones véanse las refs. [44, 103].

nos» en los datos iniciales en una región  $S$  sobre la hipersuperficie no generan cambios en la solución fuera del futuro causal  $J^+(S)$ . En el contexto de las teorías de termodinámica irreversible cuyas ecuaciones dinámicas constituyen un sistema simétrico - hiperbólico, esta propiedad garantiza que las perturbaciones de una solución de fondo se propaguen dentro del cono de luz. A cambio, esta propiedad implica que las teorías fuera del equilibrio descritas por sistemas de ecuaciones simétricos - hiperbólicos evitan los problemas que poseen el sistema clásico de Fourier-Navier-Stokes.

Como vimos en el capítulo anterior, las teorías de termodinámica irreversible por medios continuos clásicos (newtonianos) han evolucionado. En los años 1930, 1940 hemos visto el desarrollo de (TCI) y en los años 1990 hemos visto el desarrollo de (TIRE). Similarmente, las teorías relativistas también se han ido desarrollando. En el año de 1940 apareció la primera teoría de fluidos relativistas disipativos formulada por Eckart [27] y a finales de la década de 1950 llegó la teoría de Landau-Lifshitz [59], que es también una teoría de fluidos relativistas disipativos que admite una representación distinta a la teoría de Eckart [27]. A finales de la década de 1970, Israel [49] e Israel-Stewart [50], introdujeron la teoría de termodinámica transitoria<sup>2</sup>. A mediados de los años 1980, Liu, Müller y Ruggeri [66] desarrollaron una versión de la termodinámica irreversible para fluidos relativistas que extiende los principios de termodinámica irreversible racional extendida (TIRE) que hemos discutido en la última sección del capítulo anterior, al régimen relativista. Motivados por la teoría de Liu, Müller y Ruggeri, a principios de la década de 1990 Pennisi [84], Geroch y Lindblom [34, 35] desarrollaron una nueva teoría de fluidos disipativos relativistas ligeramente distinta de la teoría de Liu-Müller-Ruggeri, referida como teoría de fluidos relativistas del tipo divergente. Propiedades de esta clase de fluidos son una área activa de la investigación y para progresos recientes véase por ejemplo [60]. En los capítulos siguientes, discutiremos estas teorías e ilustraremos sus principios analizando propiedades de estados de fluidos simples (o una mezcla de fluidos simples).

Comenzamos preparando la arena para el desarrollo de la termodinámica transitoria de Israel-Stewart. Dentro de esta teoría, estados de un fluido simple<sup>3</sup>, están descritos por un conjunto de variables primarias<sup>4</sup> que consisten del tensor de energía-momento  $T^{\alpha\beta} = T^{\beta\alpha}$  que satisface condiciones de energía que discuti-

<sup>2</sup>«Transient thermodynamics» en inglés.

<sup>3</sup>Parte de la discusión que sigue es válida si en vez de considerar fluidos, consideramos medios continuos más generales e.g. medios elásticos relativistas, medios polarizados, etc. Para la descripción de estados fuera del equilibrio por tales medios véase [51, 57, 58]

<sup>4</sup>Una especificación completa de los estados por un fluido simple requiere la especificación de variables adicionales auxiliares las cuales serán introducidas más adelante.

mos más delante, una 4-corriente de partículas  $J^\alpha$  tipo tiempo y un 4-vector de entropía  $S^\alpha$  también de tipo tiempo, sujetos a satisfacer:

$$\nabla_\alpha T^{\alpha\beta} = 0, \quad \nabla_\alpha J^\alpha = 0, \quad \nabla_\alpha S^\alpha \geq 0, \quad (3.1.1)$$

en donde como ya hemos visto en el capítulo introductorio, la desigualdad satisfecha por  $S^\alpha$  está dictada por la segunda ley de la termodinámica. Mencionamos aquí que por el momento, no imponemos ninguna restricción en la dependencia funcional de  $S^\alpha$  de las variables básicas, esta dependencia entrará en nuestras consideraciones de forma gradual.

Para una mezcla de fluidos, un estado arbitrario involucra  $n$  4-corrientes de partículas descritas por  $n$ -vectores temporales  $J_A^\alpha$  con  $A \in \{1, 2, \dots, n\}$  y en ausencia de reacciones químicas, nucleares, etc., las variables primarias  $(J_A^\alpha, T^{\alpha\beta}, S^\alpha)$ , para esta mezcla, satisfacen

$$\nabla_\alpha T^{\alpha\beta} = 0, \quad \nabla_\alpha J_A^\alpha = 0, \quad \nabla_\alpha S^\alpha \geq 0, \quad A \in \{1, 2, \dots, n\}, \quad (3.1.2)$$

mientras que en la presencia de reacciones, los  $n$ -vectores de corriente  $J_A^\alpha$ , satisfacen que

$$\nabla_\alpha J_A^\alpha = \sum_i C_A^i r_i, \quad i \in \{1, 2, \dots, k\}, \quad (3.1.3)$$

en donde  $k$  indica el número de reacción que involucra la especie del tipo  $A$ ,  $r_i$  representa la  $i$ -ésima tasa de reacción y  $C_A^i$  son los coeficientes estequiométricos (para una introducción de estos conceptos véase [24, 49]).

Para fluidos clásicos, es común asumir que el tensor de energía-momento  $T_{\alpha\beta}$  satisface la condición de energía débil, es decir,  $T_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta \geq 0$  para todos los vectores temporales  $u^\alpha$  y por tanto apelando al teorema de Synge [101] concluimos que  $T^{\alpha\beta}$  admite un único eigenvector temporal  $u_E^\alpha$ ,  $g(u_E, u_E) = -1$  dirigido a futuro que define el marco de Landau-Lifshitz o marco de energía.

Por otro lado, cada 4-corriente de partículas  $J_A^\alpha$  define un único campo vectorial temporal dirigido a futuro  $u_A^\alpha$  vía  $J_A^\alpha = n_A u_A^\alpha$  con  $g(u_A, u_A) = -1$  y cada uno de estos  $n$ -campos  $u_A$  define su propio marco en reposo. Para el caso de un fluido simple, el único  $u_N$  paralelo a  $J^\alpha$  define el marco de Eckart o marco de partículas. De estas consideraciones vemos que los medios continuos relativistas ofrecen la posibilidad de introducir más de un marco en reposo y en general como hicimos claro en la introducción de esta tesis no existe ninguna razón fundamental

para elegir uno sobre otro. Sin embargo, cuando el estado del fluido se encuentra dentro de una familia particular referida como estados de equilibrio, las variables primarias definen un único marco en reposo preferido y en este caso, naturalmente las propiedades termodinámicas se expresan relativas a este marco en reposo especial<sup>5</sup> (aunque esto no es necesario).

Para estados fuera del equilibrio, es una práctica común entre los relativistas expresar a las propiedades termodinámicas del fluido al respecto del marco de Eckart o al respecto del marco de Landau-Lifshitz. Esta tendencia da la impresión de que las leyes de la termodinámica de fluidos relativistas están atadas a marcos particulares, a pesar de que las variables primarias no señalan tales marcos. Como Israel ha señalado desde hace muchos años atrás, mientras nos restringimos a estados cercanos al equilibrio térmico, existe una «libertad de norma» al respecto de la elección del marco<sup>6</sup>. Una teoría termodinámica consistente puede ser desarrollada que es manifiestamente invariante bajo cambios particulares de la 4-velocidad  $u^\alpha$  que define el marco en reposo a otro marco definido por  $\hat{u}^\alpha$ . Como veremos, esto sucede cuando ambas  $(u, \hat{u})$  se encuentran dentro del cono con «pseudo-ángulo»  $\epsilon$  formado<sup>7</sup> por  $(u_E^\alpha, u_N^\alpha)$ .

En este capítulo, introducimos una teoría en donde las ecuaciones dinámicas permanecen forma invariante bajo cambios particulares de los marcos de referencia<sup>8</sup>. Pero esta invarianza viene acompañada de una restricción fuerte: Los estados del fluido se encuentran «cerca» al equilibrio, un término que definiremos con más detalle en el curso de este capítulo (véase también el apéndice de este capítulo). La teoría que vamos a desarrollar es la termodinámica transitoria de Israel-Stewart y para introducirla, primero identificamos a los estados en equilibrio (termodinámico) en el contexto de la termodinámica transitoria y en la sección que sigue los definimos en detalle.

---

<sup>5</sup>Debemos de estar conscientes de que existen sistemas que no admiten un marco en reposo, en el sentido de que el marco se mueve a la velocidad de la luz. Esto ocurre por ejemplo, para el campo de radiación de Hawking sobre el horizonte de eventos de un hoyo negro.

<sup>6</sup>Esta propiedad apareció originalmente en una tesis de maestría escrita en los años 1960 por Aitken [3], estudiante de Israel.

<sup>7</sup>En el apéndice de este capítulo definimos este parámetro  $\epsilon$  con más detalle. También mencionamos que en esta sección por simplicidad asumimos que el fluido, es un fluido simple. Las consideraciones se extienden de manera natural a una mezcla de fluidos.

<sup>8</sup>Adelantando un poco, un cambio de marco de referencia se realiza a través de  $u^\alpha \rightarrow \hat{u}^\alpha(u)$  y la invarianza de las leyes dinámicas corresponde a un grupo de transformaciones  $u^\alpha \rightarrow \hat{u}^\alpha(u)$  particulares. La naturaleza de este grupo, la discutimos más adelante (véanse los Teoremas 2, 3 y 4 de este capítulo).

## 3.2. Equilibrio termodinámico global en la teoría transitoria

Decimos que un fluido simple (o mezcla de fluidos) se encuentra en un estado de equilibrio (termodinámico), si tal estado cumple las siguientes condiciones<sup>9</sup>:

- i) Existe un 4-vector de flujo de entropía  $S^\alpha$ , que satisface:

$$\nabla_\alpha S^\alpha = 0, \quad \alpha \in \{0, 1, 2, 3\}, \quad (3.2.1)$$

y como ya apuntamos en el capítulo introductorio, esto indica que no hay producción de entropía.

- ii) Existe una única 4-velocidad  $u^\alpha$ , al respecto de la cual, las variables primarias  $(J^\alpha, T^{\alpha\beta}, S^\alpha)$  pueden descomponerse de la forma:

$$J_A^\alpha = n_A u^\alpha, \quad T^{\alpha\beta} = (\rho + P)u^\alpha u^\beta + P g^{\alpha\beta}, \quad S^\alpha = s u^\alpha, \quad A \in \{1, 2, \dots, n\}, \quad (3.2.2)$$

en donde  $(n_A, \rho, P, s)$  denotan respectivamente la densidad de partículas de la especie  $A$ , la densidad de energía, la presión termodinámica y la densidad de entropía<sup>10</sup> medidas por el observador  $u^\alpha$ .

- iii) Existe una ecuación de estado de equilibrio  $s = s(\rho, n_A)$ , de la cual, la presión termodinámica  $P(\rho, n_A)$  puede encontrarse a partir de la expresión<sup>11</sup>

$$s = \frac{\rho + P}{T} - \sum_{A=1}^n \Theta_A n_A, \quad A \in (1, 2, \dots, n), \quad (3.2.3)$$

<sup>9</sup>Para una discusión más completa sobre la motivación de introducir las condiciones que siguen, véase la discusión en [49]. Mencionamos aquí que las condiciones  $i) - v)$  que siguen pueden derivarse una vez que hemos especificado el flujo  $S^\mu$  y luego identificamos los estados de equilibrio imponiendo la restricción  $\nabla_\mu S^\mu = 0$ . Este punto de vista ha sido desarrollado en la referencia [43].

<sup>10</sup>Señalamos aquí que  $s$  denota densidad de entropía, mientras que de acuerdo a nuestra notación del capítulo introductorio,  $\hat{s}$  denota la entropía por partícula.

<sup>11</sup>Esta expresión esta motivada por las consideraciones que nos condujeron a (1.1.18) del capítulo introductorio.

mientras la temperatura  $T$  y los potenciales térmicos  $\Theta_A$ ,  $A \in \{1, 2, \dots, n\}$  se definen a partir de la relación de Gibbs en equilibrio

$$ds = \frac{d\rho}{T} - \sum_{A=1}^n \Theta_A dn_A, \quad (3.2.4)$$

y aquí  $(T, \Theta_A)$  son medidos por los observadores que se co-mueven con  $u^\alpha$ .

iv) Los potenciales térmicos  $\Theta_A$  y las tazas de reacción  $r_i$  satisfacen:

$$\Theta_A C_A^i = 0, \quad r_i = 0, \quad \Theta_A = cte, \quad (3.2.5)$$

v) El movimiento es rígido en el sentido de Born i.e.

$$\Delta^\gamma_\alpha \Delta^\delta_\beta (\nabla_\gamma u_\delta + \nabla_\delta u_\gamma) = 0, \quad \Delta^\alpha_\beta = \delta^\alpha_\beta + u^\alpha u_\beta. \quad (3.2.6)$$

Cuando estas cinco condiciones se satisfacen simultáneamente, el estado definido por las variables primarias  $(J^\alpha, T^{\alpha\beta}, S^\alpha)$  en (3.2.2), describe un estado en equilibrio termodinámico global y estos estados son muy particulares.

Para obtener un entendimiento de sus propiedades, definimos el 4-vector de temperatura inversa  $\beta^\alpha$ , vía

$$\beta^\alpha = \frac{u^\alpha}{T}, \quad (3.2.7)$$

y esta definición junto con (3.2.6), las leyes de conservación (3.1.2) y en combinación de (3.2.1, 3.2.2) implican que  $\beta_\alpha$  es un campo de Killing<sup>12</sup> i.e. obedece

$$\nabla_\mu \beta_\nu + \nabla_\nu \beta_\mu = 0. \quad (3.2.8)$$

Esta ecuación implica que

$$T \sqrt{-g(\beta, \beta)} = 1, \quad (3.2.9)$$

<sup>12</sup>La presencia de este campo de Killing por estados de equilibrio en el contexto de la teoría transitoria, viene como consecuencia de imponer la condición:  $\nabla_\alpha S^\alpha = 0$ . Adelantando un poco, como será aparente en la sección 3.3.2, en la teoría transitoria la producción de entropía toma la forma  $\nabla_\alpha S^\alpha = \lambda_1 q^\alpha q_\alpha + \lambda_2 (\pi)^2 + \lambda_3 \pi^{\alpha\beta} \pi_{\alpha\beta} = 0$  la cual demanda que  $q^\alpha = \pi = \pi^{\alpha\beta} = 0$ . Estas restricciones combinadas con las ecuaciones fenomenológicas nos llevan a (3.2.8, 3.2.10). Para más detalles sobre esta derivación véase la referencia [43].

así como también la ley de Tolman-Klein

$$T\Theta_A\sqrt{-g(\beta, \beta)} = cte. \quad (3.2.10)$$

De estas consideraciones se ve que, los estados de equilibrio termodinámico que cumplan con las condiciones *i*) a *v*) son especiales. Además de una producción de entropía nula ( $\nabla_\alpha S^\alpha = 0$ ) y la forma particular de las variables primarias en (3.2.2), demandan que el espacio-tiempo de fondo  $(M, g)$  sea estacionario y además la 4-velocidad  $u^\alpha$  que aparece en (3.2.2) debe ser paralela al campo de Killing  $\beta^\alpha$  y estas condiciones son muy restrictivas.

Por otro lado, decimos que estados que satisfacen las condiciones *i*) – *iii*), describen estados en equilibrio termodinámico local. Estos estados se caracterizan por una producción de entropía nula ( $\nabla_\alpha S^\alpha = 0$ ), la cual es consecuencia de (3.2.2) y (3.2.3) y debido a que la condición *v*) no se impone aquí, el flujo del fluido no es rígido, y por tanto, el espacio-tiempo de fondo  $(M, g)$  no se requiere que sea estacionario<sup>13</sup>.

Los estados en equilibrio termodinámico global o local, forman un espacio de  $(n + 4)$  dimensiones denotado por  $\Sigma_0$ , parametrizado por los  $n$ -potenciales térmicos  $\Theta_A$ ,  $A \in \{1, 2, \dots, n\}$  y el 4-vector de temperatura inverso  $\beta^\alpha$  definido en (3.2.7) y este espacio jugará un papel importante más adelante.

En la discusión de las condiciones *ii*) a *v*) vemos que, el marco en reposo definido por la velocidad  $u^\alpha$  en (3.2.2) jugó un papel importante. Mediciones hechas relativamente a tal marco obedecen las condiciones *i*) – *iii*) (y posiblemente las condiciones *i*) – *v*)).

Sin embargo, como veremos a continuación, una derivación covariante de la relación de Gibbs en equilibrio removerá esta dependencia de  $u^\alpha$ . Para derivar esta forma covariante, notamos primero que (3.2.4) junto con la ecuación de estado en equilibrio (3.2.3) implican las siguientes identidades

$$T^{-1}dP + (\rho + P)d(T^{-1}) = \sum_{A=1}^n n_A d\Theta_A, \quad (3.2.11)$$

$$Td(sX) = d(\rho X) + PdX - T \sum_{A=1}^n \Theta_A d(n_A X), \quad (3.2.12)$$

<sup>13</sup>Existe una amplia cantidad de sistemas que admiten estados en equilibrio termodinámico local. Por ejemplo, cualquier estado describiendo a un fluido perfecto simple propagándose en un espacio-tiempo  $(M, g)$  satisface las condiciones *i*) – *iii*).

en donde  $X$  representa una función arbitraria. La elección  $X = 1$  arriba, nos conduce a (3.2.4), mientras que la elección  $X = \hat{V} = \frac{1}{n}$  y por el caso de un fluido simple nos da<sup>14</sup>

$$d\hat{s} = T^{-1}(de + Pd\hat{V}), \quad (3.2.13)$$

en donde  $\hat{s} = sn^{-1}$  es la entropía por partícula y  $e$  representa la energía interna por partícula definida por  $\rho = n(m+e)$  (en donde por simplicidad hemos tomado a la constante de Boltzmann  $k$  y a la velocidad de la luz  $c$  iguales a 1). Sin embargo, la relación más importante escondida en (3.2.12), viene a través de la elección  $X = u^\alpha$ . Recordando que estamos tratando con estados que cumplen *i) – iii)* (o posiblemente *i) a v)*), entonces por la elección  $X = u^\alpha$ , la identidad (3.2.12) implica que

$$dS_{(0)}^\alpha = - \sum_{A=1}^n \Theta_A dJ_{(0)A}^\alpha - \beta_\beta dT_{(0)}^{\alpha\beta}, \quad (3.2.14)$$

mientras que (3.2.3) da que

$$S_{(0)}^\alpha = P\beta^\alpha - \sum_{A=1}^n \Theta_A J_{(0)A}^\alpha - \beta_\beta T_{(0)}^{\alpha\beta}. \quad (3.2.15)$$

Una identidad adicional que será importante más adelante viene diferenciando (3.2.15) y sumando (3.2.14) dando como resultado:

$$d(P\beta^\alpha) = \sum_{A=1}^n J_{(0)A}^\alpha d\Theta_A + T_{(0)}^{\alpha\beta} d\beta_\beta. \quad (3.2.16)$$

en donde arriba  $(S_{(0)}^\alpha, J_{(0)}^\alpha, T_{(0)}^{\alpha\beta})$  denotan a las variables primarias en un estado de equilibrio<sup>15</sup>.

La expresión (3.2.14) es la versión covariante de la relación de Gibbs (en equilibrio) la cual involucra solo a cantidades tensoriales y por lo tanto elimina variables termodinámicas definidas relativas a un marco particular (véase la derivación de esta relación en el capítulo introductorio). Esta versión covariante describe transformaciones reversibles desde un estado en equilibrio (local o global) parametrizado por  $(\Theta_A, \beta^\alpha)$  a otro estado en equilibrio (local o global) parametrizado por

<sup>14</sup>Por el caso de mezcla de fluidos y por elecciones particulares de  $X$  se obtiene la forma de la relación de Gibbs (véase discusión en [49]).

<sup>15</sup>El subíndice (0) distinguirá entre las variables primarias en un estado de equilibrio (local o global), de las que no lo estén y será útil esta diferencia más adelante.

$(\Theta_A + d\Theta_A, \beta^\alpha + d\beta^\alpha)$  y como veremos en la siguiente sección, la relación (3.2.14) será fundamental para la formulación de la termodinámica transitoria.

### 3.3. Termodinámica transitoria

En el capítulo 2, hemos visto que las deficiencias del sistema de Fourier-Navier-Stokes se pueden remover haciendo a un lado la hipótesis de que la entropía física de los estados fuera del equilibrio coincide con la entropía predicha por la ecuación de estado en equilibrio según el postulado del equilibrio local, y en su lugar considerando la noción de entropía generalizada la cual recibe contribuciones cuadráticas de los flujos disipativos  $(\vec{q}, P^v, \sigma_{(v)}^{ij})$ . El desarrollo de la termodinámica transitoria sigue una ruta similar. Israel en [49], motivado por la teoría cinética relativista de gases diluidos puso por delante la hipótesis de que el estado arbitrario de un fluido, está caracterizado por las variables primarias  $(S^\alpha, J_A^\alpha, T^{\alpha\beta})$  pero además de estas variables, está caracterizado por un conjunto (en principio infinito) de variables denotadas conjuntamente por  $X_{(i)}^{\alpha\beta\gamma\dots}$  en donde  $i \in \{1, 2, \dots\}$ . Más aún, él sugirió que existe una ecuación de estado de la forma:

$$S^\alpha = F^\alpha(J_A^\alpha, T^{\alpha\beta}, X_{(i)}^{\alpha\beta\gamma\dots}), \quad i \in \{1, 2, \dots\}, \quad (3.3.1)$$

con las siguientes propiedades:

- a) Para cualquier estado de equilibrio, las variables adicionales se anulan  $X_{(i)}^{\alpha\beta\gamma\dots} = 0$ , y en este caso (3.3.1) se reduce a la relación lineal entre  $(S^\alpha, J_A^\alpha, T^{\alpha\beta})$  escrita por (3.2.15).
- b) Por estados cercanos al equilibrio, la entropía  $S^\alpha$  en (3.3.1) puede ser expandida en serie de Taylor alrededor de los estados de equilibrio de fondo, y en esta expansión se consideran solo contribuciones cuadráticas en primera instancia.

La existencia de la ecuación de estado (3.3.1) que satisface estas propiedades, constituye la columna vertebral de la termodinámica transitoria. Asumiendo validez de a) y b), sea  $(\Theta_A, \beta^\alpha)$  un punto en el espacio de estados de equilibrio  $\Sigma_0$ , tal que  $(J_{(0)A}^\alpha, T_{(0)}^{\alpha\beta}, S_{(0)}^\alpha)$  denotan las variables primarias que describen este estado de equilibrio. Sea ahora  $(dJ^\alpha, dT^{\alpha\beta}, dS^\alpha)$  una perturbación infinitesimal, tal que

$$S^\alpha = S_{(0)}^\alpha + dS^\alpha, \quad T^{\alpha\beta} = T_{(0)}^{\alpha\beta} + dT^{\alpha\beta}, \quad J_A^\alpha = J_{(0)A}^\alpha + dJ_A^\alpha. \quad (3.3.2)$$

define un nuevo estado «infinitesimalmente cercano» a  $(J_{(0)A}^\alpha, T_{(0)}^{\alpha\beta}, S_{(0)}^\alpha)$ , pero fuera de  $\Sigma_0$ . El postulado de «liberación de variaciones» o escrito en inglés «release of variations», introducido en [49, 50], enuncia que las perturbaciones  $dS^\alpha, dT^{\alpha\beta}, dJ_A^\alpha$  en (3.3.2) no son independientes, sino que satisfacen la relación

$$dS^\alpha = - \sum_{A=1}^n \Theta_A dJ_A^\alpha - \beta_\beta dT^{\alpha\beta}, \quad (3.3.3)$$

i.e. una expresión con la misma forma funcional que la relación de Gibbs covariante (3.2.14), excepto que en (3.3.3), las perturbaciones  $(dS^\alpha, dT^{\alpha\beta}, dJ^\alpha)$  no son tangenciales a  $\Sigma_0$ , i.e. nos conducen en general fuera de  $\Sigma_0$ .

Aceptando esta hipótesis y acoplando (3.2.15), (3.3.3) en (3.3.2), se obtiene:

$$S^\alpha = P(\Theta_A, \beta^\alpha) \beta^\alpha - \sum_{A=1}^n \Theta_A J_A^\alpha - \beta_\gamma T^{\alpha\gamma} - Q^\alpha(\delta J_A^\alpha, \delta T^{\alpha\beta}, X_{(i)}^{\alpha\beta\gamma\dots}), \quad (3.3.4)$$

en donde el término  $Q^\alpha$  guarda las contribuciones cuadráticas y de orden mayor en la expansión en serie de Taylor de  $S^\alpha$  alrededor del estado de equilibrio parametrizado por  $(\Theta_A, \beta^\alpha)$ . En esta relación,  $P(\Theta_A, \beta^\alpha)$  representa la presión termodinámica del estado de equilibrio, mientras  $(\delta J^\alpha, \delta T^{\alpha\beta})$  están definidas por:  $\delta J^\alpha = J^\alpha - J_{(0)}^\alpha$ ,  $\delta T^{\alpha\beta} = T^{\alpha\beta} - T_{(0)}^{\alpha\beta}$ .

La fórmula (3.3.4) relaciona el flujo de entropía  $S^\alpha$  de un estado arbitrario con otras características del fluido y es la expresión central de la termodinámica transitoria. Como hemos mencionado en el capítulo introductorio, el conocimiento de  $S^\alpha$  efectivamente determina las propiedades termodinámicas de los estados del fluido y en las secciones que vienen verificamos tal afirmación.

Nótese también que la estructura del flujo  $S^\alpha$  en (3.3.4) es similar a la entropía generalizada  $s_{gen}(\vec{x}, t)$  introducida en la termodinámica irreversible extendida (TIE) descrita en la sección 2.3.2, sujeto a que  $Q^\alpha$  tiene contribuciones cuadráticas en desviación del equilibrio local y como veremos más adelante la teoría transitoria hace esta suposición.

El flujo de entropía  $S^\alpha$  escrito en (3.3.4) es suficientemente general e incluye como casos particulares a las teorías de primer orden como la teoría de Eckart [27] y la teoría de Landau-Lifshitz [59]. En el contexto de (3.3.4), las teorías de primer orden, se generan a través de la elección  $Q^\alpha = 0$ , mientras que las teorías de

segundo orden<sup>16</sup> postulan que  $Q^\alpha \neq 0$ . Antes de discutir las propiedades de las teorías resultantes, es conveniente señalar algunas implicaciones que se siguen de la fórmula fundamental por el flujo de entropía  $S^\alpha$  escrito en (3.3.4).

Mirando cuidadosamente la forma en la que está escrita (3.3.4), vemos que es un poco peculiar. Hay una mezcla entre las variables primarias ( $S^\alpha, J_A^\alpha, T^{\alpha\beta}, X_{(i)}^{\alpha\beta\gamma\dots}$ ), con las variables ( $S_{(0)}^\alpha, J_{(0)A}^\alpha, T_{(0)}^{\alpha\beta}$ ) del estado de equilibrio de fondo y esta mezcla hace difícil extraer la física escondida en (3.3.4). Como enfatizan Israel y Stewart, una propiedad que facilita entender el significado de (3.3.4) es la observación que el estado de equilibrio de fondo el cual es cercano al estado físico no está únicamente definido.

Israel y Stewart observaron que si los parámetros  $(\Theta_A, \beta^\alpha)$  que especifican el estado de equilibrio ( $S_{(0)}^\alpha, J_{(0)A}^\alpha, T_{(0)}^{\alpha\beta}$ ) el cual es cercano a ( $S^\alpha, J_A^\alpha, T^{\alpha\beta}, X_{(i)}^{\alpha\beta\gamma\dots}$ ), son desplazados a los valores<sup>17</sup> ( $\Theta'_A = \Theta_A + \delta\Theta_A, \beta'_\alpha = \beta_\alpha + \delta\beta_\alpha$ ), se sigue que el término  $Q^\alpha$ , se transforma de una manera especial. Para derivar esta transformación, notamos que bajo

$$(\Theta_A, \beta^\alpha) \rightarrow (\Theta'_A, \beta'^\alpha) = (\Theta_A + \delta\Theta_A, \beta^\alpha + \delta\beta^\alpha), \quad (3.3.5)$$

tenemos las siguientes expansiones:

$$\begin{aligned} P(\Theta_A, \beta^\alpha) &= P(\Theta'_A - \delta\Theta_A, \beta'^\alpha - \delta\beta^\alpha) = P(\Theta'_A, \beta'^\alpha) - dP(\Theta'_A, \beta'^\alpha) \\ &+ O(\delta\Theta_A, \delta\beta_\alpha)^n, \quad n \geq 2, \end{aligned} \quad (3.3.6)$$

$$dP(\Theta'_A, \beta'^\alpha) = \frac{\partial P}{\partial \Theta'_A} \delta\Theta_A + \frac{\partial P}{\partial \beta'^\alpha} \delta\beta^\alpha \quad (3.3.7)$$

$$\Theta_A J_A^\alpha = (\Theta'_A - \delta\Theta_A) J_A^\alpha = \Theta'_A J_A^\alpha - \delta\Theta_A J_A^\alpha \quad (3.3.8)$$

$$\beta_\beta T^{\alpha\beta} = (\beta'_\beta - \delta\beta_\beta) T^{\alpha\beta} = \beta'_\beta T^{\alpha\beta} - \delta\beta_\beta T^{\alpha\beta}. \quad (3.3.9)$$

<sup>16</sup>El término «teorías de primer orden», «teoría de segundo orden», parece ser que fué acuñado por Hiscock y Lindblom en [43].

<sup>17</sup>Notemos que en esta sección las variaciones  $\delta\Theta_A, A \in \{1, 2, \dots, n\}$  y  $\delta\beta_\alpha$  se consideran como variaciones arbitrarias con la excepción que nos dejan en el espacio  $\Sigma_0$ . Sin embargo, abajo veremos que podemos materializarlas como variaciones inducidas por un cambio de marco, sin embargo, en esta sección no tomamos este punto de vista. Las consideramos como «pequeñas» y mantendremos únicamente términos lineales en estas perturbaciones.

Usando estas expansiones en (3.3.4), se obtiene:

$$\begin{aligned}
S^\alpha &= P(\Theta'_A - \delta\Theta_A, \beta'_\nu - \delta\beta_\nu)(\beta'^\alpha - \delta\beta^\alpha) - \sum_{A=1}^n (\Theta'_A - \delta\Theta_A)J_A^\alpha - (\beta'_\beta - \delta\beta_\beta)T^{\alpha\beta} \\
&\quad - Q^\alpha(\delta J_A^\mu, \delta T^{\mu\nu}, X_{(i)}^{\mu\nu\xi\dots}) \\
&= [P(\Theta'_A, \beta'^\mu) - dP(\Theta'_A, \beta'^\mu)](\beta'^\alpha - \delta\beta^\alpha) - \sum_{A=1}^n (\Theta'_A - \delta\Theta_A)J_A^\alpha - (\beta'_\beta - \delta\beta_\beta)T^{\alpha\beta} \\
&\quad - Q^\alpha(\delta J_A^\mu, \delta T^{\mu\nu}, X_{(i)}^{\mu\nu\xi\dots}) + O(\delta\Theta_A, \delta\beta_\mu)^n, \quad n \geq 2,
\end{aligned} \tag{3.3.10}$$

y tomando en cuenta que el estado de equilibrio de fondo satisface que

$$d(P(\Theta'_A, \beta'^\mu)\beta'^\alpha) = \sum_{A=1}^n J_{(0)A}^\alpha d\Theta_A + T_{(0)}^{\alpha\beta} d\beta_\beta \tag{3.3.11}$$

llegamos a

$$S^\alpha = P(\Theta'_A, \beta'_\nu)\beta'^\alpha - \sum_{A=1}^n \Theta'_A J_A^\alpha - \beta'_\beta T^{\alpha\beta} - Q'^\alpha + O(\delta\Theta_A, \delta\beta_\mu)^n, \quad n \geq 2, \tag{3.3.12}$$

en donde el término  $Q'^\alpha$ , esta definido vía

$$Q'^\alpha = Q^\alpha - \sum_{A=1}^n (J_A^\alpha - J_{(0)A}^\alpha)\delta\Theta_A - (T^{\alpha\beta} - T_{(0)}^{\alpha\beta})\delta\beta_\beta. \tag{3.3.13}$$

Israel y Stewart interpretaron que la relación (3.3.12) implica que a una precisión a orden  $O_1$  (que en el presente contexto significa a orden lineal en  $\delta\Theta_A$  y  $\delta\beta_\alpha$ ), tanto  $(\Theta_A, \beta_\alpha)$  como  $(\Theta'_A = \Theta_A + \delta\Theta_A, \beta'_\alpha = \beta_\alpha + \delta\beta_\alpha)$  pueden parametrizar el estado de equilibrio de fondo cercano al estado físico  $(T^{\alpha\beta}, J_A^\alpha, S^\alpha, X_{(i)}^{\alpha\beta\gamma\dots})$ . A cambio, esto implica que asumiendo que las perturbaciones cuadráticas en  $\delta\Theta_A$  y  $\delta\beta_\alpha$  se desprecien, el contenido físico de (3.3.4), es el mismo que en (3.3.12) combinado con (3.3.13).

Más adelante, veremos que las perturbaciones  $\delta\Theta_A$  y  $\delta\beta_\alpha$  en los potenciales térmicos  $\Theta_A$  y en el campo vectorial  $\beta^\alpha$ , pueden ser inducidas por el cambio de marco de referencia y en este contexto, las conclusiones sobre el compartamiento del flujo de entropía  $S^\alpha$  (o equivalentemente la transformación del término  $Q^\alpha$  escrito en (3.3.13)) será importante. Por el momento mencionamos que la libertad en

la elección del estado de equilibrio de referencia, tiene otras consecuencias que a continuación discutimos.

Dado un estado físico  $(S^\alpha, J_A^\alpha, T^{\alpha\beta}, X_{(i)}^{\alpha\beta\gamma\dots})$ , Israel y Stewart asignan un estado de equilibrio de fondo de la siguiente manera: Primero por el caso de un fluido simple eligen una 4-velocidad  $u^\alpha$  arbitraria pero al interior del «cono<sup>18</sup>» formado por  $u_E^\alpha$  y  $u_N^\alpha$  (para una definición del cono véase el apéndice de este capítulo). Una vez hecha la elección de  $u^\alpha$ , las variables primarias  $(S_{(0)}^\alpha, J_{(0)A}^\alpha, T_{(0)}^{\alpha\beta})$  que identifican este estado de referencia se eligen de tal manera que las siguientes condiciones («fitting conditions» en inglés) se cumplan

$$-u_\alpha(J^\alpha - J_{(0)A}^\alpha) = u_\alpha u_\beta (T^{\alpha\beta} - T_{(0)}^{\alpha\beta}) = 0 \quad A \in \{1, 2, \dots, n\}, \quad (3.3.14)$$

mientras que el resto de las variables termodinámicas  $s(u), T(u), P(u), \Theta_A(u)$  que especifican el estado de equilibrio, se construyen apelando a la ecuación de estado en equilibrio y a la relación de Gibbs<sup>19</sup>.

La validez de (3.3.14) implica una relación entre la densidad de entropía física  $(-u_\alpha S^\alpha)$  y la densidad de entropía  $(-u_\alpha S_{(0)}^\alpha)$  con  $S_{(0)}^\alpha$  el flujo de entropía por el estado de equilibrio de fondo, medidas por el observador  $u^\alpha$  que aparece un (3.3.14). Por definición de estas densidades tenemos:

<sup>18</sup>Para una mezcla de fluidos que consiste de  $n$ -corrientes de partículas  $(J_1, J_2, \dots, J_n)$ , uno puede definir tal «cono» de la siguiente manera: Primero uno define  $n$  4-velocidades  $(u_1, u_2, \dots, u_n)$  a través de  $J_A^\alpha = n_A u_A^\alpha$ , con  $A \in \{1, 2, \dots, n\}$  y por lo tanto uno introduce  $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$  pseudo ángulos  $(\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_{\frac{(n+1)(n+2)}{2}})$  entre  $u_E$  y los correspondientes  $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ . Un estado es cercano al equilibrio, cuando los  $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$  pseudo-ángulos obedecen que  $\epsilon_A \ll 1$  para todo  $A \in \{1, 2, \dots, n\}$  y por tales estados uno define un «cono» de pseudo-ángulo  $\epsilon$  tomando:  $\epsilon = \min(\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_{\frac{(n+1)(n+2)}{2}})$  y proceder como en el caso de un fluido simple. Estos asuntos se discuten con más detalles en el apéndice de este capítulo.

<sup>19</sup>Aquí el contenido del capítulo introductorio es muy útil. Las variables termodinámicas medidas por el observador con 4-velocidad  $u^\alpha$  satisfacen las relaciones discutidas en el capítulo introductorio.

$$\begin{aligned}
-u_\alpha(S^\alpha - S_{(0)}^\alpha) &= -u_\alpha \left[ P(\Theta_A, \beta^\alpha)\beta^\alpha - \sum_{A=1}^n \Theta_A J_A^\alpha - \beta_\beta T^{\alpha\beta} - Q^\alpha(\delta J_A^\alpha, \delta T^{\alpha\beta}, X_{(i)}^{\alpha\beta\gamma\dots}) \right. \\
&\quad \left. - P\beta^\alpha + \sum_{A=1}^n \Theta_A J_{(0)A}^\alpha + \beta_\beta T_{(0)}^{\alpha\beta} \right] \\
&= u_\alpha \sum_{A=1}^n \Theta_A (J^\alpha - J_{(0)A}^\alpha) - u_\alpha \beta_\beta (T^{\alpha\beta} - T_{(0)}^{\alpha\beta}) + u_\alpha Q^\alpha, \\
&= u_\alpha Q^\alpha,
\end{aligned} \tag{3.3.15}$$

en donde pasamos a la última línea tomando en cuenta (3.3.14). El resultado de (3.3.15), implica que la densidad de entropía  $s(x) = -u_\alpha S^\alpha$  del estado actual medida por el observador  $u^\alpha$  y la densidad de entropía  $s_0(u) = -u_\alpha S_{(0)}^\alpha$  del estado de referencia en equilibrio medida por el mismo observador  $u^\alpha$ , satisfacen

$$s(u) - s_0(u) = u_\alpha Q^\alpha. \tag{3.3.16}$$

Teniendo en mente que  $Q^\alpha \equiv Q^\alpha(\delta J_A^\alpha, \delta T^{\alpha\beta}, X_{(i)}^{\alpha\beta\gamma\dots})$  y como justificamos más adelante,  $Q^\alpha$  contiene contribuciones cuadráticas en las perturbaciones  $(\delta J_A^\alpha, \delta T^{\alpha\beta})$ , que expresan desviaciones del estado de equilibrio, la fórmula (3.3.16) implica que las dos densidades están en acuerdo a primer orden en la desviación del equilibrio y la diferencia aparece a segundo orden en la desviación. Más aún, (3.3.16) muestra que asumiendo que las condiciones (3.3.14) son válidas, entonces de entre todos los estados con las mismas  $(\rho(u), n(u))$  se sigue que

$$s(x) = -u_\alpha S^\alpha, \tag{3.3.17}$$

alcanza su máximo valor en equilibrio si y sólo si  $Q^\alpha$  es temporal y dirigido a futuro.

En seguida discutimos otra consecuencia importante de (3.3.4) o más específicamente de la relación (3.3.16). En este punto abordamos las sutilezas que hemos mencionado en la sección 2.2.3 y como hemos visto en dicha sección, por un fluido viscoso aparece la sutileza de distinguir entre la presión termodinámica  $P$ , de la presión  $P^v$  que nace del estrés viscoso. Este problema también re-aparece en los fluidos relativistas y discutimos este punto desde la perspectiva de la teoría que hemos desarrollado hasta este punto.

Según las consideraciones hasta este punto, notamos que una vez hecha una elección de  $u^\alpha$ , las variables primarias ( $J_A^\alpha, T^{\alpha\beta}$ ) definen la densidad de energía  $\rho(u) = T^{\mu\nu}u_\mu u_\nu$ , y las  $n$ -densidades de las especies de partículas  $n_A(u) = -J_A^\mu u_\mu$ ,  $A \in \{1, 2, \dots, n\}$  mientras que la ecuación de estado de equilibrio  $s = s(\rho, n_A)$  a través de  $s(u) \equiv s(\rho(u), n_A(u))$  define la temperatura  $T(u)$  y los potenciales térmicos  $\Theta_A(u)$ ,  $A \in \{1, 2, \dots, n\}$  medidos por  $u^\alpha$  de la manera en que hemos discutido en el capítulo introductorio.

Adicionalmente, la relación fundamental  $s = T^{-1}(\rho + P) - \sum_{A=1}^n \Theta_A n_A$  define la presión termodinámica<sup>20</sup>  $P(u)$  a través de la relación:

$$T(u)s(u) = \rho(u) + P(u) - T(u) \sum_{A=1}^n \Theta_A(u)n_A(u). \quad (3.3.18)$$

Por otro lado, la presión viscosa (bulk pressure)  $\pi(u)$  percibida por el observador  $u^\alpha$  entra en escena a través de la relación

$$\frac{1}{3}T_{\alpha\beta}\Delta^{\alpha\beta}(u) = P(u) + \pi(u), \quad \Delta^\alpha_\beta(u) = \delta^\alpha_\beta + u^\alpha u_\beta, \quad (3.3.19)$$

en donde  $\Delta^{\alpha\beta}(u)$  es el tensor de proyección asociado con la 4-velocidad  $u^\alpha$  y como es común tomamos la presión termodinámica  $P(u)$  que aparece en (3.3.18) como una parte de la traza del tensor  $T^{\alpha\beta}$ . Entonces, las variables primarias y la elección del observador  $u^\alpha$  definen la suma  $P(u) + \pi(u)$  y no individualmente  $P(u)$  y  $\pi(u)$ . Pero, la división entre las dos presiones viene apelando a (3.3.19) una vez  $T(u)$  y los  $n$ -potenciales térmicos  $\Theta_A$  han sido especificados vía  $s(u) \equiv s(\rho(u), n_A(u))$  o equivalente la primera ley por procesos isentrópicos.

Pero antes de que veamos esta propiedad, primero mostraremos que la presión  $P(\Theta_A, \beta^\alpha)$  del estado del equilibrio de fondo que aparece en (3.3.4), y la presión termodinámica  $P(u)$  del estado actual que apenas hemos definido, satisfacen que

$$P(u) - P(\Theta_A, \beta^\alpha) = O_2, \quad (3.3.20)$$

es decir, las dos presiones están en acuerdo a primer orden desviación del equilibrio. Para mostrar esta propiedad, recordamos que de acuerdo con las consideraciones del capítulo 1, por un fluido simple, la primera ley toma la forma

$$d\hat{s} = \frac{1}{T} \left[ de + P(u)d\left(\frac{1}{n}\right) \right] = T^{-1}[d(\rho\hat{V}) + P(u)d\hat{V}], \quad \hat{V} = \frac{1}{n}. \quad (3.3.21)$$

<sup>20</sup>Esta presión puede también definirse a través de la primera ley vía procesos isentrópicos véase (3.3.22).

en donde  $(\hat{s} = \hat{s}(u), \rho = \rho(u), n = n(u))$  son medidas por el observador  $u^\alpha$  relativamente de su marco. Entonces para cualquier proceso en donde la entropía por partícula  $\hat{s} = sn^{-1}$  permanezca constante, se cumple que:

$$d(\rho\hat{V}) + P(u)d\hat{V} = 0, \quad (3.3.22)$$

de la cual sigue

$$P(u) = -\left.\frac{\partial(\rho\hat{V})}{\partial\hat{V}}\right|_{(s\hat{V},n)} = -\left.\frac{\partial(\rho_0\hat{V}_0)}{\partial\hat{V}_0}\right|_{[(s_0+u_\alpha Q^\alpha)\hat{V},n_0]} = P(\Theta_A, \beta^\alpha) + O_2. \quad (3.3.23)$$

en donde  $(\hat{s}_0 = \hat{s}_0(u), \rho_0 = \rho_0(u), n_0 = n_0(u))$  son medidas por el observador  $u^\alpha$  en el estado de equilibrio parametrizado por  $(\Theta_A, \beta^\alpha)$  y en (3.3.23) pasamos a la segunda igualdad tomando en cuenta las condiciones (3.3.14, 3.3.16). Por tanto, la presión termodinámica  $P(u)$  en (3.3.19) y la presión en equilibrio  $P(\Theta_A, \beta^\alpha)$  que aparece en (3.3.4), están en acuerdo a primer orden desviación del equilibrio. Debido a que en la teoría transitoria estamos interesados solo en la dinámica a primer orden desviación del equilibrio, de aquí en adelante no distinguiremos entre  $P(u)$  y  $P(\Theta_A, \beta^\alpha)$ .

Para una mezcla de fluidos, la primera ley toma la forma (véase (1.1.19))

$$ds = \beta d\rho - \sum_{A=1}^n \Theta_A dn_A,$$

y uno no puede derivar de inmediato una fórmula análoga de (3.3.23). Para derivar una fórmula análoga de (3.3.23), es conveniente regresar a la identidad (véase 1.1.21),

$$d(sX) = \beta d(\rho X) - \sum_{A=1}^n \Theta_A d(n_A X) + \beta P dX,$$

y elegir a la variable  $X$  como el volumen específico (análogo al volume  $\hat{V} = n^{-1}$  en (3.3.21 3.3.23)). Por tal elección esta identidad se reduce a la forma de la relación de Gibbs (véase la discusión en [49]) y por procesos en donde

$$d(sX) = \sum_{A=1}^n \Theta_A d(n_A X) = 0,$$

uno deriva una relación análoga de (3.3.22) de la cual se sigue (3.3.23).

Estas consideraciones aparte de mostrar que la presión  $P(\Theta_A, \beta^\alpha)$  del estado del

equilibrio de fondo en (3.3.4), y la presión termodinámica  $P(u)$  del estado actual medida por el observador  $u^\alpha$  satisfacen (3.3.20), también ofrecen una manera de separar en principio, las dos presiones  $P(u)$  y  $\pi(u)$  que aparecen en (3.3.19). La primera, es decir,  $P(u)$  puede identificarse aplicando la primera ley por procesos isentrópicos que obedecen (3.3.22) y asumiendo que la traza del tensor de energía-momento como conocida se identifica  $\pi(u)$ .

En seguida consideramos otras implicaciones que surgen de la no-unicidad de la 4-velocidad  $u^\alpha$  que entra en la teoría imponiendo las condiciones (3.3.14). Tal  $u^\alpha$  es arbitraria excepto que esta restringido al interior del «cono» formado por los marcos  $u_E^\alpha$  y  $u_N^\alpha$  (o por el caso de una mezcla de fluidos, el «cono» que hemos definido en el comentario 18 en páginas previas).

Sea que ahora uno hace una elección de  $u^\alpha$  al interior de este «cono». Por tal elección de  $u^\alpha$ , las variables primarias  $T^{\alpha\beta}$  y  $J^\alpha$  se pueden descomponer<sup>21</sup> de acuerdo a

$$T^{\alpha\beta} = \rho(u)u^\alpha u^\beta + P(u)\Delta^{\alpha\beta}(u) + h^\alpha(u)u^\beta + h^\beta(u)u^\alpha + \tau^{\alpha\beta}(u), \quad (3.3.24)$$

$$J_A^\alpha = n_A(u)u^\alpha + n_A^\alpha(u), \quad h^\alpha(u)u_\alpha = 0, \quad n_A^\alpha(u)u_\alpha = 0, \quad \tau^{\alpha\beta}(u)u_\alpha = 0. \quad (3.3.25)$$

en donde  $h^\alpha(u)$ ,  $n_A^\alpha(u)$  representan el flujo de energía y el «flujo» (drift) de partículas relativo al marco  $u^\alpha$ , mientras que el tensor simétrico espacial  $\tau^{\alpha\beta}$  representa el estrés (o tensor de presión) que se descompone según:

$$\tau^{\alpha\beta}(u) = \pi(u)\Delta^{\alpha\beta}(u) + \pi^{\alpha\beta}(u), \quad \pi^\alpha_\alpha = 0, \quad (3.3.26)$$

en donde  $\pi(u)$  y  $\pi^{\alpha\beta}(u)$  representan el estrés de volumen («bulk stress») y el estrés de cizallamiento («shear stress») respectivamente. Estas descomposiciones de los campos  $T^{\alpha\beta}$ ,  $J^\alpha$  nos permiten re-escribir una expresión para  $S^\alpha$  la cual es bastante útil. Para derivarla notamos que la relación (3.3.18) implica

$$P\beta^\alpha = su^\alpha - \rho\beta^\alpha + \sum_{A=1}^n \Theta_A(J_A^\alpha - n_A^\alpha(u)). \quad (3.3.27)$$

<sup>21</sup>Aquí y en las secciones faltantes, escribimos  $\rho(u), P(u), h(u), \tau^{\alpha\beta}(u)$ , etc., para señalar al lector que estas variables son medidas por el observador  $u^\alpha$ . En general estas variables no son funciones de  $u^\alpha$ .

(hemos multiplicado (3.3.18) por  $u^\alpha$  y utilizado (3.3.25)). Eliminando  $P(\Theta_A, \beta^\alpha)$  de la relación fundamental (3.3.4) usando (3.3.20), normalizado el término  $Q^\alpha$  si es necesario, y usando la expresión (3.3.24) por  $T^{\alpha\beta}$  encontramos que (3.3.4) toma la forma equivalente<sup>22</sup>

$$S^\alpha = s(\rho(u), n(u))u^\alpha - \sum_{A=1}^n \Theta_A(u)n_A^\alpha(u) + \frac{h^\alpha(u)}{T(u)} - Q^\alpha(u). \quad (3.3.28)$$

La dependencia en el lado derecho del flujo  $S^\alpha$  sobre la 4-velocidad  $u^\alpha$  elegida arbitrariamente levanta algunas preguntas delicadas concernientes con la interpretación de la teoría, la implementación de la segunda ley y a continuación discutimos estos asuntos.

Al inicio de esta tesis, introducimos a las variables termodinámicas que un observador local mide y hemos formulado la primera ley en términos de estas variables. También, hablamos sobre la covarianza de las relaciones termodinámicas y en particular la covarianza en el contexto de la teoría transitoria. Ahora llegamos al punto en donde vamos a desarrollar las herramientas necesarias para establecer la covarianza de la teoría transitoria.

Como primer paso observamos que en (3.3.24, 3.3.25), las variables

$$\rho(u), \quad n_A(u), \quad P(u), \quad h^\alpha(u), \quad n_A^\alpha(u), \quad \tau^{\alpha\beta}(u), \quad (3.3.29)$$

y las variables

$$s(u), \quad T(u), \quad \Theta_A(u),$$

definidas por la ecuación de estado en equilibrio  $s(u) = s(\rho(u), n_A(u))$  en combinación de la primera ley y de el término  $Q^\alpha(u)$  en (3.3.4), en general dependiente del observador («observer dependent» en inglés). Pero en el contexto de la teoría transitoria y en particular, la existencia de observadores cuyas 4-velocidades  $u^\alpha$  se hayan al interior del «cono» que hemos mencionado arriba, ofrecen la posibilidad de tratar a estas variables como «observador independiente» y en seguida discutimos en que sentido estas variables satisfacen esta propiedad.

Para analizar este asunto, sea por el momento que  $Z(u)$  es una variable termodinámica arbitraria medida por el observador  $u^\alpha$  y sea  $u^\alpha \rightarrow \hat{u}^\alpha(u)$ , un cambio de marco de referencia (véase la transformación (3.3.32) en el teorema 2 que sigue)

<sup>22</sup>Nótese aquí que (3.3.28) muestra que  $S_{(0)}^\alpha = s(\rho(u), n(u))u^\alpha$  con  $s = s(\rho, n)$  la ecuación de estado en equilibrio, no representa la entropía física del estado actual, un punto que hemos enfatizado en el capítulo introductorio.

en un evento al interior del fluido. En el contexto de la teoría transitoria, bajo este cambio de marco, la variación  $\delta Z \equiv Z(\hat{u}) - Z(u)$  puede ser escrita en la forma<sup>23</sup>

$$\delta Z \equiv Z(\hat{u}) - Z(u) = a_1 O_1 + a_2 O_2 + \dots, \quad (3.3.30)$$

en donde  $(a_1, a_2, \dots)$  son funciones bien definidas y  $O_1, O_2, \dots$  representan términos de primer, segundo, ... orden desviación del equilibrio (local ó global). Variables caracterizadas por la propiedad de que  $a_1 = 0$  se consideran en el contexto de la teoría transitoria, como marco-invariantes («frame independent» en inglés).

Los siguientes teoremas describen las propiedades de transformación de varias variables termodinámicas bajo cambios particulares del marco en reposo y estos teoremas fueron formulados por Israel en [49].

**Teorema 2** Sean  $(u, \hat{u})$ , dos vectores unitarios temporales arbitrarios dirigidos a futuro al interior del cono generado por  $u_E$  y  $u_N$  y con (opening) pseudo-ángulo  $\epsilon$  y sea

$$\hat{u}^\alpha = (1 + \delta^2)^{\frac{1}{2}} u^\alpha + \delta^\alpha, \quad \delta^2 = \delta^\alpha \delta_\alpha, \quad \delta^\alpha u_\alpha = 0, \quad (3.3.31)$$

con  $\delta^\alpha$  sujeto a:  $\delta^\alpha = \hat{\epsilon}^\alpha \leq O_1$ , tal que el cambio de marco a primer orden esta escrito por:

$$u^\alpha \rightarrow \hat{u}^\alpha = u^\alpha + \hat{\epsilon}^\alpha + O(\hat{\epsilon})^2, \quad \hat{\epsilon}^\alpha \leq O_1. \quad (3.3.32)$$

Sean también las variables primarias  $J^\alpha$  y  $T^{\alpha\beta}$  descompuestas relativas al marco  $u^\alpha$  de acurdo a (3.3.24, 3.3.25) mientras que relativo al marco  $\hat{u}$ , estas descomposiciones están escritas de la forma:

$$T^{\alpha\beta} = \rho(\hat{u}) \hat{u}^\alpha \hat{u}^\beta + P(\hat{u}) \Delta^{\alpha\beta}(\hat{u}) + h^\alpha(\hat{u}) \hat{u}^\beta + h^\beta(\hat{u}) \hat{u}^\alpha + \tau^{\alpha\beta}(\hat{u}), \quad (3.3.33)$$

$$J^\alpha = n(\hat{u}) \hat{u}^\alpha + \hat{n}^\alpha(\hat{u}), \quad h^\alpha(\hat{u}) \hat{u}_\alpha = 0, \quad \hat{n}^\alpha(\hat{u}) \hat{u}_\alpha = 0, \quad \tau^{\alpha\beta}(\hat{u}) \hat{u}_\alpha = 0. \quad (3.3.34)$$

Entonces, bajo la transformación (3.3.32) las siguientes relaciones se cumplen

<sup>23</sup>Nótese que en la fórmula (3.3.30) se asume un cambio de marco  $u_N^\alpha \rightarrow u_E^\alpha$ , y por este caso tenemos  $u_N^\alpha - u_E^\alpha = \epsilon^\alpha = O_1$ . Pero en general tenemos la libertad a realizar cambios  $u^\alpha \rightarrow \hat{u}^\alpha$  con  $(u^\alpha, \hat{u}^\alpha)$  al interior del cono formado por  $(u_N^\mu, u_E^\mu)$ . En este caso, las variables termodinámicas exhiben propiedades de transformación más complejas en donde el parámetro  $\hat{\epsilon}^\alpha = \hat{u}^\alpha - u^\alpha$  aparece. En particular (3.3.30) toma la forma:  $\delta Z \equiv Z(\hat{u}) - Z(u) = a_1 \hat{\epsilon} O_1 + a_2 \hat{\epsilon}^2 O_2 + \dots$ , (véanse los teoremas 2-4 que siguen).

$$\delta\rho \equiv \rho(\hat{u}) - \rho(u) = \hat{\epsilon}O_1 \quad (3.3.35)$$

$$\delta h^\alpha \equiv h^\alpha(\hat{u}) - h^\alpha(u) = -\hat{\epsilon}^\alpha \quad (3.3.36)$$

$$\delta n_A \equiv n_A(\hat{u}) - n_A(u) = \hat{\epsilon}O_1, \quad (3.3.37)$$

$$\delta P \equiv P(\hat{u}) - P(u) = \hat{\epsilon}O_1, \quad (3.3.38)$$

$$\delta\tau^{\alpha\beta} \equiv \tau^{\alpha\beta}(\hat{u}) - \tau^{\alpha\beta}(u) = \hat{\epsilon}O_1. \quad (3.3.39)$$

$$\delta\hat{j}_A^\alpha \equiv \hat{j}_A^\alpha(\hat{u}) - \hat{j}_A^\alpha(u) = \hat{\epsilon}^\alpha. \quad (3.3.40)$$

En este teorema las expresiones  $\hat{j}_A^\alpha(u)$ ,  $A \in \{1, 2, \dots, n\}$  representan los  $n$ -drifts de las  $n$ -corrientes de partículas definidas por  $\hat{j}_A^\alpha(u) = \Delta^\alpha_\beta(u)J_A^\beta$ ,  $A \in \{1, 2, \dots, n\}$ . La notación  $\hat{j}_A^\alpha(u)$  por estos «drifts» aparece en la formulación original de este teorema en [49], pero en este capítulo frecuentemente denotamos a estos «drifts» por  $n_A^\alpha(u) = \Delta^\alpha_\beta(u)J_A^\beta$ ,  $A \in \{1, 2, \dots, n\}$  (véase las descomposiciones en (3.3.25) y en (3.3.34)). Un caso especial es en donde  $u^\alpha$  corresponde con el marco de energía, denotamos estos «drifts» vía  $\nu_A^\alpha = \Delta^\alpha_\beta(u_E)J_A^\beta$ ,  $A \in \{1, 2, \dots, n\}$ .

**Teorema 3** *Bajo las mismas suposiciones como en el teorema previo, el 4-vector<sup>24</sup>*

$$q^\alpha(u) = h^\alpha(u) - \frac{\rho(u) + P(u)}{n(u)}n^\alpha(u), \quad (3.3.41)$$

es marco-independiente i.e.

$$\delta q^\alpha \equiv q^\alpha(\hat{u}) - q^\alpha(u) = a_2O_2 + \dots \quad (3.3.42)$$

**Teorema 4** *Bajo las mismas suposiciones como en los dos teoremas previos, las variables termodinámicas*

<sup>24</sup>Este vector espacial  $q^\alpha$  en (3.3.41), se puede interpretar como flujo de calor, ya que relativo al marco de Eckart este  $q^\alpha(u)$  se reduce al flujo de energía  $h^\alpha(u)$ , mientras que relativo al marco de energía especificado por  $u_E$ , este  $q^\alpha(u_E)$  es proporcional al flujo de partículas  $\nu^\alpha(u_E)$ . Para el caso de mezcla de fluidos,  $q^\alpha(u)$  es reemplazado por  $q_A^\alpha(u) = h^\alpha(u) - \frac{\rho(u)+P(u)}{n_A(u)}n_A^\alpha(u)$  que tiene la propiedad de que si  $u^\alpha$  se identifica con uno de los  $u_A$  que satisface que  $J^\alpha = n_A u_A^\alpha$ , entonces  $q_A^\alpha(u_A) = h^\alpha(u_A)$ . Para una mezcla de fluidos, los flujos de partículas relativos al marco de energía denotadas por  $\nu_A^\alpha$  son variables más convenientes (véase relación (3.3.71) más adelante).

$$s(u), \quad T(u), \quad \Theta_A(u), \quad A \in \{1, \dots, n\}, \quad (3.3.43)$$

bajo cambio del marco a primer orden i.e.

$$u^\alpha \rightarrow \hat{u}^\alpha = u^\alpha + \hat{\epsilon}^\alpha, \quad (3.3.44)$$

cambian de la siguiente manera:

$$\delta s \equiv s(\hat{u}) - s(u) = \hat{\epsilon} O_1, \quad (3.3.45)$$

$$\delta T \equiv T(\hat{u}) - T(u) = \hat{\epsilon} O_1, \quad (3.3.46)$$

$$\delta \Theta_A \equiv \Theta_A(\hat{u}) - \Theta_A(u) = \hat{\epsilon} O_1, \quad (3.3.47)$$

Las demostraciones de estos teoremas se encuentran en el apéndice de este capítulo.

Estos teoremas implican que las variables termodinámicas como  $(\rho(u), n(u), \dots)$  bajo el cambio de marco  $u^\alpha \rightarrow \hat{u}^\alpha$  escrito por la transformación exacta en (3.3.31) cambian de una manera complicada. Pero bajo el cambio de marco  $u^\alpha \rightarrow \hat{u}^\alpha$  escrito en (3.3.32) cambian de manera simple. Existen variables como  $\rho(u), \tau^{\alpha\beta}(u)$ , etc., que bajo cambio de marco de primer orden i.e. cambio de marco escritos por (3.3.32) cambian a orden  $\hat{\epsilon} O_1$  i.e. se quedan invariantes a orden  $O_1$ , mientras que hay variables como  $h^\alpha(u)$  y el flujo de partículas  $\hat{j}^\alpha(u)$  que cambian a orden  $\hat{\epsilon}$ .

El contenido de los tres teoremas, «racionaliza» la libertad de norma al respecto de los cambios de marco que caracterizan a la teoría transitoria. Uno necesita expresar a las ecuaciones fenomenológicas en términos de variables que son invariantes a orden  $O_1$  bajo cambio de marco, y como veremos más adelante bajo elecciones particulares del término  $Q^\alpha$  en la relación fundamental (3.3.4), esto es factible.

Los teoremas anteriores, nos permiten en varias ocasiones eliminar la dependencia explícita de la 4-velocidad  $u^\alpha$  que especifica el marco de referencia de las variables termodinámicas. Por ejemplo, si escribimos la representación de  $S^\alpha$  en (3.3.28) para el caso de un fluido simple y eliminamos el flujo de energía  $h^\alpha(u)$  en favor del flujo de calor  $q^\alpha(u)$ , entonces  $S^\alpha$  se reduce a

$$S^\alpha = \frac{s}{n} J^\alpha + \frac{q^\alpha}{T} - Q^\alpha, \quad J^\alpha = n u^\alpha + n^\alpha. \quad (3.3.48)$$

Entonces, si por el momento ignoramos el término  $Q^\alpha$ , la fórmula para la entropía  $S^\alpha$  resultante es invariante a orden  $O_1$  bajo cambio de marco, sujeto a que despreciemos las desviaciones  $O_2, O_3, \dots$  del equilibrio. Debido a tal invarianza, en varias ocasiones escribimos  $s, n, \dots$  en vez de la forma más apropiada  $s(u), n(u)$ , etc teniendo en mente que la empleada cuatro velocidad  $u^\mu$  caya la interior del "cono" que hemos definido. Esta invarianza es una de los virtudes de la teoría transitoria, y más adelante discutimos sobre esta propiedad.

Entramos en seguida al problema central de la teoría i.e. la implementación de la segunda ley imponiendo la desigualdad  $\nabla_\alpha S^\alpha \geq 0$  sobre el flujo  $S^\alpha$  escrito en (3.3.4).

Para esto, formamos la divergencia de (3.3.4), y en vista de las leyes de conservación satisfechas por las variables primarias, obtenemos

$$\nabla_\alpha S^\alpha = \nabla_\alpha (P(\Theta_A, \beta^\mu) \beta^\alpha) - \sum_{A=1}^n J_A^\alpha (\nabla_\alpha \Theta_A) - T^{\alpha\beta} \nabla_\alpha \beta_\beta - \nabla_\alpha Q^\alpha, \quad (3.3.49)$$

y si apelamos a la identidad (3.2.16), escrita como

$$\nabla_\alpha (P(\Theta_A, \beta^\mu) \beta^\alpha) = \sum_{A=1}^n J_{(0)A}^\alpha \nabla_\alpha \Theta_A + T_{(0)}^{\alpha\beta} \nabla_\alpha \beta_\beta. \quad (3.3.50)$$

re-escribimos (3.3.49) de la siguiente forma:

$$\nabla_\alpha S^\alpha = \sum_{A=1}^n (J_{(0)A}^\alpha - J_A^\alpha) \nabla_\alpha \Theta_A + (T_{(0)}^{\alpha\beta} - T^{\alpha\beta}) \nabla_\alpha \beta_\beta - \nabla_\alpha Q^\alpha. \quad (3.3.51)$$

Insertando las descomposiciones por  $(J_{(0)A}^\alpha, T_{(0)}^{\alpha\beta})$  y  $(J_A^\alpha, T^{\alpha\beta})$  dadas en (3.2.2) y (3.3.24, 3.3.25) en la relación (3.3.51), representamos  $\nabla_\alpha S^\alpha$  en la siguiente forma:

$$\nabla_\alpha S^\alpha = W - \nabla_\alpha Q^\alpha \quad (3.3.52)$$

con  $W$  dado por:

$$\begin{aligned}
W &= \sum_{A=1}^n (J_{(0)A}^\alpha - J_A^\alpha) \nabla_\alpha \Theta_A + (T_{(0)}^{\alpha\beta} - T^{\alpha\beta}) \nabla_\alpha \beta_\beta \\
&= - \sum_{A=1}^n n_A^\alpha(u) \nabla_\alpha \Theta_A - \left( h^\alpha(u) u^\beta + h^\beta(u) u^\alpha + \tau^{\alpha\beta}(u) \right) \nabla_\alpha \beta_\beta \\
&= - \sum_{A=1}^n n_A^\alpha(u) \nabla_\alpha \Theta_A - \left( h^\alpha(u) u^\beta + h^\beta(u) u^\alpha + \tau^{\alpha\beta}(u) \right) \left( \frac{1}{T(u)} \nabla_\alpha u_\beta + u_\beta \nabla_\alpha \left( \frac{1}{T(u)} \right) \right) \\
&= h^\alpha(u) \left[ \nabla_\alpha \left( \frac{1}{T(u)} \right) - \frac{a_\alpha}{T(u)} \right] - \sum_{A=1}^n n_A^\alpha(u) \nabla_\alpha \Theta_A(u) - \frac{\tau^{\alpha\beta}}{T(u)} \nabla_\alpha u_\beta.
\end{aligned} \tag{3.3.53}$$

en donde  $a_\alpha = u^\beta \nabla_\beta u_\alpha$  representa la 4-aceleración de las curvas integrales del campo  $u^\alpha$  y al pasar a la última línea hemos tomado en cuenta que el tensor  $\tau^{\alpha\beta}$  es un tensor espacial.

Las fórmulas (3.3.52, 3.3.53) muestran que para implementar la segunda ley, lo cual es equivalente a derivar las ecuaciones fenomenológicas para la teoría, es necesario especificar la forma explícita del término  $Q^\alpha$  y en las secciones que vienen hacemos varias elecciones para este término.

### 3.3.1. Teorías de primer orden: Eckart y Landau-Lifshitz

Como hemos mencionado, el flujo de entropía  $S^\alpha$  escrito en (3.3.4), es una expresión bastante general e incorpora un número de teorías de fluidos desipativos. Una clase de estas teorías, son aquellas referidas como teorías de primer orden, que ya mencionamos previamente en el capítulo introductorio. En el contexto del flujo  $S^\alpha$  escrito en (3.3.4), estas teorías se generan tomando  $Q^\alpha = 0$ .

Por tal elección, la fórmula (3.3.48) implica que el flujo de entropía  $S^\alpha$  se reduce a:

$$S^\alpha = \frac{s}{n} J^\alpha + \frac{q^\alpha}{T}, \quad J^\alpha = n u^\alpha + n^\alpha, \tag{3.3.54}$$

en donde el primer término de  $S^\alpha$  describe el flujo de entropía debido al movimiento convectivo mientras que el segundo término es la contribución irreversible generada por el flujo de calor  $q^\alpha$ . Aunque este  $S^\alpha$  tiene una forma simple, no debemos perder de vista el hecho de que estamos tratando con estados de fluido que admiten disipación y conducción de calor, y en el lado derecho de (3.3.54) esta escondida la elección del marco en reposo  $u^\alpha$  (su impacto es obvio en la fórmula

por  $J^\alpha$  en (3.3.54)). Dependiendo de la elección del marco en reposo, estas teorías incluyen como casos particulares la teoría de Landau-Lifshitz y la teoría de Eckart y abajo, brevemente las analizamos.

### Teoría de Landau-Lifshitz (LL) por fluidos simples

La teoría de Landau-Lifshitz es una teoría de fluidos relativistas disipativos que fué desarrollada a finales de los años 1950 y es discutida con detalle en [59]. Para esta teoría, elegimos como marco en reposo  $u^\alpha$ , al único eigenvector temporal  $u_E$  del tensor de energía-momento  $T_{\alpha\beta}$  y por esta elección, la descomposición de los campos  $T^{\alpha\beta}$ ,  $J^\alpha$  en (3.3.24, 3.3.25) toman la forma:

$$J^\alpha = n_E u_E^\alpha + n_E^\alpha, \quad T^{\alpha\beta} = \rho_E u_E^\alpha u_E^\beta + (P + \pi)_E \Delta_E^{\alpha\beta} + \pi_E^{\alpha\beta}, \quad (3.3.55)$$

en donde hemos empleamos la siguiente notación:

$$n_E = n(u_E), \quad n_E^\alpha = n^\alpha(u_E), \quad \rho_E = \rho(u_E), \quad \Delta_E^{\alpha\beta} = \Delta^{\alpha\beta}(u_E), \quad etc. \quad (3.3.56)$$

que enfatizan la elección del marco. La expresión para la entropía  $S^\alpha$  se obtiene de (3.3.54) especificada en el marco de energía, la cual da

$$\begin{aligned} S^\alpha &= \frac{s(u_E)}{n(u_E)} J^\alpha + \frac{q^\alpha(u_E)}{T(u_E)}, & J^\alpha &= n(u_E) u_E^\alpha + n^\alpha(u_E) \\ &= \frac{s_E}{n_E} (n_E u_E^\alpha + n_E^\alpha) + \frac{q_E^\alpha}{T_E} = \frac{s_E}{n_E} \left[ n_E u_E^\alpha - \frac{n_E q_E^\alpha}{\rho_E + P_E} \right] + \frac{q_E^\alpha}{T_E} \\ &= s_E u_E^\alpha - \left[ \frac{s_E}{\rho_E + P_E} - \frac{1}{T_E} \right] q_E^\alpha \\ &= s_E u_E^\alpha + \frac{\Theta_E n_E}{(\rho + P)_E} q_E^\alpha. \end{aligned} \quad (3.3.57)$$

Sustituyendo las descomposiciones (3.3.55) en la fórmula (3.3.51) tomando a  $Q^\alpha = 0$  obtenemos

$$\begin{aligned}
\nabla_\alpha S^\alpha &= -n^\alpha \nabla_\alpha \Theta - (\pi \Delta^{\alpha\beta} + \pi^{\alpha\beta}) \nabla_\alpha \beta_\beta \\
&= -n^\alpha \nabla_\alpha \Theta - \frac{\pi}{T} \Delta^{\alpha\beta} \nabla_\alpha u_\beta - \frac{\pi^{\alpha\beta}}{T} \nabla_\alpha u_\beta \\
&= -n^\alpha \nabla_\alpha \Theta - \frac{\pi}{T} \nabla_\alpha u^\alpha - \frac{\pi^{\alpha\beta}}{T} \langle \nabla_\alpha u_\beta \rangle,
\end{aligned} \tag{3.3.58}$$

en donde arriba y en las fórmulas que siguen en esta sección, hemos escrito  $u^\alpha$ ,  $n$ , *etc.* en lugar de  $u_E^\alpha$ ,  $n_E$ , *etc.*

Si empleamos al vector flujo de calor  $q^\alpha$  definido en (3.3.41) con  $h^\alpha(u_E) = 0$ , encontramos que

$$T \nabla_\alpha S^\alpha = \frac{nq^\alpha}{(\rho + P)} T \nabla_\alpha \Theta - \pi \nabla_\alpha u^\alpha - \pi^{\alpha\beta} \langle \nabla_\alpha u_\beta \rangle \geq 0, \tag{3.3.59}$$

y del lado derecho se ve que la implementación de la segunda ley en el contexto de relaciones lineales entre "flujos" y "fuerzas" que discutimos a session (2.3.1), nos lleva a las relaciones fenomenológicas

$$q^\alpha = \kappa \frac{n}{\rho + P} T^2 \Delta^{\alpha\beta} \nabla_\beta \Theta, \quad \pi = -\frac{1}{3} \zeta_v \nabla_\alpha u^\alpha, \quad \pi_{\alpha\beta} = -\zeta \langle \nabla_\alpha u_\beta \rangle, \tag{3.3.60}$$

en donde hemos introducido los coeficientes  $(\kappa, \zeta_v, \zeta)$  que se interpretan como el coeficiente de conductividad térmica y los coeficientes de bulk y shear respectivamente<sup>25</sup>. Pasemos ahora a la teoría de Eckart y veamos la diferencia entre las expresiones derivadas.

### Teoría de Eckart por fluidos simples

La teoría de Eckart<sup>26</sup> [27], se genera eligiendo como marco en reposo al 4-vector de velocidad  $u_N$ , que obedece  $J^\alpha = nu_N^\alpha$ . Con esta elección, las variables primarias  $(T^{\alpha\beta}, J^\alpha)$  en (3.3.24, 3.3.25) toman la forma:

<sup>25</sup>Los corchetes angulares en (3.3.60) y en ecuaciones previas y posteriores, denotan la parte simétrica, puramente espacial, sin traza del tensor

$$\langle A_{\alpha\beta} \rangle \equiv \frac{1}{2} \Delta^\lambda_\alpha \Delta^\mu_\beta \left( A_{\lambda\mu} + A_{\mu\lambda} - \frac{2}{3} \Delta_{\lambda\mu} \Delta^{\rho\sigma} A_{\rho\sigma} \right). \tag{3.3.61}$$

<sup>26</sup>Más adelante, en el capítulo 5, damos una introducción más detallada de esta teoría con énfasis en la propiedad de que la teoría de Eckart puede representarse como una teoría de fluidos disipativos del tipo divergente.

$$J^\alpha = n_N u_N^\alpha, \quad T^{\alpha\beta} = \rho_N u_N^\alpha u_N^\beta + (P + \pi)_N \Delta_N^{\alpha\beta} + h^\alpha u_N^\beta + h^\beta u_N^\alpha + \pi_N^{\alpha\beta}, \quad (3.3.62)$$

mientras que para el flujo de entropía  $S^\alpha$ , se ve de inmediato de (3.3.54) que tiene la forma:

$$S^\alpha = s_N u_N^\alpha + \frac{q_N^\alpha}{T_N}, \quad (3.3.63)$$

y sustituyendo (3.3.62) en (3.3.51), con  $Q^\alpha = 0$  (removiendo el subíndice  $N$  por simplicidad), se muestra que

$$\nabla_\alpha S^\alpha = -h^\alpha \left[ \frac{a_\alpha}{T} - \nabla_\alpha \left( \frac{1}{T} \right) \right] - \frac{\pi}{T} \nabla_\alpha u^\alpha - \frac{\pi^{\alpha\beta}}{T} \langle \nabla_\alpha u_\beta \rangle. \quad (3.3.64)$$

En esta teoría  $q^\alpha(u_N^\alpha) = h^\alpha$  debido a que  $n^\alpha(u_N^\alpha) = 0$ , por tanto, se concluye de arriba que las ecuaciones fenomenológicas en el contexto lineal, tienen la forma:

$$q^\alpha = -\kappa \Delta^{\alpha\beta} \left( \frac{\nabla_\beta T}{T} + a_\beta \right), \quad \pi = -\frac{1}{3} \zeta_\nu \nabla_\nu u^\alpha, \quad \pi_{\alpha\beta} = -2\zeta \langle \nabla_\alpha u_\beta \rangle. \quad (3.3.65)$$

en donde los coeficientes ( $\kappa, \zeta_\nu, \zeta$ ) tienen el mismo significado como en el caso de la teoría de Landau-Lifshitz. Aunque las teorías de Landau-Lifshitz y de Eckart son teorías simples, sin embargo son patológicas. Por ejemplo, las perturbaciones pequeñas alrededor de los estados de equilibrio exhiben una velocidad de propagación infinita, no existe un problema de valores iniciales bien planteado para fluidos rotantes y las configuraciones en equilibrio son inestables.

### 3.3.2. Teoría de segundo orden: La aproximación hidrodinámica

En esta sección, consideramos la teoría de segundo orden generada por una elección particular del término  $Q^\alpha$  en (3.3.4) el cual genera la termodinámica transitoria de Israel-Stewart (IS).

Como hemos mencionado, motivados por la teoría cinética relativista de gases diluidos Israel y Stewart, propusieron que por un fluido simple, el flujo de entropía  $S^\alpha$  (y por lo tanto  $Q^\alpha$ ) en (3.3.4), debería ser independiente de los gradientes<sup>27</sup>

<sup>27</sup>Si vemos a  $S^\alpha$  como una relación constitutiva, la dependencia de  $S^\alpha$  de las variables básicas  $J^\alpha, T^{\alpha\beta}$  debe ser local.

de  $J^\alpha$  y de  $T^{\alpha\beta}$  y ser cuadrática en las perturbaciones  $(\delta J^\alpha, \delta T^{\alpha\beta})$  de un estado de equilibrio del fondo.

Eligiendo una 4-velocidad  $u^\alpha$  arbitraria pero al interior del «cono» formado por  $(u_E^\alpha, u_N^\alpha)$ , y expandiendo las variables primarias  $(J^\alpha, T^{\alpha\beta})$  como en (3.3.24, 3.3.25), el ansatz de Israel y Stewart es que  $Q^\alpha(u)$  debe ser cuadrático en las variables  $\pi(u), \pi^{\alpha\beta}(u), h^\alpha(u)$  y en el vector de flujo de calor  $q^\alpha(u)$ , el cual está definido vía

$$q^\alpha(u) = h^\alpha(u) - \frac{\rho(u) + P(u)}{n(u)} n^\alpha(u), \quad (3.3.66)$$

(véase (3.3.41)). Ellos propusieron que por un fluido simple,  $Q^\alpha(u)$  tiene la forma<sup>28</sup>

$$Q^\alpha(u) = \frac{1}{2} u^\alpha [\beta_0 \pi^2 + \beta_1 q^\beta q_\beta + \beta_2 \pi^{\beta\gamma} \pi_{\beta\gamma}] - \alpha_0 \pi q^\alpha - \alpha_1 \pi^{\alpha\beta} q_\beta + R^\alpha(u), \quad (3.3.67)$$

$$R^\alpha(u) = \frac{1}{T(\rho + P)} \left[ \frac{1}{2} u^\alpha h^\beta h_\beta + \tau^{\alpha\beta} h_\beta \right], \quad (3.3.68)$$

en donde  $\alpha_j, j \in \{0, 1\}$ ,  $\beta_i, i \in \{0, 1, 2\}$  son coeficientes indeterminados funciones de  $(\rho(u), n(u))$  mientras que  $R^\alpha(u)$  contiene el flujo de energía  $h^\alpha(u)$  y no tiene funciones libres<sup>29</sup>.

Para una mezcla de fluidos,  $Q^\alpha(u)$  tiene una forma ligeramente diferente de la que tiene en (3.3.67). Para una mezcla, es conveniente eliminar el flujo de calor invariante  $q^\alpha(u)$  en favor de los  $n$ -flujos<sup>30</sup> (« $n$ -drifts» en inglés) relativos al marco de energía. Estos flujos (drifts) están denotados por  $\nu_A^\alpha$ , y son definidos según

$$\nu_A^\alpha \equiv \Delta^\alpha_{\beta}(u_E) J_A^\beta(u_E) = n_A^\alpha(u_E), \quad A \in \{1, 2, 3, \dots, n\}, \quad (3.3.69)$$

en donde  $u_E$  especifica el marco de energía. En términos de los  $\nu_A^\alpha$ , la forma de  $Q^\alpha(u)$  que elige Israel en [49], es:

<sup>28</sup>En las siguientes fórmulas para  $Q^\alpha(u)$ , por conveniencia tipográfica evitamos escribir explícitamente  $\pi(u), \pi^{\alpha\beta}(u), \dots$ , etc. aunque escribimos  $Q^\alpha(u)$  para denotar al marco que estamos empleando.

<sup>29</sup>Como veremos más adelante, la ausencia de funciones libres en la expresión para  $R^\alpha(u)$  no es un accidente. La razón fundamental para tal ausencia tiene que ver con el requisito de que  $Q^\alpha(u)$  debe poseer propiedades específicas bajo cambio de marco a primer orden.

<sup>30</sup>Este reemplazamiento es bastante importante para el tratamiento de una mezcla de fluidos y la razón principal la veremos más adelante.

$$Q^\alpha(u) = \pi \sum_A a_0^A \nu_A^\alpha + \pi^\alpha_\beta \sum_A a_1^A \nu_A^\beta + \frac{1}{2} u^\alpha \left( \beta_0 \pi^2 + \sum_{A,B} \beta_1^{AB} \nu_A^\beta \nu_{B\beta} + \beta_2 \pi_{\gamma\delta} \pi^{\gamma\delta} \right) + R^\alpha, \quad (3.3.70)$$

arriba la suma se extiende sobre todas la  $n$ -especies de partículas y los coeficientes  $(a_0^A, a_1^A, \beta_0, \beta_1^{AB}, \beta_2)$  con  $A, B \in \{1, 2, \dots, n\}$  son funciones indeterminadas de  $\rho$  y de  $n_A$ , mientras que el termino  $R^\alpha$  en (3.3.70) conserva su forma como en (3.3.68).

A continuación ofrecemos algunos comentarios sobre la estructura del término  $Q^\alpha(u)$  en (3.3.67, 3.3.70), y sobre el ansatz de Israel-Stewart. Específicamente, nos preguntamos:

- a) ¿Se pueden hacer elecciones alternativas para  $Q^\alpha(u)$  ?,  
 b) ¿Porqué en (3.3.70) se prefieren a los  $n$ -flujos (drifts)  $\nu_A^\mu$  definidos vía  $\nu_A^\mu = n_A^\mu(u_E)$ ,  $A \in (1, 2, \dots, n)$  en vez de

$$n_A^\mu(u) = \Delta^\mu_\nu(u) J_A^\nu, \quad A \in (1, 2, \dots, n)?, \quad (3.3.71)$$

i.e. ¿qué pasaría si en vez de (3.3.70) se postula

$$Q^\alpha(u) = \pi \sum_A a_0^A n_A^\alpha + \pi^\alpha_\beta \sum_A a_1^A n_A^\beta + \frac{1}{2} u^\alpha \left( \beta_0 \pi^2 + \sum_{A,B} \beta_1^{AB} n_A^\beta n_{B\beta} + \beta_2 \pi_{\gamma\delta} \pi^{\gamma\delta} \right) + R^\alpha?. \quad (3.3.72)$$

Por un fluido simple, Israel y Stewart postulan que  $Q^\alpha(u)$  en (3.3.67) depende del flujo de calor invariante  $q^\alpha(u)$  definido en (3.3.66) que es  $O_1$  invariante bajo cambio de marco.

- c) ¿Puede  $q^\alpha$  en (3.3.67) ser remplazada por  $n^\alpha(u)$ ?

Finalmente observamos: de acuerdo al ansatz de Israel-Stewart, la forma más general del término  $R^\alpha$  que es cuadrático en desviaciones del equilibrio, debería tener la forma:

$$T(\rho + P)R^\alpha(u) = \left[ \frac{1}{2}\gamma_1 u^\alpha h^\beta h_\beta + \gamma_2 \tau^{\alpha\beta} h_\beta + \gamma_3 \pi h^\alpha \right], \quad (3.3.73)$$

con  $\gamma_1, \gamma_2$  y  $\gamma_3$  coeficientes arbitrarios.

d) ¿Por qué razón, los coeficientes  $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$  en el término  $R^\alpha$  dados en Israel [49] e Israel-Stewart [50] tienen los valores

$$(\gamma_1 = \gamma_2 = 1, \gamma_3 = 0)? \quad (3.3.74)$$

La respuesta a las preguntas hechas arriba, parecen recaer en las propiedades de transformación del término  $Q^\alpha(u)$  bajo cambio a primer orden del marco de fondo i.e. cambios del marco descritos por:

$$u^\alpha \rightarrow \hat{u}^\alpha = u^\alpha + \epsilon^\alpha, \quad \epsilon^\alpha \leq O_1. \quad (3.3.75)$$

Las elecciones hechas por Israel e Israel-Stewart para el término  $Q^\alpha(u)$  se han motivado por el deseo de que la teoría resultante sea  $O_1$  invariante bajo los cambios de marcos descritos en (3.3.75), y en seguida examinamos la variación del término  $Q^\alpha(u)$  bajo este cambio de marco. Por razones de generalidad construimos la variación de  $Q^\alpha$  escrito en (3.3.70).

Observando el lado derecho de (3.3.70), podemos darnos cuenta de que la única parte que no es marco-independiente a orden  $O_2$ , es el término  $R^\alpha$ . Para ver esta propiedad, reescribimos  $Q^\alpha(u)$  en (3.3.70) en la forma

$$Q^\alpha(u) = K^\alpha(u) + R^\alpha(u), \quad (3.3.76)$$

con

$$K^\alpha(u) = \pi \sum_A a_0^A \nu_A^\alpha + \pi^\alpha_\beta \sum_A a_1^A \nu_A^\beta + \frac{1}{2} u^\alpha \left( \beta_0 \pi^2 + \sum_{A,B} \beta_1^{AB} \nu_A^\gamma \nu_{B\gamma} + \beta_2 \pi_{\gamma\delta} \pi^{\gamma\delta} \right). \quad (3.3.77)$$

Bajo el cambio de marco escrito en (3.3.75), se obtienen las siguientes variaciones:

$$\delta K^\alpha \equiv K^\alpha(\hat{u}) - K^\alpha(u) = \epsilon O_2. \quad (3.3.78)$$

$$\delta R^\alpha \equiv R^\alpha(\hat{u}) - R^\alpha(u) = -\frac{1}{T} \left[ \gamma_1 u^\alpha h^\beta(u) + \gamma_2 \tau^{\alpha\beta}(u) + \gamma_3 \pi(u) g^{\alpha\beta} \right] \epsilon_\beta + \epsilon O_1, \quad (3.3.79)$$

$$\delta Q^\alpha \equiv Q^\alpha(\hat{u}) - Q^\alpha(u) = -T^{-1} [\gamma_1 u^\alpha h^\beta + \gamma_2 \tau^{\alpha\beta} + \gamma_3 \pi g^{\alpha\beta}] \epsilon_\beta + \epsilon O_2, \quad (3.3.80)$$

en (3.3.79) hemos empleado la forma general de  $R^\alpha(u)$  escrita en (3.3.73). A continuación mostramos estas relaciones importantes.

Para la demostración de (3.3.78) empezamos de la forma de  $K^\alpha(u)$  en (3.3.77) y para construir  $\delta K$ , es útil recordar que por estados cercanos al equilibrio, los  $n$ -flujos (drifts)  $\nu_A^\alpha = n_A^\alpha(u_E)$ ,  $A \in \{1, 2, \dots, n\}$  y el tensor de presión viscosa  $\tau^{\alpha\beta}$  obedecen

$$\nu_A^\alpha = n_A(u_E) O_1, \quad A \in (1, 2, \dots, n), \quad \tau^{\alpha\beta}(u_E) = \rho(u_E) O_1, \quad (3.3.81)$$

y durante el proceso de variación tratamos a los coeficientes  $a's$  y  $\beta's$  en (3.3.77) como constantes<sup>31</sup>.

Bajo estas condiciones, y apelando a la linealidad del proceso de variación, tenemos:

$$\delta(\pi \nu_A^\alpha) \equiv \pi(\hat{u}) \nu_A^\alpha - \pi(u) \nu_A^\alpha = (\pi(u) + \epsilon O_1) \nu_A^\alpha - \pi(u) \nu_A^\alpha = \epsilon O_1 \nu_A^\alpha = \epsilon O_2, \quad (3.3.82)$$

y de manera similar,

$$\delta(\pi^\alpha_\beta \nu_A^\beta) \equiv \pi^\alpha_\beta(\hat{u}) \nu_A^\beta - \pi^\alpha_\beta(u) \nu_A^\beta = (\pi^\alpha_\beta(u) + \epsilon O_1) \nu_A^\beta - \pi^\alpha_\beta(u) \nu_A^\beta = \epsilon O_2, \quad (3.3.83)$$

mientras que

$$\begin{aligned} \delta(u^\alpha \pi^2) &\equiv \hat{u}^\alpha \pi^2(\hat{u}) - u^\alpha \pi^2(u) = (u^\alpha + \epsilon^\alpha) \pi^2(\hat{u}) - u^\alpha \pi^2(u) \\ &= u^\alpha \pi^2(\hat{u}) - u^\alpha \pi^2(u) + \epsilon^\alpha \pi^2(\hat{u}) = u^\alpha (\pi^2(\hat{u}) - \pi^2(u)) + \epsilon^\alpha \pi^2(\hat{u}) \\ &= u^\alpha [\pi(\hat{u}) - \pi(u)] [\pi(\hat{u}) + \pi(u)] + \epsilon O_2 \\ &= \epsilon O_2. \end{aligned} \quad (3.3.84)$$

De este análisis, eventualmente concluimos que bajo el cambio de marco escrito por (3.3.75) tenemos:  $\delta K^\alpha = \epsilon O_2$ .

---

<sup>31</sup>Podemos considerar sus variaciones también, pero sus contribuciones dan términos mayores a  $\epsilon O_2$ .

Ahora, consideramos la variación del término:

$$T(\rho + P)R^\alpha(u) = \left[ \frac{1}{2}\gamma_1 u^\alpha h^\beta h_\beta + \gamma_2 \tau^{\alpha\beta} h_\beta + \gamma_3 \pi h^\alpha \right]. \quad (3.3.85)$$

Bajo el cambio de marco escrito en (3.3.75) tenemos:

$$\begin{aligned} \delta R^\alpha &= \hat{A} \left[ \frac{1}{2}\gamma_1 \hat{u}^\alpha h^\beta(\hat{u}) h_\beta(\hat{u}) + \gamma_2 \tau^{\alpha\beta}(\hat{u}) h_\beta(\hat{u}) + \gamma_3 \pi(\hat{u}) h^\alpha(\hat{u}) \right] \\ &- A \left[ \frac{1}{2}\gamma_1 u^\alpha h^\beta(u) h_\beta(u) + \gamma_2 \tau^{\alpha\beta}(u) h_\beta(u) + \gamma_3 \pi(u) h^\alpha(u) \right]. \end{aligned} \quad (3.3.86)$$

en donde  $A$  y  $\hat{A}$  están definidas por:

$$\hat{A} = \frac{1}{T(\hat{u}) (\rho(\hat{u}) + P(\hat{u}))}, \quad A = \frac{1}{T(u) (\rho(u) + P(u))}. \quad (3.3.87)$$

Tomando en cuenta los teoremas 2, 3 y 4, y en particular las variaciones

$$\delta h^\alpha = h^\alpha(\hat{u}) - h^\alpha(u) = -(\rho + P)\epsilon^\alpha, \quad \delta u^\alpha = \hat{u}^\alpha - u^\alpha = \epsilon^\alpha, \quad (3.3.88)$$

notemos primero que

$$\begin{aligned} \hat{u}^\alpha \hat{h}^\beta \hat{h}_\beta &= (u^\alpha + \epsilon^\alpha) \left[ h^\beta(u) - (\rho(u) + P(u))\epsilon^\beta \right] [h_\beta(u) - (\rho(u) + P(u))\epsilon_\beta] \\ &= u^\alpha h^\beta h_\beta - u^\alpha [(\rho(u) + P(u)) h^\beta \epsilon_\beta + O(\epsilon)^2] \end{aligned} \quad (3.3.89)$$

$$\begin{aligned} \hat{\tau}^{\alpha\beta}(\hat{u}) \hat{h}_\beta(\hat{u}) &= (\tau^{\alpha\beta}(u) + \epsilon O_1) [h_\beta(u) - (\rho(u) + P(u))\epsilon_\beta] \\ &= \tau^{\alpha\beta}(u) h_\beta(u) - (\rho(u) + P(u)) \tau^{\alpha\beta} \epsilon_\beta + \epsilon O_1 + \epsilon^2 O_1, \end{aligned} \quad (3.3.90)$$

y de una fórmula similar por  $\pi h^\alpha$ , se sigue que

$$\delta R^\alpha = -\frac{1}{T} \left[ \gamma_1 u^\alpha h^\beta(u) + \gamma_2 \tau^{\alpha\beta}(u) + \gamma_3 \pi(u) g^{\alpha\beta} \right] \epsilon_\beta + \epsilon O_1. \quad (3.3.91)$$

Llegamos a la forma final teniendo en mente que  $\hat{A} = A + O_2$ . Esta variación combinada con  $\delta K^\alpha = \epsilon O_2$ , implica la fórmula (3.3.80).

Regresamos ahora para discutir la estructura de  $R^\alpha(u)$  escrita (3.3.68) versus la forma de  $R^\alpha(u)$  escrita en (3.3.73) y la pregunta es: ¿Porqué el empleo de (3.3.68) y no el de (3.3.73)?

Para analizar esta pregunta, notemos que la variación  $\delta Q^\alpha$  de  $Q^\alpha$  en (3.3.80) es una identidad i.e. válida para todos los valores de  $\gamma_i$ ,  $i \in (1, 2, 3)$ , mientras que la variación  $\delta Q^\alpha$  debe ser consistente con la variación que se sigue de la relación fundamental (3.3.4) (la cual re-escribimos aquí para la conveniencia del lector):

$$S^\alpha = P(\Theta_A, \beta^\mu)\beta^\alpha - \sum_{A=1}^n \Theta_A J_A^\alpha - \beta_\lambda T^{\lambda\alpha} - Q^\alpha(\delta J_A^\mu, \delta T^{\lambda\mu}, X_{(i)}^{\mu\nu\dots}).$$

Como mostramos en seguida, la respuesta a la pregunta que planteamos viene después de que construimos la variación  $\delta Q^\alpha$  que es consistente con esta relación fundamental.

Para construir esta variación, recordamos que en la sección 3.3 hemos mostrado que bajo cambios infinitesimales  $\delta\Theta_A$ ,  $A \in \{1, 2, \dots, n\}$  y  $\delta\beta^\alpha$  en los parámetros  $(\Theta_A, \beta^\mu)$  que especifican el estado de equilibrio de fondo que aparece en (3.3.2), producen un cambio en  $Q^\alpha(u)$  escrito por:

$$Q'^\alpha = Q^\alpha - \sum_{A=1}^n (J_A^\alpha - J_{(0)A}^\alpha)\delta\Theta_A - (T^{\alpha\lambda} - T_{(0)}^{\alpha\lambda})\delta\beta_\lambda, \quad (3.3.92)$$

(véase (3.3.13)), y en seguida usaremos esta fórmula para evaluar la variación  $\delta Q^\alpha$  de  $Q^\alpha(u)$  bajo el cambio de marco escrito por (3.3.75).

Para esto, sea  $u^\alpha$  la 4-velocidad que entra en la expresión para  $Q^\alpha(u)$  mediante las («fitting conditions») condiciones en (3.3.14). Como hemos visto, esta  $u^\alpha$  puede considerarse como la 4-velocidad que define el marco en reposo del estado de equilibrio de fondo especificado por:  $\Theta_A(u), \beta^\alpha = T^{-1}(u)u^\alpha$ ,  $A \in \{1, 2, \dots, n\}$ .

Sea ahora el cambio de marco en reposo  $u^\alpha$  al nuevo marco especificado por  $\hat{u}^\alpha$  descrito por (3.3.75) i.e.

$$u^\alpha \rightarrow \hat{u}^\alpha = u^\alpha + \epsilon^\alpha, \quad \epsilon^\alpha \leq O_1.$$

Bajo este cambio de marco, los parámetros  $(\Theta_A, \beta^\alpha)$ ,  $A \in \{1, 2, \dots, n\}$  cambian de acuerdo con los teoremas 2, 3 y 4 como

$$\delta\Theta_A \equiv \Theta_A(\hat{u}) - \Theta_A(u) = \epsilon O_1, \quad \delta\beta^\alpha = \frac{\epsilon^\alpha}{T(u)} + u^\alpha \delta\left(\frac{1}{T(u)}\right) = \frac{\epsilon^\alpha}{T(u)} + \epsilon O_1. \quad (3.3.93)$$

Sustituyendo estas variaciones en (3.3.92) llegamos a:

$$\delta Q^\alpha \equiv Q^\alpha(\hat{u}) - Q^\alpha(u) = -(T^{\alpha\beta} - T_{(0)}^{\alpha\beta}) \frac{\epsilon_\beta}{T(u)} + \epsilon O_2. \quad (3.3.94)$$

Evaluando el lado derecho tomando en cuenta que

$$\begin{aligned} T^{\alpha\beta} &= \rho(u)u^\alpha u^\beta + P(u)\Delta^{\alpha\beta}(u) + h^\alpha(u)u^\beta + h^\beta(u)u^\alpha + \tau^{\alpha\beta}(u), \\ T_{(0)}^{\alpha\beta} &= \rho(u)u^\alpha u^\beta + P(u)\Delta^{\alpha\beta}(u), \end{aligned} \quad (3.3.95)$$

se sigue que

$$T(u)\delta Q^\alpha = - \left[ u^\beta h^\alpha + \tau^{\alpha\beta} \right] \epsilon_\beta + \epsilon O_2. \quad (3.3.96)$$

Una comparación entre esta variación con la variación mostrada en (3.3.80), fija a los coeficientes  $\gamma_i$  a los valores

$$\gamma_1 = \gamma_2 = 1, \quad \gamma_3 = 0, \quad (3.3.97)$$

y con estos valores, tenemos finalmente la forma de  $Q^\alpha$  usada por Israel [49] e Israel-Stewart [50] en la aproximación hidrodinámica.

En resumen, vemos que las propiedades de transformación del término  $Q^\alpha(u)$  bajo cambios a primer orden en el marco en reposo fijan a los coeficientes libres  $\gamma_i$ , que aparecen en (3.3.73). Desafortunadamente, no hay un método conocido para fijar a los otros coeficientes  $a's$  y  $\beta's$  que aparecen en el término  $Q^\alpha$  mostrado en (3.3.67) o en (3.3.70). Por tanto, la aproximación hidrodinámica de Israel-Stewart para un fluido simple consiste en elegir el término  $Q^\alpha$  como en (3.3.67) mientras que para una mezcla se debe elegir  $Q^\alpha$  como en (3.3.70), dejando a los coeficientes  $\alpha's$  y  $\beta's$  como funciones libres.

$$Q^\alpha(u) = \frac{1}{2}u^\alpha \left[ \beta_0\pi^2 + \beta_1q^\nu q_\nu + \beta_2\pi^{\lambda\nu}\pi_{\lambda\nu} \right] - \alpha_0\pi q^\alpha - \alpha_1\pi^{\alpha\beta}q_\beta + R^\alpha, \quad (3.3.98)$$

con  $R^\alpha$  dado por

$$R^\alpha(u) = \frac{1}{T(\rho + P)} \left[ \frac{1}{2}u^\alpha h^\beta h_\beta + \tau^{\alpha\beta} h_\beta \right],$$

y  $\alpha_j$ ,  $j \in (0, 1)$ ,  $\beta_i$ ,  $i \in (0, 1, 2)$  son coeficientes indeterminados. Para una mezcla de fluidos, el término correspondiente tiene la forma (3.3.70) con  $R^\alpha$  dado como

arriba. Con esta elección, estamos ahora listos para imponer la segunda ley dentro de esta teoría y derivar las ecuaciones fenomenológicas correspondientes.

Una vez que se decide la forma del término  $Q^\alpha$  en el flujo de entropía  $S^\alpha$ , ahora procedemos a derivar las ecuaciones fenomenológicas. Para esto regresamos a la expresión  $\nabla_\alpha S^\alpha = W - \nabla_\alpha Q^\alpha$  escrita en (3.3.52) con el término  $W$  para una mezcla de fluidos escrito en (3.3.53).

Una inspección de (3.3.52) en combinación de  $W$  en (3.3.53), muestra que  $W$  contiene términos que cambian a order  $\epsilon$ . La teoría transitoria por diseño tiene la propiedad de que estos términos en  $W$  se anulan con los términos correspondientes que aparecen en la divergencia del término  $R^\alpha$ .

La teoría transitoria por diseño tiene la propiedad que estos términos en  $W$  que cambian de orden  $\epsilon$  se anulan con los correspondientes términos que aparecen en la divergencia del término  $R^\alpha$ . Para ver estas cancelaciones, empezamos con  $R^\alpha$  en (3.3.68) y computamos

$$\begin{aligned}\nabla_\alpha R^\alpha &= \nabla_\alpha \left[ \frac{1}{2} \frac{u^\alpha h^\beta h_\beta}{T(\rho + P)} \right] + \nabla_\alpha \left[ \frac{\tau^{\alpha\beta} h_\beta}{T(\rho + P)} \right] \\ &= \nabla_\alpha \left[ \frac{1}{2} \frac{u^\alpha h^\beta h_\beta}{T(\rho + P)} \right] + \left[ \nabla_\alpha \left( \frac{\tau^{\alpha\beta}}{T} \right) \right] \frac{h_\beta}{\rho + P} + \frac{\tau^{\alpha\beta}}{T} \left[ \nabla_\alpha \left( \frac{h_\beta}{\rho + P} \right) \right],\end{aligned}\tag{3.3.99}$$

entonces el termino  $W - \nabla_\alpha R^\alpha$  toma la forma:

$$\begin{aligned}W - \nabla_\alpha R^\alpha &= h^\alpha(u) \left[ \nabla_\alpha \left( \frac{1}{T} \right) - \frac{a_\alpha}{T} \right] - \frac{\tau^{\alpha\beta} \nabla_\alpha u_\beta}{T} - \sum_{A=1}^n n_A^\alpha(u) \nabla_\alpha \Theta_A \\ &\quad - \nabla_\alpha \left[ \frac{1}{2} \frac{u^\alpha h^\beta h_\beta}{T(\rho + P)} \right] - \nabla_\alpha \left[ \frac{\tau^{\alpha\beta} h_\beta}{T(\rho + P)} \right].\end{aligned}\tag{3.3.100}$$

Re-escribimos los últimos dos términos usando la segunda línea en (3.3.99), entonces se sigue que (3.3.100) toma la forma

$$\begin{aligned}W - \nabla_\alpha R^\alpha &= h^\alpha(u) \left[ \nabla_\alpha \left( \frac{1}{T} \right) - \frac{a_\alpha}{T} \right] - \sum_{A=1}^n n_A^\alpha(u) \nabla_\alpha \Theta_A(u) - \frac{\tau^{\alpha\beta}}{T} \nabla_\alpha \left[ u_\beta + \frac{h_\beta}{\rho + P} \right] \\ &\quad - \nabla_\alpha \left[ \frac{1}{2} \frac{u^\alpha h^\beta h_\beta}{T(\rho + P)} \right] - \left[ \nabla_\alpha \left( \frac{\tau^{\alpha\beta}}{T} \right) \right] \frac{h_\beta}{\rho + P}.\end{aligned}\tag{3.3.101}$$

En la forma en que está escrito, el lado derecho de esta expresión tiene propiedades atroces bajo cambio a primer orden del marco. Pero hay una manera en donde podemos re-arreglar los términos en (3.3.101) resultando en una expresión con mejores propiedades de transformación. Para eso, eliminamos los flujos (drifts)  $n_A^\alpha(u)$ ,  $A \in (1, 2, \dots, n)$  tomados relativos al marco  $u^\alpha$  en favor de los flujos (drifts)  $\nu_A^\alpha$  relativos al marco de energía  $u_E^\alpha$ . Por esta transformación, notamos que bajo cambio del marco escrito por (3.3.75) tenemos:

$$\begin{aligned}\delta n_A^\alpha &\equiv n_A^\alpha(\hat{u}) - n_A^\alpha(u) = -n_A \epsilon^\alpha, \quad A \in (1, 2, \dots, n), \\ \delta h^\alpha &\equiv h^\alpha(\hat{u}) - h^\alpha(u) = -(\rho + P)\epsilon^\alpha + \epsilon O_1.\end{aligned}\tag{3.3.102}$$

Aplicando estas fórmulas, por la elección  $\hat{u}^\alpha = u_E^\alpha$ , y tomando en cuenta que  $h^\alpha(u_E) = 0$ ,  $\nu^\alpha = n^\alpha(u_E)$  concluimos que

$$n_A^\alpha(u) = \nu_A^\alpha + \frac{n_A}{(\rho + P)} h^\alpha(u) + O_2.\tag{3.3.103}$$

Usando esta fórmula, regresamos a (3.3.101) y eliminamos  $n_A^\alpha(u)$ , con lo que resulta en:

$$\begin{aligned}W - \nabla_\alpha R^\alpha &= - \sum_{A=1}^n \nu_A^\alpha \nabla_\alpha \Theta_A(u) - \frac{\tau^{\alpha\beta}}{T} \nabla_\alpha \left[ u_\beta + \frac{h_\beta}{\rho + P} \right] + \\ &+ h^\alpha(u) \left[ \nabla_\alpha \left( \frac{1}{T} \right) - \frac{a_\alpha}{T} \right] - \sum_{A=1}^n \nabla_\alpha \Theta_A(u) \left[ \frac{n_A}{(\rho + P)} h^\alpha(u) + O_2 \right] - \\ &- \nabla_\alpha \left[ \frac{1}{2} \frac{u^\alpha h^\beta h_\beta}{T(\rho + P)} \right] - \left[ \nabla_\alpha \left( \frac{\tau^{\alpha\beta}}{T} \right) \right] \frac{h_\beta}{\rho + P}.\end{aligned}\tag{3.3.104}$$

De esta fórmula se ve casi inmediatamente que los primeros dos términos son  $O_2$  invariantes, mientras que el resto son  $O_3$  invariantes.

Mostramos primero que

$$Z = - \sum_{A=1}^n \nu_A^\alpha \nabla_\alpha \Theta_A(u) - \frac{\tau^{\alpha\beta}}{T(u)} \nabla_\alpha \left[ u_\beta + \frac{h_\beta}{\rho + P} \right]\tag{3.3.105}$$

es  $O_2$  invariante y para esto checamos primero la variación de cada componente  $\nu_A^\alpha \nabla_\alpha \Theta_A(u)$  en la suma. Bajo  $u^\alpha \rightarrow \hat{u}^\alpha = u^\alpha + \epsilon^\alpha$  con  $\epsilon^\alpha \leq O_1$  tenemos:

$$\begin{aligned}
\delta(\nu_A^\alpha \nabla_\alpha \Theta_A) &= \nu_A^\alpha(u_E) \nabla_\alpha \Theta_A(\hat{u}) - \nu_A^\alpha(u_E) \nabla_\alpha \Theta_A(u) \\
&= \nu_A^\alpha(u_E) [\nabla_\alpha \Theta_A(\hat{u}) - \nabla_\alpha \Theta_A(u)] = \epsilon O_2
\end{aligned} \tag{3.3.106}$$

lo cual muestra que  $(\nu_A^\alpha \nabla_\alpha \Theta_A)$  es  $O_2$  y por lo tanto la suma completa es  $O_2$  invariante.

Examinamos en seguida la variación del segundo término i.e.

$$\begin{aligned}
\delta \left( \frac{\tau^{\alpha\beta}}{T} \nabla_\alpha \left[ u_\beta + \frac{h_\beta}{\rho + P} \right] \right) &= \frac{\tau^{\alpha\beta}(\hat{u})}{T(\hat{u})} \nabla_\alpha \left[ \hat{u}_\beta + \frac{h_\beta(\hat{u})}{\rho(\hat{u}) + P(\hat{u})} \right] \\
&\quad - \frac{\tau^{\alpha\beta}(u)}{T(u)} \nabla_\alpha \left[ u_\beta + \frac{h_\beta(u)}{\rho(u) + P(u)} \right] \\
&= \frac{\tau^{\alpha\beta}(u) + \epsilon O_1}{T(u) + \epsilon O_1} \nabla_\alpha \left[ u_\beta + \epsilon_\beta + \frac{h_\beta(u) - (\rho(u) + P(u))\epsilon_\beta}{\rho(u) + P(u) + \epsilon O_1} \right] \\
&\quad - \frac{\tau^{\alpha\beta}(u)}{T(u)} \nabla_\alpha \left[ u_\beta + \frac{h_\beta(u)}{\rho(u) + P(u)} \right].
\end{aligned} \tag{3.3.107}$$

Aunque podemos desarrollar los términos y mostrar la  $O_2$  invarianza, existe un truco al que podemos apelar para llegar a la misma conclusión más rápido. Nótese que en la variación

$$\delta h^\alpha \equiv h^\alpha(\hat{u}) - h^\alpha(u) = -(\rho + P)\epsilon^\alpha + \epsilon O_1, \tag{3.3.108}$$

tomando a  $\hat{u}^\alpha = u_E^\alpha$  combinado con el hecho de que  $h^\alpha(u_E) = 0$  y la propiedad  $u_E^\alpha - u^\alpha = \epsilon^\alpha$  se obtiene:

$$\frac{h^\alpha(u)}{\rho(u) + P(u)} = u_E^\alpha(u) - u^\alpha, \quad \implies \quad u^\alpha + \frac{h^\alpha(u)}{\rho(u) + P(u)} = u_E^\alpha + O_2. \tag{3.3.109}$$

Con esta identidad, la variación del segundo término en  $Z$  se simplifica considerablemente:

$$\delta \left( \frac{\tau^{\alpha\beta}}{T} \nabla_\alpha \left[ u_\beta + \frac{h_\beta}{\rho + P} \right] \right) = \nabla^\alpha u^\beta(E) \delta \left( \frac{\tau_{\alpha\beta}}{T} \right), \tag{3.3.110}$$

y el lado derecho, es  $\epsilon O_2$  en donde, siguiendo el tratamiento de Israel en [49] tomamos el gradiente de  $u^\alpha(E)$  como  $O_1$  y apelamos a las variaciones de los términos restantes apelando a las fórmulas del teorema 3.

Sin embargo, establecer la propiedad  $O_3$  en los términos restantes en (3.3.104) es algo involucrado. Claramente, si los evaluamos en el marco de energía, automáticamente se anulan y entonces  $W - \nabla_\alpha R^\alpha$  es  $O_2$  invariante. Pero para establecer esta propiedad, afuera del marco de energía, es un poco laborioso. Sin embargo, en seguida damos la demostración.

Para hacer esto, empezamos con el término:

$$\Lambda = - \sum_{A=1}^n \nabla_\alpha \Theta_A(u) \left[ \frac{n_A}{(\rho + P)} h^\alpha(u) + O_2 \right]$$

en (3.3.104) y usamos la identidad

$$- \sum_{A=1}^n \nabla_\alpha \Theta_A(u) n_A(u) + \nabla_\alpha \left( \frac{P(u)}{T(u)} \right) + \rho(u) \nabla_\alpha \left( \frac{1}{T(u)} \right) = 0, \quad (3.3.111)$$

implicando

$$\Lambda = \left( - \frac{h^\alpha(u)}{\rho(u) + P(u)} + O_2 \right) \left[ \nabla_\alpha \left( \frac{P(u)}{T(u)} \right) + \rho(u) \nabla_\alpha \left( \frac{1}{T(u)} \right) \right].$$

Usado esta representación, (3.3.104) toma la forma

$$\begin{aligned} W - \nabla_\alpha R^\alpha &= - \sum_{A=1}^n \nu_A^\alpha \nabla_\alpha \Theta_A(u) - \frac{\tau^{\alpha\beta}}{T} \nabla_\alpha \left[ u_\beta + \frac{h_\beta}{\rho + P} \right] \\ &\quad + h^\alpha(u) \left[ \nabla_\alpha \left( \frac{1}{T(u)} \right) - \frac{a_\alpha}{T(u)} \right] \\ &\quad + \left[ \frac{h^\alpha(u)}{\rho(u) + P(u)} + O_2 \right] \left[ - \nabla_\alpha \left( \frac{P(u)}{T(u)} \right) - \rho(u) \nabla_\alpha \left( \frac{1}{T(u)} \right) \right] \\ &\quad - \nabla_\alpha \left[ \frac{1}{2} \frac{u^\alpha h^\beta h_\beta}{T(\rho + P)} \right] - \left[ \nabla_\alpha \left( \frac{\tau^{\alpha\beta}}{T} \right) \right] \frac{h_\beta}{\rho + P}. \end{aligned} \quad (3.3.112)$$

Ahora eliminamos el término de  $h^\alpha a_\alpha$  del lado derecho en (3.3.112) apelando a la ecuación de conservación  $\Delta_{\rho\nu}(u) \nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$  en donde  $T^{\alpha\beta}$  esta dado por

$$T^{\alpha\beta} = \rho(u) u^\alpha u^\beta + P(u) \Delta^{\alpha\beta}(u) + h^\alpha(u) u^\beta + h^\beta(u) u^\alpha + \tau^{\alpha\beta}(u). \quad (3.3.113)$$

Después del álgebra, escribimos  $\Delta_{\rho\beta}(u)\nabla_\alpha T^{\alpha\beta} = 0$  de la forma

$$(\rho + P)a_\rho + \Delta^\mu{}_\rho(u)\nabla_\mu P = F_\rho, \quad (3.3.114)$$

en donde

$$F_\rho = -h^\mu\nabla_\mu u_\rho + u_\rho h^\mu a_\mu + u_\rho(\nabla_\mu u_\nu)\tau^{\mu\nu} - u^\mu\nabla_\mu h_\rho - h_\rho\nabla_\mu u^\mu - \nabla_\mu\tau^\mu{}_\rho. \quad (3.3.115)$$

De estas dos últimas relaciones, formamos la combinación:  $T^{-1}h^\rho a_\rho$  y usando la expresión resultante, eliminamos  $T^{-1}h^\rho a_\rho$  de lado derecho de (3.3.112). Estos procesos nos llevan a

$$\begin{aligned} W - \nabla_\alpha R^\alpha &= - \sum_{A=1}^n \nu_A^\alpha \nabla_\alpha \Theta_A(u) - \frac{\tau^{\alpha\beta}}{T} \nabla_\alpha \left[ u_\beta + \frac{h_\beta}{\rho + P} \right] \\ &+ \frac{h^\alpha(\nabla_\alpha u_\rho)h^\rho}{T(\rho + P)} + \frac{u^\mu(\nabla_\mu h_\rho)h^\rho}{T(\rho + P)} + \frac{\nabla_\mu u^\mu h^\rho h_\rho}{T(\rho + P)} \\ &- \nabla_\alpha \left[ \frac{1}{2} \frac{u^\alpha h^\beta h_\beta}{T(\rho + P)} \right] - \frac{\tau^{\alpha\beta} h_\beta}{\rho + P} \nabla_\alpha \left( \frac{1}{T} \right). \end{aligned} \quad (3.3.116)$$

Para estudiar el comportamiento de los últimos cinco términos será suficiente considerar sus comportamientos bajo  $u^\alpha \rightarrow u_E^\alpha$  y por esto cambios (3.3.109) implica que

$$h^\alpha(u) = (u_E^\alpha - u^\alpha + O_2)(\rho(u) + P(u)). \quad (3.3.117)$$

En esta «norma» uno ve que el último término cambia a orden  $O_3$  debido a que

$$\tau^{\alpha\beta} = \tau^{\alpha\beta}(u) = \tau^{\alpha\beta}(u_E) + O_2 = \rho(u_E)O_1 + O_2$$

mientras que

$$\delta \left[ \nabla_\alpha \left( \frac{1}{T} \right) \right] = \nabla_\alpha \delta \left( \frac{1}{T} \right) = O_2$$

implicando que el último término cambia a orden  $O_3$ .

Desarrollando la derivada covariante del penúltimo término combinado con los otros llegamos a que

$$\begin{aligned} & \frac{h^\mu(\nabla_\mu u_\rho)h^\rho}{T(\rho+P)} + \frac{u^\mu(\nabla_\mu h_\rho)h^\rho}{T(\rho+P)} + \frac{\nabla_\mu u^\mu h^\rho h_\rho}{T(\rho+P)} - \nabla_\alpha \left[ \frac{1}{2} \frac{u^\alpha h^\beta h_\beta}{T(\rho+P)} \right] = \\ & = \frac{h^\mu(\nabla_\mu u_\rho)h^\rho}{T(\rho+P)} + \frac{1}{2} \frac{\nabla_\mu u^\mu h^\rho h_\rho}{T(\rho+P)} - \frac{1}{2} u^\alpha h^\beta h_\beta \nabla_\alpha \left( \frac{1}{T(\rho+P)} \right). \end{aligned}$$

En estos términos, debido a que  $\hat{u}^\mu = u_E^\mu$  combinado con el hecho de que  $h^\alpha(u_E) = 0$  se sigue que los términos proporcionales a  $h^\alpha(u)$  podemos reemplazarlos por sus variaciones que son de orden  $\epsilon = O_1$ , mientras que la divergencia de  $\nabla_\mu u^\mu$  es  $O_1$  y la variación de  $(T(\rho+P))^{-1}$  es  $O_2$ . Con esto se concluye que estos términos son  $O_3$ .

### 3.3.3. La estructura de las ecuaciones fenomenológicas

Con los resultados de la sección anterior sobre la estructura del término  $W - \nabla_\alpha R^\alpha$ , ahora estamos listos para derivar las ecuaciones fenomenológicas. Por razones de generalidad consideremos el caso de una mezcla de fluidos en donde  $Q^\alpha$  tiene la forma escrita en (3.3.70) mientras que el término  $W - \nabla_\alpha R^\alpha$  está dado por

$$W - \nabla_\alpha R^\alpha = -\frac{\tau^{\alpha\beta}}{T} \nabla_\alpha \left( u_\beta + \frac{h_\beta}{\rho+P} \right) - \sum_{A=1}^n \nu_A^\alpha \nabla_\alpha \Theta_A + O_3. \quad (3.3.118)$$

Se sigue entonces que

$$\begin{aligned} \nabla_\alpha S^\alpha &= -\sum_{A=1}^n \nu_A^\alpha \nabla_\alpha \Theta_A - \frac{\tau^{\alpha\beta}}{T} \nabla_\alpha \left( u_\beta + \frac{h_\beta}{\rho+P} \right) \\ & - \nabla_\alpha \left[ \frac{1}{2} u^\alpha \left( \beta_0 \pi^2 + \sum_{A,B} \beta_1^{AB} \nu_A^\beta \nu_{B\beta} + \beta_2 \pi_{\gamma\delta} \pi^{\gamma\delta} \right) + \pi \sum_{A=1}^n a_0^A \nu_A^\alpha + \pi_\beta^\alpha \sum_{A=1}^n a_1^A \nu_A^\beta \right] + O_3. \end{aligned} \quad (3.3.119)$$

Siguiendo el enfoque de [49, 50], despreciamos los gradientes en los coeficientes

$$(a_0^A, a_1^A, \beta_0, \beta_1^{AB}, \beta_2), \quad A, B \in (1, 2, \dots, n),$$

y por lo tanto, el lado derecho de (3.3.119), puede ser escrito de la forma

$$\nabla_\alpha S^\alpha = \sum_{A=1}^n \nu_A^\alpha f_\alpha^A + \pi f + \pi^{\alpha\beta} f_{\alpha\beta}, \quad (3.3.120)$$

en donde  $f_\alpha^A, f, f_{\alpha\beta}$  son funciones determinadas. Llevando a cabo la diferenciación en el lado derecho de (3.3.119) y agrupado los términos, usando la descomposición

$$\tau^{\alpha\beta} = \pi\Delta^{\alpha\beta} + \pi^{\alpha\beta},$$

junto con la notación  $\dot{\pi} = u^\alpha \nabla_\alpha \pi$ , etc., que significa diferenciación a lo largo del flujo, llegamos a

$$\begin{aligned} \nabla_\alpha S^\alpha = & - \sum_{A=1}^n \nu_A^\alpha \left[ \nabla_\alpha \Theta_A + \sum_B \beta_1^{AB} \dot{\nu}_{B\alpha} + a_0^A \nabla_\alpha \pi + a_1^A \nabla_\gamma \pi^\gamma_\alpha \right] \\ & - \pi \left[ \beta_0 \dot{\pi} + \frac{\Delta^{\alpha\beta}}{T} \nabla_\alpha \left( u_\beta + \frac{h_\beta}{\rho + P} \right) + \sum a_0^A \nabla_\alpha \nu_A^\alpha \right] \\ & - \pi^{\alpha\beta} \left[ \frac{1}{T} \nabla_\alpha \left( u_\beta + \frac{h_\beta}{\rho + P} \right) + \beta_2 \dot{\pi}_{\alpha\beta} + \sum_{A=1}^n a_1^A \nabla_\alpha \nu_{A\beta} \right]. \end{aligned} \quad (3.3.121)$$

Podemos reducir más esta expresión, observando que:

$$\Delta^{\alpha\beta} \nabla_\alpha \left( u_\beta + \frac{h_\beta}{\rho + P} \right) = \nabla_\alpha u^\alpha + \frac{\nabla_\alpha h^\alpha}{\rho + P}, \quad (3.3.122)$$

en donde hemos hecho uso de que  $h^\alpha u_\alpha = 0$  y  $u^\alpha u_\alpha = -1$ , conduciéndonos finalmente a que:

$$\begin{aligned} \nabla_\alpha S^\alpha = & - \sum_{A=1}^n \nu_A^\alpha \left[ \nabla_\alpha \Theta_A + \sum_B \beta_1^{AB} \dot{\nu}_{B\alpha} + a_0^A \nabla_\alpha \pi + a_1^A \nabla_\gamma \pi^\gamma_\alpha \right] - \\ & - \pi \left[ \beta_0 \dot{\pi} + \frac{\nabla_\alpha u^\alpha}{T} + \frac{\nabla_\alpha h^\alpha}{T(\rho + P)} + \sum a_0^A \nabla_\alpha \nu_A^\alpha \right] - \\ & - \pi^{\alpha\beta} \left[ \frac{\nabla_\alpha u_\beta}{T} + \frac{1}{T} \nabla_\alpha \left( \frac{h_\beta}{\rho + P} \right) + \beta_2 \dot{\pi}_{\alpha\beta} + \sum_A a_1^A \nabla_\alpha \nu_{A\beta} \right]. \end{aligned} \quad (3.3.123)$$

Una inspección del lado derecho, nos permite escribir las ecuaciones fenomenológicas para  $(\pi, \pi^{\alpha\beta}, \nu_A^\alpha)$  que forcen la segunda ley. Para esto, es suficiente asumir que  $(\pi, \pi^{\alpha\beta}, \nu_A^\alpha)$  dependen linealmente de los «estresés» i.e.

$$\begin{aligned}
\nu_A^\alpha &= -\Delta^{\alpha\beta} T^2 \sum_B k_{AB} \left( \nabla_\beta \Theta_B + \sum_C \beta_1^{BC} \dot{\nu}_{CB} + a_0^B \nabla_\beta \pi + a_1^B \nabla_\gamma \pi^\gamma_\beta \right) \\
\pi &= -\frac{1}{3} \zeta_\nu \left( \nabla_\alpha u^\alpha + \frac{\nabla_\alpha h^\alpha}{\rho + P} + T \beta_0 \dot{\pi} + T \sum_{A=1}^n a_0^A \nabla_\alpha \nu_A^\alpha \right) \\
\pi_{\alpha\beta} &= -2\zeta \langle \nabla_\beta u_\alpha + \frac{\nabla_\beta h_\alpha}{\rho + P} + T \beta_2 \dot{\pi}_{\alpha\beta} + T \sum_A a_1^A \nabla_\beta \nu_{A\alpha} \rangle,
\end{aligned} \tag{3.3.124}$$

en donde  $k_{AB}$   $A, B, \in (1, 2, \dots, n)$ , representa una matriz  $(n \times n)$  semi-positiva definitiva de variables reales y los corchetes angulares significan que:

$$\langle A_{\alpha\beta} \rangle = \left( \Delta_{(\alpha}^\gamma \Delta_{\beta)}^\delta - \frac{1}{3} \Delta_{\alpha\beta} \Delta^{\gamma\delta} \right) A_{\gamma\delta}. \tag{3.3.125}$$

Las ecuaciones (3.3.124), son las relaciones fenomenológicas que se siguen de la imposición de la segunda ley (3.3.52) para la elección del término  $Q^\alpha$  en (3.3.70). Son válidas para cualquier marco en reposo  $u^\alpha$  al interior del cono especificado por los marcos de Landau-Lifshitz y los  $n$ -marcos de Eckart asociados a las  $n$ -corrientes de partículas. Estas ecuaciones se simplifican en el caso en que son expresadas relativas a un marco en particular e.g. el marco de energía ó el marco de partículas. En las siguientes secciones por completez damos las ecuaciones resultantes para el caso de un fluido simple relativamente al marco de Landau-Lifshitz y en seguida relativamente al marco de Eckart.

### Ecuaciones fenomenológicas en el marco de Landau-Lifshitz

Las ecuaciones fenomenológicas para un fluido simple al respecto del marco de energía se obtienen de (3.3.124) tomando  $h^\alpha(u_E) = 0$ , removiendo los índices  $(A, B)$  y el símbolo de suma. Las ecuaciones resultantes tienen la forma:

$$\begin{aligned}
\nu^\alpha &= -k \Delta^{\alpha\beta} T^2 \left( \nabla_\beta \Theta + \beta_1 \dot{\nu}_\beta + a_0 \nabla_\beta \pi + a_1 \nabla_\mu \pi^\mu_\beta \right), \\
\pi &= -\frac{1}{3} \zeta_\nu \left( \nabla_\alpha u^\alpha + T \beta_0 \dot{\pi} + T a_0 \nabla_\alpha \nu^\alpha \right), \\
\pi_{\alpha\beta} &= -2\zeta \langle \nabla_\beta u_\alpha + T \beta_2 \dot{\pi}_{\alpha\beta} + T a_1 \nabla_\beta \nu_\alpha \rangle.
\end{aligned} \tag{3.3.126}$$

Estas ecuaciones involucran al flujo (drift)  $\nu^\alpha$ , pero en ocasiones resulta conveniente sustituirlo en favor del flujo de calor  $q^\alpha$ , a través de la siguiente relación

$$n^\alpha(u_E) \equiv \nu^\alpha(u_E) = -\frac{n(u_E)}{\rho(u_E) + P(u_E)} q^\alpha(u_E) + O_2. \quad (3.3.127)$$

Pero la estructura de estas ecuaciones se obtienen de la expresión de  $Q^\alpha$  en (3.3.67, 3.3.68) y tienen la siguiente forma:

$$\pi = -\frac{1}{3}\zeta_\nu(\nabla_\alpha u^\alpha + \beta_0 \dot{\pi} - \alpha_0 \nabla_\alpha q^\alpha),$$

$$q^\alpha = \kappa T \Delta^{\alpha\beta} (\eta^{-1} T \nabla_\beta \Theta - \beta_1 \dot{q}_\beta + \alpha_0 \nabla_\beta \pi + \alpha_1 \nabla_\gamma \pi_\beta^\gamma), \quad \eta = \frac{\rho + P}{n}, \quad (3.3.128)$$

$$\pi_{\alpha\beta} = -2\zeta \langle \nabla_\beta u_\alpha + \beta_2 \dot{\pi}_{\alpha\beta} - \alpha_1 \nabla_\beta q_\alpha \rangle,$$

y estas ecuaciones están dadas por Israel [49] e Israel-Stewart [50].

### Ecuaciones fenomenológicas en el marco de Eckart

En esta sección pasamos a la estructura de las ecuaciones fenomenológicas para un fluido simple relativo al marco de Eckart. Estas ecuaciones se obtienen mediante el término  $Q^\alpha$  mostrado en (3.3.67, 3.3.68) y teniendo en cuenta que  $W - \nabla_\alpha R^\alpha$  se reduce a

$$W - \nabla_\alpha R^\alpha = q^\alpha \left[ \nabla_\alpha \left( \frac{1}{T} \right) - \frac{a_\alpha}{T} \right] - \frac{\tau^{\alpha\beta} \nabla_\alpha u_\beta}{T} + O_3. \quad (3.3.129)$$

Las ecuaciones resultantes tienen la forma:

$$\pi = -\frac{1}{3}\zeta_\nu(\nabla_\alpha u^\alpha + \beta_0 \dot{\pi} - \bar{\alpha}_0 \nabla_\alpha q^\alpha),$$

$$q^\alpha = -\kappa T \Delta_N^{\alpha\beta} (T^{-1} \nabla_\beta T + \dot{u}_\beta + \bar{\beta}_1 \dot{q}_\beta - \bar{\alpha}_0 \nabla_\beta \pi + \bar{\alpha}_1 \nabla_\gamma \pi_\beta^\gamma), \quad (3.3.130)$$

$$\pi_{\alpha\beta} = -2\zeta \langle u_{\alpha\beta} + \beta_2 \dot{\pi}_{\alpha\beta} - \bar{\alpha}_1 \nabla_\beta q_\alpha \rangle.$$

Un hecho relevante, es la relación que guardan los coeficientes que aparecen en las ecuaciones (3.3.128) y (3.3.130), cuya conexión está dada a través de:

$$\bar{\alpha}_0 - \alpha_0 = \bar{\alpha}_1 - \alpha_1 = \beta_1 - \bar{\beta}_1 = [(\rho + P)T]^{-1}, \quad \beta_0 = \bar{\beta}_0, \quad \beta_2 = \bar{\beta}_2, \quad (3.3.131)$$

que nos apoyan a demostrar la equivalencia entra ambas expresiones a primer orden desviación del equilibrio, sin embargo, además necesitamos de la regla de transformación entre marcos

$$u_E^\alpha = u_N^\alpha + (\rho + P)^{-1} q^\alpha + O_2, \quad (3.3.132)$$

así como también de la relación

$$\Delta^{\alpha\beta} \eta^{-1} \nabla_\beta \Theta = \Delta^{\alpha\beta} \left[ \nabla_\beta \left( \frac{1}{T} \right) - \frac{1}{T(\rho + P)} (\dot{q}_\beta + \nabla_\beta \pi + \nabla_\gamma \pi^\gamma_\beta) \right] - \frac{1}{T} \dot{u}_N^\alpha. \quad (3.3.133)$$

### 3.4. El estatus de la teoría transitoria

El conjunto de ecuaciones fenomenológicas derivadas arriba dan las ecuaciones de evolución para el flujo de calor, los estresés de viscosidad volumétrica y de cizallamiento («bulk» y «shear stresses» en inglés), y estas ecuaciones combinadas con las ecuaciones que surgen de las leyes de conservación forman un sistema cerrado de ecuaciones. Sus soluciones describen el comportamiento de estados cercanos al equilibrio cuya evolución es compatible con la segunda ley de la termodinámica. Aunque la implementación de la segunda ley es bienvenida, no es suficiente para la aceptación física de la teoría. Sería de importancia conocer si el conjunto de ecuaciones dinámicas constituye un conjunto causal de ecuaciones al menos para estados cercanos al equilibrio. En términos más concretos: como se comportan las perturbaciones pequeñas alrededor del estado de equilibrio de fondo.

Israel y Stewart salieron de la teoría fenomenológica y derivaron las ecuaciones de la termodinámica transitoria a partir de consideraciones microfísicas. Comenzando desde la ecuación de Boltzmann relativista (para una introducción de este tema véase [2, 28, 95–97]) y dentro de la aproximación de Grad [40] fueron capaces en [50] de derivar las ecuaciones de termodinámica transitoria mediante la evaluación de los tres primeros momentos de la ecuación de Boltzmann<sup>32</sup>. Más aún, fueron capaces de evaluar los cinco coeficientes  $(\alpha_i, \beta_i)$  que aparecen en (3.3.124) y mostraron que son funciones puramente termodinámicas i.e. funciones independientes de la sección eficaz que entra en el término de colisión en la ecuación

<sup>32</sup>Específicamente en [50], muestran que los primeros tres momentos de la función de distribución  $f(x, p)$  i.e.  $\hat{J}^\alpha(x) = \int f(x, p) p^\alpha d\Omega$ ,  $\hat{T}^{\alpha\beta} = \int f(x, p) p^\alpha p^\beta d\Omega$ ,  $A^{\alpha\beta\gamma}(x) = \int f(x, p) p^\alpha p^\beta p^\gamma d\Omega$ , como consecuencia de la ecuación de Boltzmann satisfacen:  $\nabla_\alpha \hat{J}^\alpha = \nabla_\alpha \hat{T}^{\alpha\beta} = 0$ ,  $\nabla_\alpha \hat{A}^{\alpha\beta\gamma} = \hat{I}^{\beta\gamma}$  en donde  $\hat{I}^{\beta\gamma} = \int C[f] p^\beta p^\gamma d\Omega$  es el segundo momento del término de colisiones  $C[f]$  para la ecuación de Boltzmann.

de Boltzmann. Subsecuentemente, evaluarón las velocidades de los frentes de onda por perturbaciones pequeñas alrededor del estado de equilibrio y encontraron que las velocidades de propagación de estas perturbaciones son finitas y causales. Estas conclusiones muestran que la termodinámica transitoria al menos para los coeficientes  $(\alpha_i, \beta_i)$  predichos por la ecuación de Boltzmann relativista evita la propagación infinita de las perturbaciones alrededor de un estado de equilibrio y estos resultados parece mostrar que la termodinámica transitoria rectifica las predicciones de las teorías de primer orden de Eckart y de Landau-Lifshitz. Aunque toda la evidencia apunta a que la termodinámica transitoria es alentadora y la señalan como una teoría robusta, sin embargo, más trabajo es necesario. Por ejemplo, no es sabido si las ecuaciones dinámicas constituye un sistema simétrico - hiperbólico y también la presencia de las funciones arbitrarias  $(\alpha_i, \beta_i)$  que aparecen en el ansatz para el término  $Q^\alpha$  es otro asunto que necesita consideraciones adicionales. ¿Como eventualmente estos coeficientes van a estar especificados?

# Apéndice del capítulo 3

## 3.5. Sobre estados cercanos al equilibrio

Como vimos en este capítulo, la termodinámica transitoria por diseño se enfoca en la descripción de estados «cerca» al equilibrio, y en esta sección discutimos como identificar esta clase de estados. Como ya hemos dicho en repetidas ocasiones el tensor de energía-momento  $T^{\alpha\beta}$  por la clase de fluidos clásicos que empleamos en esta tesis, define un único eigenvector temporal  $u_E^\alpha$ , el cual determina el marco de Landau-Lifshitz (ó marco de energía), mientras que por un fluido simple, la corriente de partículas  $J^\alpha$  vía  $J^\alpha = n_N u_N^\alpha$  determina al vector  $u_N^\alpha$  que especifica al marco de Eckart (ó marco de partículas). La existencia de los vectores  $(u_E, u_N)$ , nos dan la oportunidad de definir la noción de estados de un fluido cercano al equilibrio, a través de las siguientes consideraciones.

Para cualquier evento al interior de un fluido simple, sea el vector  $u_E^\alpha$  junto con tres 4-vectores tipo espacio ortonormales, denotados por  $e_a$ ,  $a \in \{1, 2, 3\}$ , de manera que  $(u_E, e_a)$  forma una tetraada ortonormal. Debido a que la tríada  $e_a$ , no está únicamente definida, podemos sin pérdida de generalidad, elegir los vectores espaciales, de manera que  $u_N^\alpha$  en el evento bajo consideración admita la siguiente representación:

$$u_N^\alpha = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} u_E^\alpha + \frac{v}{c} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} e_1^\alpha = \cosh \epsilon u_E^\alpha + \sinh \epsilon e_1^\alpha, \quad (3.5.1)$$

en donde  $\vec{v} = v e_1$  es la «velocidad relativa» del marco de Eckart al respecto del marco de Landau-Lifshitz y hemos introducido el parámetro  $\epsilon$  como el «pseudo-ángulo» entre  $u_E$  y  $u_N$ . Tal ángulo satisface que:

$$\cosh \epsilon = -g(u_E, u_N) = -u_E^\alpha u_{N\alpha} = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}, \quad (3.5.2)$$

y uno nota que en equilibrio local (o global),  $u_N$  y  $u_E$  coinciden, entonces  $\epsilon =$

0. Siguiendo a Israel [49], es natural definir estados de un fluido simple<sup>33</sup> como estados cercanos al equilibrio como aquellos estados que tienen la propiedad de que el pseudo-ángulo  $\epsilon$  en (3.5.2) satisface:  $\epsilon \approx \frac{v}{c} \ll 1$  para todos los eventos ocupados por el fluido. Para tales estados (3.5.1) implica que

$$u_N^\alpha - u_E^\alpha \simeq \epsilon e_1^\alpha \simeq \frac{v}{c} e_1^\alpha \simeq \frac{\hat{j}^\alpha}{n_N} = \frac{\nu^\alpha(u_E)}{n_N} = \frac{\nu^\alpha(u_E)}{n_E} = O_1 \ll 1, \quad (3.5.3)$$

en donde siguiendo la notación de [49],  $\hat{j}^\alpha$  representa el «flujo»<sup>34</sup> (drift) de partículas relativo al marco de energía y denotamos este flujo como:  $\nu^\alpha(u_E) \equiv \hat{j}^\alpha$ . Por lo tanto, estados cercanos al equilibrio se caracterizan por la propiedad de que el flujo  $\nu^\alpha(u_E)$  percibido desde el marco de energía satisface (3.5.3) y de aquí en adelante el símbolo  $O_1$  significa desviación del estado del equilibrio (local o global) a primer orden.

Además de la validez de la condición (3.5.3), estados cercanos al equilibrio están sujetos a otra restricción: los estresés viscosos medidos al respecto del marco de energía, denotados colectivamente por  $\tau^{\alpha\beta}(u_E) \equiv \tau_E^{\alpha\beta}$ , satisfacen

$$\frac{\tau_E^{\alpha\beta}}{\rho_E} = O_1 \ll 1, \quad (3.5.4)$$

en donde  $\rho_E$  es la densidad de energía medida al respecto del marco de energía.

La condición (3.5.3) implica que para cada evento dentro del fluido, en el espacio tangente se define un «cono» de pseudo-ángulo  $\epsilon \simeq \frac{v}{c} = O_1 \ll 1$  con  $v$  la velocidad relativa del marco de Eckart al respecto del marco de Landau-Lifshitz. Como hemos visto en este capítulo, cualquier 4-velocidad  $u^\alpha$  que se encuentre al interior de este cono, puede ser usada como marco en reposo y observadores en reposo al respecto de este marco determinan las variables termodinámicas del estado correspondiente. Estas variables tienen en general dependencia del marco que empleamos y sus compartamientos bajo cambios particulares del marco de referen-

<sup>33</sup>Para una mezcla de fluidos que consiste de  $n$ -corrientes de partículas ( $J_1, J_2, \dots, J_n$ ), uno puede definir la 4-velocidad  $u_E^\alpha$  del marco de energía y las  $n$  4-velocidades ( $u_1, u_2, \dots, u_n$ ) a través de  $J_A^\alpha = n_A u_A^\alpha$ , con  $A \in \{1, 2, \dots, n\}$  y por lo tanto introducir  $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ -pseudo ángulos ( $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_{\frac{(n+1)(n+2)}{2}}$ ) entre  $u_E$  y los correspondientes ( $u_1, u_2, \dots, u_n$ ). Por esta situación, un estado es cercano al equilibrio, cuando los  $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$  pseudo-ángulos obedecen que  $\epsilon_A \ll 1$ . Por este caso uno puede definir  $\epsilon = \min(\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_{\frac{(n+1)(n+2)}{2}})$  y proceder como en el caso de un fluido simple.

<sup>34</sup>En la notación de Israel [49], este flujo es referido como drift.

nia están escritos por los teoremas (2-4) que demostramos en la siguiente sección<sup>35</sup>.

### 3.6. Demostración de los teoremas 2, 3 y 4

Antes a proceder a demostrar los teoremas 2, 3 y 4, primero hacemos algunos comentarios preliminares.

Empezamos con dos vectores unitarios tipo tiempo dirigidos a futuro,  $(u, \hat{u})$  que se encuentran al interior del cono de pseudo-ángulo  $\epsilon$  que acabamos de definir en la sección anterior. Estos vectores definen los ejes temporales de dos marcos admisibles<sup>36</sup> y los complementamos con dos triadas de vectores unitarios tipo espacio  $e_a, \hat{e}_a$ , con  $a \in (1, 2, 3)$  tal que  $(u, e_a)$  y  $(\hat{u}, \hat{e}_a)$  constituyen dos bases ortonormales en el evento bajo consideración. Tal arreglo implica que

$$\hat{u} = \frac{u}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}} + \frac{v^a e_a}{c} \frac{1}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}}, \quad v^2 = v^a v_a, \quad (3.6.1)$$

en donde  $v^a$  son las componentes de la 3-velocidad del marco  $u$  relativo al marco  $\hat{u}$ . Siguiendo a Israel [49], reexpresamos (3.6.1) en la forma equivalente

$$\hat{u}^\alpha = (1 + \delta^2)^{\frac{1}{2}} u^\alpha + \delta^\alpha, \quad \delta^2 = \delta^\alpha \delta_\alpha, \quad \delta^\alpha u_\alpha = 0. \quad (3.6.2)$$

Vemos a (3.6.2) como una transformación de  $u^\alpha \rightarrow \hat{u}^\alpha$  y como hemos mencionado la teoría transitoria no es invariante bajo cambios de marcos escritos por (3.6.2). Pero asumiendo que la velocidad relativa de  $u^\alpha$  al respecto de  $\hat{u}^\alpha$  satisface<sup>37</sup> que  $\delta \ll 1$ , entonces reemplazamos (3.6.2) por

<sup>35</sup>Por estados fuera del equilibrio, la velocidad relativa del marco  $u_N$  al respecto del marco  $u_E$  ( $u$  al respecto de  $\hat{u}$ ) no es en general pequeña y por eso uno no puede controlar el comportamiento de las variables termodinámicas bajo cambio de marco. Pero, por estados cercanos al equilibrio, el ángulo  $\epsilon$  entre  $u_N$  y  $u_E$  es pequeño véase (3.5.3), y esta propiedad permite tener un buen control sobre el comportamiento de las variables termodinámicas bajo cambio de marco.

<sup>36</sup>Un marco en esta teoría es admisible, cuando la 4-velocidad  $u^\alpha$  que define este marco cae dentro del cono de ángulo  $\epsilon$  que hemos definido.

<sup>37</sup>Nótese que la condición  $\delta \ll 1$  siempre se cumple por estados cercanos al equilibrio. Por estados fuera del equilibrio, la velocidad relativa del marco  $u_N$  al respecto del marco  $u_E$  (o de  $u$  al respecto de  $\hat{u}$ ) en general no es pequeña y por este caso uno no puede aproximar (3.6.3) por (3.6.2). Como consecuencia las variables termodinámicas se transforman de una manera complicada. Pero, por estados cercanos al equilibrio, el ángulo  $\epsilon$  entre  $u_N$  y  $u_E$  es pequeño (véase (3.5.3)), y esta propiedad permite tener un buen control sobre el comportamiento de las variables termodinámicas bajo cambio de marco.

$$u^\alpha \rightarrow \hat{u}^\alpha = u^\alpha + \delta^\alpha + O(\delta^\alpha)^2, \quad (3.6.3)$$

y estos tipos de transformaciones son de relevancia para la teoría transitoria (véase también la transformación (3.3.32) en el teorema 2). Introduciendo el parámetro  $\hat{\epsilon}^\alpha$  via

$$\hat{u}^\alpha - u^\alpha = \delta^\alpha \equiv \hat{\epsilon}^\alpha = \hat{\epsilon} \leq O_1, \quad (3.6.4)$$

en donde  $\hat{\epsilon} \leq O_1$  se sigue como consecuencia de que por estados cercanos al equilibrio  $u_E - u_N = \epsilon = O_1 \ll 1$ . Este nuevo parámetro de «pequeñez  $\hat{\epsilon}$ » introducido en (3.6.4) se interpreta como la velocidad relativa de  $u^\alpha$  al respecto de  $\hat{u}^\alpha$  y será importante en la demostración de los teoremas 2, 3 y 4.

Mencionamos también que durante la demostración de los teoremas (2-4) y como pasos intermedios, haremos cambios de marcos escritos por:

$$u_E^\alpha \rightarrow \hat{u}^\alpha = u_E^\alpha + \hat{\delta}^\alpha + O(\delta^\alpha)^2, \quad \hat{\delta} \leq O_1 \quad (3.6.5)$$

$$u_E^\alpha \rightarrow u^\alpha = u_E^\alpha + \gamma^\alpha + O(\gamma^\alpha)^2, \quad \gamma \leq O_1, \quad (3.6.6)$$

en donde  $u_E^\alpha$  especifica el marco de energía y en estas transformaciones,  $(\hat{\delta}, \gamma)$  se consideran como las velocidades relativas de  $u_E^\alpha$  con  $\hat{u}^\alpha$  y  $u^\alpha$  respectivamente. Debido a que (3.6.3) implica  $\hat{u}^\alpha - u^\alpha = \delta^\alpha$  en combinación con (3.6.4-3.6.6) obtenemos

$$\hat{\delta}^\alpha - \gamma^\alpha = \delta^\alpha = \hat{\epsilon} \leq O_1,$$

implicando que la velocidad relativa  $\hat{\epsilon}$  de  $u^\alpha$  relativamente a  $\hat{u}^\alpha$  es la diferencia de velocidades relativas  $\hat{\delta}^\alpha$  y  $\gamma^\alpha$  que aparecen en (3.6.5, 3.6.6) y esta propiedad será útil más adelante.

También en la demostración de los teoremas empleamos la expansión del tensor  $T^{\alpha\beta}$  al respecto del marco de energía, es decir,  $T^{\alpha\beta}$  tiene la forma:

$$T^{\alpha\beta} = (\rho(u_E) + P(u_E))u_E^\alpha u_E^\beta + P(u_E)g^{\alpha\beta} + \tau^{\alpha\beta}(u_E).$$

Con estos conceptos en mente, consideramos la transformación  $u^\alpha \rightarrow \hat{u}^\alpha$  escrita en (3.6.2) y construimos las variación de las variables termodinámicas inducidas por esta transformación. Comenzamos con la demostración de (3.3.35).

### 3.6.1. Demostración del teorema 2

Sean  $\rho(\hat{u}), \rho(u)$  las densidades de energía medidas por  $\hat{u}^a$  respectivamente  $u^a$ , entonces las siguientes relaciones son válidas

$$\begin{aligned}
\delta\rho &\equiv \rho(\hat{u}) - \rho(u) = T^{\alpha\beta} (\hat{u}_\alpha \hat{u}_\beta - u_\alpha u_\beta) \\
&= [(\rho(u_E) + P(u_E)) u_E^\alpha u_E^\beta + P(u_E) g^{\alpha\beta} + \tau^{\alpha\beta}(u_E)] (\hat{u}_\alpha \hat{u}_\beta - u_\alpha u_\beta) \\
&= [\rho(u_E) + P(u_E)] [(\hat{u}^\alpha u_{E\alpha})^2 - (u^\alpha u_{E\alpha})^2] + \tau^{\alpha\beta}(u_E) (\hat{u}_\alpha \hat{u}_\beta - u_\alpha u_\beta) \\
&= [\rho(u_E) + P(u_E)] (\hat{\delta}^2 - \gamma^2) + \tau^{\alpha\beta}(u_E) (\hat{\delta}_\alpha \hat{\delta}_\beta - \gamma_\alpha \gamma_\beta).
\end{aligned} \tag{3.6.7}$$

Recordando que los estados cercanos al equilibrio satisfacen  $\tau^{\alpha\beta}(u_E) = \rho(u_E) O_1$ , se sigue que

$$\tau^{\alpha\beta}(u_E) (\hat{\delta}_\alpha \hat{\delta}_\beta - \gamma_\alpha \gamma_\beta) = \hat{\epsilon}^2 O_1 + \hat{\epsilon} O_1^2. \tag{3.6.8}$$

Por otro lado, el primer término da

$$[\rho(u_E) + P(u_E)] (\hat{\delta}^2 - \gamma^2) = [\rho(u_E) + P(u_E)] (\hat{\delta} - \gamma)(\hat{\delta} + \gamma),$$

y si eliminamos  $\hat{\delta}^\alpha$  en favor de  $\delta$  a través de  $\hat{\delta}^\alpha - \gamma^\alpha = \delta^\alpha = \hat{\epsilon}$ , mientras que  $\hat{\delta}^\alpha + \gamma^\alpha = O_1$ , obtenemos a mayor orden

$$[\rho(u_E) + P(u_E)] (\hat{\delta}^2 - \gamma^2) = \hat{\epsilon} O_1, \tag{3.6.9}$$

y por lo tanto, concluimos que

$$\delta\rho = \rho(\hat{u}) - \rho(u) = \hat{\epsilon} O_1 + O_2. \tag{3.6.10}$$

Para demostrar el inciso (3.3.36) del teorema 2, empezamos con

$$\begin{aligned}
\delta h^\gamma &= h^\gamma(\hat{u}) - h^\gamma(u) \\
&= -[\Delta^\gamma_\alpha(\hat{u}) \hat{u}_\beta - \Delta^\gamma_\alpha(u) u_\beta] T^{\alpha\beta} \\
&= -[\Delta^\gamma_\alpha(\hat{u}) \hat{u}_\beta - \Delta^\gamma_\alpha(u) u_\beta] [(\rho(u_E) + P(u_E)) u_E^\alpha u_E^\beta + P(u_E) g^{\alpha\beta} + \tau^{\alpha\beta}(u_E)].
\end{aligned} \tag{3.6.11}$$

Sin embargo, notamos inmediatamente que el término  $P(u_E)g^{\alpha\beta}$  no contribuye, mientras que la contribución de menor orden surge del término:

$$- [\Delta^\gamma_\alpha(\hat{u})\hat{u}_\beta - \Delta^\gamma_\alpha(u)u_\beta] (\rho(u_E) + P(u_E)) u_E^\alpha u_E^\beta.$$

Más explícitamente mostramos que

$$K^\gamma = (\Delta^\gamma_\alpha(\hat{u})\hat{u}_\beta) u_E^\alpha u_E^\beta = -u_E^\gamma (1 + \hat{\delta}^2)^{\frac{1}{2}} + \hat{u}^\gamma (1 + \hat{\delta}^2),$$

y eliminando  $\hat{u}^\gamma$  usando  $\hat{u}^\gamma = u_E^\gamma + \hat{\delta}^\gamma + O(\hat{\delta}^\gamma)^2$ , encontramos que

$$K^\gamma = \hat{\delta}^\gamma + O(\hat{\delta}^\gamma \hat{\delta}^2).$$

Esto implica que

$$\delta h^\gamma = h^\gamma(\hat{u}) - h^\gamma(u) = [\rho(u_E) + P(u_E)] (-\hat{\delta}^\gamma + \gamma^\gamma) = -[\rho(u_E) + P(u_E)] \hat{\epsilon}^\gamma, \quad (3.6.12)$$

el cual es el inciso (3.3.36) del teorema 2.

A través de un procedimiento similar, podemos establecer la fórmula (3.3.39) i.e.

$$\delta\tau^{\alpha\beta} \equiv \tau^{\alpha\beta}(\hat{u}) - \tau^{\alpha\beta}(u) = \hat{\epsilon}O_1, \quad (3.6.13)$$

y para esta prueba, comenzamos con la identidad:

$$\begin{aligned} \tau^{\gamma\delta}(u) &= \Delta^\gamma_\alpha(u)\Delta^\delta_\beta(u)T^{\alpha\beta} - P(u)\Delta^{\gamma\delta}(u) \\ &= \Delta^\gamma_\alpha(u)\Delta^\delta_\beta(u)[(\rho(u_E) + P(u_E))u_E^\alpha u_E^\beta + P(u_E)g^{\alpha\beta} + \tau^{\alpha\beta}(u_E)] - P(u)\Delta^{\gamma\delta}(u). \end{aligned} \quad (3.6.14)$$

Formado

$$\delta\tau^{\alpha\beta} = \tau^{\alpha\beta}(\hat{u}) - \tau^{\alpha\beta}(u), \quad (3.6.15)$$

apelando a (3.6.14) y después de algo de álgebra se sigue que

$$\delta\tau^{\alpha\beta} \equiv \tau^{\alpha\beta}(\hat{u}) - \tau^{\alpha\beta}(u) = \hat{\epsilon}O_1.$$

Con un procedimiento similar mostramos los otros incisos del teorema 2.

### 3.6.2. Demostración del teorema 3

La demostración del teorema 3 se sigue formando la variación  $\delta q^\alpha$  de  $q^\alpha$ . Tenemos por definición:

$$\begin{aligned}\delta q^\alpha &\equiv q^\alpha(\hat{u}) - q^\alpha(u) \\ &= h^\alpha(\hat{u}) - \frac{\rho(\hat{u}) + P(\hat{u})}{n(\hat{u})}n^\alpha(\hat{u}) - h^\alpha(u) + \frac{\rho(u) + P(u)}{n(u)}n^\alpha(u) \\ &= \delta h^\alpha - \frac{\rho(u_E) + P(u_E)}{n(u_E)}(1 + O_2)\delta n^\alpha.\end{aligned}\tag{3.6.16}$$

Apelando a las conclusiones del teorema 2, tenemos:

$$\delta h^\gamma \equiv h^\gamma(\hat{u}) - h^\gamma(u) = -(\rho(u_E) + P(u_E))\hat{\epsilon}^\gamma$$

$$\delta n^\gamma = -n(u_E)\epsilon^\gamma + \hat{\epsilon}O_1.$$

y sustituyendo estas variaciones en (3.6.16) se verifica la conclusión del teorema 3.

### 3.6.3. Demostración del teorema 4

Finalmente consideramos la demostración del teorema 4, y para este teorema apelamos a la relación de Gibbs:

$$ds = T^{-1}d\rho - \sum_{A=1}^n \Theta_A dn_A, \quad A \in (1, 2, \dots, n),$$

la cual mostramos en el capítulo 1 (véase (1.1.18) con  $k = c = 1$ ). En donde tomamos las variaciones  $(ds, d\rho, dn_A)$  formadas, tomando la diferencia

$$ds = s(\rho(u), n_A(u)) - s(\rho(u(E)), n_A(u(E))),$$

en donde  $u(E)$ ,  $\rho(u(E))$ ,  $n_A(u(E))$ , etc., denota valores en equilibrio. Por la elección de los  $(\hat{u}^\alpha, u^\alpha)$  al interior del cono de pseudo-ángulo  $\epsilon$  que hemos definido en la sección anterior, tenemos:

$$s(\hat{u}) - s(u(E)) = T_E^{-1}(\rho(\hat{u}) - \rho(u(E)) - \sum_{A=1}^n \Theta_A(u(E)) [n_A(\hat{u}) - n_A(u(E))]), \quad (3.6.17)$$

$$s(u) - s(u(E)) = T_E^{-1}(\rho(u) - \rho(u(E)) - \sum_{A=1}^n \Theta_A(u(E)) [n_A(u) - n_A(u(E))]). \quad (3.6.18)$$

Tomando la diferencia y recordado las variaciones de  $\rho$  y  $n_A$  del teorema 2 se sigue que

$$\delta s = s(\hat{u}) - s(u) = \hat{\epsilon}O_1.$$

Por otro lado, apelando a las propiedades de las derivadas parciales de  $s(\rho(u), n_A(u))$  los potenciales térmicos  $\Theta_A(u)$  para cada especie de partículas de la mezcla obedece:

$$\Theta_A(\hat{u}) = \frac{\partial s(\rho(\hat{u}), n(\hat{u}))}{\partial n_A(\hat{u})} = \frac{\partial s(\rho(u) + \hat{\epsilon}O_1, n_A(u) + \hat{\epsilon}O_1)}{\partial n_A(\hat{u})} = \Theta_A(u) + \hat{\epsilon}O_1,$$

la cual implica que

$$\delta\Theta_A = \hat{\epsilon}O_1.$$

Con estas variaciones y apelando a

$$T(u)s(u) = \rho(u) + P(u) - T(u) \sum_{A=1}^n \Theta_A(u)n_A(u), \quad (3.6.19)$$

por la dobleta  $(\hat{u}^\alpha, u^\alpha)$  como en el inciso anterior, se sigue que

$$\delta T = \hat{\epsilon}O_1. \quad (3.6.20)$$

Con esta fórmula se concluye la demostración del teorema 4.

# 4 La teoría de Liu-Müller-Ruggeri

## 4.1. Descripción de la teoría de Liu-Müller-Ruggeri

En el capítulo anterior hemos discutido las propiedades básicas de la termodinámica transitoria propuesta por Israel y Stewart en los años (1970 – 1980). En este capítulo<sup>1</sup> introducimos una nueva teoría que también se enfoca en la descripción de estados de fluidos simples relativistas desarrollada por Liu, Müller y Ruggeri originalmente en [66] y discutida con más detalle en la monografía [77]. La teoría puede considerarse como una extensión al régimen relativista de la termodinámica irreversible racional extendida clásica (TIRE) que brevemente discutimos en la sección 2.3.3 y por esta razón en ocasiones nos referimos a la teoría de Liu, Müller y Ruggeri como (TIRE) relativista.

Motivados por el deseo de poner a la termodinámica irreversible de fluidos relativistas en un fundamento matemático sólido, los autores en [66] introdujeron una nueva teoría que describe estados de fluidos relativistas. La característica distintiva de esta teoría es que las ecuaciones dinámicas constituyen un sistema simétrico-hiperbólico/causal y por la tanto la propagación finita de las perturbaciones está considerada. En esta teoría las variables dinámicas son las 10 componentes del tensor de energía-momento  $T^{\alpha\beta} = T^{\beta\alpha}$  y las 4 componentes del 4-vector de corriente de partículas  $J^\alpha$ . Estas 14 variables están sujetas a satisfacer

$$\nabla_\alpha T^{\alpha\beta} = \nabla_\alpha J^\alpha = 0, \quad (4.1.1)$$

---

<sup>1</sup>**Notación:** (En este capítulo y para estar en acuerdo con las convenciones del artículo original [66], empleamos la siguiente notación:)

(+ - - -): Signatura

Normalizamos la 4-velocidad según  $g(u, u) = c^2$ , con  $c$ , la velocidad de la luz y el proyector asociado por la 4-velocidad  $u$  tiene la siguiente forma:

$$\Delta^{\alpha\beta} = -g^{\alpha\beta} + \frac{1}{c^2} u^\alpha u^\beta.$$

$$\nabla_\gamma A^{\alpha\beta\gamma} = I^{\alpha\beta}, \quad (4.1.2)$$

en donde  $A^{\alpha\beta\gamma}$  es un campo tensorial completamente simétrico, mientras que  $I^{\alpha\beta}$  es un campo tensorial simétrico con traza nula  $I^\alpha_\alpha = 0$ , y por tanto  $\nabla_\alpha A^{\alpha\beta}_\beta = 0$ . Debido a estas simetrías, el sistema (4.1.1, 4.1.2) involucra a 14 ecuaciones y por tanto (4.1.1, 4.1.2) pueden servir como las ecuaciones dinámicas para las 14 variables bajo la suposición que:

$$A^{\alpha\beta\gamma} = A^{\alpha\beta\gamma}(J^\alpha, T^{\alpha\beta}), \quad I^{\alpha\beta} = I^{\alpha\beta}(J^\alpha, T^{\alpha\beta}), \quad (4.1.3)$$

i.e.  $A^{\alpha\beta\gamma}$  e  $I^{\alpha\beta}$  se consideran como funciones constitutivas con  $(J^\alpha, T^{\alpha\beta})$  actuando como las variables básicas. Además de las leyes de balance (4.1.1, 4.1.2), los autores completan el sistema, incluyendo un vector de flujo de entropía  $S^\alpha$  que también es función constitutiva<sup>2</sup> i.e.

$$S^\alpha = S^\alpha(J^\alpha, T^{\alpha\beta}), \quad (4.1.4)$$

y demandan que para cualquier solución<sup>3</sup>  $(J^\alpha, T^{\alpha\beta})$  del sistema (4.1.1, 4.1.2), el flujo  $S^\alpha$  debe satisfacer:

$$\nabla_\alpha S^\alpha(J^\alpha, T^{\alpha\beta}) \geq 0. \quad (4.1.5)$$

Los autores imponen restricciones severas sobre la forma de las funciones constitutivas  $A^{\alpha\beta\gamma}(J^\alpha, T^{\alpha\beta})$ ,  $I^{\alpha\beta} = I^{\alpha\beta}(J^\alpha, T^{\alpha\beta})$  y  $S^\alpha = S^\alpha(J^\alpha, T^{\alpha\beta})$  apelando a:

- a) Principio de entropía.
- b) Principio de relatividad.
- c) Hiperbolicidad.

Desafortunadamente, la aplicación de estos principios como medio para fijar la estructura de las funciones constitutivas involucra cálculos largos, por tanto, en

<sup>2</sup>Es interesante señalar aquí las diferentes filosofías que sustentan a la presente teoría y a la teoría transitoria desarrollada en el capítulo anterior. Mientras que en la teoría transitoria el vector de entropía  $S^\alpha$  (véase (3.3.1)) depende de las variables primarias y tal vez de un conjunto infinito de variables adicionales denotadas por  $X_{(i)}^{\alpha\beta\gamma\cdots}$  con  $i \in \{1, 2, \dots\}$ , en la teoría presente  $S^\alpha$  depende únicamente de las variables básicas  $J^\alpha$  y  $T^{\alpha\beta}$ .

<sup>3</sup>Una solución  $(J^\alpha, T^{\alpha\beta})$  de las ecuaciones de campo (4.1.1, 4.1.2) y en acuerdo con la terminología de los termodinámicos, es referida como un proceso termodinámico.

este capítulo, solo resaltaremos los pasos esenciales en este proceso.

Los autores comienzan rompiendo la invarianza de la teoría bajo cambio de marco utilizando el marco de Eckart<sup>4</sup> para realizar sus cálculos. Relativamente a este marco, se descomponen el tensor de energía-momento  $T^{\alpha\beta}$  y la 4-corriente de partículas  $J^\alpha$  de acuerdo a:

$$T^{\alpha\beta} = \frac{1}{c^2}\rho u^\alpha u^\beta + (P + \pi)\Delta^{\alpha\beta} + \frac{1}{c^2}(u^\alpha q^\beta + u^\beta q^\alpha) + \pi^{\alpha\beta}, \quad J^\alpha = n u^\alpha, \quad (4.1.6)$$

en donde<sup>5</sup>  $(\rho, P, \pi, q^\alpha, \pi^{\alpha\beta})$  tienen la misma interpretación como aquellas que aparecen en las expansiones mostradas en (3.3.24, 3.3.25). Pero nótese que en este capítulo y para estar de acuerdo con la terminología en [66], [77], el flujo de energía  $h^\alpha$  en (3.3.24) es denotado aquí por  $q^\alpha$  y referido como el flujo de calor, mientras recordamos al lector, que al respecto del marco de Eckart, el flujo de partículas (particle drift en inglés) definido en (3.3.25) es nulo i.e.  $n^\alpha(u_N) = 0$ . Para un uso posterior, notemos que

$$\pi^{\alpha\beta} = \left( \Delta^\alpha_\gamma \Delta^\beta_\delta - \frac{1}{3} \Delta^{\alpha\beta} \Delta_{\gamma\delta} \right) T^{\gamma\delta}, \quad (4.1.7)$$

mientras que la presión termodinámica  $P$ , la presión volumétrica<sup>6</sup>  $\pi$  (bulk pressure), la densidad de energía  $\rho$ , el vector flujo de calor  $q^\alpha$  y la densidad de partículas  $n$  estan determinados por

$$P + \pi = \frac{1}{3} \Delta_{\alpha\beta} T^{\alpha\beta}, \quad \rho = \frac{1}{c^2} u_\alpha u_\beta T^{\alpha\beta}, \quad c^2 n^2 = J^\alpha J_\alpha, \quad q^\alpha = -\Delta^\alpha_\beta u_\gamma T^{\beta\gamma}. \quad (4.1.8)$$

En el tratamiento que sigue, las 14 componentes de  $(J^\alpha, T^{\alpha\beta})$  se cambian en favor de los 14 campos  $(\rho, P + \pi, q^\alpha, \pi^{\alpha\beta}, n, u^\alpha)$  definidos en (4.1.6, 4.1.8) medidos por los observadores locales en reposo al respecto del marco de Eckart.

<sup>4</sup>Es interesante señalar aquí que el sistema (4.1.1, 4.1.2, 4.1.5) involucra únicamente campos tensoriales y en principio no hay espacio para observadores locales, pero como hemos mencionado en el capítulo introductorio progresos en medios continuos relativistas vienen apelando a las mediciones que realizan observadores locales. La expansión (4.1.6) ofrece pistas para un mejor entendimiento del contenido de esta teoría.

<sup>5</sup>Debido a que todos los cálculos en este capítulo estan hechos al respecto del marco de Eckart ( $u^\alpha = u_N^\alpha$ ) y no hay peligro de confusión, no especificamos la dependencia de  $(\rho, P, \pi, q^\alpha, \pi^{\alpha\beta})$  sobre  $u_N^\alpha$ .

<sup>6</sup>En el capítulo anterior hemos discutido la sutileza entre la distinción y definición de estas dos presiones (vease discusion que sigue relacion (3.3.18)).

## 4.2. Relaciones constitutivas y los principios de Relatividad y de Entropía

El principio de relatividad, aplicado a las relaciones constitutivas  $A^{\alpha\beta\gamma}(J^\alpha, T^{\alpha\beta})$ ,  $I^{\alpha\beta} = I^{\alpha\beta}(J^\alpha, T^{\alpha\beta})$  y  $S^\alpha = S^\alpha(J^\alpha, T^{\alpha\beta})$ , dicta que estos objetos deben permanecer forma invariante bajo transformaciones arbitrarias de coordenadas. Aunque alguien podría estudiar la estructura de tales campos tensoriales, los autores evitan ir en esa dirección. En vez de esto, emplean las componentes de  $(u^\alpha, q^\alpha, \pi^{\alpha\beta}, \pi^{\alpha\beta})$  y escalares, con los que construyen a los tensores  $I^{\alpha\beta}$ ,  $A^{\alpha\beta\gamma}$  más generales posibles compatibles con las simetrías que mencionamos en la sección anterior. Adicionalmente, restringen su atención a la clase de estos tensores que exhiben dependencia lineal<sup>7</sup> en  $(\pi, \pi^{\alpha\beta}, q^\alpha)$ . Estos tensores tienen la forma:

$$I^{\alpha\beta} = B_1^\pi \pi g^{\alpha\beta} - \frac{4}{c^2} B_1^\pi \pi u^\alpha u^\beta + B_3 \pi^{\alpha\beta} + \frac{1}{c^2} B_4 (q^\alpha u^\beta + q^\beta u^\alpha), \quad (4.2.1)$$

$$\begin{aligned} A^{\alpha\beta\gamma} = & (C_1^0 + C_1^\pi \pi) u^\alpha u^\beta u^\gamma + \frac{c^2}{6} (nm^2 - C_1^0 - C_1^\pi \pi) (g^{\alpha\beta} u^\gamma + g^{\beta\gamma} u^\alpha + g^{\gamma\alpha} u^\beta) \\ & + C_3 (g^{\alpha\beta} q^\gamma + g^{\beta\gamma} q^\alpha + g^{\gamma\alpha} q^\beta) - \frac{6}{c^2} C_3 (u^\alpha u^\beta q^\gamma + u^\beta u^\gamma q^\alpha + u^\gamma u^\alpha q^\beta) \\ & + C_5 (\pi^{\alpha\beta} u^\gamma + \pi^{\beta\gamma} u^\alpha + \pi^{\gamma\alpha} u^\beta), \end{aligned} \quad (4.2.2)$$

en donde  $(B_1^\pi, B_3, B_4)$  y  $(C_1^0, C_1^\pi, C_3, C_5)$  son funciones de  $(n, \rho)$  por determinarse, y  $m$  es una escala de masa.

Una construcción similar muestra que la parte de  $S^\alpha$  que contiene terminos hasta incluso cuadráticos<sup>8</sup> en  $(\pi, \pi^{\alpha\beta}, q^\alpha)$  tiene la forma:

$$\begin{aligned} S^\alpha = & (ns + A_1^\pi \pi + A_1^{\pi^2} \pi^2 + A_1^q q^\beta q_\beta + A_1^t \pi^{\beta\gamma} \pi_{\beta\gamma}) u^\alpha \\ & + (A_2^0 + A_2^\pi \pi) q^\alpha + A_3^0 \pi^{\alpha\beta} q_\beta, \end{aligned} \quad (4.2.3)$$

<sup>7</sup>Interpretamos esta restricción como un intento de parte de los autores para ganar intuición sobre el contenido de esta teoría. Como veremos en esta sección, esta elección restringe la atención a estados cercanos al equilibrio y tal propiedad hace el análisis manejable para un tratamiento analítico. La inclusión de términos no lineales complica el asunto considerablemente.

<sup>8</sup>La naturalidad cuadrática de  $S^\alpha$  implementa la idea original de Müller que introducimos en el capítulo 2 y estructuralmente tal  $S^\alpha$  es idéntico al flujo de entropía por la teoría transitoria.

en donde nuevamente  $(A^\pi_1, A^{\pi^2}_1, A^q_1, A^t_1, A^0_2, A^{\pi_2}, A^0_3)$  son funciones por determinar mientras que  $(n, s)$  son la densidad del número de partículas y la densidad de entropía por partícula medidas al respecto del marco de Eckart. La determinación de los 14 coeficientes  $(A, \dots B, \dots C, \dots)$  que aparecen en (4.2.1, 4.2.2, 4.2.3) es un tema delicado y para tal tarea, el principio de entropía juega un papel importante. En el presente contexto, este principio afirma que la dependencia de las relaciones constitutivas  $A^{\alpha\beta\gamma}(J^\alpha, T^{\alpha\beta})$ ,  $I^{\alpha\beta} = I^{\alpha\beta}(J^\alpha, T^{\alpha\beta})$  y  $S^\alpha = S^\alpha(J^\alpha, T^{\alpha\beta})$ , sobre las variables básicas  $(J^\alpha, T^{\alpha\beta})$  deben de elegirse de tal manera que cada solución a las leyes de balance (4.1.1, 4.1.2) satisfaga la desigualdad de entropía (4.1.5).

Como hemos mencionado en el capítulo 2, la implementación de este principio es un problema difícil y a lo largo del desarrollo de la termodinámica de medios continuous se han ideado diferentes maneras de implementar este principio. Para las necesidades de esta tesis, introducimos el procedimiento de Liu para la implementación de este principio.

Liu en [64], tomó un punto de vista drástico para poder implementar este principio. Él elimino la restricción fuerte

*que cada solución a las leyes de balance debe satisfacer la desigualdad de entropía*

por algo mucho más ligero. El demando que:

*por cualquiera configuración de las variables básicas deben que cumplir una desigualdad de entropía extendida.*

El precio de remover la restricción *de cada solución* a las leyes de balance por *configuraciones arbitrarias* de las variables básicas, llegó pagando un precio alto: Uno necesita introducir variables adicionales referidas como multiplicadores de Lagrange.

En el contexto del sistema (4.1.1, 4.1.2), acoplado con la desigualdad de entropía (4.1.5), el procedimiento de Liu consiste en introducir los multiplicadores de Lagrange como nuevos campos denotados por:  $(\zeta, \zeta_\alpha, \zeta_{\alpha\beta})$  con  $\zeta_{\alpha\beta} = \zeta_{\beta\alpha}$  y  $g^{\alpha\beta}\zeta_{\alpha\beta} = 0$  mientras la desigualdad de entropía extendida tiene la forma

$$\nabla_\alpha S^\alpha + \zeta \nabla_\alpha J^\alpha + \zeta_\beta \nabla_\alpha T^{\beta\alpha} + \zeta_{\beta\mu} (\nabla_\alpha A^{\alpha\beta\mu} - I^{\beta\mu}) \geq 0, \quad (4.2.4)$$

y esta desigualdad debería ser válida para cualquier configuración de  $(J^\alpha, T^{\alpha\beta})$  y no solamente para soluciones al sistema (4.1.1, 4.1.2). La existencia de los multiplicadores  $(\zeta, \zeta_\alpha, \zeta_{\alpha\beta})$  que satisfacen esta desigualdad es un problema involucrado y su demostración es discutida en la ref. [64]. Aceptando la existencia de los

multiplicadores  $(J^\alpha, T^{\alpha\beta})$  e introduciendo un nuevo campo  $S'^\alpha$  vía

$$S'^\alpha = S^\alpha + \zeta J^\alpha + \zeta_\beta T^{\alpha\beta} + \zeta_{\beta\gamma} A^{\alpha\beta\gamma}, \quad (4.2.5)$$

entonces (4.2.4) puede ser reescrita de la forma

$$\nabla_\alpha S'^\alpha - J^\alpha \nabla_\alpha \zeta - T^{\alpha\beta} \nabla_\alpha \zeta_\beta - A^{\beta\gamma\alpha} \nabla_\alpha \zeta_{\beta\gamma} - \zeta_{\beta\gamma} I^{\beta\gamma} \geq 0. \quad (4.2.6)$$

Debido a que  $(J^\alpha, T^{\alpha\beta})$  y  $(\zeta, \zeta_\alpha, \zeta_{\alpha\beta})$  tienen el mismo número de componentes, uno podría pensar en una transformación invertible de la forma

$$(J^\alpha, T^{\alpha\beta}) \mapsto (\zeta, \zeta_\alpha, \zeta_{\alpha\beta}), \quad (4.2.7)$$

es decir, considerar los multiplicadores  $(\zeta, \zeta_\alpha, \zeta_{\alpha\beta})$  como funciones de  $(J^\alpha, T^{\alpha\beta})$ . Los autores en [66], muestran que esta transformación<sup>9</sup> puede ser generada a través de una función vectorial  $S'^\alpha(\zeta, \zeta_\alpha, \zeta_{\alpha\beta})$ . Para ver esta propiedad, uno primero desarrolla  $\nabla_\alpha S'^\alpha$ , entonces (4.2.6) da que

$$\left( \frac{\partial S'^\alpha}{\partial \zeta} - J^\alpha \right) \nabla_\alpha \zeta + \left( \frac{\partial S'^\alpha}{\partial \zeta_\beta} - T^{\alpha\beta} \right) \nabla_\alpha \zeta_\beta + \left( \frac{\partial S'^\alpha}{\partial \zeta_{\beta\gamma}} - A^{\beta\gamma\alpha} \right) \nabla_\alpha \zeta_{\beta\gamma} - \zeta_{\beta\gamma} I^{\beta\gamma} \geq 0, \quad (4.2.8)$$

y esta desigualdad debe ser válida para cualesquiera  $(\zeta, \zeta_\beta, \zeta_{\alpha\beta})$ . Este requisito implica que

$$J^\alpha = \frac{\partial S'^\alpha}{\partial \zeta}, \quad T^{\alpha\beta} = \frac{\partial S'^\alpha}{\partial \zeta_\beta}, \quad A^{\langle\beta\gamma\rangle\alpha} = \frac{\partial S'^\alpha}{\partial \zeta_{\beta\gamma}} - \frac{1}{4} g^{\beta\gamma} g_{\mu\nu} \frac{\partial S'^\alpha}{\partial \zeta_{\mu\nu}}, \quad (4.2.9)$$

e introduciendo la producción de entropía  $\sigma$  vía  $\sigma \equiv -\zeta_{\beta\gamma} I^{\beta\gamma}$ , entonces la validez de (4.2.8) también demanda que

$$\sigma = -\zeta_{\beta\gamma} I^{\beta\gamma} \geq 0. \quad (4.2.10)$$

Pero (4.2.9) implica que las componentes  $(J^\alpha, T^{\alpha\beta}, A^{\alpha\beta\gamma})$  se pueden considerar como funciones dependientes de  $(\zeta, \zeta_\alpha, \zeta_{\alpha\beta})$  y estas componentes se pueden generar mediante la diferenciación del «potencial vectorial»  $S'^\alpha = S'^\alpha(\zeta, \zeta_\alpha, \zeta_{\alpha\beta})$ ,

<sup>9</sup>Esta transformación y en particular, su naturaleza global es sutil. En [77] y para el caso de fluidos no relativistas, los autores discuten este punto en detalle. Muestran que la invertibilidad global está asegurada si la densidad de entropía  $s$  es una función cóncava de las variables básicas. Para el caso relativista, el tema se complica. Sin embargo, como veremos más adelante esperamos que la invertibilidad local sea válida.

sujeto por supuesto a que alguien tiene la manera de construir  $S'^\alpha$  como función de  $(\zeta, \zeta_\alpha, \zeta_{\alpha\beta})$ .

Debido al significado de este «potencial vectorial», en [66, 77] construyeron una representación explícita de  $S'^\alpha$  como función de  $(\zeta, \zeta_\alpha, \zeta_{\alpha\beta})$  apelando al principio de relatividad. Este principio requiere que  $S'^\alpha$  debe ser forma invariante bajo transformaciones arbitrarias de coordenadas. Dado que  $S'^\alpha = S'^\alpha(\zeta, \zeta_\alpha, \zeta_{\alpha\beta})$  y los únicos vectores que se puede construir a partir de los multiplicadores de Lagrange que sean a lo más cuadráticos en  $\zeta_{\alpha\beta}$ , son

$$\zeta_\alpha, \quad \zeta_{\alpha\beta}\zeta^\beta, \quad \zeta_{\alpha\beta}^2\zeta^\beta,$$

se sigue que  $S'^\alpha$  debe ser una combinación lineal de estos vectores con coeficientes escalares formados de los multiplicadores de Lagrange. Introduciendo los escalares

$$\begin{aligned} H_0 &= \zeta & G_0 &= \zeta^\alpha \zeta_\alpha \\ H_2 &= \text{tr}(\zeta_{\alpha\beta}^2) & G_1 &= \zeta^\alpha \zeta_{\alpha\beta} \zeta^\beta \\ H_3 &= \text{tr}(\zeta_{\alpha\beta}^3) & G_2 &= \zeta^\alpha \zeta_{\alpha\beta}^2 \zeta^\beta \\ H_4 &= \text{tr}(\zeta_{\alpha\beta}^4) & G_3 &= \zeta^\alpha \zeta_{\alpha\beta}^3 \zeta^\beta \end{aligned} \quad (4.2.11)$$

entonces, se mostró en [66, 77] que la forma más general de  $S'^\alpha$  cuadrática en  $\zeta_{\alpha\beta}$  es

$$\begin{aligned} S'_\alpha &= \left[ \Gamma_0 + \frac{\partial \Gamma_1}{\partial G_0} G_1 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Gamma_2}{\partial G_0^2} G_1^2 + \frac{\partial \Gamma_2}{\partial G_0} G_2 + \frac{1}{4} \Gamma_2 H_2 \right] \zeta_\alpha + \\ &+ \left[ \Gamma_1 + \frac{\partial \Gamma_2}{\partial G_0} G_1 \right] \zeta_{\alpha\beta} \zeta^\beta + \Gamma_2 \zeta_{\alpha\beta}^2 \zeta^\beta. \end{aligned} \quad (4.2.12)$$

en donde los  $(\Gamma_0, \Gamma_1, \Gamma_2)$  son funciones arbitrarias de  $\zeta$  y  $G_0 = \zeta^\alpha \zeta_\alpha$ . Para llegar a (4.2.12), los autores tomaron en consideración las simetrías de los campos  $(T^{\alpha\beta}, A^{\alpha\beta\gamma})$  y el requisito de que  $(J^\alpha, T^{\alpha\beta}, A^{\alpha\beta\gamma})$  deben ser funciones lineales de  $\zeta_{\alpha\beta}$ . Estas condiciones fijan a las funciones  $(\Gamma_1, \Gamma_2)$  en términos de  $\Gamma_0(\zeta, G_0)$  y dos funciones arbitrarias de  $\zeta$ . Por lo tanto, aunque en las siguientes fórmulas las funciones  $\Gamma_1, \Gamma_2$  aparecen explícitamente, de hecho están determinadas por  $\Gamma_0$  y dos funciones arbitrarias de  $\zeta$ .

Usando la forma de  $S'_\alpha$  en (4.2.12) combinada con (4.2.11), se sigue que las componentes de  $J^\alpha$ ,  $T^{\alpha\beta}$  y  $A^{\beta\gamma\alpha}$  a orden lineal en  $\zeta_{\alpha\beta}$  tiene la forma

$$J^\alpha = \left( \frac{\partial\Gamma_0}{\partial\zeta} + \frac{\partial^2\Gamma_1}{\partial\zeta\partial G_0} G_1 \right) \zeta^\alpha + \frac{\partial\Gamma_1}{\partial\zeta} \zeta^{\alpha\beta} \zeta_\beta, \quad (4.2.13)$$

$$\begin{aligned} T^{\alpha\beta} = & \left( \Gamma_0 + \frac{\partial\Gamma_1}{\partial G_0} G_1 \right) g^{\alpha\beta} + \Gamma_1 \zeta^{\alpha\beta} + 2 \left( \frac{\partial\Gamma_0}{\partial G_0} + \frac{\partial^2\Gamma_1}{\partial G_0^2} G_1 \right) \zeta^\alpha \zeta^\beta \\ & + 2 \frac{\partial\Gamma_1}{\partial G_0} (\zeta^\alpha \zeta^{\beta\gamma} \zeta_\gamma + \zeta^\beta \zeta^{\alpha\gamma} \zeta_\gamma), \end{aligned} \quad (4.2.14)$$

$$\begin{aligned} A^{\beta\gamma\alpha} = & \frac{1}{2} \left( \Gamma_1 + \frac{\partial\Gamma_2}{\partial G_0} G_1 \right) (g^{\beta\gamma} \zeta^\alpha + g^{\gamma\alpha} \zeta^\beta + g^{\alpha\beta} \zeta^\gamma) + \\ & + \frac{1}{2} \Gamma_2 (g^{\beta\gamma} \zeta^{\alpha\delta} \zeta_\delta + g^{\gamma\alpha} \zeta^{\beta\delta} \zeta_\delta + g^{\alpha\beta} \zeta^{\gamma\delta} \zeta_\delta + \zeta^{\beta\gamma} \zeta^\alpha + \zeta^{\gamma\alpha} \zeta^\beta + \zeta^{\alpha\beta} \zeta^\gamma) + \\ & + \left( \frac{\partial\Gamma_1}{\partial G_0} + \frac{\partial^2\Gamma_2}{\partial G_0^2} G_1 \right) \zeta^\beta \zeta^\gamma \zeta^\alpha + \frac{\partial\Gamma_2}{\partial G_0} (\zeta^\beta \zeta^\gamma \zeta^{\alpha\delta} \zeta_\delta + \zeta^\gamma \zeta^\alpha \zeta^{\beta\delta} \zeta_\delta + \zeta^\alpha \zeta^\beta \zeta^{\gamma\delta} \zeta_\delta), \end{aligned} \quad (4.2.15)$$

mientras que el vector de entropía  $S^\alpha$  tiene la forma

$$\begin{aligned} S^\alpha = & - \left[ \zeta \frac{\partial\Gamma_0}{\partial\zeta} + 2 \frac{\partial\Gamma_0}{\partial G_0} G_0 + \left( \zeta \frac{\partial^2\Gamma_1}{\partial\zeta\partial G_0} + 2G_0 \frac{\partial^2\Gamma_1}{\partial G_0^2} + 3 \frac{\partial\Gamma_1}{\partial G_0} \right) G_1 \right] \zeta^\alpha - \\ & - \left[ \Gamma_1 + \zeta \frac{\partial\Gamma_1}{\partial\zeta} + 2G_0 \frac{\partial\Gamma_1}{\partial G_0} \right] \zeta^{\alpha\beta} \zeta_\beta. \end{aligned} \quad (4.2.16)$$

La representación de los campos  $(J^\alpha, T^{\alpha\beta}, A^{\beta\gamma\alpha}, S^\alpha)$  en (4.2.13-4.2.16) es formal ya que dependen de los multiplicadores de Lagrange  $(\zeta, \zeta_\alpha, \zeta_{\alpha\beta})$  cuyo significado físico en este punto no es claro, y tampoco tenemos una manera de construir la dependencia de estos multiplicadores como funciones de las coordenadas del espacio-tiempo.

Como segundo paso, los autores en [66,77] expresan a los multiplicadores en términos de las cantidades físicas  $(\rho, P+\pi, q^\alpha, \pi^{\alpha\beta}, n, u^\alpha)$  que aparecen en las descomposiciones de  $(J^\alpha, T^{\alpha\beta})$  en (4.1.6). Para eso, combinando (4.2.13, 4.2.14) con (4.1.6, 4.1.8) se obtiene

$$nm u^\alpha = \left( \frac{\partial \Gamma_0}{\partial \zeta} + \frac{\partial^2 \Gamma_1}{\partial \zeta \partial G_0} G_1 \right) \zeta^\alpha + \frac{\partial \Gamma_1}{\partial \zeta} \zeta^{\alpha\beta} \zeta_\beta, \quad (4.2.17)$$

$$\begin{aligned} \pi^{\alpha\beta} + (P + \pi) \Delta^{\alpha\beta} + \frac{1}{c^2} (u^\alpha q^\beta + u^\beta q^\alpha) + \frac{1}{c^2} \rho u^\alpha u^\beta &= \left( \Gamma_0 + \frac{\partial \Gamma_1}{\partial G_0} G_0 \right) g^{\alpha\beta} + \\ + \Gamma_1 \zeta^{\alpha\beta} + 2 \left( \frac{\partial \Gamma_0}{\partial G_0} + \frac{\partial \Gamma_1}{\partial G_0^2} G_1 \right) \zeta^\alpha \zeta^\beta + 2 \frac{\partial \Gamma_1}{\partial G_0} & \left( \zeta^\beta \zeta^{\alpha\gamma} \zeta_\gamma + \zeta^\alpha \zeta^{\beta\gamma} \zeta_\gamma \right), \end{aligned} \quad (4.2.18)$$

y estas relaciones se consideran como un sistema de 14 ecuaciones que relacionan a los 14 multiplicadores de Lagrange  $(\zeta, \zeta_\alpha, \zeta_{\alpha\beta})$  con las cantidades  $(\rho, P + \pi, q^\alpha, \pi^{\alpha\beta}, n, u^\alpha)$  que aparecen en (4.1.6, 4.1.8). Sin embargo, debido a la no linealidad, resolver estas ecuaciones para los multiplicadores no es una tarea trivial. Los autores en [66, 77] resuelven este problema «perturbativamente»: para ello primero establecieron la relación entre  $(\zeta, \zeta_\alpha, \zeta_{\alpha\beta})$  y las variables físicas  $(\rho, P + \pi, q^\alpha, \pi^{\alpha\beta}, n, u^\alpha)$  para los estados de equilibrio los cuales identificamos en la sección próxima.

### 4.3. Estados de equilibrio en la teoría de Liu-Müller-Ruggeri

La identificación de los estados de equilibrio dentro de la presente teoría necesita algunas consideraciones. Los autores argumentan que los estados en equilibrio están caracterizados por una producción de entropía  $\sigma$  nula i.e.  $\sigma = -\zeta_{\beta\gamma} I^{\beta\gamma} = 0$  (véase 4.2.10), y esta condición además de requerir  $I^{\alpha\beta} = 0$  requiere adicionalmente que  $\sigma$  en equilibrio debe ser un mínimo local implicando que los estados de equilibrio están caracterizados por la propiedad<sup>10</sup> :  $\zeta_{\alpha\beta} = 0$ .

Con la propiedad de que los estados en equilibrio cumplen con  $\zeta_{\alpha\beta} = 0$  y usando el subíndice  $E$  para denotar valores en equilibrio, se encuentra a partir de las expresiones (4.2.16, 4.2.17, 4.2.18), las siguientes fórmulas válidas para estados de equilibrio

<sup>10</sup>Esta restricción viene notando que la variación a primer orden  $\delta\sigma$  de la producción de entropía  $\sigma$  evaluada en un estado de equilibrio verdadero i.e.  $\sigma$  en un mínimo local, satisface  $\delta\sigma = \delta\zeta_{\mu\nu} I^{\mu\nu} + \zeta_{\mu\nu} \delta I^{\mu\nu} = 0 + O(\delta\zeta)^2$  para todas las variaciones  $\delta\zeta, \delta\zeta_\mu, \delta\zeta_{\mu\nu}$  y esto se cumple cuando  $\zeta_{\mu\nu} = 0$  esta en un estado de equilibrio verdadero.

$$S_E^\alpha \equiv S_E u^\alpha = \left[ - \left( \zeta \frac{\partial \Gamma_0}{\partial \zeta} + 2 \frac{\partial \Gamma_0}{\partial G_0} G_0 \right) \zeta^\alpha \right]_E, \quad (4.3.1)$$

$$nm u^\alpha = \left( \frac{\partial \Gamma_0}{\partial \zeta} \zeta^\alpha \right)_E, \quad (4.3.2)$$

$$P \Delta^{\alpha\beta} + \frac{1}{c^2} \rho u^\alpha u^\beta = \left( \Gamma_0 g^{\alpha\beta} + 2 \frac{\partial \Gamma_0}{\partial G_0} \zeta^\alpha \zeta^\beta \right)_E, \quad (4.3.3)$$

en donde  $S_E$  es la densidad de entropía escrita por la ecuación de estado en equilibrio<sup>11</sup> y  $S_E^\alpha \equiv S_E u^\alpha$ . Recordemos que  $\Gamma_0 \equiv \Gamma_0(\zeta, G_0)$  y  $G_0 \equiv (\zeta^\alpha \zeta_\alpha)$ , se argumentó en [66], [77], que las tres relaciones de arriba son consistentes sujetas a que se identifique a  $\zeta_E$  y  $G_{0E} \equiv (\zeta^\alpha \zeta_\alpha)_E$  con la fugacidad  $\alpha$  y la temperatura absoluta  $T$ , y más aún  $\Gamma_0(\zeta_E, G_{0E}) = -P$  en donde  $P = P(n, \rho)$  es la ecuación de estado térmica. En suma, la validez de (4.3.1-4.3.3) requiere:

$$\frac{1}{T} = -\frac{(G_{0E})^{\frac{1}{2}}}{c}, \quad \zeta_E = \frac{1}{T} \left( \frac{\rho - T S_E + P}{nm} \right) = -\alpha, \quad \Gamma_0(\zeta, G_{0E}) = -P(n, \rho). \quad (4.3.4)$$

Más aún, la identificación  $T^{-2} c^2 = G_{0E} = (\zeta^\alpha \zeta_\alpha)_E$ , implica que  $(\zeta_\alpha)_E = -c u_\alpha T^{-1}$  y por lo tanto, los valores en equilibrio de los multiplicadores están dados por:

$$(\zeta)_E = -\alpha, \quad (\zeta_\alpha)_E = -\frac{u_\alpha}{T}, \quad (\zeta_{\alpha\beta})_E = 0. \quad (4.3.5)$$

Usando estos valores para los multiplicadores en equilibrio, a continuación los perturban de acuerdo a:

$$\begin{aligned} \zeta &= -\alpha + \chi, \\ \zeta_\alpha &= -\frac{u_\alpha}{T} + \lambda_\alpha + \lambda u_\alpha, \\ \zeta_{\alpha\beta} &= \sigma_{\langle\alpha\beta\rangle} + \sigma \Delta_{\alpha\beta} + \frac{1}{c^2} (u_\alpha \sigma_\beta + u_\beta \sigma_\alpha) + \frac{3}{c^2} \sigma u_\alpha u_\beta, \quad \sigma_\alpha^\alpha = 0, \end{aligned} \quad (4.3.6)$$

en donde  $(\chi, \lambda, \lambda_\alpha, \sigma, \sigma_\alpha, \sigma_{\alpha\beta})$  son las perturbaciones de los multiplicadores en (4.3.5) y por simplicidad de notación omitimos el subíndice  $E$  que identifica a los

<sup>11</sup>No confundir esta notación, con la notación del capítulo anterior en donde ahí el subíndice  $E$  hacia referencia a cantidades medidas en el marco de energía, mientras que en el presente contexto denotan cantidades en estado de equilibrio y además estamos haciendo todo el desarrollo al respecto del marco de Eckart.

términos en estado de equilibrio. Insertando (4.3.6) en (4.2.17, 4.2.18) se obtiene un sistema lineal para  $(\chi, \lambda, \lambda_\alpha, \sigma, \sigma_\alpha, \sigma_{\alpha\beta})$  cuyas soluciones son funciones lineales de  $(q^\alpha, \pi, \pi^{\alpha\beta})$  y abajo damos una muestra de las soluciones

$$\lambda^\alpha = -\frac{1}{T} \frac{\dot{\Gamma}_1}{D_3} q^\alpha = \lambda_q q^\alpha, \quad (4.3.7)$$

$$\sigma^\alpha = \frac{\dot{P}}{D_3} q^\alpha \sigma_q q^\alpha, \quad (4.3.8)$$

$$\sigma^{\langle\beta\alpha\rangle} = \frac{1}{\Gamma_1} \pi^{\langle\beta\alpha\rangle}, \quad (4.3.9)$$

en donde un punto encima de una cantidad significa derivada con respecto al potencial químico  $\alpha$ , mientras que  $D_3$  es el determinante de una matriz  $(3 \times 3)$  que involucra derivadas de la ecuación de estado en equilibrio  $P(\alpha, T)$  y derivadas de  $\Gamma_1(\alpha, T)$ , mientras que  $\langle\beta\alpha\rangle$  representa la combinación simétrica sin traza. Los otros términos de los multiplicadores de Lagrange que aparecen en (4.3.6) son expresiones largas que se pueden encontrar en las ecuaciones (2.39) página 115 en [77].

Sustituyendo estas representaciones linealizadas de los multiplicadores de Lagrange en (4.2.15), resulta en una expresión larga para las componentes  $A^{\alpha\beta\gamma}$  que pueden encontrarse en la página 116 fórmula (2.41) en [77]. Esta representación de  $A^{\alpha\beta\gamma}$  tiene la misma estructura como la mostrada en (4.2.2) y una comparación entre estas dos da los 4 coeficientes  $(C_1^0, C_1^\pi, C_3, C_5)$  en términos de la ecuación de estado en equilibrio  $P = P(\alpha, T)$  y las funciones  $\Gamma_1(\alpha, T)$ ,  $\Gamma_2(\alpha, T)$ . Las fórmulas explícitas<sup>12</sup> para los coeficientes  $(C_1^0, C_1^\pi, C_3, C_5)$  se pueden encontrar en las ecuaciones (2.43) de la página 116 en [77].

La determinación de los coeficientes  $(A_1^\pi, A_1^{\pi^2}, A_1^q, \dots, A_3^0)$  que aparecen en el 4-vector de flujo de entropía  $S^\alpha$  en (4.2.3) son calculadas en [66], [77], notando que (4.2.5) combinada con (4.2.9) implican

$$dS^\alpha = -\zeta dJ^\alpha - \zeta_\beta dT^{\alpha\beta} - \zeta_{\beta\gamma} dA^{\alpha\beta\gamma}. \quad (4.3.10)$$

Eliminando a los multiplicadores de Lagrange usando su versión linealizada en (4.3.6) y las expansiones en (4.1.6), la fórmula de arriba (4.3.10) puede ser reescrita en la forma

<sup>12</sup>Notar que aunque en estas fórmulas aparecen los términos  $\Gamma_1(\alpha, T)$  y  $\Gamma_2(\alpha, T)$ , estas funciones están determinadas por  $P = P(\alpha, T)$  y dos funciones  $A_1(\alpha)$ ,  $A_2(\alpha)$  de  $\alpha$  (véanse ecs. (268), (269) de la página 122 en [77]).

$$dS^\alpha = f^\alpha d\pi + g^\alpha_\beta dq^\beta + G^\alpha_{\beta\gamma} d\pi^{\beta\gamma}, \quad (4.3.11)$$

tal que

$$\frac{\partial S^\alpha}{\partial \pi} = f^\alpha, \quad \frac{\partial S^\alpha}{\partial q^\beta} = g^\alpha_\beta, \quad \frac{\partial S^\alpha}{\partial \pi^{\beta\gamma}} = G^\alpha_{\beta\gamma}, \quad (4.3.12)$$

en donde  $(f^\alpha, g^\alpha_\beta, G^\alpha_{\beta\gamma})$  son funciones bien definidas. Una integración de estas relaciones y una comparación de la forma resultante de  $S^\alpha$  con la mostrada en (4.2.3), fija los coeficientes  $(A^\pi_1, A^{\pi^2}_1, A^q_1, A^t_1, A^0_2, A^\pi_2, A^0_3)$  y su forma explícita puede ser encontrada en la página 117 en [77].

Para completar el análisis, los coeficientes  $(B^\pi_1, B_3, B_4)$  que aparecen en el tensor de disipación  $I^{\alpha\beta}$  en (4.2.1) necesitan ser considerados. Sin embargo, estos coeficientes parecen estar indeterminados excepto por estar restringidos a obedecer ciertas desigualdades. Estas desigualdades surgen notando que la producción de entropía  $\sigma = -\zeta_{\alpha\beta} I^{\alpha\beta}$  al usar  $I^{\alpha\beta}$  en (4.2.1) y sustituyendo  $\zeta_{\alpha\beta}$  de la expresión de (4.3.6) da

$$\sigma = 12B^\pi_1 \sigma_\pi \pi^2 - 2\frac{1}{c^2} B_4 \sigma_q q^\gamma q_\gamma - B_3 \frac{1}{\Gamma_1} \pi^{\langle\beta\gamma\rangle} \pi_{\langle\beta\gamma\rangle} \geq 0. \quad (4.3.13)$$

El requisito de que  $\sigma$  sea no negativo<sup>13</sup>, pone restricciones en la forma de las desigualdades y sobre los coeficientes  $(B^\pi_1, B_4, B_3)$ . A partir de estas restricciones, estos coeficientes permanecen indeterminados y como veremos abajo, estos coeficientes están relacionados con los coeficientes de bulk viscosity, shear viscosity y conducción de calor del fluido. Como un comentario aparte, (4.3.13) muestra que existen tres mecanismos de disipación que generan entropía en el fluido, llamémosles el flujo de calor y los dos estresés.

Finalmente mencionamos el tema importante de que las ecuaciones dinámicas formen un sistema simétrico-hiperbólico y causal dentro de esta teoría. Como se muestra en más detalle en [66], [77], este requisito pone restricciones sobre los coeficientes  $C$  y  $A$  que aparecen en  $A^{\alpha\beta\gamma}$  y  $S^\alpha$  (véanse las ecs. (4.2.2), (4.2.3)). Adicionalmente, la hiperbolicidad impone restricciones en la forma de la ecuación de estado en equilibrio  $P = P(\alpha, T)$ , aunque esta no es la única restricción. En efecto, cuando estas restricciones son válidas, en una vecindad abierta alrededor del estado de equilibrio las ecuaciones dinámicas forman un sistema simétrico hiperbólico

<sup>13</sup>Notemos que aunque aparecen los coeficientes  $\sigma_\pi$ ,  $\sigma_q$  y  $\Gamma_1^{-1}$ , estos coeficientes se consideran conocidos y su forma se puede encontrar en la página 115 en [77].

y causal. Aunque desde el punto de vista físico, hiperbolicidad y causalidad son muy importante, no discutiremos sus implicaciones sobre (TIRE) relativista. En el siguiente capítulo abordaremos esta tema en mayor detalle.

## 4.4. Predicciones de la teoría de Liu-Müller-Ruggeri

Todo el trabajo que discutimos en este capítulo, está dedicado a especificar la estructura de las funciones constitutivas  $A^{\alpha\beta\gamma}$ ,  $I^{\alpha\beta}$  y  $S^\alpha$  que aparecen en el sistema original (4.1.1, 4.1.2, 4.1.5). Una vez hecho esto, el sistema (4.1.1, 4.1.2) da un conjunto de 14 ecuaciones dinámicas para las variables auxiliares ( $\rho, P + \pi, q^\alpha, \pi^{\alpha\beta}, n, u^\alpha$ ). Soluciones a estas ecuaciones describen estados cercanos al equilibrio y estas ecuaciones forman un sistema cerrado sujeto a que la ecuación de estado en equilibrio  $P = P(\alpha, T)$  haya sido a priori especificada<sup>14</sup>. Una vez hecha la elección de  $P = P(\alpha, T)$ , las ecuaciones dinámicas para los campos ( $n, \rho, P, \pi, q^\alpha, \pi^{\alpha\beta}$ ) son:

$$\nabla_\alpha(nu^\alpha) = 0 \tag{4.4.1}$$

$$\nabla_\alpha \left[ \frac{1}{c^2} \rho u^\alpha u^\beta + (P + \pi) \Delta^{\alpha\beta} + \frac{1}{c^2} (u^\alpha q^\beta + u^\beta q^\alpha) + \pi^{\alpha\beta} \right] = 0, \tag{4.4.2}$$

$$\left( \Delta_{\mu\alpha} \Delta_{\nu\beta} - \frac{1}{3} \Delta_{\mu\nu} \Delta_{\alpha\beta} \right) \nabla_\gamma A^{\alpha\beta\gamma} = B_3 \pi_{\mu\nu}, \tag{4.4.3}$$

$$\Delta_{\mu\alpha} u_\beta \nabla_\gamma A^{\alpha\beta\gamma} = -B_4 c^2 q_\mu, \tag{4.4.4}$$

$$u_\alpha u_\beta \nabla_\gamma A^{\alpha\beta\gamma} = -3B_1^\pi c^2 \pi, \tag{4.4.5}$$

en donde en las últimas tres ecuaciones, las componentes de  $A^{\alpha\beta\gamma}$  son las que están en (4.2.2) con las «constantes» ( $C_1^0, C_1^\pi, C_3, C_5$ ) determinadas por  $P = P(\alpha, T)$  (y dos funciones arbitrarias de  $\alpha$ ). Como hemos mencionado, estas ecuaciones contienen tres funciones no determinadas que son los ( $B_1^\pi, B_4, B_3$ ) que determinan la

<sup>14</sup>Señalamos en este punto la filosofía que subraya el trabajo en [66], [77]. Dado que para sistemas relativistas parece difícil determinar observacionalmente la ecuación de estado térmica, los autores apelan a la teoría cinética relativista de gases diluidos para especificar una ecuación de estado confiable. Por tales medios se pueden especificar familias de ecuaciones de estados en equilibrio, apelando a la función de distribución de Jüttner. Mencionamos sin embargo, que a excepción de esta tecnicidad, el tratamiento en [66, 77] es bastante general.

producción de entropía.

Vale la pena notar que al evaluar los lados izquierdos en (4.4.3-4.4.5) sobre estados de equilibrio y denotando sus lados derechos por  $(\pi_{\alpha\beta}^1, \pi^1, q_\alpha^1)$ , uno recupera las ecuaciones fenomenológicas de Eckart, que derivamos en el capítulo anterior. Por tanto, (TIRE) relativista en un límite apropiado, contiene a la teoría de Eckart de primer orden.

Si por otro lado, en el lado izquierdo de (4.4.3-4.4.5), uno emplea la forma de  $A^{\alpha\beta\gamma}$  que contiene contribuciones lineales  $(\pi_{\alpha\beta}, \pi, q_\alpha)$ , uno recupera ecuaciones fenomenológicas cuya forma es estructuralmente análoga a las ecuaciones fenomenológicas en (3.3.130) derivadas en la termodinámica transitoria de Israel-Stewart. Aquí notamos una diferencia pronunciada entre los dos conjuntos de ecuaciones fenomenológicas. Mientras que las ecuaciones (3.3.130) contiene ocho coeficientes no especificados de dos variables, a saber  $(\zeta_\nu, \beta_0, \bar{\alpha}_0, \kappa, \bar{\beta}_1, \bar{\alpha}_1, \zeta, \beta_2)$ , las ecuaciones correspondientes dentro de la teoría de Liu-Müller-Ruggeri contiene únicamente tres funciones desconocidas  $(B^{\pi_1}, B_4, B_3)$  de dos variables y dos funciones desconocidas de una sola variable (correspondientemente una función desconocida de una sola variable para el caso de un gas relativista cuya ecuación de estado en equilibrio térmico surge de la función de distribución de Jüttner). Desde este punto de vista, la teoría de Liu-Müller-Ruggeri restringe considerablemente el número de funciones libres que aparecen en la ecuaciones fenomenológicas.

No vamos a discutir más similaridades y diferencias entre la teoría transitoria y la teoría de Liu-Müller-Ruggeri debido a que esta última se ha modificado drásticamente al menos bajo la condición que el fluido esta descrito por un tensor de energía-momentum simétrico conservado. La nueva teoría es el contenido del capítulo siguiente.

# 5 Fluidos relativistas del tipo divergente

En el capítulo anterior, discutimos la teoría de Liu-Müller-Ruggeri y hemos visto que las ecuaciones fenomenológicas resultantes involucran sólo a tres funciones arbitrarias de dos variables (más una ó dos funciones de una variable, dependiendo de la naturaleza del medio bajo consideración). Sin embargo, como hemos visto, la implementación del principio de entropía y la implementación del principio de relatividad para especificar las relaciones constitutivas, involucra cálculos largos y tediosos, que tienen como consecuencia que las características principales de la teoría se vuelvan opacas.

Pennisi en [84] y Geroch-Lindblom en [34], motivados por la estructura de las ecuaciones dinámicas (4.1.1, 4.1.2) de la teoría de Liu-Müller-Ruggeri, introdujeron una clase particular de fluidos relativistas que satisfacen las siguientes tres propiedades:

- a) Las variables dinámicas que especifican al fluido son las componentes del 4-vector de corriente de partículas  $J^\alpha$  y las componentes del tensor de energía-momento  $T^{\alpha\beta} = T^{\beta\alpha}$ .
- b) Las ecuaciones dinámicas son:

$$\nabla_\alpha T^{\alpha\beta} = \nabla_\alpha J^\alpha = 0, \quad (5.0.1)$$

$$\nabla_\gamma A^{\gamma\alpha\beta} = I^{\alpha\beta}, \quad (5.0.2)$$

i.e. las mismas que en (4.1.1, 4.1.2), pero ahora el campo tensorial  $A^{\gamma\alpha\beta}$  es simétrico en los índices<sup>1</sup>  $\alpha\beta$  y de traza cero. Más aún, como en la teoría de Liu-Müller-Ruggeri,  $A^{\gamma\alpha\beta}$  e  $I^{\alpha\beta}$  se consideran como funciones constitutivas i.e. funciones algebraicas de las variables básicas  $J^\alpha$  y  $T^{\alpha\beta}$ .

---

<sup>1</sup>Por tanto, el tratamiento de Pennisi y Geroch-Lindblom generaliza ligeramente a la teoría de Liu-Müller-Ruggeri. Mientras que en esta última teoría, el tensor  $A^{\gamma\alpha\beta}$  es totalmente simétrico, en la teoría de Penissi-Geroch-Lindblom el tensor  $A^{\gamma\alpha\beta}$  solo es simétrico en los índice  $\alpha\beta$  y además la restricción  $A^{\gamma\alpha}_\alpha = m^2 J^\gamma$  ya no es impuesta.

- c) Existe una 4-corriente de entropía  $S^\alpha(J^\alpha, T^{\alpha\beta})$ , cuya dependencia sobre  $(J^\alpha, T^{\alpha\beta})$  es tal que el principio de entropía es válido i.e. para cualquier solución  $(J^\alpha, T^{\alpha\beta})$  de las ecuaciones (5.0.1, 5.0.2), el flujo  $S^\alpha$  satisface que

$$\nabla_\alpha S^\alpha(J^\alpha, T^{\alpha\beta}) = \sigma(J^\alpha, T^{\alpha\beta}) \geq 0, \quad (5.0.3)$$

en donde  $\sigma(J^\alpha, T^{\alpha\beta})$ , es la producción de entropía que también es una función constitutiva.

La teoría definida por las condiciones  $a) - c)$ , es referida como la teoría de fluidos (relativistas) del tipo divergente y en este capítulo hablaremos de sus propiedades más importantes. El análisis de la (TIRE) relativista, i.e. la teoría de Liu-Müller-Ruggeri, en el capítulo anterior, nos dio ya un entendimiento de la estructura de esta teoría al menos por estados cercanos al equilibrio. Sin embargo, Pennisi [84] en 1989 e independientemente Geroch y Lindblom en 1990, ofrecieron una formulación alternativa para fluidos de tipo divergente y en este capítulo analizamos esta formulación.

El formalismo de Pennisi-Geroch-Lindblom introduce nuevamente a los multiplicadores de Lagrange<sup>2</sup>  $(\zeta, \zeta_\alpha, \zeta_{\alpha\beta})$  que satisfacen  $\zeta_{\alpha\beta} = \zeta_{\beta\alpha}$  y  $g^{\alpha\beta}\zeta_{\alpha\beta} = 0$  y como en la teoría de Liu-Müller-Ruggeri, también introducen la función vectorial  $S'^a$  como en (4.2.5) y la transformación escrita en (4.2.7). Sin embargo, Pennisi en [84] y Geroch-Lindblom en [34], notaron que la naturaleza simétrica del tensor de energía-momento  $T^{\alpha\beta}$  implica que la transformación en (4.2.7) puede ser generada por una función escalar  $\chi(\zeta, \zeta_\alpha, \zeta_{\alpha\beta})$  relacionado con la función vectorial  $S'^a$  a través de

$$S'^\alpha = \frac{\partial \chi}{\partial \zeta_\alpha}, \quad (5.0.4)$$

y esta relación fundamental es la que hace la gran diferencia entre el formalismo de Pennisi-Geroch-Lindblom y el formalismo de Liu-Müller-Ruggeri. Los autores en [66, 77], emplean la función vectorial  $S'^a$ , aun el tensor de energía-momento  $T^{\alpha\beta}$  que emplean es simétrico (véase la ec. (4.1.6) del capítulo anterior.)

Debemos mencionar en este punto, que con la excepción de las simetrías de  $A^{\alpha\beta\gamma}$ , la teoría de Liu-Müller-Ruggeri y la teoría de fluidos (relativistas) del tipo divergente se consideran como «estrechamente relacionadas». En este trabajo, decimos que un fluido pertenece a la clase del tipo divergente cuando el tensor de energía-momento  $T^{\alpha\beta}$  es simétrico y  $(T^{\alpha\beta}, J^\alpha)$  obedecen las ecuaciones dinámica (5.0.1,

<sup>2</sup>Para propósitos de comparación, denotamos a estos multiplicadores con los mismos símbolos que los empleados en la teoría de Liu-Müller-Ruggeri.

5.0.2, 5.0.3) citadas arriba. Como veremos en este capítulo, esta clase de fluidos pueden ser tratados a través de una función generadora que simplifica las cosas considerablemente. Sin embargo, debemos señalar que las herramientas desarrolladas en el tratamiento de Liu-Müller-Ruggeri no deben desvirtuarse. Existen muchas situaciones físicas importantes en donde un fluido relativista interactúa con campos externos o con otros fluidos y en estos casos uno no puede tratarlos a través de una función generadora, y en estos casos el tratamiento de Liu-Müller-Ruggeri puede ser relevante<sup>3</sup>. Sin embargo en este capítulo y sin otro aviso se asume que el tensor de energía-momento es siempre un tensor simétrico.

En suma, cualquier fluido que satisfaga las condiciones  $a) - c)$ , está determinado a partir del conocimiento del tensor de disipación  $I^{\alpha\beta}(\zeta, \zeta_\alpha, \zeta_{\alpha\beta})$  y a partir de la función escalar  $\chi(\zeta, \zeta_\alpha, \zeta_{\alpha\beta})$  definida en (5.0.4) y referida como la función generadora. Esta función, como consecuencia de (5.0.4) y en combinación de (4.2.9) satisface:

$$J^\alpha = \frac{\partial^2 \chi}{\partial \zeta \partial \zeta_\alpha}, \quad T^{\alpha\beta} = \frac{\partial^2 \chi}{\partial \zeta_\alpha \partial \zeta_\beta}, \quad A^{\alpha\beta\gamma} = \frac{\partial^2 \chi}{\partial \zeta_\alpha \partial \zeta_{\beta\gamma}}, \quad (5.0.5)$$

y genera la corriente de entropía  $S^\alpha$  vía

$$S^\alpha = \frac{\partial \chi}{\partial \zeta_\alpha} - \zeta J^\alpha - \zeta_\beta T^{\alpha\beta} - \zeta_{\beta\gamma} A^{\alpha\beta\gamma}, \quad (5.0.6)$$

mientras que el término de fuente  $\sigma$  en (5.0.3), está definido a partir del tensor de disipación  $I^{\alpha\beta}$  y  $\zeta_{\alpha\beta}$ , vía

$$\sigma = -\zeta_{\alpha\beta} I^{\alpha\beta}. \quad (5.0.7)$$

Las expresiones (5.0.5, 5.0.6), son las relaciones fundamentales en el formalismo de Pennisi-Geroch-Lindblom y muestran que las componentes de  $(J^\alpha, T^{\alpha\beta}, A^{\alpha\beta\gamma})$  pueden ser consideradas como funciones de los multiplicadores de Lagrange  $(\zeta, \zeta_\alpha, \zeta_{\alpha\beta})$ . Más aún, las ecuaciones dinámicas (5.0.1, 5.0.2) implican:

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla_\alpha J^\alpha = \nabla_\alpha \left( \frac{\partial^2 \chi}{\partial \zeta \partial \zeta_\alpha} \right) = \nabla_\alpha \left( \frac{\partial \chi^\alpha}{\partial \zeta} \right) \\ &= \frac{\partial^2 \chi^\alpha}{\partial \zeta \partial \zeta} \nabla_\alpha \zeta + \frac{\partial^2 \chi^\alpha}{\partial \zeta \partial \zeta_\beta} \nabla_\alpha \zeta_\beta + \frac{\partial^2 \chi^\alpha}{\partial \zeta \partial \zeta_{\gamma\delta}} \nabla_\alpha \zeta_{\gamma\delta} \end{aligned} \quad (5.0.8)$$

<sup>3</sup>Debemos mencionar en este punto que el procedimiento de Liu para la implementación del principio de entropía debe analizarse nuevamente.

$$\begin{aligned}
0 &= \nabla_\alpha T^{\alpha\beta} = \nabla_\alpha \left( \frac{\partial^2 \chi}{\partial \zeta_\alpha \partial \zeta_\beta} \right) = \nabla_\alpha \left( \frac{\partial \chi^\alpha}{\partial \zeta_\beta} \right) \\
&= \frac{\partial^2 \chi^\alpha}{\partial \zeta \partial \zeta_\beta} \nabla_\alpha \zeta + \frac{\partial^2 \chi^\alpha}{\partial \zeta_\gamma \partial \zeta_\beta} \nabla_\alpha \zeta_\gamma + \frac{\partial^2 \chi^\alpha}{\partial \zeta_\beta \partial \zeta_{\gamma\delta}} \nabla_\alpha \zeta_{\gamma\delta}
\end{aligned} \tag{5.0.9}$$

$$\begin{aligned}
I^{\alpha\beta} &= \nabla_\gamma A^{\gamma\alpha\beta} = \nabla_\gamma \left( \frac{\partial^2 \chi}{\partial \zeta_\gamma \partial \zeta_{\alpha\beta}} \right) = \nabla_\gamma \left( \frac{\partial \chi^\gamma}{\partial \zeta_{\alpha\beta}} \right) \\
&= \frac{\partial^2 \chi^\gamma}{\partial \zeta \partial \zeta_{\alpha\beta}} \nabla_\gamma \zeta + \frac{\partial^2 \chi^\gamma}{\partial \zeta_\mu \partial \zeta_{\alpha\beta}} \nabla_\gamma \zeta_\mu + \frac{\partial^2 \chi^\gamma}{\partial \zeta_{\alpha\beta} \partial \zeta_{\mu\nu}} \nabla_\gamma \zeta_{\mu\nu}.
\end{aligned} \tag{5.0.10}$$

Introduciendo índices mayúsculos ( $A, B, C, \dots$ ) tal que la dobleta  $(\zeta_A, I^A)$  representa  $\zeta_A \equiv (\zeta, \zeta_\alpha, \zeta_{\alpha\beta})$ ,  $I^A \equiv (0, 0, I^{\alpha\beta})$ , las ecuaciones de arriba pueden ser escritas en la siguiente forma compacta:

$$M^{AB\alpha} \nabla_\alpha \zeta_B = I^A, \quad \alpha \in \{0, 1, 2, 3\}, \tag{5.0.11}$$

con

$$M^{AB\alpha} = \frac{\partial^2 \chi^\alpha}{\partial \zeta_A \partial \zeta_B} = M^{BA\alpha}, \quad \alpha \in \{0, 1, 2, 3\}, \tag{5.0.12}$$

y por construcción las cuatro matrices  $M^{AB\alpha}$  son matrices simétricas cuyas elementos dependen de los multiplicadores  $\zeta_A$  y en (5.0.11) la convención de suma de Einstein ha sido extendida a los índices ( $A, B, \dots$ ).

De este análisis, se ve la importancia de la dobleta  $(\chi(\zeta, \zeta_\alpha, \zeta_{\alpha\beta}), I^{\alpha\beta}(\zeta, \zeta_\alpha, \zeta_{\alpha\beta}))$  en el formalismo Pennisi-Geroch-Lindblom. Una vez que este par ha sido especificado, entonces (5.0.11) es un sistema simétrico de ecuaciones cuasi-lineales para las variables  $(\zeta, \zeta_\alpha, \zeta_{\alpha\beta})$ . Soluciones de este sistema especifican la dependencia de los  $(\zeta, \zeta_\alpha, \zeta_{\alpha\beta})$  como funciones de las coordenadas locales y con este conocimiento las relaciones (5.0.5) determinen la solución.

Aunque el formalismo implica que (5.0.11) es un sistema manifiestamente simétrico, el formalismo deja abierta la posibilidad a obtener un sistema<sup>4</sup> que es simétrico-hiperbólico y/o causal. Abajo damos algunos ejemplos de funciones generadoras

<sup>4</sup>En este capítulo seguimos la terminología y las definiciones de [34]. Por lo tanto, decimos que el sistema  $M^{AB\alpha} \nabla_\alpha \zeta_B = I^A$  es simétrico cuando  $M^{AB\alpha} = M^{BA\alpha}$ . Un sistema es simétrico-hiperbólico en un conjunto abierto de estados de fluido, si la matriz  $M^{AB\alpha} w_\alpha$  es negativa definitiva («negative definite» en inglés) para algunas (posiblemente dependiente del estado) 1-formas  $w_\alpha$  temporales dirigidas a futuro. Finalmente, si  $M^{AB\alpha} \nabla_\alpha \zeta_B = I^A$  es simétrico, entonces decimos que es causal en un conjunto abierto de estados de fluido (i.e. hiperbólicos

$\chi(\zeta, \zeta_\alpha, \zeta_{\alpha\beta})$  físicamente relevantes y brevemente discutimos las propiedades de los fluidos resultantes. También mencionamos que por elecciones particulares de  $\chi(\zeta, \zeta_\alpha, \zeta_{\alpha\beta})$  el sistema (5.0.11) es un sistema simétrico - hiperbólico causal.

## 5.1. Ejemplos de fluidos del tipo divergente

### 5.1.1. Fluidos perfectos

El primer ejemplo de una función generadora  $\chi(\zeta, \zeta_\alpha, \zeta_{\alpha\beta})$ , es la función que genera estados de un fluido perfecto simple. Como hemos visto en repetidas ocasiones, debido a que la evolución de los estados de los fluidos perfectos no generan entropía, y de pistas que vienen de la teoría de Liu-Müller-Ruggeri que desarrollamos en la última sección, elegimos al tensor de disipación como cero i.e.  $I^{\alpha\beta} = 0$  y la función generadora  $\chi$  como una función suave que depende sólo de  $(\zeta, \zeta^\alpha)$  i.e.

$$\chi = \alpha(\zeta, \mu), \quad \mu = \zeta^\alpha \zeta_\alpha. \quad (5.1.1)$$

Por esta elección, se sigue de (5.0.5) que  $A^{\alpha\beta\gamma} = 0$ , mientras que la 4-corriente de partículas  $J_{FP}^\alpha$ , el tensor de energía-momento  $T_{FP}^{\alpha\beta}$  y la 4-corriente de entropía  $S_{FP}^\alpha$  están dadas por:

$$J_{FP}^\alpha = \frac{\partial^2 \chi}{\partial \zeta \partial \zeta_\alpha} = \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \frac{\partial \chi}{\partial \zeta_\alpha} \right) = \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( 2 \frac{\partial \alpha}{\partial \mu} \zeta^\alpha \right) = 2 \frac{\partial^2 \alpha}{\partial \mu \partial \zeta} \zeta^\alpha, \quad (5.1.2)$$

---

con velocidades de propagación menores a la velocidad de la luz), si  $M^{AB\alpha} w_\alpha$  es negativo definitivo para todas las 1-formas  $w_\alpha$  temporales dirigidas a futuro. En general el símbolo principal  $M^{AB\alpha} w_\alpha$  está evaluado sobre una solución de fondo del sistema  $M^{AB\alpha} \nabla_\alpha \zeta_B = I^A$ , y en la práctica tal solución corresponde a un estado de equilibrio debido a que es relativamente fácil conseguirlos (los estados de equilibrio dentro de la presente teoría serán definidos más adelante). A través de argumentos de continuidad, se sigue que el símbolo principal mantiene el signo sobre una vecindad abierta de estados de fluidos alrededor del estado de equilibrio.

$$\begin{aligned}
T_{FP}^{\alpha\beta} &= \frac{\partial^2 \chi}{\partial \zeta_\alpha \partial \zeta_\beta} = \frac{\partial}{\partial \zeta_\alpha} \left( \frac{\partial \chi}{\partial \zeta_\beta} \right) = \frac{\partial}{\partial \zeta_\alpha} \left( 2 \frac{\partial \alpha}{\partial \mu} \zeta^\beta \right) \\
&= 2 \left[ \frac{\partial}{\partial \mu} \left( \frac{\partial \alpha}{\partial \zeta_\alpha} \right) \zeta^\beta \right] + 2 \frac{\partial \alpha}{\partial \mu} g^{\beta\gamma} \delta_{\gamma\alpha} \\
&= 2 \left[ \frac{\partial}{\partial \mu} \left( 2 \frac{\partial \alpha}{\partial \mu} \zeta^\alpha \right) \zeta^\beta \right] + 2 \frac{\partial \alpha}{\partial \mu} g^{\alpha\beta} \\
&= 4 \frac{\partial^2 \alpha}{\partial \mu^2} \zeta^\alpha \zeta^\beta + 2 \frac{\partial \alpha}{\partial \mu} g^{\alpha\beta},
\end{aligned} \tag{5.1.3}$$

$$\begin{aligned}
S_{FP}^\alpha &= \frac{\partial \chi}{\partial \zeta_\alpha} - \zeta J^\alpha - \zeta_\beta T^{\alpha\beta} \\
&= 2 \frac{\partial \alpha}{\partial \mu} \zeta^\alpha - 2 \zeta \frac{\partial^2 \alpha}{\partial \mu \partial \zeta} \zeta^\alpha - 4 \mu \frac{\partial^2 \alpha}{\partial \mu^2} \zeta^\alpha - 2 \frac{\partial \alpha}{\partial \mu} \zeta^\alpha \\
&= -2 \left[ \zeta \frac{\partial^2 \alpha}{\partial \mu \partial \zeta} + 2 \mu \frac{\partial^2 \alpha}{\partial \mu^2} \right] \zeta^\alpha.
\end{aligned} \tag{5.1.4}$$

Comparando los lados derechos de (5.1.2, 5.1.3, 5.1.4) con las fórmulas estándares para la corriente de partículas, el tensor de energía-momento y el flujo de entropía de un fluido perfecto, se muestra que (5.1.1) genera estados de un fluido perfecto cuya densidad de partículas  $n$ , densidad de energía  $\rho$ , presión isotrópica  $P$ , medidos al respecto del marco en reposo del flujo, están dados por:

$$nT = 2 \frac{\partial^2 \alpha}{\partial \mu \partial \zeta}, \quad \rho + P = -4\mu \frac{\partial^2 \alpha}{\partial \mu^2}, \quad P = 2 \frac{\partial \alpha}{\partial \mu}, \tag{5.1.5}$$

mientras que los multiplicadores de Lagrange  $(\zeta, \zeta_\alpha)$  están relacionados con el potencial térmico  $\Theta$ , la 4-velocidad  $u^\alpha$ , la temperatura local  $T$  y la entropía por partícula  $\hat{s}$ , vía

$$\zeta = \Theta = \frac{\rho + P}{nT} - \hat{s}, \quad \zeta^\alpha = \frac{u^\alpha}{T}, \quad T^2 = -\frac{1}{\mu}. \tag{5.1.6}$$

Finalmente, por completez, mencionamos que la propiedad de que las ecuaciones dinámicas para un fluido perfecto simple y bajo restricciones sobre la ecuación de estado, formen un sistema simétrico hiperbólico, puede derivarse apelando al formalismo de Geroch-Lindblom. Usando a la función generadora (5.1.1), y examinando la parte principal de  $M^{AB\alpha}$  escrita en (5.0.11), Geroch y Lindblom en [34],

muestran que la causalidad es válida si y solo si la función  $\alpha(\zeta, \mu)$  en (5.1.1) esta restringida a que las cantidades  $(\rho, P)$  satisfacen las siguientes desigualdades:

$$\rho + P > 0, \quad \left. \frac{\partial \rho}{\partial P} \right|_J > \left. \frac{\partial \rho}{\partial P} \right|_S \geq 1. \quad (5.1.7)$$

### 5.1.2. Estados de equilibrio

Para fluidos relativistas del tipo divergente, Geroch y Lindblom en [34] definen a los estados de equilibrio como aquellos que tienen la propiedad que las variables  $(J^\alpha, T^{\alpha\beta})$  satisfacen (5.0.1, 5.0.2) con  $I^{\alpha\beta}(J^\alpha, T^{\alpha\beta}) = 0$ . Denotamos por  $(J_E^\alpha, T_E^{\alpha\beta})$  a los estados de equilibrio y utilizamos el subíndice  $E$  para distinguir a las variables evaluadas en un estado de equilibrio. Se sigue entonces que

$$\sigma_E(J_E^\alpha, T_E^{\alpha\beta}) = -\zeta_{\alpha\beta} I_E^{\alpha\beta} = 0, \quad (5.1.8)$$

y bajo la suposición adicional de que para cualquier solución  $(J^\alpha, T^{\alpha\beta})$  de (5.0.1, 5.0.2) se satisface que  $\sigma \geq 0$ , se sigue que los estados de equilibrio tienen la propiedad de que  $\zeta_{\alpha\beta} = 0$ , una conclusión que es válida también para los estados de equilibrio en el contexto de la teoría de Liu-Müller-Ruggeri.

Propiedades adicionales de los estados de equilibrio, pueden determinarse considerando una expansión en serie de la función generadora  $\chi(\zeta, \zeta_\alpha, \zeta_{\alpha\beta})$  alrededor de  $(\zeta, \zeta_\alpha, \zeta_{\alpha\beta} = 0)$ . Tal expansión, lineal en  $\zeta_{\alpha\beta}$  tiene la forma:

$$\chi(\zeta, \zeta_\alpha, \zeta_{\alpha\beta}) = \alpha(\zeta, \mu), + \left( \frac{\partial \chi}{\partial \zeta_{\alpha\beta}} \right)_E \zeta^{\alpha\beta} + O(\zeta^{\alpha\beta})^2, \quad \mu = \zeta^\alpha \zeta_\alpha, \quad (5.1.9)$$

en donde  $\alpha(\zeta, \mu)$ , es una función algebraica suave de  $(\zeta, \mu)$ , mientras que las derivadas de  $\chi$  al respecto de  $\zeta_{\alpha\beta}$ , evaluadas en estados de equilibrio se parametrizan según

$$\left( \frac{\partial \chi}{\partial \zeta_{\alpha\beta}} \right)_E = \beta(\zeta, \mu) \left( \zeta^\alpha \zeta^\beta - \frac{1}{4} \mu g^{\alpha\beta} \right), \quad \beta(\zeta, \mu) = \frac{\partial \alpha(\zeta, \mu)}{\partial \mu}. \quad (5.1.10)$$

La estructura de (5.1.9, 5.1.10), implica que la corriente de partículas  $J_E^\alpha$ , el tensor de energía-momento  $T_E^{\alpha\beta}$  y la corriente de entropía  $S_E^\alpha$ , tienen formas idénticas como aquellas mostradas en (5.1.2, 5.1.3, 5.1.4), mientras que el tensor  $A^{\alpha\beta\gamma}$  esta dado por:

$$\begin{aligned}
A_E^{\gamma\alpha\beta} &= \frac{\partial^2 \chi}{\partial \zeta_\gamma \partial \alpha\beta} = \frac{\partial}{\partial \zeta_\gamma} \left( \frac{\partial \chi}{\partial \zeta_{\alpha\beta}} \right) = \frac{\partial}{\partial \zeta_\gamma} \left[ \beta(\zeta, \mu) \left( \zeta^\alpha \zeta^\beta - \frac{1}{4} \mu g^{\alpha\beta} \right) \right] \\
&= 2 \frac{\partial \beta}{\partial \mu} \zeta^\gamma \left( \zeta^\alpha \zeta^\beta - \frac{1}{4} \mu g^{\alpha\beta} \right) + \beta \left[ \zeta^\beta \frac{\partial \zeta^\alpha}{\partial \zeta_\gamma} + \zeta^\alpha \frac{\partial \zeta^\beta}{\partial \zeta_\gamma} - \frac{1}{4} \frac{\partial \mu}{\partial \zeta_\gamma} g^{\alpha\beta} \right] \quad (5.1.11) \\
&= \frac{1}{2} \frac{\partial \beta}{\partial \mu} \zeta^\gamma \left( 4 \zeta^\alpha \zeta^\beta - \mu g^{\alpha\beta} \right) + \frac{1}{2} \beta \left[ 4 \zeta^{(\alpha} g^{\beta)\gamma} - \zeta^\gamma g^{\alpha\beta} \right].
\end{aligned}$$

Por lo tanto, la densidad del número de partículas  $n_E$ , la densidad de energía  $\rho_E$  y la presión isotrópica  $P_E$ , medidos al respecto del marco en reposo del flujo<sup>5</sup> son idénticas a (5.1.5), mientras que los campos  $(\zeta, \zeta_\alpha)$  están relacionados con el potencial térmico  $\Theta$ , 4-velocidad  $u^\alpha$ , temperatura local  $T$  y entropía por partícula  $\hat{s}$  como en (5.1.6).

Estados en equilibrio imponen restricciones sobre la forma de las funciones  $\alpha(\zeta, \mu)$  y  $\beta(\zeta, \mu)$  que aparecen en (5.1.10). Estas restricciones surgen de las ecuaciones:

$$\nabla_\alpha J_E^\alpha = \zeta_\beta \nabla_\alpha T_E^{\alpha\beta} = \zeta_\beta \zeta_\gamma \nabla_\alpha A_E^{\alpha\beta\gamma} = 0 \quad (5.1.12)$$

que dan

$$\frac{\partial^2 \alpha}{\partial \mu \partial \zeta} \nabla_\gamma \zeta^\gamma + \frac{\partial^3 \alpha}{\partial \mu \partial \zeta^2} \zeta^\gamma \nabla_\gamma \zeta + \frac{\partial^3 \alpha}{\partial \mu^2 \partial \zeta} \zeta^\gamma \nabla_\gamma \mu = 0, \quad (5.1.13)$$

$$\begin{aligned}
2\mu \frac{\partial^2 \alpha}{\partial \mu^2} \nabla_\gamma \zeta^\gamma + \left[ 2\mu \frac{\partial^3 \alpha}{\partial \mu^2 \partial \zeta} + \frac{\partial^2 \alpha}{\partial \mu \partial \zeta} \right] \zeta^\gamma \nabla_\gamma \zeta + \\
+ 2 \left[ \mu \frac{\partial^3 \alpha}{\partial \mu^3} + \frac{\partial^2 \alpha}{\partial \mu^2} \right] \zeta^\gamma \nabla_\gamma \mu = 0, \quad (5.1.14)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left[ 3\mu^2 \frac{\partial \beta}{\partial \mu} - \mu \beta \right] \nabla_\gamma \zeta^\gamma + 3\mu \left[ \frac{\partial \beta}{\partial \zeta} + \mu \frac{\partial^2 \beta}{\partial \mu \partial \zeta} \right] \zeta^\gamma \nabla_\gamma \zeta + \\
+ \left[ 3\mu^2 \frac{\partial^2 \beta}{\partial \mu^2} + 6\mu \frac{\partial \beta}{\partial \mu} + 2\beta \right] \zeta^\gamma \nabla_\gamma \mu = 0. \quad (5.1.15)
\end{aligned}$$

<sup>5</sup>Recordemos de nueva cuenta que el subíndice  $E$  denota estados de equilibrio y no variables termodinámicas medidas al respecto del marco de energía  $u_E$ .

Estas tres ecuaciones pueden ser escritas de la siguiente manera

$$A^\beta_\alpha X^\alpha = 0, \quad X^\alpha = (\nabla_\gamma \zeta^\gamma, \zeta^\gamma \nabla_\gamma \zeta, \zeta^\gamma \nabla_\gamma \mu), \quad (5.1.16)$$

en donde la matriz  $(3 \times 3)$   $A$ , se puede leer de las ecuaciones (5.1.13-5.1.15). Los elementos  $A^\beta_\alpha$  de la matriz  $A$  están formados a partir de las derivadas de las funciones  $\alpha(\zeta, \mu)$ ,  $\beta(\zeta, \mu)$  definidas en (5.1.9, 5.1.10). Si estas funciones son elegidas de tal manera que  $\det A \neq 0$  en un conjunto abierto  $U$  del  $(M, g)$  de fondo, entonces se concluye que

$$\nabla_\gamma \zeta^\gamma = \zeta^\gamma \nabla_\gamma \zeta = \zeta^\gamma \nabla_\gamma \mu = 0, \quad (5.1.17)$$

y estas condiciones combinadas con  $\nabla_\gamma A_E^{\gamma\alpha\beta} = 0$  implican:

$$\beta(\nabla_\alpha \zeta_\beta + \nabla_\beta \zeta_\alpha) = 0. \quad (5.1.18)$$

Asumiendo que  $\beta(\zeta, \mu) \neq 0$  en  $U$ , se sigue que  $\zeta_\alpha$  es un campo de Killing temporal en  $U$ , lo que significa que los estados de equilibrio dentro de la clase de fluidos relativistas del tipo divergente están caracterizados por la presencia de un campo de Killing temporal y  $\zeta$  es adicionalmente uniforme en  $U$ .

### 5.1.3. Teoría de Eckart como una teoría del tipo divergente

El análisis hecho hasta ahora, muestra que el espacio de los fluidos relativistas del tipo divergente no es vacío. Pero ¿existen fluidos disipativos relativistas del tipo divergente que son físicamente relevantes, en el sentido de que sus ecuaciones dinámicas forman un sistema simétrico - hiperbólico que respeten causalidad?

La respuesta a esta pregunta es afirmativa, y abajo discutiremos una familia importante de fluidos relativistas que comparten esta propiedad. Para introducir esta familia, es conveniente primero dar una reformulación de la teoría de Eckart que discutimos en la sección 3.3.3, como un teoría que describe fluidos de tipo divergente. Aprovechamos este punto para hacer algunos comentarios sobre el desarrollo histórico y la estructura de la teoría de Eckart.

Recordemos que hemos encontrado esta teoría como un límite particular de la termodinámica transitoria de Israel-Stewart, pero esa no fué la manera en que Eckart introdujó «su teoría» a mediados de 1940. Eckart introduce su teoría empleado como variables primarias a  $(J^\alpha, T^{\alpha\beta}, S^\alpha)$  que obedecen

$$\nabla_\alpha J^\alpha = 0, \quad \nabla_\alpha T^{\alpha\beta} = 0, \quad \nabla_\alpha S^\alpha \geq 0. \quad (5.1.19)$$

El expandio ( $J^\alpha, T^{\alpha\beta}$ ) al respecto del marco de partículas<sup>6</sup> de acuerdo a:

$$J^\alpha = nu^\alpha, \quad T^{\alpha\beta} = \rho u^\alpha u^\beta + (P + \pi)\Delta^{\alpha\beta}(u) + h^\alpha u^\beta + h^\beta u^\alpha + \pi^{\alpha\beta} \quad (5.1.20)$$

y postuló que el flujo de entropía  $S^\alpha$  tiene la forma:

$$S^\alpha = su^\alpha + \frac{h^\alpha}{T}, \quad (5.1.21)$$

en donde las variables ( $n, \rho, P + \pi, u^\alpha, h^\alpha, \pi^{\alpha\beta}$ ) en (5.1.20) tienen el significado usual i.e. están medidas por un observador local co-moviéndose con  $u^\alpha$ . Como ya hemos discutido en el capítulo introductorio, la validez del postulado del equilibrio termodinámico local garantiza la existencia de una ecuación de estado en equilibrio  $s = s(\rho, n)$  (o  $\rho = \rho(s, n)$ ) y una versión (local) de la primera ley con la forma:

$$d\rho = Tds + \mu dn, \quad d\rho = \frac{\rho + P}{n}dn + nTd\hat{s}, \quad (5.1.22)$$

que define la temperatura local  $T$  y el potencial químico  $\mu$  en términos de las derivadas de  $\rho = \rho(s, n)$  (véanse las ecuaciones (1.1.6), (1.1.7) y (1.1.12)).

Desde el punto de vista matemático, la teoría de Eckart constituye un sistema sub-determinado de ecuaciones. Tenemos cinco leyes de balance  $\nabla_\alpha J^\alpha = \nabla_\alpha T^{\alpha\beta} = 0$ , acompañadas por la desigualdad  $\nabla_\alpha S^\alpha \geq 0$ , para un conjunto de 14 variables dinámicas ( $n, \rho, P + \pi, u^\alpha, h^\alpha, \pi^{\alpha\beta}$ ) que describen el fluido, mientras que el conocimiento de  $(\rho, n)$  y de la ecuación de estado  $s = s(\rho, n)$  determinan la temperatura local  $T$  y el potencial químico  $\mu$ .

Como hemos visto en la breve exposición de la teoría en la sección 3.3.1, uno trata a  $(\rho, n, u^\alpha, T)$  como las variables básicas y mediante la imposición de  $\nabla_\alpha S^\alpha \geq 0$  con  $S^\alpha$  dado en (5.1.21) resulta un conjunto de ecuaciones fenomenológicas (ó conjunto de leyes constitutivas), expresando a  $(\pi, h^\alpha, \pi^{\alpha\beta})$  como funciones de las variables básicas  $(\rho, n, u^\alpha, T)$  y sus gradientes. La forma explícita de estas relaciones están escritas en (3.3.65). Como hemos mencionado, aunque la teoría resultante, es una teoría simple, ya hemos discutido sus propiedades no deseadas. Tratamos en seguida, a un fluido de Eckart como un fluido relativista del tipo divergente y tal transición requiere incrementar el número de las variables básicas  $(\rho, n, u^\alpha, T)$  que describen los estados del fluido.

<sup>6</sup>En esta sección y debido a que trabajamos en el marco de partículas escribimos simplemente  $u^\alpha, n$ , etc., en lugar de  $u_N^\alpha, n_N$ , etc.

Específicamente, para describir un fluido de Eckart como un fluido del tipo divergente usamos (5.1.20) y eliminamos las 14 variables  $(J^\alpha, T^{\alpha\beta})$  en favor de las 14 variables  $(n, \rho, P + \pi, u^\alpha, h^\alpha, \pi^{\alpha\beta})$  que aparecen en los lados derechos de (5.1.20), las cuales las consideremos como variables independientes. En términos de estas variables, un fluido de Eckart del tipo divergente esta especificado dados los campos  $(A^{\alpha\beta\gamma}, I^{\alpha\beta}, S^\alpha)$  y  $\sigma$ . Siguiendo el tratamiento de Geroch-Lindblom [34], estos campos estan dados por:

$$J^\alpha = nu^\alpha \quad (5.1.23)$$

$$T^{\alpha\beta} = \rho u^\alpha u^\beta + (P + \pi)\Delta^{\alpha\beta} + 2u^{(\alpha}q^{\beta)} + \pi^{\alpha\beta} \quad (5.1.24)$$

$$A^{\alpha\beta\gamma} = 2Tu^{(\alpha}(g^{\beta)\gamma} + u^\beta)u^\gamma) \quad (5.1.25)$$

$$I^{\alpha\beta} = -\frac{T}{\hat{\zeta}}\pi^{\alpha\beta} - \frac{2T}{3\hat{\zeta}_v}(g^{\alpha\beta} + 4u^\alpha u^\beta)\pi - \frac{2}{\kappa}q^{(\alpha}u^{\beta)} \quad (5.1.26)$$

$$S^\alpha = \hat{s}nu^\alpha + \frac{1}{T}q^\alpha \quad (5.1.27)$$

$$\sigma = \frac{\pi^2}{\hat{\zeta}_v T} + \frac{q^\alpha q_\alpha}{\kappa T^2} + \frac{\pi^{\alpha\beta}\pi_{\alpha\beta}}{2\hat{\zeta}T}, \quad (5.1.28)$$

en donde  $(\hat{\zeta}, \hat{\zeta}_v)$  se interpretan como los coeficientes de la viscosidad volumétrica («bulk viscosity» en inglés) y de cizallamiento («shear») definidos antes y con el propósito de evitar confusión, aquí hemos usado gorros en estos coeficientes para distinguirlos de los multiplicadores de Lagrange.

Para tener un entendimiento sobre la estructura de los campos (5.1.23 - 5.1.28) que describen un fluido de Eckart, los comparamos con los campos correspondientes de la teoría de Liu-Müller-Ruggeri. Los campos que son relevantes para esta comparación son  $(A^{\gamma\alpha\beta}, I^{\alpha\beta}, S^\alpha)$ , los cuales por la teoría de Liu-Müller-Ruggeri discutida en el capítulo previo, tienen la forma

$$\begin{aligned} A^{\alpha\beta\gamma} = & (C_1^0 + C_1^\pi \pi)u^\alpha u^\beta u^\gamma + \frac{c^2}{6}(nm^2 - C_1^0 - C_1^\pi \pi)(g^{\alpha\beta}u^\gamma + g^{\beta\gamma}u^\alpha + g^{\gamma\alpha}u^\beta) \\ & + C_3(g^{\alpha\beta}q^\gamma + g^{\beta\gamma}q^\alpha + g^{\gamma\alpha}q^\beta) - \frac{6}{c^2}C_3(u^\alpha u^\beta q^\gamma + u^\beta u^\gamma q^\alpha + u^\gamma u^\alpha q^\beta) \\ & + C_5(\pi^{\alpha\beta}u^\gamma + \pi^{\beta\gamma}u^\alpha + \pi^{\gamma\alpha}u^\beta), \end{aligned} \quad (5.1.29)$$

$$I^{\alpha\beta} = B_1^{\pi} \pi g^{\alpha\beta} - \frac{4}{c^2} B_1^{\pi} \pi u^{\alpha} u^{\beta} + B_3^{\pi} \pi^{\alpha\beta} + \frac{1}{c^2} B_4 (q^{\alpha} u^{\beta} + q^{\beta} u^{\alpha}), \quad (5.1.30)$$

$$S^{\alpha} = (ns + A_1^{\pi} \pi + A_1^{\pi^2} \pi^2 + A_1^q q^{\beta} q_{\beta} + A_1^t \pi^{\beta\gamma} \pi_{\beta\gamma}) u^{\alpha} \\ + (A_2^0 + A_2^{\pi} \pi) q^{\alpha} + A_3^0 \pi^{\alpha\beta} q_{\beta}. \quad (5.1.31)$$

Una comparación entre estas funciones con las escritas en (5.1.25 - 5.1.28) muestran la naturaleza especial de un fluido de Eckart visto como un fluido del tipo divergente. Por tal fluido, el campo  $A^{\alpha\beta\gamma}$  en (5.1.25) no involucra a ninguna de las variables  $(\pi, \pi^{\alpha\beta}, h^{\alpha})$  que describen desviaciones a primer orden del estado de equilibrio aunque los tensores de disipación  $I^{\alpha\beta}$  tienen la misma estructura. Sin embargo, en donde existe una diferencia pronunciada es en el vector de flujo de entropía  $S^{\alpha}$ . Mientras que por estados de un fluido de Eckart visto como un fluido del tipo divergente, el flujo de entropía  $S^{\alpha}$  es lineal en el «flujo de calor»  $h^{\alpha}$  (véase (5.1.27)), estados arbitrarios del fluido dentro de la teoría de Liu-Müller-Ruggeri están caracterizados por un flujo de entropía  $S^{\alpha}$  mucho más general. El flujo  $S^{\alpha}$  es lineal en las tres desviaciones del equilibrio i.e.  $(h^{\alpha}, \pi, \pi^{\alpha\beta})$  pero también contiene todas las posibles contribuciones cuadráticas de estas desviaciones (compare (5.1.27) con (5.1.31)).

Esta comparación breve muestra que un fluido de Eckart visto como un fluido del tipo divergente es un fluido muy especial. Fluidos relativistas arbitrarios del tipo divergente son configuraciones mucho más complejas, como muestra una comparación adicional de la función generadora  $\chi$  que discutimos en seguida.

En [34], se muestra que un fluido de Eckart escrito como un fluido de tipo divergente en (5.1.23 - 5.1.28), puede ser obtenido a través de la función generadora  $\chi(\zeta, \zeta_{\alpha}, \zeta_{\alpha\beta})$  dada por

$$\chi = \alpha(\zeta, \mu) - \frac{\zeta^{\alpha\beta} \zeta_{\alpha} \zeta_{\beta}}{\mu}, \quad \mu = \zeta^{\alpha} \zeta_{\alpha}, \quad (5.1.32)$$

en donde  $\alpha(\zeta, \mu)$  es una función arbitraria suave. Por esta función y siguiendo un procedimiento similar como en la teoría de Liu-Müller-Ruggeri, los multiplicadores de Lagrange  $(\zeta, \zeta_{\alpha}, \zeta_{\alpha\beta})$  están relacionados con los campos observables  $(n, \rho, P, u^{\alpha}, T, \pi, \pi^{\alpha\beta})$  en (5.1.23 - 5.1.28) vía

$$\zeta = \frac{\rho + P}{nT} - s, \quad (5.1.33)$$

$$\zeta^a = \frac{u^a}{T}, \quad (5.1.34)$$

$$\zeta^{\alpha\beta} = \frac{1}{2T^2} \left[ \pi^{\alpha\beta} - 2u^{(\alpha} q^{\beta)} + \frac{\pi}{4} (g^{\alpha\beta} + u^\alpha u^\beta) \right], \quad (5.1.35)$$

mientras que las variables termodinámicas como la temperatura  $T$ , la densidad de partículas  $n$ , la presión termodinámica  $P$  y la densidad  $\rho$  están dadas por

$$T^2 = -\frac{1}{\mu}, \quad (5.1.36)$$

$$nT = 2 \frac{\partial^2 \alpha}{\partial \mu \partial \zeta}, \quad (5.1.37)$$

$$P = 2 \frac{\partial \alpha}{\partial \mu}, \quad (5.1.38)$$

$$\rho + P = -4\mu \frac{\partial^2 \alpha}{\partial \mu^2}. \quad (5.1.39)$$

Geroch y Lindblom en [34], señalan que la teoría de Eckart es un ejemplo de una teoría de fluidos disipativos relativistas del tipo divergente, cuyas ecuaciones dinámicas alrededor de un estado de equilibrio, fallan en constituir un conjunto causal y por lo tanto no se le puede considerar como una teoría física satisfactoria (esta conclusión era la esperada debido a los resultados mostrados en [43, 45]). De hecho, para la función generadora  $\chi(\zeta, \zeta_\alpha, \zeta_{\alpha\beta})$  definida en (5.1.32), la forma cuadrática  $M^{AB\gamma} w_\gamma Z_A Z_B$  con  $Z_A = (Z, Z_\alpha, Z_{\alpha\beta})$  falla en ser negativa definitiva ya que

$$\frac{\partial^3 \chi}{\partial \zeta_\mu \partial \zeta_{\alpha\beta} \partial \zeta_{\gamma\delta}}, \quad (5.1.40)$$

se anula<sup>7</sup>.

Las ventajas del formalismo de Pennisi, Geroch-Lindblom es la flexibilidad que ofrece para construir estados de fluidos disipativos con propiedades físicas interesantes. Esta flexibilidad surge debido a la libertad que existe en la elección de la función generadora. Los autores en [35], reemplazan a la función generadora  $\chi(\zeta, \zeta_a, \zeta_{ab})$  en (5.1.32) por una nueva función generadora escrita por:

$$\chi = \alpha(\zeta, \mu) + \beta(\zeta, \mu) \zeta^{\alpha\beta} \zeta_\alpha \zeta_\beta + \chi_2(\zeta, \zeta_\alpha, \zeta_{\alpha\beta}), \quad (5.1.41)$$

<sup>7</sup>Debemos mencionar que la estructura de la contracción  $M^{AB\gamma} w_\gamma Z_A Z_B$  es bastante complicada, ya que los índices mayúsculos  $A, B$  corren en el intervalo  $1, 2, 3, \dots, 14$ . Pero en el caso de la función  $\chi$  en (5.1.32), la anulación de (5.1.40) hace el análisis más simple.

en donde  $\chi_2$ , tiene la forma<sup>8</sup>

$$\chi_2 = \frac{\gamma(\zeta, \mu)}{\mu^2} (\mu g_{\alpha\beta} - 2\zeta_\alpha \zeta_\beta) (\mu g_{\gamma\delta} - 2\zeta_\gamma \zeta_\delta) \zeta^{\alpha\gamma} \zeta^{\beta\delta}, \quad (5.1.42)$$

y generaron una nueva familia de fluidos del tipo divergente. Geroch y Lindblom en [34], investigaron la propiedad de causalidad de este estado analizando la forma cuadrática

$$M^{AB\gamma} w_\gamma Z_A Z_B \quad A, B \in \{1, 2, 3, \dots, 14\}, \quad (5.1.43)$$

evaluada en  $\chi$  dada por (5.1.41, 5.1.42). Se encontraron que esta forma es negativa definitiva para todos los estados de fluido con  $\zeta_{\alpha\beta} = 0$  siempre que la condición de causalidad de fluido perfecto mostrada en (5.1.7) sea válida y que  $\frac{\partial\gamma}{\partial\mu}$  sea suficientemente grande. Concluyen que la teoría es causal para valores los suficientemente pequeños de  $\zeta_{\alpha\beta}$  i.e. en alguna vecindad abierta de estados de equilibrio, y este resultado es bienvenido. Esta conclusión muestra que la clase de fluidos relativistas del tipo divergente están caracterizados por propiedades sensibles como la propagación causal de las perturbaciones, un problema de valores iniciales bien planteado, estabilidad de estados de equilibrio, etc.

## 5.2. El «post era de Pennisi-Geroch-Lindblom»

Con la teoría de fluidos disipativos del tipo divergente y la teoría de Liu-Müller-Ruggeri que hemos desarrollado en este y en el capítulo anterior, se cierra el círculo de los últimos intentos por parte de los relativistas en construir teorías de termodinámica irreversible por fluidos relativistas cuyas ecuaciones dinámicas constituyen sistemas simétricos - hiperbólicos y/o causales.

La estructura simple de los fluidos relativistas del tipo divergente actuaron como un estímulo para realizar investigaciones adicionales sobre la naturaleza de este clase de fluidos. Una basta cantidad de trabajo en la literatura, se ha centrado en la naturaleza de la función generadora  $\chi(\zeta, \zeta_\alpha, \zeta_{\alpha\beta})$  y como su estructura afecta a las propiedades del fluido resultante. Como hemos visto en este capítulo, los estados de equilibrio están caracterizados por la propiedad de que  $\zeta_{\alpha\beta} = 0$ , por

<sup>8</sup>Nótese que la función  $\chi$  en (5.1.41) combinada con (5.1.42), no es la forma más general para la función generadora que contiene términos cuadráticos en  $\zeta^{\alpha\beta}$ . Para una discusión más general, consulte [12, 13, 78, 86, 89]

lo tanto, los estados cercanos al equilibrio pueden ser estudiados mediante una expansión en serie de Taylor de la función generadora  $\chi$  alrededor de los estados de equilibrio hasta la inclusión de términos cuadráticos no nulos de  $\zeta_{\alpha\beta}$ . La inclusión de estas contribuciones cuadráticas en  $\chi$ , permiten estudiar la parte principal de  $M^{AB\gamma}$  en las ecuaciones dinámicas en (5.0.11) y por lo tanto abordar cuestiones de causalidad para estados cercanos al equilibrio. Para una representación explícita de familias de funciones generadoras alrededor de estados de equilibrio véase por ejemplo [12, 13, 78, 86, 89].

Otro aspecto relevante dentro de la clase de fluidos del tipo divergente que ha sido abordado en la literatura está asociado con la conexión entre la clase de fluidos de tipo divergente y la teoría cinética relativista de gases diluidos. Como hemos señalado previamente, para un gas relativista diluido, los primeros tres momentos  $\hat{J}^\alpha$ ,  $\hat{T}^{\alpha\beta}$  y  $\hat{A}^{\alpha\beta\gamma}$  para una función de distribución  $f(x, p)$  solución de la ecuación de Boltzmann relativista, satisfacen:  $\nabla_a \hat{J}^\alpha = \nabla_\alpha \hat{T}^{\alpha\beta} = 0$ ,  $\nabla_\gamma \hat{A}^{\gamma\alpha\beta} = \hat{I}^{\alpha\beta}$  y estas ecuaciones lucen similares a las ecuaciones estándares (4.1.1, 4.1.2) para la teoría de Liu-Müller-Ruggeri y para la teoría de fluidos de tipo divergente. Sin embargo, esta similitud es engañosa y en [78, 89] esa pregunta ha sido discutida. En general, el segundo momento del término de colisión  $\hat{I}^{\alpha\beta}$  contiene a la función de distribución y por lo tanto tiene diferente estructura que el tensor de disipación que depende únicamente de  $J^\alpha, T^{\alpha\beta}$  y por lo tanto, a lo más depende de los primeros dos momentos de la función de distribución. En [78, 89], los autores construyen una familia particular de teorías de fluidos disipativos del tipo divergente con la propiedad de que los campos  $J^\alpha, T^{\alpha\beta}$  y  $A^{\alpha\beta\gamma}$  estén expresados como los momentos de una función de distribución adecuada. El sistema resultante de ecuaciones diferenciales parciales hiperbólicas es muy simple y nos permite identificar una subclase de teorías causales.

Recientemente, una clase de fluidos disipativos del tipo divergente que ha sido investigado en la literatura está relacionado con los fluidos disipativos que exhiben invarianza conforme. Físicamente, estos fluidos se pueden pensar que representan el límite de baja energía en una teoría de campos cuánticos conformes (para una introducción véase [7]). En la reciente referencia [60], y para esta clase de fluidos, la función generadora  $\chi$  que incluye desviaciones a segundo orden del equilibrio ha sido construida. Debido a las simetría conforme, la función generadora  $\chi$  depende únicamente de  $(\zeta_\alpha, \zeta_{\alpha\beta})$  y esta propiedad facilita el análisis. Los estados de equilibrio dentro de esta teoría, son estados caracterizados por la condición de que  $\zeta_{\alpha\beta} = 0$  y adicionalmente el multiplicador de Lagrange  $\zeta_\alpha$  es un campo de Killing conforme. También se mostró en [60], que cuando tales estados de equilibrio se admiten, existe un conjunto abierto de estados de fluido alrededor del equilibrio

tal que las ecuaciones dinámicas constituyen un sistema simétrico - hiperbólico.

# Apéndice del capítulo 5.

## Implementación del principio de entropía: El método de Boillat-Ruggeri

En el capítulo 2, sección 2.3.3, hemos dado una discusión sobre las relaciones constitutivas y el principio de entropía en su forma final propuesto por Müller. También hemos mencionado la necesidad de tener un procedimiento algorítmico para elegir apropiadamente a las relaciones constitutivas de manera que la segunda ley de la termodinámica sea válida para cada proceso termodinámico. Hemos mencionado, que una manera de implementar el principio de entropía viene a través del concepto de los multiplicadores de Lagrange que fueron introducidos por primera vez por Liu en [64] y aplicados en [66] (para una introducción rápida del procedimiento de Liu, véase el apéndice B en [93]).

En este apéndice discutimos un procedimiento alternativo al mostrado por Liu [64], en donde también aparecen los multiplicadores de Lagrange, pero ahora vienen desde una perspectiva de la teoría matemática de los sistemas simétricos - hiperbólicos. Este procedimiento alternativo, fué inventado después de que Boillat en [9] y Ruggeri-Strumia en [91] notaran que, cuando los multiplicadores de Lagrange son elegidos como las variables dinámicas (y bajo condiciones adicionales sobre el vector de entropía como convexidad), entonces las leyes de balance se pueden transformar en un sistema simétrico - hiperbólico. Varios aspectos del método de Boillat-Ruggeri han sido discutidos en [8–10, 91, 92]. Por completez, a continuación bosquejamos este método.

El procedimiento de Boillat-Ruggeri-Strumia asume que el medio está gobernado por  $n$ -leyes de balance de la forma:

$$\partial_\alpha \vec{F}^\alpha(\vec{u}) = \vec{f}(\vec{u}), \quad \alpha \in \{0, 1, 2, 3\}, \quad (5.2.1)$$

en donde  $\vec{F}^\alpha$  representa los  $n$ -flujos de las leyes de balance que tienen la forma

$$\vec{F}^0 \equiv (F_1^0, F_2^0, \dots, F_n^0)^T, \quad \vec{F}^1 \equiv (F_1^1, F_2^1, \dots, F_n^1)^T, \quad \text{etc.} \quad (5.2.2)$$

mientras  $(\vec{f}, \vec{u})$  representan

$$\vec{f}(\vec{u}) \equiv (f_1(\vec{u}), f_2(\vec{u}), \dots, f_n(\vec{u}))^T, \quad \vec{u}(t, \vec{x}) \equiv (u_1(t, \vec{x}), u_2(t, \vec{x}), \dots, u_n(t, \vec{x}))^T, \quad (5.2.3)$$

en donde  $T$  significa transpuesta. Las  $n$ -funciones denotadas por  $\vec{u}$  i.e.  $\vec{u}(t, \vec{x}) \equiv (u_1(t, \vec{x}), u_2(t, \vec{x}), \dots, u_n(t, \vec{x}))^T$  corresponden con las variables básicas que describen al medio bajo consideración y por lo tanto (5.2.1), representa un sistema de  $n$ -ecuaciones para  $n$ -incógnitas  $\vec{u}(t, \vec{x})$ .

El sistema (5.2.1) viene acompañado de una ecuación suplementaria, que se interpreta como una ley de entropía, de la forma

$$\partial_\alpha S^\alpha(\vec{u}) = \Sigma(\vec{u}), \quad \alpha \in \{0, 1, 2, 3\}, \quad (5.2.4)$$

en donde  $S^\alpha$  son las componentes de un campo vectorial 4-dimensional y  $\Sigma$  es un escalar, ambos dependientes de  $\vec{u}(t, \vec{x})$ . La inclusión de esta ecuación en (5.2.1) implica que el sistema conjunto formado por (5.2.1, 5.2.4), constituye un sistema sobredeterminado de  $(n + 1)$  ecuaciones para  $n$  variables.

Cabe mencionar aquí, que dentro de la termodinámica de medios continuos, sistemas sobredeterminados de «leyes de conservación» son encontrados frecuentemente. Por ejemplo, las ecuaciones dinámicas para el fluido de Fourier-Navier-Stokes pueden ser escritas en la forma (5.2.1, 5.2.4). También las ecuaciones dinámicas por la teoría de Liu-Müller-Ruggeri y por la teoría de fluidos disipativos relativistas del tipo divergente, son casos particulares del sistema (5.2.1, 5.2.4). Para estas teorías, las 14 variables  $(u_1, u_2, \dots, u_{14})$  se identifican con las 14 componentes (incógnitas) de los campos  $(J^\alpha, T^{\alpha\beta})$ , y estas 14 variables satisfacen 15 ecuaciones (véanse 4.1.1, 4.1.2, 4.1.5). Dada la frecuencia con que se encuentran tales sistemas de ecuaciones sobredeterminadas, es relevante describir algunas características de estos sistemas.

Por un sistema de ecuaciones sobredeterminado, en general, no se espera que las ecuaciones admitan soluciones. Sin embargo, bajo restricciones adecuadas, Friedrichs en [31, 32] ha mostrado que tales sistemas se pueden convertir en un sistema de ecuaciones simétrico - hiperbólico y este será el caso cuando una «relación de dependencia principal» se cumpla (véase 5.2.6 abajo) y además cierta forma

cuadrática sea positiva definitiva (véase relación 5.2.19 más adelante).

Para ver con más detalle como las condiciones de Friedrichs nos conducen a un sistema simétrico - hiperbólico, primero reescribimos al sistema (5.2.1, 5.2.4) en la forma

$$\left(\partial_\alpha \vec{F}^\alpha, \partial_\alpha S^\alpha\right)^T = (\vec{f}, \Sigma)^T, \quad (5.2.5)$$

y denotamos por un punto  $\cdot$  al producto escalar euclideo en  $\mathbb{R}^{n+1}$ . De esta manera, la «relación de dependencia principal» de Friedrichs se cumple cuando existe un campo vectorial de  $(n + 1)$  - dimensión denotado por  $\vec{Z}(\vec{u})$  tal que la siguiente relación

$$\vec{Z} \cdot \left(\partial_\alpha \vec{F}^\alpha, \partial_\alpha S^\alpha\right)^T = \vec{Z} \cdot (\vec{f}, \Sigma)^T, \quad (5.2.6)$$

se satisface para todo<sup>9</sup>  $\vec{u}$  y  $\partial_\alpha u^b$ ,  $b \in \{1, 2, \dots, n\}$ . Elegimos al campo  $\vec{Z}$  de la forma

$$\vec{Z} = \left(-\vec{\Lambda}(\vec{u}), 1\right), \quad \vec{\Lambda}(\vec{u}) = (\Lambda^1(\vec{u}), \Lambda^2(\vec{u}), \dots, \Lambda^n(\vec{u})), \quad (5.2.7)$$

en donde debido a la propiedad de que si  $\vec{Z}$  satisface (5.2.6), entonces  $\lambda \vec{Z}$  también la satisface, tomamos sin pérdida de generalidad  $Z^{n+1} \equiv 1$ . Por tal elección se sigue que (5.2.6), es equivalente a

$$-\vec{\Lambda} \cdot \partial_\alpha \vec{F}^\alpha + \partial_\alpha S^\alpha = -\vec{\Lambda} \cdot \vec{f} + \Sigma, \quad (5.2.8)$$

y esta relación muestra que  $\vec{\Lambda}(\vec{u})$  juega el mismo rol que juegan los multiplicadores de Lagrange en el procedimiento de Liu (véase [64, 66, 77]).

Sea ahora el operador gradiente  $\hat{\nabla}$  en  $\mathbb{R}^n$  definido como:

$$\hat{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial u^1}, \frac{\partial}{\partial u^2}, \dots, \frac{\partial}{\partial u^n}\right), \quad (5.2.9)$$

usando este operador y demandando que la condición (5.2.8) sea válida para todo  $\vec{u}$ ,  $\partial_\alpha u^b$ , concluimos:

$$\vec{\Lambda} \cdot \hat{\nabla} \vec{F}^\alpha = \hat{\nabla} S^\alpha, \quad \vec{\Lambda} \cdot \vec{f} = \Sigma. \quad (5.2.10)$$

<sup>9</sup>Recordemos que los índices latinos corren de 1 a  $n$ .

Haciendo uso del operador derivada exterior  $d$  en el espacio euclideo  $\mathbb{R}^n$ , las condiciones (5.2.10), pueden ser escritas en la forma equivalente

$$\vec{\Lambda} \cdot d\vec{F}^\alpha = dS^\alpha, \quad \vec{\Lambda} \cdot \vec{f} = \Sigma, \quad \alpha \in \{0, 1, 2, 3\}. \quad (5.2.11)$$

Estas dos expresiones, son consecuencias de la «relación de dependencia principal» de Friedrichs y será interesante tener un entendimiento profundo de su significado. Por lo pronto evitamos esto, y nos enfocamos en explotar algunas de sus consecuencias.

Sea ahora que en el sistema (5.2.1) es posible elegir:  $\vec{u} = \vec{F}^0$ . Entonces por esta elección (5.2.11) implica que

$$\frac{\partial S^0}{\partial \vec{u}} = \vec{\Lambda}, \quad \implies \quad \frac{\partial^2 S^0}{\partial \vec{u} \partial \vec{u}} = \frac{\partial \vec{\Lambda}}{\partial \vec{u}}, \quad (5.2.12)$$

en donde aquí y en adelante

$$\frac{\partial S^0}{\partial \vec{u}} \equiv \left( \frac{\partial S^0}{\partial u^1}, \dots, \frac{\partial S^0}{\partial u^n} \right), \quad \frac{\partial^2 S^0}{\partial \vec{u} \partial \vec{u}} \equiv \left( \frac{\partial^2 S^0}{\partial u^i \partial u^j} \right), \quad 1 \leq i, j \leq n. \quad (5.2.13)$$

Supongamos que por esta elección particular i.e.  $\vec{u} = \vec{F}^0$ , la densidad de entropía<sup>10</sup>  $S^0(\vec{u})$  es una función cóncava de  $\vec{u}$  i.e. que la matriz

$$\frac{\partial^2 S^0}{\partial \vec{u} \partial \vec{u}}, \quad (5.2.14)$$

es definida negativa («negative definite» en inglés). Por tal elección, (5.2.12) implica que la matriz  $\frac{\partial \vec{\Lambda}}{\partial \vec{u}}$  también es definida negativa. Apelando a los teoremas estándares de matrices Jacobianas, concluimos que la transformación  $\vec{u} \rightarrow \vec{\Lambda}(\vec{u})$  es globalmente invertible. Esta propiedad nos permite ver que

$$S^\alpha = S^\alpha(\vec{\Lambda}), \quad \vec{F}^\alpha = \vec{F}^\alpha(\vec{\Lambda}), \quad \vec{f} = \vec{f}(\vec{\Lambda}). \quad (5.2.15)$$

Estas relaciones combinadas con (5.2.11), nos conducen a concluir que existen 4 escalares denotados por  $S'^\alpha$ ,  $\alpha \in \{0, 1, 2, 3\}$  tales que

<sup>10</sup>Esta propiedad esta bien definida para el caso de medios newtonianos. Sin embargo, para medios relativistas la covarianza general hace que el concepto de la densidad de entropía no este bien definido.

$$\vec{F}^\alpha \cdot d\Lambda^\alpha = dS'^\alpha, \quad S'^\alpha = \vec{\Lambda} \cdot \vec{F}^\alpha - S^\alpha \implies \vec{F}^\alpha = \frac{\partial S'^\alpha}{\partial \vec{\Lambda}}. \quad (5.2.16)$$

Por lo tanto, el sistema (5.2.1) es compatible con la ley complementaria (5.2.4), cuando las componentes de  $\vec{F}^\alpha$  son los gradientes de  $S'^\alpha(\vec{\Lambda})$ . Regresando al sistema (5.2.1) y usando esta representación de  $\vec{F}^\alpha$  obtenemos

$$\frac{\partial^2 S'^\alpha}{\partial \vec{\Lambda} \partial \vec{\Lambda}} \partial_\alpha \vec{\Lambda} = \vec{f}(\vec{\Lambda}) \implies \frac{\partial^2 S^\alpha}{\partial \Lambda^i \partial \Lambda^j} \partial_\alpha \Lambda^i = f_j(\Lambda), \quad \alpha \in \{0, 1, 2, 3\}, \quad (5.2.17)$$

y notamos que las 4 matrices ( $n \times n$ )

$$A^\alpha_{ij} = \frac{\partial^2 S'^\alpha}{\partial \Lambda^i \partial \Lambda^j}, \quad i, j \in \{1, 2, \dots, n\}, \quad (5.2.18)$$

corresponden a las matrices hessianas de  $S'^\alpha(\vec{\Lambda})$  (con respecto a las componentes de  $\vec{\Lambda}$ ) y son por construcción matrices simétricas.

Más allá de esta propiedad, el sistema (5.2.17) posee otra propiedad notable. Bajo la suposición fuerte de que la densidad de entropía  $S^0$  es una función cóncava de  $\vec{u}$ , el sistema (5.2.17) es un sistema simétrico - hiperbólico. La naturaleza simétrica - hiperbólica se puede establecer apelando a la segunda condición de Friedrichs (véase la relación 5.2.19), o revisando directamente si las condiciones sobre la definición de sistemas simétricos - hiperbólicos en el sentido de la definición de Friedrichs se cumplen por el sistema (5.2.17).

Aquí por completez, mencionamos que la segunda condición de Friedrichs que justo hemos mencionado, demanda que exista un covector (i.e. una 1-forma)  $\xi = (\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3)$  tal que la siguiente forma cuadrática

$$Q = -\xi_\alpha \left[ \vec{\Lambda} \cdot \delta^2 \vec{F}^\alpha + \delta^2 S^\alpha \right] > 0, \quad (5.2.19)$$

sea definida positiva («positive definite» en inglés) para todas las variaciones suaves  $\delta u(t, \vec{x})$  del fondo  $\vec{u}(t, \vec{x})$ . Validez de esta condición combinada con (5.2.11) da la condición deseada. Nótemos sin embargo que podemos llegar a la misma conclusión apelando a la segunda alternativa i.e. revisando directamente si el sistema (5.2.17) satisface las condiciones de un sistema simétrico - hiperbólico. Escribiendo el sistema (5.2.17) en la forma

$$A^\alpha_{ij} \partial_\alpha \Lambda^i = f_j, \quad (5.2.20)$$

entonces este es un sistema simétrico - hiperbólico en el sentido de Friedrichs, cuando las 4 matrices  $A_{ij}^\alpha$  sean simétricas i.e.

$$A_{ij}^\alpha = A_{ji}^\alpha, \quad \forall \alpha \in \{0, 1, 2, 3\},$$

y además una condición de «positividad» sea válida. Esta última condición requiere la existencia de un covector  $\xi = (\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3)$  tal que la matriz  $\xi_\alpha A_{ij}^\alpha$  es definida positiva.

Para el sistema (5.2.17), ya hemos visto que las 4 matrices  $A_{ij}^\alpha$  son todas simétricas. Para establecer la positividad, es suficiente con elegir un covector  $\xi = (\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3) = (1, 0, 0, 0)$ . Por esta elección, la positividad se mantiene sujeta a que la matriz

$$\frac{\partial^2 S^0}{\partial \vec{\Lambda} \partial \vec{\Lambda}} \quad (5.2.21)$$

sea definida positiva («positive definite» en inglés). Esta conclusión, sin embargo, se sigue recordando que para la elección  $\vec{u} = \vec{F}^0$ , la relación  $S'^\alpha = \vec{\Lambda} \cdot \vec{F}^\alpha - S^\alpha$  implica que  $S'^0 = \vec{\Lambda} \cdot \vec{u} - S^0$  y por lo tanto  $S'^0$  es la transformada de Legendre de  $S^0$ . Esto implica que  $S^0$  es una función cóncava de  $\vec{\Lambda}$  ya que  $S^0$  se ha asumido que es una función cóncava de  $\vec{u}$ . Esta conclusión prueba que el sistema simétrico (5.2.17) es hiperbólico.

En el lenguaje adoptado por Ruggeri y colaboradores, los campos  $S'^\alpha$  son referidos como los generadores, mientras que los multiplicadores de Lagrange  $\Lambda$  constituyen el campo principal. Del análisis hecho hasta ahora, se sigue que si uno fuese capaz de identificar al campo generador  $S'^\alpha$ , entonces las relaciones constitutivas i.e. las funciones  $\vec{F}^\alpha$  compatibles con la desigualdad de entropía (5.2.4), son obtenidas mediante la diferenciación del generador con respecto a las componentes del campo principal. Aquí vemos una implementación más concreta del principio de entropía. La dependencia de las funciones constitutivas  $\vec{F}^\alpha$  sobre las variables básicas, tomadas aquí como los multiplicadores de Lagrange, deben ser especiales para poder ser compatibles con la desigualdad de entropía.

En cuanto a las aplicaciones de los resultados mostrados arriba, es suficiente señalar que de relevancia es la construcción del campo generador  $S'^\alpha$ ,  $\alpha \in \{0, 1, 2, 3\}$ . En el caso de la teoría de Liu-Müller-Ruggeri, el campo  $S'^\alpha$  está definido en (4.2.5) y expresiones aproximadas para  $S'^\alpha$  como función de los multiplicadores de Lagrange han sido construidas apelando al principio de relatividad (4.2.12). El requisito de que  $S'^0$  es una función cóncava es discutido en detalle en [66, 77] y brevemente lo mencionamos en el capítulo 4.

Para el caso de la teoría de fluidos relativistas del tipo divergente que vimos

en este capítulo, el enfoque es diferente. En esta teoría, las componentes de  $S'^\alpha$  corresponden con los gradientes de una función generadora escalar  $\chi(\zeta, \zeta_\alpha, \zeta_{\alpha\beta})$  i.e.

$$S'^\alpha = \frac{\partial \chi}{\partial \zeta_\alpha} \quad (5.2.22)$$

y esta fórmula implica que el sistema (5.2.17) es un sistema simétrico. Como hemos visto en este capítulo, tal sistema es simétrico - hiperbólico bajo elecciones particulares de la función generadora escalar  $\chi(\zeta, \zeta_\alpha, \zeta_{\alpha\beta})$ .

Por último mencionamos que en los enfoques de ambas teorías i.e. de Liu-Müller-Ruggeri y la teoría de fluidos divergentes citados arriba, el análisis es local. La transformación  $\Lambda^i \rightarrow u^i$  empleada en estos trabajos (y que también empleamos en los últimos dos capítulos de esta tesis), es únicamente localmente invertible, lo cual es consecuencia de la «relación de dependencia principal» de Friedrichs y el carácter definido positivo de la forma cuadrática. En un trabajo separado, hemos discutido esta propiedad en más detalle [94].

# Conclusiones

En esta tesis nos dedicamos en dar una vista panorámica sobre los avances recientes en el campo de la termodinámica fuera del equilibrio de medios continuos clásicos con énfasis en la termodinámica irreversible de fluidos relativistas.

Empezamos discutiendo brevemente las sutilezas que uno encuentra en la descripción de la termodinámica de medios continuos relativistas que se propagan en un espacio-tiempo suave  $(M, g)$  arbitrario. Tales sutilezas nacen de la curvatura<sup>11</sup> del espacio-tiempo  $(M, g)$  la cual tiene como consecuencia la ausencia de clases de observadores y/o sistemas de coordenadas privilegiados. En esta tesis, y como hemos discutido en la sección 1.3 la base de la termodinámica de medios continuos que desarrollamos en esta tesis, se sustenta en el empleo de observadores locales combinado con el postulado del equilibrio termodinámico local. Como hemos visto en el capítulo 1, tal principio es válido al menos por estados de fluidos relativistas que son cercanos al equilibrio. Esta última condición nos permite definir un «cono» invariante de pseudo-ángulo  $\epsilon$  y como hemos visto, que si por un observador con 4-velocidad  $u^\alpha$  al interior de este cono el medio se encuentra en un estado de equilibrio termodinámico local, entonces tal propiedad se mantiene válida para toda la clase de observadores cuya 4-velocidad se encuentra al interior de este cono. Desde nuestro punto de vista, el principio del equilibrio termodinámico local, puede verse como:

*El Principio de Equivalencia Termodinámico,*

en el siguiente sentido: No importa cual sea el estado actual del medio continuo bajo consideración, a los ojos de los observadores locales cuyas 4-velocidades se encuentren al interior del «cono» de pseudo-ángulo  $\epsilon$ , el estado del medio parece localmente como un estado en equilibrio.

Como hemos visto en el capítulo introductorio, los observadores locales en combinación del postulado del equilibrio local fueron de gran apoyo para formular la primera y la segunda ley de la termodinámica de medios continuos. Pero además

---

<sup>11</sup>Incluso para el caso del espacio-tiempo de Minkowski  $(\mathbb{R}^4, \eta)$ , la descripción termodinámica de medios continuos es sutil y ha generado muchas controversias científicas como mencionamos en el capítulo introductorio. En este trabajo evitamos entrar en estos asuntos controvertidos apelado a la descripción local de las propiedades termodinámicas.

de esto, fueron los conceptos claves en el desarrollo de la tesis, es decir, los utilizamos como elementos esenciales para entender el contenido físico escondido en las ecuaciones tensoriales<sup>12</sup> que describen la dinámica de medios continuos. Esta propiedad la hemos visto en el desarrollo de la teoría transitoria de Israel-Stewart, la teoría de Liu-Müller-Ruggeri y la clase de fluidos relativistas del tipo divergente en el formalismo de Pennisi-Geroch-Lindblom. Durante el desarrollo de estas teorías, hemos visto que sus contenidos físicos se manifestaron después de que las ecuaciones tensoriales se proyectaran a los marcos en reposo de clases de observadores seleccionados apropiadamente. Durante el desarrollo de la tesis hemos visto la propiedad complaciente que exhibe la teoría transitoria de Israel-Stewart i.e. la invarianza de la teoría bajo un grupo particular de cambio de marco, aunque como hemos discutido en el capítulo 3 tal invarianza viene a través de restricciones severas sobre el estado del fluido y repitiendo una vez más: la teoría describe estados de los fluidos cercanos al equilibrio (y esperamos que tal invarianza persista por medios continuos más generales que los fluidos).

En el desarrollo de esta tesis, tuvimos la oportunidad de discutir algunas propiedades de las teorías de fluidos relativistas disipativos que fueron desarrolladas a tiempos tempranos, como la teoría de Eckart que nació en 1940, la teoría de Landau-Lifshitz desarrollada alrededor de los años 1950 y más recientes las teorías de primer orden desarrolladas en los años 1980 por Hiscock y Lindblom [43, 45]. Estas teorías, referidas como teorías convencionales, predicen una propagación infinita de los efectos térmicos y de los efectos viscosos, crecimiento sin límite en las amplitudes pequeñas de perturbaciones alrededor de los estados de equilibrio, etc.

Estos efectos indeseables actuarán como estímulos para el desarrollo de teorías alternativas que describen la termodinámica irreversible de medios continuos clásicos<sup>13</sup> y relativistas. Esta búsqueda dió nacimiento a nuevas teorías con el objetivo de pretender obtener la descripción de la termodinámica fuera del equilibrio por medios continuos clásicos y relativistas.

Como hemos visto en los capítulos 2-5, una clase de estas nuevas teorías extiende la idea fundamental que hizo Müller en 1967 al respecto de la naturaleza de la entropía por estados fuera del equilibrio y con esta extensión comenzarán las teorías con la propiedad característica que las ecuaciones dinámicas constituyen sistemas de ecuaciones que son simétricos-hiperbólicos y/o causales.

El reemplazamiento de sistemas de ecuaciones parabólicas por ecuaciones simétricas-hiperbólicas y/o causales, por un lado remueve las deficiencias de las teorías de

<sup>12</sup>El empleo de campos tensoriales para describir la dinámica del medio, está dictado por el principio de covarianza general.

<sup>13</sup>Como hemos visto en el capítulo 3, la propagación infinita de las perturbaciones es un característica de las teorías relativistas de primer orden, el sistema de Fourier-Navier-Stokes exhibe el mismo comportamiento.

primer orden y del sistema de Fourier-Navier-Stokes, pero al mismo tiempo la transición hacia las teorías «hiperbólicas - causales» llega con un precio. Es necesario extender considerablemente las variables independientes que describen los estados del fluido<sup>14</sup>. Vimos esta extensión en el capítulo 5 en donde por razones de ilustración tratamos a un fluido relativista en el contexto de la teoría original de Eckart versus la descripción de un fluido de Eckart como un fluido relativista del tipo divergente.

Pero este crecimiento en el número de las variables físicas que describen los estados de los fluidos relativistas, por un lado es una «bendición» y por otro lado es una «maldición». Es una «maldición» porque describe la disipación relativista<sup>15</sup> con un gran número de variables físicas, pero por otro lado es una «bendición» porque la teoría expone sus virtudes a los observacionistas y los experimentalistas y esto es muy saludable.

Antes de que entremos en la observabilidad de los campos adicionales que entran en las teorías «hiperbólicas-causales» de fluidos relativistas, nos hacemos la siguiente pregunta:

*¿Es de relevancia física la termodinámica de medios continuos relativistas para el Universo en que vivimos o es un asunto que tiene solo interés académico?*

Para dar un respuesta a tal inquietud dejamos que los hechos observacionales de los últimos años hablen por sí mismos:

La fecha 14 de Septiembre del 2015 permanecerá en los anales de la física gravitacional como una fecha histórica. Ese día, el Observatorio de Ondas Gravitacionales por Interferometría Laser con sigla en inglés LIGO capturó ondas gravitacionales provenientes de dos hoyos negros girando entre sí, la primera detección de ondas gravitacionales registrada en la historia de la humanidad. El evento fué anunciado en una conferencia de prensa el día 11 de Febrero del 2016 y el lector es referido a la página web de LIGO para un análisis exhaustivo de esa detección [61].

Dos años después, específicamente el 17 de Agosto del 2017, la red de observatorios de ondas gravitacionales LIGO/VIRGO, registró una onda gravitacional referida como GW170817, consistente con una estrella binaria de neutrones fusionada. Para un análisis de esta señal, su interpretación y consecuencias el lector es referido a [1, 62].

<sup>14</sup>Restrigimos la discusión aquí y hasta que termine esta sección al caso de fluidos relativistas por falta de desarrollo de teorías «hiperbólicas - causales» para otros medios relativistas.

<sup>15</sup>Por el término disipación relativista nos estamos refiriendo al proceso físico en donde la forma «organizada» del 4-momento del movimiento está difundida (repartida) en muchos grados de libertad que describen la microfísica del medio bajo consideración.

El 10 de Abril del 2019, la colaboración del Telescopio Horizonte de Eventos con siglas en inglés EHT, publicó la primera imagen de la sombra del hoyo negro supermasivo en centro de la galaxía M87 [29]. Esta imagen establece la existencia de un disco de acreación alrededor del hoyo negro y aquí vale la pena recordar que modelar tal disco, presupone materia viscosa acretante.

Otro desarrollo emocionante, vino a través de los experimentos en el Laboratorio Nacional de Brookhaven en el Colisionador de Iones Pesados Relativistas con siglas en inglés RHIC y en el Gran Colisionador de Hadrones en el CERN. Estos experimentos muestran que en la colisión de iones pesados el plasma de quark-gluon formado en estos «mini big-bangs» está confiablemente descrito por un fluido viscoso relativista. Para evidencias que apoyan esta conexión inesperada véanse [23, 30, 90].

Estos hechos observacionales, inimaginables digamos hace cincuenta años, hablan mucho. Están destinados a tener consecuencias de gran alcance sobre nuestro entendimiento del Cosmos. A nivel fundamental, una vez más, nos aseguramos que la teoría de la relatividad general de Einstein, en palabras de R. Penrose «is a superb theory» [85]. Con el desarrollo tecnológico, vemos que sus predicciones minuciosas se han ido una tras otra confirmado observacionalmente (o estan en alcance para confirmarse). Más aún, en una era en donde los observatorios LIGO/VIRGO están en operación y en el futuro cercano el observatorio KAGRA se espera que este en funcionamiento, acreción de materia hacia un hoyo negro y otros objetos compactos, plasmas en el Universo temprano, explosiones de supernovas y colapso de núcleos, estarán bajo escrutineo observacional y en estos escenarios los fluidos disipativos o más generalmente medios continuos relativistas jugarán un rol importante. En esta conexión, mencionamos que los últimos modelos de estrellas de neutrones sugieren que la viscosidad y la conductividad térmica juegan un rol importante en su estabilidad, mientras que resultados de colisiones de iones pesados relativistas sugieren que la viscosidad también es relevante en un dominio subnuclear.

Estos desarrollos en el dominio observacional sugieren que la disipación relativista es un fenómeno relevante en el Universo en que vivimos. Mucho más desafiante para los relativistas y los físicos de altas energías es sin duda desarrollar teorías confiables de termodinámica irreversible de medios continuos relativistas con el propósito de enfrentar a estas nuevas realidades observacionales. Esta tesis tuvo como finalidad ponernos al día con el desarrollo teórico en esta dirección y los problemas abiertos que están involucrados en la descripción de disipación relativista

y más general la descripción de la termodinámica fuera de equilibrio de medios continuos relativistas.

A lo largo de esta tesis, hemos mencionado que muchas de las predicciones de las teorías (TIE) y (TIRE) clásicas que desarrollamos en el capítulo 2, han tenido confirmación experimental y más aún han encontrado aplicaciones en la ciencia y la tecnología. Por ejemplo, en el tratamiento del transporte de calor a escalas micrométricas y nanométricas, en la propagación de ondas de choque en sistemas hidrodinámicos, en hidrodinámica fenomenológica, etc. Para más detalles al respecto de los éxitos (y fracasos) de estas teorías, los interesados pueden consultar las referencias [54, 77].

Sin embargo, a nivel relativista la situación es diferente. Como hemos visto en esta tesis hay una tendencia por parte de los termodinámicos y los relativistas hacia la construcción de teorías irreversibles por estados de fluidos relativistas en donde las ecuaciones dinámicas constituyen sistemas simétricos-hiperbólico y/o causal. La termodinámica transitoria de Israel-Stewart que desarrollamos en detalle en el capítulo 3, aún se desconoce si las ecuaciones dinámicas constituyen un sistema simétrico-hiperbólico/causal, sin embargo como ya hemos discutido, trabajos de Israel-Stewart y de Hiscock-Lindblom sugieren tal propiedad. Es una teoría flexible y con esfuerzos adicionales, apuntando hacia la estructura matemática, es probable que se vuelva práctica y muy útil. Incluso en el nivel de desarrollo actual, la teoría ha sido aplicada a varios problemas físicos.

Un sistema tratable, en donde los efectos transitorios («transient effects» en inglés) se toman en cuenta, involucra a modelos cosmológicos espacialmente homogéneos y espacialmente isotrópicos. Normalmente, estas cosmologías postulan que el fluido cósmico se expande adiabáticamente, pero existen procesos en la evolución cósmica en donde esta suposición puede ser cuestionada e.g. transiciones de fase – dentro de la teoría de gran unificación TGU<sup>16</sup>, el recalentamiento después de inflación, el desacoplamiento de los neutrinos y los fotones de la materia, etc. En estos escenarios, el fluido cósmico puede ser modelado como un fluido disipativo en donde las variables termodinámicas exhiben grandes variaciones temporales de tal manera que la termodinámica transitoria sería una teoría apropiada para describir la física subyacente. Por lo tanto, la dinámica de modelos cosmológicos espacialmente homogéneos e isotrópicos acoplada con un fluido disipativo ha atraído la atención de los cosmólogos. Ya que el tensor de energía-momento de un fluido disipativo debe de respetar las simetrías del espacio-tiempo de fondo, se sigue que tales estados están caracterizados únicamente por una viscosidad volumétrica (bulk viscosity) no nula, y esta propiedad convierte al sistema Einstein-fluido disipativo

---

<sup>16</sup>Con siglas en inglés GUT.

en un sistema tratable de analizar. Estudios en donde la termodinámica causal ha sido aplicada a problemas de cosmología se pueden encontrar en [46, 68, 83].

El colapso gravitacional también ofrece varios escenarios en donde la termodinámica transitoria encuentra suelo fértil para su aplicación. Uno de estos escenarios, corresponde a la fase en donde durante el colapso gravitacional completo de una estrella, los neutrinos que escapan pasan de un flujo libre (free streaming) a un régimen atrapado. Durante esta transición, muchas variables termodinámicas muestran variaciones temporales y espaciales abruptas, lo que implica que la termodinámica transitoria es aplicable. No tenemos conocimiento de ningún tratamiento para este problema dentro del sistema Einstein-fluido disipativo, aunque algunos intentos en esta dirección se han perseguido [71]. Más aún, en [98, 99], la termodinámica transitoria ha sido aplicada a fluidos radiativos (una mezcla de materia ionizada y fotones) con énfasis en el comportamiento de las densidades de las perturbaciones y sus implicaciones en la formación de estructura.

Es de interés mencionar que la versión relativista del disco de acreción de materia geoméricamente delgada y ópticamente gruesa de Shakura-Sunyaev es modelado por un fluido viscoso. La descripción termodinámica de este fluido viscoso emplea al marco de Eckart y asume relaciones constitutivas sobre el flujo de calor y los estréss de la teoría convencional de Eckart. Sería de interés teórico examinar si las ecuaciones de termodinámica transitoria admiten soluciones de tipo disco que modelan acreción de materia y si tales soluciones, si es que existen, tienen alguna relevancia física.

Finalmente, debemos mencionar los esfuerzos que han hecho los físicos de altas energías, para simular analíticamente el plasma de quark-gluon generado en colisiones de iones pesados apelando a la teoría transitoria. Debido a que en tal escenario, los efectos de la curvatura del espacio-tiempo son despreciables, varios investigadores han orientado sus esfuerzos para construir soluciones analíticas (o semi-analíticas) de las ecuaciones de termodinámica transitoria sobre un espacio-tiempo de Minkowski. Hasta ahora, solo algunas familias de tales soluciones han sido obtenidas (véase [71] y referencias ahí mismo).

En cuanto al estado de la teoría de Liu-Müller-Ruggeri y la clase de los fluidos relativistas de tipo divergente, aunque por ajuste de la función generadora, las ecuaciones dinámicas pueden formar sistemas «hiperbólicos - causales» al menos en un conjunto abierto de estados alrededor del estado de equilibrio, desafortunadamente carecemos de un criterio que nos permita destacar una teoría universalmente aceptable de disipación. Como hemos visto en el análisis de la teoría de

Liu-Müller-Ruggeri y la discusión de estados de fluidos divergentes, en particular, la discusión después de la ecuación (5.1.42), sugiere que puede existir más de un tipo de fluidos del tipo divergente que respete causalidad. Por ejemplo, reemplazando a la función generadora  $\chi(\zeta, \zeta_\alpha, \zeta_{\alpha\beta})$  en (5.1.42) por una combinación diferente, otro fluido causal puede ser generado, ¿cuál de estos distintos fluidos, debemos considerar como el tipo de fluido elegido por la naturaleza?

Además de este tema de unicidad, existe otro problema relacionado con la estructura de las teorías «hiperbólicas - causales». Como hemos mencionado, disipación relativista en las teorías «hiperbólicas - causales» está descrita por muchos grados de libertad y el problema de la observabilidad de estos campos se vuelve relevante. Este asunto, es decir, la observabilidad de estos campos adicionales, fué analizado en el trabajo de Geroch y Lindblom [35, 36, 63]. En estos trabajos estudiaron una clase de fluidos relativistas más general que abarca la clase de fluidos del tipo divergente como caso particular. Se mostró en estas referencias que la dinámica de esta clase general de fluidos «hiperbólicos-causales» es tal que los campos dinámicos se relajan en escalas de tiempo caracterizada por la interacción entre partículas (típicamente el tiempo libre medio entre colisiones) a los campos correspondientes que describen la teoría original de Eckart i.e. la teoría que tiene como variables básicas a los campos  $(\rho, n, u^\alpha, T)$  y sus gradientes, y los campos  $(q^\alpha, \tau^{\alpha\beta})$  son vistos como relaciones constitutivas. Estos resultados sugieren que los efectos de los campos adicionales presentes en las teorías de fluidos relativistas «hiperbólicos - causales» son desde el punto de vista práctico irrelevantes.

La conclusión en [36, 63] ha sido respondida en [5, 41, 42], quienes argumentan que el contenido físico de las teorías hiperbólicas - causales es en general, más amplio que aquellas del tipo parabólico. Se argumentan en [5, 41, 42], que los tiempos de relajación presentes en las ecuaciones dinámicas puede ser grande, y por lo tanto el fenómeno de disipación (clásico o relativista) puede tener efectos observables. Aunque los argumentos en [5, 41, 42] son convincentes y de hecho Geroch en [37] explícitamente enuncia que pueden existir sustancias que manifiestan disipación en donde las teorías «hiperbólicas - causales» pueden ser de importancia para el caso especial de fluidos de Navier-Stokes (en nuestra terminología fluidos relativistas cuyas variables dinámicas relativamente al marco de Eckart son las variables  $(\rho, n, u^\alpha, q^\alpha, \tau^{\alpha\beta})$ ) este no es el caso. Para fluidos de Navier-Stokes, las teorías hiperbólicas tienen una posibilidad de ser viables, siempre que las ecuaciones satisfechas por el flujo de calor y el tensor de cizallamiento (shear tensor) dejen de ser válidas en alguna escala de longitud mucho mayor que la escala de longitud sobre la que las variables  $(\rho, n, u^\alpha, q^\alpha, \tau^{\alpha\beta})$  deje de ser válida. Sin embargo, los fluidos de Navier-Stokes, no exhiben este tipo de comportamiento.

Para un fluido de Navier-Stokes, a escalas lo suficientemente grandes en donde la descripción hidrodinámica es válida, parece ser que existe un sistema de ecuaciones, el sistema de Navier-Stokes, que es apropiado para la descripción de la física del fluido y una segunda familia de sistemas hiperbólicos, que son apropiados para las matemáticas. Geroch en [37] enuncia:

*«esta división de la física y la matemática es una situación nueva, y toma algún tiempo acostumbrarse a ella. Pero con un poco de cuidado, “teorías” de este tipo pueden ser aplicadas tan efectivamente como las teorías físicas tradicionales».*

En suma, la descripción de la disipación en un fluido relativista es un problema desafiante.

Finalizamos esta tesis mencionando que en este trabajo nos enfocamos en las teorías de termodinámica fuera del equilibrio referidas frecuentemente como teorías extendidas, un término que nació después de la idea de Müller de extender la dependencia funcional de la entropía de estados fuera de equilibrio, incluyendo variables adicionales que aparecen en las leyes de balance. Como tal, dejamos fuera muchas teorías alternativas que tienen como finalidad describir los tipos de medios continuos (clásicos y relativistas) y su comportamiento termodinámico. En particular, no discutimos la teoría de Carter de la conducción del calor relativista que toma el punto de vista variacional [16, 67], ni tampoco la estructura de la teoría GENERIC siglas en inglés para general equation for non equilibrium reversible irreversible coupling [33, 48, 82]. También, dejamos afuera de este trabajo a los gases poliatómicos y a los gases densos dentro de la teoría (TIRE) clásica y relativista etc. Israel en [52] comenta sobre la plétora de las teorías existentes de la siguiente manera:

*There are as many attitudes to nonequilibrium thermodynamics as there are theories. They run the gamut from pragmatism to axiomatism, and are represented in forms ranging from brief papers directed toward specific experiments to monumental Handbuch articles.*

¿Cuál de estas teorías describe la naturaleza?. Aquí la respuesta es obvia: los experimentos y las observaciones van a decidir y esta es una tarea para el futuro. Por otro lado, el reto por parte de los teóricos consiste en construir teorías que esten en armonía con los bien establecidos principios fundamentales.

# Referencias

- [1] Abbott B, Abbott R, Abbott T D et. al. *Phys. Rev. Lett.* 119, 161101, (2017)
- [2] Acuña-Cárdenas R O, Gabarrete C and Sarbach O, *An introduction to the relativistic kinetic theory on curved spacetimes* [arXiv:2106.09235 [gr-qc]] (2021)
- [3] Aitken D M *Relativistic Irreversible Thermodynamics*, M. Sc. thesis, University of Alberta, Edmonton, Canada (1964)
- [4] Anile A M and Majorana A *Mecanica*, 16, 149 (1981)
- [5] Anile A M, Pavon D, Romano V [arXiv:9810014 [gr-qc]] (1998)
- [6] Arima T, Ruggeri T and Sugiyama M. *Entropy* 20, 301 (2018)
- [7] Bhattacharyya S, Minwalla S, Hubeny V and Rangamani M, *J. High Energy Phys*, 02,045. (2008)
- [8] Boillat G *C.R. Acad. Sc. Paris*, 278A, 909, (1974)
- [9] Boillat G and Ruggeri T *Arch. Rational Mech. Anal* 137, (1997)
- [10] Boillat G and Ruggeri T *Cont.Mech. Thermodyn* 9, (1997)
- [11] Callen H B *Thermodynamics and an Introduction to Thermostatistics*, 2nd ed., Wiley, New York, (1985)
- [12] Calzetta E and Thibeault M, *Phys. Rev. D* **63**, 103507 (2001)
- [13] Calzetta E, *Phys. Rev. D* **92**, (2015)
- [14] Carter B and Quintana H *Proc. R. Soc. Lond. A* 331 57 (1972)
- [15] Carter B and Quintana H *Phys. Rev D* 16 2928 (1977)
- [16] Carter B *in Relativistic Fluid Dynamics* eds. A. Anile and Y. Choquet-Bruhat (Springer) (1989)
- [17] Cattaneo C, *Atti Sem. Mat. Fis. Modena* 3, 83, 101 (1948)
- [18] Cattaneo C. *R. Acad. Sc. Paris* 247, 431-433 (1958).

- 
- [19] Cimmelli V A, D Jou D, Ruggeri T and Van P, *Entropy* 16, 1756, (2014)
- [20] Coleman B D and Noll W, *Arch. Ration. Mech. Anal*, 13, 167, (1963)
- [21] Coleman B D *Arch. Rat. Mech. Anal*, 17, 1 (1964)
- [22] Coleman B D and Gurtin M E *J. Chem. Phys*, 47, 597, (1967)
- [23] Derradi de Souza R, Koide T and Kodama T *Hydrodynamical approach in relativistic ion reaction* Prog. Part. Nucl. Phys 86 35 (2016)
- [24] De Groot S R and Mazur P *Non-Equilibrium Thermodynamics* (Amsterdam, North Holland) (1962)
- [25] Eckart C *Phys. Rev.* **58**, 267 (1940)
- [26] Eckart C *Phys. Rev.* **58**, 269 (1940)
- [27] Eckart C *Phys. Rev.* **58**, 919 (1940)
- [28] Ehlers J *Continuum Mechanics and Thermodynamics in Relativity*, Astrophysics and Cosmology, ed. W. Israel, Dordrecht, Reidel Pub. Com. (1973)
- [29] Event Horizon Telescope <https://eventhorizontelescope.org/>
- [30] Florkowski W, Heller M P and Spalinski M *New theories of relativistic hydrodynamics in the LHC era*, Rept. Prog. Phys. 81 (2018)
- [31] Friedrichs K O *Com. Pure Appl. Math.* 27, 749, (1974)
- [32] Friedrichs K O *Com. Pure Appl. Math.* 31, 123, (1978)
- [33] Grmela M *Multiscale Equilibrium and Nonequilibrium Thermodynamics in Chemical Engineering Adv. Chem. Eng.* 39, 75-129, (2010)
- [34] Geroch R and Lindblom L *Phy. Rev. D* **41** (1990)
- [35] Geroch R and Lindblom L *Ann. Phys.* 207, 394 (1991)
- [36] Geroch R *J.Math.* 36, 8, 4226 (1995)
- [37] Geroch R *On Hyperbolic Theories of Relativistic Dissipative Fluids* [arXiv:0103112v1, [gr-qc]] (2001)
- [38] Gyarmati I *Nonequilibrium Thermodynamics* (Berlin, Springer) (1970)
- [39] Glansdorff P and Prigogine I *Thermodynamic Theory of Structure, Stability and Fluctuations* (New York, Wiley) (1971)

- 
- [40] Grad H *Comm. Pure Appl. Math* 2, 331 (1949)
- [41] Herrera L, Pavon D *Physica A*307, 121 (2002)
- [42] Herrera L, Pavon D *Phys. Rev. D*64, 088503 (2001)
- [43] Hiscock W A and Lindblom L *Ann. Phys* **151** 466, (1983)
- [44] Hawking S W and Ellis G F R, *The Large Scale Structure of Space-Time* Cambridge: Cambridge University Press (1973).
- [45] Hiscock W A and Lindblom L *Phys. Rev. D* **31** 725, (1985)
- [46] Hiscock W and Salmonson J *Phys. Rev. D* 43, 3249 (1991)
- [47] Huang K *Statistical Physics*, Second Edition, J.Wiley and Sons, New York (1987)
- [48] Hütter M and Svendsen B *Quasi-Linear versus Potential-Based formulation of Force-Flux Relations and GENERIC for Irreversible Processes: Comparison and Examples Continuum Mech. Thermodyn* 25 803-816 (2013)
- [49] Israel W, *Anns. Phys., NY* **100** 310 (1976)
- [50] Israel W and Stewart J M, *Anns. Phys., NY* **118** 341 (1979)
- [51] Israel W and Stewart J M *General Relativity and Gravitation, Vol. 2, Ed. A. Held* (1980)
- [52] Israel W, *in Relativistic Fluid Dynamics* eds. A. Anile and Y. Choquet-Bruhat (Springer) (1989)
- [53] Jou D, Casas-Vázquez J and Lebon G, *Rep. Prog. Phys.* 51,1105, (1988)
- [54] Jou D, Casas-Vázquez J and Lebon G, *Extended Irreversible Thermodynamics, 4th edition, Springer* (2010)
- [55] Klein O, *Rev. Mod. Phys.* 21, 531 (1949)
- [56] Kluitenberg G A and de Groot J R, *Physica*, 21, 148 (1955)
- [57] Kranys M *Ann. Ins. Henri Poincare*, 25, 197 (1976)
- [58] Kranys M, *J. Phys. A*10, 1847 (1977)
- [59] Landau L and Lifshitz E M, *Fluid Mechanics*, Addison Wesley, Reading Mass (1958)

- 
- [60] Lehner L, Reula O and Rubio M, *Phys. Rev. D* 97, 024013 (2018)
- [61] LIGO Lab Caltech [www.ligo.caltech.edu/page/press-release-gw150914](http://www.ligo.caltech.edu/page/press-release-gw150914)
- [62] LIGO Scientific Collaboration and Virgo Collaboration. *Ap. J. Lett.* 850:L39, (2017)
- [63] Lindblom L, *Ann. Phys.* 247, 1 (1996)
- [64] Liu I S, *Arch. Rat.Mech.Anal*, 46, (1972)
- [65] Liu I S and Müller I *Arch. Rat.Mech.Anal*, 83, 285 (1983)
- [66] Liu I S, Müller I and Ruggeri T, *Ann. Phys.* **169** (1986)
- [67] Lopez-Monsalvo C S *PhD Thesis* School of Mathematics, University of Southampton UK [arXiv:1107.1005 [gr-qc]] (2011)
- [68] Maartens R *Class. Quantum. Grav.* 12 1455 (1995)
- [69] Majorana A and Motta S *J. Non-Equillb. Thermodyn.* 10, 1 (1985)
- [70] Marsden J and Hughes T *Mathematical Foundations of Elasticity*, Dover Pub (1994)
- [71] Martínez J *Phys. Rev. D* 53, 6921 (1996)
- [72] Meixner J and H G Reik H G *Themodynamik der Irreversiblen Prozesse (Handbuch der Physik 111/2)* Editor: S Flugge (Berlin, Springer) (1959)
- [73] Misner C W, Thorne K S and Wheeler J A *Gravitation* San Francisco: Freeman (1973)
- [74] Müller I *Z. Physik* **198**, 329-344 (1967)
- [75] Müller I *Arch. Rational Mech. Anal.* 40, 1, (1971)
- [76] Müller I *Arch. Rational Mech. Anal.* 41, 319, (1971)
- [77] Müller I and Ruggeri T *Rational Extended Thermodynamics*, 2th edition, Springer, New York (1998)
- [78] Nagy G B and Reula O A *J. Phys. A* **28**, 6943 (1995)
- [79] Noll W *The Foundation of Mechanics and Thermodynamics*, Springer (1974)
- [80] Onsager L *Phys. Rev.* **37** 405 (1931a)
- [81] Onsager L *Phys. Rev.* **38** 2265 (1931b)

- [82] Öttinger H C *Beyond Equilibrium Thermodynamics*; Wiley: Hoboken, NJ, USA. (2005)
- [83] Pavón D, Bafaluy J and Jou D *Class. Quantum. Grav.* 8 347 (1991)
- [84] Pennisi S *Proceedings of symposium of Kinetic Theory and Extended Thermodynamics, Eds. Müller I and Ruggeri T, Bologna* (1987)
- [85] Penrose R, *The Emperor's New Mind* Oxford Univ.Press, Vintage edition (1990)
- [86] Peralta-Ramos J and Calzetta E, *Phys. Rev. D* **80**, (2009)
- [87] Quevedo H *Geometrothermodynamics*, *Journal of Mathematical Physics* 48, 013506 (2007)
- [88] Quevedo H and Quevedo M N *Fundamentals of Geometrothermodynamics*, (2011)
- [89] Reula O A and Nagy G B *J. Phys A: Math. Gen* **30**, 1695 (1997)
- [90] Romatschke P and Romatschke U, *Relativistic fluid dynamics in and out of equilibrium - ten years of progress in theory and numerical simulations of nuclear collisions* (2019)
- [91] Ruggeri T and Strumia A *Ann. Inst. H. Poincare* 34, 65, (1981)
- [92] Ruggeri T *Cont. Mech. Thermodyn.* 1, (1989)
- [93] Salazar J F and Zannias T *T. Int. J. Mod. Phys D*. Vol. 29, No. 15, 2030010 (2020)
- [94] Salazar J F and Zannias T *Some Remarks on Relativistic Fluids of Divergent Type* (Por ser publicado) (2021)
- [95] Sarbach O and Zannias T *AIP Conf. Proc.* 1548,134, [arXiv:1303.2829 [gr-qc]]. (2013)
- [96] Sarbach O and Zannias T *AIP Conf. Proc.* 1577, 192, [arXiv:1303.2829 [gr-qc]]. (2014)
- [97] Sarbach O and Zannias T *Class. Quant. Grav.* 31, 085013, [arXiv:1309.2036 [gr-qc]]. (2014)
- [98] Schweizer M A *MNRAS*, 210, 303 (1984)
- [99] Schweizer M A *Astron. Astrophys.* 151, 79 (1985)

- 
- [100] Shapiro S D and Teukolsky S A *Black Holes, White Dwarfs and Neutron Stars* John Wiley and Sons, New York. (1983)
- [101] Synge J L *Relativity: The Special Theory*, North Holland, Amsterdam (1964)
- [102] Truesdell C *Rational Thermodynamics*, 2nd Edition, Springer (1984)
- [103] Wald R M *General Relativity*, University of Chicago Press (1984)