Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo
y
Universidad Nacional Autónoma de México

Posgrado Conjunto en Ciencias Matemáticas

Instituto de Física y Matemáticas
y
Centro de Ciencias Matemáticas

# Invariantes cardinales generalizados en dos parámetros

T E S I S

Que para optar por el grado de Maestro en Ciencias Matemáticas
Presenta:

Yhon Jairo Castro Bedoya

*Asesor:* Dr. Michael Hrušák

Centro de Ciencias Matemáticas UNAM

Morelia, Michoacán - marzo de 2021.

# ÍNDICE GENERAL

**AGRADECIMIENTOS** **4**

**INTRODUCCIÓN** **7**

**1. Preliminares** **9**

1.1. Invariantes cardinales del continuo . . . . . 10

1.2. Invariantes cardinales generalizados . . . . . 10

**2. Invariantes cardinales en dos parámetros** **12**

2.1. Los cardinales $\mathfrak{b}(\kappa, \lambda)$ y $\mathfrak{d}(\kappa, \lambda)$ . . . . . 12

2.2. El cardinal $\mathfrak{s}(\kappa, \lambda)$ . . . . . 13

2.3. El caso $cf(\lambda) = \kappa$ . . . . . 15

**3. Más sobre $\mathfrak{s}(\kappa, \lambda)$** **17**

3.1. Un resultado preliminar . . . . . 17

3.2. El cardinal $\mathfrak{s}'(\kappa, \lambda)$ . . . . . 18

**BIBLIOGRAFÍA** **22**

# AGRADECIMIENTOS

En primer lugar debo agradecer al CONACyT y a su sistema de becas nacionales por su apoyo y financiamiento durante los dos años que estuve relizando mis estudios de maestría en el Posgrado Conjunto en Ciencias Matemáticas. Agradezco a Micahel Hrušák por estos dos años de asesoría, la cual me permitió obtener un mayor grado de madurez en el área de la teoría de conjuntos.

Quiero agradecer fraternalmente a mi amigo Diego Mejía, puesto que es debido a él que me animé a realizar mis estudios en México, agradezco su apoyo incondicional y su interés por mi avance profesional. Quiero agradecer también a mis colegas, los cuales hicieron mi estadía en México más placentera. Por mencionar algunos están Kevin, Arley, Jorge, Mario, David, Emanuel entre otros.

Por último, agradezco a mi familia por su incansable apoyo en todo momento en que lo necesité, por su preocupación y por su fe en mí. Quiero agradecer a mi hermana Cristina por su amor y atención en todo momento; también quiero agradecer a Mabel por la paciencia, amor y comprensión que siempre ha tenido conmigo. A ellas dos les debo haberme ayudado incondicionalmente en los momentos más difíciles de la actual pandemía. Sin su invaluable apoyo no hubiera podido llegar hasta este punto.

# RESUMEN

El trabajo aquí presentado está dividido en tres capítulos. En el primer capítulo nos enfocamos en establecer la notación que usaremos en lo largo del texto, la cual es estándar [2, 1], como también, introduciremos algunos resultados y definiciones que nos servirán de guía para el desarrollo del trabajo posterior. Por ejemplo, hablaremos de los invariantes cardinales del continuo, tanto para el caso numerable, como su generalización a cardinales no numerables. Todo esto con el afán de hacer el texto lo mejor autocontenido posible. Cabe resaltar que en este capítulo no ofreceremos pruebas del los resultados a mencionar, por lo que se le sugiere al lector ir a las referencias recomendadas para encontrarlas.

En el segundo capítulo introducimos la generalización de algunos invariantes cardinales a dos parámetros, ofreciendo algunos resultados básicos que acotarán su tamaño. Haciendo uso del teorema de Erdös-Rado, obtendremos una cota inferior para el cardinal $\mathfrak{s}(\kappa^+, (2^\kappa)^+)$, resultado que nos será muy útil para el capítulo siguiente. Terminaremos este capítulo con el estudio de los invariantes cardinales en dos parámetros para el caso $cf(\lambda) = \kappa$. Para finalizar, en el capítulo tres, estudiaremos un poco más a fondo al cardinal $\mathfrak{s}(\kappa, \lambda)$. Introduciremos un cardinal nuevo, $\mathfrak{s}'(\kappa, \lambda)$ y, con ayuda de este, lograremos obtener $\mathfrak{s}(\kappa^+, \kappa^{++}) = \kappa^{++}$ al exigirle a $\kappa$ ciertas condiciones sobre su aritmética cardinal. De esto obtendremos como corolario que el cardinal $\mathfrak{s}(\aleph_1, \aleph_2)$ solo de pende de si asumimos, o no, **CH**.

Palabras Clave: Invariantes cardinales, invariantes cardinales en dos parámetros, combinatoria infinita, hipótesis del continuo, teoría de conjuntos.

## Abstract

The work presented here is divided into three chapters. In the first chapter we focused on establishing the notation that we will use throughout the text, which is standard [2, 1], as well as introducing some results and definitions that will serve as a guide for the development of later work. For example, we will talk about the cardinal invariants of the continuum, both for the countable case, and its generalization to uncountable cardinals. All this with the aim of making the text as self-contained as possible. It should be noted that in this chapter we will not offer proofs of the results to be mentioned, so the reader is suggested to go to the recommended references to find them.

In the second chapter we introduce the generalization of some cardinal invariants to two parameters, offering some basic results that will limit their size. Using the Erdös-Rado theorem, we will obtain a lower bound for the cardinal $\mathfrak{s}(\kappa^+, (2^\kappa)^+)$, a result that will be very useful for the next chapter. We

will finish this chapter with the study of cardinal invariants in two parameters for the case $cf(\lambda) = \kappa$. Finally, in chapter three, we will study the cardinal $\mathfrak{s}(\kappa, \lambda)$ a little more thoroughly. We will introduce a new cardinal, $\mathfrak{s}'(\kappa, \lambda)$ and, with its help, we will be able to obtain $\mathfrak{s}(\kappa^+, \kappa^{++}) = \kappa^{++}$ by requiring $\kappa$ to have certain conditions on its cardinal arithmetic. From this we will obtain as a corollary that the cardinal $\mathfrak{s}(\aleph_1, \aleph_2)$ only depends on whether or not we assume **CH**.

# INTRODUCCIÓN

Uno de los tópicos de investigación en teoría de conjuntos que ha ofrecido fructíferos resultados y que hoy por hoy sigue siendo vanguardista, es el estudio de las *características cardinales del continuo* o *invariantes cardinales del continuo*. Estos son cardinales que se encuentran entre $\aleph_1$ y $\mathfrak{c}$ (la cardinalidad del conjunto de los números reales) y que, generalmente, están definidos a partir de propiedades combinatorias de familias de conjuntos en $\mathcal{P}(\omega)$ o $\omega^\omega$ [4]. Notemos que, bajo la Hipótesis del Continuo ($\mathfrak{c} = \omega_1$), la teoría sobre estos cardinales se trivializa; sin embargo, gracias al trabajo de P. Cohen y su método de *forcing*, podemos suponer que $\mathfrak{c} > \omega_1$ sin que esto nos traiga algún tipo de contravención más que las propias de **ZFC**.

Un lugar donde estos cardinales han desempeñado un rol importante es en la topología de conjuntos o topología general, puesto que han sido una herramienta útil para caracterizar propiedades de espacios topológicos. Por ejemplo, el cardinal $\mathfrak{s}$ (ver Definición 1.2) caracteriza al mínimo peso que puede tener un espacio compacto que no sea secuencialmente compacto. Así, todo espacio compacto con un peso menor que $\mathfrak{s}$ (en particular separable) también es secuencialmente compacto. Una pregunta natural que puede surgir al tener como hipótesis $\mathfrak{c} = \omega_1$ en la prueba de un teorema es, qué tanto podemos debilitar esta suposición. De nuevo los invariantes cardinales nos dan la respuesta en muchos casos, ya que en ocasiones se logra individualizar cuál fue el argumento combinatorio protagónico en la prueba y asociarlo a un invariante cardinal. Por ejemplo, al asumir la Hipótesis del Continuo es posible demostrar que en la clase de espacios primero numerables y localmente compactos, la propiedad de ser "numerablemente compacto" no es productiva; sin embargo, podemos obtener el mismo resultado descartando la rígidez combinatoria que nos ofrece **CH** y asumir $\mathfrak{b} = \mathfrak{c}$ (ver Definición 1.1)[13].

Otro lugar donde estos cardinales son de suma importancia es en la teoría del forcing. Más aún, entre estas dos líneas de investigación hay una relación muy estrecha ya que, un avance en una de ellas lleva consigo un avance en la otra. Para ejemplificar esto, tomaremos el caso de los cardinales $\mathfrak{u}$ y $\mathfrak{d}$ (para la definición del primero ver [4], para la del segundo ver Definición 1.1). Estos dos cardinales son independientes el uno del otro, es decir, las afirmaciones $\mathfrak{u} < \mathfrak{d}, \mathfrak{d} < \mathfrak{u}$ y $\mathfrak{u} = \mathfrak{d}$ son todas consistentes con **ZFC**; sin embargo, para probar que estos cardinales consistentemente son iguales a cualquier par de cardinales regulares y no contables, A. Blass y S. Shelah introdujeron a la teoría del forcing lo que hoy conocemos como *matrices de iteración* [14], una técnica de iteración con soportes finitos bastante útil y que particularmente ha permitido obtener resultados de independencia que involucran varios invariantes cardinales a la vez.

Naturalmente, estos cardinales ya se han generalizado al considerar el caso no numerable y obteniendo, como era de esperarse, resultados importantes. Algunos de ellos son el comportamiento inusual del cardinal $\mathfrak{s}(\kappa)$ y su estrecha conección con la teoría de grandes cardinales [5, 6], como también la desigualdad $\mathfrak{s}(\kappa) \leq \mathfrak{b}(\kappa)$ [11], que nos evidencia el hecho de que el caso numerable puede ser bastante distinto al no numerable.

En este trabajo nos disponemos a trabajar sobre una generalización en dos parámetros de los invariantes cardinales del continuo, proveyendo algunos resultados que dependen, generalmente, de su combinatoria y de la aritmética cardinal. Particularmente nos centraremos en el estudio del cardinal $\mathfrak{s}(\kappa, \lambda)$ (ver Definición 2.3), y mostraremos que el valor de $\mathfrak{s}(\aleph_1, \aleph_2)$ solo depende de si asumimos, o no, la Hipótesis del Continuo.

# CAPÍTULO 1

# PRELIMINARES

En este capítulo daremos la notación, resultados y definiciones básicas que serán necesarias en los capítulos siguientes, esto con la intención de hacer el texto lo mayormente auto-contenido posible. Cabe aclarar que los resultados presentados aquí serán dados sin demostraciones; sin embargo, los acompañaremos con las respectivas referencias en donde se podrán encontrar sus pruebas. La notación que usaremos es estándar y sigue en mayor medida a los textos [1, 2].

Sea $X$ un conjunto, por $|X|$ denotaremos su cardinal y usaremos las letras griegas $\mu$, $\kappa$, $\lambda$, entre otras, para referirnos a cardinales arbitrarios. Si $\kappa$ es un cardinal, $\kappa^+ := \text{mín}\{\lambda : \kappa < \lambda \text{ cardinal}\}$ es su *cardinal sucesor* y, un cardinal que no sea sucesor, lo llamaremos *cardinal límite*. Dados dos cardinales $\kappa$ y $\lambda$ con $\kappa \leq \lambda$, una función $f : \kappa \to \lambda$ se dirá que es cofinal si y solo si $f[\kappa]$ es no acotado en $\lambda$ y definimos el cardinal $cf(\lambda) := \text{mín}\{\kappa : \exists f : \kappa \to \lambda \text{ cofinal}\}$, al cual llamaremos *cofinalidad de* $\lambda$. Notemos que siempre se tiene $cf(\lambda) \leq \lambda$. Decimos que $\lambda$ es un cardinal *regular* si $cf(\lambda) = \lambda$, en otro caso, diremos que es *singular*. Dados dos conjuntos $X$ e $Y$, $Y^X$ denotará al conjunto de funciones $f : X \to Y$. En el caso en que $X$ e $Y$ sean cardinales, usaremos la misma notación para indicar su potenciación. Esto no nos deberá causar confusión alguna ya que el contexto nos dirá a qué noción nos referimos.

Dado un conjunto $X$ con $|X| \geq \kappa$, denotaremos por $[X]^\kappa$ a los subconjuntos de $X$ con tamaño $\kappa$; así como por $[X]^{<\kappa}$ denotaremos a sus subconjuntos con tamaño $< \kappa$. Llamaremos a una función $c : [X]^\kappa \to \lambda$ una *coloración de* $[X]^\kappa$ *en* $\lambda$ *colores*. La notación $\kappa \to (\mu)^\theta_\lambda$, indica que para toda coloración $c : [\kappa]^\theta \to \lambda$, existe un $X \in [\kappa]^\mu$ tal que $c \restriction [X]^\theta$ es constante. Dado un cardinal infinito $\kappa$, definimos por recursión al cardinal $exp_n(\kappa)$, para cada $n \in \omega$, como sigue: $exp_0(\kappa) := \kappa$ y, teniendo ya definido $exp_n(\kappa)$, $exp_{n+1}(\kappa) := 2^{exp_n(\kappa)}$. Así, tenemos el siguiente teorema [3].

**Teorema 1.1** (Erdös-Rado 1956)**.**

$$exp_n(\kappa)^+ \to (\kappa^+)^{n+1}_\kappa$$

Es fácil ver que todo cardinal sucesor es regular. Un cardinal límite y regular $\kappa$ lo llamaremos *débilmente inaccesible*. Además, si para todo $\lambda, \mu < \kappa$ se cumple que $\lambda^\mu < \kappa$, lo llamaremos solo *inaccesible*. Ahora, si un cardinal $\kappa$ satisface la relación $\kappa \to (\kappa)^2_2$ lo llamaremos *débilmente compacto* [7].

## 1.1. Invariantes cardinales del continuo

Cantor mostró que $\aleph_1 \leq 2^{\aleph_0}$ y además, conjeturó que esta relación puede ser sustituida por una igualdad. Su conjetura es conocida hoy como la *Hipótesis del Continuo* (**CH**). En diciembre de 1963, el matemático estadounidense P.Cohen mostró con su novedosa técnica de forcing que $\neg$**CH** es consistente con **ZFC**. Esto hace preguntarnos por el espectro de cardinales que se sitúan entre $\aleph_1$ y $\mathfrak{c} := 2^{\aleph_0}$. Estos cardinales reciben el nombre de *invariantes cardinales del continuo* o *características cardinales del continuo*. En esta sección, la cual está basada en el artículo [4], definiremos algunos de ellos y veremos como se relacionan entre sí.

Dadas dos funciones $f, g \in \omega^\omega$, decimos que $f \leq^* g$ si existe un $m \in \omega$ tal que, para todo $k \geq m$, $f(k) \leq g(k)$. Consideremos una familia $\mathcal{F} \subseteq \omega^\omega$. Decimos que la familia $\mathcal{F}$ es *no acotada* si $\neg\exists g \in \omega^\omega \forall f \in \mathcal{F}(f \leq^* g)$. Diremos que $\mathcal{F}$ es *dominante* si es $\leq^*$-cofinal en $\omega^\omega$, es decir, $\forall f \in \omega^\omega \exists g \in \mathcal{F}(f \leq^* g)$.

**Definición 1.1.** *Definimos a los cardinales* $\mathfrak{b}$ *y* $\mathfrak{d}$ *como:*

- $\mathfrak{b} := \text{mín}\{|\mathcal{B}| : \mathcal{B} \subseteq \omega^\omega \wedge \mathcal{B} \textit{ es no acotada}\}$
- $\mathfrak{d} := \text{mín}\{|\mathcal{D}| : \mathcal{D} \subseteq \omega^\omega \wedge \mathcal{D} \textit{ es dominante}\}$.

**Teorema 1.2.** $\aleph_1 \leq cf(\mathfrak{b}) = \mathfrak{b} \leq cf(\mathfrak{d}) \leq \mathfrak{d} \leq \mathfrak{c}$.

Sean $A, B \in [\omega]^\omega$. Diremos que $A$ y $B$ son *casi-disjuntos* o *ad*, si $|A \cap B| < \aleph_0$. Una familia $\mathcal{A} \subseteq [\omega]^\omega$ es *familia ad* si $\forall A, B \in \mathcal{A}(A \neq B \rightarrow |A \cap B| < \aleph_0)$ y diremos que es una *mad* si es una familia ad $\subseteq$-maximal. Si tenemos que $|A \cap B| = |A \cap (\omega \setminus B)| = \aleph_0$, diremos que $B$ *divide* a $A$. Una familia $\mathcal{S} \subseteq [\omega]^\omega$ es una *familia divisora* si $\forall A \in [\omega]^\omega \exists S \in \mathcal{S}(S \text{ divide a } A)$.

**Definición 1.2.** *Definimos los cardinales* $\mathfrak{a}$ *y* $\mathfrak{s}$ *como:*

- $\mathfrak{a} := \text{mín}\{|\mathcal{A}| : \mathcal{A} \subseteq [\omega]^\omega \wedge \mathcal{A} \textit{ es familia mad infinita}\}$
- $\mathfrak{s} := \text{mín}\{|\mathcal{S}| : \mathcal{S} \subseteq [\omega]^\omega \wedge \mathcal{S} \textit{ es familia divisora}\}$

**Teorema 1.3.** $\aleph_1 \leq \mathfrak{b} \leq \mathfrak{a} \leq \mathfrak{c}$ *y* $\aleph_1 \leq \mathfrak{s} \leq \mathfrak{d} \leq \mathfrak{c}$.

Los dos teoremas anteriores quedan resumidos en el siguiente diagrama. Los cardinales en el diagrama están ordenados de izquierda a derecha y de abajo hacia arriba en forma $\leq$-ascendente. Además de esto, este diagrama es completo, esto quiere decir que no se puede obtener más información sobre ellos desde **ZFC** más que la exhibida en el diagrama.

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{s} \arrow[r] & \mathfrak{d} \arrow[r] & \mathfrak{c} \\
\aleph_1 \arrow[r] \arrow[u] & \mathfrak{b} \arrow[r] \arrow[u] & \mathfrak{a} \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

## 1.2. Invariantes cardinales generalizados

Notemos que los cardinales anteriores caractarizan propiedades combinatorias de familias en $\omega^\omega$ y $[\omega]^\omega$. Esto nos permite definir, en forma natural, cardinales que caractericen propiedades en $\kappa^\kappa$ y $[\kappa]^\kappa$ donde $\kappa$ es un cardinal no numerable.

Dadas dos funciones $f, g \in \kappa^\kappa$, diremos que $f \leq^* g$ si y, solamente si, $|\{\alpha < \kappa : f(\alpha) > g(\alpha)\}| < \kappa$. Notemos que si $\kappa$ es regular, $f \leq^* g$ es equivalente a que $\exists \gamma < \kappa \forall \alpha \geq \gamma (f(\alpha) \leq g(\alpha))$. De igual manera, dados dos subconjuntos $a, b \subseteq \kappa$ diremos que $a$ y $b$ son $(\kappa)$-*ad* si $|a \cap b| < \kappa$. Por otro lado, si $|a \cap b| = |a \cap \kappa \setminus b| = \kappa$ diremos que $b$ *divide* $a$ $a$. Con lo anterior podemos definir los análogos de familia dominante, acotada, divisora y casi-disjunta maximal al contexto de $\kappa^\kappa$ y $[\kappa]^\kappa$.

**Definición 1.3.** *Sea $\kappa$ un cardinal infinito*

- $\mathfrak{b}(\kappa) := \text{mín}\{|\mathcal{B}| : \mathcal{B} \subseteq \kappa^\kappa \wedge \mathcal{B}$ *es no acotada*$\}$
- $\mathfrak{d}(\kappa) := \text{mín}\{|\mathcal{D}| : \mathcal{D} \subseteq \kappa^\kappa \wedge \mathcal{D}$ *es dominante*$\}$
- $\mathfrak{s}(\kappa) := \text{mín}\{|\mathcal{S}| : \mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(\kappa) \wedge \mathcal{S}$ *es divisora*$\}$
- $\mathfrak{a}(\kappa) := \text{mín}\{|\mathcal{A}| : \mathcal{A} \subseteq [\kappa]^\kappa \wedge \mathcal{A}$ *es mad de tamaño* $\geq \kappa\}$.

La mayoría de los resultados presentados en la sección anterior se generalizan para este contexto. Sin embargo, para el caso en el cual $\kappa$ es regular tenemos el siguiente diagrama [8].

$$
\begin{tikzcd}
\mathfrak{s}(\kappa) \arrow[r] & \mathfrak{d}(\kappa) \arrow[r] & 2^\kappa \\
\kappa^+ \arrow[r] & \mathfrak{b}(\kappa) \arrow[r] \arrow[u] & \mathfrak{a}(\kappa) \arrow[u]
\end{tikzcd}
$$

Las flechas en este diagrama tienen el mismo significado que aquellas en el diagrama de la sección anterior. Notemos que en este diagrama no aparece relación (flecha) entre los cardinales $\mathfrak{s}(\kappa)$ y $\kappa^+$ y esto se debe a que, en el caso no numerable, $\mathfrak{s}(\kappa)$ tiene un comportamiento diferente. Por ejemplo, es fácil probar que $\mathfrak{s}(\aleph_1) = \aleph_0$ (ver Teorema 3.1). En general, es posible probar que $\mathfrak{s}(\kappa) \geq \kappa$ si, y solamente si, $\kappa$ es un cardinal inaccesible, aún más, $\mathfrak{s}(\kappa) \geq \kappa^+$ si, y solamente si, $\kappa$ es un cardinal débilmente compacto [5, 6].

CAPÍTULO 2

# INVARIANTES CARDINALES EN DOS PARÁMETROS

En este capítulo bríndaremos generalizaciones de los invariantes cardinales ya mencionados. Para este capítulo $\kappa$ y $\lambda$ siempre denotarán cardinales infinitos con $\kappa \leq \lambda$ a menos que indiquemos lo contrario.

## 2.1. Los cardinales $\mathfrak{b}(\kappa, \lambda)$ y $\mathfrak{d}(\kappa, \lambda)$

**Definición 2.1.** *Sean $f, g \in \lambda^\kappa$. Decimos que $f \leq^* g$ si y solo si, $|\{\alpha < \kappa : f(\alpha) > g(\alpha)\}| < \kappa$.*

Notemos que esto es una ganeralización natural al conjunto $\lambda^\kappa$ de la relación $\leq^*$ definida en el capítulo anterior. Por tal razón, nos permitimos la misma notación ya que el contexto nos será suficiente para salir de ambigüedades. De igual forma podemos definir las nociones de familia no acotada y de familia dominante, como también sus respectivos cardinales asociados:

**Definición 2.2.** *Dados $\kappa$ y $\lambda$ tales que $\kappa \leq \lambda$ definimos:*

- $\mathfrak{b}(\kappa, \lambda) := \text{mín}\{|\mathcal{B}| : \mathcal{B} \subseteq \lambda^\kappa \wedge \mathcal{B}$ *no acotada*$\}$
- $\mathfrak{d}(\kappa, \lambda) := \text{mín}\{|\mathcal{D}| : \mathcal{D} \subseteq \lambda^\kappa \wedge \mathcal{D}$ *dominante*$\}$.

De forma análoga a los casos anteriores, es posible probar la siguiente proposición que muestra la relación que aguardan entre sí $\mathfrak{b}(\kappa, \lambda)$ y $\mathfrak{d}(\kappa, \lambda)$.

**Proposición 2.1.** $\mathfrak{b}(\kappa, \lambda) \leq cf(\mathfrak{d}(\kappa, \lambda)) \leq \mathfrak{d}(\kappa, \lambda) \leq \lambda^\kappa$

Veamos ahora unos resultados particulares sobre la estimación de $\mathfrak{b}(\kappa, \lambda)$ y $\mathfrak{d}(\kappa, \lambda)$ dependiendo de la combinatoria de $\kappa$ y $\lambda$.

**Proposición 2.2.** *Si $\kappa < cf(\lambda)$, entonces $\mathfrak{b}(\kappa, \lambda) = \mathfrak{d}(\kappa, \lambda) = cf(\lambda)$.*

*Demostración.* Sea $\mathcal{B} := \{f_\alpha : \alpha < \mu\} \subseteq \lambda^\kappa$ donde $\mu < cf(\lambda)$. Como $\kappa < cf(\lambda)$, ningún elemento de $\mathcal{B}$ es cofinal en $\lambda$, por lo tanto, por cada $\alpha < \mu$, existe $\mu_\alpha < \lambda$ tal que $\bigcup ran(f_\alpha) < \mu_\alpha$. De nuevo, como $\mu < cf(\lambda)$, tenemos que $\theta := \sup_{\alpha<\mu} \mu_\alpha < \lambda$ y, al definir $f \in \lambda^\kappa$ tal que $f(\gamma) = \theta$ para todo $\gamma < \kappa$, se sigue que $f_\alpha < f$ para todo $\alpha < \mu$. Por lo tanto $\mathfrak{b}(\kappa, \lambda) \geq cf(\lambda)$.

Ahora tomemos $\{\gamma_\alpha : \alpha < cf(\lambda)\}$ cofinal en $\lambda$. Así, por cada $\alpha < cf(\lambda)$, definimos la función $f_\alpha \in \lambda^\kappa$ tal que $f_\alpha(\gamma) = \gamma_\alpha$ para cada $\gamma < \kappa$. Es claro que la familia $\mathcal{D} := \{f_\alpha : \alpha < cf(\lambda)\}$ es dominante y, por lo tanto, $\mathfrak{d}(\kappa, \lambda) \leq cf(\lambda)$. □

**Proposición 2.3.** *Si* $\kappa = cf(\lambda)$ *entonces* $\kappa^+ \leq \mathfrak{b}(\kappa, \lambda)$.

*Demostración.* Sea $\mathcal{B} := \{f_\alpha : \alpha < \kappa\}$ una familia de funciones en $\lambda^\kappa$. Ahora definimos $f \in \lambda^\kappa$ tal que $f(\alpha) := (\sup_{\beta \leq \alpha} f_\beta(\alpha)) + 1$ para todo $\alpha < \kappa$. Notemos que lo anterior está bien definido puesto que $\kappa = cf(\lambda)$. De esta manera se cumple que $\forall \gamma \geq \alpha(f_\alpha(\gamma) < f(\gamma))$ y, por lo tanto $\forall \alpha < \kappa(f_\alpha \leq^* f)$. De esto se sigue que $\mathfrak{b}(\kappa, \lambda) \geq \kappa^+$. □

**Proposición 2.4.** *Sea* $\kappa$ *un cardinal tal que* $cf(\lambda) < \kappa < \lambda$*, entonces* $\mathfrak{b}(\kappa, \lambda) \geq cf(\lambda)$*. Además, si* $\kappa$ *es regular, entonces* $\mathfrak{b}(\kappa, \lambda) = cf(\kappa)$.

*Demostración.* Supongamos que $\kappa$ es regular. Sea $\{\gamma_\alpha\}_{\alpha < cf(\lambda)}$ una sucesión cofinal en $\lambda$ y, por cada $\alpha < cf(\lambda)$, definamos $f_\alpha \in \lambda^\kappa$ tal que $f_\alpha[\kappa] = \{\gamma_\alpha\}$. Afirmamos que la familia $\{f_\alpha : \alpha < cf(\lambda)\}$ es no acotada. En caso contrario, existiría $f \in \lambda^\kappa$ tal que $\forall \alpha < cf(\lambda)(f_\alpha \leq^* f)$. Definamos por cada $\alpha < cf(\lambda)$ al conjunto $A_\alpha := \{\delta < \kappa : f(\delta) < \gamma_\alpha\}$. Así, como $f_\alpha \leq^* f$, tenemos que $|A_\alpha| < \kappa$, y como $\kappa = \bigcup_{\alpha < cf(\lambda)} A_\alpha$, se sigue que $\kappa$ es singular en contra de lo supuesto.

De lo anterior conseguimos que $\mathfrak{b}(\kappa, \lambda) \leq cf(\lambda)$ para el caso regular. Para conseguir la desigualdad contraria basta un argumento análogo al de la Proposición 2.2, por lo cual podemos concluir que $\mathfrak{b}(\kappa, \lambda) \geq cf(\lambda)$ y, en el caso regular, $\mathfrak{b}(\kappa, \lambda) = cf(\lambda)$ □

Algunos comentarios acerca de los resultados anteriores son los siguientes:

1. Como consecuencia de la Proposición 2.2 tenemos que $\mathfrak{b}(\kappa, \kappa^+) = \mathfrak{d}(\kappa, \kappa^+) = \kappa^+$. Notemos que esto implica que el cardinal $\mathfrak{d}(\kappa, \lambda)$ puede ser regular para muchos casos, lo que difiere mucho del caso $\kappa = \lambda = \omega$, en el cuál la afirmación "$\mathfrak{d}$ es regular" es independiente de **ZFC** (ver Teorema 2.5 en [4]).

2. Las Proposiciones 2.2 y 2.4 implican que el cardinal $\mathfrak{b}(\kappa, \lambda)$, en general, no es creciente con respecto al segundo parámetro. En efecto, por la Proposición 2.4, tenemos que $\mathfrak{b}(\aleph_n, \aleph_\omega) = \aleph_0$ para todo $n \in \omega$ con $n \geq 1$. Sin embargo, por la Proposición 2.2, tenemos que $\mathfrak{b}(\aleph_n, \aleph_{n+1}) = \aleph_{n+1} > \mathfrak{b}(\aleph_n, \aleph_\omega)$.

## 2.2. El cardinal $\mathfrak{s}(\kappa, \lambda)$

En esta sección definiremos al cardinal $\mathfrak{s}(\kappa, \lambda)$ como una generalización natural de los cardinales $\mathfrak{s}$ y $\mathfrak{s}(\kappa)$. Además de esto, daremos unos cuantos resultados que dependen solamente de la combinatoria de $\kappa$ y $\lambda$. Por otro lado, en el siguiente capítulo, daremos un cálculo exacto de $\mathfrak{s}(\aleph_1, \aleph_2)$ el cual dependerá de si asumimos o no **CH**.

Sea $A \in [\lambda]^\kappa$. Decimos que $B \in \mathcal{P}(\lambda)$ *divide* al conjunto $A$ si, y sólo si, $|A \cap B| = |A \cap \lambda \setminus B| = \kappa$. Una familia $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(\lambda)$ es $\kappa$-*divisora* si para todo $A \in [\lambda]^\kappa$, existe un $S \in \mathcal{S}$ tal que $S$ divide a $A$. A partir de esto tenemos la siguiente definición:

**Definición 2.3.** $\mathfrak{s}(\kappa, \lambda) := \text{mín}\{|\mathcal{S}| : \mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(\lambda) \wedge \mathcal{S}$ *$\kappa$-divisora*$\}$.

**Proposición 2.5.** *Si* $\lambda \leq \lambda'$*, entonces* $\mathfrak{s}(\kappa, \lambda) \leq \mathfrak{s}(\kappa, \lambda')$.

*Demostración.* Sea $\mu := \mathfrak{s}(\kappa, \lambda')$ y consideremos $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(\lambda')$ una familia $\kappa$-divisora de tamaño $\mu$. Definimos $\mathcal{S}' := \{A \cap \lambda : A \in \mathcal{S}\}$. Claramente $\mathcal{S}' \subseteq \mathcal{P}(\lambda)$ y $|\mathcal{S}'| \leq \mu$. Sea $X \in [\lambda]^\kappa \subseteq [\lambda']^\kappa$, luego, por ser $\mathcal{S}$ $\kappa$-divisora, existe $A \in \mathcal{S}$ tal que $|X \cap A| = |X \cap \lambda' \setminus A| = \kappa$. Pero notemos que $X = X \cap \lambda$, por lo que la anterior relación se convierte en $|X \cap (A \cap \lambda)| = |X \cap \lambda \setminus (A \cap \lambda)| = \kappa$, y como $A \cap \lambda \in \mathcal{S}'$, se sigue que $\mathcal{S}'$ es $\kappa$-divisora en $\mathcal{P}(\lambda)$. Por tanto, $\mathfrak{s}(\kappa, \lambda) \leq \mu$. □

Lo que nos dice la proposición anterior es que, a diferencia del cardinal $\mathfrak{b}(\kappa, \lambda)$, el cardinal $\mathfrak{s}(\kappa, \lambda)$ siempre es creciente respecto al segundo parámetro. Sin embargo, este cardinal no es en general creciente respecto al primero puesto que $\aleph_0 = \mathfrak{s}(\aleph_1) = \mathfrak{s}(\aleph_1, \aleph_1) < \mathfrak{s} = \mathfrak{s}(\aleph_0, \aleph_0)$.

**Proposición 2.6.** *Sea $\kappa \leq \lambda$, entonces $\mathfrak{s}(\kappa, \lambda^+) \leq \lambda^+ \cdot \mathfrak{s}(\kappa, \lambda)$.*

*Demostración.* Sea $\{X_\alpha\}_{\alpha<\lambda^+}$ una famila de subconjuntos de $\lambda^+$ tales que $X_\alpha \subseteq X_{\alpha+1}$, $|X_\alpha| = \lambda$ y $\lambda^+ = \bigcup_{\alpha<\lambda^+} X_\alpha$. Ahora, por cada $\alpha < \lambda^+$, sea $\mathcal{S}_\alpha$ una familia $\kappa$-divisora en $\mathcal{P}(X_\alpha)$ de tamaño $\mathfrak{s}(\kappa, \lambda)$. Afirmamos que $\mathcal{S} := \bigcup_{\alpha<\lambda^+} \mathcal{S}_\alpha$ es $\kappa$-divisora en $\mathcal{P}(\lambda^+)$. En efecto, sea $X \in [\lambda^+]^\kappa$. Luego, como $\lambda^+$ es un cardinal regular, existe $\alpha < \lambda^+$ tal que $X \subseteq X_\alpha$, por lo cual existe $A \in \mathcal{S}_\alpha$ de tal modo que $A$ divide a $X$, que es lo que queríamos probar. Así se sigue que $\mathfrak{s}(\kappa, \lambda^+) \leq |\mathcal{S}| \leq \lambda^+ \cdot \mathfrak{s}(\kappa, \lambda)$. □

En este punto de nuevo podemos usar el hecho de que si $\kappa$ es no contable, $\mathfrak{s}(\kappa) > \kappa$ si y sólo si $\kappa$ es un cardinal débilmente compacto [5] y concluir de la Proposición 2.6 que, si $m, n \in \omega$ son tales que $1 \leq n < m$, entonces $\mathfrak{s}(\aleph_n, \aleph_m) \leq \aleph_m$. Más generalmente, si $\kappa$ es un cardinal no contable, que no es débilmente compacto y denotamos por $\kappa^{+n}$ al cardinal que resulta de $\kappa$ al aplicarle la operación sucesor $n$-veces, tenemos que $\mathfrak{s}(\kappa, \kappa^{+n}) \leq \kappa^{+n}$.

**Proposición 2.7.** *Sea $\kappa < \mu := cf(\lambda)$ y sea $\{\kappa_\alpha\}_{\alpha<\mu}$ una sucesión cofinal y estrictamente creciente en $\lambda$. Entonces $\mathfrak{s}(\kappa, \lambda) \leq \mu \cdot \sup_{\alpha\in\mu} \mathfrak{s}(\kappa, \kappa_\alpha)$.*

*Demostración.* Sea $\alpha_0 < \mu$ tal que $\kappa \leq \kappa_{\alpha_0}$. Por lo tanto, para todo $\alpha_0 \leq \alpha$ se cumple que $\kappa < \kappa_\alpha$. Seleccionamos una sucesión de subconjuntos de $\lambda$, $\{X_\alpha\}_{\alpha<\mu}$ tales que $X_\alpha \subseteq X_\beta$ si $\alpha < \beta$, $\lambda := \bigcup_{\alpha<\mu} X_\alpha$ y $|X_\alpha| = \kappa_\alpha$. Desde este punto, seguimos la prueba de la Proposición 2.7. Sea, por cada $\alpha_0 \leq \alpha < \mu$, $\mathcal{S}_\alpha$ una familia $\kappa$-divisora de tamaño $\mathfrak{s}(\kappa, \kappa_\alpha)$ [(1)] y definamos $\mathcal{S} := \bigcup_{\alpha_0\leq\alpha<\mu} \mathcal{S}_\alpha$. Ahora, dado $X \in [\lambda]^\kappa$, como $|X| < \mu$, existe un $\alpha_0 \leq \alpha < \mu$ tal que $X \subseteq X_\alpha$, y por tanto en $\mathcal{S}_\alpha$ hay un conjunto que divide a $X$. Por lo anterior podemos concluir que $\mathcal{S}$ es $\kappa$-divisora en $\mathcal{P}(\lambda)$ y, por ende, $\mathfrak{s}(\kappa, \lambda) \leq \mu \cdot \sup_{\alpha<\mu} \mathfrak{s}(\kappa, \kappa_\alpha)$. □

Notemos que los resultados que tenemos hasta ahora de $\mathfrak{s}(\kappa, \lambda)$, diferentes a su monotonía, nos dan cotas superiores de este cardinal. El siguiente resultado, en el cual haremos uso del Teorema 1.1, nos dará una cota inferior de este cardinal para un caso particular.

**Teorema 2.1.** $\mathfrak{s}(\kappa^+, (2^\kappa)^+) \geq \kappa^+$.

*Demostración.* Sea $\mu := (2^\kappa)^+$ y consideremos la familia $\mathcal{S} := \{S_\gamma : \gamma < \kappa\} \subseteq \mathcal{P}(\mu)$. Definimos la función $C : [\mu]^2 \to \kappa + 1$ como sigue:

$$C(\{\alpha, \beta\}) := \begin{cases} \min\{\gamma < \kappa : |S_\gamma \cap \{\alpha, \beta\}| = 1\} & \text{Si tal } \gamma \text{ existe} \\ \kappa & \text{En otro caso} \end{cases}$$

Luego, por el Teorema 1.1 para el caso $n = 1$, tenemos que existe $A \in [\mu]^{\kappa^+}$ que es $C$-momocromático. Notemos que necesariamente se cumple que $C \restriction [A]^2 = \{\kappa\}$. Sea $\gamma < \kappa$ y $\alpha, \beta \in [A]^2$ fijos. Tenemos dos casos:

1. Si $|S_\gamma \cap \{\alpha, \beta\}| = 2$, necesariamente $A \subseteq S_\gamma$ puesto que, en otro caso, tendríamos que existe $\delta \in A \setminus S_\gamma$ y por tanto $|\{\alpha, \delta\} \cap S_\gamma| = 1$, lo que implica que $C(\{\alpha, \delta\}) \leq \gamma$, contradiciendo el hecho de que la coloración $C$ es monocromática en $A$.

2. Si $|S_\gamma \cap \{\alpha, \beta\}| = 0$, entonces tenemos que $S_\gamma \cap A = \emptyset$, pues en caso contrario, al tomar $\delta \in A \cap S_\gamma$, tendríamos que $C(\{\alpha, \delta\}) \leq \gamma$ que de nuevo contradice que $C$ es momocromática.

Lo anterior muestra que ningún conjunto de $\mathcal{S}$ divida a $A$, lo que nos permite concluir que ninguna familia de subconjuntos de $\mathcal{P}(\mu)$ es $\kappa$-divisora, esto es, $\mathfrak{s}(\kappa^+, \mu) \geq \kappa^+$ □

[1] Notemos que el cardinal $\mathfrak{s}(\kappa, \lambda)$ no está definido para $\lambda < \kappa$.

## 2.3. El caso $cf(\lambda) = \kappa$

En esta sección defiremos lo que vamos a llamar *famila* $\kappa$-$\lambda$-*mad*, con la intención de relacionar esta con los cardinales definidos anteriormente. Nos enfocaremos en el caso $cf(\lambda) = \kappa$ puesto que, bajo esta situación, obtendremos como resultado un diagrama similar a los presentados en el capítulo anterior.

Decimos que $a, b \in \mathcal{P}(\lambda)$, con $a \neq b$, son $\kappa$-$\lambda$-*ad* si se cumple que $|a \cap b| < \kappa$. Ahora, diremos que una familia $\mathcal{A} \subseteq [\lambda]^\kappa$ es $\kappa$-$\lambda$-*ad* si cada par de sus elementos son $\kappa$-$\lambda$-*ad*, y diremos que es $\kappa$-$\lambda$-*mad* si $\mathcal{A}$ es maximal respecto a la contención. Notemos que esta es la generalización a dos parámetros de las familias casi-disjuntas.

**Definición 2.4.** *Sean $\kappa \leq \lambda$ cardinales infinitos. Definimos:*

$$\mathfrak{a}(\kappa, \lambda) := \text{mín}\{|\mathcal{A}| : \mathcal{A} \subseteq P(\lambda) \wedge \mathcal{A} \ \kappa\text{-}\lambda\text{-}mad \text{ de tamaño} \geq \kappa\}$$

**Proposición 2.8.** *$cf(\kappa)^+ \leq \mathfrak{a}(\kappa, \lambda)$.*

*Demostración.* Sea $\mathcal{A} := \{A_\alpha : \alpha < cf(\kappa)\}$ una familia $\kappa$-$\lambda$-ad. Veamos que $\mathcal{A}$ no es maximal. Selecionemos una sucesión creciente de cardinales $\{\kappa_\alpha\}_{\alpha < cf(\kappa)}$ tal que $\sup_{\alpha < cf(\kappa)} \kappa_\alpha = \kappa$. Ahora, inductivamente, por cada $\alpha < cf(\kappa)$ podemos tomar $S_\alpha \subseteq A_\alpha \setminus \bigcup_{\beta < \alpha} A_\beta$ de modo que $|S_\alpha| = \kappa_\alpha$. Consideremos al conjunto $S := \bigcup_{\alpha < cf(\kappa)} S_\alpha$ el cual, por construcción,tiene tamaño $\kappa$. Es claro que para cada $\alpha < cf(\kappa)$, se tiene que $|S \cap A_\alpha| = |\bigcup_{\beta \leq \alpha} S_\beta| < \kappa$ por lo que $A \cup \{S\}$ es $\kappa$-$\lambda$-ad. □

Es sabido que los cardinales $\mathfrak{s}$ y $\mathfrak{a}$ son independientes de **ZFC**, es decir, es consistente que $\mathfrak{s} < \mathfrak{a}$ [9] como también $\mathfrak{a} < \mathfrak{s}$ [10]. Adicionalmente, si $\kappa$ es no numerable y regular se sigue desde **ZFC** que $\mathfrak{s}(\kappa) \leq \mathfrak{a}(\kappa)$ [11]. En el caso de dos parámetros tenemos que, si $\kappa$ es regular y $2^{<\kappa} = \kappa$, por el resultado anterior y el Teorema 3.2 (ver Capítulo 3), tendrémos que $\mathfrak{s}(\kappa^+, \kappa^{++}) \leq \mathfrak{a}(\kappa^+, \kappa^{++})$.

Hay muchas variantes en la definición de familias ad y mad tanto en el caso clásico así como en el caso no numerable, a las cuales, se les puede asociar sus respectivos cardinales característicos [12]. Al asumir que $cf(\lambda) = \kappa$, podremos definir una variante de $\mathfrak{a}(\kappa, \lambda)$ que nos será útil para obtener una cota superior de $\mathfrak{b}(\kappa, \lambda)$.

Sean $\kappa$, $\lambda$ cardinales tales que $cf(\lambda) = \kappa$. Dadas dos funciones $f, g \in \lambda^\kappa$, con $f \neq g$ diremos que son *ad* si, y sólo si, $|\{\alpha < \kappa : f(\alpha) = g(\alpha)\}| < \kappa$. Diremos que una familia $\mathcal{A} \subseteq \lambda^\kappa$ es *ad-cofinal* si todos sus elementos son funciones cofinales y cada par de ellos son ad. Diremos que $\mathcal{A}$ es *mad-cofinal* y es ad-cofinal y $\subseteq$-maximal.

**Definición 2.5.** *Sean $\kappa$ y $\lambda$ cardinales infinitos tales que $cf(\lambda) = \kappa$, definimos el cardinal $\mathfrak{a}_{cof}(\kappa, \lambda)$ como:*

$$\mathfrak{a}_{cof}(\kappa, \lambda) := \text{mín}\{|\mathcal{A}| : \mathcal{A} \subseteq \lambda^\kappa \wedge \mathcal{A} \text{ mad-cofinal}\}$$

**Proposición 2.9.** *Sean $\kappa$ y $\lambda$ cardinales infinitos tales que $cf(\lambda) = \kappa$. Entonces $\kappa^+ \leq \mathfrak{a}_{cof}(\kappa, \lambda)$.*

*Demostración.* Sea $\{f_\alpha : \alpha < \kappa\}$ una familia ad-cofinal. Veamos que esta no puede ser maximal. Definamos $f \in \lambda^\kappa$ tal que $f(\beta) := \sup\{f_\alpha(\beta) : \alpha \leq \beta\} + 1$. Para cada $\alpha < \kappa$, $A_\alpha := \{\gamma < \kappa : f(\gamma) = f_\alpha(\gamma)\} \subseteq \alpha + 1$ y, por lo tanto, $|A_\alpha| < \kappa$ para todo $\alpha < \kappa$. De esta forma tenemos que $\{f_\alpha : \alpha < \kappa\} \cup \{f\}$ es ad-cofinal. □

**Proposición 2.10.** *Sean $\kappa$ y $\lambda$ cardinales infinitos tales que $cf(\lambda) = \kappa$. Entonces $\mathfrak{b}(\kappa, \lambda) \leq \mathfrak{a}_{cof}(\kappa, \lambda)$.*

*Demostración.* Sea $\mu := \mathfrak{b}(\kappa, \lambda)$ y $\nu := \mathfrak{a}_{cof}(\kappa, \lambda)$. Supongamos, para llegar a una contradicción, que $\nu < \mu$. Sea $\mathcal{A} := \{f_\alpha : \alpha < \nu\}$ una familia mad-cofinal. Luego, por nuestra hipótesis tenemos que existe una función $f \in \lambda^\kappa$ tal que, para todo $\alpha < \nu$, se cumple $f_\alpha <^* f$. Sin pérdida de generalidad podemos asumir que $f$ es estrictamente creciente y cofinal. Ahora, como $\kappa$ es regular (puesto que es la cofinalidad de $\lambda$), por cada $\alpha < \nu$ existe un $\mu_\alpha < \kappa$ de tal modo que $\{\gamma < \kappa : f(\gamma) = f_\alpha(\gamma)\} \subseteq \mu_\alpha$. De esta manera tenemos que $f$ es ad con todos los miembros de $\mathcal{A}$, lo que contradice la maximalidad de $\mathcal{A}$. De esta manera se sigue que $\mu \leq \nu$. $\square$

En el siguiente diagrama resumimos los resultados obtenidos hasta ahora para el caso $cf(\lambda) = \kappa$. Las flechas tiene el mismo significado que en los diagramas anteriores y además, la línea punteada representa una incongnita entre la relación de los cardinales $\mathfrak{s}(\kappa, \lambda)$ y $\mathfrak{d}(\kappa, \lambda)$.

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{s}(\kappa,\lambda) \arrow[r, dash, dashed, "?"] & \mathfrak{d}(\kappa,\lambda) \arrow[r] & \lambda^\kappa \\
\kappa^+ \arrow[r] & \mathfrak{b}(\kappa,\lambda) \arrow[r] \arrow[u] & \mathfrak{a}_{cof}(\kappa,\lambda) \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

CAPÍTULO 3

# MÁS SOBRE $\mathfrak{s}(\kappa, \lambda)$

En este capítulo daremos más resultados sobre el cardinal $\mathfrak{s}(\kappa, \lambda)$. En particular, calcularemos el valor $\mathfrak{s}(\aleph_1, \aleph_2)$, el cual, asombrosamente, solo depende de si asumimos **CH** o su negación. Esto responde a una pregunta hecha por Michael Hrušák en el workshop *Set theory of the Reals*, evento que se llevó a cabo en *Casa Matemática Oxaca* (CMO) en agosto del 2019.

## 3.1. Un resultado preliminar

**Definición 3.1.** *Sea $A$ un conjunto y $\alpha$ un ordinal. Definimos los siguientes conjuntos: $A^{<\alpha} := \bigcup_{\beta<\alpha} A^\beta$ y dado $s \in A^{<\alpha}$, $\langle s \rangle := \{f \in A^\alpha : s \subseteq f\}$. Además, dado $a \in A$ y $s \in A^{<\alpha}$, definimos la concatenación de $s$ con $a$ como $s^\frown a := s \cup (dom(s), a)$.*

**Teorema 3.1.** *Si $\mu$, $\kappa$ y $\lambda$ son cardinales infinitos tales que $2^{<\mu} = \mu < \kappa \leq \lambda \leq 2^\mu$ y $\kappa$ es un cardinal regular, entonces $\mathfrak{s}(\kappa, \lambda) \leq \mu$.*

*Demostración.* Seleccionemos $X \subseteq 2^\mu$ tal que $|X| = \lambda$. Ahora, por cada $s \in 2^{<\mu}$, definimos $\langle s \rangle_X := \langle s \rangle \cap X = \{f \in X : s \subseteq f\}$, y con esto, definimos a la familia $\mathcal{S} := \{\langle s \rangle_X : s \in 2^{<\mu}\}$. Veremos que $\mathcal{S}$ es una familia $\kappa$-divisora en $\mathcal{P}(X)$ con lo que, como $|\mathcal{S}| \leq 2^{<\mu}$ y por hipótesis tenemos que $2^{<\mu} = \mu$, obtendremos el resultado deseado.

Sea $A \in [X]^\kappa$. Ahora, como $X = \bigcup_{s \in 2^{<\mu}} \langle s \rangle_X$ y $\kappa$ es un cardinal regular con $\kappa > 2^{<\mu}$, debe existir $s \in 2^{<\mu}$ tal que $|\langle s \rangle_X \cap A| = \kappa$. Mostraremos que existe $t \in 2^{<\mu}$ tal que $s \subseteq t$ y $|\langle t^\frown 1 \rangle_X \cap A| = |\langle t^\frown 0 \rangle_X \cap A| = \kappa$, con lo cual mostramos que, en efecto, $\mathcal{S}$ es una familia $\kappa$-divisora. De no ser cierto lo anterior, recursivamente podemos seleccionar una sucesión $\{t_\alpha\}_{\alpha<\mu} \subseteq 2^{<\mu}$, tal que $|\langle t_\alpha \rangle_X \cap A| < \kappa$ y $s \subseteq t_\alpha$ para todo $\alpha < \mu$, como también, una función $f \in X$ de tal suerte que $(A \cap \langle s \rangle_X) \setminus \{f\} = \bigcup_{\alpha<\mu} (\langle t_\alpha \rangle_X \cap A)$. Sin embargo, el conjunto del lado izquiero de la igualdad tiene cardinalidad $\kappa$, mientras que la parte derecha de la igualdad es una unión de $\mu$ conjuntos con cardinalidad $< \kappa$ y, como $\mu < \kappa$, esto contradice que $\kappa$ sea regular. □

Notemos que en la prueba anterior se encontró una familia $\kappa$-divisora en $\mathcal{P}(X)$ donde $X$ es un subconjunto de $2^\mu$ de tamaño $\lambda$ y no en $\mathcal{P}(\lambda)$ como sugiere la definición de familia $\kappa$-divisora. Esto es algo que se usa repetidamente en teoría de conjuntos, puesto que en pruebas como la anterior, nos interesa más la combinatoria del conjunto que la naturaleza de sus elementos. Estos cambios están justificados por el hecho de que, al ambos conjuntos tener el mismo tamaño, una biyección entre ellos hace que la combinatoria de uno de estos conjuntos se "refleje" en el otro.

**Corolario 3.1.** *Si asumimos* $\neg$***CH****, entonces* $\mathfrak{s}(\aleph_1, \aleph_2) = \aleph_0$.

*Demostración.* En este caso tenemos que $2^{\aleph_0} \geq \aleph_2$ y además, $2^{<\aleph_0} = \aleph_0$ siempre se cumple. Por lo tanto, por el Teorema 3.1, $\mathfrak{s}(\aleph_1, \aleph_2) \leq \aleph_0$. $\square$

## 3.2. El cardinal $\mathfrak{s}'(\kappa, \lambda)$

En esta sección introducimos un nuevo cardinal que llamaremos $\mathfrak{s}'(\kappa, \lambda)$. Su nombre sugiere similitudes con el cardinal $\mathfrak{s}(\kappa, \lambda)$, que en efecto las tiene, ya que la combinatoria del primero puede inferir en la del segundo como veremos en los resultados siguientes. Usaremos la relación que existe entre estos dos cardinales para probar que, asumiendo **CH**, $\mathfrak{s}(\aleph_1, \aleph_2) = \aleph_2$.

**Definición 3.2.** *Dados dos cardinales $\kappa \leq \lambda$, definimos:*

$$\mathfrak{s}'(\kappa, \lambda) := \text{mín}\{\mu : \exists S \in [2^{\mu}]^{\lambda} \forall g \in 2^{\mu} \forall A \in [S]^{\kappa} \exists \alpha < \mu (|\{f \in A : f(\alpha) \neq g(\alpha)\}| = \kappa)\}.$$

**Proposición 3.1.** $\mathfrak{s}(\kappa, \lambda) \leq \mathfrak{s}'(\kappa, \lambda)$.

*Demostración.* Sea $\mu < \mathfrak{s}(\kappa, \lambda)$ y $F := \{f_\gamma : \gamma < \lambda\} \subseteq 2^{\mu}$. Por cada $\alpha < \mu$ definimos al conjunto $S_\alpha := \{\gamma < \lambda : f_\gamma(\alpha) = 1\}$. Luego, al tomar $\mathcal{S} := \{S_\alpha : \alpha < \mu\}$, como $|\mathcal{S}| \leq \mu$, debe existir $A \in [\lambda]^{\kappa}$ que no es dividido por ningún elemento de $\mathcal{S}$. Definimos la función $g \in 2^{\mu}$ de modo que $g(\alpha) = 1$ si, y sólo si, $|A \cap \lambda \setminus S_\alpha| < \kappa$. Luego tenemos que:

$$\{\gamma \in A : g(\alpha) \neq f_\gamma(\alpha)\} = \begin{cases} A \cap \lambda \setminus S_\alpha & \text{si } g(\alpha) = 1 \\ A \cap S_\alpha & \text{si } g(\alpha) = 0 \end{cases}$$

Por lo tanto, para todo $\alpha < \mu$, se cumple que $|\{\gamma \in A : g(\alpha) \neq f_\gamma(\alpha)\}| < \kappa$. Así, la familia $F$ no satisface la definición de $\mathfrak{s}'(\kappa, \lambda)$, lo que nos permite concluir el resultado. $\square$

**Definición 3.3.** *Dados un conjunto $X$ y una familia de subconjuntos $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$, decimos que $\mathcal{F}$ separa puntos de $X$ si, para cada $x, y \in X$, si $x \neq y$, existe un $F \in \mathcal{F}$ tal que $|F \cap \{x, y\}| = 1$.*

**Proposición 3.2.** *Dados un conjunto $A$ y $\alpha$ un ordinal límite, la familia $\mathcal{F} := \{\langle s \rangle : s \in A^{<\alpha}\}$ separa puntos de $A^{\alpha}$.*

*Demostración.* Sean $f, g \in A^{\alpha}$ tales que $f \neq g$. Luego, existe $\beta < \alpha$ tal que $f(\beta) \neq g(\beta)$. De esta manera, si tomamos $s := f \restriction (\beta + 1)$, entonces $\langle s \rangle \cap \{f, g\} = \{f\}$, que es lo que buscábamos. $\square$

**Proposición 3.3.** *Sea $\mu < \mathfrak{s}'(\kappa, \lambda)$ tal que $\lambda \leq 2^{\mu}$, $\mu \leq 2^{\lambda}$ y $2^{<\mu} = \mu$, entonces $\mathfrak{s}(\kappa, \lambda) \geq \mu^{+}$.*

*Demostración.* Por hipótesis tenemos que $2^{\mu} \geq \lambda$ y $2^{<\mu} = \mu$. Por lo tanto, por la proposición anterior, en $\mathcal{P}(\lambda)$ existe una familia que separa puntos de $\lambda$ de tamaño $\mu$.

Sea $\mathcal{S} := \{S_\alpha : \alpha < \mu\} \subseteq \mathcal{P}(\lambda)$ que, sin pérdida de generalidad, podemos asumir que separa puntos. Veamos que $\mathcal{S}$ no puede ser $\kappa$-divisora. En efecto, por cada $\gamma < \lambda$ definimos la función $f_\gamma \in 2^{\mu}$ tal que $f_\gamma(\alpha) = 1$ si, y sólo si, $\gamma \in S_\alpha$. Consideremos $F := \{f_\gamma : \gamma < \lambda\}$. Como la familia $\mathcal{S}$ separa puntos, tenemos que $|F| = \lambda$ puesto que, dados $\gamma, \gamma' \in \lambda$ distintos, existe $\alpha < \mu$ tal que $|S_\alpha \cap \{\gamma, \gamma'\}| = 1$ y por tanto $f_\gamma(\alpha) \neq f_{\gamma'}(\alpha)$.

Ahora, como $\mu < \mathfrak{s}'(\kappa,\lambda)$, tenemos que existen $g \in 2^\mu$ y $A \in [\lambda]^\kappa$ tales que, para todo $\alpha < \mu$, se cumple que $|\{\gamma \in A : f_\gamma(\alpha) \neq g(\alpha)\}| < \kappa$. Veamos que ningún elemento de $\mathcal{S}$ divide a $A$. En efecto, por cada $\alpha < \mu$ tenemos que el conjunto $\{\gamma \in A : f_\gamma(\alpha) \neq g(\alpha)\} \in \{S_\alpha \cap A, \lambda \setminus S_\alpha \cap A\}$, ya que $\{\gamma \in A : f_\gamma(\alpha) \neq g(\alpha)\}$ es el conjunto $S_\alpha \cap A$ si, y sólo si, $g(\alpha) = 0$, en otro caso, es igual al conjunto $\lambda \setminus S_\alpha \cap A$. Como para todo $\alpha < \mu$ se tiene que $|\{\gamma \in A : f_\gamma(\alpha) \neq g(\alpha)\}| < \kappa$ se sigue que para todo $\alpha < \mu$, $S_\alpha$ no divide a $A$. Así obtenemos que $\mathfrak{s}(\kappa,\lambda) \geq \mu^+$. □

Las Proposiciones 3.1 y 3.3 evidencian la inferencia que puede tener el cardinal $\mathfrak{s}'(\kappa,\lambda)$ sobre el cardinal $\mathfrak{s}(\kappa,\lambda)$ que, en principio, parecieran fortuitas. Sin embargo, no lo son. Observemos que la Definición 3.2 es equivalente a:

$$\mathfrak{s}'(\kappa,\lambda) := \text{mín}\{\mu : \exists F \in (2^\mu)^\lambda (F \text{ inyectiva}) \forall g \in 2^\mu \forall A \in [F(\lambda)]^\kappa \exists \alpha < \mu (|\{f \in A : f(\alpha) \neq g(\alpha)\}| = \kappa)\}.$$

Es decir, intercambiamos el subconjunto de $2^\mu$ de tamaño $\lambda$ por una función inyectiva $F$. Notemos que en la proposición anterior usamos las hipótesis y la propiedad de separar puntos para garantizar que la familia $F$ tenga tamaño $\lambda$. En otras palabras, esto significa que $F$ es el rango de una función inyectiva en $(2^\mu)^\lambda$. Ahora bien, si relajamos un poco la definición y obviamos la condición de que $F$ sea inyectiva, podemos obtener una nueva caracterización del cardinal $\mathfrak{s}(\kappa,\lambda)$, puesto que en este caso podemos descartar las hipótesis de la Proposición 3.3 y junto una modificación de la Proposición 3.1 a este contexto tenemos lo siguiente:

**Proposición 3.4.**

$$\mathfrak{s}(\kappa,\lambda) := \text{mín}\{\mu : \exists F \in (2^\mu)^\lambda \forall g \in 2^\mu \forall A \in [F(\lambda)]^\kappa \exists \alpha < \mu (|\{f \in A : f(\alpha) \neq g(\alpha)\}| = \kappa)\}.$$

**Proposición 3.5.** *Sean $\kappa < \lambda$ cardinales infinitos. Supongamos que $2^{<\kappa} = \kappa$, $2^\kappa \geq \lambda$ y $\kappa$ regular. Entonces, $\mathfrak{s}'(\kappa,\lambda) \neq \kappa$.*

*Demostración.* Sea $S \in [2^\kappa]^\lambda$. Veamos que $S$ no satisface la Definición 3.2. Sea $S' := \{s \in 2^{<\kappa} : \exists f \in S(s \subseteq f)\}$. Para $\theta$ suficientemente grande, tomamos $M$ un submodelo elemental de $H(\theta)$ de tamaño $\kappa$ tal que $S, S', \kappa, \lambda, 2^{<\kappa} \in M$ y $2^{<\kappa} \subseteq M$. Por elementaridad tenemos que se cumple que

$$M \models \forall s \in S' \exists f \in S(s \subseteq f) \quad (*)$$

Como $|S| > \kappa$, podemos tomar $g \in S \setminus M$. Ahora, por $(*)$, para cada $\alpha < \kappa$, existe un $f_\alpha \in M$ tal que $f_\alpha \restriction \alpha = g \restriction \alpha$. Ahora, por cada $\alpha < \kappa$, existe $\beta < \kappa$ tal que $\alpha < \beta$ y $f_\alpha \neq f_\beta$, puesto que en otro caso $g = f_\alpha \in M$. Así, por la regularidad de $\kappa$, podemos tomar $\{\alpha_i\}_{i<\kappa} \subseteq \kappa$ cofinal y creciente de tal suerte que $f_{\alpha_i} \neq f_{\alpha_j}$ si $i \neq j$. Sea $A := \{f_{\alpha_i} : i < \kappa\}$ que, por construcción $|A| = \kappa$. Sea $\beta < \kappa$ fijo. Escojemos $i < \kappa$ tal que $\beta < \alpha_i$, por lo que $\{f \in A : f(\beta) \neq g(\beta)\} \subseteq \{f_{\alpha_j} : j < i\}$. De esta manera tenemos que para todo $\beta < \kappa$, $|\{f \in A : f(\beta) \neq g(\beta)\}| < \kappa$ y como $S$ fue seleccionado arbitrariamente, podemos conlcuir que $\mathfrak{s}'(\kappa,\lambda) \neq \kappa$. □

Con los resultados hasta ahora obtenidos nos es suficiente para el cálculo del cardinal $\mathfrak{s}(\aleph_1,\aleph_2)$ en presencia de **CH**. En el próximo resultado, por $\mathbf{CH}_\kappa$, abreviamos la expresión "$2^\kappa = \kappa^+$" y como corolario de este resultado, obtenemos que, bajo **CH**, $\mathfrak{s}(\aleph_1,\aleph_2) = \aleph_2$.

**Teorema 3.2.** *Supongamos que $\kappa$ es un cardinal regular tal que $2^{<\kappa} = \kappa$. Entonces $\mathfrak{s}(\kappa^+,\kappa^{++}) \in \kappa^+ \cup \{\kappa^{++}\}$.*

*Demostración.* Supongamos en primer lugar $\neg\mathbf{CH}_\kappa$. Luego, bajo esta hipótesis tenemos que $\kappa = 2^{<\kappa} < \kappa^+ < \kappa^{++} \leq 2^\kappa$. Así, por el Teorema 3.1 se sigue que $\mathfrak{s}(\kappa^+,\kappa^{++}) \leq \kappa$.

Como $\kappa^+$ no es fuertemente inaccesible (puesto que no es cardinal límite), tenemos que $\mathfrak{s}(\kappa^+) < \kappa^+$ [5]. Así, por la Proposición 2.6 se sigue que $\mathfrak{s}(\kappa^+, \kappa^{++}) \leq \kappa^{++} \cdot \mathfrak{s}(\kappa^+) \leq \kappa^{++}$. Asumamos $\mathbf{CH}_\kappa$, por lo tanto tenemos que $(2^\kappa)^+ = \kappa^{++}$ con lo que, por el Teorema 2.1, conseguimos que $\mathfrak{s}(\kappa^+, \kappa^{++}) \geq \kappa^+$. Ahora bien, por hipótesis tenemos que $2^{<\kappa} = \kappa$, con lo cual se sigue por la Proporsición 3.5 que $\mathfrak{s}'(\kappa^+, \kappa^{++}) \neq \kappa^+$ y como por la Proposición 3.1 tenemos que $\mathfrak{s}(\kappa^+, \kappa^{++}) \leq \mathfrak{s}'(\kappa^+, \kappa^{++})$ se sigue que $\kappa^+ < \mathfrak{s}'(\kappa^+, \kappa^{++})$. De nuevo, por $\mathbf{CH}_\kappa$, tenemos que $2^{<\kappa^+} = 2^\kappa = \kappa^+$, y esto junto con la Proposición 3.3 nos permite concluir que $\mathfrak{s}(\kappa^+, \kappa^{++}) \geq \kappa^{++}$. Con lo que podemos obtener que, bajo $\mathbf{CH}_\kappa$, $\mathfrak{s}(\kappa^+, \kappa^{++}) = \kappa^{++}$. $\square$

# BIBLIOGRAFÍA


[1] Jech, Thomas. *Set theory.* Springer Science & Business Media, 2013.

[2] Kunen, Kenneth. *Set theory an introduction to independence proofs.* Elsevier, 2014.

[3] Erdös, Paul, and Richard Rado. *A partition calculus in set theory.* Bulletin of the American Mathematical Society 62.5 (1956): 427-489.

[4] Blass, Andreas. *Combinatorial cardinal characteristics of the continuum.* Handbook of set theory. Springer, Dordrecht, 2010. 395-489.

[5] Suzuki, Toshio. *About splitting numbers.* Proceedings of the Japan Academy, Series A, Mathematical Sciences 74.2 (1998): 33-35.

[6] Zapletal, Jindřich. *Splitting number at uncountable cardinals.* Journal of Symbolic Logic (1997): 35-42.

[7] Kanamori, Akihiro. *The higher infinite: large cardinals in set theory from their beginnings.* Springer Science & Business Media, 2008.

[8] Schilhan, Jonathan. *Bounding, splitting and almost disjointness.* Diss. Bachelor's thesis 1, University of Vienna, 2015.

[9] Baumgartner, James E., and Peter Dordal. *Adjoining dominating functions.* The Journal of Symbolic Logic 50.1 (1985): 94-101.

[10] Brendle, Jörg, and Vera Fischer. *Mad families, splitting families and large continuum.* Journal of Symbolic Logic 76.1 (2011): 198-208.

[11] Raghavan, Dilip, and Saharon Shelah. *Two inequalities between cardinal invariants.* Fundamenta Mathematicae 237 (2017), 187-200.

[12] Blass, Andreas, Tapani Hyttinen, and Yi Zhang. *Mad families and their neighbors.* (2005).

[13] Van Douwen, Eric K. *The integers and topology.* Handbook of set-theoretic topology. North-Holland, 1984. 111-167.

[14] Blass, Andreas, and Saharon Shelah. *Ultrafilters with small generating sets.* Israel Journal of Mathematics 65.3 (1989): 259-271.