



**UNIVERSIDAD MICHOACANA
DE SAN NICOLÁS DE HIDALGO**



Instituto de Física y Matemáticas

**Sobre la existencia de estrellas de bosones
newtonianas con momento angular en simetría
esférica**

Tesis

que para obtener el título de:

Maestro en Ciencias en el área de Física

Presenta:

Emmanuel Chávez Nambo

Director de Tesis:

Dr. Olivier Charles Albert Sarbach

Morelia, Michoacán. **Septiembre 2021**

Índice general

Resumen	1
Abstract	3
Introducción	5
1. Ecuaciones de movimiento	7
2. Existencia de soluciones locales en la vecindad del centro	11
3. Propiedades de la extensión máxima	17
3.1. Explosión de la solución en radio finito	18
3.2. Propiedades del potencial efectivo	21
3.3. Comportamiento asintótico de las soluciones globales	26
4. Existencia global de una familia de soluciones normalizables	31
4.1. Comportamiento de la solución para a pequeño	33
4.2. Comportamiento de la solución para a grande	35
4.3. Demostración del teorema principal	36
Conclusiones	39
Bibliografía	41

Resumen

Se presenta la demostración de la existencia de una familia discreta de soluciones globales, normalizables, estáticas y con simetría esférica del sistema Schrödinger-Poisson generalizado, el cual considera un número impar $N = 2\ell + 1$ de campos escalares complejos con masa m_b y momento angular ℓ . Estas soluciones son conocidas como estrellas de bosones newtonianas con momento angular y hasta el presente fueron construidas únicamente de forma numérica.

Palabras clave— Problema de ajuste fino, parámetro libre, ecuaciones diferenciales, teorema de existencia, sistema Schrödinger-Poisson.

Abstract

We present a proof for the existence of a discrete family of global, normalizable, static and spherically symmetric solutions of the generalized Schrödinger-Poisson system, which considers an odd number of $N = 2\ell + 1$ complex scalar fields of mass m_b and angular momentum ℓ . These solutions are known as Newtonian ℓ -boson stars and so far were only constructed numerically.

Introducción

Las estrellas de bosones son objetos astrofísicos hipotéticos las cuales están compuestas por campos bosónicos masivos. Fueron propuestos primeramente por Kaupp [1] y Ruffini y Bonazzola [2] quienes encontraron soluciones numéricas esféricamente simétricas del sistema de ecuaciones Einstein-Klein-Gordon (EKG). En los últimos años se ha generado cierto interés, ya sea matemático o físico, por estas estrellas exóticas y se han explorado en más detalle en, por ejemplo, las siguientes referencias [3, 4, 5, 6] y ver también [7] para una revisión. Particularmente en [8] se da una demostración rigurosa de la existencia de las soluciones encontradas en [1, 2] a las cuales se les conoce en la literatura como “mini-boson stars” debido a que son objetos diminutos con masa $\sim \hbar c/Gm_b$ donde \hbar es la constante de Planck reducida, c es la velocidad de la luz, m_b es la masa del bosón y G es la constante de gravitación universal. La masa de Planck se define como $M_p = \sqrt{\hbar c/G} \sim 10^{-8}$ kg y entonces las estrellas de bosones tienen masa $\sim M_p^2/m_b$. Aunque las estrellas de bosones sigan siendo hipotéticas ya que aún no hay evidencia experimental de que existan, éstas son frecuentemente consideradas como candidatas a imitadores de agujeros negros [9], objetos compactos masivos hechos de axiones [10] o incluso se ha sugerido que la materia oscura podría ser bosónica ya que parte de la materia faltante en el universo podría estar por ahí en forma de estrellas de bosones [11]. Basado en estas motivaciones, en [12] se presenta una nueva clase de soluciones estáticas al sistema de ecuaciones (EKG) el cual generaliza las conocidas estrellas de bosones considerando un número impar N de campos escalares complejos con masa m_b . La particularidad de estas soluciones reside en que cada campo escalar individual posee momento angular; sin embargo la configuración total es esféricamente simétrica.

Además de las estrellas de bosones mencionadas anteriormente, las cuales son configuraciones relativistas, también se ha estudiado su contra-parte newtoniana las cuales son conocidas como estrellas de bosones newtonianas. Estas estrellas hipotéticas se propusieron en [13] donde se encuentran soluciones numéricas esféricamente simétricas del sistema de ecuaciones Schrödinger-Poisson y algunos años después en [14] se da una demostración rigurosa de la existencia de estas soluciones.

El objetivo de esta tesis es generalizar el sistema de ecuaciones Schrödinger-Poisson como se hace en [12], es decir, se consideran N campos escalares complejos en lugar de solamente uno. Esto cambia las ecuaciones añadiendo un término centrífugo al potencial gravitatorio dado que al igual que en la versión relativista, cada campo escalar individual posee momento angular ℓ pero la configuración total sigue siendo esféricamente simétrica. En esta tesis damos una demostración rigurosa de la existencia de soluciones del sistema Schrödinger-Poisson generalizado.

Con el fin de lograr este objetivo, esta tesis se organiza como sigue. En el capítulo 1

se describe el sistema Schrödinger-Poisson generalizado y partiendo de un ansatz estático y esféricamente simétrico se reduce a un sistema no lineal de ecuaciones diferenciales ordinarias para $\phi(r)$ relacionado con el campo gravitatorio y la amplitud $w_\ell(r)$ del campo escalar formado por los bosones; estas ecuaciones son singulares en el centro de simetría $r = 0$, por lo que se imponen las condiciones de regularidad $\phi(0) = \phi_0$, $w_\ell(r) = a$, $\phi'(r) = w'_\ell(r) = 0$ (' denota la derivada con respecto a r) sobre $\phi(r)$ y $w_\ell(r)$ para que sean regulares en el centro, con ϕ_0 y a parámetros libres. Debido a esto obtenemos un problema de “shooting”, es decir, de ajuste fino donde (como su nombre lo indica) debemos ajustar correctamente dichos parámetros libres con el fin de encontrar soluciones que existan globalmente ($0 < r < \infty$) y decaigan suficientemente rápido cuando $r \rightarrow \infty$ para que sean normalizables. Pero debido a que el sistema de ecuaciones diferenciales obtenido es invariante bajo cierto re-escalado de $\phi(r)$ y $w_\ell(r)$ podemos fijar ϕ_0 , por lo que no hay necesidad de ajustar este parámetro y entonces se obtiene un problema de “shooting” uni-dimensional, donde solo se debe ajustar el parámetro a . Para finalizar este capítulo se enuncia el teorema principal que se quiere demostrar en esta tesis, el cual nos da la existencia de soluciones globales, normalizables y esféricamente simétricas del sistema Schrödinger-Poisson generalizado. En el capítulo 2 usamos el teorema del punto fijo de Banach para demostrar la existencia de una solución de las ecuaciones que se obtuvieron en el capítulo 1, en una vecindad del centro de simetría $r = 0$ y la cual es única una vez se fijan los parámetros libres a y ϕ_0 ; dicha solución tiene la propiedad de ser regular cerca del centro y de depender continuamente de estos parámetros libres. Después, en el capítulo 3 se dan algunas propiedades de la extensión máxima de la solución local construida en el capítulo anterior. En este capítulo, además de otros resultados, se encuentra que existen dos posibilidades para la extensión máxima: (1) La solución explota (diverge) en radio finito, o, (2) la solución existe globalmente y decae exponencialmente cuando $r \rightarrow \infty$. Luego, en el capítulo 4 se introduce la función de rotación y sus propiedades, además se discute el comportamiento de la solución para valores grandes y pequeños del parámetro libre en el centro. Finalmente, usando los resultados de los capítulos anteriores, presentamos la demostración del teorema principal la cual está basada en gran parte sobre los trabajos [8, 14] y generaliza estos trabajos para el caso con momento angular $\ell > 0$.

Para terminar se dan algunas conclusiones finales.

Capítulo 1

Ecuaciones de movimiento

Las estrellas de bosones newtonianas son modeladas por el sistema Schrödinger-Poisson, el cual consiste de una ecuación de Schrödinger para cada función de onda Ψ_n y la ecuación de Poisson para el campo gravitatorio Φ (asumiendo que $\Phi(\vec{x}) \rightarrow 0$ cuando $|\vec{x}| \rightarrow \infty$), dejando el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales parciales o PDE por sus siglas en ingles:

$$\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial t} \Psi_n - \frac{\hbar^2}{2m_b} \Delta \Psi_n + m_b \Phi \Psi_n = 0, \quad n = 1, 2, \dots, N, \quad (1.1)$$

$$\Delta \Phi = 4\pi G \rho, \quad \rho = m_b \sum_{n=1}^N |\Psi_n|^2. \quad (1.2)$$

Aquí m_b es la masa asociada con el bosón, ρ es la densidad de masa generada por los N campos y Δ denota el operador laplaciano 3-dimensional. El caso particular con $N = 1$ corresponde a la situación analizada en [13, 14]. Como en estas referencias, en esta tesis estamos interesados en soluciones estacionarias para las cuales la función de onda tiene una dependencia armónica en el tiempo:

$$\Psi_n(t, \vec{x}) = e^{-i\omega t} u_n(\vec{x}), \quad (1.3)$$

donde $\omega \in \mathbb{R}$ es la frecuencia angular y $u_n(\vec{x})$ son funciones con valores en \mathbb{C} que dependen de las coordenadas espaciales $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ las cuales satisfacen las condiciones de normalización usual

$$\int |u_n(\vec{x})|^2 d^3x = 1. \quad (1.4)$$

Sustituyendo el ansatz (1.3) en las ecs. (1.1, 1.2) deja el problema de eigenvalores no-lineal

$$-\frac{\hbar^2}{2m_b} \Delta u_n + m_b \Phi u_n = E u_n, \quad (1.5)$$

$$\Delta \Phi = 4\pi G m_b \sum_{n=1}^N |u_n|^2, \quad (1.6)$$

con eigenvalor $E = \hbar\omega$. Para estudiar este problema y siguiendo [13, 14] es conveniente reescribir este sistema en términos de las siguientes variables ¹

$$S_n = \alpha^{-1}u_n, \quad \phi = \beta^{-1}(m_b\Phi - E), \quad (1.7)$$

donde

$$\alpha = \left(\frac{\hbar^2}{8\pi G m_b^3} \right)^{1/2} \quad \text{y} \quad \beta = \frac{\hbar^2}{2m_b}, \quad (1.8)$$

donde α y β tienen unidades de (longitud)^{-1/2} y (energía)(longitud)². Esto simplifica el sistema (1.5, 1.6) a

$$\Delta S_n = S_n \phi, \quad (1.9)$$

$$\Delta \phi = \sum_{n=1}^N |S_n|^2. \quad (1.10)$$

Los campos re-escalados S_n y ϕ tienen unidades de (longitud)⁻² y como puede ser fácilmente verificado el sistema (1.9,1.10) es invariante bajo el re-escalo

$$(\vec{x}, S_n, \phi) \mapsto (\lambda^{-1}\vec{x}, \lambda^2 S_n, \lambda^2 \phi) \quad (1.11)$$

por un parámetro $\lambda > 0$. Además, el sistema es invariante con respecto al cambio de signo $(\vec{x}, S_n, \phi) \mapsto (\vec{x}, -S_n, \phi)$. Dada una solución (S_n, ϕ) del sistema (1.9, 1.10) para la cual

$$0 < \int |S_n(\vec{x})|^2 d^3x < \infty, \quad (1.12)$$

el re-escalo (1.11) puede ser usado para imponer la condición de normalización (1.4). En lo que sigue, nos enfocamos en configuraciones con simetría esférica para las cuales el campo S_n tiene un número de momento angular total fijo ℓ y $N = (2\ell + 1)$. Tales configuraciones fueron consideradas primero en [15] en el contexto del colapso crítico de campos escalares en relatividad general. Posteriormente, esta idea se adaptó para construir numéricamente nuevas configuraciones estáticas esféricamente simétricas del sistema de ecuaciones Einstein-Klein-Gordon denominadas *ℓ -boson stars* [12]. Para una contra-parte newtoniana de estas soluciones, ver [16] y [17]. En el caso newtoniano, estas configuraciones son obtenidas del siguiente ansatz para S_n y ϕ :

$$S_n(\vec{x}) = \sqrt{\frac{4\pi}{2\ell + 1}} r^\ell w_\ell(r) Y^{\ell m}(\vartheta, \varphi) \quad \text{y} \quad \phi(\vec{x}) = \phi(r), \quad (1.13)$$

donde (r, ϑ, φ) son las coordenadas esféricas estándar en \mathbb{R}^3 , $Y^{\ell m}$ denotan los esféricos armónicos estándar con números de momento angular asociados ℓm y w_ℓ es una función real-valuada que depende solamente de la coordenada radial r . Aquí, cada S_n tiene el mismo perfil radial w_ℓ , pero es asociada con un valor diferente de m . La relación entre n y m esta dada por $m = n - \ell - 1$, con m variando sobre todo el rango $m = -\ell, \dots, +\ell$ mientras n incrementa de 1 to $2\ell + 1$. Sustituyendo el ansatz (1.13) en las ecs. (1.9,1.10),

¹Notar que nuestra cantidad ϕ corresponde a la función $-V$ in [13, 14].

usando el hecho que $Y^{\ell m}$ son eigenfunciones del operador esférico de Laplace con eigenvalor asociado $-\ell(\ell + 1)$, y usando el teorema de adición para los armónicos esféricos (ver por ejemplo [18]) el cual deja

$$\sum_{m=-\ell}^{\ell} |Y^{\ell m}(\vartheta, \varphi)|^2 = \frac{2\ell + 1}{4\pi}, \quad (1.14)$$

obtenemos el problema radial

$$\frac{1}{r^{2(\ell+1)}} [r^{2(\ell+1)} w_\ell']' = \phi w_\ell, \quad (1.15)$$

$$\frac{1}{r^2} (r^2 \phi')' = r^{2\ell} w_\ell^2, \quad (1.16)$$

donde la prima denota diferenciación con respecto a r . Observamos que las ecs. (1.15, 1.16) son singulares en $r = 0$. La regularidad de las soluciones en $r = 0$ requiere las condiciones

$$w_\ell(0) = a, \quad \phi(0) = \phi_0, \quad w_\ell'(0) = 0, \quad \phi'(0) = 0, \quad (1.17)$$

con dos parámetros reales a y ϕ_0 . En el siguiente capítulo vamos a demostrar que dado $(a, \phi_0) \in \mathbb{R}^2$ existe una única solución (w_ℓ, ϕ) de (1.15, 1.16) en una vecindad del centro que cumple con (1.17). Para $\ell = 0$ este sistema se reduce al sistema analizado en [14] (ver ec. (2.1) en esta referencia y notar la relación $w_0(r) = S(r)$ y $\phi(r) = -V(r)$ entre su notación y la nuestra). En [14] se demuestra que para $\ell = 0$ el sistema admite una familia discreta de soluciones $(w_0(r), \phi(r))$, definidas para $0 < r < \infty$, las cuales son regulares en el centro $r = 0$ y satisfacen la condición de normalización (cf. ec. (1.12))

$$0 < \int_0^\infty w_\ell(r)^2 r^{2(\ell+1)} dr < \infty. \quad (1.18)$$

El objetivo de este trabajo es extender este resultado para valores arbitrarios de ℓ . Siguiendo [8] damos la siguientes definiciones:

Definición 1 *La extensión máxima de la solución (w_ℓ, ϕ) del sistema (1.15, 1.16) que satisface las condiciones (1.17) es llamada la a -órbita.*

Definición 2 *Las a -órbitas que existen para todo $r > 0$ son llamadas globalmente definidas.*

En el capítulo 3 vamos a demostrar que las a -órbitas globalmente definidas son automáticamente normalizables, es decir, satisfacen la ec. (1.18). Ahora es posible enunciar el teorema principal de esta tesis:

Teorema 1 *Para cada $\phi_0 < 0$, existe una sucesión decreciente de parámetros a_n ($n = 0, 1, 2, 3, \dots$) tal que las correspondientes a_n -órbitas son globalmente definidas. El índice n etiqueta el número de nodos de la función w_ℓ .*

En la siguiente figura 1.1 se muestran algunos ejemplos numéricos de a -órbitas. Se puede notar que dependiendo del correcto ajuste del parámetro libre a , las a -órbitas son globalmente definidas o no.

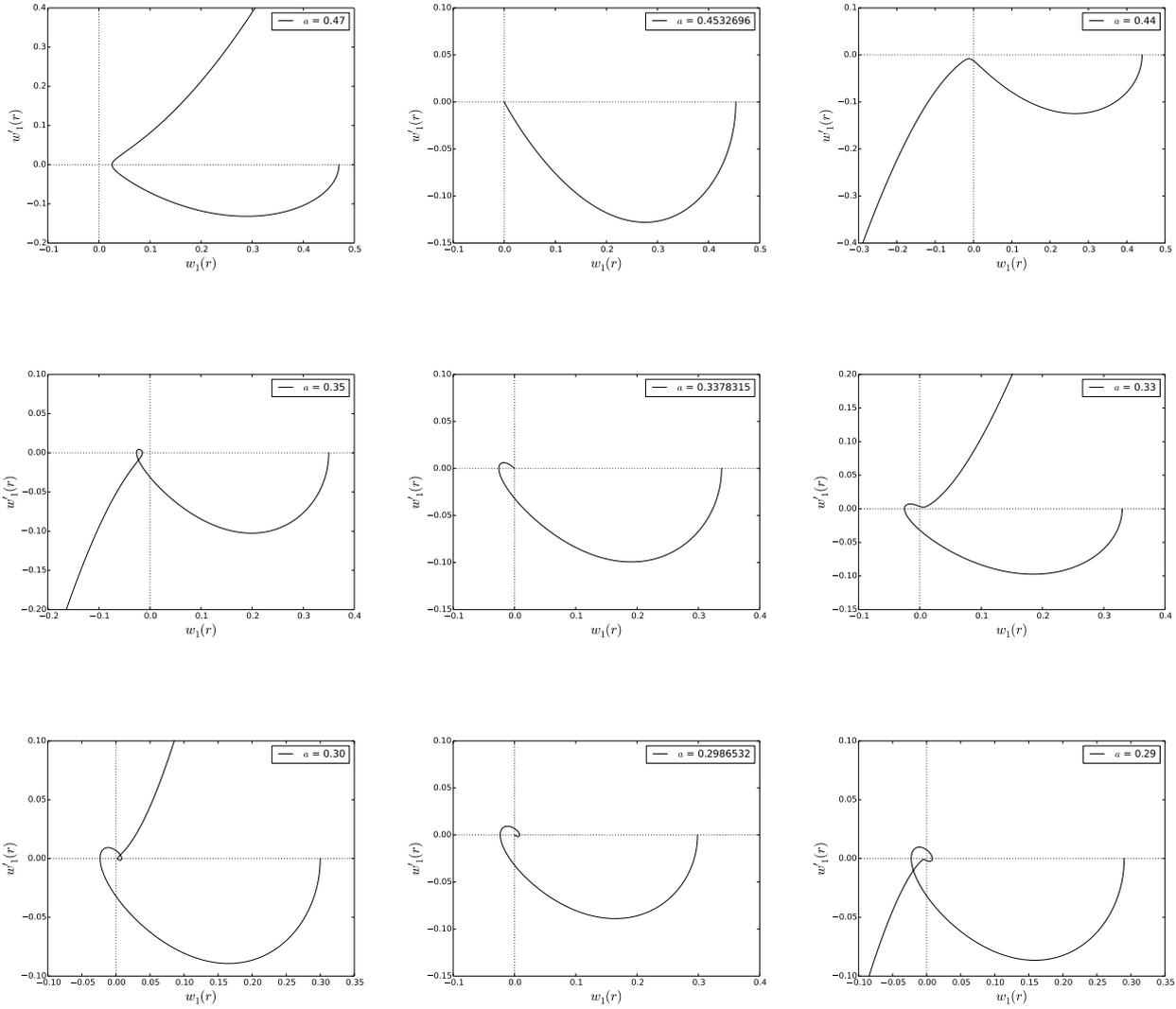


Figura 1.1: La a -órbita, con $\ell = 1$ y $\phi_0 = -1$, en el plano (w_1, w'_1) para diferentes valores del parámetro de ajuste a . Los ejemplos con $a = 0.4532696$, $a = 0.3378315$ y $a = 0.2986532$ aproximan los estados globales con 0, 1 y 2 nodos de w_ℓ , respectivamente.

Capítulo 2

Existencia de soluciones locales en la vecindad del centro

En esta sección se demuestra, usando el teorema del punto fijo de Banach, la existencia de soluciones locales $w_\ell(r)$, $\phi(r)$ del sistema (1.15, 1.16) en la vecindad del centro de simetría $r = 0$ las cuales satisfacen las condiciones de regularidad (1.17). Para esto, convertimos las ecuaciones diferenciales (1.15, 1.16) en ecuaciones integrales. Integrando una vez estas ecuaciones se obtiene

$$w'_\ell(r) = \frac{1}{r^{2(\ell+1)}} \int_0^r \phi(x) w_\ell(x) x^{2(\ell+1)} dx, \quad (2.1)$$

$$\phi'(r) = \frac{1}{r^2} \int_0^r w_\ell^2(x) x^{2(\ell+1)} dx, \quad (2.2)$$

donde las constantes de integración se han elegido de tal manera que se satisfagan las condiciones (1.17). Integrando nuevamente y usando integración por partes obtenemos

$$w_\ell(r) = a + \frac{1}{2\ell + 1} \int_0^r \phi(x) w_\ell(x) \left[1 - \left(\frac{x}{r} \right)^{2\ell+1} \right] x dx =: T_1(w_\ell, \phi)(r), \quad (2.3)$$

$$\phi(r) = \phi_0 + \int_0^r w_\ell^2(x) \left(1 - \frac{x}{r} \right) x^{2\ell+1} dx =: T_2(w_\ell, \phi)(r), \quad (2.4)$$

donde nuevamente las constantes de integración se han elegido de tal forma que se satisfagan las condiciones (1.17). Podemos usar la simetría $S_n \mapsto -S_n$ para asumir $a > 0$. Ambos a y ϕ_0 son parámetros libres en el centro (describiendo el valor de la función de onda y del potencial gravitatorio respectivamente, en $r = 0$). El sistema de ecuaciones integrales (2.3, 2.4) tiene la forma de un problema de punto fijo

$$k = Tk, \quad k = (w_\ell, \phi), \quad Tk = (T_1k, T_2k), \quad (2.5)$$

y en lo que sigue mostramos, que cuando k es definido en una clase de funciones apropiada sobre el intervalo $(0, R]$, entonces T es una contracción siempre que $R > 0$ es suficientemente pequeño. La existencia local y la unicidad se sigue entonces del teorema del punto

fijo de Banach (ver por ejemplo [19]). Con el fin de aplicar este teorema, introducimos para cada $R > 0$ el espacio vectorial real

$$X_R := \{k : (0, R] \rightarrow \mathbb{R}^2 \mid k \text{ continua y acotada}\} \quad (2.6)$$

equipado con la norma

$$\|k\| := \max\{\|w_\ell\|_\infty, \|\phi\|_\infty\} = \max\left\{\sup_{0 < r \leq R} |w_\ell(r)|, \sup_{0 < r \leq R} |\phi(r)|\right\}, \quad k = (w_\ell, \phi) \in X_R. \quad (2.7)$$

Se puede verificar que $(X_R, \|\cdot\|)$ define un espacio de Banach, es decir, un espacio vectorial normado completo. Después introducimos

$$A_R := \left\{k \in X_R \mid \lim_{r \rightarrow 0} k(r) = (a, \phi_0), |w_\ell(r)| \leq a + 1 \text{ y } |\phi(r)| \leq |\phi_0| + 1 \text{ para todo } 0 < r \leq R\right\}, \quad (2.8)$$

el cual es un subconjunto cerrado, no vacío de X_R . Con esta configuración mostramos

Lema 1 *El mapeo $T : X_R \rightarrow X_R$ definido por ecs. (2.3, 2.4, 2.5) está bien definido en X_R , mapea A_R en sí mismo y define una contracción siempre que $R > 0$ sea suficientemente pequeño.*

Demostración. Para probar el lema primero notamos que $0 \leq 1 - (x/r)^p \leq 1$ para todo $0 \leq x \leq r$ y todo $p \in \mathbb{N}$, lo que implica que el mapeo $T : X_R \rightarrow X_R$ está bien definido para todo $R > 0$ y que $Tk(r) \rightarrow (a, \phi_0)$ cuando $r \rightarrow 0$ para todo $k \in X_R$. Después, usando las integrales

$$\int_0^r \left[1 - \left(\frac{x}{r}\right)^{2\ell+1}\right] x \, dx = \frac{2\ell+1}{2\ell+3} \frac{r^2}{2}, \quad (2.9)$$

$$\int_0^r \left(1 - \frac{x}{r}\right) x^{2\ell+1} \, dx = \frac{r^{2(\ell+1)}}{2(\ell+1)(2\ell+3)}, \quad (2.10)$$

se sigue que

$$|T_1 k(r)| \leq a + \frac{(|\phi_0| + 1)(a + 1)}{2(2\ell + 3)} r^2, \quad (2.11)$$

$$|T_2 k(r)| \leq |\phi_0| + \frac{(a + 1)^2}{2(\ell + 1)(2\ell + 3)} r^{2(\ell+1)}, \quad (2.12)$$

para todo $k \in A_R$ y $0 < r \leq R$. Entonces que T deja A_R invariante siempre que R es suficientemente pequeño tal que

$$R^2 \leq \frac{2(2\ell + 3)}{(|\phi_0| + 1)(a + 1)}, \quad R^{2(\ell+1)} \leq \frac{2(\ell + 1)(2\ell + 3)}{(a + 1)^2}. \quad (2.13)$$

Queda por demostrar que T define una contracción en A_R si $R > 0$ es suficientemente pequeño, es decir, debemos probar la existencia de una constante $0 < L < 1$ tal que

$$\|T\tilde{k} - Tk\| \leq L\|\tilde{k} - k\|, \quad \text{para todo } k, \tilde{k} \in A_R. \quad (2.14)$$

Con este propósito estimamos para todo $k = (w_\ell, \phi), \tilde{k} = (\tilde{w}_\ell, \tilde{\phi}) \in A_R$:

$$\begin{aligned} |T_1 \tilde{k}(r) - T_1 k(r)| &\leq \frac{1}{2\ell + 1} \int_0^r \left| [\tilde{\phi}(x) \tilde{w}_\ell(x) - \phi(x) w_\ell(x)] \left[1 - \left(\frac{x}{r} \right)^{2\ell+1} \right] x \right| dx \\ &\leq \frac{\|\tilde{\phi} \tilde{w}_\ell - \phi w_\ell\|_\infty}{2(2\ell + 3)} r^2, \end{aligned}$$

para todo $0 < r \leq R$, lo que implica

$$\|T_1 \tilde{k} - T_1 k\|_\infty \leq \frac{\|\tilde{\phi} \tilde{w}_\ell - \phi w_\ell\|_\infty}{2(2\ell + 3)} R^2. \quad (2.15)$$

Por otro lado, usando la desigualdad del triángulo, se sigue que

$$\begin{aligned} \|\tilde{\phi} \tilde{w}_\ell - \phi w_\ell\|_\infty &= \|\tilde{\phi}(\tilde{w}_\ell - w_\ell) + w_\ell(\tilde{\phi} - \phi)\|_\infty \\ &\leq \|\tilde{\phi}\|_\infty \|\tilde{w}_\ell - w_\ell\|_\infty + \|w_\ell\|_\infty \|\tilde{\phi} - \phi\|_\infty \\ &\leq (1 + |\phi_0|) \|\tilde{w}_\ell - w_\ell\|_\infty + (1 + a) \|\tilde{\phi} - \phi\|_\infty \\ &\leq (2 + a + |\phi_0|) \|\tilde{k} - k\|, \end{aligned}$$

Combinando este resultado con la estimación (2.15), se obtiene

$$\|T_1 \tilde{k} - T_1 k\|_\infty \leq \frac{2 + a + |\phi_0|}{2(2\ell + 3)} R^2 \|\tilde{k} - k\|, \quad (2.16)$$

para todo $k, \tilde{k} \in A_R$. De forma similar, uno encuentra

$$\begin{aligned} |T_2 \tilde{k}(r) - T_2 k(r)| &\leq \int_0^r \left| [\tilde{w}_\ell^2(x) - w_\ell^2(x)] \left(1 - \frac{x}{r} \right) x^{2\ell+1} \right| dx \\ &\leq \frac{r^{2(\ell+1)}}{2(\ell + 1)(2\ell + 3)} \|\tilde{w}_\ell^2 - w_\ell^2\|_\infty, \end{aligned}$$

para todo $0 < r \leq R$, lo cual, junto con la estimación

$$\|\tilde{w}_\ell^2 - w_\ell^2\|_\infty \leq \|\tilde{w}_\ell + w_\ell\|_\infty \|\tilde{w}_\ell - w_\ell\|_\infty \leq 2(a + 1) \|\tilde{k} - k\|, \quad (2.17)$$

implica

$$\|T_2 \tilde{k} - T_2 k\|_\infty \leq \frac{(a + 1) R^{2(\ell+1)}}{(\ell + 1)(2\ell + 3)} \|\tilde{k} - k\|, \quad (2.18)$$

para todo $k, \tilde{k} \in A_R$. Por lo tanto, se sigue de ecs. (2.13, 2.16, 2.18) que T es una contracción sobre A_R , si $R > 0$ satisface las desigualdades (2.13) y

$$L := R^2 \max \left\{ \frac{2 + a + |\phi_0|}{2(2\ell + 3)}, \frac{(a + 1) R^{2\ell}}{(\ell + 1)(2\ell + 3)} \right\} < 1. \quad (2.19)$$

□

Mediante el teorema del punto fijo de Banach, obtenemos:

Teorema 2 Dado $a, \phi_0 \in \mathbb{R}$ y cualquier $R > 0$ satisfaciendo las condiciones (2.13, 2.19), existe una única solución $k := (w_\ell, \phi) : (0, R) \rightarrow \mathbb{R}^2$ de las ecuaciones (1.15, 1.16) la cual es dos veces continuamente diferenciable, y que satisface $\lim_{r \rightarrow 0} k(r) = (a, \phi_0)$ y $\lim_{r \rightarrow 0} k'(r) = (0, 0)$.

Demostración. De acuerdo al teorema del punto fijo de Banach y el resultado del lema anterior se sigue que T posee un único punto fijo $k = (w_\ell, \phi) \in A_R$. Ya que $k = Tk$ se sigue que $\lim_{r \rightarrow 0} k(r) = (a, \phi_0)$ y que $k : (0, R) \rightarrow \mathbb{R}^2$ es diferenciable con derivada

$$k'(r) = \left(\frac{1}{r^{2(\ell+1)}} \int_0^r \phi(x) w_\ell(x) x^{2(\ell+1)} dx, \frac{1}{r^2} \int_0^r w_\ell^2(x) x^{2(\ell+1)} dx \right), \quad 0 < r < R. \quad (2.20)$$

De esta expresión, se puede verificar que k' es diferenciable, $\lim_{r \rightarrow 0} k'(r) = (0, 0)$ y que $k = (w_\ell, \phi)$ satisface las ecs. (1.15, 1.16) para todo $0 < r < R$.

Respecto a la propiedad de unicidad, si $\tilde{k} : (0, R) \rightarrow \mathbb{R}^2$ fuera otra solución dos veces continuamente diferenciable de las ecs. (1.15, 1.16) tal que $\lim_{r \rightarrow 0} \tilde{k}(r) = (a, \phi_0)$ y $\lim_{r \rightarrow 0} \tilde{k}'(r) = (0, 0)$, entonces \tilde{k} sería también un punto fijo de T en A_R y por lo tanto coincidiría con k por la unicidad del punto fijo. □

A continuación, demostramos que k y k' tienen dependencia continua en los parámetros a y ϕ_0 , lo cual va a ser útil en los siguientes capítulos.

Teorema 3 Sean $k, \tilde{k} : (0, R) \rightarrow \mathbb{R}^2$ dos soluciones de las ecuaciones (1.15, 1.16) que son dos veces continuamente diferenciables y tales que $\lim_{r \rightarrow 0} k(r) = (a, \phi_0)$ y $\lim_{r \rightarrow 0} \tilde{k}(r) = (\tilde{a}, \tilde{\phi}_0)$. Si a, ϕ_0 son fijos tales que $|\tilde{a} - a| \leq 1$ y $|\tilde{\phi}_0 - \phi_0| \leq 1$, entonces para $R > 0$ suficientemente pequeño existen constantes $C_1 := C_1(a, \phi_0, R)$ y $C_2 := C_2(a, \phi_0, R)$ tales que

$$\|\tilde{k} - k\| \leq C_1 \max\{|\tilde{a} - a|, |\tilde{\phi}_0 - \phi_0|\}, \quad (2.21)$$

$$\|\tilde{k}' - k'\| \leq C_2 \max\{|\tilde{a} - a|, |\tilde{\phi}_0 - \phi_0|\}. \quad (2.22)$$

En particular, $\tilde{k} \rightarrow k$ y $\tilde{k}' \rightarrow k'$ de manera uniforme si $\tilde{a} \rightarrow a$ y $\tilde{\phi}_0 \rightarrow \phi_0$.

Demostración. De las ecs. (2.3, 2.4) y las integrales (2.9, 2.10) tenemos

$$\begin{aligned} |\tilde{w}_\ell(r) - w_\ell(r)| &\leq |\tilde{a} - a| + \frac{1}{2\ell + 1} \int_0^r \left| [\tilde{\phi}(x) \tilde{w}_\ell(x) - \phi(x) w_\ell(x)] \left[1 - \left(\frac{x}{r}\right)^{2\ell+1} \right] x \right| dx \\ &\leq |\tilde{a} - a| + \frac{\|\tilde{\phi} \tilde{w}_\ell - \phi w_\ell\|_\infty}{2(2\ell + 3)} r^2, \end{aligned} \quad (2.23)$$

$$\begin{aligned} |\tilde{\phi}(r) - \phi(r)| &\leq |\tilde{\phi}_0 - \phi_0| + \int_0^r \left| [\tilde{w}_\ell^2(x) - w_\ell^2(x)] \left(1 - \frac{x}{r} \right) x^{2\ell+1} \right| dx \\ &\leq |\tilde{\phi}_0 - \phi_0| + \frac{r^{2(\ell+1)}}{2(\ell + 1)(2\ell + 3)} \|\tilde{w}_\ell^2 - w_\ell^2\|_\infty, \end{aligned} \quad (2.24)$$

para todo $0 < r \leq R$, lo que implica

$$\|\tilde{w}_\ell - w_\ell\|_\infty \leq |\tilde{a} - a| + \frac{R^2}{2(2\ell + 3)} \|\tilde{\phi}\tilde{w}_\ell - \phi w_\ell\|_\infty, \quad (2.25)$$

$$\|\tilde{\phi} - \phi\|_\infty \leq |\tilde{\phi}_0 - \phi_0| + \frac{R^{2(\ell+1)}}{2(\ell+1)(2\ell+3)} \|\tilde{w}_\ell^2 - w_\ell^2\|_\infty. \quad (2.26)$$

Ahora, de forma similar al procedimiento en la demostración del Lema 1, usando la desigualdad del triángulo obtenemos

$$\begin{aligned} \|\tilde{w}_\ell^2 - w_\ell^2\|_\infty &\leq \|\tilde{w}_\ell + w_\ell\|_\infty \|\tilde{w}_\ell - w_\ell\|_\infty \leq (2 + a + \tilde{a}) \|\tilde{k} - k\| \\ &\leq (3 + 2a) \|\tilde{k} - k\|, \end{aligned} \quad (2.27)$$

$$\begin{aligned} \|\tilde{\phi}\tilde{w}_\ell - \phi w_\ell\|_\infty &= \|\tilde{\phi}(\tilde{w}_\ell - w_\ell) + w_\ell(\tilde{\phi} - \phi)\|_\infty \\ &\leq \|\tilde{\phi}\|_\infty \|\tilde{w}_\ell - w_\ell\|_\infty + \|w_\ell\|_\infty \|\tilde{\phi} - \phi\|_\infty \\ &\leq (1 + |\tilde{\phi}_0|) \|\tilde{w}_\ell - w_\ell\|_\infty + (1 + a) \|\tilde{\phi} - \phi\|_\infty \\ &\leq (3 + a + |\phi_0|) \|\tilde{k} - k\|. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Combinando este resultado con las estimaciones (2.25,2.26), se obtiene

$$\|\tilde{w}_\ell - w_\ell\|_\infty \leq |\tilde{a} - a| + \frac{(3 + a + |\tilde{\phi}_0|)R^2}{2(2\ell + 3)} \|\tilde{k} - k\| \leq |\tilde{a} - a| + \hat{L} \|\tilde{k} - k\|, \quad (2.29)$$

$$\|\tilde{\phi} - \phi\|_\infty \leq |\tilde{\phi}_0 - \phi_0| + \frac{(3 + 2a)R^{2(\ell+1)}}{2(\ell+1)(2\ell+3)} \|\tilde{k} - k\| \leq |\tilde{\phi}_0 - \phi_0| + \hat{L} \|\tilde{k} - k\|, \quad (2.30)$$

con

$$\hat{L} := R^2 \max \left\{ \frac{3 + a + |\phi_0|}{2(2\ell + 3)}, \frac{(3 + 2a)R^{2\ell}}{2(\ell + 1)(2\ell + 3)} \right\}. \quad (2.31)$$

Siempre que R sea lo suficientemente pequeño tal que $0 < \hat{L} < 1$, esto implica

$$\|\tilde{k} - k\| \leq C_1 \max\{|\tilde{a} - a|, |\tilde{\phi}_0 - \phi_0|\}, \quad (2.32)$$

donde $C_1 = 1/(1 - \hat{L})$ es una constante que depende de R, a, ϕ_0 . Con esto queda demostrada la desigualdad (2.21). Para demostrar la desigualdad (2.22) usamos las ecs. (2.1,2.2) para estimar como sigue

$$|\tilde{w}'_\ell(r) - w'_\ell(r)| \leq \frac{r}{2\ell + 3} \|\tilde{\phi}\tilde{w}_\ell - \phi w_\ell\|_\infty, \quad (2.33)$$

$$|\tilde{\phi}'(r) - \phi'(r)| \leq \frac{r^{2\ell+1}}{2\ell + 3} \|\tilde{w}_\ell^2 - w_\ell^2\|_\infty, \quad (2.34)$$

para todo $0 < r \leq R$. Sustituyendo las estimaciones anteriores para $\|\tilde{\phi}\tilde{w}_\ell - \phi w_\ell\|_\infty$ y $\|\tilde{w}_\ell^2 - w_\ell^2\|_\infty$ tenemos

$$\|\tilde{w}'_\ell - w'_\ell\|_\infty \leq \frac{(3 + a + |\phi_0|)R}{2\ell + 3} \|\tilde{k} - k\|, \quad (2.35)$$

$$\|\tilde{\phi}' - \phi'\|_\infty \leq \frac{(3 + 2a)R^{2\ell+1}}{2\ell + 3} \|\tilde{k} - k\|. \quad (2.36)$$

Finalmente, combinando este resultado con la estimación (2.32) obtenemos

$$\|\tilde{k}' - k'\| \leq C_2 \max\{|\tilde{\phi}_0 - \phi_0|, |\tilde{a} - a|\}, \quad (2.37)$$

donde C_2 es una constante que depende de R, a, ϕ_0 dada por

$$C_2 = \frac{R}{1 - \hat{L}} \max\left\{\frac{3 + a + |\phi_0|}{2\ell + 3}, \frac{(3 + 2a)R^{2\ell}}{2\ell + 3}\right\}. \quad (2.38)$$

□

Capítulo 3

Propiedades de la extensión máxima

Para lo que sigue, fijamos $\phi_0 \in \mathbb{R}$ y analizamos para cada $a \in \mathbb{R}$ las propiedades de la extensión máxima (la cual llamamos a -órbita) $(w_\ell, \phi) : (0, r_*) \rightarrow \mathbb{R}^2$ de la solución local construida en el Teorema 2, donde $r_* = r_*(a)$ es definido como

$$r_*(a) := \sup \left\{ r_1 > 0 \mid \begin{array}{l} \text{Existe solución dos veces continuamente diferenciable} \\ (w_\ell, \phi) : (0, r_1) \rightarrow \mathbb{R}^2 \text{ de las ecs. (1.15, 1.16) satisfaciendo} \\ \lim_{r \rightarrow 0} (w_\ell(r), \phi(r)) = (a, \phi_0) \text{ y } \lim_{r \rightarrow 0} (w'_\ell(r), \phi'(r)) = (0, 0) \end{array} \right\} \quad (3.1)$$

De los resultados del capítulo anterior y de los resultados estándar de sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias (ver por ejemplo [20]), se sigue que $r_*(a)$ y las normas de k y k' en intervalos de la forma $(0, R]$ con $R < r_*(a)$ dependen continuamente de a . Estamos interesados en encontrar aquellos valores de a para los cuales la a -órbita es globalmente definida (tal que $r_*(a) = \infty$) y deja una solución satisfaciendo la condición de normalización (1.18). Notar que debido a la propiedad de re-escalado (1.11) no hay necesidad de variar ϕ_0 por lo que el ajuste fino es 1-dimensional.

Para analizar las propiedades globales de la a -órbita es conveniente introducir las siguientes funciones

$$X_\ell(r) := r^{\ell+1} w_\ell(r), \quad \psi(r) := \phi(r) + \frac{\ell(\ell+1)}{r^2}, \quad r > 0, \quad (3.2)$$

en términos de las cuales ecs. (1.15) y (2.2) pueden ser re-escritas como sigue:

$$X_\ell''(r) = \psi(r) X_\ell(r), \quad (3.3)$$

$$r^2 \psi'(r) = -\frac{2\ell(\ell+1)}{r} + \int_0^r X_\ell^2(s) ds. \quad (3.4)$$

Notamos de la expresión (3.2) que $\psi(r) \rightarrow \infty$ cuando $r \rightarrow 0$. Podemos ver también de (3.3) que X_ℓ es oscilatoria mientras $\psi < 0$. En lo que sigue escribiremos solamente r_* en lugar de $r_*(a)$ cuando no haya peligro de confusión.

3.1. Explosión de la solución en radio finito

En esta sección se dan condiciones suficientes para que la solución no sea globalmente definida, es decir, para que $r_* < \infty$. El siguiente lema muestra que ψ (y ϕ) debe explotar si la a -órbita no es definida globalmente

Lema 2 *Supongamos que $r_* < \infty$, entonces $\psi(r), \psi'(r), |X_\ell(r)|, |X'_\ell(r)| \rightarrow \infty$ mientras $r \rightarrow r_*$.*

Demostración. La demostración es por contradicción. Sea $r_0 \in (0, r_*)$ y supongamos

$$B := \sup_{r_0 < r < r_*} |\psi(r)| < \infty. \quad (3.5)$$

Afirmamos que esta condición implica que las funciones X_ℓ, X'_ℓ y ψ' son también acotadas en el intervalo (r_0, r_*) , lo cual significa que la solución puede ser extendida mas allá de $r = r_*$ lo que contradice la definición de r_* . Para demostrar esta afirmación introducimos la cantidad

$$\varepsilon(r) := X_\ell^2(r) + X_\ell'^2(r), \quad r > 0. \quad (3.6)$$

Diferenciando ambos lados con respecto de r , usando ec. (3.3) y la suposición (3.5) obtenemos

$$\begin{aligned} \varepsilon'(r) &= 2[1 + \psi(r)]X_\ell(r)X'_\ell(r) \\ &\leq 2(1 + B)|X_\ell(r)||X'_\ell(r)| \\ &\leq (1 + B)[X_\ell^2(r) + X_\ell'^2(r)] = (1 + B)\varepsilon(r), \end{aligned}$$

para todo $r_0 < r < r_*$, lo que deja

$$\varepsilon(r) \leq e^{(1+B)(r-r_0)}\varepsilon(r_0) \leq C := e^{(1+B)(r_*-r_0)}\varepsilon(r_0). \quad (3.7)$$

para todo $r_0 < r < r_*$. Entonces la suposición (3.5) implica que las funciones X_ℓ y X'_ℓ son acotadas en el intervalo (r_0, r_*) . Esto a su vez implica que ψ' es también acotada en este intervalo, de acuerdo a la ec. (3.4). Por lo tanto, mientras ψ es finito la solución existe.

Queda por mostrar que ψ no puede divergir a menos infinito. Para esto es suficiente notar que $\phi(r) \geq \phi_0$ para todo $r \in (0, r_*)$, ver ec. (2.2), lo cual trivialmente implica $\psi(r) \geq \phi_0$ para todo $r \in (0, r_*)$. Luego, si $\psi \rightarrow \infty$ entonces $\phi \rightarrow \infty$ cuando $r \rightarrow r_*$ lo que implica que $|w_\ell| \rightarrow \infty$ por la ec. (2.4) y a su vez, por definición, $|X_\ell| \rightarrow \infty$ cuando $r \rightarrow r_*$. Finalmente, las funciones $|w'_\ell|, \phi' \rightarrow \infty$ cuando $r \rightarrow r_*$ por la ecs. (2.1, 2.2) y entonces, por definición $\psi, |X'_\ell| \rightarrow \infty$ cuando $r \rightarrow r_*$. \square

Observación 1 *El lema anterior muestra que puede ocurrir uno de los siguientes dos casos:*

- (1) $r_* < \infty$ con $\psi(r) \rightarrow \infty$ mientras $r \rightarrow r_*$ (la solución explota), o,
- (2) $r_* = \infty$ (solución global).

En los siguientes resultados damos condiciones suficientes para que ocurra (1).

Lema 3 *Supongamos que $0 < r_1 < r_*$ es tal que $X_\ell(r_1)X'_\ell(r_1) \geq 0$, $\psi(r_1) \geq 0$ y $\psi'(r) > 0$ para todo $r \in (r_1, r_*)$. Entonces $\psi(r)$, $X_\ell(r)$, $X'_\ell(r)$ no tienen ceros en el intervalo $r > r_1$.*

Demostración. Primero notamos que $\psi(r) > 0$ para todo $r \in (r_1, r_*)$. Luego, multiplicamos ambos lados de la ec. (3.3) por $X_\ell(r)$ e integramos, obteniendo así la siguiente ecuación

$$\int_{r_1}^r X''_\ell(s)X_\ell(s)ds = \int_{r_1}^r \psi(s)X_\ell(s)^2 ds. \quad (3.8)$$

Usando integración por partes llegamos a

$$X'_\ell(r)X_\ell(r) = X'_\ell(r_1)X_\ell(r_1) + \int_{r_1}^r [X'_\ell(s)^2 + \psi(s)X_\ell(s)^2]ds > 0, \quad (3.9)$$

para todo $r \in (r_1, r_*)$, lo que demuestra la afirmación del lema. □

Observación 2 *Bajo las hipótesis del lema anterior observamos que la solución no puede ser global y normalizable. De otra forma podemos tomar $r_2 > r_1$ y usando la simetría $X_\ell \mapsto -X_\ell$ de las ecs. (3.3, 3.4) para asumir que $X_\ell(r_2), X'_\ell(r_2) > 0$ obtenemos*

$$X''_\ell(r) = \psi(r)X_\ell(r) \geq \psi(r_2)X_\ell(r_2), \quad (3.10)$$

para todo $r > r_2$. Esto implica que $X_\ell(r)$ crece por lo menos cuadráticamente en r y por lo tanto no es normalizable, ya que en términos de $X_\ell(r)$ la condición de normalización es

$$0 < \int_0^\infty X_\ell(r)^2 dr < \infty. \quad (3.11)$$

Ahora presentamos un resultado mucho más fuerte. Vamos a mostrar que bajo las mismas hipótesis del Lema 3, la solución explota en radio finito.

Proposición 1 *Supongamos que $0 < r_1 < r_*$ es tal que $X_\ell(r_1)X'_\ell(r_1) \geq 0$, $\psi(r_1) \geq 0$ y $\psi'(r) > 0$ para todo $r \in (r_1, r_*)$. Entonces $r_* < \infty$.*

Demostración. Usando el Lema 3 podemos asumir sin pérdida de generalidad que $X_\ell(r), X'_\ell(r) > 0$ para todo (r_1, r_*) , además notamos también que $\psi(r) > 0$ para todo (r_1, r_*) . Luego, supongamos que $r_* = \infty$ e introducimos para todo $r > 0$ la siguiente cantidad

$$Q(r) := X_\ell(r) - r\psi(r). \quad (3.12)$$

Derivando dos veces con respecto de r y usando las ecs. (3.3, 3.4) obtenemos

$$Q''(r) = -\frac{1}{r}X_\ell(r)Q(r) - \frac{2\ell(\ell+1)}{r^3}. \quad (3.13)$$

Además definimos también la siguiente función

$$\mathcal{F}(r) := \frac{Q'(r)^2}{X_\ell(r)/r} + Q(r)^2 + \frac{1}{\varepsilon} \frac{[\ell(\ell+1)]^2}{r^2} > 0, \quad (3.14)$$

para todo $r \geq r_1$ y donde $\varepsilon > 0$ es una constante positiva. Su derivada con respecto de r es

$$\mathcal{F}'(r) = \frac{2Q'(r)Q''(r)}{X_\ell(r)/r} + 2Q(r)Q'(r) - \frac{[X_\ell(r)/r]'}{[X_\ell(r)/r]^2} Q'(r)^2 - \frac{2}{\varepsilon} \frac{[\ell(\ell+1)]^2}{r^3}. \quad (3.15)$$

Sustituyendo la expresión para $Q''(r)$ obtenemos

$$\mathcal{F}'(r) = -\frac{[X_\ell(r)/r]'}{[X_\ell(r)/r]^2} Q'(r)^2 - \frac{4\ell(\ell+1)Q'(r)}{r^3[X_\ell(r)/r]} - \frac{2}{\varepsilon} \frac{[\ell(\ell+1)]^2}{r^3} \leq -\frac{Q'(r)^2}{[X_\ell(r)/r]^2} \left[\left(\frac{X_\ell(r)}{r} \right)' - \frac{2\varepsilon}{r^3} \right]. \quad (3.16)$$

para todo $r \geq r_1$, donde se ha usado la desigualdad $2uv \leq \varepsilon u^2 + v^2/\varepsilon$ con $v = \ell(\ell+1)$ y $u = Q'(r)/[X_\ell(r)/r]$. Por otro lado, usando de nuevo la ec. (3.3) se obtiene

$$\left[r^2 \left(\frac{X_\ell(r)}{r} \right)' \right]' = r\psi(r)X_\ell(r) \geq r\psi(r_1)X_\ell(r_1), \quad (3.17)$$

para todo $r \geq r_1$. Integramos ambos lados

$$r^2 \left(\frac{X_\ell(r)}{r} \right)' \geq \frac{1}{2}\psi(r_1)X_\ell(r_1)(r^2 - r_1^2) + r_1X_\ell'(r_1) - X_\ell(r_1) = Ar^2 + B, \quad (3.18)$$

para todo $r \geq r_1$. Aquí, $A = \psi(r_1)X_\ell(r_1)/2 > 0$ es una constante positiva y $B = r_1X_\ell'(r_1) - X_\ell(r_1) - \psi(r_1)X_\ell(r_1)r_1^2/2$ es una constante que puede ser positiva o negativa. Podemos usar este resultado en la desigualdad (3.16) para obtener la siguiente estimación

$$\mathcal{F}'(r) \leq -\frac{Q'(r)^2}{[X_\ell(r)/r]^2} \left[A + \frac{B}{r^2} - \frac{2\varepsilon}{r^3} \right], \quad (3.19)$$

para todo $r \geq r_1$. Pero veamos que

$$A + \frac{B}{r^2} - \frac{2\varepsilon}{r^3} \geq 0, \quad (3.20)$$

para todo $r \geq r_2$ suficientemente grande y esto implica $\mathcal{F}'(r) < 0$ para todo $r \geq r_2 > r_1$. Por lo tanto

$$Q(r)^2 \leq \mathcal{F}(r) \leq \mathcal{F}(r_2), \quad (3.21)$$

para todo $r \geq r_2$. Sustituyendo la definición de $Q(r)$ dada en (3.12) tenemos que

$$-\sqrt{\mathcal{F}(r_2)} \leq X_\ell(r) - r\psi(r) \leq \sqrt{\mathcal{F}(r_2)}. \quad (3.22)$$

para todo $r \geq r_2$. Teniendo en cuenta la Observación 2, de aquí se sigue que

$$\psi(r) \geq \frac{X_\ell(r) - \sqrt{\mathcal{F}(r_2)}}{r} \geq \frac{1}{2r} X_\ell(r), \quad (3.23)$$

para todo $r \geq r_3$ tal que $X_\ell(r) \geq 2\sqrt{\mathcal{F}(r_2)}$. Entonces de la ec. (3.3) se obtiene la siguiente desigualdad

$$X_\ell''(r) = \psi(r)X_\ell(r) \geq \frac{1}{2r}X_\ell(r)^2, \quad (3.24)$$

para todo $r \geq r_3$. Multiplicamos ambos lados de esta desigualdad por $2X_\ell'(r)$ para obtener

$$\frac{d}{dr}X_\ell'(r)^2 \geq \frac{1}{3r} \frac{d}{dr}X_\ell(r)^3, \quad (3.25)$$

para todo $r \geq r_3$. Integrando ambos lados, llegamos a

$$X_\ell'(r)^2 - X_\ell'(r_3)^2 \geq \frac{1}{3r} [X_\ell(r)^3 - X_\ell(r_3)^3], \quad (3.26)$$

lo que implica

$$X_\ell'(r)^2 \geq \frac{1}{3r}X_\ell(r)^3 + X_\ell'(r_3)^2 - \frac{1}{3r_3}X_\ell(r_3)^3 \quad (3.27)$$

$$= \frac{1}{6r}X_\ell(r)^3 + \frac{1}{6r}X_\ell(r)^3 + X_\ell'(r_3)^2 - \frac{1}{3r_3}X_\ell(r_3)^3 \quad (3.28)$$

$$\geq \frac{1}{6r}X_\ell(r)^3, \quad (3.29)$$

para todo $r \geq r_4$ suficientemente grande, de lo cual se sigue

$$\frac{X_\ell'(r)}{X_\ell(r)^{3/2}} \geq \frac{1}{\sqrt{6r}}, \quad \text{para todo } r \geq r_4. \quad (3.30)$$

Finalmente, integrando ambos lados de esta desigualdad obtenemos

$$X_\ell(r) \geq \frac{6}{(\sqrt{r_b} - \sqrt{r})^2}, \quad (3.31)$$

para todo $r \geq r_4$ y entonces vemos que $X_\ell(r) \rightarrow \infty$ cuando $r \rightarrow r_b$ con r_b dado por

$$\sqrt{r_b} = \sqrt{r_4} + \sqrt{\frac{6}{X_\ell(r_4)}} > \sqrt{r_4}, \quad (3.32)$$

lo que contradice $r_* = \infty$.

□

3.2. Propiedades del potencial efectivo

En esta sección discutimos algunas propiedades importantes del potencial efectivo ψ . Primero enunciamos el siguiente lema, el cual muestra que ψ debe tener un mínimo global.

Lema 4 *El potencial efectivo ψ tiene un mínimo global en algún punto $\hat{r} \in (0, r_*)$. Además, $\psi(\hat{r}) < 0$ es necesario para que exista una solución globalmente definida y normalizable.*

Demostración. Se sigue de la ec. (3.4) que $\psi'(r) < 0$ para r pequeño. Sin embargo, $\psi'(r) < 0$ no se puede mantener para todo $r < r_*$. Si $r_* < \infty$ esto se sigue del hecho que $\psi(r) \rightarrow +\infty$ cuando $r \rightarrow r_*$, mientras que si $r_* = \infty$ esto se sigue de la ec. (3.4) la cual muestra que para r suficientemente grande $\psi'(r)$ debe ser positiva. Entonces, existe un punto $\hat{r} \in (0, r_*(a))$ tal que $\psi'(\hat{r}) = 0$. Este punto debe ser único, porque

$$[r^2\psi'(r)]' = X_\ell^2(r) + \frac{2\ell(\ell+1)}{r^2} > 0, \quad (3.33)$$

para todo $0 < r < r_*$, lo cual implica $r^2\psi'(r) > 0$ para todo $r \in (\hat{r}, r_*)$ y por lo tanto \hat{r} es un mínimo global. Luego, notamos que $\psi(\hat{r}) \geq 0$ implica $\psi(r) \geq 0$ para todo $r > 0$. Por otro lado, tomando el límite $r_1 \rightarrow 0$ en la ec. (3.9) tenemos que

$$X_\ell(r)X'_\ell(r) = \int_0^r [\psi(s)X_\ell(s)^2 + X'_\ell(s)^2] > 0, \quad (3.34)$$

para todo $r \in (0, r_*)$. Concluimos que $r_* < \infty$ por la Proposición 1. □

Lema 5 *No hay soluciones globalmente definidas para $\phi_0 \geq 0$.*

Demostración. Ya que ϕ es una función monótona creciente entonces $\phi(r) > 0$ para todo $r \in (0, r_*)$, por lo tanto $\psi(r) > 0$ para todo $r \in (0, r_*)$. Concluimos por el Lema 4 y Proposición 1 que la solución no es globalmente definida. □

La siguiente proposición proporciona información más precisa sobre el comportamiento cualitativo del potencial efectivo ψ .

Proposición 2 *Supongamos que $\phi_0 < 0$ y consideremos la a -órbita. Supongamos además que el mínimo global de ψ satisface $\psi(\hat{r}) < 0$. Entonces, la función $\psi(r)$ tiene un único cero r_0 en el intervalo (\hat{r}, r_*) y $\psi(r) > 0$ para todo $r \in (r_0, r_*)$.*

Observación 3 *En particular, ϕ debe tener un único cero siempre que $\phi_0 < 0$.*

Observación 4 *De acuerdo a la Proposición 1, la condición $X_\ell(r_0)X'_\ell(r_0) < 0$ en el cero de ψ es necesaria para que la a -órbita sea globalmente definida y normalizable.*

Observación 5 *La proposición 2 y el Lema 4 implica que el potencial efectivo describe un pozo de potencial con mínimo negativo para una solución globalmente definida y normalizable. Mientras $r \rightarrow 0$ se sigue de la ec. (3.2) que $\psi(r) \approx \ell(\ell+1)/r^2$ tiene el comportamiento usual dado por una barrera centrifuga, mientras que para r suficientemente grande, $\psi(r)$ es positivo.*

Demostración de la Proposición 2. Como se explica en la demostración del Lema 4, se tiene $r^2\psi'(r) > 0$ para todo $r \in (\hat{r}, r_*)$ lo que implica que $\psi(r)$ es monótona creciente para $r > \hat{r}$. Esto implica que r_0 (si existe) debe ser único.

Para demostrar la existencia, supongamos primero que $r_* < \infty$. Entonces, se sigue del Lema 2 que $\psi(r) \rightarrow +\infty$ mientras $r \rightarrow r_*$ y por lo tanto ψ debe tener un cero en el intervalo (\hat{r}, r_*) . Para analizar el caso restante $r_* = \infty$ procedemos por contradicción. Supongamos que $\psi(r) < 0$ para todo $r > \hat{r}$. Ya que $\psi(r)$ es una función monótona creciente en este intervalo, el límite

$$\psi_\infty := \lim_{r \rightarrow \infty} \psi(r) \leq 0 \quad (3.35)$$

existe. Entonces, la idea es descartar los siguientes casos:

- (i) $\psi_\infty \leq -C^2$, con $C > 0$ una constante positiva,
- (ii) $\psi_\infty = 0$.

Asumimos primero que se cumple el caso (i); esto implica que la solución X_ℓ es oscilatoria. Consideramos los ceros de $X_\ell(r)$ localizados después del punto crítico $r = \hat{r}$ del potencial ψ en $r = r_n$ ($n = 1, 2, 3$) y tomamos el cero localizado en $r = r_N$ con N fijo. Entonces para algún R suficientemente grande con $r_N < R < r_{N+1}$ queremos estimar por abajo la integral

$$\int_{r_1}^R X_\ell(r)^2 dr, \quad (3.36)$$

con el objetivo de estimar por abajo $r^2\psi'$ en la ec. (3.4) y llegar a una contradicción. Con el fin de hacer esta estimación introducimos la función

$$F(r) := X_\ell^2(r) - \frac{X_\ell'^2(r)}{\psi(r)}, \quad (3.37)$$

la cual satisface

$$F'(r) = \frac{X_\ell'^2(r)\psi'(r)}{\psi^2(r)} \geq 0, \quad (3.38)$$

para todo $r > \hat{r}$, lo cual implica que $F(r)$ es una función monótona creciente en el intervalo (\hat{r}, ∞) . Además, ya que se asume que $\psi(r)$ es negativo para todo $r \geq \hat{r}$, se sigue que $F(r) \geq F(\hat{r}) > 0$ para todo $r \geq \hat{r}$. En particular, esto implica que $X_\ell^2(r) \geq F(\hat{r})$ en cualquier punto crítico $y_n \geq \hat{r}$ de $X_\ell(r)$.

Regresando a la expresión (3.36) que queremos estimar, tenemos

$$\int_{r_1}^R X_\ell^2(r) dr \geq \sum_{n=1}^{N-1} \int_{r_n}^{r_{n+1}} X_\ell^2(r) dr. \quad (3.39)$$

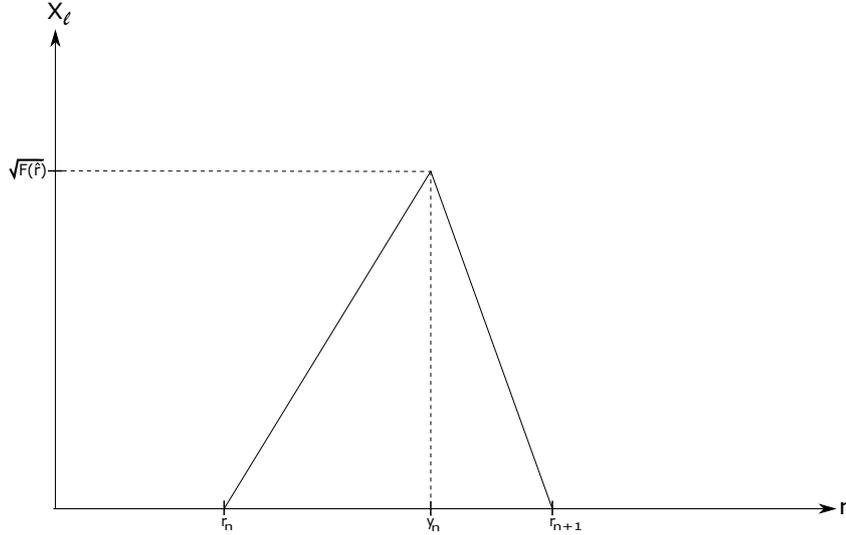


Figura 3.1: La función $X_\ell(r)$ es acotada por abajo por la función lineal mostrada en el intervalo $r_n \leq r \leq r_{n+1}$

Sin pérdida de generalidad, supongamos que $X_\ell(r) > 0$ en el intervalo (r_n, r_{n+1}) con $X'_\ell(r) = 0$ en el punto crítico $y_n \in (r_n, r_{n+1})$. Entonces dado que $X''_\ell = \psi X_\ell < 0$ es cóncava, $X_\ell(r)$ es más grande que la función lineal mostrada en la figura 3.1 para todo $r \in (r_n, r_{n+1})$ y por lo tanto

$$\int_{r_n}^{r_{n+1}} X_\ell^2(r) dr \geq \frac{F(\hat{r})}{3}(r_{n+1} - r_n), \quad (3.40)$$

por lo que sumando sobre n obtenemos

$$\int_{r_1}^R X_\ell^2(r) dr \geq \frac{F(\hat{r})}{3}(r_N - r_1) = \frac{F(\hat{r})}{3}[R - r_1 - (R - r_N)]. \quad (3.41)$$

La dificultad que queda es estimar la cantidad $R - r_N \leq r_{N+1} - r_N$, y asegurar que la distancia entre dos ceros consecutivos de X_ℓ no crezca más rápido que R para $N \rightarrow \infty$. Usamos entonces el teorema de comparación de Sturm (ver, por ejemplo, teorema 3.1 en [21]) para comparar la solución $X_\ell(r)$ de la ec. (3.3) con las soluciones $Y(r) = \sin(Cr - \delta)$ de la ecuación más simple

$$Y''(r) + C^2 Y(r) = 0. \quad (3.42)$$

De acuerdo al teorema de comparación de Sturm, hay un cero de $X_\ell(r)$ entre cada cero de $Y(r)$. Por lo tanto, en cada intervalo de longitud π/C hay un cero $X_\ell(r)$. Entonces se

cumple $r_{N+1} - r_N < 2\pi/C$ lo cual trivialmente implica que $R - r_N < 2\pi/C$ y combinando este resultado con la estimación (3.41) obtenemos

$$\int_{r_1}^R X_\ell^2(r) dr \geq \frac{F(\hat{r})}{3} \left[(R - r_1) - \frac{2\pi}{C} \right], \quad (3.43)$$

para todo $R > r_1$. Por otro lado, de la ec. (3.4) tenemos que

$$\int_{r_1}^R X_\ell^2(r) dr = \int_0^R X_\ell^2(r) dr - \int_0^{r_1} X_\ell^2(r) dr \quad (3.44)$$

$$= R^2\psi'(R) - r_1^2\psi'(r_1) - 2\ell(\ell+1) \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{R} \right), \quad (3.45)$$

lo cual implica

$$R^2\psi'(R) = r_1^2\psi'(r_1) + 2\ell(\ell+1) \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{R} \right) + \int_{r_1}^R X_\ell^2(r) dr \quad (3.46)$$

$$\geq r_1^2\psi'(r_1) + \int_{r_1}^R X_\ell^2(r) dr, \quad (3.47)$$

para todo $R > r_1$. Usando la estimación (3.43) obtenemos

$$R^2\psi'(R) \geq \frac{F(\hat{r})}{3}R + C_1, \quad (3.48)$$

para todo $R > r_1$ donde $C_1 = r_1^2\psi'(r_1) - r_1F(\hat{r})/3 - 2\pi F(\hat{r})/3C$ es una constante. Dividiendo por R^2 e integrando de r_1 a R ambos lados de la desigualdad uno obtiene la siguiente expresión

$$\psi(R) \geq \frac{F(\hat{r})}{3} \log \left(\frac{R}{r_1} \right) + \psi(r_1) + C_1 \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{R} \right), \quad (3.49)$$

para todo $R > r_1$. Entonces $\psi(R) \rightarrow \infty$ cuando $R \rightarrow \infty$ y por consiguiente ψ_∞ no puede ser acotado para $-C^2$ como asumimos y por lo tanto descartamos el caso (i).

Ahora asumimos que se cumple el caso (ii), es decir, que $\psi_\infty = 0$. De forma similar al caso (i) obtenemos

$$\int_{r_1}^R X_\ell^2(r) dr \geq \frac{F(\hat{r})}{3}(r_N - r_1) = \frac{F(\hat{r})}{3}[R - r_1 - (R - r_N)]. \quad (3.50)$$

El problema es estimar $R - r_N$. Para esto vemos de la ec. (3.4) que

$$r^2\psi'(r) \geq \varepsilon > 0 \quad \text{para todo } r \geq r_2 > \hat{r}, \quad (3.51)$$

de tal manera que

$$\psi_\infty - \psi(r) = \int_r^\infty \psi'(s) ds \geq \varepsilon \int_r^\infty \frac{ds}{s^2} = \frac{\varepsilon}{r}, \quad (3.52)$$

pero ya que $\psi_\infty = 0$, obtenemos la estimación

$$\psi(r) \leq -\frac{\varepsilon}{r} \quad \text{para todo } r \geq r_2. \quad (3.53)$$

Como en el caso anterior, usamos el teorema de comparación de Sturm para comparar la solución $X_\ell(r)$ de la Ec. (3.3) con las soluciones $Z(r) = \sin(C_n(r_n - r))$ de la siguiente ecuación

$$Z''(r) + C_n^2 Z(r) = 0, \quad (3.54)$$

donde C_n es una constante que se fijará después. Podemos analizar las ecuaciones (3.3, 3.54) en el intervalo $I_n = (r_n, r_n + \pi/C_n)$. De la ec. (3.53) se obtiene

$$-\psi(r) \geq \frac{\varepsilon}{r} \geq C_n^2 \quad \text{para } r \in I_n, \quad (3.55)$$

si escogemos $C_n > 0$ tal que

$$C_n^2 = \frac{\varepsilon}{r_n + \pi/C_n}, \quad (3.56)$$

lo cual, resolviendo la ecuación cuadrática, implica

$$\frac{\pi}{C_n} = \frac{\pi^2}{2\varepsilon} \left(\sqrt{1 + \frac{4F(\hat{r})r_n}{\pi^2}} + 1 \right). \quad (3.57)$$

Luego, de acuerdo al teorema de comparación de Sturm, hay un cero de $X_\ell(r)$ entre cada cero de $Z(r)$. Por lo tanto, dentro del intervalo I_N existe un cero de $X_\ell(r)$. Entonces esto implica que $r_{N+1} - r_N < \pi/C_N$. Usando la ec. (3.57) y la desigualdad

$$\sqrt{1 + \frac{4F(\hat{r})r_N}{\pi^2}} + 1 \leq 2 \left(1 + \frac{1}{\pi} \sqrt{F(\hat{r})r_N} \right) \quad (3.58)$$

se sigue que

$$R - r_N \leq A_1 \sqrt{r_N} + A_0 \leq A_1 \sqrt{R} + A_0, \quad (3.59)$$

para R suficientemente grande tal que $r_N < R < r_{N+1}$ donde $A_0 = \pi^2/\varepsilon$ y $A_1 = \pi F(\hat{r})/\varepsilon$ constantes. Combinando este resultado con la estimación (3.50) obtenemos

$$\int_{r_1}^R X_\ell^2(r) dr \geq \frac{F(\hat{r})}{3} (r_N - r_1) = \frac{F(\hat{r})}{3} [R - r_1 - A_1 \sqrt{R} - A_0]. \quad (3.60)$$

Finalmente repitiendo el mismo procedimiento que en el caso (i) podemos demostrar que $\psi(R) \rightarrow \infty$ mientras $R \rightarrow \infty$, llegando así a una contradicción. Por lo tanto descartamos también el caso (ii). □

3.3. Comportamiento asintótico de las soluciones globales

En esta sección demostramos que si la solución es globalmente definida ($r_* = \infty$), entonces $|X_\ell|$ decrece exponencialmente y es normalizable.

Proposición 3 Si la a -órbita es globalmente definida ($r_* = \infty$), entonces la función $|X_\ell|$ decae exponencialmente. Más precisamente, dado $r_1 > 0$ tal que $\psi(r) \geq \psi(r_1) > 0$ para todo $r \geq r_1$ existe una constante $A > 0$ tal que,

$$|X_\ell(r)| \leq Ae^{-C(r-r_1)}, \quad r \geq r_1, \quad (3.61)$$

con $C = \sqrt{\psi(r_1)}$. Además, el límite

$$\psi_\infty := \lim_{r \rightarrow \infty} \psi(r) > 0 \quad (3.62)$$

existe y es positivo.

Demostración. Primero notamos que la Proposición 2 garantiza la existencia de r_1 . Además por la Proposición 1 se debe cumplir $X_\ell(r_1)X'_\ell(r_1) < 0$ para todo $r \geq r_1$, y por el Lema 4 podemos asumir que $\psi(r) > 0$ para todo $r \geq r_1$. Esto implica que:

- (i) $X_\ell(r) > 0$ y $X'_\ell(r) < 0$, o,
- (ii) $X_\ell(r) < 0$ y $X'_\ell(r) > 0$,

para todo $r \geq r_1$. Ya que el sistema es invariante con respecto al cambio de signo $X_\ell \rightarrow -X_\ell$ es suficiente tratar el caso (i). Para esto, se define la siguiente cantidad

$$P(r) := X_\ell(r) - \frac{1}{C}X'_\ell(r) > 0, \quad r \geq r_1, \quad (3.63)$$

donde $C = \sqrt{\psi(r_1)}$. Usando la ec. (3.3) y el hecho que $\psi(r) \geq C^2$, obtenemos

$$P'(r) = X'_\ell(r) - \frac{1}{C}\psi(r)X_\ell(r) \leq X'_\ell(r) - CX_\ell(r) = -CP(r), \quad r \geq r_1, \quad (3.64)$$

lo cual implica

$$P(r) \leq P(r_1)e^{-C(r-r_1)}, \quad r \geq r_1. \quad (3.65)$$

Ya que $X_\ell(r) \leq P(r)$, se sigue que

$$0 < X_\ell(r) \leq P(r_1)e^{-C(r-r_1)}, \quad r \geq r_1, \quad (3.66)$$

lo cual implica la desigualdad (3.61) con $A := P(r_1)$.

Queda por mostrar que el límite ψ_∞ existe y es positivo. Con el fin de hacer esto, evaluamos ec. (3.4) en $r = r_1$ y restamos el resultado de ec. (3.4), lo cual deja

$$r^2\psi'(r) = B - \frac{2\ell(\ell+1)}{r} + \int_{r_1}^r X_\ell^2(s)ds, \quad (3.67)$$

donde $B := r_1^2\psi'(r_1) + 2\ell(\ell+1)/r_1 > 0$. Usando la desigualdad (3.61) obtenemos

$$r^2\psi'(r) \leq B - \frac{2\ell(\ell+1)}{r} + \frac{A^2}{2C} [1 - e^{-2C(r-r_1)}] \leq B + \frac{A^2}{2C} =: D, \quad r \geq r_1. \quad (3.68)$$

Dividiendo por r^2 e integrando de r_1 a r tenemos

$$0 < \psi(r) \leq \psi(r_1) + D \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r} \right), \quad r \geq r_1. \quad (3.69)$$

Ya que la ec. (3.67) implica que ψ es monótona creciente para r grande, se sigue de esto que el límite $\psi_\infty := \lim_{r \rightarrow \infty} \psi(r)$ existe y satisface

$$0 < \psi_\infty \leq \psi(r_1) + \frac{D}{r_1}. \quad (3.70)$$

□

Observación 6 *Se sigue de la proposición anterior que la integral*

$$\tilde{M} := \int_0^\infty X_\ell(r)^2 dr < \infty \quad (3.71)$$

es finita. Introduciendo la función $q(r)$ definida por

$$\psi(r) = \psi_\infty - \frac{\tilde{M}}{r} + \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} + q(r), \quad (3.72)$$

se sigue de la ec. (3.4) que

$$q'(r) = -\frac{1}{r^2} \int_r^\infty X_\ell(s)^2 ds, \quad r > 0. \quad (3.73)$$

Luego, usando nuevamente la desigualdad (3.61) y el hecho que $q(r) \rightarrow 0$ cuando $r \rightarrow \infty$, se tiene que

$$0 \leq q(r) \leq A_0 e^{-2C(r-r_1)}, \quad r \geq r_1, \quad (3.74)$$

para alguna constante $A_0 > 0$.

Podemos darle interpretación física a las cantidades \tilde{M} y ψ_∞ . Para esto recordemos primero que la masa total M de la configuración está dada por

$$M = 4\pi \int_0^\infty \rho(r) r^2 dr. \quad (3.75)$$

Usando las ecs. (1.2, 1.3, 1.7, 1.13) podemos verificar que la relación entre la masa de la estrella M y \tilde{M} es

$$M = 4\pi m_b \alpha^2 \tilde{M}, \quad (3.76)$$

donde α esta dada por la expresion (1.8). Observamos además que tomando en cuenta la condición de normalizacion (1.4) para u_n , la masa también esta dada por $M = Nm_b$. Entonces la ec. (3.76) implica que $\tilde{M} = N/4\pi\alpha^2$, lo que se puede lograr con el re-escaleo (1.11).

Luego, para ψ_∞ notemos que $\psi_\infty = \phi_\infty$, entonces ya que el potencial gravitatorio cumple $\Phi_\infty = 0$ podemos usar la ec. (1.7) para obtener

$$\psi_\infty = -\frac{E}{\beta}, \quad (3.77)$$

donde β esta dada por la expresión (1.8). Lo que esta ecuación nos dice es que ψ_∞ nos da la energía de la configuración, es decir

$$E = -\beta\psi_\infty = -\frac{\hbar^2}{2m_b}\psi_\infty. \quad (3.78)$$

Capítulo 4

Existencia global de una familia de soluciones normalizables

En este capítulo damos una prueba de la existencia de una familia discreta de soluciones globales de las ecs. (2.1, 2.2). Con este fin, seguimos [8] e introducimos la función de rotación $\theta(r, a)$ asociada a la a -órbita, la cual está definida por

$$\tan \theta(r, a) = -\frac{w'_\ell(r)}{w_\ell(r)}, \quad (4.1)$$

$$\theta(0, a) = 0, \quad (4.2)$$

y $\theta(r, a)$ es continua en r . Notamos que la derivada de $\theta(r, a)$ con respecto de r está dada por

$$\theta'(r) = \frac{w'_\ell(r)^2 - w_\ell(r)w''_\ell(r)}{w_\ell(r)^2 + w'_\ell(r)^2} \quad (4.3)$$

y usando la ec. (1.15), obtenemos

$$\theta'(r, a) = \frac{w'_\ell(r)^2 + \frac{2\ell(\ell+1)}{r}w_\ell(r)w'_\ell(r) - \phi(r)w_\ell(r)^2}{w_\ell(r)^2 + w'_\ell(r)^2}, \quad (4.4)$$

lo que implica

$$\theta(r, a) = \int_0^r \frac{w'_\ell(s)^2 + \frac{2\ell(\ell+1)}{s}w_\ell(s)w'_\ell(s) - \phi(s)w_\ell(s)^2}{w_\ell(s)^2 + w'_\ell(s)^2} ds. \quad (4.5)$$

De esta expresión observamos que, debido al Teorema 3, $\theta(r, a)$ también es continua en a . Notemos además

$$\theta'(r, a) = \begin{cases} 1 & \text{si, } w_\ell(r) = 0 \\ -\phi(r) & \text{si, } w'_\ell(r) = 0. \end{cases} \quad (4.6)$$

En los resultados que siguen se analiza el comportamiento de la a -órbita en el plano (w_ℓ, w'_ℓ) ; entonces cuando digamos, por ejemplo, que la a -órbita se encuentra en el cuadrante

3 (Q3 para abreviar) nos referimos a que la proyección de la a -órbita en el plano (w_ℓ, w'_ℓ) está en Q3. Véase la figura 4.1.

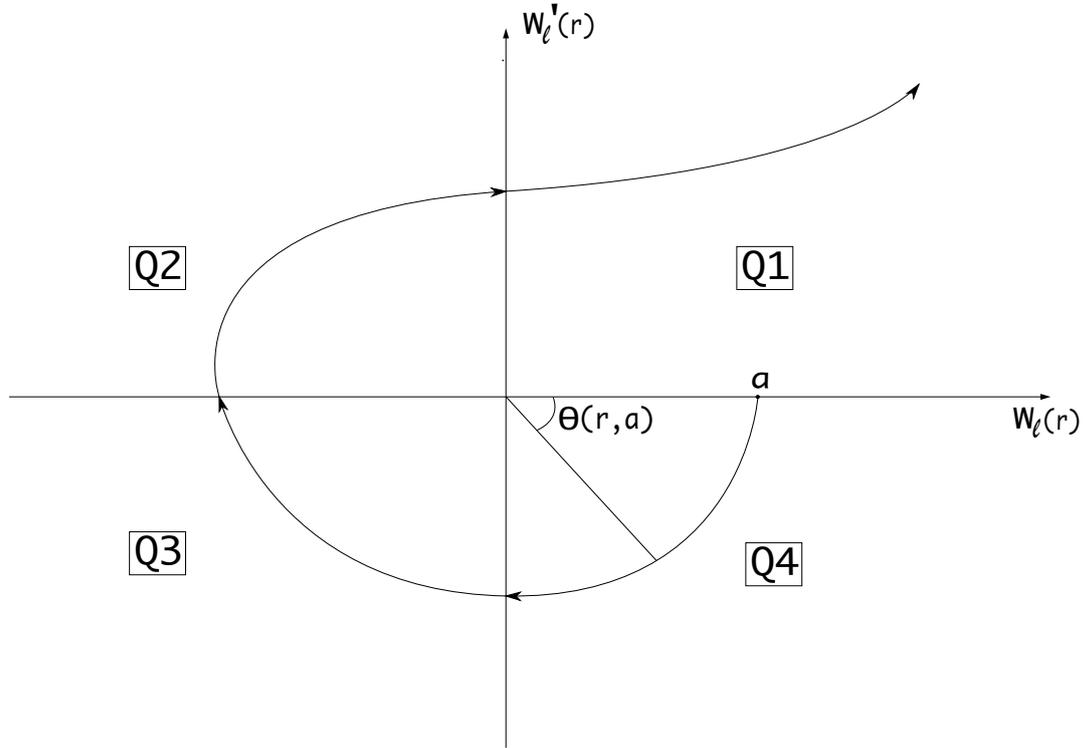


Figura 4.1: Diagrama del comportamiento cualitativo de la a -órbita.

Ahora, damos dos propiedades elementales de la función de rotación de las a -órbitas.

Lema 6 Para cualquier entero $n \geq 0$ tenemos:

- (a) Si $\theta(r_1) \geq (n - 1/2)\pi$ para algún $r_1 \in (0, r_*)$, entonces $\theta(r) > (n - 1/2)\pi$ para todo $r \in (r_1, r_*)$.
- (b) Si $\theta(r_1) \leq n\pi$ para algún $r_1 \in (0, r_*)$ tal que $\phi(r_1) > 0$, entonces $\theta(r) < n\pi$ para todo $r \in (r_1, r_*)$.

Demostración.

- (a) Observemos que $\theta(r, a) = (n - 1/2)\pi$ si y sólo si $w_\ell(r) = 0$. Luego, de la ec. (4.6) tenemos que $\theta'(r, a) = 1$, lo que implica que $\theta(r, a)$ no puede cruzar el valor $(n - 1/2)\pi$ por arriba.
- (b) Si $r > r_1$ y $\phi(r_1) \geq 0$ para todo $r \in (r_1, r_*)$, entonces $\phi(r) > 0$ ya que ϕ es una función monótona creciente. Después, notamos que $\theta(r) = n\pi$ si y sólo si $w'_\ell(r) = 0$ y por lo tanto de la ec. (4.6) obtenemos $\theta'(r) = -\phi(r) < 0$, lo que muestra que $\theta(r, a)$ no puede cruzar el valor $n\pi$ por debajo si $r \in (r_1, r_*)$.

□

Observación 7 *Mientras $\phi(r) < 0$ la a -órbita puede oscilar y cruzar de $Q4$ a $Q3$, después de $Q3$ a $Q2$, luego de $Q2$ a $Q1$, etcétera. Pero una vez que $\phi(r) > 0$ la a -órbita se queda atrapada en $Q1$ o $Q3$ si llega a alguno de estos dos cuadrantes.*

Observación 8 *Una consecuencia del lema anterior es que $\theta(r, a) > -\pi/2$ para todo $r \in (0, r_*)$.*

A continuación suponemos que $\phi_0 < 0$; de otra forma no hay soluciones globales (Lema 5).

4.1. Comportamiento de la solución para a pequeño

En esta sección analizamos el comportamiento de las soluciones para a suficientemente pequeño. Enunciamos entonces la siguiente proposición:

Proposición 4 *Para cualquier entero $n > 0$, existe un $b_n > 0$ tal que para todo $a \in (0, b_n)$ existe un $r \in (0, r_*(a))$ con $\theta(r, a) > n\pi$.*

Demostración. Sea $\tilde{w}_\ell = w_\ell/a$. Entonces, las ecs. (1.15, 1.16) se convierten

$$\frac{1}{r^{2(\ell+1)}} [r^{2(\ell+1)} \tilde{w}'_\ell]' = \phi \tilde{w}_\ell, \quad (4.7)$$

$$\frac{1}{r^2} (r^2 \phi')' = a^2 r^{2\ell} \tilde{w}_\ell^2, \quad (4.8)$$

con la siguiente condición en $r = 0$:

$$\tilde{w}(0) = 1, \quad \phi(0) = \phi_0, \quad \tilde{w}'(0) = 0, \quad \phi'(0) = 0. \quad (4.9)$$

Para $a = 0$ la ec. (4.8) con las condiciones (4.9) tienen la solución constante $\phi = \phi_0$. Sustituyendo esto en la ec. (4.7) obtenemos una ecuación de Bessel transformada

$$r^2 \tilde{w}_\ell'' + 2(\ell + 1)r \tilde{w}_\ell' + |\phi_0| r^2 \tilde{w}_\ell = 0. \quad (4.10)$$

Esta ecuación fue dada por Bowman [22] y su solución es

$$\tilde{w}(r, a = 0) = r^{-(\ell+1/2)} \left[C_1 J_{\ell+1/2}(\sqrt{|\phi_0|r}) + C_2 Y_{\ell+1/2}(\sqrt{|\phi_0|r}) \right], \quad (4.11)$$

donde $J_{\ell+1/2}(r)$ y $Y_{\ell+1/2}(r)$ son las funciones de Bessel de primera y segunda especie respectivamente, de orden $\ell + 1/2$. C_1 y C_1 son constantes que podemos fijar con la condición (4.9). Ya que queremos que la solución sea regular en $r = 0$ elegimos $C_2 = 0$, entonces

$$\tilde{w}_\ell(r, a = 0) = C_1 r^{-(\ell+1/2)} J_{\ell+1/2}(\sqrt{|\phi_0|r}), \quad (4.12)$$

$$\tilde{w}'_\ell(r, a = 0) = C_1 r^{-(\ell+1/2)} \left[\sqrt{|\phi_0|} J_{\ell-1/2}(\sqrt{|\phi_0|r}) - \frac{2\ell+1}{r} J_{\ell+1/2}(\sqrt{|\phi_0|r}) \right] \quad (4.13)$$

con $C_1 = \left(2/\sqrt{|\phi_0|}\right)^{\ell+1/2} \Gamma(\ell + 3/2)$ y donde hemos usado las relaciones de recurrencia de las funciones de Bessel. Para continuar con la demostración necesitamos analizar el comportamiento de $\tilde{w}_\ell(r, a = 0)$ y $\tilde{w}'_\ell(r, a = 0)$ para $r \rightarrow \infty$. Como podemos ver en [23], en este caso el comportamiento de las funciones de Bessel es

$$J_{\ell+1/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \left[\sin\left(z - \frac{\pi\ell}{2}\right) + o(1) \right], \quad (4.14)$$

$$J_{\ell-1/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \left[\cos\left(z - \frac{\pi\ell}{2}\right) + o(1) \right], \quad (4.15)$$

donde $z = \sqrt{|\phi_0|}r$. Usando estas expresiones y las ecs. (4.12, 4.13) obtenemos

$$\begin{aligned} \tilde{w}_\ell(r, a = 0)^2 + \tilde{w}'_\ell(r, a = 0)^2 &= C_1 r^{-(2\ell+1)} \frac{2}{\pi z} \left[\sin^2\left(z - \frac{\pi\ell}{2}\right) + \right. \\ &\quad \left. + |\phi_0| \cos^2\left(z - \frac{\pi\ell}{2}\right) + o(1) \right], \end{aligned} \quad (4.16)$$

$$\begin{aligned} \tilde{w}'_\ell(r, a = 0)^2 + |\phi_0| \tilde{w}_\ell(r, a = 0)^2 &= C_1 r^{-(2\ell+1)} \frac{2}{\pi z} \left[|\phi_0| \sin^2\left(z - \frac{\pi\ell}{2}\right) + \right. \\ &\quad \left. + |\phi_0| \cos^2\left(z - \frac{\pi\ell}{2}\right) + o(1) \right]. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Por otro lado, notamos

$$\sin^2\left(z - \frac{\pi\ell}{2}\right) + |\phi_0| \cos^2\left(z - \frac{\pi\ell}{2}\right) + o(1) \leq 2 + |\phi_0|, \quad (4.18)$$

$$|\phi_0| \sin^2\left(z - \frac{\pi\ell}{2}\right) + |\phi_0| \cos^2\left(z - \frac{\pi\ell}{2}\right) + o(1) \geq \frac{|\phi_0|}{2}, \quad (4.19)$$

para z suficientemente grande, lo que implica

$$\tilde{w}_\ell(r, a = 0)^2 + \tilde{w}'_\ell(r, a = 0)^2 \leq C_1 r^{-(2\ell+1)} \frac{2(2 + |\phi_0|)}{\pi z}, \quad (4.20)$$

$$\tilde{w}'_\ell(r, a = 0)^2 + |\phi_0| \tilde{w}_\ell(r, a = 0)^2 \geq C_1 r^{-(2\ell+1)} \frac{2|\phi_0|}{\pi z}. \quad (4.21)$$

Combinando estas estimaciones con la ec. (4.4) obtenemos la siguiente desigualdad para $\theta'(r, a = 0)$ y $r > 0$ suficientemente grande:

$$\theta'(r, a = 0) \geq \frac{|\phi_0|}{2(2 + |\phi_0|)} > 0, \quad (4.22)$$

Esto implica que $\theta(r, 0) \rightarrow \infty$ mientras $r \rightarrow \infty$ y entonces existe $r_n > 0$ tal que $\theta(r, 0) > n\pi$. Sea $r > r_n$ fijo. Dado que $\theta(r, a)$ es continua en a , existe $b_n > 0$ tal que si $a \in (0, b_n)$ vale $\theta(r, a) > n\pi$.

□

4.2. Comportamiento de la solución para a grande

En esta sección estudiamos el comportamiento de la solución para a suficientemente grande. Para ello damos la siguiente proposición

Lema 7 *Para cada $\phi_0 < 0$, existe una constante $\alpha_\ell > 0$ tal que todas las a -órbitas con $a > \alpha_\ell$ explotan y $X_\ell(r) > 0$ para todo $0 < r < r_*(a)$.*

Demostración. Podemos verificar que debido a la ec. (1.13), el re-escaleo (1.11) induce el siguiente re-escaleo de los parámetros a y ϕ_0 :

$$(a, \phi_0) \mapsto (\hat{a}, \hat{\phi}_0) = (\lambda^{2+\ell} a, \lambda^2 \phi_0). \quad (4.23)$$

Luego, si $\hat{\phi}_0 = 0$ el Lema 5 implica que $X_\ell(r)X'_\ell(r) > 0$ para todo $r \in (0, r_*)$, lo que a su vez implica $w_\ell(r) > 0$ para todo $r \in (0, r_*)$. Por lo tanto si $\hat{\phi}_0 = 0$ existe $r_1 \in (0, r_*)$, tal que $X_\ell(r_1), X'_\ell(r_1), \psi(r_1), \psi'(r_1) > 0$.

Ahora fijamos $\hat{a} = 1$. Por el Teorema 3 sabemos que la solución es continua en el parámetro libre restante $\hat{\phi}_0$. Esto implica que existe $\varepsilon > 0$ tal que si $-\varepsilon < \hat{\phi}_0 < \varepsilon$, entonces también vale $X_\ell(r_1), X'_\ell(r_1), \psi(r_1), \psi'(r_1) > 0$ y $w_\ell(r) > 0$ para todo $0 < r \leq r_1$. Por lo tanto por el Lema 4 y la Proposición 1 se tiene que la a -órbita explota y $X_\ell(r) > 0$ para todo $r \geq r_1$.

Ahora fijamos $\phi_0 < 0$ y elegimos $\lambda > 0$ suficientemente pequeño tal que

$$|\hat{\phi}_0| = \lambda^2 |\phi_0| < \varepsilon, \quad (4.24)$$

lo que implica

$$\lambda < \sqrt{\frac{\varepsilon}{|\phi_0|}}. \quad (4.25)$$

Del re-escaleo (4.23) concluimos que si a cumple la desigualdad

$$a = \frac{\hat{a}}{\lambda^{2+\ell}} = \frac{1}{\lambda^{2+\ell}} > \left(\frac{|\phi_0|}{\varepsilon}\right)^{1+\ell/2} := \alpha_\ell, \quad (4.26)$$

entonces las a -órbitas explotan y $X_\ell(r) > 0$ para todo $0 < r < r_*(a)$.

□

Proposición 5 *Las a -órbitas con a suficientemente grande salen de Q_4 directamente a Q_1 , de tal manera que $-\pi/2 < \theta(r, a) < \pi/2$ para todo $r \in (0, r_*)$ (Ver el ejemplo $a = 0.47$ en la Figura 1.1).*

Demostración. Es una consecuencia directa del Lema 3.

□

4.3. Demostración del teorema principal

Con los resultados de los anteriores capítulos estamos listos para demostrar el Teorema principal 1, el cual nos da la existencia de soluciones globalmente definidas de las ecuaciones (1.15, 1.16) que satisfacen las condiciones de regularidad (1.17) en el centro y que son normalizables.

Demostración de el Teorema 1. Siguiendo [8] introducimos para cada $n = 0, 1, 2, \dots$ el conjunto

$$M_n := \{a > 0 \mid \theta(r, a) < (n + 1/2)\pi \text{ para todo } 0 < r < r_*(a)\}. \quad (4.27)$$

Por definición, $M_n \subset M_{n+1}$ para todo $n = 0, 1, 2, \dots$ y $M_0 \neq \emptyset$ por la Proposición 5. Entonces, los conjuntos M_n son no vacíos. Además, se sigue de la Proposición 4 que b_{n+1} es una cota inferior para M_n . Por lo tanto,

$$a_n := \inf M_n \geq b_{n+1} > 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (4.28)$$

Para demostrar el teorema, afirmamos que las a_n -órbitas son globalmente definidas y satisfacen $n\pi < \theta(r, a_n) < (n + 1/2)\pi$ para r suficientemente grande. Por las Proposición 3 se sigue que la solución correspondiente es normalizable y de acuerdo al Lema 6(a) se sigue que esta solución tiene precisamente n ceros de w_ℓ .

Con el fin de probar esta afirmación, primero mostramos que $a_n \in M_n$, es decir, a_n es el elemento más pequeño de M_n . Si no fuera así, entonces existiría $r \in (0, r_*(a_n))$ tal que $\theta(r, a_n) > (n + 1/2)\pi$ ¹. Por continuidad, se seguiría que $\theta(r, a) > (n + 1/2)\pi$ para todo a suficientemente cercano a a_n , lo cual implicaría que $a \notin M_n$ para a en una vecindad de a_n lo que contradeciría el hecho que a_n es el ínfimo de M_n . Entonces, $a_n \in M_n$ y la a_n -órbita tiene rotación acotada $\theta(r, a_n) < (n + 1/2)\pi$ para todo $0 < r < r_*(a_n)$.

Después, mostramos que la a_n -órbita no explota, es decir, $r_*(a_n) = \infty$. Asumimos por contradicción que $r_*(a_n) < \infty$. Entonces por el Lema 2 $\psi(r) \rightarrow +\infty$ para $r \rightarrow r_*$, de tal manera que la a_n -órbita diverge en Q1 o Q3. Por lo tanto existe $k = 0, 1, 2, \dots, n$ tal que $(k - 1/2)\pi < \theta(r, a_n) < k\pi$ para r suficientemente cercano a $r_*(a_n)$. Fijamos tal valor para r y lo llamamos r_1 . Por continuidad se sigue que $(k - 1/2)\pi < \theta(r_1, a) < k\pi$ y $\phi(r_1, a) > 0$ para a suficientemente cercano a a_n . Por el Lema 6(b) se sigue que tales a -órbitas deben satisfacer $\theta(r, a) < k\pi$ para todo $r \in (r_1, r_*(a))$. Además, por el Lema 6(a), $\theta(r, a) < (k + 1/2)\pi$ para todo $0 \leq r \leq r_1$. Esto implica que $a \in M_k \subset M_n$ para a en una vecindad abierta de a_n lo que de nuevo contradice el hecho que a_n es el ínfimo de M_n .

Concluimos que la a_n -órbita es globalmente definida y normalizable. Además, por las Proposiciones 1 y 2 esta a_n -órbita debe satisfacer $X_\ell(r)X'_\ell(r) < 0$ y por lo tanto también $w_\ell(r)w'_\ell(r) < 0$ para todo $r > 0$ tal que $\phi(r) > 0$. Esto implica que la a_n -órbita cae en Q2 o Q4 para tales valores de r . Queda por mostrar que $\theta(r, a_n) > n\pi$ para r grande. Supongamos por contradicción que $\theta(r_1, a_n) < n\pi$ para algún $r_1 > 0$ tal que $\phi(r_1, a_n) > 0$. Por continuidad, también se sigue que $\theta(r_1, a) < n\pi$ y $\phi(r_1, a) > 0$ para todo a cercano a a_n . Por el Lema 6(a) y (b) tales a -órbitas deben tener $\theta(r, a) < (n + 1/2)\pi$ para todo

¹Si $\theta(r, a_n) = (n + 1/2)\pi$ podemos usar el Lema 6(a) y reemplazar r por una r un poco más grande tal que $\theta(r, a_n) > (n + 1/2)\pi$.

$r \geq 0$ y por lo tanto $a \in M_n$ para todo a en una vecindad abierta de a_n lo cual contradice el hecho que a_n es el ínfimo de M_n .

□

Conclusiones

Se dio una demostración rigurosa de la existencia de una familia discreta de soluciones globales, normalizables, estáticas y esféricamente simétricas del sistema Schrödinger-Poisson generalizado el cual considera $N = 2\ell + 1$ campos escalares complejos de masa m_b y momento angular ℓ . Nuestro resultado generaliza el trabajo previo [14] que se limita al caso $\ell = 0$. Las soluciones con $\ell > 0$ fueron llamadas estrellas de bosones newtonianas con momento angular y son frecuentemente consideradas como candidatas a imitadoras de agujeros negros o también se ha considerado que la materia oscura puede estar formada de estas estrellas. Hasta el presente, estas soluciones se habían construido únicamente de forma numérica mientras que los resultados de esta tesis proveen un resultado de existencia matemáticamente riguroso y de esta forma complementa los resultados previos.

Queda para futuros trabajos encontrar una demostración rigurosa de la existencia de soluciones de la versión relativista de estos resultados, es decir, de las soluciones encontradas en [12]. Además, se puede pensar en configuraciones donde cada campo escalar tenga diferente número de momento angular total ℓ pero todos con la misma amplitud en m para que las ecuaciones mantengan la simetría esférica. En este caso tendríamos un problema de ajuste fino multi-dimensional, donde habría un parámetro que se debe ajustar por cada valor de ℓ que se quiere excitar. Finalmente, existe la posibilidad interesante de estudiar configuraciones fuera de simetría esférica lo cual puede ser estudiado usando teoría de perturbación, misma teoría que puede ser usada para estudiar la estabilidad lineal de las estrellas de bosones con momento angular. En [24] se presentaron algunos resultados recientes sobre la estabilidad lineal en el caso relativista y entonces la idea sería ampliar estos estudios para una demostración rigurosa de la estabilidad lineal de dichos objetos.

Bibliografía

- [1] D.J. Kaup. Klein-Gordon geon. *Phys. Rev.*, 172:1331–1342, 1968.
- [2] R. Ruffini and S. Bonazzola. Systems of self-gravitating particles in general relativity and the concept of an equation of state. *Phys. Rev.*, 187:1767–1783, 1969.
- [3] R. Friedberg, T. D. Lee, and Y Pang. Mini - soliton-stars. *Phys. Rev. D*, 35:3640, 1987.
- [4] M. Gleiser. Stability of Boson Stars. *Phys. Rev. D*, 38:2376, 1988.
- [5] E. Seidel and W-M. Suen. Dynamical Evolution of Boson Stars. 1. Perturbing the Ground State. *Phys. Rev. D*, 42:384–403, 1990.
- [6] F.S. Guzmán and L.A. Ureña-López. Evolution of the Schrödinger-Newton system for a selfgravitating scalar field. *Phys. Rev. D*, 69:124033, 2004.
- [7] S.L. Liebling and C. Palenzuela. Dynamical Boson Stars. *Living Rev. Rel.*, 15:6, 2012.
- [8] P. Bizoń and A. Wasserman. On existence of mini - boson stars. *Commun. Math. Phys.*, 215:357–373, 2000.
- [9] D.F. Torres, S. Capozziello, and G. Lambiase. A Supermassive scalar star at the galactic center? *Phys. Rev. D*, 62:104012, 2000.
- [10] E.W. Kolb and I.I. Tkachev. Axion miniclusters and Bose stars. *Phys. Rev. Lett.*, 71:3051–3054, 1993.
- [11] L. Hui, J.P. Ostriker, S. Tremaine, and E. Witten. Ultralight scalars as cosmological dark matter. *Phys. Rev. D*, 95:043541, 2017.
- [12] M. Alcubierre, J. Barranco, A. Bernal, J.C. Degollado, A. Diez-Tejedor, M. Megevand, D. Núñez, and O. Sarbach. ℓ -Boson stars. *Class. Quant. Grav.*, 35:19LT01, 2018.
- [13] I.M. Moroz, R. Penrose, and P. Tod. Spherically-symmetric solutions of the Schrödinger-Newton equations. *Classical and Quantum Gravity*, 15:2733–2742, 1998.
- [14] P. Tod and I.M. Moroz. An analytical approach to the Schrödinger-Newton equations. *Nonlinearity*, 12:201–216, 1999.

- [15] I. Olabarrieta, J.F. Ventrella, M.W. Choptuik, and W.G. Unruh. Critical behavior in the gravitational collapse of a scalar field with angular momentum in spherical symmetry. *Phys. Rev.*, D76:124014, 2007.
- [16] Víctor Manuel Jaramillo Pérez. Límite de campo débil para el campo escalar auto-gravitante. Master's thesis, Universidad Nacional Autónoma de México, 2019.
- [17] Emmanuel Chávez Nambo. Estrellas esféricas newtonianas y relativistas soportadas por un gas politrópico o campos de bosones. Bachelor's thesis, Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, 2019.
- [18] J.D. Jackson. *Classical Electrodynamics*. John Wiley and Sons, Inc., New York, 1999.
- [19] M. Reed and B. Simon. *Methods of Modern Mathematical Physics, Vol. I*. Academic Press, San Diego, 1980.
- [20] W. Walter. *Ordinary Differential Equations*. Springer, New York, 1998.
- [21] B. Simon. Sturm oscillation and comparison theorems. In D.P. Pearson W.O. Amrein, A.M. Hinz, editor, *Sturm-Liouville Theory*. Birkhäuser, Basel, 2005.
- [22] F. Bowman. *Introduction to Bessel Functions*. Dover Publications Inc., New York, 1958.
- [23] Digital library of mathematical functions. <http://dlmf.nist.gov/>.
- [24] M. Alcubierre, J. Barranco, A. Bernal, J.C. Degollado, A. Diez-Tejedor, M. Megevand, D. Núñez, and O. Sarbach. On the linear stability of ℓ -boson stars with respect to radial perturbations. *Classical and Quantum Gravity*, 38:174001, 2021.