Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo
y
Universidad Nacional Autónoma de México

Posgrado Conjunto en Ciencias Matemáticas

Instituto de Física y Matemáticas
y
Centro de Ciencias Matemáticas

Teorema de clasificación de superficies no compactas

T E S I N A

Que para optar por el grado de Maestro en Ciencias Matemáticas
Presenta:

Kevin Josué Rodríguez Portillo

Asesor: Dr. José Ferrán Valdez
Centro de Ciencias Matemática

Morelia, Michoacán - septiembre 2021.

ÍNDICE GENERAL

AGRADECIMIENTOS

En primer lugar debo agradecer a mis padres Terencio Rodríguez y Elsy Portillo porque siempre lucharon por mi educación, bienestar y salud, sin ellos no sería quien soy ahora. A mis hermanos por su gran cariño, por apoyarme en mis decisiones y estar conmigo en las buenas y en las malas. A Sara Margarita Batres Paiz, esa persona especial que me llena de felicidad al ver su sonrisa y con su mirada da luz a mis días oscuros, a ella quiero agradecer su apoyo incondicional, su paciencia y amor.

Quiero agradecer al Dr. Ferrán Valdez por su valiosa guía, por sus consejos, su paciencia y ser un referente académico en el camino de la ciencia. A mis profesores salvadoreños Mcs. Marcelino Mejía (Q.E.P.D.), Msc. Jorge Martínez y Msc. Gabriel Chicas que en su momento me dieron su apoyo, orientaron y animaron a seguir con mis estudios de posgrado en México. Quiero agradecer también a mis colegas y amigos del posgrado, por hacer más amena cada día en México, entre ellos Arley, Yhon, Oscar, Erick, Miguel por mencionar algunos. También, a mis amigos en El Salvador William, Tobías por su invaluable apoyo.

Por último, agradezco al CONACyT y su programa de becas por apoyarme económicamente durante los dos años que duró mi formación académica en el Posgrado Conjunto en Ciencias Matemáticas.

Resumen

El objetivo de este trabajo es presentar una demostración del Teorema de Kerékjártó que afirma esencialmente que toda superficie S está completamente determinada hasta homeomorfismos por cinco invariantes topológicos: el género $g(S) \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, el tipo de orientabilidad, el espacio de fines $Ends(S)$, el espacio de fines acumulados por género $Ends_\infty(S)$ y el espacio de fines acumulados por género no orientable $Ends_\alpha(S)$.

PALABRAS CLAVES: Superficies, Teorema de Kerékjártó, Espacio de fines, Espacio de fines acumulados por género, tipos de orientabilidad.

Abstract

The objective of this work is to present a proof of the Kerékjártó Theorem which states that every surface S is completely determined up to homeomorphisms by five topological invariants: the genus $g(S) \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, orientability classes, the space of ends $Ends(S)$, the space of orientable ends accumulated by genus $Ends_\infty(S)$ and the space of non-orientable ends accumulated by genus $Ends_\alpha(S)$.

INTRODUCCIÓN

Uno de los temas de investigación que ha sido muy estudiado y que sus resultados son de mucha utilidad en diversas áreas es la clasificación topológica de n-variedades, aunque sólo se conozca completamente el caso de las variedades reales de dimensión 1 y 2; a estas últimas las llamaremos superficies. Para las superficies compactas su estudio se remonta a los trabajos de Möbius [**Mob1861**] y Jordan [**Jor1866**] a mediados del siglo XIX, aunque por la falta de herramientas técnicas de la época la primer prueba rigurosa fue dada a inicios del siglo XX. Por otra parte, el teorema de clasificación de superficies no compactas [**Ker23**] fue planteado en 1923 por Béla Kerékjártó. En este escrito se presentará la demostración de dicho teorema y la guia timada para la presentación de este tópico es el articulo de Ian Richards: *On the classification of noncompact surfaces* [**Ian63**].

Es importante poder clasificar las superficie pues éstas aparecen en diversas áreas de investigación, por ejemplo, la superficie invariante natural asociada con el juego de billar $X(P)$ en un poligono irracional P es homeomorfa al monstruo del Lago Ness, es decir, la única superficie topológica de género infinito orientable con exactamente un fin ($g(S) = \infty$, $|Ends(S) = 1|$, $|Ends_\infty(S) = 1|$ y $|Ends_\alpha(S)| = 0$) [**VAL09**].

CAPÍTULO 1

PRELIMINARES

En esta sección presentaremos definiciones y resultados necesarios para la demostración del Teorema de clasificación de superficies no compactas de Kerékjártó.

1.1. Definiciones básicas

Por una *superficie topológica* entenderemos una variedad real 2-dimensional, segundo numerables, separable y conexa. Por definición una superficie topológica no tiene frontera pero se presentan resultados sobre éstas.

Diremos que un conjunto es *acotado* si su cerradura en S es compacta, mientras que una *subsuperficie* será una región cerrada cuya frontera en S consiste de un cantidad finita de curvas cerradas simples que no se intersecan, es decir, con borde.

Al pensar las superficie como un objeto triangulable definimos la característica de Euler de S, dada una triangulación T, como $\chi(\Sigma) = V - A + C$, donde V, A y C son los números de 0-simplejos, el número de 1-simplejos y el número de 2-simplejos respectivamente, el cual es un invariante topológico.

Un propiedad importante de las superficies es la orientabilidad o no orientabilidad de éstas, también la manera en que a partir de una que sea orientable podemos invertir su orientabilidad y es por ello que se presenta una definición a partir de la construcción siguiente:

Sea la superficie $\Sigma = D' - D \subset \mathbb{C}$ donde D y D' son discos cerrados en el plano $\mathbb{R}^2$ centrados en el origen con $D \subsetneq D'$. Definimos la relación "$\sim$" mediante

$$x \sim x' \ \text{ si y sólo si } \begin{cases} x = -x' & \text{Para } x, x' \in \partial D \quad \text{o} \\ x = x' & \text{Si } x, x' \in D' - D \end{cases}$$

Definición 1.1 *La superficie S obtenida con la construcción anterior se conoce como cross cap (por su nombre en inglés) y es no orientable.*

Se enuncia, sin demostración, el teorema fundamental de clasificación para superficies compactas con borde el cual será de mucha utilidad posteriormente.

Teorema 1.2 *Dos superficies compactas con borde S y S' son homeomorfas si y sólo si tienen el mismo número de curvas frontera, $\chi(S) = \chi(S')$ y ambas son orientables o no orientables.*

Definimos el género de una superficie compacta S con característica de Euler $\chi(S)$ como

$$g(S) = \begin{cases} \frac{1}{2}(2 - \chi(S)) & \text{Si } S \text{ es orientable} \\ 2 - \chi(S) & \text{Si } S \text{ es no orientable} \end{cases}$$

Y una generalización de éste, conocido como el *género reducido*, que aplica a las superficies compactas con borde, que poseen q curvas fronteras y característica de Euler $\chi(S)$, y es definido como:

$$g(S) = 1 - \frac{1}{2}(\chi(S) + q).$$

Cuando tenemos dos superficies compactas con borde S_1 y S_2 unidas a lo largo de r curvas frontera comunes podemos calcular el género reducido de la suma conexa de éstas por medio de la fórmula siguiente:

$$g(S_1 \cup S_2) = g(S_1) + g(S_2) + (r - 1).$$

Se dice que una superficie con borde S es *plana* si cada subsuperficie compacta es de género reducido cero (o equivalentemente, de género cero). Una superficie sin fronteras es plana si y solo si cada curva de Jordan la separa.

1.2. Espacio de fines

En esta sección definiremos el espacio de fines de una superficie S y dos subconjuntos importantes de éste, que son el espacio de fines acumulado por género y el espacio de fines acumulados por género no orientables, los cuales son invariantes topológicos.

Definición 1.3 *Una componente frontera de una superficie S es una sucesión anidada $P_1 \supset P_2 \supset \ldots$ de regiones no acotadas conexas en S tales que:*

1. *La frontera de P_n en S es compacta para todo n.*

2. *Para cualquier subconjunto acotado A de S, $P_n \cap A = \emptyset$ para n suficientemente grande.*

Decimos que dos componentes frontera $P_1 \supset P_2 \supset ...$ y $P'_1 \supset P'_2 \supset ...$ son equivalentes si, para cualquier n, existe un entero N tal que $P'_N \subset P_n$ y viceversa, $[P_i]$ denotará la clase de equivalencia de las componentes frontera que contienen a $[P_i] = P_1 \supset P_2 \supset ...$ y se le llamará *fin*.

Definición 1.4 *El espacio de fines $Ends(S)$ de una superficie S es el espacio topológico que tiene los fines de S como elementos, y dotado de la siguiente topología: para cualquier conjunto U en S cuya frontera en S es compacta, definimos U^* como el conjunto de todos los fines $[P_i]$, representando por algún $[P_i] = P_1 \supset P_2 \supset ...$, tal que $P_n \subset U$ para n suficientemente grande; tomamos el conjunto de todos los U^* como base para la topología de $Ends(S)$.*

Definición 1.5 *Sea $[P_i]$ un fin de S representado por $[P_i] = P_1 \supset P_2 \supset ...$ Decimos que:*

- *$[P_i]$ es un fin plano si los conjuntos P_n son planos para todo n excepto un número finito.*
- *$[P_i]$ es un fin acumulado por género si P_n es de género infinito para todo n.*
- *$[P_i]$ es un fin acumulado por género no orientable si P_n es no orientable para todo n.*

Siguiendo la Definición 1.5 consideraremos al espacio de fines como un triple anidado de conjuntos $Ends(S) \supset Ends_\infty(S) \supset Ends_\alpha(S)$, donde $Ends(S)$ es el espacio de fines completo, $Ends_\infty(S)$ es el *espacio de fines acumulados por género*, y $Ends_\alpha(S)$ es el *espacio de fines acumulados por género no orientable*. A partir de las definiciones se deduce que $Ends_\infty(S)$ y $Ends_\alpha(S)$ son subconjuntos cerrados de $Ends(S)$.

Definición 1.6 *Una superficie con frontera S es de género infinito y/o infinitamente no orientable si para todo subconjunto acotado $A \subset S$ se tiene que $S - A$ no es de género cero y/o orientable.*

Definición 1.7 *Definimos cuatro clases de orientabilidad de superficies. Dos clases son las superficies orientables e infinitamente no orientables; una superficie que no pertenece a ninguna de estas categorías se dice que es de tipo par o impar no orientable de acuerdo a si cada subsuperficie compacta suficientemente grande contiene un número par o impar de cross cap, respectivamente(es decir, tiene por género reducido n o $\frac{2n+1}{2}$ con $n \in \mathbb{Z}$).*

Enunciamos ahora, algunas propiedades importantes del espacio de fines de una superficie.

Proposición 1.8 *Sea S una superficie*

a. Sean $U, V \subset S$ cuyas fronteras en S son compactas, entonces $[U \cap V]^* = U^* \cap V^*$ y $[U \cup V]^* = U^* \cup V^*$.

b. Si $S_1 \subset S$ es una subsuperficie, entonces

   I. $S_1^* \cap Ends_\infty(S) \neq \emptyset$ si y sólo si S_1 es de género infinito.

   II. $S_1^* \cap Ends_\alpha(S) \neq \emptyset$ si y sólo si S_1 es infinitamente no orientable.

III. $S_1^* = \emptyset$ *si y sólo si* S_1 *es acotado.*

Demostración: Se probará unicamente **a.** $[U \cap V]^* = U^* \cap V^*$.

Si $[P_i] = P_1 \supset P_2 \supset ... \in [U \cap V]^*$, entonces para n suficientemente grande $P_n \subset U \cap V$, así tenemos que $P_n \subset U$ y $P_n \subset V$, por lo cual, $[P_i] \in U$ y $[P_i] \in V$. La otra inclusión es inmediata.

Ahora demostramos $[U \cup V]^* = U^* \cup V^*$.

Sea $[P_i] = P_1 \supset P_2 \supset ... \in [U \cup V]^*$. Como ∂U es compacta tomamos n tal que $\partial U \cap P_n = \emptyset$ y que $P_n \subset U \cup V$. Note que si $P_n \cap U = \emptyset$ entonces $[P_i] \in V^*$, similarmente si $P_n \cap V = \emptyset$. Supongamos que $P_n \cap U \neq \emptyset$. Dado que $U \subset int(U) \cup \partial U$ y la elección de n tenemos que $\partial U \cap P_n = \emptyset$, entonces $P_n \subset int(U) \subset U$ y $[P_i] \in (int(U))^* \subset U^*$. La otra inclusión es inmediata. ■

1.3. Más sobre superficies

Proposición 1.9 *Una superficie con borde de género infinito contiene subsuperficies de género arbitrariamente grande.*

El lema que se presenta a continuación puede verse en su forma general en [**Sha11**] pág. 126, para nuestros fines se demostrará para superficies.

Lema 1.10 *Sea S una superficie. Entonces existe una sucesión anidada de subconjuntos abiertos $\{W_i\}$ en S tales que*

1. $\overline{W_n}$, *es compacto para cada n.*
2. $\overline{W_n} \subset W_{n+1}$, *para cada n*
3. $\bigcup_n W_n = S$

Demostración: Para cada $x \in S$, existe U_x vecindad de x y $\varphi_x : U_x \longrightarrow B_1(0) \subset \mathbb{R}^2$ un carta tal que $\varphi_x(x) = 0$, entonces $S = \bigcup_x \varphi_x^{-1}(B_{1/2}(0))$. Como S es segundo numerable, entonces es Lindelöff, por lo que existe un subconjunto numerable $K = \{x_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ de S tal que $S = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \varphi_{x_i}^{-1}(B_{1/2}(0))$. Definimos $V_i = \varphi_{x_i}^{-1}(B_{1/2}(0)) \subset S$ y notemos que $\overline{V_i} = \overline{\varphi_{x_i}^{-1}(B_{1/2}(0))} = \varphi_{x_i}^{-1}(\overline{B_{1/2}(0)}) = \varphi_{x_i}^{-1}(\mathbb{D}_{1/2})$, por tanto $\overline{V_i}$ es compacto.

Sea $W_1 = V_1$ y supongamos que ya tenemos construido hasta W_{k-1} de manera que cumpla 1. y 2. Entonces ∂W_{k-1} es compacta y al cubrirlo con los $\{V_i\}$ obtenemos una cantidad finita de $\{V_j\}_{j \in J}$ que también lo cubren, por lo que definimos $W_k = W_{k-1} \cup [\bigcup_{j \in J} V_j]$ el cual cumple con 1. y 2. mientras que 3. se verifica fácilmente. ■

Los resultados que se presentan a continuación serán de utilidad para obtener homeomorfismos entre superficies compactas con frontera a partir de una asignación dada entre sus fronteras. También, para construir subsuperficies con género reducido dado y cantidad de componentes fronteras fijas.

Lema 1.11 *Si Σ y Σ' son superficies compactas con frontera las cuales tienen el mismo género reducido, la misma clase de orientabilidad y el mismo número de curvas fronteras. Sea H una biyección entre las componentes frontera de Σ y Σ', entonces existe un homeomorfismo $\eta : \Sigma \to \Sigma'$ bajo el cual las curvas fronteras de Σ y Σ' se corresponden mediante H.*

Lema 1.12 *Si Σ es una superficie compacta con borde, α es una curva cerrada simple en la frontera de Σ y $\varphi : \alpha \to \alpha$ es un homeomorfismo, entonces φ puede extenderse a un homeomorfismo $\overline{\varphi} : \Sigma \to \Sigma$ tal que toda curva frontera de Σ resulta invariante bajo $\overline{\varphi}$.*

Lema 1.13 *Sea Σ una superficie con borde compacta de género reducido g, y sea $\Gamma_1, ...\Gamma_r$ una partición del conjunto de curvas frontera de Σ. Entonces, para cualquier $k \leq max(g - \frac{1}{2}, 0)$, existen $r-1$ curvas cerradas simples en Σ que no se cortan entre sí las cuales dividen a Σ en p componentes $U_1, ..., U_r$ tal que $\Gamma_i \subset U_i$ para todo $i = 1, ..., r$, U_1 es de género reducido k, y U_i es de género cero para $1 < i < r$. Si Σ es no orientable y k es un entero, entonces U_1 puede hacerse tanto orientable como no orientable.*

Para una ilustración del Lema 1.13 ver la Figura 1.1, en cual se presenta el caso de una superficie Σ de género reducido 5, con 4 componentes fronteras γ_i, la partición dada por $\Gamma_1 = \{\gamma_1\}$, $\Gamma_2 = \{\gamma_2, \gamma_3\}$ y $\Gamma_3 = \{\gamma_4\}$. En este caso elegimos $k = 3 \leq max\{g-1/2, 0\}$ y obtenemos dos curvas α_1 y α_2 disjuntas que separan a S en 3 componentes U_1, U_2 y U_3. Note que la componente U_1 es de género reducido 3, mientras que U_3 tiene género reducido 2.

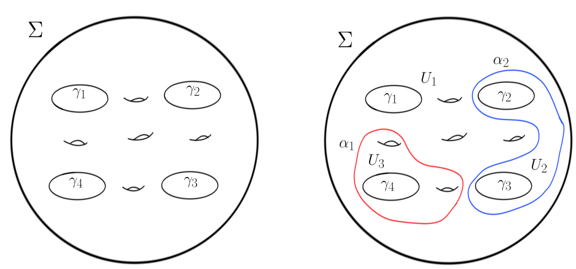


Figura 1.1: $\Gamma_1 = \{\gamma_1\}$, $\Gamma_2 = \{\gamma_2, \gamma_3\}$ y $\Gamma_3 = \{\gamma_4\}$,$g = 5$ $k = 3$.

Es importante mencionar que U_1 se puede construir de manera que la frontera sea $\Gamma_1 \cup \{\alpha_i\}_{i \geq 1}$ y que U_r no tiene restricción y su género reducido es $g - k$.

CAPÍTULO 2

TEOREMA DE CLASIFICACIÓN DE SUPERFICIES NO COMPACTAS

En este capítulo se presentará una demostración del Teorema de Clasificación de Superficies no Compactas, el cual fue obtenido en 1923 por Béla Kerékjártó.

Teorema 2.1 *Sean S y S' dos superficies sin frontera. Entonces S es homeomorfa a S' si y sólo si $g(S) = g(S')$, son de la misma clase de orientabilidad y sus espacios de fines, considerados como terna de espacios $Ends(S) \supset Ends_\infty(S) \supset Ends_\alpha(S)$, son homeomorfos como espacios anidados*[1].

Demostración.

Dado que género, tipo de orientabilidad y espacio de fines son invariantes topológicos, entonces la necesidad es trivial.

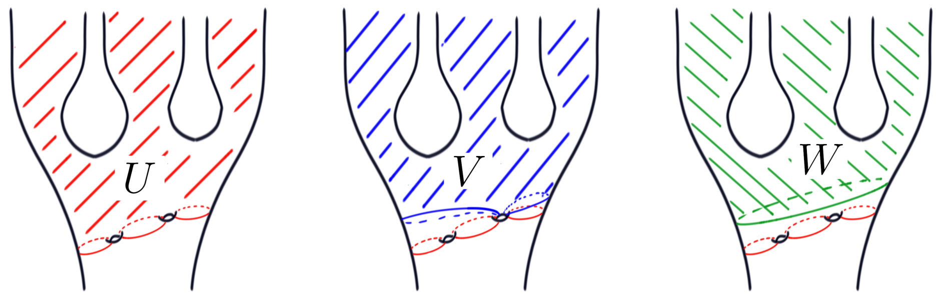
Para probar la suficiencia supongamos que tenemos dos superficies S y S' tales que $g(S) = g(S')$, son de la misma clase de orientabilidad y sus espacios de fines son homeomorfos como espacios anidados. Asumiremos que el tipo de orientabilidad de ambas superficies es infinitamente no orientables (es decir, $Ends_\alpha(S) \neq \emptyset$) debido a que el resto de los casos serán modificaciones de esta prueba. Definiremos h como el homeomorfismo entre $Ends(S)$ y $Ends(S')$.

Construiremos una sucesión anidada de subsuperficies que cubren a S, similarmente con S'. Para lo cual analizaremos algunos conjuntos que forman la base de $Ends(S)$ descrito en la Definición 1.4 e impondremos algunas condiciones, respecto a la frontera y el género, que deberán cumplir cada subsuperficie que queremos construir.

Sea $U \subset S$ un conjunto conexo, no acotado, con frontera compacta y supongamos que $g(U) > 0$. Dado que ∂U es compacta esta debe ser una unión finita de curvas cerradas simples, supongamos

[1]Es decir, existe un homeomorfismo $f : Ends(S) \to Ends(S')$ tal que la $f(Ends_\infty(S)) = Ends_\infty(S')$ y $f(Ends_\alpha(S)) = Ends_\alpha(S')$

que hay k de ellas. Luego, por la definición 1.4 tendremos que U^* es un básico en la topología de $Ends(S)$. Sin embargo, podemos tomar $V \subsetneq U$ conexo no acotado y de frontera compacta, con un número curvas frontera k' menor o igual k y tal que $V^* = U^*$ (Ver ejemplo en figura 2.1(a) y 2.1(b)).



(a) $k = 3$ (b) $k' = 2$ (c) $k' = 1$

Figura 2.1:

Para dar un uso correcto de los resultados de superficies compactas con frontera, que aplicaremos posteriormente, al tener un conjunto no acotado tomaremos el caso en que $k' = 1$ (Ver Figura 2.1(c)), es decir, la frontera de U es una curva cerrada simple.

Notemos también que si $Ends_\infty(S) \cap U^* \neq \emptyset$, entonces U tiene fines acumulados por género ya sean orientables o no orientables, por lo que $g(U)$ es infinito, mientras que si $Ends_\infty(S) \cap U^* = \emptyset$, U tendrá género finito. Para la modificación de esta prueba cuando consideremos el resto de tipos de orientabilidad será adecuado que si $Ends_\infty(S) \cap U^* = \emptyset$ entonces el género de U sea cero. La elección de U de esta manera es posible por el Lema 1.13.

Procedemos a construir una sucesión anidada $\{B_n\}_n \in \mathbb{N}$ de subsuperficies acotadas que cubren a S de manera cada una de las componentes conexas de $S - B_n$ sean no acotadas y cumplan las observaciones anteriores, es decir, la frontera sea una curva cerrada simple y sea o de género cero o género infinito.

Por el Lema 1.10 podemos tomar una sucesión anidada de abiertos $W_1 \subset W_2 \subset ...$ de S tal que

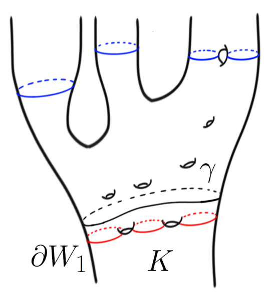
- $\overline{W_i}$ es compacto para todo i.
- $\overline{W_i} \subset W_{i+1}$
- $S = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} W_i$

A partir de la sucesión $\{W_n\}_n$ construiremos por recursividad la sucesión $\{B_n\}_{n \geq 1}$.

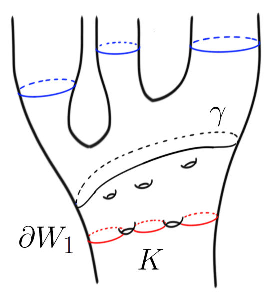
Para definir B_1 tomaremos a $\overline{W_1}$ y como éste es compacto, entonces ∂W_1 es compacta. Definimos el conjunto K como la unión de $\overline{W_1}$ con las componentes acotadas de su complemento, de manera que K es conexo y compacto. Si tomamos U componente conexa de $S-K$ tenemos que es no acotada y ∂U es compacta. Como hemos supuesto que $Ends_\alpha(S) \neq \emptyset$, entonces al ser U no acotada su género puede ser finito o infinito.

Supongamos, en primer lugar que $g(U) = \infty$. Tomamos $\overline{U \cap W_2}$ la cual será una superficies acotada de género reducido finito. Tomamos la partición de las curvas fronteras de $\overline{U \cap W_2}$ como $\Gamma_1 = \{\alpha : \alpha \text{ es frontera común de } U \cap W_2 \text{ y } W_1\}$ y $\Gamma_2 = \{\alpha : \alpha \text{ es frontera común de } U \cap W_2 \text{ y } W_2\}$. Aplicamos el Lema 1.13 con $k = 0$ y obtenemos una curva cerrada simple γ que divide a $\overline{U \cap W_2}$ en dos componentes disjuntas, U_1 de género reducido 0 y U_2 de genero reducido $g(\overline{U \cap W_2})$.

En el caso que $g(U)$ sea finito, tomamos M de tal forma que $\overline{W_M \cap U}$ tenga el mismo género que U. Elegimos $k = g(U)$ y con una partición similar al caso anterior encontramos U_1 de género reducido k. (Ver Figura 2.2)



(a) $g(U)$ infinito



(b) $g(U)$ finito

Figura 2.2: En ambos casos Γ_1 son las curvas en rojo, mientras que Γ_2 las curvas en azul.

Aplicamos este procedimiento al resto de las componentes del complemento de K y definimos B_1 como la unión de K con U_1's. De esta forma $B_1 \supset W_1$ y es acotado .

Supongamos que tenemos construido hasta B_n, para definir B_{n+1} tomamos W_M, de manera que $W_M \supset B_n$ y que $M \geq n$, y aplicamos el proceso base a W_M.

Por último, como $W_n \subset B_n$, entonces $S = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} W_n \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_i$, de manera que $S = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} B_n$.

Hemos obtenido una sucesión anidada $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de subsuperficies acotadas que cubren a S y de manera que cada componente conexa de $S - B_n$ es no acotada, su frontera es una curva cerrada simple, de género cero o infinito. De igual forma para S' construimos $\{B'_n\}_n \in \mathbb{N}$ con las mismas condiciones.

Para definir un homeomorfismo entre S y S' construiremos inductivamente ternas (f_n, A_n, A'_n)

de tal forma que para cada n tengamos que: A_n y A'_n sean subsuperficies compactas de S y S', respectivamente, también que $B_n \subset A_n \subset A_{n+1}$; $B'_n \subset A'_n \subset A'_{n+1}$ y que el diagrama siguiente conmute:

$$\begin{array}{ccc} A_n & \xrightarrow{i_n} & A_{n+1} \\ \downarrow f_n & & \downarrow f_{n+1} \\ A'_n & \xrightarrow{i'_n} & A'_{n+1} \end{array}$$

Donde i_n, i'_n son inclusiones, de manera que el homeomorfismo $f : S \longrightarrow S'$ se obtendrá con la extensión de las f_n.

Además, como en el caso de $\{B_n\}_n \in \mathbb{N}$, también cumplirán que cada componente conexa de $S - A_n$ (o $S' - A'_n$) sea no acotada, su frontera sea una curva cerrada simple, de género cero o infinito.

Impondremos una condición más a los homeomorfismos f_n, pues partimos del supuesto que h existe, entonces necesitamos establecer una relación entre las f_n y h, la cual obtendremos de la siguiente observación.

Observación 1: Sean $K \subset S$, $K' \subset S'$ subsuperficies de género reducido g y $g+1$, respectivamente (las cuales existen por la Proposición 1.9), y con q_K y $q_{K'}$ número de componentes frontera, el cual no necesariamente es el mismo.

Supongamos $q_k \leq q_{k'}$, cada componente conexa de sus complementos es no acotada y su frontera es una curva cerrada simple. Por el Lema 1.13 podemos construir $K'' \subset K'$ (el U_1) subsuperficie de género reducido g y con q_k componentes frontera (ver ejemplo en Figura 2.3). Note que K y K'' son homeomorfas por el Teorema 1.2.

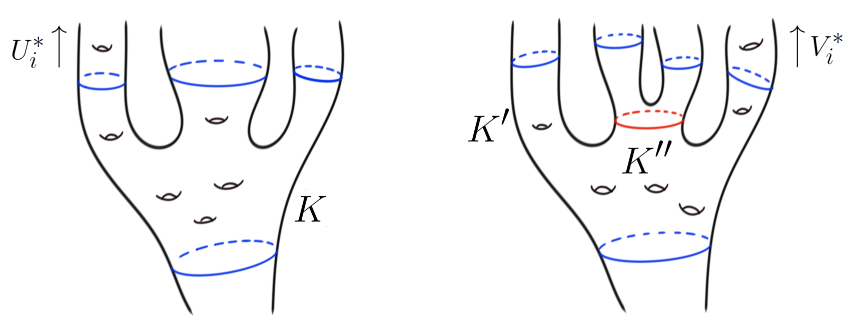


Figura 2.3:

Observación 2: Como cada U_i componente conexa de $S - K$ es no acotada y $U_i \cap U_j = \emptyset$ si $i \neq j$, entonces $U_i^* \cap U_j^* = \emptyset$, y dado que K es acotado tendremos que $Ends(S) = \sqcup_{i=1}^{q_k} U_i^*$, de igual forma podemos ver que $Ends(S') = \sqcup_{j=1}^{q_k} V_j^*$. Entonces existe una correspondencia biyectiva entre las curvas frontera de K y K'', llamaremos G a dicha biyección y estará dada por $G(\partial U_i) = \partial V_j$ si y sólo si $h(U^*) = V^*$, donde U y V son componentes de $S - K$ y $S' - K''$ respectivamente. El homeomorfismo $\varphi : K \longrightarrow K''$, mencionado en la Observación 1, que nos interesará será el que cumpla que: si $\varphi(\partial U_i) = \partial V_j$ entonces $h(U_i^*) = V_j^*$.

A partir de esto, si $U \subset S - A_n$ y $V \subset S' - A'_n$ son componentes conexas se pedirá que si $f_n(\partial U) = \partial V$ entonces pediremos que $h(U^*) = V^*$.

Regresando a la prueba, iniciamos con $A_0 = A'_0 = \emptyset$, suponemos que ya tenemos construido hasta (A_n, A'_n, f_n) con n par (en el caso de tener n impar se hará un trabajo similar intercambiando los papeles de A_n y A'_n). Queremos construir $(f_{n+1},\ A_{n+1},\ A'_{n+1})$ tal que $B'_{n+1} \subset A'_{n+1}$.

Comenzamos construyendo la subsuperficie A'_{n+1}. Como A'_n es compacta y la sucesión creciente $\{B'_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ cubre a S', existe $M \in \mathbb{N}$ tal que $A'_n \subset int(B'_M)$, tomamos $m = max(n+1, M)$ y definimos $A'_{n+1} = B'_m$ el cual cumple que $B'_{n+1} \subset A'_{n+1}$ (Ver Figura 2.4).

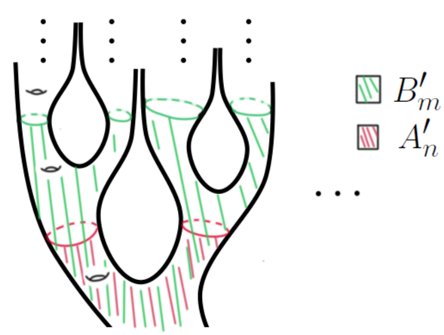


Figura 2.4:

Con esto podemos ver que la frontera de cada componente de $A'_{n+1} - A'_n$ contiene exactamente una curva frontera de A'_n, y una o más curvas de frontera de A'_{n+1}. Además, si $A'_n \subset int(A'_{n+1})$, cada componente de $S' - A'_n$ contendrá una componente no vacía de $A'_{n+1} - A'_n$. (Ver ejemplo en Figura 2.4).

Ya que tenemos a A'_{n+1}, fijamos a V componente conexa de $S' - A'_n$ tal que $(B'_m - A'_n) \cap V \neq \emptyset$, entonces existe U una componente de $S - A_n$ tal que $f_n(\partial U) = \partial V$, o en otras palabras $h(U^*) = V^*$. Ahora, tomemos $m \geq n$ tal que $B_m \supset A_n$ y definimos $W_m := (B_m - A_n) \cap U$ y $W' := (B'_m - A'_n) \cap V$.

Para construir tanto A_{n+1} como f_{n+1} analizaremos la relación entre W_m y W', es decir, compararemos género, orientabilidad y número de componentes fronteras. Luego generalizaremos lo obtenido a todas las componentes de $S' - A'_n$. Dado que A'_{n+1} está fijo trabajaremos principalmente en elegir el B_m adecuado, para lo cual necesitamos lo siguiente:

Lema 2.2 *Existe m de tal manera que:*

a. Si $g(W') > 0$, entonces $g(W_m) > g(W')$.

b. Si W' es no orientable, entonces W_m también lo será.

c. El número de componentes fronteras de W' es menor que el número de componentes fronteras de W_m. En particular, cada componente de $U - B_m$ está contenida la imagen inversa de alguna componente de $V - A_{n+1}$ (dicha relación de contención puede definirse utilizando el homeomorfismo $h : Ends(S) \to Ends(S')$).

Demostración de a. Supongamos que $g(W') = k > 0$, entonces $V \subset S' - A'_n$ tiene género mayor a cero, recordemos que cada componente de $S' - A'_n$ cumple que su género es infinito o es cero, así, V debe ser de género infinito. De esto se sigue que $V^* \cap Ends_\infty(S') \neq \emptyset$, como h es homeomorfismo $U^* \cap Ends_\infty(S) = h^{-1}(V^* \cap Ends_\infty(S')) \neq \emptyset$, por lo cual U debe ser de género infinito también. Por la Proposición 1.9 podemos tomar K subsuperficie compacta de U de tal manera que $g(K) > k$. Como los $\{B_n\}$ cubren a S, y tanto A_n como K son compactos, debe existir m de modo que $A_n \cup K \subset B_m$. Definimos $W_m = (B_m - A_n) \cap U$ y escribimos su cerradura como $\overline{W_m} = K \cap \overline{(W_m - K)}$. Note que ambas superficies son compactas y supongamos que comparten q componentes fronteras, así por la fórmula de género obtenemos: $g(\overline{W_m}) = g(K) + g(\overline{W_m - K}) + (q-1)$ y como $g(\overline{W_m - K}) + (k-1) \geq 0$ entonces $g(\overline{W_m}) > k = g(W')$.

Demostración de b. Si W' es no orientable, entonces también lo será W, pues si W' es no orientable, entonces V debe ser de infinitamente no orientable, es decir, $V^* \cap Ends_\alpha(S') \neq \emptyset$ y por el homeomorfismo h tendremos que $U^* \cap Ends_\alpha(S) \neq \emptyset$, por lo que U debe ser infinitamente no orientable y por la Definición 1.6 W_m no puede ser orientable.

Demostración de c. Definimos q = número de componentes frontera de W', el cual es finito, y supongamos que para toda m tal que $W_m = (B_m - A_n) \cap U \neq \emptyset$ tenemos que $p_m < q$ donde p_m = número de componentes frontera de W_m. Entonces existe m' tal que $p_k = p_{m'}$ para toda $k \geq m'$, es decir, $|U^*|$ es finito, de esta forma tenemos que $|V^*| \geq q - 1 > |U^*|$ lo cual es una contradicción pues al ser h homeomorfismo y U^* finito se debe cumplir que $|U^*| = |V^*|$ pues $h(U^*) = V^*$. De esta manera debe existir un m tal que $p_m > q$. Denotemos $U_{j,m} \subset (S - B_m) \cap U$ con $j \in \{1, ..., p_m - 1\}$ las componentes conexas de $U - B_m$ y $V_k \subset (S' - A'_{n+1}) \cap V$ con $k \in \{1, ..., q - 1\}$ las componentes de $V - A'_{n+1}$. De esta forma

$$U^* = \bigsqcup_{j=1}^{p_m - 1} U^*_{j,m} \ \text{ y } \ V^* = \bigsqcup_{k=1}^{q-1} V^*_k$$

Utilizamos nuevamente el hecho que $h(U^*) = V^*$ tenemos para todo j, existe k tal que $h(U^*_{j,m}) \subset V^*_k$, en otras palabras $U^*_{j,m} \subset h^{-1}(V^*_k)$. ■

Como el número de componentes V de $S - A_{n+1}$ es finito, podemos elegir M de forma que el Lema 2.2 se cumpla para toda componente.

Introducimos la notación que será usada en el resto de la prueba. Tomemos $A \subset S$ subsuperficie compacta tal que la frontera de cada componente conexa de $S - A$ es una curva cerrada simple. Denotamos por U_α la componente de $S - A$ que tiene por frontera la curva α. Similarmente por V'_β cuando nos referimos a las componentes de $S' - A'$ con frontera β. Definimos $C = \{\alpha : \alpha$ es componente frontera de $B_M\}$ y $C' = \{\beta : \beta$ es componente frontera de $A'_{n+1}\}$. Sea $H : C \to C'$ dada por $H(\alpha) = \beta$ si y sólo si $[U_\alpha]^* \subset h^{-1}([V'_\beta]^*)$ la cual es una función sobreyectiva y se obtiene a partir del Lema 2.2 c.

Procedemos a la construcción de A_{n+1}. Nuevamente trabajaremos sobre cada componente conexa de $A'_{n+1} - A'_n$. Fijamos W'_{β_0} componente conexa de $\overline{A'_{n+1} - A'_n}$ y elegimos un M suficientemente grande para que se cumpla el Lema 2.2, así obtenemos W_{α_0} componente conexa de $\overline{B_M - A_n}$ de tal que $G(\alpha_0) = \beta_0$ (según se adecúe la Observación 2. cuando consideramos $K = A_n$ y $K'' = A'_n$). Además, note que α_0 es la frontera en común de $\overline{B_M - A_n}$ con A_n y β_0 la frontera en común de $\overline{A'_{n+1} - A'_n}$ con A'_n (ver Figura 2.5).

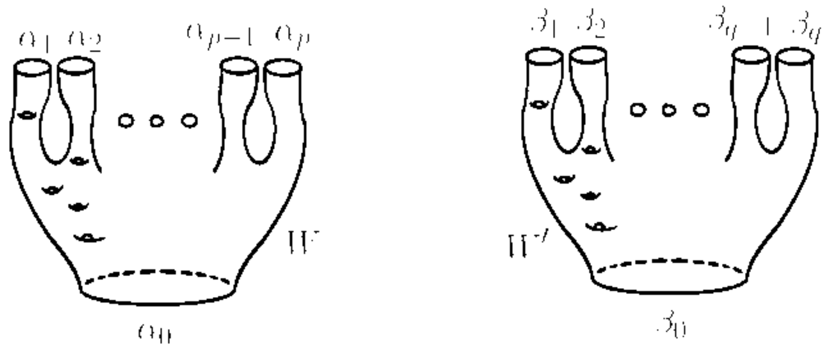


Figura 2.5: $p \geq q$ y $G(\alpha_0) = \beta_0$

Restringimos H a las curvas en común de W con B_M y de W' con A'_{n+1}, la cual sigue siendo sobreyectiva y la denotaremos por $H_{W'}$.

Supongamos que k es el género reducido de W', el cual es menor que el de W (Por el Lema 2.2 a.) y tomemos la partición del conjunto de curvas fronteras de $\overline{B_M - A_n}$ como sigue:

- $\Gamma_1 = \{\alpha_0\} \cup \{\alpha_i : H^{-1}_{W'}(\beta_j) = \{\alpha_i\}$ para algún β_j $\}$.
- $\Gamma_i = H^{-1}_{W'}(\beta)$ siempre que $|H^{-1}_{W'}(\beta)| \geq 2$

- $\Gamma_r = H^{-1}_{W'}(\beta)$ siempre que U_α sea de género infinito sea orientable o no orientable. Note que la elección de los elementos Γ_r es a conveniencia y puede ser Γ_i $(i \geq 2)$ o uno de los elementos de Γ_1, en este caso se debería modificar Γ_1. Además, Γ_r no está definida de forma única.

Aplicamos el Lema 1.13 a $W \subset \overline{B_m - A_n}$ con la partición anterior y obtenemos:

- Los γ_i que dividen a W, podemos pensarla como una por cada Γ_i con $i \geq 2$.
- U_1 con género reducido k y sus componentes fronteras son $\Gamma_1 \cup \{\gamma_i\}_{i\geq 1}$.
- U_r que puede o no ser de género reducido cero y es subconjunto de una componente conexa de $S - B_M$ de género infinito y/o infinitamente no orientable (Ver Figura 2.6).

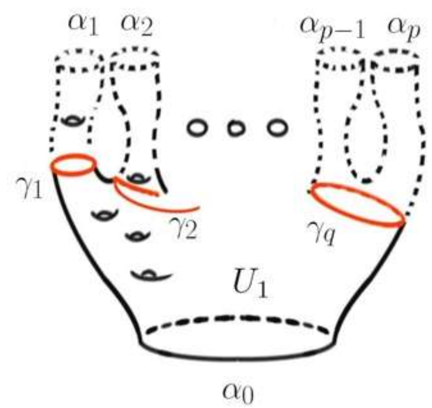


Figura 2.6: Construcción de U_1 con fronteras $\Gamma_1 \cup \{\gamma_i\}_{i\geq 1}$

En el caso que W' tenga género reducido cero, aplicamos el Lema 1.13 a W eligiendo $k = 0$, con la partición dada al considerar los primero dos casos y a diferencia del caso anterior U_r está contenida en una componente conexa de $S - B_m$ de género 0.

Observemos que por el Lema 2.2 a. U_1 tiene la misma orientabilidad que W', el mismo número de componentes fronteras y el mismo género, por el Teorema 1.2 deben ser homeomorfos.

Tomando todos los U_1's obtenidos y se pegan a A_n mediante las fronteras común entre U_1's y A_n determinando de esta manera a A_{n+1}, donde las componentes de $A_{n+1} - A_n$ son precisamente los U_1's.

A continuación definiremos f_{n+1}.

Primero fijamos a U_1 y W' componentes conexas de $A_{n+1} - A_n$ y $A'_{n+1} - A'_n$ donde construiremos un homeomorfismo adecuado para extender a f_n. Así, U_1 y W' son superficies compactas con frontera que tienen el mismo género reducido, el mismo número de componentes frontera y la misma orientabilidad. Por el Lema 1.11 obtenemos un homeomorfismo $\eta_{W'} : U_1 \to W'$ cuando establecemos la correspondencia biyectiva entre las curvas fronteras como sigue:

- α_0 corresponde a β_0.
- α_j corresponde a β_j siempre que $\alpha_j \in \Gamma_1$ y $H(\alpha_j) = \beta_j$.
- γ_i corresponde a β_j siempre que la componente conexa de $S - A_{n+1}$ cuya frontera es γ_k contenga a las componentes de $S - B_m$ cuyas fronteras estén en $H^{-1}(\beta_j)$. (Ver ejemplo en Figura 2.7)

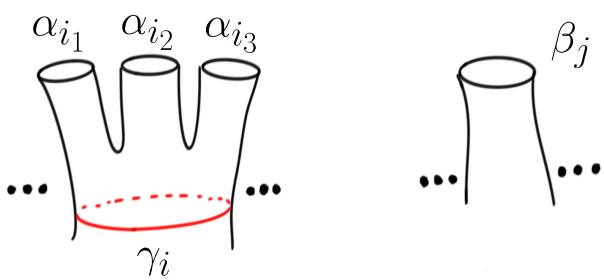


Figura 2.7: $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \alpha_{i_3} \subset U_{\gamma_i}$ y $H^{-1}_{W'}(\beta_j) = \{\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \alpha_{i_3}\}$

Es importante comentar que si $\eta_{W'}(\alpha_i) = \beta_j$ implica que $h(U^*_{\alpha_i}) = V^*_{\beta_i}$, lo cual se cumple debido a que la asignación hecha para aplicar el Lema 1.11 se basa en la definición de la función H, que a su vez está basado en el Lema 2.2 c.

Ahora, definimos $\varphi_{U_1} := \eta^{-1}_{W'} \circ f_n : \alpha \longrightarrow \alpha$ homeomorfismo y notemos que

$$\varphi_{U_1}(\alpha_0) = \eta^{-1}_{W'}(f_n(\alpha_0)) = \eta^{-1}_{W'}(\beta_0) = \alpha_0$$

En otras palabras φ_{U_1} fija la curva frontera α_0 de U_1, entonces por el Lema 1.12 $\varphi_{W'}$ se extiende a $\overline{\varphi}_{U_1} : U_1 \to U_1$, de manera que toda frontera de U_1 resulta invariante bajo $\overline{\varphi_{U_1}}$. Definamos $g : (A_{n+1} - A_n) \longrightarrow (A'_{n+1} - A'_n)$ a partir de las $\eta_{W'}$'s y $\psi : (A_{n+1} - A_n) \longrightarrow (A_{n+1} - A_n)$ a partir de las $\overline{\varphi}_{U_1}$'s que se obtienen de cada componente conexa, entonces definimos

$$f_{n+1}(x) = \begin{cases} (g \circ \psi)(x) & \text{Si} \quad x \in A_{n+1} - A_n \\ f_n(x) & \text{Si} \quad\quad x \in A_n \end{cases}$$

De esta manera f_{n+1} es continua sobre cada componente frontera de A_n y por tanto en todo A_{n+1}. Observe también que si α es una componente frontera de A_{n+1} (en particular de algún U_1), entonces $f_{n+1}(\alpha) = \beta$, donde β es componte frontera de A'_{n+1}, de esta manera:

$$\beta = f_{n+1}(\alpha) = (g \circ \varphi)(\alpha) = \eta_{W'} \circ \overline{\varphi}_{U_1}(\alpha) = \eta_{W'}(\overline{\varphi}_{U_1}(\alpha)) = \eta_{W'}(\alpha))$$

Como $\beta = \eta_{W'}(\alpha))$, entonces $h(U^*_\alpha) = V^*_\beta$, es decir, f_{n+1} cumple la condición dada en la Observación 1. Luego, la terna $(f_{n+1}, A_{n+1}, A'_{n+1})$ verifica todas las condiciones y definimos $f : S \longrightarrow S'$ como la extensión natural de la sucesión $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Por último, se describirán los cambios en la prueba al considerar el resto de clases de orientación.

1. S y S' son orientables.

   a) Si son ambas de género infinito, basta no considerar a. del Lema 2.2.

   b) Si son ambas de género finito k, definimos $A_0 = B_m$ donde m es el primer entero que cumple que el género reducido de B_m es k. Luego, construimos A'_0 y f_0 sin considera a., b. del Lema 2.2.

2. S y S' son par/impar, es decir, tienen k cross caps tomamos $A_0 = B_m$ donde el género reducido de B_m es mayor que k. Luego, construimos A'_0 con f_0 dependiendo el caso si S y S' son o no de género infinito y para el resto de ternas se hace como en los casos anteriores. ■

BIBLIOGRAFÍA

[Ahl60] Ahlfors, Lars V. and Sario, Leo, *Riemann surfaces*, Princeton, Berlin, 1960.

[Hur41] W. Hurewicz and H. Wallman.*Dimension theory.* Princeton University Press. New Jersey, 1941.

[Ian63] Ian Richards. *On the classification of noncompact surfaces.* Trans. Amer. Math. Soc., 106:259-269, 1963.

[Jor1866] C. Jordan. *Sur la déformation des surfaces.* J. de Mathématiques Pures et Appliquées 2e 11, 1866.

[Ker23] B. Kerékjártó. *Vorlesungen über Topologie I.* Springer, 1923.

[Mob1861] A.F. Möbius. *Zur theorie der polyëder und der elementarverwandtsschaft.* Oeuvres Complètes 2, 1861

[Ray60] Frank Raymond. *The end point compactification of manifolds.* Pacific J. Math., 10:947-963, 1960.

[Sha11] Anant R. Shastri.*Elements of Differential Topology.* CRC Press 2011.

[VAL09] Valdez, F. *Infinite genus surfaces and irrational polygonal billiards.* Geom Dedicata 143, 143 (2009). https://doi.org/10.1007/s10711-009-9378-x