UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN NICOLÁS DE HIDALGO
Y
UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

POSGRADO CONJUNTO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

INSTITUTO DE FÍSICA Y MATEMÁTICAS
Y
CENTRO DE CIENCIAS MATEMÁTICAS

UNA APLICACIÓN DEL TEOREMA DE HALPERN-LAÜCHLI A SUBCONJUNTOS PERFECTOS

TESIS

Que para optar por el grado de:
Maestro en Ciencias Matemáticas

Presenta:
Emmanuel Alejandro Balderas Cristóbal

Tutor:
Dr. Osvaldo Guzmán González
Centro de Ciencias Matemáticas, UNAM Morelia

Morelia, Michoacán, México
Octubre de 2021

Dedicado a mi familia...

Agradecimientos

Primeramente quiero agradecer a dios por permitirme seguir con vida, especialmente en estos tiempos en los que nos encontramos. Le agradezco por permitirme terminar mis estudios de maestría y por darme la fuerza de voluntad para seguir adelante.

Agradezco a la Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, a la Universidad Nacional Autónoma de México y al Centro de Ciencias Matemáticas por permitirme continuar con mis estudios de maestría.

Muchas gracias a mis profesores y sinodales Salvador, Daniel, Fernando, Michael y Osvaldo por revisar esta tesis y por sus valiosos comentarios y observaciones que ayudaron a mejorar mucho este trabajo. Muchas gracias a todos por ser unos excelentes profesores y por compartir sus conocimientos con sus alumnos.

Agradezco especialmente a mi tutor Osvaldo por permitirme trabajar con el y por guiarme a lo largo de mis estudios de maestría. Te agradezco por toda la paciencia que me tuviste y aunque seguramente escuchas esto muy seguido, que sepas que eres un matemático excepcional y eres una referencia no sólo a nivel profesional, sino también personal.

Finalmente agradezco y dedico este trabajo a mi familia; especialmente a mis padres, a mis hermanos y a mi sobrino. Muchas gracias por todo el apoyo, por siempre tenerme fe y por ser mi principal fuerza para seguir adelante. Hoy más que nunca me doy cuenta de lo afortunado que soy por tenerlos a mi lado. Muchas gracias por todo.

Resumen

Sea P un subconjunto perfecto de la recta real y consideremos una partición finita y abierta de $[P]^2$; entonces existe Q subconjunto perfecto de P tal que $[Q]^2$ está contenido en un solo pedazo de la partición. La generalización natural de este resultado para $n \geq 3$ es falso. Dado P un subconjunto perfecto de la recta real, es posible encontrar una partición finita y abierta de $[P]^n$ ($n \geq 3$) de modo tal que no existen subconjuntos perfectos de P monocromáticos. Galvin conjeturó que en el caso $n \geq 3$, si bien no podemos encontrar subconjuntos perfectos monocromáticos, es posible encontrar subconjuntos perfectos que intersectan a lo más a $(n-1)!$ pedazos de la partición. El mismo Galvin demostró el caso $n = 3$ en 1961. Finalmente, en 1981 Andreas Blass demostró la generalización del resultado de Galvin para dimensiones finitas arbitrarias.

En el presente trabajo se presenta el material necesario para entender y desarrollar la demostración del Teorema de Blass, además de analizar algunas consecuencias de este.

Palabras clave: subconjunto, perfecto, monocromático, partición, finita, abierta.

Abstract

Let P be a perfect subset of the real line and suppose we have a finite open partition of $[P]^2$; then there exists Q a perfect subset of P such that $[Q]^2$ is contained in a single piece of the partition. The generalization of this result for $n \geq 3$ is false. Given P a perfect subset of the real line, it is possible to find a finite open partition of $[P]^n$ $(n \geq 3)$ such that there aren't monochromatics perfect subsets. Galvin conjetured that in the case $n \geq 3$, we can't get a monochromatic perfect subset of P, but it is possible to get a perfect subset such that intersects at most $(n-1)!$ of the pieces. Galvin proved the case $n = 3$ in 1961. Finally, in 1981 Andreas Blass proved the generalization of the Galvin's Theorem for arbitrary finite dimensions.

In this job we present the necessary material to understand and develop the proof of the Blass's Theorem, in addition to analyzing some consequences of this.

Introducción

En [3], Galvin demostró lo siguiente: "Sea P un subconjunto perfecto de la recta real y consideremos una partición finita y abierta de $[P]^3$; entonces existe Q subconjunto perfecto de P tal que $[Q]^3$ intersecta a lo más a dos pedazos de la partición". El mismo Galvin conjeturó en 1969, la generalización de este resultado a una dimensión finita arbitraria; pero no fué hasta 1981 que Andreas Blass [1] demostraría dicha generalización.

En el presente trabajo se presenta el material necesario para entender y desarrollar la demostración de la generalización del resultado de Galvin; a la cual nos referiremos a lo largo de este trabajo como *el Teorema de Blass*.

En el primer capítulo introducimos conceptos y resultados básicos de la teoría de conjuntos y topología, así como algo de notación y algunas convenciones que seguiremos a lo largo de este trabajo. Aún con esto, se espera que el lector tenga un sólido conocimiento de la técnica de forcing, además de estar familiarizado con argumentos de combinatoria infinita y el uso de submodelos elementales (en caso de necesitarlo, el lector puede revisar [6] o bien [7]).

El segundo capítulo es dedicado a un importante resultado combinatorio; el Teorema de Halpern-Laüchli. Si bien existen diferentes versiones de este resultado, en este trabajo nos enfocaremos en dos versiones concretas, siendo la segunda versión la que usaremos para probar el Teorema de Blass.

Finalmente, el tercer capítulo está enfocado enteramente a la demostración Teorema de Blass, así como a algunas consecuencias directas de dicho resultado.

Índice general

AGRADECIMIENTOS **IV**

RESUMEN **V**

ABSTRACT **VI**

INTRODUCCIÓN **VII**

1. Preliminares **1**
1.1. Árboles 1
1.2. Teoría de Ramsey 6

2. Teorema de Halpern-Laüchli **12**
2.1. Dos versiones del Teorema de Halpern-Laüchli 12
2.2. Una aplicación de Halpern-Laüchli para Ultrafiltros 19

3. Teorema de Blass **23**

Bibliografía **32**

Capítulo 1

Preliminares

En este primer capítulo, se introducirán algunas definiciones y resultados básicos de teoría de conjuntos y topología que serán frecuentemente utilizados a lo largo de este trabajo.

1.1. Árboles

Definición 1. *Un árbol es un conjunto parcialmente ordenado $(T, \leq_T)$ de modo que T tiene un elemento mínimo llamado raíz y para cada $t \in T$ el conjunto de predecesores de t en T, $\{s \in T : s \leq_T t\}$ está bien ordenado.*

Cuando el orden del árbol no esté en controversia nos referiremos al árbol simplemente por T y no por $(T, \leq_T)$. A los elementos de T les llamamos *nodos*, el conjunto de predecesores de un nodo está explícitamente mencionado en la definición anterior. La *altura* de un nodo t, denotada $ht(t)$, es el tipo de orden del conjunto de predecesores de t. Una vez definida la altura de cada nodo, es posible definir los *niveles* de T; si α es un numero ordinal, el α-ésimo nivel de T es

$$Lev(\alpha, T) = \{s \in T : ht(s) = \alpha\}.$$

Ahora, la *altura del árbol* es $ht(T) = \text{mín}\{\alpha : Lev(\alpha, T) = \emptyset\}$. Una *rama* es un subconjunto linealmente ordenado $\subseteq$-maximal. Una *rama cofinal* es aquella que intersecta a todos los niveles del árbol. Al conjunto de todas las ramas de un árbol T, lo denotaremos por (T). Finalmente, un *subárbol* T' de T es un subconjunto de T de modo tal que si $t \in T'$, se tiene que $\{s \in T : s \leq_T t\} \subseteq T'$.

Ejemplo 2. *Cualquier conjunto bien ordenado es un árbol. En particular, cualquier ordinal α es un árbol.*

Ejemplo 3. *Para cualquier ordinal λ y cualquier conjunto no vació A, el conjunto de todas las funciones $f : \alpha \longrightarrow A$, donde $\alpha < \lambda$, denotado por $A^{<\lambda}$, es un árbol con el orden de la extensión de funciones; es decir, el orden inducido por $\subseteq$. Note que en este caso $(A^{<\lambda})$ es el conjunto de funciones $f : \lambda \longrightarrow A$.*

El ejemplo anterior es un tipo de árbol muy importante para nosotros, en especial el árbol

$2^{<\omega}$. Pronto veremos la relación que hay entre los subconjuntos perfectos de un espacio métrico completo y el conjunto 2^{ω}.

Sea $s \in 2^{<\omega}$, es decir, es una sucesión finita $s : n \longrightarrow 2$ de ceros y unos; el *cono* determinado por s es el subconjunto de 2^{ω}

$$[s] = \{f \in 2^{\omega} : f \restriction n = s\}.$$

Por otro lado, recuerde que si $2 = \{0, 1\}$ es dotado con la topología discreta, una base para la topología de 2^{ω} está dada por la colección de conjuntos

$$\{f \in 2^{\omega} : (\forall i < n)(f(k_i) = a_i)\},$$

donde claramente $n < \omega$ y para cada $i < n$, se tiene que $k_i < \omega$ y $a_i \in 2$. Note que para cada $s \in 2^{<\omega}$, $[s]$ es un abierto básico para 2^{ω}. Más aún, es fácil ver que la familia $\{[s] : s \in 2^{<\omega}\}$ es una base una para la topología de 2^{ω}. A partir de aquí siempre asumiremos que 2 tiene la topología discreta.

Algo que también usaremos, es la llamada concatenación de sucesiones. Si $s, t \in 2^{<\omega}$, digamos que $s = \langle s_0, ..., s_n\rangle$ y $t = \langle t_0, ..., t_m\rangle$, se define la *concatenación* de s con t como la sucesión

$$s^\frown t = \langle s_0, s_1, ..., s_n, t_0, t_1, ..., t_m\rangle.$$

En particular, si $s \in 2^{<\omega}$ y $k < 2$; entonces $s^\frown\langle k\rangle = s \cup \{\langle \mathrm{dom}(s), k\rangle\} = \langle s_0, ..., s_n, k\rangle$ que por comodidad escribiremos simplemente como $s^\frown\{k\}$.

Definición 4. *Sea λ un número ordinal y A un conjunto no vacío. Un árbol $T \subseteq A^{<\omega}$ es bien podado si para cada $\alpha \leq \beta < \lambda$, se tiene que cada nodo $s \in Lev(\alpha, T)$ tiene al menos un sucesor en $Lev(\beta, T)$.*

Veamos nuestro primer resultado sobre los subárboles de $2^{<\omega}$ y la topología de 2^{ω}.

Teorema 5. *Hay una correspondencia biyectiva entre la familia de subárboles bien podados de $2^{<\omega}$ y la familia de subconjuntos cerrados de 2^{ω}; esta correspondencia está dada por $T \longrightarrow (T)$.*

Demostración. Si $T \subseteq 2^{<\omega}$ es bien podado, entonces (T) es cerrado, ya que si $x \notin (T)$, entonces existe $n \in \omega$ tal que $s = x \restriction n \notin T$, por lo que $[s] \cap (T) = \emptyset$. Además, si $K \subseteq 2^{\omega}$ es un cerrado, entonces $T_K = \{x \restriction n : x \in K \;\&\; n \in \omega\}$ es claramente un árbol bien podado y $K = (T_K)$ con lo que podemos concluir que la función $K \longrightarrow T_K$ es la función inversa de la función en el enunciado del teorema. $\square$

Como mencionamos antes, estamos interesados en la relación que hay entre el espacio 2^{ω} y los subconjuntos perfectos de un espacio métrico completo. Para esto, conviene recordar algunas definiciones y resultados básicos de topología general.

Teorema 6. *Sea $\{X_n : n \in \omega\}$ una familia de espacios segundo numerables. Entonces $X = \prod_{n\in\omega} X_n$ es segundo numerable.*

Demostración. Para cada $n \in \omega$ sea $\mathscr{B}_n$ una base numerable para la topología de X_n. Recordemos que un conjunto abierto básico para X es de la forma

$$W = \pi_{n_0}^{-1}[U_0] \cap \cdots \cap \pi_{n_m}^{-1}[U_m],$$

donde $\{n_0, n_1, ..., n_m\} \in [\omega]^{<\omega}$ y cada $U_i \in \mathscr{B}_{n_i}$. Por lo tanto, la cantidad de elementos de una base para X puede calcularse como la cantidad de elementos de $[\omega]^{<\omega} \times [\bigcup_{n\in\omega} \mathscr{B}_n]^{<\omega}$, el cual es un conjunto numerable. □

Teorema 7 (Lema de Urysohn). *Un espacio X es un espacio normal si y sólo si siempre que A y B son subconjuntos cerrados y ajenos de X, existe una función continua $f : X \longrightarrow [0,1]$ tal que $f[A] \subseteq \{0\}$ y $f[B] \subseteq \{1\}$.*

Demostración. El regreso es inmediato por lo que sólo se demostrará la ida.
Sean A, B subconjuntos cerrados y ajenos de X. Enumere a $\mathbb{Q} \cap (0,1)$ como $\{q_n : n \in \omega \backslash 2\}$ y sean $q_0 = 0$ y $q_1 = 1$. De manera recursiva construiremos subconjuntos abiertos V_q tales que

(1) $X \backslash B = V_1$,

(2) $q < q'$ implica que $\overline{V_q} \subseteq V_{q'}$.

Como $A \subseteq V_1$, por la normalidad de X existe un subconjunto abierto V_0 tal que $A \subseteq V_0 \subseteq \overline{V_0} \subseteq V_1$.

Sea $n > 1$ y suponga que ya se han elegido los abiertos V_{q_i} para $i \leq n$. Existen $m, l \leq n$ tales que

$$q_l < q_{n+1} < q_m$$

y de forma tal que entre ellos no hay otros q_j. Por hipótesis recursiva $\overline{V_{q_l}} \subseteq V_{q_m}$ y la normalidad de X garantiza otra vez la existencia de un subconjunto abierto $V_{q_{n+1}}$ tal que

$$\overline{V_{q_l}} \subseteq V_{q_{n+1}} \subseteq \overline{V_{q_{n+1}}} \subseteq V_{q_m};$$

esto termina la construcción recursiva.

Defínase ahora $f : X \longrightarrow [0,1]$ por

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \notin V_1. \\ \inf\{q \in \mathbb{Q} : x \in V_q\} & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Inmediatamente se tiene que $f[A] \subseteq \{0\}$ y $f[B] \subseteq \{1\}$. Resta demostrar que f es continua lo cual se conseguirá al establecer que para cualesquiera $a, b \in (0,1)$ se tienen que $f^{-1}[[0,a)]$ y $f^{-1}[(b,1]]$ son conjuntos abiertos.

Si $x \in X$ es tal que $f(x) < a$, entonces $x \in V_q$ para algún $q < a$. Por otro lado si $x \in V_q$ para algún $q < a$, entonces $f(x) \leq q < a$; por lo tanto se tiene que

$$f^{-1}[[0,a)] = \bigcup\{V_q : q < a\}.$$

Por otra parte supongamos que $x \in X$ es tal que $b < f(x)$, entonces para cada $q \in \mathbb{Q}$ tal que $b < q < f(x)$ se tiene que $x \notin \overline{V_q}$. De igual forma si $x \notin \overline{V_q}$ para algún $q \in \mathbb{Q}$ tal que $b < q$, entonces se tiene que $b < q \leq f(x)$. Luego

$$f^{-1}[(b,1]] = \bigcup\{X \backslash \overline{V_q} : b < q\}.$$

Esto termina la demostración. □

Teorema 8 (Urysohn)**.** *Un espacio regular X es segundo numerable si y sólo si X puede encajarse en $[0,1]^\omega$.*

Demostración. Sea X regular y segundo numerable; entonces en particular X es un espacio normal.

Sea $\mathscr{B}$ una base numerable para la topología de X y sea

$$S = \{(U,V) \in \mathscr{B} \times \mathscr{B} : \overline{U} \subseteq V\}.$$

Note que S es numerable. Ahora para cada $s = (U,V) \in S$ considere una función continua $f_s : X \longrightarrow [0,1]$ tal que $f_s[\overline{U}] \subseteq \{0\}$ y $f_s[X \backslash V] \subseteq \{1\}$. Puesto que X es normal, el lema de Urysohn garantiza que tales funciones f_s existen. Defina $\varphi : X \longrightarrow [0,1]^S$ por $\varphi(x) = \langle f_s(x) : s \in S\rangle$. Entonces φ es un encaje puesto que la familia $\{f_s : s \in S\}$ separa puntos y separa puntos de conjuntos cerrados.

La otra parte de la demostración se sigue del hecho de que X es homeomorfo a un subespacio de un espacio segundo numerable y la propiedad de ser segundo numerable se preserva bajo subespacios. □

Corolario 9 (Teorema de metrización de Urysohn)**.** *Si X es un espacio topológico regular y segundo numerable, entonces X es metrizable.*

Teorema 10 (Tychonoff)**.** *El producto arbitrario de espacios es compacto si y sólo si cada factor es compacto.*

Demostración. Usando el hecho de que las proyecciones son funciones continuas y sobreyectivas se tiene la implicación de ida.

Supóngase que $\{X_s : s \in S\}$ es una familia de espacios compactos y sea $X = \prod_{s \in S} X_s$; se demostrará que X también es un espacio compacto.

Sea $\mathscr{G}$ un ultrafiltro sobre X. Probaremos que $\mathscr{G}$ tiene un punto de adherencia en X y en consecuencia, X es compacto. Para cada $s \in S$, note que

$$\pi_s[\mathscr{G}] = \{\pi_s(G) : g \in \mathscr{G}\}$$

es base para un filtro $\mathscr{G}_s$ sobre X_s. Sea x_s un punto de adherencia de $\mathscr{G}$, para cada $s \in S$. Defina

$$x = \langle x_s : s \in S\rangle \in X.$$

Sea $W = \pi_{s_0}^{-1}[U_0] \cap \pi_{s_1}^{-1}[U_1] \cap \cdots \cap \pi_{s_n}^{-1}[U_n]$ una vecindad básica abierta de x; es decir, $x_{s_i} \in U_i$. Fije $i \leq n$ arbitrario. Puesto que x_{s_i} es punto de adherencia de $\mathscr{G}_{s_i}$; para cada $A \in \mathscr{G}$ se tiene que $x_{s_i} \in \overline{\pi_{s_i}[A]}$; consecuentemente $U_i \cap \pi_{s_i}[A] \neq \emptyset$ y por lo tanto $A \cap \pi_{s_i}^{-1}[U_i]$. Como $A \in \mathscr{G}$ fue también arbitrario, por la maximalidad de $\mathscr{G}$ se sigue que $\pi_{s_i}^{-1}[U_i] \in \mathscr{G}$. Entonces $W \in \mathscr{G}$ y se concluye que $\mathscr{G}$ converge a x. Esto termina la demostración. $\square$

Teorema 11. *Sea $\{X_n : n \in \omega\}$ una familia de espacios metrizables. Entonces $\prod_{n\in\omega} X_n$ es un espacio metrizable. Más aún si X_n es completamente metrizable para cada $n \in \omega$, entonces $\prod_{n\in\omega} X_n$ es completamente metrizable.*

Si el lector lo desea puede consultar en [11] una demostración completa del teorema anterior.

Definición 12. *Un espacio topológico X es cero dimensional si la topología de X tiene una base de conjuntos clopens, es decir, conjuntos abiertos y cerrados a la vez.*

Usando los resultados anteriores se obtienen propiedades importantes del espacio 2^ω; a saber, que 2^ω es un espacio métrico compacto (por lo tanto completo), segundo numerable, cero dimensional (la familia de conos forma una base de conjuntos clopens) y sin puntos aislados.

Definición 13. *Sea X un conjunto. Una familia $\langle A_s : s \in 2^{<\omega} \rangle$ de subconjuntos de X es un esquema de Cantor si:*

(1) Para cada $s, t \in 2^{<\omega}$; si $s \subseteq t$, entonces $A_t \subseteq A_s$.

(2) Para cada $s \in 2^{<\omega}$, se tiene que $A_{s^\frown\{0\}} \cap A_{s^\frown\{1\}} = \emptyset$.

El siguiente resultado muestra la importancia de 2^ω para los espacios métricos completos.

Teorema 14. *Cada espacio métrico completo y perfecto contiene un subespacio homeomorfo al espacio 2^ω.*

Demostración. Sea (X, d) un espacio métrico completo. Sea $\langle A_s : s \in 2^{<\omega} \rangle$ un esquema de Cantor tal que para cualesquiera $s, t \in 2^{<\omega}$, lo siguiente ocurre.

(1) A_s es abierto no vacío para cada $s \in 2^{<\omega}$.

(2) Si $s \subseteq t$, entonces $\overline{A}_t \subseteq A_s$.

(3) Para cada $s \in 2^{<\omega}$, el diámetro de A_s es menor o igual a $\frac{1}{2^{dom(s)}}$.

Es posible construir el esquema por inducción sobre $dom(s)$. $A_\emptyset$ es cualquier bola de radio a lo más 1. Suponiendo definido A_s, como X es perfecto, A_s tiene al menos dos puntos x_0 y x_1. Por (3), $d(x_0, x_1) < \frac{1}{2^{dom(s)}}$; además, como X es regular y A_s es un conjunto abierto, existe $0 < r < \text{mín}\{d(x_0, x_1), \frac{1}{2^{dom(s)+1}}\}$ tal que $\overline{B(x_0, r)}$ y $\overline{B(x_1, r)}$ están contenidas en A_s. Hacemos $A_{s^\frown\{0\}} = B(x_0, r)$ y $A_{s^\frown\{1\}} = B(x_1, r)$. Así, la familia $\langle A_s : s \in 2^{<\omega} \rangle$ es un esquema de Cantor que satisface lo deseado. Sea $f \in 2^\omega$. Por la completéz de X

$$\bigcap\{A_{f\restriction n} : n \in \omega\} = \bigcap\{\overline{A}_{f\restriction n} : n \in \omega\} \neq \emptyset.$$

Más aún, por la propiedad (3), el conjunto $\bigcap\{A_{f\restriction n} : n \in \omega\}$ tiene un sólo elemento, digamos x_f. Sea $\varphi : 2^\omega \longrightarrow X$ dada por $\varphi(f) = x_f$ y sea $C = \varphi[2^\omega]$. Es muy sencillo ver que φ es una biyección entre 2^ω y C; además, φ es abierta puesto que para cada $s \in 2^{<\omega}$, $\varphi([s]) = C \cap A_s$. Note que los conjuntos de la forma $C \cap A_s$ forman una base para C y que $\varphi^{-1}[A_s \cap C] = \varphi^{-1}[A_s] = [s]$. Así, φ es continua y por lo tanto C es homeomorfo a 2^ω. $\square$

Definición 15. *Sea $T \subseteq 2^{<\omega}$ un árbol, decimos que T es perfecto si cada nodo $s \in T$ tiene dos sucesores incomparables (con respecto a $\leq_T$) en T.*

Ejemplo 16. *Si $T \subseteq 2^{<\omega}$ es un árbol perfecto y $s \in T$, entonces el árbol $T(s) := \{t \in T : t \leq s \vee s \leq t\}$ es un subárbol perfecto.*

Se sigue directamente de la definición anterior que si $T \subseteq 2^{<\omega}$ es un árbol perfecto, entonces (T) es un subconjunto perfecto de 2^ω.

1.2. Teoría de Ramsey

Comenzamos esta sección con el siguiente famoso enunciado: "Si más de n palomas ocupan n palomares, entonces al menos un palomar es ocupado por al menos dos palomas".

El enunciado anterior es conocido en la literatura como el *Principio del Palomar* o también como *Principio de Casillas.* Podemos reformular el Principio de Casillas en el siguiente principio combinatorio.

Teorema 17 (Principio de Casillas infinito)**.** *Supongamos que κ es un cardinal infinito y que A es un conjunto de cardinalidad κ. Si $A = \bigcup_{\alpha<\sigma} A_\alpha$, donde $\sigma < cf(\kappa)$, entonces existe $\alpha < \sigma$ tal que $|A_\alpha| = \kappa$.*

Podemos considerar al Principio de Casillas infinito como nuestro primer ejemplo de un *teorema sobre particiones.* Para dar una idea más general de lo que es un teorema sobre particiones necesitaremos la siguiente notación. Sea X un conjunto y κ un cardinal; $[X]^\kappa$ denota a la familia de los subconjuntos de X de cardinalidad κ. Una familia de conjuntos $\mathcal{P} = \{P_i : i \in I\}$ es una *partición* de $[X]^\kappa$ si

$$\bigcup\{P_i : i \in I\} = [X]^\kappa \text{ y } P_i \cap P_k = \emptyset \text{ para cada } i, k \in I, i \neq k.$$

Sea $f_\mathcal{P} : [X]^\kappa \longrightarrow I$ la única función f tal que $f^{-1}(i) = P_i$ para cada $i \in I$. Llamamos a $f_\mathcal{P}$ la *coloración canónica asociada a* $\mathcal{P}$. De igual forma, dada una coloración $f : [X]^\kappa \longrightarrow I$, hay una partición canónica de $[X]^\kappa$ asociada a f. Un conjunto $Y \subseteq X$ es *homogéneo* (o *monocromático*) para la partición $\mathcal{P}$ (así como para la coloración canónica asociada a $\mathcal{P}$) si existe $i_0 \in I$ tal que $[Y]^k \subseteq P_{i_0}$.

Definición 18. *Sean $\kappa, \lambda, \rho, \sigma$ cardinales, el símbolo*

$$\kappa \to (\lambda)^\rho_\sigma$$

significa que para cada conjunto X de cardinalidad κ y cualquier coloración de $[X]^\rho$ en σ

colores, digamos f, hay un subconjunto $Y \subseteq X$ tal que $|Y| = \lambda$ y Y es monocromático para f.

Note que el Principio de Casillas infinito implica que para cada cardinal infinito κ y para cada $\sigma < cf(\kappa)$, la relación $\kappa \to (\kappa)^1_\sigma$ se cumple.

Cualquier resultado de la forma $\kappa \to (\lambda)^\rho_\sigma$ es un teorema sobre particiones, pero no todos los teoremas sobre particiones son de esta forma. El estudio de dichos resultados es conocido como *Teoría de Ramsey* en honor al autor del siguiente teorema.

Teorema 19 (Teorema de Ramsey)**.** *Para cada par de naturales positivos k, l, tenemos*

$$\omega \to (\omega)^k_l$$

Demostración. Por inducción sobre k con l fijo. Para $k = 1$, es sólo un caso particular del Principio de Casillas infinito.

Supongamos que hemos probado el teorema para k, veamos que el teorema es cierto para $k + 1$. Sea $f : [\omega]^{k+1} \longrightarrow l$ una coloración de $[\omega]^{k+1}$ en l colores. Construiremos una sucesión estrictamente creciente de naturales $\{n_i : i < \omega\}$ y una sucesión $\subseteq$-decreciente de subconjuntos infinitos de ω, $\{A_i : i < \omega\}$ tales que para cada $i < \omega$ lo siguiente se cumple:

(1) para cada $n \in A_i$, $n_i < n$;

(2) para cada $a, b \in [A_i]^k$ $f(\{n_i\} \cup a) = f(\{n_i\} \cup b)$.

Comenzamos a construir dichas sucesiones como sigue. Sea $n_0 = 0$. Para $a \in [\omega \backslash \{0\}]^k$, sea $f_0(a) = f(a \cup \{0\})$. Note que f_0 es una coloración de $[\omega \backslash \{0\}]^k$ en l colores. Aplicando la hipótesis de inducción, podemos encontrar un subconjunto infinito $A_0 \subseteq \omega \backslash \{0\}$ que es monocromático con respecto de f_0. Note que A_0 satisface las condiciones (1) y (2).

Suponga que n_i y A_i han sido construido para $i < j$. Hacemos $n_j = \min A_{j-1}$. Para cada $a \in [A_{j-1} \backslash \{n_j\}]^k$, sea $f_j(a) = f(a \cup \{n_j\})$. Aplicamos la hipótesis de inducción para encontrar un subconjunto infinito $A_j \subseteq A_{j-1} \backslash \{n_j\}$ que es monocromático con respecto de f_j.

Sea $K = \{n_i : i < \omega\}$, Note que por la construcción de K y de $\{A_i : i < \omega\}$, tenemos que si $n \in K$ y $a, b \in [K \backslash (n+1)]^k$, entonces $f(a \cup \{n\}) = f(b \cup \{n\})$.

Sea $g : K \longrightarrow l$ definida por $g(n) = i_n$, donde i_n es tal que para cada $a \in [K \backslash (n+1)]^k$, $f(a \cup \{n\}) = i_n$. Ahora escogemos $i < l$ tal que $Y = g^{-1}(\{i\})$ es infinito. Veamos que Y es monocromático para f. Sea $a \in [Y]^{k+1}$ y sea $m = \min a$. Entonces

$$f(a) = f(\{m\} \cup a \backslash \{m\}) = g(m).$$

Esto termina la demostración. $\square$

El Teorema de Ramsey también tiene una versión finita; la demostración de dicho resultado que presentaremos aquí usa el siguiente lema, el cual es bien conocido como el *Lema de König*.

Lema 20 (Lema de König)**.** *Sea $\langle T, \leq_T\rangle$ un árbol de altura ω tal que $Lev(n,T)$ es finito para cada $n \in \omega$. Entonces T tiene un rama cofinal.*

Demostración. Sea $\langle T, \leq_T\rangle$ un árbol como en las hipótesis. Construiremos de forma recursiva una sucesión $\langle t_n : n \in \omega\rangle$ de elementos de T tales que para cada $n \in \omega$ se tiene lo siguiente:

(1) $t_n <_T t_{n+1}$;

(2) $t_n \in Lev(n,T)$;

(3) $|\{s \in T : t_n <_T s\}| = \aleph_0$.

Sea t_0 cualquier elemento en $Lev(0,T)$ tal que $|\{s \in T : t_0 <_T s\}| = \aleph_0$.

Supongamos que hemos encontrado t_n tal que satisface las condiciones deseadas. Como $Lev(n+1,T)$ es finito y como para cada s tal que $t_n <_T s$ existe $t \in Lev(n+1,T)$ tal que $t \leq_T s$; podemos encontrar $t \in Lev(n+1,T)$ tal que $t_n <_T t$ y además $|\{s \in T : t <_T s\}| = \aleph_0$. Escogemos como nuestro t_{n+1} a tal t.

Claramente, el conjunto $B = \{t_n : n \in \omega\}$ es una rama cofinal de T. □

Algo interesante es que su puede deducir el lema de König a partir del teorema de Tychonoff como sigue: Sea $(T, \leq_T)$ un árbol de altura ω y con niveles finitos. Para cada $n \in \omega$ consideramos $X_n = Lev(n,T)$ con la topología discreta y hacemos $X = \prod_{n\in\omega} X_n$. Como cada X_n es finito, en particular es compacto; así, por el Teorema de Tychonoff, X también es compacto. Para cada $n \in \omega$ definimos

$$K_n = \{\vec{a} = \langle a_i : i \in \omega\rangle \in X : \langle a_0, ..., a_n\rangle \in T\}.$$

Es decir, K_n es el conjunto de elementos de X cuyas primeras n-entradas siguen al árbol. Veamos que cada K_n es cerrado. Sean $n \in \omega$ y $\vec{a} = \langle a_i : i \in \omega\rangle \in X \backslash K_n$, entonces por definición se tiene que $\langle a_0, .., a_n\rangle \notin T$. Por otro lado, para cada $i \leq n$, sea $U_i = \{a_i\} \subseteq X_i$ y consideremos

$$W = \bigcap_{i\leq n} \pi^{-1}(U_i).$$

Como cada U_i es un conjunto abierto de X_i, tenemos que W es un subconjunto abierto de X; además, si $\vec{b} = \langle b_i : i \in \omega\rangle \in W$, entonces para cada $i \leq n$ se tiene que $b_i = a_i$, por lo que $\vec{b} \notin K_n$. Esto demuestra que cada K_n es cerrado.

Por otro lado, como T tiene altura ω, se tiene que $K_n \neq \emptyset$ para cada $n \in \omega$. Además, si $n < m$ entonces $K_m \subseteq K_n$, por lo que $\{K_n : n \in \omega\}$ es una sucesión de conjuntos cerrados con la propiedad de la intersección finita. Como X es compacto, se tiene que $\bigcap_{n\in\omega} K_n \neq \emptyset$. Finalmente, si $x \in \bigcap_{n\in\omega} K_n$, se sigue por construcción que x es una rama cofinal de T.

Como mencionamos antes, usaremos el Lema de König para demostrar una versión del Teorema de Ramsey para cardinales finitos.

Teorema 21 (Teorema de Ramsey finito). *Sean m, l, k números naturales positivos. Existe un número natural n tal que*

$$n \to (m)^k_l.$$

Demostración. Procederemos por contradicción. Supongamos que $m, l, k \in \omega \backslash \{0\}$ son tales que $n \nrightarrow (m)^k_l$ para cada $n \in \omega$. Es decir, para cada $f : [n]^k \longrightarrow l$, tenemos que f no tiene monocromáticos de tamaño m. Sea

$$F = \{f : (\exists n \in \omega)(f : [n]^k \longrightarrow l \;\; y \;\; f \textit{ no tiene monocromáticos de tamaño } m)\}$$

y consideremos $\langle F, \subseteq \rangle$. Notemos que

(1) $\langle F, \subseteq \rangle$ es un árbol.

(2) El nivel r de $\langle F, \subseteq \rangle$ consiste de todas las funciones $f \in F$ con dominio $[k + r - 1]^k$.

Por hipótesis sabemos que cada nivel de $\langle F, \subseteq \rangle$ es no vacío. Por otro lado, como sólo existen una cantidad finita de funciones de $[k + r - 1]^k$ en l, se sigue que los niveles de $\langle F, \subseteq \rangle$ son finitos. Por el Lema de König, $\langle F, \subseteq \rangle$ tiene una rama infinita, digamos B. Consideremos $g = \bigcup B$ y notemos que

(1) g es una funcion de $[\omega]^k$ en l y

(2) $g \restriction [n]^k \in F$ para cada $n \in \omega$.

Por el Teorema de Ramsey, existe $A \in [\omega]^\omega$ tal que A es monocromático para g. Sean $a_0 < a_i <, ..., < a_{m-1}$ los primeros m elementos de A y sea $n = a_{m-1} + 1$. Entonces $\{a_0, ..., a_{m-1}\}$ es un conjunto monocromático de tamaño m para $g \restriction [n]^k$. Esto último es una contradicción a la definición de F $\square$

Es un ejercicio muy fácil probar que $6 \to (3)^2_2$; sin embargo $5 \nrightarrow (3)^2_2$. Por otro lado, por el Teorema de Ramsey, tenemos $\omega \to (\omega)^2_2$, por lo que es natural preguntarse ¿para que cardinales κ ocurre que $\kappa \to (\omega_1)^2_2$? Por un ejemplo de Sierpiński, tenemos el siguiente lema.

Lema 22. $\mathfrak{c} \nrightarrow (\omega_1)^2_2$

Demostración. Vamos a reemplazar $\mathfrak{c}$ por $\mathbb{R}$. Sea $<$ el orden usual en $\mathbb{R}$ y sea $\lhd$ un buen orden en $\mathbb{R}$. Definimos $f : [\mathbb{R}]^2 \to 2$ por $f(\{x, y\}) = 0$ si y sólo si $<$ y $\lhd$ están de acuerdo en $\{x, y\}$. Si $Z \subseteq \mathbb{R}$ es homogéneo para f, entonces Z es bien ordenado por $<$ o por $>$, por lo tanto Z es numerable. $\square$

Sin embargo, para $\kappa > \mathfrak{c}^+$ tenemos $\kappa \to (\omega_1)^2_\omega$ y por lo tanto $\kappa \to (\omega_1)^2_2$.

Lema 23. $\mathfrak{c}^+ \to (\omega_1)^2_\omega$

Demostración. Fijemos una coloración $f : [I]^2 \longrightarrow \omega$, donde $|I| \geq \mathfrak{c}^+$.

Sea θ un cardinal regular suficientemente grande tal que $f, I \in H(\theta)$ y fijemos M un submodelo elemental ω-cerrado (es decir, $[M]^\omega \subseteq M$) de $H(\theta)$ tal que $f, I \in M$ y $|M| = \mathfrak{c}$. Como $|I| > \mathfrak{c}$, fijamos $j \in I \backslash M$.

Recursivamente escogemos $i_\xi \in I \cap M$ para $\xi < \omega_1$ tal que para cada $\eta < \xi$, tenemos que $i_\eta \neq i_\xi$ y $f(\{i_\eta, i_\xi\}) = f(\{i_\eta, j\})$. Para encontrar tal i_ξ, consideramos $D = \{i_\eta : \eta < \xi\}$ y definimos $g : D \longrightarrow \omega$ por

$$g(i) = f(\{i, j\}).$$

Entonces $g, D \in M$ ya que M es ω-cerrado; además el enunciado

$$\exists y[y \notin D \wedge \forall i \in D[f(\{i, y\}) = g(i)]]$$

es un enunciado sobre objetos de M que es cierto en $H(\theta)$ (tomando $y = j$); por lo tanto también es cierto en M; así, usamos tal y como i_ξ.

Ahora fijamos $k \in \omega$ tal que $Z = \{\eta < \omega_1 : f(\{i_\eta, j\})\}$ es no numerable. Entonces cada $p \in [Z]^2$ es de la forma $\{i_\eta, i_\xi\}$ para algunos $\eta < \xi < \omega_1$ y $f(p) = f(\{i_\eta, j\}) = k$. $\square$

Concluimos esta sección con el bien conocido *Teorema de Erdős-Rado*, el cual es una generalización del lema anterior.

Sea κ un cardinal infinito arbitrario. Por recursión sobre $n < \omega$, definimos

$$\exp_0(\kappa) = \kappa;$$

$$\exp_{n+1}(\kappa) = 2^{\exp_n(\kappa)}.$$

Teorema 24 (Erdős-Rado). $(\exp_n(\kappa))^+ \rightarrow (\kappa^+)^{n+1}_\kappa$ *para cualquier cardinal infinito* κ *y cualquier* $n < \omega$.

Demostración. Por inducción sobre n con κ un cardinal infinito fijo. Para $n = 0$ el teorema es sólo un caso particular del Principio de Casillas infinito,

Supongamos que $n > 0$ y que $(\exp_{n-1}(\kappa))^+ \rightarrow (\kappa^+)^n_\kappa$. Para simplificar notación, hacemos $\lambda = (\exp_{n-1}(\kappa))$ y $\mu = (\exp_n(\kappa))^+$. Sea $f : [\mu]^{n+1} \longrightarrow \kappa$ una coloración.

Sea θ un cardinal regular suficientemente grande tal que $\mu, f \in H(\theta)$ y sea M un submodelo elemental de $H(\theta)$ tal que:

(1) $f, \mu \in M$.

(2) $|M| = \exp_n(\kappa)$.

(3) $[M]^\lambda \subseteq M$.

Como $\mu > |M|$, podemos fijar $\alpha \in \mu \backslash M$. Recursivamente escogemos $\beta_\xi \in \mu \cap M$ para $\xi < \lambda^+$ tal que $a \notin \{\beta_\eta : \eta < \xi\}$ y para cada $a \in [\{\beta_\eta : \eta < \xi\}]^n$ se tiene que

$$f(a \cup \{\beta_\xi\}) = f(a \cup \{\alpha\}).$$

Veamos como encontrar β_ξ. Supongamos que hemos construido $D = \{\beta_\eta : \eta < \xi\}$ que satisface lo requerido. Definimos $g : [D]^n \longrightarrow \kappa$ por

$$g(a) = f(a \cup \{\alpha\}).$$

Note que por (3), tenemos que $g, D \in M$; además el enunciado

$$\exists \alpha' [\alpha' \notin D \wedge \forall a \in [D]^n [f(a \cup \{\alpha'\}) = g(a)]]$$

es un enunciado sobre los objetos $f, g, D \in M$ que es cierto en $H(\theta)$ (podemos tomar $\alpha = \alpha'$), por lo tanto también es cierto en M. De esta forma podemos escoger en M, un β_ξ que satisface lo requerido.

Sea $Z = \{\beta_\xi : \xi < \lambda^+\}$ y sea $g' : [Z]^n \longrightarrow \kappa$ definida como g, es decir

$$g'(a) = f(a \cup \{\alpha\}).$$

Por hipótesis de inducción, existe $H \subseteq Z$ monocromático para g' de cardinalidad κ^+; entonces, por construcción H también es monocromático para f de cardinalidad κ. Esto termina la demostración. $\square$

Capítulo 2

Teorema de Halpern-Laüchli

El Teorema de Halpern-Laüchli es un importante resultado combinatorio que fue probado originalmente como un lema técnico que permitió una demostración posterior de que el Teorema del ideal primo Booleano es estrictamente más débil que el Axioma de Elección; sin embargo, se ha observado que el teorema de Halpern-Laüchli podría tener un interés independiente. Desde entonces, se han probado diferentes versiones del Teorema Halpern-Laüchli. En este capítulo, nosotros nos enfocaremos en dos versiones de dicho teorema y probaremos que ambas versiones son equivalentes.

2.1. Dos versiones del Teorema de Halpern-Laüchli

La primer versión del teorema de Halpern-Laüchli que veremos en esta sección la llamaremos "Halpern-Laüchli versión subárboles fuertes" con el fin de diferenciarla de una versión posterior. Más adelante demostraremos que ambas versiones son equivalentes y nos referiremos a ellas de forma indistinta.

En la literatura se pueden encontrar diferentes demostraciones de la versión de Halpern-Laüchli con subárboles fuertes. La demostración que presentamos aquí, de la autoría de Dobrinen y Laver [2] (aunque fué originalmente descubierta por Harrington); está basada en el método de forcing y en el teorema de Erdős-Rado.

Definición 25. *Sea $T \subseteq \omega^{<\omega}$ un árbol de ramificación finita sin nodos terminales. Decimos que $S \subseteq T$ es un subárbol fuerte si:*

1. *Existe $L = \{l_n : n \in \omega\} \in [\omega]^\omega$ tal que S es subárbol de $T \restriction L$.*
2. *Para cada $s \in S$ tal que $|s| = l_n$ y cada $i \in succ_T(s)$, existe $s' \in S$ tal que $|s'| = l_{n+1}$ y además $s^\frown\{i\} \subseteq s'$.*

Diremos que S es un subárbol fuerte finito si existe un conjunto finito $L \subseteq \omega$, digamos $L = \{l_0, ..., l_k\}$ y para cada $n < k - 1$, si $s \in S$ es tal que $|s| = l_n$, entonces se tiene que para cada $i \in succ_T(s)$, existe $s' \in S$ tal que $|s'| = l_{n+1}$ y además $s^\frown\{i\} \subseteq s'$.

Definición 26. *Sea $1 < d < \omega$ y sean T_i, $i < d$, árboles. Definimos*

$$\bigotimes_{i<d} T_i = \{(s_0, ..., s_{d-1}) \in \prod_{i<d} T_i : (\exists l \in \omega)(\forall i < d)(s_i \in Lev(l, T_i)\}.$$

Teorema 27 (Halpern-Laüchli versión subárboles fuertes)**.** *Sea $1 < d < \omega$ y sean $T_i \subseteq \omega^{<\omega}$ ($i<d$) árboles de ramificación finita, sin hojas y tales que cada nodo tiene al menos dos sucesores inmediatos. Para cada coloración*

$$c : \bigotimes_{i<d} T_i \longrightarrow 2,$$

existen $L \in [\omega]^\omega$ y subárboles fuertes $S_i \subseteq T_i$ ($i<d$), con niveles de ramificación L tales que $\bigotimes_{i<d} S_i$ es monocromático.

Demostración. Sea $c : \bigotimes_{i<d} T_i \longrightarrow 2$ dada. Sea κ tal que $\kappa \to (\omega_1)^{2d}_\omega$; Tal κ existe por el Teorema de Erdős-Rado. La siguiente noción de forcing $\mathbb{P}$ agrega κ ramas en cada T_i, $i < d$. $\mathbb{P}$ es el conjunto de condiciones p tal que p es una función de la forma

$$p : d \times \vec{\delta}_p \longrightarrow \bigcup_{i<d} Lev(l_p, T_i),$$

donde

(1) $\vec{\delta}_p \in [\kappa]^{<\omega}$,

(2) $l_p < \omega$ y

(3) para cada $i < d$, $\{p(i, \delta) : \delta \in \vec{\delta}_p\} \subseteq Lev(l_p, T_i)$.

El orden en $\mathbb{P}$ es la inclusión de las imágenes con las mismas entradas, es decir, $q \leq p$ si y sólo si $l_q \geq l_p$, $\vec{\delta}_p \subseteq \vec{\delta}_q$ y para cada $(i, \delta) \in d \times \vec{\delta}_p$, $p(i, \delta) \subseteq q(i, \delta)$.

Si bien no lo necesitaremos, es posible probar que $\mathbb{P}$ es equivalente a agregar κ reales de Cohen a través de cada T_i, $i < d$.

Antes de seguir con la demostración, introducimos la siguiente notación y las siguientes convenciones.

- Para cada $i \in d$ y $\alpha \in \kappa$, $\dot{b}_{i,\alpha}$ denota la α-ésima rama genérica agregada por $\mathbb{P}$ a través de T_i.
- Si $a \in [\kappa]^d$, siempre que escribamos $a = \{a_i : i < d\}$, asumiremos que los $a_{i's}$ están en su enumeración creciente.
- Si $K_i \subseteq \kappa$, $i < d$, son subconjuntos no vacíos y ajenos por pares y $a \in \prod_{i<d} K_i$, entonces a determina un elemento de $[\kappa]^d$, por lo que veremos a a como un elemento de $[\kappa]^d$.
- Para cada $a = \{a_i : i < d\} \in [\kappa]^d$, $\dot{b}_a$ denota $\langle \dot{b}_{0,a_0}, ..., \dot{b}_{d-1,a_{d-1}} \rangle$.

- Para cada $a = \{a_i : i < d\} \in [\kappa]^d$ y cada $l \in \omega$, $\dot{b}_a \restriction l$ denota $\{\dot{b}_{i,a_i} \restriction l : i < d\}$.

Sea $\dot{\mathfrak{U}}$ un $\mathbb{P}$-nombre para un ultrafiltro no principal sobre ω. Nuestro objetivo ahora es encontrar subconjuntos infinitos y ajenos por pares $K_i \subseteq \kappa$, $i < d$, y un conjunto de condiciones compatibles $\{p_a : a \in \prod_{i<d} K_i\}$ tales que tengan las mismas imágenes y tales que para algún $\epsilon \in 2$ fijo, para cada $a \in \prod K_i$, p_a forza que $\{l \in \omega : c(\dot{b}_a \restriction l) = \epsilon\} \in \dot{\mathfrak{U}}$.

Para cada $a = \{a_i : i < d\} \in [\kappa]^d$, escoja una condición $p_a \in \mathbb{P}$ tal que:

(1) $a \subseteq \vec{\delta}_{p_a}$;

(2) p_a conoce un valor $\epsilon_a \in 2$, tal que $p_a \Vdash$ "$\{l \in \omega : c(\dot{b}_a \restriction l) = \epsilon_a\} \in \dot{\mathfrak{U}}$";

(3) $c(\{p_a(i, a_i) : i < d\}) = \epsilon_a$.

Tales condiciones p_a pueden obtenerse como sigue. Dado $a \in [\kappa]^d$, escoja cualquier condición $p_a^1 \in \mathbb{P}$ tal que $a \subseteq \vec{\delta}_{p_a^1}$. Como $\mathbb{P}$ fuerza que $\dot{\mathfrak{U}}$ es un ultrafiltro en ω, se tiene que $p_a^1 \Vdash$ "existe $\epsilon \in 2$ tal que $\{l \in \omega : c(\dot{b}_a \restriction l) = \epsilon\} \in \dot{\mathfrak{U}}$". Más aún, existe $p_a^2 \leq p_a^1$ que determina el valor de ϵ, digamos ϵ_a. Finalmente como p_a^2 fuerza que $\{l \in \omega : c(\dot{b}_a \restriction l) = \epsilon_a\} \in \dot{\mathfrak{U}}$, existe $p_a^3 \leq p_a^2$ que conoce $l \in \omega$ tal que $c(\dot{b}_a \restriction l) = \epsilon_a$. Si $l_{p_a} < l$, haga p_a cualquier condición tal que $p_a \leq p_a^3$ y $l_{p_a} = l$. Si $l_{p_a} \geq l$, haga $p_a = \{((i,\delta), p_a^4(i,\delta) \restriction l) : (i,\delta) \in d \times \vec{\delta}_{p_a^4}\}$, es decir, restringimos las imágenes de p_a^3 para que tengan longitud l. Entonces p_a fuerza que $\dot{b}_{p_a} \restriction l = \{p_a(i, a_i) : i < d\}$ y por lo tanto p_a fuerza la condición (4).

A partir de aquí, siempre que $a = \{a_i : i < d\} \in [\kappa]^d$, el conjunto $\vec{\delta}_{p_a}$ será igual al conjunto $\{a'_i : i < |\vec{\delta}_{p_a}|\}$. Entonces para cada $i < d$, existe $j < |\vec{\delta}_{p_a}|$ tal que $a_i = a'_j$

Sean $a, b \in [\kappa]^d$. Decimos que $a \backsimeq b$ si:

(1) $k_a = |\vec{\delta}_{p_a}| = |\vec{\delta}_{p_b}| = k_b$ y $\epsilon_a = \epsilon_b$.

(2) Si $\vec{\delta}_{p_a} = \{a'_i : i < k_a\}$ y $\vec{\delta}_{p_b} = \{b'_i : i < k_a\}$, $a'_i \in a$ si y sólo si $b'_i \in b$ para cada $i < k_a$.

(3) $p_a((i, a'_j)) = p_b((i, b'_j))$ para cada $i < d$ y $j < k_a = k_b$.

Note que si $a \backsimeq b$ entonces por (3) tenemos que $l_{p_a} = l_{p_b}$. Claramente $\backsimeq$ es una relación equivalencia. Si $a \in [\kappa]^d$, la clase de a será denotada por $[a]$ y el conjunto de clases de equivalencia será $CL = \{[a] : a \in [\kappa]^d\}$. Note que sólo hay una cantidad numerable de clases de equivalencia.

Sea $\mathscr{F}$ el conjunto de las funciones $h : 2d \longrightarrow 2d$ tales que para cada $i < d$, $h(2i), h(2i+1) \in \{2i, 2i+1\}$. Para cada $x = \{x_0, ..., x_{2d-1}\} \in [\kappa]^{2d}$, y cada $h \in \mathscr{F}$, sean $a(h, x) = \{x_{h(i)} : i \text{ es par}\}$ y $b(h, x) = \{x_{h(i)} : i \text{ es impar}\}$.

Definimos ahora una coloración en $[\kappa]^{2d}$ como sigue. Recuerde que si $a = \{a_i : i < d\} \in [\kappa]^d$, $\vec{\delta}_{p_a} = \{a'_i : i < k_a\}$. Sea

$$g : [\kappa]^d \times [\kappa]^d \longrightarrow CL \times CL \times [\omega^2]^{<\omega}$$

definida por

$$g(a, b) = ([a], [b], \{(i, j) : a'_i = b'_j\}).$$

Finalmente definimos

$$f : [\kappa]^{2d} \longrightarrow (CL \times CL \times [\omega^2]^{<\omega})^{\mathscr{F}},$$

por

$$f(x) = \{(h, g(a(h, x), b(h, x))) : h \in \mathscr{F}\}.$$

Como CL es numerable y $\mathscr{F}$ es finita, entonces $(CL \times CL \times [\omega^2]^{<\omega})^{\mathscr{F}}$ es numerable. Así, f define una coloración de $[\kappa]^{2d}$ en ω colores.

Como $\kappa \to (\omega_1)^{2d}_{\omega}$, podemos encontrar $K \in [\kappa]^{\omega_1}$ monocromático para f. Tomamos $K' \subseteq K$ tal que $|K'| = \aleph_1$, entre cualesquiera dos elementos de K' hay un elemento de $K \backslash K'$ y $\min(K') > \min(K)$. Ahora escogemos $K_i \subseteq K'$, $i < d$, tales que $K_0, ..., K_{d-1} \in [K']^{\omega}$, cada K_i tiene tipo de orden ω y para cada $i < d - 1$, se cumple que $\min(K_i) < \min(K_{i+1})$.

Afirmación 28. *Para cada $c = \{c_i : i < d\}$ y $e = \{e_i : i < d\}$ elementos de $\prod_{i<d} K_i$, tenemos que $c \backsimeq e$.*

Demostración. Sean c, e como en las hipótesis. Sea $i : 2d \longrightarrow 2d$, la función identidad. Escogemos $x, y \in [K']^{2d}$ tales que:

(1) $x = \{x_i : i < 2d\}$ y $y = \{y_i : i < 2d\}$.

(2) Para cada $i < d$, $x_{2i}, x_{2i+1}, y_{2i}, y_{2i+1}$ están en K_i.

(3) Para cada $i < d$, $x_{2i} = c_i < x_{2i+1}$ y $y_{2i} = e_i < y_{2i+1}$.

Note que $a(i, x) = c$ y $a(i, y) = e$. Como $x, y \in [K']^{2d}$ y K' es monocromático, entonces

$$\begin{aligned} \{(h, g(a(h, x), b(h, x))) : h \in \mathscr{F}\} &= f(x) \\ &= f(y) \\ &= \{(h, g(a(h, y), b(h, y))) : h \in \mathscr{F}\}. \end{aligned}$$

De esta forma, como $i \in \mathscr{F}$,

$$\begin{aligned} &g(a(i, x), b(i, x)) \\ &\quad = g(c, b(i, x)) \\ &\quad = g(e, b(i, y)) \\ &\quad = g(a(i, y), b(i, y)), \end{aligned}$$

por lo que, usando la definición de g, concluimos que $[c] = [e]$. Esto termina la demostración de la afirmación. □

Sea $z = \{z_i : i < d\} \in \prod_{i<d} K_i$, hacemos $\epsilon = \epsilon_z$, $k = k_z$ y para cada $i < d$, hacemos $t_i = p_z(i, z_i)$. Note que por la afirmación anterior y por la definición de la relación $\backsimeq$, si $a \in \prod_{i<d} K_i$, entonces $\epsilon = \epsilon_a$, $k_a = k$ y para cada $i < d$, tenemos que $t_i = p_a(i, a_i)$.

Afirmación 29. *Sean* $c = \{c_i : i < d\}$ *y* $e = \{e_i : i < d\}$ *elementos de* $\prod_{i<d} K_i$*. Si* $c'_i = e'_j$*, entonces* $i = j$*.*

Demostración. Sean $c, e \in \prod_{i<d} K_i$ y supongamos que $c'_i = e'_j$. Defina $h \in \mathscr{F}$ de la siguiente manera. Sea $l \in 2d$ par.

- Si $c_l < e_l$, definimos $h(l) = l$ y $h(l+1) = l+1$.
- Si $e_l < c_l$, definimos $h(l) = l+1$ y $h(l+1) = l$.
- Si $c_l = e_l$, definimos $h(l) = h(l+1) = l$.

Claramente $h \in \mathscr{F}$. Ahora escogemos $x \in [K']^{2d}$ tal que $a(h,x) = c$, $b(h,x) = e$. Tal x puede obtenerse como sigue.

- Si $c_l \neq e_l$, entonces ponemos a c_l y e_l en x.
- Si $c_l = e_l$, entonces ponemos a c_l en x. Como $c_l \in K_l$ y K_l tiene tipo de orden ω, existe $w \in K_l$ tal que $c_l < w$. Hacemos también que w este en x.

Note que x tiene dos elementos en cada K_i y por construcción $a(h,x) = c$ y $b(h,x) = e$.

Por otro lado, usando que entre cualesquiera dos elementos de K' existe un elemento de $K \backslash K'$, podemos encontrar $r = \{r_i : i < d\} \subseteq K$ tal que si $c_l \neq e_l$, entonces r_l está entre c_l y r_l y si $c_l = e_l$, entonces $r_l = c_l = e_l$.

De la misma forma en la que obtuvimos a x, podemos encontrar $y, z \in [K]^{2d}$ tales que:

- $a(h,y) = c$ y $b(h,y) = r$ y
- $a(h,z) = r$ y $b(h,z) = e$.

Por hipótesis $c'_i = e'_j$, entonces (i,j) es un elemento de la tercera coordenada de $g(c,e) = g(a(h,x), b(h,x))$. Como K es monocromático, entonces $f(x) = f(y) = f(z)$, así

$$g(a(h,x), b(h,x)) = g(a(h,y), b(h,y)) = g(a(h,z), b(h,z))$$

y por lo tanto,

$$g(c,e) = g(c,r) = g(r,e).$$

Así, (i,j) está en la tercera coordenada de $g(c,r)$ y $g(r,e)$. Es decir,

$$(i,j) \in \{(m,l) : c'_m = r'_l\} \ y \ (i,j) \in \{(m,l) : r'_m = e'_l\}.$$

Finalmente, de lo anterior concluimos que $r'_j = c'_i = e'_j = r'_i$ y por lo tanto $i = j$.

□

Afirmación 30. *El conjunto* $\{p_a : a \in \prod_{i<d} K_i\}$*, es un conjunto de condiciones compatibles.*

Demostración. Sean $c = \{c_i : i < d\}$ y $e = \{e_i : i < d\}$ elementos de $\prod_{i<d} K_i$. Note que para probar la afirmación es suficiente demostrar que si $\delta \in \vec{\delta}_{p_c} \cap \vec{\delta}_{p_e}$, entonces para cada $i < d$, $p_c(i, \delta) = p_e(i, \delta)$; es decir, si (i, δ) esta en la intersección de los dominios de las condiciones p_c y p_e, entonces ambas condiciones valen lo mismo en (i, δ)

Sea $\delta \in \vec{\delta}_{p_c} \cap \vec{\delta}_{p_e}$, entonces existen i, j menores que k tales que $c'_i = \delta = e'_j$. Por la afirmación anterior, tenemos que $i = j$. Finalmente, por la definición de la relación $\backsimeq$ y el hecho de que $[c] = [e]$, para cada $l < d$,

$$p_c(l, \delta) = p_c(l, c'_i) = p_e(l, e'_j) = p_e(l, \delta).$$

□

Construiremos subárboles fuertes $S_i \subseteq T_i$, para cada $i < d$, de manera inductiva. Comenzamos la inducción haciendo $\text{stem}(S_i)$ igual a t_i, para cada $i < d$ (recuerde que para cada $i < d$, $t_i = p_z(i, z_i)$). Sea l_0 la altura de los $t_{i's}$.

Suponga que $1 \leq m < \omega$, que hay niveles $l_0, .., l_{m-1}$ y que hemos construido subárboles fuertes finitos $S_i \restriction l_{m-1}$ de T_i, $i < d$, tales que para cada $j < m$, c toma el valor de ϵ en cada elemento de $\prod_{i<d} Lev(l_j, S_i)$.

Para cada $i < d$, sea X_i el conjunto de extensiones inmediatas en T_i de los nodos en $Lev(l_{m-1}, S_i)$ y sea $J_i \subseteq K_i$ del mismo tamaño que X_i. Para cada $i < d$, etiquetamos los nodos en X_i como $X_i = \{q(i, \delta) : \delta \in J_i\}$. Note que para cada $a \in \prod_{i<d} J_i$ y cada $i < d$, $t_i \subseteq q(i, a_i)$.

Construiremos una condición $q \in \mathbb{P}$ tal que para cada $a \in \prod_{i<d} J_i$, se tiene que $q \leq p_a$. Sea $\vec{\delta}_q = \bigcup\{\vec{\delta}_{p_a} : a \in \prod_{i<d} J_i\}$. Para cada (i, δ) con $i < d$ y $\delta \in \vec{\delta}_q \backslash J_i$, existe al menos un conjunto $a \in \prod_{i<d} J_i$ y algún $j' < k$ tales que $a'_{j'} = \delta$ (recuerde que $\vec{\delta}_{p_a} = \{a'_i : i < k\}$). Note que si existe otro elemento $b \in \prod_{i<d} J_i$ tal que $\delta \in \vec{\delta}_{p_b}$, entonces como las condiciones $\{p_a : a \in \prod_{i<d} J_i\}$ son compatibles, tenemos que $p_a(i, \delta) = p_b(i, \delta)$. Sea $q(i, \delta)$ la extensión mínima de $p_a(i, \delta)$ en el nivel $l_{m-1} + 1$ de T_i respecto al orden lexicográfico.

Definimos

$$q = \{((i, \delta), q(i, \delta)) : i \times \delta \in d \times \vec{\delta}_p\}.$$

Dado $a \in \prod_{i<d} J_i$, por construcción para cada $(i, \delta) \in i \times \vec{\delta}_{p_a}$, se tiene que $p_a(i, \delta) \subseteq q(i, \delta)$, por lo tanto $q \leq p_a$.

Para construir el m-ésimo nivel de los subárboles fuertes S_i $(i < d)$, tomamos $r \leq q$ en $\mathbb{P}$ tal que r determina un nivel $l_m > l_q$ para el cual $c(\dot{b}_a \restriction_{l_m}) = \epsilon$ para cada $a \in \prod_{i<d} J_i$. Lo anterior puede hacerse ya que;

- para cada $a, b \in \prod_{i<d} J_i$, $a \backsimeq b$, por lo que $\epsilon_a = \epsilon = \epsilon_b$ y
- como $q \leq p_a$ para cada $a \in \prod_{i<d} J_i$, entonces $q \Vdash$ "$\{l \in \omega : c(\dot{b}_a \restriction l) = \epsilon\} \in \dot{\mathfrak{U}}$".

Extendiendo a r o restringiendo las imágenes de r si es necesario, podemos suponer sin pérdida de generalidad, que la altura de los nodos en la imagen de r es l_m. Note que como

r fuerza que $\dot{b}_a \restriction l_m = \{r(i, a_i) : i < d\}$ para cada $a \in \prod_{i<d} J_i$, y como la coloración c está definida en el modelo base, entonces también es cierto en el modelo base que $c(\{r(i, a_i) : i < d\}) = \epsilon$ para cada $a \in \prod_{i<d} J_i$. Para cada $i < d$ y $\delta \in J_i$, extendemos los nodos de X_i al nivel l_m, extendiendo $q(i, \delta)$ a $r(i, \delta)$. Así, para cada $i < d$, definimos $Lev(l_m, S_i) = \{r(i, \delta) : \delta \in J_i\}$, de esta forma aseguramos que c toma el valor ϵ en cada elemento de $\prod_{i<d}(S_i)_{l_m}$.

Finalmente, para cada $i < d$, definimos $S_i = \bigcup_{m \in \omega} Lev(l_m, S_i)$ y hacemos $L = \{l_m : m \in \omega\}$. Entonces cada S_i es un subárbol fuerte de T_i con niveles de ramificación L y c toma el valor ϵ en cada elemento de $\bigotimes_{i<d} S_i$. Esto finaliza la demostración. □

Veamos ahora una segunda versión del Teorema de Halpern-Laüchli, la cual llamaremos "Halpern-Laüchli versión con subconjuntos densos". Si bien nosotros no demostraremos tal versión, si el lector lo desea puede consultar [5] para ver una demostración de dicho resultado.

Definición 31. *Sea $T \subseteq \omega^{<\omega}$ un árbol. Dados $m \leq k$ enteros positivos, decimos que $D \subseteq T$ es (m, k)-denso en T si D está contenido en $Lev(k, T)$ y cada nodo en $Lev(m, T)$ tiene una extensión en D.*

Teorema 32 (Halpern-Laüchli versión con subconjuntos densos)**.** *Para cualquier entero $d \in \omega$, dados T_i, $i < d$, árboles perfectos de $\omega^{<\omega}$ y una partición*

$$\bigotimes_{i<d} T_i = K_0 \cup K_1,$$

para cada $A \in [\omega]^\omega$, existen $\langle x_0, ..., x_{d-1}\rangle \in \bigotimes_{i<d} T_i$ y $\epsilon \in 2$ tales que para cada $m \in \omega$ hay $k \in A$ y conjuntos D_i, para $i < d$, tales que D_i es (m, k)-denso en $T_i(x_i)$ y $\bigotimes_{i<d} D_i \subseteq K_\epsilon$.

Terminaremos este capítulo con el siguiente teorema que nos permitirá hablar de las dos versiones de Halpern-Laüchli anteriormente presentadas de forma indistinta.

Teorema 33. *La versión del Teorema de Halpern-Laüchli con subárboles fuertes es equivalente a la versión con subconjuntos densos.*

Demostración. Si se analiza la demostración del Teorema de Halpern-Laüchli versión con subárboles fuertes es fácil darse cuenta que dicha demostración implica la versión con subconjuntos densos.

Por otro lado, supongamos cierta la versión con subconjuntos densos. Sean $T_i \subseteq \omega^{<\omega}$ $(i < d)$ árboles de ramificación finita, sin hojas y tales que cada nodo tiene al menos dos sucesores inmediatos y sea $c : \bigotimes_{i<d} T_i \longrightarrow 2$, una coloración fija.

Sean $\langle x_0, ..., x_{d-1}\rangle \in \bigotimes_{i<d} T_i$ y $\epsilon \in 2$ dados tras aplicar la versión de Halpern-Laüchli con subconjuntos densos tomando $A = \omega$. Construiremos subárboles fuertes $S_i \subseteq T_i$, para $i < d$ de forma inductiva. Comenzamos la inducción haciendo stem(S_i) igual a x_i para cada $i < d$ y hacemos l_0 igual a la altura de los $x_{i's}$.

Suponga que $1 \leq m < \omega$, que hay niveles $l_0, .., l_{m-1}$ y que hemos construido subárboles fuertes finitos $S_i \upharpoonright l_{m-1}$ de T_i, $i < d$, tales que para cada $j < m$, tenemos que c toma el valor de ϵ en cada elemento de $\prod_{i<d} Lev(l_j, S_i)$.

Para cada $i < d$, sea X_i el conjunto de extensiones inmediatas en T_i de los nodos en $Lev(l_{m-1}, S_i)$. Note que X_i también es igual al conjunto de extensiones inmediatas en $T_i(x_i)$ de los nodos en $Lev(l_{m-1}, S_i)$. Sea $l_m \in \omega$ tal que $l_m \geq l_{m-1} + 1$ y sean $D_i \subseteq T_i$ $(i < d)$, tales que D_i es $(l_{m-1} + 1, l_m)$-denso en $T_i(x_i)$ y c es constante en $\bigotimes_{i<d} D_i$. Para cada $i < d$, sean $E_i \subseteq D_i$ tales que E_i contiene únicamente extensiones de nodos en X_i y definimos $Lev(l_m, S_i) = E_i$.

Finalmente, para cada $i < d$, definimos $S_i = \bigcup_{m\in\omega} Lev(l_m, S_i)$ y hacemos $L = \{l_m : m \in \omega\}$. Entonces, por construcción, cada S_i es un subárbol fuerte de T_i con niveles de ramificación L y c toma el valor ϵ en cada elemento de $\bigotimes_{i<d} S_i$. □

2.2. Una aplicación de Halpern-Laüchli para Ultrafiltros

El objetivo de esta sección es utilizar el Teorema de Halpern-Laüchli para demostrar un resultado de preservación de ultrafiltros selectivos bajo una noción de forcing concreta.

Comencemos esta sección recordando que el *forcing de Sacks* es el conjunto $\mathbb{S}$ de subconjuntos perfectos de 2^ω ordenados por la contención. Si G es un filtro $\mathbb{S}$-genérico, al único elemento en la intersección de G lo llamamos el *real de Sacks*.

Definición 34. *Sea $\mathcal{P} = \langle P_s : s \in 2^{<\omega}\rangle$ una familia de subconjuntos perfectos no vacíos de 2^ω. Decimos que $\mathcal{P}$ es una sucesión fusionable si y sólo si satisface las siguientes condiciones:*

(1) Si $s \subseteq t$, entonces $P_s \supseteq P_t$,

(2) para cada $s \neq t$ del mismo nivel, tenemos que los conjuntos P_s y P_t son disjuntos y

(3) el diámetro de P_s converge a 0 cuando la longitud de s tiende a infinito.

El conjunto

$$\bigcup_{f\in 2^\omega} \bigcap_{n\in\omega} P_{f\upharpoonright n} = \bigcap_{n\in\omega} \bigcup_{s\in 2^n} P_s$$

se llama la fusión de la familia $\mathcal{P}$.

Lema 35 (Lema fusión)**.** *La Fusión siempre es un conjunto perfecto.*

El Lema fusión es una herramienta muy útil para probar propiedades importantes del forcing de Sacks. Por ejemplo se puede probar que para cada subconjunto X de ω en la extensión de forcing por $\mathbb{S}$, existe un subconjunto infinito A en el modelo base tal que; o bien $A \subseteq X$ o $A \cap X = \emptyset$. De hecho, lo anterior es cierto para cada producto $\mathbb{S}^d$ con $d < \omega$; sin embargo, para ver esto es necesario extender la definición de una sucesión fusión a dimensiones más altas.

Definición 36. *Sea $d < \omega$. Una familia $\langle P^i_s : s \in 2^{<\omega} \wedge (i < d)\rangle$ es una sucesión fusionable en $\mathbb{S}^d$ si y sólo si para cada $i < d$, tenemos que $\langle P^i_s : s \in 2^{<\omega}\rangle$ es una sucesión fusionable en el sentido de la definición 34 excepto que P^i_s tiene valor constante $P^i_\emptyset$ cuando s tiene longitud menor o igual a i. La sucesión de subconjuntos perfectos $\langle P^i : i \leq d\rangle$ definida por*

$$P^i = \bigcup_{f \in 2^\omega} \bigcap_{n \in \omega} P^i_{f \upharpoonright n}.$$

Se llama la fusión de la sucesión $\langle P^i_s : s \in 2^{<\omega},\ (i < d)\rangle$.

Supongamos ahora que $d < \omega$ y que tenemos un $\mathbb{S}^d$-nombre $\dot{X}$ para un subconjunto de ω y construimos una sucesión fusión $\langle P^i_s : s \in 2^{<\omega},\ (i < d)\rangle$ tal que para cada $n \in \omega$ y cada sucesión $\langle s_i : i < d\rangle$ de $(2^n)^d$, se tiene que

$$\langle P^i_{s_i} : i < d\rangle \Vdash \breve{n} \in \dot{X} \quad o \quad \langle P^i_{s_i} : i < d\rangle \Vdash \breve{n} \notin \dot{X}.$$

Por el Teorema de Halpern-Laüchli, para $i < d$ existen subárboles fuertes $T_i \subseteq 2^{<\omega}$ con niveles de ramificación $L \in [\omega]^\omega$ tales que para cada

$$\langle s_i : i < d\rangle \in \bigotimes_{i<d} T_i \upharpoonright L$$

una de las dos posibilidades anteriores pasa. Para cada $i < d$, sea

$$\bigcup_{f \in (T_i)} \bigcap_{n \in \omega} P_{f \upharpoonright n}.$$

Entonces cada P_i es un subconjunto perfecto de 2^ω y la sucesión $\langle P_i < i < d\rangle$ forza que

$$L \subseteq int_G(\dot{X}) \quad o \quad L \cap int_G(\dot{X}) = \emptyset.$$

El resultado principal de esta sección involucra la siguiente definición.

Definición 37. *Un ultrafiltro no principal $\mathscr{U}$ sobre ω es selectivo si para cualquier sucesión $\{A_n : n \in \omega\}$ de elementos de $\mathscr{U}$, existe $A \in \mathscr{U}$ tal que $A \backslash n \subseteq A_n$ para cada $n \in A$*

La existencia de los ultrafiltros selectivos requiere de suposiciones adicionales a ZFC tales como la Hipótesis del Continuo. En lo que resta de la sección asumiremos la existencia de tales utrafiltros.

Los ultrafiltros selectivos son frecuentemente llamados *ultrafiltros Ramsey* debido al siguiente resultado.

Lema 38. *Un ultrafiltro no principal $\mathscr{U}$ es selectivo si y sólo si para cualquier partición $p : [\omega]^2 \longrightarrow 2$ existe $i \in 2$ y $U \in \mathscr{U}$ tal que $p[U] \subseteq \{i\}$.*

De hecho, muchos resultados tipo Ramsey que involucran a ω tienen su "versión selectiva", no sólo el Teorema de Ramsey. Por ejemplo:

Teorema 39. *Si $\mathscr{U}$ es un ultrafiltro selectivo en ω y $\mathscr{A}$ es un subconjunto analítico de $[\omega]^\omega$, entonces existe $U \in \mathscr{U}$ tal que $[U]^\omega \subseteq \mathscr{A}$ o $[U]^\omega \cap \mathscr{A} = \emptyset$.*

En algunos textos como en [10], se refieren al siguiente teorema como el Teorema de Halpern-Laüchli; nosotros lo deduciremos como una aplicación del teorema 32.

Teorema 40. *Sea $d \in \omega$. Para cada $i < d$, sea $T_i \subseteq \omega^{<\omega}$ un árbol perfecto. Entonces para cada función $c : \bigotimes_{i<d} T_i \longrightarrow 2$, existen $B \in [\omega]^\omega$ y subárboles perfectos $T_i' \subseteq T_i$ para cada $i < d$, tales que la función*

$$c \restriction (\bigotimes_{i<d} T_i' \restriction B)$$

es constante.

Demostración. Sean $d \in \omega$, $T_i \subseteq \omega^{<\omega}$ $(i < d\ )$ y $c : \bigotimes_{i<d} T_i \longrightarrow 2$ como en las hipótesis del teorema. Por el teorema 32, existen $\langle x_0, ..., x_{d-1}\rangle \in \bigotimes_{i<d} T_i$ y $\epsilon \in 2$ tales que para cada $m \in \omega$ hay $k \in \omega$ y conjuntos D_i, para $i < d$, tales que D_i es (m, k)-denso en $T_i(x_i)$ y $c(\bigotimes_{i<d} D_i) = \epsilon$.

Para cada $i < d$, construiremos una sucesión de subárboles $T_0^i \subseteq T_1^i \subseteq, ...$ y una sucesión creciente de números naturales $\{l_n : n \in \omega\}$ tales que para cada $i < d$ y cada $n \in \omega$, se tiene que $T_n^i \subseteq T_i(x_i)$ y la altura de T_n^i es $l_n + 1$. Comenzamos haciendo $T_0^i = \{s \in T_i : s \subseteq x_i\}$ y definimos l_0 como la altura de los $x_{i's}$.

Suponga que $1 \leq m < \omega$, que hay niveles $l_0, .., l_{m-1}$ y que para cada $i < d$ hemos construido subárboles $T_0^i \subseteq T_1^i \subseteq, .., \subseteq T_{m-1}^i \subseteq T_i(x_i)$ que satisfacen lo requerido. Como $T_{m-1}^i \subseteq T_i(x_i)$ y cada $T_i(x_i)$ es perfecto, es posible escoger l' suficientemente grande tal que si $i < d$, cualquier nodo en el nivel l_{m-1} de T_{m-1}^i tiene dos extensiones incompatibles en el nivel l' de $T_i(x_i)$. Para cada $i < d$, sea X_i el conjunto de nodos en el nivel l' de $T_i(x_i)$ que extienden a algún nodo de $Lev(l_{m-1}, T_{m-1}^i)$. Sean $l'' \in \omega$ y D_i, para $i < d$, tales que D_i es (l', l'')-denso en $T_i(x_i)$ y $c(\bigotimes_{i<d} D_i) = \epsilon$. Sea $Y_i \subseteq D_i$ $(i < d)$ de tal modo que $s \in Y_i$ si y sólo si existe $t \in X_i$ tal que $t \subseteq s$; es decir, un nodo s está en Y_i si y sólo si s extiende a algún nodo de X_i.

Para cada $i < d$, definimos

$$T_m^i = \{t \in T_i(x_i) : (\exists s \in Y_i)(t \subseteq s)\}$$

y hacemos $l_m = l''$. Note que por construcción, cualquier nodo de T_{m-1}^i tiene dos extensiones incompatibles en T_m^i; además, claramente $T_m^i \subseteq T_i(x_i)$.

Finalmente, para cada $i < d$, definimos

$$T_i' = \bigcup_{n\in\omega} T_n^i \quad y \quad B = \{l_n : n \in \omega\}.$$

Claramente $T_i' \subseteq T_i$ es un árbol perfecto y la función

$$c \restriction (\bigotimes_{i<d} T_i' \restriction B)$$

es constante con valor ϵ. Esto termina la demostración. □

Definición 41. *Si $\mathscr{U}$ es un ultrafiltro en ω, HL($\mathscr{U}$) denota el siguiente enunciado: Sea $d \in \omega$. Para cada $i < d$, sea $T_i \subseteq \omega^{<\omega}$ un árbol perfecto. Entonces para cada función $c : \bigotimes_{i<d} T_i \longrightarrow 2$, existen $U \in \mathscr{U} \cap [\omega]^\omega$ y subárboles perfectos $T'_i \subseteq T_i$ para cada $i < d$, tales que la función*

$$c \upharpoonright (\bigotimes_{i<d} T'_i \upharpoonright U)$$

es constante.

Teorema 42. *Para cada ultrafiltro selectivo $\mathscr{U}$, se tiene que HL($\mathscr{U}$) es cierto.*

Demostración. Sean T_i $(i < d)$ árboles como en las hipótesis de Halpern-Laüchli y consideremos

$$p : \bigotimes_{i<d} T_i \longrightarrow 2$$

una coloración fija. Sea

$$\mathscr{A} = \{A \in [\omega]^\omega : (\forall i < d)(\exists S_i \subseteq T_i \text{ subárbol perfecto })(\exists \epsilon \in 2)(p[\bigotimes_{i<d} S_i \upharpoonright A]) \subseteq \{\epsilon\}\}.$$

Entonces $\mathscr{A}$ es un subconjunto analítico de $[\omega]^\omega$ y por lo tanto existe $U \in \mathscr{U}$ tal que

$$[U]^\omega \subseteq \mathscr{A} \quad o \quad [U]^\omega \cap \mathscr{A} = \emptyset.$$

Note que por el Teorema de Halpern-Laüchli la segunda opción no pasa. Esto termina la demostración. □

Usando un argumento parecido al que usamos justo antes de la definición 37 es posible demostrar que el teorema anterior es de hecho equivalente al siguiente teorema.

Teorema 43. *Cualquier ultrafiltro selectivo $\mathscr{U}$ genera un ultrafiltro selectivo $\mathscr{U}^*$ en la extensión de forcing de $\mathbb{S}^d$.*

Demostración. Sea

$$\mathscr{U}^* = \{int_G(\dot{X}) \subseteq \omega : (\exists A \in \mathscr{U})(A \subseteq int_G(\dot{X}))\}.$$

Es claro que $\mathscr{U}^*$ es un ultrafiltro, sólo resta ver que es selectivo. Sea $\langle \dot{A}_n : n \in \omega\rangle$ una sucesión de elementos de $\mathscr{U}^*$ (la cual de hecho es suficiente tomarla de $\mathscr{U}$ mismo). Consideramos una sucesión fusionable $\langle P^i_s : s \in 2^{<\omega}, (i < d)\rangle$ tal que para cada $n \in \omega$ y cada sucesión $\hat{s} = \langle s_i : i < d\rangle$ de $(2^n)^d$, se tiene que la condición $\langle P^i_{s_i} : i < d\rangle$ fuerza que $\dot{A}_n$ es igual a algún $B_{\hat{s}}$ en $\mathscr{U}$. Sea $\langle P^i : i < d\rangle$ la fusión de tal sucesión y sea $B \in \mathscr{U}$ tal que $B \backslash n \subseteq B_{\hat{s}}$ para cada $n \in B$ y cada $s \in (2^n)^d$; entonces $\langle P^i : i < d\rangle$ fuerza que B es un testigo de la selectividad de $\mathscr{U}^*$ para la sucesión $\langle \dot{A}_n : n \in \omega\rangle$. □

Capítulo 3

Teorema de Blass

El objetivo de este capítulo es demostrar el siguiente teorema de tipo Ramsey el cual fue conjeturado por F. Galvin (quien probó el resultado para $n \leq 3$) pero fue demostrado por Andreas Blass.

Teorema 44 (Blass)**.** *Sea $P \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto perfecto y considere una partición finita y abierta de $[P]^n$. Entonces existe un subconjunto perfecto $Q \subseteq P$ tal que $[Q]^n$ interseca a lo más a $(n-1)!$ pedazos de la partición.*

Antes de avanzar, aclaremos algunas cosas sobre el teorema anterior. Si $P \subseteq \mathbb{R}$ y $n \in \omega$, existe una manera natural de ver a $[P]^n$ en P^n; a saber, cada elemento de $[P]^n$ lo podemos pensar en su enumeración creciente con respecto al orden lexicográfico, de esta forma es posible hablar sin ningún problema de $[P]^n$ como subespacio topológico de P^n.

La última cosa importante que hay que mencionar es que por el teorema 14 es posible reemplazar a $\mathbb{R}$ por 2^ω en el teorema de Blass. De esta forma, tenemos el siguiente enunciado.

Teorema 45 (Blass)**.** *Sea $P \subseteq 2^\omega$ un conjunto perfecto y considere una partición finita y abierta de $[P]^n$ (como subespacio de P^n). Entonces existe un subconjunto perfecto $Q \subseteq P$ tal que $[Q]^n$ interseca a lo más a $(n-1)!$ pedazos de la partición.*

Como mencionamos antes, Galvin demostró el resultado para $n \leq 3$. Notemos que para el caso $n = 2$, el teorema concluye que si $P \subseteq \mathbb{R}$ es un subconjunto perfecto y $[P]^2 = \bigcup_{i \in I} B_i$, donde I es finito y para cada $i \in I$, tenemos que B_i es abierto; entonces existen $Q \subseteq P$ subconjunto perfecto y $j \in I$ tales que $[Q]^2 \subseteq B_j$; es decir, existe $Q \subseteq P$ subconjunto perfecto tal que $[Q]^2$ es monocromático para la función $f : [P]^2 \longrightarrow [P]^2$ determinada por la partición de los B_i's. La pregunta natural es si pasa lo mismo para $n = 3$; es decir, bajo las mismas hipótesis que en el teorema de Blass para $n = 3$ ¿Existe $Q \subseteq P$ subconjunto perfecto tal que $[Q]^3$ es monocromático? La respuesta a esta pregunta es no.

Recordemos que si $x, y \in 2^\omega$, entonces $\Delta(x, y) = \min\{n \in \omega : x(n) \neq y(n)\}$. Por otro lado, si $\{x_0, x_1, x_2\} \in [2^\omega]^3$ (aquí estamos pensado a los $x_{i's}$ en su enumeración creciente con respecto al orden lexicográfico), existen 2 posibilidades: $\Delta(x_0, x_1) < \Delta(x_1, x_2)$ o bien,

$\Delta(x_1, x_2) < \Delta(x_0, x_1)$. Diremos que $\{x_0, x_1, x_2\} \in [2^\omega]^3$ es de *tipo 1* si $\Delta(x_0, x_1) < \Delta(x_1, x_2)$ y es de *tipo 2* en el otro caso. Note que los elementos de $[2^\omega]^3$ que son de un mismo tipo forman un conjunto abierto. Así, podemos partir a $[2^\omega]^3$ en los elementos que son del tipo 1 y los que son del tipo 2. Finalmente, es muy faćil darse cuenta de que si $P \subseteq 2^\omega$ es un subconjunto perfecto, entonces $[P]^3$ tiene elementos de los dos tipos, por lo que no podemos tener subconjuntos perfectos monocromáticos.

Para demostrar el Teorema de Blass será útil la siguiente notación y terminología:

Si $s \in T$, diremos que s es *de ramificación* si $s^\frown\{0\}$ y $s^\frown\{1\}$ están en T.

Si $s \in T$ *quitar al nodo* s significa no solo remover a s, sino remover a todos los nodos arriba de s y a todos los nodos debajo de s pero arriba del nodo de ramificación más alto debajo de s.[1] Es decir, si t es el nodo de ramificación más alto por debajo de s, *quitar al nodo* s significa que T será reemplazado por $T \setminus \{p \in T : (t \subset p) \wedge (s \subseteq p \vee p \subseteq s)\}$, el cual es el subárbol de T más grande (con respecto a $\subseteq$) sin nodos terminales que no contiene a s.

Eliminar el nodo de ramificación s significa quitar (en el sentido anterior) uno de los dos sucesores inmediatos de S. La elección de cual sucesor eliminar será arbitraria excepto cuando un nodo t tal que $s \subseteq t$ necesite ser conservado; en este caso el sucesor inmediato de s que no está contenido en t será eliminado.

Fijar los nodos de T hasta en el nivel l significa que todos los nodos en un nivel menor o igual a l permanecerán intactos durante operaciones posteriores en T.

Definición 46. *Sea $T \subseteq 2^{<\omega}$ un árbol. Decimos que T es torcido si ningún nivel de T contiene dos nodos de ramificación distintos.*

Lema 47. *Cualquier árbol perfecto contiene un subárbol perfecto torcido.*

Demostración. Sea $T = \{s_n : n \in \omega\}$ una enumeración de T. Construiremos una sucesión $\{T_n : n \in \omega\}$ de subárboles perfectos de T tales que $T = T_0 \supseteq T_1 \supseteq, \ldots$ y una sucesión creciente de números naturales $\{l_n : n \in \omega\}$ como sigue. Suponga que después de n pasos hemos construido T_n y fijado todos los nodos de T_n hasta un nivel l_n. Si $s_n \notin T_n$, entonces hacemos $T_{n+1} = T_n$ y $l_{n+1} = l_n$. Si $s_n \in T_n$, encuentre un nodo de ramificación $t \in T_n$ arriba de s, en un nivel $l > l_n$. Elimine a todos los nodos de ramificación de T_n entre los niveles l_n y l excepto a t. Sea T_{n+1} el árbol obtenido; entonces fije los nodos de T_{n+1} hasta el nivel $l_{n+1} = l + 1$. Por construcción, $T' = \bigcap_{n\in\omega} T_n$ es el árbol buscado. $\square$

Observe que por el lema anterior y por el hecho de que las ramas de un subárbol perfecto en $2^{<\omega}$ es un subconjunto perfecto de 2^ω, el Teorema de Blass es equivalente al siguiente teorema.

[1]A lo largo de este capítulo, cuando estemos hablando de un árbol T y usemos palabras como arriba, abajo o alto, entenderemos que estas palabras se refieren al orden de T. Por ejemplo, si decimos que A es el conjunto de los nodos en T arriba de s, esto significa que $A = \{t \in T : s <_T t\}$. Si por el contrario B es el conjunto de los nodos en T debajo de s, entonces lo que queremos decir es que $B = \{t \in T : t <_T s\}$.

Teorema 48. *Si T es un árbol perfecto y torcido, entonces para cualquier partición finita y abierta de $[(T)]^n$, hay un subárbol perfecto de T, digamos T' tal que $[(T')]^n$ interseca a lo más a $(n-1)!$ pedazos de la partición.*

A partir de aquí T siempre denotará un árbol perfecto torcido; además para cada $n \in \omega$, llamaremos n-conjuntos de (T) a los elementos de $[(T)]^n$. Si a es un n-conjunto de (T), siempre que escribamos $a = \{a_0, ..., a_{n-1}\}$ asumiremos que los $a_{i's}$ están indexados en orden creciente lexicográficamente.

El *patrón* de un n-conjunto $\{a_0, ..., a_{n-1}\}$ de (T) es el orden lineal ρ en $\{1, 2, .., n-1\}$ dado por :

$$i\rho j \iff \Delta(a_{i-1}, a_i) < \Delta(a_{j-1}, a_j).$$

Como T es torcido ρ está bien definido. Así, ρ dice en que orden los $a_{i's}$ se ramifican. Por otro lado, como sólo hay $(n-1)!$ ordenes lineales en $\{1, ..., n-1\}$ y todos ellos se realizan como patrones dentro de cualquier subconjunto perfecto de (T), es posible deducir que el número $(n-1)!$ del teorema es un resultado óptimo. Lo anterior ya nos da una sugerencia para probar el Teorema de Blass; es suficiente encontrar un subárbol perfecto T' tal que la clase de cualquier n-conjunto de (T') esté únicamente determinada por su patrón. De hecho, es suficiente probar que para cualquier partición finita y abierta de $[(T)]^n$ y cualquier patrón fijo ρ, hay un subárbol perfecto $T' \subseteq T$ tal que cualquier n-conjunto de (T') con patrón ρ está en el mismo pedazo de la partición.

Para obtener tal T' será conveniente trabajar con la siguiente notación y terminología. Supongamos que $r \in \omega \backslash \{0\}$

- $\overrightarrow{T} = \langle T_0, .., T_{r-1} \rangle$ denota una r-tupla de árboles perfectos torcidos tales que no hay dos T_i's distintos con nodos de ramificación con la misma altura.
- $\overrightarrow{n} = \langle n_0, .., n_{r-1} \rangle$ denota una r-tupla de enteros positivos tales que su suma es n.
- Un $\overrightarrow{n}$-conjunto en $\overrightarrow{T}$ es una r-tupla σ cuya i-ésima coordenada es un n_i-conjunto de (T_i).
- El *patrón* de un $\overrightarrow{n}$-conjunto σ en $\overrightarrow{T}$ es el orden lineal de las parejas (i, j) con $0 \leq i \leq r-1$ y $0 < j < n_i$ dado nuevamente por los $\Delta(a_{i,j-1}, a_{i,j})$, donde $a_{i,j}$ es el j-ésimo elemento (con respecto al orden lexicográfico) de σ_i. En el caso en el que cada $n_i = 1$, el patrón de un $\overrightarrow{n}$-conjunto será simplemente el orden en n dado por el orden usual en los números ordinales. En otro caso, como cada T_i $(i < r)$ es torcido, el patrón está bien definido.

Usaremos la notación anterior y el Teorema de Halpern-Laüchli para probar el siguiente teorema, cuyo caso especial cuando $r = 1$, nos da como corolario el teorema de Blass.

Teorema 49 (Polarizado)**.** *Sean $r, n, \overrightarrow{T}, \overrightarrow{n}$ como antes y sea ρ un patrón de $\overrightarrow{n}$-conjuntos. Considere una partición finita y abierta de la familia de $\overrightarrow{n}$-conjuntos en $\overrightarrow{T}$. Entonces existen subárboles perfectos $T_i' \subseteq T_i$ tales que todos los $\overrightarrow{n}$-conjuntos en $\overrightarrow{T'} = \langle T_0', ..., T_{r-1}' \rangle$ con patrón ρ están en el mismo pedazo de la partición.*

Demostración. Procederemos por inducción hacia atrás sobre r, con n fijo. Como los n_i's son enteros positivos, el valor más grande posible de r es $r = n$. En tal caso, cada $n_i = 1$ y un $\overrightarrow{n}$-conjunto de $\overrightarrow{T}$ es una n-tupla $a = \langle a_0, ..a_{n-1}\rangle$ tal que $a_i \in (T_i)$ para cada $i < n$. Note también que en este caso existe un único patrón para los $\overrightarrow{n}$-conjuntos de $\overrightarrow{T}$. Fije un $\overrightarrow{n}$-conjunto $a = \langle a_0, ..a_{n-1}\rangle$. Como la partición es abierta, entonces para un segmento inicial s_i de a_i suficientemente largo, los árboles $T_i(s_i) = T'_i$ satisfacen la conclusión del teorema.

Veamos ahora el caso $r < n$. Supongamos que hemos probado el teorema para $r + 1$ (y el mismo n). Reindexando los árboles si es necesario podemos suponer que el primer elemento en el orden ρ es de la forma $(0, q)$ para algún q. Por lo tanto si $\sigma = \langle \sigma_0, .., \sigma_{r-1}\rangle$ es un $\overrightarrow{n}$-conjunto con patrón ρ, existe un nodo de ramificación en T_0, digamos $f(\sigma)$, que separa a $\{a_{0,0}, .., a_{0,q-1}\}$ de $\{a_{0,q}, .., a_{0,n_0-1}\}$, llamaremos a $f(\sigma)$ *el primer nodo de ramificación de* σ. Además si $f(\sigma)$ esta en el nivel l de T_0, entonces para cada $0 < i < r$ existe s_i en el nivel l de T_i tal que cualquier elemento de σ_i contiene a s_i. Llamaremos a la r-tupla $\langle f(\sigma), s_0, .., s_{r-1}\rangle$ el *tipo* de σ.

Afirmación 50. *Existen subárboles perfectos $T^*_i \subseteq T_i$ tales que los $\overrightarrow{n}$-conjuntos en $\overrightarrow{T}^* = \langle T^*_0, ..., T^*_{r-1}\rangle$ con patrón ρ y el mismo tipo están en el mismo pedazo de la partición.*

Demostración. Cada T^*_i será obtenido como intersección de una sucesión $\subseteq$-decreciente de subárboles perfectos de T_i; construiremos dicha sucesión por recursión. Con el propósito de describir la recursión sin un exceso de notación, usaremos a S_i como variable para representar en cada paso de la recursión el subárbol de T_i obtenido hasta ese punto.

Para empezar la recursión, haga $S_i = T_i$ y fije todos los nodos de S_i hasta el nivel 0 para cada $i < r$.

Suponga que hasta un paso posterior, hemos obtenido subárboles perfectos S_i y hemos fijado sus nodos hasta un nivel l. Elija l' suficientemente grande tal que en cada S_i $(i \neq 0)$ cualquier nodo en el nivel l tiene dos sucesores en el nivel l'; lo anterior es posible ya que cada S_i es perfecto. Eliminamos a todos los nodos de ramificación de S_0 entre los niveles l y l' y fijamos todos los nodos hasta el nivel l' en todos los árboles (observe que la elección de l' garantiza que T^*_i será perfecto para cada $i \neq 0$). Escoja ahora un nodo de ramificación f en (el nuevo) S_0 arriba del nivel l', digamos en el nivel l''. Eliminamos a los nodos de ramificación en S_0 entre los niveles l' y l''-1 conservando a f y fijamos todos los nodos restantes hasta el nivel $l'' + 1$ en todos los árboles. Lo anterior garantiza que f será el único nodo de ramificación de T^*_0 entre los niveles l y l''.

Nuestro objetivo ahora es garantizar que todos los $\overrightarrow{n}$-conjuntos con patrón ρ y primer nodo de ramificación f tengan sus clases determinadas por sus tipos. Enumere todos los posibles tipos en el nuevo $\overrightarrow{T}$ cuya primera coordenada es f. Claramente sólo hay una cantidad finita de ellos ya que si $\langle f, s_1, ...s_{r-1}\rangle$ es un tipo, los $s_{i's}$ están en el mismo nivel l'' que f y los árboles $T_{i's}$ tienen niveles finitos.

Fije $\langle f, s_1, ...s_{r-1}\rangle$ un tipo de $\overrightarrow{n}$-conjuntos de $\overrightarrow{S} = \langle S_0, ...S_{r-1}\rangle$ y considere

- $\overrightarrow{S}^* = \langle S_0(f^\frown\{0\}), S_0(f^\frown\{1\}), S_1(s_1)...S_{r-1}(s_{r-1})\rangle = \langle S_0^*, S_1^*, ...S_r^*\rangle$ y
- $\overrightarrow{n}^* = \langle q, n_0 - q, n_1, ..., n_{r-1}\rangle$.

Un $\overrightarrow{n}$-conjunto σ en $\overrightarrow{S}$ con patrón ρ y tipo $\langle f, s_1, ...s_{r-1}\rangle$ define un $\overrightarrow{n}^*$-conjunto $\sigma^* = \langle\{a_{0,0}, ..., a_{0,q-1}\}, \{a_{0,q}, ..., a_{0,n_0}\}, \sigma_1, ..., \sigma_{r-1}\rangle$ en $\overrightarrow{S}^*$. El patrón ρ^* de σ^* está únicamente determinado por ρ y claramente cualquier $\overrightarrow{n}^*$-conjunto σ^* en $\overrightarrow{S}^*$ determina un único $\overrightarrow{n}$-conjunto σ en $\overrightarrow{S}$. Más aún, la asignación $g(\sigma^*) = \sigma$ es una función continua de $\overrightarrow{S}^*$ en $\overrightarrow{S}$, por lo que la partición original induce una partición finita y abierta en la familia de los $\overrightarrow{n}^*$-conjuntos en $\overrightarrow{S}^*$. Aplicando la hipótesis de inducción, podemos encontrar subárboles de los S_i^* tales que sus $\overrightarrow{n}^*$-conjuntos con patrón ρ están en la misma clase. Pode los árboles S_i respectivamente, de tal forma que los nuevos $S_0(f^\frown 0), S_0(f^\frown 1), S_1(s_1), ..S_{r-1}(s_{r-1})$ son los S_i^*'s dados por la hipótesis de inducción. Note que este cambio en los árboles S_i's puede hacerse enteramente arriba del nivel $l'' + 1$, preservando así los nodos que ya habíamos fijado con anterioridad. Repitiendo el procedimiento anterior una cantidad finita de veces, obtenemos homogeneidad para cada tipo cuya primera coordenada es f. Esto completa el siguiente paso en la recursión.

Repitiendo el procedimiento anterior una infinidad de veces, obtenemos una sucesión $\subseteq$-decreciente de subárboles perfectos $S_i \subseteq T_i$ cuyas intersecciones T_i^*, por construcción tienen las siguientes propiedades.

- T_i^* es perfecto para cada $i \neq 0$.
- Los únicos nodos de ramificación de T_0^* son precisamente los f's considerados en cada paso de la recursión.
- La clase de los $\overrightarrow{n}$-conjuntos en $\overrightarrow{T}^*$ con patrón ρ, esta determinada únicamente por su tipo.

Esto termina la demostración de la afirmación. □

Sean $T_i^* \subseteq T_i$ para $i < r$, subárboles como en la afirmación. Como la clase de un $\overrightarrow{n}$-conjunto en $\overrightarrow{T}^*$ con patrón ρ está determinada por su tipo, podemos inducir una partición en la familia de los tipos en $\overrightarrow{T}^*$, es decir en la familia de r-tuplas $\langle s_0, ..., s_{r-1}\rangle$ tales que $s_i \in T_i^*$ para cada $i < r$, s_0 es un nodo de ramificación y todos los s_i's están en el mismo nivel. Note que si encontramos subárboles perfectos $T_i' \subseteq T_i^*$ tales que los tipos de $\overrightarrow{T}'$ están en el mismo pedazo de la partición inducida, habremos terminado la demostración del teorema.

Sin pérdida de generalidad, podemos asumir que la partición de tipos en $\overrightarrow{T}^*$ es sólo en dos piezas, el caso general se sigue por inducción sobre el número de piezas de la partición. Nuevamente cada T_i' será obtenido como intersección de una sucesión $\subseteq$-decreciente de subárboles perfectos de T_i^* y obtendremos dicha sucesión recursivamente. Como antes, usaremos la variable S_i para representar los subárboles de T_i^* obtenidos en cada punto de la recursión.

Para cada r-tupla $s = \langle s_0, ..., s_{r-1}\rangle \in \bigotimes_{i<r} T_i^*$ asociamos un tipo $\hat{s}$ de $\overrightarrow{T}^*$ como sigue. Sea

$\hat{s}_0$ el nodo de ramificación más alto contenido en s_0 (si s_0 está contenido en el nodo de ramificación mas bajo de S_0, escoja un tipo g de $\overrightarrow{T}^*$ y haga $\hat{s} = g$). Para cada $i \neq 0$ sea $\hat{s}_i$ el predecesor de s_i en el nivel de $\hat{s}_0$. Claramente $\hat{s} = \langle \hat{s}_0, ..., \hat{s}_{r-1} \rangle$ es un tipo de $\overrightarrow{T}^*$.

Extendemos la partición de los tipos a una partición de todas las r-tuplas $s = \langle s_0, ..., s_{r-1} \rangle \in \bigotimes_{i<r} T_i^*$ poniendo cada s en la misma clase que $\hat{s}$. Así, $\bigotimes_{i<r} T_i^* = K_0 \cup K_1$. Aplicamos la versión con subconjuntos densos del Teorema de Halpern Laüchli a la partición obtenida de $\bigotimes_{i<r} T_i^*$ para obtener una r-tupla $x = \langle x_0, ..., x_{r-1} \rangle \in \bigotimes_{i<r} T_i^*$ y $\epsilon \in 2$ tales que:

- $x \in K_\epsilon$ y
- para cada $m \in \omega$ existen $k \geq m$ y subconjuntos D_i, para $i < r$ tales que D_i es (m, k)-denso en $T_i^*(x_i)$ y $\bigotimes_{i<r} D_i \subseteq K_\epsilon$.

Comenzamos la recursión para obtener a los T_i''s haciendo $S_i = T_i^*(x_i)$ y fijamos sus nodos hasta el nivel h, donde h es la altura de los $x_{i's}$. Suponga que hasta un paso posterior, hemos obtenido subárboles perfectos S_i y hemos fijado sus nodos hasta un nivel l. Supongamos además que los pasos anteriores han involucrado la eliminación sólo de los nodos del nivel l o inferior junto con sus sucesores. Así, los nodos de S_i arriba del nivel l tienen los mismos sucesores en S_i que los que tenían en T_i^*. Esto asegura que $\hat{s}$ no cambia cuando hacemos la operación $\hat{s}$ en $\overrightarrow{S} = \langle S_0, ..., S_{r-1} \rangle$ o en $\overrightarrow{T}^*$. El siguiente paso de la recursión es como sigue.

Al igual que en la construcción de $\overrightarrow{T}^*$, escoja l' suficientemente grande tal que en cada S_i $(i \neq 0)$ cualquier nodo en el nivel l tiene dos sucesores en el nivel l'. Eliminamos a todos los nodos de ramificación de S_0 entre los niveles l y l' y fijamos todos los nodos hasta el nivel l' en todos los árboles. Como antes, esto asegura que los T_i' serán perfectos para $i \neq 0$. Escoja un nodo de ramificación f en S_0 arriba del nivel l', digamos en el nivel $l'' > l'$. Por el Teorema de Halpern Laüchli, encontramos $k \geq l''$ y subconjuntos $D_i \subseteq S_i$ tales que

1. D_i es (l'', k)-denso en S_i y
2. $\bigotimes_{i<r} D_i \subseteq K_\epsilon$.

Escoja $s_0 \in D_0$ tal que $f \subseteq s_0$. Entonces $f \subseteq \hat{s}_0$ o $f = \hat{s}_0$ y así, el nivel de $\hat{s}_0$, digamos l^*, es mayor o igual a l''. Eliminamos a todos los nodos de ramificación de S_0 entre los niveles l' y $l^* - 1$ conservando a s_0 y después fijamos todos los nodos de s_0 hasta el nivel $l^* + 1$. Como antes, esto asegura que s_0 será el único nodo de ramificación de T_0' entre los niveles l y l^*. Para cada $i \neq 0$ y cada $s_i \in D_i$, sea $\hat{s}_i$ como antes, es decir el predecesor o el primer sucesor lexicográficamente de s_i en el nivel l^*. Como D_i es (l'', k)-denso en S_i, en particular es (l', k)-denso, además $l^* \geq l'$, por lo que $B_i = \{\hat{s}_i : s_i \in D_i\}$ es (l', l^*)-denso. Más aun, por (2) y la definición de la partición de los tipos, tenemos que $\hat{s}_0 \times \prod_{i \neq 0} B_i \subseteq K_\epsilon$. Para cada $i \neq 0$, eliminamos todos los nodos de S_i que no son comparables con algún elemento de B_i. Note que como B_i es (l', l^*)-denso en S_i, todos los nodos del nivel l' o inferior de S_i permanecen intactos, por lo que los nodos que habíamos fijado antes no sufren ningún cambio. Todos los nodos en el nivel l^* del nuevo S_i $(i \neq 0)$ pertenecen a B_i, por lo tanto todos los tipos cuya primera entrada es $\hat{s}_0$, pertenecen a K_ϵ. Fije todos los nodos hasta el nivel $l^* + 1$ en todos los árboles. Esto termina el siguiente paso de la inducción.

Repitiendo el procedimiento anterior una infinidad de veces, obtenemos sucesiones $\subseteq$-decrecientes de subárboles perfectos $S_i \subseteq T_i^*$ cuyas intersecciones T_i' tienen las siguientes propiedades.

- Cada T_i' $(i \neq 0)$ es perfecto.
- Los únicos nodos de ramificación en S_0 son los $\hat{s}_0$ considerados en cada paso de la recursión.

Por lo anterior, cada tipo de $\overrightarrow{T'}$ esta en K_ϵ. Esto completa la demostración del teorema Polarizado. $\square$

Veamos rápidamente que el teorema Polarizado implica el Teorema de Blass. Sean $n \in \omega$ y $T \subseteq 2^{<\omega}$ un árbol perfecto y torcido. Consideremos una partición finita y abierta de $[(T)]^n$. Queremos encontrar un subárbol perfecto $T' \subseteq T$ tal que $[(T')]^n$ interseca a lo más a $(n-1)!$ pedazos de la partición.
Observe que si $r = 1$ y $\overrightarrow{T} = \langle T \rangle$, entonces un $\overrightarrow{n}$-conjunto de $\overrightarrow{T}$ es simplemente un elemento de $[(T)]^n$ y un patrón ρ de un $\overrightarrow{n}$-conjunto de $\overrightarrow{T}$ es un orden lineal en el conjunto $\{1, ..., n-1\}$. Como hay exactamente $(n-1)!$ ordenes lineales en el conjunto $\{1, ..., n-1\}$, aplicando el teorema Polarizado para $r = 1$, $\overrightarrow{T} = \langle T \rangle$ y cada patrón ρ en turno, es posible encontrar un subárbol perfecto $T' \subseteq T$ tal que el pedazo de la partición en el que se encuentra cada elemento de $[T']^n$ esta completamente determinada por su patrón. Así, como sólo hay $(n-1)!$ patrones, entonces $[(T')]^n$ interseca a lo más a $(n-1)!$ pedazos de la partición.

Dos preguntas naturales al Teorema de Blass son ¿Podemos mejorar la hipótesis de que los pedazos de la partición sean abiertos? Y también ¿Qué pasa si la partición es infinita? Antes de responder a estas dos preguntas, recordemos algunas definiciones importantes de la teoría descriptiva de conjuntos.

Definición 51. *Sea X un espacio topológico. Un subconjunto A de X es nunca denso si el interior de su cerradura es vacío.*

Ejemplo 52. *Cualquier conjunto finito, el conjunto de los números enteros y el conjunto de Cantor; son ejemplos de subconjuntos nunca densos en $\mathbb{R}$*

Definición 53. *Sea X un espacio topológico. Un subconjunto A de X es magro o de primera categoría si existe una sucesión $\{F_n : n \in \omega\}$ de conjuntos nunca densos de X tal que $A \subseteq \bigcup_{n\in\omega} F_n$.*

Ejemplo 54. $\mathbb{Q}$ *el conjunto de números racionales es magro en $\mathbb{R}$.*

Definición 55. *Sea X espacio topológico y $A \subseteq X$. Se dice que A tiene la propiedad de Baire si existe $U \subseteq X$ abierto tal que $A \triangle U$ es un conjunto magro. Donde $A \triangle B = A \backslash B \cup B \backslash A$.*

Intuitivamente, podemos pensar que un conjunto A tiene la propiedad de Baire si A se parece mucho a un conjunto abierto salvo por un conjunto magro. Además se sigue directamente de la definición anterior que los conjuntos abiertos y los conjuntos magros, tienen la propiedad de Baire. De hecho, tenemos el siguiente teorema.

Teorema 56. *Sea X un espacio topológico y*

$$\mathscr{A} = \{A \subseteq X : A \text{ tiene la propiedad de Baire}\}$$

Entonces

(1) $\mathscr{A}$ es una σ-álgebra.

(2) $\mathscr{A}$ es la σ-álgebra generada por los conjuntos abiertos y los conjuntos magros.

Demostración. Empecemos probando (1). Dado que $\emptyset$ es magro y que X y $\emptyset$ son conjuntos abiertos, se tiene que $X, \emptyset \in \mathscr{A}$.

Supongamos que $A \in \mathscr{A}$ y que U es un subconjunto abierto tal que $A \triangle U$ es magro. Sea $W = X \backslash \overline{U}$. Así

$$\begin{aligned} A^c \triangle W &= (A^c \backslash W) \cup (W \backslash A^c) \\ &= (A^c \cap \overline{U}) \cup (A \backslash \overline{U}) \\ &= (\overline{U} \backslash A) \cup (A \backslash \overline{U}) \\ &\subseteq (\overline{U} \backslash U) \cup (A \backslash U) \cup (U \backslash A) \\ &= (\overline{U} \backslash U) \cup (A \triangle U). \end{aligned}$$

Como $\overline{U} \backslash U$ es la frontera de un abierto, en consecuencia es nunca denso; además, $A \triangle U$ es magro. Por lo tanto, $A^c \triangle W$ es magro ya que está contenido en un conjunto magro.

Sea $\{A_n : n \in \omega\}$ una sucesión de elementos de $\mathscr{A}$. Para cada $n \in \omega$, sea U_n un conjunto abierto tal que $A_n \triangle U_n$ es magro. Sean $A = \bigcup_{n\in\omega} A_n$ y $U = \bigcup_{n\in\omega} U_n$. Veamos que $A \triangle U$ es un conjunto magro.

$$\begin{aligned} A \triangle U &= (A \backslash \bigcup_{n\in\omega} U_n) \cup (\bigcup_{n\in\omega} U_n \backslash \bigcup_{n\in\omega} A_n) \\ &= (\bigcap_{n\in\omega} (A \backslash U_n)) \cup (\bigcap_{n\in\omega} (U \backslash A_n)) \\ &\subseteq (\bigcup_{n\in\omega} (A_n \backslash U_n)) \cup (\bigcup_{n\in\omega} (U_n \backslash A_n)). \end{aligned}$$

Como la unión numerable de conjuntos magros es magro, tenemos que $A \triangle U$ es magro y en consecuencia $A \in \mathscr{A}$. Por lo tanto, $\mathscr{A}$ es una σ-álgebra.

Para probar (2), denotemos por $\mathscr{C}$ a la σ-álgebra generada por lo abiertos y los magros de X. Hay que observar, en primer lugar, que si U es un conjunto abierto, entonces $U \triangle U = \emptyset$ es magro y si M es un conjunto magro, $M \triangle \emptyset = M$ es magro. En consecuencia, todos los conjuntos abiertos y todos lo conjuntos magros pertenecen a $\mathscr{A}$, por lo tanto, $\mathscr{C} \subseteq \mathscr{A}$. Por otro lado, si $A \in \mathscr{A}$ y U es un conjunto abierto tal que $A \triangle U$ es magro, entonces $A \backslash U$ y

$U \backslash A$ son conjuntos magros, ya que están contenidos en $A \triangle U$. Además $U \backslash (U \backslash A) \in \mathscr{C}$, por lo tanto, $A = (A \backslash U) \cup (U \backslash (U \backslash A)) \in \mathscr{C}$, con lo que queda demostrado que $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{C}$. $\square$

Del teorema anterior se concluye que si X es un espacio topológico, entonces la σ-álgebra de Borel $\mathcal{B}$, está contenida en $\mathscr{A}$.

Ahora ya estamos en condiciones de responder las dos preguntas anteriormente planteadas.

En [8] y [9], Mycielski demostró que cualquier conjunto magro o cualquier conjunto de medida de Lebesgue cero en $[\mathbb{R}]^n$ es disjunto de $[P]^n$ para algún $P \subseteq \mathbb{R}$ perfecto. Para el caso magro, obtenemos el mismo resultado si cambiamos a $\mathbb{R}$ por cualquier otro espacio métrico completo sin puntos aislados. Se sigue que si $[\mathbb{R}]^n$ es partido en una cantidad finita de piezas, cada una con la propiedad de Baire, entonces sus intersecciones con $[P]^n$ son abiertas en $[P]^n$ para algún $P \subseteq \mathbb{R}$ perfecto. Similarmente si las piezas son Lebesgue medibles, entonces sus intersecciones con $[P']^n$ son conjuntos G_δ en $[P']^n$ para algún $P' \subseteq \mathbb{R}$ perfecto; además, como los conjuntos G_δ tienen la propiedad de Baire, podemos encontrar $P \subseteq P'$ conjunto perfecto tal que la intersección de los elementos de la partición con $[P]^n$ son conjuntos abiertos en $[P]^n$. Así, el Teorema de Blass puede extenderse al siguiente resultado.

Teorema 57. *Si $[\mathbb{R}]^n$ es partido en un numero finito de pedazos, cada uno con la propiedad de Baire o bien cada uno Lebesgue medible; entonces existe un subconjunto perfecto $P \subseteq \mathbb{R}$ tal que $[P]^n$ intersecta a lo más a $(n-1)!$ pedazos de la partición.*

El teorema anterior demuestra que efectivamente es posible mejorar la hipótesis de que los pedazos de la partición sean abiertos a que estos tengan la propiedad de Baire o sean Lebesgue medibles. Sin embargo la hipótesis de que la partición sea finita, no puede mejorarse. Galvin y Shelah [4] demostraron que existe una partición de $[2^\omega]^2$ en una cantidad infinita de pedazos tal que para cada $Q \subseteq 2^\omega$ de cardinalidad igual a la del continuo (en particular para cada Q subconjunto perfecto) se tiene que $[Q]^2$ intersecta a todos los pedazos de la partición.

Bibliografía

[1] A. Blass. A partition theorem for perfect sets. *Proc. Amer. Math. Soc. 82*, 1981.

[2] N. Dobrinen. *Forcing in Ramsey theory*. 2017.

[3] F. Galvin. Partition theorems for the real line. *Notices Amer. Math. Soc.15*, 1968.

[4] F. Galvin and S. Shelah. *Some counterexamples in the partition calculus*. 1973.

[5] J.D. Halpern and H. Laüchli. A partition theorem. *Trans. Amer. Math. Soc. 124*, 1966.

[6] Lorenz J. Halbeisen. *Combinatorial set theory. With a Gentle Introduction to Forcing*. Springer, 01 2012.

[7] Kenneth Kunen. *Set Theory : An Introduction to Independence Proofs*. North-Holland Amsterdam, 1980.

[8] J. Mycielski. Independent sets in topological algebras. *Fund. Math. 55*, 1964.

[9] J. Mycielski. Algebraic independence and measure. *Fund. Math. 61*, 1967.

[10] S. Todorcevic and I. Farah. *Some applications of the method of forcing*. Moscow: Yenisei, 1996.

[11] S. Williard. *General Topology*. Dover Publications, Inc., 2004.