Posgrado Conjunto en Ciencias Matemáticas
Universidad Nacional Autonoma de México
Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo
Instituto de Física y Matemáticas

T E S I S

Comportamiento asintótico para la ecuación no lineal del tipo Sóbolev con bombeo de energía.

Que para obtener el grado de *Doctor en Ciencias Matemáticas*
Presenta:

Jhon Jairo Pérez

Director: Dr. Pavel Ivanovich Naumkin Venedictova

Morelia, Michoacán marzo 2022

Agradezco:
A mi madre María Luisa,
a mi esposa Paola Andrea.
a mis hijos María De Los
Ángeles y Luis Daniel,
que han hecho posible
conseguir este logro.

Agradecimientos.

En esta tesis doctoral quiero tener un reconocimiento con las personas y entidades que me apoyaron para llevar a cabo y cumplir con estos estudios.

En primer lugar, a Dios que me ha regalado el conocimiento que me permitió profundizar mis estudios y culminarlos. A mi familia, que a través de la distancia me ofrecieron su confianza, paciencia, apoyo incondicional y por los sacrificios que hicieron mi esposa e hijos.

A compañeros que con el tiempo se transformaron en grandes amigos Liliana, Leidy, Rubén, Karley, Yesenia, Israel, Shaday, Diana, Diego, Arley, Richard, les agradezco por su compañía.

Al director de esta investigación, el profesor Pavel Naumkin, por la confianza que depositó en mí, puesto que sin conocerme me aceptó como su estudiante, también por su dedicación, entrega y continuo respaldo tanto en lo científico como en lo humano.

Muchas gracias también a mis sinoidales Dr. José Antonio Zapata Ramirez, Dr. Carlos Osvaldo Osuna Castro, Dr. Eugenio Balanzario Gutiérrez; Dr. Miguel Arturo Ballesteros, por el tiempo que tomaron para leer este manuscrito, por las correcciones realizadas las cuales contribuyeron a que este trabajo quedase aún mejor. Igualmente, agradezco M.A.D Morelia Álvarez Llanes por su gran ayuda en las cuestiones administrativas, por la paciencia y comprensión que para mí ha tenido le doy las gracias.

A la Universidad del Cauca, por darme la oportunidad de hacer este doctorado, por medio de la comisión de estudios que me fue otorgada, a mis compañeros y amigos de la universidad, Francisco Enríquez, Wilmer Molina, Alex Montes, Jhon Jairo Roa y en especial a Fredy Bustos, por ser mi representante legal ante la universidad durante mi comisión de estudios.

Por último aprecio y gratifico la confianza recibida por el Posgrado Conjunto en Ciencia Matemáticas UNAM-UMSNH, para mis estudios de Doctorado, el cual fue financiado por sistema nacional de becas CONACYT.

Resumen

Estudiamos el comportamiento asintótico de las soluciones $u(t,x)$ en el problema de Cauchy para la siguiente ecuación de tipo Sobolev

$$\begin{cases} \partial_t(u-u_{xx})+(1+t)^n u\, u_x - u_{xx}=0,\ x\in\mathbb{R},\ t>0,\\ u(0,x)=u_0(x),\ x\in\mathbb{R},\\ u(t,x)\to a_\pm,\ \ x\to\pm\infty,\ t>0, \end{cases}$$

donde $n\in\mathbb{N}$. Encontraremos fórmulas asintóticas para las soluciones en tiempos grandes para tres casos diferentes:
1) $a_\pm=\pm1$, 2) $a_\pm=\mp1$, 3) $a_\pm=0$.
Los resultados de la presente tesis han sido publicados en [**56**].

Palabras Claves: Ecuaciones Seudoparabólicas, Condiciones de frontera de Cauchy, Expansiones asintóticas, Onda de raraefacción, Onda de choque.

Abstract

We consider the large time asymptotic behavior of solutions to the initial-boundary value problem

$$\begin{cases} \partial_t(u-u_{xx})+(1+t)^n u\, u_x - u_{xx}=0,\ x\in\mathbb{R},\ t>0,\\ u(0,x)=u_0(x),\ x\in\mathbb{R},\\ u(t,x)\to a_\pm,\ \ x\to\pm\infty,\ t>0, \end{cases}$$

where $n\in\mathbb{N}$. We find large time asymptotic formulas of solutions for three different cases: 1) $a_\pm=\pm1$, 2) $a_\pm=\mp1$, 3) $a_\pm=0$.
These results can be found in [**56**]

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

En esta tesis estudiamos el comportamiento asintótico de las soluciones $u(t,x)$ en el problema de Cauchy para la siguiente ecuación de tipo Sobolev

$$(0.1)\qquad \begin{cases} \partial_t(u-u_{xx})+(1+t)^n u\, u_x - u_{xx}=0,\ x\in\mathbb{R},\ t>0, \\ u(0,x)=u_0(x),\ x\in\mathbb{R},\ u(t,x)\to a_\pm\ x\to\pm\infty,\ t>0 \end{cases}$$

donde $n\in\mathbb{N}$. Encontraremos fórmulas asintoticas para las soluciones en tiempos grandes para tres casos diferentes $a_\pm=\pm1$, $a_\pm=\mp1$ y $a_\pm=0$.

La ecuación (0.1) con el coeficiente $(1+t)^n$ en el término no lineal modela un bombeo de la energía. Con el parámetro n queremos estudiar los diferentes escenarios de crecimiento de la no linealidad con el tiempo y cómo esto influye al comportamiento asintótico de la solución.

Este tipo de ecuaciones se aplican en diferentes campos de la ciencia, tales como: hidrodinámica, electodinámica de plasma, biomatemática, ingenieria, etc.(Los llaman en literatura también como seudoparabólicas). Véase el libro: [**55**]

Las ecuaciones tipo Sobolev describen varios procesos físicos y son el tema de muchos documentos, por lo que la teoría matemática de estas ecuaciones toma un importante lugar en la física matemática moderna. En

[**50**] Sobolev dedujo la ecuación lineal $\partial_t^2 \Delta u + \alpha^2 \partial_{x_3}^2 u = 0$, $x \in \mathbb{R}^3$, que describe pequeñas oscilaciones en un fluido rotativo, y fue el primero en considerar, en un nivel matemáticamente riguroso un problema que no es del tipo Cauchy-Kovalevskaya. Este documento generó gran interés en el análisis de ecuaciones no clásicas, denominadas ecuaciones de tipo Sobolev. Posteriormente, las investigaciones de Sobolev continuaron en otras obras (ver [**2**], [**21**], [**43**], [**38**], [**39**], [**53**]).

En [**3**] una ecuación lineal de tipo Sobolev $\partial_t(\Delta u + \beta u) + \Delta u = 0$ con $\beta \neq 0$ describe el proceso no estacionario de filtración de fluidos en un medio poroso fisurado. En [**21**] y [**22**] se estableció la existencia de soluciones globales en el tiempo para problemas de valor inicial y de frontera para ecuaciones en fluidos estratificados. En [**27**] se construyó la solución fundamental para el operador de ondas interiores gravitacionales $\partial_t^2 \left(\Delta u - \beta^2 u\right) + \omega_0^2 \left(\partial_{x_1}^2 + \partial_{x_2}^2\right) u = 0$, $x \in \mathbb{R}^3$, donde β es el parámetro de estratificación y ω_0 es la frecuencia Vaisala-Brent.

En [**13**] se encontraron condiciones para la solvencia de los problemas en los espacios Sobolev ponderados, se comprobaron los resultados de singularidad y se obtuvieron L^p-estimaciones a priori para las soluciones del problema de Cauchy y el problema mixto para ecuaciones diferenciales y sistemas no resueltos con respecto a la derivada de mayor orden. También se estudiaron las propiedades asintóticas de las soluciones de algunos problemas de hidrodinámica.

En [**52**] la teoría de semigrupos se aplicado a la teoría general de ecuaciones singulares de tipo Sobolev. Desde un punto de vista abstracto, las ecuaciones de tipo Sobolev degeneradas se investigaron en la monografía [**19**], donde las ecuaciones de tipo Sobolev se reducen a una ecuación diferencial con un operador lineal multivalor. Las ecuaciones de tipo Sobolev con dos no linealidades se discutieron en [**51**], donde el método de operadores lineales multivalor propuesto en [**19**] se desarrolló aún más.

Con respecto a la unicidad en el problema de Cauchy para la ecuación casi lineal $\partial_t(u - c\Delta u) = \varphi(u)$ de tipo pseudoparabólico se investigó en la clase de funciones de crecimiento $\varphi(u)$ en [**24**]. En [**32**] obtuvieron resultados sobre la existencia y la no existencia, y en particular demostraron la explosión en tiempo finito de una solución positiva de una ecuación de tipo Sobolev no lineal $\partial_t(u - \Delta u) - \Delta\psi(u) + q(u) = 0$ con fuente. El control óptimo en problemas lineales para ecuaciones de tipo pseudoparabólico se investigó en [**37**]. Para las ecuaciones lineales de orden superior de Sobolev, se demostró la existencia de soluciones generalizadas en [**46**]. El artículo [**14**] está dedicado a la prueba del principio máximo para ecuaciones de tipo pseudoparabólico. Las ecuaciones pseudoparabólicas con una no linealidad monótona se consideraron en [**49**], donde el método clásico de monotonía se aplicó ampliamente a varias clases de ecuaciones de física matemática y, en particular, a ecuaciones no lineales de tipo Sobolev con una monotonía no lineal.

Las ecuaciones de tipo Sobolev rara vez pueden resolverse explícitamente, por lo que son importantes varios métodos analíticos para estudiarlas. Algunos de los enfoques más eficaces para el análisis cualitativo de las ecuaciones diferenciales parciales no lineales son los métodos asintótico para la representación explícita de soluciones. Las fórmulas asintóticas permiten describir propiedades de soluciones como la tasa de disminución (o crecimiento) en varios dominios, el patrón monotónico u oscilatorio de su comportamiento, la dependencia con el tiempo de las perturbaciones iniciales, etc. También es interesante analizar cómo los términos no lineales en las ecuaciones de tipo Sobolev influyen en el comportamiento asintótico de las soluciones. Por ejemplo, a diferencia de las ecuaciones lineales correspondientes, las soluciones de los problemas no lineales pueden estar oscilando rápidamente, pueden crecer o decaer más rápidamente que las soluciones de las ecuaciones lineales correspondientes, pueden aproximarse a una solución auto-similar, y así sucesivamente. Notamos que esta información es difícil de obtener mediante experimentos numéricos, por lo que los métodos asintóticos no solo son importantes desde el punto de vista teórico, sino que también se usan ampliamente en la práctica como complemento de los métodos numéricos.

La teoría de los métodos asintóticos para las ecuaciones evolutivas no lineales es relativamente joven y las preguntas tradicionales de la teoría general están lejos de ser respondidas. Una descripción del comportamiento asintótico a largo plazo de las soluciones de ecuaciones de evolución no lineal requiere principalmente nuevos enfoques y la reorientación de los puntos de vista en los métodos asintóticos. Por ejemplo, los requisitos de la infinita diferenciabilidad y un soporte compacto generalmente aceptable en la teoría lineal son demasiado fuertes en la teoría no lineal.

La teoría asintótica es difícil incluso en el caso de ecuaciones evolutivas lineales. (Ver libros [**15**], [**20**]). La dificultad de los métodos asintóticos se explica por el hecho de que no solo necesitan una existencia global de soluciones, sino también una serie de estimaciones adicionales a priori de la diferencia entre la solución y la solución aproximada (generalmente las normas con peso). Tambi én las soluciones generalizadas no serián aceptadas por la teorí a asintótica, por lo que consideramos soluciones clásicas y semiclásicas (suaves), que pertenecen a algunos espacios de Lebesgue. Además, en el caso de las ecuaciones no lineales, es necesario probar la existencia global de soluciones clásicas y obtener algunas estimaciones adicionales para aclarar las expansiones asintóticas. Cada tipo de no linealidad debe estudiarse individualmente, especialmente en el caso de datos iniciales grandes.

Una gran cantidad de publicaciones han tratado representaciones asintóticas de soluciones al problema de Cauchy para ecuaciones de evolución no lineal en los últimos veinte años. Enumeraremos algunos trabajos conocidos [**6**], [**7**], [**16**], [**18**], [**25**], [**31**], [**44**], [**45**], donde, en particular, se obtuvieron estimaciones de tiempo óptimo y fórmulas asintóticas de soluciones de diferentes ecuaciones no lineales locales y no locales en el caso del problema de Cauchy. Sin embargo, hay pocos resultados con respecto al comportamiento asintótico para tiempos grandes de soluciones de problemas de valor inicial y de frontera.

Para entender la dificultad en el estudio del comportamiento asintótico de las soluciones de la ecuación de Sobolev (0.1) vamos a razonar heurísticamente y camparamos la velocidad de decaimineto de diferentes términos en la ecuación de Sobolev (0.1). Así podemos ver que la no linealidad en la ecuación de Sobolev (0.1) decrece lentamente con tiempo en comparación con los términos lineales y por lo tanto juega el papel principal en el comportamiento asintótico de las soluciones. Entonces no se puede omitir en primera aproximación, como frecuentemente pasa en otros problemas no lineales.

Hasta donde sabemos la asintótica de la ecuación de Sobolev (0.1) no fue estudiada anteriormente y hasta el momento es desconocida. En este trabajo llenaremos este vacío y encontraremos fórmulas asintóticas para las soluciones de la ecuación de Sobolev (0.1). Para esto inventamos un método de factorización modificada para este tipo de ecuaciones de Sobolev con no linealidad convectivas. Suponiendo que cerca del frente de la onda la solución se aproxima con una onda de choque y en la región lejana la solución parece una onda de rarefacción, entonces proponemos una nueva representación de la solución en la forma de un producto de una onda de rarefacción y otra onda de choque. Después demostramos rigurosamente, estimando los términos residuos, que está representación es válida y realemte describe el comportamiento asintótico de las soluciones de la ecuación de Sobolev (0.1).

Todos los resultados obtenidos en el trabajo son nuevos y originales y fueron publícados en el artículo en revista indezada con arbitraje estricto [**56**] (además como autor único).

El método de factorización con una cierta modificación se puede aplicar a otras ecuaciones no lineales de orden más alto (véase [**57**], [**58**]).

Este trabajo ha sido organizado de la siguiente manera:

Capítulo 1: Se expone la teoría básica para facilitar la comprensión del contenido de este trabajo.
Capítulo 2: En este capítulo demostraremos que si los datos iniciales son momotónamente crecientes y tienen derivadas de orden superior pequeñas, entonces las soluciones del problema de Cauchy (0.1) tienden a la onda de rarefacción.
Capítulo 3: En este capítulo consideraremos el caso de la onda de choque $a_+ < a_-$ y mostraremos que las soluciones tienen solución similar a $-\tanh(x(1+t)^n)$ cuando $t \to \infty$.
Capítulo 4: En este capítulo estudiaremos el caso de las condiciones de frontera cero $a_\pm = 0$, donde probaremos que las soluciones del problema de Cauchy (0.1) puede ser representada como el producto de una onda de rarefacción y una onda de choque.
Capítulo 5: En este capítulo, mostraremos con más detalles algunos cálculos y estimaciones de los tres capítulos anteriores.

NOTACIÓN

$\mathbb{R}$	Campo de los números reales.
$\mathbb{R}^+$	Números reales positivos.
$\mathbf{C}^k[E;F]$	Espacio de funciones k veces diferenciables del espacio topológico E al espacio topológico F.
$S(\mathbb{R})$	Espacio de Schwartz, espacio de funciones rápidamente decrecientes, (ver página 10)
$S'(\mathbb{R})$	Espacio de Distribuciones, esto es el dual topológico de $S(\mathbb{R})$, (ver página 10)
$\mathbf{L}^p(\mathbb{R})$	Espacio de funciones medibles p integrables con $1 \leq p \leq \infty$, (ver página 10).
$\mathbf{H}^k(\mathbb{R})$	Espacio de Banach de elementos $u \in S'(\mathbb{R})$ tal que $u^m \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R})$, $0 \leq m \leq k$; (ver página 10).

Capítulo 1

PRELIMINARES

Denotaremos a lo largo de esta tesis $\langle x\rangle = \sqrt{1+|x|^2}$, $\{x\} = \frac{|x|}{\langle x\rangle}$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Por $[x]$ denotaremos a la parte entera de $x \in \mathbb{R}$; más precisamente $[x] = \max_{k\leq x} k$, donde $k \in \mathbb{Z}$.

Se dice que la función f es infinitesimal con respecto a la función g en un punto $x_0 \in [-\infty, +\infty]$ si

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0,$$

en este caso se escribe $f = o(g)$ cuando $x \to x_0$. Por otra parte se dice que las funciones f, g son asintóticamente iguales en una vecindad de x_0 si

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1,$$

se denota $f \sim g$ cuando $x \to x_0$. Finalmente, se escribe $f = O(g)$ cuando $x \to x_0$ si existe una constante $C > 0$ tal que la desigualdad $|f(x)| < C|g(x)|$ se satisface en una vecindad de x_0. En particular, una función es $o(1)$ o $O(1)$ si esta tiende a cero o está acotada respectivamente.

Diferentes espacios funcionales serán utilizados a lo largo del presente trabajo. Para definir estos espacios es necesario considerar el espacio de medida $(\mathbb{R}, \mathscr{B}, \mathfrak{m})$, donde $\mathscr{B}$ representa la σ-álgebra de Borel y $\mathfrak{m}$ es la medida de Lebesgue.

Los espacios de Sobolev y la diferenciabilidad en $\boldsymbol{L}^2$ son herramientas fundamentales en el estudio cualitativo de las ecuaciones diferenciales parciales. Se enlistarán algunos hechos básicos de esta teoría que serán de gran utilidad en el análisis del comportamiento de las soluciones al problema no lineal.

Una función $f \in C^{\infty}(\mathbb{R})$ se dice que es *rápidamente decreciente* si para cualquiera $n, m \in \mathbb{N}$ existe $C = C(f) > 0$ tal que

$$|x^n D^m f(x)| \leq C \text{ para todo } x \in \mathbb{R},$$

siendo D el operador diferencial. El espacio de todas las funciones rápidamente decrecientes denotado por $\mathbf{S}(\mathbb{R})$ (ver [**10**], [**17**], [**33**]).

Espacios de Lebesgue $\boldsymbol{L}^p(\mathbb{R}) = \left\{f \in S'(\mathbb{R}) : \|f\|_p < \infty\right\}$, donde

$$\|f\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}},$$

para $1 \leq p < \infty$ y

$$\|f\|_{\infty} = \text{ess.}\sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|,$$

para $p = \infty$. Para más detalles sobre estos espacios puede consultar: [**9**], [**10**], [**11**] y [**54**].

Espacio de Sobolev de orden $k \geq 0$, $\boldsymbol{H}^k(\mathbb{R}) = \left\{f \in S'(\mathbb{R}) : \left\|\langle i\partial_x\rangle^k f\right\|_2 < \infty\right\}$. Es claro que $\boldsymbol{H}^k(\mathbb{R})$ es un espacio de Hilbert con el producto interno definido por

$$(f \cdot g) = \int_{\mathbb{R}} f(x)g(x)dx,$$

se sigue para $k \in \mathbb{Z}^+$. vía teorema Plancherel que

$$\boldsymbol{H}^k(\mathbb{R}) = \left\{f \in S'(\mathbb{R}) : D^m f \in \boldsymbol{L}^2(\mathbb{R}) \text{ para todo } m \in \mathbb{N},\ m \leq k\right\}.$$

Teorema de embebimiento de Sobolev: $\boldsymbol{H}^{k_1}(\mathbb{R}) \subset \boldsymbol{H}^{k_2}(\mathbb{R})$ si $k_1 \leq k_2$.

Para profundizar en el estudio de los espacios de Sobolev pueden consultar [**1**], [**4**], [**23**]. Teoría acerca de espacios de Sobolev sobre $\mathbb{R}^n$ puede ser encontrada en [**8**], [**11**], [**34**] y [**35**].

Las siguientes desigualdades serán de uso frecuente en los estimativos.

Teorema 1.1 (Desigualdad de Hölder). *Para* $f \in \boldsymbol{L}^p(\mathbb{R}^m)$ *y* $g \in \boldsymbol{L}^q(\mathbb{R}^m)$ *con* $1 \leq p, q \leq \infty$ *exponentes conjugados, esto es* $\frac{1}{p} + \frac{1}{9} = 1$, *se tiene que* $fg \in \boldsymbol{L}^1(\mathbb{R}^m)$ *y la desigualdad de Hölder*

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \, \|g\|_q \,,$$

se satisface.

Para funciones medibles f, g en $\mathbb{R}^m$ su convulución es una función $f * g$ definida por

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^m} f(x-y) g(y) dy.$$

En el siguiente teorema se expone una propiedad de esta función convolución.

Teorema 1.2 (Desigualdad de Young). *Sean* $1 \leq p, q, r \leq \infty$ *tales que* $1 + \frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$. *Si* $f \in \boldsymbol{L}^p(\mathbb{R}^m)$ *y* $g \in \boldsymbol{L}^q(\mathbb{R}^m)$ *entonces* $f * g$ *existe en casi todo punto* $x \in \mathbb{R}^m$ *y satisface*

$$\|f * g\|_r \leq \|f\|_p \, \|g\|_q \,.$$

Teorema 1.3 (Desigualdad de Gagliardo-Nirenberg). *Sean* $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $1 \leq q, r \leq \infty$ *y* $m \in \mathbb{N}$. *Supongamos también* $\alpha \in \mathbb{R}$, $j \in \mathbb{N}$ *tales que* $\frac{1}{p} = \frac{j}{n} + \left(\frac{1}{r} - \frac{m}{n}\right)\alpha + \frac{1-\alpha}{q}$ *y* $\frac{j}{m} \leq \alpha \leq 1$, *entonces existe una constante* $C > 0$ *que depende solo de* m, n, j, q, r *y* α *tal que*

$$\left\|D^j u\right\|_p \leq C \, \|D^m u\|_r^{\alpha} \, \|u\|_q^{1-\alpha} \,.$$

Teorema 1.4 (Desigualdad de Interpolación).

a): Si $f \in L^p, g \in L^q$ con $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \leq 1$, entonces $fg \in L^r$ y

$$\|fg\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q .$$

b): Si $1 \leq p \leq q \leq \infty$, $f \in L^p \cap L^q$, entonces $f \in L^r$ para todo $r \in [p,q]$ y de hecho si $\frac{1}{r} = \frac{\alpha}{p} + \frac{1-\alpha}{q}$ con $\alpha \in [0,1]$ entonces

$$\|f\|_r \leq \|f\|_p^{\alpha} \|f\|_q^{1-\alpha} .$$

Teorema 1.5. Si $k \geq 1$, entonces $\boldsymbol{H}_2^k(\mathbb{R}^+) \subset \boldsymbol{L}_\infty(\mathbb{R}^+)$.

Demostración. Observemos que $w^2 = -\int_x^{+\infty} d(w^2) = -2\int_x^{+\infty} ww_x dx$ y con ello obtenemos

$$\|w\|_\infty \leq \sqrt{2}\,\|w\|_2^{\frac{1}{2}} \|w_x\|_2^{\frac{1}{2}} \leq \sqrt{2}\,\|w\|_{H_2^1}$$

$\blacksquare$

Por el método del artículo [**12**] tenemos el siguiente resultado.

Lema 1.6. Sea $w \in \boldsymbol{C}^1((T_1, T_2); \boldsymbol{L}^\infty(\mathbb{R}))$ y $\tilde{w}(t) = \sup_{x\in\mathbb{R}} w(t,x) > 0$ para todo $t \in (T_1, T_2)$. entonces existe un punto $\zeta(t) \in \mathbb{R}$ tal que $\tilde{w}(t) = w(t, \zeta(t))$, además $\tilde{w}'(t) = w_t(t, \zeta(t))$ en casi todo (T_1, T_2).

Demostración. Como $\tilde{w}(t) = \sup_{x\in\mathbb{R}} w(t,x) > 0$ y $w(t,x) \in \boldsymbol{L}^\infty(\mathbb{R})$ para cada $t \in (T_1, T_2)$, existe un punto $\zeta(t) \in \mathbb{R}$ tal que $\tilde{w}(t) = w(t, \zeta(t))$ para todo $t \in (T_1, T_2)$. Por la desigualdad

$$\begin{aligned}
\tilde{w}(s) - \tilde{w}(t) &\leq w(s, \zeta(s)) - w(t, \zeta(s)) \leq \|w(s) - w(t)\|_\infty \\
&\leq \left\| \int_t^s w_t(\tau)\, d\tau \right\|_\infty \leq |s-t| \sup_{\tau\in(s,t)} \|w_\tau(\tau)\|_\infty
\end{aligned}$$

para todo $s,t \in (T_1, T_2)$ tenemos que $\tilde{w}(t)$ tiene variación acotada sobre (T_1, T_2), por tanto es diferenciable en casi todo (T_1, T_2). Entonces tenemos

$$\tilde{w}'(t) \leq \lim_{s\to t+0} \frac{\tilde{w}(s) - \tilde{w}(t)}{s-t} \leq \lim_{s\to t+0} \frac{\tilde{w}(s, \zeta(t)) - \tilde{w}(t, \zeta(t))}{s-t} = w_t(t, \zeta(t))$$

y

$$\tilde{w}'(t) \leq \lim_{s\to t-0} \frac{\tilde{w}(t)-\tilde{w}(s)}{t-s} \leq \lim_{s\to t+0} \frac{\tilde{w}(t,\zeta(t))-\tilde{w}(s,\zeta(t))}{t-s} = w_t(t,\zeta(t))$$

en casi todo $(T_{1,}T_2)$, como

$$w_t(t,x) = \lim_{s\to t} \frac{1}{t-s}(w(t,x)-w(s,x))$$

uniformemente con respecto a $x \in \mathbb{R}$. Por lo tanto $\tilde{w}'(t) = w_t(t,\zeta(t))$ en casi todo $(T_{1,}T_2)$. Hemos así demostrado el Lema 1.6 ■

Capítulo 2

ONDA DE RAREFACCIÓN

Primero investigemos el caso de la onda de rarefacción. Consideremos el problema de valor inicial para la ecuación

$$(2.1)\qquad \begin{cases} \varphi_t + (1+t)^n \varphi\varphi_x = 0,\ x \in \mathbb{R},\ t > 0, \\ \varphi(0,x) = \varphi_0(x),\ x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

donde $n \in \mathbb{N}$. El dato inicial $\varphi_0(x) \in \boldsymbol{C}^2(\mathbb{R})$ es monotónamente creciente $0 < \varphi_0'(x) < C$ para todo $x \in \mathbb{R}$, $\varphi_0(x) \to \pm 1$ cuando $x \to \pm\infty$ y $\varphi_0(0) = 0$.
La solución al problema (2.1) está dada por $\varphi(t, \chi(t,\xi)) = \varphi_0(\xi)$, donde las curvas características son $\chi(t,\xi) = \xi + \Phi(t)\varphi_0(\xi)$, para $\xi \in \mathbb{R}$, $t > 0$, donde $\Phi(t) = \frac{1}{n+1}\left[(1+t)^{n+1} - 1\right]$. Notemos que

$$\varphi_x(t, \chi(t,\xi)) = \frac{\varphi_0'(\xi)}{1 + \Phi(t)\varphi_0'(\xi)} > 0$$

y

$$0 < \frac{\varphi_0'(\xi)}{(1+\Phi(t)\varphi_0'(\xi))^2} = \frac{1}{\Phi(t)}\frac{\Phi(t)\varphi_0'(\xi)}{(1+\Phi(t)\varphi_0'(\xi))^2} \le \frac{1}{\Phi(t)} \le C\frac{1}{(1+t)^{n+1}}$$

para todo $t \geq 1$. Como $0 < \varphi_0'(\xi) < C$ para todo $\xi \in \mathbb{R}$, entonces

$$\|\varphi_x(t)\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}} \frac{(\varphi_0'(\xi))^2}{(1+\ \Phi(t)\varphi_0'(\xi))^2} d\xi \leq C \frac{1}{(1+t)^{n+1}} \int_{\mathbb{R}} \varphi_0'(\xi)\ d\xi \leq C(1+t)^{-(n+1)}$$

para todo $t \geq 1$. Por tanto tenemos que

$$\|\varphi_x(t)\|_2 \leq C(1+t)^{-\frac{1}{2}(n+1)}; \quad \int_t^\infty \|\varphi_x(\tau)\|_\infty \, d\tau \to 0 \tag{2.2}$$

cuando $t \to \infty$. Ahora si suponemos que el dato inicial $\varphi_0(\xi) \in \mathbf{C}^2(\mathbb{R})$ tenga los asintóticos

$$\begin{aligned} \varphi_0(\xi) &= \vartheta(\xi) + O\left(|\xi|^{-\beta}\right), \quad \varphi_0'(\xi) = O\left(|\xi|^{-\beta}\right), \\ \varphi_0''(\xi) &= O\left(|\xi|^{-(1+3\beta)}\right), \quad \varphi_0'''(\xi) = O\left(|\xi|^{-(1+4\beta)}\right), \end{aligned} \tag{2.3}$$

cuando $\xi \to \pm\infty$, donde $\beta > 0$ y $\vartheta(\xi) = 1$ si $\xi \geq 0$, $\vartheta(\xi) = -1$ si $\xi < 0$.
Con ello obtenemos los siguientes estimativos,

$$\begin{aligned} \|\varphi_{xx}(t)\|_2 &\leq C(1+t)^{-3(n+1)}, \quad \int_t^\infty \|\varphi_{xx}(\tau)\|_\infty \, d\tau \to 0, \\ \|\varphi_{xxx}(t)\|_2 &\leq C(1+t)^{-4(n+1)}, \quad \int_t^\infty \|\varphi_{xxx}(\tau)\|_\infty \, d\tau \to 0, \\ \|\varphi_{xt}(t)\|_2 &\leq C(1+t)^{-\frac{1}{2}(n+3)}, \quad \int_t^\infty \|\varphi_{xt}(\tau)\|_\infty \, d\tau \to 0, \\ \|\varphi_{xxt}(t)\|_2 &\leq C(1+t)^{-(3n+4)}, \quad \int_t^\infty \|\varphi_{xxt}(\tau)\|_\infty \, d\tau \to 0, \end{aligned} \tag{2.4}$$

cuando $t \to \infty$. Las verificaciones de estos estimativos se pueden ver en el Apéndice 1.1.

Primero mostremos un resultado suficientemente general acerca de la convergencia $t \to \infty$ de las soluciones $u(t,x)$ del problema (0.1) de la onda de rarefacción $\varphi(t,x)$. Algunas otras trabajos relacionadas se pueden encontrar en los artículos [**36**], [**40**], [**41**].

Teorema 2.1. $u_0 - \varphi_0 \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R})$ y $u_0 > 0$. Supongamos que $\varphi_0(x) \in \mathbf{C}^2(\mathbb{R})$ tal que satisface la condición (2.3). Entonces

$$u(t,x) = \varphi(t,x) + o(1)$$

cuando $t \to \infty$ uniformemente con respecto a $x \in \mathbb{R}$.

Demostración. Por la diferencia $w = u - \varphi$ obtenemos el problema de Cauchy

$$\begin{cases} \partial_t(w - w_{xx} - \varphi_{xx}) + (1+t)^n((w+\varphi)(w+\varphi)_x - \varphi\varphi_x) - w_{xx} - \varphi_{xx} = 0, \\ w(0,x) = w_0(x), \end{cases} \tag{2.5}$$

donde $w_0(x) = u_0(x) - \varphi_0(x) \in \boldsymbol{L}^2(\mathbb{R})$. Por el método del libro [**43**] se puede probar facílmente la existencia de una única solución $w(t,x) \in \boldsymbol{C}^\infty((0,\infty); \boldsymbol{H}^\infty(\mathbb{R})) \cap \boldsymbol{C}([0,\infty); \boldsymbol{L}^2(\mathbb{R}))$. Multiplicando la ecuación (2.5) por w y integrando con respecto a x sobre $\mathbb{R}$, obtenemos un estimativo a priori de tipo energía

$$\frac{d}{dt}\left(\|w\|_2^2 + \|w_x\|_2^2\right) + (1+t)^n \int_{\mathbb{R}} w^2 \varphi_x dx + 2\|w_x\|_2^2 + 2\int_{\mathbb{R}} w_x(\varphi_x + \varphi_{xt}) dx = 0.$$

Notemos que $(1+t)^n \int_{\mathbb{R}} w^2 \varphi_x dx \geq 0$ para todo $t > 0$, entonces

$$\frac{d}{dt}\left(\|w\|_2^2 + \|w_x\|_2^2\right) + 2\|w_x\|_2^2 + 2\int_{\mathbb{R}} w_x(\varphi_x + \varphi_{xt}) dx \leq 0.$$

aplicando desigualdad de Cauchy tenemos

$$\frac{d}{dt}\left(\|w\|_2^2 + \|w_x\|_2^2\right) + 2\|w_x\|_2^2 \leq 2\|w_x\|_2 \left(\|\varphi_x\|_2 + \|\varphi_{xt}\|_2\right).$$

Aplicando los estimativos (2.2), (2.4), obtenemos

$$\frac{d}{dt}\left(\|w\|_2^2 + \|w_x\|_2^2\right) + 2\|w_x\|_2^2 \leq C\|w_x\|_2 (1+t)^{-\frac{1}{2}(n+1)}.$$

Ahora sea $v = \|w\|_2^2 + \|w_x\|_2^2$, entonces $\|w_x\|_2 \leq \sqrt{v}$, por tanto tenemos $\frac{d}{dt}v \leq 2\sqrt{v}(1+t)^{-\frac{1}{2}(n+1)}$ integrando con respecto al tiempo $t > 0$, obtenemos $v = \|w\|_2^2 + \|w_x\|_2^2 \leq C$ y con ello $\|w\|_2 \leq C$ y $\|w_x\|_2 \leq C$, por tanto

$$\frac{d}{dt}\left(\|w\|_2^2 + \|w_x\|_2^2\right) + 2\|w_x\|_2^2 \leq C(1+t)^{-\frac{1}{2}(n+1)},$$

ahora integrando con respecto a $t>0$ y usando los estimativos respectivos obtenemos

$$\|w\|_2^2+\|w_x\|_2^2+2\int_0^t \|w_x(\tau)\|_2^2\,d\tau \leq C$$

entonces $\int_0^t \|w_x(\tau)\|_2^2\,d\tau \leq C$. Ahora teniendo encuenta la desigualdad $\|w\|_\infty^4 \leq 4\|w\|_2^2\|w_x\|_2^2 \leq C\|w_x\|_2^2$ obtenemos $\int_0^\infty \|w(t)\|_\infty^4\,dt < C$. Por tanto existe una sucesion $t_k \to \infty$ tales que $\|w(t_k)\|_\infty \to 0$ y $\|w_x(t_k)\|_2 \to 0$. Para probar que $\|w(t)\|_\infty \to 0$ cuando $t\to\infty$, estimemos $\sup_{x\in\mathbb{R}} w(t,x)$ y $\inf_{x\in\mathbb{R}} w(t,x)$. Dado que $w\in \boldsymbol{C}((0,\infty);\boldsymbol{H}^1(\mathbb{R}))$ se tiene que $\lim_{|x|\to\infty} w(t,x)=0$, por lo tanto tenemos $\sup_{x\in\mathbb{R}} w(t,x)\geq 0$ y $\inf_{x\in\mathbb{R}} w(t,x)\leq 0$ para todo $t\in(0,\infty)$. Sea $\tilde{w}(t)=\sup_{x\in\mathbb{R}} w(t,x)$, probemos que $\tilde{w}(t)\to 0$ cuando $t\to\infty$. Como $\|w(t_k)\|_\infty \to 0$ para alguna sucesión $t_k\to\infty$, consideremos $T_2>T_1\geq t_k$ tal que $\tilde{w}(t)>0$ para todo $t\in(T_1,T_2)$. En virtud del Lema 1.6, para cada $t>0$, sea $(t,\zeta(t))$ el punto donde $w(t,x)$ alcanza el supremo, esto es, $\tilde{w}(t)=w(t,\zeta(t))$. Luego $w_x(t,\zeta(t))=0$, entonces de la ecuación (2.5), tenemos

$$\tilde{w}'-\partial_t(w_{xx}+\varphi_{xx})+(1+t)^n\tilde{w}\varphi_x-w_{xx}(t,\zeta(t))-\varphi_{xx}(t,\zeta(t))=0,$$

Como $w_{xx}(t,\zeta(t))<0$, aplicando el Lema a $\tilde{w}_{xx}(t)=\inf_{x\in\mathbb{R}} w_{xx}(t,x)<0$ se tiene que $\tilde{w}_{xx}(t)=w_{xx}(t,\zeta(t))$ y $\tilde{w}_{xxt}(t)=w_{xxt}(t,\zeta(t))$ en casi todo $t\in(T_1,T_2)$, por tanto

$$\tilde{w}_t-\tilde{w}_{xxt}-\varphi_{xxt}+(1+t)^n\tilde{w}\varphi_x-\tilde{w}_{xx}-\varphi_{xx}=0,$$

como $(1+t)^n\tilde{w}\varphi_x>0$ para todo $x\in\mathbb{R}$ y todo $t>0$, y si hacemos $y(t)=\tilde{w}(t)-\tilde{w}_{xx}(t)>0$, tenemos entonces que

$$y_t-\tilde{w}_{xx}\leq \varphi_{xx}+\varphi_{xxt}$$

integrando con respecto a $t\in(T_1,T_2)$, tenemos

$$0<\int_{t_k}^t y_\tau(\tau)\,d\tau-\int_{t_k}^t \tilde{w}_{xx}(\tau)\,d\tau \leq \int_{t_k}^t (\varphi_{xx}(\tau,\zeta(\tau))+\varphi_{xxt}(\tau,\zeta(\tau)))\,d\tau$$

como $\int_{T_1}^{T_2}\tilde{w}_{xx}(\tau)\,d\tau<0$ y $\int_{T_1}^{T_2}(\varphi_{xx}(\tau,\zeta(\tau))+\varphi_{xxt}(\tau,\zeta(\tau)))\,d\tau<\infty$, entonces $\left|\int_0^\infty \tilde{w}_{xx}(\tau)d\tau\right|<\infty$,por tanto $\tilde{w}_{xx}(t_k)\to 0$ cuando $t_k\to\infty$, y también tenemos que

$$0 < \int_{t_k}^{t} y_\tau(\tau)\, d\tau \leq \int_{t_k}^{t} (\varphi_{xx}(\tau,\zeta(\tau)) + \varphi_{xxt}(\tau,\zeta(\tau)))\, d\tau$$

ahora por los estimativos (2.4), tenemos entonces

$$\left| \int_{t_k}^{t} \varphi_{xx}(\tau,\zeta(\tau))\, d\tau \right| \leq \int_{t_k}^{\infty} \|\varphi_{xx}(t)\|_\infty\, dt = o(1)$$

$$\left| \int_{t_k}^{t} \varphi_{xx\tau}(\tau,\zeta(\tau))\, d\tau \right| \leq \int_{t_k}^{\infty} \|\varphi_{xxt}(t)\|_\infty\, dt = o(1)$$

cuando $t_k \to \infty$. Asi $\int_{t_k}^{t} y_\tau(\tau)\; d\tau \to 0$ cuando $t_k \to \infty$, entonces $y(t) \leq y(t_k) + o(1)$ cuando $t_k \to \infty$, esto es, $y(t) \leq \tilde{w}(t_k) - \tilde{w}_{xx}(t_k) + o(1)$ cuando $t_k \to \infty$. Como $\tilde{w}(t_k) \to 0$ y $\tilde{w}_{xx}(t_k) \to 0$ cuando $t_k \to \infty$, tenemos entonces $y(t) \to 0$ cuando $t \to \infty$. Por tanto $\widetilde{w}(t) \to 0$ cuando $t \to \infty$. Similarmente se pruebe probar que $\inf_{x\in\mathbb{R}} w(t,x) \to 0$ cuando $t \to \infty$. Con ello obtenemos $\|w(t)\|_\infty \to 0$ Cuando $t \to \infty$. Hemos así demostrado el Teorema 2.1. ■

Suponemos ahora que se deben cumplir algunas condiciones más para el dato inicial $u_0(x)$ y calcular más precisamente el comportamiento asintótico de soluciones $u(x,t)$ al problema (0.1). Supongamos que el dato inicial $u_0(x)$ es monotónamente creciente y varía lentamente, de tal manera que las derivadas de orden superior son menos comparadas con las primeras. Más precisamente suponemos que el dato inicial $u_0(x) \in \boldsymbol{C}^3(\mathbb{R})$. tiene las siguientes estimaciones.

$$0 < u_0'(x) \leq \varepsilon, \quad |u_0''(x)| \leq C\varepsilon \left(u_0'(x)\right)^{\frac{3}{2}}, \quad |u_0'''(x)| \leq C\varepsilon^2 \left(u_0'(x)\right)^2 \tag{2.6}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$, donde $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño. Por ejemplo, podemos tomar el dato inicial de la siguiente forma $u_0(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{x} \varepsilon^2(1+\varepsilon^4\xi^2)^{-1} d\xi$. Notemos que $u_0(+\infty) = 1$, también tenemos $u_0'(x) = \frac{1}{\pi}\varepsilon^2\left(1+\varepsilon^4x^2\right)^{-1}$, $u_0''(x) = -\frac{2}{\pi}\varepsilon^6 x\left(1+\varepsilon^4x^2\right)^{-2}$, $u_0'''(x) = \frac{2}{\pi}\varepsilon^6\left(4\varepsilon^4x^2-1\right)\left(1+\varepsilon^4x^2\right)^{-3}$.

Por Teorema 2.1 sabemos que las soluciones de (0.1) son similares a las de la ecuación de Hopf (2.1). Por lo tanto, la no linealidad en la ecuación

(0.1) crece más rápidamente con respecto al tiempo que el término de la segunda derivada, por lo tanto el comportamiento de las soluciones a tiempo grande debe ser determinado por los dos primeros términos en la ecuación (0.1). Por tal motivo vamos a resolver la ecuación (0.1) por el método de las características. Haciendo un cambio de variable $y = u - u_{xx}$ en (0.1), obtenemos

$$\begin{cases} \partial_t y + (1+t)^n y y_x + (1+t)^n (u_{xx} y_x + u u_{xxx}) - u_{xx} = 0,\ x \in \mathbb{R},\ t > 0, \\ y(0,x) = y_0(x),\ x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

donde $y_0(x) = u_0(x) - u_0''(x)$. luego

$$\begin{cases} \partial_t y + y_x \Big((1+t)^n y + \Big((1+t)^n u_{xx} + \frac{(1+t)^n u u_{xxx} - u_{xx}}{y_x} \Big) \Big) = 0,\ x \in \mathbb{R},\ t > 0, \\ y(0,x) = y_0(x),\ x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Definimos las características $\chi(t,\xi)$ como las soluciones al problema de Cauchy

$$\begin{cases} \chi_t = (1+t)^n\ y(t,\chi) + \Big((1+t)^n u_{xx} + \frac{(1+t)^n u u_{xxx} - u_{xx}}{y_x} \Big),\ t > 0,\ \xi \in \mathbb{R}. \\ \chi(0,\xi) = \xi,\ \ \xi \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Entonces obtenemos $\frac{d}{dt} y\,(t, \chi(t,\xi)) = 0$. Integrando tenemos
$y\,(t, \chi(t,\xi)) = y_0(\xi),\ \xi \in \mathbb{R}$. Por lo tanto

$$\chi_t = (1+t)^n y_0(\xi) + \left((1+t)^n u_{xx} + \frac{\chi_\xi(t,\xi)}{y_0'(\xi)} ((1+t)^n u u_{xxx} - u_{xx}) \right).$$

Ahora si cambiamos la variable dependiente $\eta = u_0(\xi)$, tenemos que el eje real $\xi \in \mathbb{R}$ es transformado biunívocamente al segmento $(-1,1)$ (debido a nuestra suposiciones (2.6) tenemos $y_0'(\xi) = u_0'(\xi) - u_0'''(\xi) > 0$).
Denotemos $m(\eta) = \frac{\partial \eta}{\partial \xi} = u_0'(\xi)$, y $Z(t,\eta) = \frac{m((\eta)}{\chi_\xi(t,\xi)} = u_\chi(t,\chi)$. Entonces obtenemos

$$\begin{aligned} \partial_t \chi_\xi &= (1+t)^n m(\eta) + \partial_\xi \left((1+t)^n u_{xx} + \frac{\chi_\xi(t,\xi)}{y_0'(\xi)} ((1+t)^n u u_{xxx} - u_{xx}) \right) \\ &= m(\eta) \left((1+t)^n + \partial_\eta \left((1+t)^n u_{xx} + \frac{1}{Z} ((1+t)^n u u_{xxx} - u_{xx}) \right) \right). \end{aligned}$$

Luego para $Z(t,\eta)$ tenemos

$$\partial_t Z = -Z^2 \frac{1}{m(\eta)} \partial_t \chi_\xi(t,\xi) = -Z^2((1+t)^n + A),$$

donde

$$
\begin{aligned}
A(t,\eta) &= \partial_\eta\left((1+t)^n u_{xx} + \frac{1}{Z}\left((1+t)^n u u_{xxx} - u_{xx}\right)\right)\\
&= \frac{1}{Z^2}\left((1+t)^n\left(Z u_{xxx} - Z_\eta u u_{xxx} + u_x u_{xxx} + u u_{xxxx}\right) + Z_\eta u_{xx} - u_{xxx}\right)\\
&= \frac{1}{Z^2}\left((1+t)^n\left(Z u_{xxx} - \frac{u}{Z} y_{xx} u_{xxx} + u_x u_{xxx} + u u_{xxxx}\right)\right.\\
&\quad \left. + \frac{1}{Z} y_{xx} u_{xx} - u_{xxx}\right)
\end{aligned}
$$

Así, para $Z(t,\eta)$ obtenemos el siguiente problema de valor inicial y de frontera

$$
\begin{cases}
Z_t = -Z^2((1+t)^n + A),\ t>0,\ \eta \in (-1,1),\\
Z(0,\eta) = m(\eta),\ \eta \in (-1,1),\\
\partial_\eta^k Z\Big|_{\eta=\pm 1} = 0,\ t>0,\ k=1,2,
\end{cases}
\tag{2.7}
$$

De la existencia y unicidad de la solución $u(t,x)$ al problema (0.1), se sigue que existe una única solución global $Z(t,\eta) \in \mathbf{C}([0,\infty);\mathbf{C}^2(0,1)) \cap \mathbf{C}^1([0,\infty);\mathbf{C}(0,1))$ para el problema de valor inicial y frontera (2.7). Integrando la ecuación (2.7) con respecto a $t>0$ tenemos la siguiente representación

$$
Z(t,\eta) = m(\eta)\left(1 + m(\eta)\left(\Phi(t) + \int_0^t A(\tau,\eta)\, d\tau\right)\right)^{-1}.
\tag{2.8}
$$

donde $\Phi(t) = \frac{1}{n+1}\left((1+t)^{n+1} - 1\right)$.

Probemos el siguiente resultado.

Teorema 2.2. Sean $u_0(x)$ el valor inicial dado con las condiciones (2.6) y $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño. Entonces tenemos

$$
\sup_{\eta\in(-1,1)} |A(t,\eta)| < C\varepsilon
$$

para todo $t>0$.

Observación 2.3. Por la representación (2.8) y el estimativo del Teorema 2.2, tenemos los asintóticos

$$Z(t,\eta) = \frac{m(\eta)}{1+m(\eta)\Phi(t)(1+O(t^{-1}))} \text{ cuando } t \to \infty,$$

en efecto, cuando $t \to \infty$, tenemos

$$\begin{aligned} 1+m(\eta)\left(\Phi(t)+\int_0^t A(\tau,\eta)\,d\tau\right) &= 1+m(\eta)(\Phi(t)+O(1)) \\ &= 1+m(\eta)\Phi(t)\left(1+(1+t)^{-(n+1)}O(1)\right) \\ &= 1+m(\eta)\Phi(t)(1+O(1)) \end{aligned}$$

luego

$$y_\chi(t,\chi(t,\xi)) = \frac{y_0'(\xi)}{1+y_0'(\xi)\Phi(t)(1+O(1))} \tag{2.9}$$

donde

(2.10)

$$\chi(t,\xi) = \xi+\Phi(t)y_0(\xi)+\int_0^t \left(\left(1+t'\right)^n u_{xx}+\frac{\chi_\xi(t',\xi)}{y_0'(\xi)}\left(\left(1+t'\right)^n uu_{xxx}-u_{xx}\right)\right)dt'$$

Así vemos que la solución $u(t,x)$ al problema (0.1) se comporta asintóticamente como una solución de la ecuación de Hopf (2.1). Notemos que mediante las fórmulas (2.9) y (2.10) podemos obtener una expansión asintótica de orden superior de la solución $u(t,x)$.

Demostración del Teorema 2.2. Por contradicción y en virtud de la continuidad con respecto al tiempo podemos encontrar un tiempo $T>1$, tal que

$$\sup_{\eta\in(-1,1)} |A(t,\eta)| \leq C\varepsilon$$

para $t \in [0, T]$. Entonces tenemos la estiamación

$$\begin{aligned} Z(t,\eta) &= m(\eta)\left(1 + m(\eta)\left(\Phi(t) + \int_0^t A(\tau,\eta)\, d\tau\right)\right)^{-1} \\ &\leq \begin{cases} C\,(n+1)(1+t)^{-n-1},\ t \in [1,T] \\ Cm(\eta),\ 0 < t < 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Como las estimaciones para $0 < t < 1$, son más sencillas, entonces dedes ahora consideraremos las estimaciones para tiempos $t \geq 1$. Derivando dos veces la ecuación (0.1), obtenemos

$$\begin{aligned} \partial_t(u_{xx} - u_{xxxx}) &= -3\,(1+t)^n u_x u_{xx} - (1+t)^n u u_{xxx} + u_{xxxx} \\ &= -3\,(1+t)^n u_x(u_{xx} - u_{xxxx}) - (1+t)^n u u_{xxx} \\ &\quad + (1 - 3\,(1+t)^n u_x)\, u_{xxxx}. \end{aligned}$$

Denotemos $w_1 = u_{xx} - u_{xxxx}$, entonces tenemos

$$\partial_t w_1 = -3\,(1+t)^n u_x w_1 - (1+t)^n u u_{xxx} + (1 - 3\,(1+t)^n u_x)\, u_{xxxx}.$$

Sea X_1 el punto tal que $u_{xx}(t,X_1) = \max_{x\in\mathbb{R}} u_{xx}(t,x)$. Denotemos $\widetilde{w}_1 = u_{xx}(t,X_1) - u_{xxxx}(t,X_1)$, luego

$$\frac{d}{dt}\widetilde{w}_1 = -3\,(1+t)^n u_x \widetilde{w}_1 + (1 - 3\,(1+t)^n u_x)\, u_{xxxx}(t,X_1) \leq -\frac{3\,(n+1)}{1+t}\widetilde{w}_1$$

para todo $t \geq 1$. Integrando tenemos $\widetilde{w}_1(t) \leq \widetilde{w}_1(1)\left(\frac{1+t}{2}\right)^{-3(n+1)}$. Por tanto

$$\max_{x\in\mathbb{R}} u_{xx}(t,x) \leq u_{xx}(t,X_1) - u_{xxxx}(t,X_1) = \widetilde{w}_1 \leq C\,(1+t)^{-3(n+1)} \leq CZ^3.$$

Similarmente derivando tres veces la ecuación (0.1), obtenemos

$$\begin{aligned} \partial_t(u_{xxx} - u_{xxxxx}) &= -4\,(1+t)^n u_x u_{xxx} - 3\,(1+t)^n u_{xx}^2 \\ &\quad - (1+t)^n u u_{xxxx} + u_{xxxxx} \\ &= -4\,(1+t)^n u_x(u_{xxx} - u_{xxxxx}) - 3\,(1+t)^n u_{xx}^2 \\ &\quad - (1+t)^n u u_{xxxx} + (1 - 4\,(1+t)^n u_x)\, u_{xxxxx}. \end{aligned}$$

Denotemos $w_2 = u_{xxx} - u_{xxxxx}$, luego

$$\begin{aligned}\partial_t w_2 &= -4(1+t)^n u_x w_2 - 3(1+t)^n u_{xx}^2 \\ &\quad -(1+t)^n u u_{xxxx} + (1-4(1+t)^n u_x) u_{xxxxx}.\end{aligned}$$

Sea X_2 el punto tal que $u_{xxx}(t,X_2) = \max_{x\in\mathbb{R}} u_{xxx}(t,x)$. Denotemos $\widetilde{w}_2 = u_{xxx}(t,X_2) - u_{xxxxx}(t,X_2)$, así obtenemos

$$\frac{d}{dt}\widetilde{w}_2 \leq -4(1+t)^n u_x \widetilde{w}_2 + (1-4(1+t)^n u_x) u_{xxxxx}(t,X_2) \leq -\frac{4(n+1)}{1+t}\widetilde{w}_2.$$

Ahora integrando obtenemos

$$|u_{xxx}| \leq u_{xxx}(t,X_2) - u_{xxxxx}(t,X_2) = \widetilde{w}_2 \leq C(1+t)^{-4(n+1)} \leq CZ^4.$$

Similarmente derivando cuatro veces la ecuación (0.1), obtenemos

$$\begin{aligned}\partial_t(u_{xxxx} - u_{xxxxxx}) &= -5(1+t)^n u_x u_{xxxx} - 6(1+t)^n u_{xx} u_{xxx} \\ &\quad -(1+t)^n u u_{xxxxx} + u_{xxxxxx} \\ &= -5(1+t)^n u_x (u_{xxxx} - u_{xxxxxx}) - 6(1+t)^n u_{xx} u_{xxx} \\ &\quad -(1+t)^n u u_{xxxxx} + (1-5(1+t)^n u_x) u_{xxxxxx}.\end{aligned}$$

Denotemos $w_3 = u_{xxxx} - u_{xxxxxx}$, entonces

$$\begin{aligned}\partial_t w_3 &= -5(1+t)^n u_x w_3 - 6(1+t)^n u_{xx} u_{xxx} - (1+t)^n u u_{xxxxx} \\ &\quad +(1-5(1+t)^n u_x) u_{xxxxxx}.\end{aligned}$$

Sea X_3 el punto talque $u_{xxxx}(t,X_3) = \max_x u_{xxxx}(t,x)$. Denotemos $\widetilde{w}_3 = u_{xxxx}(t,X_3) - u_{xxxxxx}(t,X_3)$, entonces obtenemos

$$\partial_t \widetilde{w}_3 = -5(1+t)^n u_x \widetilde{w}_3 + (1-5(1+t)^n u_x) u_{xxxxxx}(t,X_3) \leq -\frac{5(n+1)}{1+t}\widetilde{w}_2$$

Integrando como arriba obtenemos

$$u_{xxxx} \leq u_{xxxx}\left(t,\widetilde{X}_3\right) - u_{xxxxxx}\left(t,\widetilde{X}_3\right) = \widetilde{w}_3 \leq C(1+t)^{-5(n+1)} \leq CZ^5.$$

Entonces tenemos los estimativos.

$$|u_{xx}| \leq C(1+t)^{-3(n+1)}, \quad |u_{xxx}| \leq C(1+t)^{-4(n+1)}, \quad |u_{xxxx}| \leq C(1+t)^{-5(n+1)}.$$

Ahora estimemos A

$$\begin{aligned}
|A| &= \left|\frac{1}{Z^2}\left[(1+t)^n\left(Zu_{xxx} - \frac{u}{Z}y_{xx}u_{xxx} + u_x u_{xxx} + uu_{xxxx}\right)\right.\right.\\
&\quad \left.\left. + \frac{1}{Z}y_{xx}u_{xx} - u_{xxx}\right]\right|\\
&= \left|\frac{1}{Z^2}\left[(1+t)^n\left(Zu_{xxx} - \frac{u}{Z}(u_{xx} - u_{xxxx})u_{xxx} + u_x u_{xxx} + uu_{xxxx}\right)\right.\right.\\
&\leq \left.\left. + \frac{1}{Z}(u_{xx} - u_{xxxx})u_{xx} - u_{xxx}\right]\right|\\
&\leq CZ^{-2}\left((1+t)^n Z^5 + Z^4\right) \leq CZ^2 < C\varepsilon.
\end{aligned}$$

Hemos así demostrado el Teorema 2.2. ■

Capítulo 3

ONDA DE CHOQUE

Aquí consideramos otro tipo de condiciones de frontera, correspondientes a las soluciones de una onda de choque. Estudiemos el problema de Cauchy

$$\begin{cases} \partial_t(u-u_{xx})+(1+t)^n uu_x - u_{xx} = 0, \; x\in\mathbb{R}, \; t>0 \\ u(0,x)=u_0(x), \; x\in\mathbb{R}, \end{cases} \tag{3.1}$$

Con datos iniciales que satisfacen las condiciones de frontera de las ondas de choque, $u_0(x) \to \mp 1$ cuando $x \to \pm\infty$. Haciendo cambio de variable $u(t,x)=w(t,y)$, $y=x(1+t)^n$ y reemplazando en (3.1), obtenemos

$$\begin{cases} w_t + n\frac{y}{1+t}w_y - (1+t)^{2n}\Big[-ww_y + \big(2n\frac{1}{1+t}+1\big)w_{yy} \\ +w_{tyy} + n\frac{y}{1+t}w_{yyy}\Big] = 0 \;, \; y\in\mathbb{R}, \; t>0 \\ w(0,y)=u_0(y), \; y\in\mathbb{R}, \end{cases} \tag{3.2}$$

Introducimos una solución aproximada (para t suficientemente grande se tiene una mejor aproximación)

$$W(t,y) = \sum_{k=0}^{m}(1+t)^{-k}W_k(y),$$

donde $m > 2n$, las funciones $W_k(y)$ para $0 \leq k \leq m$ las definimos de forma recurrente. Sustituimos W en (3.2) para obtener

$$\sum_{k=1}^{m+1}\Big((k-1)(1+t)^{-k}W_{k-1}(y) - ny(1+t)^{-k}W'_{k-1}(y)\Big)$$
$$= (1+t)^{2n}\left[\sum_{l=0}^{m}\sum_{s=0}^{m}(1+t)^{-(l+s)}W_l W'_s - \Big(2n\tfrac{1}{1+t}+1\Big)\sum_{k=0}^{m}(1+t)^{-k}W''_k\right.$$
$$\left. + \sum_{k=1}^{m}k(1+t)^{-k-1}W''_k(y) \; - ny\sum_{k=0}^{m}(1+t)^{-k-1}W'''_k\right]$$

Si recopilamos los términos con la mismo potencia de $(1+t)^{2n-k}$, obtenemos la ecuaciones

$$W_0W'_0 - W''_0 = 0 \tag{3.3}$$

$$\sum_{l=0}^{k}W_{k-l}W'_l - 2nW''_{k-1} - W''_k + (k-1)W''_{k-1} - nyW'''_{k-1} = 0, \quad k = 1,\dots,2n \tag{3.4}$$

$$\begin{aligned}(j-1)W_{j-1} - nyW'_{j-1} &= \sum_{l=0}^{k}W_{k-l}W'_l - 2nW''_{k-1} \\ &\quad -W''_k + (k-1)W''_{k-1} - nyW'''_{k-1}, \quad (k = j+2n), \quad j \geq 1.\end{aligned} \tag{3.5}$$

Como $W_0(y) \to \mp 1$ y $W'_0(y) \to 0$ cuando $y \to \pm\infty$, entonces la solución de la ecuación (3.3), es $W_0(y) = -\tanh\left(\frac{1}{2}y\right)$. En efecto,

$$\begin{aligned} W_0W'_0 - W''_0 &= 0 \iff \frac{d}{dy}\left(\frac{1}{2}W_0^2 - W'_0\right) = 0 \iff W'_0 = \frac{1}{2}\left(W_0^2 - 1\right) \iff \\ \int \frac{1}{1-W_0^2}dW_0 &= -\frac{1}{2}y \iff \tanh^{-1}W_0(y) = -\frac{1}{2}y \iff W_0(y) = -\tanh\left(\frac{1}{2}y\right).\end{aligned}$$

Ahora de la ecuación (3.4), tenemos entonces

$$\begin{aligned} W''_k &= \sum_{l=0}^{k}W_{k-l}W'_l + (k-2n-1)W''_{k-1} - nyW'''_{k-1} \\ &= \frac{1}{2}\partial_y\sum_{l=0}^{k}W_{k-l}W_l + (k-2n-1)W''_{k-1} - nyW'''_{k-1},\end{aligned} \tag{3.6}$$

con condiciones de frontera $W_k(y) \to 0$ cuando $y \to \pm\infty$, $k = 1,\ldots,2n$. Integrando respecto a y sobre $(-\infty, y)$ obtenemos

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{y} W_k''(\tau)d\tau &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{y} \partial_\tau \sum_{l=0}^{k} W_{k-l}(\tau)W_l(\tau)d\tau \\ &+(k-2n-1)\int_{-\infty}^{y} W_{k-1}''(\tau)d\tau - n\int_{-\infty}^{y} \tau W_{k-1}'''(\tau)d\tau\end{aligned}$$

$$W_k' = W_kW_0 + \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{k-1} W_{k-l}W_l + (k-2n-1)W_{k-1}' - n\int_{-\infty}^{y} \tau W_{k-1}'''(\tau)d\tau \tag{3.7}$$

$$W_k' - W_kW_0 = \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{k-1} W_{k-l}W_l + (k-2n-1)W_{k-1}' - n\int_{-\infty}^{y} \tau W_{k-1}'''(\tau)d\tau$$

Como $W_0(y) = -\tanh\left(\frac{1}{2}y\right)$, entonces

$$\begin{aligned}\frac{d}{dy}\left[\cosh^2\left(\frac{1}{2}y\right)W_k(y)\right] &= \cosh\left(\frac{1}{2}y\right)\sinh\left(\frac{1}{2}y\right)W_k(y) \\ &+\cosh^2\left(\frac{1}{2}y\right)W_k'(y) \\ &= \cosh^2\left(\frac{1}{2}y\right)\tanh\left(\frac{1}{2}y\right)W_k(y) \\ &+\cosh^2\left(\frac{1}{2}y\right)W_k'(y) \\ &= \cosh^2\left(\frac{1}{2}y\right)\left(W_k' - W_kW_0\right).\end{aligned}$$

Multiplicando a ambos lados por $\cosh^2\left(\frac{1}{2}y\right)$ obtenemos

$$\begin{aligned}&\tfrac{d}{dy}\left[\cosh^2\left(\tfrac{1}{2}y\right)W_k(y)\right] \\ &= \cosh^2\left(\tfrac{1}{2}y\right)\left(\tfrac{1}{2}\sum_{l=1}^{k-1} W_{k-l}W_l + (k-2n-1)W_{k-1}' - n\int_{-\infty}^{y} \tau W_{k-1}'''(\tau)d\tau\right)\end{aligned}$$

e integrando con respecto a y sobre $(-\infty, y)$, tenemos

$$
\begin{aligned}
W_k(y) = \quad & \int_{-\infty}^{y} \frac{\cosh^2\left(\frac{1}{2}z\right)}{\cosh^2\left(\frac{1}{2}y\right)} \left(\frac{1}{2} \sum_{l=1}^{k-1} W_{k-l} W_l + (k-2n-1) W'_{k-1} \right. \\
& \left. -n \int_{-\infty}^{z} \tau W'''_{k-1}(\tau) d\tau \right) dz, \quad k = 1, ..., 2n.
\end{aligned} \tag{3.8}
$$

Dé (3.5) obtenemos

$$
\begin{aligned}
W''_k \quad &= \quad \sum_{l=0}^{k} W_{k-l} W'_l + (k-2n-1) W''_{k-1} - n y W'''_{k-1} \\
& \quad -(j-1) W_{j-1} + n y W'_{j-1} \\
W''_k \quad &= \quad \frac{1}{2} \partial_y \sum_{l=0}^{k} W_{k-l} W_l + (k-2n-1) W''_{k-1} - n y W'''_{k-1} \\
& \quad -(j-1) W_{j-1} + n y W'_{j-1}
\end{aligned} \tag{3.9}
$$

con condicones de frontera $W_j(y) \to 0$ cuando $y \to \pm\infty$, $k = j + 2n$, $j \geq 1$, ahora integrando respecto a y sobre $(-\infty, y)$ obtenemos

$$
\begin{aligned}
W'_k \quad &= \quad W_k W_0 + \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{k-1} W_{k-l} W_l + (k-2n-1) W'_{k-1} \\
& \quad -n \int_{-\infty}^{y} \tau W'''_{k-1}(\tau) d\tau - (j-1) \int_{-\infty}^{y} W_{j-1}(\tau) d\tau \\
& \quad +n \int_{-\infty}^{y} \tau W'_{j-1}(\tau) d\tau.
\end{aligned} \tag{3.10}
$$

Como $W_0(y) = -\tanh\left(\frac{1}{2}y\right)$, entonces multiplicando a ambos lados por $\cosh^2\left(\frac{1}{2}y\right)$ e integrando con respecto a y sobre $(-\infty, y)$, obtenemos

$$
\begin{aligned}
W_k(y) = \quad & \int_{-\infty}^{y} \frac{\cosh^2\left(\frac{1}{2}z\right)}{\cosh^2\left(\frac{1}{2}y\right)} \left(\frac{1}{2} \sum_{l=1}^{k-1} W_{k-l} W_l + (k-2n-1) W'_{k-1} \right. \\
& -n \int_{-\infty}^{z} \tau W'''_{k-1}(\tau) d\tau - (j-1) \int_{-\infty}^{z} W_{j-1}(\tau) d\tau \\
& \left. +n \int_{-\infty}^{z} \tau W'_{j-1}(\tau) d\tau \right) dz, \quad k = j + 2n, \quad j \geq 1.
\end{aligned} \tag{3.11}
$$

Podemos ver que $W_k(y)$ es una función impar para cada $k \geq 0$. En efecto $W_0(y) = -\tanh\left(\frac{1}{2}y\right)$ es una función impar y si suponemos que W_i es una función impar para todo $i \leq k-1$ también W_i'' es una función impar, entonces

$$\begin{aligned}\int_{-\eta}^{\eta} \tau W_i'(\tau)d\tau &= \tau W_i(\tau)|_{\tau=-\eta}^{\tau=\eta} - \int_{-\eta}^{\eta} W_i(\tau)d\tau \\ &= -\int_{-\eta}^{\eta} W_i(\tau)d\tau = 0,\ i = 0, ..., k-1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_{-\eta}^{\eta} \tau W_i'''(\tau)d\tau &= \tau W_i''(\tau)\Big|_{\tau=-\eta}^{\tau=\eta} - \int_{-\eta}^{\eta} W_i''(\tau)d\tau \\ &= -\int_{-\eta}^{\eta} W_i''(\tau)d\tau = 0,\ i = 0, ..., k-1\end{aligned}$$

y

$$W_i(\eta)W_l(\eta) = W_i(-\eta)W_l(-\eta)$$

lo cual implica que $W_k(y)$ es una función impar. La función $W(t,y)$ está cerca a la onda de choque $W_0(y) = -\tanh\left(\frac{1}{2}y\right)$ para tiempos grandes $t \to \infty$, sin embargo las derivadas con respecto a x de $W(t,y)$ no están cercanas a la de W_0 cuando $t \to \infty$. Esta es la razón por la que introducimos las correcciones de orden superior $W_k(y)(1+t)^{-k}$, $k \geq 1$ considerando la convergencia con las derivadas de la solución $u(t,x)$ cuando $t \to \infty$.

Ahora analicemos el comportamiento asintótico de $W_k^{(j)}(y)$ cuando $y \to \pm\infty$, para todo k y para todo j. De (3.8) tenemos entonces

$$W_1(y) = \int_{-\infty}^{y} \frac{\cosh^2\left(\frac{1}{2}z\right)}{\cosh^2\left(\frac{1}{2}y\right)} \left(-2nW_0'(z) - n\int_{-\infty}^{z} \tau W_0'''(\tau)d\tau\right)dz.$$

Ahora

$$\int_{-\infty}^{z} \tau W_0'''(\tau)d\tau = \tau W_0''(\tau) - W_0'(\tau)\Big|_{-\infty}^{z}$$

$$\int_{-\infty}^{z} \tau W_0'''(\tau)d\tau = zW_0''(z) - W_0'(z) - \lim_{\tau\to-\infty}\left(\tau W_0''(\tau) - W_0'(\tau)\right).$$

Dé (3.3) tenemos $W_0'' = W_0 W_0'$, entonces

$$\int_{-\infty}^{z} \tau W_0'''(\tau) d\tau = z W_0(z) W_0'(z) - W_0'(z) - \lim_{\tau \to -\infty} \left(\tau W_0(\tau) W_0'(\tau) - W_0'(\tau) \right).$$

Como $W_0(y) \to \mp 1$, $W_0'(y) = \mathcal{O}(e^{-|y|})$ cuando $y \to \pm\infty$, entonces

$$\begin{aligned} \lim_{\tau \to -\infty} \left(\tau W_0(\tau) W_0'(\tau) - W_0'(\tau) \right) &= \lim_{\tau \to -\infty} W_0'(\tau)(\tau W_0(\tau) - 1) \\ &= \lim_{\tau \to -\infty} e^{\tau}(\tau - 1) = 0. \end{aligned}$$

Luego $\int_{-\infty}^{z} \tau W_0'''(\tau) d\tau = z W_0(z) W_0'(z) - W_0'(z)$, entonces tenemos

$$\begin{aligned} W_1(y) &= \int_{-\infty}^{y} \frac{\cosh^2\left(\frac{1}{2}z\right)}{\cosh^2\left(\frac{1}{2}y\right)} \left(-2n W_0'(z) - n \int_{-\infty}^{z} \tau W_0'''(\tau) d\tau \right) dz \\ &= \int_{-\infty}^{y} \frac{\cosh^2\left(\frac{1}{2}z\right)}{\cosh^2\left(\frac{1}{2}y\right)} \left(-2n W_0'(z) - n \left(z W_0(z) W_0'(z) - W_0'(z) \right) \right) dz \\ &= -n \int_{-\infty}^{y} \frac{\cosh^2\left(\frac{1}{2}z\right)}{\cosh^2\left(\frac{1}{2}y\right)} W_0'(z)(z W_0(z) + 1) dz. \end{aligned}$$

Como tenemos $\cosh^2\left(\frac{1}{2}y\right) = \mathcal{O}(e^{|y|}), W_0(y) \to \mp 1$, $W_0'(y) = \mathcal{O}(e^{-|y|})$ cuando $y \to \pm\infty$, entonces

$$\begin{aligned} W_1(y) &\sim e^{-y} \int_{-\infty}^{y} e^{z}(-z e^{-z} - e^{-z}) dz \quad \text{cuando } y \to +\infty \\ &\sim e^{-y} \left(-\frac{1}{2} y^2 - y \right) \text{ cuando } y \to +\infty \\ &\sim y^2 e^{-|y|} \text{ cuando } y \to +\infty \end{aligned}$$

Podemos concluir que $W_1(y) = \mathcal{O}(y^2 e^{-|y|})$ cuando $y \to \pm\infty$. En forma similar demostramos que $W_1^{(j)}(y) = \mathcal{O}(y^2 e^{-|y|})$ cuando $y \to \pm\infty$; para todo j. Además en forma recursiva demostramos que $W_k^{(j)}(y) = \mathcal{O}(y^{2k} e^{-|y|})$ cuando $y \to \pm\infty$, para todo $k = 1, \ldots, 2n$ y para todo j (ver Apéndice 2.1). Ahora usando (3.11) tenemos

$$W_{2n+1}(y) = \int_{-\infty}^{y} \frac{\cosh^2\left(\frac{1}{2}z\right)}{\cosh^2\left(\frac{1}{2}y\right)} \left(\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{2n} W_{2n+1-l}W_l - n\int_{-\infty}^{z} \tau W_{2n}'''(\tau)d\tau + n\int_{-\infty}^{z} \tau W_0'(\tau)d\tau \right) dz.$$

De la misma manera como se hizo arriba, obtenemos $W_{2n+1}^{(j)}(y) = \mathcal{O}(y^{2(2n+1)}e^{-|y|})$ cuando $y \to \pm\infty$ para todo j, y enforma recursiva también tendriamos $W_k^{(j)}(y) = \mathcal{O}(y^{2k}e^{-|y|})$ cuando $y \to \pm\infty$ para todo $k = 2n+1, \cdots, m$ y para todo j (ver Apéndice 2.2). Asi obtemos entonces $W_k^{(j)}(y) = \mathcal{O}(y^{2k}e^{-|y|})$ cuando $y \to \pm\infty$ para todo $k = 1, \ldots, m$ y para todo j.

En virtud de (3.2), (3.4) y (3.5), de la diferencia $v(t,x) = u(t,x) - W(t,y)$ donde $W(t,y) = \sum_{k=0}^{m}(1+t)^{-k}W_k(y)$ y $u(t,x)$ solución del problema (3.1), obtenemos

$$v_t - v_{txx} + (1+t)^n v v_x + (1+t)^n \partial_x(vW) - v_{xx} + R = 0 \tag{3.12}$$

donde

$$\begin{aligned} R(t,y) &= W_t - W_{txx} + (1+t)^n W W_x - W_{xx} \\ &= -\sum_{k=m-2n}^{m} k(1+t)^{-k-1}W_k + ny\sum_{k=m-2n}^{m}(1+t)^{-k-1}W_k' \\ &\quad -(1+t)^{2n}(2n-m)(1+t)^{-m-1}W_m'' - (1+t)^{2n}ny(1+t)^{-m-1}W_m''' \\ &\quad +(1+t)^{2n}\sum_{k=m+1}^{2m}\left(\sum_{l=0}^{k} W_{k-l}W_l'\right)(1+t)^{-k}. \end{aligned}$$

Ver Apéndice 2.3. Integrando con respecto a x sobre $(-\infty, x)$ a (3.12), obtenemos

$$V_t - V_{txx} - \frac{1}{2}(1+t)^n(V_x)^2 + (1+t)^n W V_x - V_{xx} + R_1 = 0 \tag{3.13}$$

donde $V(t,x)=\int_{-\infty}^{x} v(t,x')\,dx'$ y

$$\begin{aligned}
R_1(t,y) = \;& (1+t)^{-n-1}\Bigg[-ny\sum_{k=m-2n}^{m}(1+t)^{-k}W_k(y)\\
&-\sum_{k=m-2n}^{m}(n+k)(1+t)^{-k}\int_{-\infty}^{y}W_k(\tau)d\tau\Bigg]\\
&-(1+t)^{n-m-1}(n-m)W_m'(y)-(1+t)^{n-m-1}nyW_m''(y)\\
&+\tfrac{1}{2}(1+t)^{n}\sum_{k=m+1}^{2m}\left(\sum_{l=0}^{k}W_{k-l}(y)W_l(y)\right)(1+t)^{-k}
\end{aligned}$$

Ahora usando los estimativos de W_k, $k\geq 0$ y sus derivadas obtenemos

$$\begin{aligned}
R_1(t,y)\sim \;& e^{-y}(1+t)^{-n-1}\Bigg[n\sum_{k=m-2n}^{m}y^{2k+1}(1+t)^{-k}\\
&-\sum_{k=m-2n}^{m}(n+k)y^{2k}(1+t)^{-k}\Bigg]\\
&-(1+t)^{n-m-1}(n-m)y^{2m}e^{-y}+(1+t)^{n-m-1}ny^{2m+1}e^{-y}\\
&+\tfrac{1}{2}(1+t)^{n}\left(\sum_{k=m+1}^{2m}y^{2k}(1+t)^{-k}\right)e^{-2y}\text{ cuando } y\to+\infty,
\end{aligned}$$

por tanto

$$\begin{aligned}
R_1(t,y) \;&\sim\; Cy^{2m+1}(1+t)^{-(m-n+1)}e^{-y}+Cy^{2m}(1+t)^{-(m-n+1)}e^{-y}\\
&\quad +Cy^{4m}(1+t)^{-(m-n+1)}e^{-2y}\\
&\sim\; (1+t)^{n-m-1}y^{4m}e^{-y}\text{ cuando }\; y\to+\infty.
\end{aligned}$$

Esto es, $R_1(t,y)=\mathcal{O}((1+t)^{n-m-1}y^{4m}e^{-|y|})$ cuando $y\to\pm\infty$. Supogamos que los datos iniciales $u_0(x)$ para el problema (0.1) están cerca de la solución aproximada $W(t_0,y)$ tal que $V(t_0,x)\cosh\alpha x\in \boldsymbol{L}^{\infty}$ para un $\alpha>0$ suficientemente pequeño y para algún tiempo $t=t_0$ donde el tiempo inicial $t_0>0$, lo consideramos suficientemente grande. Esto significa que la forma en que el comienzo de los efectos no lineales dominan sobre los lineales (podríamos reemplazar este requisito considerando un gran coeficiente al término no lineal en la Eq (0.1)).

Probemos ahora el siguiente resultado.

Teorema 3.1. Sea el tiempo inicial $t_0 > 0$ lo suficientemente grande y el dato inicial $u(t_0,x) \in \boldsymbol{L}^\infty$ cerca de la onda de choque $W(t_0, x(1+t_0)^n)$, es decir

$$\cosh(\alpha x) \int_{-\infty}^{x} \left(u(t,x') - W(t_0, x'(1+t_0)^n)\right) dx' \in \boldsymbol{L}^\infty$$

donde $\alpha > 0$ es sufientemente pequeño. Entonces existe solución única $u(t,x)$ para el problema de Cauchy (0.1) tal que

$$\cosh(\alpha x) \int_{-\infty}^{x} \left(u(t,x') - W(t, x'(1+t)^n)\right) dx' \in \mathbf{C}([t_{0,}\infty); \boldsymbol{L}^\infty)$$

y el estimativo

$$\left\| \cosh(\alpha x) \int_{-\infty}^{x} \left(u(t,x') - W(t, x'(1+t)^n)\right) dx' \right\|_\infty \leq C\,(1+t)^{-(n+1)},$$

es valido para todo $t \geq t_0$.

Demostración. Sea $g(t,x) = V(t,x)\cosh\alpha x$, donde $\alpha > 0$ suficientemente pequeño. En virtud de la ecuacion (3.13) tenemos entonces

$$\begin{aligned} & \partial_t\left((1+\alpha^2 - 2\alpha^2\tanh^2\alpha x)g - g_{xx} + (2\alpha\tanh\alpha x)g_x\right) \\ = \; & \frac{(1+t)^n}{2\cosh\alpha x}(g_x - \alpha g\tanh\alpha x)^2 - \chi g - \psi g_x + g_{xx} - R_1\cosh\alpha x \end{aligned} \tag{3.14}$$

donde

$$\chi = \alpha^2 - 2\alpha^2\tanh^2\alpha x - \alpha(1+t)^n W(t,y)\tanh\alpha x, \quad \psi = 2\alpha\tanh\alpha x + (1+t)^n W(t,y),$$

ver Apéndice 2.4. Como $1+\alpha^2 - 2\alpha^2\tanh^2\alpha x > 0$, apliquemos el principio del máximo a la ecuación (3.14), por virtud del Lema 1.6, sea $\zeta(t)$ la curva tal que $\tilde{g}(t) = g(t,\zeta(t)) = \sup_{x\in\mathbb{R}} g(t,x)$, entonces

$$\begin{aligned} (1+\alpha^2 - 2\alpha^2\tanh^2\alpha x)\tilde{g}_t - g_{xxt} \;=\; & \frac{(1+t)^n}{2\cosh\alpha x}(\alpha\tilde{g}\tanh\alpha x)^2 \\ & -\chi\tilde{g} + g_{xx}(t,\zeta(t)) - R_1\cosh\alpha x \end{aligned}$$

Como $g_{xx}(t,\zeta(t)) < 0$, aplicando el Lema 1.6 a $\tilde{g}_{xx}(t) = \inf_{x\in\mathbb{R}} g_{xx}(t,x) < 0$ se tiene que $\tilde{g}_{xx}(t) = g_{xx}(t,\zeta(t))$ y $\tilde{g}_{xxt}(t) = g_{xxt}(t,\zeta(t))$ en casi todo t, por tanto

$$\begin{aligned}(1+\alpha^2-2\alpha^2\tanh^2\alpha x)\tilde{g}_t - \tilde{g}_{xxt} &= \frac{(1+t)^n}{2\cosh\alpha x}(\alpha\tilde{g}\tanh\alpha x)^2 \\ &\quad -\chi\tilde{g} + \tilde{g}_{xx} - R_1\cosh\alpha x \\ &\leq \frac{1}{2}\alpha^2(1+t)^n\tilde{g}^2 - \chi\tilde{g} + \tilde{g}_{xx} - R_1\cosh\alpha x.\end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned}W(t,y) &= \sum_{k=0}^{m}(1+t)^{-k}W_k(y) = W_0(y) + \sum_{k=1}^{m}(1+t)^{-k}W_k(y) \\ &= -\tanh(y/2) + \sum_{k=1}^{m}(1+t)^{-k}W_k(y)\end{aligned}$$

donde $W_k(y) \to 0$ cuando $y \to \pm\infty$, para todo $k \geq 1$. Entonces

$$\begin{aligned}\chi &= \alpha^2 - 2\alpha^2\tanh^2\alpha x - \alpha(1+t)^n W(t,y)\tanh\alpha x \\ \chi &= \alpha^2 - 2\alpha^2\tanh^2\alpha x + \alpha(1+t)^n\tanh\alpha x\tanh(y/2) \\ &\quad -\alpha(1+t)^n\tanh\alpha\sum_{k=1}^{m}(1+t)^{-k}W_k(y) \\ &= \alpha^2 - 2\alpha^2\tanh^2\alpha x + \alpha(1+t)^n\tanh\alpha x\tanh(y/2) + O(1)\end{aligned}$$

para todo $t \geq t_0$. Si t_0 es suficientemente grande y $\alpha > 0$ es suficientemente pequeño entonces $\chi \geq c$ (ver Apéndice 2.5), con ello obtenemos entonces

$$(1+\alpha^2-2\alpha^2\tanh^2\alpha x)\tilde{g} - \tilde{g}_{xx} \leq \frac{1}{2}\alpha^2(1+t)^n\tilde{g}^2 - c\tilde{g} + \tilde{g}_{xx} - R_1\cosh\alpha x. \tag{3.15}$$

Como $I(t) = (1+\alpha^2-2\alpha^2\tanh^2\alpha x)\tilde{g}(t) - \tilde{g}_{xx}(t) > 0$ y si suponemos

$$M_1 = \max\left(1+\alpha^2-2\alpha^2\tanh^2\alpha x\right) > 0,\ m_1 = \min\left(1+\alpha^2-2\alpha^2\tanh^2\alpha x\right) > 0,$$

entonces $M_1\tilde{g}(t) \geq (1+\alpha^2-2\alpha^2\tanh^2\alpha x)\tilde{g}(t)$, luego

$$\begin{aligned}-\tilde{g}(t) &\leq -\frac{1}{M_1}\left((1+\alpha^2-2\alpha^2\tanh^2\alpha x)\tilde{g}(t) - \tilde{g}_{xx}(t)\right) - \frac{1}{M_1}\tilde{g}_{xx}(t) \\ &\leq -\frac{1}{M_1}I(t) - \frac{1}{M_1}\tilde{g}_{xx}(t)\end{aligned}$$

y como $m_1\tilde{g}(t) \le (1+\alpha^2 - 2\alpha^2\tanh^2 \alpha x)\tilde{g}(t) \le I(t)$, en virtud de (3.15) tenemos entonces

$$\frac{d}{dt}I \le \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha}{m_1}\right)^2 (1+t)^n I^2 - \frac{c}{M_1}I + \left(1-\frac{c}{M_1}\right)\tilde{g}_{xx} - R_1\cosh\alpha x,$$

sin perdida de generalidad podemos suponer $c > 0$ suficientemente pequeño tal que $\left(1-\frac{c}{M_1}\right) > 0$, entonces

$$\frac{d}{dt}I \le \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha}{m_1}\right)^2 (1+t)^n I^2 - \frac{c}{M_1}I - R_1\cosh\alpha x.$$

ahora como $\cosh\alpha x = \mathcal{O}(e^{|\alpha x|})$ y $R_1(t,y) = \mathcal{O}((1+t)^{n-m-1}y^{4m}e^{-|y|})$ cuando $y \to \pm\infty$, $(y = (1+t)^n x)$ entonces $|R_1(t,y)\cosh\alpha x| \le C(1+t)^{n-m-1}$. Así tenemos entonces

$$\frac{d}{dt}I \le C(1+t)^n I^2 - rI + C(1+t)^{n-m-1}.$$

Sea $I(t) = z(t)e^{-rt}$, entonces

$$\begin{aligned} z_t e^{-rt} - rI &\le C(1+t)^n z^2 e^{-2rt} - rI + C(1+t)^{n-m-1} \\ z_t &\le C(1+t)^n z^2 e^{-rt} + C(1+t)^{n-m-1}e^{rt}. \end{aligned} \tag{3.16}$$

Probemos que

$$z(t) < Ce^{rt}(1+t)^{n-m} \tag{3.17}$$

para todo $t \ge t_0$. Por contradicción supongamos que existe $T > t_0$ tal que $z(t) \le Ce^{rt}(1+t)^{n-m}$ para todo $t \in [t_0, T]$. Por (3.16) tendríamos

$$\begin{aligned} z_t &\le C(1+t)^n\left((1+t)^{n-m}e^{rt}\right)^2 e^{-rt} + C(1+t)^{n-m-1}e^{rt} \\ &\le C(1+t)^{-(2m-3n)}e^{rt} + C(1+t)^{-(m+1-n)}e^{rt} \\ &\le C(1+t)^{-(m+1-n)}e^{rt} \end{aligned}$$

integrando con respecto a t, obtenemos

$$
\begin{aligned}
z &\leq C+\int_{t_0}^{t}(1+\tau)^{-(m+1-n)}e^{r\tau}d\tau \\
&\leq C+\int_{t_0}^{t/2}(1+\tau)^{-(m+1-n)}e^{r\tau}d\tau+\int_{t/2}^{t}(1+\tau)^{-(m+1-n)}e^{r\tau}d\tau \qquad (3.18)\\
&\leq C+e^{rt/2}\int_{t_0}^{t/2}(1+\tau)^{-(m+1-n)}d\tau+(1+t/2)^{-(m+1-n)}\int_{t/2}^{t}e^{r\tau}d\tau \\
&< C+e^{rt/2}+e^{rt}(1+t/2)^{-(m+1-n)}<C+Ce^{rt}(1+t)^{-(m+1-n)}
\end{aligned}
$$

entonces $z(t) < (1+t)^{-(m+1-n)}e^{rt}$ para todo $t \in [t_0, T]$. La contradicción obtenida prueba el estimativo (3.17) para todo $t \geq t_0$, con ello tenemos $w(t) < C(1+t)^{-(m+1-n)}$ y como $m\tilde{g}(t) < w(t)$ entonces $\tilde{g}(t) < C(1+t)^{-(m+1-n)}$ para todo $t \geq t_0$. De manera similar si hacemos $\widehat{g}(t) = \inf_{x\in\mathbb{R}} g(t,x)$, obtenemos el estimativo $\widehat{g}(t) > -C(1+t)^{-(m+1-n)}$. De esta forma el Teorema 3.1 queda demostrado. ■

Capítulo 4

CONDICIONES DE FRONTERA CERO

En este Capitulo estudiamos el caso más difícil cuando los datos iniciales se descomponen en el infinito. Para facilitar los cálculo aanlizaremos (0.1) cuando $n = 1$. Así que consideramos el problema de Cauchy

$$\begin{cases} \partial_t(u - u_{xx}) + (1+t)uu_x - u_{xx} = 0,\ x \in \mathbb{R},\ t > 0 \\ u(0,x) = u_0(x),\ x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

con dato inicial $u_0(x) \to 0$ cuando $x \to \pm\infty$. Sabemo (ver libro [**43**]) que existe una única solución $u(t,x) \in \boldsymbol{C}([0,\infty);\boldsymbol{L}^2)\cap\boldsymbol{C}^\infty((0,\infty);\boldsymbol{L}^\infty)$ si $u_0 \in \boldsymbol{L}^2$. Ahora si el dato inicial $u_0(x)$ es una función impar, entonces la solución $u(t,x)$ sigue siendo una función impar para todo $t > 0$ y se puede obtenerse como una prolongación impar de la solución del siguiente problema de valor de frontera de Dirichlet

$$\begin{cases} \partial_t(u - u_{xx}) + (1+t)uu_x - u_{xx} = 0,\ x \in (-\infty,0),\ t > 0, \\ u(t,-\infty) = 0,\ u(t,0) = 0,\ \ t > 0, \\ u(0,x) = u_0(x),\ x \in (-\infty,0). \end{cases} \tag{4.1}$$

Definimos $\varphi(t,x)$ una onda de rarefación como en el capítulo 3

$$\begin{cases} \partial_t(\varphi - \varphi_{xx}) + (1+t)\varphi\varphi_x - \varphi_{xx} = 0,\ x \in \mathbb{R},\ t > 0, \\ \varphi(0,x) = \varphi_0(x),\ x \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{4.2}$$

donde el dato inicial $\varphi_0(x)$ es monotonamente creciente $\varphi_0'(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, tal que $\varphi_0(x) \to 0$ cuando $x \to -\infty$. Ahora definiremos la solución de la onda de choque $r(t,x)$ como la solución del problema de valor de frontera de Dirichlet

$$
(4.3) \quad \begin{cases} \partial_t(r - r_{xx}) + (1+t)\varphi r r_x + (1+t)\varphi_x r(r-1) \\ -\dfrac{1}{\varphi}\left[\varphi_{xx} r_t + 2\partial_t(\varphi_x r_x) + \varphi_t r_{xx} + 2\varphi_x r_x\right] - r_{xx} = 0, \; x \in (-\infty, 0), \; t > 0, \\ r(t, -\infty) = 1, \; r(t,0) = 0, \; t > 0, \\ r(0,x) = r_0(x), \; x \in (-\infty, 0). \end{cases}
$$

Entonces la función $u = \varphi r$ satisface el problema de Cauchy (4.1). Por ejemplo, supongamos que los datos iniciales $\varphi_0(x)$ decaen al infinito como $\varphi_0(x) = -\frac{1}{x} + \mathcal{O}(e^{-|x|})$ cuando $x \to -\infty$. Utilicemos el método de características para resolver la ecuación. Definamos la caracteristica $\chi(t,\xi)$ como la solución al problema de Cauchy

$$
\begin{cases} \chi_t = (1+t)\varphi(t,\chi) - \frac{\varphi_{t\chi\chi}}{\varphi_\chi} - \frac{\varphi_{\chi\chi}}{\varphi_\chi}, \; t > 0, \; \xi \in \mathbb{R}, \\ \chi(0,\xi) = \xi, \; \xi \in \mathbb{R}. \end{cases}
$$

Entonces de la ecuación (4.2) obtenemos la ecuación

$$
\begin{aligned} w_t(t,\xi) &= \varphi_t + \varphi_\chi \chi_t = \varphi_t + \varphi_\chi\left((1+t)\varphi - \frac{\varphi_{t\chi\chi}}{\varphi_\chi} - \frac{\varphi_{\chi\chi}}{\varphi_\chi}\right) \\ &= \partial_t(\varphi - \varphi_{\chi\chi}) + (1+t)\varphi\varphi_\chi - \varphi_{\chi\chi} = 0 \end{aligned}
$$

para una nueva variable dependiente $w(t,\xi) = \varphi(t,\chi(t,\xi))$. Por lo tanto $w(t,\xi) = \varphi_0(\xi)$ para todo $t > 0$, $\xi \in \mathbb{R}$. Con cálculos sencillos obtenemos

$$
\partial_\chi \varphi = \frac{\varphi_0'(\xi)}{\chi_\xi(t,\xi)}, \quad \partial^2_{\chi\chi}\varphi = \frac{\varphi_0''(\xi)}{\chi_\xi^2(t,\xi)} - \frac{\varphi_0'(\xi)\chi_{\xi\xi}(t,\xi)}{\chi_\xi^3(t,\xi)} = \frac{1}{\chi_\xi(t,\xi)}\partial_\xi\left(\frac{\varphi_0'(\xi)}{\chi_\xi(t,\xi)}\right)
$$

$$
\partial^3_{\chi\chi\chi}\varphi(t,\chi(t,\xi)) = \frac{\varphi_0'''(\xi)}{\chi_\xi^3(t,\xi)} - \frac{3\varphi_0''(\xi)\chi_{\xi\xi}(t,\xi)}{\chi_\xi^3(t,\xi)} - \frac{\varphi_0'(\xi)\chi_{\xi\xi\xi}(t,\xi)}{\chi_\xi^3(t,\xi)} + \frac{3\varphi_0'(\xi)\chi^2_{\xi\xi}(t,\xi)}{\chi_\xi^4(t,\xi)}
$$

y por consiguiente

$$
\chi_t = (1+t)\varphi_0(\xi) - \frac{\chi_\xi(t,\xi)}{\varphi_0'(\xi)}\partial_t\left[\frac{1}{\chi_\xi(t,\xi)}\partial_\xi\left(\frac{\varphi_0'(\xi)}{\chi_\xi(t,\xi)}\right)\right] - \frac{1}{\varphi_0'(\xi)}\partial_\xi\left(\frac{\varphi_0'(\xi)}{\chi_\xi(t,\xi)}\right).
$$

Integrando con respecto al tiempo $t \geq 0$, obtenemos

$$\begin{aligned}\chi(t,\xi) &= \xi + \frac{1}{2}(1+t)^2\varphi_0(\xi) - \frac{1}{\varphi_0'(\xi)}\partial_\xi \int_0^t \varphi_\chi(t',\chi(t',\xi))dt' \\ &\quad - \frac{1}{\varphi_0'(\xi)}\int_0^t \chi_\xi(t',\xi)\frac{\partial}{\partial t'}\left[\frac{1}{\chi_\xi(t',\xi)}\partial_\xi\varphi_\chi(t',\chi(t',\xi))\right]dt'.\end{aligned}$$

Definamos la curva $\xi_0(t)$ tal que $\chi(t,\xi_0(t)) = 0$ para todo $t > 0$. Entonces

$$\begin{aligned}\xi_0(t) &= \frac{1}{\varphi_0'(\xi_0)}\int_0^t \chi_\xi(t',\xi_0)\frac{\partial}{\partial t'}\left[\frac{1}{\chi_\xi(t',\xi_0)}\partial_\xi\varphi_\chi(t',\chi(t',\xi_0))\right]dt' \\ &\quad + \frac{1}{\varphi_0'(\xi_0)}\partial_\xi \int_0^t \varphi_\chi(t',\chi(t',\xi_0))dt' - \frac{1}{2}(1+t)^2\varphi_0(\xi_0)\end{aligned}$$

Fácilmente vemos que $\xi_0(t) \to -\infty$ cuando $t \to \infty$. Si suponemos lo contrario, que $\xi_0(t)$ esta acotado cuando $t \to \infty$, entonces $\varphi_0(\xi_0) \geq C_0 > 0$ y el último término $-\frac{1}{2}(1+t)^2\varphi_0(\xi_0)$ se porta como $-Ct^2$. Por otro lado la solución φ y sus derivadas en el intervalo acotado estan acotadas (en realidad decaen con respecto al tiempo). Entonces las dos primeras integrales crecen menos que Ct. En total el último término siempre gana. En la primera aproximación escribimos $\chi(t,\xi) = \xi - \frac{1}{2\xi}(1+t)^2 + \mathcal{O}(\xi^{-1}(1+t)^3)$, por consiguiente $\xi_0^2 = \frac{1}{2}(1+t)^2 + \mathcal{O}((1+t)^3)$. Por lo tanto las siguientes expansiones asintótica

$$\begin{aligned}&\xi_0(t) = -\tfrac{1}{\sqrt{2}}(1+t) + \mathcal{O}((1+t)^2), &&\varphi_{\chi\chi}(t,0) = \tfrac{1}{\sqrt{2}}(1+t)^{-3} + \mathcal{O}((1+t)^{-4}),\\ &\varphi_\chi(t,0) = (1+t)^{-2} + \mathcal{O}((1+t)^{-3}), &&\varphi_{\chi\chi\chi}(t,0) = -3(1+t)^{-4} + \mathcal{O}((1+t)^{-5}).\end{aligned}$$

son válidas para $t \to \infty$. Aplicando fórmula de Taylor

$\varphi(t,x) = \varphi(t,0) + x\varphi_x(t,0) + \frac{1}{2}x^2\varphi_{xx}(t,0) + \frac{1}{6}x^3\varphi_{xxx}(t,\tilde{x})$, obtenemos

$$\begin{aligned}
\varphi(t,x) &= \sqrt{2}(1+t)^{-1} + x(1+t)^{-2} + \frac{1}{2\sqrt{2}}x^2(1+t)^{-3} + \mathcal{O}(x^3(1+t)^{-4}) \\
\varphi_x(t,x) &= (1+t)^{-2} + \frac{1}{\sqrt{2}}x(1+t)^{-3} - \frac{3}{2}x^2(1+t)^{-4} + \mathcal{O}(x^3(1+t)^{-5}) \\
\varphi_{xx}(t,x) &= \frac{1}{\sqrt{2}}(1+t)^{-3} - 3x(1+t)^{-4} + \mathcal{O}(x^2(1+t)^{-5}) \\
\varphi_t(t,x) &= -\sqrt{2}(1+t)^{-2} - 2x(1+t)^{-3} - \frac{3}{2\sqrt{2}}x^2(1+t)^{-4} + \mathcal{O}(x^3(1+t)^{-5}) \\
\varphi_{tx}(t,x) &= -2(1+t)^{-3} - \frac{3}{\sqrt{2}}x(1+t)^{-4} + 6x^2(1+t)^{-5} + \mathcal{O}(x^3(1+t)^{-6})
\end{aligned}$$

cuando $t \to \infty$. Continuando este procedimiento obtenemos la expansión asintótica

$$(1+t)\varphi(t,x) = \sum_{k=0}^{m} a_k(x)(1+t)^{-k} + \mathcal{O}(x^{m+1}(1+t)^{-(m+1)})$$

cuando $t \to \infty$, donde $a_k(x)$ es un polinomio con respecto a x de orden menor o igual a k, y similarmente obtenemos las expansiones asintóticas para $(1+t)^2\varphi_x(t,x)$, $(1+t)\frac{\varphi_x(t,x)}{\varphi(t,x)}$, $(1+t)^2\frac{\varphi_{xx}(t,x)}{\varphi(t,x)}$, $(1+t)\frac{\varphi_t(t,x)}{\varphi(t,x)}$, $(1+t)^2\frac{\varphi_{tx}(t,x)}{\varphi(t,x)}$. Ahora como en el capítulo 3 contruyamos una solución aproximada $\Phi(t,x)$ al problema (4.3) de la forma $\Phi(t,x) = \sum_{k=0}^{m} \phi_k(x)(1+t)^{-k}$, donde las funciones $\phi_k(x)$, $0 \leq k \leq m$, son definidas recurrentemente por medio de ecuciones las cuales son obtenidas comparando los términos que contienen $(1+t)^{-k}$. Mediante algunos cálculos (ver Apéndice 3.1) llegamos a las siguientes ecuaciones

$$\phi_0'' - a_0\phi_0\phi_0' = 0, \quad \phi_k'' - a_0(\phi_k\phi_0)' = z_k, \quad k \geq 1, \tag{4.4}$$

donde

$$\begin{aligned} z_k(t,x) &= \sum_{j=0}^{k-1}\sum_{l=0}^{j}\left(a_{k-j}\phi'_{j-l}\phi_l + b_{k-1-j}\phi_{j-l}\phi_l\right) + \sum_{l=1}^{k-1} a_0\phi'_{k-l}\phi_l \\ &\quad -\sum_{j=0}^{k-1}\left(b_{k-1-j}\phi_j + e_{k-1-j}\phi''_j + c_{k-1-j}\phi'_j\right) \\ &\quad -\sum_{j=0}^{k-2}\left(f_{k-2-j}\phi'_j - jc_{k-2-j}\phi'_j\right) + \sum_{j=0}^{k-3} jd_{k-3-j}\phi_j \\ &\quad -(k-1)\,\phi_{k-1} + (k-1)\,\phi''_{k-1} \end{aligned}$$

para $k \geq 1$, donde $b_k(x)$, $c_k(x)$, $d_k(x)$, $e_k(x)$ y $f_k(x)$ son polinomios con respecto a x de ordenes menor o igual a k. Por las condiciones de frontera tenemos $\phi_0(x) \to 1$, $\phi_k(x) \to 0$, $k \geq 1$,cuando $x \to -\infty$ y $\phi_k(0) = 0 \quad k \geq 0$. Integrando (4.4) con respecto a x sobre $(-\infty, x)$ con $a_0 = 1$, tenemos $\phi_0(x) = -\tanh\left(\frac{x}{2}\right)$ y $\phi'_k - (\phi_0\phi_k) = \int_{-\infty}^{x} z_k(\eta)d\eta$. Como

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\left[\cosh^2\left(\frac{1}{2}x\right)\phi_k(x)\right] &= \cosh\left(\frac{1}{2}x\right)\sinh\left(\frac{1}{2}x\right)\phi_k(x) + \cosh^2\left(\frac{1}{2}x\right)\phi'_k(x) \\ &= \cosh^2\left(\frac{1}{2}x\right)\tanh\left(\frac{1}{2}x\right)\phi_k(x) + \cosh^2\left(\frac{1}{2}x\right)\phi'_k(x) \\ &= \cosh^2\left(\frac{1}{2}x\right)\left(\phi'_k(x) - \phi_0(x)\phi_k(x)\right). \end{aligned}$$

Entonces multiplicando a ambos lados por $\cosh^2\left(\frac{1}{2}x\right)$ tenemos

$$\frac{d}{dx}\left[\cosh^2\left(\frac{1}{2}x\right)\phi_k(x)\right] = \cosh^2\left(\frac{1}{2}x\right)\int_{-\infty}^{x} z_k(\eta)d\eta,$$

e integrando con respecto a x sobre $(-\infty, x)$, obtenemos

$$\phi_k(x) = \frac{1}{\cosh^2\left(\frac{1}{2}x\right)}\int_{-\infty}^{x}\cosh^2\left(\frac{1}{2}\eta\right)\int_{-\infty}^{\eta} z_k(\eta')d\eta' d\eta; \quad k \geq 1.$$

Por inducción tenemos el estimativo $|\phi_k(x)| \leq C\,|x|^{2k}\,e^{-|x|}$ cuando $x \to -\infty$, para cada $k \geq 1$ (ver Apéndice 3.2). Ahora de la diferencia $w(t,x) = r(t,x) - \Phi(t,x)$

obtenemos

$$
\begin{aligned}
(4.5)\qquad & w_t - w_{txx} - w_{xx} + (1+t)(\varphi\Phi w)_x + \tfrac{1}{2}(1+t)\left(\varphi w^2\right)_x \\
& +\tfrac{1}{2}(1+t)\varphi_x w^2 + (1+t)\varphi_x(\Phi-1)w - \frac{2\varphi_x}{\varphi}w_x \\
& -\frac{\varphi_{xx}}{\varphi}w_t - \frac{2\varphi_{tx}}{\varphi}w_x - \frac{2\varphi_x}{\varphi}w_{tx} - \frac{\varphi_t}{\varphi}w_{xx} + R \quad = 0
\end{aligned}
$$

donde

$$
\begin{aligned}
R \;=\; & \Phi_t - \Phi_{txx} - \Phi_{xx} + (1+t)\varphi\Phi\Phi_x + (1+t)\varphi_x\Phi(\Phi-1) \\
& -\frac{\varphi_{xx}}{\varphi}\Phi_t - \frac{2\varphi_{tx}}{\varphi}\Phi_x - \frac{2\varphi_x}{\varphi}\Phi_{tx} - \frac{\varphi_t}{\varphi}\Phi_{xx} - \frac{2\varphi_x}{\varphi}\Phi_x
\end{aligned}
$$

En virtud de (4.4), de los estimativos de $\phi_k(x)$, $k \geq 0$ y sus derivadas obtenemos el estimativo $R(t,x) = \mathcal{O}((1+t)^{-(m+1)}|x|^{3m}e^{-|x|})$ cuando $x \to -\infty$ (ver Apéndice 3.3). Si denotamos $W(t,x) = \int_{-\infty}^{x} w(t,x')dx'$ e integramos la ecuación (4.5) de $-\infty$ a x, obtenemos

$$
\begin{aligned}
& \left(1 - \frac{\varphi_{xx}}{\varphi} + \left(\frac{2\varphi_x}{\varphi}\right)_x\right)W_t - \frac{2\varphi_x}{\varphi}W_{tx} - W_{txx} \\
& -\left(1+\frac{\varphi_t}{\varphi}\right)W_{xx} + \left((1+t)\varphi\Phi - \frac{2\varphi_x}{\varphi} - \frac{2\varphi_{tx}}{\varphi} + \left(\frac{\varphi_t}{\varphi}\right)_x\right)W_x \\
(4.6)\qquad & +\left((1+t)\varphi_x(\Phi-1) + \left(\frac{2\varphi_x}{\varphi}\right)_x + \left(\frac{2\varphi_{tx}}{\varphi}\right)_x - \left(\frac{\varphi_t}{\varphi}\right)_{xx}\right)W \\
& +\frac{1}{2}(1+t)\varphi w^2 + \frac{1}{2}(1+t)\partial_x^{-1}\left(\varphi_x w^2\right) - (1+t)\partial_x^{-1}\left((\varphi_x(\Phi-1))_x W\right) \\
& -\partial_x^{-1}\left(\left(\left(\frac{2\varphi_x}{\varphi}\right)_x + \left(\frac{2\varphi_{tx}}{\varphi}\right)_x - \left(\frac{\varphi_t}{\varphi}\right)_{xx}\right)_x W\right) \\
& +\partial_x^{-1}\left(\partial_x\left[\frac{\varphi_{xx}}{\varphi} - \left(\frac{2\varphi_x}{\varphi}\right)_x\right]W_t\right) + R_1 \; = 0.
\end{aligned}
$$

con la condición de frontera de Neumann $W_x(t,0) = w(t,0) = 0$, donde $R_1(t,x) = \int_{-\infty}^{x} R(t,\tau)d\tau$. Usando el estimativo de $R(t,x)$, tenemos entonces $R_1(t,x) = \mathcal{O}((1+t)^{-(m+1)}|x|^{3m}e^{-|x|})$ cuando $x \to -\infty$.

Supongamos que el dato inicial $r(t_0, x)$ está suficientemente cerca a $\Phi(t_0, x)$ para que la función $W(t_0, x) \cosh \alpha x \in \boldsymbol{L}^{\infty}((-\infty, 0))$ para alg ún $\alpha > 0$ suficientemente pequeño y el tiempo inicial $t = t_0$ sea suficientemente grande. Esto significa que desde el comienzo los efectos no lineales dominan sobre los lineales (podríamos reemplazar este requisito considerando un gran coeficiente en el término no lineal en la ecuación (0.1)).

Probemos el siguiente resultado.

Teorema 4.1. Sea el tiempo inicial $t_0 > 0$ lo suficientemente grande y el dato inicial $u_0(x) \in \boldsymbol{L}^{\infty}$ una función impar y cercana a la onda de choque $\Phi(t_0, x)$, es decir

$$\cosh(\alpha x) \int_{-\infty}^{x} \left(\frac{u_0(x')}{\varphi_0(x')} - \Phi(t_0, x') \right) dx' \in \boldsymbol{L}^{\infty}$$

donde$\alpha > 0$ es sufientemente pequeño y $\varphi_0(x)$ es tal $\varphi_0'(x) > 0$ para todo $x \in (-\infty, 0)$ y$\varphi_0(x) = -\frac{1}{x} + \mathcal{O}(e^{-|x|})$ cuando $x \to -\infty$. Entonces existe solución única $u(t, x)$ para el problema de Cauchy (0.1) tiene una representación asintótica

$$u(t, x) = \varphi(t, -|x|) \Phi(t, -|x|) \operatorname{sign}(x) + O(1)$$

para $t \to \infty$ y uniformemente con respecto a $x \in \mathbb{R}$.

Para que la solución $u(t, x)$ se represente como $u(t, x) = r(t, x)\varphi(t, x)$, el resultado del Teorema 4.1 se sigue del siguiente Lema.

Lema 4.2. Sea el tiempo inicial $t_0 > 0$lo suficientemente grande y el dato inicial $r(t_{0,}x) \in \boldsymbol{L}^{\infty}$ cercana a la onda de choque $\Phi(t_0, x)$,es decir

$$\cosh \alpha x \int_{-\infty}^{x} \left(r(t_0, x) - \Phi(t_0, x') \right) dx' \in \boldsymbol{L}^{\infty}$$

donde $\alpha > 0$ es sufientemente pequeño. Entonces existe una única solución $r(t, x)$ para el problema de Cauchy (4.3) tal que

$$\cosh \frac{\alpha}{2} x \int_{-\infty}^{x} \left(r(t, x') - \Phi(t, x') \right) dx' \in \boldsymbol{C}([t_{0,} \infty); \boldsymbol{L}^{\infty})$$

y el estimativo

$$\left\| \cosh \frac{\alpha}{2} x \int_{-\infty}^{x} \big(r(t,x') - \Phi(t,x') \big)\, dx' \right\|_{\infty} \leq C\,(1+t)^{-(m+1)}$$

es válido para todo $t \geq t_0$.

Así vemos que la solución $r(t,x)$ del problema (4.3) tiende a la onda de choque $\Phi(t,x)$ cuando $t \to \infty$ uniformemente con respecto a $x \in (-\infty, 0)$.

Demostración. Denotemos $h(t,x) = w(t,x) \cosh \alpha x$, $g(t,x) = W(t,x) \cosh \alpha x$, $s(t,x) = w(t,x) \cosh \frac{\alpha}{2} x$ y $v(t,x) = W(t,x) \cosh \frac{\alpha}{2} x$ donde $\alpha > 0$ suficientemente pequeño. Demostremos que se tienen las siguientes estimaciones

$$\text{(4.7)} \quad \|h\|_{\infty} < Ce^{rt}, \ \|g\|_{\infty} < Ce^{pt}, \ \|s\|_{\infty} < C(1+t)^{-(m+1)} \ \text{ y } \ \|v\|_{\infty} < C(1+t)^{-(m+1)},$$

para todo $t \geq t_0$, donde $t_0 > 0$ es suficientemente grande. Por contradicción supongamos que existe $T > t_0$ tal que

$$\text{(4.8)} \qquad \begin{aligned} \|h(t,x)\|_{\infty} &\leq Ce^{rt}, \ \|g(t,x)\|_{\infty} \leq Ce^{pt}, \\ \|s(t,x)\|_{\infty} &\leq C(1+t)^{-(m+1)} \ \text{y} \ \|v(t,x)\| \leq C(1+t)^{-(m+1)}, \end{aligned}$$

para todo $t \in [t_0, T]$. Siguiento el mismo método como en la prueba del Teorema 3.1, aplicando $h(t,x) = w(t,x) \cosh \alpha x$ a la ecuación (4.5) obtenemos

$$\text{(4.9)} \qquad \begin{aligned} &\partial_t \left[\left(1 + \alpha^2 - 2\alpha^2 \tanh^2 \alpha x - \frac{\varphi_{xx}}{\varphi} + \frac{2\varphi_x}{\varphi} \alpha \tanh \alpha x \right) h \right. \\ &\left. - h_{xx} + \left(2\alpha \tanh \alpha x - \frac{2\varphi_x}{\varphi} \right) h_x \right] \\ &= -\chi_1 h - \psi_1 h_x + \left(1 + \frac{\varphi_t}{\varphi} \right) h_{xx} - \tfrac{1}{\cosh \alpha x} (1+t) \varphi h h_x - R \cosh \alpha x \end{aligned}$$

con la condición de frontera $h(t,0)=0$, donde

$$\begin{aligned}
\chi_1 &= \left(1+\frac{\varphi_t}{\varphi}\right)\left(\alpha^2-2\alpha^2\tanh^2\alpha x+\frac{2\varphi_x}{\varphi}\alpha\tanh\alpha x\right)\\
&\quad +(1+t)(\varphi\Phi)_x+(1+t)\varphi_x(\Phi-1)\\
&\quad -(1+t)\varphi\Phi\alpha\tanh\alpha x+(1+t)\varphi_x\frac{s}{\cosh\frac{\alpha}{2}x}\\
&\quad -(1+t)\varphi\frac{s}{\cosh\frac{\alpha}{2}x}\alpha\tanh\alpha x+\left(\frac{\varphi_{xx}}{\varphi}\right)_t\\
\psi_1 &= \left(1+\frac{\varphi_t}{\varphi}\right)\left(2\alpha\tanh\alpha x-\frac{2\varphi_x}{\varphi}\right)+(1+t)\varphi\Phi.
\end{aligned}$$

Estos cálculos se puede ver en Apéncice 3.4. Observemos que para $\alpha>0$ suficientemente pequeño tenemos que

$$1+\alpha^2-2\alpha^2\tanh^2\alpha x-\frac{\varphi_{xx}}{\varphi}+\frac{2\varphi_x}{\varphi}\alpha\tanh\alpha x>0$$

para todo $x<0$, entonces podemos aplicar el principio del máximo a la ecuación (4.9), por virtud del Lema 1.6. Sea $\zeta(t)$ el punto tal que $\tilde{h}(t)=h(t,\zeta(t))=\sup_{x\in(-\infty,0)}h(t,x)$, entonces

$$\begin{aligned}
&\partial_t\left(\left(1+\alpha^2-2\alpha^2\tanh^2\alpha x-\frac{\varphi_{xx}}{\varphi}+\frac{2\varphi_x}{\varphi}\alpha\tanh\alpha x\right)\tilde{h}-h_{xx}(t,\zeta(t))\right)\\
&=-\chi_1\tilde{h}+\left(1+\frac{\varphi_t}{\varphi}\right)h_{xx}(t,\zeta(t))-R\cosh\alpha x.
\end{aligned}$$

Como $h_{xx}(t,\zeta(t))<0$, podemos aplicar nuevamente el Lema 1.6 a $\tilde{h}_{xx}(t)=\inf_{x\in(-\infty,0)}h_{xx}(t,x)<0$. Tenemos $\tilde{h}_{xx}(t)=h_{xx}(t,\zeta(t))$ y $\tilde{h}_{xxt}(t)=h_{xxt}(t,\zeta(t))$ en casi todo $t>t_0$. Por lo tanto

$$\begin{aligned}
&\partial_t\left(\left(1+\alpha^2-2\alpha^2\tanh^2\alpha x-\frac{\varphi_{xx}}{\varphi}+\frac{2\varphi_x}{\varphi}\alpha\tanh\alpha x\right)\tilde{h}-\tilde{h}_{xx}\right)\\
&\le-\chi_1\tilde{h}+\tilde{h}_{xx}-R\cosh\alpha x.
\end{aligned}$$

Aplicando el estimativo $\chi_1\ge -c_1$ con $c_1>0$ (ver Apéndice 3.5), obtenemos

$$\begin{aligned}
&\partial_t\left(\left(1+\alpha^2-2\alpha^2\tanh^2\alpha x-\frac{\varphi_{xx}}{\varphi}+\frac{2\varphi_x}{\varphi}\alpha\tanh\alpha x\right)\tilde{h}-\tilde{h}_{xx}\right)\\
&\le c_1\tilde{h}+\tilde{h}_{xx}-R\cosh\alpha x.
\end{aligned}$$

Como $\cosh \alpha x = \mathcal{O}(e^{|\alpha x|})$ y $R(t,x) = \mathcal{O}((1+t)^{-(m+1)}|x|^{3m}e^{-|x|})$ cuando $x \to -\infty$, entonces $|R\cosh \alpha x| \leq C(1+t)^{-(m+1)}$, luego

$$\begin{aligned}&\partial_t\left(\left(1+\alpha^2-2\alpha^2\tanh^2\alpha x-\frac{\varphi_{xx}}{\varphi}+\frac{2\varphi_x}{\varphi}\alpha\tanh\alpha x\right)\tilde{h}-\tilde{h}_{xx}\right)\\&\leq c_1\tilde{h}+\tilde{h}_{xx}+C(1+t)^{-(m+1)}.\end{aligned}$$

Para $J(t) = \left(1+\alpha^2-2\alpha^2\tanh^2\alpha x-\frac{\varphi_{xx}}{\varphi}+\frac{2\varphi_x}{\varphi}\alpha\tanh\alpha x\right)\tilde{h}(t) - \tilde{h}_{xx}(t) > 0$, tenemos

$$\frac{d}{dt}J \leq c_1\tilde{h}+\tilde{h}_{xx}+C(1+t)^{-(m+1)}. \tag{4.10}$$

Sea $m_1 = \min\left(1+\alpha^2-2\alpha^2\tanh^2\alpha x-\frac{\varphi_{xx}}{\varphi}+\frac{2\varphi_x}{\varphi}\alpha\tanh\alpha x\right) > 0$, entonces

$$m_1\tilde{h}(t) \leq \left(1+\alpha^2-2\alpha^2\tanh^2\alpha x-\frac{\varphi_{xx}}{\varphi}+\frac{2\varphi_x}{\varphi}\alpha\tanh\alpha x\right)\tilde{h}(t),$$

luego

$$\begin{aligned}\tilde{h} &\leq \frac{1}{m_1}\left(1+\alpha^2-2\alpha^2\tanh^2\alpha x-\frac{\varphi_{xx}}{\varphi}+\frac{2\varphi_x}{\varphi}\alpha\tanh\alpha x\right)\tilde{h}\\&= \frac{1}{m_1}\left(\left(1+\alpha^2-2\alpha^2\tanh^2\alpha x-\frac{\varphi_{xx}}{\varphi}+\frac{2\varphi_x}{\varphi}\alpha\tanh\alpha x\right)\tilde{h}-\tilde{h}_{xx}\right)+\frac{1}{m_1}\tilde{h}_{xx}\\&= \frac{1}{m_1}J+\frac{1}{m_1}\tilde{h}_{xx}\end{aligned}$$

Por (4.10) obtenemos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}J &\leq \frac{c_1}{m_1}J+\left(\frac{c_1}{m_1}+1\right)\tilde{h}_{xx}+C(1+t)^{-(m+1)}\\&\leq \frac{c_1}{m_1}J+C(1+t)^{-(m+1)} = rJ+C(1+t)^{-(m+1)}.\end{aligned}$$

Sea $J(t) = z(t)e^{rt}$, entonces

$$\begin{aligned}z_te^{rt}+rJ &\leq rJ+C(1+t)^{-(m+1)}\\z_t &\leq C(1+t)^{-(m+1)}e^{-rt},\end{aligned}$$

integrando con respecto a $t \geq t_0$ obtenemos

$$z \leq C + \int_{t_0}^{t} (1+t)^{-(m+1)} e^{-rt} < C$$

para todo $t \in [t_0, T]$, así $J(t) < Ce^{rt}$ y como $m_1 \tilde{h}(t) < J(t)$ entonces $\tilde{h}(t) < Ce^{rt}$ para todo $t \in [t_0, T]$. De manera similar si hacemos $\widehat{h}(t) = \inf_{x \in (-\infty, 0)} h(t,x)$, obtenemos $\widehat{h}(t) > -Ce^{rt}$ para todo $t \in [t_0, T]$. Por tanto $||h||_\infty < Ce^{rt}$ para todo $t \in [t_0, T]$. La contradicción obtenida prueba uno de los estimativo en (4.7) $||h||_\infty \leq Ce^{rt}$ para todo $t \geq t_0$.

De forma analoga si aplicamos la función $s(t,x) = w(t,x)\cosh \frac{\alpha}{2} x$ a la ecuación (4.5) obtenemos el estimativo $||s||_\infty \leq C(1+t)^{-(m+1)}$ para todo $t \geq t_0$ (ver Apéndice 3.6). Ahora para $g(t,x) = W(t,x)\cosh \alpha x$ tenemos de la ecuación (4.6)

(4.11)

$$\begin{aligned}
&\partial_t \left[\left(1 + \alpha^2 - 2\alpha^2 \tanh^2 \alpha x - \left(\frac{\varphi_{xx}}{\varphi} - \left(\frac{2\varphi_x}{\varphi} \right)_x \right) + \frac{2\varphi_x}{\varphi} \alpha \tanh \alpha x \right) g \right. \\
&\left. + \cosh \alpha x \, \partial_x^{-1} \left(\partial_x \left[\frac{\varphi_{xx}}{\varphi} - \left(\frac{2\varphi_x}{\varphi} \right)_x \right] \frac{g}{\cosh \alpha x} \right) + \left(2\alpha \tanh \alpha x - \frac{2\varphi_x}{\varphi} \right) g_x - g_{xx} \right] \\
&= -\tfrac{1}{2}(1+t)\cosh \alpha x \, \varphi w^2 - \tfrac{1}{2}(1+t)\cosh \alpha x \, \partial_x^{-1} \left(\varphi_x w^2 \right) - \chi_3 g - \psi_3 g_x \\
&+ \left(1 + \frac{\varphi_t}{\varphi} \right) g_{xx} + F - R_1 \cosh \alpha x
\end{aligned}$$

con la condición de frontera $g_x(t,0) = 0$, donde

$$\begin{aligned}
\chi_3 \;\; = \;\; & \left(1 + \frac{\varphi_t}{\varphi} \right) \left(\alpha^2 - 2\alpha^2 \tanh^2 \alpha x \right) + (1+t)\varphi_x(\Phi - 1) - (1+t)\varphi \Phi \alpha \tanh \alpha x \\
& + \left(\frac{2\varphi_x}{\varphi} + \frac{2\varphi_{tx}}{\varphi} - \left(\frac{\varphi_t}{\varphi} \right)_x \right) \alpha \tanh \alpha x + \partial_x \left[\frac{2\varphi_x}{\varphi} + \frac{2\varphi_{tx}}{\varphi} - \left(\frac{\varphi_t}{\varphi} \right)_x \right] \\
& + \partial_t \left[\frac{\varphi_{xx}}{\varphi} - \left(\frac{2\varphi_x}{\varphi} \right)_x \right] - \left(\frac{2\varphi_x}{\varphi} \right)_t \alpha \tanh \alpha x.
\end{aligned}$$

$$\psi_3 \;\; = \;\; (1+t)\varphi \Phi - \left(\frac{2\varphi_x}{\varphi} + \frac{2\varphi_{tx}}{\varphi} - \left(\frac{\varphi_t}{\varphi} \right)_x \right) + \left(1 + \frac{\varphi_t}{\varphi} \right) 2\alpha \tanh \alpha x + \left(\frac{2\varphi_x}{\varphi} \right)_t .$$

$$
\begin{aligned}
F \;=\;& (1+t)\cosh\alpha x\,\partial_x^{-1}\left((\varphi_x(\Phi-1))_x\,\frac{g}{\cosh\alpha x}\right)\\
&+\cosh\alpha x\,\partial_x^{-1}\left(\left(\frac{2\varphi_x}{\varphi}+\frac{2\varphi_{tx}}{\varphi}-\left(\frac{\varphi_t}{\varphi}\right)_x\right)_{xx}\frac{g}{\cosh\alpha x}\right)\\
&+\cosh\alpha x\,\partial_x^{-1}\left(\partial_{tx}^2\left[\frac{\varphi_{xx}}{\varphi}-\left(\frac{2\varphi_x}{\varphi}\right)_x\right]\frac{g}{\cosh\alpha x}\right).
\end{aligned}
$$

Estos cálculos se pueden ver en Apéndice 3.7. Observemos

$$
\begin{aligned}
&\cosh\alpha x\,\partial_x^{-1}\left(\partial_x\left[\frac{\varphi_{xx}}{\varphi}-\left(\frac{2\varphi_x}{\varphi}\right)_x\right]\tfrac{g}{\cosh\alpha x}\right)\\
&\leq \partial_x^{-1}\left(\partial_x\left[\frac{\varphi_{xx}}{\varphi}-\left(\frac{2\varphi_x}{\varphi}\right)_x\right]g\right)\\
&\leq \sup_{x\in(-\infty,0)}|g(t,x)|\,\partial_x^{-1}\left(\left|\partial_x\left[\frac{\varphi_{xx}}{\varphi}-\left(\frac{2\varphi_x}{\varphi}\right)_x\right]\right|\right)
\end{aligned}
$$

Como

$$
\begin{aligned}
\lambda(t,x)=\;& 1+\alpha^2-2\alpha^2\tanh^2\alpha x-\left(\frac{\varphi_{xx}}{\varphi}-\left(\frac{2\varphi_x}{\varphi}\right)_x\right)\\
&+\frac{2\varphi_x}{\varphi}\alpha\tanh\alpha x+\partial_x^{-1}\left(\left|\partial_x\left[\frac{\varphi_{xx}}{\varphi}-\left(\frac{2\varphi_x}{\varphi}\right)_x\right]\right|\right)>0
\end{aligned}
$$

para un $\alpha>0$ suficientemente pequeño, entonces podemos aplicar el principio del máximo a la ecuacion (4.11), por virtud del lema 1.6, sea $\zeta(t)$ tal que $\tilde{g}(t)=g(t,\zeta(t))=\sup_{x\in(-\infty,0)}g(t,x)$, entonces

$$
\begin{aligned}
\partial_t[\lambda(t,\zeta(t))\tilde{g}-g_{xx}(t,\zeta(t))] \;\leq\;& -\chi_3\tilde{g}+\left(1+\frac{\varphi_t}{\varphi}\right)g_{xx}(t,\zeta(t))\\
&+\sup_{x\in(-\infty,0)}\left|\frac{1}{2}(1+t)\cosh\alpha x\,\varphi w^2\right|\\
&+\sup_{x\in(-\infty,0)}\left|\frac{1}{2}(1+t)\cosh\alpha x\,\partial_x^{-1}\left(\varphi_x w^2\right)\right|\\
&+\sup_{x\in(-\infty,0)}|F(t,x)|-R_1\cosh\alpha x
\end{aligned}
$$

Como $g_{xx}(t,\zeta(t))<0$, aplicando nuevamente el Lema 1.6 a
$\tilde{g}_{xx}(t)=\inf_{x\in(-\infty,0)}g_{xx}(t,x)<0$ tenemos $\tilde{g}_{xx}(t)=g_{xx}(t,\zeta(t))$ y

$\tilde{g}_{xxt}(t) = g_{xxt}(t,\zeta(t))$ en casi todo $t > t_0$. En forma análoga como se encontro el estimativo a χ_1 (ver Ápendice 3.5), obtenemos el estimativo $\chi_3 \geq -c_3$ con $c_3 > 0$, por tanto

$$\begin{aligned}
\partial_t[\lambda(t,\zeta(t))\tilde{g} - g_{xx}(t,\zeta(t))] \quad \leq \quad & c_3\tilde{g} + \tilde{g}_{xx} + \sup_{x\in(-\infty,0)} \left|\frac{1}{2}(1+t)\cosh\alpha x\varphi w^2\right| \\
& + \sup_{x\in(-\infty,0)} \left|\frac{1}{2}(1+t)\cosh\alpha x\partial_x^{-1}\left(\varphi_x w^2\right)\right| \\
& + \sup_{x\in(-\infty,0)} |F(t,x)| - R_1\cosh\alpha x.
\end{aligned}$$

Ahora calculemos un estimativo para $|F(t,x)|$. Por Teorema 1.2 desigualdad de Young, tenemos

$$\begin{aligned}
& \left|(1+t)\cosh\alpha x\partial_x^{-1}\left((\varphi_x(\Phi-1))_x \tfrac{g}{\cosh\alpha x}\right)\right| \\
& \leq (1+t)\partial_x^{-1}\left|(\varphi_x(\Phi-1))_x\, g\right| \\
& \leq (1+t)\partial_x^{-1}\left|(\varphi_{xx}(\Phi-1) + \varphi_x\Phi_x)\, g\right| \\
& \leq C(1+t)\left\|\varphi_{xx}\right\|_\infty \left\|(\Phi-1)g\right\|_1 + C(1+t)\left\|\varphi_x\right\|_\infty \left\|\Phi_x g\right\|_1 \\
& \leq C(1+t)\left\|\varphi_{xx}\right\|_\infty \left\|\Phi-1\right\|_1 \tilde{g} + C(1+t)\left\|\varphi_x\right\|_\infty \left\|\Phi_x\right\|_1 \tilde{g}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left|\cosh\alpha x\partial_x^{-1}\left(\partial_{xx}^2\left[\left(\frac{2\varphi_x}{\varphi} + \frac{2\varphi_{tx}}{\varphi} - \left(\frac{\varphi_t}{\varphi}\right)_x\right)\right]\tfrac{g}{\cosh\alpha x}\right)\right| \\
& \leq \partial_x^{-1}\left|\partial_{xx}^2\left[\left(\frac{2\varphi_x}{\varphi} + \frac{2\varphi_{tx}}{\varphi} - \left(\frac{\varphi_t}{\varphi}\right)_x\right)\right] g\right| \\
& \leq C\left\|\partial_{xx}^2\left[\left(\frac{2\varphi_x}{\varphi} + \frac{2\varphi_{tx}}{\varphi} - \left(\frac{\varphi_t}{\varphi}\right)_x\right)\right]\right\|_1 \tilde{g}.
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
& \left|\cosh\alpha x\partial_x^{-1}\left(\partial_{tx}^2\left[\frac{\varphi_{xx}}{\varphi} - \left(\frac{2\varphi_x}{\varphi}\right)_x\right]\tfrac{g}{\cosh\alpha x}\right)\right| \\
& \leq \partial_x^{-1}\left|\partial_{tx}^2\left[\frac{\varphi_{xx}}{\varphi} - \left(\frac{2\varphi_x}{\varphi}\right)_x\right] g\right| \\
& \leq C\left\|\partial_{tx}^2\left[\frac{\varphi_{xx}}{\varphi} - \left(\frac{2\varphi_x}{\varphi}\right)_x\right]\right\|_1 \tilde{g}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
|F(t,x)| &\leq C(1+t)\|\varphi_{xx}\|_\infty \|\Phi-1\|_1 \tilde{g} + C(1+t)\|\varphi_x\|_\infty \|\Phi_x\|_1 \tilde{g} \\
&+C\left\|\partial_{xx}^2\left[\left(\frac{2\varphi_x}{\varphi}+\frac{2\varphi_{tx}}{\varphi}-\left(\frac{\varphi_t}{\varphi}\right)_x\right)\right]\right\|_1 \tilde{g} \\
&+C\left\|\partial_{tx}^2\left[\frac{\varphi_{xx}}{\varphi}-\left(\frac{2\varphi_x}{\varphi}\right)_x\right]\right\|_1 \tilde{g}.
\end{aligned}$$

como tenemos los estimativos

$$\begin{aligned}
&\|\varphi\|_\infty \leq C(1+t)^{-1},\ \|\varphi_x\|_\infty \leq C(1+t)^{-2},\\
&\|\varphi_{xx}\|_\infty \leq C(1+t)^{-3},\ \|\Phi-1\|_1 \leq C,\ \|\Phi_x\|_1 \leq C,\\
&\left\|\partial_{xx}^2\left[\left(\frac{2\varphi_x}{\varphi}+\frac{2\varphi_{tx}}{\varphi}-\left(\frac{\varphi_t}{\varphi}\right)_x\right)\right]\right\|_1 \leq C(1+t)^{-3}\\
&\left\|\partial_{tx}^2\left[\frac{\varphi_{xx}}{\varphi}-\left(\frac{2\varphi_x}{\varphi}\right)_x\right]\right\|_1 \leq C(1+t)^{-4}, \qquad \text{(ver Apéndice 3.8)}
\end{aligned}$$

Tenemos entonces

$$\begin{aligned}
|F(t,x)| &\leq C(1+t)^{-2}\tilde{g} + C(1+t)^{-1}\tilde{g} + C(1+t)^{-3}\tilde{g} + C(1+t)^{-4}\tilde{g} \\
&\leq C(1+t)^{-1}\tilde{g},
\end{aligned} \tag{4.12}$$

ahora

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1}{2}(1+t)\cosh\alpha x\,\partial_x^{-1}\left(\varphi_x w^2\right)\right| &= \left|(1+t)\cosh\alpha x\,\partial_x^{-1}\left(\varphi_x\frac{s^2}{2\cosh^2\frac{\alpha}{2}x}\right)\right| \\
&\leq (1+t)\partial_x^{-1}\left(\left|\varphi_x s^2\right|\right) \\
&\leq C(1+t)\|\varphi_x\|_\infty \left\|s^2\right\|_1 \\
&\leq C(1+t)\|\varphi_x\|_\infty \|s\|_1 \|s\|_\infty .
\end{aligned}$$

Como $s(t,x) = \frac{\cosh\frac{\alpha}{2}x}{\cosh\alpha x}h(t,x)$, tenemos

$$\|s\|_1 = \left\|\frac{\cosh\frac{\alpha}{2}x}{\cosh\alpha x}h\right\|_1 = \left\|\frac{\cosh\frac{\alpha}{2}x}{\cosh\alpha x}\right\|_1 \|h\|_\infty \leq C\|h\|_\infty ,$$

luego

$$
\begin{aligned}
(4.13) \qquad \left|\frac{1}{2}(1+t)\cosh\alpha x\partial_x^{-1}\left(\varphi_x w^2\right)\right| &\leq C(1+t)^{-1}\|h\|_\infty\|s\|_\infty \\
&\leq Ce^{rt}(1+t)^{-(m+2)}
\end{aligned}
$$

Ahora

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}(1+t)\cosh\alpha x\varphi w^2 &= \frac{(1+t)\varphi sh}{2\cosh\frac{\alpha}{2}x} \\
(4.14) \qquad \left|\frac{1}{2}(1+t)\cosh\alpha x\varphi w^2\right| &\leq (1+t)|\varphi sh| \\
&\leq (1+t)\|\varphi\|_\infty\|s\|_\infty\|h\|_\infty \\
&\leq Ce^{rt}(1+t)^{-(m+1)}
\end{aligned}
$$

y como $\cosh\alpha x = \mathcal{O}(e^{|\alpha x|})$ y $R_1(t,x) = \mathcal{O}((1+t)^{-(m+1)}|x|^{2m+1}e^{-|x|})$ cuando $x \to -\infty$, entonces $|R_1\cosh\alpha x| \leq C(1+t)^{-(m+1)}$. Con todos estos estimativos obtenemos

$$
\begin{aligned}
\partial_t[\lambda(t,\zeta(t))\tilde{g} - \tilde{g}_{xx}] &\leq c_3\tilde{g} + \tilde{g}_{xx} + Ce^{rt}(1+t)^{-(m+2)} \\
&\quad + Ce^{rt}(1+t)^{-(m+1)} + C(1+t)^{-1}\tilde{g} + C(1+t)^{-(m+1)} \\
&\leq C_3\tilde{g} + \tilde{g}_{xx} + Ce^{rt}(1+t)^{-(m+1)} + C(1+t)^{-(m+1)}
\end{aligned}
$$

Para $K(t) = \lambda\tilde{g} - \tilde{g}_{xx} > 0$, tenemos

$$
K_t \leq C_3\tilde{g} + \tilde{g}_{xx} + Ce^{rt}(1+t)^{-(m+1)} + C(1+t)^{-(m+1)}
$$

Sea $m_3 = \min\lambda(t,\zeta(t)) > 0$, entonces $m_3\tilde{g}(t) \leq \lambda(t,\zeta(t))\tilde{g}(t) \leq K(t)$ y

$$
\tilde{g} \leq \frac{1}{m_3}\lambda\tilde{g} = \frac{1}{m_3}K\tilde{g} + \frac{1}{m_3}\tilde{g}_{xx},
$$

por tanto

$$
\begin{aligned}
K_t &\leq \frac{C_3}{m_3}K + \left(1 + \frac{C_3}{m_3}\right)\tilde{g}_{xx} + Ce^{rt}(1+t)^{-(m+1)} + C(1+t)^{-(m+1)} \\
&\leq pK + Ce^{rt}(1+t)^{-(m+1)} + C(1+t)^{-(m+1)}
\end{aligned}
$$

Sea $K(t) = z(t)e^{pt}$con $p > 0$, entonces

$$\begin{aligned} z_t e^{pt} + pK &\leq pK + Ce^{rt}(1+t)^{-(m+1)} + C(1+t)^{-(m+1)} \\ z_t &\leq Ce^{(r-p)t}(1+t)^{-(m+1)} + Ce^{-pt}(1+t)^{-(m+1)}. \end{aligned}$$

integrando con respecto a $t \geq t_0$, obtenemos

$$z \leq C + \int_{t_0}^{t} (1+\tau)^{-(m+1)} e^{(r-p)\tau} d\tau + \int_{t_0}^{t} (1+\tau)^{-(m+1)} e^{-p\tau}$$

Podemos suponemos que $r < p$, entonces $z < C$ para todo $t \in [t_0, T]$, con ello obtenemos $K(t) < Ce^{pt}$ y como $m_2\tilde{g}(t) < K(t)$ entonces $\tilde{g}(t) < Ce^{pt}$ para todo $t \in [t_0, T]$. De manera similar si hacemos $\widehat{g}(t) = \inf_{x\in(-\infty,0)} g(t,x)$, obtenemos $\widehat{g}(t) > -Ce^{pt}$ para todo $t \in [t_0, T]$. Por tanto $||g||_\infty < Ce^{pt}$ para todo $t \in [t_0, T]$. La contradicción obtenida prueba uno de los estimativo en (4.7) $||g||_\infty \leq Ce^{pt}$ para todo $t \geq t_0$. De forma análoga si aplicamos la función $v(t,x) = W(t,x)\cosh\frac{\alpha}{2}x$ a la ecuación (4.6) obtenemos el estimativo $||v||_\infty \leq C(1+t)^{-(m+1)}$ para todo $t \geq t_0$ (ver Apéndice 3.9).De esta forma el Lema 4.2 queda demostrado. ■

Capítulo 5

APÉNDICE

En esta parte del trabajo daremos con más detalles todos los cálculos de los tres capítulos: 2, 3 y 4.

1. Cálculo del Capítulo 2

1.1. Primer cálculo. Si Suponemos que el dato inicial $\varphi_0(\xi) \in \mathbf{C}^2(\mathbb{R})$ al problema (2.1) tiene los asintóticos

$$\begin{aligned} \varphi_0(\xi) &= \vartheta(\xi) + O\left(|\xi|^{-\beta}\right),\ \varphi_0'(\xi) = O\left(|\xi|^{-\beta}\right), \\ \varphi_0''(\xi) &= O\left(|\xi|^{-(1+3\beta)}\right),\ \varphi_0'''(\xi) = O\left(|\xi|^{-(1+4\beta)}\right), \end{aligned} \tag{5.1}$$

cuando $\xi \to \pm\infty$, donde $\beta > 0$ y $\vartheta(\xi) = 1$ si $\xi \geq 0$, $\vartheta(\xi) = -1$ si $\xi < 0$. Con ello obtenemos los siguientes estimativos,

$$\begin{aligned} \|\varphi_{xx}(t)\|_2 &\leq C(1+t)^{-3(n+1)},\ \int_t^\infty \|\varphi_{xx}(\tau)\|_\infty \, d\tau \to 0, \\ \|\varphi_{xxx}(t)\|_2 &\leq C(1+t)^{-4(n+1)},\ \int_t^\infty \|\varphi_{xxx}(\tau)\|_\infty \, d\tau \to 0, \end{aligned}$$

$$(5.2)\qquad \begin{aligned} \|\varphi_{xt}(t)\|_2 &\leq C(1+t)^{-\frac{1}{2}(n+3)}, \quad \int_t^\infty \|\varphi_{xt}(\tau)\|_\infty \, d\tau \to 0, \\ \|\varphi_{xxt}(t)\|_2 &\leq C(1+t)^{-(3n+4)}, \quad \int_t^\infty \|\varphi_{xxt}(\tau)\|_\infty \, d\tau \to 0, \end{aligned}$$

En efecto, por (5.1), tenemos entonces $\forall M > 0, \exists C > 0$ tal que si $|\xi| > M$ implica $\left|\varphi_0'(\xi)\right| \leq C|\xi|^{-\beta}$, $\left|\varphi_0''(\xi)\right| \leq C|\xi|^{-(1+3\beta)}$, $\left|\varphi_0'''(\xi)\right| \leq C|\xi|^{-(1+4\beta)}$. (la constante C depende de $M, \varphi_0', \varphi_0'', \varphi_0'''$). Como

$$\varphi_{xx}(t, \chi(t,\xi)) = \frac{\varphi_0''(\xi)}{\left(1+\Phi(t)\varphi_0'(\xi)\right)^3}$$

entonces

$$\begin{aligned} \|\varphi_{xx}(t)\|_2^2 &= \int_{\mathbb{R}} \frac{(\varphi_0''(\xi))^2}{(1+\ \Phi(t)\varphi_0'(\xi))^6} d\xi \\ &= \int_{-M}^{M} \frac{(\varphi_0''(\xi))^2}{(1+\ \Phi(t)\varphi_0'(\xi))^6} d\xi + \int_{|\xi|>M} \frac{(\varphi_0''(\xi))^2}{(1+\ \Phi(t)\varphi_0'(\xi))^6} d\xi \\ &= I_1 + I_2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{-M}^{M} \frac{(\varphi_0''(\xi))^2}{(1+\Phi(t)\varphi_0'(\xi))^6} d\xi = \int_{-M}^{M} \frac{\varphi_0''(\xi)}{(1+\Phi(t)\varphi_0'(\xi))^6} \varphi_0''(\xi) d\xi \\ &\leq \max_{\xi\in[-M,\,M]} \left|\varphi_0''(\xi)\right| \int_{-M}^{M} \frac{1}{(1+\Phi(t)\varphi_0'(\xi))^6} \varphi_0''(\xi) d\xi \\ &\leq \max_{\xi\in[-M,\,M]} \left|\varphi_0''(\xi)\right| \int_{-M}^{M} \frac{1}{\Phi^6(t)\left(\varphi_0'(\xi)\right)^6} \varphi_0''(\xi) d\xi \quad (\ \tau = 1+\ \Phi(t)\varphi_0'(\xi)\ ) \\ &\leq \frac{1}{\Phi^6(t)} \max_{\xi\in[-M,\,M]} \left|\varphi_0''(\xi)\right| \int_1^\infty \frac{1}{\tau^6} d\tau = C\ \Phi(t)^{-6} \leq C(1+t)^{-6(n+1)} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
I_2 &= \int\limits_{|\xi|>M} \frac{(\varphi_0''(\xi))^2}{(1+\Phi(t)\varphi_0'(\xi))^6} d\xi \le C \int\limits_{|\xi|>M} \frac{(|\xi|^{-(1+3\beta)})^2}{(1+\Phi(t)\,|\xi|^{-\beta})^6} d\,|\xi| \\
&\le C \int\limits_{\zeta>M} \frac{(\zeta^{-(1+3\beta)})^2}{(1+\Phi(t)\zeta^{-\beta})^6} d\zeta \qquad (\ \zeta=|\xi|\ ) \\
&= C\Phi(t)^{-\frac{1+6\beta}{\beta}} \int\limits_{x>M\ \Phi(t)^{-\frac{1}{\beta}1}} \frac{x^{-2(1+3\beta)}}{(1+x^{-\beta})^6} dx \qquad (\ \zeta = x\ \Phi(t)^{\frac{1}{\beta}}\ ) \\
&= C\Phi(t)^{-\frac{1+6\beta}{\beta}} \int\limits_{x>M\ \Phi(t)^{-\frac{1}{\beta}1}} \frac{1}{x^2} dx \le C(1+t)^{-\frac{1+6\beta}{\beta}(n+1)}
\end{aligned}
$$

así

$$
\begin{aligned}
\|\varphi_{xx}(t)\|_2^2 &\le C(1+t)^{-6(n+1)} + C(1+t)^{-\frac{1+6\beta}{\beta}(n+1)} \\
&\le C(1+t)^{-6(n+1)}
\end{aligned}
$$

Ahora, como $0<\varphi_0'(\xi)<C$ para todo $\xi\in\mathbb{R}$, sea $\inf_{\xi\in[-M,M]}\varphi_0'(\xi)=\varepsilon$, entonces para $\xi\in[-M,M]$, tenemos

$$
\begin{aligned}
|\varphi_{xx}(t,\chi(t,\xi))| &= \frac{\left|\varphi_0''(\xi)\right|}{(1+\Phi(t)\varphi_0'(\xi))^3} \le \frac{1}{(1+\Phi(t)\varepsilon)^3} \max_{\xi\in[-M,M]} \left|\varphi_0''(\xi)\right| \\
&\le C\frac{1}{(1+\Phi(t)\varepsilon)^3} \le C\frac{1}{\Phi^3(t)\varepsilon^3} \le C(1+t)^{-3(n+1)}
\end{aligned}
$$

Para $|\xi|>M$, tenemos

$$
\begin{aligned}
|\varphi_{xx}(t,\chi(t,\xi))| &\le C\frac{|\xi|^{-(1+3\beta)}}{\left(1+\Phi(t)\,|\xi|^{-\beta}\right)^3} \\
&\le C\frac{1}{\Phi^3(t)\,|\xi|} \le C\frac{1}{\Phi^3(t)} \le C(1+t)^{-3(n+1)}.
\end{aligned}
$$

Por tanto tenemos que

$$
\|\varphi_{xx}(t)\|_\infty \le C(1+t)^{-3(n+1)}, \quad \int_t^\infty \|\varphi_{xx}(\tau)\|_\infty\, d\tau \to 0 \text{ cuando } t\to\infty. \tag{5.3}
$$

Ahora

$$\begin{aligned}\varphi_{xxx}(t,\chi(t,\xi)) &= \frac{\varphi_0'''(\xi)}{\left(1+\Phi(t)\varphi_0'(\xi)\right)^4} - 3\varphi_{xx}(t,\chi(t,\xi))\frac{\Phi(t)\varphi_0''(\xi)}{\left(1+\Phi(t)\varphi_0'(\xi)\right)^2}\\ &= f(t,\xi) - 3\varphi_{xx}(t,\chi(t,\xi))g(t,\xi),\end{aligned}$$

usando la desigualdad de interpolación 1.4, tenemos

$$\begin{aligned}\|\varphi_{xxx}(t)\|_2 &\leq \|f(t)\|_2 + 3\,\|\varphi_{xx}(t)g(t)\|_2\\ &\leq \|f(t)\|_2 + 3\,\|\varphi_{xx}(t)\|_\infty \|g(t)\|_2\end{aligned}$$

Ahora

$$\begin{aligned}\|f(t)\|_2^2 &= \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{(\varphi_0'''(\xi))^2}{(1+\ \Phi(t)\varphi_0'(\xi))^8}d\xi\\ &= \int\limits_{-M}^{M} \frac{(\varphi_0'''(\xi))^2}{(1+\ \Phi(t)\varphi_0'(\xi))^8}d\xi + \int\limits_{|\xi|>M} \frac{(\varphi_0'''(\xi))^2}{(1+\ \Phi(t)\varphi_0'(\xi))^8}d\xi\\ &= I_1 + I_2\end{aligned}$$

Como $0 < \varphi_0'(\xi) < C$ para todo $\xi \in \mathbb{R}$, sea $\inf_{\xi\in[-M,M]} \varphi_0'(\xi) = \varepsilon$, entonces

$$\begin{aligned}I_1 &= \int\limits_{-M}^{M} \frac{(\varphi_0'''(\xi))^2}{(1+\Phi(t)\varphi_0'(\xi))^8}d\xi \leq \int\limits_{-M}^{M} \frac{(\varphi_0'''(\xi))^2}{(1+\Phi(t)\varepsilon)^8}d\xi\\ &\leq \frac{1}{(1+\ \Phi(t)\varepsilon)^8}\int\limits_{-M}^{M} (\varphi_0'''(\xi))^2 d\xi\\ &\leq C\frac{1}{(1+\ \Phi(t)\varepsilon)^8} \leq C\frac{1}{\Phi^8(t)} = C(1+t)^{-8(n+1)}\end{aligned}$$

y

$$
\begin{aligned}
I_2 &= \int\limits_{|\xi|>M} \frac{(\varphi_0'''(\xi))^2}{(1+\Phi(t)\varphi_0'(\xi))^8} d\xi \leq C \int\limits_{|\xi|>M} \frac{(|\xi|^{-(1+4\beta)})^2}{(1+\Phi(t)\,|\xi|^{-\beta})^8} d\,|\xi| \\
&\leq C \int\limits_{\zeta>M} \frac{(\zeta^{-(1+4\beta)})^2}{(1+\ \Phi(t)\zeta^{-\beta})^8} d\zeta \qquad (\ \zeta = |\xi|) \\
&= C\Phi(t)^{-\frac{8\beta+1}{\beta}} \int\limits_{x>M\ \Phi(t)^{-\frac{1}{\beta}}} \frac{x^{-2(1+4\beta)}}{(1+x^{-\beta})^8} dx \qquad (\zeta = x\Phi(t)^{\frac{1}{\beta}}) \\
&= C\Phi(t)^{-\frac{8\beta+1}{\beta}} \int\limits_{x>M\ \Phi(t)^{-\frac{1}{\beta}}} \frac{1}{x^2} dx \leq C\Phi(t)^{-\frac{8\beta+1}{\beta}} = C(1+t)^{-\frac{8\beta+1}{\beta}(n+1)}
\end{aligned}
$$

luego

$$
\begin{aligned}
\|f(t)\|_2^2 &\leq C(1+t)^{-8(n+1)} + C(1+t)^{-\frac{8\beta+1}{\beta}(n+1)} \\
&\leq C(1+t)^{-8(n+1)}.
\end{aligned}
$$

Ahora

$$
\begin{aligned}
\|g(t)\|_2^2 &= \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{\left(\Phi(t)\varphi_0''(\xi)\right)^2}{\left(1+\Phi(t)\varphi_0'(\xi)\right)^4} d\xi \\
&= \int\limits_{-M}^{M} \frac{(\Phi(t)\varphi_0''(\xi))^2}{(1+\Phi(t)\varphi_0'(\xi))^4} d\xi + \int\limits_{|\xi|>M} \frac{(\Phi(t)\varphi_0''(\xi))^2}{(1+\Phi(t)\varphi_0'(\xi))^4} d\xi \\
&= I_1 + I_2.
\end{aligned}
$$

Como $0 < \varphi_0'(\xi) < C$ para todo $\xi \in \mathbb{R}$, sea $\inf_{\xi\in[-M,M]} \varphi_0'(\xi) = \varepsilon$, entonces

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \int_{-M}^{M} \frac{(\Phi(t)\varphi_0''(\xi))^2}{(1+\ \Phi(t)\varphi_0'(\xi))^4} d\xi \leq \int_{-M}^{M} \frac{(\Phi(t)\varphi_0''(\xi))^2}{(1+\ \Phi(t)\varepsilon)^4} d\xi \\
&\leq \frac{\Phi^2(t)}{(1+\Phi(t)\varepsilon)^4} \int_{-M}^{M} \varphi_0''(\xi) d\xi \\
&\leq C\frac{1}{\Phi^2(t)\varepsilon^4} \leq C(1+t)^{-2(n+1)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
I_2 &= \int_{|\xi|>M} \frac{(\Phi(t)\varphi_0''(\xi))^2}{(1+\ \Phi(t)\varphi_0'(\xi))^4} d\xi \leq C \int_{|\xi|>M} \frac{(\Phi(t)\,|\xi|^{-(1+3\beta)})^2}{(1+\ \Phi(t)\,|\xi|^{-\beta})^4} d\,|\xi| \\
&\leq C \int_{\zeta>M} \frac{(\Phi(t)\zeta^{-(1+3\beta)})^2}{(1+\ \Phi(t)\zeta^{-\beta})^4} d\zeta \qquad (\ \zeta = |\xi|) \\
&= C\Phi(t)^{-\frac{4\beta+1}{\beta}} \int_{x>M\ \Phi(t)^{-\frac{1}{\beta}}} \frac{x^{-2(1+3\beta)}}{(1+x^{-\beta})^4} dx \qquad (\zeta = x\ \Phi(t)^{\frac{1}{\beta}}) \\
&\leq C\Phi(t)^{-\frac{4\beta+1}{\beta}} \int_{x>M\ \Phi(t)^{-\frac{1}{\beta_1}}} \frac{1}{x^{2\beta+2}} dx \leq C\Phi(t)^{-\frac{4\beta+1}{\beta}} = C(1+t)^{-\frac{4\beta+1}{\beta}(n+1)}
\end{aligned}
$$

luego

$$
\begin{aligned}
\|g(t)\|_2^2 &\leq C(1+t)^{-2(n+1)} + C(1+t)^{-\frac{4\beta+1}{\beta}(n+1)} \\
&\leq C(1+t)^{-2(n+1)}.
\end{aligned}
$$

Como $\|\varphi_{xx}(t)\|_\infty \leq C(1+t)^{-3(n+1)}$ cuando $t \to \infty$, entonces

$$
\begin{aligned}
\|\varphi_{xxx}(t)\|_2 &\leq \|f(t)\|_2 + 3\,\|\varphi_{xx}(t)\|_\infty\,\|g(t)\|_2 \\
\|\varphi_{xxx}(t)\|_2 &\leq C(1+t)^{-4(n+1)}. \qquad (5.4)
\end{aligned}
$$

Ahora

$$\begin{aligned}
\varphi_{xxx}(t,\chi(t,\xi)) &= f(t,\xi)-3\varphi_{xx}(t,\chi(t,\xi))g(t,\xi)\\
|\varphi_{xxx}(t,\chi(t,\xi))| &\le |f(t,\xi)|+3\,|\varphi_{xx}(t,\chi(t,\xi))|\ \ |g(t,\xi)|,
\end{aligned}$$

para $|\xi|>M$, tenemos $|\varphi_{xx}(t,\chi(t,\xi))|\le C(1+t)^{-3(n+1)}$. Entonces

$$\begin{aligned}
|f(t,\xi)| &= \left|\frac{\varphi_0'''(\xi)}{\left(1+\Phi(t)\varphi_0'(\xi)\right)^4}\right| \le C\frac{|\xi|^{-(1+4\beta)}}{\left(1+\ \Phi(t)\,|\xi|^{-\beta}\right)^4}\\
&\le C\frac{1}{\Phi^4(t)\,|\xi|} \le C(1+t)^{-4(n+1)},
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
|g(t,\xi)| &= \left|\frac{\Phi(t)\varphi_0''(\xi)}{\left(1+\Phi(t)\varphi_0'(\xi)\right)^2}\right| \le C\ \frac{\Phi(t)\,|\xi|^{-(1+3\beta)}}{\left(1+\Phi(t)\,|\xi|^{-\beta}\right)^2}\\
&\le C\frac{1}{\Phi(t)\,|\xi|^{1+\beta}} \le C(1+t)^{-(n+1)},
\end{aligned}$$

obtenemos entonces

$$\|\varphi_{xxx}(t)\|_\infty \le C(1+t)^{-4(n+1)},\quad \int_t^\infty \|\varphi_{xxx}(\tau)\|_\infty\,d\tau \to 0 \text{ cuando } t\to\infty. \tag{5.5}$$

Ahora

$$\begin{aligned}
\varphi_{xt}(t,\chi(t,\xi)) &= -(1+t)^n\left[\varphi_x^2(t,\chi(t,\xi))+\varphi_0(\xi)\varphi_{xx}(t,\chi(t,\xi))\right]\\
\|\varphi_{xt}(t)\|_2 &\le (1+t)^n\left(\left\|\varphi_x^2(t)\right\|_2+\|\varphi_0\varphi_{xx}(t)\|_2\right),
\end{aligned}$$

como $-1\le\varphi_0(\xi)\le 1$ para todo $\xi\in\mathbb{R}$, entonces $\|\varphi_0\varphi_{xx}(t)\|_2 \le \|\varphi_{xx}(t)\|_2$ y por desigualdad de interpolación 1.4 tenemos $\left\|\varphi_x^2(t)\right\|_2 \le \|\varphi_x(t)\|_\infty\,\|\varphi_x(t)\|_2$, por lo tanto

$$\begin{aligned}
\|\varphi_{xt}(t)\|_2 &\le (1+t)^n\left(\|\varphi_x(t)\|_\infty\,\|\varphi_x(t)\|_2+\|\varphi_{xx}(t)\|_2\right)\\
&\le C(1+t)^n\left((1+t)^{-\frac{3}{2}(n+1)}+(1+t)^{-3(n+1)}\right)\\
&\le C(1+t)^{-\frac{1}{2}(n+3)} \text{ cuando } t\to\infty.
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
\|\varphi_{xt}(t)\|_\infty &\leq (1+t)^n \left(\left\|\varphi_x^2(t)\right\|_\infty + \|\varphi_0\varphi_{xx}(t)\|_\infty\right) \\
&\leq (1+t)^n \left(\|\varphi_x(t)\|_\infty \|\varphi_x(t)\|_\infty + \|\varphi_{xx}(t)\|_\infty\right) \\
&\leq C(1+t)^n \left((1+t)^{-2(n+1)} + (1+t)^{-3(n+1)}\right) \\
&\leq C(1+t)^{-(n+2)} \text{ cuando } t \to \infty,
\end{aligned}$$

por tanto

$$\|\varphi_{xt}(t)\|_\infty \leq Ct^{-(n+2)}, \quad \int_t^\infty \|\varphi_{xt}(\tau)\|_\infty \, d\tau \to 0 \text{ cuando } t \to \infty.$$

También tenemos

$$\begin{aligned}
\varphi_{xxt}(t,\chi(t,\xi)) &= -(1+t)^n \left[3\varphi_x(t,\chi(t,\xi))\varphi_{xx}(t,\chi(t,\xi)) + \varphi_0(\xi)\ \varphi_{xxx}(t,\chi(t,\xi))\right] \\
\|\varphi_{xxt}(t)\|_2 &\leq (1+t)^n \left(3\,\|\varphi_x(t)\varphi_{xx}(t)\|_2 + \|\varphi_0\varphi_{xxx}(t)\|_2\right) \\
&\leq (1+t)^n \left(3\,\|\varphi_x(t)\|_\infty \|\varphi_{xx}(t)\|_2 + \|\varphi_{xxx}(t)\|_2\right) \\
&\leq C(1+t)^n \left((1+t)^{-4(n+1)} + (1+t)^{-4(n+1)}\right) \\
&\leq C(1+t)^{-(3n+4)} \text{ cuando } t \to \infty.
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
\|\varphi_{xxt}(t)\|_\infty &\leq (1+t)^n \left(3\,\|\varphi_x(t)\varphi_{xx}(t)\|_\infty + \|\varphi_0\varphi_{xxx}(t)\|_\infty\right) \\
&\leq (1+t)^n \left(3\,\|\varphi_x(t)\|_\infty \|\varphi_{xx}(t)\|_\infty + \|\varphi_{xxx}(t)\|_\infty\right) \\
&\leq C(1+t)^n \left((1+t)^{-4(n+1)} + (1+t)^{-4(n+1)}\right) \\
&\leq C(1+t)^{-(3n+4)} \text{ cuando } t \to \infty,
\end{aligned}$$

por tanto

$$\|\varphi_{xxt}(t)\|_\infty \leq C(1+t)^{-(3n+4)}, \quad \int_t^\infty \|\varphi_{xxt}(\tau)\|_\infty \, d\tau \to 0 \text{ cuando } t \to \infty.$$

2. Cálculo del Capítulo 3

2.1. Primer cálculo. Usando (3.7), tendríamos para el caso $k=1$,

$$W_1' = W_1 W_0 - 2nW_0' - n\int_{-\infty}^{y} \tau W_0'''(\tau)d\tau.$$

Ahora

$$\int_{-\infty}^{y} \tau W_0'''(\tau)d\tau = \tau W_0''(\tau) - W_0'(\tau)\Big|_{-\infty}^{y}$$

$$\int_{-\infty}^{y} \tau W_0'''(\tau)d\tau = yW_0''(y) - W_0'(y) - \lim_{\tau\to-\infty}\left(\tau W_0''(\tau) - W_0'(\tau)\right).$$

Como $W_0''(y) = W_0(y)W_0'(y)$, entonces

$$\int_{-\infty}^{y} \tau W_0'''(\tau)d\tau = yW_0(y)W_0'(y) - W_0'(y) - \lim_{\tau\to-\infty} yW_0(y)W_0'(y) - W_0'(y).$$

Sabemos que $W_0(y) \to \mp 1$, $W_0'(y) \sim e^{-|y|}$ cuando $y \to \pm\infty$, entonces

$$\begin{aligned}\lim_{\tau\to-\infty} yW_0(y)W_0'(y) - W_0'(y) &= \lim_{\tau\to-\infty} W_0'(\tau)(\tau W_0(\tau) - 1)\\ &= \lim_{\tau\to-\infty} e^{\tau}(\tau - 1) = 0.\end{aligned}$$

Por tanto

$$\int_{-\infty}^{y} \tau W_0'''(\tau)d\tau = yW_0(y)W_0'(y) - W_0'(y).$$

Así tenemos,

$$\begin{aligned}W_1' &= W_1W_0 - 2nW_0' - n\left(yW_0W_0' - W_0'\right)\\ &= W_1W_0 - nW_0' - nyW_0W_0'.\end{aligned}$$

como $W_1(y) \sim y^2e^{-|y|}$ cuando $y \to \pm\infty$, entonces $W_1' \sim y^2e^{-|y|} + e^{-|y|} + ye^{-|y|} \sim y^2e^{-|y|}$ cuando $y \to \pm\infty$. En forma recursiva tendríamos entonces $W_1^{(j)}(y) \sim y^2e^{-|y|}$ cuando $y \to +\infty$. Para $k=2$, por (3.8) tendríamos

$$W_2(y) = \int_0^y \frac{\cosh^2\left(\frac{1}{2}z\right)}{\cosh^2\left(\frac{1}{2}y\right)}\left(\frac{1}{2}W_1^2(z) + (1-2n)W_1'(z) - n\int_{-\infty}^{z} \tau W_1'''(\tau)d\tau\right)dz.$$

De la misma manera como se hizo antes para W_0, tenemos

$$\int_{-\infty}^{z} \tau W_1'''(\tau)d\tau = zW_1''(z) - W_1'(z).$$

Asi

$$\begin{aligned} W_2(y) &= \int_0^y \frac{\cosh^2\left(\frac{1}{2}z\right)}{\cosh^2\left(\frac{1}{2}y\right)} \left(\frac{1}{2}W_1^2(z) + (1-2n)W_1'(z) - n\left(zW_1''(z) - W_1'(z)\right)\right)dz \\ &= \int_0^y \frac{\cosh^2\left(\frac{1}{2}z\right)}{\cosh^2\left(\frac{1}{2}y\right)} \left(\frac{1}{2}W_1^2(z) + (1-n)W_1'(z) - nzW_1''(z)\right)dz. \end{aligned}$$

Usando los estimativos calculados anteriormente y $\cosh^2\left(\frac{1}{2}y\right) \sim e^{|y|}$ cuando $y \to \pm\infty$, obtenemos

$$\begin{aligned} W_2(y) &\sim e^{-y}\int_0^y e^z\left(\frac{1}{2}z^4e^{-2z} + (1-2n)z^2e^{-z} - nz^3e^{-z}\right)dz \\ &\sim y^4e^{-y} \text{ cuando } y \to +\infty \end{aligned}$$

Via (3.7) y (3.6) obtenemos los estimativos $W_2'(y) \sim y^4e^{-|y|}$ y $W_2''(y) \sim y^4e^{-|y|}$ cuando $y \to \pm\infty$ respectivamente. En forma similar tendríamos $W_2^{(j)}(y) \sim y^4e^{-|y|}$ cuando $y \to \pm\infty$; para todo j. En forma recursiva se demuestra que $W_k^{(j)}(y) \sim y^{2k}e^{-|y|}$ para todo $k = 1, \ldots, 2n$ y para todo j. En efecto supongamos que $W_i^{(j)}(y) \sim y^{2k}e^{-|y|}$ cuando $y \to \pm\infty$, para todo $i < k < 2n$ y para todo j. Observemos

$$\int_{-\infty}^{z} \tau W_{k-1}'''(\tau)d\tau = \tau W_{k-1}''(\tau) - W_{k-1}'(\tau)\Big|_{-\infty}^{z}$$

entonces

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{z} \tau W_{k-1}'''(\tau)d\tau &= zW_{k-1}''(z) - W_{k-1}'(z) - \lim_{\tau\to-\infty}\left(\tau W_{k-1}''(\tau) - W_{k-1}'(\tau)\right) \\ &= zW_{k-1}''(z) - W_{k-1}'(z). \end{aligned}$$

Por tanto reemplazando en (3.8) tendríamos

$$
\begin{aligned}
W_k(y) &= \int\limits_0^y \frac{\cosh^2\left(\frac{1}{2}z\right)}{\cosh^2\left(\frac{1}{2}y\right)} \left(\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{k-1} W_{k-l}W_l \right. \\
&\quad \left. +(k-2n-1)W'_{k-1} - n(zW''_{k-1} - W'_{k-1}) \right) dz \\
&= \int\limits_0^y \frac{\cosh^2\left(\frac{1}{2}z\right)}{\cosh^2\left(\frac{1}{2}y\right)} \left(\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{k-1} W_{k-l}W_l + (k-n-1)W'_{k-1} - nzW''_{k-1} \right) dz.
\end{aligned}
$$

Aplicando los estimativos correspondientes tendríamos entonces

$$
\begin{aligned}
W_k(y) &\sim e^{-y}\int_0^y e^z \left(z^{2k}e^{-2z} + (k-n-1)z^{2(k-1)}e^{-z} - nz^{2k-1}e^{-z} \right) dz \\
&\sim y^{2k}e^{-y} \text{ cuando } y \to +\infty.
\end{aligned}
$$

Así obtenemos los estimativos

$$
W_k(y) \sim |y|^{2k}e^{-|y|} \;\text{ cuando }\; y \to \pm\infty,\; k = 1, \ldots, 2n.
$$

2.2. Segundo cálculo . Encontremos los estimativos para $W_k^{(j)}$, $k = 2n+1\ldots, m$ y $j \geq 0$. Via (3.11) tendríamos

$$
\begin{aligned}
W_{2n+1}(y) &= \int\limits_{-\infty}^y \frac{\cosh^2\left(\frac{1}{2}z\right)}{\cosh^2\left(\frac{1}{2}y\right)} \left(\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{2n} W_{2n+1-l}W_l \right. \\
&\quad \left. -n\int\limits_{-\infty}^z \tau W'''_{2n}(\tau)d\tau + n\int\limits_{-\infty}^z \tau W'_0(\tau)d\tau \right) dz
\end{aligned}
$$

Usando los estimativos $W_k^{(j)} \sim |y|^{2k}e^{-|y|}$ cuando $y \to \pm\infty$, para cada $k = 1, \ldots 2n$ y todo j. Obtenemos entonces

$$
\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{2n} W_{2n+1-l}W_l \sim y^{2(2n+1)}e^{-2y} \;\text{ cuando }\; y \to +\infty,
$$

$$
\int_{-\infty}^z \tau W'_0(\tau)d\tau \sim \int_{-\infty}^z \tau e^{\tau}d\tau \sim ze^{-z} \;\text{ cuando }\; z \to +\infty
$$

y

$$\int_{-\infty}^{z} \tau W_{2n}'''(\tau)d\tau \sim \int_{-\infty}^{z} \tau^{4n+1}e^{\tau} \sim z^{4n+1}e^{-z} \text{ cuando } z \to +\infty.$$

Con ello tenemos entonces

$$\begin{aligned} W_{2n+1}(y) &\sim e^{-y}\int_0^y e^{z}\left(z^{2(2n+1)}e^{-2z} - nz^{4n+1}e^{-z} + nze^{-z}\right)dz \text{ cuando} y \to +\infty \\ &\sim y^{2(2n+1)}e^{-y} \text{ cuando } y \to +\infty. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$W_{2n+1}(y) \sim y^{2(2n+1)}e^{-|y|} \text{ cuando } y \to -\infty.$$

Via (3.10) y (3.10) obtenemos los estimativos $W_{2n+1}'(y) \sim y^{2(2n+1)}e^{-|y|}$ y $W_{2n+1}''(y) \sim y^{2(2n+1)}e^{-|y|}$ cuando $y \to \pm\infty$ respectivamente. En forma similar tendríamos $W_{2n+1}^{(j)}(y) \sim y^{2(2n+1)}e^{-|y|}$ cuando $y \to \pm\infty$; para todo j. Aplicando un proceso recursivo demostremos que $W_k^{(j)}(y) \sim y^{2k}e^{-|y|}$ para todo $k = 2n+1, \ldots, m$ y para todo j. En efecto supongamos que $W_i^{(j)}(y) \sim y^{2i}e^{-|y|}$ cuando $y \to \pm\infty$, para todo $i < 2n+k$ y para todo j. Via (3.11) tenemos

$$\begin{aligned} W_{2n+k}(y) &= \int_{-\infty}^{y} \frac{\cosh^2\left(\frac{1}{2}z\right)}{\cosh^2\left(\frac{1}{2}y\right)}\left(\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{2n+k-1} W_{2n+k-l}W_l + (k-1)W_{2n+k-1}' \right. \\ &\quad -n\int_{-\infty}^{z} \tau W_{2n+k-1}'''(\tau)d\tau - (k-1)\int_{-\infty}^{z} W_{k-1}(\tau)d\tau \\ &\quad \left. +n\int_{-\infty}^{z} \tau W_{k-1}'(\tau)d\tau\right)dz \end{aligned}$$

y con los estimativos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{2n+k-1} W_{2n+k-l}W_l &\sim \left(\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{2n+k-1} C_{2n+k-l}C_l\right)n^{2n+k}y^{2(2n+k)}e^{-2y} \\ &\sim A_{2n+k}n^{2n+k}y^{2(2n+k)}e^{-2y} \text{ cuando } y \to +\infty, \end{aligned}$$

$$\int_{-\infty}^{z} \tau W'''_{2n+k-1}(\tau)d\tau \sim \int_{-\infty}^{z} \tau^{4n+2k-1}e^{-\tau}d\tau \sim z^{4n+2k-1}e^{-z} \text{ cuando } z \to +\infty,$$

$$\int_{-\infty}^{z} W_{k-1}(\tau)d\tau \sim \int_{-\infty}^{z} \tau^{2(k-1)}e^{-\tau}d\tau \sim z^{2(k-1)}e^{-z} \text{ cuando } z \to +\infty,$$

y

$$\int_{-\infty}^{z} \tau W'_{k-1}(\tau)d\tau \sim \int_{-\infty}^{z} \tau^{2k-1}e^{-\tau}d\tau \sim z^{2k-1}e^{-z} \text{ cuando } z \to +\infty,$$

tenemos entonces

$$W_{2n+k}(y) \sim y^{2(2n+k)}e^{-|y|} \text{ cuando } y \to +\infty.$$

Por tanto

$$W_k(y) \sim |y|^{2k}e^{-|y|} \text{ cuando } y \to \pm\infty$$

para todo $k = 2n+1, \ldots, m$.

2.3. Tercer Cálculo . Sea $W(t,y) = \sum_{k=0}^{m}(1+t)^{-k}W_k(y)$ y $y = x(1+t)^n$, entonces

$$\begin{aligned}
W_t &= \sum_{k=0}^{m}(-k)(1+t)^{-k-1}W_k + ny\sum_{k=0}^{m}(1+t)^{-k-1}W'_k,\\
W_x &= (1+t)^n\sum_{k=0}^{m}(1+t)^{-k}W'_k,\\
W_{xx} &= (1+t)^{2n}\sum_{k=0}^{m}(1+t)^{-k}W''_k,\\
W_{txx} &= (1+t)^{2n}\left[\sum_{k=0}^{m}(2n-k)(1+t)^{-k-1}W''_k + ny\sum_{k=0}^{m}(1+t)^{-k-1}W'''_k\right].
\end{aligned}$$

Luego

$$
\begin{aligned}
R(t,y) &= W_t - W_{txx} + (1+t)^n W W_x - W_{xx} \\
&= \sum_{k=0}^{m}(-k)(1+t)^{-k-1}W_k + ny\sum_{k=0}^{m}(1+t)^{-k-1}W_k' \\
&\quad -(1+t)^{2n}\left[\sum_{k=0}^{m}(2n-k)(1+t)^{-k-1}W_k'' + ny\sum_{k=0}^{m}(1+t)^{-k-1}W_k'''\right] \\
&\quad +(1+t)^{2n}\left(\sum_{k=0}^{m}(1+t)^{-k}W_k'\right)\left(\sum_{k=0}^{m}(1+t)^{-k}W_k\right) \\
&\quad -(1+t)^{2n}\sum_{k=0}^{m}(1+t)^{-k}W_k''.
\end{aligned}
$$

Ahora supongamos $m > 2n$,

$$
\sum_{k=0}^{m}(1+t)^{-k}W_k'' = \sum_{k=0}^{2n}(1+t)^{-k}W_k'' + \sum_{j=2n+1}^{m}(1+t)^{-j}W_j''
$$

Vía (3.6) y (3.10) obtenemos

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{2n}(1+t)^{-k}W_k'' &= \sum_{k=1}^{2n}(1+t)^{-k}(k-2n-1)W_{k-1}'' - ny\sum_{k=1}^{2n}(1+t)^{-k}W_{k-1}''' \\
&\quad + \sum_{k=0}^{2n}\left(\sum_{l=0}^{k}W_{k-l}W_l'\right)(1+t)^{-k},
\end{aligned}
$$

y

$$
\begin{aligned}
\sum_{j=2n+1}^{m}(1+t)^{-j}W_j'' &= \sum_{j=2n+1}^{m}(1+t)^{-j}(j-2n-1)W_{j-1}'' \\
&\quad -ny\sum_{j=2n+1}^{m}(1+t)^{-j}W_{j-1}''' \\
&\quad -\sum_{j=2n+1}^{m}(1+t)^{-j}(j-2n-1)W_{j-2n-1} \\
&\quad +ny\sum_{j=2n+1}^{m}(1+t)^{-j}W_{j-2n-1}' \\
&\quad +\sum_{j=2n+1}^{m}\left(\sum_{l=0}^{j}W_{j-l}W_l'\right)(1+t)^{-j},
\end{aligned}
$$

entonces

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{m}(1+t)^{-k}W_k'' &= \sum_{k=0}^{2n}(1+t)^{-k}W_k'' + \sum_{j=2n+1}^{m}(1+t)^{-j}W_j'' \\
&= \sum_{k=1}^{m}(1+t)^{-k}(k-2n-1)W_{k-1}'' - ny\sum_{k=1}^{m}(1+t)^{-k}W_{k-1}''' \\
&\quad +\sum_{k=0}^{m}\left(\sum_{l=0}^{k}W_{k-l}W_l'\right)(1+t)^{-k} \\
&\quad -\sum_{j=2n+1}^{m}(1+t)^{-j}(j-2n-1)W_{j-2n-1} \\
&\quad +ny\sum_{j=2n+1}^{m}(1+t)^{-j}W_{j-2n-1}'
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{m}(1+t)^{-k}W_k'' &= \sum_{k=0}^{m-1}(1+t)^{-k-1}(k-2n)W_k'' - ny\sum_{k=0}^{m-1}(1+t)^{-k-1}W_k''' \\ &+\sum_{k=0}^{m}\left(\sum_{l=0}^{k}W_{k-l}W_l'\right)t^{-k} - \sum_{k=0}^{m-2n-1}(1+t)^{-(k+2n+1)}kW_k \\ &+ny\sum_{k=0}^{m-2n-1}(1+t)^{-(k+2n+1)}W_k'\end{aligned}$$

por tanto

$$\begin{aligned}t^{2n}\sum_{k=0}^{m}t^{-k}W_k'' &= t^{2n}\left[\sum_{k=0}^{m-1}t^{-k-1}(k-2n)W_k'' - ny\sum_{k=0}^{m-1}t^{-k-1}W_k'''\right. \\ &\left.+\sum_{k=0}^{m}\left(\sum_{l=0}^{k}W_{k-l}W_l'\right)t^{-k}\right] \\ &-\sum_{k=0}^{m-2n-1}t^{-k-1}kW_k + ny\sum_{k=0}^{m-2n-1}t^{-k-1}W_k'\end{aligned}$$

y como

$$\left(\sum_{k=0}^{m}(1+t)^{-k}W_k'\right)\left(\sum_{k=0}^{m}(1+t)^{-k}W_k\right) = \sum_{k=0}^{2m}\left(\sum_{l=\max(0,k-m)}^{\min(m,k)}W_{k-l}W_l'\right)(1+t)^{-k},$$

entonces tenemos

$$\begin{aligned}R(t,y) &= -\sum_{k=m-2n}^{m}k(1+t)^{-k-1}W_k + ny\sum_{k=m-2n}^{m}(1+t)^{-k-1}W_k' \\ &-(1+t)^{2n}(2n-m)(1+t)^{-m-1}W_m'' - (1+t)^{2n}ny(1+t)^{-m-1}W_m''' \\ &+(1+t)^{2n}\sum_{k=m+1}^{2m}\left(\sum_{l=0}^{k}W_{k-l}W_l'\right)(1+t)^{-k}.\end{aligned}$$

2.4. Cuarto Cálculo . Sea $g(t,x) = V(t,x)\cosh\alpha x$, entonces

$$\begin{aligned}
V_t \cosh\alpha x &= g_t,\; V_x \cosh\alpha x = g_x - \alpha g \tanh\alpha x \\
V_{tx} \cosh\alpha x &= g_{xt} - \alpha g_t \tanh\alpha x, \\
V_{xx} \cosh\alpha x &= g_{xx} - 2\alpha \tanh\alpha x\,(g_x - \alpha g \tanh\alpha x) - \alpha^2 g, \\
V_{xx} \cosh\alpha x &= g_{xx} - 2\alpha \tanh\alpha x\,(g_x - \alpha g \tanh\alpha x) - \alpha^2 g, \\
V_{txx} \cosh\alpha x &= g_{txx} - 2\alpha \tanh\alpha x\,(g_{tx} - \alpha g_t \tanh\alpha x) - \alpha^2 g_t.
\end{aligned}$$

Reempazando en la ecuación (3.13)

$$V_t - V_{txx} - \frac{1}{2}(1+t)^n (V_x)^2 + (1+t)^n W V_x - V_{xx} + R = 0,$$

obtenemos

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{\cosh\alpha x}\Big[g_t - \big(g_{txx} - 2\alpha \tanh\alpha x\,(g_{tx} - \alpha g_t \tanh\alpha x) - \alpha^2 g_t\big) \\
-\tfrac{1}{2}(1+t)^n \tfrac{1}{\cosh\alpha x}(g_x - \alpha g \tanh\alpha x)^2 + (1+t)^n W (g_x - \alpha g \tanh\alpha x) \\
-g_{xx} + 2\alpha \tanh\alpha x\,(g_x - \alpha g \tanh\alpha x)\; + \alpha^2 g\Big] + R &= 0,
\end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned}
(1+\alpha^2 - 2\alpha^2 \tanh^2\alpha x) g_t - g_{txx} - \tfrac{(1+t)^n}{2\cosh\alpha x}(g_x - \alpha g \tanh\alpha x)^2 \\
+ (2\alpha \tanh\alpha x)\, g_{tx} + (\alpha^2 - 2\alpha^2 \tanh^2\alpha x - \alpha(1+t)^n W \tanh\alpha x) g \\
+ (2\alpha \tanh\alpha x + (1+t)^n W) g_x - g_{xx}\; + R\cosh\alpha x &= 0.
\end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned}
&\partial_t\big((1+\alpha^2 - 2\alpha^2 \tanh^2\alpha x) g - g_{xx} + (2\alpha \tanh\alpha x) g_x\big) \\
=\;& \frac{(1+t)^n}{2\cosh\alpha x}(g_x - \alpha g \tanh\alpha x)^2 - \chi g - \psi g_x + g_{xx} - R\cosh\alpha x
\end{aligned}$$

donde

$$\chi = \alpha^2 - 2\alpha^2 \tanh^2\alpha x - \alpha(1+t)^n W(t,y) \tanh\alpha x, \quad \psi = 2\alpha \tanh\alpha x + (1+t)^n W(t,y).$$

2.5. Quinto Cálculo . Sea

$$\chi = \alpha^2 - 2\alpha^2 \tanh^2 \alpha x + \alpha(1+t)^n \tanh \alpha x \tanh(y/2) + O(1)$$

para todo $t \geq t_0$, donde $y = (1+t)^n x$. Si t_0 es suficientemente grande y $\alpha > 0$ es suficientemente pequeñ o tenemos que $\chi \geq c$, en efecto,

$$\alpha(1+t)^n \tanh \alpha x \tanh(y/2) = \frac{\alpha(1+t)^n \sinh \alpha x \sinh\left(x(1+t)^n/2\right)}{\cosh \alpha x \cosh(x(1+t)^n/2)}$$

Caso 1. $\alpha x < x(1+t)^n/2 < 1$. como $\sinh z \sim z$, $\cosh z \sim 1$ cuando $|z| < 1$, entonces

$$\frac{\alpha(1+t)^n \sinh \alpha x \sinh\left(x(1+t)^n/2\right)}{\cosh(x(1+t)^n/2) \cosh \alpha x} \sim \frac{\alpha^2}{2} x^2 (1+t)^{2n} \geq 2\alpha^2 x^2$$

Caso 2. $1 < \alpha x < x(1+t)^n/2$, como $\sinh z \sim e^z$, $\cosh z \sim e^z$ cuando $|z| > 1$, entonces

$$\frac{\alpha(1+t)^n \sinh \alpha x \sinh\left(x(1+t)^n/2\right)}{\cosh(x(1+t)^n/2) \cosh \alpha x} \sim \alpha(1+t)^n \geq 2\alpha^2$$

Caso 3. $\alpha x < 1 < x(1+t)^n/2$, tenemos

$$\frac{\alpha(1+t)^n \sinh \alpha x \sinh\left(x(1+t)^n/2\right)}{\cosh(x(1+t)^n/2) \cosh \alpha x} \sim \alpha^2 (1+t)^n x \geq 2\alpha^2.$$

Con ello obtenemos $\chi \geq c$.

3. Cálculo del Capítulo 4

3.1. Primer cálculo. Sea $\Phi(t,x) = \sum_{k=0}^{m} \phi_k(x)(1+t)^{-k}$ una solución aproximada del problema

$$\text{(5.6)} \quad \begin{cases} \partial_t(r - r_{xx}) + (1+t)\varphi r r_x + (1+t)\varphi_x r(r-1) \\ -\dfrac{1}{\varphi}\left[\varphi_{xx} r_t + 2\partial_t(\varphi_x r_x) + \varphi_t r_{xx} + 2\varphi_x r_x\right] - r_{xx} = 0, \ x \in (-\infty, 0), \ t > 0, \\ r(t, -\infty) = 1, \ r(t,0) = 0, \ t > 0, \\ r(0,x) = r_0(x), \ x \in (-\infty, 0), \end{cases}$$

donde las funciones $\phi_k(x)$, $0 \leq k \leq m$, son definidas recurrentemente por medio de ecuciones las cuales son obtenidas comparando los términos que contienen

$(1+t)^{-k}$. En efecto, tenemos

$$\begin{aligned}
\Phi_x &= \sum_{k=0}^{m} \phi_k'(1+t)^{-k},\ \Phi_t = -\sum_{k=1}^{m+1}(k-1)\,\phi_{k-1}(1+t)^{-k},\\
\Phi_{xx} &= \sum_{k=0}^{m} \phi_k''(1+t)^{-k},\ \Phi_{tx} = -\sum_{k=1}^{m+1}(k-1)\,\phi_{k-1}'(1+t)^{-k}\\
\Phi_{txx} &= -\sum_{k=1}^{m+1}(k-1)\,\phi_{k-1}''(1+t)^{-k}.
\end{aligned}$$

Al reemplazar en (5.6), obtenemos

$$\begin{aligned}
&-\sum_{k=1}^{m+1}(k-1)\,\phi_{k-1}(1+t)^{-k} + \sum_{k=1}^{m+1}(k-1)\,\phi_{k-1}''(1+t)^{-k}\\
&+(1+t)\varphi\left(\sum_{k=0}^{m}\phi_k(1+t)^{-k}\right)\left(\sum_{k=0}^{m}\phi_k'(1+t)^{-k}\right)\\
&+(1+t)\varphi_x\left(\sum_{k=0}^{m}\phi_k(1+t)^{-k}\right)^2 - (1+t)\varphi_x\sum_{k=0}^{m}\phi_k(1+t)^{-k}\\
&-\sum_{k=0}^{m}\phi_k''(1+t)^{-k} + \frac{\varphi_{xx}}{\varphi}\sum_{k=1}^{m+1}(k-1)\,\phi_{k-1}(1+t)^{-k}\\
&-\frac{2\varphi_{tx}}{\varphi}\sum_{k=0}^{m}\phi_k' t^{-k} + \frac{2\varphi_x}{\varphi}\sum_{k=1}^{m+1}(k-1)\,\phi_{k-1}'(1+t)^{-k}\\
&-\frac{\varphi_t}{\varphi}\sum_{k=0}^{m}\phi_k''(1+t)^{-k} - \frac{2\varphi_x}{\varphi}\sum_{k=0}^{m}\phi_k'(1+t)^{-k} = 0.
\end{aligned}$$

Luego

$$
\begin{aligned}
&-\sum_{k=1}^{m+1}(k-1)\,\phi_{k-1}(1+t)^{-k}+\sum_{k=1}^{m+1}(k-1)\,\phi''_{k-1}(1+t)^{-k}\\
&+(1+t)\varphi\sum_{l=0}^{m}\sum_{s=0}^{m}\phi'_l\phi_s(1+t)^{-(l+s)}+(1+t)\varphi_x\sum_{l=0}^{m}\sum_{s=0}^{m}\phi_l\phi_s(1+t)^{-(l+s)}\\
&-(1+t)\varphi_x\sum_{k=0}^{m}\phi_k(1+t)^{-k}-\sum_{k=0}^{m}\phi''_k(1+t)^{-k}\\
&+\frac{\varphi_{xx}}{\varphi}\sum_{k=1}^{m+1}(k-1)\,\phi_{k-1}(1+t)^{-k}-\frac{2\varphi_{tx}}{\varphi}\sum_{k=0}^{m}\phi'_k(1+t)^{-k}\\
&+\frac{2\varphi_x}{\varphi}\sum_{k=1}^{m+1}(k-1)\,\phi'_{k-1}(1+t)^{-k}-\frac{\varphi_t}{\varphi}\sum_{k=0}^{m}\phi''_k(1+t)^{-k}\\
&-\frac{2\varphi_x}{\varphi}\sum_{k=0}^{m}\phi'_k(1+t)^{-k}\ =0.
\end{aligned}
$$

Tomando las aproximaciones

$$
\begin{aligned}
(1+t)\varphi(t,x) &= \sum_{k=0}^{m}a_k(x)(1+t)^{-k}+O(x^{m+1}(1+t)^{-(m+1)}),\\
(1+t)^2\varphi_x(t,x) &= \sum_{k=0}^{m}b_k(x)(1+t)^{-k}+O(x^{m+1}(1+t)^{-(m+1)}),\\
(1+t)\frac{\varphi_x(t,x)}{\varphi(t,x)} &= \sum_{k=0}^{m}c_k(x)(1+t)^{-k}+O(x^{m+1}(1+t)^{-(m+1)}),\\
(1+t)\frac{\varphi_t(t,x)}{\varphi(t,x)} &= \sum_{k=0}^{m}e_k(x)(1+t)^{-k}+O(x^{m+1}(1+t)^{-(m+1)}),\\
(1+t)^2\frac{\varphi_{xx}(t,x)}{\varphi(t,x)} &= \sum_{k=0}^{m}d_k(x)(1+t)^{-k}+O(x^{m+1}(1+t)^{-(m+1)}),\\
(1+t)^2\frac{\varphi_{tx}(t,x)}{\varphi(t,x)} &= \sum_{k=0}^{m}f_k(x)(1+t)^{-k}+O(x^{m+1}(1+t)^{-(m+1)}).
\end{aligned}
$$

Tenemos entonces

$$
\begin{aligned}
&-\sum_{l=1}^{m+1}(l-1)\,\phi_{l-1}(1+t)^{-l}+\sum_{l=1}^{m+1}(l-1)\,\phi''_{l-1}(1+t)^{-l}\\
&+\sum_{r=0}^{m}\sum_{l=0}^{m}\sum_{s=0}^{m}a_r\phi'_l\phi_s(1+t)^{-(r+l+s)}+\sum_{r=0}^{m}\sum_{l=0}^{m}\sum_{s=0}^{m}b_r\phi_l\phi_s(1+t)^{-(r+l+s+1)}\\
&-\sum_{r=0}^{m}\sum_{l=0}^{m}b_r\phi_l(1+t)^{-(r+l+1)}-\sum_{l=0}^{m}\phi''_l(1+t)^{-l}\\
&+\sum_{r=0}^{m}\sum_{l=1}^{m+1}(l-1)\,d_r\phi_{l-1}(1+t)^{-(r+l+2)}-\sum_{r=0}^{m}\sum_{l=0}^{m}f_r\phi'_l(1+t)^{-(r+l+2)}\\
&+\sum_{r=0}^{m}\sum_{l=1}^{m+1}(l-1)\,c_r\phi'_{l-1}(1+t)^{-(r+l+1)}-\sum_{r=0}^{m}\sum_{k=0}^{m}e_r\phi''_l(1+t)^{-(r+l+1)}\\
&-\sum_{r=0}^{m}\sum_{k=0}^{m}c_r\phi'_l(1+t)^{-(r+l+1)}\ =0
\end{aligned}
$$

Al Recopilar los términos con potencia t^0, obtenemos la ecuación

$$\phi''_0-a_0\phi_0\phi'_0=0,$$

los de potencia $(1+t)^{-1}$, obtenemos la ecuación

$$\phi''_1-a_0\,(\phi_0\phi_1)'=a_1\phi'_0\phi_0+b_0\phi_0\phi_0-b_0\phi_0-c_0\phi'_0-e_0\phi''_0.$$

En general al recopilar los términos con potencia $(1+t)^{-k}$, $k\geq 1$,obtenemos

$$
\begin{aligned}
&-(k-1)\,\phi_{k-1}+(k-1)\,\phi''_{k-1}+\sum_{j=0}^{k}\sum_{l=0}^{j}a_{k-j}\phi'_{j-l}\phi_l\\
&+\sum_{j=0}^{k-1}\sum_{l=0}^{j}b_{k-1-j}\phi_{j-l}\phi_l-\sum_{j=0}^{k-1}b_{k-1-j}\phi_j-\phi''_k+\sum_{j=0}^{k-3}jd_{k-3-j}\phi_j\\
&-\sum_{j=0}^{k-2}f_{k-2-j}\phi'_j+\sum_{j=0}^{k-2}jc_{k-2-j}\phi'_j-\sum_{j=0}^{k-1}e_{k-1-j}\phi''_j-\sum_{j=0}^{k-1}c_{k-1-j}\phi'_j\ =0
\end{aligned}
$$

Asi,

$$\begin{aligned}
\phi_k'' - \sum_{j=0}^{k}\sum_{l=0}^{j} a_{k-j}\phi_{j-l}'\phi_l &= \sum_{j=0}^{k-1}\sum_{l=0}^{j} b_{k-1-j}\phi_{j-l}\phi_l - \sum_{j=0}^{k-1} b_{k-1-j}\phi_j \\
&\quad - \sum_{j=0}^{k-1} e_{k-1-j}\phi_j'' - \sum_{j=0}^{k-1} c_{k-1-j}\phi_j' \\
&\quad - \sum_{j=0}^{k-2} f_{k-2-j}\phi_j' + \sum_{j=0}^{k-2} j c_{k-2-j}\phi_j' \\
&\quad + \sum_{j=0}^{k-3} j d_{k-3-j}\phi_j - (k-1)\,\phi_{k-1} + (k-1)\,\phi_{k-1}''
\end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{k}\sum_{l=0}^{j} a_{k-j}\phi_{j-l}'\phi_l &= a_0\sum_{l=0}^{k}\phi_{k-l}'\phi_l + \sum_{j=0}^{k-1}\sum_{l=0}^{j} a_{k-j}\phi_{j-l}'\phi_l \\
&= a_0\phi_k'\phi_0 + a_0\phi_0'\phi_k + \sum_{l=1}^{k-1} a_0\phi_{k-l}'\phi_l + \sum_{j=0}^{k-1}\sum_{l=0}^{j} a_{k-j}\phi_{j-l}'\phi_l.
\end{aligned}$$

Obtenemos

$$\phi_0'' - a_0\phi_0\phi_0' = 0,\ \phi_k'' - a_0\left(\phi_k\phi_0\right)' = z_k,\ k \geq 1,$$

donde

$$\begin{aligned}
z_k(t,x) &= \sum_{j=0}^{k-1}\sum_{l=0}^{j}\left(a_{k-j}\phi_{j-l}'\phi_l + b_{k-1-j}\phi_{j-l}\phi_l\right) + \sum_{l=1}^{k-1} a_0\phi_{k-l}'\phi_l \\
&\quad - \sum_{j=0}^{k-1}\left(b_{k-1-j}\phi_j + e_{k-1-j}\phi_j'' + c_{k-1-j}\phi_j'\right) \\
&\quad - \sum_{j=0}^{k-2}\left(f_{k-2-j}\phi_j' - j c_{k-2-j}\phi_j'\right) + \sum_{j=0}^{k-3} j d_{k-3-j}\phi_j \\
&\quad - (k-1)\,\phi_{k-1} + (k-1)\,\phi_{k-1}''.
\end{aligned}$$

para $k \geq 1$, donde $a_k(x)$, $b_k(x)$, $c_k(x)$, $d_k(x)$, $e_k(x)$ y $f_k(x)$ son polinomios con respecto a x de orden menores o iguales a k.

3.2. Segundo Cálculo . Sea

$$\phi_k(x) = \frac{1}{\cosh^2\left(\frac{1}{2}x\right)} \int_{-\infty}^{x} \cosh^2\left(\frac{1}{2}\eta\right) \int_{-\infty}^{\eta} z_k(\eta')d\eta' d\eta; \quad k \geq 1.$$

donde

$$\begin{aligned} z_k(t,x) &= \sum_{j=0}^{k-1}\sum_{l=0}^{j}\left(a_{k-j}\phi'_{j-l}\phi_l + b_{k-1-j}\phi_{j-l}\phi_l\right) + \sum_{l=1}^{k-1} a_0\phi'_{k-l}\phi_l \\ &\quad -\sum_{j=0}^{k-1}\left(b_{k-1-j}\phi_j + e_{k-1-j}\phi''_j + c_{k-1-j}\phi'_j\right) \\ &\quad -\sum_{j=0}^{k-2}\left(f_{k-2-j}\phi'_j - jc_{k-2-j}\phi'_j\right) + \sum_{j=0}^{k-3} jd_{k-3-j}\phi_j \\ &\quad -(k-1)\,\phi_{k-1} + (k-1)\,\phi''_{k-1} \end{aligned}$$

los $a_k(x)$, $b_k(x)$, $c_k(x)$, $d_k(x)$, $e_k(x)$ y $f_k(x)$ son polinomios con respecto a x de ordenes menor o igual a k. Probemos por inducción el siguiente estimativo

$$\phi_k(x) \leq C\,|x|^{2k}\,e^{-|x|},\ k \geq 1;\ \text{cuando}\ x \to -\infty.$$

Para $k = 1$, tenemos

$$z_1(x) = a_1\phi_0\phi'_0 + b_0\phi_0^2 - b_0\phi_0 - e_0\phi''_0 - c_0\phi'_0$$

Como $\phi_0(x) \to 1$; $x \to -\infty$, entonces $b_0\phi_0^2 - b_0\phi_0 \to 0$; $x \to -\infty$, además $\phi'_0(x) = \mathcal{O}(e^{-|x|})$, $\phi''_0(x) = \mathcal{O}(e^{-|x|})$; $x \to -\infty$. Entonces $z_1(x) = \mathcal{O}(xe^{-|x|})$; $x \to -\infty$. Así

$$\int_{-\infty}^{\eta} z_1(\eta')d\eta' \sim \int_{-\infty}^{\eta} \eta' e^{-|\eta'|}d\eta' \sim \eta e^{-|\eta|}\ \text{cuando}\ \eta \to -\infty,$$

como $\cosh^2\left(\frac{1}{2}\eta\right) = \mathcal{O}(e^{|\eta|})$ cuando $\eta \to -\infty$, entonces

$$\begin{aligned} \phi_1(x) &= \frac{1}{\cosh^2\left(\frac{1}{2}x\right)} \int_{-\infty}^{x} \cosh^2\left(\frac{1}{2}\eta\right) \int_{-\infty}^{\eta} z_1(\eta')d\eta' d\eta \\ &\sim e^{-|x|}\int_{-\infty}^{x} e^{|\eta|}\eta e^{-|\eta|}d\eta \sim x^2 e^{-|x|}\ \text{cuando}\ \ x \to -\infty. \end{aligned}$$

Por tanto $\phi_1(x)=\mathcal{O}(x^2e^{-|x|})$ cuando $x\to-\infty$.
$\phi_1(x)\sim x^2e^{-|x|}$ cuando $x\to-\infty$
$\phi_1'(x)\sim 2xe^{-|x|}+x^2e^{-|x|}\sim x^2e^{-|x|}$ cuando $x\to-\infty$
$\phi_1''(x)\sim x^2e^{-|x|}$ cuando $x\to-\infty$.

Ahora

$$\begin{aligned} z_2(t,x) &= a_2\phi_0'\phi_0+b_1\phi_0^2+a_1\phi_1'\phi_0+b_0\phi_1\phi_0+a_1\phi_0'\phi_1+b_0\phi_0\phi_1+a_0\phi_1'\phi_1\\ &\quad -\left(b_1\phi_0+e_1\phi_0''+c_1\phi_0'\right)-\left(b_0\phi_1+e_0\phi_1''+c_0\phi_1'\right)-f_0\phi_0'-\phi_1+\phi_1'' \end{aligned}$$

como $\phi_0(x)=-\tanh(\frac{1}{2}x)$, entonces
$b_1\phi_0^2-b_1\phi_0=x\tanh(\frac{1}{2}x)\left[\tanh(\frac{1}{2}x)+1\right]\to 0$ cuando $x\to-\infty$, así

$$\begin{aligned} z_2(t,x) &\sim a_2e^{-|x|}+a_1x^2e^{-|x|}+b_0x^2e^{-|x|}+a_1x^2e^{-2|x|}+a_0x^4e^{-2|x|}\\ &\quad -e_1e^{-|x|}-c_1e^{-|x|}-b_0x^2e^{-|x|}-e_0x^2e^{-|x|}-c_0x^2e^{-|x|}\\ &\quad -f_0e^{-|x|}-x^2e^{-|x|}+x^2e^{-|x|}\\ &\sim x^3e^{-|x|} \text{ cuando } x\to-\infty \end{aligned}$$

$$\int_{-\infty}^{\eta} z_2(\eta')d\eta'\sim\int_{-\infty}^{\eta}\left(\eta'\right)^3e^{-|\eta'|}d\eta'\sim\eta^3e^{-|\eta|} \text{ cuando } \eta\to-\infty,$$

entonces

$$\begin{aligned} \phi_2(x) &= \frac{1}{\cosh^2\left(\frac{1}{2}x\right)}\int_0^x\cosh^2\left(\frac{1}{2}\eta\right)\int_{-\infty}^{\eta}z_2(\eta')d\eta'd\eta\\ &\sim e^{-|x|}\int_0^x e^{|\eta|}\eta^3e^{-|\eta|}d\eta\sim x^4e^{-|x|} \text{ cuando } x\to-\infty. \end{aligned}$$

Por lo tanto $\phi_2(x)=\mathcal{O}(x^4e^{-|x|})$ cuando $x\to-\infty$. Supongamos que
$\phi_j(x)=\mathcal{O}(|x|^{2j}\,e^{-|x|})$ cuando $x\to-\infty$, $1\le j\le k-1$. Entonces

$$
\begin{aligned}
z_k(t,x) = &\left(a_k\phi_0'\phi_0 + b_{k-1}\phi_0\phi_0\right) + \sum_{j=1}^{k-1}(a_{k-j}\phi_j'\phi_0 + b_{k-1-j}\phi_j\phi_0)\\
&+\sum_{j=1}^{k-1}\sum_{l=1}^{j-1}\left(a_{k-j}\phi_{j-l}'\phi_l + b_{k-1-j}\phi_{j-l}\phi_l\right) + \sum_{j=1}^{k-1}\left(a_{k-j}\phi_0'\phi_j + b_{k-1-j}\phi_0\phi_j\right)\\
&+\sum_{l=1}^{k-1} a_0\phi_{k-l}'\phi_l - \left(b_{k-1}\phi_0 + e_{k-1}\phi_0'' + c_{k-1}\phi_0'\right) - \sum_{j=1}^{k-1}\left(b_{k-1-j}\phi_j + e_{k-1-j}\phi_j'' + c_{k-1-j}\phi_j'\right)\\
&-f_{k-2}\phi_0' - \sum_{j=1}^{k-2}\left(f_{k-2-j}\phi_j' - jc_{k-2-j}\phi_j'\right) + \sum_{j=1}^{k-3} jd_{k-3-j}\phi_j - (k-1)\,\phi_{k-1} + (k-1)\,\phi_{k-1}''.
\end{aligned}
$$

Como $b_{k-1}\phi_0\phi_0 - b_{k-1}\phi_0 \to 0$, cuando $x \to -\infty$ y por hipotesis inductivo, tenemos entonces

$$
\begin{aligned}
z_k(t,x) \sim\ & a_k e^{-|x|} + \sum_{j=1}^{k-1}(a_{k-j}x^{2j}e^{-|x|} + b_{k-1-j}x^{2j}e^{-|x|}) + \sum_{j=1}^{k-1}\left(a_{k-j}x^{2j}e^{-2|x|} + b_{k-1-j}x^{2j}e^{-2|x|}\right)\\
&+\sum_{j=1}^{k-1}\left(a_{k-j}x^{2j}e^{-2|x|} + b_{k-1-j}x^{2j}e^{-|x|}\right) + a_0x^{2k}e^{-2|x|} - (e_{k-1}e^{-|x|} + c_{k-1}e^{-|x|})\\
&-\sum_{j=1}^{k-1}\left(b_{k-1-j}x^{2j}e^{-|x|} + e_{k-1-j}x^{2j}e^{-|x|} + c_{k-1-j}x^{2j}e^{-|x|}\right) - f_{k-2}e^{-|x|}\\
&-\sum_{j=1}^{k-2}\left(f_{k-2-j}x^{2j}e^{-|x|} - jc_{k-2-j}x^{2j}e^{-|x|}\right) + \sum_{j=1}^{k-3} jd_{k-3-j}x^{2j}e^{-|x|}\\
&-(k-1)\,x^{2(k-1)}e^{-|x|} + (k-1)\,x^{2(k-1)}e^{-|x|}
\end{aligned}
$$

cuando $x \to -\infty$, como $a_k(x)$, $b_k(x)$, $c_k(x)$, $d_k(x)$, $e_k(x)$ y $f_k(x)$ son polinomios con respecto a x de ordenes menor o igual a k, entonces

$$
\begin{aligned}
z_k(t,x) \sim\ & x^k e^{-|x|} + \sum_{j=1}^{k-1}(x^{k+j}e^{-|x|} + x^{k-1+j}e^{-|x|}) + \sum_{j=1}^{k-1}\left(x^{k+j}e^{-2|x|} + x^{k-1+j}e^{-2|x|}\right)\\
&+x^{2k}e^{-2|x|} + x^{k-1}e^{-|x|} + \sum_{j=1}^{k-1} x^{k-1+j}e^{-|x|} + x^{k-2}e^{-|x|} + \sum_{j=1}^{k-2} x^{k-2+j}e^{-|x|}\\
&+\sum_{j=1}^{k-3} x^{k-3+j}e^{-|x|} + x^{2(k-1)}e^{-|x|} + x^{2(k-1)}e^{-|x|}\\
\sim\ & x^k e^{-|x|} + x^{2k-1}e^{-|x|} + x^{2(k-1)}e^{-|x|} + x^{k+1}e^{-2|x|} + x^k e^{-2|x|} + x^{2k}e^{-2|x|} + x^{k-1}e^{-|x|}\\
&+x^{2(k-1)}e^{-|x|} + x^{k-2}e^{-|x|} + x^{2(k-2)}e^{-|x|} + x^{2(k-3)}e^{-|x|} + x^{2(k-1)}e^{-|x|}
\end{aligned}
$$

$\sim x^{2k-1}e^{-|x|}$ cuando $x \to -\infty$,

luego

$$\begin{aligned}\phi_k(x) &= \frac{1}{\cosh^2\left(\frac{1}{2}x\right)}\int_{-\infty}^{x}\cosh^2\left(\frac{1}{2}\eta\right)\int_{-\infty}^{\eta} z_k(\eta')d\eta' d\eta \\ &\sim e^{-|x|}\int_{-\infty}^{x} e^{|\eta|}\eta^{2k-1}e^{-|\eta|}d\eta \sim |x|^{2k}\, e^{-|x|} \text{ cuando } \ x \to -\infty.\end{aligned}$$

Por tanto $\phi_k(x) = \mathcal{O}(\,|x|^{2k}\, e^{-|x|})$ cuando $x \to -\infty$. Hemos así demostrado el estimativo deseado.

3.3. Tercer Cálculo . Probemos el siguiente estimativo

$$R(t,x) = \mathcal{O}((1+t)^{-(m+1)}x^{3m}e^{-|x|})$$

cuando $x \to -\infty$, donde

$$\begin{aligned}R &= \Phi_t - \Phi_{txx} - \Phi_{xx} + (1+t)\varphi\Phi\Phi_x + (1+t)\varphi_x\Phi(\Phi-1) \\ &\quad -\frac{\varphi_{xx}}{\varphi}\Phi_t - \frac{2\varphi_{tx}}{\varphi}\Phi_x - \frac{2\varphi_x}{\varphi}\Phi_{tx} - \frac{\varphi_t}{\varphi}\Phi_{xx} - \frac{2\varphi_x}{\varphi}\Phi_x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}R = &-\sum_{k=1}^{m+1}(k-1)\,\phi_{k-1}(1+t)^{-k} + \sum_{k=1}^{m+1}(k-1)\,\phi''_{k-1}(1+t)^{-k} \\ &-\sum_{k=0}^{m}\phi''_k(1+t)^{-k} + \left((1+t)\varphi - \sum_{k=0}^{m}a_k(1+t)^{-k}\right)\Phi\Phi_x \\ &+(1+t)^{-1}\left((1+t)^2\varphi_x - \sum_{k=0}^{m}b_k(1+t)^{-k}\right)\Phi(\Phi-1) \\ &-(1+t)^{-2}\left((1+t)^2\frac{\varphi_{xx}}{\varphi} - \sum_{k=0}^{m}d_k(1+t)^{-k}\right)\Phi_t \\ &-(1+t)^{-2}\left((1+t)^2\frac{2\varphi_{tx}}{\varphi} - \sum_{k=0}^{m}f_k(1+t)^{-k}\right)\Phi_x \\ &-(1+t)^{-1}\left((1+t)\frac{2\varphi_x}{\varphi} - \sum_{k=0}^{m}c_k(1+t)^{-k}\right)\Phi_{tx} \\ &-(1+t)^{-1}\left((1+t)\frac{\varphi_t}{\varphi} - \sum_{k=0}^{m}b_k(1+t)^{-k}\right)\Phi_{xx}\end{aligned}$$

$$-(1+t)^{-1}\left(\frac{2\varphi_x}{\varphi}-\sum_{k=0}^{m}c_k(1+t)^{-k}\right)\Phi_x$$
$$+\left(\sum_{k=0}^{m}a_k(1+t)^{-k}\right)\left(\sum_{k=0}^{m}\phi_k(1+t)^{-k}\right)\left(\sum_{k=0}^{m}\phi'_k(1+t)^{-k}\right)$$
$$+(1+t)^{-1}\left(\sum_{k=0}^{m}b_k(1+t)^{-k}\right)\left(\sum_{k=0}^{m}\phi_k(1+t)^{-k}\right)\left(\sum_{k=0}^{m}\phi_k(1+t)^{-k}\right)$$
$$-(1+t)^{-1}\left(\sum_{k=0}^{m}b_k(1+t)^{-k}\right)\left(\sum_{k=0}^{m}\phi_k(1+t)^{-k}\right)$$
$$+(1+t)^{-2}\left(\sum_{k=0}^{m}d_k(1+t)^{-k}\right)\left(\sum_{k=1}^{m+1}(k-1)\,\phi_{k-1}(1+t)^{-k}\right)$$
$$-(1+t)^{-2}\left(\sum_{k=0}^{m}f_k(1+t)^{-k}\right)\left(\sum_{k=0}^{m}\phi'_k(1+t)^{-k}\right)$$
$$+(1+t)^{-1}\left(\sum_{k=0}^{m}c_k(1+t)^{-k}\right)\left(\sum_{k=1}^{m+1}(k-1)\,\phi'_{k-1}(1+t)^{-k}\right)$$
$$-(1+t)^{-1}\left(\sum_{k=0}^{m}e_k(1+t)^{-k}\right)\left(\sum_{k=0}^{m}\phi''_k(1+t)^{-k}\right)$$
$$-(1+t)^{-1}\left(\sum_{k=0}^{m}c_k(1+t)^{-k}\right)\left(\sum_{k=0}^{m}\phi'_k(1+t)^{-k}\right)$$

Como

$$\left(\sum_{k=0}^{m}a_k(1+t)^{-k}\right)\left(\sum_{k=0}^{m}\phi_k(1+t)^{-k}\right)\left(\sum_{k=0}^{m}\phi'_k(1+t)^{-k}\right)$$
$$=\sum_{k=0}^{3m}(1+t)^{-k}\sum_{j=\max\{0,k-m\}}^{\min\{m,k\}}\ \sum_{l=\max\{0,j-m\}}^{\min\{m,j\}}a_{k-j}\phi_{j-l}\phi'_l$$
$$=\sum_{k=0}^{m}(1+t)^{-k}\sum_{j=0}^{k}\sum_{l=0}^{j}a_{k-j}\phi_{j-l}\phi'_l$$
$$+\sum_{k=m+1}^{2m}(1+t)^{-k}\sum_{j=k-m}^{m}\sum_{l=0}^{j}a_{k-j}\phi_{j-l}\phi'_l$$
$$+\sum_{k=2m+1}^{3m}(1+t)^{-k}\sum_{j=k-m}^{2m}\sum_{l=j-m}^{m}a_{k-j}\phi_{j-l}\phi'_l,$$

$$\left(\sum_{k=0}^{m}a_k(1+t)^{-k}\right)\left(\sum_{k=0}^{m}\phi_k(1+t)^{-k}\right)\left(\sum_{k=0}^{m}\phi'_k(1+t)^{-k}\right)$$
$$=\sum_{k=0}^{3m}(1+t)^{-k}\sum_{j=\max\{0,k-m\}}^{\min\{m,k\}}\ \sum_{l=\max\{0,j-m\}}^{\min\{m,j\}}a_{k-j}\phi_{j-l}\phi'_l$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{m}(1+t)^{-k}\sum_{j=0}^{k}\sum_{l=0}^{j}a_{k-j}\phi_{j-l}\phi_l' \\
&+ \sum_{k=m+1}^{2m}(1+t)^{-k}\sum_{j=k-m}^{m}\sum_{l=0}^{j}a_{k-j}\phi_{j-l}\phi_l' \\
&+ \sum_{k=2m+1}^{3m}(1+t)^{-k}\sum_{j=k-m}^{2m}\sum_{l=j-m}^{m}a_{k-j}\phi_{j-l}\phi_l',
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&(1+t)^{-1}\left(\sum_{k=0}^{m}b_k(1+t)^{-k}\right)\left(\sum_{k=0}^{m}\phi_k(1+t)^{-k}\right)\left(\sum_{k=0}^{m}\phi_k(1+t)^{-k}\right) \\
&\quad= \left(\sum_{k=1}^{m+1}b_{k-1}(1+t)^{-k}\right)\left(\sum_{k=0}^{m}\phi_k(1+t)^{-k}\right)\left(\sum_{k=0}^{m}\phi_k(1+t)^{-k}\right) \\
&\quad= \sum_{k=1}^{3m+1}(1+t)^{-k}\sum_{j=\max\{0,k-1-m\}}^{\min\{m,k-1\}}\ \sum_{l=\max\{0,j-m\}}^{\min\{m,j\}}b_{k-1-j}\phi_{j-l}\phi_l \\
&\quad= \sum_{k=1}^{m+1}(1+t)^{-k}\sum_{j=0}^{k-1}\sum_{l=0}^{,j}b_{k-1-j}\phi_{j-l}\phi_l \\
&\quad+ \sum_{k=m+2}^{2m+1}(1+t)^{-k}\sum_{j=k-1-m}^{m}\sum_{l=0}^{j}b_{k-1-j}\phi_{j-l}\phi_l \\
&\quad+ \sum_{k=2m+2}^{3m+1}(1+t)^{-k}\sum_{j=k-1-m}^{2m}\sum_{l=j-m}^{m}b_{k-1-j}\phi_{j-l}\phi_l,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&(1+t)^{-1}\left(\sum_{k=0}^{m}b_k(1+t)^{-k}\right)\left(\sum_{k=0}^{m}\phi_k(1+t)^{-k}\right) \\
&\quad= \left(\sum_{k=1}^{m+1}b_{k-1}(1+t)^{-k}\right)\left(\sum_{k=0}^{m}\phi_k(1+t)^{-k}\right) \\
&\quad= \sum_{k=1}^{2m+1}(1+t)^{-k}\sum_{j=\max\{0,k-1-m\}}^{\min\{m,k-1\}}b_{k-1-j}\phi_j \\
&\quad= \sum_{k=1}^{m}(1+t)^{-k}\sum_{j=0}^{k-1}b_{k-1-j}\phi_j + \sum_{k=m+1}^{2m+1}(1+t)^{-k}\sum_{j=k-1-m}^{m}b_{k-1-j}\phi_j,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&(1+t)^{-2}\left(\sum_{k=0}^{m}d_k(1+t)^{-k}\right)\left(\sum_{k=1}^{m+1}(k-1)\,\phi_{k-1}(1+t)^{-k}\right) \\
&\quad= (1+t)^{-3}\left(\sum_{k=0}^{m}d_k(1+t)^{-k}\right)\left(\sum_{k=0}^{m}k\phi_k(1+t)^{-k}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(\sum_{k=3}^{m+3} d_{k-3}(1+t)^{-k}\right)\left(\sum_{k=0}^{m} k\phi_k(1+t)^{-k}\right) \\
&= \sum_{k=3}^{2m+3} (1+t)^{-k} \sum_{j=\max\{0,k-3-m\}}^{\min\{m,k-3\}} j b_{k-3-j}\phi_j \\
&= \sum_{k=3}^{m+2} (1+t)^{-k} \sum_{j=0}^{k-3} j d_{k-3-j}\phi_j + \sum_{k=m+3}^{2m+3} (1+t)^{-k} \sum_{j=k-3-m}^{m} j d_{k-3-j}\phi_j,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&(1+t)^{-2}\left(\sum_{k=0}^{m} f_k(1+t)^{-k}\right)\left(\sum_{k=0}^{m} \phi'_k(1+t)^{-k}\right) \\
&\quad = \sum_{k=2}^{m+1} (1+t)^{-k} \sum_{j=0}^{k-2} f_{k-2-j}\phi'_j + \sum_{k=m+2}^{3m+2} (1+t)^{-k} \sum_{j=k-2-m}^{m} f_{k-2-j}\phi'_j
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&(1+t)^{-1}\left(\sum_{k=0}^{m} c_k(1+t)^{-k}\right)\left(\sum_{k=1}^{m+1} (k-1)\,\phi'_{k-1}(1+t)^{-k}\right) \\
&\quad = (1+t)^{-2}\left(\sum_{k=0}^{m} c_k(1+t)^{-k}\right)\left(\sum_{k=0}^{m} k\phi'_k(1+t)^{-k}\right) \\
&\quad = \sum_{k=2}^{m+1} (1+t)^{k} \sum_{j=0}^{k-2} j c_{k-2-j}\phi'_j + \sum_{k=m+2}^{2m+2} (1+t)^{k} \sum_{j=k-1-m}^{m} j c_{k-2-j}\phi'_j
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&(1+t)^{-1}\left(\sum_{k=0}^{m} e_k(1+t)^{-k}\right)\left(\sum_{k=0}^{m} \phi''_k(1+t)^{-k}\right) \\
&\quad = \sum_{k=1}^{m} (1+t)^{-k} \sum_{j=0}^{k-1} e_{k-1-j}\phi''_j + \sum_{k=m+1}^{2m+1} (1+t)^{-k} \sum_{j=k-1-m}^{m} e_{k-1-j}\phi''_j
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&(1+t)^{-1}\left(\sum_{k=0}^{m} c_k(1+t)^{-k}\right)\left(\sum_{k=0}^{m} \phi'_k(1+t)^{-k}\right) \\
&\quad = \sum_{k=1}^{m} (1+t)^{-k} \sum_{j=0}^{k-1} c_{k-1-j}\phi'_j + \sum_{k=m+1}^{2m+1} (1+t)^{-k} \sum_{j=k-1-m}^{m} c_{k-1-j}\phi'_j.
\end{aligned}
$$

Entonces

$$
\begin{aligned}
R = &-\sum_{k=1}^{m+1} (k-1)\,\phi_{k-1}(1+t)^{-k} + \sum_{k=1}^{m+1} (k-1)\,\phi''_{k-1}(1+t)^{-k} - \sum_{k=0}^{m} \phi''_k(1+t)^{-k} \\
&+ \sum_{k=0}^{m} (1+t)^{-k} \sum_{j=0}^{k}\sum_{l=0}^{j} a_{k-j}\phi_{j-l}\phi'_l + \sum_{k=m+1}^{2m} (1+t)^{-k} \sum_{j=k-m}^{m}\sum_{l=0}^{j} a_{k-j}\phi_{j-l}\phi'_l
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\sum_{k=2m+1}^{3m}(1+t)^{-k}\sum_{j=k-m}^{2m}\sum_{l=j-m}^{m}a_{k-j}\phi_{j-l}\phi_l'+\sum_{k=1}^{m+1}(1+t)^{-k}\sum_{j=0}^{k-1}\sum_{l=0}^{j}b_{k-1-j}\phi_{j-l}\phi_l\\
&+\sum_{k=m+2}^{2m+1}(1+t)^{-k}\sum_{j=k-1-m}^{m}\sum_{l=0}^{j}b_{k-1-j}\phi_{j-l}\phi_l\\
&+\sum_{k=2m+2}^{3m+1}(1+t)^{-k}\sum_{j=k-1-m}^{2m}\sum_{l=j-m}^{m}b_{k-1-j}\phi_{j-l}\phi_l\\
&-\sum_{k=1}^{m}(1+t)^{-k}\sum_{j=0}^{k-1}b_{k-1-j}\phi_j-\sum_{k=m+1}^{2m+1}(1+t)^{-k}\sum_{j=k-1-m}^{m}b_{k-1-j}\phi_j\\
&+\sum_{k=3}^{m+2}(1+t)^{-k}\sum_{j=0}^{k-3}jd_{k-3-j}\phi_j+\sum_{k=m+3}^{2m+3}(1+t)^{-k}\sum_{j=k-3-m}^{m}jd_{k-3-j}\phi_j\\
&-\sum_{k=2}^{m+1}(1+t)^{-k}\sum_{j=0}^{k-2}f_{k-2-j}\phi_j'-\sum_{k=m+2}^{2m+2}(1+t)^{-k}\sum_{j=k-2-m}^{m}f_{k-2-j}\phi_j'\\
&+\sum_{k=2}^{m+1}(1+t)^{-k}\sum_{j=0}^{k-2}jc_{k-2-j}\phi_j'+\sum_{k=m+2}^{2m+2}(1+t)^{-k}\sum_{j=k-2-m}^{m}jc_{k-2-j}\phi_j'\\
&-\sum_{k=1}^{m}(1+t)^{-k}\sum_{j=0}^{k-1}e_{k-1-j}\phi_j''-\sum_{k=m+1}^{2m+1}(1+t)^{-k}\sum_{j=k-1-m}^{m}e_{k-1-j}\phi_j''\\
&-\sum_{k=1}^{m}(1+t)^{-k}\sum_{j=0}^{k-1}c_{k-1-j}\phi_j'-\sum_{k=m+1}^{2m+1}(1+t)^{-k}\sum_{j=k-1-m}^{m}c_{k-1-j}\phi_j'+F
\end{aligned}
$$

donde

$$
\begin{aligned}
F=&\left((1+t)\varphi-\sum_{k=0}^{m}a_k(1+t)^{-k}\right)\Phi\Phi_x\\
&+(1+t)^{-1}\left((1+t)^2\varphi_x-\sum_{k=0}^{m}b_k(1+t)^{-k}\right)\Phi(\Phi-1)\\
&-(1+t)^{-2}\left((1+t)^2\frac{\varphi_{xx}}{\varphi}-\sum_{k=0}^{m}d_k(1+t)^{-k}\right)\Phi_t\\
&-(1+t)^{-2}\left((1+t)^2\frac{2\varphi_{tx}}{\varphi}-\sum_{k=0}^{m}f_k(1+t)^{-k}\right)\Phi_x\\
&-(1+t)^{-1}\left((1+t)\frac{2\varphi_x}{\varphi}-\sum_{k=0}^{m}c_k(1+t)^{-k}\right)\Phi_{tx}\\
&-(1+t)^{-1}\left((1+t)\frac{\varphi_t}{\varphi}-\sum_{k=0}^{m}b_k(1+t)^{-k}\right)\Phi_{xx}\\
&-(1+t)^{-1}\left(\frac{2\varphi_x}{\varphi}-\sum_{k=0}^{m}c_k(1+t)^{-k}\right)\Phi_x
\end{aligned}
$$

y teniendo encuenta las ecuaciones $\phi_0'' - a_0\phi_0\phi_0' = 0$ y

$$
\begin{aligned}
&-(k-1)\,\phi_{k-1} + (k-1)\,\phi_{k-1}'' + \sum_{j=0}^{k}\sum_{l=0}^{j} a_{k-j}\phi_{j-l}'\phi_l \\
&+\sum_{j=0}^{k-1}\sum_{l=0}^{j} b_{k-1-j}\phi_{j-l}\phi_l - \sum_{j=0}^{k-1} b_{k-1-j}\phi_j - \phi_k'' \\
&+\sum_{j=0}^{k-3} j d_{k-3-j}\phi_j - \sum_{j=0}^{k-2} f_{k-2-j}\phi_j' + \sum_{j=0}^{k-2} j c_{k-2-j}\phi_j' \\
&-\sum_{j=0}^{k-1} e_{k-1-j}\phi_j'' - \sum_{j=0}^{k-1} c_{k-1-j}\phi_j' \;= 0,\; k \geq 1.
\end{aligned}
$$

Obtenemos

$$
\begin{aligned}
R = &\sum_{k=1}^{m}(1+t)^{-k}\left(-(k-1)\,\phi_{k-1} + (k-1)\,\phi_{k-1}'' - \phi_k''\right) \\
&+(1+t)^{-(m+1)} m\left(-\phi_m + \phi_m''\right) - \phi_0'' + \sum_{k=1}^{m}(1+t)^{-k}\sum_{j=0}^{k}\sum_{l=0}^{j} a_{k-j}\phi_{j-l}\phi_l' + a_0\phi_0\phi_0' \\
&+\sum_{k=m+1}^{2m}(1+t)^{-k}\sum_{j=k-m}^{m}\sum_{l=0}^{j} a_{k-j}\phi_{j-l}\phi_l' + \sum_{k=2m+1}^{3m}(1+t)^{-k}\sum_{j=k-m}^{2m}\sum_{l=j-m}^{m} a_{k-j}\phi_{j-l}\phi_l' \\
&+\sum_{k=1}^{m}(1+t)^{-k}\sum_{j=0}^{k-1}\sum_{l=0}^{,j} b_{k-1-j}\phi_{j-l}\phi_l + \sum_{k=m+1}^{2m+1}(1+t)^{-k}\sum_{j=k-1-m}^{m}\sum_{l=0}^{j} b_{k-1-j}\phi_{j-l}\phi_l \\
&+\sum_{k=2m+2}^{3m+1}(1+t)^{-k}\sum_{j=k-1-m}^{2m}\sum_{l=j-m}^{m} b_{k-1-j}\phi_{j-l}\phi_l - \sum_{k=1}^{m}(1+t)^{-k}\sum_{j=0}^{k-1} b_{k-1-j}\phi_j \\
&-\sum_{k=m+1}^{2m+1}(1+t)^{-k}\sum_{j=k-1-m}^{m} b_{k-1-j}\phi_j + \sum_{k=3}^{m}(1+t)^{-k}\sum_{j=0}^{k-3} j d_{k-3-j}\phi_j \\
&+(1+t)^{-(m+1)}\sum_{j=0}^{k-3} j d_{m-2-j}\phi_j + (1+t)^{-(m+2)}\sum_{j=0}^{k-3} j d_{m-1-j}\phi_j \\
&+\sum_{k=m+3}^{2m+3}(1+t)^{-k}\sum_{j=k-3-m}^{m} j d_{k-3-j}\phi_j - \sum_{k=2}^{m}(1+t)^{-k}\sum_{j=0}^{k-2} f_{k-2-j}\phi_j' \\
&-(1+t)^{-(m+1)}\sum_{j=0}^{m-1} f_{m-1-j}\phi_j' - \sum_{k=m+2}^{2m+2}(1+t)^{-k}\sum_{j=k-2-m}^{m} f_{k-2-j}\phi_j' \\
&+\sum_{k=2}^{m}(1+t)^{-k}\sum_{j=0}^{k-2} j c_{k-2-j}\phi_j' + (1+t)^{-(m+1)}\sum_{j=0}^{m-1} j c_{m-1-j}\phi_j'
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\sum_{k=m+2}^{2m+2}(1+t)^{-k}\sum_{j=k-2-m}^{m} jc_{k-2-j}\phi_j' - \sum_{k=1}^{m}(1+t)^{-k}\sum_{j=0}^{k-1} e_{k-1-j}\phi_j'' \\
&-\sum_{k=m+1}^{2m+1}(1+t)^{-k}\sum_{j=k-1-m}^{m} e_{k-1-j}\phi_j'' - \sum_{k=1}^{m}(1+t)^{-k}\sum_{j=0}^{k-1} c_{k-1-j}\phi_j' \\
&-\sum_{k=m+1}^{2m+1}(1+t)^{-k}\sum_{j=k-1-m}^{m} c_{k-1-j}\phi_j' + F
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
R = {}&(1+t)^{-(m+1)}m\left(-\phi_m+\phi_m''\right) + \sum_{k=m+1}^{2m}(1+t)^{-k}\sum_{j=k-m}^{m}\sum_{l=0}^{j} a_{k-j}\phi_{j-l}\phi_l' \\
&+\sum_{k=2m+1}^{3m}(1+t)^{-k}\sum_{j=k-m}^{2m}\sum_{l=j-m}^{m} a_{k-j}\phi_{j-l}\phi_l' + \sum_{k=m+1}^{2m+1}(1+t)^{-k}\sum_{j=k-1-m}^{m}\sum_{l=0}^{j} b_{k-1-j}\phi_{j-l}\phi_l \\
&+\sum_{k=2m+2}^{3m+1}(1+t)^{-k}\sum_{j=k-1-m}^{2m}\sum_{l=j-m}^{m} b_{k-1-j}\phi_{j-l}\phi_l - \sum_{k=m+1}^{2m+1}(1+t)^{-k}\sum_{j=k-1-m}^{m} b_{k-1-j}\phi_j \\
&+(1+t)^{-(m+1)}\sum_{j=1}^{m-2} jd_{m-2-j}\phi_j + (1+t)^{-(m+2)}\sum_{j=1}^{m-1} jd_{m-1-j}\phi_j \\
&+\sum_{k=m+3}^{2m+3}(1+t)^{-k}\sum_{j=k-3-m}^{m} jd_{k-3-j}\phi_j - (1+t)^{-(m+1)}\sum_{j=0}^{m-1} f_{m-1-j}\phi_j' \\
&-\sum_{k=m+2}^{2m+2}(1+t)^{-k}\sum_{j=k-2-m}^{m} f_{k-2-j}\phi_j' + (1+t)^{-(m+1)}\sum_{j=1}^{m-1} jc_{m-1-j}\phi_j' \\
&+\sum_{k=m+2}^{2m+2}(1+t)^{-k}\sum_{j=k-2-m}^{m} jc_{k-2-j}\phi_j' - \sum_{k=m+1}^{2m+1}(1+t)^{-k}\sum_{j=k-1-m}^{m} e_{k-1-j}\phi_j'' \\
&-\sum_{k=m+1}^{2m+1}(1+t)^{-k}\sum_{j=k-1-m}^{m} c_{k-1-j}\phi_j' + F.
\end{aligned}
$$

Observemos

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k=m+1}^{2m}(1+t)^{-k}\sum_{j=k-m}^{m}\sum_{l=0}^{j} a_{k-j}\phi_{j-l}\phi_l' \\
&\quad = \sum_{k=m+1}^{2m}(1+t)^{-k}\sum_{j=k-m}^{m}\left(a_{k-j}\phi_j\phi_0' + \sum_{l=1}^{j-1} a_{k-j}\phi_{j-l}\phi_l' + a_{k-j}\phi_0\phi_j'\right).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k=m+1}^{2m+1}(1+t)^{-k}\sum_{j=k-1-m}^{m}\sum_{l=0}^{j} b_{k-1-j}\phi_{j-l}\phi_l \\
&\quad = (1+t)^{-(m+1)}\left(\sum_{j=0}^{m}\sum_{l=0}^{j} b_{m-j}\phi_{j-l}\phi_l\right) + \sum_{k=m+2}^{2m+1}(1+t)^{-k}\sum_{j=k-1-m}^{m}\sum_{l=0}^{j} b_{k-1-j}\phi_{j-l}\phi_l
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= (1+t)^{-(m+1)}\left(b_m\phi_0\phi_0 + \sum_{j=1}^{m}\sum_{l=0}^{j} b_{m-j}\phi_{j-l}\phi_l\right)\\
&+ \sum_{k=m+2}^{2m+1}(1+t)^{-k}\sum_{j=k-1-m}^{m}\left(b_{k-1-j}\phi_j\phi_0 + \sum_{l=1}^{j} b_{k-1-j}\phi_{j-l}\phi_l\right)\\
&= (1+t)^{-(m+1)}\left(b_m\phi_0\phi_0 + \sum_{j=1}^{m}\left(b_{m-j}\phi_j\phi_0 + \sum_{l=0}^{j-1} b_{m-j}\phi_{j-l}\phi_l + b_{m-j}\phi_0\phi_j\right)\right)\\
&+ \sum_{k=m+2}^{2m+1}(1+t)^{-k}\sum_{j=k-1-m}^{m}\left(b_{k-1-j}\phi_j\phi_0 + \sum_{l=1}^{j} b_{k-1-j}\phi_{j-l}\phi_l\right).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k=m+1}^{2m+1}(1+t)^{-k}\sum_{j=k-1-m}^{m} b_{k-1-j}\phi_j\\
&\quad= (1+t)^{-(m+1)}\left(\sum_{j=0}^{m} b_{m-j}\phi_j\right) + \sum_{k=m+2}^{2m+1}(1+t)^{-k}\sum_{j=k-1-m}^{m} b_{k-1-j}\phi_j\\
&\quad= (1+t)^{-(m+1)}\left(b_m\phi_0 + \sum_{j=1}^{m} b_{m-j}\phi_j\right) + \sum_{k=m+2}^{2m+1}(1+t)^{-k}\sum_{j=k-1-m}^{m} b_{k-1-j}\phi_j.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&(1+t)^{-(m+1)}\sum_{j=1}^{m-2} jd_{m-2-j}\phi_j + (1+t)^{-(m+2)}\sum_{j=1}^{m-1} jd_{m-1-j}\phi_j\\
&\quad+ \sum_{k=m+3}^{2m+3}(1+t)^{-k}\sum_{j=k-3-m}^{m} jd_{k-3-j}\phi_j\\
&\quad= (1+t)^{-(m+1)}\sum_{j=1}^{m-2} jd_{m-2-j}\phi_j + (1+t)^{-(m+2)}\sum_{j=1}^{m-1} jd_{m-1-j}\phi_j\\
&\quad+ (1+t)^{-(m+3)}\sum_{j=1}^{m} jd_{m-j}\phi_j + \sum_{k=m+4}^{2m+3}(1+t)^{-k}\sum_{j=k-3-m}^{m} jd_{k-3-j}\phi_j.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&(1+t)^{-(m+1)}\sum_{j=0}^{m-1} f_{m-1-j}\phi_j' + \sum_{k=m+2}^{2m+2}(1+t)^{-k}\sum_{j=k-2-m}^{m} f_{k-2-j}\phi_j'\\
&\quad= (1+t)^{-(m+1)}\left(f_{m-1}\phi_0' + \sum_{j=1}^{m-1} f_{m-1-j}\phi_j'\right) + (1+t)^{-(m+2)}\sum_{j=0}^{m} f_{m-j}\phi_j'\\
&\quad+ \sum_{k=m+3}^{2m+2}(1+t)^{-k}\sum_{j=k-2-m}^{m} f_{k-2-j}\phi_j'\\
&\quad= (1+t)^{-(m+1)}\left(f_{m-1}\phi_0' + \sum_{j=1}^{m-1} f_{m-1-j}\phi_j'\right) + (1+t)^{-(m+2)}\left(f_m\phi_0' + \sum_{j=1}^{m} f_{m-j}\phi_j'\right)
\end{aligned}
$$

$$+\sum_{k=m+3}^{2m+2}(1+t)^{-k}\sum_{j=k-2-m}^{m} f_{k-2-j}\phi_j'.$$

$$\begin{aligned}
&(1+t)^{-(m+1)}\sum_{j=1}^{m-1} jc_{m-1-j}\phi_j' + \sum_{k=m+2}^{2m+2}(1+t)^{-k}\sum_{j=k-2-m}^{m} jc_{k-2-j}\phi_j'\\
&\quad = (1+t)^{-(m+1)}\sum_{j=1}^{m-1} jc_{m-1-j}\phi_j' + (1+t)^{-(m+2)}\sum_{j=0}^{m} jc_{m-j}\phi_j'\\
&\quad + \sum_{k=m+3}^{2m+2}(1+t)^{-k}\sum_{j=k-2-m}^{m} jc_{k-2-j}\phi\\
&\quad = (1+t)^{-(m+1)}\sum_{j=1}^{m-1} jc_{m-1-j}\phi_j' + (1+t)^{-(m+2)}\sum_{j=1}^{m} jc_{m-j}\phi_j'\\
&\quad + \sum_{k=m+3}^{2m+2}(1+t)^{-k}\sum_{j=k-2-m}^{m} jc_{k-2-j}\phi_j'.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=m+1}^{2m+1}(1+t)^{-k}\sum_{j=k-1-m}^{m} e_{k-1-j}\phi_j''\\
&\quad = (1+t)^{-(m+1)}\sum_{j=0}^{m} e_{m-j}\phi_j'' + \sum_{k=m+2}^{2m+1}(1+t)^{-k}\sum_{j=k-1-m}^{m} e_{k-1-j}\phi_j''\\
&\quad = (1+t)^{-(m+1)}\left(e_m\phi_0'' + \sum_{j=1}^{m} e_{m-j}\phi_j''\right) + \sum_{k=m+2}^{2m+1}(1+t)^{-k}\sum_{j=k-1-m}^{m} e_{k-1-j}\phi_j''.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=m+1}^{2m+1}(1+t)^{-k}\sum_{j=k-1-m}^{m} c_{k-1-j}\phi_j'\\
&\quad = (1+t)^{-(m+1)}\sum_{j=0}^{m} c_{m-j}\phi_j' + \sum_{k=m+2}^{2m+1}(1+t)^{-k}\sum_{j=k-1-m}^{m} c_{k-1-j}\phi_j'\\
&\quad = (1+t)^{-(m+1)}\left(c_m\phi_0' + \sum_{j=1}^{m} c_{m-j}\phi_j'\right) + \sum_{k=m+2}^{2m+1}(1+t)^{-k}\sum_{j=k-1-m}^{m} c_{k-1-j}\phi_j'.
\end{aligned}$$

Asi

$$\begin{aligned}
R &= (1+t)^{-(m+1)} m\left(-\phi_m + \phi_m''\right)\\
&\quad + \sum_{k=m+1}^{2m}(1+t)^{-k}\sum_{j=k-m}^{m}\left(a_{k-j}\phi_j\phi_0' + \sum_{l=1}^{j-1} a_{k-j}\phi_{j-l}\phi_l' + a_{k-j}\phi_0\phi_j'\right)\\
&\quad + \sum_{k=2m+1}^{3m}(1+t)^{-k}\sum_{j=k-m}^{2m}\sum_{l=j-m}^{m} a_{k-j}\phi_{j-l}\phi_l'
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+(1+t)^{-(m+1)}\left(b_m\phi_0\phi_0+\sum_{j=1}^{m}\left(b_{m-j}\phi_j\phi_0+\sum_{l=1}^{j-1}b_{m-j}\phi_{j-l}\phi_l+b_{m-j}\phi_0\phi_j\right)\right)\\
&+\sum_{k=m+2}^{2m+1}(1+t)^{-k}\sum_{j=k-1-m}^{m}\left(b_{k-1-j}\phi_j\phi_0+\sum_{l=1}^{j}b_{k-1-j}\phi_{j-l}\phi_l\right)\\
&+\sum_{k=2m+2}^{3m+1}(1+t)^{-k}\sum_{j=k-1-m}^{2m}\sum_{l=j-m}^{m}b_{k-1-j}\phi_{j-l}\phi_l\\
&-(1+t)^{-(m+1)}\left(b_m\phi_0+\sum_{j=1}^{m}b_{m-j}\phi_j\right)-\sum_{k=m+2}^{2m+1}(1+t)^{-k}\sum_{j=k-1-m}^{m}b_{k-1-j}\phi_j\\
&+(1+t)^{-(m+1)}\sum_{j=1}^{m-2}jd_{m-2-j}\phi_j+(1+t)^{-(m+2)}\sum_{j=1}^{m-1}jd_{m-1-j}\phi_j\\
&+(1+t)^{-(m+3)}\sum_{j=1}^{m}jd_{m-j}\phi_j+\sum_{k=m+4}^{2m+3}(1+t)^{-k}\sum_{j=k-3-m}^{m}jd_{k-3-j}\phi_j\\
&-(1+t)^{-(m+1)}\left(f_{m-1}\phi_0'+\sum_{j=1}^{m-1}f_{m-1-j}\phi_j'\right)-(1+t)^{-(m+2)}\left(f_m\phi_0'+\sum_{j=1}^{m}f_{m-j}\phi_j'\right)\\
&-\sum_{k=m+3}^{2m+2}(1+t)^{-k}\sum_{j=k-2-m}^{m}f_{k-2-j}\phi_j'+(1+t)^{-(m+1)}\sum_{j=1}^{m-1}jc_{m-1-j}\phi_j'\\
&+(1+t)^{-(m+2)}\sum_{j=1}^{m}jc_{m-j}\phi_j'+\sum_{k=m+3}^{2m+2}(1+t)^{-k}\sum_{j=k-2-m}^{m}jc_{k-2-j}\phi_j'\\
&-(1+t)^{-(m+1)}\left(e_m\phi_0''+\sum_{j=1}^{m}e_{m-j}\phi_j''\right)-\sum_{k=m+2}^{2m+1}(1+t)^{-k}\sum_{j=k-1-m}^{m}e_{k-1-j}\phi_j''\\
&-(1+t)^{-(m+1)}\left(c_m\phi_0'+\sum_{j=1}^{m}c_{m-j}\phi_j'\right)\\
&-\sum_{k=m+2}^{2m+1}(1+t)^{-k}\sum_{j=k-1-m}^{m}c_{k-1-j}\phi_j'+F.
\end{aligned}
$$

Teniendo encuenta los estimativos $\phi_0(x)\to 1$, $\phi_0^{(j)}(x)=\mathcal{O}(e^{-|x|})$, $j\geq 1$ y $\phi_k^{(j)}(x)=\mathcal{O}(|x|^{2k}e^{-|x|})$, $k\geq 1$, $j\geq 0$ cuando $x\to-\infty$. Obtenemos

$$
\begin{aligned}
R\sim{}&(1+t)^{-(m+1)}x^{2m}e^{-|x|}+\sum_{k=m+1}^{2m}(1+t)^{-k}\sum_{j=k-m}^{m}\left(x^{k+j}e^{-2|x|}+x^{k+j}e^{-|x|}\right)\\
&+\sum_{k=2m+1}^{3m}(1+t)^{-k}\sum_{j=k-m}^{m}x^{k+j}e^{-2|x|}+(1+t)^{-(m+1)}\left(b_m\phi_0^2+\sum_{j=1}^{m}\left(x^{m+j}e^{-|x|}+x^{m+j}e^{-2|x|}\right)\right)\\
&+\sum_{k=m+2}^{2m+1}(1+t)^{-k}\sum_{j=k-1-m}^{m}\left(x^{k-1+j}e^{-|x|}+x^{k-1+j}e^{-2|x|}\right)+\sum_{k=2m+2}^{3m+1}(1+t)^{-k}\sum_{j=k-1-m}^{2m}x^{k-1+j}e^{-2|x|}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&-(1+t)^{-(m+1)}\left(b_m\phi_0+\sum_{j=1}^{m}x^{m+j}e^{-|x|}\right)-\sum_{k=m+2}^{2m+1}(1+t)^{-k}\sum_{j=k-1-m}^{m}x^{k-1+j}e^{-|x|}\\
&+(1+t)^{-(m+1)}\sum_{j=1}^{m-2}x^{m-2+j}e^{-|x|}+t^{-(m+2)}\sum_{j=1}^{m-1}x^{m-1+j}e^{-|x|}+(1+t)^{-(m+3)}\sum_{j=1}^{m}x^{m+j}e^{-|x|}\\
&+\sum_{k=m+4}^{2m+3}(1+t)^{-k}\sum_{j=k-3-m}^{m}x^{k-3+j}e^{-|x|}-(1+t)^{-(m+1)}\left(x^{m-1}e^{-|x|}+\sum_{j=1}^{m-1}x^{m-1+j}e^{-|x|}\right)\\
&-(1+t)^{-(m+2)}\left(x^{m}e^{-|x|}+\sum_{j=1}^{m}x^{m+j}e^{-|x|}\right)-\sum_{k=m+3}^{2m+2}(1+t)^{-k}\sum_{j=k-2-m}^{m}x^{k-2+j}e^{-|x|}\\
&+(1+t)^{-(m+1)}\sum_{j=1}^{m-1}x^{m-1+j}e^{-|x|}+(1+t)^{-(m+2)}\sum_{j=1}^{m}x^{m+j}e^{-|x|}\\
&+\sum_{k=m+3}^{2m+2}(1+t)^{-k}\sum_{j=k-2-m}^{m}x^{k-2+j}e^{-|x|}-(1+t)^{-(m+1)}\left(x^{m}e^{-|x|}+\sum_{j=1}^{m}x^{m+j}e^{-|x|}\right)\\
&-\sum_{k=m+2}^{2m+1}(1+t)^{-k}\sum_{j=k-1-m}^{m}x^{k-1+j}e^{-|x|}-(1+t)^{-(m+1)}\left(x^{m}e^{-|x|}+\sum_{j=1}^{m}x^{m+j}e^{-|x|}\right)\\
&-\sum_{k=m+2}^{2m+1}(1+t)^{-k}\sum_{j=k-1-m}^{m}x^{k-1+j}e^{-|x|}.
\end{aligned}
$$

Como $x^p\phi_0^2-x^p\phi_0\to 0$, cuando $x\to-\infty$, para todo $p\in\mathbb{N}$,

entonce $R\sim(1+t)^{-(m+1)}x^{3m}e^{-|x|}$ cuando $x\to-\infty$.

3.4. Cuarto Cálculo . Apliquemos $h(t,x)=w(t,x)\cosh\alpha x$ a la ecuación

$$
\begin{aligned}
&w_t-w_{txx}-w_{xx}+(1+t)(\varphi\Phi w)_x+\frac{1}{2}(1+t)\left(\varphi w^2\right)_x\\
&+\frac{1}{2}(1+t)\varphi_x w^2+(1+t)\varphi_x(\Phi-1)w-\frac{2\varphi_x}{\varphi}w_x\\
&-\frac{\varphi_{xx}}{\varphi}w_t-\frac{2\varphi_{tx}}{\varphi}w_x-\frac{2\varphi_x}{\varphi}w_{tx}-\frac{\varphi_t}{\varphi}w_{xx}+R=0.
\end{aligned}
$$

Tenemos

$h=w\cosh\alpha x,\quad w=\frac{1}{\cosh\alpha x}h,\quad w\sinh\alpha x=h\tanh\alpha x$

$h_t=w_t\cosh\alpha x\quad w_t=\frac{1}{\cosh\alpha x}h_t,\ \ w_t\sinh\alpha x=h_t\tanh\alpha x$

$h_x=w_x\cosh\alpha x+\alpha w\sinh\alpha x=w_x\cosh\alpha x+\alpha h\tanh\alpha x$

$w_x\cosh\alpha x=h_x-\alpha h\tanh\alpha x,\quad w_x=\frac{1}{\cosh\alpha x}\left(h_x-\alpha h\tanh\alpha x\right),$

$w_x\sinh\alpha x=\tanh\alpha x\left(h_x-\alpha h\tanh\alpha x\right)$

$$
\begin{aligned}
&h_{tx} = w_{tx}\cosh\alpha x + \alpha h_t \tanh\alpha x\\
&w_{tx} = \tfrac{1}{\cosh\alpha x}\left(h_{tx} - \alpha h_t \tanh\alpha x\right)\\
&w_{tx}\sinh\alpha x = \tanh\alpha x\left(h_{tx} - \alpha h_t \tanh\alpha x\right)\\
&h_{xx} = w_{xx}\cosh\alpha x + 2\alpha w_x \sinh\alpha x + \alpha^2 w\cosh\alpha x\\
&\quad = w_{xx}\cosh\alpha x + 2\alpha\tanh\alpha x\left(h_x - \alpha h\tanh\alpha x\right) + \alpha^2 h,\\
&w_{xx}\cosh\alpha x = h_{xx} - 2\alpha\tanh\alpha x\left(h_x - \alpha h\tanh\alpha x\right) - \alpha^2 h\\
&w_{xx} = \tfrac{1}{\cosh\alpha x}\Big(h_{xx} - 2\alpha\tanh\alpha x\left(h_x - \alpha h\tanh\alpha x\right) - \alpha^2 h\Big)\\
&w_{xx}\sinh\alpha x = \tanh\alpha x\Big(h_{xx} - 2\alpha\tanh\alpha x\left(h_x - \alpha h\tanh\alpha x\right) - \alpha^2 h\Big)\\
&g_{txx} = W_{txx}\cosh\alpha x + 2\alpha\tanh\alpha x\left(g_{tx} - \alpha g_t\tanh\alpha x\right) + \alpha^2 g_t\\
&w_{txx}\cosh\alpha x = h_{txx} - 2\alpha\tanh\alpha x\left(h_{tx} - \alpha h_t\tanh\alpha x\right) - \alpha^2 h_t.
\end{aligned}
$$

Luego

$$
\begin{aligned}
&\tfrac{1}{\cosh\alpha x}h_t - \tfrac{1}{\cosh\alpha x}\Big(h_{txx} - 2\alpha\tanh\alpha x\left(h_{tx} - \alpha h_t\tanh\alpha x\right) - \alpha^2 h_t\Big)\\
&-\tfrac{1}{\cosh\alpha x}\Big(h_{xx} - 2\alpha\tanh\alpha x\left(h_x - \alpha h\tanh\alpha x\right) - \alpha^2 h\Big)\\
&(1+t)\left(\varphi\Phi\right)_x\tfrac{1}{\cosh\alpha x}h + (1+t)\varphi\Phi\tfrac{1}{\cosh\alpha x}\left(h_x - \alpha h\tanh\alpha x\right)\\
&+(1+t)\varphi_x\tfrac{1}{\cosh\alpha x}h\tfrac{1}{\cosh\frac{\alpha}{2}x}s + (1+t)\varphi\tfrac{1}{\cosh^2\alpha x}h\left(h_x - \alpha h\tanh\alpha x\right)\\
&+(1+t)\varphi_x(\Phi-1)\tfrac{1}{\cosh\alpha x}h - \frac{2\varphi_x}{\varphi}\tfrac{1}{\cosh\alpha x}\left(h_x - \alpha h\tanh\alpha x\right)\\
&-\frac{\varphi_{xx}}{\varphi}\tfrac{1}{\cosh\alpha x}h_t - \frac{2\varphi_{tx}}{\varphi}\tfrac{1}{\cosh\alpha x}\left(h_x - \alpha h\tanh\alpha x\right)\\
&-\frac{2\varphi_x}{\varphi}\tfrac{1}{\cosh\alpha x}\left(h_{tx} - \alpha h_t\tanh\alpha x\right)\\
&-\frac{\varphi_t}{\varphi}\tfrac{1}{\cosh\alpha x}\Big(h_{xx} - 2\alpha\tanh\alpha x\left(h_x - \alpha h\tanh\alpha x\right) - \alpha^2 h\Big) + R = 0.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&h_t - \Big(h_{txx} - 2\alpha\tanh\alpha x\left(h_{tx} - \alpha h_t\tanh\alpha x\right) - \alpha^2 h_t\Big)\\
&-\Big(h_{xx} - 2\alpha\tanh\alpha x\left(h_x - \alpha h\tanh\alpha x\right) - \alpha^2 h\Big)\\
&(1+t)\left(\varphi\Phi\right)_x h + (1+t)\varphi\Phi\left(h_x - \alpha h\tanh\alpha x\right)\\
&+(1+t)\varphi_x\tfrac{1}{\cosh\frac{\alpha}{2}x}sh + \tfrac{1}{\cosh\alpha x}(1+t)\varphi h\left(h_x - \alpha h\tanh\alpha x\right)\\
&+(1+t)\varphi_x(\Phi-1)h - \frac{2\varphi_x}{\varphi}\left(h_x - \alpha h\tanh\alpha x\right)\\
&-\frac{\varphi_{xx}}{\varphi}h_t - \frac{2\varphi_{tx}}{\varphi}\left(h_x - \alpha h\tanh\alpha x\right) - \frac{2\varphi_x}{\varphi}\left(h_{tx} - \alpha h_t\tanh\alpha x\right)
\end{aligned}
$$

$$-\frac{\varphi_t}{\varphi}\left(h_{xx}-2\alpha\tanh\alpha x\,(h_x-\alpha h\tanh\alpha x)-\alpha^2 h\right)+R\cosh\alpha x=0.$$

$$\begin{aligned}
&h_t-h_{txx}+2\alpha\tanh\alpha x\ h_{tx}-2\alpha^2\tanh^2\alpha x\ h_t+\alpha^2 h_t-h_{xx}\\
&+2\alpha\tanh\alpha x\ h_x-2\alpha^2\tanh^2\alpha x\ h+\alpha^2 h+(1+t)(\varphi\Phi)_x h\\
&+(1+t)\varphi\Phi h_x-(1+t)\varphi\Phi\alpha\ \tanh\alpha x\ h+(1+t)\varphi_x\tfrac{1}{\cosh\frac{\alpha}{2}x}sh\\
&+\tfrac{1}{\cosh\alpha x}(1+t)\varphi hh_x-\tfrac{1}{\cosh\alpha x}(1+t)\varphi\alpha\tanh\alpha x\ hh+(1+t)\varphi_x(\Phi-1)h\\
&-\frac{2\varphi_x}{\varphi}h_x+\frac{2\varphi_x}{\varphi}\alpha\tanh\alpha x\ h-\frac{\varphi_{xx}}{\varphi}h_t-\frac{2\varphi_{tx}}{\varphi}h_x+\frac{2\varphi_{tx}}{\varphi}\alpha\tanh\alpha x\ h\\
&-\frac{2\varphi_x}{\varphi}h_{tx}+\frac{2\varphi_x}{\varphi}\alpha\tanh\alpha x\ h_t-\frac{\varphi_t}{\varphi}h_{xx}+\frac{\varphi_t}{\varphi}2\alpha\tanh\alpha x\ h_x\\
&-\frac{\varphi_t}{\varphi}2\alpha^2\tanh^2\alpha x\ h+\frac{\varphi_t}{\varphi}\alpha^2 h+R\cosh\alpha x=0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\left(1+\alpha^2-2\alpha^2\tanh^2\alpha x-\frac{\varphi_{xx}}{\varphi}+\frac{2\varphi_x}{\varphi}\alpha\tanh\alpha x\right)h_t-h_{txx}+\left(2\alpha\tanh\alpha x-\frac{2\varphi_x}{\varphi}\right)h_{tx}\\
&+\Big(\alpha^2-2\alpha^2\tanh^2\alpha x+(1+t)(\varphi\Phi)_x-(1+t)\varphi\Phi\alpha\ \tanh\alpha x+(1+t)\varphi_x\tfrac{1}{\cosh\frac{\alpha}{2}x}s\\
&-(1+t)\varphi\tfrac{h}{\cosh\alpha x}\alpha\tanh\alpha x+(1+t)\varphi_x(\Phi-1)+\frac{2\varphi_x}{\varphi}\alpha\tanh\alpha x\\
&+\frac{2\varphi_{tx}}{\varphi}\alpha\tanh\alpha x-\frac{\varphi_t}{\varphi}2\alpha^2\tanh^2\alpha x+\frac{\varphi_t}{\varphi}\alpha^2\Big)h\\
&+\left(2\alpha\tanh\alpha x+(1+t)\varphi\Phi-\frac{2\varphi_x}{\varphi}-\frac{2\varphi_{tx}}{\varphi}+\frac{\varphi_t}{\varphi}2\alpha\tanh\alpha x\right)h_x\\
&-\left(1+\frac{\varphi_t}{\varphi}\right)h_{xx}+\tfrac{1}{\cosh\alpha x}(1+t)\varphi hh_x+R\cosh\alpha x=0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\left(1+\alpha^2-2\alpha^2\tanh^2\alpha x-\frac{\varphi_{xx}}{\varphi}+\frac{2\varphi_x}{\varphi}\alpha\tanh\alpha x\right)h_t-h_{txx}+\left(2\alpha\tanh\alpha x-\frac{2\varphi_x}{\varphi}\right)h_{tx}\\
&+\Big(\alpha^2-2\alpha^2\tanh^2\alpha x+(1+t)(\varphi\Phi)_x-(1+t)\varphi\Phi\alpha\tanh\alpha x+(1+t)\varphi_x\tfrac{s}{\cosh\frac{\alpha}{2}x}\\
&-(1+t)\varphi\tfrac{s}{\cosh\frac{\alpha}{2}x}\alpha\tanh\alpha x+(1+t)\varphi_x(\Phi-1)+\frac{2\varphi_x}{\varphi}\alpha\tanh\alpha x\\
&+\frac{2\varphi_{tx}}{\varphi}\alpha\tanh\alpha x-\frac{\varphi_t}{\varphi}2\alpha^2\tanh^2\alpha x+\frac{\varphi_t}{\varphi}\alpha^2\Big)h\\
&+\left(2\alpha\tanh\alpha x+(1+t)\varphi\Phi-\frac{2\varphi_x}{\varphi}-\frac{2\varphi_{tx}}{\varphi}+\frac{\varphi_t}{\varphi}2\alpha\tanh\alpha x\right)h_x\\
&-\left(1+\frac{\varphi_t}{\varphi}\right)h_{xx}+\tfrac{1}{\cosh\alpha x}(1+t)\varphi hh_x+R\cosh\alpha x=0.
\end{aligned}$$

$$\left(1+\alpha^2-2\alpha^2\tanh^2\alpha x-\frac{\varphi_{xx}}{\varphi}+\frac{2\varphi_x}{\varphi}\alpha\tanh\alpha x\right)h_t-h_{txx}+\left(2\alpha\tanh\alpha x-\frac{2\varphi_x}{\varphi}\right)h_{tx}$$
$$+\left(\left(1+\frac{\varphi_t}{\varphi}\right)\left(\alpha^2-2\alpha^2\tanh^2\alpha x\right)+(1+t)(\varphi\Phi)_x+(1+t)\varphi_x(\Phi-1)-(1+t)\varphi\Phi\alpha\tanh\alpha x\right.$$
$$+(1+t)\varphi_x\tfrac{s}{\cosh\frac{\alpha}{2}x}-(1+t)\varphi\tfrac{s}{\cosh\frac{\alpha}{2}x}\alpha\tanh\alpha x+\left.\left(\frac{2\varphi_x}{\varphi}+\frac{2\varphi_{tx}}{\varphi}\right)\alpha\tanh\alpha x\right)h$$
$$+\left(\left(1+\frac{\varphi_t}{\varphi}\right)2\alpha\tanh\alpha x+(1+t)\varphi\Phi-\left(\frac{2\varphi_x}{\varphi}+\frac{2\varphi_{tx}}{\varphi}\right)\right)h_x$$
$$-\left(1+\frac{\varphi_t}{\varphi}\right)h_{xx}+\tfrac{1}{\cosh\alpha x}t\varphi hh_x+R\cosh\alpha x=0.$$

$$\partial_t\left[\left(1+\alpha^2-2\alpha^2\tanh^2\alpha x-\frac{\varphi_{xx}}{\varphi}+\frac{2\varphi_x}{\varphi}\alpha\tanh\alpha x\right)h-h_{xx}+\left(2\alpha\tanh\alpha x-\frac{2\varphi_x}{\varphi}\right)h_x\right]$$
$$+\left(\left(1+\frac{\varphi_t}{\varphi}\right)\left(\alpha^2-2\alpha^2\tanh^2\alpha x\right)+(1+t)(\varphi\Phi)_x+(1+t)\varphi_x(\Phi-1)\right.$$
$$-(1+t)\varphi\Phi\alpha\tanh\alpha x+(1+t)\varphi_x\tfrac{s}{\cosh\frac{\alpha}{2}x}-(1+t)\varphi\tfrac{s}{\cosh\frac{\alpha}{2}x}\alpha\tanh\alpha x$$
$$\left(+\left(\frac{2\varphi_x}{\varphi}+\frac{2\varphi_{tx}}{\varphi}\right)\alpha\tanh\alpha x-\left(\frac{2\varphi_x}{\varphi}\right)_t\alpha\tanh\alpha x+\left(\frac{\varphi_{xx}}{\varphi}\right)_t\right)h$$
$$+\left(\left(1+\frac{\varphi_t}{\varphi}\right)2\alpha\tanh\alpha x+(1+t)\varphi\Phi-\left(\frac{2\varphi_x}{\varphi}+\frac{2\varphi_{tx}}{\varphi}\right)+\left(\frac{2\varphi_x}{\varphi}\right)_t\right)h_x$$
$$-\left(1+\frac{\varphi_t}{\varphi}\right)h_{xx}+\tfrac{1}{\cosh\alpha x}(1+t)\varphi hh_x+R\cosh\alpha x=0.$$

$$\partial_t\left[\left(1+\alpha^2-2\alpha^2\tanh^2\alpha x-\frac{\varphi_{xx}}{\varphi}+\frac{2\varphi_x}{\varphi}\alpha\tanh\alpha x\right)h-h_{xx}+\left(2\alpha\tanh\alpha x-\frac{2\varphi_x}{\varphi}\right)h_x\right]$$
$$+\left(\left(1+\frac{\varphi_t}{\varphi}\right)\left(\alpha^2-2\alpha^2\tanh^2\alpha x\right)+(1+t)(\varphi\Phi)_x+(1+t)\varphi_x(\Phi-1)\right.$$
$$-(1+t)\varphi\Phi\alpha\tanh\alpha x+(1+t)\varphi_x\tfrac{s}{\cosh\frac{\alpha}{2}x}-(1+t)\varphi\tfrac{s}{\cosh\frac{\alpha}{2}x}\alpha\tanh\alpha x$$
$$+\left.\frac{2\varphi_x}{\varphi}\left(1+\frac{\varphi_t}{\varphi}\right)\alpha\tanh\alpha x+\left(\frac{\varphi_{xx}}{\varphi}\right)_t\right)h$$
$$+\left(\left(1+\frac{\varphi_t}{\varphi}\right)2\alpha\tanh\alpha x+(1+t)\varphi\Phi-\frac{2\varphi_x}{\varphi}\left(1+\frac{\varphi_t}{\varphi}\right)\right)h_x$$
$$-\left(1+\frac{\varphi_t}{\varphi}\right)h_{xx}+\tfrac{1}{\cosh\alpha x}(1+t)\varphi hh_x+R\cosh\alpha x=0.$$

$$\partial_t\left[\left(1+\alpha^2-2\alpha^2\tanh^2\alpha x-\frac{\varphi_{xx}}{\varphi}+\frac{2\varphi_x}{\varphi}\alpha\tanh\alpha x\right)h-h_{xx}+\left(2\alpha\tanh\alpha x-\frac{2\varphi_x}{\varphi}\right)h_x\right]$$

$$+\left(\left(1+\frac{\varphi_t}{\varphi}\right)\left(\alpha^2-2\alpha^2\tanh^2\alpha x+\frac{2\varphi_x}{\varphi}\alpha\tanh\alpha x\right)+(1+t)(\varphi\Phi)_x+(1+t)\varphi_x(\Phi-1)\right.$$
$$-(1+t)\varphi\Phi\alpha\tanh\alpha x+(1+t)\varphi_x\tfrac{s}{\cosh\frac{\alpha}{2}x}-(1+t)\varphi\tfrac{s}{\cosh\frac{\alpha}{2}x}\alpha\tanh\alpha x+\left.\left(\frac{\varphi_{xx}}{\varphi}\right)_t\right)h$$
$$+\left(\left(1+\frac{\varphi_t}{\varphi}\right)\left(2\alpha\tanh\alpha x-\frac{2\varphi_x}{\varphi}\right)+(1+t)\varphi\Phi\right)h_x$$
$$-\left(1+\frac{\varphi_t}{\varphi}\right)h_{xx}+\tfrac{1}{\cosh\alpha x}(1+t)\varphi hh_x+R\cosh\alpha x=0.$$

$$\partial_t\left[\left(1+\alpha^2-2\alpha^2\tanh^2\alpha x-\frac{\varphi_{xx}}{\varphi}+\frac{2\varphi_x}{\varphi}\alpha\tanh\alpha x\right)h-h_{xx}+\left(2\alpha\tanh\alpha x-\frac{2\varphi_x}{\varphi}\right)h_x\right]$$
$$+\left(\left(1+\frac{\varphi_t}{\varphi}\right)\left(\alpha^2-2\alpha^2\tanh^2\alpha x+\frac{2\varphi_x}{\varphi}\alpha\tanh\alpha x\right)+(1+t)(\varphi\Phi)_x+(1+t)\varphi_x(\Phi-1)\right.$$
$$-(1+t)\varphi\Phi\alpha\tanh\alpha x+(1+t)\varphi_x\tfrac{s}{\cosh\frac{\alpha}{2}x}-(1+t)\varphi\tfrac{s}{\cosh\frac{\alpha}{2}x}\alpha\tanh\alpha x+\left.\left(\frac{\varphi_{xx}}{\varphi}\right)_t\right)h$$
$$+\left(\left(1+\frac{\varphi_t}{\varphi}\right)\left(2\alpha\tanh\alpha x-\frac{2\varphi_x}{\varphi}\right)+(1+t)\varphi\Phi\right)h_x$$
$$-\left(1+\frac{\varphi_t}{\varphi}\right)h_{xx}+\tfrac{1}{\cosh\alpha x}(1+t)\varphi hh_x+R\cosh\alpha x=0.$$

Obtenemos entonces la ecuación

$$\begin{aligned}&\partial_t\left[\left(1+\alpha^2-2\alpha^2\tanh^2\alpha x-\frac{\varphi_{xx}}{\varphi}+\frac{2\varphi_x}{\varphi}\alpha\tanh\alpha x\right)h\right.\\&\left.-h_{xx}+\left(2\alpha\tanh\alpha x-\frac{2\varphi_x}{\varphi}\right)h_x\right]\\&=-\chi_1h-\psi_1h_x+\left(1+\frac{\varphi_t}{\varphi}\right)h_{xx}-\tfrac{1}{\cosh\alpha x}(1+t)\varphi hh_x-R\cosh\alpha x\end{aligned}$$

con la condición de frontera $h(t,0)=0$, donde

$$\begin{aligned}\chi_1&=\left(1+\frac{\varphi_t}{\varphi}\right)\left(\alpha^2-2\alpha^2\tanh^2\alpha x+\frac{2\varphi_x}{\varphi}\alpha\tanh\alpha x\right)\\&\quad+(1+t)(\varphi\Phi)_x+(1+t)\varphi_x(\Phi-1)\\&\quad-(1+t)\varphi\Phi\alpha\tanh\alpha x+(1+t)\varphi_x\frac{s}{\cosh\frac{\alpha}{2}x}\\&\quad-(1+t)\varphi\frac{s}{\cosh\frac{\alpha}{2}x}\alpha\tanh\alpha x+\left(\frac{\varphi_{xx}}{\varphi}\right)_t\\\psi_1&=\left(1+\frac{\varphi_t}{\varphi}\right)\left(2\alpha\tanh\alpha x-\frac{2\varphi_x}{\varphi}\right)+(1+t)\varphi\Phi.\end{aligned}$$

3.5. Quinto Cálculo . Verifiquemos que $\chi_1(t,x) \geq -c_1$, con $c_1 > 0$, para todo $x < 0$ y para todo $t \geq t_0$.

Primero analicemos la expresión $\alpha^2 - 2\alpha^2 \tanh^2 \alpha x + \frac{2\varphi_x}{\varphi}\alpha \tanh \alpha x$ para todo $x \in (-\infty, 0)$ y todo $t > 0$. Observemos que para todo $z < 0$, tenemos $-1 < \tanh z < 0$, entonces $0 < \tanh^2 z < 1$, por tanto

$-\alpha^2 - \frac{2\varphi_x}{\varphi}\alpha < \alpha^2 - 2\alpha^2 \tanh^2 \alpha x + \frac{2\varphi_x}{\varphi}\alpha \tanh \alpha x < \alpha^2$ para todo $x < 0$. Entonces

$$-\left(\alpha^2 + \frac{2\varphi_x}{\varphi}\alpha\right)\left(1 + \frac{\varphi_t}{\varphi}\right) < \left(1 + \frac{\varphi_t}{\varphi}\right)\left(\alpha^2 - 2\alpha^2 \tanh^2 \alpha x + \frac{2\varphi_x}{\varphi}\alpha \tanh \alpha x\right) < \alpha^2\left(1 + \frac{\varphi_t}{\varphi}\right)$$

Como $\alpha > 0$ es suficientemente pequeño ($\alpha < 1$), $\frac{2\varphi_x}{\varphi} \approx (1+t)^{-1}$ y $\frac{\varphi_t}{\varphi} \approx (1+t)^{-1}$ cuando $t \to \infty$, entonces para todo $t \geq t_0 > \frac{1}{\alpha}$, donde $t_0 > 0$ es suficientemente grande, tenemos

$$\begin{aligned}
-2\alpha^2(1+\alpha) &< \left(1 + \frac{\varphi_t}{\varphi}\right)\left(\alpha^2 - 2\alpha^2 \tanh^2 \alpha x + \frac{2\varphi_x}{\varphi}\alpha \tanh \alpha x\right) < \alpha^2(1+\alpha) \\
-4\alpha^2 &< \left(1 + \frac{\varphi_t}{\varphi}\right)\left(\alpha^2 - 2\alpha^2 \tanh^2 \alpha x + \frac{2\varphi_x}{\varphi}\alpha \tanh \alpha x\right) < 2\alpha^2 \\
-4 &< \left(1 + \frac{\varphi_t}{\varphi}\right)\left(\alpha^2 - 2\alpha^2 \tanh^2 \alpha x + \frac{2\varphi_x}{\varphi}\alpha \tanh \alpha x\right) < 2
\end{aligned}$$

Ahora analicemos

$$\begin{aligned}
G(t,x) &= (1+t)(\varphi\Phi)_x + (1+t)\varphi_x(\Phi - 1) - (1+t)\varphi\Phi\alpha \tanh \alpha x \\
&= (1+t)\varphi_x(2\Phi - 1) + (1+t)\varphi\,(\Phi_x - \Phi\alpha \tanh \alpha x)
\end{aligned}$$

Como $\Phi \approx -\tanh(\frac{x}{2})$, $\Phi_x \approx -\frac{1}{2\cosh^2(\frac{x}{2})}$, para todo $x \in (-\infty, 0)$ tenemos

$$G(t,x) \approx (1+t)\varphi_x\left(2\left|\tanh\frac{x}{2}\right| - 1\right) + (1+t)\varphi\left(\alpha\left|\tanh \alpha x\right|\left|\tanh\frac{x}{2}\right| - \frac{1}{2\cosh^2(\frac{x}{2})}\right),$$

como $-1 \leq 2\left|\tanh\frac{x}{2}\right| - 1 < 1$ y $-\frac{1}{2} \leq \alpha\left|\tanh \alpha x\right|\left|\tanh\frac{x}{2}\right| - \frac{1}{2\cosh^2(\frac{x}{2})} < \alpha$, entonces

$$\begin{aligned}
-(1+t)\varphi_x &\leq (1+t)\varphi_x\left(2\left|\tanh\frac{x}{2}\right| - 1\right) \leq (1+t)\varphi_x \\
-(1+t)\varphi &\leq (1+t)\varphi\left(\alpha\left|\tanh \alpha x\right|\left|\tanh\frac{x}{2}\right| - \frac{1}{2\cosh^2(\frac{x}{2})}\right) < (1+t)\varphi\alpha,
\end{aligned}$$

por tanto

$$-[(1+t)\varphi_x + (1+t)\varphi] \leq G(t,x) < (1+t)\varphi_x + (1+t)\varphi\alpha.$$

Como $\varphi \approx (1+t)^{-1}$, $\varphi_x \approx (1+t)^{-2}$ cuando $t \to \infty$

$$-(1+t)\varphi \leq (1+t)\varphi\left(\alpha\,|\tanh\alpha x|\left|\tanh\frac{x}{2}\right| - \frac{1}{2\cosh^2(\frac{x}{2})}\right) < (1+t)\varphi\alpha$$

Caso 1 $(x \leq -3t)$ $(t \geq t_0 > \frac{1}{\alpha})$

$$\begin{aligned} -[(1+t)^{-1}+1] &\leq G(t,x) < (1+t)^{-1} + \alpha \\ -[\alpha+1] &\leq G(t,x) < 2\alpha \\ -2 &\leq G(t,x) < 2\alpha \\ -2 &\leq G(t,x) < 2 \end{aligned}$$

Caso 2 $(-3t \leq x < 0)$ $(t \geq t_0 > \frac{1}{\alpha})$
Como $(1+t)\varphi_x \approx (1+t)^{-1}$ y $(1+t)\varphi \approx (1+t)\frac{1}{1+t+|x|}$ entonces

$$-\left[(1+t)^{-1} + (1+t)\frac{\alpha}{1+t+|x|}\right] \leq G(t,x) \leq (1+t)^{-1} + (1+t)\frac{\alpha}{1+t+|x|},$$

observemos $\frac{\alpha(1+t)}{1+t+|x|} \approx \frac{\alpha(1+t)}{1+t+|x|} \approx \frac{\alpha}{2}$, entonces

$$\begin{aligned} -2\alpha &\leq G(t,x) \leq 2\alpha \\ -2 &< G(t,x) < 2. \end{aligned}$$

Ahora analicemos $(1+t)\varphi_x\frac{s}{\cosh\frac{\alpha}{2}x} - (1+t)\varphi\frac{s}{\cosh\frac{\alpha}{2}x}\alpha\tanh\alpha x$ para todo $x \in (-\infty, 0)$

$$\begin{aligned} & (1+t)\varphi_x\frac{s}{\cosh\frac{\alpha}{2}x} - (1+t)\varphi\frac{s}{\cosh\frac{\alpha}{2}x}\alpha\tanh\alpha x \\ = \; & (1+t)\frac{s}{\cosh\frac{\alpha}{2}x}(\varphi_x - \varphi\alpha\tanh\alpha x) \\ = \; & (1+t)\frac{s}{\cosh\frac{\alpha}{2}x}(\varphi_x + \varphi\alpha\,|\tanh\alpha x|) \end{aligned}$$

Así,

$$0 < (1+t)\frac{s}{\cosh\frac{\alpha}{2}x}(\varphi_x + \varphi\alpha\,|\tanh\alpha x|) \leq \|s\|_\infty (1+t)(\varphi_x + \varphi\alpha).$$

ahora de la misma manera como se hizo el estimativo anterior, en los casos 1 y 2, obtenemos

$$0 < (1+t)\frac{s}{\cosh\frac{\alpha}{2}x}\left(\varphi_x + \varphi\alpha\,|\tanh\alpha x|\right) \leq 2\alpha\,\|s\|_\infty < 2\,\|s\|_\infty\,.$$

Podemos así concluir que existe un $c_1 > 0$ tal que $\chi_1(t,x) \geq -c_1$, para todo $x < 0$ y para todo $t \geq t_0$.

3.6. Sexto Cálculo. Aplicando $s(t,x) = w(t,x)\cosh\beta x$,donde $\beta = \alpha/2$ a la ecuaci ón (4.5), obtenemos

$$\begin{aligned}
&\partial_t\left[\left(1+\beta^2-2\beta^2\tanh^2\beta x - \frac{\varphi_{xx}}{\varphi} + \frac{2\varphi_x}{\varphi}\beta\tanh\beta x\right)s\right.\\
&\left.-s_{xx} + \left(2\beta\tanh\beta x - \frac{2\varphi_x}{\varphi}\right)s_x\right] - \chi_2 s - \psi_2 s_x\left(1+\frac{\varphi_t}{\varphi}\right)s_{xx}\\
&-(1+t)\frac{\varphi s s_x}{\cosh\beta x} - (1+t)\frac{\varphi_x - \varphi\tanh\beta x}{\cosh\beta x}s^2 - R\cosh\beta x \ = 0
\end{aligned}$$

con la condición de frontera $s(t,0) = 0$, donde

$$\begin{aligned}
\chi_2 &= \left(1+\frac{\varphi_t}{\varphi}\right)\left(\beta^2 - 2\beta^2\tanh^2\beta x + \frac{2\varphi_x}{\varphi}\beta\tanh\beta x\right)\\
&\quad + t\,(\varphi\Phi)_x + t\varphi_x(\Phi-1) - t\varphi\Phi\beta\tanh\beta x + \left(\frac{\varphi_{xx}}{\varphi}\right)_t.\\
\psi_2 &= \left(1+\frac{\varphi_t}{\varphi}\right)\left(2\beta\tanh\beta x - \frac{2\varphi_x}{\varphi}\right) + t\varphi\Phi.
\end{aligned}$$

Por Lema 1.6, sea $\zeta(t)$ la curva tal que $\tilde{s}(t) = s(t,\zeta(t)) = \sup_{x\in(-\infty,0)} s(t,x)$, por tanto $s_x(t,\zeta(t)) = 0$ para casi todo $t \geq t_0$.
Como $\left(1+\beta^2-2\beta^2\tanh^2\beta x - \frac{\varphi_{xx}}{\varphi} + \frac{2\varphi_x}{\varphi}\beta\tanh\beta x\right) > 0$, entonces aplicando el principio del máximo,

$$\begin{aligned}
&\partial_t\left(\left(1+\beta^2-2\beta^2\tanh^2\beta x - \frac{\varphi_{xx}}{\varphi} + \frac{2\varphi_x}{\varphi}\beta\tanh\beta x\right)\tilde{s} - s_{xx}(t,\zeta(t))\right) \ \leq\\
&-\chi_2\tilde{s} + \left(1+\frac{\varphi_t}{\varphi}\right)s_{xx}(t,\zeta(t)) - t\frac{\varphi_x - \varphi\tanh\beta x}{\cosh\beta x}\tilde{s}^2 - R\cosh\beta x
\end{aligned}$$

ahora $\chi_2 \geq c_2$, para todo $x : -3t \leq x < 0$ y para todo $t \geq t_0$, donde t_0 suficientemente grande, entonces

$$\partial_t\left(\left(1+\beta^2-2\beta^2\tanh^2\beta x-\frac{\varphi_{xx}}{\varphi}+\frac{2\varphi_x}{\varphi}\beta\tanh\beta x\right)\tilde{s}-s_{xx}(t,\zeta(t))\right) \leq -c\tilde{s}+s_{xx}(t,\zeta(t))-t\frac{\varphi_x-\varphi\tanh\beta x}{\cosh\beta x}\tilde{s}^2-R\cosh\beta x$$

Como $s_{xx}(t,\zeta(t)) \leq 0$, aplicando nuevamente el Lema 1.6 a $\tilde{s}_{xx}(t)=\inf_{x\in(-\infty,0)}s_{xx}(t,x)<0$ se tiene que $\tilde{s}_{xx}(t)=s_{xx}(t,\zeta(t))$ y $\tilde{s}_{xxt}(t)\ =s_{xxt}(t,\zeta(t))$ en casi todo t, por tanto

$$\partial_t\left(\left(1+\beta^2-2\beta^2\tanh^2\beta x-\frac{\varphi_{xx}}{\varphi}+\frac{2\varphi_x}{\varphi}\beta\tanh\beta x\right)\tilde{s}-\tilde{s}_{xx}\right) \leq -c_2\tilde{s}+\tilde{s}_{xx}-t\frac{\varphi_x-\varphi\tanh\beta x}{\cosh\beta x}\tilde{s}^2-R\cosh\beta x$$

Como

$$\left|t\frac{\varphi_x-\varphi\tanh\beta x}{\cosh\beta x}\right| \leq Ct\left(\|\varphi_x\|_\infty+\|\varphi\|_\infty\right)$$

y $\|\varphi_x\|_\infty \leq C(1+t)^{-2}$, $\|\varphi\|_\infty \leq C(1+t)^{-1}$, entonces

$$\left|(1+t)\frac{\varphi_x-\varphi\tanh\beta x}{\cosh\beta x}\right| \leq C.$$

Además $\cosh\beta x = \mathcal{O}(e^{\beta|x|})$ y $R(t,x) = \mathcal{O}((1+t)^{-(m+1)}|x|^{3m}e^{-|x|})$ sobre $(-\infty,0]$, tenemos entonces

$$\begin{aligned}|R\cosh\beta x| &\leq (1+t)^{-(m+1)}|x|^{3m}e^{(\beta-1)|x|}\\ &\leq (1+t)^{-(m+1)}\end{aligned}$$

Por tanto

$$\partial_t\left(\left(1+\beta^2-2\beta^2\tanh^2\beta x-\frac{\varphi_{xx}}{\varphi}+\frac{2\varphi_x}{\varphi}\beta\tanh\beta x\right)\tilde{s}-\tilde{s}_{xx}\right) \leq -c_2\tilde{s}+C\tilde{s}^2+C(1+t)^{-(m+1)}$$

si hacemos $J(t) = \left(1+\beta^2-2\beta^2\tanh^2\beta x-\frac{\varphi_{xx}}{\varphi}+\frac{2\varphi_x}{\varphi}\beta\tanh\beta x\right)\tilde{s}-\tilde{s}_{xx} > 0$, tenemos entonces

$$J_t \leq -c_2\tilde{s}+C\tilde{s}^2+C(1+t)^{-(m+1)}.$$

Sea $M_2 = \max\left(1+\beta^2-2\beta^2\tanh^2\beta x - \frac{\varphi_{xx}}{\varphi} + \frac{2\varphi_x}{\varphi}\beta\tanh\beta x\right) > 0$ y
$m_2 = \min\left(1+\beta^2-2\beta^2\tanh^2\beta x - \frac{\varphi_{xx}}{\varphi} + \frac{2\varphi_x}{\varphi}\beta\tanh\beta x\right) > 0$,

$$\begin{aligned}
M_2\tilde{s}(t) &\geq \left(1+\beta^2-2\beta^2\tanh^2\beta x - \frac{\varphi_{xx}}{\varphi} + \frac{2\varphi_x}{\varphi}\beta\tanh\beta x\right)\tilde{s}(t) \\
m_2\tilde{s}(t) &\leq \left(1+\beta^2-2\beta^2\tanh^2\beta x - \frac{\varphi_{xx}}{\varphi} + \frac{2\varphi_x}{\varphi}\beta\tanh\beta x\right)\tilde{s}(t) \leq J(t)
\end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned}
-\tilde{s} &\leq -\frac{1}{M_2}\left(1+\beta^2-2\beta^2\tanh^2\beta x - \frac{\varphi_{xx}}{\varphi} + \frac{2\varphi_x}{\varphi}\beta\tanh\beta x\right)\tilde{s} \\
&= -\frac{1}{M_2}\left(\left(1+\beta^2-2\beta^2\tanh^2\beta x - \frac{\varphi_{xx}}{\varphi} + \frac{2\varphi_x}{\varphi}\beta\tanh\beta x\right)\tilde{s} - \tilde{s}_{xx}\right) - \frac{1}{M_2}\tilde{s}_{xx} \\
&= -\frac{1}{M_2}J - \frac{1}{M_2}\tilde{s}_{xx}
\end{aligned}$$

y

$$\tilde{s}(t) \leq \frac{1}{m_2}J(t) \tag{5.7}$$

luego

$$\begin{aligned}
J_t &\leq -c_2\tilde{s} + \tilde{s}_{xx} + C(1+t)\tilde{s}^2 + C(1+t)^{-(m+1)} \\
&\leq -\frac{c_2}{M_2}J + \left(1-\frac{c_2}{M_2}\right)\tilde{s}_{xx} + C(1+t)J^2 + C(1+t)^{-(m+1)}
\end{aligned}$$

se puede escoger $c_2 > 0$ suficientemente pequeño tal que $\left(1-\frac{c_2}{M_2}\right) > 0$, entonces

$$\begin{aligned}
J_t &\leq -\frac{c_2}{M_2}J + C(1+t)J^2 + C(1+t)^{-(m+1)} \\
J_t &\leq -rJ + C(1+t)J^2 + C(1+t)^{-(m+1)}
\end{aligned}$$

Sea $J(t) = z(t)e^{-qt}$, entonces

$$\begin{aligned}
z_t e^{-qt} - qJ &\leq -qJ + C(1+t)J^2 + C(1+t)^{-(m+1)} \\
z_t &\leq Ce^{-qt}(1+t)z^2 + Ce^{qt}(1+t)^{-(m+1)}.
\end{aligned}$$

De la misma manera, como se demostro 3.16 en el capitulo anterior, obtenemos entonces

$$z(t) < Ce^{qt}(1+t)^{-(m+1)} \tag{5.8}$$

para todo $t \geq t_0$. con ello tenemos $J(t) < C(1+t)^{-(m+1)}$ y por (5.7) tenemos $\tilde{s}(t) < C(1+t)^{-(m+1)}$, si hacemos $\widehat{s}(t) = \inf_{x\in(-\infty,0)} s(t,x)$, obtenemos $\widehat{s}(t) > -C(1+t)^{-(m+1)}$ para todo $t \geq t_0$. Por tanto tenemos el estiamtivo $\|s(t,x)\|_\infty \leq C(1+t)^{-(m+1)}$ para todo $t \geq t_0$.

3.7. Septimo Cálculo. Apliquemos $g(t,x) = W(t,x)\cosh\alpha x$ a la ecuación

$$\begin{aligned}
&\left(1-\frac{\varphi_{xx}}{\varphi}+\left(\frac{2\varphi_x}{\varphi}\right)_x\right)W_t-\frac{2\varphi_x}{\varphi}W_{tx}-W_{txx}\\
&-\left(1+\frac{\varphi_t}{\varphi}\right)W_{xx}+\left((1+t)\varphi\Phi-\frac{2\varphi_x}{\varphi}-\frac{2\varphi_{tx}}{\varphi}+\left(\frac{\varphi_t}{\varphi}\right)_x\right)W_x\\
&+\left((1+t)\varphi_x(\Phi-1)+\left(\frac{2\varphi_x}{\varphi}\right)_x+\left(\frac{2\varphi_{tx}}{\varphi}\right)_x-\left(\frac{\varphi_t}{\varphi}\right)_{xx}\right)W\\
&+\frac{1}{2}(1+t)\varphi w^2+\frac{1}{2}(1+t)\partial_x^{-1}\left(\varphi_x w^2\right)-(1+t)\partial_x^{-1}\left((\varphi_x(\Phi-1))_x W\right)\\
&-\partial_x^{-1}\left(\partial_x\left[\left(\frac{2\varphi_x}{\varphi}\right)_x+\left(\frac{2\varphi_{tx}}{\varphi}\right)_x-\left(\frac{\varphi_t}{\varphi}\right)_{xx}\right]W\right)\\
&+\partial_x^{-1}\left(\partial_x\left[\frac{\varphi_{xx}}{\varphi}-\left(\frac{2\varphi_x}{\varphi}\right)_x\right]W_t\right)+R_1\ =0.
\end{aligned}$$

Tenemos

$$\begin{aligned}
&g = W\cosh\alpha x, \quad W = \tfrac{1}{\cosh\alpha x}g, \quad W\sinh\alpha x = g\tanh\alpha x\\
&g_t = W_t\cosh\alpha x \quad W_t = \tfrac{1}{\cosh\alpha x}g_t, \ \ W_t\sinh\alpha x = g_t\tanh\alpha x\\
&g_x = W_x\cosh\alpha x+\alpha W\sinh\alpha x = W_x\cosh\alpha x+\alpha g\tanh\alpha x\\
&W_x\cosh\alpha x = g_x-\alpha g\tanh\alpha x, \quad W_x = \tfrac{1}{\cosh\alpha x}\left(g_x-\alpha g\tanh\alpha x\right),\\
&W_x\sinh\alpha x = \tanh\alpha x\left(g_x-\alpha g\tanh\alpha x\right)\\
&g_{tx} = W_{tx}\cosh\alpha x+\alpha g_t\tanh\alpha x\\
&W_{tx} = \tfrac{1}{\cosh\alpha x}\left(g_{tx}-\alpha g_t\tanh\alpha x\right)\\
&W_{tx}\sinh\alpha x = \tanh\alpha x\left(g_{tx}-\alpha g_t\tanh\alpha x\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
g_{xx} &= W_{xx}\cosh\alpha x + 2\alpha W_x \sinh\alpha x + \alpha^2 W\cosh\alpha x\\
&= W_{xx}\cosh\alpha x + 2\alpha\tanh\alpha x\,(g_x - \alpha g\tanh\alpha x) + \alpha^2 g,\\
W_{xx}\cosh\alpha x &= g_{xx} - 2\alpha\tanh\alpha x\,(g_x - \alpha g\tanh\alpha x) - \alpha^2 g\\
W_{xx} &= \tfrac{1}{\cosh\alpha x}\left(g_{xx} - 2\alpha\tanh\alpha x\,(g_x - \alpha g\tanh\alpha x) - \alpha^2 g\right)\\
W_{xx}\sinh\alpha x &= \tanh\alpha x\left(g_{xx} - 2\alpha\tanh\alpha x\,(g_x - \alpha g\tanh\alpha x) - \alpha^2 g\right)\\
g_{txx} &= W_{txx}\cosh\alpha x + 2\alpha\tanh\alpha x\,(g_{tx} - \alpha g_t\tanh\alpha x) + \alpha^2 g_t\\
W_{txx}\cosh\alpha x &= g_{txx} - 2\alpha\tanh\alpha x\,(g_{tx} - \alpha g_t\tanh\alpha x) - \alpha^2 g_t.
\end{aligned}
$$

Reemplazando, obtenemos

$$
\begin{aligned}
&\left(1 - \frac{\varphi_{xx}}{\varphi} + \left(\frac{2\varphi_x}{\varphi}\right)_x\right)\tfrac{1}{\cosh\alpha x}g_t - \frac{2\varphi_x}{\varphi}\tfrac{1}{\cosh\alpha x}(g_{tx} - \alpha g_t\tanh\alpha x)\\
&-\tfrac{1}{\cosh\alpha x}\left(g_{txx} - 2\alpha\tanh\alpha x\,(g_{tx} - \alpha g_t\tanh\alpha x) - \alpha^2 g_t\right)\\
&-\left(1 + \frac{\varphi_t}{\varphi}\right)\tfrac{1}{\cosh\alpha x}\left(g_{xx} - 2\alpha\tanh\alpha x\,(g_x - \alpha g\tanh\alpha x) - \alpha^2 g\right)\\
&+\left((1+t)\varphi\Phi - \frac{2\varphi_x}{\varphi} - \frac{2\varphi_{tx}}{\varphi} + \left(\frac{\varphi_t}{\varphi}\right)_x\right)\tfrac{1}{\cosh\alpha x}(g_x - \alpha g\tanh\alpha x)\\
&+\left((1+t)\varphi_x(\Phi-1) + \left(\frac{2\varphi_x}{\varphi}\right)_x + \left(\frac{2\varphi_{tx}}{\varphi}\right)_x - \left(\frac{\varphi_t}{\varphi}\right)_{xx}\right)\tfrac{1}{\cosh\alpha x}g\\
&+\tfrac{1}{2}(1+t)\varphi w^2 + \tfrac{1}{2}(1+t)\partial_x^{-1}\left(\varphi_x w^2\right) - (1+t)\partial_x^{-1}\left((\varphi_x(\Phi-1))_x\,W\right)\\
&-\partial_x^{-1}\left(\partial_x\left[\left(\frac{2\varphi_x}{\varphi}\right)_x + \left(\frac{2\varphi_{tx}}{\varphi}\right)_x - \left(\frac{\varphi_t}{\varphi}\right)_{xx}\right]\tfrac{g}{\cosh\alpha x}\right)\\
&+\partial_x^{-1}\left(\partial_x\left[\frac{\varphi_{xx}}{\varphi} - \left(\frac{2\varphi_x}{\varphi}\right)_x\right]\tfrac{g_t}{\cosh\alpha x}\right) + R_1 = 0.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\left(1 - \frac{\varphi_{xx}}{\varphi} + \left(\frac{2\varphi_x}{\varphi}\right)_x\right)g_t - \frac{2\varphi_x}{\varphi}g_{tx} + \frac{2\varphi_x}{\varphi}\alpha\tanh\alpha x\;g_t\\
&-g_{txx} + 2\alpha\tanh\alpha x\,g_{tx} - 2\alpha^2\tanh^2\alpha x\;g_t + \alpha^2 g_t\\
&-\left(1 + \frac{\varphi_t}{\varphi}\right)g_{xx} + \left(1 + \frac{\varphi_t}{\varphi}\right)2\alpha\tanh\alpha x\;g_x\\
&-\left(1 + \frac{\varphi_t}{\varphi}\right)2\alpha^2\tanh^2\alpha x\;g + \left(1 + \frac{\varphi_t}{\varphi}\right)\alpha^2 g\\
&+\left((1+t)\varphi\Phi - \frac{2\varphi_x}{\varphi} - \frac{2\varphi_{tx}}{\varphi} + \left(\frac{\varphi_t}{\varphi}\right)_x\right)g_x
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&-\left((1+t)\varphi\Phi-\frac{2\varphi_x}{\varphi}-\frac{2\varphi_{tx}}{\varphi}+\left(\frac{\varphi_t}{\varphi}\right)_x\right)\alpha\tanh\alpha x\ g\\
&+\left((1+t)\varphi_x(\Phi-1)+\left(\frac{2\varphi_x}{\varphi}\right)_x+\left(\frac{2\varphi_{tx}}{\varphi}\right)_x-\left(\frac{\varphi_t}{\varphi}\right)_{xx}\right)g\\
&+\tfrac{1}{2}(1+t)\cosh\alpha x\varphi w^2+\tfrac{1}{2}(1+t)\cosh\alpha x\partial_x^{-1}\left(\varphi_x w^2\right)\\
&-(1+t)\cosh\alpha x\partial_x^{-1}\left((\varphi_x(\Phi-1))_x W\right)\\
&-\cosh\alpha x\partial_x^{-1}\left(\partial_x\left[\left(\frac{2\varphi_x}{\varphi}\right)_x+\left(\frac{2\varphi_{tx}}{\varphi}\right)_x-\left(\frac{\varphi_t}{\varphi}\right)_{xx}\right]\frac{g}{\cosh\alpha x}\right)\\
&+\cosh\alpha x\partial_x^{-1}\left(\partial_x\left[\frac{\varphi_{xx}}{\varphi}-\left(\frac{2\varphi_x}{\varphi}\right)_x\right]\frac{g_t}{\cosh\alpha x}\right)+R_1\cosh\alpha x=0.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\left(1-\frac{\varphi_{xx}}{\varphi}+\left(\frac{2\varphi_x}{\varphi}\right)_x+\alpha^2-2\alpha^2\tanh^2\alpha x+\frac{2\varphi_x}{\varphi}\alpha\tanh\alpha x\right)g_t\\
&+\left(2\alpha\tanh\alpha x-\frac{2\varphi_x}{\varphi}\right)g_{tx}-g_{txx}\\
&+\left(\left(1+\frac{\varphi_t}{\varphi}\right)\left(\alpha^2-2\alpha^2\tanh^2\alpha x\right)+(1+t)\varphi_x(\Phi-1)-(1+t)\varphi\Phi\alpha\tanh\alpha x\right.\\
&\left.+\left(\frac{2\varphi_x}{\varphi}+\frac{2\varphi_{tx}}{\varphi}-\left(\frac{\varphi_t}{\varphi}\right)_x\right)\alpha\tanh\alpha x+\partial_x\left[\frac{2\varphi_x}{\varphi}+\frac{2\varphi_{tx}}{\varphi}-\left(\frac{\varphi_t}{\varphi}\right)_x\right]\right)g\\
&+\left((1+t)\varphi\Phi-\left(\frac{2\varphi_x}{\varphi}+\frac{2\varphi_{tx}}{\varphi}-\left(\frac{\varphi_t}{\varphi}\right)_x\right)+\left(1+\frac{\varphi_t}{\varphi}\right)2\alpha\tanh\alpha x\right)g_x\\
&-\left(1+\frac{\varphi_t}{\varphi}\right)g_{xx}+\tfrac{1}{2}t\cosh\alpha x\varphi w^2+\tfrac{1}{2}t\cosh\alpha x\partial_x^{-1}\left(\varphi_x w^2\right)\\
&-t\cosh\alpha x\partial_x^{-1}\left((\varphi_x(\Phi-1))_x\frac{g}{\cosh\alpha x}\right)\\
&-\cosh\alpha x\partial_x^{-1}\left(\left(\frac{2\varphi_x}{\varphi}+\frac{2\varphi_{tx}}{\varphi}-\left(\frac{\varphi_t}{\varphi}\right)_x\right)_{xx}\frac{g}{\cosh\alpha x}\right)\\
&-\cosh\alpha x\partial_x^{-1}\left(\partial_x\left[\left(\frac{2\varphi_x}{\varphi}\right)_x-\frac{\varphi_{xx}}{\varphi}\right]\frac{g_t}{\cosh\alpha x}\right)+R_1\cosh\alpha x=0.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\partial_t\left[\left(1+\alpha^2-2\alpha^2\tanh^2\alpha x-\left(\frac{\varphi_{xx}}{\varphi}-\left(\frac{2\varphi_x}{\varphi}\right)_x\right)+\frac{2\varphi_x}{\varphi}\alpha\tanh\alpha x\right)g\right.\\
&\left.+\cosh\alpha x\partial_x^{-1}\left(\partial_x\left[\frac{\varphi_{xx}}{\varphi}-\left(\frac{2\varphi_x}{\varphi}\right)_x\right]\frac{g}{\cosh\alpha x}\right)+\left(2\alpha\tanh\alpha x-\frac{2\varphi_x}{\varphi}\right)g_x-g_{xx}\right]\\
&+\left(\left(1+\frac{\varphi_t}{\varphi}\right)\left(\alpha^2-2\alpha^2\tanh^2\alpha x\right)+t\varphi_x(\Phi-1)-t\varphi\Phi\alpha\tanh\alpha x\right.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\left(\frac{2\varphi_x}{\varphi}+\frac{2\varphi_{tx}}{\varphi}-\left(\frac{\varphi_t}{\varphi}\right)_x\right)\alpha\tanh\alpha x+\partial_x\left[\frac{2\varphi_x}{\varphi}+\frac{2\varphi_{tx}}{\varphi}-\left(\frac{\varphi_t}{\varphi}\right)_x\right]\\
&+\partial_t\left[\frac{\varphi_{xx}}{\varphi}-\left(\frac{2\varphi_x}{\varphi}\right)_x\right]-\left(\frac{2\varphi_x}{\varphi}\right)_t\alpha\tanh\alpha x\Bigg)g\\
&+\left(t\varphi\Phi-\left(\frac{2\varphi_x}{\varphi}+\frac{2\varphi_{tx}}{\varphi}-\left(\frac{\varphi_t}{\varphi}\right)_x\right)+\left(1+\frac{\varphi_t}{\varphi}\right)2\alpha\tanh\alpha x+\left(\frac{2\varphi_x}{\varphi}\right)_t\right)g_x\\
&-\left(1+\frac{\varphi_t}{\varphi}\right)g_{xx}+\tfrac{1}{2}t\cosh\alpha x\varphi w^2+\tfrac{1}{2}t\cosh\alpha x\partial_x^{-1}\left(\varphi_x w^2\right)\\
&-t\cosh\alpha x\partial_x^{-1}\left((\varphi_x(\Phi-1))_x\frac{g}{\cosh\alpha x}\right)\\
&-\cosh\alpha x\partial_x^{-1}\left(\left(\frac{2\varphi_x}{\varphi}+\frac{2\varphi_{tx}}{\varphi}-\left(\frac{\varphi_t}{\varphi}\right)_x\right)_{xx}\frac{g}{\cosh\alpha x}\right)\\
&-\cosh\alpha x\partial_x^{-1}\left(\partial^2_{tx}\left[\frac{\varphi_{xx}}{\varphi}-\left(\frac{2\varphi_x}{\varphi}\right)_x\right]\frac{g}{\cosh\alpha x}\right)+R_1\cosh\alpha x=0.
\end{aligned}
$$

Por tanto

$$
\begin{aligned}
&\partial_t\Bigg[\left(1+\alpha^2-2\alpha^2\tanh^2\alpha x-\left(\frac{\varphi_{xx}}{\varphi}-\left(\frac{2\varphi_x}{\varphi}\right)_x\right)+\frac{2\varphi_x}{\varphi}\alpha\tanh\alpha x\right)g\\
&\quad+\cosh\alpha x\partial_x^{-1}\left(\partial_x\left[\frac{\varphi_{xx}}{\varphi}-\left(\frac{2\varphi_x}{\varphi}\right)_x\right]\frac{g}{\cosh\alpha x}\right)+\left(2\alpha\tanh\alpha x-\frac{2\varphi_x}{\varphi}\right)g_x-g_{xx}\Bigg]\\
&=-\tfrac{1}{2}(1+t)\cosh\alpha x\varphi w^2-\tfrac{1}{2}(1+t)\cosh\alpha x\partial_x^{-1}\left(\varphi_x w^2\right)-\chi_2 g-\psi_2 g_x\\
&\quad+\left(1+\frac{\varphi_t}{\varphi}\right)g_{xx}+F-R_1\cosh\alpha x
\end{aligned}
$$

donde

$$
\begin{aligned}
\chi_2=&\left(1+\frac{\varphi_t}{\varphi}\right)\left(\alpha^2-2\alpha^2\tanh^2\alpha x\right)+(1+t)\varphi_x(\Phi-1)-(1+t)\varphi\Phi\alpha\tanh\alpha x\\
&\left(\frac{2\varphi_x}{\varphi}+\frac{2\varphi_{tx}}{\varphi}-\left(\frac{\varphi_t}{\varphi}\right)_x\right)\alpha\tanh\alpha x+\partial_x\left[\frac{2\varphi_x}{\varphi}+\frac{2\varphi_{tx}}{\varphi}-\left(\frac{\varphi_t}{\varphi}\right)_x\right]\\
&+\partial_t\left[\frac{\varphi_{xx}}{\varphi}-\left(\frac{2\varphi_x}{\varphi}\right)_x\right]-\left(\frac{2\varphi_x}{\varphi}\right)_t\alpha\tanh\alpha x\\
\psi_2=&(1+t)\varphi\Phi-\left(\frac{2\varphi_x}{\varphi}+\frac{2\varphi_{tx}}{\varphi}-\left(\frac{\varphi_t}{\varphi}\right)_x\right)+\left(1+\frac{\varphi_t}{\varphi}\right)2\alpha\tanh\alpha x+\left(\frac{2\varphi_x}{\varphi}\right)_t
\end{aligned}
$$

$$F = (1+t)\cosh\alpha x\,\partial_x^{-1}\left(\left((\varphi_x(\Phi-1))_x\,\frac{g}{\cosh\alpha x}\right)\right.$$
$$+\cosh\alpha x\,\partial_x^{-1}\left(\partial_{xx}^2\left[\left(\frac{2\varphi_x}{\varphi}+\frac{2\varphi_{tx}}{\varphi}-\left(\frac{\varphi_t}{\varphi}\right)_x\right)\right]\frac{g}{\cosh\alpha x}\right)$$
$$+\cosh\alpha x\,\partial_x^{-1}\left(\partial_{tx}^2\left[\frac{\varphi_{xx}}{\varphi}-\left(\frac{2\varphi_x}{\varphi}\right)_x\right]\frac{g}{\cosh\alpha x}\right)$$

3.8. Octavo Cálculo. Demostremos los siguientes estimativos

$$\begin{aligned}\left\|\partial_{xx}^2\left[\left(\frac{2\varphi_x}{\varphi}+\frac{2\varphi_{tx}}{\varphi}-\left(\frac{\varphi_t}{\varphi}\right)_x\right)\right]\right\|_1 &\leq C(1+t)^{-3}\\ \left\|\partial_{tx}^2\left[\frac{\varphi_{xx}}{\varphi}-\left(\frac{2\varphi_x}{\varphi}\right)_x\right]\right\|_1 &\leq C(1+t)^{-4}\end{aligned}$$

Para todo $t \geq t_{0,}$, donde $t_0 > 0$ es sufinentemente grande. Como

$$\begin{aligned}\varphi(t,x) &= \sqrt{2}(1+t)^{-1}+x(1+t)^{-2}+\frac{1}{2\sqrt{2}}x^2(1+t)^{-3}+\mathcal{O}(x^3(1+t)^{-4})\\ \varphi_x(t,x) &= (1+t)^{-2}+\frac{1}{\sqrt{2}}x(1+t)^{-3}-\frac{3}{2}x^2(1+t)^{-4}+\mathcal{O}(x^3(1+t)^{-5})\\ \varphi_t(t,x) &= -\sqrt{2}(1+t)^{-2}-2x(1+t)^{-3}-\frac{3}{2\sqrt{2}}x^2(1+t)^{-4}+\mathcal{O}(x^3(1+t)^{-5})\\ \varphi_{tx}(t,x) &= -2(1+t)^{-3}-\frac{3}{\sqrt{2}}x(1+t)^{-4}+6x^2(1+t)^{-5}+\mathcal{O}(x^3(1+t)^{-6})\end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned}\frac{2\varphi_x}{\varphi} &\approx (1+t)^{-1}+x(1+t)^{-2}+x^2(1+t)^{-3}\\ \frac{\varphi_t}{\varphi} &\approx (1+t)^{-1}+x(1+t)^{-2}+x^2(1+t)^{-3}\\ \frac{\varphi_{xx}}{\varphi} &\approx (1+t)^{-2}+x(1+t)^{-3}+x^2(1+t)^{-4}\\ \left(\frac{\varphi_t}{\varphi}\right)_x &\approx (1+t)^{-2}+x(1+t)^{-3}+x^2(1+t)^{-4}\\ \left(\frac{2\varphi_x}{\varphi}\right)_x &\approx (1+t)^{-2}+x(1+t)^{-3}+x^2(1+t)^{-4},\end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned}\frac{2\varphi_x}{\varphi}+\frac{2\varphi_{tx}}{\varphi}-\left(\frac{\varphi_t}{\varphi}\right)_x &\approx (1+t)^{-1}+x(1+t)^{-2}+x^2(1+t)^{-3}\\ \frac{\varphi_{xx}}{\varphi}-\left(\frac{2\varphi_x}{\varphi}\right)_x &\approx (1+t)^{-2}+x(1+t)^{-3}+x^2(1+t)^{-4}.\end{aligned}$$

Por tanto

$$\begin{aligned}\partial_{xx}^2\left[\left(\frac{2\varphi_x}{\varphi}+\frac{2\varphi_{tx}}{\varphi}-\left(\frac{\varphi_t}{\varphi}\right)_x\right)\right] &\approx (1+t)^{-3}+x(1+t)^{-4}+x^2(1+t)^{-5}\\ \partial_{tx}^2\left[\frac{\varphi_{xx}}{\varphi}-\left(\frac{2\varphi_x}{\varphi}\right)_x\right] &\approx (1+t)^{-4}+x(1+t)^{-5}+x^2(1+t)^{-6}.\end{aligned}$$

Obtenemos así los estiamtivos

$$\begin{aligned}\left\|\partial_{xx}^2\left[\left(\frac{2\varphi_x}{\varphi}+\frac{2\varphi_{tx}}{\varphi}-\left(\frac{\varphi_t}{\varphi}\right)_x\right)\right]\right\|_1 &\leq C(1+t)^{-3}\\ \left\|\partial_{tx}^2\left[\frac{\varphi_{xx}}{\varphi}-\left(\frac{2\varphi_x}{\varphi}\right)_x\right]\right\|_1 &\leq C(1+t)^{-4}\end{aligned}$$

3.9. Noveno Cálculo. Ahora apliquemos $v(t,x)=W(t,x)\cosh\beta x$ con $\beta=\alpha/2$ a la ecuación

$$\begin{aligned}&\left(1-\frac{\varphi_{xx}}{\varphi}+\left(\frac{2\varphi_x}{\varphi}\right)_x\right)W_t-\frac{2\varphi_x}{\varphi}W_{tx}-W_{txx}\\ &-\left(1+\frac{\varphi_t}{\varphi}\right)W_{xx}+\left((1+t)\varphi\Phi-\frac{2\varphi_x}{\varphi}-\frac{2\varphi_{tx}}{\varphi}+\left(\frac{\varphi_t}{\varphi}\right)_x\right)W_x\\ &+\left((1+t)\varphi_x(\Phi-1)+\left(\frac{2\varphi_x}{\varphi}\right)_x+\left(\frac{2\varphi_{tx}}{\varphi}\right)_x-\left(\frac{\varphi_t}{\varphi}\right)_{xx}\right)W\\ &+\frac{1}{2}(1+t)\varphi w^2+\frac{1}{2}(1+t)\partial_x^{-1}\left(\varphi_x w^2\right)-(1+t)\partial_x^{-1}\left((\varphi_x(\Phi-1))_x W\right)\\ &-\partial_x^{-1}\left(\left(\left(\frac{2\varphi_x}{\varphi}\right)_x+\left(\frac{2\varphi_{tx}}{\varphi}\right)_x-\left(\frac{\varphi_t}{\varphi}\right)_{xx}\right)_x W\right)\\ &+\partial_x^{-1}\left(\partial_x\left[\frac{\varphi_{xx}}{\varphi}-\left(\frac{2\varphi_x}{\varphi}\right)_x\right]W_t\right)+R_1=0.\end{aligned}$$

obtenemos

$$\begin{aligned}
&\partial_t\Bigg[\left(\left(1+\beta^2-2\beta^2\tanh^2\beta x-\left(\frac{\varphi_{xx}}{\varphi}-\left(\frac{2\varphi_x}{\varphi}\right)_x\right)+\frac{2\varphi_x}{\varphi}\beta\tanh\beta x\right)v\right.\\
&+\cosh\beta x\,\partial_x^{-1}\left(\partial_x\left[\frac{\varphi_{xx}}{\varphi}-\left(\frac{2\varphi_x}{\varphi}\right)_x\right]\frac{v}{\cosh\beta x}\right)+\left(2\beta\tanh\beta x-\frac{2\varphi_x}{\varphi}\right)v_x-v_{xx}\Bigg]\\
&=-\tfrac{1}{2}(1+t)\cosh\beta x\,\varphi w^2-\tfrac{1}{2}(1+t)\cosh\beta x\,\partial_x^{-1}\left(\varphi_x w^2\right)-\chi_4 v-\psi_4 v_x\\
&+\left(1+\frac{\varphi_t}{\varphi}\right)v_{xx}+G-R_1\cosh\beta x
\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
\chi_4 &= \left(1+\frac{\varphi_t}{\varphi}\right)\left(\beta^2-2\beta^2\tanh^2\beta x\right)+(1+t)\varphi_x(\Phi-1)-(1+t)\varphi\Phi\beta\tanh\beta x\\
&\quad\left(\frac{2\varphi_x}{\varphi}+\frac{2\varphi_{tx}}{\varphi}-\left(\frac{\varphi_t}{\varphi}\right)_x\right)\beta\tanh\beta x+\partial_x\left[\frac{2\varphi_x}{\varphi}+\frac{2\varphi_{tx}}{\varphi}-\left(\frac{\varphi_t}{\varphi}\right)_x\right]\\
&\quad+\partial_t\left[\frac{\varphi_{xx}}{\varphi}-\left(\frac{2\varphi_x}{\varphi}\right)_x\right]-\left(\frac{2\varphi_x}{\varphi}\right)_t\beta\tanh\beta x\\
\psi_4 &= (1+t)\varphi\Phi-\left(\frac{2\varphi_x}{\varphi}+\frac{2\varphi_{tx}}{\varphi}-\left(\frac{\varphi_t}{\varphi}\right)_x\right)+\left(1+\frac{\varphi_t}{\varphi}\right)2\beta\tanh\beta x+\left(\frac{2\varphi_x}{\varphi}\right)_t\\
G &= (1+t)\cosh\beta x\,\partial_x^{-1}\left((\varphi_x(\Phi-1))_x\frac{g}{\cosh\alpha x}\right)\\
&\quad+\cosh\beta x\,\partial_x^{-1}\left(\left(\frac{2\varphi_x}{\varphi}+\frac{2\varphi_{tx}}{\varphi}-\left(\frac{\varphi_t}{\varphi}\right)_x\right)_{xx}\frac{g}{\cosh\alpha x}\right)\\
&\quad+\cosh\beta x\,\partial_x^{-1}\left(\partial_{tx}^2\left[\frac{\varphi_{xx}}{\varphi}-\left(\frac{2\varphi_x}{\varphi}\right)_x\right]\frac{g}{\cosh\alpha x}\right).
\end{aligned}$$

Observemos

$$\begin{aligned}
&\cosh\beta x\,\partial_x^{-1}\left(\partial_x\left[\frac{\varphi_{xx}}{\varphi}-\left(\frac{2\varphi_x}{\varphi}\right)_x\right]\frac{v}{\cosh\alpha x}\right)\\
&\le\partial_x^{-1}\left(\partial_x\left[\frac{\varphi_{xx}}{\varphi}-\left(\frac{2\varphi_x}{\varphi}\right)_x\right]v\right)\\
&\le\sup_{x\in(-\infty,0)}|v(t,x)|\,\partial_x^{-1}\left(\left|\partial_x\left[\frac{\varphi_{xx}}{\varphi}-\left(\frac{2\varphi_x}{\varphi}\right)_x\right]\right|\right).
\end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned}\kappa(t,x) = &\quad 1+\beta^2-2\beta^2\tanh^2\beta x-\left(\frac{\varphi_{xx}}{\varphi}-\left(\frac{2\varphi_x}{\varphi}\right)_x\right)\\ &+\frac{2\varphi_x}{\varphi}\beta\tanh\beta x+\partial_x^{-1}\left(\left|\partial_x\left[\frac{\varphi_{xx}}{\varphi}-\left(\frac{2\varphi_x}{\varphi}\right)_x\right]\right|\right)>0,\end{aligned}$$

podemos aplicar el principio del máximo a la ecuacion (4.11), por virtud del lema 1.6, sea $\zeta(t)$ tal que $\tilde{v}(t)=v(t,\zeta(t))=\sup_{x\in(-\infty,0)}|v(t,x)|$, entonces

$$\begin{aligned}\partial_t[\kappa(t,\zeta(t))\tilde{v}-v_{xx}(t,\zeta(t))] \;\leq\;& -\chi_4\tilde{v}+\left(1+\frac{\varphi_t}{\varphi}\right)v_{xx}(t,\zeta(t))\\ &+\sup_{x\in(-\infty,0)}\left|\frac{1}{2}(1+t)\cosh\beta x\varphi w^2\right|\\ &+\sup_{x\in(-\infty,0)}\left|\frac{1}{2}(1+t)\cosh\beta x\partial_x^{-1}\left(\varphi_x w^2\right)\right|\\ &+\sup_{x\in(-\infty,0)}|G(t,x)|-R_1\cosh\beta x\end{aligned}$$

Como $v_{xx}(t,\zeta(t))<0$, aplicando nuevamente el Lema 1.6
$\tilde{v}_{xx}(t)=\inf_{x\in(-\infty,0)}v_{xx}(t,x)<0$ tenemos $\tilde{v}_{xx}(t)=v_{xx}(t,\zeta(t))$ y

$\tilde{v}_{xxt}(t)=v_{xxt}(t,\zeta(t))$ en casi todo $t>t_0$.

$$\begin{aligned}\partial_t[\kappa(t,\zeta(t))\tilde{v}-\tilde{v}_{xx}] \;\leq\;& -\chi_4\tilde{v}+\tilde{v}_{xx}\\ &+\sup_{x\in(-\infty,0)}\left|\frac{1}{2}(1+t)\cosh\beta x\varphi w^2\right|\\ &+\sup_{x\in(-\infty,0)}\left|\frac{1}{2}(1+t)\cosh\beta x\partial_x^{-1}\left(\varphi_x w^2\right)\right|\\ &+\sup_{x\in(-\infty,0)}|G(t,x)|-R_1\cosh\beta x\end{aligned}$$

podemos obtener $\chi_4>c_4$ con $c_4>0$ para todo $x:-3t\leq x<0$ y para todo $t\geq t_0$. Además en forma análoga a los cálculos de los estimativos (4.12), (4.13) y (4.14), obtenemos entonces

$$\begin{aligned}\partial_t[\kappa(t,\zeta(t))\tilde{v}-\tilde{v}_{xx}] \;\leq\;& -c_4\tilde{v}+\tilde{v}_{xx}+C\|s\|_\infty\|h\|_\infty+C(1+t)^{-1}\|h\|_\infty\|s\|_\infty\\ &+C(1+t)^{-1}\|v\|_\infty+C(1+t)^{-(m+1)}\end{aligned}$$

como $\|s\|_\infty \leq C(1+t)^{-(m+1)}$ y $\|h\|_\infty \leq Ce^{rt}$ entonces obtenemos

$$\begin{aligned}\partial_t[\kappa(t,\zeta(t))\tilde{v}-\tilde{v}_{xx}] &\leq -c_4\tilde{v}+\tilde{v}_{xx}+Ce^{rt}(1+t)^{-(m+1)}\\ &\quad +Ce^{rt}(1+t)^{-(m+2)}+C(1+t)^{-1}\tilde{v}+C(1+t)^{-(m+1)}\\ &\leq -c_4\tilde{v}+\tilde{v}_{xx}+C(1+t)^{-1}\tilde{v}+Ce^{rt}(1+t)^{-(m+1)}+C(1+t)^{-(m+1)}.\end{aligned}$$

Para $H(t)=\kappa\tilde{v}-\tilde{v}_{xx}>0$, tenemos

$$H_t \leq -c_4\tilde{v}+\tilde{v}_{xx}+C(1+t)^{-1}\tilde{v}+Ce^{rt}(1+t)^{-(m+1)}.$$

Sean $M_4=\max\kappa(t,\zeta(t))>0$ y $m_4=\min\kappa(t,\zeta(t))>0$, entonces

$$m_4\tilde{v}(t)\leq \kappa(t,\zeta(t))\tilde{v}(t)\leq H(t) \;\text{ y } M_4\tilde{v}\geq\kappa\tilde{v}$$

$$\begin{aligned}-\tilde{v} &\leq -\frac{1}{M_4}\kappa\tilde{v}=-\frac{1}{M_4}H-\frac{1}{M_4}v_{xx},\\ \tilde{v} &\leq \frac{1}{m_4}H\end{aligned}$$

por tanto

$$H_t\leq -\frac{c_4}{M_4}H+\left(1-\frac{c_4}{M_4}\right)\tilde{v}_{xx}+C(1+t)^{-1}H+C(1+t)^{-(m+1)}$$

se puede de escoger $c_4>0$ suficientemente pequeño tal que $\left(1-\frac{c_4}{M4}\right)>0$,

$$\begin{aligned}H_t &\leq -\frac{c_4}{M_4}H+C(1+t)^{-1}H+C(1+t)^{-(m+1)}\\ &\leq -qH+C(1+t)^{-1}H+C(1+t)^{-(m+1)}\end{aligned}$$

Sea $H(t)=z(t)e^{-qt}$, entonces

$$\begin{aligned}z_te^{-qt}-qH &\leq -qH+C(1+t)^{-1}H+C(1+t)^{-(m+1)}\\ z_t &\leq C(1+t)^{-1}z+(1+t)^{-(m+1)}e^{qt}.\end{aligned}$$

Como se ha hecho anteriormente podemos probar

$$z(t)<Ce^{qt}(1+t)^{-(m+1)}$$

para todo $t\geq t_0$ (ver), con ello tenemos $H(t)<C(1+t)^{-(m+1)}$, luego $\tilde{v}(t)<C(1+t)^{-(m+1)}$, ahora si hacemos $\widehat{v}(t)=\inf_{x\in(-\infty,0)}v(t,x)$, obtenemos

$\widehat{v}(t) > -C(1+t)^{-(m+1)}$ para todo $t \geq t_0$. Por tanto tenemos entonces el estiamtivo $||v||_\infty \leq C(1+t)^{-(m+1)}$.

BIBLIOGRAFÍA

[1] Adams, Robert A. *Sobolev spaces.* Academic Press [A subsidiary of Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], New York-London, 1975. Pure and Applied Mathematics, Vol. 65.

[2] R. A. Aleksandryan. *Spectral properties of the operators generated by a system of differential equations of S. L. Sobolev type.* Tr. Mosk. Mat. Obshch., Vol. 9 (1960) 455-505.

[3] G. I. Barenblatt, Yu. P. Zheltov, and I. N. Kochina. *Basic concepts in the theory of seepage of homogeneous liquids in fissured rocks (strata).* J. Appl. Math. Mech. 24:5 (1960), 1286–1303.

[4] Bergh, Jöran; Löfström, Jörgen. *Interpolation spaces. An introduction.* Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, No. 223. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1976. x+207 pp.

[5] V. Bisogninn. *On the asympototic behavior of the solutions of a nonlinear dispersive system of Benjamin–Bona–Mahony's type.* Boll. Un. Mat. Ital. B 10 (1996), 99–128.

[6] J. L. Bona and L. Luo. *More results on the decay of solutions to nonlinear, dispersive wave equations.* Discrete and Continuous Dynamical Systems, 1 (1995), 151–193.

[7] J. L Bona and L. Luo. *Asymptotic decomposition of nonlinear, dispersive wave equations with dissipation.* Advances in Nonlinear Mathematics and Science, Phys. D 152/152 (2001), 363-383.

[8] Brezis, H. *Opérateurs maximaux monotones et semi-groupes de contractions dans les espaces de Hilbert.* North-Holland Mathematics Studies, 5. Notas de Matemática, 50. North-Holland, Amsterdam-London, 1972. American Elsevier, New York, 1973.

[9] Brezis, H. *Analyse fonctionnelle.* Théorie et applications. Collection Mathématiques. Appliquées pour la Maitrise. Masson, Paris, (1983).

[10] Brezis, H. *Functional analysis, Sobolev spaces a,nd partial differential equations.* Universitext. Springer, New York, (2011). xiv+599 pp.

[11] Cazenave, Thierry, Haraux A. *An introduction to semilinear evolution equations.* Transl. by Yvan Martel Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications. 13. Oxford: Clarendon Press. xiv, 186 p. (1998).

[12] A. Constantin and J. Escher. *Wave breaking for nonlinear nonlocal shallow water equations.* Acta Math., 181:2 (1998), 229-243.

[13] G. V. Demidenko and S. V. Uspenskii. *Partial differential equations and sistems not solvable with respect to the highest-order derivative.* Monogr. Textbooks Pure Appl. Math., vol. 256, Dekker, New York 2003.

[14] E. Di Benedetto. *Degenerate parabolic equations.* Universitext, Springer-Verlag, New York 1993.

[15] D. B. Dix. *Large Time Behavior of Solutions of Linear Dispersive Equations.* Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1668, 1997.

[16] D. B. Dix. *Temporal asymptotic bahavior of solutions of the Bengamin-One-Burgers equation.* J. Diff. Eqs. 90 (1991), 238-287.

[17] Duistermaat, J. J.; Kolk, J. A. C. *Distributions. Theory and applications.* Translated from the Dutch by J. P. van Braam Houckgeest. Cornerstones. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, (2010). xvi+445 pp.

[18] M. Escobedo, O. Kavian and H. Matano. *Large time bahavior of solutions of a dissipative nonlinear heat equation.* Comm. P. D. E., 20 (1995, 1427.1452.

[19] A. Favini and A. Yagi. *Degenerate differential equations in Banach spaces.* Marcel Dekker, New York 1999.

[20] M.V. Fedoryuk. *Partial differential equations.* V, volumen 34 of Encyclopaedia of Mathematical Sciences. Springer-Verlag, Berlin,1999.

[21] S. A. Gabov. *New problems of the mathematical theory of waves.* Fizmatlit, Moscow 1998.

[22] S.A. Gabov and A.G. Sveshnikov. *linear problem in the theory of unsteady interior waves.* Nauka, Moscow, 1990.

[23] Gilbarg, D., and Trudinger , N. S. *Elliptic partial differential equations of second order.* Second edition. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], 224. Springer-Verlag, Berlin, (1983), xiii+513 pp.

[24] A. L. Gladkov. *Unique solvability of the Cauchy problem for certain quasilinear pseudoparabolic equations.* Math. Notes 60:3 (1996), 264–268.

[25] N. Hayashi, E. I Kaikina, P. I. Naumkin. *Large time bahavior of solutions to the Landau-Ginzburg type equation.* Funcialaj Ekvacioj, 44 (2001), 171-200.

[26] N. Hayashi, P.I. Naumkin, E.I. Kaikina, I.A. Shishmarev. *Asymptotics for Dissipative Non-linear Equations.* Lectura Notes in Mathematics, 1884, Springer-Verlag, Berlin (2005), 557.

[27] S. Ja. Sekerž - Zen'kovič. *Fundamental solution of the interior wave operator.* Soviet Phys. Dokl. 24:5 (1979), 347-349.

[28] E. I. Kaikina, P. I. Naumkin, and I. A. Shishmarev. *Large-time asymptotic behaviour of nonlinear Sobolev-type equations.* Uspekhi Mat. Nauk, 64:3(387) (2009), 3–72; English transl.: Russian Math. Surveys, 64:3 (2009), 399–468.

[29] E. I. Kaikina, P. I. Naumkin, and I. A. Shishmarev. *Asimptotic for a of Sobolev type equation with a critical nonlinearity.* Differ. Equ. 43:5 (2007), 673-687.

[30] E. I. Kaikina, P. I. Naumkin, and I. A. Shishmarev. *The Cauchy problem for an equation of Sobolev type with power non-linearity.* Izv. Math. 69:1 (2005), 59-111.

[31] G. Karch. *Self-similar large time bahavior of solutions to the Korteweg-de Vries-Burgers equation.* Nonlinear Anal. T.M.A. 35A (1999), No, 2, 199-219.

[32] A. I. Kozhanov. *Initial boundary value problem for generalized Boussinesq type equations with nonlinear source.* Math. Notes 65:1 (1999), 59–63.

[33] Lighthill. M.J. *An introduction to Fourier analysis and generalised functions.* Cambridge Monographs on Mechanics and Applied Mathematics. London. 1964.

[34] Lions, J.L.; Magenes, E. *Problèmes aux limites non homogènes et applications.* (French) Paris: Dunod 1: XIX, 372 p.; 2: XV, 251 p. (1968).

[35] Lions, J.-L. *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires.* (French) Dunod; Gauthier-Villars, Paris (1969), xx+554 pp.

[36] T.P. Liu, A. Matsumaru, and K. Nishihara. *Behavior of solutions of the Burgers equation with boundary corresponding to rarefaction waves.* SIAM J. Math. Anal 29:2 (1998), 293-308.

[37] S. I. Lyashko. *Generalized optimal control of linear systems with distributed parameters, Appl. Optimization.* vol. 69, Kluwer, Dordrecht 2002.

[38] V. N. Maslennikova. *Explicit representations and a priori estimates for the solutions of boundary problems for Sobolev systems.* Siberian Math. J. 9:5 (1968) 883-897.

[39] V. P. Maslov. *On the existence of a solution, decreasing as $t \to \infty$, of Sobolev's equation for small oscillations of a rotating fluid in a cylindrical domain.* Siberian Math. J. 9:6 (1968), 1013-1020.

[40] A. Matsumura and K. Nishihara. *Asimptotics toward the rerafaction wave of the solutions of Burgers' equation with nonlinear degenerate viscosity.* Nonlinear Anal; 23:5 (1994) 605-614.

[41] A. Matsumura and K. Nishihara. *Asimptotics toward the rerafaction wave of the solutions of a one-dimensional model system for compressible viscous gas.* Japan J. Appl. Math; 3:1 (1986) 1-13.

[42] M. Mei and C. Schmeiser. *Asymptotic pro...les of solutions for the BBM–Burgers equations.* Funkcial. Ekvac. 44 (2001), 151–170.

[43] P.I. Naumkin; I.A. Shishmarev. *Nonlinear nonlocal equations in the theory of waves.* Translations of monograhs, 133 A.M.S., Providence, R.I., 1994.

[44] P.I. Naumkin; I.A. Shishmarev. *Asymptotics as time tends to infinity of solutions to nonlinear equations with large initial data.* Mathematicheskie Zametki 29 (1996), No. 6, 855-864.

[45] P.I. Naumkin; I.A. Shishmarev. *Asymptotic relationship as $t \to +\infty$ between solutions to some nonlinear equations I, II.* Differential Equations 30 (1994) 806-814; 1329-1340.

[46] D. A. Nomirovskii. *On homeomorphisms realized by certain partial differential operators.* Ukrainian Math. J. 56:12 (2005), 2017–2027.

[47] R. Prado and E. Zuazua. *Asymptotic expansion for the generalized Benjamin–Bona–Mahony–Burgers equation.* J. Differential Integral Equations 15 (2002), 1409–1434.

[48] I. A. Shishmarev. *On a non-linear equation of Sobolev type.* Differ. Uravn. 41 (2005); English transl. in Differ. Equ. 41 (2005).

[49] R. E. Showalter. *Monotone operators in Banach space and nonlinear partial differential equations.* , Mathematical Surveys and Monographs, no. 49, Amer. Math. Soc., Providence, RI 1997.

[50] S. L. Sobolev. *On a new problem of mathematical physics.* Selected word of S. L. Sobolev, Vol. I: Equations of mathematical physics, computational mathematics, and cubature formulas, Springer, New York (2006), 455-332.

[51] U. Stefanelli. *On a class of doubly nonlinear nonlocal evolution equations.* J. Differential Integral Equations 15 (2002), 897–922.

[52] G. A. Sviridyuk and V. E. Fedorov. *Analytic semigroups with kernel and linear equations of Sobolev type.* Sibirsk. Mat. Zh. 36 (1995), 1130–1145; English transl., Siberian Math. J. 36 (1995), 973–987.

[53] A. G. Sveshnikov, A. B. Al'shin, M. O. Korpusov, and Yu. D. Pletner. *Linear and non-linear equations of Sobolev type.* Fizmatlit, Moscow 2007.

[54] Triebel, Hans. *Theory of function spaces.* Monographs in Mathematics, 78. Birkhäuser Verlag, Basel, 1983. 284 pp.

[55] Al'shin, Alexander B; Korpusov, Maxim O.; Sveshnikov, Alexey G. *Blow-up in nonlinear Sobolev type equations.* De Gruyter Series in Nonlinear Analysis and Applications, 15. Walter de Gruyter & Co., Berlin, 2011.xii+648 pp.

[56] Pérez, Jhon J. *Asymptotics for the Sobolev type equations with pumping.* Differ. Equa. Appl. 12 (2020), no. 2, 105-127.

[57] Naumkin, Pavel I.; Pérez, Jhon J. *Modified KdV equation with higher order dispersion terms.* NoDEA Nonlinear Differential Equations Appl. 27 (2020), no. 1, Paper No. 1, 35 pp.

[58] Naumkin, Pavel I.; Pérez, Jhon J. *Higher-order derivative nonlinear Schrödinger equation in the critical case.* J. Math. Phys. 59 (2018), no. 2, 021506, 32 pp.