

UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN NICOLAS DE HIDALGO



TRABAJO DE TESINA

CÁLCULOS DE ESFUERZOS Y DEFORMACIONES EN ARMADURAS

QUE PARA OBTENER EL TITULO
INGENIERO CIVIL

PRESENTA

P.I.C. SERGIO CAMPOS DURÁN

ASESOR

Dr. JOSÉ DE JESUS ÁLVAREZ SERENO

Morelia, Mich. Mayo 2007

AGRADECIMIENTOS

A Dios

Por brindarme la oportunidad de poder realizarme como profesionalista y por brindarme sabiduría, esperanza y valor.

A Mis Padres

José Luis Campos Lucas y Maria. Elena Durán Díaz

Por toda su paciencia y apoyo que me brindaron en el transcurso de mi vida, tanto en momentos de dolor como en momentos de alegría por todo eso y más les agradezco.

A mis Hermanos Maria Elena, Maria Yunúen , Carolina y Andrea
Que los quiero y adoro con todo mi corazón.

A la U.M.S.N.H a la F.I.C y a sus Profesores
Por enseñarme sus experiencias y conocimientos.

Al M.I. Enrique Omar Navarro Caballero
Por su valiosa colaboración, revisión y orientación de esta tesina.

ÍNDICE

Introducción.....	1
Objetivo.....	3
CAPÍTULO I	
Método de nodos.....	6
CAPÍTULO II	
Método de secciones.....	17
CAPÍTULO III	
Método del trabajo virtual.....	65
CAPÍTULO IV	
Método de rigideces	81
Conclusiones.....	115
Bibliografía.....	100

INTRODUCCIÓN

Las armaduras es un conjunto miembro a base de elementos rectos conectados en sus extremos a base de conexiones flexibles para formar una configuración rígida, en virtud de su gran resistencia y de un peso relativamente ligero son muy usadas en una gran cantidad de áreas de la construcción que van desde puentes, naves industriales hasta estaciones espaciales.

Las armaduras en la actualidad se construyen con acero estructural pero también se pueden construir de diferentes tipos de material como pueden ser perfiles de aluminio o puntales de madera que se unen a escuadras de ensamble por medio de pernos o en su defecto pueden ir soldadas.

OBJETIVO:

Comprender el comportamiento de los elementos que conforman a una armadura.

Obtener la sensibilidad en el análisis de una armadura para elegir la mejor opción en cuanto a costo y seguridad.

DETERMINACIÓN, INDETERMINACIÓN E INESTABILIDAD ESTÁTICAS DE LAS ARMADURAS PLANAS

Se considera que una armadura es estáticamente indeterminada, si las fuerzas en todos los miembros, así como todas las reacciones externas, se pueden determinar usando las ecuaciones de equilibrio.

En los métodos de análisis como son los de nodos y secciones se pueden usar solo para analizar armaduras estáticamente determinadas, es importante llevar a cabo la determinación de las armaduras para así proceder con el análisis.

Si suponemos que la armadura completa esta en equilibrio, cada uno de sus nodos también lo estarán, en cada nodo las fuerzas internas y externas forman un sistema de fuerzas coplanares y concurrentes, las cuales deben satisfacer las siguientes ecuaciones de equilibrio:

$$\sum F_x = 0 \quad \text{y} \quad \sum F_y = 0$$

Se pueden desarrollar varios criterios para la determinación, indeterminación e inestabilidad estática de las armaduras planas generales que contengan m (miembros :barras) y j (nodos), y estén apoyadas en r (número de reacciones externas), con esto es necesario calcular un total de $m + r$ cantidades desconocidas, dado que se tiene j (nodos) y se pueden escribir dos ecuaciones de equilibrio ($\sum F_x = 0$, $\sum F_y = 0$) para cada nodo, por lo tanto el número total de ecuaciones de equilibrio de las que se dispone es de $2j$. Si el número de incógnitas ($m + r$) para una armadura es igual al número de ecuaciones de equilibrio ($2j$), por lo que se podría decir que $m + r = 2j$, con esta expresión se pueden determinar todas las incógnitas es decir que es una armadura estáticamente determinada.

Las condiciones de inestabilidad, determinación e indeterminación estática de armaduras planas se puede resumir de la siguiente forma

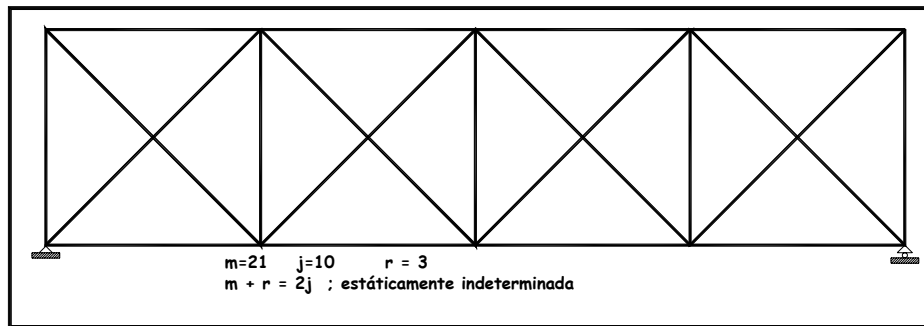
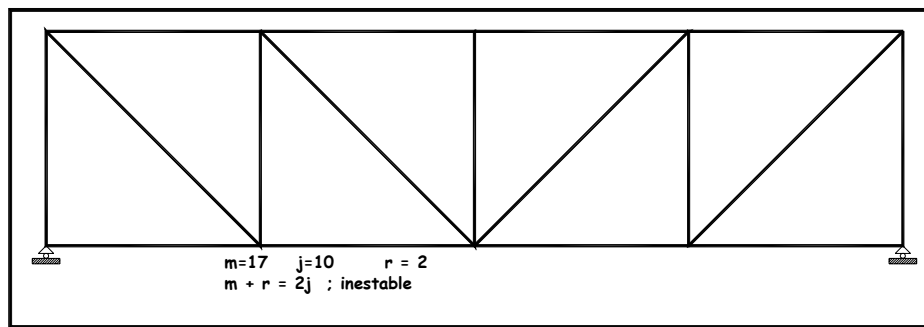
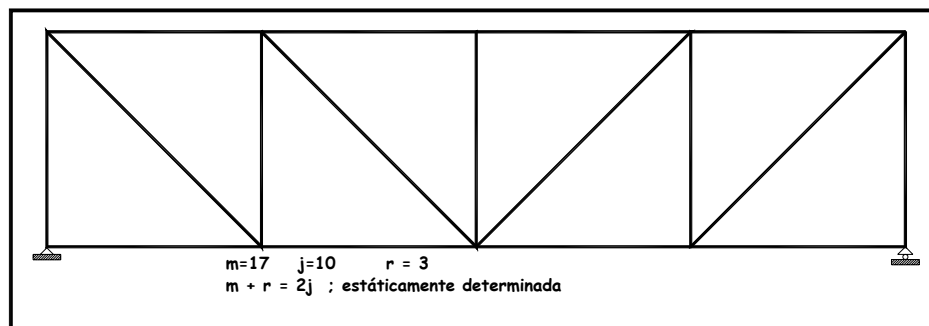
$$\begin{aligned} m + r < 2j & \text{---- armadura estáticamente inestable} \\ m + r = 2j & \text{---- armadura estáticamente determinada} \\ m + r > 2j & \text{---- armadura estáticamente indeterminada} \end{aligned}$$

La primera condición, para la estabilidad estática de las armaduras, es tanto necesaria como suficiente en el sentido de que si $m < 2j - r$, se tiene la certidumbre de que la armadura es estáticamente inestable. En tanto las otras dos condiciones restantes para la determinación estática ($m = 2j - r$) y la indeterminación ($m > 2j - r$) son condiciones necesarias pero no suficientes, es decir estas ecuaciones sencillamente expresan que el número de miembros y de reacciones son suficientes para tener estabilidad, más sin embargo esta información no da referencia a la disposición de los elementos de la armadura en estudio.

Una armadura puede tener un número suficiente de miembros y de reacciones externas, pero esto no garantiza que la armadura sea estable esto debido a una disposición inapropiada de los miembros, de los apoyos externos o de ambas.

Las armaduras internamente estables deben estar apoyadas al menos por tres reacciones, las cuales no todas deben ser paralelas ni concurrentes. Si una armadura es internamente estable, entonces debe de estar apoyada por reacciones iguales en número a por lo menos tres más el número de ecuaciones de condición ($3 + e_c$), y no todas las reacciones deben ser paralelas ni concurrentes además, en cada nodo o miembro y parte de la armadura, sea por el resto de esta o por los apoyos externos.

Si una armadura contiene un número suficiente de miembros, pero no están dispuestos de manera apropiada, se dice que tiene **forma crítica**. Para algunas armaduras puede no resultar obvio a partir de los dibujos si sus miembros están o no dispuestos de manera apropiada. Sin embargo, si la disposición de los miembros no es apropiada, resulta evidente durante el análisis de la armadura, el análisis de una armadura inestable siempre conducirá a resultados incoherentes, indeterminados o infinitos.



DISPOSICIÓN DE MIEMBROS DE ARMADURAS PLANAS: ESTABILIDAD INTERNA

Se puede definir a una armadura plana internamente estable si el número y disposición geométrica de sus miembros es tal que la propia armadura no cambia su forma y sigue siendo un cuerpo rígido cuando se separa de sus apoyos para este caso se usa el termino estabilidad interna.

La estabilidad interna expresa el requisito del número mínimo de miembros que una armadura plana de j nodos debe contener de lo cual se desprenden las siguientes condiciones:

$M < 2j - 3$ la armadura es internamente inestable

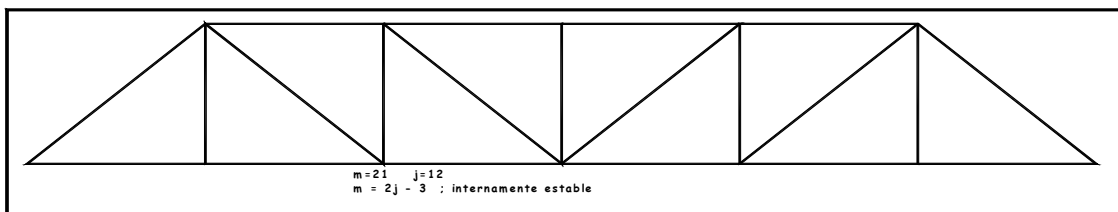
$M > 2j - 3$ la armadura es internamente estable

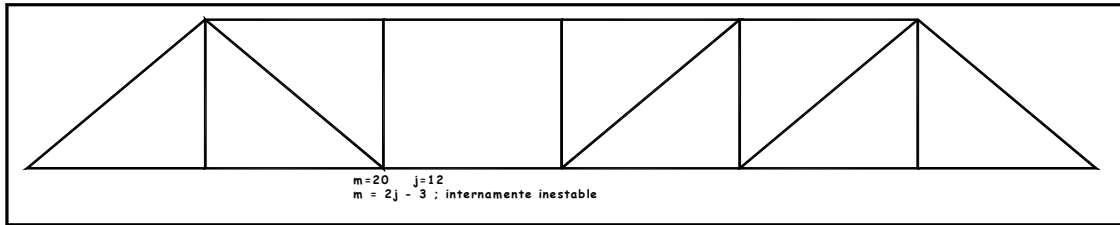
Es importante tomar en cuenta que aun tomando el criterio para la estabilidad interna, para garantizar la estabilidad.

Una armadura no solo debe contener los suficientes miembros para satisfacer la estabilidad, sino que también deben estar dispuestos de manera apropiada para garantizar la rigidez de la armadura en todo su conjunto.

Hay que tomar en cuenta que para garantizar la estabilidad de una armadura:

- Cada nodo esta conectado al resto de la estructura por al menos dos miembros no paralelos
- Cada parte de la armadura debe estar conectada al resto de la misma por conexiones capaces de transmitir al menos tres componentes de fuerzas no paralelas y no concurrentes.





➤ HIPÓTESIS PARA LA SOLUCIÓN DE LAS ARMADURAS PLANAS

1. Las conexiones son pasadores sin fricción
2. Las barras son rectas
3. Las deformaciones que sufre la armadura son pequeñas (poner atención a las armaduras demasiado largas y flexibles)
4. Las cargas y las reacciones se aplican solo en los nudos

*MÉTODO
DE
NODOS*

Este método determina las fuerzas axiales de los miembros de una armadura estoicamente determinada al considerar al equilibrio de los nodos.

Considerando el equilibrio general de la armadura se considera que cada uno de sus nodos esta en equilibrio, las fuerzas en los miembros y cualquier carga así como reacciones aplicadas forman un sistema de fuerzas concurrentes y coplanares las cuales satisfacen las siguientes ecuaciones de equilibrio

$$\sum F_x = 0 \quad \text{y} \quad \sum F_y = 0$$

Dichas ecuaciones deben satisfacer el equilibrio en cada uno de sus nodos de la armadura, de tal forma que al tener dos ecuaciones de equilibrio en cada nodo, este método no permite determinar más de dos fuerzas desconocidas.

Este método consiste en seleccionar un nodo con no más de dos fuerzas desconocidas (las cuales no deben ser colineales) que actúen sobre el y aplicar las dos ecuaciones de equilibrio con la finalidad de determinar dichas fuerzas desconocidas, este procedimiento se repite hasta abarcar todos y cada uno de los nodos.

Hay ocasiones en que las armaduras puede que halla nodos con dos o menos incógnitas, para comenzar el análisis, a menos que se tenga conocimiento de las reacciones, estas se pueden obtener al aplicar las ecuaciones de equilibrio a la armadura en todo su conjunto aplicando las siguientes ecuaciones:

$$\sum F_x = 0 \quad , \quad \sum F_y = 0 \quad \text{y} \quad \sum M_z = 0$$

IDENTIFICACIÓN DE LOS ELEMENTOS DE FUERZA CERO

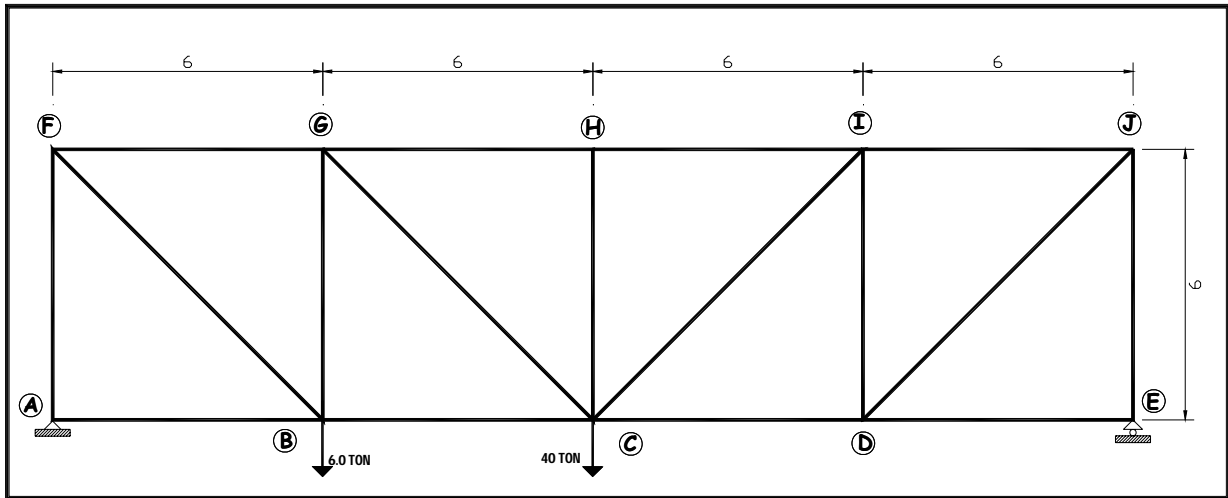
En de que las armaduras se diseñan para soportar varias condiciones (es decir diferentes cargas) no es extraño encontrar miembros con fuerzas de valor cero en ellas.

Cuando se analiza una armadura para una condición particular de carga, los miembros de fuerza cero también, estos elemento e añaden para arristrar los miembros a compresión y los miembros esbeltos a tensión contra la vibración.

Dicho análisis se pude simplificar si se logran identificar los elementos cuya fuerza es de valor igual a cero, esto se puede lograr con una inspección y tomando en cuenta lo siguiente:

- Si solo se conectan dos miembros no colineales a un nodo que no tiene cargas o reacciones externas aplicadas a el, por lo tanto las fuerzas en los dos miembros es de valor cero

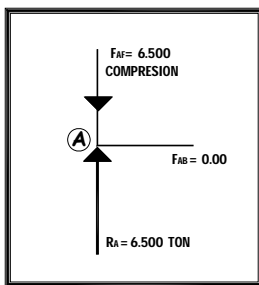
- Si se conectan tres miembros, dos de los cuales son colineales, a un nodo que no tiene cargas o reacciones externas a el, entonces las fuerzas en el miembro que no es colineal tiene valor de cero



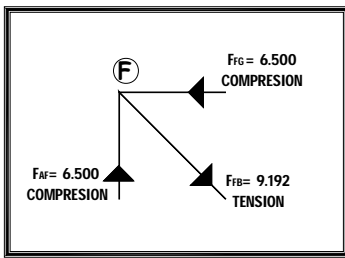
CALCULO DE LAS REACCIONES

- $\sum M_A = 0 \quad \curvearrowright +$
 $6.0(6) + 4.0(12) - R_B(24) = 0$
 $R_B = 3.5 \text{ ton}$
- $\sum F_V = 0 \quad \rightarrow +$
 $R_A = 6.0 + 4.0 - 3.5$
 $R_A = 6.5 \text{ ton}$

NODO A



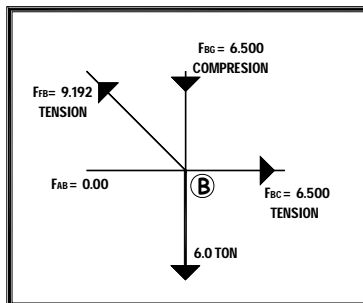
NODO F



- $\sum F_V = 0 \quad \uparrow +$
 $6.5 - F_{FB} (\text{SEN } 45^\circ) = 0$
 $F_{FB} = 9.192 \text{ ton}$

- $\sum F_H = 0 \quad \rightarrow +$
 $9.192 (\text{SEN } 45^\circ) - F_{FG} = 0$
 $F_{FG} = 6.5 \text{ ton}$

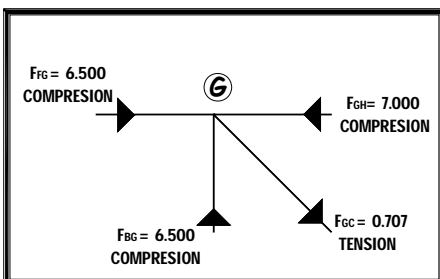
NODO B



- $\sum F_V = 0 \quad \uparrow +$
 $-6.0 + 9.192 (\text{SEN } 45^\circ) - F_{BG} = 0$
 $F_{BG} = -6.0 + 6.5$
 $F_{BG} = 0.5 \text{ ton}$

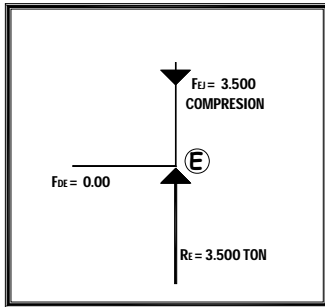
- $\sum F_H = 0 \quad \rightarrow +$
 $0 - 9.192 (\text{COS } 45^\circ) + F_{BC} = 0$
 $F_{BC} = 9.192 (\text{COS } 45^\circ)$
 $F_{BC} = 6.5 \text{ ton}$

NODO G

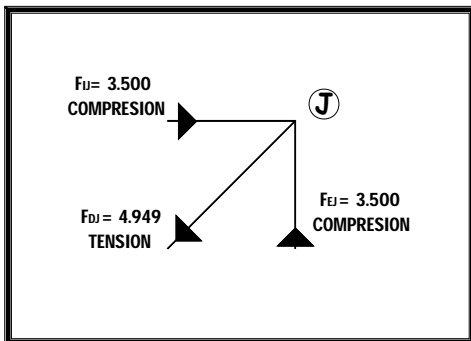


- $\sum F_V = 0 \quad \uparrow +$
 $0.5 - F_{GC} (\cos 45^\circ) = 0$
 $F_{GC} = \frac{0.5}{(\cos 45^\circ)}$
 $F_{GC} = 0.707 \text{ ton}$
- $\sum F_H = 0 \quad \rightarrow +$
 $6.5 + 0.707 (\text{SEN } 45^\circ) - F_{GH} = 0$
 $F_{GH} = -6.5 - 0.5 \text{ KN}$
 $F_{GH} = 7.0 \text{ ton}$

NODO E

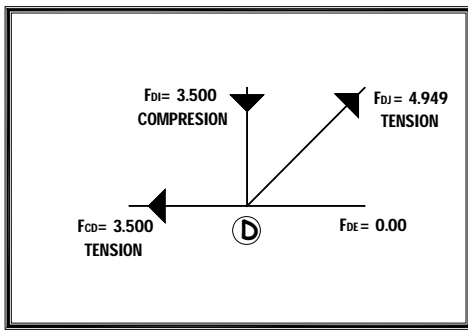


NODO J



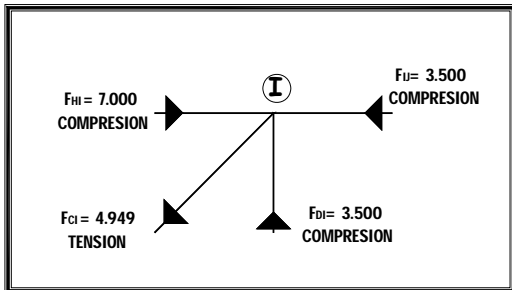
- $\sum F_V = 0 \quad \uparrow +$
 $3.5 - F_{DJ} (\cos 45^\circ) = 0$
 $F_{DJ} = \frac{3.5}{(\cos 45^\circ)}$
 $F_{DJ} = 4.949 \text{ ton}$
- $\sum F_H = 0 \quad \rightarrow +$
 $F_{IJ} - 4.949 (\text{SEN } 45^\circ) = 0$
 $F_{IJ} = 4.949 (\text{SEN } 45^\circ)$
 $F_{IJ} = 3.5 \text{ ton}$

NODO D



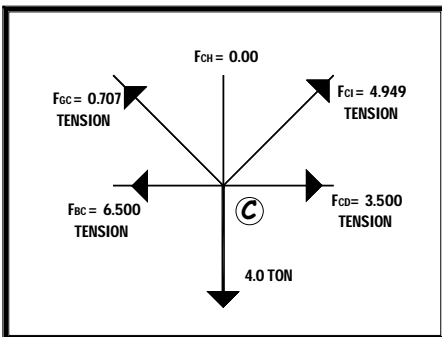
- $\sum F_V = 0 \uparrow +$
 $4.949 (\text{SEN } 45^\circ) - F_{DI} = 0$
 $F_{DI} = 4.949 (\text{SEN } 45^\circ)$
 $F_{DI} = 3.5 \text{ ton}$
- $\sum F_H = 0 \rightarrow +$
 $0 + 4.949 (\text{COS } 45^\circ) - F_{DC} = 0$
 $F_{DC} = 4.949 (\text{COS } 45^\circ)$
 $F_{DC} = 3.5 \text{ ton}$

NODO I



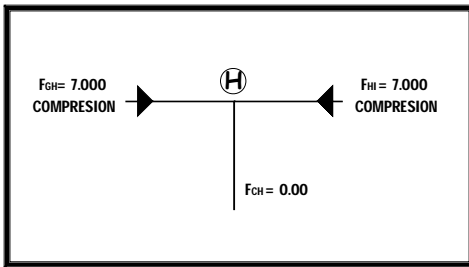
- $\sum F_V = 0 \uparrow +$
 $3.5 - F_{CI} (\text{COS } 45^\circ) = 0$
 $F_{CI} = \frac{3.5}{(\text{COS } 45^\circ)}$
 $F_{FB} = 4.949 \text{ ton}$
- $\sum F_H = 0 \rightarrow +$
 $-3.5 - 4.949 (\text{SEN } 45^\circ) - F_{HI} = 0$
 $F_{HI} = 3.5 + 4.949 (\text{SEN } 45^\circ)$
 $F_{HI} = 7.0 \text{ ton}$

NODO C



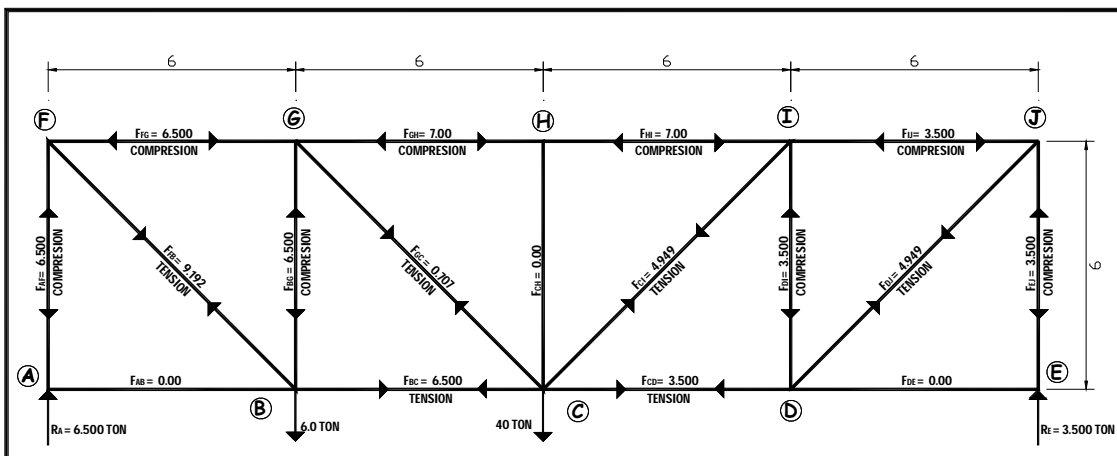
- $\sum F_V = 0 \uparrow +$
 $-4.0 + 0.707 (\text{COS } 45^\circ) + 4.949 (\text{COS } 45^\circ) + F_{CH} = 0$
 $F_{CH} = 4.0 - 0.707 (\text{COS } 45^\circ) - 4.949 (\text{COS } 45^\circ)$
 $F_{CH} = 4.0 - 0.5 - 3.5$
 $F_{CH} = 0$
- $\sum F_H = 0 \rightarrow +$
 $-6.5 - 0.707 (\text{SEN } 45^\circ) + 3.5 + 4.949 (\text{SEN } 45^\circ) = 0$
 $-6.5 - 0.5 + 3.5 + 3.5 = 0$
 $0 = 0$

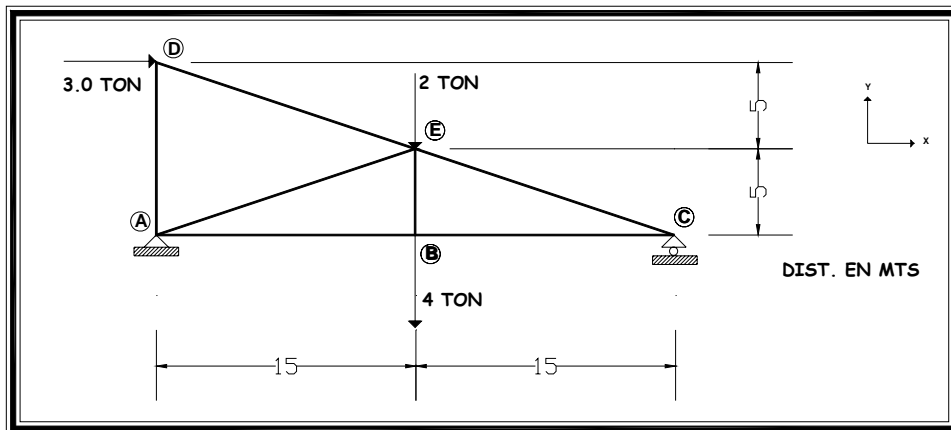
NODO H



- $\sum F_V = 0 \uparrow +$
 $0 = 0$
- $\sum F_H = 0 \rightarrow +$
 $70 - 70 = 0$
 $0 = 0$

RESUMEN DE LAS CARGAS





CALCULO DE LAS REACCIONES

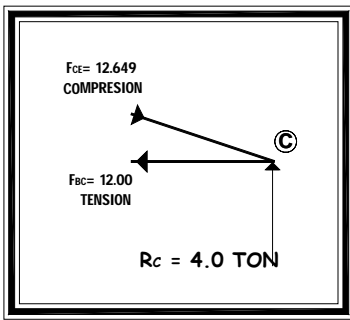
- $\sum M_A = 0 \quad \curvearrowright +$
 $3.0(10) + 2.0(15) + 4.0(15) - R_C(30) = 0$
 $R_C = \frac{3.0(10) + 2.0(15) + 4.0(15)}{30}$
 $R_C = 4.0 \text{ ton}$

- $\sum M_C = 0 \quad \curvearrowright +$
 $R_A(30) + 3.0(10) - 2.0(15) - 4.0(15) = 0$
 $R_A = \frac{-3.0(10) + 2.0(15) + 4.0(15)}{30}$
 $R_A = 2.0 \text{ ton}$

- $\sum F_x = 0 \quad \rightarrow +$
 $3.0 - R_{AX} = 0$
 $R_{AX} = 3.0 \text{ ton}$

- $\sum F_y = 0 \quad \uparrow +$
 $2.0 + 4.0 - 2.0 - 4.0 = 0$
 $0 = 0$

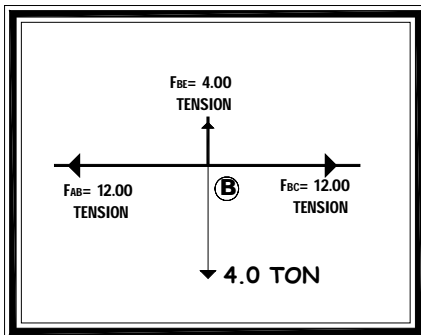
NODO C



- $\sum F_V = 0 \quad \uparrow +$
 $4.0 - F_{CE} (\text{SEN } 18.43^\circ) = 0$
 $F_{CE} = \frac{4.0}{(\text{SEN } 18.43^\circ)}$
 $F_{CE} = 12.649 \text{ ton}$

- $\sum F_H = 0 \quad \rightarrow +$
 $12.649 (\text{COS } 18.43^\circ) - F_{BC} = 0$
 $F_{BC} = 12.649 (\text{COS } 18.43^\circ)$
 $F_{BC} = 12.0 \text{ ton}$

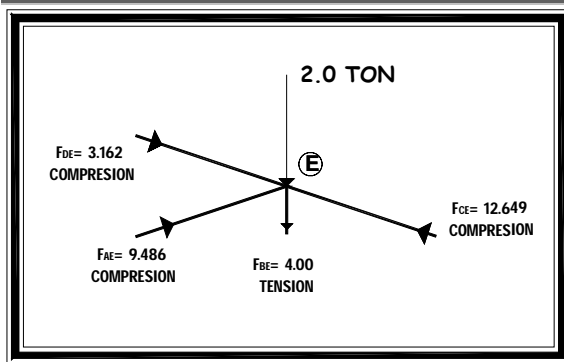
NODO B



- $\sum F_V = 0 \quad \uparrow +$
 $F_{BE} - 4.0 = 0$
 $F_{BE} = 4.0 \text{ ton}$

- $\sum F_H = 0 \quad \rightarrow +$
 $12.0 - F_{AB} = 0$
 $F_{AB} = 12.0 \text{ ton}$

NODO E



- $\sum F_V = 0 \quad \uparrow +$
 $F_{DE} (\cos 71.56^\circ) - F_{EA} (\cos 71.56^\circ) - 2.0 - 4.0 + 12.649 (\cos 71.56^\circ) = 0$
 $F_{DE} = -\frac{F_{EA} (\cos 71.56^\circ)}{(\cos 71.56^\circ)} + \frac{2.0 + 4.0 - 12.649 (\cos 71.56^\circ)}{(\cos 71.56^\circ)}$
 $F_{DE} = -F_{EA} + 0.6324 \quad \dots\dots 1$

- $\sum F_H = 0 \quad \rightarrow +$
 $-F_{DE} (\sin 71.56^\circ) + F_{EA} (\sin 71.56^\circ) - 12.649 (\sin 71.56^\circ) = 0$
 $F_{DC} = \frac{F_{EA} (\sin 71.56^\circ) - 12.649 (\sin 71.56^\circ)}{(\sin 71.56^\circ)}$
 $F_{DE} = F_{EA} - 12.649 \quad \dots\dots 2$

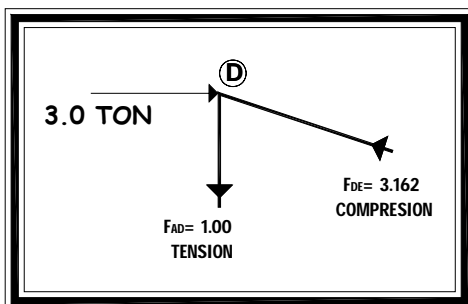
SUETITUYENDO LA EXPRESION 1 EN 2

$$F_{EA} - 12.649 = -F_{EA} + 6.324$$

$$2 F_{EA} = 6.324 + 12.649$$

$$\therefore F_{EA} = 9.4865 \text{ ton} \quad ; \quad F_{DE} = 3.162 \text{ ton}$$

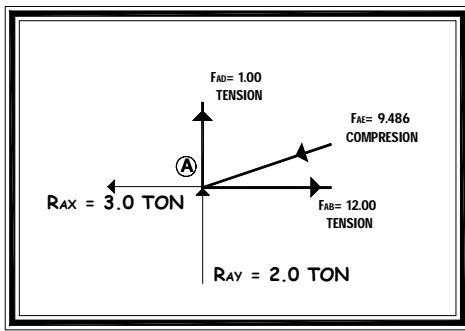
NODO D



- $\sum F_V = 0 \quad \uparrow +$
 $3.162 (\cos 71.52^\circ) - F_{DA} = 0$
 $F_{DA} = 3.162 (\cos 71.52^\circ)$
 $F_{DA} = 1.0 \text{ ton}$

- $\sum F_H = 0 \quad \rightarrow +$
 $3.0 + 3.162 (\sin 71.52^\circ) - F_{DC} = 0$
 $3.0 - 3.0 = 0$
 $0 = 0$

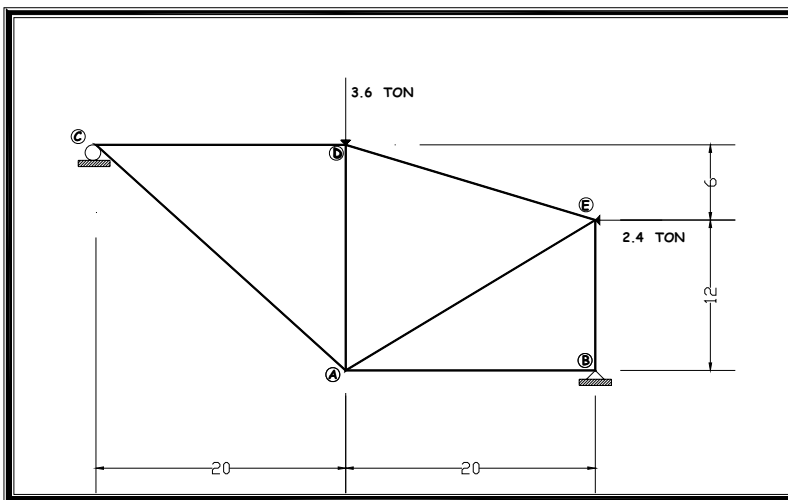
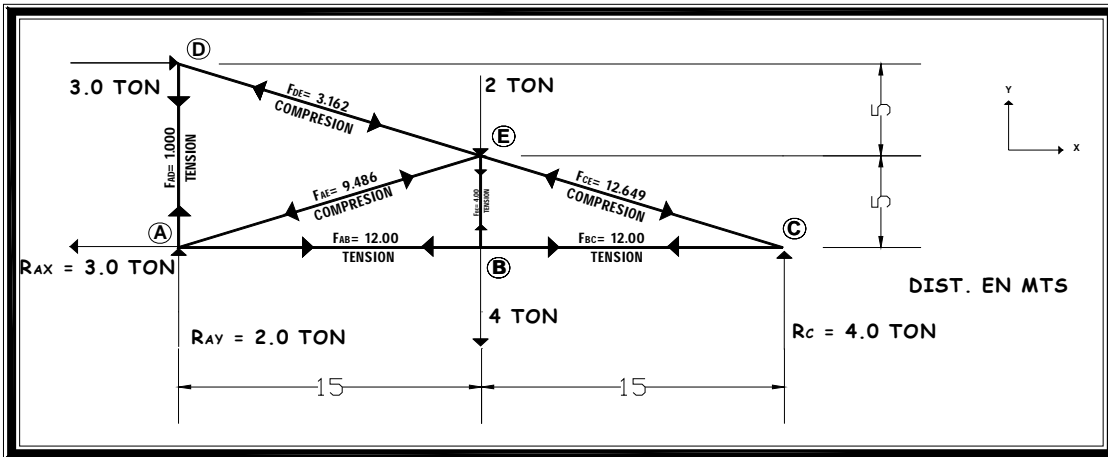
NODO A



- $\sum F_v = 0 \uparrow +$
 $1.0 + 2.0 - 7.486 (\cos 71.54^\circ) = 0$
 $1.0 + 2.0 - 3.0 = 0$
 $0 = 0$

- $\sum F_H = 0 \rightarrow +$
 $- 3.0 + 9.486 (\sin 71.54^\circ) + 12.0 = 0$
 $- 3.0 - 9.0 + 12.0 = 0$
 $0 = 0$

RESUMEN DE LAS CARGAS

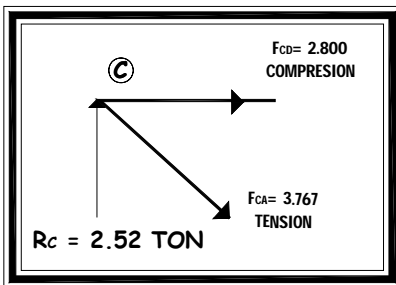


CALCULO DE LAS REACCIONES

- $\sum M_C = 0 \quad \curvearrowright +$
 $3.6(20) + 2.4(6) - R_{BY}(40) - R_{BX}(18) = 0$
 $R_{BY} = \frac{3.6(20) + 2.4(6)}{40} - \frac{R_{BX}(18)}{40}$
- $\sum F_H = 0 \quad \rightarrow +$
 $R_{BX} - 2.4 = 0$
 $R_{BX} = 2.4 \text{ ton}$

- $\sum M_B = 0 \quad \curvearrowright +$
 $R_C(40) - 3.6(20) - 2.4(12) = 0$
 $R_C = \frac{3.6(20) + 2.4(12)}{40}$
 $R_C = 2.52 \text{ ton}$
- $\sum F_Y = 0 \quad \uparrow +$
 $2.52 - 3.6 + R_{BY} = 0$
 $R_{BY} = -2.52 + 3.6$
 $R_{BY} = 1.080 \text{ ton}$

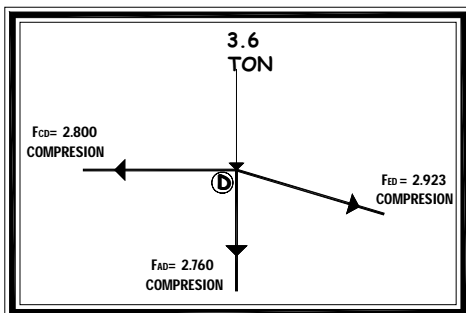
NODO C



- $\sum F_V = 0 \quad \uparrow +$
 $2.52 - F_{CA}(\text{SEN } 41.98^\circ) = 0$
 $F_{CA} = \frac{2.52}{(\text{SEN } 41.98^\circ)}$
 $F_{CA} = 3.767 \text{ ton}$

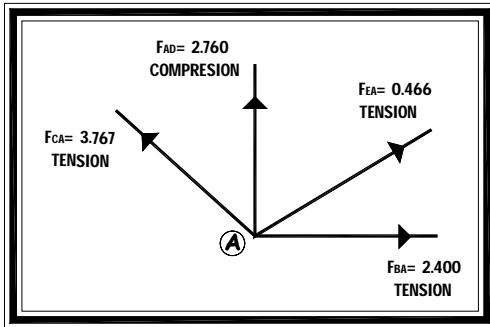
- $\sum F_H = 0 \quad \rightarrow +$
 $3.767(\text{COS } 41.98^\circ) - F_{CD} = 0$
 $F_{CD} = 3.767(\text{COS } 41.98^\circ)$
 $F_{CD} = 2.8 \text{ ton}$

NODO D



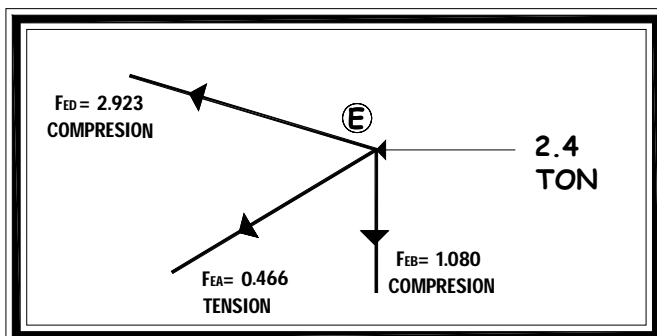
- $\sum F_V = 0 \quad \uparrow +$
 $-3.6 + F_{DA} + 2.923 (\text{SEN } 16.70^\circ) = 0$
 $F_{DA} = 3.6 - 2.923 (\text{SEN } 16.70^\circ)$
 $F_{BE} = 2.760 \text{ ton}$
- $\sum F_H = 0 \quad \rightarrow +$
 $2.8 - F_{DE} (\text{COS } 16.70^\circ) = 0$
 $F_{BE} = \frac{2.8}{(\text{COS } 16.70^\circ)}$
 $F_{BE} = 2.923 \text{ ton}$

NODO A



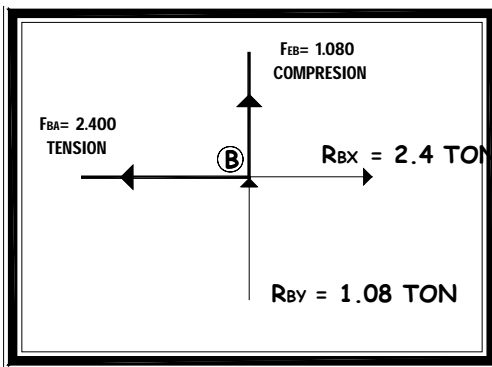
- $\sum F_V = 0 \quad \uparrow +$
 $-2.960 + 3.767 (\text{COS } 41.98^\circ) - F_{AE} (\text{SEN } 30.96^\circ) = 0$
 $F_{AE} = \frac{-2.960 + 3.767 (\text{COS } 41.98^\circ)}{(\text{SEN } 30.96^\circ)}$
 $F_{AE} = 0.466 \text{ ton}$
- $\sum F_H = 0 \quad \rightarrow +$
 $-3.767 (\text{COS } 41.98^\circ) + 0.466 (\text{COS } 30.96^\circ) + F_{AB} = 0$
 $F_{AB} = 3.767 (\text{COS } 41.98^\circ) - 0.466 (\text{COS } 30.96^\circ)$
 $F_{AB} = 2.4 \text{ ton}$

NODO E



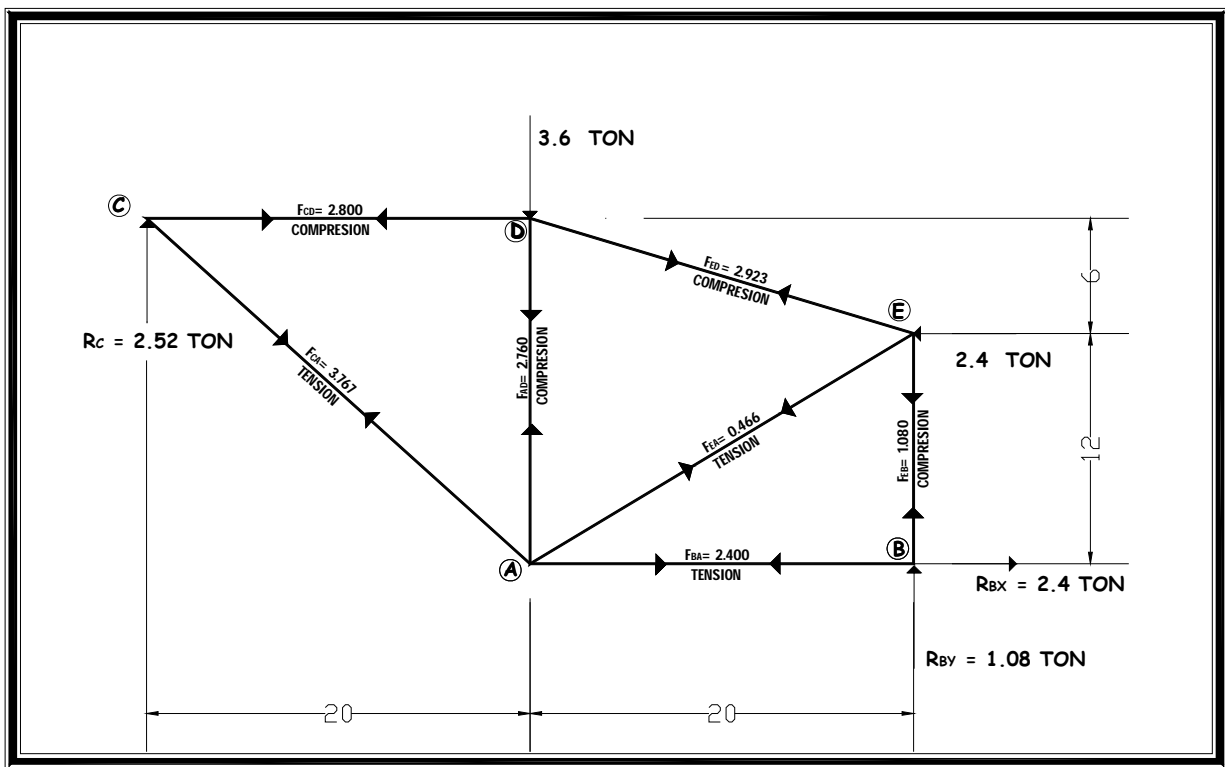
- $\Sigma F_V = 0 \quad \uparrow +$
 $-2.923 (\text{SEN } 16.69^\circ) - 0.466 (\text{COS } 59.03^\circ) - F_{EB} = 0$
 $F_{EB} = 2.923 (\text{SEN } 16.69^\circ) + 0.466 (\text{COS } 59.03^\circ)$
 $F_{EB} = 1.080 \text{ ton}$
- $\Sigma F_H = 0 \quad \rightarrow +$
 $2.923 (\text{COS } 16.69^\circ) - 0.466 (\text{SEN } 59.03^\circ) - 2.4 = 0$
 $2.799 - 0.399 - 2.4 = 0$
 $0 = 0$

NODO B



- $\Sigma F_V = 0 \quad \uparrow +$
 $-1.080 + 1.080 = 0$
 $0 = 0$
- $\Sigma F_H = 0 \quad \rightarrow +$
 $-2.4 + 2.4 = 0$
 $0 = 0$

RESUMEN DE LAS CARGAS



*METODO
DE
SECCIONES*

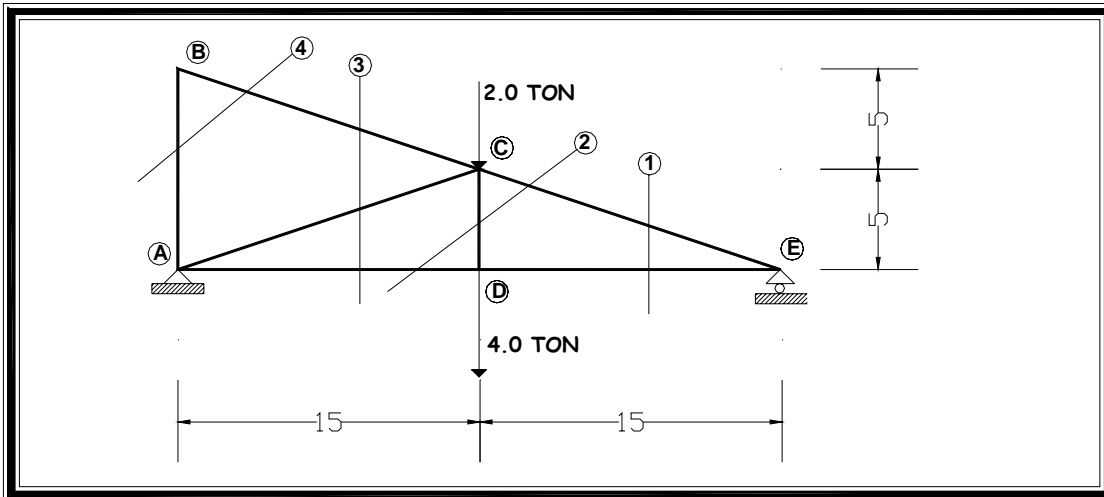
El método de las secciones nos permite determinar en forma directa las fuerzas en los miembros específicos, sin que se calculen en primer lugar muchas fuerzas innecesarias en los miembros, como puede requerirse en el método de los nodos.

El método de las secciones comprende el corte de la armadura en dos partes, al pasar una sección imaginaria a través de los miembros cuyas fuerzas se desean. Entonces se determinan las fuerzas deseadas en los miembros al considerar el equilibrio de una de las dos partes de la armadura. Cada parte de la armadura se trata como un cuerpo rígido en equilibrio, bajo la acción de cualquiera de las cargas o reacciones aplicadas y las fuerzas en los miembros que hayan sido cortados por la sección. Las fuerzas desconocidas en los miembros se determinan al aplicar las tres ecuaciones de equilibrio ($\sum F_x = 0$, $\sum F_y = 0$ y $\sum M_z = 0$) a una de las dos partes de la armadura.

Solo se tienen tres ecuaciones de equilibrio disponibles, de modo que no se pueden usar para determinar más de tres fuerzas desconocidas. Por consiguiente deben elegirse secciones de modo que no pasen por más de tres miembros con fuerzas desconocidas. En algunas armaduras, la disposición de los miembros puede ser tal que, al utilizar secciones que pasen por más de tres miembros con fuerzas desconocidas se puede determinar una o cuando dos de esas fuerzas desconocidas. No obstante esas secciones se emplean en el análisis de ciertos tipos de armaduras.

Este método es utilizado cuando el método de secciones no es posible utilizarlo ya que este permite el cálculo de dos fuerzas desconocidas por condiciones de ecuaciones de equilibrio y el de secciones permite tres.

RESUELVA LAS SIGUIENTES ARMADURAS. CALCULA LAS FUERZAS EN TODAS LAS BARRAS EMPLEANDO EL MÉTODO DE LAS SECCIONES.



$$\sum M_E = 0$$

$$30R_{AY} + 3.0(10) - 2.0(15) - 4.0(15) = 0$$

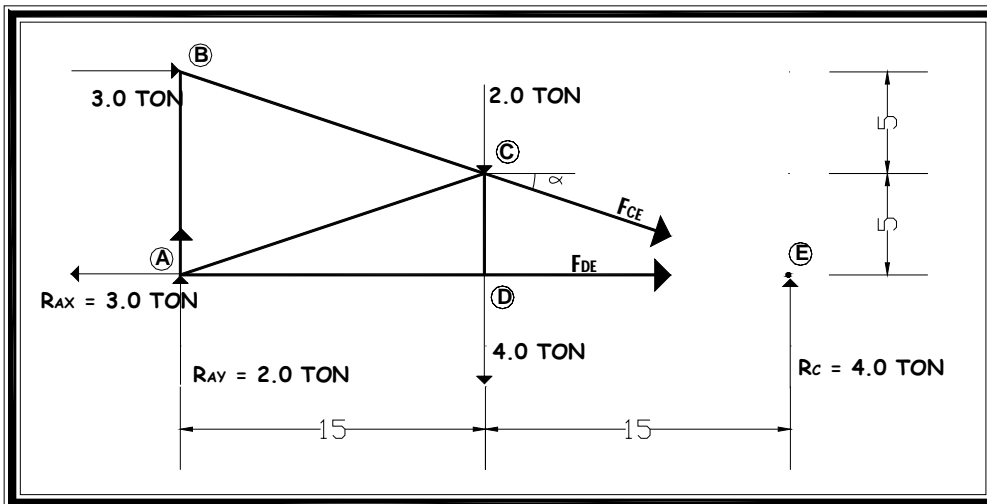
$$R_{AY} = 2.0 \text{ ton}$$

$$\sum M_A = 0$$

$$-30R_{EY} + 3.0(10) + 2.0(15) + 4.0(15) = 0$$

$$R_{EY} = 4.0 \text{ ton}$$

CORTE 1 IZQUIERDA



$$\alpha = 18.435^\circ$$

$$\sum M_C = 0$$

$$3.0(5) + 3.0(5) + 2.0(15) - F_{DE}(5) = 0$$

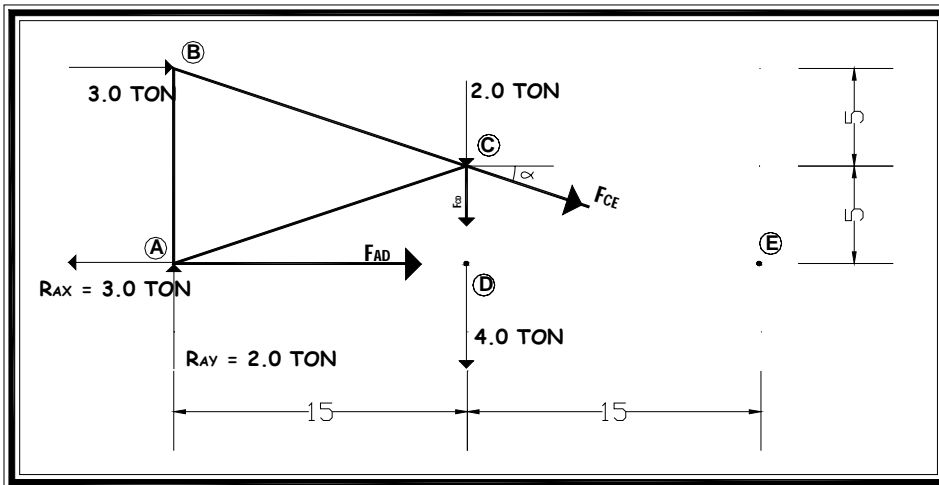
$$F_{DE} = 12.0 \text{ ton}$$

$$\sum M_D = 0$$

$$3.0(10) + 2.0(15) - F_{CE} (\cos 18.435)(5) = 0$$

$$F_{CE} = 12.6491 \text{ ton}$$

CORTE 2 IZQUIERDA



$$\sum M_E = 0$$

$$3.0(10) - 2.0(15) + 2.0(30) - F_{DE} (15) = 0$$

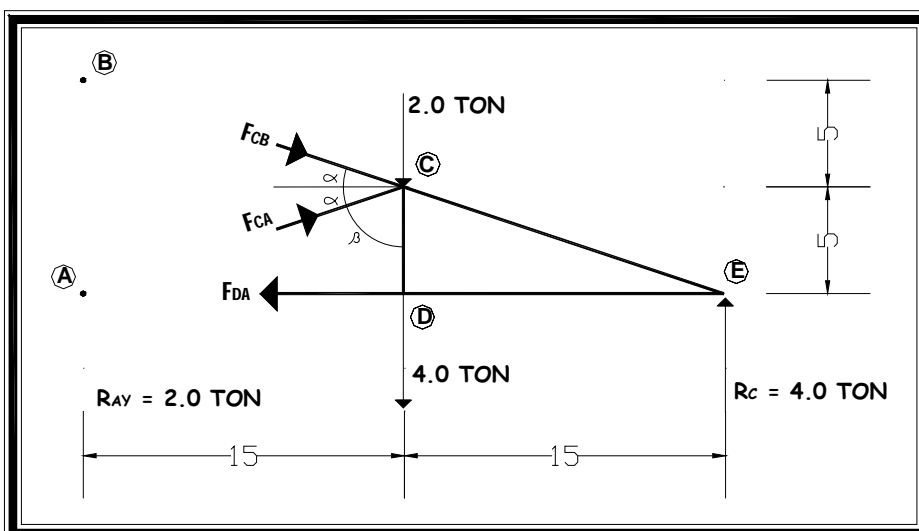
$$F_{DE} = 4.0 \text{ ton}$$

$$\sum M_B = 0$$

$$3.0(10) + 2.0(15) + 4.0(15) - F_{AD} (10) = 0$$

$$F_{AD} = 12.0 \text{ ton}$$

CORTE 3 DERECHA



$$\alpha = 18.435^\circ \quad \beta = 71.565^\circ$$

$$\sum M_C = 0$$

$$F_{DA}(5) - 4.0(15) = 0$$

$$F_{DA} = 12.0 \text{ ton}$$

$$\sum M_E = 0$$

$$-2.0(15) - 4.0(15) + F_{CA}(\text{SEN } 71.565)(5) + F_{CA}(\text{COS } 71.565)(15) = 0$$

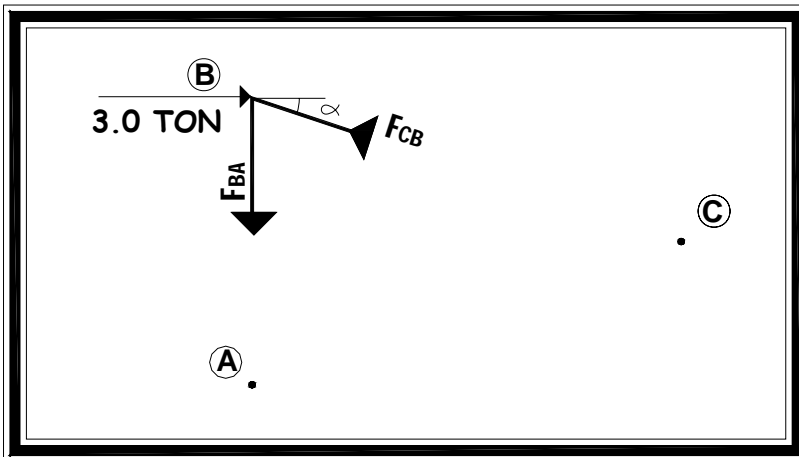
$$F_{CA} = 9.4868 \text{ ton}$$

$$\sum M_A = 0$$

$$4.0(15) - 2.0(15) - 4.0(30) + F_{CB}(\text{SEN } 71.565)(5) + F_{CA}(\text{COS } 71.565)(15) = 0$$

$$F_{CB} = 3.162 \text{ ton}$$

CORTE 4 IZQUIERDA



$$\sum M_C = 0$$

$$-F_{BA}(15) + 3.0(5) = 0$$

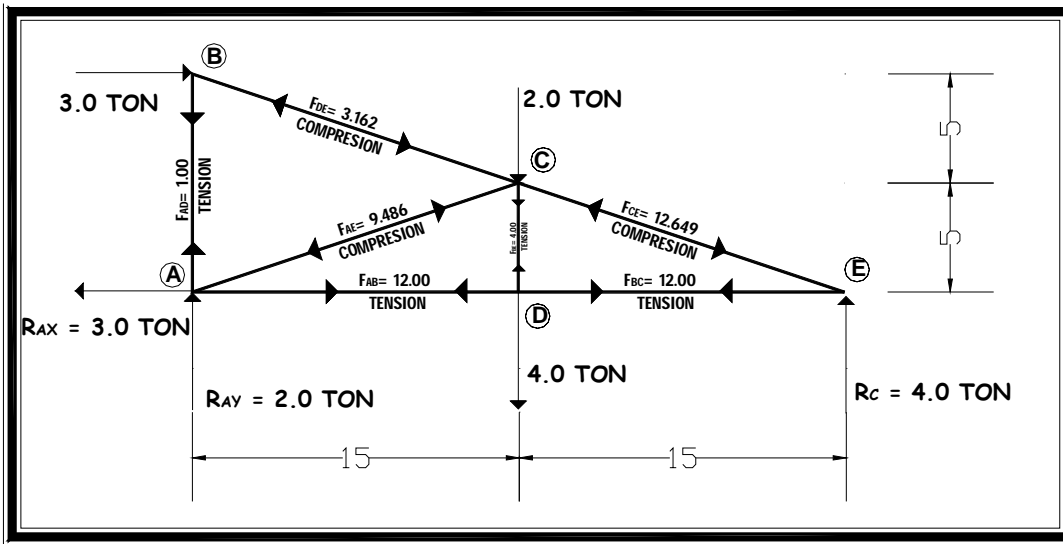
$$F_{BA} = 1.0 \text{ ton}$$

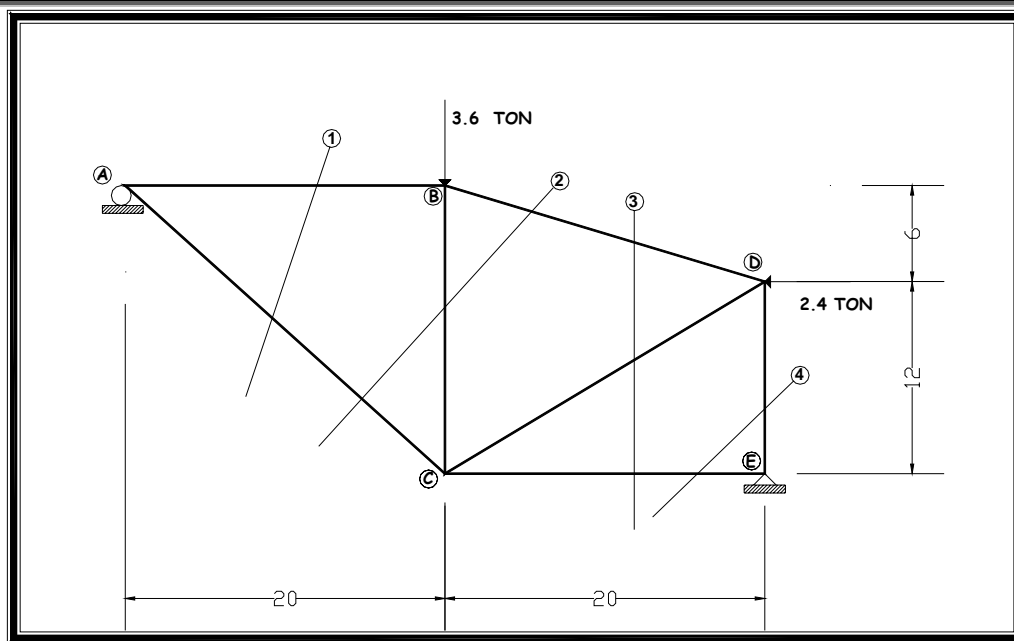
$$\sum M_A = 0$$

$$3.0(10) - F_{CB}(\text{COS } 18.435)(10) = 0$$

$$F_{CB} = 3.162 \text{ ton}$$

Resumen de las cargas





$$\sum M_E = 0$$

$$40R_{AY} - 3.6(20) - 2.4(12) = 0$$

$$R_{AY} = 2.52 \text{ ton}$$

$$\sum M_G = 0$$

$$-40R_{EY} + 3.6(20) - 2.4(12) = 0$$

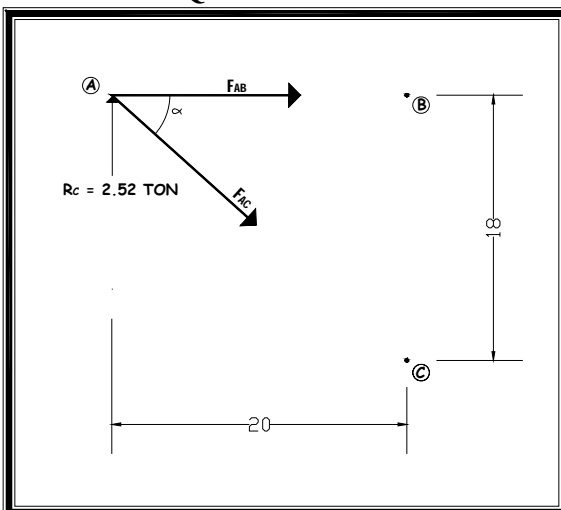
$$R_{EY} = 1.08 \text{ ton}$$

$$\sum F_x = 0$$

$$R_{EX} - 2.4 = 0$$

$$R_{EX} = 2.4 \text{ ton}$$

CORTE 1 IZQUIERDA



$$\alpha = 41.987^\circ$$

$$\sum M_C = 0$$

$$2.52(20) - F_{AB}(18) = 0$$

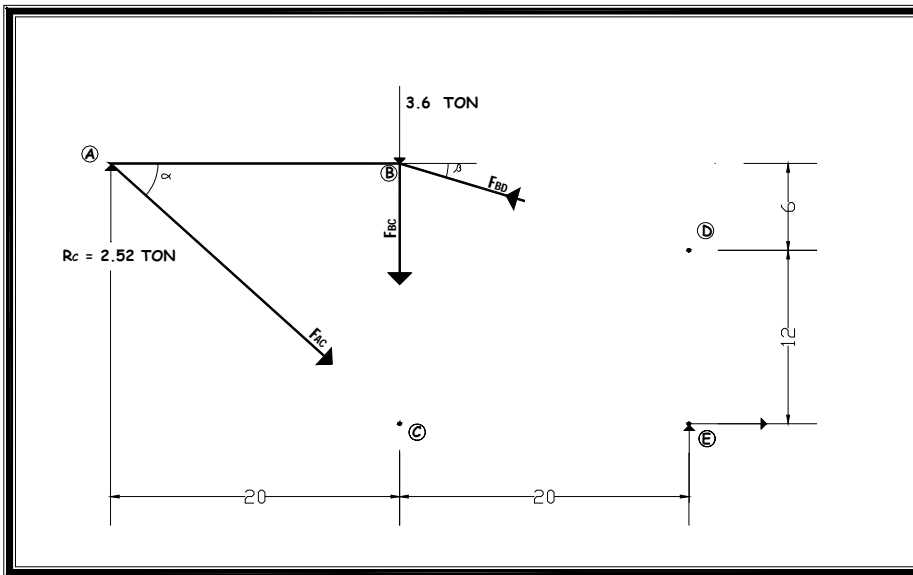
$$F_{DE} = 2.8 \text{ ton}$$

$$\sum M_B = 0$$

$$2.52(20) - F_{AC}(\text{SEN}41.987)(20) = 0$$

$$F_{AC} = 3.7671 \text{ ton}$$

CORTE 2 IZQUIERDA



$$\beta = 16.699^\circ$$

$$\sum M_C = 0$$

$$2.52(20) - F_{BD}(\text{COS}16.699)(18) = 0$$

$$F_{BD} = 2.9233 \text{ ton}$$

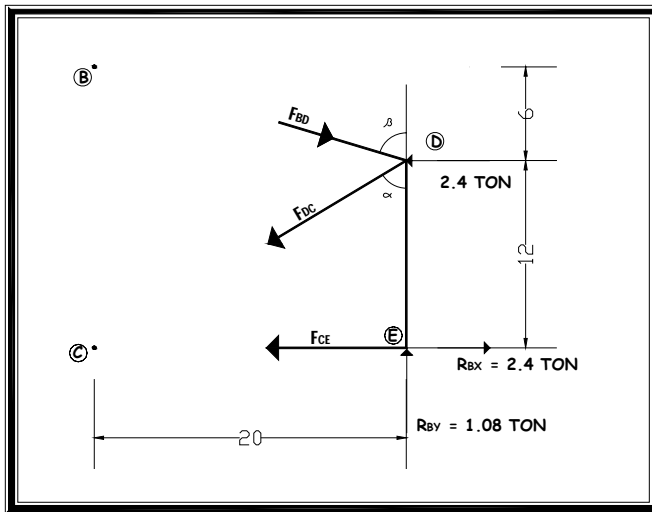
$$F_{AC} = 3.7671 \text{ ton}$$

$$\sum M_D = 0$$

$$2.52(40) + 3.7671(\text{COS}41.987)(6) - 3.7671(\text{SEN}41.987)(40) - 3.6(20) - F_{BC}(20) = 0$$

$$F_{BC} = 2.7601 \text{ ton}$$

CORTE 3 DERECHA



$$\alpha_1 = 59.036^\circ \quad \beta_1 = 73.301^\circ$$

$$\sum M_D = 0$$

$$F_{CE} (12) - 2.4(12) = 0$$

$$F_{CE} = 2.4 \text{ ton}$$

$$\sum M_B = 0$$

$$2.4 (6) + 2.4 (18) - 2.4 (18) - 1.08 (20) + F_{DC} (\text{COS}59.036)(20) + F_{DC} (\text{SEN}59.036)(6) = 0$$

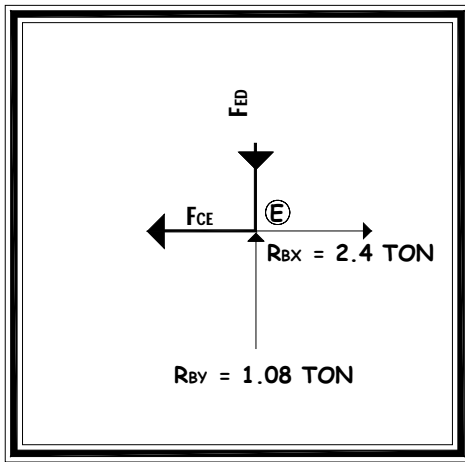
$$F_{DC} = 0.4665 \text{ ton}$$

$$\sum M_C = 0$$

$$-1.08 (20) - 2.4 (12) + F_{BD} (\text{SEN} 73.301)(12) + F_{BD} (\text{COS} 73.301)(20) = 0$$

$$F_{BD} = 2.9233 \text{ ton}$$

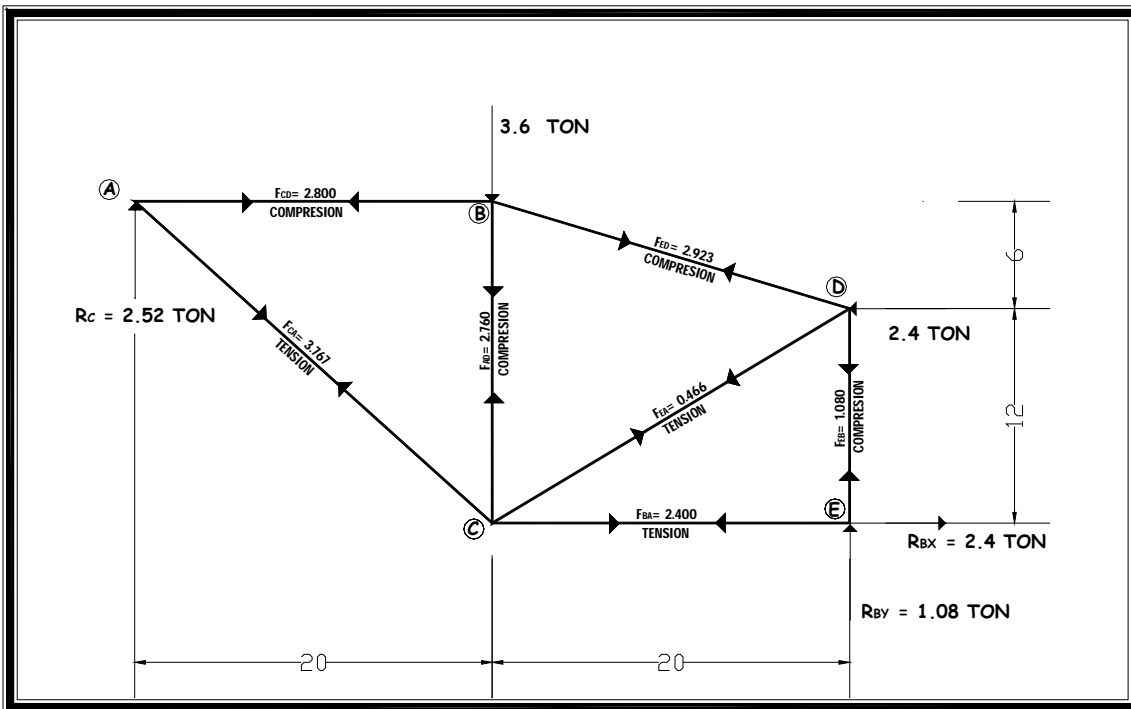
CORTE 4 DERECHA



POR ANALOGÍA TENEMOS QUE:

$$F_{EC} = R_{EX} = 2.4 \text{ ton}$$

$$F_{ED} = R_{EY} = 1.08 \text{ ton}$$



TRABAJO VIRTUAL

El método del trabajo virtual o método de la carga unitaria ficticia permite calcular deflexiones en armaduras vigas o marcos.

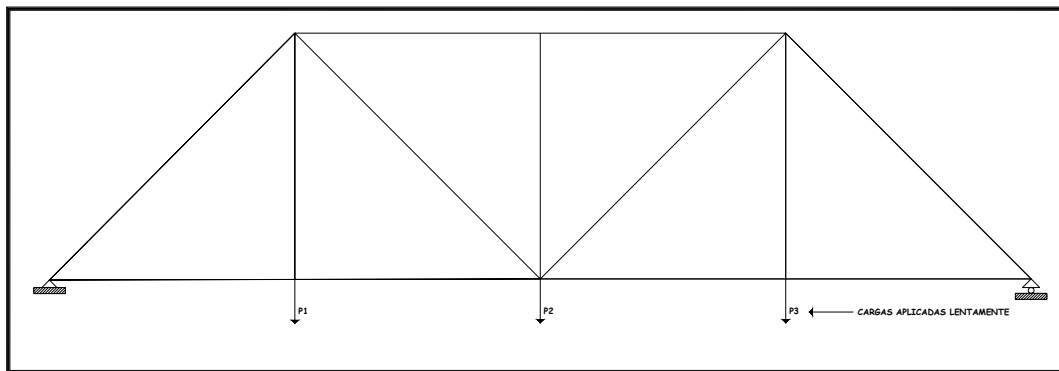
- Ley de conservación de energía

$$\left(\begin{array}{l} \text{trabajo hecho por un grupo de} \\ \text{de cargas externas} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{l} \text{energía elástica interna} \\ \text{almacenada en la estructura} \end{array} \right)$$

- Consideraciones:

- Las fuentes internas y externas están en equilibrio.
- El límite elástico del material no se excede.
- Los apoyos en principio, están en equilibrio.

Sea:



- Las cargas P_1 a P_3 producen fuerzas en las barras.
- Como consecuencia, cada barra se acorta o se alarga.
- Estas deformaciones internas causan deflexiones externas y cada una de las cargas se desplaza una pequeña distancia.

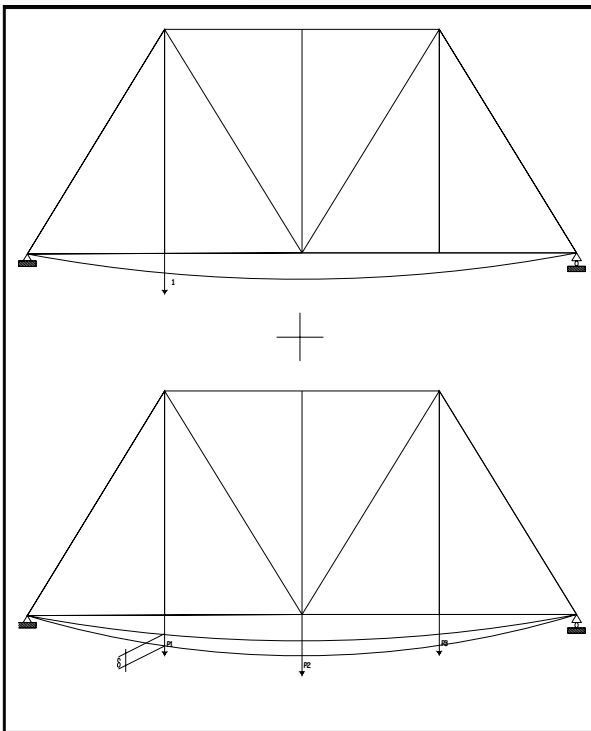
El principio de conservación de energía para la armadura

$$\left(\begin{array}{c} \text{Trabajo externo efectuado por} \\ \text{las cargas } P_1 \text{ a } P_3 \text{ al moverse éstas} \\ \text{atravez de sus respectivos} \\ \text{desplazamientos} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} \text{Trabajo interno efectuado} \\ \text{por las fuerzas en las barras al} \\ \text{desplazarse sobre sus respectivos} \\ \text{cambios de longitud} \end{array} \right)$$

La deformación en una de las barras de una armadura:

$$\Delta = \frac{FL}{EA}$$

Para calcular la deflexión de un nudo de la armadura:



$-\mu$ = fuerzas en las barras producidas por la carga unitaria (originan pequeñas deformaciones en las barras y deformaciones externas en la armadura).

Cuando las cargas externas regresan ala armadura, la fuerza en cada una de las barras cambia de acuerdo a la fuerza F y la deformación de cada barra cambia de acuerdo a FL / EA . La armadura se de flecha y la carga unitaria se traslada una distancia δ .

El trabajo externo que realiza la carga unitaria cuando las cargas externas regresan a la estructura es:

$$W_e = 1 \times \delta$$

Internamente, la fuerza μ en cada barra se desplaza una distancia $\Delta L = FL / EA$. El trabajo interno efectuado por todas las fuerzas μ al moverse esta distancia es:

$$W_i = \sum \frac{F\mu L}{EA}$$

Igualando los trabajos externo e interno se tiene:

$$\delta = \sum \frac{F\mu L}{EA}$$

De donde:

- F = Carga en la barra debida a las condiciones iniciales
(las fuerzas en las barras pueden calcularse por cualquier método como por ejemplo: nodos, secciones, etc)
- μ = Carga en la barra debida a la carga unitaria
- L = Longitud de la barra
- E = Modulo de elasticidad
- A = Área de la barra que se esta analizando
- δ = Deformación

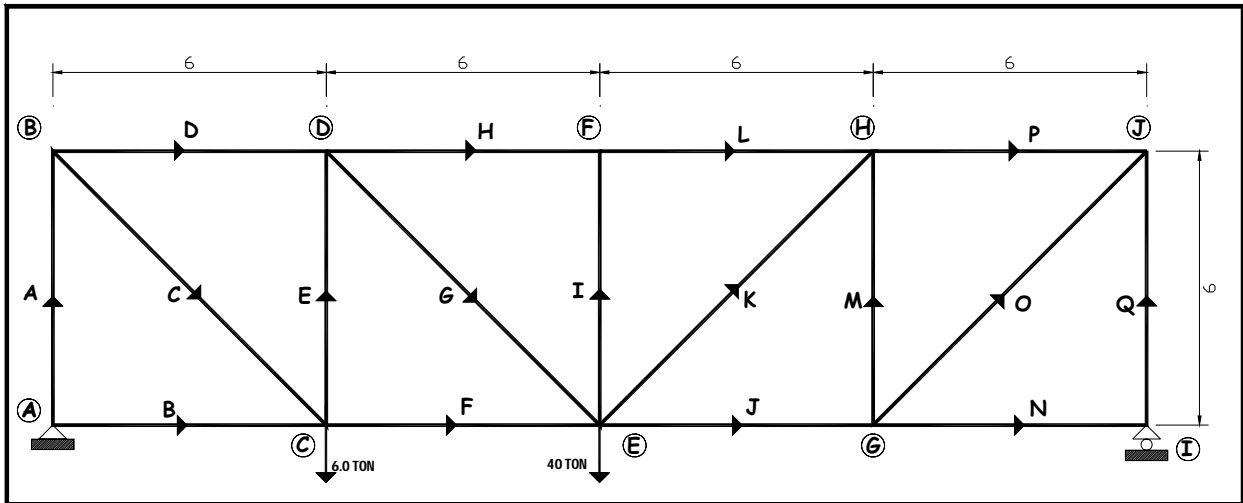
E = 2000000

nodo que se esta analizando

				NODO ¿?			
BARRA	L (Cm)	AREA (cm2)	Fig (kg)	Mv	F*Mv*L /E*A	M _H	F*M*L /E*A
A							
B							
					1		2
ETC							
					3		4

M_v --- valor de la fuerza debida a la carga ficticia en sentido vertical de cada barra
 M_H --- valor de la fuerza debida a la carga ficticia en sentido horizontal de cada barra

- 1 ---- este valor se obtiene al aplicar la formula de la deformación al multiplicarla por la carga debida a la fuerza vertical
- 2 ---- este valor se obtiene al aplicar la formula de la deformación al multiplicarla por la carga debida a la fuerza horizontal
- 3,4 – indican la sumatoria de las deformaciones producidas por las cargas iniciales y las deformaciones debidas a la carga unitaria



Para secciones a tensión

Para secciones a compresión

$$\text{Área requerida} = \frac{F}{0.6 f_y}$$

$$\text{Área requerida} = \frac{F}{0.5 f_y}$$

Áreas requeridas para las secciones transversales (dimensionamiento preliminar)

FY = 2530

					BARRA	SE PROPONEN
Área req.	5.13834	cm ²	=	6.2	cm ²	A 2 LI -- 51 X 3
Área req.	0.00000	cm ²	=	4.68	cm ²	B 2 LI --38 X 3
Área req.	6.05534	cm ²	=	6.2	cm ²	C 2 LI -- 51 X 3
Área req.	5.13834	cm ²	=	4.68	cm ²	D 2 LI --38 X 3
Área req.	0.39526	cm ²	=	4.68	cm ²	E 2 LI --38 X 3
Área req.	4.28195	cm ²	=	4.68	cm ²	F 2 LI --38 X 3
Área req.	0.46574	cm ²	=	4.68	cm ²	G 2 LI --38 X 3
Área req.	5.53360	cm ²	=	6.2	cm ²	H 2 LI -- 51 X 3
Área req.	0.00000	cm ²	=	4.68	cm ²	I 2 LI --38 X 3
Área req.	2.30567	cm ²	=	4.68	cm ²	J 2 LI --38 X 3
Área req.	3.26021	cm ²	=	4.68	cm ²	K 2 LI --38 X 3
Área req.	5.53360	cm ²	=	6.2	cm ²	L 2 LI -- 51 X 3
Área req.	2.76680	cm ²	=	4.68	cm ²	M 2 LI --38 X 3
Área req.	0.00000	cm ²	=	4.68	cm ²	N 2 LI --38 X 3
Área req.	3.26021	cm ²	=	4.68	cm ²	O 2 LI --38 X 3
Área req.	2.76680	cm ²	=	4.68	cm ²	P 2 LI --38 X 3
Área req.	2.76680	cm ²	=	4.68	cm ²	Q 2 LI --38 X 3

LAS SECCIONES SE OBTENDRAN DEL MANUAL DEL IMCA

Calculo de los desplazamientos

$E = 2000000$

BARRA	L (Cm)	AREA (cm2)	Fig (kg)	NODO B			
				Mv	F*M _v *L /E*A	M _H	F*M _H *L /E*A
A	600	6.2	-6500	1	-0.315	0.25	-0.079
B	600	4.68	0	0	0.000	1	0.000
C	848.528	6.2	9192	0	0.000	-0.3536	-0.222
D	600	4.68	-6500	0	0.000	-0.75	0.313
E	600	4.68	-500	0	0.000	0.25	-0.008
F	600	4.68	6500	0	0.000	0.75	0.313
G	848.528	4.68	707	0	0.000	-0.3536	-0.023
H	600	6.2	-7000	0	0.000	-0.5	0.169
I	600	4.68	0	0	0.000	0	0.000
J	600	4.68	3500	0	0.000	0.25	0.056
K	848.528	4.68	4949	0	0.000	0.3536	0.159
L	600	6.2	-7000	0	0.000	-0.5	0.169
M	600	4.68	-3500	0	0.000	-0.25	0.056
N	600	4.68	0	0	0.000	0	0.000
O	848.528	4.68	4949	0	0.000	0.3536	0.159
P	600	4.68	-3500	0	0.000	-0.25	0.056
Q	600	4.68	-3500	0	0.000	0.25	-0.056
					-0.315 cm.	1.061 cm.	

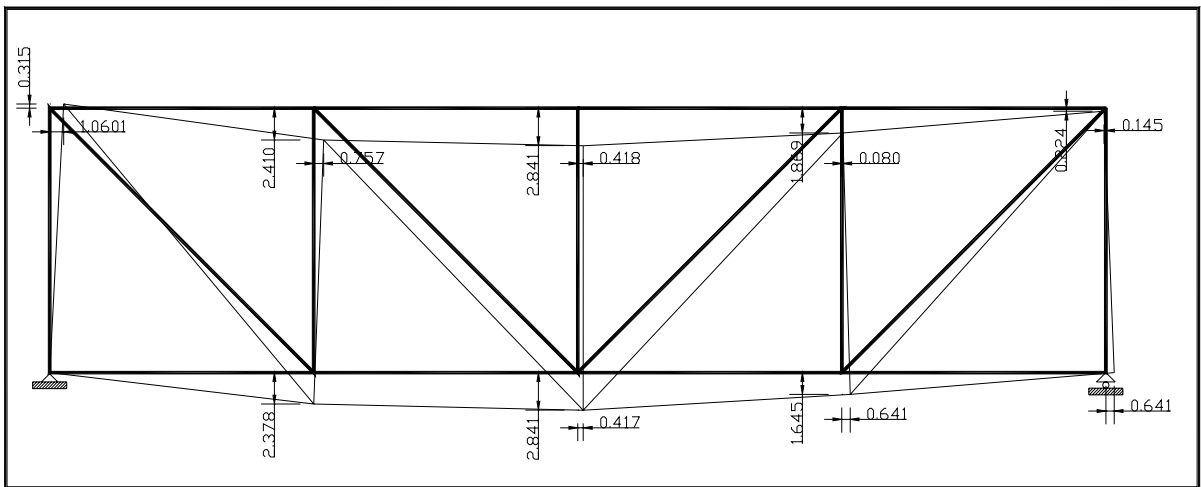
NODO C				NODO D							
Mv	F*M _v *L /E*A	M _H	F*M _H *L /E*A	Mv	F*M _v *L /E*A	M _H	F*M _H *L /E*A				
-0.75	0.236	0	0.000	-0.75	0.236	0.25	-0.079				
0	0.000	1	0.000	0	0.000	1	0.000				
1.0607	0.667	0	0.000	1.0607	0.667	-0.3536	-0.222				
-0.75	0.313	0	0.000	-0.75	0.313	0.25	-0.104				
0.25	-0.008	0	0.000	-0.75	0.024	0.25	-0.008				
0.75	0.313	0	0.000	0.75	0.313	0.75	0.313				
-0.3536	-0.023	0	0.000	-0.3536	-0.023	-0.3536	-0.023				
-0.5	0.169	0	0.000	-0.5	0.169	-0.5	0.169				
0	0.000	0	0.000	0	0.000	0	0.000				
0.25	0.056	0	0.000	0.25	0.056	0.25	0.056				
0.3536	0.159	0	0.000	0.3536	0.159	0.3536	0.159				
-0.5	0.169	0	0.000	-0.5	0.169	-0.5	0.169				
-0.25	0.056	0	0.000	-0.25	0.056	-0.25	0.056				
0	0.000	0	0.000	0	0.000	0	0.000				
0.3536	0.159	0	0.000	0.3536	0.159	0.3536	0.159				
-0.25	0.056	0	0.000	-0.25	0.056	-0.25	0.056				
-0.25	0.056	0	0.000	-0.25	0.056	-0.25	0.056				
2.378				0.000				2.410		0.757	

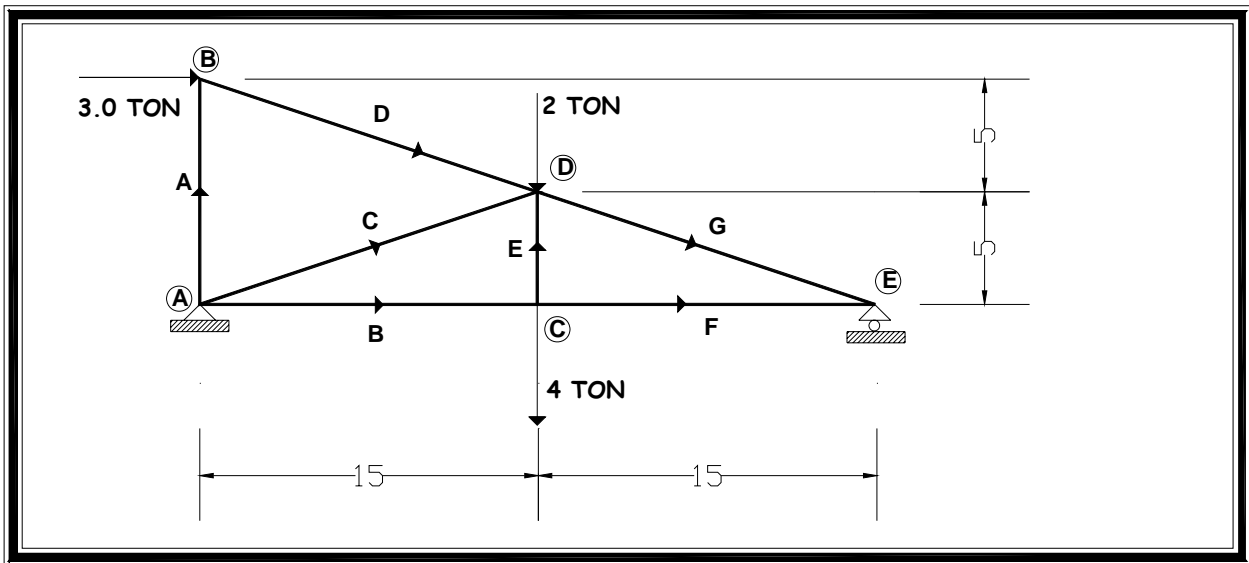
NODO E				NODO F			
M _v	F*M _v *L /E*A	M _H	F*M _H *L /E*A	M _v	F*M _v *L /E*A	M _H	F*M _H *L /E*A
-0.5	0.157	0	0.000	-0.5	0.157	0.25	-0.079
0	0.000	1	0.000	0	0.000	1	0.000
0.7071	0.445	0	0.000	0.7071	0.445	-0.3536	-0.222
-0.5	0.208	0	0.000	-0.5	0.208	0.25	-0.104
-0.5	0.016	0	0.000	-0.5	0.016	0.25	-0.008
0.5	0.208	1	0.417	0.5	0.208	0.75	0.313
0.7071	0.045	0	0.000	0.7071	0.045	-0.3536	-0.023
-1	0.339	0	0.000	-1	0.339	0.5	-0.169
0	0.000	0	0.000	-1	0.000	0	0.000
0.5	0.112	0	0.000	0.5	0.112	0.25	0.056
0.7071	0.317	0	0.000	0.7071	0.317	0.3536	0.159
-1	0.339	0	0.000	-1	0.339	-0.5	0.169
-0.5	0.112	0	0.000	-0.5	0.112	-0.25	0.056
0	0.000	0	0.000	0	0.000	0	0.000
0.7071	0.317	0	0.000	0.7071	0.317	0.3536	0.159
-0.5	0.112	0	0.000	-0.5	0.112	-0.25	0.056
-0.5	0.112	0	0.000	-0.5	0.112	-0.25	0.056
	2.841		0.417		2.841		0.418

NODO G				NODO H			
M _v	F*M _v *L /E*A	M _H	F*M _H *L /E*A	M _v	F*M _v *L /E*A	M _H	F*M _H *L /E*A
-0.25	0.079	0	0.000	-0.25	0.079	0.25	-0.079
0	0.000	1	0.000	0	0.000	0	0.000
0.3536	0.222	0	0.000	0.3536	0.222	-0.3536	-0.222
-0.25	0.104	0	0.000	-0.25	0.104	0.25	-0.104
-0.25	0.008	0	0.000	-0.25	0.008	0.25	-0.008
0.25	0.104	1	0.417	0.25	0.104	0.75	0.313
0.3536	0.023	0	0.000	0.3536	0.023	-0.3536	-0.023
-0.5	0.169	0	0.000	-0.5	0.169	0.5	-0.169
0	0.000	0	0.000	0	0.000	0	0.000
0.75	0.168	1	0.224	0.75	0.168	0.25	0.056
-0.3536	-0.159	0	0.000	-0.3536	-0.159	0.3536	0.159
-0.5	0.169	0	0.000	-0.5	0.169	0.5	-0.169
0.25	-0.056	0	0.000	-0.75	0.168	-0.25	0.056
0	0.000	0	0.000	0	0.000	0	0.000
1.0607	0.476	0	0.000	1.0607	0.476	0.3536	0.159
-0.75	0.168	0	0.000	-0.75	0.168	-0.25	0.056
-0.75	0.168	0	0.000	-0.75	0.168	-0.25	0.056
	1.645		0.641		1.869		0.080

NODO I				NODO J			
MV	$F \cdot M_V \cdot L / E \cdot A$	MH	$F \cdot M_H \cdot L / E \cdot A$	MV	$F \cdot M_V \cdot L / E \cdot A$	MH	$F \cdot M_H \cdot L / E \cdot A$
0	0.000	0	0.000	0	0.000	0.25	-0.079
0	0.000	1	0.000	0	0.000	1	0.000
0	0.000	0	0.000	0	0.000	-0.3536	-0.222
0	0.000	0	0.000	0	0.000	0.25	-0.104
0	0.000	0	0.000	0	0.000	0.25	-0.008
0	0.000	1	0.417	0	0.000	0.75	0.313
0	0.000	0	0.000	0	0.000	-0.3536	-0.023
0	0.000	0	0.000	0	0.000	0.5	-0.169
0	0.000	0	0.000	0	0.000	0	0.000
0	0.000	1	0.224	0	0.000	0.25	0.056
0	0.000	0	0.000	0	0.000	0.3536	0.159
0	0.000	0	0.000	0	0.000	0.5	-0.169
0	0.000	0	0.000	0	0.000	-0.25	0.056
0	0.000	1	0.000	0	0.000	0	0.000
0	0.000	0	0.000	0	0.000	0.3536	0.159
0	0.000	0	0.000	0	0.000	0.75	-0.168
0	0.000	0	0.000	-1	0.224	-0.25	0.056
	0.000		0.641		0.224		-0.145

Los desplazamientos son en centímetros





Para secciones a tensión

Para secciones a compresión

$$\text{Área requerida} = \frac{F}{0.6 f_y}$$

$$\text{Área requerida} = \frac{F}{0.5 f_y}$$

Áreas requeridas para las secciones transversales (dimensionamiento preliminar)

$$F_Y = 2530$$

					BARRA	SE PROPONEN
Área req.	0.65876	cm ²	=	3.04	cm ²	A 2 LI --25 X 3
Área req.	7.90514	cm ²	=	10.8	cm ²	B 2 LI --38 X 8
Área req.	7.49881	cm ²	=	10.8	cm ²	C 2 LI --38 X 8
Área req.	2.49960	cm ²	=	3.04	cm ²	D 2 LI --25 X 3
Área req.	2.63505	cm ²	=	3.04	cm ²	E 2 LI --25 X 3
Área req.	7.90514	cm ²	=	10.8	cm ²	F 2 LI --38 X 8
Área req.	9.99921	cm ²	=	10.8	cm ²	G 2 LI --38 X 8

LAS SECCIONES SE OBTENDRAN DEL MANUAL DEL IMCA

Calculo de los desplazamientos

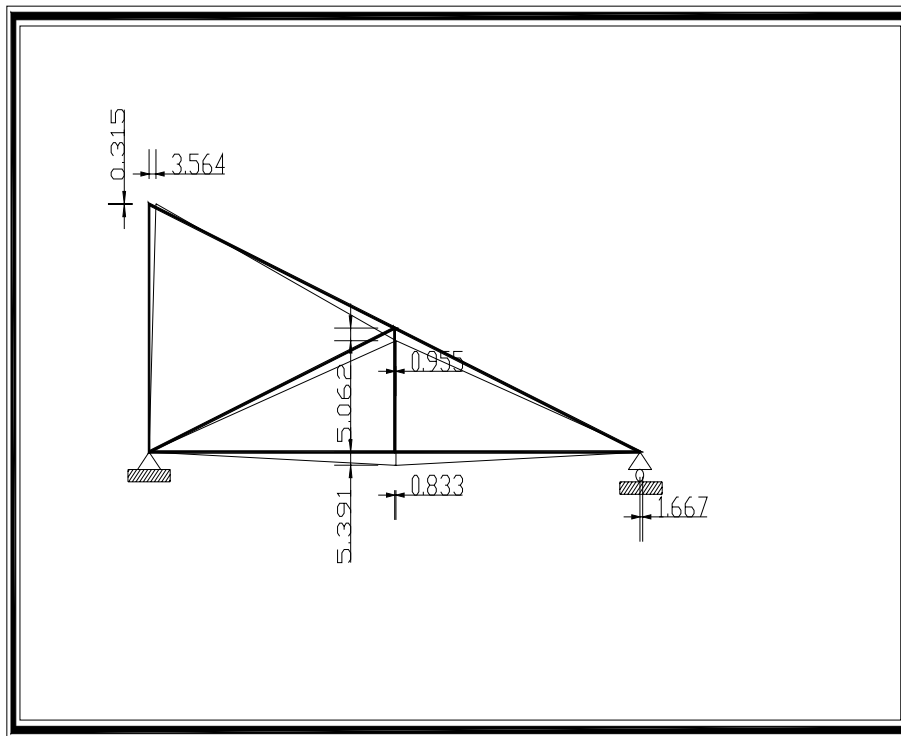
$E = 2000000$

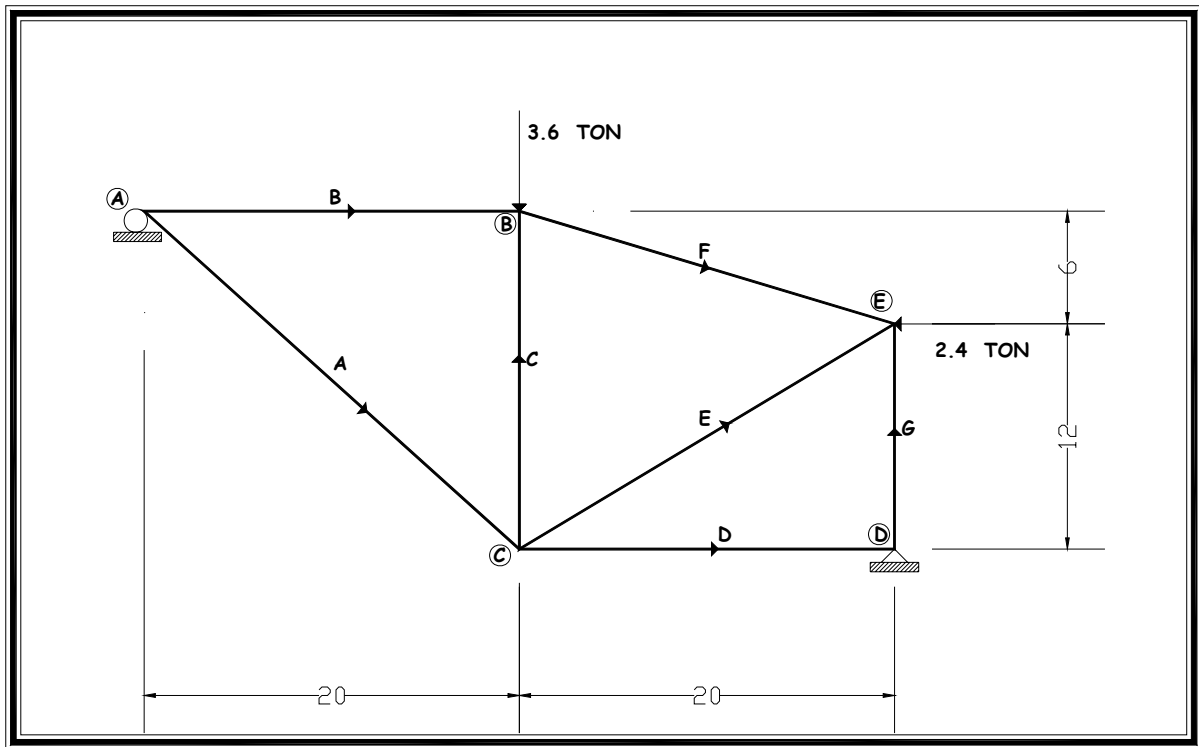
				NODO B			
BARRA	L (Cm)	AREA (cm2)	Fig (kg)	MV	$F \cdot M_V \cdot L / E \cdot A$	MH	$F \cdot M_H \cdot L / E \cdot A$
A	1000	3.04	1000	-1	-0.164	0.333	0.055
B	1500	10.8	12000	0	0.000	1	0.833
C	1581.14	10.8	-9486	0	0.000	0	0.000
D	1581.14	3.04	-3162	0	0.000	-1.0541	0.867
E	500	3.04	4000	0	0.000	0	0.000
F	1500	10.8	12000	0	0.000	1	0.833
G	1581.14	10.8	-12649	0	0.000	-1.0541	0.976
					-0.1645		3.564

NODO C				NODO D			
MV	$F \cdot M \cdot L / E \cdot A$	MH	$F \cdot M \cdot L / E \cdot A$	MV	$F \cdot M_V \cdot L / E \cdot A$	MH	$F \cdot M_H \cdot L / E \cdot A$
0	0.000	0	0.000	0	0.000	0	0.000
1.5	1.250	1	0.833	1.5	1.250	0.5	0.417
-1.581	1.098	0	0.000	-1.5809	1.098	0.5272	-0.366
0	0.000	0	0.000	0	0.000	0	0.000
1	0.329	0	0.000	0	0.000	0	0.000
1.5	1.250	0	0.000	1.5	1.250	0.5	0.417
-1.581	1.464	0	0.000	-1.5809	1.464	-0.5272	0.488
		5.391	0.833			5.062	0.9554

NODO E			
MV	$F \cdot M_V \cdot L / E \cdot A$	MH	$F \cdot M_H \cdot L / E \cdot A$
0	0.000	0	0.000
0	0.000	1	0.833
0	0.000	0	0.000
0	0.000	0	0.000
0	0.000	0	0.000
0	0.000	1	0.833
0	0.000	0	0.000
		0.000	1.667

Los desplazamientos son en cm





Para secciones a tensión

Para secciones a compresión

$$\text{Área requerida} = \frac{F}{0.6 f_y}$$

$$\text{Área requerida} = \frac{F}{0.5 f_y}$$

Áreas requeridas para las secciones transversales (dimensionamiento preliminar)

$$F_y = 2530$$

					BARRA	SE PROPONEN	
Área req.	2.48155	cm ²	=	3.04	cm ²	A	2 LI -- 25 X 3
Área req.	2.21344	cm ²	=	3.04	cm ²	B	2 LI -- 25 X 3
Área req.	2.18182	cm ²	=	3.04	cm ²	C	2 LI -- 25 X 3
Área req.	1.58103	cm ²	=	3.04	cm ²	D	2 LI -- 25 X 3
Área req.	0.30698	cm ²	=	3.04	cm ²	E	2 LI -- 25 X 3
Área req.	2.31067	cm ²	=	3.04	cm ²	F	2 LI -- 25 X 3
Área req.	0.85375	cm ²	=	3.04	cm ²	G	2 LI -- 25 X 3

LAS SECCIONES SE OBTENDRAN DEL MANUAL DEL IMCA

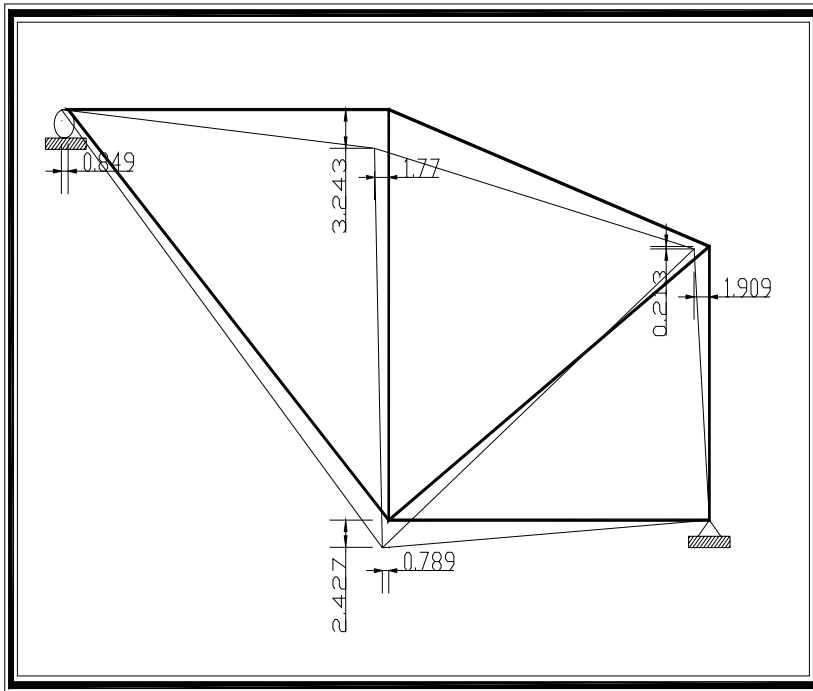
Calculo de los desplazamientos

$E = 2000000$

				NODO A			
BARRA	L (Cm)	AREA (cm2)	Fig (kg)	MV	$F \cdot M_V \cdot L / E \cdot A$	MH	$F \cdot M_H \cdot L / E \cdot A$
A	2690.72	3.04	3767	0	0.000	-0.6727	-1.121
B	2000	3.04	-2800	0	0.000	-0.5	0.461
C	1800	3.04	-2760	0	0.000	0.15	-0.123
D	2000	3.04	2400	0	0.000	-1	-0.789
E	2332.38	3.04	466	0	0.000	0.5831	0.104
F	2088.06	3.04	-2923	0	0.000	-0.522	0.524
G	1200	3.04	-1080	0	0.000	-0.45	0.096
					0.000		-0.849

NODO B				NODO C			
MV	$F \cdot M_V \cdot L / E \cdot A$	MH	$F \cdot M_H \cdot L / E \cdot A$	MV	$F \cdot M_V \cdot L / E \cdot A$	MH	$F \cdot M_H \cdot L / E \cdot A$
0.7474	1.246	-0.6727	-1.121	0.7475	1.246	0	0.000
-0.5556	0.512	0.5	-0.461	-0.556	0.512	0	0.000
-0.8333	0.681	0.15	-0.123	0.1667	-0.136	0	0.000
0	0.000	-1	-0.789	0	0.000	-1	-0.789
0.6479	0.116	0.583	0.104	0.6479	0.116	0	0.000
-0.58	0.582	-0.522	0.524	-0.58	0.582	0	0.000
-0.5	0.107	-0.45	0.096	-0.5	0.107	0	0.000
		3.243	-1.770			2.427	-0.789

NODO E			
MV	$F \cdot M_V \cdot L / E \cdot A$	MH	$F \cdot M_H \cdot L / E \cdot A$
0	0.000	-0.4485	-0.748
0	0.000	0.3334	-0.307
0	0.000	-0.1	0.082
0	0.000	-1	-0.789
0	0.000	0.7774	0.139
0	0.000	0.3481	-0.349
-1	0.213	-0.3	0.064
		0.213	-1.909



Los desplazamientos son en cm

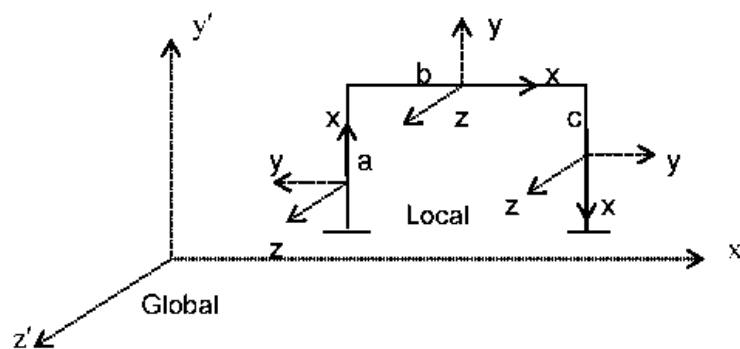
*MÈTODO
DE
RIGIDECES*

Es el método en el cual se pueden modelar armaduras en el plano , armaduras tridimensionales , marcos planos, retículas así como estructuras tridimensionales a base de elementos barra.

El método permite conocer a partir de los desplazamientos que sufren las estructuras en sus nodos los elementos mecánicos de cada barra a partir de establecer el equilibrio y compatibilidad entre las cargas y los desplazamientos.

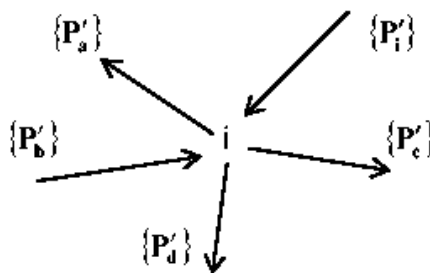
En general se tienen dos sistemas de referencia, uno llamado local (x,y,z) para poder hablar de cada elemento que forma parte de un sistema estructural y otro llamado sistema global (x',y',z'), que es el que se usa para hablar de l sistema estructural en su totalidad.

El eje local x deberá coincidir con el eje longitudinal de la barra y dependiendo de esto los otros ejes se establecerán en base al sistema coordenado derecho.



referencia del sistema global al local

para la aplicación del método se parte de que toda estructura debe cumplir con la condicione de equilibrio y de compatibilidad o continuidad para ilustrar dichas condiciones, considérese un nodo “i” de una estructura cualquiera al que concurren varias barras y se aplica a un vector de cargas {P}.



Por equilibrio

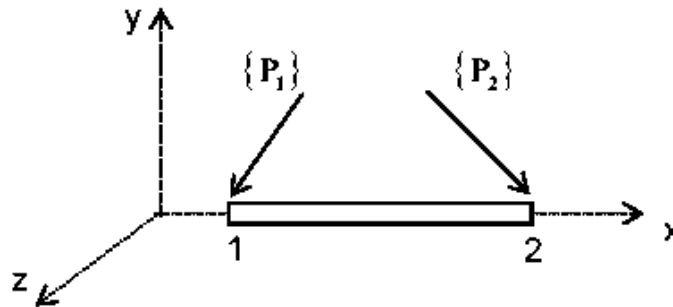
$$\{P'_i\} = \{P'_{1a}\} + \{P'_{2b}\} + \{P'_{1c}\} + \{P'_{id}\}$$

Por compatibilidad

$$\{d'_i\} = \{d'_{1a}\} + \{d'_{2b}\} + \{d'_{1c}\} + \{d'_{id}\}$$

Esta ultima condición indica que el desplazamiento del nodo debera ser igual al vector desplazamiento de dicho nodo.

Considerando una barra en el sistema local y que puede estar sujeta a los vectores de carga $\{1P\}$ y $\{2P\}$ en el extremo 1 y 2 respectivamente, estos sin importar su dirección y magnitud, generaran los vectores de desplazamiento $\{1d\}$ y $\{2d\}$



barras sujeta a cargas en sus extremos

Acoplado los vectores de cargas y desplazamientos en forma matricial, se puede establecer la relación entre estos vectores a través de una matriz de coeficientes que se define como la matriz de rigideces de la barra, esta se expresa de la siguiente forma:

$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{1,1} & K_{2,1} \\ K_{2,1} & K_{2,2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{Bmatrix}$$

En forma condensada se puede escribir

$$\{P\} = [K]\{d\}$$

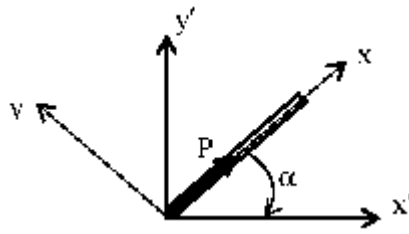
Esta es la ecuación fuerza desplazamiento de una barra en el sistema local

ARMADURAS EN EL PLANO

La aplicación del método de rigideces requiere el conocimiento de las matrices de rigidez de cada barra en el sistema global el cual se logra aplicando la siguiente expresión :

$$[K'_{i,j}] = [T][K_{i,j}][T]^T$$

Para nuestro caso la matriz de rotación $[T]$ se determina con la siguiente figura:



Sistema de referencia local y global para armaduras planas

$$P'_x = P \cos \alpha$$

$$P'_y = P \sin \alpha$$

De lo cual para hacer una simplificación llamaremos

$$\cos \alpha = \ell \quad \sin \alpha = m$$

Escribiendo de forma matricial tenemos:

$$\begin{Bmatrix} P'_x \\ P'_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \ell \\ m \end{bmatrix} P$$

La cual se puede escribir en forma compacta de la siguiente forma.

$$\{P'\} = [T]\{P\}$$

De donde la matriz de rotación para los elementos de armaduras en el plano resulta:

$$[T] = \begin{bmatrix} \ell \\ m \end{bmatrix}$$

Por otro lado solo considerando carga axial para la barra de la armadura, puede obtener de la matriz general de doce por doce la siguiente matriz de rigidez :

$$[K] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & -\frac{EA}{L} \\ -\frac{EA}{L} & \frac{EA}{L} \end{bmatrix}$$

De donde

$$K_{1,1} = \frac{EA}{L} \quad K_{1,2} = -\frac{EA}{L}$$

$$K_{2,1} = -\frac{EA}{L} \quad K_{2,2} = \frac{EA}{L}$$

Haciendo la rotación al sistema global de la submatriz $K_{1,1}$ se tiene:

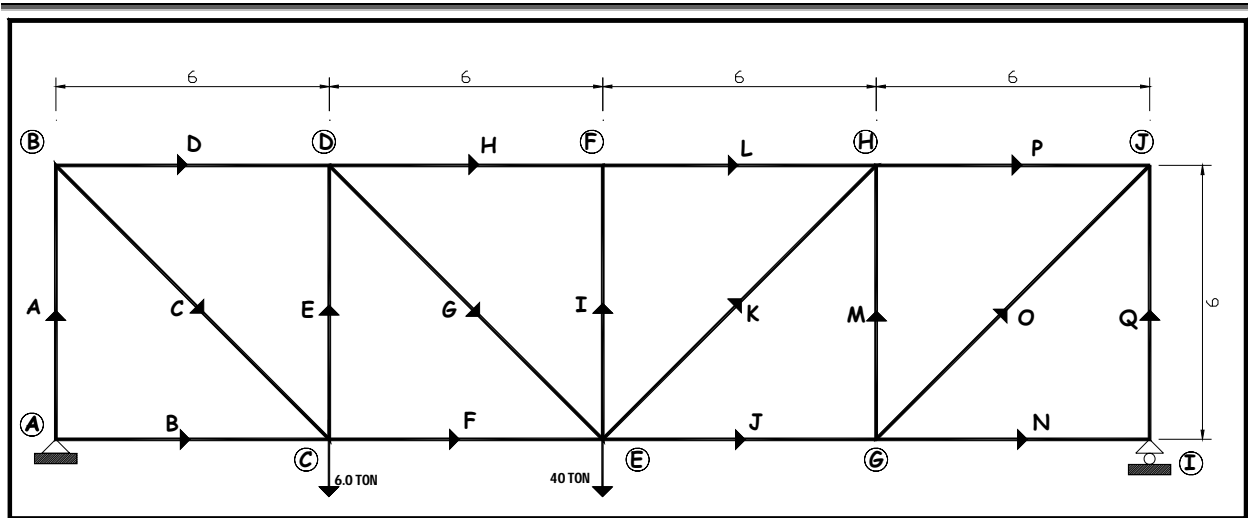
$$[K'_{1,1}] = \begin{bmatrix} \ell \\ m \end{bmatrix} \left[\frac{EA}{L} \right] [\ell \quad m]$$

$$[K'_{1,1}] = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} \ell^2 & \ell m \\ \ell m & m^2 \end{bmatrix}$$

Por lo que se concluye lo siguiente

$$[K'_{1,2}] = [K'_{2,1}] = -[K'_{1,1}]$$

$$[K'_{2,2}] = [K'_{1,1}]$$



E = 2000000

BARRA	L (cm)	A (cm ²)	L	M	L ²	M ²	L*M
A	600	6.2	0	1	0.0000	1.0000	0.0000
B	600	4.68	1	0	1.0000	0.0000	0.0000
C	848.528	6.2	-0.7071	0.7071	0.5000	0.5000	-0.5000
D	600	4.68	1	0	1.0000	0.0000	0.0000
E	600	4.68	0	1	0.0000	1.0000	0.0000
F	600	4.68	1	0	1.0000	0.0000	0.0000
G	848.528	4.68	-0.7071	0.7071	0.5000	0.5000	-0.5000
H	600	6.2	1	0	1.0000	0.0000	0.0000
I	600	4.68	0	1	0.0000	1.0000	0.0000
J	600	4.68	1	0	1.0000	0.0000	0.0000
K	848.528	4.68	0.7071	0.7071	0.5000	0.5000	0.5000
L	600	6.2	1	0	1.0000	0.0000	0.0000
M	600	4.68	0	1	0.0000	1.0000	0.0000
N	600	4.68	1	0	1.0000	0.0000	0.0000
O	848.528	4.68	0.7071	0.7071	0.5000	0.5000	0.5000
P	600	4.68	1	0	1.0000	0.0000	0.0000
Q	600	4.68	0	1	0.0000	1.0000	0.0000

Matriz de rigidez de cada barra

BARRA A

$$K_{11} = K_{22} \begin{vmatrix} 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 20666.667 \end{vmatrix} \quad K_{12} = K_{21} \begin{vmatrix} 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & -20666.667 \end{vmatrix}$$

BARRA B

$$K_{11} = K_{22} \begin{vmatrix} 15600.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 \end{vmatrix} \quad K_{12} = K_{21} \begin{vmatrix} -15600.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 \end{vmatrix}$$

BARRA C

$$K_{11} = K_{22} \begin{vmatrix} 7306.631 & -7306.631 \\ -7306.631 & 7306.631 \end{vmatrix} \quad K_{12} = K_{21} \begin{vmatrix} -7306.631 & 7306.631 \\ 7306.631 & -7306.631 \end{vmatrix}$$

BARRA D

$$K_{11} = K_{22} \begin{vmatrix} 15600.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 \end{vmatrix} \quad K_{12} = K_{21} \begin{vmatrix} -15600.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 \end{vmatrix}$$

BARRA E

$$K_{11} = K_{22} \begin{vmatrix} 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 15600.000 \end{vmatrix} \quad K_{12} = K_{21} \begin{vmatrix} 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & -15600.000 \end{vmatrix}$$

BARRA F

$$K_{11} = K_{22} \begin{vmatrix} 15600.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 \end{vmatrix} \quad K_{12} = K_{21} \begin{vmatrix} -15600.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 \end{vmatrix}$$

BARRA G

$$K_{11} = K_{22} \begin{vmatrix} 5515.328 & -5515.328 \\ -5515.328 & 5515.328 \end{vmatrix} \quad K_{12} = K_{21} \begin{vmatrix} -5515.328 & 5515.328 \\ 5515.328 & -5515.328 \end{vmatrix}$$

BARRA H

$$K_{11} = K_{22} \begin{vmatrix} 20666.667 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 \end{vmatrix} \quad K_{12} = K_{21} \begin{vmatrix} -20666.667 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 \end{vmatrix}$$

BARRA I

$$K_{11} = K_{22} \begin{vmatrix} 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 15600.000 \end{vmatrix} \quad K_{12} = K_{21} \begin{vmatrix} 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & -15600.000 \end{vmatrix}$$

BARRA J

$$K_{11} = K_{22} \begin{vmatrix} 15600.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 \end{vmatrix} \quad K_{12} = K_{21} \begin{vmatrix} -15600.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 \end{vmatrix}$$

BARRA K

$$K_{11} = K_{22} \begin{vmatrix} 5515.328 & 5515.328 \\ 5515.328 & 5515.328 \end{vmatrix} \quad K_{12} = K_{21} \begin{vmatrix} -5515.328 & -5515.328 \\ -5515.328 & -5515.328 \end{vmatrix}$$

BARRA L

$$K_{11} = K_{22} \begin{vmatrix} 20666.667 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 \end{vmatrix} \quad K_{12} = K_{21} \begin{vmatrix} -20666.667 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 \end{vmatrix}$$

BARRA M

$$K_{11} = K_{22} \begin{vmatrix} 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 15600.000 \end{vmatrix} \quad K_{12} = K_{21} \begin{vmatrix} 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & -15600.000 \end{vmatrix}$$

BARRA N

$$K_{11} = K_{22} \begin{vmatrix} 15600.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 \end{vmatrix} \quad K_{12} = K_{21} \begin{vmatrix} -15600.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 \end{vmatrix}$$

BARRA O

$$K_{11} = K_{22} \begin{vmatrix} 5515.328 & 5515.328 \\ 5515.328 & 5515.328 \end{vmatrix} \quad K_{12} = K_{21} \begin{vmatrix} -5515.328 & -5515.328 \\ -5515.328 & -5515.328 \end{vmatrix}$$

BARRA P

$$K_{11} = K_{22} \begin{vmatrix} 15600.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 \end{vmatrix} \quad K_{12} = K_{21} \begin{vmatrix} -15600.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 \end{vmatrix}$$

BARRA Q

$$K_{11} = K_{22} \begin{vmatrix} 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 15600.000 \end{vmatrix} \quad K_{12} = K_{21} \begin{vmatrix} 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & -15600.000 \end{vmatrix}$$

Matriz de rigideces de la armadura

15600,000	0,000	0,000	0,000	-15600,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
0,000	15600,000	0,000	-15600,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
0,000	0,000	22906,631	-7306,631	-7306,631	7306,631	-15600,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
0,000	-15600,000	-7306,631	22906,631	7306,631	-7306,631	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
-15600,000	0,000	-7306,631	7306,631	38506,631	-7306,631	0,000	0,000	-15600,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
0,000	0,000	7306,631	-7306,631	-7306,631	22906,631	0,000	-15600,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	-6000,000
0,000	0,000	-15600,000	0,000	0,000	0,000	36715,328	-5515,328	-5515,328	5515,328	-15600,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	-15600,000	-5515,328	21115,328	5515,328	-5515,328	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
0,000	0,000	0,000	0,000	-15600,000	0,000	-5515,328	5515,328	42230,656	0,000	0,000	0,000	#####	0,000	-5515,328	-5515,328	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	5515,328	-5515,328	0,000	26630,656	0,000	-15600,000	0,000	0,000	-5515,328	-5515,328	0,000	0,000	0,000	0,000	-4000,000
0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	-15600,000	0,000	0,000	0,000	31200,000	0,000	0,000	0,000	-15600,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	-15600,000	0,000	15600,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	-15600,000	0,000	0,000	0,000	36715,328	5515,328	0,000	0,000	-15600,000	0,000	-5515,328	-5515,328	0,000
0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	5515,328	21115,328	0,000	-15600,000	0,000	0,000	-5515,328	-5515,328	0,000
0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	-5515,328	-5515,328	-15600,000	0,000	0,000	0,000	36715,328	5515,328	0,000	0,000	-15600,000	0,000	0,000
0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	-5515,328	-5515,328	0,000	0,000	0,000	-15600,000	5515,328	21115,328	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	15600,000	0,000	0,000	0,000	0,000
0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	15600,000	0,000	-15600,000	0,000
0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	-5515,328	-5515,328	-15600,000	0,000	0,000	0,000	21115,328	5515,328	0,000
0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	-5515,328	-5515,328	0,000	0,000	0,000	-15600,000	5515,328	21115,328	0,000

Matriz de rigideces reducida

22906,631	-7306,631	-7306,631	7306,631	-15600,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
-7306,631	22906,631	7306,631	-7306,631	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
-7306,631	7306,631	38506,631	-7306,631	0,000	0,000	-15600,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
7306,631	-7306,631	-7306,631	22906,631	0,000	-15600,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	-6000,000
-15600,000	0,000	0,000	0,000	36715,328	-5515,328	-5515,328	5515,328	-15600,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
0,000	0,000	0,000	-15600,000	-5515,328	21115,328	5515,328	-5515,328	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
0,000	0,000	-15600,000	0,000	-5515,328	5515,328	42230,656	0,000	0,000	0,000	-15600,000	0,000	-5515,328	-5515,328	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
0,000	0,000	0,000	0,000	5515,328	-5515,328	0,000	26630,656	0,000	-15600,000	0,000	0,000	-5515,328	-5515,328	0,000	0,000	0,000	0,000	-4000,000
0,000	0,000	0,000	0,000	-15600,000	0,000	0,000	0,000	31200,000	0,000	0,000	0,000	-15600,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	-15600,000	0,000	15600,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	-15600,000	0,000	0,000	0,000	36715,328	5515,328	0,000	0,000	-15600,000	-5515,328	-5515,328	0,000	0,000
0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	5515,328	21115,328	0,000	-15600,000	0,000	-5515,328	-5515,328	0,000	0,000
0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	-5515,328	-5515,328	-15600,000	0,000	0,000	0,000	36715,328	5515,328	0,000	-15600,000	0,000	0,000	0,000
0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	-5515,328	-5515,328	0,000	0,000	0,000	-15600,000	5515,328	21115,328	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	-15600,000	0,000	0,000	0,000	15600,000	0,000	0,000	0,000	0,000
0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	-5515,328	-5515,328	-15600,000	0,000	0,000	21115,328	5515,328	0,000	0,000
0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	-5515,328	-5515,328	0,000	0,000	0,000	5515,328	21115,328	0,000	0,000

Vector de desplazamientos resolviendo la matriz reducida

A	0,00000
	0,00000
B	-1,25813
	-0,4166666
C	-1,7227E-07
	-2,564399
D	0,8414634
	-2,596451
E	0,4166663
	-3,111905
F	0,3927453
	-3,111905
G	0,6410253
	-1,780312
H	-0,05597281
	-2,004671
I	0,6410253
	0,00000
J	-0,2803319
	-0,2243591

Por compatibilidad

$$\begin{aligned}
 \{d'_{1a}\} &= \{0\} & \{d'_{2a}\} &= \{d_B\}' \\
 \{d'_{1b}\} &= \{0\} & \{d'_{2b}\} &= \{d_C\}' \\
 \{d'_{1c}\} &= \{d_B\}' & \{d'_{2c}\} &= \{d_C\}' \\
 \{d'_{1d}\} &= \{d_B\}' & \{d'_{2d}\} &= \{d_D\}' \\
 \{d'_{1e}\} &= \{d_C\}' & \{d'_{2e}\} &= \{d_D\}' \\
 \{d'_{1f}\} &= \{d_C\}' & \{d'_{2f}\} &= \{d_E\}' \\
 \{d'_{1g}\} &= \{d_D\}' & \{d'_{2g}\} &= \{d_E\}' \\
 \{d'_{1h}\} &= \{d_D\}' & \{d'_{2h}\} &= \{d_F\}' \\
 \{d'_{1i}\} &= \{d_E\}' & \{d'_{2i}\} &= \{d_F\}' \\
 \{d'_{1j}\} &= \{d_E\}' & \{d'_{2j}\} &= \{d_G\}' \\
 \{d'_{1k}\} &= \{d_E\}' & \{d'_{2k}\} &= \{d_H\}' \\
 \{d'_{1l}\} &= \{d_F\}' & \{d'_{2l}\} &= \{d_H\}' \\
 \{d'_{1m}\} &= \{d_G\}' & \{d'_{2m}\} &= \{d_H\}' \\
 \{d'_{1n}\} &= \{d_G\}' & \{d'_{2n}\} &= \{d_I\}' \\
 \{d'_{1o}\} &= \{d_G\}' & \{d'_{2o}\} &= \{d_J\}' \\
 \{d'_{1p}\} &= \{d_H\}' & \{d'_{2p}\} &= \{d_J\}' \\
 \{d'_{1q}\} &= \{d_I\}' & \{d'_{2q}\} &= \{d_J\}'
 \end{aligned}$$

Sustituyendo en las ecuaciones fuerza-desplazamiento para cada barra

$$\begin{aligned}
 [P'_1] &= [K'_{1,1}]\{d'_1\} + [K'_{1,2}]\{d'_2\} \\
 [P'_2] &= [K'_{2,1}]\{d'_1\} + [K'_{2,2}]\{d'_2\}
 \end{aligned}$$

BARRA A

$$\begin{aligned}
 \begin{vmatrix} 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 20666.667 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 0.000 \\ 0.000 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & -20666.67 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 1.173 \\ -0.314 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 0.000 \\ 6500.001 \end{vmatrix} \\
 \begin{vmatrix} 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & -20666.67 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 0.000 \\ 0.000 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 20666.67 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 1.173 \\ -0.314 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 0.000 \\ -6500 \end{vmatrix}
 \end{aligned}$$

BARRA B

$$\begin{aligned}
 \begin{vmatrix} 15600 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 0.000 \\ 0.000 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -15600 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} -3.380 \\ -2.378 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 0.001 \\ 0.000 \end{vmatrix} \\
 \begin{vmatrix} -15600 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 0.000 \\ 0.000 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 15600 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} -3.380 \\ -2.378 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} -0.001 \\ 0.000 \end{vmatrix}
 \end{aligned}$$

BARRA C

$$\begin{vmatrix} 7306.631 & -7306.631 \\ -7306.63 & 7306.631 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 1.174 \\ -0.314 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -7306.6 & 7306.63 \\ 7306.63 & -7306.63 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} -3.380 \\ -2.378 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -6500 \\ 6499.999 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -7306.63 & 7306.631 \\ 7306.631 & -7306.631 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 1.174 \\ -0.314 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 7306.63 & -7306.63 \\ -7306.6 & 7306.63 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} -3.380 \\ -2.378 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6499.999 \\ -6500 \end{vmatrix}$$

BARRA D

$$\begin{vmatrix} 15600 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 1.17366 \\ -0.31452 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -15600 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 0.757 \\ -2.409 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6500.00 \\ 0.000 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -15600 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 1.17366 \\ -0.31452 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 15600 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 0.756993 \\ -2.40983 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -6500.0 \\ 0.000 \end{vmatrix}$$

BARRA E

$$\begin{vmatrix} 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 15600 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} -3.4E-08 \\ -2.377 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & -15600 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 0.757 \\ -2.409 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0.000 \\ 499.995 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & -15600 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} -3.4E-08 \\ -2.377 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 15600 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 0.756 \\ -2.409 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0.000 \\ -499.996 \end{vmatrix}$$

BARRA F

$$\begin{vmatrix} 15600 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} -3.4E-08 \\ -2.378 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -15600 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 0.417 \\ -2.841 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -6500 \\ 0.000 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -15600 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} -3.4E-08 \\ -2.378 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 15600 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 0.417 \\ -2.840 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6500 \\ 0.000 \end{vmatrix}$$

BARRA G

$$\begin{vmatrix} 5515.328 & -5515.328 \\ -5515.33 & 5515.328 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 0.757 \\ -2.409 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -5515.3 & 5515.328 \\ 5515.33 & -5515.33 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 0.417 \\ -2.841 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -500.003 \\ 500.00 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -5515.33 & 5515.328 \\ 5515.328 & -5515.328 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 0.757 \\ -2.401 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 5515.33 & -5515.33 \\ -5515.3 & 5515.328 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 0.417 \\ -2.841 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 500.00 \\ -500.003 \end{vmatrix}$$

BARRA H

$$\begin{vmatrix} 20666.67 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 0.757 \\ -2.401 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -20667 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 0.418 \\ -2.841 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7000.00 \\ 0.000 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -20666.7 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 0.757 \\ -2.401 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 20666.7 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 0.418 \\ -2.841 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -7000 \\ 0.000 \end{vmatrix}$$

BARRA I

$$\begin{vmatrix} 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 15600 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 0.417 \\ -2.841 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & -15600 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 0.418 \\ -2.841 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0.000 \\ 0.000 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & -15600 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 0.417 \\ -2.841 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 15600 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 0.418 \\ -2.841 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0.000 \\ 0.000 \end{vmatrix}$$

BARRA J

$$\begin{vmatrix} 15600 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 0.417 \\ -2.841 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -15600 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 0.641 \\ -1.645 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3500 \\ 0.000 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -15600 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 0.417 \\ -2.841 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 15600 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 0.641 \\ -1.645 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3500 \\ 0.000 \end{vmatrix}$$

BARRA K

$$\begin{vmatrix} 5515.328 & 5515.328 \\ 5515.328 & 5515.328 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 0.417 \\ -2.841 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -5515.3 & -5515.328 \\ -5515.3 & -5515.328 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 0.079 \\ -1.869 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3500 \\ -3500 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -5515.33 & -5515.328 \\ -5515.33 & -5515.328 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 0.417 \\ -2.841 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 5515.33 & 5515.328 \\ 5515.33 & 5515.328 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 0.079 \\ -1.869 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3500.003 \\ 3500.003 \end{vmatrix}$$

BARRA L

$$\begin{vmatrix} 20666.67 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 0.418 \\ -2.841 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -20667 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 0.079 \\ -1.869 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7000 \\ 0.000 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -20666.7 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 0.418 \\ -2.841 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 20666.7 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 0.079 \\ -1.869 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -7000 \\ 0.000 \end{vmatrix}$$

BARRA M

$$\begin{vmatrix} 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 15600 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 0.641 \\ -1.645 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & -15600 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 0.079 \\ -1.869 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0.000 \\ 3500 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & -15600 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 0.641 \\ -1.645 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 15600 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 0.079 \\ -1.869 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0.000 \\ -3500 \end{vmatrix}$$

BARRA N

$$\begin{vmatrix} 15600 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 0.641 \\ -1.645 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -15600 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 0.641 \\ 0.000 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -0.00156 \\ 0.000 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -15600 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 0.641 \\ -1.645 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 15600 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 0.641 \\ 0.000 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0.00156 \\ 0.000 \end{vmatrix}$$

BARRA O

$$\begin{vmatrix} 5515.328 & 5515.328 \\ 5515.328 & 5515.328 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 0.641 \\ -1.645 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -5515.3 & -5515.328 \\ -5515.3 & -5515.328 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} -0.145 \\ -0.224 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3500 \\ -3500 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -5515.33 & -5515.328 \\ -5515.33 & -5515.328 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 0.641 \\ -1.645 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 5515.33 & 5515.328 \\ 5515.33 & 5515.328 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} -0.145 \\ -0.224 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3499.998 \\ 3499.998 \end{vmatrix}$$

BARRA P

$$\begin{vmatrix} 15600 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 0.079 \\ -1.869 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -15600 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} -0.145 \\ -0.224 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3499.999 \\ 0.000 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -15600 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 0.079 \\ -1.869 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 15600 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} -0.145 \\ -0.224 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3500 \\ 0.000 \end{vmatrix}$$

BARRA Q

$$\begin{vmatrix} 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 15600 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 0.641 \\ 0.000 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & -15600 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} -0.145 \\ -0.224 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0.000 \\ 3499.999 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & -15600 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 0.641 \\ 0.000 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 15600 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} -0.145 \\ -0.224 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0.000 \\ -3500 \end{vmatrix}$$

Comprobación del equilibrio

BARRA A

0,000	0,000	X	0,000	+	0,000	0,000	X	1,258	=	0,000
0,000	15600,000		0,000		0,000	-15600,000		-0,417		6499,999
0,000	0,000	X	0,000	+	0,000	0,000	X	1,258	=	0,000
0,000	-15600,000		0,000		0,000	15600,000		-0,417		-6499,999

BARRA B

15600,000	0,000	X	0,000	+	-15600,000	0,000	X	0,000	=	0,003
0,000	0,000		0,000		0,000	0,000		-2,564		0,000
-15600,000	0,000	X	0,000	+	15600,000	0,000	X	0,000	=	-0,003
0,000	0,000		0,000		0,000	0,000		-2,564		0,000

BARRA C

7306,631	-7306,631	X	1,258	+	-7306,631	7306,631	X	0,000	=	-6499,995
-7306,631	7306,631		-0,417		7306,631	-7306,631		-2,564		6499,995
-7306,631	7306,631	X	1,258	+	7306,631	-7306,631	X	0,000	=	6499,995
7306,631	-7306,631		-0,417		-7306,631	7306,631		-2,564		-6499,995

BARRA D

15600,000	0,000	X	1,258	+	-15600,000	0,000	X	0,841	=	6499,999
0,000	0,000		-0,417		0,000	0,000		-2,596		0,000
-15600,000	0,000	X	1,258	+	15600,000	0,000	X	0,841	=	-6499,999
0,000	0,000		-0,417		0,000	0,000		-2,596		0,000

BARRA E

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline & 0,000 & 0,000 & | & X & | & 0,000 & | & + & | & 0,000 & 0,000 & | & X & | & 0,841 & | & = & | & 0,000 & | \\ & 0,000 & 15600,000 & | & & | & -2,564 & | & & | & 0,000 & -15600,000 & | & & | & -2,596 & | & & | & 500,011 & | \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline & 0,000 & 0,000 & | & X & | & 0,000 & | & + & | & 0,000 & 0,000 & | & X & | & 0,841 & | & = & | & 0,000 & | \\ & 0,000 & -15600,000 & | & & | & -2,564 & | & & | & 0,000 & 15600,000 & | & & | & -2,596 & | & & | & -500,011 & | \\ \hline \end{array}$$

BARRA F

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline & 15600,000 & 0,000 & | & X & | & 0,000 & | & + & | & -15600,000 & 0,000 & | & X & | & 0,417 & | & = & | & -6499,997 & | \\ & 0,000 & 0,000 & | & & | & -2,564 & | & & | & 0,000 & 0,000 & | & & | & -3,112 & | & & | & 0,000 & | \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline & -15600,000 & 0,000 & | & X & | & 0,000 & | & + & | & 15600,000 & 0,000 & | & X & | & 0,417 & | & = & | & 6499,997 & | \\ & 0,000 & 0,000 & | & & | & -2,564 & | & & | & 0,000 & 0,000 & | & & | & -3,112 & | & & | & 0,000 & | \\ \hline \end{array}$$

BARRA G

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline & 5515,328 & -5515,328 & | & X & | & 0,841 & | & + & | & -5515,328 & 5515,328 & | & X & | & 0,417 & | & = & | & -500,003 & | \\ & -5515,328 & 5515,328 & | & & | & -2,596 & | & & | & 5515,328 & -5515,328 & | & & | & -3,112 & | & & | & 500,003 & | \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline & -5515,328 & 5515,328 & | & X & | & 0,841 & | & + & | & 5515,328 & -5515,328 & | & X & | & 0,417 & | & = & | & 500,003 & | \\ & 5515,328 & -5515,328 & | & & | & -2,596 & | & & | & -5515,328 & 5515,328 & | & & | & -3,112 & | & & | & -500,003 & | \\ \hline \end{array}$$

BARRA H

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline & 15600,000 & 0,000 & | & X & | & 0,841 & | & + & | & -15600,000 & 0,000 & | & X & | & 0,393 & | & = & | & 7000,002 & | \\ & 0,000 & 0,000 & | & & | & -2,596 & | & & | & 0,000 & 0,000 & | & & | & -3,112 & | & & | & 0,000 & | \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline & -15600,000 & 0,000 & | & X & | & 0,841 & | & + & | & 15600,000 & 0,000 & | & X & | & 0,393 & | & = & | & -7000,002 & | \\ & 0,000 & 0,000 & | & & | & -2,596 & | & & | & 0,000 & 0,000 & | & & | & -3,112 & | & & | & 0,000 & | \\ \hline \end{array}$$

BARRA I

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline & 0,000 & 0,000 & | & X & | & 0,417 & | & + & | & 0,000 & 0,000 & | & X & | & 0,393 & | & = & | & 0,000 & | \\ & 0,000 & 15600,000 & | & & | & -3,112 & | & & | & 0,000 & -15600,000 & | & & | & -3,112 & | & & | & 0,000 & | \\ \hline \end{array}$$

	0,000	0,000	X	0,417	+	0,000	0,000	X	0,393	=	0,000
	0,000	-15600,000		-3,112		0,000	15600,000		-3,112		0,000
BARRA J											
	15600,000	0,000	X	0,417	+	-15600,000	0,000	X	0,641	=	-3500,000
	0,000	0,000		-3,112		0,000	0,000		-1,780		0,000
	-15600,000	0,000	X	0,417	+	15600,000	0,000	X	0,641	=	3500,000
	0,000	0,000		-3,112		0,000	0,000		-1,780		0,000
BARRA K											
	5515,328	5515,328	X	0,417	+	-5515,328	-5515,328	X	-0,056	=	-3499,999
	5515,328	5515,328		-3,112		-5515,328	-5515,328		-2,005		-3499,999
	-5515,328	-5515,328	X	0,417	+	5515,328	5515,328	X	-0,056	=	3499,999
	-5515,328	-5515,328		-3,112		5515,328	5515,328		-2,005		3499,999
BARRA L											
	15600,000	0,000	X	0,393	+	-15600,000	0,000	X	-0,056	=	7000,003
	0,000	0,000		-3,112		0,000	0,000		-2,005		0,000
	-15600,000	0,000	X	0,393	+	15600,000	0,000	X	-0,056	=	-7000,003
	0,000	0,000		-3,112		0,000	0,000		-2,005		0,000
BARRA M											
	0,000	0,000	X	0,641	+	0,000	0,000	X	-0,056	=	0,000
	0,000	15600,000		-1,780		0,000	-15600,000		-2,005		3500,000
	0,000	0,000	X	0,641	+	0,000	0,000	X	-0,056	=	0,000
	0,000	-15600,000		-1,780		0,000	15600,000		-2,005		-3500,000
BARRA N											

15600,000	0,000	X	0,641	+	-15600,000	0,000	X	0,641	=	0,000
0,000	0,000		-1,780		0,000	0,000		0,000		0,000
-15600,000	0,000	X	0,641	+	15600,000	0,000	X	0,641	=	0,000
0,000	0,000		-1,780		0,000	0,000		0,000		0,000

BARRA O

5515,328	5515,328	X	0,641	+	-5515,328	-5515,328	X	-0,280	=	-3500,003
5515,328	5515,328		-1,780		-5515,328	-5515,328		-0,224		-3500,003
-5515,328	-5515,328	X	0,641	+	5515,328	5515,328	X	-0,280	=	3500,003
-5515,328	-5515,328		-1,780		5515,328	5515,328		-0,224		3500,003

BARRA P

15600,000	0,000	X	-0,056	+	-15600,000	0,000	X	-0,280	=	3500,002
0,000	0,000		-2,005		0,000	0,000		-0,224		0,000
-15600,000	0,000	X	-0,056	+	15600,000	0,000	X	-0,280	=	-3500,002
0,000	0,000		-2,005		0,000	0,000		-0,224		0,000

BARRA Q

0,000	0,000	X	0,641	+	0,000	0,000	X	-0,280	=	0,000
0,000	15600,000		0,000		0,000	-15600,000		-0,224		3500,002
0,000	0,000	X	0,641	+	0,000	0,000	X	-0,280	=	0,000
0,000	-15600,000		0,000		0,000	15600,000		-0,224		-3500,002

ROTACION DEL SISTEMA GLOVAL AL SISTEMA LOCAL

BARRA -A

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & | & X & | & 0 \\ & & & & & 6500.001 \end{vmatrix} = 6500.001$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & | & X & | & 0 \\ & & & & & -6500.001 \end{vmatrix} = -6500.001$$

BARRA -B

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & | & X & | & 0.000527 \\ & & & & & 0 \end{vmatrix} = 0.000527$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & | & X & | & -0.000527 \\ & & & & & 0 \end{vmatrix} = -0.000527$$

BARRA -C

$$\begin{vmatrix} -0.7071 & 0.7071 & | & X & | & -6499.999 \\ & & & & & 6499.999 \end{vmatrix} = 9192.298$$

$$\begin{vmatrix} -0.7071 & 0.7071 & | & X & | & 6499.999 \\ & & & & & -6499.999 \end{vmatrix} = -9192.298$$

BARRA -D

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & | & X & | & 6500.008 \\ & & & & & 0 \end{vmatrix} = 6500.008$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & | & X & | & -6500.008 \\ & & & & & 0 \end{vmatrix} = -6500.008$$

BARRA -E

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & | & X & | & 0 \\ & & & & & 499.995 \end{vmatrix} = 499.995$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & | & X & | & 0 \\ & & & & & -499.995 \end{vmatrix} = -499.995$$

BARRA -F

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & | & X & | & -6500.001 \\ & & & & & 0 \end{vmatrix} = -6500.001$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & | & X & | & 6500.001 \\ & & & & & 0 \end{vmatrix} = 6500.001$$

BARRA -G

$$\begin{vmatrix} -0.7071 & 0.7071 & | & X & | & -500.003 \\ & & & & & 500.003 \end{vmatrix} = 707.104$$

$$\begin{vmatrix} -0.7071 & 0.7071 & | & X & | & 500.003 \\ & & & & & -500.003 \end{vmatrix} = -707.104$$

BARRA -H

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline & 1 & 0 & |X| & \begin{array}{c} 7000.003 \\ 0 \end{array} & = 7000.003 \\ \hline & 1 & 0 & |X| & \begin{array}{c} -7000.003 \\ 0 \end{array} & = -7000.003 \\ \hline \end{array}$$

BARRA -I

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline & 0 & 1 & |X| & \begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} & = 0 \\ \hline & 0 & 1 & |X| & \begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} & = 0 \\ \hline \end{array}$$

BARRA -J

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline & 1 & 0 & |X| & \begin{array}{c} -3500.000 \\ 0 \end{array} & = -3500.000 \\ \hline & 1 & 0 & |X| & \begin{array}{c} 3500.000 \\ 0 \end{array} & = 3500.000 \\ \hline \end{array}$$

BARRA -K

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline & 0.7071 & 0.7071 & |X| & \begin{array}{c} -3500.003 \\ -3500.003 \end{array} & = -4949.704 \\ \hline & 0.7071 & 0.7071 & |X| & \begin{array}{c} 3500.003 \\ 3500.003 \end{array} & = 4949.704 \\ \hline \end{array}$$

BARRA -L

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline & 1 & 0 & |X| & \begin{array}{c} 7000.000 \\ 0 \\ 0 \end{array} & = 7000.000 \\ \hline & 1 & 0 & |X| & \begin{array}{c} -7000.000 \\ 0 \end{array} & = -7000.000 \\ \hline \end{array}$$

BARRA -M

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline & 0 & 1 & |X| & \begin{array}{c} 0 \\ 3500.0004 \end{array} & = 3500.0004 \\ \hline & 0 & 1 & |X| & \begin{array}{c} 0 \\ -3500.0004 \end{array} & = -3500.0004 \\ \hline \end{array}$$

BARRA -N

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline & 1 & 0 & |X| & \begin{array}{c} -0.00156 \\ 0 \end{array} & = -0.00156 \\ \hline & 1 & 0 & |X| & \begin{array}{c} 0.00156 \\ 0 \end{array} & = 0.00156 \\ \hline \end{array}$$

BARRA -O

$$\begin{vmatrix} 0.7071 & 0.7071 \\ 0.7071 & 0.7071 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} X \\ X \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -3499.999 \\ -3499.999 \end{vmatrix} = -4949.697$$

$$\begin{vmatrix} 0.7071 & 0.7071 \\ 0.7071 & 0.7071 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} X \\ X \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 3499.999 \\ 3499.999 \end{vmatrix} = 4949.697$$

BARRA -P

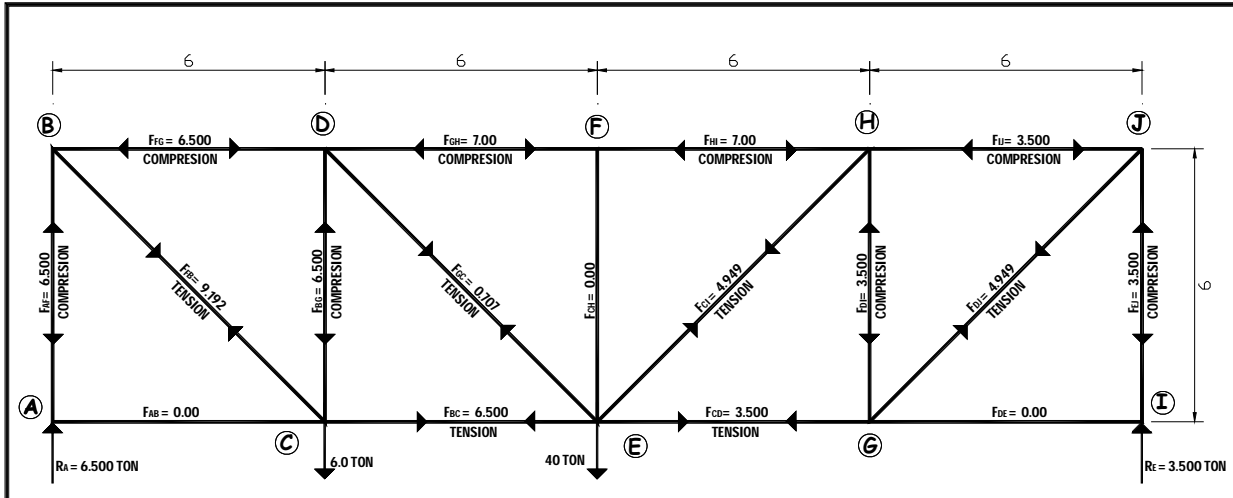
$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} X \\ X \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 3499.998 \\ 0 \end{vmatrix} = 3499.998$$

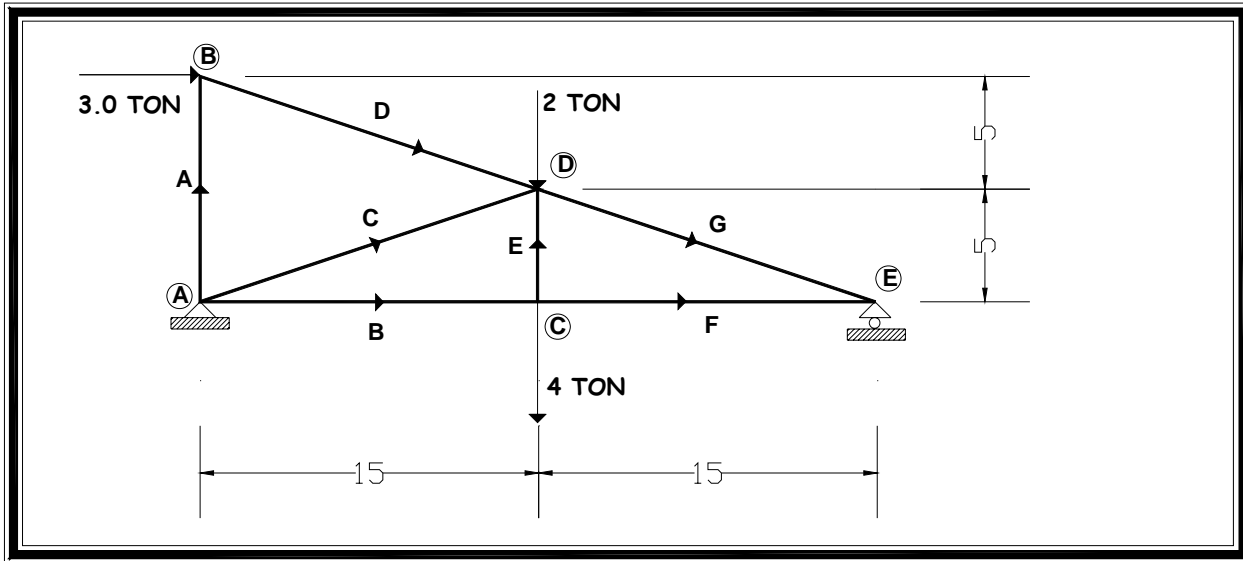
$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} X \\ X \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -3499.998 \\ 0 \end{vmatrix} = -3499.998$$

BARRA -Q

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} X \\ X \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 \\ 3499.998 \end{vmatrix} = 3499.998$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} X \\ X \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 \\ -3499.998 \end{vmatrix} = -3499.998$$





E = 2000000

BARRA	L (cm)	A (cm ²)	L	M	L ²	M ²	L*M
A	1000	3.04	0	1	0.0000	1.0000	0.0000
B	1500	10.8	1	0	1.0000	0.0000	0.0000
C	1581.14	10.8	0.9487	0.3162	0.9000	0.1000	0.3000
D	1581.14	3.04	0.9487	-0.3162	0.9000	0.1000	-0.3000
E	500	3.04	0	1	0.0000	1.0000	0.0000
F	1500	10.8	1	0	1.0000	0.0000	0.0000
G	1581.14	10.8	0.9487	-0.3162	0.9000	0.1000	-0.3000

Matriz de rigidez de cada barra

BARRA A

$$K_{11} = K_{22} \begin{vmatrix} 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 6080.000 \end{vmatrix} \quad K_{12} = K_{21} \begin{vmatrix} 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & -6080.000 \end{vmatrix}$$

BARRA B

$$K_{11} = K_{22} \begin{vmatrix} 14400.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 \end{vmatrix} \quad K_{12} = K_{21} \begin{vmatrix} -14400.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 \end{vmatrix}$$

BARRA C

$$K_{11} = K_{22} \begin{vmatrix} 12295.359 & 4098.021 \\ 4098.021 & 1365.863 \end{vmatrix} \quad K_{12} = K_{21} \begin{vmatrix} -12295.359 & -4098.021 \\ -4098.021 & -1365.863 \end{vmatrix}$$

BARRA D

$$K_{11} = K_{22} \begin{vmatrix} 3460.916 & -1153.517 \\ -1153.517 & 384.465 \end{vmatrix} \quad K_{12} = K_{21} \begin{vmatrix} -3460.916 & 1153.517 \\ 1153.517 & -384.465 \end{vmatrix}$$

BARRA E

$$K_{11} = K_{22} \begin{vmatrix} 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 12160.000 \end{vmatrix} \quad K_{12} = K_{21} \begin{vmatrix} 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & -12160.000 \end{vmatrix}$$

BARRA F

$$K_{11} = K_{22} \begin{vmatrix} 14400.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 \end{vmatrix} \quad K_{12} = K_{21} \begin{vmatrix} -14400.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 \end{vmatrix}$$

BARRA G

$$K_{11} = K_{22} \begin{vmatrix} 12295.359 & -4098.021 \\ -4098.021 & 1365.863 \end{vmatrix} \quad K_{12} = K_{21} \begin{vmatrix} -12295.359 & 4098.021 \\ 4098.021 & -1365.863 \end{vmatrix}$$

Matriz de rigideces ensamblada

18108,705	2124,900	0,000	0,000	-11733,333	0,000	-6375,372	-2124,900	0,000	0,000	0,000
2124,900	11908,225	0,000	-11200,000	0,000	0,000	-2124,900	-708,225	0,000	0,000	0,000
0,000	0,000	6375,372	-2124,900	0,000	0,000	-6375,372	2124,900	0,000	0,000	3000,000
0,000	-11200,000	-2124,900	11908,225	0,000	0,000	2124,900	-708,225	0,000	0,000	0,000
-11733,333	0,000	0,000	0,000	23466,667	0,000	0,000	0,000	-11733,333	0,000	0,000
0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	22400,000	0,000	-22400,000	0,000	0,000	-4000,000
-6375,372	-2124,900	-6375,372	2124,900	0,000	0,000	22769,184	-3339,128	-10018,441	3339,128	0,000
-2124,900	-708,225	2124,900	-708,225	0,000	-22400,000	-3339,128	24929,376	3339,128	-1112,925	-2000,000
0,000	0,000	0,000	0,000	-11733,333	0,000	-10018,441	3339,128	21751,774	-3339,128	0,000
0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	3339,128	-1112,925	-3339,128	1112,925	0,000

Matriz de rigideces reducida

6375,372	-2124,900	0,000	0,000	-6375,372	2124,900	0,000	3000,000
-2124,900	11908,225	0,000	0,000	2124,900	-708,225	0,000	0,000
0,000	0,000	23466,667	0,000	0,000	0,000	-11733,333	0,000
0,000	0,000	0,000	22400,000	0,000	-22400,000	0,000	-4000,000
-6375,372	2124,900	0,000	0,000	22769,184	-3339,128	-10018,441	0,000
2124,900	-708,225	0,000	-22400,000	-3339,128	24929,376	3339,128	-2000,000
0,000	0,000	-11733,333	0,000	-10018,441	3339,128	21751,774	0,000

Vector de desplazamientos resolviendo la matriz reducida

A	0,00000
	0,00000
B	3,743815
	0,08927634
C	1,022807
	-7,162298
D	0,915835
	-6,983727
E	2,045614
	0,0000

Por compatibilidad

$$\begin{aligned}
 \{d'_{1a}\} &= \{0\} & \{d'_{2a}\} &= \{d_B\}' \\
 \{d'_{1b}\} &= \{0\} & \{d'_{2b}\} &= \{d_C\}' \\
 \{d'_{1c}\} &= \{0\} & \{d'_{2c}\} &= \{d_D\}' \\
 \{d'_{1d}\} &= \{d_B\}' & \{d'_{2d}\} &= \{d_D\}' \\
 \{d'_{1e}\} &= \{d_C\}' & \{d'_{2e}\} &= \{d_D\}' \\
 \{d'_{1f}\} &= \{d_C\}' & \{d'_{2f}\} &= \{d_E\}' \\
 \{d'_{1g}\} &= \{d_D\}' & \{d'_{2g}\} &= \{d_E\}'
 \end{aligned}$$

Sustituyendo en las ecuaciones fuerza-desplazamiento para cada barra

$$\begin{aligned}
 [P'_1] &= [K'_{1,1}]\{d'_1\} + [K'_{1,2}]\{d'_2\} \\
 [P'_2] &= [K'_{2,1}]\{d'_1\} + [K'_{2,2}]\{d'_2\}
 \end{aligned}$$

BARRA A

$$\begin{aligned}
 \begin{vmatrix} 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 6080 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 0.000 \\ 0.000 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & -6080 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 3.564 \\ 0.16 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 0.000 \\ -999.894 \end{vmatrix} \\
 \begin{vmatrix} 0.000 & 0.000 \\ 0 & -6080 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 0.000 \\ 0.000 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 6080 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 3.564 \\ 0.164 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 0.000 \\ 999.894 \end{vmatrix}
 \end{aligned}$$

BARRA B

$$\begin{aligned}
 \begin{vmatrix} 14400 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 0.000 \\ 0.000 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -14400 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 0.833 \\ -5.392 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} -12000.944 \\ 0.000 \end{vmatrix} \\
 \begin{vmatrix} -14400 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 0.000 \\ 0.000 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 14400 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 0.833 \\ -5.392 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 12000.944 \\ 0.000 \end{vmatrix}
 \end{aligned}$$

BARRA C

$$\begin{aligned}
 \begin{vmatrix} 12295.359 & 4098.021 \\ 4098.021 & 1365.863 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 0.000 \\ 0.000 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -12295.36 & -4098.021 \\ -4098.021 & -1365.863 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 0.955 \\ -5.063 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 9000.945 \\ 2999.99875 \end{vmatrix} \\
 \begin{vmatrix} -12295.359 & -4098.021 \\ -4098.021 & -1365.863 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 0.000 \\ 0.000 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 12295.36 & 4098.021 \\ 4098.021 & 1365.863 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 0.955 \\ -5.0629 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} -9000.945 \\ -2999.999 \end{vmatrix}
 \end{aligned}$$

BARRA D

$$\begin{aligned}
 \begin{vmatrix} 3460.915 & -1153.517 \\ -1153.517 & 384.465 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 3.564 \\ 0.164 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -3460.916 & 1153.517 \\ 1153.517 & -384.465 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 0.955 \\ -5.062 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 2999.999 \\ -999.894 \end{vmatrix} \\
 \begin{vmatrix} -3460.916 & 1153.517 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 3.564 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3460.916 & -1153.517 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 0.955 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} -2999.999 \end{vmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\begin{vmatrix} 1153.517 & -384.465 \\ 0.000 & 0.000 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 0.833 \\ -5.391 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1153.517 & 384.4652 \\ 0.000 & -12160 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 0.955 \\ -5.0629 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0.000 \\ -3999.996 \end{vmatrix}$$

BARRA E

$$\begin{vmatrix} 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 12160 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 0.833 \\ -5.391 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & -12160 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 0.955 \\ -5.0629 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0.000 \\ -3999.996 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & -12160 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 0.833 \\ -5.392 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 12160 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 0.955 \\ -5.0629 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0.000 \\ 3999.995 \end{vmatrix}$$

BARRA F

$$\begin{vmatrix} 14400 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 0.833 \\ -5.392 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -14400 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 1.667 \\ 0.000 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -12000.947 \\ 0.000 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -14400 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 0.833 \\ -5.392 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 14400 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 1.667 \\ 0.000 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 12000.947 \\ 0.000 \end{vmatrix}$$

BARRA G

$$\begin{vmatrix} 12295.359 & -4098.021 \\ -4098.021 & 1365.863 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 0.955 \\ -5.063 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -12295.36 & 4098.021 \\ 4098.021 & -1365.863 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 1.667 \\ 0.000 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 12000.941 \\ -3999.892 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -12295.359 & 4098.0211 \\ 4098.0211 & -1365.8631 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 0.955396 \\ -5.0629 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 12295.36 & -4098.021 \\ -4098.021 & 1365.863 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 1.666798 \\ 0.000 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -12000.941 \\ 3999.89213 \end{vmatrix}$$

comprobación del equilibrio

NODO A

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline \text{RAX} & = & 0,00 & + & -12000,935 & + & 9000,932 & + & 0,00 & = & -3000,003 \\ \text{RAY} & & -999,895 & & 0,000 & & 2999,994 & & 0,000 & & 2000,099 \\ \hline \end{array}$$

NODO B

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline 3000,00 & = & 0,000 & + & 3000,000 & + & 0,000 & + & 0,000 & = & 3000,000 \\ 0,00 & & 999,895 & & -999,894 & & 0,000 & & 0,000 & & 0,001 \\ \hline \end{array}$$

NODO C

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline 0,00 & = & 12000,935 & + & 0,000 & + & -12000,935 & + & 0,000 & = & 0,000 \\ -4000,00 & & 0,000 & & -3999,990 & & 0,000 & & 0,000 & & -3999,990 \\ \hline \end{array}$$

NODO D

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline 0,00 & = & -9000,932 & + & -3000,000 & + & 0,000 & + & 12000,936 & = & 0,005 \\ -2000,00 & & -2999,994 & & 999,894 & & 3999,990 & & -3999,890 & & -2000,000 \\ \hline \end{array}$$

NODO E

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline 0 & = & 12000,935 & + & -12000,936 & + & 0,000 & + & 0,000 & + & 0,000 & = & -0,001 \\ \text{RE} & & 0,000 & & 3999,890 & & 0,000 & & 0,000 & & 0,000 & & 3999,890 \\ \hline \end{array}$$

ROTACION DEL SISTEMA GLOVAL AL SISTEMA LOCAL

BARRA -A

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & 1 & X \\ \hline \end{array} \begin{array}{l} 0.000 \\ -999.894 \\ 0.000 \\ 999.894 \end{array} = \begin{array}{l} -999.894 \\ 999.894 \end{array}$$

BARRA -B

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 0 & X \\ \hline \end{array} \begin{array}{l} -12000.944 \\ 0.000 \\ 12000.944 \\ 0.000 \end{array} = \begin{array}{l} -12000.944 \\ 12000.944 \end{array}$$

BARRA -C

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 0.9487 & 0.3162 & X \\ \hline \end{array} \begin{array}{l} 9000.945 \\ 2999.999 \\ -9000.945 \\ -2999.999 \end{array} = \begin{array}{l} 9487.796 \\ -9487.796 \end{array}$$

BARRA -D

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 0.9487 & -0.3162 & X \\ \hline \end{array} \begin{array}{l} 2999.999 \\ -999.894 \\ -2999.999 \\ 999.894 \end{array} = \begin{array}{l} 3162.266 \\ -3162.266 \end{array}$$

BARRA -E

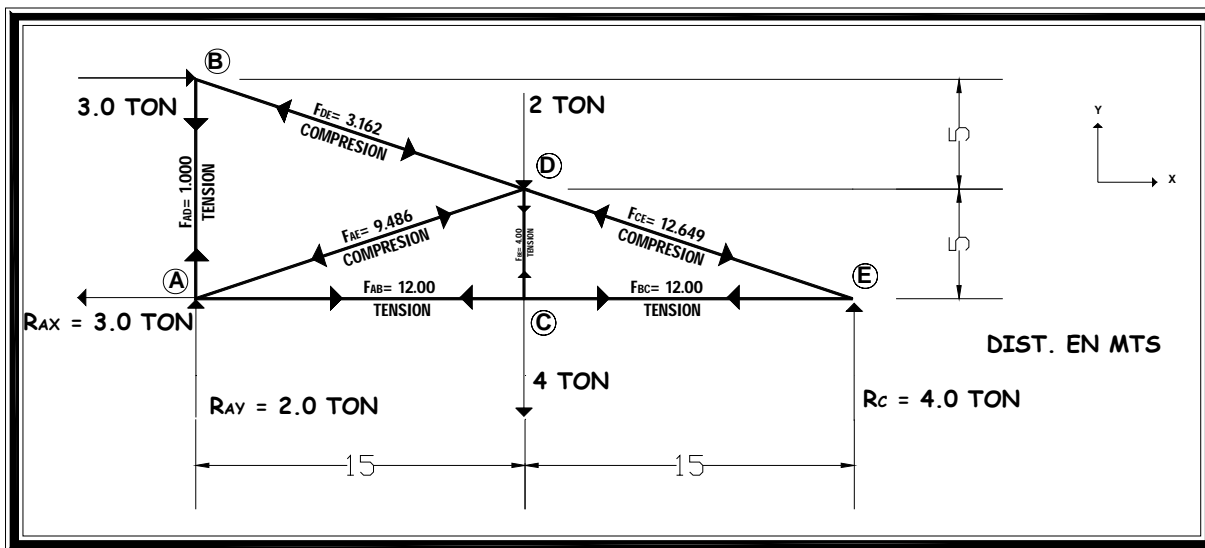
$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & 1 & X \\ \hline \end{array} \begin{array}{l} 0.000 \\ -3999.995 \\ 0.000 \\ 3999.995 \end{array} = \begin{array}{l} -3999.995 \\ 3999.995 \end{array}$$

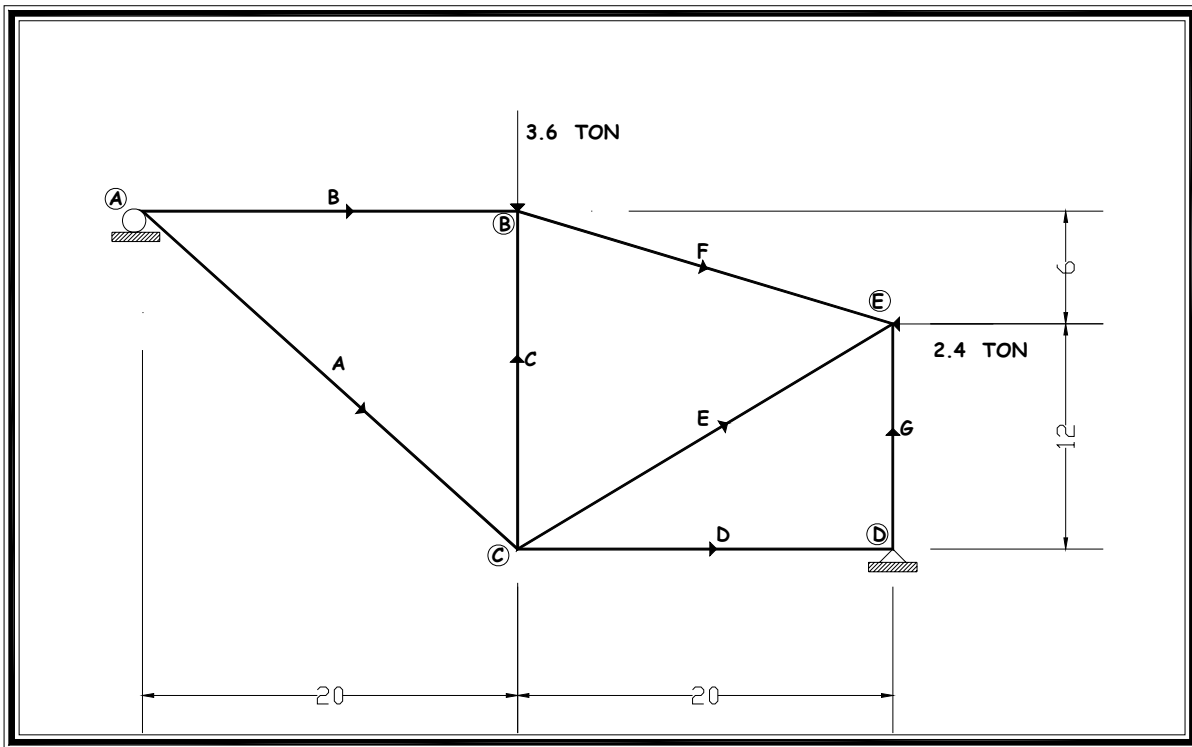
BARRA -F

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 0 & X \\ \hline \end{array} \begin{array}{l} -12000.947 \\ 0.000 \\ 12000.947 \\ 0.000 \end{array} = \begin{array}{l} -12000.947 \\ 12000.947 \end{array}$$

BARRA -G

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 0.9487 & -0.3162 & X \\ \hline \end{array} \begin{array}{l} 12000.941 \\ -3999.892 \\ -12000.941 \\ 3999.892 \end{array} = \begin{array}{l} 12650.058 \\ -12650.058 \end{array}$$





E = 2000000

BARRA	L (cm)	A (cm ²)	L	M	L ²	M ²	L*M
A	2690.72	3.04	-0.7433	0.6689	0.5525	0.4474	-0.4972
B	2000	3.04	1	0	1.0000	0.0000	0.0000
C	1800	3.04	0	1	0.0000	1.0000	0.0000
D	2000	3.04	1	0	1.0000	0.0000	0.0000
E	2332.38	3.04	0.8575	0.5145	0.7353	0.2647	0.4412
F	2088.06	3.04	-0.9578	0.2873	0.9174	0.0825	-0.2752
G	1200	3.04	0	1	0.0000	1.0000	0.0000

Matriz de rigidez de cada barra

BARRA A

$$K_{11} = K_{22} \begin{vmatrix} 1248.428 & -1123.467 \\ -1123.467 & 1011.015 \end{vmatrix} \quad K_{12} = K_{21} \begin{vmatrix} -1248.428 & 1123.467 \\ 1123.467 & -1011.015 \end{vmatrix}$$

BARRA B

$$K_{11} = K_{22} \begin{vmatrix} 3040.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 \end{vmatrix} \quad K_{12} = K_{21} \begin{vmatrix} -3040.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 \end{vmatrix}$$

BARRA C

$$K_{11} = K_{22} \begin{vmatrix} 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 3377.778 \end{vmatrix} \quad K_{12} = K_{21} \begin{vmatrix} 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & -3377.778 \end{vmatrix}$$

BARRA D

$$K_{11} = K_{22} \begin{vmatrix} 3040.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 \end{vmatrix} \quad K_{12} = K_{21} \begin{vmatrix} -3040.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 \end{vmatrix}$$

BARRA E

$$K_{11} = K_{22} \begin{vmatrix} 1916.781 & 1150.069 \\ 1150.069 & 690.041 \end{vmatrix} \quad K_{12} = K_{21} \begin{vmatrix} -1916.781 & -1150.069 \\ -1150.069 & -690.041 \end{vmatrix}$$

BARRA F

$$K_{11} = K_{22} \begin{vmatrix} 2671.224 & -801.256 \\ -801.256 & 240.343 \end{vmatrix} \quad K_{12} = K_{21} \begin{vmatrix} -2671.224 & 801.256 \\ 801.256 & -240.343 \end{vmatrix}$$

BARRA G

$$K_{11} = K_{22} \begin{vmatrix} 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 5066.667 \end{vmatrix} \quad K_{12} = K_{21} \begin{vmatrix} 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & -5066.667 \end{vmatrix}$$

Matriz de rigideces ensamblada

4288,428	-1123,467	-3040,000	0,000	-1248,428	1123,467	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
-1123,467	1011,015	0,000	0,000	1123,467	-1011,015	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
-3040,000	0,000	5711,224	-801,256	0,000	0,000	0,000	0,000	-2671,224	801,256	0,000
0,000	0,000	-801,256	3618,121	0,000	-3377,778	0,000	0,000	801,256	-240,343	-3600,000
-1248,428	1123,467	0,000	0,000	6205,209	26,601	-3040,000	0,000	-1916,781	-1150,069	0,000
1123,467	-1011,015	0,000	-3377,778	26,601	5078,834	0,000	0,000	-1150,069	-690,041	0,000
0,000	0,000	0,000	0,000	-3040,000	0,000	3040,000	0,000	0,000	0,000	0,000
0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	5066,667	0,000	-5066,667	0,000
0,000	0,000	-2671,224	801,256	-1916,781	-1150,069	0,000	0,000	4588,005	348,813	-2400,000
0,000	0,000	801,256	-240,343	-1150,069	-690,041	0,000	-5066,667	348,813	5997,051	0,000

Matriz de rigideces reducida

4288,428	-3040,000	0,000	-1248,428	1123,467	0,000	0,000	0,000
-3040,000	5711,224	-801,256	0,000	0,000	-2671,224	801,256	0,000
0,000	-801,256	3618,121	0,000	-3377,778	801,256	-240,343	-3600,000
-1248,428	0,000	0,000	6205,209	26,601	-1916,781	-1150,069	0,000
1123,467	0,000	-3377,778	26,601	5078,834	-1150,069	-690,041	0,000
0,000	-2671,224	801,256	-1916,781	-1150,069	4588,005	348,813	-2400,000
0,000	801,256	-240,343	-1150,069	-690,041	348,813	5997,051	0,000

Vector de desplazamientos resolviendo la matriz reducida

A	-0,84856
	0,00000
B	-1,769682
	-3,243937
C	-0,7894741
	-2,426816
D	0,00000
	0,00000
E	-1,908867
	-0,2131723

Por compatibilidad

$$\begin{aligned}
 \{d'_{1a}\} &= \{d_A\} & \{d'_{2a}\} &= \{d_C\} \\
 \{d'_{1b}\} &= \{d_A\} & \{d'_{2b}\} &= \{d_B\} \\
 \{d'_{1c}\} &= \{d_C\} & \{d'_{2c}\} &= \{d_B\} \\
 \{d'_{1d}\} &= \{d_C\} & \{d'_{2d}\} &= \{0\} \\
 \{d'_{1e}\} &= \{d_C\} & \{d'_{2e}\} &= \{d_E\} \\
 \{d'_{1f}\} &= \{d_C\} & \{d'_{2f}\} &= \{d_E\} \\
 \{d'_{1g}\} &= \{0\} & \{d'_{2g}\} &= \{d_E\}
 \end{aligned}$$

Sustituyendo en las ecuaciones fuerza-desplazamiento para cada barra

$$\begin{aligned}
 [P'_1] &= [K'_{1,1}]\{d'_1\} + [K'_{1,2}]\{d'_2\} \\
 [P'_2] &= [K'_{2,1}]\{d'_1\} + [K'_{2,2}]\{d'_2\}
 \end{aligned}$$

BARRA A

$$\begin{aligned}
 \begin{vmatrix} 1248.427 & -1123.467 \\ -1123.467 & 1011.015 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} -0.84856 \\ 0.000 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1248.428 & 1123.467 \\ 1123.467 & -1011.015 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} -0.789 \\ -2.427 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} -2800.212 \\ 2519.927 \end{vmatrix} \\
 \begin{vmatrix} -1248.427 & 1123.467 \\ 1123.467 & -1011.015 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} -0.848 \\ 0.000 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1248.427 & -1123.467 \\ -1123.467 & 1011.015 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} -0.789 \\ -2.427 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 2800.212 \\ -2519.927 \end{vmatrix}
 \end{aligned}$$

BARRA B

$$\begin{aligned}
 \begin{vmatrix} 3040 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} -0.848 \\ 0.00000 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -3040 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} -1.769 \\ -3.243937 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 2800.212 \\ 0.000 \end{vmatrix} \\
 \begin{vmatrix} -3040 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} -0.848 \\ 0.000 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3040 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} -1.769 \\ -3.244 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} -2800.212 \\ 0.000 \end{vmatrix}
 \end{aligned}$$

BARRA C

$$\begin{aligned}
 \begin{vmatrix} 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 3377.778 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} -0.789 \\ -2.427 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & -3377.778 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} -1.769 \\ -3.244 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 0.000 \\ 2760.053 \end{vmatrix} \\
 \begin{vmatrix} 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & -3377.778 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} -0.789 \\ -2.427 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 3377.778 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} -1.769 \\ -3.244 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 0.000 \\ -2760.053 \end{vmatrix}
 \end{aligned}$$

BARRA D

$$\begin{aligned}
 \begin{vmatrix} 3040 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} -0.789474 \\ -2.426816 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -3040 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 0.000 \\ 0.000 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} -2400.001 \\ 0.000 \end{vmatrix} \\
 \begin{vmatrix} -3040 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} -0.789 \\ -2.427 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3040 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 0.000 \\ 0.000 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 2400.001 \\ 0.000 \end{vmatrix}
 \end{aligned}$$

BARRA E

$$\begin{bmatrix} 1916.781 & 1150.069 \\ 1150.069 & 690.041 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -0.789 \\ -2.427 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1916.781 & -1150.069 \\ -1150.069 & -690.041 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -1.909 \\ -0.213 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -400.211 \\ -240.127 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1916.781 & -1150.069 \\ -1150.069 & -690.041 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -0.789 \\ -2.427 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1916.781 & 1150.069 \\ 1150.069 & 690.041 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -1.909 \\ -0.213 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 400.211 \\ 240.127 \end{bmatrix}$$

BARRA F

$$\begin{bmatrix} 2671.224 & -801.256 \\ -801.256 & 240.343 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -1.769 \\ -3.244 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2671.224 & 801.255 \\ 801.256 & -240.343 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -1.909 \\ -0.213 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2800.211 \\ -839.946 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -2671.224 & 801.256 \\ 801.256 & -240.343 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -1.769 \\ -3.244 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2671.224 & -801.256 \\ -801.256 & 240.343 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -1.909 \\ -0.213 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2800.211 \\ 839.946 \end{bmatrix}$$

BARRA G

$$\begin{bmatrix} 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 5066.667 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0.000 \\ 0.000 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & -5066.667 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -1.909 \\ -0.213 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.000 \\ 1080.073 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & -5066.667 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0.000 \\ 0.000 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 5066.667 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -1.909 \\ -0.213 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.000 \\ -1080.073 \end{bmatrix}$$

NODO A

$$\begin{vmatrix} 0 \\ \text{Ray} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2800,212 \\ 2519,927 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2800,212 \\ 0,000 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0,000 \\ 0,000 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0,000 \\ 0,000 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0,000 \\ 2519,927 \end{vmatrix}$$

NODO B

$$\begin{vmatrix} 0,00 \\ -3600,00 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2800,212 \\ 0,000 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0,000 \\ -2760,053 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2800,211 \\ -839,946 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0,000 \\ 0,000 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0,000 \\ -3600,000 \end{vmatrix}$$

NODO C

$$\begin{vmatrix} 0,00 \\ 0,00 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2800,212 \\ -2519,927 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0,000 \\ 2760,053 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -400,211 \\ -240,127 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -2400,001 \\ 0,000 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0,000 \\ -0,001 \end{vmatrix}$$

NODO D

$$\begin{vmatrix} \text{Rdx} \\ \text{Rdy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2400,001 \\ 0,000 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0,000 \\ 1080,073 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0,000 \\ 0,000 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0,000 \\ 0,000 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2400,001 \\ 1080,073 \end{vmatrix}$$

NODO E

$$\begin{vmatrix} -2400,00 \\ 0,00 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2800,211 \\ 839,946 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 400,211 \\ 240,127 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0,000 \\ -1080,073 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0,000 \\ 0,000 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0,000 \\ 0,000 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2400,000 \\ 0,000 \end{vmatrix}$$

ROTACION DEL SISTEMA GLOVAL AL SISTEMA LOCAL

BARRA -A

$$\begin{vmatrix} -0.7433 & 0.6689 \\ -0.7433 & 0.6689 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} X \\ X \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -2800.212 \\ 2519.927 \\ 0 \\ 2800.212 \\ -2519.927 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3766.977 \\ -3766.977 \end{vmatrix}$$

BARRA -B

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} X \\ X \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2800.212 \\ 0 \\ -2800.212 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2800.212 \\ -2800.212 \end{vmatrix}$$

BARRA -C

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} X \\ X \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 \\ 2760.053 \\ 0 \\ -2760.053 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2760.053 \\ -2760.053 \end{vmatrix}$$

BARRA -D

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} X \\ X \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -2400.001 \\ 0 \\ 2400.001 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2400.001 \\ 2400.001 \end{vmatrix}$$

BARRA -E

$$\begin{vmatrix} 0.8575 & 0.5145 \\ 0.8575 & 0.5145 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} X \\ X \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -400.211 \\ -240.127 \\ 400.211 \\ 240.127 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -466.726 \\ 466.726 \end{vmatrix}$$

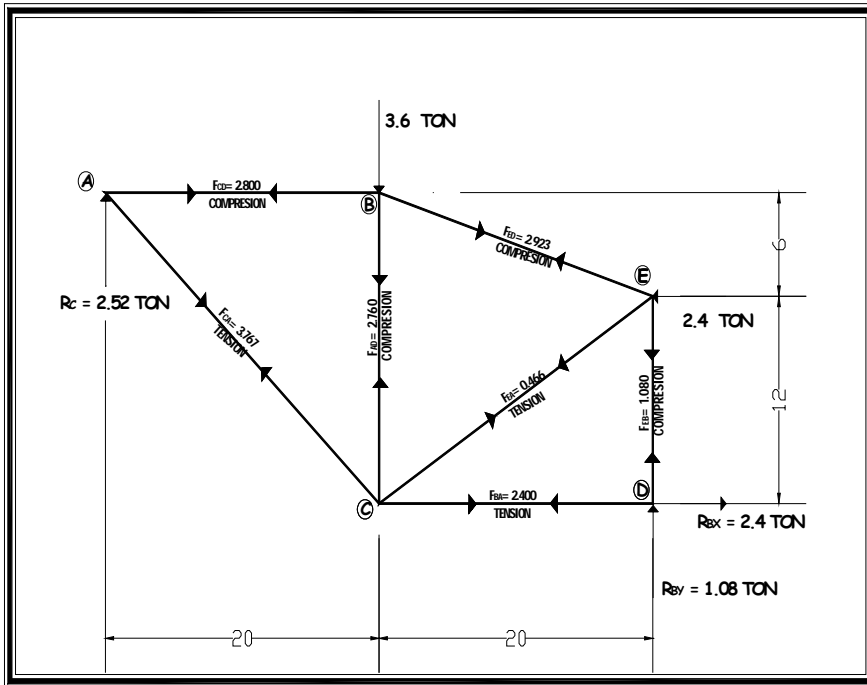
BARRA -F

$$\begin{vmatrix} -0.9578 & 0.2873 \\ -0.9578 & 0.2873 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} X \\ X \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2800.211 \\ -839.946 \\ -2800.211 \\ 839.946 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2923.359 \\ 2923.359 \end{vmatrix}$$

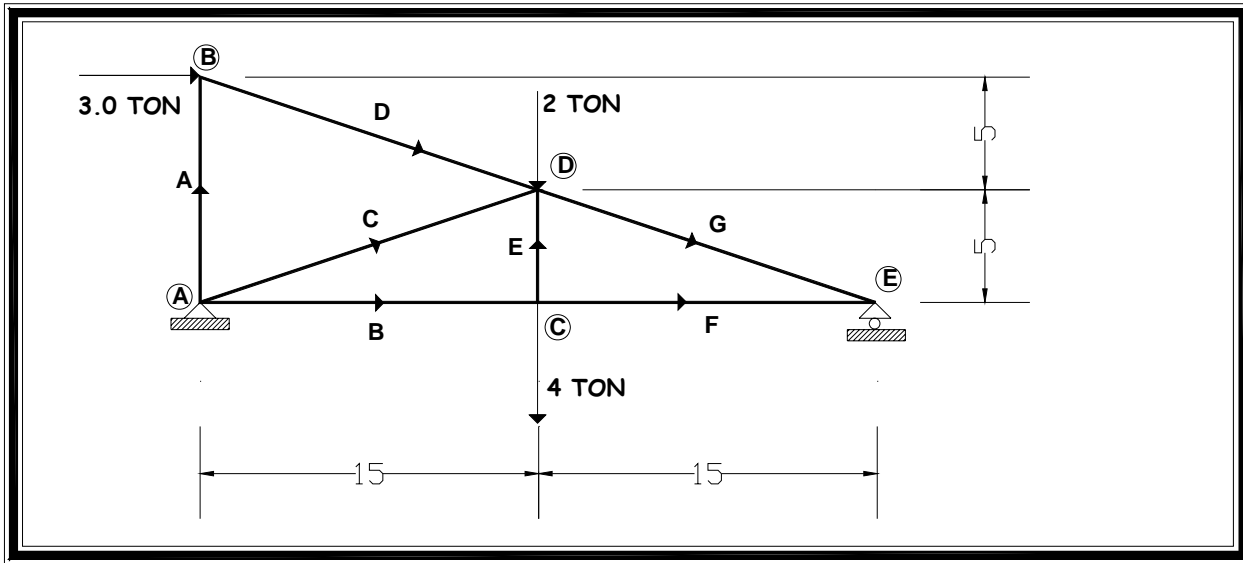
BARRA -G

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} X \\ X \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 \\ 1080.073 \\ 0 \\ -1080.073 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1080.073 \\ -1080.073 \end{vmatrix}$$

-1080.073



Comparación de resultados



BARRA	MÉTODOS DE NODOS	MÉTODOS DE SECCIONES	TRABAJO VIRTUAL		MÉTODOS DE RIGIDEZES			
	cargas	cargas	desplazamientos		desplazamientos		cargas	
			x	y	x	y		
A	1,000	1,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,999	
B	12,000	12,000	3,744	-0,089	3,744	0,089	12,000	
C	9,486	9,486	1,023	7,161	1,023	-7,162	9,487	
D	3,162	3,162	0,916	6,982	0,916	-6,984	3,162	
E	4,000	4,000	2,045	0,000	2,046	0,000	3,999	
F	12,000	12,000						12,000
G	12,649	12,649						12,650

Nota: Las cargas están dadas en toneladas
 Los desplazamientos están dados en centímetros

*PROGRAMA
PARA EL
CALCULO
DE
ARMADURAS*

UMSNH

FACULTAD DE INGENIERIA CIVIL

POSGRADO EN ESTRUCTURAS

PROGRAMACION

MANUAL DE USUARIO DEL PROGRAMA "ARMADURAS".

PROGRAMA ELABORADO POR: SERGIO CAMPOS DURAN

PROCEDIMIENTO PARA LA EJECUCIÓN DEL PROGRAMA

El programa adjunto se reconoce con el nombre de "ARMADURAS.EXE" .La ejecución de este programa se realiza mediante los siguientes pasos:

Paso 1: Se debe ser congruente con las unidades.

Paso 2: Debemos abrir el programa ejecutable de ARMADURA.EXE

Una vez abierto el programa éste nos pide la introducción del Nombre de un Archivo de Datos, el cual tiene la siguiente forma para el caso de ARMADURA2D:

Ejemplo de archivo de datos para una armadura en 3D:

```
1----3 8 16 4 1 1
2----1 000 000 000
3----2 400 000 000
4----3 100 400 100
5----4 300 400 100
6----5 100 400 300
7----6 300 400 300
8----7 000 000 400
9----8 400 000 400
10---1 20 2000000
11---1 1 2 1
12---2 7 1 1
13---3 8 7 1
14---4 2 8 1
15---5 2 4 1
16---6 4 3 1
17---7 2 3 1
18---8 1 3 1
19---9 3 5 1
20---10 1 5 1
21---11 7 5 1
22---12 5 6 1
23---13 7 6 1
24---14 8 6 1
25---15 6 4 1
26---16 8 4 1
27---1 100E100 100E100 100E100
28---2 100E100 100E100 100E100
29---7 100E100 100E100 100E100
30---8 100E100 100E100 100E100
31---5 5000 -5000 000
```


La primera fila de números nos indica:

Grado de Libertad	numero de nodos	numero de barras	numero de apoyos	numero de propiedades	nodos cargados
3	8	16	4	1	1

nota: el grado de libertad para una armadura 2d deberá ser **2** y para 3d este deberá ser **3**

Las filas 2 al 9 de números nos indican:

Numero de Nodo	coordenada en X	coordenada en Y	coordenada en Z
1	000	000	000
2	400	000	000
.			
.			
8	400	000	400

Las fila 10 de números nos indican:

Numero de Propiedades	área de la sección	modulo de elasticidad
1	20	2000000

Las filas 11 al 26 de números nos indican:

Las incidencias y propiedades de las barras, empezando de izquierda a derecha para cada barra: numero de barra, Nodo inicial, Nodo final y propiedad.

Numero de Barra	Nodo inicial	Nodo final	Numero propiedad
1	1	2	1
2	7	1	1
.			
.			
16	8	4	1

Las filas 27 al 30 de números nos indican:

numero de nodo,	Restricción en la dirección X	Restricción en la dirección y	Restricción en La dirección z
1	100E100	100E100	100E100
.			
.			
8	100E100	100E100	100E100

NOTA : considerar empotramiento se deberá considerar una rigidez grande por lo que se recomienda 100 E 100 y para considerar que tiene permitido el desplazamiento en alguna dirección se considera una rigidez pequeña se recomienda 0

Las filas 31 de números nos indican:

Las cargas concentradas en cada uno de los nodos, empezando de izquierda a derecha para cada nodo: carga en dirección X y carga en dirección Y.

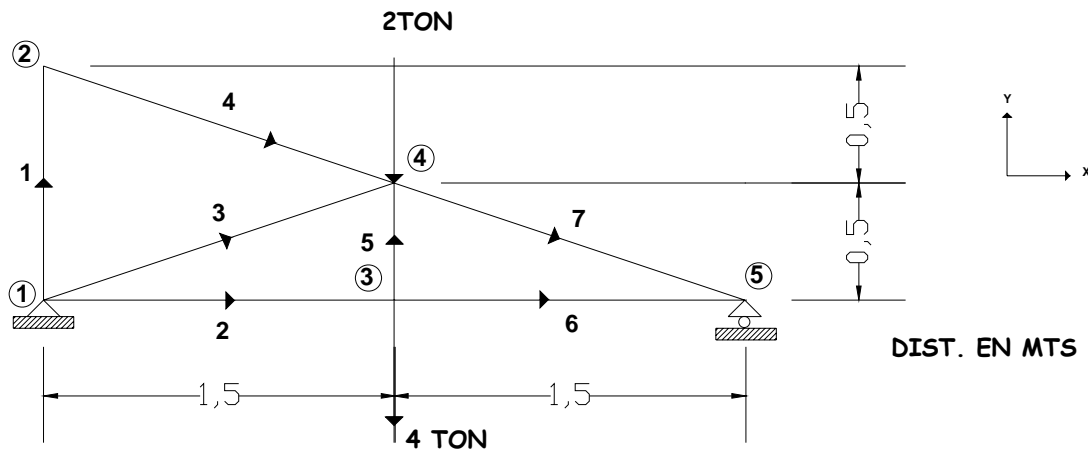
numero de nodo,	Carga en la dirección X	Carga en la dirección y	Carga en La dirección z
5	5000	-5000	000

Pasó 3: introducimos el nombre del archivo de datos creado "A2D.TXT".

Pasó 4: introducimos el nombre del archivo de Resultados "R2D.TXT".
o cualquier otro nombre que el usuario elija, pero con extensión txt.

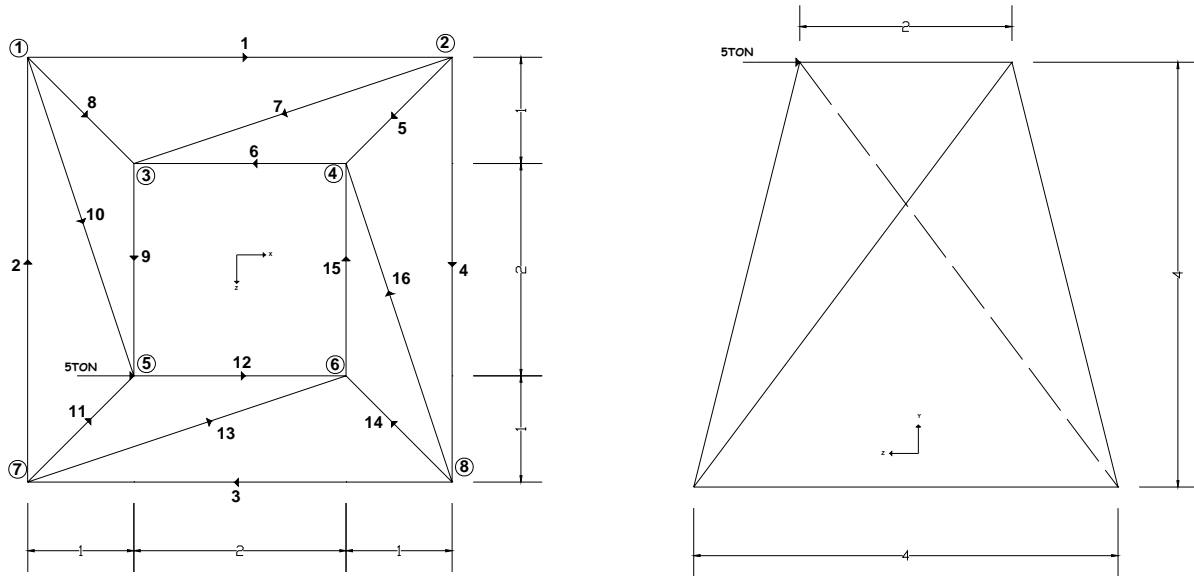
Para el cálculo de elementos mecánicos para armaduras en 2Ds el procedimiento descrito anteriormente es muy similar.

Ejemplo para armadura en 2D.



El nombre del archivo de datos es "A2D.TXT"

Ejemplo para armadura en 3D.



El nombre del archivo de datos es "A3D.TXT"

Código fuente empleado el método de rigideces programado en fortran 90

```

PROGRAM rigideces
IMPLICIT NONE
CHARACTER(20):: archdat, archres
INTEGER:: nn, nb, gl, error
REAL(8), POINTER:: p(:), k(:, :)

PRINT '(5X,A,/)','_____ '
PRINT '(18X,A)', 'PROGRAMA ELABORADO POR: SERGIO CAMPOS'
PRINT '(5X,A,/)','_____ '
PRINT '(8X,A)', 'ESTE PROGRAMA OBTIENE LA SOLUCIONES DE ARMADURAS EN 2D Y 3D'
PRINT *

      WRITE(*, "(5x,a,\)") "ARCHIVO DE DATOS:..... "
      READ * , archdat
      WRITE(*, "(5x,a,\)") "ARCHIVO DE RESULTADOS:..... "
      READ* , archres

      OPEN(unit=1, file=archdat, status="old", action="read", iostat=error)
      READ(1,* , iostat=error) gl, nn, nb
      CLOSE(unit = 1)

      ALLOCATE(p(nn*gl), stat=error)
      p=0;
      CALL lee_escribe_datos(gl, nn, p, archdat, archres);

      ALLOCATE(k(nn*gl, nn*gl), stat=error)
      k=0

      CALL emsamble( gl, nb, k)
      CALL gaus_jord(k, p)
      DEALLOCATE(k)

      CALL imprime_desp(p, archres, nn, gl)
      CALL fuerzas( gl, nb, p, archres)
      DEALLOCATE(p)

      PRINT "(//,20X, a, //)", " PROCESO TERMINADO CON EXITO"

CONTAINS
*****
SUBROUTINE lee_escribe_datos(gl, nn, p, archdat, archres)
IMPLICIT NONE
CHARACTER(*), INTENT(IN):: archdat, archres
INTEGER, INTENT(INOUT):: nn
REAL(8), POINTER:: p (:)

INTEGER:: r, n, error, nb, na, np, nc, gl, i
REAL(8), POINTER:: coord(:, :), prop(:, :), apoy(:, :)
INTEGER, POINTER:: incip(:, :)

OPEN(unit=1, file= archdat, status="old", action="read", iostat =error)
OPEN(unit=2, file= archres, status="replace", action="write", iostat =error)

```

```

IF (gl ==2) THEN
  READ(1,*,iostat=error) gl, nn, nb, na, np, nc
  ALLOCATE(coord(nn, 2), prop(np, 2), incip(nb, 3), apoy(na, 3), stat=error)
  coord=0; prop=0; incip=0; apoy=0

ELSE IF (gl ==3) THEN
  READ(1,*,iostat=error) gl, nn, nb, na, np, nc
  ALLOCATE(coord(nn, 3), prop(np, 3), incip(nb, 3), apoy(na, 4), stat=error)
  coord=0; prop=0; incip=0; apoy=0

END IF

WRITE(2,*) "ARCHIVO DE DATOS:  ", archdat
WRITE(2,"(x,a,)\") "TIPO DE ESTRUCTURA: "

IF (gl ==2) THEN
  WRITE(2,*) "Armadura Bidimensional"

ELSE IF (gl ==3) THEN
  WRITE(2,*) "Armadura Tridimensional"

END IF

WRITE(2,"(//5(a, i3)") "Grados l.....", gl
WRITE(2,"(5(a, i3)") "Nudos.....", nn
WRITE(2,"(5(a, i3)") "Barras.....", nb
WRITE(2,"(5(a, i3)") "Apoyos.....", na
WRITE(2,"(5(a, i3)") "Propiedades.....", np
WRITE(2,"(5(a, i3)") "Nudos cargados.....", nc
WRITE(2,"(/)")

IF (gl ==2) THEN
  WRITE(2,*) "      COORDENADAS DE LOS NUDOS"
  WRITE(2,*) "NUDOS      X      Y"

  DO r=1, nn
    READ(1,*, iostat=error) r, coord(r, 1:2)
  END DO

  DO r=1, nn
    WRITE(2,"(i4, 2f18.4)") r, coord(r, 1:2)
  END DO

  DO r=1, np
    READ(1,*, iostat=error) n, prop(n, 1:2)
  END DO

  DO r=1, nb
    READ(1,*, iostat=error) n, incip(n, 1:3)
  END DO

ELSE IF (gl ==3) THEN
  WRITE(2,*) "      COORDENADAS DE LOS NUDOS"
  WRITE(2,*) "NUDOS      X      Y      Z"

  DO r=1, nn
    READ(1,*, iostat=error) r, coord(r, 1:3)

```

```

END DO

DO r=1, nn
  WRITE(2, "(i4, 3f18.4)") r, coord(r, 1:3)
END DO

DO r=1, np
  READ(1, *, iostat=error) n, prop(n, 1:2)
END DO

DO r=1, nb
  READ(1, *, iostat=error) n, incip(n, 1:3)
END DO

END IF

WRITE(2, "(/)")
WRITE(2, *) "          PROPIEDADES DE LAS BARRAS"
WRITE(2, *) "BARRA  Nudo   Nudo   A     E"
WRITE(2, *) "          Inicial  Final"

IF (gl ==2) THEN
  DO r=1, nb
    WRITE(2, "(i4, i7, i8, f17.4, f15.2, 10x)") r, incip(r,1:2), prop(incip(r,3),1:2)
  END DO

ELSE IF (gl ==3) THEN
  DO r=1, nb
    WRITE(2, "(i4, i7, i8, f17.4, f15.2, 10x)") r, incip(r,1:2), prop(incip(r,3),1:2)
  END DO

END IF

DO r=1, na
  READ(1, *, iostat=error) apoy(r, 1: gl +1)
END DO

WRITE(2, "(/)")
WRITE(2, *) "          APOYOS"
IF (gl ==2) THEN
  WRITE(2, *) " Nudo  Restriccion X  Restriccion Y"
  DO r=1, na
    WRITE(2, "(f5.0, 2(4x, G14.6))") apoy(r, 1:3)
  END DO

ELSE IF (gl ==3) THEN
  WRITE(2, *) " Nudo  Restriccion X  Restriccion Y  Restriccion Z"
  DO r=1, na
    WRITE(2, "(f5.0, 3(4x, G14.6))") apoy(r, 1:4)
  END DO

END IF

IF(nc > 0) THEN
  IF (gl ==2) THEN

```

```

WRITE(2, "(/)" )
WRITE(2, *) "          CARGAS EN LOS NUDOS"
WRITE(2, *) "Nudo      X      Y"
DO r=1, nc

      READ(1, *, iostat=error) n, p (gl *n- gl +1: gl *n)
      WRITE(2, "(i4, 2f15.4)") n, p (n* gl -1:n* gl)
END DO

ELSE IF (gl ==3) THEN
WRITE(2, "(/)" )
WRITE(2, *) "          CARGAS EN LOS NUDOS"
WRITE(2, *) "Nudo      X      Y      Z"
DO r=1, nc

      READ(1, *, iostat=error) n, p (gl *n- gl +1: gl *n)
      WRITE(2, "(i4, 3f15.4)") n, p (n* gl -2:n* gl)
END DO

END IF

OPEN(unit=3, file="TEMPO.tmp", status="replace", action="write", iostat=i)

IF (gl==2) THEN
DO i=1, SIZE(incip, dim=1)
WRITE(3, *) incip(i,1:2), coord(incip(i,1), 1:2), coord(incip(i,2), 1:2), prop(incip(i,3), 1:2)
END DO

ELSE IF (gl==3) THEN
DO i=1, SIZE(incip, dim=1)
WRITE(3, *) incip(i,1:2), coord(incip(i,1), 1:3), coord(incip(i,2), 1:3), prop(incip(i,3), 1:2)
END DO

END IF

DO i=1, SIZE(apoy, dim=1)
WRITE(3, *) apoy(i, 1: gl+1)
END DO

CLOSE (3)
DEALLOCATE(prop, apoy)
DEALLOCATE(coord, incip)
CLOSE(1)
CLOSE(2)

END IF
END SUBROUTINE
*****
SUBROUTINE emsamble(gl, nb, k)
IMPLICIT NONE
INTEGER, INTENT(IN):: gl, nb
REAL(8), POINTER:: k(:, :)
INTEGER:: x, i, j, r, c, ni, nf
REAL(8):: x1, y1, z1, x2, y2, z2, A, E
REAL(8), POINTER:: mat(:, :), apoy(:)

ALLOCATE(mat(2* gl, 2* gl), stat=i);

```

```

DO x=1, nb
  IF (gl == 2) THEN
    OPEN(unit=3, file="TEMPO.tmp", action="read", status="old", iostat=i)
    READ(3,*) ni, nf, x1, y1, x2, y2, A, E
    CALL MARM2(mat, x1, y1, x2, y2, A, E)

  ELSE IF (gl == 3) THEN
    OPEN(unit=3, file="TEMPO.tmp", action="read", status="old", iostat=i)
    READ(3,*) ni, nf, x1, y1, z1, x2, y2, z2, A, E
    CALL MARM3(mat, x1, y1, z1, x2, y2, z2, A, E)

  END IF
  i = ni* gl - gl + 1
  j = i
  DO r=1, 2* gl
    DO c=1, 2* gl
      k(i,j) = k(i,j) + mat(r,c)
      IF(c == gl) THEN
        j = nf* gl - gl+1
      ELSE IF(c == 2* gl) THEN
        j = ni* gl - gl + 1
      ELSE
        j = j+1
      END IF
    END DO

    IF(r == gl) THEN
      i = gl *nf- gl+1
    ELSE
      i = i+1
    END IF

  END DO

  END DO

  DEALLOCATE (mat)

  ALLOCATE(apoy(gl + 1), stat=x)

  DO WHILE(.not. EOF(3))
    READ(3,*) apoy(1: gl + 1)
    DO x=2, gl + 1
      r = INT(apoy (1)* gl - gl + x-1)
      k( r , r) = k(r , r) + apoy (x)
    END DO
  END DO

  CLOSE (3)
  DEALLOCATE(apoy)
  END SUBROUTINE
*****
SUBROUTINE MARM3 (C, x1, y1, z1, x2, y2, z2, A, E)
REAL(8), INTENT(inout):: x1, y1, z1, x2, y2, z2, A, E
REAL(8), POINTER:: C(:, :)
REAL(8):: l, m, n, p

l = (x2 - x1) / DSQRT((x2-x1)**2 + (y2-y1)**2 + (z2-z1)**2)
m = (y2 - y1) / DSQRT((x2-x1)**2 + (y2-y1)**2 + (z2-z1)**2)

```


$n = (z2 - z1) / \text{DSQRT}((x2-x1)**2 + (y2-y1)**2 + (z2-z1)**2)$
 $p = A * E / \text{DSQRT}((x2-x1)**2 + (y2-y1)**2 + (z2-z1)**2); C = 0$

C(1,2)= p*I*m; C(1,3)= p*I*n; C(1,4)=-p*I*I; C(1,5)=-p*I*m; C(1,6)=-p*I*n
 C(2,3)= p*m*n; C(2,4)=-p*m*I; C(2,5)=-p*m*m; C(2,6)=-p*m*n
 C(3,4)=-p*n*I; C(3,5)=-p*n*m; C(3,6)=-p*n*n
 C(4,5)= p*I*m; C(4,6)= p*I*n
 C(5,6)= p*m*n

C = C + TRANSPOSE(C)
 C(1,1)=p*I*I; C(2,2)=p*m*m; C(3,3)=p*n*n; C(4,4)=p*I*I; C(5,5)=p*m*m; C(6,6)=p*n*n

END SUBROUTINE

SUBROUTINE MARM2(C, x1, y1, x2, y2, A, E)
 REAL(8), INTENT(inout):: x1, y1, x2, y2, A, E
 REAL(8), POINTER:: C(:, :)
 REAL(8):: l, m, n, p

$l = (x2 - x1) / \text{DSQRT}((x2-x1)**2 + (y2-y1)**2)$
 $m = (y2 - y1) / \text{DSQRT}((x2-x1)**2 + (y2-y1)**2)$
 $n = 0$
 $p = A * E / \text{DSQRT}((x2-x1)**2 + (y2-y1)**2); C = 0$

C(1,2)= p*I*m; C(1,3)= -p*I*I; C(1,4)=-p*I*m;
 C(2,3)= -p*I*m; C(2,4)=-p*m*m;
 C(3,4)= p*I*m;

C = C + TRANSPOSE(C)
 C(1,1)=p*I*I; C(2,2)=p*m*m; C(3,3)=p*I*I; C(4,4)=p*m*m;

END SUBROUTINE

SUBROUTINE gaus_jord(m, v)
 IMPLICIT NONE
 REAL(8), POINTER:: m(:, :), v(:)
 INTEGER:: o, r, c

```
DO o=1, SIZE(m, dim=1)
    v(o) = v(o) / m(o,o)
    DO c=SIZE(m, dim=1) , o, -1
        m(o,c) = m(o,c) / m(o,o)
    END DO
    DO r=1, SIZE(m, dim=1)
        IF(r/=o) THEN
            v(r) = v(r) - m(r,o) * v(o)
            DO c=SIZE(m, dim=1), o, -1
                m(r,c) = m(r,c) - m(r,o)*m(o,c)
            END DO
        END IF
    END DO
END DO
END SUBROUTINE
```

```

SUBROUTINE imprime_desp (p, archres, nn, gl)
IMPLICIT NONE
CHARACTER(*), intent(IN):: archres
INTEGER, INTENT(IN):: nn, gl
REAL(8), POINTER:: p(:)

INTEGER:: x

OPEN(unit=2, file=archres, action="write", status="old", access="append", iostat=x)

IF (GL==2)THEN
    WRITE(2,"(//,a)") "DESPLAZAMIENTOS DE LOS NUDOS"
    WRITE(2,*) "Nudo      X      Y "

    DO x=1, nn
        WRITE(2,"(i4, 2f20.10)") x, p(x*gl-1:x*gl)
    END DO

ELSE IF (GL==3)THEN
    WRITE(2,"(//,a)") "      DESPLAZAMIENTOS DE LOS NUDOS"
    WRITE(2,*) "Nudo      X      Y      Z"

    DO x=1, nn
        WRITE(2,"(i4, 3f20.10)") x, p(x*gl-2:x*gl)
    END DO

END IF

CLOSE(unit=2, status='keep')
END SUBROUTINE
*****
subroutine fuerzas( gl, nb, vd, archres)
IMPLICIT NONE
CHARACTER(*), INTENT(IN):: archres
INTEGER, INTENT(IN):: gl, nb
REAL(8), POINTER:: vd(:)
INTEGER:: x, ni, nf, r
REAL(8):: x1, y1, z1, x2, y2, z2, A, E
REAL(8), POINTER:: mat(:,,:), desp(:)

ALLOCATE(mat(2*gl, 2*gl), desp(2*gl), stat=x)
OPEN(unit=2, file=archres, action="write", status="old", access="append", iostat=x)
OPEN(unit=3, file="TEMPO.tmp", action="read", status="old", iostat=x)

WRITE(2,"(//,a)") " FUERZAS ACTUANTES EN LAS BARRAS"
WRITE(2,*) "BARRA      CARGA      TIPO"

DO x=1, nb
    IF (gl==2)THEN
        READ(3,*) ni, nf, x1, y1, x2, y2, A, E
        DO r=1, gl
            desp(r) = vd(ni*gl-gl+r)
            desp(r+gl) = vd(nf*gl-gl+r)
        END DO

    ELSE IF(gl==3) THEN
        READ(3,*) ni, nf, x1, y1, z1, x2, y2, z2, A, E
        DO r=1, gl
            desp(r) = vd(ni*gl-gl+r)

```

```

                desp(r+gl) = vd(nf*gl-gl+r)
            END DO

        END IF

        IF (gl==2) THEN
            CALL MARM2(mat, x1, y1, x2, y2, A, E)
            desp = MATMUL (mat, desp);
            mat = 0
            mat(1,1) = (x2 - x1) / DSQRT((x2-x1)**2 + (y2-y1)**2)
            mat(1,2) = (y2 - y1) / DSQRT((x2-x1)**2 + (y2-y1)**2)

            desp = MATMUL(mat, desp)

        ELSE IF (gl==3) THEN
            CALL MARM3 (mat, x1, y1, z1, x2, y2, z2, A, E)
            desp = MATMUL (mat, desp)
            mat = 0
            mat(1,1) = (x2 - x1) / DSQRT((x2-x1)**2 + (y2-y1)**2 + (z2-z1)**2)
            mat(1,2) = (y2 - y1) / DSQRT((x2-x1)**2 + (y2-y1)**2 + (z2-z1)**2)
            mat(1,3) = (z2 - z1) / DSQRT((x2-x1)**2 + (y2-y1)**2 + (z2-z1)**2)

            desp = MATMUL(mat, desp)

        END IF

        WRITE(2,"(i4, f18.4,\)") x, ABS(desp(1))
        IF(desp(1) > 0) THEN
            WRITE(2,"(a)") "   Compresion"
        ELSE
            WRITE(2,"(a)") "   Tension"
        END IF
    END DO

    DEALLOCATE(mat, desp)
    CLOSE(unit=2, status="keep")
    CLOSE(unit=3, status="delete")
    END SUBROUTINE
    *****
END PROGRAM

```

CONCLUSIONES:

Los métodos aquí descritos demuestran ser eficientes para la determinación de las fuerzas que actúan en una armadura, así como de sus respectivos desplazamientos en los nodos

Es importante tomar en cuenta que para que se puedan aplicar estos métodos la armadura tiene que ser estáticamente determinada ya que de lo contrario el desarrollo de dicho análisis nos arrojaría resultados erróneos.

El desarrollo de los métodos abordados cumplen en cuanto a la obtención de resultados pero en ello no implica que el desarrollo de ellos nos permita obtener la mayor información y hay que tomar en cuenta las limitaciones de dichos métodos.

El método en el cual se puede obtener la mayor información es el método de las rigideces y es una de las herramientas más poderosas para el determinación de las fuerzas actuantes en las armaduras y este método puede tiene una ventaja ya que por la forma en que se lleva acabo su desarrollo es fácil de programar.

BIBLIOGRAFIA:

- Apuntes de la materia de estructuras (curso propedéutico)

- Análisis estructural segunda edición
Autor: Aslam Kassmali Ed: Thomson Learning

- Mecanica de materials
Autor: Gere y Timoshenko

- Análisis de estructuras método clásico y matricial
Autor: Mccormac y Nelson