



UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN NICOLÁS DE HIDALGO
FACULTAD DE INGENIERÍA EN TECNOLOGÍA DE LA MADERA



UNIFICACIÓN ENTRE LOS MÉTODOS DE APROXIMACIÓN DEL CÁLCULO Y LOS MÉTODOS DE CUBICACIÓN FORESTAL

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE INGENIERO EN TECNOLOGÍA DE LA MADERA

Presenta:

Isaac Alfaro Trujillo

Director:

Dr. Gildardo Cruz de León

MORELIA, MICHOACÁN; ENERO 2008

ÍNDICE

1. Introducción.	1
2. Descripción del problema.	4
2.1 Planteamiento del problema.	4
2.2 Hipótesis.	4
2.3 Antecedentes.	5
2.4 Objetivos.	6
3. Conceptos generales.	7
3.1 Métodos aproximados para determinar el área bajo una curva en un intervalo.	7
3.1.1 Método general.	7
3.1.2 La regla del trapecio.	8
3.2 Métodos aproximados para determinar el volumen de sólidos de revolución.	8
3.3 Tipos dendrométricos.	10
3.3.1 Tipos dendrométricos clásicos.	10
3.3.2 Funciones de volumen y de perfil.	11
3.4 Métodos de cubicación.	11
3.4.1 Métodos estándar de cubicación.	11
3.4.2 El modelo cónico segmentado (MCS).	12
3.5 Tipos de diámetros medios en dendrometría.	13
3.5.1 Diámetros medios para secciones transversales asimétricas.	13
3.5.2 Diámetros medios para una geometría irregular a la altura del pecho.	14
3.5.3 Generalización de la definición de diámetros medios a segmentos de tronco y trozas.	14
4. Identificación, definición y unificación de métodos.	15
4.1 Identificación de métodos estándar aproximación para determinar el área bajo una curva en un intervalo.	15
4.2 Definición de métodos de aproximación en base a los diámetros dendrométricos.	15
4.3 Definición de métodos de aproximación por correspondencia con los métodos de cubicación estándar.	16
4.4 Definición de métodos de cubicación por analogía con los métodos de aproximación del cálculo.	18
4.5 Resumen y relación entre métodos de aproximación del cálculo y métodos de cubicación.	19
5. Metodología	22
5.1 Estimación del área bajo la curva generatriz de paraboloides.	23
5.2 Estimación del área bajo la curva generatriz de neiloide.	23
5.3 Estimación del volumen de paraboloides.	24
5.4 Estimación del volumen de neiloide.	25
5.5 Cálculo analítico de área y volumen para los casos de $n=5$ y $n=10$.	25
5.6 Cálculo numérico para cualquier n finita.	26
5.7 Definición de área relativa total y volumen relativo total.	27

6. Resultados para el área bajo la curva generatriz de paraboloides.	28
6.1 Área exacta bajo la curva generatriz de paraboloides.	28
6.2 Resultados para área bajo la curva generatriz de paraboloides para 5 segmentos, mediante métodos aproximados.	28
6.3 Resultados para área bajo la curva generatriz de paraboloides para 10 segmentos, mediante métodos aproximados.	31
6.4 Área relativa total bajo la curva generatriz de paraboloides para 5 y 10 segmentos, mediante cálculo analítico.	34
6.5 Área relativa total bajo la curva generatriz de paraboloides para 5, 10, 20, 50, 100 y 500 segmentos, mediante Excel.	34
7. Resultados para el área bajo la curva generatriz de neiloide.	36
7.1 Área exacta bajo la curva generatriz de neiloide.	34
7.2 Resultados para área bajo la curva generatriz de neiloide para 5 segmentos, mediante métodos aproximados.	34
7.3 Resultados para área bajo la curva generatriz de neiloide para 10 segmentos, mediante métodos aproximados.	37
7.4 Área relativa total bajo la curva generatriz de neiloide para 5 y 10 segmentos, mediante cálculo analítico.	40
7.5 Área relativa total bajo la curva generatriz de neiloide para 5, 10, 20, 50, 100 y 500 segmentos, mediante Excel.	40
8. Resultados para el volumen total de paraboloides.	44
8.1 Volumen exacto de paraboloides.	44
8.2 Resultados para el volumen de paraboloides con 5 segmentos.	44
8.3 Resultados para el volumen de paraboloides con 10 segmentos.	47
8.4 Volumen relativo total de paraboloides para 5 y 10 segmentos, mediante cálculo analítico.	50
8.5 Volumen relativo total de paraboloides para 5, 10, 20, 50, 100 y 500 segmentos, mediante Excel.	50
9. Resultados para el volumen total de neiloide.	52
9.1 Volumen exacto de neiloide.	52
9.2 Resultados para el volumen de neiloide con 5 segmentos.	52
9.3 Resultados para el volumen de neiloide con 10 segmentos.	55
9.4 Volumen relativo total de neiloide para 5 y 10 segmentos, mediante cálculo analítico.	58
9.5 Volumen relativo total de neiloide para 5, 10, 20, 50, 100 y 500 segmentos, mediante Excel.	58
10. Análisis y discusión.	60
Apéndice A.	63
Apéndice B.	66
Apéndice C.	69
Apéndice D.	72
Referencias.	75

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 3.1 Tipo dendrométrico correspondiente a la potencia indicada en la función generatriz.	10
Tabla 4.1 Funciones de puntos muestra más utilizadas en el cálculo integral como función de puntos de intervalo.	15
Tabla 4.2 Funciones de puntos muestra propuestas, definidas, en base a los radios dendrométricos.	16
Tabla 4.3 Funciones de puntos muestra propuestas, definidas, en base a los métodos de cubicación estándar.	17
Tabla 4.4 Métodos de cubicación resultantes al establecer la relación de analogía.	19
Tabla 4.5 Marco unificado para los métodos de aproximación del cálculo y los métodos de cubicación.	20
Tabla 5.1 Ejemplo de una secuencia de cálculo considerada para el cálculo de área bajo una curva mediante Excel, utilizando el método de la regla de Simpson.	26
Tabla 6.1 Conjunto de parámetros requeridos en el cálculo de áreas para la curva generatriz de paraboloides con 5 segmentos.	29
Tabla 6.2 Áreas totales debajo de la curva generatriz del paraboloides para 5 segmentos.	30
Tabla 6.3 Conjunto completo de parámetros requeridos en el cálculo de áreas para la curva generatriz de paraboloides con 10 segmentos.	32
Tabla 6.4 Áreas totales debajo de la curva generatriz del paraboloides para 10 segmentos.	33
Tabla 6.5 Resultados de la estimación del área relativa total bajo la curva generatriz de paraboloides, con 5 y 10 segmentos, respectivamente, mediante cálculo analítico.	34
Tabla 6.6 Resultados del área relativa total bajo la curva generatriz de paraboloides calculados mediante Excel, como función del número de segmentos.	35
Tabla 7.1 Conjunto de parámetros requeridos en el cálculo de áreas para la curva generatriz de neiloides con 5 segmentos.	37
Tabla 7.2 Áreas totales debajo de la curva generatriz del neiloides para 5 segmentos.	38
Tabla 7.3 Conjunto de parámetros requeridos en el cálculo de áreas para la curva generatriz de paraboloides con 10 segmentos.	40
Tabla 7.4 Áreas totales debajo de la curva generatriz del neiloides para 10 segmentos.	41
Tabla 7.5 Resultados de la estimación del área relativa total bajo la curva generatriz de neiloides, con 5 y 10 segmentos, respectivamente, mediante cálculo analítico.	42
Tabla 7.6 Resultados del área relativa total bajo la curva generatriz de neiloides calculados mediante Excel, como función del número de segmentos.	43
Tabla 8.1 Conjunto de parámetros requeridos en el cálculo de volúmenes de paraboloides con 5 segmentos.	45
Tabla 8.2 Volúmenes totales del paraboloides para 5 segmentos.	46
Tabla 8.3 Conjunto de parámetros requeridos en el cálculo de volúmenes de paraboloides con 10 segmentos.	48
Tabla 8.4 Volúmenes totales del paraboloides para 10 segmentos.	49
Tabla 8.5. Resultados de la estimación del volumen total de paraboloides, con 5 y 10 segmentos, respectivamente, mediante cálculo analítico.	50
Tabla 8.6 Resultados del volumen relativo total de paraboloides calculados mediante Excel como función del número de segmentos.	51

Tabla 9.1 Conjunto de parámetros requeridos en el cálculo de volúmenes de neiloide con 5 segmentos.	53
Tabla 9.2 Volúmenes totales de neiloide para 5 segmentos.	54
Tabla 9.3 Conjunto de parámetros requeridos en el cálculo de volúmenes de neiloide con 10 segmentos.	56
Tabla 9.4 Volúmenes totales debajo de la curva generatriz del neiloide para 10 segmentos.	57
Tabla 9.5 Resultados de la estimación del volumen total de neiloide, con 5 y 10 segmentos, respectivamente, mediante cálculo analítico.	58
Tabla 9.6 Resultados del volumen relativo total de neiloide calculados mediante Excel, como función del número de segmentos.	59
Tabla A.6 Resultados para el área de los intervalos bajo la curva generatriz de paraboloides por el método 5, para 5 intervalos.	64
Tabla B.6 Resultados para el área de los intervalos bajo la curva generatriz de neiloide por el método 5, para 5 intervalos.	67
Tabla C.5 Resultados para el volumen de los intervalos del paraboloides por el método 4, para 5 intervalos.	70
Tabla D.5 Resultados para el volumen de los intervalos del neiloide por el método 4, para 5 intervalos.	73

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 3.1 Método de aproximación mediante rectángulos para determinar el área bajo una curva $y=f(x)$ en un intervalo $[a, b]$. El área exacta se obtiene en el límite cuando el número de rectángulos n tiende a infinito (Stewart, 2002).	7
Figura 3.2 Aproximación al área bajo una curva en un intervalo mediante la regla del trapecio (Uranga-Valencia, 2007).	8
Figura 3.3 Sólido de revolución generado al realizar una rotación de 2π del área bajo la curva $y=\sqrt{x}$ alrededor del eje x (Stewart, 2002).	9
Figura 3.4 Aproximación al volumen de una esfera con radio 1, mediante un número n de cilindros. Se muestran los casos para $n=5, 10$ y 20 (Stewart, 2002).	9
Figura 3.5 Secciones $S, S_{1/2}$ y S' localizadas en una troza	12
Figura 5.1 Curva generatriz de un paraboloides de altura h , y división en segmentos de igual longitud.	23
Figura 5.2 Curva generatriz de un neiloide de altura h , y división en segmentos de igual longitud.	24
Figura 5.3 Paraboloides y su orientación típica en un sistema coordenado tridimensional para propósito de cálculo.	24
Figura 5.4 Neiloide y su orientación típica en un sistema coordenado tridimensional para propósito de cálculo.	25
Figura 6.1 División del área bajo la curva generatriz de paraboloides de altura h en 5 segmentos de igual longitud.	29
Figura 6.2 División del área bajo la curva generatriz de paraboloides de altura h en 10 segmentos de igual longitud.	31
Figura 7.1 División del área bajo la curva generatriz de neiloide de altura h en 5 segmentos de igual longitud.	37
Figura 7.2 División del área bajo la curva generatriz de neiloide de altura h en 10 segmentos de igual longitud.	39
Figura 8.1 División del volumen de paraboloides de altura h en 5 segmentos de igual longitud.	45
Figura 8.2 División del volumen de paraboloides de altura h en 10 segmentos de igual longitud.	47
Figura 9.1 División del volumen de neiloide de altura h en 5 segmentos de igual longitud.	53
Figura 9.2 División del volumen de neiloide de altura h en 10 segmentos de igual longitud.	55
Figura A1: Impresión de pantalla de la primera página de área bajo la curva generatriz de paraboloides para 500 segmentos con el método aproximado de Smalian.	65
Figura B1: Impresión de pantalla de la primera página de área bajo la curva generatriz de neiloide para 500 segmentos con el método aproximado de Smalian.	68
Figura C1: Impresión de pantalla de la primera página del volumen de paraboloides para 500 segmentos con el método de cubicación de Smalian.	71
Figura D1: Impresión de pantalla de la primera página del volumen de neiloide para 500 segmentos con el método de cubicación de Smalian.	74

1. INTRODUCCIÓN

En el área forestal, la determinación del volumen de madera contenido en un tronco se considera como una de las más importantes mediciones en un bosque, por dos razones: 1) la madera es el principal producto comercial de un bosque; 2) El tronco contiene una proporción muy grande de la biomasa de un árbol. Estos motivos son determinantes en la elaboración de inventarios forestales y en la cuantificación de la importancia de un bosque en la captura de dióxido de carbono de la atmósfera (West, 2004).

En forma similar, en ingeniería en tecnología de la madera, uno de los principales problemas que se presentan es el de cuantificar la cantidad de madera aprovechable extraída directamente del bosque para determinar su costo. En particular, una parte importante de dicho material lo constituye el tronco del árbol. El hecho de obtener volúmenes de troncos lo más exactos posibles, además del aspecto técnico, implica una importancia económica. No se trata de una tarea simple, ya que interviene el conocimiento o determinación de la geometría involucrada. En palabras de Brack “el volumen de un tronco o fuste, depende principalmente de su altura, área basal y forma. Es uno de los parámetros más difíciles de medir porque cualquier variación en las variables anteriores se reflejará en la estimación del volumen” (Brack, 1999). Esa importante estimación se hace a través de lo que se denomina métodos de cubicación.

El término cubicación es muy general, involucra la determinación de volúmenes de madera comercial en sus diferentes formas, procesada o no (Castro-Sánchez, 2008). Lo anterior forma parte de la rama conocida como Dendrometría. Por simplicidad, en este trabajo el término cubicación se referirá a la determinación del volumen ya sea de un tronco en pie, derribado, y de secciones longitudinales de los mismos. A secciones longitudinales que ya hayan sido cortadas, se les denominará trozas. Se utilizará frecuentemente el término segmento como un término equivalente a sección longitudinal. A menos que se especifique que se trata de una sección transversal, en lo subsecuente, el término sección de un tronco, se referirá a una sección longitudinal.

Los métodos de cubicación son aproximados, de tal forma que involucran un error. Este error varía para las diferentes secciones de un tronco. Incluso, un método puede sobreestimar el volumen para unas secciones y subestimar en otras, debido a que la geometría puede cambiar apreciablemente en secciones diferentes de un mismo tronco. El uso y valor comercial también cambia para las diferentes secciones de un tronco. El problema de cubicación, es de tal importancia y magnitud, que se han propuesto métodos exclusivos para estimar el volumen de la primera sección del tronco, en la base de corte, que es la de mayor interés comercial. En árboles de gran magnitud, una inadecuada estimación de ese volumen implicaría grandes pérdidas (Bruce, 1982).

Existe una vasta cantidad de métodos de cubicación. Sin embargo, se pueden clasificar simplemente en directos e indirectos (Brack, 1999). Entre los métodos directos, se encuentran los métodos por seccionamiento que como su nombre lo indica, son métodos para determinar el volumen de secciones de tronco y trozas. Entre los métodos indirectos más utilizados, se encuentran los que se basan en funciones de perfil, o ahusamiento, y en funciones de volumen para una especie determinada. En el primer caso, se proponen ecuaciones para el diámetro como función de la altura, altura total, y diámetro a la altura del pecho (1.30 m del suelo). A estas funciones se les denomina, funciones de perfil, o ahusamiento, y reproducen de manera aproximada la forma total de un tronco de árbol. Posteriormente, se realizan integraciones analíticas o numéricas para estimar su volumen total o por secciones. En el segundo caso, se proponen ecuaciones para el volumen total de un tronco, como función de su altura total y del diámetro a la altura del pecho. A estas funciones se les llama funciones de volumen (Diéguez-Aranda *et al.*, 2003; West, 2004).

Los métodos por seccionamiento, se pueden interpretar como la determinación del volumen de un cilindro equivalente con un área promedio de sección transversal que es función de las áreas de las secciones transversales en los extremos y/o en el centro de la sección o troza. Se estima el volumen como el producto de esa área promedio y la longitud de la sección (Avery y Burkhart, 2002). Aún entre estos métodos, se tiene una amplia cantidad y se continúan proponiendo otros nuevos, en base a la experiencia y mediciones en campo. Se trata de métodos simples de aplicación en campo que difícilmente podrán ser substituidos por los otros

tipos de métodos, principalmente, cuando se trata de trozas en las que ya no se cuenta con la información sobre su origen (Bruce, 1982; Doruska y Patterson, 2004; Patterson *et al.*, 2007).

El presente trabajo, se enfoca en determinar relaciones entre algunos métodos por seccionamiento con métodos matemáticos formales. Lo anterior, implica uniformizar conceptos y lenguaje utilizado en ambos campos. Se obtiene como resultado, una especie de unificación entre métodos de cubicación y métodos aproximados del cálculo.

2. DESCRIPCIÓN DEL PROBLEMA

2.1 Planteamiento del problema

El presente trabajo tiene su origen en la observación del siguiente problema: en la literatura tradicional forestal y de tecnología de la madera, al alcance para el desarrollo de este trabajo, los métodos de cubicación se presentan, generalmente, sin especificar su origen o fundamento.

La falta de un sustento teórico sólido para dichos métodos sugeriría que no tienen, rigurosamente, las características de un conocimiento científico. Es frecuente que se presenten simplemente como fórmulas en las que se tienen que sustituir los valores de parámetros que se deben medir en campo, laboratorio e industria, como son diámetros, longitudes y alturas. Lo anterior se justifica a un nivel técnico pero no a nivel de ingeniería, en donde se debe proporcionar la formación profesional necesaria para conocer el fundamento de los métodos de medición que se utilizan, así como la forma en que se derivan.

Al considerar y analizar el problema anterior, se intuyó que los métodos de cubicación podrían tener estrecha relación con los métodos de aproximación del cálculo integral para estimar áreas bajo curvas, en intervalos definidos, y volúmenes de sólidos de revolución. De encontrarse dicha conexión, se lograría identificar un origen y fundamento teórico de los métodos de cubicación. En general, ello equivaldría a obtener un esquema unificado de métodos.

De esta forma, el problema se transformó en la pregunta: *¿será posible obtener una unificación entre los métodos aproximados del cálculo y los métodos de cubicación?*

2.2 “Hipótesis”

Para intentar dar una respuesta afirmativa a la pregunta arriba señalada, se planteó la siguiente “hipótesis”: *si los métodos aproximados del cálculo y los métodos de cubicación están relacionados y se identifican esas relaciones, entonces, se puede lograr su unificación.*

Se ha marcado a la hipótesis entre comillas, porque aún cuando tiene la estructura lógica condicional de una hipótesis de conformidad con el método científico, no lo es, ya que no se refiere a una suposición que intenta dar respuesta a un hecho o fenómeno real (se trata de un trabajo teórico). El carecer de ésta propiedad la convierte más bien en un teorema matemático. Lo anterior se explica porque el material de la presente tesis no se ubica dentro de las ciencias fácticas sino dentro de las ciencias formales (Bunge, 1983; Castañeda *et al*, 2002). Sin embargo, si se define aquí que el escribir “hipótesis” implica la salvedad mencionada, se puede usar ese término más familiar, en ingeniería, que el de teorema y la estructura de una investigación científica queda inalterada. El término “hipótesis” correspondería al de *conjetura* que se utiliza en matemáticas (Guerrero-Magaña, 2008). Conjetura, también es un término aceptado como equivalente al de hipótesis (Castañeda *et al*, 2002), por lo que sería un término más general para cualquier tipo de investigación.

Los resultados satisfactorios de prueba de la “hipótesis” para dar respuesta al problema señalado constituyen el material principal de este trabajo. En el transcurso de dicha prueba, fueron derivados nuevos métodos de cubicación y sus correspondientes métodos de aproximación del cálculo. Ello constituye la aportación más importante. El resto del material, se refiere a la aplicación de todos los métodos a un par de geometrías de interés común para el cálculo y dendrometría, según se indica más adelante.

2.3 Antecedentes

El material conceptual y los conocimientos básicos para comprender y definir técnicamente el problema, se encuentran en el capítulo 2, denominado conceptos generales. En su mayoría, el trabajo desarrollado en esta tesis es original, incluyendo parte de la metodología. Hasta donde se tiene conocimiento, no existen trabajos de este tipo, excepto los dos antecedentes directos que se describen a continuación: 1) la referencia (Cruz de León y Cruz de León, 2006), en la cual se presenta lo que se denomina el Modelo Cónico Segmentado para las mediciones forestales y se encuentra su fundamento al identificarlo con un método particular de

aproximación del cálculo para estimar el volumen de sólidos de revolución; 2) las referencias (Uranga-Valencia, 2007; Uranga-Valencia y Cruz de León, 2007), en las cuales se aplica por primera vez el modelo de 1), en particular, a los tipos dendrométricos clásicos como función del número de segmentos y se descubre por primera vez el importante papel que juegan los diferentes diámetros medios que se definen en dendrometría, en los métodos de cubicación. Como se definió previamente, el término segmento es equivalente a sección longitudinal. Dichos trabajos representan los primeros pasos hacia la tarea de unificación que se ha llevado a cabo en esta tesis.

2.4 Objetivos

Objetivo general: *unificar los métodos aproximados del cálculo y los métodos de cubicación forestal.*

Objetivos particulares:

- I) Identificar y definir las relaciones entre los métodos de aproximación del cálculo y los métodos de cubicación en un marco unificado.
- II) Aplicar y comparar los métodos aproximados resultantes de la unificación para estimar áreas bajo las curvas generatrices del paraboloides y del neiloide.
- III) Aplicar y comparar los métodos de cubicación resultantes de la unificación para estimar los volúmenes del paraboloides y del neiloide.

3. CONCEPTOS GENERALES.

3.1 Métodos aproximados para determinar el área bajo una curva en un intervalo.

3.1.1 Método general.

El principio fundamental del cálculo integral para determinar el área bajo una curva $y=f(x)$ para un intervalo $[a, b]$ de la variable x es usualmente explicado como sigue: se divide el intervalo en un número n de segmentos o subintervalos $[x_{i-1}, x_i]$ de igual longitud, $\Delta x = (b - a) / n$, en donde $i = 1, 2, \dots, n$, $x_0 = a$ y $x_n = b$, y se les asocian rectángulos de alturas $f(x_i^*)$ en donde x_i^* puede ser cualquier punto del subintervalo. Los puntos x_i^* , se llaman *puntos muestra*. Los más utilizados son: los extremos izquierdos, los extremos derechos y los puntos medios de los subintervalos. El área bajo la curva se aproxima mediante la suma de las áreas de los rectángulos, $\sum_{i=0}^n f(x_i^*) \Delta x$. Conforme el número n se incrementa, la aproximación es mejor y en

el límite cuando ese número tiende a infinito, se obtiene el área exacta, como se ilustra en la figura 3.1. En ese límite, la suma se define como una integral particular denominada *integral definida* y se escribe como $\int_a^b f(x) dx$. De hecho, los segmentos pueden tener diferente longitud y

la condición sería que en el límite, cuando su número tiende a infinito, la longitud del segmento mayor tienda a cero (Courant y John, 1965; Stewart, 2002).

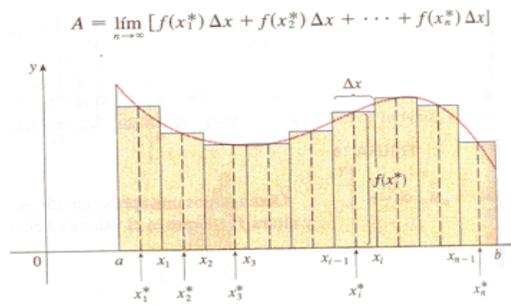


Figura 3.1 Método de aproximación mediante rectángulos para determinar el área bajo una curva $y=f(x)$ en un intervalo $[a, b]$. El área exacta se obtiene en el límite cuando el número de rectángulos n tiende a infinito (Stewart, 2002).

3.1.2 La regla del trapecio

Existe una forma particular de seleccionar los rectángulos en la aproximación de área bajo una curva, relacionando a cada subintervalo un rectángulo cuya área es el promedio de las áreas de los dos rectángulos con alturas $f(x_{i-1})$ y $f(x_i)$ que corresponden a las alturas en sus extremos.

Los puntos muestra se definen como $f(x_i^*) = \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2}$. El resultado es equivalente a una aproximación mediante trapecios en donde una línea recta conecta a los puntos $(x_{i-1}, f(x_{i-1}))$ y $(x_i, f(x_i))$ de cada segmento y se denomina la regla del trapecio (Stewart, 2002). En la figura 3.2 se muestra cualitativamente la aproximación mediante la regla del trapecio.

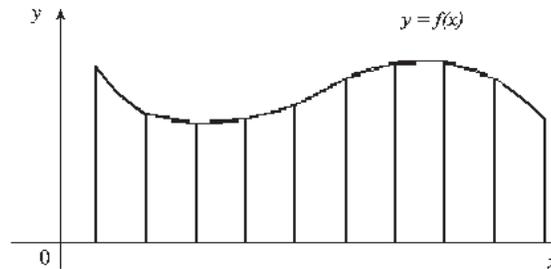


Figura 3.2 Aproximación al área bajo una curva en un intervalo mediante la regla del trapecio (Uranga-Valencia, 2007).

3.2 Métodos aproximados para determinar el volumen de sólidos de revolución

Un sólido de revolución se genera por una rotación de 2π de la curva $y=f(x)$ alrededor del eje x , como puede verse en la figura 3.3, para el caso de la función $f(x) = \sqrt{x}$.

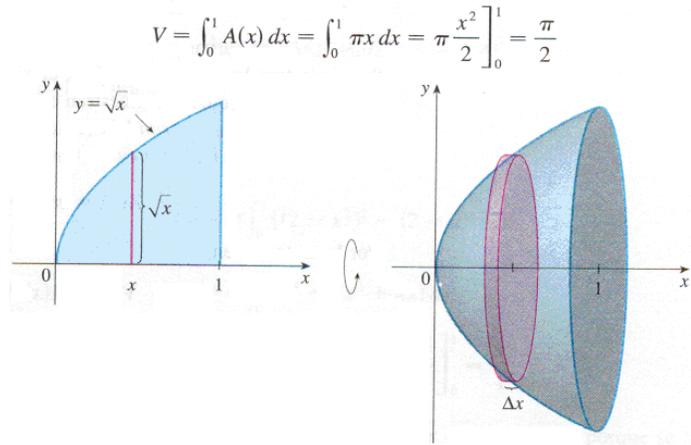


Figura 3.3 Sólido de revolución generado al realizar una rotación de 2π del área bajo la curva $y = \sqrt{x}$ alrededor del eje x , (Stewart, 2002).

La misma rotación de los n rectángulos utilizados en la aproximación del área, origina una aproximación al volumen del sólido de revolución mediante n cilindros, como lo indica la figura 3.4, para el caso de una esfera de radio unitario. El volumen exacto se obtiene cuando n tiende a infinito (Stewart, 2002).



Figura 3.4 Aproximación al volumen de una esfera con radio 1, mediante un número n de cilindros. Se muestran los casos para $n=5$, 10 y 20 (Stewart, 2002).

3.3 Tipos dendrométricos

3.3.1 Tipos dendrométricos clásicos

Los troncos de los árboles que por causas naturales no han sido perturbados, tienden a tomar una forma regular o simétrica, por lo que su eje aparece rectilíneo y su sección transversal adquiere una forma aproximadamente circular, de tal manera que se asemeja a un sólido de revolución. Los troncos no tienen una forma geométrica predeterminada y para estimar su volumen se recurre a los tipos dendrométricos que son figuras o cuerpos geométricos ideales que por secciones modelan a los troncos. Tradicionalmente, los tipos dendrométricos que se asocian a ellos son: cilindro, cono, paraboloides y neiloide (Chapman, 1921; Castro, 1955; Bruce, y Shumacher, 1965; Romahn de la Vega *et al.*, 1994; Avery y Burkhart, 2002), los cuales son sólidos de revolución generados por la función

$$y^2 = Ax^n$$

en donde A es una constante denominada el parámetro de forma, (x, y) son las coordenadas en un sistema cartesiano bidimensional y n es un número entero positivo que designa la forma del cuerpo de acuerdo con la tabla 3.1.

Tabla 3.1 Tipo dendrométrico correspondiente a la potencia indicada en la función generatriz.

n	<i>Tipo dendrométrico</i>
0	cilindro
1	paraboloides
2	cono
3	neiloide

Mediante técnicas de cálculo integral, es posible calcular el volumen exacto para los tipos dendrométricos anteriores así como para segmentos de los mismos.

3.3.2 Funciones de volumen y de perfil.

En general, no es posible asociar una geometría simple como las mencionadas en la sección anterior a la geometría de un tronco. Lo que se hace en investigación actualmente es determinar funciones de volumen y funciones de perfil o ahusamiento para troncos de cada especie en particular (West, 2004; Cruz-Cobos *et al*, 2005; Hernández y Soto-Soto, 2005). La función de volumen del tronco, proporciona el volumen total del tronco como función de los dos parámetros característicos en mediciones forestales que son el diámetro a la altura del pecho, D_p , y la altura total del tronco, H , (West, 2004). Por su parte, la función de perfil proporciona el diámetro como función de la altura h , D_p y H . En el caso de las funciones de perfil, el volumen total se puede obtener mediante una integración sobre dichas funciones con respecto a la altura h , de 0 a H (West, 2004). Se han propuesto en la literatura una considerable cantidad de funciones de volumen y de perfil, que llevan el nombre de sus autores. Las funciones de perfil representan tipos dendrométricos en general y los tipos dendrométricos clásicos son simplemente casos particulares de ellas.

Aún cuando la tendencia actual, en investigación, es la de desarrollar fórmulas específicas para cada especie arbórea (Diéguez Aranda *et al*, 2003; West, 2004), es importante el conocer las interrelaciones que presentan las formas más básicas de determinación del volumen de trozas, que continúan siendo las de uso común, en la práctica, ya que generalmente no se conoce su geometría (Bruce, 1982; Doruska and Patterson, 2004; Patterson *et al.*, 2007).

3.4 Métodos de cubicación.

3.4.1 Métodos estándar de cubicación.

Los métodos estándar de cubicación a que se refiere la literatura son: los métodos de Huber, Smalian y Newton (Chapman, 1921; Romahn de la Vega *et al*, 1994; Bruce y Schumacher, 1965; Avery y Burkhart, 2002; West, 2004).

Si se denominan S y S' a las áreas de las secciones transversales de los extremos de una troza de

longitud L , respectivamente, y $S_{1/2}$ al área de la sección transversal correspondiente a la mitad de la troza, según se ilustra en la figura 3.5 los volúmenes de Huber, Smalian y Newton están dados, respectivamente, por

$$V_H = S_{1/2}L$$

$$V_S = \left(\frac{S + S'}{2}\right)L$$

$$V_N = \frac{(S + 4S_{1/2} + S')}{6}L.$$

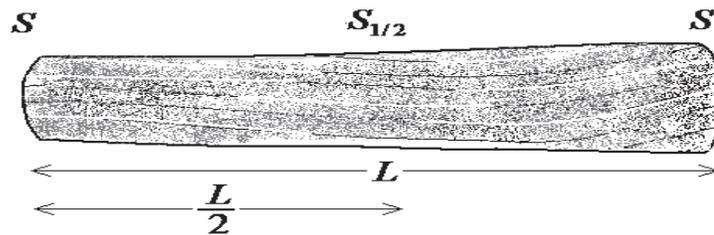


Figura 3.5 Secciones S , $S_{1/2}$ y S' localizadas en una troza.

El método de Newton es el más exacto y tiene la importante característica de que reproduce exactamente el volumen para todos los tipos dendrométricos clásicos.

3.4.2 El modelo cónico segmentado (MCS).

En caso de que se aplique la regla del trapecio para estimar el área bajo una curva, una rotación de 2π tanto de la curva como de los trapecios considerados resulta en una aproximación al volumen del sólido de revolución correspondiente mediante conos truncados. Cualquiera de los dos casos, utilizando conos truncados de la misma ó diferente longitud, se denomina el Modelo Cónico Segmentado (MCS), (Cruz de León y Cruz de León, 2006). El modelo se soporta en la ecuación de volumen de cono truncado,

$$V_{MCS} = \frac{L}{3} (S + S' + \sqrt{SS'})$$

en donde los parámetros tienen el mismo significado que en la sección anterior. En realidad, la propuesta de MCS representa el primer paso que se ha dado en la dirección de unificación que se definió para el presente trabajo. La ecuación anterior se usa comúnmente en la práctica para determinar el volumen de trozas de coníferas. Incluso, recientemente se ha encontrado un trabajo de investigación en donde implícitamente ya se aplicó MCS (Plank, 1984) también a coníferas y se comparan sus resultados con los de un método de cubicación denominado método de Bruce. Sin embargo MCS se ha desarrollado en forma general y es aplicable a cualquier sólido de revolución, en particular a los considerados en el área forestal y de tecnología de la madera (Cruz de León y Cruz de León, 2006). Lo anterior se debe a que el modelo no representa otra cosa que un método general de aproximación del cálculo. La aplicación particular formal del MCS a los tipos dendrométricos clásicos definidos en la sección 3.3.1, como función del número de segmentos, se encuentra en proceso (Uranga-Valencia, 2007; Uranga-Valencia y Cruz de León, 2007).

3.5 Tipos de diámetros medios en dendrometría

3.5.1 Diámetros medios para secciones transversales asimétricas

Cuando una sección transversal de un tronco o troza no es circular, sino más bien asimétrica respecto a su eje, se definen en dendrometría diferentes tipos de diámetro. Si se denotan como d_m y d_M , a la mínima y máxima longitud de una sección transversal asimétrica, se definen los diámetros: medio aritmético, medio cuadrático y medio geométrico, respectivamente, como

$$d = \frac{d_m + d_M}{2}$$

$$d = \sqrt{\frac{d_m^2 + d_M^2}{2}}$$

y

$$d = \sqrt{d_m d_M} ,$$

(Diéguez- Aranda *et. al.*, 2003). En adelante, al diámetro (o radio) aritmético se le designará simplemente como diámetro (o radio) medio.

3.5.2 Diámetros medios para una geometría irregular a la altura del pecho

En ocasiones, la zona de interés para la medición de diámetro no sólo es asimétrica, sino que es muy irregular y con deformaciones. En particular, cuando se requiere medir el diámetro característico en mediciones forestales, que es el diámetro a una altura de 1.30 m denominado diámetro a la altura del pecho, y se encuentra exactamente en una zona del tipo mencionado, se mide el diámetro a una distancia determinada por encima de la altura del pecho y el diámetro a esa misma distancia por debajo de dicha altura. En base a estos dos diámetros, se definen los mismos tipos de diámetros que en la sección precedente (Diéguez- Aranda *et. al.*, 2003; West, 2004).

3.5.3 Generalización de la definición de diámetros medios a segmentos de tronco y trozas.

De manera similar al proceso de la sección anterior, que se refiere a una pequeña sección o segmento alrededor de la altura del pecho, en este trabajo se generaliza la definición de los diámetros medios para cualquier segmento de tronco y trozas, en términos de los diámetros de sus extremos. Esta definición representa uno de los elementos centrales en el presente trabajo, ya que proporciona una justificación y explicación natural a métodos de aproximación existentes y da origen a otros nuevos. La importancia y necesidad de la presente generalización se descubrió por primera vez en (Uranga-Valencia y Cruz de León, 2007; Uranga-Valencia, 2007), para el caso de MCS.

En lo subsecuente a los diámetros medios generalizados, se les denominará simplemente como diámetros dendrométricos.

4. IDENTIFICACIÓN, DEFINICIÓN y UNIFICACIÓN DE MÉTODOS

4.1 Identificación de métodos estándar de aproximación para determinar el área bajo una curva en un intervalo.

Como se ha señalado en la sección 3.1.1, la definición de un método aproximado para estimar el área bajo una curva, en el Cálculo, depende de la forma en que se seleccionan los puntos muestra. En la tabla 4.1, se identifican algunas funciones de los puntos muestra asociadas a los métodos de aproximación más utilizados (Burden y Faires, 1998; Stewart, 2002).

Tabla 4.1. Funciones de puntos muestra más utilizadas en el cálculo integral como función de puntos de intervalo.

Puntos extremos izquierdos de los subintervalos $f(x_i^*) = f(x_{i-1})$
Puntos extremos derechos de los subintervalos $f(x_i^*) = f(x_i)$
Puntos medios de los subintervalos $f(x_i^*) = f(x_{1/2,i}); \quad x_{1/2} = \frac{x_{i-1} + x_i}{2}$
Regla del trapecio: $f(x_i^*) = \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2}$
Regla de Simpson: $f(x_i^*) = \frac{f(x_{i-1}) + 4f(x_{1/2,i}) + f(x_i)}{6}$

4.2 Definición de métodos de aproximación en base a los diámetros dendrométricos.

Al extender la aplicación de los métodos al caso de un sólido de revolución, la función $f(x_i^*)$ de los puntos muestra, representa el radio de una sección transversal. Tomando en consideración la definición de los diferentes tipos de diámetros medios de la sección 3.5.1, con sus respectivos radios, y su generalización al caso de un segmento o troza, mediante los diámetros dendrométricos que propone este trabajo en la sección 3.5.3, es posible definir

otros métodos de aproximación. De esta forma, se tienen los métodos asociados a las funciones de los puntos muestra, que se especifican en la tabla 4.2.

Tabla 4.2 Funciones de puntos muestra propuestas, definidas, en base a los radios dendrométricos.

Radio medio: $f(x_i^*) = \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2}$
Radio medio cuadrático: $f(x_i^*) = \sqrt{\frac{f^2(x_{i-1}) + f^2(x_i)}{2}}$
Radio medio geométrico: $f(x_i^*) = \sqrt{f(x_{i-1})f(x_i)}$

Como puede observarse, el método correspondiente al diámetro o radio medio no es otra cosa que la regla del trapecio ya identificada en la sección 3.1.2. Sin embargo, los otros dos métodos no tienen correspondencia con los métodos de aproximación del cálculo por lo que se trata de nuevos métodos que se proponen de manera original en el presente trabajo de tesis.

4.3 Definición de métodos de aproximación por *correspondencia* con los métodos de cubicación estándar.

La elección de los puntos muestra definen a los métodos de aproximación para estimar áreas bajo una curva en un intervalo. En forma similar, la elección de una sección transversal promedio define a los métodos de cubicación para estimar volúmenes.

Cualquier método aproximado de cubicación utilizado en ciencia forestal y tecnología de la madera, se basa en la aproximación del volumen de una sección de tronco o troza, de longitud L , mediante un cilindro de longitud L y una área de su sección transversal promedio \bar{S} (Avery y Burkhart, 2002). De esta forma, el volumen se estima como $V = \bar{S}L$. Por ejemplo, a los

métodos de cubicación estándar de Huber, Smalian y Newton definidos por las ecuaciones de volumen

$$V_H = S_{1/2}L$$

$$V_S = \frac{(S + S')}{2}L$$

$$V_N = \frac{(S + 4S_{1/2} + S')}{6}L$$

respectivamente, les corresponden las secciones transversales promedio siguientes

$$\bar{S} = S_{1/2}$$

$$\bar{S} = \frac{(S + S')}{2}$$

$$\bar{S} = \frac{(S + 4S_{1/2} + S')}{6}.$$

Por su parte, a cada sección promedio anterior le corresponde un radio medio \bar{r} , que se puede determinar a partir de la relación $\bar{S} = \pi(\bar{r})^2$. Por lo tanto, se está en condiciones de definir otros métodos de aproximación, por *correspondencia*, de tal forma que $f(x_i^*) = \bar{r}$. En la tabla 4.3, se muestran dichos métodos de aproximación que se etiquetarán aquí con los mismos nombres de los métodos de cubicación de los cuales provienen.

Tabla 4.3 Funciones de puntos muestra propuestas, definidas, en base a los métodos de cubicación estándar.

<p>Aproximación de Huber</p> $f(x_i^*) = f(x_{1/2,i})$
<p>Aproximación de Smalian</p> $f(x_i^*) = \sqrt{\frac{f^2(x_{i-1}) + f^2(x_i)}{2}}$
<p>Aproximación de Newton</p> $f(x_i^*) = \sqrt{\frac{f^2(x_{i-1}) + 4f^2(x_{1/2,i}) + f^2(x_i)}{6}}$

Como puede verse, la aproximación de Huber corresponde a la conocida aproximación de los puntos medios, del cálculo, señalada en la sección 3.1. Similarmente, la aproximación de Smalian corresponde a la aproximación del radio medio cuadrático, ya especificada como nueva propuesta de este trabajo en la sección 3.2. Finalmente, la aproximación de Newton no tiene paralelo en los métodos aproximados del cálculo, por lo cual también representa un nuevo método de aproximación que se propone en esta tesis.

4.4 Definición de métodos de cubicación por *analogía* con los métodos de aproximación del cálculo.

Se define en esta parte, un método de cubicación por analogía con los métodos de aproximación del cálculo, como aquel método que se obtiene al sustituir los radios por las correspondientes secciones transversales, es decir, $f(x_i^*)$ por \bar{S} , en las fórmulas que definen la aproximación al área, bajo una curva, señaladas en las secciones 3.1 y 3.2. De esta forma se generan los métodos que se muestran en la tabla 4.4.

También en la tabla 4.4 puede observarse un resultado muy importante que justifica el presente procedimiento, los tres métodos estándar de cubicación corresponden por analogía con métodos de aproximación conocidos en el cálculo. Además, se proponen nuevos métodos de cubicación en base a los nuevos métodos de aproximación para áreas, los cuales se han denominado Método Cuadrático de Smalian y Método Cuadrático de Newton. También se ha derivado un método a partir del radio medio geométrico, denominado aquí, método de la sección geométrica. Estos tres últimos métodos también constituyen una propuesta de esta tesis. En particular, se observa que el método de Newton es el análogo del método de Simpson del cálculo. El método de Simpson proporciona resultados exactos para la integral de un polinomio de grado máximo tres, debido a que el error involucrado es proporcional a la cuarta derivada de dicha función. La función generatriz de los tipos dendrométricos clásicos solo considera una potencia máxima de tres, por esa razón el método de Newton es exacto para todos ellos.

Tabla 4.4 Métodos de cubicación resultantes al establecer la relación de analogía.

<p><i>Método de aproximación para el área bajo una curva $f(x)$ en un intervalo de longitud L</i> $Area = f(x_i^*)L$</p>	<p><i>Método de cubicación correspondiente por analogía</i> $V = \bar{S}L$</p>
<p>Puntos medios de los subintervalos $f(x_i^*) = f(x_{1/2,i})$</p>	<p>Método de Huber $\bar{S} = S_{1/2}$</p>
<p>Regla del trapecio $f(x_i^*) = \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2}$</p>	<p>Método de Smalian: $\bar{S} = \frac{S_m + S_M}{2}$</p>
<p>Regla de Simpson: $f(x_i^*) = \frac{f(x_{i-1}) + 4f(x_{1/2,i}) + f(x_i)}{6}$</p>	<p>Método de Newton: $\bar{S} = \frac{S_m + 4S_{1/2} + S_M}{6}$</p>
<p>Radio medio geométrico: $f(x_i^*) = \sqrt{f(x_{i-1})f(x_i)}$</p>	<p>Método geométrico $\bar{S} = \sqrt{S_m S_M}$</p>
<p>Aproximación de Smalian $f(x_i^*) = \sqrt{\frac{f^2(x_{i-1}) + f^2(x_i)}{2}}$</p>	<p>Método cuadrático de Smalian $\bar{S} = \sqrt{\frac{S_m^2 + S_M^2}{2}}$</p>
<p>Aproximación de Newton $f(x_i^*) = \sqrt{\frac{f^2(x_{i-1}) + 4f^2(x_{1/2,i}) + f^2(x_i)}{6}}$</p>	<p>Método cuadrático de Newton $\bar{S} = \sqrt{\frac{S_m^2 + 4S_{1/2}^2 + S_M^2}{6}}$</p>

4.5 Resumen y relación entre métodos de aproximación del cálculo y métodos de cubicación.

En la tabla 4.5 se resumen todos los métodos identificados, tanto los ya existentes como los nuevos, así como la propiedad que los define y la relación entre ellos.

Tabla 4.5. Marco unificado para los métodos de aproximación del cálculo y los métodos de cubicación. Los métodos nuevos se denotan mediante (N).

Método para aproximación de áreas $Area = f(x_i^*)L$	Relación	Método de cubicación $V = \bar{S}L$
Extremos izquierdos de los subintervalos: $f(x_i^*) = f(x_{i-1})$	Analogía y Correspondencia	Sección menor: $\bar{S} = S_m$
Extremos derechos de los subintervalos: $f(x_i^*) = f(x_i)$	Analogía y Correspondencia	Sección mayor $\bar{S} = S_M$
Puntos medios de los subintervalos (Aproximación de Huber): $f(x_i^*) = f(x_{1/2,i})$	Analogía y Correspondencia	Huber: $\bar{S} = S_{1/2}$
Radio medio cuadrático-geométrico (Aproximación de MCS): $f(x_i^*) = \sqrt{\frac{f^2(x_{i-1}) + f^2(x_i) + f(x_{i-1})f(x_i)}{3}}$ (N)	Analogía	Sección media cuadrático-geométrica: $\bar{S} = \sqrt{\frac{S_m^2 + S_M^2 + S_m S_M}{3}}$ (N)
	Correspondencia	MCS: $\bar{S} = \frac{S_m + S_M + \sqrt{S_m S_M}}{3}$
Regla del trapecio (Radio medio): $f(x_i^*) = \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2}$	Rotación	
	Analogía	Smalian: $\bar{S} = \frac{S_m + S_M}{2}$
Radio medio cuadrático (Aproximación de Smalian): $f(x_i^*) = \sqrt{\frac{f^2(x_{i-1}) + f^2(x_i)}{2}}$ (N)	Correspondencia	
	Analogía	Sección media cuadrática de Smalian: $\bar{S} = \sqrt{\frac{S_m^2 + S_M^2}{2}}$ (N)
Radio medio geométrico: $f(x_i^*) = \sqrt{f(x_{i-1})f(x_i)}$ (N)	Analogía y Correspondencia	Sección media geométrica: $\bar{S} = \sqrt{S_m S_M}$ (N)
Regla de Simpson: $f(x_i^*) = \frac{f(x_{i-1}) + 4f(x_{1/2,i}) + f(x_i)}{6}$	Analogía	Newton: $\bar{S} = \frac{S_m + 4S_{1/2} + S_M}{6}$
Regla de Simpson cuadrática (Aproximación de Newton): $f(x_i^*) = \sqrt{\frac{f^2(x_{i-1}) + 4f^2(x_{1/2,i}) + f^2(x_i)}{6}}$ (N)	Correspondencia	
	Analogía	Sección media cuadrática de Newton: $\bar{S} = \sqrt{\frac{S_m^2 + 4S_{1/2}^2 + S_M^2}{6}}$ (N)

Como puede observarse en la tabla 4.5, el resultado es una unificación de métodos que se da a través de una interrelación matemática simple en unos casos y compleja en otros. Los casos marcados con **(N)** corresponden a los nuevos métodos no triviales que aporta esta tesis. Incluso, el método trivial definido como de la sección menor, se utiliza, en la práctica, para estimar el volumen de un tocón (parte del tronco que queda por encima del suelo al cortar el árbol). En resumen, como resultado de la unificación, con excepción de los primeros dos métodos triviales, se tienen cuatro nuevos métodos de aproximación para estimar áreas bajo curvas en un intervalo y también cuatro nuevos métodos de cubicación para estimar el volumen de un intervalo o segmento de un sólido de revolución. La singular relación de rotación para MCS ha sido implícitamente definida en la sección 3.4.2. Se han definido en dicha tabla, el radio medio cuadrático-geométrico y la correspondiente sección media cuadrático-geométrica, porque no son otra cosa que las medias cuadráticas de los radios extremos y el radio geométrico en el primer caso y de las áreas de las secciones extremas y la sección geométrica en el segundo caso. También se definen los métodos de aproximación para áreas en base al nombre del método de cubicación con el cual están relacionados (entre paréntesis). El único trabajo que se encontró en donde se proponen varios nuevos métodos de cubicación en forma similar al presente, fue en la referencia (Bruce, 1982), en el cual, se utilizan los diámetros medio cuadrático y medio geométrico, en el mismo sentido que el aplicado aquí, pero multiplicados por un factor de ajuste que es función de los diámetros de los extremos de una troza o bien, de un segmento de tronco.

En lenguaje del cálculo, se han determinado métodos aproximados generales para estimar el volumen de sólidos de revolución y métodos para estimar el área bajo las curvas que por rotación los generan. En el lenguaje equivalente del área forestal y tecnología de la madera, se han determinado métodos de cubicación para tipos dendrométricos generales así como métodos para estimar el área bajo sus funciones generatrices.

A manera de ejemplo, la aplicación de todos los métodos de la tabla 4.5, para determinar el área bajo las curvas generatrices y el volumen de paraboloides y neiloides, se presenta en los restantes capítulos, a excepción del caso de MCS que ya fue resuelto previamente (Uranga-Valencia, 2007; Uranga-Valencia y Cruz de León, 2007).

5. METODOLOGÍA.

Lo que finalmente se persigue, es la estimación de áreas y volúmenes, en particular de geometrías de interés tanto para cálculo integral como para el sector forestal y de tecnología de la madera. Los métodos a utilizar en dicha tarea son los que se han presentado en el capítulo previo. En particular, se considerará la estimación del área bajo las curvas generatrices de paraboloides y neiloides, así como el volumen de dichos sólidos de revolución. Los otros tipos dendrométricos clásicos, cilindro y cono son ejemplos simples que tienen solución directa. A continuación se describe de manera explícita la forma en que se aplicarán los métodos en cuestión.

El área de un rectángulo se obtiene del producto de su base por su altura. Por lo tanto, para obtener el área debajo de una curva es necesario calcularla por separado para cada segmento y posteriormente sumar para todos los segmentos.

Por facilidad, se utilizarán segmentos de igual longitud. De conformidad con la notación del capítulo 2, para una función dada $f(x)$, la altura del i -ésimo segmento será $f(x_i^*)$, en donde x_i^* es el punto muestra correspondiente a dicho segmento. Si se denota por l a la longitud de cada segmento, el área para cada segmento se define como:

$$A_i = lf(x_i^*),$$

y el área total como

$$A_T = \sum_{i=1}^n A_i.$$

Similarmente, para el caso de volúmenes, se define el volumen de segmento como:

$$V_i = l\bar{S}_i$$

En donde \bar{S}_i es el área de la sección transversal promedio del i -ésimo segmento. El volumen total se define como:

$$V_T = \sum_{i=1}^n V_i.$$

5.1 Estimación del área bajo la curva generatriz de paraboloides.

En principio, el área exacta bajo la curva generatriz de un paraboloides de altura h , se podría conocer si se conociera exactamente el área bajo la curva correspondiente a cada intervalo o segmento de longitud, $l = h/n$, en donde n es el número de intervalos considerados, como lo muestra la figura 5.1. Como la idea aquí es poner a prueba los métodos de aproximación del capítulo previo, dichas áreas se aproximarán por áreas de rectángulos con altura definida para cada método y para diferentes números de segmentos. Al sumar las áreas de dichos rectángulos, se tendrá finalmente una estimación del área total.

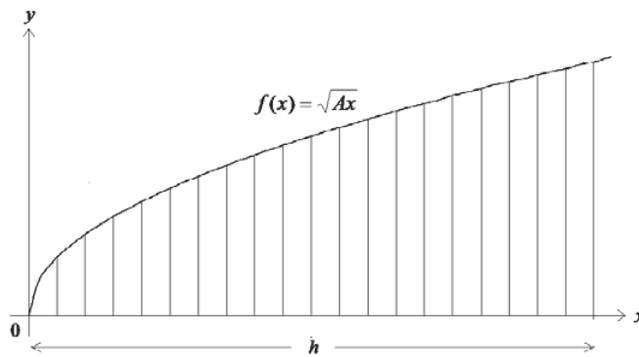


Figura 5.1 Curva generatriz de un paraboloides de altura h y división en segmentos de igual longitud.

5.2 Estimación del área bajo la curva generatriz de neiloide.

En forma similar al paraboloides, en la figura 5.2, se muestra la curva generatriz de un neiloide de altura h , así como la división en un número determinado de segmentos de igual longitud. También en este caso, el área bajo la curva correspondiente a cada segmento se aproximará mediante los métodos del capítulo anterior y para diferentes números de segmentos.

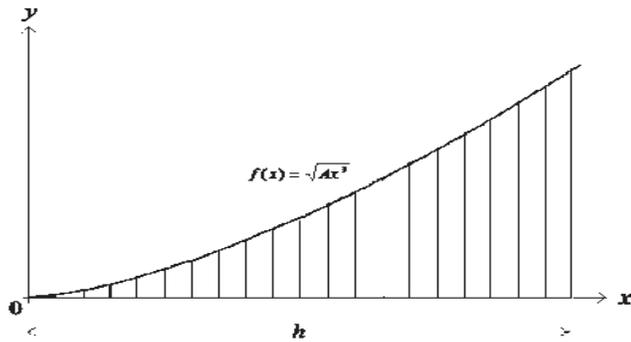


Figura 5.2. Curva generatriz de un neiloide de altura h y división en segmentos de igual longitud.

5.3 Estimación del volumen de paraboloides.

Al girar la curva de la figura 5.1, (junto con el área bajo ella), un ángulo de 2π alrededor del eje x , se genera un paraboloides, como puede verse en la figura 5.3.

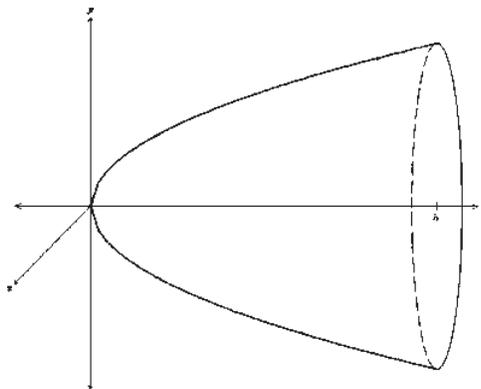


Figura 5.3 Paraboloides y su orientación típica en un sistema coordenado tridimensional para propósito de cálculo.

Al dividir el eje x en intervalos de igual longitud y considerar el volumen correspondiente del sólido de revolución, se tendrá una especie de sólido en rebanadas. El área exacta del paraboloides se puede obtener al sumar los volúmenes de dichas rebanadas. Al utilizar métodos aproximados para estimar el volumen de cada rebanada, se aproxima su geometría por la de un

cilindro con una sección transversal definida para cada método. Al sumar el volumen de los cilindros, se tendrá una estimación del volumen del sólido de revolución.

5.4 Estimación del volumen de neiloide.

En forma similar al caso del paraboloides, al girar la curva de la figura 5.2 (junto con el área bajo ella) un ángulo de 2π alrededor del eje x , se genera un neiloide, como puede verse en la figura 5.4.

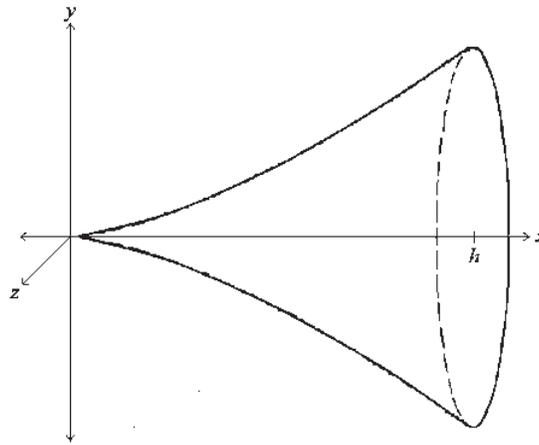


Figura 5.4 Neiloide y su orientación típica en un sistema coordenado tridimensional para propósito de cálculo.

5.5 Cálculo analítico de área y volumen para los casos de $n=5$ y $n=10$.

En primer lugar, se realizaron los cálculos analíticamente para cada método y para los casos en que se dividan las figuras 5.1 y 5.2 en 5 y 10 segmentos. A partir de la fórmula generatriz, se determinaron los valores de la función, en cada caso, para los puntos extremos y medios de los intervalos. Posteriormente se calculó el valor de la función y secciones transversales correspondientes a los diferentes puntos muestra que definen a cada uno de los métodos considerados. A partir de ellos se determinaron los valores aproximados de área y volumen, multiplicando por la longitud de segmento.

5.6 Cálculo numérico para cualquier n finita.

Para un número de segmentos mayor de 10 el cálculo manual es complicado en extremo. En general para cualquier n finita, el procedimiento de cálculo se puede realizar mediante Excel de acuerdo al procedimiento de hoja de cálculo que se describe a continuación. Se asignan columnas a las variables x_{i-1} y x_i , y en caso necesario, otra columna para la variable $x_{1/2}$. Se asignan columnas a $f(x_{i-1})$ y $f(x_i)$, y en su caso, otra columna para $f(x_{1/2})$. Se asigna una columna al cálculo de la $f(x_i^*)$ y \bar{S} correspondiente a cada método. Finalmente se asignan columnas a $lf(x_i^*)$ y $l\bar{S}$. Al realizar la suma de valores en cada columna, se obtienen finalmente los valores de área y volumen correspondientes al método en cuestión. La tabla 5.1, ilustra el método descrito para el caso del cálculo de área utilizando la regla de Simpson.

Tabla 5.1 Ejemplo de una secuencia de cálculo considerada para el cálculo de área bajo una curva mediante Excel, utilizando el método de la regla de Simpson.

$A = \# \text{ de Intervalo } 1, 2, \dots, n$	$B = \frac{A}{n} (x_i)$	$C = \frac{A-1}{n} (x_{i-1})$	$D = \frac{B+C}{2} (x_{1/2,i})$	$E = \sqrt{B} f(x_i)$	$F = \sqrt{C} f(x_{i-1})$	$G = \sqrt{D} f(x_{1/2,i})$	$H = l/n$	$I = \frac{F+4G+E}{6} f(x_i^*)$	$J = IH \equiv \text{área}$
---	-------------------------	-------------------------------	---------------------------------	-----------------------	---------------------------	-----------------------------	-----------	---------------------------------	-----------------------------

El número de segmentos se asigna manualmente en la columna A. Se realizaron los cálculos para $n=5, 10, 20, 100$ y 500 . El procedimiento de cálculo mediante Excel para un número grande de segmentos equivale a un proceso de integración numérica.

Los cálculos analíticos para 5 y 10 segmentos que se mencionan en la sección anterior, sirvieron como datos de referencia para probar que las fórmulas introducidas en Excel estaban escritas correctamente. El software Excel es muy sensible a errores mínimos en la escritura de fórmulas matemáticas. Una vez que en Excel se reprodujeron exactamente todos los datos, para 5 y 10 segmentos, se tuvo la seguridad de que las fórmulas estaban bien escritas y que podía realizarse el cálculo para cualquier número de segmentos.

5.7 Definición de área relativa total y volumen relativo total

Interesa conocer la estimación del área total, A_T , y el volumen total, V_T , de los métodos aproximados en comparación con el área total exacta, A_E , y el volumen total exacto, V_E , respectivamente, lo que proporcionaría un indicio de la exactitud de los métodos. Esto, se puede cuantificar mediante los parámetros adimensionales, A_T/A_E , y V_T/V_E , que se definen aquí como el área relativa total y el volumen relativo total, respectivamente.

6. RESULTADOS PARA EL ÁREA TOTAL BAJO LA CURVA GENERATRIZ DE PARABOLOIDE

6.1 Área exacta bajo la curva generatriz de paraboloides.

La curva generatriz del paraboloides $y=f(x)$ se obtiene a partir de la solución positiva de la ecuación

$$y^2 = Ax$$

mediante un despeje de variable,

$$y = \sqrt{Ax}; \quad a = \sqrt{A}$$

$$y = a\sqrt{x}.$$

El área exacta bajo la curva generatriz del paraboloides con longitud h , se obtiene mediante técnicas estándar del cálculo integral,

$$\begin{aligned} A_E &= \int_0^h y dx = a \int_0^h \sqrt{x} dx \\ &= a \frac{x^{3/2}}{3/2} \Big|_0^h \\ &= \left[\frac{2a}{3} x^{3/2} \right]_0^h \end{aligned}$$

$$A_E = \frac{2a}{3} h^{3/2} = \frac{2}{3} \sqrt{Ah^3}.$$

6.2 Resultados para el área bajo la curva generatriz de paraboloides con 5 segmentos, mediante métodos aproximados.

La división del área bajo la curva generatriz de un paraboloides de altura h para 5 segmentos de longitud, $l=h/5$, se muestra en la figura 6.1.

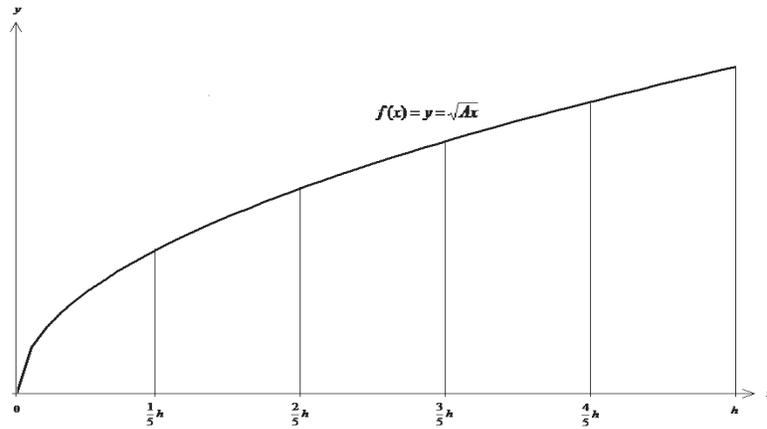


Figura 6.1 División del área bajo la curva generatriz de paraboloides de altura h en 5 segmentos de igual longitud.

Los parámetros requeridos para la estimación del área para 5 intervalos, mediante los métodos aproximados considerados, se muestran en la tabla 6.1 y los resultados obtenidos para el área total, en la tabla 6.2.

Tabla 6.1 Conjunto de parámetros requeridos en el cálculo de áreas para la curva generatriz de paraboloides con 5 segmentos.

intervalo	x_i	x_{i-1}	$x_{1/2,i}$	$y_i = f(x_i)$	$y_{i-1} = f(x_{i-1})$	$y_{1/2,i} = f(x_{1/2,i})$
1	$\frac{1}{5}h$	0	$\frac{1}{10}h$	$\sqrt{\frac{1}{5}Ah}$	0	$\sqrt{\frac{1}{10}Ah}$
2	$\frac{2}{5}h$	$\frac{1}{5}h$	$\frac{3}{10}h$	$\sqrt{\frac{2}{5}Ah}$	$\sqrt{\frac{1}{5}Ah}$	$\sqrt{\frac{3}{10}Ah}$
3	$\frac{3}{5}h$	$\frac{2}{5}h$	$\frac{5}{10}h$	$\sqrt{\frac{3}{5}Ah}$	$\sqrt{\frac{2}{5}Ah}$	$\sqrt{\frac{5}{10}Ah}$
4	$\frac{4}{5}h$	$\frac{3}{5}h$	$\frac{7}{10}h$	$\sqrt{\frac{4}{5}Ah}$	$\sqrt{\frac{3}{5}Ah}$	$\sqrt{\frac{7}{10}Ah}$
5	h	$\frac{4}{5}h$	$\frac{9}{10}h$	\sqrt{Ah}	$\sqrt{\frac{4}{5}Ah}$	$\sqrt{\frac{9}{10}Ah}$

Tabla 6.2 Áreas totales debajo de la curva generatriz del paraboloide para 5 segmentos.

MÉTODO	REGLA QUE DEFINE AL MÉTODO
ÁREA TOTAL	
1. Extremos izquierdos de los subintervalos:	$f(x_i^*) = f(x_{i-1})$
$A_T = \frac{\sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4}}{5\sqrt{5}} \sqrt{Ah^3}$	
2. Extremos derechos de los subintervalos	$f(x_i^*) = f(x_i)$
$A_T = \frac{\sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4} + \sqrt{5}}{5\sqrt{5}} \sqrt{Ah^3}$	
3. Puntos medios de los subintervalos:	$f(x_i^*) = f(x_{1/2,i})$
$A_T = \frac{\sqrt{1} + \sqrt{3} + \sqrt{5} + \sqrt{7} + \sqrt{9}}{5\sqrt{10}} \sqrt{Ah^3}$	
4. Regla del trapecio (radio medio):	$f(x_i^*) = \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2}$
$A_T = \frac{2\sqrt{1} + 2\sqrt{2} + 2\sqrt{3} + 2\sqrt{4} + \sqrt{5}}{10\sqrt{5}} \sqrt{Ah^3}$	
5. Aproximación de Smalian:	$f(x_i^*) = \sqrt{\frac{f^2(x_{i-1}) + f^2(x_i)}{2}}$
$A_T = \frac{\sqrt{1} + \sqrt{3} + \sqrt{5} + \sqrt{7} + \sqrt{9}}{5\sqrt{10}} \sqrt{Ah^3}$	
6. Radio medio geométrico:	$f(x_i^*) = \sqrt{f(x_{i-1})f(x_i)}$
$A_T = \frac{\sqrt[4]{2} + \sqrt[4]{6} + \sqrt[4]{12} + \sqrt[4]{20}}{5\sqrt{5}} \sqrt{Ah^3}$	
7. Radio medio cuadrático geométrico	$f(x_i^*) = \sqrt{\frac{f^2(x_{i-1}) + f^2(x_i) + f(x_{i-1})f(x_i)}{3}}$
$A_T = \frac{\sqrt{1} + \sqrt{3} + \sqrt{2} + \sqrt{5} + \sqrt{6} + \sqrt{7} + \sqrt{12} + \sqrt{9} + \sqrt{20}}{5\sqrt{15}} \sqrt{Ah^3}$	
8. Regla de Simpson:	$f(x_i^*) = \frac{f(x_{i-1}) + 4f(x_{1/2i}) + f(x_i)}{6}$
$A_T = \frac{(4\sqrt{1} + 2\sqrt{2} + 4\sqrt{3} + 2\sqrt{4} + 4\sqrt{5} + 2\sqrt{6} + 4\sqrt{7} + 2\sqrt{8} + 4\sqrt{9} + \sqrt{10})\sqrt{Ah^3}}{30\sqrt{10}}$	
9. Regla de Simpson cuadrática:	$f(x_i^*) = \sqrt{\frac{f^2(x_{i-1}) + 4f^2(x_{1/2i}) + f^2(x_i)}{6}}$
$A_T = \frac{\sqrt{1} + \sqrt{3} + \sqrt{5} + \sqrt{7} + \sqrt{9}}{5\sqrt{10}} \sqrt{Ah^3}$	

6.3 Resultados para el área bajo la curva generatriz de paraboloides con 10 segmentos, mediante métodos aproximados.

La división del área bajo la curva generatriz de un paraboloides de altura h para 10 segmentos ($l=h/10$) se muestra en la figura 6.2.

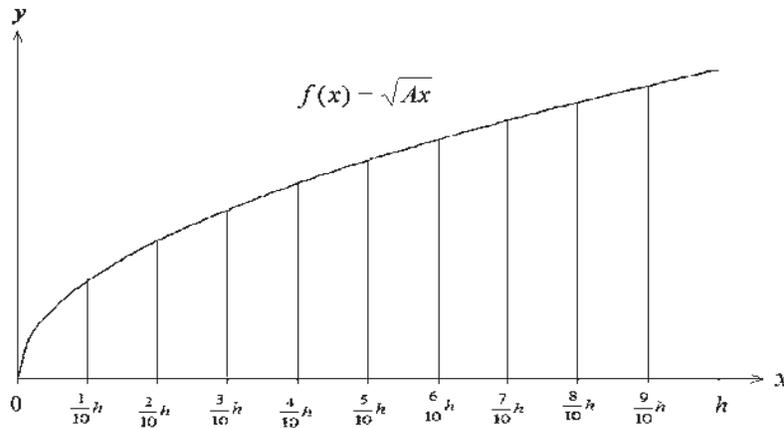


Figura 6.2 División del área bajo la curva generatriz de paraboloides de altura h en 10 segmentos de igual longitud.

En forma similar al caso de 5 segmentos, los parámetros requeridos para la estimación del área para 10 intervalos, mediante los métodos aproximados considerados, se muestran en la tabla 6.3 y los resultados obtenidos, en la tabla 6.4.

Tabla 6.3 Conjunto completo de parámetros requeridos en el cálculo de áreas para la curva generatriz de paraboloides con 10 segmentos.

# intervalo	x_i	x_{i-1}	$x_{i/2i}$	$y_i = f(x_i)$	$y_{i-1} = f(x_{i-1})$	$y_{i/2i} = f(x_{i/2i})$
1	$\frac{1}{10}h$	0	$\frac{1}{20}h$	$\sqrt{\frac{1}{10}Ah}$	0	$\sqrt{\frac{1}{20}Ah}$
2	$\frac{2}{10}h$	$\frac{1}{10}h$	$\frac{3}{20}h$	$\sqrt{\frac{2}{10}Ah}$	$\sqrt{\frac{1}{10}Ah}$	$\sqrt{\frac{3}{20}Ah}$
3	$\frac{3}{10}h$	$\frac{2}{10}h$	$\frac{5}{20}h$	$\sqrt{\frac{3}{10}Ah}$	$\sqrt{\frac{2}{10}Ah}$	$\sqrt{\frac{5}{20}Ah}$
4	$\frac{4}{10}h$	$\frac{3}{10}h$	$\frac{7}{20}h$	$\sqrt{\frac{4}{10}Ah}$	$\sqrt{\frac{3}{10}Ah}$	$\sqrt{\frac{7}{20}Ah}$
5	$\frac{5}{10}h$	$\frac{4}{10}h$	$\frac{9}{20}h$	$\sqrt{\frac{5}{10}Ah}$	$\sqrt{\frac{4}{10}Ah}$	$\sqrt{\frac{9}{20}Ah}$
6	$\frac{6}{10}h$	$\frac{5}{10}h$	$\frac{11}{20}h$	$\sqrt{\frac{6}{10}Ah}$	$\sqrt{\frac{5}{10}Ah}$	$\sqrt{\frac{11}{20}Ah}$
7	$\frac{7}{10}h$	$\frac{6}{10}h$	$\frac{13}{20}h$	$\sqrt{\frac{7}{10}Ah}$	$\sqrt{\frac{6}{10}Ah}$	$\sqrt{\frac{13}{20}Ah}$
8	$\frac{8}{10}h$	$\frac{7}{10}h$	$\frac{15}{20}h$	$\sqrt{\frac{8}{10}Ah}$	$\sqrt{\frac{7}{10}Ah}$	$\sqrt{\frac{15}{20}Ah}$
9	$\frac{9}{10}h$	$\frac{8}{10}h$	$\frac{17}{20}h$	$\sqrt{\frac{9}{10}Ah}$	$\sqrt{\frac{8}{10}Ah}$	$\sqrt{\frac{17}{20}Ah}$
10	h	$\frac{9}{10}h$	$\frac{19}{20}h$	\sqrt{Ah}	$\sqrt{\frac{9}{10}Ah}$	$\sqrt{\frac{19}{20}Ah}$

Tabla 6.4 Áreas totales debajo de la curva generatriz del paraboloides para 10 segmentos

MÉTODO	REGLA QUE DEFINE AL MÉTODO
ÁREA TOTAL	
1. Extremos izquierdos de los subintervalos:	$f(x_i^*) = f(x_{i-1})$
$A_T = \frac{\sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4} + \sqrt{5} + \sqrt{6} + \sqrt{7} + \sqrt{8} + \sqrt{9}}{10\sqrt{10}} \sqrt{Ah^3}$	
2. Extremos derechos de los subintervalos	$f(x_i^*) = f(x_i)$
$A_T = \frac{\sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4} + \sqrt{5} + \sqrt{6} + \sqrt{7} + \sqrt{8} + \sqrt{9} + \sqrt{10}}{10\sqrt{10}} \sqrt{Ah^3}$	
3. Puntos medios de los subintervalos:	$f(x_i^*) = f(x_{i/2,i})$
$A_T = \frac{\sqrt{1} + \sqrt{3} + \sqrt{5} + \sqrt{7} + \sqrt{9} + \sqrt{11} + \sqrt{13} + \sqrt{15} + \sqrt{17} + \sqrt{19}}{10\sqrt{20}} \sqrt{Ah^3}$	
4. Regla del trapecio (radio medio):	$f(x_i^*) = \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2}$
$A_T = \frac{2\sqrt{1} + 2\sqrt{2} + 2\sqrt{3} + 2\sqrt{4} + 2\sqrt{5} + 2\sqrt{6} + 2\sqrt{7} + 2\sqrt{8} + 2\sqrt{9} + \sqrt{10}}{20\sqrt{10}} \sqrt{Ah^3}$	
5. Aproximación de Smalian:	$f(x_i^*) = \sqrt{\frac{f^2(x_{i-1}) + f^2(x_i)}{2}}$
$A_T = \frac{\sqrt{1} + \sqrt{3} + \sqrt{5} + \sqrt{7} + \sqrt{9} + \sqrt{11} + \sqrt{13} + \sqrt{15} + \sqrt{17} + \sqrt{19}}{10\sqrt{20}} \sqrt{Ah^3}$	
6. Radio medio geométrico:	$f(x_i^*) = \sqrt{f(x_{i-1})f(x_i)}$
$A_T = \frac{\sqrt[4]{2} + \sqrt[4]{6} + \sqrt[4]{12} + \sqrt[4]{20} + \sqrt[4]{30} + \sqrt[4]{42} + \sqrt[4]{56} + \sqrt[4]{72} + \sqrt[4]{90}}{10\sqrt{10}} \sqrt{Ah^3}$	
7. Radio medio cuadrático geométrico	$f(x_i^*) = \sqrt{\frac{f^2(x_{i-1}) + f^2(x_i) + f(x_{i-1})f(x_i)}{3}}$
$A_T = \frac{\sqrt{1} + \sqrt{3} + \sqrt{2} + \sqrt{5} + \sqrt{6} + \sqrt{7} + \sqrt{12} + \sqrt{9} + \sqrt{20} + \sqrt{11} + \sqrt{30} + \sqrt{13} + \sqrt{42} + \sqrt{15} + \sqrt{56} + \sqrt{17} + \sqrt{72} + \sqrt{19} + \sqrt{90}}{10\sqrt{30}} \sqrt{Ah^3}$	
8. Regla de Simpson:	$f(x_i^*) = \frac{f(x_{i-1}) + 4f(x_{i/2,i}) + f(x_i)}{6}$
$A_T = \frac{4(\sqrt{1} + \sqrt{3} + \sqrt{5} + \sqrt{7} + \sqrt{9} + \sqrt{11} + \sqrt{13} + \sqrt{15} + \sqrt{17} + \sqrt{19}) + 2(\sqrt{2} + \sqrt{4} + \sqrt{6} + \sqrt{8} + \sqrt{10} + \sqrt{12} + \sqrt{14} + \sqrt{16} + \sqrt{18}) + \sqrt{20}}{60\sqrt{20}} \sqrt{Ah^3}$	
9. Regla de Simpson cuadrática:	$f(x_i^*) = \sqrt{\frac{f^2(x_{i-1}) + 4f^2(x_{i/2,i}) + f^2(x_i)}{6}}$
$A_T = \frac{\sqrt{1} + \sqrt{3} + \sqrt{5} + \sqrt{7} + \sqrt{9} + \sqrt{11} + \sqrt{13} + \sqrt{15} + \sqrt{17} + \sqrt{19}}{10\sqrt{20}} \sqrt{Ah^3}$	

En el apéndice A, se muestra un ejemplo de cálculo de área para los segmentos individuales mediante uno de los métodos considerados. Los resultados analíticos completos para todos los métodos involucrados, para 5 y 10 segmentos, ocuparían un gran espacio en este documento, por lo que se anexan en archivo electrónico en el CD que acompaña a esta tesis (también se etiquetan como apéndice A).

6.4 Área relativa total bajo la curva generatriz de paraboloides para 5 y 10 segmentos, mediante cálculo analítico.

Los resultados para el área bajo la curva de paraboloides pueden ser resumidos a través del área relativa total, definida en la sección 5.1.7, que es el parámetro de estimación más representativo de dichos cálculos. En la tabla 6.5, se muestran los resultados para el área relativa total para 5 y 10 segmentos.

Tabla 6.5 Resultados de la estimación del área relativa total bajo la curva generatriz de paraboloides, con 5 y 10 segmentos, respectivamente, mediante cálculo analítico.

Método	A_T/A_E	
	5 segmentos	10 segmentos
1. Extremos izquierdos de los subintervalos	0.8246	0.9157
2. Extremos derechos de los subintervalos	1.1246	1.0657
3. Puntos medios de los subintervalos	1.0069	1.0025
4. Regla del trapecio	0.9746	0.9907
5. Aproximación de Smalian	1.0069	1.0025
6. Radio medio geométrico	0.9029	0.9650
7. Radio medio cuadrático geométrico	0.9864	0.9950
8. Regla de Simpson	0.9961	0.9986
9. Regla de Simpson cuadrática	1.0069	1.0025
10. Regla Husma	0.9387	0.9779

6.5 Área relativa total bajo la curva generatriz de paraboloides para 5, 10, 20, 50, 100 y 500 segmentos, mediante Excel.

Los cálculos analíticos para un número de segmentos superior a 10, son en extremo difíciles, por lo que se utilizó para ello el software Excel de acuerdo con el procedimiento descrito en la sección 5.1.6 de la metodología.

En la tabla 6.6, se muestran el resumen de resultados para área relativa total como función del número de segmentos obtenidos mediante Excel.

Tabla 6.6 Resultados del área relativa total bajo la curva generatriz de paraboloides calculados mediante Excel, como función del número de segmentos.

MÉTODO	A_T/A_E					
	5	10	20	50	100	500
1. Extremos izquierdos de los subintervalos	0.824607	0.915764	0.959169	0.984143	0.992194	0.998472
2. Extremos derechos de los subintervalos	1.124607	1.065764	1.034169	1.014143	1.007194	1.001472
3. Puntos medios de los subintervalos	1.006920	1.002575	1.000943	1.000245	1.000088	1.000008
4. Regla del trapecio	0.974607	0.990764	0.996669	0.999143	0.999694	0.999972
5. Aproximación de Smalian	1.006920	1.002575	1.000943	1.000245	1.000088	1.000008
6. Radio medio geométrico	0.902957	0.965043	0.987479	0.996796	0.998860	0.999897
7. Radio medio cuadrático geométrico	0.986498	0.995097	0.998234	0.999546	0.999838	0.999985
8. Regla de Simpson	0.996149	0.998638	0.999518	0.999878	0.999956	0.999996
9. Regla de Simpson cuadrática	1.006920	1.002575	1.000943	1.000245	1.000088	1.000008
10. Regla de Husma	0.9387824	0.9779038	0.9920746	0.9979696	0.9992776	0.9999348

Los cálculos por segmento se han guardado solamente en archivo electrónico debido a que ocuparían un espacio extraordinario en forma escrita. Como ilustración, en el apéndice A, se incluye la impresión de pantalla de la primera hoja de cálculo de Excel para el método 5, para el caso de 500 segmentos.

7. RESULTADOS PARA EL ÁREA TOTAL BAJO LA CURVA GENERATRIZ DE NEILOIDE.

7.1 Área exacta bajo la curva generatriz de neiloide.

La curva generatriz del neiloide $y=f(x)$ se obtiene a partir de la relación

$$y^2 = Ax^3$$

mediante un simple despeje de variable

$$y = \sqrt{Ax^3} ; \quad a = \sqrt{A}$$

$$y = a\sqrt{x^3}$$

El área exacta bajo la curva generatriz del neiloide con longitud h , se obtiene mediante técnicas estándar del cálculo integral,

$$\begin{aligned} A_E &= \int_0^h y dx = a \int_0^h \sqrt{x^3} dx \\ &= a \int_0^h x^{3/2} dx \\ &= a \left. \frac{x^{5/2}}{5/2} \right|_0^h \\ &= \left[\frac{2a}{5} x^{5/2} \right]_0^h \\ A_E &= \frac{2a}{5} h^{5/2} = \frac{2}{5} \sqrt{Ah^5} \end{aligned}$$

7.2 Resultados para el área bajo la curva generatriz de neiloide con 5 segmentos, mediante métodos aproximados.

La división del área bajo la curva generatriz de un neiloide de altura h para 5 segmentos ($l=h/5$) se muestra en la figura 7.1.

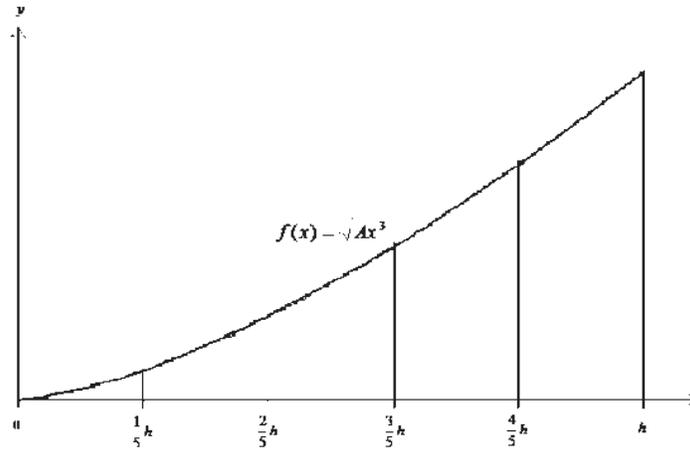


Figura 7.1 División del área bajo la curva generatriz de neiloide de altura h en 5 segmentos de igual longitud.

Los parámetros requeridos para la estimación del área para 5 intervalos, mediante los métodos aproximados considerados, se muestran en la tabla 7.1 y los resultados obtenidos, en la tabla 7.2.

Tabla 7.1 Conjunto de parámetros requeridos en el cálculo de áreas bajo la curva generatriz de neiloide con 5 segmentos.

# intervalo	x_i	x_{i-1}	$x_{1/2,i}$	$y_i = f(x_i)$	$y_{i-1} = f(x_{i-1})$	$y_{1/2,i} = f(x_{1/2,i})$
1	$\frac{1}{5}h$	0	$\frac{1}{10}h$	$\sqrt{\left(\frac{1}{5}\right)^3 Ah^3}$	0	$\sqrt{\left(\frac{1}{10}\right)^3 Ah^3}$
2	$\frac{2}{5}h$	$\frac{1}{5}h$	$\frac{3}{10}h$	$\sqrt{\left(\frac{2}{5}\right)^3 Ah^3}$	$\sqrt{\left(\frac{1}{5}\right)^3 Ah^3}$	$\sqrt{\left(\frac{3}{10}\right)^3 Ah^3}$
3	$\frac{3}{5}h$	$\frac{2}{5}h$	$\frac{5}{10}h$	$\sqrt{\left(\frac{3}{5}\right)^3 Ah^3}$	$\sqrt{\left(\frac{2}{5}\right)^3 Ah^3}$	$\sqrt{\left(\frac{5}{10}\right)^3 Ah^3}$
4	$\frac{4}{5}h$	$\frac{3}{5}h$	$\frac{7}{10}h$	$\sqrt{\left(\frac{4}{5}\right)^3 Ah^3}$	$\sqrt{\left(\frac{3}{5}\right)^3 Ah^3}$	$\sqrt{\left(\frac{7}{10}\right)^3 Ah^3}$
5	h	$\frac{4}{5}h$	$\frac{9}{10}h$	$\sqrt{Ah^3}$	$\sqrt{\left(\frac{4}{5}\right)^3 Ah^3}$	$\sqrt{\left(\frac{9}{10}\right)^3 Ah^3}$

Tabla 7.2 Áreas totales debajo de la curva generatriz del neiloide para 5 segmentos

MÉTODO	REGLA QUE DEFINE AL MÉTODO
ÁREA TOTAL	
1. Extremos izquierdos de los subintervalos:	$f(x_i^*) = f(x_{i-1})$
$A_T = \frac{\sqrt{1^3} + \sqrt{2^3} + \sqrt{3^3} + \sqrt{4^3}}{5\sqrt{5^3}} \sqrt{Ah^5}$	
2. Extremos derechos de los subintervalos	$f(x_i^*) = f(x_i)$
$A_T = \frac{\sqrt{1^3} + \sqrt{2^3} + \sqrt{3^3} + \sqrt{4^3} + \sqrt{5^3}}{5\sqrt{5^3}} \sqrt{Ah^3}$	
3. Puntos medios de los subintervalos:	$f(x_i^*) = f(x_{i/2,i})$
$A_T = \frac{\sqrt{1^3} + \sqrt{3^3} + \sqrt{5^3} + \sqrt{7^3} + \sqrt{9^3}}{5\sqrt{10^3}} \sqrt{Ah^5}$	
4. Regla del trapecio (radio medio):	$f(x_i^*) = \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2}$
$A_T = \frac{2(\sqrt{1^3} + \sqrt{2^3} + \sqrt{3^3} + \sqrt{4^3} + \sqrt{5^3}/2)}{10\sqrt{5^3}} \sqrt{Ah^5}$	
5. Aproximación de Smalian:	$f(x_i^*) = \sqrt{\frac{f^2(x_{i-1}) + f^2(x_i)}{2}}$
$A_T = \frac{\sqrt{1^3} + \sqrt{1^3 + 2^3} + \sqrt{2^3 + 3^3} + \sqrt{3^3 + 4^3} + \sqrt{4^3 + 5^3}}{5\sqrt{2(5^3)}} \sqrt{Ah^5}$	
6. Radio medio geométrico:	$f(x_i^*) = \sqrt{f(x_{i-1})f(x_i)}$
$A_T = \frac{\sqrt[4]{2^3} + \sqrt[4]{6^3} + \sqrt[4]{12^3} + \sqrt[4]{20^3}}{5\sqrt{5^3}} \sqrt{Ah^5}$	
7. Radio medio cuadrático geométrico	$f(x_i^*) = \sqrt{\frac{f^2(x_{i-1}) + f^2(x_i) + f(x_{i-1})f(x_i)}{3}}$
$A_T = \frac{1 + \sqrt{1+2^3} + \sqrt{2^3} + \sqrt{2^3+3^3} + \sqrt{6^3} + \sqrt{3^3+4^3} + \sqrt{12^3} + \sqrt{4^3+5^3} + \sqrt{20^3}}{5\sqrt{3(5^3)}} \sqrt{Ah^5}$	
8. Regla de Simpson:	$f(x_i^*) = \frac{f(x_{i-1}) + 4f(x_{i/2,i}) + f(x_i)}{6}$
$A_T = \frac{(4\sqrt{1} + 2\sqrt{2^3} + 4\sqrt{3^3} + 2\sqrt{4^3} + 4\sqrt{5^3} + 2\sqrt{6^3} + 4\sqrt{7^3} + 2\sqrt{8^3} + 4\sqrt{9^3} + \sqrt{10^3})\sqrt{Ah^5}}{30\sqrt{10^3}}$	
9. Regla de Simpson cuadrática:	$f(x_i^*) = \sqrt{\frac{f^2(x_{i-1}) + 4f^2(x_{i/2,i}) + f^2(x_i)}{6}}$
$A_T = \frac{\sqrt{4+2^3} + \sqrt{2^3+4(3^3)} + 4^3 + \sqrt{4^3+4(5^3)} + 6^3 + \sqrt{6^3+4(7^3)} + 8^3 + \sqrt{8^3+4(9^3)} + 10^3}{5\sqrt{6(10^3)}} \sqrt{Ah^5}$	

7.3 Resultados para el área bajo la curva generatriz de neiloide con 10 segmentos, mediante métodos aproximados.

La división del área bajo la curva generatriz de un neiloide de altura h para 10 segmentos ($l=h/10$) se muestra en la figura 7.2.

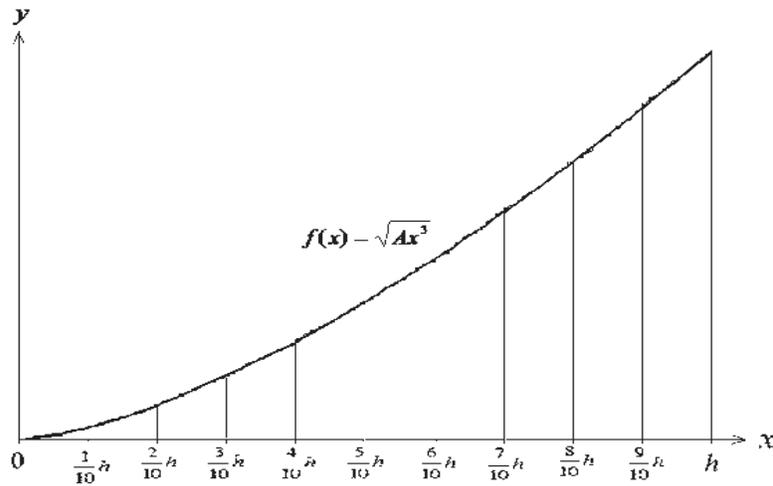


Figura 7.2 División del área bajo la curva generatriz de neiloide de altura h en 10 segmentos de igual longitud.

Así como en el caso de 5 segmentos, los parámetros requeridos para la estimación del área para 10 intervalos, mediante los métodos aproximados considerados, se muestran en la tabla 7.3 y los resultados obtenidos, en la tabla 7.4.

Tabla 7.3 Conjunto de parámetros requeridos en el cálculo de áreas para la curva generatriz de paraboloides con 10 segmentos.

# intervalo	x_i	x_{i-1}	$x_{1/2,i}$	$y_i = f(x_i)$	$y_{i-1} = f(x_{i-1})$	$y_{1/2,i} = f(x_{1/2,i})$
1	$\frac{1}{10}h$	0	$\frac{1}{20}h$	$\sqrt{\left(\frac{1}{10}\right)^3 Ah^3}$	0	$\sqrt{\left(\frac{1}{20}\right)^3 Ah^3}$
2	$\frac{2}{10}h$	$\frac{1}{10}h$	$\frac{3}{20}h$	$\sqrt{\left(\frac{2}{10}\right)^3 Ah^3}$	$\sqrt{\left(\frac{1}{10}\right)^3 Ah^3}$	$\sqrt{\left(\frac{3}{20}\right)^3 Ah^3}$
3	$\frac{3}{10}h$	$\frac{2}{10}h$	$\frac{5}{20}h$	$\sqrt{\left(\frac{3}{10}\right)^3 Ah^3}$	$\sqrt{\left(\frac{2}{10}\right)^3 Ah^3}$	$\sqrt{\left(\frac{5}{20}\right)^3 Ah^3}$
4	$\frac{4}{10}h$	$\frac{3}{10}h$	$\frac{7}{20}h$	$\sqrt{\left(\frac{4}{10}\right)^3 Ah^3}$	$\sqrt{\left(\frac{3}{10}\right)^3 Ah^3}$	$\sqrt{\left(\frac{7}{20}\right)^3 Ah^3}$
5	$\frac{5}{10}h$	$\frac{4}{10}h$	$\frac{9}{20}h$	$\sqrt{\left(\frac{5}{10}\right)^3 Ah^3}$	$\sqrt{\left(\frac{4}{10}\right)^3 Ah^3}$	$\sqrt{\left(\frac{9}{20}\right)^3 Ah^3}$
6	$\frac{6}{10}h$	$\frac{5}{10}h$	$\frac{11}{20}h$	$\sqrt{\left(\frac{6}{10}\right)^3 Ah^3}$	$\sqrt{\left(\frac{5}{10}\right)^3 Ah^3}$	$\sqrt{\left(\frac{11}{20}\right)^3 Ah^3}$
7	$\frac{7}{10}h$	$\frac{6}{10}h$	$\frac{13}{20}h$	$\sqrt{\left(\frac{7}{10}\right)^3 Ah^3}$	$\sqrt{\left(\frac{6}{10}\right)^3 Ah^3}$	$\sqrt{\left(\frac{13}{20}\right)^3 Ah^3}$
8	$\frac{8}{10}h$	$\frac{7}{10}h$	$\frac{15}{20}h$	$\sqrt{\left(\frac{8}{10}\right)^3 Ah^3}$	$\sqrt{\left(\frac{7}{10}\right)^3 Ah^3}$	$\sqrt{\left(\frac{15}{20}\right)^3 Ah^3}$
9	$\frac{9}{10}h$	$\frac{8}{10}h$	$\frac{17}{20}h$	$\sqrt{\left(\frac{9}{10}\right)^3 Ah^3}$	$\sqrt{\left(\frac{8}{10}\right)^3 Ah^3}$	$\sqrt{\left(\frac{17}{20}\right)^3 Ah^3}$
10	h	$\frac{9}{10}h$	$\frac{19}{20}h$	$\sqrt{Ah^3}$	$\sqrt{\left(\frac{9}{10}\right)^3 Ah^3}$	$\sqrt{\left(\frac{19}{20}\right)^3 Ah^3}$

Tabla 7.4 Áreas totales debajo de la curva generatriz del neiloide para 10 segmentos

MÉTODO	REGLA QUE DEFINE AL MÉTODO
ÁREA TOTAL	
1. Extremos izquierdos de los subintervalos:	$f(x_i^*) = f(x_{i-1})$
$A_T = \frac{\sqrt{1^3} + \sqrt{2^3} + \sqrt{3^3} + \sqrt{4^3} + \sqrt{5^3} + \sqrt{6^3} + \sqrt{7^3} + \sqrt{8^3} + \sqrt{9^3}}{10\sqrt{10^3}} \sqrt{Ah^5}$	
2. Extremos derechos de los subintervalos	$f(x_i^*) = f(x_i)$
$A_T = \frac{\sqrt{1^3} + \sqrt{2^3} + \sqrt{3^3} + \sqrt{4^3} + \sqrt{5^3} + \sqrt{6^3} + \sqrt{7^3} + \sqrt{8^3} + \sqrt{9^3} + \sqrt{10^3}}{10\sqrt{10^3}} \sqrt{Ah^5}$	
3. Puntos medios de los subintervalos:	$f(x_i^*) = f(x_{i/2,i})$
$A_T = \frac{\sqrt{1^3} + \sqrt{3^3} + \sqrt{5^3} + \sqrt{7^3} + \sqrt{9^3} + \sqrt{11^3} + \sqrt{13^3} + \sqrt{15^3} + \sqrt{17^3} + \sqrt{19^3}}{10\sqrt{20^3}} \sqrt{Ah^5}$	
4. Regla del trapecio (radio medio):	$f(x_i^*) = \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2}$
$A_T = \frac{\sqrt{1^3} + \sqrt{2^3} + \sqrt{3^3} + \sqrt{4^3} + \sqrt{5^3} + \sqrt{6^3} + \sqrt{7^3} + \sqrt{8^3} + \sqrt{9^3} + \sqrt{10^3}}{10\sqrt{10^3}} \sqrt{Ah^5}$	
5. Aproximación de Smalian:	$f(x_i^*) = \sqrt{\frac{f^2(x_{i-1}) + f^2(x_i)}{2}}$
$A_T = \frac{\sqrt{1^3 + 1^3 + 2^3} + \sqrt{2^3 + 2^3 + 3^3} + \sqrt{3^3 + 3^3 + 4^3} + \sqrt{4^3 + 4^3 + 5^3} + \sqrt{5^3 + 5^3 + 6^3} + \sqrt{6^3 + 6^3 + 7^3} + \sqrt{7^3 + 7^3 + 8^3} + \sqrt{8^3 + 8^3 + 9^3} + \sqrt{9^3 + 9^3 + 10^3}}{10\sqrt{2(10^3)}} \sqrt{Ah^5}$	
6. Radio medio geométrico:	$f(x_i^*) = \sqrt{f(x_{i-1})f(x_i)}$
$A_T = \frac{\sqrt[4]{2^3} + \sqrt[4]{6^3} + \sqrt[4]{12^3} + \sqrt[4]{20^3} + \sqrt[4]{30^3} + \sqrt[4]{42^3} + \sqrt[4]{56^3} + \sqrt[4]{72^3} + \sqrt[4]{90^3}}{10\sqrt{10^3}} \sqrt{Ah^5}$	
7. Radio medio cuadrático geométrico	$f(x_i^*) = \sqrt{\frac{f^2(x_{i-1}) + f^2(x_i) + f(x_{i-1})f(x_i)}{3}}$
$A_T = \frac{1 + \sqrt{1+2^3} + \sqrt{2^3} + \sqrt{2^3+3^3} + \sqrt{3^3} + \sqrt{3^3+4^3} + \sqrt{4^3} + \sqrt{4^3+5^3} + \sqrt{5^3} + \sqrt{5^3+6^3} + \sqrt{6^3} + \sqrt{6^3+7^3} + \sqrt{7^3} + \sqrt{7^3+8^3} + \sqrt{8^3} + \sqrt{8^3+9^3} + \sqrt{9^3} + \sqrt{9^3+10^3} + \sqrt{10^3}}{10\sqrt{3(10^3)}} \sqrt{Ah^5}$	
8. Regla de Simpson:	$f(x_i^*) = \frac{f(x_{i-1}) + 4f(x_{i/2,i}) + f(x_i)}{6}$
$A_T = \frac{(4\sqrt{1+2^3} + 2\sqrt{4^3} + 4\sqrt{5^3} + 2\sqrt{6^3} + 4\sqrt{7^3} + 2\sqrt{8^3} + 4\sqrt{9^3} + 2\sqrt{10^3} + 4\sqrt{1^3} + 2\sqrt{12^3} + 4\sqrt{13^3} + 2\sqrt{14^3} + 4\sqrt{15^3} + 2\sqrt{16^3} + 4\sqrt{17^3} + 2\sqrt{18^3} + 4\sqrt{19^3} + \sqrt{20^3})}{60\sqrt{20^3}} \sqrt{Ah^5}$	
9. Regla de Simpson cuadrática:	$f(x_i^*) = \sqrt{\frac{f^2(x_{i-1}) + 4f^2(x_{i/2,i}) + f^2(x_i)}{6}}$
$A_T = \frac{\sqrt{4+2^3} + \sqrt{2^3+4^3} + \sqrt{4^3+4^3} + \sqrt{4^3+4^3} + \sqrt{6^3+4^3} + \sqrt{6^3+4^3} + \sqrt{8^3+4^3} + \sqrt{8^3+4^3} + \sqrt{10^3+4^3} + \sqrt{10^3+4^3} + \sqrt{12^3+4^3} + \sqrt{12^3+4^3} + \sqrt{14^3+4^3} + \sqrt{14^3+4^3} + \sqrt{16^3+4^3} + \sqrt{16^3+4^3} + \sqrt{18^3+4^3} + \sqrt{18^3+4^3} + \sqrt{20^3}}{10\sqrt{6(20^3)}} \sqrt{Ah^5}$	

Similarmente al capítulo anterior, en el apéndice B, se muestra solo un ejemplo de cálculo de área y los resultados completos se anexan en archivo electrónico en el CD que acompaña a esta tesis (se etiquetan como apéndice B).

7.4 Área relativa total bajo la curva generatriz de neiloide para 5 y 10, segmentos, mediante cálculo analítico.

En forma similar a la sección 6.4 En la tabla 7.5 se presentan, a manera de resumen, los resultados para el área relativa total bajo la curva generatriz de neiloide, para 5 y 10 segmentos.

Tabla 7.5. Resultados de la estimación del área relativa total bajo la curva generatriz de neiloide, con 5 y 10 segmentos, respectivamente, mediante cálculo analítico.

Método	A_T/A_E	
	5 segmentos	10 segmentos
1. Extremos izquierdos de los subintervalos	0.7613	0.8779
2. Extremos derechos de los subintervalos	1.2613	1.1279
3. Puntos medios de los subintervalos	0.9955	0.9985
4. Regla del trapecio	1.0113	1.0029
5. Aproximación de Smalian	1.0499	1.0138
6. Radio medio geométrico	0.9579	0.9893
7. Radio medio cuadrático geométrico	1.0247	1.0066
8. Regla de Simpson	1.0001	1.00001
9. Regla de Simpson cuadrática	1.0145	1.0039
10. Regla de Husma	0.9846	0.9961

7.5 Área relativa total bajo la curva generatriz de neiloide para 5, 10, 20, 50, 100 y 500 segmentos, mediante Excel.

En la tabla 7.6 se presentan, los resultados para el área relativa total bajo la curva generatriz de neiloide, como función del número de segmentos, obtenidos mediante Excel.

Tabla 7.6. Resultados del área relativa total bajo la curva generatriz de neiloide calculados mediante Excel, como función del número de segmentos.

MÉTODO	A_T/A_E					
	5	10	20	50	100	500
1. Extremos izquierdos de los subintervalos	0.761362	0.877923	0.938245	0.975121	0.987530	0.997501
2. Extremos derechos de los subintervalos	1.261362	1.127923	1.063245	1.025121	1.012530	1.002501
3. Puntos medios de los subintervalos	0.994485	0.998567	0.999632	0.999939	0.999984	0.999999
4. Regla del trapecio	1.011362	1.002923	1.000745	1.000121	1.000030	1.000001
5. Aproximación de Smalian	1.049977	1.013844	1.003704	1.000627	1.000161	1.000006
6. Radio medio geométrico	0.957944	0.989362	0.997318	0.999567	0.999891	0.999995
7. Radio medio cuadrático geométrico	1.024774	1.006662	1.001749	1.000291	1.000074	1.000003
8. Regla de Simpson	1.000110	1.000019	1.0000035	1.00000035	1.000000062	1.0000000011
9. Regla de Simpson cuadrática	1.014579	1.003946	1.001040	1.000174	1.000044	1.000001
10. Regla de Husma	0.9846534	0.9961429	0.9990321	0.9998446	0.9999611	0.9999984

En el apéndice B, se incluye la impresión de pantalla de la primer hoja de cálculo de Excel para el método 5, para el caso de 500 segmentos.

8. RESULTADOS PARA EL VOLUMEN TOTAL DE PARABOLOIDE.

8.1 Volumen exacto de paraboloides.

El sólido de revolución resultante al girar la curva generatriz de paraboloides un ángulo 2π , es precisamente el paraboloides. La sección transversal a una altura x del paraboloides está dada por

$$\bar{A}(x) = \pi y^2,$$

en donde

$$y^2 = Ax^n$$

Es la expresión original para la curva generatriz, para el caso de $n = 1$.

El volumen exacto del paraboloides de altura h , se obtiene mediante técnicas estándar del cálculo integral,

$$\begin{aligned} V_E &= \int_0^h \bar{A}(x) dx = \int_0^h \pi y^2 dx \\ &= \pi \int_0^h A x dx \\ &= A\pi \int_0^h x dx \\ &= A\pi \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^h \\ V_E &= \frac{1}{2} Ah^2 \pi \end{aligned}$$

8.2 Resultados para el volumen de paraboloides con 5 segmentos.

La división del volumen del paraboloides de altura h para 5 segmentos ($l=h/5$) se muestra en la figura 8.1.

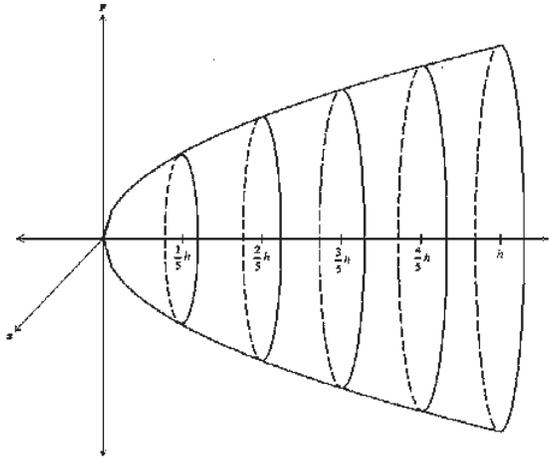


Figura 7.1 División del volumen de paraboloides de altura h en 5 segmentos de igual longitud.

Los parámetros requeridos para la estimación del volumen por intervalos para 5 intervalos, mediante los métodos de cubicación, se muestran en la tabla 8.1 y los resultados obtenidos, en la tabla 8.2.

Tabla 8.1 Conjunto de parámetros requeridos en el cálculo de volúmenes de paraboloides con 5 segmentos.

#	x_i	x_{i-1}	$x_{1/2,i}$	y_i	y_{i-1}	$y_{1/2,i}$	S_i	S_{i-1}	$S_{1/2,i}$
1	$\frac{1}{5}h$	0	$\frac{1}{10}h$	$\sqrt{\frac{1}{5}Ah}$	0	$\sqrt{\frac{1}{10}Ah}$	$\frac{1}{5}Ah\pi$	0	$\frac{1}{10}Ah\pi$
2	$\frac{2}{5}h$	$\frac{1}{5}h$	$\frac{3}{10}h$	$\sqrt{\frac{2}{5}Ah}$	$\sqrt{\frac{1}{5}Ah}$	$\sqrt{\frac{3}{10}Ah}$	$\frac{2}{5}Ah\pi$	$\frac{1}{5}Ah\pi$	$\frac{3}{10}Ah\pi$
3	$\frac{3}{5}h$	$\frac{2}{5}h$	$\frac{5}{10}h$	$\sqrt{\frac{3}{5}Ah}$	$\sqrt{\frac{2}{5}Ah}$	$\sqrt{\frac{5}{10}Ah}$	$\frac{3}{5}Ah\pi$	$\frac{2}{5}Ah\pi$	$\frac{5}{10}Ah\pi$
4	$\frac{4}{5}h$	$\frac{3}{5}h$	$\frac{7}{10}h$	$\sqrt{\frac{4}{5}Ah}$	$\sqrt{\frac{3}{5}Ah}$	$\sqrt{\frac{7}{10}Ah}$	$\frac{4}{5}Ah\pi$	$\frac{3}{5}Ah\pi$	$\frac{7}{10}Ah\pi$
5	h	$\frac{4}{5}h$	$\frac{9}{10}h$	\sqrt{Ah}	$\sqrt{\frac{4}{5}Ah}$	$\sqrt{\frac{9}{10}Ah}$	$Ah\pi$	$\frac{4}{5}Ah\pi$	$\frac{9}{10}Ah\pi$

Tabla 8.2 Volúmenes totales del paraboloides para 5 segmentos

MÉTODO	REGLA QUE DEFINE AL MÉTODO
VOLÚMEN TOTAL	
1. Método de la sección menor:	$\bar{S}_i = S_{i-1}$
	$V_T = \frac{2}{5} Ah^2 \pi$
2. Método de la sección mayor:	$\bar{S}_i = S_i$
	$V_T = \frac{3}{5} Ah^2 \pi$
3. Método de Huber:	$\bar{S}_i = S_{1/2,i}$
	$V_T = \frac{1}{2} Ah^2 \pi$
4. Método de Smalian:	$\bar{S}_i = \frac{S_{i-1} + S_i}{2}$
	$V_T = \frac{1}{2} Ah^2 \pi$
5. Sección media geométrica:	$\bar{S}_i = \sqrt{S_{i-1}(S_i)}$
	$V_T = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6} + \sqrt{12} + \sqrt{20}}{25} Ah^2 \pi$
6. Sección media cuadrática geométrica	$\bar{S}_i = \sqrt{\frac{S_{i-1}^2 + S_i^2 + S_{i-1}S_i}{3}}$
	$V_T = \frac{\sqrt{1} + \sqrt{7} + \sqrt{19} + \sqrt{37} + \sqrt{61}}{5\sqrt{75}} Ah^2 \pi$
7. Método de Newton:	$\bar{S}_i = \frac{S_{i-1} + 4S_{1/2,i} + S_i}{6}$
	$V_T = \frac{1}{2} Ah^2 \pi$
8. Método cuadrático de Smalian	$\bar{S}_i = \sqrt{\frac{S_{i-1}^2 + S_i^2}{2}}$
	$V_T = \frac{\sqrt{1} + \sqrt{5} + \sqrt{13} + \sqrt{25} + \sqrt{41}}{5\sqrt{50}} Ah^2 \pi$
9. Método cuadrático de Newton	$\bar{S}_i = \sqrt{\frac{S_{i-1}^2 + 4S_{1/2,i}^2 + S_i^2}{6}}$
	$V_T = \frac{\sqrt{8} + \sqrt{56} + \sqrt{152} + \sqrt{296} + \sqrt{488}}{5\sqrt{600}} Ah^2 \pi$

8.3 Resultados para el volumen de paraboloides con 10 segmentos.

La división del volumen del paraboloides de altura h para 10 segmentos ($l=h/5$) se muestra en la figura 8.2.

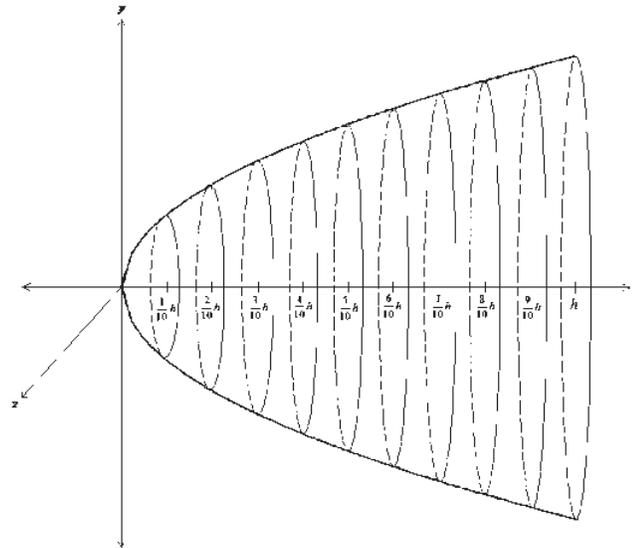


Figura 8.2 División del volumen de paraboloides de altura h en 10 segmentos de igual longitud.

Los parámetros requeridos para la estimación del volumen por intervalos para 10 intervalos, mediante los métodos de cubicación, se muestran en la tabla 8.3 y los resultados obtenidos, en la tabla 8.4.

Tabla 8.3 Conjunto de parámetros requeridos en el cálculo de volúmenes de paraboloides con 10 segmentos.

#	x_i	x_{i-1}	$x_{1/2,i}$	y_i	y_{i-1}	$y_{1/2,i}$	S_i	S_{i-1}	$S_{1/2,i}$
1	$\frac{1}{10}h$	0	$\frac{1}{20}h$	$\sqrt{\frac{1}{10}Ah}$	0	$\sqrt{\frac{1}{20}Ah}$	$\frac{1}{10}Ah\pi$	0	$\frac{1}{20}Ah\pi$
2	$\frac{2}{10}h$	$\frac{1}{10}h$	$\frac{3}{20}h$	$\sqrt{\frac{2}{10}Ah}$	$\sqrt{\frac{1}{10}Ah}$	$\sqrt{\frac{3}{20}Ah}$	$\frac{2}{10}Ah\pi$	$\frac{1}{10}Ah\pi$	$\frac{3}{20}Ah\pi$
3	$\frac{3}{10}h$	$\frac{2}{10}h$	$\frac{5}{20}h$	$\sqrt{\frac{3}{10}Ah}$	$\sqrt{\frac{2}{10}Ah}$	$\sqrt{\frac{5}{20}Ah}$	$\frac{3}{10}Ah\pi$	$\frac{2}{10}Ah\pi$	$\frac{5}{20}Ah\pi$
4	$\frac{4}{10}h$	$\frac{3}{10}h$	$\frac{7}{20}h$	$\sqrt{\frac{4}{10}Ah}$	$\sqrt{\frac{3}{10}Ah}$	$\sqrt{\frac{7}{20}Ah}$	$\frac{4}{10}Ah\pi$	$\frac{3}{10}Ah\pi$	$\frac{7}{20}Ah\pi$
5	$\frac{5}{10}h$	$\frac{4}{10}h$	$\frac{9}{20}h$	$\sqrt{\frac{5}{10}Ah}$	$\sqrt{\frac{4}{10}Ah}$	$\sqrt{\frac{9}{20}Ah}$	$\frac{5}{10}Ah\pi$	$\frac{4}{10}Ah\pi$	$\frac{9}{20}Ah\pi$
6	$\frac{6}{10}h$	$\frac{5}{10}h$	$\frac{11}{20}h$	$\sqrt{\frac{6}{10}Ah}$	$\sqrt{\frac{5}{10}Ah}$	$\sqrt{\frac{11}{20}Ah}$	$\frac{6}{10}Ah\pi$	$\frac{5}{10}Ah\pi$	$\frac{11}{20}Ah\pi$
7	$\frac{7}{10}h$	$\frac{6}{10}h$	$\frac{13}{20}h$	$\sqrt{\frac{7}{10}Ah}$	$\sqrt{\frac{6}{10}Ah}$	$\sqrt{\frac{13}{20}Ah}$	$\frac{7}{10}Ah\pi$	$\frac{6}{10}Ah\pi$	$\frac{13}{20}Ah\pi$
8	$\frac{8}{10}h$	$\frac{7}{10}h$	$\frac{15}{20}h$	$\sqrt{\frac{8}{10}Ah}$	$\sqrt{\frac{7}{10}Ah}$	$\sqrt{\frac{15}{20}Ah}$	$\frac{8}{10}Ah\pi$	$\frac{7}{10}Ah\pi$	$\frac{15}{20}Ah\pi$
9	$\frac{9}{10}h$	$\frac{8}{10}h$	$\frac{17}{20}h$	$\sqrt{\frac{9}{10}Ah}$	$\sqrt{\frac{8}{10}Ah}$	$\sqrt{\frac{17}{20}Ah}$	$\frac{9}{10}Ah\pi$	$\frac{8}{10}Ah\pi$	$\frac{17}{20}Ah\pi$
10	h	$\frac{9}{10}h$	$\frac{19}{20}h$	\sqrt{Ah}	$\sqrt{\frac{9}{10}Ah}$	$\sqrt{\frac{19}{20}Ah}$	$Ah\pi$	$\frac{9}{10}Ah\pi$	$\frac{19}{20}Ah\pi$

Tabla 8.4 Volúmenes totales del paraboloides para 10 segmentos

MÉTODO	REGLA QUE DEFINE AL MÉTODO
VOLÚMEN TOTAL	
1. Método de la sección menor:	$\bar{S}_i = S_{i-1}$
	$V_T = \frac{9}{20} Ah^2 \pi$
2. Método de la sección mayor:	$\bar{S}_i = S_i$
	$V_T = \frac{11}{20} Ah^2 \pi$
3. Método de Huber:	$\bar{S}_i = S_{1/2,i}$
	$V_T = \frac{1}{2} Ah^2 \pi$
4. Método de Smalian:	$\bar{S}_i = \frac{S_{i-1} + S_i}{2}$
	$V_T = \frac{1}{2} Ah^2 \pi$
5. Sección media geométrica:	$\bar{S}_i = \sqrt{S_{i-1} S_i}$
	$V_T = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6} + \sqrt{12} + \sqrt{20} + \sqrt{30} + \sqrt{42} + \sqrt{56} + \sqrt{72} + \sqrt{90}}{100} Ah^2 \pi$
6. Sección media cuadrática geométrica	$\bar{S}_i = \sqrt{\frac{S_{i-1}^2 + S_i^2 + S_{i-1} S_i}{3}}$
	$V_T = \frac{\sqrt{1} + \sqrt{7} + \sqrt{19} + \sqrt{37} + \sqrt{61} + \sqrt{91} + \sqrt{127} + \sqrt{169} + \sqrt{217} + \sqrt{271}}{10\sqrt{300}} Ah^2 \pi$
7. Método de Newton:	$\bar{S}_i = \frac{S_{i-1} + 4S_{1/2,i} + S_i}{6}$
	$V_T = \frac{1}{2} Ah^2 \pi$
8. Método cuadrático de Smalian	$\bar{S}_i = \sqrt{\frac{S_{i-1}^2 + S_i^2}{2}}$
	$V_T = \frac{\sqrt{1} + \sqrt{5} + \sqrt{13} + \sqrt{25} + \sqrt{41} + \sqrt{61} + \sqrt{85} + \sqrt{113} + \sqrt{145} + \sqrt{181}}{10\sqrt{200}} Ah^2 \pi$
9. Método cuadrático de Newton	$\bar{S}_i = \sqrt{\frac{S_{i-1}^2 + 4S_{1/2,i}^2 + S_i^2}{6}}$
	$V_T = \frac{\sqrt{8} + \sqrt{56} + \sqrt{152} + \sqrt{296} + \sqrt{488} + \sqrt{728} + \sqrt{1016} + \sqrt{1352} + \sqrt{1736} + \sqrt{2168}}{10\sqrt{2400}} Ah^2 \pi$

En el apéndice C, se muestra un ejemplo de cálculo de volumen para los segmentos individuales mediante el método 5. Los resultados completos para todos los métodos involucrados, para 5 y 10 segmentos, ocuparían un gran espacio en este documento, por lo que se anexan en archivo electrónico en el CD que acompaña a esta tesis (también se etiquetan como apéndice C).

8.4 Volumen relativo total de paraboloides para 5 y 10 segmentos, mediante cálculo analítico.

Los resultados para el volumen de paraboloides pueden ser resumidos a través del volumen relativo total, V_T/V_E , que es el parámetro de estimación más representativo de dichos cálculos. En la tabla 8.5, se muestran los resultados de tal parámetro para 5 y 10 segmentos.

Tabla 8.5 Resultados de la estimación del volumen total de paraboloides, con 5 y 10 segmentos, respectivamente, mediante cálculo analítico.

Método	V_T/V_E	
	5 segmentos	10 segmentos
1. Método de la sección menor	0.8000	0.9000
2. Método de la sección mayor	1.2000	1.1000
3. Método de Huber	1.0000	1.0000
4. Método de Smalian	1.0000	1.0000
5. Sección media geométrica	0.9439	0.9842
6. Sección media cuadrática geométrica	1.0114	1.0034
7. Método de Newton	1.0000	1.0000
8. Método cuadrático de Smalian	1.0320	1.0097
9. Método cuadrático de Newton	1.0114	1.0034

8.5 Volumen relativo total de paraboloides para 5, 10, 20, 50, 100 y 500 segmentos, mediante Excel.

Los cálculos analíticos para un número de segmentos superior a 10, son en extremo difíciles, por lo que se utilizó para ello el software Excel de acuerdo con el procedimiento descrito en la sección 5.6 de la metodología.

En la tabla 8.6, se muestran los resultados para volumen relativo total como función del número de segmentos obtenidos mediante Excel.

Tabla 8.6 Resultados del volumen relativo total de paraboloides calculados mediante Excel, como función del número de segmentos

MÉTODO	V_T/V_E					
	5	10	20	50	100	500
1. Método de la sección menor	0.8	0.9	0.95	0.98	0.99	0.998
2. Método de la sección mayor	1.2	1.1	1.05	1.02	1.01	1.002
3. Método de Huber	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
4. Método de Smalian	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
5. Sección media geométrica	0.943995	0.984266	0.995633	0.999209	0.999785	0.999989
6. Sección media cuadrática geométrica	1.011409	1.003428	1.001001	1.000190	1.000053	1.000002
7. Método de Newton	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
8. Método cuadrático de Smalian	1.032078	1.009747	1.002869	1.000550	1.000155	1.000007
9. Método cuadrático de Newton	1.011409	1.003428	1.001001	1.000190	1.000053	1.000002

Como ilustración, en el apéndice C, se incluye la impresión de pantalla de la primera hoja de cálculo de Excel para el método 5, para el caso de 500 segmentos.

9. RESULTADOS PARA EL VOLUMEN TOTAL DE NEILOIDE

9.1 Volumen exacto de neiloide

El sólido de revolución resultante al girar la curva generatriz de neiloide un ángulo 2π , es el neiloide. La sección transversal a una altura x del neiloide está dada por

$$\bar{A}(x) = \pi y^2$$

en donde

$$y^2 = Ax^n$$

Es la expresión original para la curva generatriz, para el caso de $n = 3$

El volumen exacto del neiloide de altura h , se obtiene mediante técnicas estándar del cálculo integral,

$$\begin{aligned} V_E &= \int_0^h \bar{A}(x) dx = \int_0^h \pi y^2 dx \\ &= \pi \int_0^h Ax^3 dx \\ &= A\pi \int_0^h x^3 dx \\ &= A\pi \left[\frac{x^4}{4} \right]_0^h \\ V_E &= \frac{1}{4} Ah^4 \pi \end{aligned}$$

9.2 Resultados para el volumen de neiloide con 5 segmentos.

La división del volumen del paraboloides de altura h para 5 segmentos ($l=h/5$) se muestra en la figura 9.1.

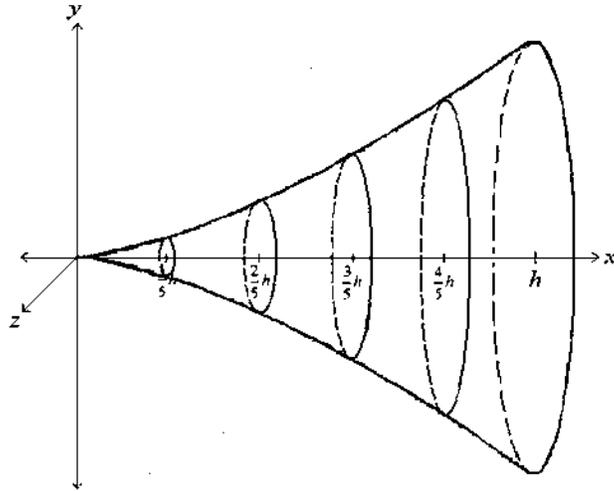


Figura 9.1 División del volumen de neiloide de altura h en 5 segmentos de igual longitud.

Los parámetros requeridos para la estimación del volumen por intervalos para 5 intervalos, mediante los métodos de cubicación, se muestran en la tabla 9.1 y los resultados obtenidos, en la tabla 9.2.

Tabla 9.1. Conjunto de parámetros requeridos en el cálculo de volúmenes de paraboloides con 5 segmentos

#	x_i	x_{i-1}	$x_{1/2,i}$	y_i	y_{i-1}	$y_{1/2,i}$	S_i	S_{i-1}	$S_{1/2,i}$
1	$\frac{1}{5}h$	0	$\frac{1}{10}h$	$\sqrt{\left(\frac{1}{5}\right)^3 Ah^3}$	0	$\sqrt{\left(\frac{1}{10}\right)^3 Ah^3}$	$\left(\frac{1}{5}\right)^3 Ah^3 \pi$	0	$\left(\frac{1}{10}\right)^3 Ah^3 \pi$
2	$\frac{2}{5}h$	$\frac{1}{5}h$	$\frac{3}{10}h$	$\sqrt{\left(\frac{2}{5}\right)^3 Ah^3}$	$\sqrt{\left(\frac{1}{5}\right)^3 Ah^3}$	$\sqrt{\left(\frac{3}{10}\right)^3 Ah^3}$	$\left(\frac{2}{5}\right)^3 Ah^3 \pi$	$\left(\frac{1}{5}\right)^3 Ah^3 \pi$	$\left(\frac{3}{10}\right)^3 Ah^3 \pi$
3	$\frac{3}{5}h$	$\frac{2}{5}h$	$\frac{5}{10}h$	$\sqrt{\left(\frac{3}{5}\right)^3 Ah^3}$	$\sqrt{\left(\frac{2}{5}\right)^3 Ah^3}$	$\sqrt{\left(\frac{5}{10}\right)^3 Ah^3}$	$\left(\frac{3}{5}\right)^3 Ah^3 \pi$	$\left(\frac{2}{5}\right)^3 Ah^3 \pi$	$\left(\frac{5}{10}\right)^3 Ah^3 \pi$
4	$\frac{4}{5}h$	$\frac{3}{5}h$	$\frac{7}{10}h$	$\sqrt{\left(\frac{4}{5}\right)^3 Ah^3}$	$\sqrt{\left(\frac{3}{5}\right)^3 Ah^3}$	$\sqrt{\left(\frac{7}{10}\right)^3 Ah^3}$	$\left(\frac{4}{5}\right)^3 Ah^3 \pi$	$\left(\frac{3}{5}\right)^3 Ah^3 \pi$	$\left(\frac{7}{10}\right)^3 Ah^3 \pi$
5	h	$\frac{4}{5}h$	$\frac{9}{10}h$	$\sqrt{Ah^3}$	$\sqrt{\left(\frac{4}{5}\right)^3 Ah^3}$	$\sqrt{\left(\frac{9}{10}\right)^3 Ah^3}$	$Ah^3 \pi$	$\left(\frac{4}{5}\right)^3 Ah^3 \pi$	$\left(\frac{9}{10}\right)^3 Ah^3 \pi$

Tabla 9.2 Volúmenes totales de neiloide para 5 segmentos

MÉTODO	REGLA QUE DEFINE AL MÉTODO
VOLÚMEN TOTAL	
1. Método de la sección menor:	$\bar{S}_i = S_{i-1}$
$V_T = \frac{20}{125} Ah^4 \pi$	
2. Método de la sección mayor:	$\bar{S}_i = S_i$
$V_T = \frac{45}{125} Ah^4 \pi$	
3. Método de Huber:	$\bar{S}_i = S_{1/2,i}$
$V_T = \frac{49}{200} Ah^4 \pi$	
4. Método de Smalian:	$\bar{S}_i = \frac{S_{i-1} + S_i}{2}$
$V_T = \frac{13}{50} Ah^4 \pi$	
5. Sección media geométrica:	$\bar{S}_i = \sqrt{S_{i-1}(S_{i_2})}$
$V_T = \frac{\sqrt{8} + \sqrt{216} + \sqrt{1728} + \sqrt{8000}}{625} Ah^4 \pi$	
6. Sección media cuadrática geométrica:	$\bar{S}_i = \sqrt{\frac{S_{i-1}^2 + S_i^2 + S_{i-1}S_i}{3}}$
$V_T = \frac{\sqrt{1} + \sqrt{73} + \sqrt{1009} + \sqrt{6553} + \sqrt{27721}}{5\sqrt{46875}} Ah^4 \pi$	
7. Método de Newton:	$\bar{S}_i = \frac{S_{i-1} + 4S_{1/2,i} + S_i}{6}$
$V_T = \frac{1}{4} Ah^4 \pi$	
8. Método cuadrático de Smalian	$\bar{S}_i = \sqrt{\frac{S_{i-1}^2 + S_i^2}{2}}$
$V_T = \frac{\sqrt{1} + \sqrt{65} + \sqrt{793} + \sqrt{4825} + \sqrt{19721}}{5\sqrt{31250}} Ah^4 \pi$	
9. Método cuadrático de Newton	$\bar{S}_i = \sqrt{\frac{S_{i-1}^2 + 4S_{1/2,i}^2 + S_i^2}{6}}$
$V_T = \frac{\sqrt{68} + \sqrt{7076} + \sqrt{113252} + \sqrt{779396} + \sqrt{3387908}}{5\sqrt{6 \times 10^6}} Ah^4 \pi$	

9.3 Resultados para el volumen de neiloide con 10 segmentos.

La división del volumen del neiloide de altura h para 10 segmentos ($l=h/5$) se muestra en la figura 9.2.

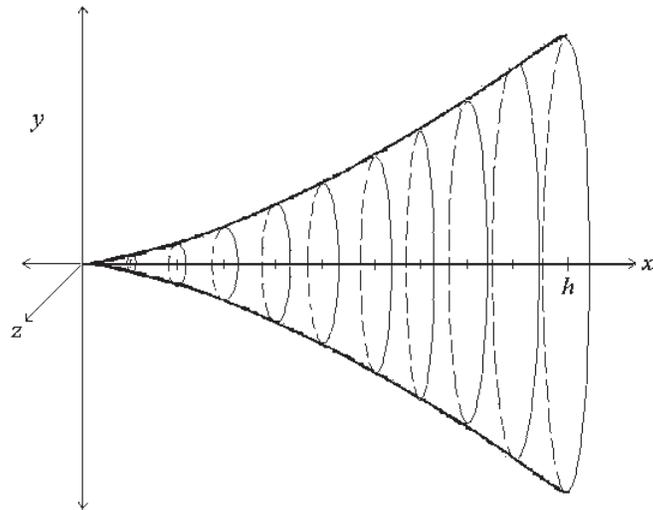


Figura 9.2 División del volumen de neiloide de altura h en 10 segmentos de igual longitud.

Los parámetros requeridos para la estimación del volumen por intervalos para 10 intervalos, mediante los métodos de cubicación, se muestran en la tabla 9.3 y los resultados obtenidos, en la tabla 9.4.

Tabla 9.3 Conjunto de parámetros requeridos en el cálculo de volúmenes de neiloide con 10 segmentos.

#	x_i	x_{i-1}	$x_{1/2,i}$	y_i	y_{i-1}	$y_{1/2,i}$	S_i	S_{i-1}	$S_{1/2,i}$
1	$\frac{1}{10}h$	0	$\frac{1}{20}h$	$\sqrt{\left(\frac{1}{10}\right)^3 Ah^3}$	0	$\sqrt{\left(\frac{1}{20}\right)^3 Ah^3}$	$\frac{1}{10^3} Ah^3 \pi$	0	$\frac{1}{20^3} Ah^3 \pi$
2	$\frac{2}{10}h$	$\frac{1}{10}h$	$\frac{3}{20}h$	$\sqrt{\left(\frac{2}{10}\right)^3 Ah^3}$	$\sqrt{\left(\frac{1}{10}\right)^3 Ah^3}$	$\sqrt{\left(\frac{3}{20}\right)^3 Ah^3}$	$\frac{8}{10^3} Ah^3 \pi$	$\frac{1}{10^3} Ah^3 \pi$	$\frac{27}{20^3} Ah^3 \pi$
3	$\frac{3}{10}h$	$\frac{2}{10}h$	$\frac{5}{20}h$	$\sqrt{\left(\frac{3}{10}\right)^3 Ah^3}$	$\sqrt{\left(\frac{2}{10}\right)^3 Ah^3}$	$\sqrt{\left(\frac{5}{20}\right)^3 Ah^3}$	$\frac{27}{10^3} Ah^3 \pi$	$\frac{8}{10^3} Ah^3 \pi$	$\frac{125}{20^3} Ah^3 \pi$
4	$\frac{4}{10}h$	$\frac{3}{10}h$	$\frac{7}{20}h$	$\sqrt{\left(\frac{4}{10}\right)^3 Ah^3}$	$\sqrt{\left(\frac{3}{10}\right)^3 Ah^3}$	$\sqrt{\left(\frac{7}{20}\right)^3 Ah^3}$	$\frac{64}{10^3} Ah^3 \pi$	$\frac{27}{10^3} Ah^3 \pi$	$\frac{343}{20^3} Ah^3 \pi$
5	$\frac{5}{10}h$	$\frac{4}{10}h$	$\frac{9}{20}h$	$\sqrt{\left(\frac{5}{10}\right)^3 Ah^3}$	$\sqrt{\left(\frac{4}{10}\right)^3 Ah^3}$	$\sqrt{\left(\frac{9}{20}\right)^3 Ah^3}$	$\frac{125}{10^3} Ah^3 \pi$	$\frac{64}{10^3} Ah^3 \pi$	$\frac{729}{20^3} Ah^3 \pi$
6	$\frac{6}{10}h$	$\frac{5}{10}h$	$\frac{11}{20}h$	$\sqrt{\left(\frac{6}{10}\right)^3 Ah^3}$	$\sqrt{\left(\frac{5}{10}\right)^3 Ah^3}$	$\sqrt{\left(\frac{11}{20}\right)^3 Ah^3}$	$\frac{216}{10^3} Ah^3 \pi$	$\frac{125}{10^3} Ah^3 \pi$	$\frac{1331}{20^3} Ah^3 \pi$
7	$\frac{7}{10}h$	$\frac{6}{10}h$	$\frac{13}{20}h$	$\sqrt{\left(\frac{7}{10}\right)^3 Ah^3}$	$\sqrt{\left(\frac{6}{10}\right)^3 Ah^3}$	$\sqrt{\left(\frac{13}{20}\right)^3 Ah^3}$	$\frac{343}{10^3} Ah^3 \pi$	$\frac{216}{10^3} Ah^3 \pi$	$\frac{2197}{20^3} Ah^3 \pi$
8	$\frac{8}{10}h$	$\frac{7}{10}h$	$\frac{15}{20}h$	$\sqrt{\left(\frac{8}{10}\right)^3 Ah^3}$	$\sqrt{\left(\frac{7}{10}\right)^3 Ah^3}$	$\sqrt{\left(\frac{15}{20}\right)^3 Ah^3}$	$\frac{512}{10^3} Ah^3 \pi$	$\frac{343}{10^3} Ah^3 \pi$	$\frac{3375}{20^3} Ah^3 \pi$
9	$\frac{9}{10}h$	$\frac{8}{10}h$	$\frac{17}{20}h$	$\sqrt{\left(\frac{9}{10}\right)^3 Ah^3}$	$\sqrt{\left(\frac{8}{10}\right)^3 Ah^3}$	$\sqrt{\left(\frac{17}{20}\right)^3 Ah^3}$	$\frac{729}{10^3} Ah^3 \pi$	$\frac{512}{10^3} Ah^3 \pi$	$\frac{4913}{20^3} Ah^3 \pi$
10	h	$\frac{9}{10}h$	$\frac{19}{20}h$	$\sqrt{Ah^3}$	$\sqrt{\left(\frac{9}{10}\right)^3 Ah^3}$	$\sqrt{\left(\frac{19}{20}\right)^3 Ah^3}$	$Ah^3 \pi$	$\frac{729}{10^3} Ah^3 \pi$	$\frac{6859}{20^3} Ah^3 \pi$

Tabla 9.4 Volúmenes totales debajo de la curva generatriz del neiloide para 10 segmentos

MÉTODO	REGLA QUE DEFINE AL MÉTODO
VOLÚMEN TOTAL	
1. Método de la sección menor:	$\bar{S}_i = S_{i-1}$
$V_T = \frac{2025}{10000} Ah^2 \pi$	
2. Método de la sección mayor:	$\bar{S}_i = S_i$
$V_T = \frac{3025}{10000} Ah^2 \pi$	
3. Método de Huber:	$\bar{S}_i = S_{1/2,i}$
$V_T = \frac{199}{800} Ah^2 \pi$	
4. Método de Smalian:	$\bar{S}_i = \frac{S_{i-1} + S_i}{2}$
$V_T = \frac{101}{400} Ah^2 \pi$	
5. Sección media geométrica:	$\bar{S}_i = \sqrt{S_{i-1}(S_i)}$
$V_T = \frac{\sqrt{8} + \sqrt{216} + \sqrt{1728} + \sqrt{8000} + \sqrt{27000} + \sqrt{74088} + \sqrt{175616} + \sqrt{373248} + \sqrt{729000}}{10^4} Ah^4 \pi$	
6. Sección media cuadrática geométrica:	$\bar{S}_i = \sqrt{\frac{S_{i-1}^2 + S_i^2 + S_{i-1}S_i}{3}}$
$V_T = \frac{\sqrt{1} + \sqrt{73} + \sqrt{1009} + \sqrt{6553} + \sqrt{27721} + \sqrt{89281} + \sqrt{238393} + \sqrt{555409} + \sqrt{1166833} + \sqrt{2260441}}{10\sqrt{3} \times 10^6} Ah^4 \pi$	
7. Método de Newton:	$\bar{S}_i = \frac{S_{i-1} + 4S_{1/2,i} + S_i}{6}$
$V_T = \frac{1}{4} Ah^2 \pi$	
8. Método cuadrático de Smalian	$\bar{S}_i = \sqrt{\frac{S_{i-1}^2 + S_i^2}{2}}$
$V_T = \frac{\sqrt{1} + \sqrt{65} + \sqrt{793} + \sqrt{4825} + \sqrt{19721} + \sqrt{62281} + \sqrt{164305} + \sqrt{379793} + \sqrt{793585} + \sqrt{1531441}}{10\sqrt{2} \times 10^6} Ah^4 \pi$	
9. Método cuadrático de Newton	$\bar{S}_i = \sqrt{\frac{S_{i-1}^2 + 4S_{1/2,i}^2 + S_i^2}{6}}$
$V_T = \frac{\sqrt{68} + \sqrt{7076} + \sqrt{113252} + \sqrt{779396} + \sqrt{3387908} + \sqrt{11072228} + \sqrt{29822756} + \sqrt{69869252} + \sqrt{147339716} + \sqrt{286195748}}{10\sqrt{384} \times 10^6} Ah^4 \pi$	

En el apéndice D, se muestra un ejemplo de cálculo de volumen para los segmentos individuales mediante el método 5. Los resultados completos para todos los métodos involucrados, para 5 y 10 segmentos, ocuparían un gran espacio en este documento, por lo que se anexan en archivo electrónico en el CD que acompaña a esta tesis (también se etiquetan como apéndice D).

9.4 Volumen relativo total de neiloide para 5 y 10 segmentos, mediante cálculo analítico.

Los resultados para el volumen de neiloide pueden ser resumidos a través del volumen relativo total, V_T/V_E , que es el parámetro de estimación más representativo de dichos cálculos. En la tabla 9.5, se muestran los resultados de tal parámetro para 5 y 10 segmentos.

Tabla 9.5 Resultados de la estimación del volumen total de neiloide, con 5 y 10 segmentos, respectivamente, mediante cálculo analítico.

Método	V_T/V_E	
	5 segmentos	10 segmentos
1. Método de la sección menor	0.6400	0.8100
2. Método de la sección mayor	1.4400	1.2100
3. Método de Huber	0.9800	0.9950
4. Método de Smalian	1.0400	1.0100
5. Sección media geométrica	0.9506	0.9875
6. Sección media cuadrática geométrica	1.0669	1.0172
7. Método de Newton	1.0000	1.0000
8. Método cuadrático de Smalian	1.1183	1.0314
9. Método cuadrático de Newton	1.0295	1.0074

9.5 Volumen relativo total de neiloide para 5, 10, 20, 50, 100 y 500 segmentos, mediante Excel.

Los cálculos analíticos para un número de segmentos superior a 10, son en extremo difíciles, por lo que se utilizó para ello el software Excel de acuerdo con el procedimiento descrito en la sección 5.6 de la metodología.

En la tabla 9.6, se muestran los resultados para volumen relativo total como función del número de segmentos obtenidos mediante Excel.

Tabla 9.6 Resultados del volumen relativo total de neiloide calculados mediante Excel, como función del número de segmentos.

MÉTODO	V_T/V_E					
	5	10	20	50	100	500
1. Método de la sección menor	0.64	0.81	0.9025	0.9604	0.9801	0.996004
2. Método de la sección mayor	1.44	1.21	1.1025	1.0404	1.0201	1.004004
3. Método de Huber	0.98	0.995	0.99875	0.9998	0.99995	0.999998
4. Método de Smalian	1.04	1.01	1.0025	1.0004	1.0001	1.000004
5. Sección media geométrica	0.950638	0.987546	0.996878	0.999500	0.999875	0.999995
6. Sección media cuadrática geométrica	1.066964	1.017232	1.004353	1.000699	1.000174	1.000007
7. Método de Newton	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
8. Método cuadrático de Smalian	1.118320	1.031426	1.008035	1.001297	1.000324	1.000013
9. Método cuadrático de Newton	1.029555	1.007461	1.001871	1.000299	1.000075	1.000003

Como ilustración, en el apéndice D, se incluye la impresión de pantalla de la primera hoja de cálculo de Excel para el método 5, para el caso de 500 segmentos.

10. ANÁLISIS Y CONCLUSIONES

El establecer las relaciones que hay entre los métodos de cubicación forestal y los métodos aproximados del cálculo, implica un avance en ambos campos de estudio. Al analizar cuidadosamente los métodos de aproximación del cálculo, se observó que algunos correspondían o tenían su analogía directa con métodos estándar de cubicación. Sin embargo, otros métodos no estaban directamente relacionados. Se lograron identificar o establecer sus relaciones, lo que condujo de manera natural a la propuesta de cuatro métodos nuevos de aproximación del cálculo para estimar áreas y cuatro nuevos métodos de cubicación. Inversamente, algunos métodos de cubicación desarrollados exclusivamente para el campo forestal, representan en realidad métodos de aproximación del cálculo que no habían sido considerados en la literatura matemática. Una vez que se logró identificar o encontrar las relaciones entre los métodos de aproximación del cálculo y los métodos de cubicación, se pudo establecer un marco unificado de métodos, como se muestra en la tabla 3.5. Lo anterior constituye una prueba satisfactoria de la “hipótesis” que se planteó al inicio de este trabajo. De esta forma, ambos campos se hacen aportaciones importantes entre sí, tanto en la identificación como en la justificación e interpretación de sus métodos, que concluyen en la unificación de los mismos.

Lo que define a los métodos aproximados del cálculo para determinar áreas y volúmenes es la selección o definición de lo que se denomina, puntos muestra, para cada intervalo o sección (Stewart, 2002). En cubicación forestal, se define un método aproximado mediante la definición del área promedio de sección transversal para un segmento o troza de tronco (Avery and Burkhart, 2002). La estrategia para establecer la relación entre ambos métodos fue: considerar cada intervalo o sección de un método de aproximación del cálculo, para estimar el volumen de un sólido de revolución, como un segmento, a la manera en que se considera en un método de cubicación forestal. Se han distinguido en este trabajo básicamente dos tipos de relaciones. En la primera de ellas, a cada método para estimar área se le determinó su correspondiente método para estimar volumen (*relación por correspondencia*). Al igual que en cálculo, a cada método aproximado para estimar el volumen de un sólido de revolución le corresponde un método para estimar el área bajo su curva generatriz, también a cada método

de cubicación le corresponde un método para estimar el área bajo la curva generatriz de su tipo dendrométrico. La segunda relación consistió en identificar que los métodos de cubicación estándar conocidos, se pueden reproducir por analogía (*relación por analogía*), al sustituir directamente en las ecuaciones para estimar áreas de determinados métodos, los valores de la función involucrados, por los valores del área de sus secciones transversales en el sólido de revolución correspondiente.

Cabe resaltar una de las claves aparentemente obvia, la cual consistió en la generalización de la definición de diámetros dendrométricos realizada en la sección 2.5.3. La necesidad de dicha generalización se descubrió por primera vez en (Uranga-Valencia, 2007; Uranga-Valencia y Cruz de León, 2007), para el caso de MCS, y se confirma plenamente en el presente trabajo. Dicha generalización implicó, tanto la interconexión entre métodos ya existentes, como la derivación e interconexión entre nuevos métodos.

La sección media cuadrático-geométrica, definida para la tabla 3.5, fue identificada por primera vez en (Uranga-Valencia, 2007; Uranga-Valencia y Cruz de León, 2007). El radio (o diámetro) medio cuadrático-geométrico ha sido identificado por primera ocasión en el presente trabajo. Al observar los métodos de aproximación en el marco unificado de la tabla 3.5, se infiere una de las más importantes conclusiones de la unificación llevada a cabo en esta tesis: en forma similar al área de una sección media que define los diferentes métodos de cubicación, cualquier método de aproximación del cálculo para estimar áreas bajo una curva queda definido por un radio (ó diámetro) medio dado por $\bar{r} = f(x_i^*)$, y no únicamente el caso de las relaciones de correspondencia. Dicho radio medio esta conectado al área de la sección media de su método de cubicación respectivo por la relación $\bar{S} = \pi(\bar{r})^2$.

Este trabajo, no aporta únicamente el esquema unificado de métodos, sino que presenta también la metodología completa para la aplicación de los mismos, la cual se ilustra mediante el cálculo de área bajo las curvas generatrices y volúmenes para paraboloides y neiloides. Se observó que es posible realizar los cálculos analíticamente hasta el orden de 10 segmentos. Para un número mayor que 10 segmentos, los cálculos se pueden llevar a cabo mediante Excel. Se recomienda realizar primero los cálculos analíticos para 5 y 10 segmentos, y

posteriormente reproducirlos mediante Excel, para verificar que las fórmulas estén correctamente escritas, antes de aplicarlo a cualquier número de segmentos.

En los resultados de aplicación para estimar áreas bajo las curvas generatrices y volúmenes de paraboloides y neiloides, puede verse que en general todos los métodos considerados producen resultados razonables en comparación con los valores exactos. Algunos métodos son más precisos que otros; algunos métodos son de más fácil aplicación práctica que otros, etc. Sin embargo, el propósito de este trabajo no es proporcionar criterios de selección de métodos, sino mostrar que existe un espectro de métodos que pueden formalmente ser definidos y que es posible, mediante la metodología que se propone aquí, la aplicación de todos ellos. No se afirma que los métodos aquí propuestos sean los únicos posibles, al contrario, lo más probable es que el espectro de métodos pueda ampliarse posteriormente.

Al organizar y analizar detalladamente los resultados obtenidos en este trabajo, se empiezan a detectar otras propiedades y relaciones matemáticas que pueden conducir a futuros trabajos de investigación, de forma similar a como ocurrió con el presente, que se originó como consecuencia del mismo ejercicio en trabajos previos (Cruz de León y Cruz de León, 2006; Uranga-Valencia, 2007 y Uranga-Valencia y Cruz de León, 2007).

Este trabajo deja ver que a pesar de que la especialización de los campos de estudio ha permitido importantes avances en la ciencia, en ocasiones esa misma especialización impide ver las conexiones que se presentan entre las diferentes áreas del conocimiento. Este trabajo, representa un ejemplo de la importancia y necesidad de que los sectores forestal y de tecnología de la madera interactúen con otras disciplinas, lo que ayudará a enriquecer y comprender mejor diferentes aspectos, básicos y aplicados. Si bien, la deducción matemática es simple, el vínculo que se establece entre los campos referidos debe resaltarse, ya que hasta la fecha, al parecer, nadie lo había propuesto como tal. Gran parte de la investigación que se realiza actualmente en las diferentes áreas del conocimiento es multidisciplinaria, a través de colaboraciones, y los sectores en cuestión no deben quedarse rezagados.

APENDICE A. RESULTADOS COMPLETOS PARA EL ÁREA BAJO LA CURVA GENERATRIZ DE PARABOLOIDE (EJEMPLO).

Como se menciona en el capítulo 6, los resultados analíticos completos para todos los métodos involucrados, para 5 y 10 segmentos, ocuparían un gran espacio en este documento, por lo que se anexan en archivo electrónico en el CD que acompaña a esta tesis. También se etiquetan como apéndice A y con el mismo nombre: *Resultados completos para el área bajo la curva generatriz de paraboloides*. En esta parte, solo se muestra un ejemplo de dichos resultados para el caso de la aproximación de Smalian.

A.1 Resultados completos para el área bajo la curva generatriz de paraboloides con 5 segmentos, mediante métodos aproximados (Ejemplo: aproximación de Smalian).

<p>5. Aproximación de Smalian</p>	$f(x_i^*) = \sqrt{\frac{f^2(x_{i-1}) + f^2(x_i)}{2}}$
--	---

Ejemplo de solución (para el intervalo 2):

$$f(x_2^*) = \sqrt{\frac{f^2(x_1) + f^2(x_2)}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2} \left[\left(\sqrt{\frac{1}{5} Ah} \right)^2 + \left(\sqrt{\frac{2}{5} Ah} \right)^2 \right]}$$

$$f(x_2^*) = \sqrt{\frac{3}{10} Ah}$$

$$A_2 = lf(x_2^*) = \frac{1}{5} h \left(\sqrt{\frac{3}{10} Ah} \right)$$

$$A_2 = \frac{1}{5} \sqrt{\frac{3}{10} Ah^3}$$

En la última columna de la tabla A.6 se muestran los resultados para cada uno de los 5 intervalos, para el método 5.

Tabla A.6 Resultados para el área de los intervalos bajo la curva generatriz de paraboloides por el método 5, para 5 intervalos.

intervalo	$A_i = I f(x_i^*)$
1	$\frac{1}{5} \sqrt{\frac{1}{10}} Ah^3$
2	$\frac{1}{5} \sqrt{\frac{3}{10}} Ah^3$
3	$\frac{1}{5} \sqrt{\frac{5}{10}} Ah^3$
4	$\frac{1}{5} \sqrt{\frac{7}{10}} Ah^3$
5	$\frac{1}{5} \sqrt{\frac{9}{10}} Ah^3$

El área total para el método 5 está dada por

$$A_T = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5$$

$$A_T = \frac{1}{5} \sqrt{\frac{1}{10}} Ah^3 + \frac{1}{5} \sqrt{\frac{3}{10}} Ah^3 + \frac{1}{5} \sqrt{\frac{5}{10}} Ah^3 + \frac{1}{5} \sqrt{\frac{7}{10}} Ah^3 + \frac{1}{5} \sqrt{\frac{9}{10}} Ah^3$$

$$A_T = \frac{1}{5} \sqrt{\frac{1}{10}} Ah^3 (\sqrt{1} + \sqrt{3} + \sqrt{5} + \sqrt{7} + \sqrt{9})$$

$$A_T = \frac{\sqrt{1} + \sqrt{3} + \sqrt{5} + \sqrt{7} + \sqrt{9}}{5\sqrt{10}} \sqrt{Ah^3}$$

Finalmente, en la figura siguiente, se muestra una impresión de pantalla de la hoja de cálculo de Excel con el método de Smalian para 500 intervalos, en la que se observan los resultados para el área bajo la curva generatriz de paraboloides de los primeros 41 intervalos.

Áreas paraboloides M5										
# intervalo	xi	xi-1	xi/2	f(xi)	f(xi-1)	f(xi/2)	f	f(xi ²)	área	n
1	0.002	0	0.001	0.04472136	0	0.031622777	0.002	0.031622777	6.32456E-05	500
2	0.004	0.002	0.003	0.063245553	0.04472136	0.054772256	0.002	0.054772256	0.000109545	500
3	0.006	0.004	0.005	0.077459667	0.063245553	0.070710678	0.002	0.070710678	0.000141421	500
4	0.008	0.006	0.007	0.089442719	0.077459667	0.083666003	0.002	0.083666003	0.000167332	500
5	0.01	0.008	0.009	0.1	0.089442719	0.09496833	0.002	0.09496833	0.000189737	500
6	0.012	0.01	0.011	0.109544512	0.1	0.104800885	0.002	0.104800885	0.000209762	500
7	0.014	0.012	0.013	0.118321536	0.109544512	0.114017543	0.002	0.114017543	0.000228035	500
8	0.016	0.014	0.015	0.126491106	0.118321536	0.122474487	0.002	0.122474487	0.000244943	500
9	0.018	0.016	0.017	0.134164079	0.126491106	0.130384048	0.002	0.130384048	0.000260768	500
10	0.02	0.018	0.019	0.141421356	0.134164079	0.137840488	0.002	0.137840488	0.000275681	500
11	0.022	0.02	0.021	0.14832397	0.141421356	0.144913767	0.002	0.144913767	0.000289828	500
12	0.024	0.022	0.023	0.154919334	0.14832397	0.151657509	0.002	0.151657509	0.000303315	500
13	0.026	0.024	0.025	0.161245155	0.154919334	0.158113883	0.002	0.158113883	0.000316228	500
14	0.028	0.026	0.027	0.167332005	0.161245155	0.164316767	0.002	0.164316767	0.000328634	500
15	0.03	0.028	0.029	0.173205081	0.167332005	0.170293864	0.002	0.170293864	0.000340588	500
16	0.032	0.03	0.031	0.178885438	0.173205081	0.176068169	0.002	0.176068169	0.000352136	500
17	0.034	0.032	0.033	0.184390889	0.178885438	0.181659021	0.002	0.181659021	0.000363318	500
18	0.036	0.034	0.035	0.18973666	0.184390889	0.187082869	0.002	0.187082869	0.000374166	500
19	0.038	0.036	0.037	0.194935887	0.18973666	0.192353841	0.002	0.192353841	0.000384708	500
20	0.04	0.038	0.039	0.2	0.194935887	0.197484177	0.002	0.197484177	0.000394968	500
21	0.042	0.04	0.041	0.204933915	0.2	0.202484567	0.002	0.202484567	0.000404969	500
22	0.044	0.042	0.043	0.20978177	0.204933915	0.207364414	0.002	0.207364414	0.000414729	500
23	0.046	0.044	0.045	0.214476106	0.20978177	0.212132034	0.002	0.212132034	0.000424264	500
24	0.048	0.046	0.047	0.219089023	0.214476106	0.216794834	0.002	0.216794834	0.00043358	500
25	0.05	0.048	0.049	0.223606798	0.219089023	0.221359436	0.002	0.221359436	0.000442719	500
26	0.052	0.05	0.051	0.228035085	0.223606798	0.225831796	0.002	0.225831796	0.000451664	500
27	0.054	0.052	0.053	0.232379001	0.228035085	0.230217289	0.002	0.230217289	0.000460435	500
28	0.056	0.054	0.055	0.236643191	0.232379001	0.234520788	0.002	0.234520788	0.000469042	500
29	0.058	0.056	0.057	0.240831892	0.236643191	0.238746728	0.002	0.238746728	0.000477493	500
30	0.06	0.058	0.059	0.244948974	0.240831892	0.242899156	0.002	0.242899156	0.000485798	500
31	0.062	0.06	0.061	0.248997992	0.244948974	0.246981781	0.002	0.246981781	0.000493964	500
32	0.064	0.062	0.063	0.252982213	0.248997992	0.250998008	0.002	0.250998008	0.000501996	500
33	0.066	0.064	0.065	0.256904652	0.252982213	0.254950976	0.002	0.254950976	0.000509902	500
34	0.068	0.066	0.067	0.260768096	0.256904652	0.258843582	0.002	0.258843582	0.000517687	500
35	0.07	0.068	0.069	0.264575131	0.260768096	0.262678511	0.002	0.262678511	0.000525357	500
36	0.072	0.07	0.071	0.268328157	0.264575131	0.266458252	0.002	0.266458252	0.000532917	500
37	0.074	0.072	0.073	0.27202941	0.268328157	0.270185122	0.002	0.270185122	0.00054037	500
38	0.076	0.074	0.075	0.275680975	0.27202941	0.273861279	0.002	0.273861279	0.000547723	500
39	0.078	0.076	0.077	0.279284801	0.275680975	0.27748739	0.002	0.27748739	0.000554977	500
40	0.08	0.078	0.079	0.282842712	0.279284801	0.281069386	0.002	0.281069386	0.000562139	500
41	0.082	0.08	0.081	0.286356421	0.282842712	0.284604989	0.002	0.284604989	0.00056921	500

Figura A1: Impresión de pantalla de la primera página de área bajo la curva generatriz de paraboloides para 500 segmentos con el método aproximado de Smalian

APENDICE B. RESULTADOS COMPLETOS PARA EL ÁREA BAJO LA CURVA GENERATRIZ DE NEILOIDE (EJEMPLO).

Como se mencionó en el capítulo 6, los resultados analíticos completos para todos los métodos involucrados, para 5 y 10 segmentos, ocuparían un gran espacio en este documento, por lo que se anexan en archivo electrónico en el CD que acompaña a esta tesis. También se etiquetan como apéndice A y con el mismo nombre: *Resultados completos para el área bajo la curva generatriz de neiloide*. En esta parte, solo se muestra un ejemplo de dichos resultados para el caso de la aproximación de Smalian con 5 segmentos.

B.1 Resultados completos para el área bajo la curva generatriz de neiloide con 5 segmentos, mediante métodos aproximados (Ejemplo: aproximación de Smalian).

<p>5. Aproximación de Smalian</p>	$f(x_i^*) = \sqrt{\frac{f^2(x_{i-1}) + f^2(x_i)}{2}}$
--	---

Ejemplo de solución (para el intervalo 2):

$$f(x_2^*) = \sqrt{\frac{f^2(x_1) + f^2(x_2)}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2} \left[\left(\sqrt{\left(\frac{1}{5}\right)^3 Ah^3} \right)^2 + \left(\sqrt{\left(\frac{2}{5}\right)^3 Ah^3} \right)^2 \right]}$$

$$f(x_2^*) = \sqrt{\frac{1^3 + 2^3}{2(5^3)} Ah^3}$$

$$A_2 = lf(x_2^*) = \frac{1}{5} h \left(\sqrt{\frac{1^3 + 2^3}{2(5^3)} Ah^3} \right)$$

$$A_2 = \frac{1}{5} \sqrt{\frac{1^3 + 2^3}{2(5^3)} Ah^5}$$

En tabla B.6 (notación del CD), se muestran los resultados para cada uno de los 5 intervalos, para el método 5.

Tabla B.6 Resultados para el área de los intervalos bajo la curva generatriz de neiloide por el método 5, para 5 intervalos.

intervalo	$A_i = lf(x_i^*)$
1	$\frac{1}{5} \sqrt{\frac{1^3}{2(5^3)}} Ah^5$
2	$\frac{1}{5} \sqrt{\frac{1^3 + 2^3}{2(5^3)}} Ah^5$
3	$\frac{1}{5} \sqrt{\frac{2^3 + 3^3}{2(5^3)}} Ah^5$
4	$\frac{1}{5} \sqrt{\frac{3^3 + 4^3}{2(5^3)}} Ah^5$
5	$\frac{1}{5} \sqrt{\frac{4^3 + 5^3}{2(5^3)}} Ah^5$

El área total para el método 5 está dada por

$$A_T = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5$$

$$A_T = \frac{1}{5} \sqrt{\frac{1^3}{2(5^3)}} Ah^5 + \frac{1}{5} \sqrt{\frac{1^3 + 2^3}{2(5^3)}} Ah^5 + \frac{1}{5} \sqrt{\frac{2^3 + 3^3}{2(5^3)}} Ah^5 + \frac{1}{5} \sqrt{\frac{3^3 + 4^3}{2(5^3)}} Ah^5 + \frac{1}{5} \sqrt{\frac{4^3 + 5^3}{2(5^3)}} Ah^5$$

$$A_T = \frac{1}{5} \sqrt{\frac{1}{2(5^3)}} Ah^5 \left(\sqrt{1^3} + \sqrt{1^3 + 2^3} + \sqrt{2^3 + 3^3} + \sqrt{3^3 + 4^3} + \sqrt{4^3 + 5^3} \right)$$

$$A_T = \frac{\sqrt{1^3} + \sqrt{1^3 + 2^3} + \sqrt{2^3 + 3^3} + \sqrt{3^3 + 4^3} + \sqrt{4^3 + 5^3}}{5\sqrt{2(5^3)}} \sqrt{Ah^5}$$

Finalmente, en la figura siguiente, se muestra una impresión de pantalla de la hoja de cálculo de Excel con el método de Smalian para 500 intervalos, en la que se observan los resultados para el área bajo la curva generatriz de neiloide de los primeros 41 intervalos.

# intervalo	xi	xi-1	xi,1/2	f(xi)	f(xi-1)	f(xi,1/2)	f'	f(xi')	área	n	At	Ae
1	0.002	0	0.001	8.94427E-05	0	3.16228E-05	0.002	6.32456E-05	1.26491E-07	500	0.4000027	1.0000067
2	0.004	0.002	0.003	0.000252982	8.94427E-05	0.000164317	0.002	0.000189737	3.79473E-07	500		
3	0.006	0.004	0.005	0.000464758	0.000252982	0.000353553	0.002	0.000374166	7.48331E-07	500		
4	0.008	0.006	0.007	0.000715542	0.000464758	0.000585662	0.002	0.000603324	1.20665E-06	500		
5	0.01	0.008	0.009	0.001	0.000715542	0.000853815	0.002	0.000869483	1.73897E-06	500		
6	0.012	0.01	0.011	0.001314534	0.001	0.00115369	0.002	0.001167904	2.33581E-06	500		
7	0.014	0.012	0.013	0.001656502	0.001314534	0.001482228	0.002	0.001495326	2.99065E-06	500		
8	0.016	0.014	0.015	0.002023858	0.001656502	0.001837117	0.002	0.001849324	3.69865E-06	500		
9	0.018	0.016	0.017	0.002414953	0.002023858	0.002218529	0.002	0.002228004	4.45601E-06	500		
10	0.02	0.018	0.019	0.002828427	0.002414953	0.002618969	0.002	0.002629829	5.25968E-06	500		
11	0.022	0.02	0.021	0.003263127	0.002828427	0.003043189	0.002	0.003053523	6.10705E-06	500		
12	0.024	0.022	0.023	0.003718064	0.003263127	0.003488123	0.002	0.003497999	6.996E-06	500		
13	0.026	0.024	0.025	0.004192374	0.003718064	0.003952847	0.002	0.003962323	7.92465E-06	500		
14	0.028	0.026	0.027	0.004685296	0.004192374	0.004438553	0.002	0.004445672	8.89134E-06	500		
15	0.03	0.028	0.029	0.005196152	0.004685296	0.004938522	0.002	0.004947323	9.89465E-06	500		
16	0.032	0.03	0.031	0.005724334	0.005196152	0.005458113	0.002	0.005466626	1.09333E-05	500		
17	0.034	0.032	0.033	0.006269329	0.005724334	0.005994748	0.002	0.006002999	1.2006E-05	500		
18	0.036	0.034	0.035	0.00683052	0.006269329	0.0065479	0.002	0.006555913	1.3118E-05	500		
19	0.038	0.036	0.037	0.007407564	0.00683052	0.007117092	0.002	0.007124886	1.42498E-05	500		
20	0.04	0.038	0.039	0.008	0.007407564	0.007701883	0.002	0.007709475	1.54189E-05	500		
21	0.042	0.04	0.041	0.008607439	0.008	0.008301867	0.002	0.008309272	1.66185E-05	500		
22	0.044	0.042	0.043	0.009223518	0.008607439	0.00891667	0.002	0.0089239	1.78478E-05	500		
23	0.046	0.044	0.045	0.009865901	0.009223518	0.009545942	0.002	0.00955301	1.9106E-05	500		
24	0.048	0.046	0.047	0.010516273	0.009865901	0.010189357	0.002	0.010196274	2.03925E-05	500		
25	0.05	0.048	0.049	0.01118034	0.010516273	0.010846612	0.002	0.010853387	2.17068E-05	500		
26	0.052	0.05	0.051	0.011857824	0.01118034	0.011517422	0.002	0.011524062	2.30481E-05	500		
27	0.054	0.052	0.053	0.012548466	0.011857824	0.012201516	0.002	0.01220803	2.44161E-05	500		
28	0.056	0.054	0.055	0.013252019	0.012548466	0.012898643	0.002	0.012905038	2.58101E-05	500		
29	0.058	0.056	0.057	0.01396825	0.013252019	0.013608563	0.002	0.013614845	2.72297E-05	500		
30	0.06	0.058	0.059	0.014696938	0.01396825	0.01433105	0.002	0.014337224	2.86744E-05	500		
31	0.062	0.06	0.061	0.015437876	0.014696938	0.015065889	0.002	0.015071961	3.01439E-05	500		
32	0.064	0.062	0.063	0.016190862	0.015437876	0.015812875	0.002	0.01581885	3.16377E-05	500		
33	0.066	0.064	0.065	0.016955707	0.016190862	0.016571813	0.002	0.016577696	3.31554E-05	500		
34	0.068	0.066	0.067	0.017732231	0.016955707	0.01734252	0.002	0.017348314	3.46968E-05	500		
35	0.07	0.068	0.069	0.018520259	0.017732231	0.018124817	0.002	0.018130527	3.62611E-05	500		
36	0.072	0.07	0.071	0.019319627	0.018520259	0.018918536	0.002	0.018924164	3.78483E-05	500		
37	0.074	0.072	0.073	0.020130176	0.019319627	0.019723514	0.002	0.019729065	3.94581E-05	500		
38	0.076	0.074	0.075	0.020951754	0.020130176	0.020539596	0.002	0.020545072	4.10910E-05	500		
39	0.078	0.076	0.077	0.021784214	0.020951754	0.021366633	0.002	0.021372038	4.27441E-05	500		
40	0.08	0.078	0.079	0.022627417	0.021784214	0.022204482	0.002	0.022209818	4.44196E-05	500		
41	0.082	0.08	0.081	0.023481227	0.022627417	0.023053004	0.002	0.023058274	4.61165E-05	500		

Figura B1: Impresión de pantalla de la primera página de área bajo la curva generatriz de neiloide para 500 segmentos con el método aproximado de Smalian

APENDICE C. RESULTADOS COMPLETOS PARA EL VOLÚMEN DE PARABOLOIDE (EJEMPLO).

Como se mencionó en el capítulo 8, los resultados analíticos completos para todos los métodos involucrados, para 5 y 10 segmentos, ocuparían un gran espacio en este documento, por lo que se anexan en archivo electrónico en el CD que acompaña a esta tesis. También se etiquetan como apéndice C y con el mismo nombre: *Resultados completos para el volumen de paraboloides*. En esta parte, sólo se muestra un ejemplo de dichos resultados para el caso del método de Smalian.

C.1 Resultados completos para el volumen de paraboloides con 5 segmentos, mediante métodos de cubicación (Ejemplo: método de Smalian).

4. Método de Smalian	$\bar{S} = \frac{S_m + S_M}{2} = \frac{S_{i-1} + S_i}{2}$
-----------------------------	---

Ejemplo de solución (para el intervalo 2):

$$\bar{S}_2 = \frac{S_1 + S_2}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{5} Ah\pi + \frac{2}{5} Ah\pi \right)$$
$$\bar{S}_2 = \frac{3}{10} Ah\pi$$

$$V_2 = l\bar{S}_2 = \frac{1}{5} h \left(\frac{3}{10} Ah\pi \right)$$

$$V_2 = \frac{3}{50} Ah^2\pi$$

En la tabla C.5 se muestran los resultados del volumen de cada uno de los 5 intervalos, por el método 4.

Tabla C.5. Resultados para el volumen de los intervalos del paraboloides por el método 4, para 5 intervalos.

intervalo	$V_i = \bar{S}l$
1	$\frac{1}{50} Ah^2 \pi$
2	$\frac{3}{50} Ah^2 \pi$
3	$\frac{5}{50} Ah^2 \pi$
4	$\frac{7}{50} Ah^2 \pi$
5	$\frac{9}{50} Ah^2 \pi$

El volumen total para el método 4 esta dado por

$$V_T = V_1 + V_2 + V_3 + V_4 + V_5$$

$$V_T = \frac{1}{50} Ah^2 \pi + \frac{3}{50} Ah^2 \pi + \frac{5}{50} Ah^2 \pi + \frac{7}{50} Ah^2 \pi + \frac{9}{50} Ah^2 \pi$$

$$V_T = \frac{1}{50} Ah^2 \pi (1 + 3 + 5 + 7 + 9) = \frac{25}{50} Ah^2 \pi$$

$$V_T = \frac{1}{2} Ah^2 \pi$$

Finalmente, en la figura siguiente, se muestra una impresión de pantalla de la hoja de cálculo de Excel con el método de cubicación de Smalian para 500 intervalos, en la que se observan los resultados para el volumen de paraboloides de los primeros 41 intervalos.

# intervalo	xi	xi-1	xi, M2	f(xi)	f(xi-1)	f(xi, M2)	S1	S1-1	S1, M2	f	S1*	volumen	n	Vt	0.5
1	0.002	0	0.001	0.04472136	0	0.031622777	0.002	0	0.001	0.002	0.001	0.000002	500		
2	0.004	0.002	0.003	0.063245553	0.04472136	0.054772256	0.004	0.002	0.003	0.002	0.003	0.000006	500		
3	0.006	0.004	0.005	0.077459667	0.063245553	0.070710678	0.006	0.004	0.005	0.002	0.005	0.00001	500		
4	0.008	0.006	0.007	0.089442719	0.077459667	0.083666003	0.008	0.006	0.007	0.002	0.007	0.000014	500		
5	0.01	0.008	0.009	0.1	0.089442719	0.0946833	0.01	0.008	0.009	0.002	0.009	0.000018	500		
6	0.012	0.01	0.011	0.109544512	0.1	0.104880885	0.012	0.01	0.011	0.002	0.011	0.000022	500		
7	0.014	0.012	0.013	0.118321596	0.109544512	0.114017543	0.014	0.012	0.013	0.002	0.013	0.000026	500		
8	0.016	0.014	0.015	0.126491106	0.118321596	0.122474487	0.016	0.014	0.015	0.002	0.015	0.00003	500		
9	0.018	0.016	0.017	0.134164079	0.126491106	0.130384048	0.018	0.016	0.017	0.002	0.017	0.000034	500		
10	0.02	0.018	0.019	0.141421356	0.134164079	0.137840488	0.02	0.018	0.019	0.002	0.019	0.000038	500		
11	0.022	0.02	0.021	0.14832397	0.141421356	0.144913767	0.022	0.02	0.021	0.002	0.021	0.000042	500		
12	0.024	0.022	0.023	0.154919334	0.14832397	0.151657509	0.024	0.022	0.023	0.002	0.023	0.000046	500		
13	0.026	0.024	0.025	0.161245155	0.154919334	0.158113883	0.026	0.024	0.025	0.002	0.025	0.00005	500		
14	0.028	0.026	0.027	0.167332005	0.161245155	0.164316767	0.028	0.026	0.027	0.002	0.027	0.000054	500		
15	0.03	0.028	0.029	0.173205081	0.167332005	0.170293864	0.03	0.028	0.029	0.002	0.029	0.000058	500		
16	0.032	0.03	0.031	0.178885438	0.173205081	0.176068169	0.032	0.03	0.031	0.002	0.031	0.000062	500		
17	0.034	0.032	0.033	0.184390889	0.178885438	0.181659021	0.034	0.032	0.033	0.002	0.033	0.000066	500		
18	0.036	0.034	0.035	0.18973666	0.184390889	0.187082683	0.036	0.034	0.035	0.002	0.035	0.00007	500		
19	0.038	0.036	0.037	0.194935887	0.18973666	0.192353841	0.038	0.036	0.037	0.002	0.037	0.000074	500		
20	0.04	0.038	0.039	0.2	0.194935887	0.197484177	0.04	0.038	0.039	0.002	0.039	0.000078	500		
21	0.042	0.04	0.041	0.204939015	0.2	0.202494567	0.042	0.04	0.041	0.002	0.041	0.000082	500		
22	0.044	0.042	0.043	0.20976177	0.204939015	0.207364414	0.044	0.042	0.043	0.002	0.043	0.000086	500		
23	0.046	0.044	0.045	0.214476106	0.20976177	0.212132034	0.046	0.044	0.045	0.002	0.045	0.00009	500		
24	0.048	0.046	0.047	0.2190893023	0.214476106	0.216794934	0.048	0.046	0.047	0.002	0.047	0.000094	500		
25	0.05	0.048	0.049	0.223606798	0.2190893023	0.221359436	0.05	0.048	0.049	0.002	0.049	0.000098	500		
26	0.052	0.05	0.051	0.228035085	0.223606798	0.225831796	0.052	0.05	0.051	0.002	0.051	0.000102	500		
27	0.054	0.052	0.053	0.232379001	0.228035085	0.230217289	0.054	0.052	0.053	0.002	0.053	0.000106	500		
28	0.056	0.054	0.055	0.236643191	0.232379001	0.234520788	0.056	0.054	0.055	0.002	0.055	0.00011	500		
29	0.058	0.056	0.057	0.240831892	0.236643191	0.238746728	0.058	0.056	0.057	0.002	0.057	0.000114	500		
30	0.06	0.058	0.059	0.244949374	0.240831892	0.242893156	0.06	0.058	0.059	0.002	0.059	0.000118	500		
31	0.062	0.06	0.061	0.248997992	0.244949374	0.246981781	0.062	0.06	0.061	0.002	0.061	0.000122	500		
32	0.064	0.062	0.063	0.252982213	0.248997992	0.250998008	0.064	0.062	0.063	0.002	0.063	0.000126	500		
33	0.066	0.064	0.065	0.256904852	0.252982213	0.254950976	0.066	0.064	0.065	0.002	0.065	0.00013	500		
34	0.068	0.066	0.067	0.260768096	0.256904852	0.258843582	0.068	0.066	0.067	0.002	0.067	0.000134	500		
35	0.07	0.068	0.069	0.264575131	0.260768096	0.262678511	0.07	0.068	0.069	0.002	0.069	0.000138	500		
36	0.072	0.07	0.071	0.268328157	0.264575131	0.266458252	0.072	0.07	0.071	0.002	0.071	0.000142	500		
37	0.074	0.072	0.073	0.27202841	0.268328157	0.270185122	0.074	0.072	0.073	0.002	0.073	0.000146	500		
38	0.076	0.074	0.075	0.275680975	0.27202841	0.273861279	0.076	0.074	0.075	0.002	0.075	0.00015	500		
39	0.078	0.076	0.077	0.279284901	0.275680975	0.277498739	0.078	0.076	0.077	0.002	0.077	0.000154	500		
40	0.08	0.078	0.079	0.282842712	0.279284901	0.281069386	0.08	0.078	0.079	0.002	0.079	0.000158	500		
41	0.082	0.08	0.081	0.286356421	0.282842712	0.284604989	0.082	0.08	0.081	0.002	0.081	0.000162	500		

Figura C1: Impresión de pantalla de la primera página del volumen de paraboloides para 500 segmentos con el método de cubicación de Smalian

APENDICE D. RESULTADOS COMPLETOS PARA EL VOLÚMEN DE NEILOIDE (EJEMPLO).

Como se mencionó en el capítulo 8, los resultados analíticos completos para todos los métodos involucrados, para 5 y 10 segmentos, ocuparían un gran espacio en este documento, por lo que se anexan en archivo electrónico en el CD que acompaña a esta tesis. También se etiquetan como apéndice D y con el mismo nombre: *Resultados completos para el volumen de neiloide*. En esta parte, sólo se muestra un ejemplo de dichos resultados para el caso del método de Smalian.

D.1 Resultados completos para el volumen de neiloide con 5 segmentos, mediante métodos de cubicación (Ejemplo: método de Smalian).

4. Método de Smalian	$\bar{S} = \frac{S_m + S_M}{2} = \frac{S_{i-1} + S_i}{2}$
-----------------------------	---

Ejemplo de solución (para el intervalo 2):

$$\bar{S}_2 = \frac{S_1 + S_2}{2} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{5} \right)^3 Ah^3 \pi + \left(\frac{2}{5} \right)^3 Ah^3 \pi \right]$$

$$\bar{S}_2 = \frac{9}{250} Ah^3 \pi$$

$$V_2 = l \bar{S}_2 = \frac{1}{5} h \left(\frac{9}{250} Ah^3 \pi \right)$$

$$V_2 = \frac{9}{1250} Ah^4 \pi$$

En la tabla D.5 se muestran los resultados del volumen de cada uno de los 5 intervalos, por el método 4.

Tabla D.5. Resultados para el volumen de los intervalos del neiloide por el método 4, para 5 intervalos.

intervalo	$V_i = \bar{S}l$
1	$\frac{1}{1250} Ah^4 \pi$
2	$\frac{9}{1250} Ah^4 \pi$
3	$\frac{35}{1250} Ah^4 \pi$
4	$\frac{91}{1250} Ah^4 \pi$
5	$\frac{189}{1250} Ah^4 \pi$

El volumen total para el método 4 esta dado por:

$$V_T = V_1 + V_2 + V_3 + V_4 + V_5$$

$$V_T = \frac{1}{1250} Ah^4 \pi + \frac{9}{1250} Ah^4 \pi + \frac{35}{1250} Ah^4 \pi + \frac{91}{1250} Ah^4 \pi + \frac{189}{1250} Ah^4 \pi$$

$$V_T = \frac{1}{1250} Ah^4 \pi (1 + 9 + 35 + 91 + 189) = \frac{325}{1250} Ah^4 \pi$$

$$V_T = \frac{13}{50} Ah^4 \pi$$

Finalmente, en la figura siguiente, se muestra una impresión de pantalla de la hoja de cálculo de Excel con el método de cubicación de Smalian para 500 intervalos, en la que se observan los resultados para el volumen de neiloide de los primeros 41 intervalos.

# intervalo	xi	xi-1	xi,M2	f(xi)	f(xi-1)	f(xi,M2)	Si	Si-1	Si,M2	/	Si*	volumen	n	Vt	Ve
1	0.002	0	0.001	8.94427E-05	0	3.16228E-05	0.00000008	0	0.00000001	0.002	0.00000004	8E-12	500		
2	0.004	0.002	0.003	0.000252382	8.94427E-05	0.000184317	0.00000064	0.00000008	0.000000027	0.002	0.00000036	7.2E-11	500		
3	0.006	0.004	0.005	0.000464758	0.000252382	0.000353553	0.00000216	0.00000064	0.00000125	0.002	0.00000014	2.8E-10	500		
4	0.008	0.006	0.007	0.000715542	0.000464758	0.000585662	0.00000912	0.00000216	0.00000343	0.002	0.000000364	7.28E-10	500		
5	0.01	0.008	0.009	0.001	0.000715542	0.000853815	0.000001	0.00000912	0.00000729	0.002	0.000000756	1.512E-09	500		
6	0.012	0.01	0.011	0.001314534	0.001	0.00115369	0.000001728	0.000001	0.000001331	0.002	0.000001364	2.728E-09	500		
7	0.014	0.012	0.013	0.001656502	0.001314534	0.001482228	0.000002744	0.000001728	0.000002197	0.002	0.000002236	4.472E-09	500		
8	0.016	0.014	0.015	0.002023858	0.001656502	0.001817117	0.000004096	0.000002744	0.000003375	0.002	0.00000342	6.84E-09	500		
9	0.018	0.016	0.017	0.002414953	0.002023858	0.00216529	0.000006832	0.000004096	0.000004913	0.002	0.000004964	9.328E-09	500		
10	0.02	0.018	0.019	0.002828427	0.002414953	0.002518969	0.00001088	0.000006832	0.000008359	0.002	0.000008916	1.3832E-08	500		
11	0.022	0.02	0.021	0.003263127	0.002828427	0.003043189	0.00001648	0.00001088	0.000009261	0.002	0.000009324	1.8648E-08	500		
12	0.024	0.022	0.023	0.003718064	0.003263127	0.003488123	0.00001824	0.00001648	0.000012167	0.002	0.000012236	2.4472E-08	500		
13	0.026	0.024	0.025	0.004192374	0.003718064	0.003952847	0.000017576	0.00001824	0.000016225	0.002	0.0000167	3.14E-08	500		
14	0.028	0.026	0.027	0.004685296	0.004192374	0.004436553	0.000021952	0.000017576	0.000019683	0.002	0.000019764	3.9528E-08	500		
15	0.03	0.028	0.029	0.005196152	0.004685296	0.004939522	0.000027	0.000021952	0.000024389	0.002	0.000024476	4.8952E-08	500		
16	0.032	0.03	0.031	0.005724334	0.005196152	0.005459113	0.000032768	0.000027	0.000029791	0.002	0.000029884	5.9768E-08	500		
17	0.034	0.032	0.033	0.00626929	0.005724334	0.005994748	0.000039304	0.000032768	0.000035937	0.002	0.000036036	7.2072E-08	500		
18	0.036	0.034	0.035	0.00683052	0.00626929	0.0065479	0.000046556	0.000039304	0.000042875	0.002	0.00004298	8.586E-08	500		
19	0.038	0.036	0.037	0.007407564	0.00683052	0.007117032	0.000054872	0.000046556	0.000050653	0.002	0.000050784	1.01528E-07	500		
20	0.04	0.038	0.039	0.008	0.007407564	0.007701883	0.000064	0.000054872	0.000059319	0.002	0.000059436	1.18872E-07	500		
21	0.042	0.04	0.041	0.008807439	0.008	0.008301867	0.000074088	0.000064	0.000068321	0.002	0.000068404	1.38088E-07	500		
22	0.044	0.042	0.043	0.009229518	0.008807439	0.00891667	0.000085184	0.000074088	0.000079507	0.002	0.000079636	1.58272E-07	500		
23	0.046	0.044	0.045	0.009685901	0.009229518	0.009545942	0.000097336	0.000085184	0.000091225	0.002	0.00009126	1.8252E-07	500		
24	0.048	0.046	0.047	0.010162273	0.009685901	0.010105357	0.00010592	0.000097336	0.000103823	0.002	0.000103964	2.07928E-07	500		
25	0.05	0.048	0.049	0.01065034	0.010162273	0.010466612	0.000125	0.00010592	0.000117649	0.002	0.000117796	2.35592E-07	500		
26	0.052	0.05	0.051	0.01116834	0.01065034	0.01118034	0.00014608	0.000125	0.000132851	0.002	0.000132804	2.65608E-07	500		
27	0.054	0.052	0.053	0.011714966	0.01116834	0.011720156	0.000157464	0.00014608	0.000148877	0.002	0.000149036	2.98072E-07	500		
28	0.056	0.054	0.055	0.012252019	0.011714966	0.012288843	0.000175616	0.000157464	0.000163375	0.002	0.000163854	3.3308E-07	500		
29	0.058	0.056	0.057	0.01280259	0.012252019	0.012808563	0.000195112	0.000175616	0.000185193	0.002	0.000185364	3.70728E-07	500		
30	0.06	0.058	0.059	0.01336825	0.01280259	0.01336825	0.000216	0.000195112	0.000205379	0.002	0.000205556	4.1112E-07	500		
31	0.062	0.06	0.061	0.013937878	0.01336825	0.013937878	0.000238288	0.000216	0.000226581	0.002	0.000226764	4.54328E-07	500		
32	0.064	0.062	0.063	0.014519062	0.013937878	0.014519062	0.000262144	0.000238288	0.000250047	0.002	0.000250236	5.00472E-07	500		
33	0.066	0.064	0.065	0.0151105707	0.014519062	0.0151105707	0.000287496	0.000262144	0.000274625	0.002	0.00027482	5.4864E-07	500		
34	0.068	0.066	0.067	0.0157122231	0.0151105707	0.0157122231	0.000314432	0.000287496	0.000300763	0.002	0.000300964	6.01828E-07	500		
35	0.07	0.068	0.069	0.016320259	0.0157122231	0.016320259	0.000343	0.000314432	0.000328509	0.002	0.000328716	6.57432E-07	500		
36	0.072	0.07	0.071	0.0169319627	0.016320259	0.0169319627	0.000373248	0.000343	0.000357911	0.002	0.000358124	7.16248E-07	500		
37	0.074	0.072	0.073	0.020130176	0.0169319627	0.020130176	0.000405224	0.000373248	0.000389017	0.002	0.000389236	7.78472E-07	500		
38	0.076	0.074	0.075	0.020951754	0.020130176	0.020951754	0.000438976	0.000405224	0.000421675	0.002	0.0004221	8.442E-07	500		
39	0.078	0.076	0.077	0.021784214	0.020951754	0.021784214	0.000474562	0.000438976	0.000456533	0.002	0.000456784	9.13528E-07	500		
40	0.08	0.078	0.079	0.022627417	0.021784214	0.022627417	0.000512	0.000474562	0.000493039	0.002	0.000493276	9.86552E-07	500		
41	0.082	0.08	0.081	0.023481227	0.022627417	0.023481227	0.000551368	0.000512	0.000531441	0.002	0.000531684	1.06337E-06	500		

Figura D1: Impresión de pantalla de la primera página del volumen de neiloide para 500 segmentos con el método de cubicación de Smalian

REFERENCIAS

1. Avery, T.E. and Burkhart, H.E. 2002. Forest Measurements. Mc Graw Hill. New York.
2. Brack, C. 1999. Forest mensuration. Measuring trees, stands and forests for effective forest management. Computer-based course resources for forest mensuration at the Australian National University. Publicado en internet, disponible en <http://sres-associated.anu.edu.au/mensuration/volume.htm>.
3. Bruce, D. and Shumacher, F. 1965. Medición Forestal. Editorial Herrero. México.
4. Bunge, M. 1983. La investigación científica. Editorial Planeta. México.
5. Burden R.L. y Faires J.D. 1998. Análisis Numérico. 6ª Ed. International Thompson Editores. México.
6. Castañeda-Jiménez, J., De la Torre-Lozano, M.O., Morán-Rodríguez, J.M., y Lara-Ramírez, L.R. 2002. Metodología de la investigación. Mc Graw-Hill. México.
7. Castro, F. 1955. Curso de dasometría. ENA Chapingo. México.
8. Chapman, H.H. 1921. Forest Mensuration. John Wiley & Sons Inc. New York.
9. Courant, R. and John, F. 1965. Introduction to Calculus and Analysis. Volume I. Wiley Internacional Edition. USA.
10. Cruz-Cobos, F., De los Santos-Posadas, H.M., Valdéz-Lazalde, J.R. 2005. Un sistema compatible de ahusamiento y volumen para *Pinus cooperi* blanco en Durango, México. Memorias del VII Congreso Mexicano de Recursos Forestales, Chihuahua, Chih., México.
11. Cruz de León, G. and Cruz de León, J. 2006. The Segmental Conic Model for Forest Measurements. Maderas y Bosques 12(2):91-96.
12. Diéguez-Aranda, U., Barrio-Anta, M., Castedo-Dorado, F., Ruíz-González, A.D., Álvarez-González, M.F., y Rojo-Albareca, A. 2003. Dendrometría. Mundi-Prensa. Madrid, España.
13. Hernández, F.J. y Soto-Soto, M.G. 2005. Funciones para estimar volumen fustal y ahusamiento de *Pinus douglasiana*. Memorias del VII Congreso Mexicano de Recursos Forestales, Chihuahua, Chih., México.

14. Plank, M.E and Cahill, J.M. 1984. Estimating cubic volume of small diameter tree-length logs from ponderosa and lodgepole pine. United states department of agriculture. Forest Service. Research note: PNW-417
15. Romahn de la Vega, C.F., Ramírez-Maldonado, H. y Treviño-García, J.L. 1994. Dendrometría. Universidad Autónoma Chapingo. México.
16. Stewart, J. 2002. Cálculo. Trascendentes tempranas. Thompson Learning. México.
17. Uranga-Valencia, L.P. 2007. (Tesis de maestría en proceso) . Facultad de Ingeniería en Tecnología de la Madera. Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo.
18. Uranga-Valencia, L.P. y Cruz de León, G. 2007. (Manuscrito en preparación)
19. West, P.W. 2004. Tree and Forest Measurement. Springer-Verlag. Berlín.