



**UNIVERSIDAD MICHOCANA DE
SAN NICOLAS DE HIDALGO**

Facultad de Ingeniería Química



ANALISIS DE DESICIONES EN INGENIERIA

REPORTE DE MEMORIAS DE EXPERIENCIA PROFESIONAL
PARA OBTENER EL TÍTULO DE LICENCIATURA EN
INGENIERÍA QUÍMICA

PRESENTADA POR:

RAFAEL CORONA GUERRA

ASESOR: Dra. MARICELA VILLICAÑA MÉNDEZ.

MORELIA, MICHOACÁN
ENERO 2013

ÍNDICE DE CONTENIDO

SECCIÓN	PAGINA
ÍNDICE DE ANEXOS (APENDICES)	1
I. INTRODUCCIÓN	2
II. OBJETIVOS	7
III. SUMARIO	10
1. Sistema administrativo	12
1.1 Definición de la toma de decisiones	14
1.2 El proceso en la toma de decisiones	15
1.2.1 Decisiones en situación de certeza	15
1.2.2 Decisiones en situación de incertidumbre	15
1.2.2.1 Decisiones no competitivas	15
1.2.2.2 Decisiones competitivas	18
1.2.3 Decisiones en situación de riesgo	19
1.3 Sistemas organizacionales y la toma de decisiones	24
1.3.1. Niveles en la toma de decisiones	24
1.3.2. Tipo de decisiones	25
1.4 Diseminación de la toma de decisiones	25
1.4.1. Servicios de diseminación selectiva de información electrónicos	26
1.4.2. Sobre la utilidad de un boletín electrónico de diseminación selectiva de información en las áreas de economía y negocios	28
1.4.3. El boletín electrónico como estrategia proactiva de promoción de la consulta a la base de datos <i>CLASE</i> a través de www	29
1.4.4. Características del boletín electrónico de diseminación selectiva de información de <i>ECON-CLASE</i>	30
1.5 Unidad básica de comportamiento	30
1.6 Factores en la toma de decisiones	31
1.7 Dimensiones de la toma de decisiones	33
1.8 Toma de decisiones proactiva y reactivas	47
1.9. Resumen de la primera parte	49
2. Estructuración	54
2.1 Matriz de decisiones	57
2.2 Opciones en la toma de decisiones	60
3. Pronósticos	63
3.1 Técnicas cuantitativas de pronóstico	66
3.1.1 Regresión (Método de los mínimos cuadrados)	67
3.1.1.1 Modelo de regresión simple	68
3.1.1.1.1 Correlación lineal	68
3.1.1.1.1.1 Coeficiente de correlación lineal	75
3.1.1.1.1.2 Coeficiente de determinación	80
3.1.1.1.2 Correlación parabólica	80
3.1.1.1.2.1 Ecuaciones de primer grado con tres incógnitas	85
3.1.1.1.3 Correlación exponencial, potencial y media móvil	90
3.1.1.2 Modelo de regresión múltiple	91

3.1.1.3 Modelo econométrico	91
3.1.1.4 Modelos de series de tiempo	92
3.2 Diagnóstico externo	93
3.3. Radiografía interna	93
3.3.1. Análisis FODA	94
4. Mercado	103
4.1 La Importancia del mercado	103
4.2 Presentación de los mercados - El Esquema de Porter -	104
4.3 Estudio del mercado	105
4.3.1 El mercado consumidor	107
4.3.1.1 Bienes de capital	109
4.3.1.2 Bienes de consumo intermedio	110
4.3.1.3 Bienes de consumo final (masivos, otros)	110
4.3.1.4 Servicios	110
4.3.2 El mercado proveedor	111
4.3.3 El mercado distribuidor	112
4.3.4 El mercado competidor	113
4.3.4.1 Potenciales competidores	113
4.3.5. El mercado de bienes sustitutos	114
4.3.6 Resumen del estudio del mercado	114
4.4 Herramientas para el estudio de mercados	115
4.4.1 Tipos de herramientas	116
4.4.1.1 Estudios cuantitativos y cualitativos	116
4.4.1.2 Estudios desde la oferta y desde la demanda	116
4.4.1.3 Estudios con información primaria y con información secundaria	117
4.5 Técnicas de análisis del mercado	117
4.5.1 Ciclo de vida del producto	117
4.5.2 Otras	118
4.6 El análisis de la información recopilada es el eje del estudio de mercado	118
4.6.1 Fijación del precio del producto	119
4.6.2 Objeto de su estudio en proyecto	121
4.6.3 Etapas de un estudio de mercado	122
4.6.4 Metodología	126
4.6.5 Conclusiones del estudio: El posicionamiento	129
4.6.5.1 Estrategias genéricas de Porter	129
4.6.6 Aplicación de la información obtenida	131
4.7 Potencial del mercado	131
4.7.1 Medición de la demanda del mercado	131
4.7.1.1 Variables para pronosticar las variables del mercado	136
4.7.1.2 Variables para pronosticar el potencial del mercado	140
4.7.1.3. Determinación del potencial del mercado actual y previsible para el negocio	140
4.8 Investigación de mercados	140
5. Estrategia del diseño experimental	144
5.1 Distribución de probabilidad de variables aleatorias discretas o discontinuas	144
5.1.1 Definición de variable aleatoria discreta o discontinua	144
5.1.2 Función de probabilidad y de distribución,	148

valor esperado (μ), varianza (σ^2) y desviación estándar (σ)	
5.1.3 Distribución binomial	155
5.1.4 Distribución hipergeométrica	167
5.1.4.1. Aproximación de la hipergeométrica por la binomial	173
5.1.5 Distribución geométrica	176
5.1.6 Distribución multinomial	180
5.1.7 Distribución de Poisson	186
5.1.7.1. Aproximación de la binomial por la de Poisson	190
5.2 Distribución de probabilidad de variables aleatorias continuas	193
5.2.1 Definición variable aleatoria continua	193
5.2.1.1 Parámetros de una variable aleatoria continua	195
5.2.2 Función de densidad y acumulativa	196
5.2.3 Valor esperado (μ), varianza (σ^2) y desviación típica o estándar (σ)	198
5.2.4 Distribución uniforme y exponencial	201
5.2.5 Distribución Normal	207
5.2.6 Aproximación de la binomial a la normal	214
5.2.7 Teorema de Chébyshev	219
5.3 Diseño de experimentos de un factor	221
5.3.1 Diseño completamente aleatorizado	223
5.3.2 Formulas para el cálculo de sumas de cuadrados (SS: "Sum of Squares")	225
5.3.3 Diseño complementario al azar y ANOVA (ANalysis Of VAriance)	227
5.3.4 Pruebas de igualdad de varianzas	234
5.3.5 Comparación de un solo grado de libertad	241
5.3.6 Verificación de los supuestos del modelo	241
IV. CONCLUSIONES	246
V. BIBLIOGRAFIA	247
VI. ANEXOS (APENDICES)	250
VII. GLOSARIO	270

DEDICATORIA

Este trabajo lo dedico al creador que me brindó la salud, sabiduría y fe para no desistir de todos mis propósitos positivos de vida.

A mi compañera de vida, Lupita, que siempre mantuvo firme su confianza en mi para concluir pendientes que en ocasiones demeritamos por considerarlos impropios en etapas ya avanzadas de nuestra vida, por su apoyo en la realización de los proyectos más difíciles que puedo imaginar, por ser constante en las situaciones más difíciles que en el camino encontré y en todo momento me brindo su compañía, consejo, aliciente y por sobre todo lo mejor de sí.

A mis hijos Víctor Alejandro, Christian Daniel, Evil Adán y Ángel Uriel; que con el ejemplo les predico que nunca es tarde para alcanzar nuestras metas.

A mis Padres por darme su apoyo moral, económico e inspirarme siempre a salir adelante.

“Hoy es el ayer del mañana, mañana no dejes de hacer lo que ayer pudiste, porque el ayer en mañana solo existe como lo que pudiste hacer hoy”

Rafael Corona Guerra

AGRADECIMIENTOS

Agradezco a Dios por concederme el amor y la fortaleza necesaria al conocimiento para la conclusión de mis estudios, pero por sobre todo, en especial para este trabajo, que en algún momento dude de realizarlo.

A la Facultad de Ingeniería Química que me equipó con los enceres del conocimiento necesarios para el buen desenvolvimiento en el campo profesional de la ingeniería química.

A Celanese Mexicana S.A., que me dio la oportunidad de laborar 13 años de mi vida ejerciendo y desarrollando lo aprendido en los años de estudiante.

A Conalep, que también me ha brindado la oportunidad de desarrollo en el campo de la docencia y de impulso en el ámbito del desarrollo del conocimiento académico al involucrarme en el proyecto de docentes escritores donde tuve la oportunidad de escribir un libro cuyo tema es referido al álgebra y de donde hoy gozo de una publicación de más de 13,000 textos vendidos y de uso oficial en el subsistema en el estado.

A mis asesores la ***Dra. Maricela Villicaña Méndez*** y ***M.C. Mercedes Gabriela Téllez Arias*** por su confianza y por brindarme su apoyo durante el transcurso de este proyecto.

Al ***M.C. Marco Guzmán Ponce de León*** por su ayuda y aporte de conocimiento en el levantamiento de los datos, uso de software y edición de este proyecto.

Un especial agradecimiento a mis tíos *José Jiménez Gaona* y *Beatriz Guerra Meza* que tuvieron a bien apoyarme durante mis años de universitario con su atención y paciencia que solo a ellos caracteriza.

ÍNDICE DE ANEXOS (APENDICES)

APENDICE	PAGINA
Apéndice A: TABLA NORMAL ESTANDAR (Áreas Bajo la curva normal estándar)	251
Apéndice B: VALORES F DE LA DISTRIBUCIÓN F DE FISHER	256
Apéndice C: VALORES CRÍTICOS PARA LA PRUEBA DE BARTLETT	264
Apéndice D: VALORES CRÍTICOS q' (p , df ; α) PARA PRUEBAS DE RANGO MÚLTIPLE DE DUNCAN	266

I. INTRODUCCION

La toma de decisiones se define como la selección de un curso de acciones entre alternativas, es decir que existe un plan un compromiso de recursos de dirección o reputación.

En ocasiones los ingenieros consideran la toma de decisiones como su trabajo principal ya que tienen que seleccionar constantemente ¿Qué se hace?, ¿Quién lo hace?, ¿Cuándo?, ¿Dónde? e incluso ¿Cómo se hará?. Sin embargo la toma de decisiones es sólo un paso de la planeación ya que forma la parte esencial de los procesos que se siguen para elaboración de los objetivos o metas trazadas a seguir. Rara vez se puede juzgar sólo un curso de acción, porque prácticamente cada decisión tiene que estar engranada con otros planes.

El proceso que conduce a la toma de decisión:

1. Elaboración de premisas.
2. Identificación de alternativas.
3. Evaluación de las alternativas, en términos de metas que se desea alcanzar.
4. Selección de una alternativa, es decir tomar una decisión.

RACIONALIDAD EN LA TOMA DE DECISIONES

Las personas que actúan o deciden racionalmente están intentando alcanzar alguna meta que no se puede lograr sin acción. Necesitan comprender en forma clara los cursos alternativos mediante los cuales se puede alcanzar una meta de acuerdo a las circunstancias y limitaciones existentes. Se necesita también la información y la capacidad para analizar y evaluar las alternativas de acuerdo con la meta deseada. Por último, necesitan tener el deseo de llegar a la mejor solución mediante la selección de la alternativa que satisfaga de un modo más efectivo el logro de la meta.

Es raro que las personas logren una racionalidad completa, en particular en la administración como en la ingeniería.

1. En primer lugar, como nadie puede tomar decisiones que afecten el pasado, las decisiones tienen que operar para el futuro.
2. Es difícil reconocer todas las alternativas que se pudieran seguir para alcanzar una meta; esto es cierto cuando en especial la toma de decisiones incluye oportunidades de hacer algo que no se ha hecho antes. Es más, en la mayor parte de los casos no se pueden analizar todas las alternativas e incluso con las técnicas analíticas y las computadoras mas modernas disponibles.

Ejemplo de lo anterior; las decisiones gerenciales se toman con el deseo de “*Resolver*” en una forma tan segura como sea posible, la mayoría de los gerentes sí intentan tomara las mejores decisiones que puedan dentro de los límites de la racionalidad y de acuerdo al tamaño y la naturaleza de los riesgos involucrados.

EVALUACION DE ALTERNATIVAS

Una vez encontrada la alternativa a apropiada, el siguiente paso es evaluar y seleccionar aquellas que contribuirán mejor al logro de la meta.

FACTORES CUANTITATIVOS: Son factores que se pueden medir en términos numéricos, como es el tiempo, o los diversos costos fijos o de operación.

FACTORES CUALITATIVOS: Son difíciles de medir numéricamente. Como la calidad de las relaciones de trabajo, el riesgo del cambio tecnológico o el clima político internacional.

Para evaluar y comparar los factores se debe reconocer el problema y luego analizar que factor se le aplica ya se cuantitativo o cualitativo o ambos, clasificar los términos de importancia, comparar su probable influencia sobre el resultado y tomar una decisión.

DECISIONES PROGRAMADAS Y NO PROGRAMADAS

Una ***decisión programada*** se aplica a problemas estructurados o de rutina. Los operadores de tomos tienen especificaciones y reglas que les señalan si la pieza que han hecho es aceptable, si tiene que desecharse o si se tiene que procesar de nuevo.

Las ***decisiones no programadas*** se usan para situaciones no programadas, diferentes o diversas, nuevas y mal definidas, de naturaleza no repetitivas.

En realidad las decisiones estratégicas son, en general, decisiones no programadas, puesto que requieren juicios subjetivos.

La mayoría de las decisiones no son ni completamente programadas ni completamente no programadas; son una combinación de ambas. La mayor parte de las decisiones no programadas las toman los gerentes del nivel más alto, esto es porque los gerentes de ese nivel tienen que hacer frente a los problemas no estructurados.

ENFOQUES MODERNOS EN LA TOMA DE DECISIONES BAJO CONDICIONES DE INCERTIDUMBRE

Análisis de riesgo: Prácticamente cada decisión se basa en la interacción de variables importantes, muchas de las cuales tienen un elemento de incertidumbre pero quizás un grado bastante alto de probabilidad. Por lo tanto, la sensatez de lanzar un nuevo producto podría desprender de varias variables críticas: el costo de producto, la inversión del capital, el precio que se puede fijar, el tamaño del mercado potencial y la participación del mercado total.

Árboles de decisión: Presentan los puntos de decisión, los acontecimientos fortuitos y las probabilidades existentes en los diversos cursos que se podrían seguir. El enfoque del árbol de decisión hace posible observar, al menos las principales alternativas y el hecho de que las decisiones posteriormente dependan de acontecimientos en el futuro.

Por ejemplo, los gerentes también pueden comprender la verdadera probabilidad de una decisión que conduzca a los resultados deseados. Una cosa es cierta los árboles de decisión y técnicas similares de decisión reubican criterios amplios con un centro de atención sobre los elementos importantes de una decisión, hacen resaltar premisas que con frecuencia están escondidas y muestran el proceso de razonamiento mediante el cual se toman las decisiones bajo incertidumbre.

Teorías de la referencia: Se basa en las ideas de que las actitudes de las personas hacia el riesgo variarían.

La probabilidad puramente estadística, como se aplican a la toma de decisiones, descansan sobre la suposición de que los encargados de tomar las decisiones las seguirán. Podría parecer razonable que si existiera una posibilidad del 60% de que la decisión sea cierta, una persona la tomaría. Sin embargo esto no es necesariamente cierto, pues el riesgo de estar equivocados es del 40%, quizás la persona no desee correr este riesgo.

CREATIVIDAD E INNOVACION

La creatividad suele entenderse la capacidad de desarrollar nuevas ideas. Por el contrario e innovación significa el uso de esas ideas. Por supuesto que las organizaciones no solo generan nuevas ideas, sino que además las convierte en aplicaciones prácticas.

PROCESO CREATIVO

Ésta compuesta por 4 fases interactuantes entre sí:

1. Exploración inconsciente.
2. Intuición.
3. El discernimiento.
4. La formulación o verificación lógica.

SISTEMAS DE APOYO A LAS DECISIONES

Los sistemas de apoyo a las decisiones (SAD) usan computadoras para facilitar el proceso de toma de decisiones de tareas semiestructuradas. Estos sistemas están diseñados no para reemplazar el criterio administrativo, sino para apoyarlo y hacer mas efectivo el proceso de toma de decisiones. Los sistemas de respaldo a las decisiones ayudan también a los gerentes a reaccionar rápidamente a los cambios de necesidades. Por lo tanto, queda claro que el diseño de un sistema efectivo requiere de un conocimiento profundo de cómo los gerentes toman las decisiones.

ENFOQUE DE SISTEMAS A LA TOMA DE DECISIONES

Por lo general no se puede tomar decisiones en un ambiente de sistema cerrado. Además, cada departamento o sección de una empresa; los gerentes de estas unidades organizacionales tiene que ser sensibles a las políticas y programas de otras unidades organizacionales y de toda la empresa. Más aún, las personas dentro de la empresa son parte del sistema social y sus pensamientos y actitudes se tienen que tomar en cuenta cada vez que un gerente toma una decisión.

Los gerentes para solucionar sus problemas toman en cuenta los diversos elementos del ambiente del sistema no significan que renuncien a su papel como tomadores de decisiones. Alguien tiene que seleccionar un curso de acción entre diversas alternativas, tomando en cuenta los acontecimientos y fuerzas en el ambiente de una decisión.

TOMA DE DECISIONES EN MEXICO

El proceso de toma de decisiones es uno de los rangos más significativos para caracterizar una organización, porque en él se resume su cultura y sus paradigmas administrativos. En las organizaciones mexicanas, por lo general, no se hace una búsqueda sistemática de alternativas, sino que se procede a buscar las más obvias y familiares.

Como las empresas dedican casi todo su tiempo y sus recursos a la realización de los procesos de transformación directamente relacionados con la elaboración de sus productos y no están orientadas hacia la innovación ni el perfeccionamiento, los problemas que perciben y por consiguiente, las decisiones que toma, son rutinarias y se basan en la experiencia y en la memoria personal de los ejecutivos.

Una deficiencia en la toma de decisiones notoria es la ausencia de mecanismos de seguimiento y evaluación. Esta carencia priva a la organización de oportunidad de apreciar el impacto de sus decisiones y de aprender de sus experiencias. La toma de decisiones es centralizada.

Invito al lector a un cambio de paradigma en el contexto señalado, de favor le pido lea y analice el contenido de este documento para tal efecto.

II. OBJETIVOS

GENERAL

Formar ingenieros administradores con una preparación interdisciplinaria, capaces de hacer frente al reto de la globalización y la internacionalización de la empresa, mediante la capacitación en las diferentes técnicas de toma de decisiones a través de la aplicación de técnicas de regresión y diseño experimental, aplicación de metodología para el análisis de situaciones y análisis de problemas en potencia por medio de un proceso lógico, para evaluar y mejorar procesos de producción de bienes y servicios.

ESPECIFICOS

1. Sistema administrativo.

Adquirir conocimientos en la toma de las decisiones de control de información tanto interna como externa de la organización y en el caso del sistema de manufactura aquellas decisiones íntimamente ligadas con los insumos.

2. Estructuración.

Aplicación de las condiciones de certeza, riesgo, incertidumbre y conflictos para diseñar la estructuración de la toma de decisiones bajo un amplio criterio de realismo y razones financieras.

3. Pronósticos.

Interpretación del proceso metodológico para la construcción de un modelo de regresión simple y múltiple con el propósito de estimación y predicción de los parámetros del modelo para su análisis. Utilizar software, para obtener una respuesta rápida y precisa en la generación de los parámetros de los modelos.

4. Mercado.

Análisis e interpretación de los pronósticos del potencial del mercado y de la competencia por medio de la investigación de los mismos, del comportamiento de los consumidores, de las características del producto, la marca, su precio, el envase, de las plazas y los canales de distribución, de los medios de publicidad y promoción de ventas.

5. Diseño de experimentos.

Aplicación del análisis de varianza para procesar la información y tomar una decisión en base a los resultados obtenidos.

- Identificar la familia de diseños experimentales para comparar tratamientos.
- Elementos de los diseños completamente al azar y el análisis de varianza. Interpretar con seguridad los resultados del análisis de varianza
- Aplicar las pruebas de hipótesis para evaluar su calidad de ajuste.
- Utilizar un software para el manejo de información asociada al modelo de un factor.

ANALISIS DE DESICIONES EN INGENIERIA

III. SUMARIO

Primera parte

Sistema administrativo

1. Sistema administrativo

La Real Academia de la Lengua define a sistema como:

“Un conjunto de eventos y recursos, que, ordenadamente relacionados entre sí, contribuyen en la realización de determinado objetivo”

En 1964 en la Systems Science Conference se propuso y aprobó la siguiente definición de sistema:

“Un sistema es un conjunto de diversos elementos humanos y mecánicos integrados para lograr un objetivo común mediante el manejo y control de materiales, información, energía y hombres”

Del análisis de esta definición surge que todo sistema está caracterizado por sus objetivos, elementos, estructura (o relación tecnológica) y su comportamiento.

Una serie de elementos reunidos que formen un conjunto pero sin perseguir un objetivo o propósito común, no constituye un sistema. Al no tener ese objetivo común su comportamiento será caótico (lo contrario de sistemático). El objetivo de un sistema puede ser fijo e invariable a través del tiempo, o bien puede ser variable. En el primer caso el objetivo ha sido impuesto al sistema desde fuera del mismo, es decir, desde su contexto. Como ejemplo puede mencionarse cualquier tipo de máquina o mecanismo tradicional. En el segundo caso el objetivo ha sido consecuencia de acciones previas de algunos elementos del mismo sistema; es decir, el objetivo resultante es generalmente un compromiso entre varios objetivos distintos, que podían tener algunos elementos del sistema. Cabe dentro de este grupo, cualquier sistema integrado por hombres y mujeres; por ejemplo, la empresa. En este caso el objetivo resultante podrá variar con el tiempo de acuerdo al mayor o menor poder que detecten los elementos con objetivos propios.

Respecto de los elementos de un sistema pueden ser totalmente humanos, totalmente mecánicos o mixtos. Dijimos que para constituir un sistema sus elementos deben estar relacionados entre sí; con esto queremos significar que el estado de un elemento depende del estado de los otros elementos.

La estructura del sistema se refiere a la forma en que están interrelacionados los elementos del sistema. De acuerdo a ello, la estructura puede ser de tipo material o visible, física o bien tipo no material. En el primer caso la vinculación puede ser mecánica o eléctrica y en el caso de la no material puede darse como ejemplo cualquier forma de comunicación no física, incluyendo la oral.

El comportamiento del sistema se mide por su mayor o menor grado de *predictibilidad*. Hallaremos así sistemas de comportamiento determinístico o probabilístico. Será determinista cuando no influyen sobre él mismo las decisiones personales; por ejemplo un sistema que se va realimentando o auto-regulando. Será probabilista cuando no hay certeza de lo que se va a obtener.

Sistemas administrativos

Hemos considerado distintas definiciones del vocablo sistema en su sentido amplio y en la presente analizaremos en forma concreta la aplicación de ese concepto en las actividades administrativas (propias de actividades ingenieriles). Nuestro propósito será demostrar a través de sucesivas elaboraciones cómo las organizaciones modernas deben actuar bajo la forma de sistema para lograr el máximo de eficiencia. Comentaremos por lo tanto, algunas definiciones especializadas.

Definimos a los sistemas administrativos como la red de procedimientos relacionados de acuerdo a un esquema integrado tendientes al logro de los fines de una organización. Esto quiere decir que un conjunto de procedimientos relacionados y dentro de determinadas condiciones, constituyen un sistema. Así, el sistema de control de producción, por ejemplo, consiste en un conjunto de procedimientos de pedidos de materiales, procedimientos de despacho o ruteo, procedimientos de control, etcétera. Obsérvese la condición de “*relación*” como elemento indispensable para que un conjunto de partes configuren un sistema. En toda definición de sistema aparece siempre ese factor como común denominador que transforma la individualidad de cada componente de tal modo que ya no tiene sentido sino dentro de un conjunto.

Los profundos cambios experimentados en los últimos años en el ambiente socio/político/económico en que se desarrolla la empresa moderna, unido esto a los avances de la tecnología, obligan a encarar urgentemente la necesidad de su remodelación y adecuación al concepto de sistema. Es indudable que en la gestión empresarial sobreviven aquéllos que utilizan los mejores procedimientos y emplean los mejores medios (léase tecnología y conocimiento) para alcanzar sus objetivos.

La empresa actual ésta en función de dos estructuras (Barrios, J. D.: *Sistemas y Procedimientos*, Editorial Roble, Méjico, pág. 15): una, que podría llamarse organizacional, que define las funciones y responsabilidades de sus componentes y el grado de relación entre los mismos; se trata de una estructura de carácter estático, dado que determina a través del organigrama y la definición de tareas, qué es lo que debe efectuar cada sector responsable, pero no indica qué movimientos son necesarios para que la organización se mantenga al compás de la realidad del ambiente y le permita alcanzar sus fines. Este segundo aspecto se cubre a través de una segunda estructura, de

naturaleza dinámica que es el reflejo de la aplicación de los sistemas administrativos a la resolución de los problemas dinámicos surgidos en la empresa.

Debemos dejar bien en claro que el análisis de sistemas no debe encararse simplemente “*como un medio para establecer la mejor manera de hacer con una computadora lo que se está haciendo manualmente*” (Rockart, J. F.: Nuevos criterios para el análisis de sistemas. Revista Administración de Empresas. Ed. Contabilidad Moderna. Tomo 1. Pág. 659). Por el contrario debe enfocarse como un proceso de detección de problemas (hoy agregaríamos y también de oportunidades) y apoyarse en un modelo. En este caso existirá mayor seguridad de que (Rockart, ob. citada, pág. 664):

- a) *No deje de verse algún aspecto importante;*
- b) *Se observen y corrijan las deficiencias de los métodos en uso;*
- c) *Que el sistema de información sea apto para adaptarse a los mejoramientos futuros que puedan introducirse en el proceso.*

Si bien nosotros consideramos que los sistemas y procedimientos constituyen un “*campo*” de actividad así como “*producción*” y “*comercialización*” representan otros campos, debemos reconocer que toda función de organización y conducción lleva implícita la responsabilidad de formular los sistemas y procedimientos necesarios para cumplir su propósito. Quiere decir que, en ese sentido, ese campo puede ser clasificado como uno de los varios elementos del manejo administrativo.

1.1 Definición de la toma de decisiones

Una decisión es una elección consciente y racional, orientada a conseguir un objetivo, que se realiza entre diversas posibilidades de actuación (o alternativas). Antes de tomar una decisión deberemos calcular cual será el resultado de escoger una alternativa. En función de las consecuencias previsibles para cada alternativa se tomará la decisión.

Así, los elementos que constituyen la estructura de la decisión son:

- Los objetivos de quién decide y las restricciones para conseguirlos.
- Las alternativas posibles y potenciales.
- Las consecuencias de cada alternativa.
- El escenario en el que se toma la decisión.
- Las preferencias de quien decide.

1.2 El proceso en la toma de decisiones

Existen diversas situaciones en las que deben tomarse decisiones empresariales: situaciones de certeza, incertidumbre y riesgo.

1.2.1 Decisiones en situación de certeza

Una situación de certeza es aquella en la que un sujeto tiene información completa sobre una situación determinada, sobre cómo evolucionará y conoce el resultado de su decisión. Por ejemplo, decisiones sobre compras cuando se conoce la demanda, de distribución de personal cuando se conoce el coste por persona y operación, etc. La toma de decisiones en un marco de certeza no implica dificultad alguna, más allá de las relacionadas con la gestión empresarial.

1.2.2 Decisiones en situación de incertidumbre

Una situación de incertidumbre es aquella en la que un sujeto toma la decisión sin conocer del todo la situación y existen varios resultados para cada estrategia. Pueden ser decisiones no competitivas y competitivas.

1.2.2.1 Decisiones no competitivas¹

En las decisiones no competitivas nadie se opone a la estrategia del sujeto que decide. Por ejemplo, vendedores de periódicos (se quiere conocer la cantidad a adquirir de acuerdo con las ventas). Para decidir existen una serie de criterios de elección:

- *Maximin, pesimista o Wald.*
- *Máximax, optimista o Hurwicz.*
- *Coeficiente de optimismo-pesimismo.*
- *Razón suficiente o Laplace.*
- *Mínimax, coste de oportunidad o Savage.*

a) El criterio *Maximin* supone maximizar el resultado mínimo, es decir el decisor quiere asegurarse la elección mejor en caso que se de la situación más desfavorable. Es pesimista. Es útil en situaciones muy inciertas, si quieren evitarse riesgos o si existe conflicto.

b) El criterio *Maximax* consiste en maximizar el máximo; escoger el resultado máximo entre los mejores de cada alternativa. El decisor es optimista.

¹ Ver tópico 2.1 *Matriz de decisiones* de la parte 2 de este documento.

c) El criterio del *Coefficiente de Optimismo-Pesimismo* se sitúa entre los dos anteriores.

Partimos de un grado de optimismo y de pesimismo relacionados del siguiente modo:

- Coeficiente de optimismo= p .
- Coeficiente de pesimismo= $(1-p) = q$; donde $p+q = 1$ y $0 < p < 1$.

Dentro de la misma alternativa o estrategia consideraremos el resultado mayor de cada alternativa como p mientras que el resultado menor será q . Se escoge el mayor tras ponderar los resultados esperados por los coeficientes de optimismo y pesimismo.

d) El criterio del *Principio de Razón Suficiente* espera que todas las situaciones de futuro tendrán la misma probabilidad de suceder. Ante esta situación se elige el resultado medio más elevado.

e) El criterio *Minimax* plantea elegir en función de lo que se dejará de ganar. Por tanto, en primer lugar debe calcularse el máximo coste de oportunidad de cualquier opción y, en segundo lugar, elegir el menor de ellos.

Ejemplo 1. Supongamos que una empresa quiere realizar una campaña publicitaria. Se le presentan 3 posibilidades: Radio (15 minutos de lunes a jueves en un espacio), TV (1 spot cada semana sobre las 12h) y Prensa (1 anuncio 2 días a la semana los lunes y los jueves). Como han hecho campañas anteriormente se han podido valorar los resultados de las diferentes posibilidades del siguiente modo:

	Demanda alta	Demanda media	Demanda baja
Radio	100	40	20
T.V	80	20	5
Prensa	90	35	25

Si la demanda de mercado se mantiene alta, la campaña publicitaria en la Radio garantiza los mejores resultados. Si la demanda de mercado se mantiene baja, la campaña publicitaria que garantiza los mejores resultados es la Prensa. ¿Qué medio de comunicación elegirías?

Solución.

a) El pesimista adoptará el *MAXIMIN*, es decir, escoger el mejor resultado de entre la peor situación. El peor escenario (o peor situación) es que la demanda sea baja. El mejor resultado en el peor escenario es: PRENSA.

b) El optimista adoptará el criterio *MAXIMAX*, el mejor de los mejores. El mejor escenario es la demanda alta. El mejor de los mejores es: RADIO.

c) Puede escogerse una situación intermedia entre optimismo y pesimismo (CRITERIO OPTIMISMO-PESIMISMO). Debe suponerse un determinado grado de optimismo (p). Si suponemos $p = 60\% = 0.6$; $q = 1 - p = 1 - 0.6 = 0.4$:

- Radio: $(p * \text{máx.}) + (q * \text{mín.}) = (0.6 * 100) + (0.4 * 20) = 68$
- T.V.: $(p * \text{máx.}) + (q * \text{mín.}) = (0.6 * 80) + (0.4 * 5) = 50$
- Prensa: $(p * \text{máx.}) + (q * \text{mín.}) = (0.6 * 90) + (0.4 * 25) = 64$

Escogerá la RADIO, al ser el resultado mayor de entre las distintas alternativas.

d) Si creemos que todas las situaciones tienen la misma posibilidad de suceder se escogerá el resultado medio más elevado (LAPLACE).

- Resultado medio radio = $(100+40+20)/3 = 53.3$
- Resultado medio TV = $(80+20+5)/3 = 35$
- Resultado medio prensa = $(90+35+25)/3 = 50$

Escogerá RADIO.

e) Con el *MINIMAX* se escoge el mínimo de los máximos costes de oportunidad posibles.

Calculamos la matriz de costes de oportunidad:

	Demanda alta	Demanda media	Demanda baja	Máx. Coste de Oportunidad
Radio	0	0	5	5
T.V.	20	20	20	20
Prensa	10	5	0	10

Elegirá el mínimo de los máximos costes de oportunidad: RADIO.

En resumen:

	Maximin	Maximax	Laplace	Optim.-Pesim.	Minimax
<u>Radio</u>		X	X	X	X
T.V.					
Prensa	X				

Se escogerá realizar la campaña publicitaria por la RADIO.

1.2.2.2 Decisiones competitivas²

Muchas veces la empresa se enfrenta a un oponente que conoce sus estrategias y que escogerá aquella que más le perjudique. Por ejemplo, duopolios (Coca-Cola y Pepsi-Cola) y oligopolios (fabricantes de coches). Estas decisiones se estudian en la teoría de juegos. Esta teoría considera que en la toma de decisiones intervienen pocos individuos, con información diferente y, generalmente incompleta, sobre los resultados de las decisiones. Pueden darse dos situaciones genéricas:

- Conflicto puro: las ganancias de un "jugador" son pérdidas para el otro (juego bipersonal de *suma cero*).
- Conflicto mixto y de cooperación: quienes deciden pueden llegar a acuerdos o colaborar para mejorar sus resultados aunque ambos se arriesgarán en el juego. Se denomina juego *cooperativo* o de *suma no cero*.

Analicemos el siguiente ejemplo de Juego de suma no cero.

Ejemplo 2. Dos empresas A y B pueden optar por mantener o reducir precios. Resultados:

Empresa	Estrategia	B	
		(1) Mantener precios	(2) Reducir precios
A	(1) Mantenim. precios	8 , 8 todo queda igual	2 , 9 B gana; A pierde
	(2) Reducción de precios	9 , 2 A gana; B pierde	3 , 3 Ambos pierden

La situación (2)(2) no es satisfactoria ya que ambos pierden. Si B se avanza y reduce precios ganará 9 unidades monetarias. Entonces A bajará precios y llegarán a (2)(2). Si A baja precios ganará 9 pero entonces B bajará precios y llegarán a (2)(2). Les interesa cooperar y así saldrán

² Ver tópico 2.1 *Matriz de decisiones* de la parte 2 de este documento.

ganando ambos 8 unidades monetarias, pero con información incompleta sobre lo que hará el otro tienden a no cooperar y pueden llegar a la insatisfactoria solución de (2)(2).

1.2.3 Decisiones en situación de riesgo

En este tipo de situaciones conocemos la probabilidad de que ocurra cada situación. Se trata de analizar beneficios y pérdidas ponderados por las probabilidades de que sucedan.

Ejemplo 3. Los directivos de la agencia de viajes de Barcelona Cabarna S.A. quieren plantear una estrategia de expansión hacia el resto de comarcas, por lo que se plantea si fusionarse con la empresa Sol S.A., comprar la empresa de la competencia o bien ampliar sus instalaciones.

La decisión se tomará en función de la evolución futura de las ventas. El Departamento Comercial prevé que las ventas pueden ser altas, medias o bajas, con una probabilidad del 25%, 45% y 30% respectivamente.

Por otra parte, los beneficios esperados de acuerdo con la estrategia seleccionada son los siguientes:

- Fusionarse: 350,000.00 euros si las ventas son altas, 60,000.00 bajas y 140,000.00 si son medias.
- Comprar la empresa competidora: 300,000.00 si las ventas son altas, 50,000.00 si son bajas y 180,000.00 si son medias.
- Ampliar instalaciones: 275,000.00 si las ventas son altas, 80,000.00 bajas y 160,000.00 medias.

Con estos datos, se pide:

1. Construir la matriz de decisión.
2. Escoger la opción que maximiza los beneficios según:
 - a) Criterio de certeza, si sabe que la situación será de ventas medias
 - b) Criterio de riesgo, si se parte del conocimiento de la probabilidad de ocurrencia de cada uno de los estados de la naturaleza: 25% ventas altas, 45% ventas medias y 30% ventas bajas.
 - c) Criterio de incertidumbre:
 - I. *Criterio Pesimista.*
 - II. *Criterio Optimista.*

- III. *Criterio de Optimista-Pesimista*³.
 IV. *Criterio de la Razón Suficiente*.
 V. *Criterio de Coste de Oportunidad*.

Solución.

1. Construir la matriz de decisión.

MATRIZ DE DECISIÓN

BENEFICIOS			
ALTERNATIVAS	Ventas Altas	Ventas Medias	Ventas Bajas
Fusión	350,000.00	140,000.00	60,000.00
Compra	300,000.00	180,000.00	50,000.00
Ampliación	275,000.00	160,000.00	80,000.00

2. Escoger la opción que maximiza los beneficios según:

a) Criterio de Certeza. Si se conoce que la situación es de ventas medias, la estrategia escogida entre las tres disponibles será la de Comprar la empresa de la competencia, ya que le aporta un mayor beneficio (180,000.00 euros).

b) Criterio de Riesgo.

BENEFICIOS			
	25%	45%	30%
ALTERNATIVAS	Ventas Altas	Ventas Medias	Ventas Bajas
Fusión	350,000.00	140,000.00	60,000.00
Compra	300,000.00	180,000.00	50,000.00
Ampliación	275,000.00	160,000.00	80,000.00

Aplicamos el criterio del valor esperado a partir de las probabilidades:

- VE Fusión: $(p \cdot \text{máx.}) + (p \cdot \text{med.}) + (p \cdot \text{mín.})$

³ Se considera que es un 60% optimista y un 40% pesimista.

- VE Fusión: $(0.25 \cdot 350,000) + (0.45 \cdot 140,000) + (0.3 \cdot 60,000) = 168,500$ euros.
- VE Comprar: $(p \cdot \text{máx.}) + (p \cdot \text{med.}) + (p \cdot \text{mín.})$
- VE Comprar: $(0.25 \cdot 300,000) + (0.45 \cdot 180,000) + (0.3 \cdot 50,000) = 171,000$ euros.
- VE Ampliar: $(p \cdot \text{máx.}) + (p \cdot \text{med.}) + (p \cdot \text{mín.})$
- VE Ampliar: $(0.25 \cdot 275,000) + (0.45 \cdot 160,000) + (0.3 \cdot 80,000) = 164,750$ euros.

Por lo tanto, la estrategia escogida será la de Comprar la empresa competidora, ya que da unos beneficios superiores.

c) Criterio de Incertidumbre.

I. Criterio Pesimista o de Wald o Maximin.

Este criterio no desea arriesgar y siempre piensa que una vez escogida una estrategia se le presentará el estado de la naturaleza más desfavorable, por ello escogerá el valor máximo entre los mínimos. En nuestro caso:

BENEFICIOS				
ALTERNATIVAS	Ventas Altas	Ventas Medias	Ventas Bajas	Peor
Fusión	350,000.00	140,000.00	60,000.00	60,000.00
Compra	300,000.00	180,000.00	50,000.00	50,000.00
<u>Ampliación</u>	275,000.00	160,000.00	80,000.00	<u>80,000.00</u>

Escogerá Ampliar las instalaciones, ya que como mínimo tendría unos beneficios de 80,000.00 euros.

II. Criterio Optimista o Maximax.

El criterio optimista siempre piensa que se le presentará la mejor alternativa, es decir, escogerá el máximo entre los máximos. Arriesga mucho.

BENEFICIOS				
ALTERNATIVAS	Ventas Altas	Ventas Medias	Ventas Bajas	Mejor
<u>Fusión</u>	350,000.00	140,000.00	60,000.00	<u>350,000.00</u>
Compra	300,000.00	180,000.00	50,000.00	300,000.00

Ampliación	275,000.00	160,000.00	80,000.00	275,000.00
------------	------------	------------	-----------	------------

Según este criterio, la estrategia escogida será la de Fusionar, ya que le producirá unos beneficios de 350,000.00 euros.

III. Criterio Optimista–Pesimista.

Mezcla el optimismo y el pesimismo, partiendo de que es un 60% optimista, y un 40% pesimista. Como consecuencia multiplica por 0.60 el mejor resultado de cada alternativa (el máximo) y el 0.40 por el peor (mínimo).

	BENEFICIOS	
	60%	40%
ALTERNATIVAS	Ventas Altas	Ventas Bajas
Fusión	350,000.00	60,000.00
Compra	300,000.00	50,000.00
Ampliación	275,000.00	80,000.00

- Fusión: (po * máx.) + (pp * mín.)
- Fusión: $(0.60 \cdot 350,000) + (0.40 \cdot 60,000) = 234,000$ euros.

- Comprar: (po * máx.) + (pp * mín.)
- Comprar: $(0.60 \cdot 300,000) + (0.40 \cdot 50,000) = 200,000$ euros.

- Ampliar: (po * máx.) + (pp * mín.)
- Ampliar: $(0.60 \cdot 275,000) + (0.40 \cdot 80,000) = 197,000$ euros.

Según este criterio, la estrategia escogida sería la de Fusionarse debido a que proporciona unos beneficios superiores.

IV. Criterio de la Razón Suficiente.

El criterio de la razón suficiente (Laplace), como no conoce la probabilidad de ocurrencia de cada situación, imagina que todas tienen la misma probabilidad. Como hay tres opciones, la probabilidad de cada una es 1/3 y después se aplica el criterio de riesgo:

BENEFICIOS			
	33.33%	33.33%	33.33%
ALTERNATIVAS	Ventas Altas	Ventas Medias	Ventas Bajas
Fusión	350,000.00	140,000.00	60,000.00
Compra	300,000.00	180,000.00	50,000.00
Ampliación	275,000.00	160,000.00	80,000.00

- Fusión: $(1/3 \cdot 350,000) + (1/3 \cdot 140,000) + (1/3 \cdot 60,000) = 183,315$ euros.
- Comprar: $(1/3 \cdot 300,000) + (1/3 \cdot 180,000) + (1/3 \cdot 50,000) = 176,667$ euros.
- Ampliar: $(1/3 \cdot 275,000) + (1/3 \cdot 160,000) + (1/3 \cdot 80,000) = 171,667$ euros.

La estrategia escogida sería Fusionarse.

V. Criterio de Coste de Oportunidad.

Para aplicar el criterio de coste de oportunidad debe construirse una matriz de costes de oportunidad, que es lo que se deja de ganar por no haber escogido la mejor opción.

Observando los datos de forma vertical, es decir, por columnas, se resta el peor resultado del mejor.

MATRIZ DE COSTE DE OPORTUNIDAD

BENEFICIOS				
ALTERNATIVAS	Ventas Altas	Ventas Medias	Ventas Bajas	Mejor
<u>Fusión</u>	0.00	40,000.00	20,000.00	<u>40,000.00</u>
Compra	50,000.00	0.00	30,000.00	50,000.00
Ampliación	75,000.00	20,000.00	0.00	75,000.00

A partir de la matriz se escogen por filas, los costes de oportunidad mayores y de éstos el más pequeño, en resumen, de los máximos se escoge el mínimo. Por ello siguiendo este criterio, el valor escogido sería Fusionarse ya que tiene un coste de oportunidad mínimo.

El resumen del punto c, es:

	Maximin	Maximax	Laplace	Optim.-pesim.	Minimax
Fusión		x	x	x	x
Comprar					
Ampliar	x				

La mejor estrategia que los directivos de la agencia de viajes de Barcelona Cabarna S.A. deben seguir es la de Fusionarse con la empresa Sol S.A. bajo el *Criterio de Incertidumbre*.

Matriz global de decisión:

	a) Criterio de Certeza	b) Criterio de Riesgo	c) Criterio de Incertidumbre
Fusión			x
Comprar	x	x	
Ampliar			

En base al análisis anterior, la mejor decisión de los directivos de la agencia de viajes de Barcelona Cabarna S.A. es la de Comprar la empresa Sol S.A.

1.3 Sistemas organizacionales y la toma de decisiones

El tema de la toma de decisiones cobra importancia en la medida que el fin último de los sistemas de información es servir como herramienta para tal fin. Es decir, de una correcta o incorrecta toma de decisiones depende la forma en que una organización evolucione y logre o no el éxito organizacional.

1.3.1. Niveles en la toma de decisiones

La agrupación de la toma de decisiones en una institución puede hacerse, según los niveles organizacionales que en esta existan, así:

- Toma estratégica de decisiones: Determina los objetivos, políticas y recursos de una organización. Se encuentra en cabeza de un reducido grupo de directivos quienes tienen que ver con problemas complejos y no rutinarios.

- Control administrativo: Hace referencia a que tan eficaz y eficientemente se emplean los recursos en una empresa y que tan bien se desempeñan las unidades operativas.
- Toma de decisiones a nivel conocimientos: Evalúa las nuevas ideas para los productos y servicios, las maneras de comunicar nuevos conocimientos y las formas de distribuir la información dentro de la organización.
- Toma de decisiones para el control operativo: Determina como llevar a cabo las tareas específicas establecidas a niveles de mediana y alta gerencia.

1.3.2. Tipo de decisiones

Según los criterios y la forma como son tomadas las decisiones, éstas pueden ser clasificadas en:

- No estructuradas: En este tipo, quien toma la decisión debe establecer los criterios, evaluación y los puntos de vista para la definición del problema. Estas decisiones no cuentan con un procedimiento definido para tomarlas.
- Estructuradas: Son repetitivas, rutinarias y cuentan con un procedimiento definido para tomarlas de forma que cada vez que se presenten no se manejen como si fueran nuevas.
- Semiestructuradas: En este tipo de decisiones solo parte del problema tiene una respuesta ya definida proporcionada por un procedimiento que es aceptado.

1.4 Diseminación de la toma de decisiones

La diseminación selectiva de información es un procedimiento mediante el cual se suministra periódicamente a cada persona o grupo de personas las referencias de los documentos que corresponden a sus intereses cognoscitivos. Esta información puede proporcionarse a una persona en especial basándose en un perfil de recuperación de información individual, o bien, a un conjunto de personas que tienen intereses comunes, requiriéndose para tal caso la definición de un perfil colectivo, por lo que la eficacia de esta actividad depende, sobre todo, de una adecuada definición del perfil del personal mediante la selección de un conjunto de palabras clave que reflejen la temática en cuestión.

El término "*diseminación selectiva de información (DSI)*" ya ha cumplido cinco décadas de existencia, pues fue acuñado en 1958 por Hans Peter Luhn, miembro de la entonces *Advance Systems Development Division* de la IBM, quien definió el término en su ensayo "*Business Intelligence System*" del siguiente modo:

"Aquel servicio dentro de una organización dedicado a la canalización de nuevos elementos (*items*⁴) de información, a partir de cualquier fuente hasta aquellos puntos dentro de la organización donde la probabilidad de su utilidad en el trabajo diario o interés sea elevada".

Por su parte, la ISO (Organización Internacional de Normalización) define al DSI como "un proceso activo de comunicar regularmente la nueva información disponible sobre una materia definida por un perfil de búsqueda", entendiendo por perfil de búsqueda "la descripción de una solicitud en un lenguaje documentario indicando y definiendo el área de interés de un usuario".

Sin embargo, ya desde 1947 Fleming señalaba la necesidad que tiene cualquier experto en cualquier área de contar con un servicio de información continua que pudiera coleccionar la extensamente dispersa información sobre cualquier tema y presentarla reunida de manera oportuna. Con el aumento exponencial de la información esta necesidad se ha acentuado, de manera que cada día resulta más apremiante abarcar una cantidad de información que crece constantemente, mientras que el tiempo disponible para hacerlo es cada día más limitado. Mediante la canalización de información actualizada y personalizada este servicio puede impactar positivamente sobre la toma de decisiones en los proyectos de trabajo individuales o de grupo, al permitir ajustar oportunamente la dirección de una investigación conforme se conozca el avance desarrollado por otros especialistas de la misma materia.

La diseminación selectiva de información es conocida también como información indicativa, información señal o alerta informativa, y puede consistir simplemente en las copias de las tablas de contenido o bien en perfiles personalizados.

1.4.1. Servicios de diseminación selectiva de información electrónicos

La compañía Elsevier Science ha estado desarrollando una gama de servicios y productos para la distribución de publicaciones electrónicas entre los que se encuentran *Contents Alert* (1993), que es un servicio de alerta gratuito a través de correo electrónico con las tablas de contenido de un importante grupo de revistas agrupadas por disciplina; *Contents Direct* (1994), el cual incluye títulos editados en el Reino Unido y consiste en el envío por correo electrónico de las tablas de contenido de cada fascículo semanas antes de que la revista se publique y distribuya, y meses antes de que se incluya en publicaciones secundarias; y *capcas* (*Computer Aided Production for Current Awareness*), servicio electrónico resultado del proceso de edición de revistas, que funciona como

⁴ Del latín *item* ("también"), "del mismo modo". El término ítem se utiliza en evaluación para referirse a una pregunta en una prueba de corrección objetiva. En muchas ocasiones, en español, el término *ítem* puede utilizarse indistintamente como sinónimo de *pregunta*. Una tarea o ejercicio de evaluación puede incluir uno o más ítemes.

un alerta previo que permite obtener acceso a información básica sobre lo que está en proceso de edición⁶.

Existen bases de datos especializadas en tablas de contenido, como Swetscan, Ebsco, Uncover y Current Contents. Ebsco, Uncover (servicio de documentación electrónica de Knight-Ridder⁷) y Current Contents ofrecen además el servicio DSI personalizado, mediante el cual el usuario inserta su estrategia de búsqueda en el sistema de manera que ésta se actualiza al ritmo que se actualiza la base. Uncover y Ebsco permiten además que el servicio obedezca a estrategias de búsqueda a partir de temáticas (mediante palabras clave), mientras que Current Contents sólo trabaja a partir de títulos de revista, esto es, Current Contents sólo actualiza al usuario con las tablas de contenido de las publicaciones que al usuario le interesen, mientras que Uncover y Ebsco proveen no sólo las tablas de contenido sino también las citas bibliográficas de los artículos concernientes a la temática de su interés.

La mayoría de las bases de datos del sistema Dialog cuentan con un servicio de diseminación selectiva de información que funciona de la misma manera que Uncover: a partir de una estrategia de búsqueda personalizada, cuyos resultados son referencias bibliográficas o texto completo. Por último, hay que mencionar que estos servicios se distribuyen tanto por fax como por correo electrónico.

La característica común de todos estos servicios es que trabajan en función de un perfil de actualización personalizado, pues responden a las necesidades de información específicas de un usuario. El boletín econ-clase no se configuraría a partir de las necesidades individuales de un usuario sino que constituiría una especie de monitoreo general de ciertas temáticas publicadas en revistas latinoamericanas y su destino serían los grupos de interés, esto es, aquel conjunto de usuarios que comparten un interés común por una temática en particular.

El ejemplo de boletines electrónicos sobre el que se inspiró directamente esta versión latinoamericana de DSI son los producidos por el *Economics Research Network* (ERN), una división del *Social Electronic Publishing, Inc.* (SEEP, Inc.) y el *Social Science Research Network* (SSRN) de Estados Unidos, así como *Contents Alert Economics* de la empresa holandesa *Elsevier Science*.

El ERN produce los siguientes boletines:

- *Monetary Economics Abstracts*: boletín especializado en teoría monetaria.
- *Macroeconomics Abstracts*: especializado en macroeconomía.
- *Microeconomics*: especializado en microeconomía.
- *Labor Abstracts*: especializado en economía del trabajo.

- *Economics Research Network / Professional Job Openings*: boletín especializado en oportunidades de trabajo para economistas.

Estos boletines contienen lo siguiente: tabla de contenido del boletín, las citas bibliográficas con título, autor, institución a la que está afiliado el autor, así como la dirección, número telefónico, fax, e-mail del autor, y *abstract*. El boletín explica la forma mediante la cual se pueden obtener los documentos y los criterios adoptados como política editorial.

El boletín *Contents Alert Economics* (CASECON-C), de *Elsevier Science*, contiene citas bibliográficas de artículos que se publicarán próximamente, es decir, es un alerta previo. Las fichas bibliográficas constan de título de la revista, autor, institución del autor, palabras clave, y no contiene *abstract*. Finalmente, el boletín contiene un apartado con la dirección del sitio web para consultar la base *ECONBASE* y solicitar documentos.

1.4.2. Sobre la utilidad de un boletín electrónico de disseminación selectiva de información en las áreas de economía y negocios

Es la creciente demanda de información en estas áreas la que sostiene fundamentalmente la viabilidad del presente proyecto, pues este tipo de información se ha convertido en un insumo básico no sólo de la investigación académica sino de ámbitos empresariales y gubernamentales en los que recae la toma de decisiones y la planeación de políticas.

Existen algunas cifras que corroboran la importancia que atribuimos a la información económica y de negocios, áreas que concentran la mayor demanda de información a nivel mundial después del área biomédica o biociencias. El 40% de las bases de datos que comercializa el sistema *Dialog* pertenece al área de negocios, y en el servicio de documentación *Uncover*, la demanda de documentos del área de ciencia, tecnología y medicina representa el 53% de su servicio, mientras que el área de ciencias sociales representa el 33% y humanidades el 14%; dentro del área de ciencias sociales, la información de negocios representa el 12%, seguida, aunque muy por debajo, del derecho (5%) y educación (4%). En el *World Wide Web* de Internet, más del 50% de la información disponible es información de tipo comercial. En el caso de América Latina, se ha identificado que el área de economía posee el segundo lugar en bases de datos, sólo después de las bases de datos multidisciplinarias, con un 23% dentro del total de bases producidas, contra un 33% de bases multidisciplinarias, incluyendo bajo el término de economía no sólo la investigación académica propiamente dicha, sino también a la información sobre finanzas y comercio.

Pero ante todo debe destacarse la utilidad del boletín como medio para lograr mayor difusión y visibilidad para la base de datos clase, considerando que esta base no ha explotado aún la demanda potencial sobre la que puede ejercer una atracción, habida cuenta de que se encuentra entre las bases de datos que indizan mayores cantidades de publicaciones latinoamericanas, y que comienza, a partir de finales de 1997, a incursionar en el *World Wide Web* a través de la página web de la Dirección General de Bibliotecas.

Un acervo de información bibliohemerográfica multidisciplinaria es *CLASE* que indiza revistas del área de ciencias sociales y humanidades editadas en los países de América Latina, y conforma junto con las bases periódica y blat la llamada *Bibliografía Latinoamericana (BIBLAT)*, proyecto dedicado a la identificación, compilación y análisis de información hemerográfica generada en la región desde 1975, fecha de nacimiento de *CLASE*, la base más antigua de *Bibliografía Latinoamericana*. Derivado de estas características consideramos que *clase* está lejos aún de agotar la demanda que creemos potencialmente muy vasta, dado que constituye un esfuerzo único en la producción de bases de datos latinoamericanas y sobre Latinoamérica en un doble sentido: primero porque algunas bases de datos importantes del y sobre el área lo hacen desde una temática especializada, y en segundo lugar, debido al hecho de que dentro de la geopolítica de la información, América Latina ocupa un lugar marginal dentro de la producción, manejo y distribución de información, ya que aporta sólo 3.6% de las publicaciones seriadas en el mundo, según datos del Ulrich's Plus (verano 1996). Esta situación se refleja en el hecho de que buena parte del conocimiento generado en la región haya sido marginado debido no sólo a la menor producción de revistas, sino también a que muchas de las publicaciones latinoamericanas carecen de la regularidad necesaria que exigen los criterios internacionales para la inclusión de publicaciones en bases de datos, y en el peor de los casos, debido a que existe cierta subestimación sobre el conocimiento originario de esta parte del orbe, todo lo cual arroja como resultado el que la mayoría de los títulos disponibles en bases de datos internacionales provengan de Francia, con 137,739 títulos (18.24% del total) y de los Estados Unidos con 136,053 (18.02%), mientras que el idioma más representativo es el inglés con 306,732 (40.62%) títulos, y solamente 23,954 (3.17%) en español.

1.4.3. El boletín electrónico como estrategia proactiva de promoción de la consulta a la base de datos *CLASE* a través de www

Al proceso de "*ir hacia el usuario*" se le ha dado a llamar en la mercadotecnia vía Internet "*estrategia proactiva*" de promoción de productos y servicios, en tanto que procura desviar tráfico en la navegación de los usuarios de la www hacia la página web en la que radica la oferta de productos y servicios. Internet representa la opción tecnológica más poderosa en cuanto a difusión

se refiere en comparación al disco compacto y a los índices impresos, sin embargo, cualquier página web corre el riesgo de perderse en ese vasto océano de la "telaraña mundial". De ahí que resulte estratégico para cualquier empresa o institución que desee darse a conocer por este medio publicitar la dirección de su página web (URL) y hacerse visible dentro del multitudinario tráfico cibernético. En este sentido, y en contraste con el carácter "estático" de la página web que simplemente "espera" visitantes, un servicio de diseminación selectiva de información constituye una especie de apéndice de la base de datos, que como servicio de actualización al usuario renueva constantemente la relación con éste y muy probablemente coadyuvará a promover el interés por consultar el acervo histórico contenido en la base de datos. Entre las estrategias que los mercadólogos denominan como proactivas están las de registrar la página web en los directorios, herramientas de búsqueda y otros sitios de interés que facilitan la búsqueda de información para el usuario, así como la actividad propia del correo electrónico, a través de grupos de discusión, boletines y revistas electrónicas (e-zines), en tanto que útiles extensiones del ambiente web.

1.4.4. Características del boletín electrónico de diseminación selectiva de información de *ECON-CLASE*

El boletín electrónico especializado en economía *ECON-CLASE* podría a su vez desagregarse en un nivel mayor de especialización, dividiéndose en versiones diferentes, cada una de las cuales correspondientes a distintas temáticas de la economía, como por ejemplo, comercio internacional, economía agrícola o economía del trabajo. Consideramos que un tema que por sí solo merece una versión del boletín *ECON-CLASE* es el del Tratado de Libre Comercio (TLC o NAFTA), ya que es susceptible de despertar interés en una amplia gama de sectores sociales, considerando que nuestro país tiene fincada buena parte de su perspectiva de desarrollo económico en el devenir de este tratado comercial. Otras posibles versiones pueden ser *econ-clase* Macroeconomía, *ECON-CLASE* Teoría e historia económica, *ECON-CLASE* Economía del trabajo y *ECON-CLASE* Integración regional latinoamericana.

1.5 Unidad básica de comportamiento

La unidad básica de comportamiento es la persona actuando, la unidad básica de la sociedad son dos personas adaptándose la una a la otra. Los comportamientos colectivos son ejecutados en su materialidad por individuos, sin embargo, se hacen en representación de una organización. Los puntos mas importantes son los roles, la cultura de la organización y la socialización organizacional.

Entendemos por rol un modelo estructurado de conducta referido a una posición, es decir, un conjunto de derechos obligaciones y normas de conducta aprobadas por los individuos que están en esa posición., pero en la psicología de las organizaciones se entiende como el conjunto de expectativas sobre las conductas esperadas de la persona que ocupa una posición en la organización, emitidas por las personas que se ven afectadas por su conducta, e incluso, por su propio ocupante, cuya función es prever, coordinar y facilitar la interacción social reduciendo la gran incertidumbre que hay en la conducta organizacional.

La unidad básica de una organización es el desempeño de un rol, que si es inadecuado para la organización esta procurara retirarlo o cambiarlo de rol.

El estudio de los roles permite un análisis de la estructura de la organización pues *“un puesto es esencialmente un concepto relacional que define cada posición basándose en el nexo que tenga con otros puestos y con el sistema como un todo. Asociado con cada puesto hay un conjunto de actividades o conductas esperadas”*.

1.6 Factores en la toma de decisiones

Existen muchos factores que pueden condicionar una decisión, ya que pueden existir consecuencias negativas de tipo familiar, personal, social, etc. Al llevar a cabo la decisión, por lo tanto es otro punto fundamental en la toma de una decisión concreta, debemos saber cuáles son estos factores que pueden influir en nuestra decisión, aunque en algunas decisiones podemos estar influenciados sin que uno mismo sepa que su decisión está pre-condicionada por algún motivo que, repito, puede desconocer.

Si, por ejemplo, en una decisión personal podemos vulnerar a un familiar, a nuestras costumbres, nuestras creencias, o alguno de nuestros ámbitos personales, siempre trataremos de buscar otra decisión que evite esa vulnerabilidad. Si dicha vulnerabilidad es inevitable, conviene acceder al apartado de dinámicas del blog, ya que nos ponen en situaciones reflexivas de las que podemos sacar conclusiones útiles para sacar adelante nuestra decisión.

Así como factores negativos, también podemos tener condicionantes que nos animen en cierto modo a la hora de tomar una decisión concreta. Si a nuestro jefe le parece bien que nos tomemos un viernes por la tarde libre, seguro que existen más posibilidades de que nosotros decidamos tomarlo, ya que no tendremos la preocupación de que el jefe no esté de acuerdo (creo que es un buen ejemplo aprovechando los tiempos que desgraciadamente corren).

En resumen, existen muchos factores tanto positivos como negativos, que pueden afectarnos en diferentes grados, incluso hasta tal punto de condicionar nuestra decisión completamente, los factores influyen en mayor o menor medida en función de la cercanía de estos a nosotros, ya que si una persona por la calle nos dijera que no fumásemos, probablemente no le haríamos el mismo caso que le podemos hacer a una hermana.

Los factores de mayor relevancia en la toma de decisiones son:

1. Intuición: Es un modo de conocer o razonar, basado en la experiencia, en cuyo caso la evidencia se equilibra automáticamente y en forma inconsciente. Aunque se debe tener cuenta todas sus posibles consecuencias ya que puede tener un amplio margen de error.

2. Personalidad e inteligencia cognoscitiva: Se refiere al tipo de inteligencia, para resolver problemas difíciles con soluciones eficaces. (ser imaginativo–creativo–adaptarse bien al contexto social- tener capacidad para decidir).

3. Inteligencia emocional: Se refiere a cualidades tales como comprender sus propias emociones, sentir empatía por los demás y controlar las emociones para mejorar la vida.

4. Calidad de la información: Es necesario para el acto de tomar de toma una buena decisión, pero algo aun más importante es la posibilidad de acceder a ella.

5. Consideraciones políticas: Son importantes para la acción de la organización pero se debe tener en cuenta que estas pueden entorpecer la toma de una buena decisión ya que limita a los individuos en su búsqueda de la innovación.

6. Grado de incertidumbre: Se divide en tres categorías:

- Certidumbre. Se presenta cuando los hechos son bien conocidos y el resultado se puede predecir con precisión.
- Riesgo. se presenta cuando una decisión se tiene que tomar basándose en información con datos exactos pero incompletos.
- Incertidumbre. Es la inseguridad de si la decisión tomara los caminos planeados.

7. Valores: Influyen en cada uno de los pasos en la toma de decisiones, siendo el más claro la búsqueda de la excelencia.

8. Crisis y conflictos: el conflicto se relaciona con la crisis porque ambos son una experiencia

emocional. Ante ellos se debe mantener un pensamiento racional y no sentimental, ya que se concentra mal, se aplican juicios equivocados y se piensa de forma impulsiva.

9. Etapa de desarrollo moral: Realizan una evaluación de la capacidad que posee un individuo para juzgar lo moralmente correcto. A más alto desarrollo moral, menos dependiente será de las influencias externas y, en consecuencia, más predispuesto a comportarse de manera ética.

10. Ambiente organizacional: Se refiere a la percepción de un empleado acerca las expectativas organizacionales. Algunos ejemplos son: Los códigos de ética, el comportamiento de la alta moral, por parte de la gerencia, las expectativas realistas de desempeño, las evaluaciones del desempeño que consideran tanto el fin como los medios, el reconocimiento notorio, los ascensos de las personas que muestran una conducta moral alta y el castigo para las que no la muestren, entre otros.

11. Locus de control: Se refiere a la dimensión en la que los individuos se creen responsables de los hechos de su vida. Los individuos con un locus de control interno, se apoyan en sus propios esquemas de lo correcto o incorrecto para orientar su comportamiento, en cambio las personas con locus de control externo, por lo general es menos posible que asuman la responsabilidad de los efectos de su comportamiento y es más dable que se apoye en las influencias externas.

1.7 Dimensiones de la toma de decisiones

Las dimensiones en la toma de decisiones son siete:

1.- Dimensión lógica.

Desde esta dimensión se percibe a la organización como centro de producción y construcción del conocimiento; espacios donde las decisiones de sus actores generalmente están influenciadas por la parte lógica presente en todo ser humano. Se utiliza, en la generalidad de las veces, el coeficiente intelectual identificado con el cerebro izquierdo; por lo que las decisiones suelen plantearse racionales, mecanicistas; guiadas por el deber ser de lo que constituye las normativas institucionales, que en la mayoría de los casos hace inflexible los procesos decisionales de la organización. La dimensión *lógica y las decisiones éticas* se toman como punto de partida para incoar el razonamiento del presente constructo, en virtud de la fuerza que tiene sobre los actores de la organización, el intelecto lógico. A tales efectos, es provechosa la revisión documental.

En este particular, las concepciones teórica asumidas sobre esta temática, permitirá en este documento, presentar el nuevo significado que se le quiere dar a las decisiones que se tomen en la

organización, agregando el componente sobre ética del límite y condición humana, a la toma de decisiones del involucrado como líder; quien asumirá la responsabilidad de promover la nueva significación sobre toma de decisiones. Ya que, objetos y hechos carecerían de significado por sí solo. El significado en los procesos decisionales, pudiera decirse, se organiza en función de los principios y creencias presentes en el individuo y en el resto de las personas que integran la organización. Porque cada persona tiene su propia interpretación del mundo, razón por la cual, la condición de límite no hay que perderla de vista para no invadir los espacios del otro y comprenderlo con relación a su mundo. Trias propone “*comprender eso que somos a través de la idea de límite. Somos los límites del mundo*”; por consiguiente, el quehacer diario de un individuo, de su convivencia; beneficia o perjudica al otro dependiendo de la percepción de su entorno y de su propio yo interior.

Desde esta perspectiva, el hombre en su propio horizonte casi siempre andará en la búsqueda de la verdad para sus decisiones éticas, una verdad que es posible observar como una triple verdad: verdad Dios, verdad hombre y verdad mundo. En el escenario organizacional, el pensar en la antropología de lo limitado marca frontera situando al hombre a infinita distancia de lo pre-humano y del misterio de lo supra-humano; como al igual que en lo físico y metafísico o teológico. Según este autor, con “*nuestras emociones, pasiones y usos lingüísticos, dotamos de sentido y significación al mundo de vida en que habitamos*”.

Debido a la importancia significativa que tiene la dimensión lógica para la toma de decisiones desde la ética y la condición humana en el contexto organizacional, se han seleccionado los siguientes autores:

Etkin (1993). Define la toma de decisiones como una actitud mental que se desarrolla al mover una organización del estado actual de la situación, a un estado previsto. La acción de tomar decisiones entonces involucra un proceso de comunicación identificado con el tipo de negociación que mejor respuesta ofrezca, originando una relación de compromiso para las partes involucradas en el proceso. En tal sentido, una dimensión lógica para llegar a decisiones éticas debe considerarse en todo caso, que el decidir es una acción netamente del ser humano, y en este particular, el uso práctico de la razón “*se abrirá en experiencia*”.

Gelatt (1998). Sigue discutiendo sobre la dimensión lógica y expresa, que tomar decisiones requiere de tácticas para el orden y el caos, haciendo uso de la flexibilidad y el equilibrio para estar a tono con los cambios propios de un futuro incierto. Flexibilidad para adaptarse a las diferentes exigencias del entorno y equilibrio a fin de mantener una conducta correcta con un mínimo de desviaciones. “*necesitamos los conocimientos y actitudes para manejar tanto el orden como el caos*”.

El autor propone para la toma de decisiones el proceso del *Dos por Cuatro*, esto es: “*dos actitudes y cuatro factores*”.

Las actitudes están representadas por:

- Aceptar como incierto el pasado, el presente y el futuro, y
- Ser positivo acerca de la incertidumbre.

Por su parte los factores se identifican con:

- Lo que desea,
- Lo que sabe,
- Lo que cree y
- Lo que hace.

Combinando las actitudes con los factores, logra cuatro principios que caracterizan a una persona tomando decisiones. Estos son:

- Concentrarse y ser flexible en lo que se quiere;
- Informarse y tener cautela con su información;
- Ser objetivo y optimista acerca de lo que cree, y por ultimo,
- Ser práctico e imaginativo”.

Con el uso apropiado de los factores, desde una dimensión lógica el autor abre una ventana hacia la toma de decisiones éticas, porque estos, son el reflejo de la integridad de una persona, puesto que según Trias (2000) “*la ética se inspira nuclearmente en lo que somos*”.

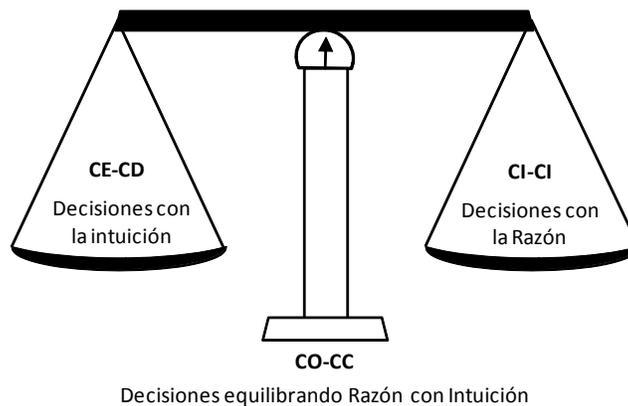
Robbins (1999). Expone un criterio suficientemente aceptado sobre la toma de decisiones. Señala que en toda decisión está presente lo ético, aplicando tres razonamientos:

- El utilitarismo, las decisiones proporcionan bienestar,
- Los derechos, toda decisión está sujeta a códigos éticos y
- La justicia, el decidir amerita imponer reglas justa e imparciales.

Cada uno de estos tres criterios tiene sus ventajas y sus desventajas: el utilitarismo, promueve la eficiencia y la productividad, a costa de los derechos de la persona; el uso los derechos protegen al individuo, pero crea un ambiente de trabajo rígido, y por último, la justicia, protege los intereses de las minorías, alentando un sentido de distinción entre los trabajadores. El enfoque Robbins, también admite un tratamiento desde la óptica del límite y de la condición humana, pues, si se

reconocen los valores que generalmente se identifican con la actividad laboral, el tomar decisiones en las organizaciones se convertiría en un ejercicio ético transformacional.

De estos planteamientos surge la imperiosa necesidad de darle un giro a la forma con que deciden los individuos, combinando lo racional con lo intuitivo y hasta con lo operativo. En otras palabras, significa combinar coeficiente intelectual-cerebro izquierdo (CI-CI), coeficiente emocional-cerebro derecho (CE-CD) y coeficiente operacional-cerebro central (CO-CC). En la gráfica 1, se presenta este equilibrio para una toma de decisiones éticas, en una dimensión lógica.



Gráfica 1. Toma de decisiones éticas en una dimensión lógica

De Gregori y Volpato (2003). Sin embargo, como en la práctica no es fácil presenciar tal equilibrio, es necesario plantearse varios escenarios, como lo propone dicho autor en su teoría cibernética social y proporcionalismo que conforman el capital mental triádico⁵ del cerebro en una persona decidiendo:

- Cuando la tendencia es a utilizar el coeficiente intelectual-cerebro izquierdo. En este caso la persona decide con funciones mecánicas-analíticas, desde el deber ser, utilizando nomás.
- La persona decidiendo con el coeficiente emocional-cerebro derecho, centrado en el ser, su decidir se deja guiar por lo intuitivo-sintético y
- La persona que decide con funciones intempestivo-operativo, utilizando su coeficiente operacional-cerebro central sin razonar y considerar las consecuencias de la decisión.

Chopra (1996). Considerando la imperfección del ser, ¿cómo saber tomar una decisión ética?, el autor responde tal interrogante que sirve de guía a quienes se interesan por él tema señalando

⁵ Triádico: todo lo considera en conjuntos de tres elementos o factores, dos en competencia o contradicción y un tercero en cooperación; o dos en cooperación y un tercero en competencia o contradicción.

que; *“al sentir paz y consuelo y ninguna resistencia de parte del universo, el cuerpo experimenta una sensación de tranquilidad y te sientes bien, y cuando escoges el camino equivocado, también lo sientes en forma de malestar físico”*.

La necesidad entonces, de reconciliar la esencia del ser humano con las decisiones desde la dimensión lógica en la organización, hace presumir que las acciones del individuo, obviamente no siempre se inspiran en la racionalidad y la dependencia; en virtud de que la libertad que éste tiene para decidir, lo lleva a optar por escoger, aquella que responda con asertividad a su forma de pensar y sentir, a sus metas y circunstancias. A esto, se suma el hecho que cuando una persona decide, se somete a procesos complejos, cargados de incertidumbre, ambigüedad, indeterminación y duda. Por ello, la intuición, la creatividad, los sentimientos, las corazonadas y el respeto al ser humano; serían los iconos que orientarían la toma de decisiones éticas desde una dimensión lógica.

2.- Dimensión **condición humana**.

La dimensión de la condición humana y la toma de decisiones ética desde la realidad del hombre en la organización, podría ser explicada a través de la comprensión de aspectos filosóficos, debido a que el ser humano instruido y educado es menos propenso a hacerse prisionero de las opiniones de los demás. En la mente del hombre instruido, la existencia propia del “*ser*” clarifica y reflexiona acerca de sus propias capacidades, dando sentido y significación a los símbolos para decidir; hecho manifiesto mediante la exposición y expresión en figuras y formas de comunicación.

De esta manera, el símbolo, es aquel concepto como expresa Trias (2000), que permite *“abrir la razón fronteriza a la experiencia... También a través de símbolos tenemos la posibilidad de formalizar y configurar aspectos de nuestro mundo de vida”*.

La ética como filosofía del saber y actuar, reconcilia lo etéreo con la condición humana para discernir y explicar la toma de decisiones, confiriéndole irradiación de valores a fin de darle forma y aliento al contenido, por ser una de las actividades de mayor cotidianidad, que ejecuta el hombre desde el inicio de cada amanecer.

Se tiene plena conciencia de que lo que se quiere transmitir, no es fácil escribirlo, transmitirlo y practicarlo; sin embargo, el interés por el tema *“Ética del Límite y Condición Humana: adjunción ideal para la toma de decisiones en las organizaciones”*, impulsan a sobrepasar y entender los

espacios fronterizos invisibles que aclaran las ideas del ser humano, para combinar la praxis⁶ con lo trascendental.

Apremia entonces, la creación de una base conceptual para construir un nuevo conocimiento dirigido a rescatar la Dimensión Condición Humana para la Toma de Decisiones Ética, que ofrezca respuestas en el logro de una conciencia que permita distinguir cuándo se está perjudicando o cuándo se está actuando equilibradamente. Demostrando sensibilidad, ponderación y sobre todo un profundo respeto por la libertad de criterios y opiniones contrarias, activando el diálogo para acordar la decisión que beneficie a las partes involucradas.

No es una novedad que para hacerle frente a situaciones macras como las señaladas, las organizaciones deberán asirse a los cambios paradigmáticos, como bien propone Drucker (1994), quien plantea como salida a la crisis, la gestión del cambio, implementando cuatro prácticas sistemáticas:

- Mejora continua de todo lo que hace,
- Aprender a innovar en forma sistemática,
- Tener capacidad para tomar decisiones aceptando el respeto por las diferencias y
- Actualizar los conocimientos cada cuatro o cinco años.

Siguiendo con esta misma línea de pensamiento, Guédez (2001) recoge el ideal para las organizaciones en el presente milenio:

“Sabemos que la historia de la humanidad se ha apoyado sobre recursos distintos para impulsar la sobrevivencia de la especie durante los diferentes períodos de la historia. Se han conocido la ola agrícola, la industrial, la tecnológica, la del conocimiento y ahora se asoma la ola ética... la ética surge así como el eje de conductas individuales necesarias para que las organizaciones, los países, las subregiones y el mundo asuman el compromiso de sobrevivir, de convivir y de vivir”.

En este sentido una convivencia entre las personas para actuar éticamente, significa fortalecer en función del dialogo desde la razón, el juicio y el concepto, la forma como el hombre toma decisiones. El abordaje filosófico de la ética del limite en la propuesta teórica de Trias (2000) sobre la condición humana, es una salida que pudiera plantearse a la organización para impulsar el fortalecimiento y crecimiento de un ser humano limítrofe y fronterizo, consciente de que no es un ser racional para creerse un ser perfecto.

⁶ Praxis proviene de un término griego y hace referencia a la práctica. Se trata de un concepto que se utiliza en oposición a la teoría. El término suele usarse para nombrar al proceso por el cual una teoría pasa a formar parte de la experiencia vivida. Se hace presente cuando dichas ideas son experimentadas en el mundo físico para continuar con una contemplación reflexiva de sus resultados.

Desde los escenarios de acción del hombre como tomador de decisiones, debe tenerse siempre presente que su condición humana es limitada no obstante tiene la capacidad de abrirse a la experiencia para elegir la mejor decisión desde el ser de convivencia, regido por el dialogo, las disidencias, las opiniones opuestas, los juicios de valor y el respeto a la libertad individual del otro. Una libertad como expresa Gómez (2000) que debe ser producto del respeto, sin que haya para ello ninguna causa o razón, sino porque el hombre desde lo más íntimo de su ser toma la decisión de respetarse y respetar al otro. En palabras del autor: *“cuando te respeto porque simplemente yo decido respetarte, me ubico en el plano humano, en el de la ética”*.

Esta transformación ética en una organización, tiene como prioridad, implementar mecanismos para que su organización vea en la condición humana el objetivo, para obrar decidiendo con transparencia y coherencia entre lo que piensa, lo que dice, lo que siente y la decisión que finalmente tome. Es decir, deberá actuar con prudencia y sabiduría del corazón desde las propias fronteras del hombre como signo de identidad e identificación ante su entorno inmediato, ante el país y ante el mundo.

3.- Dimensión prudencia.

Buscar un nuevo arte para vivir, sin el protagonismo y el heroísmo al momento de la toma de decisiones, debe ser una práctica fundamental de la organización desde su condición humana como actores principales de la misma, por cuanto la eficacia en sus metas estarían directamente relacionadas con la discrecionalidad y la prudencia que son virtudes consideradas por Aristóteles, como indispensables para el buen juicio del hombre como tomador de decisiones. Con pensamiento similar, Balaguer (1977) expresa que el sabio del corazón será llamado prudente, considerado no como pusilánime y falta de audacia, si no como el hábito de actuar bien, clarificar el fin y buscar los medios para alcanzarlos.

El ser humano, sin ufanarse, puede lucir sus cualidades, atributos, dotes y talentos en sus diferentes escenarios cotidianos; dejándole a terceros las opiniones calificativas que a bien tengan sobre su persona. Al cultivar la virtud de la prudencia, individuo se hace más audaz en el buen sentido de la palabra y menos insensato en su diario actuar. Desde esta visión, el ser prudente no significa el no equivocarse, sino más bien, rectificar cuando comete algún error; asumiendo con responsabilidad el riesgo por la decisión tomada.

Santo Tomás de Aquino (Citado por Balaguer 1977) señala que los tres actos más importantes de la sabiduría son: pedir consejo, juzgar y decidir rectamente. El cultivo de estas actitudes, encuentra

en la virtud de la prudencia el fundamento clave para reconocer las propias limitaciones del ser humano.

Si bien es cierto que actuar con sabiduría, implica un salto cualitativo en las decisiones prudentes que se tomen, hay que considerar que ésta virtud, no es nada fácil de asimilar por el hombre, debido al beneficio material que casi siempre busca en todo lo que hace. Por ello, el considerar las opiniones opuestas, el desafío de conocer la propia identidad y conocer la identidad del otro; representan esos límites que muchas veces no se deben dejar pasar por alto, en bien del hombre y de su organización. Condición que lo lleva a retrasar la decisión, hasta completar todos los elementos de juicios que permitan para cada situación que le presente el contexto inmediato y la propia naturaleza; controlar los grados de duda, así como minimizar los índices de discrepancia.

Aubenque (1999) haciendo una de las exposiciones más sugerentes y atractivas sobre la ética de Aristóteles, expresa que la prudencia es la síntesis de todas las virtudes, es el buen juicio, el arte de la medida y de la oportunidad en el obrar; implica valor, templanza, justicia y sabiduría práctica. El decidir éticamente en una dimensión prudente se entiende entonces, como la forma de poner fronteras para que el ser humano no actúe desde la contingencia, la precariedad y la imprevisibilidad; de allí la importancia de medir su forma de comportarse, enfrentarse al azar y aceptar el riesgo de equivocarse.

Es como darle una respuesta a los límites de la razón, que en no pocas oportunidades agobia al docente para cumplir con las normas preestablecidas por la organización; que sin ignorar la existencia humana confía en el poder de la inteligencia del conocimiento y de la acción para decidir con discrecionalidad, como la esencia significativa que le permite, ser ponderado y comedido, antes de emitir un juicio o tomar decisiones que en la generalidad de las veces influyen a las personas positiva o negativamente. El autor enfoca hacia los límites de la razón, asumidos por Aristóteles; que sin ignorar los aspectos trágicos de existencia humana, confía en el poder del conocimiento y de la acción para superarlo.

De esta manera asumir con éxito y ética las decisiones que se tomen en la organización, depende en gran parte de que sus integrantes, proveedores y clientes sean prudentes, ponderados y discretos; sean objetivos, sin dejarse llevar por el apasionamiento, inclinando la balanza hacia la conveniencia de una u otra parte. Porque como señala Guédez (2001) *"...no somos libres para elegir lo que nos pasa, sino libres para responder a lo que nos pasa... todas las conductas éticas son lucrativas, mientras que todas las conductas anti-éticas son empobrecedoras"*.

El significado de una práctica ética para decidir con prudencia, conlleva entonces, al cultivo de la paz y la comprensión con un profundo respeto por la dignidad de todos los que comparten el diario

quehacer de la organización, entre ellos principalmente sus integrantes; quienes son los que mayores interrelaciones positivas deben tener, para que su actividad social-laboral sea del disfrute por construir nuevos conocimientos y elevar el nivel de formación humano-espiritual del individuo.

Significa por otra parte, fomentar escenarios de acción en el ambiente cotidiano para decidir mediante acuerdos, considerando la pluralidad, la diversidad, el respeto y la innovación; para contribuir, a hacer más humano, al propio ser humano, promoviendo un verdadero compromiso personal, profesional y organizacional.

4.- Dimensión imperfecta.

Los errores que pudiera cometer el hombre no son impedimento para lograr la excelencia, la superación y el éxito; no deben ser tampoco predisposiciones para fallar de nuevo, dejando que estos dominen su voluntad. En este dilema, lógicamente él, casi siempre esta en búsqueda de la perfección para decidir y actuar buscando ser exitoso y excelente en todo lo que se propone. Es por ello, que la perfección como expresa Peter (2002), influencia la vida de las personas de una manera silenciosa e imperceptible, *“la expresión alcanzar la perfección... no es una aspiración sana. La búsqueda de la perfección no ayuda a las personas a vivir, a amar, a sonreír, a gozar, a perdonar. No ayuda ni siquiera a sufrir”*.

Las acotaciones que hace el autor son como para mover el piso de cualquier individuo que busca ser modelo perfecto a seguir; ya que como ser humano, en la generalidad de las veces esta proceso de realización y de transformación mediante cursos de perfeccionamiento y crecimiento personal; para no fallar, o no equivocarse; pero sobre todo para realizar mejor sus actividades. La búsqueda la perfección no significa el no equivocares o no tener fracasos, pero par asumirlos sin fomentar comportamientos pobres de escasa calidad; Peter propone la *Terapia de la Imperfección* como respuesta que esclarece y devuelve al individuo *“su verdad, concibiéndolo como un ser, que tiene que cargar con el peso de sus limites”*.

En la búsqueda de un contexto donde poder reflexionar acerca la terapia de la imperfección; la organización es el ambiente propicio, ya que sus integrantes en la generalidad de las veces quieren vivir con un estilo de vida que los lleva a arreglar la realidad y a tener bajo control sus sentimientos; y se enfrenta en no pocas oportunidades con situaciones esencialmente limitadas, con sus defectos, con la incertidumbre y la complejidad en que viven; donde lo que tiene que fallar, fallara; el concepto de la perfección se vuelve cada vez más vacío. Etimológicamente, perfección según Peter significa:

“aquellos a lo cual nada falta... la noción de perfección se convirtió en la medida de lo ideal y de lo real en todos los aspectos. Todo quedó plasmado por la idea de perfección... a través de este concepto la mente puede absorber funciones fundamentales como por ejemplo, esclarecer los aspectos formales de la problemática del ser”.

Pero la búsqueda de la perfección se enfrenta con una realidad esencialmente limitada y una existencia inevitablemente defectuosa, generando una actitud y una conducta de choque con la realidad y la vida misma. Un individuo que tienda al perfeccionismo, está en la búsqueda de convertir el desorden de la vida al orden que le dictan sus propios procesos mentales; formulando frases como: si fuera perfecto, si fuera estimado, si tuviera éxito, si fuera aceptado, si fuera amado, si fuera profesionalmente exitoso. Esta dinámica producto de la imaginación, casi siempre está cargada de desconfianza y fragilidad hacia la *“fragilidad de la condición humana”*. Esta es una de las razones, que llevan al autor a proponer el concepto de imperfección, identificado con todo aquello que la razón lógica percibe como inadecuado, deforme, limitado, finito o incompleto.

La realidad asumida con estos argumentos, coloca la toma de decisiones de la organización en una línea clara de distinción y separación entre la tendencia a la excelencia como aspiración sana y legítima de quien quiere desarrollarse, ser competitivo y productivo utilizando sus propias potencialidades; y la perfección que tiene una actitud neurótica, de fondo narcisista, que lo lleva al auto-desprecio cuando se equivoca. Desde esta óptica el perfeccionismo es visto con una concepción antagónica a la excelencia, manifiesto en un problema de vectorialidad, es una confusión de fondo; caracterizada por la imposibilidad de comprender que se pueden tomar decisiones erradas. Es como si la persona desviara o moviera el vector de su vida en dirección contraria a su propia naturaleza, signada de incertidumbre y cambio.

Pero ¿de qué manera el individuo puede superar la complejidad y el caos de la realidad reconociendo que es un ser imperfecto para afrontarlo? ¿De qué manera puede hacer que emerja a la superficie su yo como ser humano capaz de auto-conocerse y conocer al otro? Como perfeccionista que se mueve hacia sí mismo, hacia su propio “yo”, ignorando su razón fronteriza y limítrofe para interactuar con el contexto, ¡no podría!; sin embargo si observa a su alrededor, para encontrar su yo interior y el y el tú del otro, el grupo, las cosas, los acontecimientos, el pasado, el presente, el futuro, las deficiencias, el ideal y el valor, la alegría, el sufrimiento, el deber por convicción, el amor, la muerte y su Dios; es un buen síntoma de la proyección de sus sentimientos e intuición. Peter en la *Terapia de la Imperfección* propone:

“... las implicaciones filosóficas y las proyecciones ético-espirituales... sus raíces y al mismo tiempo su apertura... alude a una determinada visión del hombre concebido como ser limitado, por otra, se reconocen las exigencias ético-espirituales que derivan de esa misma concepción... como en una

parte de un conjunto más amplio que abraza diversos niveles de reflexión, cada uno con su propia función, pero integrados por el concepto del límite en una única totalidad unitaria”.

El reconocimiento de que el individuo es un ser humano asido a la imperfección, es un primer paso para no hacer resistencia a los límites y debilidades que lo embargan. De allí, la necesidad de considerar en las decisiones que tome, las potencialidades taxativas⁷ de la sabiduría del corazón y la prudencia para el éxito y la excelencia. Esta dimensión de lo imperfecto, obliga a poner frente a frente, al hombre con sus propias fronteras y sus límites; en el pensar, en el sentir, en el decir, en el decidir y en el hacer; para no invadir los espacios del otro.

5.- Dimensión ética del límite.

La dimensión ética del límite como adjunción ideal para tomar decisiones en la organización, representa reconocer en el individuo, los límites que éste tiene, por su propia condición humana; para lograr el engranaje de las fuerzas internas y externas que afectan su cohesión para la toma de decisiones. El límite es la primera reflexión que se impone el hombre al momento de decidir, bajo dos aspectos: como dato por la información recibida y como experiencia en el dinamismo de la propia acción, que casi siempre influye negativa o positivamente en el otro. Trias (2000) expone el límite como una filosofía “... es el ser mismo el determinante radical del concepto de inteligencia o razón que puede formarse”.

Esta exaltación del hombre como un ser ontológicamente limitado, es su razón fronteriza que lucha entre dos realidades que lo convierten en una “ser” dinámico dentro de su existencia, sellada por el límite en el conocer, comunicar, entender, amar y perdonar; haciendo uso de sus propias facultades, actuaciones y potencialidades limitadas por sus imperfecciones. Pero como muy bien lo expresa el autor, es también “...Asunción ontológica⁸ de ser y razón limítrofe es, justamente, la que hace posible la viabilidad de un uso práctico, o ético, de esa misma razón”.

La ética del límite como dimensión para decidir éticamente en una organización, desde la óptica expresada por este autor, representa en un individuo, estar consciente de sus propias capacidades humanas y limitadas para asumir aquellos valores que hacen a la persona más humanitaria, más solidaria, más tolerante, más justa, más transparente, más sensible con el otro; en fin significa elegir, compartir, amar, intercambiar y admitir equivocaciones. En resumen, para obrar decidiendo de tal manera que ajuste su máxima conducta a su propia condición de habitante de la tierra, puesto que es la forma más firme y veraz de vivir la felicidad que todo hombre desea, como una de

⁷ Taxativa: Que no admite discusión.

⁸ Asunción ontológica = Exaltación existente.

las aspiraciones más dignas del ser humano, la de vivir a plenitud. Un significado que le trae un mayor compromiso, porque vivir en plenitud; no es solo vivir satisfecho, sino estar a punto de desbordar los límites de la propia existencia.

Todo límite se explica en el hecho que siempre es una invitación a ser traspasado, transgredido o revocado. *“Pero el límite es, también, una incitación a la superación, al exceso... se producen siempre importantes fenómenos... todo pierde su identidad pura y dura de carácter originario, agreste o natural”*. La noción de límite en razón del reconocimiento de la propia condición humana, ofrece una oportunidad mística y sensible en la que se desarrolla y tiene prosperidad espiritual y material el hombre. El límite es entonces la condición fronteriza por medio de la cual se hace posible la vida en convivencia.

La expresión *“ser-en-el-límite”* que plantea el autor, es la síntesis de lo corpóreo y lo espiritual, que representa la verdadera medida de las cosas. *“Y esa condición determina la relación con todos los demás sujetos libres y personales”*. Esto significa, que el hombre es un ser relacional que se abre desde dentro hacia fuera, entendiéndose así, el porque la toma de decisiones esta cargada de un alto componente emocional y es en la sabiduría del corazón que éste, trasciende su propia finitud, poniendo límites a su comportamiento, conoce lo limitado y lo impulsa a trascender en el mundo hacia la excelencia para tomar decisiones consistentes, vivificantes y eficaces.

Es por ello, que abordar al individuo en organización significa ubicarlo como un ser en proceso de realización proyectado por su propia razón, de esta manera mantiene en la generalidad de las veces un constante movimiento de fuga y huida de lo ordinario, tratando siempre de buscar decisiones perfectibles alejándose de sus límites para volar hacia la cima. En este vuelo, lo humano muchas veces tiene sabor a desolación, pero también a expectativas, sin embargo, en el límite de su propia condición humana es capaz de obtener el gozo que le brinda la felicidad para disfrutar la decisión tomada con justicia y verdad respetando la dignidad del ser. De esta manera responde a una profunda necesidad de racionalizar la indignancia producida por el límite. Es pues como plantea Trias;

“... aquel ser que, en razón de sus modos de responder a la proposición ética, va adaptando y armonizando su conducta a aquel lugar que constituye y que determina y define su propia condición y naturaleza. Tal lugar es el límite. El sujeto, en la medida misma en que se adapta a ese lugar, respondiendo del ser que se le ofrece a través de la proposición ética, se constituye como habitante del límite”

En una dimensión desde la ética del límite para tomar decisiones desde la eticidad de sus actores en la organización, entre ellas sus integrantes, podrían encontrar respuestas a sus acciones,

desencadenando verdaderos cambios desde esa fuerza interior espiritual que el ser humano tiene para saber lo que puede y lo que debe hacer, y lo que conduce inminentemente a lo que quiere hacer, en bien propio y de su condiscípulo con quien comparte el diario quehacer.

Esta nueva concepción de ética para decidir, fomenta valores que interactúan con los hechos y circunstancias de la vida, para conformar el sistema de valores y significado; desde la propia esencia del hombre en acción; su ser espiritual y su ser corpóreo en un plano existencial, definidos por sus límites en el pensar, el entender, el conocer y el actuar.

6.- Dimensión valores.

La dimensión de los valores permite al individuo actuar con una conciencia ética, para ver e interpretar la realidad desde una visión para decidir más trascendental; impregnada de verdad, bien, unidad, tolerancia, solidaridad y justicia, demarcando los límites que dan luces para iluminar el camino, advirtiendo si es necesario parar, retroceder, dar preferencia o detenerse. Los valores se manifiestan con la dimensión comunitaria de la persona y su significado responde a la dimensión ética. Una ética que se atenga según Trias (2000) *“a las condiciones de su posible realización a través de la acción... que el ser humano permita”*.

La unión entre la dimensión de los valores y la ética, admite asumir con propiedad cualquier decisión, por cuanto la influencia de un valor transformado en significado desde la dimensión ética del límite, provoca ajustes en los procesos racionales, intuitivos e impulsivos; para adecuar el sistema mental a las situaciones de cambio e incertidumbre que se presenten al docente en su comunidad universitaria, mediante un sistema de valores compartidos que conduzcan hacia el camino de una toma de decisiones ética.

Pero es innegable, que un incontable número de veces los procesos racionales e impulsivos, dominan sobre los intuitivos. Es por ello, que un individuo, se deba plantear en la generalidad de las veces valores trascendentes relacionados con la dignidad de la persona humana para activar el diálogo y los acuerdos que le permita decidir sobre la opción que mejor responda con prudencia y sabiduría del corazón.

En este dilema aparece la dimensión ética del límite y la dimensión imperfecta desde la propia condición humana limítrofe y fronteriza, en medio de la cual se encuentra la razón que hace funcionar la idea de lo lógico, y la intuición que hace funcionar la idea de lo individual, para orientar el curso de las decisiones desde la propia esencia del hombre. Trias (2000) muestra dentro de su teoría del límite como frontera del hombre que; *“La libertad del sabio... de su voluntad a ese orden*

del mundo gobernado por su razón inminente, ... que es el pensamiento interno... no es ajeno al mundo... sino que lo gobierna desde dentro de modo hegemónico”.

La intuición descubre entonces una cierta transparencia, apertura y utilidad para abordar aquellas decisiones turbulentas, asimétricas y en permanente desequilibrio con la vida; mientras que la razón percibe el ideal de una vida en positivo, mediante una conducta simétrica, equilibrada y armoniosa que no admita errores, obstáculos e imperfecciones. En esta disyuntiva el hombre asume muchas veces una lucha constante entre lo perfecto producto de la razón y la intuición que le establece una especie de frontera, para vivir con sus errores; perdonando y tolerando los defectos ajenos y los propios.

Bajo la ética de los valores para decidir del individuo, surge una intencionalidad con un contenido moral asumido por convicción y no por coacción, produciendo objetivos claros de productividad y competitividad, con propiedades intrínsecas que no deberían modificarse por las circunstancias contingentes de incertidumbre y ansiedad propios de estos tiempos de cambio acelerado y permanente. Se trata de elegir entre vicio y virtud, entre el bien y el mal; expresados a través de valores considerados como deseables y como camino para orientar las decisiones que se tomen.

7.- Dimensión transformación.

Transformación, cambio permanente, turbulencia entre otros títulos; caracterizan el mundo en el cual están inmersas las organizaciones, que tiene como imperiosa necesidad poner en práctica mecanismos más humanos para la toma de decisiones desde una perspectiva ético transformacional. En tal sentido la observancia de reflexiones profundas sobre su ser y su quehacer en el contexto organizacional, las lleva a centrarse en el debate sobre el papel trascendente de esta tipología de organizaciones en el camino hacia la excelencia, la modernización y el desarrollo sustentable de la sociedad, la región, el país y el mundo. Para lograrlo deberán inspirarse en principios y valores trascendentes de equidad, democracia, justicia, y libertad; como fundamentos insustituibles de una cultura de paz y armonía, donde se respeten las diferencias políticas, culturales, raciales y sobre todo las opiniones opuestas al momento de decidir.

Las consideraciones expuestas, permiten evidenciar que los procesos de crisis son vividos casi siempre por los que toman decisiones, quienes deben enfilarse sus principios, valores y creencias para llegar a decisiones ético transformacionales, que influyeran todos los niveles del contexto organizacional.

A este respecto, Morgan (1996) explica que en la actuación de los líderes un sin número de veces existe una axiología que presenta el deber que lo lleva a cumplir sus tareas, con una concepción ortodoxo de fidelidad, producto de una imposición externa; contraria a la ética, que logra acuerdos considerando las tareas con una actitud espontánea y voluntaria, que se integren e identifiquen para llegar a la toma de decisiones logrando una participación libre y voluntaria mediante la comunicación a través del dialogo y el saber de convivencia.

Es indiscutible entonces, la aquiescencia del liderazgo transformacional como la fuente de unidad y coherencia capaz de equilibrar las tensiones conflictivas para asumir con conciencia moral una toma de decisiones ético transformacional.

Reflexiones finales de las dimensiones y decisiones éticas.

Es partir de las dimensiones que respetan la condición humana desde la ética del límite, lo imperfecto, los valores y la transformación. En este orden de categorías dimensionales, el ser humano ésta en constante aprendizaje. Ese ser libre que valora la vida desde su propia razón fronteriza, que sabe que a través de la coherencia entre lo que piensa, lo que dice y la decisión que finalmente toma es capaz de abrir caminos inimaginables hacia el ser de convivencia.

Un ser humano que al convivir tiene la virtud de contagiar, de desarrollar el espíritu de responsabilidad y el sentido de fraternidad. Es capaz hasta de incentivar y dar significado a la propia tarea y a la del otro.

1.8 Toma de decisiones proactiva y reactivas

La pro-actividad involucra actuar antes de, y para actuar antes de hay que decidir y para decidir, es necesario asumir la responsabilidad de afrontar las consecuencias de nuestras decisiones. Responsabilidad significa HABILIDAD para RESPONDER. Es la habilidad que tenemos para escoger nuestra respuesta. La gente que toma decisiones efectivas es proactiva, ya que sus actitudes son el producto de sus propias decisiones, basadas en valores, en lugar de ser producto de sus condicionamientos o sentimientos. Mientras más proactivos seamos, menor es la tendencia a culpar a otros por las cosas que nos pasan. La libertad es una condición derivada del ambiente. Usted. Tiene varias opciones para escoger. La libertad implica ejercer esas opciones, a través de nuestra propia fuerza interior, ya que esa es la base de ser proactivo. Pro-actividad en general implica no esperar que las cosas pasen para decidir y actuar.

La toma de decisión reactiva se presenta cuando el individuo se enfrenta a un riesgo inmediato, es totalmente emocional y típicamente muy rápida ya que le lleva a la corteza cerebral un tiempo de

por lo menos 0.1 segundos analizar la información de la situación y por lo tanto nos conduce a una toma de decisión prácticamente subconsciente y en “*caliente*”.

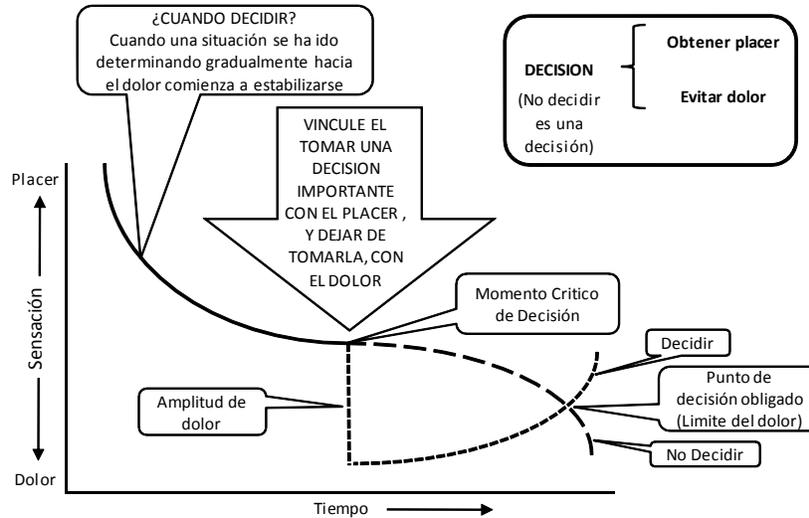
Cuando uno se limita a esperar que las cosas pasen, sin decidir, está actuando de manera reactiva. La persona reactiva actúa en base a lo que le sucede, sin prever absolutamente nada. De esta manera las decisiones son forzadas por la situación y siempre presentan una sola alternativa de actuación. Cuando se es proactivo, se tienen múltiples alternativas para decidir.

Cualquier cosa que nos es familiar, es difícil de reconocer y aún más difícil de cambiar cuando el hacerlo es doloroso o nos causa algún problema. Después de todo ¿cómo sé que algo nuevo será mejor?, la respuesta es, no lo sabrás si no lo intentas. Aunque muchas personas anhelan algo mejor y tienen la oportunidad de obtenerlo, siempre tienen que librar una batalla contra la comodidad de la familiaridad. Una vez que se deja lo familiar, obviamente se entra en lo desconocido, lo incómodo, esto es lo que a la mayoría de nosotros nos asusta. Aquí es donde el dolor al cambio significa renunciar a lo familiar para ahondar en lo desconocido. Este dolor se conoce como inseguridad o ansiedad.

Sólo necesitamos cambiar nuestra actitud y aprender nuevas habilidades personales. Todos podemos lograrlo. Las partes que necesitamos ya las tenemos, sólo es cosa de llegar a familiarizarnos con ellas y comprender y expandir su uso.

Lo que hace posible acrecentar nuestro sentimiento de autoestima, es el estar dispuesto a abrirse a nuevas posibilidades para probarlas y entonces, si encajan, practicarlas utilizándolas hasta que sean verdaderamente nuestras. En esto se basa el aprovechar nuestro poder de decidir y crearnos el hábito de enfrentar la vida asumiendo nuestros actos con responsabilidad.

A veces tomar una decisión genera mucho dolor y malestar a corto plazo, con una profunda sensación de fracaso, pero luego, a largo plazo se vuelve placentera.



La figura nos muestra como trabaja este proceso de decisiones entre el placer y el dolor

El momento crítico para tomar una decisión ocurre cuando percibimos que una situación que se viene deteriorando hacia el dolor, comienza a sufrir un estancamiento, generando en nosotros la falsa sensación de que ya pasó lo peor. Sin embargo es a partir de este momento en que cualquier cosa que suceda tiende a deteriorar más la situación hasta llegar a un punto en que no queda más remedio y debemos asumir nuestra decisión, con un grave deterioro de nuestra autoestima.

Para salir de esta trampa mortal es necesario vincular el tomar una decisión importante con el placer (a largo plazo) y el no tomarla con el dolor. Entienda que es dolor a corto plazo como precio a pagar por el placer a largo plazo.

1.9. Resumen de la primera parte

6 PASOS PARA TOMAR DECISIONES.

Vamos a brindar una pauta de 6 pasos para tomar decisiones importantes en nuestra vida.

1. Establezca con claridad que es lo que realmente desea obtener y que es lo que le impide hacerlo ahora. Para ello:

- Establezca objetivos.
- Actúe con Sinceridad.
- Actúe con Integridad.
- Vea la situación como una oportunidad y no como una amenaza.
- Identifique todos los elementos que le alejan de la decisión adecuada.

2. Logre apalancamiento: asocie un fuerte dolor al no decidir ahora y un gran placer al tomar la decisión en este momento.

3. Interrumpa las pautas de pensamiento, sentimiento y acción que lo limitan a actuar de manera adecuada. Recuerde que:

- Ninguna decisión que se tome para resolver una situación, debe ser tomada en el mismo nivel de pensamiento en que se generó dicha situación.
- Los modelos mentales y las creencias influyen sensiblemente en la toma de decisiones.

4. Cree nuevas alternativas que sean realmente capacitadoras. Busque alternativas que lo acerquen al placer o el éxito y lo alejen del dolor o fracaso. Utilice su creatividad para generar alternativas capacitadoras. El proceso creativo consiste en una secuencia de: DESCONGELAR – ACUMULAR – DELIBERAR – INCUBAR – ILUMINAR – FINALIZAR - REFORZAR.

- DESCONGELAR: Implica romper el hielo para retirar los obstáculos que puedan dañar la creatividad. Esto nos lleva a desarrollar nuevos modelos y creencias para actuar.
- ACUMULAR: Reunir los datos, recopilar la información y aportar nuevos datos.
- DELIBERAR: Analizar y discutir los datos y estratificar la información.
- INCUBAR: Es dejar un tiempo para permitir que la información fluya.
- ILUMINAR: Identificar posibles soluciones y alternativas. Esto es él... ¡ajá!
- FINALIZAR: Tomar la decisión de tal modo que todos conozcan el qué, el cómo, el cuándo y el quién.
- REFORZAR: Reevaluar la decisión. Reforzarnos para ofrecer a cada quién la oportunidad de reafirmar la decisión.

5. Condicione sus nuevas pautas de acción, hasta lograr que sean consistentes. Asegúrese del éxito de la decisión a largo plazo.

6. Ponga a prueba sus decisiones y deles tiempo para que comiencen a producir sus efectos positivos. La comprobación implica realizar lo siguiente:

- Haga una revisión ecológica de su decisión en el sistema. (Verifíquela dentro de sus principios y valores).
- Visualice los posibles efectos de su decisión a corto, mediano y largo plazo. Póngala a prueba, dándole tiempo para que surta sus efectos positivos.

PROBLEMAS Y CONSECUENCIAS EN LA TOMA DE DECISIONES.

Los problemas más comunes en los procesos de Toma de Decisiones son los siguientes:

- Impuntualidad.
- Conexiones no detectadas con otros problemas.
- Incumplimiento de las secuencias para decidir adecuadamente.
- No hacer seguimiento a las decisiones.
- No establecer reglas claras de dirección.
- Tomar la decisión reactivamente porque se acabó el tiempo.
- Parálisis del tomador de decisiones.
- Inseguridad y falta de confianza.
- Exceso de confianza que lo lleva a uno a creer que las cosas no le pasan a uno.
- Falta de claridad personal.
- Indefinición personal.
- Temores desmedidos.

Hay una serie de elementos externos que ayudan a los procesos de toma de decisión, sin embargo, debemos tener siempre presente que los más importantes son los que están dentro de nosotros. Estos elementos son:

- Indicadores bien definidos.
 - Gráficos de control estadístico de procesos.
 - Gráficos de tendencias.
 - Histogramas.
 - Diagramas de Pareto y de Causa-Efecto para Jerarquizar.
 - Árboles de decisión.
 - Sistemas de información gerencial.
- ¿Qué consecuencias nos trae una toma de decisiones inadecuada?

Veamos a continuación, que consecuencias trae una toma de decisiones inadecuada en el ámbito organizacional.

 - Desmotivación en el personal.
 - Inseguridad.
 - Poca valoración personal.
 - Gerencia por crisis.
 - Rotación del personal.
 - Desperdicio en todos los sentidos.
 - Malestar en el personal.

- Inconsecuencia.
- Falta de compromiso.

Una organización que no crea en su personal gerencial la conciencia de lo que significa tomar decisiones, está poniendo en juego su propia supervivencia. Decidir es un proceso crítico en cada instante de la vida organizacional y también en la vida personal.

DECISIONES Y CAMBIO.

Cuando una organización desea realizar un proceso de cambio, es necesario partir de una serie de elementos importantes, tales como:

- Poseer inconformidad constructiva.
- Tener absoluta claridad del estado deseado.
- Tener claridad sobre los pasos iniciales del proceso, es decir, el hoy.
- Promover la anticipación y la participación para generar un aprendizaje innovativo.

Una vez establecidas las condiciones requeridas para el cambio, se requiere:

- Tener claridad del estado actual, para saber de donde estamos partiendo.
- Tener claridad del estado deseado, para ir lo más directamente posible.
- Tener claridad sobre el hecho de que el estado deseado no llega solamente porque fue deseado y evocado por nosotros.
- Saber que entre los dos estados (actual y deseado), existe un período de transición que puede ser más o menos largo, dependiendo de la magnitud del cambio (liderar el estado de transición).
- Fijar mecanismos de retroalimentación claros para liderar adecuadamente la transición y decidir la necesidad de ajustes.

Todo esto debe estar acompañado de una actitud orientada hacia el mejoramiento permanente, a fin de cuentas:

“Para el caminante, lo importante es el camino, no la meta” – Lao Tse.

Segunda parte

Estructuración

2. Estructuración

Todo proceso de decisión supone una elección, no toda elección es una decisión. Las fases para la toma científica de una decisión suponen una abstracción del mundo real, para pasar a un nudo simbólico que permita clasificar y objetivizar las alternativas tras esta fase es preciso verificar los resultados obtenidos en la práctica.

No todo el proceso de decisión precisa un estudio detallado de sus fases y que la toma de decisiones se haga de forma intuitiva, pero la complejidad de la empresa hace necesario un análisis y descomposición de un proceso de decisión en sus fases.

Objetivos

- Nos permiten seleccionar la información relevante, elegir el modelo más adecuado y tomar la decisión concreta.
- La complejidad de los problemas económicos y sus frecuentes ramificaciones y conexiones con otros campos dificultan la definición de objetivos claros y concretos.
- Los objetivos generales no pueden definirse de forma amplia ni vaga.
- Los objetivos deben de concentrarse en unas líneas de acción que se descomponen en 2 niveles: Estrategia y táctica

Estrategias

- Es una ordenación de aquellos factores que están bajo el control del ente decisor.
- Se configura mediante la atribución de una atención especial a una necesidad específica.
- Existen varias estrategias aceptables; siendo la elegida un criterio de selección de las alternativas por las cuales se puede optar
- La eficacia de las distintas estrategias nos viene determinada por la contribución que las decisiones que de ellas se derivan aportan a los objetivos generales del sistema.
- Mientras que las estrategias se refieren al “*dónde*”, “*cuando*” y “*cómo*”, las tácticas indican la forma concreta de llevar a cabo la acción.

Tácticas

- Las estrategias se evalúan en base a su eficacia casa a los objetivos generales, las tácticas deben ser medidas por su eficiencia; eficiencia que vendrá determinada por el estudio de las actividades requeridas para llevar a cabo una acción táctica.

- La estrategia es más importante que la táctica, pero en una operación concreta puede ser preferible la elección táctica que provenga de una decisión estratégica menos eficaz.

Suboptimización

- Cuando ante un problema concreto la multiplicidad de los objetivos no permita una optimización de ellos, hay que recurrir a una alternativa que sea lo mas operativa posible y que armonice los objetivos en conflicto.
- La suboptimizacion consiste en la optimización de una táctica sin prestar atención a la eficacia estratégica de la solución. Esta técnica de buscar subóptimos debe de combinarse con un posterior intento de conseguir un conjunto óptimo.

Alternativas

- Son las distintas líneas de acción posibles.
- Las alternativas se deducen a partir de la información existente u en base.
- En la base preliminar a la toma de una decisión suele recurrirse a la enumeración de todas las posibles alternativas mediante técnicas como el Brain-Storning o los Skull-Sessions, en las que distintas personas aporta ideas sobre el proceso y sugieren aspectos que, de otro modo, pudieran pasar inadvertidos.

Estado de la naturaleza

- Hace referencia al medio en el que tiene que ligar la decisión; este factor es incontrolable, aunque puede tener un conocimiento total o parcial del mismo.
- El conocimiento total se da cuando el ente decisor sabe perfectamente como ha de comportarse el mismo.
- El conocimiento parcial si conoce la probabilidad de que exista un estado u otro de la naturaleza (decisión tomada en situación de riesgo).
- La decisión tomada en situación de incertidumbre cuando el ente decisor conoce los diferentes estados de la naturaleza que pueden darse pero se desconoce totalmente las probabilidades de que ocurra uno u otro estado.
- Entre estas 3 situaciones existen varios estados intermedios aunque aquí sean 3.
- Miller y M. Starr establecen una cuarta categoría entre la incertidumbre y el riesgo a la que denominan decisión tomada en caso de información parcial, lo cual ocurre cuando se conocen las probabilidades de los distinto estados de naturaleza en parte y no en su totalidad. Starr, distingue mas casos todavía:

- Decisiones tomadas en situación de ambigüedad, cuando no existe la posibilidad de conocer las condiciones relevantes del estado de la naturaleza
- Decisiones tomadas en situación de mutabilidad, cuando es imposible conocer la probabilidad no solamente de los estados de la naturaleza, si no del resultado de nuestra estrategia.

Modelos

- Un modelo es una representación de la realidad.
- Sirven para mostrarnos la relación entre causas y efectos, entre objetivos perseguidos y limitaciones al logro de los mismos.
- James L. Riggs clasifica los modelos en 3 tipos:
 - Físicos:
 - ✓ Representación real de un objeto o situación real en los que han reflejado algunas características de un objeto o situación existente.
 - ✓ Sirven para experimentar de la forma más real posible sin sufrir los efectos no deseables que la realidad pudiera motivar.
 - Esquemáticos
 - ✓ Representaciones graficas de una determinada realidad
 - Matemáticos:
 - ✓ Las ecuaciones y formulas matemáticas intentan reflejar los problemas económicos.
 - ✓ Constituyen la mejor forma de enfrentarse a la toma de decisiones en situaciones complejas.
 - ✓ Cuantifican y jerarquizan esta información.

Resultado

- Resultado es la consecuencia de haber elegido una u otra alternativa y su interacción con el estado de la naturaleza correspondiente.

La toma de decisiones es indispensable para las empresas, pues una decisión mal tomada puede conllevar a una situación comprometedora. Por tal razón, las personas encargadas de la toma de

decisiones deben estar capacitadas y conocer ampliamente todas las características y pasos que constituyen este proceso, y que las obliga a escoger entre dos o más alternativas.

Ser parte de la premisa de que la diversidad de información que recibe un individuo y el poco tiempo que tiene para tomar decisiones hacen que en muchas ocasiones elija la primera opción que satisfaga sus aspiraciones, sin seguir un proceso racional para la resolución de sus problemas. Esta característica hace necesario que éste cuente con algún sistema que le ayude a procesar información y a expresado de tal manera que el proceso decisorio sea más simple.

La modelación es el método matemático del proceso de toma de decisiones. En la mayoría de los debates sobre el método científico, se citan como esenciales las ocho etapas siguientes:

- 1) Percepción de la necesidad.
- 2) Formulación del problema.
- 3) Construcción del modelo.
- 4) Obtención de la solución.
- 5) Validación y verificación.
- 6) Establecimiento de controles.
- 7) Implementación y recomendación.
- 8) Evaluación de los resultados.

2.1 Matriz de decisiones⁹

Todas las técnicas para adoptar decisiones comprender unos elementos comunes que permiten mostrar de forma cuantitativa la valoración en términos de beneficios y/o pérdidas de las diferentes opciones que se presentan. Estos elementos son:

- La matriz de decisiones presenta en filas y columnas al conjunto de elementos que se emplea para decidir.
- Las estrategias se presentan en las filas de la matriz y son las opciones que el sujeto decisor contempla como realizables.
- Los estados de la naturaleza son los posibles escenarios o variables externas del entorno que el sujeto no puede controlar. No muestran necesariamente situaciones de la naturaleza a pesar de su nombre.

⁹ Ver tópicos 1.2.2.1 *Decisiones no competitivas* y 1.2.2.2 *Decisiones competitivas* de la parte 1 de este documento.

- Los resultados previstos que dependen de cada estrategia combinada con cada uno de los posibles estados de la naturaleza.
- Las probabilidades de que ocurra cada estado de la naturaleza, como norma en total deben sumar.

La forma de elegir varia en función de la información de que disponga el sujeto decisor. Salvo el caso improbable de información completa y perfecta, en un ambiente de certeza y, por lo tanto, los estados de la naturaleza se reducirán a uno con probabilidad igual a uno, los demás ambientes que se presentan se sitúan entre el riesgo y la incertidumbre.

El riesgo se produce cuando se conocen todos los estados de la naturaleza que se pueden dar y sus probabilidades de que ocurran y un ambiente de incertidumbre es aquel en el cual desconocemos las probabilidades asociadas a cada suceso.

Por ejemplo, una empresa lanza un producto innovador al mercado y no tenemos ni idea de la respuesta que puede tener en el mismo: puede ser un éxito, o bien puede ser que incluso ofenda a determinados consumidores, por lo que lluevan demandas...

Imaginemos que nos hallamos en una situación en la cual podemos tomar las decisiones A y B, que pueden dar lugar a tres resultados posibles (positivos en el ejemplo), que cuantificamos como sigue:

DECISIÓN/RESULTADOS	CONTEXTO 1	CONTEXTO 2	CONTEXTO 3
DECISIÓN A	60	50	40
DECISIÓN B	10	40	70

Este es el caso por ejemplo de un agricultor que puede realizar un cultivo u otro (DECISIÓN A ó B). En función de que el año sea seco (CONTEXTO 1), normal (CONTEXTO 2) o lluvioso (CONTEXTO 3), los resultados serán unos u otros, lo que se especifica en la tabla anterior.

Criterio de Laplace (racionalista o de igual verosimilitud): siendo las posibilidades de los contextos 1-2-3 iguales, el agricultor decidirá en función de la media aritmética de los resultados posibles para cada decisión.

$$\text{DECISIÓN A: } (60 + 50 + 40) / 3 = 50$$

$$\text{DECISIÓN B: } (10 + 40 + 70) / 3 = 40$$

Es decir, el resultado medio que se deriva de la decisión A es 50, y de la decisión B, 40. Si el año fuese lluvioso, la posibilidad mejor sería la B (resultado 70), y si el año fuese seco la A (resultado 60). Pero desconociendo si el año será seco, normal o lluvioso, lo mejor es optar por la decisión A, porque la media de los resultados de las situaciones posibles es la más alta. Siguiendo este criterio, el decisor escogerá la decisión que pueda aportar un mayor beneficio. En el ejemplo será la DECISIÓN B, que permite en el CONTEXTO 3 un resultado de 70, el mayor posible.

Este es el caso de quien no se juega en realidad mucho adoptando la DECISIÓN A ó B. Se arriesgará a ganar menos (el peor de los resultados posibles), sabiendo que existe una posibilidad de tener el resultado más alto posible. O al contrario, es el caso de quien necesita forzosamente un determinado resultado ("si perdido, al río..."). Imaginemos, por ejemplo, que el agricultor necesita unos ingresos altos ese año por algún motivo, so pena de tener que abandonar la actividad. Imaginemos que el mínimo de resultados aceptables para él sea 65. Quizás se arriesgue adoptando la DECISIÓN B, porque la DECISIÓN A no le aporta en ningún caso unos ingresos mínimos para continuar en su actividad (65). O sea, se ve forzado a tomar la DECISIÓN B porque un resultado de 70 es el único aceptable para él.

Siguiendo este criterio, el decisor escogerá la decisión que evite el menor beneficio (en el ejemplo) o que minimice la pérdida. En el ejemplo será la DECISIÓN A, que permite en el CONTEXTO 3 un resultado de 40, el menor posible adoptando la decisión A. No escogerá la DECISIÓN B porque en el peor de los casos (CONTEXTO 1), el resultado es 10. Este criterio es muy racional. Imaginemos que el agricultor se arruina y se va a la miseria en el caso de que el resultado sea 10 (es decir, tomando la DECISIÓN B y habiendo un tiempo seco). Lo racional es no asumir el riesgo de tener que padecer esta circunstancia. Por lo tanto, el agricultor tomará la DECISIÓN A, que permite ingresos mínimos más altos, aunque los ingresos máximos posibles sean inferiores a la DECISIÓN B.

Una estrategia es dominante cuando en todo caso sus resultados son más favorables para el decisor que otra estrategia, que denominamos dominada. Por ejemplo, en la matriz de decisiones que reproducimos abajo, en la cual los resultados son beneficios, parece claro que la estrategia A es dominante respecto de la estrategia B. No parece razonable escoger la estrategia B dado que en todos los contextos sus resultados son inferiores.

ESTRATEGIA/RESULTADOS	CONTEXTO 1	CONTEXTO 2	CONTEXTO 3
ESTRATEGIA A	60	50	40

ESTRATEGIA B	10	40	30
--------------	----	----	----

Imaginemos que en la tabla siguiente (la primera que pusimos) introducimos una posibilidad para cada uno de los contextos posibles.

DECISIÓN/RESULTADOS	CONTEXTO 1 (10%)	CONTEXTO 2 (20%)	CONTEXTO 3 (70%)
DECISIÓN A	60	50	40
DECISIÓN B	10	40	70

En el criterio de Laplace decíamos que las posibilidades de que se produzcan los contextos 1-2-3 eran similares. En ese caso, para conocer cuál es la decisión más favorable, solamente teníamos que hacer una media aritmética de los resultados posibles en las dos decisiones dadas (A y B).

Cuando los contextos 1-2-3 tienen posibilidades diferentes, el problema es algo más complejo. En este caso, tenemos que ponderar los resultados de las decisiones en cada uno de los contextos, con la posibilidad de cada uno de los contextos. Del siguiente modo:

$$\text{DECISIÓN A: } [(10 \cdot 60) + (20 \cdot 50) + (70 \cdot 40)] / 100 = 44$$

$$\text{DECISIÓN B: } (10 \cdot 10) + (20 \cdot 40) + (70 \cdot 70) / 100 = 58$$

Con la distribución dada de posibilidades entre los contextos 1-2-3 (10% / 20% / 70%), la posibilidad más alta es que se produzca el contexto 3, para el cual adoptando la decisión B maximizamos el resultado. Por este motivo, desde este punto de vista, siendo al 70 % el contexto 3 el más posible, lo más racional es adoptar la DECISIÓN B, que permite unos resultados estadísticamente más favorables.

2.2 Opciones en la toma de decisiones

Una forma metódica y recomendable de proceder ante la toma de decisiones es la siguiente:

- Fijar objetivos. Identificar los objetivos es el paso más importante de todos. Una vez que se define una meta, decidir cómo alcanzarla resulta mucho más fácil.
- Reunir información. El segundo paso de este procedimiento de toma de decisiones es reunir la información que sirva para lograr los objetivos que se buscan alcanzar.
- Identificar opciones alternativas. Cuando se tiene que tomar una decisión, siempre es tentador elegir la opción más obvia. Pero muchas veces una de las respuestas menos

evidentes es la que ayuda a alcanzar los objetivos deseados. Para poder tomar decisiones de modo efectivo hay que aprender a buscar bajo la superficie y descubrir ideas innovadoras.

- Evaluar opciones. Una vez que se han generado varias opciones, el siguiente paso es evaluar las más adecuadas. Para las decisiones de rutina o urgentes, se suele hacer esta evaluación rápidamente y de modo informal, guiándose por la experiencia y el sentido común. En cambio, para las decisiones más problemáticas o decisiones que tendrán un efecto significativo sobre la vida, resulta útil abordar el proceso de evaluación de modo más sistemático.
- Elegir la mejor opción. Uno de los pasos finales es elegir la mejor opción de la gama de soluciones o decisiones posibles que se han generado y evaluado. Las siguientes metodologías pueden ayudar en esta difícil tarea:
 - Implementar y monitorear la decisión. Tomar una decisión no es el fin del proceso. Hay que actuar y luego verificar si las cosas funcionan como se las pensó.
 - La oración. La oración es uno de los principales medios que tiene el hombre para comunicarse con Dios. Es fundamental presentar a Dios, en oración, el tema sobre el cual hay que decidir. Pedir su ayuda para obtener mayor claridad sobre la cuestión; y su guía para tomar e implementar la mejor decisión. Si se cumple un procedimiento sistemático, se hacen las preguntas citadas, y se presenta el tema a Dios en oración, se puede tomar la decisión con mayor tranquilidad; porque seguramente será una decisión acertada.

Tercera parte

Pronósticos

3. Pronósticos

Definición: En su sentido más amplio, el término pronóstico refiere a aquel conocimiento anticipado de lo que sucederá en un futuro mediante ciertos indicios que se suceden cumpliendo una función de anuncio. Viendo como se está esforzando en el estudio el pronóstico sobre su futuro laboral es realmente auspicioso.

Todo pronóstico por ende es una hipótesis, pero mediante el empleo de ciertas técnicas puede ser algo más significativo que nos dará un parámetro para tomar decisiones.

Realizar un pronóstico en las industrias es muy necesario a pesar de tener un grado de error y ser predecible, es fundamental para la planeación de gestión en general. El pronóstico tiene varias visiones y variables en general como el tiempo, el espacio y el producto.

Tipos de pronósticos

- Pronósticos subjetivos: Son aquellos en la que las personas de experiencia en ventas, mercadotecnia, gerentes expresan cual es su parecer respecto a las ventas que se puede esperar para el futuro. La desventaja de los métodos que siguen este tipo de pronósticos es que no son precisas y depende mucho de algunos factores ya sea externos e internos para dar opiniones, los vendedores pueden ser muy optimistas o muy pesimistas, también dependen mucho de la experiencia de las ventas que se realizo en un pasado inmediato. Este procedimiento no puede ser objeto de evaluación en cuanto errores.
- Pronósticos basados en un índice: Dependen de un índice de base para su precisión además del grado de correlación entre la demanda real y el pronóstico basado en el índice.
- Pronósticos basados en promedios: Este pronóstico se basa en el promedio de los datos de ventas, quiere decir que la demanda anterior representa la demanda futura. Con una buena aplicación de los métodos de este tipo de pronósticos y ciertos ajustes, el promedio de los datos de la demanda puede dar un valor aproximado muy bueno. Sin embargo, existen mejores técnicas y más exactas que pueden utilizarse.
- Pronósticos estadísticos: El pronóstico basado en el análisis estadístico de la demanda es el procedimiento más exacto siempre que exista una relación entre el pasado y el futuro. En realidad el pasado brinda la mejor base para las decisiones referentes a la acción futura.

- **Métodos combinados:** Es posible y quizá sea deseable combinar algunos o todos los tipos de pronósticos mencionados y hasta añadirle otros métodos. La seguridad de que se alcanza el grado necesario de exactitud puede conocerse por la estrecha coincidencia de los pronósticos siguiendo varios métodos.

Importancia de la exactitud en el pronóstico

Cualquiera sea el método u técnica utilizada, lograr tener un pronóstico con mayor exactitud es fundamental ya que de esta dependen muchas decisiones futuras en general en control de materiales, producción y ventas.

Es importante para conseguir mayor exactitud determinar el tipo de demanda ya que los métodos para pronosticar según esta nos darán un resultado diferente, y solo uno es el acertado.

Cabe recalcar que no hay que confundir precisión con exactitud de un pronóstico; ser preciso con datos erróneos o con el método inadecuado nos llevara a un resultado irreal e inadecuado.

Análisis y discusión de la variable selección del método de pronóstico

Hanke y Ritch (1996), opinan que es difícil determinar que método de pronóstico es mejor, ya que no es necesario confiar en sistemas demasiado complejos para obtener los resultados esperados, de lo que se trata es de definir la situación real en que se encuentre la empresa y del tipo de información que se requiera con el pronóstico.

Cuando se comparan las empresas manufactureras y de servicio, las primeras llevan a cabo más repetición y realizan mayores ajustes a sus pronósticos en comparación a las de servicio, ya que las manufactureras utilizan con mayor frecuencia los métodos cuantitativos por ser más confiables. Este tipo de empresas le da mayor importancia a los pronósticos y a la precisión en comparación con las empresas de servicios.

Para elegir, de entre cualquiera de los métodos que existen, es necesario saber las condiciones que existen en el mercado, para esto es recomendable realizar pruebas de medición de error.

Monks (1991) propone una metodología a partir de la cual podemos tomar la decisión correcta para la selección del método de pronósticos más adecuado. A continuación se describen los pasos:

1. El tipo de pronóstico (demanda, tecnológica, etc.).
2. El horizonte de tiempo (corto, mediano, o largo plazo).

3. La base de datos disponible.
4. La metodología disponible (cualitativa o cuantitativa).

Los primeros autores del tema sobre pronósticos, especulaban acerca de cuáles serían los métodos más precisos; por ejemplo los trabajos de Wheelwright y Makridakis, (famosos a mediados de los setentas) presentaban unas evaluaciones que se reducen a la expresión “*entre más complicado, mejor*” olvidándose con ello las consideraciones del costo. Aún desde el punto de vista de dichos autores, queda pendiente la pregunta, si se desea pronosticar una variable en particular, ¿cuál es la utilidad de los diversos métodos? Desde aquellas publicaciones, los lineamientos ofrecidos fueron criticados de manera empírica, con lo cual en circunstancias particulares, se demostró que eran engañosos (Fildes y Howell 1979).

A medida que transcurre la década de los 80's, se tiene la desagradable sensación de que las bases empíricas de muchas generalizaciones son débiles. Es difícil encontrar reglas sencillas mediante las cuales el pronosticador pueda seleccionar el método (dentro de las limitaciones de costo) que le permita lograr el nivel de precisión deseado. Tampoco se espera que el analista examine todos los métodos posibles, comparándolos y evaluándolos. Tal proceder es inadmisibles, salvo cuando se trata del más importante proyecto. En lugar de ello, las elecciones se hacen teniendo en cuenta un gran número de factores como los que a continuación se describen:

- Concepciones previas del pronosticador. Si únicamente se conoce un método, ese será el que se use. Si se invirtió mucho tiempo en el aprendizaje de un método complicado, es probable que ese esfuerzo influya indebidamente en la elección. También ejercerán influencias importantes la experiencia previa y la investigación relacionada que haya llevado a cabo el pronosticador.
- Como se empleará el pronóstico. Si el encargado de la toma de decisiones necesita una evaluación del efecto que tendrá, por ejemplo, la publicidad, como parte de un pronóstico de mercado, el enfoque seleccionado tendrá que responder a esa interrogante.
- Complejidad y facilidad de comprensión. Es muy difícil emplear decisiones, asimismo, también se rechazará un modelo que no incluya aquellos elementos que el encargado de la toma de decisiones juzgue importantes.
- Prueba de comparación. Si se toma en serio la tarea de selección, se desarrollarán paralelamente algunos de los métodos más plausibles y se probará su utilidad para el pronóstico. Tal como se ha mencionado, este análisis no incluirá todas las alternativas posibles.

Las decisiones importantes que resientan la inexactitud de los pronósticos, requieren de un cuidadoso análisis de las posibles alternativas. El error más probable es limitar dicho análisis a un

número reducido de métodos de pronósticos. Armstrong (1978), ha sido muy convincente al señalar que se tienen muchas ventajas al considerar más de un método y que entre más difieran estos, mejor. Por lo tanto, las organizaciones deben adoptar algún procedimiento de pronósticos que, en los problemas importantes, permitan una comparación fácil de las distintas alternativas. Esto significa que el sistema de información debe estar bien desarrollado y que es necesario llevar un registro histórico de los resultados anteriores de los pronósticos.

Los costos de mantenimiento de tales registros son bajos y brindan un mayor tiempo para pronosticar, en lugar de invertirlo recabando datos, con la base de datos también se facilitará el empleo de una gran variedad de modelos alternativos, estadísticos, económicos y de mercadotecnia.

3.1 Técnicas cuantitativas de pronóstico

Un modelo de regresión con un alto porcentaje de variaciones explicado, puede no ser bueno para predecir, ya que el que la mayoría de los puntos se encuentren cercanos a la curva de regresión, no implica que todos lo estén, y puede ocurrir, que justamente para aquel rango de valores en el que el investigador está interesado, se alejen de la curva, y por tanto, el valor predictivo puede alejarse mucho de la realidad.

La única forma de poder evaluar el poder predictivo del modelo es tras la observación y el análisis de los gráficos de residuales, es decir, de diagramas de dispersión, en los que en el eje de ordenadas se colocan los residuales, y en el eje de abscisas se colocan o bien x , y , o y^* .

Sólo si la banda de residuales es homogénea, y se encuentran todos los puntos no demasiado alejados del 0 (aunque depende de la escala de medida), diremos, que un modelo con un alto poder explicativo, también es bueno para predecir.

Causalidad

Es muy importante resaltar el hecho, de que un modelo sea capaz de explicar de manera adecuada las variaciones de la variable dependiente en función de la independiente, no implica que la primera sea causa de la segunda.

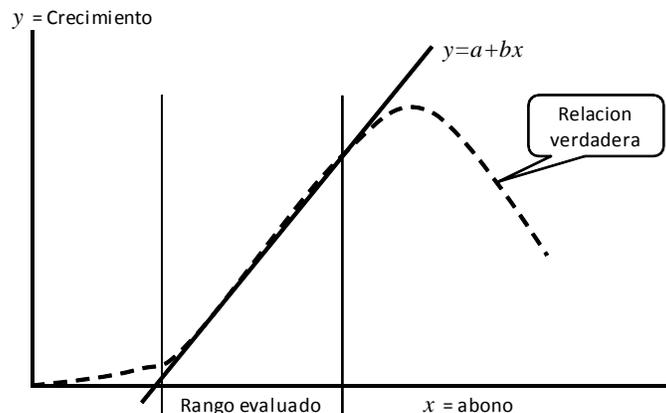
Es un error muy común confundir *causalidad* con *casualidad*. El hecho de que las variables estén relacionadas no implica que una sea causa de la otra, ya que puede ocurrir el hecho de que se esté dando una variación concomitante, por el simple hecho de que las dos son causa de una

tercera. Por ejemplo, si se realiza un estudio en el que se analiza el número de canas (x) y la presión arterial (y) podría encontrarse una relación lineal casi perfecta. Eso no significa que el tener canas aumente la presión arterial, lo que verdaderamente está ocurriendo es que es la edad, la causante, de que se tengan más canas y una tendencia a tener más alta la presión arterial.

Extrapolación

Es importante resaltar el hecho de que al hacer predicciones, no deben extrapolarse los resultados más allá del rango de la variable x utilizado para ajustar el modelo, ya que más allá de ese rango se desconoce qué puede estar ocurriendo.

De todos es conocido que las plantas necesitan abono para poder crecer y que hay que abonarlas, de modo que en principio, cuanto más abono se les suministre más crecerán. Pero ¿qué ocurriría si se abonase demasiado el suelo? Obviamente, moriría la planta. Esto se traduce en que conforme aumenta la cantidad de abono, el crecimiento es más notable, pero a partir de un punto, la planta deja de crecer y muere, como refleja la siguiente figura que ilustra el peligro de extrapolar los resultados.



Comparación de una posible verdadera relación entre cantidad de abono y crecimiento de una planta, con los resultados de una recta de regresión obtenida mediante el estudio de un rango limitado de valores de abono.

3.1.1 Regresión (Método de los mínimos cuadrados)

La regresión es una herramienta que determina las causales explicativas de un determinado elemento del mercado objeto del análisis. Las causales explicativas se definen como variables independientes y el elemento del mercado objeto del análisis variable dependiente. Existen dos modelos básicos de regresión:

1. Modelo de regresión simple o de dos variables.
2. Modelo de regresión múltiple.

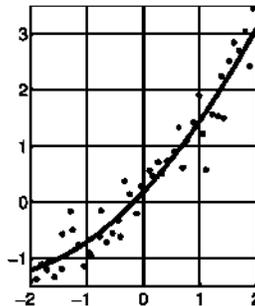
3.1.1.1 Modelo de regresión simple

Esta herramienta relaciona una variable dependiente (elemento del mercado objeto del análisis), con una variable independiente (variable causal), de esta manera si se tiene información proyectada de la variable independiente, se puede predecir el comportamiento de la variable dependiente dentro de un determinado margen de error, que se podrá estimar de varias maneras. Una de ellas es a través del coeficiente R^2 .

3.1.1.1.1 Correlación lineal

Es una técnica de análisis numérico encuadrada dentro de la optimización matemática, en la que, dados un conjunto de pares ordenados: (variable independiente, variable dependiente) y una familia de funciones, se intenta encontrar la función, dentro de dicha familia, que mejor se aproxime a los datos (un "mejor ajuste"), de acuerdo con el criterio de mínimo error cuadrático.

Desde un punto de vista estadístico, un requisito implícito para que funcione el método de mínimos cuadrados es que los errores de cada medida estén distribuidos de forma aleatoria. El teorema de Gauss-Márkov prueba que los estimadores mínimos cuadrados carecen de sesgo y que el muestreo de datos no tiene que ajustarse, por ejemplo, a una distribución normal. También es importante que los datos recogidos estén bien escogidos, para que permitan visibilidad en las variables que han de ser resueltas (para dar más peso a un dato en particular, véase mínimos cuadrados ponderados).



El resultado del ajuste de un conjunto de datos a una función cuadrática.

Existen numerosas leyes físicas en las que se sabe de antemano que dos magnitudes x e y se relacionan a través de una ecuación lineal:

$$y = ax + b$$

Donde las constantes b (ordenada en el origen) y a (pendiente) dependen del tipo de sistema que se estudia y, a menudo, son los parámetros (o coeficientes de regresión) que se pretende encontrar.

$$a = \frac{n(\sum x_i y_i) - (\sum x_i)(\sum y_i)}{n(\sum x_i^2) - (\sum x_i)^2} \quad (1)$$

$$b = \frac{(\sum y_i) - a(\sum x_i)}{n} \quad (2)$$

Donde n es el número de medidas y Σ representa la suma de todos los datos que se indican.

Los errores en las medidas, se traducirán en errores en los resultados de a y b . Se describe a continuación un método para calcular estos errores. En principio, el método de mínimos cuadrados asume que, al fijar las condiciones experimentales, los valores y_i de la variable independiente se conocen con precisión absoluta (esto generalmente no es así, pero lo aceptamos como esencial en el método). Sin embargo, las mediciones de la variable x , irán afectadas de sus errores correspondientes, si ε es el valor máximo de todos estos errores, entonces se tiene:

$$\Delta a = \frac{\varepsilon \sqrt{n}}{\sqrt{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}} \quad (3)$$

$$\Delta b = \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}} \quad (4)$$

La pendiente de la recta se escribirá $a \pm \Delta a$, y la ordenada en el origen $b \pm \Delta b$.

Ejemplo 4. La fuerza F de tracción sobre un muelle y el alargamiento A que experimenta éste están ligados a través de una ley lineal:

$$A = (1/K)F + P$$

Donde el inverso de la pendiente (K) es una característica propia de cada muelle: la llamada constante elástica del mismo.

Supongamos que un muelle sometido a tracción, se ha cargado con diferentes pesos (F, variable independiente o x) y se han anotado los alargamientos (A variable dependiente o y).

Cargas sucesivas F(x _i) Kg	Lecturas sucesivas A(y _i) mm
60	200
120	400
150	500
210	700
260	900
290	1000

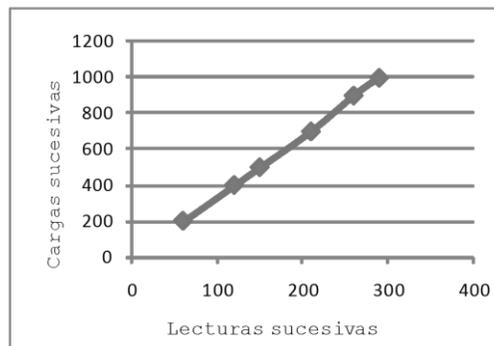
Obtener:

- Una expresión que pueda estimar la deformación para este muelle con cualquier fuerza de tracción.
- La constante elástica para este muelle.
- El grado de error de los parámetros a y b si se pretende que la expresión obtenida en el primer inciso tenga una exactitud mínima del 80%.

Solución.

Se verifica en primer lugar si los datos presentan una tendencia lineal para lo cual se grafican:

Cargas sucesivas F(x _i) Kg	Lecturas sucesivas A(y _i) mm
60	200
120	400
150	500
210	700
260	900
290	1000



En base a que la tendencia de los datos es lineal se aplica el método de mínimos cuadrados para una correlación lineal.

a) Una expresión que pueda estimar el alargamiento para este muelle con cualquier fuerza de tracción.

Para lo cual se hace uso de las siguientes expresiones:

$$y = ax + b$$

Donde:

$$a = \frac{n(\sum x_i y_i) - (\sum x_i)(\sum y_i)}{n(\sum x_i^2) - (\sum x_i)^2} \quad (1)$$

$$b = \frac{(\sum y_i) - a(\sum x_i)}{n} \quad (2)$$

Se debe evaluar a y b para lo cual se requiere estimar $\sum x_i$, $\sum y_i$, $\sum x_i y_i$ y $\sum x_i^2$. n=es el número de medidas=6.

n	x_i	y_i	$x_i y_i$	x_i^2
1	60	200	12000	3600
2	120	400	48000	14400
3	150	500	75000	22500
4	210	700	147000	44100
5	260	900	234000	67600
6	290	1000	290000	84100
Σ	1090	3700	806000	236300

Con las expresiones (1) y (2) se evalúan los parámetros a y b:

$$a = \frac{(6)(806000) - (1090)(3700)}{(6)(236300) - (1090)^2} = 3.4959$$

$$b = \frac{3700 - (3.4959)(1090)}{6} = -18.4218$$

Por analogía: $y=l$, $a=(1/K)$, $x=F$ y $b=P$.

Por lo tanto: $A=aF+b$ y la expresión buscada es:

$$A=3.4959F-18.4218$$

Expresión con la que podemos interpolar o extrapolar datos para este sistema en particular.

b) La constante elástica para este muelle.

Por analogía deducimos que $a = 1/K$, entonces $K = 1/a = 1/3.4959 = 0.2860$.

$$K = 0.2860$$

c) El grado de error de los parámetros a y b si se pretende que la expresión obtenida en el primer inciso tenga una exactitud mínima del 80%.

Con estos datos podemos deducir el valor de ε :

$\varepsilon = 100\%$ -grado de exactitud = $100\%-80\%=20\%$ o sea $\varepsilon = 0.2$.

Aplicando la expresión (3) Y (4):

$$\Delta a = \frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sqrt{n\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}} \quad (3)$$

$$\Delta b = \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}} \quad (4)$$

Por lo tanto:

$$\Delta a = \frac{(\sqrt{6})(0.2)}{\sqrt{(6)(236300) - (1090)^2}} = 0.00102217$$

$$\Delta b = \frac{0.2}{\sqrt{6}} = 0.0816496$$

$$a = 3.4959 \pm 0.00102217 \text{ m/Kg}, b = -18.4218 \pm 0.0816496 \text{ mm}$$

Ajuste por mínimos cuadrados mediante comandos EXCEL

Mediante la hoja de cálculo EXCEL también, aun sin graficar la recta de ajuste, es posible calcular el valor de la pendiente (a), la ordenada en el origen (b) y el coeficiente de correlación¹⁰ (R^2), para ello, nos situamos en una celda en blanco y escribimos:

$$=PENDIENTE (\text{conocido } y, \text{ conocido } x) = 3.4959$$

Al escribir en una celda en blanco: =PENDIENTE (Señalamos con *click* izquierdo todos los valores de y y ponemos coma, posteriormente volvemos a señalar con *click* izquierdo todos los valores de x y cerramos el paréntesis, al dar *enter* aparece el valor de la pendiente, o sea del valor de la constante a .

Nos volvemos a situar en otra celda en blanco y escribimos:

$$=INTERSECCION EJE (\text{conocido } y, \text{ conocido } x) = -18.4153$$

Al escribir en una celda en blanco: =INTERSECCION (Señalamos con *click* izquierdo todos los valores de y y ponemos coma, posteriormente volvemos a señalar con *click* izquierdo todos los valores de x y cerramos el paréntesis, al dar *enter* aparece el valor de la ordenada al origen, o sea del valor de la constante b .

Una vez más nos volvemos a situar en otra celda en blanco y escribimos:

$$=COEF.DE.CORREL (\text{conocido } y, \text{ conocido } x) = 0.9995$$

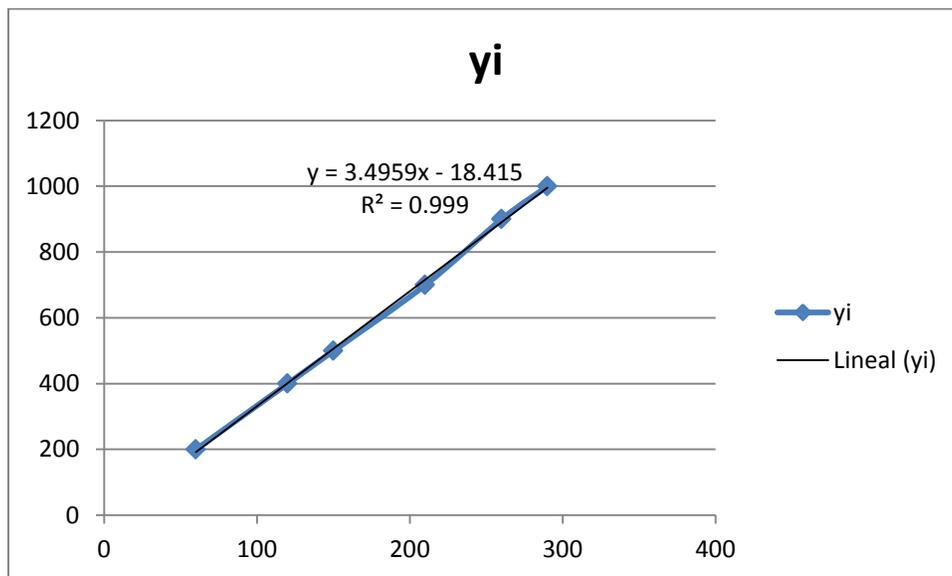
Al escribir en una celda en blanco: =COEF.DE.CORREL (Señalamos con *click* izquierdo todos los valores de y y ponemos coma, posteriormente volvemos a señalar con *click* izquierdo todos los valores de x y cerramos el paréntesis, al dar *enter* aparece el valor del coeficiente de correlación, o sea del valor de R^2 .

¹⁰ Ver tópico: 3.1.1.1.1.1 Coeficiente de correlación lineal.

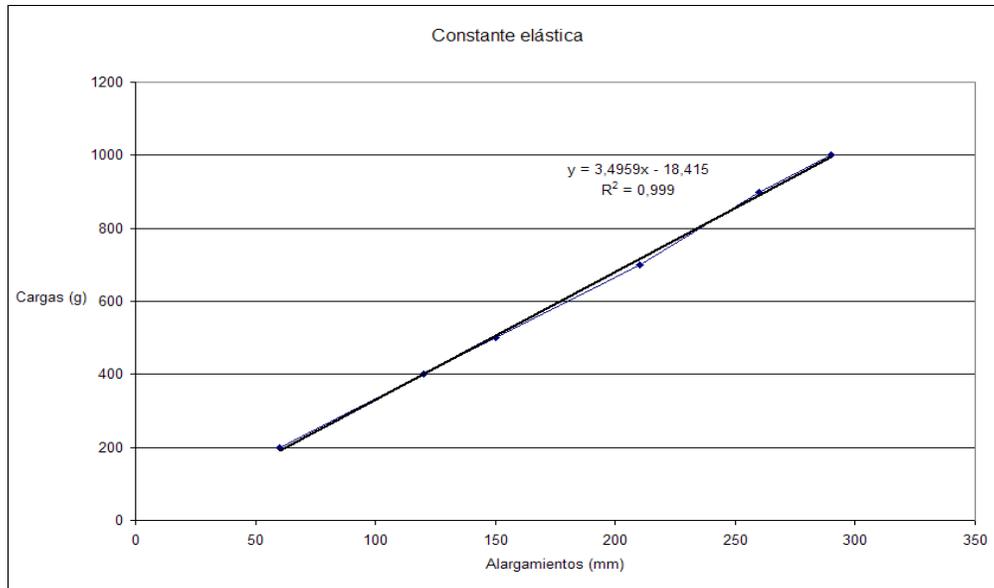
Ajuste por mínimos cuadrados mediante el asistente graficador EXCEL

- 1.- En tabla de datos seleccionar x y y , y hacemos clic sobre el asistente *Insertar*.
- 2.- Seleccionamos *Dispersión* y luego la opción *Dispersión con líneas suavizadas* y marcadores, automáticamente aparece una grafica.
- 3.- El gráfico nos muestra los puntos dispuestos en el plano xy , ahora vamos a buscar la recta de ajuste, para ello, hacemos *click* derecho directamente sobre la tendencia de los datos (línea que muestra la gráfica) y aparecerá un menú en donde debemos seleccionar *Agregar línea de tendencia*, posterior a esto aparecerá otro menú llamado *Formato de línea de tendencia*, hacemos *click* izquierdo en *Presentar ecuación en grafico* y *Presentar el valor R^2 cuadrado en el grafico*, al seleccionar finalmente *cerrar* en dicho menú nos aparece la recta de ajuste, su ecuación correspondiente y el coeficiente de correlación al cuadrado.

Este será el aspecto final del grafico:



Con un poco de conocimiento de EXCEL, podemos maquillar el anterior grafico de la forma siguiente:



3.1.1.1.1 Coeficiente de correlación lineal

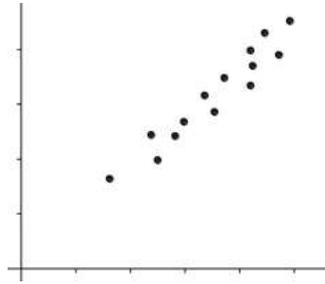
La correlación trata de establecer la relación o dependencia que existe entre las dos variables que intervienen en una distribución bidimensional sin necesidad de graficar los datos. Es decir, determina si los cambios en una de las variables influyen en los cambios de la otra. En caso de que suceda, diremos que las variables están correlacionadas o que hay correlación entre ellas.

El coeficiente de correlación lineal es el cociente entre la covarianza y el producto de las desviaciones típicas de ambas variables. El coeficiente de correlación lineal se expresa mediante la letra R^2 .

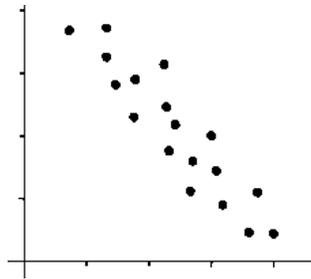
$$R^2 = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}$$

Tipos de correlación

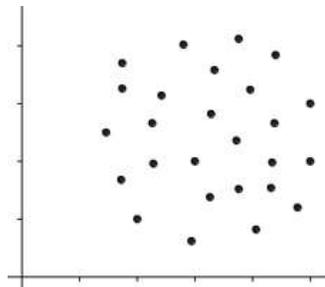
1.- *Correlación directa*: La correlación directa se da cuando al aumentar una de las variables la otra aumenta. La recta correspondiente a la nube de puntos de la distribución es una recta creciente.



2.- *Correlación inversa*: La correlación inversa se da cuando al aumentar una de las variables la otra disminuye. La recta correspondiente a la nube de puntos de la distribución es una recta decreciente.



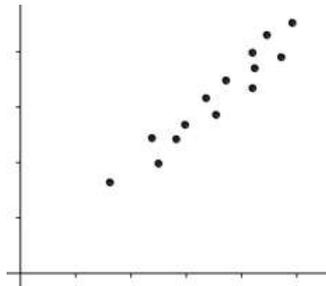
3.- *Correlación nula*: La correlación nula se da cuando no hay dependencia de ningún tipo entre las variables. En este caso se dice que las variables son incorreladas y la nube de puntos tiene una forma redondeada.



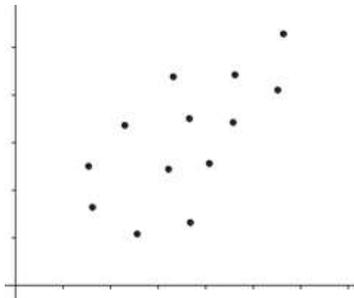
Grado de correlación

El grado de correlación indica la proximidad que hay entre los puntos de la nube de puntos. Se pueden dar tres tipos:

1.- *Correlación fuerte*: La correlación será fuerte cuanto más cerca estén los puntos de la recta.



2.- *Correlación débil*: La correlación será débil cuanto más separados estén los puntos de la recta.



Propiedades del coeficiente de correlación

1.- El coeficiente de correlación no varía al hacerlo la escala de medición. Es decir, si expresamos la altura en metros o en centímetros el coeficiente de correlación no varía.

2.- El signo del coeficiente de correlación es el mismo que el de la covarianza:

- Si la covarianza es positiva, la correlación es directa.
- Si la covarianza es negativa, la correlación es inversa.
- Si la covarianza es nula, no existe correlación.

3.- El coeficiente de correlación lineal es un número real comprendido entre -1 y 1 . Es decir: $-1 \leq R^2 \leq 1$.

4.- Si el coeficiente de correlación lineal toma valores cercanos a -1 la correlación es fuerte e inversa, y será tanto más fuerte cuanto más se aproxime R^2 a -1 .

5.- Si el coeficiente de correlación lineal toma valores cercanos a 1 la correlación es fuerte y directa, y será tanto más fuerte cuanto más se aproxime R^2 a 1 .

6.- Si el coeficiente de correlación lineal toma valores cercanos a 0, la correlación es débil.

7.- Si $R^2 = 1$ ó -1 , los puntos de la nube están sobre la recta creciente o decreciente. Entre ambas variables hay dependencia funcional.

En resumen:

$$R^2 = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}$$

Coef. de correlacion

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n} - \bar{x}^2} \\ \sigma_y = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n y_i^2}{n} - \bar{y}^2} \\ \sigma_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i}{n} - \bar{x} \bar{y} \end{array} \right.$$

Desviaciones típicas marginales Covarianza

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \\ \bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{n} \end{array} \right.$$

Centro de gravedad

Ejemplo 5. Las notas de 12 alumnos de una clase en Matemáticas y Física son las siguientes:

Matemáticas	2	3	4	4	5	6	6	7	7	8	10	10
Física	1	3	2	4	4	4	6	4	6	7	9	10

Hallar el **coeficiente de correlación** de la distribución e interpretarlo.

Solución.

Para tal efecto elaboramos la siguiente tabulación que contiene los elementos de las expresiones algebraicas a utilizar:

n	Matem. x_i	Física y_i	$x_i \cdot y_i$	x_i^2	y_i^2
1	2	1	2	4	1
2	3	3	9	9	9
3	4	2	8	16	4

4	4	4	16	16	16
5	5	4	20	25	16
6	6	4	24	36	16
7	6	6	36	36	36
8	7	4	28	49	16
9	7	6	42	49	36
10	8	7	56	64	49
11	10	9	90	100	81
12	10	10	100	100	100
Σ	72	60	431	504	380

1º Hallamos las medias aritméticas o centro de gravedad:

$$\bar{x} = \frac{\Sigma x_i}{n} \quad \bar{y} = \frac{\Sigma y_i}{n}$$

Por lo tanto:

$$\bar{x} = \frac{72}{12} = 6 \quad \bar{y} = \frac{60}{12} = 5$$

2º Calculamos la covarianza.

$$\sigma_{xy} = \frac{\Sigma x_i y_i}{n} - \bar{x} \bar{y}$$

Por lo tanto:

$$\sigma_{xy} = \frac{431}{12} - (6)(5) = 5.92$$

3º Calculamos las desviaciones típicas.

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{n} - \bar{x}^2} \quad \sigma_y = \sqrt{\frac{\sum y_i^2}{n} - \bar{y}^2}$$

Por lo tanto:

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{504}{12} - (6)^2} = 2.45 \quad \sigma_y = \sqrt{\frac{380}{12} - (5)^2} = 2.58$$

4º Aplicamos la fórmula del **coeficiente de correlación lineal**.

$$R^2 = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}$$

Por lo tanto:

$$R^2 = \frac{5.92}{(2.45)(2.58)} = 0.94$$

Al ser el coeficiente de correlación positivo, la correlación es directa. Como el coeficiente de correlación está muy próximo a 1 la correlación es muy fuerte y puede entonces aplicarse el método de mínimos cuadrados para estimar una expresión matemática que nos pronostique el comportamiento de la variable dependiente.

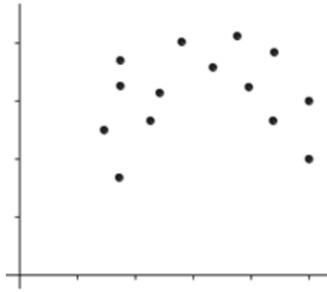
3.1.1.1.2 Coeficiente de determinación

El Coeficiente de determinación, se calcula elevando al cuadrado el coeficiente de correlación, luego se multiplica por 100, para expresar el resultado como porcentaje. El Coeficiente de Determinación, indica la proporción o porcentaje, en que la variable "y"(variable dependiente) debe su variación a la variable "x"(variable independiente).

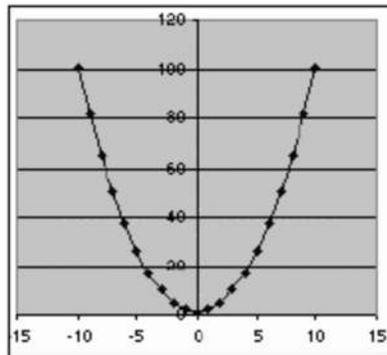
$$R = \sqrt{R^2}$$

3.1.1.1.2 Correlación parabólica

Supóngase que al representar gráficamente la correspondiente distribución bidimensional, se obtiene la siguiente figura:



Se observa una clara relación entre las dos variables, pero claramente no lineal. Por tanto, deberá buscar la función que ha de describir la dependencia entre las dos variables. Dicha dependencia puede ser parabólica, hiperbólica, logarítmica, exponencial y potencial. Estas notas se limitarán únicamente al estudio de las funciones parabólicas.



Parábola de regresión

En muchos casos, es una función de segundo grado la que se ajusta lo suficiente a la situación real dada. La expresión general de un polinomio de 2º grado es:

$$y=a+bx+cx^2$$

Donde a , b y c son los parámetros.

El problema consiste, por tanto, en determinar dichos parámetros para una distribución dada. Seguiremos para ello, un razonamiento similar al que hicimos en el caso del modelo de regresión lineal simple, utilizando el procedimiento de ajuste de los mínimos cuadrados.

Donde, siguiendo la notación habitual, y_i son los valores observados de la variable dependiente, e y_i^* los valores estimados según el modelo. Por tanto, podemos escribir:

$$y^* = a + bx + cx^2$$

Para encontrar los valores de a , b y c se hace uso de las ecuaciones normales de Gauss (igual que en el caso de la regresión lineal simple):

$$\sum y_i = na + b\sum x_i + c\sum x_i^2$$

$$\sum x_i y_i = a\sum x_i + b\sum x_i^2 + c\sum x_i^3$$

$$\sum x_i^2 y_i = a\sum x_i^2 + b\sum x_i^3 + c\sum x_i^4$$

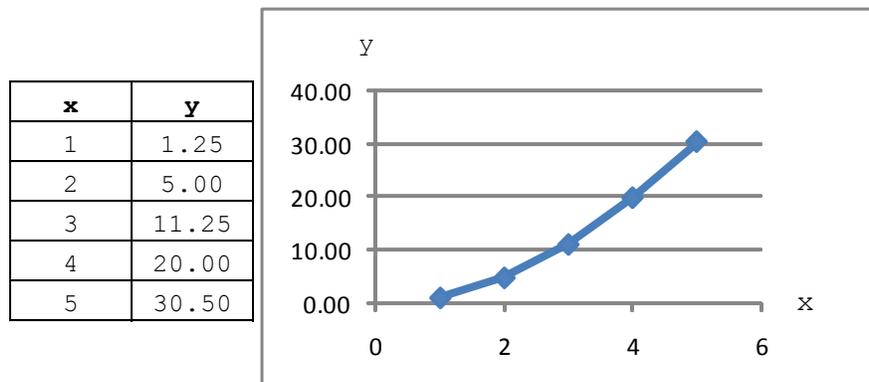
Ejemplo 6. Sea el siguiente conjunto de datos bidimensionales (x, y) :

x	1	2	3	4	5
y	1.25	5.00	11.25	20.00	30.50

Obtener una expresión que correlacione los datos anteriores.

Solución.

Se verifica en primer lugar el tipo de tendencia que siguen los datos para lo cual se grafican:



En base a que la tendencia de los datos es parabólica se aplica el método de mínimos cuadrados para este tipo de funciones.

Ajuste de una función parabólica: $y^* = a + bx + cx^2$

Como se hará uso de las siguientes expresiones:

$$\Sigma y_i = na + b\Sigma x_i + c\Sigma x_i^2 \quad (1)$$

$$\Sigma x_i y_i = a\Sigma x_i + b\Sigma x_i^2 + c\Sigma x_i^3 \quad (2)$$

$$\Sigma x_i^2 y_i = a\Sigma x_i^2 + b\Sigma x_i^3 + c\Sigma x_i^4 \quad (3)$$

Se requiere evaluar: Σx_i^2 , Σx_i^3 , Σx_i^4 , $\Sigma x_i y_i$ y $\Sigma x_i^2 y_i$ para evaluar los parámetros (coeficientes de correlación) a, b y c.

n	x_i	y_i	x_i^2	x_i^3	x_i^4	xy	x^2y
1	1	1.25	1.00	1.00	1.00	1.25	1.25
2	2	5.00	4.00	8.00	16.00	10.00	20.00
3	3	11.25	9.00	27.00	81.00	33.75	101.25
4	4	20.00	16.00	64.00	256.00	80.00	320.00
5	5	30.50	25.00	125.00	625.00	152.50	762.50
Σ	15	68.00	55.00	225.00	979.00	277.50	1205.00

Por lo tanto, sustituyendo en (1), (2) y (3), tenemos:

$$68 = 5a + 15b + 55c$$

$$277.5 = 15a + 55b + 225c$$

$$1205 = 55a + 225b + 979c$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones¹¹ por el método de Reducción o eliminación de Gauss, se obtiene: $a = -0.47$, $b = 0.51$ y $c = 1.14$

Por consiguiente la expresión que nos correlaciona estos datos es:

$$\mathbf{y^* = -0.47 + 0.51x + 1.14x^2}$$

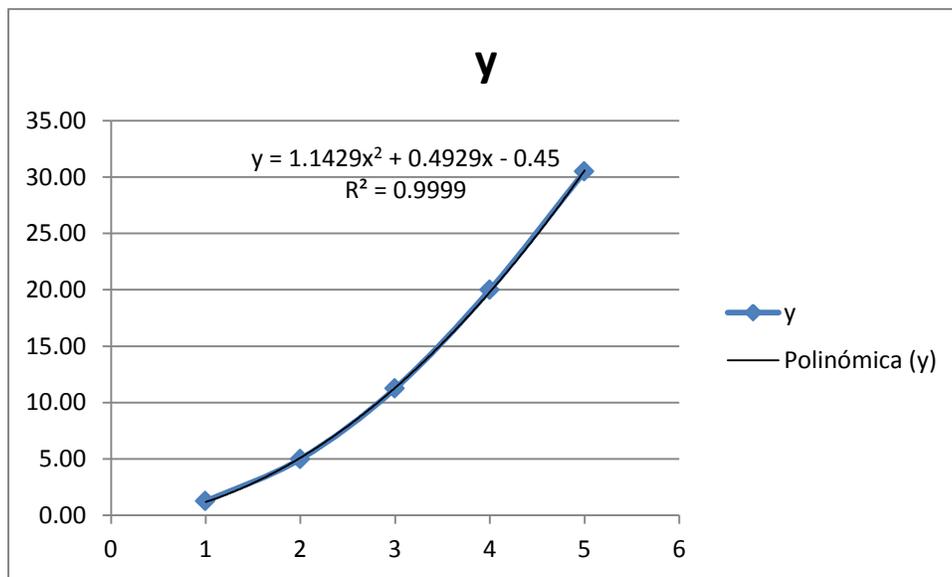
¹¹ Ver tópico 3.1.1.1.2.1 Ecuaciones de primer grado con tres incógnitas para revisar métodos.

Expresión con la que podemos interpolar o extrapolar datos para este sistema en particular.

Ajuste por mínimos cuadrados mediante el asistente graficador EXCEL

Señalar datos → Insertar → Dispersión → Dispersión con líneas suaves y marcadores → Click derecho en línea de tendencia del grafico → Agregar línea de tendencia → Marcar: Polinómica, Presentar ecuación en el grafico y Presentar el valor R cuadrado en el grafico.

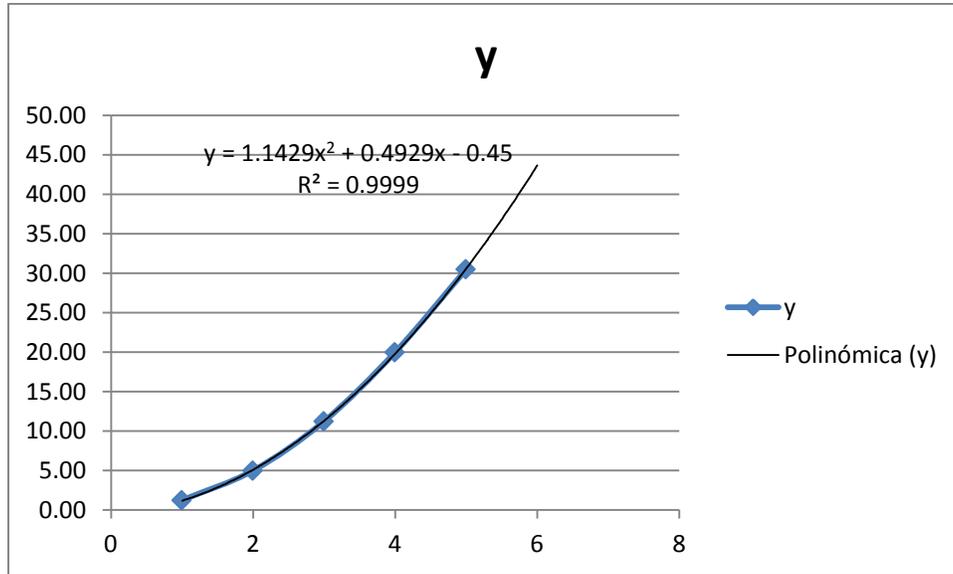
El aspecto final del grafico, será:



Si se desea extrapolar un dato, basta con reiniciar las instrucciones adicionando según lo siguiente:

Señalar datos → Insertar → Dispersión → Dispersión con líneas suaves y marcadores → Click derecho en línea de tendencia del grafico → Agregar línea de tendencia → Marcar: Polinómica, en Adelante poner 1, Presentar ecuación en el grafico y Presentar el valor R cuadrado en el grafico.

El aspecto del grafico, entonces será:



3.1.1.1.2.1 Ecuaciones de primer grado con tres incógnitas

Se llama sistema de ecuaciones de primer grado con tres incógnitas, donde $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3; k_1, k_2, k_3$ son números reales donde x, y, z son las incógnitas o variables.

$$a_1x + b_1y + c_1z = k_1$$

$$a_2x + b_2y + c_2z = k_2$$

$$a_3x + b_3y + c_3z = k_3$$

Ejemplo:

$$3x - y - z = 5$$

$$2x + y - z = -3$$

$$x + 2y + z = 0$$

Existen diversos procedimientos que permiten hallar el conjunto solución de un sistema de tres ecuaciones con tres variables. Entre ellas tenemos:

1. Método de Reducción. Por este método, se trata de obtener (eliminando una misma variable en las tres ecuaciones del sistema) dos ecuaciones con solo dos variables para luego, al hallar el valor de estas variables, determinar sustitución en cualquiera de estas tres primeras ecuaciones, el valor de la tercera ecuación.

Los pasos del método se describen a continuación:

- i. Se elimina una de las variables (la más adecuada) tomando dos a dos las ecuaciones del sistema.

- ii. Se forma un sistema con dos variables y se resuelve.
 - iii. Se sustituyen los valores de estas dos variables en una de las ecuaciones del sistema (la más simple) y se halla la tercera variable.
2. Método de sustitución.
 3. Método de igualación.
 4. Método de determinantes. Dado un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas, a él están asociadas dos matrices: A matriz de coeficientes y A^* matriz ampliada (se le añade a la matriz de coeficientes la columna de términos independientes). Para resolver el sistema por este método hay varios sub-métodos:
 - a. Método de Gauss¹²: Tomamos la matriz ampliada asociada al sistema y hacemos las transformaciones de filas necesarias para hacer la matriz de coeficientes triangular, a partir de ahí deducimos los valores de las variables.
 - b. Matriz inversa: Si expresamos el sistema en forma matricial $Ax=B$ y A es invertible entonces $x=A^{-1}B$ donde x es la matriz de variables A la de coeficientes y B la de términos independientes. Condición necesaria es que exista la inversa de A .
 - c. Regla de Cramer: El valor de la variable i -ésima se obtiene del cociente C/D , donde C es el determinante de la matriz de coeficientes donde se cambia la columna i -ésima por la columna de términos independientes y D es el determinante de la matriz de coeficientes.

Analizamos solo algunos métodos mediante los siguientes ejemplos.

Ejemplo 7. Mediante el método de Reducción, resuelva el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$4x - 2y - 3z = -28 \quad (1)$$

$$2x + 3y + 2z = 13 \quad (2)$$

$$3x + 4y - z = 9 \quad (3)$$

Solución.

Paso 1. Tomamos (1) y (2) y eliminamos x .

$$4x - 2y - 3z = -28 \quad (1)$$

$$2x + 3y + 2z = 13 \quad (2)$$

Paso 2. Multiplicamos por -2 la ecuación (2).

$$(-2)(2x + 3y + 2z = 13) \rightarrow -4x - 6y - 4z = -26$$

¹² Ver tópico: 2.1.3. *Método de eliminación de Gauss*, de las notas del Ing. Rafael Corona Guerra para el módulo de "Análisis Numéricos".

Paso 3. A la ecuación obtenida en el paso 2 le sumamos la ecuación (1).

$$-4x - 6y - 4z = -26$$

$$\underline{4x - 2y - 3z = -28}$$

$$-8y - 7z = -54 \quad (4)$$

Paso 4. Multiplicamos por -3 la ecuación (2).

$$(-3)(2x + 3y + 2z = 13) \rightarrow -6x - 9y - 6z = -39$$

Paso 5. Multiplicamos por 2 la ecuación (3).

$$(2)(3x + 4y - z = 9) \rightarrow 6x + 8y - 2z = 18$$

Paso 6. Sumamos las ecuaciones obtenidas en el paso 4 y 5.

$$-6x - 9y - 6z = -39$$

$$\underline{6x + 8y - 2z = 18}$$

$$-y - 8z = -21 \quad (5)$$

Paso 7. Resolvemos el nuevo sistema formado por las ecuaciones (4) y (5).

$$-8y - 7z = -54 \quad (4)$$

$$-y - 8z = -21 \quad (5)$$

Paso 8. Tomamos (4) y (5) y eliminamos y, multiplicamos por -8 la ecuación (5) y luego la sumamos con la ecuación (4) para obtenemos el valor de z.

$$(-8)(-y - 8z = -21) \rightarrow 8y + 64z = 168$$

$$8y + 64z = 168$$

$$\underline{-8y - 7z = -54}$$

$$57z = 114 \rightarrow z = \frac{114}{57} = 2 \rightarrow \underline{z = 2.}$$

Paso 9. Reemplazamos z en la ecuación (4) para obtener el valor de y.

$$-8y - 7z = -54 \rightarrow -8y - 7(2) = -54 \rightarrow -8y - 14 = -54 \rightarrow$$

$$-8y = -54 + 14 \rightarrow -8y = -40 \rightarrow y = \frac{-40}{-8} = 5 \rightarrow \underline{y = 5.}$$

Paso 10. Para obtener la variable x, se sustituyen las variables z e y en la ecuación (1).

$$4x - 2y - 3z = -28 \rightarrow 4x - 2(5) - 3(2) = -28 \rightarrow 4x - 10 - 6 = -28 \rightarrow$$

$$4x - 16 = -28 \rightarrow 4x = -28 + 16 \rightarrow 4x = -12 \rightarrow x = \frac{-12}{4} = -3 \rightarrow$$

$$\underline{x = -3.}$$

Ejemplo 8. Mediante el método de Gauss, resuelva el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$x + 4y + z = 7 \quad (1)$$

$$x + 6y - z = 13 \quad (2)$$

$$2x - y + 2z = 5 \quad (3)$$

Solución.

Paso 1. Utilizar como ecuación pivote la ecuación (1) la cual se normaliza, para lo que se divide dicha ecuación entre su coeficiente de x.

$$\frac{x}{1} + \frac{4y}{1} + \frac{z}{1} = \frac{7}{1} \rightarrow x + 4y + z = 7 \quad (4)$$

Paso 2. Multiplicar la ecuación normalizada (4) por el coeficiente de x de la ecuación (2).

$$1 \times (x + 4y + z = 7) \rightarrow x + 4y + z = 7 \quad (5)$$

Paso 3. Nótese que el término en x de la ecuación (4) es idéntico al término en x de la ecuación (2). Por lo tanto, se puede eliminar la primera incógnita (x) de la segunda ecuación restando de la ecuación (2) la ecuación (4).

$$x + 6y - z = 13 \quad (2)$$

$$-(x + 4y + z = 7) \quad (4)$$

$$\begin{array}{r} x + 6y - z = 13 \\ -x - 4y - z = -7 \\ \hline 2y - 2z = 6 \end{array} \quad (6)$$

Paso 4. Repetir el paso 2 y 3 hasta eliminar la primera incógnita de todas las ecuaciones restantes.

Estos pasos se repiten tomando como pivotes las ecuaciones restantes hasta convertir el sistema en una matriz triangular superior.

Paso 2. Multiplicar la ecuación normalizada (4) por el coeficiente de x de la ecuación (3).

$$2 \times (x + 4y + z = 7) \rightarrow 2x + 8y + 2z = 14 \quad (7)$$

Paso 3. Nótese que el término en x de la ecuación (7) es idéntico al término en x de la ecuación (3). Por lo tanto, se puede eliminar la primera incógnita (x) de la segunda ecuación restando de la ecuación (3) la ecuación (7).

$$2x - y + 2z = 5 \quad (3)$$

$$-(2x + 8y + 2z = 14) \quad (7)$$

$$\begin{array}{r} \cancel{2x} - y + \cancel{2z} = 5 \\ -\cancel{2x} - 8y - \cancel{2z} = -14 \\ \hline -9y = -9 \end{array} \quad (8)$$

La primera matriz triangular del sistema es entonces:

$$x + 4y + z = 7 \quad (1)$$

$$2y - 2z = 6 \quad (6)$$

$$-9y = -9 \quad (8)$$

Con esta matriz triangular se inicia una nueva iteración en el algoritmo, pero ahora se utiliza como ecuación pivote la segunda ecuación (6) para obtener un segundo sistema triangular de ecuaciones.

Paso 1. Utilizar como ecuación pivote la ecuación (6) la cual se normaliza, para lo que se divide dicha ecuación entre su coeficiente de y.

$$\frac{2y}{2} - \frac{2z}{2} = \frac{6}{2} \rightarrow y - z = 3 \quad (9)$$

Paso 2. Multiplicar la ecuación normalizada (9) por el coeficiente de y de la ecuación (8).

$$-9 \times (y - z = 3) \rightarrow -9y + 9z = -27 \quad (10)$$

Paso 3. Nótese que el término en y de la ecuación (10) es idéntico al término en y de la ecuación (8). Por lo tanto, se puede eliminar la segunda incógnita (y) de la segunda ecuación restando de la ecuación (8) la ecuación (10).

$$-9y = -9 \quad (8)$$

$$-(-9y + 9z = -27) \quad (10)$$

$$\begin{array}{r}
 -9y \quad = -9 \\
 \underline{9y - 9z = 27} \\
 -9z = 18
 \end{array} \quad (11)$$

La segunda matriz triangular y superior a las matrices triangulares anteriores del sistema es entonces:

$$x + 4y + z = 7 \quad (1)$$

$$y - z = 3 \quad (9)$$

$$-9z = 18 \quad (11)$$

Finalmente mediante sustitución inversa en el sistema equivalente así obtenido el cual es un sistema triangular superior más manejable, se puede resolver despejando primero la z y este valor utilizarlo para obtener despejando la segunda incógnita y hasta obtener el resultado completo del sistema. Esto es:

$$z = \frac{18}{-9} = -2, \quad y = z + 3 = (-2) + 3 = 1, \quad x = -4y - z + 7 = -4(1) - (-2) + 7 = -4 + 2 + 7 = 5$$

Es decir: $z = -2$, $y = 1$ y $x = 5$.

Verifica estos resultados, sustituyendo los valores de x , y y z en el sistema original y comprobando que las igualdades si son verdaderas.

Aplicaciones del método de Gauss:

- ✓ Resolución de sistemas de ecuaciones lineales con solución única ($A \neq 0$).
- ✓ Resolución de sistemas de ecuaciones lineales sin saber si $A \neq 0$.
- ✓ Discusión general de sistemas de ecuaciones lineales.
- ✓ Resolución simultánea de sistemas de ecuaciones lineales.
- ✓ Cálculo eficiente de determinantes.
- ✓ Cálculo eficiente de inversas.

3.1.1.1.3 Correlación exponencial, potencial y media móvil

Al igual que en los casos anteriores se hace el ajuste por mínimos cuadrados mediante el asistente graficador EXCEL:

Señalar datos → Insertar → Dispersión → Dispersión con líneas suaves y marcadores → Click derecho en línea de tendencia del gráfico → Agregar línea de tendencia → Marcar: (Exponencial, Potencial o Media móvil), Presentar ecuación en el gráfico y Presentar el valor R cuadrado en el gráfico.

3.1.1.2 Modelo de regresión múltiple

El modelo de regresión múltiple es utilizado generalmente debido a que la mayoría de las relaciones involucran más de una variable independiente con una variable dependiente. Por ejemplo, la demanda de un producto puede depender del precio del producto, el ingreso de la población, el precio de otros bienes sustitutos y posiblemente de otras variables. Por lo tanto una simple ecuación de regresión entre cantidad y precio sería incompleta y por tanto incorrecta. Esto es debido a que el efecto que las otras variables omitidas en el modelo producen, no es tenido en cuenta. Los coeficientes estimados para cada variable independiente miden la relación existente entre esta y la variable dependiente, manteniendo constante la influencia de las demás variables independientes consideradas en el modelo. Si en el modelo se incluyen variables independientes incorrectas, y/o no se incluyen variables independientes que sí deben ser tenidas en cuenta, la ecuación de regresión llevaría a conclusiones erróneas.

3.1.1.3 Modelo econométrico

Un modelo econométrico se compone de la aplicación de varias ciencias: estadística, matemáticas y economía, con la función de medir relaciones entre variables económicas. A pesar de que frecuentemente su empleo es más complicado que otras técnicas de proyección, el pronóstico basado en un método econométrico tiene por lo menos dos ventajas comparado con otras técnicas. En primer lugar, además de predecir, también explica el sentido de la relación entre las variables analizadas. Entender el comportamiento de la relación puede ser muy útil para evaluar los efectos que se producen ante distintos escenarios. Por ejemplo, un estudio econométrico que estima el impacto de la publicidad en la demanda, puede ser muy útil en determinar qué estrategia comercial seguir. En segundo lugar, un modelo econométrico estima la magnitud de la relación entre variables. En cambio, muchos pronósticos basados en métodos cualitativos sólo dan una idea de la relación entre dichas variables.

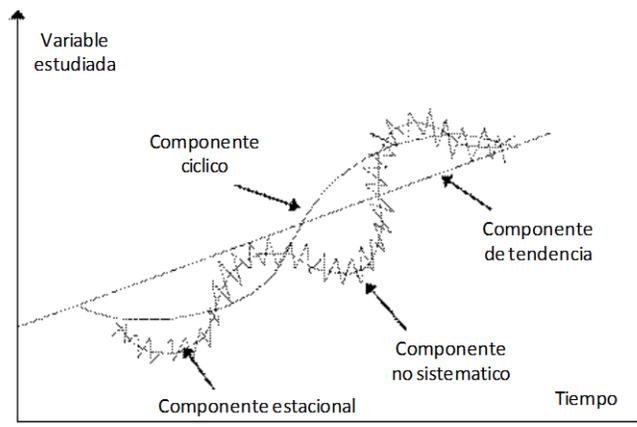
La formulación de un modelo econométrico involucra cuatro pasos:

1. Desarrollo de un modelo teórico que determine fundamentalmente las variables que deberían estar incluidas y determinar si existe una teoría que explique la naturaleza y la magnitud de la relación de las variables involucradas.
2. Recolección de información de las variables involucradas.
3. Determinación de la forma de la ecuación (lineal, polinómica, exponencial, etc.)
4. Estimación de la ecuación y análisis de los resultados.

3.1.1.4 Modelos de series de tiempo

Los modelos de series de tiempo requieren de la medición de valores de una variable en el tiempo a intervalos espaciados uniformemente. El objetivo de la identificación de la información histórica es determinar un patrón en su comportamiento, que posibilite la proyección futura de la variable deseada. Los modelos de series de tiempo se emplean cuando el comportamiento futuro del mercado puede estimarse por lo sucedido en el pasado. Por esto mismo, cualquier cambio en las variables que caracterizaron al ambiente en el pasado, como el avance tecnológico, una recesión, la aparición de productos sustitutos y otros, hace que estos modelos pierdan validez. Para salvar este inconveniente suelen eliminarse los datos perturbadores de la serie.

En un análisis de series de tiempo pueden distinguirse cuatro componentes básicos que se refieren a una tendencia, a un factor cíclico, a fluctuaciones estacionales y a variaciones no sistemáticas.



Hasta aquí, hemos analizado diferentes herramientas útiles en la ejecución de un estudio de mercado¹³. Recordemos que como primer herramienta a tener presente se encuentra el criterio profesional.

¹³ Ver Cuarta parte: Estudio del Mercado.

Cualquiera sea el método utilizado, la validez de los resultados dependerá en primer medida del criterio profesional del responsable que evaluará la calidad de los antecedentes considerados para el pronóstico y en función de esto determinará el método a emplear. No debemos olvidar que los resultados que se obtienen de los métodos de proyección son sólo indicadores de referencia para una estimación definitiva que el responsable o grupo de responsables tomarán. La dificultad mayor en pronosticar comportamientos radica en la posibilidad de que eventos que nunca hayan ocurrido anteriormente, ocurran y no hayan sido considerados en el análisis.

3.2 Diagnóstico externo

El diagnóstico externo es la conclusión que se obtiene al analizar las oportunidades y amenazas del entorno del proyecto, aplicando las herramientas previamente mencionadas sin considerar las fortalezas y debilidades internas.

Al estudiar las variables externas, las cuales no son controlables por la empresa, deben reconocerse cuatro factores: los económicos, socioculturales, tecnológicos y políticos-legales. La evolución independiente de cada uno de ellos hace muy compleja la tarea de pronosticar su comportamiento y sus efectos sobre una determinada estrategia del proyecto, estrategia de los competidores, consumidores, proveedores e intermediarios.

3.3 Radiografía interna

Consiste en estudiar las fortalezas y debilidades del proyecto. Hay que analizar las fortalezas y debilidades existentes y potenciales.

Las *fortalezas* se basan en las ventajas comparativas que el proyecto posea respecto a su competencia debido a avances tecnológicos, liderazgo en costos, canales de comercialización y distribución, conocimiento del mercado, capacidad de innovación (llegar primero, ej.: aceite Capullo), una buena campaña de marketing (ej.: Omni Life), una marca reconocida (ej.: Coca-Cola), información, etc. Hay que saber distinguir las fortalezas potenciales debido a que al introducir un proyecto al mercado las fortalezas aparentes del mismo pueden desvanecerse al reaccionar la competencia.

Las *debilidades* suelen estar en las fortalezas de la competencia como por ejemplo: la competencia llega antes con la idea, posee mayor nivel de producción teniendo economía de escala, posee mayor información del mercado, tiene una red de distribución ya establecida y en funcionamiento,

posee mayor velocidad de respuesta; o bien la tecnología del proyecto es obsoleta, no se cuentan con los recursos necesarios para una buena penetración en el mercado, etc.

Una forma de aprovechar las fortalezas de un proyecto es a través de la realización de proyectos marginales que permitan una mayor utilización de las mismas. Un proyecto marginal es aquel en el cual se aprovecha la estructura existente. Esto suele ocurrir con empresas en marcha o sea que se hallan en funcionamiento. Un proyecto marginal puede tener uno o varios de estos fines:

- Aumentar la rentabilidad.
- Aumentar los ingresos.
- Reducir costos.
- Mantener mercado.
- Relanzamiento de un producto.

Se pueden citar algunos ejemplos:

Ejemplo 9. Una empresa con una buena red de distribución, dedicada a la producción y comercialización de cerveza incursionó en el mercado del Agua Mineral con el fin de obtener mayor rentabilidad usando la cadena de distribución con la que contaba.

Ejemplo 10. La venta de jeans que Alpargatas realiza en Estados Unidos se realiza con el fin de renovarse constantemente en lo que respecta a texturas y colores permaneciendo en un mercado hiper competitivo como es el norteamericano. Al realizar el análisis con el proyecto es importante ver como impacta el mismo en los otros mercados que ataca la empresa. Es importante considerar en estos proyectos eventuales ventajas impositivas.

3.3.1 Análisis FODA

El análisis FODA es una herramienta que permite conformar un cuadro de la situación actual de la empresa u organización, permitiendo de esta manera obtener un diagnóstico preciso que permita en función de ello tomar decisiones acordes con los objetivos y políticas formulados.

El término FODA es una sigla conformada por las primeras letras de las palabras Fortalezas, Oportunidades, Debilidades y Amenazas (en inglés SWOT: Strengths, Weaknesses, Opportunities, Threats). De entre estas cuatro variables, tanto fortalezas como debilidades son internas de la organización, por lo que es posible actuar directamente sobre ellas. En cambio las oportunidades y las amenazas son externas, por lo que en general resulta muy difícil poder modificarlas.

Fortalezas: Son las capacidades especiales con que cuenta la empresa, y por los que cuenta con una posición privilegiada frente a la competencia. Recursos que se controlan, capacidades y habilidades que se poseen, actividades que se desarrollan positivamente, etc.

Oportunidades: Son aquellos factores que resultan positivos, favorables, explotables, que se deben descubrir en el entorno en el que actúa la empresa, y que permiten obtener ventajas competitivas.

Debilidades: Son aquellos factores que provocan una posición desfavorable frente a la competencia. Recursos de los que se carece, habilidades que no se poseen, actividades que no se desarrollan positivamente, etc.

Amenazas: Son aquellas situaciones que provienen del entorno y que pueden llegar a atentar incluso contra la permanencia de la organización.

El Análisis FODA es un concepto muy simple y claro, pero detrás de su simpleza residen conceptos fundamentales de la Administración. Intentaré desguzar el FODA para exponer sus partes fundamentales.

Tenemos un objetivo: Convertir los datos del universo (según lo percibimos) en información, procesada y lista para la toma de decisiones (estratégicas en este caso). En términos de sistemas, tenemos un conjunto inicial de datos (universo a analizar), un proceso (análisis FODA) y un producto, que es la información para la toma de decisiones (el informe FODA que resulta del análisis FODA).

Sostengo que casi cualquier persona puede hacer un análisis FODA. Digo casi porque esa persona tiene que tener la capacidad de distinguir en un sistema:

- Lo relevante de lo irrelevante.
- Lo externo de lo interno.
- Lo bueno de lo malo.

Parece fácil, ¿verdad?

Pongámoslo en otras palabras: el FODA nos va a ayudar a analizar nuestra empresa siempre y cuando podamos responder tres preguntas: Lo que estoy analizando, ¿es relevante? ¿Está fuera o dentro de la empresa? ¿Es bueno o malo para mi empresa?

Estas tres preguntas no son otra cosa más que subprocesos que involucran la relevancia la cual

funciona como filtro, es decir, no todo merece ser elevado a componente del análisis estratégico. Es sentido común, ya que en todos los órdenes de la vida, es fundamental distinguir lo relevante de lo irrelevante. En FODA este filtro reduce nuestro universo de análisis disminuyendo nuestra necesidad de procesamiento (que no es poca cosa).

Ejemplo 11: dudosamente sea una ventaja comparativa el sistema de limpieza de baños de una petroquímica, o el color de los monitores, o si el papel que se usa es carta o A4. Parece tonto, pero es increíble la cantidad de veces que a los seres humanos nos cuesta distinguir lo principal de lo accesorio, ya sea en una discusión, una decisión o donde sea.

Claro que la relevancia de algo depende de dónde estemos parados, y este concepto de relatividad es importante. La higiene de los baños puede ser clave en un Hospital o un Hotel. El orden en el que se hacen los pasos al efectuar una compraventa no es tan importante como los pasos que toman los bomberos para apagar un incendio. La disciplina y la autoridad formal son dejadas de lado en muchas empresas de la "Nueva Economía"... pero a un ejército en batalla eso puede costarle la vida. Es por eso que quien hace un análisis FODA debe conocer el negocio (ni más ni menos que saber de lo que está hablando).

Filtrados los datos sólo nos queda clasificarlos. Aplicando el sentido común, podemos construir una matriz con dos dimensiones (dentro/fuera, bueno/malo):

Análisis	Positivas	Negativas
Exterior	<p><u>Oportunidades (+)</u></p> <p>Nuevas tecnologías. Debilitamiento de competidores. Posicionamiento estratégico.</p>	<p><u>Amenazas (-)</u></p> <p>Altos riesgos – Cambios en el entorno</p>
Interior	<p><u>Fortalezas (+)</u></p> <p>Capacidades distintas. Ventajas naturales. Recursos superiores.</p>	<p><u>Debilidades (-)</u></p> <p>Recursos y capacidades escasas. Resistencia al cambio. Problemas de motivación del personal.</p>

Quien haya inventado el Análisis FODA eligió para cada intersección una palabra: así la intersección de "bueno" y "exterior" es una oportunidad, mientras que las cuestiones "positivas" del "interior" de nuestra empresa son una fortaleza, y así sucesivamente.

Distinguir entre el adentro y el afuera de la empresa a veces no es tan fácil como parece. Es fácil

decir que desde el punto de vista de la Ferrari, M. Schumager es una fortaleza (interna), y que si M. Hakkinen se queda sin empleo en su escudería, será una Oportunidad (externa) para la Ferrari. Pero el control de un recurso escaso (petróleo) o un proveedor exclusivo están físicamente fuera de mi empresa... y sin embargo son Fortalezas. La clave está en adoptar una visión de sistemas y saber distinguir los límites del mismo. Para esto hay que tener en cuenta, no la disposición física de los factores, sino el control que yo tenga sobre ellos. Recordando una vieja definición de límite: lo que me afecta y controlo, es interno al sistema. Lo que me afecta pero está fuera de mi control, es ambiente (externo).

Sólo nos queda la dimensión positivo/negativo, que aparentemente no debería ofrecer dificultad, pero hay que tener cuidado. El competitivo ambiente de los negocios está lleno de maniobras, engaños, etc. En la Segunda Guerra Mundial, el Eje estaba feliz de que el desembarco de los Aliados fuera en Calais, porque tenía muchas fortalezas en ese caso. Pero el día D fue en Normandía y por eso hoy el mundo es lo que es.

Las circunstancias pueden cambiar de un día para el otro también en el interior de la empresa: la Fortaleza de tener a ese joven y sagaz empleado puede convertirse en grave Debilidad si se marcha (y peor si se va con la competencia). Y la Debilidad de tener a un empleado próximo a jubilarse y a quien le cuesta adaptarse a las nuevas tecnologías puede revelarse como Fortaleza demasiado tarde... cuando se retira y nos damos cuenta de que dependíamos de él porque era el único que sabía "dónde estaba todo" y "*cómo se hacen las cosas*".

La sagacidad del empresario debe convertir las Amenazas en Oportunidades y las Debilidades en Fortalezas. Ejemplos: Asociarnos con nuestra competencia de toda la vida para enfrentar a un enemigo más pesado; pasar a un empleado desestructurado y extrovertido de una tarea organizativa que hace mal, a la línea de fuego de atención al público. Las posibilidades son muchas.

Estrategias

Al tener ya determinadas cuales son las FODA en un primer plano, nos permite determinar los principales elementos de fortalezas, oportunidades, amenazas y debilidades, lo que implica ahora hacer un ejercicio de mayor concentración en dónde se determine, teniendo como referencias a la Misión y la Visión de la Empresa, cómo afecta cada uno de los elementos de FODA. Después de obtener una relación lo más exhaustiva posible, se ponderan y ordenan por importancia cada uno de los FODA a efecto de quedarnos con los que revisten mayor importancia para dicha empresa.

La Matriz FODA nos indica cuatro estrategias alternativas conceptualmente distintas. En la práctica, algunas de las estrategias se traslapan o pueden ser llevadas a cabo de manera concurrente y de manera concertada. Pero para propósitos de discusión, el enfoque estará sobre las interacciones de los cuatro conjuntos de variables, que adecuándolas a lo revisado en el tópico 1.2.2.1 *Decisiones no competitivas*, obtenemos una matriz FODA reestructurada.

<div style="text-align: center;">FACTORES INTERNOS</div> <div style="text-align: center;">FACTORES EXTERNOS</div>	<u>Lista de Fortalezas (+)</u>	<u>Lista de Debilidades (-)</u>
	F ₁ . F ₂ . F ₃ F _n .	D ₁ . D ₂ . D ₃ D _r .
<u>Lista de Oportunidades (+)</u> O ₁ . O ₂ O _p .	<u>FO (Maxi-Maxi)</u> <i>Estrategia para maximizar tanto las F como las O.</i> 1. xxxxxxxxxxxxxxxxxxxx (O ₁ , O ₂ , F ₁ , F ₃ ...)	<u>DO (Mini-Maxi)</u> <i>Estrategia para minimizar las D y maximizar las O.</i> 1. xxxxxxxxxxxxxxxxxxxx (O ₁ , O ₂ , D ₁ , D ₃ , ...)
<u>Lista de Amenazas (-)</u> A ₁ . A ₂ . A ₃ A _q .	<u>FA (Maxi-Mini)</u> <i>Estrategia para fortalecer el Instituto y minimizar las amenazas.</i> 1. xxxxxxxxxxxxxxxxxxxx (F ₁ , F ₃ , A ₂ , A ₃ , ...)	<u>DA (Mini-Mini)</u> <i>Estrategia para minimizar tanto las A como las D.</i> 1. xxxxxxxxxxxxxxxxxxxx (D ₁ , D ₃ , A ₁ , A ₂ , A ₃ , ...)

La Estrategia DA (Mini-Mini). En general, el objetivo de la estrategia DA (Debilidades–vs–Amenazas), es el de minimizar tanto las debilidades como las amenazas. Una empresa que estuviera enfrentada sólo con amenazas externas y con debilidades internas, pudiera encontrarse en una situación totalmente precaria. De hecho, tal empresa tendría que luchar por su supervivencia o llegar hasta su liquidación. Pero existen otras alternativas. Por ejemplo, esa empresa podría reducir sus operaciones buscando ya sea sobreponerse a sus debilidades o para esperar tiempos mejores, cuando desaparezcan esas amenazas (a menudo esas son falsas esperanzas). Sin embargo, cualquiera que sea la estrategia seleccionada, la posición DA se deberá siempre tratar de evitar.

La Estrategia DO (Mini-Maxi). La segunda estrategia, DO (Debilidades–vs–Oportunidades), intenta minimizar las debilidades y maximizar las oportunidades. Una empresa podría identificar oportunidades en el medio ambiente externo pero tener debilidades organizacionales que le eviten aprovechar las ventajas del mercado. Por ejemplo, al IPN se le podría presentar la oportunidad de

una gran demanda por sus egresados, pero su capacidad instalada podría ser insuficiente. Una estrategia posible sería adquirir esa capacidad con instalaciones gubernamentales. Una táctica alternativa podría ser obtener mayor presupuesto para construir las instalaciones necesarias. Es claro que otra estrategia sería el no hacer absolutamente nada y dejar pasar la oportunidad y que la aproveche la competencia.

La Estrategia FA (Maxi-Mini). Esta estrategia FA (Fortalezas–vs–Amenazas), se basa en las fortalezas de la institución que pueden copar con las amenazas del medio ambiente externo. Su objetivo es maximizar las primeras mientras se minimizan las segundas. Esto, sin embargo, no significa necesariamente que una institución fuerte tenga que dedicarse a buscar amenazas en el medio ambiente externo para enfrentarlas. Por lo contrario, las fortalezas de una institución deben ser usadas con mucho cuidado y discreción.

La Estrategia FO (Maxi-Maxi). A cualquier empresa le agradaría estar siempre en la situación donde pudiera maximizar tanto sus fortalezas como sus oportunidades, es decir aplicar siempre la estrategia FO (Fortalezas–vs–Oportunidades). Tales empresas podrían echar mano de sus fortalezas, utilizando recursos para aprovechar la oportunidad del mercado para sus productos y servicios. Por ejemplo, el IPN con su prestigio ampliamente reconocido como una de sus grandes fortalezas, podría aprovechar la oportunidad de la gran demanda externa por técnicos y profesionistas altamente capacitados. Las empresas exitosas, aún si ellas han tenido que usar de manera temporal alguna de las tres estrategias antes mencionadas, siempre hará lo posible por llegar a la situación donde pueda trabajar a partir de las fortalezas para aprovechar las oportunidades. Si tienen debilidades, esas empresas lucharán para sobreponerlas y convertirlas en fortalezas. Si encaran amenazas, ellas las coparán para poder enfocarse en las oportunidades.

La Dimensión del Tiempo y la Matriz FODA

Hasta ahora, los factores que se incorporan en la Matriz FODA corresponden al análisis en un punto particular del tiempo. Pero tanto el medio ambiente externo como el interno, son dinámicos; algunos factores cambian fuertemente con el tiempo, otros cambian muy poco. Debido a este carácter dinámico del medio ambiente, el diseñador de estrategias debe preparar varias matrices FODA en diferentes puntos del tiempo. Así, podríamos empezar con un Análisis FODA del pasado, continuar con un Análisis FODA del Presente, y, quizás más importante, hacer varios análisis FODA en diferentes tiempos del futuro.

Ejemplo 12. Proyecto de “*Tortillas de Nopa*” por alumnos de la Licenciatura en Administración de Empresas del Instituto Universitario del Centro (UNICEN) de Zacapu Michoacán, como trabajo final

del modulo de Evaluación de Proyectos. (Integrantes y propietarios del proyecto: Antonio Morales Martínez, Mariana Magaña Carrillo, Mayra A. Negrete Arévalo, Andrés Mendoza Tapia, J. Israel Orozco Reyes y Javier Anaya Salinas).

Solución.

MATRIZ FODA PARA ELABORAR TORTILLA DE NOPAL

<p style="text-align: center;">FACTORES INTERNOS</p> <p style="text-align: center;">FACTORES EXTERNOS</p>	<p style="text-align: center;"><u>Lista de Fortalezas (+)</u></p> <p>F1. Es un producto innovador. F2. Producir penca de nopal. F3. Tendencia en el mercado del cultivo orgánico. F4. El nopal es 100% orgánico. F5. Ausencia de colorantes, saborizantes y aditivos artificiales. F6. El producto es más económico que el de maíz o trigo. F7. La tortilla de nopal tiene 19 calorías Vs. 80 de la de maíz.</p>	<p style="text-align: center;"><u>Lista de Debilidades (-)</u></p> <p>D1. Solvencia económica para el desarrollo de la empresa. D2. Inexperiencia en el ramo.</p>
<p><u>Lista de Oportunidades (+)</u></p> <p>O1. Expansión y exportación del producto por no ser muy ortodoxo. O2. Crecimiento de mercado en productos relacionados con la salud.</p>	<p><u>FO (Maxi-Maxi)</u> Estrategia para maximizar tanto las F como las O.</p> <div style="border: 1px solid black; height: 30px; width: 100%;"></div>	<p><u>DO (Mini-Maxi)</u> Estrategia para minimizar las D y maximizar las O.</p> <div style="border: 1px solid black; height: 30px; width: 100%;"></div>
<p><u>Lista de Amenazas (-)</u></p> <p>A1. La posibilidad de que empresas corporativas acaparen el mercado de la tortilla de nopal, sobre todo aquellas que dominan la producción de harina de maíz nixtamalizada. A2. La falta de posicionamiento de productos de nopal en la mente del consumidor, a nivel masivo.</p>	<p><u>FA (Maxi-Mini)</u> Estrategia para fortalecer el Instituto y minimizar las amenazas.</p> <div style="border: 1px solid black; height: 30px; width: 100%;"></div>	<p><u>DA (Mini-Mini)</u> Estrategia para minimizar tanto las A como las D.</p> <div style="border: 1px solid black; height: 30px; width: 100%;"></div>

Una directriz fundamental en la viabilidad de este análisis es equilibrar cada parámetro de la matriz, esto es:

$$\text{FODA} = \Sigma \text{Fortalezas (+)} + \Sigma \text{Debilidades (-)} + \Sigma \text{Oportunidades (+)} + \Sigma \text{Amenazas (-)} = 0$$

Por lo que si evaluamos la anterior matriz observamos que no esta balanceada y por lo tanto no tiene viabilidad de análisis.

$$\text{FODA} = \Sigma \text{Fortalezas (+)}(7) + \Sigma \text{Debilidades (-)}(2) + \Sigma \text{Oportunidades (+)}(2) + \Sigma \text{Amenazas (-)}(2)$$

$$\text{FODA} = 7 - 2 + 2 - 2 = 9 - 4 = 7 \neq 0$$

Para hacer viable este proyecto se requiere definir las Estrategias acordes a los recuadros en blanco de la matriz FODA en exhibición.

Cuarta parte

Estudio del Mercado

4. Mercado

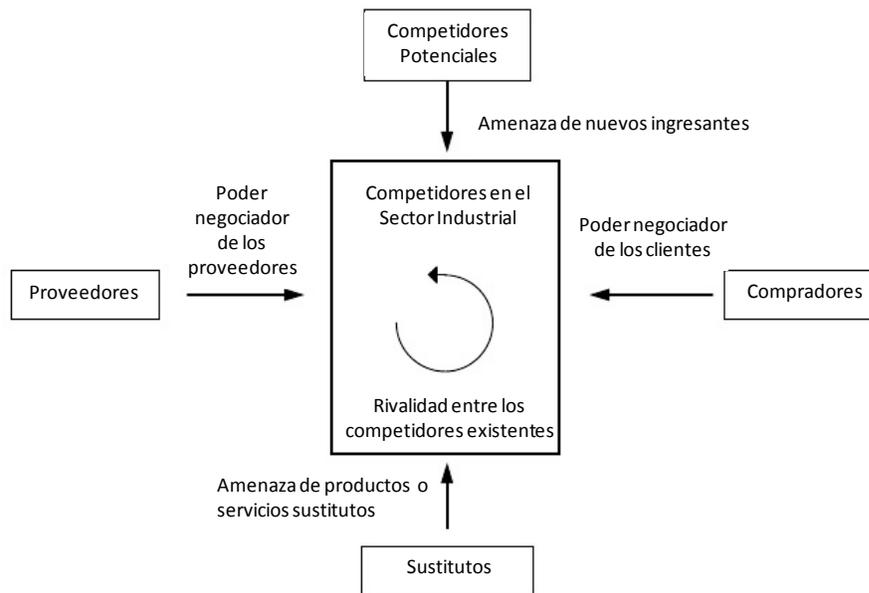
Es el área en el cuál convergen las fuerzas de la oferta y la demanda para establecer un precio único.

4.1 La importancia del mercado

MUNDO DE AYER	MUNDO DE HOY
Estable.....	Dinámico
Monopolios.....	Alta Competencia
Mercados Protegidos.....	Mercado libre y global
Poca Tecnología.....	Alta Tecnología
Producto: Rey.....	Cliente: Rey

El mundo se encuentra en continuo cambio. Este dinamismo obliga a empresas y directivos a moverse y transformarse para no quedar olvidados en el pasado y ser superados por el tiempo y las nuevas exigencias. En este mundo de cambios nos encontramos en la transición, escapando del viejo mundo estable, monopólico, con mercados protegidos y escasez de tecnología, donde quien decidía lo que debía producirse y cómo era el productor. El producto, bueno o malo, era el Rey del escenario. El consumidor no tenía poder para exigir, ya que las alternativas en los mercados monopólicos y protegidos eran escasas. Hoy el camino está en la dirección de la alta competencia, en mercados libres y globalizados, en la alta tecnología, donde el poder se localiza en la información, y donde el Cliente pasa a ser el Rey del mercado. Es él quien decide qué producto comprar, y junto con su elección determina cuál empresa es rentable y cuál no. Hoy en día la clave para que un proyecto sea rentable está en la búsqueda de la satisfacción de las necesidades del cliente, y no en intentar forzar al cliente hacia el proyecto.

4.2 Presentación de los mercados - El Esquema de Porter -



La situación de la competencia en un sector industrial depende, según el esquema de Porter, de cinco fuerzas competitivas básicas. Estas cinco fuerzas competitivas: nuevos ingresantes, amenaza de sustitución, poder negociador de los compradores, poder negociador de los proveedores y la rivalidad entre los actuales competidores; reflejan el hecho de que la competencia en un sector industrial va más allá de los simples competidores. Los clientes, proveedores, sustitutos y competidores potenciales son todos “*competidores*” para las empresas en un sector industrial y pueden ser de mayor o menor importancia dependiendo de las circunstancias particulares.

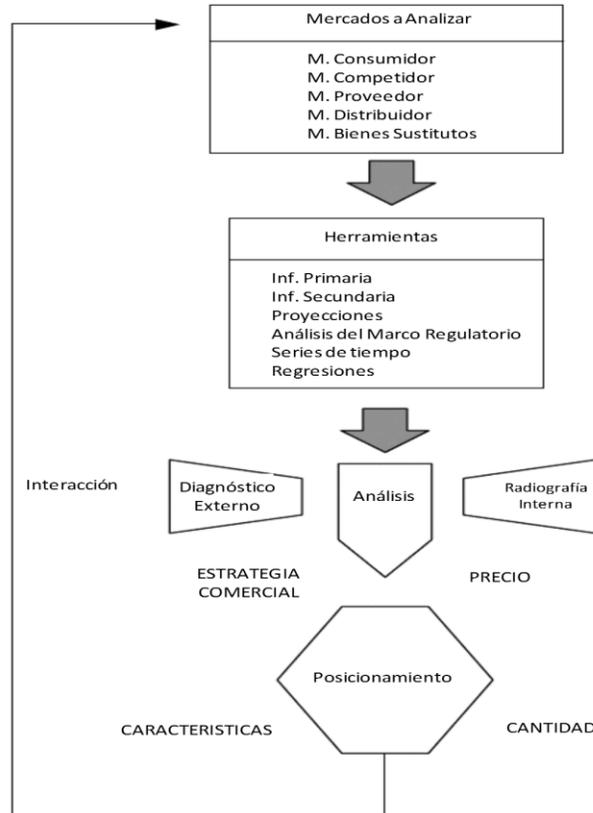
Por ejemplo, hace 15 años las industrias alimenticias del país poseían un gran poder de negociación. Esto era así pues ellas decidían a quien y cuánto vender. Los supermercados no tenían opción de negociar. Con el correr del tiempo, el avance tecnológico hizo posibles profundos cambios en la dinámica del supermercadismo. Introdujeron herramientas, como el código de barras, disposición estratégica de las góndolas, que hicieron posible la adquisición de información vital del consumidor, tales como hábitos de compra, costumbres, frecuencia, gustos. Con esta información, los supermercados encontraron la clave del negocio, “*satisfacer al cliente*”, y se convirtieron en los protagonistas del mercado. Hoy ellos poseen el poder de negociación y las empresas deben aceptar sus condiciones.

La esencia de la formulación de una estrategia competitiva (y dentro de ella, una estrategia comercial) consiste en relacionar a una empresa con su medio ambiente. El objetivo de la

estrategia competitiva es encontrar una posición, dentro del sector industrial establecido, en la cual pueda defenderse mejor la empresa contra estas fuerzas competitivas o inclinarlas a su favor

4.3 Estudio de mercado

Esquema básico del proceso de un estudio de mercado



Este proceso fue diagramado de tal manera que sea de utilidad para su aplicación en cualquier tipo de Proyecto de Inversión. Todos los elementos del mismo deben ser tenidos en cuenta, aunque el analista decidirá según su criterio cuáles de estos elementos tendrán que ser analizados con mayor o menor profundidad según su proyecto.

El objetivo principal de un estudio de mercado es determinar cuatro elementos fundamentales en el proyecto:

1. Precios de los productos/servicios a introducir en el mercado,
2. Cantidad a vender,
3. Características de los productos/servicios, y

4. Estrategia Comercial (canales de comercialización/distribución).

Para determinar estos elementos es necesario saber cuál es el posicionamiento elegido para la empresa.

A su vez para determinar el posicionamiento contamos con dos herramientas: el diagnóstico externo¹⁴ y la radiografía interna.

El diagnóstico externo es un análisis de las oportunidades y amenazas del proyecto. Para ello se estudian los mercados involucrados en el negocio, su interacción y su equilibrio, teniendo en cuenta historia, situación actual y futuro proyectado.

Este análisis y sus factores fundamentales serán descriptos en el punto correspondiente.

La radiografía interna es un análisis de las fortalezas y debilidades del proyecto. En éste punto se debe tener en cuenta la importancia de marcas ya existentes, canales de distribución y comercialización, conocimiento del negocio y de la tecnología involucrada ("*know-how*"), estructura de recursos humanos para afrontar el proyecto, etc.

Este análisis cambia rotundamente ya sea si el proyecto se desarrolla en una empresa existente o si involucra la fundación de una nueva empresa.

Para determinar las oportunidades, amenazas, fortalezas y debilidades del proyecto se deben estudiar los siguientes mercados:

- Consumidor.
- Competidor (incluye la distribución).
- Proveedor.
- Bienes sustitutos.
- Potenciales competidores.

Dicho estudio se realiza a través de diversas herramientas como ser proyecciones, regresiones, etc., cuya descripción y aplicaciones serán vistas en el punto correspondiente. El estudio de mercado es un proceso iterativo que implica una validación de los resultados obtenidos.

Un error en el que se incurre con frecuencia en los estudios de mercado es el de analizar solamente al mercado consumidor, sin tener en cuenta el impacto y la influencia sobre los

¹⁴ Ver tópicos: 3.2 *Diagnóstico externo*, 3.3. *Radiografía interna* y 3.3.1. *Análisis FODA* de la parte 3.

resultados de un proyecto que tienen el resto de los mercados que interactúan con él. Para determinar un posicionamiento correcto del proyecto es fundamental tener también un conocimiento acabado de los mercados competidor, proveedor, de bienes sustitutos y de potenciales competidores.

Si hoy en día se hiciera un estudio de mercado de televisión por cable, solamente teniendo en cuenta el análisis del mercado consumidor, se obtendrían resultados muy alentadores, pero falsos. En efecto, el crecimiento de la penetración de la televisión por cable en el Distrito Federal y principales urbes del país en los últimos 5 años ha sido enorme; y la avidez actual del mercado impulsaría a ingresar en el negocio a cualquier inversor que observe sólo este lado de la realidad.

Sin embargo, si se realiza un estudio más amplio del negocio, analizando las grandes inversiones que grupos locales y extranjeros con experiencia en comunicaciones están realizando en el país y la necesidad de trabajar con proveedores extranjeros para montar la infraestructura, se llegará a la conclusión de que la televisión por cable es un negocio difícil y con altas barreras de entrada y salida.

A pesar de lo expuesto, es importante aclarar que el estudio a fondo del mercado consumidor es fundamental, ya que de éste dependen los ingresos del proyecto.

4.3.1 El mercado consumidor

Está formado tanto por los consumidores actuales como por los que potencialmente podrían incorporarse, demandando los productos o servicios del mercado competidor o del propio proyecto.

El estudio del mercado consumidor es de importancia fundamental. Es el estudio al que generalmente se le dedica mayor tiempo y al cual se asignan mayores recursos. Esto se debe a que las variables de este mercado tienen influencia directa sobre los ingresos de la empresa o del proyecto.

"La importancia que tiene (la determinación de la demanda) en la evaluación de un proyecto queda de manifiesto si se considera que la variable de mayor incidencia en el rechazo de solicitudes de otorgamiento de créditos por los bancos para financiar nuevas iniciativas de inversión la constituye la poca confianza que estos tienen respecto a las posibilidades efectivas de éxito en los niveles de venta propuestos" (Criterios de Evaluación de Proyectos: Sapag Chain).

Como se mencionó anteriormente, los mercados son medios dinámicos, que pueden variar su equilibrio ante el ingreso de una nueva empresa en el medio. El mercado consumidor no es una excepción.

Un claro ejemplo donde la introducción de un nuevo producto afectó el equilibrio del mercado consumidor fue la aparición de varios aceites comestibles (Aceite Capullo, Canolla, etc), fraccionado por una empresa que hasta ese momento se dedicaba a la comercialización del aceite a granel. La competencia subestimó la habilidad de éste para incursionar en ese mercado. Para su estrategia comercial lo posicionó como aceite natural “*sin colesterol*”, aprovechando el desconocimiento de los consumidores que ningún aceite de origen vegetal (fitoesteroles) contiene el tipo de colesterol perjudicial para la salud (zooesteroles). Esto sumado a un atractivo envase, una excelente distribución y una fuerte campaña promocional, logró un “*nuevo*” producto en la mente de los consumidores, aceptable para los seguidores de corrientes naturistas, más sano que los “*viejos*” aceites vegetales para los habituales consumidores, con lo que amplió el tradicional mercado y tomó una gran participación, muy fuertemente ubicado por haber sido el primero. Los antiguos dueños del mercado tuvieron que replantear su situación y tomar medidas urgentes.

Los Mercados Consumidores se pueden clasificar según actitud de compra de la siguiente manera:

- **Razonamiento:** el consumidor analiza la compra midiendo costos y beneficios de manera racional. Hace una comparación entre las opciones y opta por la que le resulta más conveniente. Este tipo de compra es común en empresas cuando deben evaluar una compra de bienes de capital, intermedios o servicios. Por ejemplo, si una empresa debe contratar servicio de limpieza para sus oficinas, analizará las propuestas que ofrece el mercado de empresas de limpieza y optará por aquella que cumpla con el trabajo con los niveles de calidad requeridos a un costo mínimo. Otros casos semejantes son la compra de maquinaria para su instalación en una planta, la elección de un determinado proveedor de insumos para la fabricación, etc. El trabajar en un mercado de demanda racional simplifica las estimaciones de demanda.
- **Hábito:** es el caso en el cual el consumidor compra por costumbre. Este tipo de consumidores se presentan en los casos de productos donde se da gran valor a la marca. Este es el caso de la avena. Los consumidores asocian este producto unívocamente con la marca Quaker. En el año 90' Nestlé intentó incursionar en este mercado. A pesar de los enormes esfuerzos publicitarios, no pudo romper con la asociación producto-marca. En estos casos la estimación de la demanda es más compleja ya que no es fácil determinar el esfuerzo a realizar para romper el hábito del consumidor.

- **Impulso:** En este tipo de compra el cliente se puede encontrar frente a un producto de necesidad primaria o secundaria, pero solamente se logrará una intención de compra si se logra llamar la atención el mismo. Para lograr esto no siempre el beneficio del producto o servicio es el factor decisorio, sino la forma como la oferta es “*comunicada*” al potencial cliente. Se debe tener en cuenta el *packaging* (colores, forma, tipografía, etc.), la manera de exponerlo, como circulan los potenciales compradores y todo tipo de variable que afecte la accesibilidad al producto o servicio.

Antes de continuar es necesario realizar una clasificación de los proyectos según los bienes/servicios que produzcan. Estos pueden ser:

1. Bienes de Capital.
2. Bienes de Consumo Intermedio.
3. Bienes de Consumo Final (masivo, otros.).
4. Servicios.

El estudio del mercado consumidor varía de un caso a otro, y debido a ello serán tratados separadamente.

4.3.1.1 Bienes de capital

Los bienes de capital son aquellos que se adquieren para la producción de otros productos/servicios. Las ventas de este tipo de bienes es altamente dependiente de la evolución del sector industrial al cual proveen. Se deben tener en cuenta varios elementos del mismo:

- Antigüedad de la maquinaria utilizada por las empresas del sector.
- Renovación de tecnología.
- Crecimiento del sector industrial.
- Rentabilidad promedio de las empresas del mismo.

Por ejemplo, la actual tendencia de las empresas del país con grandes cadenas de distribución a renovar la tecnología de sus depósitos, es una oportunidad importante para las productoras de robots inteligentes para centros de distribución. La compra de este tipo de bienes es típicamente por razonamiento. Las herramientas que se utilizan para determinación de la demanda son generalmente estudios econométricos y regresiones.

4.3.1.2 Bienes de consumo intermedio

Los bienes de consumo intermedio son aquellos que se utilizan como insumos en la producción de otros bienes. Una de las características más comunes en este tipo de productos es que generalmente no se diferencian por sus características (“*commodities*”). La diferenciación se basa fundamentalmente en precio y servicio. Esto genera una falta de segmentación en la oferta.

4.3.1.3 Bienes de consumo final (masivos, otros)

Los bienes de consumo final son aquellos que llegan desde la empresa productora hasta las manos del consumidor final sin sufrir transformaciones.

En este tipo de mercados, un ejemplo claro lo componen los bienes de consumo masivo. Este tipo de mercados se estudian generalmente con herramientas¹⁵ como encuestas (información primaria) y estudios cualitativos.

4.3.1.4 Servicios

Las empresas de servicios se pueden clasificar en dos tipos:

1. Las que brindan servicios a otras empresas y
2. Las que brindan servicios a consumidores finales.

Se puede citar como ejemplo del primer tipo el caso de una empresa distribuidora. Ésta presta el servicio de distribución a otras que no poseen cadena propia. En este tipo de compra el comportamiento es de razonamiento: se evalúan costos Versus beneficios. En el caso de servicios a consumidores finales priman las características del servicio como medio de diferenciación. Tanto en los servicios como en los productos el foco debe estar siempre en el agregado de valor, orientado a los usuarios del servicio. Esto nos podrá llevar a que un mismo servicio sea necesario presentarlo en distintas formas para distintos segmentos de mercado (micro-marketing). Por ejemplo, si tomamos el servicio de limpieza de uniformes de trabajo, no serán iguales las exigencias de un hospital que las de una fábrica de rulemanes¹⁶. En el caso del hospital no solo será imprescindible un nivel de asepsia muy alto sino que hasta podrá darse valor agregado al servicio, mediante el ofrecimiento de charlas al personal sobre la necesidad de mantener el máximo control sobre la limpieza personal en el establecimiento. Este tipo de mercados también se

¹⁵ Ver tópico: 4.4 Herramientas para el estudio de mercados.

¹⁶ Del francés: *Roulement*, que significa “Rodamiento o cilindro metálico que contiene pequeñas bolas o rodillos que giran libremente”. “rulemanes” en glosario de jergas y modismos de Argentina.

estudian generalmente con herramientas como encuestas (información primaria) y estudios cualitativos.

4.3.2 El mercado proveedor

El mercado proveedor es el conjunto de empresas que en el futuro proporcionarán insumos a la empresa que se crearía con el proyecto. Generalmente el mercado proveedor es compartido con la competencia. Aunque resulte evidente que para el desarrollo del proyecto se debe analizar la disponibilidad de insumos, con frecuencia no se le da a este tema la importancia que posee. Un ejemplo de proyecto que al instalarse modifica al mercado proveedor afectando de esa manera la rentabilidad esperada del mismo, es el de una curtiembre de cueros ovinos con asiento en las regiones propias de este producto. Previo a la radicación de esta curtiembre, los productores tiraban casi la totalidad de los cueros tras la faena, por lo que los analistas le asignaron precio casi nulo a la materia prima (podría asignársele costo de transporte y otros). Una vez instalada la curtiembre los productores no estaban dispuestos a entregar gratuitamente los cueros, sabiendo que la industria de pieles curtidas (zapatos, bolsos, carteras, etc.) dependía de ellos para la obtención de su materia prima y por lo tanto para su subsistencia, con lo que lograron un gran poder de negociación. Esto afectó sensiblemente la rentabilidad del proyecto.

Como se puede observar, el analista debe realizar un estudio sobre la disponibilidad actual de insumos y sus precios. El mercado proveedor, como todos los mercados, es dinámico. Su equilibrio puede ser modificado debido al ingreso de una nueva empresa compradora. Por ejemplo, un aumento en la cantidad de insumos demandados puede generar un aumento del precio de los mismos. Esto provocará una disminución en los márgenes de las empresas y en sus rentabilidades. Debe quedar claro que el estudio de los precios y las cantidades ofertadas por los proveedores se deben analizar, no sólo en la situación actual, sino bajo la influencia del proyecto en funcionamiento.

Resulta evidente que el tamaño del proyecto a instalar y su impacto en el equilibrio del mercado proveedor están íntimamente relacionados. No se comportará de igual manera un mercado en el cual aumente la demanda de insumos en un 1% que aquel en la que aumente un 30%. Al análisis de precios y cantidades se le debe sumar el estudio de las condiciones de crédito, los plazos de entrega y cumplimiento de los mismos. A veces, en los proyectos altamente dependientes de los insumos y con pocos proveedores, es necesario realizar un estudio sobre la salud financiera de los mismos para evitar faltantes de insumos por quiebra. En el caso de trabajar con proveedores poco confiables, una posible solución para salvar este inconveniente es la "*Integración hacia Atrás*". Esto es, adquirir o crear una empresa que sirva de proveedora a la empresa creada por el proyecto. En

el caso que se analice la posibilidad de trabajar con proveedores extranjeros, es importante analizarla influencia de la política de importaciones y el impacto en el proyecto de sus posibles variaciones.

4.3.3 El mercado distribuidor

Está formado por aquellas empresas intermediarias que entregan los productos / servicios de los productores a los consumidores. En función del proyecto que se analice la distribución jugará o no un papel relevante. Por ejemplo para un proyecto de bienes de capital (maquinaria) la distribución no será vital y no requerirá un gran análisis. En cambio si el proyecto se trata de una nueva golosina, la distribución, en tiempo y forma, será una variable clave del negocio por lo que el análisis del mercado distribuidor será tan importante como el del mercado consumidor. El impacto del mercado distribuidor sobre la rentabilidad de un proyecto llega a ser muy importante en determinados casos. Este mercado es de gran influencia en el caso de las empresas que producen bienes de consumo masivo y/o en el caso de bienes perecederos.

Se puede citar como ejemplo el caso de Lala. Una de las principales fuentes de diferenciación de esta empresa es que sus productos llegan todos los días a todo el país, garantizando productos frescos y una cobertura nacional. Esta diferenciación ha hecho que Lala se convierta en la empresa más importante de productos lácteos dentro del país. Pero, por otro lado, los costos de mantener una estructura de distribución de esta magnitud son enormes y la elección de una correcta política de distribución es fundamental para la vida de la empresa. Existen tres medios de llegar al cliente:

1. Distribución propia.
2. Distribución por terceros.
3. Distribución mixta.

La elección de uno u otro medio dependerá de los costos asociados y del nivel de servicio esperado. En el caso que se opte por utilizar distribución por terceros es fundamental la correcta selección de la empresa distribuidora. No hay que olvidar que el contacto con el cliente lo tiene el distribuidor, es la cara de la empresa, una mala selección de la misma puede atentar directamente contra la rentabilidad del negocio. Según quien sea el cliente del proyecto, será el tipo de funcionamiento del canal de comercialización:

- Distribución directa: el cliente es el consumidor final del producto.
- Distribución indirecta: el cliente es un mayorista o comerciante del producto.

4.3.4 El mercado competidor

El mercado competidor está formado por el conjunto de empresas que en la actualidad satisfacen total o parcialmente las necesidades de los potenciales consumidores del proyecto. Estas empresas serán rivales de la empresa que creará el proyecto en la participación por el mercado consumidor. Uno de los pocos elementos positivos que tiene la existencia de competencia para el proyecto es que puede ser utilizada como fuente de información para el análisis del proyecto. Si se tiene acceso a información de la competencia tales como balances, cuadros de resultados, informes de gestión, etc. se pueden obtener datos muy valiosos para el estudio. Un concepto que es muy importante tener en cuenta es el de la "*Competencia en Nichos*". Debido a la segmentación propia del mercado consumidor, no todas las empresas involucradas en un mismo negocio compiten entre sí. Algunas de ellas se orientarán a un determinado segmento, en donde competirán por el mercado consumidor, mientras que otras lucharán en otro nicho.

Por ejemplo, si se realiza el estudio de la competencia de un vino fino, se debe tener en cuenta que éste no compite directamente con un vino de mesa. Esto se debe a que ambos apuntan a distintos segmentos del mercado. Esto no quiere decir que no se deban analizar determinados segmentos del mercado competidor. Un buen estudio del mercado competidor incluye la investigación de todos los segmentos para determinar cuál de ellos resulta más atractivo. Uno de los elementos más delicados en el estudio de un mercado es la dificultad de prever la reacción de los distintos competidores ante la posible modificación del equilibrio en el mercado que genere el proyecto. En el caso de que se compita con empresas extranjeras (ya sea en México o en un mercado externo) es fundamental el estudio de las políticas arancelarias para importaciones / exportaciones tanto de México como de los mercados en los que se pretenda incursionar.

4.3.4.1 Potenciales competidores

La competencia potencial está formada por aquellas empresas con intenciones de ingresar en el negocio. El ingreso de esta nueva competencia está contenida por las barreras de entrada del negocio. La influencia del ingreso de una nueva empresa en un negocio puede influir en el equilibrio del mercado competidor en diversas formas. Tanto precios, como cantidades y calidades pueden modificarse debido a la aparición de nueva competencia. Un caso claro de variación de equilibrio es el de la televisión por cable en el país. El ingreso de poderosos grupos empresarios en este mercado en los últimos años, ha obligado a las empresas que anteriormente comandaban el negocio con precios altos y calidades intermedias a bajar sus precios y brindar señales de alta nitidez con mayor número de canales.

4.3.5. El mercado de bienes sustitutos

Se debe estudiar el mercado de bienes sustitutos (actuales y potenciales). Los bienes sustitutos cobran importancia al modificarse el equilibrio del mercado, principalmente por efecto del precio. Se deben estudiar los potenciales sustitutos ya que estos pueden ser más atractivos al consumidor, que el producto que se pretende introducir. Un claro ejemplo se puede ver con los envases de PET. Si un estudio de mercado realizado en 1985 para la producción de envases de vidrio no tuvo en cuenta el impacto que tendría más tarde la fabricación de envases PET, seguramente la rentabilidad de este proyecto fue mucho menor que la esperada. Como este se pueden mencionar muchos casos en los que la competencia de los productos sustitutos es tan importante como la de los competidores del mismo ramo (Ej.: Maquinas de escribir vs. Computadoras, Cine vs. Video, Video vs. TV por cable, etc.).

4.3.6 Resumen del estudio del mercado

En resumen, los principales puntos a considerar en el análisis de cada mercado son:

- Mercado consumidor:
 - Características del segmento al que apunta el bien o servicio producido por el proyecto.
 - Necesidades a satisfacer.
 - Demanda (actual y proyectada) del bien o servicio a producir.
 - Mercado interno y/o externo.

- Mercado proveedor:
 - Disponibilidad (actual y proyectada) de recursos (materia prima, mano de obra, etc.).
 - ¿Puede la demanda de materia prima generada por el proyecto modificar los parámetros de la oferta (precio, etc.)?
 - Poder de negociación con los proveedores.

- Mercado Distribuidor:
 - Como se sitúa la empresa dentro de la cadena.
 - Tipo de distribución (propia, por terceros o mixta).
 - Disponibilidad de canales de comercialización.
 - Funcionamiento de los canales de comercialización (directo / indirecto).

- Mercado Competidor:
 - Oferta (actual y proyectada) del bien o servicio a producir.

- Situación actual de la competencia (estrategia comercial, precios, etc.).
 - Impacto del proyecto en la competencia.
 - Posible reacción de la competencia a la introducción del proyecto.
 - Condiciones para la importación y exportación: barreras arancelarias, cupos, cuotas, etc.
 - Impacto de potenciales nuevos competidores en el proyecto.
- Mercado de Bienes sustitutos:
 - Oferta (actual y proyectada).
 - Situación actual de los competidores sustitutos (estrategia comercial, precios, etc.).
 - Impacto del proyecto en los competidores sustitutos.
 - Posible reacción de los competidores sustitutos a la introducción del proyecto.

4.4 Herramientas para el estudio de mercados

Una herramienta es aquel instrumento capaz de medir en magnitud o en atributo cualquier variable que sea clave para el proyecto a analizar. La primera herramienta clave para un análisis eficaz, es el criterio profesional que debe aplicarse en cada paso del proceso de evaluación. El primer paso a encarar en un estudio de mercado consiste en la determinación de aquellas variables claves para el proyecto, de manera de no invertir horas de trabajo en análisis que a posteriori no servirá. Es muy importante la manera de analizar la información. Por ejemplo: Si uno desea estudiar el mercado de cervezas, cualquier analista estimará importante estudiar el consumo histórico de cervezas, pero la clave en la lectura de la información es conocer de qué manera ordenarla, cómo segmentarla. Una buena manera sería:

- Por edad.
- Por sexo.
- Por nivel socioeconómico.
- Por época del año.

Ordenar la información de la manera más adecuada es la mejor manera de realizar un análisis.

Las herramientas cumplen la función de ayudar a simplificar el estudio del mercado. A su vez el análisis puede ser separado en tres etapas:

- I. Análisis histórico
- II. Análisis de la situación presente
- III. Análisis de la situación proyectada

I. Análisis histórico: El análisis histórico pretende lograr dos objetivos específicos: Reunir información de carácter estadístico, que pueda servir para proyectar esa situación a futuro. Evaluar el resultado de algunas decisiones tomadas por otros agentes del mercado, para identificar los efectos positivos o negativos que se lograron. (La experiencia de otros puede evitar cometer los mismos errores que ellos cometieron y repetir o imitar las acciones que les produjeron beneficios).

II. Situación presente: El estudio de la situación presente es importante porque es la base de cualquier predicción, y define la relación causa-efecto analizada junto a la situación pasada.

II. Situación proyectada: La información histórica y presente analizada permite proyectar una situación suponiendo el mantenimiento del comportamiento de las variables analizadas que con la implementación del proyecto se deberían modificar. En la situación proyectada se debe diferenciar la situación futura sin el proyecto y la situación futura con la participación de él, concluyendo así con la definición del mercado para él mismo.

4.4.1 Tipos de herramientas

Podemos clasificar las herramientas de diferentes maneras. Por ejemplo:

- Estudios cuantitativos y cualitativos.
- Estudios desde la oferta y desde la demanda.
- Estudios con información primaria y con información secundaria.

4.4.1.1 Estudios cuantitativos y cualitativos

Los estudios cuantitativos nos permiten, como su nombre lo indica, cuantificar el mercado, tomar una muestra representativa y poder proyectar sus resultados con un margen de error acotado. Los estudios cualitativos, en cambio, permiten evaluar tendencias, saber los “*por qué*”, sin embargo sus resultados no son proyectables.

4.4.1.2 Estudios desde la oferta y desde la demanda

Para que un estudio de mercado sea completo, es necesario realizar el análisis desde estos dos enfoques: Oferta y Demanda, que juntos dan una idea cabal del mercado. Por ejemplo, en el mismo caso tratado previamente (cervezas), por un lado es necesario determinar quienes son los oferentes, identificar su estrategia comercial, volúmenes de venta, precio, canales de distribución,

promoción. Pero toda esta información debe ser cruzada con quién consume la cerveza, quién la demanda, de manera de tener una visión completa de cómo se comporta el mercado.

4.4.1.3 Estudios con información primaria y con información secundaria

La información primaria, es todo tipo de información que uno recibe desde la fuente original, sin intermediarios. Por ejemplo desde una encuesta, la información es recogida tal cual se generó. En cambio la información secundaria, es todo tipo de información ya elaborada y procesada por un agente intermediario, por ejemplo información recogida desde una cámara, INEGI, etc. Por lo general, cuando se analiza un mercado desde el lado de la oferta, la información que se dispone es secundaria, pues las empresas son más reacias a brindar información individualmente. En cambio, cuando se analiza el mercado desde la demanda es más usual trabajar con información primaria.

Hasta aquí se presentaron diversas herramientas útiles a la hora de realizar un estudio del mercado. A su vez el estudio del mercado puede ser analizado en tres etapas:

1. Análisis histórico,
2. Análisis de la situación presente y
3. Análisis de la situación proyectada.

Esta manera sistémica de estudiar el mercado pretende no pasar por alto ningún punto que pueda resultar importante en la determinación de las variables "*clave*" para la continuación del estudio de factibilidad del proyecto. Recordemos que las variables "*clave*" son:

- Precio.
- Cantidad.
- Características.
- Estrategia Comercial.

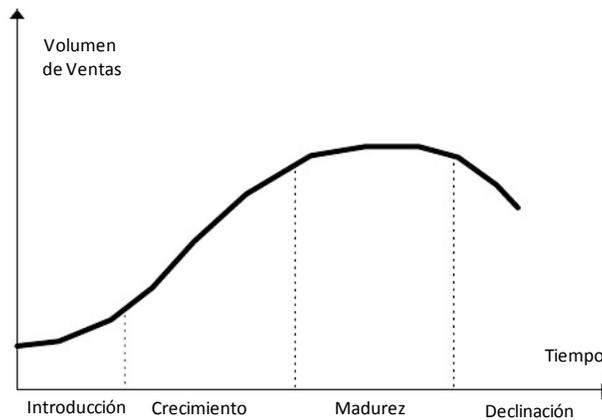
4.5 Técnicas de análisis del mercado

A continuación se explican algunas técnicas utilizadas en la ejecución de estudios de mercado.

4.5.1 Ciclo de vida del Producto

Al evaluar un producto, el comportamiento esperado de las ventas pasa a constituirse en una de las variables más importantes, pues determina el ingreso del proyecto. Sin ventas, no hay proyecto. El concepto de ciclo de vida del producto ayuda a identificar parte de ese comportamiento

esperado. En la mayoría de los casos se reconoce un comportamiento variable que responde a un proceso de cuatro etapas: introducción, crecimiento, madurez y declinación. En la etapa de introducción, las ventas se incrementan levemente, mientras se da a conocer el producto, la marca se prestigia, o la moda se impone. Si el producto se acepta se produce un rápido crecimiento en las ventas. Estas alcanzarán su etapa de madurez estabilizándose, para llegar luego a una etapa de declinación en la cual las ventas disminuyen rápidamente. El tiempo que demore este proceso y la forma de la curva dependerán de cada producto/servicio y de la estrategia de cada proyecto en particular.



4.5.2 Otras

Ver Parte 3: 3. *Pronósticos*, 3.1 *Técnicas cuantitativas de pronóstico*, 3.1.1 *Regresión (Método de los mínimos cuadrados)*, 3.1.1.1 *Modelo de regresión simple*, 3.1.1.1.1 *Correlación lineal*, 3.1.1.1.1.1 *Coeficiente de correlación lineal*, 3.1.1.1.1.2 *Coeficiente de determinación*, 3.1.1.1.2 *Correlación parabólica*, 3.1.1.1.2.1 *Ecuaciones de primer grado con tres incógnitas*, 3.1.1.1.3 *Correlación exponencial, potencial y media móvil*, 3.1.1.2 *Modelo de regresión múltiple*, 3.1.1.3 *Modelo econométrico*, 3.1.1.4 *Modelos de series de tiempo*, 3.2 *Diagnóstico externo*, 3.3 *Radiografía interna*, y .3.1. *Análisis FODA*.

4.6 El análisis de la información recopilada es el eje del estudio de mercado

Este proceso involucra la asimilación de los estudios realizados y tiene como conclusión el posicionamiento a ser adoptado por la empresa en el mercado. La correcta elección del

posicionamiento, que concluye en las definiciones de precio, cantidad, características y estrategia comercial, será vital en el éxito del proyecto. Si bien los estudios de condiciones externas e internas acotan al proyecto, las posibilidades y los grados de libertad para la toma de decisión que quedan son múltiples. El proceso de análisis del diagnóstico externo y de la radiografía interna en búsqueda de un posicionamiento correcto no es matemático. En él es fundamental el criterio que el analista utilice.

4.6.1 Fijación del precio del producto

Toda empresa o proyecto debe enfrentar el reto de la fijación de precio para su producto o servicio. Históricamente el precio se establecía por negociación entre el comprador y el vendedor. En cambio hoy en día es determinado por las variables del mercado. Entre las variables definidas por el estudio de mercado, la que representa ingresos es fundamentalmente el precio; el resto representa costos. Los errores más comunes en la fijación de precios son:

- La fijación de precios está orientada a los costos.
- El precio no se revisa con suficiente frecuencia como para aprovechar los cambios en el mercado.
- El precio se establece independientemente del resto de variables fijadas por el estudio de mercado.
- El precio no contempla variaciones para diferentes artículos y segmentos de mercado.
- Se considera al precio como variable estática y no dinámica.

Los factores a considerar en la fijación y proyección de precios pueden separarse en internos y externos. Dentro de los factores internos se deben nombrar: los objetivos de la empresa (supervivencia, maximización de utilidades, liderazgo, otros), la estrategia de posicionamiento de los productos, los costos de insumos (constantes y variables, según su comportamiento en diferentes niveles de producción, etc.) y consideraciones organizacionales (área que fija precios dependerá del tamaño de la empresa). Por el otro lado tenemos los factores externos de los cuales cabe mencionar: tipo de mercado (competencia pura, competencia monopolista, competencia oligopólica o monopolio puro), balance oferta–demanda, percepción del consumidor del precio y el valor, precios y oferta de la competencia y otros factores como situación económica, gobierno, revendedores, moda, usos, etc. Para la proyección del precio se debe tener en cuenta la tendencia de las variables involucradas.

Desde el punto de vista puramente económico, el precio es percibido como el determinante principal de la venta de un producto/servicio. La mayoría de los modelos económicos toman el precio como la variable central. Al considerar la oferta y demanda en un mercado se debe tener la

en cuenta los efectos que producirá el lanzamiento de nuestro producto sobre esos parámetros, considerados anteriormente en la descripción general de un mercado. Al tratarse de exportaciones por lo general la cantidad ofertada es despreciable frente al total, por lo que son despreciables también los efectos sobre el total del mercado internacional. Al determinar las curvas de demanda hay que señalar el comportamiento diferente de los bienes de prestigio frente a los bienes comunes. Estos primeros llegan a experimentar una retracción en la demanda junto con la reducción su precio de venta por dejar de percibir el consumidor el valor que le asigna relacionado con su elevado precio.

Para la fijación del precio hay que distinguir también si tendrá el producto por destino el mercado interno o el externo. Al exportar, al llamado precio FOB (sigla del inglés que significa puesto sobre la cubierta del buque) que puede coincidir con el precio que tiene el producto para la venta en el mercado interno, se le debe agregar el costo del flete, que dependerá del tipo de transporte, del volumen y peso a transportar, del destino de la carga, etc., con lo que se tiene el precio C&F (que significa costo y flete). El siguiente costo adicional a considerar es el del seguro, que generalmente es un porcentaje sobre el precio C&F declarado, con lo que llegamos al precio CIF (que comprende costo, seguro y flete).

Preguntas claves que podríamos formular para la fijación del precio serían:

- ¿Cuáles son los precios de los competidores?
- ¿En qué etapa de su ciclo de vida se encuentra el producto/servicio?
- ¿Cuáles nuestra política de posicionamiento?
- ¿Qué objetivos se están intentando lograr a través del precio del producto? (por ejemplo, penetración y crecimiento del mercado, testeo superficial del mercado o margen de ganancia máxima, rápida recuperación de la inversión, porcentaje de ganancia satisfactorio, promoción de la línea de producto)
- ¿En qué se basa para fijar el precio del producto: la estructura de costos (por ejemplo alza de precio, precio–meta), la demanda que tiene el producto (por ejemplo, discriminación de precio, valor percibido) y/o la actividad competitiva?
- ¿Hasta qué punto son sensibles al cambio de precio los consumidores o clientes?
- ¿Hasta qué punto son sensibles los competidores al cambio de precio?

Un ejemplo de fijación de precio lo dan Volkswagen y Jaguar. El primero posiciona su automóvil sobre un precio razonable y la economía de uso. Jaguar en cambio lo posiciona esencialmente sobre la calidad y el rendimiento, su precio agrega prestigio.

Un ejemplo de fijación de precio por posicionamiento es el del Peugeot 405 fabricado por Sevel. En un primer momento se calculaban producir 200 unidades diarias, y el sector de *Marketing* había fijado su precio alrededor de los 32.000 dólares para posicionarlo como automóvil de altas prestaciones y gran confort. En el período 95–96 sólo se produjeron 70 unidades diarias, debido en primera instancia a la posibilidad de los compradores de importar el mismo modelo por precio sensiblemente menor. Sevel podría bajar el precio fijado por *Marketing* como estrategia comercial, ganando terreno a los importados y disminuyendo a la vez los costos que acarrea la disminución del nivel de actividad, a costa de disminuir el valor subjetivo que los consumidores le asignan al modelo por su precio elevado.

Un ejemplo de la variación de demanda de un bien considerado de prestigio es el caso de fijación de precio del Lexus en EE.UU., que tenía buenas ventas con un precio relativamente elevado. Al bajar el precio del automóvil, se notó juntamente una disminución en las ventas. Entonces se volvió a elevar el precio hasta equipararlo con los más altos del mercado, con lo que incrementó las ventas por encima del volumen máximo antes alcanzado.

4.6.2 Objeto de su estudio en proyecto

Consiste en determinar la cantidad de productos industriales, provenientes de una fuente de producción a instalar, que la comunidad estaría dispuesta a adquirir a determinados precios. Con este estudio se puede adjudicar a esa fuente una determinada capacidad de producción, dato base sobre el cual se realizarán todos los estudios de factibilidad.

Se debe hacer constar que la determinación de la capacidad de producción no depende únicamente de un estudio de mercado, sino también de otros factores limitantes, como podría ser la disponibilidad de materias primas (ej. Utilización de un subproducto proveniente de otra planta), limitaciones en la disponibilidad de energía o combustibles, agua, etc.

De la definición de mercado y a los efectos de llegar a determinar su amplitud, se extrae que es necesario estudiar la cuantía de la oferta y la demanda. Según la magnitud relativa de cada uno de estos dos factores podremos tener dos situaciones:

1. Demanda insatisfecha: se da cuando la demanda supera a la oferta. La Producción que corresponda al Proyecto se sumará a la oferta de los demás Proveedores. Normalmente se puede reconocer por dos indicadores:
 - Precios altos.
 - Establecimiento de controles por parte del Estado.

2. Demanda satisfecha: Se da cuando por lo menos la oferta alcanza la magnitud de la demanda. En este caso, a los efectos de encarar el desarrollo del proyecto, se deberá intentar una *demanda por sustitución*, es decir que no se amplía el volumen del mercado existente sino que se desplaza a otros productores. Encarar una demanda por sustitución implica mejorar las condiciones del mercado actual ya que de otra forma no se podría romper con la inercia de la comercialización.

Para mejorar las condiciones del mercado se pueden variar tres factores:

1. La calidad del producto o un mismo producto de mayor calidad (tecnologías más modernas) o un nuevo producto sustituto con mejores propiedades
2. El precio del producto.
3. Las condiciones de venta.

4.6.3 Etapas de un estudio de mercado

El estudio de mercado comprende dos etapas:

1. La recopilación de antecedentes
2. La elaboración y análisis de los mismos

1. Recopilación de antecedentes. Implica localizar las fuentes de información. Estas pueden ser de dos tipos, Primarias y Secundarias.

- Fuentes de información primaria: estas no pueden ser identificadas tan fácilmente como las fuentes de datos secundarios. La identificación de las fuentes primarias surge luego de la determinación del propósito y ámbito de la investigación.
- Fuentes de información secundarias: estas fuentes han sido publicadas anteriormente y pueden ser internas o externas. Los archivos de la compañía y los reportes de investigación de mercado preparados anteriormente son el ejemplo típico de fuentes de información secundaria interna. Los datos acerca de fuentes de información secundaria externa pueden enmarcarse en las siguientes fuentes principales:
 - Bibliotecas públicas.
 - Universidades, servicios de biblioteca y oficinas de investigación y economía.
 - Agencias gubernamentales, especialmente departamentos de industria, comercio, agricultura, etc.
 - Asociaciones profesionales.
 - Editores de publicaciones comerciales.

- Organizaciones de investigación de estadísticas y censos.
- Revistas especializadas, conferencias y contactos personales.
- Internet.

Cuando se ha identificado la información requerida, es posible dar con la persona o personas que poseen esa información. Por ejemplo un fabricante de vitaminas para niños descubrió que era necesario obtener información de los usuarios (niños), de los compradores (padres), de los vendedores (farmacéuticos) y de los que influyen en la compra (pediatras). Obviamente es muy costoso recolectar información de múltiples fuentes y además implica un dilatado lapso.

Estas desventajas se compensan, ya que la información obtenida está hecha a la medida específica de del problema. Se puede en este momento preguntar a que fuente de información se debe recurrir, esto dependerá lógicamente de dos factores, el valor de ésta con relación al tiempo y el costo requerido y el lugar donde se encuentra localizada.

Circunscribiendo el problema al ámbito de Proyecto de plantas podemos decir que existen tremendas ventajas al utilizar las fuentes de información secundaria ya que con frecuencia, y hasta podríamos decir siempre, para resolver el problema planteado a nivel gerencial, la información debe ser obtenida rápidamente y analizada con prontitud.

Las fuentes de información secundaria reúnen estos requisitos. Además el costo es solo una pequeña fracción del que implicaría reunir información primaria.

Las limitaciones que nos impondría la utilización de este tipo de información son las siguientes:

- Se refieren a otro momento determinado en el tiempo
- La causa por la cuál fueron reunidas es distinta al problema de investigación que nos atañe.

Los antecedentes que son necesarios recopilar se refieren a información estadística, como las características del mercado en cuanto a comercialización, normas legales, tipificación, racionamiento, controles de precios u otros elementos de incidencia significativa en la cuantía de la demanda.

Los principales antecedentes a los que se ha hecho referencia se describen a continuación:

- Series estadísticas. Todo estudio tendrá que comenzar por recopilar series estadísticas de producción nacional, exportación e importación y consumo. Podemos aclarar que cuando no existan datos de consumo, se puede aceptar como indicador de éste, el llamado

consumo aparente, que resulta de restar a la producción nacional el saldo entre exportación e importación.

- $C.A. = P.N. + IM. - EX.$
- $C.A. = P.N. - (EX. - IM.)$

Estas series deben ser vertidas en forma de gráficos en función del tiempo, y en general pueden bastar informaciones de 10 a 15 años atrás para ubicar las líneas de regresión.

- Precios y Costos actuales. El conocimiento de precios actuales a que se vende a mayoristas y consumidores finales permite hacer estimaciones sobre costos de distribución. Además se podrá estimar qué posibilidad hay de sustituir a la competencia mediante el precio, o viceversa.
- Fuentes de abastecimiento. Es indispensable saber cuáles son las principales fuentes proveedoras actuales del producto, y si éste procede del extranjero o se produce en el país. En este último caso convendrá averiguar la capacidad productora existente, en qué medidas se la está utilizando, donde está localizada y qué características tiene las unidades productoras típicas. Estas pueden ser, por ejemplo, del tipo artesanal o empresas pequeñas de bajo rendimiento reemplazables por una fábrica de tamaño adecuado que emplee técnicas modernas.
- Política Económica. El conocimiento adecuado del mercado puede requerir un análisis por separado de las influencias relativas tales como el racionamiento de divisas, el racionamiento del producto, los tipos de cambio y otros que tienen su origen en decisiones de naturaleza política. Estas informaciones serán útiles para hacer apreciaciones respecto a la influencia que tendrían sobre el Proyecto, el mantenimiento o la variación en determinado sentido de la política económica.

La importancia relativa de los diversos antecedentes señalados variará según el objetivo del estudio y el tipo de producto que se quiere fabricar. Quedará a criterio de los diseñadores determinar donde será necesario ir más a fondo y en que otros se podrá prescindir de un estudio detallado.

2. Elaboración y análisis de los antecedentes. Una vez reunida la información, para obtener una cabal idea del mercado se deberán responder varias preguntas que se relacionan directamente

con los consumidores y su conducta. Las preguntas más importantes que relacionan el análisis con el consumidor son:

- ✓ ¿Quién es el cliente?
- ✓ ¿Qué desea en lo que se refiere a satisfacción?
- ✓ ¿Dónde escoge comprar?
- ✓ ¿Por qué compra?
- ✓ ¿Cuándo compra?
- ✓ ¿Cómo busca sus satisfacciones en el mercado?

En cuanto a la primera pregunta se puede decir que los tipos más importantes de consumidores son:

- Los consumidores finales.
- Industriales y comerciales.
- Instituciones.
- Gobierno.

Las respuestas al resto de las preguntas están determinadas por tres grupos de fuerzas influenciadoras que son:

I. *Factores económicos*. Que a su vez pueden separarse en también en tres:

- Ingresos.
- Créditos.
- Patrones de gastos familiares, los que según las leyes de Engel varían de la siguiente manera:
 - Conforme aumenta el ingreso de una familia un % más pequeño se gasta en alimentación.
 - Para un aumento de ingreso un % igual se incrementa en ropa, renta, remodelaciones en la casa.
 - De un aumento de ingreso un % mayor se produce en el consumo de artículos discrecionales.

Debemos aclarar que cuando hablamos de aumento de ingresos nos referimos al caso concreto de un aumento del ingreso real.

II. *Factores demográficos*. Que comprende los siguientes ítems:

- Distribución de la edad.

- Educación.
- Origen racial.
- Distribución geográfica.

III. Características familiares.

IV. Actitudes y opiniones individuales.

2.1. Proyección de la Demanda. Es de vital conveniencia la necesidad de estimar una demanda futura de los productos a fabricar para así obtener criterios de estimación de la Producción que la Fábrica deberá ser capaz de producir en determinado momento.

No existen normas definitivas para estimar las demandas futuras y sus precios, los métodos de proyección que se utilizan en la práctica revelan por ello distintos grados de complejidad, que van desde simples extrapolaciones de tendencias históricas hasta elaborados métodos de correlación. El método que se escoja dependerá de la naturaleza del problema y de los datos accesibles.

La técnica a usar en los distintos proyectos es la de la extrapolación de la tendencia histórica. Consiste en establecer una línea de ajuste entre las cantidades consumidas a lo largo de un cierto número de años (10 ó 15), para luego extrapolar la futura demanda en los próximos 10 años.

En el caso que los grados de correlación sean menores que el valor absoluto de uno (1), se puede trabajar con valores logarítmicos, lo cual podrá reducir muchas curvas a rectas.

En todos los casos, a la demanda estimada se le debe sumar una demanda adicional debida a la instalación de nuevas empresas consumidoras de las cuales se pudo haber recabado información en la recopilación de antecedentes, de que dichas Empresas van hacer instaladas en ese periodo de extrapolación.

Con esta demanda futura se calcula la producción máxima con la cual se debe proyectar los equipos y operaciones de la planta.

4.6.4 Metodología

La metodología a seguir para concretar el estudio de mercado implica:

- La recopilación de antecedentes sobre:

- Oferta, series estadísticas de:
 - ✓ Producción nacional.
 - * Capacidad operada.
 - * Capacidad instalada.
 - * Futuras expansiones.
 - ✓ Importación.

- Demanda, series estadísticas de:
 - ✓ Consumo interno.
 - * Consumo per cápita.
 - * Consumo aparente:
 - C.A.= Prod. Nac. + Importaciones – Exportaciones.
 - C.A.= Prod. Nac.– (Exportaciones – Importaciones)
 - ✓ Exportaciones.

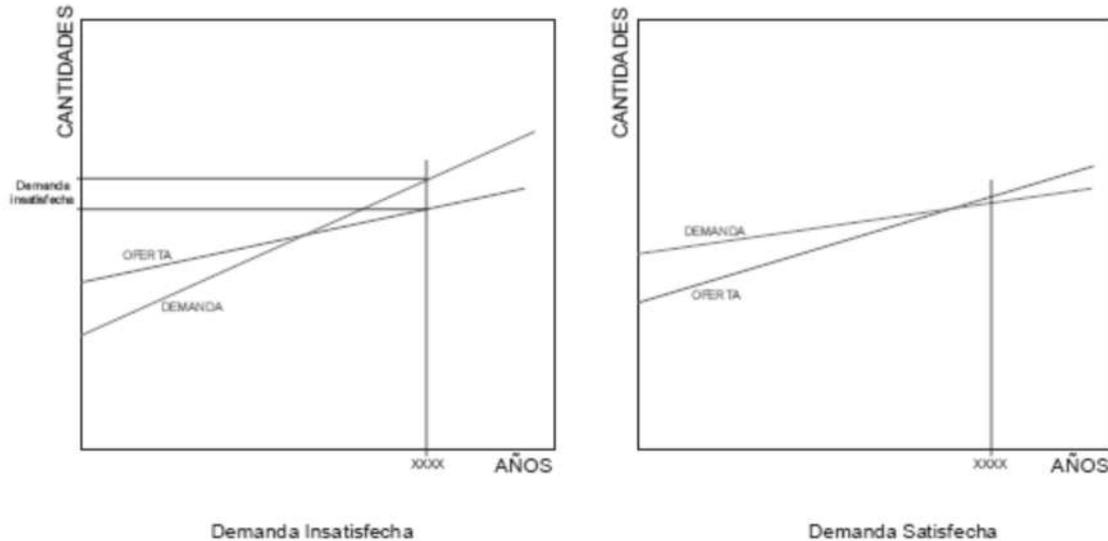
- Análisis de la posición competitiva, que implica el estudio de:
 - ✓ Usos y especificaciones actuales y futuras.
 - ✓ Calidad.
 - ✓ Precios.
 - ✓ Posibles sustitutos.
 - ✓ Descontento con productos existentes.

- Factores económicos, que abarca el estudio de:
 - ✓ Política económica.
 - ✓ Nivel de crédito.
 - ✓ Intenciones de compra.

- Items que deben constar en el informe:
 - Descripción, nombre y marca según denominaciones corrientes del bien a producir.
 - Uso y especificaciones del producto a fabricar.
 - Enumerar los bienes que derivan de la producción del bien principal a producir (sub-productos), cuya explotación se encara en el Proyecto. En el caso de que no se encarare la explotación de los sub-productos, indicar el destino que se les dará.
 - Indicar si el bien es de:
 - ✓ Consumo final.

- ✓ Consumo intermedio, señalando si reviste el carácter de materia prima, semielaborada o piezas componentes. En todos los casos se debe indicar las Industrias usuarias y la relación existente entre su consumo y el de los bienes finales en cuya elaboración participan.
- Mercados previstos:
 - ✓ Interno. Indicar zonas o regiones y sus características.
 - ✓ Externo. Indicar países, clasificándolos por integraciones comerciales, por ejemplo MCE Mercado Común Europeo).
- Análisis del Mercado:
 - ✓ Construcción de gráficos y tablas que se indican a continuación:
 - * Exportación versus Tiempo en años.
 - * Importación versus Tiempo en años.
 - * Producción versus Tiempo en años.
 - * Consumo versus Tiempo en años.
- En caso de que exista Demanda Insatisfecha, expresarla indicando las causas.
- Detallar los principales Productores, especificando: ubicación, capacidad instalada en los últimos 10 años, producción efectiva en el mismo lapso y Mercados que abastecen.
- Detallar los principales Importadores, especificando: ubicación, origen de las importaciones y la importancia de cada uno de ellos en el total importado.
- Detallar los principales Consumidores, especificando: ubicación, producto final que elaboran y la importancia de cada uno de ellos en el total de la Demanda.
- Transporte de materias primas, materiales, combustibles y productos terminados. Para cada uno de ellos, especificar: medios a utilizarse; indicar si la empresa lo tendrá a su cargo o el proveedor o el comprador en su caso, o si será contratado a terceros.
- Estimar la Demanda Futura y el cálculo de la capacidad de Producción.

Una vez reunidos estos antecedentes, con las series estadísticas construiremos los gráficos de Oferta vs. Tiempo y Demanda vs. Tiempo, proyectándolas para los diez años próximos. De la brecha que pudiese producirse entre las dos rectas se observará la característica de la demanda en cuanto a su satisfacción.



Para las evaluaciones económicas posteriores, aquellas expectativas que denotan demasiado optimismo, como por ejemplo, encarar una demanda por sustitución, darán relativa aproximación a la realidad, frente a otras basadas en la seguridad de tener la posibilidad de disponer de un sector del mercado como en el caso de la demanda insatisfecha. En este caso los pronósticos de ventas estarán probablemente más cerca de lo real que en el caso opuesto.

NOTA: En el caso de no tener antecedentes de los productos en el país, se podrá hacer el estudio del mercado, en base a comparaciones internacionales con países de situación económica similar o posibilidad de exportar (o sea, qué países son posibles importadores potenciales).

4.6.5 Conclusiones del Estudio: El Posicionamiento

Una vez realizado el análisis de las fortalezas y debilidades del proyecto (radiografía interna) y comparando éstas con las oportunidades y amenazas de los mercados en los cuales se desenvolverá el proyecto (diagnóstico externo) se llega a la conclusión del estudio: El Posicionamiento. Este debe ser la guía en base a la cual se tomen las decisiones sobre segmento, precio, volumen, servicio, etc., de tal manera de conservar una coherencia entre estos elementos.

4.6.5.1 Estrategias genéricas de Porter

Según Porter hay dos dimensiones fundamentales en el Posicionamiento:

1. El tipo de diferenciación: una empresa puede diferenciarse según:
 - Bajos costos.
 - Otro tipo de diferenciación (características diferenciales, servicios, etc.).

2. El ancho del mercado que se abarque: Cuando se selecciona el mercado consumidor target de la empresa, éste puede estar formado por:
- Un segmento del mercado (“*target*” segmento angosto).
 - La totalidad del mismo (“*target*” segmento ancho).

Es importante que el Posicionamiento que se elija genere una diferenciación clara del proyecto respecto a su competencia. No es posible pretender producir productos de alta calidad y venderlos a bajos precios. Las conclusiones de todo Estudio de Mercado son:

- Precios de los productos/servicios a introducir en el mercado.
- Cantidad a vender:
 - Volumen de ventas del proyecto y su evolución en el tiempo.
 - Penetración esperada del mercado.
 - Ampliación del mercado consumidor con la introducción de la empresa.
 - Penetración en las carteras de consumidores de las distintas empresas competidoras.
- Características de los mismos:
 - Calidad del producto/servicio.
 - Servicios adicionales que lo acompañan.
 - Características especiales (packaging, servicio a domicilio, etc.).
 - Características diferenciales generadas por la publicidad.
- Estrategia Comercial:
 - Cadena de distribución.
 - Canales de Comercialización.
 - Estrategia de venta con los clientes.
 - Estrategia de compra con los proveedores

Es fundamental que las conclusiones del estudio de mercado estén cuantificadas. Esto quiere decir, que los precios, penetraciones, niveles de servicio, etc. sean expresados en valores numéricos. Por ejemplo, si se realiza el estudio de una empresa telefónica se deben evitar expresiones como: “*se logrará un alto nivel de servicio*”. Más bien estas frases deben ser remplazadas por: “*el nivel de servicio promedio será de 2 cortes/año, la señal auditiva tendrá un nivel mínimo en el teléfono del cliente de 5 dB (mV)*”. Esto permitirá posteriormente la correcta elección de la tecnología a instalar en el dimensionamiento físico.

4.6.6 Aplicación de la información obtenida

Los resultados del estudio de mercado, demanda del bien o servicio a producir, precio de venta, características del mismo y estrategia comercial a seguir, son los datos básicos de los cuales se nutrirá el proyecto. La cantidad a producir será un dato necesario al determinar los *stocks* de materia prima y materiales necesarios, la tecnología a adoptar, la capacidad productiva a instalar, la mano de obra requerida, los stocks de producto terminado y las ventas. Las características del bien o servicio serán un dato necesario al determinar las características de la materia prima y materiales necesarios, la tecnología a adoptar y las características de la mano de obra requerida.

El precio de venta será un dato necesario al determinar los ingresos por las ventas y para realizar el análisis económico y financiero. La estrategia comercial será uno de los dato a utilizar al determinar la localización y la selección de la cadena de distribución. También son datos de la localización la materia prima y mano de obra obtenidos de la cantidad y características requeridas.

4.7 Potencial del mercado

Es el límite al que se aproxima la demanda del mercado a medida que los gastos de mercadeo en la industria se aproximan al infinito para un entorno de mercadeo en particular (por ejemplo, un período de recesión o de prosperidad).

4.7.1 Medición de la demanda del mercado

Potencial del mercado total

La fórmula¹⁷ generalmente utilizada para calcular este potencial es la siguiente:

$$Q = nqp$$

Donde:

Q = Potencial del mercado total.

n = Número de compradores en el mercado según hipótesis.

q = Probabilidad esperada de compradores.

p = Precio promedio de la unidad.

¹⁷ Ver tópico: 2.3 Distribución Binomial, de las notas del Ing. Rafael Corona Guerra para el modulo de Probabilidad y Estadística II.

Ejemplo 13. En Estados Unidos, país de 260 millones de habitantes, el consumo anual per cápita de flores es de US\$20. Por consiguiente el potencial del mercado total es de US\$5200 millones. Pero este es el conjunto esperado del que debemos eliminar a los grupos que no comprarían el producto como los niños menores de 12 años, los desempleados, los neuróticos, los de bajos ingresos, etc. La investigación nos indica que son el 40% del conjunto esperado. Calcula el potencial del mercado total para el resto del conjunto esperado factible.

Solución.

n = Numero de compradores en el mercado según hipótesis = 260×10^6 .

q = Probabilidad esperada de compradores = $1 - 0.4 = 0.6$

p = Precio de la unidad promedio = US\$20.

$$Q = nqp = (260 \times 10^6)(0.6)(US\$20) = US\$3120 \times 10^6$$

Interpretación:

Por lo tanto nos queda un conjunto esperado factible de: $(260 \times 10^6)(0.6) = 156$ millones de personas para un potencial del mercado total de US\$3120 millones. Una variación de la fórmula original es la de multiplicar n por varios porcentajes de ajuste, sistema conocido como de variación en cadena.

Potencial del área de mercado.

Las empresas tienen que estimar el potencial de mercado de países, regiones, departamentos, ciudades, para lo cual disponen de dos métodos principales:

- **Acumulación progresiva del mercado.** Se trata de identificar a todos los compradores potenciales en cada mercado y estimar sus compras potenciales. Este método se utiliza en mercadeo industrial donde es más difícil estimar ventas y participaciones. Aquí a veces es necesario contentarse con saber nuestra posición con respecto al líder del mercado y con el competidor que viene inmediatamente detrás de nosotros.
- **Indicador de factor múltiple.** Es el que se utiliza en mercadeo de consumo. Como aquí los clientes son muy numerosos se utiliza un indicador de factor múltiple y a cada factor se le asigna un peso específico. Conociendo el poder adquisitivo per cápita de una región i , se determina el poder relativo de compra con base en la siguiente ecuación:

$$B_i = F_1 y_i + F_2 r_i + F_3 p_i + F_4 d_i \quad (1)$$

Donde:

B_i = Porcentaje del poder nacional de compra total que se encontró en la región i .

y_i = Porcentaje del ingreso nacional disponible generado en la región i .

r_i = Porcentaje de las ventas nacionales en la región i .

p_i = Porcentaje de la población nacional localizada en la región i .

d_i = Otros factores que influyen en el poder de compra.

Otros factores pueden ser el número de médicos por cada 10,000 habitantes, los costos locales de promoción o también factores estacionales, cíclicos o aleatorios.

Puesto que la ecuación (1) es un promedio ponderado debe cumplirse que:

$$F_1 + F_2 + F_3 + F_4 = 1 \quad (2)$$

F_1 , F_2 , F_3 y F_4 son factores de ponderación arbitrarios. Los primeros tres factores de ponderación se relacionan con los elementos a los cuales están ponderando. El valor del cuarto factor depende de los primeros tres pues la suma de los cuatro debe ser 1, como muestra la ecuación (2).

El valor que se asigne a d_i refleja que tan importantes se consideran los *otros factores* (de los cuales no se tienen datos) en el poder de compra total.

Ejemplo 14. El estado de Michoacán tiene el 7% de poder nacional de compra, el 8% de ventas nacionales y el 11% de la población nacional. Si consideramos que los medicamentos están directamente relacionados con el tamaño de la población (aunque existen otros factores que influyen en su compra, como pueden ser el ingreso disponible y el gasto en compras al de tal) y que a cada uno de los factores de ponderación se les asignó el peso que se muestra a continuación:

$$F_1 = 0.3 \quad F_2 = 0.3 \quad F_3 = 0.2$$

Arbitrariamente se considera en este ejemplo que los otros factores contribuyen con un 5% al poder total de compra. Calcula el indicativo del poder de compra de medicamentos para el estado de Michoacán.

Solución.

$$B_i = F_1 y_i + F_2 r_i + F_3 p_i + F_4 d_i$$

Donde:

B_{Mich} = Porcentaje del poder nacional de compra total que se encontró en el estado de Michoacán.

y_{Mich} = Porcentaje del ingreso nacional disponible generado en el estado de Michoacán = 7.

r_{Mich} = Porcentaje de las ventas nacionales en el estado de Michoacán = 8.

p_{Mich} = Porcentaje de la población nacional localizada en el estado de Michoacán = 11.

d_i = Otros factores que influyen en el poder de compra = 5.

De donde se puede calcular F_4 como $F_4 = 1 - (F_1 + F_2 + F_3) = 0.2$

$$B_{Mich.} = 0.3(7) + 0.3(8) + 0.2(11) + 0.2(5) = 7.7\%$$

Interpretación.

Podríamos esperar entonces que en el estado de Michoacán se produjera el 7.7% de las ventas de medicamentos del país. Debemos tener en cuenta que el peso que le damos a los factores son en cierto modo arbitrarios y que no estamos calculando para artículos de primera necesidad de bajo costo ni para productos suntuarios costosos.

Las empresas además de calcular el potencial total y el de la zona geográfica seleccionada, necesitan también conocer las ventas de su industria, identificar a sus competidores y estimar su volumen de ventas.

En el mercado de bienes de consumo empacados las empresas recurren al índice **Nielsen Detallista** producido por AC Nielsen Corporation, el cual les permite medir sus ventas al consumidor en relación a las de la competencia, medir sus entregas de producto a los detallistas, conocer su presencia en góndolas en los establecimientos, analizar y corregir problemas de distribución, evaluar precios, controlar ofertas al consumidor, medir los esfuerzos promocionales en el punto de venta y otros datos suplementarios. La industria farmacéutica contrata un sistema similar con **IMS Health, Inc (IMS)** para analizar el mercado de medicamentos por clase terapéutica,

región, canal, laboratorio, producto y presentación tanto en unidades como en valores. Además identifica médicos por región, especialidad y patrones de prescripción.

Desarrollo del pronóstico de ventas

El pronóstico de ventas difiere del potencial de ventas de la empresa. Este establece lo que serán las ventas reales de la empresa a un determinado grado de esfuerzo de mercadeo de la compañía, mientras que el potencial de ventas evalúa qué ventas son posibles en los diversos niveles del esfuerzo de mercadeo, suponiendo que existan ciertas condiciones del entorno.

Las técnicas generalmente aceptadas para la elaboración de pronósticos se dividen en cinco categorías: juicio ejecutivo, encuestas, análisis de series de tiempo, análisis de regresión y pruebas de mercado. La elección del método o métodos dependerá de los costos involucrados, del propósito del pronóstico, de la confiabilidad y consistencia de los datos históricos de ventas, del tiempo disponible para hacer el pronóstico, del tipo de producto, de las características del mercado, de la disponibilidad de la información necesaria y de la pericia de los encargados de hacer el pronóstico. Lo usual es que las empresas combinen varias técnicas de pronóstico.

Juicio Ejecutivo. Se basa en la intuición de uno o más ejecutivos experimentados con relación a productos de demanda estable. Su inconveniente es que se basa solamente en el pasado y está influenciado por los hechos recientes.

Encuesta de Pronóstico de los Clientes. Útil para empresas que tengan pocos clientes. Se les pregunta que tipo y cantidades de productos se proponen comprar durante un determinado período. Los clientes industriales tienden a dar estimados más precisos. Estas encuestas reflejan las intenciones de compra, pero no las compras reales.

Encuesta de Pronóstico de la Fuerza de Ventas. Los vendedores estiman las ventas esperadas en sus territorios para un determinado período. La sumatoria de los estimados individuales conforma el pronóstico de la Empresa o de la División. El inconveniente es la tendencia de los vendedores a hacer estimativos muy conservadores que les facilite la obtención futura de comisiones y bonos.

El Método Delfos (*Delphi*). Se contratan expertos que hacen pronósticos iniciales que la empresa promedia y les devuelve para refinar los estimados individuales. El procedimiento puede repetirse varias veces hasta cuando los expertos (trabajando por separado) lleguen a un consenso sobre los pronósticos. Es un método de alta precisión.

Análisis de Series de Tiempo. Se utilizan los datos históricos de ventas de la empresa para descubrir tendencias de tipo estacional, cíclico y aleatorio o errático. Es un método efectivo para productos de demanda razonablemente estable. Por medio de los promedios móviles determinamos primero si hay presente un factor estacional. Con un sistema de regresión lineal simple determinamos la línea de tendencia de los datos para establecer si hay presente un factor cíclico. El factor aleatorio estará presente si podemos atribuir un comportamiento errático a las ventas debido a acontecimientos aleatorios no recurrentes.

Análisis de Regresión. Se trata de encontrar una relación entre las ventas históricas (variable dependiente) y una o más variables independientes, como población, ingreso per cápita o producto interno bruto (PIB). Este método puede ser útil cuando se dispone de datos históricos que cubren amplios períodos de tiempo. Es ineficaz para pronosticar las ventas de nuevos productos.

Prueba de Mercado. Se pone un producto a disposición de los compradores en uno o varios territorios de prueba. Luego se miden las compras y la respuesta del consumidor a diferentes mezclas de mercadeo. Con base en esta información se proyectan las ventas para unidades geográficas más grandes. Es útil para pronosticar las ventas de nuevos productos o las de productos existentes en nuevos territorios. Estas pruebas son costosas en tiempo y dinero, además alertan a la competencia.

4.7.1.1 Variables para pronosticar las variables del mercado

Análisis de la demanda

¿Qué es la demanda?, la demanda es una función; ¿Cuáles son sus variables?, sus variables son:

1. Gustos y preferencias de los consumidores.
2. Ingresos.
3. Productos sustitutos.
4. Precio.

Influencia de estas variables en la demanda.

1. Gustos y preferencias.

La demanda está enclavada en las necesidades de los consumidores, por lo tanto, sus gustos y preferencias son determinantes de la misma.

Los cambios pueden resultar de cambios culturales o demográficos y también de esfuerzos promocionales, es decir por efecto de una competencia que no es de precios.

2. El ingreso personal disponible.

El consumo y con ello la demanda de casi todos los productos, se incrementa conforme al incremento de los ingresos.

Como vimos anteriormente, los aumentos de ingresos no provocan un incremento igual en todos los bienes y servicios, por esta razón es interesante conocer el término *elasticidad* de la demanda referida a los ingresos.

Este término es la relación entre un aumento en el ingreso personal y el cambio en el consumo de bienes.

Utilizando este valor es posible predecir con bastante aproximación el nivel de demanda para cualquier nivel de ingreso personal.

3. Productos sustitutos.

La disponibilidad de sustitutos afecta las preferencias de los consumidores. Dentro de la actitud de un consumidor por algún producto en especial está su análisis hacia aquellos otros que le dan una alternativa para satisfacer su necesidad.

Por ejemplo, la demanda de automotores está afectada por la disponibilidad de transportes públicos.

Es muy difícil medir el grado de sustitución, una manera de hacerlo es medir el efecto de un cambio de precio de un producto contra el otro. El término cruzamiento de la elasticidad es usado para identificar este tipo de medición. Específicamente, el cambio relativo en las ventas de un producto se divide por el cambio relativo de precio de sus sustitutos, cuanto mayor sea el valor de esta relación mayor será el grado de sustitución de los productos.

4. Precio.

El precio ha sido considerado siempre el principal determinante de la demanda. Mientras que en la mayoría de los casos los factores anteriores (1, 2 Y 3) son bastante estables en el tiempo y en el

espacio, el precio es el factor dinámico que balancea las fuerzas económicas de la oferta y la demanda.

La relación más importante entre la cantidad y el precio es la *elasticidad* de la demanda referida a los precios, que se define como cociente entre el cambio relativo de la cantidad demandada (Q_i) y el cambio relativo en el precio (P_i).

$$E_p = \frac{\frac{Q_1 - Q_2}{Q_1 + Q_2}}{\frac{P_1 - P_2}{P_1 + P_2}}$$

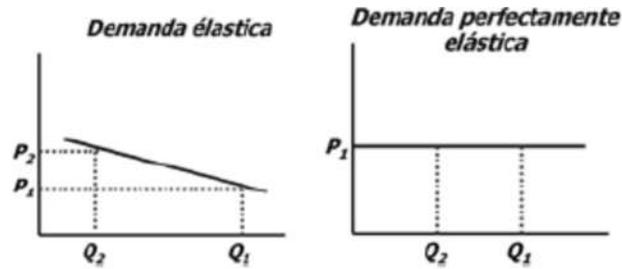
Como un aumento de precios provoca una disminución de la demanda, generalmente, el coeficiente E_p será negativo, sin embargo éste se suele presentar con signo positivo.

La demanda de un bien es elástica si la cantidad demandada responde significativamente a una variación del precio, e inelástica si la cantidad demandada responde muy levemente a una variación del precio.

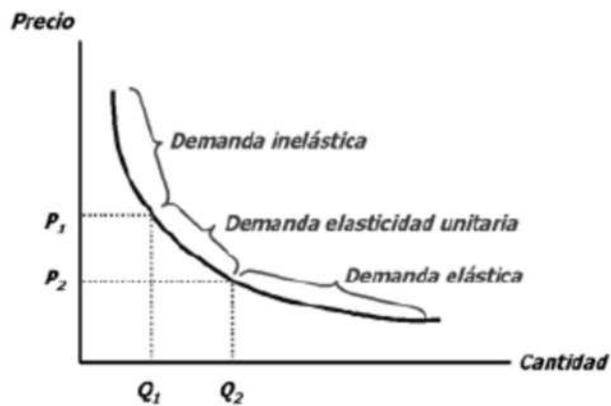
Según el valor de la elasticidad se puede hablar de:

- Demanda perfectamente elástica (elasticidad = infinito).
- Demanda elástica (elasticidad > 1).
- Demanda con elasticidad unitaria (elasticidad = 1).
- Demanda inelástica (elasticidad < 1).
- Demanda perfectamente inelástica (elasticidad = 0).





Se puede observar en los gráficos anteriores que cuanto más inclinada sea la curva de demanda menor será su elasticidad-precio. La elasticidad de la demanda no suele ser la misma a lo largo de toda la curva. Sino que al igual que la pendiente de la curva la elasticidad-precio también va variando.



Las mediciones de la elasticidad de precios son difíciles de obtener, por lo tanto para hacer una evaluación subjetiva de la situación del producto en cuanto a la elasticidad es fundamental conocer algunos determinantes de la misma.

Factores asociados a la demanda elástica	Factores asociados a la demanda inelástica
Un producto de lujo	Una necesidad
Un producto importante dentro del gasto total	Un producto poco importante dentro del gasto total
Sustitutos cercanos disponibles	Ningún sustituto cercano posible
Producto almacenable	Producto perecedero
Compra que se puede posponer	Compra no posponible
Demanda autónoma	Demanda derivable
Un producto final	Un producto intermedio
Vendido a nivel consumidor	Vendido a nivel productor

4.7.1.2 Variables para pronosticar el potencial del mercado

El siguiente tema nos ayudará a identificar las variables a considerar para la determinación del potencial del mercado.

4.7.1.3. Determinación del potencial del mercado actual y previsible para el negocio

La investigación del mercado es un trabajo sistemático que consiste en diseñar, indagar, recoger y analizar la información básica relacionada con los problemas de ventas de un producto o servicio.

Con el término de mercado no nos estamos refiriendo a aquel lugar tradicional donde la gente se reúne a vender y comprar productos. En su expresión más amplia, el mercado es un lugar indefinido que utilizamos para representarnos un área geográfica indeterminada donde en alguna forma están presentes los consumidores reales o potenciales de nuestro producto o servicio. Tales consumidores son a la vez utilizadores simultáneos de varios productos o servicios, como alimentos, medicinas, diversiones, escuelas, herramientas, talleres de reparación, tiendas, restaurantes, etc.

Sin embargo, no todo el consumidor potencial para un restaurante de comida china lo será para un expendio de comida rápida (o viceversa); a la vez que no todo industrial que posea una mini computadora en su negocio tendrá las mismas necesidades de software, ni todas las novias se casarán con vestido blanco y largo.

De cualquier forma, para confirmar lo que hasta este punto de estas notas has pensado respecto a tu propia situación, y presentarte los aspectos que no has considerado, revisa cada tema siguiente en función siempre de tu propia circunstancia presente o proyectada. Quizás tengas que dar marcha atrás en aspectos que habías aceptado en forma automática. Aún es tiempo.

4.8 Investigación de mercados

1. Definir la razón del análisis del mercado.
2. Determinar la información básica realmente necesaria.
3. Diseñar la forma para obtener la información requerida.
4. Llevar a cabo la investigación.
5. Analizar los datos y establecer los resultados de la investigación.

Fuentes de Información

- Por correo
- Por teléfono
- Por entrevistas personales
- Por publicaciones
- Por encuestas anteriores

Investigación de Mercados

- El mercado industrial es la agrupación de compañías que utilizan materias primas iguales y servicios similares para la fabricación de productos similares, ejemplo:
 - El mercado de la construcción.
 - El mercado de las pinturas para casas.
- La mercadotecnia es el proceso completo de la distribución de productos y servicios del productor al consumidor.
- La investigación de mercado es el análisis del mercado organizado. Se logra a través de un proceso sistemático de recopilación, archivo y análisis de información relacionada con la comercialización de bienes o servicios

Razones para llevar a cabo una Investigación de Mercado

1. Para identificar las necesidades del producto o servicio en mercados nuevos o existentes.
2. Para desarrollar una estrategia de venta.
3. Para pronosticar su tendencia de ventas.
4. Para estudiar las adquisiciones de materias primas y materiales.
5. Para programar producción, ventas y distribución.
6. Para analizar las actitudes del consumidor.
7. Para conducir campañas promocionales.
8. Para establecer el monto del capital requerido.
9. Para planear utilidades.

Análisis de Mercado

Antes de que un concepto de negocios se desarrolle alrededor de una nueva idea, deberá hacerse un meticuloso análisis o investigación del mercado. El análisis de mercado no es necesariamente

complejo ni costoso: es esencialmente lógico y práctico. Deberá darnos respuestas a las siguientes preguntas:

1. ¿Quién comprará mi producto o servicio?
2. ¿Cuánta gente, familias o compañías componen el mercado potencial?
3. ¿Cómo puede ser alcanzado ese mercado? La mejor forma de llegarle al cliente potencial dependerá del tipo de producto o servicio, ya se trate de un producto industrial o de un servicio.
4. ¿Hay bastante gente que tenga necesidad de un servicio o producto? ¿Puede pagarlo?
5. ¿Hay un número suficiente de gente que tiene esa necesidad, la reconocen como tal, o tendría que ser educada para que reconozca que tiene tal necesidad?
6. ¿Será el valor de la demanda lo suficientemente alto como para permitir satisfacerla con un buen margen de beneficio?
7. ¿Dispondrá el mercado de los recursos necesarios para comprarme a los precios que estipule?
8. ¿Podré alcanzar mi mercado con la frecuencia suficiente en forma económica y eficientemente?

Quinta Parte

Diseño de experimentos

5 Estrategia del diseño experimental

Definimos a una unidad experimental como una unidad motivo del análisis, por ejemplo, una unidad experimental podría ser el peso, la talla, el nivel de colesterol, etc. Es necesario que estas se tomen de forma aleatoria para eliminar el sesgo, nunca se debe realizar el experimento para un conjunto de variables dadas y tomar de forma secuencial un conjunto de datos.

Cuando se tiene un conjunto de datos grande el sesgo se reduce, pero hay que recordar, que este se incrementa a medida que reducimos el tamaño del conjunto.

Definimos un bloque al conjunto de unidades experimentales que se agrupan de acuerdo a una propiedad o característica en particular. Los niveles del factor o tratamiento se asignan entonces de forma aleatoria dentro de los bloques. El propósito de formar bloques es reducir el error experimental efectivo.

El término tratamiento se usa por lo general para referirnos a las diversas clasificaciones, ya sea de las mezclas diferentes, análisis diferentes, fertilizantes diferentes o regiones diferentes del país.

5.1 Distribución de probabilidad de variables aleatorias discretas o discontinuas

Toda distribución de probabilidad es generada por una variable aleatoria X , la que puede ser de dos tipos (discreta y continua).

5.1.1 Definición de variable aleatoria discreta o discontinua

Se le denomina variable porque puede tomar diferentes valores, aleatoria, porque el valor tomado es totalmente al azar y discreta porque solo puede tomar valores enteros y un número finito de ellos.

Ejemplos:

15. $x \rightarrow$ Variable que nos define el número de burbujas por envase de vidrio que son generadas en un proceso dado.

✓ $x \rightarrow 0, 1, 2, 3, 4, 5, \text{ etc. etc. burbujas por envase.}$

16. $x \rightarrow$ Variable que nos define el número de productos defectuosos en un lote de 25 productos.

✓ $x \rightarrow 0, 1, 2, 3, \dots, 25$ productos defectuosos en el lote.

17. $x \rightarrow$ Variable que nos define el número de alumnos aprobados en la materia de probabilidad en un grupo de 40 alumnos.

✓ $x \rightarrow 0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots, 40$ alumnos aprobados en probabilidad.

Con los ejemplos anteriores nos damos cuenta claramente que los valores de la variable x siempre serán enteros, nunca fraccionarios.

Dado un experimento aleatorio cualquiera cuyos sucesos elementales posibles pueden identificarse fácilmente mediante un número real, se denomina *variable aleatoria*, x , al conjunto de estos números.

También se le llama variable de azar o variable estocástica, y significa cantidad que puede tomar varios valores imprevistos.

Ejemplo 18. Sea el experimento aleatorio de lanzar un dado al aire. Los posibles resultados del experimento (sucesos elementales) son los siguientes: <<que salga 1>>, <<que salga 2>>, <<que salga 3>>, <<que salga 4>>, <<que salga 5>> y <<que salga 6>>. Resulta sencillo asociar a cada suceso elemental el número correspondiente a la cara del dado que haya salido. Por tanto, la variable aleatoria, x , será: $x = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

Por el contrario, si dado un experimento aleatorio cualquiera no resulta inmediata la asociación de un número para cada uno de los posibles sucesos elementales, se establece una correspondencia entre el conjunto de los posibles sucesos elementales y el conjunto de los números reales, de manera que a cada suceso elemental le corresponda un número real arbitrario y que a sucesos elementales distintos les correspondan números distintos.

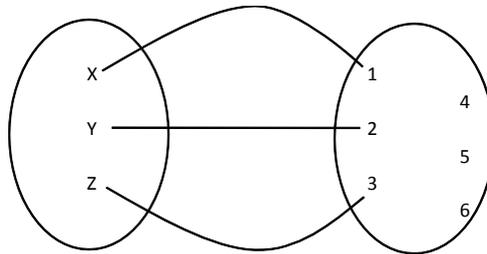
Se denomina variable aleatoria al conjunto imagen de esta correspondencia, es decir, al conjunto de los números reales que se hayan hecho corresponder a cada uno de los sucesos elementales.

Ejemplo 19. Sea el experimento aleatorio de averiguar la marca de tabaco que preferirá un individuo entre las posibles marcas: <<X>>, <<Y>>, <<Z>>.

En este caso la asociación de un número para cada suceso elemental posible del experimento no es inmediata. En consecuencia, se establece una correspondencia entre el conjunto de los sucesos elementales posibles y el conjunto de los números reales, del modo siguiente:

Al suceso elemental <<preferir la marca X>> se le hace corresponder el número 1; al suceso elemental <<preferir la marca Y>> se le hace corresponder el número 2; al suceso elemental <<preferir la marca Z>> se le hace corresponder el número 3. La variable aleatoria x , será: $x = (1,2,3)$.

El número asociado a cada suceso elemental puede ser cualquiera dentro del conjunto de los números reales, con la condición única de que a sucesos elementales distintos le correspondan números también distintos. Se comprueba fácilmente que la correspondencia así definida entre el conjunto de los posibles sucesos elementales de un experimento aleatorio y el conjunto de los números reales es una aplicación inyectiva.



CLASIFICACIÓN DE LAS VARIABLES ALEATORIAS

Las variables aleatorias pueden ser continuas o discontinuas. En este último caso se denomina también discretas.

Variable aleatoria continua. Si x es una *variable aleatoria continua*, puede tomar cualquier valor de un intervalo continuo o dentro de un campo de variación dado. Las probabilidades de que ocurra un valor dado x , están dadas por una función de densidad de probabilidad de que x quede entre a y b . El área total bajo la curva es 1.

Ejemplo 20. Sea el experimento aleatorio consistente en medir la altura que es capaz de saltar cada miembro de un conjunto de personas. En este experimento, cada miembro del conjunto

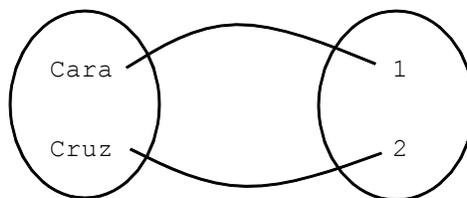
observado da lugar a un número, por lo que se toma como variable aleatoria el conjunto de las medidas de las alturas que son capaces de saltar las distintas personas.

En el supuesto que una persona hubiera saltado 105 cm y otra 106 cm, no existiría ninguna razón para que otra no hubiera saltado un valor intermedio cualquiera entre las dos anteriores, como 105.5 cm. Se trata de una variable aleatoria continua.

Variable aleatoria discontinua o discreta. Se dice que una *variable aleatoria discreta o discontinua* X , tiene un conjunto definido de valores posibles $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ con probabilidades respectivas: $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$. Es decir, que sólo puede tomar ciertos valores dentro de un campo de variación dado. Como X ha de tomar uno de los valores de este conjunto, entonces: $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$.

En general, una variable aleatoria *discreta* X representa los resultados de un espacio muestral en forma tal que por $p(X = x)$ se entenderá la probabilidad de que X tome el valor de x . De esta forma, al considerar los valores de una variable aleatoria es posible desarrollar una función matemática que asigne una probabilidad a cada realización x de la variable aleatoria X . Esta función recibe el nombre de función de la probabilidad.

Ejemplo 21. Sea el experimento aleatorio consistente en lanzar una moneda al aire. Los sucesos elementales del experimento, <<que salga cara>>, <<que salga cruz>>, no vienen representados por los números, por lo que cada suceso elemental se le hace corresponder un número real. Así al suceso elemental <<que salga cara>> se le hace corresponder el número "1" y al suceso elemental <<que salga cruz>> se le hace corresponder el número "2". La variable aleatoria será: $x = (1, 2)$.



Se trata de una variable aleatoria discontinua o discreta, ya que únicamente puede adoptar los valores 1 y 2.

5.1.2 Función de probabilidad y de distribución, valor esperado (μ), varianza (σ^2) y desviación estándar (σ)

Distribución de probabilidad discreta

Características:

1. Es generada por una variable discreta (x).

$x \rightarrow$ Variable que solo toma valores enteros.

✓ $x \rightarrow 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, \dots$ etc., etc.

2. $p(x_i) \geq 0$. Las probabilidades asociadas a cada uno de los valores que toma x deben ser mayores o iguales a cero.

3. $\sum p(x_i) = 1$. La sumatoria de las probabilidades asociadas a cada uno de los valores que toma x debe ser igual a 1.

Calculo de media y desviación estándar para una distribución discreta

Media o valor esperado de x . Para determinar la media de la distribución discreta se utiliza la siguiente fórmula:

$$\mu = E(x) = \sum [x_i \cdot p(x_i)]$$

Donde:

μ = media de la distribución.

$E(x)$ = valor esperado de x .

x_i = valores que toma la variable.

$p(x_i)$ = probabilidad asociada a cada uno de los valores de la variable x .

Desviación estándar. Para determinar la desviación estándar de la distribución discreta se utiliza la siguiente fórmula:

$$\sigma = \sqrt{\sum [(x_i - \mu)^2 * p(x_i)]}$$

Donde:

σ = desviación estándar.

μ = media o valor esperado de x .

x_i = valores que toma la variable x .

$p(x_i)$ = probabilidad asociada a cada uno de los valores que toma x .

Ejemplo 22. Según estadísticas la probabilidad de que el motor de un auto nuevo, de cierto modelo, y marca sufra de algún desperfecto en los primeros 12 meses de uso es de 0.02, si se prueban tres automóviles de esta marca y modelo, encuentre:

- Obtenga la distribución de probabilidad del experimento.
- El número esperado de autos que no sufren de algún desperfecto en los primeros doce meses de uso y su desviación estándar.

Solución.

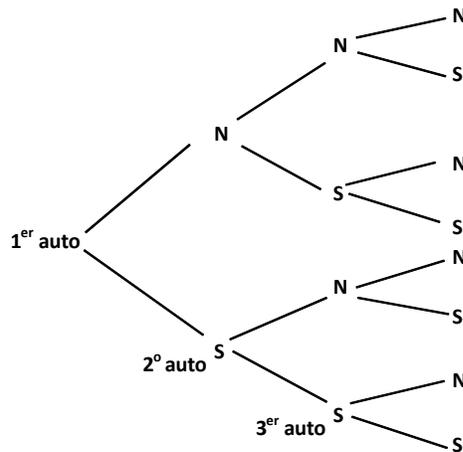
a) *Distribución de probabilidad del experimento.*

Se realiza un diagrama de árbol, usando las literales siguientes:

N = no sufre de algún desperfecto en el motor los primeros 12 meses de uso.

S = sufre de algún desperfecto en el motor los primeros 12 meses de uso.

El espacio muestral (δ) se muestra a continuación.



$$\delta = \{NNN, NNS, NSN, NSS, SNN, SNS, SSN, SSS\}$$

x = variable que nos define el número de autos que no sufren de algún desperfecto en el motor durante los primeros 12 meses de uso.

$\therefore x = 0, 1, 2$ o 3 autos que no sufren algún desperfecto en el motor en los primeros 12 meses de uso. Así que:

$$p(x=0)=p(SSS)=(0.02)(0.02)(0.02)=0.000008$$

$$p(x=1)=p(NSS,SNS,SSN)=(0.98)(0.02)(0.02)+(0.02)(0.98)(0.02)+(0.02)(0.02)(0.98)=0.001176$$

$$p(x=2)=p(NNS,NSN,SNN)=(0.98)(0.98)(0.02)+(0.98)(0.02)(0.98)+(0.02)(0.98)(0.98)=0.057624$$

$$p(x=3)=p(NNN)=(0.98)(0.98)(0.98)=0.941192$$

Distribución de probabilidad

x_i	0	1	2	3
$p(x_i)$	0.000008	0.001176	0.057624	0.941192

b) Número esperado de autos que no sufren de algún desperfecto en los primeros doce meses de uso.

Por tanto la media o valor esperado se determina de la siguiente manera:

$$\mu = E(x) = \sum [x_i * p(x_i)]$$

$\mu=E(x)=\sum[x_i * p(x_i)]=[0](0.000008)+[1](0.001176)+[2](0.057624)+[3](0.941192)=0.0+0.001176+0.115248+2.823576=2.94 \approx 3$ autos que no sufren algún desperfecto en el motor en los primeros 12 meses de uso.

Ya que $\mu=3$, se espera que los 3 autos probados no sufran de algún desperfecto en el motor en los primeros 12 meses de uso.

b.1) Evaluación de la desviación estándar.

$$\sigma = \sqrt{\sum [(x_i - \mu)^2 * p(x_i)]}$$

$$\sigma = \sqrt{[(0 - 3)^2(0.000008)] + [(1 - 3)^2(0.001176)] + \dots + [(3 - 3)^2(0.941192)]}$$

$$\sigma = \sqrt{0.000072 + 0.004704 + 0.05762} = \sqrt{0.062396} = \pm 0.2497 \cong 0.0$$

0.0 autos que no sufren algún desperfecto en su motor en los primeros 12 meses de uso.

Interpretación:

En este experimento (donde $\mu=3 \pm \sigma=0$) se espera que los 3 autos probados no sufran de algún desperfecto en su motor en los primeros 12 meses de uso y la variabilidad de este experimento es de cero.

Nota: La media y la desviación estándar se redondean a un valor entero ya que son la media y desviación de una distribución de probabilidad discreta.

Ejemplo 23. Se ha detectado en una línea de producción que 1 de cada 10 artículos fabricados es defectuoso; se toman de esa línea tres artículos uno tras otro.

- Obtenga la distribución de probabilidad del experimento.
- Encuentre el número esperado de artículos defectuosos en esa muestra y su desviación estándar.

Solución.

a) *Distribución de probabilidad del experimento.*

Realizar un diagrama de árbol, para obtener el espacio muestral (δ), donde: D = objeto defectuoso y N = objeto no defectuoso.

$$\delta = \{DDD, DDN, DND, DNN, NDD, NDN, NND, NNN\}$$

x = Variable que nos define el número de objetos defectuosos encontrados.

\therefore x = 0, 1, 2 o 3 objetos defectuosos. Así que:

$$p(x=0)=p(DDD)=(0.9)(0.9)(0.9)=0.729$$

$$p(x=1)=p(DDN,DND,NDD)=(0.9)(0.9)(0.1)+(0.9)(0.1)(0.9)+(0.1)(0.9)(0.9)= 0.243$$

$$p(x=2)=p(DNN,NDN,NND)=(0.9)(0.1)(0.1)+(0.1)(0.9)(0.1)+(0.1)(0.1)(0.9)= =0.027$$

$$p(x=3)=p(NNN)=(0.1)(0.1)(0.1)=0.001$$

Distribución de probabilidad

x_i	0	1	2	3
$p(x_i)$	0.729	0.243	0.027	0.001

b) Número esperado de artículos defectuosos en esa muestra.

$$\mu = E(x) = \sum [x_i * p(x_i)]$$

$$\mu=E(x)=\sum[x_i * p(x_i)]=[0(0.729)]+[1(0.243)]+[2(0.027)]+[3(0.001)]=0.0+0.243+0.054+0.003=0.3 \cong 0$$

productos defectuosos.

Ya que $\mu=0$, se espera que ninguno de los productos inspeccionados sea defectuoso.

b.1) Evaluación de la desviación estándar.

$$\sigma = \sqrt{\sum [(x_i - \mu)^2 * p(x_i)]}$$

$$\sigma = \sqrt{[(0 - 0)^2(0.729)] + [(1 - 0)^2(0.243)] + [(2 - 0)^2(0.027)] + [(3 - 0)^2(0.001)]}$$

$$\sigma = \sqrt{0 + 0.243 + 0.108 + 0.009} = \sqrt{0.36} = \pm 0.6 \cong \pm 1$$

± 1 producto defectuoso.

Interpretación:

En este experimento (donde $\mu=0 \pm \sigma=1$) se espera que ninguno de los productos inspeccionados sea defectuoso, pero los resultados de este experimento pueden variar en ± 1 producto defectuoso, por lo que al inspeccionar los 3 productos el número de productos defectuosos puede variar desde -1 producto defectuoso, hasta 1 producto defectuoso, pero, ¿es posible obtener -1 producto defectuoso?, claro que esto no puede ocurrir, luego el número de productos defectuosos en el experimento variará de 0 a 1 producto defectuoso solamente.

Ejemplo 24. Según estadísticas, la probabilidad de que un pozo petrolero que se perfora en cierta región pueda ser beneficiado es de 0.30. Se perforan tres pozos en esa región, encuentre:

- La distribución de probabilidad del experimento.
- El número esperado de pozos que pueden ser beneficiados y su desviación estándar.

Solución.

a) *Distribución de probabilidad del experimento.*

Se obtiene el espacio muestral (δ), de la misma forma que se ha hecho en el anterior ejemplo, donde: B = se puede beneficiar el pozo que se perfora y N = no se puede beneficiar el pozo que se perfora.

$$\delta = \{BBB, BBN, BNB, NBB, NNB, NBN, BNN, NNN\}$$

x = variable que nos define el número de pozos que se pueden beneficiar.

$\therefore x = 0, 1, 2$ o 3 pozos que se pueden beneficiar. Así que:

$$p(x=0) = p(BBB) = (0.7)(0.7)(0.7) = 0.343$$

$$p(x=1) = p(BBN, BNB, NBB) = (0.7)(0.7)(0.3)(3) = 0.441$$

$$p(x=2) = p(NNB, NBN, BNN) = (0.1)(0.1)(0.7)(3) = 0.021$$

$$p(x=3) = p(NNN) = (0.3)(0.3)(0.3) = 0.027$$

Distribución de probabilidad

x	0	1	2	3
p(x)	2.1	0.441	0.021	0.27

b) Número esperado de pozos que pueden ser beneficiados.

Por tanto la media o valor esperado se determina de la siguiente manera:

$$\mu = E(x) = \sum [x_i * p(x_i)]$$

$$\mu = E(x) = \sum [x_i * p(x_i)] = [(0)(2.1)] + [(1)(0.441)] + [(2)(0.021)] + [(3)(0.27)] = 1.293 \cong 1 \text{ pozo beneficiado.}$$

Ya que $\mu=1$, se espera que solo 1 de los tres pozos perforados sea el que pueda ser beneficiado.

b.1) Evaluación de la desviación estándar.

$$\sigma = \sqrt{\sum [(x_i - \mu)^2 * p(x_i)]}$$

$$\sigma = \sqrt{[(0 - 1)^2(2.1)] + [(1 - 1)^2(0.441)] + [(2 - 1)^2(0.021)] + [(3 - 1)^2(0.27)]}$$

$$\sigma = \sqrt{2.1 + 0 + 0.021 + 1.08} = \sqrt{3.201} = \pm 1.789 \cong \pm 1$$

± 1 pozos beneficiados.

Interpretación:

En este experimento (donde $\mu=1 \pm \sigma=1$) se espera que la cantidad esperada de pozos que se pueden beneficiar puede variar en 1 ± 1 pozo, esto es la cantidad de pozos que se pueden beneficiar puede variar de 0 a 2 pozos.

5.1.3 Distribución binomial

Las características de esta distribución son:

- a) En los experimentos que tienen este tipo de distribución, siempre se esperan dos tipos de resultados, ejemplos: Defectuoso, no defectuoso, pasa, no pasa, etc., etc.; denominados arbitrariamente "éxito" (que es lo que se espera que ocurra) o "fracaso" (lo contrario del éxito).
- b) Las probabilidades asociadas a cada uno de estos resultados son constantes, es decir no cambian.
- c) Cada uno de los ensayos o repeticiones del experimento son independientes entre sí.
- d) El número de ensayos o repeticiones del experimento (n) es constante.

Entonces la distribución de probabilidad de la variable aleatoria x y el número de éxitos en las n pruebas viene en términos de:

- ✓ p = probabilidad de éxito.
- ✓ q = probabilidad de fracaso = $1-p$.
- ✓ x = la variable aleatoria, el numero de éxitos en las n pruebas.
- ✓ n = el numero de pruebas.

El siguiente análisis nos permite definir una formula que evalué cualquier problema que tenga este tipo de distribución.

Antes de empezar a resolver algún problema, lo primero que hay que hacer es identificarlo como un problema que tiene una distribución binomial, y podemos decir que lo es si se trata de un experimento en donde solo se pueden esperar dos tipos de resultados cuyas probabilidades de ocurrencia son constantes y donde además cada uno de los ensayos es constante e independiente de los demás.

Posteriormente se elabora un diagrama de árbol, en donde representaremos los ensayos, de ahí se obtendrá el espacio muestral (δ) y posteriormente la probabilidad pedida.

Podemos partir de la siguiente expresión para desarrollar la fórmula:

$$p(x, n, p) = (\# \text{ de ramas "exitosas" del diagrama de arbol})(\text{probabilidad asociada a cada rama})$$

Y se enumeran las ramas de interés.

¿QUÉ TIPO DE ARREGLOS SON ESTOS ELEMENTOS DEL ESPACIO MUESTRAL?, Son permutaciones en donde algunos objetos son iguales, entonces, el número de ramas se puede obtener con la fórmula correspondiente:

$${}_n P_{x_1, x_2, \dots, x_k} = \frac{n!}{x_1! x_2! \dots x_k!}$$

Donde: $n = x_1 + x_2 + \dots + x_k$

Esta fórmula puede ser sustituida por la de combinaciones, solo en el caso de dos tipos de resultados. Si hay más de dos tipos de resultados, definitivamente solo se usa la fórmula original, como se observará en el caso de la distribución multinomial¹⁸, pero ¿por qué vamos a cambiar de fórmula?, simplemente porque en todos los textos estadísticos se encuentra la fórmula de combinaciones en lugar de la de permutaciones, que es la siguiente:

$${}_n C_x = \frac{n!}{x! (n-x)!}$$

Formula con la que se obtiene el número de ramas.

¿Y la probabilidad asociada a cada rama?: Probabilidad asociada a cada rama = $p^x q^{n-x}$

Luego la fórmula de la distribución binomial sería:

$$p(x, n, p) = {}_n C_{n-x} p^x q^{n-x} = \left[\frac{n!}{x! (n-x)!} \right] p^x q^{n-x}$$

Donde:

$p(x, n, p)$ = probabilidad de obtener x éxitos en n ensayos, cuando la probabilidad de éxito es p .

Es conveniente observar que: ${}_n C_{n-x} = {}_n C_x$, esto es: ${}_{100} C_{100-98} = {}_{100} C_{98} = {}_{100} C_2$.

Para calcular la media y la desviación estándar de un experimento que tenga una distribución binomial usaremos las siguientes fórmulas:

¹⁸ Ver tópico: 5.1.6 Distribución multinomial.

Media o valor esperado.

$$\mu = np$$

Donde:

n = número de ensayos o repeticiones del experimento.

p = probabilidad de éxito o la probabilidad referente al evento del cual se desea calcular la media que se refiere la media.

Desviación estándar.

$$\sigma = \sqrt{npq}$$

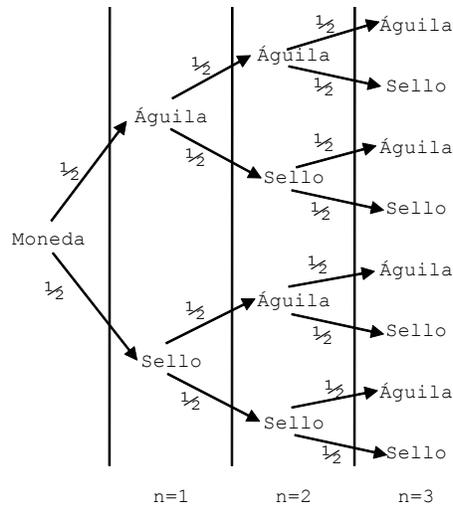
Donde: q = (complemento de p) = $1 - p$.

Ejemplo 25. Se lanza al aire una moneda normal 3 veces, determine la probabilidad de que aparezcan 2 águilas.

Solución.

Para dar solución a este problema, lo primero que hay que hacer es un diagrama de árbol, en donde representaremos los tres lanzamientos, de ahí se obtendrá el espacio muestral (δ) y posteriormente la probabilidad pedida.

Sean: A = águila y S = sello



$$\delta = \{AAA, AAS, ASA, SAA, ASS, SAS, SSA, SSS\}$$

Definiremos lo siguiente:

n = número de lanzamientos de moneda = 3

x = número de “éxitos” requeridos = número de águilas = 2

p = probabilidad de “éxito” = $p(\text{éxito}) = p(\text{aparezca águila}) = 1/2$

q = probabilidad de “fracaso” = $p(\text{fracaso}) = p(\text{aparezca sello}) = 1 - p(\text{éxito}) = 1/2$

Podemos partir de la siguiente expresión:

$$p(\text{aparezcan 2 águilas}) = (\# \text{ de ramas del árbol en donde aparecen 2 águilas})(\text{probabilidad asociada a cada rama})$$

Entonces el número de ramas en donde aparecen dos águilas se puede obtener enumerando las ramas de interés, estas serían: AAS, ASA, SAA.

La fórmula de combinaciones es:

$${}_n C_x = \frac{n!}{x!(n-x)!}$$

Y sustituyendo valores, nos damos cuenta de que son 3 las ramas de interés, que son donde aparecen dos águilas, donde $n=3$ (y es constante) y $x = 2$.

$${}_3 C_2 = \frac{3!}{2!(3-2)!} = \frac{3!}{2!1!} = 3 \text{ ramas}$$

De la formula:

$$p(x, n, p) = {}_n C_{n-x} p^x q^{n-x} = {}_n C_x p^x q^{n-x} = \left[\frac{n!}{x! (n-x)!} \right] p^x q^{n-x}$$

Donde:

$$n=3$$

$$x=2$$

$$p=1/2$$

$$q=1-p=1/2$$

Sustituyendo valores, obtenemos:

$$p\left(x=2, n=3, p=\frac{1}{2}\right) = {}_3 C_2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^{3-2} = \left[\frac{3!}{2! (3-2)!} \right] \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^1 = 0.375$$

Que es la probabilidad de que aparezcan 2 águilas en el experimento, es decir, $0.375 \times 100 = 37.5\%$ de que aparezcan 2 águilas.

Ejemplo 26. Se dice que el 75% de los accidentes de una planta se atribuyen a errores humanos. Si en un período de tiempo dado, se suscitan 5 accidentes, determine la probabilidad de que:

- Dos de los accidentes se atribuyan a errores humanos.
- Como máximo 1 de los accidentes se atribuya a errores de tipo humano.
- Tres de los accidentes no se atribuyan a errores humanos.

Solución.

a) *Probabilidad de que dos de los accidentes se atribuyan a errores humanos.*

$$n = 5$$

x = variable que nos define el número de accidentes debidos a errores humanos.

$\therefore x = 2$ accidentes debidos a errores de tipo humano.

$$p = p(\text{un accidente se deba a errores humanos}) = 0.75$$

$$q = q(\text{un accidente no se deba a errores humanos}) = 1-p = 0.25$$

$$p(x, n, p) = {}_n C_x p^x q^{n-x}$$

Donde:

$${}_n C_x = \frac{n!}{x!(n-x)!}$$

Por lo tanto:

$$p(x, n, p) = {}_n C_x p^x q^{n-x} = \left[\frac{n!}{x!(n-x)!} \right] p^x q^{n-x}$$

$$p(x = 2, n = 5, p = 0.75) = {}_5 C_2 (0.75)^2 (0.25)^{5-2} = \left[\frac{5!}{2!(5-2)!} \right] (0.5625)(0.015625)$$

$$p(x = 2, n = 5, p = 0.75) = (10)(0.5625)(0.015625) = 0.08789$$

Nota: Una manera mas fácil de evaluar las combinaciones es mediante una calculadora científica con la tecla: nCx, es decir:

$${}_n C_x = {}_5 C_2 = 10$$

b) Probabilidad de que como máximo 1 de los accidentes se atribuya a errores de tipo humano.

$n = 5$

$x =$ variable que nos define el número de accidentes debidos a errores humanos.

$\therefore x = 0$ y 1 accidentes debidos a errores de tipo humano.

$p = p(\text{un accidente se deba a errores humanos}) = 0.75$

$q = q(\text{un accidente no se deba a errores humanos}) = 1 - p = 0.25$

$$p[x = (0,1), n = 5, p = 0.75] = p(x = 0, n = 5, p = 0.75) + p(x = 1, n = 5, p = 0.75)$$

Donde:

$$p(x) = {}_n C_x p^x q^{n-x}$$

Por lo tanto:

$$p[x = (0,1), n = 5, p = 0.75] = {}_5 C_0 p^0 q^{5-0} + {}_5 C_1 p^1 q^{5-1}$$

Donde también:

$${}_n C_x = \frac{n!}{x!(n-x)!}$$

Finalmente tenemos:

$$p[x = (0,1), n = 5, p = 0.75] = \left[\frac{5!}{0!(5-0)!} \right] (0.75)^0 (0.25)^{5-0} + \left[\frac{5!}{1!(5-1)!} \right] (0.75)^1 (0.25)^{5-1}$$

$$p[x = (0,1), n = 5, p = 0.75] = 0.000976 + 0.14648 = 0.015624$$

c) Probabilidad de que tres de los accidentes no se atribuyan a errores humanos.

$n = 5$

x = variable que nos define el número de accidentes que no se deben a errores de tipo humano.

$\therefore x = 3$ accidentes que no se deben a errores de tipo humano.

En este caso cambiaremos el valor de p :

p = p (probabilidad de que un accidente no se deba a errores humanos) = 0.25

q = p (probabilidad de que un accidente se deba a errores humanos) = $1 - p = 0.75$

$$p(x, n, p) = {}_n C_x p^x q^{n-x} = \left[\frac{n!}{x!(n-x)!} \right] p^x q^{n-x}$$

$$p(x = 3, n = 5, p = 0.25) = {}_5 C_3 (0.25)^3 (0.75)^{5-3} = \left[\frac{5!}{3!(5-3)!} \right] (0.015625)(0.5625)$$

$$p(x = 3, n = 5, p = 0.25) = (10)(0.015625)(0.5625) = 0.08789$$

Ejemplo 27. Si la probabilidad de que el vapor se condense en un tubo de aluminio de cubierta delgada a 10 atm de presión es de 0.40, si se prueban 12 tubos de ese tipo y bajo esas condiciones, determine la probabilidad de que:

- El vapor se condense en 4 de los tubos.
- En más de 2 tubos se condense el vapor.
- El vapor se condense en exactamente 5 tubos.

Solución.

a) Probabilidad de que el vapor se condense en 4 de los tubos.

$n = 12$

x = variable que nos define el número de tubos en que el vapor se condensa.

$\therefore x = 4$ tubos en el que el vapor se condensa.

$p = p(\text{se condense el vapor en un tubo de Al a 10 atm}) = 0.40$.

$q = p(\text{no se condense el vapor en un tubo de Al a 10 atm}) = 1 - p = 0.60$.

$$p(x, n, p) = {}_n C_x p^x q^{n-x} = \left[\frac{n!}{x! (n-x)!} \right] p^x q^{n-x}$$

$$p(x = 4, n = 12, p = 0.40) = {}_{12} C_4 (0.40)^4 (0.60)^{12-4} = \left[\frac{12!}{4! (12-4)!} \right] (0.0256)(0.0168)$$

$$p(x = 4, n = 12, p = 0.40) = (495)(0.00043) = 0.21285$$

b) Probabilidad de que en más de 2 tubos se condense el vapor.

$n = 12$

$x =$ variable que nos define el número de tubos en que el vapor se condensa.

$\therefore x = 3, 4, 5, \dots, 12$ tubos en el que el vapor se condensa.

$p = p(\text{se condense el vapor en un tubo de Al a 10 atm}) = 0.40$.

$q = p(\text{no se condense el vapor en un tubo de Al a 10 atm}) = 1 - p = 0.60$.

$$p(x=3, 4, \dots, 12; n=12; p=0.40) = p(x=3, n, p) + p(x=4, n, p) + \dots + p(x=12, n, p)$$

Lo anterior nos define la probabilidad de éxito del experimento, pero también es posible obtener el mismo resultado si se considera la probabilidad de fracaso de la siguiente manera:

$$p(x=3, 4, \dots, 12; n=12; p=0.40) = 1 - [p(x=0, 1, 2; n=12; p=0.40)]$$

Por lo tanto:

$$p(x=3, 4, \dots, 12; n=12; p=0.40) = 1 - [p(x=0, n, p) + p(x=1, n, p) + p(x=2, n, p)]$$

Donde:

$$p(x, n, p) = {}_n C_x p^x q^{n-x}$$

Así que:

$$\begin{aligned} p(x = 3, 4, \dots, 12; n = 12; p = 0.40) \\ = 1 - [{}_{12} C_0 (0.40)^0 (0.6)^{12-0} + {}_{12} C_1 (0.40)^1 (0.6)^{12-1} + {}_{12} C_2 (0.40)^2 (0.6)^{12-2}] \end{aligned}$$

Recordar que:

$${}_n C_x = \frac{n!}{x!(n-x)!}$$

Por lo tanto:

$$p(x = 3,4, \dots 12; n = 12, p = 0.40) = 1 - [(1)(1)(0.0022) + (12)(0.40)(0.0036) + (66)(0.16)(0.0060)]$$

$$p(x = 3,4, \dots 12; n = 12, p = 0.40) = 1 - [0.0022 + 0.01728 + 0.06336] = 1 - 0.08284 = 0.91716$$

c) Probabilidad de que el vapor se condense en exactamente 5 tubos.

$n = 12$

x = variable que nos define el número de tubos en que el vapor se condensa.

$\therefore x = 5$ tubos en el que el vapor se condensa.

$p = p(\text{se condense el vapor en un tubos de Al a } 10 \text{ atm}) = 0.40.$

$q = p(\text{no se condense el vapor en un tubo de Al a } 10 \text{ atm}) = 1-p = 0.60.$

$$p(x, n, p) = {}_n C_x p^x q^{n-x} = \left[\frac{n!}{x!(n-x)!} \right] p^x q^{n-x}$$

$$p(x = 5, n = 12, p = 0.40) = {}_{12} C_5 (0.40)^5 (0.60)^{12-5} = \left[\frac{12!}{5!(12-5)!} \right] (0.01024)(0.02799)$$

$$p(x = 5, n = 12, p = 0.40) = (792)(0.0002866) = 0.22699$$

Ejemplo 28. La probabilidad de que el nivel de ruido de un amplificador de banda ancha exceda de 2 dB (decibeles) es de 15%, si se prueban 10 amplificadores de banda ancha, determine la probabilidad de que:

- En solo 5 de los amplificadores el nivel de ruido exceda los 2 dB.
- Por lo menos en 2 de los amplificadores, el ruido exceda de 2 dB.
- Que entre 4 y 6 amplificadores no se excedan de los 2 dB.
- Encuentre el número esperado de amplificadores que se exceden de un nivel de ruido de 2 dB y su desviación estándar.

Solución.

a) Probabilidad de que en solo 5 de los amplificadores el nivel de ruido exceda los 2 dB.

$$n = 10$$

x = variable que nos define el número de amplificadores de banda ancha que su nivel de ruido excede de 2 dB.

∴ x = 5 amplificadores en los que el nivel de ruido excede de los 2 dB.

p = p(un amplificador exceda su nivel de ruido de 2 dB) = 0.15.

q = p(un amplificador no exceda su nivel de ruido de 2 dB = 1-p = 0.85).

$$p(x, n, p) = {}_n C_x p^x q^{n-x} = \left[\frac{n!}{x! (n-x)!} \right] p^x q^{n-x}$$

$$p(x = 5, n = 10, p = 0.15) = {}_{10} C_5 (0.15)^5 (0.85)^{10-5} = \left[\frac{10!}{5! (10-5)!} \right] (0.00007593)(0.4437)$$

$$p(x = 5, n = 10, p = 0.15) = (252)(0.00003369) = 0.00849$$

b) Probabilidad de que por lo menos en 2 de los amplificadores, el ruido exceda de 2 dB.

$$n = 10$$

x = variable que nos define el número de amplificadores de banda ancha que su nivel de ruido excede de 2 dB.

∴ x = 2, 3, ..., 10 amplificadores en los que el nivel de ruido excede de los 2 dB.

p = p(un amplificador exceda su nivel de ruido de 2 dB) = 0.15.

q = p(un amplificador no exceda su nivel de ruido de 2 dB = 1-p = 0.85).

$$p(x=2,3,\dots,10; n=10; p=0.15) = p(x=2,n,p) + p(x=3,n,p) + \dots + p(x=10,n,p)$$

Lo anterior nos define la probabilidad de éxito del experimento, pero también es posible obtener el mismo resultado si se considera la probabilidad de fracaso de la siguiente manera:

$$p(x=2,3,\dots,10; n=10; p=0.15) = 1 - [p(x=0,1; n=10; p=0.15)]$$

Por lo tanto:

$$p(x=2,3,\dots,10; n=10; p=0.15) = 1 - [p(x=0,n,p) + p(x=1,n,p)]$$

Donde:

$$p(x) = {}_n C_x p^x q^{n-x}$$

Así que:

$$p(x = 2, 3, \dots, 10; n = 10; p = 0.15) = 1 - [{}_{10} C_0 (0.15)^0 (0.85)^{10-0} + {}_{10} C_1 (0.15)^1 (0.85)^{10-1}]$$

Recordar que:

$${}_n C_x = \frac{n!}{x! (n-x)!}$$

Por lo tanto:

$$p(x = 2, 3, \dots, 10; n = 10; p = 0.15) = 1 - [{}_{10} C_0 (0.15)^0 (0.85)^{10-0} + {}_{10} C_1 (0.15)^1 (0.85)^{10-1}]$$

$$p(x = 2, 3, \dots, 10; n = 10, p = 0.15) = 1 - [(1)(0.1969) + (10)(0.03474)] = 1 - 0.5443 = 0.4557$$

c) Probabilidad de que entre 4 y 6 amplificadores no excedan de los 2 dB.

$n=10$

x = variable que nos define el número de amplificadores de banda ancha que su nivel de ruido no excede de 2 dB.

$\therefore x = 4, 5$ y 6 amplificadores que su nivel de ruido no excede de los 2 dB.

En este caso cambiaremos el valor de p :

$p = p(\text{un amplificador no exceda su nivel de ruido de 2 dB}) = 0.85.$

$q = p(\text{un amplificador exceda su nivel de ruido de 2 dB}) = 1-p = 0.15$

$$p(x=4,5,6; n=10; p=0.85) = p(x=4, n, p) + p(x=5, n, p) + p(x=6, n, p)$$

Donde:

$$p(x) = {}_n C_x p^x q^{n-x}$$

Así que:

$$\begin{aligned} p(x = 4, 5, 6; n = 10; p = 0.85) \\ = {}_{10} C_4 (0.85)^4 (0.15)^{10-4} + {}_{10} C_5 (0.85)^5 (0.15)^{10-5} + {}_{10} C_6 (0.85)^6 (0.15)^{10-6} \end{aligned}$$

Recordar que:

$${}_n C_x = \frac{n!}{x!(n-x)!}$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} p(x = 4,5,6; n = 10, p = 0.85) \\ = (210)(0.522)(0.00001139) + (252)(0.4437)(0.000075937) + (210)(0.37715)(0.0005063) \end{aligned}$$

$$p(x = 4,5,6; n = 10, p = 0.85) = 0.001249 + 0.008491 + 0.040099 = 0.04984$$

d) Encuentre el número esperado de amplificadores que exceden de un nivel de ruido de 2 dB y su desviación estándar.

$n=10, p=0.15$

$$\mu = np$$

$$\mu = np = (10)(0.15) = 1.5 \cong 2 \text{ amplificadores}$$

Ya que $\mu=2$, se espera que 2 de los 10 amplificadores probados se excedan de un nivel de ruido de 2 db.

d.1) Evaluación de la desviación estándar.

$n=10, p=0.15$ y $q=0.85$

$$\sigma = \sqrt{npq}$$

$$\sigma = \sqrt{(10) \times (0.15) \times (0.85)} = \sqrt{1.25} = \pm 1.129 \cong \pm 1 \text{ amplificador}$$

Interpretación:

Este experimento (donde $\mu=2 \pm \sigma=1$) puede variar en 2 ± 1 amplificador, esto es, de 1 a 3 amplificadores que se excedan de un nivel de ruido de 2 dB.

5.1.4 Distribución hipergeométrica

El interés de la distribución de la variable aleatoria hipergeométrica x , se centra en la probabilidad de seleccionar x éxitos de los k posibles resultados o artículos también considerados éxitos y $n-x$ fracasos de los $N-K$ posibles resultados o artículos también considerados fracasos, cuando una muestra aleatoria de tamaño n , se selecciona de N resultados posibles o artículos totales (objetos en total).

Los experimentos que tienen este tipo de distribución tienen las siguientes características:

- a) Al realizar un experimento con este tipo de distribución, se esperan dos tipos de resultados.
- b) Las probabilidades asociadas a cada uno de los resultados no son constantes.
- c) Cada ensayo o repetición del experimento no es independiente de los demás.
- d) El número de repeticiones del experimento (n) es constante.

La siguiente fórmula nos permite evaluar cualquier problema que tenga este tipo de distribución.

$$p(x, n) = \frac{{}_a C_x \times {}_{N-a} C_{n-x}}{{}_N C_n}$$

Donde:

$p(x, n)$ = Probabilidad de obtener x objetos defectuosos de entre n seleccionados.

${}_a C_x \times {}_{N-a} C_{n-x}$ = Muestras de n objetos en donde hay x que son defectuosos y $n - x$ buenos.
 ${}_N C_n = \delta$ = Todas las muestras posibles de seleccionar n objetos tomadas de entre N .

Ejemplo 29. Considerar que en una urna hay un total de 10 objetos, 3 de los cuales son defectuosos, si se seleccionan 4 objetos al azar, ¿cuál es la probabilidad de que 2 sean defectuosos?

Solución.

Tenemos:

$$p(x, n) = \frac{{}_a C_x \times {}_{N-a} C_{n-x}}{{}_N C_n}$$

Donde:

$N = 10$ objetos en total.

$a = 3$ objetos defectuosos.

$n = 4$ objetos seleccionados en muestra.

$x = 2$ objetos defectuosos deseados en la muestra.

Sustituyendo datos:

$$p(x = 2, n = 4) = \frac{{}_3C_2 \times {}_{10-3}C_{4-2}}{{}_{10}C_4} = \frac{{}_3C_2 \times {}_{17}C_2}{{}_{10}C_4}$$

Recordar que:

$${}_n C_x = \frac{n!}{x!(n-x)!}$$

Por lo tanto:

$$p(x = 2, n = 4) = \frac{\frac{3!}{(3-2)!2!} \times \frac{7!}{(7-2)!2!}}{\frac{10!}{(10-4)!4!}} = \frac{\frac{3!}{1!2!} \times \frac{7!}{5!2!}}{\frac{10!}{6!4!}}$$

$$p(x = 2, n = 4) = \frac{\frac{3 \times 2 \times 1!}{1!2!} \times \frac{7 \times 6 \times 5!}{5!2!}}{\frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6!}{6!4!}} = \frac{\frac{3 \times 2 \times 7 \times 6}{2!2!}}{\frac{10 \times 9 \times 8 \times 7}{4!}}$$

$$p(x = 2, n = 4) = \frac{(3 \times 2 \times 7 \times 6)(4!)}{(10 \times 9 \times 8 \times 7)(2!2!)} = \frac{3 \times 2 \times 7 \times 6}{10 \times 9 \times 8 \times 7} \times \frac{4!}{2!2!}$$

Donde:

$\frac{3 \times 2 \times 7 \times 6}{10 \times 9 \times 8 \times 7}$ = Probabilidad asociada a cada muestra de 4 objetos que se seleccionaron, con lo que se demuestra que las probabilidades no son constantes.

$\frac{4!}{2!2!}$ = Formas o maneras de obtener 2 objetos defectuosos entre los 4 seleccionados = muestras de 4 objetos entre los que 2 son defectuosos.

Como se observa en el desarrollo de la solución del problema, la pretensión es demostrar que las probabilidades asociadas a cada uno de los resultados no son constantes.

Luego la probabilidad de obtener 2 objetos defectuosos entre los 4 seleccionados al azar sería:

$$p(x = 2, n = 4) = \frac{3 \times 2 \times 7 \times 6}{10 \times 9 \times 8 \times 7} \times \frac{4!}{2!2} = \frac{252}{5040} \times \frac{24}{4} = \frac{6048}{20160} = 0.3$$

Ejemplo 30. Para evitar que lo descubran en la aduana, un viajero ha colocado 6 tabletas de narcótico en una botella que contiene 9 píldoras de vitamina que son similares en apariencia. Si el oficial de la aduana selecciona 3 tabletas aleatoriamente para analizarlas:

- ¿Cuál es la probabilidad de que el viajero sea arrestado por posesión de narcóticos?
- ¿Cuál es la probabilidad de que no sea arrestado por posesión de narcóticos?

Solución:

a) *Probabilidad de que el viajero sea arrestado por posesión de narcóticos.*

$N = 9 + 6 = 15$ total de tabletas.

$a = 6$ tabletas de narcótico.

$n = 3$ tabletas seleccionadas.

$x = 1, 2,$ o 3 tabletas de narcótico = variable que nos indica el número de tabletas de narcótico que se puede encontrar al seleccionar las 3 tabletas.

$p(\text{viajero sea arrestado por posesión de narcóticos}) = p(\text{de que entre las 3 tabletas seleccionadas haya 1 o más tabletas de narcótico})$, esto es:

$$p(x, n) = \frac{{}_a C_x \times {}_{N-a} C_{n-x}}{{}_N C_n}$$

Sustituyendo datos:

$$p(x = 1, 2 \text{ o } 3 \text{ tabletas}; n = 3) = \frac{{}_6 C_1 \times {}_{15-6} C_{3-1}}{{}_{15} C_3} + \frac{{}_6 C_2 \times {}_{15-6} C_{3-2}}{{}_{15} C_3} + \frac{{}_6 C_3 \times {}_{15-6} C_{3-3}}{{}_{15} C_3}$$

$$p(x = 1, 2 \text{ o } 3 \text{ tabletas}; n = 3) = \frac{{}_6 C_1 \times {}_9 C_2}{{}_{15} C_3} + \frac{{}_6 C_2 \times {}_9 C_1}{{}_{15} C_3} + \frac{{}_6 C_3 \times {}_9 C_0}{{}_{15} C_3}$$

$$p(x = 1, 2 \text{ o } 3 \text{ tabletas}; n = 3) = \frac{(6)(36)}{455} + \frac{(15)(9)}{455} + \frac{(20)(1)}{455} = \frac{216 + 135 + 20}{455} = 0.8154$$

Nota: Para el calculo de nCx mediante calculadora científica, ver nota del ejemplo 26, inciso a.

Otra forma de resolver:

$p(\text{el viajero sea arrestado por posesión de narcóticos}) = 1 - p(\text{de que entre las tabletas seleccionadas no haya una sola de narcótico}).$

$N = 9 + 6 = 15$ total de tabletas.

$a = 6$ tabletas de narcótico.

$n = 3$ tabletas seleccionadas.

$x = 0$ (cero) tabletas de narcótico = variable que nos indica el número de tabletas de narcótico que se puede encontrar al seleccionar las 3 tabletas.

$$p(x = 1,2 \text{ o } 3 \text{ tabletas}; n = 3) = 1 - p(x = 0; n = 3) = 1 - \frac{{}_a C_x \times {}_{N-a} C_{n-x}}{{}_N C_n}$$

$$p(x = 1,2 \text{ o } 3 \text{ tabletas}; n = 3) = 1 - \frac{{}_6 C_0 \times {}_{15-6} C_{3-0}}{{}_{15} C_3} = 1 - \frac{{}_6 C_0 * {}_9 C_3}{{}_{15} C_3}$$

$$p(x = 1,2 \text{ o } 3 \text{ tabletas}; n = 3) = 1 - \frac{(1)(84)}{455} = 0.8154$$

b) Probabilidad de que no sea arrestado por posesión de narcóticos.

$N = 9 + 6 = 15$ total de tabletas.

$a = 6$ tabletas de narcótico.

$n = 3$ tabletas seleccionadas.

$x = 0$ (cero) tabletas de narcótico = variable que nos indica el número de tabletas de narcótico que se puede encontrar al seleccionar las 3 tabletas.

$$p(x, n) = \frac{{}_a C_x \times {}_{N-a} C_{n-x}}{{}_N C_n}$$

Sustituyendo datos:

$$p(x = 0 \text{ tabletas}; n = 3) = \frac{{}_6 C_0 * {}_{15-6} C_{3-0}}{{}_{15} C_3} = \frac{{}_6 C_0 * {}_9 C_3}{{}_{15} C_3} = \frac{(1)(84)}{455} = 0.1846$$

Ejemplo 31. De un lote de 10 proyectiles, 4 se seleccionan al azar y se disparan. Si el lote contiene 3 proyectiles defectuosos que no explotarán, ¿Cuál es la probabilidad de que?

a) ¿Los 4 exploten?

b) ¿Al menos 2 no exploten?

Solución.

a) Los 4 exploten.

$N = 10$ proyectiles en total.

$a = 7$ proyectiles que explotan.

$n = 4$ proyectiles seleccionados.

$x = 4$ proyectiles que explotan = variable que nos define el número de proyectiles que explotan entre la muestra que se dispara.

$$p(x, n) = \frac{{}_a C_x \times {}_{N-a} C_{n-x}}{{}_N C_n}$$

Nota: Para el calculo de nCx mediante calculadora científica, ver nota del ejemplo 26, inciso a.

Sustituyendo datos:

$$p(x = 4 ; n = 4) = \frac{{}_7 C_4 * {}_{10-7} C_{4-4}}{{}_{10} C_4} = \frac{{}_7 C_4 * {}_3 C_0}{{}_{10} C_4} = \frac{(35)(1)}{210} = 0.1667$$

b) Al menos 2 no exploten.

$N = 10$ proyectiles en total.

$a = 3$ proyectiles que no explotan.

$n = 4$ proyectiles seleccionados.

$x = 2$ o 3 proyectiles que no explotan.

$$p(\text{al menos 2 no exploten}) = p(2 \text{ o más proyectiles no exploten})$$

Esto es:

$$p(x = 2 \text{ o } 3; n = 4) = p(x = 2, n = 4) + p(x = 3, n = 4)$$

Recordar que:

$$p(x, n) = \frac{{}_a C_x \times {}_{N-a} C_{n-x}}{{}_N C_n}$$

Por lo tanto:

$$p(x = 2 \text{ o } 3; n = 4) = \frac{{}_3 C_2 * {}_{10-3} C_{4-2}}{{}_{10} C_4} + \frac{{}_3 C_3 * {}_{10-3} C_{4-3}}{{}_{10} C_4} = \frac{{}_3 C_2 * {}_7 C_2}{{}_{10} C_4} + \frac{{}_3 C_3 * {}_7 C_1}{{}_{10} C_4}$$

$$p(x = 2 \text{ o } 3; n = 4) = \frac{(3)(21) + (1)(7)}{210} = 0.3333$$

Ejemplo 32. ¿Cuál es la probabilidad de que una mesera se rehúse a servir bebidas alcohólicas únicamente a dos menores de edad si verifica aleatoriamente solo 5 identificaciones de entre 9 estudiantes, de los cuales 4 no tienen la edad suficiente? y ¿Cuál es la probabilidad de que como máximo 2 de las identificaciones pertenezcan a menores de edad?

Solución.

a) Probabilidad de que una mesera se rehúse a servir bebidas alcohólicas únicamente a dos menores de edad si verifica aleatoriamente solo 5 identificaciones de entre 9 estudiantes, de los cuales 4 no tienen la edad suficiente.

$N = 9$ total de estudiantes.

$a = 4$ estudiantes menores de edad.

$n = 5$ identificaciones seleccionadas.

$x =$ variable que nos define el número de identificaciones que pertenecen a personas menores de edad.

$\therefore x = 2$ identificaciones de personas menores de edad.

$$p(x, n) = \frac{{}_a C_x \times {}_{N-a} C_{n-x}}{{}_N C_n}$$

Nota: Para el calculo de nCr mediante calculadora científica, ver nota del ejemplo 26, inciso a.

$$p(x = 2; n = 5) = \frac{{}_4 C_2 * {}_{9-4} C_{5-2}}{{}_9 C_5} = \frac{{}_4 C_2 * {}_5 C_3}{{}_9 C_5} = \frac{(6)(10)}{126} = 0.4761$$

b) Probabilidad de que como máximo 2 de las identificaciones pertenezcan a menores de edad.

$N = 9$ total de estudiantes.

$a = 4$ estudiantes menores de edad.

$n = 5$ identificaciones seleccionadas.

$x =$ variable que nos define el número de identificaciones que pertenecen a personas menores de edad.

$\therefore x = 0, 1$ y 2 identificaciones de personas menores de edad.

$$p(x, n) = \frac{a C_x \times {}_{N-a} C_{n-x}}{N C_n}$$

Sustituyendo valores:

$$p(x = 0, 1, 2; n = 5) = p(x = 0, n = 5) + p(x = 1, n = 5) + p(x = 2, n = 5)$$

$$p(x = 0, 1, 2; n = 5) = \frac{{}_4 C_0 * {}_{9-4} C_{5-0}}{{}_9 C_5} + \frac{{}_4 C_1 * {}_{9-4} C_{5-1}}{{}_9 C_5} + \frac{{}_4 C_2 * {}_{9-4} C_{5-2}}{{}_9 C_5}$$

$$p(x = 0, 1, 2; n = 5) = \frac{{}_4 C_0 * {}_5 C_5}{{}_9 C_5} + \frac{{}_4 C_1 * {}_5 C_4}{{}_9 C_5} + \frac{{}_4 C_2 * {}_5 C_3}{{}_9 C_5}$$

$$p(x = 0, 1, 2; n = 5) = \frac{(1)(1) + (4)(5) + (6)(10)}{126} = 0.6428$$

5.1.4.1. Aproximación de la hipergeométrica por la binomial

En términos generales, con una gran población, el muestreo con o sin reposición es casi idéntico.

Consideremos un experimento binomial $B[n, p(x)]$, es decir, el experimento, se repite n veces, donde cada vez la probabilidad de éxito de p y la probabilidad de fracaso es $q=1-p$. Este experimento puede ser modelado de la siguiente manera:

Paso 1). Escoja una población de N elementos donde p de los elementos son designados como éxitos y los q elementos restantes son designados como fracasos.

Paso 2). Escoja una muestra S de n elementos con reposición, es decir, cada vez que se selecciona un elemento de la muestra, este es reemplazado en la población antes de seleccionar el elemento siguiente.

El siguiente teorema nos dice:

“Que la probabilidad de $p(x)$ de la muestra S tenga x elementos de éxito¹⁹”, esto es:

$$p(x) = {}_n C_x p^x q^{n-x}$$

Paso 3). Escoja una muestra S de n elementos sin reposición, es decir, cada vez que se selecciona un elemento de la muestra, este no es reemplazado en la población antes de seleccionar el elemento siguiente.

El siguiente teorema se aplica cuando $\min(M, n)$, que significa: *el mínimo de los dos números*. Donde M = al espacio muestral de “éxito”.

“Suponemos que los enteros positivos N , M y n están dados con $M, n \leq N$. Entonces la siguiente es una distribución de posibilidad discreta²⁰”

$$p(x) = \frac{{}_M C_x * {}_{N-M} C_{n-x}}{{}_N C_n}$$

Para $x= 1, 2 \dots \min(M, n)$

Los números anteriores forman la llamada distribución hipergeométrica, ésta se caracteriza por tres parámetros n , N y M , y estos algunas veces está representado $HYP(n, N, M)$. Una variable aleatoria X con esta distribución se llama una *variable aleatoria hipergeométrica*.

Si n es mucho menor que N y M , entonces la distribución hipergeométrica se acerca a la distribución binomial.

La distribución hipergeométrica se aplica al muestreo cuando no hay reposición.

¹⁹ Ver tópico: 5.1.3 Distribución binomial.

²⁰ Ver tópico: 5.1.4 Distribución hipergeométrica.

Ejemplo 33. Considere el experimento binomial $B(n, p)$ y supongamos que se escoge una muestra aleatoria de tamaño 5, con reposición. Un modelo que representa este experimento sería una caja con 10 canicas de las cuales 6 tendrían color blanco y 4 tendrían color rojo.

- a) ¿Cuál es la probabilidad de obtener exactamente 3 canicas blancas (y por lo tanto dos canicas rojas) para cada una de las 5 selecciones?
 b) ¿Cuál sería el modelo del experimento binomial?

Solución.

a) *Probabilidad de obtener tres canicas blancas para cada una de las 5 selecciones.*

Paso 1: Evaluación de p (éxito) y q (fracaso).

Sean:

$N = 6$ canicas blancas + 4 canicas rojas = 10

$x = 3$ canicas blancas sean obtenidas.

$n =$ muestra aleatoria de 5 canicas = 5.

$p(\text{canica blanca}) = 6/10 = 0.6$

$q(\text{canica roja}) = 1-p = 1-0.6 = 0.4$

Como es un experimento con reposición se aplica el paso 2 para evaluar $p(x)$.

$$p(x) = {}_n C_x p^x q^{n-x}$$

Nota: *Para el calculo de nCr mediante calculadora científica, ver nota del ejemplo 26, inciso a.*

$$p(x = 3) = {}_5 C_3 p^3 q^{5-3} = (10) \times (0.6)^3 \times (0.4)^2 = 0.3456$$

Interpretación:

La probabilidad de obtener 3 canicas blancas es $p(x=3)=0.3456$ y la probabilidad de obtener 2 canicas blancas es $q(x=2)=1-0.3456=0.6544$. Es decir, que la probabilidad esta en función de los casos de éxito, a medida que estos aumentan, la probabilidad disminuye y viceversa.

b) *modelo del experimento binomial.*

El modelo del experimento binomial, entonces, sería: $B(5,0.3456)$.

Ejemplo 34. Una clase con 10 estudiantes tiene 6 hombres y 4 mujeres. Supongamos que se ha seleccionado una muestra aleatoria de 5 estudiantes. Encuentre la probabilidad de que exactamente 3 hombres (y por lo tanto 2 mujeres) sean seleccionados.

Solución.

Como el experimento no menciona que haya reposición en la muestra aleatoria, se hace uso directamente del paso 3, esto es:

$$p(x) = \frac{{}^M C_x * {}^{N-M} C_{n-x}}{{}^N C_n}$$

Donde:

$N = 10$ estudiantes.

$M = 6$ hombres.

$n = 5$.

$x = 3$ hombres sean seleccionados.

Sustituyendo datos:

$$p(3) = \frac{{}_6 C_3 * {}_{10-6} C_{5-3}}{{}_{10} C_5} = \frac{{}_6 C_3 * {}_4 C_2}{{}_{10} C_5} = \frac{(20)(6)}{252} = \frac{120}{252} = 0.4762$$

Interpretación:

El denominador ${}_{10} C_5$ representa el número de formas posibles de seleccionar una muestra de $n=5$ de los 10 estudiantes. El ${}_6 C_3$ representa el número de formas posibles de seleccionar 3 de los 6 hombres y el ${}_4 C_2$ representa el número de formas posibles de seleccionar 2 de las 4 mujeres.

5.1.5 Distribución Geométrica

Esta distribución es un caso especial de la binomial, ya que se desea que ocurra un éxito por primera y única vez en el último ensayo que se realiza del experimento, para obtener la fórmula de

esta distribución, el siguiente análisis nos permite definir una fórmula que evalúe cualquier problema que tenga este tipo de distribución.

Si nosotros trazamos un diagrama de árbol que nos represente los ensayos de un evento, observaremos que la única rama de ese árbol que nos interesa es aquella en donde aparecen las probabilidades de "fracaso" y por último la probabilidad de "éxito".

Sí denotamos:

x = el número de repeticiones del experimento necesarias para que ocurra un éxito por primera y única vez.

p = probabilidad de "éxito".

q = probabilidad de "fracaso".

Entonces la probabilidad buscada sería:

$$p(\text{Probabilidad de que ocurra un éxito en el ensayo } x \text{ por primera y única vez}) = q(\text{fracaso}) \times p(\text{éxito}) \times \dots p(\text{éxito})$$

$$p(\text{Probabilidad de que ocurra un éxito en el ensayo } x \text{ por primera y única vez}) = q^{x-1}p$$

Luego, la fórmula a utilizar cuando se desee calcular probabilidades con esta distribución sería:

$$p(x) = q^{x-1}p$$

Donde:

$p(x)$ = Probabilidad de que ocurra un éxito en el ensayo x por primera y única vez.

q = Probabilidad de fracaso.

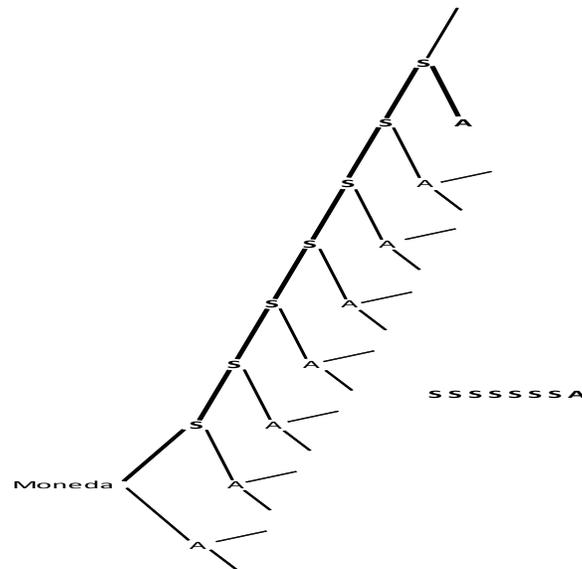
p = Probabilidad de éxito.

Ejemplo 35: Se lanza al aire una moneda cargada 8 veces, de tal manera que la probabilidad de que aparezca águila es de $2/3$, mientras que la probabilidad de que aparezca sello es de $1/3$, Determine la probabilidad de que en el último lanzamiento aparezca un águila.

Solución.

Si nosotros trazamos un diagrama de árbol que nos represente los 8 lanzamientos de la moneda, observaremos que una de las ramas de ese árbol que nos interesa es aquella en donde aparecen

7 sellos seguidos y por último un águila; a continuación se muestra la más simple de las posibilidades para tal efecto:



Sí desarrollamos completamente el diagrama de árbol, veremos que:

$x =$ es el número de repeticiones del experimento necesarias para que ocurra un fracaso por primera y única vez en los lanzamientos indicados = 8 lanzamientos.

$q =$ probabilidad de que aparezca un sello = $p(\text{fracaso}) = 1/3$.

$p =$ probabilidad de que aparezca una águila = $p(\text{éxito}) = 2/3$.

Entonces la probabilidad buscada sería:

$$p(\text{aparezca una águila en el último lanzamiento}) = p(A) \times p(S) \times p(S) \times p(S) \times p(S) \times p(S) \times p(S) \times p(S)$$

$$p(\text{aparezca una águila en el último lanzamiento}) = q^{x-1}p$$

Luego sustituyendo datos en:

$$p(x) = q^{x-1}p$$

Tenemos:

$$p(x = 8) = \left(\frac{1}{3}\right)^{8-1} \left(\frac{2}{3}\right) = 0.0003048$$

Ejemplo 36. Cierta compañía constructora de instrumentos de medición tiene la certeza de que cinco de sus dispositivos muestren una desviación excesiva del 0.05. ¿Cuál es la probabilidad? de que:

- a) El sexto de estos dispositivos de medición sometidos a prueba sea el primero en mostrar una desviación excesiva.
- b) El séptimo de estos dispositivos de medición sometidos a prueba, sea el primero que no muestre una desviación excesiva.

Solución.

a) Probabilidad de que el sexto de estos dispositivos de medición sometidos a prueba sea el primero en mostrar una desviación excesiva.

Se aplica la siguiente relación:

$$p(x) = q^{x-1}p$$

Donde:

$x = 6$ (que el sexto dispositivo de medición probado sea el primero que muestre una variación excesiva).

$p = 0.05$ = probabilidad de que un dispositivo de medición muestre una variación excesiva.

$q = 1-p = 0.95$ = probabilidad de que un dispositivo de medición no muestre una variación excesiva.

Por lo tanto:

$$p(x = 6) = (0.95)^{6-1}(0.05) = 0.03869$$

b) Probabilidad de que el séptimo de estos dispositivos de medición sometidos a prueba, sea el primero que no muestre una desviación excesiva.

$x = 7$ que el séptimo dispositivo de medición probado, sea el primero que no muestre una desviación excesiva.

$p = 0.95$ = probabilidad de que un dispositivo de medición no muestre una variación excesiva.

$q = 0.05$ = probabilidad de que un dispositivo de medición muestre una variación excesiva.

Se aplica la siguiente relación:

$$p(x) = q^{x-1}p$$

Sustituyendo datos:

$$p(x = 7) = (0.05)^{7-1}(0.95) = 0.000000014$$

Ejemplo 37. Los registros de una compañía constructora de pozos, indican que la probabilidad de que uno de sus pozos nuevos, requiera de reparaciones en el término de un año es de 0.20. ¿Cuál es la probabilidad de que el quinto pozo construido por esta compañía en un año dado sea el primero en requerir reparaciones en un año?

Solución.

$x = 5$ (que el 5º pozo sea el primero que requiera reparaciones en un año).

$p = 0.20$ (probabilidad de que un pozo requiera reparaciones en el término de un año).

$q = 0.80$ = (probabilidad de que un pozo no requiera reparaciones en el término de un año).

$$p(x = 5) = (0.80)^{5-1}(0.20) = 0.08192$$

5.1.6 Distribución multinomial

Los experimentos que tienen este tipo de distribución tienen las siguientes características:

- a) Al llevar a cabo un experimento con esta distribución se esperan más de dos tipos de resultados.
- b) Las probabilidades asociadas a cada uno de los resultados son constantes.
- c) Cada uno de los ensayos o repeticiones del experimento son independientes.
- d) El número de repeticiones del experimento, n es constante.

El siguiente análisis nos permite definir una fórmula que evalúe cualquier problema que tenga este tipo de distribución.

Antes de empezar a resolver algún problema, lo primero que hay que hacer es identificarlo como un problema que tiene una distribución multinomial, y podemos decir que lo es si se trata de un experimento en donde se pueden esperar mas de dos tipos de resultados cuyas probabilidades de ocurrencia son constantes y donde además cada uno de los ensayos es constante e independiente de los demás.

Posteriormente se elabora un diagrama de árbol, en donde representaremos los ensayos, de ahí se obtendrá el espacio muestral (δ) y posteriormente la probabilidad pedida.

Podemos partir de la siguiente expresión para desarrollar la fórmula:

$$p(x, n, p) = (\# \text{ de ramas "exitosas" del diagrama de arbol})(\text{probabilidad asociada a cada rama})$$

Donde:

$$p(x_1, x_2 \dots x_k; n; p)$$

= *prob. de que en n ensayos aparezcan x_1 objetos del 1er. tipo, x_2 objetos del 2º tipo ... y x_k del ultimo tipo*

Y se enumeran las ramas de interés.

¿QUÉ TIPO DE ARREGLOS SON ESTOS ELEMENTOS DEL ESPACIO MUESTRAL?, Son permutaciones en donde algunos objetos son iguales, entonces, el número de ramas se puede obtener con la fórmula correspondiente:

$${}_n P_{x_1, x_2 \dots x_k} = \frac{n!}{x_1! x_2! \dots x_k!}$$

Donde: $n = x_1 + x_2 + \dots + x_k$

Formula con la que se obtiene el número de ramas.

¿Y la probabilidad asociada a cada rama?

$$\text{Probabilidad asociada a cada rama} = p_1^{x_1} p_2^{x_2} \dots p_k^{x_k}$$

Luego la fórmula de la distribución multinomial sería:

$$p(x, n, p) = {}_n P_{x_1, x_2, \dots, x_k} \cdot p^{x_1} \cdot p^{x_2} \dots p^{x_k} = \left[\frac{n!}{x_1! x_2! \dots x_k!} \right] p^{x_1} p^{x_2} \dots p^{x_k}$$

Donde:

$p(x, n, p)$ = probabilidad de obtener x éxitos en n ensayos, cuando la probabilidad de éxito es p .

p = probabilidad de éxito.

q = probabilidad de fracaso = $1-p$.

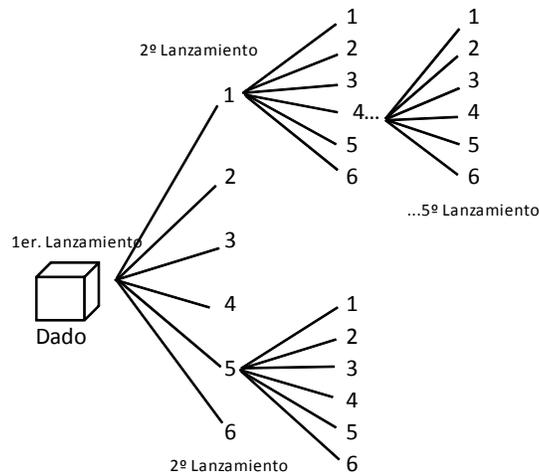
x = la variable aleatoria, el numero de éxitos en las n pruebas.

n = el numero de pruebas.

Ejemplo 38. Se lanza al aire un dado normal, 5 veces, determine la probabilidad de que aparezca dos números uno, dos números tres y un número cinco.

Solución.

Lo primero es trazar un diagrama de árbol que nos muestre los 5 lanzamientos del dado; esto sería muy laborioso por lo que se muestra parte del mismo a continuación:



$$\delta = [(1, 1, 5, 3, 3), (5, 1, 1, 3, 3), (1, 3, 3, 1, 5), \dots \text{etc, etc.}]$$

Del diagrama de árbol se obtendría el espacio muestral y enseguida se determinarían las probabilidades requeridas. En lugar de lo anterior, utilicemos la siguiente expresión:

$$p(\text{aparezcan dos 1, dos 3 y un 5}) = (\# \text{ de ramas en donde haya dos 1, dos 3 y un 5}) (\text{probabilidad asociada a cada rama})$$

Para esto definiremos lo siguiente:

n = número de lanzamientos del dado

x_1 = número de veces que aparece el número 1 = 2

x_3 = número de veces que aparece el número 3 = 2

x_5 = número de veces que aparece el número 5 = 1

p_1 = probabilidad de que aparezca el número 1 = 1/6

p_3 = probabilidad de que aparezca el número 3 = 1/6

p_5 = probabilidad de que aparezca el número 5 = 1/6

El número de ramas se puede obtener de la siguiente manera:

$${}_n P_{x_1, x_2, \dots, x_k} = \frac{n!}{x_1! x_2! \dots x_k!} \quad \text{Donde: } n = x_1 + x_3 + x_5 = 2 + 2 + 1 = 5$$

Sustituyendo datos:

$$\text{Numero de ramas} = {}_5 P_{2,2,1} = \frac{5!}{2! 2! 1!} = \frac{120}{4} = 30$$

Y la probabilidad asociada a cada una de las ramas, sería:

$$p(\text{asociada a cada rama}) = p(\# 1)p(\# 1)p(\# 3)p(\# 3)p(\# 5) = p_1 p_1 p_3 p_3 p_5 = p_1^2 p_3^2 p_5$$

$$p(\text{aparezcan dos 1, dos 3 y un 5}) = p\left(x = 1, 3, 5, n = 5, p_{1,3,5} = \frac{1}{6}\right) = (30)\left(p_1^2 p_3^2 p_5\right)$$

De donde:

$$p\left(x = 2_1, 2_3, 1_5; n = 5; p_{1,3,5} = \frac{1}{6}\right) = ({}_5 P_{2,2,1})(p_1^2 p_3^2 p_5) = (30)\left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{1}{6}\right)$$

$$p\left(x = 2_1, 2_3, 1_5; n = 5; p_{1,3,5} = \frac{1}{6}\right) = (30)(0.02778)(0.02778)(0.1667) = 0.003859$$

Ejemplo 39. Las probabilidades son de 0.40, 0.20, 0.30 y 0.10, respectivamente, de que un delegado llegue por avión a una cierta convención, llegue en autobús, en automóvil o en tren. ¿Cuál es la probabilidad de que entre 9 delegados seleccionados aleatoriamente en esta convención

a) 3 hayan llegado por avión, 3 en autobús, 1 en automóvil y 2 en tren?

- b) 4 hayan llegado por avión, 1 en autobús y 2 en automóvil?
 c) 5 hayan llegado en automóvil?

Solución.

a) Probabilidad de que 3 hayan llegado por avión, 3 en autobús, 1 en automóvil y 2 en tren.

n = Delegados seleccionados aleatoriamente = 9

x_1 = # de delegados que llegan por avión = 3

x_2 = # de delegados que llegan en autobús = 3

x_3 = # de delegados que llegan en automóvil = 1

x_4 = # de delegados que llegan en tren = 2

p_1 = probabilidad de que un delegado llegue por avión = 0.40

p_2 = probabilidad de que un delegado llegue en autobús = 0.20

p_3 = probabilidad de que un delegado llegue en automóvil = 0.30

p_4 = probabilidad de que un delegado llegue en tren = 0.10

$$p(x, n, p) = {}_n P_{x_1, x_2, \dots, x_k} \cdot p_1^{x_1} \cdot p_2^{x_2} \dots p_k^{x_k} = \left[\frac{n!}{x_1! x_2! \dots x_k!} \right] p_1^{x_1} p_2^{x_2} \dots p_k^{x_k}$$

Sustituyendo datos:

$$p(x = 3_{av}, 3_{bus}, 1_{aut}, 2_{tren}; n = 9; p = 0.4_{av}, 0.2_{bus}, 0.3_{aut}, 0.1_{tren}) = \left[\frac{9!}{3! 3! 1! 2!} \right] (0.4)^3 (0.2)^3 (0.3)(0.1)^2$$

$$p(x = 3_{av}, 3_{bus}, 1_{aut}, 2_{tren}; n = 9; p = 0.4_{av}, 0.2_{bus}, 0.3_{aut}, 0.1_{tren}) = 0.007741$$

b) Probabilidad de que 4 hayan llegado por avión, 1 en autobús y 2 en automóvil.

Nota: Si 4 delegados llegan por avión, 1 en autobús y 2 en automóvil; obviamente el resto de los delegados (2) llegarán en tren.

Donde:

n = Delegados seleccionados aleatoriamente = 9

x_1 = # de delegados que llegan por avión = 4

x_2 = # de delegados que llegan en autobús = 1

x_3 = # de delegados que llegan en automóvil = 2

x_4 = # de delegados que llegan en tren = 2

p_1 = probabilidad de que un delegado llegue por avión = 0.40

p_2 = probabilidad de que un delegado llegue en autobús = 0.20

p_3 = probabilidad de que un delegado llegue en automóvil = 0.30

p_4 = probabilidad de que un delegado llegue en tren = 0.10

$$p(x, n, p) = {}_n P_{x_1, x_2, \dots, x_k} \cdot p_1^{x_1} \cdot p_2^{x_2} \cdots p_k^{x_k} = \left[\frac{n!}{x_1! x_2! \dots x_k!} \right] p_1^{x_1} p_2^{x_2} \cdots p_k^{x_k}$$

Sustituyendo datos:

$$p(x = 4_{av}, 1_{bus}, 2_{aut}, 2_{tren}; n = 9; p = 0.4_{av}, 0.2_{bus}, 0.3_{aut}, 0.1_{tren}) = \left[\frac{9!}{4! 1! 2! 2!} \right] (0.4)^4 (0.2) (0.3)^2 (0.1)^2$$

$$p(x = 3_{av}, 3_{bus}, 1_{aut}, 2_{tren}; n = 9; p = 0.4_{av}, 0.2_{bus}, 0.3_{aut}, 0.1_{tren}) = 0.01742$$

c) Probabilidad de que 5 hayan llegado en automóvil.

Nota: Si 5 delegados llegan en automóvil, obviamente el resto de los delegados (4) llegarán en avión o autobús o tren.

Donde:

$n = 9$

$x_1 = 5$ lleguen en automóvil.

$x_2 = 4$ lleguen por avión o autobús o tren.

$p_1 = 0.30$

$p_2 = 0.40 + 0.20 + 0.10 = 0.70$

$$p(x, n, p) = {}_n P_{x_1, x_2, \dots, x_k} \cdot p_1^{x_1} \cdot p_2^{x_2} \cdots p_k^{x_k} = \left[\frac{n!}{x_1! x_2! \dots x_k!} \right] p_1^{x_1} p_2^{x_2} \cdots p_k^{x_k}$$

Sustituyendo datos:

$$p(x = 5_{aut}, 4_{av, bus \text{ o } tren}; n = 9; p = 0.3_{aut}, 0.7_{av, bus \text{ o } tren}) = \left[\frac{9!}{5! 4!} \right] (0.3)^5 (0.7)^4 = 0.07352$$

Ejemplo 40. De acuerdo con la teoría de la genética, un cierto cruce de conejillo de indias resultará en una descendencia roja, negra y blanca en la relación 8:4:4. Encuentre la probabilidad de que entre 8 descendientes,

- a) 5 sean rojos, 2 negros y un blanco.
 b) 3 sean rojos y 2 sean negros.

Solución.

a) *Probabilidad de que 5 sean rojos, 2 negros y un blanco.*

$n =$ descendientes $= 8$

$x_1 = 5$ rojos; $p_1 =$ probabilidad de que sean rojos $= 8/16 = 0.5$

$x_2 = 2$ negros; $p_2 =$ probabilidad de que sean negros $= 4/16 = 0.25$

$x_3 = 1$ blanco; $p_3 =$ probabilidad de que sean blancos $= 4/16 = 0.25$

$$p(x, n, p) = {}_n P_{x_1, x_2, \dots, x_k} \cdot p_1^{x_1} \cdot p_2^{x_2} \cdots p_k^{x_k} = \left[\frac{n!}{x_1! x_2! \dots x_k!} \right] p_1^{x_1} p_2^{x_2} \cdots p_k^{x_k}$$

Sustituyendo datos:

$$p(x = 5_R, 2_N, 1_B; n = 8; p = 0.5_R, 0.25_N, 0.25_B) = \left[\frac{8!}{5! 2! 1!} \right] (0.50)^5 (0.25)^2 (0.25) = 0.08203$$

b) *Probabilidad de que 3 sean rojos y 2 sean negros.*

$n =$ descendientes $= 8$

$x_1 = 3$ rojos; $p_1 = 0.50$

$x_2 = 2$ negros; $p_2 = 0.25$

$x_3 = 3$ blanco; $p_3 = 0.25$

$$p(x = 3_R, 2_N, 3_B; n = 8; p = 0.5_R, 0.25_N, 0.25_B) = \left[\frac{8!}{3! 2! 3!} \right] (0.50)^3 (0.25)^2 (0.25)^3 = 0.06836$$

5.1.7 Distribución de Poisson

Los experimentos que tienen este tipo de distribución tienen las siguientes características:

1. El número de resultados que ocurren en un intervalo de tiempo a región específicos es independiente del número que ocurre en cualquier otro intervalo disjunto de tiempo o región del espacio disjunto. De esta manera se dice que el proceso de Poisson no tiene memoria.
2. La probabilidad de que un resultado sencillo ocurra en un intervalo de tiempo muy corto o en una región pequeña es proporcional a la longitud del intervalo de tiempo o al tamaño de la región y no depende del número de resultados que ocurran fuera de ese intervalo.
3. La probabilidad de que más de un resultado ocurra en ese intervalo de tiempo tan corto o en esa región tan pequeña, es despreciable.
4. La distribución de probabilidad de la variable aleatoria de Poisson x , que representa el número de resultados que ocurren en un intervalo de tiempo dado o en una región específica indicada por t .

En este tipo de experimentos los éxitos buscados son expresados por unidad de área, tiempo, pieza, etc, etc,:

- a. # de defectos de una tela por m^2 .
- b. # de aviones que aterrizan en un aeropuerto por día, hora, minuto, etc, etc.
- c. # de bacterias por cm^2 de cultivo.
- d. # de llamadas telefónicas a un conmutador por hora, minuto, etc, etc.
- e. # de llegadas de embarcaciones a un puerto por día, mes, etc, etc.

Para determinar la probabilidad de que ocurran x éxitos por unidad de tiempo, área, o producto, la fórmula a utilizar sería:

$$p(x, \lambda) = \frac{\lambda^x \varepsilon^{-\lambda}}{x!}$$

Donde:

$p(x, \lambda)$ = Probabilidad de que ocurran x éxitos, cuando el número promedio de ocurrencia de ellos es λ .

λ = Media o promedio de éxitos por unidad de tiempo, área o producto.

$\varepsilon = 2.718$

x = variable que nos denota el número de éxitos que se desea que ocurra.

Hay que hacer notar que en esta distribución el número de éxitos que ocurren por unidad de tiempo, área o producto es totalmente al azar y que cada intervalo de tiempo es independiente de otro intervalo dado, así como cada área es independiente de otra área dada y cada producto es independiente de otro producto dado.

Ejemplo 41. Si un banco recibe en promedio 6 cheques sin fondo por día, ¿Cuáles son las probabilidades de que reciba?

- a) ¿Cuatro cheques sin fondo en un día dado?
 b) ¿10 cheques sin fondos en cualquiera de dos días consecutivos?

Solución.

En ambos casos se aplica la siguiente expresión:

$$p(x, \lambda) = \frac{\lambda^x \varepsilon^{-\lambda}}{x!}$$

a) *Probabilidad de recibir cuatro cheques sin fondo en un día dado.*

Donde:

x = variable que nos define el número de cheques sin fondo que llegan al banco en un día cualquiera = 0, 1, 2, 3, 4.

λ = 6 cheques sin fondo por día.

ε = 2.718

$$p(x = 4, \lambda = 6) = \frac{(6)^4 (2.718)^{-6}}{4!} = \frac{(1296)(0.00248)}{24} = 0.1339$$

b) *Probabilidad de recibir 10 cheques sin fondos en cualquiera de dos días consecutivos.*

Donde:

x = variable que nos define el número de cheques sin fondo que llegan al banco en dos días consecutivos = 10.

λ = 6 x 2 = 12 cheques sin fondo en promedio que llegan al banco en dos días consecutivos.

ε = 2.718

Nota: λ siempre debe de estar en función de x o dicho de otra forma, debe “hablar” de lo mismo que x .

$$p(x = 10, \lambda = 12) = \frac{(12)^{10}(2.718)^{-12}}{10!} = \frac{(6.1917 \times 10^{10})(6.151 \times 10^{-6})}{3628800} = 0.1049$$

Ejemplo 42. En la inspección de hojalata producida por un proceso electrolítico continuo, se identifican 0.2 imperfecciones en promedio por minuto. Determine las probabilidades de identificar:

- una imperfección en 3 minutos.
- al menos dos imperfecciones en 5 minutos.
- cuando más una imperfección en 15 minutos.

Solución.

En todos los casos se aplica la siguiente expresión:

$$p(x, \lambda) = \frac{\lambda^x \varepsilon^{-\lambda}}{x!}$$

a) Probabilidad de identificar una imperfección en 3 minutos.

Donde:

x = variable que nos define el número de imperfecciones en la hojalata por cada 3 minutos = 1.

λ = 0.2 x 3 = 0.6 imperfecciones en promedio por cada 3 minutos en la hojalata.

ε = 2.718

$$p(x = 1, \lambda = 0.6) = \frac{(0.6)^1(2.718)^{-0.6}}{1!} = \frac{(0.6)(0.5488)}{1} = 0.03293$$

b) Probabilidad de identificar al menos dos imperfecciones en 5 minutos.

Donde:

x = variable que nos define el número de imperfecciones en la hojalata por cada 5 minutos = 2, 3, 4, ..., etc., etc.

λ = 0.2 x 5 = 1 imperfección en promedio por cada 5 minutos en la hojalata.

ε = 2.718

$$p(x = 2,3,4, \text{etc. } \dots; \lambda = 1) = 1 - p(x = 0,1; \lambda = 1) = 1 - [p(x = 0; \lambda = 1) + p(x = 1; \lambda = 1)]$$

$$p(x = 2,3,4, \text{etc. } \dots; \lambda = 1) = 1 - \left[\frac{(1)^0(2.718)^{-1}}{0!} + \frac{(1)^1(2.718)^{-1}}{1!} \right] = 1 - [0.3679 + 0.3679]$$

$$p(x = 2,3,4, \text{etc. } \dots; \lambda = 1) = 1 - p(x = 0,1; \lambda = 1) = 1 - 0.7358 = 0.2642$$

c) Probabilidad de identificar cuando más una imperfección en 15 minutos.

Donde:

x = variable que nos define el número de imperfecciones en la hojalata por cada 15 minutos = 0, 1.

$\lambda = 0.2 \times 15 = 3$ imperfecciones en promedio por cada 15 minutos en la hojalata.

$\varepsilon = 2.718$

$$p(x = 0,1; \lambda = 3) = p(x = 0; \lambda = 3) + p(x = 1; \lambda = 3)$$

$$p(x = 0,1; \lambda = 3) = \frac{(3)^0(2.718)^{-3}}{0!} + \frac{(3)^1(2.718)^{-3}}{1!}$$

$$p(x = 0,1; \lambda = 3) = \frac{(1)(0.04980)}{1} + \frac{(3)(0.04980)}{1} = 0.04980 + 0.1494 = 0.1992$$

5.1.7.1 Aproximación de la Binomial por la de Poisson

En este caso se determinarán probabilidades de experimentos binomiales, pero que dadas sus características, es posible aproximarlas con la distribución de Poisson, estas características son, $n \rightarrow \infty$ (n es muy grande) y $p \rightarrow 0$ (p es muy pequeña), por lo que:

$$p(x, n, p) = {}_n C_x p^x q^{n-x} \cong \frac{\lambda^x \varepsilon^{-\lambda}}{x!}$$

La expresión anterior solo se cumple cuando $n \rightarrow \infty$ y $p \rightarrow 0$, solo en este caso, si esto no se cumple, la aproximación no se puede llevar a efecto, por lo que la fórmula a utilizar en este caso sería:

$$p(x, \lambda) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$$

Donde:

$\lambda = \mu = np$ = número esperado de éxitos = tasa promedio de éxitos.

n = número de repeticiones del experimento.

p = probabilidad de éxito = $p(\text{éxito})$.

Una regla general aceptable es emplear esta aproximación si $n \geq 20$ y $p \leq 0.05$: si $n \geq 100$, la aproximación es generalmente excelente siempre y cuando $np \leq 10$.

Ejemplo 43. Se sabe que el 5% de los libros encuadernados en cierto taller tienen encuadernaciones defectuosas. Determine la probabilidad de que 2 de 100 libros encuadernados en ese taller, tengan encuadernaciones defectuosas, usando:

- la fórmula de la distribución binomial.
- la aproximación de Poisson a la distribución binomial.

Solución.

a) Usando la fórmula de la distribución binomial.

$$p(x, n, p) = {}_n C_x p^x q^{n-x} = \left[\frac{n!}{x! (n-x)!} \right] p^x q^{n-x}$$

Donde:

n = libros encuadernados = 100.

$p = 0.05$ = $p(\text{encuadernación defectuosa}) = p(\text{éxito})$.

$q = 0.95$ = $p(\text{encuadernación no defectuosa}) = p(\text{fracaso})$.

x = variable que nos define el número de encuadernaciones defectuosas en la muestra = 2.

Por lo tanto:

$$p(x = 2, n = 100, p = 0.05) = {}_{100} C_2 (0.05)^2 (0.95)^{100-2} = \left[\frac{100!}{2! (100-2)!} \right] (0.0025)(0.95)^{98}$$

$$p(x = 2, n = 100, p = 0.05) = \left[\frac{9.3326 \times 10^{157}}{2! 98!} \right] (0.0025)(0.006560143)$$

$$p(x = 2, n = 100, p = 0.05) = \left[\frac{9.3326 \times 10^{157}}{(2)(9.4269 \times 10^{153})} \right] (0.0025)(0.006560143)$$

$$p(x = 2, n = 100, p = 0.05) = (4950)(0.0025)(0.006560143) = 0.0812$$

b) Usando la aproximación de Poisson a la distribución binomial.

$$p(x, \lambda) = \frac{\lambda^x \varepsilon^{-\lambda}}{x!}$$

Donde:

$n = 100$ encuadernaciones.

$p = 0.05$.

$\lambda = np = (100)(0.05) = 5$.

$x =$ variable que nos define el número de encuadernaciones defectuosas en la muestra = 2.

$\varepsilon = 2.718$

$$p(x = 2, \lambda = 5) = \frac{(5)^2 (2.718)^{-5}}{2!} = \frac{(25)(0.006741)}{2} = 0.08426$$

Al comparar los resultados de las probabilidades con una y otra distribución, nos damos cuenta de que la diferencia entre un cálculo y otro es de tan solo 0.00306, por lo que la aproximación de Poisson es una buena opción para calcular probabilidades binomiales.

Ejemplo 44. Un fabricante de maquinaria pesada tiene instalados en el campo 3840 generadores de gran tamaño con garantía. Si la probabilidad de que cualquiera de ellos falle durante el año dado es de 1/1200 determine la probabilidad de que:

- a) 4 generadores fallen durante el año en cuestión.
- b) más 1 de un generador falle durante el año en cuestión.

Solución.

a) Probabilidad de que 4 generadores fallen durante el año en cuestión.

$n = 3840$ generadores.

$p = 1/1200 = 8.33 \times 10^{-4}$ probabilidad de que un generador falle durante el año de garantía.
 $\lambda = np = (3840)(8.33 \times 10^{-4}) = 3.2$ motores en promedio pueden fallar en el año de garantía.
 $x =$ variable que nos define el número de motores que pueden fallar en el año de garantía = 4.
 $\varepsilon = 2.718$

$$p(x, \lambda) = \frac{\lambda^x \varepsilon^{-\lambda}}{x!}$$

Sustituyendo datos:

$$p(x = 4, \lambda = 3.2) = \frac{(3.2)^4 (2.718)^{-3.2}}{4!} = \frac{(104.8576)(0.04077)}{24} = 0.17813$$

b) Probabilidad de que más 1 de un generador falle durante el año en cuestión.

$$p(x = 2,3,4, \dots 3840; \lambda = 3.2) = 1 - p(x = 0,1; \lambda = 3.2) = 1 - [p(x = 0; \lambda = 3.2) + p(x = 1; \lambda = 3.2)]$$

$$p(x = 2,3,4, \dots 3840; \lambda = 3.2) = 1 - \left[\frac{(3.2)^0 (2.718)^{-3.2}}{0!} + \frac{(3.2)^1 (2.718)^{-3.2}}{1!} \right]$$

$$p(x = 2,3,4, \dots 3840; \lambda = 3.2) = 1 - (0.04077 + 0.1305) = 0.8287$$

5.2 Distribución de probabilidad de variables aleatorias continuas

Toda distribución de probabilidad es generada por una variable aleatoria x , la que puede ser de dos tipos, variable aleatoria discreta y variable aleatoria continua.

5.2.1 Definición de variable aleatoria continúa

Se le denomina variable porque puede tomar diferentes valores, aleatoria, porque los valores que toma son totalmente al azar y continua porque puede tomar tanto valores enteros como fraccionarios y un número infinito de ellos.

Ejemplo 45.

a). $x \rightarrow$ Variable que nos define el diámetro de un engrane en pulgadas:

$x \rightarrow 5.0", 4.99", 4.98", 5.0", 5.01", 5.0", 4.96"$

b). $x \rightarrow$ Variable que nos define la longitud de un cable o circuito utilizado en un arnés de auto:

$x \rightarrow 20.5 \text{ cm}, 20.1, 20.0, 19.8, 20.6, 20.0, 20.0$

c). $x \rightarrow$ Variable que nos define la concentración en gramos de plata de algunas muestras de mineral:

$x \rightarrow 14.8 \text{ gramos}, 12.0, 10.0, 42.3, 15.0, 18.4, 19.0, 21.0, 20.8$

Como se observa en los ejemplos anteriores, una variable continua puede tomar cualquier valor, entero o fraccionario, una forma de distinguir cuando se trata de una variable continua es que esta variable nos permite medirla o evaluarla, mientras que una variable discreta no es medible, es una variable de tipo atributo, cuando se inspecciona un producto este puede ser defectuoso o no, blanco o negro, cumple con las especificaciones o no cumple, etc.

Si en un experimento aleatorio a cada suceso aleatorio elemental le asignamos un valor numérico obtenemos una variable aleatoria. Es decir, una variable que lleva asociada una probabilidad. La probabilidad de un valor concreto de la variable es la probabilidad que corresponde a los sucesos aleatorios elementales a los que hemos asignado ese valor numérico.

Por ejemplo: En el experimento aleatorio "*lanzar un dado*" asignamos a cada cara del dado su valor numérico (esta asignación aparece de forma natural). Así generamos una variable aleatoria que toma seis valores, del 1 al 6 con igual probabilidad ($1/6$) cada uno de ellos. Pero, con este mismo experimento, podemos generar otras variables aleatorias (no tan naturales) como puede ser: asignar el valor 1 a las caras que son múltiplos de tres y el valor 0 a las que no lo son, apareciendo una variable aleatoria que tiene dos valores, el 1 con probabilidad $1/3$ y el 0 con probabilidad $2/3$.

Crear una variable aleatoria no tiene mucho sentido sino la vamos a utilizar en un determinado contexto, por ejemplo, podemos utilizar la segunda variable aleatoria que hemos creado para apostar si sale o no múltiplo de tres.

Resumiendo, una variable aleatoria se construye al atribuir un número (positivo, negativo o cero) a cada uno de los sucesos aleatorios que forman el espacio muestral (δ) de un experimento aleatorio. La probabilidad de cada valor de la variable es la probabilidad conjunta de los sucesos

que dan lugar a ese valor. Es decir, definimos una variable aleatoria como una aplicación del espacio muestral sobre el conjunto de los números reales \mathbb{R} .

Según la amplitud del campo de variación de la función podemos distinguir: variables aleatorias discretas y variables aleatorias continuas. De la misma forma que en estadística descriptiva, una variable aleatoria es discreta si toma valores en un conjunto finito o infinito numerable. Y una variable aleatoria es continua si puede tomar valores en un conjunto infinito no numerable. Como ejemplo típico de variable aleatoria discreta tenemos la distribución binomial, y como ejemplo típico de variable aleatoria continua tenemos la distribución normal.

Como hemos visto hay variables aleatorias que pueden tomar cualquier valor de un intervalo real de la forma (a, b) , $(a, +\infty)$, $(-\infty, b)$, $(-\infty, +\infty)$ o uniones de ellos. A las variables de este tipo se las denomina variables aleatorias continuas.

Por ejemplo: Supongamos que vamos a realizar un experimento aleatorio que consiste en seleccionar una persona y apuntar su peso. Podemos crear una variable aleatoria cuyos valores sean el número de kilogramos que pesa la persona observada. En este caso, el rango de valores posibles se extiende entre los límites naturales, pero la continuidad de esta variable aleatoria radica en el carácter continuo de lo que medimos, el peso, es decir, en el hecho de que entre dos valores posibles se podrían obtener infinitos valores intermedios, también posibles si utilizáramos aparatos con suficiente precisión. Estos "infinitos" en el interior del rango de la variable es lo que diferencia a las variables continuas de las discretas.

Sin entrar en profundidades, consideramos que una distribución de probabilidad es cualquier mecanismo que nos ayuda a obtener las probabilidades de los valores de una variable si es discreta, o las probabilidades de intervalos de la variable si es continua. Si la variable aleatoria es discreta es posible asignar probabilidades a cada uno de los valores puntuales de la variable. En contra, cuando es continua cada uno de los infinitos valores posibles tendrá probabilidad cero y sólo podremos hablar de probabilidad dentro de intervalos.

5.2.1.1 Parámetros de una variable aleatoria continua

Por analogía con las definiciones de estos conceptos para variables aleatorias discretas, se definen²¹ la esperanza matemática o media (μ), la varianza (σ^2) y la desviación típica (σ) de una variable aleatoria continua de la siguiente forma:

²¹ Ver tópico: 5.1.3 Valor esperado (μ), varianza (σ^2) y desviación típica o estándar (σ).

Si toma valores en toda la recta real:

$$\mu = E(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x) dx; \quad \sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^2 f(x) dx; \quad \sigma = +\sqrt{\sigma^2}$$

Si toma valores en el intervalo $[a, b]$:

$$\mu = E(x) = \int_a^b x \cdot f(x) dx; \quad \sigma^2 = \int_a^b (x - \mu)^2 f(x) dx; \quad \sigma = +\sqrt{\sigma^2}$$

Donde:

$\mu = E(x)$ = media o valor esperado de la distribución.

x = variable aleatoria continua.

$f(x)$ = función de densidad de la distribución de probabilidad.

Tipificación de una variable aleatoria

Si x es una variable aleatoria de media μ y desviación típica σ , la variable $y=(x-\mu)/\sigma$ tiene de media 0 (cero) y de desviación típica 1, y se llama tipificada de x .

Podemos decir que mide la desviación de x respecto de su media, tomando como unidad la desviación típica de x .

5.2.2 Función de densidad y acumulativa

Una función que ofrece la probabilidad total de obtener un resultado de una variable aleatoria que varía desde el valor más bajo posible para la variable aleatoria hasta cualquier valor específico de interés. Las funciones de densidad acumulativa se derivan de las funciones de densidad de probabilidad. También se conoce como función de probabilidad acumulativa o simplemente función de distribución acumulada (FDA).

La función de distribución acumulada es bastante utilizada en el caso de una variable aleatoria continua ya que permite calcular todas las probabilidades que se requieran de dicha variable, resolviendo sólo una integral. Recuerde que, a partir, de la FDA, cada que requiera calcular una

probabilidad de un evento, necesitará integrar. La FDA ofrece que sólo resuelva una integral inicial y podrá calcular todas las probabilidades que necesite de la variable aleatoria continua que este analizando.

En cambio, la FDA de una variable aleatoria discreta, no resulta útil, porque en ese caso las probabilidades acumuladas se calculan a partir de sumas, lo cual demanda mucho tiempo y esfuerzo como no lo hacen las integrales.

La función de densidad de una variable aleatoria x permite trasladar la medida de probabilidad o “suerte” de realización de los sucesos de una experiencia aleatoria a la característica numérica que define la variable aleatoria.

Designando por F a la función de densidad x_i , distinguiremos el caso discreto, donde los posibles valores de x forman un conjunto discreto (finito o numerable), del continuo, donde el recorrido de la variable aleatoria es un intervalo de la recta real.

Si x es discreta su función de densidad se define por $F(x_i) = p(x_i=x)$ cualquiera que sea el valor de x .

En el caso de que x sea continua su función de densidad debe permitir expresar f , la función de distribución de probabilidad de x_i , en forma integral:

$$p(x_i < x) = \int_x^{\infty} f(x_i) dx$$

Cualquiera que sea el valor de x .

Para una variable aleatoria x_i , se define la función acumulativa de probabilidad como la probabilidad de que la variable aleatoria sea menor a un valor x .

Características

1. Es generada por una variable continua (x).

$x \rightarrow$ Es una variable que puede tomar tanto valores enteros como fraccionarios.

$x \rightarrow 1.0, 3.7, 4.0, 4.6, 7.9, 8.0, 8.3, 11.5, \dots, \infty$

2. $f(x) \geq 0$ Las probabilidades asociadas a cada uno de los valores que toma x deben ser mayores o iguales a cero. Dicho de otra forma, la función de densidad de probabilidad deberá tomar solo valores mayores o iguales a cero. La función de densidad de probabilidad sólo puede estar definida en los cuadrantes I y II de plano cartesiano.

3. $A = \int_a^b f(x)dx = 1$, la sumatoria de las probabilidades asociadas a cada uno de los valores que toma x en el intervalo $[a, b]$ debe ser igual a 1. El área (A) definida bajo la función de densidad de probabilidad deberá ser de 1.

5.2.3 Valor esperado (μ), varianza (σ^2) y desviación típica o estándar (σ)

- Media o valor esperado de x . Para calcular la media de una distribución de probabilidad continua se utiliza la siguiente fórmula:

$$\mu = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)dx$$

- Varianza. La fórmula para determinar la varianza de una distribución continua es:

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^2 f(x)dx$$

- Desviación típica o estándar. La fórmula para determinar la desviación típica de una distribución continua es:

$$\sigma = +\sqrt{\sigma^2}$$

Ejemplo 46. Para la siguiente función:

$$f(x) = \frac{x^2}{9}$$

Cuando $0 \leq x \leq 3$, donde $f(x) = 0$ para cualquier otro valor.

a) Diga si esta función nos define una distribución de probabilidad continua.

- b) Si la función define una distribución de probabilidad continua, entonces, determine su media, varianza y desviación típica o estándar.
- c) Determine la probabilidad de que $1 \leq x < 2$.

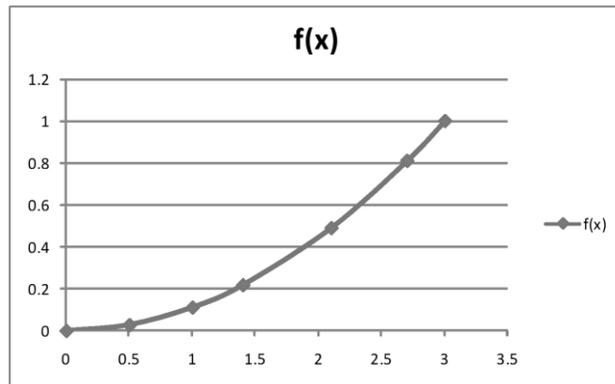
Solución.

a) Verificar si esta función nos define una distribución de probabilidad continua.

Para verificar que la función nos define una distribución de probabilidad continua, es necesario que cumpla con las características que se habían mencionado:

1. $x \rightarrow$ sí es una variable continua porque puede tomar cualquier valor entre 0 (a) y 3 (b).
2. $f(x) \geq 0$, lo que se comprueba si damos diferentes valores a x para ver que valores toma $f(x)$, dándonos cuenta de que efectivamente $f(x)$ solo toma valores mayores o iguales a cero. Esto es:

x	f(x)
0.0	0.00
0.5	0.03
1.0	0.11
1.4	0.22
2.1	0.49
2.7	0.81
3.0	1.00



3. Para comprobar que la sumatoria de las probabilidades que toma cada valor de x es de 1, se integra la función de 0 a 3 como se muestra a continuación:

$$A = \int_a^b f(x) dx = \int_0^3 \frac{x^2}{9} dx = \frac{1}{9} \cdot \frac{x^{2+1}}{2+1} \Big|_0^3 = \frac{1}{9} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_0^3 = \frac{x^3}{27} \Big|_0^3 = \frac{(3^3 - 0^3)}{27} = \frac{(27 - 0)}{27} = \frac{27}{27} = 1$$

Con las operaciones anteriores comprobamos que $f(x) = \frac{x^2}{9}$ sí nos define una distribución de probabilidad continua (que previamente ya se visualizaba en la grafica correspondiente).

b) Como la función define una distribución de probabilidad continua, entonces se puede calcular la media, varianza y desviación típica o estándar.

Calculo del valor esperado o media:

$$\mu = \int_a^b x \cdot f(x) dx = \int_0^3 x \left(\frac{x^2}{9}\right) dx = \int_0^3 \frac{x^3}{9} dx = \frac{1}{9} \cdot \left(\frac{x^4}{4}\right) \Big|_0^3 = \frac{(3^4 - 0^4)}{36} = \frac{(81 - 0)}{36} = \frac{81}{36} = 2.25$$

Calculo de la varianza:

$$\sigma^2 = \int_a^b (x - \mu)^2 f(x) dx = \int_0^3 (x - 2.25)^2 \left(\frac{x^2}{9}\right) dx = \int_0^3 (x^2 - 4.5x + 5.0625) \left(\frac{x^2}{9}\right) dx =$$

$$\int_0^3 \left(\frac{x^4}{9} - \frac{x^3}{2} + \frac{5.0625x^2}{9}\right) dx = \left(\frac{x^5}{45} - \frac{x^4}{8} + \frac{5.0625x^3}{27}\right) \Big|_0^3 = \frac{3^5}{45} - \frac{3^4}{8} + \frac{5.0625(3)^3}{27} =$$

$$\frac{243}{45} - \frac{81}{8} + \frac{136.6875}{27} = 5.4 - 10.125 + 5.0625 = 0.3375$$

Por lo tanto: $\sigma^2 = 0.3375$

Calculo de la desviación típica o estándar:

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{0.3375} = 0.5809$$

c) Probabilidad de que $1 \leq x < 2$.

Como ya se observó x es una variable continua porque $x \rightarrow$ puede tomar cualquier valor entre 1 (a) y 2 (b), por lo que su función de densidad acumulada debe permitir expresar f en función de distribución de probabilidad continua de x , en forma integral:

$$p(1 \leq x \leq 2) = \int_a^b f(x) dx = \int_1^2 \frac{x^2}{9} dx = \frac{1}{9} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_1^2 = \frac{x^3}{27} \Big|_1^2 = \frac{(2^3 - 1^3)}{27} = \frac{7}{27} = 0.2592$$

Nota: Las barras | nos indican la evaluación de la integral entre 0 y 3.

Con las operaciones anteriores nos damos cuenta que para evaluar probabilidades para variables de tipo continuo, es necesario evaluar la función de densidad de probabilidad en el rango de valores que se desea; que vendría siendo el área que se encuentra entre $f(x)$ y el eje de las x y entre el rango de valores definidos por la variable x .

5.2.4 Distribución uniforme y exponencial

Distribución uniforme

Las distribuciones uniformes corresponden al experimento de elegir dos puntos al azar entre dos fijos m y n . Como la probabilidad de elegir cualquier punto es la misma, la función de densidad tendrá la misma altura en todos los puntos entre m y n , es decir se trata de una función constante desde m a n , de altura $1/(n-m)$.

En esta distribuciones la media coincide con el punto medio del segmento $[a,b]$:

$$\mu = \frac{a + b}{2}$$

La desviación típica es:

$$\sigma = \frac{b - a}{\sqrt{12}}$$

La distribución exponencial

Las distribuciones exponenciales se utilizan como modelo para representar tiempos de funcionamiento o tiempos de espera. Su función de densidad que depende de un parámetro k es de la forma:

$$p(x) = ke^{-kx}$$

La media de esta distribución es $\mu=1/k$ y la desviación típica también es $\sigma=1/k$.

Resulta que la exponencial es un caso especial de la distribución gamma, ambas tienen un gran número de aplicaciones. Las distribuciones exponencial y gamma juegan un papel importante tanto en teoría de colas como en problemas de confiabilidad. El tiempo entre las llegadas en las instalaciones de servicio y el tiempo de falla de los componentes y sistemas eléctricos, frecuentemente involucran la distribución exponencial. La relación entre la gamma y la exponencial permite que la distribución gamma se utilice en tipos similares de problemas.

La variable aleatoria x tiene una distribución exponencial, con parámetro β , si su función de densidad es:

$$p(x) = \frac{1}{\beta} x^{\frac{-x}{\beta}}, \quad x > 0; \quad p(x) = 0 \text{ en cualquier otro caso donde } \beta > 0.$$

La media y la variancia de la distribución exponencial son: $\mu = \beta$ y $\sigma^2 = \beta^2$.

Relación con el proceso de Poisson

Las aplicaciones más importantes de la distribución exponencial son aquellas situaciones en donde se aplica el proceso de Poisson, es necesario recordar que un proceso de Poisson permite el uso de la distribución de Poisson. Recuérdese también que la distribución de Poisson se utiliza para calcular la probabilidad de números específicos de “eventos” durante un período o espacio particular. En muchas aplicaciones, el período o la cantidad de espacio es la variable aleatoria. Por ejemplo un ingeniero industrial puede interesarse en el tiempo t entre llegadas en una intersección congestionada durante la hora de salida de trabajo en una gran ciudad. Una llegada representa el evento de Poisson.

La relación entre la distribución exponencial (con frecuencia llamada exponencial negativa) y el proceso llamado de Poisson es bastante simple. La distribución de Poisson se desarrolló como una distribución de un solo parámetro λ , donde λ puede interpretarse como el número promedio de eventos por unidad de “tiempo”.

Considérese ahora la variable aleatoria descrita por el tiempo que se requiere para que ocurra el primer evento. Mediante la distribución de Poisson, se encuentra que la probabilidad de que no ocurran en el espacio hasta el tiempo t está dada por:

$$p(x, \lambda t) = \frac{(\lambda t)^x e^{-\lambda t}}{x!}; \quad \text{donde } e = 2.718$$

Ahora puede utilizarse lo anterior y hacer que X sea el tiempo para el primer evento de Poisson. La probabilidad de que el período hasta que ocurre el primer evento de Poisson exceda x es la misma que la probabilidad de que no ocurra un evento de Poisson en x . Esto último por supuesto está dado por $\varepsilon^{-\lambda t}$. Como resultado:

$$p(X \geq x) = \varepsilon^{-\lambda x}$$

Entonces, la función de distribución acumulada para x es:

$$p(0 \leq X \leq x) = 1 - \varepsilon^{-\lambda x}$$

Ahora, con objeto de que se reconozca la presencia de la distribución exponencial, puede derivarse la distribución acumulada anterior para obtener la función de densidad:

$$p(x) = \lambda \varepsilon^{-\lambda x}$$

La cual es la función de densidad de la distribución exponencial con:

$$\lambda = \frac{1}{\beta}$$

Nótese que la media de la distribución exponencial es el parámetro β , el recíproco del parámetro en la distribución de Poisson. El lector debe recordar que con frecuencia se dice que la distribución de Poisson no tiene memoria, lo cual implica que las ocurrencias en períodos de tiempo sucesivos son independientes. Aquí el parámetro importante β es el tiempo promedio entre eventos. En teoría de la confiabilidad, donde la falla de un equipo concuerda con el proceso de Poisson, β recibe el nombre de tiempo promedio entre fallas. Muchas descomposturas de equipo siguen el proceso de Poisson, y entonces la distribución exponencial es aplicable.

En el siguiente ejemplo se muestra una aplicación simple de la distribución exponencial en un problema de confiabilidad. La distribución binomial también juega un papel importante en la solución.

Ejemplo 47. Suponga que un sistema contiene cierto tipo de componente cuyo tiempo de falla en años está dado por la variable aleatoria t , distribuida exponencialmente con tiempo promedio de falla $\beta = 5$. Si 5 de estos componentes se instalan en diferentes sistemas, ¿Cuál es la probabilidad de que al menos 2 continúen funcionando después de 8 años?

Solución.

La probabilidad de que un determinado componente esté funcionando aún después de 8 años es:

$$p(x) = \lambda e^{-\lambda x} = \frac{1}{\beta} e^{-\frac{x}{\beta}}$$

$$p(x) = \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{\beta} e^{-\frac{x}{\beta}} dx$$

Donde:

$$\beta = 5$$

$$\varepsilon = 2.718$$

$$t > 8$$

$$p(t > 8) = \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{\beta} e^{-\frac{t}{\beta}} dt = \frac{1}{\beta} \int_{t_1}^{t_2} e^{-\frac{t}{\beta}} dt = \frac{1}{5} \int_8^{\infty} e^{-\frac{t}{5}} dt = \frac{\varepsilon^{-\frac{t}{5}}}{5} \Big|_8^{\infty}$$

La $|$ nos indica que la integral se va a evaluar desde 8 hasta ∞ .

$$p(t > 8) = \frac{\varepsilon^{-\frac{\infty}{5}}}{5} - \frac{\varepsilon^{-\frac{8}{5}}}{5} = \frac{1}{5\varepsilon^{\infty}} - \frac{\varepsilon^{-\frac{8}{5}}}{5} = \frac{1}{5\varepsilon^{\infty}} - \frac{\varepsilon^{-\frac{8}{5}}}{5} = \frac{1}{5 \cdot \infty} - \frac{\varepsilon^{-\frac{8}{5}}}{5}$$

$$p(t > 8) = \frac{1}{\infty} - \frac{\varepsilon^{-\frac{8}{5}}}{5} = 0 - \frac{\varepsilon^{-\frac{8}{5}}}{5} = -\frac{\varepsilon^{-\frac{8}{5}}}{5}$$

La expresión para $p(t=8)$ es la misma que para $p(t>8)$ pero con signo invertido, esto es:

$$p(t = 8) = -\left(-\frac{\varepsilon^{-\frac{8}{5}}}{5}\right) = \frac{\varepsilon^{-\frac{8}{5}}}{5}$$

La expresión obtenida se refiere a 1 componente, pero el enunciado indica $n=5$ de estos componentes que se instalan en diferentes sistemas, por lo tanto:

$$p(t = 8) = (n) \binom{\varepsilon^{-\frac{8}{5}}}{5} = (5) \left[\frac{(2.718)^{-\frac{8}{5}}}{5} \right] = (2.718)^{-\frac{8}{5}} = 0.2019 \cong 0.2$$

Sea x el número de componentes funcionando después de 8 años. Entonces mediante la distribución binomial:

x = al menos 2 componentes continúen funcionando después de 8 años.

$x = 2, 3, 4, \dots$

$n = 5$ componentes instalados en diferentes sistemas.

$p = 0.20$ = probabilidad de que un componente esté funcionando después de 8 años.

$q = 1 - p = 0.80$ = probabilidad de que un componente no funcione después de 8 años.

$$p(x \geq 2, n=5, p=0.20) = p(x=2) + p(x=3) + p(x=4) + p(x=5) = 1 - p(x=0,1)$$

$$p(x \geq 2, n=5, p=0.20) = 1 - [p(x=0, n=5, p=0.20) + p(x=1, n=5, p=0.20)]$$

Donde:

$$p(x, n, p) = {}_n C_x p^x q^{n-x}$$

Por lo tanto:

$$p(x \geq 2, n = 5, p = 0.20) = 1 - [{}_5 C_0 (0.2)^0 (0.8)^{5-0} + {}_5 C_1 (0.2)^1 (0.8)^{5-1}]$$

$$p(x \geq 2, n = 5, p = 0.20) = 1 - [{}_5 C_0 (0.2)^0 (0.8)^5 + {}_5 C_1 (0.2)^1 (0.8)^4]$$

$$p(x \geq 2, n = 5, p = 0.20) = 1 - [(1)(1)(0.3277) + (5)(0.2)(0.4096)] = 1 - 0.7373 = 0.2627$$

Ejemplo 48. El tiempo que transcurre antes de que una persona sea atendida en una cafetería es una variable aleatoria que tiene una distribución exponencial con una media de 4 minutos. ¿Cuál es la probabilidad de que una persona sea atendida antes de que transcurran 3 minutos en al menos 4 de los 6 días siguientes?

Solución.

La probabilidad de que una persona sea atendida antes de que transcurran 3 minutos en al menos 4 de los 6 días siguientes es:

$$p(x) = \lambda \varepsilon^{-\lambda x} = \frac{1}{\beta} \varepsilon^{-\frac{x}{\beta}}$$

$$p(x) = \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{\beta} \varepsilon^{-\frac{x}{\beta}} dx$$

Donde:

$$\beta = 4$$

$$\varepsilon = 2.718$$

$$t \leq 3$$

$$p(t \leq 3) = \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{\beta} \varepsilon^{-\frac{t}{\beta}} dt = \frac{1}{\beta} \int_0^3 \varepsilon^{-\frac{t}{\beta}} dt = \frac{\varepsilon^{-\frac{t}{\beta}}}{-\frac{1}{\beta}} \Big|_0^3$$

La | nos indica que la integral se va a evaluar desde 0 hasta 3.

$$p(t \leq 3) = \frac{\varepsilon^{-\frac{3}{4}}}{-\frac{1}{4}} - \frac{\varepsilon^{-\frac{0}{4}}}{-\frac{1}{4}} = \frac{\varepsilon^{-\frac{3}{4}}}{4} - \frac{\varepsilon^{-\infty}}{4} = \frac{\varepsilon^{-\frac{3}{4}}}{4} - \frac{1}{4}$$

La expresión para $p(t=3)$ es la misma que para $p(t \leq 3)$ pero con signo invertido, esto es:

$$p(t = 3) = -\left(\frac{\varepsilon^{-\frac{3}{4}}}{4} - \frac{1}{4}\right) = -\frac{\varepsilon^{-\frac{3}{4}}}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} - \frac{\varepsilon^{-\frac{3}{4}}}{4}$$

La expresión obtenida se refiere a 1 día de al menos $n=4$ de los 6 días siguientes por lo tanto:

$$p(t = 3) = (n) \left(\frac{1}{4} - \frac{\varepsilon^{-\frac{3}{4}}}{4}\right) = (4) \left(\frac{1}{4} - \frac{\varepsilon^{-\frac{3}{4}}}{4}\right) = 1 - \varepsilon^{-\frac{3}{4}} = 1 - (2.718)^{-\frac{3}{4}} = 0.5276$$

Sea x el número de días en que un cliente es atendido antes de que transcurran 3 minutos.

Entonces mediante la distribución binomial:

x = número de días en que un cliente es atendido antes de que transcurran 3 minutos.

$\therefore x = 5$ o 6 días.

$n = 6$ días.

p = probabilidad de que un cliente sea atendido antes de que transcurran 3 minutos en un día cualquiera = 0.5276

q = probabilidad de que un cliente no sea atendido antes de que transcurran 3 minutos en un día cualquiera = $1 - p = 0.4724$

$$p(x = 5 \text{ o } 6, n = 6, p = 0.5276) = p(x = 5, n = 6, p = 0.5276) + p(x = 6, n = 6, p = 0.5276)$$

Donde:

$$p(x, n, p) = {}_n C_x p^x q^{n-x}$$

Por lo tanto:

$$p(x = 5 \text{ o } 6, n = 6, p = 0.5276) = {}_6 C_5 (0.5276)^5 (0.4724)^{6-5} + {}_6 C_6 (0.5276)^6 (0.4724)^{6-6}$$

$$p(x = 5 \text{ o } 6, n = 6, p = 0.5276) = (6)(0.04088)(0.4724) + (1)(0.02157)(1) = 0.1374$$

5.2.5 Distribución normal

En estadística y probabilidad se llama distribución normal, distribución de Gauss o distribución gaussiana, a una de las distribuciones de probabilidad de variable continua que con más frecuencia aparece aproximada en fenómenos reales.

La gráfica de su función de densidad tiene una forma acampanada y es simétrica respecto de un determinado parámetro estadístico. Esta curva se conoce como campana de Gauss y es el gráfico de una función gaussiana.

La importancia de esta distribución radica en que permite modelar numerosos fenómenos naturales, sociales y psicológicos. Mientras que los mecanismos que subyacen a gran parte de este tipo de fenómenos son desconocidos, por la enorme cantidad de variables incontrolables que en ellos intervienen, el uso del modelo normal puede justificarse asumiendo que cada observación se obtiene como la suma de unas pocas causas independientes.

De hecho, la estadística es un modelo matemático que sólo permite describir un fenómeno, sin explicación alguna. Para la explicación causal es preciso el diseño experimental, de ahí que al uso de la estadística en psicología y sociología sea conocido como método correlacional.

La distribución normal también es importante por su relación con la estimación por mínimos cuadrados, uno de los métodos de estimación más simples y antiguos.

Algunos ejemplos de variables asociadas a fenómenos naturales que siguen el modelo de la normal son:

- Caracteres morfológicos de individuos como la estatura;
- Caracteres fisiológicos como el efecto de un fármaco;
- Caracteres sociológicos como el consumo de cierto producto por un mismo grupo de individuos;
- Caracteres psicológicos como el cociente intelectual;
- Nivel de ruido en telecomunicaciones;
- Errores cometidos al medir ciertas magnitudes;
- etc.

La distribución normal también aparece en muchas áreas de la propia estadística. Por ejemplo, la distribución muestral de las medias muestrales es aproximadamente normal, cuando la distribución de la población de la cual se extrae la muestra no es normal. Además, la distribución normal maximiza la entropía entre todas las distribuciones con media y varianza conocidas, lo cual la convierte en la elección natural de la distribución subyacente a una lista de datos resumidos en términos de media muestral y varianza. La distribución normal es la más extendida en estadística y muchos test estadísticos están basados en una supuesta "*normalidad*".

En probabilidad, la distribución normal aparece como el límite de varias distribuciones de probabilidad continua y discreta.

Características

1. Es generada por una variable de tipo continuo, denominada X ; $-\infty < X < +\infty$.

2. La función que nos define esta distribución es:

$$f(x, \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \quad \text{siempre que } x \in R$$

Al dar a la función los valores de μ , σ y valores a x , obtendremos la distribución en cuestión, la que tiene forma de campana, por lo que también se le conoce como campana de Gauss. Hay un

número infinito de funciones de densidad normal, una para cada combinación de μ y σ . La media μ mide la ubicación de la distribución y la desviación estándar σ mide su dispersión.

3. Es simétrica con respecto a su eje vertical. Es decir, que es simétrica con respecto a su media μ . Según esto, para este tipo de variables existe una probabilidad de un 50% de observar mayor que la media, y un 50% de observar un dato menor.

4. Es asintótica con respecto a su eje horizontal; esto quiere decir que jamás va a tocar el eje de las x .

5. El área total bajo la curva es 1.

6. Sí sumamos a $\mu \pm \sigma$, se observará que aproximadamente el 68.26% de los datos se encuentran bajo la curva, si sumamos a $\mu \pm 2\sigma$, el 95.44% de los datos estará entre esos límites y si sumamos a $\mu \pm 3\sigma$, entonces el 99.74% de los datos caerá dentro de esos límites. Esta característica es a la vez una forma empírica y rápida de demostrar si los datos que se analizan tienen una distribución normal; ya que para trabajar los datos con esta distribución, debe verificarse que efectivamente así se distribuyen, ya que de no hacerlo, las decisiones que en un momento dado se tomarán de un análisis de los datos con la distribución normal, serían erróneas.

¿Cómo se determinan probabilidades con la distribución normal?

Lo más lógico es que la función $f(x, \mu, \sigma^2)$, se integre entre los límites de la variable x ; esto es:

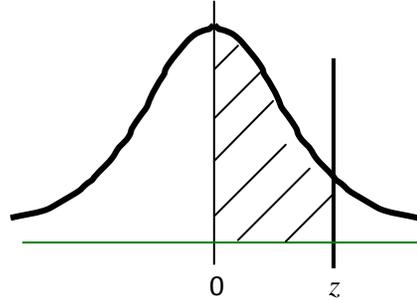
$$p(a \leq x \leq b) = \int_a^b f(x, \mu, \sigma^2) dx$$

La integral anterior nos daría el área bajo la curva de la función, desde a hasta b , que corresponde o es igual a la probabilidad buscada.

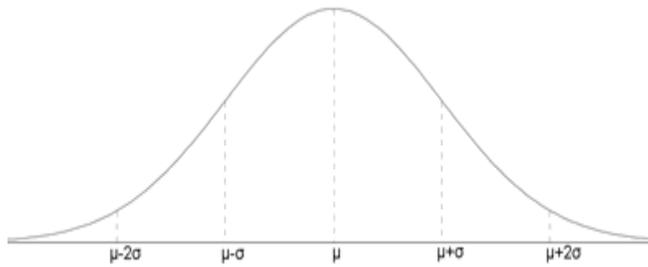
Debido a la dificultad que se presenta para integrar esta función cada vez que sea necesario, lo que se hace es tipificar el valor de la variable x , esto es, x se transforma en un valor de Z (variable aleatoria normal estándar), de la siguiente manera:

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma} = \text{valor}$$

Este valor de z es buscado en una tabla donde vienen áreas asociadas a este valor (Apéndice A, Tabla normal estándar: Áreas bajo la curva normal estándar) y haciendo uso de los valores tabulados, se determina la probabilidad requerida. La tabla que es usada para calcular las probabilidades es la que nos da el área que se muestra a continuación (0 a z):



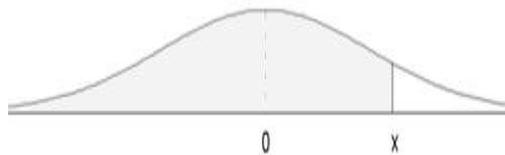
Una distribución normal de media μ y desviación típica σ se designa por $N(\mu, \sigma)$. Su gráfica es la campana de Gauss:



El área del recinto determinado por la función y el eje de abscisas es igual a la unidad.

Al ser simétrica respecto al eje que pasa por $x = \mu$, deja un área igual a 0.5 a la izquierda y otra igual a 0.5 a la derecha. La probabilidad equivale al área encerrada bajo la curva.

La distribución normal estándar, o tipificada o reducida, es aquella que tiene por media el valor cero, $\mu = 0$, y por desviación típica la unidad, $\sigma = 1$.



La probabilidad de la variable x dependerá del área del recinto sombreado en la figura y para calcularla utilizaremos la tabla ya mencionada.

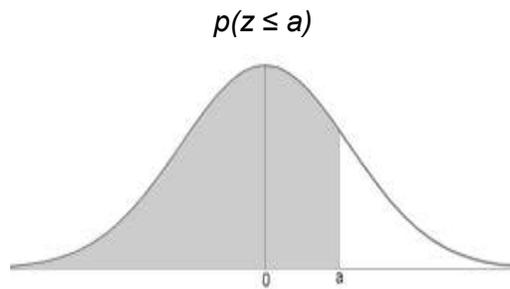
Calculo de probabilidades en distribuciones normales

La tabla nos da las probabilidades de $p(z \leq k)$, siendo z la variable tipificada. Estas probabilidades nos dan la función de distribución $\Phi(k)$.

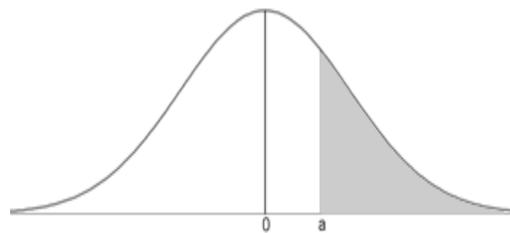
$$\Phi(k) = p(z \leq k)$$

Búsqueda en la tabla el valor de k

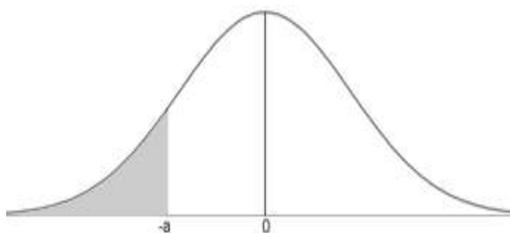
- Unidades y décimas en la columna de la izquierda.
- Centésimas en la fila de arriba.



$$p(z > a) = 1 - p(z \leq a)$$



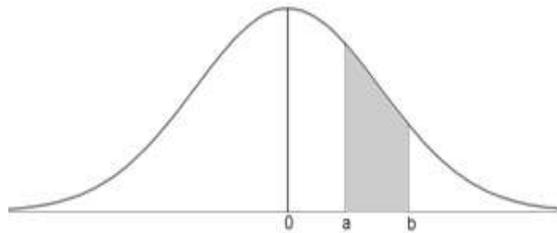
$$p(z \leq -a) = 1 - p(z \leq a)$$



$$p(z > -a) = p(z \leq a)$$

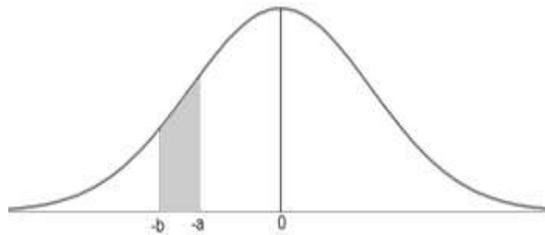


$$p(a < z \leq b) = p(z \leq b) - p(z \leq a)$$

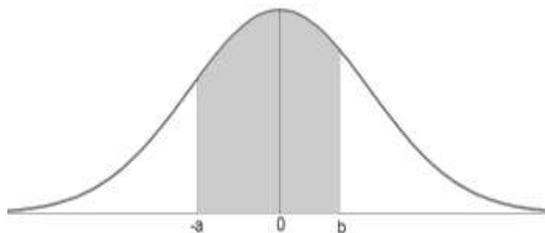


$$p(-b < z \leq -a) = p(a < z \leq b)$$

Nos encontramos con el caso inverso a los anteriores, conocemos el valor de la probabilidad y se trata de hallar el valor de la abscisa. Ahora tenemos que buscar en la tabla el valor que más se aproxime a k .



$$p(-a < z \leq b) = p(z \leq b) - [1 - p(z \leq a)]$$



$$p = k$$

Para calcular la variable x nos vamos a la fórmula de la tipificación.

Resumiendo

- $p(x < a) = 1 - p(z=k)$
- $p(x > a) = 1 - p(z=k)$
- $p(x < a) = 0.5 - p(z=k)$ para una escala de 0 a z .
- $p(x > a) = 0.5 - p(z=k)$ para una escala de 0 a z .
- $p(a \leq x \leq b) = p(z_2) - p(z_1)$

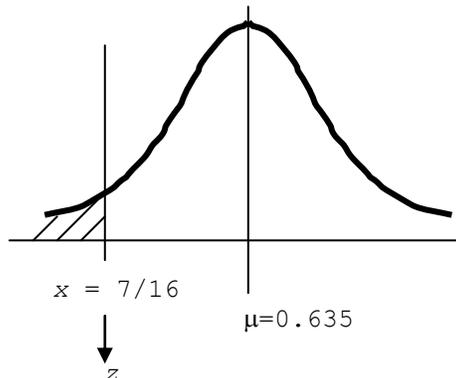
Ejemplo 49. El acero que se utiliza para tuberías de agua a menudo se recubre internamente con un mortero de cemento para evitar la corrosión. En un estudio de los recubrimientos de mortero de una tubería empleada en un proyecto de transmisión de agua en California (Transportation Engineering Journal, Noviembre de 1979) se especificó un espesor de $7/16$ pulgadas para el mortero. Un gran número de mediciones de espesor dieron una media de 0.635 pulgadas y una desviación estándar de 0.082 pulgadas. Si las mediciones de espesor, tenían una distribución normal, ¿qué porcentaje aproximado fue inferior a $7/16$ de pulgada?

Solución.

$x < 7/16$ " = variable que nos define el espesor del mortero en pulgadas (a = variable de decisión).

$$\mu = 0.635 \text{ pulgadas}$$

$$\sigma = 0.082 \text{ pulgadas}$$



$$z = \frac{x - \mu}{\sigma} = \frac{\frac{7}{16} - 0.635}{0.082} = -2.4085 \approx 2.41$$

Con este dato de z y con la escala del área de 0 a z en las tablas (Apéndice A, Tabla normal estándar: Áreas bajo la curva normal estándar), obtenemos el valor de k :

$$k = p(z=2.41) \text{ y (escala del área de 0 a } z) = 0.492$$

De donde:

$$p(x < a) = 0.5 - p(z=k)$$

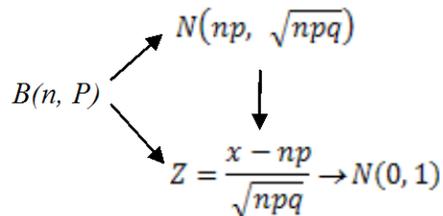
Por lo tanto:

$$p(x < 7/16 \text{ pulgadas}) = 0.5 - [p(z=2.41) \text{ para una escala de 0 a } z] = 0.5 - 0.492 = 0.008$$

Por tanto, $0.008 \times 100\% = 0.8\%$ de los recubrimientos de mortero tienen un espesor menor de 7/16 pulgadas.

5.2.6 Aproximación de la binomial a la normal

Cuando n es muy grande, la distribución binomial resulta laboriosa y complicada, por lo que el matemático Abraham de Moivre (1667-1754) demostró que cuando se dan ciertas condiciones una distribución binomial se puede aproximar a una distribución normal de media $\mu=np$ y desviación típica $\sigma = \sqrt{npq}$. Esto es $B(n, p) \cong N(np, \sqrt{npq})$.



En este caso se estarán calculando probabilidades de experimentos binomiales de una forma muy aproximada con la distribución normal, esto puede llevarse a cabo si $n \rightarrow \infty$ y $p=p(\text{éxito})$ no es muy cercana a 0 y 1, o cuando n es pequeño y p tiene un valor muy cercano a $\frac{1}{2}$; esto es:

$$p(x, n, p) = {}_n C_x p^x q^{n-x} \cong p \left(z = \frac{x - np}{\sqrt{npq}} \right)$$

Donde:

x = variable de tipo discreto, solo toma valores enteros.

$\mu = np$ = media de la distribución binomial.

$\sigma = \sqrt{npq}$ = desviación estándar de la distribución binomial.

Cuando ocurren las condiciones anteriores, la gráfica de la distribución binomial, es muy parecida a la distribución normal, por lo que es adecuado calcular probabilidades con la normal en lugar de con la binomial y de una forma más rápida.

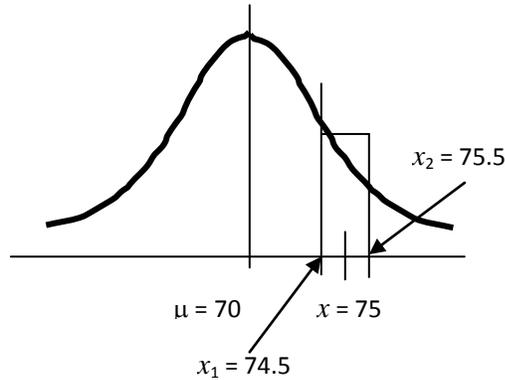
En resumen, se utiliza la aproximación normal para evaluar probabilidades binomiales siempre que P no esté cercano a 0 o 1. La aproximación es excelente cuando n es grande y bastante buena para valores pequeños de n si P está razonablemente cercana a $\frac{1}{2}$. Una posible guía para determinar cuando puede utilizarse la aproximación normal es tener en cuenta el cálculo de np y nq . Si ambos, np y nq son mayores o iguales a 5, la aproximación será buena.

Antes de empezar a resolver problemas con la aproximación normal, es bueno aclarar que se están evaluando probabilidades asociadas a una variable discreta x , con una distribución que evalúa variables de tipo continuo como es la normal, por lo que z sufre un pequeño cambio como se muestra a continuación:

$$z = \frac{\left(x \pm \frac{1}{2}\right) - \mu}{\sigma}$$

Nota: Recordar que z se localiza en las tablas del Apéndice A, Tabla normal estándar en la escala de (0 a z).

¿Por qué vamos a sumar o a restar $\frac{1}{2}$ a x ? Este es un factor de corrección debido a que se está evaluando una variable discreta con una distribución continua, por lo que hay que delimitar claramente desde que punto se va a evaluar la variable, dicho de otra forma, en que límite de la barra (inferior o superior) nos debemos posicionar para determinar la probabilidad requerida, cada barra de probabilidad a evaluar tiene como base la unidad, ese es el porqué del $\pm \frac{1}{2}$.



Entonces:

$p(x < a) = 1 + p(z=k)$ y $p(x > a) = 1 + p(z=k)$ para el limite inferior de la barra.

$p(x < a) = 1 - p(z=k)$ y $p(x > a) = 1 - p(z=k)$ para el limite superior de la barra.

$p(x < a) = 0.5 + p(z=k)$ y $p(x > a) = 0.5 + p(z=k)$ para el limite inferior de la barra.

$p(a \leq x \leq b) = p(z_2) - p(z_1)$ para ambos limites.

Ejemplo 50. La probabilidad de que un paciente se recupere de una rara enfermedad de la sangre es del 40%. Si se sabe que 100 personas han contraído esta enfermedad, ¿Cuál es la probabilidad de que?

- ¿Al menos 30 sobrevivan?
- ¿Más de 46 sobrevivan?
- ¿Menos de 50 no sobrevivan?

Solución.

a) *Probabilidad de que al menos 30 pacientes sobrevivan.*

$$n = 100$$

$$p = p(\text{paciente se recupere}) = 0.40$$

$$q = p(\text{paciente no se recupere}) = 1 - p = 1 - 0.40 = 0.60$$

$$\mu = np = (100)(0.40) = 40 \text{ pacientes se recuperen.}$$

$$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{(100)(0.4)(0.6)} = 4.899 = \text{pacientes que se recuperan.}$$

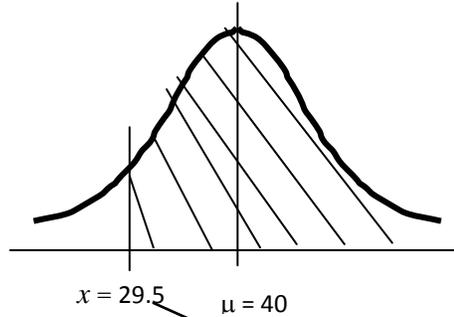
x = variable que nos define el número de pacientes que se recuperan.

$x \geq 30$ pacientes que se recuperan.

$$z = \frac{\left(x \pm \frac{1}{2}\right) - \mu}{\sigma}$$

Nos debemos posicionar en el límite inferior de la barra para determinar la probabilidad de que al menos 30 pacientes sobrevivan, esto es:

$$\text{lim. Inf.}(29.5) - x(30) - \text{lim. Sup.}(30.5)$$



$$z = \frac{\left(x - \frac{1}{2}\right) - \mu}{\sigma} = \frac{\left(30 - \frac{1}{2}\right) - 40}{4.899} = \frac{29.5 - 40}{4.899} = -2.1433 \cong -2.14$$

$$p(z = -2.14) = 0.4838 \text{ (de tablas para una escala de 0 a z)}$$

Como se esta tomando el límite inferior de la barra:

$$p(x > a) = 0.5 + p(z=k)$$

$$p(x \geq 30) = 0.5 + p(z = -2.14) = 0.5 + 0.4838 = 0.9838$$

Por tanto, $0.9838 \times 100\% = 98.38\%$ de que al menos 30 pacientes sobrevivan.

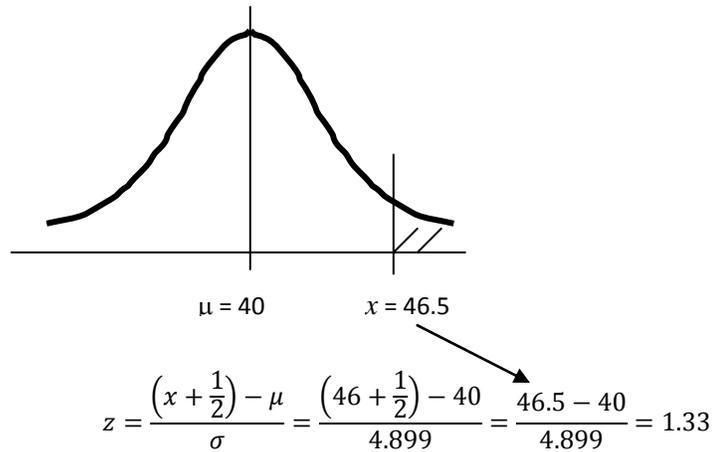
b) Probabilidad de que más de 46 pacientes se recuperen.

$x > 46$ pacientes que se recuperan.

$$z = \frac{\left(x \pm \frac{1}{2}\right) - \mu}{\sigma}$$

Nos debemos posicionar en el límite superior de la barra para determinar la probabilidad de que más de 46 pacientes se recuperen, esto es:

$$\text{lim. Inf.}(45.5) - x(46) - \text{lim. Sup.}(46.5)$$



$$p(z = 1.33) = 0.4082 \text{ (de tablas para una escala de 0 a z)}$$

Como se esta tomando el límite superior de la barra:

$$p(x > a) = 0.5 - p(z=k)$$

$$p(x > 46) = 0.5 - p(z = 1.33) = 0.5 - 0.4082 = 0.0918$$

Por tanto, $0.0918 \times 100\% = 9.18\%$ de que más de 46 pacientes se recuperen.

c) Probabilidad de que menos de 50 no sobrevivan.

$$n = 100$$

$$p = p(\text{paciente no sobreviva}) = 0.60$$

$$q = p(\text{paciente sobreviva}) = 1 - p = 0.40$$

$$\mu = np = (100)(0.60) = 60 \text{ pacientes que no se recuperan.}$$

$$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{(100)(0.6)(0.4)} = 0.4899 = \text{pacientes que no se recuperan.}$$

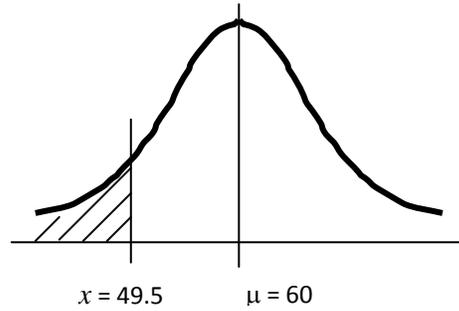
x = variable que nos define el número de pacientes que no sobreviven.

$\therefore x < 50$ pacientes que no sobreviven.

$$z = \frac{\left(x \pm \frac{1}{2}\right) - \mu}{\sigma}$$

Nos debemos posicionar en el límite inferior de la barra para determinar la probabilidad de que menos de 50 pacientes no sobrevivan:

$$\text{lim. Inf.}(49.5) - x(50) - \text{lim. Sup.}(50.5)$$



$$z = \frac{\left(x - \frac{1}{2}\right) - \mu}{\sigma} = \frac{\left(50 - \frac{1}{2}\right) - 60}{4.899} = \frac{49.5 - 60}{4.899} = -2.14$$

$$p(z = -2.14) = 0.4838 \text{ (de tablas para una escala de 0 a z)}$$

Como se esta tomando el límite inferior de la barra:

$$p(x < a) = 0.5 + p(z=k)$$

$$p(x < 50) = 0.5 + p(z = -2.14) = 0.5 + 0.4838 = 0.9838$$

Por tanto, $0.9838 \times 100\% = 98.38\%$ de que menos de 50 pacientes no sobreviven.

5.2.7 Teorema de Chébyshev

Para demostrar cómo la desviación estándar es indicadora de la dispersión de la distribución de una variable aleatoria, el matemático ruso Pafnuty Lvovich Chébyshev desarrolló un teorema en el que ofrece una garantía mínima acerca de la probabilidad de que una variable aleatoria asuma un valor dentro de k desviaciones estándar alrededor de la media.

Para cualquier variable aleatoria x con media μ y desviación estándar σ , la probabilidad de que x tome un valor contenido en k desviaciones estándar de la media, siendo k una constante positiva cualquiera, es cuando menos $1 - \frac{1}{k^2}$.

Simbólicamente, el teorema se expresa de cualquiera de las siguientes maneras:

$$p(|x - \mu| \leq k\sigma) \geq \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) \quad \text{o} \quad p(|x - \mu| > k\sigma) \leq \frac{1}{k^2}$$

La desigualdad de Chébyshv es muy importante, ya que permite determinar los límites de las probabilidades de variables aleatorias discretas o continuas sin tener que especificar sus funciones de probabilidad. Este teorema asegura que la probabilidad de que una variable aleatoria se aleje de la media no más de k desviaciones estándar, es menor o igual a $\frac{1}{k^2}$ para algún valor de $k > 1$.

Aunque la garantía no siempre es muy precisa, la ventaja sobre este teorema es su gran generalidad por cuanto es aplicable a cualquier variable aleatoria con cualquier distribución de probabilidad, ya sea discreta o continua.

En términos generales, el teorema de Chébyshv establece:

Para un grupo de observaciones (muestra o población), la proporción mínima de valores que caen dentro de un intervalo formado por la media $\pm k$ desviaciones estándar es por lo menos $1 - \frac{1}{k^2}$, donde k es una constante más grande que 1.

$$p(\mu - k\sigma < x < \mu + k\sigma) \geq \left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$$

Basados en el Teorema de Chébyshv, por lo menos tres de cada 4 valores, podrían caer en el intervalo comprendido entre la media más dos desviaciones estándar y la media menos dos desviaciones estándar.

$$p(\mu - k\sigma < x < \mu + k\sigma) \geq \left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$$

$$p(\mu - 2\sigma < x < \mu + 2\sigma) \geq \left(1 - \frac{1}{2^2}\right)$$

$$p(\mu - 2\sigma < x < \mu + 2\sigma) \geq \left(1 - \frac{1}{4}\right)$$

$$p(\mu - 2\sigma < x < \mu + 2\sigma) \geq 0.75$$

Ejemplo 51. El número de licencias de conducción expedidas en una ciudad durante el mes de junio puede considerarse como una variable aleatoria cuya distribución de probabilidad se desconoce, pero se estima que su media sea aproximadamente $\mu = 124$ y su desviación estándar

$\sigma = 7.5$. Según el teorema de Chébyshev, ¿con qué probabilidad se puede afirmar que se expedirán entre 64 y 184 licencias de conducción en esa ciudad durante el mes de Junio? Para dar solución a este problema se debe conocer cuál es ese valor de k . Para ello se parte de la definición de una desigualdad menor que de un valor absoluto:

$$p(-k\sigma \leq x - \mu \leq k\sigma) \geq \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) \Leftrightarrow p[(-k\sigma + \mu) \leq x \leq (k\sigma + \mu)] \geq \left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$$

Tomando el factor de la izquierda, se tiene:

$$p[(-k\sigma + \mu) \leq x \leq (k\sigma + \mu)] \geq \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) \Leftrightarrow p(64 \leq x \leq 184)$$

Esto quiere decir que: $-k\sigma + \mu = 64$ o bien $k\sigma + \mu = 184$. Al despejar k de cualquiera de ellas se tiene:

$$k = \frac{\mu - 64}{\sigma} = \frac{124 - 64}{7.5} = 8$$

De manera que la desigualdad de Chébyshev queda planteada:

$$p(64 \leq x \leq 184) \geq 1 - \frac{1}{8^2} \Leftrightarrow p(64 \leq x \leq 184) \geq 0.9844$$

De modo que se puede afirmar que se expedirán entre 64 y 184 licencias de conducción en esa ciudad durante el mes de junio con una probabilidad del 98,44%.

5.3 Diseño de experimentos de un factor

Suponga que en un experimento industrial un ingeniero está interesado en cómo la absorción media de humedad en concreto varía entre cinco mezclas diferentes de concreto. Las muestras se exponen a la humedad por 48 horas y se decide que se prueben seis muestras para cada mezcla, por lo que se requiere probar un total de 30 muestras. Los datos de este experimento se muestran en la siguiente tabla.

Tabla 1. Absorción de humedad en mezclas de concreto.

Mezcla		1	2	3	4	5	
Observaciones	1	551.00	595.00	639.00	417.00	563.00	
	2	457.00	580.00	615.00	449.00	631.00	
	3	450.00	508.00	511.00	517.00	522.00	
	4	731.00	583.00	573.00	438.00	613.00	
	5	499.00	633.00	648.00	415.00	656.00	
	6	632.00	517.00	677.00	555.00	679.00	
Total		3320.00	3416.00	3663.00	2791.00	3664.00	16854.00
Media		553.33	569.33	610.50	465.17	610.67	561.80

El modelo para esta estimación se puede considerar como sigue. Hay 6 observaciones que se toman, cada una de las cinco poblaciones con medias $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_5$ que también se toman respectivamente y deseamos probar que la hipótesis inicial es:

$$H_0: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = \mu_5$$

y que,

$$H_1: \text{al menos dos de las medias no son iguales.}$$

Además, nos podemos interesar en realizar comparaciones individuales entre estas cinco medias poblacionales.

En el procedimiento de análisis de varianza, se supone que cualquier variación que exista entre los promedios de las mezclas se atribuye a:

- 1) La variación en la absorción entre las observaciones dentro de los tipos de mezclas.
- 2) La variación que se debe a los tipos de mezclas; las que se deben a diferencias en la composición química de las mezclas.

Las variaciones dentro de la muestra, por supuesto, son ocasionadas por diversas causas. Quizá las condiciones de humedad y temperatura no se conservaron completamente constantes a lo largo del experimento. Es posible que haya cierta cantidad de heterogeneidad en los lotes de materia prima que se utilizan. De todos modos, consideraremos que la variación dentro de la muestra es una variación aleatoria o al azar, y parte del objetivo del análisis de varianza es determinar si las diferencias entre las cinco medias muestrales son las que se esperarían debido sólo a la variación aleatoria o si en realidad también hay una contribución de la variación sistemática que se atribuye al tipo de mezcla.

5.3.1 Diseño completamente aleatorizado

Se seleccionan muestras aleatorias de tamaño n de cada una de las k poblaciones. Las k poblaciones diferentes se clasifican sobre la base de un solo criterio, como tratamientos o grupos diferentes. Se supone que las k poblaciones son diferentes y normalmente distribuidas con medias $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k$ y varianza común s^2 .

Deseamos derivar métodos apropiados para probar la hipótesis:

$$H_0: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = \mu_5$$

H_1 : al menos dos de las medias no son iguales.

Denotemos a y_{ij} como la j -ésima observación del i -ésimo tratamiento y acomodemos los datos de acuerdo con la siguiente tabla:

<i>tratamiento</i>	1	2	...	i	...	k	
	y_{11}	y_{21}	...	y_{i1}	...	y_{k1}	
	y_{12}	y_{22}	...	y_{i2}	...	y_{k2}	
	\vdots	\vdots		\vdots		\vdots	
	y_{1n}	y_{2n}	...	y_{in}	...	y_{kn}	
<i>Total</i>	T_1	T_2	...	T_i	...	T_k	$T_{..}$
<i>Media</i>	\bar{y}_1	\bar{y}_2	...	\bar{y}_i	...	\bar{y}_k	$\bar{y}_{..}$

Aquí T_i es el total de todas las observaciones del i -ésimo tratamiento, \bar{y}_i es la media de todas las observaciones del i -ésimo tratamiento, $T_{..}$ es el total de las k_n observaciones y $\bar{y}_{..}$ es la media de todas las observaciones. Cada observación se puede escribir en la forma:

$$y_{ij} = \mu_i + \varepsilon_{ij}$$

Donde ε_{ij} mide la desviación de la j -ésima observación de la i -ésima muestra de la correspondiente media del tratamiento. El término ε_{ij} representa el error aleatorio y juega el mismo papel que los términos de error en los modelos de regresión. Una forma alternativa de esta misma ecuación y que se prefiere se obtiene al sustituir:

$$\mu_i = \mu + \alpha_i$$

Sujeta a la restricción $\sum_{i=1}^k \alpha_i = 0$, de aquí podemos escribir:

$$y_{ij} = \mu + \alpha_i + \varepsilon_{ij}$$

Donde μ es la media general de todas las observaciones es decir:

$$\mu = \frac{\sum_{i=1}^k \mu_i}{k}$$

Y α_i se denomina el efecto de i -ésimo tratamiento.

La hipótesis nula de que las k medias poblacionales son iguales contra la alternativa de que al menos dos de las medias son diferentes se puede reemplazar ahora por la hipótesis equivalente,

$$H_0: \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k = 0$$

H_1 : al menos una es diferente de cero.

Nuestra prueba se basará en una comparación de dos estimaciones independientes de la varianza poblacional común s^2 . Estas estimaciones se obtendrán al dividir la variabilidad total de nuestros datos, que se presentan en la doble sumatoria en dos componentes.

$$\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n (y_{ij} - \bar{y}_{..})^2$$

$$\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n (y_{ij} - \bar{y}_{..})^2 = n \sum_{i=1}^k (\bar{y}_i - \bar{y}_{..})^2 + \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n (y_{ij} - \bar{y}_i)^2$$

Esta ecuación es llamada la Identidad de la suma de cuadrados, para la prueba.

Será conveniente en lo que sigue identificar los términos de la identidad de suma de cuadrados mediante la siguiente notación.

$$SST = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n (y_{ij} - \bar{y}_{..})^2$$

$$SSA = n \sum_{i=1}^k (\bar{y}_i - \bar{y}_{..})^2$$

$$SSE = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n (y_{ij} - \bar{y}_i)^2$$

Donde:

SST = Suma total de cuadrados.

SSA = Suma de cuadrados de tratamiento.

SSE = Suma de cuadrados de error.

La identidad de la suma de cuadrados se puede presentar de manera simbólica con la ecuación.

$$SST = SSA + SSE$$

5.3.2 Formulas para el cálculo de sumas de cuadrados (SS: “Sum of Squares”)

A continuación se indica un conjunto de formulas mas simples para calcular la suma de cuadrados.

$$SST = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n y_{ij}^2 - \frac{(\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n y_{ij})^2}{nk}$$

$$SSA = n \sum_{i=1}^k (\bar{y}_i)^2 - \frac{(\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n y_{ij})^2}{nk}$$

$$SSE = SST - SSA$$

El valor esperado de SSA es:

$$E(SSA) = (k - 1)\sigma^2 + n \sum_{i=1}^k \alpha_i^2$$

Si H_0 es verdadera, una estimación de s , que se basa en $k-1$ grados de libertad, la proporciona la expresión:

$$s = \frac{SSA}{k - 1}$$

La cual se denomina cuadrado medio del tratamiento.

Un segundo e independiente estimados de s^2 , que se basa en $k(n-1)$ grados de libertad, es la formula:

$$s^2 = \frac{SSE}{k(n - 1)}$$

La cual se denomina cuadrado del error.

Cuando H_0 es verdadero, la razón $f = \frac{s}{s^2}$ es un valor de la variable aleatoria f con $k-1$ y $k(n-1)$ grados de libertad. Como s sobrestima s^2 cuando H_0 es falsa, tenemos una prueba de una sola cola con la región crítica completamente en la cola derecha de la distribución.

La hipótesis nula H_0 se rechaza en el nivel de significancia α cuando:

$$f_{calculada} > f_{\alpha}[(k-1), k(n-1)]$$

Esto es:

Análisis de variancia para probar: $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = \mu_5$				
Fuente de variación	Suma de cuadrados	Grados de libertad	Cuadrado medio	f calculada
Regresión	SSA	$k-1$	$s = SSA/(k-1)$	s/s^2
Error	SSE	$k(n-1)$	$s^2 = SSE/[k*(n-1)]$	
Total	SST	$nk-1$		
Rechazamos H_0 , al nivel de significancia cuando: $f_{calculada} > f_{\alpha}[(k-1), k(n-1)]$				

Análisis que también es conocido como *Tabla ANOVA*.

5.3.3 Diseño complementario al azar y ANOVA (ANalysis Of VAriance)

En estadística, el análisis de la varianza (ANOVA, **AN**alysis **Of** **VA**riance, según terminología inglesa) es una colección de modelos estadísticos y sus procedimientos asociados, en el cual la varianza está particionada en ciertos componentes debidos a diferentes variables explicativas.

Las técnicas iniciales del análisis de varianza fueron desarrolladas por el estadístico y genetista R. A. Fisher en los años 1920 y 1930 y es algunas veces conocido como "*Anova de Fisher*" o "*Análisis de varianza de Fisher*", debido al uso de la distribución *F de Fisher* como parte del contraste de hipótesis.

El análisis de la varianza parte de los conceptos de regresión lineal.

Supuestos previos.

El ANOVA parte de algunos supuestos que han de cumplirse:

- La variable dependiente debe medirse al menos a nivel de intervalo.
- Independencia de las observaciones.
- La distribución de los residuales debe ser normal.
- Homocedasticidad: Homogeneidad de varianzas.

La técnica fundamental consiste en la separación de la suma de cuadrados (SS =Sum of Squares) en componentes relativos a los factores contemplados en el modelo. Como ejemplo, mostramos el modelo para un ANOVA simplificado con un tipo de factores en diferentes niveles. (Si los niveles son cuantitativos y los efectos son lineales, puede resultar apropiado un análisis de regresión lineal).

Ejemplo 52. Suponga que en un experimento industrial, un ingeniero está interesado en cómo la absorción media de humedad de un concreto varía entre cinco mezclas diferentes. Las muestras se exponen a la humedad por 48 horas y se decide que se prueben seis muestras para cada mezcla, por lo que se requiere probar un total de 30 muestras. Los datos de este experimento se muestran en la siguiente tabla.

Absorción de humedad en mezclas de concreto

Mezcla	1	2	3	4	5
1	551	595	639	417	563
2	457	580	615	449	631
3	450	508	511	517	522
4	731	583	573	438	613
5	499	633	648	415	656
6	632	517	677	555	679

Para los datos de la anterior tabla, realizar el análisis de varianza (ANOVA). Considerar un nivel de significancia (α) = 0.01.

Solución:

Verificar parámetros a calcular con las formulas propias de este método.

$$SST = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n y_{ij}^2 - \frac{(\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n y_{ij})^2}{nk}$$

$$SSA = n \sum_{i=1}^k (\bar{y}_i)^2 - \frac{(\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n y_{ij})^2}{nk}$$

y =		Tratam.	1	2	3	4	5
Observaciones	1	551	595	639	417	563	
	2	457	580	615	449	631	
	3	450	508	511	517	522	
	4	731	583	573	438	613	
	5	499	633	648	415	656	
	6	632	517	677	555	679	
	Total	3320.00	3416.00	3663.00	2791.00	3664.00	16854.00
	Media	553.33	569.33	610.50	465.17	610.67	
	Media²	306177.78	324140.44	372710.25	216380.03	372913.78	1592322.28

$y^2 =$		Tratam.	1	2	3	4	5	
Observaciones	1		303601	354025	408321	173889	316969	
	2		208849	336400	378225	201601	398161	
	3		202500	258064	261121	267289	272484	
	4		534361	339889	328329	191844	375769	
	5		249001	400689	419904	172225	430336	
	6		399424	267289	458329	308025	461041	
Total			1897736	1956356	2254229	1314873	2254760	9677954

Tabla ANOVA

Análisis de variancia para probar: $\mu_1=\mu_2=\mu_3=\mu_4=\mu_5$				
Fuente de variación	Suma de cuadrados	Grados de libertad	Cuadrado medio	f calculada
Regresión	SSA	$k-1$	$s=SSA/(k-1)$	s/s^2
Error	SSE	$k(n-1)$	$s^2=SSE/(k(n-1))$	
Total	SST	$nk-1$		
Rechazamos H_0 , al nivel de significancia cuando: $f \text{ calculada} > f_{\alpha}[(k-1), k(n-1)]$				

Donde:

n = Numero de observaciones = 6

k = Numero de tratamientos = 5

$$\sum \sum y_{ij}^2 = 9677954$$

$$\sum \sum y_{ij} = 16854$$

$$\sum (\bar{Y}_i)^2 = 1592322.28$$

Por Lo tanto:

Tabla ANOVA

Análisis de variancia para probar: $\mu_1=\mu_2=\mu_3=\mu_4=\mu_5$				
Fuente de variación	Suma de cuadrados	Grados de libertad	Cuadrado medio	f calculada
Regresión	85356.47	4	21339.117	4.30
Error	124020.33	25	4960.81	
Total	209376.80	29		
Rechazamos H_0 , al nivel de significancia cuando: $f \text{ calculada} > f_{\alpha}[(k-1), k(n-1)]$				

fa se obtiene de la tabla 5: VALORES F DE LA DISTRIBUCIÓN F DE FISHER (Apéndice B de estas notas).

Con $(1-\alpha)$ y las coordenadas $[(k-1), k(n-1)]$ se obtiene fa. Esto es:

$$\left. \begin{aligned} 1 - \alpha &= 1 - 0.01 = \mathbf{0.99} \\ v_1 &= k - 1 = 5 - 1 = \mathbf{4} \\ v_2 &= k(n-1) = 5(6-1) = \mathbf{25} \end{aligned} \right\} \quad f_a = 4.177$$

Como $4.30 > 4.177$ rechazamos la hipótesis nula dado que f calc es mayor que fa.

Cuando rechazamos la hipótesis nula se considera que la prueba es potente, si aceptáramos la hipótesis nula el criterio de decisión es débil, ya que generalmente se busca rechazar H_0 .

RESOLVIENDO EL MISMO EJEMPLO CON HERRAMIENTAS DE ANALISIS DE EXCEL

Es posible que en algunas versiones de Excel no estén habilitadas las *PRUEBAS DE HIPOTESIS*, para tal efecto verifica lo siguiente:

- 1.- Accesa **Datos** en tu barra de herramientas, si aparece la opción **Análisis de datos**, dirígete al paso 3.
- 2.- Si no aparece la opción **Análisis de datos**, hacer lo siguiente para activarlo:
 - a. Ir a **Archivo** y seleccionar **Opciones de Excel**,
 - b. Del panel de la izquierda dar clic en **Complementos**.
 - c. Del panel de la derecha seleccionar **Herramientas para análisis**.
 - d. Dar clic en el botón **Ir** de la parte inferior.
 - e. Si tu Excel es el apropiado con esto basta, si no, te aparecerá un recuadro titulado **Complementos**, selecciona la opción **Herramientas de análisis** y haz clic en **aceptar**, la activación tarda algunos segundos (minutos en algunos casos, pero te monitorea la descarga).
- 3.- **Análisis de datos** → **Análisis de varianzas de un factor** → **Aceptar** → **Rango de entrada** (Introducir datos) → **Rango de salida** (Indica la celda donde deseas que te ponga la tabla ANOVA) → **Aceptar**.

Mezcla	1	2	3	4	5
	Absorcion media de humedad				
1	551	595	639	417	563
2	457	580	615	449	631
3	450	508	511	517	522
4	731	583	573	438	613
5	499	633	648	415	656
6	632	517	677	555	679

Una vez efectuado el paso 3, te aparecerán dos tablas con el siguiente aspecto:

Análisis de varianza de un factor

RESUMEN

Grupos	Cuenta	Suma	Promedio	Varianza
Columna 1	6	3320	553.333333	12133.8667
Columna 2	6	3416	569.333333	2302.66667
Columna 3	6	3663	610.5	3593.5
Columna 4	6	2791	465.166667	3318.56667
Columna 5	6	3664	610.666667	3455.46667

ANÁLISIS DE VARIANZA

Origen de las variaciones	Suma de cuadrados	Grados de libertad	Promedio de los cuadrados	F	Probabilidad	Valor crítico para F
Entre grupos	85356.4667	4	21339.1167	4.3015359	0.00875164	4.17742023
Dentro de los grupos	124020.333	25	4960.81333			
Total	209376.8	29				

Como $4.3015359 > 4.17742023$ rechazamos la hipótesis nula dado que f_{calc} es mayor que f_{fa} .

CÓDIGO EN MATLAB PARA ESTE EJEMPLO

```
function z = MiAnova(y)
```

```
n = length(y(:,1));
```

```

k = length(y(1,:));

Suma2 = 0;
Suma = 0;

for ren = 1:n
for col = 1:k
Suma2 = Suma2 + y(ren, col)^2;
    Suma = Suma + y(ren, col);

end;
end;

SST = Suma2 - Suma^2/n/k;
SSA = n*sum(mean(y).^2) - Suma^2/n/k;
SSE = SST - SSA;

v1 = k-1;
v2 = k*(n-1);

s1 = SSA/v1;
s2 = SSE/v2;

F = s1/s2;
alfa = 0.01;

Fc = Finv(1-alfa, v1, v2);

fprintf('-----\n');
fprintf('Análisis de Varianza\n');
fprintf('-----\n');
fprintf('Fuente de Suma Grados de Cuadrado F calc\n');
fprintf('Variación cuadrados Libertad medio \n');
fprintf('-----\n');
fprintf('Regresión %13.2f %13.f %13.2f %13.2f\n', SSA, v1, s1, F);
fprintf('Error %13.2f %13.f %13.2f \n', SSE, v2, s2);
fprintf('Total %13.2f %13.f \n', SST, v1+v2);
fprintf('-----\n');
fprintf('Con (1-alfa) = %5.3f tenemos %13.2f > %13.2f\n', 1-alfa, F, Fc);

z = F;

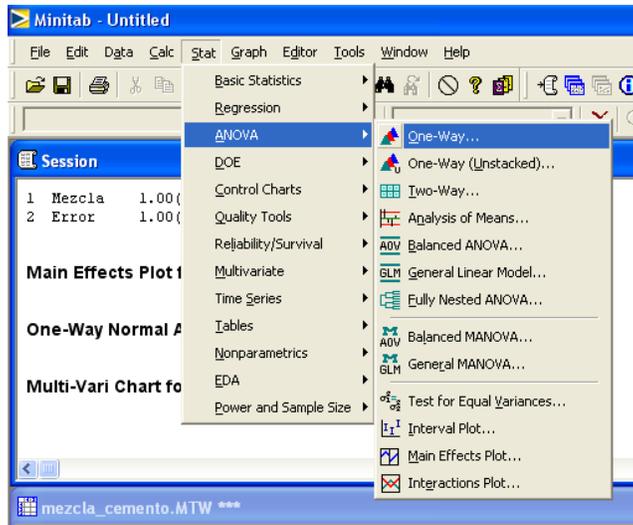
```

Esta implementación se puede realizar con el comando `anova1` de MATLAB y para este ejemplo los resultados son:

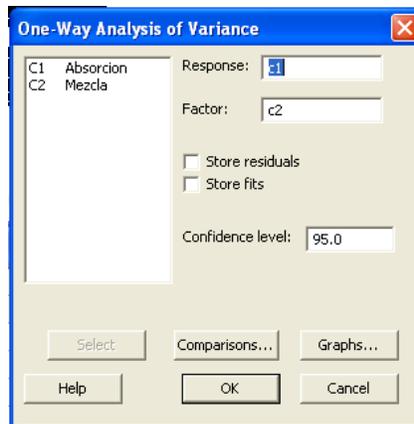
ANOVA Table				
Source	SS	df	M S	F
Columns	8.536e+004	4	2.134e+004	4.302
Error	1.24e+005	25	4691	
Total	2.094e+005	29		

PROCEDIMIENTO UTILIZANDO MINITAB PARA ESTE EJEMPLO

Una vez introducidos los datos en la hoja de trabajo ir al menú Stat > ANOVA > One-Way...



Después aparecerá la caja de diálogo

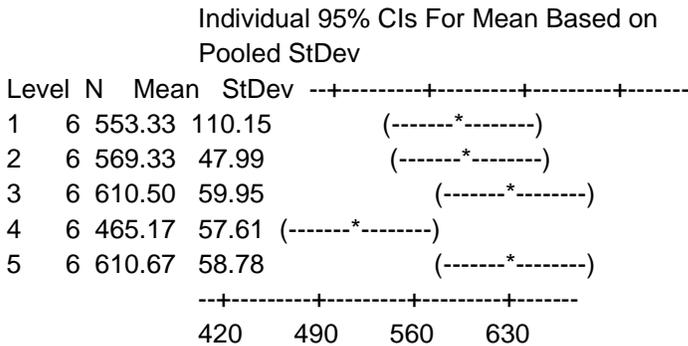


La solución utilizando MINITAB será entonces:

One-way ANOVA: Absorcion versus Mezcla

Source	DF	SS	MS	F	P
Mezcla	4	85356	21339	4.30	0.009
Error	25	124020	4961		
Total	29	209377			

S = 70.43 R-Sq = 40.77% R-Sq(adj) = 31.29%



Pooled StDev = 70.43

Para el valor P podemos ver que es menor que el nivel de significancia por lo tal la hipótesis debe ser rechazada y tenemos medias diferentes.

5.3.4 Pruebas de igualdad de varianzas

Aunque la razón *f* que se obtiene del procedimiento de análisis de varianza es insensible a desviaciones de la suposición de varianzas iguales para las *k* poblaciones normales cuando las muestras son de tamaño igual, aún podemos preferir tener precaución y realizar una prueba preliminar para la homogeneidad de varianzas. Tal prueba en realidad sería aconsejable en el caso de tamaños de muestras diferentes, donde si hay una duda razonable, con respecto a la homogeneidad de la varianzas poblacionales. Suponga, por tanto, que deseamos probar la hipótesis nula:

$$H_0: S^2_1 = S^2_2 = \dots = S^2_k$$

*H*₁: No todas las varianzas son iguales.

La prueba que utilizaremos, es la prueba de Bartlett, se basa en una estadística cuya distribución muestral proporciona valores críticos exactos cuando los tamaños muestrales son iguales. Estos valores críticos para tamaños iguales de muestras también se pueden utilizar para obtener aproximaciones altamente precisas de los valores críticos para tamaños diferentes de las muestras.

Los pasos para la prueba de Bartlett son:

Primero: Calculamos las k varianzas muestrales $s^2_1, s^2_2, \dots, s^2_k$ a partir de las muestras de tamaño n_1, n_2, \dots, n_k , con $\sum_{i=1}^k n_i = N$.

$$S_j^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n_j} |y_{ij} - \bar{y}_i|^2}{n_j - 1}$$

Segundo: Combinamos las varianzas muestrales para obtener la estimación combinada.

$$S_p^2 = \frac{\sum_{i=1}^k S_j^2 |n_j - 1|}{N - k}$$

Ahora bien,

$$b = \frac{[(S_1^2)^{n_1-1} (S_2^2)^{n_2-1} \dots (S_k^2)^{n_k-1}]^{\frac{1}{N-k}}}{S_p^2}$$

Donde b es el valor de una variable aleatoria que tiene una distribución Bartlett. Donde rechazamos H_0 en el nivel de significancia si:

$$b < b_k(\alpha, n)$$

Donde $b_k(\alpha, n)$ es el valor crítico que deja un área de tamaño α en la cola izquierda de una distribución Bartlett. Cuando los tamaños son diferentes, la hipótesis nula se rechaza en el nivel de significancia si:

$$b < b_k(\alpha; n_1, n_2, \dots, n_k)$$

Donde:

$$b_k(\alpha, n_1, n_2, \dots, n_k) = \frac{n_1 b_k(\alpha, n_1) + n_2 b_k(\alpha, n_2) + \dots + n_k b_k(\alpha, n_k)}{N}$$

Ejemplo 53. Parte de un estudio que se llevo a cabo en el Instituto Politécnico y Universidad Estatal de Virginia (USA), se diseño para medir los niveles de actividad de fosfatasa alcalina en suero de niños con crisis convulsivas que reciben terapia contra convulsiones bajo el cuidado de un médico particular. Se encontraron 45 sujetos para estudio y se clasificaron en cuatro grupos según el medicamento administrado:

G-1: Control (No reciben anticonvulsivos y no tienen historial de crisis convulsivas).

G-2: Fenobartibal.

G-3: Carbanacepina.

G-4: Otros anticonvulsivos.

Se determinó el nivel de actividad de la fosfatasa alcalina en suero a partir de muestras sanguíneas obtenidas de cada sujeto y se registraron en la siguiente tabla:

Nivel de Actividad de fosfatasa alcalina en suero				
G-1		G-2	G-3	G-4
49.20	97.5	97.07	62.1	110.6
44.54	105	73.4	94.95	57.1
45.8	58.05	68.5	142.5	117.6
95.84	86.6	91.85	53	77.71
30.1	58.35	106.6	175	150
36.5	72.8	0.57	79.5	82.9
82.3	116.7	0.79	29.5	115.5
87.85	45.15	0.77	78.4	
105	70.35	0.81	127.5	
95.22	77.4			

Utilice la prueba de Bartlett para probar la hipótesis, en el nivel de significancia (α) 0.01, que las varianzas poblacionales de los cuatro grupos de medicamentos son iguales.

Solución.

Nuestra hipótesis a probar es:

$$H_0: S^2_1 = S^2_2 = \dots = S^2_k$$

H_1 : No todas las varianzas son iguales.

Los datos dados son:

$$n_1 = 20, n_2 = 9, n_3 = 9, n_4 = 7, N = n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = 45, k = 4 \text{ y } \alpha = 0.01$$

Y rechazamos la hipótesis nula cuando: $b < b_k(\alpha; n_1, n_2, \dots, n_k)$, es decir:

$$b < b_4(0.01; 20, 9, 9, 7)$$

El estadístico b_k lo calculamos con:

$$b_k(\alpha, n_1, n_2, \dots, n_k) = \frac{n_1 b_k(\alpha, n_1) + n_2 b_k(\alpha, n_2) + \dots + n_k b_k(\alpha, n_k)}{N}$$

De donde los valores de $b_k(\alpha, n_k)$, son extraídos del Apéndice C, Tabla A10: Valores críticos para la prueba de Bartlett.

k=4	Valor
$b_1(0,20)$	0.8586
$b_2(0,9)$	0.6892
$b_3(0,9)$	0.6892
$b_4(0,7)$	0.6045

Sustituyendo valores en $b_k(\alpha, n_1, n_2, \dots, n_k)$ tenemos:

$$\mathbf{b_4(0.001, 20, 9, 9, 7) = 0.75131}$$

El estadístico b lo calculamos de acuerdo a lo siguiente:

Primero: Las varianzas de cada grupo las calculamos:

$$S_j^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n_j} |y_{ij} - \bar{y}_i|^2}{n_j - 1}$$

k= 1			k= 2			k= 3			k= 4		
n	G-1	$ G1 - \bar{y}_1 ^2$	n	G-2	$ G2 - \bar{y}_2 ^2$	n	G-3	$ G3 - \bar{y}_3 ^2$	n	G-4	$ G4 - \bar{y}_4 ^2$
1	49.20	567.04	1	97.07	2317.6	1	62.10	992.6	1	110.60	82.032
2	44.54	810.68	2	73.40	598.84	2	94.95	1.8075	2	57.10	1975.2
3	45.80	740.52	3	68.50	383.03	3	142.50	2390.7	3	117.60	257.83
4	95.84	521.09	4	91.85	1842.2	4	53.00	1648.8	4	77.10	597.45
5	30.10	1841.5	5	106.60	3326	5	175.00	6625.1	5	150.00	2348.1
6	36.50	1333.2	6	0.57	2338.6	6	79.50	198.97	6	82.90	347.56
7	82.30	86.258	7	0.79	2317.4	7	29.50	4109.5	7	115.50	194.8
8	87.85	220.15	8	0.77	2319.3	8	78.40	231.21			
9	105.00	1023.2	9	0.81	2315.4	9	127.50	1148.8			
10	95.22	493.17									
11	97.50	599.64									
12	105.00	1023.2									
13	58.05	223.88									
14	86.60	184.62									
15	58.35	214.99									
16	72.80	0.0452									
17	116.70	1908.6									
18	45.15	776.32									
19	70.35	7.0889									
20	77.40	19.25									
Σ	1460.25	12594	Σ	440.36	17758	Σ	842.45	17347	Σ	710.80	5802.9
\bar{y}_1	73.013		\bar{y}_2	48.929		\bar{y}_3	93.606		\bar{y}_4	101.54	
S_1^2	662.8623671		S_2^2	2219.781236		S_3^2	2168.434028		S_4^2	967.1561905	

Segundo: Combinamos las varianzas muestrales para obtener la estimación combinada.

$$S_p^2 = \frac{\sum_{i=1}^k S_j^2 |n_j - 1|}{N - k}$$

Sustituyendo datos:

$$s_p^2 = [(662.862) \cdot (20-1) + (2219.781) \cdot (9-1) + (2168.434) \cdot (9-1) + (967.156) \cdot (7-1)] / (45-4) = 1304.952298$$

$$S_p^2 = 1304.952298$$

Por lo tanto, sustituyendo en:

$$b = \frac{[(S_1^2)^{n_1-1} (S_2^2)^{n_2-1} \dots (S_k^2)^{n_k-1}]^{\frac{1}{N-k}}}{S_p^2}$$

$$b = [(662.862)^{19} (2219.781)^8 (2168.434)^8 (967.156)^6]^{1/41}$$

1304.952

$$\underline{b = 0.85643}$$

Por lo tanto no se rechaza la hipótesis porque no es cierto que:

$$\underline{b = 0.85643 < b_4 = 0.75131}$$

La decisión es no rechazar la hipótesis y concluir que las varianzas poblacionales de los cuatro grupos de medicamentos no son significativamente diferentes.

RESOLVIENDO EL MISMO EJEMPLO CON HERRAMIENTAS DE ANALISIS DE EXCEL

Nuestra hipótesis a probar es:

$$H_0: S^2_1 = S^2_2 = \dots = S^2_k$$

H_1 : No todas las varianzas son iguales.

Y rechazamos la hipótesis nula cuando: $b < b_k(\alpha; n_1, n_2, \dots, n_k)$, es decir:

$$b < b_4(0.01; 20, 9, 9, 7)$$

El estadístico b_k lo calculamos de la misma manera que se hizo de forma manual. De Donde observamos que $b_4 = 0.75131$.

Una vez habilitada la *PRUEBA DE HIPOTESIS*:

Datos → **Análisis de datos** → **Análisis de varianzas de un factor** → **Aceptar** → **Rango de entrada** (Introducir datos) → **Rango de salida** (Indica la celda donde deseas que te ponga la tabla ANOVA) → **Aceptar**.

G-1	G-2	G-3	G-4
49.20	97.07	62.10	110.60
44.54	73.40	94.95	57.10
45.80	68.50	142.50	117.60
95.84	91.85	53.00	77.10
30.10	106.60	175.00	150.00
36.50	0.57	79.50	82.90
82.30	0.79	29.50	115.50
87.85	0.77	78.40	
105.00	0.81	127.50	
95.22			
97.50			
105.00			
58.05			
86.60			
58.35			
72.80			
116.70			
45.15			
70.35			
77.40			

Una vez efectuado lo anterior, aparecerán dos tablas con el siguiente aspecto:

Análisis de varianza de un factor

RESUMEN				
Grupos	Cuenta	Suma	Promedio	Varianza
Columna 1	20	1460.25	73.0125	662.862367
Columna 2	9	440.36	48.9288889	2219.78124
Columna 3	9	842.45	93.6055556	2168.43403
Columna 4	7	710.8	101.542857	967.15619

ANÁLISIS DE VARIANZA						
Origen de	Suma de	Grados de	Promedio	F	Probabilidad	Valor crítico
Entre grupos	14105.294	3	4701.76467	3.6030165	0.02122581	4.2985617
Dentro de los grupos	53503.0442	41	1304.9523			
Total	67608.3382	44				

Donde:

$$k=4$$

$$n_1=20, n_2=9, n_3=9 \text{ y } n_4=7$$

$$S^2_1=662.862367, S^2_2=2219.78124, S^2_3=2168.43403 \text{ y } S^2_4=967.15619$$

$$S^2_p=1304.9523$$

$$N=n_1+n_2+n_3+n_4=45$$

Por lo tanto:

$$b = \frac{[(S^2_1)^{n_1-1}(S^2_2)^{n_2-1} \dots (S^2_k)^{n_k-1}]^{\frac{1}{N-k}}}{S^2_p} = 0.85643$$

Y se rechaza la hipótesis ya que:

$$\underline{\underline{b=0.85643 > b_4=0.75131}}$$

5.3.5 Comparación de un solo grado de libertad

El análisis de varianza es una clasificación unilateral, o experimento de un factor, como a menudo se llama; solamente indica si la hipótesis de las medias es igual, y si se puede rechazar o no. Por lo general, un experimentador preferiría que sus análisis tuvieran pruebas más profundas de comparación.

5.3.6 Verificación de los supuestos del modelo

Prueba de Duncan.

Es un procedimiento utilizado para realizar la comparación de rangos múltiples de medias. Este procedimiento se basa en la noción general de un rango studentizado (investigar: Distribución t–student). El rango de cualquier subconjunto de p medias muestrales debe exceder cierto valor antes de que se encuentre que cualquiera de la p medias es diferente. Este valor se llama rango de menor significancia para las p medias y se denota con R_p y la expresión que la define es:

$$R_p = r_p \sqrt{\frac{S^2}{n}}$$

Donde:

1. r_p son los rangos studentizado de menor significancia y depende del nivel de significancia (α) y del número de grados de libertad [Apéndice D. Valores Críticos q' ($p, df; \alpha$) para pruebas de Rango Múltiple de Duncan].
2. S^2 es el cuadrado medio del error y se toma de la tabla de análisis de varianza
3. n es el número de elementos para un tratamiento específico.
4. p representa el tamaño del conjunto de medias.
5. R_p puede entenderse como la diferencia mínima que debe existir entre la media mas grande y la más pequeña de un conjunto de tamaño p .

Los pasos que debemos seguir para aplicar la prueba de Duncan son:

1. Calcular el valor de cada una de las medias correspondientes a cada tratamiento y ordenarlas de mayor a menor, ya ordenadas las renumeraremos de 1 a p . Note que inicialmente p es igual al número de tratamientos k .
2. Determinar de una tabla los valores r_p para un valor de significancia.
3. Calcular los R_p de acuerdo con la expresión anterior y tomar de la tabla de análisis de varianza el valor $s^2 = SSE/(k*(n-1))$.
4. Probar por rangos que vayan de la media 1 a la p .
5. Si la hipótesis se cumple, es decir si $R_p < (m_{i+p} - m_i)$, terminamos.
6. Hacemos rangos más pequeños $p = p-1$ y regresamos al paso 4 mientras $p > 1$.

Ejemplo 54. Consideremos un ejemplo hipotético donde tenemos los siguientes valores para las medias de 6 tratamientos:

media	μ_2	μ_5	μ_1	μ_3	μ_6	μ_4
y	14.5	16.75	19.84	21.12	22.9	23.2
n	5	5	5	5	5	5

El nivel de significancia (α) es de 0.05.

Solución.

Paso 1. La tabla anterior es el resultado de este paso.

Paso 2.

Los valores de r_p los obtenemos de tablas.

p	2	3	4	5	6
r_p	2.919	3.066	3.160	3.226	3.276

Paso 3.

Calculamos los R_p para nuestro ejemplo, tomando el valor de $s^2 = 2.45$ del análisis de varianza:

$$R_p^2 = r_p^2 * [s^2/n]^{1/2}$$

$$R_2^2 = r_2^2 * [s^2/n]^{1/2} = 2.919^2 * [2.45/5]^{1/2} = 2.043$$

$$R_3^2 = r_3^2 * [s^2/n]^{1/2} = 3.066^2 * [2.45/5]^{1/2} = 2.146$$

$$R_4^2 = r_4^2 * [s^2/n]^{1/2} = 3.160^2 * [2.45/5]^{1/2} = 2.212$$

$$R_5^2 = r_5^2 * [s^2/n]^{1/2} = 3.226^2 * [2.45/5]^{1/2} = 2.258$$

$$R_6^2 = r_6^2 * [s^2/n]^{1/2} = 3.276^2 * [2.45/5]^{1/2} = 2.293$$

En resumen:

p	2	3	4	5	6
r_p	2.919	3.066	3.160	3.226	3.276
R_p	2.043	2.146	2.212	2.258	2.293

Paso 4.

Comenzamos con $p=6$, por lo tanto $R_6 = 2.293$ y probamos:

$$\mu_4 - \mu_2 = 23.20 - 14.5 = 8.7$$

Paso 5.

$\mu_4 - \mu_2$ es mayor que 2.293, por lo tanto el rango no es 6.

Paso 6.

$p = 5$.

Paso 4.1

$$\mu_4 - \mu_5 = 23.20 - 16.75 = 6.45$$

$$\mu_6 - \mu_2 = 22.90 - 14.50 = 8.4$$

Paso 5.1

$\mu_4 - \mu_5$ es mayor que $R_5 = 2.296$, y

$\mu_6 - \mu_2$ es mayor que $R_5 = 2.296$, por lo tanto el rango no es 5.

Paso 6.1

$p = 4$.

Paso 4.2

$$\mu_4 - \mu_1 = 23.20 - 19.84 = 3.36$$

$$\mu_6 - \mu_5 = 22.90 - 16.75 = 6.15$$

$$\mu_3 - \mu_2 = 21.12 - 14.50 = 6.62$$

Paso 5.2

$\mu_4 - \mu_1$ es mayor que $R_4 = 2.212$,

$\mu_6 - \mu_5$ es mayor que $R_4 = 2.212$,

$\mu_3 - \mu_2$ es mayor que $R_4 = 2.212$, y por lo tanto el rango no es 4.

Paso 6.2

$p = 3$.

Paso 4.3

$$\mu_4 - \mu_3 = 23.20 - 21.12 = 2.08$$

$$\mu_6 - \mu_1 = 22.90 - 19.84 = 3.50$$

$$\mu_3 - \mu_5 = 21.12 - 16.75 = 4.37$$

$$\mu_1 - \mu_2 = 19.84 - 14.50 = 5.84$$

Paso 5.3

$\mu_4 - \mu_3$ es menor que $R_3 = 2.146$, por tanto hay un rango 3 dado por $[\mu_4, \mu_6, \mu_3]$.

Para el resto:

$\mu_6 - \mu_1$ es mayor que $R_3 = 2.146$,

$\mu_3 - \mu_5$ es mayor que $R_3 = 2.146$,

$\mu_1 - \mu_2$ es mayor que $R_3 = 2.146$ y por lo tanto el rango no es 3.

Paso 6.3

$p = 2$.

Paso 4.4

Como ya determinamos el conjunto $[m_4, m_6, m_3]$, trabajamos con el resto de las medias así:

$$\mu_3 - \mu_1 = 21.12 - 19.84 = 2.08$$

$$\mu_1 - \mu_5 = 19.84 - 16.75 = 3.09$$

$$\mu_5 - \mu_2 = 16.75 - 14.50 = 2.25$$

Paso 5.4

$\mu_3 - \mu_1$ es menor que $R_2 = 2.043$, por tanto hay un rango 2 dado por $[\mu_3 - \mu_1]$.

Para las demás:

$\mu_1 - \mu_5$ es mayor que $R_2 = 2.043$,

$\mu_5 - \mu_2$ es mayor que $R_2 = 2.043$ por lo tanto el rango no es 2.

Paso 6.3

$p = 1$. Terminamos.

Finalmente los rangos quedan:

$$\mu = \{[\mu_4, \mu_6, \mu_3, \mu_1], [\mu_5], [\mu_2]\}$$

IV. CONCLUSIONES

Dentro del entorno económico actual citado no sólo por la globalización, y los rápidos cambios tecnológicos y culturales, sino además por la polución ambiental y la cada vez más intensa explotación de los recursos escasos, las organizaciones se ven en la obligación de mejorar sus procesos de decisión día a día para afianzar su competitividad, satisfaciendo de la mejor forma a los usuarios con sus productos y servicios, y además hacer un uso más eficiente de los recursos.

A partir de este trabajo y de forma continua se busca desarrollar un modelo que resuma y sienta las bases para el análisis de la toma de decisiones individuales o personales y organizacionales.

De este modelo emergen con fuerza conceptos tales como: escenarios futuros, técnicas y herramientas para la toma de decisiones y el factor humano, los cuales en forma integral forman parte del proceso para la resolución de problemas y toma de decisiones. Su aplicación dentro de cualquier organización, tanto por la dirección como por todos los integrantes de la misma, tiene el fin de optimizar los procesos decisorios.

Por otro lado con respecto al contenido de estas memorias se puede citar lo siguiente:

- En la parte axiomática de estas memorias se siguen las reglas básicas del manual abreviado de los estilos de publicaciones de la APA (American Psychological Association).
- En la estructura de estas memorias, en cada tema se hace referencia de las actualizaciones mas recientes con respecto a los temas que así lo requieren.
- Con ejemplos (54) de situaciones verdaderas se induce al lector a una aplicación real de lo expuesto en estas memorias.
- Estas memorias relacionan módulos desde bachiller (Análisis Integral de Funciones, Probabilidad y estadística II) hasta módulos de Licenciatura en Economía y administración (Análisis de Decisiones I y II), Ingeniería de Procesos Industriales (Estadística II) y Licenciatura en informática (Análisis numéricos); con aplicación a casos prácticos como no se ha revisado tanto en la formación a nivel licenciatura y si en casos prácticos de la vida laboral.
- Los cálculos de los ejemplos se realizan manualmente haciendo uso de los aspectos teóricos que dan origen a formulas, la mayoría, además de esto, se resuelven mediante asistentes propios de los mas elementales paquetes de informática, algunos otros solo es necesario el dominio de cualquier calculadora de tipo científico.

V. BIBLIOGRAFIA

No.	TITULO	AUTOR	EDITORIAL	AÑO
1	<i>Fundamentos de Mercadotecnia</i>	Stanton, Etsel y Walker		9a. Edición
2	<i>Mercadotecnia</i>	Philip Kotler	Prentice Hall	3ª. Edición 1996
3	<i>Estudios de Mercadotecnia</i>	Kotler y Dox	Mc Graw Hill	
4	<i>Mercados Estratégicos Internacionales</i>	Negandhi y Savara		
5	<i>Análisis y Diseño de Experimentos.</i>	Gutiérrez P. Humberto y de la Vara, S. Román.	Mc Graw Hill.	2003
6	<i>Probabilidad y Estadística para Ingeniería y Administración.</i>	Hines, William W. y Montgomery, Douglas C.	CECSA.	1986
7	<i>Applied Regression Analysis.</i>	Draper, N. R. y H. Smith.	Wiley,	2ª Edición 1981
8	<i>Introduction to Lineal Regression Analysis.</i>	Montgomery, Douglas C. y Peck, Elizabeth A.	Wiley.	1982
9	<i>Probability and Statistics for Engineers and Scientists.</i>	Walpole, Ronald E. y Raymond H. Myers.	Coller Macmillan	2ª Edición. 1978
10	<i>Introduction to Operations Research.</i>	Gillett, Billy E.	Mc Graw Hill.	1976
11	<i>Fitting Equations to Data</i>	Daniel, C. y F.S. Wood.	Wiley	1980
12	<i>Design and Analysis of Experiments</i>	Montgomery, Douglas C.	Wiley	2ª Edición. 1978

Información internet

No.	E-Mail	Fecha de Recup.
13	Sistemas y Métodos Administrativos. Por: Alberto R. Lardent . http://es.scribd.com/doc/2234625/sistemas-y-metodos-administrativos	19 Jun 2012
14	http://www.eco.ub.es/~escard/EMPRESA6.pdf	19 Jun 201
15	Gámez Gastélum, Rosalinda : (2007) <i>Comunicación y cultura organizacional en empresas chinas y japonesas</i> . Edición electrónica gratuita. Texto completo en www.eumed.net/libros/2007a/221/ http://www.eumed.net/libros/2007a/221/2p.htm	19 Jun 2012
16	Lic. Antonio Sánchez Pereyra. Departamento de Bibliografía Latinoamericana de la Dirección General de Bibliotecas de la Universidad Nacional Autónoma de México. http://www.dgbiblio.unam.mx/servicios/dgb/publicdgb/bole/fulltext/voll1/clase.html	19 Jun 2012
17	http://html.rincondelvago.com/comportamientos-colectivos.html	19 Jun 2012.
18	Lila de Nazaret Atencio de Pérez. Universidad del Zulia en Venezuela. http://www.monografias.com/trabajos61/etica-limite-condicion-humana/etica-limite-condicion-humana2.shtml	20 Jun 2012
19	http://www.virtual5.com.mx/articulos/382/toma-de-decisiones-obtener-el-exito/	20 Jun 2012
20	http://www.cyfuss.com/introduccion_la_economia/la_toma_de_decisiones	21 Jun

		2012
21	Aproximación al proceso de toma de decisiones en la empresa barranquillera. Leonor Cabeza de Vergara. Alberto Ellas Muñoz Santiago. Sandra Milena Vivero Santis. http://ciruelo.uninorte.edu.co/pdf/pensamiento_gestion/17/1_APROXIMACION%20AL%20PROCESO%20DE%20TOMA%20DE%20DECISIONES_PENSAMIENTO%20Y%20GE.pdf	21 Jun 2012
22	Herramientas Para la Toma de Decisiones. http://www.monografias.com/trabajos13/herapa/herapa.shtml	21 Jun 2012
26	http://lomejordeti.wordpress.com/consejos-exitosos/metodo-para-la-toma-de-decisiones/	23 Jun 2012
24	http://www.definicionabc.com/ciencia/pronostico.php	14 Jul 2012
25	Pronostico, definición, importancia y tipos de pronósticos. Sergio Guardia.. http://www.emagister.com/pronostico-definicion-importancia-tipos-pronostico_h	14 Jul 2012
26	Investigación en el ámbito empresarial "Pronósticos, supervisión e indicadores financieros". García Santillán Arturo. http://www.eumed.net/libros/2009b/543/Analisis%20y%20discusion%20de%20la%20variable%20seleccion%20del%20metodo%20de%20pronostico.htm	14 Jul 2012
27	http://biplot.usal.es/problemas/regresion/teoria/regnolin.htm	19 Jul 2012
28	http://es.wikipedia.org/wiki/M%C3%ADnimos_cuadrados (material verificado).	19 Jul 2012
29	FUNDAMENTOS FÍSICOS DE LA INGENIERÍA. Escuela Universitaria de Ingenieros Técnicos de Minas.	19 Jul 2012
30	Coefficiente de correlación lineal. http://www.vitutor.com/estadistica/bi/coeficiente_correlacion.html	19 Jul 2012
31	http://www.capacitaciononline.blogspot.mx/2009/02/coeficiente-de-determinacion.html	19 Jul 2012
32	http://biplot.usal.es/problemas/regresion/teoria/regnolin.htm	19 Jul 2012
33	SISTEMA-DE-ECUACIONES-3-VARIABLES1. http://20874.tudocente.com/wp-content/uploads/2010/10/SISTEMA-DE-ECUACIONES-3-VARIABLES1.pdf	19 Jul 2012
34	http://www.ematematicas.net/sistres.php	19 Jul 2012
35	Capítulo 1- Estudio de Mercado. http://es.scribd.com/doc/12953427/Capitulo-1-Estudio-de-Mercado	16 Jul 2012
36	Capítulo 1- Estudio de Mercado. http://es.scribd.com/doc/12953427/Capitulo-1-Estudio-de-Mercado	16 Jul 2012
37	Hugo Esteban Glagovsky, Licenciatura en Sistemas de Información de las Organizaciones, Facultad de Cs. Económicas, Universidad de Buenos Aires; Buenos Aires, Argentina. http://www.monografias.com/trabajos10/foda/foda.shtml	12 Nov 2012
38	INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL, SECRETARÍA TÉCNICA, "METODOLOGÍA PARA EL ANÁLISIS FODA". DIRECCIÓN DE PLANEACIÓN Y ORGANIZACIÓN. (Marzo 2002). http://uventas.com/ebooks/Analisis_Foda.pdf	12 Nov 2012
39	SECCION I: INVESTIGACIÓN DE MERCADO Y CAPACIDAD DE PRODUCCION. http://www.firro.utn.edu.ar/repositorio/catedras/quimica/5_año/integracion5/seccion1.pdf	16 Jul 2012
40	http://www.deguate.com/infocentros/gerencia/mercadeo/mk25.htm	16 Jul 2012
41	http://mexico.smetoolkit.org/mexico/es/content/es/3495/Mercado-Potencial	16 Jul 2012
42	http://html.rincondelvago.com/variables-aleatorias.html	14 Abr 2012
43	Luna, Rita. Curso: PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA- FUNCIÓN DE PROBABILIDAD Y DE DISTRIBUCIÓN, VALOR ESPERADO, VARIANZA Y DESVIACIÓN ESTANDAR. Instituto Tecnológico de Chihuahua. México 2005. pp. 7.	14 Abr 2012
44	Luna, Rita. Curso: PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA-DISTRIBUCIÓN HIPERGEOMÉTRICA. Instituto Tecnológico de Chihuahua. México 2005. pp. 5.	14 Abr 2012
45	http://html.rincondelvago.com/probabilidad_12.html	03 Jun 2012
46	Luna, Rita. Curso: PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA-DISTRIBUCIÓN MULTINOMIAL. Instituto Tecnológico de Chihuahua. México 2005. pp. 6.	14 Abr 2012
47	Luna, Rita. Curso: PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA-DISTRIBUCIÓN DE POISSON. Instituto Tecnológico de Chihuahua. México 2005. pp. 3.	14 Abr 2011
48	http://html.rincondelvago.com/probabilidad_12.html	03 Jun 2012
49	Cetina López Wendy. DEFINICIÓN DE VARIABLES ALEATORIAS CONTINUAS. México. 2005. pp. 3.	14 Abr 2012

50	http://personal5.iddeo.es/ztt/Tem/t20_variable_aleatoria_continua.htm	14 Abr 2012
51	Cetina López Wendy. FUNCIÓN DE DENSIDAD Y ACUMULATIVA. México. 2005. pp. 8.	15 Abr 2012
52	http://www.youtube.com/watch?v=zDTnB5oqeIM	02 Jun 2010
53	http://www.mitecnologico.com/ibq/Main/FuncionDeDensidadYAcumulativa	02 Jun 2012
54	http://www.itch.edu.mx/academic/industrial/sabaticorita/_private/04Distribuciones%20de%20Probabilidad.htm	02 Jun 2012
55	Cetina López Wendy. DISTRIBUCIÓN UNIFORME Y EXPONENCIAL. México 2005. Pp. 11	15 Abr 2011
56	APUNTES: INSTITUTO TECNOLÓGICO DE CHIHUAHUA. Luna Gandara, Rita. Curso: PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA-DISTRIBUCIÓN EXPONENCIAL. Instituto Tecnológico de Chihuahua. México 2005. Pp. 7. http://www.cnice.mecd.es/Descartes/Bach_HCS_2/Distribuciones_probabilidad_continuas/dist_continuas.htm	15 Abr 2011
57	¹ http://es.wikipedia.org/wiki/Distribuci%C3%B3n_normal (material verificado).	17 Jun 2012
58	Luna Gandara, Rita. Curso: PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA-DISTRIBUCIÓN NORMAL. Instituto Tecnológico de Chihuahua. México 2005. Pp. 7.	15 Abr 2012
59	http://www.vitutor.net/1/55.html	17 Jun 2012
60	http://www.itch.edu.mx/academic/industrial/sabaticorita/_private/002APROXIMACION%20%20DE%20%20LA%20%20NORMAL%20%20A%20%20LA%20%20BINOMIAL.htm	16 Jun 2012
61	UNIVERSIDAD NACIONAL ABIERTA Y A DISTANCIA – UNAD. ESCUELA DE CIENCIAS BÁSICAS, TECNOLOGÍA E INGENIERIA CONTENIDO DIDÁCTICO DEL CURSO: 100402 – PROBABILIDAD. http://es.scribd.com/doc/55626384/20/Leccion-20-TEOREMA-DE-CHEBYSHEV	18 Jun 2012
62	http://masmatematicas.com/lu.com/estadisticas/mvar.html#Teorema de Chebyshev	18 Jun 2012
63	Diseño de experimentos; 1. Análisis de varianza. http://lc.fie.umich.mx/~calderon/estadistica/anova03.html	07 Sep 2012
64	http://es.wikipedia.org/wiki/ANOVA (material verificado).	14 Sep 2012
65	http://www.mat.uda.cl/hsalinas/cursos/2008/probabilidad/TablaNormalEstandar.pdf	10 Nov 2012
66	http://dcb.fi-c.unam.mx/profesores/irene/Notas/tablas/Fisher.pdf	11 Sep 2012
67	Traducido de D.D. Dyer y J. P. Keating. “On the determination of critical values of Bartlett’s test” J. Am. Stat. Assoc. , vol. 75. 1980, con permiso del consejo de directores. Reedición: Ing. Rafael Corona Guerra, Sep. 14, 2012. Para notas del modulo de Estadística II, (Licenciatura). http://books.google.com.mx/books?id=Melpe80mYOIC&pg=PA696&lpg=PA695&ots=CcnvNtyOLG&dq=Probabilidad+y+estadistica:(0.01,20)%3D0.8586&hl=es	14 Sep 2012
68	http://www.um.edu.ar/math/estadis/tablas/duncan.htm	12 Oct 2012
69	http://www.deguate.com/infocentros/gerencia/mercadeo/mk25.htm	16 Jul 2012
70	http://es.wikipedia.org/wiki/Pron%C3%B3stico_de_venta (material verificado).	16 Jul 2012

VI. ANEXOS (APENDICES)

Apéndice A

TABLA NORMAL ESTANDAR

ÁREAS BAJO LA CURVA NORMAL ESTÁNDAR



c.chica (z)					c.grande (z)					área central					área (0 a z)				
z	c.chica (z)	c.grande (z)	área central	área (0 a z)	z	c.chica (z)	c.grande (z)	área central	área (0 a z)	z	c.chica (z)	c.grande (z)	área central	área (0 a z)	z	c.chica (z)	c.grande (z)	área central	área (0 a z)
0,00	0,50000	0,50000	0,00000	0,00000	0,50	0,30854	0,69146	0,38292	0,19146	0,50	0,30854	0,69146	0,38292	0,19146	0,50	0,30854	0,69146	0,38292	0,19146
0,01	0,49601	0,50399	0,00798	0,00399	0,51	0,30503	0,69497	0,38995	0,19497	0,51	0,30503	0,69497	0,38995	0,19497	0,51	0,30503	0,69497	0,38995	0,19497
0,02	0,49202	0,50798	0,01596	0,00798	0,52	0,30153	0,69847	0,39694	0,19847	0,52	0,30153	0,69847	0,39694	0,19847	0,52	0,30153	0,69847	0,39694	0,19847
0,03	0,48803	0,51197	0,02393	0,01197	0,53	0,29806	0,70194	0,40389	0,20194	0,53	0,29806	0,70194	0,40389	0,20194	0,53	0,29806	0,70194	0,40389	0,20194
0,04	0,48405	0,51595	0,03191	0,01595	0,54	0,29460	0,70540	0,41080	0,20540	0,54	0,29460	0,70540	0,41080	0,20540	0,54	0,29460	0,70540	0,41080	0,20540
0,05	0,48006	0,51994	0,03988	0,01994	0,55	0,29116	0,70884	0,41768	0,20884	0,55	0,29116	0,70884	0,41768	0,20884	0,55	0,29116	0,70884	0,41768	0,20884
0,06	0,47608	0,52392	0,04784	0,02392	0,56	0,28774	0,71226	0,42452	0,21226	0,56	0,28774	0,71226	0,42452	0,21226	0,56	0,28774	0,71226	0,42452	0,21226
0,07	0,47210	0,52790	0,05581	0,02790	0,57	0,28434	0,71566	0,43132	0,21566	0,57	0,28434	0,71566	0,43132	0,21566	0,57	0,28434	0,71566	0,43132	0,21566
0,08	0,46812	0,53188	0,06376	0,03188	0,58	0,28096	0,71904	0,43809	0,21904	0,58	0,28096	0,71904	0,43809	0,21904	0,58	0,28096	0,71904	0,43809	0,21904
0,09	0,46414	0,53586	0,07171	0,03586	0,59	0,27760	0,72240	0,44481	0,22240	0,59	0,27760	0,72240	0,44481	0,22240	0,59	0,27760	0,72240	0,44481	0,22240
0,10	0,46017	0,53983	0,07966	0,03983	0,60	0,27425	0,72575	0,45149	0,22575	0,60	0,27425	0,72575	0,45149	0,22575	0,60	0,27425	0,72575	0,45149	0,22575
0,11	0,45620	0,54380	0,08759	0,04380	0,61	0,27093	0,72907	0,45814	0,22907	0,61	0,27093	0,72907	0,45814	0,22907	0,61	0,27093	0,72907	0,45814	0,22907
0,12	0,45224	0,54776	0,09552	0,04776	0,62	0,26763	0,73237	0,46474	0,23237	0,62	0,26763	0,73237	0,46474	0,23237	0,62	0,26763	0,73237	0,46474	0,23237
0,13	0,44828	0,55172	0,10343	0,05172	0,63	0,26435	0,73565	0,47131	0,23565	0,63	0,26435	0,73565	0,47131	0,23565	0,63	0,26435	0,73565	0,47131	0,23565
0,14	0,44433	0,55567	0,11134	0,05567	0,64	0,26109	0,73891	0,47783	0,23891	0,64	0,26109	0,73891	0,47783	0,23891	0,64	0,26109	0,73891	0,47783	0,23891
0,15	0,44038	0,55962	0,11924	0,05962	0,65	0,25785	0,74215	0,48431	0,24215	0,65	0,25785	0,74215	0,48431	0,24215	0,65	0,25785	0,74215	0,48431	0,24215
0,16	0,43644	0,56356	0,12712	0,06356	0,66	0,25463	0,74537	0,49075	0,24537	0,66	0,25463	0,74537	0,49075	0,24537	0,66	0,25463	0,74537	0,49075	0,24537
0,17	0,43251	0,56749	0,13499	0,06749	0,67	0,25143	0,74857	0,49714	0,24857	0,67	0,25143	0,74857	0,49714	0,24857	0,67	0,25143	0,74857	0,49714	0,24857
0,18	0,42858	0,57142	0,14285	0,07142	0,68	0,24825	0,75175	0,50350	0,25175	0,68	0,24825	0,75175	0,50350	0,25175	0,68	0,24825	0,75175	0,50350	0,25175
0,19	0,42465	0,57535	0,15069	0,07535	0,69	0,24510	0,75490	0,50981	0,25490	0,69	0,24510	0,75490	0,50981	0,25490	0,69	0,24510	0,75490	0,50981	0,25490
0,20	0,42074	0,57926	0,15852	0,07926	0,70	0,24196	0,75804	0,51607	0,25804	0,70	0,24196	0,75804	0,51607	0,25804	0,70	0,24196	0,75804	0,51607	0,25804
0,21	0,41683	0,58317	0,16633	0,08317	0,71	0,23885	0,76115	0,52230	0,26115	0,71	0,23885	0,76115	0,52230	0,26115	0,71	0,23885	0,76115	0,52230	0,26115
0,22	0,41294	0,58706	0,17413	0,08706	0,72	0,23576	0,76424	0,52848	0,26424	0,72	0,23576	0,76424	0,52848	0,26424	0,72	0,23576	0,76424	0,52848	0,26424
0,23	0,40905	0,59095	0,18191	0,09095	0,73	0,23270	0,76730	0,53461	0,26730	0,73	0,23270	0,76730	0,53461	0,26730	0,73	0,23270	0,76730	0,53461	0,26730
0,24	0,40517	0,59483	0,18967	0,09483	0,74	0,22965	0,77035	0,54070	0,27035	0,74	0,22965	0,77035	0,54070	0,27035	0,74	0,22965	0,77035	0,54070	0,27035
0,25	0,40129	0,59871	0,19741	0,09871	0,75	0,22663	0,77337	0,54675	0,27337	0,75	0,22663	0,77337	0,54675	0,27337	0,75	0,22663	0,77337	0,54675	0,27337
0,26	0,39743	0,60257	0,20514	0,10257	0,76	0,22363	0,77637	0,55275	0,27637	0,76	0,22363	0,77637	0,55275	0,27637	0,76	0,22363	0,77637	0,55275	0,27637
0,27	0,39358	0,60642	0,21284	0,10642	0,77	0,22065	0,77935	0,55870	0,27935	0,77	0,22065	0,77935	0,55870	0,27935	0,77	0,22065	0,77935	0,55870	0,27935
0,28	0,38974	0,61026	0,22052	0,11026	0,78	0,21770	0,78230	0,56461	0,28230	0,78	0,21770	0,78230	0,56461	0,28230	0,78	0,21770	0,78230	0,56461	0,28230
0,29	0,38591	0,61409	0,22818	0,11409	0,79	0,21476	0,78524	0,57047	0,28524	0,79	0,21476	0,78524	0,57047	0,28524	0,79	0,21476	0,78524	0,57047	0,28524
0,30	0,38209	0,61791	0,23582	0,11791	0,80	0,21186	0,78814	0,57629	0,28814	0,80	0,21186	0,78814	0,57629	0,28814	0,80	0,21186	0,78814	0,57629	0,28814
0,31	0,37828	0,62172	0,24344	0,12172	0,81	0,20897	0,79103	0,58206	0,29103	0,81	0,20897	0,79103	0,58206	0,29103	0,81	0,20897	0,79103	0,58206	0,29103
0,32	0,37448	0,62552	0,25103	0,12552	0,82	0,20611	0,79389	0,58778	0,29389	0,82	0,20611	0,79389	0,58778	0,29389	0,82	0,20611	0,79389	0,58778	0,29389
0,33	0,37070	0,62930	0,25860	0,12930	0,83	0,20327	0,79673	0,59346	0,29673	0,83	0,20327	0,79673	0,59346	0,29673	0,83	0,20327	0,79673	0,59346	0,29673
0,34	0,36693	0,63307	0,26614	0,13307	0,84	0,20045	0,79955	0,59909	0,29955	0,84	0,20045	0,79955	0,59909	0,29955	0,84	0,20045	0,79955	0,59909	0,29955
0,35	0,36317	0,63683	0,27366	0,13683	0,85	0,19766	0,80234	0,60467	0,30234	0,85	0,19766	0,80234	0,60467	0,30234	0,85	0,19766	0,80234	0,60467	0,30234
0,36	0,35942	0,64058	0,28115	0,14058	0,86	0,19489	0,80511	0,61021	0,30511	0,86	0,19489	0,80511	0,61021	0,30511	0,86	0,19489	0,80511	0,61021	0,30511
0,37	0,35569	0,64431	0,28862	0,14431	0,87	0,19215	0,80785	0,61570	0,30785	0,87	0,19215	0,80785	0,61570	0,30785	0,87	0,19215	0,80785	0,61570	0,30785
0,38	0,35197	0,64803	0,29605	0,14803	0,88	0,18943	0,81057	0,62114	0,31057	0,88	0,18943	0,81057	0,62114	0,31057	0,88	0,18943	0,81057	0,62114	0,31057
0,39	0,34827	0,65173	0,30346	0,15173	0,89	0,18673	0,81327	0,62653	0,31327	0,89	0,18673	0,81327	0,62653	0,31327	0,89	0,18673	0,81327	0,62653	0,31327
0,40	0,34458	0,65542	0,31084	0,15542	0,90	0,18406	0,81594	0,63188	0,31594	0,90	0,18406	0,81594	0,63188	0,31594	0,90	0,18406	0,81594	0,63188	0,31594
0,41	0,34090	0,65910	0,31819	0,15910	0,91	0,18141	0,81859	0,63718	0,31859	0,91	0,18141	0,81859	0,63718	0,31859	0,91	0,18141	0,81859	0,63718	0,31859
0,42	0,33724	0,66276	0,32551	0,16276	0,92	0,17879	0,82121	0,64243	0,32121	0,92	0,17879	0,82121	0,64243	0,32121	0,92	0,17879	0,82121	0,64243	0,32121
0,43	0,33360	0,66640	0,33280	0,16640	0,93	0,17619	0,82381	0,64763	0,32381	0,93	0,17619	0,82381	0,64763	0,32381	0,93	0,17619	0,82381	0,64763	0,32381
0,44	0,32997	0,67003	0,34006	0,17003	0,94	0,17361	0,82639	0,65278	0,32639	0,94	0,17361	0,82639	0,65278	0,32639	0,94	0,17361	0,82639	0,65278	0,32639
0,45	0,32636	0,67364	0,34729	0,17364	0,95	0,17106	0,82894	0,65789	0,32894	0,95	0,17106	0,82894	0,65789	0,32894	0,95	0,17106	0,82894	0,65789	0,32894
0,46	0,32276	0,67724	0,35448	0,17724	0,96	0,16853	0,83147	0,66294	0,33147	0,96	0,16853	0,83147	0,66294	0,33147	0,96	0,16853	0,83147	0,66294	0,33147
0,47	0,31918	0,68082	0,36164	0,18082	0,97	0,16602	0,83398	0,66795	0,33398	0,97	0,16602	0,83398	0,66795	0,33398	0,97	0,16602	0,83398	0,66795	0,33398
0,48	0,31561	0,68439	0,36877	0,18439	0,98	0,16354	0,83646	0,67291	0,33646	0,98	0,16354	0,83646	0,67291	0,33646	0,98	0,16354	0,83646	0,67291	0,33646
0,49	0,31207	0,68793	0,37587	0,18793	0,99	0,16109	0,83891	0,67783	0,33891	0,99	0,16109	0,83891	0,67783	0,33891	0,99	0,16109	0,83891	0,67783	0,33891

Apéndice A (Continuación)

TABLA NORMAL ESTANDAR

ÁREAS BAJO LA CURVA NORMAL ESTÁNDAR



z	c. chica (z)	c. grande (z)	área central	área (0 a z)	z	c. chica (z)	c. grande (z)	área central	área (0 a z)
1,00	0,15866	0,84134	0,68269	0,34134	1,50	0,06681	0,93319	0,86639	0,43319
1,01	0,15625	0,84375	0,68750	0,34375	1,51	0,06552	0,93448	0,86896	0,43448
1,02	0,15386	0,84614	0,69227	0,34614	1,52	0,06426	0,93574	0,87149	0,43574
1,03	0,15151	0,84849	0,69699	0,34849	1,53	0,06301	0,93699	0,87398	0,43699
1,04	0,14917	0,85083	0,70166	0,35083	1,54	0,06178	0,93822	0,87644	0,43822
1,05	0,14686	0,85314	0,70628	0,35314	1,55	0,06057	0,93943	0,87886	0,43943
1,06	0,14457	0,85543	0,71086	0,35543	1,56	0,05938	0,94062	0,88124	0,44062
1,07	0,14231	0,85769	0,71538	0,35769	1,57	0,05821	0,94179	0,88358	0,44179
1,08	0,14007	0,85993	0,71986	0,35993	1,58	0,05705	0,94295	0,88589	0,44295
1,09	0,13786	0,86214	0,72429	0,36214	1,59	0,05592	0,94408	0,88817	0,44408
1,10	0,13567	0,86433	0,72867	0,36433	1,60	0,05480	0,94520	0,89040	0,44520
1,11	0,13350	0,86650	0,73300	0,36650	1,61	0,05370	0,94630	0,89260	0,44630
1,12	0,13136	0,86864	0,73729	0,36864	1,62	0,05262	0,94738	0,89477	0,44738
1,13	0,12924	0,87076	0,74152	0,37076	1,63	0,05155	0,94845	0,89690	0,44845
1,14	0,12714	0,87286	0,74571	0,37286	1,64	0,05050	0,94950	0,89899	0,44950
1,15	0,12507	0,87493	0,74986	0,37493	1,65	0,04947	0,95053	0,90106	0,45053
1,16	0,12302	0,87698	0,75395	0,37698	1,66	0,04846	0,95154	0,90309	0,45154
1,17	0,12100	0,87900	0,75800	0,37900	1,67	0,04746	0,95254	0,90508	0,45254
1,18	0,11900	0,88100	0,76200	0,38100	1,68	0,04648	0,95352	0,90704	0,45352
1,19	0,11702	0,88298	0,76595	0,38298	1,69	0,04551	0,95449	0,90897	0,45449
1,20	0,11507	0,88493	0,76986	0,38493	1,70	0,04457	0,95543	0,91087	0,45543
1,21	0,11314	0,88686	0,77372	0,38686	1,71	0,04363	0,95637	0,91273	0,45637
1,22	0,11123	0,88877	0,77754	0,38877	1,72	0,04272	0,95728	0,91457	0,45728
1,23	0,10935	0,89065	0,78130	0,39065	1,73	0,04182	0,95818	0,91637	0,45818
1,24	0,10749	0,89251	0,78502	0,39251	1,74	0,04093	0,95907	0,91814	0,45907
1,25	0,10565	0,89435	0,78870	0,39435	1,75	0,04006	0,95994	0,91988	0,45994
1,26	0,10383	0,89617	0,79233	0,39617	1,76	0,03920	0,96080	0,92159	0,46080
1,27	0,10204	0,89796	0,79592	0,39796	1,77	0,03836	0,96164	0,92327	0,46164
1,28	0,10027	0,89973	0,79945	0,39973	1,78	0,03754	0,96246	0,92492	0,46246
1,29	0,09853	0,90147	0,80295	0,40147	1,79	0,03673	0,96327	0,92655	0,46327
1,30	0,09680	0,90320	0,80640	0,40320	1,80	0,03593	0,96407	0,92814	0,46407
1,31	0,09510	0,90490	0,80980	0,40490	1,81	0,03515	0,96485	0,92970	0,46485
1,32	0,09342	0,90658	0,81316	0,40658	1,82	0,03438	0,96562	0,93124	0,46562
1,33	0,09176	0,90824	0,81648	0,40824	1,83	0,03362	0,96638	0,93275	0,46638
1,34	0,09012	0,90988	0,81975	0,40988	1,84	0,03288	0,96712	0,93423	0,46712
1,35	0,08851	0,91149	0,82298	0,41149	1,85	0,03216	0,96784	0,93569	0,46784
1,36	0,08691	0,91309	0,82617	0,41309	1,86	0,03144	0,96856	0,93711	0,46856
1,37	0,08534	0,91466	0,82931	0,41466	1,87	0,03074	0,96926	0,93852	0,46926
1,38	0,08379	0,91621	0,83241	0,41621	1,88	0,03005	0,96995	0,93989	0,46995
1,39	0,08226	0,91774	0,83547	0,41774	1,89	0,02938	0,97062	0,94124	0,47062
1,40	0,08076	0,91924	0,83849	0,41924	1,90	0,02872	0,97128	0,94257	0,47128
1,41	0,07927	0,92073	0,84146	0,42073	1,91	0,02807	0,97193	0,94387	0,47193
1,42	0,07780	0,92220	0,84439	0,42220	1,92	0,02743	0,97257	0,94514	0,47257
1,43	0,07636	0,92364	0,84728	0,42364	1,93	0,02680	0,97320	0,94639	0,47320
1,44	0,07493	0,92507	0,85013	0,42507	1,94	0,02619	0,97381	0,94762	0,47381
1,45	0,07353	0,92647	0,85294	0,42647	1,95	0,02559	0,97441	0,94882	0,47441
1,46	0,07215	0,92785	0,85571	0,42785	1,96	0,02500	0,97500	0,95000	0,47500
1,47	0,07078	0,92922	0,85844	0,42922	1,97	0,02442	0,97558	0,95116	0,47558
1,48	0,06944	0,93056	0,86113	0,43056	1,98	0,02385	0,97615	0,95230	0,47615
1,49	0,06811	0,93189	0,86378	0,43189	1,99	0,02330	0,97670	0,95341	0,47670

Apéndice A (Continuación)

TABLA NORMAL ESTANDAR

ÁREAS BAJO LA CURVA NORMAL ESTÁNDAR



z	c.chica (z)	c.grande (z)	área central	área (0 a z)	z	c.chica (z)	c.grande (z)	área central	área (0 a z)
2,00	0,02275	0,97725	0,95450	0,47725	2,50	0,00621	0,99379	0,98758	0,49379
2,01	0,02222	0,97778	0,95557	0,47778	2,51	0,00604	0,99396	0,98793	0,49396
2,02	0,02169	0,97831	0,95662	0,47831	2,52	0,00587	0,99413	0,98826	0,49413
2,03	0,02118	0,97882	0,95764	0,47882	2,53	0,00570	0,99430	0,98859	0,49430
2,04	0,02068	0,97932	0,95865	0,47932	2,54	0,00554	0,99446	0,98891	0,49446
2,05	0,02018	0,97982	0,95964	0,47982	2,55	0,00539	0,99461	0,98923	0,49461
2,06	0,01970	0,98030	0,96060	0,48030	2,56	0,00523	0,99477	0,98953	0,49477
2,07	0,01923	0,98077	0,96155	0,48077	2,57	0,00508	0,99492	0,98983	0,49492
2,08	0,01876	0,98124	0,96247	0,48124	2,58	0,00494	0,99506	0,99012	0,49506
2,09	0,01831	0,98169	0,96338	0,48169	2,59	0,00480	0,99520	0,99040	0,49520
2,10	0,01786	0,98214	0,96427	0,48214	2,60	0,00466	0,99534	0,99068	0,49534
2,11	0,01743	0,98257	0,96514	0,48257	2,61	0,00453	0,99547	0,99095	0,49547
2,12	0,01700	0,98300	0,96599	0,48300	2,62	0,00440	0,99560	0,99121	0,49560
2,13	0,01659	0,98341	0,96683	0,48341	2,63	0,00427	0,99573	0,99146	0,49573
2,14	0,01618	0,98382	0,96765	0,48382	2,64	0,00415	0,99585	0,99171	0,49585
2,15	0,01578	0,98422	0,96844	0,48422	2,65	0,00402	0,99598	0,99195	0,49598
2,16	0,01539	0,98461	0,96923	0,48461	2,66	0,00391	0,99609	0,99219	0,49609
2,17	0,01500	0,98500	0,96999	0,48500	2,67	0,00379	0,99621	0,99241	0,49621
2,18	0,01463	0,98537	0,97074	0,48537	2,68	0,00368	0,99632	0,99264	0,49632
2,19	0,01426	0,98574	0,97148	0,48574	2,69	0,00357	0,99643	0,99285	0,49643
2,20	0,01390	0,98610	0,97219	0,48610	2,70	0,00347	0,99653	0,99307	0,49653
2,21	0,01355	0,98645	0,97289	0,48645	2,71	0,00336	0,99664	0,99327	0,49664
2,22	0,01321	0,98679	0,97358	0,48679	2,72	0,00326	0,99674	0,99347	0,49674
2,23	0,01287	0,98713	0,97425	0,48713	2,73	0,00317	0,99683	0,99367	0,49683
2,24	0,01255	0,98745	0,97491	0,48745	2,74	0,00307	0,99693	0,99386	0,49693
2,25	0,01222	0,98778	0,97555	0,48778	2,75	0,00298	0,99702	0,99404	0,49702
2,26	0,01191	0,98809	0,97618	0,48809	2,76	0,00289	0,99711	0,99422	0,49711
2,27	0,01160	0,98840	0,97679	0,48840	2,77	0,00280	0,99720	0,99439	0,49720
2,28	0,01130	0,98870	0,97739	0,48870	2,78	0,00272	0,99728	0,99456	0,49728
2,29	0,01101	0,98899	0,97798	0,48899	2,79	0,00264	0,99736	0,99473	0,49736
2,30	0,01072	0,98928	0,97855	0,48928	2,80	0,00256	0,99744	0,99489	0,49744
2,31	0,01044	0,98956	0,97911	0,48956	2,81	0,00248	0,99752	0,99505	0,49752
2,32	0,01017	0,98983	0,97966	0,48983	2,82	0,00240	0,99760	0,99520	0,49760
2,33	0,00990	0,99010	0,98019	0,49010	2,83	0,00233	0,99767	0,99535	0,49767
2,34	0,00964	0,99036	0,98072	0,49036	2,84	0,00226	0,99774	0,99549	0,49774
2,35	0,00939	0,99061	0,98123	0,49061	2,85	0,00219	0,99781	0,99563	0,49781
2,36	0,00914	0,99086	0,98173	0,49086	2,86	0,00212	0,99788	0,99576	0,49788
2,37	0,00889	0,99111	0,98221	0,49111	2,87	0,00205	0,99795	0,99590	0,49795
2,38	0,00866	0,99134	0,98269	0,49134	2,88	0,00199	0,99801	0,99602	0,49801
2,39	0,00842	0,99158	0,98315	0,49158	2,89	0,00193	0,99807	0,99615	0,49807
2,40	0,00820	0,99180	0,98360	0,49180	2,90	0,00187	0,99813	0,99627	0,49813
2,41	0,00798	0,99202	0,98405	0,49202	2,91	0,00181	0,99819	0,99639	0,49819
2,42	0,00776	0,99224	0,98448	0,49224	2,92	0,00175	0,99825	0,99650	0,49825
2,43	0,00755	0,99245	0,98490	0,49245	2,93	0,00169	0,99831	0,99661	0,49831
2,44	0,00734	0,99266	0,98531	0,49266	2,94	0,00164	0,99836	0,99672	0,49836
2,45	0,00714	0,99286	0,98571	0,49286	2,95	0,00159	0,99841	0,99682	0,49841
2,46	0,00695	0,99305	0,98611	0,49305	2,96	0,00154	0,99846	0,99692	0,49846
2,47	0,00676	0,99324	0,98649	0,49324	2,97	0,00149	0,99851	0,99702	0,49851
2,48	0,00657	0,99343	0,98686	0,49343	2,98	0,00144	0,99856	0,99712	0,49856
2,49	0,00639	0,99361	0,98723	0,49361	2,99	0,00139	0,99861	0,99721	0,49861

Apéndice A (Continuación)

TABLA NORMAL ESTANDAR

ÁREAS BAJO LA CURVA NORMAL ESTÁNDAR

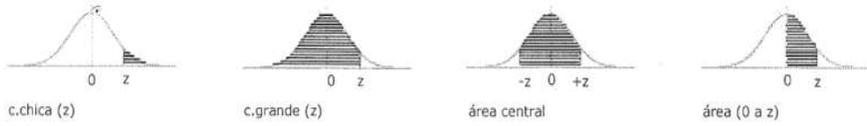


z	c. chica (z)	c. grande (z)	área central	área (0 a z)	z	c. chica (z)	c. grande (z)	área central	área (0 a z)
3,00	0,00135	0,99865	0,99730	0,49865	3,50	0,00023	0,99977	0,99953	0,49977
3,01	0,00131	0,99869	0,99739	0,49869	3,51	0,00022	0,99978	0,99955	0,49978
3,02	0,00126	0,99874	0,99747	0,49874	3,52	0,00022	0,99978	0,99957	0,49978
3,03	0,00122	0,99878	0,99755	0,49878	3,53	0,00021	0,99979	0,99958	0,49979
3,04	0,00118	0,99882	0,99763	0,49882	3,54	0,00020	0,99980	0,99960	0,49980
3,05	0,00114	0,99886	0,99771	0,49886	3,55	0,00019	0,99981	0,99961	0,49981
3,06	0,00111	0,99889	0,99779	0,49889	3,56	0,00019	0,99981	0,99963	0,49981
3,07	0,00107	0,99893	0,99786	0,49893	3,57	0,00018	0,99982	0,99964	0,49982
3,08	0,00104	0,99896	0,99793	0,49896	3,58	0,00017	0,99983	0,99966	0,49983
3,09	0,00100	0,99900	0,99800	0,49900	3,59	0,00017	0,99983	0,99967	0,49983
3,10	0,00097	0,99903	0,99806	0,49903	3,60	0,00016	0,99984	0,99968	0,49984
3,11	0,00094	0,99906	0,99813	0,49906	3,61	0,00015	0,99985	0,99969	0,49985
3,12	0,00090	0,99910	0,99819	0,49910	3,62	0,00015	0,99985	0,99971	0,49985
3,13	0,00087	0,99913	0,99825	0,49913	3,63	0,00014	0,99986	0,99972	0,49986
3,14	0,00084	0,99916	0,99831	0,49916	3,64	0,00014	0,99986	0,99973	0,49986
3,15	0,00082	0,99918	0,99837	0,49918	3,65	0,00013	0,99987	0,99974	0,49987
3,16	0,00079	0,99921	0,99842	0,49921	3,66	0,00013	0,99987	0,99975	0,49987
3,17	0,00076	0,99924	0,99848	0,49924	3,67	0,00012	0,99988	0,99976	0,49988
3,18	0,00074	0,99926	0,99853	0,49926	3,68	0,00012	0,99988	0,99977	0,49988
3,19	0,00071	0,99929	0,99858	0,49929	3,69	0,00011	0,99989	0,99978	0,49989
3,20	0,00069	0,99931	0,99863	0,49931	3,70	0,00011	0,99989	0,99978	0,49989
3,21	0,00066	0,99934	0,99867	0,49934	3,71	0,00010	0,99990	0,99979	0,49990
3,22	0,00064	0,99936	0,99872	0,49936	3,72	0,00010	0,99990	0,99980	0,49990
3,23	0,00062	0,99938	0,99876	0,49938	3,73	0,00010	0,99990	0,99981	0,49990
3,24	0,00060	0,99940	0,99880	0,49940	3,74	0,00009	0,99991	0,99982	0,49991
3,25	0,00058	0,99942	0,99885	0,49942	3,75	0,00009	0,99991	0,99982	0,49991
3,26	0,00056	0,99944	0,99889	0,49944	3,76	0,00008	0,99992	0,99983	0,49992
3,27	0,00054	0,99946	0,99892	0,49946	3,77	0,00008	0,99992	0,99984	0,49992
3,28	0,00052	0,99948	0,99896	0,49948	3,78	0,00008	0,99992	0,99984	0,49992
3,29	0,00050	0,99950	0,99900	0,49950	3,79	0,00008	0,99992	0,99985	0,49992
3,30	0,00048	0,99952	0,99903	0,49952	3,80	0,00007	0,99993	0,99986	0,49993
3,31	0,00047	0,99953	0,99907	0,49953	3,81	0,00007	0,99993	0,99986	0,49993
3,32	0,00045	0,99955	0,99910	0,49955	3,82	0,00007	0,99993	0,99987	0,49993
3,33	0,00043	0,99957	0,99913	0,49957	3,83	0,00006	0,99994	0,99987	0,49994
3,34	0,00042	0,99958	0,99916	0,49958	3,84	0,00006	0,99994	0,99988	0,49994
3,35	0,00040	0,99960	0,99919	0,49960	3,85	0,00006	0,99994	0,99988	0,49994
3,36	0,00039	0,99961	0,99922	0,49961	3,86	0,00006	0,99994	0,99989	0,49994
3,37	0,00038	0,99962	0,99925	0,49962	3,87	0,00005	0,99995	0,99989	0,49995
3,38	0,00036	0,99964	0,99928	0,49964	3,88	0,00005	0,99995	0,99990	0,49995
3,39	0,00035	0,99965	0,99930	0,49965	3,89	0,00005	0,99995	0,99990	0,49995
3,40	0,00034	0,99966	0,99933	0,49966	3,90	0,00005	0,99995	0,99990	0,49995
3,41	0,00032	0,99968	0,99935	0,49968	3,91	0,00005	0,99995	0,99991	0,49995
3,42	0,00031	0,99969	0,99937	0,49969	3,92	0,00004	0,99996	0,99991	0,49996
3,43	0,00030	0,99970	0,99940	0,49970	3,93	0,00004	0,99996	0,99992	0,49996
3,44	0,00029	0,99971	0,99942	0,49971	3,94	0,00004	0,99996	0,99992	0,49996
3,45	0,00028	0,99972	0,99944	0,49972	3,95	0,00004	0,99996	0,99992	0,49996
3,46	0,00027	0,99973	0,99946	0,49973	3,96	0,00004	0,99996	0,99993	0,49996
3,47	0,00026	0,99974	0,99948	0,49974	3,97	0,00004	0,99996	0,99993	0,49996
3,48	0,00025	0,99975	0,99950	0,49975	3,98	0,00003	0,99997	0,99993	0,49997
3,49	0,00024	0,99976	0,99952	0,49976	3,99	0,00003	0,99997	0,99993	0,49997

Apéndice A (Continuación)

TABLA NORMAL ESTANDAR

ÁREAS BAJO LA CURVA NORMAL ESTÁNDAR



z	c.chica (z)	c.grande (z)	área central	área (0 a z)	z	c.chica (z)	c.grande (z)	área central	área (0 a z)
4,00	0,00003	0,99997	0,99994	0,49997	4,25	0,00001	0,99999	0,99998	0,49999
4,01	0,00003	0,99997	0,99994	0,49997	4,26	0,00001	0,99999	0,99998	0,49999
4,02	0,00003	0,99997	0,99994	0,49997	4,27	0,00001	0,99999	0,99998	0,49999
4,03	0,00003	0,99997	0,99994	0,49997	4,28	0,00001	0,99999	0,99998	0,49999
4,04	0,00003	0,99997	0,99995	0,49997	4,29	0,00001	0,99999	0,99998	0,49999
4,05	0,00003	0,99997	0,99995	0,49997	4,30	0,00001	0,99999	0,99998	0,49999
4,06	0,00002	0,99998	0,99995	0,49998	4,31	0,00001	0,99999	0,99998	0,49999
4,07	0,00002	0,99998	0,99995	0,49998	4,32	0,00001	0,99999	0,99998	0,49999
4,08	0,00002	0,99998	0,99995	0,49998	4,33	0,00001	0,99999	0,99999	0,49999
4,09	0,00002	0,99998	0,99996	0,49998	4,34	0,00001	0,99999	0,99999	0,49999
4,10	0,00002	0,99998	0,99996	0,49998	4,35	0,00001	0,99999	0,99999	0,49999
4,11	0,00002	0,99998	0,99996	0,49998	4,36	0,00001	0,99999	0,99999	0,49999
4,12	0,00002	0,99998	0,99996	0,49998	4,37	0,00001	0,99999	0,99999	0,49999
4,13	0,00002	0,99998	0,99996	0,49998	4,38	0,00001	0,99999	0,99999	0,49999
4,14	0,00002	0,99998	0,99997	0,49998	4,39	0,00001	0,99999	0,99999	0,49999
4,15	0,00002	0,99998	0,99997	0,49998	4,40	0,00001	0,99999	0,99999	0,49999
4,16	0,00002	0,99998	0,99997	0,49998	4,41	0,00001	0,99999	0,99999	0,49999
4,17	0,00002	0,99998	0,99997	0,49998	4,42	0,00000	1,00000	0,99999	0,50000
4,18	0,00001	0,99999	0,99997	0,49999	4,43	0,00000	1,00000	0,99999	0,50000
4,19	0,00001	0,99999	0,99997	0,49999	4,44	0,00000	1,00000	0,99999	0,50000
4,20	0,00001	0,99999	0,99997	0,49999					
4,21	0,00001	0,99999	0,99997	0,49999					
4,22	0,00001	0,99999	0,99998	0,49999					
4,23	0,00001	0,99999	0,99998	0,49999					
4,24	0,00001	0,99999	0,99998	0,49999					

Apéndice B

VALORES F DE LA DISTRIBUCIÓN F DE FISHER

Tabla 5. VALORES F DE LA DISTRIBUCIÓN F DE FISHER

$1 - \alpha = 0.9$ v_1 = grados de libertad del numerador
 $1 - \alpha = P(F \leq f_{\alpha, v_1, v_2})$ v_2 = grados de libertad del denominador

$v_2 \backslash v_1$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	39.864	49.500	53.593	55.833	57.240	58.204	58.906	59.439	59.857	60.195	60.473	60.705	60.902	61.073	61.220	61.350	61.465	61.566	61.658	61.740
2	8.526	9.000	9.162	9.243	9.293	9.326	9.349	9.367	9.381	9.392	9.401	9.408	9.415	9.420	9.425	9.429	9.433	9.436	9.439	9.441
3	5.538	5.462	5.391	5.343	5.309	5.285	5.266	5.252	5.240	5.230	5.222	5.216	5.210	5.205	5.200	5.196	5.193	5.190	5.187	5.184
4	4.545	4.325	4.191	4.107	4.051	4.010	3.979	3.955	3.936	3.920	3.907	3.896	3.886	3.878	3.870	3.864	3.858	3.853	3.848	3.844
5	4.050	3.790	3.619	3.520	3.453	3.405	3.368	3.339	3.316	3.297	3.282	3.268	3.257	3.247	3.238	3.230	3.223	3.217	3.212	3.207
6	3.776	3.463	3.269	3.161	3.109	3.055	3.014	2.983	2.959	2.937	2.920	2.905	2.892	2.881	2.871	2.863	2.855	2.848	2.842	2.836
7	3.589	3.257	3.074	2.951	2.883	2.827	2.785	2.752	2.725	2.703	2.684	2.668	2.654	2.643	2.632	2.623	2.615	2.607	2.601	2.595
8	3.458	3.113	2.924	2.806	2.726	2.668	2.624	2.589	2.561	2.538	2.519	2.502	2.488	2.475	2.464	2.454	2.446	2.438	2.431	2.425
9	3.360	3.006	2.813	2.693	2.611	2.551	2.505	2.469	2.440	2.416	2.396	2.379	2.364	2.351	2.340	2.330	2.320	2.312	2.305	2.298
10	3.285	2.924	2.728	2.605	2.522	2.461	2.414	2.377	2.347	2.323	2.302	2.284	2.269	2.255	2.244	2.233	2.224	2.215	2.208	2.201
11	3.225	2.860	2.660	2.536	2.451	2.389	2.342	2.304	2.274	2.248	2.227	2.209	2.193	2.179	2.167	2.156	2.147	2.138	2.130	2.123
12	3.177	2.807	2.606	2.480	2.394	2.331	2.283	2.245	2.214	2.188	2.166	2.147	2.131	2.117	2.105	2.094	2.084	2.075	2.067	2.060
13	3.136	2.763	2.560	2.434	2.347	2.283	2.234	2.195	2.164	2.138	2.116	2.097	2.080	2.066	2.053	2.042	2.032	2.023	2.014	2.007
14	3.102	2.726	2.522	2.395	2.307	2.243	2.193	2.154	2.122	2.095	2.073	2.054	2.037	2.022	2.010	1.998	1.988	1.978	1.970	1.962
15	3.073	2.695	2.490	2.361	2.273	2.209	2.158	2.119	2.086	2.059	2.037	2.017	2.000	1.985	1.972	1.961	1.950	1.941	1.932	1.924
16	3.048	2.668	2.462	2.333	2.244	2.179	2.128	2.088	2.055	2.028	2.005	1.985	1.968	1.953	1.940	1.928	1.917	1.908	1.899	1.891
17	3.026	2.645	2.437	2.308	2.218	2.152	2.102	2.061	2.028	2.001	1.978	1.958	1.940	1.925	1.912	1.900	1.889	1.879	1.870	1.862
18	3.007	2.624	2.416	2.286	2.196	2.130	2.079	2.038	2.005	1.977	1.954	1.933	1.916	1.900	1.887	1.875	1.864	1.854	1.845	1.837
19	2.990	2.606	2.397	2.266	2.176	2.109	2.058	2.017	1.984	1.956	1.932	1.912	1.894	1.878	1.865	1.852	1.841	1.831	1.822	1.814
20	2.975	2.589	2.380	2.249	2.158	2.091	2.040	1.999	1.965	1.937	1.913	1.892	1.875	1.859	1.845	1.833	1.821	1.811	1.802	1.794
21	2.961	2.575	2.365	2.233	2.142	2.075	2.023	1.982	1.948	1.920	1.896	1.875	1.857	1.841	1.827	1.815	1.803	1.793	1.784	1.776
22	2.949	2.561	2.351	2.219	2.128	2.060	2.008	1.967	1.933	1.904	1.880	1.859	1.841	1.825	1.811	1.799	1.787	1.777	1.768	1.759
23	2.937	2.549	2.339	2.207	2.115	2.047	1.995	1.953	1.919	1.890	1.866	1.845	1.827	1.811	1.796	1.784	1.772	1.762	1.753	1.744
24	2.927	2.538	2.327	2.195	2.103	2.035	1.983	1.941	1.906	1.877	1.853	1.832	1.814	1.797	1.783	1.770	1.759	1.748	1.739	1.730
25	2.918	2.528	2.317	2.184	2.092	2.024	1.971	1.929	1.895	1.866	1.841	1.820	1.802	1.785	1.771	1.758	1.746	1.736	1.726	1.718
26	2.909	2.519	2.307	2.174	2.082	2.014	1.961	1.919	1.884	1.855	1.830	1.809	1.790	1.774	1.760	1.747	1.735	1.724	1.715	1.706
27	2.901	2.511	2.299	2.165	2.073	2.005	1.952	1.909	1.874	1.845	1.820	1.799	1.780	1.764	1.749	1.736	1.724	1.714	1.704	1.695
28	2.894	2.503	2.291	2.157	2.064	1.996	1.943	1.900	1.865	1.836	1.811	1.790	1.771	1.754	1.740	1.726	1.715	1.704	1.694	1.685
29	2.887	2.495	2.283	2.149	2.057	1.988	1.935	1.892	1.857	1.827	1.802	1.781	1.762	1.745	1.731	1.717	1.705	1.695	1.685	1.676
30	2.881	2.489	2.276	2.142	2.049	1.980	1.927	1.884	1.849	1.819	1.794	1.773	1.754	1.737	1.722	1.709	1.697	1.686	1.676	1.667
40	2.835	2.440	2.226	2.091	1.997	1.927	1.873	1.829	1.793	1.763	1.737	1.715	1.695	1.678	1.662	1.649	1.636	1.625	1.615	1.605
50	2.809	2.412	2.197	2.061	1.966	1.895	1.840	1.795	1.759	1.729	1.703	1.680	1.660	1.643	1.627	1.613	1.600	1.588	1.578	1.568
60	2.791	2.393	2.177	2.041	1.946	1.875	1.819	1.775	1.738	1.707	1.680	1.657	1.637	1.619	1.603	1.589	1.576	1.564	1.553	1.543
70	2.779	2.380	2.164	2.027	1.931	1.860	1.804	1.760	1.723	1.691	1.665	1.641	1.621	1.603	1.587	1.572	1.559	1.547	1.536	1.526
80	2.769	2.370	2.154	2.016	1.921	1.849	1.793	1.748	1.711	1.680	1.653	1.629	1.609	1.590	1.574	1.559	1.546	1.534	1.523	1.513
90	2.762	2.363	2.146	2.008	1.912	1.841	1.785	1.739	1.702	1.670	1.643	1.620	1.599	1.581	1.564	1.550	1.536	1.524	1.513	1.503
100	2.756	2.356	2.139	2.002	1.906	1.834	1.778	1.732	1.695	1.663	1.636	1.612	1.592	1.573	1.557	1.542	1.528	1.516	1.505	1.494
200	2.731	2.329	2.111	1.973	1.876	1.804	1.747	1.701	1.663	1.631	1.603	1.579	1.558	1.539	1.522	1.507	1.493	1.480	1.468	1.458
500	2.716	2.313	2.095	1.956	1.859	1.786	1.729	1.683	1.644	1.612	1.583	1.559	1.537	1.518	1.501	1.485	1.471	1.458	1.446	1.435
1000	2.711	2.308	2.089	1.950	1.853	1.780	1.723	1.676	1.638	1.605	1.577	1.552	1.531	1.511	1.494	1.478	1.464	1.451	1.439	1.428

Elaborada por Irene Patricia Valdez y Albano.

Apéndice B (Continuación)

VALORES F DE LA DISTRIBUCIÓN F DE FISHER

Tabla 5. VALORES F DE LA DISTRIBUCIÓN F DE FISHER

$1 - \alpha = 0.9$

$1 - \alpha = P(F \leq f_{\alpha, v_1, v_2})$

$v_2 \backslash v_1$	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	40	50	60	70	80	90	100	200	500	1000
1	61.815	61.683	61.945	62.002	62.055	62.103	62.148	62.189	62.229	62.265	62.529	62.668	62.794	62.871	62.927	62.972	63.007	63.167	63.264	63.296
2	9.444	9.446	9.448	9.450	9.451	9.453	9.454	9.456	9.457	9.458	9.466	9.471	9.475	9.477	9.479	9.480	9.481	9.486	9.489	9.490
3	5.182	5.180	5.178	5.176	5.175	5.173	5.172	5.170	5.169	5.168	5.160	5.155	5.151	5.149	5.147	5.145	5.144	5.139	5.136	5.135
4	3.841	3.837	3.834	3.831	3.828	3.826	3.823	3.821	3.819	3.817	3.804	3.795	3.790	3.786	3.782	3.780	3.778	3.769	3.764	3.762
5	3.202	3.198	3.194	3.191	3.187	3.184	3.181	3.179	3.176	3.174	3.157	3.147	3.140	3.135	3.132	3.129	3.126	3.116	3.103	3.107
6	2.831	2.827	2.822	2.818	2.815	2.811	2.808	2.805	2.803	2.800	2.781	2.770	2.762	2.756	2.752	2.749	2.746	2.734	2.727	2.725
7	2.589	2.584	2.580	2.575	2.571	2.568	2.564	2.561	2.558	2.555	2.535	2.523	2.514	2.508	2.504	2.500	2.497	2.484	2.476	2.473
8	2.419	2.414	2.409	2.404	2.400	2.396	2.392	2.389	2.386	2.383	2.361	2.346	2.339	2.333	2.328	2.324	2.321	2.307	2.299	2.295
9	2.292	2.287	2.282	2.277	2.272	2.268	2.265	2.261	2.258	2.255	2.232	2.216	2.208	2.202	2.196	2.192	2.189	2.174	2.165	2.162
10	2.194	2.189	2.183	2.178	2.174	2.170	2.166	2.162	2.159	2.155	2.132	2.117	2.107	2.100	2.095	2.090	2.087	2.071	2.062	2.059
11	2.117	2.111	2.105	2.100	2.095	2.091	2.087	2.083	2.080	2.076	2.052	2.036	2.026	2.019	2.013	2.009	2.005	1.989	1.979	1.975
12	2.053	2.047	2.041	2.036	2.031	2.027	2.022	2.019	2.015	2.011	1.986	1.970	1.960	1.952	1.946	1.942	1.938	1.921	1.911	1.907
13	2.000	1.994	1.988	1.983	1.978	1.973	1.969	1.965	1.961	1.958	1.931	1.915	1.904	1.896	1.890	1.886	1.882	1.864	1.853	1.850
14	1.955	1.949	1.943	1.938	1.933	1.928	1.923	1.919	1.916	1.912	1.885	1.869	1.857	1.849	1.843	1.838	1.834	1.815	1.805	1.801
15	1.917	1.911	1.905	1.899	1.894	1.889	1.885	1.880	1.876	1.873	1.845	1.828	1.817	1.808	1.802	1.797	1.793	1.774	1.763	1.759
16	1.884	1.877	1.871	1.866	1.860	1.855	1.851	1.847	1.843	1.839	1.811	1.793	1.782	1.773	1.766	1.761	1.757	1.738	1.726	1.722
17	1.855	1.848	1.842	1.836	1.831	1.826	1.821	1.817	1.813	1.809	1.781	1.763	1.751	1.742	1.735	1.730	1.726	1.706	1.694	1.690
18	1.829	1.823	1.816	1.810	1.805	1.800	1.795	1.791	1.787	1.783	1.754	1.736	1.723	1.714	1.707	1.702	1.698	1.678	1.665	1.661
19	1.807	1.800	1.793	1.787	1.782	1.777	1.772	1.767	1.763	1.759	1.730	1.711	1.699	1.690	1.683	1.677	1.673	1.652	1.639	1.635
20	1.786	1.779	1.773	1.767	1.761	1.756	1.751	1.746	1.742	1.738	1.708	1.690	1.677	1.667	1.660	1.655	1.650	1.629	1.616	1.612
21	1.768	1.761	1.754	1.748	1.742	1.737	1.732	1.728	1.723	1.719	1.689	1.670	1.657	1.647	1.640	1.634	1.630	1.608	1.595	1.591
22	1.751	1.744	1.737	1.731	1.726	1.720	1.715	1.711	1.706	1.702	1.671	1.652	1.639	1.629	1.622	1.616	1.611	1.590	1.576	1.571
23	1.736	1.729	1.722	1.716	1.710	1.705	1.700	1.695	1.691	1.686	1.655	1.636	1.622	1.613	1.606	1.599	1.594	1.572	1.558	1.554
24	1.722	1.715	1.708	1.702	1.696	1.691	1.686	1.681	1.676	1.672	1.641	1.621	1.607	1.597	1.590	1.584	1.579	1.556	1.542	1.538
25	1.710	1.702	1.695	1.689	1.683	1.678	1.672	1.668	1.663	1.659	1.627	1.607	1.593	1.583	1.576	1.569	1.565	1.542	1.527	1.523
26	1.698	1.690	1.683	1.677	1.671	1.666	1.660	1.655	1.651	1.647	1.615	1.594	1.581	1.570	1.562	1.556	1.551	1.528	1.514	1.509
27	1.687	1.680	1.673	1.666	1.660	1.655	1.649	1.645	1.640	1.636	1.603	1.583	1.569	1.558	1.550	1.544	1.539	1.515	1.501	1.496
28	1.677	1.669	1.662	1.656	1.650	1.644	1.639	1.634	1.630	1.625	1.592	1.572	1.558	1.547	1.539	1.533	1.528	1.504	1.489	1.484
29	1.668	1.660	1.653	1.647	1.640	1.635	1.630	1.625	1.620	1.616	1.583	1.562	1.547	1.537	1.529	1.522	1.517	1.493	1.478	1.472
30	1.659	1.651	1.644	1.638	1.632	1.626	1.621	1.616	1.611	1.606	1.573	1.552	1.538	1.527	1.519	1.512	1.507	1.482	1.467	1.462
40	1.596	1.588	1.581	1.574	1.568	1.562	1.556	1.551	1.546	1.541	1.506	1.483	1.467	1.455	1.447	1.439	1.434	1.406	1.389	1.383
50	1.559	1.551	1.543	1.536	1.529	1.523	1.517	1.512	1.507	1.502	1.465	1.441	1.424	1.412	1.402	1.395	1.388	1.359	1.340	1.333
60	1.534	1.526	1.518	1.511	1.504	1.498	1.492	1.486	1.481	1.476	1.437	1.413	1.395	1.382	1.372	1.364	1.358	1.326	1.306	1.299
70	1.517	1.508	1.500	1.493	1.486	1.479	1.473	1.467	1.462	1.457	1.418	1.392	1.374	1.361	1.350	1.342	1.335	1.302	1.281	1.273
80	1.503	1.495	1.487	1.479	1.472	1.465	1.459	1.453	1.448	1.443	1.403	1.377	1.358	1.344	1.334	1.325	1.318	1.284	1.261	1.253
90	1.493	1.484	1.476	1.468	1.461	1.455	1.448	1.442	1.437	1.432	1.391	1.365	1.346	1.332	1.321	1.312	1.304	1.269	1.245	1.237
100	1.485	1.476	1.468	1.460	1.453	1.446	1.440	1.434	1.428	1.423	1.382	1.355	1.336	1.321	1.310	1.301	1.293	1.257	1.232	1.223
200	1.448	1.438	1.430	1.422	1.414	1.407	1.400	1.394	1.388	1.383	1.339	1.310	1.291	1.273	1.261	1.250	1.242	1.199	1.168	1.157
500	1.425	1.416	1.407	1.399	1.391	1.384	1.377	1.370	1.364	1.358	1.313	1.282	1.260	1.243	1.229	1.218	1.209	1.160	1.122	1.106
1000	1.418	1.408	1.399	1.391	1.383	1.376	1.369	1.362	1.356	1.350	1.304	1.273	1.250	1.232	1.218	1.207	1.197	1.145	1.103	1.084

Elaborada por Irene Patricia Valdez y Alfaro.

Apéndice B (Continuación)

VALORES F DE LA DISTRIBUCIÓN F DE FISHER

Tabla 5. VALORES F DE LA DISTRIBUCIÓN F DE FISHER

$1 - \alpha = 0.95$ v_1 = grados de libertad del numerador
 $1 - \alpha = P(F \leq f_{\alpha, v_1, v_2})$ v_2 = grados de libertad del denominador

$v_2 \backslash v_1$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	161.446	199.499	215.707	224.583	230.160	233.986	236.767	238.864	240.543	241.862	242.961	243.905	244.690	245.363	245.949	246.466	246.917	247.324	247.688	248.016
2	18.513	19.000	19.164	19.247	19.296	19.329	19.353	19.371	19.385	19.396	19.405	19.412	19.419	19.424	19.429	19.433	19.437	19.440	19.443	19.446
3	10.128	9.582	9.277	9.117	9.013	8.941	8.887	8.845	8.812	8.785	8.763	8.745	8.729	8.715	8.703	8.692	8.683	8.675	8.667	8.660
4	7.703	6.944	6.591	6.388	6.256	6.163	6.094	6.041	5.999	5.964	5.936	5.912	5.891	5.873	5.858	5.844	5.832	5.821	5.811	5.803
5	6.608	5.786	5.403	5.192	5.050	4.950	4.876	4.818	4.772	4.735	4.704	4.678	4.655	4.636	4.619	4.604	4.590	4.579	4.568	4.558
6	5.967	5.143	4.757	4.534	4.387	4.284	4.207	4.147	4.099	4.060	4.027	4.000	3.976	3.956	3.938	3.922	3.906	3.895	3.884	3.874
7	5.591	4.737	4.347	4.120	3.972	3.866	3.787	3.726	3.677	3.637	3.603	3.575	3.550	3.529	3.511	3.494	3.480	3.467	3.455	3.445
8	5.318	4.459	4.066	3.838	3.688	3.581	3.500	3.438	3.388	3.347	3.313	3.284	3.259	3.237	3.218	3.202	3.187	3.173	3.161	3.150
9	5.117	4.256	3.863	3.633	3.482	3.374	3.293	3.230	3.179	3.137	3.102	3.073	3.048	3.025	3.006	2.989	2.974	2.960	2.948	2.936
10	4.965	4.103	3.709	3.478	3.326	3.217	3.135	3.072	3.020	2.978	2.943	2.913	2.887	2.865	2.845	2.828	2.812	2.798	2.785	2.774
11	4.844	3.982	3.587	3.357	3.204	3.095	3.012	2.948	2.896	2.854	2.818	2.786	2.761	2.739	2.719	2.701	2.685	2.671	2.658	2.646
12	4.747	3.885	3.490	3.259	3.106	2.996	2.913	2.849	2.796	2.753	2.717	2.687	2.660	2.637	2.617	2.599	2.583	2.568	2.555	2.544
13	4.667	3.806	3.411	3.179	3.026	2.915	2.832	2.767	2.714	2.671	2.635	2.604	2.577	2.554	2.533	2.515	2.499	2.484	2.471	2.459
14	4.600	3.739	3.344	3.112	2.959	2.848	2.764	2.699	2.646	2.602	2.565	2.534	2.507	2.484	2.463	2.445	2.428	2.413	2.400	2.388
15	4.543	3.682	3.287	3.056	2.903	2.792	2.707	2.641	2.588	2.544	2.507	2.475	2.448	2.424	2.403	2.385	2.368	2.353	2.340	2.328
16	4.494	3.634	3.239	3.007	2.854	2.743	2.657	2.591	2.538	2.494	2.456	2.425	2.397	2.373	2.352	2.333	2.317	2.302	2.288	2.276
17	4.451	3.592	3.197	2.965	2.812	2.699	2.614	2.548	2.494	2.450	2.413	2.381	2.353	2.329	2.308	2.289	2.272	2.257	2.243	2.230
18	4.414	3.555	3.160	2.928	2.773	2.661	2.575	2.510	2.456	2.412	2.374	2.342	2.314	2.290	2.269	2.250	2.233	2.217	2.203	2.191
19	4.381	3.522	3.127	2.895	2.740	2.628	2.542	2.477	2.423	2.378	2.340	2.308	2.280	2.256	2.234	2.215	2.198	2.182	2.168	2.155
20	4.351	3.493	3.098	2.866	2.711	2.599	2.514	2.447	2.393	2.348	2.310	2.278	2.250	2.225	2.203	2.184	2.167	2.151	2.137	2.124
21	4.325	3.467	3.072	2.840	2.685	2.573	2.488	2.420	2.366	2.321	2.283	2.250	2.222	2.197	2.176	2.156	2.139	2.123	2.109	2.096
22	4.301	3.443	3.048	2.817	2.661	2.549	2.464	2.397	2.342	2.297	2.259	2.226	2.198	2.173	2.151	2.131	2.114	2.098	2.084	2.071
23	4.279	3.422	3.028	2.796	2.640	2.528	2.442	2.375	2.320	2.275	2.236	2.204	2.175	2.150	2.128	2.109	2.091	2.075	2.061	2.048
24	4.260	3.403	3.009	2.776	2.620	2.508	2.422	2.355	2.300	2.255	2.216	2.183	2.155	2.130	2.108	2.088	2.070	2.054	2.040	2.027
25	4.242	3.385	2.991	2.759	2.603	2.490	2.405	2.337	2.282	2.236	2.196	2.165	2.136	2.111	2.089	2.069	2.051	2.035	2.021	2.007
26	4.225	3.369	2.975	2.743	2.587	2.474	2.388	2.321	2.265	2.220	2.181	2.148	2.119	2.094	2.072	2.052	2.034	2.018	2.003	1.990
27	4.210	3.354	2.960	2.728	2.572	2.459	2.373	2.305	2.250	2.204	2.165	2.132	2.103	2.078	2.056	2.036	2.018	2.002	1.987	1.974
28	4.196	3.340	2.947	2.714	2.558	2.445	2.359	2.291	2.236	2.190	2.151	2.118	2.089	2.064	2.041	2.021	2.003	1.987	1.972	1.959
29	4.183	3.328	2.934	2.701	2.545	2.432	2.346	2.278	2.223	2.177	2.138	2.104	2.075	2.050	2.027	2.007	1.989	1.973	1.958	1.945
30	4.171	3.316	2.922	2.690	2.534	2.421	2.334	2.266	2.211	2.165	2.125	2.092	2.063	2.037	2.015	1.995	1.977	1.960	1.945	1.932
40	4.065	3.232	2.839	2.606	2.449	2.336	2.249	2.180	2.124	2.077	2.038	2.003	1.974	1.948	1.924	1.904	1.885	1.868	1.853	1.839
50	4.034	3.183	2.790	2.557	2.400	2.286	2.199	2.130	2.073	2.026	1.986	1.952	1.921	1.895	1.871	1.850	1.831	1.814	1.798	1.784
60	4.001	3.150	2.758	2.525	2.368	2.254	2.167	2.097	2.040	1.993	1.952	1.917	1.887	1.860	1.836	1.815	1.796	1.778	1.763	1.748
70	3.978	3.128	2.736	2.503	2.346	2.231	2.143	2.074	2.017	1.969	1.928	1.893	1.863	1.836	1.812	1.790	1.771	1.753	1.737	1.722
80	3.960	3.111	2.719	2.486	2.329	2.214	2.126	2.056	1.999	1.951	1.910	1.875	1.845	1.817	1.793	1.772	1.752	1.734	1.718	1.703
90	3.947	3.098	2.706	2.473	2.316	2.201	2.113	2.043	1.986	1.938	1.897	1.861	1.830	1.803	1.779	1.757	1.737	1.720	1.703	1.688
100	3.936	3.087	2.696	2.463	2.305	2.191	2.103	2.032	1.975	1.927	1.886	1.850	1.819	1.792	1.768	1.746	1.725	1.708	1.691	1.676
200	3.868	3.041	2.650	2.417	2.259	2.144	2.056	1.985	1.927	1.878	1.837	1.801	1.769	1.742	1.717	1.694	1.674	1.656	1.639	1.623
500	3.860	3.014	2.623	2.390	2.232	2.117	2.028	1.957	1.899	1.850	1.808	1.772	1.740	1.712	1.686	1.664	1.643	1.625	1.607	1.592
1000	3.851	3.005	2.614	2.381	2.223	2.108	2.019	1.948	1.889	1.840	1.798	1.762	1.730	1.702	1.676	1.654	1.633	1.614	1.597	1.581

Elaborada por Irene Patricia Valdez y Alfaro.

Apéndice B (Continuación)

VALORES F DE LA DISTRIBUCIÓN F DE FISHER

Tabla 5. VALORES F DE LA DISTRIBUCIÓN F DE FISHER

$1 - \alpha = 0.95$

$1 - \alpha = P(F \leq f_{\alpha, v_1, v_2})$

$v_2 \backslash v_1$	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	40	50	60	70	80	90	100	200	500	1000
1	248.307	248.579	248.823	249.052	249.260	249.453	249.631	249.796	249.951	250.096	251.144	251.774	252.196	252.498	252.723	252.896	253.043	253.676	254.062	254.186
2	19.448	19.450	19.452	19.454	19.456	19.457	19.459	19.460	19.461	19.463	19.471	19.476	19.479	19.481	19.483	19.485	19.486	19.491	19.494	19.495
3	8.654	8.648	8.643	8.638	8.634	8.630	8.626	8.623	8.620	8.617	8.594	8.581	8.572	8.566	8.561	8.557	8.554	8.540	8.532	8.529
4	5.795	5.787	5.781	5.774	5.769	5.763	5.759	5.754	5.750	5.746	5.717	5.699	5.688	5.679	5.673	5.668	5.664	5.646	5.635	5.632
5	4.549	4.541	4.534	4.527	4.521	4.515	4.510	4.505	4.500	4.496	4.464	4.444	4.431	4.422	4.415	4.409	4.405	4.385	4.373	4.369
6	3.865	3.856	3.849	3.841	3.835	3.829	3.823	3.818	3.813	3.808	3.774	3.754	3.740	3.730	3.722	3.716	3.712	3.690	3.678	3.673
7	3.435	3.426	3.418	3.410	3.404	3.397	3.391	3.386	3.381	3.376	3.340	3.319	3.304	3.294	3.286	3.280	3.275	3.252	3.239	3.234
8	3.140	3.131	3.123	3.115	3.108	3.102	3.095	3.090	3.084	3.079	3.043	3.020	3.005	2.994	2.986	2.980	2.975	2.951	2.937	2.932
9	2.926	2.917	2.908	2.900	2.893	2.886	2.880	2.874	2.869	2.864	2.826	2.803	2.787	2.776	2.768	2.761	2.756	2.731	2.717	2.712
10	2.764	2.754	2.745	2.737	2.730	2.723	2.716	2.710	2.705	2.700	2.661	2.637	2.621	2.609	2.601	2.594	2.588	2.563	2.548	2.543
11	2.636	2.626	2.617	2.609	2.601	2.594	2.588	2.582	2.576	2.570	2.531	2.507	2.490	2.478	2.469	2.462	2.457	2.431	2.415	2.410
12	2.533	2.523	2.514	2.505	2.498	2.491	2.484	2.478	2.472	2.466	2.426	2.401	2.384	2.372	2.363	2.356	2.350	2.323	2.307	2.302
13	2.448	2.438	2.429	2.420	2.412	2.405	2.398	2.392	2.386	2.380	2.339	2.314	2.297	2.284	2.275	2.267	2.261	2.234	2.218	2.212
14	2.377	2.367	2.357	2.349	2.341	2.333	2.326	2.320	2.314	2.308	2.266	2.241	2.223	2.210	2.201	2.193	2.187	2.159	2.142	2.136
15	2.316	2.306	2.297	2.288	2.280	2.272	2.265	2.259	2.253	2.247	2.204	2.178	2.160	2.147	2.137	2.130	2.123	2.095	2.078	2.072
16	2.264	2.254	2.244	2.235	2.227	2.220	2.212	2.206	2.200	2.194	2.151	2.124	2.106	2.093	2.083	2.075	2.068	2.039	2.022	2.016
17	2.219	2.208	2.199	2.190	2.181	2.174	2.167	2.160	2.154	2.148	2.104	2.077	2.058	2.045	2.035	2.027	2.020	1.991	1.973	1.967
18	2.179	2.168	2.159	2.150	2.141	2.134	2.126	2.119	2.113	2.107	2.063	2.035	2.017	2.003	1.993	1.985	1.978	1.948	1.929	1.923
19	2.144	2.133	2.123	2.114	2.106	2.098	2.090	2.084	2.077	2.071	2.026	1.999	1.980	1.966	1.955	1.947	1.940	1.910	1.891	1.884
20	2.112	2.102	2.092	2.082	2.074	2.066	2.059	2.052	2.045	2.039	1.994	1.966	1.946	1.932	1.922	1.913	1.907	1.875	1.856	1.850
21	2.084	2.073	2.063	2.054	2.045	2.037	2.030	2.023	2.016	2.010	1.965	1.936	1.916	1.902	1.891	1.883	1.876	1.845	1.825	1.818
22	2.059	2.048	2.038	2.028	2.020	2.012	2.004	1.997	1.990	1.984	1.938	1.909	1.889	1.875	1.864	1.856	1.849	1.817	1.797	1.790
23	2.036	2.025	2.014	2.005	1.996	1.988	1.981	1.973	1.967	1.961	1.914	1.885	1.865	1.850	1.839	1.830	1.823	1.791	1.771	1.764
24	2.015	2.003	1.993	1.984	1.975	1.967	1.959	1.952	1.945	1.939	1.892	1.863	1.842	1.828	1.816	1.808	1.800	1.768	1.747	1.740
25	1.995	1.984	1.974	1.964	1.955	1.947	1.939	1.932	1.926	1.919	1.872	1.842	1.822	1.807	1.795	1.787	1.779	1.746	1.725	1.718
26	1.978	1.966	1.956	1.946	1.938	1.929	1.921	1.914	1.907	1.901	1.853	1.823	1.803	1.788	1.776	1.767	1.760	1.726	1.705	1.698
27	1.961	1.950	1.940	1.930	1.921	1.913	1.905	1.898	1.891	1.884	1.836	1.806	1.785	1.770	1.758	1.749	1.742	1.708	1.686	1.679
28	1.946	1.935	1.924	1.915	1.906	1.897	1.889	1.882	1.875	1.869	1.820	1.790	1.769	1.754	1.742	1.733	1.725	1.691	1.669	1.662
29	1.932	1.921	1.910	1.901	1.891	1.883	1.875	1.868	1.861	1.854	1.806	1.775	1.754	1.738	1.726	1.717	1.710	1.675	1.653	1.645
30	1.919	1.908	1.897	1.887	1.878	1.870	1.862	1.854	1.847	1.841	1.792	1.761	1.740	1.724	1.712	1.703	1.695	1.660	1.637	1.630
40	1.826	1.814	1.803	1.793	1.783	1.775	1.766	1.759	1.751	1.744	1.693	1.660	1.637	1.621	1.609	1.597	1.589	1.551	1.526	1.517
50	1.771	1.759	1.748	1.737	1.727	1.718	1.710	1.702	1.694	1.687	1.634	1.599	1.576	1.558	1.544	1.534	1.525	1.484	1.457	1.448
60	1.735	1.722	1.711	1.700	1.690	1.681	1.672	1.664	1.656	1.649	1.594	1.559	1.534	1.516	1.502	1.491	1.481	1.438	1.409	1.399
70	1.709	1.696	1.685	1.674	1.664	1.654	1.646	1.637	1.629	1.622	1.566	1.530	1.505	1.486	1.471	1.459	1.450	1.404	1.374	1.364
80	1.689	1.677	1.665	1.654	1.644	1.634	1.626	1.617	1.609	1.602	1.545	1.508	1.482	1.463	1.448	1.436	1.426	1.379	1.347	1.336
90	1.675	1.662	1.650	1.639	1.629	1.619	1.610	1.601	1.593	1.586	1.528	1.491	1.465	1.445	1.429	1.417	1.407	1.358	1.326	1.314
100	1.663	1.650	1.638	1.627	1.616	1.607	1.598	1.589	1.581	1.573	1.515	1.477	1.450	1.430	1.415	1.402	1.392	1.342	1.308	1.296
200	1.609	1.596	1.583	1.572	1.561	1.551	1.542	1.533	1.524	1.516	1.455	1.415	1.386	1.364	1.346	1.332	1.321	1.263	1.221	1.205
500	1.577	1.563	1.551	1.539	1.528	1.518	1.508	1.499	1.490	1.482	1.419	1.376	1.345	1.322	1.303	1.288	1.275	1.210	1.159	1.138
1000	1.566	1.553	1.540	1.528	1.517	1.507	1.497	1.488	1.479	1.471	1.406	1.363	1.332	1.308	1.289	1.273	1.260	1.190	1.134	1.110

Elaborada por Irene Patricia Valdez y Alhro.

Apéndice B (Continuación)

VALORES F DE LA DISTRIBUCIÓN F DE FISHER

Tabla 5. VALORES F DE LA DISTRIBUCIÓN F DE FISHER

$1 - \alpha = 0.975$ v_1 = grados de libertad del numerador
 $1 - \alpha = P(F \leq f_{\alpha, v_1, v_2})$ v_2 = grados de libertad del denominador

$v_2 \backslash v_1$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	647.793	799.482	864.151	899.599	921.635	937.114	946.203	956.643	963.279	968.634	973.028	976.725	979.839	982.545	984.874	986.911	988.715	990.345	991.800	993.061
2	38.506	39.000	39.166	39.248	39.298	39.331	39.356	39.373	39.387	39.399	39.407	39.415	39.421	39.427	39.431	39.436	39.439	39.442	39.446	39.448
3	17.443	16.644	15.439	15.101	14.865	14.735	14.624	14.540	14.473	14.419	14.374	14.337	14.305	14.277	14.253	14.232	14.213	14.196	14.181	14.167
4	12.218	10.649	9.979	9.604	9.364	9.197	9.074	8.980	8.905	8.844	8.794	8.751	8.715	8.684	8.657	8.633	8.611	8.592	8.575	8.560
5	10.007	8.434	7.764	7.388	7.146	6.978	6.853	6.757	6.681	6.619	6.568	6.525	6.488	6.456	6.428	6.403	6.381	6.362	6.344	6.329
6	8.813	7.280	6.599	6.227	5.988	5.820	5.695	5.600	5.523	5.461	5.410	5.366	5.329	5.297	5.269	5.244	5.222	5.202	5.184	5.168
7	8.073	6.542	5.860	5.523	5.285	5.119	4.995	4.899	4.823	4.761	4.709	4.666	4.628	4.596	4.568	4.543	4.521	4.501	4.483	4.467
8	7.571	6.069	5.416	5.063	4.817	4.652	4.529	4.433	4.357	4.295	4.243	4.200	4.162	4.130	4.101	4.076	4.054	4.034	4.016	3.999
9	7.209	5.715	5.078	4.718	4.464	4.320	4.197	4.102	4.026	3.964	3.912	3.868	3.831	3.796	3.769	3.744	3.722	3.701	3.683	3.667
10	6.937	5.456	4.826	4.468	4.236	4.072	3.950	3.855	3.779	3.717	3.665	3.621	3.583	3.550	3.522	3.496	3.474	3.453	3.435	3.419
11	6.724	5.256	4.630	4.275	4.044	3.881	3.759	3.664	3.588	3.526	3.474	3.430	3.392	3.359	3.330	3.304	3.282	3.261	3.243	3.226
12	6.554	5.096	4.474	4.121	3.891	3.728	3.607	3.512	3.436	3.374	3.321	3.277	3.239	3.206	3.177	3.152	3.129	3.108	3.090	3.073
13	6.414	4.965	4.347	3.996	3.767	3.604	3.483	3.388	3.312	3.250	3.197	3.153	3.115	3.082	3.053	3.027	3.004	2.983	2.965	2.948
14	6.298	4.857	4.242	3.892	3.663	3.501	3.380	3.285	3.209	3.147	3.095	3.050	3.012	2.979	2.949	2.923	2.900	2.879	2.861	2.844
15	6.200	4.765	4.153	3.804	3.576	3.415	3.293	3.199	3.123	3.060	3.008	2.963	2.925	2.891	2.862	2.836	2.813	2.792	2.773	2.756
16	6.115	4.687	4.077	3.729	3.502	3.341	3.219	3.125	3.049	2.986	2.934	2.889	2.851	2.817	2.788	2.761	2.738	2.717	2.698	2.681
17	6.042	4.619	4.011	3.665	3.438	3.277	3.156	3.061	2.985	2.922	2.870	2.825	2.786	2.753	2.723	2.697	2.673	2.652	2.633	2.616
18	5.978	4.580	3.964	3.620	3.392	3.231	3.100	3.005	2.929	2.866	2.814	2.769	2.730	2.696	2.667	2.640	2.617	2.596	2.576	2.559
19	5.922	4.528	3.903	3.559	3.331	3.172	3.051	2.956	2.880	2.817	2.765	2.720	2.681	2.647	2.617	2.591	2.567	2.546	2.526	2.509
20	5.871	4.461	3.859	3.515	3.289	3.128	3.007	2.913	2.837	2.774	2.721	2.676	2.637	2.603	2.573	2.547	2.523	2.501	2.482	2.464
21	5.827	4.420	3.819	3.475	3.250	3.090	2.969	2.874	2.798	2.735	2.682	2.637	2.598	2.564	2.534	2.507	2.483	2.462	2.442	2.425
22	5.786	4.383	3.783	3.440	3.215	3.055	2.934	2.839	2.763	2.700	2.647	2.602	2.563	2.528	2.498	2.472	2.448	2.426	2.407	2.389
23	5.750	4.349	3.750	3.408	3.183	3.023	2.902	2.806	2.731	2.668	2.615	2.570	2.531	2.497	2.466	2.440	2.416	2.394	2.374	2.357
24	5.717	4.319	3.721	3.379	3.155	2.995	2.874	2.779	2.703	2.640	2.586	2.541	2.502	2.468	2.437	2.411	2.386	2.365	2.345	2.327
25	5.686	4.291	3.694	3.353	3.129	2.969	2.848	2.753	2.677	2.613	2.560	2.515	2.476	2.441	2.411	2.384	2.360	2.338	2.318	2.300
26	5.659	4.265	3.670	3.329	3.105	2.945	2.824	2.729	2.653	2.590	2.536	2.491	2.452	2.417	2.387	2.360	2.335	2.314	2.294	2.276
27	5.633	4.242	3.647	3.307	3.083	2.923	2.802	2.707	2.631	2.568	2.514	2.469	2.429	2.395	2.364	2.337	2.313	2.291	2.271	2.253
28	5.610	4.221	3.626	3.286	3.063	2.903	2.782	2.687	2.611	2.547	2.494	2.448	2.409	2.374	2.344	2.317	2.292	2.270	2.251	2.232
29	5.588	4.201	3.607	3.267	3.044	2.884	2.763	2.668	2.592	2.529	2.475	2.430	2.390	2.355	2.325	2.298	2.273	2.251	2.231	2.213
30	5.568	4.182	3.589	3.250	3.026	2.867	2.746	2.651	2.575	2.511	2.458	2.412	2.372	2.338	2.307	2.280	2.255	2.233	2.213	2.195
40	5.424	4.051	3.463	3.126	2.904	2.744	2.624	2.529	2.452	2.388	2.334	2.288	2.248	2.213	2.182	2.154	2.129	2.107	2.086	2.068
50	5.340	3.975	3.390	3.054	2.833	2.674	2.553	2.458	2.381	2.317	2.263	2.216	2.176	2.140	2.109	2.081	2.056	2.033	2.012	1.993
60	5.286	3.925	3.343	3.008	2.786	2.627	2.507	2.412	2.334	2.270	2.216	2.169	2.129	2.093	2.061	2.033	2.008	1.985	1.964	1.944
70	5.247	3.890	3.309	2.975	2.754	2.595	2.474	2.379	2.302	2.237	2.183	2.136	2.095	2.059	2.028	1.999	1.974	1.950	1.929	1.910
80	5.218	3.864	3.284	2.950	2.730	2.571	2.450	2.355	2.277	2.213	2.158	2.111	2.071	2.035	2.003	1.974	1.948	1.925	1.904	1.884
90	5.196	3.844	3.265	2.932	2.711	2.552	2.432	2.336	2.259	2.194	2.140	2.092	2.051	2.015	1.983	1.955	1.929	1.905	1.884	1.864
100	5.179	3.828	3.250	2.917	2.696	2.537	2.417	2.321	2.244	2.179	2.124	2.077	2.036	2.000	1.968	1.939	1.913	1.890	1.868	1.849
200	5.100	3.758	3.182	2.850	2.630	2.472	2.351	2.256	2.178	2.113	2.058	2.010	1.969	1.932	1.900	1.870	1.844	1.820	1.796	1.776
500	5.054	3.716	3.142	2.811	2.592	2.434	2.313	2.217	2.139	2.074	2.019	1.971	1.929	1.892	1.859	1.830	1.803	1.779	1.757	1.736
1000	5.039	3.703	3.129	2.799	2.579	2.421	2.300	2.204	2.126	2.061	2.006	1.958	1.916	1.879	1.846	1.816	1.789	1.765	1.743	1.722

Elaborada por Irene Patricia Valdez y Alfaro.

Apéndice B (Continuación)

VALORES F DE LA DISTRIBUCIÓN F DE FISHER

Tabla 5. VALORES F DE LA DISTRIBUCIÓN F DE FISHER

1 - $\alpha = 0.975$

1 - $\alpha = P(F \leq f_{\alpha, v_1, v_2})$

$v_2 \backslash v_1$	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	40	50	60	70	80	90	100
1	994.303	995.351	996.341	997.272	998.087	998.843	999.542	1000.240	1000.823	1001.405	1005.596	1008.098	1009.787	1011.009	1011.911	1012.610	1013.163
2	39.450	39.452	39.455	39.457	39.458	39.459	39.461	39.462	39.463	39.465	39.473	39.478	39.481	39.484	39.486	39.487	39.488
3	14.155	14.144	14.134	14.124	14.115	14.107	14.100	14.093	14.086	14.081	14.036	14.010	13.992	13.979	13.970	13.962	13.956
4	8.546	8.533	8.522	8.511	8.501	8.492	8.483	8.475	8.468	8.461	8.411	8.381	8.360	8.346	8.335	8.326	8.319
5	6.314	6.301	6.289	6.278	6.268	6.258	6.250	6.242	6.234	6.227	6.175	6.144	6.123	6.107	6.096	6.087	6.080
6	5.154	5.141	5.128	5.117	5.107	5.097	5.088	5.080	5.072	5.065	5.012	4.980	4.959	4.943	4.932	4.923	4.915
7	4.452	4.439	4.426	4.415	4.405	4.395	4.386	4.378	4.370	4.362	4.309	4.276	4.254	4.239	4.227	4.218	4.210
8	3.985	3.971	3.959	3.947	3.937	3.927	3.918	3.909	3.901	3.894	3.840	3.807	3.784	3.768	3.756	3.747	3.739
9	3.652	3.638	3.626	3.614	3.604	3.594	3.584	3.576	3.568	3.560	3.505	3.472	3.449	3.433	3.421	3.411	3.403
10	3.403	3.390	3.377	3.365	3.355	3.345	3.335	3.327	3.319	3.311	3.255	3.221	3.198	3.182	3.169	3.160	3.152
11	3.211	3.197	3.184	3.173	3.162	3.152	3.142	3.133	3.125	3.118	3.061	3.027	3.004	2.987	2.974	2.964	2.956
12	3.057	3.043	3.031	3.019	3.008	2.998	2.988	2.979	2.971	2.963	2.906	2.871	2.848	2.831	2.818	2.808	2.800
13	2.932	2.918	2.905	2.893	2.882	2.872	2.862	2.853	2.845	2.837	2.780	2.744	2.720	2.703	2.690	2.680	2.671
14	2.828	2.814	2.801	2.789	2.778	2.767	2.758	2.749	2.740	2.732	2.674	2.638	2.614	2.597	2.583	2.573	2.565
15	2.740	2.726	2.713	2.701	2.689	2.679	2.669	2.660	2.652	2.644	2.585	2.549	2.524	2.506	2.493	2.482	2.474
16	2.665	2.651	2.637	2.625	2.614	2.603	2.594	2.584	2.576	2.568	2.509	2.472	2.447	2.429	2.415	2.405	2.396
17	2.600	2.585	2.572	2.560	2.548	2.538	2.528	2.519	2.510	2.502	2.442	2.405	2.380	2.362	2.348	2.337	2.329
18	2.543	2.529	2.515	2.503	2.491	2.481	2.471	2.461	2.453	2.445	2.384	2.347	2.321	2.303	2.289	2.278	2.269
19	2.493	2.478	2.465	2.452	2.441	2.430	2.420	2.411	2.402	2.394	2.333	2.295	2.270	2.251	2.237	2.226	2.217
20	2.448	2.434	2.420	2.408	2.396	2.385	2.375	2.366	2.357	2.349	2.287	2.249	2.223	2.205	2.190	2.179	2.170
21	2.409	2.394	2.380	2.368	2.356	2.345	2.335	2.325	2.317	2.308	2.246	2.208	2.182	2.163	2.148	2.137	2.128
22	2.373	2.358	2.344	2.332	2.320	2.309	2.299	2.289	2.280	2.272	2.210	2.171	2.145	2.125	2.111	2.099	2.090
23	2.340	2.325	2.312	2.299	2.287	2.276	2.266	2.256	2.247	2.239	2.176	2.137	2.111	2.091	2.077	2.065	2.056
24	2.311	2.296	2.282	2.269	2.257	2.246	2.236	2.226	2.217	2.209	2.146	2.107	2.080	2.060	2.045	2.034	2.024
25	2.284	2.269	2.255	2.242	2.230	2.219	2.209	2.199	2.190	2.182	2.118	2.079	2.052	2.032	2.017	2.005	1.996
26	2.259	2.244	2.230	2.217	2.205	2.194	2.184	2.174	2.165	2.157	2.093	2.053	2.026	2.005	1.991	1.979	1.969
27	2.237	2.222	2.208	2.195	2.183	2.171	2.161	2.151	2.142	2.133	2.069	2.029	2.002	1.982	1.966	1.954	1.945
28	2.216	2.201	2.187	2.174	2.161	2.150	2.140	2.130	2.121	2.112	2.048	2.007	1.980	1.959	1.944	1.932	1.922
29	2.196	2.181	2.167	2.154	2.142	2.131	2.120	2.110	2.101	2.092	2.028	1.987	1.959	1.939	1.923	1.911	1.901
30	2.178	2.163	2.149	2.136	2.124	2.112	2.102	2.092	2.083	2.074	2.009	1.968	1.940	1.920	1.904	1.892	1.882
40	2.051	2.035	2.020	2.007	1.994	1.983	1.972	1.962	1.952	1.943	1.875	1.832	1.803	1.781	1.764	1.751	1.741
50	1.976	1.960	1.945	1.931	1.919	1.907	1.895	1.885	1.875	1.866	1.796	1.752	1.721	1.698	1.681	1.667	1.656
60	1.927	1.911	1.896	1.882	1.869	1.857	1.845	1.835	1.825	1.815	1.744	1.699	1.667	1.643	1.625	1.611	1.599
70	1.892	1.876	1.861	1.847	1.833	1.821	1.810	1.799	1.789	1.779	1.707	1.660	1.628	1.604	1.585	1.570	1.558
80	1.866	1.850	1.835	1.820	1.807	1.795	1.783	1.772	1.762	1.752	1.679	1.632	1.599	1.574	1.555	1.540	1.527
90	1.846	1.830	1.814	1.800	1.787	1.774	1.763	1.752	1.741	1.731	1.657	1.610	1.576	1.551	1.531	1.516	1.503
100	1.830	1.814	1.798	1.784	1.770	1.758	1.746	1.735	1.725	1.715	1.640	1.592	1.558	1.532	1.512	1.496	1.483
200	1.759	1.742	1.726	1.712	1.698	1.685	1.673	1.661	1.650	1.640	1.562	1.511	1.474	1.447	1.425	1.407	1.393
500	1.717	1.700	1.684	1.669	1.655	1.641	1.629	1.617	1.606	1.596	1.515	1.462	1.423	1.394	1.370	1.351	1.336
1000	1.703	1.686	1.670	1.654	1.640	1.627	1.614	1.603	1.591	1.581	1.499	1.445	1.406	1.376	1.352	1.332	1.316

Elaborada por Irana Patricia Valdéz y Alvaro.

Apéndice B (Continuación)

VALORES F DE LA DISTRIBUCIÓN F DE FISHER

Tabla 5. VALORES F DE LA DISTRIBUCIÓN F DE FISHER

$1 - \alpha = 0.99$ v_1 = grados de libertad del numerador
 $1 - \alpha = P(F \leq f_{\alpha, v_1, v_2})$ v_2 = grados de libertad del denominador

$v_2 \backslash v_1$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	4052.185	4999.340	5403.534	5624.257	5763.955	5859.950	5928.334	5980.954	6022.397	6055.925	6083.399	6106.662	6125.774	6143.004	6156.974	6170.012	6181.186	6191.432	6200.746	6206.662
2	96.502	99.000	99.164	99.251	99.302	99.331	99.357	99.375	99.390	99.397	99.408	99.419	99.422	99.426	99.433	99.437	99.441	99.444	99.448	99.446
3	34.116	30.616	29.457	28.710	28.237	27.911	27.671	27.489	27.345	27.228	27.132	27.052	26.983	26.924	26.872	26.826	26.786	26.751	26.719	26.690
4	21.198	18.000	16.694	15.977	15.522	15.207	14.976	14.799	14.659	14.546	14.452	14.374	14.306	14.249	14.198	14.154	14.114	14.079	14.048	14.019
5	16.258	13.274	12.060	11.392	10.967	10.672	10.456	10.289	10.158	10.051	9.963	9.886	9.825	9.770	9.722	9.680	9.643	9.609	9.580	9.553
6	13.745	10.925	9.780	9.148	8.746	8.466	8.260	8.102	7.976	7.874	7.790	7.718	7.657	7.605	7.559	7.519	7.483	7.451	7.422	7.396
7	12.246	9.547	8.451	7.847	7.460	7.191	6.993	6.840	6.719	6.620	6.536	6.469	6.410	6.359	6.314	6.275	6.240	6.209	6.181	6.155
8	11.259	8.649	7.591	7.006	6.632	6.371	6.178	6.029	5.911	5.814	5.734	5.667	5.609	5.559	5.515	5.477	5.442	5.412	5.384	5.359
9	10.562	8.022	6.992	6.422	6.057	5.802	5.613	5.467	5.351	5.257	5.176	5.111	5.055	5.005	4.962	4.924	4.890	4.860	4.833	4.806
10	10.044	7.559	6.562	5.994	5.636	5.386	5.200	5.057	4.942	4.849	4.772	4.706	4.650	4.601	4.558	4.520	4.487	4.457	4.430	4.405
11	9.646	7.206	6.217	5.668	5.316	5.069	4.886	4.744	4.632	4.539	4.462	4.397	4.342	4.293	4.251	4.213	4.180	4.150	4.123	4.099
12	9.330	6.927	5.953	5.412	5.064	4.821	4.640	4.499	4.388	4.296	4.220	4.155	4.100	4.052	4.010	3.972	3.939	3.910	3.883	3.858
13	9.074	6.701	5.739	5.205	4.862	4.620	4.441	4.302	4.191	4.100	4.025	3.960	3.905	3.857	3.815	3.778	3.745	3.716	3.689	3.665
14	8.862	6.515	5.564	5.035	4.695	4.456	4.278	4.140	4.030	3.939	3.864	3.800	3.745	3.698	3.656	3.619	3.586	3.556	3.529	3.505
15	8.683	6.359	5.417	4.893	4.556	4.318	4.142	4.004	3.895	3.805	3.730	3.666	3.612	3.564	3.522	3.485	3.452	3.423	3.396	3.372
16	8.531	6.226	5.292	4.773	4.437	4.202	4.026	3.890	3.780	3.691	3.616	3.553	3.498	3.451	3.409	3.372	3.339	3.310	3.283	3.259
17	8.400	6.112	5.185	4.669	4.336	4.101	3.927	3.791	3.682	3.593	3.518	3.455	3.401	3.353	3.312	3.275	3.242	3.212	3.186	3.162
18	8.285	6.013	5.092	4.579	4.246	4.015	3.841	3.705	3.597	3.508	3.434	3.371	3.316	3.269	3.227	3.190	3.158	3.128	3.101	3.077
19	8.185	5.926	5.010	4.500	4.171	3.939	3.765	3.631	3.523	3.434	3.360	3.297	3.242	3.195	3.153	3.116	3.084	3.054	3.027	3.003
20	8.096	5.849	4.938	4.431	4.103	3.871	3.699	3.564	3.457	3.368	3.294	3.231	3.177	3.130	3.088	3.051	3.018	2.989	2.962	2.938
21	8.017	5.780	4.874	4.369	4.042	3.812	3.640	3.506	3.399	3.310	3.236	3.173	3.119	3.072	3.030	2.993	2.960	2.931	2.904	2.880
22	7.945	5.719	4.817	4.313	3.986	3.758	3.587	3.453	3.346	3.258	3.184	3.121	3.067	3.019	2.978	2.941	2.908	2.879	2.852	2.827
23	7.881	5.664	4.765	4.264	3.939	3.710	3.539	3.406	3.299	3.211	3.137	3.074	3.020	2.973	2.931	2.894	2.861	2.832	2.805	2.780
24	7.823	5.614	4.718	4.218	3.895	3.667	3.496	3.363	3.256	3.168	3.094	3.032	2.977	2.930	2.889	2.852	2.819	2.790	2.762	2.738
25	7.770	5.568	4.675	4.177	3.855	3.627	3.457	3.324	3.217	3.129	3.056	2.993	2.939	2.892	2.850	2.813	2.780	2.751	2.724	2.699
26	7.721	5.526	4.637	4.140	3.818	3.591	3.421	3.288	3.182	3.094	3.021	2.958	2.904	2.857	2.815	2.778	2.745	2.715	2.688	2.664
27	7.677	5.488	4.601	4.106	3.785	3.558	3.388	3.256	3.149	3.062	2.988	2.926	2.872	2.824	2.783	2.746	2.713	2.683	2.656	2.632
28	7.636	5.453	4.568	4.074	3.754	3.528	3.358	3.226	3.120	3.032	2.959	2.896	2.842	2.795	2.753	2.716	2.683	2.653	2.626	2.602
29	7.598	5.420	4.538	4.045	3.725	3.499	3.330	3.198	3.092	3.005	2.931	2.868	2.814	2.767	2.726	2.689	2.656	2.626	2.599	2.574
30	7.562	5.390	4.510	4.018	3.699	3.473	3.305	3.173	3.067	2.979	2.906	2.843	2.789	2.742	2.700	2.663	2.630	2.600	2.573	2.549
40	7.314	5.178	4.313	3.828	3.514	3.291	3.124	2.993	2.888	2.801	2.727	2.665	2.611	2.563	2.522	2.484	2.451	2.421	2.394	2.369
50	7.171	5.057	4.199	3.720	3.406	3.186	3.020	2.890	2.785	2.698	2.625	2.563	2.508	2.461	2.419	2.382	2.349	2.319	2.290	2.265
60	7.077	4.977	4.126	3.649	3.339	3.119	2.953	2.823	2.718	2.632	2.559	2.496	2.442	2.394	2.352	2.315	2.281	2.251	2.222	2.196
70	7.011	4.922	4.074	3.600	3.291	3.071	2.906	2.777	2.672	2.586	2.512	2.450	2.395	2.348	2.306	2.268	2.234	2.204	2.176	2.150
80	6.963	4.861	4.026	3.553	3.255	3.036	2.871	2.742	2.637	2.551	2.476	2.415	2.361	2.313	2.271	2.233	2.199	2.169	2.141	2.115
90	6.925	4.849	4.007	3.535	3.238	3.019	2.854	2.725	2.611	2.524	2.451	2.390	2.334	2.286	2.244	2.206	2.172	2.142	2.114	2.088
100	6.895	4.824	3.984	3.513	3.206	2.988	2.823	2.694	2.580	2.503	2.430	2.368	2.313	2.265	2.223	2.185	2.151	2.120	2.092	2.067
200	6.763	4.713	3.881	3.414	3.110	2.893	2.730	2.601	2.487	2.411	2.338	2.275	2.220	2.172	2.129	2.091	2.057	2.026	1.997	1.971
500	6.686	4.648	3.821	3.357	3.054	2.838	2.675	2.547	2.443	2.366	2.293	2.230	2.166	2.117	2.075	2.036	2.002	1.970	1.942	1.915
1000	6.680	4.626	3.801	3.338	3.036	2.820	2.657	2.529	2.425	2.339	2.265	2.203	2.140	2.091	2.056	2.018	1.983	1.952	1.923	1.897

Elaborada por Irene Patricia Valdez y Alfaro.

Apéndice B (Continuación)

VALORES F DE LA DISTRIBUCIÓN F DE FISHER

Tabla 5. VALORES F DE LA DISTRIBUCIÓN F DE FISHER

$1 - \alpha = 0.99$

$1 - \alpha = P(F \leq f_{\alpha, v_1, v_2})$

$v_2 \backslash v_1$	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	40	50	60	70	80	90	100	200	500	1000
1	6216.113	6223.097	6228.686	6234.273	6239.861	6244.516	6249.174	6252.900	6257.091	6260.330	6286.427	6302.260	6312.970	6320.806	6326.474	6330.865	6333.925	6348.757	6359.526	6362.796
2	99.451	99.455	99.455	99.455	99.459	99.462	99.462	99.462	99.462	99.466	99.477	99.477	99.484	99.484	99.484	99.488	99.491	99.491	99.499	99.499
3	26.664	26.639	26.617	26.597	26.579	26.562	26.546	26.531	26.517	26.504	26.411	26.354	26.316	26.289	26.269	26.253	26.241	26.183	26.148	26.137
4	13.994	13.970	13.949	13.929	13.911	13.894	13.878	13.864	13.850	13.838	13.745	13.690	13.652	13.626	13.605	13.590	13.577	13.520	13.486	13.475
5	9.528	9.506	9.485	9.466	9.449	9.433	9.418	9.404	9.391	9.379	9.291	9.238	9.202	9.176	9.157	9.142	9.130	9.075	9.042	9.032
6	7.372	7.351	7.331	7.313	7.296	7.281	7.266	7.253	7.240	7.229	7.143	7.091	7.057	7.032	7.013	6.998	6.987	6.934	6.901	6.891
7	6.132	6.111	6.092	6.074	6.058	6.043	6.029	6.016	6.003	5.992	5.908	5.858	5.824	5.799	5.781	5.766	5.755	5.702	5.671	5.660
8	5.336	5.316	5.297	5.279	5.263	5.248	5.234	5.221	5.209	5.198	5.116	5.065	5.032	5.007	4.989	4.975	4.963	4.911	4.880	4.869
9	4.796	4.765	4.746	4.729	4.713	4.698	4.684	4.672	4.660	4.649	4.567	4.517	4.483	4.459	4.441	4.426	4.415	4.363	4.332	4.321
10	4.383	4.363	4.344	4.327	4.311	4.296	4.283	4.270	4.258	4.247	4.165	4.115	4.082	4.058	4.039	4.025	4.014	3.962	3.930	3.920
11	4.077	4.057	4.038	4.021	4.005	3.990	3.977	3.964	3.952	3.941	3.860	3.810	3.776	3.752	3.734	3.719	3.706	3.656	3.624	3.613
12	3.836	3.816	3.798	3.780	3.765	3.750	3.736	3.724	3.712	3.701	3.619	3.569	3.535	3.511	3.493	3.478	3.467	3.414	3.382	3.372
13	3.643	3.622	3.604	3.587	3.571	3.556	3.543	3.530	3.518	3.507	3.425	3.375	3.341	3.317	3.298	3.284	3.272	3.219	3.187	3.176
14	3.483	3.463	3.444	3.427	3.412	3.397	3.383	3.371	3.359	3.348	3.266	3.215	3.181	3.157	3.138	3.124	3.112	3.059	3.026	3.015
15	3.350	3.330	3.311	3.294	3.278	3.264	3.250	3.237	3.225	3.214	3.132	3.081	3.047	3.022	3.004	2.989	2.977	2.923	2.891	2.880
16	3.237	3.216	3.198	3.181	3.165	3.150	3.137	3.124	3.112	3.101	3.018	2.967	2.933	2.908	2.889	2.875	2.863	2.808	2.775	2.764
17	3.139	3.119	3.101	3.083	3.068	3.053	3.039	3.026	3.014	3.003	2.920	2.869	2.835	2.810	2.791	2.776	2.764	2.709	2.675	2.664
18	3.055	3.035	3.016	2.999	2.983	2.968	2.955	2.942	2.930	2.919	2.835	2.784	2.749	2.724	2.705	2.690	2.678	2.623	2.589	2.577
19	2.981	2.961	2.942	2.925	2.909	2.894	2.880	2.866	2.855	2.844	2.761	2.709	2.674	2.649	2.630	2.614	2.602	2.547	2.512	2.501
20	2.916	2.895	2.877	2.859	2.843	2.828	2.815	2.802	2.790	2.778	2.695	2.643	2.608	2.582	2.563	2.548	2.535	2.479	2.445	2.433
21	2.857	2.837	2.818	2.801	2.785	2.770	2.756	2.743	2.731	2.720	2.636	2.584	2.548	2.523	2.503	2.488	2.475	2.419	2.384	2.372
22	2.805	2.785	2.766	2.749	2.733	2.718	2.704	2.691	2.679	2.667	2.583	2.531	2.495	2.469	2.450	2.434	2.422	2.365	2.329	2.317
23	2.758	2.738	2.719	2.702	2.686	2.671	2.657	2.644	2.632	2.620	2.536	2.483	2.447	2.421	2.401	2.386	2.373	2.316	2.280	2.268
24	2.716	2.695	2.676	2.659	2.643	2.628	2.614	2.601	2.589	2.577	2.492	2.440	2.403	2.377	2.357	2.342	2.329	2.271	2.235	2.223
25	2.677	2.657	2.638	2.620	2.604	2.589	2.575	2.562	2.550	2.538	2.453	2.400	2.364	2.337	2.317	2.302	2.289	2.230	2.194	2.182
26	2.642	2.621	2.602	2.585	2.569	2.554	2.540	2.526	2.514	2.503	2.417	2.364	2.327	2.301	2.281	2.265	2.252	2.193	2.156	2.144
27	2.609	2.589	2.570	2.552	2.536	2.521	2.507	2.494	2.481	2.470	2.384	2.330	2.294	2.267	2.247	2.231	2.218	2.159	2.122	2.109
28	2.579	2.559	2.540	2.522	2.506	2.491	2.477	2.464	2.451	2.440	2.354	2.300	2.263	2.236	2.216	2.200	2.187	2.127	2.090	2.077
29	2.552	2.531	2.512	2.495	2.478	2.463	2.449	2.436	2.423	2.412	2.325	2.271	2.234	2.207	2.187	2.171	2.158	2.097	2.060	2.047
30	2.526	2.506	2.487	2.469	2.453	2.437	2.423	2.410	2.398	2.386	2.299	2.245	2.208	2.181	2.160	2.144	2.131	2.070	2.032	2.019
40	2.346	2.325	2.306	2.288	2.271	2.255	2.241	2.228	2.215	2.203	2.114	2.058	2.019	1.991	1.969	1.952	1.938	1.874	1.833	1.819
50	2.242	2.221	2.202	2.183	2.167	2.151	2.136	2.123	2.110	2.098	2.007	1.949	1.909	1.880	1.857	1.839	1.825	1.757	1.713	1.698
60	2.175	2.153	2.134	2.115	2.099	2.083	2.068	2.054	2.041	2.028	1.936	1.877	1.836	1.806	1.783	1.764	1.749	1.678	1.633	1.617
70	2.127	2.106	2.086	2.067	2.050	2.034	2.019	2.005	1.992	1.980	1.886	1.826	1.785	1.754	1.730	1.711	1.695	1.622	1.574	1.558
80	2.092	2.070	2.050	2.032	2.015	1.999	1.983	1.969	1.956	1.944	1.849	1.788	1.746	1.714	1.690	1.671	1.655	1.579	1.530	1.512
90	2.065	2.043	2.023	2.004	1.987	1.971	1.955	1.942	1.928	1.916	1.820	1.759	1.716	1.684	1.659	1.639	1.623	1.546	1.494	1.476
100	2.043	2.021	2.001	1.983	1.965	1.949	1.934	1.919	1.906	1.893	1.797	1.735	1.692	1.659	1.634	1.614	1.598	1.518	1.466	1.447
200	1.947	1.925	1.905	1.886	1.868	1.851	1.836	1.821	1.807	1.794	1.694	1.629	1.583	1.548	1.521	1.499	1.481	1.391	1.328	1.304
500	1.891	1.869	1.848	1.829	1.810	1.794	1.778	1.763	1.749	1.735	1.633	1.566	1.517	1.481	1.452	1.428	1.408	1.308	1.232	1.201
1000	1.872	1.850	1.829	1.810	1.791	1.774	1.758	1.743	1.729	1.716	1.613	1.544	1.495	1.458	1.428	1.404	1.383	1.278	1.195	1.159

Elaborada por Irene Patricia Valdéz y Alfaro.

Apéndice C

Tabla A10: Valores críticos para la prueba de Bartlett
 $b_k(0.01, n)$

n	Numero de poblaciones, k								
	2	3	4	5	6	7	8	9	10
3	0.1411	0.1672	*	*	*	*	*	*	*
4	0.2843	0.3165	0.3475	0.3729	0.3937	0.4110	*	*	*
5	0.3984	0.4303	0.4607	0.4850	0.5046	0.5207	0.5343	0.5458	0.5558
6	0.4850	0.5149	0.5430	0.5653	0.5832	0.5978	0.6100	0.6204	0.6293
7	0.5512	0.5787	0.6045	0.6248	0.6410	0.6542	0.6652	0.6744	0.6824
8	0.6031	0.6282	0.6518	0.6704	0.6851	0.6970	0.7069	0.7153	0.7225
9	0.6445	0.6676	0.6892	0.7062	0.7197	0.7305	0.7395	0.7471	0.7536
10	0.6783	0.6996	0.7195	0.7352	0.7475	0.7575	0.7657	0.7726	0.7786
11	0.7063	0.7260	0.7445	0.7590	0.7703	0.7795	0.7871	0.7935	0.7990
12	0.7299	0.7483	0.7654	0.7789	0.7894	0.7980	0.8050	0.8109	0.8160
13	0.7501	0.7672	0.7832	0.7958	0.8056	0.8135	0.8201	0.8256	0.8303
14	0.7674	0.7835	0.7985	0.8103	0.8195	0.8269	0.8330	0.8382	0.8426
15	0.7825	0.7977	0.8118	0.8229	0.8315	0.8385	0.8443	0.8491	0.8532
16	0.7958	0.8101	0.8235	0.8339	0.8421	0.8486	0.8541	0.8586	0.8625
17	0.8076	0.8211	0.8338	0.8436	0.8514	0.8576	0.8627	0.8670	0.8707
18	0.8181	0.8309	0.8429	0.8523	0.8596	0.8655	0.8704	0.8745	0.8780
19	0.8275	0.8397	0.8512	0.8601	0.8670	0.8727	0.8773	0.8811	0.8845
20	0.8360	0.8476	0.8586	0.8671	0.8737	0.8791	0.8835	0.8871	0.8903
21	0.8437	0.8548	0.8653	0.8734	0.8797	0.8848	0.8890	0.8926	0.8956
22	0.8507	0.8614	0.8714	0.8791	0.8852	0.8901	0.8941	0.8975	0.9004
23	0.8571	0.8673	0.8769	0.8844	0.8902	0.8949	0.8988	0.9020	0.9047
24	0.8630	0.8728	0.8820	0.8892	0.8948	0.8993	0.9030	0.9061	0.9087
25	0.8684	0.8779	0.8867	0.8936	0.8990	0.9034	0.9069	0.9099	0.9124
26	0.8734	0.8825	0.8911	0.8977	0.9029	0.9071	0.9105	0.9134	0.9158
27	0.8781	0.8869	0.8951	0.9015	0.9065	0.9105	0.9138	0.9166	0.9190
28	0.8824	0.8909	0.8988	0.9050	0.9099	0.9138	0.9169	0.9196	0.9219
29	0.8864	0.8946	0.9023	0.9083	0.9130	0.9167	0.9198	0.9224	0.9246
30	0.8902	0.8981	0.9056	0.9114	0.9159	0.9195	0.9225	0.9250	0.9271
40	0.9175	0.9235	0.9291	0.9335	0.9370	0.9397	0.9420	0.9439	0.9455
50	0.9339	0.9387	0.9433	0.9468	0.9496	0.9518	0.9536	0.9551	0.9564
60	0.9449	0.9489	0.9527	0.9557	0.9580	0.9599	0.9614	0.9626	0.9637
80	0.9586	0.9617	0.9646	0.9668	0.9685	0.9699	0.9711	0.9720	0.9718
100	0.9669	0.9663	0.9716	0.9734	0.9748	0.9759	0.9769	0.9776	0.9783

Apéndice C (Continuación)

Tabla A10: Valores críticos para la prueba de Bartlett
 $b_k(0.05, n)$

n	Numero de poblaciones, k								
	2	3	4	5	6	7	8	9	10
3	0.3123	0.3058	*	*	*	*	*	*	*
4	0.2843	0.3165	0.3475	0.3729	0.3937	0.4110	*	*	*
5	0.3984	0.4304	0.4607	0.4850	0.5046	0.5207	0.5343	0.5458	0.5558
6	0.4850	0.5149	0.5430	0.5653	0.5832	0.5978	0.6100	0.6204	0.6293
7	0.5512	0.5787	0.6045	0.6248	0.6410	0.6542	0.6652	0.6744	0.6824
8	0.6031	0.6282	0.6518	0.6704	0.6851	0.6970	0.7069	0.7153	0.7225
9	0.6445	0.6676	0.6892	0.7062	0.7197	0.7305	0.7395	0.7471	0.7536
10	0.6783	0.6996	0.7195	0.7352	0.7475	0.7575	0.7657	0.7726	0.7786
11	0.7063	0.7260	0.7445	0.7590	0.7703	0.7795	0.7871	0.7935	0.7990
12	0.7299	0.7483	0.7654	0.7789	0.7894	0.7980	0.8050	0.8109	0.8160
13	0.7501	0.7672	0.7832	0.7958	0.8056	0.8135	0.8201	0.8256	0.8303
14	0.7674	0.7835	0.7985	0.8103	0.8195	0.8269	0.8330	0.8382	0.8426
15	0.7825	0.7977	0.8118	0.8229	0.8315	0.8385	0.8443	0.8491	0.8532
16	0.7958	0.8101	0.8235	0.8339	0.8421	0.8486	0.8541	0.8586	0.8625
17	0.8076	0.8211	0.8338	0.8436	0.8514	0.8576	0.8627	0.8670	0.8707
18	0.8181	0.8309	0.8429	0.8523	0.8596	0.8655	0.8704	0.8745	0.8780
19	0.8275	0.8397	0.8512	0.8601	0.8670	0.8727	0.8773	0.8811	0.8845
20	0.8360	0.8476	0.8586	0.8671	0.8737	0.8791	0.8835	0.8871	0.8903
21	0.8437	0.8548	0.8653	0.8734	0.8797	0.8848	0.8890	0.8926	0.8956
22	0.8507	0.8614	0.8714	0.8791	0.8852	0.8901	0.8941	0.8975	0.9004
23	0.8571	0.8673	0.8769	0.8844	0.8902	0.8949	0.8988	0.9020	0.9047
24	0.8630	0.8728	0.8820	0.8892	0.8948	0.8993	0.9030	0.9091	0.9087
25	0.8684	0.8779	0.8867	0.8936	0.8990	0.9034	0.9069	0.9099	0.9124
26	0.8734	0.8825	0.8911	0.8977	0.9029	0.9071	0.9105	0.9134	0.9158
27	0.8781	0.8869	0.8951	0.9015	0.9065	0.9105	0.9138	0.9166	0.9190
28	0.8824	0.8909	0.8988	0.9050	0.9099	0.9138	0.9169	0.9196	0.9219
29	0.8864	0.8946	0.9023	0.9083	0.9130	0.9157	0.9198	0.9224	0.9246
30	0.8902	0.8981	0.9056	0.9114	0.9159	0.9195	0.9225	0.9250	0.9271
40	0.9175	0.9235	0.9291	0.9335	0.9370	0.9397	0.9420	0.9339	0.9455
50	0.9339	0.9387	0.9433	0.9468	0.9496	0.9518	0.9536	0.9551	0.9564
60	0.9449	0.9489	0.9527	0.9557	0.9580	0.9599	0.9614	0.9626	0.9637
80	0.9586	0.9617	0.9646	0.9668	0.9685	0.9699	0.9711	0.9720	0.9728
100	0.9669	0.9693	0.9716	0.9734	0.9748	0.9759	0.9769	0.9766	0.9783

Apéndice D

Valores Críticos q' (p , df ; α) para pruebas de Rango Múltiple de Duncan

$\alpha = 0.05$

df	p->	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	17.969	17.969	17.969	17.969	17.969	17.969	17.969	17.969	17.969	17.969	17.969	17.969	17.969	17.969	17.969	17.969	17.969	17.969	17.969	17.969
2	6.085	6.085	6.085	6.085	6.085	6.085	6.085	6.085	6.085	6.085	6.085	6.085	6.085	6.085	6.085	6.085	6.085	6.085	6.085	6.085
3	4.501	4.516	4.516	4.516	4.516	4.516	4.516	4.516	4.516	4.516	4.516	4.516	4.516	4.516	4.516	4.516	4.516	4.516	4.516	4.516
4	3.926	4.013	4.033	4.033	4.033	4.033	4.033	4.033	4.033	4.033	4.033	4.033	4.033	4.033	4.033	4.033	4.033	4.033	4.033	4.033
5	3.635	3.749	3.796	3.814	3.814	3.814	3.814	3.814	3.814	3.814	3.814	3.814	3.814	3.814	3.814	3.814	3.814	3.814	3.814	3.814
6	3.460	3.586	3.649	3.680	3.694	3.697	3.697	3.697	3.697	3.697	3.697	3.697	3.697	3.697	3.697	3.697	3.697	3.697	3.697	3.697
7	3.344	3.477	3.548	3.588	3.611	3.622	3.625	3.625	3.625	3.625	3.625	3.625	3.625	3.625	3.625	3.625	3.625	3.625	3.625	3.625
8	3.261	3.398	3.475	3.521	3.549	3.566	3.575	3.579	3.579	3.579	3.579	3.579	3.579	3.579	3.579	3.579	3.579	3.579	3.579	3.579
9	3.199	3.339	3.420	3.470	3.502	3.523	3.536	3.544	3.547	3.547	3.547	3.547	3.547	3.547	3.547	3.547	3.547	3.547	3.547	3.547
10	3.151	3.293	3.376	3.430	3.465	3.489	3.505	3.516	3.522	3.525	3.525	3.525	3.525	3.525	3.525	3.525	3.525	3.525	3.525	3.525
11	3.113	3.256	3.341	3.397	3.435	3.462	3.480	3.493	3.501	3.506	3.509	3.510	3.510	3.510	3.510	3.510	3.510	3.510	3.510	3.510
12	3.081	3.225	3.312	3.370	3.410	3.439	3.459	3.474	3.484	3.491	3.495	3.498	3.498	3.498	3.498	3.498	3.498	3.498	3.498	3.498
13	3.055	3.200	3.288	3.348	3.389	3.419	3.441	3.458	3.470	3.478	3.484	3.488	3.490	3.490	3.490	3.490	3.490	3.490	3.490	3.490
14	3.033	3.178	3.268	3.328	3.371	3.403	3.426	3.444	3.457	3.467	3.474	3.479	3.482	3.484	3.484	3.484	3.484	3.484	3.484	3.484
15	3.014	3.160	3.250	3.312	3.356	3.389	3.413	3.432	3.446	3.457	3.465	3.471	3.476	3.478	3.480	3.480	3.480	3.480	3.480	3.480
16	2.998	3.144	3.235	3.297	3.343	3.376	3.402	3.422	3.437	3.449	3.458	3.465	3.470	3.473	3.476	3.477	3.477	3.477	3.477	3.477
17	2.984	3.130	3.222	3.285	3.331	3.365	3.392	3.412	3.429	3.441	3.451	3.459	3.465	3.469	3.472	3.474	3.475	3.475	3.475	3.475
18	2.971	3.117	3.210	3.274	3.320	3.356	3.383	3.404	3.421	3.435	3.445	3.454	3.460	3.465	3.469	3.472	3.473	3.474	3.474	3.474
19	2.960	3.106	3.199	3.264	3.311	3.347	3.375	3.397	3.415	3.429	3.440	3.449	3.456	3.462	3.466	3.469	3.472	3.473	3.473	3.473
20	2.950	3.097	3.190	3.255	3.303	3.339	3.368	3.390	3.409	3.423	3.435	3.445	3.452	3.459	3.463	3.467	3.470	3.472	3.473	3.473
21	2.941	3.088	3.181	3.247	3.295	3.332	3.361	3.385	3.403	3.418	3.431	3.441	3.449	3.456	3.461	3.465	3.469	3.471	3.473	3.473
22	2.933	3.080	3.173	3.239	3.288	3.326	3.355	3.379	3.398	3.414	3.427	3.437	3.446	3.453	3.459	3.464	3.467	3.470	3.472	3.472
23	2.926	3.072	3.166	3.233	3.282	3.320	3.350	3.374	3.394	3.410	3.423	3.434	3.443	3.451	3.457	3.462	3.466	3.469	3.472	3.472
24	2.919	3.066	3.160	3.226	3.276	3.315	3.345	3.370	3.390	3.406	3.420	3.431	3.441	3.449	3.455	3.461	3.465	3.469	3.472	3.472
25	2.913	3.059	3.154	3.221	3.271	3.310	3.341	3.366	3.386	3.403	3.417	3.429	3.439	3.447	3.454	3.459	3.464	3.468	3.471	3.471
26	2.907	3.054	3.149	3.216	3.266	3.305	3.336	3.362	3.382	3.400	3.414	3.426	3.436	3.445	3.452	3.458	3.463	3.468	3.471	3.471
27	2.902	3.049	3.144	3.211	3.262	3.301	3.332	3.358	3.379	3.397	3.412	3.424	3.434	3.443	3.451	3.457	3.463	3.467	3.471	3.471
28	2.897	3.044	3.139	3.206	3.257	3.297	3.329	3.355	3.376	3.394	3.409	3.422	3.433	3.442	3.450	3.456	3.462	3.467	3.470	3.470
29	2.892	3.039	3.135	3.202	3.253	3.293	3.326	3.352	3.373	3.392	3.407	3.420	3.431	3.440	3.448	3.455	3.461	3.466	3.470	3.470
30	2.888	3.035	3.131	3.199	3.250	3.290	3.322	3.349	3.371	3.389	3.405	3.418	3.429	3.439	3.447	3.454	3.460	3.466	3.470	3.470

Apéndice D (Continuación)

Valores Críticos q' (p , df ; α) para pruebas de Rango Múltiple de Duncan

$\alpha = 0.05$

df	p->	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
31	2.884	3.031	3.127	3.195	3.246	3.287	3.319	3.346	3.368	3.387	3.403	3.416	3.428	3.438	3.446	3.454	3.460	3.465	3.470	
32	2.881	3.028	3.123	3.192	3.243	3.284	3.317	3.344	3.366	3.385	3.401	3.415	3.426	3.436	3.445	3.453	3.459	3.465	3.470	
33	2.877	3.024	3.120	3.188	3.240	3.281	3.314	3.341	3.364	3.383	3.399	3.413	3.425	3.435	3.444	3.452	3.459	3.465	3.470	
34	2.874	3.021	3.117	3.185	3.238	3.279	3.312	3.339	3.362	3.381	3.398	3.412	3.424	3.434	3.443	3.451	3.458	3.464	3.469	
35	2.871	3.018	3.114	3.183	3.235	3.276	3.309	3.337	3.360	3.379	3.396	3.410	3.423	3.433	3.443	3.451	3.458	3.464	3.469	
36	2.868	3.015	3.111	3.180	3.232	3.274	3.307	3.335	3.358	3.378	3.395	3.409	3.421	3.432	3.442	3.450	3.457	3.464	3.469	
37	2.865	3.013	3.109	3.178	3.230	3.272	3.305	3.333	3.356	3.376	3.393	3.408	3.420	3.431	3.441	3.449	3.457	3.463	3.469	
38	2.863	3.010	3.106	3.175	3.228	3.270	3.303	3.331	3.355	3.375	3.392	3.407	3.419	3.431	3.440	3.449	3.456	3.463	3.469	
39	2.861	3.008	3.104	3.173	3.226	3.268	3.301	3.330	3.353	3.373	3.391	3.406	3.418	3.430	3.440	3.448	3.456	3.463	3.469	
40	2.858	3.005	3.102	3.171	3.224	3.266	3.300	3.328	3.352	3.372	3.389	3.404	3.418	3.429	3.439	3.448	3.456	3.463	3.469	
48	2.843	2.991	3.087	3.157	3.211	3.253	3.288	3.318	3.342	3.363	3.382	3.398	3.412	3.424	3.435	3.445	3.453	3.461	3.468	
60	2.829	2.976	3.073	3.143	3.198	3.241	3.277	3.307	3.333	3.355	3.374	3.391	3.406	3.419	3.431	3.441	3.451	3.460	3.468	
80	2.814	2.961	3.059	3.130	3.185	3.229	3.266	3.297	3.323	3.346	3.366	3.384	3.400	3.414	3.427	3.438	3.449	3.458	3.467	
120	2.800	2.947	3.045	3.116	3.172	3.217	3.254	3.286	3.313	3.337	3.358	3.377	3.394	3.409	3.423	3.435	3.446	3.457	3.466	
240	2.786	2.933	3.031	3.103	3.159	3.205	3.243	3.276	3.304	3.329	3.350	3.370	3.388	3.404	3.418	3.432	3.444	3.455	3.466	
Inf	2.772	2.918	3.017	3.089	3.146	3.193	3.232	3.265	3.294	3.320	3.343	3.363	3.382	3.399	3.414	3.428	3.442	3.454	3.466	

Apéndice D (Continuación)

Valores Críticos q' (p, df; α) para pruebas de Rango Múltiple de Duncan

$\alpha = 0.01$

df	p->	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	90.024	90.024	90.024	90.024	90.024	90.024	90.024	90.024	90.024	90.024	90.024	90.024	90.024	90.024	90.024	90.024	90.024	90.024	90.024	90.024
2	14.036	14.036	14.036	14.036	14.036	14.036	14.036	14.036	14.036	14.036	14.036	14.036	14.036	14.036	14.036	14.036	14.036	14.036	14.036	14.036
3	8.260	8.321	8.321	8.321	8.321	8.321	8.321	8.321	8.321	8.321	8.321	8.321	8.321	8.321	8.321	8.321	8.321	8.321	8.321	8.321
4	6.511	6.677	6.740	6.755	6.755	6.755	6.755	6.755	6.755	6.755	6.755	6.755	6.755	6.755	6.755	6.755	6.755	6.755	6.755	6.755
5	5.702	5.893	5.989	6.040	6.065	6.074	6.074	6.074	6.074	6.074	6.074	6.074	6.074	6.074	6.074	6.074	6.074	6.074	6.074	6.074
6	5.243	5.439	5.549	5.614	5.655	5.680	5.694	5.701	5.703	5.703	5.703	5.703	5.703	5.703	5.703	5.703	5.703	5.703	5.703	5.703
7	4.949	5.145	5.260	5.333	5.383	5.416	5.439	5.454	5.464	5.470	5.472	5.472	5.472	5.472	5.472	5.472	5.472	5.472	5.472	5.472
8	4.745	4.939	5.056	5.134	5.189	5.227	5.256	5.276	5.291	5.302	5.309	5.313	5.316	5.317	5.317	5.317	5.317	5.317	5.317	5.317
9	4.596	4.787	4.906	4.986	5.043	5.086	5.117	5.142	5.160	5.174	5.185	5.193	5.199	5.202	5.205	5.206	5.206	5.206	5.206	5.206
10	4.482	4.671	4.789	4.871	4.931	4.975	5.010	5.036	5.058	5.074	5.087	5.098	5.106	5.112	5.117	5.120	5.122	5.123	5.124	5.124
11	4.392	4.579	4.697	4.780	4.841	4.887	4.923	4.952	4.975	4.994	5.009	5.021	5.031	5.039	5.045	5.050	5.054	5.057	5.059	5.059
12	4.320	4.504	4.622	4.705	4.767	4.815	4.852	4.882	4.907	4.927	4.944	4.957	4.969	4.978	4.986	4.993	4.998	5.002	5.005	5.005
13	4.260	4.442	4.560	4.643	4.706	4.754	4.793	4.824	4.850	4.871	4.889	4.904	4.917	4.927	4.936	4.944	4.950	4.955	4.960	4.960
14	4.210	4.391	4.508	4.591	4.654	4.703	4.743	4.775	4.802	4.824	4.843	4.859	4.872	4.884	4.894	4.902	4.909	4.916	4.921	4.921
15	4.167	4.346	4.463	4.547	4.610	4.660	4.700	4.733	4.760	4.783	4.803	4.820	4.834	4.846	4.857	4.866	4.874	4.881	4.887	4.887
16	4.131	4.308	4.425	4.508	4.572	4.622	4.662	4.696	4.724	4.748	4.768	4.785	4.800	4.813	4.825	4.835	4.843	4.851	4.858	4.858
17	4.099	4.275	4.391	4.474	4.538	4.589	4.630	4.664	4.692	4.717	4.737	4.755	4.771	4.785	4.797	4.807	4.816	4.824	4.832	4.832
18	4.071	4.246	4.361	4.445	4.509	4.559	4.601	4.635	4.664	4.689	4.710	4.729	4.745	4.759	4.771	4.782	4.792	4.801	4.808	4.808
19	4.046	4.220	4.335	4.418	4.483	4.533	4.575	4.610	4.639	4.664	4.686	4.705	4.722	4.736	4.749	4.760	4.771	4.780	4.788	4.788
20	4.024	4.197	4.312	4.395	4.459	4.510	4.552	4.587	4.617	4.642	4.664	4.684	4.701	4.716	4.729	4.741	4.751	4.761	4.769	4.769
21	4.004	4.177	4.291	4.374	4.438	4.489	4.531	4.567	4.597	4.622	4.645	4.664	4.682	4.697	4.711	4.723	4.734	4.743	4.752	4.752
22	3.986	4.158	4.272	4.355	4.419	4.470	4.513	4.548	4.578	4.604	4.627	4.647	4.664	4.680	4.694	4.706	4.718	4.728	4.737	4.737
23	3.970	4.141	4.254	4.337	4.402	4.453	4.496	4.531	4.562	4.588	4.611	4.631	4.649	4.665	4.679	4.692	4.703	4.713	4.723	4.723
24	3.955	4.126	4.239	4.322	4.386	4.437	4.480	4.516	4.546	4.573	4.596	4.616	4.634	4.651	4.665	4.678	4.690	4.700	4.710	4.710
25	3.942	4.112	4.224	4.307	4.371	4.423	4.466	4.502	4.532	4.559	4.582	4.603	4.621	4.638	4.652	4.665	4.677	4.688	4.698	4.698
26	3.930	4.099	4.211	4.294	4.358	4.410	4.452	4.489	4.520	4.546	4.570	4.591	4.609	4.626	4.640	4.654	4.666	4.677	4.687	4.687
27	3.918	4.087	4.199	4.282	4.346	4.397	4.440	4.477	4.508	4.535	4.558	4.579	4.598	4.615	4.630	4.643	4.655	4.667	4.677	4.677
28	3.908	4.076	4.188	4.270	4.334	4.386	4.429	4.465	4.497	4.524	4.548	4.569	4.587	4.604	4.619	4.633	4.646	4.657	4.667	4.667
29	3.898	4.065	4.177	4.260	4.324	4.376	4.419	4.455	4.486	4.514	4.538	4.559	4.578	4.595	4.610	4.624	4.637	4.648	4.659	4.659
30	3.889	4.056	4.168	4.250	4.314	4.366	4.409	4.445	4.477	4.504	4.528	4.550	4.569	4.586	4.601	4.615	4.628	4.640	4.650	4.650
31	3.881	4.047	4.159	4.241	4.305	4.357	4.400	4.436	4.468	4.495	4.519	4.541	4.560	4.577	4.593	4.607	4.620	4.632	4.643	4.643
32	3.873	4.039	4.150	4.232	4.296	4.348	4.391	4.428	4.459	4.487	4.511	4.533	4.552	4.570	4.585	4.600	4.613	4.625	4.635	4.635
33	3.865	4.031	4.142	4.224	4.288	4.340	4.383	4.420	4.452	4.479	4.504	4.525	4.545	4.562	4.578	4.592	4.606	4.618	4.629	4.629
34	3.859	4.024	4.135	4.217	4.281	4.333	4.376	4.413	4.444	4.472	4.496	4.518	4.538	4.555	4.571	4.586	4.599	4.611	4.622	4.622
35	3.852	4.017	4.128	4.210	4.273	4.325	4.369	4.406	4.437	4.465	4.490	4.511	4.531	4.549	4.565	4.579	4.593	4.605	4.616	4.616

Apéndice D (Continuación)

Valores Críticos q' (p , df ; α) para pruebas de Rango Múltiple de Duncan

$\alpha = 0.01$

df	p->	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
36		3.846	4.011	4.121	4.203	4.267	4.319	4.362	4.399	4.431	4.459	4.483	4.505	4.525	4.543	4.559	4.573	4.587	4.599	4.611
37		3.840	4.005	4.115	4.197	4.260	4.312	4.356	4.393	4.425	4.452	4.477	4.499	4.519	4.537	4.553	4.568	4.581	4.594	4.605
38		3.835	3.999	4.109	4.191	4.254	4.306	4.350	4.387	4.419	4.447	4.471	4.493	4.513	4.531	4.548	4.562	4.576	4.589	4.600
39		3.830	3.993	4.103	4.185	4.249	4.301	4.344	4.381	4.413	4.441	4.466	4.488	4.508	4.526	4.542	4.557	4.571	4.584	4.595
40		3.825	3.988	4.098	4.180	4.243	4.295	4.339	4.376	4.408	4.436	4.461	4.483	4.503	4.521	4.537	4.552	4.566	4.579	4.591
48		3.793	3.955	4.064	4.145	4.209	4.261	4.304	4.341	4.374	4.402	4.427	4.450	4.470	4.489	4.506	4.521	4.535	4.548	4.561
60		3.762	3.922	4.030	4.111	4.174	4.226	4.270	4.307	4.340	4.368	4.394	4.417	4.437	4.456	4.474	4.489	4.504	4.518	4.530
80		3.732	3.890	3.997	4.077	4.140	4.192	4.236	4.273	4.306	4.335	4.360	4.384	4.405	4.424	4.442	4.458	4.473	4.487	4.500
120		3.702	3.858	3.964	4.044	4.107	4.158	4.202	4.239	4.272	4.301	4.327	4.351	4.372	4.392	4.410	4.426	4.442	4.456	4.469
240		3.672	3.827	3.932	4.011	4.073	4.125	4.168	4.206	4.239	4.268	4.294	4.318	4.339	4.359	4.378	4.394	4.410	4.425	4.439
Inf		3.643	3.796	3.900	3.978	4.040	4.091	4.135	4.172	4.205	4.235	4.261	4.285	4.307	4.327	4.345	4.363	4.379	4.394	4.408

VII. GLOSARIO

Mercado

- Mercado. Un mercado está formado por todos los clientes potenciales que comparten una necesidad o deseo específico y que podrían estar dispuestos a participar de un intercambio que satisfaga esa necesidad o deseo. En Mercadeo los vendedores constituyen la industria y los compradores el mercado. En Mercadeo se habla del mercado total, potencial, disponible, meta y por el que se penetra. Estos mercados deben cuantificarse con el fin de medir la demanda.
- Mercado total. Es el conjunto de todos los compradores reales y potenciales de un producto.
- Tamaño del mercado. Es el número de compradores que pudieran existir para una oferta de mercado en particular.
- Mercado potencial. Es el conjunto de clientes que manifiesta un grado suficiente de interés en una determinada oferta del mercado.
- Mercado disponible. Es el conjunto de consumidores que tiene interés, ingresos y acceso a una oferta de mercado específica.
- Mercado disponible calificado. Es el conjunto de consumidores que tiene interés, ingresos, acceso y cualidades que concuerdan con la oferta de mercado en particular.
- Mercado meta. Es la parte del mercado disponible calificado que la empresa decidió servir. Recuerde que la empresa debe escoger las necesidades del cliente que ha de satisfacer y las que no. Toda organización tiene un conjunto finito de recursos y capacidades y, por lo tanto, solo puede atender a cierto grupo de clientes y satisfacer una serie limitada de necesidades. Una decisión fundamental es seleccionar el mercado meta.
- Mercado en el que se penetra. Es el conjunto de consumidores que ya ha comprado el producto.

Mercadeo. "Es un proceso social y administrativo mediante el cual grupos e individuos obtienen lo que necesitan y desean a través de generar, ofrecer e intercambiar productos de valor con sus semejantes"

(Kotler, P.). Este concepto se ha ampliado para incluir el estudio de la conducta de transferencia y de transacción. Esta definición de mercadeo se basa en los conceptos esenciales siguientes:

- Necesidad. La necesidad humana es el estado en el que se siente la privación de algunos satisfactores básicos. Vgr: vestido, seguridad, sentido de pertenencia. Las necesidades humanas básicas son pocas.
- Deseo. Consiste en anhelar los satisfactores específicos para satisfacer necesidades profundas. Los deseos humanos son muchos y continuamente están siendo modelados y remodelados por las fuerzas sociales e instituciones.
- Demanda. Consiste en desear productos específicos que están respaldados por la capacidad y la voluntad de adquirirlos.
- Exigencia. Son deseos respaldados por el poder adquisitivo.
- Producto. Es todo aquello que puede ofrecerse para satisfacer una necesidad o un deseo. Según esto, los productos físicos son, en realidad, vehículos que proporcionan servicio. Los servicios son administrados por otros vehículos como personas, lugares, actividades, organizaciones e ideas.
- Valor percibido. Es la estimación que hace el consumidor de la capacidad total del producto para satisfacer sus necesidades.

- Intercambio. Es el acto de obtener de alguien un producto que se desea ofreciendo algo a cambio. El intercambio se describe como un proceso de generación de valor, es decir, cuando ambas partes quedan en mejor situación de la que se encontraban antes de llevarlo a cabo.
- Transacción. Consiste en el comercio de valores entre dos partes.
- Transferencia. Cuando entregamos un obsequio o una contribución de beneficencia y no esperamos recibir nada tangible a cambio. Este comportamiento debe entenderse a través del concepto de intercambio.

Terminología para la medición de la demanda del mercado

La empresa debe seleccionar entre numerosas oportunidades de mercadeo las más atractivas. Por consiguiente debe evaluarlas cuidadosamente para poder elegir sus mercados meta. La empresa debe medir y pronosticar el tamaño, el crecimiento y la utilidad potencial de varias oportunidades de mercadeo. Cuando usted ha seleccionado su mercado meta, necesita preparar proyecciones de demanda y es cuando en la empresa se habla de pronósticos, estimaciones, proyecciones, metas y cuotas de ventas. Los conceptos principales en la medición de la demanda son:

- Demanda total del mercado. La demanda total del mercado para un producto es el volumen total que adquiriría un grupo de clientes definido, en un área geográfica definida, dentro de un período definido, en un ambiente de mercadeo definido, bajo un programa de mercadeo definido. Tenga en cuenta que la demanda total del mercado no es un número fijo sino una función de la demanda del mercado. El nivel estimado de la demanda del mercado estará relacionado con niveles variables de gasto en mercadeo en una industria en particular. A mayores niveles de gasto en mercadeo en una industria mayores niveles de demanda, primero con un índice creciente y luego con uno decreciente. Después de cierto nivel, los gastos de mercadeo que se hagan no estimularán en mayor grado la demanda posterior, lo que sugiere un límite superior en cuanto a la demanda del mercado. Esto sugiere también que hay un límite inferior de demanda del mercado que serán las ventas mínimas que se producirán sin efectuar ningún gasto para estimular la demanda.
- Pronóstico del mercado. Es la demanda de mercado que corresponde a un determinado nivel de gasto en mercadeo en la industria.
- Mercado potencial. Es el límite al que se aproxima la demanda del mercado a medida que los gastos de mercadeo en la industria se aproximan al infinito para un entorno de mercadeo en particular (por ejemplo, un período de recesión o de prosperidad).
- Demanda de la empresa. Es la participación de la empresa en la demanda del mercado y que dependerá de la forma como sean percibidos sus productos, servicios, precios, comunicaciones y distribución, en comparación con la oferta de la competencia.
- Pronóstico de ventas de la empresa. Es el nivel esperado de ventas de la empresa con base en su plan de mercadeo y en el entorno de mercadeo esperado.
- Presupuesto de ventas. Es un cálculo prudente del volumen de ventas esperado y que se utiliza principalmente para tomar decisiones de compras, producción y flujos de efectivo. Los presupuestos de ventas son generalmente un poco más bajos que el pronóstico de ventas de la empresa.
- Cuota de ventas. Es la meta de ventas para una línea de productos, una división de una empresa o un vendedor. Es un instrumento administrativo para estimular el esfuerzo de ventas.
- Potencial de ventas de la empresa. Es el límite aproximado de la demanda de la empresa conforme ésta aumenta sus esfuerzos de mercadeo en relación con sus competidores.

Este potencial es menor que el mercado potencial no importa que los gastos de mercadeo de la empresa aumenten de manera considerable en relación con la competencia.

Términos básicos del pronóstico

- Pronóstico de venta. Es la estimación o previsión de las ventas de un producto (bien o servicio) durante determinado período futuro. La demanda de mercado para un producto es el volumen total susceptible de ser comprado por un determinado grupo de consumidores, en un área geográfica concreta, para un determinado período, en un entorno definido de marketing y bajo un específico programa de marketing. Los pronósticos son igual a las ventas son indicadores de realidades económico-empresariales (básicamente la situación de la industria en el mercado y la participación de la empresa en ese mercado). El pronóstico determina qué puede venderse con base en la realidad, y el plan de ventas permite que esa realidad hipotética se materialice, guiando al resto de los planes operativos de la empresa. El objetivo principal de los pronósticos se transforma entonces en el de convertirse en la entrada para el resto de los planes operativos. El pronóstico de ventas es la proyección en el futuro de la demanda esperada dando un conjunto de restricciones ambientales. Muchas empresas confunden la función de pronósticos con la planeación. La definición de plan de ventas no incluye las actividades de hacer proyecciones de niveles de demanda y ésta es una de las diferenciaciones más importantes a este respecto. De este modo, el sistema de pronósticos se configura como un “sistema de aprendizaje”. Se pretende determinar los errores contenidos en pronósticos basados en los cambios ambientales que los generaron, para de ese modo mejorar su precisión en el futuro.
- Factor de mercado. Es un objeto del mercado que:
 - Existe en el mercado.
 - Es finito y medible.
 - Se relaciona con la demanda de un bien o servicio.

Por ejemplo la cantidad de restaurantes es un factor de mercado ya que se relaciona con la demanda de materia prima alimenticia, vajilla, etc.
- Potencial de ventas de un mercado: Es la venta total de un mismo producto de todas las empresas que lo comercializan, en condiciones óptimas, durante un período determinado. Esto supone dos cosas:
 - 1) Los planes de marketing se diseñaron y ejecutaron a la perfección.
 - 2) Todos los miembros del mercado con deseos de comprar el producto y el dinero para hacerlo, lo hicieron.
- Participación de mercado: Es la porción de mercado que abarcan las ventas totales de un producto en particular. Puede referirse a una empresa o varias, así como a un producto o varios.
- Previsión de ventas o Demanda de la empresa: Es la estimación de ventas que hace una empresa para un período determinado, suponiendo que se aplique un determinado plan de marketing, una estrategia de mercado y otros elementos de negocios. Un pronóstico puede expresarse en unidades físicas o monetarias.

$$Q_i = S_i Q$$

Donde:

Q_i = Demanda de la empresa i

S_i = Cuota de mercado

Q = Demanda total del mercado

Métodos de pronóstico de ventas

- Métodos cuantitativos

- *Análisis de los factores de mercado*: La demanda de un producto siempre se relaciona con el comportamiento de ciertos factores de mercado. Al ser esto cierto, podemos determinar una estimación de venta estudiando los factores relacionados con el producto.
 - *Método de derivación directa*: Se trata de un estudio de los factores relacionados con un producto y las consecuencias directas de su uso y compra, determinando aspectos como desecho, recambio, rotura, moda, etc.
 - *Análisis de correlación*: Mide la relación directa entre dos datos o factores de mercado, se puntúa de 0 (sin relación) a 1 (relación perfecta).
- *Análisis de ventas históricas y la tendencia*: Consiste en pronosticar teniendo en cuenta las ventas y demanda del pasado, considerando factores del momento. No necesariamente el pronóstico es positivo.

-

$$\bar{Q}(t + 1) = \alpha Q_t + (1 - \alpha)Q_t$$

Donde:

$\bar{Q}(t + 1)$ = ventas previstas para el próximo período.

α = constante alisadora comprendida entre 0 y 1.

Q_t = ventas en el período t.

\bar{Q}_t = ventas previstas para el período t.

- *Pruebas de Mercados*: Un empresa vende un producto determinado en una zona restringida a modo de piloto o experimento y mide sus resultados. Se proyectan las ventas y la demanda potencial.

Características de los pronósticos cuantitativos:

- ✓ Los pronósticos casi siempre son incorrectos. Lo importante es centrarnos en el error esperado de cada pronóstico.
- ✓ Los pronósticos son más precisos para grupos o familias de artículos. Casi siempre es más fácil desarrollar un buen pronóstico para una línea de productos que para un producto individual, ya que los errores tienden a cancelarse entre sí a medida que se les agrupa.
- ✓ Los pronósticos son más precisos cuando se hacen para periodos cortos. Son menos las perturbaciones potenciales respecto del futuro próximo que pueden impactar en la demanda de productos. La demanda en periodos futuros más amplios casi siempre resulta menos confiable.
- ✓ Los pronósticos no son sustituto de demanda calculada, Si se cuenta con información de la demanda real no tiene caso obtener pronósticos.

- Métodos cualitativos

Pronósticos generados a partir de información que no contiene una estructura analítica bien definida. Este tipo de pronósticos resulta bastante útil cuando no se cuenta con información histórica (por ejemplo un nuevo producto)

- *Encuesta de las intenciones del comprador:* Consiste en un relevamiento de opinión de deseos o expectativas sobre la compra de un producto. Esto incluirá ítems como precio esperado, calidad, parking, etc. Su limitación está dada por que una cosa es la intención de compra y otra la compra misma.
- *Participación de la fuerza de ventas:* Consiste en pronosticar las ventas con las estimaciones de la fuerza de venta (vendedores, distribuidores, jefes de ventas, etc.). Este método puede generar pronósticos muy precisos si los vendedores son personas competentes ya que el vínculo directo con el mercado los hace personas claves y aptas para hacer dicho pronóstico. La limitante es que por lo general la fuerza de ventas no domina las herramientas estadísticas, métodos, etc.
- *Juicio de los ejecutivos:* Al igual que el método anterior, puede ser acertado si los ejecutivos han sido competentes, pero por lo general se trata más de conjeturas. Una manera de reducir el margen de error es aplicar el método Delphi: Se toma un grupo de conocedores y de formas anónimas opinan, luego se resumen las estimaciones y posteriormente se dan a conocer estas estimaciones a todo el grupo y se les pide que hagan una nueva predicción, esto puede repetirse varias veces. Este método evita que personas de poder influyan en otras o que se “acoplen” varias opiniones en torno a un solo juicio por el mero hecho de opinar como “el otro” o “no desentonar”.
- *Juicio de consultores expertos.*

Características de los pronósticos cualitativos:

- ✓ El pronóstico se basa en el juicio personal o en alguna información cualitativa externa.
- ✓ El pronóstico es subjetivo. El mismo se sesga según la perspectiva optimista o pesimista que tengan las personas.
- ✓ Permite obtener algunos resultados con bastante rapidez.
- ✓ En ocasiones constituye el único método disponible.
- ✓ Se suelen utilizar para productos individuales, o familias de productos pero rara vez para mercados completos.