



**UNIVERSIDAD MICHOACANA
DE
SAN NICOLÁS DE HIDALGO**



FACULTAD DE INGENIERÍA QUÍMICA

**EVIDENCIAS Y PROPUESTAS PARA EL DESARROLLO
ALGEBRAICO DE LOS ESTUDIANTES DE LA FIQ CON EL USO
DE LAS TIC**

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

INGENIERÍO QUÍMICO

PRESENTA:

ROSA MARÍA PORTILLA ZEA

ASESORA DE TESIS

Doctora en Matemática Educativa, Informática Educativa y Ciencias de la
Cognición

GRACIELA ERÉNDIRA NÚÑEZ PALENIUS

CO-ASESORA DE TESIS

Maestra en la Enseñanza de las Matemáticas con Salida Terminal en Educación
Matemática

MARÍA DEL ROSARIO GALLARDO REYES

MORELIA, MICH., MAYO DE 2014

*Las matemáticas no solamente poseen la verdad, sino suprema
belleza, una belleza fría y austera, como la de la escultura, sin
atractivo para la parte más débil de nuestra belleza...*

Bertrand Russell

ÍNDICE

AGRADECIMIENTOS

RESUMEN

CAPÍTULO I. INTRODUCCIÓN	1
1.1 ANTECEDENTES.....	2
Investigaciones en pensamiento algebraico.....	3
La construcción de conceptos.....	5
Tecnologías de la Información y la Comunicación.....	6
1.2 JUSTIFICACIÓN	8
1.3 OBJETIVO GENERAL.....	10
1.4 OBJETIVOS PARTICULARES.....	10
1.5 HIPÓTESIS.....	10
1.6 PREGUNTAS DE INVESTIGACIÓN.....	11
 CAPÍTULO II. MARCO TEÓRICO.....	 12
2.1 TEORÍA DE REGISTROS DE REPRESENTACIÓN SEMIÓTICA.....	12
El concepto de representación.....	13
Semiótica y Noética en el aprendizaje de las matemáticas.....	13
Sistemas, Registros y Representaciones Semióticas.....	14
2.2 APRENDIZAJE COLABORATIVO	15
Teoría sociocultural de Vygotsky.....	16
Teoría del aprendizaje mediado de Feuerstein.....	17
Piaget y la educación.....	18
Zona de Desarrollo Próximo.....	20
El modelo del aprendizaje colaborativo.....	21
2.3 TECNOLOGÍAS DE LA INFORMACIÓN Y LA COMUNICACIÓN EN LA EDUCACIÓN.....	23

Introducción de las TIC en la formación de los estudiantes universitarios.....	24
Las TIC en la enseñanza de las matemáticas.....	24
CAPÍTULO III. METODOLOGÍA.....	29
3.1 INTRODUCCIÓN	29
3.2 DISEÑO DE LAS ACTIVIDADES.....	29
3.3 METODOLOGÍA DE LA EXPERIMENTACIÓN.....	31
3.4 EXPERIMENTACIÓN.....	32
CAPÍTULO IV. ANÁLISIS Y DISCUSIÓN DE RESULTADOS.....	34
CAPÍTULO V. CONCLUSIONES	44
REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS	47
ANEXOS	51

AGRADECIMIENTOS

Quiero expresar mi más sincero agradecimiento a todas las personas que, de una manera u otra, han contribuido a que este trabajo sea una realidad.

A mis padres, Manuel Portilla y Rosa María Zea, por apoyarme y animarme siempre para lograr la culminación de mis metas. Por su cariño y confianza incondicional.

A mis asesoras, Dra. Graciela Eréndira Núñez Palenius y M. E.M. María del Rosario Gallardo Reyes, por permitirme trabajar a su lado y por haber confiado en mí para la realización de este proyecto.

A mis profesores, por guiarme y descubrir un mundo nuevo de conocimientos.

A Dios por haberme dado fuerzas para llegar hasta donde estoy ahorita y porque nunca me dejo flaquear.

RESUMEN

En este trabajo de tesis se hizo presente el uso de la calculadora TI-Nspire CX CAS, la cual fortalece un ambiente didáctico e influye en el aprendizaje de los estudiantes. Se intenta motivar el estudio y desarrollo de los conceptos algebraicos con mediación de las TIC (Tecnologías de la Información y la Comunicación), por medio de actividades que despierten el interés de los estudiantes y desarrollen en ellos habilidades de razonamiento y comprensión de los conceptos involucrados en las mismas.

Esta tecnología se aplicó a los alumnos del primer año de la licenciatura de la Facultad de Ingeniería Química de la Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, la cual utilizaron para resolver actividades con tópicos de álgebra en un ambiente de trabajo colaborativo. Dichas actividades fueron elaboradas con la finalidad de desarrollar razonamientos que lleven al estudiante a lograr aprendizajes significativos.

Actualmente se promueve el uso de las nuevas tecnologías y con mayor énfasis en la enseñanza de las matemáticas. Las calculadoras han incorporado un gran número de herramientas que permiten descargar en ellas gran parte del trabajo operativo. Esto permite que en los cursos de matemáticas se puedan ilustrar más los procesos, modelar con problemas de aplicación, así como ampliar el análisis de los mismos.

ABSTRACT

This thesis was done using the TI-Nspire CX CAS calculator which strengthens an educational environment and influences student learning. The work tries to encourage the study and development of algebraic concepts with mediation of ICT (Information and Communication Technology), through activities that arouse student's interest and develop reasoning and comprehension skills of the concepts involved.

This technology was applied to students enrolled in the first year of undergraduate chemical engineering in the Faculty of Chemical Engineering part of the Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, which was used to solve topical algebra activities in a collaborative work environment. These activities were developed with the aim of developing student's reasoning in order to achieve meaningful learning.

The use of new technologies with a major emphasis on teaching mathematics has been promoted lately. Calculators have incorporated a great number of tools that permit the omission of operative work. The latter permits mathematic courses to focus more on the illustration of processes, modeling applications as well as placing greater emphasis on the analysis of said problems.

Keywords:CAS,TIC,Technologys,Enviroment,Activities.

CAPÍTULO I

INTRODUCCIÓN

En este trabajo se dan a conocer los resultados que se obtuvieron al implementar actividades de aprendizaje con temas de Álgebra, que incorporan la calculadora TI-Nspire CX CAS y que propician el aprendizaje colaborativo, para que de esta manera los estudiantes hagan suyas las competencias matemáticas. El proyecto se llevó a cabo con estudiantes de nuevo ingreso de la Facultad de Ingeniería Química de la Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo.

Con el propósito de evaluar los conocimientos matemáticos se realizaron dos experimentaciones: una piloto y otra formal. Para llevar a cabo estas, se seleccionó un grupo de primer año de la carrera de Ingeniería Química, con el cual se utilizó una estrategia didáctica basada en las teorías de representaciones semióticas y de aprendizaje colaborativo.

El documento de tesis consta de cinco capítulos organizados de la siguiente forma:

En el Capítulo 1 se tiene la Introducción, en la cual se presenta la descripción del trabajo de investigación, así como la hipótesis, los objetivos, las preguntas de investigación y la justificación del mismo.

El Capítulo 2, presenta el Marco Teórico, en este se destacan los elementos teóricos que sustentan la propuesta metodológica del proyecto de investigación, incluyendo el planteamiento de las teorías del aprendizaje colaborativo y de las representaciones semióticas, así como, de los procesos psicológicos en los cuales está involucrada la construcción de las representaciones.

La Metodología de la Investigación y la Metodología Experimental se exponen en el Capítulo 3; comprende la descripción de las etapas que fueron consideradas en el desarrollo del proyecto y la descripción del mismo.

En el Capítulo 4 se presentan los Resultados obtenidos en las diferentes experimentaciones llevadas a cabo en el trabajo de investigación.

Las conclusiones realizadas a través del análisis de los resultados obtenidos en la solución de las actividades de Aprendizaje, tanto en las evidencias escritas como videograbadas; así como, la estrategia didáctica aplicada para incorporar la tecnología al aprendizaje de las matemáticas, se encuentran en el Capítulo 5.

También se presentan las referencias Bibliográficas y los anexos, en los cuales se incorporan las actividades de aprendizaje aplicadas en el trabajo de investigación y la experimentación piloto.

1.1 ANTECEDENTES

Los antecedentes mostrados en este trabajo, son investigaciones en donde se habla sobre el uso de las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC) en la enseñanza de las matemáticas, principalmente en tópicos de álgebra, tanto en México como en países como Costa Rica y E.U.A.

Una de las características más importantes de esta investigación, es la implementación de la calculadora TI-Nspire CX CAS, pues a la fecha se tienen pocos antecedentes de su uso en México, aunque se han elaborado algunos trabajos de investigación con el uso de esta tecnología:

- Aprendizaje Colaborativo Un Caso de Éxito en la Enseñanza de la Geometría Analítica Usando TI-Navigator y la TI-Nspire CX CAS. CBTis No. 94, Pátzcuaro, México.
- El Centro Capacitador para Profesores de Matemáticas en el Uso de Herramientas Digitales del CBTis 164.Cd Madero, Tamaulipas.
- Integrales Impropias y Series de Potencias (La Serie de Taylor). Instituto Politécnico Nacional, México, D.F
- Modelación y Uso de Tecnología TI-Nspire CX CAS en la Enseñanza de las Ecuaciones Diferenciales. Instituto Tecnológico de Estudios Superiores de Monterrey (ITESM), Campus Monterrey.
- Implementación de Competencias en el Aula a través de un Caso de C. S. I. apoyado en TI-Nspire CX CAS. Liceo Alberto del Canto, Saltillo, México.

El estudio del álgebra, tiene una gran importancia como contenido matemático en diferentes etapas en el Sistema Educativo, especialmente desde la Secundaria Obligatoria hasta la Universidad; en los últimos veinte años han surgido propuestas de incorporar ciertas cuestiones del Pensamiento Algebraico.

Una revisión de los estudios realizados sobre el lenguaje algebraico, se puede organizar desde ámbitos diferentes, uno de ellos es el que hace referencia a los tres campos de la didáctica: Epistemológico (historia y epistemología), Cognitivo (cognición y aprendizaje) y Didáctico (enseñanza y desarrollo curricular); poniendo el énfasis en algunos de los aspectos más relevantes de los tres ámbitos. Otro puede ser, tomar en consideración las cuestiones básicas que han incidido más en las investigaciones en álgebra en estos últimos 30 años, como por ejemplo: La relación entre la aritmética y el álgebra, dificultades y errores; La búsqueda de significados para el álgebra; La organización de la enseñanza y la formación del profesorado.

Investigaciones en pensamiento algebraico

A grandes rasgos, sin la intención de ser exhaustivos, se puede decir que a nivel internacional las investigaciones en Pensamiento Algebraico, se han orientado en los últimos 30 años:

- Al análisis de las características esenciales del Pensamiento Algebraico, niveles de organización y problemas que ocasionan en la enseñanza y en el aprendizaje.
- La descripción y estudio de respuestas y procesos de solución de estudiantes y profesores en tareas específicas en Pensamiento Algebraico.

Diferentes trabajos como los de Wagner y Kieran (1989), Kieran y Filloy (1989), Kieran (1992, 2006, 2007), Rojano (1994), muestran que la investigación en Pensamiento Algebraico trata de encontrar soluciones a preguntas como: ¿Qué pueden hacer y qué no pueden hacer los estudiantes y los profesores en los distintos ciclos o niveles del sistema educativo en Pensamiento Algebraico?

Si tomamos como referencia los contenidos tratados podemos agrupar estas investigaciones en tres grandes núcleos: La transición del Pensamiento Numérico al Algebraico, analizando los aspectos del primero que son la base para los conocimientos de la Aritmética Generalizada.

1. Los procesos específicos del Pensamiento Algebraico como la sustitución formal, la generalización y la modelización.

2. La búsqueda de propuestas que mejoren la enseñanza y aprendizaje del Álgebra en la Educación Secundaria.

Una visión general sobre las investigaciones en Pensamiento Algebraico en la Educación se puede extraer de los siguientes trabajos:

Wagner y Kieran (1989), aportan un primer documento que presenta gran parte de los resultados de las investigaciones en álgebra hasta la década de los ochenta, señalando diferentes perspectivas de investigaciones en álgebra. Este trabajo coordinado por Wagner y Kieran constituye de hecho “Una agenda para la investigación del aprendizaje y la enseñanza del álgebra”. Las perspectivas presentadas en la agenda se basaron en: contenido, aprendizaje, enseñanza, pensamiento algebraico, tecnología, desarrollo curricular, evaluación, formación del profesor.

Kieran y Filloy (1989), describen algunas de las contribuciones más significativas de la investigación sobre procesos cognitivos implicados en el aprendizaje del álgebra escolar hasta finales de los ochenta, entre las que cabe destacar el marco aritmético de referencia. Estas aportaciones ponen de manifiesto la presencia de un cuerpo creciente de conocimientos sobre los procesos cognitivos involucrados en el aprendizaje del álgebra.

Kieran (1992), presenta un documento sobre las investigaciones en álgebra, en el que realiza un análisis histórico del álgebra, una descripción del contenido del álgebra, una reflexión y discusión de las demandas psicológicas hechas sobre el aprendiz de álgebra por el contenido matemático y una descripción breve del panorama de la perspectiva de enseñanza. En su informe, adopta una perspectiva histórica/epistemológica y hace una revisión y reconceptualización de gran parte de las investigaciones existentes en álgebra en términos de un modelo que llama “experimental-estructural”, y lo propone como marco en el que analiza y trata de comprender mejor las dificultades que los estudiantes tienen al aprender álgebra y los problemas de su enseñanza.

Kieran (2006), aporta un amplio resumen de los trabajos de investigación llevados a cabo por los investigadores en álgebra del “*International Group of the Psychology of Mathematics Education*” (PME). El grupo tiene como objetivo inicial, caracterizar los cambios que se han

producido en el Pensamiento Algebraico y el papel que juega el simbolismo en este cambio. Kieran organiza en tres grandes núcleos los trabajos realizados en los 30 años de historia:

- Transición de la aritmética al álgebra, variables e incógnitas, ecuaciones y resolución de ecuaciones, y planteamiento y resolución de problemas verbales de álgebra.
- Uso de herramientas tecnológicas, representaciones múltiples y proceso de generalización.
- El pensamiento algebraico en los estudiantes de la escuela elemental, la enseñanza–aprendizaje del álgebra y la modelización dinámica de situaciones físicas y en entornos algebraicos.

Kieran (2007), aporta un nuevo trabajo en el que hace una revisión de la enseñanza y el aprendizaje del álgebra en la educación, mostrando formas de construir significados para los símbolos algebraicos y para su manipulación. Parte de unas breves referencias a los principales problemas de la enseñanza y el aprendizaje del álgebra, centrándose, especialmente, en las diferentes fuentes de significado para el lenguaje algebraico. La parte central de este trabajo lo dedica a analizar actividades e investigaciones sobre el álgebra y distingue: la secundaria obligatoria y la no obligatoria, y el primer año de universidad.

La construcción de conceptos

Si se está interesado, por ejemplo, en los sistemas semióticos de representación y en la importancia de las tareas de conversión entre diferentes representaciones, se debe tener presente algunos aspectos teóricos que presentan autores como Duval (1993, 1995, 1999), Hiebert y Carpenter (1992), Janvier (1987), entre otros.

Aun leyendo los aspectos teóricos que proponen estos autores, es necesario entender su teoría con respecto al problema de investigación. Incluso, en muchos casos, para entender esos aspectos teóricos de esos investigadores es necesario consultar a otros autores que posiblemente son los que les proporcionaron un sustento básico. Por ejemplo, los investigadores antes mencionados, de manera independiente, tratan sobre el papel de las representaciones en la construcción de conceptos matemáticos y se apoyaron en trabajos como los de Piaget y Skemp, entre otros.

La teoría constructivista de Piaget, sufrió como toda teoría en evolución, transformaciones como las promovidas por Skemp (1986) y quedaron plasmadas en su libro *The Psychology of Learning Mathematics*. Skemp escribió sobre la construcción de conceptos en general y de la construcción de conceptos matemáticos en lo particular.

El trabajo de Hiebert y Carpenter (1992), nos explica esas ideas dentro del marco teórico de las redes formadas por representaciones internas, generadas por la manipulación de representaciones externas. Por ejemplo, en la siguiente cita de Hiebert y Carpenter, se ha transformado la idea de esquema de Piaget y Skemp en la idea de red, bajo la siguiente explicación:

Compresión: Iniciamos definiendo compresión en términos de la manera en que la información es representada y estructurada. Una idea matemática, procedimiento o hecho, es entendido si su representación mental es parte de una red de representaciones. El grado de entendimiento es determinado por el número y la fuerza de las conexiones. Una idea matemática, procedimiento, o hecho es entendido profundamente, si este está ligado a una red existente con fuertes o numerosas conexiones.

Tecnologías de la información y la comunicación (TICS)

Las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC) están presentes en todos los sistemas que componen los diferentes ámbitos de la sociedad. En el campo de la educación se puede afirmar que, aunque ha sido lenta la inclusión de esas tecnologías, hay investigaciones que sustentan la importancia de su uso. Ya no se debate sobre su necesidad, sino las ventajas que ofrece su utilización (la mejor manera de sacarles provecho, al ser medios o herramientas que contribuyen a enriquecer el proceso de enseñanza-aprendizaje), su incidencia en la cognición y procesos del pensamiento de los alumnos y la manera como impactan en la reestructuración del currículo educativo.

Aunado a estos estudios se buscan teorías, enfoques, metodologías y propuestas de enseñanza y aprendizaje que sustentan las acciones y funciones a seguir por parte de los docentes que enseñan matemáticas en diferentes niveles educativos para mejorar la calidad.

En la actualidad se reconocen internacionalmente tres concepciones bien diferenciadas: las TIC como un conjunto de habilidades o competencias; las TIC como un conjunto de herramientas o de medios de hacer lo mismo de siempre pero de un modo más eficiente; las TIC como un agente de cambio con impacto revolucionario.

La primera propone a las TIC como materia de enseñanza, lo cual conduce a logros en el nivel de las competencias informáticas mismas; sin embargo, esto no garantiza que dichos logros se reflejan automáticamente en otras áreas curriculares (por ejemplo, las matemáticas o las ciencias naturales). En la segunda se pone énfasis en la relación de las TIC con el currículo, consiste en agregar elementos de tecnología informática a las tareas de aprendizaje para un mejor logro de los objetivos planteados por el currículo vigente. Finalmente, la tercera concepción que considera a las TIC como agentes de cambio y con una gran potencialidad de revolucionar las prácticas en el aula, esta hoy muy difundida en los medios académicos (comunidad de especialistas y de investigadores del uso de las TIC en educación).

Lo anteriormente señalado, representa un doble reto para los sistemas educativos en los países en desarrollo, pues además de incorporar las TIC a las escuelas a través de un *uso apropiado* para la enseñanza y el aprendizaje, se debe afrontar el hecho de que la mayor parte de los docentes y de los alumnos no posee las *competencias informáticas básicas*. Concebir modelos de incorporación de las TIC con la tercera concepción implica, junto a ese doble reto, lidiar con las prácticas generadas por un currículo conservador.

Las TIC se desarrollan a partir de los avances científicos producidos en los ámbitos de la informática y las telecomunicaciones. Las TIC son el conjunto de tecnologías que permiten el acceso, producción, tratamiento y comunicación de información presentada en diferentes códigos (texto, imagen, sonido,...). El elemento más representativo de las nuevas tecnologías es sin duda el ordenador y más específicamente, el Internet. Como indican varios autores, el Internet supone un salto cualitativo de gran magnitud, cambiando y redefiniendo los modos de conocer y relacionarse del hombre.

Las nuevas tecnologías permitieron al mundo un cambio vertiginoso y profundo, dotándolo de herramientas al alcance de todos para que el hombre pueda vivir de una forma distinta y con una tendencia a mejorar las prácticas comunes desde todo punto de vista.

Indudablemente, frente a este gran cambio, la educación debe hacerse eco y construir un nuevo modelo que permita a los alumnos la utilización de las TIC con la finalidad de mejorar su aprendizaje. Todo esto deja dentro de este cambio, a la educación superior la que debe perfeccionar a cada uno de sus docentes en la aplicación de esta tecnología, crear sitios web educativos e insertar a los alumnos en el uso de este medio tan importante, es decir que los distintos Espacios Curriculares tiendan a planificarse con la utilización de las TIC como medio pedagógico esencial para mejorar el aprendizaje de los estudiantes.

1.2 JUSTIFICACIÓN

La matemática es considerada en la actualidad como la ciencia deductiva por excelencia, ya que con ella se pueden obtener resultados a partir de otros, mediante la aplicación de leyes lógicas. Específicamente, la enseñanza del álgebra ha sido y sigue siendo tema de preocupación para la Educación Matemática. Muchos investigadores consideran que la enseñanza tradicional del álgebra no es adecuada y señalan la falta de comprensión que ponen de manifiesto los alumnos en su aprendizaje algebraico, así como, la escasa conexión existente entre la enseñanza del álgebra y la del resto de las ramas de la matemática.

Las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC) tienen un impacto muy grande (Martínez, 2007), en ocasiones sirven para comprobar resultados, para reforzar conceptos o para que el estudiante construya autónomamente su propio conocimiento. Su integración dentro del currículo, sirve como puente para la apropiación de conceptos matemáticos. El uso de la tecnología en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, permite crear instrumentos atractivos con alto grado de interactividad que facilitan la exploración, el descubrimiento y la investigación de conceptos y relaciones.

La sociedad actual, demanda cambios en los sistemas educativos de forma que éstos se tornen más flexibles y accesibles, menos costosos y a los que han de poderse incorporar los ciudadanos en cualquier momento de su vida. Las instituciones de formación superior para responder estos desafíos, deben revisar sus referentes actuales y promover experiencias innovadoras en los procesos de enseñanza-aprendizaje apoyados en las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC). El énfasis debe hacerse en la docencia, en los cambios de estrategias didácticas de los profesores, en los sistemas de

comunicación y distribución de los materiales de aprendizaje; en lugar de enfatizar la disponibilidad y las potencialidades de las tecnologías.

Las calculadoras, el software de herramientas del computador y otras tecnologías, aumentan la capacidad de hacer cálculos y ofrecen herramientas convenientes, precisas y dinámicas que dibujan, grafican y calculan. Con estas ayudas, los estudiantes pueden extender el rango y la calidad de su desarrollo matemático y enfrentarse a ideas matemáticas en ambientes realistas.

En el contexto de un programa de matemáticas bien articulado, la tecnología acrecienta tanto el alcance del contenido matemático como el rango de situaciones problemáticas o tipos de problemas al que pueden enfrentarse los estudiantes. Las herramientas de cómputo poderosas, que ofrecen construcciones y representaciones visuales a los estudiantes, además de acceso a contenidos matemáticos y a contextos que de otro modo serían para ellos muy difíciles de explorar. El uso de herramientas tecnológicas para trabajar en contextos de problemas interesantes, puede facilitar el logro de los estudiantes en una variedad de categorías de aprendizaje de orden superior, tales como reflexión, razonamiento, planteamiento de problemas, solución de problemas y toma de decisiones.

Las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC), son herramientas esenciales dentro de un programa matemático balanceado. Los profesores deben prepararse para tomar decisiones bien informadas con el fin de determinar cuándo y cómo pueden sus estudiantes utilizar más efectivamente estas herramientas.

Esta problemática nos demuestra la urgencia de replantear la acción del profesor frente a sus alumnos, para lo cual se requieren nuevas estrategias frente a materias como las Matemáticas, Lenguaje y Comunicación entre otras, que posibiliten la participación e integración de los estudiantes.

Este estudio considera como referencia, el enfoque cognitivo basado en los registros de representación semiótica y su incidencia en el aprendizaje de nociones matemáticas, en particular algunas propiedades algebraicas. Este enfoque ha sido desarrollado por Raymond Duval y se apoya en la noción Registro de Representación Semiótica.

1.3 OBJETIVO GENERAL

Mediante el uso de la calculadora graficadora TI-Nspire CX CAS y de actividades de aprendizaje que involucren conceptos algebraicos, se recabará información acerca de los razonamientos realizados por los estudiantes en ambientes de trabajo colaborativo.

1.4 OBJETIVOS PARTICULARES

- ❖ Desarrollar una propuesta de enseñanza que permita mejorar el desempeño del estudiante en cuanto al aprendizaje del álgebra.
- ❖ Recabar evidencias del desarrollo algebraico de los estudiantes cuando utilizan la calculadora TI-Nspire CX CAS.
- ❖ Evaluar en forma cualitativa los razonamientos de los alumnos cuando se trabaja con actividades de aprendizaje, mediante el uso de una calculadora graficadora TI-Nspire CX CAS.

1.5 HIPÓTESIS

El estudio de los conceptos algebraicos con mediación de las TIC (Tecnologías de la Información y la Comunicación) y por medio de actividades de aprendizaje que despierten el interés de los estudiantes, que desarrollen en ellos habilidades de razonamiento y comprensión de los conceptos involucrados en las mismas; generarán aprendizajes matemáticos en los estudiantes de nuevo ingreso de la carrera de Ingeniería Química.

1.6 PREGUNTAS DE INVESTIGACIÓN

Con el fin de guiar el estudio y lograr alcanzar los objetivos propuestos, se plantean las siguientes preguntas de investigación:

1. ¿Qué características de las actividades propuestas, permiten generar un ambiente de aprendizaje que favorezca la construcción del conocimiento?
2. ¿Qué estrategias y recursos, utilizan los estudiantes de nuevo ingreso de la licenciatura de Ingeniería Química para resolver los problemas planteados en las actividades de aprendizaje?
3. ¿A qué procesos de razonamiento recurren los estudiantes al trabajar en las actividades propuestas?
4. ¿A qué dificultades se enfrentan los estudiantes cuando trabajan en las actividades algebraicas?

CAPÍTULO II

MARCO TEÓRICO

El aprendizaje de las matemáticas constituye un campo de estudio privilegiado para el análisis de actividades cognitivas fundamentales como lo son la conceptualización, el razonamiento, resolución de problemas, incluso la comprensión de textos. Es por esto que es necesaria la utilización de varios sistemas de expresión y de representación distinta a los del lenguaje natural o de las imágenes.

En matemáticas, las representaciones semióticas no solo son indispensables para fines de comunicación, sino que también son necesarias para el desarrollo de la actividad o matemática misma. Es esencial no confundir los objetos matemáticos con sus representaciones. Toda confusión entre objeto y su representación, provoca una pérdida de comprensión de los conocimientos adquiridos, se hacen rápidamente inutilizables por fuera de su contexto del aprendizaje, sea por no recordarlos o porque permanecen como representaciones inherentes que no sugieren ninguna transformación productora. No puede haber comprensión en matemáticas si no se distingue un objeto de su representación.

2.1 TEORÍA DE REGISTROS DE REPRESENTACIÓN SEMIÓTICA

En este trabajo se ha privilegiado la utilización de la Teoría de los registros de representación semiótica de Raymond Duval (1993). Habla de “representaciones semióticas” como un conjunto de signos que son el medio de expresión de las representaciones mentales para hacerlas visibles a otros individuos.

En sus investigaciones sobre los registros de representación semiótica, Raymond Duval señala que el conocimiento matemático se puede representar bajo diferentes formas semióticas a través de la cual un conocimiento es representado. Por lo tanto, las representaciones mentales nunca pueden ser independientes de las representaciones semióticas. La elección de un determinado registro de representación puede ser la clave para facilitar la comprensión de un determinado objeto matemático.

El concepto de representación

Una representación, es una construcción que realizan los sujetos y que se refiere a objetos o fenómenos con los cuales ellos entran en interacción. De esta forma, la representación puede ser utilizada para remplazar a los objetos y fenómenos representados. Este remplazo se ejecuta a efectos comunicativos e intelectuales. Es decir, la representación se utiliza para la interacción con los objetos y para operar sobre ellos sin necesidad de su presencia física. En el ámbito de las matemáticas, las representaciones se entienden como notaciones simbólicas o gráficas, o bien manifestaciones verbales, mediante las que se expresan los conceptos y procedimientos en esta disciplina así como sus características y propiedades más relevantes.

Semiótica y Noética en el aprendizaje de las matemáticas

En matemáticas la adquisición conceptual de un objeto, pasa necesariamente a través de la adquisición de una o más representaciones semióticas. Por primera vez, Duval propone la problemática de los registros en los célebres artículos del año de 1988; pero sobre este argumento Duval publica también trabajos en 1989 y 1990. En los cuales, Duval dice: ***no existe noética sin semiótica.***

El desarrollo de las representaciones mentales depende de la interiorización de las representaciones semióticas, las cuales, para intervenir en la actividad cognitiva, deben integrarse por dos componentes inseparables (Duval, 1993):

- ❖ **Semiósis:** es cualquier forma de actividad, conducta o proceso que involucre signos, incluyendo la creación de un significado. Es un proceso que se desarrolla en la mente del intérprete; se inicia con la percepción del signo y finaliza con la presencia en su mente del objeto del signo.
- ❖ **Noésis:** se llama noesis a los actos cognitivos como la aprehensión conceptual de un objeto.

Duval (1995) afirma que el uso de varios registros, parece una condición necesaria para que los objetos matemáticos no sean confundidos con sus representaciones y para que puedan también ser reconocidos en cada una de ellas. Así, la variabilidad de registros de representación (figuras, gráficas, escritura simbólica, lenguaje) conlleva una aprehensión conceptual de los objetos. Una representación funciona como tal si permite acceder al objeto representado.

Para que un sistema semiótico pueda ser un registro de representación, debe permitir tres actividades cognitivas ligadas a la semiósis (Duval, 1993): formación de una representación, tratamiento de una representación y la conversión de las representaciones.

- ❖ **Formación de representaciones** en un registro semiótico, para “expresar” una representación mental o bien para “evocar” un objeto real.
- ❖ **Tratamiento de representaciones** cuando la transformación produce otra representación en el mismo registro.
- ❖ **Conversión de representaciones**, cuando la transformación produce una representación en un registro distinto a la de la representación inicial.

Sistemas, Registros y Representaciones Semióticas

La influencia de las representaciones gráficas en la construcción del conocimiento, sin duda juega un papel muy importante porque *la apropiación de un objeto matemático difícilmente puede lograrse sin recurrir a diversas representaciones del mismo* (Hitt, 1997).

Para Duval (1993), la habilidad para cambiar de registro cualquier representación semiótica en el aprendizaje de las matemáticas ocupa un lugar central, porque como operación cognitiva, se caracteriza por no estar reducida a algún patrón de procesamiento y se encuentra vinculada a los tratamientos de compresión y a las dificultades de aprendizaje conceptual. Esto es fuente de obstáculos, que únicamente la coordinación de varios registros de formas semióticas puede ayudar a suprimir. La distinción entre un objeto y su representación es un punto estratégico y fundamental para la comprensión de las matemáticas, porque si no podemos acceder directamente a objetos matemáticos por medio de la percepción o la experiencia intuitiva, sus representaciones semióticas son absolutamente necesarias. La posibilidad de efectuar tratamientos sobre los objetos matemáticos depende directamente del sistema de representación semiótica utilizada, de ahí que juegan un papel fundamental en la actividad matemática.

Se reconocen dos aspectos esenciales de las representaciones semióticas para comunicar y para la actividad cognitiva del pensamiento: juegan un papel fundamental para el desarrollo de las representaciones mentales que dependen de la interiorización de representaciones semióticas; cumplen con diferentes funciones cognitivas como la objetivación, comunicación

y tratamiento; además, permiten representaciones radicalmente diferentes de un mismo objeto, por lo que contribuyen a la producción de conocimientos.

Las representaciones semióticas son producciones constituidas por el empleo de signos que pertenecen a un sistema de representación. Una figura geométrica, un enunciado en lengua natural, una fórmula algebraica, una gráfica, son representaciones semióticas que pertenecen a sistemas semióticos diferentes (Duval, 1993).

Debido a que los objetos matemáticos no son directamente accesibles a la percepción Duval (1998) enfatiza la importancia de la representación en Matemáticas, estableciendo que no es posible estudiar los fenómenos relativos al conocimiento sin recurrir a ella. Sin embargo, establece que no se deben confundir los objetos matemáticos con su representación. De la misma manera, establece que es posible representar un concepto matemático en diversos registros de representación.

Para la comprensión de un concepto es necesaria la coordinación de los diferentes registros de representación, ya que la representación en un solo registro (mono-registro) no se obtiene la comprensión integral del concepto. Sin embargo, la conversión entre registros no se realiza en forma espontánea, a menos que se trate de representaciones congruentes entre el registro de partida y el de llegada.

2.2 APRENDIZAJE COLABORATIVO

En la historia de la humanidad el trabajar y aprender juntos es algo bastante difundido, a finales del siglo XX surge el concepto de aprendizaje colaborativo, transformándose en un tema de estudio en el que se ha teorizado bastante.

La sociedad actual gestiona a nivel mundial el paso a un nuevo tiempo aún en definición. A nivel nacional se plantean cambios significativos, que más allá de la diatriba política, tocan cuestiones de fondo, por lo que es imprescindible concretar un verdadero interés por superar los conflictos y resolver los problemas que complican la concertación y el necesario consenso en torno a asuntos fundamentales para el definitivo arranque del país en pos de su desarrollo; de allí la necesidad de poseer una percepción que permita la ponderación y el equilibrio, indispensables para la constitución de equipos de trabajo eficientes.

El aprendizaje colaborativo es fundamentado por varias corrientes psicológicas; entre ellas, la teoría de Vygotsky y la de Piaget.

Teoría sociocultural de Vygotsky

La teoría de Vygotsky, se basa principalmente en el aprendizaje sociocultural de cada individuo y por lo tanto en el medio en el cual se desarrolla. La teoría de Vygotsky se refiere a cómo el ser humano ya trae consigo un código genético o línea natural del desarrollo, la cual está en función del aprendizaje, en el momento que el individuo interactúa con el medio ambiente. Su teoría toma en cuenta la interacción sociocultural en contra posición de Piaget. No podemos decir que el individuo se construye de aislamiento.

Hay al menos tres formas en las que las herramientas culturales se pueden pasar de un individuo a otro (Vygotsky, 1979):

- ✓ **Aprendizaje imitativo:** es aquel que se logra cuando una persona imita a otra.
- ✓ **Aprendizaje instruido:** es el aprendizaje por el que se internalizan las instrucciones del maestro y se utilizan para autorregularse.
- ✓ **Aprendizaje colaborativo:** es el cual, en el que un grupo de compañeros se esfuerzan por aprender y en el proceso ocurre el aprendizaje.

Vygotsky (1979) estaba muy interesado en el aprendizaje instruido mediante las enseñanzas directas o la estructuración continua de las experiencias que apoyan el aprendizaje de otro, pero su teoría también respalda las otras formas de aprendizaje cultural. En cualquier situación, el aprendizaje asistido es un aspecto importante de la enseñanza.

La teoría de Vygotsky deja claro el rol que ocupa el mediador, lo cual es la persona principal en un aula de clases, tiene la autoridad y la obligación de coordinar y orientar el proceso de enseñanza y también de resolver conflictos que se puedan presentar en la comunidad estudiantil.

Vygotsky (1979) distingue entre:

1. Nivel de Desarrollo Real (NDR): conjunto de actividades que el sujeto puede hacer por sí mismo, de un modo autónomo, sin la ayuda de los demás.

2. Nivel de Desarrollo Potencial (NDP): nivel de actividades que podría alcanzar el sujeto con la colaboración y guía de otras personas, es decir, en interacción con los otros.

Vygotsky (1979) plantea los siguientes principios del aprendizaje:

1. Tomar en cuenta el nivel de desarrollo de los alumnos.
2. Fomentar un rol activo del alumno en su aprendizaje.
3. Enfatizar la importancia de la interacción (con padres, profesores y otros alumnos).
4. Hacer énfasis en la reestructuración y reorganización del conocimiento.

Es así como la acción conjunta (interacción) del estudiante y de los que le rodean será el factor que haga posible que el mediador externo de conocimiento llegue a convertirse en procesos internos.

En otras palabras, toda función psicológica aparecerá dos veces: primero entre las personas (interpsicológica) y después en el interior del propio estudiante (intrapsicológica). Esta doble formación supone que el aprendizaje se logra por la internalización, se transforman en procesos de desarrollo que hacen posible la reestructuración (Vygotsky, 1979).

Esta teoría hace hincapié en las influencias sociales y culturales, ya que cada cultura transmite creencias, valores y métodos de herramientas de adaptación intelectual a la generación que le sigue.

Teoría del aprendizaje mediado de Feuerstein

Años más tarde, surge el Modelo del Aprendizaje Mediado, el cual se sustenta en la Teoría de la Modificabilidad Cognitiva Estructural de Reuven Feuerstein (1980), un planteamiento altamente práctico con características similares a la teoría Vygotskyana, aun cuando Feuerstein no declare esta cercanía (en cambio sí acepta influencias de Piaget).

Para Feuerstein, la Modificabilidad Cognitiva del niño o adolescente implica la capacidad de mejorar su inteligencia por medio de la mediación oportuna de un adulto. El mismo Feuerstein (1980) define el aprendizaje mediado como la forma en que los estímulos emitidos

por el ambiente son transformados por un agente mediador (padre, madre, hermano, profesor u otro). El agente mediador, haciendo uso de sus intenciones, cultura y emociones, selecciona y organiza los estímulos más apropiados para el estudiante, de manera que en futuras situaciones este mismo logre identificar, clasifica y organizar los estímulos más relevantes que debe aprender en una situación en desmedro de otros más importantes.

El modelo de Mediación del Aprendizaje, transforma el paradigma conductista en donde los comportamientos se producen independientemente del contexto a través de la confrontación directa con un estímulo (fórmula: Estímulo-Respuesta), por un paradigma social en donde el nuevo conocimiento se logra a través de un mediador (fórmula: estímulo-mediador humano-organismo-mediador humano-respuesta). El mediador humano se interpone entre el estudiante (organismo) filtrando los estímulos que recibe y tratando de interpretarlos y valorarlos con él.

Es así como el proceso de mediación, centrado en la modificación cognitiva, afecta la estructura mental del estudiante permitiéndole adquirir nuevos comportamientos, vistos estos como estrategias de aprendizaje, habilidades y actitudes.

Aun cuando en principio el concepto de mediación cognitiva se utilizó en el ámbito psicológico, específicamente en el tratamiento orientado a la potenciación de la inteligencia. En los últimos años se ha introducido como parte fundamental de las prácticas docentes dentro del aula, dándole al profesor la posibilidad de intervenir intencionadamente en el desarrollo de todas y cada una de las facultades psicológicas individuales y sociales de sus estudiantes, así como de utilizar a otros niños o adolescentes como herramientas para el aprendizaje de sus pares.

Piaget y la Educación

En una revisión de las teorías más influyentes en la educación durante el siglo XX, sin duda resulta imprescindible considerar las relaciones de la teoría de Piaget. La psicología genética, fundada por Jean Piaget durante la primera mitad del siglo XX, ha tenido un enorme impacto en la educación, tanto en lo que respecta a las elaboraciones teóricas como en la propia práctica pedagógica. La producción pedagógica inspirada en la psicología genética ha sido vasta y diversificada.

La influencia de esta teoría en la educación sigue siendo muy importante en nuestros días, si bien las lecturas y el tipo de apropiación que desde la educación se han hecho de ella, han ido variando a lo largo de las décadas.

Para este psicólogo la mente no solo responde a los estímulos si no que crece, cambia y se adapta al entorno, cambios que en general se dan a nivel de la estructura y a nivel del procesamiento de la información.

Para Piaget (1948), la mente es activa en constante proceso de asimilación y acomodación. En que la **asimilación** consiste en interpretar las nuevas experiencias en términos de las estructuras mentales presentes sin alterarlas y la **acomodación** consiste en cambiar esas estructuras para integrar experiencias nuevas. Explica que la mente permanentemente trata de encontrar un balance o ajuste entre el ambiente y su propia estructura de pensamiento.

El aprendizaje colaborativo se sustenta en teorías cognoscitivas. Para Piaget (1948), hay cuatro factores que inciden e intervienen en la modificación de estrategias cognoscitivas: la maduración, la experiencia, el equilibrio y la transmisión social. Todos ellos se pueden propiciar a través de ambientes colaborativos. En la teoría constructivista de Vigotsky (1979), el aprendiz requiere la acción de un agente mediador para acceder a la zona de desarrollo próximo, este será responsable de ir teniendo un andamiaje que proporcione seguridad y permita que aquel se apropie del conocimiento y lo transfiera a su propio entorno.

Por otro lado, podemos definir el Aprendizaje Colaborativo como un conjunto de métodos de instrucción y entrenamiento en estrategias, para propiciar el desarrollo de habilidades mixtas donde cada individuo (miembro de un grupo) es responsable tanto de su aprendizaje como de los restantes del grupo.

Además, el Aprendizaje Colaborativo desde la perspectiva sociológica se deduce que representa un componente social de aprendizaje que no sería posible con el aprendizaje habitual, porque como dice Vygotsky (1979): “El Aprendizaje Colaborativo consiste en aprender con otros y de otros”, es decir, hace referencia a lo que en psicología social se conoce como Zona de Desarrollo Próximo (ZDP). Este hecho permite valorar desde perspectivas educativas, el trabajo que desempeña un sujeto con otros a favor de un aprendizaje determinado, la importancia que se le designará al compartir con otros abre las

puertas para generar estrategias de enseñanza, sus propios aprendizajes centrados en el diseño colectivo.

Zona de Desarrollo próximo

Vygotsky (1974), considera que en cualquier punto del desarrollo hay problemas que el niño está a punto de resolver, y para lograrlo, solo necesita cierta estructura, claves, recordatorios, ayuda con los detalles o pasos del recuerdo, aliento para seguir esforzándose y cosas por el estilo. La *zona de desarrollo próximo* es “la distancia entre el nivel de desarrollo, determinado por la solución independiente de problemas, y el nivel de desarrollo posible, precisado mediante la solución de problemas con la dirección de un adulto o la colaboración de otros compañeros más diestros”. Es un concepto perteneciente a la Teoría Socio-histórica, para explicar las características del aprendizaje; el cual según sostiene, acelera la maduración y facilita el desarrollo humano.

Desde esta perspectiva, la zona de desarrollo próximo es la posibilidad de los individuos de aprender en el ambiente social en la interacción con los demás. El conocimiento y la experiencia de los demás es lo que posibilita el aprendizaje; consiguientemente, mientras más rica y frecuente sea la interacción con los demás, el conocimiento será más rico y amplio. La zona de desarrollo próximo, consecuentemente, está determinada socialmente.

Aprendemos con la ayuda de los demás, aprendemos en el ámbito de la interacción social y esta interacción social como posibilidad de aprendizaje es *la zona de desarrollo próximo*.

Habitualmente se ha aceptado que el desarrollo es base previa para el aprendizaje, que deben haberse cumplido gradientes, etapas y logros para la producción de los cambios por aprendizaje

Para Vygotsky (1974), existen dos niveles en el desarrollo: un nivel real y un nivel potencial. El **desarrollo real**, señala la capacidad de una persona para resolver un problema por sí misma; es decir, lo que puede hacer por sí misma sin ayuda de terceros; el **desarrollo potencial**, en cambio, es un indicador del nivel al que esa misma persona podría llegar, de ser ayudada por otra u otras más capaces. Menciona que, el desarrollo humano es el producto de las interacciones entre la persona que aprende y aquellas que lo auxilian. Quien enseña es un facilitador del desarrollo y aquí se interconectan el concepto de ZDP con el Andamiaje. En

pocas palabras, la *zona de desarrollo próximo*, nos brinda un modelo para pensar las interacciones y las acciones de quien enseña como potencializadoras de desarrollo.

El Aprendizaje Colaborativo, requiere una planificación previa; es decir, tener claros los objetivos (generales como específicos) que se pretenden lograr, por tanto, significa hacer uso del enfoque de aprendizaje constructivista donde el estudiante pasa a ser el centro del proceso enseñanza-aprendizaje.

Existe incidencia de la inteligencia emocional en el comportamiento de la labor del individuo en las organizaciones, y que ellas influyen de manera significativa en las relaciones interpersonales para crear un clima que active la creatividad y de apertura a escenarios de participación en la toma de decisiones que impulsen la mejor gestión como producto de un trabajo en equipo sinérgico.

La combinación de las estrategias ofrecidas por la inteligencia emocional y el aprendizaje colaborativo pudiera optimizar el proceso de incorporación tecnológica a la formación docente, con la finalidad de superar las barreras emocionales que pudieran existir para afrontar la alfabetización tecnológica del recurso humano, componente esencial del proceso.

El modelo del Aprendizaje colaborativo

La educación tradicional favorecida por los modelos sociopolíticos convencionales, lejos de favorecer el proceso antes descrito, se ha empeñado en exaltar los logros individuales y la competencia, por encima del trabajo en equipo y la colaboración; esta realidad, tal como lo señala Díaz Barriga (1999), se evidencia no solo el currículo, el trabajo en clase y la evaluación, sino el pensamiento y la acción del docente y sus alumnos.

Si bien el conductismo planteaba la absoluta dependencia del docente, quien dominaba la situación educativa en el aula sobre sus alumnos; al hablar de aprendizaje colaborativo no traspasamos esta situación al grupo, su esencia es mucho más compleja y enriquecedora. En el aprendizaje colaborativo cada participante asume su propio ritmo y potencialidades, impregnando la actividad de autonomía, pero cada uno comprende la necesidad de aportar lo mejor de sí al grupo para lograr un resultado sinérgico al que ninguno accedería por sus

propios medios; se logra así una relación de interdependencia que favorece los procesos individuales de crecimiento y desarrollo, las relaciones interpersonales y la productividad.

Por otra parte, el aprender en forma colaborativa permite al individuo recibir retroalimentación y conocer mejor su propio ritmo y estilo de aprendizaje, lo que le facilita la aplicación de estrategias metacognitivas para regular el desempeño y optimizar el rendimiento; por otra parte, este tipo de aprendizaje incrementa la motivación, pues genera en los individuos fuertes sentimientos de pertenencia y cohesión, a través de la identificación de metas comunes y atribuciones compartidas, lo que le permite sentirse “parte de”, estimulando su productividad y responsabilidad, lo que incidirá directamente en su autoestima y desarrollo.

Según Díaz Barriga (1999), el aprendizaje colaborativo se caracteriza por la igualdad que debe tener cada individuo en el proceso de aprendizaje y la mutualidad, entendida como la conexión, profundidad y bidireccionalidad que alcance la experiencia, siendo esta una variable en función del nivel de competitividad existente, la distribución de responsabilidades, la planificación conjunta y el intercambio de roles.

Resulta importante resaltar la necesidad de comprender el verdadero significado del aprendizaje colaborativo, pues de lo contrario se corre el riesgo de promover experiencias caracterizadas por actitudes individualistas, en las que prevalecen los conflictos, frustraciones y complejos de los miembros del grupo, y no se logra entablar una interacción favorable que conduzca a la interdependencia positiva. Atendiendo el proceso desde la conformación misma del equipo, se producirá un aprendizaje que además de resultar rico en cuanto a los productos cognoscitivos logrados a nivel interpersonal e intrapersonal, se modela y aprende; valoración y responsabilidad hacia el proceso educativo, capacidad para conformar equipos de trabajo productivo y respeto por los demás y su trabajo.

El aprendizaje colaborativo ha demostrado eficiencia en la superación de actitudes negativas, incrementar la motivación y el autoconcepto; por otra parte las experiencias de interacción cooperativa permiten producir un aprendizaje vinculado al entorno social del individuo, dado que propician la creación de ambientes estimulantes y participativos, en los que los individuos se sientan apoyados y en confianza para consolidar su propio estilo de aprendizaje.

2.3 TECNOLOGÍAS DE LA INFORMACIÓN Y LA COMUNICACIÓN EN LA EDUCACIÓN

Los sistemas educativos de todo el mundo, se enfrentan actualmente al desafío de utilizar las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC) para proveer a sus alumnos con las herramientas y conocimientos necesarios. El Informe Mundial sobre la Educación de la UNESCO, *Los docentes y la enseñanza en un mundo en mutación*, describió el profundo impacto de las TIC en los métodos convencionales de enseñanza y aprendizaje; augurando también la transformación del proceso de enseñanza-aprendizaje y la forma en que docentes y alumnos acceden al conocimiento y la información. Las instituciones de formación de docentes se enfrentan al desafío de capacitar a la nueva generación de docentes para incorporar en sus clases las nuevas herramientas de aprendizaje.

Desde sus comienzos el hombre ha estado creando métodos, técnicas y herramientas con el fin de organizar el tipo de sociedad que ha querido. Cada descubrimiento ha traído expectativas, dudas, temores y confusión, y los cambios en las relaciones sociales se han multiplicado. Hoy es tal el desarrollo de la Ciencia y la Tecnología, que no existe actividad humana en las que las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC) no sean su prioridad referente, la educación una de ellas.

El uso de las TIC en educación, entendidas como “el conjunto de procesos y productos derivados de las nuevas herramientas, soportes de información y canales de comunicación relacionados con el almacenamiento, procesamiento y transmisión digitalizados de la información”, se encuentran en un desfase entre la sociedad y la escuela, puesto que la mayoría de los centros escolares, sobre todo los que corresponden a la entidad pública, se encuentran con sistemas obsoletos, por lo que la mayoría de los alumnos aprenden a utilizar las TIC fuera del contexto escolar, impulsados simplemente por la cultura y el mismo avance tecnológico. Así mismo, el avance que se ha tenido en la utilización de las TIC en el sector educativo no ha sido lo suficientemente fluido aun cuando han implementado proyectos educativos para la implantación de las TIC en las escuelas.

Introducción de las TIC en la formación de los estudiantes universitarios

El mundo ha llegado a niveles de complejidad inimaginables y con ellos aparecen retos y desafíos jamás pensados. Para afrontar estos retos y desafíos los individuos no solo necesitarán una base considerable de conocimientos significativos, sino tal vez lo más importante, una gran capacidad para aplicarlos convenientemente. Los cambios son tan rápidos que ya no es posible, como en otros tiempos, aprender lo suficiente en unos años de educación formal para estar preparado para la vida. Se requiere una educación a lo largo de toda la existencia.

Las tecnologías de la información permiten que cada estudiante tenga la alternativa de planificar y ejecutar su propio estilo de aprendizaje. Luego, en vez de descansar su proceso de aprendizaje en libros de textos y clases magistrales, puede tomar como modelo otras fuentes de información de mayor dinamismo para continuar aprendiendo el resto de su vida. Lo importante es destacar que en esa situación, el profesor como facilitador o mediador del aprendizaje, ayudará a sus participantes a tomar la mejor decisión ante la abundancia de información disponible.

Los recursos tecnológicos son solo herramientas y medios para la mejora de la calidad de la enseñanza-aprendizaje, no son un objetivo educativo por sí mismo, sino tan solo medios. La incorporación de los recursos tecnológicos a la enseñanza y su dominio por el estudiante debe ser paulatina, gradual y permanente durante toda su vida profesional.

Las TIC en la enseñanza de las matemáticas

La implementación de las Tecnologías de la Información y Comunicación (TIC) en el ámbito educativo, tiene como un propósito innovar y mejorar la calidad del proceso de enseñanza y aprendizaje, de tal forma que en los niveles de educación básica y media superior los enseñantes no las deben desestimar (Gómez y López, 2008), ya que esto permitirá que el maestro interprete, procese y comparta información; además, investigaciones recientes sobre el tema dan muestra que su incursión para aprender es una realidad (Santandreu, 2004). Desafortunadamente, existen dificultades para su uso en

algunas escuelas al no tener el equipo correspondiente mientras otras están a la vanguardia.

Existen investigaciones sobre la utilización e impacto que han tenido los medios y la tecnología en la educación formal y han concluido que el manejo pedagógico que tiene el maestro en el aula tiene mayor importancia que las herramientas utilizadas. Por esta razón, es importante saber cómo los docentes que se están formando con este enfoque, incorporan estas herramientas.

Diversos estudios (Área, 2008), concluyeron que a pesar de incorporar y tener disponibilidad de los recursos tecnológicos en las instituciones, la práctica docente en el aula no ha variado mucho del modelo tradicional, usando las TIC para apoyar más bien las prácticas expositivas donde solo se transmite información, lo cual no constituye una innovación al modelo de enseñanza. Siendo una tarea muy importante para las instituciones formadoras de docentes, en diseñar estrategias para que el futuro profesor sea capaz de crear situaciones que favorezcan el aprendizaje significativo con apoyo de las TIC.

Sin duda la incorporación de las tecnologías para la enseñanza de las matemáticas no es una tarea fácil, el problema a abordar gira en torno a las prácticas educativas de bajo nivel que tienen los docentes en formación, con la especialidad para la enseñanza de las matemáticas a pesar de estar incorporando las TIC en sus planeaciones y funciones, para posteriormente explicar cómo los futuros profesores van introduciendo las TIC en su práctica educativa, y entender los retos que las escuelas normales enfrentan para lograr docentes competentes ante la sociedad de la información y conocimiento en la que nos vemos inmersos.

La OCDE (*Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos*) se ha dado a la tarea de saber hasta qué punto los sistemas educativos de los países participantes (42 en 2003), están preparando a sus estudiantes de 15 años para jugar un papel constructivo como ciudadanos participantes en la sociedad a través de la evaluación internacional llamada PISA. Para OCDE/PISA la Competencia en Matemáticas “*conciene la capacidad de los estudiantes para analizar, razonar y comunicar eficazmente sus ideas al tiempo que se plantean, formulan, resuelven e interpretan problemas matemáticos en una variedad de contextos*”. La evaluación de OCDE/PISA se concentra en problemas de la

vida real que van más allá de las situaciones y problemas que típicamente se encuentran dentro del salón de clases.

El nivel de competencia en matemáticas de OCDE/PISA se refiere a la medida en la que estudiantes de 15 años pueden ser considerados como ciudadanos reflexivos y bien informados además de consumidores inteligentes. En todo el mundo las personas se enfrentan a una diversidad cada vez mayor de tareas que involucran conceptos cuantitativos, espaciales, etc. Se enfoca en la capacidad de los estudiantes de utilizar su conocimiento matemático para enriquecer su comprensión de temas que son importantes para ellos y promover así su capacidad de acción. Define de la siguiente manera la competencia matemática: *La competencia matemática es la capacidad de un individuo para identificar y entender el rol que juegan las matemáticas en el mundo, emitir juicios bien fundamentados y utilizar las matemáticas en formas que le permitan satisfacer sus necesidades como ciudadano constructivo, comprometido y reflexivo.*

El proyecto PISA consideró las matemáticas en relación con su utilización en la vida diaria y evaluó la capacidad de los estudiantes para reconocer e interpretar problemas matemáticos; trasladar estos problemas a contextos matemáticos; utilizar los conocimientos y procedimientos matemáticos para resolver problemas; interpretar los resultados en términos del problema original; reflexionar sobre los métodos aplicados; así como formular y comunicar los resultados.

Un problema, es algo más que una ocasión para ejercitar los procedimientos aprendidos que una situación interesante, pero sin relación precisa con los propósitos de la enseñanza. Un problema debe dar a los alumnos la oportunidad de explorar las relaciones entre nociones conocidas y utilizarlas para descubrir o asimilar nuevos conocimientos, los cuales a su vez servirán para resolver nuevos problemas.

Esta es esencialmente, la naturaleza de la actividad matemática. Hoy con las TIC estamos ante una nueva “problemática” pues insertar al interior de esta disciplina la utilización de estos recursos plantea, por parte del docente, la necesidad de poner en práctica nuevas estrategias a la hora de pensar e implementar las propuestas del área.

La competencia matemática es también, una de las ocho competencias básicas que marca la ley. Las Matemáticas y las TIC, han tenido mucho antes de que los ordenadores llegasen a las escuelas de enseñanza media, una relación sumamente estrecha.

Básicamente, puede resumirse en una frase: los ordenadores se convirtieron, en un primer momento, en el laboratorio del que carecía el matemático profesional, en las más insospechadas ramas (en el Análisis, en la Geometría).

Esto es posible gracias a que el ordenador permite llevar a cabo dos funciones que la investigación matemática utiliza como cualquier otra ciencia, en un tiempo que antes de su aparición era impracticable: la *autoevaluación* de conjeturas y la *experimentación*. Estas dos funciones, autoevaluación y experimentación, son comunes a la práctica investigadora y al aprendizaje de las matemáticas.

Cuando el alumno utiliza el ordenador para realizar los cálculos precisos, pero mucho más ágilmente y con más fiabilidad que si los realizarse con papel y lápiz. Podemos decir, que estamos usando como calculadora y viene al caso el excelente artículo *The Algebraic Calculator as a Pedagogical Tool for Teaching Mathematics*, del profesor Berhard Kutzler, en el que presenta la “espiral de creatividad de Buchberger”, y que describe así:

Aplicando conocer algoritmos produces ejemplos. Desde los ejemplos, nosotros obtenemos propiedades, que son expresadas como una conjetura. Demostrando la conjetura produce un teorema, por ejemplo., conocimiento garantizado. El teorema algorítmicamente utilizable conocido es implementado en un nuevo algoritmo. Entonces, el algoritmo es aplicado a un nuevo dato, produciendo nuevos ejemplos, que guían a nuevas observaciones (Kutzler, 1999).

Esta es la teoría didáctica de Ives Chevallard, virtuosamente emparejada con el uso de las calculadoras (u ordenadores utilizados como calculadoras). En el fondo lo que se propone, es el uso de la calculadora como herramienta que permita abstraer la parte interesante del quehacer matemático (establecimiento de conjeturas, análisis de resultados y prueba de teoremas) de la rutinaria, que puede ser encargada a la calculadora.

La matemática del siglo XX ha recibido el impacto de la introducción de las computadoras y otros tipos de tecnologías, como las calculadoras gráficas, que han cambiado las cuestiones relacionadas con la enseñanza de los contenidos de la matemática, por ejemplo la modelización, dado que su gran capacidad y rapidez en el cálculo, la facilidad que brindan para lograr representaciones gráficas, permiten incursionar aún más en campos como economía, química, física, entre otros; sistematizando gran cantidad de datos para lograr modelos matemáticos que los cuantifiquen y expliquen.

Son muchos los trabajos referentes a la introducción de las tecnologías en la educación, y no todos coinciden en sus opiniones. Artigue (2002) cita, referente al tema de la inclusión de las TIC:

Ciertamente estas tecnologías son socialmente y científicamente legítimas, pero a nivel de la escuela, esas legitimidades no son suficientes para asegurarse la integración. Pues no se busca que la enseñanza forme alumnos aptos para funcionar matemáticamente con esas herramientas, lo que sería el caso por ejemplo de una formación de carácter profesional, se busca mucho más. Efectivamente, lo que se espera de esas herramientas esencialmente es que permitan aprender más rápidamente, mejor, de manera más motivante, una matemática cuyos valores son pensados independientemente de esas herramientas. Lo que se necesita entonces es asegurar la legitimidad científica o social. Esto, como hemos mostrado, genera un círculo vicioso que enferma la formación en un esquema de militancia y proselitismo, poco adecuado para otorgar herramientas a los docentes que les permitan hacer frente a las dificultades que inevitablemente van a encontrar, que les permitan identificar las necesidades matemáticas y técnicas de las génesis instrumentales y de responderlas eficazmente; poco adecuado también para permitirles la necesaria superación de una visión ingenua de la tecnología como remedio a las dificultades de la enseñanza.

CAPITULO III

METODOLOGÍA

3.1 INTRODUCCIÓN

Este estudio es parte de un proyecto que explora el uso de la calculadora TI-Nspire CX CAS como una herramienta didáctica para el aprendizaje de conceptos algebraicos, con apoyo de actividades rediseñadas por el equipo de investigación.

La toma de datos de la investigación, consistió en dos fases: el estudio piloto y la experimentación formal. El objetivo de la primera, fue obtener evidencia de la viabilidad del proyecto de investigación y para efectuar las modificaciones pertinentes en los instrumentos de acopio de datos. La segunda, se llevó a cabo para contar con los datos que provean evidencias acerca de la hipótesis planteada en la investigación. La recolección de datos en ambas fases, se llevó a cabo en forma escrita y con video grabación de la entrevista realizada; con tareas (actividades) diseñadas con un enfoque técnico-teórico. Es decir, en términos del marco conceptual adoptado para el análisis de datos de esta investigación.

En el desarrollo del proyecto de investigación, se trabajó con alumnos de primer año de licenciatura (de 18 a 20 años). Estos estudiantes han seguido programas de matemáticas desde el nivel secundaria, lo que significa que el álgebra es parte del curso de estudio de cada año.

3.2 DISEÑO DE LAS ACTIVIDADES

Las actividades aplicadas a los alumnos de licenciatura para esta investigación, fueron diseñadas por el Dr. Fernando Hitt y la Dra. Carolyn Kieran, ambos, investigadores de la Universidad de Quebec, Canadá. Las actividades mencionadas anteriormente se elaboraron con el objetivo de que los estudiantes aprendan algebra haciendo uso de papel y lápiz, así como de la calculadora para crear un razonamiento por medio de la discusión

entre ellos. Estas actividades fueron diseñadas con el fin de que exista una conexión entre el razonamiento del estudiante y el uso de la tecnología, las cuales se presentan a continuación con su contenido.

La **actividad cuatro** trata sobre la racionalización del denominador de una expresión, en donde el estudiante por medio de papel y lápiz, y de la calculadora tiene que racionalizar una expresión algebraica dada utilizando diversos registros de representación.

El contenido de ésta actividad se presenta en tres partes: la racionalización del denominador monomio de una expresión, la racionalización del denominador de una expresión cuando sea un polinomio y una discusión entre los alumnos sobre cada una de las partes que conforman dicha actividad; esto con el fin de que surja una discusión entre cada uno de los integrantes del equipo. El cual se presenta a continuación:

Actividad 4: Racionalización del denominador de una expresión

Parte I: Actividad con calculador así como con papel y lápiz.

Parte II: Actividad con calculadora así como con papel y lápiz.

Parte III: Actividad con calculadora así como con papel y lápiz.

La **actividad seis** versa sobre la factorización de una expresión polinómica, en donde el alumno haciendo uso de papel y lápiz en primera instancia y luego de la calculadora; para posteriormente trabajar con la calculadora y después con papel y lápiz. Como tercera etapa se discuten los resultados obtenidos, con el fin de desarrollar razonamientos que lo lleven al aprendizaje conceptual. El contenido de ésta actividad se presenta a continuación:

Actividad seis: Factorización

Parte I (con papel y lápiz, así como con CAS): Observación de patrones en los factores.

Parte II: Hacia una generalización (actividad con papel y lápiz, así como con calculadora).

Parte III: papel y lápiz (tarea de desafío).

La **actividad ocho** presenta ejercicios de ecuaciones con una y dos incógnitas, y de sistemas de ecuaciones con dos incógnitas. Ésta actividad tiene como objetivo, que el estudiante por medio del comando SOLVE de la calculadora resuelva las ecuaciones, así como los sistemas de ecuaciones por medio de los métodos de Igualación y Sustitución. El contenido se presenta a continuación:

Actividad ocho: Sistemas de ecuaciones

Parte I (con CAS): Uso de evaluaciones numéricas para verificar soluciones dadas con números de cierto tipo de ecuaciones dadas.

Parte II (con CAS): Interpretación con la CAS de las soluciones de ecuaciones con una y dos incógnitas.

Parte III (con papel y lápiz): Repaso de los métodos de Igualación y de Sustitución.

Parte III B (con CAS): Uso del método de Igualación con la CAS.

Parte III C (con CAS): Uso del método de Sustitución con la CAS.

3.3 METODOLOGÍA DE LA EXPERIMENTACIÓN

El presente trabajo de investigación es de enfoque cualitativo, se contó para realizar la experimentación con un grupo alumnos de primer ingreso de la carrera de Ingeniería Química de la Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo. Se realizaron dos pruebas experimentales: una prueba piloto y una prueba formal.

La estructura de la metodología se realizó de la siguiente manera:

- Una experimentación piloto para obtener evidencias de la viabilidad del proyecto de investigación y para efectuar las modificaciones pertinentes en los instrumentos de acopio de datos.
- Experimentación formal, la cual se llevó a cabo para obtener las evidencias que comprueben la hipótesis planteada en la investigación.
- Una entrevista a los equipos que hagan razonamientos interesantes para alcanzar los objetivos planteados en el proyecto de investigación.

- Recabar, organizar y analizar los datos resultantes de las evidencias escritas y videograbadas.
- Obtención de las conclusiones pertinentes de los razonamientos vertidos por los estudiantes en las evidencias, para dar respuesta a las preguntas de investigación de éste proyecto.
- Elaborar propuestas, que estén sustentadas en los resultados del trabajo de investigación de éste proyecto.

3.4 EXPERIMENTACIÓN

Previo a la experimentación formal, los encargados de aplicar la actividad le dieron solución para tratar de identificar algunas posibles dudas que pudieran surgir al momento de desarrollar la actividad. Las actividades que se aplicaron a los estudiantes fueron hechas con una estructura didáctica, de forma tal, que lleve a los estudiantes a desarrollar razonamientos que aterricen en el aprendizaje de conceptos.

Para la experimentación, se contó con el trabajo de 21 de alumnos, de los cuales se formaron siete equipos de tres alumnos cada uno. Las sesiones de trabajo fueron cuatro, las cuales tuvieron una duración de tres horas cada una. Se reformuló parte de la redacción de las actividades de aprendizaje de Hitt-Kieran (2009), para tenerlas acorde al contexto de los estudiantes.

En la primera sesión, se trabajó con el uso y manejo de la calculadora, así como de los principales comandos: ENTER, FACTOR, EXPAND y SOLVE; ya que estos eran importantes para resolver las actividades con la calculadora; a cada equipo se le entregó una, así como la actividad diseñada por el equipo de investigación, para que fueran practicando con la calculadora y los comandos.

La segunda sesión de trabajo, fue la aplicación de la actividad cuatro. En donde se aborda la racionalización del denominador de una expresión. A los equipos, se les entregó la calculadora, la actividad y hojas en blanco, para que anotaran todas sus observaciones y dudas que tuvieran durante el desarrollo de la actividad. Por otro lado, a los integrantes de los equipos se les cambió el rol de trabajo en cada actividad: con la calculadora, con papel y lápiz y con la coordinación de la actividad.

En la tercera sesión de trabajo se aplicó la actividad seis, en la cual se trabajó con factorización. Con la misma estructura de trabajo que en la sesión anterior.

En la última sesión de trabajo, se aplicó la actividad ocho que aborda el tópico de sistemas de ecuaciones. Con la misma metodología de trabajo que en la sesión anterior.

En la última parte de la experimentación, se realizó una entrevista con uno de los siete equipos. Se elaboró un guion de preguntas, las cuales tenían que responder los estudiantes para que el equipo de investigación observara sus razonamientos al dar solución a las actividades. Se instalaron en el salón de clases, dos cámaras de video: una cámara fija, la cual era para observar las interacciones que se daban entre los alumnos; y otra cámara móvil, que podía hacer acercamientos para ver cómo resolvían las actividades los estudiantes y lo que escribían en las hojas en blanco que se les repartieron. La finalidad de esta entrevista era obtener evidencias del trabajo de los alumnos al resolver las actividades, así como, de lo que respondieron en la entrevista. El equipo se seleccionó, porque al hacer el análisis de los resultados de las actividades se observó que éste, consiguió soluciones correctas con procedimientos interesantes.

CAPÍTULO IV

ANÁLISIS Y DISCUSIÓN DE RESULTADOS

Para elaborar éste capítulo se contó con las siguientes evidencias: actividades que resolvieron los estudiantes, así como de las hojas en donde hicieron sus procedimientos y observaciones y de las videograbaciones.

Actividad 4: Racionalización del denominador de una expresión

En la actividad que se presenta a continuación como evidencia, los estudiantes hacen uso de papel y lápiz, y de la calculadora para racionalizar expresiones cuando el denominador es un monomio o un polinomio.

Parte I. b) En la siguiente actividad se continua con el trabajo en torno a la racionalización de denominadores de expresiones. Completa en la tabla siguiente, una fila a la vez; procede de arriba hacia abajo.

Expresión	Introduce en tu calculadora cada una de las expresiones dadas y escribe el resultado mostrado.	Trabajo con papel y lápiz que transforma la expresión original en la forma producida por la calculadora.
$\frac{7}{\sqrt{5}}$	$\frac{7\sqrt{5}}{5}$	$\frac{7}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{7\sqrt{5}}{5}$
$\frac{1}{\sqrt{3}-1}$	$\frac{\sqrt{3}+1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}-1} \cdot \frac{(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}+1)} = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$
$\frac{1}{\sqrt{7}+2}$	$\frac{\sqrt{7}-2}{3}$	$\frac{1}{\sqrt{7}+2} \cdot \frac{(\sqrt{7}-2)}{(\sqrt{7}-2)} = \frac{\sqrt{7}-2}{7-4} = \frac{\sqrt{7}-2}{3}$
$\frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{3}$	$\frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{3}$
$\frac{1}{3\sqrt{7}-5}$	$\frac{3\sqrt{7}+5}{28}$	$\frac{1}{3\sqrt{7}-5} \cdot \frac{3\sqrt{7}+5}{3\sqrt{7}+5} = \frac{3\sqrt{7}+5}{63-25} = \frac{3\sqrt{7}+5}{38}$
$\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}$	$-\frac{(\sqrt{5}-3)}{2}$	$\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1} \cdot \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}-1} = \frac{5-2\sqrt{5}+1}{5-1} = \frac{6-2\sqrt{5}}{4} = \frac{2(3-\sqrt{5})}{4} = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$
$\frac{\sqrt{3}+1}{1-\sqrt{3}}$	$-(\sqrt{3}+2)$	$\frac{\sqrt{3}+1}{1-\sqrt{3}} \cdot \frac{1+\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} = \frac{3+2\sqrt{3}+1}{1-3} = \frac{4+2\sqrt{3}}{-2} = -\frac{2(2+\sqrt{3})}{2} = -2-\sqrt{3}$

Observación

Los estudiantes al resolver esta parte de la actividad, hacen uso de papel y lápiz, y de la calculadora. Al trabajar con estos recursos, los alumnos razonan e interaccionan entre ellos para llegar al resultado mostrado por la calculadora.

En la **parte III b**, los alumnos tienen que hacer cálculos simbólicos para racionalizar el denominador de la expresión que se muestra en la actividad, por medio de papel y lápiz.

III b) ¿Qué cálculos simbólicos, con papel y lápiz, debes usar para racionalizar el denominador de la expresión $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt{2}}$?

Solo invertí el orden de las cantidades subradicales

Observación

Los alumnos al hacer uso de la calculadora observan y razonan que solo se invirtió el orden de los términos de abajo de la expresión, en tanto entran en discusión y razonan sobre los cálculos simbólicos que harían para que esta misma expresión la racionalicen haciendo uso de papel y lápiz.

Actividad 6: Factorización

En ésta actividad los alumnos haciendo uso de papel y lápiz, tratan de recordar la factorización y posteriormente hacen uso de la calculadora como manera de comprobar lo que hicieron con papel y lápiz. Así mismo, sin usar papel y lápiz ni calculadora, los estudiantes tienen que hacer cálculos mentales para anticipar los resultados de las expresiones que tienen que factorizar.

Parte I (con papel y lápiz así como con CAS): observación de patrones en los factores

1. (a) Antes de usar la calculadora, trata de recordar la factorización de cada una de las expresiones algebraicas listadas en la columna izquierda de la siguiente tabla:

Factorización usando papel y lápiz	Verificación usando FACTOR (muestra el resultado exhibido en la pantalla de la CAS)
$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$	$(a + b)(a - b)$
$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$	$(a - b)(a^2 + ab + b^2)$
$x^2 - 1 = (x + 1)(x - 1)$	$(x - 1)(x + 1)$
$x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$	$(x - 1)(x^2 + x + 1)$

Uno de los equipos respondió que cada una de las expresiones mostradas en la tabla anterior, se factorizan como diferencia de cuadrados o, diferencia o suma de cubos.

Observación

Los alumnos al observar las expresiones mostradas en la tabla, discuten sobre cómo debe de ser realizada la factorización de cada una de ellas. Después hacen uso de la calculadora, esto hace que surja un cambio de lo realizado con papel y lápiz a lo hecho con dicha tecnología, es decir, el alumno aprende a factorizar cuando maneja estos dos recursos.

En la **pregunta 2 (a)** de la parte 1, se le pide a los estudiantes que pronostiquen el resultado de la expresión dada sin hacer uso de papel y lápiz, y sin usar calculadora.

2 (a) Sin hacer manipulación algebraica alguna, anticipa el resultado de la siguiente expresión:

$$(x-1)(x^3+x^2+x+1) = x^4 - 1$$

Observaciones

Aquí los estudiantes antes de escribir, discuten entre ellos y razonan que es una diferencia de términos y que la variable está elevada a la cuarta, también observan que cuando se están multiplicando dos factores y el primero es una diferencia de dos términos y el segundo es un polinomio que va en forma descendente con respecto a la variable, nos va a dar una diferencia de la variable elevada a una potencia un número mayor que la potencia del segundo factor.

Actividad 8: Sistemas de ecuaciones.

En esta actividad, se les pide a los estudiantes que propongan cómo deben de usar la calculadora utilizando el comando SOLVE para resolver una ecuación con una incógnita, una ecuación con dos incógnitas, así como un sistema de ecuaciones por medio de los métodos de Igualación y Sustitución.

En la **pregunta 3** de la parte 1 A, se les pide a los estudiantes que encuentren más soluciones de la ecuación dada y cómo lo hacen.

2. Ahora el trabajo con la calculadora (pero no resuelvas, por favor). Completa la tabla de abajo con la información apropiada. $12x + 15 = 4(x - 2) + 7$

Valores de x	Qué introduces en la CAS	Resultado mostrado por la CAS
x = -2	$8x + 16 = 0 \quad \quad x = -2$	True
x = 2	$8x + 16 = 0 \quad \quad x = 2$	False
x = -5	$8x + 16 = 0 \quad \quad x = -5$	False

no, ya que es una ecuación de exponente 1
así que solo tiene una solución

Observación

Los estudiantes al resolver una ecuación que solo tiene una solución con la calculadora (muestra como resultado “verdadero”), inician entre ellos una discusión sobre la posibilidad de que ésta ecuación tenga más de una solución. Es aquí, cuando los estudiantes generan un ambiente de trabajo colaborativo,

En la parte III b de la actividad, los estudiantes tienen que resolver un sistema de ecuaciones por medio del método de Igualación y Sustitución, haciendo uso de la calculadora.

Parte III B (con CAS): Uso del método de Igualación con la CAS

He aquí un sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{aligned}x - 8 &= 2y + 2 \\ 3x + 5y + 3 &= 0\end{aligned}$$

1. Con la CAS, usa el método de Igualación para resolver este sistema (registra todo aquello que introduces en la calculadora, mientras prosigues con tu trabajo, y de lo que la calculadora muestra como resultado al usar sus comandos).

El método de Igualación consiste en:	Qué introduces en la CAS	Qué muestra la CAS como resultado
1. Despejar la misma variable en cada una de las ecuaciones y, de este modo, crear dos expresiones, las cuales tienen una sola variable;	$\text{solve}(x - 8 = 2y + 2, y)$ $\text{solve}(3x + 5y + 3 = 0, y)$	$x = \frac{x - 10}{2}$ $y = \frac{-3(x + 1)}{5}$
2 y 3. Proponer que las dos expresiones obtenidas en el paso 1 sean iguales entre ellas, para construir una ecuación con una variable; resolver la ecuación que resulta;	$\text{solve}\left(\frac{-3(x + 1)}{5} = \frac{x - 10}{2}\right)$	$x = 4$
4. Sustituir el valor obtenido en una de las ecuaciones del sistema; con	$\frac{4 - 10}{2}$	$y = -3$

Observación

Los alumnos al analizar que cuando despejan la misma variable del sistema de ecuaciones y lo introducen en la calculadora obtienen un solo valor. Concluyen que es porque al hacer esto tienen una ecuación con una variable.

Parte III C (con CAS): Uso del método de Sustitución con la CAS

1. Con la CAS usa el método de Sustitución para resolver este sistema (registra todo aquello que introduces en la calculadora, mientras prosigues con tu trabajo, y de lo que la calculadora muestra como resultado al usar sus comandos).

$$\begin{aligned}x + 3y &= 5 \\ 7x + 6y &= 20\end{aligned}$$

El método de Sustitución consiste en:	Qué introduces en la CAS	Qué muestra la CAS como resultado
1. Despejar, si es necesario, una de las variables de alguna de las ecuaciones;	<code>solve(x + 3y = 5, x)</code>	$x = 5 - 3y$
2. Sustituir la expresión obtenida, en el paso 1, en la variable apropiada de la otra ecuación y, de este modo, crear una ecuación con una sola variable;	<code>expand(7(5 - 3y) + 6y = 20, y)</code>	$35 - 15y = 20$
3. Resolver la ecuación obtenida en el paso 2;	<code>solve(35 - 15y = 20)</code>	$y = 1$
4. Sustituir el valor obtenido en una de las ecuaciones del sistema; con objeto de calcular el valor de la otra variable de la pareja solución.	$5 - 3y y = 1$	2

Uno de los equipos respondió que este método consiste en despejar una de las incógnitas de una de las ecuaciones y sustituirlo en la otra ecuación para poder encontrar el valor de la incógnita despejada.

Observación

Se observó que para algunos de los estudiantes el método de sustitución se les facilita más que el método de igualación, ya que para ellos en el método de sustitución se trabaja en una sola línea y no se despeja tanto. Otros comentaron que el Método de Igualación es el más fácil, ya que despejan la misma variable de las dos ecuaciones y las igualan para así encontrar el valor de la otra variable.

Para todas estas respuestas y observaciones que realizaron los alumnos, se tienen las evidencias correspondientes. A continuación se presenta la revisión de los videos que se tomaron en la entrevista que se les hizo a los estudiantes.

Revisión videos

Tiempo (min)	Tema	Observaciones
00:01	Trabajo con calculadora	Explican al profesor el resultado mostrado por la calculadora.
00:038	Trabajo con papel y lápiz	Explican cómo haciendo uso de papel y lápiz, racionalizan la expresión.
01:06	Diferencias	Explican al profesor qué diferencias hay entre la racionalización de un denominador monomio y un polinomio.
01:39	Trabajo con calculadora	Explican al profesor el resultado mostrado por la calculadora de la racionalización de la expresión.
01:56	Trabajo con papel y lápiz	Explican cómo deben racionalizar el denominador de la expresión dada.
02:28	Productos Notables	Explican al profesor cómo se realiza la factorización de las expresiones.
02:52		Hacen uso de la calculadora para comprobar los resultados de las factorizaciones de las expresiones hechas con papel y lápiz
03:02	Factorización	Interacción de los alumnos al discutir sobre los valores de la variable “n”.
03:23		El profesor pregunta si en una expresión se encuentra el factor $(x+1)$ cuando la variable “n” es número par o impar.
04:27		Explican al profesor la solución de la expresión x^5-1 .
05:47	Sistemas de ecuaciones	Desarrollan el término de la derecha de la ecuación y despejar la variable “x”
07:09	Sistemas de ecuaciones	Interacción de los alumnos sobre las soluciones de una ecuación.
07:37		Explicación del método de sustitución.
09:56		Explican al profesor por qué el valor dado es el único que resuelve la ecuación.

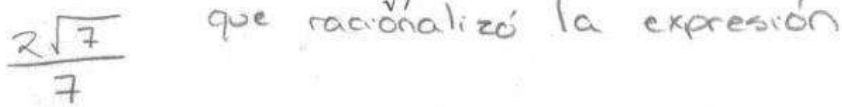
12:03		Explicación de cómo introducen en la calculadora la expresión.
13:21		Explicación de cómo resuelven el sistema de ecuaciones por los métodos de Sustitución e Igualación.
15:04		El profesor les pregunta qué método se les facilita más y por qué.

En el dialogo que se muestra a continuación, los alumnos trabajan con la calculadora para resolver la expresión mostrada en la actividad, posteriormente hacen uso de papel y lápiz para demostrar el resultado mostrado por la calculadora.

Actividad 4: Racionalización del denominador de una expresión

En el siguiente diálogo, el equipo trabajó con un ejercicio de racionalización del denominador de una expresión haciendo uso de la calculadora y explica qué es lo que muestra la calculadora.

a-i) Introduce en tu calculadora la expresión $\frac{2}{\sqrt{7}}$ y presiona ENTER ¿qué observas?



Handwritten calculation: $\frac{2\sqrt{7}}{7}$ que racionalizó la expresión

El siguiente dialogo entre los estudiantes y el profesor, evidencia su razonamiento.

Profesor: La actividad racionalización de denominador, ustedes introducen la siguiente expresión en la calculadora $\frac{2}{\sqrt{7}}$

Y presiona el comando ENTER, ¿qué es lo que observas?

Alumno 1: Que elimina el radical del denominador

Profesor: Ahora, esa misma expresión, haciendo manipulación algebraica cómo la hacen para que salga el mismo resultado

Alumno 2: Si

Profesor: ¿Por qué?

Alumno 2: Porque de la misma forma como se va a multiplicar uno, se va a eliminar

la raíz del denominador

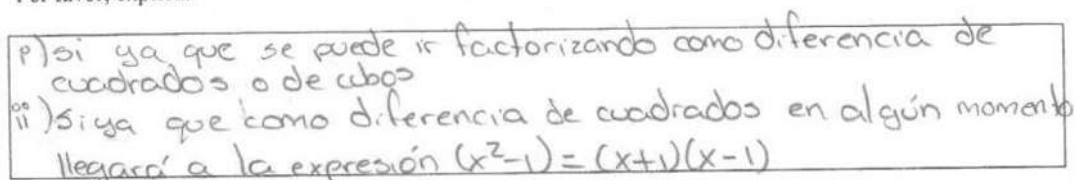
Lo que observan los estudiantes es que racionaliza el denominador de la expresión, entonces cuando ellos hacen uso del papel y lápiz, demuestran el resultado mostrado por la calculadora, es aquí donde el estudiante aprende cuando utiliza estos dos recursos, además de que interactúan entre ellos y trabajan en equipo.

Actividad 6: Factorización

Se muestra en el siguiente diálogo la interacción que hay entre los alumnos, cuando responden la pregunta sobre la expresión mostrada en la actividad.

1. La expresión: $x^{2004} - 1$
i) ¿contiene más de dos factores?
ii) ¿incluye a $(x+1)$ como factor?

Por favor, explica:



i) si ya que se puede ir factorizando como diferencia de cuadrados o de cubos
ii) si ya que como diferencia de cuadrados en algún momento llegaré a la expresión $(x^2-1) = (x+1)(x-1)$

Profesor: Ahora, si yo le digo la siguiente expresión: $x^{2400} - 1$, ¿Contiene más de dos factores?

Alumno 1: No

Profesor: ¿Por qué?

Alumno 3: ¿Si podría, no?

Alumno 1: Es igual a la expresión anterior

Alumno 2: La separas como diferencia de cuadrados

Alumno 1: Entonces si tiene más de dos factores.

Se observa que cada uno de los integrantes del equipo da una respuesta diferente, el alumno al analizar la expresión dice que uno de los factores de la expresión se puede separar como diferencia de cuadrados, es aquí donde el alumno uno razona sobre la respuesta del alumno dos y es cuando se da la interacción entre ellos para sacar sus

conclusiones. Además, se fortalece el trabajo en equipo y se consolida el aprendizaje colaborativo.

Actividad 8: Sistemas de ecuaciones

En esta parte del diálogo el profesor pregunta a los estudiantes, qué método de solución para un sistema de ecuaciones se les facilita y por qué. Cada uno de ellos, dio su respuesta de acuerdo a lo que trabajaron en la actividad.

3. ¿Cuál de los dos métodos (IGUALACIÓN y SUSTITUCIÓN) prefieres y por qué?

El de igualación se nos hizo más sencillo ya que no se nos complicó en el uso de la calculadora

Profesor: Para ustedes, ¿Qué método le resulta más fácil para la solución de ecuaciones?

Alumno 1: Sustitución

Profesor: ¿Por qué?

Alumno 1: Porque es más fácil trabajar en una sola línea, en vez de estar haciendo despejes.

Profesor: Para ti, alumno 2

Alumno 2: A mí me gusta más el de igualación

Profesor: ¿Por qué?

Alumno 2: Porque como yo soy de estar contando peras y manzanas, así como que se me hace más fácil, que esté la igualdad, ahora sí que dos ecuaciones con una sola incógnita que tener dos y estar cambiando.

Profesor: Para ti, alumno 3

Alumno 3: Pues también, igualación

Profesor: ¿Por qué?

Alumno 3: Por lo mismo, que nada más tenemos una sola variable.

Cada alumno resolvió el sistema de ecuaciones mostrado en la actividad por el método que más se les facilitaba. El alumno uno, dice que a él se le facilita más el método de sustitución ya que trabaja en una sola línea en vez de estar despejando. Para los alumnos dos y tres se les facilita más el método de igualación, porque es más sencillo obtener dos expresiones iguales con una sola incógnita. Cada alumno hace su propio razonamiento, y con eso crea su propio aprendizaje.

CAPÍTULO V

CONCLUSIONES

Las nuevas tecnologías son uno de los factores más influyentes en el desarrollo alcanzado por la sociedad contemporánea, su incidencia en la educación es tal, que constituye un valioso recurso que permite llevar cabo un proceso educativo centrado en el aprendizaje del alumno. Sin embargo, no es necesario que el profesor haga uso de la tecnología computacional en todas las actividades, sino sólo en aquellas en las que su uso mejore el proceso de aprendizaje.

Las TIC pueden apoyar las investigaciones sobre el aprendizaje de los alumnos en varias áreas de las matemáticas, como geometría, estadística, álgebra, etc.; pues se espera que cuando dispongan de ellas logren concentrarse en tomar decisiones, razonar y resolver problemas, más que en el apoyo operacional de las calculadora. La existencia, versatilidad y poder de las TIC, hacen posible y necesario reexaminar qué matemáticas deben aprender los alumnos, así como la mejor forma en que puedan aprenderlas.

El uso de la calculadora TI-Nspire CX CAS es parte fundamental de éste proyecto, junto con las actividades de aprendizaje que resolvieron los estudiantes, porque lograron aprender álgebra por medio de los razonamiento que hicieron en cada una de las actividades, por la estructura didáctica de las mismas. Además, de que se fortaleció el trabajo en equipo, para así alcanzar el aprendizaje colaborativo.

Con las evidencias que se tienen, tanto en forma escrita como en videograbaciones, se pudo observar que el alumno tuvo razonamientos con los que conceptualizó tópicos algebraicos. Lo anterior se logró, por el trabajo del estudiante con la calculadora y las actividades de aprendizaje.

Algunas conclusiones importantes, se muestran a continuación:

- Analizando la actividad cuatro en la parte a-ii, se puede concluir, que el estudiante al utilizar diferentes registros de representación, aprende a racionalizar el denominador de la expresión, fortaleciendo así el ambiente de trabajo colaborativo.
- De la actividad seis que involucra la factorización, en la parte 1(a) que se les pide a los alumnos que factoricen las expresiones algebraicas; se concluye que los alumnos

saben diferenciar cuando una expresión puede ser factorizada como una diferencia de cuadrados, o como una suma o diferencia de cubos; es decir, los alumnos al observar la expresión entran en un proceso de razonamiento y de discusión entre ellos que hace que se llegue a dicha conclusión.

- Analizando la actividad seis en la parte II C.1, los alumnos concluyeron que la expresión $x^{2004} - 1$ sí contiene más de dos factores, porque al momento de realizar la factorización, uno de los dos términos todavía se puede factorizar aún más y que además contiene a $(x + 1)$ como factor. Podemos decir, que los alumnos al observar la expresión propuesta empiezan a discutir entre ellos y su razonamiento los lleva lo anteriormente citado.
- De la actividad seis parte II C.3, los estudiantes concluyen que al realizar la factorización de $(x^{853} - 1)$, observaron que no contiene más de dos factores, debido a que la variable “ x ” esta elevada a una potencia impar y cuando tenemos este tipo de diferencia no aparece el factor $(x + 1)$, ellos llegaron a este razonamiento después de haber trabajado y discutido en equipo.
- La actividad ocho trata sobre Sistemas de ecuaciones en la parte I A.3, en ella se puede observar que la ecuación $12x + 15 = 4(x - 2) + 7$ sólo tiene una solución al introducirla en la calculadora, ya que muestra como resultado que es verdadero (true). Podemos concluir que los estudiantes en el equipo, interaccionan y discuten entre ellos, generando un ambiente de aprendizaje colaborativo.
- En la actividad ocho parte I B.3, los estudiantes concluyeron que la ecuación $\frac{3}{2}y - x = 9$ puede tener más de dos soluciones si se despeja una variable en función de la otra, esto debido a que si le damos un valor a una de las variables obtenemos el valor de la otra. Esto generó interacción entre los estudiantes sobre sus razonamientos, como se puede ver en las evidencias, y del por qué puede haber más soluciones de la ecuación mostrada en la actividad.
- Dando respuesta a una de las preguntas de investigación, acerca de los razonamientos que tienen los estudiantes en la solución de las actividades; parten por lo general de la visualización, es decir, el alumno al estar trabajando con lápiz y papel y posteriormente con la calculadora, manejan diferentes registros de representación y transitan de un registro a otro. Lo cual, favorece que el estudiante conceptualice los tópicos algebraicos involucrados en la actividad utilizando el sentido de la vista.

- Contestando a otra de las preguntas de investigación, en donde se cuestiona acerca de las estrategias y recursos que utilizan los estudiantes para resolver las actividades; en el presente trabajo, los estudiantes utilizan como estrategias las discusiones entre cada uno de los integrantes del equipo, así como las posibles interrogantes que se hacen los estudiantes de cómo resolver las actividades, de tal manera que el estudiante crea un razonamiento que le permite resolver dichas actividades, teniendo como recursos la calculadora y las actividades.
- Para dar respuesta a la pregunta de investigación sobre las dificultades a las que se enfrentan los estudiantes cuando trabajan con las actividades, se pudo observar, que les cuesta trabajo razonar cuando se les pide en la actividad que la resuelvan sin que hagan uso de la calculadora, ni del papel y lápiz.
- Respondiendo a la última pregunta de investigación, acerca de las características de las actividades que permiten generar un ambiente de aprendizaje que favorezca la construcción del conocimiento; se puede concluir, que la estructura didáctica que tiene cada actividad y el trabajo colaborativo, desarrollaron razonamientos entre los estudiantes que generaron un ambiente propicio para el aprendizaje.
- Por otro lado, los estudiantes comentaron que se les hicieron interesantes las actividades y el trabajo con la calculadora, porque aprendieron cosas nuevas que no habían visto ni hecho, en el manejo de conceptos de álgebra.
- Los alumnos se mostraron muy motivados al trabajar con la calculadora TI-Nspire CX CAS, ya que para ellos era algo nuevo en cuestión de tecnología aplicada al aprendizaje de las matemáticas.
- También aprendieron a trabajar en equipo, intercambiando los roles de trabajo y reforzaron sus conocimientos acerca del álgebra.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. Área, M. (2008). ¿Las TIC están generando innovación pedagógica en las aulas? Lo que nos dice la investigación. Ordenadores en el aula. Blog sobre los retos de la educación ante la tecnología y la cultura digital.
2. Artigue, M. (2002). Learning mathematics in a CAS environment: the genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. *International journal of computers for mathematical learning* 7: 245–274.
3. Ávila Font, E. (2003). Las Nuevas Tecnologías de la Información y la Comunicación como herramientas necesarias en la formación profesional de los estudiantes universitarios. Granada, España.
4. Brady, C. (2010). El aprendizaje colaborativo con tecnología. Innovaciones Educativas. Texas Instruments.
5. Calzadilla, M.E. (2001). Aprendizaje colaborativo y tecnologías de la información y comunicación. *EOI-Revista Iberoamericana de Educación*, 1-10.
6. Castillo, S. (2008). Propuesta pedagógica basada en el constructivismo para el uso óptimo de las TIC en la enseñanza y el aprendizaje de la matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 11(2), pp. 171-194.
7. Chevallard, Y. (1991). Dimension instrumentale, dimension sémiotique de l'activité mathématique. Seminaire de Didactique des Mathématiques et de l'Informatique de Grenoble LSD2, IMAG, Université J. Fourier, Grenoble.
8. D'Amore, B. (2009/11). Conceptualización, registros de representaciones semióticas y noética: Interacciones constructivistas en el aprendizaje de los conceptos matemáticos e hipótesis sobre algunos factores que inhiben la devolución. *Revista Científica. Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá*. 11, 150-164. ISSN:0124-2253. [El número 2009 fue impreso en mayo de 2011; esto explica la fecha puesta al artículo: 2009/11].
9. Díaz Barriga Arceo F, Hernández Rojas G. (2003). Estrategias Docentes para un Aprendizaje Significativo. Una interpretación Constructivista. Ed. McGraw-Hill, México. Página 31.

10. Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitive*, IREM de Strasbourg. (Traducido por el Departamento de Matemática Educativa del CINVESTAV IPN, México 1997).
11. Duval, R. (1995). Sémosis et pensée humaine: Registres sémiotiques et apprentissage intellectuels. Peter Lang. Suisse.
12. Duval, R. (1998). Signe et objet (I). Trois grandes étapes dans la problématique des rapports entre représentation et objet. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*.6, 139-163.
13. Feuerstein, R. (1980). Teoría de la Modificabilidad Cognitiva Estructural de Reuven Feuerstein.
14. García, L, M., Romero, A, I. (2009). Influencia de las Nuevas Tecnologías en la Evolución del Aprendizaje y las Actitudes Matemáticas de Estudiantes de Secundaria.
15. Gómez, M.T., López, N. (2008). Metodologías centradas en el alumno para el aprendizaje en red. Editorial Síntesis. España.
16. Hiebert, J., Carpenter, T. (1992). *Learning and Teaching with understanding*. En D. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 65-97). New York: Macmillan Publishing Company.
17. Hitt, F., Kieran, C. (2009). Constructing knowledge via a peer interaction in a CAS environment with task designed from a task-technique-theory perspective. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 14,121-152.
18. Janvier, C. (1987). Representations and Understanding: The notion of Function as an example. En C. Janvier (Ed.), *Problems of representation in the Teaching and Learning of Mathematics*. Lawrence Erlbaum Associates, p. 67-71.
19. Kieran, C. (1989). The early learning of algebra: A structural perspective .En S. Wagner y C. Kieran. *Research agenda for mathematics education: Vol. 4 Research issues in the learning and teaching of algebra*, pp. 33-56. Hillsdale, NJ: Erlbaum.
20. Kieran, C. (1992). The Learning and Teaching of School Algebra. En Grouws, D.A. (ED.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. Macmillan Publishing Company. New York, pp. 390-419.
21. Kieran, C.(1996). The changing face of school algebra .En C. Alsina, B. Alvarez, B.R. Hodgson; C. Laborde y A Perez.(Eds.).8th International Congress on Mathematics Education: Selected Lectures.(pp.271-290). Sevilla: S.A.E.M. Thales.

22. Kieran, C. (2007). Learning and Teaching Algebra at the Middle School Through College Levels. En Lester, F.K. (Ed.). Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning (pp.707-762). Reston, Virginia: NTCM e IAP.
23. Kieran, C. y Filloy, E. (1989). El aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva psicológica. Enseñanza de las Ciencias, 7(3), pp. 229-240.
24. Kieran, C., Boileau, A., Hitt, F., Gúzman, J., Saldanha., Tanguay, D. (2006). Le role des calculatrices symboliques dans l'emergence de la pensé algebrique: les CAS des expressions equivalentes.
25. Kutzler, B. (1999). The Algebraic Calculator as a Pedagogical for Teaching Mathematics. In: Laughbaum E.D. (ed). Hand-Held Technology in Mathematics and Science Education: A Collection of Papers, Teachers Teaching with Technology Short Course Program.
26. Piaget, J., Inhelder, B. (1948). "La role des operations dans le development de l'intelligence". Proc.12 Int. Congr. Psychol., pp.102-103.
27. PISA, Pruebas de Matemáticas y Solución de Problemas, Instituto Nacional de Evaluación y Calidad del Sistema Educativo, Ministerio de Educación y Ciencia, Madrid, (2003 a).
28. Rojano, T. (2003). Incorporación de entornos tecnológicos de aprendizaje a la cultura escolar: Proyecto de innovación educativa en matemáticas y ciencias en escuelas secundarias públicas de México [Incorporating technological learning environments into the school culture: An educational innovation project in mathematics and science in the public secondary schools of México]. *Revista Iberoamericana de Educación*, 33, 135-165.
29. Santandreu, P., Mercé. (2004). *Recursos TIC en la enseñanza y aprendizaje del área de matemáticas*. En revista electrónica no. 20 Comunicación y Pedagogía.
30. Skemp, R. (1986). The psychology of learning mathematics. London, Pelican.
31. UNESCO (1996): La Educación encierra un tesoro. Santillana Editores/UNESCO. Madrid.
32. Ursini, S., Sánchez, G., Orendain, M., Butto, C. (2004). El uso de la tecnología en el aula de Matemáticas: Diferencias de género desde la perspectiva de los docentes. Departamento de Matemática Educativa. CINVESTAV. Facultad de Psicología. FES Zaragoza. UNAM. Dirección General de Materiales y Métodos Educativos. SEP. México DF.

33. Vygotsky, L. (1979). El desarrollo de los procesos psicológicos superiores. Madrid, Editorial Grijalbo.
34. Vygotsky, L. <http://www.idoneos.com/index.php/293538>.
35. www.monografias.com/trabajos87/registros-semioticos-duval/registros-semioticos-duval.
36. <http://algebravida.blogspot.mx/2009/06/aprendizaje-del-algebra-mediante-las.html>

ANEXO 1

El anexo 1 contiene los formatos de las actividades de aprendizaje, así como la hoja de manejo de la calculadora, que se aplicaron a los estudiantes de nuevo ingreso de la carrera de Ingeniería Química de la Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, para realizar el presente proyecto de tesis.

ACTIVIDAD 4

Nombre:

Fecha:

Actividad 4: Racionalización del denominador de una expresión

Contenido: Racionalización del denominador de una expresión.

Objetivo: Ser capaz de racionalizar un denominador y de simplificar expresiones, usando la multiplicación de formas conjugadas.

Parte I: Actividad con calculadora así como con papel y lápiz

a-i) Introduce en tu calculadora la expresión $\frac{2}{\sqrt{7}}$ y presiona ENTER ¿qué observas?

a-ii) ¿Qué cálculos simbólicos con papel y lápiz, producirán el mismo resultado dado por la calculadora (en la parte a-i precedente)?

(Discusión en el salón de clases de las preguntas a-i y a-ii)

Parte I. b) En la siguiente actividad se continúa con el trabajo en torno a la racionalización de denominadores de expresiones. **Completa, en la tabla siguiente, una fila a la vez;** procede de arriba hacia abajo:

Expresión	Introduce en tu calculadora cada una de las expresiones	Trabajo con papel y lápiz que transforma la expresión original en la
-----------	---	--

	dadas y escribe el resultado mostrado.	forma producida por la calculadora.
$\frac{7}{\sqrt{5}}$		
$\frac{1}{\sqrt{3}-1}$		
$\frac{1}{\sqrt{7}+2}$		
$\frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$		
$\frac{1}{3\sqrt{7}-5}$		
$\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}$		
$\frac{\sqrt{3}+1}{1-\sqrt{3}}$		

(Discusión en el salón de clases de la Pregunta Parte I b)

Parte I c) Tomando como base las estrategias usadas para racionalizar los denominadores de las expresiones precedentes, completa las celdas vacías de la tabla siguiente:

Expresión ($c \geq 0$ y $d \geq 0$)	Manipulación simbólica que permite racionalizar el denominador de las expresiones dadas
$\frac{1}{\sqrt{c}-1}$	
$\frac{\sqrt{d}}{\sqrt{d}+1}$	

(Discusión en el salón de clases de la Pregunta I c)

Parte II: Actividad con calculadora así como con papel y lápiz

a) ¿Qué manipulaciones simbólicas, con papel y lápiz, racionalizarán el denominador de la expresión $\frac{a\sqrt{b}-b\sqrt{a}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$, donde $a, b > 0$?

II b) Introduce en tu calculadora la expresión $\frac{a\sqrt{b}-b\sqrt{a}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$, presiona ENTER y escribe, en la parte de abajo, el resultado obtenido:

II c) Si la calculadora muestra un resultado que difiere del obtenido en la Parte II a), ¿qué puedes hacer para ajustarlos?

(Discusión en el salón de clases de Parte I y Parte II)

Parte III: Un desafío (papel y lápiz)

Se desea usar una estrategia similar a la empleada hasta esta parte para racionalizar el denominador de la expresión $\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}$

III a) Introduce en tu calculadora la expresión $\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}$, presiona ENTER y escribe, en la parte de abajo, el resultado obtenido. ¿Qué observas?

III b) ¿Qué cálculos simbólicos, con papel y lápiz, debes usar para racionalizar el denominador de la expresión $\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}$?

(Discusión en el salón de clases de la Parte III)

ACTIVIDAD 6

Nombre:

Fecha:

Actividad 6: Factorización

Parte I (con papel y lápiz, así como con CAS): observación de patrones en los factores

1. (a) Antes de usar la calculadora, trata de recordar la factorización de cada una de las expresiones algebraicas listadas en la columna izquierda de la siguiente tabla:

Factorización usando papel y lápiz	Verificación usando FACTOR (muestra el resultado exhibido en la pantalla de la CAS)
$a^2 - b^2 =$	
$a^3 - b^3 =$	
$x^2 - 1 =$	
$x^3 - 1 =$	

Discusión en el salón de clases de la Parte I, 1a

1. (b) Efectúa las operaciones indicadas (usando papel y lápiz)

$$(x - 1)(x + 1) =$$

$$(x - 1)(x^2 + x + 1) =$$

2. (a) Sin hacer manipulación algebraica alguna, anticipa el resultado de los siguientes productos:

$$(x - 1)(x^3 + x^2 + x + 1) =$$

2. (b) Verifica los resultados precedentes anticipados, usando papel y lápiz (en el rectángulo de abajo), y después usando la calculadora.

2. (c) ¿Qué tienen de común las siguientes tres expresiones? y ¿en qué difieren?

$$(x-1)(x+1), (x-1)(x^2 + x + 1), \text{ y } (x-1)(x^3 + x^2 + x + 1).$$

2. (d) ¿Cómo explicas el hecho de que los productos precedentes son todos ellos un binomio, si se llevó a cabo la multiplicación de: dos binomios, un binomio por un trinomio y un binomio por un tetranomio?

Discusión en el salón de clases de la Pregunta 2d

2. (e) Tomando como base las expresiones que has encontrado hasta ahora, pronostica una factorización de la expresión: $x^5 - 1$.

2. (f) Explica por qué el producto: $(x-1)(x^{15} + x^{14} + x^{13} + \dots + x^2 + x + 1)$ da como resultado: $x^{16} - 1$

2. (g) Tu explicación (en (f), precedente) ¿también es válida para la siguiente igualdad?
- $$(x-1)(x^{134} + x^{133} + x^{132} + \dots + x^2 + x + 1) = x^{135} - 1$$

Explica:

--

Discusión en el salón de clases de la Parte

Parte II: Hacia una generalización (actividad con papel y lápiz, así como con calculadora)

II(A) 1. En esta actividad, cada línea de la tabla de abajo debe ser completada en su totalidad (las tres celdas) una fila a la vez. Empieza de arriba hacia abajo.

Si para una fila dada, los resultados de las columnas de la izquierda y de en medio difieren, reajústalas usando manipulaciones algebraicas, y escribe tus resultados en la columna de la derecha.

II.(A).2. Elabora una conjetura, en general, ¿para qué números n la factorización $x^n - 1$?:

- i) contiene exactamente dos factores.
- ii) contiene más de dos factores.
- iii) incluye a $(x+1)$ como factor.

Por favor, explica:

--

Discusión en el salón de clases de la Parte II A

Parte II: Hacia una generalización (actividad con papel y lápiz, así como con calculadora)

II(A) 1. En esta actividad, cada línea de la tabla de abajo debe ser completada en su totalidad (las tres celdas) una fila a la vez. Empieza de arriba hacia abajo.

Si, para una fila dada, los resultados de las columnas de la izquierda y de en medio difieren, reajústalas usando manipulaciones algebraicas, y escribe tus resultados en la columna de la derecha.

Factorización usando papel y lápiz	Resultado dado por el comando FACTOR	Cálculos algebraicos para reajustarlas, si es necesario
$x^2 - 1 =$		
$x^3 - 1 =$		
$x^4 - 1 =$		
$x^5 - 1 =$		
$x^6 - 1 =$		

Parte II, continuación (con papel y lápiz así como con calculadora)

II (B) 1. Como con la Parte A precedente, cada una de las líneas de la tabla de abajo, debe ser completada en su totalidad (las tres celdas), una fila a la vez, antes de proceder a la fila siguiente. Trabaja de arriba hacia abajo.

Si, para una fila dada, los resultados de las columnas de la izquierda y de en medio difieren, reajústalas usando manipulaciones algebraicas pertinentes; escribe tu trabajo en la columna de la derecha.

Factorización usando papel y lápiz	Resultado dado por el comando FACTOR	Cálculos algebraicos para reajustarlas, si es necesario
$x^7 - 1 =$		
$x^8 - 1 =$		
$x^9 - 1 =$		
$x^{10} - 1 =$		
$x^{11} - 1 =$		
$x^{12} - 1 =$		

$x^{13} - 1 =$		
----------------	--	--

II. (B).2. Con base en los patrones que observaste en la tabla II.B precedente, revisa (si es necesario) tu conjetura de la Parte A. Esto es, ¿para qué números n la factorización de $x^n - 1$?:

i) contiene exactamente dos factores.

ii) contiene más de dos factores.

ii) incluye a $(x+1)$ como factor.

Por favor, explica:

--

II(C) Sin usar tu calculadora, responde las siguientes preguntas:

1. La expresión: $x^{2004} - 1$

i) ¿contiene más de dos factores?

ii) ¿incluye a $(x+1)$ como factor?

Por favor, explica:

--

2. La expresión: $x^{3003} - 1$

i) ¿contiene más de dos factores?

ii) ¿incluye a $(x+1)$ como factor?

Por favor, explica:

--

3. La expresión: $x^{853} - 1$

i) ¿contiene más de dos factores?

ii) ¿incluye a $(x+1)$ como factor?

Por favor, explica:

--

Parte III: papel y lápiz, tarea de desafío

Explica por qué $(x + 1)$ es siempre factor de $x^n - 1$ para valores pares de $n \geq 2$.

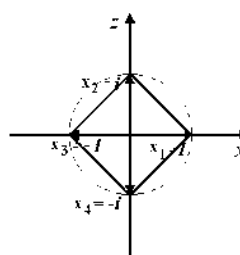
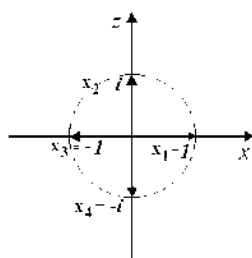
Investigación opcional

Considerando las diferentes expresiones polinómicas que se han trabajado en esta parte, y que nuestro objetivo fue encontrar las raíces de esos polinomios, vayamos ahora al estudio de lo que llamamos “**raíces de la unidad**”.

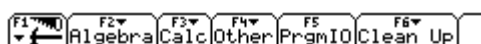
Por ejemplo, calcula las raíces de la ecuación polinómica $x^4 - 1 = 0$, la cual es equivalente a $x^4 = 1$, se puede proceder mediante la factorización:

$$(x^2 - 1)(x^2 + 1) = (x - 1)(x + 1)(x^2 + 1) = 0$$

Esta factorización lleva a las soluciones: $x_1 = 1$, $x_2 = i$, $x_3 = -1$ y $x_4 = -i$, las cuales son cuatro raíces en el plano complejo.



Otro ejemplo: encontrar las raíces reales del polinomio $x^3 - 1$ se reduce a resolver la ecuación $x^3 - 1 = 0$, la cual puede ser resuelta usando el comando SOLVE. Sin embargo, también se pueden encontrar las raíces *complejas* de este polinomio, buscando las soluciones complejas de $x^3 - 1 = 0$ mediante el uso del comando CSOLVE de la calculadora:



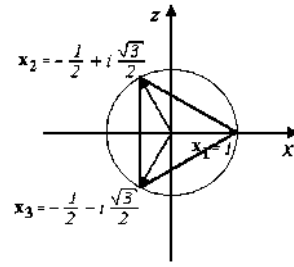
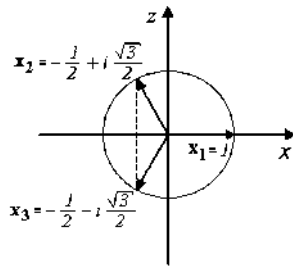
```

■ solve(x^3 - 1 = 0, x)          x = 1
■ cSolve(x^3 - 1 = 0, x)
x = -1/2 + (sqrt(3)/2)i or x = -1/2 - (sqrt(3)/2)i or x = 1
csolve(x^3-1=0,x)
MAIN          RAD EXACT          FUNC 2/30
    
```

Esto es tanto como decir que la ecuación $x^3 - 1 = 0$ es equivalente a

$$(x - 1) \left(x - \left(\frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} \right) \right) \left(x - \left(\frac{-1 - \sqrt{3}i}{2} \right) \right) = 0$$

Nota que: $x_1=1$, $x_2=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ y $x_3=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$. Estos tres números complejos, x_1 , x_2 y x_3 , llamados “*las tres raíces cúbicas de la unidad*”, son las tres soluciones de la ecuación $x^3-1=0$, la cual es equivalente a $x^3=1$. Entonces, las soluciones son las raíces cúbicas de 1. Estos tres números complejos tienen la propiedad de que ellos pueden ser localizados en el círculo unitario (i.e., el círculo centrado en (0, 0) cuyo radio es de longitud 1) en el plano complejo:



En efecto, x_2 y x_3 son raíces del polinomio: $x^2 + x + 1$. Esto es, ellas son soluciones de la ecuación $x^2 + x + 1 = 0$. Más aún, el producto de cualesquiera de tales raíces complejas, siempre da como resultado una de esas raíces.

¿Se puede continuar de esta misma manera con otras expresiones desarrolladas hasta ahora?

¿Notaste cierta regularidad en la obtención de las raíces de la unidad?

ACTIVIDAD 8

Nombre:

Fecha:

Actividad 8: Sistemas de ecuaciones

Lección 1: Introducción a los sistemas de ecuaciones

Parte I (con CAS): uso de evaluaciones numéricas para verificar soluciones dadas con números de cierto tipo de ecuaciones dadas

(A) Ecuaciones de primer grado con una incógnita

1. La tabla siguiente contiene una ecuación y algunos valores numéricos:

Sin resolver esta ecuación, determina si los valores de la columna de la izquierda son soluciones de la ecuación (usando la CAS). Pero antes de usar la CAS, describe, en el rectángulo de abajo, cómo propones usar la CAS para determinar esto, y di qué información te dará la calculadora.

--

2. Ahora el trabajo con la calculadora (pero no resuelvas, por favor). Completa la tabla de abajo con la información apropiada. $12x+15=4(x-2)+7$

Valores de x	Qué introduces en la CAS	Resultado mostrado por la CAS
$x = -2$		
$x = 2$		
$x = -5$		

3. Pregunta adicional: ¿puedes encontrar otras soluciones de esta ecuación? Por favor, explica.

--

(B) Ecuaciones de primer grado con dos incógnitas

1. La tabla siguiente contiene una nueva ecuación y algunos valores numéricos:

Sin resolver esta ecuación, pero de nuevo usando la CAS, determina si cada par de valores de la columna de la izquierda es solución. Pero antes de usar la CAS, describe, en el

rectángulo de abajo, cómo propones usar la CAS para determinar esto, y di qué información te dará la calculadora.

2. Ahora el trabajo con la calculadora (pero sin resolver, por favor). Completa la tabla de abajo con la información apropiada. $\frac{3}{2}y - x = 9$

Valores de la pareja x y y	Qué introduces en la CAS	Resultado mostrado por la CAS
$x = -3$ y $y = 4$		
$x = -18$ y $y = -6$		
$x = 3$ y $y = 12$		

3. Pregunta adicional: ¿puedes encontrar otras soluciones de esta ecuación? Por favor, explica.

(C) Sistemas de dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas

1. La tabla siguiente contiene un sistema de ecuaciones y algunas parejas ordenadas de números.

Sin resolver este sistema de ecuaciones, determina si cada par de valores de la columna de la izquierda es solución (usando la CAS). Pero antes de usar la CAS, describe, en el rectángulo de abajo, cómo propones usar la CAS para determinar esto, y di qué información te dará la calculadora.

2. Ahora el trabajo con la calculadora (pero no resuelvas). Por favor, escribe, en la tabla de abajo, qué introduces en la calculadora, así como aquello que la calculadora muestra como resultado.

$$2x = 8 - 4y$$

$$17x - 31y = 3$$

Valores de la pareja x y y	Qué introduces en la CAS	Resultado mostrado por la CAS
$x = 0$ y $y = 2$		
$x = 4$ y $y = 3$		
$x = 2$ y $y = 1$		

3. Pregunta adicional: ¿puedes encontrar otras soluciones de este sistema de ecuaciones? Por favor, explica.

4. ¿Hay algunas preguntas o ideas que se te hayan ocurrido, mientras trabajabas con esos tres tipos de ecuaciones?

Discusión en el salón de clases de la Parte I

[Para tomar nota durante la discusión con todo el grupo]

Sección A, ecuación: $12 + 15 = 4(x - 2) + 7$

Sección B, ecuación: $\frac{3}{2}y - x = 9$

Sección C, sistema de ecuaciones: $2x = 8 - 4y$
 $17x - 31y = 3$

Parte II (con CAS):

Interpretación con la CAS de las soluciones de ecuaciones con una y dos incógnitas

(A) Solución de una ecuación con una incógnita.

Usa el comando “SOLVE” de la CAS para resolver la siguiente ecuación: $4(3x-7) = 2(3-x)+5$

Qué introduces en la CAS	Qué muestra la CAS como resultado

(B) Solución de una ecuación con dos incógnitas.

Las siguientes seis preguntas se refieren a la ecuación: $2x+7 = 8y+11$.

1. ¿Cuál crees que sea el resultado si usas la CAS para resolver esta ecuación en términos de x ?

--

2. Usa la CAS para resolver esta ecuación en términos de x :

Qué introduces en la CAS	Qué muestra la CAS como resultado

3. ¿Cómo interpretas el resultado mostrado por la CAS?

--

4. ¿Cuál crees que sea el resultado si usas la CAS para resolver esta ecuación en términos de y ?

--

5. Usa la CAS para resolver la ecuación: $2x+7 = 8y+11$ en términos de y :

Qué introduces en la CAS	Qué muestra la CAS como resultado

6. ¿Cómo interpretas el resultado mostrado por la CAS?

--

C) Distinción entre soluciones de ecuaciones con una y dos incógnitas

- Es probable que te hayas dado cuenta de que, en la Parte II (A), la CAS mostró un valor numérico como solución para x . Por el contrario, en la Parte II (B), la calculadora mostró el resultado en forma de expresión algebraica. ¿Cómo explicas esta diferencia?

--

- ¿Cómo puedes usar esas expresiones, mostradas por la CAS, para encontrar soluciones numéricas de las ecuaciones?

--

Discusión en el salón de clases de la Parte II A, B, C

(D) Uso de la CAS para generar y verificar soluciones de ecuaciones con una y dos incógnitas

- Usa la CAS para generar tres soluciones de cada una de estas ecuaciones (registra todo aquello que introduces en la CAS mientras prosigues con tu trabajo, y de lo que la CAS muestra como resultado, en cada paso). Verifica al menos una solución de cada ecuación (con la CAS).

(a) $\frac{x+1}{3} = 5y - 7$

Qué introduces en la CAS	Qué resultado muestra la CAS

$$(b) \quad -\frac{1}{7}y + \frac{11}{12} = 3x - \frac{5}{8}$$

Qué introduces en la CAS	Qué resultado muestra la CAS

2. Plantea al menos una pregunta o da alguna idea que se te haya ocurrido, mientras trabajabas en la Parte D, precedente (por ejemplo, una pregunta referente a las dificultades que hayas tenido).

Lección 2 (Partes IIIA, IIIB, IIIC)

Parte IIIA (con papel y lápiz): Repaso de los métodos de Igualación y de Sustitución

1. He aquí el método de IGUALACIÓN para resolver un sistema de ecuaciones lineales:

MÉTODO DE IGUALACIÓN	$x + 3y = 5$ $7x + 6y = 20$
El método algebraico de Igualación consiste en:	
1. Despejar la misma variable en cada una de las ecuaciones y, de este modo, construir dos expresiones; las cuales tienen una variable común;	$y = (5-x)/3$ $y = (20-7x)/6$
2. Proponer que las dos expresiones obtenidas en el paso 1 sean iguales entre ellas, y así construir una ecuación con una variable;	$(5-x)/3 = (20-7x)/6$
3. Resolver la ecuación que resulta;	$(5-x)/3 = (20-7x)/6$ $2(5-x) = (20-7x)$ $10-2x = 20-7x$ $7x-2x = 20-10$ $5x = 10$

	$x = 2$
4. Sustituir el valor obtenido en una de las ecuaciones del sistema, con objeto de calcular el valor de la otra variable de la pareja solución.	$y = (5 - x)/3 = (5 - 2)/3 = 1$ La pareja solución es $(x, y) = (2, 1)$ ¡Verifique esto!

Pregunta: ¿por qué piensas que este método es llamado Método de Igualación? En otras palabras, ¿en qué sentido se lleva a cabo la igualación en este método?

2. He aquí el método de SUSTITUCIÓN para resolver un sistema de ecuaciones lineales:

MÉTODO DE SUSTITUCIÓN	$2x + 3y = 25$ $5x + y = 30$
El método de sustitución algebraica consiste en:	
1. Despejar, si es necesario, una de las variables en una de las ecuaciones;	$y = 30 - 5x$
2. Sustituir la expresión obtenida, en el paso 1, en la variable apropiada de la otra ecuación y, de este modo, construir una ecuación con una variable;	$2x + 3(30 - 5x) = 25$
3. Resolver la ecuación obtenida en el paso 2;	$2x + 90 - 15x = 25$ $-13x = 25 - 90$ $-13x = -65$ $x = 65/13$
4. Sustituir el valor obtenido en una de las ecuaciones del sistema; con objeto de calcular el valor de la otra variable de la pareja solución.	$y = 30 - 5(65/13)$ $= 65/13$ La pareja solución es $(x, y) = (65/13, 65/13)$ ¡Verifique esto!

Pregunta: ¿por qué piensas que este método es llamado Método de Sustitución?

3. ¿En qué forma estos dos métodos (los métodos de Igualación y de Sustitución) te permiten reducir el sistema dado en otro que ya sabes cómo abordarlo?

Discusión en el salón de clases de la Parte IIIA

Parte IIIB (con CAS): Uso del método de Igualación con la CAS

He aquí un sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{aligned}x - 8 &= 2y + 2 \\ 3x + 5y + 3 &= 0\end{aligned}$$

1. Con la CAS, usa el método de Igualación para resolver este sistema (registra todo aquello que introduces en la calculadora, mientras prosigues con tu trabajo, y de lo que la calculadora muestra como resultado al usar sus comandos).

El método de Igualación consiste en:	Qué introduces en la CAS	Qué muestra la CAS como resultado
1. Despejar la misma variable en cada una de las ecuaciones y, de este modo, crear dos expresiones, las cuales tienen una sola variable;		
2 y 3. Proponer que las dos expresiones obtenidas en el paso 1 sean iguales entre ellas, para construir una ecuación con una variable; resolver la ecuación que resulta;		
4. Sustituir el valor obtenido en una de las ecuaciones del sistema; con objeto de calcular el valor de la otra variable de la pareja solución.		

2. ¿Cómo verificas con la CAS que tu solución es correcta?

3. En el paso 4 de la Pregunta 1 precedente, reemplazaste el valor obtenido en el Paso 3 (de la primera variable) en una de las ecuaciones. Ahora sustituye este mismo valor obtenido en el Paso 3 en la otra ecuación. ¿Qué sucede? ¿Por qué crees que pasa esto?

Discusión en el salón de clases de la Parte IIIB

Parte IIIC (con CAS): Uso del método de Sustitución con la CAS

1. Con la CAS, usa el método de Sustitución para resolver este sistema (registra todo aquello que introduces en la calculadora, mientras prosigues con tu trabajo, y de lo que la calculadora muestra como resultado al usar sus comandos).

$$x + 3y = 5$$

$$7x + 6y = 20$$

El método de Sustitución consiste en:	Qué introduces en la CAS	Qué muestra la CAS como resultado
1. Despejar, si es necesario, una de las variables de alguna de las ecuaciones;		
2. Sustituir la expresión obtenida, en el paso 1, en la variable apropiada de la otra ecuación y, de este modo, crear una ecuación con una sola variable;		
3. Resolver la ecuación obtenida en el paso 2;		
4. Sustituir el valor obtenido en una de las ecuaciones del sistema; con objeto de calcular el valor de la otra variable de la pareja solución.		

2. ¿Cómo verificas con la CAS que tu solución es correcta?

3. ¿Cuál de los dos métodos (IGUALACIÓN y SUSTITUCIÓN) prefieres y por qué?

4. ¿Qué tienen en común esos dos métodos? (No re-escriba sólo los pasos de los dos métodos).

Discusión en el salón de clases de la Parte IIIC

Tarea

Con la CAS, usa el método más apropiado (Igualación o Sustitución) para resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales:

(1) $y + 1 = x + 6$

$$y - 4 = -x + 3$$

(2) $3x + y = 23$

$$2x + 3y = 48$$

HOJA DE MANEJO DE LA CALCULADORA

Nombres: _____

Matriculas: _____

No. de serie: _____

On	Encendido
Menú	Abre el menú de aplicación o contexto
Enter	Evalúa una expresión, ejecuta una instrucción
Ctrl	Brinda acceso a la función o caracter que se muestra sobre la tecla
Ctrl x	Cortar
Ctrl c	Copiar
Ctrl v	Pegar
Ctrl z	Deshacer
Ctrl y	rehacer

Para trabajar las actividades vamos a utilizar

Expand (); solve (), factor ()

Para utilizarlas: 1° presiona menú; 2° álgebra; 3° expand o solve o factor

Para resolver una ecuación de una variable tenemos dos opciones:

Opción 1: solve (expresión# 1=expresión# 2, x)

Opción 2: expresión 1=expresión 2 | x=valor

Para resolver una ecuación con dos incógnitas

Ecuación | x=valor and y=valor

Para resolver dos ecuaciones con dos incógnitas

(Ecuación 1 | x=valor and y=valor) and (ecuación 2 | x=valor and y=valor)

Expand: $(x + 2)(x^2 + 2x + 4)$; b) $(x - 3)(x + 2)(x - 5)$

Factor: $(x^2 - 2x + 1)$; b) $(x^2 - 2)(x^2 + 2)$

Solve:

a) $3x - 7 = 8x - 4$

b) $6x + 9 = 7x + 2$

c) $2x + 7y = 4x - y$; $6x - 9y = x - 3y$

ANEXO 2

EXPERIMENTACIÓN PILOTO

Como parte de la metodología se realizó una experimentación piloto, la cual sirvió para revisar todas aquellas observaciones o dudas que tuvieran los alumnos al momento de estar realizando las actividades, además de ver si entendían las instrucciones de lo que se les pedía en cada actividad, para poder realizar las modificaciones pertinentes. Para la realización de ésta experimentación se contó con un grupo de primer año de la Licenciatura de Ingeniería Química de la Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo. Se trabajó con 25 estudiantes, los cuales formaron 14 equipos, donde nueve fueron de dos alumnos, un equipo de tres y un equipo de cuatro.

Se les aplicó a los estudiantes ocho actividades de aprendizaje con tópicos de álgebra, las cuales fueron elaboradas por el Dr. Fernando Hitt y la Dra. Carolyn Kieran, investigadores del Departamento de Matemática Educativa de la Universidad de Quebec, Canadá.

Ésta experimentación se llevó a cabo en tres sesiones de tres horas cada una. La primera fue el trabajo con la calculadora y de los principales comandos ENTER, FACTOR, EXPAND, SOLVE; ya que con ellos iban a trabajar las actividades de aprendizaje. Se diseñaron ejercicios (ANEXO 1) para que los estudiantes se fueran familiarizando con el manejo de la calculadora, dichos ejercicios eran para resolverse con los cuatro comandos mencionados anteriormente.

La segunda sesión fue la aplicación de las actividades uno, dos, tres y cuatro. Se les repartió a cada equipo una calculadora, las actividades y hojas en blanco, para que hicieran todas las observaciones y procesos que realizaran durante la aplicación de las actividades. A cada uno de los integrantes de los equipos, se les fue rotando el uso de la calculadora, el trabajo con papel y lápiz, así como la coordinación de la actividad.

La tercera sesión fue la aplicación de las actividades cinco, seis, siete y ocho; con el mismo procedimiento mencionado anteriormente.

Se realizaron modificaciones en las instrucciones de algunas de las actividades, porque hubo alumnos que no entendían bien qué era lo que tenía que hacer en la actividad. Estas observaciones y correcciones a las actividades sirvieron para realizar la experimentación formal.