UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN NICOLÁS DE HIDALGO

FACULTAD DE INGENIERÍA QUIMICA

CONCEPTUALIZACIÓN DEL CÁLCULO DIFERENCIAL A TRAVÉS DE ACTIVIDADES CON LA CALCULADORA TI-NSIPIRE CX CAS

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE
LICENCIATURA EN INGENIERÍA QUÍMICA

PRESENTA
GUILLERMO IBARRA REYES

ASESORES DE TESIS
DOCTORA EN MATEMÁTICA EDUCATIVA, INFORMÁTICA EDUCATIVA Y CIENCAS DE COGNICIÓN EDUCATIVA
GRACIELA ERÉNDIRA NÚÑEZ PALENUIS

DOCTOR EN CIENCIAS CON ESPECIALIDAD EN MATEMÁTICA EDUCATIVA
JOSÉ CARLOS CORTÉS ZAVALA

MORELIA, MICH., ENERO DE 2015

The true measure of a man is how he treats
someone who can do him absolutely no good.
Samuel Jackson (1709-1784)

Índice general

Glosario

Actividades de aprendizaje

Tareas estructuradas de tal manera que se puede guiar y organizar el aprendizaje, ejercitar, afianzar y consolidar lo aprendido.

Artefacto

Un objeto o material.

Aprendizaje Cooperativo

Metodo de aprendizaje en donde las interacciones sociales con compañeros de clase, maestros y otros contribuyen a la construcción de conocimientos.

Aprendizaje Mediado

Aprendizaje a través de mediadores. El mediador ayuda al aprendiz a *estructurar, filtrar y programa* estímulos.

CAS

Computer algebra system en inglés. Sistema de álgebra computational es un software que facilita el cálculo simbólico.

Constructivismo

Una teoría de aprendizaje, la cual argumenta que los humanos generan conocimiento y significado a través de sus experiencias e ideas.

Instrumento

Un objeto con alguna utilidad o valor instrumental.

Génisis instrumental

Proceso de la transformación de un artefacto a instrumento.

Instrumentalización

El proceso en donde progresivamente se carga un artefacto con potencialidades y eventualmente tiene un uso específico.

Instrumentación

Proceso de Génesis instrumental dirigido hacia el sujeto, lo cual resulta en la apropiación de esquemas de acción instrumentado que se convierten en técnicas que permiten una respuesta eficaz a tareas dadas.

Instrumento

Un objeto con alguna utilidad o valor instrumental.

Matematización

La reducción de conceptos a su forma matemática.

RME

Realistic Mathematics Education en inglés. Educación matemática realística es la idea que las matemáticas se deben ver como una actividad humana para tener más significado. Debe involucrar temas relacionados como el mundo *real*, la libertad de producir, matematización, interacción y aprendizaje integrado.

ZPD

Zone of proximal development en inglés. Zona de desarrollo próxima se define como la diferencia entre lo que un aprendiz ha dominado y lo que puede lograr cuando se le proporciona apoyo educativo.

Índice de tablas

Índice de figuras

Resumen

Este trabajo de Tesis presenta el diseño de actividades de aprendizaje para la conceptualización del cálculo diferencial. En la enseñanza tradicional del cálculo diferencial se pone énfasis en la parte operacional, lo cual no es suficiente para el entendimiento de los conceptos involucrados. Entonces es necesario implementar métodos para lograr que el estudiante tenga un mejor acercamiento a lo conceptual.

A través de experimentaciones, las actividades se refinaron y evolucionaron hasta considerarse adecuadas para una prueba piloto. Además de contener el material necesario para la conceptualización del cálculo diferencial; la estructura de las actividades debe tener un orden para que el desarrollo sea *fluido*. El esquema empleado utiliza preguntas tales como: ¿qué pasa bajo esas condiciones?, ¿a qué se debe?, ¿cómo formularías lo antes dicho?, etc., con lo cual construyen los conocimientos fundamentales.

La experimentación piloto se llevó a cabo con tres equipos de tres integrantes. Se aplico a los integrantes un pre-examen sobre los conocimientos fundamentales con el fin de evaluarlos. Al analizar los resultados del pre-examen quedaba claro que la mayoría de ellos tiene una idea general de los conceptos básicos. También se observó que sabían la ecuaciones generales, pero no su significado.

Considerando los resultado obtenidos en la experimentación se puede decir categóricamente que hubo aprendizaje de los conceptos, ya que existen evidencias que demuestran que los alumnos tienen un dominio del cálculo diferencial después de realizar las actividades, el cual que no estaba presente antes del pre-examen.

Esta Tesis, muestra que es posible diseñar e implementar actividades de aprendizaje para la conceptualización del cálculo diferencial. Como un trabajo futuro, se pueden diseñar actividades con la misma metodología empleada en este trabajo para la conceptualización de cálculo integral y cálculo multivariable.

Palabras Claves: CAS, Actividades de Aprendizaje, Ti-Nspire CX CAS, Cálculo Diferencial, Matematización

Abstract

The following Thesis presents the elaborated method utilised to create learning activities for the conceptualization of the main ideas in calculus. In a traditional teaching environment differential calculus clases tends to emphasise the operational aspect, which isn't sufficient for understanding the conceptos involved.

Through informal experimentation, the activities were refined and evolved until considered adequate for a trial test. For the aforementioned, as well as contained the required topics for the conceptualization; the activities should be *fluid*, an appropriate work flow in order to encapsulate and relate the concepts. The scheme uses questions such as: *what happened under those conditions?*, *why?*, *how would you express it as a formula?*, etc.. With those types of questions knowledge is being constructed, which are crucial in differential calculus.

The trial test or experimentation consisted of three teams of three members. Before starting, a pre-test over fundamental concepts of differential calculus was administered. Analyzing the results of the pre-test it was clear that the majority of the participants had a very vague idea over the basic concepts.

Considered the results of the trial experimentation there is no doubt that the participantes learned the concepts presented. The answers given suggest a through understanding of select topics, which was no observed in the pre-test.

From the trial experiment, the majority of the misunderstandings were due to the participantes and not the activities. Some errors were caused by not reading correctly the instructions, questions, o not discussing the questions amongst the team members. Regarding the activity design, the only modifications as a result of the trial experiment were the addition of group discusiones. Which are aimed at summarizing the important concepts and reinforcing the construction of the ideas involved.

The present Thesis, demonstrates that it is possible to create and implement learning activities for the conceptualisation of differential calculus. As future work, the same scheme used can be used to design activities for the conceptualization of integral and multivariable calculus.

Key Words: CAS, Learning Activites, Ti-Nspire CX CAS, Differential Calculus, Mathe-

mazation

Cápitulo 1

Introdución

El presente trabajo de tesis tiene el propósito de crear actividades sobre los conceptos de cálculo diferencial. Dentro de las actividades.

La calculadora simbólica empleada en este trabajo solo es una herramienta, su uso no garantiza el aprendizaje. Como cualquier herramienta se debe saber cómo utilizar y en qué situaciones. Las actividades se generaron de tal manera que el alumno conceptualiza fenómenos fundamentales dentro del cálculo diferencial empleando la estrategia de *abajo hacia arriba*, en donde se juntan las piezas claves del concepto para construir el conocimiento.

1.1. Antecedentes

La integración de sistemas de algebra computacional (CAS), reconocidas por su combinación poderosa de computación simbólica y visualización gráfica, en la enseñanza de matemáticas ha sido investigado e implementado en muchos países. Desde su desarrollo en los 1970s y su introducción a la enseñza en los 1980s, CAS se vio como una herramienta altamente valiosa para hacer matemáticas y como potencialmente viable para la enseñanza y aprendizaje de matemáticas.

Estudios implementados en clases de matemáticas en el nivel medio superior y superior (Heid, 1988; Atkins, Creegan y Soan, 1995; Pierce, 1999; Lagrange 2000) han apoyado el argumento de que la manipulación simbólica dentro del CAS puede evitar los errores de manipulación de los alumnos y por lo tanto permitirles generar resultados exactos y aproximados de manera rápida. De acuerdo a Kutlzer (1994) la habilidad de *construir* bases conceptuales en CAS permite que los alumnos puedan manejar problemas más complicados que la mayoría de alumnos que trabajan de maneras tradicionales (lápiz y papel). Además, teniendo las facilidades de manipulación simbólica, capacidades numéricas y representaciones gráficas puede promover el hárito de utilizar las tres representaciones para aumentar su conocimiento (Pierce, 1999).

Una experimentación se llevó a cabo con alumnos universitarios de primer año inscritos en un curso de cálculo. El experimento consistio en el uso de CAS para la formulación del concepto de derivada utilizando gráficas y la combinación de otras representaciones. Las técnicas de diferenciación fieron enseñadas hasta el final del curso. Los resultados de este curso de *concepto primero* indica que el desarrollo de conceptos puede preceder el aprendizaje de técnicas. Con base a lo anterior, Heid (1988) demostró que CAS puede facilitar el desarrollo de conceptos matemáticos y sugirió que el uso de CAS puede provocar una re-secuencia de conceptos y habilidades en cursos de matemáticas.

Cuando se introdujeron las calculadoras graficas en la educación, fue evidente que los alumno tenían dificultades en la interpretación de las representaciones graficas que aparecían en la pantalla de la calculadora (Goldenberg, 1987; Hillel *et. al.*, 1992). Guin y Trouche (1999), notaron que la confusión de los alumnos se debe al no poder distinguir entre el objeto matemático y su representación en la calculadora.

Para entender el uso de dichas herramientas conceptuales, debemos enfocarnos en el concepto de *instrumento* (Artigue, 2002). El instrumento es diferente al objeto (material), el cual se conoce como *artefacto*. Por lo tanto el instrumento es una entidad mixta, parte artefacto y parte esquemas congestivos que lo hacen un instrumento. Inicialmente para un individuo el artefacto no tiene valor instrumental. La tranformación de artefacto se lleva a cabo por un procesos conocido como *Génisis instrumental*, lo cual involucra la apropriación de esquemas sociales preexistentes.

La Génisis instrumental puede funcionar de dos maneras. La primera es dirigida hacia el instrumento, en donde progresivamente se carga con potencialidades y eventualmente tiene un uso específico; conocido como la *instrumentalización* del artefacto. Por otra parte la Génisis instrumental está dirigida hacia el sujeto, lo cual resulta en la apopiación de esquemas de acción instrumentada que se convierten ténchichas que permiten una respuesta eficaz a tareas dadas. Lo anterior se conoce como *instrumentación*. Para entender y promover la Génisis en los aprendices, es necesario identificar la restricciones inducidas por el instrumento, existen las restricciones internas y de interface (Balacheff, 1994). Además, es necesario identificar el potencial ofrecido por el trabajo con instrumentos.

Por lo tanto la Génisis instrumental es el proceso de construir esquemas, técnicas y conceptos que le dan significado a las técnicas. La teoría de instrumentación está en línea con las opiniones sobre el rol de símbolos en la educación matemática (Gravemeijer *et. al.*, 2000). El valor de la teoría de la instrumentación es que proporciona una forma específica para ver la interacción entre alumnos y la herramienta tecnología, y en particular demuestra cómo obstáculos técnias pueden ser relacionados a dificultades conceptuales.

El enfoque instrumental es una herramienta que ha sido reconocida para el análisis de procesos de enseñanza y aprendizaje en un ambiente CAS (Artigue, 2002; Lagrange, 2003). De acuerdo a Monaghan (2007) este enfoque abarca elementos de ergonomía cognitiva (Vérillon y Rabardel, 1995) y la teoría antropológica de didáctica (Chevallard, 1999). En la teoría antropológica de didáctica, Chevallard (1999) nota que objetos matemáticos emergen en un sistema de prácticas que son caracterizadas por cuatro componentes: *tarea*, en donde el objeto se encuentra; *técnica*, utilizado para resolver la tarea; *tecnología*, el discurso que explica y justifica la técnica; y *teoría*, el discurso que proporciona la base estructural para la tecnología.

Artigue (2002) redujo los cuatro componentes de Chevallard a tres: *tarea, tecnología y teoría*. El componente de *teoría* de Artigue combina los componentes de *tecnología y teoría* de Chevallard. Dentro de este marco teórico (Tarea - Técnica - Teoría) una técnica es el conjunto complejo de razonamiento y trabajo de rutina, tiene valores pragmáticos y epistémico (Artigue, 2002). Su rol pragmático de debe a que realiza una tarea (Lagrange, 2003). Con respecto a su valor epistémico, Lagrange (2003) argumenta que:

Técnica tiene un rol epistémico al contribuir al entendimiento del objeto que trata, particularmente durante su elaboración. También sirve como un objeto para la reflexión conceptual al ser comparado con otras técnicas y cuando se discute con respecto a su consistencia. (p. 271)

De acuerdo a Lagrange (2005), la consistencia y efectividad de la técnica son discutidas en el nivel teórico. El valor epistémico de las técnicas es importante en el estudio de las reflexiones conceptuales de los alumnos dentro del ambiente CAS.

1.2. Planteamiento del Problema

El informe del Programa Internacional para la Evaluación de Estudiantes o Informe PISA se lleva a cabo por la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos (OCDE). Esta organización está compuesta por 34 países, entre ellos México, y su objetivo es coordinar sus políticas económicas y sociales para maximizar su crecimiento económico y colaborar en su desarrollo. De acuerdo al crecimiento del producto interno bruto (PIB) de los 34 miembros México estuvo en el lugar número 8 en el 2013 con un crecimiento del 3.3 %.

Lamentablemente en el Informe PISA del 2012 de 61 países (los 34 miembros del OCDE y otros participantes, el total representado el 80 % de la economía mundial), México obtuvo el puesto 49 en matemáticas. El examen se aplicó a alumnos de 15 y 16 años. Dentro del mismo informe, el 56.6 % de los alumnos Mexicanos no obtuvieron el nivel de competencia número 2, el cual la OCDE considera el punto de referencia en donde los estudiantes empiezan a demostrar las capacidades que les permitirá participar activamente en situaciones cotidianas. Mientras que el nivel más alto de competencia solo se encuentra el 0.6 %. ¿Cómo puede ser posible que exista tanta disparidad?

Matemáticas se considera una disciplina cumulativa, es decir que la información funciona como bloques de construcción. No se pueden *crear* nuevos conceptos o conocimientos sin tener los *cimientos*. Los primeros bloques se establecen en la primaria al ver los conceptos de sumas, restas, multiplicación y división; estos conceptos constituyen los cimientos o lo fundamental. Los siguientes bloques típicamente involucran fórmulas y operaciones, se deben dominar estos temas antes de seguir a los siguientes. En los niveles de secundaria y bachillerato comienzan los problemas. Los alumnos avanzan en los cursos sin tener bien definidos los conceptos. Haciendo uso de la analogía previa, intentan construir sobre un cimiento débil. Un no debe ser carpintero para entender que bajo ese esquema no se espera mucho de la obra.

Por lo general, en la enseñanza tradicional de las matemáticas se lleva a cabo bajo el siguiente esquema:

1. Se presenta el concepto teórico
2. Se hacen unos ejemplos en clase
3. Se deja tarea sobre el tema
4. Se evalúa el tema con un examen

Por cuestiones de tiempo, el modelo de enseñanza anterior se considera el más práctico pero en los últimos años, estudios han demostrado que dichos modelos pasivos no funcionan. Los maestros están presionados por cumplir con el programa que no existe el tiempo suficiente para asegurar el domino del tema de cada alumno. Este problema se va arrastrando a través de los años para producir resultados como el del Informe PISA. Al llegar al nivel licenciatura, debido a la carencia de conocimientos y habilidades adecuadas el alumno llega a tener demasiados problemas en el aprendizaje de cálculo diferencial, así mismo el tipo de actividades de aprendizaje que se proponen hace que los profesores de matemáticas tengan otra alternativa para trabajar estos temas.

1.3. Hipótesis

En la enseñanza tradicional de la asignatura de cálculo diferencial se pone más énfasis en la parte operacional, lo cual no es suficiente para el entendimiento de los conceptos involucrados. A través de la aplicación de las actividades diseñadas se lograr que el estudiante tenga un mejor acercamiento a lo conceptual.

Para un aprendizaje y enseñanza plena es necesario emplear métodos activos. Dichos métodos incluyen actividades de descubrimiento guiado por discusiones de reinvención. En este trabajo de tesis las actividades propuestas juegan el rol del método activo. Guían al alumno en la construcción de conceptos bajo la estrategia de abajo hacia arriba. Se empieza con bloques fundamentales como sumas, restas, multiplicaciones y divisiones, a través del descubrimiento y conceptualización de otros fenómenos se llega al significado de la derivada. Dicho desarrollo encapsula el tema del cálculo diferencial.

1.4. Justificación

Dentro de cualquier programa de licenciatura ingenieril, el aprendizaje del Cálculo Diferencial es fundamental. En la Facultad de Ingeniería Química de la Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, se introducen los temas de Cálculo Diferencial e Integral en el primer año de la carrera. En la mayoría de los casos, el alumno no tiene los conocimientos y fundamentos algebraicos para iniciar el trabajo con el Cálculo Diferencial, y por lo tanto, no llega a tener un aprendizaje adecuado de los conceptos. Al carecer de estos fundamentos, el alumno se va rezagando en los nuevos conocimientos y debe recurrir al aprendizaje con *métodos cortos*; métodos que algunas veces no tienen una base conceptual y se apoyan en la repetición de procedimientos.

El Cálculo Diferencial e Integral, se unen por la teoría fundamental de cálculo la cual cita, que la diferenciación es el proceso inverso de la integración. Es decir, que si el alumno no aprende los conceptos de cálculo diferencial, no podrá aprender cálculo integral. Al estar en este dilema, el alumno que no construye el aprendizaje de los conceptos del cálculo diferencial no podrá avanzar en su conocimiento matemático; y por ende, tampoco en el aprendizaje de las diferentes materias del currículo de la carrera de Ingeniería Química.

Tomando en cuenta lo anterior, se puede ver la gran importancia que tiene el aprendizaje de cálculo diferencial. Las actividades propuestas tiene el fin conceptualizar los temas importantes dentro del cálculo diferencial comenzando con los conceptos de algebra necesarios.

1.5. Objetivos

1.5.1. Objetivo General

El objetivo General que se propone en este trabajo de tesis, es el diseño de actividades de Aprendizaje que involucren conceptos de Cálculo Diferencial apoyadas con la calculadora Ti-nspire CX CAS, con una estructura didáctica que propicie el aprendizaje de los estudiantes.

1.5.2. Objetivos Específicos

Los objetivos específicos que se plantean para esta investigación, son los siguientes:

1. Analizar y proponer, la estructura conceptual de las actividades de aprendizaje sobre conceptos de Cálculo diferencial.
2. Diseñar la metodología didáctica, de las actividades de aprendizaje.
3. Revisar las actividades desarrolladas desde dos enfoques, viabilidad del entendimiento conceptual por parte de los estudiantes y posibilidad de que el alumno aprenda los conceptos del cálculo diferencial.
4. Aplicar las actividades en una experimentación piloto, a los estudiantes de primer año de la carrera de Ingeniería Química.
5. Reestructurar las actividades de aprendizaje con base en la evidencia obtenida en la experimentación piloto.
6. Hacer la propuesta final de las Actividades de Aprendizaje sobre Cálculo Diferencial.

Cápitulo 2

Marco Teórico

2.1. Aspectos Teóricos de Ambientes de Aprendizaje

La educación involucra la interacción entre estudiantes, maestros, y ambientes de aprendizaje. Hoy en día el estudiante puede decidir qué y cómo va aprender, debe tomar la iniciativa y hacerse responsable por su aprendizaje con el fin de ser un aprendiz eficaz (Kuhn, 2007). Una visión del aprendizaje es el constructivismo, en donde el alumno es el agente activo en el proceso de la adquisición de conocimientos (Phillips, 1998). El Constructivismo es un término general que abarca varias perspectivas del aprendizaje (Gijbels et al. 2006). La manera en que las personas entienden situaciones y cómo crean significado es el interés principal de las teorías del constructivismo. Una definición clara e inequívoca del constructivismo es difícil de encontrar (Gijbels et al. 2006; Loyens 2007).

2.1.1. Ideas Principales del Constructivismo

El constructivismo ha introducido nuevos conceptos de aprendizaje y enseñanza (Marshall, 1996; Phillips, 1998). Aunque tome muchas formas, Phillips (1998) mencionó unas de las premisas fundamentales. Dentro de la familia enorme de teorías del constructivismo, hay algunas ideas generales predominantes. De acuerdo al análisis de Taber (2006), algunos conceptos fundamentales son:

1. Los conocimientos son activamente construidos por el aprendiz, no pasivamente recibidos del entorno. El aprendizaje es algo hecho por el alumno, no algo que es impuesto sobre él.

2. Los aprendices llegan al aprendizaje con ideas existentes sobre muchos fenómenos. Algunas de las cuales son *ad hoc* e inestables, mientras que otras son profundamente fundamentadas y bien desarrolladas.

3. Los aprendices tienen sus propias ideas sobre el mundo, pero hay muchas similitudes y patrones comunes dentro de sus ideas. Algunas ideas son aceptadas y compartidas socialmente, culturalmente, y frecuentemente parte del idioma es soportado por metáforas. Muchas veces lo anterior funciona como herramientas para entender los fenómenos.

4. Unas ideas van en contra de conceptos científicos aceptados, y algunas de ellas pueden ser persistentes y difíciles de cambiar.

5. El conocimiento es representado en el cerebro como estructuras conceptuales, es posible modelar y describirlas en detalle.

6. La enseñanza debe contemplar las ideas existentes del aprendiz si quiere cambiar o poner en duda dichas ideas.

7. Aunque en un sentido el conocimiento es personal e individual, el aprendiz construye su conocimiento a través de su interacción con el mundo físico, colaborativamente en ambientes sociales, y en un ambiente cultural y lingüístico.

2.1.2. Métodos de la Enseñanza Constructivista

Una interpretación común de la enseñanza constructivista es el proceso activo en donde los estudiantes deben estar involucrados en el aprendizaje. De acuerdo a esta interpretación, opciones pasivas como libros, clases y presentaciones en línea son clasificadas como enseñanzas no-constructivistas, mientras que opciones activas como discusiones en grupo, actividades prácticas y juegos interactivos se clasifican como enseñanzas constructivistas.

La idea de que el aprendizaje constructivista requiere métodos de enseñanza activos, es un tema recurrente en educación. Lefrancois (1997), resumió el campo de educación al notar que "el enfoque constructivista a la enseñanza es basado en la suposición de que los estudiantes deben construir conocimientos por si mismos. Por lo tanto, los enfoques constructivistas son básicamente orientados al descubrimiento" (pg. 206). Esta declaración significa, que una teoría de enseñanza constructivista en donde un aprendiz es cognitivamente activo, equivale a una en donde hay un comportamiento activo.

Mayer (2004), se refiere a la interpretación anterior como la *falacia de la enseñanza constructivista*, debido a que asocia el aprendizaje activo con la enseñanza activa. Sostiene que la enseñanza constructivista no debe ser restringida a métodos de descubrimiento puro. Dentro de la teoría de Mayer, el aprendizaje activo tiene dos dimensiones, actividad cognitiva y del comportamiento. En métodos de enseñanza de descubrimiento puro hay una alta actividad cognitiva y un alto nivel de comportamiento, mientras que en un método de enseñanza guiada existe alta actividad cognitiva pero no necesariamente con un comportamiento activo.

Observando casos de enseñanza de descubrimiento puro contra enseñanza guiada, Mayer (2004) notó que en las décadas de los 60s, 70s, y 80s hubo un mayor aprendizaje con los métodos de enseñanza guiada. El estudio evaluó la enseñanza de reglas para resolver problemas, estrategias de conservación, y conceptos de programación.

2.1.3. Constructivismo Social y Sociocultural

Diferentes perspectivas del constructivismo enfatizan procesos cognitivos individuales, como el constructivismo cognitivo que se enfoca a la construcción del conocimiento del individuo. También las co-construcciones sociales de conocimientos como el constructivismo social, que destaca procesos de colaboración en la construcción de conocimientos (Windschitl, 2002). El constructivismo sociocultural deriva su fundamento teórico de Lev Vygotsky (1978).

El paradigma sociocultural afirma que hay una relación entre procesos sociales y la construcción de conocimientos. Hay tres premisas en los conceptos mentales y de aprendizaje de Vygotsky (Werstech, 1990). Los procesos mentales superiores son desarrollados plenamente en la vida social del individuo, nuestro entorno contribuye al crecimiento mental. Las herramientas y señales (el habla) utilizadas en las experiencias cotidianas, sirven como mediadores en el desarrollo de procesos mentales superiores. Finalmente, la manera más eficaz para analizar las influencias sociales y dichos mediadores es por análisis genético o de desarrollo. En el método analítico, el aprendizaje y el desarrollo son evaluados por la observación cuidadosa de las fuerzas sociales, culturales y la mediación que existe en el ambiente que rodea el aprendiz. Se hace hincapié a los cambios históricos que ocurren en el "contexto y oportunidades para el aprendizaje" (John-Steiner y Mahn, 1996, pg. 194) y los "procesos", toman precedencia sobre los "productos" (Vygotsky, 1978) en la compresión del desarrollo mental superior.

Existen algunas distinciones entre el constructivismo social y el sociocultural, sin embargo, comparten ideologías similares. Como el constructivismo sociocultural, el social es una visión psicológica en donde las formas de aprender están muy apegadas al entorno y a un contexto social en donde se lleva a cabo el aprendizaje. Por lo general, el constructivismo social se puede caracterizar en términos de tres propuestas (Savery y Duffy, 1995):

1. La comprensión de nuestra interacción con el entorno.
2. El conflicto cognitivo es el estímulo para el aprendizaje, y determina la organización y

naturaleza de lo que se aprende.

3. El conocimiento evoluciona a través de negociación y la evaluación de la viabilidad de conocimientos del individuo.

2.2. Aprendizaje Mediado

Teóricamente, y en términos de su aplicación en clase, las investigaciones de Vygotsky y Feuerstein han influido significativamente en los medios de enseñanza en todo el mundo. Tharp y Gallimore (1991), sugieren que el enfoque socio-histórico de Vygotsky afecta profundamente el entendimiento de la enseñanza, el aprendizaje y el desarrollo de la educación del estudiante. Sternberg (1990) sostiene que ambas teorías subrayan la importancia de la socialización de la inteligencia y su desarrollo.

G. H. Mead (1974), se enfocó en los mecanismos de mediación incrustados dentro de la estructura de la sociedad humana. Dentro de ese estudio, Mead hizo una distinción importante entre un estímulo y un objeto. En lugar de simplemente percibir y responder a estímulos, sugirió que los objetos son construidos y no dados. La construcción de un objeto solamente es posible cuando el estímulo del ambiente toma ciertos significados a lo largo de la actividad humana, la cual tiene una naturaleza social.

Blumer (1969), propone que el significado de un objeto para una persona proviene de las formas en que otros individuos actúan sobre dicho objeto, sus acciones sobre él lo definen. Por consiguiente, los significados se pueden ver como productos sociales, creaciones que son formadas dentro y a lo largo de las actividades definidoras de la gente al interactuar. La interacción entre el individuo y el ambiente nunca es inmediata, siempre es mediado por significados que tienen origen fuera del individuo, en el mundo de relaciones sociales.

2.2.1. Elaboración de la Teoría

El aprendizaje mediado reemplazó al modelo de conductismo debido a que es una mejor concepción cognitiva de la inteligencia humana y el aprendizaje (Gardner 1985). Feuerstein (1980) y Vygotsky (1986), desarrollaron sus teorías bajo la influencia de Jean Piaget, uno de los grandes dentro de la psicología del desarrollo cognitivo. Sin embargo, ambos estaban insatisfechos con ciertos aspectos del enfoque de Piaget. Para Vygotsky hubo una inquietud sobre el individualismo epistemológico en la teoría de Piaget y el descuido de la mediación social. Para Feuerstein, el desacuerdo fue con los mecanismos concretos del aprendizaje por la mediación de otro humano.

La mediación también hace hincapié en el entendimiento comunal del conocimiento, no solo en el intercambio colaborativo de ideas, si no en el acomodo y la categorización de las mismas. El mediador ayuda al aprendiz a "estructurar, filtrar y programar" estímulos y básicamente influye el potencial de transferencia de conocimientos que ocurre en el pensamiento del alumno (Perkins y Salomon, 1988). La mediación supone que la instrucción esta más enfocada en ir más allá de la información dada, al hacer la conexión con el pasado y la anticipación del futuro que con el dominio de los datos del presente.

El enfoque del aprendizaje mediado sugiere un nuevo paradigma para la educación, en donde la inteligencia es redefinida y formulada. De acuerdo a Feuerstein, la inteligencia es la habilidad de aprender y adaptar. Investigadores (Detterman y Sternberg, 1982; Diamond, 1988) proponen que el comportamiento inteligente y reflexivo puede ser mejorado.

2.2.2. Enfoque de Vygotsky al Aprendizaje Mediado

Vygotsky (1978, 1986) propuso que los procesos mentales superiores pueden ser considerados como funciones de actividades mediadas. Él sugirió tres clases principales de mediadores: herramientas físicas, herramientas psicológicas y otros humanos (Kozulin, 1990). Las herramientas físicas solamente tienen una influencia indirecta sobre los procesos psicológicos humanos, debido a que son dirigidos a los procesos en la naturaleza. De cualquier manera el uso de herramientas físicas agrega nuevas demandas en los procesos mentales humanos.

Las herramientas físicas no existen como instrumentos individuales; se presuponen al uso colectivo, comunicación interpersonal y representación simbólica. El aspecto simbólico de una actividad mediada por herramientas da lugar a una nueva e importante clase de mediadores, la cual Vygotsky designó *herramientas psicológicas*. Mientas que las herramientas físicas son dirigidas a objetos en la naturaleza, las herramientas psicológicas median procesos psicológicos. Unas de las herramientas psicológicas que mencionó Vygotsky (1978) fueron: el sorteo, la atadura de nudos y el contar con los dedos. El sorteo aparece en una situación cuando la incertidumbre de decisión causada por dos estímulos opuestos y de la misma potencia es resuelta por la aplicación de un estímulo artificial y arbitrario. La atadura de nudos ejemplifica la introducción de un recurso nemotécnico para asegurar la recuperación de información de la memoria. El conteo de dedos es la adaptación de una herramienta que siempre esta disponible para la organización de procesos mentales superiores involucrados en operaciones básicas de cálculo.

Con respecto a la mediación a través de otro individuo, Vygotsky (1978) sugiere dos posibilidades. La primera fue expresada con la declaración, "cada función en el desarrollo cultural del niño aparece dos veces; primero entre personas (inter-psicológico) y después dentro del niño (intra-psicológico)". Como una ilustración, Vygotsky observó que la habilidad de un niño para considerar los diferentes puntos de perspectiva en un plano mental depende de los argumentos entre ellos.

La segunda posibilidad se enfoca en el rol del otro individuo como un mediador de significado. Como ejemplo, Vygotsky propone el desarrollo de la gesticulación demostrativa en un niño. De acuerdo a Vygotsky (1978), un gesto aparece primero como un intento natural de sujetar un objeto. El movimiento avaricioso es interpretado por un adulto como un gesto; por lo tanto el significado del acto natural es proporcionado al niño por el adulto. El destinatario del movimiento cambia del objeto al sujeto humano. El movimiento se transforma y reduce, empieza como un intento avaricioso y se hace un gesto real. Más adelante este tipo de gestos son internalizados y forman parte de los comandos internos del niño. El significado de la actividad para una persona es formulado por la mediación a través de otro individuo. Vygotsky (1983), creyó que este principio aplicaba también para la personalidad, "sólo a través de otros nos hacemos nosotros mismos, esta regla aplica a cada función psicológica además de la personalidad en conjunto".

En términos de una aplicación educativa, la idea de Vygotsky más popular se convirtió en la zona de desarrollo próxima (ZPD) (Rogoff y Wertsch, 1984). La ZPD se define como la diferencia entre lo que un aprendiz ha dominado (nivel actual de desarrollo) y lo que puede lograr cuando se le proporciona apoyo educativo (desarrollo potencial). Es nivel de desarrollo que demuestra un niño en una actividad colaborativa con un adulto, pero no en la actividad individual. El concepto fue introducido por Vygotsky (1978) para atender dos problemas de psicología educativa y del desarrollo: (1) cómo evaluar correctamente las habilidades intelectuales del niño y (2) cómo evaluar la eficacia de las prácticas de enseñanza. Un niño con una ZPD más amplia tiene una mejor oportunidad de éxito en el aprendizaje en la escuela. El aprendizaje dentro de la ZPD es asociado con una interacción entre conceptos espontáneos del niño y los conceptos sistemáticos y científicos introducidos por el maestro.

2.2.3. Enfoque de Feuerstein al Aprendizaje Mediado

La experiencia del aprendizaje mediado (MLE), de acuerdo a Feuerstein en términos generales, se puede ver como la interacción entre un humano y su ambiente socio-cultural. Pero la MLE no incluye todas las interacciones, se enfoca en las experiencias que influyen en la *propensión a aprender* del individuo, la calidad de la interacción que ayuda al aprendiz "ser modificado por la exposición a estímulos en la dirección de niveles superiores y más eficientes de funcionamiento y adaptación” (Feuerstein y Feuerstein, 1991). La pregunta central que la teoría de la MLE intenta responder es: ¿Cuál es la causa del desarrollo cognitivo diferencial? El aspecto central de mediación es el cambio que cuantitativamente influye el aprendiz y lo permite desarrollar prerrequisitos cognitivos para el aprendizaje por su cuenta a partir de estímulos directos (Kozulin, 1991).

Feuerstein (1990), sostiene que diferentes aprendices tienen distintas capacidades para beneficiarse de la experiencia mediada. Cada individuo demuestra diferencias en términos de su estructura cognitiva, su base de conocimientos, y su funcionamiento operativo. Dado el mismo estímulo, diferentes aprendices pueden demostrar variaciones considerables en los grados de rapidez, generalización, y permanencia de cambios con el cual responden a instrucción.

En la MLE, el mediador modifica el estímulos al cambiar su frecuencia, orden, intensidad, y contexto al estimular la curiosidad, la vigilancia y la agudeza perceptiva, y al intentar mejorar y/o crear las funciones cognitivas dentro del niño que se requiere para relaciones temporal, espacial y, causa y efecto. Los procesos de la MLE son gradualmente internalizados por el niño y se convierten en mecanismos de cambio integrados dentro del mismo. Lo más que el niño experimenta con la MLE, lo más que él es capaz de aprender de exposiciones directas a situaciones de aprendizaje formales o informales, independiente de la calidad de los estímulos proporcionados. La falta de una MLE puede ser derivado de dos categorías generales; (1) carencia de oportunidades de mediación, (2) y la inhabilidad del niño para beneficiarse de interacciones mediadas (Kozulin, 1991). Para algunos un cambio ligero en color, forma o peso, puede neutralizar los efectos de una respuesta previamente aprendida, lo cual requiere un nuevo proceso de aprendizaje como si la lección fuera totalmente nueva y desconocida.

Feuerstein dice que la MLE, como una calidad de interacción, es responsable por dos fenómenos principales únicos a humanos: la modificabilidad y diversidad. Estos dos fenómenos están estrechamente entrelazados y contribuyen a la flexibilidad y plasticidad cognitiva de cada humano. La existencia de estos dos fenómenos es exclusiva a la teoría de la MLE, de acuerdo a Feuerstein.

La teoría de la MLE distingue doce criterios principales (Feuerstein, 1990). Los primeros tres criterios se deben cubrir en cada aprendizaje que constituye la MLE, son universales y se encuentran en todas razas, grupos étnicos, y clases socio-económicas. Estos criterios incluyen: mediación de intencionalidad y reciprocidad, mediación de transcendencia y mediación de significado. Los otros nueve criterios no se deben considerar exhaustivos, pero se ven como la primera selección de cualidades que en una interacción pueden, pero no es necesario, aparecer en cada interacción para convertirla en una experiencia mediada. Feuerstein considera que la presencia de cualquiera de estos parámetros secundarios, son determinados situacionalmente y varían considerablemente de acuerdo a factores sociales, ambientales y culturales. Los nueve criterios incluyen: mediación de un sentimiento de competencia; mediación de regulación y control de comportamiento; mediación de comportamiento compartido; mediación de diferenciación individual y psicológica; mediación de búsqueda de metas, establecimiento de metas, planeación y comportamiento para lograr la meta; mediación para el desafío; la búsqueda por novedad y complejidad; mediación de la conciencia de un humano como una entidad que cambia; mediación de la búsqueda por una alternativa optimista; y la mediación del sentimiento de pertenencia.

Los primeros cinco criterios de la MLE fueron puestos en operación y observados en interacciones de madre-hijo (Klein, 1991; Tzuriel, 1999), el aprendizaje asistido por par (Tzuriel y Shamir, 2010), hermanos (Klein et al., 2002), y la instrucción entre maestro-alumno (Tzuriel et al., 1998). Los primeros cinco criterios de la MLE que fueron observados son:

1. *Intencionalidad y Reciprocidad*: se refiere a los esfuerzos deliberados del mediador para cambiar la conciencia, la percepción, el procesamiento o la reacción del niño. La intencionalidad es inadecuada sin la reciprocidad, definida como la respuesta vocal, verbal, o no verbal al comportamiento del mediador. Por ejemplo, la intencionalidad y la reciprocidad son observadas cuando un adulto intencionalmente le ofrece un artículo a un niño o verbalmente enfoca la atención del niño y sin duda el niño responde. Este criterio es considerado crucial para el desarrollo de sentimientos de competencia y autodeterminación.

2. *Mediación de Significado*: se refiere a la respuesta del mediador que transmite el significado afectivo, motivacional, y orientado al valor poseído por el estímulo presentado. Esto puede ser expresado verbalmente al explicar el contexto presente, relacionándolo con otros eventos, haciendo hincapié a su importancia y valor, o no verbalmente por expresiones faciales, tono de voz, acciones repetitivas o rituales. De acuerdo a la teoría de la MLE, los niños que experimentan mediación de sentido van a conectar ágilmente significados futuros a nueva información en lugar de esperar pasivamente que el significado aparezca.

3. *Mediación de Transcendencia*:se refiere a las interacciones en donde el mediador proporciona las necesidades inmediatas y concretas de los niños e intenta llegar a metas adicionales que están más allá de la situación o actividad. En las interacciones de madre-hijo, la madre puede ir más allá de la experiencia específica al enseñar estrategias, reglas y principios, con el fin de generalizar otras situaciones. Por ejemplo, en una situación de juego, la madre podrá mediar las reglas y principios que dirigen un juego, y generalizarlas a otras

situaciones. La mediación de transcendencia depende de los primeros dos criterios, intencionalidad y reciprocidad, y significado, a través de la combinación de los tres criterios se mejora el desarrollo de la modificabilidad cognitiva y aumenta el sistema de necesidad del individuo.

4. *La Mediación de Sentimientos de Competencia*: es observado en interacciones en donde el mediador transmite al niño que él es capaz de un funcionamiento exitoso e independiente. El mediador puede organizar el entorno de tal manera que proporciona oportunidades para el éxito, interpretar el entorno al niño y premiar intentos del dominio de la situación, o atender los problemas eficientemente.

5. *Mediación del Control de Comportamiento*: se refiere a las interacciones en donde el mediador regula la reacción del niño, dependiendo en el estilo de reacción del niño y las demandas de la tarea. El mediador puede reducir la impulsividad o acelerar el comportamiento del niño. El control de comportamiento puede ser mediado en varias formas, como la fomentación de la conciencia a las características de la tarea y las respuestas adecuadas, analizando los componentes de la tarea, la modelación de auto-control y proporcionando estrategias meta-cognitivas.

2.3. Aprendizaje Cooperativo

La importancia del aprendizaje cooperativo es una de las suposiciones propuestas por teóricos constructivistas (Loyens et al., 2007). Las interacciones sociales con compañeros de clases, maestros y otros contribuyen a la construcción de conocimientos (Steffe y Gale, 1995). Los Constructivistas tienen diferentes opiniones sobre cómo influye el aprendizaje cooperativo en la adquisición de conocimiento. Sin embargo, en general se cree que la negociación social y las interacciones entre alumnos son elementos cruciales en la adquisición de conocimientos (Greeno et al., 1996). Las interacciones sociales entre alumnos puede facilitar la comunicación de ideas sobre un tema, debido a que su nivel de comprensión es más similar entre ellos comparado al nivel del maestro (Slavin, 1996). Además, el aprendizaje cooperativo permite discusiones entre alumnos que son indicativas de su nivel del conocimiento previo. Dichas discusiones proporcionan a los alumnos la dirección y grado de estudio al cual se debe llevar a cabo para lograr una comprensión profunda del tema.

2.3.1. Aprendizaje Cooperativo y Colaborativo

Panitz (1997) propone una definición básica de los términos cooperativo y colaborativo, reducido a sus términos más simples:

- *La colaboración es una filosofía de interacción y estilo de vida personal donde individuos son responsables por sus acciones, incluyendo el aprendizaje, y deben ser conscientes de las habilidades y contribuciones de sus iguales/pares.*
- *La cooperación es la estructura de interacción designada para facilitar el cumplimiento de un producto final específico o meta a través de personas que trabajan juntos en grupos.*

Panitz también describe la diferencia entre estos paradigmas en términos del comportamiento que se observa en una clase. Para el modelo cooperativo, el maestro mantiene el control de la clase, aun que los alumnos trabajan en grupos para realizar una meta. Además hace preguntas específicas, proporciona información adicional, hace recomendaciones y fomenta la discusión entre los alumnos. En el modelo colaborativo, el grupo asume casi toda la responsabilidad para responder una pregunta. Los alumnos determinan si tienen la información suficiente para realizar la tarea, si no deben identificar otras fuentes. El maestro colaborativo está disponible para consultas y facilita el progreso al pedir avances frecuentes, pero el grupo decide el producto final.

El aprendizaje cooperativo puede ser caracterizado por actividades en donde se establecen objetivos del grupo, cada individuo es responsable por su trabajo, todos los miembros tienen la misma oportunidad para tener éxito, hay competencia entre los equipos, cada miembro tiene una tarea a realizar, y la instrucción se adapta a la necesidad del individuo (Brody, 1995). El aprendizaje cooperativo ha sido descrito como trabajo en grupo altamente estructurado (Davidson y Worsham, 1992), el cual proporciona métodos de instrucción que apoya el desarrollo de habilidades sociales y el logro de objetivos (Presseisen, 1992) que dependen de influencias contextuales y cómo la gente responde a dichas influencias (Jacobs, 1999).

El aprendizaje colaborativo generalmente se considera menos estructurado y los alumnos tienen más libertad en el alcance y los resultados del proceso de aprendizaje. Ellos definen sus propias necesidades de aprendizaje y en cambio se hacen responsables para identificar lo que creen que deben aprender y cómo lo van a aprender, al contrario del aprendizaje cooperativo en donde el maestro tiene la responsabilidad de determinar lo que se aprenderá (Caplow y Kardash, 1995).

Johnson, Johnson y Holubec (1991), establecieron una definición de aprendizaje cooperativo en donde identificaron cinco elementos principales necesario para considerar una actividad como cooperativa. Las cinco condiciones son las siguientes:

1. *Independencia Positiva*: Los alumnos entienden que se necesitan para realizar la tarea.
2. *Interacciones Promovedoras de Cara a Cara*: Los alumnos promueven el aprendizaje del otro al ayudar, compartir y animar los esfuerzos del mismo.

3. *Responsabilidad Individual*: El desempeño de cada alumno es evaluado frecuentemente y los resultados son entregados al grupo y al individuo.

4. *Habilidades Interpersonales*: Los grupos no pueden funcionar eficazmente si los alumnos no tienen o usan las habilidades sociales necesarias. Dichas pueden ser pero no limitadas a liderazgo, toma de decisiones, comunicación y el manejo de conflictos.

5. *Procesamiento del Grupo*: Los grupos necesitan el tiempo suficiente para discutir cómo van a lograr sus objetivos y cómo mantener relaciones de trabajo eficaces entre los integrantes.

El aprendizaje colaborativo está basado en los siguientes principios (Orr, 1998):

1. Trabajando juntos resulta en un mejor entendimiento a comparación de haber trabajado independientemente.

2. Las interacciones habladas y escritas contribuyen a una mejor comprensión.

3. Existe la oportunidad de ser consciente a través de experiencias del aula, de las relaciones entre interacciones sociales y de una mejor comprensión.

4. Algunos elementos de dicha comprensión son idiosincrásicos e impredecibles.

5. La participación es voluntaria.

2.3.2. Investigaciones sobre Aprendizaje Cooperativo y el Pensamiento

Qin, Johnson y Johnson (1995), analizaron cuarenta y seis estudios publicados entre 1929 y 1993. Aplicaron meta-análisis a sesenta y tres conclusiones relevantes de los estudios, cincuenta y cinco veces el aprendizaje cooperativo tuvo mejor rendimiento que el colaborativo. El aprendizaje cooperativo fue superior en la resolución de problemas lingüísticos, problemas no lingüísticos, problemas bien definidos y en problemas mal definidos. Los problemas de lingüística son principalmente representados en lenguas escritas u orales, mientas que los no lingüísticos son principalmente representados y resueltos en dibujos, gráficas, fórmulas matemáticas, símbolos o acciones en situaciones reales. Los problemas bien definidos tienen un objetivo claramente especificado, mientras que los mal definidos son aquellos en donde hay incertidumbre con respecto a los procedimientos operacionales y los objetivos del problema. Los estudios indican que comparado al aprendizaje individual, el cooperativo es más eficaz en: la promoción de motivación intrínseca y la realización de la tarea, la generación de habilidades de pensamiento de orden superior y el mejoramiento de las actitudes hacia el tema.

Estudios demuestran que la interdependencia positiva se promueve a través del aprendizaje cooperativo (Cohen, 1994). Designando un rol a cada integrante dentro del grupo tiene el efecto de asignar competencia, el cual aumenta el auto estima en los aprendices de bajo nivel. También aumenta la interdependencia positiva al tener un objetivo en donde cada integrante debe contribuir (Johnson et al., 1990). También se puede aumentar al estructurar los materiales, por ejemplo, un lápiz o una calculadora por equipo (Slavin, 1991).

2.3.3. Tipos de Aprendizaje Cooperativo

El aprendizaje cooperativo es un procedimiento versátil que puede ser utilizado para una gran variedad de objetivos. Los grupos de aprendizaje cooperativo pueden ser utilizados para enseñar temas específicos (aprendizaje cooperativo formal) (Johnson et al., 2008). El aprendizaje cooperativo formal puede durar una clase o unas semanas. Algunos roles del maestro incluyen:

1. *Toma de decisiones pre-instrucción*. El maestro selecciona los objetivos académicos y sociales, decide el tamaño de los grupos, elije el método para la asignación de alumnos al grupo, decide cuales roles asignar a cada integrante del grupo, acomodan el aula, ordenan los materiales requeridos para completar la tarea. Estas decisiones afectan la interdependencia y la responsabilidad de los integrantes.

2. *Explicar la tarea y estructura cooperativa*. El maestro explica la tarea académica a realizar a los alumnos y los criterios para el éxito, estructura interdependencia positiva y responsabilidad individual, explica las habilidades sociales que los alumnos deben utilizar y acentúa la cooperación intergrupal. Por último, elimina la posibilidad de competencia entre integrantes del equipo.

3. *Monitorear el aprendizaje del alumno*. Además proporcionan asistencia en la realización de la tarea o con la utilización de habilidades sociales adecuadas. Cuando un maestro observa un grupo, los integrantes tienden a sentirse obligados a ser constructivos.

4. *Analizar el aprendizaje del alumno y les ayuda observar cómo funciona su grupo*. El maestro termina la tarea, analiza la calidad y cantidad del logro de los estudiantes, asegura que los integrantes discutan y analicen la eficacia con la cual han trabajado, hace que los estudiantes realicen un plan de mejoramiento.

El aprendizaje cooperativo informal consiste en que los alumnos trabajen juntos para realizar un objetivo de aprendizaje en grupos ad hoc temporales que duran desde unos minutos a una clase

(Johnson et al., 2008). Durante una clase, esta táctica puede ser utilizado para enfocar la atención de los alumnos al material que se debe aprender. Dos aspectos importantes del aprendizaje cooperativo informal son hacer la tarea y las instrucciones explícitas y precisas, y requerir que los grupos produzcan un resultado específico. El procedimiento es el siguiente:

1. *Discusión introductoria del tema*. El maestro organiza los grupos y explica la tarea a realizar. La discusión se enfoca en promover la organización avanzada de la información actual de los alumnos y que se debe cubrir en la clase.

2. *Discusión intermitente*. La clase se divide en segmentos de 10 a 15 minutos. Después de cada segmento los alumnos trabajan de manera cooperativa para responder la pregunta, bajo el siguiente esquema:

   a) Cada alumno formula su propia respuesta.

   b) Los alumnos comparten su respuestas con sus compañeros.

   c) Los alumnos escuchan cuidadosamente a las respuestas de sus compañeros.

   d) Los alumnos en equipo forman una nueva respuesta superior con respecto a la inicial al integrar las dos.

   La pregunta puede requerir que los alumnos:

   a) Resuman el tema presentado.

   b) Den una reacción a la teoría, el concepto o la información presentada.

   c) Hagan una predicción de cuál tema se presentará; plantear una hipótesis.

   d) Resuelvan un problema.

   e) Relacionen a otros temas y que los integren conceptualmente.

   f) Resuelvan algún conflicto conceptual creado por la presentación.

3. *Discusión final*. El maestro da una discusión final, la cual dura entre cuatro y cinco minutos, con el fin de resumir lo que se aprendió en la clase e integrarlo conceptualmente a temas anteriores. Esto concluye la clase.

El aprendizaje cooperativo informal, asegura que los alumnos estén activamente involucrados en el entendimiento del tema que se está presentando. Además, proporciona tiempo para que el maestro camine en el aula y escuche las respuestas de los alumnos. Al escuchar las discusiones de los alumnos, el maestro recibe dirección y una idea del domino de los conceptos de los alumnos.

2.4. Semiótica

2.4.1. Enfoque Semiótico Estructural y Funcional de Duval

Los procesos cognitivos matemáticos son procesos intrínsecamente semióticos que involucran una red compleja de símbolos y señales (Duval, 2006). De acuerdo a Duval (2006), hay un sistema de símbolos, el cual se conoce como sistema semiótico. Lo anterior es caracterizado por un conjunto de símbolos básicos, un conjunto de reglas para la producción y transformación de símbolos y una estructura de significado derivado de la relación entre los símbolos dentro del sistema. Dentro de los sistemas semióticos, existen registros de representación (Duval, 1995). No todos los sistemas semióticos son registros, sólo los que permiten una transformación de representaciones.

La característica principal que describe el funcionamiento cognitivo y por lo tanto el desarrollo del conocimiento en matemáticas, es que los sistemas semióticos permiten transformaciones y comparaciones entre símbolos. El enfoque semiótico estructural y funcional de Duval, relaciona el pensamiento y el aprendizaje matemático con la coordinación de representaciones semióticas seguidas por los siguientes procesos cognitivos (Duval, 1993, 1995, 2006):

- *Representación*: en donde se describen las características distintivas, por ejemplo una gráfica que representa una función.
- *Tratamiento*: consiste en la transformación de una representación a otra dentro del mismo sistema semiótico, por ejemplo la manipulación de una expresión algebraica,
- *Conversión*: la cual consiste en la transformación de una representación a otra en otro sistema semiótico, por ejemplo el cambio de la representación simbólica $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ a su gráfica Cartesiana.

El enfoque estructural y funcional, proporciona una herramienta útil para entender los procesos cognitivos involucrados en el pensamiento y aprendizaje matemático. Duval (2006), concluyó que los procesos de pensamiento en matemáticas son basados en dos diferentes tipos de transformaciones de representaciones. Aún que un tipo de registro de representación sea suficiente desde el punto de vista matemático, cognitivamente la actividad matemática involucra la movilización simultánea de por lo menos dos registros de representación, o la posibilidad de cambiar en cualquier momento de un registro a otro. Es decir, que la comprensión conceptual en matemáticas requiere del manejo de por lo menos dos registros. Lo anterior es la razón por la cual procesos matemáticamente sencillos para la construcción de conocimiento matemático pueden ser complejos cognitivamente y requieren del entendimiento sobre la coordinación de registros.

2.4.2. Enfoque Semiótico Cultural y el Aprendizaje

La teoría de objetivación de Radford (2008), considera el pensamiento como una reflexión mediada de acuerdo a la actividad del individuo. Dentro de una visión pragmática y siguiendo las ideas de Vygotsky (1986), los símbolos son elementos del pensamiento debido a que median la actividad social y unen la individual a una dimensión histórica y cultural. El Pensamiento no es una actividad aislada en donde el individuo asimila conocimiento, es la reflexión por parte del sujeto logrado en una actividad social. Dentro de la dimensión reflexiva mediada, "objetos matemáticos son patrones fijos de la actividad reflexiva colocados dentro de un mundo dinámico de práctica social mediado por artefactos" (Radford, 2008, pg. 222).

El aprendizaje se considera una actividad reflexiva mediada que se dirige a objetos matemáticos que llevan una dimensión histórica y cultural. Es el proceso de hacerse consciente de un objeto que existe en la cultura, un proceso activo en la construcción de significados que permiten encontrar el objeto cultural. Radford llama dicho proceso *objetivación*, en donde se aprende a objetivar algo (Radford, 2005).

El aprendizaje es un acto intencional en donde una persona se encuentra con un objeto matemático y a través de actividad reflexiva mediada le da un significado al objeto. Considerando el enfoque cultural, símbolos median culturalmente la actividad reflexiva dentro de la objetivación de objetos matemáticos. La manera en que los alumnos proponen el objeto matemático a través de sus actos intencionales, no es una relación neutral (sujeto-objeto o señal-objeto). La relación es intrínsecamente ?contaminada? por cultura, historia y estructuras sociales, a través de un conjunto general de mediadores semióticos que dirigen la intención, denominado como fines semióticos de objetivación (Radford, 2006). Lo anterior incluye objetos, artefactos, señales, gestos, ritmo, etc. En el proceso de objetivación, se menciona mucho el objeto matemático. Dentro de este proceso existe una relación entre la dimensión cultural y personal, y entre significado cultural y personal. Por una parte, el alumno impulsa su aprendizaje a través de sus actos intencionales de la construcción de significado; pero dichos actos intencionales son dirigidos por aspectos sociales. Por lo tanto, la actividad de construcción de significado se puede ver como la convergencia del significado cultural y el personal.

El proceso de objetivación implica principalmente dos dificultades por parte del alumno (Santi, 2011):

1. El objeto matemático es un ente con niveles de generalidad. Cada nivel está asociado con una actividad reflexiva particular, determinada por las características de los medios se-

mióticos de objetivación que la median. La diversidad de actividades reflexivas afecta los actos intencionales del alumno. Mientras él se enfoca en los objetos que considera desconocidos o diferentes, en un nivel interpersonal los mismos objetos son reconocidos como pertenecientes al mismo ente cultural. Por lo tanto, el proceso de objetivación no requiere de la coordinación de representaciones semióticas sólo la de las diferentes actividades mediadas por dichas representaciones.

2. El significado tiene una naturaleza fuertemente encarnada (Radford, 2003; Lakoff y Núñez, 2000) pero a niveles superiores de generalidad, el alumno debe emplear símbolos formales y abstractos que rompan la relación entre la experiencia espacial y temporal. Los alumnos deben experimentar una liberación de significado que a niveles superiores de generalidad impide la objetivación del objeto matemático como un ente general e interpersonal.

2.4.3. Enfoque Onto-Semiótico

El enfoque onto-semiótico (Godino, 2002; D?Amore y Godino, 2006; Font et al., 2007) está basado en la teoría pragmática de objetos matemáticos y generaliza la noción de representación a través de la noción de función semiótica, la cual relaciona un antecedente (significante) con un consecuente (significado). Considere esta relación con la palabra ?abierto? y cómo se interpreta cuando alguien la encuentra en la puerta de una tienda, el antecedente es la palabra mientras que el consecuente indica que la tienda esta en servicio (abierta). La representación no sólo depende del lenguaje, también es factor de cualquier objeto que resulta de prácticas matemáticas que puede ser un antecedente de la función semiótica. Por lo tanto, el enfoque onto-semiótico es fundamentalmente racional.

Esta generalización de representaciones proviene de una distinción en el desarrollo de la actividad matemática, entre una fase operacional y fase referencial (Ullmann, 1962). El enfoque semiótico estructural y funcional, es efectivo en la descripción de procesos cognitivos en el nivel referencial. La coordinación de sistemas semióticos, la cual caracteriza el pensamiento matemático, es el resultado de la fase operacional. Lo anterior es el sistema de prácticas en donde surge la representación y su uso.

Los objetos matemáticos emergen de prácticas y sistemas de prácticas; de acuerdo a las características de los sistemas de prácticas, los objetos matemáticos emergentes son concebidos como los siguientes entes primarios: situaciones, procedimientos, definiciones, propiedades, argumentos y lenguajes. Los entes primarios son interrelacionados a lo largo de la actividad matemática, formando una red de objetos denominada configuración cognitiva, si relaciona actividad personal, o configuración epistémica si relaciona las prácticas institucionales (D?Amore y Godino, 2006).

Los entes primarios de acuerdo al ?juego de lenguaje? (Wittgenstien, 1953) que pertenecen, se pueden caracterizar como las siguientes dualidades cognitivas: personal-institucional, unitario-sistemático, expresión-contenido, ostensiva-no ostensiva, o extensivo-intensivo (D?Amore y Godino, 2006). De la dualidad expresión-contenido, surge la función semiótica. Hjemslev (1943) introdujo la noción de función de símbolos, la cual Eco (1979) denominó función semiótica, que representa la dependencia entre texto y sus componentes y entre los mismos componentes. Dentro del enfoque semiótico, se relaciona un antecedente con un consecuente. Los entes primarios pueden ser antecedentes o consecuentes. La función semiótica se establece de acuerdo a un código o regla derivada del juego de lenguaje que apoya el sistema de practicas (Font et al., 2007).

En el enfoque onto-semiótico, el significado es el contenido de cualquier función semiótica (Font et al., 2008). Este enfoque va más allá de la idea, de que el significado surge de la relación referencial entre un objeto independiente y una de sus representaciones posibles. El significado es una relación establecida a través de la función semiótica entre dos pares P(SP,CO) constituido por un sistema de prácticas (SP) y la configuración de objetos (CO). Las transformaciones semióticas son los aspectos emergentes de una función semiótica que relaciona un representación R (antecedente) en un par, con una representación S (consecuente) en otro par.

2.5. Tecnología y La Educación

2.5.1. Piaget

Piaget (1980) y su teoría del constructivismo, proponen un modelo psicológico que genera teorías educativas de aprendizaje. Las estructuras cognitivas y el conocimiento se forman cuando seres humanos tienen contacto con su entorno. El conocimiento es la conciencia de propiedades invariantes de las cosas (conocido por Piaget como abstracción empírica) y de las propiedades invariantes de acción (a través de la reflexión sobre la abstracción). “Todo conocimiento con respecto a la realidad, resulta de acciones y operaciones que actúan sobre el cual lo hacen cambiar y por lo tanto demuestran sus propiedades estables y variables” (Piaget, 1980, p. 222).

El crecimiento cognitivo puede ser representado como un proceso tipo espiral. La interacción con la realidad inicia un proceso de asimilación, en donde estructuras existentes son aplicadas al objeto. Las estructuras son adaptadas y asimiladas, y si no fallan. Esto crea una situación de desequilibrio cognitivo que provoca acomodación. A través de la acomodación, las estructuras cognitivas son modificadas para considerar los aspectos de resistencia de la realidad. El crecimiento se convierte en un proceso que resulta de la desestabilización recurrente de las estructuras existentes, debido a las características nuevas e inesperadas del objeto en la realidad, seguido por la generación subsecuente de estructuras más profundas en su alcance que resisten la asimilación.

Piaget se enfoca principalmente en epistemología, en donde el desarrollo se debe a evolución biológica y la génesis histórica del conocimiento científico. Inhelder y Cellerier (1992), propusieron que se hicieran más investigaciones sobre pragmática, argumentaron que ya hay suficiente investigación sobre la transformación epistémica (la alteración del mundo con el fin de generar conocimientos), lo cual no es el caso de la transformación pragmática (conocimiento puesto en marcha con el fin de alterar el mundo). La transformación pragmática claramente incorpora un aspecto de tecnología, pero sale de interacciones biológicas en el sentido de que involucra herramientas técnicas de mediación y técnicas corporales. Piaget siempre supuso una continuidad fundamental entre procesos biológico adaptivos y niveles avanzados de cognición. Su modelo de interacción se reduce a relaciones entre el organismo y su entorno, y por lo tanto excluye la mediación.

2.5.2. Vygotsky

Vygotsky (1985) consideró que unas teorías de Piaget ilegítimamente “reducen procesos psíquicos superiores complejos a procesos naturales y desprecian las características específicas del desarrollo cultural del comportamiento” (p. 27). Acertó que “junto a los actos y procesos de comportamiento natural, es necesario distinguir las funciones y formas de comportamiento artificial o instrumental” (p. 40). Argumentó que la introducción y el uso de instrumentos provocan cambios de gran alcance en la cognición: “Activa una nueva serie de funciones ligadas al uso y control del instrumento seleccionado; el trabajo desarrollado por el instrumento reemplaza y hace inservible un número considerable de procesos naturales” (p. 42).

Por lo tanto, el desarrollo se ve como resultado de procesos altamente artificiales en donde la mediación de instrumentos desempeña una función principal, de acuerdo a Vygotsky el tema central de su psicología es mediación. A través de la mediación (material y simbiótica) la cognición humana se involucra en relaciones con el ambiente material y social, las cuales son fundamentalmente diferentes de relaciones no mediadas.

2.5.3. Modelo Psicológico de Instrumentos

Un instrumento es cualquier objeto que un sujeto asocia con su acción, con el fin de llevar a cabo una tarea. En una actividad *instrumentada*, el objeto es un artefacto (un objeto hecho, como una herramienta o máquina, que ha sido diseñado para una tarea específica) (Vérillon, 2000). De acuerdo a Vérillon (2000), las acciones instrumentadas pueden ser de naturaleza pragmática, epistémica o semiótica. Un uso pragmático de un instrumento, es en donde él mismo es utilizado para transformar un objeto u otro aspecto del ambiente, por ejemplo utilizar una goma para borrar marcas de lápiz. Un uso epistémico de un instrumento, es en donde él mismo es utilizado para proporcionar información sobre el ambiente, por ejemplo un termómetro mide la temperatura. Finalmente el uso semiótico o comunicativo, es un instrumento que es utilizado para transformar información de una persona. Vérillon (2000, p.7)) indica que lo anterior requiere el conocimiento de códigos verbales, gestuales y gráficos. También reconoce que en ciertas circunstancias puede ser una mezcla, “actividad instrumentada, ya sea material o semiótica, generalmente consiste de ambas fases pragmáticas y epistémicas” (Vérillon, 2000, p. 6).

Vérillon (2000), propone un modelo de actividad instrumentada situada (SIA) en donde subraya las relaciones múltiples dentro de una actividad instrumentada, las cuales incluyen el sujeto, el instrumento y el objeto hacia el cual se dirige la acción instrumentada. La Figura 2.1 ilustra este modelo. Muestra que en el análisis de la actividad además de considerar las interacciones directas sujeto-instrumento (s-i) y sujeto-objeto (s-o), debe considerar la interacción instrumento-objeto (i-o) y la interacción indirecta a través de la mediación del instrumento (s(i)-o).

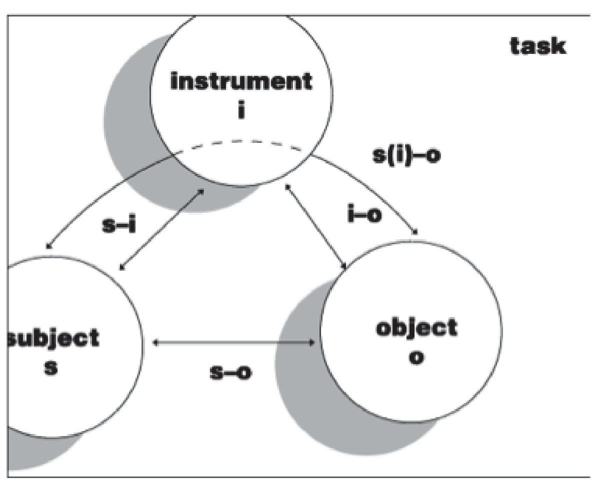


Figura 2.1: Modelo SIA

El modelo SIA se puede ajustar para aplicarse a situaciones instrumentadas semióticamente. Vygotsky (1985) se refiere a instrumentos semióticos (símbolos, códigos, mapas, diagramas, etc.) como instrumentos *psíquicos*. "El instrumento psíquico básicamente difiere de un instrumento técnico en la dirección de su acción. El instrumento psíquico no provoca un cambio en un objeto, su fin es influenciar su propio comportamiento o el de otro" (Vygotsky, 1985, p. 43). Considerando ese punto de vista el modelo debe representar la interacción que se lleva a cabo entre dos sujetos: un *transmisor* y un *receptor*. Además, debido a que los instrumentos semióticos tienen el fin de modificar la información del receptor o sus representaciones, se introduce un cuarto elemento al modelo SIA: el referente (r), la información o representación inicial (Figura 2.2). El referente es el objeto al cual se actúa la acción instrumentada del transmisor.

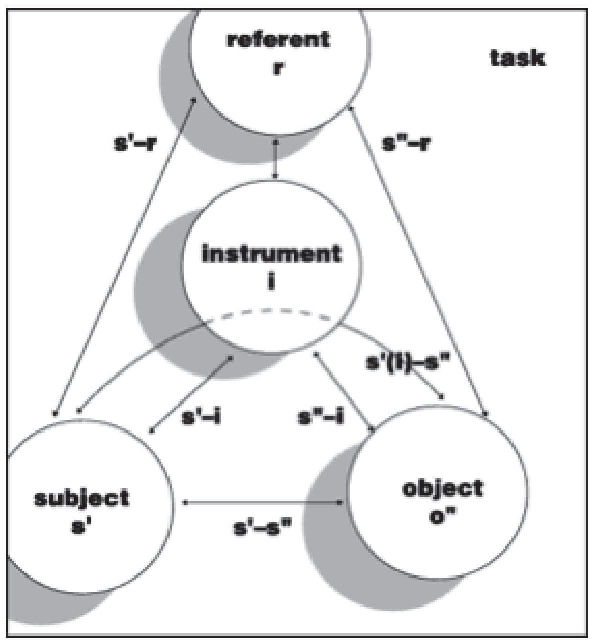


Figura 2.2: Modelo SIA Modificado

En situaciones instrumentadas semióticamente, la mediación se presenta en dos formas: mediación de la acción del transmisor sobre el receptor y la mediación al objeto de referencia común a ambos.

2.6. Génesis Instrumental

2.6.1. Introducción

En los primeros años de ser introducido, la secuencia de caja-blanca/caja-negra dominaba la discusión de álgebra computacional. En un proceso de caja negra no se sabe el mecanismo de resolución y en un proceso de caja blanca se tiene la información sobre él. Buchberger (1989) sugirió que los alumnos solo deben utilizar álgebra computacional para tareas que pueden hacer a mano. Dicha estrategia dice que hasta que el alumno domine un tema nuevo podrá utilizar algebra computacional. Bajo esta condición al utilizar el álgebra computacional (caja-negra), el alumno es capaz de saber que *hay dentro* del proceso. Mientras que en la secuencia caja-negra/caja-blanca se invierte el orden, primero se utiliza el álgebra computacional. Proponentes de este enfoque, utilizan el sistema de álgebra computación (CAS) como un generador de ejemplos y como una herramienta de exploración para provocar curiosidad, y poder llevar a cabo descubrimientos interesantes (Drijvers, 1995).

Heid (1988), demostró que CAS puede facilitar el desarrollo de conceptos matemáticos. La experimentación se llevó a cabo con alumnos de primer año de la Universidad inscritos en un curso de cálculo. El experimento consistió en el uso de CAS para la formulación del concepto de la derivada utilizando gráficas y la combinación de representaciones. Las técnicas de diferenciación fueron enseñadas hasta el final del curso. Los resultados del experimento de *concepto primero*, indican que al desarrollo de conceptos puede preceder el aprendizaje de técnicas. Heid sugirió que el uso de CAS puede provocar una re-secuencia de conceptos y habilidades en los cursos de matemáticas.

Cuando se introdujeron las calculadoras gráficas en la educación, fue evidente que los alumnos tenían dificultades en la interpretación de las representaciones gráficas que aparecían en la pantalla de la calculadora (Goldenberg, 1987; Hillel et al., 1992). Guin y Trouche (1999), observaron que la confusión de los alumnos se debe al no poder distinguir entre el objeto matemático y su representación en la calculadora.

2.6.2. Génisis Instrumental

Dentro del campo de la ergonomía cognitiva, que tiene que ver con procesos mentales (percepción, memoria, razonamiento y respuesta ideomotor) y en cómo afectan las interacciones entre humanos y otros elementos de un sistema, el cual se apoyan en la idea de instrumentación (Vérillon y Rabardel, 1995). Los investigadores de la ergonomía cognitiva se enfocan en estudiar procesos de aprendizaje profesionales, que se llevan a cabo en ambientes tecnológicamente complejos. Por ejemplo para el entrenamiento de pilotos de avión o cirujanos, se han desarrollado herramientas conceptuales adaptadas para el estudio de este tipo de procesos de aprendizaje.

Para entender el uso de dichas herramientas conceptuales, debemos enfocarnos en el concepto de *instrumento* (Artigue, 2002). El instrumento es diferente al objeto (material), el cual se conoce como *artefacto*. Por lo tanto el instrumento es una entidad mixta, parte artefacto y parte esquemas cognitivos que lo hacen un instrumento. Inicialmente, para un individuo el artefacto no tiene valor instrumental. La transformación de artefacto a instrumento se lleva a cabo por un proceso conocido como *Génisis instrumental*, lo cual involucra la apropiación de esquemas sociales pre-existentes.

La Génesis instrumental puede funcionar de dos formas. La primera forma es dirigida hacia el instrumento. En donde progresivamente se carga con potencialidades y eventualmente tiene un uso específico; conocido como la *Instrumentalización* del artefacto. Por otra parte, la Génesis instrumental está dirigida hacia el sujeto, lo cual resulta en la apropiación de esquemas de acción instrumentado que se convierten en técnicas y permiten una respuesta eficaz a tareas dadas. Lo anterior se conoce como *Instrumentación*. Para entender y promover la Génesis para aprendices es necesario identificar las restricciones inducidas por el instrumento, existen las restricciones internas y de interface (Balacheff, 1994). Además, es necesario identificar el potencial ofrecido por el trabajo con instrumentos.

Por lo tanto, la Génesis instrumental es el proceso de la construcción de esquemas que consiste en técnicas y concepciones, que le dan significado a las mismas. La teoría de instrumentación está en línea con las opiniones sobre el rol de símbolos en la educación matemática (Gravemeijer et al., 2000). El valor de la teoría de la Instrumentación es que proporciona una forma específica para ver la interacción entre los alumnos y la herramienta tecnológica, en particular demuestra cómo los obstáculos técnicos pueden ser relacionados a dificultades conceptuales.

La actividad humana puede ser descrita como técnicas, un conjunto de gestos construidos por el sujeto para realizar una tarea (Lagrange, 2000). Un gesto es un bloque básico de actividad que tiene varias funciones (Trouche, 2000). Para estudiar la función de un gesto, se debe considerar la actividad realizada por el alumno para lograr la tarea. Una técnica instrumentada se lleva a cabo cuando el conjunto de gestos son instrumentados, es decir, que los gestos son articulados hacia el instrumento.

2.6.3. Complejidad de la Génisis Instrumental

En la década pasada, se llevó a cabo un extenso estudio sobre la tecnología en la enseñanza de las matemáticas (Legrange et al., 2001, 2002). El objetivo del estudio, fue estudiar los problemas de la integración de tecnología en la enseñanza de las matemáticas y cómo se entienden mejor las dificultades de la integración, examinando el potencial y las limitaciones de las investigaciones en dicho campo. Este estudio sugirió que la Instrumentación puede ser un proceso muy complejo y costoso. Estudios realizados por Trouche (1997) y Defouad (2000) ayudan en la comprensión de algunas de las complejidades de la Instrumentación.

Investigaciones hechas por Trouche (1997), observaron la diversidad de relaciones instrumentales que el alumno desarrolla. La tesis de Trouche (1997), se enfocó en la conceptualización de la noción del límite utilizando calculadoras gráficas y calculadoras simbólicas. Debido a la diversidad, Trouche introdujo cinco perfiles extremos, los cuales el llamó “teórico”, “racionalista”, “académico”, “generalista” y “experimentalista”. Estos perfiles son caracterizados por el tipo de recursos que favorece el alumno, el meta-conocimiento que tiende a activar y los modelos de validación utilizados (Trouche, 2000). Por ejemplo, el “generalista” está caracterizado a través de los ejes: calculadora, investigación y acumulación; mientas que el “racionalista” está caracterizado por: lápiz y papel, inferencia y demostración matemática; y el “teórico” por: referencias, interpretación y analogía. Trouche (2000), demostró que las diferencias en los perfiles de los estudiantes tienen efectos significativos en la Génesis instrumental de las calculadoras gráficas y simbólicas.

Los análisis más precisos sobre el trabajo de alumnos con calculadoras simbólicas, demuestran una gran variedad en los métodos de trabajo (Drijvers, 2000). Guin y Trouche (2002), clasificaron cinco comportamientos extremos, los cuales son muy similares a los perfiles observados por Trouche (2000). Los cinco tipos de métodos de trabajo son:

- *Método de trabajo teórico*: caracterizado por el uso de referencias matemáticas como un recurso sistemático. El razonamiento está esencialmente basado en analogías e interpretaciones excesivas de hechos, con procesos de verificación de los resultados de la calculadora.

- *Método de trabajo raciona*: caracterizado por el uso reducido de la calculadora, generalmente trabajan en un ambiente tradicional (lápiz y papel). El alumno tiene un manejo fuerte de procesos como inferencia, razonamiento y su manipulación para resolver problemas.

- *Método de trabajo mecánico*: en donde las fuentes de información más o menos son restringidas a las investigaciones de calculadora y manipulaciones sencillas. Sin embargo, el razonamiento es debido a la acumulación de los resultados de la calculadora. El manejo de procesos es relativamente débil, debido a que evita referencias matemáticas.

- *Método de trabajo ingenioso*: caracterizado por la exploración de todas las fuentes de información disponibles (calculadora, lápiz y papel, libros de texto, etc.). El razonamiento está fundamentado en la comparación y confrontación de dicha información con un grado regular del manejo de procesos.

- *Método de trabajo aleatorio*: caracterizado por las dificultades con en manejo de la calculadora, con lápiz y papel. Las tareas se llevan a cabo por medios de estrategias de cortar y pegar las soluciones previamente memorizadas. Por lo tanto, el manejo de procesos débiles del alumno se revela al utilizar procesos de prueba y error con referencias muy limitadas a las herramientas de entendimiento y sin estrategias de verificación del resultado de la calculadora

La tesis de Defouad (2000), se enfocó en la instrumentación de la calculadora TI-92 y el estudio de variaciones de funciones. La experimentación se llevó a acabo con alumnos del grado 11 (penúltimo año de preparatoria), ellos tuvieron la calculadora TI-92 por un año académico. Este estudio demostró la complejidad de los procesos de instrumentación. La Génesis instrumental se desarrolla con el tiempo, en formas que no refleja la enseñanza formal dedicada al tema de variación de funciones. Además, había una tendencia entre los alumnos de darle más importancia a la búsqueda de coherencia entre la información que proporcionaban las diferentes fuentes (cálculos simbólicos, representaciones gráficas y valores aproximados), en lugar de buscar un argumento decisivo.

Con las entrevistas de algunos alumnos, Defouad (2000) identificó varias fases en la instrumentación. En la primera fase, los alumnos seguían dependiendo de las representaciones gráficas para el estudio de funciones. En esta fase, el uso de cálculo formal en la aplicación "HOME" de la calculadora simbólica fue marginal, a pesar de su potencial. En la siguiente fase, denominada la "fase intermedia", la aplicación gráfica sigue siendo la más utilizada pero HOME empieza a emerger como una herramienta de solución y una conexión entre las diferentes aplicaciones que se desarrollan. Finalmente, en la última fase conocida como la "fase de cálculo", se logra desarrollar una conexión entre las aplicaciones.

Analizando las diferentes fases y la enseñanza formal, se llegó a las siguientes observaciones. En el primer año del experimento, los alumnos aplicaron HOME muy lentamente con diferencias claras debido a su perfil personal. El desarrollo del conocimiento matemático, fue importante en la apropiación progresiva. En la primera fase, a pesar de utilizar HOME para calcular derivadas, regresaron a la aplicación gráfica en el momento de que la situación o los resultados proporcionados por la calculadora se hicieron más complejos. No lograban emplear estrategias económicas útiles en la TI-92, preferían estrategias de sobre verificación. La conexión eficiente entre las aplicaciones algebraicas y gráficas, requerían más tiempo para desarrollarse de lo que se esperaba.

La Génesis instrumental, involucra una evolución de roles de diferentes aplicaciones de la calculadora. Durante la primera fase de la Génesis, la aplicación gráfica fue la herramienta principal en exploración y resolución; la aplicación de Table (tabla numérica de la gráfica), la cual tuvo un rol central; la aplicación simbólica HOME tuvo un rol mínimo. En la segunda fase, aunque la aplicación gráfica sigue como la herramienta predominante, HOME es más usado en el cálculo de valores exactos para la función y su derivada, para calcular límites, o para verificar algunos resultados gráficos. En la tercera fase ocurre una inversión; la aplicación simbólica se convirtió en la herramienta predominante en el proceso de resolución, en conjunto con trabajo de lápiz y papel, mientras que la aplicación gráfica se convirtió principalmente en una herramienta heurística, para anticipación y control.

2.6.4. Técnicas Instrumentadas

Artigue (2002) identificó dos fuentes complementarias, de las cuales el trabajo matemático instrumentado por CAS puede ayudar en la conceptualización y en la progresión de conocimiento matemático. La primera fuente tiene que ver con el dominio de técnicas instrumentadas. La otra fuente, trata las nuevas posibilidades ofrecidas por el trabajo instrumentado, esta fuente es más fácil de identificar y por lo tanto está más reconocida en la literatura sobre CAS.

2.7. Educación Matemática Realística y Algebra Computacional

Las matemáticas se consideran una actividad humana (Freudenthal, 1991). Van Reeuwijk (1995) propone las siguientes características para la educación matemática realística (RME): mundo *real*, producciones y construcciones libres, matematización, interacción y aprendizaje integrado. Una extensa discusión sobre la RME, se puede encontrar en Freudenthal (1991), Delange (1987) y Treffers (1987).

Con respecto a la característica de mundo *real*, se refiere a que el aprendizaje de las matemáticas empieza a partir de situaciones problema que los alumnos perciben como real o realístico. Pueden ser contextos de la vida cotidiana, pero también pueden salir de situaciones matemáticas que son significativas y naturales para el alumno.

La característica de producciones y construcciones libres en la teoría, es en donde los alumnos tienen la oportunidad de desarrollar sus propias estrategias de resolución de problemas informales, que pueden llevar a la construcción de procedimientos de solución. Los modelos que se desarrollan gradualmente, se convierten en modelos genéricos para un tipo de situaciones. Este proceso de reinvención de *abajo hacia arriba*, es guiado por el maestro y los materiales de instrucción. El concepto de reinvención guiada es esencial en RME.

Organizar los fenómenos de acuerdo a la matematización, es importante en el aprendizaje de matemáticas. Generalmente se distinguen dos tipos de matematización, horizontal y vertical. La matematización horizontal se refiere, a modelar la situación problema en forma matemática y viceversa. Mientras que la matematización vertical, se refiere al proceso de obtener un nivel superior de abstracción matemática.

Las interacciones entre alumnos, entre alumnos y el maestro, son importantes en la RME; debido a que la discusión y cooperación entre ellos, mejoran la reflexión que es esencia en el proceso de matematización.

En la filosofía de la RME, se deben integrar a un plan de estudios diferentes temas matemáticos. El alumno debe desarrollar una visión integrada de las matemáticas, además de la flexibilidad de conectar los diferentes sub-dominios.

La idea de tecnología como un catalizador para la realización de la RME, se ha estudiado profundamente. Drijvers y Doorman (1997), describen el uso potencial de la calculadora gráfica en el proceso de matematización, exploración, integración y flexibilidad. Drijvers (2000), llegó a las siguientes tres suposiciones sobre los posible beneficios de utilizar álgebra computacional para realizar los objetivos de la RME.

1. *Matematización horizontal*: Utilizando dispositivos de álgebra computacional, se permite que la atención de los alumnos cambie de operaciones puramente algorítmicas a la traducción de problemas realísticos, a la modelación matemática y a la interpretación de los resultados con respecto al contexto. Liberando al alumno del trabajo técnico, que puede ser la solución para la matematización horizontal.

2. *Exploración*: Debido a su retroalimentación directa, la herramienta de álgebra computacional ofrece diferentes oportunidades para las actividades de exploración. Tareas de descubrimiento y clasificación, pueden facilitar que a través de la reflexión y la generalización se llegue a la reinvención de propiedades o teoremas. CAS puede lograr la matematización vertical similar a otros dispositivos tecnológicos que sirven como instrumentos de investigación, pero el álgebra dentro del sistema proporciona nuevas oportunidades como técnicas algebraicas.

3. *Integración flexible de diferentes representaciones*: Utilizar CAS permite que el alumno cambie fácilmente entre representaciones matemáticas, como gráficas, tablas y fórmulas. Lo anterior, significa un uso flexible e integrado de las representaciones que serán percibidas como diferente pero relacionadas. La forma sofisticada de representar y editar fórmulas no es exclusiva de CAS, solo que es el punto débil de otras herramientas tecnológicas.

Drijvers (2000), también postuló los siguientes tres conflictos posibles entre la teoría de la RME y el uso de CAS:

1. *Herramienta de arriba hacia abajo*: Ya que CAS está muy avanzada matemáticamente, existe el riesgo que los resultados sean obtenidos de una manera ?arriba hacia abajo?. Debido a que todo ya está inventado, estos puede frustrar la motivación del alumno para construir y reinventar, a menos que se tomen medidas didácticas adecuadas.

2. *Caja Negra*: Típicamente CAS no da información sobre cómo se obtuvieron los resultados, el software es una caja negra que no enseña el método utilizado. Generalmente, los métodos, aunque sean problemas sencillos, son más sofisticados que los métodos que los alumnos hubieran utilizado. Claramente el CAS no apoya estrategias básicas o informales.

3. *Idiosincrasia*: Como una herramienta para un usuario aprendiz, CAS no es muy flexible. La introducción de datos requiere una sintaxis estricta y el resultado puede ser presentado en formas desconocidas. El lenguaje CAS es diferente de lenguaje matemático y natural, y el sistema no permite lenguaje informal. Cada CAS tiene sus propias reglas, restricciones y hábitos. Por lo tanto, los alumnos pueden percibir a CAS como una herramienta idiosincrásica en lugar de un instrumento flexible y natural que puede adaptarse a sus notaciones informales y estrategias. Lo cual hace, que la Génesis instrumental sea un proceso muy difícil (Guin y Trouche, 1999).

Después de su experimentación, Drijvers (2000) analizó las experiencias que los alumnos tuvieron con álgebra computacional y concluyó los siguientes obstáculos:

1. La diferencia entre las representaciones algebraicas proporcionadas por CAS y aquellas que los alumnos esperan y conciben como ?sencillo?.

2. La diferencia entre cálculos numéricos y algebraicos, y la forma implícita en la que CAS maneja la diferencia.

3. Las limitaciones de CAS y la dificultad en proporcionar estrategias algebraicas para ayudar a CAS a superar dichas limitaciones.

4. La inhabilidad de decidir cuándo y cómo el álgebra computacional puede ser útil.

5. La concepción flexible de variables y parámetros que el uso de CAS requiere.

Los cinco obstáculos son relacionados entre sí y tienen una doble naturaleza común. Existe un componente tecnológico y otro relacionado al dispositivo, pero para tratarlos adecuadamente requieren de comprensión matemática. Solo el quinto obstáculo puede ser considerado matemático, aquí la falta de comprensión se hace más explícita al usar CAS.

2.8. Tarea - Técnica - Teoría

El enfoque instrumental, es una herramienta que ha sido reconocida para el análisis de procesos de enseñanza y aprendizaje en un ambiente CAS (Artigue, 2002; Lagrange, 2003). De acuerdo a Monaghan (2007), este enfoque abarca elementos de ergonomía cognitiva (Vérillon y Rabardel, 1995) y la teoría antropológica didáctica (Chevallard, 1999). En la teoría antropológica didáctica, Chevallard (1999) observa que los objetos matemáticos emergen en un sistema de prácticas que son caracterizadas por cuatro componentes: *tarea*, en donde el objeto se encuentra; *técnica*, utilizada para resolver la tarea; *tecnología*, el medio que explica y justifica la técnica; y *teoría*, el discurso que proporciona la base estructural para la tecnología.

Artigue (2002) redujo los cuatro componentes de Chevallard a tres: *tarea, tecnología* y *teoría*. El componente de *teoría* de Artigue combina los componentes de *tecnología* y *teoría* de Chevallard. Dentro de este marco teórico (Tarea - Técnica - Teoría), una *técnica* es el conjunto complejo de razonamiento y trabajo de rutina, y tiene valores pragmáticos y epistémicos (Artigue, 2002). Su rol pragmático se debe a que se realiza una tarea (Lagrange, 2003). Con respecto a su valor epistémico, Lagrange (2003) argumenta que:

La técnica tiene un rol epistémico al contribuir al entendimiento del objeto que trata, particularmente durante su elaboración. También sirve como un objeto para la reflexión conceptual *al ser comparado con otras técnicas y cuando se discute con respecto a su consistencia.* (p. 271)

De acuerdo a Lagrange (2005), la consistencia y efectividad de la técnica son discutidos en el nivel teórico. El valor epistémico de las técnicas es importante en el estudio de las reflexiones conceptuales de los alumnos dentro del ambiente CAS.

Guzmán, Kieran y Martínez (2011), demostraron el rol epistémico de la técnica CAS, en el sentido de que el uso de CAS provoca una reflexión espontanea teórica en los alumnos, que les permitió pensar en nuevas técnicas para la simplificación de expresiones racionales. Dicho rol también fue evidente en el uso del lenguaje de los alumnos, por ejemplo el progreso de “cancelar y dividir” a términos que involucran la división de polinomios.

2.8.1. Diseño de Actividades

Se pueden diseñar actividades bajo el esquema de tarea - técnica - tecnología (TTT), dentro de un ambiente CAS para resolver una tarea. Es importante observar, que la tarea se refiere a una pregunta dentro de una actividad. De acuerdo a Kieran y Saldanha (2008), la actividad es un conjunto de preguntas relacionadas con una tarea central. Las actividades son diseñadas de tal manera que las preguntas teóricas y técnicas son centrales, tal que, el alumno tiene la oportunidad de reflexionar sobre los aspectos técnicos y teóricos en un ambiente tradicional (lápiz y papel) y en un ambiente CAS.

Lagrange (2003), describió el caso en donde maestros franceses utilizaron el comando Derive (derivar) en las clases de álgebra con la intención de que el software de manipulación simbólica disminuyera la carga técnica y pudieran hacer hincapié a la actividad conceptual. Sin embargo, el resultado fue que no hubo desarrollo técnico ni conceptual. Lagrange (2003), observó que aunque el software proporciono un cálculo más fácil, no mejoró el entendimiento o reflexión del alumno.

En el diseño de actividades educativas, la pregunta clave es cuáles problemas significativos fomentan el desarrollo cognitivo de acuerdo a la trayectoria de aprendizaje hipotético. Tres principios de diseño guían el proceso: reinvención guiada, fenomenología didáctica y modelos de mediación (Drijvers, 2003). Drijvers también sugirió que se debe poner más atención al rol de la parte tradicional (lápiz y papel) y las discusiones de clase.

2.8.2. Propuesta Alterna para la Enseñanza del Concepto de Derivada

Andreu y Riestra (2005), proponen una alternativa para la enseñanza del concepto de derivada desde una perspectiva histórico-epistemológica. Se enfocaron en casos de maximización, haciendo la observación que los ceros de la derivada pueden indicar máximos o mínimos. Proponen la función $P(h) = f(x+h) - f(x)$, aplicando el teorema del factor se obtiene $P(h) = hQ(h)$, en donde $Q(h)$ representa la derivada. Implícitamente se consideran tres conceptos importantes en su enfoque:

1. Comportamiento cuando h tiende a cero
2. $f(x+h)$
3. $f(x+h) - f(x)$

2.9. Exposición de la Propuesta

Se propone la conceptualización del cálculo diferencial. Un punto de partida es la derivada como función y sus diferentes representaciones. Al observar la figura 3, en el centro se encuentra una de las formas más convencionales de representar una derivada, con la notación f'(x). Siguiendo las flechas se puede apreciar la relación que existe entre las diferentes representaciones. De tal manera, que se obtienen los siguientes siete temas principales:

1. Diferencias
2. Pendientes
3. Pendiente como función
4. Límites
5. Líneas secantes y tangentes
6. Función derivada
7. Aplicaciones

El último tema no aparece dentro de la Figura 2.3, pero se considera crucial dentro de la enseñanza y aprendizaje del cálculo diferencial. Los siete temas mencionados, son las actividades que constituyen el trabajo de tesis.

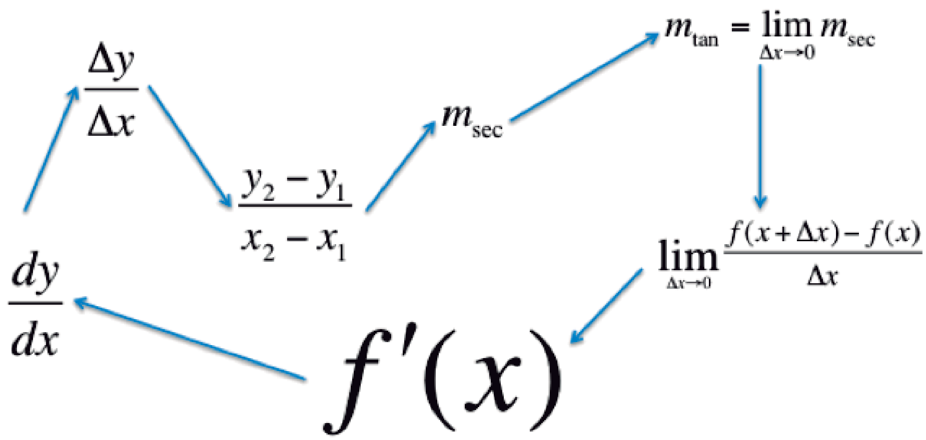


Figura 2.3: Diferentes representaciones de la derivada

El contenido de las actividades en términos generales, es la aplicación de las técnicas de la educación matemática realística (RME). La estrategia general empleada es la siguiente:

1. Introducción de un concepto dentro de la vida cotidiana o una situación *real*.
2. Libertad de construir o llegar al concepto a través de observaciones (expresión creada).
3. Reinvención del concepto o la expresión creada a través de discusiones con integrantes del equipo, la clase y el profesor

La estrategia anterior, encapsula lo fundamental de la RME. Además de la mediación por el profesor en el paso tres, se lleva a cabo la mediación por la calculadora simbólica TI NSPIRE CX CAS como apoyo para la construcción de conocimientos. Aprovechando la versatilidad de la calculadora simbólica, se presenta la oportunidad de manipular las diferentes representaciones y además, observar el mismo fenómeno en diferentes perspectivas, con el fin de lograr la matematización.

Además de las secciones del trabajo tradicional (lápiz y papel) y la tecnológica (con CAS), en este trabajo de tesis se implementó una sección de simbolización.

Cápitulo 3

Metodología

En este trabajo de tesis, se van a diseñar actividades de aprendizaje para la conceptualización del cálculo diferencial. Las mismas tienen el soporte teórico T-T-T (Artigue, 2002). Están estructuradas en tres partes: por una sección de lápiz y papel, otra utilizando el sistema CAS y la tercera es una parte de simbolización. Estas actividades, contienen los siguientes temas:

1. Diferencias
2. Pendientes
3. Pendiente como función
4. Límites
5. Líneas secantes y tangentes
6. Función derivada
7. Aplicaciones

Las experimentaciones llevadas a cabo fueron: una informal para el diseño de una primera versión, y otra formal para ver cuestiones conceptuales y didácticas. Y finalmente una experimentación piloto para obtener la propuesta final.

3.1. Propuesta y Experimentación Informal

El primer borrador de éstas, se desarrolló con los temas de cálculo diferencial de acuerdo al programa del primer módulo de la carrera de Ingeniería Química; así como, de libros de texto como Anton et al. (2009), Tan (2011), Stewart (2008), Larson y Edwards (2010), y Hass et al. (2009). Para el diseño de la primera versión, fue importante la formulación de preguntas asociadas con los conceptos. Se analizaron las diferentes técnicas de enseñanza de los autores mencionados anteriormente, en conjunto con experiencias previas de los investigadores para diseñar las mismas. En términos generales, la primera versión contiene lo siguiente:

Actividad 1 Diferencias

- Significado de una diferencia matemática
- Secuencia de números para plantear el operador Δ
- Manejo de subíndices (u_i)
- Significado del operador Δ
- Introducción básica de algunas idiosincrasias de la calculadora Ti-nspire CX CAS

Actividad 2 Pendientes

- Regla de tres y su relación con la pendiente
- Introducción de la ecuación lineal, $y = mx + b$
- La ecuación lineal a partir de dos puntos
- Manejo de datos y estadísticas, regresión lineal y exponencial, y gráfica de datos dentro de la calculadora Ti-nspire CX CAS

Actividad 3 Pendiente como función

- Desarrollo de la expresión $m = \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ a partir de $m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$
- Significado de la variable h
- Comportamiento de $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ cuando h se acerca a cero

Actividad 4 Límites

- Diferencia entre una velocidad promedio e instantánea y su significado
- Introducción a límites laterales
- Uso de la aplicación “gráfica” para funciones

Actividad 5 Líneas secantes y tangentes

- Líneas secantes y tangentes, y su relación con cambios promedios e instantáneos
- Relación entre líneas secantes y tangentes
- Límites y su relación con líneas secantes y tangentes

Actividad 6 Función derivada

- Concepto de la derivada
- Relación entre una derivada y su línea tangente
- Reglas de diferenciación

Actividad 7 Aplicación de derivada

- Funciones crecientes y decrecientes, y su relación con la derivada
- Concavidad y su significado matemático
- Comprobación gráfica de crecimiento, decrecimiento y concavidad con la calculadora Ti-nspire CX CAS

La primera versión de las actividades se encuentra en el anexo A, las cuales fueron experimentadas con varios alumnos de nivel medio superior. Cabe mencionar, que dichos alumnos no las realizaron en su totalidad; por lo tanto, se considera una experimentación informal. Dentro de ésta, se llevaron a cabo discusiones extensivas entre el investigador y los estudiantes sobre los cuestionamientos, su significado y cómo adaptar los mismos con respecto a su claridad. Este proceso ocurrió hasta que las actividades se consideraron adecuadas. Los cambios realizados se explican en la sección 3.4, mientras que las diferentes versiones de las actividades se encuentran en el anexo A.

3.2. Experimentación Formal

Se hizo la propuesta de siete actividades, las cuales se mencionan anteriormente. Dentro de esta etapa se llevaron a cabo dos experimentaciones. En la primera, las actividades propuestas se aplicaron a dos alumnos los cuales trabajaron en equipo y fueron elegidos porque se consideraron con conocimientos avanzados de cálculo diferencial. Se les proporcionó una calculadora TI-nspire CX CAS, la actividad y un lápiz, para trabajar sin límite de tiempo. Esta fase tuvo como propósito, revisar la estructura conceptual de las actividades. Posteriormente, se hicieron modificaciones considerando las discusiones y observaciones de los alumnos y el investigador.

Se llevó a cabo una segunda fase, aplicando las actividades modificadas a los alumnos que tenían noción de los conceptos involucrados, pero no lo dominan completamente. Lo anterior, para revisar la estructura didáctica de las mismas. Dichos alumnos acreditaron el curso de matemáticas I y actualmente se encuentran cursando matemáticas II. Bajo las mismas condiciones de la primera fase, se les proporcionó una calculadora, la actividad y lápiz. Posteriormente se realizaron modificaciones con el mismo esquema que en la primera fase.

3.3. Experimentación Piloto

En esta etapa participaron nueve alumnos, inscritos en la materia de matemáticas II de la carrera de Ingeniera Química. Trabajaron en equipos de tres personas, en donde cada integrante tuvo un rol específico (líder, majeo de calculadora y manejo de la actividad) que cambió en cada actividad. Se proporcionó una calculadora TI-nspire CX CAS, la actividad respectiva, un lápiz y hojas en blanco para cualquier anotación. Las interacciones y discusiones entre ellos, y los investigadores, fueron grabadas con una cámara de video para ser analizadas posteriormente.

Con las evidencias de la experimentación piloto, se prestó atención especial en las discusiones entre el investigador y los alumnos. De tal manera que, se introdujo una sección de discusiones grupales en las actividades y se formuló una guía para el maestro que las aplicará. Dentro de esta, se consideran las discusiones grupales que se llevarán a cabo en cada actividad, además se proporcionan los puntos claves de cada discusión y algunas sugerencias de cómo realizarlas.

3.4. Diseño y Rediseño de las Actividades

En ésta sección se presentan los cambios realizados en las actividades. La primera versión de las actividades fue diseñada de tal forma, que cumplieran los objetivos de las mismas. Éstas se cambiaron de acuerdo a las observaciones de la experimentación informal e informal, la cual incluye la parte conceptual y didáctica. El rediseño se llevó a cabo en dos etapas, de forma similar a las etapas de experimentación.

En la primera etapa de rediseño se consideraron las actividades realizadas por Carolina, Óscar, Anthony y Óscar, y Paty e Isaac. Las actividades realizadas por Carolina, Óscar, y Anthony y Óscar se consideran parte de la experimentación informal, ya que no hicieron las siete que constituyen el trabajo completo. Mientras que las actividades realizadas por Paty e Isaac, fueron la experimentación formal de la parte conceptual. Ambas experimentaciones, fueron consideradas para el rediseño. Es importante observar que la experimentación informal se llevó a cabo antes de la formal parte conceptual.

Para la segunda etapa de rediseño se consideró el análisis de la experimentación formal parte didáctica, la cual fue realizada por Ulises y Edgar. Se llevaron a cabo discusiones profundas con los asesores, sobre el contenido y la estructura de las actividades. Cada inciso se analizó con base en su claridad y en cómo contribuía a la actividad. Lo anterior es algo distinto a la primera etapa, en donde sólo de analizó la claridad de las preguntas. Se puede considerar que segunda etapa de rediseño, aseguró que hubiera una fluidez dentro de las actividades. Las que resultaron de la segunda etapa de rediseño, serán aplicadas en la experimentación piloto.

Los objetivos de cada actividad son los siguientes:

1. Diferencias
   - Entender el concepto de una diferencia matemática
   - Formular y aplicar los conceptos de Δx y Δy
2. Pendientes
   - Formular el concepto de la pendiente
   - Llegar a la derivación de la ecuación de una línea recta
   - Formular y aplicar la expresión $\Delta x/\Delta y$
3. Pendiente como función
   - Desarrollar la expresión $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$
   - Llegar al significado de la variable h
4. Límites
   - Comparar un cambio promedio y un cambio instantáneo
   - Entender el concepto de límite matemático
   - Comprobar gráficamente y analíticamente el límite
5. Líneas secantes y tangentes
   - Definir el concepto de una línea tangente y secante
   - Entender la relación que existe entre las líneas tangentes y secantes
   - Definir la diferencia entre un cambio promedio y un cambio instantáneo
6. Función derivada
   - Introducir el concepto fundamental de la derivada
   - Formular la función derivada
7. Aplicaciones
   - Entender el concepto de máximo, mínimo y punto de inflexión

- Formular el significado matemático del máximo, mínimo y punto de inflexión
- Entender cómo las derivadas influyen en la forma de la gráfica de una función

3.4.1. Primer Etapa

En ésta sección, se resumen los cambios hechos después de analizar las actividades realizadas, los cuales se presentan en una tabla de tres columnas. La columna etiquetada "Dónde" indica la ubicación del cambio realizado, "Qué" representa cuál fue el cambio, mientras que "Por qué" explica el motivo. Dentro de la tabla se abrevian los incisos, por ejemplo II-b indica el inciso b de la parte 2.

Por ejemplo:
En la Tabla 3.1 contiene los cambios después de analizar la actividad 1, versión 1, realizada por Carolina en la fase de experimentación informal. Los cambios fueron reflejados en la actividad 1 versión 2.

El resto de los cambios realizados dentro de la primera etapa de rediseño se encuentran en el anexo B.1.

3.4.2. Segunda Etapa

En esta etapa se llevaron a cabo discusiones con los asesores, mientras que se analizaban las actividades realizadas por Ulises y Edgar. La siguiente sección resume los cambios hechos, una descripción detallada de las actividades se encuentra en la sección 3.5.

De igual manera se presentan los cambios realizados de la segunda etapa en el anexo B.2.

3.5. Contenido Detallado de las Actividades

En esta sección se presenta el contendido detallado de las actividades, explicando en cada una de ellas la lógica utilizada en la estructura, la elección y formato de las preguntas involucradas en las mismas. Se abrevian los incisos de la siguiente manera: parte-inciso, por ejemplo II-b corresponde al inciso b de la parte II. Las actividades se encuentran en el anexo C del documento de tesis.

Dónde	Qué	Por qué
Página 1, texto antes del inciso I-a	Cambio de texto	Para tener mayor claridad. Además explica la definición de una diferencia y cómo se utiliza.
Página 1, tabla de I-a, primera pregunta	Eliminar	No es una situación *real* y no contribuye al concepto de una diferencia aplicada a la vida cotidiana.
Página 1, tabla del I-a, pregunta 4	Agregar "a lo largo de" a la pregunta	Hace la pregunta más clara y concisa, además agrega otra dimensión de lo que significa una diferencia.
Página 1, I-b	Cambio de texto	La pregunta era muy abierta y general, se cambió para que observen si hay algunas diferencias negativas.
Página 1, I-c	Cambio de texto	La pregunta era muy abierta y general, se cambió para reflexionar acerca del significado de los signos matemáticos en una diferencia.
Página 2, texto entre I-d y I-e	Eliminar I-e	Se introdujo el termino v_i sin ninguna explicación.
	Agregar texto	Una explicación sobre subíndices, v_i.
Página 3, I-g	Eliminar las últimas tres filas de la tabla (contienen v_{i+1})	No es claro qué valor toma i, el concepto se introducirá después.
Página 3, I-i	Agregar una columna de "Δu" en la tabla	Nuevo acomodo de información para ayudar en el análisis.

Tabla 3.1: Cambios realizados al analizar la actividad 1, versión 1.

3.5.1. Actividad 1: Diferencias

Objetivos:

i. Entender el concepto de una diferencia matemática

ii. Formular y aplicar los conceptos de Δx y Δy

Para el cumplimiento del objetivo (i), se pretende introducir el concepto de una diferencia matemática. En la parte I de la actividad, se hace una introducción a la definición de esta y cómo se utiliza:

> "La diferencia matemática es el resultado de restar, en donde se resta un sustraendo de un minuendo. Por ejemplo, la diferencia entre 3 (sustraendo) y 8 (minuendo) es 5. En la vida cotidiana cuando se expresa una diferencia, típicamente se refiere a la diferencia entre un valor inicial (sustraendo) y un valor final (minuendo). Es decir, *la diferencia es igual al valor final menos el valor inicial*".

En el inciso I-a se presentan situaciones de la vida cotidiana y se debe encontrar la diferencia. La idea general, es ver cómo son las diferencias en situaciones donde hay aumento o disminución de una cantidad. Por ejemplo dentro del inciso I-a se pregunta:

> "Un automóvil contiene un tanque de 90 litros. Se llena al comienzo de la semana, al final de ella se observa que el tanque contiene 32.3 litros. ¿Cuál es la diferencia de litros en el tanque a lo largo de la semana?"

Aquí existe una diferencia negativa. El inciso I-b se enfoca en esta observación y pregunta sobre su significado. Para responder el inciso anterior, se debe analizar la tabla del inciso I-a. En el caso del automóvil del inciso I-a, deben observar que hay un consumo de gasolina y una diferencia con un signo negativo. Se espera que asocien lo anterior, de tal manera que entiendan el significado de cambios negativos, positivos y constantes.

Se introduce el concepto de secuencias, porque es otra forma de representar una diferencia. En el inciso I-d, se presenta una lista de números en los cuales se debe encontrar la tendencia uniforme que existe. Lo anterior es importante, para introducir la idea de que algunos cambios pueden ser constantes.

Otro bloque de incisos se enfoca en el manejo de subíndices. El tema se introduce con el siguiente texto:

> “Considere el conjunto de datos, en donde i corresponde a una variable independiente; mientras tanto u corresponde a la variable dependiente. Por lo tanto, u_i corresponde a u evaluada en cualquier valor de i. Por ejemplo, u_3 indica el valor de u cuando i es 3 lo cual en la tabla corresponde a 14.”

En el inciso I-e se encuentra la diferencia entre un par de datos, por ejemplo $u_5 - u_4$. Dentro de este, se escribe lo que representa el dato $(u_5 - u_4)$ y su resultado. Este inciso sólo se podrá realizar, cuando se entienda lo que significa el símbolo u_i.

Para los siguientes incisos se presenta el concepto de Δ y su significado. En la actividad se introduce de la siguiente forma:

> “En matemáticas el operador delta (Δ) representa un cambio. Siendo un operador matemático, puede aplicarse a cualquier variable. Por ejemplo, Δx representa un cambio en x mientras que ΔT representa un cambio en T (muchas veces dicha variable representa una temperatura).”

En el inciso I-f se pide encontrar el valor de Δu y Δi para un conjunto de datos. Mientras que en el inciso I-g se deben observar los resultados del inciso I-f y se buscan relaciones entre ellos. Lo anterior es importante para formular una representación algebraica en el inciso I-h.

Hasta este punto, se logró cumplir con los objetivos i y ii. En la parte II de la actividad, se hace hincapié al significado de qué es una función y la relación entre variables dependientes e independientes. También se explica cómo se puede representar una función en un plano Cartesiano.

El trabajo utilizando CAS empieza en el inciso II-a, en donde se presentan unas de las particularidades del sistema. El inciso dice lo siguiente:

> “a) Introduzca la expresión $\frac{5x-6x*x+x^2}{x}$ a la calculadora y presione enter, ¿qué observa? Presione el botón $\uparrow$ en el touch pad y presione enter, ¿qué sucede? ¿para qué puede ser útil la observación anterior?”

En este inciso se debe observar que CAS reduce expresiones algebraicas y que se puede seleccionar un objeto y copiarlo.

Otra particularidad de CAS, es el comando *tal que*. Se presenta en la actividad de la siguiente manera:

> "Una herramienta útil dentro del sistema CAS, es el comando "tal que" |. Dicho comando se elije presionando el botón azul "CTRL" y el botón "=", el cual se encuentra debajo de "CTRL" y después se selecciona "|". La sintaxis para utilizar el comando es el siguiente, "función | variable = valor"."

Para el inciso II-b se utiliza ese comando para completar la tabla.

3.5.2. Actividad 2: Pendientes

Objetivos:

i. Formular el concepto de la pendiente

ii. Legar a la derivación de la ecuación de una línea recta

iii. Formular y aplicar la expresión $\Delta x/\Delta y$

En el inciso I-a relaciona la razón de cambio con una pendiente. Para lograr lo anterior, se lleva a cabo una regla de tres. Se presenta el siguiente caso y pregunta:

> "a) Un carro recorre 245 kilómetros con 18 litros de gasolina."
> "1) Si el mismo carro gasta 30 litros de gasolina, ¿qué distancia viajó?"

La regla de tres es un concepto básico, que desde los primeros años de la preparatoria se espera que el alumno sea capaz de aplicarlo. El inciso I-a-2, pregunta sobre la lógica utilizada para resolver el inciso I-a-1. En el inciso I-a-3, se intenta formular la razón de cambio en kilómetros por litro de gasolina. Puede ser que el concepto de razón de cambio sea ajeno al alumno en este momento, pero al indicar las unidades que debe tener, se espera que puedan responder la pregunta. Lo anterior simplifica la producción de un valor, después de analizar lo anterior se puede deducir su significado.

Los incisos I-a-4 y I-a-5 tienen el objetivo de deducir la relación entre una razón de cambio y la pendiente.

> "4) Utilizando el dato original, 18 litros para 245 kilómetros y el dato del problema 1, grafique dichos puntos y trace la recta. Formule una expresión matemática para la pendiente."
> "5) ¿Qué relación hay entre una razón de cambio y una pendiente?"

En los incisos I-b, I-c y I-d se analizan las funciones y sus pendientes. Se hace una introducción sobre lo que es una función y qué representa. El inciso I-b dice lo siguiente:

> "b) Considere la ecuación de la recta, y = 2x + 3. Identifique la variable independiente y la variable dependiente. Elija por lo menos 5 valores dependientes y haga una tabla con los valores independientes correspondientes."

Este inciso tiene dos propósitos. El primero es observar que se puede definir "y" (dependiente) y calcular "x" (independiente), algo crítico en el aprendizaje de funciones. Otro propósito, es ver qué recuerdan de la explicación de la actividad 1, en donde se explica qué es una variable dependiente e independiente. El inciso I-d menciona:

> "d) Considere los puntos (6, 9) y (0, 11). Sin hacer ningún cálculo responda ¿la pendiente es positiva o negativa? Compruebe gráficamente y después analíticamente."

Con esta pregunta se trata la pendiente en forma gráfica y analítica. Los incisos I-e y I-f se enfocan en la generación de la ecuación de la pendiente en términos de n $[m = \frac{y_{n+1}-y_n}{x_{n+1}-x_n}$ o $m = \frac{y_n-y_{n-1}}{x_n-x_{n-1}}]$; mientras que en el inciso I-f se pide la pendiente en términos de Δ.

En la parte II de la actividad se presenta el caso de la dotación por radiocarbono, lo cual es una técnica de dotación radiométrica que utiliza el isotopo carbono-14 para la determinación de la edad de materiales que contienen carbono. Se presenta una tabla con 18 datos de la antigüedad del material en miles de años y la cantidad de C-14 presente. En el inciso II-a se presenta la Tabla 3.2:

Antigüedad del Material (miles de años)	Cantidad de C-14	Antigüedad del Material (miles de años)	Cantidad de C-14
0	15.30	9	5.15
1	13.56	10	4.56
2	12.01	11	4.04
3	10.64	12	3.58
4	9.43	13	3.17
5	8.35	14	2.81
6	7.40	15	2.49
7	6.56	16	2.21
8	5.81	17	1.95

Tabla 3.2: Inciso II-a de la actividad 2.

El objetivo de la tabla, es calcular la pendiente y ver la tendencia de la diferencia de años y la cantidad de C-14. Utilizando la pendiente para diferentes intervalos, se debe calcular la cantidad de C-14 a 7 años y comparar la cantidad real a 7 años en el inciso II-b. Para realizar el inciso anterior, se parte de la ecuación de la pendiente. Los incisos II-c y II-d, se enfocan en las observaciones de la tabla realizada en el inciso II-b. Se repite el procedimiento anterior en los incisos II-e y II-f, además se calcula la cantidad de C-14 a 9.5 años.

En el siguiente bloque de preguntas, se utiliza las técnicas de ajuste de datos utilizando CAS. En el inciso II-g se hace un ajuste lineal y después una exponencial, de tal manera que debe aparecer la Figura 3.1.

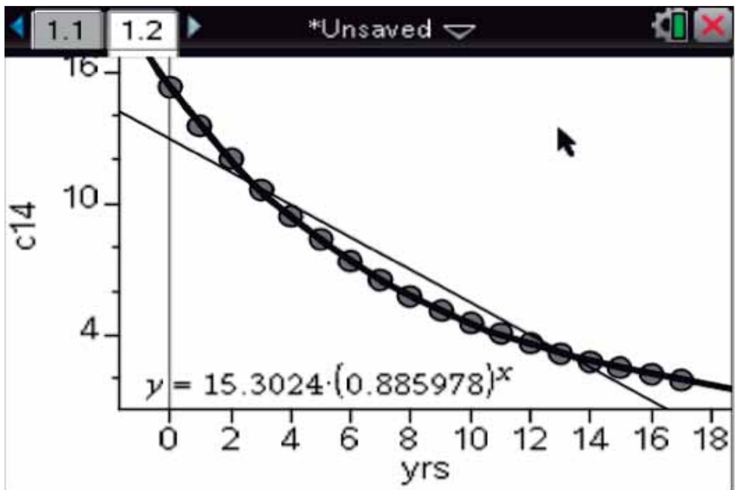


Figura 3.1: Respuesta del inciso II-g de la actividad 2

Como se observa en la figura, se ajusta mejor la función exponencial.

En el inciso II-g, el ajuste se hace sobre los datos graficados. En los incisos II-h y II-j, se hace el ajuste con un análisis lineal y exponencial respectivamente, dentro de la hoja de cálculo en donde se encuentran los datos. El objetivo de lo anterior, es ver otra forma de realizar un análisis de datos, comprobar cuál se ajusta mejor en términos del factor de correlación (R2) y obtener una ecuación de esa función. La ecuación del mejor ajuste se utiliza en el inciso II-j para calcular la cantidad de C-14 a 9.5 años.

El inciso II-k tiene el propósito de ilustrar la idea de que al utilizar una pendiente más cercana al valor que se desea calcular, se produce un mejor ajuste. La pendiente del rango 9.3 - 9.6 calcula mejor la cantidad de C-14 a 9.5 años que la pendiente del rango 9 - 10. Los incisos II-l, II-m y II-n hacen hincapié sobre las observaciones mencionadas.

La tercer parte de la actividad, tiene el propósito de desarrollar la representación simbólica de la pendiente. El inciso III-a, presenta la tabla de datos de la antigüedad de un material y su cantidad de C-14 presente. La diferencia es que cada columna no tiene título, en el presente inciso se debe introducir algún símbolo para representarlos. El inciso III-b, pide un cálculo sencillo para la pendiente entre los datos de 6 y 14. Para el inciso III-c se debe representar el cálculo de III-b simbólicamente utilizando la representación del III-a, mientras que en los incisos III-d y III-e se generaliza la representación simbólica de la pendiente.

3.5.3. Actividad 3: Pendiente como Función

Objetivos:

i. Desarrollar la expresión $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

ii. Llegar al significado de la variable h

Para el cumplimiento del primer objetivo (i), se introduce la forma convencional de la pendiente en la parte simbólica (parte I) de la presente actividad. El inciso I-a, pide comparar la ecuación de la pendiente $m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ con la representación simbólica de la pendiente de la actividad anterior (inciso III-e) y observar las diferencias. El inciso I-b dice lo siguiente:

> "b) Escriba la pendiente $\frac{f(x_{10})-f(x_9)}{x_{10}-x_9}$ introduciendo la variable n."

Lo anterior es para introducir la variable n a la forma convencional, es importante observar que n puede tomar el valor de 10 o 9. Para hacer hincapié en qué valor puede tomar n, el inciso I-c dice:

> "c) Para la pendiente $\frac{f(x_{15})-f(x_8)}{x_{15}-x_8}$, ¿qué valor le daría a n?"

Finalmente, falta introducir el concepto de Δx a la forma convencional, lo cual se lleva a cabo en el inciso I-d.

Mientras que el cumplimiento del objetivo ii, se logra en la parte con lápiz y papel (parte II). En el inciso II-a, se presenta otra forma de la pendiente. La forma introducida $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$, es la ecuación que se manejara en el resto de las actividades.

La introducción del concepto h se lleva a cabo con una representación gráfica en el inciso II-b, Figura 3.2.

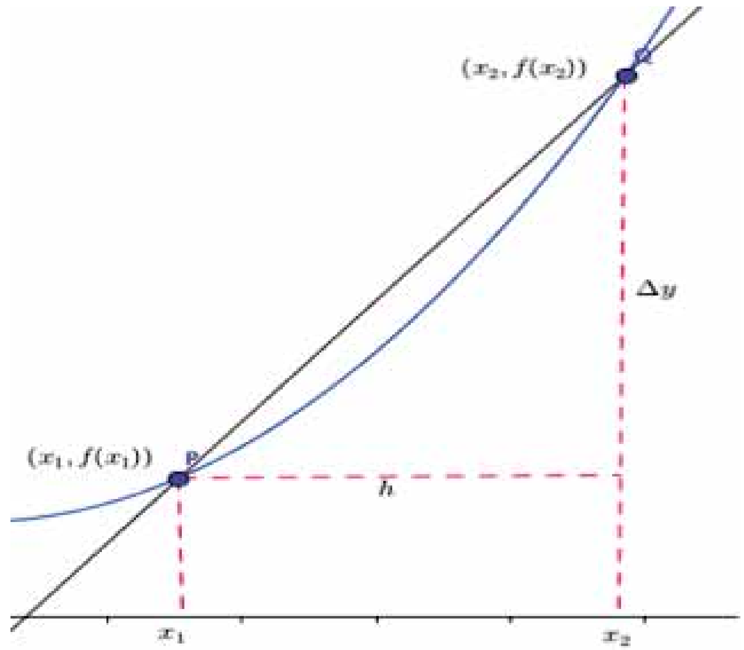


Figura 3.2: Gráfica del inciso II-b de la actividad 3

Al saber el significado de h, el inciso II-c pide que se introduzca la variable en la ecuación de la pendiente. Después de lo anterior se obtienen dos formas de expresar la pendiente, utilizando Δx o h, por ejemplo, $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ o $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$.

En el inciso II-d la intención es entender qué significan las funciones $f(x+\Delta x), f(x+h) y f(x)$, para cumplirlo se presenta como sigue:

> "d) Considere la función, $f(x) = x^2 + 2x$. ¿Cómo se expresa $f(x_1)$, $f(x_1+\Delta x)$ y $f(x_1+h)$?"

Los próximos dos incisos, II-e y II-f, dicen lo siguiente:

> "e) Considerando $f(x) = x^2 + 2x$ y Δx o h, ¿cuál es la ecuación de la pendiente del inciso c? (No es necesario reducir algebraicamente)" "f) Si el primer punto es (1, 3), exprese la ecuación del inciso anterior con estos punto. ¿Qué observa de esta ecuación?"

Dentro del inciso II-e se sustituye la representación de la función, de tal manera que se obtiene:

$$\frac{(x+\Delta x)^2-2(x+\Delta x)-x^2-2x)}{\Delta x}$$

El inciso II-f introduce el primer punto (1, 3) y deben representar la pendiente como:

$$\frac{(1+\Delta x)^2-2(1+\Delta x)-3)}{\Delta x}$$

Es importante observar que la expresión anterior puede estar en función de h.

La expresión anterior es el punto de partida para la derivada, pero antes de entrar al tema se debe ver qué significado tiene la variación de Δx o h. En la sección con CAS (parte III) se observa dicha variación utilizando la hoja de cálculo. Se introducen diferente valores de Δx o h (0.1, 0.01, 0.001, 0, -0.001, -0.01, -0.1) mientras que en la otra columna se introduce la expresión del inciso II-f. Los incisos III-b, III-c, III-d y III-e se enfocan en las observaciones de la hoja de cálculo. La parte de reflexión sobre lo anterior se presenta en los incisos III-f, III-g y III-h de la siguiente forma:

> "f) Cuando Δx o h tiende a cero, ¿a qué tiende la pendiente???
>
> "g) Considere la observación del inciso anterior, ¿es igual al valor cuando Δx o h = 0?"
>
> "h) ¿Qué puede concluir de las observaciones de los incisos f y g?"

Con la secuencia de las preguntas anteriores se espera que puedan generar una de las ideas fundamentales de límites, que el límite se analiza en valores muy cercanos y no necesariamente en el punto. Por ejemplo, si el límite fuera evaluado en 0 para la presente ecuación, el resultado sería 4, aunque en 0 es un valor indeterminado. Finalmente, en el último inciso (III-j) se hace la siguiente pregunta:

> "j) ¿Cómo puede definir este tipo de análisis (analítico o gráfico)? Explique su razonamiento."

El propósito es que el alumno asocie este tipo de técnica por su representación, ya que en las próximas actividades se conoce de tal manera.

3.5.4. Actividad 4: Límites

Objetivos:

i. Comparar un cambio promedio y un cambio instantáneo

ii. Entender el concepto de límite matemático

iii. Comprobar gráficamente y analíticamente el límite

Con el fin de facilitar el entendimiento del concepto del límite matemático, se hace la introducción de cambios promedios e instantáneos. Por lo general, uno sabe calcular una velocidad promedio. Para el inciso I-a y I-b se plantea la siguiente situación:

"Suponga que quiere calcular la velocidad promedio al viajar en una carretera recta. Si pasa el kilómetro 100 a las 12:00 y el kilómetro 140 a las 12:30."

El propósito de estos incisos es formular la ecuación de la velocidad promedio y se lleva a cabo con los siguientes incisos:

"a) Escriba la operación que realiza para obtener la cantidad que se viajó y para saber en cuánto tiempo se viajó"

"b) Utilizando las expresiones del inciso anterior, *escriba la operación* para calcular la velocidad promedio."

Para poder relacionar la velocidad promedio y la pendiente, primero se debe recordar lo que es una pendiente, lo cual se hace con el inciso I-c:

"c) Explique qué es una pendiente y escriba la expresión."

Finalmente en el inciso I-d se identifican las relaciones que existen entre una pendiente y una velocidad promedio.

En el siguiente bloque de preguntas se establece lo que significa una velocidad instantánea y cómo se calcula. Para introducir el tema, se explica con el texto:

"Por otra parte, aún que la velocidad promedio es una cantidad fija, es casi seguro que la velocidad instantánea (la velocidad indicada por el velocímetro), varía de un momento a otro."

El calculo de la velocidad instantánea requiere de diferencias de tiempo muy pequeñas. por lo tanto se introduce una situación en donde la posición se pueda calcula con una función. Se presenta de la siguiente forma:

"Se lanza verticalmente una piedra del piso a una velocidad de 96 ft/s. Despreciando la resistencia del aire, la posición de la piedra después de t segundos está dada por la función:

$$s(t) = -16^2 + 96t$$

La posición s es medida en pies con s = 0, corresponde al piso mientras que t representa el tiempo en segundos."

Para el inciso I-e, se escribe la operación para la velocidad promedio y se calcula para los intervalos de tiempo: t = 1 y t = 3, t = 1 y t = 2, y t = 1 y t = 1.5. Mientras que en el inciso I-f deben considerar las velocidades calculadas y anotar las observaciones. El inciso I-g dice:

> "g) Escriba la ecuación para la velocidad promedio de la piedra entre el intervalo $[t_0, t]$."

El fin del ejercicio anterior, es expresar la velocidad promedio sobre cualquier rango de $[t_0, t]$. Lo anterior, es fundamental en el planteamiento del cálculo de una velocidad instantánea para casos donde el intervalo $[t_0, t]$ es muy pequeño. Después se expresa la distinción matemática entre una velocidad promedio e instantánea:

> "Al calcular la velocidad promedio, se utilizó la posición del objeto en dos puntos distintos. Para la velocidad instantánea solamente se utiliza un punto. Como se verá en la siguiente sección, la velocidad instantánea se calcula a partir de velocidades promedios."

Bajo dicha idea, en el inciso I-h:

> "h) Si nos interesa calcular la velocidad instantánea a $t_0 = 1$, se calcula la velocidad promedio sobre el intervalo $[1, t]$. Escriba la ecuación de la velocidad promedio."

Con lo anterior se obtiene la expresión de la velocidad promedio necesaria para el calculo de la velocidad instantánea, la relación entre ambas se expresa en la actividad como:

> "La velocidad instantánea en el punto $t = t_0$ se determina al calcular la velocidad promedio sobre el intervalo $[t_0, t_1]$. Cuando t_1 se acerca a t_0, la velocidad promedio típicamente se acera a un número único, el cual es la velocidad instantánea. Lo anterior significa, que es un instante en donde el intervalo es muy pequeño. Este número se conoce como un límite, lo cual se puede expresar matemáticamente como
>
> $$v_{instantanea} = \lim_{t \to t_0} v_{promedio}$$"

Finalmente, dentro del inciso I-i se obtiene la expresión convencional:

> "i) Sustituya la velocidad promedio en del inciso h de la expresión de la velocidad instantánea. En donde $t_0 = 1$."

El inciso anterior tiene el objetivo de expresar el límite para un caso específico, la velocidad instantánea de la piedra para un (1) segundo. Después de obtener la expresión del límite, el inciso I-j pide que resuelvan dicha expresión. Hasta este punto no se ha explicado cómo se resuelve un límite. Esta pregunta tiene el propósito de ver qué idea preconcebida trae el alumno.

Ya que se introdujo el termino *límite*, se considera el concepto informal en la parte II. Se hace la siguiente explicación:

"El límite $\lim_{x\to a} f(x) = L$ se refiere a un límite de dos-lados, porque f(x) se acerca L cuando x se acerca a valores de x menores de a y para valores de x mayores de a. Para algunas funciones, es conveniente analizar límites de un lado denominados límites de mano izquierda y de mano derecha. La definición se puede resumir como:

i. Límite de mano derecha: Suponga que f es definida para todos los valores de x cercanos a a y $x > a$. Si $f(x)$ es arbitrariamente cercana a L para todos valores suficientemente cercanos a a con $x > a$, se escribe

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = L$$

y se dice que el límite de $f(x)$ cuando x se acerca a a por la derecha es igual a L.

ii. Límite de mano izquierda: Suponga que f es definida para todos los valores de x cercanos a a y $x < a$. Si $f(x)$ es arbitrariamente cercana a L para todos valores suficientemente cercanos a a con $x < a$, se escribe

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = L$$

y se dice que el límite de $f(x)$ cuando x se acerca a a por la izquierda es igual a L."

El inciso II-a les pide expresar gráficamente la información presentada sobre límites.

En el siguiente bloque de preguntas, se les pide a los alumnos utilizar la gráfica dentro de CAS y el comando de "trazar". Dentro de este, se trabaja con las funciones $f(x) = \frac{x^3-8}{4(x-2)}$ y $f(x) = \frac{|x|}{x}$. En el inciso II-b se traza la función $(x) = \frac{x^3-8}{4(x-2)}$, se observa su gráfica y la función para deducir qué valores de x no puede tomar. Gráficamente, no se ve alguna anomalía a simple vista. Para poder observar lo que pasa en x = 2, se utiliza el comando "trazar", lo cual se lleva a cabo en el inciso II-c. Utilizando dicho comando se completa la Tabla 3.3:

x	1.95	1.96	1.97	1.98	1.99	2	2.01	2.02	2.03	2.04	2.05
y											

Tabla 3.3: Inciso II-d de la actividad 4

Considerando la Tabla 3.3 y las expresiones i) $\lim_{x\to 2^-} \frac{x^3-8}{4(x-2)}$, ii) $\lim_{x\to 2^+} \frac{x^3-8}{4(x-2)}$, y iii) $\lim_{x\to 2} \frac{x^3-8}{4(x-2)}$ se plantean las siguientes preguntas en los incisos II-e, II-f, y II-g:

"e) De la tabla anterior, ¿qué valores utilizaría para el caso i?"

"f) De la tabla anterior, ¿qué valores utilizaría para el caso ii?"

"g) De la tabla anterior, ¿qué valores utilizaría para el caso iii?"

Mientras que en el inciso II-h se debe representar cada caso gráficamente. Se repite la metodología aplicada para la función $f(x) = \frac{|x|}{x}$. En el inciso II-i se presenta una tabla con valores cercanos a cero mientras que en el inciso II-j se grafican los casos i) $\lim_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x}$, ii) $\lim_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x}$, y iii) $\lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x}$. En el inciso II-k se considera las gráficas de los límites de las funciones $f(x) = \frac{x^3-8}{4(x-2)}$ y $f(x) = \frac{|x|}{x}$ y se anotan las observaciones. Finalmente, en los incisos II-l y II-m se evalúan los límites $\lim_{x\to 2} \frac{x^3-8}{4(x-2)}$ y $\lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x}$ respectivamente, utilizando los valores y gráficas generadas. El inciso II-n dice lo siguiente:

"n) ¿Qué relación existe entre el límite, límite de la derecha y límite de la izquierda?"

Lo anterior tiene el fin de condensar el significado de los limites de la derecha y la izquierda y su relación con el límite general.

3.5.5. Actividad 5: Líneas Secantes y Tangentes

Objetivos:

i. Definir el concepto de una línea tangente y secante

ii. Entender la relación que existe entre las líneas tangentes y secantes

iii. Definir la diferencia entre un cambio promedio y un cambio instantáneo

Dentro del aprendizaje de límites y calculo diferencial es fundamental establecer la relación entre líneas secantes y tangentes. En esta actividad empleamos la observación que una línea secante se puede *transformar* en una línea tangente. Resaltando cómo se lleva a cabo lo anterior es uno de los fundamentos principales en calculo diferencial.

Se considera los puntos $x = 3$ y $x = 8$ para la función $y = (\frac{x}{2} - 2)^3$, y se analiza el comportamiento de las pendientes. Este bloque de preguntas se divide en dos partes, una en donde $x = 3$ es fijo mientas que $x = 8$ en la otra. Para cada caso se presenta un conjunto de puntos y se llena una tabla con las siguientes columnas: $y_2 - y_1$, $x_2 - x_1$, $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$. Por ejemplo cuando $x = 3$, se presenta los datos de la Tabla 3.4.

Se considera un conjunto semejante para $x = 8$. Después de completar las columnas de la tabla mencionadas anteriormente, se traza la línea recta entre los puntos. El inciso I-e pide observar las diferencias de x de tal manera que puedan relacionar valores muy cercanos de x a líneas tangentes. Siguiendo el tema de diferencias de x pequeñas, los incisos I-g y I-g concretan el significado de $x_2 - x_1 \to 0$.

P_1	P_2
(3, 0.875)	(8,9)
(3, 0.875)	(6,2)
(3, 0.875)	(5,1.125)
(3, 0.875)	(4,1)
(3, 0.875)	(3.5,0.984375)
(3, 0.875)	(3.1,0.908875)
(3, 0.875)	(3.05,0.892828)
(3, 0.875)	(3.01,0.878713)
(3, 0.875)	(3.005,0.876866)
(3, 0.875)	(3.001,0.875375)

Tabla 3.4: Puntos utilizados en la actividad 5

En el siguiente bloque de preguntas se introduce el termino de línea tangente. El inciso I-h presenta cuatro gráficas con una línea secante o una tangente, deben identificar qué tipo de línea esta presente. Con lo anterior se visualiza el concepto gráficamente antes de formular una definición, lo cual se hace en el inciso I-i. Teniendo claro el concepto de una línea secante y tangente, el inciso I-j pide que relacionen lo anterior con una velocidad promedio e instantánea:

> “j) ¿Qué entiende por velocidad promedio y velocidad instantánea?”

Se aplica el concepto de una línea tangente en el inciso I-k:

> “k) Considere la función $y = (\frac{x}{2} - 2)^3 + 1$ y los incisos a y c, ¿cuál es la pendiente de la tangente en $x = 3$ y $x = 8$?”

Para este inciso se utiliza las gráficas, tablas así como la respuesta del inciso I-i.

Los siguientes incisos se enfocan en el trazado de líneas tangentes. Los incisos I-l y I-m tiene el fin de estimar la línea tangente para la grafica de una función. Lo anterior se hace de la siguiente manera:

> “l) Considere la función $y = x^2 + 0{,}5$. En la siguiente gráfica (Figura 3.3), trace la línea tangente en $x = -2, -1, 1,$ y 2.”
>
> “m) Utilizando la gráfica con las líneas rectas (figura de la derecha, Figura 3.3), aproxime el valor de la pendiente de las tangentes con apoyo de escuadras. (Tabla 3.5)”

Ya que se tiene la pendiente de la tangente estimada, en el inciso I-n se calculan las pendientes. Con la pendiente de la tangente calculada se trazan las líneas de nuevo, esta vez apoyándose en las rectas de referencia en el inciso I-o. Finalmente se comparan las líneas tangentes estimadas del inciso I-j con las calculadas del inciso I-o y anotan sus observaciones en el inciso I-p. El

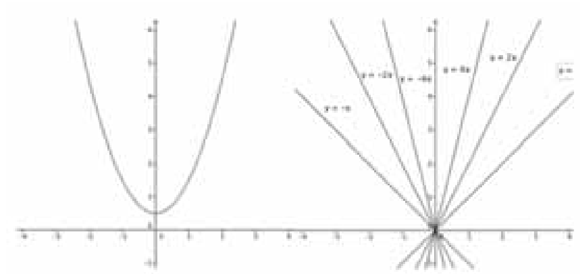


Figura 3.3: Imagen para el inciso I-l y I-m de la actividad 5

Tangente en x	Pendiente aproximada
-2	
-1	
1	
2	

Tabla 3.5: Tabla de resultados para el inciso I-m de la actividad 5

inciso I-p tiene el propósito de corregir las técnicas de trazado para líneas tangentes. Dentro del inciso I-q se presenta las gráficas de las funciones $-x^2$, x^3 y e^x en los puntos $x = -2$, 0, 1, 2 y 3 y se trazan las líneas tangentes en dichos puntos además se completa una tabla con las pendientes correspondientes. Finalmente considerando las observaciones del inciso I-q, el inciso I-r pregunta:

> "r) Elija la mejor frase para completar la declaración: Las pendientes en una gráfica de cualquier función son: siempre iguales, siempre diferentes, a veces iguales o a veces diferentes."

En la ultima parte de la sección se describe la relación entre una línea secante y una línea tangente con un texto teórico, partiendo de la definición de una línea tangente en geometría euclidiana.

La parte II de la actividad tiene el objetivo de relacionar las líneas secantes y tangentes con límites. En la actividad 4, se dio una introducción a la definición informal del límite, en esta sección se unifican los conocimientos formales e informales. Se plantea la ecuación de la pendiente para la función $f(x) = (\frac{x}{2} - 2)^3 + 1$ (la misma que se trata en la parte I de la presente actividad) en el punto (3, 0.875) de tal manera que se obtiene $m_{12} = \frac{(\frac{x}{2}-2)^2+0{,}125}{x-3}$. En el inciso II-a se completa una hoja de cálculo en donde se varía el valor de x en la pendiente de 2.9 a 3.1. Considerando los resultados de la tabla, el inciso II-b pregunta:

> "b) ¿A qué es igual $\lim_{x\to 3^-} \frac{(\frac{x}{2}-2)^2+0{,}125}{x-3}$ y $\lim_{x\to 3^+} \frac{(\frac{x}{2}-2)^2+0{,}125}{x-3}$?"

Al tener los límites laterales, en el inciso II-c se pide el límite general y además deben explicar su razonamiento.

En el inciso II-d, se compara el límite del inciso II-c y la pendiente de la tangente en $x = 3$ de la parte I de la presente actividad. La idea es que observen que son iguales, por lo tanto deben concluir que la pendiente de la línea tangente representa el límite de la pendiente de la línea secante cuando la diferencia de x tiende a cero. En los incisos II-e a II-i se repite el procedimiento para el punto $x = 8$. Al llegar a la misma conclusión que el limite de la pendiente de la secante es iguala a la pendiente de la línea tangente, se pregunta lo siguiente en los incisos II-j y II-k:

> "j) ¿Qué entiende por velocidad promedio y velocidad instantánea?"
> "k) Considere la función $y = (\frac{x}{2} - 2)^3 + 1$ y los incisos a y c, ¿cuál es la pendiente de la tangente en $x = 3$ y $x = 8$?"

Con estos incisos se debe llegar a la relación que existe entre una línea secante y tangente.

Teniendo el concepto de un límite, en la parte III de la actividad se enfoca en la simbolización de la línea tangente. En el inciso III-a deben explicar en sus palabras que es la pendiente de la tangente. Mientras que en el inciso III-b escriben una expresión algebraica que simboliza la explicación dada en el inciso III-a. Con estos incisos el alumno intenta de expresar sus observaciones de una forma matemática.

3.5.6. Actividad 6: Función Derivada

Objetivos:

i. Introducir el concepto fundamental de la derivada

ii. Formular la función derivada

La parte I de la actividad contiene la sección de simbolización, en la cual, se enfoca en comparar la expresión de la pendiente de la tangente elaborada en la actividad cinco con la forma convencional. En el inciso I-a se observa diferencias entre las expresiones, mientras que en el inciso I-b se analiza a que se deben.

Típicamente, se hace la parte de lápiz y papel antes de la parte con CAS. En esta actividad se realiza la parte con CAS primero, en donde se intenta plantear la derivada como una función de las pendientes de la línea tangente. Para lograr lo anterior, se considera la función $f(x) = x^3 + 1$; dentro de la gráfica de la función se agrega una línea pendiente almacenando los valores de la pendiente y el punto de la línea tangente, dentro de una hoja de cálculo. Finalmente, se hace un ajuste de datos de cuarto orden. En el inciso II-a se escriben los valores de los coeficientes obtenidos para las variables x^4,x^3,x^2,x^1 y x^0(constante). Algunos coeficientes son muy pequeños (del orden de 10^{-11}), por lo tanto se pueden considerar como 0, esta observación se lleva acabo en el inciso II-b. De tal manera, que se obtiene la expresión $3x^2$ en el inciso II-c. Las preguntas de los incisos II-d y II-e se enfocan en el significado de la expresión obtenida, con lo anterior se espera que deduzcan que la expresión representa la pendiente de la línea tangente en cualquier punto de x o la función derivada, como se conoce formalmente.

noindent En la parte II de la presente actividad se obtiene la derivada de la función, en donde se maneja como una función de las pendientes de la tangente. La parte III se enfoca en el concepto de la derivada, presentando la siguiente introducción:

> "En los incisos anteriores, se calculó la pendiente de una línea tangente en un punto fijo de la curva. Si este punto se mueve a través de la curva, la línea tangente también cambia y por lo general, su pendiente cambia (vea figura 1). Por esta razón, la pendiente de la línea tangente para la función f también es una función de x, llamada la derivada de f.
>
> Dejamos que f' (se lee como f prima) denote la función derivada para f, lo cual significa que $f'(a)$ cuando exista, es la pendiente de la línea tangente para la gráfica de f en $(a, f(a))$. Utilizando la definición anterior para la pendiente de la línea tangente, tenemos:
>
> $$f'(a) = m_{tan} = \text{lím}_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$
>
> En términos más generales, se puede reemplazar el a con x para llegar a la definición de la función derivada. La derivada de f es la función:
>
> $$f'(a) = \text{lím}_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$
>
> siempre que el límite exista. Si $f'(a)$ existe, decimos que f es diferenciable en x. Si f es diferenciable en cada punto del intervalo abierto I, decimos que f es diferenciable sobre I.

Para encontrar la derivada de la función $f(x) = x^3 + 1$, hacemos:

$$\begin{aligned}
f'(a) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{3hx^2 + 3h^2 + 3h^2x + h^3 - x^3}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{3hx^2 + 3h^2x + h^3}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{h(3x^2 + 3hx + h^2)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} 3x^2 + 3hx + h^2 \\
&= 3x^2
\end{aligned}$$

Por lo tanto $f'(a) = 3x^2$"

En el inciso III-a, se pide relacionar la ecuación $f'(a)$ obtenida en la explicación con la función del inciso III-c. Al demostrar que ambas ecuaciones son idénticas es importante recordar que la expresión obtenida en la parte II como una función de las pendientes de la tangente, por lo tanto, se hace hincapié en la relación que existe entre una derivada y la pendiente de la tangente de la misma.

Con la observación anterior, queda claro que la pendiente de la tangente representa la derivada. El inciso III-b pregunta sobre la derivada de una constante, un concepto fundamental y que muchas veces se ve simplemente como una regla de derivación pero no se entiende por qué. En los incisos III-c y III-d, se dirigen al por qué de que la derivada de una constante es cero. Los incisos III-c y III-d dicen lo siguiente:

"c) Considere la función, $f(x) = 3$. Grafique la función, ¿qué representa?"
"d) ¿Cuál es la derivada de la función, $f(x) = 3$ y por qué?"

Se hace un procedimiento semejante para la regla de la potencia. En el inciso III-e se les pide a los alumnos deducir $\frac{d}{dx}x^n$ de la siguiente manera:

"e) Derive las siguientes funciones: x , x^2, x^4 y x^7. Observando las derivadas, ¿cómo puede deducir $\frac{d}{dx}x^n$?"

Aquí se supone que ya se aprendió esta regla fundamental, aunque no entienda el por qué. Con los incisos III-f al III-j se intenta dar la explicación gráfica del por qué. En el inciso III-f se pide graficar la función $f(x) = x^3 + x^2 + x$ y graficar su derivada $f'(a)$. Este bloque de incisos, se enfocan en el significado de la función derivada. En el inciso III-g se pide la pendiente de la tangente de $f(x) = x^3 + x^2 + x$ en el punto $x = 3$. Mientras que en el inciso III-h, se pregunta sobre qué información se utilizó para responder el inciso III-g. El objetivo de esta pregunta es crear una discusión, ya que se puede responder utilizando la gráfica de $f(x)$ o $f'(a)$, la función de $f'(a)$ o la definición del límite ($f'(a) = \text{lím}_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$). Debido a que en esta actividad se hace hincapié a la función derivada los incisos III-i y III-j preguntan:

> "i) Supongan que $f(x)$ y $f'(a)$ están dados, ¿qué indica $f'(3)$ con respecto a la función $f(x)$?"
> "j) Si $f(x)$ esta definida, ¿cómo calcularía la pendiente de la tangente en cualquier punto de x? Explique su procedimiento."

Con los últimos dos incisos, se espera que quede claro el significado de la función derivada.

3.5.7. Actividad 7: Aplicación

Objetivos:

i. Entender el concepto de máximo, mínimo y punto de inflexión

ii. Formular el significado matemático del máximo, mínimo y punto de inflexión

iii. Entender cómo las derivadas influyen en la forma de la gráfica de una función

Esta actividad se enfoca, en el significado de los ceros de la primera derivada (puntos críticos) y de la segunda derivada (puntos de inflexión). Para lograr los objetivos, en la parte I (con lápiz y papel) se plantea el significado de un máximo, un mínimo, un intervalo de crecimiento y decrecimiento, así como la concavidad hacía arriba y abajo. Mientras que en la parte II (con CAS), se hace una comprobación gráfica de los conceptos mencionados.

Para deducir el significado de los puntos críticos y puntos de inflexión, es conveniente empezar con la introducción de los términos *creciente*, *decreciente* y *constante*. Los términos se presentan en el inciso I-a:

> "Los términos creciente, decreciente y constante son utilizados para describir el comportamiento de una función al moverse de la izquierda a la derecha. Su comportamiento depende de los valores de f(x).

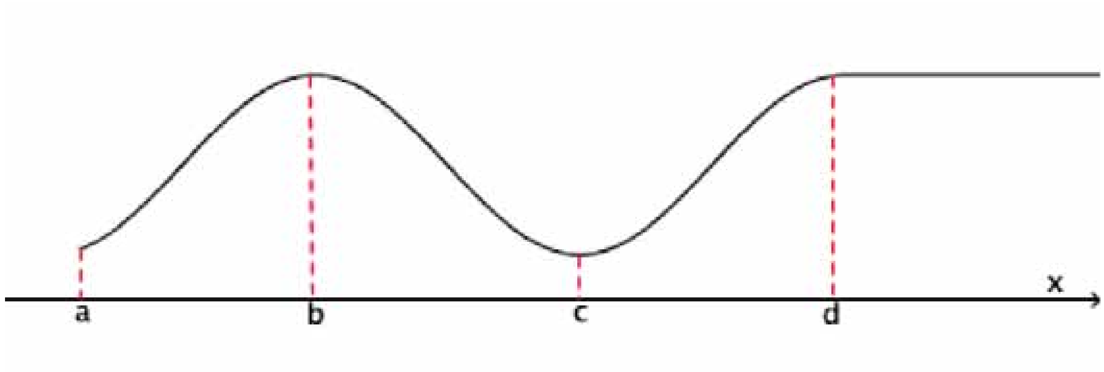


Figura 3.4: Imagen para el inciso I-a de la actividad 7

a) Considere la figura 1 (Figura 3.5), completa la siguiente tabla (Tabla 3.6) con los términos creciente, decreciente o constante.

Intervalos de x	Comportamiento de la función
a - b	
b - c	
c - d	
d - ∞	

Tabla 3.6: Tabla de resultados para el inciso I-a de la actividad 7

Después, la actividad se enfoca en las pendientes de las líneas tangentes para funciones crecientes, decrecientes y constantes. En el inciso I-b se traza la tangente en cuatro puntos para cada caso, mientras que en el inciso I-c se pregunta sobre la relación entre los valores de las tangentes en funciones crecientes, decrecientes y constantes. En los incisos I-d y I-e, se analiza el comportamiento de las pendientes de las tangentes en un máximo y un mínimo, para lograr lo anterior se presentan dos figuras: un mínimo y un máximo. Finalmente en el inciso I-f se pregunta lo siguiente:

"f) Recordando que una derivada representa una tangente y analizando su respuestas de los incisos d y e, ¿qué es el valor de la derivada en un máximo o mínimo? Este punto se conoce como un punto crítico."

En este bloque de incisos, se enfocó en las pendientes de las líneas tangentes para funciones crecientes, decrecientes y constantes, y cómo se comportan dichas líneas en un máximo y un mínimo. Además se presenta el término "punto crítico".

Una forma convencional de representar y clasificar los máximos y mínimos, es utilizando los valores de la derivada. Ya se mencionó, que la derivada de una función equivale a la pendiente de la línea tangente. Para este fin se presenta la Figura 3.5.

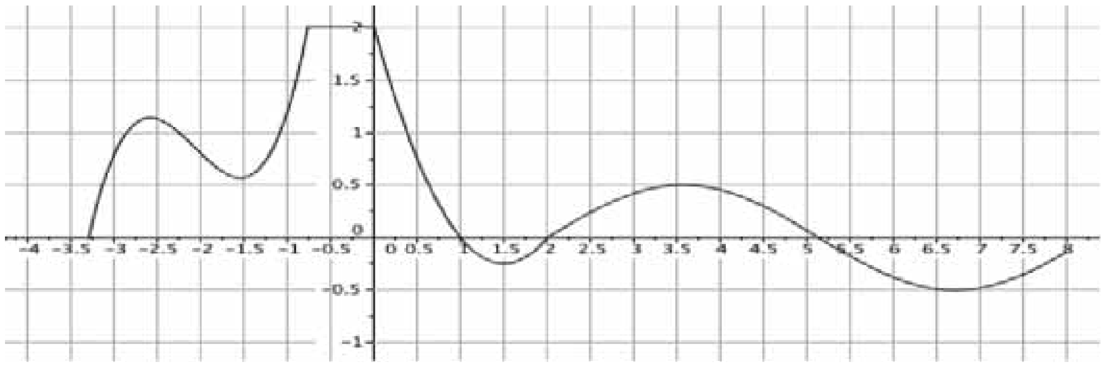


Figura 3.5: Imagen para el inciso I-g de la actividad 7

En el inciso I-g se pide identificar los puntos críticos de la gráfica. Mientras que en el inciso I-h se pide completar una tabla, en donde las columnas son "Intervalo", "Comportamiento" y "Valor de $f'(a)$". Los intervalos están separados por los puntos críticos, la columna "Comportamiento" se refiere a si la función es creciente, decreciente o constante, y la columna "Valor de $f'(a)$" se refiere a si la derivada es positiva o negativa. Los incisos I-i y I-j son los siguientes:

> "i) ¿Qué relación encuentra entre el comportamiento de la función y el valor de la derivada?"
> "j) Observe la figura 4 y los incisos anteriores, si existe un punto crítico, ¿cómo se puede clasificar como máximo o mínimo con respecto a la primera derivada?"

El inciso I-j es idéntico a los incisos I-d y I-e, solo que se clasifican por el signo de la primera derivada.

Una aplicación de las derivadas, es la optimización en donde se deben identificar valores absolutos. En esta actividad no se tratan temas de optimización, pero es importante hacer la distinción entre un máximo o mínimo absoluto y un máximo o mínimo relativo. En los incisos I-k y I-l, se deben identificar los puntos absolutos así como los puntos relativos para los máximos y mínimos, respectivamente. Finalmente en el inciso I-m, se pide explicar matemáticamente la diferencia entre valores relativos y absolutos.

Otro concepto que se debe mencionar, es la concavidad. Como sólo nos interesa la formulación matemática de la concavidad, se introduce el tema de la siguiente manera:

> "Aunque el signo de la derivada de f indica en dónde la gráfica de f es creciente o

decreciente, no indica la dirección de la *curvatura*. Por ejemplo, la función es creciente en ambos lados del punto en la figura 5 (Figura 3.6), pero en el lado izquierdo tiene una curvatura hacia arriba ("retiene agua") y en el lado derecho tiene una curvatura hacia abajo ("derrama agua"). En intervalos donde la gráfica de f tiene una curvatura hacia arriba se dice que f es *cóncava hacia arriba*, y en intervalos donde la gráfica de f tiene una curvatura hacia abajo se dice que f es *cóncava hacia abajo*. La curvatura también se conoce como la concavidad.

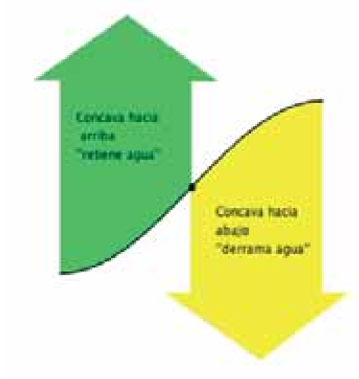


Figura 3.6: Figura 5 de la actividad 7

Para la formulación matemática se empieza con el inciso I-n:

"n) Para las figuras (Figura 3.7) en los puntos indicados, estime y trace la línea tangente"

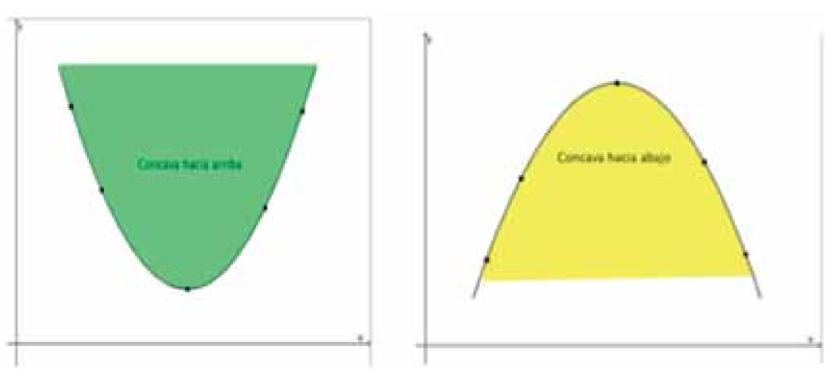


Figura 3.7: Figura para el inciso I-n de la actividad 7

Después se presentan los incisos I-o a I-r:

"o) Observe su respuesta del inciso n, ¿qué observación tiene con respecto a las pendientes para curvas cóncava hacia arriba y cóncava hacia abajo (las pendientes

> aumentan o disminuyen)? ¿A qué conclusiones llega con respecto al valor de la derivada de la función $f'(a)$ para curvas cóncava hacia arriba y cóncava hacia abajo?"
> "p) Si la primera derivada $f'(a)$ es creciente, ¿cómo será la segunda derivada $f'(a)$?"
> "q) Si $f'(a)$ es decreciente, ¿cómo será $f'(a)$?"
> "r)¿Qué relación existe entre el valor de la segunda derivada $f'(a)$ con respecto a la concavidad de la función f ?"

Con la secuencia y estructura anterior, se debe llegar a qué significa la segunda derivada con respecto a la concavidad.

En la parte II de la actividad 7, se comprueba gráficamente con CAS las formulaciones matemáticas del máximo, mínimo y concavidad. En el inciso II-a, se grafica la función $f(x) = x^2 - 4x + 3$ y se pregunta sobre la concavidad y la comprobación con la segunda derivada de la función. En este caso existe la misma concavidad para la función dada, ya que la segunda derivada es una constante ($f''(x) = 2$). En el inciso II-b, se considera la función $f(x) = x^3$ y se pregunta sobre la concavidad. Aquí sí varia la concavidad, ya que $f''(x) = 6x$. Los incisos II-c y II-d dicen lo siguiente:

> "c) Considere los incisos a y b, en el punto donde cambia la concavidad, ¿cuánto vale la segunda derivada en dicho punto?"
> "d) Elija dos (2) puntos de la función del inciso b, uno en donde hay concavidad hacia arriba y otro en donde hay concavidad hacia abajo. ¿Qué valores toma la segunda derivada en dichos puntos?"

Estos incisos tienen el fin de establecer los intervalos de concavidad. Además, se introduce el término punto de inflexión con el fin de manejar la nomenclatura convencional. Considerando lo anterior, se pregunta sobre dichos intervalos en el inciso II-e. Para los incisos II-f y II-g, se grafica la función $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$, $f'(a)$?, y f'' en la misma gráfica, en el inciso II-f se enfoca en la primera derivada y en II-g en la segunda derivada.

Un comando útil, es "zeros" para encontrar los ceros de una función. Se introduce este comando y se encuentran los ceros de una función en el inciso II-h. Con el uso del comando zeros, tal que, derivar, etc.; en la pantalla home (sin graficar) deben plantear el procedimiento para encontrar los intervalos de crecimiento y decrecimiento, los máximos y mínimos en el inciso II-i, los intervalos de concavidad y los puntos de inflexión en el inciso II-j. En el inciso II-k, se comprueban los resultados gráficamente. Finalmente, el inciso II-l es una reflexión sobre el efecto que tienen las derivadas en la gráfica de la función.

Cápitulo 4

Análisis de Resultados

En éste apartado de la tesis, se presentan las actividades que se diseñaron en su versión final. Se aplicaron a nueve alumnos de segundo año de la licenciatura de Ingeniería Química, de la Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, estos alumnos trabajaron en equipos de tres integrantes cada uno, realizando las actividades el 17 y 28 de marzo de 2014. Con respecto al conocimiento matemático de los alumnos, se considera que tienen un nivel adecuado al curso de matemáticas II. En el primer año de la carrera, obtuvieron calificaciones entre 7 y 8. Los equipos se formaron con los siguientes integrantes:

- En el equipo número1, trabajaron Efraín, Omar y Samuel
- Equipo número 2, trabajaron Edgar, Sandra y Ulises
- Equipo número 3, trabajaron Anthony, Humberto y Oscar

4.1. Análisis del Pre-Examen

Antes de realizar las actividades, se aplicó un pre-examen de cuatro preguntas con los conceptos básicos involucrados en las mismas. El examen lo realizaron de manera individual y se les dieron aproximadamente cinco minutos para su elaboración. Se eligieron preguntas abiertas que abarcan temas globales de cálculo diferencial. Las preguntas son las siguientes:

1. ¿Qué entiende por un límite matemático?
2. ¿Qué representa la derivada de una función?
3. ¿Qué relación existe entre un límite y una derivada?
4. Explique lo anterior en una expresión matemática.

Además de conocer los conocimientos previos de los alumnos, los resultados del pre-examen justifica el presente trabajo de tesis. Con base en los resultados obtenidos, se puede decir que los alumnos no aprender la parte conceptual del conocimiento, si no que solamente los procesos operacionales. Es decir, que llegan a aprender como derivar una función pero no el significado que tiene la operación de derivar. Analizando las preguntas, se observa que son temas que se ubican dentro del programa del curso de Matemáticas I, de primer año de Ingeniería Química. Los cuales, se explican antes de trabajar con los procesos operacionales.

Se calificaron las respuestas de los estudiantes, utilizando los siguientes rubros:

A: una idea fuerte y robusta acerca del trabajo y del concepto.

B: una idea general acerca del trabajo y del concepto.

C: una idea débil acerca del trabajo y del concepto.

D: ninguna idea del tema acerca del trabajo y del concepto.

Cabe mencionar que a pesar de decirles claramente que el pre-examen era individual, los equipos 2 y 3 lo realizaron de manera grupal. Los pre-exámenes que se aplicaron a los participantes, se encuentran en el anexo D. Con la primera pregunta planteada, se dio una idea del significado que tienen los alumnos del concepto de Límite. La respuesta de Samuel integrante del equipo 1, se calificó con la A, ya que respondió:

> “Es la tendencia que forma una función al aproximarse a un determinado valor”

Con la respuesta se pude concluir lo siguiente:

1. Al mencionar “tendencia”, el alumno indica que el límite puede tomar valores como $-\infty$ y ∞, no solamente números fijos.

2. El estudiante entiende que el límite, es cuando la función se “aproxima” a un valor y no necesariamente que sea evaluada en dicho punto

Un ejemplo de una calificación B fue la respuesta de Efraín, integrante del equipo 1:

> “Es el cambio que va experimentando una función al acercarse a un valor determinado”

Analizando la respuesta, se concluye que:

1. Entiende que en un límite una función se “acerca” a un valor.

2. Esta idea se clasifica como una idea general (B), debido a que ve el valor del límite como un "cambio"

Una idea débil o calificada como C, fue dada por el equipo 3:

"Son los valores mínimos o máximos a los que puede llegar una función"

Los límites matemáticos no tienen relación con máximos o mínimos directamente, si se omite *mínimos* o *máximos* seria una calificación B. Pero con el hecho de mencionar que es un valor al que puede llegar la función, la respuesta se califica como una idea débil.

Finalmente, una respuesta de calificación D fue dada por el equipo 2:

"Es el valor que limita la función"

Aquí se observa que la respuesta dada, no tiene nada que ver con cl concepto de un límite matemático.

Las siguientes tablas muestra las respuestas dadas, su análisis y la calificación otorgada para cada pregunta. Tabla 4.1 corresponde a la pregunta 1, la Tabla 4.2 a la pregunta 2, la Tabla 4.3 a la pregunta 3 y la Tabla 4.4 a la pregunta 4.

Tabla 4.1: Pregunta 1: ¿Qué entiende por un límite matemático?

Alumno	Respuesta	Análisis	Calificación
Efraín	Es el cambio que va experimentando una función al acercarse a un valor determinado.	Mencionado anteriormente.	B
Omar	Es la tendencia de una función al acercarse a un determinado parámetro o valor.	1. El término "Tendencia", indica que puede incluir $-\infty$ o ∞. 2. Entiende que la función se acerca a un valor.	A
Samuel	Es la tendencia que forma una función, al aproximarse a un determinado valor.	Mencionado anteriormente.	A
Equipo 2	Es el valor que limita la función.	Mencionado anteriormente.	D
Equipo 3	Son los valores mínimos o máximos a los que puede llegar una función.	Mencionado anteriormente.	C

Tabla 4.2: Pregunta 2: ¿Qué representa la derivada de una función?

Alumno	Respuesta	Análisis	Calificación
Efraín	Es la ecuación de la recta tangente cuando se grafica en cualquier valor de una función.	Relaciona la derivada con una línea tangente, pero no dice el significado de una tangente.	B
Omar	Es la ecuación de la recta tangente graficando en cualquier valor de x de la función.	Relaciona la línea tangente con la derivada, pero no menciona el significado de la tangente.	B
Samuel	El cambio de una función según el cambio de su variable independiente, su valor es la ecuación de la recta tangente graficando en cualquier valor de x de la función.	1. Menciona un cambio (pendiente) $\Delta y/\Delta x$. 2. Relaciona la línea tangente con la derivada.	A
Equipo 2	Es la recta tangente que pasa por la función.	1. Entienden la relación entre una línea tangente y la derivada. 2. No identifican a una derivada como una “función” de tangentes.	C
Equipo 3	Es una razón de cambio en la tangente de una función.	Entienden qué es una razón de cambio, pero dicen que es de la tangente y no de la función.	B

Tabla 4.3: Pregunta 3: ¿Qué relación existe entre un límite y una derivada?

Alumno	Respuesta	Análisis	Calificación
Efraín	Que la definición matemática de una derivada es un límite.	1. Menciona que el concepto básico de la derivada y el límite es lo mismo. 2. No clarifica bajo qué condiciones o en cuál función se evalúa el límite.	B
Omar	Que en si la derivada de la función es un límite.	1. Menciona que el concepto básico de la derivada y el límite es lo mismo. 2. No menciona bajo qué condiciones el límite es igual a la derivada.	B
Samuel	La derivada de una función es el límite de la misma cuando $\Delta x = 0$.	1. Menciona que una derivada es lo mismo que un límite. 2. La condición debe ser cuando $\Delta x \to 0$. 3. Falta decir qué expresión va dentro del límite.	A
Equipo 2	La relación entre la derivada y un límite es que matemáticamente es la derivada de un límite.	Carece de un vocabulario matemático para expresar sus ideas, además no sabe las definiciones.	D
Equipo 3	La definición de una derivada es un límite.	1. Menciona que el concepto básico de la derivada y el límite es lo mismo. 2. No menciona bajo qué condiciones el límite es igual a la derivada.	B

Tabla 4.4: Pregunta 4: Explique lo anterior en una expresión matemática.

Alumno	Respuesta	Análisis	Calificación
Efraín	$\text{lím}_{\Delta x\to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$	1. Dice que "lim" es igual a una función. 2. No menciona la derivada.	C
Omar	$\text{lím}_{\Delta x\to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$	No menciona la derivada.	B
Samuel	$\text{lím}_{\Delta x\to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$	No menciona la derivada.	B
Equipo 2	$\text{lím}_{\Delta x\to 0} \frac{f(x)+f(\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$	1. Tiene parecido a la forma convencional. 2. No hay relación con la respuesta dada en la pregunta 3.	C
Equipo 3	$\text{lím}_{\Delta x\to 0} \frac{f(x)+f(\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$	1. Tiene parecido a la forma convencional. 2. No hay relación con la respuesta dada en la pregunta 3.	C

Asignando valores numéricos a las calificaciones otorgadas (A = 4, B = 3, C = 2 y D = 1), se obtiene los promedios de la Tabla 4.5.

Analizando los promedios, se puede observar que la mayoría de los participantes tienen bases débiles y muy generales sobre los conceptos fundamentales del cálculo diferencial. Cabe mencionar, que en segundo año la materia de Matemáticas II se divide en cuatro unidades: cálculo diferencial de varias variables, cálculo integral de varias variables, ecuaciones diferenciales de primer orden y cálculo vectorial. Sin duda, el cálculo diferencial es un componente vital de cada unidad mencionada.

¿A qué se debe que un alumno pueda acreditar los primeros dos cursos de matemáticas sin saber el concepto de un límite y una derivada?

Tabla 4.5: Calificaciones del pre-examen

	Valor Numérico en la Pregunta					
Alumno	#1	#2	#3	#4	Promedio	Calificación Equivalente y Significativo
Efraín	3	3	3	2	2.75	C+, Idea general con algunas deficiencias.
Omar	4	3	3	3	3.25	B, Idea general.
Samuel	4	4	4	3	3.75	B+, Conceptualmente domina el tema.
Equipo 2	1	2	1	2	1.5	D+, Carece de los fundamentos básicos.
Equipo 3	2	3	3	2	2.5	C+, Idea general con algunas deficiencias.

Lo anterior se atribuye al hecho, de que los alumnos memorizan la materia y no llegan a aprender su significado conceptual. Un ejemplo claro de este fenómeno, es el límite:

$$\text{lím}_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x}$$

El alumno es capaz es identificar que su valor es igual a 1, pero la única explicación dada por ellos es que es por definición. Esto subraya los modelos de aprendizaje del alumno, al carecer del significado conceptual recurren a técnicas memorísticas como *recetas de cocina*. Un ejemplo de lo dicho anteriormente, para la solución de límites matemáticos siguen los tres pasos:

1. Sustituyen el valor del límite.

2. Si es indefinido, factorizan las expresiones involucradas.

3. Racionalizan si la función contiene raíces.

Esta *receta* o técnicas para resolver límites, se enfoca a procesos operacionales; los cuales provienen de estructuras conceptuales. Entonces, si algo no se acopla a las técnicas de solución conocidas por el estudiante, no es capaz de resolver el límite por la falta de entendimiento de los conceptos. Un ejemplo de lo mencionado anteriormente es:

$$\text{lím}_{x\to -2^+} \frac{x-1}{x^2(x+2)}$$

La técnica aprendida por los estudiantes no contempla el conocimiento de límites laterales, por lo tanto no podrá resolverlo. Esta observación saca a la luz un problema muy grave dentro de la enseñanza de las matemáticas, que los métodos de enseñanza son pasivos y por consiguiente no son eficientes. En las clases tradicionales (profesor activo-estudiante pasivo), la teoría se presenta como una introducción al tema y después se aplican ejercicios, poniendo más énfasis en las técnicas operacionales que en los fundamentos teóricos. Por lo anterior, se puede decir que la falta de las bases conceptuales impide que el alumno desarrolle técnicas de orden superior, debido a que el aprendizaje de las matemáticas es acumulativo. Por ejemplo, fallas en la conceptualización del cálculo diferencial implicará problemas con el aprendizaje del cálculo integral.

4.2. Análisis de la Experimentación Piloto

Antes de aplicar las actividades diseñadas, se dio una introducción breve sobre el manejo de las calculadoras simbólicas TI-nspire CXCAS. Dentro de la literatura, se menciona lo intimidante que puede ser la primera experiencia con una calculadora de ese tipo.

Se trabajó sobre diferentes aspectos, sobre cómo encender y apagar la calculadora. Fue importante mencionar que algunos botones tienen múltiples funciones, algunas se pueden ver físicamente en la calculadora, pero otras no. Por ejemplo, el mismo botón que enciende la calculadora (el botón de HOME) la puede apagar al presionar CTRL (el botón azul) y después HOME. Las funciones secundarias se representan en azul, por lo tanto es necesario presionar el botón CTRL primero y después el botón correspondiente para obtener el comando deseado.

En la calculadora se trabaja con páginas o pestañas, por ejemplo al presionar HOME aparece la Figura 4.1. Se pueden apreciar los iconos en la parte inferior de la pantalla, estos representan las diferentes pestañas que tiene la calculadora. Mientras que en la izquierda superior aparecen dos opciones “A Calculate” y “B Graph”, las cuales permiten realizar operaciones matemáticas y graficas respectivamente. Estas opciones se consideran para operaciones rápidas, ya que no crean nuevas pestañas y por lo tanto para hacer gráficas o realizar operaciones matemáticas se sugiere utilizar los iconos. Si se desea seleccionar “A Graph” se puede hacer de tres formas: 1) Presionando el botón “A”, 2) seleccionar la opción a través de las flechas (derecha, izquierda, arriba o abajo) del touch pad y presionando ENTER, o bien 3) moviendo el cursor (dentro del touch pad) y presionando el botón.

Cada vez que se abre un icono, se abre una nueva pestaña, en la Figura 4.2 se observa que hay cuatro pestañas abiertas (la actual es una hoja de cálculo). Se les explica a los estudiantes cómo cambiar entre pestañas y cómo borrarlas. El hecho de poder cambiar de una hoja de cálculo a una gráfica, es muy valioso en el descubrimiento matemático y vital para el aprendizaje.

Otros aspectos que se trabajaron fue el manejo de menús y submenús, cómo realizar una cuenta,

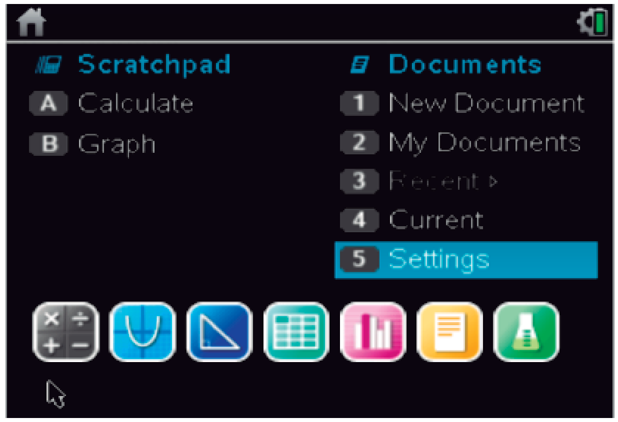


Figura 4.1: Pantalla **HOME** dentro del sistema CAS

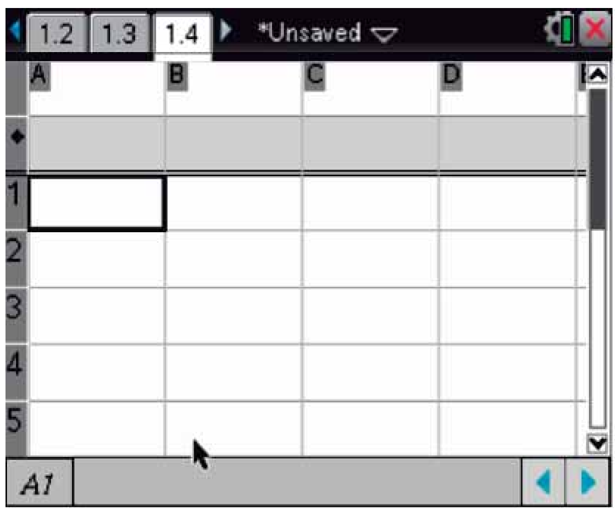


Figura 4.2: Diferentes pestañas dentro del sistema CAS

la peculiaridad que hay con fracciones y números racionales, y la diferencia entre el "-" de resta y de número negativo. Una de las diferencias entre las calculadoras convencionales y una simbólica es cómo realizar un cálculo, en este caso se utiliza ENTER ya que "=" tiene otra función. Una introducción breve se encuentra en el anexo F dentro de la guía del profesor.

4.2.1. Desarrollo de la experimentación

En cada actividad, los integrantes tienen un rol específico (líder, manejo de calculadora y manejo de la actividad). El líder tiene la responsabilidad de mantener el orden en el trabajo, asegurar que se responda la pregunta y fomenta las discusiones. El rol del que maneja la calculadora, es el que se encarga de meter los datos, realizar las operaciones e interpreta los resultados. Mientas que el integrante que tiene la actividad, lee el contenido y las preguntas planteadas, redacta la respuesta en una forma que sea lo más explícita posible.

En la Tabla 4.6 se resumen los tiempos que requirieron los equipos, para realizar cada una de las actividades (el tiempo está en minutos).

Tabla 4.6: Tiempo para completar las actividades, en minutos

	Número de Actividad						
	#1	#2	#3	#4	#5	#6	#7
Equipo 1	30	120	35	60	150	40	70
Equipo 2	30	120	33	60	125	60	65
Equipo 3	15	75	32	45	80	35	75
Promedio	25	105	33	55	118	45	70

Es recomendable aplicar las actividades en cuatro sesiones de tres horas las primeras tres y la ultima de hora y media, la estructura de trabajo en cada una de ellas es la siguiente: En la *primera sesión*, se integran los equipos de trabajo, se les da una breve introducción del manejo de la calculadora, además se realizan las actividades 1 y 2.

En la *segunda sesión*, se propone aplicar las actividades 3 y 4.

En la *tercera sesión*, se realizan las actividades 5 y 6.

Finalmente en la *cuarta sesión*, se realiza la actividad 7.

Con base en el tiempo invertido en las experimentaciones, se observó que en la actividad 5 se requiere de más tiempo del programado. Por otro lado, de acuerdo al tiempo que necesitan los estudiantes para realizan las actividades se puede ampliar el número de sesiones; siempre y cuando la actividad no sea interrumpida. La actividad de introducción a la calculadora, se puede llevar a cabo aproximadamente en 15 minutos.

4.2.2. Problemas Frecuentes

Las actividades realizadas por los estudiantes del equipo 3 en la prueba piloto, se encuentran en el anexo E. A lo largo de la experimentación, el trabajo de cada equipo se grabó por medio de tres cámaras de video. Apoyándose en la evidencia que se tiene, los errores o fallas que tuvieron los estudiantes al responder las preguntas planteadas en las actividades, se deben a los siguientes tres motivos:

1. No leyeron con cuidado las instrucciones o preguntas planteadas.

2. Les faltó discutir más a fondo dentro del grupo, los cuestionamientos de las actividades.

3. Tuvieron una respuesta incorrecta en el inciso anterior.

Las actividades 2, 5 y 6 contienen trabajo de calculadora con el sistema CAS, en donde los estudiantes deben seguir una serie de instrucciones. El tiempo para completar las mismas, es mayor que el de las restantes. Lo anterior se puede atribuir a dos razones: el uso de la calculadora para la mayoría de los alumnos es algo nuevo y requieren de más tiempo para familiarizarse; y la segunda, por no seguir las instrucciones al pie de la letra tienden a equivocarse en algún paso, lo que implica repetir el procedimiento. Contratiempos de esta naturaleza son muy frecuentes al solucionar las actividades, por lo que es importante recordarle a los participantes que lean con cuidado las instrucciones.

Un ejemplo de lo mencionado anteriormente, se encuentra cuando el equipo 1 realizó la actividad 4, parte I inciso a, b, c y d:

a) Escriba la operación que realiza para obtener la cantidad que se viajó y en cuanto tiempo se viajó.
Respuesta: $\bar{x} = \frac{x_2 - x_1}{t}$ $\frac{140-100}{30} = 1{,}333\frac{km}{h}$

b) Utilizando las expresiones del inciso anterior, **escriba la operación** para calcular la velocidad promedio.
Respuesta: $\frac{140-100}{30} = 1{,}333\frac{km}{h}$

c) Explique qué es una pendiente y escriba la expresión.
Respuesta: es un incremento de “y” respecto un incremento de “x” $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$

d) Relacione la velocidad promedio con la ecuación de la pendiente. ¿Qué observa?
Respuesta: $\bar{x} = \frac{x_2 - x_1}{t}$, Se relaciona en que el numerador es un incremento de velocidades.

El objetivo de este bloque de preguntas, es observar que la pendiente y la velocidad promedio son similares, la única diferencia es que la primera relaciona diferencias entre “y” y “x”, mientras que la segunda involucra distancias y tiempos. Para llegar a esta conclusión es necesario que dejen los dos expresados, ya que en ningún momento se les pidió calcular la velocidad promedio. Al realizar el cálculo, se pierde el objetivo y no llegan al resultado esperado; lo cual es evidente con la respuesta del inciso d.

Otro problema que se observó, fue la falta de una discusión significativa entre los integrantes del grupo. Ya que al revisar los videos, había momentos en donde un miembro del equipo respondía todas las preguntas sin aportes de los demás. La mayoría de respuestas incorrectas que se tuvieron, se deben a lo anteriormente citado. Se puede decir que a través de una discusión profunda, se afinan las respuestas de los cuestionamientos, dando como resultado una idea o concepto más claro.

4.3. Discusiones Propuestas

Las actividades diseñadas son de carácter acumulativo y progresivo, es decir, un inciso está relacionado con el anterior y con el próximo. Cada bloque de preguntas trata un tema o concepto básico, de tal manera que a través de ellos se lleva a cabo la conceptualización de un objeto matemático. Lamentablemente el mal entendimiento de alguno de los cuestionamientos, puede obstaculizar el aprendizaje deseado.

Una propuesta con el objetivo de mitigar lo anteriormente citado, es programar discusiones al término de cada bloque; las cuales tendrán dos objetivos: resumir los temas involucrados y la formulación de conceptos de orden superior. Al hacer un resumen, se evita avanzar con conceptos equivocados. Las actividades están diseñadas de tal manera, que los participantes pueden trabajar sin mucha ayuda del profesor. Algunos estudios como el de Meyer (2004), demuestran que la instrucción guida o mediada es más eficaz. Por lo anteriormente citado, el orden y estructura de las actividades propuestas constituyen un grado de mediación. En el diseño de las actividades, se buscó el balance de un trabajo completo sin ser tedioso y largo. De la experimentación piloto surgieron algunos casos, en donde ameritaba una discusión entre el investigador y el equipo para la mejor conceptualización de los temas.

En las siguientes tablas se presentan las discusiones realizadas para cada actividad, su ubicación y su objetivo en forma resumida. La guía para el investigador se encuentra en el anexo F, ahí la discusión se presenta en forma detallada. La Tabla 4.7 para la actividad 1, Tabla 4.8 para la actividad 2, Tabla 4.9 para la actividad 3, Tabla 4.10 para la actividad 4, y la Tabla 4.11 para la actividad 5.

Tabla 4.7: Discusiones propuestas para la actividad 1

Dónde	Objetivo	Puntos Claves
Después de I-c	Clarificar el significado de signos en diferencias.	Ver casos con signos positivos, negativos y valores de cero.
Después de I-h	Llegar a la conclusión de que $\Delta U/\Delta i$ es constante.	Enfatizar cómo obtener una diferencia y qué es una relación.

Tabla 4.8: Discusiones propuestas para la actividad 2

Dónde	Objetivo	Puntos Claves
Antes de II-b	Establecer la ecuación para calcular cantidad de C-14.	Ver casos con signos positivos, negativos y valores de cero.

Tabla 4.9: Discusiones propuestas para la actividad 3

Dónde	Objetivo	Puntos Claves
Después de I-d	Llegar a las expresiones y significados de $f(x_1), f(x_1+\Delta x)$ y $f(x_1+h)$.	Iniciar la discusión del significado, con ejemplos como $f(5)$.
Después de II-f	Resumir y aclarar la sección 2.	Establecer el significado de “tiende a”.

Tabla 4.10: Discusiones propuestas para la actividad 4

Dónde	Objetivo	Puntos Claves
Después de I-g	Llegar a la ecuación de velocidad promedio para el intervalo $[t_0, t]$.	Reforzar la ecuación para una velocidad promedio. Ver el significado del intervalo.

Tabla 4.11: Discusiones propuestas para la actividad 5

Dónde	Objetivo	Puntos Claves
Después de I-k	Responder y resumir el inciso I-k.	Reforzar la diferencia entre una línea secante y una tangente, y su relación. Además, explicar el uso de escuadras para los próximos incisos.
Antes de I-q	Plantear una estrategia de resolución del inciso I-q utilizando CAS.	Hacer referencias al inciso I-n y posibles métodos de mecanización utilizando CAS.

En las actividades 6 y 7 de la experimentación piloto, no se tuvieron discusiones significativas entre el investigador y los alumnos. Después de hacer el análisis, no se creyó conveniente que se agregará una discusión. Sin embargo, existen temas y cuestiones para cada actividad que el investigador que aplicará las actividades deben considerar, las cuales se exponen en la guía del anexo F.

4.4. Evolución de las Actividades

En la sección *3.4 Diseño y Rediseño de las Actividades* del presente trabajo, se presentan las modificaciones realizadas en forma general. Cabe mencionar que lo anterior constituyó la parte fuerte del trabajo de tesis, además de que fue en donde se invirtió más tiempo. Las actividades se sometieron a varias etapas de modificación, unas de ellas se planeó de manera formal mientras que las otras fueron informales. El hecho de dejar de trabajar en las actividades y regresar a ellas después de unos días, cambio algunas perspectivas del diseño.

Al observar la primera versión y la versión final de las actividades, se puede apreciar que en todas se realizaron modificaciones. Sin embargo la actividad 6 *Función Derivada*, experimento más cambios que las demás; ya que dentro de ésta el objetivo fue la conceptualización de la derivada y cómo se formula su expresión. En las primeras versiones se cometió el error de seguir la metodología tradicional que se utiliza en el aula, es decir, la actividad se enfocó en los procesos operaciones y se descuidó la conceptualización de la derivada. Lo anterior se ve claramente en la versión 1 parte I, en donde se presenta primero la "teoría" y después se hacen "ejemplos". En la parte II se enfocó en las reglas de derivación básicas, la idea fue utilizar en comando de **Derivada** dentro de CAS para deducir dichas reglas.

La primera versión no hace alusión a las preguntas esenciales que se presentan en la segunda versión, como: ¿qué representa una derivada? y ¿qué significa la función derivada? Dentro de las actividades se trabajó bajo el argumento de que una derivada es una razón de cambio, por lo tanto es primordial definir la función derivada bajo la misma premisa. Se definió de la siguiente manera: ?la función derivada representa las pendientes de las líneas tangentes?. Considerando lo anterior, la actividad toma un nuevo enfoque y utilizando algunas técnicas dentro de CAS, se grafica una función y se almacena la pendiente de la tangente y su valor de x. Después, se grafican los dos datos y se ajustan de tal manera que se obtiene una expresión. En este momento aún no se introduce el concepto de la derivada, el cual se hace hasta la siguiente sección además de su formulación matemática. La idea fundamental en el esquema propuesto para todas las actividades, es la construcción del conocimiento; por lo cual, se realizan operaciones y después se aclara su significado a través de discusiones. En este caso se llega a una expresión ajustando los datos de la pendiente de la tangente y su valor en x, para compárala con la función derivada, de tal manera que se llegue a la definición de la función derivada, representada por las pendientes de las líneas tangentes.

Las actividades se desarrollan con una parte de lápiz y papel, seguida por otra utilizando CAS; algunas de ellas tiene una parte de simbolización. Para la actividad citada anteriormente, el orden que se presenta es primero una parte con CAS; lo anterior se hace con el fin de llegar a una expresión, para las pendientes de las líneas tangentes de una función. Mientras que en la parte de lápiz y papel, se compara la expresión obtenida con CAS de la derivada para la misma función. Por lo anterior, la actividad se enfoca más en la relación entre las pendientes de las líneas tangentes y la derivada, en lugar de los procesos operaciones, la cual era el objetivo de la primera versión. Al enfocarse en la relación de las pendientes de las líneas tangentes y la derivada, se logra la conceptualización esperada.

Cápitulo 5

Conclusiones

5.1. Comprobación de la Hipótesis

De acuerdo a la hipótesis planteada la sección 1.3 y a los resultados obtenidos en el pre-examen sobre los conceptos fundamentales del cálculo diferencial, se llega a la conclusión que los alumnos tienen una idea superficial sobre los fundamentos teóricos involucrados. Considerando lo anterior y los resultados obtenidos al resolver las actividades, se puede decir categóricamente que hubo aprendizaje de los conceptos, ya que existen evidencias de las respuestas que dieron los alumnos que demuestran un dominio del cálculo diferencial, lo que no estaba presente antes del pre-examen.

5.2. Conclusiones Generales

Tradicionalmente la enseñanza de las matemáticas se lleva acabo utilizando métodos pasivos, es decir, el alumno solamente recibe información sobre el tema; además, se presenta primero la teoría y después se hacen algunos ejercicios de la misma. Por ejemplo en una clase para la cubrir el tema de derivada, se puede ver de la siguiente manera:

1. Para encontrar la derivada de cualquier función se utiliza la expresión:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

2. Entonces la derivada para x^2 sería:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{x^2 + 2hx + h^2 - x^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h(2x+h)}{h} = 2x$$

Después de esa introducción al tema, el profesor pone a trabajar a los estudiantes en la clase con problemas similares, y probablemente también se deje una tarea.

Innumerables estudios han demostrados, que técnicas de enseñanza pasivas no son adecuadas para un aprendizaje significativo. En este trabajo de tesis el alumno construye su propio conocimiento a través de métodos activos, es decir, que ellos están involucrados y son responsables de su aprendizaje por medio del "descubrimiento". Diferentes investigaciones (Heid, 1988; Atkins, Creegan y Soan, 1995; Pierce, 1999; Lagrange 2000) sugieren, que el descubrimiento guiado o mediado es más eficaz. La mediación se lleva a cabo, por las actividades de aprendizaje diseñadas y el investigador que las aplica, a través de discusiones individuales y grupales. Las actividades están diseñadas de tal manera, que el conocimiento lo construye el alumno cuando une conceptos e ideas implícitos en las mismas.

Las actividades propuestas se sometieron a experimentaciones formales e informales, y de acuerdo a las observaciones realizadas por el grupo de investigadores se modificaron hasta llegar a las actividades finales que conceptualizaron el cálculo diferencial. El esquema empleado, es que a través de preguntas tales como: ¿qué pasa bajo esas condiciones?, ¿a qué se debe?, ¿cómo formularías lo antes dicho?, etc., se van construyendo los conocimientos, los cuales representan la conceptualización del objeto matemático.

De la experimentación piloto se observó, que la mayoría de los problemas encontrados se atribuyen a los integrantes de los equipos y no al diseño de las actividades. Por ejemplo, algunos errores se deben a que no leen con cuidado los procedimientos, las preguntas, responden de forma equivocada, o bien no discuten adecuadamente sobre los cuestionamientos. Con respecto al diseño de las actividades, la única modificación resultante después de la experimentación piloto fue la inserción de discusiones. Las cuales tienen el objetivo resumir lo más importante de los temas tratados y de reforzar la construcción de los conceptos involucrados. Debido a que las actividades son acumulativas, es importante asegurar que los alumnos obtengan cada uno de los conceptos involucrados en las mismas.

Aparte del diseño de las actividades propuestas, en este trabajo también generó una guía para el profesor que aplicará las mismas, en donde se detallan las discusiones que se llevaran a cabo y cuáles son los principales errores que se cometen dentro de cada actividad. Con la guía propuesta, cualquier profesor con acceso a las calculadoras simbólicas las pueden implementar. Las actividades no requieren de conocimiento previo del cálculo diferencial, ya que parten de conceptos numéricos y algebraicos; se pueden utilizar para que el estudiante construya los conceptos fundamentales antes de ver la teoría en clase o después para hacer un reforzamiento.

El presente trabajo de Tesis, muestra que es posible crear e implementar actividades de aprendizaje para la conceptualización del cálculo diferencial. Como un trabajo futuro, se pueden diseñar actividades con las mismas técnicas empleadas en este trabajo para la conceptualización de cálculo integral y cálculo multivariable. Lo difícil de diseñar actividades de aprendizaje que involucren tópicos matemáticos, es su naturaleza acumulativa; pero con esfuerzo y trabajo, la dificultad anterior se vio como una gran oportunidad. Aprovechándose del esquema progresivo que se aplicó en el diseño, se pueden implementar actividades para materias tales como física, química y programación.

Además de apoyarse en la tecnología, las actividades emplean técnicas de enseñanza activa. Bonwell y Eison (1991), sugieren que dichas estrategias tienen en común el acto de *la involucración de alumnos en hacer y pensar sobre lo que están haciendo*. Este estudio como muchos otros, muestra la importancia del aprendizaje activo con objetos matemáticos. En las clases ?tradicionales? no se utilizan dichos elementos, por lo tanto se sugiere que se incorporen este tipo de actividades dentro de la enseñanza de todas las materias, ya que no son exclusivas para las matemáticas.

5.3. Recomendaciones y Sugerencias

Las actividades propuestas en este trabajo de tesis se pueden ser fácilmente implementadas en loas cursos normales de cálculo diferencial y servirán para que el estudiante construya los conceptos fundamentales; existen dos posibilidades de uso de las actividades: a) como introductoras antes de ver la teoría en clase; b) de reforzamiento después de ver la teoría en clase.

Es muy importante subrayar, que las actividades diseñadas contemplan lo fundamental del cálculo diferencial. Existe la posibilidad de que el programa de Matemáticas incluya temas que no estén contemplados en las actividades, pero el alcance del presente trabajo de investigación es conceptualizar los fundamentos del cálculo diferencial. Los temas adicionales, pueden explicarse bajo el mismo esquema de las actividades diseñadas.

Bibliografía

- Andreu-Ibarra, M. E. y Riestra, J. A. (2005). Propuesta alternativa para la enseñanza del concepto de derivada desde una prespectiva histórico-epistemológico de su desarrollo. En J. C. Cortés y F. Hitt (eds), Reflexiones Sobre el Aprendizaje del Cálculo y su Enseñanza. Morelia, Mich., México: Morevallado Editores, 157-174.
- Anton, H., Bivens, I. y Davis, S., (2009). Calculus Early Transcendentals (9e ed.). Hoboken, NJ: John Wiley Sons, INC.
- Artigue, M. (2002). Learning Mathematics in a CAS Enviroment: The Genesis of a Reflection About Instrumentation and The Dialectics Between Technical and Conceptual Work. International Journal of Computers for Mathematical Learning, 7, 245-274.
- Atkins, N., Creegan, A. y Soan, P. (1995). You can lead students to DERIVE, but can you make them think? International DERIVE Journal, 2(1), 63-82.
- Balacheff, N. (1994). La transposition informatique. Note sur un nouveau problème pour la didactique. En M. Artigue et al. (eds.), Vingt ans de Didactique des Mathématiques en France (pp. 364-370). Grenoble: La Pensée Sauvage.
- Blumer, H. (1969). Symbolic interactionism. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall.
- Bonwell, C. y Eison, J. (1991). Active learning: Creating excitement in the classroom (ASHE-ERIC Higher Education Report No. 1). Washington, DC: George Washington University.
- Brody, C. (1995). Collaborative or cooperative learning? Complimentary practices of instructional reform. The Journal of Staff, Program, Organization Development, 12(3), 133-142.
- Buchberger, B. (1989). Should Students Learn Integration Rules? Rise-Linz Series no. 89-07.0. Linz: University of Linz.
- Caplow, J. A. H. y Kardash, C. A. M. (1995). Collaborative learning activities in gradate courses. Innovative Higher Education, 19(8), 207-220.
- Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactiqu. Recherches en Didactique des Mathématiques, 19, 221-266.
- Cohen, E. G. (1994). Restructuring the classroom: Conditions for productive small groups.

Review of Educational Research, 64(1), 1-35.

- D'Amore, B., y Godino, J. (2006). Punti di vista antropologico ed ontosemiotico in Didattica della Matematica. La matematica e la sua didattica, 1, 9-38.
- Davidson, N. y Worsham, T. (1992). Enhancing thinking through cooperative learning. New York: Teacher's College Press.
- De Lange, J. (1987). Mathematics, Insight and Meaning. Utrecht: OWOC.
- Defouad, B. (2000). Etude de genèses instrumentales liées à l'utilisation d'une calculatrice symbolique en classe de première S. Thèsede doctorat, Université Paris 7.
- Detterman, D. K. y Sternberg, R. J. (Eds) (1982). How and how much can intelligence be increased. Norwood, NJ: Ablex Publishing.
- Diamond, M. C. (1988). Enriching heredity: The impact of the enviroment on the anatomy of the brain. New York: The Free Press.
- Drijvers, P. (1995). White-box/black-box revisited. The International Derive Journal, 14(4), 3-14.
- Drijvers, P. (2000). Students encountering obstacles using a CAS. International Journal for Mathematical Learning, 5, 189-209.
- Drijvers, P. H. M. (2003). Learning algebra in a computer alegbra enviroment (doctorial dissertation). Utrecht, The Netherlands: Freudenthal Institute.
- Drijvers, P. y Doorman, M. (1997). The graphics calculator in mathematics education. The Journal of Mathematical Behaviour, 14(4), 425-440.
- Duval, R. (1993). Registres de Représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée, Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 5, 37-65.
- Duval, R. (1995). Sémiosis et Pensée Humaine. Berne: Peter Lang.
- Duval, R. (2006). A Cognitive Analysis of Problems of Comprehension in a Learning of Mathematics. Educational Studies in Mathematics, 61, 103-131.
- Feuerstein, R. (1980). Instrumental enrichment: An intervention program for cognitive modifiability. Baltimore, MD: University Park Press.
- Feuerstein, R. (1990). The theory of structural cognitive modifiability. En B. Z. Presseisen, R. J. Sternberg, K. W. Fischer, C. G. Knight, R. Feuerstein, Learning and thinking in styles: Classroom interaction. Washington DC: National Education Association
- Feuerstein, R., Feuerstein, S. (1991). Mediated learning experience: A theoretical review. En R. Feuerstein, P. S. Klein, A. J. Tannenbaum. Mediated learning experience (MLE): Theoretical, psychological and learning implications. London: Freund Publishing House.
- Font, V. Godino, D. J., y D'Amore, B. (2007). Ontosemiotic approach of representation in mathematics education. For the Learning of Mathematics, 27(2), 2-14.
- Font, V., Godino, J., y Contreras, A. (2008). From representations to onto-semiotic con-

figurations in analyzing mathematics teaching and learning processes. En L. Radford, G. Schubring, y F. Seeger (eds.), Semiotics in mathematics education (pp. 157-173). Rotterdam: Sense Publishers.

- Freudenthal, H. (1991). Revisiting Mathematics Education. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Gardner, H. (1985). The mind's new science: A history of the cognitive revolution. New York: Basic Books.
- Gijbels, D., van de Watering, G., Dochy, F., y van den Bossche, P. (2006). New learning enviroments and constructivism: The students' perspective. Instructional Science, 34, 213-226.
- Godino, J. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. Recherche en Didactique des Mathématiques, 22, 5-6.
- Goldenberg, E. (1987). Believing is seeing: How preconceptions influence the preceptions of graphs. Proceedings of the 11th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics, Vol 1. Montreal, pp. 197-204.
- Gravemeijer, K. P. E., Cobb, P., Bowers, J., y Whitenack, J. (2000). Symbolizing, Modeling, and Instructional Design. En P. Cobb, E. Yackel, K. McClain (eds.), Symbolizing and communicating in mathematics classrooms: Perspectives on discourse, tools, and instructional design, p. 225-273. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Greeno, J. G. (1997). On claims that answer the wrong questions. Educational Researcher, 26(1), 5-17.
- Greeno, J. G., Collins, A. M., y Resnick, L. B. (1996). Cognition and learning. En D. C. Berliner y R. C. Calfee (eds.), Handbook of educational psychology (pp. 15-46). New York: Simon Schuster Macmillan.
- Guin, D., y Trouche, L. (1999). The complex process of converting tools into mathematical instruments: the case of calculators. International Journal of Computers for Mathematical Learning, 3, 195-227.
- Guin, D., y Trouche, L. (2002). Mastering by the teacher of the instrumental genesis in Cas envorioments: necessity of intrumental orchestrations. Zentralblatt für Didaltik der Mathematik, 34(5), 204-211.
- Guzmán, J., Kieran, C., y Martínez, C. (2011). Simplification of rational algebraic expressions in a CAS environment: A technical-theoretical approach. En B. Ubuz (ed.), Proceedings of 35th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (Vol. 2, pp. 484-488) . Ankara, Turkey: PME Program Committee
- Hass, J., Weir, M. B. y Thomas, G. B. (2009). University Calculus:Early Transcendentals (2e ed.). Upper Saddle River, NJ: Pearson.

- Heid, M. K. (1988). Resequencing skills and concepts in applied calculus using the computer as a tool. Journal for Research in Mathematics Education, 19(1), 3-25.
- Hillel, J., Lee, L., Laborde, C. y Linchevski, L. (1992). Base functions through the lens of computer alegbra systems. Journal of Mathematical Behaviour, 11, 119-158.
- Hjemslev, L. (1943). Prolegomena to a theory of language. Madison: University of Wisconsin.
- Inhelder, B., y Cellerier, G. (1992). Le cheminement des découvertes de l'enfant. Neuchâtel: Delachaux et Niestlé.
- Jacobs, G. M. (1997). Cooperative learning or just grooming students: The difference makes a difference. Singapore: RELC Seminar.
- John-Steiner, V. y Mahn, H. (1996). Sociocultural approaches to learning and development: A Vygotskian framework. Educational Psychology, 31(3), 191-206.
- Johnson, D. W., Johnson, R. T., y Holubec, E. J. (1991). Cooperation in the Classroom. Edina, MN: Interaction Book Company.
- Johnson, D. W., Johnson, R. T., y Holubec, E. J. (2008). Cooperation in the Classroom (8e). Edina, MN: Interaction Book Company.
- Johnson, D. W., Johnson, R., Stanne, M. B., y Garibaldi, A. (1990). Impact of group processing on achievement in cooperative groups. Journal of Social Psychology, 130(4, 507-516.
- Kieran, C., y Saldanha, L. (2008). Designing tasks for the codevelopment of conceptual and technical knowledge in CAS activity: An example from factoring. En G. W. Blume y M. K. Heid (eds.), Research on technology and the teaching and learning of mathematics: Vol. 2 cases, and perspectives (pp. 393-414). Charlotte, NC: Information Age Publishing.
- Klein, P. S. (1991). Improving the quality of parental interaction with very low birth weight children: A longitudinal study. Infant Mental Health Journal, 12, 321-337.
- Klien, P. S., Zarur, S., y Feldman, R. (2002). Mediation in a sibling context: The relations of older siblings mediating behavior and younger siblings task performance. Infant and Child Development, 11, 321-333.
- Kozulin, A. (1990). Vygotsky's psychology: A biography of ideas. Cambridge, MA: Harvard University Press.
- Kozulin, A. (1991). Mediated learning and education: Vygotsky and Feuerstein. Philadelphia, PA: Research for better Schools.
- Kuhn, D. (2007). Is direct instruction an answer to the right questions? Educational Psychologist, 42, 109-113.
- Kutzler, B. (1994). DERIVE ? the future of teaching mathematics. International DERIVE Journal, 1(1), 37-48.

- Lagrange, J. B. (2000). L'Intégration d'Instruments Informatiques dans l'Enseignement: une Approche par les Techniques. Educational Studies in Mathematics, 43(1), 1-30.
- Lagrange, J. B. (2003). Learning techniques and concepts using CAS: A practical and theoretical reflection. En J. T. Fey (ed.), Computer Algebra Systems in secondary school mathematics education (pp. 269-283). Reston, VA: Nationa Council of Teachers of Mathematics.
- Lagrange, J. B. (2005). Using symbolic calculators to study mathematics. En D. Guin, K. Ruthven, y L. Trouche (eds.), The didactical challenge of symbolic calculators (pp. 113-135). New York: Springer.
- Lagrange, J. B. et al. (2000). De l'analyse de travaux concernant les TICE à la définition d'une problématique de leur intégration à l'enseignement, Rapport de recherche. IREM Paris 7.
- Lagrange, J. B. et al. (2001). A meta study on IC technologies in education. En M. van den Heuvel-Panhuizen. Proceedings of the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematical Eduacation, vol 1 (pp. 111-122). Utrecht: Freudenthal Institue.
- Lakoff, G., y Nuñez, R. (2000). Where mathematics froms from. New York: Basic Books.
- Larson, R. Y Edwards, B. H. (2010). Calculus (9e ed.). Belmont, CA: Brooks/Cole.
- Lefrancois, G. R: (1997). Psychology for teachers (9 ed.). Belmont, CA: Wadsworth.
- Loyens, S. M. M. (2007). Students' conceptions of constructivist learning. Tesis Doctoral. Rotterdam, the Netherlands: Optima Grafische Communicatie.
- Loyens, S. M. M., Rikers, R. M. J. P., y Schmidt, H. G. (2007). Students' conceptions of distinctconstructivist assumptions. European Journal of Psychology of Education, 12, 179-199.
- Mead, G. H. (1974). Mind, self, and society. Chicago: University of Chicago Press.
- Meyer, R. F. (2004). Should There Be a Three-Strikes Rule Against Pure Discovery Learning? A Case for Guided Methods of Instruction. American Psychologist, 59 (1), 14-19.
- Monaghan, J. (2007). Computer algebra, instrumentation and the anthropological approach. The International Journal for Technology in Mathematics Education, 14(2), 63-72.
- Orr, M. T., (1998). Opportunities and chances: lessons learned from a community youth services effort. New York: Peter Lang.
- Panitz, T. (1997). Collaborative versus Cooperative Learning: Comparing the Two Defintions Helps Understand the Nature on Interactive Learning. Cooperative Learning and College Teaching, 8(2).
- Perkins, D. N., Salomon, G. (1988). Teaching for transfer. Educational Leadership, 46(1), 22-32.

- Phillips, D.C. (1998). How, why, what, when, and where: Prespectives on constructivism in psychology and education. Issues in Educaction, 3, 151-194.
- Piaget, J. (1980). Cahier de la foundation archives. Genéve: CIEG.
- Pierce, R. (1999). Using CAS as a scaffolding for calculus: Some observations. En W. Spunde, P. Cretchley y R. Hubbard (eds.), The Challenge of Diversity: Proceedings of the Delta-99 Symposium on Undergraduate Mathematics (pp. 172-176). Brisbane: Delta 99 Committee.
- Presseisen, B. Z. (1985). Thinking skills: Meaning, models, materials. En A. Costa (ed.), Developing minds. Alexandria, VA: ASCD.
- Qin, Z., Johnson, D. W., y Johnson, R. W. (1995). Cooperative versus competitive efforts and problem solving. Review of Educational Research, 65(2), 129-143.
- Radford, L. (2003). Gestures, speech, and the sprouting of signs. Mathematical Thinking and Learning, 5(1), 37-70.
- Radford, L. (2005). Body, tool, and symbol: Semiotic reflections on cognition. En E. Simmt y B. Davis (eds.), Proceedings of the 2004 annual meeting of the Canadian mathematics education study group (pp. 111-117).
- Radford, L. (2006). The anthropology of meaning. Educational Studies in Mathematics, 61(1-2), 39-65.
- Radford, L. (2008). The ethics of being and knowing: Towards a cultural theory of learning. En L. Radford, G. Schubring y F. Seeger (eds.), Semiotics in mathematical education (pp. 215-234). Rotterdam: Sense Publishers.
- Rogoff, B. y Wertsch, J. V. (Eds) (1984). Children's learning in the "Zone of Proximal Development". San Fransico, CA: Jossey-Bass.
- Santi, G. (2011). Objectification and semiotic function. Educational Studies in Mathematics, 77, 285-311.
- Savery, J. R. y Duffy, T. M. (1995). Problem Based Learning: An instructional model and its constructivist framework. Educational Technology, 35, 31-38.
- Slavin, R. E: (1991). Synthesis of reseach on cooperative learning. Educational Leadership, 48(5), 71-82.
- Slavin, R. E. (1996). Research on cooperative learning and achievement: What we know, what we need to know. Contemporay Educational Psychology, 21, 43-69.
- Sternberg, R. J. (1990). Changing children's minds: Feurstein's revolution in the teaching of intelligence. New York: Cambridge University Press.
- Stewart, J., (2008). Calculus Early Transcendentals (6e ed.). Belmont, CA: Thomson Higher Education.
- Taber, K. S. (2006). Beyond Constructivism: the Progressive Research Programme into

Learning Science. Studies in Science Education, 42, 125-184.

- Tan, S. T., (2011). Calculus: Early Transcendentals. Belmont, CA: Brooks/Cole.
- Tharp, R. G. y Gallimore, R., (1989). Rousing schools to life. American Educator, 13(2), 20-25.
- Treffers, A. (1987). Three Dimensions. Dordrecht: Reidel.
- Trouche, L. (1997). A propos de l'apprentissage de functions dans un environnement de calculatrices, étude des rapports entre processus de conceptualisation et processus d'instrumentation. Thése de doctorat, Univerité de Montpellier.
- Trouche, L. (2000). La parabole du gaucher et de la casserole à bec verseur: étude des processus d'apprentissage dans un environnement de calcularices symboliques. Educational Studies in Mathematics, 41, 239-264.
- Tzuriel, D. (1999): Parent-child mediated learning transactions as determinants of cognitive modifiability: Recent research and future directions. Genetic, Social, and General Psychology Monographs, 125, 109-156.
- Tzuriel, D., Shamir, A. (2010). Mediation strategies and cognitive modifiability in young children as a funcion of peer mediation with young children (PMYC) program and traning in analogies versus math tasks. Journal of Cognitive Psychology and educacion, 9, 48-72.
- Ullmann, S. (1962). Semántica. Introducción a la ciencia del significado. Madrid: Aguilar.
- Van Reeuwijk, M. (1995). Student's knowledge of algebra. En: Proceedings of the 19th International Conference for the Psychology of Mathematics Education. pp. 135-160.
- Vérillon, P. (2000). Instruments and cognition: Piaget and Vygotsky revisited in search of learning model for technology education. The Journal of technology Studies, 26(1), 3-10.
- Vérillon, P. y Rabardel, P. (1995). Cognition and artifacts: A contribution to the study of thought in relation to instrumented activity. European Journal of Psychology of Education, 10(1), 77-101.
- Vygotsky, L. S. (1978). Mind in society: The development of higher psychological processes. Cambridge, MA: Harvard University Press.
- Vygotsky, L. S. (1986). Thought and language. Cambridge, MA: MIT-Press
- Wertsch, J.V. (1990). The voice of rationality in a sociocultural approach to mind. En L.C. Moll (ed.), Vygotsky and education: Instructional implications and applications of socio-historical psychology. New York, NY: Cambridge University Press, 111-126.
- Windschitl, M. (2002). Framing constructivism in practice as the negotiation of dilemas: An analysis of the conceptual, pedagogical, cultural, and political challenges facing teachers. Review of Educational Research, 72, 131-175.
- Wittgenstein, L. (1953). Philosophical Investigations. Oxford: Blackwell.

Apéndice A

Primeras Versiones

A.1. Actividad 1:Diferencias

A.1.1. Versión 1

Actividad 1b
Diferencias
Versión 1, 7/10/13

OBJETIVOS:

- Entender el concepto de una diferencia matemática
- Formulación y aplicación de Δx & Δy

A. Diferencia Matemática

Parte I (con lápiz y papel): Concepto General

La diferencia matemática es el resultado de restas, en donde se resta un sustraendo de un minuendo. Por ejemplo, la diferencia entre 8 (minuendo) y 3 (sustraendo) es 5.

a) Completa la siguiente tabla. Pase el texto de la columna 1 a una sintaxis matemático en la columna 2 y escriba el resultado de la diferencia en la columna 3.

Texto	Sintaxis	Diferencia
La diferencia entre 93 y 34		
Una cuenta de ahorros tiene $2383.87 al inicio del mes y $2873.92 al final. ¿Cuál fue la diferencia a lo largo del mes?		
Se saca un pedazo de carne a descongelar, al sacarse del congelador se encuentra a -3^0 C y después de 5 horas se encuentra a 24^0C. ¿Cuál es la diferencia de temperatura después de las 5 horas?		
Un automóvil contiene un tanque de 90 litros. Se llena al comienzo de la semana y al fin de ella, se ve que el tanque contiene 32.3 litros. ¿Cuál es la diferencia de litros en el tanque?		

b) Considere el tercer y cuarto caso del inciso a, ¿qué observaciones nota al utilizar números negativos así como los valores qué puede tomar una diferencias?

c) ¿Qué indica una diferencia negativa?

d) Observe la siguiente en la primera columna se encuentra una secuencia de cinco (5) números, observe la tendencia (si existe alguna) y anótela en la segunda columna.

Secuencia	Observaciones
2, 4, 6, 8, 10	
45, 38, 31, 24, 17	
-8.75, -3.5, 1.75, 7, 12.25	
1, 9, 17, 27, 41	

Considere el conjunto de datos, en donde *i* corresponde a una variable independiente mientas tanto *u* corresponde a la variable dependiente.

i	1	2	3	4	5	6
u_i	8	11	14	17	20	23

e) Considerando el conjunto de datos previo, ¿qué valor tiene u_4? ¿Qué significado tiene u_i?

f) Utilizando el conjunto de datos mencionado, completa la siguiente tabla.

Sintaxis	Representación Algebraica	Resultado
$u_5 - u_4$		
$u_2 - u_1$		
$u_3 - u_2$		
$u_5 - u_3$		
$u_3 - u_6$		
$u_4 - u_1$		

En matemáticas el operador delta (Δ) representa un cambio. Siendo un operador matemático puede aplicarse a cualquier variable. Por ejemplo, Δx representa un cambio en x mientras que ΔT representa un cambio en T (muchas veces dicha variable representa una temperatura.

g) Considerando el concepto de Δ y utilizando el conjunto de datos, complete la siguiente tabla.

Sintaxis	Δu	Δi
$u_5 - u_4$		
$u_2 - u_1$		
$u_3 - u_2$		
$u_5 - u_3$		
$u_3 - u_6$		
$u_4 - u_1$		
$u_{i+1} - u_i$		
$u_{i+2} - u_i$		
$u_{i+3} - u_i$		

h) Considere las ultimas filas de la tabla anterior (subíndices que contienen la variable i). ¿Qué significan con respecto a las diferencias en i? ¿Para cualquier i, son los mismos valores de Δu?

i) Compruebe su respuesta del inciso h utilizando 3 valores de i.

	i	Δu
$u_{i+1} - u_i$		
$u_{i+1} - u_i$		
$u_{i+1} - u_i$		
$u_{i+2} - u_i$		
$u_{i+2} - u_i$		
$u_{i+2} - u_i$		
$u_{i+3} - u_i$		
$u_{i+3} - u_i$		
$u_{i+3} - u_i$		

j) ¿A qué conclusiones llega con respecto a los cambios en *i* así como los cambios en *u*?

Parte 2 (con CAS): Formulación de Δx & Δy

Si una variable *y* depende de una variable *x* de tal manera que cada valor de *x* determina exactamente un valor de *y*, entonces se dice que ***y* es una función de *x***. Cuarto métodos comunes para la representación de funciones son: numéricamente por tablas, geométricamente por graficas, algebraicamente por formulas y/o verbalmente. Una **función** *f* es una regla que asocia una salida única con cada entrada. Si la entrada es denotada por *x*, entonces la salida es denotada por *f(x)* (se lee como *"f* de *x*"). Para una entrada dada *x*, la salida de la función *f* se denomina el valor de *f* en *x*. Algunas veces se denomina la salida por una sola letra, por ejemplo *y*, y escribir

$$y = f(x)$$

Esta ecuación expresa *y* como una función de *x*; la variable *x* se llama la ***variable independiente*** de *f*, y la variable *y* se llama la ***variable dependiente*** de *f.*

Coordenadas cartesianas es un sistema de coordenadas de dos dimensiones, denominado como el plano cartesiano, utilizada para la representación grafica de una función. En el eje horizontal, conocido como el eje "x", se encuentran las variables independientes mientras que en el eje vertical, conocido como el eje "y", se encuentran las variables dependientes. Siendo un plano, cada punto se puede expresar por sus coordenadas (x, y).

Una herramienta útil dentro del sistema CAS, es el comando "tal que", **|**. Dicho comando se elije presionando el botón azul "CTRL" y el botón "=", el cual se encuentra debajo de "CTRL" y después seleccionar "**|".** El sintaxis para utilizar el comando es el siguiente, función**|** variable = valor.

a) Considere la función $2x^2 + 5x - 2$, llene la siguiente tabla con los valores de x respectivos.

Valor de x	Operación con lápiz	Resultado de CAS
-3		
-2		
-1.25		
-0.5		
0		
0.25		
0.89		

A.1.2. Versión 2

Actividad 1b
Diferencias
Versión 2, 28/11/13

OBJETIVOS:

- Entender el concepto de una diferencia matemática
- Formulación y aplicación de Δx & Δy

A. Diferencia Matemática

Parte I (con lápiz y papel): Concepto General

La diferencia matemática es el resultado de restas, en donde se resta un sustraendo de un minuendo. Por ejemplo, la diferencia entre 3 (sustraendo) y 8 (minuendo) es 5. En la vida cotidiana cuando se expresa una diferencia, típicamente se refiere a la diferencia entre un valor inicial (sustraendo) y un valor final (minuendo).

a) Completa la siguiente tabla. Pase el texto de la columna 1 a una sintaxis matemático en la columna 2 y escriba el resultado de la diferencia en la columna 3.

Texto	Sintaxis	Diferencia
Una cuenta de ahorros tiene \$2383.87 al inicio del mes y \$2873.92 al final. ¿Cuál fue la diferencia a lo largo del mes?		
Se saca un pedazo de carne a descongelar, al sacarse del congelador se encuentra a -3^0 C y después de 5 horas se encuentra a 24^{0}C. ¿Cuál es la diferencia de temperatura después de las 5 horas?		
Un automóvil contiene un tanque de 90 litros. Se llena al comienzo de la semana y al fin de ella, se ve que el tanque contiene 32.3 litros. ¿Cuál es la diferencia de litros en el tanque a lo largo de la semana?		

b) Observe las diferencias de los tres (3) casos del inciso anterior, ¿existe una diferencia con signo negativo? En caso afirmativo, ¿qué representa con respecto a la cantidad (aumenta o disminuya)?

c) ¿Qué concluyes a partir del inciso anterior con respecto al signo de la diferencia? Considere signos positivos, negativos y valores de cero.

d) Observe la siguiente en la primera columna se encuentra una secuencia de cinco (5) números, observe la tendencia (si existe alguna) y anótela en la segunda columna.

Secuencia	Observaciones
2, 4, 6, 8, 10	
45, 38, 31, 24, 17	
-8.75, -3.5, 1.75, 7, 12.25	
1, 9, 17, 27, 41	

Considere el conjunto de datos, en donde i corresponde a una variable independiente mientas tanto u corresponde a la variable dependiente. Por lo tanto u_i corresponde a u evaluado en cualquier valor de i. Por ejemplo, u_3 indica el valor de u cuando i es 3 lo cual es 14.

i	1	2	3	4	5	6
u_i	8	11	14	17	20	23

e) Utilizando el conjunto de datos mencionado, completa la siguiente tabla.

Sintaxis	Representación Algebraica	Resultado
$u_5 - u_4$		
$u_2 - u_1$		
$u_3 - u_2$		
$u_5 - u_3$		
$u_3 - u_6$		
$u_4 - u_1$		

En matemáticas el operador delta (Δ) representa un cambio. Siendo un operador matemático puede aplicarse a cualquier variable. Por ejemplo, Δx representa un cambio en x mientras que ΔT representa un cambio en T (muchas veces dicha variable representa una temperatura.

f) Considerando el concepto de Δ y utilizando el conjunto de datos, complete la siguiente tabla.

Sintaxis	Δu	Δi
$u_5 - u_4$		
$u_2 - u_1$		
$u_3 - u_1$		
$u_5 - u_3$		
$u_3 - u_6$		
$u_4 - u_1$		

g) Analice la tabla del inciso f, ¿hay una relación con respecto a Δi y Δu? ¿Qué puede concluir con respecto a una diferencia, es constante?

i) Compruebe su respuesta del inciso h utilizando 3 valores de *i*.

	i	Δi	Δu
$u_{i+1} - u_i$	1		
$u_{i+2} - u_i$	1		
$u_{i+3} - u_i$	1		
$u_{i+1} - u_i$	2		
$u_{i+2} - u_i$	2		
$u_{i+3} - u_i$	2		
$u_{i+1} - u_i$	3		
$u_{i+2} - u_i$	3		
$u_{i+3} - u_i$	3		

j) ¿A qué conclusiones llega con respecto a los cambios en *i* así como los cambios en *u*?

Parte 2 (con CAS): Formulación de Δx *y* Δy

Si una variable *y* depende de una variable *x* de tal manera que cada valor de *x* determina exactamente un valor de *y*, entonces se dice que ***y* es una función de *x***. Cuatro métodos comunes para la representación de funciones son: numéricamente por tablas, geométricamente por graficas, algebraicamente por formulas y/o verbalmente. Una **función** *f* es una regla que asocia una salida única con cada entrada. Si la entrada es denotada por *x*, entonces la salida es denotada por *f(x)* (se lee como *"f* de *x*"). Para una entrada dada *x*, la salida de la función *f* se denomina el valor de *f* en *x*. Algunas veces se denomina la salida por una sola letra, por ejemplo *y*, y escribir

$$y = f(x)$$

Esta ecuación expresa *y* como una función de *x*; la variable *x* se llama la ***variable independiente*** de *f*, y la variable *y* se llama la ***variable dependiente*** de *f.*

Coordenadas cartesianas es un sistema de coordenadas de dos dimensiones, denominado como el plano cartesiano, utilizada para la representación grafica de una función. En el eje horizontal, conocido como el eje "x", se encuentran las variables independientes mientras que en el eje vertical, conocido como el eje "y", se encuentran las variables dependientes. Siendo un plano, cada punto se puede expresar por sus coordenadas (x, y).

Una herramienta útil dentro del sistema CAS, es el comando "tal que", **|**. Dicho comando se elije presionando el botón azul "CTRL" y el botón "=", el cual se encuentra debajo de "CTRL" y después seleccionar "**|".** El sintaxis para utilizar el comando es el siguiente, función**|** variable = valor.

a) Considere la función $2x^2 + 5x - 2$, llene la siguiente tabla con los valores de x respectivos.

Valor de x	Operación con lápiz	Resultado de CAS
-3		
-2		
-1.25		
-0.5		
0		
0.25		
0.89		

A.2. Actividad 2: Pendientes

A.2.1. Versión 1

Actividad 2b
Pendientes
Versión 1, 10/10/13

OBJETIVOS:

- Formulación del concepto de pendiente
- Derivación de la ecuación de una línea recta
- Formulación y aplicación de $\Delta y/\Delta x$

A. Pendiente

Parte I (con lápiz y papel): Concepto de Pendiente y Rectas

a) Un carro recorre 245 kilómetros con 18 litros de gasolina.

1) Si el mismo carro gasta 30 litros de gasolina, ¿qué distancia viajó?

2) Explique la lógica utilizada en el problema anterior y las suposiciones hechas.

3) ¿Cuál es la razón de cambio en kilómetros por litros de gasolina y qué significa?

4) Utilizando el dato original, 18 litros para 245 litros y el dato del problema 1, grafique dichos puntos y trace la recta. Formule una expresión matemática para la pendiente.

5) ¿Qué similitudes hay entre un razón de cambio de cambio y una pendiente?

El modelo matemático mas sencillo para relacionar dos variables es la **ecuación lineal de dos variables** $y = mx + b$. Esta ecuación se llama *lineal* porque su grafica es una línea. Cuando $x = 0$, se obtiene

$$y = m(0) + b$$
$$= b$$

Por lo tanto, la línea cruza el eje y en $y = b$. En otras palabras, el intercepto y es $(0, b)$. La inclinación o pendiente es m. La pendiente de una línea no vertical es el numero de unidades que la recta sube (o cae) verticalmente por cada unidad de cambio horizontal de izquierda a derecha, como se nota en la figura 1 y 2.

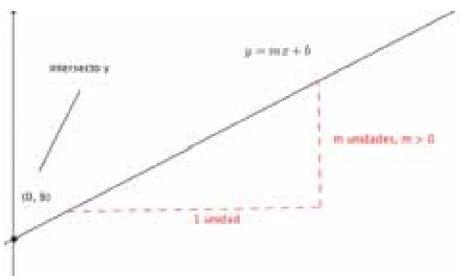


Figura 1. Línea recta con pendiente positivo

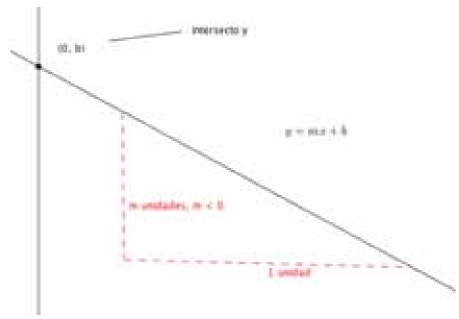


Figura 2. Línea recta con pendiente negativa

b) Considere la ecuación de la recta, y = 2x + 3. Identifique la variable independiente y la variable dependiente. Elija por lo menos 5 valores dependientes y haga una tabla con los valores independientes correspondientes.

c) Grafique la línea recta expresada por la ecuación, y = 2x + 3.

d) Considere los puntos (6, 9) y (0, 11). Sin hacer ningún calculo, ¿la pendiente es positiva o negativa? Compruebe gráficamente y después analíticamente.

e) Utilizando los puntos generales, (x_n, y_n), donde n es n-ésimo punto. Calculo la pendiente entre el punto 1 y 2.

f) Exprese la ecuación de la pendiente para puntos generales del inciso e utilizando el concepto de Δ.

Parte II (con CAS): Aplicación

La datación por radiocarbono, es una técnica de datación radiométrica que utiliza el isótopo carbono-14 para la determinación de la edad de materiales que contienen carbono. Los siguientes datos obtenidos experimentalmente, demuestran la cantidad de C-14 para un material a lo largo del tiempo.

Antigüedad del Material (miles de años)	Cantidad de C-14	Antigüedad del Material (miles de años)	Cantidad de C-14
0	15.30	9	5.15
1	13.56	10	4.56
2	12.01	11	4.04
3	10.64	12	3.58
4	9.43	13	3.17
5	8.35	14	2.81
6	7.40	15	2.49
7	6.56	16	2.21
8	5.81	17	1.95

a) Encuentre la pendiente entre los siguientes miles de años: i) 6 a 14, ii) 6 a 12, iii) 6 a 10, iv) 6 a 8.

b) ¿Qué observaciones tienes del ejercicio anterior?

Dentro del sistema CAS, se pueden graficar datos. Utilizando la hoja de calculo ingrese los datos experimentales del problema anterior dentro de esta sección. En la columna A ingrese los años y llame dicha columna "años" y en la columna B ingrese los datos de C-14 y llame dicha columna "C14". Dentro de **Home,** elija **Datos y Estadísticas** y presione **Enter**. Utilizando el **Navegador**, mueva la flecha hacia abajo y elija que la variable x sea "años". Después, mueva la flecha hacia la izquierda y elija que la variable y sea "C14". Ahora deben aparecer los datos graficados.

Se puede hacer un ajuste de datos para los datos graficados. Dentro de la gráfica, presione **Menú**, **4: Analizar, 6: Regresión.** Dentro de estas opciones existen varios ajuste disponibles.

c) Haga un ajuste de datos utilizando **Lineal (mx +b)** y **exponencial**. ¿Qué sucede? ¿Cuál se ajusta mejor?

Dentro de la hoja de cálculo, también se pueden ver datos de ajuste de datos. En la hoja de cálculo donde están los datos presione **menú, 4: Estadística, 1: Cálculos estadísticos, 3: Regresión lineal (mx + b).** Para lista *x* ingrese A[], para la lista *y* ingrese B[] y en la primera columna de resultado ingrese c[].

d) ¿Qué información aparece?

e) Repita el procedimiento para una **A: Regresión exponencial…** ¿Qué información aparece? ¿Se llega a la misma conclusión que en el inciso c?

f) Utilizando la ecuación del mejor ajuste. Encuentre la velocidad promedio dentro los siguientes miles de años: i) 6 a 14, ii) 6 a 12, iii) 6 a 10, iv) 6 a 8.

g) ¿Qué observas de los resultados obtenidos en el inciso f y en el inciso a?

h) Considerando las observaciones de esta actividad. ¿Qué puede decir de la pendiente de una función con respecto a la pendiente entre dos puntos? ¿Seria el mismo caso si la función no es una línea recta?

A.2.2. Versión 2

Actividad 2b
Pendientes
Versión 2, 29/11/13

OBJETIVOS:

- Formulación del concepto de pendiente
- Derivación de la ecuación de una línea recta
- Formulación y aplicación de $\Delta y/\Delta x$

A. Pendiente

Parte I (con lápiz y papel): Concepto de Pendiente y Rectas

a) Un carro recorre 245 kilómetros con 18 litros de gasolina.

1) Si el mismo carro gasta 30 litros de gasolina, ¿qué distancia viajó?

2) Explique la lógica utilizada en el problema anterior y las suposiciones hechas.

3) ¿Cuál es la razón de cambio en kilómetros por litros de gasolina y qué significa?

4) Utilizando el dato original, 18 litros para 245 litros y el dato del problema 1, grafique dichos puntos y trace la recta. Formule una expresión matemática para la pendiente.

5) ¿Qué similitudes hay entre un razón de cambio y una pendiente?

El modelo matemático mas sencillo para relacionar dos variables es la **ecuación lineal de dos variables** $y = mx + b$. Esta ecuación se llama *lineal* porque su grafica es una línea. Cuando $x = 0$, se obtiene

$$\begin{aligned} y &= m(0) + b \\ &= b \end{aligned}$$

Por lo tanto, la línea cruza el eje y en $y = b$. En otras palabras, el intercepto y es $(0, b)$. La inclinación o pendiente es m. La pendiente de una línea no vertical es el numero de unidades que la recta sube (o cae) verticalmente por cada unidad de cambio horizontal de izquierda a derecha, como se nota en la figura 1 y 2.

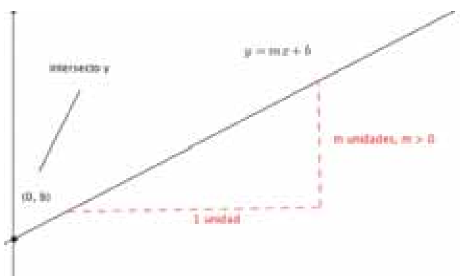


Figura 1. Línea recta con pendiente positivo

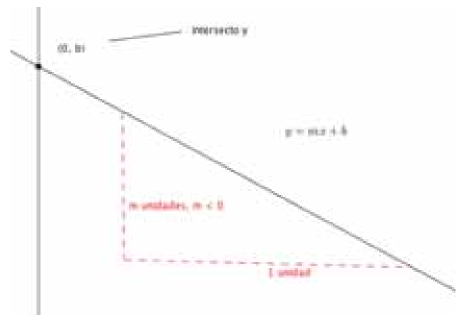


Figura 2. Línea recta con pendiente negativa

b) Considere la ecuación de la recta, $y = 2x + 3$. Identifique la variable independiente y la variable dependiente. Elija por lo menos 5 valores dependientes y haga una tabla con los valores independientes correspondientes.

c) Grafique la línea recta expresada por la ecuación, $y = 2x + 3$.

d) Considere los puntos (6, 9) y (0, 11). Sin hacer ningún calculo, ¿la pendiente es positiva o negativa? Compruebe gráficamente y después analíticamente.

e) Utilizando los puntos generales, (x_n, y_n), donde n es n-ésimo punto. Calculo la pendiente entre el punto 1 (x_1, y_1) y 2 (x_2, y_2).

f) Exprese la ecuación de la pendiente para puntos generales del inciso e utilizando el concepto de Δ.

Parte II (con CAS): Aplicación

La datación por radiocarbono, es una técnica de datación radiométrica que utiliza el isótopo carbono-14 para la determinación de la edad de materiales que contienen carbono. Los siguientes datos obtenidos experimentalmente, demuestran la cantidad de C-14 para un material a lo largo del tiempo.

Antigüedad del Material (miles de años)	Cantidad de C-14	Antigüedad del Material (miles de años)	Cantidad de C-14
0	15.30	9	5.15
1	13.56	10	4.56
2	12.01	11	4.04
3	10.64	12	3.58
4	9.43	13	3.17
5	8.35	14	2.81
6	7.40	15	2.49
7	6.56	16	2.21
8	5.81	17	1.95

a) Encuentre la pendiente entre los siguientes miles de años: i) 6 a 14, ii) 6 a 12, iii) 6 a 10, iv) 6 a 8.

b) ¿Qué observaciones nota en el inciso anterior con respecto a la diferencia de años y el valor de las pendientes?

Dentro del sistema CAS, se pueden graficar datos. Utilizando la hoja de calculo ingrese los datos experimentales del problema anterior dentro de esta sección. En la columna A ingrese los años y llame dicha columna “yrs” y en la columna B ingrese los datos de C-14 y llame dicha columna “C14”. Dentro de **Home,** elija **Datos y Estadísticas** y presione **Enter**. Utilizando el **Navegador**, mueva la flecha hacia abajo y elija que la variable x sea “yrs”. Después, mueva la flecha hacia la izquierda y elija que la variable y sea “C14”. Ahora deben aparecer los datos graficados.

Se puede hacer un ajuste de datos para los datos graficados. Dentro de la gráfica, presione **Menú**, **4: Analizar, 6: Regresión.** Dentro de estas opciones existen varios ajuste disponibles.

c) Haga un ajuste de datos utilizando **Lineal (mx +b)**. ¿Qué sucede? Repita el ajuste utilizando **exponencial**. ¿Cuál se ajusta mejor?

Dentro de la hoja de cálculo, también se pueden ver datos de ajuste de datos. En la hoja de cálculo donde están los datos presione **menú, 4: Estadística, 1: Cálculos estadísticos, 3: Regresión lineal (mx + b).** Si no encuentra la hoja de calculo, puede presionar **ctrl** y los botones de derecha o izquierda para cambiar entre las pantallas. Para lista *x* ingrese A[], para la lista *y* ingrese B[] y en la primera columna de resultado ingrese c[].

d) ¿Qué información aparece?

e) Repita el procedimiento para una **A: Regresión exponencial…** ¿Qué información aparece? ¿Se llega a la misma conclusión que en el inciso c?

f) Utilizando la ecuación y constantes del mejor ajuste (lineal o exponencial). Encuentre la pendiente dentro los siguientes miles de años: i) 6 a 14, ii) 6 a 12, iii) 6 a 10, iv) 6 a 8. Calcule dichas pendientes dentro de la hoja de calculo. Si cambia el nombre de la columna a “yrs” y “c14” va aparecer los datos utilizados en la otra hoja de calculo.

g) ¿Qué observas de los resultados obtenidos en el inciso f y en el inciso a?

h) Considerando las observaciones de esta actividad. ¿Qué puede decir de la pendiente de una función con respecto a la pendiente entre dos puntos, son casi iguales? ¿Seria el mismo caso si la función no es una línea recta?

A.2.3. Versión 3

Actividad 2b
Pendientes
Versión 3, 9/12/13

OBJETIVOS:

- Formulación del concepto de pendiente
- Derivación de la ecuación de una línea recta
- Formulación y aplicación de $\Delta y/\Delta x$

A. Pendiente

Parte I (con lápiz y papel): Concepto de Pendiente y Rectas

a) Un carro recorre 245 kilómetros con 18 litros de gasolina.

1) Si el mismo carro gasta 30 litros de gasolina, ¿qué distancia viajó?

2) Explique la lógica utilizada en el problema anterior y las suposiciones hechas.

3) ¿Cuál es la razón de cambio en kilómetros por litros de gasolina y qué significa?

4) Utilizando el dato original, 18 litros para 245 litros y el dato del problema 1, grafique dichos puntos y trace la recta. Formule una expresión matemática para la pendiente.

5) ¿Qué similitudes hay entre un razón de cambio y una pendiente?

El modelo matemático mas sencillo para relacionar dos variables es la **ecuación lineal de dos variables** $y = mx + b$. Esta ecuación se llama *lineal* porque su grafica es una línea. Cuando $x = 0$, se obtiene

$$\begin{aligned} y &= m(0) + b \\ &= b \end{aligned}$$

Por lo tanto, la línea cruza el eje y en $y = b$. En otras palabras, el intercepto y es $(0, b)$. La inclinación o pendiente es m. La pendiente de una línea no vertical es el numero de unidades que la recta sube (o cae) verticalmente por cada unidad de cambio horizontal de izquierda a derecha, como se nota en la figura 1 y 2.

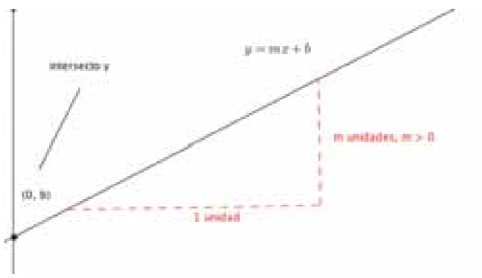


Figura 1. Línea recta con pendiente positivo

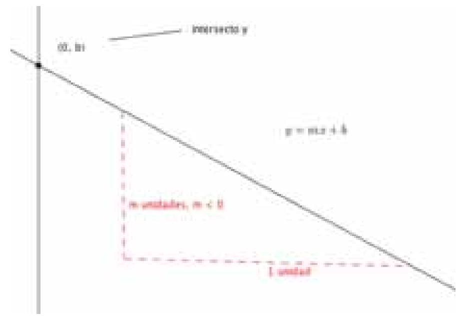


Figura 2. Línea recta con pendiente negativa

b) Considere la ecuación de la recta, $y = 2x + 3$. Identifique la variable independiente y la variable dependiente. Elija por lo menos 5 valores dependientes y haga una tabla con los valores independientes correspondientes.

c) Grafique la línea recta expresada por la ecuación, $y = 2x + 3$.

d) Considere los puntos (6, 9) y (0, 11). Sin hacer ningún calculo, ¿la pendiente es positiva o negativa? Compruebe gráficamente y después analíticamente.

e) Utilizando los puntos generales, (x_n, y_n), donde n es n-ésimo punto. Calculo la pendiente entre el punto 1 (x_1, y_1) y 2 (x_2, y_2).

f) Exprese la ecuación de la pendiente para puntos generales del inciso e utilizando el concepto de Δ.

Parte II (con CAS): Aplicación

La datación por radiocarbono, es una técnica de datación radiométrica que utiliza el isótopo carbono-14 para la determinación de la edad de materiales que contienen carbono. Los siguientes datos obtenidos experimentalmente, demuestran la cantidad de C-14 para un material a lo largo del tiempo.

Antigüedad del Material (miles de años)	Cantidad de C-14	Antigüedad del Material (miles de años)	Cantidad de C-14
0	15.30	9	5.15
1	13.56	10	4.56
2	12.01	11	4.04
3	10.64	12	3.58
4	9.43	13	3.17
5	8.35	14	2.81
6	7.40	15	2.49
7	6.56	16	2.21
8	5.81	17	1.95

a) Encuentre la pendiente entre los siguientes miles de años: i) 6 a 14, ii) 6 a 12, iii) 6 a 10, iv) 6 a 8.

b) ¿Qué observaciones nota en el inciso anterior con respecto a la diferencia de años y el valor de las pendientes?

Dentro del sistema CAS, se pueden graficar datos. Utilizando la hoja de calculo ingrese los datos experimentales del problema anterior dentro de esta sección. En la celda que tiene la letra A (celda superior) ingrese los años y llame dicha columna “yrs” y en la celda que contiene la letra B ingrese los datos de C-14 y llame dicha columna “C14”. Dentro de **Home,** elija **Datos y Estadísticas** y presione **Enter**. Utilizando el **Navegador**, mueva la flecha hacia abajo y elija que la variable x sea “yrs”. Después, mueva la flecha hacia la izquierda y elija que la variable y sea “C14”. Ahora deben aparecer los datos graficados.

Se puede hacer un ajuste de datos para los datos graficados. Dentro de la gráfica, presione **Menú**, **4: Analizar, 6: Regresión.** Dentro de estas opciones existen varios ajuste disponibles.

c) Haga un ajuste de datos utilizando **Lineal (mx +b)**. ¿Qué sucede? Repita el ajuste utilizando **exponencial**. ¿Cuál se ajusta mejor?

Dentro de la hoja de cálculo, también se pueden ver datos de ajuste de datos. En la hoja de cálculo donde están los datos presione **menú, 4: Estadística, 1: Cálculos estadísticos, 3: Regresión lineal (mx + b).** Si no encuentra la hoja de calculo, puede presionar **ctrl** y los botones de derecha o izquierda para cambiar entre las pantallas. Para lista *x* ingrese A[], para la lista *y* ingrese B[] y en la primera columna de resultado ingrese c[].

d) ¿Qué información aparece?

e) Repita el procedimiento para una **A: Regresión exponencial…** ¿Qué información aparece? ¿Se llega a la misma conclusión que en el inciso c?

f) Utilizando la ecuación y constantes del mejor ajuste (lineal o exponencial). Encuentre la pendiente dentro los siguientes miles de años: i) 6 a 14, ii) 6 a 12, iii) 6 a 10, iv) 6 a 8. Calcule dichas pendientes dentro de la hoja de calculo. Si cambia el nombre de la columna a “yrs” y “c14” va aparecer los datos utilizados en la otra hoja de calculo.

g) ¿Qué observas de los resultados obtenidos en el inciso f y en el inciso a? ¿A qué se debe?

A.3. Actividad 3: Pendiente como Función

A.3.1. Versión 1

Actividad 3b
Pendiente como Función
Versión 1, 16/10/13

OBJETIVOS:

- Desarrollo de la expresión $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$
- Formulación de la variable h

A. Desarrollo Matemático de $\boldsymbol{\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}}$

Parte I (con lápiz y papel): Concepto General

De las actividades anteriores, se llego a la expresión $m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ para una pendiente.
a) Si la variable y es la variable dependiente, exprese la ecuación para una pendiente con $f(x_n)$.

b) Si $\Delta x = x_{n+1} - x_n$, ¿a que es igual x_2 en función de x_1 y Δx? Exprese la ecuación del inciso a, sustituyendo la expresión de x_2.

c) Compare la ecuación obtenido en el inciso b, ¿es diferente a $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$? Si es diferente, ¿a qué se debe dicha diferencia?

d) Observando la figura 1, ¿qué representa h? Utilizando h, ¿cómo queda la expresión del inciso c?

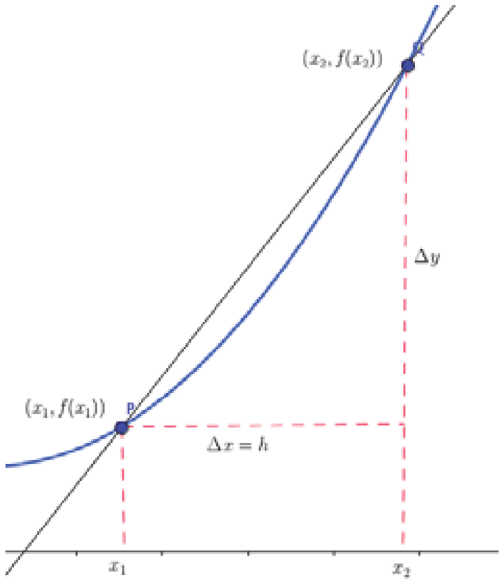


Figura 1. Introducción del concepto *h*

Parte II (con CAS): Variación de h

a) Considere la función, $f(x) = x^2 + 2x$. ¿Cuál es la ecuación de la pendiente, m?

b) Si el primer punto es (1, 3), exprese la ecuación de la pendiente m en función de h. (No es necesario reducir algebraicamente) ¿Gráficamente qué significa esta expresión?

c) Utilizando la hoja de calculo dentro de CAS, en la primera columna incluya los valores de h mientras que en la segunda columna va la pendiente. Para representar la variable h (la cual esta en la columna A), en la ecuación de la pendiente en la columna B, utilice A. Complete la siguiente tabla utilizando por lo menos 6 valores de h.

	A	B
◆		
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		

d) Si *h* se acerca a 0, ¿qué significa?

e) Utilizando la misma tabla del inciso c, utilice las siguientes valores de *h*. ¿Qué observa con respecto al valor de 0, valores positivos y los valores negativos?

	A	B
◆		
1	0.1	
2	0.01	
3	0.001	
4	0	
5	-0.001	
6	-0.01	
7	-0.01	

A.3.2. Versión 2

Actividad 3b
Pendiente como Función
Versión 2, 29/11/13

OBJETIVOS:

- Desarrollo de la expresión $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$
- Formulación de la variable h

A. Desarrollo Matemático de $\boldsymbol{\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}}$

Parte I (con lápiz y papel): Concepto General

De las actividades anteriores, se llego a la expresión $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ para una pendiente.
a) Si la variable *"y"* es la variable dependiente, es decir $y_n = f(x_n)$, exprese la ecuación para la pendiente con $f(x_n)$.

b) Si $\Delta x = x_{n+1} - x_n$, ¿a que es igual x_2 considerando la ecuación de Δx? Exprese la ecuación del inciso a, sustituyendo la expresión de x_2.

c) Compare la ecuación obtenido en el inciso b, ¿es diferente a $\boldsymbol{\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}}$? Si es diferente, ¿a qué se debe dicha diferencia?

d) Observando la figura 1 en la siguiente pagina, ¿qué representa y a que es igual h? Utilizando h, ¿cómo queda la expresión del inciso c?

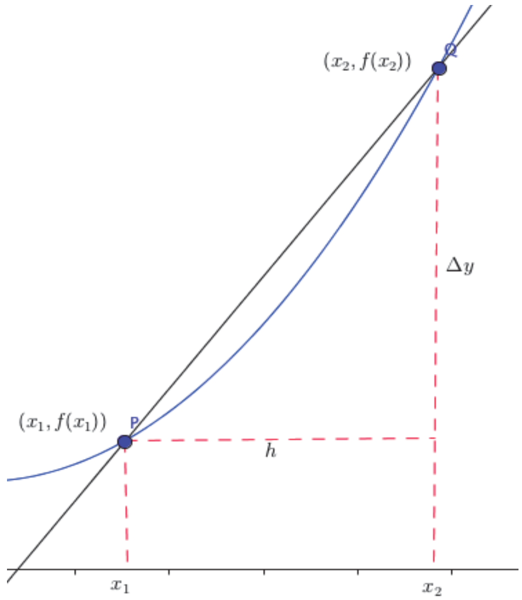


Figura 1. Introducción del concepto *h*

Parte II (con CAS): Variación de h

a) Considere la función, $f(x) = x^2 + 2x$. ¿Cómo se expresa $f(x_1)$ y $f(x_1+\Delta x)$? ¿Cuál es la ecuación de la pendiente del inciso d?

b) Si el primer punto es (1, 3), exprese la ecuación del inciso anterior con estos puntos. (No es necesario reducir algebraicamente) ¿Qué nota de esta ecuación?

c) Utilizando la hoja de calculo dentro de CAS, en la primera columna incluya los valores de *h* mientras que en la segunda columna va la pendiente. Utilice la ecuación de la pendiente del inciso anterior. Como en cualquier hoja de calculo, en la parte gris de la columna gris se puede expresar la función de la pendiente en donde h equivale a la variable "a", ya que es el valor de la columna A. Completa la tabla.

	A	B
◆		
1	0.1	
2	0.01	
3	0.001	
4	0	
5	-0.001	
6	-0.01	
7	-0.1	

d) ¿Qué observa cuando $h = 0$? ¿A qué se debe ese valor?

e) ¿A qué numero de acerca la pendiente cuando *h* se acerca a cero a partir de los números positivos?

f) ¿A qué numero de acerca la pendiente cuando *h* se acerca a cero a partir de los números negativos?

g) Observando la respuestas a los incisos e y f, ¿llega a la misma conclusión?

f) Cuando *h* tiende a cero, ¿a qué tiende la pendiente? ¿Es igual al valor cuando $h = 0$?

g) ¿Cómo puede definir este tipo de análisis (analítico o grafico)? Explique su razonamiento.

A.3.3. Versión 3

Actividad 3b
Pendiente como Función
Versión 3, 12/12/13

OBJETIVOS:

- Desarrollo de la expresión $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$
- Formulación de la variable h

A. Desarrollo Matemático de $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

Parte I (con lápiz y papel): Concepto General

De las actividades anteriores, se llego a la expresión $m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ para una pendiente.

a) Si la variable "*y*" es la variable dependiente, es decir $y_n = f(x_n)$, exprese la ecuación para la pendiente con $f(x_n)$.

b) Si $\Delta x = x_{n+1} - x_n$, ¿a que es igual x_2 considerando la ecuación de Δx? Exprese la ecuación del inciso a, sustituyendo la expresión de x_2.

c) Compare la ecuación obtenido en el inciso b, ¿es diferente a $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$? Si es diferente, ¿a qué se debe dicha diferencia?

d) Observando la figura 1 en la siguiente pagina, ¿qué representa y a que es igual *h*? Utilizando *h*, ¿cómo queda la expresión del inciso c?

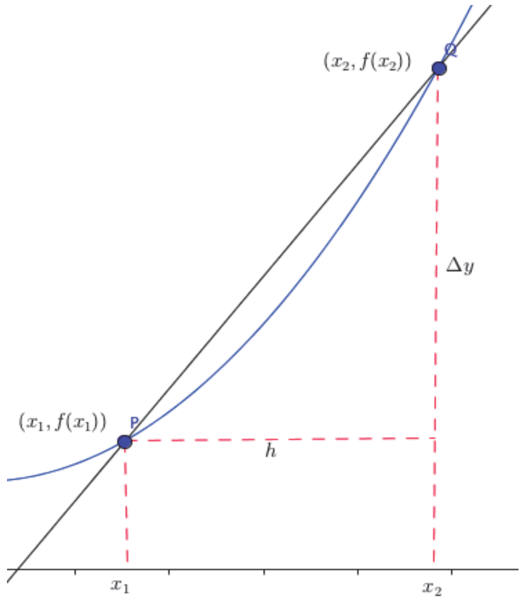


Figura 1. Introducción del concepto *h*

Parte II (con CAS): Variación de h

a) Considere la función, $f(x) = x^2 + 2x$. ¿Cómo se expresa $f(x_1)$ y $f(x_1+\Delta x)$? ¿Cuál es la ecuación de la pendiente del inciso d? (No es necesario reducir algebraicamente)

b) Si el primer punto es (1, 3), exprese la ecuación del inciso anterior con estos punto. ¿Qué nota de esta ecuación?

c) Utilizando la hoja de calculo dentro de CAS, en la primera columna incluya los valores de *h* mientras que en la segunda columna va la pendiente. Utilice la ecuación de la pendiente del inciso anterior. Como en cualquier hoja de calculo, en la parte gris de la columna gris se puede expresar la función de la pendiente en donde h equivale a la variable "a", ya que es el valor de la columna A. Completa la tabla.

	A	B
◆		
1	0.1	
2	0.01	
3	0.001	
4	0	
5	-0.001	
6	-0.01	
7	-0.1	

d) ¿Qué observa cuando $h = 0$? ¿A qué se debe ese valor?

e) ¿A qué numero de acerca la pendiente cuando h se acerca a cero a partir de los números positivos?

f) ¿A qué numero de acerca la pendiente cuando h se acerca a cero a partir de los números negativos?

g) Observando la respuestas a los incisos e y f, ¿llega a la misma conclusión?

f) Cuando h tiende a cero, ¿a qué tiende la pendiente? ¿Es igual al valor cuando $h = 0$?

g) ¿Cómo puede definir este tipo de análisis (analítico o grafico)? Explique su razonamiento.

A.4. Actividad 4: Límites

A.4.1. Versión 1

Actividad 4b
Limites
Versión 1, 21/10/13

OBJETIVOS:

- Comparación entre un cambio promedio y un cambio instantáneo
- Entender el concepto de limite matemático
- Comprobación grafico y analítico del limite

Parte I (con lápiz y papel): Concepto Informal del Limite

Suponga que quiere calcular su velocidad promedio al viajar una carretera recta. Si pasas el kilometro 100 a las 12:00 y el kilometro 140 a las 12:30, se viaja 40 kilómetros en media hora, entonces la velocidad promedio sobre este intervalo de tiempo es (40 km)/(0.5 hr) = 80 km/hr. Por otra parte, aun que la velocidad promedio sea 80 km/hr, es casi seguro que la velocidad instantánea, la velocidad indicada por el velocímetro, varia de un momento a otro.

Se lanza verticalmente una piedra del piso a una velocidad de 96 ft/s. Despreciando resistencia de aire, la posición de la piedra después de t segundos esta dada por la función

$$s(t) = -16t^2 + 96t$$

La posición s es medida en pies con $s = 0$ corresponde al piso.

a) Encuentre la velocidad promedia de la piedra entre el par de tiempos, i) $t = 1$ y $t = 3$, ii) $t = 1$ y $t = 2$.

Al calcular la velocidad promedio, se utilizo la posición del objeto a dos puntos distintos. Para la velocidad instantánea solamente se utiliza un punto distinto. Como se vera en la siguiente sección, la velocidad instantánea se calcula a partir de velocidades promedios.

b) Se menciono que la velocidad instantánea se calcula a partir de velocidades promedios. Por lo tanto se requiere de dos puntos, ¿estos puntos deben ser cercano o muy distintos? ¿Qué significa lo anterior con respecto a Δx o h? ¿Hacia qué valor se acerca?

c) Si nos interesa calcular la velocidad instantánea a $t = 1$, se calcula la velocidad promedio sobre el intervalo [1, t]. ¿Cómo queda la formula de velocidad promedio sobre dicho intervalo?

La velocidad instantánea en el punto $t = t_0$ se determina al calcular la velocidad promedio sobre el intervalo $[t_0, t_1]$. Cuando t_1 se acerca a t_0, la velocidad promedio típicamente se acera a un numero único, el cual es la velocidad instantánea. Este numero se conoce como un limite. Lo cual se puede expresar como

$$v_{instantanea} = \lim_{t \to t_0} v_{promedio}$$

d) ¿Cuál es la expresión para la velocidad instantánea cuando $t = 1$?

e) Calcule la velocidad instantánea en $t = 1$. Explique lo que significa.

f) Considerando lo anterior, ¿qué significa $\lim_{x \to a} f(x) = L$? ¿Incluye el valor a, números menores y/o números mayores?

Parte II (con CAS): Concepto Informal del Limite

El limite $\lim_{x \to a} f(x) = L$ se refiere a un limite de *dos-lados* porque *f(x)* se acerca L cuando x se acerca a valores de x menores de a y para valores de x mayores de a. Para algunas funciones, es conveniente analizar limites de *un lado* denominados limites de mano izquierda y de mano derecha. La definición se puede resumir como

1. **Limite de mano derecha** Suponga que f es definida para todos valores de x cercanos a a y $x > a$. Si *f(x)* es arbitrariamente cercana a L para todos valores suficientemente cercanos a a con $x > a$, se escribe
$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L$$
y se dice que el limite de *f(x)* cuando x se acerca a a por la derecha es igual a L.

2. **Limite de mano izquierda** Suponga que f es definida para todos valores de x cercanos a a y $x < a$. Si *f(x)* es arbitrariamente cercana a L para todos valores suficientemente cercanos a a con $x < a$, se escribe
$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L$$
y se dice que el limite de *f(x)* cuando x se acerca a a por la izquierda es igual a L.

a) Grafique con flechas para indicar la dirección los siguientes limites, i) $\lim_{x \to a} f(x) = L$, ii) $\lim_{x \to a^+} f(x) = L$, iii) $\lim_{x \to a^-} f(x) = L$

Se puede graficar funciones dentro del sistema CAS. Presione el botón **Home**, **B Gráfico, Menu, 3: Tipo de gráfico, 1: Función.** De esta manera se puede definir una función.

b) Grafique la función $f(x) = \frac{x^3-8}{4(x-2)}$ en el sistema CAS. Observe la grafica y la ecuación de la función, ¿existe algún valor de x que no puede tomar? En caso que sí, ¿porqué? Compruebe utilizando el comando de trazado. (Dentro de la grafica, presione **Menu, 5: Trazado, 1: Trazado de gráfico** y elija el numero y presione **Enter**.

c) El trazado, presionando los botones ¡ o ¢ para mover de un punto a otro. Para la misma función, el paso de trazado es de 0.3. Este incremento se puede cambiar utilizando **Menu, 5: Trazado, 3: Paso de trazado,** y introduzca el incremento deseado. Utilizando un incremento de trazo de 0.01, anote los valores de x de 1.85 hasta 2.15.

d) Utilizando la información anterior, encuentre i) $\lim_{x\to 2^-} \frac{x^3-8}{4(x-2)}$, ii) $\lim_{x\to 2^+} \frac{x^3-8}{4(x-2)}$, iii) $\lim_{x\to 2} \frac{x^3-8}{4(x-2)}$. Además explique en sus palabras que significa.

e) Repita el procedimiento anterior para la función, $f(x) = \frac{|x|}{x}$. (Para introducir el moduló de valor absoluto, utilice abs(x)). Encuentre i) $\lim_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x}$, ii) $\lim_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x}$

f) Utilizando los limites de inciso e, encuentre $\lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x}$. ¿Qué observaciones nota? ¿Si son distintos los limites de mano derecha y mano izquierda, puede existir el limite?

A.4.2. Versión 2

Actividad 4b
Limites
Versión 2, 1/12/13

OBJETIVOS:

- Comparación entre un cambio promedio y un cambio instantáneo
- Entender el concepto de limite matemático
- Comprobación grafico y analítico del limite

Parte I (con lápiz y papel): Concepto Informal del Limite

Suponga que quiere calcular su velocidad promedio al viajar una carretera recta. Si pasas el kilometro 100 a las 12:00 y el kilometro 140 a las 12:30, se viaja 40 kilómetros en media hora, entonces la velocidad promedio sobre este intervalo de tiempo es (40 km)/(0.5 hr) = 80 km/hr. Por otra parte, aun que la velocidad promedio sea 80 km/hr, es casi seguro que la velocidad instantánea, la velocidad indicada por el velocímetro, varia de un momento a otro.

Se lanza verticalmente una piedra del piso a una velocidad de 96 ft/s. Despreciando resistencia de aire, la posición de la piedra después de t segundos esta dada por la función

$$s(t) = -16t^2 + 96t$$

La posición s es medida en pies con $s = 0$ corresponde al piso.

a) Encuentre la velocidad promedia, utilizando la ecuación de la actividad pasada, de la piedra entre el par de tiempos, i) $t = 1$ y $t = 3$, ii) $t = 1$ y $t = 2$.

Al calcular la velocidad promedio, se utilizo la posición del objeto a dos puntos distintos. Para la velocidad instantánea solamente se utiliza un punto distinto. Como se vera en la siguiente sección, la velocidad instantánea se calcula a partir de velocidades promedios.

b) Se menciono que la velocidad instantánea se calcula a partir de velocidades promedios. Por lo tanto se requiere de dos puntos, ¿estos puntos deben ser cercano o muy distintos? ¿Qué significa lo anterior con respecto a Δx o h (hacia qué valor se acerca)?

c) Si nos interesa calcular la velocidad instantánea a $t = 1$, se calcula la velocidad promedio sobre el intervalo $[1, t]$. ¿Cómo queda la formula de velocidad promedio sobre dicho intervalo?

La velocidad instantánea en el punto $t = t_0$ se determina al calcular la velocidad promedio sobre el intervalo $[t_0, t_1]$. Cuando t_1 se acerca a t_0, la velocidad promedio típicamente se acera a un numero único, el cual es la velocidad instantánea. Este numero se conoce como un limite. Lo cual se puede expresar como

$$v_{instantanea} = \lim_{t \to t_0} v_{promedio}$$

d) ¿Cuál es la expresión para la velocidad instantánea cuando $t_0 = 1$?

e) ¿Cómo puede resolver analíticamente la expresión anterior? Calcule la velocidad instantánea en $t = 1$.

f) Considerando lo anterior, ¿qué significa $\lim_{x \to a} f(x) = L$? ¿Incluye el valor a, números menores y/o números mayores?

Parte II (con CAS): Concepto Informal del Limite

El limite $\lim_{x \to a} f(x) = L$ se refiere a un limite de *dos-lados* porque *f(x)* se acerca L cuando x se acerca a valores de x menores de a y para valores de x mayores de a. Para algunas funciones, es conveniente analizar limites de *un lado* denominados limites de mano izquierda y de mano derecha. La definición se puede resumir como

1. **Limite de mano derecha** Suponga que f es definida para todos valores de x cercanos a a y $x > a$. Si *f(x)* es arbitrariamente cercana a L para todos valores suficientemente cercanos a a con $x > a$, se escribe
$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L$$
y se dice que el limite de *f(x)* cuando x se acerca a a por la derecha es igual a L.

2. **Limite de mano izquierda** Suponga que f es definida para todos valores de x cercanos a a y $x < a$. Si *f(x)* es arbitrariamente cercana a L para todos valores suficientemente cercanos a a con $x < a$, se escribe
$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L$$
y se dice que el limite de *f(x)* cuando x se acerca a a por la izquierda es igual a L.

a) Grafique con flechas para indicar la dirección los siguientes limites, i) $\lim_{x \to a} f(x) = L$, ii) $\lim_{x \to a^+} f(x) = L$, iii) $\lim_{x \to a^-} f(x) = L$

Se puede graficar funciones dentro del sistema CAS. Presione el botón **Home**, **B Gráfico, Menu, 3: Tipo de gráfico, 1: Función.** De esta manera se puede definir una función.

b) Grafique la función $f(x) = \frac{x^3-8}{4(x-2)}$ en el sistema CAS. Observe la grafica y la ecuación de la función, ¿existe algún valor de x que no puede tomar? En caso que sí, ¿porqué? Compruebe utilizando el comando de trazado. (Dentro de la grafica, presione **Menu, 5: Trazado, 1: Trazado de gráfico** y elija el numero y presione **Enter**.

c) El trazado, presionando los botones ¡ o ¢ para mover de un punto a otro. Para la misma función, el paso de trazado es de 0.3. Este incremento se puede cambiar utilizando **Menu, 5: Trazado, 3: Paso de trazado,** y introduzca el incremento deseado. Utilizando un incremento de trazo de 0.01, anote los valores de x de 1.90 hasta 2.10.

d) Utilizando la información anterior, encuentre i) $\lim_{x\to 2^-} \frac{x^3-8}{4(x-2)}$, ii) $\lim_{x\to 2^+} \frac{x^3-8}{4(x-2)}$,
iii) $\lim_{x\to 2} \frac{x^3-8}{4(x-2)}$. Además explique en sus palabras que significa.

e) Repita el procedimiento anterior para la función, $f(x) = \frac{|x|}{x}$. (Para introducir el moduló de valor absoluto, utilice abs(x)). Encuentre i) $\lim_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x}$, ii) $\lim_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x}$

f) Utilizando los limites de inciso e, encuentre $\lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x}$. ¿Qué observaciones nota? ¿Si son distintos los limites de mano derecha y mano izquierda, puede existir el limite?

A.4.3. Versión 3

Actividad 4b
Limites
Versión 3, 3/12/13

OBJETIVOS:

- Comparación entre un cambio promedio y un cambio instantáneo
- Entender el concepto de limite matemático
- Comprobación grafico y analítico del limite

Parte I (con lápiz y papel): Concepto Informal del Limite

Suponga que quiere calcular su velocidad promedio al viajar una carretera recta. Si pasas el kilometro 100 a las 12:00 y el kilometro 140 a las 12:30,

a) ¿Qué cantidad se viajo? ¿En cuanto tiempo?

b) Explique que es una pendiente. ¿Cómo la puede relacionar con la velocidad promedia? Considere las unidades y encuentre la velocidad promedia.

Por otra parte, aun que la velocidad promedio es una cantidad fija, es casi seguro que la velocidad instantánea, la velocidad indicada por el velocímetro, varia de un momento a otro.

Se lanza verticalmente una piedra del piso a una velocidad de 96 ft/s. Despreciando resistencia de aire, la posición de la piedra después de t segundos esta dada por la función

$$s(t) = -16t^2 + 96t$$

La posición s es medida en pies con $s = 0$ corresponde al piso.

c) Encuentre la velocidad promedia, utilizando la ecuación de la actividad pasada, de la piedra entre el par de tiempos, i) $t = 1$ y $t = 3$, ii) $t = 1$ y $t = 2$.

Al calcular la velocidad promedio, se utilizo la posición del objeto a dos puntos distintos. Para la velocidad instantánea solamente se utiliza un punto distinto. Como se vera en la siguiente sección, la velocidad instantánea se calcula a partir de velocidades promedios.

d) Si nos interesa calcular la velocidad instantánea a $t = 1$, se calcula la velocidad promedio sobre el intervalo $[1, t]$. ¿Cómo queda la formula de velocidad promedio sobre dicho intervalo?

La velocidad instantánea en el punto $t = t_0$ se determina al calcular la velocidad promedio sobre el intervalo [t_0, t_1]. Cuando t_1 se acerca a t_0, la velocidad promedio típicamente se acera a un numero único, el cual es la velocidad instantánea. Este numero se conoce como un limite. Lo cual se puede expresar como

$$v_{instantanea} = \lim_{t \to t_0} v_{promedio}$$

e) ¿Cuál es la expresión para la velocidad instantánea cuando $t_0 = 1$?

f) ¿Cómo puede resolver analíticamente la expresión anterior? Calcule la velocidad instantánea en $t = 1$.

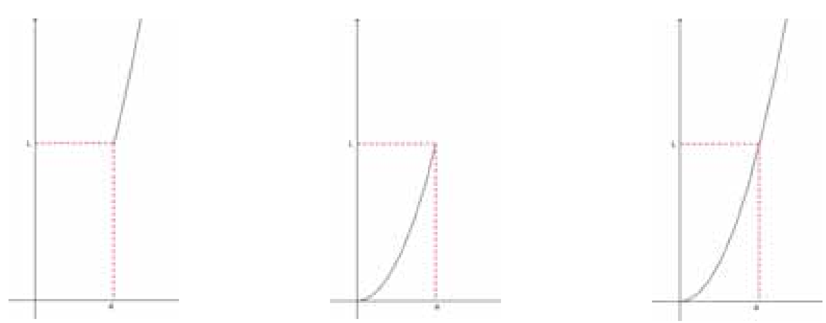
Parte II (con CAS): Concepto Informal del Limite

El limite $\lim_{x\to a} f(x) = L$ se refiere a un limite de *dos-lados* porque *f(x)* se acerca L cuando x se acerca a valores de x menores de a y para valores de x mayores de a. Para algunas funciones, es conveniente analizar limites de *un lado* denominados limites de mano izquierda y de mano derecha. La definición se puede resumir como

1. **Limite de mano derecha** Suponga que f es definida para todos valores de x cercanos a a y $x > a$. Si *f(x)* es arbitrariamente cercana a L para todos valores suficientemente cercanos a a con $x > a$, se escribe
$$\lim_{x\to a^+} f(x) = L$$
y se dice que el limite de *f(x)* cuando x se acerca a a por la derecha es igual a L.

2. **Limite de mano izquierda** Suponga que f es definida para todos valores de x cercanos a a y $x < a$. Si *f(x)* es arbitrariamente cercana a L para todos valores suficientemente cercanos a a con $x < a$, se escribe
$$\lim_{x\to a^-} f(x) = L$$
y se dice que el limite de *f(x)* cuando x se acerca a a por la izquierda es igual a L.

a) Considere las siguientes graficas y junte la grafica con el limite que le corresponde, i) $\lim_{x\to a} f(x) = L$, ii) $\lim_{x\to a^+} f(x) = L$, iii) $\lim_{x\to a^-} f(x) = L$



Se puede graficar funciones dentro del sistema CAS. Presione el botón **Home**, **B Gráfico, Menu, 3: Tipo de gráfico, 1: Función.** De esta manera se puede definir una función.

b) Grafique la función $f(x) = \frac{x^3-8}{4(x-2)}$ en el sistema CAS. Observe la grafica y la ecuación de la función, ¿existe algún valor de x que no puede tomar? En caso que sí, ¿porqué? Compruebe utilizando el comando de trazado. (Dentro de la grafica, presione **Menu, 5: Trazado, 1: Trazado de gráfico** y elija el numero y presione **Enter**.

c) El trazado, presionando los botones ¡ o ¢ para mover de un punto a otro. Para la misma función, el paso de trazado es de 0.3. Este incremento se puede cambiar utilizando **Menu, 5: Trazado, 3: Paso de trazado,** y introduzca el incremento deseado. Utilizando un incremento de trazo de 0.01, utilice el comando de trazado y anote los valores de *x* de 1.90 hasta 2.10.

d) Utilizando la información anterior, encuentre i) $\lim_{x\to 2^-} \frac{x^3-8}{4(x-2)}$, ii) $\lim_{x\to 2^+} \frac{x^3-8}{4(x-2)}$, iii) $\lim_{x\to 2} \frac{x^3-8}{4(x-2)}$. Encuentre el limite gráficamente. Además explique en sus palabras que significa.

e) Repita el procedimiento anterior para la función, $f(x) = \frac{|x|}{x}$. (Para introducir el moduló de valor absoluto, utilice abs(x)). Encuentre i) $\lim_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x}$, ii) $\lim_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x}$

f) Utilizando los limites de inciso e, encuentre $\lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x}$. ¿Qué observaciones nota? ¿Si son distintos los limites de mano derecha y mano izquierda, puede existir el limite?

A.5. Actividad 5: Líneas Secantes y Tangentes

A.5.1. Versión 1

Actividad 5b
Líneas Secantes y Tangentes
Versión 1, 30/10/13

OBJETIVOS:

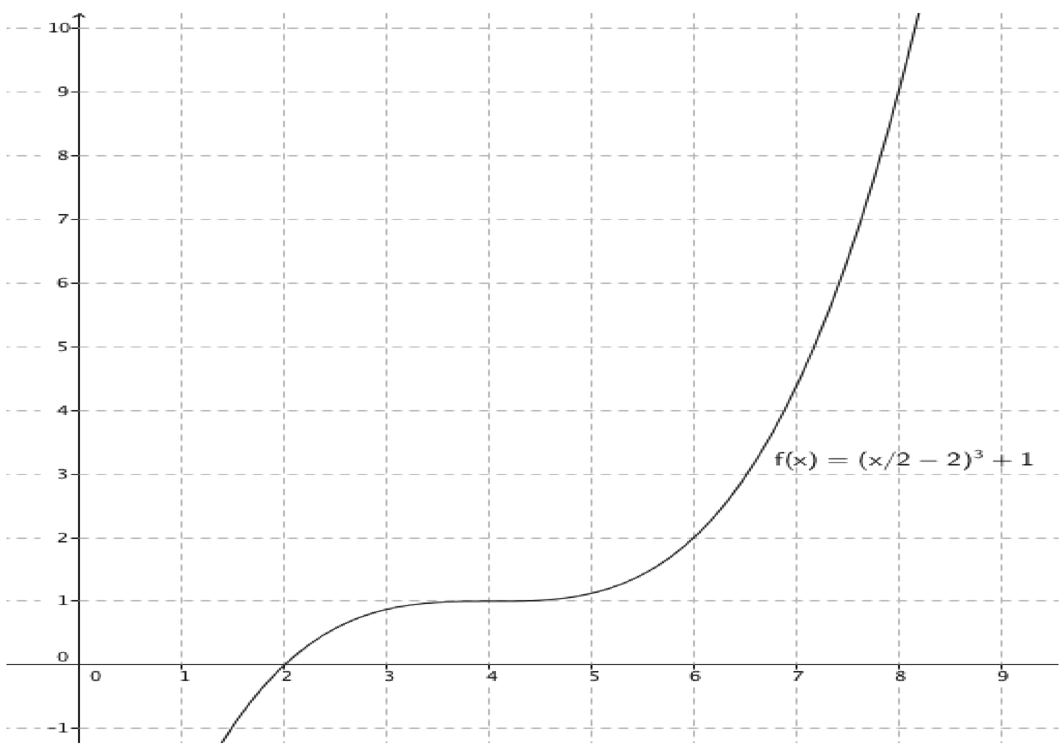
- Definir el concepto de línea tangente y línea secante.
- Entender la relación que existe entre las líneas tangentes y secantes.
- Definir la diferencia entre un cambio promedio y un cambio instantáneo.

Parte I (con lápiz y papel): Concepto de Línea Secante y Tangente

a) Complete la siguiente tabla. Donde $y = \left(\frac{x}{2} - 2\right)^3 + 1$

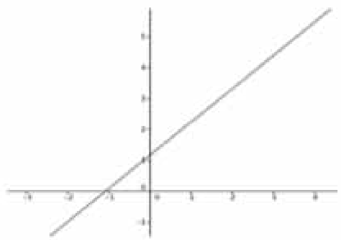
P_1 (x, y)	P_2 (x, y)	Pendiente, *m*
(3, 0.875)	(8, 9)	
(3, 0.875)	(7,)	
(3, 0.875)	(6,)	
(3, 0.875)	(5,)	
(3, 0.875)	(4,)	
(3, 0.875)	(3.5,)	
(3, 0.875)	(3.25,)	
(3, 0.875)	(3.1,)	
(3, 0.875)	(3.01,)	
(3, 0.875)	(3.001,)	

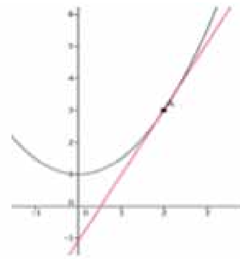
b) Grafique las líneas de la tabla anterior en la siguiente grafica.

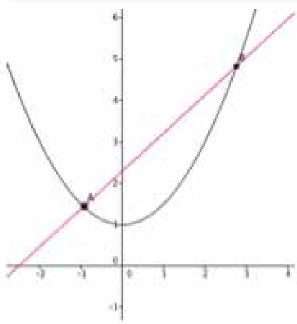


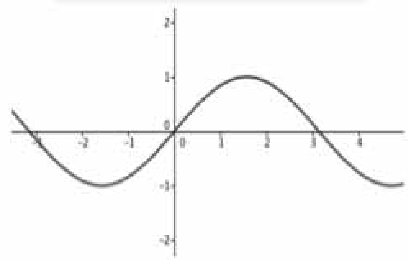
En la actividad anterior se menciono el concepto de velocidad promedio (cambio promedio) y la velocidad instantánea (cambio instantáneo). Si un cambio promedio es análogo a una línea secante y un cambio instantáneo es análogo a una línea tangente.

c) Relacione los siguientes conceptos con su gráfica correspondiente: línea secante, curva, línea recta y línea tangente.









d) En sus palabras y utilizando como referencia el inciso c, defina el concepto de línea secante y línea tangente.

e) Del inciso d y la actividad anterior, ¿qué relación hay entre una línea secante y una línea tangente?

En geometría euclidiana, una línea es tangente a un círculo, si interseca a dicho círculo solamente en un punto. Esta definición es adecuada para círculos, pero no apropiada para curvas en general. Observando la figura 1a, la línea tangente para el punto A toca la curva en otros puntos.

Figura 1a

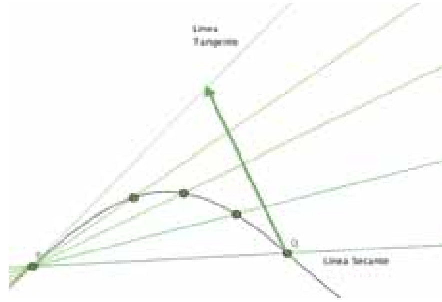


Figura 1b

Observando lo anterior, debemos encontrar otra definición para la aplicación de líneas tangentes para curvas. Para este fin, observe la figura 1b. Nos interesa la línea tangente en la curva en el plano xy. La línea que pasa por P y Q es una línea secante. Si movemos el punto Q a lo largo de la curva hacia el punto P, entonces la línea secante girará hacia una *posición limitante.* Dicha *posición limitante,* es lo que se llama, línea tangente en el punto P.

f) Utilizando la lógica de la posición limitante, ¿cuál es la pendiente de la línea recta en el punto (3, 0.875) del problema anterior?

g) ¿Cómo llegas de las líneas secantes a la línea tangente? Explica.

h) ¿Cómo afecta la forma de la curvas, a las líneas secantes y tangentes?

Parte II (con CAS): Relación a Límites

En el problema anterior la pendiente de la línea tangente para el punto (3, 0.875), se calculó gráficamente. Analíticamente la pendiente se puede expresar de la siguiente manera:

$$m_{12} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\left(\frac{x}{2} - 2\right)^3 + 1 - 0.875}{x - 3} = \frac{\left(\frac{x}{2} - 2\right)^3 + 0.125}{x - 3}$$

a) ¿De dónde se obtuvieron los valores de y_2 y x_2, de la ecuación anterior?

b) ¿Qué representa la variable x en la ecuación anterior?

c) Utilizando la hoja de cálculo dentro de CAS, completa la siguiente tabla.

	A	B
◆		$\dfrac{\left(\frac{a}{2}-2\right)^3+0.125}{a-3}$
1	3	
2	3.1	
3	3.05	
4	3.01	
5	3.005	
6	3.001	

d) ¿Qué observaciones tienes con respecto al valor de 3 y de los resultados anteriores?

e) Considerando los ejercicios realizados e información proporcionada, ¿cómo puedes relacionar las líneas secantes, línea tangente y limites?

f) ¿Cómo resolverías el siguiente límite, $\lim_{x\to 3}\frac{\left(\frac{x}{2}-2\right)^2+0.125}{x-3}$? Explique su razonamiento.

A.5.2. Versión 2

Actividad 5b
Líneas Secantes y Tangentes
Versión 2, 1/12/13

OBJETIVOS:

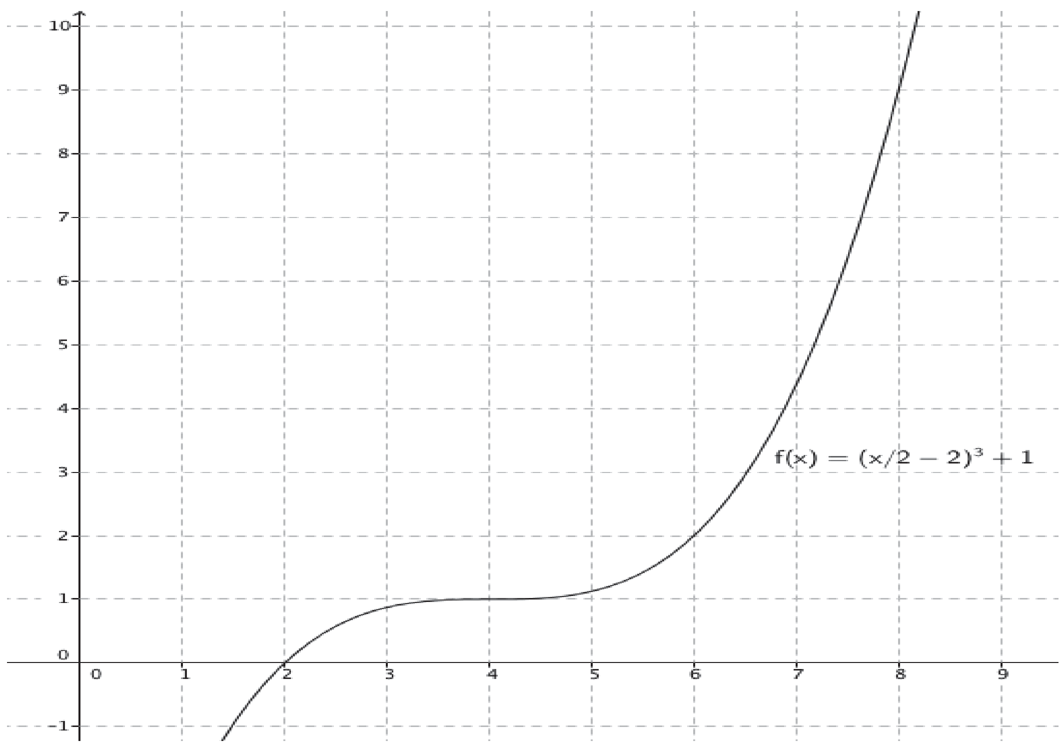
- Definir el concepto de línea tangente y línea secante.
- Entender la relación que existe entre las líneas tangentes y secantes.
- Definir la diferencia entre un cambio promedio y un cambio instantáneo.

Parte I (con lápiz y papel): Concepto de Línea Secante y Tangente

a) Complete la siguiente tabla. Donde $y = \left(\frac{x}{2} - 2\right)^3 + 1$

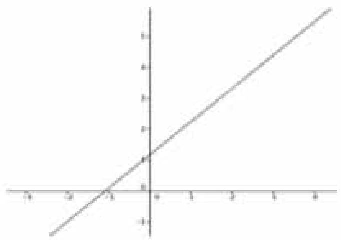
P_1 (x, y)	P_2 (x, y)	Pendiente, *m*
(3, 0.875)	(8, 9)	
(3, 0.875)	(6,)	
(3, 0.875)	(4,)	
(3, 0.875)	(3.5,)	
(3, 0.875)	(3.1,)	

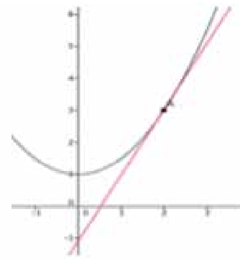
b) Grafique las líneas de la tabla anterior en la siguiente grafica.

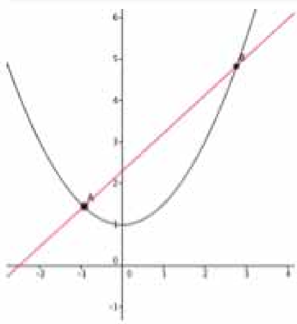


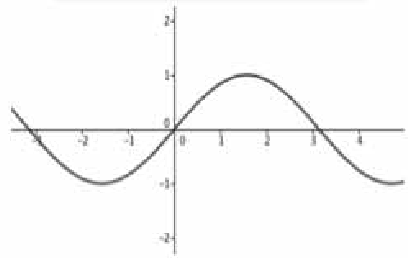
En la actividad anterior se menciono el concepto de velocidad promedio (cambio promedio) y la velocidad instantánea (cambio instantáneo). Si un cambio promedio es análogo a una línea secante y un cambio instantáneo es análogo a una línea tangente.

c) Relacione los siguientes conceptos con su gráfica correspondiente: línea secante, curva, línea recta y línea tangente.









d) En sus palabras y utilizando como referencia el inciso anterior, defina el concepto de línea secante y línea tangente.

En geometría euclidiana, una línea es tangente a un círculo, si interseca a dicho círculo solamente en un punto. Esta definición es adecuada para círculos, pero no apropiada para curvas en general. Observando la figura 1a, la línea tangente para el punto A toca la curva en otros puntos.

Figura 1a

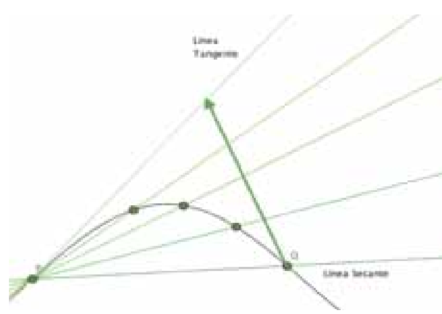


Figura 1b

Observando lo anterior, debemos encontrar otra definición para la aplicación de líneas tangentes para curvas. Para este fin, observe la figura 1b. Nos interesa la línea tangente en la curva en el plano xy. La línea que pasa por P y Q es una línea secante. Si movemos el punto Q a lo largo de la curva hacia el punto P, entonces la línea secante girará hacia una *posición limitante.* Dicha *posición limitante,* es lo que se llama, línea tangente en el punto P.

f) Utilizando la lógica de la posición limitante, ¿cuál es la pendiente de la línea recta en el punto (3, 0.875) del problema anterior?

g) ¿Qué relación hay entre una línea secante y una línea tangente?

h) Observe las siguientes dos figuras. ¿Cómo seria línea tangente en *x = 1*? ¿Qué puede concluir de cómo influye la forma de la curva la línea tangente?

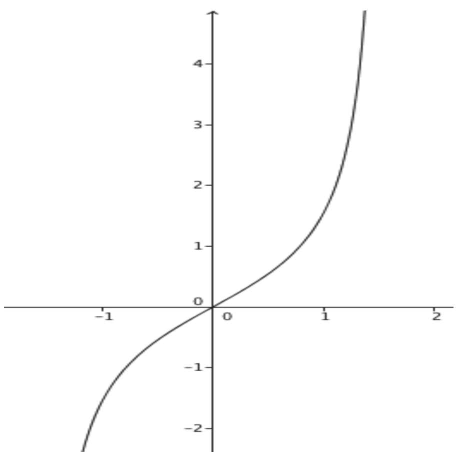


Figura 2.

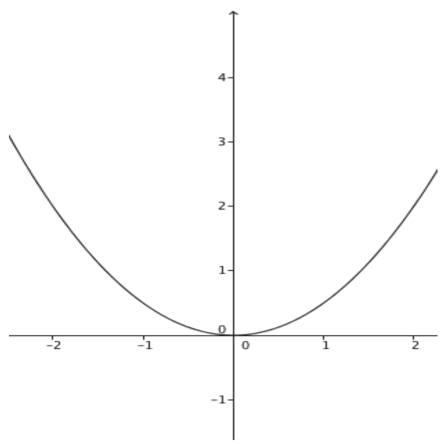


Figura 3.

Parte II (con CAS): Relación a Límites

En el problema anterior la pendiente de la línea tangente para el punto (3, 0.875), se calculó gráficamente. Analíticamente la pendiente se puede expresar de la siguiente manera:

$$m_{12} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\left(\frac{x}{2} - 2\right)^3 + 1 - 0.875}{x - 3} = \frac{\left(\frac{x}{2} - 2\right)^3 + 0.125}{x - 3}$$

a) Utilizando la hoja de cálculo dentro de CAS, completa la siguiente tabla.

	A	B
◆		$\frac{\left(\frac{a}{2} - 2\right)^3 + 0.125}{a - 3}$
1	3	
2	3.1	
3	3.05	
4	3.01	
5	3.005	
6	3.001	

b) ¿Qué observaciones tienes con respecto al valor de 3 y de los resultados anteriores?

c) ¿Cómo resolverías el siguiente límite, $\lim_{x \to 3} \frac{\left(\frac{x}{2} - 2\right)^2 + 0.125}{x - 3}$? Explique su razonamiento.

d) Considerando los ejercicios realizados e información proporcionada, ¿cómo puedes relacionar las líneas secantes, línea tangente y limites?

A.6. Actividad 6: Función Derivada

A.6.1. Versión 1

Actividad 6b
Función Derivada
Versión 1, 30/10/13

OBJETIVOS:

- Introducir el concepto fundamental de la derivada
- Formulación de la función derivada

Parte I (con lápiz y papel): Concepto de Derivada

La *derivada* de *f* es otra función, denotada *f'*, lo cual va el cambio de pendiente de la curva *y = f(x)*. Equivalentemente, la derivada de *f* da el cambio instantáneo de *f* en puntos del dominio. Se utilizan limites para definir limites.

Resumiendo de la actividad anterior:
El cambio promedio de *f* sobre el intervalo [a, x] es la pendiente de la línea secante:

$$m_{sec} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

El cambio instantáneo en *f* a $x = a$ es

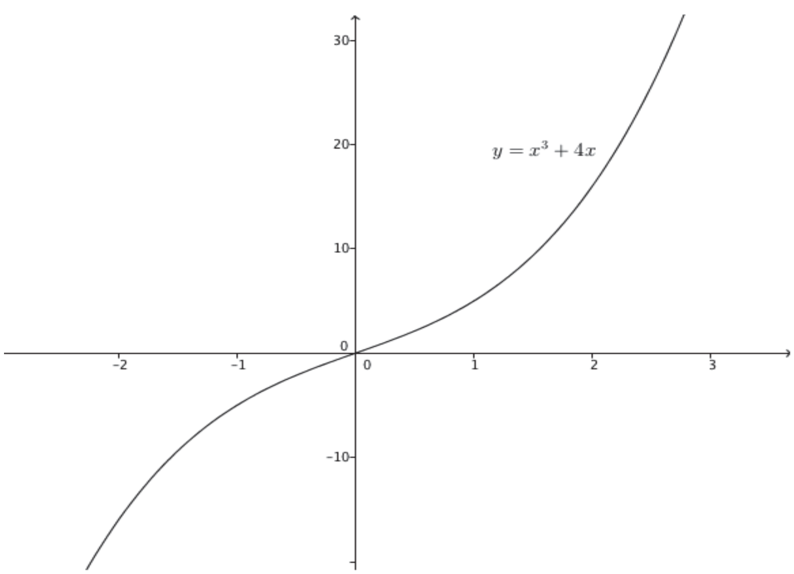
$$m_{tan} = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

el cual es la pendiente de la línea tangente a *x = a,* siempre que el limite exista. La línea tangente a *x = a* es una línea única que pasa por *(a, f(a))* con el pendiente m_{tan}. Su ecuación es

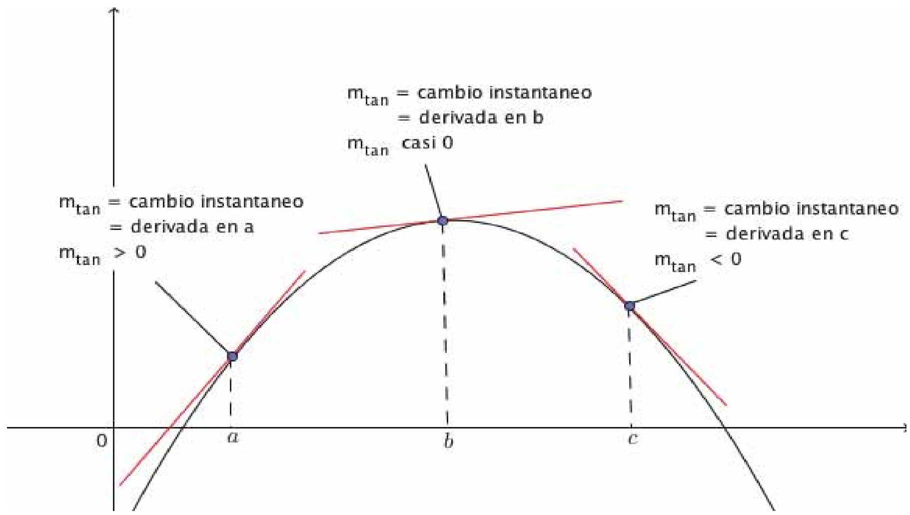
$$y - f(a) = m_{tan}(x - a)$$

a) Encuentre la ecuación de la línea de la tangente para la función $f(x) = x^3 + 4x$ a *x = 1*.

b) Grafique la línea recta del inciso a.



En los incisos anteriores, se calculo la pendiente de una linea tangente en un punto fijo de la curva. Si este punto se mueve a traves de la curva, la linea del tangente tambien cambia, y por lo general su pendiente cambia (vea figura 1). Por esta razon, la pendiente de la linea tangente para la funcion *f* tambein es una funcion de *x*, llamada la derivada de *f* .



Dejamos que *f'* (se lee como *f* prima) denote la funcion derivada para *f*, lo cual significa que *f'(a)*, cuando exista, es la pendiente de la linea tangente para la grafica de *f* en *(a, f(a))*. Utilizando la definicion anterior para la pendiente de la linea tangente, tenemos

$$f'(a) = m_{tan} = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

En terminos más generales, se puede remeplazar el a con x para llegar a la definicion de la funcion derivada. La derivada de *f* es la función

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

siempre que el limite exista. Si *f '(x)* existe, decimos que *f* es diferenciable en x. Si *f* es diferenciable en cada punto del intervalo abiero *I*, decimos que *f* es diferenciable sobre *I*.

Para encontrar la derivada de la funcion $f(x) = x^3 + 4x$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^3+4(x+h)-(x^3+4x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{x^3+3hx^2+3h^2x+h^3+4x+4h-x^3-4x}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{3hx^2+3h^2x+h^3+4h}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{h(3x^2+3hx+h^2+4)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} 3x^2+3hx+h^2+4 = 3x^2+4 \end{aligned}$$

Por lo tanto $f'(x) = 3x^2 + 4$

c) Compare la derivada de la función *f(x)* = $x^3 + 4x$ con el resultado del inciso b. ¿Qué observaciones hay?

Otra notacion que se maneja son las siguentes,

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$$

Ademas de *f'(x)* y $\frac{dy}{dx}$ otras formas comunes de escribir la derivada incluye

$$\frac{df}{dx}, \quad \frac{d}{dx}f(x), \quad D_x f(x), \quad \& \quad y'(x)$$

d) Si $g(t) = 1/t^2$, encuentre *g'(t)*

e) Considere la funcion, *f(x) = 3*. Grafique la funcion, ¿qué representa?

f) Del inciso anterior, ¿que es la derivada? Considere que "c" es cualquier constante, ¿como puede representar la expresion $\frac{d}{dx}c =$?

Parte II (con CAS): Reglas de Diferenciación Básicas

Dentro de las múltiples herramientas del sistema CAS, existe el comando derivar. Presione **Menu** → **4. Cálculo** → **1. Derivada** para elegir el comando derivar. Aparece una plantilla que contiene dos (2) campos en la línea de entrada. El campo activado (indicado por el cursor parpadeante) permite teclear la variable con la cual se va a derivar con respecto a. Teclea la variable y presione **tab** o el botón de la derecha para mover al campo entre paréntesis. Aquí se teclea la expresión que se quiere derivar.

a) Utilice el comando derivar para derivar las siguientes funciones: x, x^2, x^4 y x^7. Observando las derivadas, ¿cómo puede deducir $\frac{d}{dx}x^n$?

b) Dentro del sistema CAS, se puede derivar la función x^n. Derive, ¿qué observaciones nota? ¿Varia el resultado a su deducción del inciso anterior?

c) Derive las funciones: e^x, e^{3x}, e^{4x}, e^{7x}. Deduzca $\frac{d}{dx}e^{kx}$ tomando como referencia las derivadas anteriores.

d) Compruebe su deducción utilizando la calculadora. ¿Qué observa?

e) Derive las funciones: $2x$, $3x^3$, $4e^x$, $7e^{2x}$. ¿Qué observación puede hacer? ¿Cómo puede deducir $\frac{d}{dx}cf(x)$?

Para los siguientes incisos, considere $f(x) = x^2$ & $g(x) = e^{2x}$

f) Encuentre las derivadas de: x^2, e^{2x}, $x^2 + e^{2x}$, $e^{2x} - x^2$. ¿Qué deduce sobre $\frac{d}{dx}[f(x) + g(x)]$ o $\frac{d}{dx}[f(x) - g(x)]$.

g) Encuentre la derivada de $x^2 * e^{2x}$. ¿Qué puede deducir sobre $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}[\mathrm{f(x)} * \mathrm{g(x)}]$? Compruebe su resultado utilizando el sistema CAS, ¿qué observaciones nota?

h) Encuentre las derivadas de: $\frac{x^2}{e^{2x}}$ & $\frac{e^{2x}}{x^2}$. ¿Qué puede deducir sobre $\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]$?

i) Compruebe el resultado del inciso anterior utilizando el sistema CAS. Utilice el comando "condenom" para obtener el denominador común y reducir la expresión. El sintaxis es **condenom(expresión)**.

A.6.2. Versión 2

Actividad 6b
Función Derivada
Versión 2, 3/12/13

OBJETIVOS:

- Introducir el concepto fundamental de la derivada
- Formulación de la función derivada

Parte I (con lápiz y papel): Concepto de Derivada

La *derivada* de *f* es otra función, denotada *f'*, lo cual corresponde al cambio de pendiente de la curva $y = f(x)$. Equivalentemente, la derivada de *f* da el cambio instantáneo de *f* en puntos del dominio. Se utilizan limites para definir limites.

Resumiendo de la actividad anterior:
El cambio promedio de *f* sobre el intervalo [a, x] es la pendiente de la línea secante:

$$m_{sec} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

El cambio instantáneo en *f* a $x = a$ es

$$m_{tan} = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

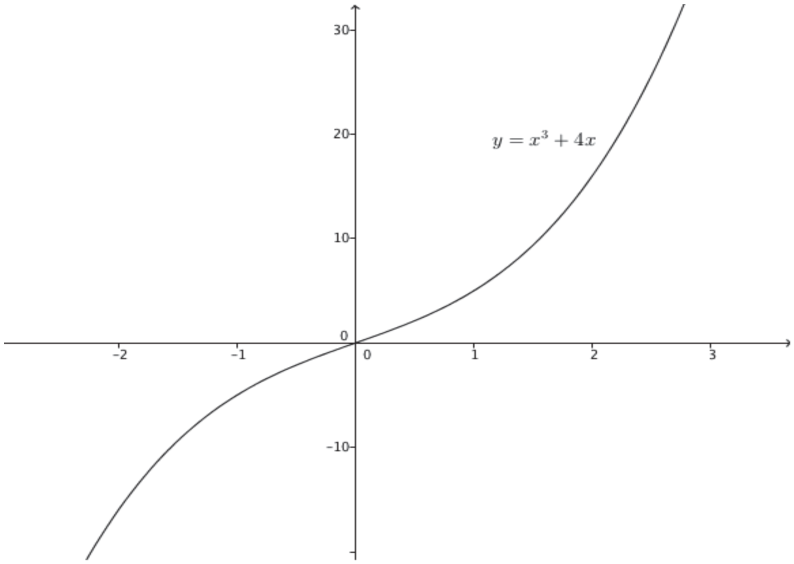
el cual es la pendiente de la línea tangente a $x = a$, siempre que el limite exista. La línea tangente a $x = a$ es una línea única que pasa por $(a, f(a))$ con el pendiente m_{tan}. Su ecuación es

$$y - f(a) = m_{tan}(x - a)$$

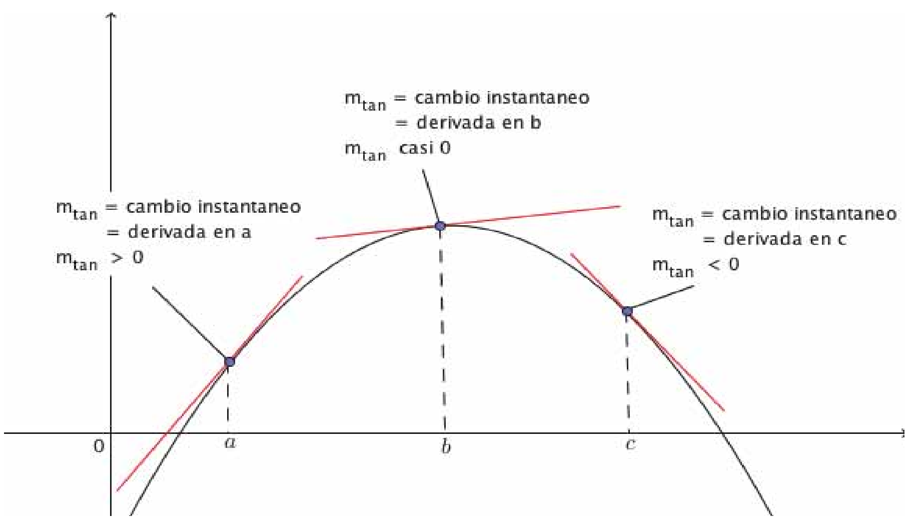
a) Encuentre m_{tan} para la función $f(x) = x^3 + 4x$ para $a = 1$. Resuelva el limite por método grafico o método analítico.

b) Encuentre la ecuación de la línea de la tangente para la función $f(x) = x^3 + 4x$ a $x = 1$.

c) Grafique la línea recta del inciso a.



En los incisos anteriores, se calculo la pendiente de una linea tangente en un punto fijo de la curva. Si este punto se mueve a traves de la curva, la linea del tangente tambien cambia, y por lo general su pendiente cambia (vea figura 1). Por esta razon, la pendiente de la linea tangente para la funcion f tambein es una funcion de x, llamada la derivada de f.



Dejamos que f' (se lee como f prima) denote la funcion derivada para f, lo cual significa que $f'(a)$, cuando exista, es la pendiente de la linea tangente para la grafica de f en $(a, f(a))$. Utilizando la definicion anterior para la pendiente de la linea tangente, tenemos

$$f'(a) = m_{tan} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

En terminos más generales, se puede remeplazar el a con x para llegar a la definicion de la funcion derivada. La derivada de f es la función

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

siempre que el limite exista. Si *f ‘(x)* existe, decimos que *f* es diferenciable en x. Si *f* es diferenciable en cada punto del intervalo abiero *I*, decimos que *f* es diferenciable sobre *I*.

Para encontrar la derivada de la funcion *f(x) = x³ + 4x*

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^3+4(x+h)-(x^3+4x)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{x^3+3hx^2+3h^2x+h^3+4x+4h-x^3-4x}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{3hx^2+3h^2x+h^3+4h}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{h(3x^2+3hx+h^2+4)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}3x^2+3hx+h^2+4 = 3x^2+4
\end{aligned}
$$

Por lo tanto $f'(x) = 3x^2 + 4$

d) Compare la derivada de la función $f(x) = x^3 + 4x$ evaluada en x = 1 con m_{tan} del inciso a, ¿qué nota? ¿Qué puede concluir de la derivada y su relacion a limites?

Otra notacion que se maneja son las siguentes,

$$f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$$

Ademas de $f'(x)$ y $\frac{dy}{dx}$ otras formas comunes de escribir la derivada incluye

$$\frac{df}{dx},\quad \frac{d}{dx}f(x),\quad D_x f(x),\quad \&\quad y'(x)$$

e) Considere la funcion, *f(x) = 3*. Grafique la funcion, ¿qué representa?

f) Del inciso anterior, ¿que es la derivada? Considere que “c” es cualquier constante, ¿como puede representar la expresion $\frac{d}{dx}c =$?

Parte II (con CAS): Reglas de Diferenciación Básicas

Dentro de las múltiples herramientas del sistema CAS, existe el comando derivar. Presione **Menu → 4. Cálculo → 1. Derivada** para elegir el comando derivar. Aparece una plantilla que contiene dos (2) campos en la línea de entrada. El campo activado (indicado por el cursor parpadeante) permite teclear la variable con la cual se va a derivar con respecto a. Teclea la variable y presione **tab** o el botón de la derecha para mover al campo entre paréntesis. Aquí se teclea la expresión que se quiere derivar.

a) Utilice el comando derivar para derivar las siguientes funciones: x, x^2, x^4 y x^7. Observando las derivadas, ¿cómo puede deducir $\frac{d}{dx}x^n$?

b) Dentro del sistema CAS, se puede derivar la función x^n. Derive, ¿qué observaciones nota? ¿Varia el resultado a su deducción del inciso anterior?

c) Derive las funciones: e^x, e^{3x}, e^{4x}, e^{7x}. Deduzca $\frac{d}{dx}e^{kx}$ tomando como referencia las derivadas anteriores.

d) Compruebe su deducción utilizando la calculadora. ¿Qué observa?

e) Derive las funciones: $2x$, $3x^3$, $4e^x$, $7e^{2x}$. ¿Qué observación puede hacer? ¿Cómo puede deducir $\frac{d}{dx}cf(x)$?

Para los siguientes incisos, considere $f(x) = x^2$ & $g(x) = e^{2x}$

f) Encuentre las derivadas de: x^2, e^{2x}, $x^2 + e^{2x}$, $e^{2x} - x^2$. ¿Qué deduce sobre $\frac{d}{dx}[f(x) + g(x)]$ o $\frac{d}{dx}[f(x) - g(x)]$.

g) Encuentre la derivada de $x^2 * e^{2x}$. ¿Qué puede deducir sobre $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}[\mathrm{f(x)} * \mathrm{g(x)}]$? Compruebe su resultado utilizando el sistema CAS, ¿qué observaciones nota?

h) Encuentre las derivadas de: $\frac{x^2}{e^{2x}}$ & $\frac{e^{2x}}{x^2}$. ¿Qué puede deducir sobre $\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]$?

i) Compruebe el resultado del inciso anterior utilizando el sistema CAS. Utilice el comando "condenom" para obtener el denominador común y reducir la expresión. El sintaxis es **condenom(expresión)**.

A.7. Actividad 7: Aplicación

A.7.1. Versión 1

Actividad 7b
Aplicación
Versión 1, 25/11/13

OBJETIVOS:

- Entender el concepto de máximo, mínimo y punto de inflexión
- Formulación matemática del máximo, mínimo y punto de inflexión
- Entender como las derivadas influyen en la forma de una función

A. Puntos Críticos y Su Significado

Parte I (con lápiz y papel): Análisis de Funciones: Creciente, Decreciente y Concavidad

Los términos *creciente*, *decreciente* y *constante* son utilizados para describir el comportamiento de una función al moverse del la izquierda a la derecha. Su comportamiento depende en los valores de *f(x)*.

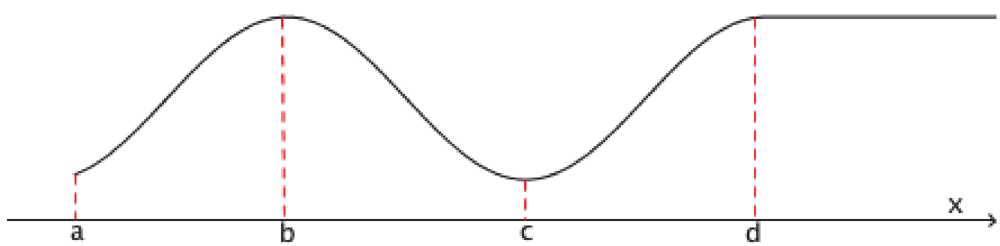
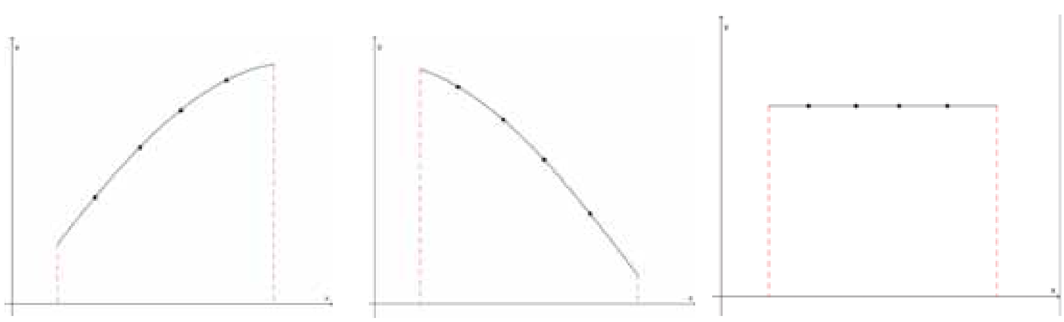


Figura 1.

a) Considere la figura 1, completa la siguiente tabla con los términos *creciente, decreciente* o *constante*.

Valores de x	Comportamiento de la función
a – b	
b – c	
c – d	
d – ∞	

b) En cada uno de las siguientes figuras se encuentran 4 puntos. Para cada punto trace la tangente.



c) Considere las tangentes del inciso anterior. ¿Qué puede concluir de los valores de las tangentes para una función *creciente, decreciente* y *constante*?

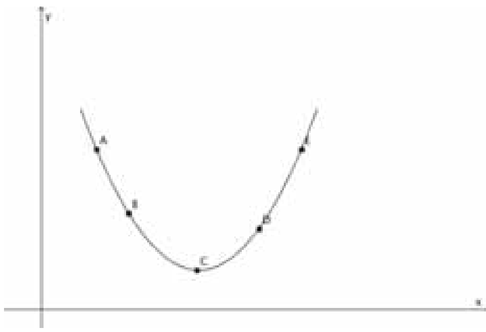


Figura 2.

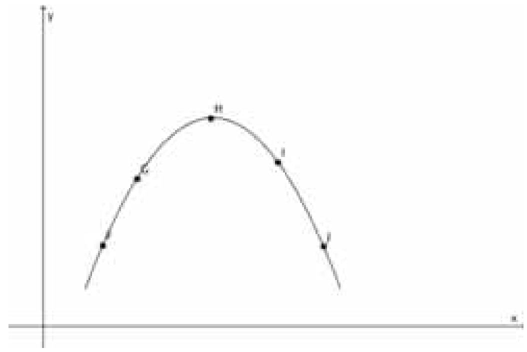


Figura 3.

d) Observe la figura 2, ¿qué representa el punto C (máximo o mínimo)? ¿Qué observa con respecto a las tangentes de cada uno de los puntos de esa figura?

e) Observe la figura 2, ¿qué representa el punto H (máximo o mínimo)? ¿Qué observa con respecto a las tangentes de cada uno de los puntos de esa figura?

f) Recordando que una derivada representa una tangente y analizando su respuestas de los incisos d y e, ¿qué es el valor de la derivada en un máximo o mínimo? ¿Qué nota con respecto al valor de las derivadas cerca del máximo o mínimo?

g) Si la derivada de una función vale cero (0), se conoce como un punto critico. Reflexione en la respuesta del inciso anterior, si existe un punto critico, ¿cómo puede ver si dicho punto es un máximo, mínimo o ninguno?

Aun que el signo de la derivada de *f* indica en donde la grafica de *f* es creciente o decreciente, no indica la dirección de la *curvatura*. Por ejemplo, la función es creciente en ambos lados del punto en la figura 4, pero en el lado izquierdo tiene una curvatura hacia arriba ("retiene agua") y en el lado derecho tiene una curvatura hacia abajo ("derrama agua"). En intervalos donde la grafica de *f* tiene una curvatura hacia arriba se dice que *f* es *cóncava hacia arriba*, y en intervalos donde la grafica de *f* tiene una curvatura hacia abajo se dice que *f* es *cóncava hacia abajo.* La curvatura también se conoce como la concavidad.

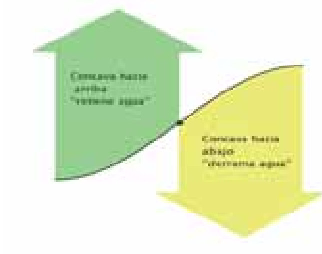


Figura 5.

h) Para las figuras 6 y 7 en los puntos indicados, estime y trace la línea tangente correspondiente.

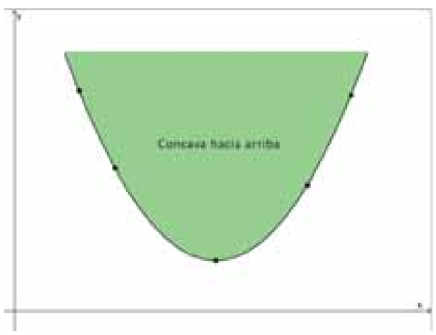


Figura 6.

Figura 7.

i) Observe su respuesta del inciso h, ¿qué observación nota con respecto a las pendientes para curvas cóncava hacia arriba y cóncava hacia abajo (las pendientes aumentan o disminuyen)? ¿A qué conclusiones llega con respecto al valor de la derivada de la función f' para curvas cóncava hacia arriba y cóncava hacia abajo?

j) Si la primera derivada f' es creciente, ¿cómo será la segunda derivada f''? Si f' es decreciente, ¿cómo será f''?¿Qué relación existe entre el valor de la segunda derivada f'' con respecto a la concavidad de la función f?

Parte II (con CAS): Comprobación Grafica

Dentro del sistema CAS, se puede graficar. Para graficar presión el botón "on" y después "B Grafico" para llegar a la pantalla del plano x-y. Dentro de esta pantalla, presione "menú", "3: Tipo de grafico", "1: Función" después aparece la línea donde se introduce la función a graficar.

a) Grafique la función $f(x) = x^2 - 4x + 3$. ¿Qué tipo de concavidad nota? ¿Cambia la concavidad en algún intervalo? Compruebe su observación con utilizando la segunda derivada de la función.

b) Grafique la función $f(x) = x^3$. ¿Qué nota de la concavidad? ¿Cambia en algún punto? ¿Cuál es la segunda derivada de la función?

c) Considere los inciso a y b, ¿qué observación puede hacer con respecto a la concavidad y la segunda derivada para cada función? En el punto donde cambia la concavidad, ¿cuánto vale la segunda derivada?

En los incisos anteriores, se nota que hay un punto donde cambia la concavidad dicho punto se conoce como el *punto de inflexión*.

Grafique las funciones $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$, $f'(x)$ y $f''(x)$ en la misma pantalla. Utilice como referencia las graficas para responder los siguientes incisos.

d) ¿Qué importancia tiene cuando la primera derivada f' y la segunda derivada f'' toman valores de 0?

f) Si tuvieran que trazar un grafica, unos de los datos mas importantes serian los máximo, mínimos y la concavidad. Para obtener los datos anteriores se calcula la primera y segunda derivada de dicha función, ¿qué seria el siguiente paso?

g) Suponga que una función *f* tienen puntos críticos en a, b, c y puntos de inflexión en d y e. ¿Qué significa tener puntos críticos con respecto a *f* '? ¿Qué significa tener puntos de inflexión con respecto a *f* ''? ¿Qué indican los puntos críticos y puntos de inflexión?

h) Tomando la misma suposición del inciso anterior, ¿cambiaria los valores de la primera derivada y la segunda derivada entre los intervalos entre los puntos críticos y puntos de inflexión, respectivamente?

En los incisos anteriores, se nota la importancia de encontrar los ceros de una ecuación. En el sistema CAS, existe el comando "zeros". Dicho comando encuentra los ceros de la función. El sintaxis es el siguiente, zeros(función, variable). La palabra "zeros" se puede escribir utilizando el teclado, se presiona el botón "( )" para poner las paréntesis, se introduce la función (ecuación) y finalmente "," (coma) y la variable.

i) Introduzca **zeros(x^3+4x^2+x–6,x)** en la calculadora y presione **enter**, ¿qué sucede y qué representan esos valores? Compruebe esos valores.

Para los siguientes incisos utilice los comandos **zeros**, **derivar**, **tal que,** etc. pero sin utilizar la grafica. Además considere que $f(x) = x^4 - 5x^3 + 9x^2$.

j) ¿Qué procedimiento utilizaría para encontrar los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los máximos y mínimos? ¿Cuáles son los intervalos y los máximos y mínimos?

k) ¿Qué procedimiento utilizaría para encontrar los intervalos de concavidad y los puntos de inflexión? ¿Cuáles con los intervalos de concavidad y los puntos de inflexión?

l) Compruebe los incisos j y k al graficar la función dentro del sistema CAS. ¿Nota algunas diferencias?

m) Reflexión sobre la actividad, ¿cómo puede resumir el efecto que tienen las derivadas (primera y segunda) sobre la grafica de la función?

A.7.2. Versión 2

Actividad 7b
Aplicación
Versión 2, 2/12/13

OBJETIVOS:

- Entender el concepto de máximo, mínimo y punto de inflexión
- Formulación matemática del máximo, mínimo y punto de inflexión
- Entender como las derivadas influyen en la forma de una función

A. Puntos Críticos y Su Significado

Parte I (con lápiz y papel): Análisis de Funciones: Creciente, Decreciente y Concavidad

Los términos *creciente*, *decreciente* y *constante* son utilizados para describir el comportamiento de una función al moverse del la izquierda a la derecha. Su comportamiento depende en los valores de *f(x)*.

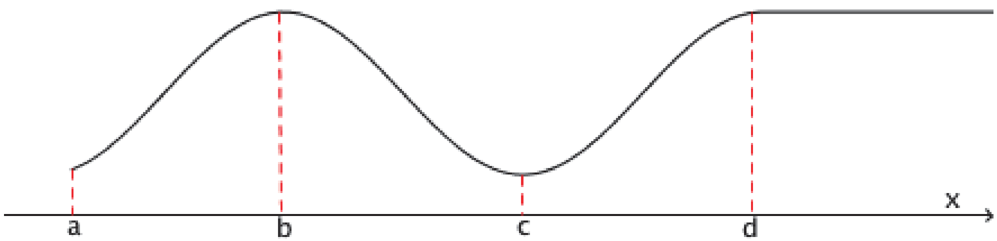
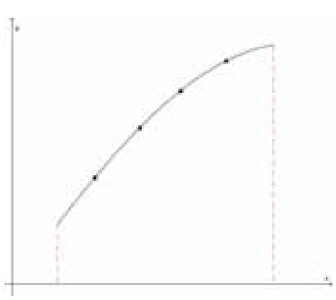
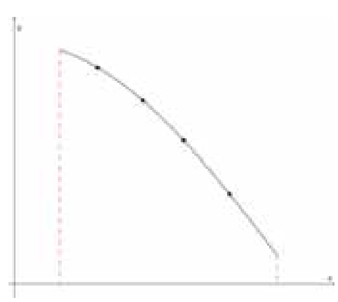
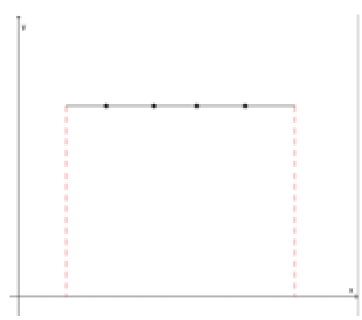


Figura 1.

a) Considere la figura 1, completa la siguiente tabla con los términos *creciente, decreciente* o *constante*.

Intervalos de x	Comportamiento de la función
a – b	
b – c	
c – d	
d – ∞	

b) En cada uno de las siguientes figuras se encuentran 4 puntos. Para cada punto trace la tangente.

c) Considere las tangentes del inciso anterior. ¿Qué puede concluir de los valores de las tangentes para una función *creciente, decreciente* y *constante*?

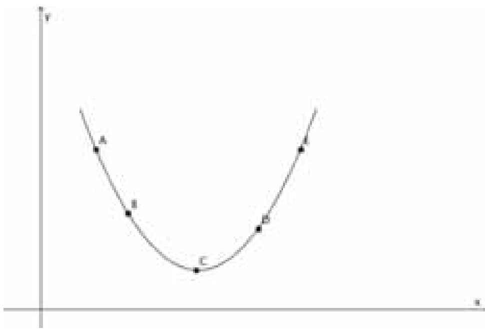


Figura 2.

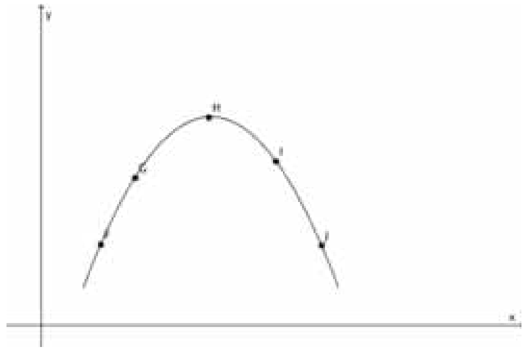


Figura 3.

d) Observe la figura 2, ¿qué representa el punto C (máximo o mínimo)? ¿Qué observa con respecto a las tangentes de cada uno de los puntos de esa figura?

e) Observe la figura 3, ¿qué representa el punto H (máximo o mínimo)? ¿Qué observa con respecto a las tangentes de cada uno de los puntos de esa figura?

f) Recordando que una derivada representa una tangente y analizando su respuestas de los incisos d y e, ¿qué es el valor de la derivada en un máximo o mínimo? Este punto se conoce como un punto critico.

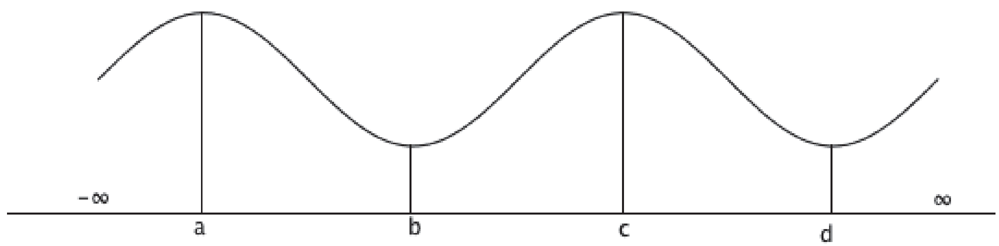


Figura 4.

g) Observando la figura 4, ¿cuáles serian los puntos críticos de la primera derivada? ¿Por qué?

h) Considere la figura 4, completa la síguete tabla. En la columna “Intervalo”, los intervalos están separados por los puntos críticos, la columna “Comportamiento” se refiere a su la función es creciente o decreciente y la columna “Valor de f‘” se refiere a si la derivada es positiva o negativa.

Intervalo	Comportamiento	Valor de f‘

i) ¿Qué relación encuentre entre el comportamiento de la función y el valor de la derivada?

j) Observe la figura 5 y los incisos anteriores, si existe un punto critico, ¿cómo se puede clasificar como máximo o mínimo con respecto a la primera derivada?

Aun que el signo de la derivada de *f* indica en donde la grafica de *f* es creciente o decreciente, no indica la dirección de la *curvatura*. Por ejemplo, la función es creciente en ambos lados del punto en la figura 5, pero en el lado izquierdo tiene una curvatura hacia arriba ("retiene agua") y en el lado derecho tiene una curvatura hacia abajo ("derrama agua"). En intervalos donde la grafica de *f* tiene una curvatura hacia arriba se dice que *f* es *cóncava hacia arriba*, y en intervalos donde la grafica de *f* tiene una curvatura hacia abajo se dice que *f* es *cóncava hacia abajo.* La curvatura también se conoce como la concavidad.

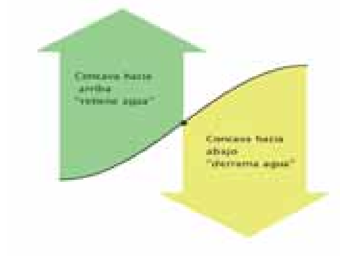


Figura 5.

k) Para las figuras 6 y 7 en los puntos indicados, estime y trace la línea tangente correspondiente.

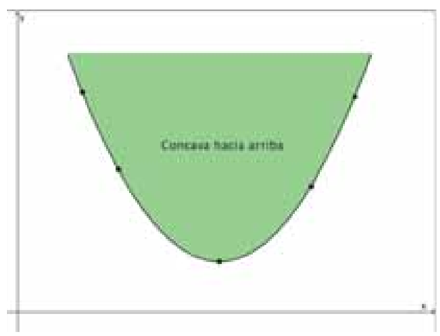


Figura 6.

Figura 7.

l) Observe su respuesta del inciso h, ¿qué observación nota con respecto a las pendientes para curvas cóncava hacia arriba y cóncava hacia abajo (las pendientes aumentan o disminuyen)? ¿A qué conclusiones llega con respecto al valor de la derivada de la función *f* ' para curvas cóncava hacia arriba y cóncava hacia abajo?

m) Si la primera derivada *f* ' es creciente, ¿cómo será la segunda derivada *f* ''? Si *f* ' es decreciente, ¿cómo será *f* ''?¿Qué relación existe entre el valor de la segunda derivada *f* '' con respecto a la concavidad de la función *f* ?

Parte II (con CAS): Comprobación Grafica

Dentro del sistema CAS, se puede graficar. Para graficar presión el botón “on” y después “B Grafico” para llegar a la pantalla del plano x-y. Dentro de esta pantalla, presione “menú”, “3: Tipo de grafico”, “1: Función” después aparece la línea donde se introduce la función a graficar.

a) Grafique la función $f(x) = x^2 - 4x + 3$. ¿Qué tipo de concavidad nota? ¿Cambia la concavidad en algún intervalo? Compruebe su observación con utilizando la segunda derivada de la función.

b) Grafique la función $f(x) = x^3$. ¿Qué nota de la concavidad? ¿Cambia en algún punto? ¿Cuál es la segunda derivada de la función?

c) Considere los inciso b, En el punto donde cambia la concavidad, ¿cuánto vale la segunda derivada en dicho punto?

d) Elija dos (2) puntos de la función del inciso b, uno en donde hay concavidad hacia arriba y otro en donde hay concavidad hacia abajo. ¿Qué valores toma la segunda derivada en dicho puntos?

En los incisos anteriores, se nota que hay un punto donde cambia la concavidad dicho punto se conoce como el *punto de inflexión*.

e) Si en un punto de inflexión hay un cambio de concavidad y observando la respuesta del inciso anterior, ¿cuáles serian los intervalos de concavidad?

Grafique las funciones *$f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$, $f'(x)$ y $f''(x)$* en la misma pantalla. Utilice como referencia las graficas para responder los siguientes incisos.

f) ¿Qué relación observa entre la primera derivada y la función? Considere los máximos y mínimos y los intervalos de creciente y decreciente en su respuesta.

g) ¿Qué relación nota entre la segunda derivada y la función? Considere los máximos y mínimos, concavidad y los intervalos de concavidad.

En los incisos anteriores, se nota la importancia de encontrar los ceros de una ecuación. En el sistema CAS, existe el comando "zeros". Dicho comando encuentra los ceros de la función. El sintaxis es el siguiente, zeros(función, variable). La palabra "zeros" se puede escribir utilizando el teclado, se presiona el botón "( )" para poner las paréntesis, se introduce la función (ecuación) y finalmente "," (coma) y la variable.

h) Introduzca **zeros(x^3+4x^2+x-6,x)** en la calculadora y presione **enter**, ¿qué sucede y qué representan esos valores? Compruebe esos valores.

Para los siguientes incisos utilice los comandos **zeros**, **derivar**, **tal que,** etc. pero sin utilizar la grafica. Además considere que *$f(x) = x^4 - 5x^3 + 9x^2$.*

i) ¿Qué procedimiento utilizaría para encontrar los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los máximos y mínimos? ¿Cuáles son los intervalos y los máximos y mínimos?

j) ¿Qué procedimiento utilizaría para encontrar los intervalos de concavidad y los puntos de inflexión? ¿Cuáles con los intervalos de concavidad y los puntos de inflexión?

k) Compruebe los incisos j y k al graficar la función dentro del sistema CAS. ¿Nota algunas diferencias?

l) Reflexión sobre la actividad, ¿cómo puede resumir el efecto que tienen las derivadas (primera y segunda) sobre la grafica de

Apéndice B

Cambios

B.1. Primera Etapa

La Tabla B.1 contiene los cambios después de analizar la **actividad 1**, **versión 2**, realizada por Paty e Isaac en la fase de experimentación formal parte conceptual. Los cambios fueron reflejados en la actividad 1, versión 3.

Tabla B.1: Cambios al analizar la actividad 1, versión 2

Dónde	Qué	Por qué
Página 1, texto antes de I-a	Agregar “Es decir...”	Agrega claridad de qué significa una diferencia.
Página 2, I-d	Agregar “tendencia uniforme” a la pregunta	Para centralizar y clarificar la pregunta.
Página 2, I-g	Eliminar “con respecto...”	Para clarificar la pregunta.
Página 3, I-h y I-j	Eliminar ambas preguntas	Repetitivas.
	Agregar una pregunta	Para observar la forma matemática de la ecuación.
Página 3, antes de II-a	Agregar una pregunta	Para introducir otros usos del sistema CAS.

La Tabla B.2 contiene los cambios después de analizar la la **actividad 2**, **versión 1**, realizada por Óscar en la fase de experimentación informal. Los cambios fueron reflejados en la actividad 2, versión 2.

Tabla B.2: Cambios al analizar la actividad 2, versión 1

Dónde	Qué	Por qué
Página 3, II-b	Reestructurar la pregunta	Para hacer la pregunta más clara y específica.
Página 4, II-c	Reestructurar la pregunta	Para hacer la pregunta más clara y específica.
Página 4, II-f	Reestructurar la pregunta	Para hacer la pregunta más clara y específica.

La Tabla B.3 contiene los cambios después de analizar la **actividad 2**, **versión 2**, realizada por Paty e Isaac en la fase de experimentación formal parte conceptual. Los cambios fueron reflejados en la actividad 2, versión 3.

Tabla B.3: Cambios al analizar la actividad 2, versión 2

Dónde	Qué	Por qué
Página 4, texto antes de II-c	Agregar “Celda que tiene...”	Para hacer las instrucciones más concisas.
Página 5, II-h	Eliminar y cambiar	No era clara la pregunta.

La Tabla B.4 contiene los cambios realizados después de analizar la **actividad 3**, **versión 1**, realizada por Óscar y Anthony en la fase de experimentación informal. Los cambios fueron reflejados en la actividad 3, versión 2.

Tabla B.4: Cambios al analizar la actividad 3, versión 1

Dónde	Qué	Por qué
Página 1, I-a	Agregar texto de $y_n = f(x_n)$	Para hacer la pregunta más clara.
Página 1, I-b	Reestructurar la pregunta	Para hacer la pregunta más clara y específica.
Página 2, II-a	Reestructurar la pregunta y agregar “Cómo se expresa...”	Para hacer la pregunta más clara y específica.
Página 2, II-b	Eliminar unas partes de la pregunta	La pregunta no es clara.
Página 2, II-c	Agregar texto y modificar la tabla	Para hacer la pregunta más clara y específica.
Página 3, después de II-e	Agregar Pregunta	Para cumplir con los objetivos.

La Tabla B.5 contiene los cambios después de analizar la **actividad 4**, **versión 1**, realizada por

Óscar y Anthony en la fase de experimentación informal. Los cambios fueron reflejados en la actividad 4, versión 2.

Tabla B.5: Cambios al analizar la actividad 4, versión 1

Dónde	Qué	Por qué
Página 1, texto al inicio	Cambiar texto y convertir en pregunta	Para establecer significado al hacer ejercicios.
Página 2, I-f	Eliminar	No es relevante.
Página 2, II-a	Agregar una gráfica	Para hacer la visualización más clara.
Página 2, II-d	Agregar el texto “Encontrar el límite gráficamente...”	Para incorporar una representación gráfica.

La Tabla B.6 contiene los cambios realizados después de analizar la **actividad 4**, **versión 2**, realizada por Paty e Isaac en la fase de experimentación formal parte conceptual. Los cambios fueron reflejados en la actividad 4, versión 3.

Tabla B.6: Cambios al analizar la actividad 4, versión 2

Dónde	Qué	Por qué
Página 1, I-c	Cambio de texto de “de la actividad pasada?? a “de la pendiente”	Para hacer la pregunta más clara y específica.

La Tabla B.7 contiene los cambios hechos después de analizar la **actividad 5**, **versión 1**. Estos cambios fueron realizados después de discusiones con Óscar y Anthony sobre las preguntas de la actividad. Los cambios fueron reflejados en la actividad 5, versión 2.

Tabla B.7: Cambios al analizar la actividad 5, versión 1

Dónde	Qué	Por qué
Página 2, I-e	Eliminar	El concepto será formulado después.
Página 3, I-h	Agregar gráficas	Cambio de formato para explicar mejor la pregunta.
Página 4, II-a y II-b	Eliminar	La simbolización ya se explicó.

La Tabla B.8 contiene los cambios hechos después de analizar la **actividad 6**, **versión 1**. Estos cambios fueron realizados después de discutir con Carolina sobre las preguntas de la actividad. Los cambios fueron reflejados en la actividad 6, versión 2.

Tabla B.8: Cambios al analizar la actividad 6, versión 1

Dónde	Qué	Por qué
Página 1, I-a	Separar la pregunta en dos	Para hacer más fácil de entender y resolver.
Página 3, I-c	Cambiar el texto	Agregar un elemento de reflexión.
Página 3, I-d	Eliminar la pregunta	No es relevante.

La Tabla B.9 contiene los cambios hechos después de analizar la **actividad 7**, **versión 1**. Estos cambios fueron realizados después de discutir con Óscar y Anthony, sobre las preguntas de la actividad. Los cambios fueron reflejados en la actividad 7, versión 2.

Tabla B.9: Cambios al analizar la actividad 7, versión 1

Dónde	Qué	Por qué
Página 2, I-f y I-g	Eliminar y cambiar	Muy general.
	Agregar otras preguntas	Agregar representaciones gráficas para un mayor entendimiento.
Página 4, II-c	Separar la pregunta en dos	Necesario para analizar mejor el problema.
Pñagina 4, II-d, II-f, II-h, y II-h	Reestructurar las preguntas	Para hacer la pregunta más clara y específica.
	Eliminar algunas	Hacer las preguntas más abiertas para generar discusión.

Para las actividades 5, 6 y 7; después de la fase de experimentación formal parte conceptual realizada por Paty e Isaac, no hubo cambios.

B.2. Segunda Etapa

No se realizó ningún cambio en la **actividad 1**, **versión 3**.

La Tabla B.10 contiene los cambios realizados después de analizar la **actividad 2**, **versión 3**. Los cambios fueron reflejados en la **actividad 2**, **final**.

Tabla B.10: Cambios al analizar la actividad 2, versión 3

Dónde	Qué	Por qué
Página 3, II-a y II-b	Cambiar a una tabla	Más fácil para analizar.
	Agregar preguntas	Más enfocadas al tema principal.
Página 4, II-f y II-g	Cambiar y reestructurar	Cambio de enfoque y concepto.
	Agregar Preguntas	Más enfocadas al tema principal.
Después de la parte II	Agregar una sección de simbolización	Necesaria para reforzar los conceptos y la semiótica.

LaTabla B.11 contiene los cambios realizados después de analizar la **actividad 3**, **versión 2**. Los cambios fueron reflejados en la **actividad 3**, **final**.

Tabla B.11: Cambios al analizar la actividad 3, versión 2

Dónde	Qué	Por qué
Inicio	Agregar una sección de simbolización	Para formular la semiótica requerida.
Página 1, I-a y I-b	Eliminar las preguntas	Muy repetitivos.
Página 1, I-d	Separar en dos preguntas	Para hacer la pregunta más clara y específica.
Página 3, II-f	Separar en dos preguntas	Para hacer la pregunta más clara y específica.

La Tabla B.12 contiene los cambios realizados después de analizar la **actividad 4**, **versión 3**. Los cambios fueron reflejados en la **actividad 4**, **final**.

Tabla B.12: Cambios al analizar la actividad 4, versión 3

Dónde	Qué	Por qué
Página 1, I-a y I-b	Separar en dos preguntas	Para hacer la pregunta más clara y específica.
Página 1, I-c	Agregar más preguntas	Para hacer hincapié y enfocarse en la forma de la ecuación.
Página 3, II-c	Agregar una tabla	Más fácil para analizar.
Página 3, II-d	Separar en tres preguntas	Para hacer la pregunta más clara y específica.
Página 3, II-e	Separar en más preguntas	Para hacer la pregunta más clara y específica.

La Tabla B.13 contiene los cambios realizados después de analizar la **actividad 5**, **versión 2**. Los cambios fueron reflejados en la **actividad 5**, **final**.

Tabla B.13: Cambios al analizar la actividad 5, versión 2

Dónde	Qué	Por qué
Página 1, I-a	Agregar más columnas y filas a la tabla	Para poder analizar las tendencias.
	Agregar el valor de (8,9)	Para poder ver la variación.
	Agregar pregunta que trate la condición cuando $\Delta x \to 0$	Es un concepto fundamental en límites.
Página 2, I-c y I-d	Eliminar "curva? y "recta" de la pregunta	No se considera importante.
	Agregar preguntas	Para relacionar una línea secante con una tangente.
	Agregar preguntas y ejercicios para el trazado de las líneas pendientes	Práctica para estimar líneas pendientes.
Página 3, I-f, I-g y I-h	Eliminar	Muy repetitivas.
Página 4, II-a	Agregar valores menores a 3 a la tabla	Necesario para observa valores próximos a 3.
Página 4, II-b	Eliminar	Muy repetitiva.
Página 4, II-c	Separar en dos preguntas	Para hacer la pregunta más clara y específica.
	Agregar una pregunta	Para relacionar la pendiente de la línea tangente con el límite.
	Agregar un conjunto de preguntas de la sección II para el punto (8,9)	Para reforzar el concepto y observar las posibles variaciones.
Después de la parte II	Agregar una sección de simbolización	Para generar una fórmula matemática del límite.

La Tabla B.14 contiene los cambios realizados después de analizar la **actividad 6**, **versión 2**. Los cambios fueron reflejados en la **actividad 6**, **final**.

Tabla B.14: Cambios al analizar la actividad 6, versión 2

Dónde	Qué	Por qué
Al inicio	Agregar una sección de simbolización	Para comparar la fórmula generada con la forma convencional.
	Poner primero la parte CAS	Para desarrollar una función de pendientes de la línea tangente.
Página 4, parte II	Reestructurar la pregunta	Cambiar el enfoque a una función de pendientes en lugar de procedimientos operacionales de límites.
Página 1, texto antes de I-a	Eliminar la pregunta	Muy repetitivo.
Página 1, I-a, I-b, y I-c	Eliminar la pregunta	Muy repetitivo.
Página 3, II-e y II-f	Cambiar el formato y el orden	Más claro y fácil de entender.
	Agregar unas preguntas con gráficas	Para relacionar la pendiente de la línea tangente con su función.

La Tabla B.15 contiene los cambios realizados después de analizar la **actividad 7**, **versión 2**. Los cambios fueron reflejados en la **actividad 7**, **final**.

Tabla B.15: Cambios al analizar la actividad 7, versión 2

Dónde	Qué	Por qué
Página 3, figura 4	Cambiar la figura	Para incorporar valores relativos y absolutos.
	Agregar preguntas	Para distinguir entre valores relativos y absolutos.
Página 4, I-m	Separar en más preguntas	Para hacer la pregunta más clara y específica.

Apéndice C

Versiones Finales

C.1. Actividad 1: Diferencias

Actividad 1
Diferencias

Líder:
Calculadora:
Hoja de Trabajo:
Número de Equipo: Hora de Inicio: Hora de Terminación:

A. Diferencia Matemática

Parte I (con lápiz y papel): Concepto General

La diferencia matemática es el resultado de restar, en donde se resta un sustraendo de un minuendo. Por ejemplo, la diferencia entre 3 (sustraendo) y 8 (minuendo) es 5.
En la vida cotidiana cuando se expresa una diferencia, típicamente se refiere a la diferencia entre un valor inicial (sustraendo) y un valor final (minuendo). *Es decir, la diferencia es igual al valor final menos el valor inicial*.

a) Completa la siguiente tabla. Pase el texto de la columna 1 a una sintaxis matemática en la columna 2 y escriba el resultado de la diferencia en la columna 3.

Texto	Sintaxis	Diferencia
Una cuenta de ahorros tiene $2383.87 al inicio del mes y $2873.92 al final. ¿Cuál fue la diferencia a lo largo del mes?		
Se saca un pedazo de carne a descongelar, al sacarse del congelador se encuentra a -3^0 C y después de 5 horas se encuentra a 24^0C. ¿Cuál es la diferencia de temperatura después de las 5 horas?		
Un automóvil contiene un tanque de 90 litros. Se llena al comienzo de la semana, al final de ella se observa que el tanque contiene 32.3 litros. ¿Cuál es la diferencia de litros en el tanque a lo largo de la semana?		

b) Observe las diferencias de los tres (3) casos del inciso anterior, ¿existe una diferencia con signo negativo? En caso afirmativo, ¿qué representa con respecto a la cantidad (aumenta o disminuye)?

c) ¿Qué concluyes a partir del inciso anterior con respecto al signo de la diferencia? Considere signos positivos, negativos y valores de cero.

d) En la siguiente tabla en la primera columna se encuentra una secuencia de cinco (5) números, observe la tendencia uniforme (si existe alguna) y anótela en la segunda columna.

Secuencia	Observaciones
2, 4, 6, 8, 10	
45, 38, 31, 24, 17	
-8.75, -3.5, 1.75, 7, 12.25	
1, 9, 17, 27, 41	

Considere el conjunto de datos, en donde i corresponde a una variable independiente mientras tanto u corresponde a la variable dependiente. Por lo tanto u_i corresponde a u evaluada en cualquier valor de i. Por ejemplo, u_3 indica el valor de u cuando i es 3 lo cual es 14.

i	1	2	3	4	5	6
u_i	8	11	14	17	20	23

e) Utilizando el conjunto de datos mencionado, complete la siguiente tabla.

Sintaxis	Representación Algebraica	Resultado
$u_5 - u_4$		
$u_2 - u_1$		
$u_3 - u_2$		
$u_5 - u_3$		
$u_3 - u_6$		
$u_4 - u_1$		

En matemáticas el operador delta (Δ) representa un cambio. Siendo un operador matemático, puede aplicarse a cualquier variable. Por ejemplo, Δx representa un cambio en x mientras que ΔT representa un cambio en T (muchas veces dicha variable representa una temperatura).

f) Considerando el concepto de Δ y utilizando el conjunto de datos, complete la siguiente tabla.

Sintaxis	Δu	Δi
$u_5 - u_4$		
$u_2 - u_1$		
$u_3 - u_1$		
$u_5 - u_3$		
$u_3 - u_6$		
$u_4 - u_1$		

g) Analice la tabla del inciso f, ¿hay una relación con respecto a Δi y Δu? ¿qué puede concluir?

h) Exprese su observación del inciso g en forma matemática (fórmula). ¿Se cumple en cada caso de la tabla?

Parte 2 (con CAS): Introducción a CAS

Si una variable *y* depende de una variable *x,* de tal manera que cada valor de *x* determina exactamente un valor de *y*, entonces se dice que ***y* es una función de *x***. Cuatro métodos comunes para la representación de funciones son: numéricamente por tablas, geométricamente por gráficas, algebraicamente por fórmulas y/o verbalmente. Una **función** f es una regla que asocia una salida única con cada entrada. Si la entrada es denotada por *x*, entonces la salida es denotada por *f(x)* (se lee como *"f* de *x*"). Para una entrada dada *x*, la salida de la función *f* se denomina el valor de *f* en *x*. Algunas veces se denomina la salida por una sola letra, por ejemplo *y*, y se escribe como *y= f(x).* Esta ecuación expresa *y* como una función de *x*; la variable *x* se llama la ***variable independiente*** de *f*, y la variable *y* se llama la ***variable dependiente*** de *f.*

Las coordenadas cartesianas son un sistema de coordenadas de dos dimensiones, denominado como el plano cartesiano, utilizado para la representación gráfica de una función. En el eje horizontal, conocido como el eje "x", se encuentran las variables independientes mientras que en el eje vertical, conocido como el eje "y", se encuentran las variables dependientes. Siendo un plano, cada punto se puede expresar por sus coordenadas (x, y).

a) Introduzca la expresión $\frac{5x-6x*x+x^2}{x}$ a la calculadora y presione **enter**, ¿qué observa? Presione el botón ↑ en el touch pad y presione **enter**, ¿qué sucede? ¿Para qué puede ser útil la observación anterior?

Una herramienta útil dentro del sistema CAS, es el comando "tal que", **|**. Dicho comando se elije presionando el botón azul "CTRL" y el botón "=", el cual se encuentra debajo de "CTRL" y después se selecciona "**|".** La sintaxis para utilizar el comando es el siguiente, ***"función| variable = valor".***

b) Considere la función $2x^2 + 5x - 2$. Llene la siguiente tabla con los valores de x respectivos.

Valor de x	Operación con lápiz	Resultado de CAS
-3		
-2		
-1.25		
-0.5		
0		
0.25		
0.89		

C.2. Actividad 2: Pendientes

Actividad 2
Pendientes

Líder:
Calculadora:
Hoja de Trabajo:
Número de Equipo: Hora de Inicio: Hora de Terminación:

A. Pendiente

Parte I (con lápiz y papel): Concepto de Pendiente y Rectas

a) Un carro recorre 245 kilómetros con 18 litros de gasolina.

1) Si el mismo carro gasta 30 litros de gasolina, ¿qué distancia viajó?

2) Explique la lógica utilizada en el problema anterior y las suposiciones hechas.

3) ¿Cuál es la razón de cambio en kilómetros por litros de gasolina y qué significa?

4) Utilizando el dato original, 18 litros para 245 kilómetros y el dato del problema 1, grafique dichos puntos y trace la recta. Formule una expresión matemática para la pendiente.

5) ¿Qué relación hay entre una razón de cambio y una pendiente?

El modelo matemático más sencillo para relacionar dos variables es la **ecuación lineal** $y = mx + b$. Esta ecuación se llama *lineal* porque su gráfica es una línea. Cuando $x = 0$, se obtiene:

$$y = m(0) + b = b$$

Por lo tanto, la línea cruza el eje y en $y = b$. En otras palabras, el intercepto y es $(0, b)$. La inclinación o pendiente es m. La pendiente de una línea no vertical es el numero de unidades que la recta sube (o cae) verticalmente por cada unidad de cambio horizontal de izquierda a derecha, como se observa en la figura 1 y 2.

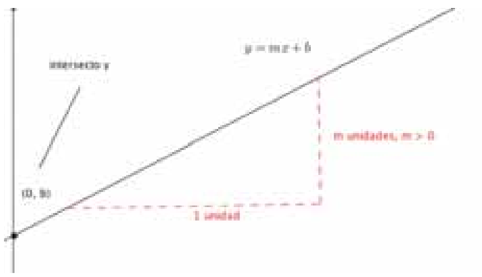


Figura 1. Línea recta con pendiente positiva

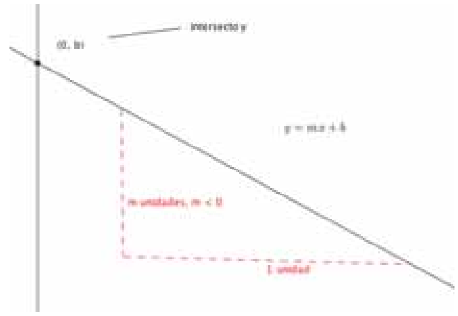


Figura 2. Línea recta con pendiente negativa

b) Considere la ecuación de la recta, $y = 2x + 3$. Identifique la variable independiente y la variable dependiente. Elija por lo menos 5 valores dependientes y haga una tabla con los valores independientes correspondientes.

c) Grafique la línea recta expresada por la ecuación $y = 2x + 3$.

d) Considere los puntos (6, 9) y (0, 11). Sin hacer ningún cálculo responda ¿la pendiente es positiva o negativa? Compruebe gráficamente y después analíticamente.

e) Utilizando los puntos generales, (x_n, y_n), donde n es n-ésimo punto. Calcule la pendiente entre el punto 1 (x_1, y_1) y 2 (x_2, y_2).

f) Exprese la ecuación de la pendiente para los puntos generales del inciso e utilizando el concepto de Δ.

Parte II (con CAS): Aplicación

La datación por radiocarbono, es una técnica de datación radiométrica que utiliza el isótopo carbono-14 para la determinación de la edad de materiales que contienen carbono. Los siguientes datos obtenidos experimentalmente, demuestran la cantidad de C-14 para un material a lo largo del tiempo.

Antigüedad del Material (miles de años)	Cantidad de C-14
0	15.30
1	13.56
2	12.01
3	10.64
4	9.43
5	8.35
6	7.40
7	6.56
8	5.81
9	5.15
10	4.56
11	4.04
12	3.58
13	3.17
14	2.81
15	2.49
16	2.21
17	1.95

a) Complete la siguiente tabla considerando el rango de años dado.

Rango	Diferencia de Años	Diferencia de C-14	Pendiente
6 – 14			
6 – 12			
6 – 10			
6 – 8			

b) Utilizando la pendiente y su intervalo respectivo, calcule la cantidad de C-14 a 7 años (7c) y compárelo con la cantidad a 7 años real (7r).

Rango	7c	7c – 7r
6 – 14		
6 – 12		
6 – 10		
6 – 8		

C) ¿Qué observaciones tiene? ¿qué pendientes calculan mejor el valor de 7c?

d) ¿A qué se debe la observación del inciso anterior?

e) Para calcular la cantidad de C -14 a 9.5 años, ¿cuál pendiente del los siguientes rangos utilizaría? (6 – 10, 7 – 10, 8 – 10, 9 – 10) ¿Por qué?

f) Calcule la cantidad de C-14 a 9.5 años.

Dentro del sistema CAS, se pueden graficar datos. Utilizando la hoja de cálculo ingrese los datos experimentales del problema anterior dentro de esta sección. Para elegir la hoja de cálculo seleccione **Home,** y después **Hoja de Cálculo**. En la celda que tiene la letra A (celda superior) llame dicha columna "yrs" y ingrese los datos empezando en la columna con el numero "1" y en la celda que contiene la letra B dicha columna "C14" y ingrese los datos de la misma manera. Dentro de **Home,** elija **Datos y Estadísticas** y presione **Enter**. Utilizando el **Navegador**, mueva la flecha hacia abajo y elija que la variable x sea "yrs". Después, mueva la flecha hacia la izquierda y elija que la variable y sea "C14". Ahora deben aparecer los datos graficados.
Se puede hacer un ajuste de datos para los datos graficados. Dentro de la gráfica, presione **Menú**, **4: Analizar, 6: Regresión.** Dentro de estas opciones existen varios ajuste disponibles.

g) Haga un ajuste de datos utilizando **Lineal (mx +b)**. ¿Qué sucede? Repita el ajuste utilizando **exponencial**. ¿Cuál se ajusta mejor?

Dentro de la hoja de cálculo, también se pueden ver datos de ajuste de datos. En la hoja de cálculo donde están los datos presione **menú, 4: Estadística, 1: Cálculos estadísticos, 3: Regresión lineal (mx + b).** Si no encuentra la hoja de cálculo, puede presionar **ctrl** y los botones de derecha o izquierda para cambiar entre las pantallas. Para lista *x* ingrese A[], para la lista *y* ingrese B[] y en la primera columna de resultado ingrese c[].

h) ¿Qué información aparece?

i) Repita el procedimiento para una **A: Regresión exponencial…** pero en la primero columna de resultado ingrese e[] ¿Qué información aparece? ¿Se llega a la misma conclusión que en el inciso g?

j) Utilizando la ecuación de mejor ajuste, calcule la cantidad de C-14 a 9.5 años.

k) Utilice la pendiente del rango 9 – 10 años para calcular la cantidad de C-14 a 9.3 y 9.6 años. Utilizando como rango 9.3 – 9.6 años, calcule la cantidad de C-14 a 9.5 años.

j) Considere la cantidad de C-14 calculada a 9.5 años del inciso f), k), y j). ¿Cuál es la mejor aproximación? ¿Por qué?

l) Con sus palabras explique la observación anterior.

m) Exprese por medio de una expresión algebraica lo que acaba de decir.

Parte III (Simbolización): Desarrollo simbólica de la Pendiente

a) En el ☐ introduzca un símbolo que represente los datos.

☐	☐
0	15.30
1	13.56
2	12.01
3	10.64
4	9.43
5	8.35
6	7.40
7	6.56
8	5.81
9	5.15
10	4.56
11	4.04
12	3.58
13	3.17
14	2.81
15	2.49
16	2.21
17	1.95

b) Escriba la operación necesaria para calcular la pendiente entre 6 y 14.

c) ¿Cómo llama o expresa simbólicamente la ecuación anterior?

d) ¿Cómo se queda la expresión simbólica anterior cuando se evalúa en 9.5 años?

e) ¿Cómo se expresa lo anterior para cualquier valor?

C.3. Actividad 3: Pendiente como Función

Actividad 3
Pendiente como Función

Líder:
Calculadora:
Hoja de Trabajo:
Número de Equipo: Hora de Inicio: Hora de Terminación:

A. Desarrollo Matemático de $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

Parte I (Simbológica): Desarrollo Preliminar

a) Una forma convencional de describir una pendiente es $m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$. Observe la forma convencional y la suya de la actividad pasada, ¿Cuál prefiere usar? ¿Por qué?

La pendiente también se puede escribir como $\frac{y_3-y_2}{x_3-x_2}$ o $\frac{y_4-y_3}{x_4-x_3}$ o $\frac{y_4-y_1}{x_4-x_1}$ o $\frac{y_n-y_m}{x_n-x_m}$ donde m y n son subíndices. Si $y_n = f(x_n)$ y n = 10, se puede escribir como $y_{10} = f(x_{10})$.

b) Escriba la pendiente $\frac{f(x_{10})-f(x_9)}{x_{10}-x_9}$ introduciendo la variable n.

c) Para la pendiente $\frac{f(x_{15})-f(x_8)}{x_{15}-x_8}$, ¿qué valor le daría a n?

d) Si $\Delta x = x_{n+1} - x_n$, ¿a qué es igual x_{n+1}? Exprese la pendiente del inciso b, utilizando los términos Δx y x_n.

Parte II (con lápiz y papel): Introducción de h

a) Compare la ecuación obtenida en el inciso d de la parte I, ¿es diferente a $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$? Si es diferente, ¿a qué se debe dicha diferencia?

b) Observando la figura 1, ¿qué representa y a qué es igual h?

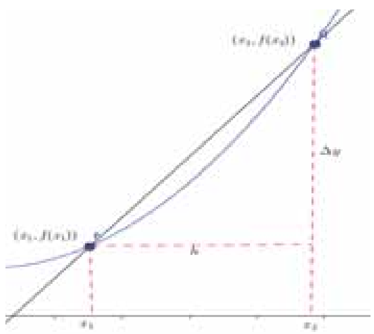


Figura 1. Introducción del concepto *h*

c) Utilizando h, ¿cómo queda la expresión de la pendiente?

d) Considere la función, $f(x) = x^2 + 2x$. ¿Cómo se expresa $f(x_1)$, $f(x_1+\Delta x)$ y $f(x_1+h)$?

e) Considerando $f(x) = x^2 + 2x$ y Δx o h, ¿cuál es la ecuación de la pendiente del inciso c? (No es necesario reducir algebraicamente)

f) Si el primer punto es (1, 3), exprese la ecuación del inciso anterior con estos punto. ¿Qué observa de esta ecuación?

Parte III (con CAS): Variación de h

a) Utilizando la hoja de cálculo dentro de CAS, en la primera columna incluya los valores de Δx o h mientras que en la segunda columna va la pendiente. Utilice la ecuación de la pendiente del inciso f de la parte II. Como en cualquier hoja de cálculo, en la parte gris de la columna gris se puede expresar la función de la pendiente en donde Δx o h equivale a la variable "a", ya que es el valor de la columna A. Complete la tabla.

	A	B
◆		
1	0.1	
2	0.01	
3	0.001	
4	0	
5	-0.001	
6	-0.01	
7	-0.1	

b) ¿Qué observa cuando Δx o $h = 0$? ¿A qué se debe ese valor?

c) ¿A qué número se acerca la pendiente cuando Δx o h se acerca a cero a partir de los números positivos?

d) ¿A qué número se acerca la pendiente cuando Δx o h se acerca a cero a partir de los números negativos?

e) Observando la respuestas a los incisos c y d, ¿llega a la misma conclusión?

f) Cuando Δx o h tiende a cero, ¿a qué tiende la pendiente?

g) Considere la observación del inciso anterior, ¿es igual al valor cuando Δx o $h = 0$?

h) ¿Qué puede concluir de las observaciones de los incisos f y g?

i) ¿Cómo puede definir este tipo de análisis (analítico o gráfico)? Explique su razonamiento.

C.4. Actividad 4: Límites

Actividad 4
Límites

Líder:
Calculadora:
Hoja de Trabajo:
Número de Equipo: Hora de Inicio: Hora de Terminación:

Parte I (con lápiz y papel): Concepto Informal del Límite

Suponga que quiere calcular la velocidad promedio al viajar en una carretera recta. Si pasa el kilómetro 100 a las 12:00 y el kilómetro 140 a las 12:30:

a) Escriba la operación que realiza para obtener la cantidad que se viajó y para saber en cuánto tiempo de viajó.

b) Utilizando las expresiones del inciso anterior, **escriba la operación** para calcular la velocidad promedio.

c) Explique qué es una pendiente y escriba la expresión.

d) Relacione la velocidad promedio con la ecuación de la pendiente. ¿Qué observa?

Por otra parte, aun que la velocidad promedio es una cantidad fija, es casi seguro que la velocidad instantánea (la velocidad indicada por el velocímetro), varía de un momento a otro.

Se lanza verticalmente una piedra del piso a una velocidad de 96 ft/s. Despreciando la resistencia del aire, la posición de la piedra después de t segundos está dada por la función:

$$s(t) = -16t^2 + 96t$$

La posición s es medida en pies con $s = 0$, corresponde al piso mientras que t representa el tiempo en segundos.

e) Escriba las operaciones para calcular la velocidad promedio y calcule la velocidad promedio entre el intervalo de tiempo, i) $t = 1$ y $t = 3$, ii) $t = 1$ y $t = 2$, iii) $t = 1$ y $t = 1.5$.

f) Observe los resultados de i, ii, y iii. ¿Qué diferencia observa?

g) Escriba la ecuación para la velocidad promedio de la piedra entre el intervalo $[t_0, t]$.

Al calcular la velocidad promedio, se utilizó la posición del objeto a dos puntos distintos. Para la velocidad instantánea solamente se utiliza un punto distinto. Como se verá en la siguiente sección, la velocidad instantánea se calcula a partir de velocidades promedios.

h) Si nos interesa calcular la velocidad instantánea a $t_0 = 1$, se calcula la velocidad promedio sobre el intervalo $[1, t]$. Escriba la ecuación de la velocidad promedio.

La velocidad instantánea en el punto $t = t_0$ se determina al calcular la velocidad promedio sobre el intervalo $[t_0, t_1]$. Cuando t_1 se acerca a t_0, la velocidad promedio típicamente se acera a un número único, el cual es la velocidad instantánea. Lo anterior significa, que es un instante en donde el intervalo es muy pequeño. Este número se conoce como un límite. Lo cual se puede expresar matemáticamente como

$$v_{instantanea} = \lim_{t \to t_0} v_{promedio}$$

i) Sustituya la velocidad promedio en del inciso h de la expresión de la velocidad instantánea. En donde $t_0 = 1$.

j) Calcule la velocidad instantánea utilizando la expresión anterior.

Parte II (con CAS): Concepto Informal del Límite

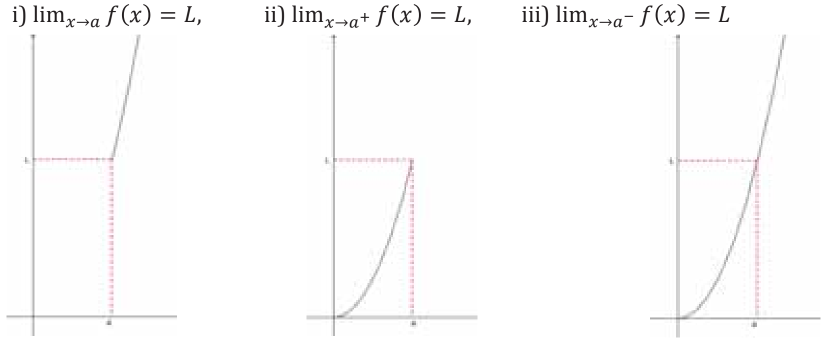
El límite $\lim_{x\to a} f(x) = L$ se refiere a un límite de *dos-lados,* porque *f(x)* se acerca L cuando x se acerca a valores de x menores de a y para valores de x mayores de a. Para algunas funciones, es conveniente analizar límites de *un lado* denominados límites de mano izquierda y de mano derecha. La definición se puede resumir como:

1. **Límite de mano derecha:** Suponga que f es definida para todos los valores de x cercanos a a y $x > a$. Si *f(x)* es arbitrariamente cercana a L para todos valores suficientemente cercanos a a con $x > a$, se escribe
$$\lim_{x\to a^+} f(x) = L$$
y se dice que el límite de *f(x)* cuando x se acerca a a por la derecha es igual a *L.*

2. **Límite de mano izquierda:** Suponga que f es definida para todos los valores de x cercanos a a y $x < a$. Si *f(x)* es arbitrariamente cercana a L para todos valores suficientemente cercanos a a con $x < a$, se escribe
$$\lim_{x\to a^-} f(x) = L$$
y se dice que el límite de *f(x)* cuando x se acerca a a por la izquierda es igual a *L.*

a) Considere las siguientes gráficas y relacione la gráfica con el límite que le corresponde:

i) $\lim_{x\to a} f(x) = L$, ii) $\lim_{x\to a^+} f(x) = L$, iii) $\lim_{x\to a^-} f(x) = L$



Se pueden graficar funciones dentro del sistema CAS. Presione el botón **Home**, **B Gráfico, Menú, 3: Tipo de gráfico, 1: Función.** De esta manera se puede definir una función.

b) Grafique la función $f(x) = \frac{x^3-8}{4(x-2)}$ en el sistema CAS. Observe la gráfica y la ecuación de la función, ¿existe algún valor de x que no puede tomar? ¿Cuál es y por qué?

c) Compruebe utilizando el comando de trazado. (Dentro de la gráfica, presione **Menú, 5: Trazado, 1: Trazado de gráfico** y elija el número y presione **Enter)**. ¿Qué sucede?

d) El trazado se hace, presionando los botones ¡ o ¢ para mover de un punto a otro. Para la misma función, el paso de trazado es de 0.3. Este incremento se puede cambiar utilizando **Menú, 5: Trazado, 3: Paso de trazado,** introduzca el incremento deseado. Utilizando un incremento de trazo de 0.01, complete la siguiente tabla.

x	1.95	1.96	1.97	1.98	1.99	2	2.01	2.02	2.03	2.04	2.05
y											

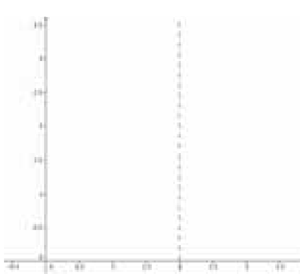
Considere las expresiones: i) $\lim_{x\to 2^-} \frac{x^3-8}{4(x-2)}$, ii) $\lim_{x\to 2^+} \frac{x^3-8}{4(x-2)}$, iii) $\lim_{x\to 2} \frac{x^3-8}{4(x-2)}$

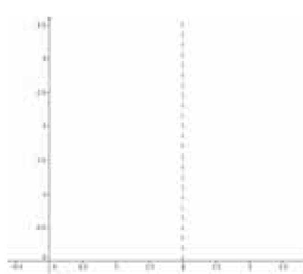
e) De la tabla anterior, ¿qué valores utilizaría para el caso i?

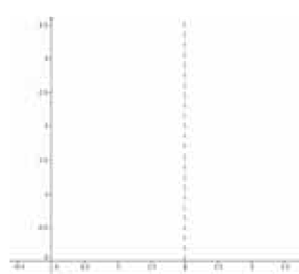
f) De la tabla anterior, ¿qué valores utilizaría para el caso ii?

g) De la tabla anterior, ¿qué valores utilizaría para el caso iii?

h) Represente gráficamente los casos i, ii, y iii.



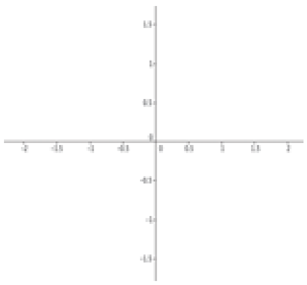
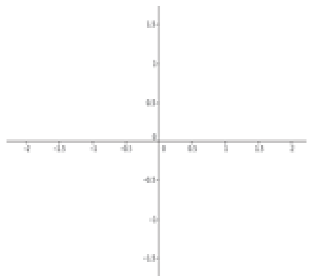
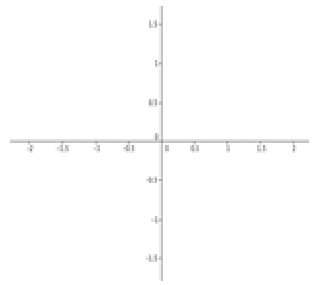




i) Repita el inciso d para la función, $f(x) = \frac{|x|}{x}$. (Para introducir el modulo de valor absoluto, utilice abs(x)).

x	-0.05	-0.04	-0.03	-0.02	-0.01	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05
y											

j) Represente gráficamente: i) $\lim_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x}$, ii) $\lim_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x}$, iii) $\lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x}$.

k) Relacione el inciso h y j, ¿qué observa?

l) Encuentre el valor de $\lim_{x\to 2} \frac{x^3-8}{4(x-2)}$ utilizando las repuestas de los incisos d hasta el h.

m) Encuentre el valor de $\lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x}$ utilizando las respuestas de los incisos i y j.

n) ¿Qué relación existe entre el límite, límite de la derecha y límite de la izquierda?

C.5. Actividad 5: Líneas Secantes y Tangentes

Actividad 5
Líneas Secantes y Tangentes

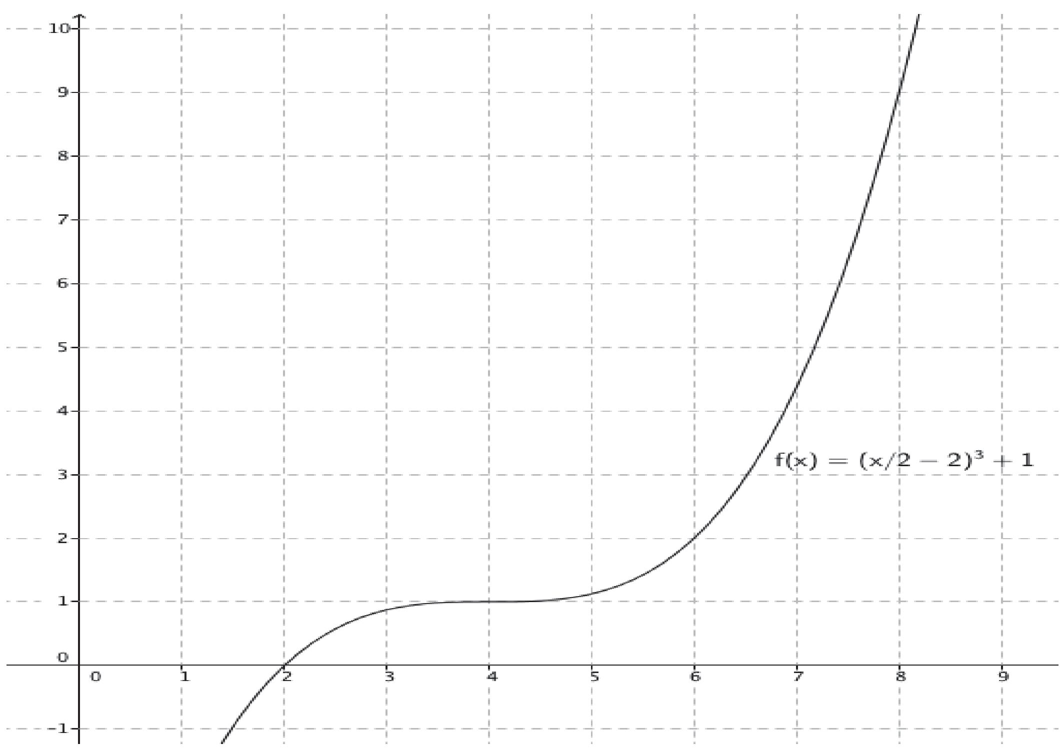
Líder:
Calculadora:
Hoja de Trabajo:
Número de Equipo: Hora de Inicio: Hora de Terminación:

Parte I (con lápiz y papel): Concepto de Línea Secante y Tangente

a) Complete la siguiente tabla. Donde $y = \left(\frac{x}{2} - 2\right)^3 + 1$

P_1	P_2	$y_2 - y_1$	$x_2 - x_1$	$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$
(3, 0.875)	(8, 9)			
(3, 0.875)	(6, 2)			
(3, 0.875)	(5, 1.125)			
(3, 0.875)	(4, 1)			
(3, 0.875)	(3.5, 0.984375)			
(3, 0.875)	(3.1, 0.908875)			
(3, 0.875)	(3.05, 0.892828)			
(3, 0.875)	(3.01, 0.878713)			
(3, 0.875)	(3.005, 0.876866)			
(3, 0.875)	(3.001, 0.875375)			

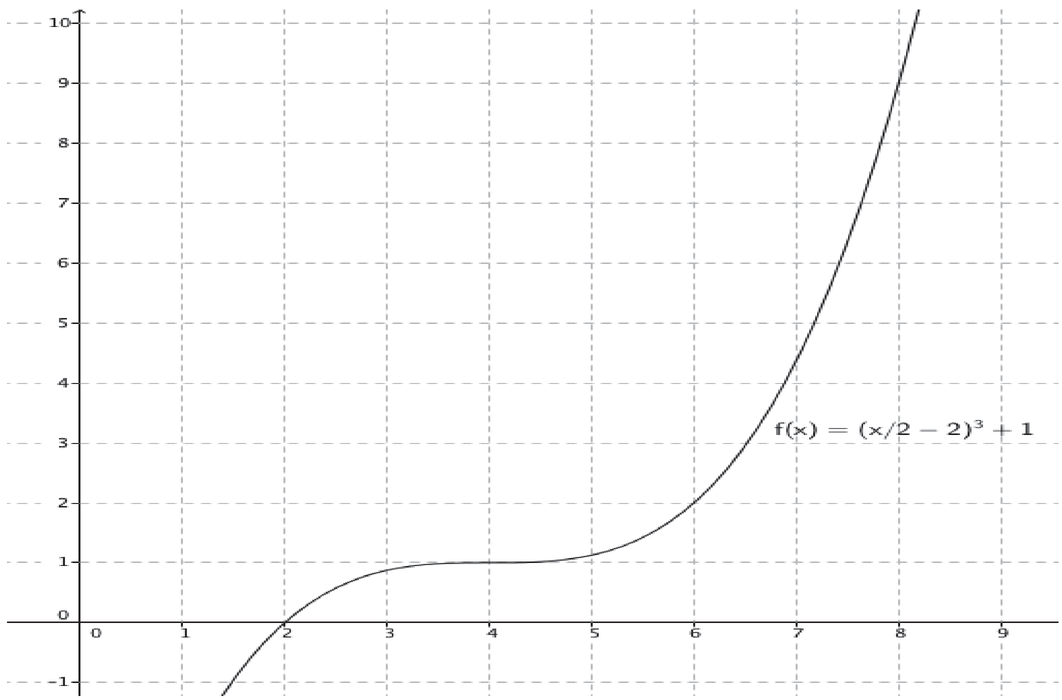
b) Grafique las líneas rectas de la tabla anterior, en la siguiente gráfica.



c) Complete la siguiente tabla, donde $y = \left(\frac{x}{2} - 2\right)^3 + 1$

P_1	P_2	$y_2 - y_1$	$x_2 - x_1$	$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$
(3, 0.875)	(8, 9)			
(5, 1.125)	(8, 9)			
(6, 2)	(8, 9)			
(7, 4.375)	(8, 9)			
(7.5, 6.35938)	(8, 9)			
(7.9, 8.41488)	(8, 9)			
(7.95, 8.70375)	(8, 9)			
(7.99, 8.94015)	(8, 9)			
(7.995, 8.97004)	(8, 9)			
(7.999, 8.994)	(8, 9)			

d) Grafique las líneas rectas de la tabla anterior en la siguiente gráfica.



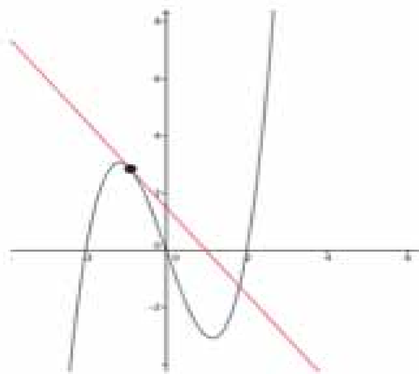
e) Observe las tablas del inciso a y c, ¿qué observa de las diferencias de x?

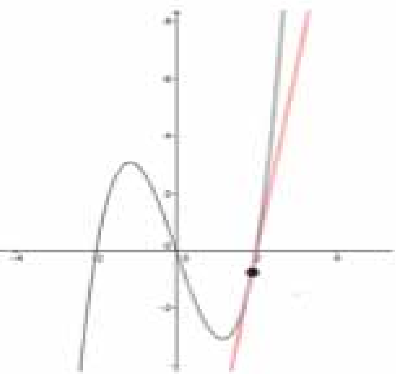
f) ¿Qué significa "$x_2 - x_1 \rightarrow 0$"?

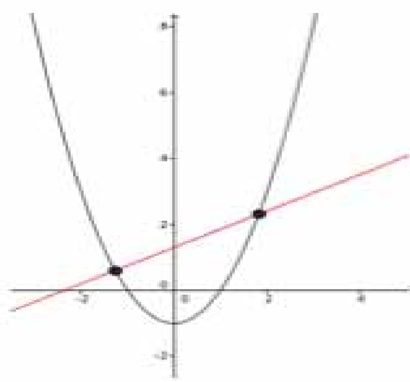
g) ¿Cuáles de los siguientes casos, representan que la diferencia de x tiende a cero?

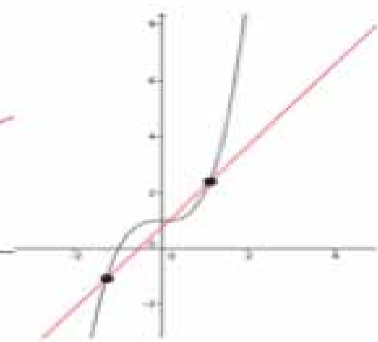
i) 1
ii) 0.4
iii) $x_2 - x_1 \rightarrow 0$
iv) 0.00001
v) $\frac{1}{10000}$

h) Relacione los siguientes conceptos, con su correspondiente gráfica: línea secante y línea tangente.







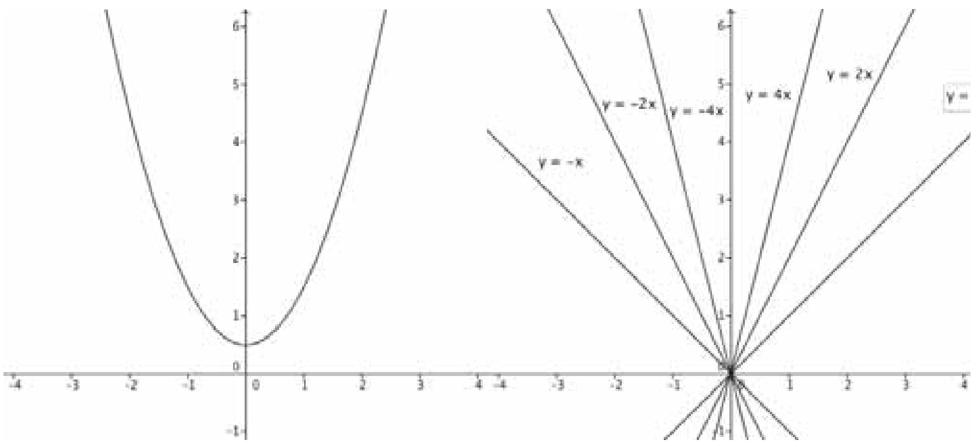


i) Con sus palabras y utilizando como referencia el inciso anterior, explique el concepto de línea secante y línea tangente.

j) ¿Qué entiende por velocidad promedio y velocidad instantánea?

k) Considere la función $y = \left(\frac{x}{2} - 2\right)^3 + 1$ y los incisos a y c, ¿cuál es la pendiente de la tangente en x=3 y x=8?

l) Considere la función $y = x^2 + 0.5$. En la siguiente gráfica, trace la línea tangente en x= -2, -1, 1, y 2.



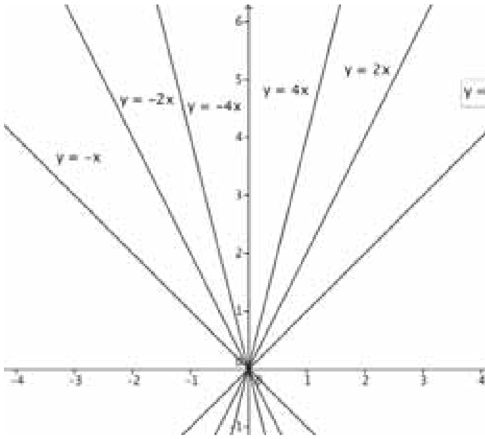
m) Utilizando la gráfica con las líneas rectas (figura de la derecha), aproxime el valor de la pendiente de las tangentes con apoyo de escuadras.

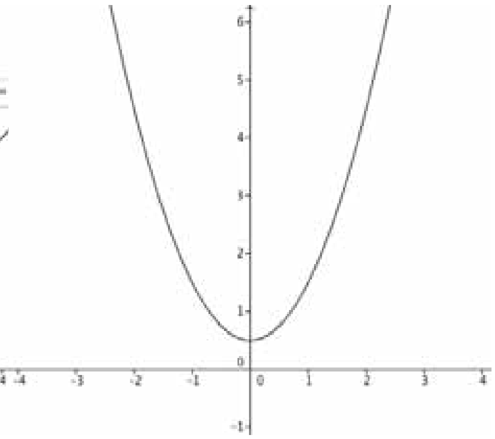
Tangente en (x)	Pendiente aproximada
-2	
-1	
1	
2	

n) Calcule las pendientes de las líneas tangentes en los puntos indicados y muestre la operación realizada.

Tangente en (x)	Operación	Pendiente
-2		
-1		
1		
2		

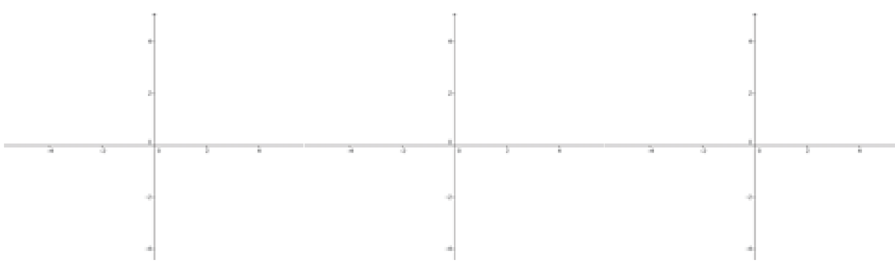
o) Utilizando las pendientes de la tabla anterior, trace la línea tangente en el punto correspondiente, apoyándose en las rectas de referencia.





p) Compare las líneas tangentes trazadas en los incisos "l" y "o", ¿qué observa?

q) Considere las funciones $-x^2$, x^3 y e^x. Trace las curvas correspondientes y las tangentes en los puntos: x = -2, 0, 1, 2 y 3. Complete la tabla indicando la pendiente de la tangente.



x	$-x^2$	x^3	e^x
-2			
0			
1			
2			
3			

r) Elija la mejor frase para completar la declaración:
Las pendientes en una gráfica de cualquier función son: siempre iguales, siempre diferentes, a veces iguales o a veces diferentes.

En geometría euclidiana, una línea es tangente a un círculo si intersecta a dicho círculo solamente en un punto. Esta definición es adecuada para círculos, pero no apropiada para curvas en general. Observando la figura 1a, la línea tangente para el punto A toca la curva en otros puntos.

Figura 1a

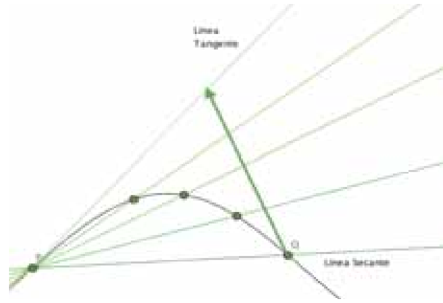


Figura 1b

Observando lo anterior, debemos encontrar otra definición para la aplicación de líneas tangentes para curvas. Para este fin, observe la figura 1b. Nos interesa la línea tangente en la curva en el plano xy. La línea que pasa por P y Q, es una línea secante. Si movemos el punto Q a lo largo de la curva hacia el punto P, entonces la línea secante girará hacia una *posición limitante.* Dicha *posición limitante,* es lo que se llama, línea tangente en el punto p.

Parte II (con CAS): Relación a Límites

En el problema anterior, la pendiente de la línea tangente para el punto (3, 0.875) se calculó gráficamente. Analíticamente la pendiente se puede expresar de la siguiente manera:

$$m_{12} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\left(\frac{x}{2} - 2\right)^3 + 1 - 0.875}{x - 3} = \frac{\left(\frac{x}{2} - 2\right)^3 + 0.125}{x - 3}$$

a) Utilizando la hoja de cálculo dentro de CAS, complete la siguiente tabla.

	A	B
◆		$\frac{\left(\frac{a}{2} - 2\right)^3 + 0.125}{a - 3}$
1	2.9	
2	2.95	
3	2.99	
4	2.995	
5	2.999	
6	3	
7	3.001	
8	3.005	
9	3.01	
10	3.05	
11	3.1	

b) ¿A qué es igual $\lim_{x \to 3^-} \frac{\left(\frac{x}{2} - 2\right)^2 + 0.125}{x - 3}$ y $\lim_{x \to 3^+} \frac{\left(\frac{x}{2} - 2\right)^2 + 0.125}{x - 3}$?

c) Con base en los cálculos anteriores, ¿a qué es igual $\lim_{x\to 3} \frac{\left(\frac{x}{2}-2\right)^2+0.125}{x-3}$? Explique su razonamiento.

d) Compare el límite del inciso c y la pendiente de la tangente en x = 3, ¿qué observa?

e) ¿Cómo sería la pendiente para la función $y = \left(\frac{x}{2}-2\right)^3 + 1$ en el punto (8, 9)?

f) Utilizando la hoja de cálculo dentro de CAS, complete la siguiente tabla. La columna B contiene la ecuación de la pendiente obtenida del inciso anterior.

	A	B
◆		□
1	7.9	
2	7.95	
3	7.99	
4	7.995	
5	7.999	
6	8	
7	8.001	
8	8.005	
9	8.01	
10	8.05	
11	8.1	

g) ¿A qué es igual $\lim_{x\to 8^-} m$ y $\lim_{x\to 8^+} m$?

h) Con base en los cálculos anteriores, ¿a qué es igual $\lim_{x \to 8} m$? Explique su razonamiento.

i) Compare el límite del inciso c y la pendiente de la tangente en x = 8, ¿qué observa?

j) ¿Qué relación observas entre la pendiente de la tangente en un punto para una función y el límite de la misma en el mismo punto?

k) ¿A qué se debe lo anterior?

Parte III (Simbolización): Ecuación de la Pendiente de la Línea Tangente

La pendiente de una línea secante se puede expresar de las siguiente manera:

$$m_{sec} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

a) Explique en sus palabras, qué es la pendiente de la tangente.

b) Escriba una expresión algebraica que simbolice lo que acaba de decir en el inciso anterior.

C.6. Actividad 6: Función Derivada

Actividad 6
Función Derivada

Líder:
Calculadora:
Hoja de Trabajo:
Número de Equipo: Hora de Inicio: Hora de Terminación:

Parte I (Simbolización): Ecuación Convencional de la pendiente de la Tangente

Una forma convencional de expresar la pendiente de la línea tangente es la siguiente:

$$m_{tan} = \lim_{\Delta x \to 0} m_{sec}$$

a) Compare la ecuación convencional anterior, con la que usted escribió en la actividad pasada (inciso b de la parte III). ¿Observa diferencias? Si es un sí, ¿cuáles son?

b) Si hay diferencias, ¿es porque faltó considerar algo? En caso afirmativo, ¿qué fue?

Parte II (con CAS): Función de las Pendientes de la Línea Tangente

Presione el botón **Home** y seleccione el ícono de gráfica en el menú, es importante que utilice la gráfica indicada por el ícono. Grafique la función x^3+1. Dentro de la gráfica, presione **menú, 7: Puntos y Líneas, 7: Tangente.** El comando anterior coloca una línea tangente, mueva el cursor sobre la función y presione **Enter** o el botón del touch pad para indicar, que la línea tangente va sobre la función graficada. Después se selecciona el punto sobre la gráfica, al presionar **Enter** o el botón del touch pad. No importa en qué punto esta la línea tangente, ya que se puede mover. Para seleccionar y mover cualquier objeto, presione **ctrl** y mueva el cursor sobre el objeto y presione el botón del touch pad.

Dentro de la gráfica, presione **menu**, **7: Puntos y Líneas, 2: Punto En.** Después seleccione el punto de la tangente en la gráfica. Lo anterior produce un conjunto de coordenadas x-y, seleccione la coordenada x presionando el botón del touch pad. Si se hace el paso anterior correctamente, la coordenada x queda subrayada. Al estar subrayada, presione **var, 1: Almacenar variable,** llame la variable “xt” y **enter**.

Dentro de la grafica, presione **menu, 8: Medición, 3. Pendiente.** Después seleccione la línea de la tangente. Lo anterior debe producir un valor. Selección ese valor (que queda subrayado), presione **var, 1: Almacenar variable,** llame la variable “mt” y **enter**.

Abra una hoja de cálculo, llame la columna A “x” y la columna B “m”. Selección la celda A ◆ (la celda gris) y presión **ctrl, menu, 8: Captura de datos, 1: Automático,** escriba “xt”, y **enter.** Repita lo anterior para la celda B ◆, pero escriba “mt”. Regrese a la hoja que contiene la gráfica, puede presionar **ctrl** y < o > del touch pad para cambiar entre pestañas. Mueva la línea de la tangente para que la coordenada x valga -2. Seleccione el punto de la línea tangente y presione **ctrl, menu, 3: Atributos,**

selección la caja con $\vec{0}$, escriba "1", y **enter.** Presione **esc** hasta que la coordenada de x llegue a un valor de 8.
Presione **home, datos y estadísticas** para graficar los datos, mueva el cursor hacia abajo y llame ese eje "x" y después mueva el cursor hacia la izquierda y llame el eje "m". Presione **menú, 4: Analizar, 6: Regresión, 6: Mostrar cuártica.**

a) De los pasos anteriores, se obtuvo una ecuación de cuarto orden. Escriba los coeficientes de la ecuación.

x^4:	x^1:
x^3:	x^0:
x^2:	

b) Observe los valores de los coeficientes, ¿se pueden reducir o eliminar unos? ¿Por qué?

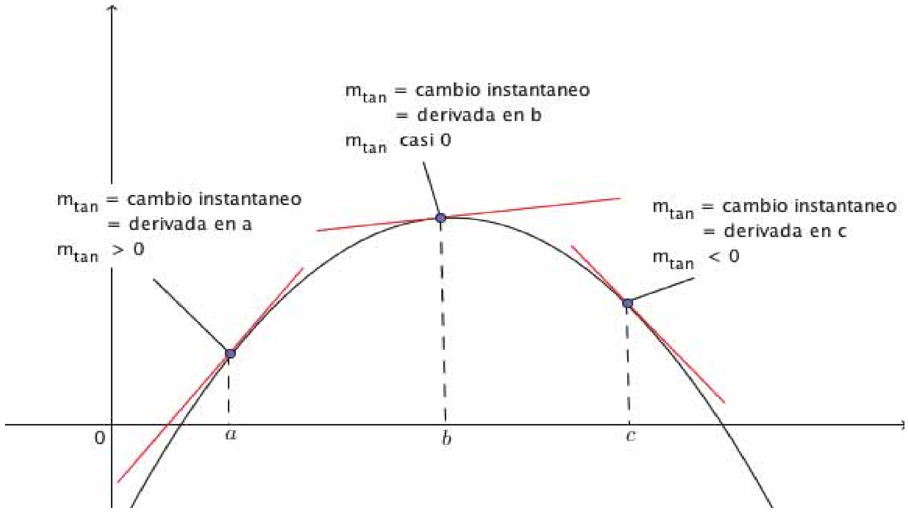
c) Considerando lo anterior, ¿cómo queda la ecuación?

d) Se obtuvo una gráfica de xt contra mt. ¿Qué representa mt?

e) Considerando su respuesta del inciso anterior, ¿qué representa la función obtenida en el inciso a?

Parte III (con lápiz y papel): Concepto de Derivada

En los incisos anteriores, se calculó la pendiente de una línea tangente en un punto fijo de la curva. Si este punto se mueve a través de la curva, la línea tangente también cambia y por lo general, su pendiente cambia (vea figura 1). Por esta razón, la pendiente de la línea tangente para la función f también es una función de x, llamada la derivada de f.



Dejamos que f' (se lee como f prima) denote la función derivada para f, lo cual significa que $f'(a)$ cuando exista, es la pendiente de la línea tangente para la gráfica de f en $(a, f(a))$. Utilizando la definición anterior para la pendiente de la línea tangente, tenemos:

$$f'(a) = m_{tan} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

En términos más generales, se puede reemplazar el a con x para llegar a la definición de la función derivada. La derivada de f es la función:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

siempre que el límite exista. Si $f'(x)$ existe, decimos que f es diferenciable en x. Si f es diferenciable en cada punto del intervalo abierto I, decimos que f es diferenciable sobre I.

Para encontrar la derivada de la función $f(x) = x^3 + 1$, hacemos:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^3 - (x^3)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{x^3 + 3hx^2 + 3h^2x + h^3 - x^3}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{3hx^2 + 3h^2x + h^3}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{h(3x^2 + 3hx + h^2)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} 3x^2 + 3hx + h^2 = 3x^2
\end{aligned}$$

Por lo tanto $f'(x) = 3x^2$

a) Relacione la ecuación $f'(x)$ obtenida con su función de la parte II, ¿qué observa?

Otras notaciones que se manejan son las siguientes:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$$

Además de $f'(x)$ y $\frac{dy}{dx}$, otras formas comunes de escribir la derivada incluyen:

$$\frac{df}{dx}, \quad \frac{d}{dx}f(x), \quad D_x f(x), \quad y \quad y'(x)$$

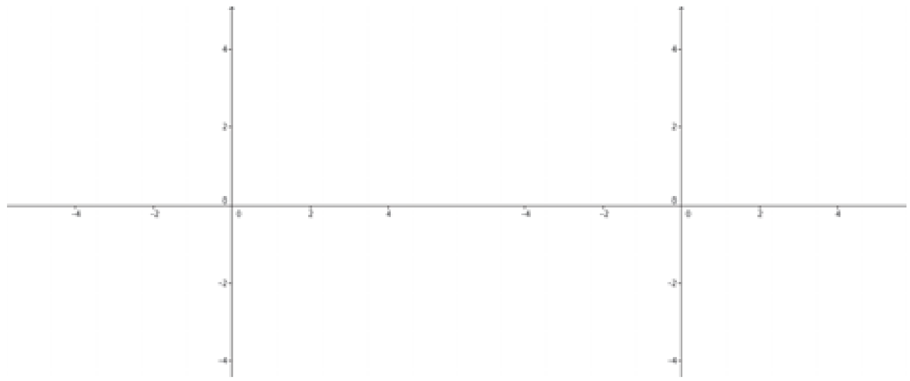
b) ¿Cuál es la derivada de una constante?

c) Considere la función, $f(x) = 3$. Grafique la función, ¿qué representa?

d) ¿Cuál es la derivada de la función, $f(x) = 3$ y por qué?

e) Derive las siguientes funciones: x, x^2, x^4 y x^7. Observando las derivadas, ¿cómo puede deducir $\frac{d}{dx}x^n$?

f) Considere la función $f(x) = x^3 + x^2 + x$. Grafique la función $f(x)$ en el eje de la izquierda y $f'(x)$ en la derecha. Además escriba la ecuación de $f'(x)$ debajo de la grafica.



$f(x) = x^3 + x^2 + x$ $f'(x) =$

g) Utilizando la información anterior, calcule la pendiente de la tangente de $f(x)$ en el punto $x = 3$.

h) ¿Qué información utilizó para responder el inciso anterior? ¿Por qué?

i) Supongan que $f(x)$ y $f'(x)$ están dados, ¿qué indica $f'(3)$ con respecto a la función $f(x)$?

j) Si $f(x)$ esta definida, ¿cómo calcularía la pendiente de la tangente en cualquier punto de x? Explique su procedimiento.

C.7. Actividad 7: Aplicación

Actividad 7
Aplicaciones

Líder:
Calculadora:
Hoja de Trabajo:
Número de Equipo: Hora de Inicio: Hora de Terminación:

A. Puntos Críticos y Su Significado

Parte I (con lápiz y papel): Análisis de Funciones: Creciente, Decreciente y Concavidad

Los términos *creciente*, *decreciente* y *constante* son utilizados para describir el comportamiento de una función al moverse de la izquierda a la derecha. Su comportamiento depende de los valores de *f(x)*.

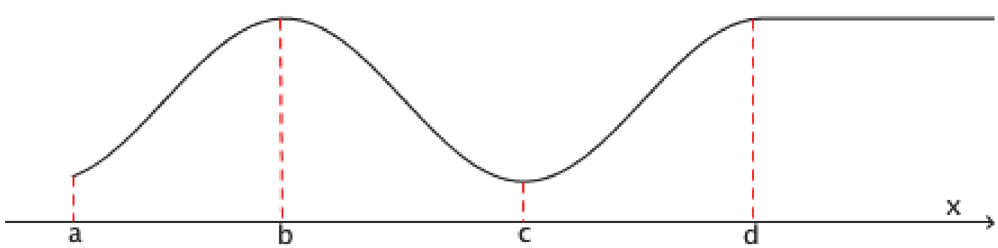
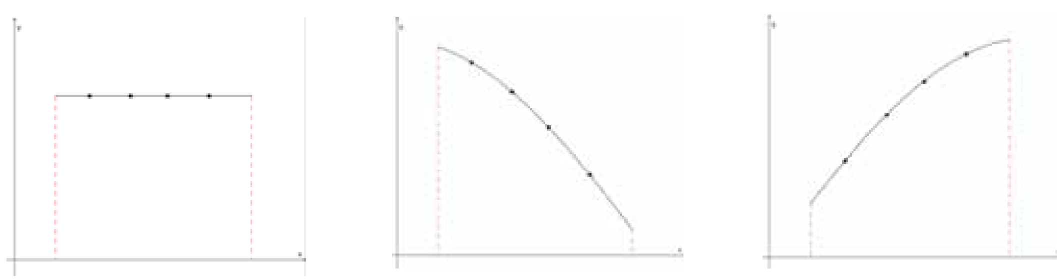


Figura 1.

a) Considere la figura 1, completa la siguiente tabla con los términos *creciente, decreciente* o *constante*.

Intervalos de x	Comportamiento de la función
a – b	
b – c	
c – d	
d – ∞	

b) En cada una de las siguientes figuras se encuentran 4 puntos. Para cada punto trace la tangente.



c) Considere las tangentes del inciso anterior. ¿Qué puede concluir de los valores de las tangentes para una función *creciente, decreciente* y *constante*?

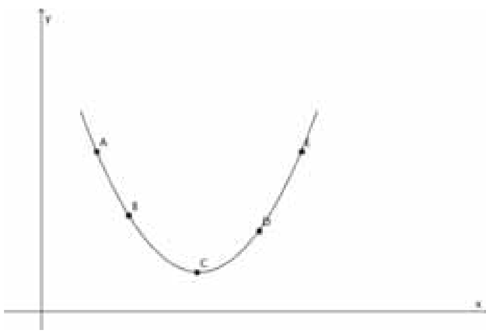


Figura 2.

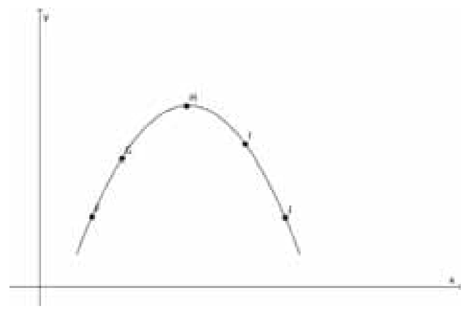


Figura 3.

d) Observe la figura 2, ¿qué representa el punto C (máximo o mínimo)? ¿Qué observa con respecto a las tangentes de cada uno de los puntos de esa figura?

e) Observe la figura 3, ¿qué representa el punto H (máximo o mínimo)? ¿Qué observa con respecto a las tangentes de cada uno de los puntos de esa figura?

f) Recordando que una derivada representa una tangente y analizando su respuestas de los incisos d y e, ¿qué es el valor de la derivada en un máximo o mínimo? Este punto se conoce como un punto crítico.

Figura 4.

g) Observando la figura 4, ¿cuáles serían los puntos críticos de la primera derivada? ¿Por qué?

h) Considere la figura 4, completa la siguiente tabla. En la columna "Intervalo", escriba los intervalos que están separados por los puntos críticos. La columna "Comportamiento" se refiere a si la función es creciente o decreciente y la columna "Valor de *f* '" se refiere a si la derivada es positiva o negativa.

Intervalo	Comportamiento	Valor de *f* '

i) ¿Qué relación encuentra entre el comportamiento de la función y el valor de la derivada?

j) Observe la figura 4 y los incisos anteriores, si existe un punto crítico, ¿cómo se puede clasificar como máximo o mínimo con respecto a la primera derivada?

k) Regrese a la figura 4, ¿en qué valores de x existen mínimos? ¿En qué punto se encuentra el mínimo absoluto?

l) De la figura 4, ¿en qué valores de x existen máximos? ¿En qué punto se encuentra el máximo absoluto?

m) ¿Qué entiende como un máximo/mínimo absoluto y un máximos/mínimo relativo? Matemáticamente ¿cómo se expresa su observación?

Aunque el signo de la derivada de *f* indica en dónde la gráfica de *f* es creciente o decreciente, no indica la dirección de la *curvatura*. Por ejemplo, la función es creciente en ambos lados del punto en la figura 5, pero en el lado izquierdo tiene una curvatura hacia arriba ("retiene agua") y en el lado derecho tiene una curvatura hacia abajo ("derrama agua"). En intervalos donde la grafica de *f* tiene una curvatura hacia arriba se dice que *f* es *cóncava hacia arriba*, y en intervalos donde la grafica de *f* tiene una curvatura hacia abajo se dice que *f* es *cóncava hacia abajo.* La curvatura también se conoce como la concavidad.

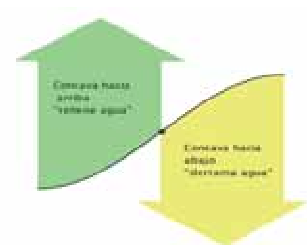
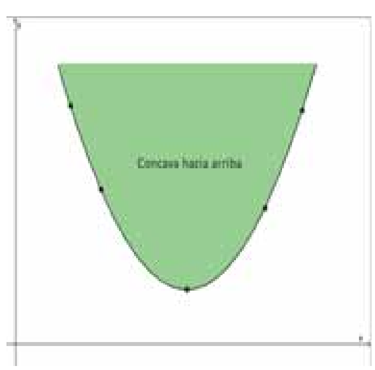
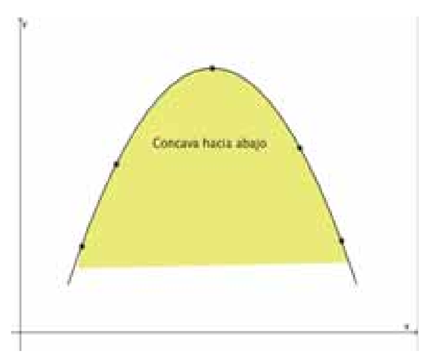


Figura 5.

n) Para las figuras en los puntos indicados, estime y trace la línea tangente correspondiente.





o) Observe su respuesta del inciso n, ¿qué observación tiene con respecto a las pendientes para curvas cóncava hacia arriba y cóncava hacia abajo (las pendientes aumentan o disminuyen)? ¿A qué conclusiones llega con respecto al valor de la derivada de la función f' para curvas cóncava hacia arriba y cóncava hacia abajo?

p) Si la primera derivada f' es creciente, ¿cómo será la segunda derivada f''?

q) Si f' es decreciente, ¿cómo será f''?

r)¿Qué relación existe entre el valor de la segunda derivada f'' con respecto a la concavidad de la función f?

Parte II (con CAS): Comprobación Grafica

Dentro del sistema CAS, también se puede graficar. Para graficar, presione el botón "on" y después "B Grafico" para llegar a la pantalla del plano x-y. Dentro de esta pantalla, presione "menú", "3: Tipo de gráfico", "1: Función" después aparece la línea donde se introduce la función a graficar.

a) Grafique la función $f(x) = x^2 - 4x + 3$. ¿Qué tipo de concavidad observa? ¿Cambia la concavidad en algún intervalo? Compruebe su observación utilizando la segunda derivada de la función.

b) Grafique la función *f(x)* = x^3. ¿Qué observa de la concavidad? ¿Cambia en algún punto? ¿Cuál es la segunda derivada de la función?

c) Considere los incisos a y b, en el punto donde cambia la concavidad, ¿cuánto vale la segunda derivada en dicho punto?

d) Elija dos (2) puntos de la función del inciso b, uno en donde hay concavidad hacia arriba y otro en donde hay concavidad hacia abajo. ¿Qué valores toma la segunda derivada en dichos puntos?

Cóncava hacia arriba: $x =$ $f'(x) =$

Cóncava hacia abajo: $x =$ $f'(x) =$

En los incisos anteriores, se observa que hay un punto donde cambia la concavidad, dicho punto se conoce como el *punto de inflexión*.

e) Si en un punto de inflexión hay un cambio de concavidad y observando la respuesta del inciso anterior, ¿cuáles serían los intervalos de concavidad?

Grafique las funciones $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$, $f'(x)$ y $f''(x)$ en la misma pantalla. Utilice como referencia las gráficas para responder los siguientes incisos.

f) ¿Qué relación observa entre la primera derivada y la función? Considere los máximos y mínimos y los intervalos crecientes y decrecientes en su respuesta.

g) ¿Qué relación observa entre la segunda derivada y la función? Considere los máximos y mínimos, concavidad y los intervalos de concavidad.

En los incisos anteriores, se observa la importancia de encontrar los ceros de una ecuación. En el sistema CAS, existe el comando "zeros". Dicho comando encuentra los ceros de la función. La sintaxis es la siguiente, zeros(función, variable). La palabra "zeros" se puede escribir utilizando el teclado, se presiona el botón "( )" para poner los paréntesis, se introduce la función (ecuación) y finalmente "," (coma) y la variable.

h) Introduzca **zeros(x^3+4x^2+x–6,x)** en la calculadora y presione **enter**, ¿qué sucede y qué representan esos valores? Compruebe esos valores.

Para los siguientes incisos utilice los comandos **zeros**, **derivar**, **tal que,** etc. pero sin utilizar la gráfica. Además considere que $f(x) = x^4 - 5x^3 + 9x^2$.

i) ¿Qué procedimiento utilizaría para encontrar los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y los máximos y mínimos? ¿Cuáles son los intervalos y, los máximos y mínimos?

j) ¿Qué procedimiento utilizaría para encontrar los intervalos de concavidad y los puntos de inflexión? ¿Cuáles con los intervalos de concavidad y los puntos de inflexión?

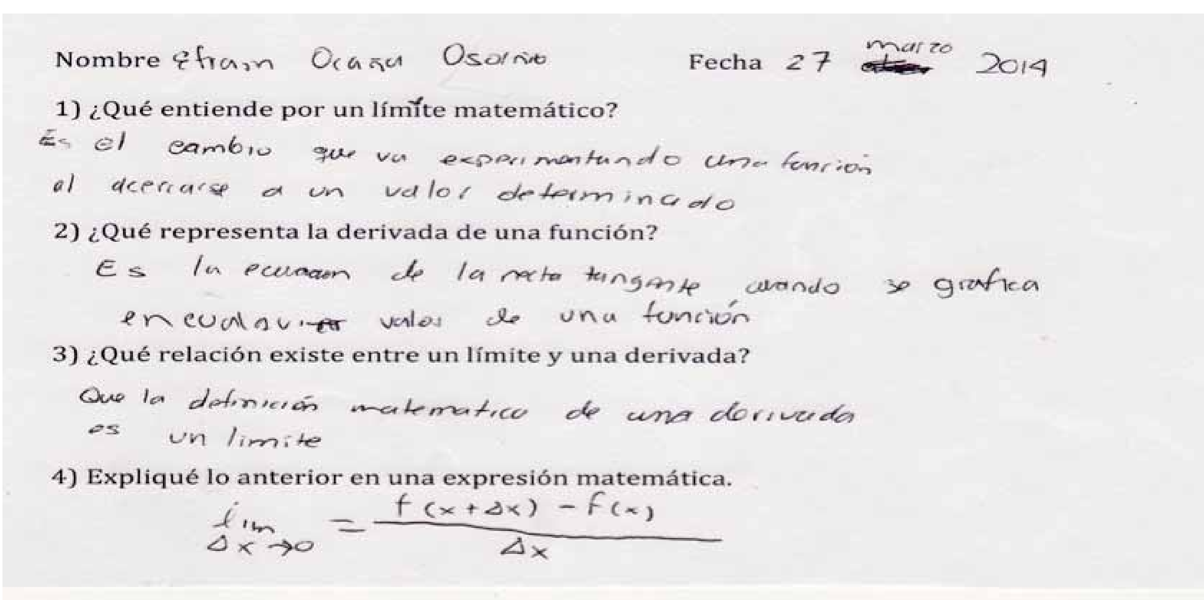
k) Compruebe los incisos j y k al graficar la función dentro del sistema CAS. ¿Observa algunas diferencias?

l) Reflexione sobre la actividad y resuma el efecto que tienen las derivadas (primera y segunda) sobre la gráfica de la función.

Apéndice D

Pre-exámenes

D.1. Equipo 1



Nombre Efrain Ocaña Osorio Fecha 27 marzo 2014

1) ¿Qué entiende por un límite matemático?

Es el cambio que va experimentando una funcion al acercarse a un valor determinado

2) ¿Qué representa la derivada de una función?

Es la ecuacion de la recta tangente cuando se grafica en cualquier valor de una función

3) ¿Qué relación existe entre un límite y una derivada?

Que la definición matematico de una derivada es un limite

4) Expliqué lo anterior en una expresión matemática.

$$\lim_{\Delta x \to 0} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Nombre: Omar Chamónica Zacarías Fecha 27-marzo-2014

1) ¿Qué entiende por un límite matemático?

Es la tendencia de una funcion al acercarse a un determinado parametro o valor.

2) ¿Qué representa la derivada de una función?

Es la ~~grafica~~ ecuacion de la recta tangente graficado en cualquier valor de x de la funcion.

3) ¿Qué relación existe entre un límite y una derivada?

que en si la derivada de la funcion es un limite.

4) Expliqué lo anterior en una expresión matemática.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Nombre Gonzalez Gómez Samuel Fecha 27/Marzo/2014

1) ¿Qué entiende por un límite matemático?

Es la tendencia que forma una función al aproximarse a un determinado valor.

2) ¿Qué representa la derivada de una función?

El cambio de valor de una función segun el cambio de su variable independiente, su valor es la ecuación de la recta tangente graficando en cualquier valor de x de la función.

3) ¿Qué relación existe entre un límite y una derivada?

La derivada de una función es el límite de la misma cuando $\Delta x = 0$

4) Expliqué lo anterior en una expresión matemática.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

D.2. Equipo 2

Nombre Ulises Carranza Nuñez Fecha 27/Marz/2014

1) ¿Qué entiende por un límite matemático?

Es un valor que limita la función

2) ¿Qué representa la derivada de una función?

Recta tangente que pasa por un punto

3) ¿Qué relación existe entre un límite y una derivada?

Matematicamente es la derivada de un límite

4) Expliqué lo anterior en una expresión matemática.

$$\lim \Delta x \to 0 \quad \frac{F(x) + \Delta x - Fx}{\Delta x}$$

Nombre Edgar Humberto Contreras Mora Fecha 27-Marzo/2014

1) ¿Qué entiende por un límite matemático?

Es el valor que limita a la función

2) ¿Qué representa la derivada de una función?

Recta tangente que pasa por un punto

3) ¿Qué relación existe entre un límite y una derivada?

Matematicamente es la derivada de un limite

4) Expliqué lo anterior en una expresión matemática.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x) + \Delta x - Fx}{\Delta x}$$

Nombre Sandra Cecilia Cerda Flores Fecha 27 · Mayo · 2014

1) ¿Qué entiende por un límite matemático?

Es el valor que limita la función

2) ¿Qué representa la derivada de una función?

Es la recta tangente que pasa por la función.

3) ¿Qué relación existe entre un límite y una derivada?

La relación entre la derivada y un límite es que matematicamente es la derivada de un límite

4) Expliqué lo anterior en una expresión matemática.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x) + \Delta x - Fx}{\Delta x}$$

D.3. Equipo 3

Nombre JOSÉ ANTHONY CASTRO DELGADO Fecha 27/03/14

1) ¿Qué entiende por un límite matemático?

SON LOS VALORES MINIMOS O MAXIMOS, A LOS QUE PUEDE LLEGAR UNA FUNCIÓN.

2) ¿Qué representa la derivada de una función?

ES UNA RAZÓN DE CAMBIO, EN LA TANGENTE DE UNA FUNCIÓN.

3) ¿Qué relación existe entre un límite y una derivada?

LA DEFINICIÓN DE UNA DERIVADA ES UN LIMITE

4) Expliqué lo anterior en una expresión matemática.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x) + \Delta x - f(x)}{\Delta x}$$

Nombre Oscar Ramirez Orozco **Fecha** 27/03/14

1) ¿Qué entiende por un límite matemático?

Son los valores máximos y mínimos que puede tomar una función

2) ¿Qué representa la derivada de una función?

Una razón de cambio en una función

3) ¿Qué relación existe entre un límite y una derivada?

La definición de una derivada es un límite

4) Expliqué lo anterior en una expresión matemática.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x) + \Delta x - f(x)}{\Delta x}$$

Nombre Jorge Humberto González Pedraza **Fecha** 27 de marzo del 2014

1) ¿Qué entiende por un límite matemático?

Son los valores minimos o maximos que puede tomar una función

2) ¿Qué representa la derivada de una función?

Es la tangente del cambio de una función

3) ¿Qué relación existe entre un límite y una derivada?

La definición de una derivada es un límite

4) Expliqué lo anterior en una expresión matemática.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{(f(x) + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Apéndice E

Actividades de la Experimentación Piloto del Equipo #1

E.1. Actividad 1: Diferencias

Actividad 1
Diferencias

Líder: Samuel González Gómez
Calculadora: Omar Chamónica Zacarías
Hoja de Trabajo: Efrain Ocaña Osorio
Número de Equipo: 1 Hora de Inicio: 9:42 Hora de Terminación: 10:16

A. Diferencia Matemática

Parte I (con lápiz y papel): Concepto General

La diferencia matemática es el resultado de restar, en donde se resta un sustraendo de un minuendo. Por ejemplo, la diferencia entre 3 (sustraendo) y 8 (minuendo) es 5.
En la vida cotidiana cuando se expresa una diferencia, típicamente se refiere a la diferencia entre un valor inicial (sustraendo) y un valor final (minuendo). *Es decir, la diferencia es igual al valor final menos el valor inicial.*

a) Completa la siguiente tabla. Pase el texto de la columna 1 a una sintaxis matemática en la columna 2 y escriba el resultado de la diferencia en la columna 3.

Texto	Sintaxis	Diferencia
Una cuenta de ahorros tiene \$2383.87 al inicio del mes y \$2873.92 al final. ¿Cuál fue la diferencia a lo largo del mes?	2873.92 - 2383.87	490.05
Se saca un pedazo de carne a descongelar, al sacarse del congelador se encuentra a -3º C y después de 5 horas se encuentra a 24ºC. ¿Cuál es la diferencia de temperatura después de las 5 horas?	24 - (-3) =	27
Un automóvil contiene un tanque de 90 litros. Se llena al comienzo de la semana, al final de ella se observa que el tanque contiene 32.3 litros. ¿Cuál es la diferencia de litros en el tanque a lo largo de la semana?	32.3 - 90 =	-57.7

b) Observe las diferencias de los tres (3) casos del inciso anterior, ¿existe una diferencia con signo negativo? En caso afirmativo, ¿qué representa con respecto a la cantidad (aumenta o disminuye)?

Si existe, representa que disminuye la cantidad inicial

c) ¿Qué concluyes a partir del inciso anterior con respecto al signo de la diferencia? Considere signos positivos, negativos y valores de cero.

Que hay una perdida de cantidad

d) En la siguiente tabla en la primera columna se encuentra una secuencia de cinco (5) números, observe la tendencia uniforme (si existe alguna) y anótela en la segunda columna.

Secuencia	Observaciones
2, 4, 6, 8, 10	es una serie con un incremento de dos en dos
45, 38, 31, 24, 17	es una serie con un decremento de 7 en 7
-8.75, -3.5, 1.75, 7, 12.25	No hay secuencia alguna
1, 9, 17, 27, 41	No hay secuencia alguna

Considere el conjunto de datos, en donde i corresponde a una variable independiente mientras tanto u corresponde a la variable dependiente. Por lo tanto u_i corresponde a u evaluada en cualquier valor de i. Por ejemplo, u_3 indica el valor de u cuando i es 3 lo cual es 14.

i	1	2	3	4	5	6
u_i	8	11	14	17	20	23

e) Utilizando el conjunto de datos mencionado, complete la siguiente tabla.

Sintaxis	Representación Algebraica	Resultado
$u_5 - u_4$	20 - 17	3
$u_2 - u_1$	11 - 8	3
$u_3 - u_2$	14 - 11	3
$u_5 - u_3$	20 - 14	6
$u_3 - u_6$	14 - 23	-9
$u_4 - u_1$	17 - 8	9

En matemáticas el operador delta (Δ) representa un cambio. Siendo un operador matemático, puede aplicarse a cualquier variable. Por ejemplo, Δx representa un cambio en x mientras que ΔT representa un cambio en T (muchas veces dicha variable representa una temperatura).

f) Considerando el concepto de Δ y utilizando el conjunto de datos, complete la siguiente tabla.

Sintaxis	Δu	Δi
$u_5 - u_4$	20 - 17 = 3	5 - 4 = 1
$u_2 - u_1$	11 - 8 = 3	2 - 1 = 1
$u_3 - u_1$	14 - 8 = 6	3 - 1 = 2
$u_5 - u_3$	20 - 14 = 6	5 - 3 = 2
$u_3 - u_6$	14 - 23 = -9	3 - 6 = -3
$u_4 - u_1$	17 - 8 = 9	4 - 1 = 3

g) Analice la tabla del inciso f, ¿hay una relación con respecto a Δi y Δu? ¿qué puede concluir?

Que los incrementos de ΔU tienen el mismo signo que los de Δi

h) Exprese su observación del inciso g en forma matemática (fórmula). ¿Se cumple en cada caso de la tabla?

$\Delta v(t) \therefore \Delta i(t)$

***Parte 2 (con CAS): Formulación de** Δx y Δy*

Si una variable y depende de una variable x, de tal manera que cada valor de x determina exactamente un valor de y, entonces se dice que **y es una función de x**. Cuatro métodos comunes para la representación de funciones son: numéricamente por tablas, geométricamente por gráficas, algebraicamente por fórmulas y/o verbalmente. Una **función f** es una regla que asocia una salida única con cada entrada. Si la entrada es denotada por x, entonces la salida es denotada por $f(x)$ (se lee como "f de x"). Para una entrada dada x, la salida de la función f se denomina el valor de f en x. Algunas veces se denomina la salida por una sola letra, por ejemplo y, y se escribe como $y = f(x)$. Esta ecuación expresa y como una función de x; la variable x se llama la ***variable independiente*** de f, y la variable y se llama la ***variable dependiente*** de f.

Las coordenadas cartesianas son un sistema de coordenadas de dos dimensiones, denominado como el plano cartesiano, utilizado para la representación gráfica de una función. En el eje horizontal, conocido como el eje "x", se encuentran las variables independientes mientras que en el eje vertical, conocido como el eje "y", se encuentran las variables dependientes. Siendo un plano, cada punto se puede expresar por sus coordenadas (x, y).

a) Introduzca la expresión $\frac{5x-6x\cdot x+x^2}{x}$ a la calculadora y presione **enter**, ¿qué observa? Presione el botón ↑ en el touch pad y presione **enter**, ¿qué sucede? ¿Para qué puede ser útil la observación anterior?

Da $-5x\cdot(x-1)$, se simplifica la expresión

Una herramienta útil dentro del sistema CAS, es el comando "tal que", |. Dicho comando se elije presionando el botón azul "CTRL" y el botón "=", el cual se encuentra debajo de "CTRL" y después se selecciona "|". La sintaxis para utilizar el comando es el siguiente, ***"función| variable = valor"***.

b) Considere la función $2x^2 + 5x - 2$. Llene la siguiente tabla con los valores de x respectivos.

Valor de x	Operación con lápiz	Resultado de CAS
-3	$2(-3)^2 + 5(-3) - 2$	1
-2	$2(-2)^2 + 5(-2) - 2$	-4
-1.25	$2(-1.25)^2 + 5(-1.25) - 2$	-5
-0.5	$2(-0.5)^2 + 5(-0.5) - 2$	-4
0	$2(0)^2 + 5(0) - 2$	-2
0.25	$2(0.25)^2 + 5(0.25) - 2$	-2.625
0.89	$2(0.89)^2 + 5(0.89) - 2$	4.0342

E.2. Actividad 2: Pendientes

Actividad 2
Pendientes

Líder: Efrain Oran Osorio
Calculadora: Samuel González Gomez
Hoja de Trabajo: Omar Chaméneca Zacarías
Número de Equipo: 1 Hora de Inicio: 10:19 Hora de Terminación: 12:14

A. Pendiente

Parte I (con lápiz y papel): Concepto de Pendiente y Rectas

a) Un carro recorre 245 kilómetros con 18 litros de gasolina.

1) Si el mismo carro gasta 30 litros de gasolina, ¿qué distancia viajó?

$\frac{245}{18} = 13.6111 \times 30 = 408.33$ Km

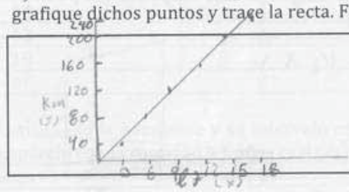
2) Explique la lógica utilizada en el problema anterior y las suposiciones hechas.

$\frac{Km}{lt} \times lt = Km$

3) ¿Cuál es la razón de cambio en kilómetros por litros de gasolina y qué significa?

13.6111 $\frac{Km}{lt}$, y significa que por cada litro de gasolina recorre esta cantidad de kilometros.

4) Utilizando el dato original, 18 litros para 245 kilómetros y el dato del problema 1, grafique dichos puntos y trace la recta. Formule una expresión matemática para la pendiente.



$m = \frac{(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)} = \frac{245 - 41}{3 - 18} = -13.6$

$y = -13.6x$

5) ¿Qué relación hay entre una razón de cambio y una pendiente?

Que la pendiente es una razon de cambio

El modelo matemático más sencillo para relacionar dos variables es la **ecuación lineal** $y = mx + b$. Esta ecuación se llama *lineal* porque su gráfica es una línea. Cuando $x = 0$, se obtiene:

$$y = m(0) + b = b$$

Por lo tanto, la línea cruza el eje y en $y = b$. En otras palabras, el intercepto y es $(0, b)$. La inclinación o pendiente es m. La pendiente de una línea no vertical es el numero de unidades que la recta sube (o cae) verticalmente por cada unidad de cambio horizontal de izquierda a derecha, como se observa en la figura 1 y 2.

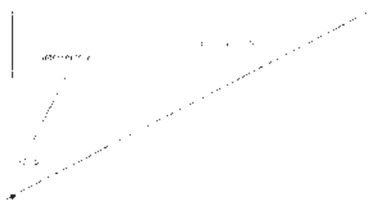


Figura 1. Línea recta con pendiente positiva

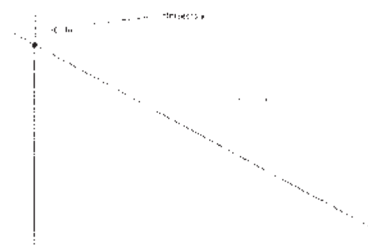
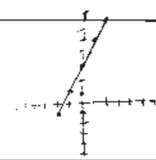


Figura 2. Línea recta con pendiente negativa

b) Considere la ecuación de la recta, y = 2x + 3. Identifique la variable independiente y la variable dependiente. Elija por lo menos 5 valores dependientes y haga una tabla con los valores independientes correspondientes.

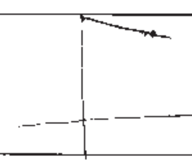
x	y
-2	-1
-1	2
0	3
1	5
2	7
3	9



c) Grafique la línea recta expresada por la ecuación y = 2x + 3.

d) Considere los puntos $(\overset{x_1}{6}, \overset{y_1}{9})$ y $(\overset{x_2}{0}, \overset{y_2}{11})$. Sin hacer ningún cálculo responda ¿la pendiente es positiva o negativa? Compruebe gráficamente y después analíticamente.

$m = \frac{11-9}{0-6} = -\frac{1}{3}$ $y = -1/3\,x$



e) Utilizando los puntos generales, (x_n, y_n), donde n es n-ésimo punto. Calcule la pendiente entre el punto 1 (x_1, y_1) y 2 (x_2, y_2).

$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

f) Exprese la ecuación de la pendiente para los puntos generales del inciso e utilizando el concepto de Δ.

$m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$

Parte II (con CAS): Aplicación

La datación por radiocarbono, es una técnica de datación radiométrica que utiliza el isótopo carbono-14 para la determinación de la edad de materiales que contienen carbono. Los siguientes datos obtenidos experimentalmente, demuestran la cantidad de C-14 para un material a lo largo del tiempo.

Antigüedad del Material (miles de años)	Cantidad de C-14
0	15.30
1	13.56
2	12.01
3	10.64
4	9.43
5	8.35
6	7.40
7	6.56
8	5.81
9	5.15
10	4.56
11	4.04
12	3.58
13	3.17
14	2.81
15	2.49
16	2.21
17	1.95

$y = mx + b$

$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$mx_2 - mx_1 -$

$m(x_2 - x_1) = y_2 - y_1$

$m(6 - x_1) = 7.40 - y_1$

$-m = 7.40 - y$

$y = 7.40 + m$

$\boxed{y = 7.40 - 0.57375}$

a) Complete la siguiente tabla considerando el rango de años dado.

Rango	Diferencia de Años	Diferencia de C-14	Pendiente
6 – 14	8	-4.59	$-4.59/8 = -0.57375$
6 – 12	6	-3.82	$-3.82/6 = -0.63666$
6 – 10	4	-2.84	$-2.84/4 = -0.71$
6 – 8	2	-1.59	$-1.59/2 = -0.795$

b) Utilizando la pendiente y su intervalo respectivo, calcule la cantidad de C-14 a 7 años (7c) y compárelo con la cantidad a 7 años real (7r).

Rango	7c	7c – 7r
6 – 14	6.82625	6.82625 - 6.56 = 0.2662
6 – 12	6.7633	6.7633 - 6.56 = 0.2033
6 – 10	6.69	6.69 - 6.56 = 0.13
6 – 8	6.605	6.605 - 6.56 = 0.045

C) ¿Qué observaciones tiene? ¿qué pendientes calculan mejor el valor de 7c?

La pendiente del rango 6-8.

d) ¿A qué se debe la observación del inciso anterior?

A que fue la menor diferencia entre el valor real

e) Para calcular la cantidad de C -14 a 9.5 años, ¿cuál pendiente del los siguientes rangos utilizaría? (6 – 10, 7 – 10, 8 – 10, 9 – 10) ¿Por qué?

De 9-10 porque el intervalo es menor.

f) Calcule la cantidad de C-14 a 9.5 años.

$\Delta x = 1$ $\quad m = \frac{-0.59}{1} = -0.59$

$\Delta y = -0.59$

$m(x_2 - x_1) = y_2 - y_1$

$m(9 - x_1) = 5.15 - y_1$

$m(9 - 9.5) = 5.15 - y_1$

$-\frac{1}{2}(-0.59) = 5.15 - y_1$

$y_1 = +4.855$

Dentro del sistema CAS, se pueden graficar datos. Utilizando la hoja de cálculo ingrese los datos experimentales del problema anterior dentro de esta sección. Para elegir la hoja de cálculo seleccione **Home,** y después **Hoja de Cálculo**. En la celda que tiene la letra A (celda superior) ingrese los años y llame dicha columna "yrs" y en la celda que contiene la letra B ingrese los datos de C-14 y llame dicha columna "C14". Dentro de **Home,** elija **Datos y Estadísticas** y presione **Enter**. Utilizando el **Navegador**, mueva la flecha hacia abajo y elija que la variable x sea "yrs". Después, mueva la flecha hacia la izquierda y elija que la variable y sea "C14". Ahora deben aparecer los datos graficados.

Se puede hacer un ajuste de datos para los datos graficados. Dentro de la gráfica, presione **Menú, 4: Analizar, 6: Regresión.** Dentro de estas opciones existen varios ajuste disponibles.

g) Haga un ajuste de datos utilizando **Lineal (mx +b)**. ¿Qué sucede? Repita el ajuste utilizando **exponencial**. ¿Cuál se ajusta mejor?

mx+b hace una linea recta cuya ecuacion es

$y = -0.743013 + 12.9112$

se ajusta mejor la exponencial.

exponencial

expresa la grafica de forma exponencial y toma los mismos puntos que en la tabla

Dentro de la hoja de cálculo, también se pueden ver datos de ajuste de datos. En la hoja de cálculo donde están los datos presione **menú, 4: Estadística, 1: Cálculos estadísticos, 3: Regresión lineal (mx + b).** Si no encuentra la hoja de cálculo, puede presionar **ctrl** y los botones de derecha o izquierda para cambiar entre las pantallas. Para lista *x* ingrese A[], para la lista *y* ingrese B[] y en la primera columna de resultado ingrese c[].

h) ¿Qué información aparece?

Que tipo es, la ecuacion y los valores de las ctes.

i) Repita el procedimiento para una **A: Regresión exponencial**... ¿Qué información aparece? ¿Se llega a la misma conclusión que en el inciso g?

muestra la ecuacion en forma exponencial y los valores de las ctes.

j) Utilizando la ecuación de mejor ajuste, calcule la cantidad de C-14 a 9.5 años.

$y = a * b^x$

$y = 15.2503 * 0.886026^{(9.5)} = 4.83$

k) Utilice la pendiente del rango 9 – 10 años para calcular la cantidad de C-14 a 9.3 y 9.6 años. Utilizando como rango 9.3 – 9.6 años, calcule la cantidad de C-14 a 9.5 años.

$\Delta x = 1$ $\quad m = -0.59 \quad m(x_2 - x_1) = y_2 - y_1$ $\quad$ Para 9.6

$\Delta y = -0.59 \quad m(9 - 9.3) = 5.15 - y_1 \quad y_1 = 4.796$

$-0.59(-0.3) = 5.15 - y_1 \quad m(9.3 - 9.5) = 4.973 - y_1$

$y_1 = 4.973 \quad y = 4.855$

j) Considere la cantidad de C-14 calculada a 9.5 años del inciso f), k), y j). ¿Cuál es la mejor aproximación? ¿Por qué?

La del inciso K y f porque se repiten.

l) Con sus palabras explique la observación anterior.

K y f son los valores que se aproximan mas ya que coinciden

m) Exprese por medio de una expresión algebraica lo que acaba de decir.

$m(x_2 - x_1) = y_2 - y_1$

Parte III (Simbolización): Desarrollo simbólica de la Pendiente

a) En el ☐ introduzca un símbolo que represente los datos.

$\boxed{X}$	$\boxed{Y}$
0	15.30
1	13.56
2	12.01
3	10.64
4	9.43
5	8.35
6	7.40
7	6.56
8	5.81
9	5.15
10	4.56
11	4.04
12	3.58
13	3.17
14	2.81
15	2.49
16	2.21
17	1.95

b) Escriba la operación necesaria para calcular la pendiente entre 6 y 14.

$$m = \frac{7.40 - 9.43}{6 - 4} = -1.015$$

c) ¿Cómo llama o expresa simbólicamente la ecuación anterior?

$$m\ (x_2 - x_1) = y_2 - y_1$$

d) ¿Cómo se queda la expresión simbólica anterior cuando se evalúa en 9.5 años?

$$m\ (x_2 - x_1) = y_2 - y_1$$
$$-1.015\,(6 - 9.5) = 7.4 - y_1$$
$$y_1 = \underline{3.84}$$

e) ¿Cómo se expresa lo anterior para cualquier valor?

$$m\ (x_2 - x_1) = y_2 - y_1$$

E.3. Actividad 3: Pendiente como Función

Actividad 3
Pendiente como Función

Líder: Omar Chamorro Zacarias
Calculadora: Efrain Ocaña Osorio
Hoja de Trabajo: Samuel González Gomez
Número de Equipo: 1 Hora de Inicio: 12:15 Hora de Terminación: 12:50

A. Desarrollo Matemático de $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

Parte I (Simbológica): Desarrollo Preliminar

a) Una forma convencional de describir una pendiente es $m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$. Observe la forma convencional y la suya de la actividad pasada, ¿Cuál prefiere usar? ¿Por qué?

Utilizamos la misma

La pendiente también se puede escribir como $\frac{y_3-y_2}{x_3-x_2}$ o $\frac{y_4-y_3}{x_4-x_3}$ o $\frac{y_4-y_1}{x_4-x_1}$ o $\frac{y_n-y_m}{x_n-x_m}$ donde m y n son subíndices. Si $y_n = f(x_n)$ y n = 10, se puede escribir como $y_{10} = f(x_{10})$.

b) Escriba la pendiente $\frac{f(x_{10})-f(x_9)}{x_{10}-x_9}$ introduciendo la variable n,

$$m = \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}$$

$n = 10$

$n = 9$

$$m = \frac{f(x_{n+1}) - f(x_n)}{x_{n+1} - x_m}$$

c) Para la pendiente $\frac{f(x_{15})-f(x_8)}{x_{15}-x_8}$, ¿qué valor le daría a n?

$n = 15$

d) Si $\Delta x = x_{n+1} - x_n$, ¿a qué es igual x_{n+1}? Exprese la pendiente del inciso b, utilizando los términos Δx y x_n.

$x_{n+1} = \Delta x + x_n$

$$m = \frac{\quad}{\Delta x}$$

$$m = \frac{f(\Delta x + x_n) - f(x_n)}{\Delta x + \cancel{x_n} - \cancel{x_n}} = f$$

Parte II (con lápiz y papel): Introducción de *h*

a) Compare la ecuación obtenida en el inciso d de la parte I, ¿es diferente a $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$? Si es diferente, ¿a qué se debe dicha diferencia?

Eliminamos terminos de la ecuación de I

b) Observando la figura 1, ¿qué representa y a qué es igual h?

$h = \Delta x$

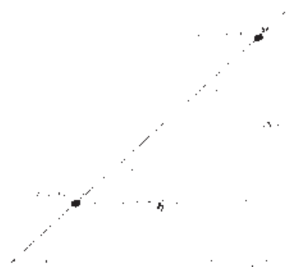


Figura 1. Introducción del concepto h

c) Utilizando h, ¿cómo queda la expresión de la pendiente?

$$m = \frac{f(h + x_n) - f(x_n)}{h}$$

d) Considere la función, $f(x) = x^2 + 2x$. ¿Cómo se expresa $f(x_1)$, $f(x_1+\Delta x)$ y $f(x_1+h)$?

$f(x_1) = x_1^2 + 2x_1$

$f(x_1 + \Delta x) = (x_1 + \Delta x)^2 + 2(x_1 + \Delta x_1)$

$f(x_1+h) = (x_1 + h)^2 + 2(x_1 + h)$

e) Considerando $f(x) = x^2 + 2x$ y Δx o h, ¿cuál es la ecuación de la pendiente del inciso c? (No es necesario reducir algebraicamente).

$$m = \frac{((x_1+h)^2 + 2(x_1+h)) - (x_1^2 + 2x_1)}{h}$$

f) Si el primer punto es (1, 3), exprese la ecuación del inciso anterior con estos punto. ¿Qué observa de esta ecuación?

$$m = \frac{((1+h)^2 + 2\ (1+h)) - 3}{h}$$

La pendiente queda en función del incremento de x
$h = \Delta x$

Parte III (con CAS): *Variación de h*

a) Utilizando la hoja de cálculo dentro de CAS, en la primera columna incluya los valores de Δx o h mientras que en la segunda columna va la pendiente. Utilice la ecuación de la pendiente del inciso f de la parte II. Como en cualquier hoja de cálculo, en la parte gris de la columna gris se puede expresar la función de la pendiente en donde Δx o h equivale a la variable "a", ya que es el valor de la columna A. Complete la tabla.

[redacted]

A	B
0.1	4.1
0.01	4.01
0.001	4.001
0	Undef
-0.001	3.999
-0.01	3.99
-0.1	3.9

b) ¿Qué observa cuando Δx o $h = 0$? ¿A qué se debe ese valor?

Es indefinido por ser dividido entre cero

c) ¿A qué número se acerca la pendiente cuando Δx o h se acerca a cero a partir de los números positivos?

a 4

d) ¿A qué número se acerca la pendiente cuando Δx o h se acerca a cero a partir de los números negativos?

a 4

e) Observando la respuestas a los incisos c y d, ¿llega a la misma conclusión?

Si

f) Cuando Δx o h tiende a cero, ¿a qué tiende la pendiente?

a 4

g) Considere la observación del inciso anterior, ¿es igual al valor cuando Δx o $h = 0$?

es distinto por ser indefinido

h) ¿Qué puede concluir de las observaciones de los incisos f y g?

Que la pendiente es igual a 4 mientras $h \neq 0$

i) ¿Cómo puede definir este tipo de análisis (analítico o gráfico)? Explique su razonamiento.

analítico por que hicimos operaciones para comprobar

E.4. Actividad 4: Límites

Actividad 4
Límites

Líder: Samuel González Gómez
Calculadora: Omar Chamorro Zacarías
Hoja de Trabajo: Efraín Ocaña Osorio
Número de Equipo: 1 Hora de Inicio: 12:55 Hora de Terminación: 1:53

Parte I (con lápiz y papel): Concepto Informal del Límite

Suponga que quiere calcular la velocidad promedio al viajar en una carretera recta. Si pasa el kilómetro 100 a las 12:00 y el kilómetro 140 a las 12:30:

a) Escriba la operación que realiza para obtener la cantidad que se viajó y para saber en cuánto tiempo de viajó.

$$\bar{x} = \frac{x_2 - x_1}{t} \quad \frac{140-100}{30} = 1.333 \frac{km}{h}$$

b) Utilizando las expresiones del inciso anterior, **escriba la operación** para calcular la velocidad promedio.

$$\frac{140-100}{30} = 1.333\ km/h$$

c) Explique qué es una pendiente y escriba la expresión.

es un incremento de Y respecto un incremento de x

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

d) Relacione la velocidad promedio con la ecuación de la pendiente. ¿Qué observa?

$$\bar{x} = \frac{x_2 - x_1}{t}$$

Se relacionan en que numerador es un incremento de velocidades

Por otra parte, aun que la velocidad promedio es una cantidad fija, es casi seguro que la velocidad instantánea (la velocidad indicada por el velocímetro), varía de un momento a otro.

Se lanza verticalmente una piedra del piso a una velocidad de 96 ft/s. Despreciando la resistencia del aire, la posición de la piedra después de t segundos está dada por la función:

$$s(t) = -16t^2 + 96t$$

La posición s es medida en pies con $s = 0$, corresponde al piso mientras que t representa el tiempo en segundos.

e) Escriba las operaciones para calcular la velocidad promedio y calcule la velocidad promedio entre el intervalo de tiempo, i) $t = 1$ y $t = 3$, ii) $t = 1$ y $t = 2$, iii) $t = 1$ y $t = 1.5$.

$t = 1 \quad t = 3$

$S = 80 \quad 144$

$\bar{V} = \dfrac{144 - 80}{3 - 1} = 32$ //

$t = 1 \quad t = 2$ [illegible]

$S = 80 \quad S =$ [illegible]

[illegible]

$t = 1 \quad t =$ [illegible]

$\dfrac{108 - 80}{1.5 - 1} = 56$ //

f) Observe los resultados de i, ii, y iii. ¿Qué diferencia observa?

que [illegible]

g) Escriba la ecuación para la velocidad promedio de la piedra entre el intervalo $[t_0, t]$.

$$\bar{V} = \frac{x_2 - x_1}{t - t_0}$$

Al calcular la velocidad promedio, se utilizó la posición del objeto a dos puntos distintos. Para la velocidad instantánea solamente se utiliza un punto distinto. Como se verá en la siguiente sección, la velocidad instantánea se calcula a partir de velocidades promedios.

h) Si nos interesa calcular la velocidad instantánea a $t_0 = 1$, se calcula la velocidad promedio sobre el intervalo $[1, t]$. Escriba la ecuación de la velocidad promedio.

$$\bar{V} = \frac{[illegible]}{t - 1}$$

La velocidad instantánea en el punto $t = t_0$ se determina al calcular la velocidad promedio sobre el intervalo $[t_0, t_1]$. Cuando t_1 se acerca a t_0, la velocidad promedio típicamente se acera a un número único, el cual es la velocidad instantánea. Lo anterior significa, que es un instante en donde el intervalo es muy pequeño. Este número se conoce como un límite. Lo cual se puede expresar matemáticamente como

$$v_{instantanea} = \lim_{t \to t_0} v_{promedio}$$

i) Sustituya la velocidad promedio en del inciso h de la expresión de la velocidad instantánea. En donde $t_0 = 1$.

$$\lim_{t \to 1} = \frac{x_2 - x_1}{t - 1}$$

j) Calcule la velocidad instantánea utilizando la expresión anterior.

$$\lim_{t \to 1} \frac{x_2 - x_1}{t - 1} \qquad \lim_{t \to 1} \frac{x_2 - x_1}{1 - 1}$$

Parte II (con CAS): Concepto Informal del Límite

El límite $\lim_{x\to a} f(x) = L$ se refiere a un límite de *dos-lados*, porque *f(x)* se acerca L cuando x se acerca a valores de x menores de a y para valores de x mayores de a. Para algunas funciones, es conveniente analizar límites de *un lado* denominados límites de mano izquierda y de mano derecha. La definición se puede resumir como:

1. **Límite de mano derecha:** Suponga que f es definida para todos los valores de x cercanos a a y $x > a$. Si *f(x)* es arbitrariamente cercana a L para todos valores suficientemente cercanos a a con $x > a$, se escribe
$$\lim_{x\to a^+} f(x) = L$$
y se dice que el límite de *f(x)* cuando x se acerca a a por la derecha es igual a L.

2. **Límite de mano izquierda:** Suponga que f es definida para todos los valores de x cercanos a a y $x < a$. Si *f(x)* es arbitrariamente cercana a L para todos valores suficientemente cercanos a a con $x < a$, se escribe
$$\lim_{x\to a^-} f(x) = L$$
y se dice que el límite de *f(x)* cuando x se acerca a a por la izquierda es igual a L.

a) Considere las siguientes gráficas y relacione la gráfica con el límite que le corresponde:
i) $\lim_{x\to a} f(x) = L$, ii) $\lim_{x\to a^+} f(x) = L$, iii) $\lim_{x\to a^-} f(x) = L$

Se pueden graficar funciones dentro del sistema CAS. Presione el botón **Home, B Gráfico, Menú, 3: Tipo de gráfico, 1: Función.** De esta manera se puede definir una función.

b) Grafique la función $f(x) = \frac{x^3 - 8}{4(x-2)}$ en el sistema CAS. Observe la gráfica y la ecuación de la función, ¿existe algún valor de x que no puede tomar? ¿Cuál es y por qué?

Todos excepto el 2

c) Compruebe utilizando el comando de trazado. (Dentro de la gráfica, presione **Menú, 5: Trazado, 1: Trazado de gráfico** y elija el número y presione **Enter**). ¿Qué sucede?

Nos marca indefinido

d) El trazado se hace, presionando los botones ◂ o ▸ para mover de un punto a otro. Para la misma función, el paso de trazado es de 0.3. Este incremento se puede cambiar utilizando **Menú, 5: Trazado, 3: Paso de trazado,** introduzca el incremento deseado. Utilizando un incremento de trazo de 0.01, complete la siguiente tabla.

x	1.95	1.96	1.97	1.98	1.99	2	2.01	2.02	2.03	2.04	2.05
y	2.93	2.91	2.96	2.97	2.99	indef	2.02	3.03	3.05	3.06	3.08

Considere las expresiones: i) $\lim_{x\to 2^-}\frac{x^3-8}{4(x-2)}$, ii) $\lim_{x\to 2^+}\frac{x^3-8}{4(x-2)}$, iii) $\lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{4(x-2)}$

e) De la tabla anterior, ¿qué valores utilizaría para el caso i?

todos los valores menores a 2
1.95, 1.96, 1.97, 1.98, 1.99

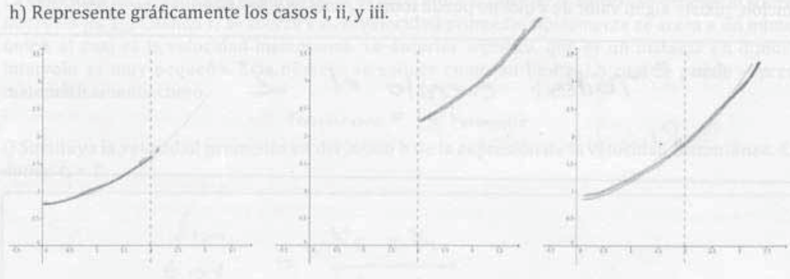
f) De la tabla anterior, ¿qué valores utilizaría para el caso ii?

valores mayores a 2 sin tomar 2
2.01, 2.02, 2.03, 2.04, 2.05

g) De la tabla anterior, ¿qué valores utilizaría para el caso iii?

Todos los valores menos el 2

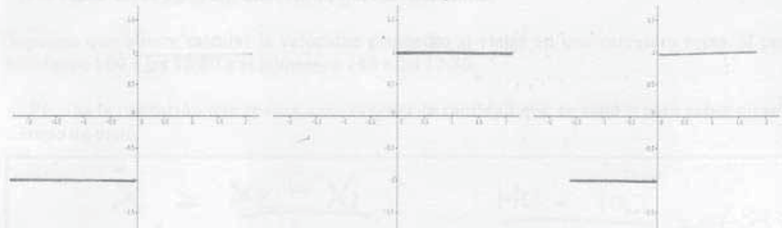
h) Represente gráficamente los casos i, ii, y iii.



i) Repita el inciso d para la función, $f(x) = \frac{|x|}{x}$. (Para introducir el modulo de valor absoluto, utilice abs(x)).

x	-0.05	-0.04	-0.03	-0.02	-0.01	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05
y	-1	-1	-1	-1	-1		1	1	1	1	1

j) Represente gráficamente: i) $\lim_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x}$, ii) $\lim_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x}$, iii) $\lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x}$.



k) Relacione el inciso h y j, ¿qué observa?

que en las dos en el caso i esta graficado de lado negativo, en el ii) del lado positivo y en iii) de ambos lados

l) Encuentre el valor de $\lim_{x\to 2} \frac{x^3-8}{4(x-2)}$ utilizando las repuestas de los incisos d hasta el h.

De acuerdo a la grafica del inciso h el limite vale 3

m) Encuentre el valor de $\lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x}$ utilizando las respuestas de los incisos i y j.

De acuerdo al inciso j, el limite es indefinido ya que se acerca a 2 valores

n) ¿Qué relación existe entre el límite, límite de la derecha y límite de la izquierda?

que mientras los dos limites se acerquen al mismo valor, éste existira

E.5. Actividad 5: Líneas Secantes y Tangentes

Actividad 5
Líneas Secantes y Tangentes

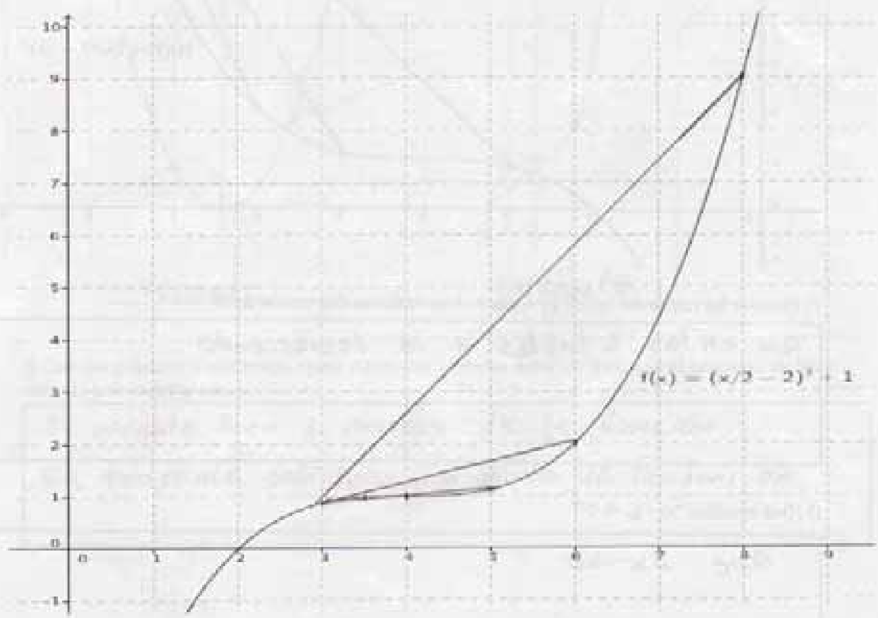
Líder: Efrain Ocana Ozornio
Calculadora: Samuel Gonzales Gomez.
Hoja de Trabajo: Omar Chamonica Zacarias.
Número de Equipo: 2 Hora de Inicio: 9:10 Hora de Terminación: 11:37

Parte I (con lápiz y papel): Concepto de Línea Secante y Tangente

a) Complete la siguiente tabla. Donde $y = \left(\frac{x}{2} - 2\right)^3 + 1$

P_1 x y_1	P_2 x_2 y_2	$y_2 - y_1$	$x_2 - x_1$	$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$
(3, 0.875)	(8, 9)	8.125	5	1.625
(3, 0.875)	(6, 2)	1.125	3	0.375
(3, 0.875)	(5, 1.125)	0.25	2	0.125
(3, 0.875)	(4, 1)	0.125	1	0.125
(3, 0.875)	(3.5, 0.984375)	0.109375	0.5	0.21875
(3, 0.875)	(3.1, 0.908875)	0.033875	0.1	0.33875
(3, 0.875)	(3.05, 0.892828)	0.017828	0.05	0.35656
(3, 0.875)	(3.01, 0.878713)	0.003713	0.01	0.3713
(3, 0.875)	(3.005, 0.876866)	0.001866	0.005	0.3732
(3, 0.875)	(3.001, 0.875375)	0.000375	0.001	0.375

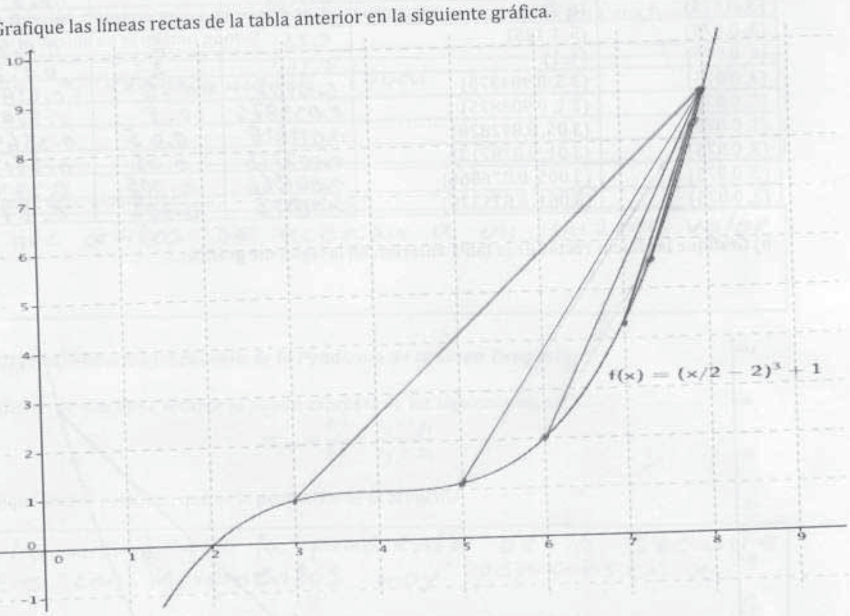
b) Grafique las líneas rectas de la tabla anterior, en la siguiente gráfica.



c) Complete la siguiente tabla, donde $y = \left(\frac{x}{2} - 2\right)^3 + 1$

P_1	P_2	$y_2 - y_1$	$x_2 - x_1$	$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$
(3, 0.875)	(8, 9)	8.125	6	1.35417
(5, 1.125)	(8, 9)	7.875	3	2,625
(6, 2)	(8, 9)	7	2	3.5
(7, 4.375)	(8, 9)	4.625	1	4.625
(7.5, 6.35938)	(8, 9)	2.64062	0.5	5.28124
(7.9, 8.41488)	(8, 9)	0.58512	0.1	5.8512
(7.95, 8.70375)	(8, 9)	0.29625	0.05	5.925
(7.99, 8.94015)	(8, 9)	0.05985	0.01	5.985
(7.995, 8.97004)	(8, 9)	0.02996	0.005	5.992
(7.999, 8.994)	(8, 9)	0.006	0.001	6

d) Grafique las líneas rectas de la tabla anterior en la siguiente gráfica.



e) Observe las tablas del inciso a y c, ¿qué observa de las diferencias de x?

Que en las 2 tablas x va decreciendo

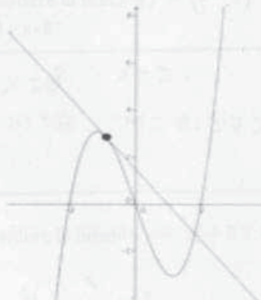
f) ¿Qué significa "$x_2 - x_1 \to 0$"?

Que $\Delta x \to 0$

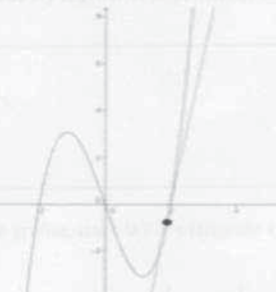
g) ¿Cuáles de los siguientes casos, representan que la diferencia de x tiende a cero?

i) 1
ii) 0.4
iii) $x_2 - x_1 \rightarrow 0$ ← esta.
iv) 0.00001
v) $\frac{1}{10000}$

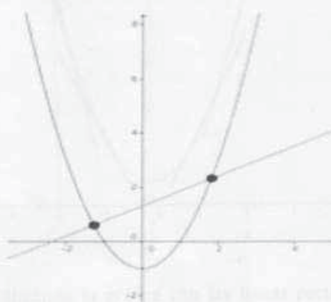
h) Relacione los siguientes conceptos, con su correspondiente gráfica: línea secante y línea tangente.



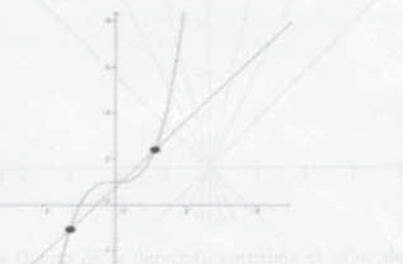
Tangente



Tangente



secante



secante

i) Con sus palabras y utilizando como referencia el inciso anterior, explique el concepto de línea secante y línea tangente.

La secante toca 2 puntos de la función
La tangente solo toca un punto de la función

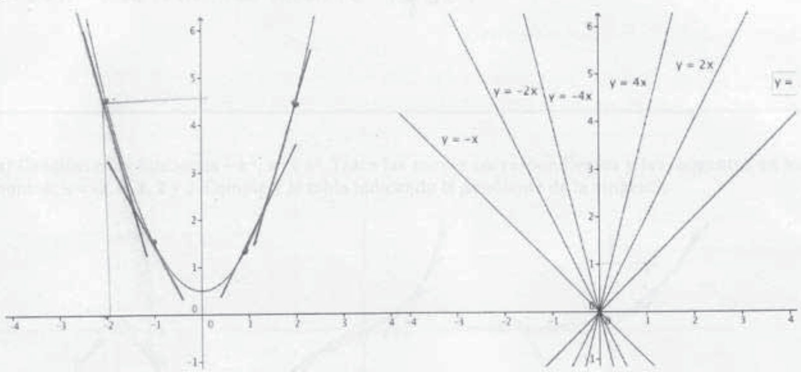
j) ¿Qué entiende por velocidad promedio y velocidad instantánea?

Es un promedio entre varios intervalos de velocidad.
La velocidad instantanea es una velocidad en un determinado momento.

k) Considere la función $y = \left(\frac{x}{2} - 2\right)^3 + 1$ y los incisos a y c, ¿cuál es la pendiente de la tangente en x=3 y x=8?

x = 8 x = 3
m = 6 m = 0.375

l) Considere la función $y = x^2 + 0.5$. En la siguiente gráfica, trace la línea tangente en x= -2, -1, 1, y 2.



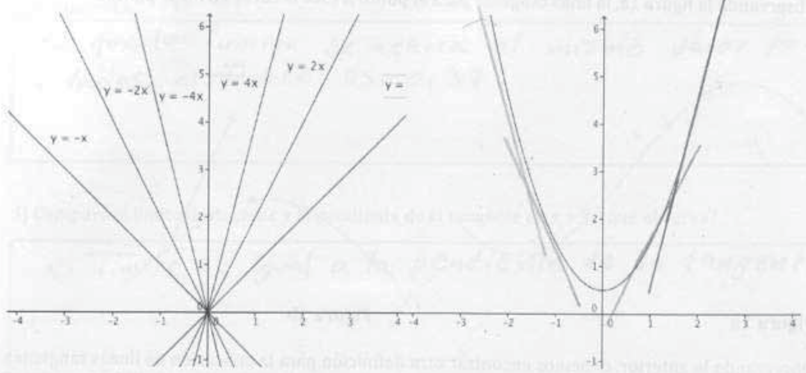
m) Utilizando la gráfica con las líneas rectas (figura de la derecha), aproxime el valor de la pendiente de las tangentes con apoyo de escuadras.

Tangente en (x)	Pendiente aproximada
-2	-4
-1	-2
1	2
2	4

n) Calcule las pendientes de las líneas tangentes en los puntos indicados y muestre la operación realizada.

Tangente en (x)	Operación	Pendiente
-2 $x_2 = -2.001$	$\frac{4.504 - 4.5}{-2.001 + 2}$	-4.001
-1 $x_2 = -1.001$	$\frac{1.504 - 1.5}{-1.001 + 1}$	-2.001
1 $x_2 = 1.001$	$\frac{1.504 - 1.5}{1.001 - 1}$	2.001
2 $x_2 = 2.001$	$\frac{4.504 - 4.50}{2.001 - 2}$	4.001

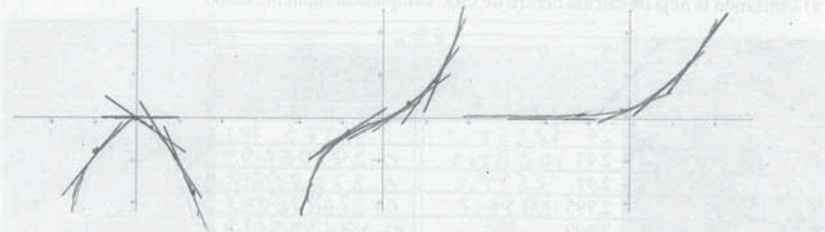
o) Utilizando las pendientes de la tabla anterior, trace la línea tangente en el punto correspondiente, apoyándose en las rectas de referencia.



p) Compare las líneas tangentes trazadas en los incisos "l" y "o", ¿qué observa?

Son aproximadamente igual

q) Considere las funciones $-x^2$, x^3 y e^x. Trace las curvas correspondientes y las tangentes en los puntos: x = -2, 0, 1, 2 y 3. Complete la tabla indicando la pendiente de la tangente.



x x_2	$-x^2$	x^3	e^x
-2 -2.001	3.999	-11.994	0.135403
0 0.001	-0.001	0.000001	1.0005
1 1.001	-2.001	-3.03	2.71964
2 2.001	-4.001	-12.06	7.39275
3 3.001	-6.001	-27.09	20.0956

r) Elija la mejor frase para completar la declaración:
Las pendientes en una gráfica de cualquier función son: siempre iguales, siempre diferentes, a veces iguales o a veces diferentes.

siempre diferentes.

En geometría euclidiana, una línea es tangente a un círculo si intersecta a dicho círculo solamente en un punto. Esta definición es adecuada para círculos, pero no apropiada para curvas en general. Observando la figura 1a, la línea tangente para el punto A toca la curva en otros puntos.

Figura 1a

Figura 1b

Observando lo anterior, debemos encontrar otra definición para la aplicación de líneas tangentes para curvas. Para este fin, observe la figura 1b. Nos interesa la línea tangente en la curva en el plano xy. La línea que pasa por P y Q, es una línea secante. Si movemos el punto Q a lo largo de la curva hacia el punto P, entonces la línea secante girará hacia una *posición limitante.* Dicha *posición limitante*, es lo que se llama, línea tangente en el punto p.

Parte II (con CAS): Relación a Límites

En el problema anterior, la pendiente de la línea tangente para el punto (3, 0.875) se calculó gráficamente. Analíticamente la pendiente se puede expresar de la siguiente manera:

$$m_{12} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\left(\frac{x}{2} - 2\right)^3 + 1 - 0.875}{x - 3} = \frac{\left(\frac{x}{2} - 2\right)^3 + 0.125}{x - 3}$$

a) Utilizando la hoja de cálculo dentro de CAS, complete la siguiente tabla.

	A	B
◆		$\frac{\left(\frac{a}{2}-2\right)^3 + 0.125}{a-3}$
1	2.9	0.41375
2	2.95	0.394 0625
3	2.99	0.3787625
4	2.995	0.376878125
5	2.999	0.375375125
6	3	# indef.
7	3.001	0.374625125
8	3.005	0.373128125
9	3.01	0.3712625
10	3.05	0.3565625
11	3.1	0.33875

b) ¿A qué es igual $\lim_{x \to 3^-} \frac{\left(\frac{x}{2}-2\right)^2 + 0.125}{x-3}$ y $\lim_{x \to 3^+} \frac{\left(\frac{x}{2}-2\right)^2 + 0.125}{x-3}$?

$\lim\limits_{x \to 3} \frac{(x/2 - 2) + 0.125}{x - 3} = .0.37$

$\lim\limits_{x \to 3} + \frac{\left(\frac{x}{2} - 2\right) + 0.125}{x - 3}$

$\lim\limits_{x \to 3} = 0.37$

c) Con base en los cálculos anteriores, ¿a qué es igual $\lim_{x \to 3} \frac{\left(\frac{x}{2}-2\right)^2+0.125}{x-3}$? Explique su razonamiento.

Ya que la funcion se acerca al mismo valor por los 2 lados el limite es 0.37

d) Compare el límite del inciso c y la pendiente de la tangente en x = 3, ¿qué observa?

el limite es igual a la pendiente de la tangente.

e) ¿Cómo sería la pendiente para la función $y = \left(\frac{x}{2}-2\right)^3+1$ en el punto (8, 9)?

$m = 6$

f) Utilizando la hoja de cálculo dentro de CAS, complete la siguiente tabla. La columna B contiene la ecuación de la pendiente obtenida del inciso anterior.

	A	B
◆		$\left(\left(\frac{x}{2}-2\right)^3-8\right)/(x-8)$
1	7.9	5.85125
2	7.95	5.92531
3	7.99	5.98501
4	7.995	5.9925
5	7.999	5.9985
6	8	#
7	8.001	6.0015
8	8.005	6.0075
9	8.01	6.01501
10	8.05	6.07531
11	8.1	6.15125

g) ¿A qué es igual $\lim_{x \to 8^-} m$ y $\lim_{x \to 8^+} m$?

$\lim_{x \to 8} -m \approx 6 \quad \lim_{x \to 8} +m \approx 6$

h) Con base en los cálculos anteriores, ¿a qué es igual $\lim_{x \to 8} m$? Explique su razonamiento.

es igual a la pendiente. por que el resultado es similar

i) Compare el límite del inciso c y la pendiente de la tangente en x = 8, ¿qué observa?

el limite es igual a la pendiente

j) ¿Qué relación observas entre la pendiente de la tangente en un punto para una función y el límite de la misma en el mismo punto?

Son aproximadamente igual

k) ¿A qué se debe lo anterior?

a que ambos se acercan a un mismo valor

Parte III (Simbolización): Ecuación de la Pendiente de la Línea Tangente

La pendiente de una línea secante se puede expresar de las siguiente manera:

$$m_{sec} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

a) Explique en sus palabras, qué es la pendiente de la tangente.

Es la misma que la pendiente de la secante pero con incrementos muy pequeños en x.

b) Escriba una expresión algebraica que simbolice lo que acaba de decir en el inciso anterior.

$$m = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad y \quad \Delta x \to 0$$

E.6. Actividad 6: Función Derivada

Actividad 6
Función Derivada

Líder: Omar Chamorrica Zacarias
Calculadora: Efrain Ocaña Osornio
Hoja de Trabajo: Samuel Gonzalez Gomez
Número de Equipo: 1 Hora de Inicio: 11:40 Hora de Terminación: 12:21

Parte I (Simbolización): Ecuación Convencional de la pendiente de la Tangente

Una forma convencional de expresar la pendiente de la línea tangente es la siguiente:

$$m_{tan} = \lim_{\Delta x \to 0} m_{sec}$$

a) Compare la ecuación convencional anterior, con la que usted escribió en la actividad pasada (inciso b de la parte III). ¿Observa diferencias? Si es un sí, ¿cuáles son?

Es igual pero escrita de diferente forma

b) Si hay diferencias, ¿es porque faltó considerar algo? En caso afirmativo, ¿qué fue?

no dos hay

Parte II (con CAS): Función de las Pendientes de la Línea Tangente.

Presione el botón **Home** y seleccione el ícono de gráfica en el menú, es importante que utilice la gráfica indicada por el ícono. Grafique la función x^3+1. Dentro de la gráfica, presione **menú, 7: Puntos y Líneas, 7: Tangente.** El comando anterior coloca una línea tangente, mueva el cursor sobre la función y presione **Enter** o el botón del touch pad para indicar, que la línea tangente va sobre la función graficada. Después se selecciona el punto sobre la gráfica, al presionar **Enter** o el botón del touch pad. No importa en qué punto esta la línea tangente, ya que se puede mover. Para seleccionar y mover cualquier objeto, presione **ctrl** y mueva el cursor sobre el objeto y presione el botón del touch pad.

Dentro de la gráfica, presione **menu, 7: Puntos y Líneas, 2: Punto En.** Después seleccione el punto de la tangente en la gráfica. Lo anterior produce un conjunto de coordenadas x-y, seleccione la coordenada x presionando el botón del touch pad. Si se hace el paso anterior correctamente, la coordenada x queda subrayada. Al estar subrayada, presione **var, 1: Almacenar variable,** llame la variable "xt" y **enter.**

Dentro de la grafica, presione **menu, 8: Medición, 3. Pendiente.** Después seleccione la línea de la tangente. Lo anterior debe producir un valor. Selección ese valor (que queda subrayado), presione **var, 1: Almacenar variable,** llame la variable "mt" y **enter.**

Abra una hoja de cálculo, llame la columna A "x" y la columna B "m". Selección la celda A ◆ (la celda gris) y presión **ctrl, menu, 8: Captura de datos, 1: Automático,** escriba "xt", y **enter.** Repita lo anterior para la celda B ◆, pero escriba "mt". Regrese a la hoja que contiene la gráfica, puede presionar **ctrl** y < o > del touch pad para cambiar entre pestañas. Mueva la línea de la tangente para que la coordenada x valga .2. Seleccione el punto de la línea tangente y presione **ctrl, menu, 3: Atributos,** selección la caja con $\vec{0}$, escriba "1", y **enter.** Presione **esc** hasta que la coordenada de x llegue a un valor de 8.

Presione **home, datos y estadísticas** para graficar los datos, mueva el cursor hacia abajo y llame ese eje "x" y después mueva el cursor hacia la izquierda y llame el eje "m". Presione **menú, 4: Analizar, 6: Regresión, 6: Mostrar cuártica.**

a) De los pasos anteriores, se obtuvo una ecuación de cuarto orden. Escriba los coeficientes de la ecuación.

x^4: 9.3797×10^{-12}	x^1: 1.04×10^{-11}
x^3: 1.81603×10^{-11}	x^0: 3×10^{-13}
x^2: 3	

b) Observe los valores de los coeficientes, ¿se pueden reducir o eliminar unos? ¿Por qué?

Si por ser practicamente despresiables

c) Considerando lo anterior, ¿cómo queda la ecuación?

$y = 3x^2$

d) Se obtuvo una gráfica de xt contra mt. ¿Qué representa mt?

Mt = Pendiente de la tangente

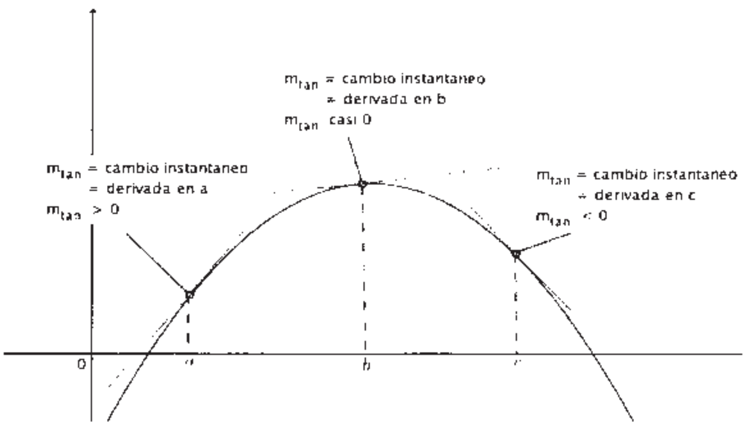
Xt = Valores de X

e) Considerando su respuesta del inciso anterior, ¿qué representa la función obtenida en el inciso a?

la pendiente de los tangentes en cualquier punto de x para la función x^3+1)

Parte III (con lápiz y papel): Concepto de Derivada

En los incisos anteriores, se calculó la pendiente de una línea tangente en un punto fijo de la curva. Si este punto se mueve a través de la curva, la línea tangente también cambia y por lo general, su pendiente cambia (vea figura 1). Por esta razón, la pendiente de la línea tangente para la función f también es una función de x, llamada la derivada de f.



Dejamos que f' (se lee como f prima) denote la función derivada para f, lo cual significa que $f'(a)$ cuando exista, es la pendiente de la línea tangente para la gráfica de f en $(a, f(a))$. Utilizando la definición anterior para la pendiente de la línea tangente, tenemos:

$$f'(a) = m_{tan} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

En términos más generales, se puede reemplazar el a con x para llegar a la definición de la función derivada. La derivada de f es la función:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

siempre que el límite exista. Si $f'(x)$ existe, decimos que f es diferenciable en x. Si f es diferenciable en cada punto del intervalo abierto I, decimos que f es diferenciable sobre I.

Para encontrar la derivada de la función $f(x) = x^3 + 1$, hacemos:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^3 - (x^3)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{x^3 + 3hx^2 + 3h^2x + h^3 - x^3}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{3hx^2 + 3h^2x + h^3}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{h(3x^2 + 3hx + h^2)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} 3x^2 + 3hx + h^2 = 3x^2 \end{aligned}$$

Por lo tanto $f'(x) = 3x^2$

a) Relacione la ecuación $f'(x)$ obtenida con su función de la parte II, ¿qué observa?

Que son iguales ya que la derivada indica la pendiente de la tangente en un punto de x

Otras notaciones que se manejan son las siguientes:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$$

Además de $f'(x)$ y $\frac{dy}{dx}$, otras formas comunes de escribir la derivada incluyen:

$$\frac{df}{dx}, \quad \frac{d}{dx}f(x), \quad D_x f(x), \quad y' \quad y'(x)$$

b) ¿Cuál es la derivada de una constante?

Cero.

c) Considere la función, $f(x) = 3$. Grafique la función, ¿qué representa?

Una línea horizontal

d) ¿Cuál es la derivada de la función, $f(x) = 3$ y por qué?

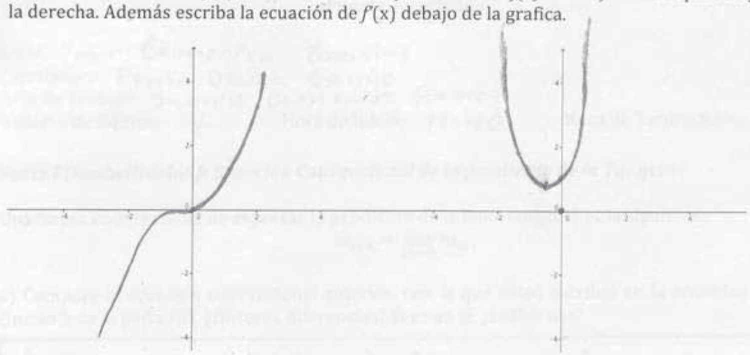
Es igual a cero, porque no existen las líneas tangentes en líneas rectas constantes

e) Derive las siguientes funciones: x, x^2, x^4 y x^7. Observando las derivadas, ¿cómo puede deducir $\frac{d}{dx}x^n$?

$\frac{\partial}{\partial x} x = 1$; $\frac{\partial}{\partial x} x^2 = 2x$; $\frac{\partial}{\partial x} x^4 = 4x^3$; $\frac{\partial}{\partial x} x^7 = 7x^6$

$\frac{\partial}{\partial x} x^n = n x^{n-1}$

f) Considere la función $f(x) = x^3 + x^2 + x$. Grafique la función $f(x)$ en el eje de la izquierda y $f'(x)$ en la derecha. Además escriba la ecuación de $f'(x)$ debajo de la grafica.



$f(x) = x^3 + x^2 + x$ $\qquad$ $f'(x) = 3x^2 + 2x + 1$

g) Utilizando la información anterior, calcule la pendiente de la tangente de $f(x)$ en el punto $x = 3$.

$f'(x) = 3(3)^2 + 2(3) + 1 = 34$

h) ¿Qué información utilizó para responder el inciso anterior? ¿Por qué?

La derivada de la función es la pendiente de la tangente en el mismo punto.

i) Supongan que $f(x)$ y $f'(x)$ están dados, ¿qué indica $f'(3)$ con respecto a la función $f(x)$?

$f'(3)$ = La pendiente de la tangente en $x = 3$

j) Si $f(x)$ esta definida, ¿cómo calcularía la pendiente de la tangente en cualquier punto de x? Explique su procedimiento.

Derivando f(x) y evaluando en cualquier punto de x

E.7. Actividad 7: Aplicación

Actividad 7
Aplicaciones

Líder: Samuel Gonzalez Gómez
Calculadora: Omar Chamonica Zacarías
Hoja de Trabajo: Efraín Ocaña Osorio
Número de Equipo: 1 Hora de Inicio: 12: 24 Hora de Terminación: 1 : 34

A. Puntos Críticos y Su Significado

Parte I (con lápiz y papel): Análisis de Funciones: Creciente, Decreciente y Concavidad

Los términos *creciente, decreciente* y *constante* son utilizados para describir el comportamiento de una función al moverse de la izquierda a la derecha. Su comportamiento depende de los valores de *f(x)*.

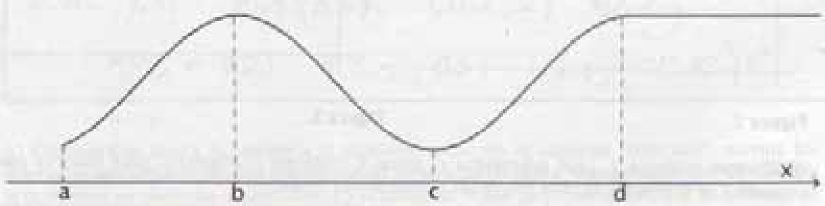
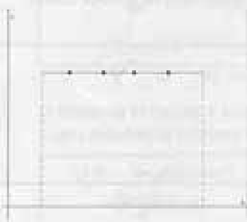


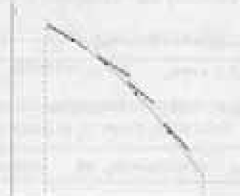
Figura 1.

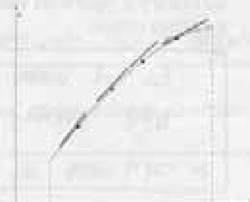
a) Considere la figura 1, completa la siguiente tabla con los términos *creciente, decreciente* o *constante.*

Intervalos de x	Comportamiento de la función
a – b	creciente
b – c	decreciente
c – d	creciente
d – ∞	constante

b) En cada una de las siguientes figuras se encuentran 4 puntos. Para cada punto trace la tangente.







c) Considere las tangentes del inciso anterior. ¿Qué puede concluir de los valores de las tangentes para una función *creciente, decreciente y constante*?

Para la constante no hay tangentes
Para las crecientes son positivas
Para las decrecientes son negativas

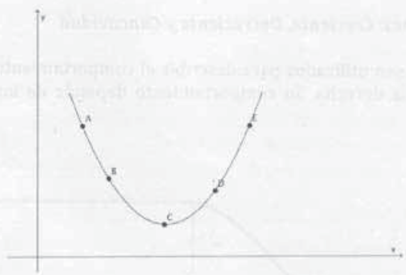


Figura 2.

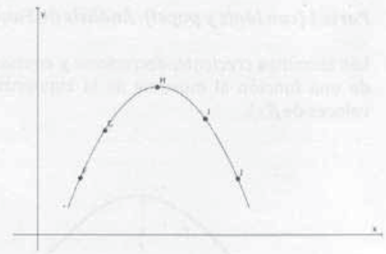


Figura 3.

d) Observe la figura 2, ¿qué representa el punto C (máximo o mínimo)? ¿Qué observa con respecto a las tangentes de cada uno de los puntos de esa figura?

mínimo ; que antes del punto de inflexión las pendientes son negativas y despues son positivas

e) Observe la figura 3, ¿qué representa el punto H (máximo o mínimo)? ¿Qué observa con respecto a las tangentes de cada uno de los puntos de esa figura?

máximo ; que antes del punto de inflexión las pendientes son positivas y despues son negativas

f) Recordando que una derivada representa una tangente y analizando su respuestas de los incisos d y e, ¿qué es el valor de la derivada en un máximo o mínimo? Este punto se conoce como un punto crítico.

Es el valor maximo o minimo respecto a "y" que puede tomar una función

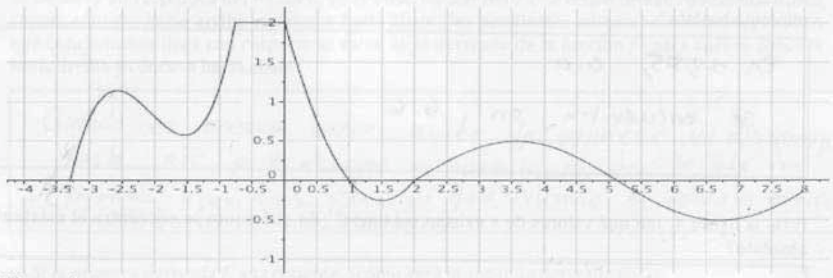


Figura 4.

g) Observando la figura 4, ¿cuáles serían los puntos críticos de la primera derivada? ¿Por qué?

(-2.6 , 1.1) (-1.5 ; 0.7) (0.7 , 2) (0, 2)
(1.5 , -0.2) (3.5 , 0.5) (6.6 , - 0.5)

h) Considere la figura 4, completa la siguiente tabla. En la columna "Intervalo", escriba los intervalos que están separados por los puntos críticos. La columna "Comportamiento" se refiere a si la función es creciente o decreciente y la columna "Valor de f'" se refiere a si la derivada es positiva o negativa.

Intervalo	Comportamiento	Valor de f'
-3.3 ~ -2.6	creciente	positiva
-2.6 - -1.5	decreciente	negativa
-1.5 - -0.7	creciente	positiva
-0.7 - 0	constante	0
0 - 1.5	decreciente	negativa
1.5 - 3.5	creciente	positiva
3.5 - 6.6	decreciente	negativa

i) ¿Qué relación encuentra entre el comportamiento de la función y el valor de la derivada?

que si el comportamiento es creciente la derivada será positiva, mientras que si el comportamiento es decreciente la derivada será negativa

j) Observe la figura 4 y los incisos anteriores, si existe un punto crítico, ¿cómo se puede clasificar como máximo o mínimo con respecto a la primera derivada?

Un maximo cuando la derivada paso de positivo a negativa

un minimo cuando la derivada paso de negativa a positiva

k) Regrese a la figura 4, ¿en qué valores de x existen mínimos? ¿En qué punto se encuentra el mínimo absoluto?

en -1.5, 1.5, 6.6

se encuentra en 6.6

l) De la figura 4, ¿en qué valores de x existen máximos? ¿En qué punto se encuentra el máximo absoluto?

-2.6, -0.7, 3.5

se encuentra en 0.7

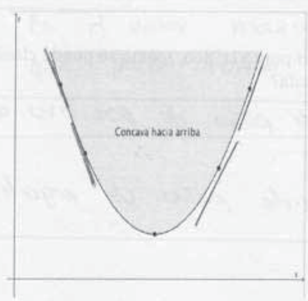
m) ¿Qué entiende como un máximo/mínimo absoluto y un máximos/mínimo relativo? Matemáticamente ¿cómo se expresa su observación?

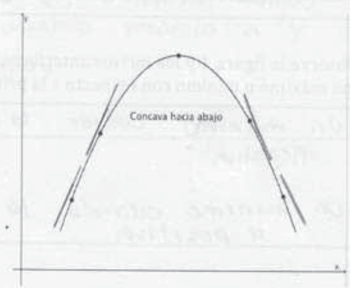
Un maximo/minimo absoluto es el menor o mayor valor que puede tener el maximo/minimo segun sea el caso y los relativos son los demas valores donde cambia la pendiente de la recta tangente

Aunque el signo de la derivada de f indica en dónde la gráfica de f es creciente o decreciente, no indica la dirección de la *curvatura*. Por ejemplo, la función es creciente en ambos lados del punto en la figura 5, pero en el lado izquierdo tiene una curvatura hacia arriba ("retiene agua") y en el lado derecho tiene una curvatura hacia abajo ("derrama agua"). En intervalos donde la grafica de f tiene una curvatura hacia arriba se dice que f es *cóncava hacia arriba*, y en intervalos donde la grafica de f tiene una curvatura hacia abajo se dice que f es *cóncava hacia abajo*. La curvatura también se conoce como la concavidad.

Figura 5.

n) Para las figuras en los puntos indicados, estime y trace la línea tangente correspondiente.





o) Observe su respuesta del inciso n, ¿qué observación tiene con respecto a las pendientes para curvas cóncava hacia arriba y cóncava hacia abajo (las pendientes aumentan o disminuyen)? ¿A qué conclusiones llega con respecto al valor de la derivada de la función f' para curvas cóncava hacia arriba y cóncava hacia abajo?

Cuando es concava hacia arriba la pendiente va disminuyendo hasta cero, para despues ir aumentando por lo que van de negativas a positivas. por lo que cuando es concavo hacia abajo es lo contrario

p) Si la primera derivada f' es creciente, ¿cómo será la segunda derivada f''?

Seria positiva

q) Si f' es decreciente, ¿cómo será f''?

Sería negativa

r)¿Qué relación existe entre el valor de la segunda derivada f'' con respecto a la concavidad de la función f?

cuando es positiva es concava hacia arriba
cuando es negativa es concava hacia abajo

Parte II (con CAS): Comprobación Grafica

Dentro del sistema CAS, también se puede graficar. Para graficar, presione el botón "on" y después "B Grafico" para llegar a la pantalla del plano x-y. Dentro de esta pantalla, presione "menú", "3: Tipo de gráfico", "1: Función" después aparece la línea donde se introduce la función a graficar.

a) Grafique la función $f(x) = x^2 - 4x + 3$. ¿Qué tipo de concavidad observa? ¿Cambia la concavidad en algún intervalo? Compruebe su observación utilizando la segunda derivada de la función.

concava hacia arriba,
$f(x) = x^2 - 4x + 3$
$f'(x) = 2x - 4$
$f''(x) = 2$

b) Grafique la función $f(x) = x^3$. ¿Qué observa de la concavidad? ¿Cambia en algún punto? ¿Cuál es la segunda derivada de la función?

Que primero hay concavidad hacia abajo $(-\infty, 0)$ y después es concava hacia arriba $(0, \infty)$ $f(x) = x^3$ $f'(x) = 3x^2$ $f''(x) = 6x$

c) Considere los incisos a y b, en el punto donde cambia la concavidad, ¿cuánto vale la segunda derivada en dicho punto?

$f(x) = x^2 - 4x + 3$ $f''(x) = 2$ $f(x) = x^3$ $f''(x) = 6x$
$(-0.001, 0.001)$

d) Elija dos (2) puntos de la función del inciso b, uno en donde hay concavidad hacia arriba y otro en donde hay concavidad hacia abajo. ¿Qué valores toma la segunda derivada en dichos puntos?

En los incisos anteriores, se observa que hay un punto donde cambia la concavidad, dicho punto se conoce como el *punto de inflexión*.

e) Si en un punto de inflexión hay un cambio de concavidad y observando la respuesta del inciso anterior, ¿cuáles serían los intervalos de concavidad?

concava hacia abajo de $(-\infty, 0)$ concava hacia arriba de $(0, \infty)$

Grafique las funciones $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$, $f'(x)$ y $f''(x)$ en la misma pantalla. Utilice como referencia las gráficas para responder los siguientes incisos.

f) ¿Qué relación observa entre la primera derivada y la función? Considere los máximos y mínimos y los intervalos crecientes y decrecientes en su respuesta.

$f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ $f'(x) = 3x^2 - 6x$ $f''(x) = 6x - 6$ Que la función tiene un maximo y un minimo; la derivada tiene un minimo y la segunda derivada es una línea recta

g) ¿Qué relación observa entre la segunda derivada y la función? Considere los máximos y mínimos, concavidad y los intervalos de concavidad.

Que la segunda derivada me indica el cambio en la concavidad de la función y el tipo que de la misma

En los incisos anteriores, se observa la importancia de encontrar los ceros de una ecuación. En el sistema CAS, existe el comando "zeros". Dicho comando encuentra los ceros de la función. La sintaxis es la siguiente, zeros(función, variable). La palabra "zeros" se puede escribir utilizando el teclado, se presiona el botón "( )" para poner los paréntesis, se introduce la función (ecuación) y finalmente "," (coma) y la variable.

h) Introduzca **zeros(x^3+4x^2+x-6,x)** en la calculadora y presione **enter**, ¿qué sucede y qué representan esos valores? Compruebe esos valores.

-3, -2, 1 representa los puntos donde la función vale cero

Para los siguientes incisos utilice los comandos **zeros**, **derivar**, **tal que**, etc. pero sin utilizar la gráfica. Además considere que $f(x) = x^4 - 5x^3 + 9x^2$.

i) ¿Qué procedimiento utilizaría para encontrar los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y los máximos y mínimos? ¿Cuáles son los intervalos y, los máximos y mínimos?

1) Derivas
2) encontras ceros (puntos criticos)
3) evaluas con un valor mayor y menor del punto critico
4) Dependiendo del signo se observa si es minimo y maximo

j) ¿Qué procedimiento utilizaría para encontrar los intervalos de concavidad y los puntos de inflexión? ¿Cuáles con los intervalos de concavidad y los puntos de inflexión?

1) obtienes la segunda derivada de la funcion
2) obtienes ceros
3) evaluas

k) Compruebe los incisos j y k al graficar la función dentro del sistema CAS. ¿Observa algunas diferencias?

NO

l) Reflexione sobre la actividad y resuma el efecto que tienen las derivadas (primera y segunda) sobre la gráfica de la función.

Se concluye que la primera derivada nos da los puntos criticos de la funcion y la segunda nos da la concavidad

Apéndice F

Guía del Professor

La siguiente sección proporciona información adicional sobre la aplicación de las actividades propuestas, las cuales se encuentran en el anexo B del presente trabajo de tesis. Antes de iniciar, es importante tomar las siguientes medidas:

1. Organizar a los participantes en equipos de tres.

2. A cada equipo se le asigna una calculadora TI ? nspire CX CAS, las actividades, hojas en blanco, pluma, lápiz, regla y escuadra.

3. Se deben explicar los roles de cada integrante con el trabajo de las actividades, en donde:

    a) El líder: Tiene la responsabilidad de mantener el orden y dinámica, fomentar las discusiones y asegurar que los otros integrantes estén cumpliendo con su trabajo.

    b) El que maneja la calculadora: Hace el trabajo relacionado con la calculadora, lo cual puede incluir la introducción de datos, comandos y/o cálculos y la interpretación de los resultados.

    c) El que maneja la actividad en papel: Lee la información y hace preguntas sobre las actividades, además de escribir las respuestas de los cuestionamientos planteados.

El cambio de roles entre los estudiantes se lleva a cabo al cambiar de actividad, con el orden de la Figura F.1.

Es muy importante que los integrantes de los equipos, lean con cuidado las instrucciones y preguntas plasmadas en la actividad, y que las respuestas que den, deben ser un consenso del equipo.

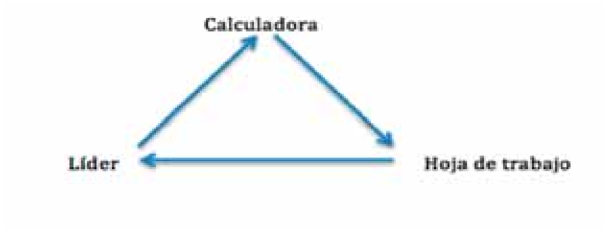


Figura F.1: Roles en las actividades

F.1. Introducción a la Calculadora

En ésta actividad, se presenta una introducción básica sobre el uso y manejo de la calculadora TI nspire CX CAS. Debido a su naturaleza, la manipulación de la calculadora es muy complicada y compleja; esta introducción no es exhaustiva pero contiene los elementos básicos requeridos para llevar a cabo las actividades. Cabe mencionar que a lo largo de la misma, se llegan a utilizar técnicas más avanzadas, las cuales son presentadas en su momento dentro de las actividades. Se recomienda que la explicación sea breve y concisa y que incluya los siguientes temas mencionados en la Figura F.2.

- **La diferencia entre "Scratchpad" y las aplicaciones dentro de la pantalla "Home". Dichas aplicaciones representadas por un icono, tienen la ventaja de estar en una pestaña dentro del documento de trabajo.**
- **El manejo de las aplicaciones: cómo crear nuevas, cómo abrir las anteriores, cómo borrar y la vista general de todas; se encuentra al presionar ctrl + ↑**
- **Explicar cómo realizar cálculos debido a que enter realiza la operaciones y no el símbolo =, además explicar el significado de = dentro del sistema CAS.**
- **Hablar sobre los números racionales e irracionales. Por ejemplo, al hacer la operación: 8 ÷ 1 6 enter da el resultado ½, mientras que 8 ÷ 1 6 ctrl enter o 8 ÷ 1 6 . enter muestra el resultado 0.5.**
- **El uso del botón ctrl , por ejemplo para apagar la calculadora se utiliza ctrl on**

Figura F.2: Sugerencias para la Introducción a la Calculadora

F.2. Actividad 1

Dentro de esta actividad se proponen dos discusiones:

1. Después de la parte I inciso c, se debe asegurar de que el inciso I.c esté resuelto correctamente, si no se deben revisar las respuestas del inciso I.a.

2. Antes del inciso h de la parte I, se debe establecer el significado de una forma matemática o fórmula. Se pueden presentar los siguientes casos: ?Por cada tres manzanas que compran, le regalan una naranja.?

   a) ¿Cómo se expresa, cuántas naranjas hay sabiendo la cantidad de manzanas? ($N = \frac{1}{3}M$)

   b) ¿Cómo se expresa, cuántas manzanas hay sabiendo la cantidad de naranjas? ($M = 3 \times N$)

   c) ¿Qué representa el "1/3" y "3" en las expresiones anteriores?

   Sabiendo expresar relaciones con la discusión anterior, se debe llegar a la respuesta del inciso I.h.

F.3. Actividad 2

Se propone la siguiente discusión para esta actividad:

1. Antes del inciso b de la segunda parte, en donde se plantea la expresión para resolverlo. Partiendo de las ecuaciones de la pendiente, se despeja el valor de y_2. De tal manera que: $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$; $\quad$ m($\mathrm{x}_2 - x_1) = y_2 - y_1$; $\quad$ $y_2 = m(x_2 - x_1) + y_1$

   a) ¿Qué representan los puntos de x y y?

   b) ¿Es importante, cuáles valores utilizan? Por ejemplo, para el rango de 6 - 14, se puede utilizar 6 o 14.

   c) ¿Cuál valor conviene utilizar?

Con el razonamiento anterior se debe llegar a la expresión: $y_2 = m(x_2 - 6) + 7{,}40$ de tal manera que m corresponda a la pendiente de cada rango.

F.4. Actividad 3

Dentro de la actividad 3, se proponen las siguientes tres discusiones:

1. Antes del inciso d de la parte I. En esta discusión se verá el desarrollo matemático de la expresión de la pendiente en términos de Δx y x. Para lograr lo anterior se pueden hacer las siguientes preguntas claves:

   a) ¿A qué equivale x_{n+1}? (Del despeje de la expresión $\Delta x = x_{n+1} - x_n$

b) Observe su expresión del inciso I.b, ¿contiene la variable x_{n+1}? Si no, ¿a qué se debe? (Si utilizaron n = 10, no tiene dicha variable.)

c) Resuelva el inciso I.d.

2. Antes del inciso d de la parte II, se debe enseñar cómo se expresan las funciones. Por ejemplo, si $f(x) = x^2$:

   a) ¿Qué significa $f(5)$ y $f(a)$?

   b) ¿Qué ocurrió? (se sustituye 5 y a en cada valor de x dentro de la función f)

   Con lo anterior se puede resolver el inciso II.d

3. Discusión después del inciso f de la parte II. Aquí se deben asegurar de que tengan la expresión correcta, ya que se necesitará para realizar la parte III de la actividad. En caso de que este incorrecta, se revisan las respuestas dadas en los incisos I.d y I.e. Si se observa que tienen dificultades en el inciso III.a, se puede llevar a cabo otra discusión para realizar el mismo.

F.5. Actividad 4

Se propone una discusión para el inciso g de la parte I. Se debe poner mucha atención, en llegar a una expresión que esté en función de las variables t y t_0. Si tienen dificultades, revise las respuestas dadas para el inciso I.e. Esta parte es crucial, ya que en el inciso I.i se sustituyen valores de t_0 para llegar a una expresión que esté solamente en función de la variable t. Lo anterior, expresa la pendiente de la secante (la cual contiene dos puntos) con una variable.

F.6. Actividad 5

En esta actividad, se manejan tres discusiones:

1. Antes del inciso k de la parte I. Al responder la pregunta en grupo, se puede reforzar la idea de que la pendiente de la tangente, equivale a la pendiente de la secante cuando la diferencia de x es muy pequeña.

2. Antes de iniciar el inciso l de la parte I, se debe explicar el uso de escuadras para realizar el mismo.

3. Antes de iniciar el inciso q de la parte I, se debe plantear una expresión general para utilizar el sistema CAS para ahorrar tiempo. Se puede utilizar el siguiente argumento:

$$m = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

Cuando Δx es pequeño la pendiente de la secante equivale a la de la tangente, entonces para $\Delta x = 0{,}001$ y cuando $f(x) = -x^2$:

$$\frac{-(x+0{,}001)^2-(-x^2)}{0{,}001}$$

Con la expresión anterior se puede utilizar el comando *tal que* y las operaciones de copiar y pegar realizadas en la actividad 1 para agilizar los cálculos. Se debe observar, que al cambiar la expresión de $f(x)$, también cambiará la expresión para la pendiente.

F.7. Notas finales

No hay discusiones propuestas para las actividades 6 y 7. Es importante observar que además de conducir las discusiones mencionadas, el profesor debe supervisar a los participantes para darse una mejor idea de otros problemas que puedan existir. En la mayoría de los casos, las dificultades o respuestas equivocadas surgen del mal entendimiento (lectura) de las preguntas o de las instrucciones (texto).