



**UNIVERSIDAD
MICHOCANA
DE
SAN NICOLÁS DE HIDALGO
FACULTAD DE INGENIERÍA QUÍMICA**

**TESIS
CONCEPTUALIZACIÓN DEL LÍMITE A TRAVÉS DE LA
APLICACIÓN DE ACTIVIADES CON LA CALCULADORA Ti-Nspire
CX CAS**

**QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:
LICENCIATURA EN INGENIERÍA QUÍMICA**

**PRESENTA:
PAULINA CALDERÓN VARGAS**

**ASESOR DE TESIS
DRA. GRACIELA ERÉNDIRA NÚÑEZ PALENIUS**

MORELIA, MICH., MARZO DE 2016

Índice General

Resumen

I

1. Capítulo I. Introducción

1.1 Antecedentes.....	9
1.1.1 Concepto de límite.....	13
1.2 Justificación.....	14
1.2.1 Dificultades de aprendizaje del concepto de límite.....	15
1.3 Planteamiento del problema.....	16
1.4 Objetivos.....	17
1.4.1 Objetivo General.....	17
1.4.2 Objetivos Específicos.....	17
1.5 Hipótesis.....	17
1.6 Preguntas de Investigación.....	18

2. Capítulo II. Marco Teórico

2.1 Teoría de registros de representación semiótica.....	19
2.1.1 Registro de Representaciones como recurso de aprendizaje.....	19
2.1.2 La semiótica y noética.....	19
2.1.3 Representaciones semióticas, transformaciones intencionales y aprendizaje.....	21
2.1.4 Formación de representaciones semióticas.....	22
2.2 Aprendizaje Cooperativo y Colaborativo.....	22
2.2.1 Teoría del aprendizaje Cooperativo.....	24
2.2.2 Aprendizaje Colaborativo.....	25
2.2.3 Diferencias y similitudes entre aprendizaje cooperativo y colaborativo.....	26
2.3 Aprendizaje Mediado.....	26
2.3.1 Vygotsky y el Aprendizaje Mediado.....	27
2.3.2 Feuerstein y el Aprendizaje Mediado.....	29
2.4 Aprendizaje Mediado con Tecnología.....	31
2.4.1 Piaget y la educación mediada con tecnología.....	31
2.4.2 Vygotsky.....	32
2.4.3 Modelo psicológico de Instrumentos y Actividad Instrumentada.....	32
2.5 Génesis Instrumental.....	34
2.5.1 Antecedentes.....	34
2.5.2 Génesis Instrumental.....	35
2.5.3 Complejidad de la Génesis Instrumental.....	36

3. Capítulo III. Metodología	
3.1 Metodología de la Investigación.....	37
3.2 Metodología de la Experimentación.....	39
3.2.1 Experimentación Piloto.....	39
3.2.2 Experimentación Formal.....	42
4. Capítulo IV. Análisis y Discusión de Resultados	
4.1 Análisis de Actividades.....	44
4.1.1 Actividad 1. Diferencias.....	44
4.1.2 Actividad 2. Pendientes.....	48
4.1.3 Actividad 3. Pendiente como Función.....	57
4.1.4 Actividad 4. Límites.....	63
5. Capítulo V. Conclusiones	
5.1 Conclusiones como respuestas a las preguntas de Investigación.....	73
5.2 Conclusiones Generales.....	74
Bibliografía	75
Anexos	81
Anexo I	
Actividad 1. Diferencias.....	82
Actividad 2. Pendientes.....	86
Actividad 3. Pendiente como Función.....	93
Actividad 4. Límites.....	98
Actividad de Primer Uso de la Calculadora.....	104
Guía del Profesos.....	108
Anexo II	
Bitácoras Experimentación Piloto.....	111
Anexo III	
Evidencia de Actividad 1 Diferencias, Experimentación Formal.....	118
Evidencia de Actividad 2 Pendientes, Experimentación Formal.....	121
Evidencia de Actividad 3 Pendiente como Función, Experimentación Formal.....	127
Evidencia de Actividad 4 Límites, Experimentación Formal.....	131

Índice General

Resumen	I
1. Capítulo I. Introducción	
1.1 Antecedentes.....	9
1.1.1 Concepto de límite.....	13
1.2 Justificación.....	14
1.2.1 Dificultades de aprendizaje del concepto de límite.....	15
1.3 Planteamiento del problema.....	16
1.4 Objetivos.....	17
1.4.1 Objetivo General.....	17
1.4.2 Objetivos Específicos.....	17
1.5 Hipótesis.....	17
1.6 Preguntas de Investigación.....	18
2. Capítulo II. Marco Teórico	
2.1 Teoría de registros de representación semiótica.....	19
2.1.1 Registro de Representaciones como recurso de aprendizaje.....	19
2.1.2 La semiótica y noética.....	19
2.1.3 Representaciones semióticas, transformaciones intencionales y aprendizaje.....	21
2.1.4 Formación de representaciones semióticas.....	22
2.2 Aprendizaje Cooperativo y Colaborativo.....	22
2.2.1 Teoría del aprendizaje Cooperativo.....	24
2.2.2 Aprendizaje Colaborativo.....	25
2.2.3 Diferencias y similitudes entre aprendizaje cooperativo y colaborativo.....	26
2.3 Aprendizaje Mediado.....	26
2.3.1 Vygotsky y el Aprendizaje Mediado.....	27
2.3.2 Feuerstein y el Aprendizaje Mediado.....	29
2.4 Aprendizaje Mediado con Tecnología.....	31
2.4.1 Piaget y la educación mediada con tecnología.....	31
2.4.2 Vygotsky.....	32
2.4.3 Modelo psicológico de Instrumentos y Actividad Instrumentada.....	32
2.5 Génesis Instrumental.....	34
2.5.1 Antecedentes.....	34

2.5.2	Génesis Instrumental.....	35
2.5.3	Complejidad de la Génesis Instrumental.....	36
3.	Capítulo III. Metodología	
3.1	Metodología de la Investigación.....	37
3.2	Metodología de la Experimentación.....	39
3.2.1	Experimentación Piloto.....	39
3.2.2	Experimentación Formal.....	42
4.	Capítulo IV. Análisis y Discusión de Resultados	
4.1	Análisis de Actividades.....	44
4.1.1	Actividad 1. Diferencias.....	44
4.1.2	Actividad 2. Pendientes.....	48
4.1.3	Actividad 3. Pendiente como Función.....	57
4.1.4	Actividad 4. Límites.....	63
5.	Capítulo V. Conclusiones	
5.1	Conclusiones como respuestas a las preguntas de Investigación.....	73
5.2	Conclusiones Generales.....	74
	Bibliografía	75
	Anexos	81
	Anexo I	
	Actividad 1. Diferencias.....	82
	Actividad 2. Pendientes.....	86
	Actividad 3. Pendiente como Función.....	93
	Actividad 4. Límites.....	98
	Actividad de Primer Uso de la Calculadora.....	104
	Guía del Profesos.....	108
	Anexo II	
	Bitácoras Experimentación Piloto.....	111
	Anexo III	
	Evidencia de Actividad 1 Diferencias, Experimentación Formal.....	118
	Evidencia de Actividad 2 Pendientes, Experimentación Formal.....	121
	Evidencia de Actividad 3 Pendiente como Función, Experimentación Formal.....	127
	Evidencia de Actividad 4 Límites, Experimentación Formal.....	131

Índice de figuras

Figura 1 Representaciones de la derivada.....	12
Figura 2 Gráfica de la definición formal de Límite.....	14
Figura 3 Modelo SIA.....	33
Figura 4 Modelo SIA modificado.....	34
Figura 5 Pantalla “HOME”.....	40
Figura 6 Evidencia del significado de una diferencia matemática.....	45
Figura 7 Evidencia de aplicación del operador Δi y Δu	47
Figura 8 Evidencia de relación de pendiente y razón de cambio.....	49
Figura 9 Evidencia de la ecuación de la pendiente en términos de n	50
Figura 10 Evidencia de la ecuación de la pendiente en términos de Δ	51
Figura 11 Evidencia de aplicación de la ecuación $y_2 = m(x_2 - x_1) + y_1$	52
Figura 12 Evidencia del análisis de pendiente.....	52
Figura 13 Evidencia de ajuste lineal y exponencial dentro de CAS.....	56
Figura 14 Evidencia del análisis comparativo entre ajuste lineal y exponencial.....	56
Figura 15 Evidencia de la pendiente como función.....	58
Figura 16 Introducción del concepto h	60
Figura 17 Significado de la variable h	61
Figura 18 Evidencia de la aplicación de la variable h	61
Figura 19 Representación de la pendiente como función.....	62
Figura 20 Evidencia del análisis de la variación de Δx cuando tiende a 0.....	63
Figura 21 Evidencia del análisis de la variación de Δx cuando es igual a 0.....	63
Figura 22 Evidencia de la relación entre velocidad promedio y Pendiente.....	64

Figura 23 Evidencia de velocidad promedio.....	65
Figura 24 Evidencia de la relación entre velocidad promedio y velocidad instantánea, así como concepto de límite matemático.....	67
Figura 25 Evidencia de representación gráfica del límite.....	70
Figura 26 Evidencia del análisis de la herramienta CAS.....	70
Figura 27 Evidencia del análisis gráfico de Límite continuo.....	70
Figura 28 Evidencia del análisis de Límite discontinuo.....	71
Figura 29 Evidencia de la conceptualización de Límite.....	71

AGRADECIMIENTOS

A DIOS

Me quedo con Dios porque de su lado están las sonrisas ilógicas, la paz inexplicable y el amor inagotable. Gracias señor por regalarme la vida, por llevarme siempre de tu mano y porque en ti todo lo puedo.

A MIS PADRES

Gracias Papás por ser quienes son; porque nunca podré pagarles todo lo que hacen por mí, aunque mil veces me caiga, sé que mil veces me levantarán. A ustedes les debo lo que soy y lo que tengo y si hoy he logrado culminar esta etapa en mi vida es gracias a su amor y apoyo infinito. Los amo.

A MI HIJA VALENTINA

Gracias hija, por regalarme esa chispa que me impulsa a seguir adelante día con día, por tus sonrisas y abrazos, pero sobre todo gracias pequeña por comprenderme y porque aun cuando no he estado contigo, siempre tienes ese inmenso cariño que cura todos mis males. Te amo.

A MIS ASESORAS

Gracias por confiar y creer en mí, muchos pueden graduarse como maestros, pero no todos logran profesar esa bonita labor con el corazón en la mano como ustedes lo hacen. Gracias por su apoyo y paciencia, pero sobre todo gracias por nunca dejarme de enseñar y brindarme más que conocimientos.

A MI AMIGA PERA

Amiga, Gracias por tu inmenso apoyo, eres una gran mujer a la cual quiero y admiro mucho. Sin ti no hubiera logrado esta meta. Gracias por siempre estar conmigo y ser un ejemplo de lucha constante, por tu sonrisa que siempre me alentó y sobre todo por tu tiempo.

A MIS AMIGOS

Erick, Juan Carlos, Karla y Paul por su amistad y apoyo a lo largo de la carrera. Nunca me dejaron sola y siempre han estado en los momentos más importantes de mi vida. Gracias.

RESUMEN

En la enseñanza tradicional del cálculo diferencial se pone énfasis en la parte operacional, lo cual no es suficiente para el entendimiento de los conceptos involucrados. Entonces es necesario implementar métodos para lograr que el estudiante tenga un mejor acercamiento a lo conceptual.

Este trabajo de tesis presenta los resultados obtenidos de una investigación, donde se evidencia cómo los estudiantes aprenden el concepto de límite al trabajar con actividades de aprendizaje apoyados de la calculadora simbólica Ti-Nspire CX CAS, aprovechando su poderosa combinación de computación simbólica y visualización gráfica en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Es así que en esta investigación se hizo presente el uso de las TIC (Tecnologías de la Información y la Comunicación), a través de la calculadora Ti-Nspire CX CAS, la cual fortalece un ambiente didáctico e influye en el aprendizaje de los estudiantes. Se inicia con una etapa exploratoria denominada experimentación piloto, seguida de una experimentación formal; ambas experimentaciones se llevaron a cabo con alumnos de primer grado de la Facultad de Ingeniería Química. Comienzan con una actividad diseñada para el primer uso de la calculadora que requiere la interacción entre el alumno y las herramientas dentro de CAS, siguiendo con actividades que fueron elaboradas para facilitar el desarrollo de razonamientos que lleven al estudiante a lograr aprendizajes significativos.

A partir de las experiencias recogidas por los alumnos durante la exploración; la experiencia concreta comienza con la observación y el análisis de las actividades de aprendizaje, continúa con la conceptualización y luego con la generalización. Se trabajó en grupos conformados por tres personas, durante el desarrollo de las actividades los estudiantes tuvieron algunas dificultades que se convirtieron en retos, dando pauta a la posibilidad de que construyan sus conocimientos en un ambiente de intercambio de ideas, puntos de vista y convencimiento, brindando así la oportunidad de que se dé un aprendizaje significativo.

Considerando los resultados obtenidos en la experimentación formal, se puede decir categóricamente que hubo aprendizaje del concepto de Límite, ya que las evidencias demuestran que los estudiantes tienen un dominio del concepto después de realizar las actividades.

Palabras Clave: Actividades, calculadora simbólica, TI-Nspire CX CAS, Límite, aprendizaje.

ABSTRACT

In a traditional teaching environment differential calculus classes tends to emphasise the operational aspect, which isn't sufficient for understanding the conceptos involved.

This thesis presents the results of an investigation, where it is evident how students learn the concept of limit when working with learning activities supported the symbolic TI-Nspire CX CAS, using its powerful combination of symbolic computation and graphical display in teaching and learning mathematics.

Thus in this research it was present the use of ICT (information and communications technology), through the Ti-Nspire CX CAS calculator which strengthens an educational environment and influences student learning. It starts with an exploratory stage called pilot experimentation, followed by a formal experimentation; Both experiments were conducted with first grade students of the Faculty of Chemical Engineering. They start with an activity designed for first use of the calculator that requires interaction between the student and tools within CAS, following activities were developed to facilitate the development of reasoning with the student to achieve significant learning.

From the experience gained by the students during exploration; the concrete experience begins with the observation and analysis of the learning activities, continues with conceptualizing and then generalization. They worked in groups made up of three people during development of the activities the students had some difficulties became challenges, giving pattern to the possibility that build their knowledge in an atmosphere of exchange of ideas, views and conviction, thus providing the opportunity for meaningful learning to occur.

Considering the results obtained in formal experimentation, one can say categorically that there was learning the concept of limit, since the evidence shows that students have a mastery of the concept after making activities.

CAPÍTULO I

INTRODUCCIÓN

Las matemáticas sin contexto son abstractas y por ende, necesitan una completa atención y dedicación para poder apropiarse de sus conceptos, por este motivo la enseñanza de las matemáticas parte del uso de material concreto permitiendo que el mismo estudiante experimente el concepto desde la estimulación de sus sentidos, logrando llegar a interiorizar los conceptos que se quieren enseñar a partir de la manipulación de los objetos en su entorno. Los niños necesitan aprender a través de experiencias concretas, en concordancia a su estadio de desarrollo cognitivo (Piaget, 1958), esto se refiere al material en el que participa el sentido del tacto así como el visual. Difícilmente se puede utilizar este método en los niveles medio superior y superior, basándose principalmente en la enseñanza tradicional, misma que no garantiza la comprensión del alumno frente al tema estudiado debido a que se ha limitado a estrategias memorísticas y perceptuales que no crean ningún interés en el estudiante, y por lo tanto, ningún aprendizaje significativo.

Es así, que interesados por el conocimiento que se deriva de la tecnología, observamos que las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC) tienen un impacto muy grande, pues en ocasiones sirven para comprobar resultados, para reforzar conceptos o para que el estudiante construya autónomamente su propio conocimiento. Su integración dentro del currículo sirve como puente para la apropiación de conceptos matemáticos.

El uso de la tecnología en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, permite crear instrumentos atractivos con alto grado de interactividad que facilitan la exploración, el descubrimiento y la investigación de conceptos y relaciones. Es por ello, que se considera altamente apropiado la integración de sistemas de álgebra computacional (CAS), reconocidos por su combinación poderosa de computación simbólica y visualización gráfica en la enseñanza de matemáticas, ya que desde su introducción, CAS se ha visto como una herramienta altamente valiosa para hacer matemáticas y potencialmente viable para la enseñanza y aprendizaje de las mismas.

Éste trabajo de tesis presenta los resultados obtenidos de una investigación, donde se evidencia cómo los estudiantes aprenden el concepto de límite al trabajar con actividades de aprendizaje apoyados de la calculadora simbólica Ti-Nspire CX CAS, aprovechando su poderosa combinación de computación simbólica y visualización gráfica en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Es así que esta investigación inicia con una etapa exploratoria denominada experimentación piloto, seguida de una experimentación formal; ambas experimentaciones comienzan con una actividad diseñada para el primer uso de la calculadora que requiere la interacción entre

el alumno y las herramientas dentro de CAS, siguiendo con actividades que facilitan el desarrollo conceptual del Límite mediante el apoyo de la calculadora simbólica Ti-Nspire CX CAS. A partir de las experiencias recogidas por los alumnos durante la exploración; la experiencia concreta comienza con la observación y el análisis de las actividades de aprendizaje, continúa con la conceptualización y luego con la generalización. Se trabajó en grupos conformados por tres personas, sin embargo, en el desarrollo de las actividades los estudiantes tuvieron algunas dificultades que se convirtieron en retos, dando pauta a la posibilidad de que construyan sus conocimientos en un ambiente de intercambio de ideas, puntos de vista y convencimiento, brindando así la oportunidad de que se dé un aprendizaje significativo.

En el capítulo II, se hace una revisión de la literatura relacionada con el uso de instrumentos para el conocimiento matemático, las distintas representaciones semióticas para la construcción de un concepto, así como la integración de la tecnología en el proceso enseñanza- aprendizaje.

En el capítulo III, se presenta la metodología que se utilizó para llevar a cabo la implementación de la experimentación; comenzando por la selección de los artefactos (video cámaras, hojas, lapiceros, etc) y aplicación de las actividades.

En el capítulo IV, se presenta el análisis de los datos que permitieron dar respuestas a las preguntas de investigación planteadas, se proporcionan las observaciones por actividad, de acuerdo a la evidencia generada por los estudiantes, así como sugerencias que se deben considerar en algunos aspectos relacionados con las actividades.

En el capítulo V, se proporcionan las conclusiones de éste trabajo de investigación así como algunos comentarios generales para la enseñanza en matemáticas.

1.1. Antecedentes

Estudios implementados en clases de matemáticas en el nivel medio superior y superior (Heid, 1988; Atkins, Creegan y Soan, 1995; Pierce, 1999; Lagrange 2000) han apoyado el argumento de que la manipulación simbólica dentro del CAS puede evitar los errores de manipulación de los alumnos y por lo tanto, permitirles generar resultados exactos y aproximados de manera rápida. De acuerdo a Kutlzer (1994), la habilidad de construir bases conceptuales en CAS permite que los alumnos puedan manejar problemas más complicados que la mayoría de alumnos que trabajan de maneras tradicionales (lápiz y papel). Además, teniendo las facilidades de manipulación simbólica, capacidades numéricas y representaciones gráficas puede promover el hábito de utilizar las tres representaciones para aumentar su conocimiento (Pierce, 1999).

Cuando se introdujeron las calculadoras gráficas en la educación, fue evidente que los alumnos tenían dificultades en la interpretación de las representaciones gráficas que aparecían en la pantalla de la calculadora (Goldenberg, 1987; Hillel et. al., 1992). Guin y

Trouche (1999), notaron que la confusión de los alumnos se debe al no poder distinguir entre el objeto matemático y su representación en la calculadora.

Para entender el uso de dichas herramientas conceptuales, debemos enfocarnos en el concepto de instrumento. Siempre que un artefacto se ofrece a un usuario, con el fin de lograr una determinada tarea donde intervienen algunos esquemas de utilización, permite que se convierta en un instrumento; este término sigue la génesis instrumental.

La génesis instrumental es el proceso de transformación de artefacto a instrumento; puede funcionar de dos maneras:

1. La primera es dirigida hacia el instrumento, en donde progresivamente se carga con potencialidades y eventualmente tiene un uso específico; conocido como la *instrumentalización del artefacto*.
2. La segunda está dirigida hacia el sujeto, lo cual resulta en la apropiación de esquemas de acción instrumentada que se convierten en técnicas que permiten una respuesta eficaz a tareas dadas. Lo anterior se conoce como *instrumentación*.

Para entender y promover la Génesis en los aprendices, es necesario identificar las restricciones inducidas por el instrumento, existen las restricciones internas y de interface (Balacheff, 1994). Además, es necesario identificar el potencial ofrecido por el trabajo con instrumentos.

Por otro lado, la investigación de Defouad (2000), se refiere al estudio de la génesis instrumental de la calculadora TI-92 y el estudio de variaciones de funciones. La experimentación se realizó con alumnos del grado 11 (penúltimo año de preparatoria), ellos tuvieron la calculadora TI-92 por un año académico. Este estudio demostró la complejidad de los procesos de instrumentación. La Génesis instrumental obedece a una organización temporal, en formas que no refleja la enseñanza formal dedicada al tema de variación de funciones. Además, favoreció una diversa relación con la demostración matemática, donde los estudiantes daban más importancia a la búsqueda de coherencia entre la información que proporcionaban las diferentes aplicaciones (cálculos simbólicos, representaciones gráficas y valores aproximados), en lugar de buscar un argumento decisivo.

Con las entrevistas de algunos alumnos, Defouad (2000) identificó varias fases en la instrumentación. En la primera fase, los alumnos seguían dependiendo de las representaciones gráficas para el estudio de funciones. En esta fase, el uso de cálculo formal en la aplicación “HOME” de la calculadora simbólica fue marginal, a pesar de su potencial. En la siguiente fase, denominada la “fase intermedia”, la aplicación gráfica sigue siendo la más utilizada pero HOME empieza a emerger como una herramienta de solución y una conexión entre las diferentes aplicaciones que se desarrollan. Finalmente, en la última

fase conocida como la “fase de cálculo”, se logra desarrollar una conexión entre las aplicaciones.

Analizando las diferentes fases y la enseñanza formal, se llegó a las siguientes observaciones. En el primer año del experimento, los alumnos aplicaron HOME muy lentamente con diferencias claras debido a su perfil personal. El desarrollo del conocimiento matemático, fue importante en la apropiación progresiva. En la primera fase, a pesar de utilizar HOME para calcular derivadas, regresaron a la aplicación gráfica en el momento de que la situación o los resultados proporcionados por la calculadora se hicieron más complejos. No lograban emplear estrategias económicas útiles en la TI-92, preferían estrategias de sobre verificación. La conexión eficiente entre las aplicaciones algebraicas y gráficas, requerían más tiempo para desarrollarse de lo que se esperaba.

La Génesis instrumental, conduce a una evolución de los papeles respectivos de las diferentes aplicaciones de la calculadora. Durante la primera fase de la Génesis, la aplicación gráfica fue un papel predominante en exploración y resolución; la aplicación de Table (tabla numérica de la gráfica), la cual tuvo un rol central; la aplicación simbólica HOME tuvo un rol mínimo. En la segunda fase, aunque la aplicación gráfica sigue como la herramienta predominante, HOME es más usado en el cálculo de valores exactos para la función y su derivada, para calcular límites, o para verificar algunos resultados gráficos. En la tercera fase ocurre una inversión; la aplicación simbólica se convirtió en la herramienta predominante en el proceso de resolución, en conjunto con trabajo de lápiz y papel, mientras que la aplicación gráfica se convirtió principalmente en una herramienta heurística, para anticipación y control.

El enfoque instrumental, es una herramienta que ha sido reconocida para el análisis de procesos de enseñanza y aprendizaje en un ambiente CAS (Artigue, 2002; Lagrange, 2003). De acuerdo a Monaghan (2007), éste enfoque abarca elementos de ergonomía cognitiva (Vérillon y Rabardel, 1995) y la teoría antropológica Didáctica (Chevallard, 1999). En la teoría antropológica didáctica, Chevallard (1999), se observa qué objetos matemáticos emergen en un sistema de prácticas que son caracterizadas por cuatro componentes: **Tarea**, en donde el objeto se encuentra; **Técnica**, utilizado para resolver la tarea; **Tecnología**, el discurso que explica y justifica la técnica; y **Teoría**, el discurso que proporciona la base estructural para la tecnología. Artigue (2002), redujo los cuatro componentes de Chevallard a tres: *tarea*, *tecnología* y *teoría*. El componente de teoría de Artigue combina los componentes de tecnología y teoría de Chevallard. Dentro de este marco teórico (Tarea - Técnica - Teoría) una técnica es el conjunto complejo de razonamiento y trabajo de rutina, tiene valores pragmáticos y epistémicos (Artigue, 2002). Su rol pragmático de debe a que realiza una tarea, con respecto a su valor epistémico, Lagrange argumenta que:

“La Técnica tiene un rol epistémico al contribuir al entendimiento del objeto que trata, particularmente durante su elaboración. También sirve como un objeto para la reflexión conceptual al ser comparado con otras técnicas y cuando se discute con respecto a su consistencia” (Lagrange, 2003).

De acuerdo a Lagrange (2005), la consistencia y efectividad de la técnica son discutidas en el nivel teórico. El valor epistémico de la técnica, es importante en el estudio de las reflexiones conceptuales de los alumnos dentro del ambiente CAS.

De acuerdo a lo anterior, Ibarra (2015) en su investigación para la conceptualización del Cálculo Diferencial, diseña siete Actividades de aprendizaje con una estructura didáctica basadas en el esquema de tarea-técnica-tecnología (TTT). Así mismo, parte de la derivada como función y sus diferentes representaciones, de manera que plasma dicha relación en la figura 1 y con ello obtiene siete temas principales:

1. Diferencias
2. Pendientes
3. Pendiente como función
4. Límites
5. Líneas secantes y tangentes
6. Función derivada
7. Aplicaciones

En la figura 1, Ibarra (2015) muestra la relación existente entre las diferentes representaciones de la derivada, poniendo en el centro la forma más convencional.

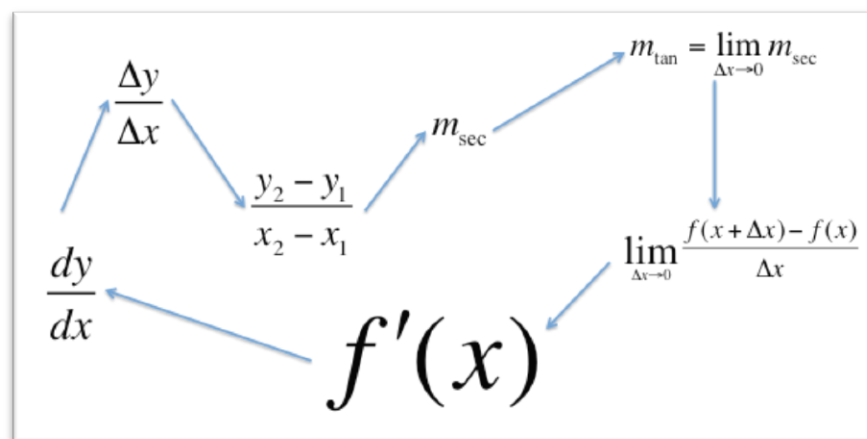


Figura 1: Representaciones de la derivada

En el diseño de actividades educativas la pregunta clave es, ¿cuáles problemas significativos fomentan el desarrollo cognitivo de acuerdo a la trayectoria de aprendizaje hipotético? Tres principios de diseño guían el proceso: reinención guiada, fenomenología didáctica y modelos de mediación (Drijvers, 2003); también sugirió que se debe poner más atención al rol de la parte tradicional (lápiz y papel) y las discusiones de clase.

Es así que Ibarra (2015), diseña las actividades de tal manera que las preguntas teóricas y técnicas son centrales, tal que, el alumno tiene la oportunidad de reflexionar sobre los aspectos técnicos y teóricos en un ambiente tradicional (lápiz y papel), un ambiente CAS y además una sección de simbolización.

Basándonos en todo lo antes mencionado, en este trabajo de tesis se tiene como propósito demostrar la funcionalidad de las primeras cuatro actividades de aprendizaje diseñadas por Ibarra (2015), las cuales involucran el desarrollo del concepto de Límite con mediación de la calculadora Ti-Nspire CX CAS y una metodología de trabajo cooperativo y colaborativo.

1.1.1. Concepto de Límite

Han sido tres siglos necesarios para llegar a la definición de Límite desde que John Wallis formulara la que es aceptada como la primera en el siglo XVII. Habría que esperar hasta el año 1821 cuando apareció el texto *Cours D'analyse Algébrique*, escrito por Louis Cauchy; en su obra definía el límite de una función de la siguiente forma:

“Cuando los valores atribuidos sucesivamente a una variable se aproximan indefinidamente a un valor fijo para llegar por último a diferir de este valor en una cantidad tan pequeña como se desee, entonces dicho valor fijo recibe el nombre de límite de todos los demás valores” (Cauchy, 1821).

Después de varios años de investigación, fue hasta 1851 cuando el alemán Karl Weierstrass haciendo un estudio riguroso llega a la definición formal de Límite. En matemáticas, el límite es un concepto que describe la tendencia de una sucesión o una función, a medida que los parámetros de esa sucesión o función se acercan a determinado valor. En cálculo este concepto se utiliza para definir los conceptos fundamentales de convergencia, continuidad, derivación, integración, entre otros.

Para esta investigación es importante abordar el concepto formal de Límite, por lo cual a continuación se presenta. Cabe mencionar que ésta también es conocida como definición ϵ - δ (épsilon-delta):

El $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$, si para todo $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$, tal que si $0 < |x - a| < \delta$, entonces $|f(x) - L| < \epsilon$

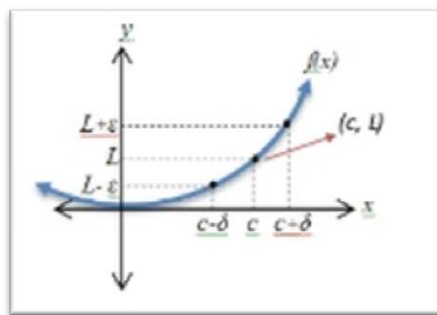


Figura 2: Gráfica de la definición formal de Límite

Dicho de otra forma $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$, si para cualquier número positivo elegido ε , por pequeño que sea, existe un número positivo δ tal que, siempre $0 < |x - a| < \delta$, entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$.

La definición propone que para $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ existe un número $\delta > 0$ lo suficientemente pequeño para un número $\varepsilon > 0$ dado, tal que, todo x en el intervalo $(a - \delta, a + \delta)$ con excepción posiblemente del mismo a , tendrá su imagen $f(x)$ en el intervalo $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$. Se observa que para un $\delta_1 < \delta$ para el mismo ε , la imagen de un valor x en el intervalo $(a - \delta_1, a + \delta_1)$ estará dentro del intervalo $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$ lo cual sólo cambia si se toma un valor de ε distinto.

1.2. Justificación

Matemáticas se considera una ciencia fundamental para la vida diaria y es una disciplina acumulativa, es decir, la información funciona como bloques de construcción. No se pueden “crear” nuevos conceptos o conocimientos sin tener los “cimientos” (Ibarra, 2015). Tal que, los cimientos básicos se establecen en la primaria al ver los conceptos de sumas, restas, multiplicación y división. Los siguientes bloques típicamente involucran fórmulas y operaciones, se deben dominar estos temas antes de seguir a los siguientes. En los niveles de secundaria y bachillerato comienzan los problemas ya que los alumnos avanzan en los cursos sin tener bien definidos los conceptos y construyen su conocimiento sobre un cimiento débil.

En la Facultad de Ingeniería Química de la Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, se introducen los temas de Cálculo Diferencial e Integral en el primer año de la carrera como parte del programa de licenciatura ingenieril, tales temas son precedidos por el concepto de Límite, el cual es parte fundamental en el concepto del Cálculo Diferencial. En la mayoría de los casos, el alumno no tiene los conocimientos y fundamentos

algebraicos para iniciar el trabajo con el concepto de Límite y por consecuencia con el Cálculo Diferencial, es decir, no logra adquirir los conceptos fundamentales de derivación e integración y por ende, no tiene un aprendizaje adecuado de los conceptos. Al carecer de estos fundamentos, el alumno se va rezagando en los nuevos conocimientos y debe recurrir al aprendizaje con “métodos cortos”; que algunas veces no tienen una base conceptual y se apoyan en la repetición de procedimientos.

Es decir, si el alumno no aprende el concepto de Límite tampoco entenderá el de Cálculo Diferencial y a su vez el Integral, al encontrarse en este dilema, el alumno no construye el aprendizaje de los conceptos del Cálculo con lo que no avanza en su conocimiento matemático y por consecuencia tampoco en el aprendizaje de las diferentes materias de la carrera de Ingeniería Química.

Tomando en cuenta lo anterior, es de gran importancia el aprendizaje del Límite por parte de los estudiantes que quieren hacer una carrera en Ingeniería Química. Las actividades de aprendizaje que se aplicaron en este Proyecto de Investigación, tienen el objetivo de llegar a la conceptualización del Límite por medio de la interacción con la calculadora Ti-Nspire CX CAS.

En el siguiente subtema se describen algunas de las dificultades de aprendizaje más comunes en el desarrollo del concepto de Límite, las cuales están analizadas por expertos en la enseñanza de las matemáticas.

1.2.1. Dificultades de aprendizaje del concepto de Límite

En la construcción del concepto de límite nos enfrentamos a dificultades de aprendizaje que tienen que ver con la complejidad del concepto en sí y su relación con la forma como se enseña.

De acuerdo a Hitt y Cortés (2005), algunas de las dificultades que tienen los estudiantes se relacionan directamente con la manera como se enseña el tema de Límites. Ello podría hacer pensar, que el problema quedaría resuelto escribiendo unas buenas notas e instruyendo al profesor de matemáticas adecuadamente. Sin embargo, la historia de las matemáticas muestra que el concepto es muy complejo y que probablemente los obstáculos que tuvieron algunos matemáticos para entenderlo y formalizarlo, aparecerán en el aula de clases. Es así que el estudio hecho por Hitt y Cortés (2005), se basa en entrevistar a varios alumnos de ingeniería que fueron seleccionados por su alto desempeño académico y que les aplicaron ejercicios que relacionan el concepto de Límite. En su estudio estos autores observan, que los estudiantes tienen ideas intuitivas sobre el infinito y que de alguna manera obstaculizan la adquisición de dicho concepto. Con base en lo anterior ellos concluyen:

“Podemos observar que se tiene un doble problema, uno tiene que ver directamente con la complejidad del concepto, y el otro tiene que ver con los obstáculos que el mismo profesor de matemáticas promueve en sus estudiantes” (Hitt y Cortés, 2005).

Dicho de otra manera, ellos argumentan que algunos profesores generan ideas intuitivas que a su vez, éstas provocan un conflicto cognitivo y como resultado, impiden la construcción del concepto.

1.3. Planteamiento del problema

En la enseñanza tradicional de la asignatura de cálculo diferencial se pone más énfasis en la parte operacional, lo cual no es suficiente para el entendimiento de los conceptos involucrados. Éste método de enseñanza se lleva a cabo bajo el siguiente esquema:

1. Se presenta el concepto teórico
2. Se hacen unos ejemplos en clase
3. Se deja tarea sobre el tema
4. Se evalúa el tema con un examen

Estudios han demostrado que por cuestiones de tiempo, el modelo de enseñanza anterior se considera el más práctico, pero dichos modelos resultan pasivos y no cumplen con el objetivo de la enseñanza de las Matemáticas, es decir, no existe el tiempo suficiente para asegurar el dominio del tema de cada alumno.

Es por ello, que Ibarra (2015) diseña actividades de aprendizaje para que a través de su aplicación, se logre que el estudiante tenga un mejor acercamiento a lo conceptual.

Por lo anteriormente citado el problema de investigación que se aborda en este trabajo de investigación es:

Evidenciar los razonamientos de los estudiantes cuando se aplican actividades de Aprendizaje, diseñadas bajo el esquema de Tarea–Técnica–Tecnología (TTT), para la conceptualización del Límite con la ayuda de la calculadora Ti- Nspire CX CAS.

Así, el trabajo de investigación se enfoca en el razonamiento que hacen los estudiantes al ir resolviendo las actividades de aprendizaje. A su vez, se analizan las evidencias generadas en las hojas de trabajo y las videograbaciones realizadas, para emitir conclusiones relativas a la construcción del concepto de Límite y verificar el impacto que presentan éstas en los estudiantes.

1.4. Objetivos

1.4.1. Objetivo General

El Objetivo General que se propone en este trabajo de tesis, es que por medio de la aplicación de actividades de Aprendizaje las cuales tienen una estructura didáctica, los estudiantes aprendan de manera significativa el concepto de Límite e identifiquen su representación teórica y gráfica, apoyados de la calculadora Ti- Nspire CX CAS.

1.4.2. Objetivos Específicos

1. Aplicar actividades de aprendizaje que involucren el concepto de Límite a estudiantes de primer año de la carrera de Ingeniería Química, en una experimentación piloto y otra formal.
2. Revisar las evidencias generadas en las experimentaciones, desde un enfoque de viabilidad del entendimiento conceptual del Límite por parte de los estudiantes.
3. Reestructurar las actividades de aprendizaje con base en la evidencia obtenida en la experimentación piloto, para posteriormente aplicarlas en una experimentación formal.
4. Analizar los resultados obtenidos de la experimentación formal, para hacer una propuesta final de las Actividades de Aprendizaje que involucren el concepto de Límite.
5. Evidenciar por medio de los resultados obtenidos el aprendizaje del concepto de Límite por los estudiantes.

1.5. Hipótesis

“La aplicación de actividades de aprendizaje en un ambiente CAS, guían a los alumnos en la construcción de conocimientos, y a través del descubrimiento, y entendimiento de otros fenómenos llegan a la conceptualización del Límite”

1.6. Preguntas de Investigación

Con la finalidad de abordar el problema de investigación y alcanzar los objetivos antes mencionados, se plantean las siguientes preguntas de investigación:

1. ¿Cómo llega el estudiante a través de sus razonamientos y la manipulación de la calculadora Ti-Nspire CX CAS, a construir el concepto de Límite?
2. ¿Qué habilidades se promueven en el estudiante durante la aplicación de las actividades utilizando la calculadora Ti-Nspire CX CAS?
3. ¿Qué estrategias aplican los estudiantes para dar respuesta a las actividades?
4. ¿A qué dificultades se enfrentan los estudiantes al trabajar por primera vez con la calculadora?

CAPÍTULO II

MARCO TEÓRICO

El aprendizaje de las matemáticas con herramientas, desde un nivel básico hasta un nivel avanzado, es más sencillo que de una manera abstracta; es una forma perceptivo-motor del aprendizaje, ya que se basa en las acciones, percepciones y reacciones recibidas debido a la retroalimentación en el uso de herramientas (Antinucci, 2001).

2.1 Teoría de registros de representación semiótica

2.1.1 Registro de Representaciones como recurso de aprendizaje

El aprendizaje de las matemáticas es hoy en día un campo de estudio primordial, ya que es indispensable el análisis de actividades cognitivas fundamentales como lo son la conceptualización, el razonamiento, resolución de problemas y la comprensión de textos. Es por ello, que es necesaria la utilización de varios sistemas de expresión y de representación distinta a los del lenguaje natural o de las imágenes.

De acuerdo a Duval (1995), existen dos tipos de representaciones:

- **Representaciones mentales:** son el conjunto de imágenes y concepciones que un individuo tiene sobre un objeto, una situación etc.
- **Representaciones semióticas:** el medio del cual dispone una persona para exteriorizar sus representaciones mentales; es decir, para hacerlas visibles para otros. En matemáticas, las representaciones semióticas son indispensables para fines de comunicación y para el desarrollo de una actividad matemática. Este tipo de representación presupone la consideración de sistemas semióticos diferentes y una operación cognitiva de conversión de las representaciones de un sistema semiótico a otro.

2.1.2 La semiótica y la noética

En un marco más amplio del pensamiento, en el uso de artefactos matemáticos se da la semiótica que se deriva de la raíz griega semeîon (signo) y sema (señal), se dice que ésta se ocupa del estudio de los signos. Duval (1999), habla de la relación de ésta con las representaciones, escribiendo que:

“Las representaciones semióticas, es decir, aquellas producciones constituidas por el empleo de signos (enunciado en lenguaje natural, fórmula algebraica, gráfico, figura geométrica...) no parecen ser más que el

medio del cual dispone un individuo para exteriorizar sus representaciones mentales; es decir, para hacerlas visibles o accesibles a los otros. Las representaciones semióticas estarían, pues, subordinadas por entero a las representaciones mentales y no cumplirían más que funciones de comunicación”

La especificidad de las representaciones semióticas consiste en que son relativas a un sistema particular de signos: el lenguaje, la escritura algebraica o los gráficos cartesianos; y en que pueden ser convertidas en representaciones “equivalentes” en otro sistema semiótico, pero pudiendo tomar significados diferentes para el sujeto que las utiliza.

Por lo anterior, el trabajo de Duval (1988) nos explica que la dificultad del paso de la representación gráfica a una ecuación, tiene que ver con el desarrollo de habilidades para distinguir las variables visuales que entran en juego en la resolución de un ejercicio como el de pasar de la gráfica de una recta a la ecuación.

Sin embargo, este autor también menciona que las representaciones mentales cubren al conjunto de imágenes globales, a las concepciones que un individuo puede tener sobre un objeto, sobre una situación y sobre lo que está asociado (Duval, 1995). De este modo se afirma que las representaciones son esenciales para la actividad cognitiva del pensamiento.

Por otra parte, la **noética** es considerada como la aprehensión conceptual de un objeto, es decir el entendimiento de los distintos conceptos. Tendremos que pensar en “algo” que ayude a interiorizar el objeto; esta operación descansará en una representación que, parece ser ese “algo” que facilite la interiorización de tal objeto.

La adquisición conceptual de un objeto matemático se basa en dos de sus características “fuertes” (Duval, 1993):

1. El uso de más registros de representación semiótica.
2. La creación y el desarrollo de sistemas semióticos nuevos, símbolo de progreso del conocimiento.

Estas consideraciones muestran la interdependencia estrecha entre noética y semiótica, cómo se pasa de una a otra: por lo que no sólo no existe noética sin semiótica, sino que la semiótica se adopta como característica necesaria para garantizar el primer paso hacia la noética. Con lo anterior, se concluye que no puede haber una sin la otra; es decir, no puede haber aprensión conceptual de un objeto sin algún representante de éste.

Es así, que uno de los objetivos de este trabajo, consiste precisamente en probar que es posible a través del uso de la calculadora simbólica Ti-Nspire CX CAS y de las representaciones gráficas generadas por ella, iniciar la comprensión conceptual de los

objetos matemáticos involucrados en las actividades, interactuando con los diferentes tipos de representaciones.

Las nociones de esquema y de representaciones internas y externas, no son de reciente creación, sin embargo, posiblemente por el desarrollo tecnológico aumentó el uso de representaciones gráficas y de figuras, esas nociones se empezaron nuevamente a analizar y a relacionar con aspectos teóricos actuales.

Desde una perspectiva teórica, donde la tecnología no queda excluida pero tampoco es central, Duval (1995) señala que:

“... estamos entonces en presencia de lo que se podría llamar la paradoja cognitiva del pensamiento matemático: por un lado, la aprehensión de los objetos matemáticos no puede ser otra cosa que una aprehensión conceptual y, por otro lado, solamente por medio de las representaciones semióticas es posible una actividad sobre los objetos matemáticos”

Duval (1995) establece que cada representación es parcial con respecto a lo que representa, debemos considerar como absolutamente necesario la interacción entre diferentes representaciones del objeto matemático para la construcción del concepto, no bastando con trabajar las actividades dentro de un sólo sistema de representación, sino también realizar las tareas de conversión de una representación a otra.

Las investigaciones en educación matemática señalan que en general el sistema algebraico es el preferido por los profesores de matemáticas en su práctica docente. Entonces, de acuerdo a la teoría sobre la importancia del uso de diferentes representaciones en la enseñanza de las matemáticas, lo que debemos hacer es introducir los conceptos matemáticos a través de actividades que propicien el trabajo con diferentes representaciones. Cuando el estudiante manipula la calculadora Ti-Nspire CX CAS, éste realizará una representación gráfica; la comprensión de las relaciones existentes entre la representación mental (al manipular la calculadora) y la representación gráfica (externa) como resultado de esta manipulación, juega un papel en la cognición.

2.1.3 Representaciones semióticas, transformaciones intencionales y aprendizaje

A pesar del parentesco, las representaciones computacionales y las representaciones semióticas no tienen la misma naturaleza. Esta diferencia se basa en la existencia de dos tipos de transformaciones:

- **Transformaciones cuasi-instantáneas:** son las que se efectúan incluso antes de haber sido observados y producen las informaciones y las significaciones de las cuales un sujeto toma inmediatamente conciencia.
- **Transformaciones intencionales:** son aquellas que para ser efectuadas toman al menos el tiempo de un control consiente y que se dirigen exclusivamente a los datos previamente observados.

Toda actividad cognitiva se basa en la complementariedad de estos dos tipos de transformaciones. La función de las transformaciones instantáneas es suministrar a la “percepción inmediata” de la conciencia unidades informacionales más y más ricas, para poder aspirar a objetos más complejos o más generales.

2.1.4 Formación de representaciones semióticas

Los actos más importantes de formación son, según los registros, la designación nominal de objetos, la reproducción de su contorno percibido, la codificación de relaciones o de algunas propiedades de un movimiento. Esta articulación, depende de las posibilidades de estructuración propia a cada sistema semiótico, por tanto, es importante que la formación de representaciones respete las reglas propias al sistema empleado.

Las reglas de conformidad son las que definen un sistema de representación y, en consecuencia los tipos de unidades constitutivas de todas las representaciones posibles en un registro. Se refieren esencialmente a:

- La determinación de unidades elementales: símbolos, vocabulario, etc.
- Las combinaciones admisibles de unidades elementales para formar unidades de nivel superior: reglas de formación de un sistema formal, gramática de las lenguas naturales, etc.
- Las condiciones para que una representación de orden superior sea una producción pertinente y completa: reglas canónicas propias de un género literario o a un tipo de producción de registro.

2.2 Aprendizaje Cooperativo y Colaborativo

Se denomina aprendizaje al proceso de adquisición de conocimientos, habilidades, valores y actitudes, posibilitado mediante el estudio, la enseñanza o la experiencia. Dicho proceso puede ser entendido a partir de diversas posturas, lo que implica que existen diferentes teorías vinculadas al hecho de aprender. La psicología constructivista, por ejemplo, describe el aprendizaje de acuerdo a los cambios que pueden observarse en la conducta de un sujeto.

Los Constructivistas tienen diferentes opiniones sobre cómo influye el aprendizaje cooperativo en la adquisición de conocimiento. Sin embargo, en general se cree que la

negociación social y las interacciones entre alumnos son elementos cruciales en la adquisición de conocimientos (Greeno, 1996).

El aprendizaje cooperativo y colaborativo buscan que el alumno interactúe con los pares y a partir de esa interacción aumente su aprendizaje, es fundamental mencionar que para que esto se logre, los profesores juegan un rol imprescindible ya que se debe llevar a los alumnos a ser responsables de su propio aprendizaje, en otras palabras, las actividades que se planean para que la interacción ocurra deben ser muy bien diseñadas ya que los alumnos por el hecho de ser jóvenes podrían intentar zafarse de un rol o de su parte del trabajo. Las actividades que buscan el aprendizaje cooperativo y colaborativo deben ser planificadas de forma rigurosa y anticipada.

El aprendizaje cooperativo es el corazón del aprendizaje basado en problemas. Se relaciona con el aprendizaje colaborativo, que hace hincapié en el "aprendizaje natural" que se produce como un efecto de la comunidad en la que los estudiantes trabajan juntos en grupos no estructurados y crean su propia situación de aprendizaje Johnson (1998).

De acuerdo a Panitz (1997) se proponen las siguientes definiciones básicas para los términos de aprendizaje cooperativo y colaborativo.

- *La colaboración* es una filosofía de interacción y estilo de vida personal donde individuos son responsables por sus acciones, incluyendo el aprendizaje, y deben ser conscientes de las habilidades y contribuciones de sus compañeros.
- *La cooperación* es una estructura de interacción diseñada para facilitar la realización de un fin específico, producto o meta, a través de personas que trabajan juntos en grupos.

Panitz (1996), también describe la diferencia entre estos paradigmas en términos del comportamiento que se observa en una clase. Para el modelo cooperativo, el maestro mantiene el control de la clase, aunque los alumnos trabajan en grupos para realizar una meta; al contrario del modelo colaborativo, en donde el grupo asume casi toda la responsabilidad para responder una pregunta. La colaboración es una filosofía de interacción y estilo de vida personal, considerando que la cooperación es una estructura de interacción diseñada para facilitar la realización de un producto final o meta.

El modelo cooperativo se caracteriza por actividades donde se establecen objetivos del grupo, cada individuo es responsable por su trabajo, todos los miembros tienen la misma oportunidad para tener éxito, hay competencia entre los equipos, cada miembro tiene una tarea a realizar, y la instrucción se adapta a la necesidad del individuo (Brody, 1995). El aprendizaje cooperativo ha sido descrito como trabajo en grupo altamente estructurado (Davidson y Worsham, 1992), el cual proporciona métodos de instrucción que apoya el

desarrollo de habilidades sociales y el logro de objetivos (Presseisen, 1992) que dependen de influencias contextuales y cómo la gente responde a dichas influencias (Jacobs, 1997).

En el modelo colaborativo los grupos asumirán la responsabilidad casi total para lograr la meta, los estudiantes determinan si tienen suficiente información para llegar a ella. Si no, se identifican otras fuentes y el trabajo de obtener información extra se distribuye entre los miembros del grupo. Ellos son responsables del alcance y los resultados de su proceso de aprendizaje, definen sus propias necesidades y en cambio se hacen responsables para identificar lo que creen que deben aprender y cómo lo van a aprender.

2.2.1 Teoría del aprendizaje Cooperativo

En contraste con el aprendizaje competitivo e individualista, los estudiantes pueden trabajar juntos en forma cooperativa para lograr objetivos de aprendizaje compartido. Cada estudiante logra su meta si y sólo si los otros miembros del grupo logran la suya. Los estudiantes trabajan en grupos pequeños para asegurarse de que todos los miembros del grupo logren un criterio prefijado.

Es así que el poder del aprendizaje cooperativo se encuentra en la interrelación entre su teoría, investigación y práctica. La teoría es practicar, es decir, si la teoría es válida y se identifican las condiciones para la aplicación efectiva, se desarrollan procedimientos prácticos y una mejora continua. Sin una teoría adecuada la práctica se estanca.

La teoría de la interdependencia social considera la cooperación como el resultado de la interdependencia positiva entre un objetivo en común (Cohen, 1994). Designando un rol a cada integrante dentro del grupo lo cual genera un efecto de asignar competencia, aumenta el autoestima en los aprendices de bajo nivel y donde cada integrante debe contribuir (Johnson *et al.*, 1990). También se puede aumentar al estructurar los materiales, por ejemplo, un lápiz o una calculadora por equipo (Slavin, 1991).

Johnson, Johnson y Holubec (1991), establecieron una definición de aprendizaje cooperativo en donde identificaron cinco elementos principales necesarios para considerar una actividad como cooperativa. Las cuales son:

1. *Interdependencia Positiva*: Disponibilidad de ayudar en el grupo, es decir, estar entrelazados para conseguir un objetivo, que consiste en que cada miembro del grupo cumpla con sus tareas.
2. *Responsabilidad Individual*: Cada miembro se considera individualmente responsable de alcanzar la meta del colectivo, la participación debe ser equivalente entre todos para que así no exista el individualismo.
3. *Interacción simultánea*: Los grupos trabajan “cara a cara” con una relación estrecha y a corta distancia. Por eso y a fin de garantizar una buena interacción comunicativa en el grupo, intercambio de retroalimentación, estímulos creativos y control autorregulador del

comportamiento, es fundamental que el grupo trabaje en un ambiente psicológico de disponibilidad y mutuo apoyo.

4. *Habilidades Interpersonales:* Los grupos no pueden funcionar eficazmente si los alumnos no tienen o usan las habilidades sociales necesarias. Dichas pueden ser pero no limitadas a liderazgo, toma de decisiones, comunicación y el manejo de conflictos.
5. *Procesamiento del Grupo:* Los grupos necesitan el tiempo suficiente para discutir cómo van a lograr sus objetivos y cómo mantener relaciones de trabajo eficaces entre los integrantes.

2.2.2 Aprendizaje Colaborativo

El aprendizaje colaborativo generalmente se considera menos estructurado y los alumnos tienen más libertad en el alcance y los resultados del proceso de aprendizaje. Ellos definen sus propias necesidades de aprendizaje y en cambio se hacen responsables para identificar lo que creen que deben aprender y cómo lo van a aprender, al contrario del aprendizaje cooperativo en donde el maestro tiene la responsabilidad de determinar lo que se aprenderá (Caplow y Kardash, 1995).

Como ya se ha mencionado, se considera que la tecnología juega un papel fundamental en la configuración del proceso de aprendizaje individual y, por supuesto, en la manera en que se genera el conocimiento colectivo. Aprender utilizando métodos colaborativos nos parece un aspecto muy importante y necesario para el desarrollo de las competencias requeridas en la sociedad del conocimiento. (Mercer; 2001).

Para que se produzca un aprendizaje colaborativo, Mercer (2001) considera que los participantes tienen que intentar establecer las bases de un conocimiento común y contextualizado en el entorno físico, es decir, se hace aprovechando cualquier fuente de información que se considere pertinente. Estos recursos contextuales se pueden encontrar en el entorno físico, en la experiencia y la relación que los interlocutores ya comparten, en las tareas u objetivos que comparten los participantes y en la experiencia que tienen las particulares conversaciones similares (Mercer, 2001). Para que haya un intercambio debe haber experiencias previas compartidas, estrategias para obtener información, maneras de argumentar las ideas y propuestas, formas de evaluar las aportaciones de los demás, repetir y reformular lo que dicen los otros.

De acuerdo a Orr (1998) el aprendizaje colaborativo está basado en los siguientes principios:

1. Trabajando juntos resulta en un mejor entendimiento a comparación de haber trabajado independientemente.
2. Las interacciones habladas y escritas contribuyen a una mejor comprensión.
3. Existe la oportunidad de ser consciente a través de experiencias del aula, de las relaciones entre interacciones sociales y de una mejor comprensión.

4. Algunos elementos de dicha comprensión son idiosincrásicos e impredecibles.
5. La participación es voluntaria.

2.2.3 Diferencias y similitudes entre aprendizaje cooperativo y colaborativo

De acuerdo a Brufee (1995), se destacan tres puntos fundamentales en que el aprendizaje cooperativo y colaborativo se diferencian.

- El primero es que el aprendizaje cooperativo tiene como fin la construcción de nuevas ideas con la contribución de pares, lo cual favorece especialmente a los estudiantes que tienen más dificultades y enriquece a aquellos más aventajados. Por su lado, el aprendizaje colaborativo tiene como objetivo que cada estudiante desarrolle nuevas ideas y cree en conjunto con los pares de trabajo, este tipo de metodología busca que cada alumno haga su mejor aporte a un fin común, lo que no necesariamente abarcará a aquellos estudiantes con dificultades de aprendizaje.
- El segundo es la responsabilidad que tiene el profesor, en el aprendizaje cooperativo es el profesor quien propone un problema y determina el rol de cada estudiante para la solución de este, por lo que cada alumno se responsabiliza de una parte de la solución de la tarea. En el aprendizaje colaborativo el profesor propone la actividad y se transforma en un guía, es decir acompaña a los alumnos en su trabajo, pero son ellos mismos los responsables de su resultado. Él no se encarga de determinar los roles o de predeterminedar los pasos del proceso.
- Como tercero, tenemos el enfoque colaborativo el cual requiere de una preparación más avanzada para trabajar con grupos de estudiantes, mientras el aprendizaje cooperativo es una metodología que se podría utilizar en grupos de alumnos heterogéneo en sus capacidades.

2.3 Aprendizaje Mediado

“Mediación es el uso del lenguaje u otro signo o instrumento, que intercede entre un estímulo y una respuesta asociativa tales como un símbolo, una fórmula, un nudo en el dedo, o una palabra, entre otros” (Waece, 2003).

El aprendizaje mediado representa la interacción, marcada por una serie de necesidades culturales, entre el alumno y su medio ambiente. Tiene como objetivo ofrecer al alumno las herramientas adecuadas para enriquecerse de los estímulos; que el alumno sea consciente de su desarrollo; la formación de una concepción del mundo propia en la solución de problemas relacionados con la vida práctica; desarrollar una actitud autónoma, activa y

autodidacta, la cual garantice a los alumnos la adquisición de conocimientos y hábitos que pueda aplicar no sólo en un contexto escolar, sino también en su vida diaria.

La mediación también hace hincapié en el entendimiento comunal del conocimiento, no solo en el intercambio colaborativo de ideas, si no en el acomodo y la categorización de las mismas. El mediador ayuda al aprendiz a “estructurar, filtrar y programar” estímulos y básicamente influye el potencial de transferencia de conocimientos que ocurre en el pensamiento del alumno (Perkins y Salomon, 1988). La mediación supone que la instrucción esta más enfocada en ir más allá de la información dada, al hacer la conexión con el pasado y la anticipación del futuro que con el dominio de los datos del presente.

El aprendizaje mediado es considerado como una concepción cognitiva de la inteligencia humana y el aprendizaje (Gardner 1985). Feuerstein (1980) y Vygotsky (1986), desarrollaron sus teorías bajo la influencia de Jean Piaget, uno de los grandes dentro de la psicología del desarrollo cognitivo. Sin embargo, ambos estaban insatisfechos con ciertos aspectos del enfoque de Piaget. Para Vygotsky hubo una inquietud sobre el individualismo epistemológico en la teoría de Piaget y el descuido de la mediación social. Para Feuerstein, el desacuerdo fue con los mecanismos concretos del aprendizaje por la mediación de otro humano.

El enfoque del aprendizaje mediado sugiere un nuevo paradigma para la educación, en donde la inteligencia es redefinida y formulada. De acuerdo a Feuerstein (1986), la mediación se produce cuando una persona con conocimientos e intenciones, media entre el mundo y otro ser humano, creando en el individuo la propensión al cambio.

Es así como el proceso de mediación, centrado en la modificación cognitiva afecta la estructura mental del estudiante permitiéndole adquirir nuevos comportamientos, vistos estos como estrategias de aprendizaje, habilidades y actitudes Roman y Diez (1999).

Teóricamente, y en términos de su aplicación en clase, las investigaciones de Vygotsky (1986) y Feuerstein (1980), subrayan la importancia de la socialización de la inteligencia y su desarrollo. Estos autores han influido de manera significativa en los medios de enseñanza alrededor del mundo.

En los siguientes subtemas abordaremos por separado la relación de Vygotsky (1986) y Feuerstein (1980) con el aprendizaje mediado.

2.3.1 Vygotsky y el Aprendizaje Mediado

“La enseñanza es buena sólo cuando es previa al desarrollo”, Lev Vigotsky.

El concepto de mediador y de aprendizaje mediado tiene su origen en la *Teoría Sociocultural de Vygotsky* (1986), la cual realiza a través de la llamada Zona de Desarrollo

Próximo (ZDP). La ZDP se define como la diferencia entre el nivel de desarrollo real del niño a partir de la resolución independiente de problemas y el nivel más elevado que puede obtener cuando se le proporciona apoyo de un adulto o en colaboración con iguales más avanzados (desarrollo potencial). El concepto fue introducido por Vygotsky (1978) para atender dos problemas de psicología educativa y del desarrollo:

1. Cómo evaluar correctamente las habilidades intelectuales del niño.
2. Cómo evaluar la eficacia de las prácticas de enseñanza.

Un niño con una ZDP más amplia tiene una mejor oportunidad de éxito en el aprendizaje en la escuela. El aprendizaje dentro de la ZDP es asociado con una interacción entre conceptos espontáneos del niño y los conceptos sistemáticos y científicos introducidos por el maestro.

Vygotsky (1986), también propuso que los procesos mentales superiores pueden ser considerados como funciones de actividades mediadas. Él sugirió tres clases principales de mediadores:

1. Herramientas físicas (mediadores simples, como los recursos materiales).
2. Herramientas psicológicas (mediadores más sofisticados, siendo el lenguaje el signo principal).
3. El sujeto humano, éste actúa sobre la realidad para adaptarse a ella transformándola y transformándose a sí mismo a través de unos instrumentos psicológicos.

Desde esta teoría, Vygotsky (1978) sugiere dos posibilidades para la mediación a través de otro individuo. La primera se refiere a la acción conjunta (interacción) del estudiante y de los que le rodean, que será el factor que hará posible que el mediador externo llegue a convertirse en procesos internos. En otras palabras, toda función psicológica aparecerá dos veces: primero entre las persona, interpsicológica, y después en el interior propio del estudiante, intrapsicológica. Esta doble formación supone que el aprendizaje se logra por la internalización de los instrumentos externos, los cuales se transforman en procesos de desarrollo que hacen posible la reestructuración mental, Vygotsky (1978).

La segunda se enfoca en el rol del otro individuo como un mediador de significado, es decir, el adulto (profesor) actúa como mediador de los aprendizajes del estudiante optimizando la evolución de sus capacidades. El significado de la actividad para una persona es formulado por la mediación a través de otro individuo. Esto, ya que el aprendizaje se realiza por medio de la socialización, sobre todo entre iguales. Esta socialización contribuye de manera decisiva a la incorporación de valores, actitudes, competencias y formas de percibir el mundo.

2.3.2 Feuerstein y el Aprendizaje Mediado

“La humanidad solo existe porque hubo un proceso de mediación a lo largo de su historia”, Reuven Feuerstein.

El Modelo del Aprendizaje Mediado, surge años más tarde, el cual se sustenta en la *Teoría de la Modificabilidad Cognitiva Estructural* de Feurstein (1980); es un planteamiento altamente práctico con características similares a la teoría Vigotskyana, aun cuando Feurstein no declare esta cercanía, pero si acepta influencias de Piaget.

La Modificabilidad Cognitiva del niño o adolescente implica la capacidad de mejorar su inteligencia por medio de la mediación oportuna de un adulto. Feurstein (1980) define el aprendizaje mediado como la forma en que los estímulos emitidos por el ambiente son transformados por un agente mediador (padre, madre, hermano, profesor u otro). El aspecto central de mediación es el cambio que cuantitativamente influye en el aprendiz y le permite desarrollar prerrequisitos cognitivos para el aprendizaje por su cuenta a partir de estímulos directos (Kozzulin, 1991). El papel del mediador haciendo uso de sus intenciones, cultura y emociones, consiste en seleccionar y organizar los estímulos más apropiados para el estudiante, de manera que en futuras situaciones éste mismo logre identificar, clasificar y organizar los estímulos más relevantes que debe aprender; de acuerdo a este proceso se deduce la vital importancia que adquiere la figura del mediador.

Feurstein (1980) afirma que el rendimiento bajo en la escolaridad es producto del uso ineficaz de aquellas funciones que son los prerrequisitos para un funcionamiento cognitivo adecuado. Feurstein parte de la base de que el desarrollo cognitivo no es solamente el resultado del proceso de maduración del organismo ni de su proceso de interacción independiente autónoma, con el mundo de los objetos, más bien es el resultado combinado de la exposición directa al mundo y lo que llamamos experiencia de aprendizaje mediado.

El modelo de mediación del aprendizaje transforma el paradigma conductista en donde los comportamientos se producen independientemente del contexto a través de la confrontación directa con un estímulo (tres elementos: estímulo-organismo-respuesta). Feuerstein elabora su propio esquema de aprendizaje en el que introduce un nuevo elemento, donde el nuevo conocimiento se logra a través de un mediador (estímulo-mediador humano-organismo-mediador humano-respuesta). El mediador humano se interpone entre el estudiante (organismo) filtrando los estímulos que recibe y tratando de interpretarlos y valorarlos con él.

La experiencia de aprendizaje mediado (MLE) representa, desde la perspectiva educacional la interacción alumno-medio. Para que la mediación en esta interacción sea posible debe cubrir doce criterios principales (Feuerstein, 1990):

1. Intencionalidad y reciprocidad.

2. Trascendencia.
3. Significado.
4. Competencia.
5. Regulación y control de comportamiento.
6. Comportamiento compartido.
7. Diferenciación individual y psicológica.
8. Mediación de búsqueda de metas, planificación y logro de la meta.
9. Mediación para el desafío
10. Mediación del cambio: búsqueda por novedad y complejidad.
11. Mediación de la conciencia de un humano como una entidad que cambia.
12. Mediación del sentimiento de pertenencia.

Los primeros tres criterios se deben cubrir en cada aprendizaje que constituye la MLE, son universales y se encuentran en todas razas, grupos étnicos, y clases socio-económicas. Estos pueden resumirse en los siguientes conceptos:

1. *Intencionalidad y reciprocidad*: se refiere a los esfuerzos deliberados del mediador para cambiar la conciencia, la percepción, el procesamiento o la reacción del niño. La intencionalidad es inadecuada sin la reciprocidad, definida como la respuesta vocal, verbal, o no verbal al comportamiento del mediador. Por ejemplo, la intencionalidad y la reciprocidad son observadas cuando un adulto intencionalmente le ofrece un artículo a un niño o verbalmente enfoca la atención del niño y sin duda el niño responde. Este criterio es considerado crucial para el desarrollo de sentimientos de competencia y autodeterminación.
2. *Mediación de Significado*: se refiere a la respuesta del mediador que transmite el significado afectivo, motivacional, y orientado al valor poseído por el estímulo presentado. Esto puede ser expresado verbalmente al explicar el contexto presente, relacionándolo con otros eventos, haciendo hincapié a su importancia y valor, o no verbalmente por expresiones faciales, tono de voz, acciones repetitivas o rituales. De acuerdo a la teoría de la MLE, los niños que experimentan mediación de sentido van a conectar ágilmente significados futuros a nueva información en lugar de esperar pasivamente que el significado aparezca.
3. *Mediación de Trascendencia*: se refiere a las interacciones en donde el mediador proporciona las necesidades inmediatas y concretas de los niños e intenta llegar a metas adicionales que están más allá de la situación o actividad. En las interacciones de madre-hijo, la madre puede ir más allá de la experiencia específica al enseñar estrategias, reglas y principios, con el fin de generalizar otras situaciones. Por ejemplo, en una situación de juego, la madre podrá mediar las reglas y principios que dirigen un juego, y generalizarlas a otras situaciones. La mediación de trascendencia depende de los primeros dos criterios, intencionalidad y reciprocidad, y significado, a través de la combinación de los tres criterios se mejora el desarrollo de la modificabilidad cognitiva y aumenta el sistema de necesidad del individuo.

Los otros nueve no se deben considerar exhaustivos, pero se ven como la primera selección de cualidades que en una interacción pueden, pero no es necesario, aparecer en cada interacción para convertirla en una experiencia mediada.

De esta manera, en una asignatura determinada la mediación permitirá que un aprendiz desarrolle y ponga en práctica destrezas cognitivas como el representar, inducir, comparar o elaborar. A su vez, gestionará la evaluación de los aprendizajes logrados y de las formas que se siguieron para conseguirlos. Finalmente, modelará la administración de las propias emociones como herramientas para obtener un mayor éxito académico.

2.4 Aprendizaje Mediado con Tecnología

La teoría constructivista se enfoca en la construcción del conocimiento a través de actividades basadas en experiencias ricas en contexto. El constructivismo ofrece un nuevo paradigma para esta nueva era de información motivado por las nuevas tecnologías que han surgido en los últimos años. Con la llegada de estas tecnologías, los estudiantes no sólo tienen a su alcance el acceso a un mundo de información ilimitada de manera instantánea, sino que también se les ofrece la posibilidad de controlar ellos mismos la dirección de su propio aprendizaje. Cambiar el esquema tradicional del aula, donde el papel y el lápiz tienen el protagonismo principal, y establecer un nuevo estilo en el que se encuentren presentes las mismas herramientas pero añadiéndoles las aplicaciones de las nuevas tecnologías, aporta una nueva manera de aprender, que crea en los estudiantes una experiencia única para la construcción de su conocimiento.

2.4.1 Piaget y la educación mediada con tecnología

Piaget (1980), propone un modelo psicológico que genera teorías educativas de aprendizaje. Es a través de la interacción de los seres humanos con su entorno que los mismos son capaces de generar una estructura cognitiva y de conocimiento. El conocimiento es la conciencia de propiedades invariantes de las cosas (conocido por Piaget como abstracción empírica) y de las propiedades invariantes de acción (a través de la reflexión sobre la abstracción). “Todo conocimiento con respecto a la realidad, resulta de acciones y operaciones que actúan sobre el cual lo hacen cambiar y por lo tanto demuestran sus propiedades estables y variables” (Piaget, 1980).

El crecimiento cognitivo puede ser representado como un proceso en espiral: La interacción con la realidad inicia un proceso de asimilación, en donde estructuras existentes son aplicadas al objeto. Las estructuras son adaptadas y asimiladas, y si no fallan, esto crea una situación de desequilibrio cognitivo que provoca acomodación. A través de la acomodación, las estructuras cognitivas son modificadas para considerar los aspectos de resistencia de la realidad. El crecimiento se convierte en un proceso que resulta de la desestabilización recurrente de las estructuras existentes, debido a las características nuevas e inesperadas del objeto en la realidad, seguido por la generación subsecuente de estructuras más profundas en su alcance que resisten la asimilación.

Piaget se enfoca principalmente en epistemología, en donde el desarrollo se debe a evolución biológica y la génesis histórica del conocimiento científico. Concibe la inteligencia humana como una construcción con una función adaptativa. Para Piaget su teoría psicológica trata de describir y explicar las diferentes formas o estructuras del pensamiento, cómo evolucionan y cómo cada una de ellas contribuye a la adaptación a la realidad del ser humano. Inhelder y Cellier (1992), propusieron que se hicieran más investigaciones sobre pragmática, argumentaron que ya hay suficiente investigación sobre la transformación epistémica (la alteración del mundo con el fin de generar conocimientos), lo cual no es el caso de la transformación pragmática (conocimiento puesto en marcha con el fin de alterar el mundo). La transformación pragmática claramente incorpora un aspecto de tecnología, pero sale de interacciones biológicas en el sentido de que involucra herramientas técnicas de mediación y técnicas corporales. Piaget siempre supuso una continuidad fundamental entre procesos biológico adaptivos y niveles avanzados de cognición. Su modelo de interacción se reduce a relaciones entre el organismo y su entorno, y por lo tanto excluye la mediación.

2.4.2 Vygotsky

Vygotsky (1986) consideró que unas teorías de Piaget ilegítimamente “reducen procesos psíquicos superiores complejos a procesos naturales y desprecian las características específicas del desarrollo cultural del comportamiento” (p. 27). Acertó que “junto a los actos y procesos de comportamiento natural, es necesario distinguir las funciones y formas de comportamiento artificial o instrumental” (p. 40). Argumentó que la introducción y el uso de instrumentos provocan cambios de gran alcance en la cognición: “Activa una nueva serie de funciones ligadas al uso y control del instrumento seleccionado; el trabajo desarrollado por el instrumento reemplaza y hace inservible un número considerable de procesos naturales” (p. 42).

Vygotsky asegura que el hombre no se limita a responder a los estímulos sino que actúa sobre ellos, transformándolos. Esto es posible gracias a la mediación de instrumentos que se interponen entre el estímulo y la respuesta. Por lo tanto, el desarrollo se ve como resultado de procesos altamente artificiales en donde la mediación de instrumentos desempeña una función principal, de acuerdo a Vygotsky el tema central de su psicología es mediación. A través de la mediación (material y simbiótica) la cognición humana se involucra en relaciones con el ambiente material y social, las cuales son fundamentalmente diferentes de relaciones no mediadas.

2.4.3 Modelo psicológico de Instrumentos y Actividad Instrumentada

Un instrumento es cualquier objeto que un sujeto asocia con su acción, con el fin de llevar a cabo una tarea. En una actividad “instrumentada”, el objeto es un artefacto (un objeto hecho, como una herramienta o máquina, que ha sido diseñado para una tarea específica), y

puede distinguirse en función de su objetivo dependiendo si es para producir transformaciones o proporcionar conocimientos (Vérillon, 2000). Éste autor afirma que las acciones instrumentadas pueden ser de naturaleza pragmática, epistémica o semiótica. Es *pragmático* ya que un instrumento puede ser utilizado para transformar un objeto u otro aspecto del ambiente, por ejemplo utilizar una goma para borrar marcas de lápiz; es *epistémico* ya que el mismo instrumento es utilizado para proporcionar información sobre el ambiente, por ejemplo un termómetro mide la temperatura y finalmente el uso *semiótico* o comunicativo, es un instrumento que es utilizado para transformar información de una persona. Vérillon (2000) indica que lo anterior requiere el conocimiento de códigos verbales, gestuales y gráficos. También reconoce que en ciertas circunstancias puede ser una mezcla, “actividad instrumentada, ya sea material o semiótica, generalmente consiste de ambas fases pragmáticas y epistémicas” (Vérillon, 2000).

Vérillon (2000), propone un modelo de actividad instrumentada situada (SIA) en donde subraya las relaciones múltiples dentro de una actividad instrumentada, las cuales incluyen el sujeto, el instrumento y el objeto hacia el cual se dirige la acción instrumentada. La figura 1 ilustra este modelo. Muestra que en el análisis de la actividad además de considerar las interacciones directas sujeto-instrumento (s-i) y sujeto-objeto (s-o), debe considerar la interacción instrumento-objeto (i-o) y la interacción indirecta a través de la mediación del instrumento (s(i)-o).

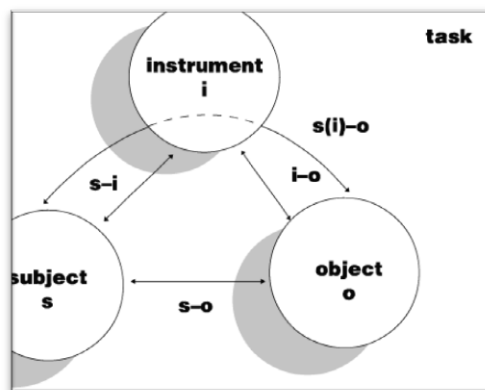


Figura 3: Modelo SIA

El modelo SIA se puede ajustar para aplicarse a situaciones instrumentadas semióticamente. Vygotsky (1985) se refiere a instrumentos semióticos (símbolos, códigos, mapas, diagramas, etc.) como instrumentos “psíquicos”. “El instrumento psíquico básicamente difiere de un instrumento técnico en la dirección de su acción. El instrumento psíquico no provoca un cambio en un objeto, su fin es influenciar su propio comportamiento o el de otro” (Vygotsky, 1985). Considerando ese punto de vista el modelo debe representar la interacción que se lleva a cabo entre dos sujetos: un “transmisor” y un “receptor”. Además, debido a que los instrumentos semióticos tienen el fin de modificar la

información del receptor o sus representaciones, se introduce un cuarto elemento al modelo SIA: el referente (r), la información o representación inicial (figura 2). El referente es el objeto al cual se actúa la acción instrumentada del transmisor.

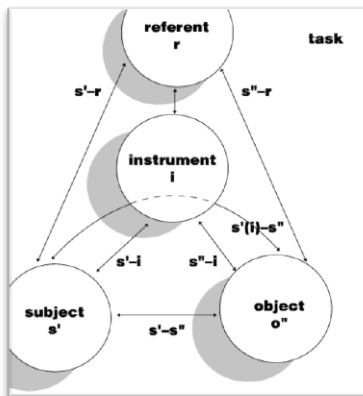


Figura 4: Modelo SIA modificado

En situaciones instrumentadas semióticamente, la mediación se presenta en dos formas: mediación de la acción del transmisor sobre el receptor y la mediación al objeto de referencia común a ambos.

2.5 Génesis Instrumental

2.5.1 Antecedentes

La investigación en educación matemática con el uso de tecnologías digitales ha mostrado que, por la vía de dichas tecnologías, los estudiantes pueden tener un acceso temprano a trabajar con ideas matemáticas complejas y poderosas. La **generalización**, la **elaboración y verificación de conjeturas**, así como conceptualización son algunas de esas ideas matemáticas, y el camino para acceder a ellas tiene como punto de partida la posibilidad que ofrecen ciertos ambientes computacionales de explorarlas y de abordarlas desde niveles intuitivos de pensamiento. Sin embargo, buena parte de las investigaciones se han dedicado a mostrar sólo estas potencialidades de la tecnología, dejando de lado el paso a la institucionalización y formalización del conocimiento matemático no-formal generado a partir del trabajo con la tecnología sustentada del uso de las tecnologías digitales a la enseñanza ordinaria y cotidiana de las matemáticas (Lagrange, Artigue, Trouche, 2003). Desde finales de los años 1970, en que se empezó a incursionar en la incorporación del uso de las tecnologías informáticas a la enseñanza, la investigación educativa se ha enfocado, sobre todo, a mostrar las virtudes de una gran variedad de entornos tecnológicos como ambientes de aprendizaje. De manera específica, se ha podido mostrar que para las matemáticas la posibilidad de manipular directamente representaciones ejecutables de conceptos y fenómenos influye en la posibilidad de acceder a otras formas de apropiación

de conocimiento, diferentes de aquellas que surgen cuando se trabaja de manera tradicional (papel y lápiz).

En pocas palabras, se ha podido constatar que el impacto de aprender en ciertos entornos tecnológicos se da a nivel no sólo cognitivo sino también epistemológico (Balacheff y Kaput, 1996). Sin embargo, a partir de muchas de las investigaciones realizadas en este campo se ha llegado a la conclusión de que el diseño de la actividad o tarea que se realice con el uso de tecnología es determinante para que dicho uso tenga un efecto significativo en el aprendizaje (Healy, 1994).

2.5.2 Génesis Instrumental

Dentro del campo de la ergonomía cognitiva, que tiene que ver con procesos mentales (percepción, memoria, razonamiento y respuesta ideomotor) y en cómo afectan las interacciones entre humanos y otros elementos de un sistema, el cual se apoya en la idea de instrumentación (Vérillon y Rabardel, 1995). Los investigadores de la ergonomía cognitiva se enfocan en estudiar procesos de aprendizaje profesionales, que se llevan a cabo en ambientes tecnológicamente complejos.

Para entender el uso de dichas herramientas conceptuales, debemos enfocarnos en los procesos de apropiación de herramientas de tecnología digital para el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas, en situaciones en las que el diseño de una actividad o tarea prevé momentos didácticos clave para la construcción de conceptos o el desarrollo de habilidades específicos. Tales procesos son interpretados a través de la **Génesis Instrumental**, la cual estudia cómo un artefacto se convierte en un instrumento de tal manera que se integra al humano para construir conocimiento matemático (Artigue, 2002).

Si bien la ubicación de su problemática tiene que ver con una relación dialéctica *técnica-conceptual*, es decir, para que exista la construcción del artefacto al instrumento, la génesis instrumental se debe de apropiar de la dualidad, producto del artefacto. Tal que la Génesis instrumental puede funcionar de dos formas. La primera es dirigida hacia el instrumento. En donde progresivamente se carga con potencialidades y eventualmente tiene un uso específico; conocido como la *Instrumentalización* del artefacto. La segunda está dirigida hacia el sujeto, lo cual resulta en la apropiación de esquemas de acción instrumentada que se convierten en técnicas y permiten una respuesta efectiva a actividades matemáticas. Lo anterior se conoce como *Instrumentación* (Trouche, 2000). Para entender y promover la Génesis para aprendices es necesario identificar las restricciones inducidas por el instrumento, existen las restricciones internas y de interface (Balacheff, 1994). Además, es necesario identificar el potencial ofrecido por el trabajo con instrumentos.

Por lo tanto, la Génesis instrumental es el proceso de la construcción de esquemas que consiste en técnicas y concepciones, que le dan significado a las mismas. En otras palabras estudia como un artefacto se convierte en un instrumento de tal manera que se integra al humano para construir conocimiento matemático. La teoría de instrumentación está en línea con las opiniones sobre el rol de símbolos en la educación matemática (Gravemeijer, 2000). El valor de la teoría de la Instrumentación es que proporciona una forma específica para ver la interacción entre los alumnos y la herramienta tecnológica, en particular demuestra cómo los obstáculos técnicos pueden ser relacionados a dificultades conceptuales.

2.5.3 Complejidad de la Génesis Instrumental

En la década pasada, se llevó a cabo una extensa investigación que tenía por objetivo identificar los potenciales y limitaciones del trabajo innovador existente sobre la integración de la tecnología en la enseñanza de las matemáticas y comprender mejor las dificultades de dicha integración (Legrange *et al.*, 2001, 2002). Este estudio sugirió que la Instrumentación puede ser un proceso muy complejo y costoso. Estudios realizados por Trouche (1997) y Defouad (2000) ayudan en la comprensión de algunas de las complejidades de la Instrumentación.

En su investigación, Trouche (1997) refirió a la conceptualización de la noción de límite, en dos ambientes distintos: calculadoras gráficas y calculadoras simbólicas. Trouche (1997) evidencia la diversidad de las relaciones instrumentales que los estudiantes desarrollan. Esta diversidad conduce al autor a introducir cinco perfiles extremos, que él llama respectivamente: “*teórico*”, “*racionalista*”, “*escolástico*”, “*artesano*” y “*experimentador*”. Estos perfiles se caracterizan por la clase de recursos que favorece el estudiante, el meta-conocimiento que tiende a activar y los modos de validación utilizados (Trouche, 2000). El “*artesano*”, por ejemplo, es caracterizado por tres ejes: calculadora, investigación y acumulación; el “*racionalista*” por la triada de papel/lápiz, inferencia y prueba, mientras que el “*teórico*” por la terna de referencias, interpretación y analogía. De acuerdo con su perfil, los estudiantes desarrollan diversas relaciones con sus calculadoras gráficas y simbólicas, es decir, las diferencias de los perfiles tienen efectos significativos en la Génesis instrumental de las calculadoras (Trouche, 2000).

CAPÍTULO III

METODOLOGÍA

En este capítulo se describen la Metodología de la Investigación, y la Metodología de la Experimentación.

3.1. Metodología de la Investigación

En esta metodología se hizo una extensa búsqueda de información bibliográfica basada en la literatura utilizada en el diseño original de las actividades (Ibarra, 2015), el cual involucra los temas de cálculo diferencial de acuerdo al programa del primer módulo de la carrera de Ingeniería Química. Además, de artículos de investigadores como Duval (1993) que aborda la Teoría de las Representaciones semióticas, Hitt y Cortés (2005) que mencionan algunas de las dificultades para el aprendizaje del concepto de límite, Panitz (1997) que propone una definición para los aprendizajes cooperativo y colaborativo, Mercer (2001) que nos habla del aprendizaje colaborativo, Vygotsky (1986) quien propone que los procesos mentales superiores pueden ser considerados como funciones de actividades mediadas, y sugiere tres clases principales de mediadores: herramientas físicas, herramientas psicológicas y otros humanos, Ibarra (2015) que propone el diseño original de las actividades, Artigue (2002) que nos enfoca al concepto de instrumento y nos menciona el esquema T-T-T (Tarea-Técnica-Tecnología). Heid (1988), demostró que CAS puede facilitar el desarrollo de conceptos matemáticos.

Por otro lado, en este trabajo de tesis se aplicaron cuatro actividades de aprendizaje para la conceptualización del Límite. Mismas que fueron diseñadas bajo el esquema Tarea-Técnica-Tecnología (Artigue, 2002). Están estructuradas en tres partes: por una sección de lápiz y papel, otra utilizando el sistema CAS y la tercera es una parte de simbolización (Ibarra 2015).

En general estas actividades, contienen los siguientes temas:

1. Diferencias
 - Significado de una diferencia matemática.
 - Secuencia de números para plantear el operador Δ así como su significado.
 - Manejo de subíndices.
 - Introducción básica a la calculadora Ti-Nspire CX CAS.
2. Pendientes
 - Regla de tres y su relación con la pendiente.
 - Introducción a la ecuación lineal $y = mx + b$.
 - Ecuación lineal a partir de dos puntos.

- Manejo de datos estadísticos como regresión lineal y exponencial, así como gráfica de datos dentro de la calculadora.
3. Pendientes como función
- Desarrollo de la expresión $m = \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ a partir de $m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$.
 - Significado de la variable h .
 - Comportamiento de $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ cuando h se acerca a cero.
4. Límites
- Diferencia entre una velocidad promedio e instantánea y su significado.
 - Introducción a límites laterales.
 - Uso de la aplicación gráfica para funciones.

Las actividades antes descritas fueron resueltas por el investigador, para conocer su estructura didáctica y conceptual.

Basándose en la aplicación de las actividades que realizó Ibarra (2015), se diseñó un plan de trabajo que permitiera planificar de manera general las experimentaciones que se llevarían a cabo para esta investigación. Para considerar el número de estudiantes que participarían, la formación de los equipos con integrantes de diferentes niveles académicos, de qué manera se distribuirían los equipos en el salón de clases, el tiempo necesario para resolver cada actividad, el lugar en dónde se colocaría la cámara fija, el desplazamiento de la cámara móvil, el papel que tomaría cada estudiante de acuerdo al rol establecido en el diseño de las actividades de aprendizaje, el empleo de lapiceros de diferentes colores para no borrar razonamientos erróneos, el diseño de una actividad para el uso y manejo de la calculadora Ti-Nspire CX CAS en donde se explicaran los principales comandos a utilizar y por último la intervención del investigador en puntos específicos durante el desarrollo de la experimentación.

De acuerdo a los resultados obtenidos en la investigación de Ibarra (2015), es necesario especificar los puntos clave donde debe intervenir el investigador; esto debido a que se observó que en ciertos incisos de las actividades, los alumnos mostraron bastante confusión en el momento de resolverlos. Basándonos en esta observación se plantea una “**Guía del profesor**” (ver anexo I), en la cual se indican los puntos específicos en la actividad, donde los alumnos presentan mayor confusión y es necesaria la intervención del investigador. Esta interacción se llevó a cabo mediante interrogantes que el investigador planteó a los alumnos, con el fin de que ellos mismos razonen sus dudas a través de preguntas clave.

Como parte de la metodología se encuentra analizar los datos obtenidos de las evidencias recabadas, como son: los videos, las actividades de aprendizaje y las hojas en donde los estudiantes escribieron razonamientos extras. Al finalizar la última sesión de cada experimentación se recabó la información obtenida y se analizó de la siguiente manera:

1. Revisar todas las actividades contestadas por los alumnos, partiendo de la actividad 1, y así sucesivamente hasta llegar a la actividad 4.
2. Una vez revisadas cada una de las actividades se procedió a realizar el análisis de las bitácoras, que se hicieron en cada una de las sesiones.
3. Con base en lo descrito en la bitácora, se hizo el análisis de cada uno de los videos para relacionar los eventos.

3.2. Metodología de la Experimentación

La parte experimental de esta investigación se realizó en dos etapas, la primera fue una “Experimentación Piloto” y la segunda una “Experimentación Formal”. La experimentación piloto se hizo con el fin de:

1. Observar la estructura didáctica de las actividades.
2. Revisar los conceptos involucrados en las actividades, que se les dificultaron a los estudiantes al contestarlas.
3. Observar razonamientos erróneos de los alumnos, para que el investigador intervenga en la experimentación formal y por medio de cuestionamientos el estudiante pueda rectificar su razonamiento.
4. De acuerdo con lo observado en las evidencias de la experimentación piloto, hacer las modificaciones necesarias para aplicar la experimentación formal.

3.2.1. Experimentación Piloto

Antes de aplicar las actividades diseñadas se dio una breve introducción sobre los principales comandos de la calculadora simbólica Ti-Nspire CX CAS. Se hizo hincapié, en que algunos botones tienen múltiples funciones, por ejemplo, el mismo botón que enciende la calculadora (botón de HOME) la puede apagar al presionar CTRL (botón azul) y después HOME. Las funciones secundarias se presentan en azul, por lo tanto es necesario presionar el botón CTRL primero y después el botón correspondiente para obtener el comando deseado. En la calculadora se trabaja con páginas o pestañas. En la figura 5 se presenta la pantalla de inicio al presionar HOME.



Figura 5: Pantalla “HOME”

En esta figura se aprecian las diferentes herramientas que tiene la calculadora Ti-Nspire CX CAS, tales como:

1. Calculadora
2. Gráficos
3. Geometría
4. Lista y hojas de calculo
5. Datos y estadísticas
6. Regresión
7. Experimento

Al término de la explicación y con el objetivo de que se comprendieran las funciones de cada una de las herramientas, se aplicó la actividad de **“Primer uso de la calculadora Ti-Nspire CX CAS”**, la cual se diseñó con la finalidad de que el estudiante se familiarizara con los principales comandos de la calculadora simbólica Ti-Nspire CX CAS. Esta actividad de primer uso se encuentra en el anexo I.

Por otro lado, se trabajó con 27 alumnos del primer año de la Facultad de Ingeniería Química de la Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo. Se organizaron nueve equipos de tres personas cada uno. De acuerdo a Ibarra (2015), cada integrante del equipo debía cumplir un rol específico que cambiaba de una actividad a otra: un estudiante trabajaba con la calculadora, otro como coordinador dentro del trabajo en equipo y el tercero haciendo las anotaciones en la actividad de aprendizaje; esto con la finalidad de que cada integrante del equipo tuviera la misma oportunidad de aprendizaje. Se entregó por equipo la actividad respectiva, una calculadora Ti-Nspire CX CAS, hojas en blanco para anotaciones extras y tres lapiceros de diferentes colores (negro, azul y rojo), con la finalidad de que los alumnos no borrarán ninguna respuesta en caso de considerarla errónea.

y para tener evidencias acerca del razonamiento inicial que utilizaban para llegar a la respuesta final

Esta experimentación se llevó a cabo en cinco sesiones de dos horas cada una, las cuales se describen a continuación:

En la **primera sesión** se trabajó con una actividad que tiene por objetivo, que el estudiante maneje la calculadora Ti-Nspire CX CAS con sus principales comandos como son: *Enter*, *Factor*, *Expand* y *Solve*. La actividad antes citada se implementó para que los alumnos practicasen con la calculadora antes de realizar las actividades de aprendizaje, (ver anexo IV). Al terminar esta actividad se inició con el trabajo de la Actividad 1 de *Diferencias*, en donde se les indicó el cambio de rol por equipo y se les proporcionó el siguiente material: la actividad a resolver, lapiceros de colores, hojas en blanco y una calculadora simbólica Ti-Nspire CX CAS.

La **segunda sesión** de trabajo fue la aplicación de la Actividad 2 de *Pendientes*, en donde se les indicó el cambio de rol por equipo y se les proporcionó el mismo material que en la primera sesión, únicamente cambiando la actividad correspondiente. En esta sesión hubo mayor interacción entre el investigador y los alumnos debido al contenido de la actividad.

En la **tercera sesión** se aplicó la Actividad 3 de *Pendientes como función*, cambiando el rol de trabajo de los estudiantes como lo establece el diseño de las actividades, se entregó la actividad correspondiente, lapiceros de colores, hojas en blanco y una calculadora simbólica Ti-Nspire CX CAS y se continuó con la experimentación. De acuerdo a la metodología de la investigación se plantearon puntos específicos en donde intervendría el investigador.

En la **cuarta y quinta sesión** se trabajó con la Actividad 4 de *Límites*, debido a que su contenido se consideraba el más extenso. Se procedió de la misma manera que en las actividades anteriores, cuidando que los alumnos respetaran el rol correspondiente en las dos sesiones. Al finalizar estas sesiones se les pidió a los estudiantes dar una opinión general del contenido y estructura de las cuatro actividades así como las dificultades y beneficios didácticos de la aplicación de las mismas.

Las interacciones y discusiones entre los equipos y el investigador fueron grabadas con tres cámaras de video: dos cámaras móviles para tener un mayor acercamiento al trabajo de cada equipo y una cámara fija que permaneció en un lugar estratégico del aula, de tal manera que enfocara todo el grupo para tener la evidencia de la interacción del grupo en general.

Cuando se terminó la Experimentación Piloto, se dio inicio a la revisión y análisis de todas las evidencias obtenidas en el desarrollo de la solución de las actividades de aprendizaje,

como son: las hojas con anotaciones extras, las actividades y los videos; con el fin de observar las discusiones entre los integrantes de los equipos y la interacción de los alumnos con el investigador. Tomando en cuenta todas las evidencias mencionadas anteriormente, se hicieron modificaciones a las actividades y a la estrategia de aplicación, para que posteriormente se realizara la experimentación formal.

En el anexo II se presentan las bitácoras elaboradas en el desarrollo de la experimentación piloto. Las cuales describen detalladamente todo lo sucedido en cada sesión, éstas se realizaron con la finalidad de tener evidencia de los momentos clave para mejorar la experimentación formal.

3.2.2. Experimentación Formal

Esta experimentación se llevó a cabo tomando en cuenta todas las observaciones realizadas de la experimentación piloto y se trabajó de la misma manera, cinco sesiones de dos horas cada una y con 21 alumnos de primer año de la Facultad de Ingeniería Química, con los cuales se formaron siete equipos de tres personas cada uno. El rol de los estudiantes se cambió en cada una de las sesiones, un estudiante trabajaba con la calculadora, otro como coordinador del trabajo en equipo y el tercero, haciendo las anotaciones en la actividad de aprendizaje.

Se instalaron tres cámaras de video, dos móviles para tener un mayor acercamiento al trabajo de los equipos y poder seguir de cerca sus razonamientos, y una fija que se colocó de manera estratégica para videogravar a todo el grupo. Esta disposición de las cámaras se utilizó en todas las sesiones de trabajo.

Al inicio de la **primera sesión** se entregó por equipo: un folder que contenía las actividades para el Uso y manejo de la calculadora Ti-Nspire CX CAS, la Actividad 1 de *Diferencias* y además hojas en blanco para hacer cualquier anotación extra; la calculadora Ti-Nspire CX CAS; tres lapiceros de diferentes colores (rojo, azul y negro), con la finalidad de que los alumnos no borrarán ninguna respuesta que consideraran errónea, para tener evidencias acerca del razonamiento inicial que utilizaban para llegar a la respuesta final. Esta estrategia se aplicó en todas las sesiones de trabajo.

En la **segunda sesión**, se trabajó con la Actividad 2 de *Pendientes*, siguiendo la misma estrategia que en la primera sesión y respetando el cambio de rol antes mencionado.

En la **tercera sesión**, se aplicó la Actividad 3 cuyo título es *Pendientes como función*.

En las dos últimas sesiones de trabajo se aplicó la actividad 4 de *Límites*, debido a la extensión de la misma. Además, se les solicitó a los estudiantes que en una hoja en blanco y por equipo expresaran su opinión acerca del contenido y estructura de las actividades. Se

les agradeció a los alumnos por su valiosa participación y apoyo, para realizar esta investigación.

Concluida la experimentación formal, se revisaron todas las evidencias generadas para dar inicio a la etapa de análisis de resultados.

CAPÍTULO IV

ANÁLISIS Y DISCUSIÓN DE RESULTADOS

En éste capítulo se presenta el análisis de los resultados de las actividades de aprendizaje realizadas en la experimentación formal. Se aplicaron a veintisiete alumnos de primer año de la licenciatura en Ingeniería Química de la Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, estos alumnos trabajaron en equipos de tres integrantes cada uno. Con respecto al conocimiento matemático de los alumnos, se considera que tienen un nivel básico de Cálculo de preparatoria.

4.1 Análisis de Actividades

En este punto se presentan los resultados obtenidos en la experimentación formal, los cuales se obtienen con base en la revisión de las actividades resueltas y a las videgrabaciones generadas durante el desarrollo de la aplicación de las mismas.

4.1.1 Actividad 1. Diferencias

En esta actividad se tienen los siguientes objetivos didácticos, los cuales permitirán empezar a construir el concepto inicial de diferencias:

- Entender el significado de una diferencia matemática.
- Formular y aplicar el concepto de los incrementos Δi y Δu .

Para el primer objetivo, se pretende que el estudiante comprenda el significado de una diferencia matemática, para lo cual al inicio de la actividad Ibarra (2015), hace una breve introducción de ésta y cómo se utiliza:

“La diferencia matemática es el resultado de restar, en donde se resta un sustraendo de un minuendo. Por ejemplo, la diferencia entre 3 (sustraendo) valor final (minuendo). *Es decir, la diferencia es igual al valor final menos el valor inicial.*”

Las situaciones que se presentan en el inciso I-a son casos de la vida cotidiana en los cuales se debe encontrar la diferencia. La idea general, es ver cómo son las diferencias en situaciones donde hay aumento o disminución de una cantidad.

Por ejemplo dentro del inciso I-a se pregunta:

“Un automóvil contiene un tanque de 90 litros. Se llena al comienzo de la semana, al final de ella se observa que el tanque contiene 32.3 litros. ¿Cuál es la diferencia de litros en el tanque a lo largo de la semana?”

Para este cuestionamiento los alumnos deben darse cuenta que hay una disminución en la cantidad inicial de gasolina, ya que cuando hacen la diferencia se obtiene un resultado con signo negativo. Al hacer el análisis de todas las situaciones planteadas dentro del inciso I-a se espera que los estudiantes asocien cada signo con su diferencia y determinen si es un consumo, un aumento o es constante. Posteriormente deben dar respuesta al inciso I-c, que plantea la siguiente interrogante:

“¿Qué concluyes a partir del inciso anterior con respecto al signo de la diferencia? Considere signos positivos, negativos y valores de cero”.

Al responder correctamente esta pregunta los alumnos estarían cumpliendo con el primer objetivo de la actividad. En la figura 6 se puede observar el análisis que hacen los estudiantes, con lo cual se demuestra que comprenden el significado de una diferencia matemática.

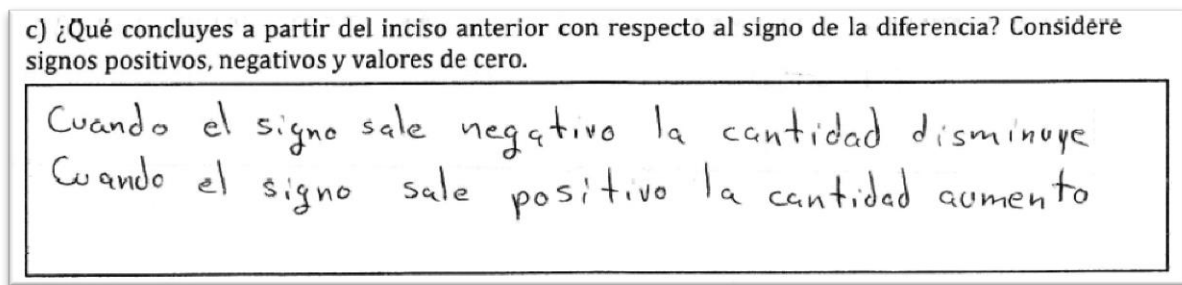


Figura 6: Evidencia del significado de una diferencia matemática.

El siguiente diálogo muestra la discusión que hacen los estudiantes para llegar al significado del signo negativo en una diferencia:

Integrante 1: (Lee la pregunta del inciso I-b) Observe las diferencias de los tres casos del inciso anterior, ¿existe una diferencia con signo negativo? En caso afirmativo, ¿qué representa con respecto a la cantidad (aumenta o disminuye)?

Integrante 2: Sí, disminuye porque todos los demás aumentan (señalando los dos primeros casos), pero el que disminuye es éste (señalando el tercer caso).

Integrante 1: (Lee la pregunta del inciso I-c) ¿Qué concluyes a partir del inciso anterior con respecto al signo de la diferencia? Considere signos positivos, negativos y valores de cero.

Integrante 2: Que cuando te sale negativo es la diferencia que hay de una cantidad a otra, pero porque disminuye, o sea cuando tu por ejemplo tienes esto (señalando la

cantidad final en el primer caso) y le restas esto (*cantidad inicial en el primer caso*) te está dando la diferencia pero porque aumentó, pero aquí (*haciendo referencia al tercer caso*) te está dando la diferencia pero de lo que disminuyó por eso te sale negativo.

Integrante 1: ¿Entonces cómo le pongo? (*pregunta a sus compañeros*). Concluimos del inciso anterior...

Integrante 2: Que el signo cuando te sale negativo significa que la cantidad disminuye, y al salirte positivo es que la cantidad aumentó.

Observaciones

Analizando el diálogo anterior, se observa que los estudiantes hacen un razonamiento correcto sobre el significado del signo negativo en una diferencia. Para llegar a esta conclusión hacen un análisis de todos los casos propuestos en el inciso I-a, observando que los dos primeros representan un aumento por ser la diferencia positiva, ya que la cantidad final es mayor a la inicial. Al llegar al tercer caso observan que la diferencia es negativa, hacen una comparación con los dos anteriores y concluyen que ésta última representa un consumo, al percatarse que la cantidad final es menor que la inicial.

Una vez entendido el significado de una diferencia, el siguiente objetivo de la actividad es que los alumnos identifiquen el concepto de delta (Δ) y su significado. Dentro de la actividad, Ibarra (2015) hace una breve introducción sobre este concepto de la siguiente manera:

“En matemáticas el operador delta (Δ) representa un cambio. Siendo un operador matemático, puede aplicarse a cualquier variable. Por ejemplo, Δx representa un cambio en x mientras que ΔT representa un cambio en T (muchas veces dicha variable representa una temperatura).”

Para cumplir con el segundo objetivo es necesario que los alumnos contesten correctamente el inciso I-f, donde se les pide encontrar el valor de Δi y Δu para un conjunto de datos. Posteriormente darán respuesta al inciso I-g y deberán encontrar una relación entre estos dos incisos. Esto es importante para que los estudiantes puedan formular una expresión algebraica y así dar respuesta al inciso I-h, el cual plantea lo siguiente:

“Expresa su observación del inciso g en forma matemática (fórmula). ¿Se cumple en cada caso de la tabla?”

Como respuesta al inciso I-h los alumnos llegan a lo siguiente:

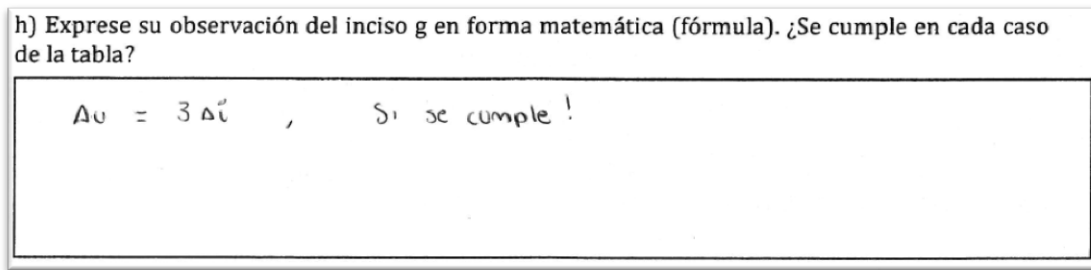


Figura 7: Evidencia de aplicación del operador Δi y Δu .

Para llegar a esta conclusión, los alumnos hacen el siguiente análisis:

Integrante 1: (Lee la pregunta del inciso I-g) Analice la tabla del inciso f, ¿hay una relación con respecto a Δi y Δu ? ¿Qué puede concluir?

Integrante 2: Que todos son múltiplos de 3, porque es uno por tres, tres; dos por tres, seis; tres por tres, nueve; es lo único que concluyo.

Integrante 3: Pues sí, ¡todos son múltiplos de tres!

Integrante 1: ¡No!, es que sería más bien que los valores de Δu son múltiplos de Δi porque Δi lo multiplicas por tres.

Investigador: ¿Cómo se vería eso que acabas de decir, en una expresión matemática?

Integrante 1: ¿O sea cómo?

Investigador: O sea, tu ahí dices que los valores de Δu son múltiplos de Δi pero múltiplos ¿cómo?, es decir, ¿Por qué los estas multiplicando para que sean igual?

Integrante 1: ¡Ah!, le entendemos que porque son múltiplos de tres...

Investigador: Si, ¿Pero cómo lo expresarías en una fórmula matemática? ¿ Δu es igual a qué? o ¿ Δi a qué es igual?

Integrante 1: ¡Ah!, Δu es igual a tres por Δi .

Observaciones

Como se muestra en el diálogo anterior los estudiantes identifican que hay una correspondencia entre los valores de Δu y Δi , ellos señalan que Δu va a estar determinado por los valores que tome Δi multiplicado por tres; es importante mencionar que

identificaban la relación pero no la podían expresar como una función matemática, por lo que fue necesaria la intervención del investigador y por medio de cuestionamientos orientarles para que ellos pudieran identificar la necesidad de utilizar dicho operador dentro de una diferencia matemática.

Con éstas evidencias se demuestra que se cumplen los objetivos planteados para esta actividad, ya que los alumnos comprenden el significado de una diferencia matemática, además formulan y aplican los conceptos de Δx y Δy .

4.1.2 Actividad 2. Pendientes

Los objetivos didácticos que se plantean para esta actividad son los siguientes:

- Formular el concepto de la pendiente.
- Llegar a la derivación de la ecuación de una línea recta.
- Formular y aplicar la expresión $\frac{\Delta x}{\Delta y}$.

Dentro de la actividad el inciso I-a relaciona la razón de cambio con una pendiente. Para lograr lo anterior se presenta el siguiente caso:

“a) Un carro recorre 245 kilómetros con 18 litros de gasolina.”

“1) Si el mismo carro gasta 30 litros de gasolina, ¿qué distancia viajó?”

Para poder dar respuesta a este cuestionamiento es necesario utilizar una regla de tres, la cual, es un concepto básico que se introduce desde los primeros años de preparatoria y se espera que el estudiante sea capaz de aplicar en este inciso. El inciso I-a-1, I-a-2 y I-a-3 están ligados con el objetivo de que el alumno identifique qué es una razón de cambio y su significado. Puede ser que éste concepto sea ajeno al alumno en este momento, pero al indicar las unidades que debe tener (kilómetro/litro), se espera que puedan responder la pregunta. Lo anterior simplifica la producción de un valor y al analizarlo se puede deducir su significado.

Los incisos I-a-4 y I-a-5 tienen el objetivo de deducir la relación entre una razón de cambio y la pendiente, mediante los siguientes cuestionamientos:

“4) Utilizando el dato original, 18 litros para 245 kilómetros y el dato del problema 1, grafique dichos puntos y trace la recta. Formule una expresión matemática para la pendiente. “

“5) ¿Qué relación hay entre una razón de cambio y una pendiente?”

Con respecto al cumplimiento del primer objetivo, los alumnos llegan al siguiente razonamiento:

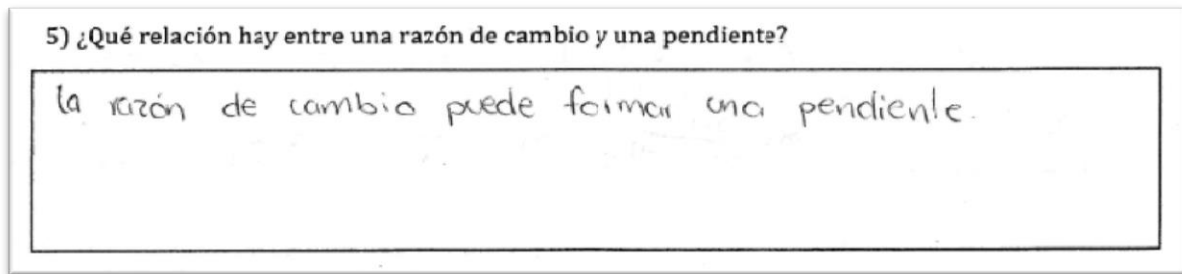


Figura 8: Evidencia de relación de pendiente y razón de cambio.

Observaciones

En la evidencia anterior, se puede observar que los estudiantes comprenden la relación entre una razón de cambio y la pendiente. Ellos afirman que las dos cosas se pueden considerar como una misma, ya que ambas representan una diferencia. Al darse cuenta de esta relación se cumple el objetivo propuesto.

Para lograr el segundo objetivo, en los incisos I-b, I-c y I-d se analizan las funciones y sus pendientes. Dentro de la actividad Ibarra (2015), hace una introducción sobre lo que es una función y qué representa.

“El modelo matemático más sencillo para relacionar dos variables es la **ecuación lineal** $y = mx + b$. Esta ecuación se llama *lineal* porque su gráfica es una línea. Cuando $x = 0$, se obtiene: $y = m(0) + b = b$.

Por lo tanto, la línea cruza el eje y en $y = b$. En otras palabras, el intercepto y es $(0, b)$. La inclinación o pendiente es m . La pendiente de una línea no vertical es el número de unidades que la recta sube (o cae) verticalmente por cada unidad de cambio horizontal de izquierda a derecha, como se observa en la figura 1 y 2”

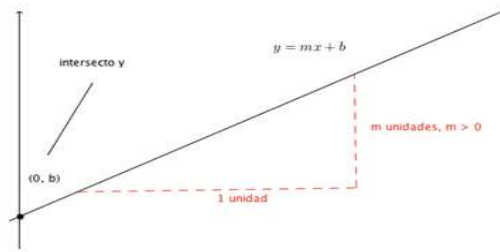


Figura 1. Línea recta con pendiente positiva

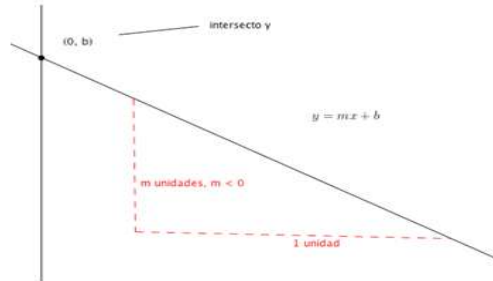


Figura 2. Línea recta con pendiente negativa

Como parte de este análisis es necesario dar respuesta al inciso I-b, el cual dice lo siguiente:

“b) Considere la ecuación de la recta, $y = 2x + 3$. Identifique la variable independiente y la variable dependiente. Elija por lo menos 5 valores dependientes y haga una tabla con los valores independientes correspondientes.”

Ibarra (2015), propone dos propósitos para este inciso. El primero es observar que se puede definir “y” (dependiente) y calcular “x” (independiente), y el segundo es ver qué recuerdan de la explicación de la actividad 1, en donde se explica qué es una variable dependiente e independiente.

Posteriormente el inciso I-d menciona:

“d) Considere los puntos (6, 9) y (0, 11). Sin hacer ningún cálculo responda ¿la pendiente es positiva o negativa? Compruebe gráficamente y después analíticamente.”

Este inciso trata la pendiente en forma gráfica y analítica. Los incisos I-e y I-f se enfocan en la generación de la ecuación de la pendiente; el inciso I-e en términos de n , mientras que el I-f en términos de Δ .

Las siguientes figuras muestran la evidencia obtenida para la comprobación del segundo objetivo:

e) Utilizando los puntos generales, (x_n, y_n) , donde n es n -ésimo punto. Calcule la pendiente entre el punto 1 (x_1, y_1) y 2 (x_2, y_2) .

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Figura 9: Evidencia de la ecuación de la pendiente en términos de n .

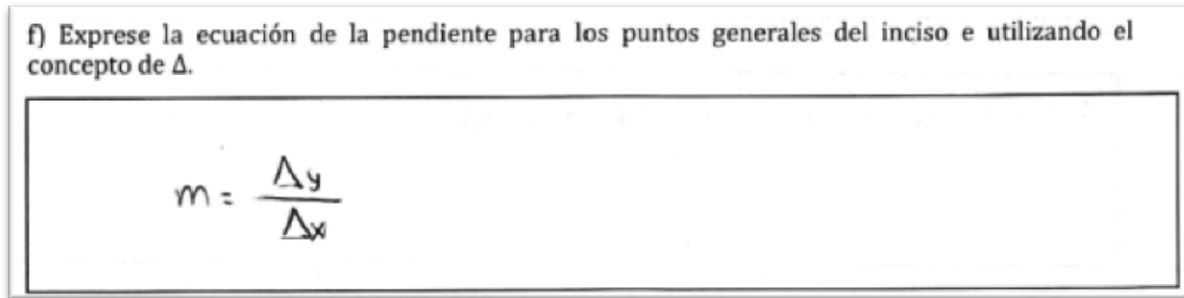


Figura 10: Evidencia de la ecuación de la pendiente en términos de Δ .

Para el tercer objetivo de esta actividad es necesaria la aplicación de la ecuación de la pendiente en términos de n dentro del inciso II-a, en el cual, Ibarra (2015) presenta el caso de la dotación por radiocarbono. Se presenta una tabla con 18 datos de la antigüedad del material en miles de años y la cantidad de C-14 presente.

El objetivo de la tabla, es calcular la pendiente en diferentes intervalos para obtener la cantidad de C-14 a 7 años y compararla con la cantidad real a 7 años en el inciso II-b. Para lograr lo anterior, se parte de la ecuación de la pendiente obtenida en el inciso I-e y dentro de ésta hacer el despeje para y_2 , de tal manera que se obtenga la siguiente expresión:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x - x_1}; m(x_2 - x_1) = y_2 - y_1; y_2 = m(x_2 - x_1) + y_1$$

Después de obtener la expresión anterior el alumno debe dar respuesta al inciso II-a mediante la siguiente indicación:

“a) Complete la siguiente tabla considerando el rango de años dado”

Al completar la tabla de manera correcta, el estudiante podrá dar respuesta al inciso II-b, y así llegar al tercer objetivo. Es muy importante que el alumno identifique que valores va a utilizar para cada una de las variables ya que de eso dependerá que se dé el razonamiento esperado. El inciso II-b hace el siguiente señalamiento:

“b) Utilizando la pendiente y su intervalo respectivo, calcule la cantidad de C-14 a 7 años (7c) y compárelo con la cantidad a 7 años real (7r). En tanto que el inciso c) de la Parte II pide al alumno que por medio de un enfoque analítico de respuesta a la siguiente indicación: ¿Qué observaciones tiene? ¿Qué pendientes calculan mejor el valor de 7c?”

Basándonos en la respuesta dada al inciso II-b observamos que los alumnos llegan a la ecuación de $y_2 = m(x_2 - x_1) + y_1$, y la aplican de manera correcta obteniendo los siguientes resultados:

b) Observando la tabla anterior y con base en la ecuación del inciso e) parte I. Calcule la cantidad de C-14 a 7 años (7c) y compárelo con la cantidad a 7 años real (7r). Utilizando la pendiente y su intervalo respectivo.

Rango	7c	7c - 7r
6 - 14	6.8245	0.2648
6 - 12	6.3828 6.763	-0.17720.203
6 - 10	5.869 6.69	-0.691 0.13
6 - 8	5.274 6.603	-0.286 0.045

Figura 11: Evidencia de aplicación de la ecuación $y_2 = m(x_2 - x_1) + y_1$

Como consecuencia de esta respuesta los estudiantes llegan a la observación siguiente:

C) ¿Qué observaciones tiene? ¿qué pendientes calculan mejor el valor de 7c?

las pendientes que tiene puntos mas cercanos uno del otro (x,y). Si el rango es mas pequeño mas preciso sera.
--

Figura 12: Evidencia del análisis de pendiente.

Para dar respuesta a los incisos II-b y II-c, cuyas evidencias se muestran en las figuras 11 y 12 respectivamente, se hace el siguiente análisis:

Cabe señalar que los estudiantes empezaron a trabajar utilizando la ecuación de la línea recta $y = mx + b$ para calcular el valor de C-14 a 7 años, mientras hacían el llenado de la tabla del inciso II-b; al observar esto, el investigador interviene para saber por qué utilizaban dicha expresión.

Investigador: Disculpen muchachos, ¿me podrían explicar qué es lo que están haciendo en ese paso?

Integrante 1: ¿Aquí? (Señalando la tabla del inciso II-b).

Investigador: Sí, en el llenado de esa tabla.

Integrante 1: ¿Aquí? (Señalando los valores que ya tenían calculados para 7c)

Investigador: Sí, primero explícame esa parte y después me explicas qué expresión utilizaste para calcular esos valores.

Integrante 1: ¡Ah!, Es que nos dice que observando la tabla anterior y con base en la ecuación del inciso e), que es la de calcular la pendiente (señala ecuación de

la pendiente del inciso I-e: $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$), dice que calcule la cantidad de C-14 para siete años, entonces con la de $y = mx + b$ despejamos b , y b nos da que es 10.839 y utilizando la pendiente de este rango (señala de 6 a 14) es 0.5735 y con esa pendiente estamos calculando a siete años la cantidad de carbono que es esta (señala valores para 7c en la tabla del inciso II-c) y después tenemos que restar la cantidad de carbono que nos dio menos la cantidad de carbono de siete años real de aquí (señala valores de la tabla dada), y ya nos sale este resultado (señala valores calculados en el inciso II-b para 7c-7r).

Investigador: ¿No se te hace más fácil en lugar de sustituir la expresión de la recta $y = mx + b$, utilizar la expresión que tienes aquí tal cual? (Señala ecuación de la pendiente $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ que deducen en el inciso I-e).

Integrante 1: Pero es para b ¿no?

Investigador: ¿Qué es lo que te pide que calcules?

Integrante 1: “y”

Investigador: Correcto. ¿Y ahí utilizas b ? (señalando ecuación de la pendiente).

Integrante 1: No, pero esto es nada más la pendiente.

Investigador: Sí, vas a utilizar la pendiente y los valores de carbono, también los años y vas a calcular la cantidad de carbono. Entonces, ¿Qué valores tienes que puedas sustituir en la formula? ¿Qué es lo que te falta?

Integrante 1: Si sustituyo los valores sería catorce, después seis.

Investigador: ¿Por qué seis?

Integrante 1: Para la y_2 sería $y_2 - y_1$, (rectifica) sería más bien 2.81- 7.40 (señalando y_2 y y_1 respectivamente).

Investigador: Sí, esos datos son para calcular la cantidad de C-14 a siete años.

Integrante 1: De eso me sale la pendiente que es igual a -0.5735 y después eso lo voy a multiplicar por siete para ver cuántos años me da, pero ocupo saber el valor de b .

Investigador: No lo ocupas, ocupas solo estos valores (señalando la ecuación de la pendiente)

Integrante 1: ¿Esto sirve para la pura pendiente, no?, aquí me está indicando que calcule el valor de una “y”.

Investigador: Sí, y te está dando el valor de la pendiente, porque te está diciendo que utilices el valor de la pendiente correspondiente a cada intervalo de años.

Integrante 1: ¡Ah! Entonces solo se despejaría y_2 , pero es que se me hace más fácil así (*señala $y = mx + b$*). Así me confundo menos.

Investigador: Intenta hacer el despeje.

Integrante 1: Tengo que despejar la y_2 (*se dice a sí mismo, mientras hace el despeje*).

Investigador: Sí, primero haz el despeje y después sustituye los valores.

Integrante 1: (Del despeje llega a la expresión $y_2 = m(x_2 - x_1) + y_1$).

Investigador: ¿Esa expresión que tienes, es similar a la que estabas utilizando anteriormente?

Integrante 1: Sí, porque tengo “ m ” multiplicado por algo y le estoy sumando algo.

Investigador: Entonces ahora con los valores que tienes haz la sustitución y compara los resultados.

Integrante 1: (*Hace las operaciones correspondiente y llena la tabla del inciso II-b, llegando a la evidencia de la figura 10*).

Investigador: Comparando los resultados que obtuviste con cada una de las formulas ¿Qué observas?

Integrante 1: Estaban mal los resultados que obtuve con la ecuación de la recta, porque utilizaba valores constantes mientras que en la ecuación de la pendiente ningún valor es constante porque es un rango y una pendiente diferente para cada cálculo que hago, o sea no puedo utilizar ningún valor constante.

Investigador: Entonces ahora si con los valores que tienes has la sustitución y llena tu tabla.

Después de terminar con el llenado de la tabla, los alumnos proceden a analizar los resultados obtenidos para dar respuesta al inciso c) mediante el siguiente diálogo:

Integrante 2: ¿Qué pendientes calculan mejor el valor de $7c$? (*Lee la indicación del inciso c*)).

Integrante 1: Las pendientes de los puntos más cercanos, por ejemplo, el seis y el ocho son puntos más cercanos y te calculan mejor el valor de $7c$. Es que como la gráfica

es logarítmica, o sea es una curva, te va a calcular mejor de seis a ocho que de seis a catorce por la curva porque es una línea recta. Si pones una línea entre cada punto, si lo pones de seis a ocho están más cercanos estos dos a la línea que seis y catorce, y si pones una línea recta entre cada uno (*señalando los pares de seis y ocho, seis y catorce*), estos dos (*señala seis y ocho*) siempre van a estar más cerca de la curva y este con este no (*señala seis y catorce*) por eso te calculan mejor los puntos que estén más cercanos uno al otro.

Integrante 2: ¿Entonces te calculan mejor los puntos que estén más cercanos?

Integrante 1: Sí, porque el rango de seis a ocho calculó mejor la pendiente el valor de “y” que cualquier otra pendiente más lejana.

Integrante 3: Mientras el rango sea más chico más preciso va a ser.

Observaciones

En la resolución de estos incisos es evidente que los alumnos presentaron confusión respecto a qué ecuación utilizar, porque ellos querían calcular los valores de y_2 por medio de la ecuación de la recta de ordenada pendiente ($y = mx + b$), basándose en su intuición. Ellos aseguraban que era el método más fácil, porque únicamente cambiarían el valor de la pendiente mientras b y x eran constantes. Al observar ésta confusión, fue necesaria la intervención del investigador para que por medio de cuestionamientos llegaran al razonamiento correcto y entendieran la aplicación de la ecuación de la pendiente que ellos mismos dedujeron anteriormente.

Con las evidencias anteriores se muestra que gracias a la intervención oportuna del investigador, los estudiantes logran entender el significado y aplicación de la ecuación de la pendiente, con lo cual se concluye que se cumplen los objetivos planteados para esta actividad.

Dentro de la parte II de esta actividad también se incluye una parte con CAS, con el objetivo de ver otra forma de realizar un análisis de datos y comprobarlo mediante un ajuste en términos del factor de correlación (R^2). Para esta parte Ibarra (2015), introduce lo siguiente:

“Dentro del sistema CAS, se pueden graficar datos. Utilizando la hoja de cálculo ingrese los datos experimentales del problema anterior dentro de esta sección. Para elegir la hoja de cálculo seleccione **Home**, y después **Hoja de Cálculo**. En la celda que tiene la letra A (celda superior) ingrese

los años y llame dicha columna “yrs” y en la celda que contiene la letra B ingrese los datos de C-14 y llame dicha columna “C14”. Dentro de **Home**, elija **Datos y Estadísticas** y presione **Enter**. Utilizando el **Navegador**, mueva la flecha hacia abajo y elija que la variable x sea “yrs”. Después, mueva la flecha hacia la izquierda y elija que la variable y sea “C14”. Ahora deben aparecer los datos graficados.

Se puede hacer un ajuste de datos para los datos graficados. Dentro de la gráfica, presione **Menú, 4: Analizar, 6: Regresión**. Dentro de estas opciones existen varios ajuste disponibles.”

En el inciso II-g se pide al alumno hacer un ajuste lineal y después un exponencial con base en los datos del inciso II-a, de tal manera que pueda hacer un análisis comparativo y así pueda determinar cuál se ajusta mejor.

En la figura 13 se observa lo que aparece dentro de CAS al hacer ambos ajustes.

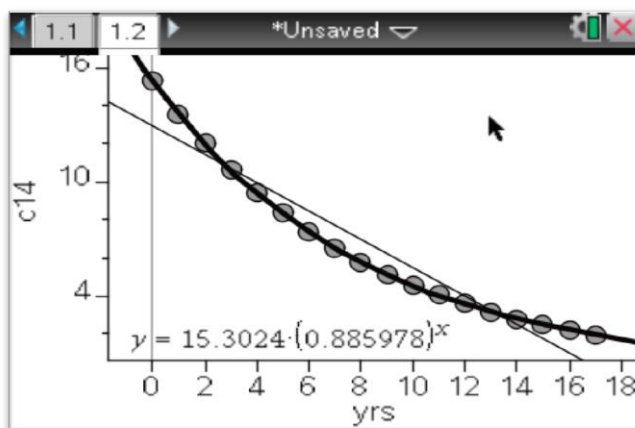


Figura 13: Evidencia de ajuste lineal y exponencial dentro de CAS

Como se muestra en la figura, se ajusta mejor la función exponencial. Para comprobar lo anterior el alumno responde el inciso II-g, obteniendo lo siguiente:

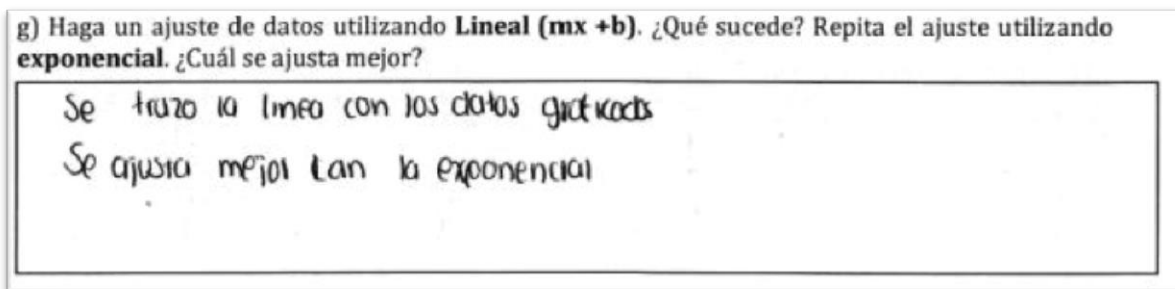


Figura 14: Evidencia del análisis comparativo entre ajuste lineal y exponencial

Observaciones

De acuerdo a Duval (1995), es necesario que el estudiante viaje a través de registros de representación semiótica para poder exteriorizar sus representaciones mentales, con lo cual dentro de esta actividad queda demostrado que los estudiantes han pasado de un registro a otro utilizando las representaciones gráficas generadas en un sistema CAS.

4.1.3 Actividad 3. Pendientes como Función

En esta actividad se tienen los siguientes objetivos didácticos:

- Desarrollar la expresión $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$.
- Identificar el significado de la variable h .

Para lograr que el alumno desarrolle la expresión $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$, se introduce la forma convencional de la pendiente en la parte simbólica (parte I) de esta actividad. El inciso I-a, pide comparar la ecuación de la pendiente $m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ con la representación simbólica de la pendiente de la actividad anterior y observar las diferencias. El inciso I-b dice lo siguiente:

“b) Escriba la pendiente $\frac{f(x_{10})-f(x_9)}{x_{10}-x_9}$ introduciendo la variable n .”

Lo anterior es para introducir la variable n a la forma convencional. Es importante tomar en cuenta qué valores tendrá n para dar respuesta al inciso I-c que dice:

“c) Para la pendiente $\frac{f(x_{15})-f(x_8)}{x_{15}-x_8}$, ¿qué valor le daría a n ?”

Finalmente, falta introducir el concepto de Δx a la forma convencional, lo cual se lleva a cabo en el inciso I-d, mediante la siguiente indicación:

“d) Si $\Delta x = x_{n+1} - x_n$, ¿a qué es igual x_{n+1} ? Expresa la pendiente del inciso b, utilizando los términos Δx y x_n .”

Es necesario que en este inciso el alumno tenga comprendido el concepto de pendiente y así pueda representarlo como una función; en la figura 15, se observa el razonamiento que hacen los estudiantes.

d) Si $\Delta x = x_{n+1} - x_n$, ¿a qué es igual x_{n+1} ? Expresa la pendiente del inciso b, utilizando los términos Δx y x_n .

$$\Delta x = x_{n+1} - x_n \rightarrow x_{n+1} = 1$$

$$\Delta x = x_{n+1} - x_n$$

$$\Delta x + x_n = x_{n+1}$$

$$m_{10} = \frac{f(\Delta x + x_n) - f(x_n)}{(x_n + \Delta x) - x_n} = m_{10} = \frac{f(\Delta x + x_n) - f(x_n)}{\Delta x}$$

Figura 15: Evidencia de la pendiente como función.

Para llegar a la evidencia presentada en la figura 15, los alumnos hacen el siguiente análisis:

Integrante 1: Aquí no le entendemos, porque dice que la pendiente también se puede escribir como $\frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2}$ o $\frac{y_4 - y_3}{x_4 - x_3}$ o $\frac{y_4 - y_1}{x_4 - x_1}$ o $\frac{y_n - y_m}{x_n - x_m}$ donde m y n son subíndices. Si $y_n = f(x_n)$ y $n = 10$, se puede escribir como $y_{10} = f(x_{10})$. Escriba la pendiente $\frac{f(x_{10}) - f(x_9)}{x_{10} - x_9}$ introduciendo la variable n. ¿entonces, aquí sería m_{10} y m_9 ?

Investigador: Si te dice que la variable n va a ser igual a 10, tienes que $f(x_{10}) - f(x_9)$, si lo que va a introducir es una variable, ¿a cuál variable le darías algún valor?, ¿o qué valor le darías a esa variable?, de esos que tienes en esa fórmula.

Integrante 1: El diez (10).

Investigador: ¿Entonces nueve a qué sería igual?

Integrante 1: A m

Investigador: Puede ser, ¿pero si te lo pide en términos de n ?

Integrante 1: A “ n ” menos 1.

Investigador: Entonces cómo quedaría la fórmula, si le das el valor de 10 a n , cómo quedaría 9, si n es igual a 10 cómo quedaría 9?

Integrante 1: “ n ” menos 1.

Investigador: Entonces ¿cómo lo expresarías en la fórmula?

Integrante 1: Sería $\frac{f(x_n)-f(x_{n-1})}{x_n-x_{n-1}}$.

Integrante 2: (Lee la pregunta del inciso I-c) Para la pendiente $\frac{f(x_{15})-f(x_8)}{x_{15}-x_8}$, ¿qué valor le daría a n ?

Integrante 1: Entonces aquí para la pendiente sería $n=15$ y $\frac{f(x_n)-f(x_{n-7})}{x_n-x_{n-7}}$.

Integrante 2: (Lee la pregunta del inciso I-d) Si $\Delta x = x_{n+1} - x_n$, ¿a qué es igual x_{n+1} ?
Expresa la pendiente del inciso b, utilizando los términos Δx y x_n .

Integrante 1: Sería igual a uno ¿no? Si $\Delta x = x_{n+1} - x_n$, es uno porque le estaría restando -
 n a $n+1$.

Investigador: Si te está dando la igualdad de $\Delta x = x_{n+1} - x_n$, ¿a qué es igual x_{n+1} ?

Integrante 1: Yo diría que a uno porque a $n+1$ le estas restando uno.

Investigador: Si tienes una correspondencia, qué es lo que te está dando, ¿Qué harías tú para obtener el valor de x_{n+1} , partiendo de la fórmula?

Integrante 1: Le daría valores a la n .

Investigador: ¿Y eso para qué?

Integrante 1: Por ejemplo si la n vale nueve más uno, entonces x_{10} menos x_9 , que sería diez menos nueve igual a x_1 .

Investigador: Sí, pero no sabes a qué es igual x , o sea estos solo son subíndices, los cuales solo te sirven para que los ubiques en la recta, pero no sabes a cuánto es igual x , ya que es una variable. Entonces como harías tú para encontrar el valor de esta, si tienes una correspondencia nada más.

Integrante 1: Se hace un despeje.

Investigador: ¿Qué despejarías?

Integrante 2: Hay que despejar x_{n+1} .

Después de concluir el despeje los alumnos hacen la sustitución en la ecuación de la pendiente, de tal manera que les quedó en términos de Δx y de x_n . Obteniendo la evidencia de la figura 15.

Observaciones

Partiendo del diálogo anterior y de las respuestas dadas por los alumnos a los diferentes incisos, como se mencionó anteriormente, era necesario que los estudiantes contestaran de manera correcta los incisos I-b y I-c para poder hacer el análisis correspondiente y dar respuesta a la indicación del inciso I-d.

Es evidente que los estudiantes mostraron un poco de confusión con respecto a la indicación del inciso I-d, debido a que no podían comprender a qué era igual x_{n+1} partiendo de la correspondencia $\Delta x = x_{n+1} - x_n$, por lo cual fue necesaria la intervención del investigador, de manera que para orientarlos les planteó cuestionamientos que permitieron al alumno ir construyendo un razonamiento correcto con fundamento en sus propias deducciones y así lograr el objetivo propuesto.

Para alcanzar el segundo objetivo, es indispensable que el alumno identifique la forma introducida para la pendiente, la cual se encuentra en el inciso II-a ($\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$), ya que es la ecuación que se maneja en el resto de las actividades.

Para la introducción del concepto h , Ibarra (2015) introduce la siguiente figura:

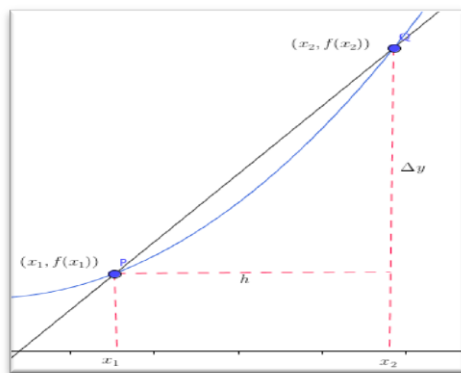


Figura 16: Introducción del concepto h .

Con base en el razonamiento que haga el estudiante sobre el significado de h de acuerdo a la gráfica, podrá dar respuesta al inciso II-b que plantea lo siguiente:

“b) Observando la figura 1, ¿qué representa y a qué es igual h ?”

La importancia de esta pregunta radica en que de ella dependerá dar respuesta al cuestionamiento que se presenta en el inciso II-c, el cual pide que se introduzca la variable h en la ecuación de la pendiente, obteniendo dos formas de expresar la pendiente, utilizando Δx o h . La indicación que hace el inciso II-c es la siguiente:

“c) Utilizando h , ¿cómo queda la expresión de la pendiente?”

La respuesta dada por los estudiantes respecto al inciso II-b es la siguiente:

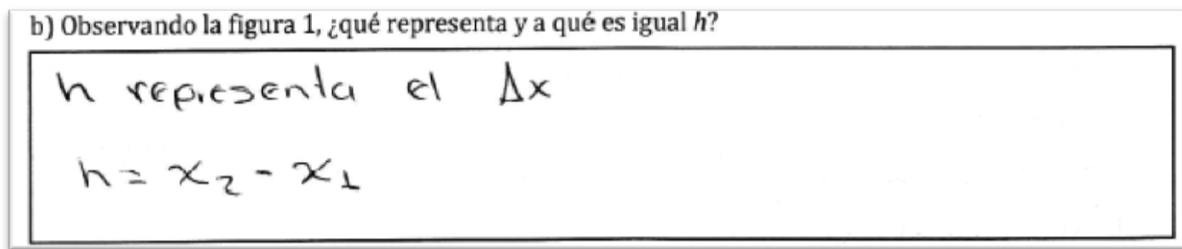


Figura 17: Significado de la variable h .

Siguiendo el razonamiento de la variable h , los alumnos llegan al inciso II-c con la siguiente respuesta:

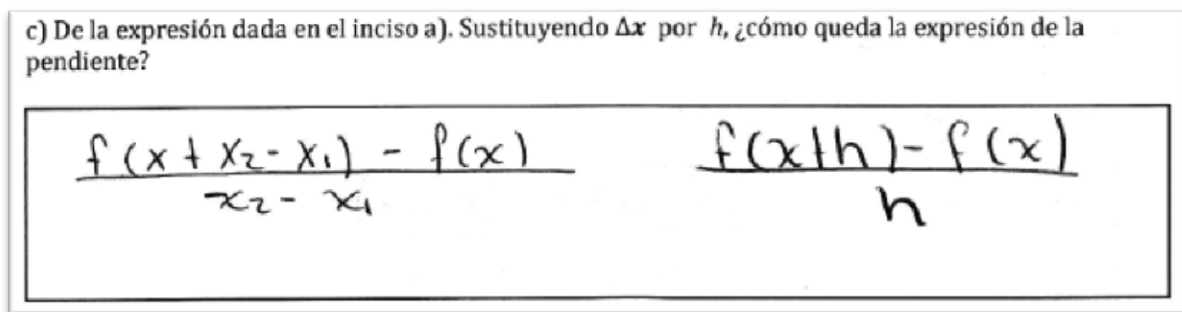


Figura 18: Evidencia de aplicación de la variable h .

Para dar respuesta a estos incisos, a continuación se presenta el diálogo generado entre los estudiantes:

Integrante 1: Tu h representa la Δx , el cambio de x entre x (*Observando la figura 16*).

Integrante 2: Entonces h es nuestra Δx .

Integrante 1: (*Lee la indicación del inciso II-c*) (De la expresión dada en el inciso a). Sustituyendo Δx por h , ¿cómo queda la expresión de la pendiente?

Los estudiantes llegan a la evidencia de la figura 18 sustituyendo correctamente h en la ecuación de la pendiente.

Observaciones

Con respecto a las evidencias generadas y al diálogo presentado se puede observar que los alumnos han logrado un avance significativo, ya que con ver únicamente la gráfica ellos

afirman que h representa la diferencia que hay entre x_1 y x_2 , y que esta diferencia es igual a Δx , con este razonamiento concluimos que logran comprender la relación entre Δx y h . Por consiguiente, al comprender el significado de h los alumnos logran introducir esta variable en la ecuación de la pendiente, logrando así el objetivo propuesto.

Tomando en cuenta el análisis que se hizo para llegar a ambos objetivos, se concluye que los estudiantes razonan y comprenden el significado de la pendiente así como su aplicación al llegar a conceptualizarla como Función.

Es importante que el estudiante comprenda qué significado tiene la variación de Δx o h dentro de la función de la pendiente obtenida en el inciso II-c, para lo cual en la actividad el inciso II-f pide representar la función obtenida en el inciso II-e en un punto específico, obteniendo la ecuación mostrada en la figura 19.

f) Si el primer punto es (1, 3), exprese la ecuación del inciso anterior con estos punto. ¿Qué observa de esta ecuación?

$$\frac{F(3^2 + 2(3)) - F(1^2 + 2(1))}{(1+h)^2 - 2(1+h) - (1^2 + 2(1))}$$

Figura 19: Representación de la pendiente como función.

Es importante mencionar que la expresión anterior también puede estar en términos de Δx . Esta expresión es el punto de partida para la introducción del límite, pero antes se debe ver qué significado tiene la variación de Δx o h . En la sección con CAS (parte III) se observa dicha variación utilizando la hoja de cálculo. Se introducen diferentes valores (0.1, 0.01, 0.001, 0, -0.001, -0.01, -0.1) mientras que en la otra columna se introduce la expresión del inciso II-f. Los incisos III-b, III-c, III-d y III-e se enfocan en las observaciones de la hoja de cálculo. La parte de reflexión sobre lo anterior se presenta en los incisos III-f, III-g y III-h de la siguiente forma:

“f) Cuando Δx o h tiende a cero, ¿a qué tiende la pendiente?”

“g) Considere la observación del inciso anterior, ¿es igual al valor cuando Δx o $h = 0$?”

“h) ¿Qué puede concluir de las observaciones de los incisos f y g?”

Para los incisos anteriores los alumnos obtienen las siguientes respuestas:

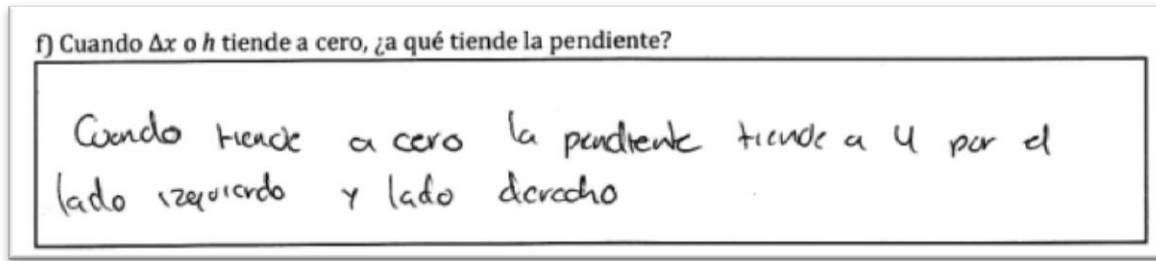


Figura 20: Evidencia del análisis de la variación de Δx cuando tiende a 0.

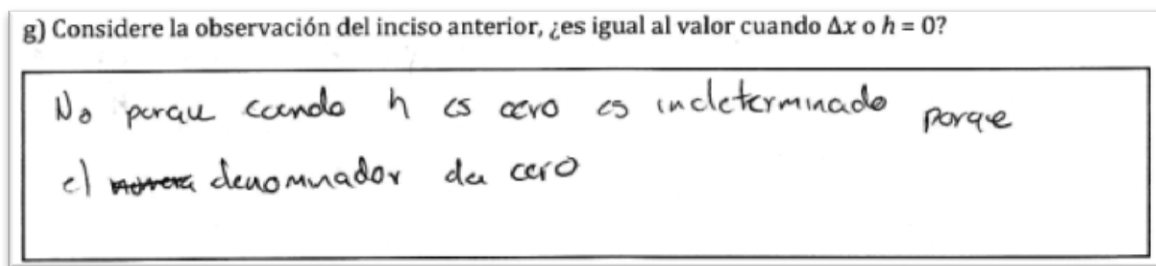


Figura 21: Evidencia del análisis de la variación de Δx cuando es igual a 0.

Observaciones

El propósito de estos incisos es que el alumno pueda generar una de las ideas fundamentales del límite, como se observa en las figuras 20 y 21 los estudiantes logran lo propuesto con la medición de las herramientas de la calculadora Ti-Nspire CX CAS.

Cuando los alumnos comprenden y aplican el concepto de Δx queda demostrada la teoría de Duval (1995), al pasar de un registro a otro. Por otra parte como menciona Vygotsky (1986), el nivel de abstracción de los estudiantes para esta actividad se debe a la mediación de instrumentos, ya que desempeña una función importante al brindar a los alumnos un estímulo para obtener una respuesta.

4.1.4 Actividad 4. Límites

Los objetivos didácticos de ésta actividad son:

- Relación de la velocidad promedio con la velocidad instantánea.
- Entender el concepto de Límite matemático.
- Comprobar gráficamente y analíticamente el límite.

Con la finalidad de facilitar el entendimiento del concepto de límite matemático Ibarra (2015), hace la introducción de cambios promedios e instantáneos. Por lo que para el inciso I-a y I-b se plantea lo siguiente:

“Suponga que quiere calcular la velocidad promedio al viajar en una carretera recta. Si pasa el kilómetro 100 a las 12:00 y el kilómetro 140 a las 12:30:”

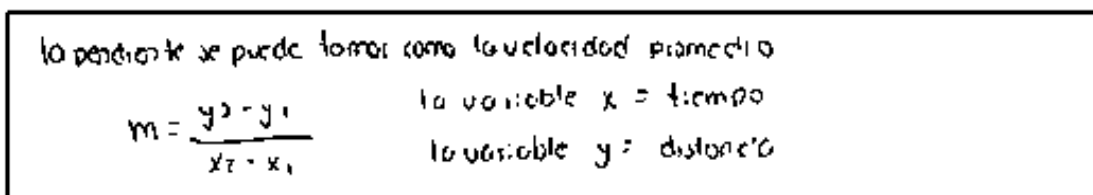
Para lograr el primer objetivo, se requiere que el alumno tenga claro el significado de la ecuación de la pendiente para relacionarlo con la velocidad promedio y posteriormente con la velocidad instantánea. Es por ello que el propósito de los incisos I-a y I-b es formular la ecuación de la velocidad promedio mediante las siguientes indicaciones:

“a) Escriba la operación que realiza para obtener la cantidad que se viajó y para saber en cuánto tiempo se viajó”

“b) Utilizando las expresiones del inciso anterior, escriba la operación para calcular la velocidad promedio.”

Finalmente el inciso I-d identifica la relación que existe entre la velocidad promedio y la pendiente. Al dar respuesta a este inciso los estudiantes llegan a la evidencia que se muestra en la figura 22:

d) Relacione la velocidad promedio con la ecuación de la pendiente. ¿Qué observa?



Handwritten student response showing the relationship between average velocity and slope. The text reads: "la pendiente se puede tomar como la velocidad promedio". Below this, the slope formula is written as $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$. To the right of the formula, it says "la variable x = tiempo" and "la variable y = distancia".

Figura 22: Evidencia de la relación entre velocidad promedio y Pendiente.

Al obtener la evidencia anterior, los estudiantes generan el siguiente análisis:

Integrante 1: (Lee la indicación del inciso I-d) Relacione la velocidad promedio con la ecuación de la pendiente. ¿Qué observa?

Integrante 2: Es la misma, nada más que la variable “y” representa la distancia y la “x” representa el tiempo. Pero es la misma ecuación.

En el siguiente bloque de preguntas se establece lo que significa una velocidad instantánea y cómo se calcula. Para introducir el tema se explica con el texto:

“Por otra parte, aún que la velocidad promedio es una cantidad fija, es casi seguro que la velocidad instantánea (la velocidad indicada por el velocímetro), varía de un momento a otro.”

El cálculo de la velocidad instantánea, requiere de diferencias de tiempo muy pequeñas. Por lo tanto, Ibarra (2015) introduce en la Parte I después del inciso I-d, una situación en donde la posición (una piedra) se pueda calcular con una función, la cual se presenta de la siguiente forma:

“Se lanza verticalmente una piedra del piso a una velocidad de 96 ft/s. Despreciando la resistencia del aire, la posición de la piedra después de t segundos está dada por la función:

$$s(t) = -16t^2 + 96t$$

La posición s es medida en pies, con $s = 0$ corresponde al piso mientras que t representa el tiempo en segundos.”

En el inciso I-h, se le solicita al alumno que escriba la ecuación de la velocidad promedio de acuerdo a lo descrito anteriormente, por medio de la siguiente indicación:

“h) Si nos interesa calcular la velocidad instantánea a $t_0 = 1$, se calcula la velocidad promedio sobre el intervalo $[1, t]$. Escriba la ecuación de la velocidad promedio.”

Para dar respuesta al inciso I-h, los estudiantes llegan a la evidencia que se muestra en la figura 23:

h) Si nos interesa calcular la velocidad instantánea a $t_0 = 1$, se calcula la velocidad promedio sobre el intervalo $[1, t]$. Escriba la ecuación de la velocidad promedio.

$$V_m = \frac{s(t) - s(1)}{t - 1} = \frac{(-16t^2 + 96t) - (-16(1)^2 + 96(1))}{t - 1}$$
$$= \frac{(-16t^2 + 96t) + 16 - 96}{t - 1} = \frac{(-16t^2 + 96t) - 80}{t - 1}$$

Figura 23: Evidencia de velocidad promedio.

Al resolver el inciso I-h los alumnos tuvieron el siguiente diálogo:

Integrante 1: (Lee el inciso I-h) Si nos interesa calcular la velocidad instantánea a $t_0 = 1$, se calcula la velocidad promedio sobre el intervalo $[1, t]$. Escriba la ecuación de la velocidad promedio.

Integrante 2: La velocidad instantánea en ese punto ($t_0 = 1$) es igual a $Vm \frac{s(t)-s(1)}{t-1}$.

Investigador: A ver muchachos, allí cómo se vería esa ecuación (señalando ecuación de Vm) si utilizan la expresión del desplazamiento en términos de t y t_0 .

Integrante 1: ¿El desplazamiento es la que nos está dando acá? (señala la ecuación para la posición de la piedra $S(t) = -16t^2 + 96t$).

Investigador: Efectivamente, ahora ¿cómo se vería la velocidad promedio utilizando la expresión del desplazamiento cuando $t_0 = 1$?

Integrante 1: Entonces sería poner toda la expresión.

Investigador: ¿Cómo quedaría la ecuación si utilizas toda la expresión como tú dices?

Integrante 1: (Escribe la ecuación expresada en la figura 23).

Habiendo contestado el inciso I-h y siguiendo el primer objetivo, es necesario que los alumnos den respuesta al inciso I-i, el cual establece la relación entre la velocidad promedio y la velocidad instantánea. Ibarra (2015), expresa dicha relación dentro de la actividad como:

“La velocidad instantánea en el punto $t = t_0$ se determina al calcular la velocidad promedio sobre el intervalo $[t_0, t_1]$. Cuando t_1 se acerca a t_0 , la velocidad promedio típicamente se acerca a un número único, el cual es la velocidad instantánea. Lo anterior significa, que es un instante en donde el intervalo es muy pequeño. Este número se conoce como un límite, lo cual se puede expresar matemáticamente como:

$$v_{instantanea} = \lim_{t \rightarrow t_0} v_{promedio}”$$

Así mismo, el inciso I-i cumple con el segundo objetivo, ya que es necesario expresar el límite para un caso en particular, es decir, la velocidad instantánea de la piedra en un tiempo específico. Dicho inciso indica lo siguiente:

“i) Sustituya la velocidad promedio en del inciso h de la expresión de la velocidad instantánea. En donde $t_0 = 1$.”

Dando respuesta a este inciso, los alumnos generan la evidencia siguiente:

i) Sustituya la velocidad promedio en el inciso h de la expresión de la velocidad instantánea. En donde $t_0 = 1$.

$$V_{\text{instantánea}} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{-16(t)^2 + 96(t) - 80}{t - 1}$$

Figura 24: Evidencia de la relación entre velocidad promedio y velocidad instantánea, así como concepto de límite matemático.

Observaciones

Las evidencias obtenidas anteriormente, nos demuestran que los alumnos entienden la ecuación de la pendiente ya que logran relacionarla con la ecuación de la velocidad promedio. Al comprender dicha relación, el inciso I-h requiere del empleo de la ecuación de la velocidad promedio con la ecuación dada en la actividad para la posición de la piedra. Para poder dar respuesta a este inciso los alumnos deben entender la aplicación de la ecuación de la velocidad promedio, pero no les queda claro que la expresión que deben utilizar es la ecuación de la posición de la piedra para los tiempos (t_0, t) cuando $t_0 = 1$, por lo cual, fue necesaria la intervención del investigador para que por medio de cuestionamientos los estudiantes razonaran sobre la ecuación que estaban empleando, y sí cumplía con lo que se les indicaba en el inciso I-h. En su intervención, el investigador les sugiere utilizar la ecuación del desplazamiento tal cual está plasmada en la actividad, ya que ellos solo la expresaban como $s(t)$ y $s(1)$, pero no la ponían en forma desarrollada y era necesario la expresión completa para poder seguir al inciso I-i.

Cuando los estudiantes llegan al inciso I-i observan la importancia de hacer el desarrollo de la ecuación de la velocidad promedio en términos de la posición de la piedra, para así poder relacionarla con la ecuación de la velocidad instantánea; obteniendo la ecuación mostrada en la figura 24.

De acuerdo con lo anterior se puede concluir que los alumnos hacen un razonamiento correcto acerca de la relación entre la velocidad promedio y la velocidad instantánea. Se concluye que los estudiantes no muestran confusión al dar respuesta al inciso I-h, únicamente no estaban poniendo atención en la indicación, porque no utilizaban la ecuación del desplazamiento desarrollada. Al llegar al inciso I-i los estudiantes contestan rápidamente sin necesidad de la intervención del investigador, ya que del inciso anterior logran comprender la importancia del uso de la expresión del desplazamiento en la velocidad promedio. Como contestan correctamente los incisos antes mencionados, se cumplen los dos primeros objetivos para esta actividad.

Siguiendo el desarrollo de la actividad 4, el tercer objetivo plantea que es necesario que el alumno deduzca y comprenda el significado del concepto de Límite a través de un análisis gráfico y otro analítico, utilizando las herramientas de la calculadora y las gráficas generadas en ella.

En la parte II de la actividad, Ibarra (2015) introduce una explicación acerca del concepto informal del límite de acuerdo al siguiente texto:

“El límite $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ se refiere a un límite de *dos-lados*, porque $f(x)$ se acerca a L cuando x se acerca a valores de x menores de a y también para valores de x mayores de a . Para algunas funciones, es conveniente analizar límites de *un lado* denominados límites de mano izquierda y de mano derecha. La definición se puede resumir como:

i. **Límite de mano derecha:** Suponga que f está definida para todos los valores de x cercanos a a y $x > a$. Si $f(x)$ es arbitrariamente cercana a L para todos los valores suficientemente cercanos a a con $x > a$, se escribe: $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$.

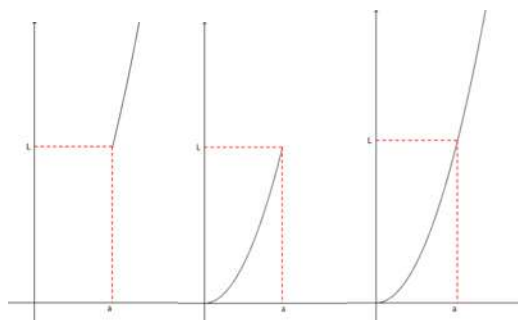
Y se dice que el límite de $f(x)$ cuando x se acerca a a por la derecha es igual a L .

ii. **Límite de mano izquierda:** Suponga que f está definida para todos los valores de x cercanos a a y $x < a$. Si $f(x)$ es arbitrariamente cercana a L para todos valores suficientemente cercanos a a con $x < a$, se escribe: $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L$.

Y se dice que el límite de $f(x)$ cuando x se acerca a a por la izquierda es igual a L .”

Para comprender la explicación anterior, es necesario que los estudiantes den respuesta al II-a con la siguiente indicación:

“a) Considere las siguientes gráficas y relacione la gráfica con el límite que le corresponde: 1. i) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$, 2. ii) $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$, 3. iii) $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L$ ”



El análisis gráfico y analítico que los alumnos deben llevar a cabo para entender el límite, comprende de los incisos II-b, II-c, II-h y II-j, donde los alumnos deben de utilizar la

gráfica dentro de CAS y el comando de “trazar”. Para poder dar respuesta a estos incisos se trabaja con las funciones $f(x) = \frac{x^3-8}{4(x-2)}$ y $f(x) = \frac{|x|}{x}$. El inciso II-b pide trazar la función $f(x) = \frac{x^3-8}{4(x-2)}$, para analizarla y deducir qué valores de x no puede tomar. A simple vista no se ve ninguna anomalía dentro de ella, por lo que en el inciso II-c se hace uso del comando “trazar”, y así poder observar lo que pasa cuando $x=2$ por medio del cuestionamiento siguiente:

“ c) Compruebe utilizando el comando de trazado. (Dentro de la gráfica, presione **Menú, 5: Trazado, 1: Trazado de gráfico** y elija el número y presione **Enter**). ¿Qué sucede?”

Por otro lado, el inciso II-h plantea la representación gráfica de los siguientes casos:

$$\text{i) } \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^3-8}{4(x-2)}, \text{ ii) } \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^3-8}{4(x-2)} \text{ y iii) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3-8}{4(x-2)}$$

Mientras que el inciso II-j pide graficar los diferentes casos para la función $f(x) = \frac{|x|}{x}$, mediante lo siguiente:

“j) Represente gráficamente: i) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x}$, ii) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x}$, iii) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}$.”

Posterior al análisis de los incisos II-c, II-h y II-j, los alumnos deben dar respuesta a los incisos II-l y II-m, donde se evalúan los límites $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3-8}{4(x-2)}$ y $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}$ respectivamente, utilizando los valores y gráficas generadas para posteriormente responder el inciso II-n el cual plantea lo siguiente:

“n) ¿Qué relación existe entre el límite, límite de la derecha y límite de la izquierda?”

Haciendo un razonamiento correcto de todos los incisos, finalmente el alumno llegará a la conceptualización del límite.

Dando respuesta a los incisos anteriores, los alumnos deducen lo siguiente:

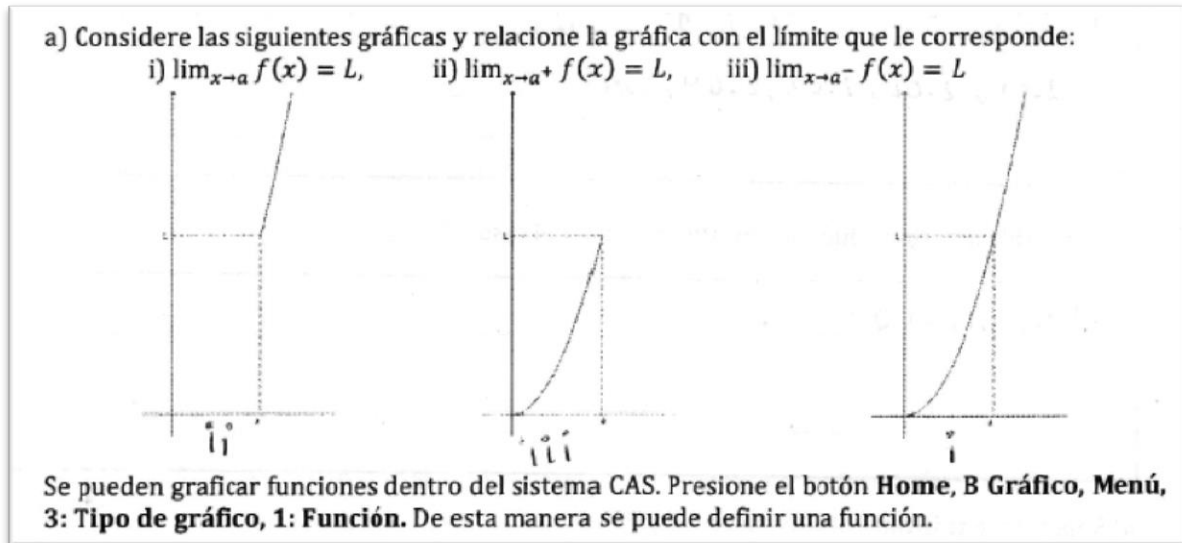


Figura 25: Evidencia de representación gráfica del Límite.

Con respecto al inciso II-c, se tiene la siguiente evidencia:

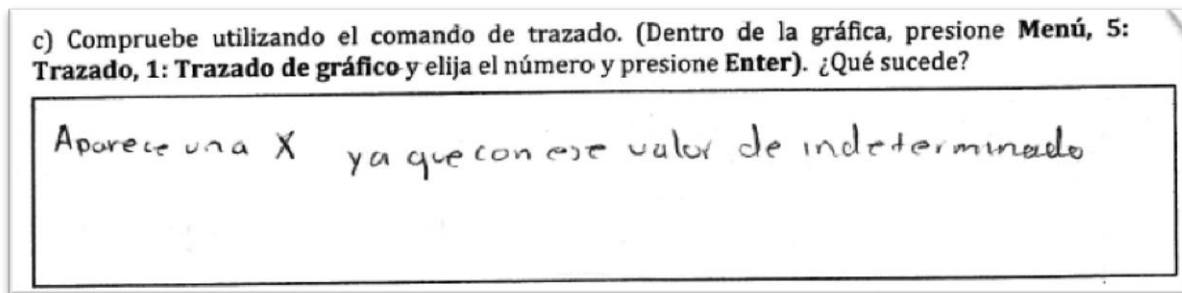


Figura 26: Evidencia del análisis de la herramienta de CAS

Para dar respuesta al inciso II-h y II-j los alumnos llegan a las siguientes respuestas:

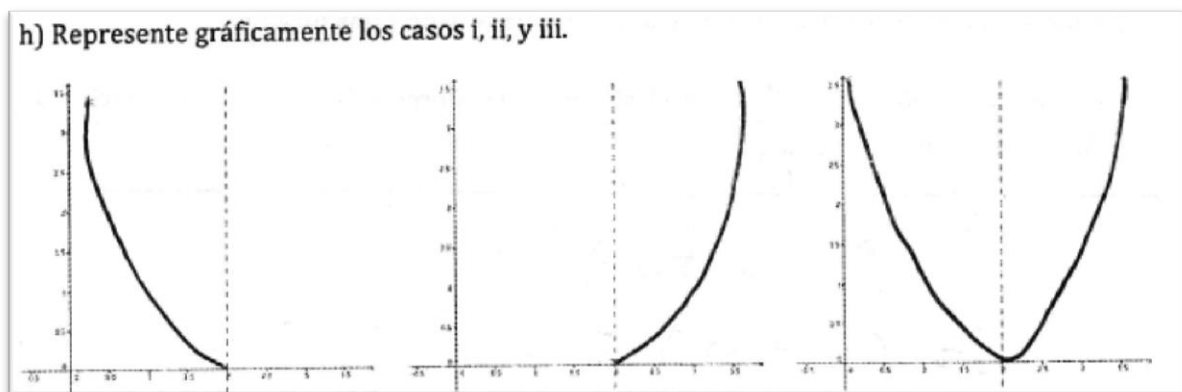


Figura 27: Evidencia del análisis gráfico de Límite continuo.

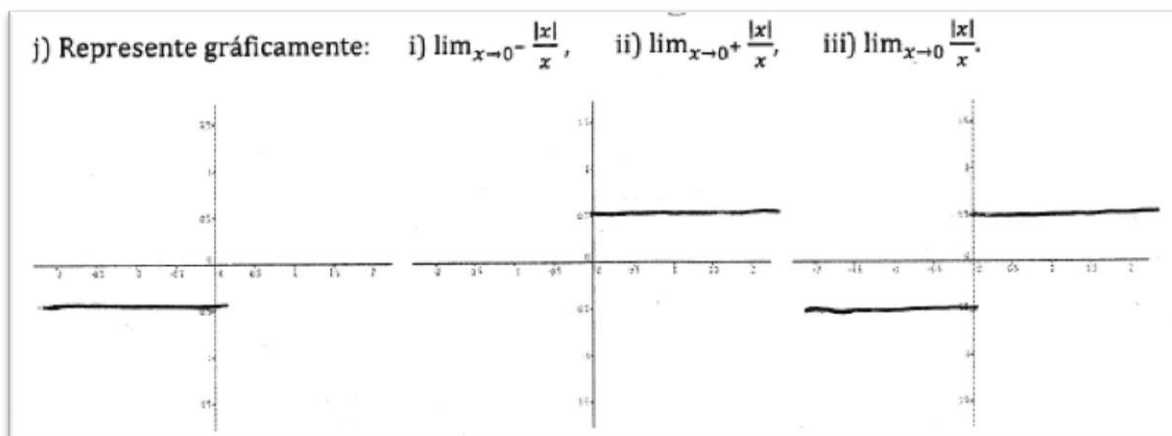


Figura 28: Evidencia del análisis gráfico de Límite discontinuo.

Para dar respuesta al inciso II-n, es necesario que los alumnos hagan un análisis gráfico y otro analítico de los incisos II-c, II-h y II-j; ya que a través de ellos el alumno podrá llegar al concepto de límite y responder la siguiente interrogante: ¿Qué relación existe entre el límite, límite de la derecha y límite de la izquierda?

La respuesta correcta que dan los alumnos se presenta a continuación:

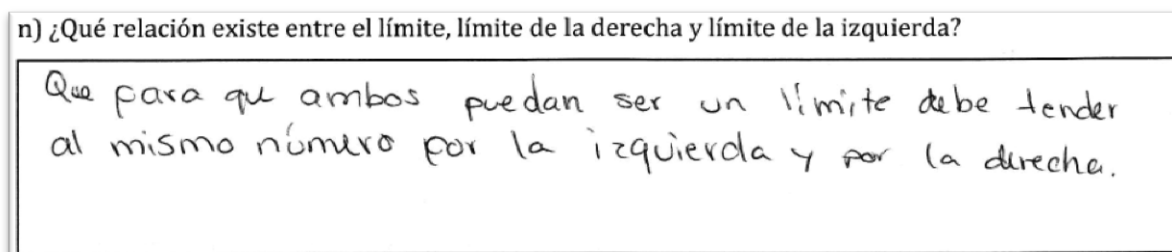


Figura 29: Evidencia de la conceitualización de Límite.

Para llegar a la evidencia anterior los alumnos hacen el siguiente análisis:

Integrante 2: (Lee la pregunta del inciso II-n). ¿Qué relación existe entre el límite, límite de la derecha y límite de la izquierda?

Integrante 1: Que cuando es límite llegan a un mismo punto.

Integrante 2: O sea a un punto específico.

Integrante 1: Y el límite derecho sería como en este caso ¿no? (Señalando la gráfica del inciso II-j para los valores del límite por la derecha).

Investigador: Observen las gráficas de los incisos II-h y II-j y díganme qué comportamiento hay en cada una de ellas.

Integrante 1: Que en este (*señala gráficas del inciso II-h*) se llega a un mismo punto por los dos lados, y aquí (*señala gráficas del inciso II-j*) se llega a un valor paralelo en diferentes direcciones.

Investigador: Observen detalladamente sus gráficas, ¿Qué pasa en las gráficas del inciso II-h?

Integrante 1: No llegan a converger como tal pero si tienden a un mismo valor.

Investigador: Ahora en la gráfica del inciso II-j, ¿qué pasa?

Integrante 1: No llegan al mismo valor.

Investigador: Entonces ¿Cuál es la relación entre el límite por la derecha y el límite por la izquierda?

Integrante 1: Que el límite como tal tiene que llegar a un mismo valor tanto por la izquierda como por la derecha para que pueda existir, y si no llega no va a ser un límite, o sea no existe.

Observaciones

Analizando las evidencias generadas, es decir, gráficas, tablas y las respuestas dadas por los alumnos se concluye que logran conceptualizar el límite por medio de dos tipos de análisis, uno analítico y otro gráfico; ya que ambos les permiten construir el concepto de manera gradual con ayuda de la calculadora TI-Nspire CX CAS. Con base en lo anteriormente mencionado, se cumple el tercer objetivo de esta actividad.

CAPITULO V

CONCLUSIONES

De acuerdo a lo establecido en la literatura observamos que innumerables estudios han demostrado que técnicas de enseñanza pasivas no son adecuadas para un aprendizaje significativo. En este trabajo de tesis, la mediación se lleva a cabo, con la calculadora TI-Nspire CX CAS, ya que es el instrumento mediador entre el alumno y los objetos matemáticos contenidos en las actividades, y es así que a través de las diferentes representaciones semióticas generadas, las discusiones individuales y grupales, el alumno logra construir gradualmente el concepto de límite.

El uso de las tecnologías de la información y la comunicación (TIC's) en los diferentes niveles y sistemas educativos tienen un impacto significativo en el desarrollo del aprendizaje, ya que han mostrado que pueden ser un gran apoyo para los docentes al verse como una herramienta que permite a los estudiantes tener más elementos (visuales y auditivos) para enriquecer el proceso de enseñanza-aprendizaje.

Las TIC pueden apoyar las investigaciones sobre el aprendizaje de los alumnos en varias áreas de las matemáticas; pues se espera que cuando dispongan de ellas logren concentrarse en tomar decisiones, razonar y resolver problemas, más que en el apoyo operacional de las calculadoras. La existencia, versatilidad y poder de las TIC, hacen posible y necesario reexaminar qué matemáticas deben aprender los alumnos, así como la mejor forma en que puedan aprenderlas.

5.1 Conclusiones como respuestas a las preguntas de Investigación

Conclusión No.1

Al ir contestando las actividades los estudiantes van relacionando los conceptos e ideas implícitos en las mismas, tal que al manipular la calculadora, deben hacer el análisis de los diferentes registros de representación y así transitar de un registro a otro, con lo cual van construyendo un razonamiento propio que les permite conceptualizar el límite.

Conclusión No.2

Cuando los estudiantes dan respuesta a las actividades con apoyo de la calculadora TI-Nspire CX CAS, logran desarrollar habilidades como el análisis, el razonamiento, la observación y la reflexión, ya que por la estructura didáctica de las actividades interactúan con diferentes tipos de representación y así van construyendo de manera gradual el concepto.

Conclusión No. 3

Los alumnos utilizan como estrategia de solución las discusiones generadas dentro de los equipos, derivadas de las respuestas que dan a las interrogantes que se plantean durante el desarrollo de la actividad, dichas discusiones permiten que vayan construyendo el concepto de manera gradual.

Conclusión No. 4

Un factor importante que permitió que los alumnos no mostraran dificultades con el uso de la calculadora, es la estructura didáctica de las actividades que los llevan paso a paso a resolverla.

5.2 Conclusión General

El uso de la calculadora TI-Nspire CX CAS es parte fundamental de éste proyecto, además de las actividades de aprendizaje, ya que gracias a su estructura didáctica los estudiantes lograron aprender el concepto de límite. Asimismo, se fortaleció el trabajo en equipo por medio del aprendizaje colaborativo y cooperativo.

Partiendo de las respuestas dadas por los alumnos a los diferentes incisos y desde el punto de vista de la aprehensión del objeto matemático, se puede decir que los alumnos interactúan con diferentes tipos de representación, por lo que podemos concluir que han alcanzado un buen nivel de abstracción en el tema abordado logrando así un aprendizaje integral del concepto.

Por otra parte, debemos ser conscientes de que la preparación que los estudiantes poseen es insuficiente en este tipo de tareas y que la habilidad para interactuar entre diferentes registros de representación no surge como una acción espontánea del sujeto, se requiere de aprendizaje; el cual se logra enfrentando a los alumnos a situaciones problemáticas que necesiten del tránsito entre las distintas representaciones semióticas (Duval, 2006), que requiere la noción matemática que es objeto del aprendizaje.

Sin embargo, este trabajo de investigación nos permite ver que es necesario seguir investigando acerca de nuevas teorías y trabajar arduamente en el aula para ponerlas en práctica, analizando y tratando de mejorar no sólo una labor docente en pos del buen desempeño de los estudiantes, sino también cuidar de que el alumno pueda construir conceptos matemáticos.

BIBLIOGRAFÍA

- Artigue, M. (2002). Learning mathematics in a CAS environment: The genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. *International Journal of Computers for Mathematical Learning* 7(3), 275-291.
- Antinucci, F. (2001). *Computer per un figlio-giocare, apprendere, creare*. Editori Laterza, Roma.
- Antinucci, F. (2001). *La scuola si é rotta-perché cambiano i modi di apprendere*. Editori Laterza, Roma.
- Atkins, N., Creegan, A. y Soan, P. (1995). You can lead students to DERIVE, but can you make them think? *International DERIVE Journal*, 2(1), 63-82.
- Balacheff, N. (1994). La transposition informatique. Note sur un nouveau problème pour la didactique. En M. Artigue et al. (eds.), *Vingt ans de Didactique des Mathématiques en France* (pp. 364-370). Grenoble: La Pensée Sauvage.
- Balacheff, N. (1994). La transposition informatique. Note sur un nouveau problème pour la didactique. En M. Artigue et al. (eds.), *Vingt ans de Didactique des Mathématiques en France* (pp. 364-370). Grenoble: La Pensée Sauvage.
- Balacheff, N. (1994). La transposition informatique. Note sur un nouveau problème pour la didactique. En M. Artigue et al. (eds.), *Vingt ans de Didactique des Mathématiques en France* (pp. 364-370). Grenoble: La Pensée Sauvage.
- Brody, C. (1995). Collaborative or cooperative learning? Complimentary practices of instructional reform. *The Journal of Staff, Program, & Organization Development*, 12(3), , 133-142.
- Bruffee, K. (1995). Sharing our toys - Cooperative learning versus collaborative learning. *Revista Change*, 27(1), 12-18.
- Bruffee, K. A. (1994). *Collaborative Learning: Higher Education, Interdependence and the Authority of Knowledge*. Baltimore: Johns Hopkins Press
- Caplow, J. A. H. y Kardash, C. A. M. (1995). Collaborative learning activities in gradate courses. *Innovative Higher Education*, 19(8), 207-220.
- Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19, 221-266.
- Cohen, J. (1994). The earth is round ($p < .05$). *American Psychologist*, 49, 997-1003.
- Cohen, S. & Ledford, G. (1994) "The Effectiveness of Self-Managing Teams : A Quasi - Experiment". *Human Relations*; Vol.47 (1), pp. 13 - 43.
- Davidson, N. y Worsham, T. (1992). *Enhancing thinking through cooperative learning*. New York: Teacher's College Press.

- Defouad, B. (2000). Etude de genèses instrumentales liées à l'utilisation d'une calculatrice symbolique en classe de première S. Thèse de doctorat, Université Paris 7
- Drijvers, P. (1995). White-box/black-box revisited. *The International Derive Journal*, 14(4), 3-14.
- Drijvers, P. (2000). Students encountering obstacles using a CAS. *International Journal for Mathematical Learning*, 5, 189-209
- Drijvers, P. H. M. (2003). Learning algebra in a computer algebra environment (doctoral dissertation). Utrecht, The Netherlands: Freudenthal Institute.
- Drijvers, P. y Doorman, M. (1997). The graphics calculator in mathematics education. *The Journal of Mathematical Behaviour*, 14(4), 425-440.
- Duval R. (1988) Graphiques et equations: l'Articulation de deux registres. *Anales de Didactique et de Sciences Cognitives* 1(1988) 235-253. Traducción: Gráficas y ecuaciones: la articulación de dos registros. En *Antología en Educación Matemática* (Editor E. Sánchez). Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav-IPN, México.
- Duval, R. (1993). Registres de Représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 5, 37-65.
- Duval, R. (1995). *Sémiosis et Pensée Humaine*. Berne: Peter Lang.
- Duval, R. (2006). A Cognitive Analysis of Problems of Comprehension in a Learning of Mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 61, 103-131.
- Feuerstein, R. (1980). *Instrumental enrichment: An intervention program for cognitive modifiability*. Baltimore, MD: University Park Press.
- Feuerstein, R. (1986). The foster home group experiment. En Y. Kashti y M. Arieli (Eds.), *Residential settings and the community*. Tel Aviv: Freund.
- Feuerstein, R. (1990). The theory of structural cognitive modifiability. En B. Z. Presseisen, R. J. Sternberg, K. W. Fischer, C. G. Knight, R. Feuerstein, *Learning and thinking in styles: Classroom interaction*. Washington DC: National Education Association
- Feuerstein, R., Feuerstein, S. (1991). Mediated learning experience: A theoretical review. En R. Feuerstein, P. S. Klein, A. J. Tannenbaum. *Mediated learning experience (MLE): Theoretical, psychological and learning implications*. London: Freund Publishing House.
- Feuerstein, R., Hoffman, M., Rand, Y. Jensen, M., Tzuriel, D. y Hoffman, D. (1986). Learning to learn: Mediated learning experience and Instrumental Enrichment. *Special Services in the Schools*, 3, 49-82.
- Gardner, H. (1985). *The mind's new science: A history of the cognitive revolution*. New York: Basic Books.

- Goldenberg, E. (1987). Believing is seeing: How preconceptions influence the preceptions of graphs. Proceedings of the 11th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics, Vol 1. Montreal, pp. 197-204
- Gravemeijer, K. P. E., Cobb, P., Bowers, J., y Whitenack, J. (2000). Symbolizing, Modeling, and Instructional Design. En P. Cobb, E. Yackel, K. McClain (eds.), Symbolizing and communicating in mathematics classrooms: Perspectives on discourse, tools, and instructional design, p. 225-273. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Greeno, J. G. (1997). On claims that answer the wrong questions. Educational Researcher, 26(1), 5-17.
- Greeno, J. G., Collins, A. M., y Resnick, L. B. (1996). Cognition and learning. En D. C. Berliner y R. C. Calfee (eds.), Handbook of educational psychology (pp. 15-46). New York: Simon & Schuster Macmillan.
- Guin, D., y Trouche, L. (1999). The complex process of converting tools into mathematical instruments: the case of calculators. International Journal of Computers for Mathematical Learning, 3, 195-227.
- Guin, D., y Trouche, L. (2002). Mastering by the teacher of the instrumental genesis in Cas environments: necessity of instrumental orchestrations. Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 34(5), 204-211.
- Healy, A.F. (1994). Letter detection: A window to unitization and other cognitive processes. Psychonomic Bulletin & Review, 1, 333-344.
- Heid, M. K. (1988). Resequencing skills and concepts in applied calculus using the computer as a tool. Journal for Research in Mathematics Education, 19(1), 3-25.
- Hillel, J., Lee, L., Laborde, C. y Linchevski, L. (1992). Base functions through the lens of computer algebra systems. Journal of Mathematical Behaviour, 11, 119-158.
- Hit, F., y Cortés, J. C. (2005). Reflexiones sobre el Aprendizaje del Cálculo y su Enseñanza. Morelia, Mich., México: Morevallado Editores.
- Ibarra, G. (2015). Conceptualización del cálculo diferencial a través de actividades con la calculadora TI-Nspire CX CAS. (Licenciatura, no publicada). UMSNH. Morelia, Mich
- Inhelder, B., y Cellier, G. (1992). Le cheminement des découvertes de l'enfant. Neuchâtel: Delachaux et Niestlé.
- Jacobs, G. M. (1997). Cooperative learning or just grooming students: The difference makes a difference. Singapore: RELC Seminar.
- Jacobs, G. M. (1999). Experience-dependent integration of texture and motion cues to depth. San Diego, MA: University of California
- Johnson, D. W., Johnson, R. & Smith, K.A. (1998). Active Learning: Cooperation in the College Classroom (2nd Edition). Edina, MN: Interaction Book Company.
- Johnson, D. W., Johnson, R. T., y Holubec, E. J. (1991). Cooperation in the Classroom. Edina, MN: Interaction Book Company.

- Johnson, D. W., Johnson, R. T., y Holubec, E. J. (2008). *Cooperation in the Classroom* (8e). Edina, MN: Interaction Book Company.
- Johnson, D. W., Johnson, R., Stanne, M. B., y Garibaldi, A. (1990). Impact of group processing on achievement in cooperative groups. *Journal of Social Psychology*, 130(4), 507-516.
- Kaput, J. (1996). Algebra and technology: New semiotic continuities and referential connectivity. In F. Hitt, T. Rojano, & M. Santos (Eds.), *Proceedings of the PME-NA XXI Annual Meeting*, Cuernavaca, Mexico.
- Kozulin, A. (1990). *Vygotsky's psychology: A biography of ideas*. Cambridge, MA: Harvard University Press.
- Kozulin, A. (1991). *Mediated learning and education: Vygotsky and Feuerstein*. Philadelphia, PA: Research for better Schools.
- Kutzler, B. (1994). DERIVE – the future of teaching mathematics. *International DERIVE Journal*, 1(1), 37-48.
- Lagrange, J. B. (1999). Complex calculators in the classroom: Theoretical and practical reflections on teaching pre-calculus. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 4, 51–81.
- Lagrange, J. B. (2000). L'Intégration d'Instruments Informatiques dans l'Enseignement: une Approche par les Techniques. *Educational Studies in Mathematics*, 43(1), 1-30.
- Lagrange, J. B. (2003). Learning techniques and concepts using CAS: A practical and theoretical reflection. En J. T. Fey (ed.), *Computer Algebra Systems in secondary school mathematics education* (pp. 269-283). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Lagrange, J. B. (2005). Using symbolic calculators to study mathematics. En D. Guin, K. Ruthven, y L. Trouche (eds.), *The didactical challenge of symbolic calculators* (pp. 113-135). New York: Springer.
- Lagrange, J. B. et al. (2000). De l'analyse de travaux concernant les TICE à la définition d'une problématique de leur intégration à l'enseignement, *Rapport de recherche*. IREM Paris 7.
- Lagrange, J. B. et al. (2001). A meta study on IC technologies in education. En M. van den Heuvel-Panhuizen. *Proceedings of the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematical Education*, vol 1 (pp. 111-122). Utrecht: Freudenthal Institute.
- Lagrange, J.-B., Artigue, M., Laborde, C. and Trouche, L. (2003). Technology and mathematics education: a multidimensional study of the evolution of research and innovation, In, A.J. Bishop, M.A. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick and F.K.S. Leung (Eds.), *Second International Handbook of Mathematics Education*, Kluwer Academic Publishers, pp. 239–271

- Mercer, N. (2001) Language as a medium for teaching-and-learning. In C.N. Candlin & N. Mercer (eds) English Language Teaching in its Social Context. London: Routledge.
- Mercer, N. (2001) Spoken Language in the classroom. In R. Mesthrie (ed.) The Concise Encyclopedia of Sociolinguistics.(Amsterdam: Pergamon).
- Monaghan, J. (2007). Computer algebra, instrumentation and the anthropological approach. The International Journal for Technology in Mathematics Education, 14(2), 63-72.
- Orr, M. T., (1998). Opportunities and chances: lessons learned from a community youth services effort. New York: Peter Lang.
- Panitz, T. (1997). Collaborative versus Cooperative Learning: Comparing the Two Definitions Helps Understand the Nature on Interactive Learning. Cooperative Learning and College Teaching, 8(2).
- Perkins, D. N., Salomon, G. (1988). Teaching for transfer. Educational Leadership, 46(1), 22-32
- Piaget, J. (1958). The growth of logical thinking from childhood to adolescence. AMC, 10, 12.
- Piaget, J. (1980). Cahier de la foundation archives. Genève: CIEG.
- Pierce, R. (1999). Using CAS as a scaffolding for calculus: Some observations. En W. Spunde, P. Cretchley y R. Hubbard (eds.), The Challenge of Diversity: Proceedings of the Delta-99 Symposium on Undergraduate Mathematics (pp. 172-176). Brisbane: Delta 99 Committee.
- Presseisen, B. Z. (1985). Thinking skills: Meaning, models, materials. En A. Costa (ed.), Developing minds. Alexandria, VA: ASCD.
- Presseisen, B. Z. (1992, February). Implementing thinking in the school's curriculum. Paper presented at the third annual meeting of the International Association for Cognitive Education, University of California, Riverside.
- Roman Pérez, M. y Díez López, E. (1988): Inteligencia y potencial de aprendizaje: Evaluación y desarrollo. Madrid. Cincel (Ediciones Pedagógicas)
- Slavin, R. E. (1996). Research on cooperative learning and achievement: What we know, what we need to know. Contemporary Educational Psychology, 21, 43-69.
- Slavin, R. E: (1991). Synthesis of reseach on cooperative learning. Educational Leadership, 48(5), 71-82.
- Trouche, L. (1997). A propos de l'apprentissage de fonctions dans un environnement de calculatrices, étude des rapports entre processus de conceptualisation et processus d'instrumentation. Thèse de doctorat, Univerité de Montpellier.
- Trouche, L. (2000). La parabole du gaucher et de la casserole à bec verseur: étude des processus d'apprentissage dans un environnement de calcularices symboliques. Educational Studies in Mathematics, 41, 239-264.

- Trouche, L. (2004). From Artifact to Instrument: Mathematics Teaching Mediated by Symbolic Calculators. In P. Rabardel and Y. Waern (Eds.), special issue of Interacting with Computers, Vol. 15(6) (in press).
- Verillon, P & Rabardel, P. (1995). Cognitions and artifacts: a contribution to the study of thought in relation to instrument activity. European Journal of Psychology of Education, 10 (1), 77-101.
- Vérillon, P. (2000). Instruments and cognition: Piaget and Vygotsky revisited in search of learning model for technology education. The Journal of technology Studies, 26(1), 3-10.
- Vérillon, P. y Rabardel, P. (1995). Cognition and artifacts: A contribution to the study of thought in relation to instrumented activity. European Journal of Psychology of Education, 10(1), 77-101
- Vygotsky, L. S. (1978). Mind in society: The development of higher psychological processes. Cambridge, MA: Harvard University Press
- Vygotsky, L. S. (1986). Thought and language. Cambridge, MA: MIT-Press
- Waece, A. (2003). Diccionario Pedagógico de la Asociación Mundial de Educadores Infantiles.

ANEXO I

El anexo I contiene los formatos de las actividades de aprendizaje originales, así como la actividad de primer uso de la calculadora, que se aplicaron a los estudiantes de primer año de la carrera de Ingeniería Química de la Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, para realizar el presente proyecto de tesis.

- ACTIVIDAD 1 *DIFERENCIAS*
- ACTIVIDAD 2 *PENDIENTES*
- ACTIVIDAD 3 *PENDIENTE COMO FUNCIÓN*
- ACTIVIDAD 4 *LÍMITES.*
- ACTIVIDAD DE *PRIMER USO DE LA CALCULADORA*
- GUÍA DEL PROFESOR

Actividad 1

Diferencias

Hora de Terminación:

A. Diferencia Matemática

Parte I (con lápiz y papel): Concepto General

En la vida cotidiana cuando se expresa una diferencia, típicamente se refiere a la diferencia entre un valor inicial (sustraendo) y un valor final (minuendo). *Es decir, la diferencia es igual al valor final menos el valor inicial.*

a) Completa la siguiente tabla. Pase el texto de la columna 1 a una sintaxis matemática en la columna 2 y escriba el resultado de la diferencia en la columna 3.

Texto	Sintaxis	Diferencia
Una cuenta de ahorros tiene \$2383.87 al inicio del mes y \$2873.92 al final. ¿Cuál fue la diferencia a lo largo del mes?		
Se saca un pedazo de carne a descongelar, al sacarse del congelador se encuentra a -3°C y después de 5 horas se encuentra a 24°C . ¿Cuál es la diferencia de temperatura después de las 5 horas?		
Un automóvil contiene un tanque de 90 litros. Se llena al comienzo de la semana, al final de ella se observa que el tanque contiene 32.3 litros. ¿Cuál es la diferencia de litros en el tanque a lo largo de la semana?		

b) Observe las diferencias de los tres (3) casos del inciso anterior, ¿existe una diferencia con signo negativo? En caso afirmativo, ¿qué representa con respecto a la cantidad (aumenta o disminuye)?

--

c) ¿Qué concluyes a partir del inciso anterior con respecto al signo de la diferencia? Considere signos positivos, negativos y valores de cero.

d) En la siguiente tabla en la primera columna se encuentra una secuencia de cinco (5) números, observe la tendencia uniforme (si existe alguna) y anótela en la segunda columna.

Secuencia	Observaciones
2, 4, 6, 8, 10	
45, 38, 31, 24, 17	
-8.75, -3.5, 1.75, 7, 12.25	-
1, 9, 17, 27, 41	

Considere el conjunto de datos, en donde i corresponde a una variable independiente mientras tanto u corresponde a la variable dependiente. Por lo tanto u_i corresponde a u evaluada en cualquier valor de i . Por ejemplo, u_3 indica el valor de u cuando i es 3 lo cual es 14.

i	1	2	3	4	5	6
u_i	8	11	14	17	20	23

e) Utilizando el conjunto de datos mencionado, complete la siguiente tabla.

Sintaxis	Representación Algebraica	Resultado
$u_5 - u_4$		
$u_2 - u_1$		
$u_3 - u_2$		
$u_5 - u_3$		
$u_3 - u_6$		
$u_4 - u_1$		

En matemáticas el operador delta (Δ) representa un cambio. Siendo un operador matemático, puede aplicarse a cualquier variable. Por ejemplo, Δx representa un cambio en x mientras que ΔT representa un cambio en T (muchas veces dicha variable representa una temperatura).

f) Considerando el concepto de Δ y utilizando el conjunto de datos, complete la siguiente tabla.

Sintaxis	Δu	Δi
$u_5 - u_4$		
$u_2 - u_1$		

$u_3 - u_1$		
$u_5 - u_3$		
$u_3 - u_6$		
$u_4 - u_1$		

g) Analice la tabla del inciso f, ¿hay una relación con respecto a Δi y Δu ? ¿qué puede concluir?

h) Exprese su observación del inciso g en forma matemática (fórmula). ¿Se cumple en cada caso de la tabla?

Parte 2 (con CAS): Introducción a CAS

Si una variable y depende de una variable x , de tal manera que cada valor de x determina exactamente un valor de y , entonces se dice que **y es una función de x** . Cuatro métodos comunes para la representación de funciones son: numéricamente por tablas, geométricamente por gráficas, algebraicamente por fórmulas y/o verbalmente. Una **función** f es una regla que asocia una salida única con cada entrada. Si la entrada es denotada por x , entonces la salida es denotada por $f(x)$ (se lee como “ f de x ”). Para una entrada dada x , la salida de la función f se denomina el valor de f en x . Algunas veces se denomina la salida por una sola letra, por ejemplo y , y se escribe como $y = f(x)$. Esta ecuación expresa y como una función de x ; la variable x se llama la **variable independiente** de f , y la variable y se llama la **variable dependiente** de f .

Las coordenadas cartesianas son un sistema de coordenadas de dos dimensiones, denominado como el plano cartesiano, utilizado para la representación gráfica de una función. En el eje horizontal, conocido como el eje “ x ”, se encuentran las variables independientes mientras que en el eje vertical, conocido como el eje “ y ”, se encuentran las variables dependientes. Siendo un plano, cada punto se puede expresar por sus coordenadas (x, y) .

a) Introduzca la expresión $\frac{5x-6x*x+x^2}{x}$ a la calculadora y presione **enter**, ¿qué observa? Presione el botón $\uparrow$ en el touch pad y presione **enter**, ¿qué sucede? ¿Para qué puede ser útil la observación anterior?

Una herramienta útil dentro del sistema CAS, es el comando “tal que”, $\mid$. Dicho comando se elije presionando el botón azul “CTRL” y el botón “=”, el cual se encuentra debajo de “CTRL” y después se selecciona “ $\mid$ ”. La sintaxis para utilizar el comando es el siguiente, **“función/ variable = valor”**.

b) Considere la función $2x^2 + 5x - 2$. Llene la siguiente tabla con los valores de x respectivos.

Valor de x	Operación con lápiz	Resultado de CAS
-3		
-2		
-1.25		
-0.5		
0		
0.25		
0.89		

Actividad 2
Pendientes

Líder:

Calculadora:

Hoja de Trabajo:

Número de Equipo:

Hora de Inicio:

Hora de Terminación:

A. Pendiente

Parte I (con lápiz y papel): Concepto de Pendiente y Rectas

a) Un carro recorre 245 kilómetros con 18 litros de gasolina.

1) Si el mismo carro gasta 30 litros de gasolina, ¿qué distancia viajó?

2) Explique la lógica utilizada en el problema anterior y las suposiciones hechas.

3) ¿Cuál es la razón de cambio en kilómetros por litros de gasolina y qué significa?

4) Utilizando el dato original, 18 litros para 245 kilómetros y el dato del problema 1, grafique dichos puntos y trace la recta. Formule una expresión matemática para la pendiente.

5) ¿Qué relación hay entre una razón de cambio y una pendiente?

El modelo matemático más sencillo para relacionar dos variables es la **ecuación lineal** $y = mx + b$. Esta ecuación se llama *lineal* porque su gráfica es una línea. Cuando $x = 0$, se obtiene:

$$y = m(0) + b = b$$

por lo tanto, la línea cruza el eje y en $y = b$. en otras palabras, el intercepto y es $(0, b)$. la inclinación o pendiente es m . la pendiente de una línea no vertical es el número de unidades que la recta sube (o cae) verticalmente por cada unidad de cambio horizontal de izquierda a derecha, como se observa en la figura 1 y 2.

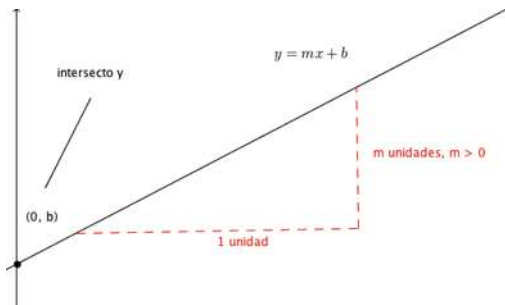


Figura 1. Línea recta con pendiente positiva

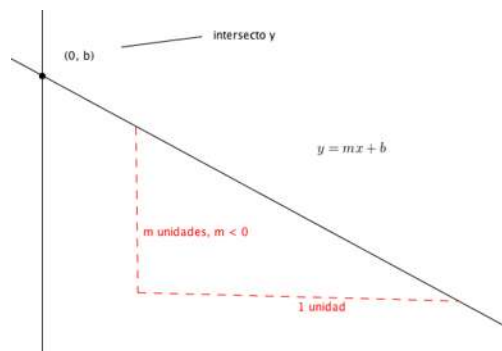


Figura 2. Línea recta con pendiente negativa

b) Considere la ecuación de la recta, $y = 2x + 3$. Identifique la variable independiente y la variable dependiente. Elija por lo menos 5 valores dependientes y haga una tabla con los valores independientes correspondientes.

c) Grafique la línea recta expresada por la ecuación $y = 2x + 3$.

d) Considere los puntos (6, 9) y (0, 11). Sin hacer ningún cálculo responda ¿la pendiente es positiva o negativa? Compruebe gráficamente y después analíticamente.

e) Utilizando los puntos generales, (x_n, y_n) , donde n es n -ésimo punto. Calcule la pendiente entre el punto 1 (x_1, y_1) y 2 (x_2, y_2) .

f) Exprese la ecuación de la pendiente para los puntos generales del inciso e utilizando el concepto de Δ .

Parte II (con CAS): Aplicación

La datación por radiocarbono, es una técnica de datación radiométrica que utiliza el isótopo carbono-14 para la determinación de la edad de materiales que contienen carbono. Los siguientes datos obtenidos experimentalmente, demuestran la cantidad de C-14 para un material a lo largo del tiempo.

Antigüedad del Material (miles de años)	Cantidad de C-14
0	15.30
1	13.56
2	12.01
3	10.64
4	9.43
5	8.35
6	7.40
7	6.56
8	5.81
9	5.15
10	4.56
11	4.04
12	3.58
13	3.17
14	2.81
15	2.49

16	2.21
17	1.95

a) Complete la siguiente tabla considerando el rango de años dado.

Rango	Diferencia de Años	Diferencia de C-14	Pendiente
6 – 14			
6 – 12			
6 – 10			
6 – 8			

b) Observando la tabla anterior y con base en la ecuación del inciso e) parte I. Calcule la cantidad de C-14 a 7 años ($7c$) y compárelo con la cantidad a 7 años real ($7r$). Utilizando la pendiente y su intervalo respectivo.

Rango	$7c$	$7c - 7r$
6 – 14		
6 – 12		
6 – 10		
6 – 8		

c) ¿Qué observaciones tiene? ¿qué pendientes calculan mejor el valor de $7c$?

d) ¿A qué se debe la observación del inciso anterior?

e) Para calcular la cantidad de C-14 a 9.5 años, ¿cuál pendiente de los siguientes rangos utilizaría? (6 – 10, 7 – 10, 8 – 10, 9 – 10) ¿Por qué?

f) Calcule la cantidad de C-14 a 9.5 años.

Dentro del sistema CAS, se pueden graficar datos. Utilizando la hoja de cálculo ingrese los datos experimentales del problema anterior dentro de esta sección. Para elegir la hoja de cálculo seleccione **Home**, y después **Hoja de Cálculo**. En la celda que tiene la letra A (celda superior) ingrese los años y llame dicha columna “yrs” y en la celda que contiene la letra B ingrese los datos de C-14 y llame dicha columna “C14”. Dentro de **Home**, elija **Datos y Estadísticas** y presione **Enter**. Utilizando el **Navegador**, mueva la flecha hacia abajo y elija que la variable x sea “yrs”. Después, mueva la flecha hacia la izquierda y elija que la variable y sea “C14”. Ahora deben aparecer los datos graficados.

Se puede hacer un ajuste de datos para los datos graficados. Dentro de la gráfica, presione **Menú, 4: Analizar, 6: Regresión**. Dentro de estas opciones existen varios ajuste disponibles.

g) Haga un ajuste de datos utilizando **Lineal ($mx + b$)**. ¿Qué sucede? Repita el ajuste utilizando **exponencial**. ¿Cuál se ajusta mejor?

Dentro de la hoja de cálculo, también se pueden ver datos de ajuste de datos. En la hoja de cálculo donde están los datos presione **menú, 4: Estadística, 1: Cálculos estadísticos, 3: Regresión lineal ($mx + b$)**. Si no encuentra la hoja de cálculo, puede presionar **ctrl** y los botones de derecha o izquierda para cambiar entre las pantallas. Para lista x ingrese A[], para la lista y ingrese B[] y en la primera columna de resultado ingrese c[].

h) ¿Qué información aparece?

i) Repita el procedimiento para una **A: Regresión exponencial...** ¿Qué información aparece? ¿Se llega a la misma conclusión que en el inciso g)?

j) Utilizando la ecuación de mejor ajuste, calcule la cantidad de C-14 a 9.5 años.

k) Utilice la pendiente del rango 9 – 10 años para calcular la cantidad de C-14 a 9.3 y 9.6 años. Utilizando como rango 9.3 – 9.6 años, calcule la cantidad de C-14 a 9.5 años.

j) Considere la cantidad de C-14 calculada a 9.5 años del inciso f), k), y j). ¿Cuál es la mejor aproximación? ¿Por qué?

l) Con sus palabras explique la observación anterior.

m) Exprese por medio de una expresión algebraica lo que acaba de decir.

Parte III (Simbolización): Desarrollo simbólica de la Pendiente

a) En el ☐ introduzca un símbolo que represente los datos.

☐	☐
0	15.30
1	13.56
2	12.01
3	10.64

4	9.43
5	8.35
6	7.40
7	6.56
8	5.81
9	5.15
10	4.56
11	4.04
12	3.58
13	3.17
14	2.81
15	2.49
16	2.21
17	1.95

b) Escriba la operación necesaria para calcular la pendiente entre 6 y 14.

c) ¿Cómo llama o expresa simbólicamente la ecuación anterior?

d) ¿Cómo se queda la expresión simbólica anterior cuando se evalúa en 9.5 años?

e) ¿Cómo se expresa lo anterior para cualquier valor?

Actividad 3
Pendiente como Función

Líder:

Calculadora:

Hoja de Trabajo:

Número de Equipo:

Hora de Inicio:

Hora de Terminación:

A. Desarrollo Matemático de $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

Parte I (Simbólica): Desarrollo Preliminar

a) Una forma convencional de describir una pendiente es $m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$. Observe la forma convencional y la suya de la actividad pasada, ¿Cuál prefiere usar? ¿Por qué?

La pendiente también se puede escribir como $\frac{y_3-y_2}{x_3-x_2}$ o $\frac{y_4-y_3}{x_4-x_3}$ o $\frac{y_4-y_1}{x_4-x_1}$ o $\frac{y_n-y_m}{x_n-x_m}$ donde m y n son subíndices. Si $y_n = f(x_n)$ y n = 10, se puede escribir como $y_{10} = f(x_{10})$.

b) Escriba la pendiente $\frac{f(x_{10})-f(x_9)}{x_{10}-x_9}$ introduciendo la variable n.

c) Para la pendiente $\frac{f(x_{15})-f(x_8)}{x_{15}-x_8}$, ¿qué valor le daría a n?

d) Si $\Delta x = x_{n+1} - x_n$, ¿a qué es igual x_{n+1} ? Exprese la pendiente del inciso b, utilizando los términos Δx y x_n .

Parte II (con lápiz y papel): Introducción de h

a) Compare la ecuación obtenida en el inciso d de la parte I, ¿es diferente a $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$? Si es diferente, ¿a qué se debe dicha diferencia?

b) Observando la figura 1, ¿qué representa y a qué es igual h ?

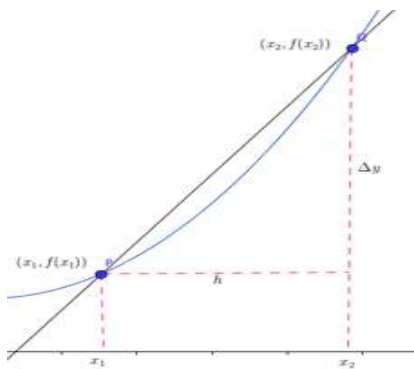


Figura 1. Introducción del concepto h

c) Utilizando h , ¿cómo queda la expresión de la pendiente?

d) Considere la función, $f(x) = x^2 + 2x$. ¿Cómo se expresa $f(x_1)$, $f(x_1 + \Delta x)$ y $f(x_1 + h)$?

e) Considerando $f(x) = x^2 + 2x$ y Δx o h , ¿cuál es la ecuación de la pendiente del inciso c? (No es necesario reducir algebraicamente)

f) Si el primer punto es $(1, 3)$, exprese la ecuación del inciso anterior con estos punto. ¿Qué observa de esta ecuación?

Parte III (con CAS): Variación de h

a) Utilizando la hoja de cálculo dentro de CAS, en la primera columna incluya los valores de Δx o h mientras que en la segunda columna va la pendiente. Utilice la ecuación de la pendiente del inciso f de la parte II. Como en cualquier hoja de cálculo, en la parte gris de la columna gris se puede expresar la función de la pendiente en donde Δx o h equivale a la variable “a”, ya que es el valor de la columna A. Complete la tabla.

	A	B
?		
1	0.1	
2	0.01	
3	0.001	
4	0	
5	-0.001	
6	-0.01	
7	-0.1	

b) ¿Qué observa cuando Δx o $h = 0$? ¿A qué se debe ese valor?

c) ¿A qué número se acerca la pendiente cuando Δx o h se acerca a cero a partir de los números positivos?

d) ¿A qué número se acerca la pendiente cuando Δx o h se acerca a cero a partir de los números negativos?

e) Observando las respuestas a los incisos c y d, ¿llega a la misma conclusión?

f) Cuando Δx o h tiende a cero, ¿a qué tiende la pendiente?

g) Considere la observación del inciso anterior, ¿es igual al valor cuando Δx o $h = 0$?

h) ¿Qué puede concluir de las observaciones de los incisos f y g?

i) ¿Cómo puede definir este tipo de análisis (analítico o gráfico)? Explique su razonamiento

Actividad 4
Límites

Líder:

Calculadora:

Hoja de Trabajo:

Número de Equipo:

Hora de Inicio:

Hora de Terminación:

Parte I (con lápiz y papel): Concepto Informal del Límite

Suponga que quiere calcular la velocidad promedio al viajar en una carretera recta. Si pasa el kilómetro 100 a las 12:00 y el kilómetro 140 a las 12:30:

a) Escriba la operación que realiza para obtener la cantidad que se viajó y para saber en cuánto tiempo de viajó.

b) Utilizando las expresiones del inciso anterior, **escriba la operación** para calcular la velocidad promedio.

c) Explique qué es una pendiente y escriba la expresión.

d) Relacione la velocidad promedio con la ecuación de la pendiente. ¿Qué observa?

Por otra parte, aun que la velocidad promedio es una cantidad fija, es casi seguro que la velocidad instantánea (la velocidad indicada por el velocímetro), varía de un momento a otro.

Se lanza verticalmente una piedra del piso a una velocidad de 96 ft/s. Despreciando la resistencia del aire, la posición de la piedra después de t segundos está dada por la función:

$$s(t) = -16t^2 + 96t$$

La posición s es medida en pies con $s = 0$, corresponde al piso mientras que t representa el tiempo en segundos.

e) Escriba las operaciones para calcular la velocidad promedio y calcule la velocidad promedio entre el intervalo de tiempo, i) $t = 1$ y $t = 3$, ii) $t = 1$ y $t = 2$, iii) $t = 1$ y $t = 1.5$.

f) Observe los resultados de i, ii, y iii. ¿Qué diferencia observa?

g) Escriba la ecuación para la velocidad promedio de la piedra entre el intervalo $[t_0, t]$.

Al calcular la velocidad promedio, se utilizó la posición del objeto a dos puntos distintos. Para la velocidad instantánea solamente se utiliza un punto distinto. Como se verá en la siguiente sección, la velocidad instantánea se calcula a partir de velocidades promedios.

h) Si nos interesa calcular la velocidad instantánea a $t_0 = 1$, se calcula la velocidad promedio sobre el intervalo $[1, t]$. Escriba la ecuación de la velocidad promedio.

La velocidad instantánea en el punto $t = t_0$ se determina al calcular la velocidad promedio sobre el intervalo $[t_0, t_1]$. Cuando t_1 se acerca a t_0 , la velocidad promedio típicamente se acerca a un número único, el cual es la velocidad instantánea. Lo anterior significa, que es un instante en donde el intervalo

es muy pequeño. Este número se conoce como un límite. Lo cual se puede expresar matemáticamente como

$$v_{instantanea} = \lim_{t \rightarrow t_0} v_{promedio}$$

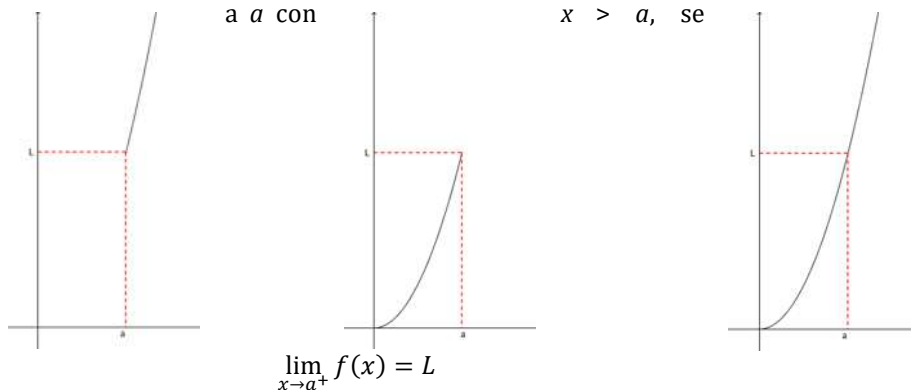
i) Sustituya la velocidad promedio del inciso h de la expresión de la velocidad instantánea. En donde $t_0 = 1$.

j) Calcule la velocidad instantánea utilizando la expresión anterior.

Parte II (con CAS): Concepto Informal del Límite

El límite $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ se refiere a un límite de *dos-lados*, porque $f(x)$ se acerca L cuando x se acerca a valores de x menores de a y para valores de x mayores de a . Para algunas funciones, es conveniente analizar límites de *un lado* denominados límites de mano izquierda y de mano derecha. La definición se puede resumir como:

- i. **Límite de mano derecha:** Suponga que f es definida para todos los valores de x cercanos a a y $x > a$. Si $f(x)$ es arbitrariamente cercana a L para todos valores suficientemente cercanos a a con $x > a$, se escribe



y se dice que el límite de $f(x)$ cuando x se acerca a a por la derecha es igual a L .

- ii. **Límite de mano izquierda:** Suponga que f es definida para todos los valores de x cercanos a a y $x < a$. Si $f(x)$ es arbitrariamente cercana a L para todos valores suficientemente cercanos a a con $x < a$, se escribe

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L$$

y se dice que el límite de $f(x)$ cuando x se acerca a a por la izquierda es igual a L .

a) Considere las siguientes gráficas y relacione la gráfica con el límite que le corresponde:

1. i) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$, 2. ii) $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$, 3. iii) $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L$

Se pueden graficar funciones dentro del sistema CAS. Presione el botón **Home, B Gráfico, Menú, 3: Tipo de gráfico, 1: Función**. De esta manera se puede definir una función.

b) Grafique la función $f(x) = \frac{x^3-8}{4(x-2)}$ en el sistema CAS. Observe la gráfica y la ecuación de la función, ¿existe algún valor de x que no puede tomar? ¿Cuál es y por qué?

c) Compruebe utilizando el comando de trazado. (Dentro de la gráfica, presione **Menú, 5: Trazado, 1: Trazado de gráfico** y elija el número y presione **Enter**). ¿Qué sucede?

d) El trazado se hace, presionando los botones $\uparrow$ o $\downarrow$ para mover de un punto a otro. Para la misma función, el paso de trazado es de 0.3. Este incremento se puede cambiar utilizando **Menú, 5: Trazado, 3: Paso de trazado**, introduzca el incremento deseado. Utilizando un incremento de trazo de 0.01, complete la siguiente tabla.

X	1.95	1.96	1.97	1.98	1.99	2	2.01	2.02	2.03	2.04	2.05
Y											

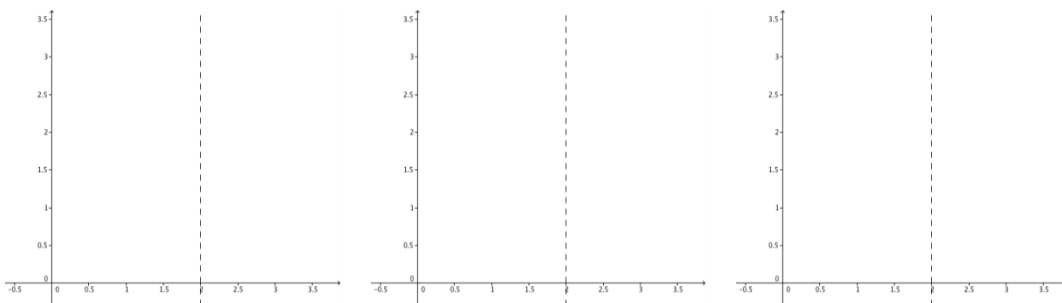
Considere las expresiones: i) $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^3-8}{4(x-2)}$, ii) $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^3-8}{4(x-2)}$, iii) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3-8}{4(x-2)}$

e) De la tabla anterior, ¿qué valores utilizaría para el caso i?

f) De la tabla anterior, ¿qué valores utilizaría para el caso ii?

g) De la tabla anterior, ¿qué valores utilizaría para el caso iii?

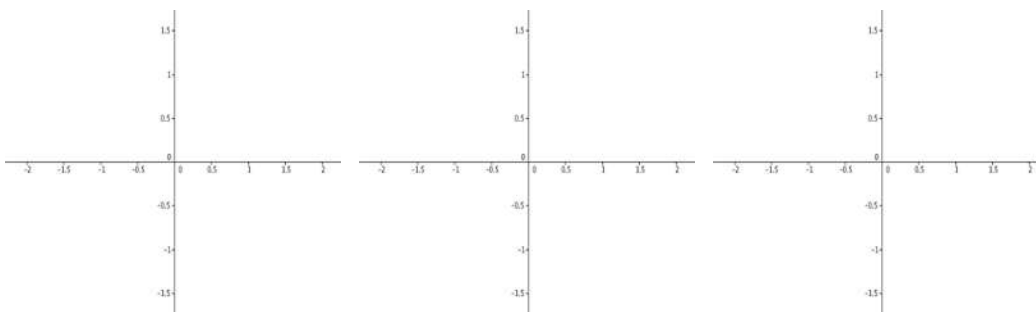
h) Represente gráficamente los casos i, ii, y iii.



i) Repita el inciso d para la función, $f(x) = \frac{|x|}{x}$. (Para introducir el modulo de valor absoluto, utilice abs(x)).

X	-0.05	-0.04	-0.03	-0.02	-0.01	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05
y											

j) Represente gráficamente: i) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x}$, ii) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x}$, iii) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}$.



k) Relacione el inciso h y j, ¿qué observa?

l) Encuentre el valor de $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{4(x - 2)}$ utilizando las repuestas de los incisos d hasta el h.

m) Encuentre el valor de $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}$ utilizando las respuestas de los incisos i y j.

n) ¿Qué relación existe entre el límite, límite de la derecha y límite de la izquierda?

Actividad de Primer Uso de la Calculadora Ti-Nspire CX CAS

La **Calculadora Ti-Nspire CX CAS** es una herramienta muy poderosa para el aprendizaje y la comprensión de las matemáticas. Ya que por medio de la experimentación a través de sus múltiples aplicaciones se nos hace más fácil entenderlas.

A continuación se describen las teclas más importantes, o que se usan con más frecuencia.

Touchpad: el área central funciona de la misma manera que el Touchpad de una laptop. Las flechas de las orillas se usan de la misma manera que las flechas derecha, izquierda, arriba y abajo.

Clic: el centro del Touchpad se usa para seleccionar, desmarcar o tomar un objeto, según la aplicación.

El botón de *Inicio o Encendido* permite acceder a:

- *Bloc de notas* para hacer cálculos y gráficos rápidos.
- *Controles* de documentos.
- *Aplicaciones*

Doc: Abre el menú de Documentos que incluye Archivo, Editar, Ver e Insertar, Diseño de página, Configuración y Estado e Inicio de Sesión.

Menú: muestra los elementos de menú disponibles dentro de una aplicación en particular.

Del: elimina el carácter anterior.

Var: muestra variables guardadas.

Shift: convierte el carácter en mayúscula.

Ctrl: brinda acceso a comandos sobre ciertas teclas.

Tab: alterna entre posibles campos de introducción de datos.

Esc: elimina menús o cuadros de dialogo y también detiene cálculos en progreso.

Ctrl esc: deshace una operación anterior.

Algunas de las aplicaciones con que cuenta esta calculadora son las siguientes:

Bloc de notas: se usa para hacer cálculos y gráficos rápidos (es la tecla con icono de calculadora que se encuentra debajo de la tecla **esc**)

Algunas operaciones que se pueden hacer con la *tecla bloc de notas* (icono de calculadora debajo de la tecla *esc*)

- Presione la tecla *Bloc de notas* y realice un *cálculo rápido*.
- Presione la tecla *Bloc de notas* nuevamente y realice un *gráfico rápido*.
- Para guardar, presione la tecla *Doc*, seleccione *Archivo*, luego *guardar como...* para guardar con un nombre de su elección.
- Para cerrar el *bloc de notas*, haga clic en la *X* que se encuentra en la esquina superior derecha de la pantalla.

Calculadora

Brinda acceso a los cálculos. Esta aplicación es muy importante. Ya que nos ayuda con los cálculos, desde los más sencillos hasta los complicados como una derivada o una integral.

Siga las instrucciones siguientes para conocer algunas de las operaciones que la aplicación Calculadora nos permite hacer.

- 5 ctrl var (sto) a enter.
- Presione a^{39} enter.
- Presione $a-7=7-a$ enter.

Gráficos.

Esta aplicación nos permite realizar gráficos, así como analizar sus diferentes propiedades y manipularlos.

Para acceder a esta aplicación, presione la tecla *Inicio/encendido* y seleccione el icono *Gráficos*. Ingrese 3x para definir $f1(x)=3x$ en la línea de ingreso de datos. Presione *enter* para graficar. (Recuerda que para acceder rápidamente a Gráficos, puedes usar la tecla *Bloc de notas*).

Geometría.

Esta aplicación nos permite trazar formas, y descubrir sus propiedades.

Para añadir una página de *Geometría*, presione la tecla *Inicio/encendido* y seleccione el icono *Geometría*. Explore el *menú* para ver las opciones que nos ofrece la calculadora e intente dibujar algunas formas.

Por ejemplo, si trazamos un triángulo rectángulo, y queremos hallar la longitud de CA: presione *menú/medición/longitud* y señale CA. Cuando aparezca la medición, presione *enter*.

Listas y Hojas de cálculo.

Esta aplicación funciona de la misma manera que una hoja de cálculo de Excel. Presione la tecla *Inicio* para insertar una página de *Listas y Hojas de cálculo*.

Ingresa estos datos en la página de *Listas y Hojas de cálculo* comenzando por el 0 en la celda A1

Tiempo	Distancia
0	5
1	10
2	15
3	20

En esta actividad se muestra el tiempo en el extremo superior de la columna A y en el Extremo superior de la columna B ingrese la distancia y presione *enter*.

Datos y Estadísticas.

Nos permite hacer y analizar gráficos.

Valla al menú *Inicio* y seleccione la opción *Datos y Estadísticas*. En la pantalla que aparece diríjase a la parte inferior, haga clic sobre “*Haga clic para añadir una variable*” para ver una lista de variables. Seleccione *tiempo*.

Aparecerán 4 puntos en el eje inferior.

Con el *Touchpad* diríjase hacia arriba, en el extremo izquierdo de la pantalla. Aparecerá un rectángulo. Haga clic dentro del rectángulo para ver una lista de variables. Ahora seleccione *distancia*. (Ahora aparecerá un gráfico con 4 puntos).

Se puede crear una línea desplazable en el gráfico.

En el diagrama de dispersión presione *menú*. Seleccione *Analizar* y elija *Añadir línea desplazable*.

Tome y mueva la línea de manera que se ajuste al conjunto de datos. Para tomar la línea, presione *ctrl/clic* (dentro del *Touchpad*). Para soltar la línea, presione *esc*.

Cálculo de una ecuación de regresión

En la página de Datos y Estadísticas,

- Presione menú
- Seleccione Analizar

- Seleccione Regresión
- Elija Mostrar lineal

Notas

La aplicación de Notas es utilizada para bridar instrucciones o información de las distintas actividades.

Use un cuadro matemático para el contenido matemático

Haga clic dentro de una expresión del cuadro matemático y evalúela presionando *enter*.

Desplace el mouse sobre la expresión que aparece más abajo. Haga clic en $\frac{3}{5} - \frac{2}{3}$. Luego, presione *enter*.

Para crear un cuadro matemático, presione: *menú/Insertar/Cuadro matemático*

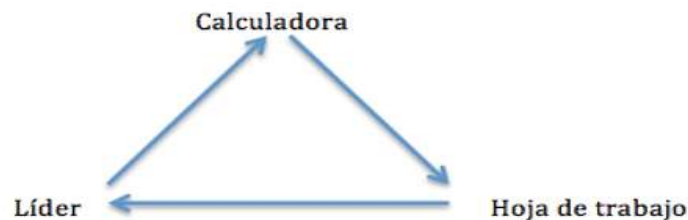
En el cuadro matemático, ingrese $\frac{4}{5} - \sqrt{9}$ y presione *enter*.

Guía del Profesor

La siguiente sección proporciona información adicional sobre la aplicación de las actividades propuestas, las cuales se encuentran en el anexo B del presente trabajo de tesis. Antes de iniciar, es importante tomar las siguientes medidas:

1. Organizar a los participantes en equipos de tres.
2. A cada equipo se le asigna una calculadora Ti-Nspire CX CAS, las actividades, hojas en blanco, pluma, lápiz, regla y escuadra.
3. Se deben explicar los roles de cada integrante con el trabajo de las actividades, en donde:
 - a. El líder: Tiene la responsabilidad de mantener el orden y dinámica, fomentar las discusiones y asegurar que los otros integrantes estén cumpliendo con su trabajo.
 - b. El que maneja la calculadora: Hace el trabajo relacionado con la calculadora, lo cual puede incluir la introducción de datos, comandos y/o cálculos y la interpretación de los resultados.
 - c. El que maneja la actividad en papel: Lee la información y hace preguntas sobre las actividades, además de escribir las respuestas de los cuestionamientos planteados.

El cambio de roles entre los estudiantes se lleva a cabo al cambiar de actividad, con el siguiente orden:



Es muy importante que los integrantes de los equipos, lean con cuidado las instrucciones y preguntas plasmadas en la actividad, y que las respuestas que den, deben ser un consenso del equipo.

Introducción a la calculadora

En ésta actividad, se presenta una introducción básica sobre el uso y manejo de la calculadora TiNspire CX CAS. Debido a su naturaleza, la manipulación de la calculadora es muy complicada y compleja; esta introducción no es exhaustiva pero contiene los

elementos básicos requeridos para llevar a cabo las actividades. Cabe mencionar que a lo largo de la misma, se llegan a utilizar técnicas más avanzadas, las cuales son presentadas en su momento dentro de las actividades. Se recomienda que la explicación sea breve y concisa y que incluya los siguientes temas:

- La diferencia entre “Scratchpad” y las aplicaciones dentro de la pantalla “Home”. Dichas aplicaciones representadas por un icono, tienen la ventaja de estar en una pestaña dentro del documento de trabajo.
- El manejo de las aplicaciones: cómo crear nuevas, cómo abrir las anteriores, cómo borrar y la vista general de todas; se encuentra al presionar $\text{2nd} + \uparrow$
- Explicar que $\cdot$ realiza la operaciones y no el símbolo $=$, además de explicar el significativo de $=$ dentro del sistema CAS.
- Hablar sobre los números racionales e irracionales. Por ejemplo, al hacer la operación: $8 \div 16 \cdot$ da el resultado $\frac{1}{2}$, mientras que $8 \div 16 / \cdot$ o $8 \div 16 \wedge \cdot$ muestra el resultado 0.5.
- El uso del botón $\text{2nd} + \text{off}$, por ejemplo para apagar la calculadora se utiliza $\text{2nd} + \text{off}$

Actividad 1

Dentro de esta actividad se proponen dos discusiones:

1. Después de la parte I inciso c, se debe asegurar de que el inciso I.c esté resuelto correctamente, si no se deben revisar las respuestas del inciso I.a.
2. Antes del inciso h de la parte I, se debe establecer el significado de una forma matemática o fórmula. Se pueden presentar los siguientes casos:
“Por cada tres manzanas que compran, le regalan una naranja.”

- a) ¿Cómo se expresa, cuántas naranjas hay sabiendo la cantidad de manzanas?
($N = \frac{1}{3} M$)
- b) ¿Cómo se expresa, cuántas manzanas hay sabiendo la cantidad de naranjas?
($M = 3 \cdot N$)
- c) ¿Qué representa el “ $\frac{1}{3}$ ” y “3” en las expresiones anteriores?

Sabiendo expresar relaciones con la discusión anterior, se debe llegar a la respuesta del inciso I.h.

Actividad 2

Se propone la siguiente discusión para esta actividad:

1. Antes del inciso b de la segunda parte, en donde se plantea la expresión para resolverlo. Partiendo de las ecuaciones de la pendiente, se despeja el valor de y_2 . De tal manera que:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}; \quad m(x_2 - x_1) = y_2 - y_1; \quad y_2 = m(x_2 - x_1) + y_1$$

- a) ¿Qué representan los puntos de x y y ?
- b) ¿Es importante, cuáles valores utilizan? Por ejemplo, para el rango de 6 – 14, se puede utilizar 6 o 14.
- c) ¿Cuál valor conviene utilizar?

Con el razonamiento anterior se debe llegar a la expresión: $y_2 = m(x_2 - 6) + 7.40$ de tal manera que m corresponda a la pendiente de cada rango.

Actividad 3

Dentro de la actividad 3, se proponen las siguientes tres discusiones:

1. Antes del inciso d de la parte I. Para lograr lo anterior se pueden hacer las siguientes preguntas claves:
 - a. ¿A qué equivale x_{n+1} ? (Del despeje de la expresión $\Delta x = x_{n+1} - x_n$)
 - b. Observe su expresión del inciso I.b, ¿contiene la variable x_{n+1} ? Si no, ¿a qué se debe? (Si utilizaron $n = 10$, no tiene dicha variable.)
 - c. Resuelva el inciso I.d.
2. Antes del inciso d de la parte II, se debe enseñar cómo se expresan las funciones. Por ejemplo, si $f(x) = x^2$:
 - a. ¿Qué significa $f(5)$ y $f(a)$?
 - b. ¿Qué ocurrió? (se sustituye 5 y a en cada valor de x dentro de la función f)Con lo anterior se puede resolver el inciso II.d
3. Discusión después del inciso f de la parte II. Aquí se deben asegurar de que tengan la expresión correcta, ya que se necesitará para realizar la parte III de la actividad. En caso de que este incorrecta, se revisan las respuestas dadas en los incisos I.d y I.e. Si se observa que tienen dificultades en el inciso III.a, se puede llevar a cabo otra discusión para realizar el mismo.

Actividad 4

Se propone una discusión antes del inciso g de la parte I. Se debe poner mucha atención, en llegar a una expresión que esté en función de las variables t y t_0 . Si tienen dificultades, revise las respuestas dadas para el inciso I.e. Esta parte es crucial, ya que en el inciso I.i se sustituyen valores de t_0 para llegar a una expresión que esté solamente en función de la variable t . Lo anterior, expresa la pendiente de la secante (la cual contiene dos puntos) con una variable.

ANEXO II

En este anexo se presentan las bitácoras realizadas en la experimentación Piloto.

BITACORAS EXPERIMENTACIÓN PILOTO.

PRIMERA SESIÓN EXPERIMENTACIÓN PILOTO

Se trabajó con alumnos del primer grado de la Facultad de Ingeniería Química. Se llegó a las 7:50 am, se empezó a acomodar el equipo de grabación y se entregó el material necesario a los alumnos para la resolución de las actividades. A las 8:00 am se empezó la **primera sesión de la experimentación piloto** con una breve explicación a los alumnos acerca del objetivo de este proyecto de investigación, posteriormente se les dio una pequeña introducción acerca del manejo de la calculadora Ti-Nspire CX AS para la resolución de las actividades, se les explicó la mecánica de trabajo iniciando la Actividad 1 alrededor de las 8:40 am.

1. Se formaron 9 equipos, 8 de tres personas y uno de cuatro. Posterior al inicio de la actividad, no se permitió la incorporación de los alumnos que llegaron tarde a la clase.
2. Las discusiones en los equipos se dieron de manera rápida, se observó que el equipo No. 1 era el que más discutía cuando realizó la actividad 1.
3. El equipo No. 5 fue el que presentó mayor dificultad para entender el significado del signo negativo en la diferencia (específicamente en los incisos b y c). Ya que argumentan que las diferencias siempre deben ser positivas.
4. Hubo confusión en la parte 1 (específicamente en los incisos e y f) al momento de identificar los subíndices, debido a que no sabían qué valores darle a **i**.
5. Se observó que la gran mayoría de los alumnos sintió curiosidad acerca del uso de la calculadora y por momentos hacían operaciones fuera del contenido de la actividad.
6. Sólo un alumno de los 28 participantes conocía la calculadora TI-Nspire CX CAS.
7. En general hubo pocas dudas en cuestión al uso de la calculadora.
8. El equipo No. 6 no discutía y mostraban bastante indiferencia al contestar la actividad 1, debido a la carga académica que tenían programada para ese día.
9. El equipo No. 5 tuvo problemas en el momento de definir los valores del subíndice **i**.
10. El equipo No. 4 no discutió en comparación de los demás equipos, pero aun así trabajaron correctamente.
11. Solamente dos equipos comenzaron con la Actividad 2.
12. También se dio la discusión entre equipos acerca de los resultados obtenidos en diversos incisos de la actividad 1.

En general se trabajó de manera ordenada y tranquila, todos los alumnos mostraron respeto al momento de esta primera sesión.

SEGUNDA SESIÓN EXPERIMENTACIÓN PILOTO

Alrededor de las 7:55 am se llegó a la Facultad de Ingeniería Química para comenzar con la **segunda sesión de experimentación formal**. A las 8:05 am se instaló el equipo de video. La actividad No. 2 dio inicio a las 8:20 am; esto debido a la impuntualidad de los alumnos. Esta segunda sesión dio inicio con la Actividad No. 2, ya que solo dos equipos pudieron iniciar la actividad 2 en la sesión 1.

1. Se trabajó con los 9 equipos que la primera sesión, incorporándose 2 nuevos alumnos a esta sesión por lo que se les acomodó en dos equipos; para que quedaran 6 equipos de tres personas y tres de cuatro personas.
2. Nuevamente el equipo 6 no mostró interés en la actividad, incluso se les llamó varias veces la atención, ya que estaban trabajando con material ajeno a las actividades. También accidentalmente tiraron la calculadora que se les asignó.
3. Se observó que todos los equipos tuvieron dudas en el inciso II-b, ya que algunos no pudieron contestar esta parte y los que lo hicieron, no llegaron a la ecuación correcta que es $y_2 = m(x_2 - x_1) + y_1$.
4. Se presentaron más comentarios entre los equipos debido a la confusión en el inciso b) de la parte II para comparar resultados.
5. Algunos equipos presentaron polémica respecto a la ecuación de la pendiente en el inciso e) de la Parte I.
6. Solo el equipo 9 comenzó a contestar la actividad 3 en esta segunda sesión.
7. Ningún equipo tuvo dudas en el uso de la calculadora para la resolución de la actividad 2.
8. Se observó que el equipo 3 en el inciso I-b quería condicionar los valores de la variable **X** para que la variable **Y** tomara únicamente valores positivos.
9. Los equipos con cuatro personas no trabajan la mecánica sugerida, puesto que solo dos integrantes son los que hacen todo el trabajo.
10. Por el avance obtenido hasta ahora se considera necesario aumentar el número de sesiones para la experimentación piloto.

En general se puede deducir que la actividad 2 genera bastante confusión en los alumnos y también se hace notar que dos horas no son suficientes para contestarla, por lo cual se sugiere modificar la indicación del inciso b para hacerla más clara.

TERCERA SESIÓN EXPERIMENTACIÓN PILOTO

Alrededor de las 7:50 am se llegó a la Facultad de Ingeniería Química para comenzar con la **tercera sesión de experimentación piloto**. Se entró al salón de clase alrededor de las 8:10 am, debido a que los alumnos tenían una clase antes y el profesor no salía. En esta tercera sesión se comenzó con la actividad 2, ya que solo un equipo pudo comenzar la actividad 3 en la sesión 2.

1. Se trabajó con los mismos 9 equipos que en la sesión 2.
2. Los alumnos ya no mostraron dudas acerca del uso de la calculadora.
3. Todos los equipos tuvieron confusión con el inciso II-c, argumentan que el inciso es poco entendible y no especifica lo que se requiere.
4. La maestra del grupo comentó que es necesario se tome en cuenta al profesor para que los alumnos muestren más interés sobre las actividades, de manera que sugirió que se le debió comentar la posibilidad de que estas actividades de trabajo tuvieran cierto porcentaje en su calificación para motivarlos.
5. Ningún equipo concluyó la actividad 3, se observó que todos los equipos mostraron duda en toda la parte II, y esta parte es esencial para poder continuar con la parte III.
6. Solo un equipo llegó a la parte III, pero no pudieron seguir debido a que no lograron comprender cómo insertar la ecuación requerida en la calculadora, ellos argumentan que no se explica cómo debe hacerse exactamente.
7. El equipo 3 discutió mucho acerca de los valores de “a” y “b” en la regresión exponencial del inciso II-j en la actividad 2, ya que no se daban cuenta que la calculadora ya daba esos valores.
8. Los alumnos presentaban mucha distracción al hacer el cambio de rol de una actividad a otra.

En general se puede deducir que la actividad 3 genera bastante confusión en los alumnos, por lo cual se sugiere modificar algunas indicaciones para hacerlas más claras.

CUARTA SESIÓN EXPERIMENTACIÓN PILOTO

Alrededor de las 7:45 am se llegó a la Facultad de Ingeniería Química para comenzar con la **cuarta sesión de experimentación piloto**. Se entró al salón de clase alrededor de las 8:00 am. En esta cuarta sesión se terminó con la actividad 3 y se comenzó con la 4, ya que solo un equipo pudo comenzar la actividad 4 en la sesión 3.

1. Se trabajó con los mismos 9 equipos que en las sesiones anteriores.
2. Los alumnos mostraron mayor destreza al usar la calculadora.
3. Ningún equipo concluyó la actividad 4, ya que debían terminar primero la actividad 3.
4. Nuevamente los alumnos presentaron distracción al hacer el cambio de rol de una actividad a otra.
5. Todos los equipos tuvieron confusión en la actividad 4, en la parte continua a la introducción de la ecuación de posición.
6. Solo dos equipos lograron avanzar a la mitad de la actividad 4.

En general se puede deducir que la actividad 4 genera confusión en los alumnos en la parte donde Ibarra (2015), introduce la ecuación para la posición.

QUINTA SESIÓN EXPERIMENTACIÓN PILOTO

Alrededor de las 7:45 am se llegó a la Facultad de Ingeniería Química para comenzar con la **quinta sesión de experimentación piloto**. Se entró al salón de clase alrededor de las 8:00 am. En esta quinta sesión se terminó con la actividad 4.

1. Se trabajó con los mismos 9 equipos que en las sesiones anteriores.
2. Los alumnos ya no mostraron dudas al usar la calculadora.
3. Todos los equipos terminaron la actividad 4.
4. Por ser la última sesión los alumnos mostraron mejor disciplina y disposición.
5. Se observó que a la mayoría de los equipos se les dificultó hacer una análisis de lo que representaban las gráficas en la parte II.

Casi por terminar esta última sesión; exactamente a las 9:40 am; se les pidió a los equipos, en una hoja aparte expresaran su opinión acerca de las actividades. A continuación se citan las opiniones de algunos equipos:

- **Equipo 1:** “Se complicó en algunos enunciados, ya que no entendíamos bien el conocimiento de algunas cosas, pero sirvió para aprender un poco sobre la calculadora CAS, tiene muchas funciones y facilita todo si la sabes usar”.
- **Equipo 4:** “El uso de la calculadora promovió el abastecimiento del conocimiento racional, el equipo 4 agradece la oportunidad de poder interactuar con este tipo de tecnología y en general las condiciones de trabajo fueron precisas y el margen de error fue nulo”.
- **Equipo 7:** “En la mayoría de los problemas no especifica de manera clara lo que se requiere”.
- **Equipo 9:** “Fue una actividad interesante solo que muy confusa y con falta de experiencia para manejar la calculadora, además de falta de explicación para comprender los problemas que se planteaban”.

Se concluye que en esta experimentación piloto la mayoría de los alumnos no mostraron el interés necesario, esto debido a que no lograban entender el contenido de las actividades por lo que se cansaban y dejaban de trabajar. Se plantea tratar de adecuar las partes donde hubo mayor confusión y proponer cambios para que queden más explícitas las indicaciones.

ANEXO III

Este anexo contiene las evidencias de cada una de las actividades que se aplicaron a los estudiantes durante el desarrollo de la experimentación formal.

- ACTIVIDAD 1 **DIFERENCIAS**, EXPERIMENTACIÓN FORMAL.
- ACTIVIDAD 2 **PENDIENTES**, EXPERIMENTACIÓN FORMAL.
- ACTIVIDAD 3 **PENDIENTES COMO FUNCIÓN**, EXPERIMENTACIÓN FORMAL.
- ACTIVIDAD 4 **LÍMITES**, EXPERIMENTACIÓN FORMAL.

11

Actividad 1 Diferencias

Líder:

Calculadora:

Hoja de Trabajo:

Número de Equipo:

Hora de Inicio:

Hora de Terminación:

A. Diferencia Matemática

Parte I (con lápiz y papel): Concepto General

La diferencia matemática es el resultado de restar, en donde se resta un sustraendo de un minuendo. Por ejemplo, la diferencia entre 3 (sustraendo) y 8 (minuendo) es 5.

En la vida cotidiana cuando se expresa una diferencia, típicamente se refiere a la diferencia entre un valor inicial (sustraendo) y un valor final (minuendo). Es decir, la diferencia es igual al valor final menos el valor inicial.

a) Completa la siguiente tabla. Pase el texto de la columna 1 a una sintaxis matemática en la columna 2 y escriba el resultado de la diferencia en la columna 3.

Texto	Sintaxis	Diferencia
Una cuenta de ahorros tiene \$2383.87 al inicio del mes y \$2873.92 al final. ¿Cuál fue la diferencia a lo largo del mes?	$2873.92 - 2383.87$	\$ 490.05
Se saca un pedazo de carne a descongelar, al sacarse del congelador se encuentra a -3°C y después de 5 horas se encuentra a 24°C . ¿Cuál es la diferencia de temperatura después de las 5 horas?	$24^{\circ} - (-3^{\circ})$	27°C
Un automóvil contiene un tanque de 90 litros. Se llena al comienzo de la semana, al final de ella se observa que el tanque contiene 32.3 litros. ¿Cuál es la diferencia de litros en el tanque a lo largo de la semana?	$32.3 - 90$	- 57.7L

b) Observe las diferencias de los tres (3) casos del inciso anterior. ¿existe una diferencia con signo negativo? En caso afirmativo, ¿qué representa con respecto a la cantidad (aumenta o disminuye)?

Si, representa que disminuye la cantidad.

c) ¿Qué concluyes a partir del inciso anterior con respecto al signo de la diferencia? Considere signos positivos, negativos y valores de cero.

Los signos representan si la cantidad aumenta o disminuye.

d) En la siguiente tabla en la primera columna se encuentra una secuencia de cinco (5) números, observe la tendencia uniforme (si existe alguna) y anótela en la segunda columna.

Secuencia	Observaciones
2, 4, 6, 8, 10	Esta secuencia presenta una tendencia uniforme de 2.
45, 38, 31, 24, 17	Presenta una tendencia uniforme decreciente de 7 en 7.
-8.75, -3.5, 1.75, 7, 12.25	Presenta una tendencia uniforme de 5.25.
1, 9, 17, 27, 41	No presenta tendencia uniforme.

Considere el conjunto de datos, en donde i corresponde a una variable independiente mientras tanto u corresponde a la variable dependiente. Por lo tanto u_i corresponde a u evaluada en cualquier valor de i . Por ejemplo, u_3 indica el valor de u cuando i es 3 lo cual es 14.

i	1	2	3	4	5	6
u_i	8	11	14	17	20	23

e) Utilizando el conjunto de datos mencionado, complete la siguiente tabla.

Sintaxis	Representación Algebraica	Resultado
$u_5 - u_4$	$20 - 17$	3
$u_2 - u_1$	$11 - 8$	3
$u_3 - u_2$	$14 - 11$	3
$u_5 - u_3$	$20 - 14$	6
$u_3 - u_6$	$14 - 23$	-9
$u_4 - u_1$	$17 - 8$	9

En matemáticas el operador delta (Δ) representa un cambio. Siendo un operador matemático, puede aplicarse a cualquier variable. Por ejemplo, Δx representa un cambio en x mientras que ΔT representa un cambio en T (muchas veces dicha variable representa una temperatura).

f) Considerando el concepto de Δ y utilizando el conjunto de datos, complete la siguiente tabla.

Sintaxis	Δu	Δi
$u_5 - u_4$	3	1
$u_2 - u_1$	3	1
$u_3 - u_1$	6	2
$u_5 - u_3$	6	2
$u_3 - u_6$	-9	-3
$u_4 - u_1$	9	3

g) Analice la tabla del inciso f, ¿hay una relación con respecto a Δi y Δu ? ¿qué puede concluir?

Por cada 1 Δi , Δu aumenta 3.
Debido a que Δu depende de Δi .

h) Exprese su observación del inciso g en forma matemática (fórmula). ¿Se cumple en cada caso de la tabla?

$$\Delta u = (\Delta_i)(3)$$

Si se cumple cada caso de la tabla

Parte 2 (con CAS): Introducción a CAS

Si una variable y depende de una variable x , de tal manera que cada valor de x determina exactamente un valor de y , entonces se dice que **y es una función de x** . Cuatro métodos comunes para la representación de funciones son: numéricamente por tablas, geométricamente por gráficas, algebraicamente por fórmulas y/o verbalmente. Una función f es una regla que asocia una salida única con cada entrada. Si la entrada es denotada por x , entonces la salida es denotada por $f(x)$ (se lee como "f de x"). Para una entrada dada x , la salida de la función f se denomina el valor de f en x . Algunas veces se denomina la salida por una sola letra, por ejemplo y , y se escribe como $y = f(x)$. Esta ecuación expresa y como una función de x ; la variable x se llama la **variable independiente** de f , y la variable y se llama la **variable dependiente** de f .

Las coordenadas cartesianas son un sistema de coordenadas de dos dimensiones, denominado como el plano cartesiano, utilizado para la representación gráfica de una función. En el eje horizontal, conocido como el eje " x ", se encuentran las variables independientes mientras que en el eje vertical, conocido como el eje " y ", se encuentran las variables dependientes. Siendo un plano, cada punto se puede expresar por sus coordenadas (x, y) .

a) Introduzca la expresión $\frac{5x-6x+x^2}{x}$ a la calculadora y presione enter, ¿qué observa? Presione el botón $\uparrow$ en el touch pad y presione enter, ¿qué sucede? ¿Para qué puede ser útil la observación anterior?

La calculadora realizó una factorización

El botón $\uparrow$ en el touch pad y enter realizan la acción de Copiar y Pegar.

Una herramienta útil dentro del sistema CAS, es el comando "tal que", $\downarrow$. Dicho comando se elige presionando el botón azul "CTRL" y el botón "=", el cual se encuentra debajo de "CTRL" y después se selecciona " $\downarrow$ ". La sintaxis para utilizar el comando es el siguiente, "**función/variable = valor**".

b) Considere la función $2x^2 + 5x - 2$. Llene la siguiente tabla con los valores de x respectivos.

Valor de x	Operación con lápiz	Resultado de CAS
-3	$2(-3)^2 + 5(-3) - 2$	1
-2	$2(-2)^2 + 5(-2) - 2$	-4
-1.25	$2(-1.25)^2 + 5(-1.25) - 2$	-7.375 -5.125
-0.5	$2(-0.5)^2 + 5(-0.5) - 2$	-4
0	$2(0)^2 + 5(0) - 2$	-2
0.25	$2(0.25)^2 + 5(0.25) - 2$	-0.625
0.89	$2(0.89)^2 + 5(0.89) - 2$	4.0342

Actividad 2
Pendientes

Líder:
Calculadora:
Hoja de Trabajo:
Número de Equipo: Hora de Inicio: Hora de Terminación:

A. Pendiente

Parte I (con lápiz y papel): Concepto de Pendiente y Rectas

a) Un carro recorre 245 kilómetros con 18 litros de gasolina.

1) Si el mismo carro gasta 30 litros de gasolina, ¿qué distancia viajó?

La distancia que viaja el automovil con 30 L es de 408.33 km.

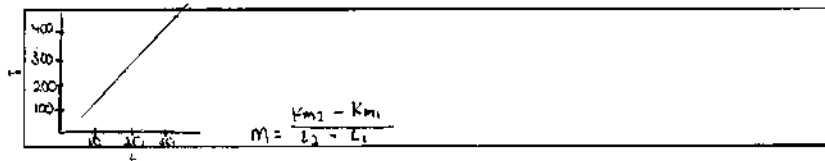
2) Explique la lógica utilizada en el problema anterior y las suposiciones hechas.

Entonces si con 18 L recorre 245 km se hace una relación donde se determina $245 \text{ km} = 30 / 18$

3) ¿Cuál es la razón de cambio en kilómetros por litros de gasolina y qué significa?

Al aumentar los litros de gasolina aumenta la distancia recorrida.

4) Utilizando el dato original, 18 litros para 245 kilómetros y el dato del problema 1, grafique dichos puntos y trace la recta. Formule una expresión matemática para la pendiente.



5) ¿Qué relación hay entre una razón de cambio y una pendiente?

la razón de cambio puede formar una pendiente.

El modelo matemático más sencillo para relacionar dos variables es la **ecuación lineal** $y = mx + b$. Esta ecuación se llama *lineal* porque su gráfica es una línea. Cuando $x = 0$, se obtiene:

$$y = m(0) + b = b$$

Por lo tanto, la línea cruza el eje y en $y = b$. En otras palabras, el intercepto y es $(0, b)$. La inclinación o pendiente es m . La pendiente de una línea no vertical es el número de unidades que la recta sube (o cae) verticalmente por cada unidad de cambio horizontal de izquierda a derecha, como se observa en la figura 1 y 2.

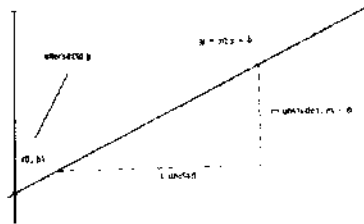


Figura 1. Línea recta con pendiente positiva

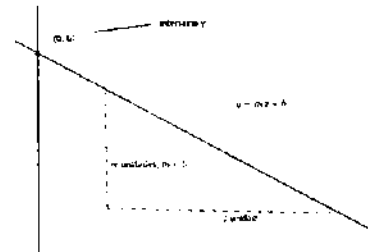
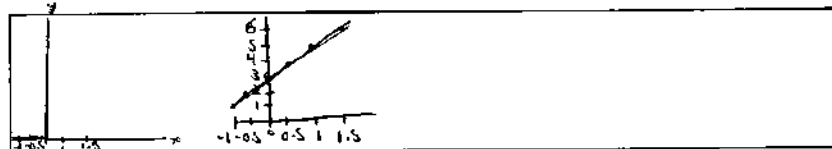


Figura 2. Línea recta con pendiente negativa

b) Considere la ecuación de la recta, $y = 2x + 3$. Identifique la variable independiente y la variable dependiente. Elija por lo menos 5 valores dependientes y haga una tabla con los valores independientes correspondientes.

y	x	x	y
1		-1	1
2		-0.5	2
3		0	3
4		0.5	4
5		1	5
6		1.5	6

c) Grafique la línea recta expresada por la ecuación $y = 2x + 3$.



d) Considere los puntos $(6, 9)$ y $(0, 11)$. Sin hacer ningún cálculo responda ¿la pendiente es positiva o negativa? Compruebe gráficamente y después analíticamente.



e) Utilizando los puntos generales, (x_n, y_n) , donde n es n -ésimo punto. Calcule la pendiente entre el punto 1 (x_1, y_1) y 2 (x_2, y_2) .

$x_1 = -1$	$m = \frac{-0.5 - (-1)}{2 - 1}$	$m = \frac{0.5}{1}$	$m = 0.5$
$x_2 = -0.5$	$m = \frac{2 - 1}{-0.5 - (-1)}$	$m = \frac{1}{0.5}$	$m = 2$
$y_1 = 1$			
$y_2 = 2$			

f) Exprese la ecuación de la pendiente para los puntos generales del inciso e utilizando el concepto de Δ .

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Parte II (con CAS): Aplicación

La datación por radiocarbono, es una técnica de datación radiométrica que utiliza el isótopo carbono-14 para la determinación de la edad de materiales que contienen carbono. Los siguientes datos obtenidos experimentalmente, demuestran la cantidad de C-14 para un material a lo largo del tiempo.

Antigüedad del Material (miles de años)	Cantidad de C-14
0	15.30
1	13.56
2	12.01
3	10.64
4	9.43
5	8.35
6	7.40
7	6.56
8	5.81
9	5.15
10	4.56
11	4.04
12	3.58
13	3.17
14	2.81
15	2.49
16	2.21
17	1.95

a) Complete la siguiente tabla considerando el rango de años dado.

Rango	Diferencia de Años	Diferencia de C-14	Pendiente
6-14	-8	5.81-4.59	0.12625-0.8337y = 0.12625(12) + ...
6-12	-6	7.40-3.82	1.2333-0.6366
6-10	-4	9.43-2.84	2.3533-0.91
6-8	-2	12.01-1.59	6.005-0.795

b) Observando la tabla anterior y con base en la ecuación del inciso e) parte I. Calcule la cantidad de C-14 a 7 años (7c) y compárelo con la cantidad a 7 años real (7r). Utilizando la pendiente y su intervalo respectivo.

Rango	7c	7c-7r
6-14	6-8.259	1.2659
6-12	6-7.63	0.233
6-10	6-6.9	0.83
6-8	7-4	0.81

c) ¿Qué observaciones tiene? ¿qué pendientes calculan mejor el valor de 7c?

La pendiente del rango 6-10

d) ¿A qué se debe la observación del inciso anterior?

Que el rango es más aproximado al valor real

e) Para calcular la cantidad de C-14 a 9.5 años, ¿cuál pendiente del los siguientes rangos utilizaría? (6 - 10, 7 - 10, 8 - 10, 9 - 10) ¿Por qué?

En el rango de 9-10 por que entre ese rango se encuentra la cantidad de años

f) Calcule la cantidad de C-14 a 9.5 años.

$$y_2 = -0.71(9.5 - 10) + 4.56 = 4.415$$

Dentro del sistema CAS, se pueden graficar datos. Utilizando la hoja de cálculo ingrese los datos experimentales del problema anterior dentro de esta sección. Para elegir la hoja de cálculo seleccione **Home**, y después **Hoja de Cálculo**. En la celda que tiene la letra A (celda superior) ingrese los años y llame dicha columna "yrs" y en la celda que contiene la letra B ingrese los datos de C-14 y llame dicha columna "C14". Dentro de **Home**, elija **Datos y Estadísticas** y presione **Enter**. Utilizando el **Navegador**, mueva la flecha hacia abajo y elija que la variable x sea "yrs". Después, mueva la flecha hacia la izquierda y elija que la variable y sea "C14". Ahora deben aparecer los datos graficados.

Se puede hacer un ajuste de datos para los datos graficados. Dentro de la gráfica, presione **Menú**, **4: Analizar**, **6: Regresión**. Dentro de estas opciones existen varios ajuste disponibles.

g) Haga un ajuste de datos utilizando **Lineal (mx + b)**. ¿Qué sucede? Repita el ajuste utilizando **exponencial**. ¿Cuál se ajusta mejor?

los puntos estan dispersos de la linea.
la exponencial se ajusta.

Dentro de la hoja de cálculo, también se pueden ver datos de ajuste de datos. En la hoja de cálculo donde están los datos presione **menú**, **4: Estadística**, **1: Cálculos estadísticos**, **3: Regresión lineal (mx + b)**. Si no encuentra la hoja de cálculo, puede presionar **ctrl** y los botones de derecha o izquierda para cambiar entre las pantallas. Para lista x ingrese A[], para la lista y ingrese B[] y en la primera columna de resultado ingrese c[].

h) ¿Qué información aparece?

Error de dimencion. no hay suficientes elementos en la lista.
la pendiente y la constante b

i) Repita el procedimiento para una A: Regresión exponencial... pero en la primera columna de resultado ingrese e[] ¿Qué información aparece? ¿Se llega a la misma conclusión que en el inciso g?

nos da los valores de a y b

j) Utilizando la ecuación de mejor ajuste, calcule la cantidad de C-14 a 9.5 años.

$$\begin{aligned} &\text{da } 5.15 \quad a \times b^x \\ &\quad \quad \quad b^{9.5} \\ &15.3024 \times 0.885478^{9.5} = 4.84482 \end{aligned}$$

k) Utilice la pendiente del rango 9 - 10 años para calcular la cantidad de C-14 a 9.3 y 9.6 años. Utilizando como rango 9.3 - 9.6 años, calcule la cantidad de C-14 a 9.5 años.

$$\begin{aligned} &5.15 \text{ y de acuerdo a } 9.3 \text{ años} = 4.96 \\ &m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4.6 - 4.3}{10 - 9} = .3 \quad 9.6 \text{ años} = 4.78 \end{aligned}$$

l) Considere la cantidad de C-14 calculada a 9.5 años del inciso f), k), y j). ¿Cuál es la mejor aproximación? ¿Por qué?

La mejor aproximación es la del j por que la exponencial se adapta mejor a nuestro grafico de datos.

l) Con sus palabras explique la observación anterior.

Es mejor usar las graficas semejantes a la original que usar otras que no concuerden.

m) Exprese por medio de una expresión algebraica lo que acaba de decir.

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Parte III (Simbolización): Desarrollo simbólico de la Pendiente

a) En el ☐ introduzca un símbolo que represente los datos.

☒ X	☒ Y
0	15.30
1	13.56
2	12.01
3	10.64
4	9.43
5	8.35
6	7.40
7	6.56
8	5.81
9	5.15
10	4.56
11	4.04
12	3.58
13	3.17
14	2.81
15	2.49
16	2.21
17	1.95

b) Escriba la operación necesaria para calcular la pendiente entre 6 y 14.

$$\frac{2.81 - 6.56}{14 - 6} = 0.5737$$

c) ¿Cómo llama o expresa simbólicamente la ecuación anterior?

Pendiente

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

d) ¿Cómo se queda la expresión simbólica anterior cuando se evalúa en 9.5 años?

$$\frac{4.56 - 5.15}{10 - 9} = 0.59$$

e) ¿Cómo se expresa lo anterior para cualquier valor?

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Actividad 3
Pendiente como Función

Líder: Pedro García Rubio
Calculadora: José Sacramento Sanguino Genua
Hoja de Trabajo: Rumio Mondragon
Número de Equipo: 6 Hora de Inicio: 10:30 Hora de Terminación:

A. Desarrollo Matemático de $\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$

Parte I (Simbólica): Desarrollo Preliminar

a) Una forma convencional de describir una pendiente es $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$. Observe la forma convencional y la suya de la actividad pasada, ¿Cuál prefiere usar? ¿Por qué?

Es la misma formula que se utilico en la actividad pasada.

La pendiente también se puede escribir como $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ o $\frac{y_4 - y_3}{x_4 - x_3}$ o $\frac{y_n - y_m}{x_n - x_m}$ donde m y n son subíndices. Si $y_n = f(x_n)$ y $n = 10$, se puede escribir como $y_{10} = f(x_{10})$.

b) Escriba la pendiente $\frac{f(x_0) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$ introduciendo la variable n.

$$\frac{f(x_n) - f(x_m)}{x_n - x_m} \quad \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}$$

c) Para la pendiente $\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$, ¿qué valor le daría a n?

$$n = 1 \quad \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}$$

d) Si $\Delta x = x_{n+1} - x_n$, ¿a qué es igual x_{n+1} ? Exprese la pendiente del inciso b, utilizando los términos Δx y x_n .

$$x_{n+1} = x_2 \quad x_{n+1} = \Delta x + x_n$$

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Parte II (con lápiz y papel): Introducción de h

a) Compare la ecuación obtenida en el inciso d de la parte I, ¿es diferente a $\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$? Si es diferente, ¿a qué se debe dicha diferencia?

Es diferente por que utilizamos el Δx , Δy para indicar el incremento.

b) Observando la figura 1, ¿qué representa y a qué es igual h ?

h representa el Δx
 $h = x_2 - x_1$

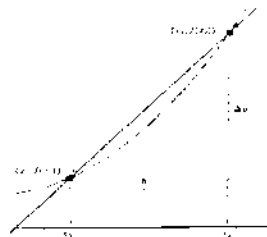


Figura 1. Introducción del concepto h

c) De la expresión dada en el inciso a). Sustituyendo Δx por h , ¿cómo queda la expresión de la pendiente?

$$\frac{f(x + x_2 - x_1) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \quad \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

d) Considere la función, $f(x) = x^2 + 2x$. ¿Cómo se expresa $f(x_1)$, $f(x_1 + \Delta x)$ y $f(x_1 + h)$?

$$\begin{aligned} f(x_1) &= x_1^2 + 2x_1 \\ f(x_1 + \Delta x) &= (x_1 + \Delta x)^2 + 2(x_1 + \Delta x) \\ f(x_1 + h) &= (x_1 + h)^2 + 2(x_1 + h) \end{aligned}$$

e) Considerando $f(x) = x^2 + 2x$ y Δx o h , ¿cuál es la ecuación de la pendiente del inciso c)? (No es necesario reducir algebraicamente)

$$\frac{f(x + \Delta x - x_1) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \quad \frac{f(x+h-x_1) - f(x_1)}{h} = m$$

$$\frac{(x+h)^2 + 2(x+h) - (x^2 + 2x)}{h} = m$$

f) Si el primer punto es (1, 3), exprese la ecuación del inciso anterior con estos punto. ¿Qué observa de esta ecuación?

$$\frac{f(1+h)-f(1)}{h} \quad \frac{f(1+h)-f(1)}{h} \quad \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \quad \frac{(1+h)^2+2(1+h)-3}{h}$$

Parte III (con CAS): Variación de h

a) Como en cualquier hoja de cálculo, en la siguiente imagen se puede observar que la columna A representa los valores que tomara Δx o h , mientras que en la columna B irán los valores que tomara la pendiente (m). Utilizando la expresión obtenida en el inciso f), calcula le pendiente y completa la tabla.

	A	B
1	0.1	4.1
2	0.01	4.01
3	0.001	4.001
4	0	0
5	-0.001	-4.001 3.999
6	-0.01	-4.01 3.99
7	-0.1	-4.1 3.9

b) ¿Qué observa cuando Δx o $h = 0$? ¿A qué se debe ese valor?

Que es indefinido, que un denominador no puede ser nunca cero.

c) ¿A qué número se acerca la pendiente cuando Δx o h se acerca a cero a partir de los números positivos?

Se acerca a 4

d) ¿A qué número se acerca la pendiente cuando Δx o h se acerca a cero a partir de los números negativos?

Se acerca a 4

e) Observando la respuestas a los incisos c y d, ¿llega a la misma conclusión?

Si que tanto por la derecha y por izquierda se aproximan a cuatro

f) Cuando Δx o h tiende a cero, ¿a qué tiende la pendiente?

Tiende a cuatro.

g) Considere la observación del inciso anterior, ¿es igual al valor cuando Δx o $h = 0$?

No porque el valor cuando $\Delta x = 0$ es indefinido.

h) ¿Qué puede concluir de las observaciones de los incisos f y g?

Que para cero no está definida.

i) ¿Cómo puede definir este tipo de análisis (analítico o gráfico)? Explique su razonamiento.

"Gráfico", como una función continua.
"Analítico" como el límite de la función.

Actividad 4
Límites

Líder:

Calculadora:

Hoja de Trabajo:

Número de Equipo:

Hora de Inicio:

Hora de Terminación:

Parte I (con lápiz y papel): Concepto Informal del Límite

Suponga que quiere calcular la velocidad promedio al viajar en una carretera recta. Si pasa el kilómetro 100 a las 12:00 y el kilómetro 140 a las 12:30:

a) Escriba la operación que realiza para obtener la cantidad que se viajó y para saber en cuánto tiempo de viajó.

$$V = \frac{d_2 - d_1}{t_2 - t_1} = \frac{140 - 100}{\frac{12.5}{3} - 12} = \frac{40}{5} = 80 \text{ km/h} \quad \text{Para 30 minutos = 40 km}$$

b) Utilizando las expresiones del inciso anterior, escriba la operación para calcular la velocidad promedio.

$$V_p = \frac{d_2 - d_1}{t_2 - t_1}$$

c) Explique qué es una pendiente y escriba la expresión.

la pendiente se puede tomar como la velocidad promedio

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

d) Relacione la velocidad promedio con la ecuación de la pendiente. ¿Qué observa?

es la misma ecuación, la variable x = tiempo
la variable y = distancia

Por otra parte, aun que la velocidad promedio es una cantidad fija, es casi seguro que la velocidad instantánea (la velocidad indicada por el velocímetro), varía de un momento a otro.

Se lanza verticalmente una piedra del piso a una velocidad de 96 ft/s. Despreciando la resistencia del aire, la posición de la piedra después de t segundos está dada por la función:

$$s(t) = -16t^2 + 96t$$

$$s'(t) = -32t + 96$$

La posición s es medida en pies con $s = 0$, corresponde al piso mientras que t representa el tiempo en segundos.

e) Escriba las operaciones para calcular la velocidad promedio y calcule la velocidad promedio entre el intervalo de tiempo, i) $t = 1$ y $t = 3$, ii) $t = 1$ y $t = 2$, iii) $t = 1$ y $t = 1.5$.

$$s(t) = 16t^2 + 96t \quad v = \frac{y_2 - y_1}{t_2 - t_1} = \frac{192 - 128}{3 - 1} = 32$$

$$s(1) = 128 \quad s(2) = 160 \quad s(1.5) = 144$$

$$v = \frac{160 - 128}{2 - 1} = 32 \quad v = \frac{144 - 128}{1.5 - 1} = 32$$

f) Observe los resultados de i, ii, y iii. ¿Qué diferencia observa?

No existe diferencia por que es un valor promedio

g) Escriba la ecuación para la velocidad promedio de la piedra entre el intervalo $[t_0, t]$.

$$s(t) = 16t^2 + 96t \quad v = \frac{-16t^2 + 96t - (-16t_0^2 + 96t_0)}{t - t_0}$$

$$s(t) = -16t^2 - 96t$$

Al calcular la velocidad promedio, se utilizó la posición del objeto a dos puntos distintos. Para la velocidad instantánea solamente se utiliza un punto distinto. Como se verá en la siguiente sección, la velocidad instantánea se calcula a partir de velocidades promedios.

h) Si nos interesa calcular la velocidad instantánea a $t_0 = 1$, se calcula la velocidad promedio sobre el intervalo $[1, t]$. Escriba la ecuación de la velocidad promedio.

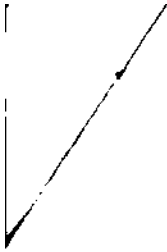
$$v = \frac{-16t^2 + 96t - (-16(1)^2 + 96(1))}{t - 1} = \frac{-16t^2 + 96t - (-80)}{t - 1}$$

La velocidad instantánea en el punto $t = t_0$ se determina al calcular la velocidad promedio sobre el intervalo $[t_0, t]$. Cuando t se acerca a t_0 la velocidad promedio típicamente se acerca a un número único, el cual es la velocidad instantánea. Lo anterior significa, que es un instante en donde el intervalo es muy pequeño. Este número se conoce como un límite. Lo cual se puede expresar matemáticamente como

$$v_{\text{instantanea}} = \lim_{t \rightarrow t_0} v_{\text{promedio}}$$

i) Sustituya la velocidad promedio en del inciso h de la expresión de la velocidad instantánea. En donde $t_0 = 1$.

$$v = \frac{-16t^2 + 96t - (-16(1)^2 + 96(1))}{t - 1} \quad v_{\text{instantanea}} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{-16t^2 + 96t - (-80)}{t - 1}$$



j) Calcule la velocidad instantánea utilizando la expresión anterior.

$$= \frac{(-16)(t+1)}{t+1} = -16(1+1) = -32$$

Parte II (con CAS): Concepto Informal del Límite

El límite $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ se refiere a un límite de *dos-lados*, porque $f(x)$ se acerca L cuando x se acerca a valores de x menores de a y para valores de x mayores de a . Para algunas funciones, es conveniente analizar límites de *un lado* denominados límites de mano izquierda y de mano derecha. La definición se puede resumir como:

1. **Límite de mano derecha:** Suponga que f es definida para todos los valores de x cercanos a a y $x > a$. Si $f(x)$ es arbitrariamente cercana a L para todos valores suficientemente cercanos a a con $x > a$, se escribe

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$$

y se dice que el límite de $f(x)$ cuando x se acerca a a por la derecha es igual a L .

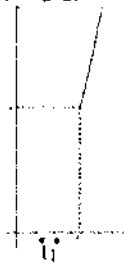
2. **Límite de mano izquierda:** Suponga que f es definida para todos los valores de x cercanos a a y $x < a$. Si $f(x)$ es arbitrariamente cercana a L para todos valores suficientemente cercanos a a con $x < a$, se escribe

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L$$

y se dice que el límite de $f(x)$ cuando x se acerca a a por la izquierda es igual a L .

a) Considere las siguientes gráficas y relacione la gráfica con el límite que le corresponde:

- i) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$, ii) $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$, iii) $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L$



Se pueden graficar funciones dentro del sistema CAS. Presione el botón **Home**, **B Gráfico**, **Menú**, **3: Tipo de gráfico**, **1: Función**. De esta manera se puede definir una función.

b) Grafique la función $f(x) = \frac{x^2-9}{4(x-2)}$ en el sistema CAS. Observe la gráfica y la ecuación de la función, ¿existe algún valor de x que no puede tomar? ¿Cuál es y por qué?

si el valor 2 porque $2-2=0$ y $0 \neq 0$ y es indeterminado

c) Compruebe utilizando el comando de trazado. (Dentro de la gráfica, presione **Menú, 5: Trazado, 1: Trazado de gráfico** y elija el número y presione **Enter**). ¿Qué sucede?

Aparece una X ya que con este valor de indeterminado

d) El trazado se hace, presionando los botones $\leftarrow$ $\rightarrow$ para mover de un punto a otro. Para la misma función, el paso de trazado es de 0.3. Este incremento se puede cambiar utilizando **Menú, 5: Trazado, 3: Paso de trazado**, introduzca el incremento deseado. Utilizando un incremento de trazo de 0.01, complete la siguiente tabla.

x	1.95	1.96	1.97	1.98	1.99	2	2.01	2.02	2.03	2.04	2.05
y	0.003	0.005	0.003	0.001	0.0001	0	0.0001	0.001	0.003	0.005	0.003

Considere las expresiones: i) $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^3 - 8}{4(x-2)}$, ii) $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^3 - 8}{4(x-2)}$, iii) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{4(x-2)}$

e) De la tabla anterior, ¿qué valores utilizaría para el caso i)?

Los valores próximos al 2 por la izquierda en este caso serían
1.95, 1.96, 1.97, 1.98, 1.99

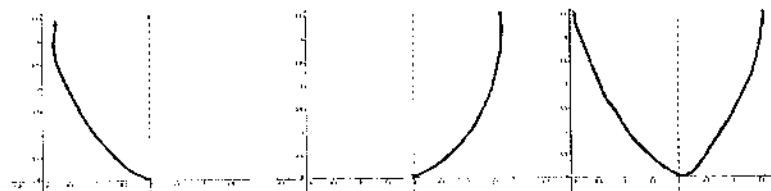
f) De la tabla anterior, ¿qué valores utilizaría para el caso ii)?

los valores después de 2 en este caso
2.01, 2.02, 2.03, 2.04, 2.05

g) De la tabla anterior, ¿qué valores utilizaría para el caso iii)?

Utilizaría el 2

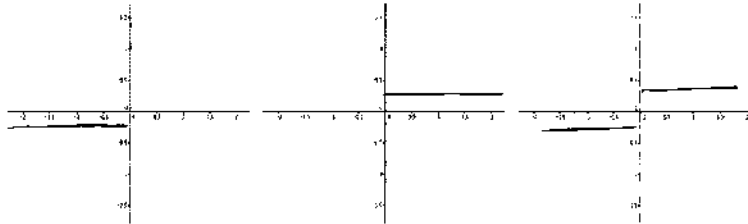
h) Represente gráficamente los casos i, ii, y iii.



i) Repita el inciso d para la función, $f(x) = \frac{|x|}{x}$. (Para introducir el modulo de valor absoluto, utilice abs(x)).

x	-0.05	-0.04	-0.03	-0.02	-0.01	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05
y	-1	-1	-1	-1	-1	0	1	1	1	1	1

j) Represente gráficamente: i) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x}$, ii) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x}$, iii) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}$.



k) Relacione el inciso h y j, ¿qué observa?

Que en ambas da asíntotas pero en una es horizontal y en otra vertical

l) Encuentre el valor de $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{4(x-2)}$ utilizando las repuestas de los incisos d hasta el h.

Es una asíntota en el número 2

$$\frac{(2)^3 - 8}{4(2-2)} = \frac{8-8}{4(0)} = 0 = \text{indef.}$$

m) Encuentre el valor de $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}$ utilizando las respuestas de los incisos i y j.

Es una asíntota en el 0

$$\frac{|0|}{0} = \frac{0}{0} = \text{indef}$$

n) ¿Qué relación existe entre el límite, límite de la derecha y límite de la izquierda?

Que para que ambos puedan ser un límite debe tender al mismo número por la izquierda y por la derecha.