

UNIVERSIDAD MICHUACANA DE SAN NICOLÁS DE HIDALGO

FACULTAD DE INGENIERÍA QUÍMICA

DISEÑO DE ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE PARA LA CONCEPTUALIZACIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES SIMULTÁNEAS EN UNA SITUACIÓN PROBLEMA, MEDIADAS CON GEOGEBRA Y CON APOYO DE LA METODOLOGÍA ACODESA

TESIS

**QUE PARA OBTENER EL GRADO DE
LICENCIATURA EN INGENIERÍA QUÍMICA**

PRESENTA

**LUIS MARTÍN PONCE VEGA
ASESORES DE TESIS**

DRA. GRACIELA ERÉNDIRA NÚÑEZ PALENIUS

DR. JOSÉ CARLOS CORTÉS ZAVALA

MORELIA, MICH., DICIEMBRE DE 2017



UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN NICOLÁS
DE HIDALGO

FACULTAD DE INGENIERÍA QUÍMICA

Edificio M, Planta Baja, Ciudad Universitaria, Francisco J. Múgica S/N,
Colonia Felicitas del Río, Morelia, Michoacán, C.P. 58030.



Número de Oficio: 25/2016

P. I. Q. LUIS MARTIN PONCE VEGA
P R E S E N T E

En contestación a su atenta solicitud de fecha 08 de Septiembre de 2016 me permito comunicarle a Usted, que se aprueba la opción de **Titulación por TESIS** propuesto para presentar Examen Recepcional en la Carrera de Ingeniero Químico.

El tema aprobado: **Diseño de actividades de Aprendizaje para la conceptualización de sistemas de ecuaciones simultáneas en una Situación Problema, mediadas con GeoGebra y con apoyo de la metodología ACODESA** el cual se desarrollará bajo el siguiente índice:

RESUMEN

- I.- INTRODUCCIÓN (JUSTIFICACIÓN, OBJETIVO(S) E HIPÓTESIS)
 - II.- GENERALIDADES O MARCO TEÓRICO
 - III.- DESARROLLO DEL TRABAJO (METODOLOGÍA)
 - IV.- ANÁLISIS Y DISCUSIÓN DE RESULTADOS
 - V.- CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES
- REFERENCIAS**

Además deberá de ajustarse al artículo 39 y 41, y podrá contemplar los puntos necesarios del artículo 40 de la reglamentación interno de la Facultad de Ingeniería Química en su capítulo VI.

Para tales efectos fungirá como asesor(a) el(la) **DR. NUÑEZ PALENIUS GRACIELA ERENDIRA** Profesor(a) de la Facultad de Ingeniería Química y como asesor(a) externo(a) el(la) **Dr. José Carlos Cortés Zavala** de Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas, UMSNH. La mesa de jurado para revisión y realización de este trabajo estará integrada por:

DR. NUÑEZ PALENIUS GRACIELA ERENDIRA
M. C. GALLARDO REYES MARIA DEL ROSARIO
M. C. REYES REYES MARIA TERESA
DR. MORENO JUAREZ DELIA
LIC. MONTES GAYTAN ROCIO

PRESIDENTE	9100129-3
VOCAL 1	8700405-4
VOCAL 2	0500549-3
SUPLENTE 1	8800066-4
SUPLENTE 2	9200282-0

A T E N T A M E N T E

Morelia, Mich. A 08 de Septiembre de 2016.

DRA. MA. DEL CARMEN CHÁVEZ PARGA
DIRECTOR DE LA FACULTAD DE INGENIERÍA QUÍMICA





FACULTAD DE INGENIERÍA QUÍMICA

PROGRAMA ACREDITADO

100 años

UNIVERSIDAD MICHOCANA
DE SAN NICOLÁS DE HIDALGO
Cuna de líderes, crad of processors

2017, Año del Centenario de la Constitución y de la Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo

No. Oficio 232/2017/2018

Morelia, Michoacán, a 13 de diciembre de 2017

Asunto: Autorización de Impresión de Tesis

LIC. ULISES GUTIÉRREZ VÁZQUEZ
JEFE DEL DEPARTAMENTO DE TITULACIÓN
DE LA UNIVERSIDAD MICHOCANA
P R E S E N T E.

Por este medio, me estoy permitiendo transcribir a esa Sección de Certificación a su digno cargo la comunicación enviada a esta Dirección por la mesa de jurado de examen Recepcional de esta fecha y que a la letra dice:

Atendiendo a las indicaciones se hizo la revisión de manuscrito de Tesis presentado por el pasante de Ingeniera Química:

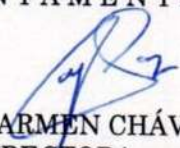
Creemos que es de aceptarse dicho manuscrito con las modificaciones sugeridas verbalmente al interesado: ENTERADOS: LUIS MARTIN PONCE VEGA CON MATRÍCULA 0703448B

DRA. NÚÑEZ PALENIUS GRACIELA ERENDIRA
DR. CORTÉS ZAVALA JOSÉ CARLOS
M.E.M. GALLARDO REYES MARÍA DEL ROSARIO
M.C. REYES REYES MARÍA TERESA

PRESIDENTA 91001293
COASESOR 94002460
VOCAL 87004054
VOCAL 05005493

Comunico a Usted lo anterior para los fines legales a que haya lugar.

ATENTAMENTE


DRA. MA. DEL CARMEN CHÁVEZ PARGA
DIRECTORA
DE LA FACULTAD DE INGENIERÍA QUÍMICA DE LA UMSNH QUÍMICA





FACULTAD DE INGENIERÍA QUÍMICA

PROGRAMA ACREDITADO

100 años
UNIVERSIDAD MICHOCANA
DE SAN NICOLÁS DE HIDALGO
Cuna de líderes, crad of generations

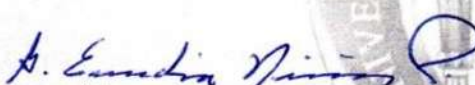
2017, Año del Centenario de la Constitución y de la Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo

Morelia, Michoacán a 13 de diciembre de 2017.

DRA. MA. DEL CARMEN CHÁVEZ PARGA
DIRECTORA
DE LA FACULTAD DE INGENIERÍA QUÍMICA DE LA UMSNH
PRESENTE

Atendiendo a sus indicaciones se hizo la revisión de manuscrito de TESIS presentada por el P.I.Q.
LUIS MARTIN PONCE VEGA CON MATRÍCULA 0703448B.

Creemos que es de aceptarse dicho manuscrito con las modificaciones sugeridas verbalmente al interesado.


DRA. NÚÑEZ PALENTUS GRACIELA ERENDIRA
PRESIDENTA 91001293


DR. CORTÉS ZAVALA JOSÉ CARLOS
COASESOR 94002460


M.E.M. GALLARDO REYES MARÍA DEL ROSARIO
VOCAL 87004054


M.C. REYES REYES MARÍA TERESA
VOCAL 05005493

ACREDITADA

FACULTAD DE INGENIERÍA
QUÍMICA

Agradecimientos

A todos:

Mis padres Luis Martín y Mirna que han dado todo de si, por mi educacion, mi bienestar y mi felicidad.

Mi hermano Fernando, con quien he tenido el gusto de crecer y aprender a su lado.

Mi familia, que ha estado para mí desde el principio.

Mis amigos, que me dieron las mejores experiencias dentro y fuera de las aulas.

La Dra. Erendira, por su calidad humana y sus enseñanzas.

El Dr. Carlos, que me orientó en el desarrollo la investigación.

Sepan que han sido mi mayor motivacion.

Además, a los alumnos de la Facultad de Ingeniería Química participantes en las experimentaciones y a la Red de Colaboración Académica *Innovación Educativa para el Aprendizaje de las Matemáticas Mediado con Tecnología*

Índice general

Glosario	V
Resumen	VII
Abstract	VIII
1 Introducción	1
1.1 Antecedentes	1
1.2 Planteamiento del Problema	4
1.3 Hipótesis	5
1.4 Justificación	6
1.5 Preguntas de investigación	7
1.6 Objetivos	7
1.5.1 Objetivo General	7
1.5.2 Objetivos Específicos	8
2 Marco Teórico	9
2.1 Constructivismo	9
2.2 Registros de representación semiótica	12
2.3 Visualización	15
2.4 Mediación	18
2.5 Situaciones Problema	20
2.6 Metodología ACODESA	25
3 Metodología	30
3.1 Diseño de las Actividades de Aprendizaje	30
3.1.1 Diseño de la Actividad de aprendizaje sobre secuencias	31
3.1.2 Diseño de la Actividad de aprendizaje sobre Función Lineal	33
3.1.3 Diseño de la Actividad de Aprendizaje sobre sistemas de ecuaciones lineales	34
3.2 Experimentaciones	36
3.2.1 Prueba Piloto	36
3.2.2 Prueba Formal	37
3.3 Rediseño de las Actividades de Aprendizaje	38
4 Análisis y Discusión de Resultados	41
4.1 Análisis del Pre-Test	41
4.2 Prueba Formal	51
4.2.1 Resultados del trabajo en equipo	51
4.2.2 Resultados del debate	75
4.3 Post-Test.	80
5 Conclusiones	91
Bibliografía	93

A	Actividades Aplicadas en la Prueba piloto	99
	A.1 Actividad 1	99
	A.2 Actividad 2	105
	A.3 Actividad 3	113
B	Capturas de los manipulables de GeoGebra	129
	B.1 Actividad 1	129
	B.2 Actividad 2	130
	B.3 Actividad 3	131
C	Resultados de la Prueba Formal	132
	C.1 Actividad 1	132
	C.2 Actividad 2	138
	C.3 Actividad 3	147

Glosario

Actividades de Aprendizaje

Tares estructuradas de tal manera que se puede guiar y organizar el aprendizaje, ejercitar, afianzar y consolidar lo aprendido.

Aprendizaje Cooperativo

Método de aprendizaje en donde las interacciones sociales con compañeros de clase, maestros y otros contribuyen a la construcción de conocimientos.

Aprendizaje Mediado

Aprendizaje a través de mediadores. El mediador ayuda al aprendiz a estructurar, filtrar y programa estímulos.

Constructivismo.

Teoría de aprendizaje, la cual argumenta que los humanos generan conocimiento y significado a través de sus experiencias e ideas.

Semiótica

Ciencia que estudia los diferentes sistemas de signos que permiten la comunicación entre individuos, sus modos de producción, de funcionamiento y de recepción.

Sistema de ecuaciones lineales compatible determinado

Sistema de ecuaciones simultaneas que tiene una única solución.

Sistema de ecuaciones lineales compatible indeterminado

Sistema de ecuaciones simultaneas que tiene infinitas soluciones.

Sistema de ecuaciones lineales incompatible

Sistema de ecuaciones simultaneas que no tiene solución.

Índice de tablas

3.1	Modificaciones de las Actividades de Aprendizaje posteriores a la prueba piloto	39
4.1	Respuestas del Pre-Test	42
4.2	Calificaciones del Pre-Test	50
4.3	Análisis de la Actividad 1: conceptualización de secuencia	52
4.4	Análisis de la Actividad 1: conceptualización de función matemática	53
4.5	Análisis de la Actividad 2: conceptualización de función	58
4.6	Análisis de la Actividad 2: conceptualización de pendiente	58
4.7	Análisis de la Actividad 2: conceptualización de ordenada al origen	61
4.8	Análisis de la Actividad 2: conceptualización de función lineal	63
4.9	Análisis de la Actividad 3: conceptualización de clasificación de los sistemas de ecuaciones lineales	66
4.10	Análisis de la Actividad 3: construcción y solución de un sistema de ecuaciones lineales, parte 2	70
4.11	Análisis de la Actividad 3: construcción y solución de un sistema de ecuaciones lineales, parte 2	74
4.12	Análisis de los resultados del debate	76
4.13	Respuestas del Post-Test	80
4.14	Calificaciones del Post-Test	89

Índice de figuras

3.1	Red conceptual de la AA 1.	31
3.2	Red conceptual de la AA 2.	33
3.3	Red conceptual de la AA 3.	35
4.1	Incisos (a) y (c) de la actividad a lápiz y papel del Equipo 2.	53
4.2	Incisos (a) y (c) de la actividad a lápiz y papel del Equipo 2.	54
4.3	Inciso (k) de la actividad a lápiz y papel del Equipo 2.	55
4.4	Enunciado (m) de la actividad a lápiz y papel del Equipo 3.	55
4.5	Inciso (ñ) de la actividad a lápiz y papel del Equipo 2.	56
4.6	Inciso (o) de la actividad a lápiz y papel del Equipo 1.	57
4.7	Inciso (o) de la actividad a lápiz y papel del Equipo 2.	57
4.8	Inciso (o) de la actividad a lápiz y papel del Equipo 3.	57
4.9	Inciso (e) de la actividad a lápiz y papel del Equipo 1.	58
4.10	Inciso (g) de la actividad a lápiz y papel del Equipo 2.	59
4.11	Inciso (h) de la actividad a lápiz y papel del Equipo 2.	59
4.12	Inciso (h) de la actividad a lápiz y papel del Equipo 3.	60
4.13	Inciso (j) de la actividad a lápiz y papel del Equipo 1.	61
4.14	Incisos (i) y (l) de la actividad a lápiz y papel del Equipo 1.	62
4.15	Incisos (i) y (l) de la actividad a lápiz y papel del Equipo 3.	62
4.16	Inciso (m) de la actividad a lápiz y papel del Equipo 1.	63
4.17	Inciso (m) de la actividad a lápiz y papel del Equipo 3.	63
4.18	Incisos (n) y (o) de la actividad a lápiz y papel del Equipo 1.	64
4.19	Incisos (n) y (o) de la actividad a lápiz y papel del Equipo 3.	65
4.20	Inciso (e) y ecuaciones del inciso (a) de la actividad a lápiz y papel del Equipo 3.	66
4.21	Incisos (h) y (i) de la actividad del Equipo 2.	68
4.22	Inciso (f) y ecuaciones del inciso (j) de la actividad a lápiz y papel del Equipo 1.	68
4.23	Inciso (n) y ecuaciones del inciso (k) de la actividad a lápiz y papel del Equipo 3.	69
4.24	Inciso (n) de la actividad a lápiz y papel del Equipo 2.	69
4.25	Inciso (p) de la actividad del Equipo 2.	70
4.26	Incisos (c), (d) y (e) de la actividad a lápiz y papel del Equipo 1.	71

4.27	Inciso (i) y gráfica del inciso (h) de la actividad a lápiz y papel del Equipo 2.	72
4.28	Inciso (i) y gráfica del inciso (h) de la actividad a lápiz y papel del Equipo 1.	73
4.29	Inciso (g) de la actividad a lápiz y papel del Equipo 2.	74
4.30	Incisos (j) y (k) de la actividad a lápiz y papel del Equipo 2.	74
4.31	Incisos (j) y (k) de la actividad a lápiz y papel del Equipo 1.	75
4.32	Inciso (m) de la actividad a lápiz y papel del Equipo 2.	75
4.33	Inciso (m) de la actividad a lápiz y papel del Equipo 1.	75
4.34	Ecuación en el pizarrón por el Participante 6.	77
4.35	Gráfica bosquejada por el Participante 2.	80

DISEÑO DE ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE PARA LA CONCEPTUALIZACIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES SIMULTÁNEAS EN UNA SITUACIÓN PROBLEMA, MEDIADAS CON GEOGEBRA Y CON APOYO DE LA METODOLOGÍA ACODESA

El presente trabajo de tesis muestra el diseño de Actividades de Aprendizaje para la conceptualización de los sistemas de ecuaciones lineales partiendo de una Situación Problema, que incluye el uso del programa GeoGebra como mediador del aprendizaje y propone la aplicación de la Metodología ACODESA, que combina el trabajo colaborativo y la autorreflexión de los estudiantes.

Para el desarrollo del diseño de las actividades se realizaron dos experimentaciones con alumnos de primer grado de la Facultad de Ingeniería Química. Una prueba piloto que permitió evaluar su estructura conceptual y didáctica, y una prueba formal en la que se evaluó el cumplimiento de sus objetivos didácticos. Los resultados se analizaron con base en la evolución de las representaciones escritas por los participantes y las videograbaciones de las experimentaciones.

La tesis concluye con una propuesta final de las Actividades de Aprendizaje, que representan un cambio en el paradigma tradicional de la enseñanza, brindándole un rol más activo al estudiante en la construcción de su propio conocimiento, que además amplía los medios para su aprendizaje al incluir un software interactivo como GeoGebra.

Palabras clave: Actividad de Aprendizaje, Situación Problema, GeoGebra, Metodología ACODESA, Sistema de ecuaciones simultáneas.

**DESING OF LEARNIGN ACTIVITIES FOR THE
CONCEPTUALIZATION OF SISTEM OF LINEAR EQUATIONS ON
A PROBLEM SITUATION, MEDIATED WITH GEOGEBRA AND
WITH SUPPORT OF ACODESA METODOLOGY**

The following Thesis presents the design of learning activities for the conceptualization of system of linear equations from a problem situation, with GeoGebra as a learning mediator and proposes the use of ACODESA methodology, which combines collaborative work and self-reflection.

Two experimentations were carried out with first year students of the Faculty of Chemical Engineering. One pilot test allowed to evaluate their conceptual an didactic structure, and a formal test allowed to evaluate the fullfiment of their didactic goals. The results were analyzed based on the student's representations evolution and the test's video recordings.

The Thesis concludes with a final proposal of learning activities, which mean a change in the traditional model of teaching, giving to the student a most active role in his own knowledge construction, also extends the means for his learning with the use of GeoGebra.

1. Introducción

El presente trabajo de tesis se realizó con el objetivo de diseñar Actividades de Aprendizaje (AA) basadas en Situaciones Problema, para la conceptualización de sistemas de ecuaciones lineales. La investigación tiene sustento en diferentes teorías socioconstructivistas como la de Vigotsky y la de Piaget, así mismo, enfatiza la importancia de desarrollar en los estudiantes la habilidad para transitar entre diferentes registros de representación. Para este propósito, las actividades están estructuradas de manera que incluye el uso del programa GeoGebra como mediador del aprendizaje. En la experimentación de las AA se aplicó la Metodología ACODESA, que combina el trabajo colaborativo y la autorreflexión de los estudiantes.

En la última década se ha desarrollado una gran cantidad de software educativo y entre los de acceso libre, se encuentra Geogebra, un programa dinámico multiplataforma que sirve para crear una conexión entre la geometría y el álgebra de un modo novedoso y visual, propiciando el aprendizaje en los estudiantes (Martínez y Salcedo, 2015).

1.1. Antecedentes

El software GeoGebra ha sido ampliamente usado en investigaciones de la enseñanza y aprendizaje de matemáticas en varias áreas y en diferentes niveles de escolarización, por ejemplo, en nociones básicas de trigonometría, como es el caso de la investigación de Carvajal, Rincón y Zúñiga (2017), sobre el estudio de triángulos rectángulos 30° - 60° desde el enfoque de la teoría de situaciones didácticas, aplicada en estudiantes de la educación media, que concluyó:

“La implementación del software Geogebra generó un ambiente de aprendizaje distinto al de enseñanza convencional en matemáticas, lo que benefició en gran medida el grado de motivación y disposición en las actividades propuestas para cada sesión.”

Por otro lado, la investigación de Almérico y Cruzata (2016) sobre los teoremas de Piro, Poncelet y Steiner, que presentó actividades bajo un enfoque constructivista, aplicadas en estudiantes de secundaria, obtuvo resultados favorables y resaltó que el software facilita la comprensión de los conceptos.

Por otra parte, en la investigación de Gutiérrez y Prieto (2015) se utilizó GeoGebra para caracterizar las transformaciones “deformación” y “reflexión” en familias de parábolas definidas por $g(x) = ax^2$, aprovechando las herramientas del software para observar dinámicamente las relaciones entre las representaciones gráfica y simbólica de la función al variar los parámetros convenientemente. A partir de los resultados se consideró que su uso facilita la integración eficiente de la tecnología en el aula, ya que coloca al profesor en condiciones distintas para impartir la enseñanza de este tópico, facilitando así la comprensión de sus estudiantes.

Además de la aplicación del software en geometría, Narváez (2015) diseñó talleres de socialización, guiados y de autoaprendizaje, donde se estimulaba el desarrollo del pensamiento variacional a través del estudio de funciones polinómicas utilizando el software GeoGebra.

Por otra parte, Arellano, Cornejo, Gómez, Palm y Villalobos (2017), analizaron el impacto del uso de software matemático en el proceso de enseñanza y aprendizaje del cálculo diferencial, al desarrollar un manual con ejercicios y problemas que requerían del uso de GeoGebra para su solución. En sus resultados, se indicó que encuestas aplicadas a estudiantes y profesores demostraron una respuesta positiva al uso del software.

Además, GeoGebra se ha aplicado para la enseñanza de análisis estadísticos, como describe la investigación que realizó Inzunza (2014) sobre el uso del software en la probabilidad, donde observa que el diseño de este programa le permite al usuario ser participe en la construcción de su propio conocimiento.

Así mismo, se ha usado GeoGebra para la enseñanza de temas propios de la ingeniería, como en la investigación de Iriarte, Aginaga y Ros (2014), para la didáctica de mecanismos y teoría de máquinas, para simular mecanismos e interactuar con ellos en el grado de Ingeniería Mecánica de la Universidad Pública de Navarra, con resultados satisfactorios.

Otra propuesta didáctica enfocada al ámbito de la ingeniería, es la relativa al trazado de cicloides, hipocicloides y epicicloides (Flórez, Carbonell y Martínez, 2011), de la Universidad Politécnica de Madrid. En la que mediante GeoGebra se realizaron construcciones dinámicas del trazado de estas curvas, con aplicaciones prácticas en ingeniería para el diseño de partes mecánicas con engranajes. Los resultados indicaron que el uso de simulaciones digitales de estos mecanismos ayuda a entender distintos conceptos mecánicos y permiten al profesorado diseñar su propio itinerario.

Las investigaciones y propuestas didácticas se desarrollan con elementos adicionales al uso de GeoGebra, por ejemplo, Díaz, García y Vargas (2016), utilizaron balanzas construidas de acrílico y el software para la comprensión de ecuaciones lineales con una y dos variables con estudiantes de secundaria.

Por su parte, Mendo, Castañeda y Tarifa (2017), utilizaron GeoGebra y la Metodología ACODESA para desarrollar una secuencia didáctica aplicada a estudiantes del segundo semestre de Ingeniería Industrial, con el propósito de estimular el desarrollo de argumentos matemáticos que siguieran el modelo de Toulmin.

Cortés, Hitt y Saboya (2016), investigaron sobre el desarrollo del pensamiento algebraico-matemático, aplicando actividades a estudiantes de secundaria con apoyo de la Metodología ACODESA, obteniendo resultados que resaltan la importancia de crear un conocimiento estable.

La Metodología ACODESA fue usada también por Hitt y Gonzáles-Martín (2015), que aplicaron actividades a estudiantes de secundaria, basadas en Situaciones Problema para la

conceptualización de la covariación entre variables, con resultados favorables de acuerdo a la evolución de las representaciones de los estudiantes.

A su vez, Guerrero, Pantoja, Ulloa y Nesterova (2016), utilizaron una Situación Problema (SP) y un software de procesamiento de video, en un ambiente colaborativo para instruir sobre la modelación matemática de situaciones cotidianas, en su investigación mencionan que el empleo de SP que se relaciona con el estudiante, tienen ciertas ventajas sobre las actividades algorítmicas comúnmente usadas en clase, ya que los motiva a aprender matemáticas activamente, mientras encuentran un uso a los conceptos y algoritmos aprendidos en clase.

1.2. Planteamiento del problema

La Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos (OCDE), lanzó un estudio trienal sobre los alumnos de 15 años en todo el mundo, denominado Programa para la Evaluación Internacional de Alumnos o PISA, que evalúa hasta qué punto han adquirido los conocimientos y habilidades fundamentales para una participación plena en las sociedades modernas. La evaluación se centra en las materias escolares básicas de ciencia, lectura y matemáticas. También se evalúan las capacidades de los alumnos en un ámbito innovador y en el 2015, ese ámbito fue la resolución colaborativa de problemas. Declaró en su diagnóstico sobre la Estrategia de Competencias, Destrezas y Habilidad de México del 2017, que pocos jóvenes mexicanos desarrollan niveles altos de competencias y cursan niveles educativos superiores. Considerando lo anteriormente expuesto, la presente investigación plantea emplear la Metodología ACODESA, que además de guiar a los estudiantes en el desarrollo de competencias matemáticas, fomenta habilidades como el trabajo colaborativo, que complementan su formación.

Por otra parte, el reporte de PISA del 2015 indica para el área de matemáticas que en México, 57% de los estudiantes no alcanzan el nivel básico de competencias, esto implica que de vez en cuando pueden realizar procedimientos rutinarios, tales como operaciones aritméticas en situaciones donde todas las instrucciones les son dadas, pero tienen

problemas identificando cómo una “simple” situación del mundo real puede ser representada matemáticamente. Así mismo, actualmente el campo laboral en el país exige que las instituciones de nivel superior replanteen la práctica educativa de las ciencias básicas, particularmente de las asignaturas del área de matemáticas, de modo que se propicie el desarrollo en los estudiantes de las competencias de análisis y síntesis, así como su capacidad creativa e innovadora, utilizando estas habilidades en la solución de problemas del área de desarrollo que les competa (Arellano et al, 2017). Por lo anteriormente citado, la investigación plantea el diseño de Actividades de Aprendizaje que abordan la conceptualización de los sistemas de ecuaciones lineales inmersas en Situaciones Problema mediadas con Geogebra, permitiendo al estudiante: manipular las representaciones de los objetos matemáticos, visualizar de manera dinámica sus características y relaciones con otros conceptos, y que reflexione acerca de los mismos, en lugar de que resuelva una secuencia de instrucciones directas.

Es importante considerar que las matemáticas sin contexto son abstractas y por ende requieren de una completa atención y dedicación para poder apropiarse de sus conceptos, por este motivo la enseñanza de las matemáticas parte del uso de material concreto, permitiendo que el mismo estudiante los experimente desde la estimulación de sus sentidos, logrando llegar a interiorizarlos, a partir de la manipulación de los objetos en su entorno (Gallardo y Núñez, 2016 b).

1.3. Hipótesis

Los estudiantes conceptualizan los sistemas de ecuaciones lineales, cuando se enfrentan a Situaciones Problema que los guíen en la construcción de los conceptos involucrados, mediados con un software que les permita visualizar diferentes Registros de Representación Semiótica y una metodología que promueva la autorreflexión inmersa en el trabajo colaborativo con sus pares.

1.4. Justificación

Para el desarrollo de los temas planteados en el plan de estudios de la Facultad de Ingeniería Química de la Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo y el futuro desempeño en sus labores cotidianas como ingeniero químico, son indispensables los conceptos, algoritmos y el pensamiento analítico relacionados con la actividad matemática, dentro de los cuales son de interés para la investigación los relacionados con el concepto de sistema de ecuaciones lineales.

Así mismo, Betancourt (2009) indica que de manera general los sistemas de ecuaciones lineales son importantes por los siguientes motivos:

1. Su aplicación en problemas de distintas disciplinas, como en la ingeniería, la economía y la computación.
2. Su aplicación a otras áreas de la matemática: la geometría analítica, el cálculo diferencial e integral de una y de varias variables, estadística, etc.
3. Originar el desarrollo de la teoría en álgebra lineal.

Por otro lado, desde principios del siglo pasado han surgido teorías sobre la construcción del conocimiento desde un punto de vista social, gradualmente se han considerado aspectos teóricos de representaciones desde el punto de vista de la construcción social del conocimiento (Hitt y Time, 2010). De manera que el uso de la Metodología de enseñanza ACODESA, que involucra la construcción del conocimiento desde un punto de vista social favorece el aprendizaje de los estudiantes.

El uso de la tecnología es más frecuente y extendido dentro de la sociedad en general, en consecuencia una sociedad con cambios notables y con desarrollos tecnológicos disponibles demanda ajustes significativos en los sistemas de educación (Santos, 2015). Al mismo tiempo, Gatica y Enriquez (2012), señalan que entre las herramientas tecnológicas y didácticas que permitirían mejorar la enseñanza de los conceptos se hallan las que permiten la visualización y la posibilidad de utilizar varios registros semióticos coordinados, dentro

de las que se encuentra el software GeoGebra. Por lo que su aplicación en esta investigación es de relevante importancia.

Para el diseño de las Actividades de Aprendizaje basadas en Situaciones Problema, se formularon preguntas abiertas que guían al estudiante a la formación del concepto que se quiere construir. Considerando que Vásquez, Bustos, Núñez, y Mazzitelli (2004), indican que cuando una tarea es abierta, el alumno se encuentra ante una pregunta a la que debe buscar respuesta sin conocer exactamente los medios para alcanzarla. Todo problema suele requerir para su solución estratégica poner en juego destrezas previamente adquiridas, una planificación y control de la ejecución, el conocimiento sobre los propios procesos psicológicos, lo que implica el uso selectivo de los propios recursos y capacidades disponibles (Pozo y Postigo, 1994).

1.5. Preguntas de investigación

1. ¿La aplicación de Actividades de Aprendizaje diseñadas a partir de Situaciones Problema facilita la conceptualización de sistemas de ecuaciones lineales?
2. ¿Puede el software GeoGebra apoyar a la conceptualización de sistemas de ecuaciones lineales?
3. ¿El uso de la Metodología ACODESA favorece la conceptualización de sistemas de ecuaciones lineales?

1.6. Objetivos

1.5.1. Objetivo General

Se diseñarán Actividades de Aprendizaje basadas en Situaciones Problema, que guíen al estudiante en la conceptualización de los sistemas de ecuaciones lineales, utilizando como herramienta el software GeoGebra y con la aplicación la Metodología ACODESA.

1.5.2. Objetivos específicos

A continuación se presentan los objetivos específicos que se plantearon para el presente trabajo de investigación:

1. Diseñar Actividades de Aprendizaje basadas en Situaciones Problema, que lleven a la conceptualización de sistemas de ecuaciones lineales.
2. Probar, analizar y corregir los aspectos conceptuales y pedagógicos de las actividades propuestas inicialmente.
3. Modificar las actividades diseñadas con base en la información obtenida en la experimentación piloto.
4. Realizar una experimentación formal con un grupo de estudiantes del primer semestre de la Facultad de Ingeniería química, aplicando las actividades corregidas con apoyo de la Metodología ACODESA.
5. Presentar la propuesta final de las actividades mediadas con GeoGebra, para la conceptualización de sistemas de ecuaciones lineales.

2. Marco Teórico

En el presente capítulo se describen las teorías en que se apoya la investigación, la interpretación de resultados y conclusiones del presente trabajo de tesis. Comenzando por el Constructivismo que da soporte teórico a la investigación, este enfoque se nutre y amplía con las teorías de Registros de Representaciones Semióticas, Mediación y Visualización. Con el tratado y comprensión de dichas teorías se pueden abordar con más detalle los aspectos que se ven involucrados en las Situaciones Problema y la Metodología ACODESA.

2.1. Constructivismo

Es la idea que mantiene que el individuo, tanto en los aspectos cognitivos y sociales del comportamiento como en los afectivos, no es un mero producto del ambiente ni un simple resultado de sus disposiciones internas, sino una construcción propia que se va produciendo día a día como resultado de la interacción entre esos dos factores. En consecuencia, según la posición constructivista, el conocimiento es una “construcción” del ser humano que realiza fundamentalmente con los esquemas (representaciones de una situación concreta o de un concepto, que permite manejarlos internamente y enfrentarse a situaciones iguales o parecidas en la realidad) que ya posee, es decir, con lo que ya construyó en su relación con el medio que le rodea. Esta construcción depende sobre todo de dos aspectos, a saber: de la representación inicial que se tenga de la nueva información de la actividad y externa o interna, que se desarrolle al respecto (Carretero, 1997).

El constructivismo es una teoría que de acuerdo a Jonassen (1991) “propone que el ambiente de aprendizaje debe sostener múltiples perspectivas o interpretaciones de la realidad, construcción de conocimiento y actividades basadas en experiencias ricas en contexto”.

Sobre el constructivismo, Hernández, S. (2008), menciona:

Esta teoría se centra en la construcción del conocimiento, no en su reproducción. Un componente importante del constructivismo es que la educación se enfoca en tareas auténticas, estas tareas son las que tienen una relevancia y utilidad en el mundo real. En el constructivismo el aprendizaje es activo, no pasivo. Una suposición básica es que las personas aprenden cuando pueden controlar su aprendizaje y están al corriente del control que poseen. Esta teoría es del aprendizaje, no una descripción de cómo enseñar. Los alumnos construyen conocimientos por sí mismos. Cada uno individualmente construye significados a medida que va aprendiendo.

De acuerdo con Serrano y Pons (2011), cualquier tipo de clasificación de los constructivismos recoge, explícita o implícitamente, la existencia de:

- a) Un constructivismo cognitivo que hunde sus raíces en la psicología y la epistemología genética de Piaget.
- b) Un constructivismo de orientación socio-cultural (constructivismo social socio-constructivismo o co-constructivismo) inspirado en las ideas y planteamientos vigotskyanos.
- c) Un constructivismo vinculado al construccionismo social de Berger y Luckmann (2001) y a los enfoques posmodernos en psicología que sitúan el conocimiento en las prácticas discursivas (Edwards, 1997; Potter, 1998).

Estas diferentes formas de entender el constructivismo difieren en cuestiones epistemológicas esenciales, lo que conduce a que difieran a la hora de pronunciarse sobre qué y cómo se construye y quién construye.

Sobre “qué es lo que se construye”, para los constructivismos cognitivos de corte piagetiano el acento está situado en las estructuras generales del conocimiento y se encuentra ligado a categorías universales, para los vehiculados por el procesamiento de la información podemos observar que se centran, o bien en los cambios de reglas y en el procesamiento estratégico (modelos de procesamiento serial), o bien en los cambios asociativos y cuantitativos de las redes neuronales (modelos conexionistas). En el caso de

los constructivismos de tradición vigotskyana, lo que se construye es una actividad semióticamente mediada que recoge la variedad de maneras que tienen los sujetos de reconstruir significados culturales y en el construccionismo social, lo que se construye son artefactos culturales.

En relación al “cómo se construye”, los modelos cognitivos hacen referencia a mecanismos autorreguladores, mientras que los modelos vinculados al constructivismo social o al construccionismo social la responsabilidad de la dirección que toma la construcción viene determinada por una forma concreta de organización social.

Finalmente “quién construye”, el sujeto que construye el conocimiento es un sujeto activo que interactúa con el entorno y que aunque no se encuentra completamente constreñido por las características del medio o por sus determinantes biológicos, va modificando sus conocimientos de acuerdo con ese conjunto de restricciones internas y externas. Sin embargo, detrás de esta homogeneidad en la conceptualización del “sujeto constructor”, se esconde una gran diversidad epistémica, y al menos nos encontramos con cuatro sujetos bien diferenciados: el sujeto individual, el sujeto epistémico, el sujeto psicológico y el sujeto colectivo.

Los educadores que desean usar métodos constructivistas de instrucción son comúnmente motivados a enfocarse en aprendizaje de descubrimiento, en el que los estudiantes son libres de trabajar en ambientes de aprendizaje con poca o nula guía (Meyer, 2004). Los objetivos de aprendizaje no son predeterminados. Por lo tanto, no existen tampoco contextos delimitados y previamente definidos. En este caso, se requiere de ambientes amplios y con gran riqueza de experiencias, de forma tal que le permitan al estudiante orientar su proceso de aprendizaje mediante el manejo de situaciones que no son ajenas a su realidad, pero en las que además pueda integrar los conocimientos previos con los nuevos (Karagiogi y Symeou, 2005).

De acuerdo con Jonassen (1994), el ambiente de aprendizaje constructivista se puede diferenciar por ocho características:

1. El ambiente constructivista en el aprendizaje, provee a las personas del contacto con múltiples representaciones de la realidad.
2. Las múltiples representaciones de la realidad, evaden las simplificaciones y representan la complejidad del mundo real.
3. El aprendizaje constructivista se enfatiza, al construir conocimiento dentro de la reproducción del mismo.
4. El aprendizaje constructivista resalta tareas auténticas de una manera significativa en el contexto, en lugar de instrucciones abstractas fuera del contexto.
5. El aprendizaje constructivista proporciona entornos de aprendizaje, como entornos de la vida diaria o casos basados en el aprendizaje en lugar de una secuencia predeterminada de instrucciones.
6. Los entornos de aprendizaje constructivista, fomentan la reflexión en la experiencia.
7. Los entornos de aprendizaje constructivista, permiten el contexto y el contenido dependiente de la construcción del conocimiento.
8. Los entornos de aprendizaje constructivista apoyan la construcción colaborativa del aprendizaje, a través de la negociación social, no de la competición entre los estudiantes para obtener apreciación y conocimiento.

El contexto juega un papel protagónico en los procesos de diseño instruccional con un enfoque constructivista. Algunos autores plantean la necesidad de agregar elementos propios de la cognición situada, de manera que los espacios de aprendizaje estén plenamente referenciados en los ambientes sociales en que participa el estudiante. Es decir, que toda estrategia de aprendizaje deberá proporcionarle al estudiante experiencias auténticas y significativas, por lo cual estarán basadas en contextos relevantes que le permitan de forma adecuada, la construcción de conocimientos en el ámbito escolar. (González, 2006).

2.2. Registros de representación semiótica

La historia demuestra que el progreso en matemáticas ha estado unido al desarrollo de varios sistemas semióticos, por ejemplo, las notaciones simbólicas que emergieron del

lenguaje escrito, condujeron a la escritura algebraica y desde el siglo XIX a la creación de lenguajes formales. Cada nuevo sistema semiótico proporciona significados específicos de representación para el pensamiento matemático, por esa razón se los llama “registros de representación” (Duval, 1995).

De acuerdo con Duval, R., Font, V., Guzmán, I., Pino-Fan, L. R., (2015), la comprensión de la Teoría de Registros de Representación requiere de la consideración de tres características clave:

1. El mismo objeto matemático tiene tantas representaciones semióticas diferentes, igual al número de registros semióticos usados en matemáticas.
2. Para un mismo objeto matemático, las representaciones semióticas no identifican explícitamente las mismas propiedades. Lo que se identifica explícitamente es el contenido de la representación.
3. Nunca deben confundirse los objetos matemáticos con el contenido de sus representaciones semióticas.

Además señalan, que una de las características de las representaciones semióticas consiste en su dependencia con un organizado sistema de signos tal como el lenguaje, escritura numérica, escritura simbólica y graficas Cartesianas. En consecuencia, todas las replantaciones semióticas deben ser consideradas, primero, con base en el registro donde se producen, segundo, con base en las propiedades del objeto analizado que puede y no puede representar de forma explícita, finalmente basado en el objeto mismo al que se refiere. Otra de las características esenciales de las representaciones semióticas es la operación cognitiva de conversión de las representaciones desde un sistema a otro, en otras palabras, la transformación de representaciones semióticas en otras representaciones semióticas.

Duval (1995, p. 17) señala que: “la noción de representación semiótica presupone la consideración de diferentes sistemas semióticos y la operación de conversión de las representaciones de un sistema a otro.”

Esta operación de conversión se ha considerado como un cambio de forma: cambiando de una oración verbal a una operación algebraica, o dibujar la curva de una ecuación de segundo grado. Estos ejemplos ilustran el cambio en la forma en que el conocimiento es representado (Duval et al., 2015).

Por otra parte, las representaciones semióticas no deben confundirse con las representaciones mentales, es decir, con el conjunto de imágenes y concepciones que un individuo puede tener acerca de un objeto, una situación y sobre todo lo asociado al mismo (Kanashiro y Oviedo, 2012).

Es importante señalar que hay dos actividades cognitivas fundamentales dentro de la Teoría de Registros de Representación Semiótica: tratamiento y conversión. La actividad de tratamiento consiste en la transformación que se lleva a cabo en el mismo registro, en otras palabras, solo un registro se moviliza. Por otra parte la actividad de conversión hace posible la movilización de un registro en otro, donde se vuelve fundamental la articulación de la representación (Duval et al., 2015).

De acuerdo a Duval (1995), el estudio de la actividad de conversión hace posible la comprensión de la estrecha relación entre “noésis” que se considera como un acto intencional del intelecto y se puede definir como la acción y efecto del entendimiento; y “sémiosis” que se define como la aprehensión o a la producción de una representación semiótica, lo cual es esencial en el aprendizaje intelectual. De cualquier manera, se debe considerar que la operación de conversión implica algunas dificultades, una respecto al hecho de que el registro de origen no tiene el mismo contenido que el registro al que se destina. Otra dificultad recae en el tratamiento, el que se vuelve complejo por el uso de un lenguaje natural y aquellos que permiten la “visualización” (graficas, formas geométricas, etc.).

Duval (1995) indica que los sistemas semióticos que permiten el estudio del par “representación, conocimiento”, deben satisfacer tres actividades cognitivas relacionadas a la representación:

1. Constituir un rastro o un montaje de rastros que se identifiquen como una representación de un objeto o cosa.
2. Transformar representaciones de acuerdo a las reglas propias del sistema para obtener otras representaciones que puedan proveer mayor conocimiento a la representación inicial.
3. Convertir representaciones producidas en un sistema de representación a otro sistema, de manera que este último permita crear otros significados explícitos de lo que representa.

No todos los sistemas semióticos permiten estas tres actividades cognitivas. Los sistemas semióticos que lo permiten son los que Duval (1995) llama registros de representación semiótica. Estos registros de representación semiótica constituyen los grados de libertad que un sujeto tiene para justificar una idea que es inicialmente confusa, una intuición, sacar provecho de alguna información o comunicarse con un interlocutor. (Duval et al., 2015).

2.3. Visualización

La visualización no puede ser entendida como el simple acto de ver, sino como “la habilidad para representar, transformar, generar, comunicar, documentar y reflejar información visual en el pensamiento y el lenguaje del que aprende” (Cantoral y Montiel, 2001: 24).

Para la visualización tenemos dos tipos de registros semióticos:

1. Registros con una estructura diádica de significado (lenguaje natural, representaciones de figuras en 2D o 3D), dentro de la estructura diádica cualquier significado se reduce a una denotación explícita de los objetos.
2. Registros con una estructura triádica (notaciones simbólicas, lenguajes formales, diagramas, etc.), dentro la estructura triádica tenemos significados independientes de cualquier denotación explícita de los objetos y se deben considerar sus interacciones (Duval, 1995).

Como percepción, la visión involucra dos funciones cognitivas:

1. *Función epistemológica*: Da acceso directo a cualquier objeto. En este sentido la visión es lo opuesto a representación, ya que la representación es algo que se presenta en lugar de algo diferente.
2. *Función sinóptica*: consiste en la aprehensión de diferentes objetos o de todo un campo, en otras palabras la visión parece dar de forma inmediata una aprehensión completa de cualquier objeto o situación (Duval, 2002).

La percepción visual realiza de una manera muy imperfecta la función sinóptica. En primer lugar, debido a que la aprehensión total requiere movimiento, ya sea del observador o del objeto observado, lo cual significa una transformación del contenido que se percibe, se tiene solo una yuxtaposición de signos sucesivos vistos desde uno solo de sus lados. En segundo lugar, debido a que la percepción visual siempre se enfoca en una parte específica del campo y no puede pasar de una parte a otra. No hay percepción visual sin exploración.

Una representación semiótica no muestra las cosas como son en el entorno 3D o como se pueden proyectar en un pequeño material 2D de soporte; sino que muestra relaciones u organizaciones de relaciones entre unidades figurativas. Estas unidades figurativas pueden ser en formas 1D o 2D, coordenadas, proposiciones o palabras. Deben estar conectadas bidimensionalmente, ya que cualquier organización requiere por lo menos dos dimensiones para volverse obvia. En una sucesión de unidades discretas (palabras, símbolos, proposiciones), no se puede realizar cualquier organización. Es por ello que el entendimiento involucra captar toda la estructura tanto de un texto o un razonamiento (Duval, 2002).

Para Duval (2002), la visualización de cada registro incluye algunas reglas o restricciones intrínsecas para producir las unidades y formar relaciones. En consecuencia plantea tres problemas desde el punto de vista del aprendizaje:

1. Problema de discriminación. Ya que el aprendizaje de la visualización en matemáticas, no es tan fácil y exitoso como para objetos físicos y el ambiente real. Por ejemplo, en un plano cartesiano la mayoría de los estudiantes solo tienen una

aprehensión local de la asociación de puntos con coordenadas, sin una aprehensión global de todas las variables visuales que les permiten discriminar entre graficas de diferentes funciones y, no se pueden crear conexiones entre las diferentes gráficas y las definiciones, descripciones o exploraciones que se realizan en otros registros. Observaciones como la anterior, revela que lo intrincado de la visualización en matemáticas no se encuentra en sus unidades visuales, que son pocas y más homogéneas que las imágenes, sino en la selección implícita de cuáles valores visuales dentro de la configuración de unidades son relevantes y cuáles no.

2. Problema de procesamiento. La clave para entender el problema es que cada registro de representación tiene una manera específica de ser procesado, por ejemplo, dividiendo, alargando, acortando, inclinando o cambiando la orientación de figuras geométricas. Estas operaciones constituyen un procesamiento figural específico, que proporciona figuras con una función heurística. En la aprensión operativa a partir de una figura dada, se investigan otras configuraciones que se pueden obtener de las operaciones visuales. La aprensión perceptual no siempre conduce a la aprensión operativa, debido a que para cada operación es necesario identificar las variables visuales que disparan o inhiben la visibilidad de la subfigura relevante y la operación implicada. Al mínimo cambio en la figura inicial, la mayoría de los estudiantes ya no reconocen su correspondencia con la figura clave.
3. Problema de coordinación con un registro discursivo. Hay una ilusión introspectiva que a menudo distorsiona el análisis de los procesos de aprendizaje en matemáticas: lo sencillo desde el punto de vista matemático, también parece sencillo desde el punto de vista cognitivo cuando se obtiene más experiencia. De hecho, es más común que lo que se considera matemáticamente simple, solo se vuelve cognitivamente evidente al final del aprendizaje (Duval, 1998), por ello se necesitan aprender paralelamente formas heterogéneas de trabajar para cada registro específico.

2.4 Mediación

La mediación o Experiencia de Aprendizaje Mediado (EAM) según Feuerstein (citado en Casados, 2002), “se produce cuando una persona con conocimientos e intenciones, media entre el mundo y otro ser humano, creando en el individuo la propensión al cambio” (p. 6). Una suposición básica de la EAM es que los individuos aprenden a través de dos modalidades: *Exposición directa a los estímulos* y *la experiencia de aprendizaje mediado*. La exposición directa se caracteriza por encuentros sin mediación de los individuos con los estímulos del ambiente. En las interacciones de la EAM el aprendizaje se desarrolla por medio de una persona más experimentada, que se interpone entre el aprendiz y los estímulos del medio. El mediador presenta estímulos al aprendiz modificando la frecuencia, orden, intensidad y contexto de los estímulos; al despertar la curiosidad, vigilancia y agudeza perceptual del aprendiz; y al tratar de mejorar y/o crear en el aprendiz funciones cognitivas requeridas para relaciones temporales, espaciales y de causa-efecto. La mediación no solo ocurre por los estímulos que presenta el mediador, también depende de las respuestas del aprendiz. Los procesos de mediación son complejos, circulares y no dependen solo de las características del mediador, también involucran las fuerzas y deficiencias cognitivas, orientación motivacional, necesidades emocionales, tendencias del comportamiento del aprendiz, las características de los estímulos y las condiciones situacionales (Tzuriel, 2014).

La exposición directa a estímulos ciertamente produce cambios en el individuo, pero estos no son de gran calidad ni suficientes para permitir en él un alto grado de modificabilidad; por el contrario, la experiencia de aprendizaje a través de un mediador favorece que el niño desarrolle sus habilidades cognitivas, la flexibilidad, la autoplaticidad y la modificabilidad.

Existen tres implicaciones derivadas de la experiencia de aprendizaje mediado, que la diferencian de la exposición directa a los estímulos:

1. Ayuda a desarrollar en el aprendiz los prerrequisitos de aprendizaje.
2. Prepara al individuo para llevar a cabo aprendizaje a través de experiencias directas a los estímulos ambientales.

3. Nunca es demasiado tarde para empezar a mediar a un individuo: siempre se pueden encontrar canales por los cuales podamos ofrecer adaptaciones para mediar y corregir las deficiencias.

El objetivo principal de la experiencia del aprendizaje mediado es ofrecer al aprendiz las herramientas adecuadas para enriquecerse de los estímulos: que el aprendiz sea consciente de su desarrollo, que construya una concepción del mundo, propia en la solución de problemas relacionados con la vida práctica y que desarrolle una actitud autónoma, activa y autodidacta que le garantice la adquisición de conocimientos y hábitos aplicables no sólo en un contexto escolar sino también en su vida diaria (Escobar, 2011).

Feuerstein, (citado en Casados, 2002), plantea una serie de criterios para la interacción que el mediador debe contemplar e integrar en su comunicación con el alumno. El hecho de que los tome en cuenta y los integre en su práctica docente cotidiana ayudará al logro de experiencias de aprendizaje mediado. Algunos de ellos se refieren a propiedades de la conciencia y de la interacción del sujeto con el objeto, otros se refieren al proceso y producto del acto mental, otros a valores relativos al autoconcepto, a la diferencia psicológica y actitudes comunitarias, y algunos más a valores relativos a la actividad cognoscitiva, al cambio y a la actitud frente al optimismo (Rosas y Sánchez, 2005).

Intencionalidad y reciprocidad: Se refiere a los esfuerzos deliberados del mediador para cambiar la atención, conciencia, percepción, procesamiento o reacción del aprendiz. La reciprocidad se manifiesta cuando el aprendiz responde de manera vocal, verbal o no verbal al comportamiento del mediador (Tzuriel, 2014). La intencionalidad a su vez implica que el mediador tenga una intención específica al interactuar con el aprendiz, estar consciente de esa intención, saber cuál es el propósito de la mediación y transmitir al aprendiz la intención específica que se les va a mediar. A su vez la reciprocidad Implica para el mediador crear curiosidad y motivación en el aprendiz para que se involucre en las tareas, motivar en la disposición para invertir un mayor esfuerzo y fomentar una mayor tolerancia a la frustración en tareas que se vuelven más demandantes (Escobar, 2011).

Mediación de significado: Se refiere a la respuesta del mediador que dirige el significado afectivo, motivacional y orientado al valor que posee el estímulo que se presenta. De acuerdo con EAM el aprendiz que experimenta la mediación de trascendencia conectará activamente con futuros significados de nueva información, en lugar de esperar pasivamente a que el significado emerja (Tzuriel, 2014). El mediador suscita la construcción del significado cuando estimula la búsqueda del porqué de las cosas, de los razonamientos, de la causalidad de los fenómenos, esto es, el origen y las consecuencias de algo. La mediación del significado permite al aprendiz trascender el nivel de comprensión propio de su sistema de necesidades (Rosas y Sánchez, 2005).

Mediación de trascendencia: Se refiere a las interacciones en las que el mediador provee de las necesidades inmediatas o concretas del aprendiz al mismo tiempo que intenta alcanzar metas adicionales que van más allá de las especificadas en la situación o actividad que enfrentan (Tzuriel, 2014). El papel del mediador es ir creando, con la pregunta y con el ejemplo, un nuevo sistema de necesidades que trascienda a las actuales y contenga valores trascendentales. El mediador debe proveer al alumno de mejores formas de comportamiento y de vida, donde a través de una estructura mejor, el mediador fomente la adquisición de conceptos, estrategias y de principios generales; fomente la construcción de significados y sentidos, y su transferencia a la vida misma y a sus problemas. (Rosas y Sánchez, 2005). No basta con que los alumnos respondan a través de sus necesidades inmediatas; hay que crear en ellos necesidades nuevas: de precisión y exactitud, de conocimientos y de significados nuevos (Escobar, 2011).

2.5. Situaciones Problema

Una situación problema (SP) la podemos interpretar como un contexto de participación colectiva para el aprendizaje, en el que los estudiantes al interactuar entre ellos mismos y con el profesor a través del objeto de conocimiento, dinamizan su actividad matemática, generando procesos conducentes a la construcción de nuevos conocimientos (Obando y Muñera, 2003).

De acuerdo a Moreno y Waldegg (2002), la SP es el detonador de la actividad cognitiva, para que esto suceda debe tener las siguientes características:

1. Debe involucrar implícitamente los conceptos que se van a aprender.
2. Debe representar un verdadero problema para el estudiante, pero a la vez, debe ser accesible a él.
3. Debe permitir al alumno utilizar conocimientos anteriores.

Para abordar el tema de una situación problema es necesario considerar los siguientes términos:

Pensamiento dirigido al objetivo (Goal-directed thinking), el cual se refiere al proceso general del estudiante para resolver ejercicios, surge de la lectura de una declaración que estimula al lector a asociar la labor planteada con un algoritmo o método de solución, que se aplica de manera directa e inconsciente sin mucha reflexión.

Pensamiento diversificado (Diversified thinking), el cual surge de la lectura de una declaración que exige reflexión, la labor no es rutinaria para quien se le plantea y posiblemente requiere la construcción de representaciones internas cuyos productos (representaciones externas) promuevan acciones que permitan un nuevo enfoque de la declaración.

Una SP usualmente no se concibe para tener una solución única y el estudiante no conoce una manera directa de resolverla; por lo cual, se requiere de pensamiento diversificado para generar diferentes ideas que guíen al estudiante hacia una de las posibles soluciones para la SP, (Hitt y González-Martín, 2015).

La SP debe permitir al estudiante, desplegar su actividad matemática a través del desarrollo explícito de una dialéctica entre la exploración y la sistematización. Esto implica que la SP debe tener, como parte de los elementos que la constituyen, dispositivos que permitan a los alumnos desarrollar de manera autónoma, procesos de exploración tales como la formulación de hipótesis, su validación y si es del caso, su reformulación. Este trabajo permite la elaboración conceptual de los objetos matemáticos presentes en la SP

(sistematización). Lo importante es que la SP vincule de manera activa al estudiante en la elaboración teórica, haga del arte de conocer un proceso no acabado, permita utilizar aspectos contextuales como herramientas dinamizadoras de aprendizaje y relacione las conceptualizaciones particulares con las formas universales socialmente construidas (Obando y Muñera, 2003).

De acuerdo con Lagos J. y Revelo I. (2006), hay una característica fundamental en las preguntas que se plantean dentro de la SP:

La enseñanza problémica analiza muchos enfoques pedagógicos, pero todos ellos enmarcados dentro de un eje central que es la pregunta o la forma como el docente indaga o cuestiona a sus estudiantes con el objeto de verificar el proceso de enseñanza

También es característico de una SP contextualizar procesos de razonamiento que permiten: particularizar, generalizar, conjeturar, verificar, utilizar algoritmos, formular y validar (Múnera, 2009).

De acuerdo al Ministerio de Educación Nacional (1998), las SP deben estar relacionadas con las siguientes actividades:

- Dar cuenta del cómo y del por qué de los procesos seguidos para llegar a conclusiones.
- Justificar las estrategias y procedimientos puestos en acción.
- Formular hipótesis, hacer conjeturas y predicciones, encontrar contraejemplos, usar hechos conocidos, propiedades y relaciones para explicar otros hechos, encontrar patrones y expresarlos matemáticamente.

Por otro lado, de acuerdo a Vigotsky:

La formación de conceptos es un proceso creativo, no mecánico ni pasivo; [...] un concepto surge y toma forma en el curso de una operación compleja encaminada a la solución de un problema, y [...] la mera presencia de condiciones externas

favorables a una vinculación mecánica de la palabra y el objeto no basta para producir un concepto [...](1995)

Desde la perspectiva vigotskiana, el problema desencadena una serie de procesos psicológicos que llevan a la formación de símbolos y palabras sobre las cuales se elabora el concepto. Por lo tanto, la situación problema, además de permitir el establecimiento de relaciones, asociaciones, inducciones, deducciones, representaciones, generalizaciones, etc., propicia niveles de estructuración simbólica y de lenguaje matemático, elementos básicos en la construcción de conceptos matemáticos (Obando y Muñera, 2003).

De acuerdo con Obando y Muñera (2003), los elementos básicos de las SP son: la red conceptual, el motivo, los medios y los mediadores, las actividades y la evaluación. Cada aspecto se define a continuación.

La red conceptual es una especie de malla, donde los nudos son el centro de las distintas relaciones existentes entre los conceptos asociados a los conocimientos que la situación permite trabajar. La red conceptual es la encargada de que el proceso de exploración y sistematización, genere cada vez más significados entre los conceptos y que las relaciones entre éstos no se agoten de inmediato. La red conceptual permite tomar decisiones sobre los medios y mediadores, y del tipo de actividad que se debe proponer al estudiante, así, se puede determinar la mejor manera de organizar la contextualización de los diferentes conceptos y relaciones de la red conceptual. De esta forma, la actividad matemática desplegada por el estudiante en el desarrollo de la situación problema es el motor generador de conocimientos con múltiples conexiones entre sí. Desde una red conceptual, los conceptos cobran vida, sentido, significado, en tanto que se ponen en relación con otros y cuanto más amplio sea el conjunto de relaciones, más complejo y estructurado es el conocimiento adquirido.

El motivo es la excusa, la oportunidad, el evento, la ocasión, el acontecimiento, la coyuntura o el suceso, que puede ser aprovechado para generar una situación problema en el aula de clase. Determina en gran medida las posibilidades de comprensión de la situación

por parte de los estudiantes, y por ende, el que la situación pueda constituirse en un verdadero problema. Para Puig (1967) es modelo matemático, del que afirma “Un modelo matemático es todo aquel material capaz de traducir o de sugerir ideas matemáticas”.

Los medios, son los soportes materiales sobre los cuales se estructura la situación problema. En este sentido, pueden ser materiales físicos, manipulables por los alumnos, como, por ejemplo, juegos (tradicionales o diseñados con fines específicos), materiales (como bloques lógicos, sólidos geométricos, etc.), instrumentos (como calculadoras, computadores, etc.), documentos escritos (talleres, libros, artículos, etc.), etc., o también pueden ser abstractos, como por ejemplo, cuando se usa una determinada estructura conceptual para acceder a otra (partir del sistema numérico de los naturales para llegar a la construcción del sistema numérico de los enteros). Los medios deben ser analizados en función de la red conceptual que se quiere trabajar con los alumnos. Esto, en virtud de lograr que éstos se conviertan en *mediadores* de la actividad matemática de los alumnos. Lograr que un medio se convierta en mediador, implica analizar cuáles son los elementos estructurales de la red conceptual cuya construcción puede mediar el medio, implica también analizar hasta qué punto la estructura de la situación permite mediar una reflexión matemática en torno a los conceptos matemáticos que involucra.

Los medios, mediadores y el motivo dentro del cual se desarrolle la SP deben constituir el contexto significativo de la situación, entendiendo que un contexto es significativo porque permite que los alumnos analicen la situación con argumentos matemáticos.

Las actividades son las tareas que conforman la SP, son su parte visible. A través de ellas el alumno desarrolla su actividad y, por ende, realiza las elaboraciones conceptuales relativas a los problemas que enfrenta. Para que una situación cumpla con el papel de dar lugar a la actividad matemática del alumno, ésta debe ser asumida por él, en lo que Brousseau (1993) llamó *devolución de la situación*. A través de la devolución se logra que el alumno asuma su papel y, por tanto, se enfrente al trabajo que se le presenta de manera autónoma. Es así como se logra que él sea consciente del trabajo que realiza y, por ende, su actividad matemática sea significativa. Esta actividad matemática debe fundamentarse sobre lo que

ya sabe, para lograr el aprendizaje de nuevos conceptos. Se trata de generar estructuras en las cuales el conocimiento que se le desea enseñar a los estudiantes sea la herramienta más eficaz para el tratamiento y desarrollo de la situación propuesta.

La validación es un elemento que le permite al alumno determinar el grado de certeza de sus acciones y el desarrollo de los cambios de estrategia que sean necesarios. Desde una perspectiva tradicional, los mecanismos de validación al alcance del alumno son mediados por la autoridad y los estudiantes creen ciegamente en lo dicho, así lo planteado sea equivocado. Entonces él nunca tendrá la posibilidad de generar confianza en lo realizado, ni tampoco podrá comprender, analizar, pensar u organizar sus elaboraciones y mucho menos proyectar nuevas formas de actuación. Por el contrario, cuando el desarrollo mismo de la situación tiene implícitos mecanismos de evaluación o de validación del trabajo, el alumno tiene herramientas que le permiten una confrontación clara de lo realizado con lo esperado y, por ende, podrá pensar el camino a seguir. Se pueden lograr mecanismos implícitos de validación en la situación, si se introducen actividades que confronten lo realizado, bien sea, porque frente a las conclusiones obtenidas hasta el momento, hagan evidentes las contradicciones o porque muestran limitaciones de las mismas, incluso, las invaliden totalmente (Obando y Muñera, 2003).

En una SP las preguntas no demasiado abiertas, permiten la reflexión, la creatividad y la búsqueda de estrategias que pueden ayudar a la motivación hacia otros conceptos que se derivan de los contenidos básicos. Además, pueden generar espacios para producir interés por la búsqueda de otros aprendizajes no planeados desde la situación problema (Múnera, 2009).

2.6. Metodología ACODESA

Para el desarrollo de la investigación se aplicarán una serie de actividades, considerando la Metodología de aprendizaje ACODESA (Hitt, 2007), basada en la comunicación, que permite dar solución a una situación problema dirigida a un grupo de alumnos del primer semestre de la Facultad de Ingeniería Química.

En el pasado, la investigación con un enfoque constructivista, tuvo un enfoque basado principalmente en las representaciones institucionales (RI) y en la construcción de ellas. Las representaciones institucionales son el tipo de representaciones usualmente aceptadas y usadas por las partes del sistema educativo: libros, pantallas y profesores. En la resolución de tareas no rutinarias es posible que se produzcan espontáneamente algunas representaciones no institucionales o representaciones funcionales (RF). Una RF es una estructura cognitiva que emerge en el aprendiz cuando trata de entender y resolver una tarea matemática no rutinaria (Hitt, 2003, 2006). Las RF aparecen en la mente antes de que se realice alguna acción, controla y organiza las acciones que sirven como un puente a través del entendimiento. La expresión externa de una RF puede ser diferente de una RI, y permite al aprendiz una mejor aprehensión de la tarea matemática que enfrenta y a actuar de una forma estructurada mientras planea una serie de acciones que permitan llegar a una solución. La metodología le da gran importancia a la evolución de representaciones en un proceso de resolución de SP, para introducir conceptos matemáticos en clase y permitir el desarrollo de pensamiento diversificado en los estudiantes, estimular la formación de RF y pensamiento dirigido al objetivo, para promover la evolución de representaciones externas asociadas con la RF (Hitty González-Martín, 2015).

La metodología ACODESA, que en sus siglas encierra: el Aprendizaje colaborativo, el Debate científico y la Auto-reflexión, consiste en:

- La construcción de cuestionamientos preliminares que despejen los comportamientos prototípicos (en este caso se trata de comportamientos más bien intuitivos, formalistas o contradictorios);
- Aplicación de actividades, con la intención de provocar un desequilibrio cognitivo en los estudiantes;
- Propiciar el debate (debate científico) al final de las actividades, para que el estudiante forme representaciones mentales que le permitan reforzar o implementar un conocimiento. Siendo la idea que, para la construcción o para la superación de un obstáculo epistemológico, los estudiantes deben enfrentar situaciones didácticas susceptibles de provocar un desequilibrio cognitivo.

De acuerdo con Hitt, Saboya y Cortés (2016a) la metodología ACODESA se compone de cinco etapas:

1. Trabajo individual. En un principio, el objetivo de esta etapa es proveer a los pupilos la oportunidad de representar por sí mismo el problema o situación problema, en una base individual, previo a la discusión en grupo. Frecuente es en esta etapa en la que aparecen las representaciones funcionales (probablemente sin relación con las representaciones institucionales), y a partir de ellas los estudiantes producen representaciones externas que les permiten tomar acción.
2. Trabajo en equipo. La interacción entre estudiantes tiene el propósito de enriquecer el acercamiento individual que se desarrolló en la primera etapa. Usualmente es en esta etapa donde se inicia el proceso de validación, así como el trabajo de refinamiento de las representaciones funcionales, en un proceso de comunicación que debe materializarse en la producción de representaciones institucionales a través de este proceso de comunicación.
3. Debate (con la posibilidad de promover el debate científico). Los resultados obtenidos por los diferentes equipos son consensados y discutidos por los equipos para lograr convicción y consenso. De nuevo en esta etapa, por lo regular, aparece un proceso del refinamiento de una representación no institucional. Es común para los pupilos expresar sus acuerdos durante una larga discusión grupal.
4. Auto-reflexión. La reconstrucción individual del conocimiento que surge del equipo y de una larga discusión grupal es un paso esencial en la promoción de abstracción en el estudiante. Los investigadores consideraron el hecho de un consenso en clase puede ser efímero para algunos estudiantes, por lo tanto es importante retornar y reconstruir lo que se emprendió en clase.
5. Institucionalización del conocimiento. En este punto, el profesor resume lo que los estudiantes han producido y supervisa el uso eficiente de representaciones institucionales.

Una de las mayores contribuciones de la metodología ACODESA, se relaciona con la importancia dada al trabajo individual inmerso en un proceso de aprendizaje sociocultural. Desde la perspectiva teórica de los autores, la metodología ACODESA considera el hecho de que una SP propicia el pensamiento diversificado, así como el trabajo que se desarrolla dentro de los equipos, tratando de convencer a los compañeros de equipo debe generar el pensamiento dirigido al objetivo, en la misma manera que el debate con toda la clase, tratando de “probar” las exposiciones matemáticas de un equipo (Hitt, 2007). También el proceso de reconstrucción a través del trabajo individual en casa pretende generar pensamiento dirigido al objetivo. Por último, al final de las actividades el profesor puede iniciar el proceso de institucionalización de la enseñanza (Hitty González-Martín, 2015).

En las primeras etapas, el profesor es un guía y solo es en la etapa de institucionalización que el profesor presenta los resultados utilizando representaciones oficiales ligadas a los registros de representación, haciendo énfasis en las producciones de los estudiantes (Hitt et al., 2016 b).

En la metodología ACODESA, Hitt (2007) hace mención que el debate científico tiene como finalidad integrar a los estudiantes a un proceso activo de cuestionamientos de los conceptos y de la construcción crítica de sus propios conocimientos, incitándolos a proponer sus propias conjeturas, proposiciones y demostraciones.

Hitt (2016) menciona sobre la metodología ACODESA lo siguiente:

En la metodología ACODESA, la manipulación de materiales (compás, cuerda, alambre, etc.) y trabajo con papel y lápiz es sumamente importante. [...] Las situaciones problema dentro de la metodología ACODESA deben estar estructuradas de manera a favorecer la producción de RF y tareas de conversión entre representaciones.

La elaboración de actividades, dentro de la metodología ACODESA, implica una estructuración de manera que favorezca la producción de representaciones funcionales, de

sus correspondientes representaciones externas (representaciones espontáneas) y procesos de conversión entre representaciones (Hitt et al. 2016 b).

3. Metodología

En este trabajo de tesis se diseñaron Actividades de Aprendizaje (AA) para la conceptualización de sistemas de ecuaciones lineales, con la aplicación de la Metodología ACODESA. Las AA están estructuradas en dos partes, una a lápiz y papel y otra mediada con el programa GeoGebra. Las AA incluyen los siguientes temas:

1. Secuencias.
2. Función lineal.
3. Sistema de ecuaciones lineales.

3.1. Diseño de las Actividades de Aprendizaje

Para el diseño de las AA se establecieron los siguientes objetivos:

Actividad 1. Secuencias.

1. Definición de un conjunto de pares ordenados.
2. Obtención de funciones lineales a partir de secuencias.

Actividad 2. Función Lineal.

1. Construir el concepto de pendiente.
2. Construir el concepto de ordenada al origen.
3. Calcular la razón de cambio de una función lineal.
4. Identificar la pendiente y el intercepto de la expresión algebraica de una función lineal dada.

Actividad 3. Sistemas de ecuaciones lineales.

1. Definir la solución de un sistema de ecuaciones lineales.
2. Identificar los diferentes tipos de sistemas de ecuaciones lineales, de acuerdo al número de soluciones del sistema.
3. Modelar un sistema de ecuaciones lineales a partir de una Situación Problema.

En este apartado, se presentan los incisos de forma abreviada, por ejemplo I-a indica el inciso (a) de la Parte I. En el Apéndice B se presentan capturas de pantalla de los manipulables de GeoGebra utilizados en las actividades.

3.1.1. Diseño de la Actividad de aprendizaje sobre secuencias

En la Figura 1 se presenta la *red conceptual* que sigue el diseño de la AA sobre secuencias. En esta actividad se parte de datos que se dan o se calculan, para encontrar relaciones entre los mismos y formar pares ordenados, los cuales se toman como coordenadas de puntos que en una representación gráfica forman una función lineal.

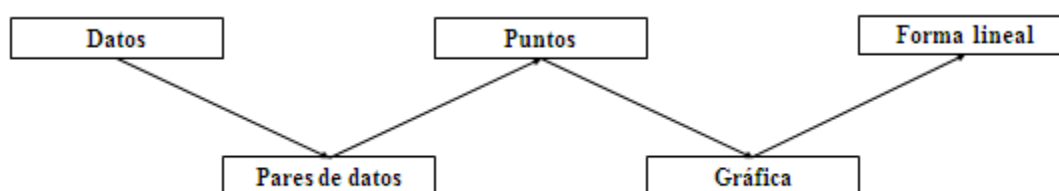


Figura 1: Red conceptual de la Actividad de Aprendizaje 1.

El problema planteado (SP) en el diseño de la Parte I de la AA, es sobre un automóvil que corre a velocidad constante un trayecto en línea recta y que pasa por debajo de varios puentes separados por una distancia constante.

Para cumplir con el primer objetivo de la AA, el inciso I-a le proporciona al estudiante un enunciado que le indica el tiempo que transcurre para que el automóvil pase por dos puntos del trayecto, se espera que los estudiantes observen que con una velocidad constante, al automóvil le tomara la misma cantidad de tiempo pasar por otro punto que esté a la misma distancia y así pueda completar la tabla que se le presenta.

En el inciso I-b, se presenta una tabla con datos que permitirá al estudiante trabajar con pares que tienen diferente comportamiento. Posteriormente, en los incisos I-c y I-d se espera que el estudiante concluya que los datos de los incisos I-a y I-b son dados en

intervalos constantes, aunque los pares de datos del inciso I-a aumenten y en el inciso I-b un conjunto de datos disminuya mientras que el otro aumenta.

Los incisos I-f y I-h se proponen, para que el estudiante pueda calcular pares de datos fuera del rango establecido en los incisos I-a y I-b, de manera que encuentre las relaciones entre los pares de datos.

Para cumplir con el segundo objetivo planteado para la AA, en el inciso I-e se le pide al estudiante asignar literales a cada una de las variables involucradas en la Situación Problema (SP). En los siguientes incisos se le pide al estudiante que construya “expresiones matemáticas” a partir de las relaciones entre los pares de datos presentados en los incisos I-a y I-b, se espera que esta parte permita a los estudiantes hacer una transición del Registro de Representación Semiótico (RRS) numérico al RRS algebraico. En el inciso I-n se le pide al estudiante graficar los valores obtenidos con su modelo, con lo que se espera que identifique la función como lineal y hagan un cambio del RRS del algebraico al RRS gráfico.

En la Parte II, de la AA, se emplea como mediador una construcción manipulativa en el programa GeoGebra. Esta parte permite al estudiante la *validación* del trabajo realizado en la primera parte. El problema planteado en la Parte II, sigue siendo un automóvil que corre sobre un trayecto en línea recta y pasa por debajo de varios puentes separados por una distancia constante entre sí. Se hace uso del programa para que los estudiantes puedan variar la velocidad del automóvil y observar cómo afecta a las variables involucradas.

Los incisos que se presentan en la Parte II se diseñaron para que el estudiante identifique las relaciones que existen entre variables manejadas en la Parte I con la velocidad del vehículo, y pueda observar el efecto de la variable independiente sobre la variable dependiente en una función.

3.1.2. Diseño de la Actividad de aprendizaje sobre Función Lineal

En la Figura 2 se muestra la *red conceptual* de la AA sobre función lineal, para lo cual, se parte de diferencias para conceptualizar la razón de cambio y posteriormente definir la pendiente de una línea recta, que también se aborda como una tangente. Habiendo introducido el concepto de pendiente, se incluye el concepto de intercepto y posteriormente el concepto de ecuación lineal, el cual se trabaja con RRS gráfico y RRS algebraico.

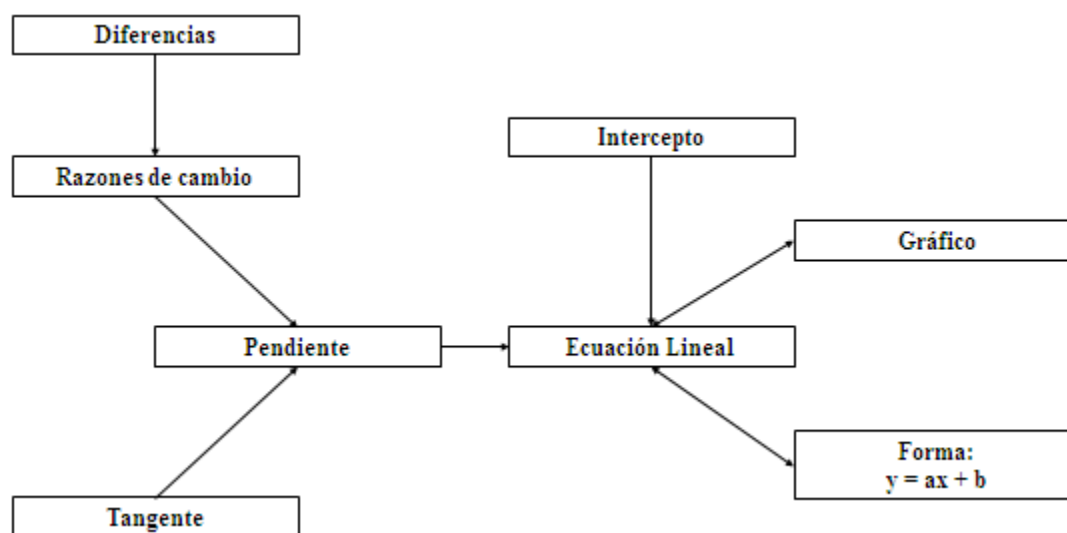


Figura 2: Red conceptual de la Actividad de Aprendizaje 2.

El problema en el que se basa el diseño de la AA, es un tanque que se llena con agua y tendrá diferente presión en el fondo mientras el proceso de llenado se efectúa.

Para cumplir con el primer objetivo de la AA, del inciso I-a, hasta el inciso I-e, se le dan al estudiante datos sobre la altura del fluido y la presión en el fondo del tanque. Los incisos I-c, I-d y I-e, le piden al estudiante que calcule las diferencias entre presiones en el fondo del tanque y las alturas del fluido en el tanque, además de realizar la variación de la presión respecto a la altura, dados dos pares de datos altura-presión. Se espera que el estudiante observe que la variación de la presión con respecto a la altura es igual para cualquier par de datos, incluso en el inciso I-e donde las diferencias que calculan están planteadas para dar valores negativos.

En el inciso I-h se introduce el concepto de razón de cambio de la siguiente forma:

“A esta variación de la presión con respecto a la variación en la altura se le conoce como la razón de cambio entre la presión y la altura.”

Dentro del mismo inciso, se le pide al estudiante que construya una representación algebraica para esa razón de cambio. El inciso I-j pretende introducir al estudiante en el significado trigonométrico de la pendiente.

Para cumplir con el segundo objetivo de la AA, el inciso I-i le pide al estudiante graficar una serie de puntos y posteriormente el inciso I-l le pide estimar el valor que tiene el intercepto.

Para cumplir el tercer objetivo de la AA, en los incisos I-c, I-d, I-e el estudiante ha calculado razones de cambio como “variación de la presión con respecto a la altura”, en el inciso I-p se le pide que calcule la razón de cambio de la gráfica en el inciso I-o.

Para cumplir con el cuarto objetivo de la AA, en el diseño de la Parte II se incluye una ecuación física que permite calcular la presión en el fondo de un tanque para cualquier sustancia de densidad conocida, en función de la altura del líquido y considerando la presión atmosférica y la aceleración de la gravedad. De la ecuación, se le pide al estudiante reconocer la pendiente y el intercepto.

La Parte II de la AA mediada con GeoGebra, permite al estudiante observar el comportamiento gráfico de una función lineal al modificar los valores de su pendiente y su ordenada al origen.

3.1.3. Diseño de la Actividad de Aprendizaje sobre sistemas de ecuaciones lineales

En la Figura 3, se muestra la *red conceptual* para el diseño de la AA sobre sistemas de ecuaciones lineales. Se parte del concepto de Función lineal para crear el concepto de sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, sobre el cual aborda los temas de

modelado y la solución del sistema. Se identificarán tres tipos de sistemas: compatible determinado, compatible indeterminado e incompatible.

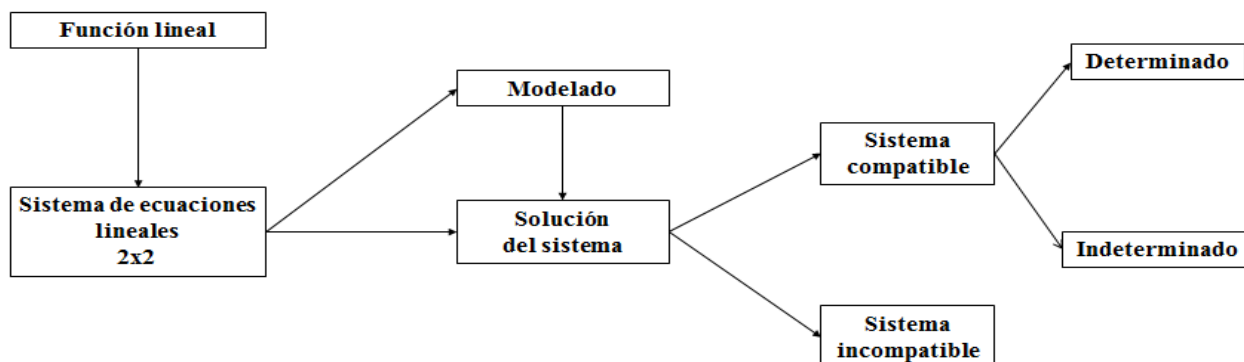


Figura 3: Red conceptual de la Actividad de Aprendizaje 3.

El problema en que se basa el diseño de las Partes II y III de la AA, es un tanque que se llena con agua usando dos bombas que funcionan con diferentes flujos.

Para cumplir con el primer objetivo de la AA del inciso I-a al I-e, se presentan al estudiante dos ecuaciones lineales y se le pide que calcule valores de “y” correspondientes a los valores de “x” dados. Posteriormente se le solicita que grafique los valores e identifique el punto en el que coinciden ambas funciones, indicándole que esa es la solución del sistema de ecuaciones.

Para cumplir con el segundo objetivo de la AA, en cada uno de los incisos I-a, I-f y I-k se le presentan al estudiante diferentes tipos de sistemas de ecuaciones: compatible determinado, compatible indeterminado e incompatible. En los incisos I-o y I-p se les guía por medio de preguntas abiertas, para que identifiquen a qué tipo pertenece el sistema de ecuaciones lineales, con base en las características de las mismas.

La Parte II de la AA, fue diseñada para cumplir con el tercer objetivo. Al principio se plantea una SP que le proporciona al estudiante información sobre el tiempo de operación de las dos bombas que llenan el tanque y el nivel que el tanque alcanza durante ese tiempo. Posteriormente, en la serie de incisos desde el II-a al II-i se diseñaron para guiar al

estudiante durante el proceso de construir y solucionar gráficamente un sistema de ecuaciones lineales que se origina de la SP.

En el inciso II-m se plantea una nueva SP, en la que una bomba introduce agua al tanque y al mismo tiempo otra bomba extrae agua del tanque. Nuevamente se le proporciona al estudiante información sobre el tiempo de operación de las dos bombas que llenan el tanque y el nivel que el tanque alcanza durante ese tiempo, posteriormente se le pide que resuelva de manera análoga a la SP anterior.

En la Parte III de la AA, el estudiante utilizando el programa GeoGebra puede verificar sus conclusiones de las Partes I y II, así como modificar las variables que les permitan representar diferentes sistemas de ecuaciones lineales y observar su comportamiento gráfico con las modificaciones.

3.2. Experimentaciones

El diseño de las Actividades de Aprendizaje fue puesto a prueba en dos diferentes etapas, siguiendo la metodología utilizada por Núñez y Gallardo (2016a, 2016b) y por Cortés, Núñez y Morales (2015). Una Prueba Piloto (PP) y una Prueba Formal (PF). La primera, diseñada de tal forma que diera información acerca de: la estructura didáctica de las actividades, las dificultades que tuvieron los estudiantes al trabajar con ellas y la metodología aplicada. La segunda, se llevó a cabo tomando en cuenta todas las observaciones realizadas de la PP (Núñez y Gallardo, 2016a). En ambas pruebas se trabajó en un entorno físico con lápiz y papel, y en un entorno digital con el uso del programa GeoGebra.

3.2.1. Prueba Piloto

En la Prueba Piloto se trabajó con un grupo de nueve estudiantes del primer semestre de la Facultad de Ingeniería Química de la UMSNH, con el propósito de analizar y evaluar las AA diseñadas desde una estructura pedagógica y conceptual.

Durante la experimentación, se formaron tres equipos de tres participantes cada uno. Aun cuando, el modo de afrontar las SP y las propuestas de solución para las AA fueron consensuadas por todos los miembros de cada equipo, a cada uno le fue asignada una responsabilidad específica dentro del grupo de trabajo para garantizar la intervención de todos ellos.

En consecuencia, el líder del equipo era el encargado de coordinar la solución de las AA, otro miembro del equipo era encargado del manejo del programa GeoGebra y el otro miembro se encargaba de escribir las respuestas en la hoja impresa de la AA. Adicionalmente, se les proporcionó una hoja en donde escribieron sus observaciones sobre las partes de las AA, que les presentaron dificultad para responderlas por su diseño.

En el desarrollo de la PP no se utilizó la metodología ACODESA, debido a que el objetivo principal de ésta etapa es poner a prueba el diseño preliminar de las AA. Se formaron los equipos, se les dieron instrucciones y se restringió la participación del investigador a cuestiones de redacción de las AA y a dar una breve explicación del manejo del entorno de GeoGebra.

El análisis y la discusión de los resultados obtenidos de la PP, permitieron hacer un rediseño más efectivo en los aspectos conceptual y didáctico de las AA propuestas en la prueba.

3.2.2. Prueba Formal

En la PF se trabajó con un grupo de nueve estudiantes del segundo semestre de la Facultad de Ingeniería Química de la UMSNH, con el objetivo de evaluar el cumplimiento de los objetivos de las AA diseñadas, así como, obtener las evidencias que mostraran los razonamientos de los estudiantes al resolverlas con apoyo de GeoGebra (Cortés, Núñez y Morales, 2015).

Previo a comenzar con el trabajo de las AA rediseñadas, se les aplicó un Pre-Test para evaluar los conocimientos sobre los conceptos que abordan las mismas. Posteriormente se trabajó con el grupo aplicando la Metodología ACODESA. Finalmente se realizó un Post-Test para evaluar la aprehensión de los conceptos abordados por las AA.

Al comparar los resultados obtenidos por los participantes en el Pre-Test con los del Post-Test, se tuvieron evidencias que comprobaban la efectividad pedagógica y conceptual de las AA mediadas con GeoGebra y apoyadas con la Metodología ACODESA.

Durante el trabajo con la Metodología ACODESA se formaron tres equipos de tres participantes, de igual manera que en la PP se le asignó a cada miembro del equipo una responsabilidad específica dentro del grupo, para garantizar la intervención de todos los integrantes.

Para el debate científico de la Metodología ACODESA, cada equipo expuso su trabajo de una AA frente al resto del grupo, apoyándose con el pizarrón y un proyector para el uso de GeoGebra. Posteriormente, el investigador presentó de manera institucional los conceptos abordados en las AA.

Para la etapa de autorreflexión de la Metodología ACODESA, se les dio a los participantes una copia de las AA que resolvieron en su casa, con el fin de que retomaran y reforzaran lo emprendido en la sesión grupal, entregaron los resultados al día siguiente de recibirlos.

Las Actividades de Aprendizaje aplicadas en esta prueba se presentan en el Apéndice A.

3.3. Rediseño de las Actividades de Aprendizaje

La primera propuesta de las AA, se diseñó de acuerdo a los objetivos planteados durante su planeación y posteriormente fueron modificadas de acuerdo a las observaciones del investigador y los comentarios de los participantes de la PP. Las AA rediseñadas fueron aplicadas en el desarrollo de la PF.

Las observaciones y correcciones a las AA se presentan en la Tabla 1. Por ejemplo: en la versión de la AA 1 que trabajaron los participantes de la PP, el enunciado del inciso I-c decía:

“¿Cómo describirías el cambio de los valores del inciso a?”

A lo que los participantes respondían con una observación numérica de la secuencia del inciso I-a y la observación que se hizo fue:

“No queda claro que se pide que observen la variación de los valores”

La “corrección” que se efectuó fue cambiar el texto de la pregunta de la siguiente manera:

“¿Cómo varía el cambio de los valores del inciso a?”

De esta manera, se espera que el estudiante analice las variaciones de los valores que obtuvo en la secuencia que plantea el inciso I-a.

Tabla 1				
Actividad	Parte	Inciso	Observación	Corrección
1	I	c y d	No queda claro que se pide que observen la variación de los valores	Cambiar la pregunta a: "¿Cómo varían los valores..."
		g y j	Al crear las expresiones matemáticas utilizan variables diferentes a las definidas en el inciso (e).	Agregar explícitamente la indicación de utilizar las variables definidas en el inciso (e).
		k	El alumno no puede crear una expresión que relacione	Modificar los incisos (a) y (b) para cambiar la relación

			las variables que se le pide.	entre variables.
	II	a-e	Los incisos no incluyen instrucciones explícitas del uso del programa GeoGebra.	Incluir instrucciones explícitas del uso del programa GeoGebra.
2	I	a y b	La indicación no se hace en el orden que se pide.	Cambiar los rótulos de las columnas para los resultados.
		d y e	La indicación causa confusión al señalar los resultados que se requieren.	Reestructurar el enunciado para que sea más claro.
		j	La indicación no enfatiza el análisis trigonométrico que se espera.	Incluir la palabra "significado trigonométrico" en el enunciado.
	II	c	El alumno no logra la conversión de la ecuación a las unidades que se le pide.	Suprimir la conversión y se proporciona la ecuación directamente.
3	I	f y l	El inciso no incluye una manera de presentar los datos graficados.	Incluir una tabla para que se presenten los datos.
	II	h y m	El alumno no indica las coordenadas de los puntos.	Incluir casillas para indicar las coordenadas.
		o	El enunciado causa confusión por su redacción.	Escribir "da solución".

4. Análisis y discusión de resultados

4.1. Análisis del Pre-Test

Durante el desarrollo de la Prueba Formal (PF), previo al comienzo del trabajo de los participantes con las Actividades de Aprendizaje (AA) diseñadas, se les aplicó de manera individual un Pre-Test con seis preguntas:

1. ¿Qué es una diferencia matemática?
2. ¿Defina qué es una razón de cambio?
3. Calcule la razón de cambio con los puntos: $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$.
4. ¿Qué es la ordenada al origen de una ecuación lineal?
5. ¿Qué representa gráficamente la solución de un sistema de dos ecuaciones lineales?
6. ¿Qué representa numéricamente la solución de un sistema de ecuaciones lineales?

El análisis de las respuestas del Pre-Test permitió evaluar el alcance de los conocimientos previos de los integrantes, dando un punto de referencia para comparar después de la aplicación de las AA.

Las respuestas a cada pregunta se evaluaron según la siguiente escala:

- 4: una idea fuerte y robusta acerca del concepto.
- 3: una idea general acerca del concepto.
- 2: una idea débil acerca del concepto.
- 1: ninguna idea del tema acerca del concepto.

Los nueve participantes de la PF se identifican con números, comenzando con el 1.

Para ejemplificar la evaluación del Pre-Test, a continuación se muestran algunas respuestas de la pregunta 4: “¿Qué es la ordenada al origen de una ecuación lineal?”

4. Análisis y discusión de resultados

La respuesta a la pregunta 4 del participante 1, valorada con 4, fue la siguiente:

"La ordenada al origen es el punto sobre el eje de las ordenadas donde cruza una función de cualquier tipo $y = mx + (b) \rightarrow$ ordenada al origen"

Se observó que el participante tiene conocimiento sobre el concepto, lo identificó gráficamente y algebraicamente.

La respuesta del participante 8 valorada con 3, fue la siguiente:

"Es por donde cruza la función al eje y"

Se observó que el participante tenía una idea próxima, aunque sólo identificó gráficamente el concepto.

La respuesta del participante 6 valorada con 2, fue la siguiente:

"El valor de una incógnita cuando la otra incógnita vale cero"

Se observó una idea débil del concepto, sin relación con la definición institucional.

La respuesta del participante 5 valorada con 1, fue la siguiente:

"La pendiente punto que es la razón de que parte de origen se prolonga de esta con una pendiente"

Se observó que el participante no tiene clara la diferencia entre pendiente y ordenada al origen.

La Tabla 2 contiene las respuestas de cada participante, su análisis y valoración:

Tabla 2				
Pregunta	¿Qué es una diferencia matemática?			
	Respuesta Institucional			
1	El resultado de la operación de restar (García, 2012).			
	Participante	Respuesta	Análisis	Valoración

4. Análisis y discusión de resultados

1	"Una diferencia es aquella operación que involucra la resta de 2 elementos"	Idea parcial del concepto, que no lo relaciona con el resultado de restar.	2
2	"Es el intervalo que existe entre un número y otro"	No menciona la resta, y relaciona el concepto con el resultado de la operación.	3
3	"Una diferencia matemática es una resta de dos valores"	Idea parcial del concepto, que no lo relaciona con el resultado de restar.	2
4	"Es un incremento que va desde un valor inicial a un valor final"	No menciona la resta, y relaciona el concepto con el resultado de la operación.	3
5	"En términos simples es una resta; donde términos semejantes se reducen a una mínima expresión"	Idea parcial del concepto, que no lo relaciona con el resultado de restar.	2
6	Blanco.	Sin respuesta.	1
7	"Es una operación matemática en la cual se restan dos cantidades o expresiones diferentes o iguales entre sí"	Idea parcial del concepto, que no lo relaciona con el resultado de restar.	2
8	"Es una variación muy pequeña, una cantidad inimaginable"	Idea equivocada que considera la diferencia matemática, únicamente como una cantidad muy	1

4. Análisis y discusión de resultados

			pequeña.	
	9	"Es la operación en la que se puede determinar el valor que hay de una cantidad a otra"	Idea parcial del concepto, que no lo relaciona con el resultado de restar.	2
Pregunta	¿Defina qué es una razón de cambio?			
	Respuesta Institucional			
2	Es la magnitud de cambio de una variable por unidad de cambio de otra, que se expresa como un cociente definido por el cambio o diferencia en la variable dependiente dividido por el respectivo cambio en la variable independiente (Larson, Hostetler y Edwards, 2006).			
	Participante	Respuesta	Análisis	Valoración
	1	"Una razón de cambio es el cociente que se tiene entre dos variables, una depende de la otra al igual que independientes para modificar algún problema"	Conocimiento sobre el concepto de razón de cambio.	4
	2	"Es un cociente entre diferencias"	Idea parcial sobre el concepto, sin incluir que las diferencias son entre variables con relación entre sí.	2
	3	"Una razón de cambio es un incremento, una variación con respecto a otro valor"	Idea parcial sobre el concepto, sin incluir que se expresa en forma de cociente.	2

4. Análisis y discusión de resultados

	4	"Es que tanto cambia un valor respecto a otro"	Idea parcial sobre el concepto, sin incluir que se expresa en forma de cociente.	2
	5	"Es cuanto cambia cuando un valor aumenta o disminuye, está siendo un término independiente que modifica el resto de la ecuación"	Idea parcial sobre el concepto, sin incluir que se expresa en forma de cociente.	2
	6	Blanco.	Sin respuesta.	1
	7	Blanco.	Sin respuesta.	1
	8	Blanco.	Sin respuesta.	1
	9	Blanco.	Sin respuesta.	1
Pregunta	Calcule la razón de cambio con los puntos: $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$.			
	Respuesta Institucional			
3	$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$			
	Participante	Respuesta	Análisis	Valoración
	1	“ $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ ”	Idea próxima al trabajo necesario, que al utilizar letras en mayúsculas hace referencia a valores diferentes de los indicados en la pregunta.	3
	2	“ $\frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1}$ ”	Idea próxima al trabajo necesario, que invierte el orden de las diferencias de variables dentro del cociente.	3

4. Análisis y discusión de resultados

	3	$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$	Conocimiento sobre el trabajo que es necesario.	4
	4	Blanco.	Sin respuesta.	1
	5	"Sería la pendiente es la razón de cambio que modifica x_1 , y_1 al igual x_2 , y_2 "	Expresión no algebraica, redundante a la pregunta.	1
	6	Blanco.	Sin respuesta.	1
	7	Blanco.	Sin respuesta.	1
	8	Blanco.	Sin respuesta.	1
	9	Blanco.	Sin respuesta.	1
Pregunta	¿Qué es la ordenada al origen de una ecuación lineal?			
	Respuesta Institucional			
4	Término independiente, que en la gráfica corta el eje de las ordenadas (Leungy Gonzáles, 2016).			
	Participante	Respuesta	Análisis	Valoración
	1	"La ordenada al origen es el punto sobre el eje de las ordenadas donde cruza una función de cualquier tipo $y=mx + (b)$ -> ordenada al origen"	Conocimiento sobre el concepto, que lo identifica gráfica y algebraicamente en la forma general de una ecuación lineal.	4
	2	"Es el punto por el cual la gráfica cruza al eje de las ordenadas"	Idea parcial sobre el concepto, que sólo lo identifica gráficamente.	3
	3	"Es b"	Idea parcial sobre el concepto, que únicamente lo identifica como parte de la expresión general de una ecuación lineal.	3

4. Análisis y discusión de resultados

	4	"Es por donde cruza la función al eje y"	Idea parcial sobre el concepto, sin incluir que se expresa en forma de cociente.	3
	5	"La pendiente punto que es la razón de que parte de origen se prolonga de esta con una pendiente"	Idea que confunde los conceptos de pendiente y ordenada al origen	1
	6	"El valor de una incógnita cuando la otra incógnita vale cero"	Idea débil del concepto, sin relación con la definición institucional.	2
	7	Blanco.	Sin respuesta.	1
	8	Blanco.	Sin respuesta.	1
	9	Blanco.	Sin respuesta.	1
Pregunta	¿Qué representa gráficamente la solución de un sistema de dos ecuaciones lineales?			
	Respuesta Institucional			
5	Las coordenadas del punto de intersección de las rectas que representan gráficamente a las dos ecuaciones lineales (García, 2012).			
	Participante	Respuesta	Análisis	Valoración
	1	"Representan los puntos donde la ecuación tiene una solución"	Idea débil, que relaciona la solución de un sistema de ecuaciones con puntos en la gráfica, pero no los ubica como la intersección entre ambas ecuaciones.	2
	2	"El punto donde ambas cruzan"	Idea poco detallada de la representación gráfica de la solución para un sistema	3

4. Análisis y discusión de resultados

			de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, que no menciona las coordenadas del punto como resultado.	
	3	"Una variación de un valor con respecto a otro"	Definición de la razón de cambio, en lugar de la representación gráfica de la solución para un sistema de ecuaciones lineales.	1
	4	"Que ambos tiene un mismo cruce por el eje y"	Idea que únicamente se aplica en un sistema de ecuaciones lineales con la misma ordenada al origen.	2
	5	$x^2 + 3 = 7$ $x + 2 = 4$	Respuesta que no mantiene relación con la pregunta.	1
	6	"Dos líneas perpendiculares entre sí"	Idea que únicamente se aplica en un sistema de ecuaciones lineales con la gráfica en forma de dos líneas perpendiculares.	2
	7	"La intersección de dos líneas en un punto en el plano cartesiano"	Conocimiento de la representación gráfica de la solución para un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.	4
	8	"Donde se intercalan ambas funciones"	Idea poco detallada de la representación gráfica de la solución para un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, que no	3

4. Análisis y discusión de resultados

			menciona las coordenadas del punto como resultado.	
	9	Blanco.	Sin respuesta.	1
Pregunta	¿Qué representa numéricamente la solución de un sistema de ecuaciones lineales?			
	Respuesta Institucional			
6	Los valores de las dos incógnitas que cumplen simultáneamente las dos igualdades (García, 2012).			
	Participante	Respuesta	Análisis	Valoración
	1	"Representa los valores de las dos variables que incluyen las ecuaciones"	Conocimiento de que la solución de un sistema de ecuaciones lineales es dada por los valores de las incógnitas del sistema, omitiendo que los valores satisfacen ambas ecuaciones al mismo tiempo.	1
	2	"Representa un conjunto de coordenadas"	Conocimiento de que la solución está dada por las coordenadas del punto de intersección de las dos ecuaciones del sistema, pero no da detalles.	2
	3	"Un valor, una solución"	Idea de una sola solución para el sistema.	2
	4	"Que ambas tienen un mismo valor para la solución"	Idea de una sola solución para el sistema.	2

4. Análisis y discusión de resultados

	5	Blanco.	Sin respuesta.	1
	6	"La definición del valor numérico de las incógnitas de la ecuación"	Idea que únicamente asocia el valor de la solución con los valores de las incógnitas del sistema.	2
	7	"El punto "P" donde intersecta la línea"	Interpretación gráfica de la solución de un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas.	2
	8	Blanco.	Sin respuesta.	1
	9	Blanco.	Sin respuesta.	1

La Tabla 3 contiene las calificaciones de los participantes de cada pregunta. Así como, el promedio del grupo, promedio por pregunta y promedio general del Pre-Test.

Tabla 3								
Participante	Pregunta						Promedio Individual	
	1	2	3	4	5	6		
1	2	4	3	4	2	1	2,67	
2	3	3	3	3	3	2	2,83	
3	2	3	4	3	1	2	2,50	
4	3	3	1	3	2	2	2,33	
5	2	3	1	1	1	1	1,50	
6	1	1	1	2	2	2	1,50	
7	2	1	1	1	4	2	1,83	
8	1	1	1	1	3	1	1,33	
9	2	1	1	1	1	1	1,17	
Promedio del grupo por pregunta	2,00	2,22	1,78	2,11	2,11	1,56	Promedio General del grupo	1,96

En los resultados de la tabla anterior se observa que el promedio del grupo es 1.96, que de acuerdo a la escala de valoración establecida indica una idea muy débil acerca de los conceptos involucrados el Pre-Test.

Además, se observa en la columna de “Promedio Individual”, que del grupo de nueve participantes, solo cuatro obtuvieron una calificación promedio mayor a 2, que de acuerdo a la escala indica una idea débil, casi general acerca de los conceptos involucrados en el Pre-Test. La mayor calificación fue de 2.83, que indica una idea general con algunas deficiencias sobre los conceptos y el trabajo necesarios para resolver el Pre-Test. El resto de los participantes obtuvieron calificaciones que indican una idea casi nula sobre los conceptos y el trabajo necesarios para resolver el Pre-Test.

Se observa en la columna “Promedio del grupo por pregunta”, que los participantes tienen una idea débil acerca de los conceptos que manejan las preguntas 1, 2, 4 y 5 del Pre-Test. La calificación obtenida en la pregunta 3 del Pre-Test indica una idea muy débil sobre el trabajo que pide la pregunta. Por otra parte, la calificación de la pregunta 6 del Pre-Test indica una idea casi nula sobre el concepto que aborda la pregunta.

4.2. Prueba Formal

4.2.1. Resultados del trabajo en equipo

En este apartado se presentan un análisis de los resultados obtenidos durante el trabajo en equipo con la metodología ACODESA y las Actividades de Aprendizaje. Para lo que se formaron los siguientes equipos:

Equipo 1:

Participante 1

Participante 4

Participante 7

Equipo 2:

Participante 2

Participante 6

Participante 8

Equipo 3:

Participante 3

Participante 5

Participante 9

La evidencia con las hojas de trabajo Equipo 2 se presenta en el Apéndice C.

1. Actividad de Aprendizaje. Secuencias

A continuación, se muestra la Tabla 4 con los apartados de la actividad que se consideraron para analizar la conceptualización de secuencia, donde se incluye los incisos de la actividad, el enunciado, su respuesta con la observación y evidencia.

Tabla 4	
Inciso	Enunciado
I-c	¿Cómo varía el cambio de los valores en el inciso a?
Respuesta del Equipo 2	
<i>“Proporcionalmente, tarda 25 minutos para pasar por cada puente”</i>	
Observación	
Permitió analizar la conceptualización de secuencia, se evidenció que los participantes identificaron que hay una relación entre los pares de datos que se presentan en el inciso y consideraron que la relación era constante.	
Evidencia	

a) Si desde que alcanzó la velocidad constante el automóvil ha corrido por 25 minutos al pasar por debajo del primer puente, y desde el primer puente tarda 25 minutos en llegar al segundo puente ¿Cuánto tiempo tiene que transcurrir desde que alcanza la velocidad constante para que pase por debajo de los siguientes puentes?

Inicio	Puente 1	Puente 2	Puente 3	Puente 4	Puente 5	Puente 6	Puente 7	Puente 8	Puente 9	Puente 10
0 min	25	50	75	100	125	150	175	200	225	250

c) ¿Cómo varía el cambio de los valores en el inciso a?

Proporcionalmente, tarda 25 minutos para pasar por cada puente.

Figura 4: Incisos (a) y (c) de la actividad a lápiz y papel del Equipo 2.

Por otra parte, la Tabla 5 muestra los apartados de la actividad que se consideraron para analizar la conceptualización de función matemática, donde se incluye los incisos de la actividad, el enunciado, su respuesta con la observación y evidencia.

Tabla 5	
Inciso	Enunciado
I-j	Expresa matemáticamente la forma en que obtuvo los valores que pide el inciso (h), utilizando las variables y símbolos que definió en el inciso (e).
Respuesta del Equipo 2	
$L = L_0 - (n \cdot 2)$; $L_0 = \text{combustible inicial}$	
Observación	
Permitió analizar la conceptualización de función matemática, en donde los participantes presentaron una expresión válida para cualquier cantidad de combustible inicial en el tanque del vehículo, utilizando un símbolo que no se les había pedido antes " L_0 ".	
Evidencia	

4. Análisis y discusión de resultados

c) ¿Cuál sería un símbolo apropiado para identificar cada serie de valores obtenidos en los incisos a y b, relacionados con los siguientes parámetros?

Parámetro	Símbolo
Tiempo que transcurre desde que alcanza la velocidad constante.	t
Cantidad de combustible remanente en el tanque del vehículo.	L
Número de puente.	n_p

h) ¿Qué cantidad de combustible tendrá al pasar por debajo del puente 15, del puente 20 y del puente 25?

Puente 15	Puente 20	Puente 25
10 L	0	-10

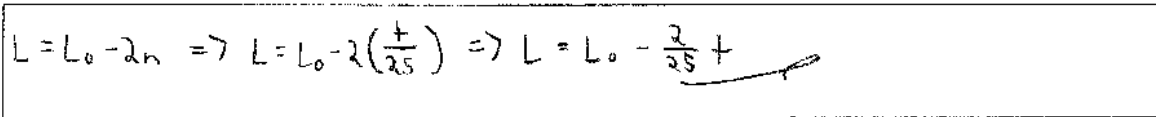
j) Exprese matemáticamente la forma en que obtuvo los valores que pide el inciso (h), utilizando las variables y símbolos que definió en el inciso (e).

$$L = L_0 - (n \cdot 2)$$

$$L_0 = \text{combustible inicial}$$

Figura 5: Incisos (c), (h), y (j) de la actividad a lápiz y papel del Equipo 2.

Inciso	Enunciado
I-k	Exprese matemáticamente la relación que se observa, entre el tiempo que transcurre desde que alcanza la velocidad constante y la cantidad de combustible remanente en el tanque del vehículo, utilizando las variables y símbolos que definió en el inciso (e).
Respuesta del Equipo 2	
$"L = L_0 - (n \cdot 2); L_0 = \text{combustible inicial}"$	
Observación	
Permitió analizar la conceptualización de función matemática, demostrando que realizaron un trabajo algebraico y de sustitución sobre las dos expresiones matemáticas que desarrollaron en los incisos I-g y I-j, además dedujeron la expresión matemática.	

Evidencia	
k) Expresé matemáticamente la relación que se observa, entre el tiempo que transcurre desde que alcanza la velocidad constante y la cantidad de combustible remanente en el tanque del vehículo, utilizando las variables y símbolos que definió en el inciso (e).	
	
Figura 6: Inciso (k) de la actividad a lápiz y papel del Equipo 2.	

Inciso	Enunciado
I-m	En el caso de hallarse en un trayecto continuo, manteniendo la velocidad constante ¿Podría usar la relación encontrada en el inciso (k) para determinar el valor de uno de los parámetros conociendo el valor del otro parámetro?

Respuesta del Equipo 3

“Si, se estableció una relación”

Observación

Permitió analizar la conceptualización de función matemática, evidenció que se identificó la existencia de una relación entre los valores que calcularon con la ecuación del inciso I-k.

Evidencia

m) En el caso de hallarse en un trayecto continuo, manteniendo la velocidad constante ¿Podría usar la relación encontrada en el inciso (k) para determinar el valor de uno de los parámetros conociendo el valor del otro parámetro?

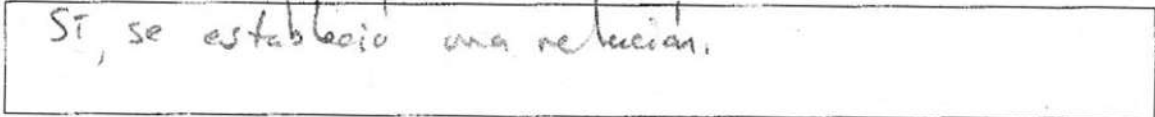
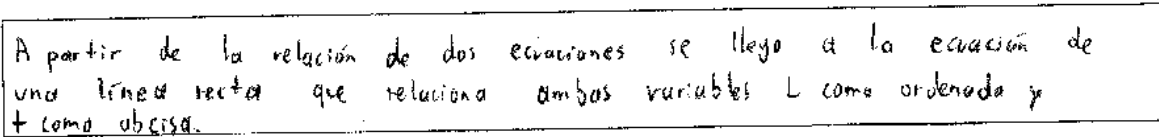


Figura 7: Enunciado (m) de la actividad a lápiz y papel del Equipo 3.

Inciso	Enunciado
I-ñ	¿Qué puede concluir del trabajo realizado en los incisos l, m y n?
Respuesta	
<i>“Se pudieron ajustar los datos a una gráfica y pudimos ver cómo se relacionaron los datos obtenidos”</i>	
Observación	
Permitió analizar la conceptualización de función matemática por parte del Equipo 1, así como la construcción socializada del conocimiento, de manera que se censa y se forman	

acuerdos entre los integrantes del equipo.	
Evidencia	
Al revisar la evidencia en video, se observó en el Equipo 1 que el Participante 7, después de revisar los incisos anteriores, hizo una conclusión que identificaba a la expresión del inciso I-k como una función lineal, el Participante 1 le preguntó si de eso se trataba, lo que hizo dudar al Participante 7, entonces el Participante 4 sugirió una respuesta más general, con la que todos los integrantes estuvieron de acuerdo y escribieron en su hoja de trabajo.	
Respuesta del Equipo 2	
<i>“A partir de la relación de dos ecuaciones se llegó a la ecuación de una línea recta que relaciona ambas variables L como ordenada y t como abscisa”</i>	
Observación	
Permitió analizar la conceptualización de función matemática, demostró que a partir del trabajo realizado sobre la gráfica del inciso I-n, el equipo identificó a la expresión matemática obtenida en el inciso I-k como una función lineal.	
Evidencia	
ñ) ¿Qué puede concluir del trabajo realizado en los incisos l, m y n?	
	
Figura 8: Inciso (ñ) de la actividad a lápiz y papel del Equipo 2.	
Inciso	Enunciado
I-o	¿Qué diferencias y semejanzas encuentra entre la ecuación que obtuvo en el inciso g y la ecuación que obtuvo en el inciso j?
Observación	
Permitió analizar la conceptualización de función matemática, el Equipo 2 mencionó que la expresión obtenida en el inciso I-j tiene más términos que la otra expresión y reconoció que ambas expresiones estaban en función de la misma variable. Los otros equipos solo notaron que ambas expresiones involucran distintas variables, aunque coincidieron con el Equipo 2 en que tienen una variable en común. Ninguno de los equipos concluyó que ambas expresiones representaban funciones lineales, quizás debido a que la actividad no pedía que construyeran la gráfica de las expresiones matemáticas.	

Evidencia

o) ¿Qué diferencias y semejanzas encuentra entre la ecuación que obtuvo en el inciso g y la ecuación que obtuvo en el inciso j?

Diferencias	Semejanzas
los simbolos son diferentes a los que se utilizan en cada ecuación	tienen en comun el numero de puentes y se relacionan por los simbolos

Figura 9: Inciso (o) de la actividad a lápiz y papel del Equipo 1.

o) ¿Qué diferencias y semejanzas encuentra entre la ecuación que obtuvo en el inciso g y la ecuación que obtuvo en el inciso j?

Diferencias	Semejanzas
• Una posee más términos que otra • Una tiene más operandos que la otra	• tienen a n como término común.

Figura 10: Inciso (o) de la actividad a lápiz y papel del Equipo 2.

o) ¿Qué diferencias y semejanzas encuentra entre la ecuación que obtuvo en el inciso g y la ecuación que obtuvo en el inciso j?

Diferencias	Semejanzas
Cambian las variables	Están en función de los puentes y la distancia.

Figura 11: Inciso (o) de la actividad a lápiz y papel del Equipo 3.

2. Actividad de Aprendizaje. Función Lineal

Para el análisis de la conceptualización de diferencias matemáticas, se observó que todos los equipos fueron capaces de calcular los valores de las diferencias que cada inciso les pedía e interpretaron correctamente el cambio de signo que representaba el inciso I-e. A continuación, se presenta la Tabla 6 con el enunciado del inciso y la evidencia en lápiz y papel.

Tabla 6

Inciso	Enunciado
I-e	Ahora considere que el tanque se vaciará en lugar de llenarse, comenzando por una altura de 75 m, pasando por 50, 35, 20, 10 y 1 m de altura. Calcule la variación de la presión con respecto a la altura para este nuevo orden de valores de altura y presión.

Evidencia

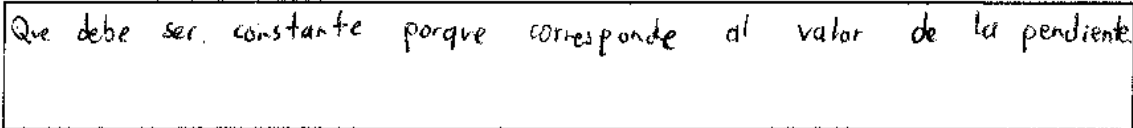
(e) Ahora considere que el tanque se vaciará en lugar de llenarse, comenzando por una altura de 75 m, pasando por 50, 35, 20, 10 y 1 m de altura. Calcule la variación de la presión con respecto a la altura para este nuevo orden de valores de altura y presión.					
Número	Altura en m (h)	Presión en atm (P)	Diferencia en la altura (h)	Diferencia en la presión (P)	Variación de la presión con respecto a la variación en la altura
1	75	8.2462			
2	50	5.8309	- 25	- 2.4153	0.0966
3	35	4.3816	- 15	- 1.4493	0.0966
4	20	2.9323	- 15	- 1.4493	0.0966
5	10	1.9662	- 10	- 0.9661	0.0966
6	1	1.0966	- 9	- 0.8696	0.0966

Figura 12: Inciso (e) de la actividad a lápiz y papel del Equipo 1.

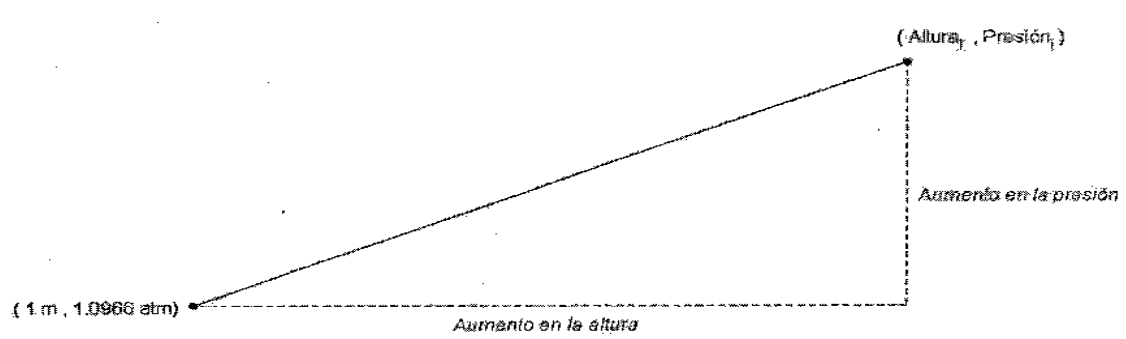
Figura 12: Inciso (e) de la actividad a lápiz y papel del Equipo 1.

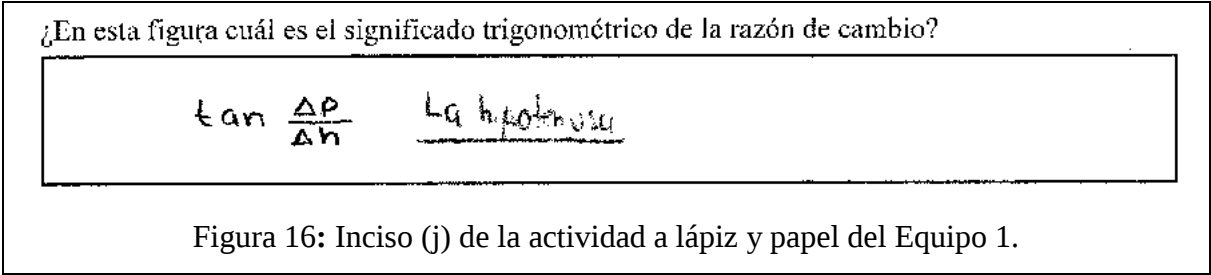
La Tabla 7 indica los apartados de la actividad que se consideraron para analizar la conceptualización de pendiente, donde se incluyen los incisos de la actividad, el enunciado, su respuesta con la observación y evidencia.

Tabla 7	
Inciso	Enunciado

I-g	¿Qué puede deducir de los resultados para la variación de la presión con respecto a la variación en la altura de los incisos (c), (d) y (e)?
Respuesta del Equipo 2	
<i>“Que debe ser constante porque corresponde al valor de la pendiente”</i>	
Observación	
Permitió analizar la conceptualización de razón de cambio, el cual identificó que la variación de la presión con respecto a la variación de la altura es constante y la relacionaron con el concepto de pendiente.	
Evidencia	
(g) ¿Qué puede deducir de los resultados para la variación de la presión con respecto a la variación en la altura de los incisos (c), (d) y (e)?	
	
Figura 13: Inciso (g) de la actividad a lápiz y papel del Equipo 2.	
Inciso	Enunciado
I-h	A esta variación de la presión con respecto a la variación en la altura se le conoce como la razón de cambio entre la presión y la altura, Escriba una ecuación que represente esta razón de cambio.
Respuesta del Equipo 2	
$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$	
Observación	
Permitió analizar la conceptualización de razón de cambio, que escribió su expresión de forma general.	
Evidencia	
(h) A esta variación de la presión con respecto a la variación en la altura se le conoce como la razón de cambio entre la presión y la altura, Escriba una ecuación que represente esta <i>razón de cambio</i> .	
	
Figura 14: Inciso (h) de la actividad a lápiz y papel del Equipo 2.	

4. Análisis y discusión de resultados

Respuesta	
$\frac{\Delta P}{\Delta h} = \frac{P_2 - P_1}{h_2 - h_1}$	
Observación	
Por su parte, el Equipo 3 escribió una expresión específica para el caso de la SP.	
Evidencia	
(h) A esta variación de la presión con respecto a la variación en la altura se le conoce como la razón de cambio entre la presión y la altura. Escriba una ecuación que represente esta <i>razón de cambio</i>. $\frac{\Delta P}{\Delta h} = \frac{P_2 - P_1}{h_2 - h_1}$	
Figura 15: Inciso (h) de la actividad a lápiz y papel del Equipo 3.	
Inciso	Enunciado
I-j	Con base en lo expuesto aquí y la gráfica del inciso (i), ¿Qué puede deducir de esta gráfica de puntos?
Respuesta del Equipo 1	
$\tan \frac{\Delta P}{\Delta h}$ La hipotenusa"	
Observación	
Permitió analizar la conceptualización de razón de cambio, que indicó que identificaron la función trigonométrica relacionada con la pendiente, sin mencionar el ángulo ni nombrar correctamente la función.	
Evidencia	
(j) Si representamos gráficamente un par de puntos cualquiera, lo unimos con el punto inicial correspondiente a una altura de 1 m y una presión de 1.0966 atm. Podremos observar que los aumentos correspondientes a la altura y presión, están representados por los catetos opuesto y adyacente respectivamente. Como se muestra en la siguiente figura	
	



Así mismo, para en análisis de la conceptualización de ordenada al origen se observó el inciso I-l, para el cual, solamente el Equipo 1 identificó el valor real de la ordenada al origen en la gráfica del inciso I-i. Mientras que los equipos 2 y 3 obtuvieron un valor incorrecto debido a su lectura de la gráfica, a continuación, se presenta la Tabla 8 con el enunciado del inciso y la evidencia en lápiz y papel.

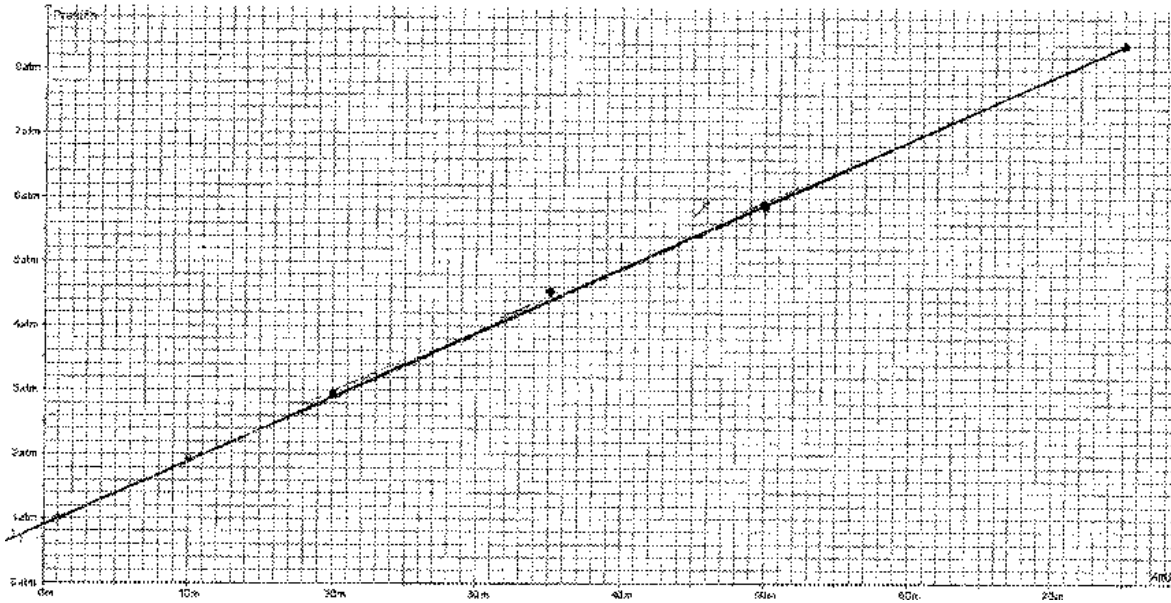
Tabla 8	
Inciso	Enunciado
I-l	Si prolonga la línea trazada en la gráfica del inciso (i) hasta que cruce el eje de la presión, ¿Cuál es el valor de presión correspondiente al punto de intersección?
Evidencia	
(i) Trace todos los puntos de altura y presión en el plano cartesiano. Trace una línea recta entre los puntos inicial y final.	

- (l) Si prolonga la línea trazada en la gráfica del inciso (i) hasta que cruce el eje de la presión, ¿Cuál es el valor de presión correspondiente al punto de intersección?

1 uno

Figura 17: Incisos (i) y (l) de la actividad a lápiz y papel del Equipo 1.

- (i) Trace todos los puntos de altura y presión en el plano cartesiano. Trace una línea recta entre los puntos inicial y final.



- (l) Si prolonga la línea trazada en la gráfica del inciso (i) hasta que cruce el eje de la presión, ¿Cuál es el valor de presión correspondiente al punto de intersección?

0.86

Figura 18: Incisos (i) y (l) de la actividad a lápiz y papel del Equipo 3.

Para en análisis de la conceptualización de función lineal se observaron los incisos I-m y I-o.

Al revisar los resultados escritos del inciso I-m, se observó que todos los equipos escribieron la expresión algebraica de una ecuación lineal de forma general, basándose en el trabajo que realizaron en los incisos anteriores.

4. Análisis y discusión de resultados

Las expresiones presentaron valores diferentes de ordenada al origen, de acuerdo con el resultado de cada equipo en el inciso I-l, en consecuencia, solo el Equipo 1 logró empatar los puntos que calcularon con su ecuación y los puntos del inciso I-o.

Lo anteriormente mencionado, presentó la posibilidad de que se necesiten cuestionamientos posteriores para que el estudiante realice un análisis más completo y verifique de manera efectiva el resultado que obtuvo en el inciso I-o.

A continuación, se presenta la Tabla 9 con el enunciado de los incisos y la evidencia en lápiz y papel.

Tabla 9	
Inciso	Enunciado
I-m	De acuerdo con esto y los resultados de los incisos anteriores, ¿Cuál es la función que describe el comportamiento de los datos de altura y presión que se dan al inicio del problema?
Evidencia	
(m) La forma general de una función lineal es la siguiente: <i>variable dependiente = intersepto + (pendiente)(variable independiente)</i> De acuerdo con esto y los resultados de los incisos anteriores, ¿Cuál es la función que describe el comportamiento de los datos de altura y presión que se dan al inicio del problema? $P = 1 + 0.0966 h$ Figura 19: Inciso (m) de la actividad a lápiz y papel del Equipo 1. (m) La forma general de una función lineal es la siguiente: <i>variable dependiente = intersepto + (pendiente)(variable independiente)</i> De acuerdo con esto y los resultados de los incisos anteriores, ¿Cuál es la función que describe el comportamiento de los datos de altura y presión que se dan al inicio del problema? $P_y = m \cdot x + b = 0.0966 h + 0.86$ $P = 0.0966 h + 0.86$ Figura 20: Inciso (m) de la actividad a lápiz y papel del Equipo 3.	
Inciso	Enunciado

I-o Compruebe que los puntos del inciso (n) corresponden a la misma función lineal en la cual se encuentran los puntos iniciales del problema (A, B, C, D, E y F), trazando estos junto con los que se proporcionan al inicio del problema. Una vez hecho esto, verifique que todos formen una función lineal.

Evidencia

(n) Con el uso de la función del inciso (m) encuentre los valores de presión correspondiente a los siguientes valores de altura

Altura (m)	Presión (atm)
15	2.4490
30	3.8980
45	5.347
60	6.7960
80	8.728

(o) Compruebe que los puntos del inciso (n) corresponden a la misma función lineal en la cual se encuentran los puntos iniciales del problema (A, B, C, D, E y F), trazando estos junto con los que se proporcionan al inicio del problema. Una vez hecho esto, verifique que todos formen una función lineal.

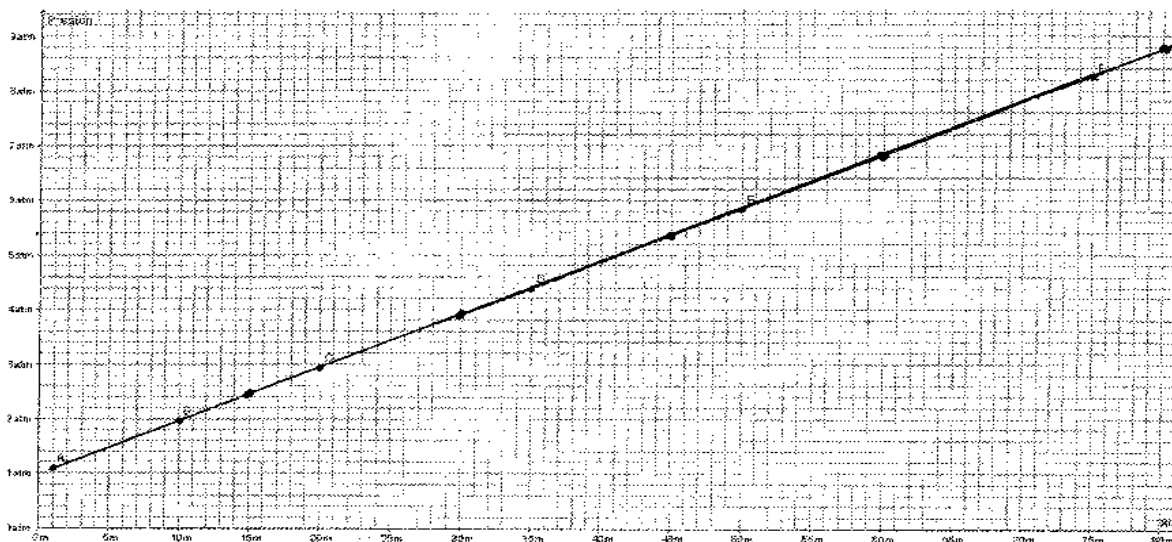


Figura 21: Incisos (n) y (o) de la actividad a lápiz y papel del Equipo 1.

- (n) Con el uso de la función del inciso (m) encuentre los valores de presión correspondiente a los siguientes valores de altura

Altura (m)	Presión (atm)
15	1.6848
30	3.458
45	5.207
60	6.656
80	8.588

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$0.2 = \frac{8.588 - 1.6848}{80 - 15}$$

- (o) Compruebe que los puntos del inciso (n) corresponden a la misma función lineal en la cual se encuentran los puntos iniciales del problema (A, B, C, D, E y F), trazando estos junto con los que se proporcionan al inicio del problema. Una vez hecho esto, verifique que todos formen una función lineal.

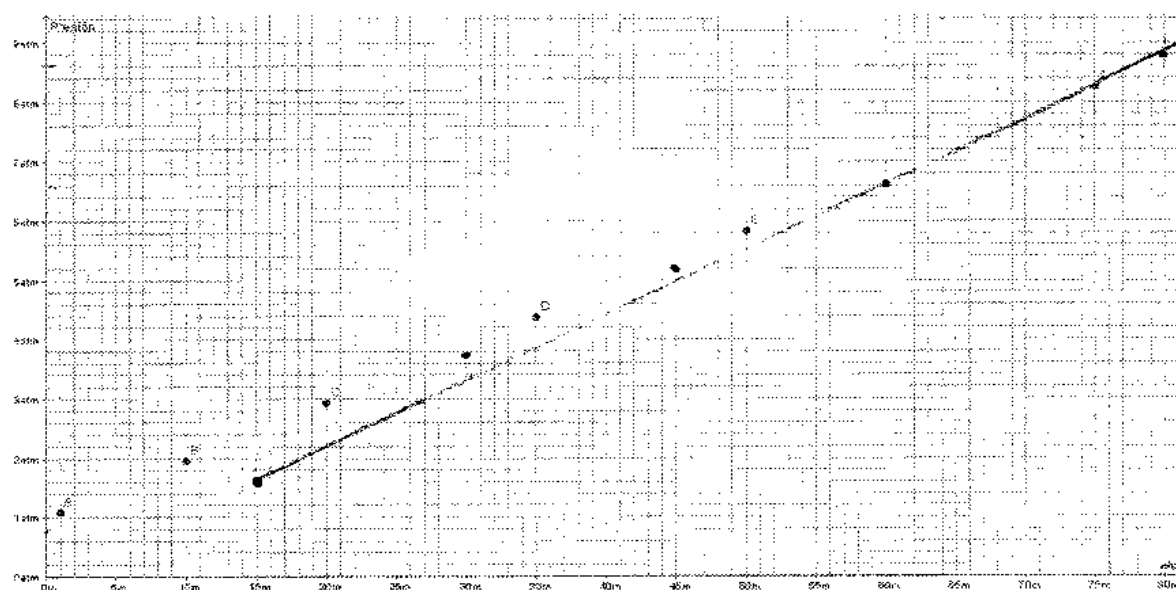


Figura 22: Incisos (n) y (o) de la actividad a lápiz y papel del Equipo 3.

El trabajo realizado posteriormente sobre la Actividad de Aprendizaje 3 sugirió que sean necesarios cuestionamientos que permitan al estudiante familiarizarse más profundamente con la forma general de la expresión algebraica de una función lineal, para que puedan identificar sus elementos con sólo la inspección de su expresión.

3. Actividad de Aprendizaje. Sistema de ecuaciones lineales

A continuación, se muestra la Tabla 10 con los apartados de la actividad que se consideraron para analizar la conceptualización de la clasificación de los sistemas de ecuaciones lineales, según su número de soluciones, donde se incluye los incisos de la actividad, el enunciado, su respuesta con la observación y evidencia.

Tabla 10	
Inciso	Enunciado
I-e	¿Corresponde este valor de y con el del punto de intersección entre las dos ecuaciones observado en la gráfica del inciso (a)? Las coordenadas de este punto representan la solución del sistema.
Respuesta general	
<i>“si corresponde”</i>	
Observación	
Permitió analizar la conceptualización de la clasificación de los sistemas de ecuaciones lineales, demostró que todos los equipos encontraron la solución al sistema de ecuaciones lineales compatible determinado, identificándola como un punto de intersección entre las gráficas de cada ecuación.	
Evidencia	
(a) Se tienen las siguientes ecuaciones lineales: $y = x$ $y = 9 - x$ (e) ¿Corresponde este valor de y con el del punto de intersección entre las dos ecuaciones observado en la gráfica del inciso (a)? Las coordenadas de este punto representan la solución del sistema. Si corresponde	
Figura 23: Inciso (e) y ecuaciones del inciso (a) de la actividad a lápiz y papel del Equipo 3.	
Inciso	Enunciado
I-g	¿Existe algún punto de intersección entre las dos ecuaciones lineales?, por lo tanto ¿este sistema de ecuaciones lineales tiene solución?, justifique su respuesta.
Respuesta del Equipo 2	
<i>“No tiene solución ya que no posee punto de intersección, son paralelas”</i>	
Observación	
Permitió analizar la conceptualización de la clasificación de los sistemas de ecuaciones lineales, indicó que los integrantes del equipo identificaron la característica gráfica de los sistemas de ecuaciones lineales no compatibles.	

Evidencia	
Del video se extrae el siguiente episodio:	
Participante 2: No tiene solución.	
Participante 6: No, no la tiene.	
Participante 2: Por lo mismo que pusimos acá (refiriéndose al inciso I-e), ¿no?, entonces ¿Cuál es nuestra justificación? ¿Tienen la misma pendiente, no?	
Participante 8: Las funciones a final de cuentas se intersectan, pero en el eje de las y's.	
Participante 2: Pero no tienen intercepto (señala el eje y de la gráfica en el inciso I-f), ¿en qué punto cruza una con otra?, no hay.	
Participante 8: Entonces significa que no hay una solución, que el sistema de ecuaciones no tiene solución.	
Participante 2: Lo cual, ¿Cómo justifica la respuesta?	
Participante 6: Al no tener punto de intercepción.	
Participante 8: La gráfica se va a ir hasta el infinito y no va a (señalamiento de cruce).	
Participante 6: Son paralelas.	
Inciso	Enunciado
I-i	Utilizando la tabla del inciso (h), ¿Cuál es el requisito que debe cumplir la razón de cambio de las ecuaciones para que un sistema de ecuaciones lineales tenga solución?
Respuesta del Equipo 2	
<i>“Porque para que tenga solución las pendientes tienen que ser de signo contrario”</i>	
Observación	
Permitió analizar la conceptualización de la clasificación de los sistemas de ecuaciones lineales, demostró que los integrantes del equipo identificaron parcialmente una característica de la pendiente de las ecuaciones lineales que forman un sistema compatible determinado. Aunque su enfoque solo mencionó el caso donde las pendientes de las ecuaciones del sistema son de signo contrario, posiblemente porque fue la característica que presentó el ejemplo sobre el que se les cuestionó.	
Evidencia	

- (h) Encuentre la razón de cambio (siguiendo el procedimiento gráfico mostrado en la actividad 2) para cada par de ecuaciones, de los incisos (a) y (f), llenando la siguiente tabla. En la columna “Razón de cambio, R_C ” anote la operación que utilizó para encontrar el resultado.

Sistema de ecuaciones lineales	Ecuaciones	Punto de prueba 1 P_1		Punto de prueba 2 P_2		Razón de cambio, R_C	¿El sistema de ecuaciones lineales tiene solución?, responda con base en lo observado en las gráficas anteriores.
		Coordenada x	Coordenada y	Coordenada x	Coordenada y		
(a)	$y = x$	1	1	3	3	1	Si tiene solución
	$y = 9 - x$	1	8	3	6	-1	
(f)	$y = 1 + x$	0	1	1	2	1	No tiene solución
(f)	$y = 3 + x$	0	3	1	4	1	No tiene solución

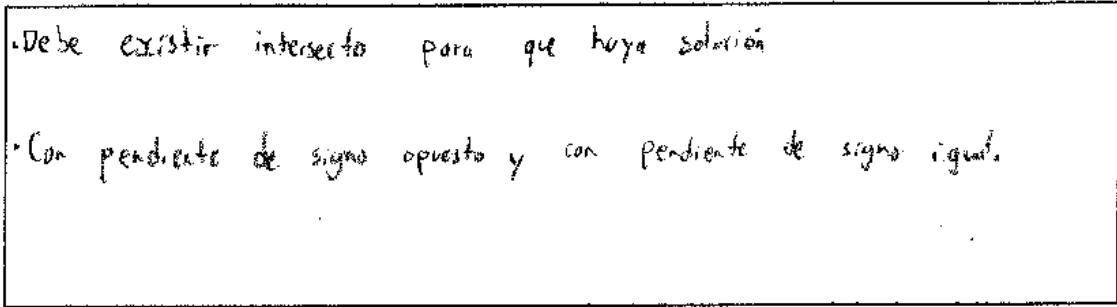
- (i) Utilizando la tabla del inciso (h), ¿Cuál es el requisito que debe cumplir la razón de cambio de las ecuaciones para que un sistema de ecuaciones lineales tenga solución?

Para que tenga solución las pendientes tienen que ser de signo contrario.

Figura 24: Incisos (h) y (i) de la actividad del Equipo 2.

Inciso	Enunciado
I-j	¿Por qué el sistema de ecuaciones lineales del inciso (f) no tiene solución?
Respuesta del Equipo 1	
“Porque tienen la misma pendiente”	
Observación	
Permitió analizar la conceptualización de la clasificación de los sistemas de ecuaciones lineales, evidenció que los integrantes del equipo identificaron una característica de las pendientes de las ecuaciones lineales que forman parte de un sistema incompatible.	
Evidencia	
(f) Considere las siguientes dos ecuaciones lineales: $y = 1 + x$ $y = 3 + x$	
(j) ¿Por qué el sistema de ecuaciones lineales del inciso (f) no tiene solución? Porque tienen la misma pendiente	

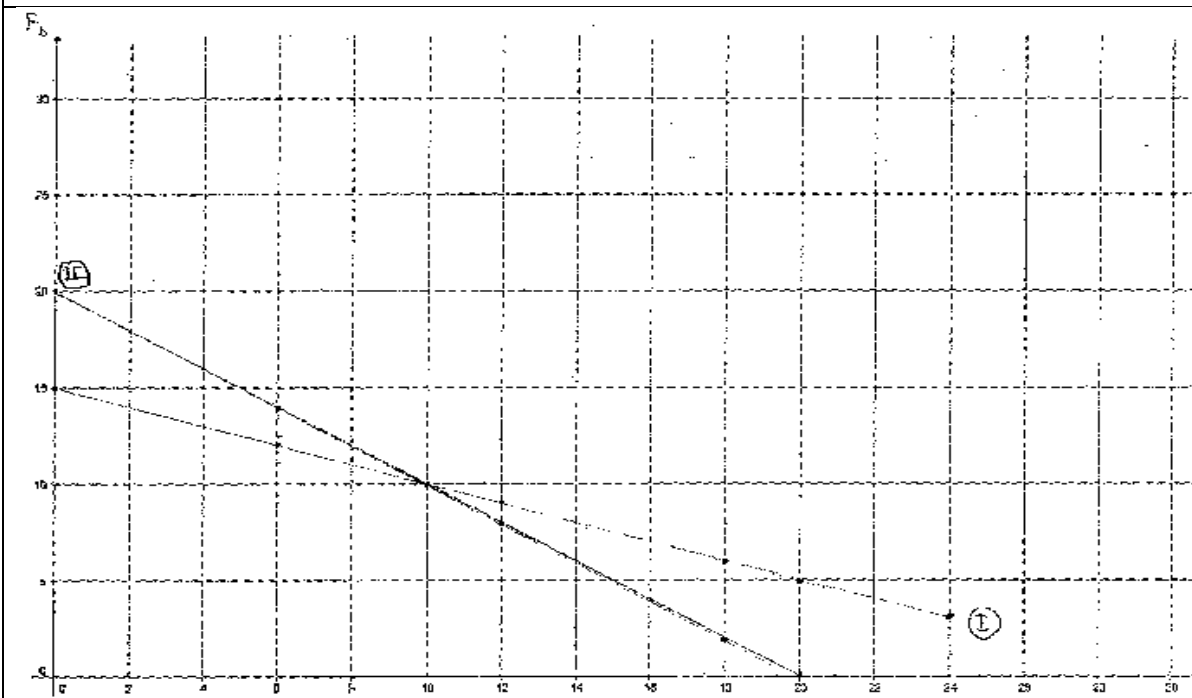
Figura 25: Inciso (f) y ecuaciones del inciso (j) de la actividad a lápiz y papel del Equipo 1.	
Inciso	Enunciado
I-n	¿Cuántas soluciones tiene el sistema de ecuaciones lineales del inciso (k)?
Respuesta del Equipo 3	
<i>"Infinitas"</i>	
Observación	
Permitió analizar la conceptualización de la clasificación de los sistemas de ecuaciones lineales, evidenció que los integrantes del equipo identificaron la característica de un sistema de ecuaciones lineales compatible indeterminada.	
Evidencia	
(k) Se tiene el siguiente sistema de ecuaciones lineales $\begin{array}{l} y = 2x - 2 \\ 8x - 8 \\ y = \frac{\quad}{4} \end{array}$ (n) ¿Cuántas soluciones tiene el sistema de ecuaciones lineales del inciso (k)? <i>Infinitas</i>	
Figura 26: Inciso (n) y ecuaciones del inciso (k) de la actividad a lápiz y papel del Equipo 3.	
Respuesta	
<i>"n soluciones"</i>	
Observación	
Permitió analizar la conceptualización de la clasificación de los sistemas de ecuaciones lineales por parte del Equipo 2, demostró que el equipo concluyó que el número de respuestas dependía del número de puntos con que se trabaja.	
Evidencia	
(n) ¿Cuántas soluciones tiene el sistema de ecuaciones lineales del inciso (k)? <i>n soluciones</i>	
Figura 27: Inciso (n) de la actividad a lápiz y papel del Equipo 2.	

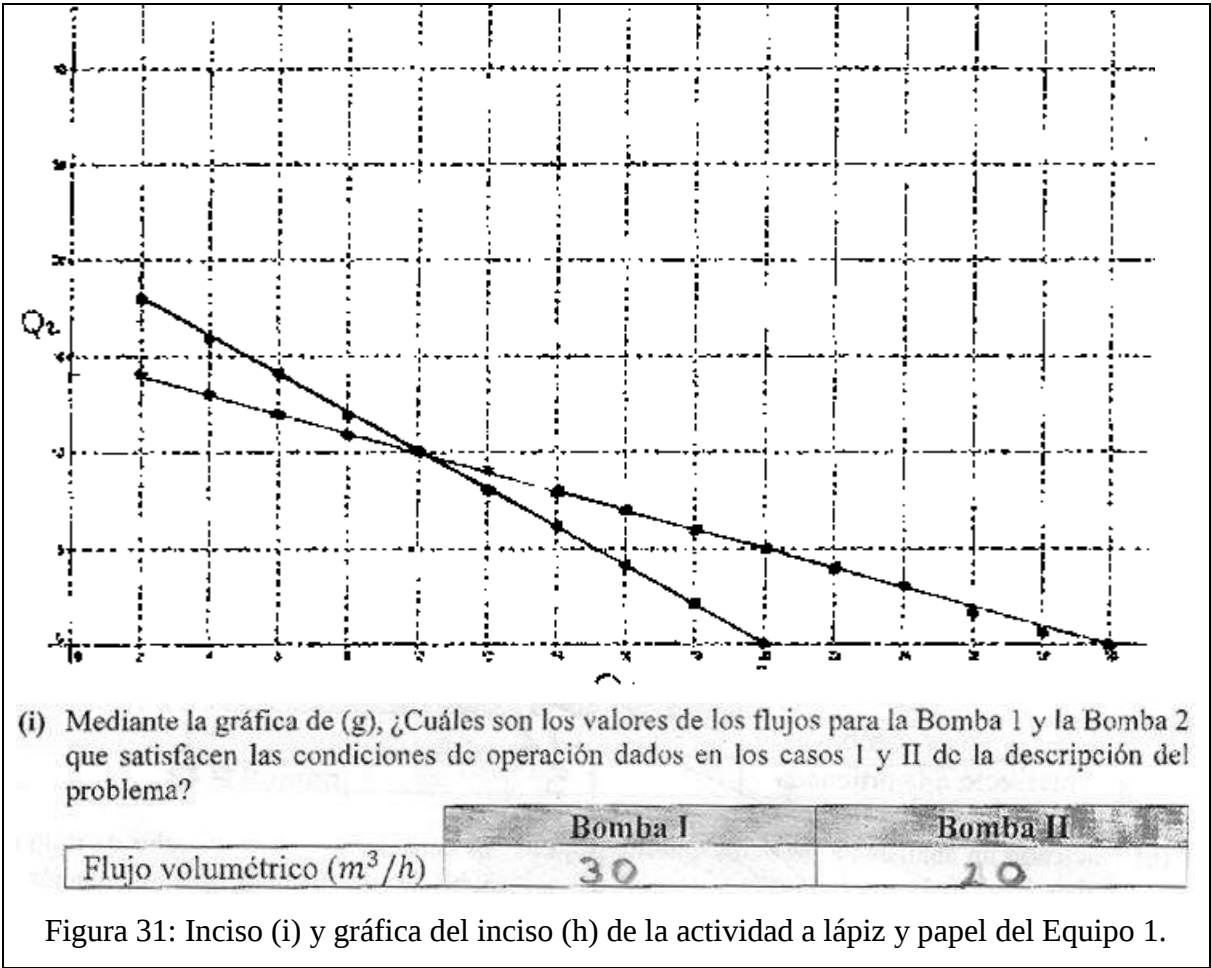
Inciso	Enunciado
I-p	De acuerdo con lo visto en los incisos anteriores, ¿Qué condiciones se deben de cumplir para que un sistema de ecuaciones lineales tenga solución? y ¿cuáles son los casos que tenemos?
Respuesta del Equipo 2	
<i>“Debe existir intersección para que haya solución (...) con pendiente de signo opuesto y con pendiente de signo igual”</i>	
Observación	
Permitió analizar la conceptualización de la clasificación de los sistemas de ecuaciones lineales, demostró que identificaron la interpretación gráfica de la solución de un sistema de ecuaciones lineales y realizaron una conclusión sobre las pendientes de las funciones lineales de un sistema, únicamente con base en su signo positivo o negativo.	
Evidencia	
(p) De acuerdo con lo visto en los incisos anteriores, ¿Qué condiciones se deben de cumplir para que un sistema de ecuaciones lineales tenga solución? Y ¿cuáles son los casos que tenemos?  Figura 28: Inciso (p) de la actividad del Equipo 2.	

La Tabla 11 indica los apartados de las actividades que se consideraron para analizar el trabajo sobre la construcción y solución de un sistema de ecuaciones lineales de función matemática, donde se incluye los incisos de la actividad, el enunciado, su respuesta con la observación y evidencia.

Tabla 11	
Inciso	Enunciado
II-e	Represente explícitamente el flujo de la Bomba 2 para cada una de las ecuaciones de los incisos (c) y (d), de manera que quede una ecuación de la forma <i>Bomba 2 =</i>

	$f(\text{Bomba1})$.
Respuesta general	
$Q_2 = \frac{30 - Q_1}{2} = 15 - \frac{Q_1}{2}$ $Q_2 = \frac{50 - 2.5Q_1}{2.5} = 20 - Q_1$	
Observación	
Permitió analizar el trabajo sobre la construcción y solución de un sistema de ecuaciones lineales, evidenció que todos los equipos construyeron un sistema de ecuaciones lineales adecuado para resolver la Situación Problema.	
Evidencia	
(c) Haciendo uso de la ecuación del inciso (a) y de los datos del problema, ¿Cuál es la representación algebraica (ecuación) del caso I? Asigne literales (letras) a cada variable, de manera que sea más cómodo el uso de esta ecuación. $D = Q_1 + 2Q_2 = 30 \text{ m}^3$ (d) ¿Cuál es la representación algebraica del caso II dado en el planteamiento del problema y la ecuación obtenida en el inciso (a)? Asigne literales (letras) a cada variable, de manera que sea más cómodo el uso de esta ecuación. $D = 2.5Q_1 + 2.5Q_2 = 50 \text{ m}^3$ (e) Represente explícitamente el flujo de la <i>Bomba 2</i> para cada una de las ecuaciones de los incisos (b) y (c), de manera que quede una ecuación de la forma <i>Bomba 2</i> = $f(\text{Bomba 1})$. Caso I. $Q_2 = \frac{30 - Q_1}{2} = 15 - \frac{Q_1}{2}$ Caso II. $Q_2 = \frac{50 - 2.5Q_1}{2.5} = 20 - Q_1$	
Figura 29: Incisos (c), (d) y (e) de la actividad a lápiz y papel del Equipo 1.	
Inciso	Enunciado
II-i	Mediante la gráfica de (h), ¿Cuáles son los valores de los flujos para la Bomba 1 y la Bomba 2 que satisfacen las condiciones de operación dados en los casos I y II de la descripción del problema?
Respuesta de los Equipos 2 y 3	

Flujo volumétrico de bomba I: 10 m³/h.							
Flujo volumétrico de bomba II: 10 m³/h.							
Observación							
Permitió analizar el trabajo sobre la construcción y solución de un sistema de ecuaciones lineales, indicó que los equipos 2 y 3 encontraron la respuesta correcta, sin embargo, el Equipo 1 leyó puntos diferentes en la gráfica del inciso II-h, lo que demostró un retroceso en su comprensión del concepto de la solución a un sistema de ecuaciones lineales.							
Evidencia							
 (i) Mediante la gráfica de (g), ¿Cuáles son los valores de los flujos para la Bomba 1 y la Bomba 2 que satisfacen las condiciones de operación dados en los casos I y II de la descripción del problema? <table><tr><th></th><th>Bomba I</th><th>Bomba II</th></tr><tr><td>Flujo volumétrico (m³/h)</td><td>10</td><td>10</td></tr></table>			Bomba I	Bomba II	Flujo volumétrico (m³/h)	10	10
	Bomba I	Bomba II					
Flujo volumétrico (m³/h)	10	10					
Figura 30: Inciso (i) y gráfica del inciso (h) de la actividad a lápiz y papel del Equipo 2.							



Inciso	Enunciado
II-g	Haciendo un análisis de los datos anteriores, ¿Las dos ecuaciones tienen un valor de flujo en ambas bombas que satisfaga ambas ecuaciones?, dicho de otra manera, ¿Tiene solución el sistema de ecuaciones? Y ¿Por qué?
Respuesta del Equipo 2	
"Si, porque la pendiente es diferente"	
Observación	
Permitió analizar el trabajo sobre la construcción y solución de un sistema de ecuaciones lineales, coincidió con su conclusión del inciso II-j. Se observó que la diferencia a la que se refieren no estaba limitada únicamente al signo positivo o negativo, esto pudo deberse a que para el desarrollo de esta parte, ambas ecuaciones del sistema tenían signo positivo.	
Evidencia	

(g) Haciendo un análisis de los datos anteriores, ¿Las dos ecuaciones tienen un valor de flujo en ambas bombas que satisfaga ambas ecuaciones?, dicho de otra manera, ¿Tiene solución el sistema de ecuaciones? Y ¿Por qué?

Si, porque la pendiente es diferente

Figura 32: Inciso (g) de la actividad a lápiz y papel del Equipo 2.

En los resultados de los incisos II-k y II-m se observó que los equipos 2 y 3 plantearon un sistema de ecuaciones y llegaron al resultado esperado, sin embargo el Equipo 1, mantuvo su error del inciso II-i, por lo que desarrolló un sistema de ecuaciones inadecuado para resolver el problema. Lo que sugiere que conviene incluir un cuestionamiento que permita al estudiante verificar el resultado que obtiene del inciso II-i. A continuación, se presenta la Tabla 12 con el enunciado de los incisos y la evidencia en lápiz y papel.

Tabla 12	
Inciso	Enunciado
II-k	Teniendo en cuenta las dimensiones del depósito, y la ecuación del inciso (j), ¿Cuál es el sistema de ecuaciones que se tiene que solucionar para determinar el tiempo en el cual se llena el depósito?
Evidencia	
(j) Sabiendo que ambas bombas trabajaran al mismo tiempo (tiempo de operación igual para ambas bombas). Construya una ecuación que represente el volumen del depósito como una función del tiempo. Utilizando los flujos de las bombas calculados en el inciso (i).	
$V_d = 20 \cdot t$ $V_d = 10 \cdot t$	
(k) Teniendo en cuenta las ^{exp} dimensiones del depósito, y la ecuación del inciso (i), ¿Cuál es el sistema de ecuaciones que se tiene que solucionar para determinar el tiempo en el cual se llena el depósito?	
$V_d = (F_a + F_b) \cdot t$ $V_d = (F_a + F_b) (V_d / F_d)$ $T = V_d / F_d$ $V_d = F_d \cdot T$	

Figura 33: Incisos (j) y (k) de la actividad a lápiz y papel del Equipo 2.

- (j) Sabiendo que ambas bombas trabajaran al mismo tiempo (tiempo de operación igual para ambas bombas). Construya una ecuación que represente el volumen del depósito como una función del tiempo. Utilizando los flujos de las bombas calculados en el inciso (h).

$$V_D = 50t \quad t = \frac{150 - 3h}{50} \quad \frac{h^2}{h^2} = \frac{h}{h} = h$$

$$150m^3 = 30(3h) + 20(3h) = 150$$

- (k) Teniendo en cuenta las dimensiones del depósito, y la ecuación del inciso (i), ¿Cuál es el sistema de ecuaciones que se tiene que solucionar para determinar el tiempo en el cual se llena el depósito?

$$V_D = 50t = 150$$

$$V_D = 30t + 20t = 150$$

Figura 34: Incisos (j) y (k) de la actividad a lápiz y papel del Equipo 1.

Inciso	Enunciado
II-m	¿En cuánto tiempo se llena el depósito?
Evidencia	

- (m) ¿En cuánto tiempo se llena el depósito?

Tiempo de llenado del depósito (horas) 7.5 horas

Figura 35: Inciso (m) de la actividad a lápiz y papel del Equipo 2.

- (m) ¿En cuánto tiempo se llena el depósito?

Tiempo de llenado del depósito (horas) 3

Figura 36: Inciso (m) de la actividad a lápiz y papel del Equipo 1.

4.2.2. Resultados del debate

A continuación, se presentan las observaciones realizadas sobre la evidencia en video que se obtuvo de la etapa de debate de la Metodología ACODESA, aplicada en la Prueba Formal. En esta etapa los integrantes de un equipo expusieron sus soluciones de las Actividades de Aprendizaje frente al resto del grupo, apoyándose con el pizarrón del aula y con un proyector para el trabajo con GeoGebra.

1. Actividad de Aprendizaje. Secuencias

Durante el debate, el Equipo 1 expuso con la intervención de todos sus integrantes y sin ningún orden particular en sus participaciones.

En la mayoría de los incisos, los participantes lograron un mutuo acuerdo en la solución. Para la solución de los incisos I-g, I-j y I-k, indicaron que las expresiones matemáticas escritas por cada equipo eran iguales, únicamente diferían entre sí de acuerdo a la respuesta dada para el inciso I-e, la Tabla 13 muestra el enunciado de los incisos.

Tabla 13	
Inciso	Enunciado
I-c	¿Cómo varía el cambio de los valores en el inciso a?
I-d	¿Cómo varía el cambio los valores en el inciso b?
I-g	Expresa matemáticamente la forma en que obtuvo los valores que pide el inciso (f), utilizando las variables y símbolos que definió en el inciso (e).
I-j	Expresa matemáticamente la forma en que obtuvo los valores que pide el inciso (h), utilizando las variables y símbolos que definió en el inciso (e)
I-k	Expresa matemáticamente la relación que se observa, entre el tiempo que transcurre desde que alcanza la velocidad constante y la cantidad de combustible remanente en el tanque del vehículo, utilizando las variables y símbolos que definió en el inciso (e).

Al revisar el video de la Prueba Formal, se observó que durante la presentación del inciso I-ñ: “¿Qué puede concluir del trabajo realizado en los incisos l, m y n?”, se desarrolló el siguiente intercambio de ideas:

Participante 1: Era, comparar los datos de cómo iba variando (...) como se iban relacionando todas las variables, llegamos a la conclusión de que todo iba como de manera, podríamos decir proporcional, porque, pues iba aumentando el tiempo en que iba pasando el carro, iba reduciéndose el combustible, que es algo lógico y también el número de puentes, por así

decirlo, que principalmente era la razón por la que estas dos variables se iban alterando.

Participante 3: Que mientras el tiempo aumenta, el combustible disminuye.

Participante 8: Bueno, que a partir de la relación de dos ecuaciones se llegó a la ecuación de una línea recta que relaciona ambas variables, P como ordenada y t como abscisa.

Participante 4: Si, está bien, si lo vimos, pero como que no vimos cómo se relacionaba mediante los símbolos que pusimos en cada ecuación.

En este punto se observó que las conclusiones de cada equipo se confirmaron y robustecieron mutuamente, por ejemplo el Equipo 1, confirmó con la participación del Equipo 2, la suposición de que la expresión que escribieron en el inciso I-k era una función lineal.

2. Actividad de Aprendizaje. Función Lineal

Durante el debate, el Equipo 2 expuso con la intervención de todos sus integrantes y sin ningún orden particular en sus participaciones.

Cuando el equipo presentó los resultados del inciso I-c: *“Con los datos que obtuviste en los incisos (a) y (b), ¿cómo es la variación de la presión de la columna de agua respecto a la variación en la altura de la columna para cada uno de los valores? Es decir, cuántas unidades aumenta la presión al aumentar la altura. Expresa sus resultados en la tabla siguiente (redondeando hasta cuatro decimales)”* se desarrolló el siguiente intercambio de ideas:

Participante 6: Nos piden la variación de la presión con respecto a la variación en la altura, aquí ya nada más tomamos como cociente el valor de la diferencia de la presión entre la diferencia de la altura, por ejemplo:

$$\frac{\Delta P}{\Delta h} = \frac{0.8646 \text{ atm}}{0.0966} = 8.9514$$

Figura 37: Ecuación en el pizarrón por el Participante 6.

Investigador: ¿Todos llegaron al mismo resultado?

Participante 3: No

Investigador: ¿Cómo lo tienen ustedes?

- Participante 3: O sea, como presión entre altura, pero (señalamiento de giro con los dedos), presión 9 entre 0.86
- Participantes 1 y 7: O sea, al revés.
- Participante 1: Y les salió como 10 punto y algo.
- Participante 3: Aja, si, así.
- Participante 7: O sea, nosotros lo habíamos hecho así, pero no lo veíamos tan lógico, la variación pues, era como muy grande y lo vimos como más coherente con los valores al revés.
- Participante 6: Nosotros lo calculamos así, porque la indicación te dice, la variación de la presión con respecto a la altura.
- Participante 1: O sea que la presión dependería de la altura.
- Participante 6: Pues prácticamente
- Participante 2: Y lo confirmamos nosotros más adelante.

El equipo 3 se mantuvo en desacuerdo y al cuestionarlos se observó una diferencia en los valores de los aumentos de presión y de altura de la columna de agua que calcularon en los incisos I-a y I-b respectivamente, se les preguntó su forma de hacer el cálculo y pasó el Participante 5 al frente, escribió tres pares de datos e indicó la operación.

Señaló que a cada valor de la tabla le restaban el valor anterior, en lugar de cumplir con la indicación del enunciado del inciso I-a: " $P_i - 1.0966$ ", en la que a cada valor le debían restar el valor de presión inicial.

El Participante 6 dijo que el Participante 5 hizo el trabajo de otro inciso, más adelante se le cuestionó al Participante 5 sobre la indicación del inciso:

- Participante 5: Indiqué el aumento de la presión por cada una de las alturas.
- Participante 6: Cuál es valor correspondiente para la diferencia P_i menos 1.0966, ustedes hicieron algo que pide después.

Posteriormente el Equipo 3 reconoció la fórmula que debían emplear y que el Equipo 2 había escrito.

En el episodio se observó que el error en el cálculo del Equipo 3 se debió a una lectura incompleta o una mala comprensión de la lectura del enunciado y cómo esta etapa de la Metodología ACODESA permitió identificar y corregir esas equivocaciones.

3. Actividad de Aprendizaje. Sistema de ecuaciones lineales

Durante el debate, el Equipo 3 expuso con la intervención de todos sus integrantes y sin ningún orden particular en sus participaciones.

La evidencia en video demostró varias complicaciones por parte del Equipo 3 para resolver la Actividad de Aprendizaje (AA), ocasionadas en parte por su lectura incompleta o mala comprensión de la lectura de las indicaciones, además, en un principio se observaron dificultades para identificar la pendiente en la expresión algebraica institucional de una ecuación lineal, trabajo que ya se había desarrollado en la AA 2.

De acuerdo a la evidencia en video, cuando se resolvió el primer sistema de ecuaciones lineales presentado en inciso I-q: *“Haciendo uso de su argumento dado en el inciso (p), indique si los siguientes sistemas de ecuaciones lineales tienen solución, basándose sólo en las expresiones algebraicas”*, se observó que el Participante 5 dijo que el Sistema de Ecuaciones Lineales no tenía solución, el Participante 4 estuvo de acuerdo y el Participante 2 observó que si tienen solución, al ser cuestionados sucedió lo siguiente:

Participante 5: Bueno, porque no parten del mismo punto y aparte tienen las pendientes distintas y son del mismo signo.

El Participante 4 coincide con sus argumentos,

Participante 2: Aunque tengan diferente pendiente, en algún momento se van a cruzar, pues nada más tienen una solución, no importa de qué punto partan y las que siguen también tienen la misma pendiente y el mismo punto de partida, en este caso tienen n número de soluciones, infinitas soluciones.

Participante 9: Pero, ¿Cómo supieron que tiene solución?

Participante 2: Pues, por experiencia.

Pasó el Participante 2 a explicar su argumento y bosquejó la gráfica de la Figura 38 en el pizarrón, indicando que no importa la inclinación de las líneas, siempre que sean diferentes, ni los puntos de origen, en algún momento se van a cruzar.



Figura 38: Gráfica bosquejada por el Participante 2.

Con lo que se observó cómo la intervención de un participante más experimentado robusteció y completó las ideas de sus compañeros.

4.3. Post-Test.

En este apartado se presenta en análisis realizado sobre el Post-Test aplicado al concluir el trabajo sobre las Actividades de Aprendizaje.

El Post-Test tenía las mismas preguntas que el Pre-Test y el criterio para el análisis de cada respuesta y su valoración fue el mismo que el utilizado en el Pre-Test.

A continuación, se presenta la Tabla 14 que contiene las respuestas de cada participante, su análisis y valoración:

Tabla 14				
Pregunta	¿Qué es una diferencia matemática?			
	Respuesta Institucional			
1	El resultado de la operación de restar (García, 2012).			
	Participante	Respuesta	Análisis	Valoración
	1	"Una diferencia es la resta o sustracción de 2 o más variables que tengan algo en común"	Idea parcial del concepto, que no lo relaciona con el resultado de restar.	2

4. Análisis y discusión de resultados

	2	"Es la resta de dos números cualesquiera"	Idea parcial del concepto, que no lo relaciona con el resultado de restar.	2
	3	"La variación de un punto a otro"	No menciona la resta, y relaciona el concepto con el resultado de la operación.	3
	4	"Es cuanto aumenta un valor respecto al inicial"	No menciona la resta, y relaciona el concepto con el resultado de la operación.	3
	5	"Es una resta de dos cantidades"	Idea parcial del concepto, que no lo relaciona con el resultado de restar.	2
	6	"Una variación entre un término a otro"	No menciona la resta, y relaciona el concepto con el resultado de la operación.	3
	7	"Es la resta que se hace entre una operación y otra"	Idea parcial del concepto, que no lo relaciona con el resultado de restar.	2
	8	"Un cambio que ocurre en relación con otro"	No menciona la resta, y relaciona el concepto con el resultado de la operación.	3
	9	"La cantidad que hay entre una y otra"	No menciona la resta, y relaciona el concepto con el resultado de la operación.	2
	Pregunta ¿Defina qué es una razón de cambio?			
	Respuesta Institucional			

2	Es la magnitud de cambio de una variable por unidad de cambio de otra, que se expresa como un cociente definido por el cambio o diferencia en la variable dependiente dividido por el respectivo cambio en la variable independiente (Larson et al., 2006).			
	Participante	Respuesta	Análisis	Valoración
	1	"Una razón de cambio es la relación que existe entre 2 variables, una función de otra $\frac{dx}{dy}$ "	Conocimiento sobre el concepto de razón de cambio.	4
	2	"Es el cociente de la diferencia de dos variables, es decir, qué tanto cambia una variable respecto a la otra cuando ésta también cambia"	Conocimiento sobre el concepto de razón de cambio.	4
	3	"Es un incremento de una variable respecto a otra"	Idea parcial sobre el concepto, sin incluir que se expresa en forma de cociente.	3
	4	"Una razón de cambio te indica que tanto cambia un valor respecto de otro"	Idea parcial sobre el concepto, sin incluir que se expresa en forma de cociente.	3
	5	"Es la pendiente de una ecuación, esta le da sentido y dirección"	Idea que únicamente relaciona el concepto de razón de cambio con la pendiente en una ecuación lineal.	2

4. Análisis y discusión de resultados

	6	"Es la interacción entre 2 puntos x y 2 puntos y a analogía de la ecuación de la pendiente esta representa la variación de un termino con otro"	Idea parcial sobre el concepto, sin incluir que se expresa en forma de cociente.	3
	7	"La razón de cambio como varía una variable con respecto a otra y de algunos datos"	Idea parcial sobre el concepto, sin incluir que se expresa en forma de cociente.	3
	8	"Es lo que aumenta o disminuye una función de forma proporcional"	Idea parcial sobre el concepto, sin incluir que se expresa en forma de cociente.	3
	9	"Pendiente, punto medio de la recta"	Idea que no tiene relación con el concepto.	1
Pregunta	Calcule la razón de cambio con los puntos: $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$.			
	Respuesta Institucional			
3	$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$			
	Participante	Respuesta	Análisis	Valoración
	1	" $dP = \frac{dx}{dy} = \frac{X_2 - X_1}{Y_2 - Y_1}$ "	Idea próxima al concepto de razón de cambio, que invierte el orden de las diferencias de variables dentro del cociente.	3
	2	"razón de cambio = $\frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1}$ "	Conocimiento sobre el al concepto de razón de cambio.	4

4. Análisis y discusión de resultados

	3	$m = \frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1}$	Idea próxima al concepto de razón de cambio, que invierte el orden de las diferencias de variables dentro del cociente.	3
	4	$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$	Respuesta que demuestra conocimiento sobre el concepto de razón de cambio.	4
	5	$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$	Conocimiento sobre el concepto de razón de cambio.	4
	6	$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$	Conocimiento sobre el concepto de razón de cambio.	4
	7	$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$	Conocimiento sobre el concepto de razón de cambio.	4
	8	$\Delta x = x_2 - x_1$ $\Delta y = y_2 - y_1$	Conocimiento sobre el concepto de razón de cambio.	2
	9	$m = \frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1}$	Idea próxima al concepto de razón de cambio, que invierte el orden de las diferencias de variables dentro del cociente.	3
Pregunta	¿Qué es la ordenada al origen de una ecuación lineal?			
	Respuesta Institucional			
4	Término independiente, que en la gráfica corta el eje de las ordenadas (Leung y Gonzáles, 2016).			
	Participante	Respuesta	Análisis	Valoración

1	"La ordenada al origen es aquel punto donde cruza la recta sobre el eje de las ordenadas le da sentido a la pendiente que se gráfica $y = mx + (b) \rightarrow$ ordenada al origen"	Idea sólida sobre el concepto, que lo identifica gráfica y algebraicamente, aunque erróneamente dice que le da dirección y sentido a la ecuación.	3
2	"Es el punto por el cual la línea recta generada atraviesa el eje de las ordenadas o el eje de la variable dependiente"	Idea parcial sobre el concepto, que únicamente lo identifica gráficamente.	3
3	" $y = mx + (b)$ "	Idea parcial sobre el concepto, que únicamente lo identifica algebraicamente.	3
4	"Es el valor por donde cruza el eje "y" a la ecuación lineal"	Idea parcial sobre el concepto, que únicamente lo identifica gráficamente.	3
5	"Es una línea que cruza el origen del plano cartesiano"	No hay relación con el concepto.	1
6	"Los términos independientes de la ecuación"	Idea parcial sobre el concepto, que únicamente lo identifica gráficamente.	3
7	Blanco.	Sin respuesta.	1
8	"El valor por donde cruza el eje la ecuación lineal"	Idea que identifica parcialmente el concepto de manera gráfica, sin	2

4. Análisis y discusión de resultados

			mencionar aleje que cruza.	
	9	Blanco.	Sin respuesta.	1
Pregunta	¿Qué representa gráficamente la solución de un sistema de dos ecuaciones lineales?			
	Respuesta Institucional			
5	Las coordenadas del punto de intersección de las rectas que representan gráficamente a las dos ecuaciones lineales (García, 2012).			
	Participante	Respuesta	Análisis	Valoración
	1	"La solución de un sistema de ecuaciones nos dice los puntos en x y en y de las variables que conforman la ecuación donde las rectas se cruzan y en el punto de intersección es válido para cada gráfica de ecuaciones"	Conocimiento de la representación gráfica de una solución a un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.	4
	2	"Representa el punto por el cual las dos líneas se cruzan"	Idea poco detallada de la representación gráfica de una solución a un sistema de ecuaciones lineales, que no menciona las coordenadas del punto como resultado.	3
	3	"La intersección de dos gráficas"	Idea poco detallada de la representación gráfica de una solución a un sistema de ecuaciones lineales, que	3

4. Análisis y discusión de resultados

			no menciona las coordenadas del punto como resultado.	
	4	"Que ambas tienen el mismo valor para la solución de las mismas"	Sin relación con la representación gráfica de la solución de un sistema de ecuaciones lineales.	1
	5	"Es punto donde cruzan dos líneas rectas, entonces es el cruce de estas líneas"	Idea poco detallada de la representación gráfica de una solución a un sistema de ecuaciones lineales, que no menciona las coordenadas del punto como resultado.	3
	6	"El punto donde intercepta las dos líneas en el caso de que así sea y si no representa que no hay solución a dicho sistema"	Idea poco detallada de la representación gráfica de una solución a un sistema de ecuaciones lineales, que no menciona las coordenadas del punto como resultado.	3
	7	"Las posibles soluciones del sistema de ecuaciones"	Sin relación con la representación gráfica de la solución de un sistema de ecuaciones lineales.	1
	8	"Cuando ambas funciones interceptan en el mismo punto (x, y)"	Idea poco detallada de la representación gráfica de una solución a un sistema de ecuaciones lineales, que no menciona las coordenadas del punto	3

4. Análisis y discusión de resultados

			como resultado.	
	9	"El punto donde se cruzan las líneas"	Idea poco detallada de la representación gráfica de una solución a un sistema de ecuaciones lineales, que no menciona las coordenadas del punto como resultado.	3
Pregunta	¿Qué representa numéricamente la solución de un sistema de ecuaciones lineales?			
	Respuesta Institucional			
6	Los valores de las dos incógnitas que cumplen simultáneamente las dos igualdades (García, 2012).			
	Participante	Respuesta	Análisis	Valoración
	1	"Representa el valor que da la igualdad en ambas ecuaciones"	Identifica la interpretación analítica de la solución al sistema de ecuaciones.	4
	2	"Representa los valores que satisfacen la igualdad de cada ecuación"	Identifica la interpretación numérica de la solución al sistema de ecuaciones.	4
	3	"La igualdad de dos ecuaciones"	Idea que sólo relaciona una igualdad de valores con la solución de un sistema de ecuaciones lineales.	2
	4	"Que ambas tienen la misma solución para ese valor"	Identifica la interpretación numérica de la solución al sistema de ecuaciones.	4

4. Análisis y discusión de resultados

	5	"Es encontrar el valor de la incógnita de las ecuaciones"	Idea que únicamente asocia el valor de la solución del sistema de ecuaciones lineales con los valores numéricos de las variables.	2
	6	"El punto donde interceptan las dos líneas rectas en caso de que así sea"	Interpretación gráfica de la solución de un sistema de ecuaciones.	1
	7	"El número de soluciones que tienen"	Idea que no se relaciona con la interpretación numérica de la solución de un sistema de ecuaciones lineales.	1
	8	"Cuando la ecuación tiene el mismo valor en relación con otra"	Identifica la interpretación numérica de la solución al sistema de ecuaciones.	4
	9	"Punto medio de cada recta, para que tenga solución deben ser de signo contrario"	Idea que no tiene relación con el concepto.	1

La tabla 15 contiene las calificaciones de los participantes cada pregunta. Así como, el promedio del grupo, promedio por pregunta y promedio general del Post-Test.

Tabla 15							
Participante	Pregunta						Promedio Individual
	1	2	3	4	5	6	
1	2	4	3	3	4	4	3,33
2	2	4	4	3	3	4	3,33
3	3	3	3	3	3	2	2,83

4. Análisis y discusión de resultados

4	3	3	4	3	1	4	3,00	
5	2	2	4	1	3	2	2,33	
6	3	3	4	3	3	1	2,83	
7	2	3	4	1	1	1	2,00	
8	3	3	2	2	3	4	2,83	
9	3	1	3	1	3	1	1,83	
Promedio del grupo por pregunta	2,44	2,89	3,44	2,22	2,67	2,56	Promedio General del grupo	2,70

En la tabla se observa que el promedio del grupo es 2.70, el cual de acuerdo a la escala de valoración establecida, indica una idea general con algunas fallas acerca de los conceptos involucrados en el Post-Test.

Además, se observa en la columna de “Promedio Individual”, que del grupo de nueve participantes, dos de ellos obtuvieron una calificación en el Post-Test de 3.3, lo que de acuerdo a la escala indica una idea general más fuerte acerca de los conceptos involucrados en el Post-Test. Un participante obtuvo una calificación de 3, que indica una idea general acerca de los conceptos. Tres de los participantes obtuvieron calificaciones de 2.83, que indican una idea general, con algunas fallas acerca de los conceptos. Uno de los participantes obtuvo 2.33, que indica una idea débil, casi general acerca de los conceptos. Un participante obtuvo una calificación de 2 y otro participante una calificación de 1.83, lo que indica una idea débil acerca de los conceptos.

Se observa en las calificaciones escritas en la fila “Promedio del grupo por pregunta” que en promedio, los participantes tienen una idea débil, casi general acerca de los conceptos que se manejan en las preguntas 1, 4, 5 y 6 del Post-Test. Las calificaciones obtenidas por el grupo en la pregunta 2 del Post-Test indican una idea general sobre el concepto que requiere la pregunta. Por otra parte las calificaciones obtenidas para la pregunta 3 del Post-Test indican una idea más fuerte sobre el concepto que aborda la pregunta.

5. Conclusiones

La propuesta didáctica desarrollada en el presente trabajo de tesis, que consiste en la aplicación de Actividades de Aprendizaje basadas en situaciones problema, mediadas con GeoGebra, apoyadas con la Metodología ACODESA, cambian el paradigma tradicional en la enseñanza de matemáticas, en donde el profesor y los libros de texto son los principales mediadores del aprendizaje, y el estudiante es un elemento pasivo en su propio proceso de formación.

Esta propuesta brinda nuevos roles dentro del salón de clases, en donde el estudiante asume una participación activa en la construcción de su propio conocimiento, al mismo tiempo que sirve como mediadora en el aprendizaje de sus compañeros, siguiendo una serie de actividades que propician el aprendizaje por descubrimiento, de la manera en que lo indica Meyer (2004) y para las cuales el profesor, es un guía que facilita las condiciones favorables y orienta las actividades que desempeñará el estudiante.

Así mismo, se amplían los medios disponibles para el aprendizaje, aprovechando el software GeoGebra que incluye elementos visuales, es más dinámico y rápido, cuenta con la capacidad de presentar el mismo concepto matemático en diferentes Registros de Representación Semiótica (Duval, 1995), es de fácil manipulación para los usuarios, mientras que su uso entusiasma y motiva la participación activa de los estudiantes, además, permite al profesor efectuar varias demostraciones para la conceptualización de sistemas de ecuaciones lineales en un contexto de situaciones problema.

La aplicación de GeoGebra se puede ampliar a temas relacionados con la trigonometría, el cálculo diferencial, la estadística y aspectos propios de la ingeniería, como se observa en las actividades 2 y 3, cuyos motivos para la Situación Problema fueron el comportamiento de la presión en el fondo de una columna de líquido y el balance simple de masa en un tanque que se llena con agua, respectivamente.

El uso de metodologías didácticas como ACODESA cuya contribución es la importancia que le da al trabajo individual, inmerso en un proceso de aprendizaje sociocultural (Hitt, 2007), permite que los estudiantes desarrollen habilidades de trabajo colaborativo en la solución de problemas, lo que los coloca en una posición competitiva en la sociedad moderna nacional e internacionalmente.

Por otra parte, en la prueba formal de las actividades diseñadas, al hacer una comparación entre los resultados obtenidos en el Pre-Test y el Post-Test, se observó un aumento de 0.8 en el promedio general del grupo.

Promedio General del grupo		Diferencia entre Pre-Test y Post-Test
Pre-Test	Post-Test	
1,94	2,74	0,8

Lo cual, indica que los participantes pasaron de tener ideas muy débiles a una idea general, sobre los conceptos y el trabajo necesarios para resolver el Pre-Test, y se puede interpretar como una mejora en el aprendizaje de los participantes.

Al observar la evolución de las representaciones que se construían con las ideas vertidas en la etapa de trabajo en equipo de los participantes en la prueba formal, se robustecieron en la etapa del debate, además, que el diseño de las Actividades de Aprendizaje basadas en Situaciones Problema propicia niveles de estructuración simbólica y de lenguaje matemático, que Obando y Muñera (2003) señalan como elementos básicos en la construcción de conceptos matemáticos.

Por otra parte, se observó que las dificultades que los participantes tuvieron en la solución de las actividades, no era por el diseño de las mismas, se debieron principalmente por una mala comprensión de lectura o por una lectura incompleta de las indicaciones. A su vez, otra situación que interfirió con el proceso de aprendizaje, fue cuando los participantes no se integraban activamente en el proceso de la solución de las actividades.

Bibliografía

- Almérico, T. y Cruzata, A., (2016). Geogebra como recurso didáctico para la comprensión y aplicación de los teoremas de Pitot, Poncelet y Steiner. En *Revista de Educación*, 7(9), 271-296.
- Arellano, S. M., Cornejo, M. S., Gómez, G. R., Palm A. M. y Villalobos, E. B., (2017). El uso de software GeoGebra como estrategia en la enseñanza del cálculo diferencial en dos institutos tecnológicos. En *Pistas Educativas*, 38(124), 305-345.
- Berger, P. L. y Luckmann, T. (2001). *La construcción social de la realidad*. Madrid: Amorrotu Editores.
- Betancourt, Y. (2009). *Ambiente computacional para apoyar la enseñanza de la resolución de sistemas de ecuaciones lineales en la educación superior*. (Maestro en Ciencias). Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional. México.
- Brousseau, G. (1993). Fundamentos y método de la didáctica de las Matemáticas. En Sánchez, E. y Zubieta, G. (Eds.), *Lecturas de didáctica de las matemáticas, escuela francesa*. (33-115). México. CINVESTAV: IPN.
- Cantoral, R. y Montiel, G. (2001). *Funciones: visualización y pensamiento matemático*. México: Prentice Hall & Pearson Educación.
- Carretero, M. (1997). ¿Qué es el constructivismo? Desarrollo cognitivo y aprendizaje. En Carretero, M. *Constructivismo y educación*. (39-71). México: Progreso.
- Carvajal, J. F., Rincón, E. G. y Zúñiga, L., (2017). Uso del software Geogebra como estrategia de enseñanza para triángulos rectángulos de 30°- 60° dirigida a estudiantes de décimo grado. En *Revista de Investigación Educativa de la Escuela de Graduados en Educación*, 7(14), 56-62.
- Casados, S. N. (2002). El desarrollo del potencial de aprendizaje Entrevista a Reuven Feuerstein. *Revista Electrónica de Investigación Educativa*, 4(2). Recuperado de: <http://redie.uabc.mx/vol4no2/contenido-noguez.html>.

- Cortés, C., Núñez, E. y Morales, C. (2015). Actividades de aprendizaje algebraicas, usando la calculadora TI-Nspire™ CX CAS en un ambiente de aprendizaje. En *Revista AMIUTEM*, 3(2), 1-10.
- Díaz, J. L., García, P. T., y Vargas J.R., (2016). El uso de manipulables para propiciar la comprensión del significado de ecuaciones lineales en la escuela secundaria.
- Duval, R., Font, V., Guzmán, I., Pino-Fan, L. R. (2015). The Theory of Registers of Semiotic Representation and the Onto-Semiotic Approach to Mathematical Cognition and Instruction: Linking Looks for the Study of Mathematical Understanding. En Beswick, K., Muir, T., & Wells, J. (Eds.), *Proceedings of the 39th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. 4, (33-40). Australia: PME. Recuperado de: http://docente.ulagos.cl/luispino/wp-content/uploads/2015/04/RR_Guzman.pdf
- Duval, R. (1995). Sémiosis et pensée: registres sémiotiques et apprentissages intellectuels. En Peter, L. (Ed.), *Semiosis and human thought. Semiotic registers and intellectual learning*. Suiza: Berne.
- Duval R., (1998). Signe et objet (II): questions relatives à l'analyse de la connaissance. En *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 6, 165-196.
- Duval, R. (2002). Representation, vision and visualization: cognitive functions in mathematical thinking. Basic issues for learning. En: F. Hitt, (ed.), *Representations and Mathematics Visualization*, (311-335). North American Chapter of IGPME: México: Cinvestav-IPN.
- Edwards, D. (1997). *Discourse and Cognition*. Londres: Sage.
- Escobar, N. (2011). La Mediación del Aprendizaje en la Escuela. En *Acción pedagógica*, 20, 58-73. Recuperado de: <http://www.saber.ula.ve/bitstream/123456789/34326/1/articulo5.pdf>
- Flórez, M., Carbonell, M. V., y Martínez, E. (2011). Design of Cycloids, Hypocycloids and Epicycloids Curves with Dynamic Geometry Software. Engineering Applications. EDULEARN11 Proceedings, 1011-1016.
- Gallardo, M. R. y Núñez, G. E. (2016a). Actividades de aprendizaje para la solución de ecuaciones que involucran expresiones con radicales. En *Revista Electrónica AMIUTEM*, 4(1).

- Gallardo, M. R. y Núñez, G. E. (2016b). Actividades de aprendizaje para el concepto de límite con el uso de la calculadora TI-NSPIRE CX CAS. En *Revista Electrónica AMIUTEM*, 4(2).
- Gatica, S. N y Enríquez Ares, O. (2012). La importancia de la visualización en el aprendizaje de conceptos matemáticos. En *EDMETIC, Revista de Educación Mediática y TIC*, 1(2), 88-107.
- García, M. N. (2012). *Representaciones simbólicas y algoritmos*. México: CONACULTA.
- González, O. (2006). *Plan de capacitación de la Facultad para el diseño de cursos en línea*. Puerto Rico: Universidad Interamericana de Puerto Rico, Recinto de Ponce.
- Guerrero, M. L., Pantoja, R., Ulloa, R., y Nesterova, E., (2016). Mathematical Modeling in Problem Situations of Daily Life. En *Journal of Education and Human Development*, 5(1), 62-76.
- Gutiérrez, R. E. y Prieto, J. L., (2015). Deformación y reflexión de funciones con GeoGebra. El caso de las parábolas definidas por la expresión $g(x)=ax^2$. En *Números*, 88, 115-126.
- Hernández, S. (2008). El modelo constructivista con las nuevas tecnologías: aplicado en el proceso de aprendizaje. En [monográfico en línea]. *Revista de Universidad y Sociedad del Conocimiento (RUSC)*, 5(2). Recuperado de: <http://www.uoc.edu/rusc/5/2/dt/esp/hernandez.pdf>
- Hitt, F. (2003). Le caractère fonction nel des représentations [The functional nature of the representations]. En *Annales de Didactique et des Sciences Cognitives*, 8, 255–271.
- Hitt, F. (2007). Utilisation de calculatrices symboliques dans le cadre d’une méthode d’apprentissage collaboratif, de débat scientifique et d’auto-réflexion. En M. Baron, D. Guinet L. Trouche (Eds.), *Environnements informatisés et ressources numériques pour l'apprentissage. conception et usages, regards croisés* (65-88). Francia: Hermes.
- Hitt, F. (2016). Proposición La modelación matemática y el aprendizaje de las matemáticas en un medio sociocultural y tecnológico: Un ejemplo con el concepto de derivada. En *PRIMER SEMINARIO INTERNACIONAL Red Temática de Cuerpos Académicos: “Innovación Educativa para el Aprendizaje de las Matemáticas mediado con Tecnología”*. 3-4.

- Hitt, F. y Time. (2010). Construction of mathematical knowledge using graphic calculators (TI-84 plus & CAS) in the mathematics classroom. Recuperado de: http://www.time2010.uma.es/proceedings/papers/d017_paper.pdf
- Hitt, F. y González-Martín, A. S. (2015). Covariation between variables in a modelling process: The ACODESA (collaborative learning, scientific debate and self-reflection) method. En *Educational Studies in Mathematics*, 88(2), 201-219. doi:10.1007/s10649-014-9578-7
- Hitt, F., Saboya, M., & Zavala, C. C. (2016 a). An arithmetic-algebraic work space for the promotion of arithmetic and algebraic thinking: triangular numbers. *ZDM*, 48(6), 775-791. doi:10.1007/s11858-015-0749-5
- Hitt, F., Saboya, M., & Zavala, C. C. (2016 b). Pensamiento Aritmético-Algebraico a través de un Espacio de Trabajo Matemático en un Ambiente de Papel, Lápiz y Tecnología en la Escuela Secundaria/Arithmetico-Algebraic Thinking through a Mathematical Working Space in a Paper, Pencil, and Technological Environment in Secondary School. *Bolema*, 30(54), 240.
- Inzunsa, C. S. (2014). GeoGebra: Una herramienta cognitiva para la enseñanza de la probabilidad. En D. Plufer. Congreso Iberoamericano de Ciencia, Tecnología, Innovación y Educación. Congreso llevado a cabo en Buenos Aires, Argentina.
- Iriarte, X., Aginaga, J., y Ros, J. (2014). Teaching Mechanism and Machine Theory with GeoGebra. En García-Prada, J. C., & Castejón, C. (Eds.), *New Trends in Educational Activity in the Field of Mechanism and Machine Theory* (pp. 211-219). Springer International Publishing.
- Jonassen, D. (1991). Evaluating constructivistic learning. En *Educational Technology*, 31(9), 28-33.
- Jonassen, D. (1994). Thinking Technology: Toward a constructivist design model. En: *Educational Technology*, 34(4), 34-37.
- Kanashiro, A. M. y Oviedo, L. M. (2012). Los registros semióticos de representación en matemática. En *Revista Aula Universitaria*, 13, 29-36. Recuperado de: <https://bibliotecavirtual.unl.edu.ar/ojs/index.php/AulaUniversitaria/article/download/4112/6207>

- Karagiorgi, Y. y Symeou, L. (2005). Translating constructivism into instructional design: potencial and limitations. En *Educational Technology & Society*, 8(1), 17-27.
- Lagos, F. J. y Revelo, F. I. (2004). *La enseñanza problémica como herramienta de apoyo al desarrollo del pensamiento crítico y creativo en el aula*. Colombia: Publicaciones del Centro de estudios superiores María Goretti. Básicas.
- Larson, R., Hostetler, R. P. y Edwards, B. H. (2006). *Cálculo con geometría analítica*. México: McGrawHill
- Leung, K. y Gonzáles, N. (16 de febrero de 2016). Función afín [Mensaje de un blog]. Recuperado de: <http://funcionafinmateblog.blogspot.mx/>
- Martínez, A. E. y Salcedo, O. J.,(2015). Análisis de la producción de artículos escritos sobre GeoGebra, publicados en las actas latinoamericanas de matemática educativa. En VIII Jornada de Investigación del Departamento de Matemática y VII Jornada de Investigación en Educación Matemática. Jornada llevada a cabo en Marazay, Venezuela.
- Mendo, L., Castañeda, A. y Tarifa, L., (2017). El desarrollo de argumentos matemáticos en estudiantes universitarios. En *Atenas Revista Científico Pedagógica*, 3(39), 1-17.
- Meyer, R. F. (2004). Should There Be a Three-Strikes Rule Against Pure Discovery Learning? A Case for Guided Methods of Instruction. En *American Psychologist*, 59(1), 14-19.
- Ministerio de Educación Nacional. (1998). *Lineamientos curriculares, Matemáticas*. Bogotá: Magisterio.
- Moreno, L. y Waldegg, G. (Eds.). (2002). *Fundamentación cognitiva del currículo de matemáticas*. México: Seminario Nacional de Formación de docentes: Uso de nuevas tecnologías en el aula de Matemáticas.
- Múnera, J. (2009). Diseño de situaciones problema dinamizadoras de pensamiento matemático escolar, En *Memorias Décimo Encuentro colombiano de matemática educativa*, octubre, San Juan de Pasto, Colombia.
- Narváez, J., (2015). Estudiando las funciones polinómicas con el software educativo Geogebra. En *Opción*, 31(3), 897-906.

- Obando, Z. G. y Muñera, C. J. J. (2003). Las situaciones problemas como estrategia para la conceptualización matemática. En *Revista Educación y Pedagogía*, 15(35), 185-199.
- Potter, J. (1998). La representación de la realidad. Discurso, retórica y construcción social. Barcelona: Paidós.
- Pozo, J. I. y. Postigo, Y. (1994). La solución de problemas como contenido procedimental de la educación obligatoria. En Pozo, J.I. (Comp), *Laresolución de problemas* (pp. 179-213). Madrid: Santillana.
- Puig, A. P. (1967). Modelos preparados y Modelos hechos. En Medina, G.(Ed.), *El material para la enseñanza de las matemáticas* (192-221). Madrid: Aguilar.
- Rosas, G. M. C. y Sánchez, G. B. (2005). *TeoríaDe La Experiencia De Aprendizaje Mediado Del Dr. ReuvenFeurestein Y Su Importancia En La Cualificación De La Educación Básica Mexicana*. (Licenciatura en Pedagogía). Universidad Pedagógica Nacional. México.
- Santos, T. M. (2015). Uso coordinado de tecnologías digitales y competencias esenciales en la educación matemática del siglo XXI. Colección Paideia Siglo XXI: La educación matemáticaen el siglo XXI.
- Serrano, G. J. M., y Pons, P. R. M. (2011). El constructivismo hoy: enfoques constructivistas en educación. En *Revista electrónica de investigación educativa*, 13(1), 1-27
- Tzuriel, D. (2014). Mediated Learning Experience (MLE) and Cognitive Modifiability: Theoretical Aspects and Research Applications1. *Erdelyi Pszichologiai Szemle = Transylvanian Journal of Psychology*, 15.Recuperado de: http://www.adam-europe.eu/prj/11513/prd/6/2/3%20-%20TSJPSpecIssueFeuerstein2014_David%20Tzuriel_15-49.pdf
- Vásquez, S., Bustos, P., Núñez, G. y Mazzitelli, C. (2004). Planteo de situaciones problemáticas como estrategia integradora en la enseñanza de las ciencias y la tecnología. *Revista Electrónica de Enseñanza de las Ciencias*, 3(1), 73–85. Recuperado de: <http://www.saum.uvigo.es/reec/volumenes/volumen3/Numero1/Art4.pdf>

APÉNDICE A

ACTIVIDADES APLICADAS EN LA PRUEBA FORMAL

Actividad 1

Secuencias

Líder:

Computadora:

Hoja de Trabajo:

Número de Equipo:

Hora de Inicio:

Hora de Terminación:

A. Secuencia numérica

Parte I. (lápiz y papel): Concepto general.

Se conduce un automóvil a través de una carretera que tiene un trayecto lineal y corre por encima de 10 puentes, ubicados a la misma distancia de 50 km entre ellos. Supóngase que realiza el trayecto a velocidad constante. Resuelva lo siguiente y represente cada valor obtenido en una tabla:

- a) Si desde que alcanzó la velocidad constante el automóvil ha corrido por 25 minutos al pasar por debajo del primer puente, y desde el primer puente tarda 25 minutos en llegar al segundo puente ¿Cuánto tiempo tiene que transcurrir desde que alcanza la velocidad constante para que pase por debajo de los siguientes puentes?

Inici o	Puent e 1	Puent e 2	Puent e 3	Puent e 4	Puent e 5	Puent e 6	Puent e 7	Puent e 8	Puent e 9	Puent e 10
0 min										

- b) Al pasar por encima de cada puente se registraron las siguientes cantidades de litros de combustible en el tanque del vehículo:

Inici o	Puent e 1	Puent e 2	Puent e 3	Puent e 4	Puent e 5	Puent e 6	Puent e 7	Puent e 8	Puent e 9	Puent e 10

40 litros	38 litros	36 litros	34 litros	32 litros	30 litros	28 litros	26 litros	24 litros	22 litros	20 litros
--------------	--------------	--------------	--------------	--------------	--------------	--------------	--------------	--------------	--------------	--------------

c) ¿Cómo varía el cambio de los valores en el inciso a?

d) ¿Cómo varía el cambio los valores en el inciso b?

e) ¿Cuál sería un símbolo apropiado para identificar cada serie de valores obtenidos en los incisos a y b, relacionados con los siguientes parámetros?

Parámetro	Símbolo
Tiempo que transcurre desde que alcanza la velocidad constante.	
Cantidad de combustible remanente en el tanque del vehículo.	
Número de puente.	

Considerando el caso anterior, para un vehículo que se desplaza a velocidad constante en un trayecto de 30 puentes todos a la misma distancia, responda lo siguiente:

f) ¿Cuánto tiempo tiene que transcurrir desde que alcanza la velocidad constante para que pase por encima del puente 15, del puente 20 y del puente 25?

Puente 15	Puente 20	Puente 25

g) Exprese matemáticamente la forma en que obtuvo los valores que pide el inciso (f), utilizando las variables y símbolos que definió en el inciso (e).

--

h) ¿Qué cantidad de combustible tendrá al pasar por debajo del puente 15, del puente 20 y del puente 25?

Puente 15	Puente 20	Puente 25

j) Exprese matemáticamente la forma en que obtuvo los valores que pide el inciso (h), utilizando las variables y símbolos que definió en el inciso (e).

--

k) Exprese matemáticamente la relación que se observa, entre el tiempo que transcurre desde que alcanza la velocidad constante y la cantidad de combustible remanente en el tanque del vehículo, utilizando las variables y símbolos que definió en el inciso (e).

--

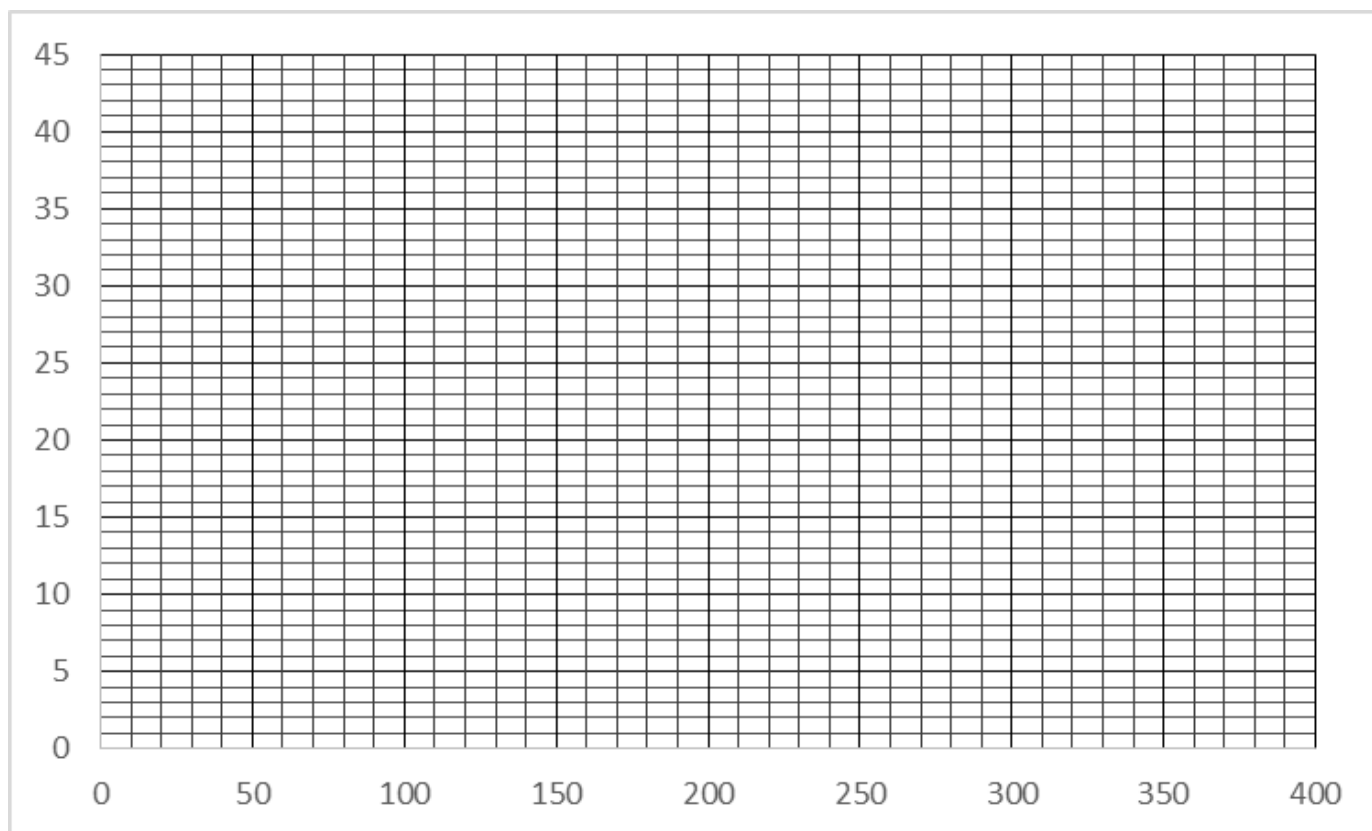
l) Usando la relación del inciso (k) complete la siguiente tabla:

Tiempo que transcurre desde que alcanza la velocidad constante.	200min		360 min	
Cantidad de combustible remanente en el tanque del vehículo.		15litros		8 litros

m) En el caso de hallarse en un trayecto continuo, manteniendo la velocidad constante ¿Podría usar la relación encontrada en el inciso (k) para determinar el valor de uno de los parámetros conociendo el valor del otro parámetro?

--

n) Grafique los valores del inciso (l) en la siguiente plantilla:



ñ) ¿Qué puede concluir del trabajo realizado en los incisos l, m y n?

--

o) ¿Qué diferencias y semejanzas encuentra entre la ecuación que obtuvo en el inciso g y la ecuación que obtuvo en el inciso j?

Diferencias	Semejanzas
-------------	------------

--	--

Parte 2 (con GeoGebra): Conceptualización

Se conduce un automóvil a través de una carretera que tiene un trayecto recto y corre por debajo de 6 puentes, ubicados a la misma distancia de 80 km entre ellos. Supóngase que realiza el trayecto a velocidad constante. Resuelva lo siguiente manipulando el programa GeoGebra de la manera en que se indica.

a) Haciendo uso del archivo de GeoGebra con el nombre *Automóvil.ggb* que se le proporciona, complete la siguiente tabla. Active la animación de velocidad, coloque en la casilla de velocidad los valores indicados en la tabla.

Parámetro	Velocidad	Puente 1	Puente 2	Puente 3	Puente 4	Puente 5	Puente 6
Tiempo que transcurre desde que alcanza la velocidad constante.	40						
	80						
	160						
Cantidad de combustible remante en el tanque del vehículo.	40						
	80						
	160						
Distancia recorrida desde el primer puente.	40						
	80						
	160						

b) ¿Qué variación observas en el inciso (a), con respecto al tiempo en el que el automóvil pasa por el puente tres y el puente cinco a diferentes velocidades?

c) ¿Qué variación observas en el inciso (a), con respecto a la cantidad remanente de combustible en el tanque del automóvil al pasar por el puente tres y el puente cinco a diferentes velocidades?

d) ¿Qué variación observas en el inciso (a), con respecto a la distancia recorrida por el automóvil al pasar por el puente tres y el puente cinco a diferentes velocidades?

e) Observando los valores obtenidos para un mismo parámetro a diferentes velocidades complete la siguiente tabla.

Parámetro	Cambio en la velocidad	Comportamiento de los valores.
Tiempo que transcurre desde que alcanza la velocidad constante.	Aumento	
	Disminución	
Cantidad de combustible remanente en el tanque del vehículo.	Aumento	
	Disminución	
Distancia recorrida desde el primer puente.	Aumento	
	Disminución	

Actividad 2 Función lineal

Líder:

Computadora:

Hoja de Trabajo:

Número de Equipo:

Hora de Inicio:

Hora de Terminación:

A. Razones de Cambio

Parte I. Formato (lápiz y papel o Geogebra).

Se llena un tanque con agua a una temperatura de 20 °C, durante el proceso de llenado se registra un incremento en la presión (P) del fondo de la columna de líquido debido al aumento en la altura del fluido (h). Por inspección se observa que para una altura de un metro, la presión es de 1.0966 atm. Si se continúa llenando el recipiente hasta los 10 metros, la presión alcanza un valor de 1.9662 atm. Continuando con la misma operación de llenado se registran los siguientes valores de presión para las diferentes alturas.

Altura en m (h)	Presión en atm (P)
1	1.0966
10	1.9662
20	2.9323
35	4.3816
50	5.8309
75	8.2462

- (a) Tomando como referencia la presión inicial de 1.0966 atm, indique cuánto aumentó la presión para cada una de las alturas. Es decir, cuál es valor correspondiente para la diferencia $P_i - 1.0966$. En la segunda columna indica la operación que utilizaste para encontrar este cambio.

Altura (m)	Diferencias	Aumento en la presión a partir de 1.0966 atm.
10		
20		
35		
50		
75		

- (b) De manera similar al procedimiento anterior indique cuál fue el cambio registrado en la altura de la columna de agua para cada medición, considerando que se encontraba inicialmente a una altura de 1 metro. En la segunda columna indica la operación que utilizaste para encontrar este cambio.

Presión (atm)	Diferencias	Aumento en la altura de la columna de agua (m)
1.9662		
2.9323		
4.3816		
5.8309		
8.2462		

- (c) Con los datos que obtuviste en los incisos (a) y (b), ¿cómo es la variación de la presión de la columna de agua respecto a la variación en la altura de la columna para cada uno de los valores? Es decir, cuántas unidades aumenta la presión al aumentar la altura. Expresa sus resultados en la tabla siguiente (redondeando hasta cuatro decimales).

Altura (m)	Presión (atm)	Aumento en la altura de la columna de agua (m)	Aumento en la presión (atm)	Variación de la presión con respecto a la variación en la altura.
10	1.9662			
20	2.9323			
35	4.3816			
50	5.8309			
75	8.2462			

- (d) Calcule la variación de la presión con respecto a la altura para cada par de datos consecutivos dados en la descripción del problema: entre el segundo par de datos y el primero, el tercero y el segundo y así sucesivamente.

Número	Altura en m (h)	Presión en atm (P)	Diferencia en la altura (h)	Diferencia en la presión (P)	Variación de la presión con respecto a la variación en la altura
1	1	1.0966			
2	10	1.9662			
3	20	2.9323			
4	35	4.3816			
5	50	5.8309			
6	75	8.2462			

- (e) Ahora considere que el tanque se vaciará en lugar de llenarse, comenzando por una altura de 75 m, pasando por 50, 35, 20, 10 y 1 m de altura. Calcule la variación de la presión con respecto a la altura para este nuevo orden de valores de altura y presión.

Número	Altura en m (h)	Presión en atm (P)	Diferencia en la altura (h)	Diferencia en la presión (P)	Variación de la presión con respecto a la variación en la altura
--------	---------------------	------------------------	---------------------------------	----------------------------------	--

Apéndice A

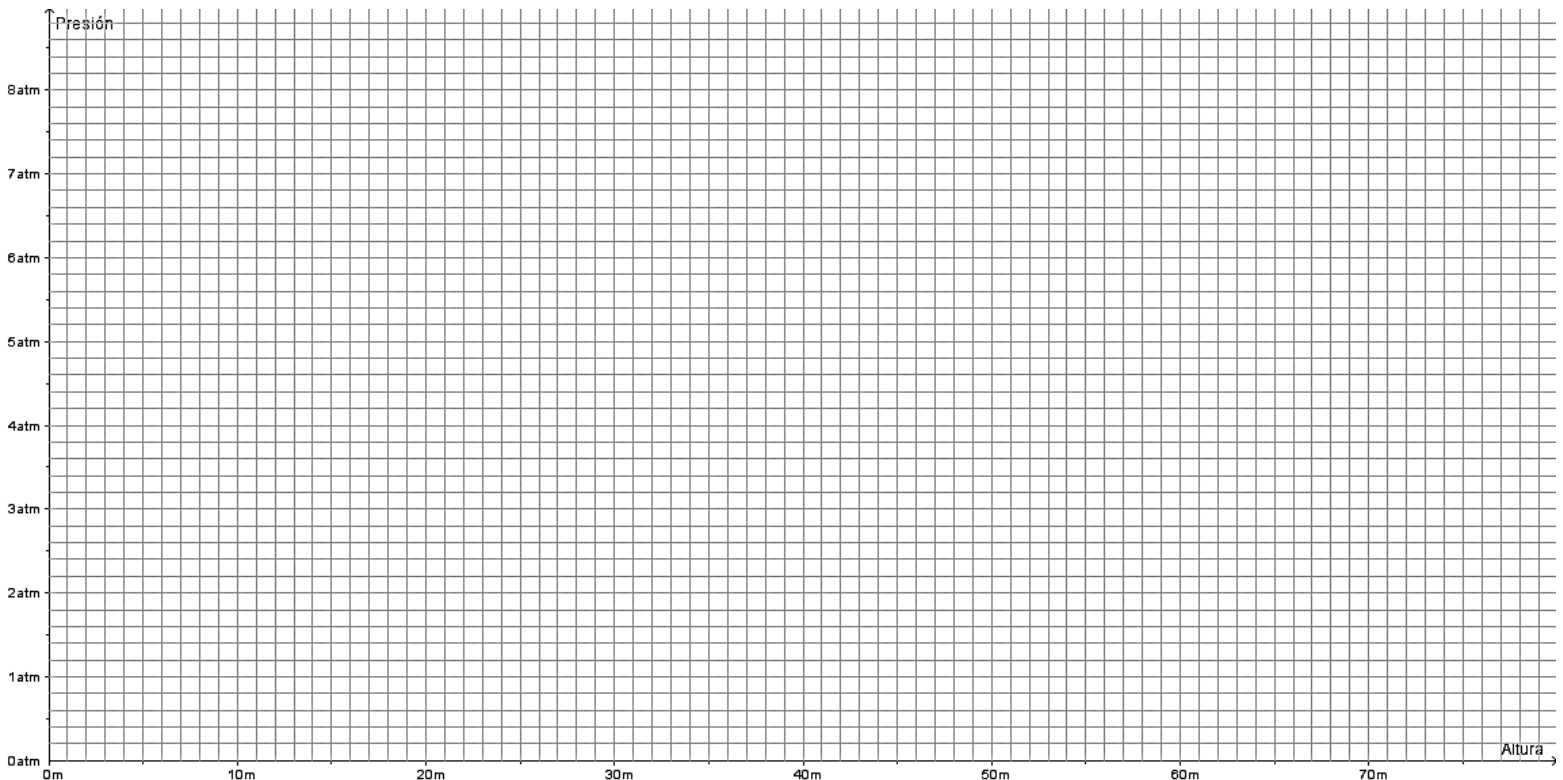
1	75	8.2462			
2	50	5.8309			
3	35	4.3816			
4	20	2.9323			
5	10	1.9662			
6	1	1.0966			

- (f) ¿Cuál es el significado de los signos negativos que se observan en la tabla del inciso (e)?

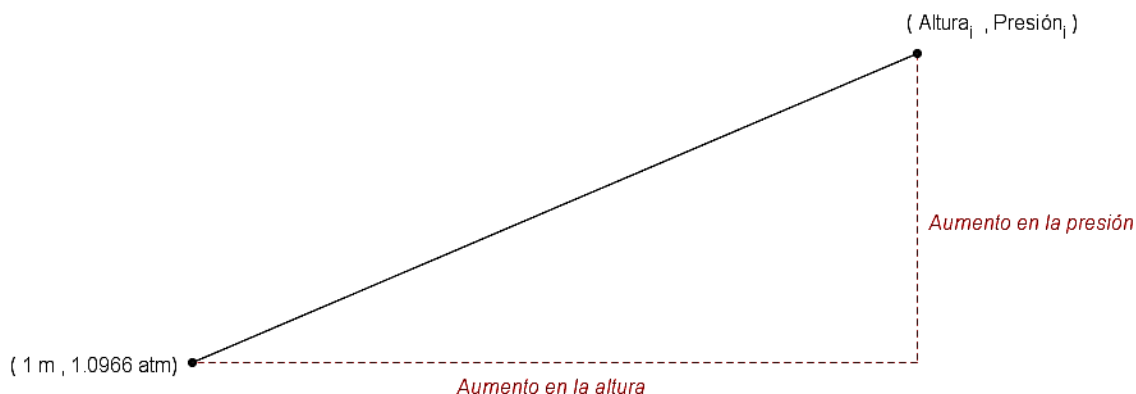
- (g) ¿Qué puede deducir de los resultados para la variación de la presión con respecto a la variación en la altura de los incisos (c), (d) y (e)?

- (h) A esta variación de la presión con respecto a la variación en la altura se le conoce como la **razón de cambio** entre la presión y la altura, Escriba una ecuación que represente esta *razón de cambio*.

- (i) Trace todos los puntos de altura y presión en el plano cartesiano. Trace una línea recta entre los puntos inicial y final.



- (j) Si representamos gráficamente un par de puntos cualquiera, lo unimos con el punto inicial correspondiente a una altura de 1 m y una presión de 1.0966 atm. Podremos observar que los aumentos correspondientes a la altura y presión, están representados por los catetos opuesto y adyacente respectivamente. Como se muestra en la siguiente figura



¿En esta figura cuál es el significado trigonométrico de la razón de cambio?

- (k) Con base en lo expuesto aquí y la gráfica del inciso (i), ¿Qué puede deducir de esta gráfica de puntos?

- (l) Si prolonga la línea trazada en la gráfica del inciso (i) hasta que cruce el eje de la presión, ¿Cuál es el valor de presión correspondiente al punto de intersección?

A este punto se le conoce como el **intersecto** u **ordenada al origen** de la función lineal.

- (m) La forma general de una función lineal es la siguiente:

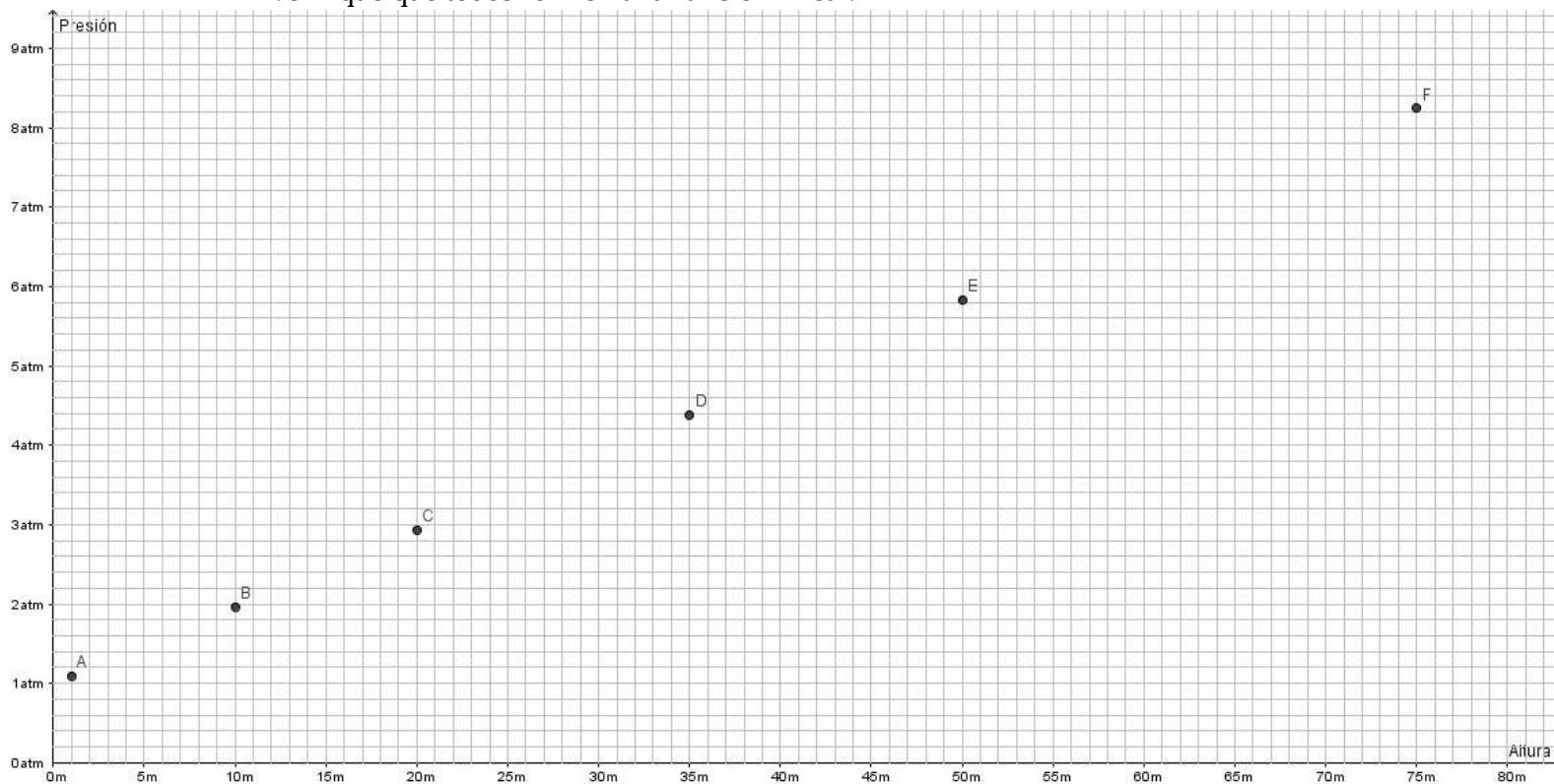
$$\text{variable dependiente} = \text{intersecto} + (\text{pendiente})(\text{variable independiente})$$

De acuerdo con esto y los resultados de los incisos anteriores, ¿Cuál es la función que describe el comportamiento de los datos de altura y presión que se dan al inicio del problema?

- (n) Con el uso de la función del inciso (m) encuentre los valores de presión correspondiente a los siguientes valores de altura

Altura (m)	Presión (atm)
15	
30	
45	
60	
80	

- (o) Compruebe que los puntos del inciso (n) corresponden a la misma función lineal en la cual se encuentran los puntos iniciales del problema (A, B, C, D, E y F), trazando estos junto con los que se proporcionan al inicio del problema. Una vez hecho esto, verifique que todos formen una función lineal.



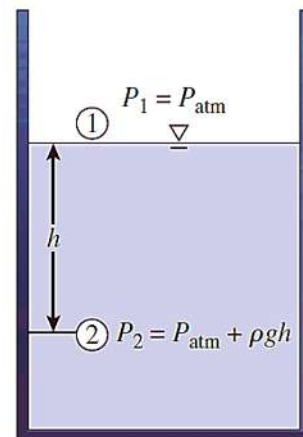
- (p) Haciendo uso de la gráfica del inciso (o) determine la razón de cambio entre el punto ubicado a 80 m de altura y el punto del intersecto.

B. Aplicación de Funciones Lineales

Parte II. Implementación con GeoGebra.

Con base en los principios físicos, se sabe que la presión en el fondo de una columna de fluido se incrementa con la profundidad debido al aumento de masa (Como se muestra en la figura).

Si se considera que el punto 1 de la figura, está sobre la superficie libre de un líquido abierto a la atmósfera, donde la presión es la presión atmosférica P_{atm} (en atm), entonces la presión a la profundidad h (en m) desde la superficie libre está dada por $P = P_{atm} + \frac{\rho gh}{101325}$, donde ρ representa la densidad del fluido (en kg/m^3) y g la fuerza de gravedad (en m/s^2).



- (a) ¿Cuál es el intersepto de la función para la presión de un fluido presentada?

- (b) ¿Cuál es la pendiente de la función para la presión de un fluido presentada?

- (c) Sabiendo que el agua a una temperatura de $20\text{ }^{\circ}\text{C}$ tiene una densidad de 998.23 kg/m^3 y el tanque se encuentra al nivel del mar ($g = 9.81\text{ m/s}^2$) y además, se encuentra abierto a la atmósfera ($P_{atm} = 1\text{ atm}$). ¿La ecuación del inciso (c) anterior corresponde con la ecuación propuesta en el inciso (m) de la parte I? Justifique su respuesta.

- (d) Haciendo uso del archivo de GeoGebra con el nombre *Presión manométrica de una columna de líquido.ggb* que  se le proporciona, analice el comportamiento de

la función. Inicie la animación pulsando en el botón una vez concluida la animación responda las siguientes preguntas:

- a. ¿Qué tipo de función es?

- b. ¿Cuál es el valor de presión que se alcanza a las siguientes alturas?

Altura (m)	Presión (atm)
5	
90	
100	

- c. Coloque en la casilla de altura el valor de 100, enseguida desplace el deslizador desde la posición superior hasta la inferior, ¿Qué observa en cuanto al comportamiento de la función?, ¿se ha modificado la función?

- (e) Reinicie la animación y observe cuál es la presión que se obtiene a una altura de 30 y 50 metros, modificando los valores de la presión superficial (atm), como se indica en la siguiente tabla

Presión superficial (atm)	Presión (atm) alcanzada a los 30 m	Presión (atm) alcanzada a los 50 m
1		
2		
3		
4		
5		

- (f) ¿Cuánto se incrementan los valores de presión a 30 y 50 m aumentando la presión superficial?

- (g) ¿Cuál debe ser el valor de la presión superficial para que a los 50 m se tenga una presión en la columna de 10.8308 atm?

- (h) Modifique el valor de densidad para otras sustancias diferentes al agua, por ejemplo, para el etanol a 20 °C tiene una densidad de 791 kg/m³, para la glicerina a 0 °C es de 1260 kg/m³ y para el mercurio a 0 °C es de 13600 kg/m³. Utilizando estos valores indique cuál es el valor de presión que se alcanza en el fondo de la columna cuando esta tiene una altura de 50 y 100 metros, para una presión superficial de 1 atm y una gravedad de 9.81 m/s².

Sustancia	Temperatura (°C)	Densidad (kg/m ³)	Presión de la columna a 50 m	Presión de la columna a 100 m
Etanol	20	791		
Agua	20	998.23		
Glicerina	0	1260		
Mercurio	0	13600		

- (i) ¿Qué sucede con la pendiente al cambiar estos valores de densidad? Explique su respuesta.

- (j) Determine el valor de la razón de cambio para estas sustancias utilizadas, empleando la ecuación del inciso (c) de la parte II.

Sustancia	Razón de cambio
Etanol	
Agua	
Glicerina	
Mercurio	

- (k) ¿Cuál es el resultado de utilizar un fluido con una densidad hipotética de 0 kg/m³? ¿Cómo es la variación de presión para la columna de líquido?, explique.

- (l) Para comprobar que sus conclusiones en los incisos (j) y (l) seleccione la casilla “Densidad” ubicado en la parte superior derecha de la pantalla y manipule el deslizador de la densidad “*ro*”, observe el comportamiento de la función lineal y de la pendiente al variar el valor la densidad. ¿Cuáles son sus conclusiones de esta actividad?

Actividad 3

Sistema de ecuaciones lineales

Líder:

Computadora:

Hoja de Trabajo:

Número de Equipo:

Hora de Inicio:

Hora de Terminación:

Parte I. (Lápiz y papel). Localización gráfica de la solución para un sistema de ecuaciones lineales

(a) Se tienen las siguientes ecuaciones lineales:

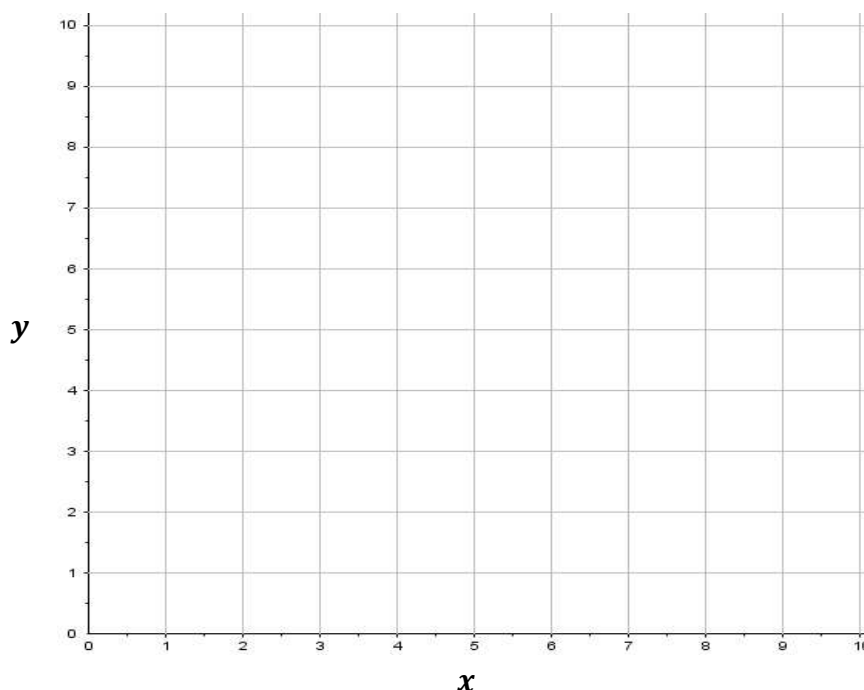
$$y = x$$

$$y = 9 - x$$

Haciendo uso de estas ecuaciones, encuentre el valor de y para cada uno de los siguientes valores de x .

Valor de x	Valor de y para la ecuación $y = x$	Valor de y para la ecuación $y = 9 - x$
1		
3		
4.5		
6		
6.5		
8		
9		

(b) En el siguiente plano cartesiano grafique las ecuaciones lineales $y = x$ y $y = 9 - x$, con ayuda de los valores encontrados en el inciso (a)



- (c) Con base en la gráfica del inciso (b), ¿Cuál es el punto de intersección entre las dos ecuaciones trazadas?

- (d) Utilizando el valor de x del punto encontrado en el inciso (c), determine el valor de y para ambas ecuaciones planteadas en el inciso (a)

Ecuación	Solución para y
$y = x$	
$y = 9 - x$	

- (e) ¿Corresponde este valor de y con el del punto de intersección entre las dos ecuaciones observado en la gráfica del inciso (a)? Las coordenadas de este punto representan la solución del sistema.

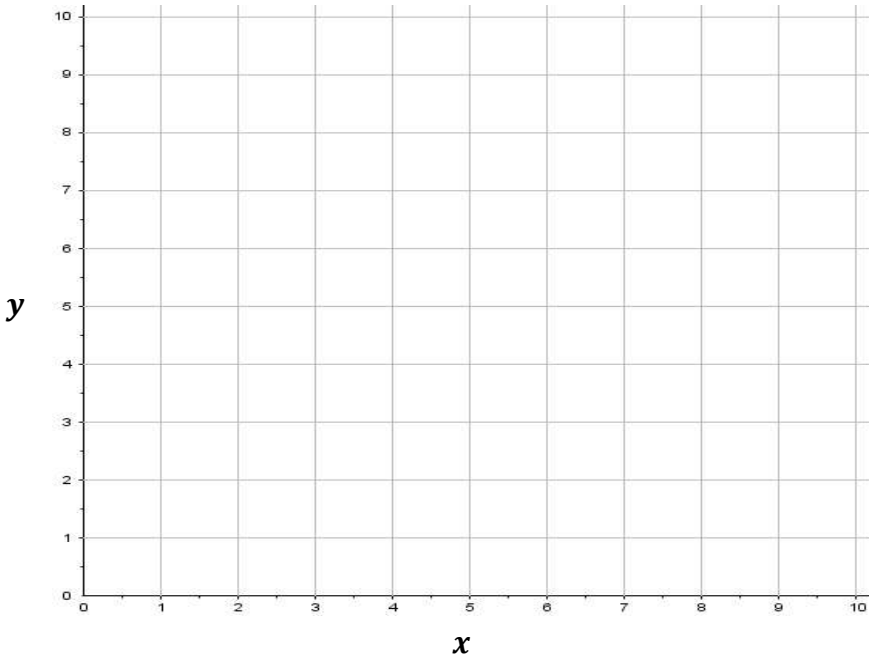
- (f) Considere las siguientes dos ecuaciones lineales:

$$y = 1 + x$$

$$y = 3 + x$$

Grafique ambas ecuaciones en el siguiente plano cartesiano, tomando los puntos que considere necesarios e indicándolos en la siguiente tabla:

x				
y ₁				
y ₂				



(g) ¿Existe algún punto de intersección entre las dos ecuaciones lineales?, por lo tanto ¿este sistema de ecuaciones lineales tiene solución?, justifique su respuesta.

(h) Encuentre la razón de cambio (siguiendo el procedimiento gráfico mostrado en la actividad 2) para cada par de ecuaciones, de los incisos (a) y (f), llenando la siguiente tabla. En la columna “Razón de cambio, R_c ” anote la operación que utilizó para encontrar el resultado.

Sistema de ecuaciones lineales	Ecuaciones	Punto de prueba 1 P_1		Punto de prueba 2 P_2		Razón de cambio, R_c	¿El sistema de ecuaciones lineales tiene solución?, responda con base en lo observado en las gráficas anteriores.
		Coordenada x	Coordenada y	Coordenada x	Coordenada y		
(a)	$y = x$						

	$y = 9 - x$						
(f)	$y = 1 + x$						
	$y = 3 + x$						

- (i) Utilizando la tabla del inciso (h), ¿Cuál es el requisito que debe cumplir la razón de cambio de las ecuaciones para que un sistema de ecuaciones lineales tenga solución?

- (j) ¿Por qué el sistema de ecuaciones lineales del inciso (f) no tiene solución?

- (k) Se tiene el siguiente sistema de ecuaciones lineales

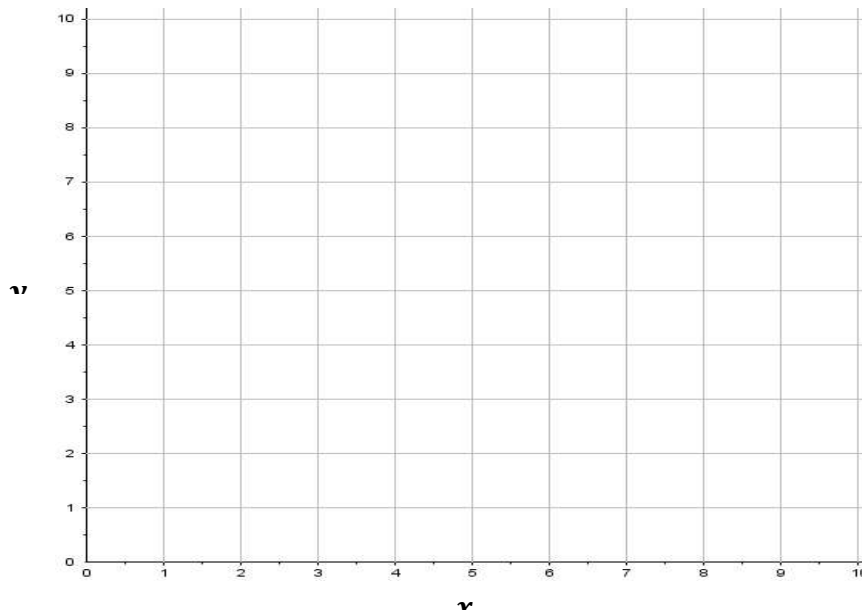
$$y = 2x - 2$$

$$y = \frac{8x - 8}{4}$$

Haciendo uso de estas ecuaciones, encuentre el valor de y para cada uno de los siguientes valores de x .

Valor de x	Valor de y para la ecuación $y = 2x - 2$	Valor de y para la ecuación $y = \frac{8x - 8}{4}$
2		
3		
3.5		
4		
5		

- (l) En el siguiente plano cartesiano grafique las ecuaciones lineales del inciso (k).



Apéndice A

(m) Encuentre la razón de cambio para las ecuaciones lineales del inciso (l), tomando un par de puntos cualquiera para cada una de las ecuaciones y aplicando el procedimiento gráfico mostrado en la actividad 2.

Ecuaciones	Punto de prueba 1 P_1		Punto de prueba 2 P_2		Razón de cambio, R_C	¿El sistema de ecuaciones lineales tiene solución?, responda con base en lo observado en la gráfica anterior.
	Coordenada x	Coordenada y	Coordenada x	Coordenada y		
$y = 2x - 2$						
$y = \frac{8x - 8}{4}$						

(n) ¿Cuántas soluciones tiene el sistema de ecuaciones lineales del inciso (k)?

(o) ¿Por qué el sistema de ecuaciones lineales del inciso (f) no tiene solución, mientras que el sistema de ecuaciones lineales del inciso (k) tiene infinitas soluciones, si observamos que en ambos casos las dos ecuaciones del sistema tienen la misma razón de cambio?, Justifique su respuesta.

- (p) De acuerdo con lo visto en los incisos anteriores, ¿Qué condiciones se deben de cumplir para que un sistema de ecuaciones lineales tenga solución? Y ¿cuáles son los casos que tenemos?

- (q) Haciendo uso de su argumento dado en el inciso (p), indique si los siguientes sistemas de ecuaciones lineales tienen solución, basándose sólo en las expresiones algebraicas.

Sistema de ecuaciones lineales	Ecuaciones del sistema	¿Tiene solución el sistema de ecuaciones lineales?	¿Cuántas soluciones tiene el sistema de ecuaciones lineales?
1	$y = 14 - 5x$		
	$y = 6 - 3x$		
2	$y = 1/3 + 5/6x$		
	$y = 4/12 + 25/30x$		
3	$y = 1/3 + 5/6x$		
	$y = 4/12 + 20/24x$		

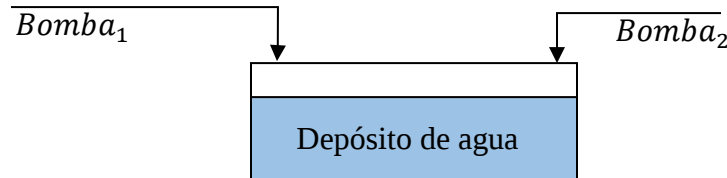
Parte II. (Lápiz y papel). Aplicación de un sistema de ecuaciones lineales.

Una empresa potabilizadora abastece de agua a una pequeña comunidad, esta cuenta con un depósito de concreto para asegurar un suministro constante de agua a la región. Las dimensiones del depósito de agua son de 10 metros de largo por 5 metros de ancho y 3 metros de alto. Para llenarlo utiliza dos bombas (*Bomba 1* y *Bomba 2*), el agua se conduce a través de una tubería desde la salida de cada bomba hasta el depósito de agua, con una válvula en el extremo de cada tubería. Se sabe por experiencia que:

- I. Si se enciende la *Bomba 1* durante una hora y la *Bomba 2* durante 2 horas, se logra introducir al depósito la cantidad de 30 000 litros de agua (30 m^3) y
- II. Si se dejan operando las dos bombas durante un tiempo de dos horas y media, habrá en el depósito una cantidad de 50 000 litros de agua (50 m^3).

Con los datos anteriores, determine:

1. ¿Cuál es el flujo de agua que tiene la *Bomba 1* y la *Bomba 2*?
2. ¿En cuánto tiempo se llenará el depósito?



- (a) Sabiendo que el volumen de agua en el depósito está constituido por los volúmenes de agua que aportan ambas bombas, ¿de qué manera representarías esto algebraicamente? Construye una ecuación que relacione los volúmenes de las bombas con el volumen del depósito.

- (b) Se conoce que un flujo volumétrico (volumen/tiempo) multiplicado por el tiempo es igual a una cantidad de volumen ($(\text{volumen}/\text{tiempo})\text{tiempo} = \text{volumen}$). A partir de esto y haciendo uso de palabras como “*flujo de Bomba 1*”, “*flujo de Bomba 2*”, “*tiempo 1*”, “*volumen del depósito*” o las que usted prefiera. Construya una ecuación general donde represente que el volumen aportado por ambas bombas será igual al volumen de agua que se encuentra en el depósito.

- (c) Haciendo uso de la ecuación del inciso (b) y de los datos del problema, ¿Cuál es la representación algebraica (ecuación) del caso I? Asigne literales (letras) a cada variable, de manera que sea más cómodo el uso de esta ecuación.

- (d) ¿Cuál es la representación algebraica del caso II dado en el planteamiento del problema y la ecuación obtenida en el inciso (b)? Asigne literales (letras) a cada variable, de manera que sea más cómodo el uso de esta ecuación.

- (e) Represente explícitamente el flujo de la *Bomba 2* para cada una de las ecuaciones de los incisos (c) y (d), de manera que quede una ecuación de la forma $Bomba\ 2 = f(Bomba\ 1)$.

Caso I.

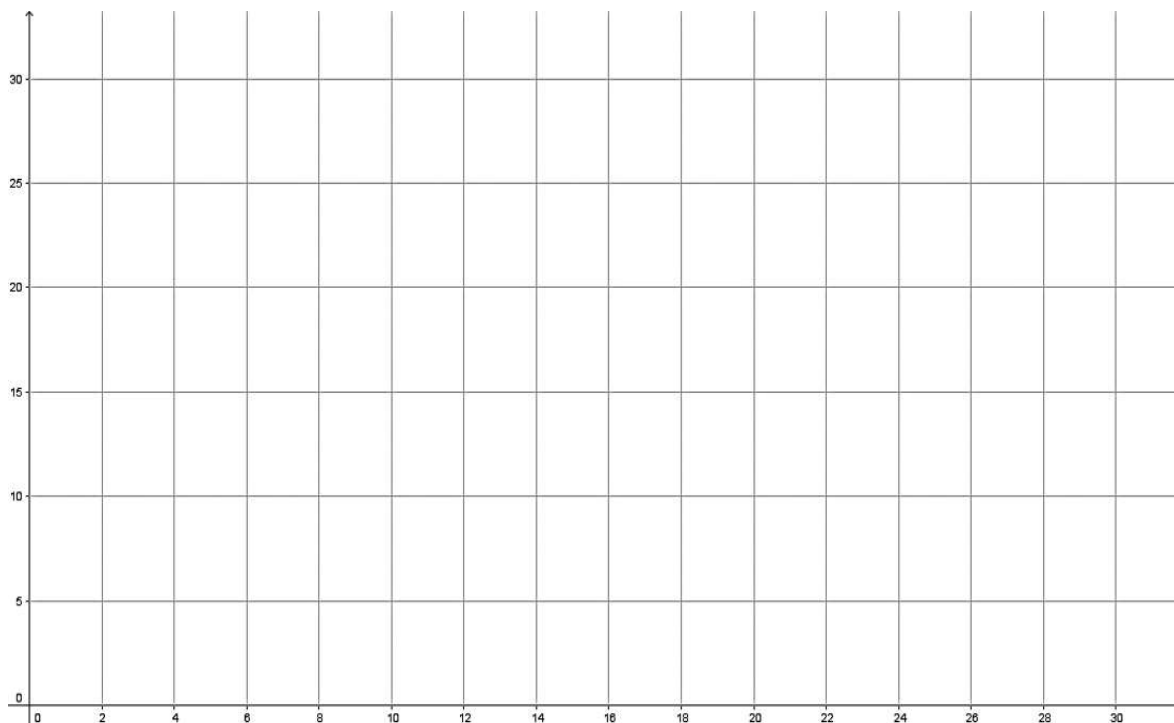
Caso II.

- (f) De acuerdo con lo expuesto en el inciso (e), ¿cuáles son las razones de cambio y los interceptos a la ordenada de las ecuaciones para los casos I y II?

	Caso I	Caso II
Razón de cambio		
Intersecto a la ordenada		

- (g) Haciendo un análisis de los datos anteriores, ¿Las dos ecuaciones tienen un valor de flujo en ambas bombas que satisfaga ambas ecuaciones?, dicho de otra manera, ¿Tiene solución el sistema de ecuaciones? Y ¿Por qué?

- (h) En el siguiente plano de ejes coordenados grafique ambas ecuaciones, para los casos I y II, colocando la leyenda correspondiente a cada eje coordenado [las variables que definió en los incisos (c) y (d)], de manera que si se eligió representar la variable “flujo de la Bomba₁” por f_1 , se colocará f_1 en las abscisas y por ejemplo, f_2 en las ordenadas.



- (i) Mediante la gráfica de (h), ¿Cuáles son los valores de los flujos para la Bomba 1 y la Bomba 2 que satisfacen las condiciones de operación dados en los casos I y II de la descripción del problema?

	Bomba I	Bomba II
Flujo volumétrico (m^3/h)		

- (j) Sabiendo que ambas bombas trabajaran al mismo tiempo (tiempo de operación igual para ambas bombas). Construya una ecuación que represente el volumen del depósito como una función del tiempo. Utilizando los flujos de las bombas calculados en el inciso (i).

- (k) Teniendo en cuenta las dimensiones del depósito, y la ecuación del inciso (j), ¿Cuál es el sistema de ecuaciones que se tiene que solucionar para determinar el tiempo en el cual se llena el depósito?

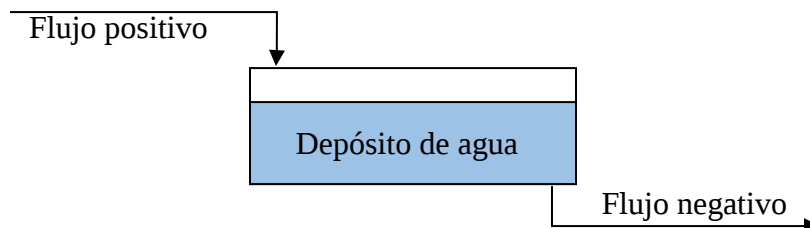
- (l) Determine el tiempo en el cual se llena el depósito, graficando el sistema de ecuaciones anterior en el siguiente plano coordenado.



- (m) ¿En cuánto tiempo se llena el depósito?

Tiempo de llenado del depósito (horas)	
--	--

Si se cuenta con una tubería por donde salga el agua del depósito, el flujo de agua en la bomba que esté colocada en esta tubería se considerará negativo (porque sale del depósito), a diferencia de lo que ocurre cuando entra el agua (se considera un flujo positivo).



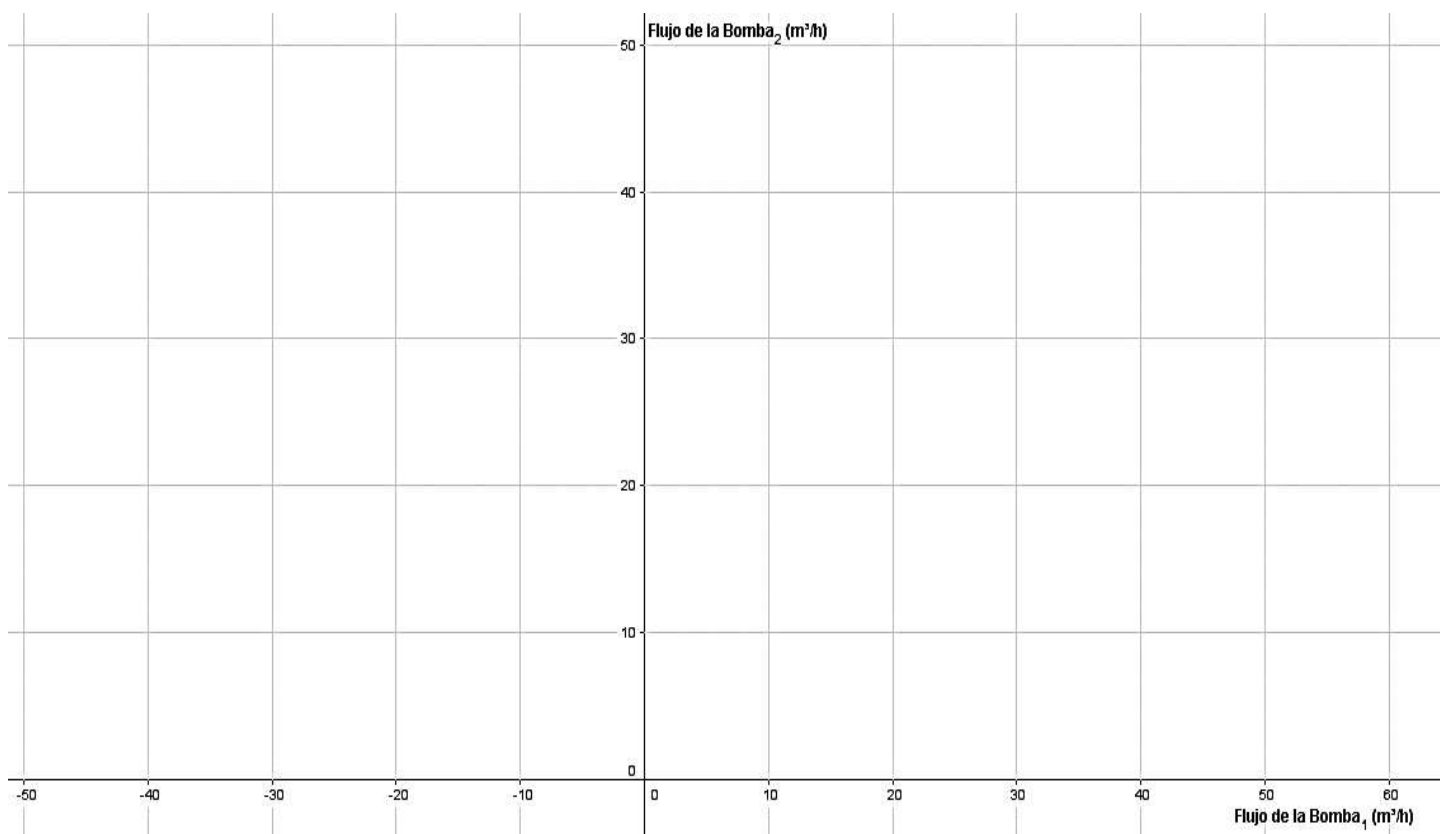
Nótese que el signo del flujo solamente hace referencia al sentido en el cual fluye con respecto al depósito de agua.

(n) Se obtuvieron los siguientes datos al tomar el tiempo de llenado:

Casos	Tiempo de operación de la Bomba 1 (h)	Tiempo de operación de la Bomba 2 (h)	Volumen de agua en el depósito (m ³)
Caso III	0.5	1	30
Caso IV	2.5	2.5	50

Siguiendo el procedimiento anterior, ¿Cuál es el sistema de ecuaciones que nos permite obtener los flujos de operación de las bombas?

(o) Siguiendo el procedimiento gráfico determine el valor de los flujos que dan solución a las ecuaciones del inciso (n), haciendo uso del siguiente plano coordenado.



- (p) ¿Cuáles son los flujos obtenidos para ambas bombas en el inciso (n), que satisfacen las condiciones del inciso (m)?, ¿Es posible tener las bombas operando en esas condiciones de flujo?, ¿De qué manera operarían las bombas?

Parte III. (GeoGebra). Aplicación de un sistema de ecuaciones lineales.

La misma empresa potabilizadora dispone de un depósito con dimensiones de 10 metros de ancho por 10 metros de largo y una altura de 5 metros. Tiene dos bombas en operación que alimentan el agua al depósito a través de dos tuberías.

Se sabe por experiencia que:

1. Si dejamos encendida la bomba 1 durante un tiempo de 1.6 horas y la bomba 2 un tiempo de 4.1 horas, al apagar las bombas habrá en el depósito la cantidad de 266 m³ de agua.
2. Si ambas bombas están encendidas durante 1.1 horas, el depósito tendrá la cantidad de 130 m³ de agua.

- (a) Usando los datos anteriores, construya un sistema de ecuaciones que nos permita determinar los flujos con los que operan las dos bombas. Utilizando el procedimiento descrito en la parte II de esta actividad.

- (b) Realizando un análisis de las ecuaciones, ¿Existe al menos una solución para este sistema de ecuaciones lineales?, ¿Por qué?

- (c) Utilice el archivo “*Depósito de agua.ggb*” proporcionado, para determinar la solución del sistema de ecuaciones que nos permita determinar los flujos de las dos bombas mencionadas en el enunciado del problema de la parte III. Siguiendo las indicaciones que se muestran a continuación:

1. Ingrese los valores de los tiempos de operación de las bombas y el volumen de agua que se logró introducir al depósito mientras las bombas estaban encendidas, en las casillas que se encuentran en la **vista gráfica 2** del archivo de GeoGebra.
2. Active la casilla de control con el nombre *Flujos* de la ventana gráfica 2, pulsando sobre el cuadro blanco de la izquierda. Notará que aparece una marca en esta una vez pulsada, además verá como se despliegan las gráficas y los ejes en la **vista gráfica** y las correspondientes ecuaciones y la solución del sistema en la vista gráfica 2.

Compruebe si su conjetura del inciso (b) es correcta y escriba los valores para los flujos de las bombas que cumplen con las dos condiciones dadas en la descripción del problema (La solución del sistema de ecuaciones lineales).

Flujo de la bomba 1:

Flujo de la bomba 2:

- (d) ¿Cuál es la ecuación que nos permite determinar cómo varía el volumen del depósito conforme este se va llenando?, utilice los valores de flujo de las bombas del inciso (c).

- (e) Escriba el sistema de ecuaciones que nos permite determinar en cuanto tiempo se llena el depósito de agua descrito en el enunciado del problema de la parte III.

- (f) Haciendo uso del archivo “*Depósito de agua.ggb*” encuentre el tiempo de llenado del depósito, de la siguiente manera:

1. Desactive la casilla de control de *flujos* y active la casilla de control para el *Volumen del depósito*. Verá cómo se limpia la vista gráfica y aparece un nuevo conjunto de ejes para el tiempo, el volumen y la altura del depósito.
2. Pulse en el botón verde de inicio de animación  mostrado en la vista gráfica 2.
3. Espere hasta que el depósito se llene.
4. Lea el valor de tiempo de llenado mostrado en la vista gráfica 2.
5. Pulse el botón azul de reinicio de la animación  mostrado en la vista gráfica 2.
6. Desactive la casilla de control *Volumen del depósito*.

¿En cuánto tiempo se llena el depósito?, Usando los flujos de las bombas que se determinaron en el inciso (c).

--

- (g) La empresa planea cambiar las bombas que alimentan de agua al depósito, para esto contempla la posibilidad de reutilizar algunas bombas que tiene en su almacén. Ha realizado pruebas con estas como las que se mostraron en el enunciado del problema. Teniendo los siguientes datos:

Combinaciones	Casos de operación	Tiempo de operación de la bomba 1 (horas)	Tiempo de operación de la bomba 2 (horas)	Volumen de agua en el depósito (m ³)
1	Caso I	12	3.1	400
	Caso II	1.8	3.3	252
2	Caso I	12	3.1	500
	Caso II	2.9	8	202.5
3	Caso I	14.75	3.1	500
	Caso II	0	13.8	500
4	Caso I	4	8.6	300
	Caso II	8	3	500
5	Caso I	0	3.1	310
	Caso II	11.4	1.6	446

Usando el procedimiento descrito en los incisos (c) y (f), encuentre los flujos con los que operan las dos bombas y el tiempo que se requiere para llenar el depósito. Para cada una de las 5 combinaciones de la tabla anterior. Anote sus resultados en la siguiente tabla.

Combinaciones	Flujo de la bomba 1 (m ³ /h)	Flujo de la bomba 2 (m ³ /h)	Tiempo que se requiere para llenar el depósito

			(horas)
1			
2			
3			
4			
5			

- (h) Asumiendo que la mejor opción es aquella en la que se tiene el menor tiempo de llenado para el depósito de agua. ¿Cuál de las 5 combinaciones dadas en el inciso (g) es la mejor?

- (i) Un operador proporcionó los siguientes datos:

Combinaciones	Casos de operación	Tiempo de operación de la bomba 1 (horas)	Tiempo de operación de la bomba 2 (horas)	Volumen de agua en el depósito (m ³)
1	Caso I	4	4	300
	Caso II	9	9	446
2	Caso I	4	4	250
	Caso II	8	8	500

Evalúe las dos combinaciones anteriores, usando el procedimiento del inciso (g) para encontrar los flujos con los que operan las bombas 1 y 2, así como el tiempo que se requiere para llenar el depósito con agua usando ambas bombas durante el mismo tiempo, anote sus resultados en la siguiente tabla:

Combinaciones	Flujo de la bomba 1 (m ³ /h)	Flujo de la bomba 2 (m ³ /h)	Tiempo que se requiere para llenar el depósito (horas)
1			
2			

- (j) ¿Cuáles son sus observaciones respecto a las dos combinaciones del inciso (i)?

Combinación 1:

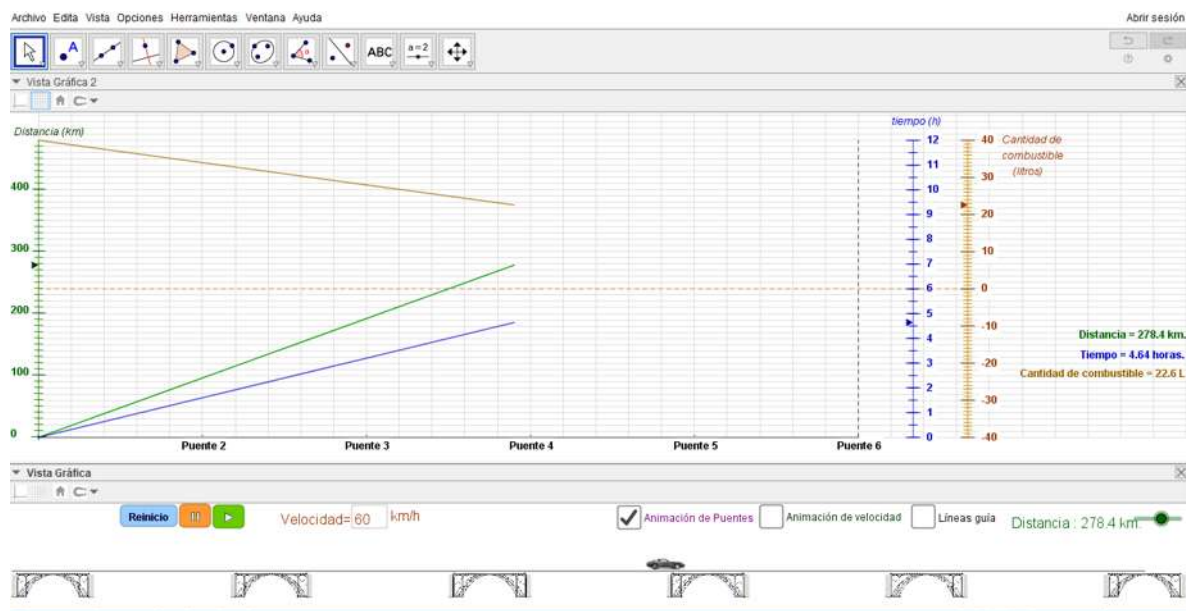
Combinación 2:

(k) ¿Cuáles son sus conclusiones respecto a esta actividad, de acuerdo con lo observado en las partes I, II y III?

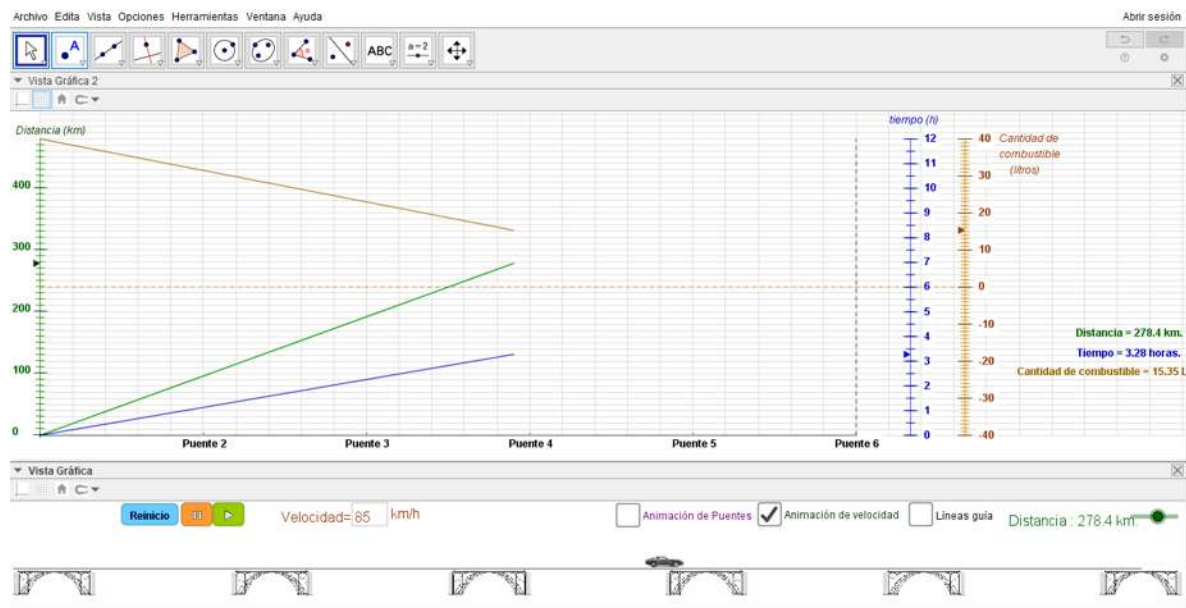
Apéndice B

CAPTURAS DE LOS MANIPULABLES EN GEOGEBRA

Actividad 1



Comportamiento de los parámetros modificando la distancia recorrida.

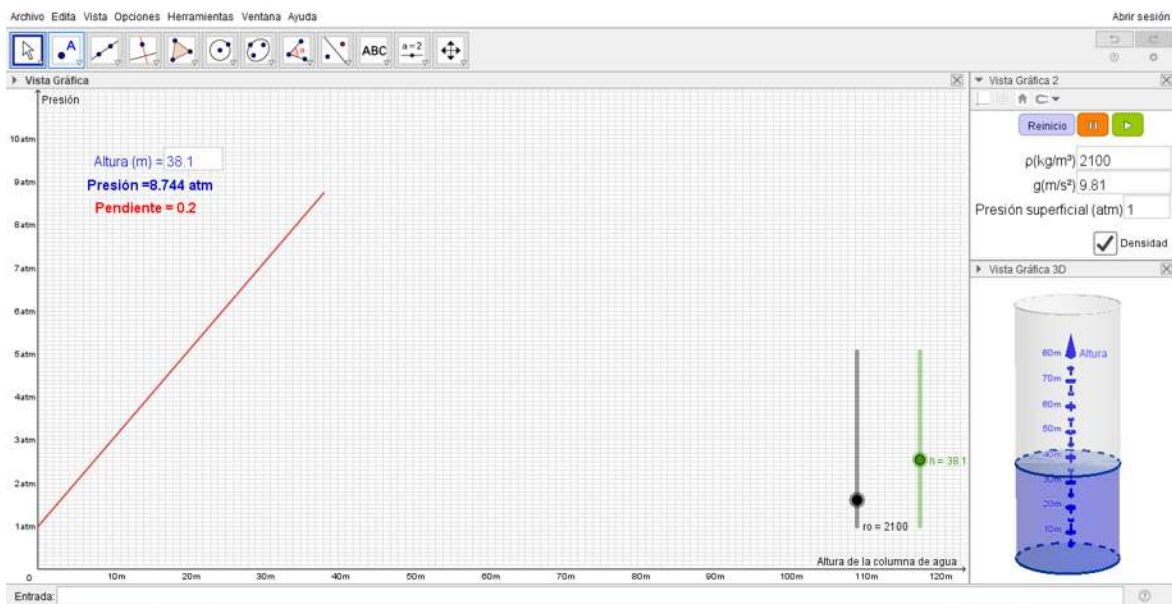


Comportamiento de los parámetros variando la velocidad.

Actividad 2

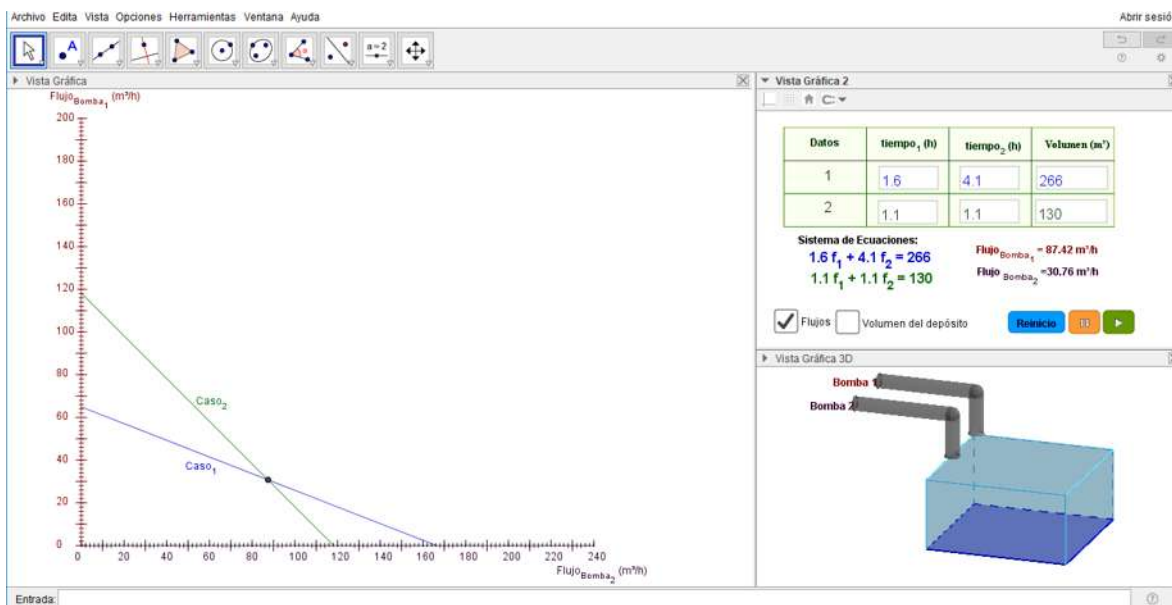


Presión en el fondo de una columna modificando de la altura del líquido.

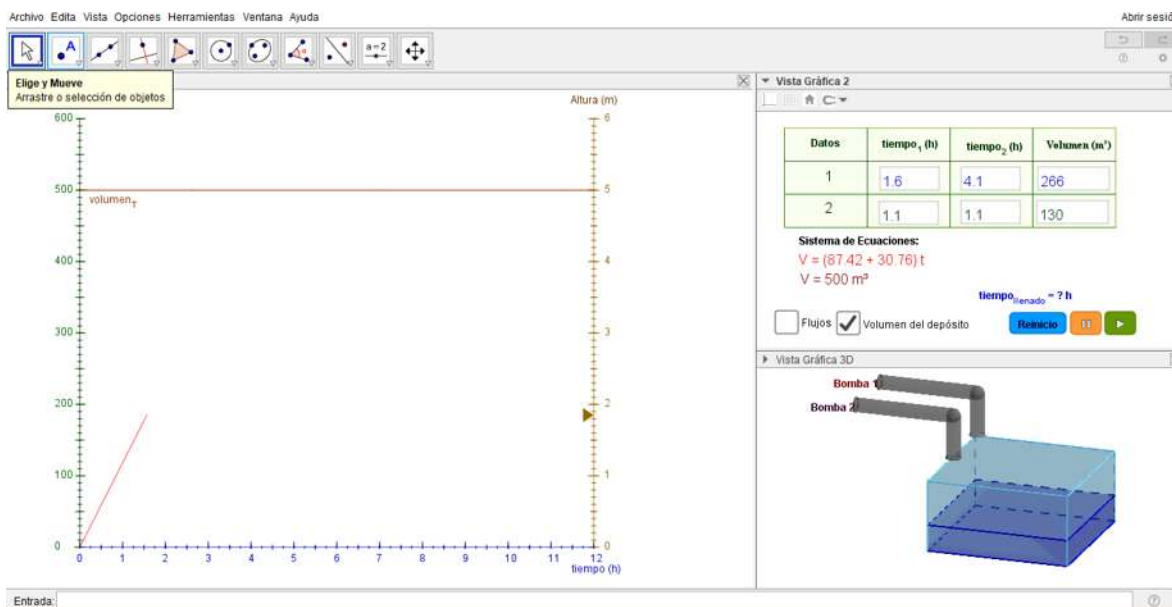


Presión en el fondo de una columna modificando de la altura y densidad del líquido.

Actividad 3



Modelo para determinar los flujos de las bombas que llenan un tanque.



Modelo para determinar el volumen y tiempo de llenado de un tanque.

Apéndice C

RESULTADOS DE LA PRUEBA FORMAL

Actividad 1

Actividad 1

Secuencias

Lider:

Computadora:

Hoja de Trabajo:

Número de Equipo: 2

Hora de Inicio: 2:47 pm.

Hora de Terminación:

A. Secuencia numérica

Parte 1. (lápiz y papel): Concepto general.

Se conduce un automóvil a través de una carretera que tiene un trayecto lineal y corre por encima de 10 puentes, ubicados a la misma distancia de 50 km entre ellos. Supóngase que realiza el trayecto a velocidad constante. Resuelva lo siguiente y represente cada valor obtenido en una tabla:

- a) Si desde que alcanzó la velocidad constante el automóvil ha corrido por 25 minutos al pasar por debajo del primer puente, y desde el primer puente tarda 25 minutos en llegar al segundo puente ¿Cuánto tiempo tiene que transcurrir desde que alcanza la velocidad constante para que pase por debajo de los siguientes puentes?

Inicio	Puente 1	Puente 2	Puente 3	Puente 4	Puente 5	Puente 6	Puente 7	Puente 8	Puente 9	Puente 10
0 min	25	50	75	100	125	150	175	200	225	250

- b) Al pasar por encima de cada puente se registraron las siguientes cantidades de litros de combustible en el tanque del vehículo:

Inicio	Puente 1	Puente 2	Puente 3	Puente 4	Puente 5	Puente 6	Puente 7	Puente 8	Puente 9	Puente 10
40 litros	38 litros	36 litros	34 litros	32 litros	30 litros	28 litros	26 litros	24 litros	22 litros	20 litros

- c) ¿Cómo varía el cambio de los valores en el inciso a)?

Proporcionalmente, tarda 25 minutos para pasar por cada puente.

- d) ¿Cómo varía el cambio los valores en el inciso b)?

Proporcionalmente, a razón de 2L cada 25 minutos.

e) ¿Cuál sería un símbolo apropiado para identificar cada serie de valores obtenidos en los incisos a y b, relacionados con los siguientes parámetros?

Parámetro	Símbolo
Tiempo que transcurre desde que alcanza la velocidad constante.	t
Cantidad de combustible remanente en el tanque del vehículo.	L
Número de puente.	n_p

Considerando el caso anterior, para un vehículo que se desplaza a velocidad constante en un trayecto de 30 puentes todos a la misma distancia, responda lo siguiente:

f) ¿Cuánto tiempo tiene que transcurrir desde que alcanza la velocidad constante para que pase por encima del puente 15, del puente 20 y del puente 25?

Puente 15	Puente 20	Puente 25
$t = 375 \text{ minutos}$	$t = 500 \text{ minutos}$	$t = 625 \text{ min}$

g) Exprese matemáticamente la forma en que obtuvo los valores que pide el inciso (f), utilizando las variables y símbolos que definió en el inciso (e).

$$t = 25 \cdot n$$

h) ¿Qué cantidad de combustible tendrá al pasar por debajo del puente 15, del puente 20 y del puente 25?

Puente 15	Puente 20	Puente 25
10 L	0	-10

j) Exprese matemáticamente la forma en que obtuvo los valores que pide el inciso (h), utilizando las variables y símbolos que definió en el inciso (e).

$$L = L_0 - (n \cdot 2)$$

$L_0 = \text{combustible inicial}$

k) Exprese matemáticamente la relación que se observa, entre el tiempo que transcurre desde que alcanza la velocidad constante y la cantidad de combustible remanente en el tanque del vehículo, utilizando las variables y símbolos que definió en el inciso (e).

$$L = L_0 - \lambda t \Rightarrow L = L_0 - \lambda \left(\frac{t}{25} \right) \Rightarrow L = L_0 - \frac{\lambda}{25} t$$

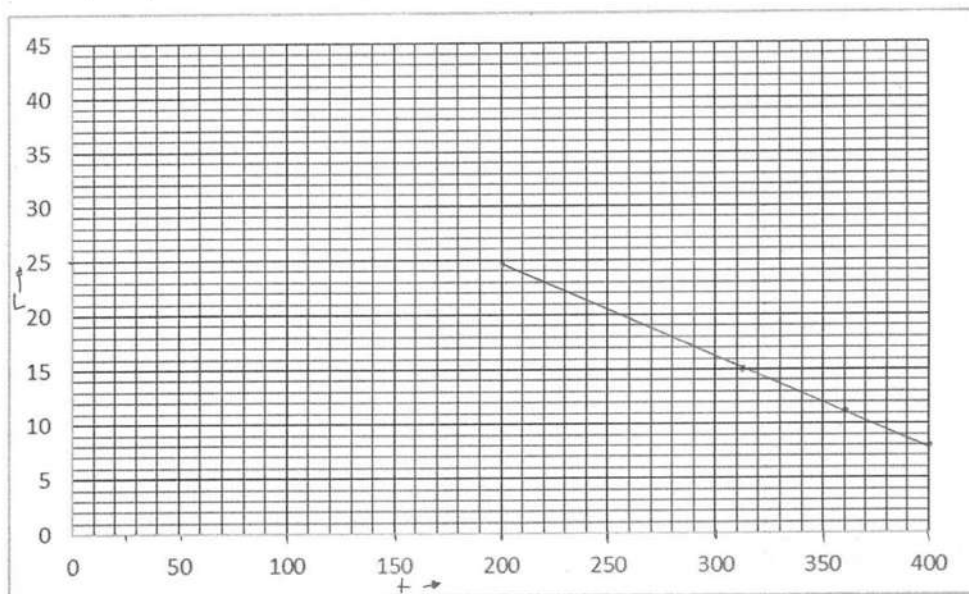
l) Usando la relación del inciso (k) complete la siguiente tabla:

Tiempo que transcurre desde que alcanza la velocidad constante.	200min	312.5 min	360 min	400 min
Cantidad de combustible remanente en el tanque del vehículo.	24 Litros	15litros	11.2 Litros	8 litros

m) En el caso de hallarse en un trayecto continuo, manteniendo la velocidad constante ¿Podría usar la relación encontrada en el inciso (k) para determinar el valor de uno de los parámetros conociendo el valor del otro parámetro?

Si porque es una ecuación.

n) Grafique los valores del inciso (l) en la siguiente plantilla:



ñ) ¿Qué puede concluir del trabajo realizado en los incisos l, m y n?

A partir de la relación de dos ecuaciones se llegó a la ecuación de una línea recta que relaciona ambas variables L como ordenada y t como abscisa.

o) ¿Qué diferencias y semejanzas encuentra entre la ecuación que obtuvo en el inciso g y la ecuación que obtuvo en el inciso j?

Diferencias	Semejanzas
- Una posee más términos que otra - Una tiene más operando que la otra	Tienen a n como término común

Parte 2 (con GeoGebra): Conceptualización

Se conduce un automóvil a través de una carretera que tiene un trayecto recto y corre por encima de 6 puentes, ubicados a la misma distancia de 96 km entre ellos. Supóngase que realiza el trayecto a velocidad constante. Resuelva lo siguiente manipulando el programa GeoGebra de la manera en que se indica.

a) Haciendo uso del archivo de GeoGebra con el nombre *Automóvil.ggb* que se le proporciona, complete la siguiente tabla. Active la animación de velocidad, coloque en la casilla de velocidad los valores indicados en la tabla.

Parámetro	Velocidad (km/h)	Puente 1	Puente 2	Puente 3	Puente 4	Puente 5	Puente 6
Tiempo que transcurre desde que alcanza la velocidad constante (h).	40	0	2.43 h	4.8 h	7.2 h	9.6 h	12 h
	80	0	1.2 h	2.42 h	3.6 h	4.8 h	6 h
	160	0	0.6 h	1.19 h	1.81 h	2.4 h	3 h
Cantidad de combustible remante en el tanque del vehículo (litros).	40	40	36.05 L	32 L	28 L	24 L	20 L
	80	40	32 L	23.9 L	16 L	8 L	0 L

	160	40	24 L	8.4 L	-8.2 L	-24 L	-40 L
Distancia recorrida desde el primer puente (km).	40	0	74.8 Km	190.8 Km	288 Km	382.8 Km	480 Km
	80	0	96 Km	193.2 Km	288 Km	384 Km	480 Km
	160	0	96 Km	189.6 Km	289.3 Km	384 Km	480 Km

b) ¿Qué variación observas en el inciso (a), con respecto al tiempo en el que el automóvil pasa por el puente tres y el puente cinco a diferentes velocidades?

A más velocidad menos tiempo.

c) ¿Qué variación observas en el inciso (a), con respecto a la cantidad remanente de combustible en el tanque del automóvil al pasar por el puente tres y el puente cinco a diferentes velocidades?

A mayor velocidad, mayor será el consumo de combustible.

d) ¿Qué variación observas en el inciso (a), con respecto a la distancia recorrida por el automóvil al pasar por el puente tres y el puente cinco a diferentes velocidades?

La variación es mínima.

e) Observando los valores obtenidos para un mismo parámetro a diferentes velocidades complete la siguiente tabla.

Parámetro	Cambio en la velocidad	Comportamiento de los valores.
Tiempo que transcurre desde que alcanza la velocidad constante.	Aumento	Tiempo disminuye
	Disminución	Tiempo aumenta.
Cantidad de combustible remanente en el tanque del vehículo.	Aumento	Es mayor el gasto de combustible.
	Disminución	Es menor el gasto de combustible.
Distancia recorrida desde el primer puente.	Aumento	La distancia es mayor.
	Disminución	La distancia es menor.

A. - Solución numerica

$$f) \quad t_1 = 15 \cdot 25 = 375 \text{ min} \quad t = n \cdot 25 \quad (1)$$

$$t_2 = 20 \cdot 25 = 500 \text{ min} \quad n = \frac{t}{25}$$

$$t_3 = 25 \cdot 25 = 625 \text{ min}$$

$$h) \quad n = \quad 40L \quad L_0 = 40 \quad \underline{L_0 - (n \cdot 2) = L} \quad (2)$$

$$L_1 = L_0 - 2n = 40 - 2(15) = 10 \quad L_0 - 2n = L$$

$$L_2 = L_0 - 2n = 40 - 2(20) = 0 \quad L_0 = L + 2n$$

$$L_3 = L_0 - 2n = 40 - 2(25) = -10 \quad \frac{40 - L}{2} = n$$

k) Reescribiendo n en ec. (1) y sustituyendo en ec. (2) tenemos:

$$L = L_0 - 2n \Rightarrow L = L_0 - 2\left(\frac{t}{25}\right) \Rightarrow L = L_0 - \frac{2}{25}t$$

$$t = \left(\frac{L_0 - L}{2}\right) 25$$

Equipo 2

Actividad 2

Actividad 2 Función lineal

Líder:

Computadora:

Hoja de Trabajo:

Número de Equipo: 2

Hora de Inicio: 3:31 pm

Hora de Terminación: 6:10 pm

A. Razones de Cambio

Parte I. Formato (lápiz y papel o Geogebra).

Se llena un tanque con agua a una temperatura de 20 °C, durante el proceso de llenado se registra un incremento en la presión (P) del fondo de la columna de líquido debido al aumento en la altura del fluido (h). Por inspección se observa que para una altura de un metro, la presión es de 1.0966 atm. Si se continúa llenando el recipiente hasta los 10 metros, la presión alcanza un valor de 1.9662 atm. Continuando con la misma operación de llenado se registran los siguientes valores de presión para las diferentes alturas.

Altura en m (h)	Presión en atm (P)
1	1.0966
10	1.9662
20	2.9323
35	4.3816
50	5.8309
75	8.2462

- (a) Tomando como referencia la presión inicial de 1.0966 atm, indique cuánto aumentó la presión para cada una de las alturas. Es decir, cuál es valor correspondiente para la diferencia $P_i - 1.0966$. En la segunda columna indica la operación que utilizaste para encontrar este cambio.

Altura (m)	Diferencias	Aumento en la presión a partir de 1.0966 atm.
10	0.8696	1.9662 - 1.0966
20	1.8357	2.9323 - 1.0966
35	3.2850	4.3816 - 1.0966
50	4.7343	5.8309 - 1.0966
75	7.1496	8.2462 - 1.0966

- (b) De manera similar al procedimiento anterior indique cuál fue el cambio registrado en la altura de la columna de agua para cada medición, considerando que se encontraba inicialmente a una altura de 1 metro. En la segunda columna indica la operación que utilizaste para encontrar este cambio.

Presión (atm)	Diferencias	Aumento en la altura de la columna de agua (m)
1.9662	9	10 - 1
2.9323	19	20 - 1
4.3816	34	35 - 1
5.8309	49	50 - 1

$$m = \frac{A_2 - A_1}{x_2 - x_1}$$

8.2462	74	75-1
--------	----	------

- (c) Con los datos que obtuviste en los incisos (a) y (b), ¿cómo es la variación de la presión de la columna de agua respecto a la variación en la altura de la columna para cada uno de los valores? Es decir, cuántas unidades aumenta la presión al aumentar la altura. Expresa sus resultados en la tabla siguiente (redondeando hasta cuatro decimales).

Altura (m)	Presión (atm)	Aumento en la altura de la columna de agua (m)	Aumento en la presión (atm)	Variación de la presión con respecto a la variación en la altura.
10	1.9662	9	0.8696	$0.8696/9 = 0.0966$
20	2.9323	19	1.8357	$1.8357/19 = 0.0966$
35	4.3816	34	3.2850	$3.2850/34 = 0.0966$
50	5.8309	49	4.7343	$4.7343/49 = 0.0966$
75	8.2462	74	7.1496	$7.1496/74 = 0.0966$

- (d) Calcule la variación de la presión con respecto a la altura para cada par de datos consecutivos dados en la descripción del problema: entre el segundo par de datos y el primero, el tercero y el segundo y así sucesivamente.

Número	Altura en m (h)	Presión en atm (P)	Diferencia en la altura (h)	Diferencia en la presión (P)	Variación de la presión con respecto a la variación en la altura
1	1	1.0966			
2	10	1.9662	$10 - 1 = 9$	$1.9662 - 1.0966 = 0.8696$	$0.8696/9 = 0.0966$
3	20	2.9323	$20 - 10 = 10$	$2.9323 - 1.9662 = 0.9661$	$0.9661/10 = 0.0966$
4	35	4.3816	$35 - 20 = 15$	$4.3816 - 2.9323 = 1.4493$	$1.4493/15 = 0.0966$
5	50	5.8309	$50 - 35 = 15$	$5.8309 - 4.3816 = 1.4493$	$1.4493/15 = 0.0966$
6	75	8.2462	$75 - 50 = 25$	$8.2462 - 5.8309 = 2.4153$	$2.4153/25 = 0.0966$

- (e) Ahora considere que el tanque se vaciará en lugar de llenarse, comenzando por una altura de 75 m, pasando por 50, 35, 20, 10 y 1 m de altura. Calcule la variación de la presión con respecto a la altura para este nuevo orden de valores de altura y presión.

Número	Altura en m (h)	Presión en atm (P)	Diferencia en la altura (h)	Diferencia en la presión (P)	Variación de la presión con respecto a la variación en la altura
1	75	8.2462			
2	50	5.8309	$50 - 75 = -25$	$5.8309 - 8.2462 = -2.4153$	$-2.4153/-25 = 0.0966$
3	35	4.3816	$35 - 50 = -15$	$4.3816 - 5.8309 = -1.4493$	$-1.4493/-15 = 0.0966$
4	20	2.9323	$20 - 35 = -15$	$2.9323 - 4.3816 = -1.4493$	$-1.4493/-15 = 0.0966$
5	10	1.9662	$10 - 20 = -10$	$1.9662 - 2.9323 = -0.9661$	$-0.9661/-10 = 0.0966$
6	1	1.0966	$1 - 10 = -9$	$1.0966 - 1.9662 = -0.8696$	$-0.8696/-9 = 0.0966$

- (f) ¿Cuál es el significado de los signos negativos que se observan en la tabla del inciso (e)?

Que los datos se evaluaron en base a una perdida y no a una ganancia.

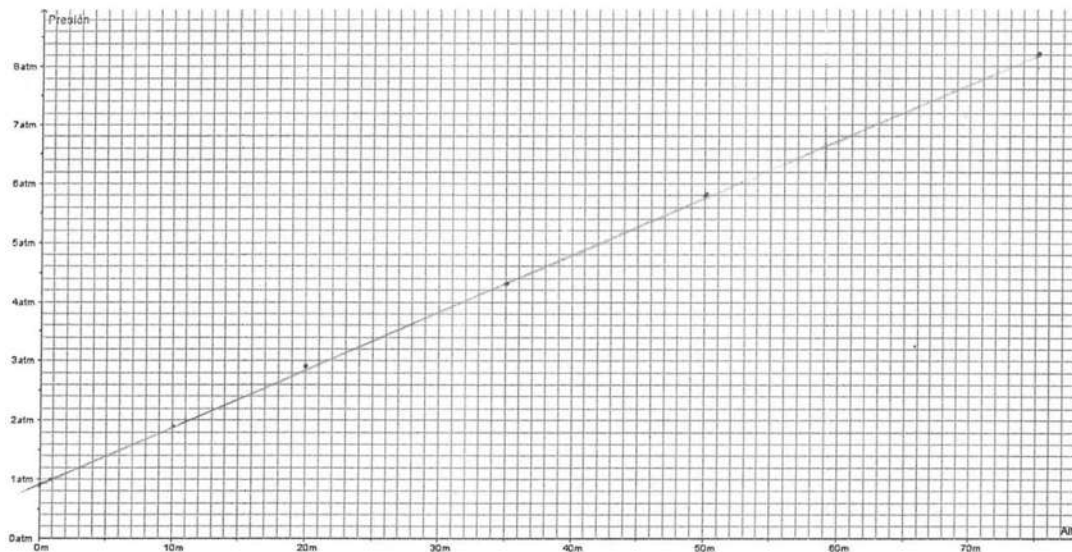
- (g) ¿Qué puede deducir de los resultados para la variación de la presión con respecto a la variación en la altura de los incisos (c), (d) y (e)?

Que debe ser constante porque corresponde al valor de la pendiente.

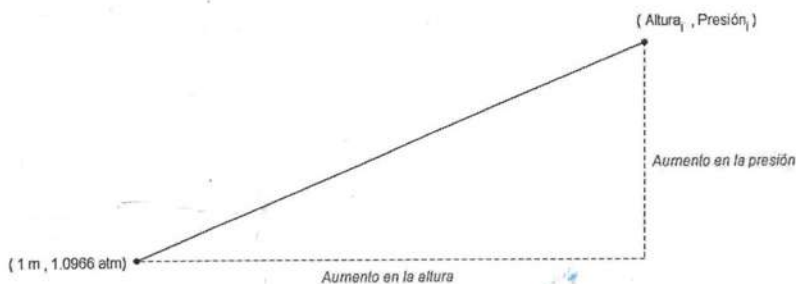
- (h) A esta variación de la presión con respecto a la variación en la altura se le conoce como la **razón de cambio** entre la presión y la altura, Escriba una ecuación que represente esta **razón de cambio**.

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

- (i) Trace todos los puntos de altura y presión en el plano cartesiano. Trace una línea recta entre los puntos inicial y final.



- (j) Si representamos gráficamente un par de puntos cualquiera, lo unimos con el punto inicial correspondiente a una altura de 1 m y una presión de 1.0966 atm. Podremos observar que los aumentos correspondientes a la altura y presión, están representados por los catetos opuesto y adyacente respectivamente. Como se muestra en la siguiente figura



¿En esta figura cuál es el significado trigonométrico de la razón de cambio?

Es la hipotenusa

- (k) Con base en lo expuesto aquí y la gráfica del inciso (i), ¿Qué puede deducir de esta gráfica de puntos?

Que también se puede formar un triángulo rectángulo

- (l) Si prolonga la línea trazada en la gráfica del inciso (i) hasta que cruce el eje de la presión, ¿Cuál es el valor de presión correspondiente al punto de intersección?

0.9 atm

A este punto se le conoce como el **intersepto** u **ordenada al origen** de la función lineal.

- (m) La forma general de una función lineal es la siguiente:

$$\text{variable dependiente} = \text{intersepto} + (\text{pendiente})(\text{variable independiente})$$

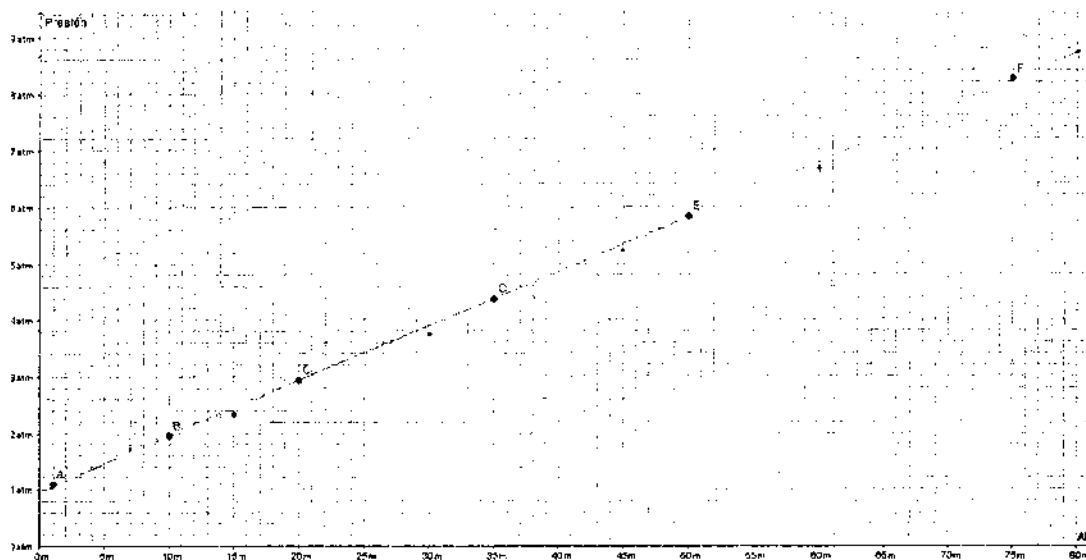
De acuerdo con esto y los resultados de los incisos anteriores, ¿Cuál es la función que describe el comportamiento de los datos de altura y presión que se dan al inicio del problema?

$$p = 1 + 0.0966h$$

- (n) Con el uso de la función del inciso (m) encuentre los valores de presión correspondiente a los siguientes valores de altura

Altura (m)	Presión (atm)
15	2.349
30	3.798
45	5.247
60	6.696
80	8.628

- (o) Compruebe que los puntos del inciso (n) corresponden a la misma función lineal en la cual se encuentran los puntos iniciales del problema (A, B, C, D, E y F), trazando estos junto con los que se proporcionan al inicio del problema. Una vez hecho esto, verifique que todos formen una función lineal.



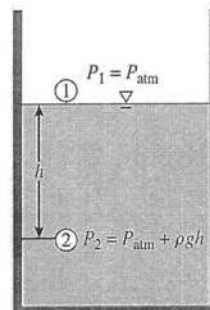
- (p) Haciendo uso de la gráfica del inciso (o) determine la razón de cambio entre el punto ubicado a 80 m de altura y el punto del intercepto.

$$\frac{8.628 - 0.9}{80 - 0} = 0.0966$$

B. Aplicación de Funciones Lineales
Parte II. Implementación con GeoGebra.

Con base en los principios físicos, se sabe que la presión en el fondo de una columna de fluido se incrementa con la profundidad debido al aumento de masa (Como se muestra en la figura).

Si se considera que el punto 1 de la figura, está sobre la superficie libre de un líquido abierto a la atmósfera, donde la presión es la presión atmosférica P_{atm} (en atm), entonces la presión a la profundidad h (en m) desde la superficie libre está dada por $P = P_{atm} + \frac{\rho gh}{101325}$, donde ρ representa la densidad del fluido (en kg/m^3) y g la fuerza de gravedad (en m/s^2).



- (a) ¿Cuál es el intersepto de la función para la presión de un fluido presentada?

P_{atm}

- (b) ¿Cuál es la pendiente de la función para la presión de un fluido presentada?

$\frac{\rho g}{101325}$

- (c) Sabiendo que el agua a una temperatura de 20°C tiene una densidad de 998.23 kg/m^3 y el tanque se encuentra al nivel del mar ($g = 9.81 \text{ m/s}^2$) y además, se encuentra abierto a la atmósfera ($P_{atm} = 1 \text{ atm}$). ¿La ecuación del inciso (c) anterior corresponde con la ecuación propuesta en el inciso (m) de la parte I? Justifique su respuesta.

Si corresponde la ecuación
 pendiente = $\frac{\rho g}{101325} = \frac{(998.23 \text{ kg/m}^3)(9.81 \text{ m/s}^2)}{101325} = 0.0966$
 intersepto = 1

- (d) Haciendo uso del archivo de GeoGebra con el nombre *Presión manométrica de una columna de líquido.ggb* que se le proporciona, analice el comportamiento de la función. Inicie la animación pulsando  en el botón una vez concluida la animación responda las siguientes preguntas:

- a. ¿Qué tipo de función es?

Es una función lineal.

- b. ¿Cuál es el valor de presión que se alcanza a las siguientes alturas?

Altura (m)	Presión (atm)
5	1.4831
90	9.6985
100	10.6616

- c. Coloque en la casilla de altura el valor de 100, enseguida desplace el deslizador desde la posición superior hasta la inferior, ¿Qué observa en cuanto al comportamiento de la función?, ¿se ha modificado la función?

No

- (e) Reinicie la animación y observe cuál es la presión que se obtiene a una altura de 30 y 50 metros, modificando los valores de la presión superficial (atm), como se indica en la siguiente tabla

Presión superficial (atm)	Presión (atm) alcanzada a los 30 m	Presión (atm) alcanzada a los 50 m
1	3.8985	5.8308
2	4.8985	6.8308
3	5.8985	7.8308
4	6.8985	8.8308
5	7.8985	9.8308

- (f) ¿Cuánto se incrementan los valores de presión a 30 y 50 m aumentando la presión superficial?

Incrementan en 1 atm.

- (g) ¿Cuál debe ser el valor de la presión superficial para que a los 50 m se tenga una presión en la columna de 10.8308 atm?

6 atm.

- (h) Modifique el valor de densidad para otras sustancias diferentes al agua, por ejemplo, para el etanol a 20 °C tiene una densidad de 791 kg/m³, para la glicerina a 0 °C es de 1260 kg/m³ y para el mercurio a 0 °C es de 13600 kg/m³. Utilizando estos valores indique cuál es el valor de presión que se alcanza en el fondo de la columna cuando esta tiene una altura de 50 y 100 metros, para una presión superficial de 1 atm y una gravedad de 9.81 m/s².

Sustancia	Temperatura (°C)	Densidad (kg/m ³)	Presión de la columna a 50 m	Presión de la columna a 100 m
Etanol	20	791	4.8279 atm	8.6559 atm
Agua	20	998.23	5.8308 atm	10.6616 atm
Glicerina	0	1260	7.0976 atm	13.1952 atm
Mercurio	0	13600	66.8155 atm	132.6311 atm

- (i) ¿Qué sucede con la pendiente al cambiar estos valores de densidad? Explique su respuesta.

La pendiente cambia porque esta relacionada directamente.

- (j) Determine el valor de la razón de cambio para estas sustancias utilizadas, empleando la ecuación del inciso (c) de la parte II.

Sustancia	Razón de cambio
Etanol	0.6765
Agua	0.9966
Glicerina	0.3219
Mercurio	1.3167

- (k) ¿Cuál es el resultado de utilizar un fluido con una densidad hipotética de 0 kg/m³? ¿Cómo es la variación de presión para la columna de líquido?, explique.

La variación de presión corresponde a la atmósfera, o sea 1 atm.

- (l) Para comprobar que sus conclusiones en los incisos (j) y (i) seleccione la casilla "Densidad" ubicado en la parte superior derecha de la pantalla y manipule el deslizador de la densidad "rho", observe el comportamiento de la función lineal y de la pendiente al variar el valor la densidad. ¿Cuáles son sus conclusiones de esta actividad?

Que es un modelo lineal, que aunque se varía la densidad y ésta está relacionada directamente con la pendiente, la línea siempre se conserva.

Variedad de h

$$\frac{P}{h} = \frac{P_2 - P_1}{h_2 - h_1}$$

1

$$P = 0.9 + 0.0966 h$$

Actividad 3

1

Actividad 3 Sistema de ecuaciones lineales

Líder:
Computadora:
Hoja de Trabajo:
Número de Equipo: 2 Hora de Inicio: 6:55 P.m. Hora de Terminación: 7:45 P.m.
6:10 P.m.

Parte I. (Lápiz y papel). Localización gráfica de la solución para un sistema de ecuaciones lineales

(a) Se tienen las siguientes ecuaciones lineales:

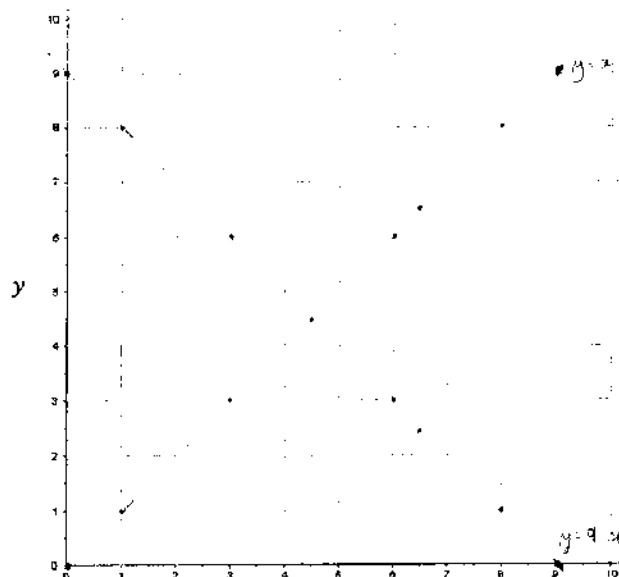
$$y = x$$

$$y = 9 - x$$

Haciendo uso de estas ecuaciones, encuentre el valor de y para cada uno de los siguientes valores de x .

Valor de x	Valor de y para la ecuación $y = x$	Valor de y para la ecuación $y = 9 - x$
1	1	8
3	3	6
4.5	4.5	4.5
6	6	3
6.5	6.5	2.5
8	8	1
9	9	0

(b) En el siguiente plano cartesiano grafique las ecuaciones lineales $y = x$ y $y = 9 - x$, con ayuda de los valores encontrados en el inciso (a)



- (c) Con base en la gráfica del inciso (b), ¿Cuál es el punto de intersección entre las dos ecuaciones trazadas?

$P(4.5, 4.5)$

- (d) Utilizando el valor de x del punto encontrado en el inciso (c), determine el valor de y para ambas ecuaciones planteadas en el inciso (a)

Ecuación	Solución para y
$y = x$	$4.5 = 4.5$
$y = 9 - x$	$4.5 = 9 - 4.5 = 4.5$

- (e) ¿Corresponde este valor de y con el del punto de intersección entre las dos ecuaciones observado en la gráfica del inciso (a)? Las coordenadas de este punto representan la solución del sistema.

Si, si corresponde

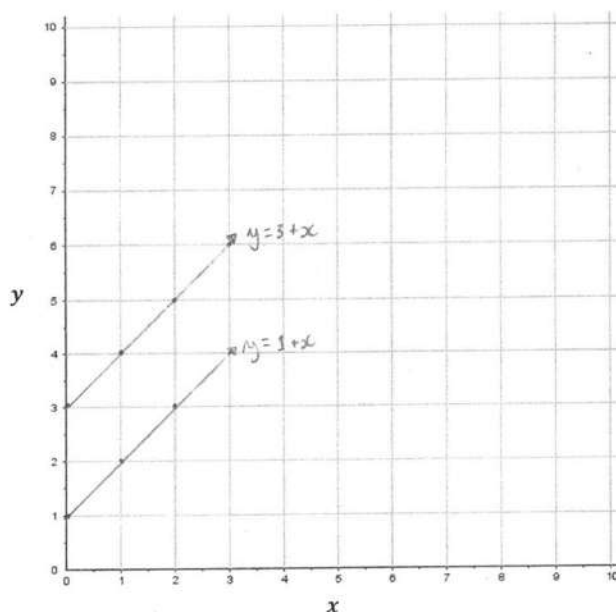
- (f) Considere las siguientes dos ecuaciones lineales:

$$y = 1 + x$$

$$y = 3 + x$$

Gráfique ambas ecuaciones en el siguiente plano cartesiano, tomando los puntos que considere necesarios e indicándolos en la siguiente tabla:

x	0	1	2	3
y_1	1	2	3	4
y_2	3	4	5	6



- (g) ¿Existe algún punto de intersección entre las dos ecuaciones lineales?, por lo tanto ¿este sistema de ecuaciones lineales tiene solución?, justifique su respuesta.

No tiene solución ya que no posee punto de intersección, son paralelas.

- (h) Encuentre la razón de cambio (siguiendo el procedimiento gráfico mostrado en la actividad 2) para cada par de ecuaciones, de los incisos (a) y (f), llenando la siguiente tabla. En la columna "Razón de cambio, R_C " anote la operación que utilizó para encontrar el resultado.

Sistema de ecuaciones lineales	Ecuaciones	Punto de prueba 1 P_1		Punto de prueba 2 P_2		Razón de cambio, R_C	¿El sistema de ecuaciones lineales tiene solución?, responda con base en lo observado en las gráficas anteriores.
		Coordenada x	Coordenada y	Coordenada x	Coordenada y		
(a)	$y = x$	1	1	3	3	1	Si tiene solución
	$y = 9 - x$	1	8	3	6	-1	
(f)	$y = 1 + x$	0	1	1	2	1	No tiene solución

6)	$y = 3 + x$	0	3	1	4	1	No tiene solución
----	-------------	---	---	---	---	---	-------------------

- (i) Utilizando la tabla del inciso (h), ¿Cuál es el requisito que debe cumplir la razón de cambio de las ecuaciones para que un sistema de ecuaciones lineales tenga solución?

Para que tenga solución las pendientes tienen que ser de signo contrario.

- (j) ¿Por qué el sistema de ecuaciones lineales del inciso (f) no tiene solución?

Porque sus pendientes son de mismo signo.

- (k) Se tiene el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$y = 2x - 2$$

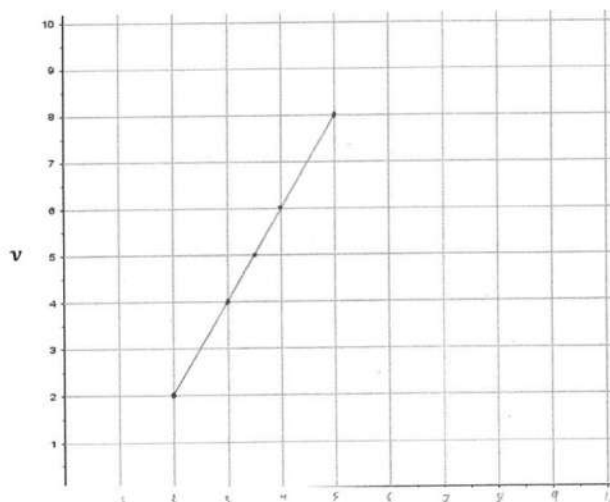
$$y = \frac{8x - 8}{4}$$

Haciendo uso de estas ecuaciones, encuentre el valor de y para cada uno de los siguientes valores de x .

Valor de x	Valor de y para la ecuación $y = 2x - 2$	Valor de y para la ecuación $y = \frac{8x - 8}{4}$
2	2	2
3	4	4
3.5	5	5
4	6	6
5	8	8

- (l) En el siguiente plano cartesiano grafique las ecuaciones lineales del inciso (k).

* No tiene solución



- (m) Encuentre la razón de cambio para las ecuaciones lineales del inciso (l), tomando un par de puntos cualquiera para cada una de las ecuaciones y aplicando el procedimiento gráfico mostrado en la actividad 2.

Ecuaciones	Punto de prueba 1 P_1		Punto de prueba 2 P_2		Razón de cambio, R_c	¿El sistema de ecuaciones lineales tiene solución? responda con base en lo observado en la gráfica anterior.
	Coordenada x	Coordenada y	Coordenada x	Coordenada y		
$y = 2x - 2$	2	2	3	4	2	Si.
$y = \frac{8x - 8}{4}$	2	2	3	4	2	

- (n) ¿Cuántas soluciones tiene el sistema de ecuaciones lineales del inciso (k)?

11 soluciones

- (o) ¿Por qué el sistema de ecuaciones lineales del inciso (f) no tiene solución, mientras que el sistema de ecuaciones lineales del inciso (k) tiene infinitas soluciones, si observamos que en ambos casos las dos ecuaciones del sistema tienen la misma razón de cambio? Justifique su respuesta.

Porque en el (f) no tiene intersección y en el (k) existe un número de intersección.

- (p) De acuerdo con lo visto en los incisos anteriores, ¿Qué condiciones se deben de cumplir para que un sistema de ecuaciones lineales tenga solución? Y ¿cuáles son los casos que tenemos?

Debe existir intersección para que haya solución.
Con pendiente de signo opuesto y con pendiente de signo igual.

- (q) Haciendo uso de su argumento dado en el inciso (p), indique si los siguientes sistemas de ecuaciones lineales tienen solución, basándose sólo en las expresiones algebraicas.

Sistema de ecuaciones lineales	Ecuaciones del sistema	¿Tiene solución el sistema de ecuaciones lineales?	¿Cuántas soluciones tiene el sistema de ecuaciones lineales?
1	$y = 14 - 5x$ $y = 6 - 3x$	Si	1 solución
2	$y = 1/3 + 5/6x$ $y = 4/12 + 25/30x$	Si	n soluciones
3	$y = 1/3 + 5/6x$ $y = 4/12 + 20/24x$	Si	n soluciones

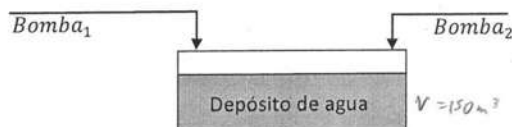
Parte II. (Lápiz y papel). Aplicación de un sistema de ecuaciones lineales.

Una empresa potabilizadora abastece de agua a una pequeña comunidad, esta cuenta con un depósito de concreto para asegurar un suministro constante de agua a la región. Las dimensiones del depósito de agua son de 10 metros de largo por 5 metros de ancho y 3 metros de alto. Para llenarlo utiliza dos bombas (Bomba 1 y Bomba 2), el agua se conduce a través de una tubería desde la salida de cada bomba hasta el depósito de agua, con una válvula en el extremo de cada tubería. Se sabe por experiencia que:

- I. Si se enciende la Bomba 1 durante una hora y la Bomba 2 durante 2 horas, se logra introducir al depósito la cantidad de 30 000 litros de agua (30 m^3) y
- II. Si se dejan operando las dos bombas durante un tiempo de dos horas y media, habrá en el depósito una cantidad de 50 000 litros de agua (50 m^3).

Con los datos anteriores, determine:

1. ¿Cuál es el flujo de agua que tiene la Bomba 1 y la Bomba 2?
2. ¿En cuánto tiempo se llenará el depósito?



- (a) Sabiendo que el volumen de agua en el depósito está constituido por los volúmenes de agua que aportan ambas bombas, ¿de qué manera representarías esto algebraicamente? Construye una ecuación que relacione los volúmenes de las bombas con el volumen del depósito.

$$V_t = V_1 + V_2$$

- (b) Se conoce que un flujo volumétrico (volumen/tiempo) multiplicado por el tiempo es igual a una cantidad de volumen ((volumen/tiempo) tiempo = volumen). A partir de esto y haciendo uso de palabras como “flujo de Bomba 1”, “flujo de Bomba 2”, “tiempo 1”,

$$V_d = \text{Volumen del depósito} = 30 \text{ m}^3$$

$$F_1 = \text{Flujo de Bomba 1}$$

$$F_2 = \text{Flujo de Bomba 2}$$

7

"volumen del depósito" o las que usted prefiera. Construya una ecuación general donde represente que el volumen aportado por ambas bombas será igual al volumen de agua que se encuentra en el depósito.

$$\text{Volumen del depósito} = (\text{flujo de Bomba 1} + \text{flujo de Bomba 2}) \cdot \text{tiempo}$$

- (c) Haciendo uso de la ecuación del inciso (a) y de los datos del problema, ¿Cuál es la representación algebraica (ecuación) del caso I? Asigne literales (letras) a cada variable, de manera que sea más cómodo el uso de esta ecuación.

$$V_d = F_1 \cdot t + F_2 \cdot 2t = 30 \text{ m}^3$$

- (d) ¿Cuál es la representación algebraica del caso II dado en el planteamiento del problema y la ecuación obtenida en el inciso (a)? Asigne literales (letras) a cada variable, de manera que sea más cómodo el uso de esta ecuación.

$$V_d = \frac{F_1}{2} + (F_1 + F_2) = 50 \text{ m}^3$$

- (e) Represente explícitamente el flujo de la Bomba 2 para cada una de las ecuaciones de los incisos (b) y (c), de manera que quede una ecuación de la forma Bomba 2 = f(Bomba 1).

$$\text{Caso I. } F_2 = \frac{30 \text{ m}^3 - F_1}{2t}$$

$$\text{Caso II. } F_2 = \frac{50 \text{ m}^3 - \frac{F_1}{2} - F_1}{2t} = \frac{50 \text{ m}^3 - \frac{3F_1}{2}}{2t}$$

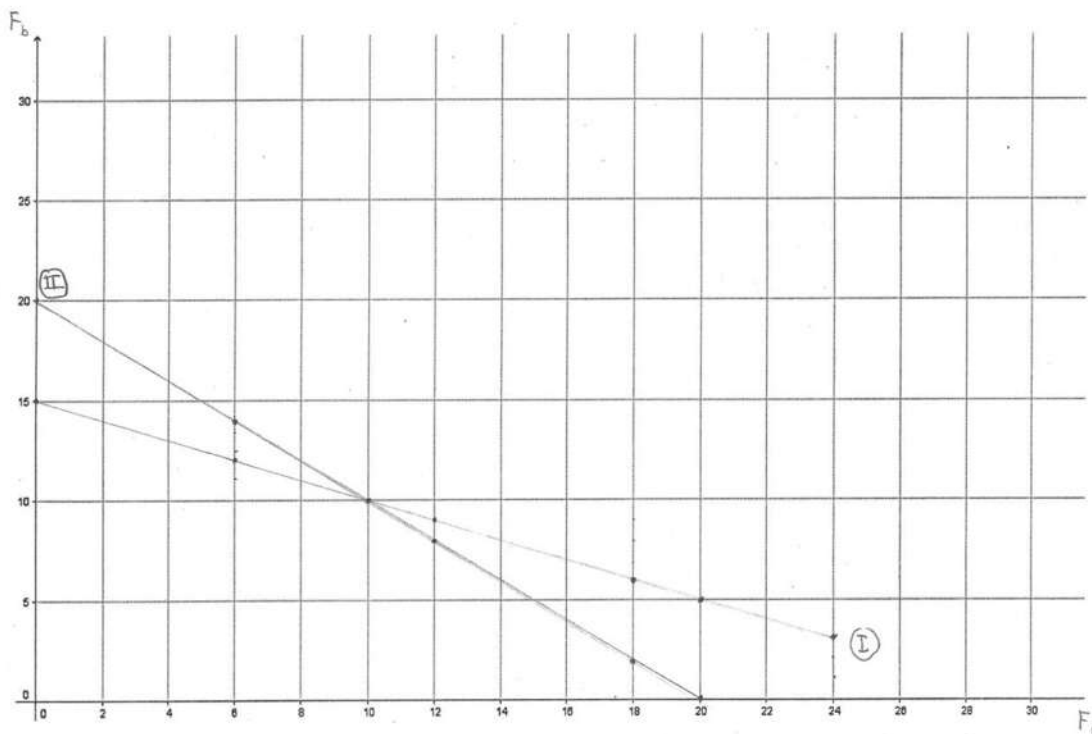
- (f) De acuerdo con lo expuesto en el inciso (e), ¿cuáles son las razones de cambio y los interceptos a la ordenada de las ecuaciones para los casos I y II?

	Caso I	Caso II
Razón de cambio	$-1/2$	-1
Intercepto a la ordenada	$V_d/2t$	$2V_d/3t$

- (g) Haciendo un análisis de los datos anteriores, ¿Las dos ecuaciones tienen un valor de flujo en ambas bombas que satisfaga ambas ecuaciones?, dicho de otra manera, ¿Tiene solución el sistema de ecuaciones? Y ¿Por qué?

Si, porque la pendiente es diferente.

- (h) En el siguiente plano de ejes coordenados grafique ambas ecuaciones, para los casos I y II, colocando la leyenda correspondiente a cada eje coordenado [las variables que definió en los incisos (b) y (c)], de manera que si se eligió representar la variable "flujo de la Bomba 1" por f_1 , se colocará f_1 en las abscisas y por ejemplo, f_2 en las ordenadas.



- (i) Mediante la gráfica de (g), ¿Cuáles son los valores de los flujos para la Bomba 1 y la Bomba 2 que satisfacen las condiciones de operación dados en los casos I y II de la descripción del problema?

	Bomba I	Bomba II
Flujo volumétrico (m^3/h)	10	10

- (j) Sabiendo que ambas bombas trabajaran al mismo tiempo (tiempo de operación igual para ambas bombas). Construya una ecuación que represente el volumen del depósito como una función del tiempo. Utilizando los flujos de las bombas calculados en el inciso (i).

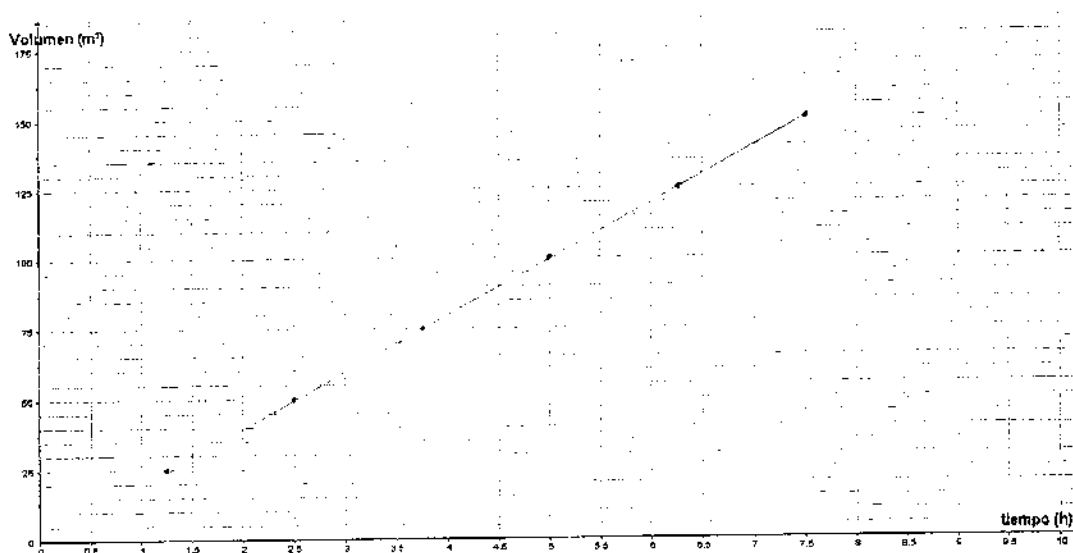
$$V_d = 20 \cdot t \quad V_d = 10 \cdot t$$

- (k) Teniendo en cuenta las dimensiones del depósito, y la ecuación del inciso (i), ¿Cuál es el sistema de ecuaciones que se tiene que solucionar para determinar el tiempo en el cual se llena el depósito?

$$t = \frac{V_d}{20} \quad V_d =$$

$$\begin{aligned} V_d &= (F_a + F_b) \cdot t \\ T &= V_d / F_a \\ V_d &= F_a \cdot T \end{aligned} \quad \begin{aligned} V_d &= (F_a + F_b) (V_d / F_a) \\ T &= V_d / F_a \\ V_d &= F_a \cdot T \end{aligned}$$

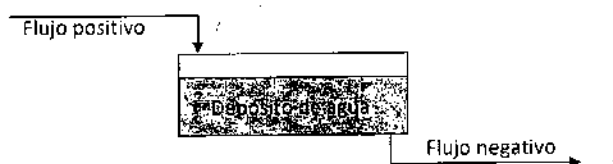
- (l) Determine el tiempo en el cual se llena el depósito, graficando el sistema de ecuaciones anterior en el siguiente plano coordenado.



- (m) ¿En cuánto tiempo se llena el depósito?

Tiempo de llenado del depósito (horas) 7.5 horas

Si se cuenta con una tubería por donde salga el agua del depósito, el flujo de agua en la bomba que esté colocada en esta tubería se considerará negativo (porque sale del depósito), a diferencia de lo que ocurre cuando entra el agua (se considera un flujo positivo).



Nótese que el signo del flujo solamente hace referencia al sentido en el cual fluye con respecto al depósito de agua.

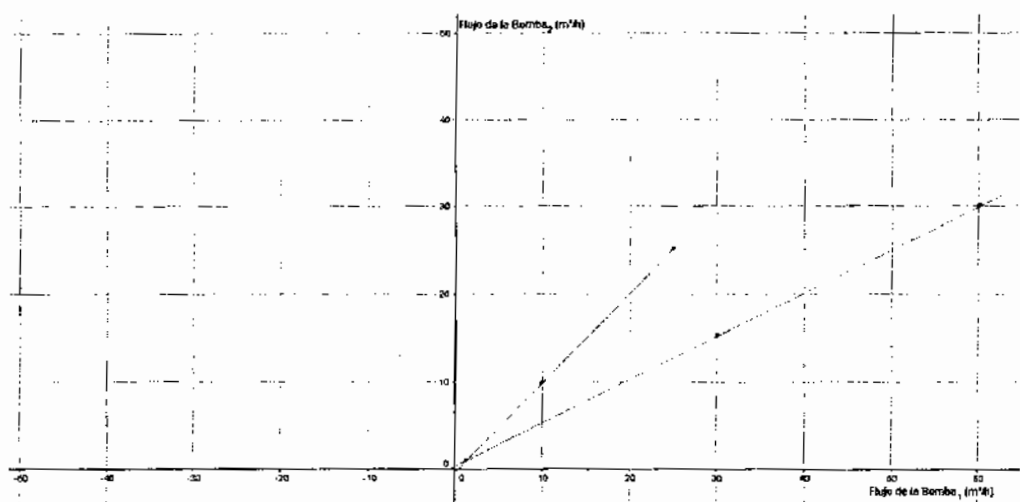
(ii) Se obtuvieron los siguientes datos al tomar el tiempo de llenado:

Casos	Tiempo de operación de la Bomba 1 (h)	Tiempo de operación de la Bomba 2 (h)	Volumen de agua en el depósito (m ³)
Caso III	0.5	1	30
Caso IV	2.5	2.5	50

Siguiendo el procedimiento anterior, ¿Cuál es el sistema de ecuaciones que nos permite obtener los flujos de operación de las bombas?

$$\begin{aligned} F_{III} &= V/t_{III} & V/t_1 + V/t_2 \\ F_{IV} &= V/t_{IV} & (V/t_1) \cdot 2 \end{aligned}$$

(iii) Siguiendo el procedimiento gráfico determine el valor de los flujos que dan solución a las ecuaciones del inciso (ii), haciendo uso del siguiente plano coordenado.



11

- (p) ¿Cuáles son los flujos obtenidos para ambas bombas en el inciso (n), que satisfacen las condiciones del inciso (m)?, ¿Es posible tener las bombas operando en esas condiciones de flujo?, ¿De qué manera operarían las bombas?

$$\begin{aligned} P(60, 30) &= 1/4 \\ P(25, 25) &= 1/4 \end{aligned}$$

Si, una más que la otra, igual.

Parte III. (GeoGebra). Aplicación de un sistema de ecuaciones lineales.

La misma empresa potabilizadora dispone de un depósito con dimensiones de 10 metros de ancho por 10 metros de largo y una altura de 5 metros. Tiene dos bombas en operación que alimentan el agua al depósito a través de dos tuberías.

Se sabe por experiencia que:

1. Si dejamos encendida la bomba 1 durante un tiempo de 1.6 horas y la bomba 2 un tiempo de 4.1 horas, al apagar las bombas habrá en el depósito la cantidad de 266 m^3 de agua.
2. Si ambas bombas están encendidas durante 1.1 horas, el depósito tendrá la cantidad de 130 m^3 de agua.

- (a) Usando los datos anteriores, construya un sistema de ecuaciones que nos permita determinar los flujos con los que operan las dos bombas. Utilizando el procedimiento descrito en la parte II de esta actividad.

$$\begin{aligned} 1.6 f_1 + 4.1 f_2 &= 266 \\ 1.1 f_1 + 1.1 f_2 &= 130 \end{aligned}$$

- (b) Realizando un análisis de las ecuaciones, ¿Existe al menos una solución para este sistema de ecuaciones lineales?, ¿Por qué?

Si, porque tienen pendientes diferentes

- (c) Utilice el archivo "Depósito de agua.ggb" proporcionado, para determinar la solución del sistema de ecuaciones que nos permita determinar los flujos de las dos bombas mencionadas en el enunciado del problema de la parte III. Siguiendo las indicaciones que se muestran a continuación:

1. Ingrese los valores de los tiempos de operación de las bombas y el volumen de agua que se logró introducir al depósito mientras las bombas estaban encendidas, en las casillas que se encuentran en la vista gráfica 2 del archivo de GeoGebra.

2. Active la casilla de control con el nombre *Flujos* de la ventana gráfica 2, pulsando sobre el cuadro blanco de la izquierda. Notará que aparece una marca en esta una vez pulsada, además verá como se despliegan las gráficas y los ejes en la vista gráfica y las correspondientes ecuaciones y la solución del sistema en la vista gráfica 2.

Compruebe si su conjetura del inciso (b) es correcta y escriba los valores para los flujos de las bombas que cumplen con las dos condiciones dadas en la descripción del problema (La solución del sistema de ecuaciones lineales).

$$\text{Flujo de la bomba 1: } = 97.42 \text{ m}^3/\text{h}$$

$$\text{Flujo de la bomba 2: } = 30.76 \text{ m}^3/\text{h}$$

- (d) ¿Cuál es la ecuación que nos permite determinar cómo varía el volumen del depósito conforme este se va llenando?, utilice los valores de flujo de las bombas del inciso (c).

$$V = (97.42 + 30.76)t$$

- (e) Escriba el sistema de ecuaciones que nos permite determinar en cuánto tiempo se llena el depósito de agua descrito en el enunciado del problema de la parte III.

$$1.6 f_1 + 4.1 f_2 = 266$$

$$1.1 f_1 + 1.1 f_2 = 130$$

- (f) Haciendo uso del archivo "*Depósito de agua.ggb*" encuentre el tiempo de llenado del depósito, de la siguiente manera:

1. Desactive la casilla de control de *flujos* y active la casilla de control para el *Volumen del depósito*. Verá cómo se limpia la vista gráfica y aparece un nuevo conjunto de ejes para el tiempo, el volumen y la altura del depósito.
2. Pulse en el botón verde de inicio de animación  mostrado en la vista gráfica 2.
3. Espere hasta que el depósito se llene.
4. Lea el valor de tiempo de llenado mostrado en la vista gráfica 2.
5. Pulse el botón azul de reinicio de la animación  mostrado en la vista gráfica 2.
6. Desactive la casilla de control *Volumen del depósito*.

¿En cuánto tiempo se llena el depósito?, Usando los flujos de las bombas que se determinaron en el inciso (c).

$$4.16 \text{ horas}$$

- (g) La empresa planea cambiar las bombas que alimentan de agua al depósito, para esto contempla la posibilidad de reutilizar algunas bombas que tiene en su almacén. Ha realizado pruebas con estas como las que se mostraron en el enunciado del problema. Teniendo los siguientes datos:

Combinaciones	Casos de operación	Tiempo de operación de la bomba 1 (horas)	Tiempo de operación de la bomba 2 (horas)	Volumen de agua en el depósito (m^3)
1	Caso I	12	3.1	400
	Caso II	1.8	3.3	252
2	Caso I	12	3.1	500
	Caso II	2.9	8	202.5
3	Caso I	14.75	3.1	500
	Caso II	0	13.8	500
4	Caso I	4	8.6	300
	Caso II	8	3	500
5	Caso I	0	3.1	310
	Caso II	11.4	1.6	446

Usando el procedimiento descrito en los incisos (c) y (f), encuentre los flujos con los que operan las dos bombas y el tiempo que se requiere para llenar el depósito. Para cada una de las 5 combinaciones de la tabla anterior. Anote sus resultados en la siguiente tabla.

Combinaciones	Flujo de la bomba 1 (m^3/h)	Flujo de la bomba 2 (m^3/h)	Tiempo que se requiere para llenar el depósito (horas)
1	15.84	67.72	5.91
2	33.40	32.02	7.57
3	26.28	36.23	7.93
4	59.86	7.04	7.40
5	25.09	100.00	3.93

- (h) Asumiendo que la mejor opción es aquella en la que se tiene el menor tiempo de llenado para el depósito de agua. ¿Cuál de las 5 combinaciones dadas en el inciso (g) es la mejor?

Combinación 5.

(i) Un operador proporcionó los siguientes datos:

Combinaciones	Casos de operación	Tiempo de operación de la bomba 1 (horas)	Tiempo de operación de la bomba 2 (horas)	Volumen de agua en el depósito (m^3)
1	Caso I	4	4	300
	Caso II	9	9	446
2	Caso I	4	4	250
	Caso II	8	8	500

Evalúe las dos combinaciones anteriores, usando el procedimiento del inciso (g) para encontrar los flujos con los que operan las bombas 1 y 2, así como el tiempo que se requiere para llenar el depósito con agua usando ambas bombas durante el mismo tiempo, anote sus resultados en la siguiente tabla:

Combinaciones	Flujo de la bomba 1 (m^3/h)	Flujo de la bomba 2 (m^3/h)	Tiempo que se requiere para llenar el depósito (horas)
1	-	-	-
2	116.5	-54	7.93

(j) ¿Cuáles son sus observaciones respecto a las dos combinaciones del inciso (i)?

Combinación 1: No hay solución

Combinación 2: No es efectiva porque una está llenando y otra está succionando.

(k) ¿Cuáles son sus conclusiones respecto a esta actividad, de acuerdo con lo observado en las partes I, II y III?

Que un flujo negativo representa una pérdida, o un flujo igual el flujo es constante.

$$\textcircled{I} \quad F_b = \frac{V_d}{12} - \frac{1}{5} F_d \Rightarrow F_b = \frac{30}{12} - \frac{1}{5} F_d \Rightarrow F_b = 15 - \frac{1}{5} F_d$$

9

$$\textcircled{II} \quad F_b = \frac{2V_d}{52} - F_d \Rightarrow F_b = \frac{2 \cdot 50}{52} - F_d \Rightarrow F_b = 20 - F_d$$

(I)

F_d	F_b
0	15
6	12
12	9
18	6
24	3

(II)

F_d	F_b
0	20
6	14
12	8
18	2
20	0

Soluc.
P(10, 10)

$$\textcircled{I} \quad V_d = f_1 + f_2 \Rightarrow$$

$$V = 10$$

$$V = 10$$

$$V = 10$$

$$V = 10$$

$$V = 10$$

$$V = 10$$

$$V = 10$$

$$V = 10$$

$$V = 10$$

$$V_d = (B_1 + B_2) + (1)$$

$$F = V/T \quad (2)$$

$$T = V/F$$

F

$$V = f \lambda$$