Universidad Nacional Autónoma de México y Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo

Posgrado Conjunto en Ciencias Matemáticas
UMSNH-UNAM

Deformaciones de Intersecciones Completas

T E S I N A

que para obtener el grado de

Maestro en Ciencias Matemáticas

presenta

Fernando Mauricio Rivera Vega

Asesor:
Dr. Luis Abel Castorena Martínez

Morelia, Michoacán de Ocampo, México
Agosto, 2022

Quien tiene la mala
suerte de leer algo
mío, ¡pues allá él!

- Amparo Dávila

Agradecimientos

Hace apenas poco más de dos años me encontraba escribiendo los agradecimientos de mi tesis de Licenciatura que recién terminaba; nunca pensé que entre los agradecimientos de un escrito y otro llegaran a existir tantas diferencias.

A *Athz*, llegué a ti sin previo aviso, y sin previo aviso te comencé a querer antes de siquiera notarlo. Me alegra el haber llegado a ti; me ayudaste de manera títanica, me calmaste con suma facilidad en mis ataques de ansiedad, preocupación, procrastinación y tristeza. Nunca me sentí más tranquilo y seguro que en compañía tuya; me hiciste feliz cuando ni siquiera sabía que lo necesitaba. Parece que desde siempre has sabido cómo hacerlo a pesar de que no me conocías. Vives en las palabras que te leí, y te recuerdo en todos los libros en los que te escuché. Te quiero.

A la familia que encontré en Morelia; *Jimmy, Adame, Erick, Félix, Alde, Migue, Natalia, Pame, Héctor, Sandy, Carlos, Sandino* e *Itzel*. Su amistad me ayudó a sobrellevar en gran medida los estragos que la pandemia y la vida misma causó en mí. En tan poco tiempo conocieron algo mucho más cercano a la realidad de persona que soy que la inmensa mayoría. Conocieron mis problemas, decepciones, tristezas, aventuras y alegrías. Las anécdotas perdurarán en mi memoria lo más que me sea físicamente posible, y aún después de ello, quedarán grabadas en estas páginas para la posteridad. Les estoy eternamente agradecido.

Por supuesto, al *"Club de Lectura"*. Conocerlos y convivir con todos Ustedes fue increíble. Conocí a maravillosas personas fin de semana tras fin de semana en esos pocos ratos que me hicieron sobrellevar mejor la pandemia. Muchas gracias a todos.

Finalmente a *Abel*, quién me aceptó como su estudiante en el posgrado y quién nunca se rindió en la tarea de hacerme comprender la belleza de la Geometría Algebraica, a tal punto de que logré escribir este pequeño trabajo.

¡Salucita!

Mauricio
Mayo 2022

Resumen

Resumen: Se hace una revisión teórica y exposición de ejemplos sobre deformaciones infinitesimales y de primer orden, haciendo enfásis en su relación con las variedades algebraicas denominadas intersecciones completas, además de una caracterización mediante el denominado primer módulo cotangente T_{B_0}, donde B_0 es la k-álgebra asociada a la intersección completa.

Palabras clave: *Kodaira, Spencer, Artin, Schlessinger, deformación infinitesimal, deformación de primer orden, esquema algebraico, intersección completa, primer módulo cotangente*

Abstract: It makes a theoretical review and exposition of examples on infinitesimal and first order deformations, making emphases in their relation to algebraic varieties called complete intersections, in addition to a characterization by the so-called first cotangent module T_{B_0}, where B_0 is the k-algebra associated with the complete intersection.

Introducción

En algún sentido, la teoría de deformaciones en un contexto de Geometría Algebraica es tan antiguo como la disciplina misma debido a que los objetos algebro-geométricos pueden “deformarse” variando adecuadamente los coeficientes de las ecuaciones que los determinan. Sin embargo, “deformar” en un sentido formal conduce a lenguaje técnico moderno basado en la teoría de esquemas y en los métodos cohomológicos. El punto de vista moderno tiene su origen en los trabajos de K. Kodaira y C. Spencer sobre las deformaciones de variedades analíticas complejas y de su formalización y traducción al lenguaje de esquemas propuesto por A. Grothendieck. La teoría para esquemas fue construida por M. Artin [1] y M. Schlessinger [12].

La idea general de deformar un esquema es encajarlo en una familia de esquemas que guardan una “fuerte” relación con él. Uno de los principales problemas que existen es, dado un esquema X_0 sobre un campo algebraicamente cerrado k, S un esquema y $s_0 \in S$ un punto k-racional, ¿existe un S-esquema $\mathcal{X}$ plano cuya fibra en el punto s_0 sea isomorfa a X_0? En caso afirmativo, tal esquema $\mathcal{X}$ se denomina deformación del esquema X_0 sobre S.

En el *Capítulo 1* se presenta la teoría básica de deformaciones infinitesimales y de primer orden, desarrollando dos ejemplos no triviales, uno para la cuádrica $Q_t := xy - t$ y otro para $\mathbb{P}^1$ mediante las superficies de Hirzebruch. En el *Capítulo 2* se desarrolla de manera tanto algebraica como geométrica los conceptos de “intersección completa” e “intersección local completa” y además de esto, se presentan diversos ejemplos que clarifican su comprensión. Por último, en el *Capítulo 3* se presentan a las deformaciones de esquemas a través de las deformaciones de las k-álgebras que los definen. Con lo anterior se lográ relacionar las deformaciones de primer orden de un esquema dado con el primer módulo cotangente de su k-álgebra asociada. El resultado principal de este último capítulo es el que afirma que un esquema afín $X = \mathrm{Spec}(B_0)$ donde B_0 es una k-álgebra, no tiene deformaciones de primer orden no triviales si y sólo si el primer módulo cotangente $T^1_{B_0} = 0$. De manera particular, se centra la atención en el caso de hipersuperficies, las cuáles son un ejemplo de intersecciones completas.

Índice general

Capítulo 1

Deformaciones

1.1. Deformaciones infinitesimales y de primer orden

El concepto de deformación necesita la noción de planitud. D. Mumford escribe: "*The concept of flatness is a riddle that comes out algebra, but which is technically the answer to many prayers*". La noción de planitud fue formulada por primera vez por J.P. Serre y rápidamente se convirtió en una de las herramientas básicas tanto de la Geometría Algebraica como del Álgebra Conmutativa. Posteriormente a su formulación en 1950, la noción de planitud fue desarrollada y explotada sistemáticamente por A. Grothendieck. Recordar que un módulo M sobre un anillo A es plano si el funtor $- \otimes_A M : Mod(A) \longrightarrow Mod(A)$ es exacto. En particular, un morfismo de anillos $A \longrightarrow B$ se denomina plano si B es plano como A-módulo. Para el caso de esquemas tenemos lo siguiente:

Definición 1.1. Sea $f : X \longrightarrow Y$ un morfismo de esquemas. Decimos que f es *plano* en un punto $x \in X$ si el homomorfismo $f_x^{\#} : \mathcal{O}_{Y,f(x)} \longrightarrow \mathcal{O}_{X,x}$ es plano; es decir, si el anillo local $\mathcal{O}_{X,x}$ es plano como $\mathcal{O}_{Y,f(x)}$-módulo. El morfismo f se denomina *morfismo plano* si es plano en todo punto de X.

Particularmente, si $A \longrightarrow B$ es un homomorfismo de anillos, entonces $\mathrm{Spec}(B) \longrightarrow \mathrm{Spec}(A)$ es plano si y sólo si $A \longrightarrow B$ es plano.

Definición 1.2. Un morfismo $f : X \longrightarrow Y$ de esquemas es *localmente de tipo finito* si existe una cubierta de Y por conjuntos abiertos afines $V_i = \mathrm{Spec}(B_i)$, tales que para cada i, $f^{-1}(V_i)$ puede ser cubierto por subconjuntos abiertos afines $U_{ij} = \mathrm{Spec}(A_{ij})$, donde cada A_{ij} es una B_i-álgebra finitamente generada. El morfismo f es de *tipo finito* si además cada $f^{-1}(V_i)$ puede ser cubierto por un número finito de U_{ij}.

Si tenemos un morfismo de tipo finito $X \longrightarrow Y$, entonces para cualquier $y \in Y$, la fibra $X(y)$ es una variedad algebraica sobre $k(y)$. Por lo tanto, podemos considerar a X como una familia de variedades algebraicas (posiblemente sobre diferentes campos) que está parametrizada por los punto de Y. Esta idea será fundamental para la comprensión del concepto de "deformación".

Definición 1.3. Sea k un campo. Un *k-esquema algebraico* es un esquema X sobre k tal que el morfismo estructural $X \longrightarrow \mathrm{Spec}(k)$ es de tipo finito. Un *k-esquema localmente algebraico* es un esquema sobre k tal que el morfismo estructural $X \longrightarrow \mathrm{Spec}(k)$ es localmente de tipo finito.

Definición 1.4. Sea X un k-esquema algebraico. Un diagrama cartesiano conmutativo de morfismos de esquemas

$$\eta : \begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{X} \arrow[d, "\pi"] \\ \mathrm{Spec}(k) \arrow[r, "s"'] & S \end{tikzcd}$$

donde el morfismo $X \longrightarrow \mathcal{X}$ denota a la inclusión, el morfismo π es plano y sobreyectivo, y S es conexo, se denomina *familia de deformaciones*, o simplemente *deformación*, de X parametrizada por S o sobre S. Denominamos a S y $\mathcal{X}$ el esquema de parámetros y el esquema total de la deformación, respectivamente.

Definición 1.5. Sean X un esquema y S un k-esquema algebraico.

1. Un punto $x \in X$ se denomina *racional* sobre k (o punto k-racional) si $k(x) = k$, donde $k(x) = \mathcal{O}_x/\mathfrak{m}_x$ es el campo residual de x.
2. Para cada punto k-racional $t \in S$, la fibra teórica del esquema $\mathcal{X}(t)$ es también denominada una deformación de X.

Sea k un campo algebraicamente cerrado. Consideremos las siguientes categorías de k-álgebras:

- $\mathcal{A}$ = Categoría de *k-álgebras localmente artinianas* con campo residual k.
- $\hat{\mathcal{A}}$ = Categoría de *k-álgebras noetherianas localmente completas* con campo residual k.
- $\mathcal{A}^*$ = Categoría de *k-álgebras localmente noetherianas* con campo residual k.

Notar que $\mathcal{A}$ es una subcategoría completa de $\mathcal{A}^*$.

Por ejemplo, sea k un campo algebraicamente cerrado y considere el anillo de polinomios $k[x]$. Se tiene que $k[x]$ es una k-álgebra noetheriana y por lo tanto, también es localmente noetheriana. Finalmente, como $\langle x \rangle$ es el ideal maximal de $k[x]$ asociado a 0_k, entonces su campo residual es

$$k(x) = \frac{k[x]_{\langle x \rangle}}{\langle x \rangle \, k[x]_{\langle x \rangle}} \cong k,$$

y por lo tanto, $k[x] \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A}^*)$. De manera más general, se tiene que el anillo de polinomios $k[x_1, ..., x_n] \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A}^*)$.

Definición 1.6. Sea η una deformación de X sobre S. Si $S = \mathrm{Spec}(A)$ con $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A}^*)$ y $s \in S$ es un punto cerrado, la deformación obtenida se denomina *familia local de deformaciones* o *deformación local* de X sobre A.

Una deformación η también se denota por (S, η) o (A, η) si $S = \mathrm{Spec}(A)$, donde A es un anillo.

Definición 1.7. Sea (A, η) una deformación local.

- La deformación (A, η) se denomina *infinitesimal* si $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$.
- La deformación (A, η) se denomina de *de primer orden* si $A = k[\varepsilon] = \frac{k[x]}{\langle x^2 \rangle}$.

De manera particular, toda deformación de primer orden es infinitesimal dado que $k[\varepsilon]$ es artiniano, y toda deformación infinitesimal es local porque $\mathcal{A}$ es subcategoría de $\mathcal{A}^*$. Así, al tener ejemplos de deformaciones de primer orden, también se tienen ejemplos de deformaciones infinitesimales y locales.

Una pregunta central al tener objetos geométricos es: ¿Qué tan distintos son entre ellos? Dicha pregunta tiene particular relevancia al hablar de deformaciones la cual se debe abordar. Dada otra deformación

$$\xi : \begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{Y} \arrow[d] \\ \mathrm{Spec}(k) \arrow[r] & S \end{tikzcd}$$

de X sobre S, un *isomorfismo de deformaciones* de ξ con η es un S-isomorfismo $\varphi : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$ que induce la identidad sobre X; es decir, tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ \mathcal{X} \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr] & & \mathcal{Y} \arrow[dl] \\ & S & \end{tikzcd}$$

Definición 1.8. Un *esquema punteado* es una pareja (S, s) donde S es un esquema y $s \in S$. Si K es un campo, denominamos a (S, s) como un *esquema K-punteado* si $K \cong k(s)$

Notar que para todo esquema X y todo esquema k-punteado (S, s) existe al menos una familia de deformaciones de X sobre S, denominada *familia producto*:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d] & X \times_k S \arrow[d, "p_2"] \\ \mathrm{Spec}(k) \arrow[r, "s"'] & S \end{tikzcd}$$

donde p_2 representa a la proyección en la segunda coordenada y $X \times_k S$ formalmente es $X \times_{\text{Spec}(k)} S$, pero debido a que Spec(k) consta de un único punto, entonces $X \times_k S$ es igual al producto cartesiano usual $X \times S$.

Definición 1.9. Una deformación de X sobre el esquema S se denomina *trivial* si es isomorfa a la familia producto. También se denomina *familia trivial* con fibra X.

Todas las fibras sobre puntos k-racionales de una deformación trivial de X parametrizado por un esquema algebraico son isomorfas a X. El recíproco es, falso en general. Existen deformaciones que son no triviales pero tienen fibras isomorfas sobre todos los puntos k-racionales.

Definición 1.10. Un esquema X se denomina *rígido* si toda deformación infinitesimal de X sobre A es trivial para todo $A \in Ob(\mathcal{A})$.

A las variedades no singulares, podemos caracterizarlas por medio de la rigidez. Si $T_X = \text{Hom}(\Omega^1_X, \mathcal{O}_X) = \text{Der}_k(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X)$ es la gavilla tangente de X, entonces:

Corolario 1.11. *[13, Corolario 1.2.15] Una variedad no singular X es rígida si y sólo si*

$$H^1(X, T_X) = 0.$$

Dada una deformación η de X sobre S como arriba y un morfismo de esquemas k-punteados $(S', s') \longrightarrow (S, s)$ se induce un diagrama conmutativo mediante cambio de base

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{X} \times_S S' \arrow[d] \\ \text{Spec}(k) \arrow[r] & S' \end{tikzcd}$$

donde si η' tiene correspondencia diagrama anterior, entonces η' es una deformación de X sobre S'.

Definición 1.12. Una deformación infinitesimal η, de un esquema X se denomina *localmente trivial* si todo punto $x \in X$ tiene una vecindad abierta $U_x \subseteq X$ tal que

$$\begin{tikzcd} U_x \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{X}|_{U_x} \arrow[d, "\pi"] \\ \text{Spec}(k) \arrow[r] & S \end{tikzcd}$$

es una deformación trivial de U_x.

1.2. Ejemplos de deformaciones

Se debe tener presente que el siguiente corolario para probar la planitud del morfismo “π” que se utilizará en el Ejemplo 1.14.

Corolario 1.13. *[4, Corolario 6.3] Sean A un dominio de ideales principales y M un A-módulo. Entonces, M es plano sobre A, si y sólo si, es libre de torsión.*

Ejemplo 1.14. La cuádrica $Q_t \subseteq \mathbb{A}^3$ con ecuación $xy - t = 0$ define, vía la proyección

$$\begin{array}{rccc} \pi : & \mathbb{A}^3 & \longrightarrow & \mathbb{A}^1 \\ & (x,y,t) & \longmapsto & t. \end{array}$$

una familia plana $Q_t \longrightarrow \mathbb{A}^1$ cuyas fibras son hipérbolas afines. Se tiene el siguiente diagrama de esquemas:

$$\eta : \quad \begin{tikzcd} Q_t \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{A}^3 \arrow[d, "\pi"] \\ \operatorname{Spec}(k) \arrow[r] & \mathbb{A}^1 \end{tikzcd}$$

Al ser π sobreyectivo y $\mathbb{A}^1$ conexo, sólo resta verificar que π es un morfismo plano para que η sea una deformación.

Se tiene que π como morfismo de esquemas está dado como sigue:

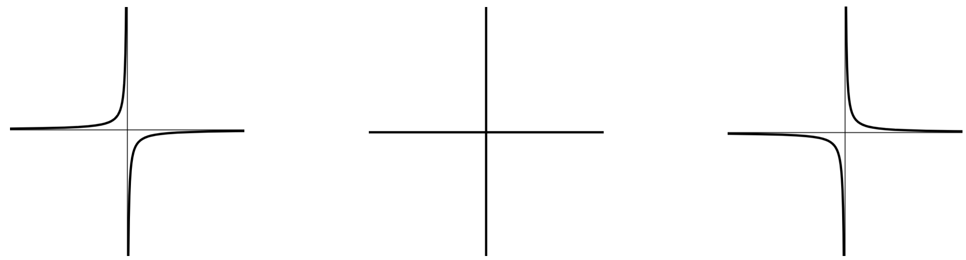
$$\pi : \ \operatorname{Spec}(k[a,b,c]) \longrightarrow \operatorname{Spec}(k[d])$$

Sea $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(k[a,b,c])$. Notar que, como k es campo, entonces $k[d]$ es dominio de ideales principales, por lo cual su localización $k[d]_{\pi(\mathfrak{p})} \cong \mathcal{O}_{\pi(\mathfrak{p})}$ lo es también. Ahora, como $k[a,b,c]_{\mathfrak{p}} \cong \mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$ es un $k[d]_{\pi(\mathfrak{p})}$-módulo libre de torsión, entonces por el Corolario 1.13, $k[a,b,c]_{\mathfrak{p}}$ es plano sobre $k[d]_{\pi(\mathfrak{p})}$. Así, η es una deformación local.

Notar que la fibra $Q_t(0) = xy$ es singular, mientras que si $s \neq 0$, la fibra $Q_t(s)$ no lo es, y por lo tanto, $Q_t(0) \ncong Q_t(s)$ siempre que $s \neq 0$. Así, consideremos la deformación trivial de Q_t dada por el diagrama

$$\zeta : \quad \begin{tikzcd} Q_t \arrow[r] \arrow[d] & Q_t \times \mathbb{A}^1 \arrow[d, "p_2"] \\ \operatorname{Spec}(k) \arrow[r] & \mathbb{A}^1 \end{tikzcd}$$

Si $s \in \mathbb{A}^1$ es distinto de cero, en la deformación ζ, una de sus fibras es $Q_t(0) \times \{s\}$ la cual es singular, mientras que respecto a la deformación η, tiene fibra igual a $Q_t(s)$ la cual es no singular. A partir de lo anterior no puede existir un isomorfismo $\varphi : \mathbb{A}^3 \longrightarrow Q_t \times \mathbb{A}^1$; es decir, la defomación η no es trivial.



(a) Fibra en $t < 0$ (b) Fibra en $t = 0$ (c) Fibra en $t > 0$

Figura 1.1: Algunas fibras de la deformación de la cuádrica

Definición 1.15. Sea C una curva suave. Una superficie S es *reglada* si es birracionalmente equivalente a $C \times \mathbb{P}^1$. Si $C = \mathbb{P}^1$, la superficie S se denomina *racional*. Una *superficie reglada geométricamente* sobre C es una superficie S, junto con un morfismo suave[1] $\pi : S \longrightarrow C$ cuyas fibras son isomorfas a $\mathbb{P}^1$.

En particular, toda superficie reglada es reglada geométricamente. Una clase particular de superficies regladas son las denominadas Superficies de Hirzebruch, las cuales son superficies regladas sobre $\mathbb{P}^1$ y fueron introducidas en 1951 por F. Hirzebruch en su tesis doctoral. Son superficies algebraicas sobre los números complejos y el interés en ellas proviene del resultado de Hirzebruch de que, como variedades complejas, son distintas por pares [ver Teorema 1.16], en tanto que únicamente hay dos tipos salvo difeomorfismo.

Para $n \geq 0$ un entero dado, la n-ésima *superficie de Hirzebruch* es la superficie:

$$\Sigma_n := \mathbb{P}_{\mathbb{P}^1}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(n)).$$

Aunque otra descripción menos técnica de las superficies de Hirzebruch es la siguiente:

$$\Sigma_n = \frac{(\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}) \times (\mathbb{C}^2 \setminus \{0\})}{\sim},$$

donde la relación $\sim$ está dada por la acción de $(\mathbb{C} \setminus \{0\})^2$ sobre $(\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}) \times (\mathbb{C}^2 \setminus \{0\})$ definida como sigue:

$$(\lambda, \mu)(s_0, s_1, t_0, t_1) \longmapsto (\lambda s_0, \lambda s_1, \lambda^n \mu t_0, \mu t_1),$$

donde $(\lambda, \mu) \in (\mathbb{C} \setminus \{0\})^2$, y además la proyección

$$\begin{array}{cccc} \pi : & \Sigma_n & \longrightarrow & \mathbb{P}^1 \\ & [s_0 : s_1 : t_0 : t_1] & \longmapsto & [s_0 : s_1] \end{array}$$

está bien definida y es un haz sobre $\mathbb{P}^1$.

[1] Sea Y un esquema localmente Noetheriano, y sea $f : X \longrightarrow Y$ un morfismo de tipo finito. Decimos que f es suave en un punto $x \in X$ si f es plano en x, y si $X(y) \longrightarrow \mathrm{Spec}(k(y))$ con $y = f(x)$ es suave en x, donde $X(y)$ representa la fibra del morfismo f sobre el punto y. Decimos que f es suave si es suave en todo punto de X.

Teorema 1.16. *[3, Proposición 4.1(3)] Las superficies de Hirzebruch Σ_n y Σ_m no son isomorfas, a menos que $n = m$.*

El hecho de que las superficies regladas geométricamente tengan asociado un morfismo suave resulta de una gran utilidad debido a que todo morfismo suave es autómaticamente plano. Lo anterior lo hacemos constatar en el siguiente ejemplo de una deformación a través de superficies de Hirzebruch.

Ejemplo 1.17. Para un entero $n \geq 0$, considere la superficie de Hirzebruch Σ_n. Se tiene así, por la descripción de las superficies de Hirzebruch, el siguiente diagrama de esquemas:

$$\eta : \quad \begin{tikzcd} \mathbb{P}^1 \arrow[r] \arrow[d] & \Sigma_n \arrow[d, "\pi"] \\ \mathrm{Spec}(k) \arrow[r] & \mathbb{P}^1 \end{tikzcd}$$

Se tiene que $\mathbb{P}^1$ es conexo, además, notar que por la descripción de Σ_n mediante la acción de $(\mathbb{C} \setminus \{0\})^2$ sobre $(\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}) \times (\mathbb{C}^2 \setminus \{0\})$, el morfismo π es sobreyectivo. Luego, como Σ_n es isomorfa a una superficie reglada geométricamente, entonces el morfismo $\pi : \Sigma_n \longrightarrow \mathbb{P}^1$ es un morfismo suave y por lo tanto, plano. Así, el morfismo estructural $\pi : \Sigma_n \longrightarrow \mathbb{P}^1$ define una familia plana, cuyas fibras son todas isomorfas a $\mathbb{P}^1$, y por lo tanto, η en efecto es una deformación local.

Finalmente, probemos que η no es una deformación trivial. Sea ζ la deformación trivial de $\mathbb{P}^1$ mediante la familia producto $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, la cual es justamente la superficie de Hirzebruch Σ_0. Así, tenemos el diagrama siguiente:

$$\zeta : \quad \begin{tikzcd} \mathbb{P}^1 \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \arrow[d, "p_2"] \\ \mathrm{Spec}(k) \arrow[r] & \mathbb{P}^1 \end{tikzcd}$$

Observar que si la deformación η es trivial, entonces $\Sigma_n \cong \Sigma_0$, pero si $n > 0$ entonces por el Teorema 1.16, Σ_n y Σ_0 no son isomorfas, y por lo tanto, η es una deformación no trivial.

Capítulo 2

Intersecciones Completas

2.1. Intersecciones Completas

Definición 2.1. Sean A un anillo conmutativo y M un A-módulo. Una *M-sucesión regular* es una sucesión $r_1, r_2, ..., r_n \in A$ tal que:

1. El elemento r_1 no es un divisor de cero de M,
2. Para todo $i > 1$, el elemento r_i no es un divisor de cero de $M/\langle r_1, ..., r_{i-1}\rangle M$,
3. $M \neq \langle r_1, ..., r_n\rangle M$.

Si tomamos a A como un A-módulo y A es un anillo local Noetheriano, entonces la regularidad de la sucesión es independiente del orden. En lo posterior, a menos que se indique lo contrario, sin pérdida de generalidad, nos referiremos a las M-sucesiones regulares simplemente como sucesiones regulares.

Definición 2.2. Una *inmensión cerrada* es un morfismo $f : X \longrightarrow Y$ de esquemas tal que f induce un homeomorfismo de $sp(X)$[1] sobre un subconjunto cerrado de $sp(Y)$, y además, el mapeo inducido $f^{\#} : \mathcal{O}_Y \longrightarrow f_*\mathcal{O}_X$ de gavillas sobre Y es sobreyectivo.

Un ejemplo de lo anterior es el morfismo inclusión Spec(A/J) $\longrightarrow$ Spec(A) inducido por el morfismo canónico $A \longrightarrow A/J$, donde A es un anillo y J es un ideal de A.

Definición 2.3. Una inmersión cerrada $\mathfrak{j} : X \hookrightarrow Y$ de esquemas es un *encaje regular* de codimensión $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ en el punto $x \in X$ si $\mathfrak{j}(x)$ tiene una vecindad abierta afín $\mathrm{Spec}(R)$ en Y tal que el ideal de $\mathfrak{j}(X) \cap \mathrm{Spec}(R)$ en R puede ser generado por una sucesión regular de longitud n. Si $\mathfrak{j}$ es un encaje que es regular en todo punto del esquema X, se dice que $\mathfrak{j}$ es un encaje regular de codimensión n.

Por ejemplo, si tenemos esquemas X e Y, entonces:

- Un encaje abierto es un encaje regular de codimensión cero.

[1] $sp(X)$ representa a X simplemente como espacio topológico.

- Si X e Y son ambos no singulares, entonces $X \hookrightarrow Y$ es un encaje regular.
- El conjunto de puntos de X donde un encaje $X \hookrightarrow Y$ es regular, es abierto.

Definición 2.4. Sea A un anillo conmutativo Noetheriano.

1. El anillo A se denomina *anillo local regular* si es un anillo local tal que el número mínimo de generadores de su ideal máximal $\mathfrak{m}$ es igual a la dimensión de Krull de A.
2. El anillo A se denomina *anillo regular* si su localización en todo ideal primo es un anillo local regular.

La propiedad de ser anillo regular es una propiedad local sobre los anillos locales.

Teorema 2.5. *[10, Teorema 19.3] Si A es un anillo local regular, entonces $A_{\mathfrak{p}}$ es un anillo regular para todo $\mathfrak{p} \in Spec(A)$.*

Algunos ejemplos de anillos locales regulares son los siguientes:

- Todo campo k es un anillo local regular y también regular.
- Si A es un anillo regular, entonces $A[x]$ y $A[[x]]$ también lo son [10, Teorema 19.4]. De manera particular, si k es un campo y $n \in \mathbb{N}$, entonces el anillo de polinomios $k[x_1, ..., x_n]$ es un anillo regular y por lo tanto, localmente regular.
- Cualquier anillo de valuación discreta es un anillo local regular de dimensión uno y los anillos locales regulares de dimensión uno son exactamente los anillos de valuación discreta.

Definición 2.6. Un anillo A se denomina *anillo de intersección completa* si $\mathrm{Spec}(A)$ admite un encaje regular en $\mathrm{Spec}(R)$, donde R es un anillo regular. Si X es un esquema tal que $X = \mathrm{Spec}(A)$ con A un anillo de intersección completa, entonces X es denominado una intersección completa.

Para una mejor compresión de este concepto de anillo de intersección completa, se tiene el siguiente ejemplo básico a partir de los números duales:

Ejemplo 2.7. Sean $R = k[x]$ y $A = k[x]/\langle x^2\rangle$. Notar que un ideal primo $\overline{\mathfrak{p}} \in \mathrm{Spec}(A)$ corresponde a un ideal primo $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)$ que contiene a $\langle x^2\rangle$. El único ideal primo de $\mathrm{Spec}(R)$ que cumple lo descrito anteriormente es justamente el ideal $\mathfrak{p} = \langle x\rangle$, y por lo tanto, $\mathrm{Spec}(A) = \{\langle\overline{x}\rangle\}$.

El morfismo canónico $k[x] \longrightarrow k[x]/\langle x^2\rangle$ nos induce la inmersión cerrada siguiente:

$$\mathfrak{j} : \mathrm{Spec}\left(\frac{k[x]}{\langle x^2\rangle}\right) \hookrightarrow \mathrm{Spec}(k[x])$$

tal que $\overline{\mathfrak{p}} = \langle \overline{x} \rangle \longmapsto \langle x \rangle$. Para $\overline{\mathfrak{p}} \in \operatorname{Spec}(k[x]/\langle x^2 \rangle)$ el único ideal primo de A, tomemos la vecindad abierta afín $V = \operatorname{Spec}(k[x])$ de $\mathfrak{j}(\overline{\mathfrak{p}})$. Entonces

$$\mathfrak{j}\left(\operatorname{Spec}\left(\frac{k[x]}{\langle x^2 \rangle}\right)\right) \cap \operatorname{Spec}(k[x]) = \{\mathfrak{p}\}$$

Ahora, como $\{x\}$ nos da una sucesión regular de longitud uno en $k[x]$ y además genera al ideal $\langle x \rangle$, entonces $\mathfrak{j}$ es un encaje regular de codimensión uno, y por lo tanto, el anillo $A = k[x]/\langle x^2 \rangle$ es un anillo de intersección completa.

Una manera menos general de concebir a los anillos de intersección completa en concordancia con el Teorema 2.8 es la siguiente: Se dice que un anillo A es un anillo de intersección completa si existe un anillo regular S y una S-sucesión regular $x_1, ..., x_n$ tal que $A \cong S/\langle x_1, ..., x_n \rangle$. Además, se dirá que A es una intersección local completa si lo anterior se satisface para $A_{\mathfrak{m}}$, donde $\mathfrak{m}$ es un ideal maximal de A.

Teorema 2.8. *[10, Teorema 21.2] Sea A un anillo local Noetheriano. Si A es un anillo de intersección completa y R es un anillo local regular tal que $A \cong R/\mathfrak{a}$ con $\mathfrak{a}$ un ideal de R, entonces $\mathfrak{a}$ está generado por una R-sucesión regular. Recíprocamente, si $\mathfrak{a}$ es un ideal generado por una R-sucesión regular, entonces $R/\mathfrak{a}$ es un anillo de intersección completa.*

Se debe tener un particular cuidado al usar la definición y el teorema previos en las frases *"si existe un anillo regular S y una S-sucesión regular"* y *"el ideal $\mathfrak{a}$ está generado por una R-sucesión regular"*, respectivamente. Se puede tener un anillo cociente de polinomios $A = R/I$ donde I tenga demasiados generadores y esto lleve a pensar que A claramente no sea una intersección completa. A continuación un ejemplo que muestra que esto no es siempre cierto.

Ejemplo 2.9. Considere los anillos $R = k[x, y, z]$ y $A = k[x, y, z]/\langle x^2, y^2, xz, yz, z^2 - xy \rangle$. Si $\overline{\mathfrak{p}} \in \operatorname{Spec}(A)$, entonces tiene correspondencia por un ideal primo $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R)$ tal que $\mathfrak{p} \supseteq \langle x^2, y^2, xz, yz, z^2 - xy \rangle$. Al tomar radicales se tiene que

$$\langle x, y, z \rangle = \sqrt{\langle x^2, y^2, xz, yz, z^2 - xy \rangle} \subseteq \sqrt{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p}.$$

Ahora, como el ideal $\langle x, y, z \rangle$ es maximal, entonces $\mathfrak{p} = \langle x, y, z \rangle$ y por lo tanto, $\operatorname{Spec}(A) = \{\overline{\mathfrak{p}}\}$. Considere la inmersión cerrada

$$\mathfrak{j} : \operatorname{Spec}(A) \hookrightarrow \operatorname{Spec}(R)$$

tal que $\overline{\mathfrak{p}} \longmapsto \mathfrak{p}$. Si se considera a $V = \operatorname{Spec}(R)$ como vecindad de $\mathfrak{j}(\overline{\mathfrak{p}})$, entonces

$$\mathfrak{j}(\operatorname{Spec}(A)) \cap \operatorname{Spec}(R) = \{\mathfrak{p}\},$$

y como $\{x, y, z\}$ claramente es una sucesión regular de longitud 3, entonces $\mathfrak{j}$ es un encaje regular de codimensión 3. Así, el anillo A es de intersección completa, a pesar de que por el número de generadores del ideal $\langle x^2, y^2, xz, yz, z^2 - xy \rangle$ se llegara a pensar que no es así.

El concepto de “intersección completa” puede traducirse de un sentido puramente algebraico a uno geométrico, el cual es el siguiente:

Definición 2.10. Una variedad X de dimensión m en $\mathbb{P}^n$ es una *intersección completa* si su ideal homogéneo $I(X)$ es generado por $n-m$ elementos.

En este sentido, si $X \subseteq \mathbb{P}^n$ es una variedad de dimensión m, entonces existen $n-m$ polinomios homogéneos f_i con $1 \leq i \leq n-m$ que generan a todos los demás polinomios homogéneos que se anulan en X. Geométricamente, cada polinomio f_i define una hipersuperficie y la intersección de estas hipersuperficies debe ser exactamente X. La intersección de $n-m$ hipersuperficies siempre tiene dimensión mayor o igual a m en campos algebraicamente cerrados. La pregunta esencial es: ¿Podemos reducir la dimensión a m, sin puntos adicionales en la intersección?

Esta condición es bastante difícil de verificar si la codimensión $n-m \geq 2$. Si $n-m=1$, entonces X es una hipersuperficie y no hay nada más que probar. Para motivar la definición anterior, tenemos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.11. Consideremos la curva cuártica $C_0 \subseteq \mathbb{P}^3$ con un punto doble en $[1:0:0:0]$. Para ser específicos, sea C_0 la imagen del mapeo

$$\begin{array}{rccc} f\colon & \mathbb{P}^1 & \longrightarrow & \mathbb{P}^3 \\ & [s:t] & \longmapsto & [s^4-t^4 : s^3t : s^2t^2 : st^3], \end{array}$$

y definimos $[x:y:z:w] := [s^4-t^4 : s^3t : s^2t^2 : st^3]$.

Sea $\mathfrak{p} = \langle z^2-yw, y^2-xz-w^2\rangle$, de donde se obtiene que $C_0 = V(\mathfrak{p})$. Además, como $\mathbb{P}^1$ es ireducible y f es polinómica, entonces C_0 es irreducible, por lo cual, $\mathfrak{p} \in Proj(k[x,y,z,w])$. Así, por la versión proyectiva del Teorema de los ceros de Hilbert, se tiene que $\mathfrak{p} = I(C_0)$. Más aún, como C_0 es una curva, entonces $\operatorname{codim}(C_0) = 2$. Por lo tanto, como $I(C_0)$ es generado por dos elementos, entonces, en efecto, C_0 es una intersección completa en el sentido definido anteriormente.

Si bien la Definición 2.10 de “intersección completa” esta dada para variedades en un espacio proyectivo, esta se traduce de manera completamente análoga al centrarse en variedades en un espacio afín.

Por otro lado, tal como en el caso de los anillos regulares, el ser intersección completa es una propiedad local si se trabaja con anillos locales Noetherianos.

Teorema 2.12. *[7, Teorema 4.3.9] Sean $(A,\mathfrak{m})$ un anillo local Noetheriano y $\mathfrak{p} \in Spec(A)$. Si A es un anillo de intersección completa, entonces $A_{\mathfrak{p}}$ es un anillo de intersección completa.*

2.2. Intersecciones Localmente Completas

Definición 2.13. Un esquema X es una intersección local completa si todo anillo local $\mathcal{O}_{X,x}$ es un anillo de intersección completa. Si $X = \operatorname{Spec}(A)$, donde A es un anillo, entonces A se denomina anillo de intersección local completa.

Como implicación del Teorema 2.12 se tiene que todo anillo local Noetheriano que es un anillo de intersección completa es también un anillo de intersección local completa.

De lo anterior, el anillo

$$A = \frac{k[x]}{\langle x^2 \rangle}$$

es un anillo de intersección local completa, dado que A es un anillo local Noetheriano y es de intersección completa. Lo mismo se tiene para el anillo A del Ejemplo 2.9.

Ejemplo 2.14. Sean $A = k[x,y]/\langle y - x^2, x^3 \rangle$ y $X = \operatorname{Spec}(A)$. Veamos que X es una intersección local completa.

Sea $\overline{\mathfrak{p}} \in X$ y tomemos el anillo local

$$\mathcal{O}_{\overline{\mathfrak{p}}} \cong \left(\frac{k[x,y]}{\langle y - x^2, x^3 \rangle} \right)_{\overline{\mathfrak{p}}}$$

Como $\overline{\mathfrak{p}} \in X$, entonces tiene correspondencia con un ideal $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(k[x,y])$, el cual satisface que $\langle y - x^2, x^3 \rangle \subseteq \mathfrak{p}$. Al tomar radicales se tiene que

$$\langle y, x \rangle = \sqrt{\langle y - x^2, x^3 \rangle} \subseteq \sqrt{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p}.$$

Ahora, como $\langle x, y \rangle$ es un ideal maximal, entonces $\mathfrak{p} = \langle x, y \rangle$, de donde se obtiene que $\overline{\mathfrak{p}} = \langle \overline{x}, \overline{y} \rangle$. Lo anterior implica también que $\operatorname{Spec}(A) = \{\overline{\mathfrak{p}}\}$, y por lo tanto, $\operatorname{Spec}(A_{\overline{\mathfrak{p}}}) = \{\overline{\mathfrak{p}}_{\overline{\mathfrak{p}}}\} = \{\hat{\mathfrak{p}}\}$.

Tomemos la inmersión cerrada

$$\mathfrak{j} : \operatorname{Spec}(A_{\overline{\mathfrak{p}}}) \hookrightarrow \operatorname{Spec}(k[x,y]),$$

tal que $\hat{\mathfrak{p}} \longmapsto \mathfrak{p}$. Elegimos $V = \operatorname{Spec}(k[x,y])$ vecindad abierta afín del punto $\mathfrak{j}(\hat{\mathfrak{p}})$. Entonces

$$\mathfrak{j}(\operatorname{Spec}(A_{\overline{\mathfrak{p}}})) \cap \operatorname{Spec}(k[x,y]) \quad = \quad \{\mathfrak{p}\}.$$

Claramente $\{x, y\}$ genera al ideal $\mathfrak{p} = \langle x, y \rangle$ y además, x no es divisor de cero en $k[x,y]$ e y no es divisor de cero en $k[x,y]/\langle x \rangle \cong k[y]$; es decir, $\{x, y\}$ es una sucesión regular de longitud dos en $k[x,y]$, y por lo tanto, $\mathfrak{j}$ es un encaje regular de codimensión dos. Además, como $k[x,y]$ es un anillo regular por ser un anillo local regular, entonces el anillo local $\mathcal{O}_{\overline{\mathfrak{p}}}$ es un anillo de intersección completa, lo que a su vez implica que X es una intersección local completa.

Lema 2.15. *Sea A un anillo Noetheriano. Entonces A es un anillo de intersección local completa si y sólo si $A_{\mathfrak{m}}$ es un anillo de intersección completa para todo ideal maximal $\mathfrak{m}$ de A.*

La *dimensión local* de una variedad X en un punto $p \in X$, denotado por $\dim_p(X)$, es el máximo de las dimensiones de las componentes irreducibles de X que contienen a p, o equivalentemente, es la dimensión de anillo cociente del anillo local $\mathcal{O}_{X,p}$. Particularmente, si X es una variedad irreducible, entonces $\dim_p(X) = \dim(X)$ para todo $p \in X$.

De manera similar al concepto de anillo de intersección local completa, teniendo presente la noción de dimensión local de una variedad, podemos definir el concepto de intersección local completa en variedades, el cual guarda gran similitud con el concepto algebraico.

Definición 2.16. Una variedad cuasi proyectiva $X \subseteq \mathbb{P}^n$ que tiene dimensión local m en un punto $p \in X$ es una intersección local completa en p si existe una vecindad afín U de p en $\mathbb{P}^n$ tal que el ideal de $U \cap X$ en $A(U)$ es generado por $n - m$ elementos. Una variedad X es una *intersección local completa* si lo es en todo punto de $p \in X$.

Ejemplo 2.17. Veamos que la curva cuártica C_0 definida en el Ejemplo 2.11 es una intersección local completa.

Sea $p \in C_0$. Notar que, como C_0 es irreducible, entonces $\dim_p(C_0) = \dim(C_0) = 1$. Ahora, recordar que $\mathbb{P}^3$ tiene una cubierta por abiertos afines; esto es:

$$\mathbb{P}^3 = U_x \cup U_y \cup U_z \cup U_w.$$

Así, tenemos los siguientes casos:

- Si $p \in U_x$, entonces el ideal $U_x \cap C_0$ en $A(U_x)$ es igual a $\langle z^2 - yw, y^2 - z - w^2 \rangle$.
- Si $p \in U_y$, entonces el ideal $U_y \cap C_0$ en $A(U_y)$ es igual a $\langle z^2 - w, 1 - xz + w^2 \rangle$.
- Si $p \in U_z$, entonces el ideal $U_z \cap C_0$ en $A(U_z)$ es igual a $\langle 1 - yw, y^2 - x - w^2 \rangle$.
- Si $p \in U_w$, entonces el ideal $U_w \cap C_0$ en $A(U_w)$ es igual a $\langle z^2 - y, y^2 - xz - 1 \rangle$.

En cualquier caso, el ideal respectivo está generado por dos elementos, y por lo tanto, C_0 es una intersección local completa en el sentido anterior definido.

Ejemplo 2.18. De manera más general se tiene lo siguiente:

- Un esquema no singular X; es decir, un esquema tal que todos sus anillos locales son regulares, es una intersección local completa.
- Si $X \hookrightarrow Y$ es un encaje regular e Y es una intersección local completa, entonces X es también una intersección local completa.

Capítulo 3

Deformaciones de Intersecciones Completas

3.1. Deformaciones de k-álgebras

Sea B_0 una k-álgebra, y sea $X_0 = \mathrm{Spec}(B_0)$. Considere una deformación infinitesimal de X_0 parametrizada por $\mathrm{Spec}(A)$ con $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$. Por definición, tenemos un diagrama cartesiano conmutativo:

$$\begin{tikzcd} X_0 \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{X} \arrow[d] \\ \mathrm{Spec}(k) \arrow[r] & \mathrm{Spec}(A) \end{tikzcd}$$

donde $\mathcal{X} \longrightarrow \mathrm{Spec}(A)$ es un morfismo plano. Por [13, Lema 1.2.3], $\mathcal{X}$ debe ser necesariamente afín. Por lo tanto, de manera equivalente, se puede hablar de deformaciones infinitesimales de la k-álgebra B_0 sobre A como un diagrama cartesiano de k-álgebras:

$$\begin{tikzcd} B_0 & B \arrow[l] \\ k \arrow[u] & A \arrow[l] \arrow[u] \end{tikzcd}$$

donde el morfismo $A \longrightarrow B$ es plano. Notar que el diagrama anterior es equivalente a dar un morfismo $A \longrightarrow B$ plano y un k-isomorfismo $B \otimes k \longrightarrow B_0$. Por lo tanto, abreviaremos llamando a $A \longrightarrow B$ a la deformación.

Dada otra deformación de $A \longrightarrow B'$ de B_0 sobre A, un isomorfismo de deformaciones entre $A \longrightarrow B$ y $A \longrightarrow B'$ es un isomorfismo de A-álgebras $\varphi : B \longrightarrow B'$ que induce un diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} & B_0 & \\ B \arrow[ur] \arrow[rr, "\varphi"] & & B' \arrow[ul] \\ & A \arrow[ul] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Además, análogamente al caso de esquemas, una deformación infinitesimal de B_0 sobre A se dice trivial si es isomorfa a la deformación producto:

$$\begin{tikzcd} B_0 & B_0 \otimes_k A \arrow[l] \\ k \arrow[u] & A \arrow[l] \arrow[u] \end{tikzcd}$$

Y como es de esperar, la cuestión de que una deformación de k-álgebras sea rígida depende directamente de la rígidez a nivel de esquemas.

Definición 3.1. La k-álgebra B_0 se denomina rígida si $\mathrm{Spec}(B_0)$ es rígido.

En este aspecto, podemos caracterizar a las k-álgebras rígidaz por medio de la cuestión de las singularidades que se tiene al subir al nivel de esquemas considerando $\mathrm{Spec}(B_0)$ tal como con el Corolario 1.11.

Teorema 3.2. *[13, Teorema 1.2.4] Toda k-álgebra suave es rígida. En particular, toda variedad algebraica afín no singular es rígida.*

Ejemplo 3.3. Considere la parábola con ecuación $f = cy - x^2$, donde $c \in k \setminus \{0\}$. En este caso se tiene la k-álgebra

$$B_0 = \frac{k[x, y]}{\langle cy - x^2 \rangle}.$$

Entonces $\nabla f = (-2x, c)$ el cual siempre es distinto de cero, y por lo tanto, la k-álgebra B_0 es suave, y por lo tanto, no tiene deformaciones no triviales. Sin embargo, si se considera a la k-álgebra

$$B_0 = \frac{k[x, y, t]}{\langle ty - x^2 \rangle},$$

donde $g = ty - x^2$, entonces $\nabla g = (-2x, t, y)$. Luego, debido a que $\nabla g(p) = 0$ si y sólo si $p = (0, 0, 0)$, el cual satisface la ecuación g, entonces p es una singularidad. Así, B_0 no es suave y por lo tanto, tiene deformaciones no triviales.

Si X es un esquema algebraico, entonces para todo $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$, definimos

$$\mathrm{Def}_X(A) := \{\text{deformaciones de } X \text{ sobre } A\}/\text{isomorfismo}$$

Si $X = \mathrm{Spec}(B_0)$ es afín, usualmente se escribe Def_{B_0} en lugar de Def_X.

Proposición 3.4. *[13, Proposición 3.1.1] Existe un isomorfismo natural*

$$Def_{B_0}(k[\varepsilon]) \cong T^1_{B_0},$$

donde la clase de las deformaciones triviales tienen correspondencia con $0 \in T^1_{B_0}$*, con* $T^1_{B_0}$ *el primer módulo cotangente de* B_0*.*

De manera particular, lo anterior implica que $T^1_{B_0} = 0$ si y sólo si B_0 es rígida. Así, si $T^1_{B_0} \neq 0$, entonces existen deformaciones de primer orden no triviales de B_0. En [13, Sección 3.1] se describe de forma explícita cómo calcular en la práctica $T^1_{B_0}$ si B_0 es esencialmente de tipo finito[1]. En resumen, si $B_0 = P/J$, donde P es una k-álgebra suave de la forma

$$P = S^{-1}k[x_1, ...x_d]$$

para algún sistema multiplicativo $S \subseteq k[x_1, ..., x_d]$ y $J \subseteq P$ un ideal, entonces si $J = \langle f_1, ..., f_n \rangle$ es generado por una sucesión regular, se tiene que

$$T^1_{B_0} \cong \frac{P^n}{\left\langle \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} \end{pmatrix}, ..., \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_d} \\ \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_d} \end{pmatrix} \right\rangle} \otimes_P B_0$$

En particular, para hipersuperficies, si $B_0 = P/\langle f \rangle$, entonces

$$T^1_{B_0} \cong \frac{P}{\left\langle f, \frac{\partial f}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial f}{\partial x_d} \right\rangle}$$

Notar que en la descripción del caso de hipersuperficies, si $S = \{1\}$, entonces $P = k[x_1, ..., x_d]$, y por lo tanto,

$$T^1_{B_0} \cong \frac{k[x_1, ..., x_d]}{\left\langle f, \frac{\partial f}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial f}{\partial x_d} \right\rangle}$$

Así, de la descripción previa se tiene que la hipersuperficie $V(f)$ es rígida si y sólo si $V(f)$ es no singular. En efecto, si $V(f)$ es rígida, entonces $T^1_{B_0} = 0$, donde $V(f) = \mathrm{Spec}(B_0)$. Por lo anterior, existen $g, g_1, ..., g_d \in R = k[x_1, ..., x_d]$ tales que

$$1_R = \sum_{i=1}^{d} g_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + gf.$$

[1] Un morfismo de anillos $A \longrightarrow B$ se denomina "esencialmente de tipo finito" si B es una localización de una A-álgebra de tipo finito. También se dice que B es un anillo esencialmente de tipo finito sobre A. Por ejemplo, todo anillo de polinomios en d variables con coeficientes sobre un campo k es un anillo esencialmente de tipo finito sobre él mismo al localizar por el elemento $1 \in k$.

Ahora, si $V(f)$ fuera singular, existiría $x \in V(f)$ tal que $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = 0$ para toda $i \in \{1, ..., d\}$, y por lo tanto,

$$1 = 1_R(x) = \sum_{i=1}^{d} g_i(x) \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) + g(x) f(x) = 0$$

lo cual no es posible y entonces se tiene que $V(f)$ es no singular.

Recíprocamente, veamos que si $V(f)$ es no singular, entonces $V(f)$ es rígida. De manera equivalente supongamos que $V(f)$ no es rígida y probemos que $V(f)$ es singular. Como $V(f)$ es rígida, entonces $T^1_{B_0} \neq 0$, y por lo tanto, $\left\langle f, \frac{\partial f}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial f}{\partial x_d} \right\rangle \subsetneq k[x_1, ..., x_d]$. Así, debe existir un ideal maximal $\mathfrak{m} \subseteq k[x_1, ..., x_d]$ tal que $\left\langle f, \frac{\partial f}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial f}{\partial x_d} \right\rangle \subseteq \mathfrak{m}$. Luego, por el Teorema de los ceros de Hilbert, al ideal maximal $\mathfrak{m}$ le corresponde un único punto $p \in \mathbb{A}^d$, lo cual implica que para todo $i \in \{1, ..., d\}$ se tiene que $\frac{\partial f}{\partial x_i}(p) = 0$. Es decir, p es un punto singular en $V(f)$, y por lo tanto, la hipersuperficie es singular.

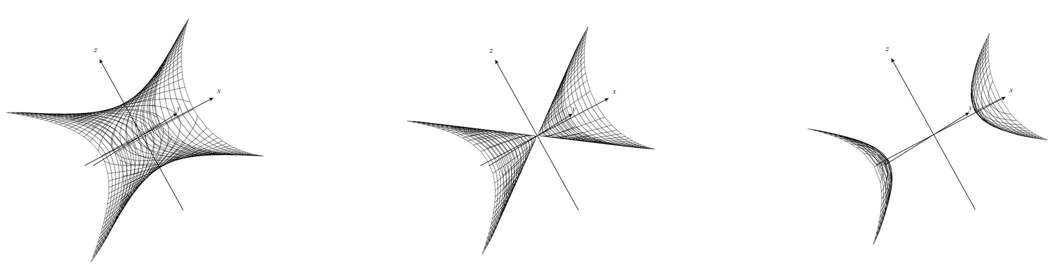
Ejemplo 3.5. Considerar el cono 3-dimensional $\mathcal{C}_0$ con ecuación $f = z^2 - xy$. En este caso se tiene la k-álgebra

$$B_0 = \frac{k[x, y, z]}{\langle z^2 - xy \rangle}$$

la cual es de intersección completa por ser $\mathcal{C}_0$ una hipersuperficie. Si además, se supone que $\mathrm{char}(k) \neq 2$, entonces el primer módulo cotangente de B_0 está dado por:

$$T^1_{B_0} \cong \frac{k[x, y, z]}{\langle z^2 - xy, -y, -x, 2z \rangle} \cong \frac{k[z]}{\langle z^2, 2z \rangle} \cong \frac{k[z]}{\langle z \rangle} \cong k.$$

debido a que $\langle z^2 \rangle \subseteq \langle 2z \rangle = \langle z \rangle$. Entonces, como $T^1_{B_0} \neq 0$, por la Proposición 3.4, el cono $\mathcal{C}_0$ tiene deformaciones de primer orden no triviales. Por ejemplo, una deformación de primer orden del cono está determinada en $\mathbb{A}^4$ por la familia: $\mathcal{C}_t := z^2 - xy + t = 0$.



(a) Fibra en $t < 0$ (b) Fibra en $t = 0$ (c) Fibra en $t > 0$

Figura 3.1: Algunas fibras de la deformación del cono 3-dimensional

Ejemplo 3.6. Retomando el Ejemplo 3.3, se tiene que si $B_0 = k[x,y]/\langle cy - x^2\rangle$ con $c \in k \setminus \{0\}$, entonces

$$T^1_{B_0} \cong \frac{k[x,y]}{\langle cy - x^2, -2x, c\rangle} \cong 0,$$

dado que $c \in \langle cy - x^2, -2x, c\rangle$ es una unidad. En este caso se tiene que, como $T^1_{B_0} = 0$, entonces B_0 es rígida.

Por otro lado, si $B_0 = k[x,y,t]/\langle ty - x^2\rangle$, entonces

$$T^1_{B_0} \cong \frac{k[x,y,t]}{\langle ty - x^2, -2x, t, y\rangle} \cong \frac{k[x]}{\langle x^2, 2x\rangle} \cong \frac{k[x]}{\langle x\rangle} \cong k,$$

debido a que $\langle 2x\rangle = \langle x\rangle$ y $\langle x^2\rangle \subseteq \langle x\rangle$. En este caso, como $T^1_{B_0} \cong k$, entonces B_0 no es rígida.

Tal como en la observación de que una hipersuperficie es rígida si y sólo si es no singular, tenemos el siguiente resultado similar para el caso de intersecciones completas:

Proposición 3.7. *[13, Proposición 3.1.3] Un anillo B_0 de intersección completa esencialmente de tipo finito tal que Spec(B_0) es singular, no es rígido.*

Ejemplo 3.8. Considerar la curva nodal $\mathcal{N}_0$ definida por la ecuación $f = y^2 - x^3 - x^2$. Se tiene la k-álgebra

$$B_0 = \frac{k[x,y]}{y^2 - x^3 - x^2}$$

el cual es un anillo de intersección completa (por ser hipersuperficie) esencialmente de tipo finito. Entonces si $\mathrm{char}(k) \neq 2$,

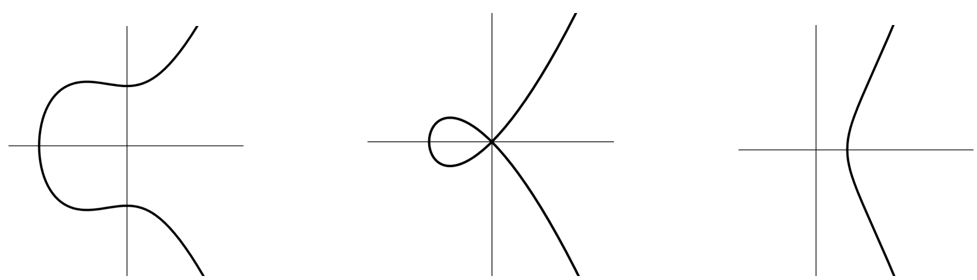
$$T^1_{B_0} \cong \frac{k[x,y]}{\langle y^2 - x^3 - x^2, -3x^2 - 2x, 2y\rangle} \cong \frac{k[x]}{\langle x^3 + x^2, 3x^2 + 2x\rangle}.$$

Luego, como $x^2 = 3(x^3 + x^2) - x(3x^2 + 2x)$, entonces $x^2 \in \langle x^3 + x^2, 3x^2 + 2x\rangle$, y por lo tanto,

$$T^1_{B_0} \cong \frac{k[x]}{\langle x^3 + x^2, 3x^2 + 2x\rangle} \cong \frac{k[x]}{\langle 2x\rangle} \cong \frac{k[x]}{\langle x\rangle} \cong k.$$

Por lo tanto, la curva nodal $\mathcal{N}_0$ tiene deformaciones de primer orden no triviales. Una deformación de primer orden de la curva nodal está determinada en $\mathbb{A}^3$ por la familia:

$$\mathcal{N}_t := y^2 - x^3 - x^2 + t = 0.$$



(a) Fibra en $t < 0$ (b) Fibra en $t = 0$ (c) Fibra en $t > 0$

Figura 3.2: Algunas fibras de la deformación de la curva nodal

Bibliografía

[1] M. Artin, *Lectures on Deformations of Singularities*, The Tata Institute of Fundamental Research, (1976).

[2] W. P. Barth, K. Hulek, C. A. M. Peters, A. Van de Ven, *Compact Complex Surfaces*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Vol 4, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, (2004).

[3] A. Beauville, *Complex Algebraic Surfaces*, London Mathematical Society, Student Texts. 34, Cambridge University Press, (1996).

[4] D. Eisenbud, *Commutative Algebra with a View Toward Algebraic Geometry*, Graduate Texts in Mathematics 150, Springer-Verlag New York, (1995).

[5] G.M. Greuel, C. Lossen, E. Shustin, *Introduction to Singularities and Deformations*, Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, (2007).

[6] J. Harris, *Algebraic Geometry. A First Course*, Graduate Texts in Mathematics 133, Springer-Verlag New York, (1992).

[7] J. Majadas, A. G. Rodicio, *Smoothness, Regularity and Complete Intersection*, London Mathematical Society, Lecture Notes Series 373, Cambridge University Press, (2010).

[8] M. Manetti, *Lectures on deformations of complex manifolds*, Rend. Mat. Appl. (7), 24, (2004).

[9] H. Matsumura, *Commutative Algebra*, Mathematics Lecture Note Series, New York, W.A. Benjamin, (1970).

[10] H. Matsumura, *Commutative Ring Theory*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, Cambridge University Press, (1987)

[11] Q. Liu, *Algebraic Geometry and Arithmetic Curves*, Oxford Graduate Texts in Mathematics 6, Oxford University Press Inc., New York, (2002)

[12] M. Schlessinger, *Funtors of Artin Rings*, Transactions of the American Mathematical Society, Vol. 130, No. 2, pp. 208-222, (1968).

[13] E. Sernesi, *Deformations of Algebraic Schemes*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Vol. 334, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, (2006).

[14] J. Stevens, *Deformations of Singularities*, Lecture Notes in Mathematics 1811, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, (2003)

Índice alfabético