



---

---

UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN NICOLÁS DE HIDALGO  
FACULTAD DE INGENIERÍA ELÉCTRICA

ANÁLISIS DINÁMICO DE SISTEMAS MULTIMÁQUINA  
USANDO LA TRANSFORMACIÓN DIFERENCIAL

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MAESTRO EN CIENCIAS EN INGENIERÍA ELÉCTRICA

P R E S E N T A :

ING. RICARDO GALARZA VILLA

DIRECTOR DE TESIS

DR. ALEJANDRO ZAMORA MÉNDEZ

CO-DIRECTOR DE TESIS

DR. CARLOS PÉREZ ROJAS



MORELIA, MICHOACÁN, OCTUBRE 2022





**ANÁLISIS DINÁMICO DE SISTEMAS MULTIMÁQUINA USANDO LA TRANSFORMACIÓN DIFERENCIAL**

Los Miembros del Jurado de Examen de Grado aprueban la Tesis de Maestría en Ciencias en Ingeniería Eléctrica de Ricardo Galarza Villa.

Dr. Jaime Cerda Jacobo  
*Presidente del Jurado*

Dr. Alejandro Zamora Méndez  
*Director de Tesis*

Dr. Carlos Pérez Rojas  
*Co-director*

Dr. Juan Carlos Silva Chávez  
*Vocal*

Dr. Juan Manuel Ramírez Arredondo  
*Revisor Externo (CINVESTAV)*

Dr. J. Aurelio Medina Ríos  
*Jefe de la División de Estudios de Posgrado  
de la Facultad de Ingeniería Eléctrica. UMSNH  
(Por reconocimiento de firmas)*

UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN NICOLÁS DE HIDALGO  
Agosto 2022



# Resumen

En esta tesis se aplica la Transformación Diferencial para el análisis dinámico de sistemas multimáquina, cuya solución se obtiene al resolver de manera numérica, un conjunto de ecuaciones diferencio-algebraicas que conforman a los sistemas de potencia. Este método es un algoritmo para calcular los coeficientes de Taylor de una manera rápida y eficiente, haciendo al método de Taylor competitivo contra los métodos de integración numérica tradicionales tales como Euler Modificado, Runge-Kutta de cuarto orden y la Regla Trapezoidal.

En primer lugar, se proponen las reglas generales de la Transformación Diferencial para las ecuaciones diferencio-algebraicas. Estas reglas se detallan aplicándolas a la obtención de la respuesta de un circuito RC en serie, haciendo un análisis detallado de la obtención de los coeficientes y de cómo se reduce el error a medida que el número de coeficientes se incrementan en el polinomio de Taylor, lo cual es equivalente a tener un mayor número de derivadas.

Posteriormente, se presenta el modelado del generador síncrono, utilizando para esto dos modelos, que son el clásico y el transitorio de cuarto orden, además de presentar las ecuaciones de interconexión con la red para su respectiva simulación, donde el conjunto de ecuaciones correspondientes (conjunto de ecuaciones diferencio-algebraicas) para cada caso se transforman mediante las reglas de la transformación diferencial, de tal manera que solamente se tengan que programar en algún software de computadora. También se sabe que se trata de un problema de valor inicial, por lo que para arrancar con la solución en estado estable se necesita de dichas condiciones iniciales, por lo tanto, se presenta la forma en que se calculan para ambos modelos y se complementa mediante su aplicación en un ejemplo sencillo.

Finalmente, se presenta la aplicación del método de la Transformación Diferencial para la simulación de grandes sistemas de potencia multimáquina, donde además se hacen comparaciones con los métodos de Euler modificado, Runge-Kutta de cuarto orden y la Regla Trapezoidal.

Por otro lado, una parte importante en la realización de esta tesis, es la adaptación

del software Power System Toolbox de Matlab, para que los diferentes métodos de integración puedan ser aplicados y comparados. Para esto, se parte del cálculo de las condiciones iniciales, posteriormente se programa cada método propuesto, incluyendo la programación de las reglas de transformación las cuales se aplican manualmente en el programa.

Palabras clave: Métodos numéricos, método de Taylor, modelado de máquina síncrona, power system toolbox, circuito RC.

# Abstract

In this thesis the Differential Transformation is applied for the dynamic analysis of multi-machine systems, whose solution is obtained by numerically solving a set of differential-algebraic equations that make up the power systems. This method is an algorithm to calculate the Taylor coefficients in a fast and efficient way, making the Taylor method competitive against traditional numerical integration methods such as the Modified Euler method, fourth order Runge-Kutta and the Trapezoidal Rule.

First, the general rules of the Differential Transformation for differential-algebraic equations are proposed. These rules are detailed by applying them to obtaining the response of a series RC circuit, making a detailed analysis of obtaining the coefficients and how the error is reduced as the number of coefficients increases in the Taylor polynomial, which is equivalent to having a larger number of derivatives.

Subsequently, the modeling of the synchronous generator is presented, using for this two models, which are the classic and the fourth order transient, in addition to presenting the interconnection equations with the network for their respective simulation, where the set of corresponding equations (set of differential-algebraic equations) for each case are transformed by the rules of the differential transformation, in such a way that they only have to be programmed in some computer software. It is also known that it is an initial value problem, so to start with the solution in stable state these initial conditions are needed, therefore, the way in which they are calculated for both models is presented and is complemented by its application in a simple example.

Finally, the application of the Differential Transformation method for the simulation of large multi-machine power systems is presented, where comparisons are also made with the modified Euler, fourth-order Runge-Kutta and Trapezoidal Rule methods.

On the other hand, an important part in the realization of this thesis is the adaptation of the Matlab Power System Toolbox software, so that the different integration methods can be applied and compared. For this, we start from the calculation of the initial conditions, then each proposed method is programmed, including the programming of the transformation rules which are applied manually in the program.





# Contenido

Resumen . . . . .	5
Abstract . . . . .	7
Contenido . . . . .	9
Lista de Figuras . . . . .	11
Lista de Tablas . . . . .	13
Lista de Símbolos . . . . .	15
Acrónimos . . . . .	17
1. Introducción . . . . .	1
1.1. Justificación . . . . .	2
1.2. Antecedentes . . . . .	3
1.3. Objetivos . . . . .	5
1.3.1. Objetivo general . . . . .	5
1.3.2. Objetivos particulares . . . . .	6
1.4. Descripción de capítulos . . . . .	7
2. Métodos de integración numérica para sistemas de potencia . . . . .	9
2.1. Introducción . . . . .	9
2.2. Integración numérica . . . . .	10
2.3. Métodos basados en la serie de Taylor . . . . .	11
2.3.1. Método de Euler . . . . .	12
2.3.2. Método de Euler Modificado . . . . .	13
2.3.3. Método de Runge Kutta . . . . .	13
2.3.4. Regla Trapezoidal . . . . .	14
2.3.5. Transformación Diferencial . . . . .	15
2.4. Simulación dinámica de un circuito RC en serie . . . . .	18
2.4.1. Modelado del circuito RC . . . . .	18
2.4.2. Obtención de la solución analítica mediante la transformada de Laplace . . . . .	19
2.5. Simulación dinámica del circuito RC en serie con la Transformación Diferencial . . . . .	23
2.5.1. Comparación entre la solución exacta, RK4, EM, RT y TD . . . . .	27

2.6. Resumen . . . . .	32
3. Aplicación de la transformación diferencial a sistemas multimáquina . . . . .	33
3.1. Modelado del generador síncrono . . . . .	33
3.1.1. Modelo transitorio del generador síncrono . . . . .	34
3.2. Modelo clásico del generador síncrono . . . . .	36
3.3. Transformación diferencial del generador síncrono, modelo transitorio . . . . .	39
3.4. Transformación diferencial del generador síncrono, modelo clásico . . . . .	40
3.5. Cálculo de las condiciones iniciales . . . . .	41
3.5.1. Cálculo de las condiciones iniciales para el modelo transitorio . . . . .	41
3.5.2. Cálculo de las condiciones iniciales para el modelo clásico . . . . .	43
3.6. Ejemplo del cálculo de las condiciones iniciales . . . . .	44
3.7. Resumen . . . . .	46
4. Simulación dinámica de grandes sistemas multimáquina . . . . .	47
4.1. Introducción . . . . .	47
4.2. Sistema NETS/NYPS de 16 generadores-68 nodos . . . . .	48
4.2.1. Simulación dinámica del sistema NETS/NYPS mediante su modelo clásico . . . . .	50
4.2.2. Simulación dinámica del sistema NETS/NYPS mediante su modelo transitorio . . . . .	52
4.3. Sistema NPCC de 48 máquinas y 140 nodos . . . . .	56
4.4. Sistema mexicano reducido de 46 máquinas y 190 nodos . . . . .	59
4.5. Sistema NETS/NYPS, caso inestable . . . . .	64
4.6. Prueba de estabilidad numérica de la transformación diferencial . . . . .	65
4.7. Incremento de la precisión de la TD . . . . .	69
4.8. Resumen . . . . .	71
5. Conclusiones generales y trabajos futuros . . . . .	73
5.1. Conclusiones Generales . . . . .	73
5.2. Trabajos Futuros . . . . .	75
Referencias . . . . .	77

# Lista de Figuras

1.1. Velocidades de dinámicas típicas en SEPs. . . . .	5
2.1. Circuito RC en serie. . . . .	18
2.2. Voltaje en el capacitor del circuito RC en serie. . . . .	22
2.3. Comparación entre la respuesta exacta y la TD para el circuito RC en serie usando $k = 3$ . . . . .	27
2.4. Error en el tiempo para los cuatro métodos propuestos. . . . .	29
2.5. Comparación del error en el tiempo entre RT y TD utilizando $k = 2$ y $k = 3$ . . . . .	30
2.6. Comportamiento del RMSE ante la variación de $h$ y $k$ . . . . .	31
3.1. Interconexión entre el generador síncrono y el resto de la red [1]. . . . .	38
3.2. Generador síncrono alimentando a una carga a través de una línea de transmisión. . . . .	44
4.1. Diagrama unifilar del sistema equivalente NETS/NYPS de 16 máquinas y 68 nodos. . . . .	49
4.2. Velocidad $\omega$ y ángulo $\delta$ de las 16 máquinas para el modelo clásico del sistema NETS/NYPS usando TD. . . . .	50
4.3. Comparación entre RK4, EM, RT y TD para la máquina 7 del sistema NETS/NYPS con modelo clásico. . . . .	51
4.4. Error en el tiempo entre EM y TD. . . . .	53
4.5. Variables de estado de las 16 máquinas para el modelo transitorio del sistema NETS/NYPS por medio de la TD. . . . .	54
4.6. Comparación entre RK4, EM, RT y TD para la máquina 7 del sistema NETS/NYPS con modelo transitorio. . . . .	55
4.7. Sistema NPCC de 48 máquinas y 140 nodos. . . . .	57
4.8. Velocidades $\omega$ y ángulos del rotor $\delta$ de las 48 máquinas para el modelo clásico del sistema NPCC por medio de la TD. . . . .	58
4.9. Comparación entre RK4, EM, RT y TD para la máquina 4 del sistema NPCC modelo clásico. . . . .	59

4.10. Sistema mexicano reducido de 46 máquinas y 190 nodos. . . . .	61
4.11. Velocidades $\omega$ , ángulos del rotor $\delta$ , $E'_d$ , $E'_q$ y $E_{fd}$ de las 46 máquinas del sistema mexicano reducido para el modelo transitorio utilizando el método de la TD. . . . .	62
4.12. Comparación entre RK4, EM, RT y TD para la máquina 5 del sistema mexicano reducido y modelo transitorio. . . . .	63
4.13. Velocidades $\omega$ , ángulos del rotor $\delta$ , $E'_d$ , $E'_q$ y $E_{fd}$ de las 16 máquinas del sistema NETS/NYPS para el modelo transitorio utilizando el método de la TD, caso inestable. . . . .	66
4.14. Comparación entre RK4, EM, RT y TD para la máquina 7 del sistema NETS/NYPS y modelo transitorio, caso inestable. . . . .	67
4.15. Demostración de la eficiencia y estabilidad numérica del método de la TD mediante un aumento en $k$ . . . . .	68
4.16. Demostración de la estabilidad de la TD conforme se incrementa $k$ para un paso de integración $h = 3/60$ . . . . .	69
4.17. Comparación de los métodos de EM y RT contra TD a medida que se incrementan los coeficientes de Taylor para $k = 2, 3, 4$ y $5$ . . . . .	70

# Lista de Tablas

2.1. Coeficientes de Taylor y solución aproximada de $v_c(t)$ para los primeros 10 pasos de integración del circuito RC mediante TD . . . . .	27
2.2. Comparación entre la solución analítica y la solución numérica por medio de la TD para los primeros 10 pasos de integración de $v_c(t)$ del circuito RC . . . . .	28
2.3. RMSE conforme se incrementa $k$ y $h$ , respectivamente . . . . .	31
4.1. Comparación de los tiempos de simulación entre RK4, EM, RT y TD para el sistema de 16 máquinas y 68 nodos, modelo clásico. . . . .	52
4.2. Comparación de los tiempos de simulación entre RK4, EM, RT y TD para el sistema de 16 máquinas y 68 nodos, modelo transitorio. . . . .	56
4.3. Comparación de los tiempos de simulación entre RK4, EM, RT y TD para el sistema NPCC de 48 máquinas y 140 nodos . . . . .	60
4.4. Tiempos de simulación de los métodos TD, EM, RT y RK4 para el sistema mexicano reducido de 46 máquinas y 190 nodos . . . . .	64
4.5. Tiempos de simulación de EM, RT y la TD para cuando $k = 2, 3, 4$ y $5$ . . . . .	71



# Lista de Símbolos

$\sigma$	Delta Krónecker de la función delta definida en el dominio discreto.
$\alpha$	Ángulo de la función <i>seno</i> y <i>coseno</i>
$R$	Resistencia eléctrica.
$C$	Capacitancia Eléctrica.
$V_m$	Voltaje pico de la fuente de alimentación senoidal.
$v_s$	Voltaje de alimentación.
$\omega$	Frecuencia angular.
$f$	Frecuencia en Hertz.
$x$	Variables de estado.
$\dot{x}$	Derivada de las variables de estado con respecto al tiempo.
$I_{dq}$	Variables algebraicas asociadas al estator de la máquina.
$V$	Variables asociadas a la red.
$u$	Vector de entradas del sistema.
$E'_{di}$ y $E'_{qi}$	Voltajes transitorios en el eje $d$ y $q$ .
$\delta_i$	Ángulo del rotor con respecto al eje magnético del estator.
$\omega_i$	Velocidad de la máquina.
$P_{ei}$	Potencia eléctrica generada.
$P_{mi}$	Potencia mecánica que inyecta la turbina al generador.
$\omega_s$	Velocidad síncrona del sistema ( $\omega_s = 2\pi \times 60$ rad/seg).
$x_{di}$ y $x_{qi}$	Reactancia síncrona en el eje $d$ y $q$ .
$x'_{di}$ y $x'_{qi}$	Reactancia transitoria en el eje $d$ y $q$ .
$T'_{dOi}$ y $T'_{qOi}$	Constantes de tiempo de circuito abierto en el eje $d$ y $q$ .
$H_i$	Inercia de la máquina síncrona.
$D_i$	Factor de amortiguamiento de la máquina síncrona.
$E_{fdi}$	Voltaje de excitación.
$K_{Ai}$	Ganancia de excitación.
$T_{Ai}$	Constante de tiempo del excitador.
$V_{refi}$	Voltaje de referencia.
$V_{ti}$	Voltaje en terminales del generador.
$I_{di}$ e $I_{qi}$	Corrientes del estator de la máquina en el eje $d$ y $q$ .
$V_{di}$ y $V_{qi}$	Voltajes en el eje $d$ y $q$ .





# Acrónimos

EDOs	Ecuaciones Diferenciales Ordinarias
EDAs	Ecuaciones Diferencio-Algebraicas
TD	Transformación Diferencial
EM	Euler Modificado
RK4	Runge-Kutta de cuarto orden
RT	Regla Trapezoidal
SEPs	Sistemas Eléctricos de Potencia
RMSE	Root Mean Square Error
PST	Power System Toolbox
FACTS	Flexible AC Transmission System
NETS/NYPS	New England Transmission System/New York Power System
NPCC	Northeast Power Coordinating Council
MISO	Michigan Independent System Operator
PJM	Pennsylvania, New Jersey and Maryland



# Capítulo 1

## Introducción

La generación de energía eléctrica es de gran utilidad en la vida diaria y en la industria, esto ha llevado a crear redes eléctricas de gran tamaño para su suministro, las cuales se vuelven cada vez más complejas de analizar, es por este motivo que se buscan técnicas matemáticas y computacionales para acelerar los procesos de simulación. Estas técnicas deben ser confiables y tener tiempos de simulación adecuados, es decir, que se deben hacer de manera relativamente rápida. Existen muchos métodos numéricos que se pueden aplicar para la solución de este tipo de problemas, por lo que este trabajo de tesis se centra en el método de la Transformación Diferencial (TD), ya que presenta algunas ventajas sobre otros métodos numéricos convencionales, como son: el método de Euler Modificado (EM), Runge-Kutta de cuarto orden (RK4) y la Regla Trapezoidal (RT). El método de la TD es un algoritmo eficiente para obtener los coeficientes de Taylor en cada paso de integración y la manera en que se procede es aplicar las reglas de transformación a cada una de las ecuaciones, tanto diferenciales como algebraicas que conforman el modelo del sistema de potencia multimáquina, y una vez que se tienen las ecuaciones transformadas se procede con la programación y simulación del mismo. Así, en este trabajo, la aplicación de dichas reglas es manual y lo que se pretende es demostrar su estabilidad numérica, precisión y rapidez computacional cuando se aplica a grandes sistemas multimáquina.

Para realizar este proyecto, se utiliza el software libre llamado PST (del inglés Power System ToolBox [1, 2]) de Matlab. Este software proporciona modelos para realizar simulaciones de sistemas de potencia mediante el método de Euler modificado, por lo que este software se utiliza como base para así adaptar el método de la TD para el análisis dinámico de los generadores síncronos en un sistema de potencia. Así, los modelos que se consideran son: modelo clásico o electromecánico y el modelo transitorio de cuarto orden. Además, el software PST también se adapta para que funcione con los métodos de RK4, RT y el propio EM; y de esta manera, poder realizar comparaciones usando diferentes sistemas de potencia.

## 1.1. Justificación

En los sistemas eléctricos de potencia es necesario conocer el comportamiento de la red ante ciertas perturbaciones, como puede ser alguna falla o un incremento repentino de carga. Por lo tanto, el análisis del sistema es muy importante para predecir y actualizar continuamente el estado operativo de la red. Para esto, se requiere la aplicación de los métodos numéricos a las ecuaciones diferenciales del sistema, particularmente, de los generadores, para conocer el comportamiento que este elemento tendrá ante cualquier perturbación, y así poder tomar decisiones, e incluso, protegerlo ante posibles daños o proteger la red de tal manera que no se vea afectada la estabilidad y continuidad del servicio. Así, a medida que los sistemas de potencia operan cada vez más en condiciones de estrés, la simulación por computadora desempeñará un papel importante en la evaluación del control y la seguridad.

Por otro lado, existen métodos de integración numérica convencionales con los cuales se ha trabajado arduamente. Es por esto, que este trabajo se centra en la aplicación del método de la TD descrito en [3, 4] para la solución de EDAs, el cual se basa en el método de Taylor y así simular los sistemas de potencia. Además, éste se compara con los métodos de EM, RK4 y RT para verificar su eficiencia computacional, precisión y

estabilidad numérica.

En general, el método de la TD es un algoritmo para obtener los coeficientes de Taylor, donde estos coeficientes se obtienen de forma exacta y no aproximada, como es el caso de RK4 en donde se aproximan las derivadas. Además, al incrementar el número de coeficientes también se puede incrementar la precisión y la estabilidad numérica del método, donde este incremento resulta sencillo ya que las propias reglas están orientadas a calcular el  $k$ -ésimo coeficiente de Taylor de manera rápida y eficiente, mientras que la solución también está determinada de manera natural como se explica en los siguientes capítulos.

## 1.2. Antecedentes

Existe en la literatura un gran número de libros y artículos que hablan sobre los Sistemas Eléctricos de Potencia (SEPs) y de la importancia que esto tiene en la vida moderna. Los SEPs tienen un gran número de componentes que trabajan simultáneamente, uno de estos componentes es el generador síncrono, que es de gran importancia ya que de ellos proviene la mayor parte de la energía para ser consumida. Los modelos de dicho elemento se pueden encontrar en [1, 5, 6]. Además, los generadores se pueden representar por diferentes modelos, algunos de ellos se reducen para tener menos ecuaciones diferenciales por resolver, dependiendo del enfoque que se le quiera dar a los resultados obtenidos. En [1] se muestra una forma detallada de cómo se reducen estos modelos, partiendo del modelo completo hasta llegar al modelo clásico o electromecánico. La nomenclatura usada en [1] es la convencional descrita en [7]. También existen libros sobre la solución de las ecuaciones diferenciales, como por ejemplo [8, 9, 10], de donde se rescatan los métodos de EM, RK4 y RT, que son comunes en la simulación de SEPs.

El método de la TD no es del todo nuevo en el área de la ingeniería eléctrica, según algunos artículos fue J.K. Zhou quien lo utilizó por primera vez en 1986 al publicar [3], aunque Georgii EVG. Pukhov publicó [4] en 1980. Pero fue hasta el año 2019 que en

[11] se aplicó este método a la simulación de los los SEPs, posteriormente, en el año 2020 se publican [12, 13] basados en este método, de donde se pueden obtener más detalles de la TD pero con un enfoque hacia el análisis dinámico.

También existen artículos que detallan la aplicación de la TD para la solución de ecuaciones diferenciales, como en [14, 15], donde se describen las reglas de transformación, otros profundizan más en el error al incrementar los coeficientes, como en [16], lo que al final se refleja en una mayor precisión.

Con este método se obtienen buenos resultados cuando se aplica a transitorios electromecánicos de grandes sistemas y puede ser fácilmente escalable a transitorios más rápidos, es decir, se puede escalar hacia la derecha de la Figura 1.1, la cual es extraída de [17], donde los pasos de integración ya son menores, pues es una necesidad el solucionar más rápido los sistemas que contienen FACTS (del inglés Flexible AC Transmission System), como lo menciona [18], y así mantener la estabilidad de la red y evitar catástrofes como las descritas en [19]. Las dinámicas de los transitorios electromagnéticos se pueden encontrar en [20, 21, 22], donde [21] habla sobre la simulación a grandes escalas y [22] habla sobre la simulación a nivel distribución, que es donde la red está siendo más afectada debido a la inyección de energía de fuentes renovables que usan convertidores de electrónica de potencia.

Así, la Figura 1.1 muestra el costo computacional (eje  $y$ ) contra la velocidad de simulación (eje  $x$ ), donde se puede apreciar que los transitorios electromagnéticos requieren de mayor velocidad de solución, es decir, demandan un paso de integración más pequeño. Por otro lado, los grandes sistemas multi-área requieren esfuerzos computacionales mayores debido a su dimensión pero un tamaño de paso relativamente grande. Es por esto que, el método de la TD puede encajar en cada una de estas velocidades de simulación debido a su eficiencia computacional, precisión y estabilidad numérica.

De lo anterior, esta tesis se enfoca en el análisis dinámico de sistemas multimáquina usando la TD, por lo que se ubica en la parte de transitorios electromecánicos con

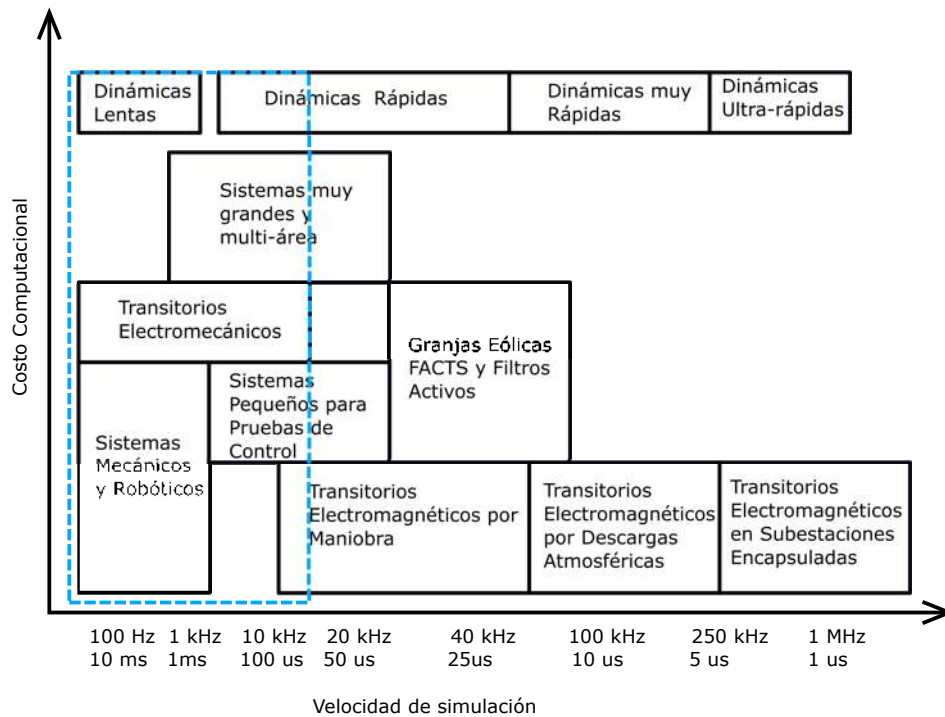


Figura 1.1: Velocidades de dinámicas típicas en SEPs.

tamaños de paso del orden de los milisegundos acorde al rectángulo en línea punteada de color azul en la Figura 1.1.

### 1.3. Objetivos

#### 1.3.1. Objetivo general

El objetivo principal de este trabajo de tesis es solucionar los sistemas de potencia multimáquina utilizando el método de la Transformación Diferencial, que es un método basado en Taylor, en donde se obtiene la  $k$ -ésima derivada evaluada en un punto para después solucionar las ecuaciones diferenciales y algebraicas mediante el polinomio de Taylor. Para esto, se solucionan tres sistemas de potencia a gran escala los cuales son: (i) el sistema de

New England Transmission System/New York Power System (NETS/NYPS) de 16 generadores y 68 nodos, (ii) el sistema Northeast Power Coordinating Council (NPCC) de 48 máquinas y 140 nodos y (iii) el sistema mexicano reducido que consta de 46 máquinas y 190 nodos.

### 1.3.2. Objetivos particulares

- Modelar los generadores síncronos, su interconexión con los SEPs y la transformación de dichas ecuaciones mediante las reglas de la TD.
- Adaptar el PST para la simulación dinámica de los sistemas NETS/NYPS, NPCC y Mexicano reducido, modificando el método de integración original (EM) y sustituyéndolo por RK4, RT y TD. Para lo anterior se parte desde el cálculo de las condiciones iniciales y posteriormente con la programación de cada método, además, las reglas de la TD para la solución se hacen a mano para luego incluirlas en el PST.
- Demostrar que el método de la TD tiene buen desempeño para la solución de grandes sistemas de potencia.
- Hacer comparaciones entre el método de la TD y los métodos de EM, RK4 y RT en cuanto al tiempo de simulación que le toma a cada método llegar a una solución adecuada.
- Comprobar la estabilidad numérica del método con el incremento del número de los coeficientes de Taylor, es decir, con un mayor número de derivadas, lo cual se refleja en un incremento de la precisión.
- Comparar la estabilidad numérica mediante incrementos de  $h$  hasta valores en donde los métodos de EM, RK4 y RT ya no son estables, mientras que la TD se hace estable con el incremento de los coeficientes  $k$ , sin sacrificar costos computacionales.



---

## 1.4. Descripción de capítulos

En esta sección se presenta una descripción general del contenido de cada uno de los capítulos.

En el Capítulo 2 se presenta el método de Taylor para la solución de ecuaciones diferenciales utilizando la Transformación Diferencial para obtener los coeficientes del polinomio de Taylor, donde las reglas de la TD se presentan para ser aplicadas a las EDAs y así obtener la  $k$ -ésima derivada evaluada en un punto por el método de Taylor. También se presenta una descripción de algunos métodos tradicionales, que son, el método de EM, RK4 y la RT, con los cuales se hace una comparación para ver el comportamiento del método basado en Taylor utilizando un circuito RC en serie alimentado con una fuente de voltaje alterno.

En el Capítulo 3 se presenta el modelado del generador síncrono utilizando dos modelos de orden diferente, el primero que usa el modelo transitorio de cuarto orden con excitación simple, es decir, se tienen cinco ecuaciones diferenciales por cada máquina, y el segundo, por medio de un modelo clásico, el cual consta de dos ecuaciones diferenciales y no tiene ecuación de excitador. Estas ecuaciones se transforman al dominio de la transformación diferencial para poder realizar su simulación. También se presentan las respectivas ecuaciones algebraicas de cada modelo y las ecuaciones de conexión de los generadores a la red para cuando se tiene un sistema de potencia multimáquina. Se presenta también el proceso para obtener las condiciones iniciales del SEP para arrancar las simulaciones en una condición de estado estable.

En el Capítulo 4 se presentan los casos de estudio de los sistemas de potencia multimáquina que son: (i) el sistema NETS/NYPS de 16 generadores y 68 nodos (modelo clásico y transitorio), (ii) el sistema NPCC de 48 máquinas y 140 nodos (modelo clásico), y finalmente, (iii) el sistema mexicano reducido que consta de 46 máquinas y 190 nodos (modelo transitorio), los cuales se simulan utilizando los métodos mencionados anteriormente, donde se evalúa el desempeño de cada uno en cuanto a su precisión numérica, estabilidad

numérica y eficiencia computacional al ser aplicados al análisis dinámico de grandes SEPs.

Por último, en el Capítulo 5 se presentan las conclusiones generales y posibles trabajos futuros.

## Capítulo 2

# Métodos de integración numérica para sistemas de potencia

### 2.1. Introducción

Debido a que existe al día de hoy un entorno no regulado en la red de energía eléctrica, ésta se ve obligada a operar de una manera para la que no fue diseñada intencionalmente, es decir, que está trabajando a niveles superiores a los nominales, como por ejemplo, las líneas de transmisión, transformadores, entre otros. Por lo tanto, el análisis de los sistemas de potencia es muy importante para predecir y actualizar continuamente el estado operativo de la red. Esto incluye determinar los límites de estabilidad del sistema mediante la integración numérica para la estabilidad transitoria [10]. Es por esto, que la simulación dinámica del sistema de potencia es de vital importancia, para que las empresas de servicios públicos evalúen la seguridad dinámica al resolver el problema de valor inicial de las ecuaciones diferenciales no lineales del sistema de potencia, con una contingencia dada que ocurre bajo una condición de operación específica [23, 11]. Los métodos de integración numérica, incluidos los métodos explícitos e implícitos, se usan comúnmente en paquetes de software comerciales con un paso de integración lo suficientemente pequeño,

típicamente de varias decenas de milisegundos, para cumplir con los requisitos de precisión y estabilidad numérica [11].

Por lo anterior, este trabajo propone un enfoque novedoso para la simulación dinámica de sistemas de potencia basado en la TD, la cual se propone para estudiar los sistemas de potencia como sistemas dinámicos no lineales de dimensión alta, la cual es capaz de evitar cálculos de derivadas de orden superior con ecuaciones diferenciales no lineales mediante sus reglas de transformación [11, 12]. Además, para su comparación, también se presenta la descripción de algunos de los métodos de integración numérica más utilizados para la resolución de EDAs.

## 2.2. Integración numérica

Los sistemas dinámicos pueden ser modelados por sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias (EDOs) de la forma

$$y'(t) = f(y, t) \quad y(t_0) = y_0 \quad (2.1)$$

donde  $y(t) \in \mathbb{R}^n$  es una función variante en el tiempo que depende de la condición inicial  $y_0$ . Un sistema de ecuaciones diferenciales no lineales, normalmente no se puede resolver analíticamente. En otras palabras, (2.1) se debe resolver de manera numérica [10].

En la solución numérica de (2.1), una secuencia de puntos  $y_0, y_1, y_2, \dots$ , se calculan para aproximarse a la solución real en un conjunto de puntos de tiempo  $t_0, t_1, t_2, \dots$ . El intervalo entre los puntos de tiempo adyacentes es llamado paso de integración o tamaño de paso. El tamaño de paso  $h_{n+1} = t_{n+1} - t_n$  puede ser constante para todo el intervalo de integración o puede variar [10].

El algoritmo de integración avanza en la solución de  $t_n$  a  $t_{n+1}$  con el paso de integración  $h_{n+1}$  basado en el cálculo que involucra los valores calculados anteriormente  $y_n, y_{n-1}, \dots$  y las funciones  $f(y_n, t_n), f(y_{n-1}, t_{n-1}), \dots$ . En general, cada algoritmo de integración debe de cumplir los siguientes criterios [10].

1. Precisión numérica,
2. estabilidad numérica y
3. eficiencia numérica.

La precisión numérica garantiza que el error numérico en cada paso de integración permanece dentro de límites aceptables [10]. La estabilidad numérica asegura que el error en un paso de integración no se propague a los pasos de integración futuros. La eficiencia numérica es el esfuerzo computacional requerido para cada paso de integración y para todo el intervalo de la solución.

A continuación, se describen algunos de los métodos de integración numérica tradicionales usados en esta tesis: (*i*) Euler Modificado, (*ii*) Runge Kutta de cuarto orden, (*iii*) Regla Trapezoidal y (*iv*) el método de la Transformación Diferencial. Lo anterior, con el propósito de comparar y así demostrar la confiabilidad y rapidez de la propuesta.

El método de Taylor es muy preciso, sin embargo, una de sus principales desventajas es que requiere del cálculo de derivadas de orden superior, lo que puede resultar costoso desde el punto de vista computacional a medida que el número de términos crece, ya que crece de manera exponencial. Es por esto, que esta investigación propone una alternativa para calcular de manera eficiente los coeficientes de Taylor sin tener que resolver las derivadas de orden superior. La metodología propuesta se basa en las reglas de la TD, con la cual se pueden obtener excelentes resultados con un menor costo computacional para el método de Taylor.

### 2.3. Métodos basados en la serie de Taylor

Varios de los métodos de integración más importantes se derivan de la expansión mediante series de Taylor de (2.1). Es decir, si  $y(t)$  denota la solución exacta de (2.1), entonces, expandiendo  $y(t)$  mediante series de Taylor alrededor de  $t = t_n$  y evaluando la

serie en  $t = t_{n+1}$ , se obtiene la siguiente expansión para  $y(t_{n+1})$  [10]:

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + y'(t_n)(t_{n+1} - t_n) + \frac{1}{2!}y''(t_n)(t_{n+1} - t_n)^2 + \dots + \frac{1}{k!}y^{(k)}(t_n)(t_{n+1} - t_n)^k + t.o.s \quad (2.2)$$

donde *t.o.s* denota los términos de orden superior. Si se establece un tamaño de paso  $h = t_{n+1} - t_n$ , entonces

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + hy'(t_n) + \frac{h^2}{2!}y''(t_n) + \dots + \frac{h^k}{k!}y^{(k)}(t_n) + t.o.s \quad (2.3)$$

donde  $k$  es el orden de la derivada o coeficiente de Taylor. Este método es muy preciso para valores de  $k$  grandes, pero computacionalmente ineficiente debido a la gran cantidad de términos que se deben calcular, lo que se refleja en los tiempos de simulación, además de esto, está la complejidad que se llega a tener al requerir derivadas de orden superior para grandes sistemas, como lo son los sistemas de potencia. Es por este motivo, que en esta investigación se presenta una forma novedosa y eficiente de calcular los coeficientes de Taylor, que es el método de la Transformación Diferencial. Esta metodología consisten en seguir ciertas reglas propuestas, con las cuales se pueden obtener muy buenos resultados, incluso, llegando a cumplir los tres criterios para los métodos numéricos en la solución de EDAs: precisión numérica, estabilidad numérica y eficiencia numérica.

### 2.3.1. Método de Euler

El método de Euler [8], es un método numérico de primer orden para la solución de ecuaciones diferenciales dada una condición inicial. Este método se deriva del polinomio de Taylor de (2.3), al truncar la serie hasta la primera derivada. Esta ecuación se muestra en (2.4).

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + f(t_n, y_n)h \quad (2.4)$$

donde  $h$  es el paso de integración,  $t_n$  y  $y(t_n) = y_n$ , son las condiciones iniciales,  $f(t_n, y_n)$  es la ecuación diferencial que se quiere resolver y  $y(t_{n+1})$  corresponden a la solución obtenida. La desventaja de este método, es que al despreciar las derivadas de orden superior, el

error se incrementa, lo cual se debe compensar al reducir el tamaño de paso  $h$  hasta escalas adecuadas. Esta es la razón por la cual se prefiere trabajar con el método de Euler Modificado, el cual es una variante del método de Euler, por lo que se describe en la siguiente sección.

### 2.3.2. Método de Euler Modificado

El método de Euler Modificado [8], también es un método para la solución de ecuaciones diferenciales dada una condición inicial, la diferencia con el método de Euler, es que en este caso se predice un valor (que es el caso del método de Euler), y posteriormente se le aplica una corrección y así reducir el error. Por lo tanto, este método consiste en dos etapas que se detallan a continuación.

Etapla 1: Cálculo del valor predicho dados  $t_n$ ,  $y(t_n) = y_n$  y  $h$

$$y_{n+1}^* = y(t_n) + f(t_n, y_n)h \quad (2.5)$$

Etapla 2: Corrección del valor predicho

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + \frac{h}{2} (f(t_n, y_n) + f(t_{n+1}, y_{n+1}^*)) \quad (2.6)$$

donde  $f(t_n, y_n)$  es la ecuación diferencial que se quiere resolver, obtenida mediante la forma presentada en (2.1), y  $y_{n+1}^*$  es la predicción de la solución. Luego, estos valores se reutilizan en (2.6) para calcular el valor de  $y(t_{n+1})$ , lo cual hace que  $y(t_{n+1})$  sea más precisa considerándose como la solución en el punto  $t_{n+1}$ .

### 2.3.3. Método de Runge Kutta

El método de Taylor para un polinomio de segundo orden ( $k = 2$ ) es [10]

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + hf(y_n, t_n) + \frac{h^2}{2} f'(y_n, t_n) \quad (2.7)$$

Se observa que, a medida que el método de Taylor se incrementa, lo hace también el número de derivadas. Por lo que en muchos casos, estas derivadas pueden ser reemplazadas por aproximaciones numéricas [10]. Los métodos más utilizados para la solución de

problemas basados en aproximaciones a las derivadas son los métodos de Runge-Kutta, especialmente el de cuarto orden (RK4), el cual viene dado por

$$y_{n+1} = y_n + hK_4 \quad (2.8)$$

$$K_4 = \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad (2.9)$$

$$k_1 = f(y_n, t_n)$$

$$k_2 = f\left(y_n + \frac{1}{2}k_1, t_n + \frac{h}{2}\right)$$

$$k_3 = f\left(y_n + \frac{1}{2}k_2, t_n + \frac{h}{2}\right)$$

$$k_4 = f(y_n + k_3, t_n + h)$$

donde  $f$  es la ecuación diferencial que se quiere resolver.

Este método es especial, ya que resulta muy sencillo de programar, debido a que el siguiente valor depende únicamente del anterior. La desventaja es, que al ser una aproximación a la derivada, se requiere de pasos de integración muy pequeños, lo que computacionalmente se refleja en tiempos de simulación mayores.

### 2.3.4. Regla Trapezoidal

El método de la Regla Trapezoidal [8], es un método numérico que se hace de manera iterativa, es decir, el valor actual depende tanto del valor anterior como del actual, por lo cual se debe establecer un nivel de error requerido para cada punto de integración. La fórmula general aparece en (2.10).

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} [f(y_n, t_n) + f(y_{n+1}, t_{n+1})] \quad (2.10)$$

El método de la RT es de segundo orden y es llamado así porque el segundo término de (2.10) puede ser interpretado como el área de un trapecio. Este método es considerado un método de dos pasos, ya que se requiere tanto la información de  $t_n$  como  $t_{n+1}$  [10].



De la ecuación (2.10), se puede observar que el nuevo valor depende del nuevo valor calculado y del anterior, entonces, se tiene que hacer de manera iterativa hasta que el término del lado izquierdo ( $y_{n+1}$ ) sea igual al término del lado derecho o cumpla con una tolerancia indicada. Obsérvese que  $f(y_n, t_n)$  no cambia en ningún momento, el que estará cambiado es  $f(y_{n+1}, t_{n+1})$ .

### 2.3.5. Transformación Diferencial

La Transformación Diferencia [11, 12], es una técnica novedosa para la solución de ecuaciones diferenciales, con una buena aproximación para un paso de integración relativamente grande comparado con algunos métodos tradicionales, como por ejemplo, el método de RK4.

La manera de proceder de este método, es obtener las derivadas (coeficientes de Taylor) en la expansión de series de Taylor en (2.3), las cuales se obtienen mediante (2.11) y posteriormente se soluciona aplicando la fórmula dada por (2.12), que es una forma compacta de escribir (2.3)

$$Y(k) = \frac{1}{k!} \left[ \frac{d^k y(t)}{dt^k} \right]_{t=t_n} \quad (2.11)$$

$$y(t_{n+1}) = \sum_{k=0}^{\infty} Y(k) h^k \quad (2.12)$$

Entonces, en  $Y(k)$  se van almacenando los coeficientes de las derivadas (donde todas las derivadas, hasta la  $k$ -ésima, se calculan para cada paso de integración, y así sucesivamente), y la solución obtenida en cada paso de integración se almacena en  $y(t_{n+1})$ .

La ventaja que tiene este método es que ya no depende únicamente de  $h$  para la solución, sino que también depende de  $k$ . Donde  $k$  representa los coeficientes del polinomio de Taylor en (2.3). Los coeficientes que se obtienen al aplicar las reglas de transformación son exactos, y no aproximados, como es el caso del método de RK4, en el cual sus derivadas dependen del paso de integración.

El método de la TD es muy eficiente en cuanto al costo computacional, porque al obtener un mayor número de coeficientes del polinomio de Taylor se puede incrementar el tamaño de paso  $h$ , lo cual se refleja en tiempos de simulación menores, pues entre más grande sea  $h$ , las computadoras hacen menos cálculos para un periodo fijo de simulación. Este tiempo de simulación, no se ve reflejado cuando se tienen unas cuantas ecuaciones por resolver, pero se hace evidente en los sistemas de potencia, ya que las redes eléctricas son de grandes dimensiones y llegan a tener cientos de máquinas operando simultáneamente.

La TD se aplica a cada una de las ecuaciones que se tienen, tanto a las ecuaciones diferenciales como a las algebraicas, lo cual lo hace un método que puede resolver tanto ODEs como EDAs. Esto se hace siguiendo ciertas reglas que se presentan a continuación.

**Proposición 1:** Denotar  $x(t)$ ,  $y(t)$  y  $z(t)$  como las funciones originales y  $X(k)$ ,  $Y(k)$  y  $Z(k)$  como sus Transformaciones Diferenciales, respectivamente. Las siguientes proposiciones son verdaderas, donde  $c$  es una constante,  $k$  es una potencia entera no negativa y  $\sigma$  es la delta Krónecker de la función delta definida en el dominio discreto. Por lo que las reglas son [11, 24]:

1.  $x(0) = X(0)$

2.  $y(t) = cx(t) \implies Y(k) = cX(k)$

3.  $z(t) = x(t) \pm y(t) \implies Z(k) = X(k) \pm Y(k)$

4.  $z(t) = x(t)y(t) \implies Z(k) = \sum_{p=0}^k X(p)Y(k-p)$

5.  $y(t) = t^n \implies Y(k) = \sigma(k-n) = \begin{cases} 1, & \text{cuando } k = n \\ 0, & \text{cuando } k \neq n \end{cases}$

6.  $y(t) = c \implies Y(k) = c\sigma(k) = \begin{cases} c, & \text{cuando } k = 0 \\ 0, & \text{cuando } k \neq 0 \end{cases}$

7.  $y(t) = \text{sen}(\omega t + \alpha) \implies Y(k) = \frac{\omega^k}{k!} \text{sen}\left(\omega t_n + \frac{\pi k}{2} + \alpha\right)$

$$8. y(t) = \cos(\omega t + \alpha) \implies Y(k) = \frac{\omega^k}{k!} \cos\left(\omega t_n + \frac{\pi k}{2} + \alpha\right)$$

$$9. y(t) = \frac{dx(t)}{dt} \implies Y(k) = (k+1)X(k+1)$$

Aquí es necesario hacer énfasis en las reglas 7 y 8, ya que en la mayoría de los artículos de la literatura, tales como [14, 25, 26, 27, 28] se omite el argumento  $\omega t$  de las funciones *seno* y *coseno*, lo que al momento de querer resolver mediante el método de Taylor no se llega a la solución esperada, por lo que la forma correcta de la aplicación de estas reglas es usar las descritas por [4] cuando se tienen fuentes de alimentación variable, tal como lo son las fuentes de corriente alterna.

**Proposición 2:** Si  $\phi(t) = \sin \delta(t)$ ,  $\psi(t) = \cos \delta(t)$  y  $\Phi(k)$ ,  $\Psi(k)$  y  $\Delta(k)$  son las TDs de  $\phi(t)$ ,  $\psi(t)$  y  $\delta(t)$ , respectivamente. Entonces,  $\Phi(k)$  y  $\Psi(k)$  se calculan mediante (2.13) [11].

$$\begin{aligned}\Phi(k) &= \sum_{p=0}^{k-1} \frac{k-p}{k} \Psi(p) \Delta(k-p) \\ \Psi(k) &= - \sum_{p=0}^{k-1} \frac{k-p}{k} \Phi(p) \Delta(k-p)\end{aligned}\tag{2.13}$$

Observe que  $\Phi$  depende de  $\Psi$  y viceversa, esto es debido a la relación que hay entre la derivada del *seno* y *coseno*, es decir, si se tiene una función *seno*, entonces su derivada será un *coseno*.

**Proposición 3:** Dada la función  $y(t) = e^{x(t)}$ , si  $Y(k)$  y  $X(k)$  son las TDs de  $y(t)$  y  $x(t)$ , respectivamente. Entonces,  $Y(k)$  se calcula mediante (2.14) [11].

$$Y(k) = \frac{1}{k} \sum_{p=0}^{k-1} (k-p) Y(p) X(k-p)\tag{2.14}$$

**Proposición 4:** Dada la función  $y(t) = \sqrt{x(t)}$ . Si  $Y(k)$  y  $X(k)$  son las TDs de  $y(t)$  y  $x(t)$ , respectivamente. Entonces,  $Y(k)$  se calcula mediante (2.15) [11].

$$Y(k) = \frac{1}{2Y(0)} X(k) - \frac{1}{2Y(0)} \sum_{p=1}^{k-1} Y(p) Y(k-p)\tag{2.15}$$

**Proposición 5:** Dada la función  $z(t) = x(t)/y(t)$ , si  $Z(k)$ ,  $Y(k)$  y  $X(k)$  son las TDs de  $z(t)$ ,  $y(t)$  y  $x(t)$ , respectivamente. Entonces,  $Z(k)$  se calcula mediante (2.16) [11].

$$Z(k) = \frac{1}{Y(0)}X(k) - \frac{1}{Y(0)} \sum_{p=0}^{k-1} Z(p)Y(k-p) \quad (2.16)$$

## 2.4. Simulación dinámica de un circuito RC en serie

Para explicar cómo funcionan las reglas de la TD, se analiza el comportamiento dinámico de la carga del capacitor que se presenta la Figura 2.1. Considérese que  $V_m = \sqrt{2} \times 110$ ,  $v_s = V_m \sin \omega t$  V a 60 Hz,  $R = 200 \Omega$ , y  $C = 0.1$  mF. Considérense además que las condiciones iniciales son iguales a cero, donde:

$R$ : es la resistencia del circuito en  $\Omega$ .

$C$ : es la capacitancia en F.

$V_m$ : es el voltaje pico de la fuente de alimentación senoidal  $v_s$ .

$v_s$ : es el voltaje de alimentación en V.

$\omega$ : es la frecuencia angular del circuito determinada por  $2\pi f$  en  $rad/s$  y  $f = 60$  Hz.

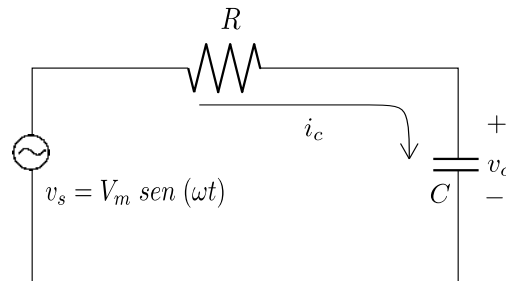


Figura 2.1: Circuito RC en serie.

### 2.4.1. Modelado del circuito RC

Aplicando la ley de voltajes de Kirchhoff (LVK), se tiene

$$v_s(t) = v_R(t) + v_C(t) \quad (2.17)$$

Debido a que la corriente en la resistencia es la misma que en el capacitor, y que el voltaje en la resistencia se calcula mediante  $v_R(t) = Ri_c(t)$ , se tiene la siguiente expresión.

$$v_s(t) = Ri_c(t) + v_c(t) \quad (2.18)$$

donde la corriente en el capacitor está determinada por:

$$i_c(t) = C \frac{dv_c(t)}{dt} \quad (2.19)$$

Sustituyendo (2.19) en (2.18), se tiene

$$v_s(t) = RC \frac{dv_c(t)}{dt} + v_c(t) \quad (2.20)$$

Por lo que despejando  $\frac{dv_c(t)}{dt}$  de (2.20) y sustituyendo el valor de  $v_s$ , se obtiene la siguiente ecuación diferencial que representa el modelo matemático para un circuito RC en serie.

$$\frac{dv_c(t)}{dt} = \frac{V_m \operatorname{sen}(\omega t) - v_c(t)}{RC} \quad (2.21)$$

### 2.4.2. Obtención de la solución analítica mediante la transformada de Laplace

Por lo general, no es posible encontrar la solución exacta de una ecuación diferencial. Es por esto que se presenta este ejemplo, donde la solución exacta se utiliza para poder comparar la soluciones numéricas por medio del método de Taylor usando la TD, y de esta manera demostrar la precisión numérica del método propuesto.

De lo anterior, (2.21) se soluciona, primero con la transformada de Laplace, y posteriormente se hace de manera detallada con las reglas de la TD y así poder comparar, incluso, con los otros métodos de integración tradicionales.

De esta manera, al reordenar nuevamente (2.21), se tiene que

$$\frac{dv_c(t)}{dt} + \frac{v_c(t)}{RC} = \frac{V_m \operatorname{sen}(\omega t)}{RC}$$

Ahora, aplicando la transformada de Laplace

$$sV_c(s) + \frac{V_c(s)}{RC} = \frac{V_m}{RC} \left( \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \right)$$

Simplificando,

$$V_c(s) \left( s + \frac{1}{RC} \right) = \frac{V_m}{RC} \left( \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \right)$$

Despejando  $V_c(s)$

$$V_c(s) = \frac{\frac{V_m}{RC} \left( \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \right)}{s + \frac{1}{RC}}$$

Con lo cual se obtiene lo siguiente:

$$V_c(s) = \frac{V_m \omega}{RC(s^2 + \omega^2) \left( s + \frac{1}{RC} \right)} \quad (2.22)$$

La ecuación (2.22) es la solución de la ecuación diferencial en el dominio de Laplace, el siguiente paso es aplicar la transformada inversa de Laplace, para obtener la solución en el dominio del tiempo. Para esto, se requiere hacer una descomposición en fracciones parciales del lado derecho de (2.22), como se indica a continuación:

$$\frac{V_m \omega}{RC(s^2 + \omega^2) \left( s + \frac{1}{RC} \right)} = \frac{A}{s + \frac{1}{RC}} + \frac{Bs + D}{s^2 + \omega^2}$$

Y despejando  $V_m \omega$ ,

$$V_m \omega = A(RC) (s^2 + \omega^2) + RC(Bs + D) \left( s + \frac{1}{RC} \right) \quad (2.23)$$

Para encontrar el valor de las variables  $A$ ,  $B$  y  $D$ , se procede a evaluar las raíces de  $s$  en (2.23), entonces se tiene que para  $s = -\frac{1}{RC}$ .

$$V_m \omega = A(RC) \left( \left( \frac{-1}{RC} \right)^2 + \omega^2 \right) + RC \left( B \left( -\frac{1}{RC} \right) + D \right) \left( -\frac{1}{RC} + \frac{1}{RC} \right)$$

$$V_m \omega = A \left( \frac{1}{RC} + \omega^2 RC \right)$$

Entonces, despejando  $A$  y simplificando

$$A = \frac{V_m \omega RC}{1 + (\omega RC)^2}$$

Se procede de la misma manera para obtener  $B$  y  $D$  al evaluar  $s = j\omega$ . Por lo que,

$$V_m \omega = A(RC)((j\omega)^2 + \omega^2) + RC(Bj\omega + D) \left( j\omega + \frac{1}{RC} \right)$$

Como  $(j\omega)^2 = -\omega^2$ , la ecuación anterior se simplifica a:

$$V_m \omega = RC(Bj\omega + D) \left( j\omega + \frac{1}{RC} \right)$$

Expandiendo,

$$V_m \omega = (-B\omega^2 RC + Bj\omega + Dj\omega RC + D)$$

Al igualar los términos del lado derecho con los del lado izquierdo, se llega al sistema de (2.24) y (2.25). Observe que del lado izquierdo no se tiene el término  $j$ , por lo tanto, los elementos que se encuentran del lado derecho y que están siendo multiplicados por  $j$  se igualan a cero.

$$V_m \omega = -B\omega^2 RC + D \tag{2.24}$$

$$0 = B\omega + D\omega RC \tag{2.25}$$

Despejando  $D$  de (2.24) se tiene

$$D = V_m \omega + B\omega^2 RC$$

Sustituyendo  $D$  en (2.25)

$$0 = B\omega + (V_m \omega + B\omega^2 RC) \omega RC$$

Simplificando y despejando  $B$

$$B = \frac{-V_m \omega RC}{1 + (\omega RC)^2}$$

Una vez que se conoce  $B$ , se sustituye para calcular  $D$  de la siguiente forma:

$$D = V_m \omega + \left( \frac{-V_m \omega RC}{1 + (\omega RC)^2} \right) \omega^2 RC = V_m \omega - \left( \frac{V_m \omega^3 (RC)^2}{1 + (\omega RC)^2} \right)$$

$$D = \frac{V_m \omega (1 + (\omega RC)^2) - V_m \omega^3 (RC)^2}{1 + (\omega RC)^2}$$

$$D = \frac{V_m \omega}{1 + (\omega RC)^2}$$

Sustituyendo los valores de  $A$ ,  $B$  y  $D$  en (2.22) y simplificando, se tiene (2.26).

$$V_c(s) = \frac{V_m}{1 + (\omega RC)^2} \left[ \left( \frac{\omega RC}{s + \frac{1}{RC}} \right) + \left( \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \right) - \omega RC \left( \frac{s}{s^2 + \omega^2} \right) \right] \quad (2.26)$$

Ahora, aplicando la transformada inversa de Laplace y simplificando, se tiene la solución de  $v_c(t)$  en (2.27) y cuya respuesta en el tiempo se muestra en la Figura 2.2.

$$v_c(t) = \frac{V_m}{1 + (\omega RC)^2} \left( \omega RC e^{-t/RC} + \text{sen } \omega t - \omega RC \cos \omega t \right) \quad (2.27)$$

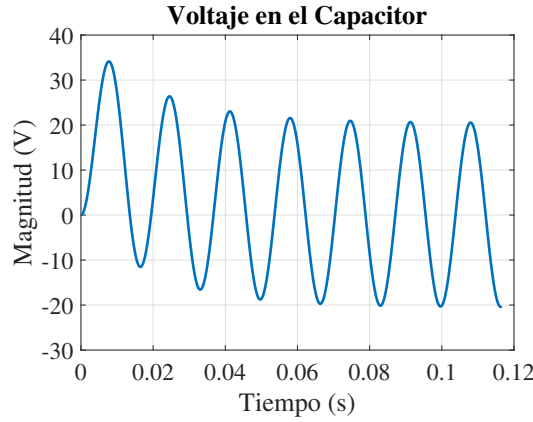


Figura 2.2: Voltaje en el capacitor del circuito RC en serie.

La ecuación (2.27) corresponde a la solución analítica del comportamiento dinámico de un circuito RC en serie, por lo que se usará para realizar las comparaciones del error para diferentes valores, tanto de  $k$  como de  $h$ , en el método de Taylor mediante las fórmulas de la TD.



## 2.5. Simulación dinámica del circuito RC en serie con la Transformación Diferencial

Ahora, se aplica la TD al circuito RC en serie mostrado en la Figura 2.1, cuyo modelo matemático se representa por (2.21) y que se repite a continuación:

$$\frac{dv_c(t)}{dt} = \frac{V_m \operatorname{sen}(\omega t) - v_c(t)}{RC} \quad (2.28)$$

Así, el primer paso para solucionar la ecuación diferencial del circuito  $RC$ , es transformar (2.28) mediante las reglas presentadas en la Sección 2.3.5. Para este caso en específico, se detallará paso a paso y para cada término de (2.28) las reglas de transformación, por lo que las reglas aplicadas también se vuelven a mostrar.

- Aplicar la regla 2 al término  $v_c(t)$ :

$$y(t) = cx(t) \implies Y(k) = cX(k)$$

$$v_c(t) \longrightarrow V_c(k)$$

- Aplicar la regla 7 al término  $V_m \operatorname{sen} \omega t$ :

$$y(t) = \operatorname{sen}(\omega t + \alpha) \implies Y(k) = \frac{\omega^k}{k!} \operatorname{sen}\left(\omega t_n + \frac{\pi k}{2} + \alpha\right)$$

$$V_m \operatorname{sen}(\omega t) \longrightarrow V_m \frac{\omega^k}{k!} \operatorname{sen}\left(\omega t_n + \frac{\pi k}{2}\right)$$

- Aplicar la regla 9 al término  $\frac{dv_c(t)}{dt}$ :

$$y(t) = \frac{dx(t)}{dt} \implies Y(k) = (k+1)X(k+1)$$

$$\frac{dv_c(t)}{dt} \longrightarrow (k+1)V_c(k+1)$$

Sustituyendo estas transformaciones en (2.28), se tiene que

$$(k+1)V_c(k+1) = \frac{V_m \frac{\omega^k}{k!} \operatorname{sen} \left( \omega t_n + \frac{\pi k}{2} \right) - V_c(k)}{RC} \quad (2.29)$$

Ahora, despejando el término  $V_c(k+1)$  la ecuación transformada queda como:

$$V_c(k+1) = \frac{V_m \frac{\omega^k}{k!} \operatorname{sen} \left( \omega t_n + \frac{\pi k}{2} \right) - V_c(k)}{(k+1)RC} \quad (2.30)$$

Por lo tanto, la TD de (2.28) se representa por (2.30), con la cual se pueden obtener los coeficientes de Taylor de (2.12) para  $k = 0, 1, 2, \dots$ , los cuales se actualizan para cada paso de integración dado por  $h$ . Así, los coeficientes de Taylor se obtienen de manera más eficiente y con un menor costo computacional por medio de TD usando (2.30), la cual, es equivalente a (2.31) y cuya solución por medio el método de Taylor se hace con (2.32).

$$V_c(k) = \frac{1}{k!} \left[ \frac{d^k v_c(t)}{dt^k} \right]_{t=t_n} \quad (2.31)$$

$$v_c(t_{n+1}) = \sum_{k=0}^{\infty} V_c(k) h^k \quad (2.32)$$

A continuación, se hace el desarrollo para la obtención de cada uno de los coeficientes de Taylor por medio de (2.30), partiendo de condiciones iniciales igual a cero,  $V_c(t_0) = 0$ , un paso de integración  $h = 5 \times 10^{-4}$  y  $k = 0, 1, 2, 3$ , con lo cual se obtienen cuatro coeficientes en la serie de Taylor.

- Para  $t_0 = 0$

$$V_c(t_0) = 0$$

- Para  $t_1 = h$

– Para  $k = 0$ :

$$V_c(1) = \frac{V_m \omega^0}{0!} \operatorname{sen} \left( \omega t_0 + \frac{\pi(0)}{2} \right) - V_c(0)}{(0+1)RC} = \frac{0 - 0}{200(0.1 \times 10^{-3})(1)} = 0$$

– Para  $k = 1$

$$V_c(2) = \frac{\frac{V_m \omega^1}{1!} \operatorname{sen} \left( \omega t_0 + \frac{\pi(1)}{2} \right) - V_c(1)}{(1+1)RC} = \frac{V_m \omega - 0}{200(0.1 \times 10^{-3})(2)} = 1.4662 \times 10^6$$

– Para  $k = 2$

$$V_c(3) = \frac{\frac{V_m \omega^2}{2!} \operatorname{sen} \left( \omega t_0 + \frac{\pi(2)}{2} \right) - V_c(2)}{(2+1)RC} = \frac{0 - 1.4662 \times 10^6}{200(0.1 \times 10^{-3})(3)} = -2.4437 \times 10^7$$

– Para  $k = 3$

$$V_c(4) = \frac{\frac{V_m \omega^3}{3!} \operatorname{sen} \left( \omega t_0 + \frac{\pi(3)}{2} \right) - V_c(3)}{(3+1)RC} = \frac{-V_m \omega^3/3! - (-2.4437 \times 10^7)}{200(0.1 \times 10^{-3})(4)} = -1.7059 \times 10^{10}$$

Luego, al sustituir estos cuatro coeficientes en la serie de Taylor de (2.32), se tiene que

$$v_c(t_1) \approx V_c(0) + V_c(1)h + V_c(2)h^2 + V_c(3)h^3 + V_c(4)h^4$$

$$v_c(t_1) \approx 0 + 0(5 \times 10^{-4}) + 1.4662 \times 10^6 (5 \times 10^{-4})^2 - 2.4437 \times 10^7 (5 \times 10^{-4})^3 - 1.7059 \times 10^{10} (5 \times 10^{-4})^4$$

Por lo tanto,

$$v_c(t_1) \approx 0.3624 \text{ V}$$

Ahora, se calculará la solución para el siguiente paso de integración,  $t_2 = 2h$ , por lo que  $t_n$  toma el valor de  $t_1 = 1 \times 10^{-3}$  en (2.30) y  $V_c(0) = 0.3624$ , es decir, el valor anterior.

• Para  $t_2 = 2h$

– Para  $k = 0$

$$V_c(1) = \frac{\frac{V_m \omega^0}{0!} \operatorname{sen} \left( \omega t_1 + \frac{\pi(0)}{2} \right) - V_c(0)}{(0+1)RC} = 1.4394 \times 10^3$$

– Para  $k = 1$

$$V_c(2) = \frac{V_m \omega^1}{1!} \frac{\text{sen} \left( \omega t_1 + \frac{\pi(1)}{2} \right) - V_c(1)}{(1+1)RC} = 1.4042 \times 10^6$$

– Para  $k = 2$

$$V_c(3) = \frac{V_m \omega^2}{2!} \frac{\text{sen} \left( \omega t_1 + \frac{\pi(2)}{2} \right) - V_c(2)}{(2+1)RC} = -5.7927 \times 10^7$$

– Para  $k = 3$

$$V_c(4) = \frac{V_m \omega^3}{3!} \frac{\text{sen} \left( \omega t_1 + \frac{\pi(3)}{2} \right) - V_c(3)}{(3+1)RC} = -1.6333 \times 10^{10}$$

Por lo que, aplicando Taylor, se tiene la solución para el instante  $t_2 = 1 \times 10^{-3}$ , es decir,

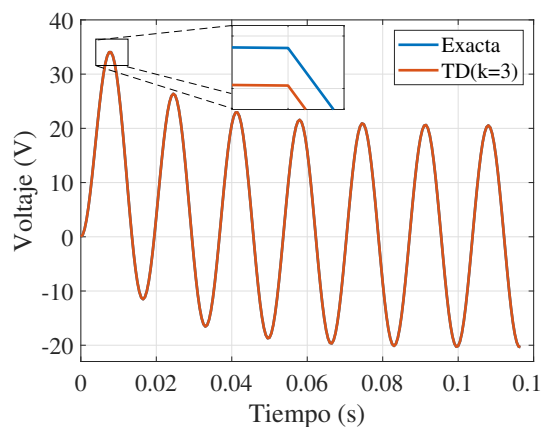
$$v_c(t_2) \approx 1.4249 \text{ V}$$

De manera similar, se sigue el mismo procedimiento para calcular los siguientes instantes de tiempo y así obtener el comportamiento dinámico para un intervalo de tiempo especificado. Para este caso, se elige un tiempo final de 7/60 segundos. La Tabla 2.1 muestra los resultados obtenidos para los primeros 10 pasos de integración por medio de la TD. Por otro lado, la Tabla 2.2 muestra la comparación entre la solución aproximada usando TD y la solución exacta para los primeros 10 pasos de integración, así como el error en el tiempo de la TD con respecto a la solución analítica.

La Figura 2.3 muestra la comparación del comportamiento dinámico entre la solución exacta y la solución con TD. Se puede observar la precisión que tiene el método de Taylor basado en la TD, el cual se acerca mucho a la solución exacta para un valor de  $k = 3$  (ver ampliación en la Figura 2.3). Una de las ventajas que presenta este método, es que se tiene la opción de manipular tanto el paso de integración  $h$ , así como el número de coeficientes  $k$  de la serie de Taylor, para una mejor precisión y, por lo tanto, una reducción en el error, mientras que los otros métodos de integración numérica tradicionales, solamente se puede manipular  $h$ , este hecho se demuestra a continuación.

Tabla 2.1: Coeficientes de Taylor y solución aproximada de  $v_c(t)$  para los primeros 10 pasos de integración del circuito RC mediante TD

$t(s)$	$V_c(0)$	$V_c(1)$	$V_c(2)$	$V_c(3)$	$V_c(4)$	$v_c(t)$
0	-	-	-	-	-	0
$5 \times 10^{-4}$	0	0	$1.4662 \times 10^6$	$-2.4436 \times 10^7$	$-1.7059 \times 10^{10}$	0.3624
$1 \times 10^{-3}$	0.3624	$1.4394 \times 10^3$	$1.4042 \times 10^6$	$-5.7927 \times 10^7$	$-1.6333 \times 10^{10}$	1.4249
$1.5 \times 10^{-3}$	1.4249	$2.7921 \times 10^3$	$1.2934 \times 10^6$	$-8.9381 \times 10^7$	$-1.5028 \times 10^{10}$	3.1322
$2 \times 10^{-3}$	3.1322	$4.0111 \times 10^3$	$1.1376 \times 10^6$	$-1.1768 \times 10^8$	$-1.3190 \times 10^{10}$	5.4066
$2.5 \times 10^{-3}$	5.4066	$5.0542 \times 10^3$	$9.4242 \times 10^5$	$-1.4183 \times 10^8$	$-1.0885 \times 10^{10}$	8.1509
$3 \times 10^{-3}$	8.1509	$5.8851 \times 10^3$	$7.1465 \times 10^5$	$-1.6097 \times 10^8$	$-8.1945 \times 10^9$	11.2515
$3.5 \times 10^{-3}$	11.2515	$6.4753 \times 10^3$	$4.6237 \times 10^5$	$-1.7441 \times 10^8$	$-5.2132 \times 10^9$	14.5826
$4 \times 10^{-3}$	14.5826	$6.8047 \times 10^3$	$1.9450 \times 10^5$	$-1.8170 \times 10^8$	$-2.0472 \times 10^9$	18.0108
$4.5 \times 10^{-3}$	18.0108	$6.8623 \times 10^3$	$-7.9497 \times 10^4$	$-1.8255 \times 10^8$	$1.1916 \times 10^9$	21.3993
$5 \times 10^{-3}$	21.3993	$6.6469 \times 10^3$	$-3.4993 \times 10^5$	$-1.7696 \times 10^8$	$4.3883 \times 10^9$	24.6134

Figura 2.3: Comparación entre la respuesta exacta y la TD para el circuito RC en serie usando  $k = 3$ .

### 2.5.1. Comparación entre la solución exacta, RK4, EM, RT y TD

El objetivo de esta Sección, es realizar una comparación entre la solución exacta y los métodos de integración numérica RK4, EM, RT y el método de la TD. Para esto,

Tabla 2.2: Comparación entre la solución analítica y la solución numérica por medio de la TD para los primeros 10 pasos de integración de  $v_c(t)$  del circuito RC

$t(s)$	TD	Analítico	error(t)
0	0	0	0
$5 \times 10^{-4}$	0.3624	0.3624	$6.5887 \times 10^{-6}$
$1 \times 10^{-3}$	1.4249	1.4249	$2.0394 \times 10^{-5}$
$1.5 \times 10^{-3}$	3.1322	3.1322	$4.0744 \times 10^{-5}$
$2 \times 10^{-3}$	5.4066	5.4067	$6.6737 \times 10^{-5}$
$2.5 \times 10^{-3}$	8.1509	8.1510	$9.7277 \times 10^{-5}$
$3 \times 10^{-3}$	11.2515	11.2516	$1.3111 \times 10^{-4}$
$3.5 \times 10^{-3}$	14.5826	14.5828	$1.6688 \times 10^{-4}$
$4 \times 10^{-3}$	18.0108	18.0110	$2.0314 \times 10^{-4}$
$4.5 \times 10^{-3}$	21.3993	21.3995	$2.3847 \times 10^{-4}$
$5 \times 10^{-3}$	24.6134	24.6137	$2.7144 \times 10^{-4}$

se obtiene tanto el error en el tiempo,  $error(t) = v_c(t) - \hat{v}_c(t)$ , donde  $v_c(t)$  corresponde a la solución exacta y  $\hat{v}_c(t)$  denota la solución numérica, así como el error cuadrático medio (RMSE, del inglés Root Mean Squared Error) de cada uno de los métodos.

### Error Cuadrático Medio

El error cuadrático medio (RMSE del inglés Root Mean Square Error) mide la cantidad de error que hay entre dos conjuntos de datos. En otras palabras, compara un valor calculado o aproximado y un valor real o conocido. Se calcula de la siguiente manera.

$$RMSE = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (valor\ real_i - valor\ estimado_i)^2}{n}} \quad (2.33)$$

donde  $n$ , para este caso, corresponde al número total de pasos de integración.

El RMSE es importante para este caso de estudio, ya que permite ver la tendencia que tiene el error conforme se incrementan los coeficientes  $k$  para el método de la TD con

$h$  fijo. Por lo que, la principal idea es incrementar los coeficientes  $k$  y comparar el RMSE entre los métodos de RK4, EM, RT y TD, respectivamente, y así verificar, que conforme el número de coeficientes  $k$  aumenta, el RMSE disminuye para un mismo  $h$ , con lo que se demuestra cómo el método propuesto mejora su precisión conforme  $k$  aumenta y de esta manera cumplir con el criterio 1 de la Sección 2.2.

La Figura 2.4 muestra el error en el tiempo para los 4 métodos propuestos, recordando que  $h = 5 \times 10^{-4}$  y para TD primeramente se utiliza un valor de  $k = 1$ . Se puede observar que para  $k = 1$  en la TD, existe un error que se comporta de manera similar a los métodos de RK4 y EM (con un error máximo alrededor de 2). A su vez, este error es mayor que el obtenido con el método de la RT (con un valor máximo alrededor de 0.06), por lo que RT tiene el menor error de los cuatro métodos.

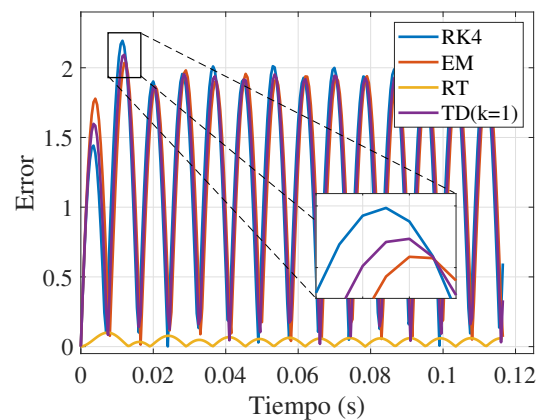


Figura 2.4: Error en el tiempo para los cuatro métodos propuestos.

Entonces, lo siguiente es comprobar como se va reduciendo el error a medida que se incrementa  $k$  para TD y conservando el mismo valor de  $h$ . Esto se puede ver en la Figura 2.5, por lo que el análisis del error se realiza únicamente para los métodos de RT y TD, ya que RT fue el que menor error presentó para el mismo paso de integración. De la Figura 2.4, se observa que el error más pequeño corresponde a la RT, por lo tanto, la Figura 2.5 vuelve a presentar el error obtenido por RT junto con el error de la transformación diferencial,

pero ahora para una  $k = 2$  y  $k = 3$ . Se observa que cuando  $k = 2$ , el error se reduce considerablemente, pero aún sigue siendo ligeramente mayor que en la RT. Pero cuando  $k = 3$ , el error ya se hace mucho menor, por lo que se puede concluir con este ejemplo, que mientras más coeficientes se tengan a la hora de realizar la solución de las ecuaciones diferenciales, más precisa será, es decir, el error se hace cada vez más pequeño.

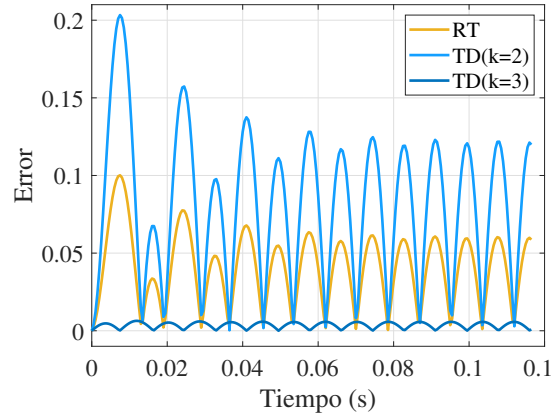


Figura 2.5: Comparación del error en el tiempo entre RT y TD utilizando  $k = 2$  y  $k = 3$ .

Para un análisis más detallado, la Figura 2.6 muestra el comportamiento del RMSE para diferentes valores de  $k$  y  $h$ , donde el eje  $x$  de la Figura 2.6(a) representa un incremento en los coeficientes  $k$  y el eje  $y$  denota el valor del RMSE. Se puede ver que cuando  $k = 1$  se tiene un porcentaje de error de 135.35% y cuando  $k$  se incrementa a 2, el error decrece a 9.59%, y así se hace para cada punto. Debido a la escala de la gráfica, no se puede observar con más detalle los coeficientes mayores a 3, por lo que estos resultados se presentan de mejor forma en la Tabla 2.3, con el propósito de observar con mayor detalle dicho comportamiento. En la columna uno de la Tabla 2.3, se muestran los coeficientes  $k$  hasta un valor de  $k = 10$ , mientras que en la columna dos se muestra el RMSE para cada coeficiente.

Similarmente, se realiza el análisis del error al decrementar  $h$ , esto se muestra en la Figura 2.6(b), donde  $h$  aparece en el eje horizontal y el error RMSE aparece en el eje



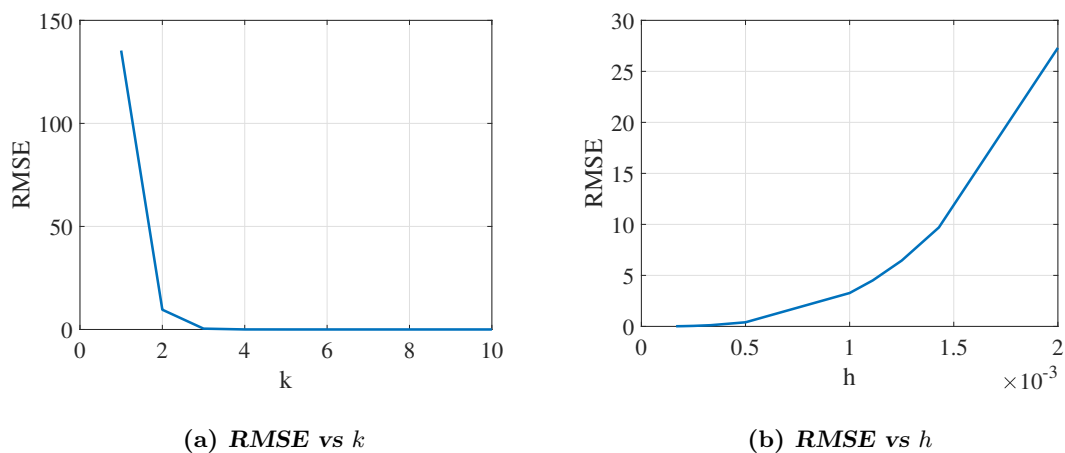


Figura 2.6: Comportamiento del RMSE ante la variación de  $h$  y  $k$ .

Tabla 2.3: RMSE conforme se incrementa  $k$  y  $h$ , respectivamente

$k$	RMSE para $h = 1.67 \times 10^{-4}$	$h$	RMSE para $k = 3$
1	135.35	$1.67 \times 10^{-4}$	0.0148
2	9.59	$2.0 \times 10^{-4}$	0.0255
3	0.402 4	$2.5 \times 10^{-4}$	0.0499
4	0.0170	$3.33 \times 10^{-4}$	0.1187
5	$4.7672 \times 10^{-4}$	$5.0 \times 10^{-4}$	0.4024
6	$1.4386 \times 10^{-5}$	$1.0 \times 10^{-3}$	3.2730
7	$3.0254 \times 10^{-7}$	0.0011	4.5091
8	$7.0986 \times 10^{-9}$	0.0013	6.4523
9	$1.0515 \times 10^{-10}$	0.0014	9.6997
10	$1.7482 \times 10^{-11}$	0.002	27.3020

vertical. Los valores exactos del RMSE y de  $h$  se muestran en la Tabla 2.3 para  $k = 3$ , esto significa que se varía  $h$  manteniendo una  $k$  constante en cada punto del RMSE para obtenerse una curva de tipo exponencial, es decir, que el RMSE no disminuye linealmente.

$h$  se muestra en la columna tres de la Tabla 2.3 y el RMSE se muestra en la columna cuatro.

## 2.6. Resumen

En este Capítulo se describen cuatro métodos de integración, que son el RK4, EM, RT y TD para la solución de ecuaciones diferenciales. Además, se presentan las reglas de la TD para el cálculo eficiente de los coeficientes de Taylor y como aplicarlas para la solución de ODEs. También se presenta un ejemplo analítico con un circuito RC en serie para ver el desempeño de cada método para un mismo paso de integración. Todos los métodos tuvieron un buen desempeño, pero con la TD se puede tener una mayor precisión al incrementar el número de derivadas para la solución mediante el método de Taylor. Esto se demuestra en la gráfica del RMSE, donde con cada incremento de  $k$  se tiene un RMSE cada vez menor, por lo que en este Capítulo queda demostrada la precisión y la estabilidad numérica de dicho método mediante las reglas de la TD.

## Capítulo 3

# Aplicación de la transformación diferencial a sistemas multimáquina

En este Capítulo se presenta el modelo del generador síncrono y las ecuaciones de interconexión con la red para su respectiva simulación. El modelado del generador síncrono sigue siendo de gran importancia debido a que tiene un gran impacto en la generación de la energía eléctrica. Los modelos que se presentan en esta tesis son: (*i*) el modelo transitorio con excitación simple, es decir, se tiene un modelo de generador con cuatro ecuaciones diferenciales más una ecuación del excitador y (*ii*) el modelo clásico, el cual consiste de dos ecuaciones diferenciales y no se considera el excitador.

### 3.1. Modelado del generador síncrono

En general, las EDAs correspondientes al generador y las ecuaciones de red se pueden representar mediante (3.1), (3.2) y (3.3) [29].

$$\dot{x} = f(x, I_{dq}, V, u) \quad (3.1)$$

$$I_{dq} = h(x, V) \quad (3.2)$$

$$0 = g(x, I_{dq}, V) \quad (3.3)$$

La ecuación (3.1) es la representación matemática de un sistema dinámico, donde  $x$  son las variables de estado,  $\dot{x}$  es la derivada de las variables de estado con respecto al tiempo,  $I_{dq}$  representa las variables algebraicas asociadas al estator de la máquina,  $V$  son las variables asociadas a la red y  $u$  es el vector de entradas del sistema.

La ecuación (3.2) representa el balance de potencia en la red [29]. Ya que las variables algebraicas asociadas al estator  $I_{dq}$  están en función de  $x$  y  $V$ , estas se sustituyen en (3.1) y (3.3), obteniéndose (3.4) y (3.5)

$$\dot{x} = f(x, V, u) \quad (3.4)$$

$$0 = g(x, V) \quad (3.5)$$

donde (3.4) y (3.5) constituyen el sistema de EDAs a resolver. Note que (3.5) engloba a las ecuaciones de balance de potencia, donde  $x$  son las variables de estado,  $I_{dq}$  son las variables algebraicas relacionadas con el estator de la máquina,  $V$  son las variables de la red y  $u$  son las entradas al sistema, estas entradas dependerán del modelo que se utilice, como se verá cuando se analicen los modelos para las simulaciones.

### 3.1.1. Modelo transitorio del generador síncrono

El modelo transitorio del generador síncrono se representa mediante cuatro ecuaciones diferenciales y tres algebraicas. Estas ecuaciones se obtienen al hacer ciertas consideraciones en el modelo completo. El modelo completo se puede verificar en el Capítulo 3 de [1] y la manera en la que se reduce se encuentra en el Capítulo 5 del mismo libro [1].

De acuerdo a [1] y [30], las ecuaciones que describen el comportamiento del modelo transitorio del generador son las siguientes:

$$T'_{qO_i} \frac{dE'_{di}}{dt} = -E'_{di} + (x_{qi} - x'_{qi})I_{qi} \quad (3.6)$$

$$T'_{dO_i} \frac{dE'_{qi}}{dt} = E_{fdi} - E'_{qi} - (x_{di} - x'_{di})I_{di} \quad (3.7)$$

$$\frac{d\delta_i}{dt} = \omega_s(\omega_i - 1) \quad (3.8)$$

$$2H_i \frac{d\omega_i}{dt} = P_{mi} - P_{ei} - D_i(\omega_i - 1) \quad (3.9)$$

donde  $E'_{di}$  y  $E'_{qi}$  son los voltajes transitorios en el eje  $d$  y  $q$ ,  $\delta_i$  es el ángulo del rotor con respecto al eje magnético del estator y  $\omega_i$  es la velocidad de la máquina.  $P_{ei}$  es la potencia eléctrica generada,  $P_{mi}$  es la potencia mecánica que inyecta la turbina al generador (para las simulaciones presentadas se considera constante) y  $\omega_s$  es la velocidad síncrona del sistema ( $\omega_s = 2\pi \times 60$  rad/seg). Los parámetros físicos de la máquina  $x_{di}$  y  $x_{qi}$  son la reactancia síncrona en el eje  $d$  y  $q$ ,  $x'_{di}$  y  $x'_{qi}$  son la reactancia transitoria en el eje  $d$  y  $q$ ,  $T'_{dO_i}$  y  $T'_{qO_i}$  son las constantes de tiempo de circuito abierto en el eje  $d$  y  $q$ ,  $H_i$  es la inercia y  $D_i$  es el factor de amortiguamiento, donde el subíndice  $i$  denota el número de generador que se está analizando. Todas las variables están en pu a excepción de  $\omega_s$ , la cual está en rad/seg y  $\delta_i$  en radianes.  $E_{fdi}$  es el voltaje de excitación, aquí se utilizará el modelo simple descrito en [31], el cual consta de una ecuación diferencial que viene dada por

$$T_{Ai} \frac{dE_{fdi}}{dt} = -E_{fdi} + K_{Ai}(V_{refi} - |V_{ti}|) \quad (3.10)$$

donde  $K_{Ai}$  y  $T_{Ai}$  son la ganancia de excitación y la constante de tiempo, respectivamente.  $V_{refi}$  es el voltaje de referencia y  $V_{ti}$  es el voltaje en terminales del generador determinado por

$$|V_{ti}| = \sqrt{V_{di}^2 + V_{qi}^2} \quad (3.11)$$

Las ecuaciones algebraicas son

$$P_{ei} = V_{di}I_{di} + V_{qi}I_{qi} \quad (3.12)$$

$$V_{di} = E'_{di} + x'_{di}I_{qi} \quad (3.13)$$

$$V_{qi} = E'_{qi} - x'_{di}I_{di} \quad (3.14)$$

donde  $I_{di}$  e  $I_{qi}$  son las corrientes del estator de la máquina en el eje  $d$  y  $q$ ,  $V_{di}$  y  $V_{qi}$  son los voltajes en el eje  $d$  y  $q$ , respectivamente.

### 3.2. Modelo clásico del generador síncrono

El modelo clásico del generador síncrono se puede obtener del modelo transitorio haciendo ciertas consideraciones [1] como  $x'_{qi} = x'_{di}$ ,  $T'_{qO_i} = T'_{dO_i} = \infty$ . El resultado son las ecuaciones diferenciales para la velocidad y el ángulo como se muestran a continuación:

$$2H_i \frac{d\omega_i}{dt} = P_{mi} - P_{ei} - D_i(\omega_i - 1) \quad (3.15)$$

$$\frac{d\delta_i}{dt} = \omega_s(\omega_i - 1) \quad (3.16)$$

Estas ecuaciones son iguales a las mostradas para el modelo transitorio, solo se eliminaron los estados  $E'_{di}$  y  $E'_{qi}$ , que para este caso se consideran constantes. Tampoco se considera la ecuación del excitador simple  $E_{fdi}$ , la cual también es constante para la simulación. Las ecuaciones algebraicas son las mismas que en el caso transitorio, las cuales se escriben nuevamente a continuación:

$$P_{ei} = V_{di}I_{di} + V_{qi}I_{qi} \quad (3.17)$$

$$V_{di} = E'_{di} + x'_{di}I_{qi} \quad (3.18)$$

$$V_{qi} = E'_{qi} - x'_{di}I_{di} \quad (3.19)$$

Hasta aquí, ya se tienen los modelos del generador para los casos transitorio y clásico, lo que sigue es hacer las interconexiones con la red para pasar del plano de referencia

$dq$  al plano de complejo  $xy$ , debido a que los voltajes y corrientes nodales se presentan en forma rectangular para los casos de estudio. Por lo tanto, las ecuaciones de equivalencia son [1]:

$$\mathbf{I} = \mathbf{Y}_{\text{red}} \mathbf{V} \quad (3.20)$$

$$\begin{bmatrix} I_{xi} \\ I_{yi} \end{bmatrix} = \mathbf{R} \begin{bmatrix} I_{di} \\ I_{qi} \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

$$\begin{bmatrix} V_{xi} \\ V_{yi} \end{bmatrix} = \mathbf{R} \begin{bmatrix} E'_{di} \\ E'_{qi} \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \text{sen } \delta_i & \text{cos } \delta_i \\ -\text{cos } \delta_i & \text{sen } \delta_i \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

donde  $\mathbf{I}$  es el vector de corrientes de la red en forma rectangular,  $\mathbf{Y}_{\text{red}}$  es la matriz reducida de admitancia,  $\mathbf{V}$  es el vector de voltajes de la red en forma rectangular,  $\mathbf{R}$  es la matriz de conversión entre los planos de referencia  $dq$  y  $xy$ ,  $I_{xi}$  e  $I_{yi}$  son las corrientes real e imaginaria de la red,  $V_{xi}$  y  $V_{yi}$  son los voltajes real e imaginario. La Figura 3.1 muestra de manera gráfica la interacción de los elementos de la red con los generadores.

Del lado izquierdo de la figura aparecen fuentes de voltaje controlado que representan a los generadores síncronos con su respectiva impedancia interna ( $R_{si} + jx'_{di}$ ), donde  $R_{si}$  es la resistencia interna de las bobinas. Estos generadores están inyectando corrientes a la red ( $I_{di} + jI_{qi}$ ), para  $i = 1, \dots, m$ , donde  $m$  es el número total de generadores en el sistema. Del lado derecho de la figura aparecen las cargas. Obsérvese que del lado izquierdo también aparecen cargas conectadas al mismo nodo que los generadores, por lo que se tiene para  $i = m + 1, \dots, n$ , donde  $n$  es el número de nodos de carga en el sistema. Estas interconexiones están determinadas por las ecuaciones de balance de potencia y se presentan a continuación[1].

### Nodos de generación

$$V_i e^{j\theta} (I_{di} - jI_{qi}) e^{-j(\delta_i - \pi/2)} + P_{Li}(V_i) + jQ_{Li}(V_i) = \sum_{i=1}^m V_i V_k Y_{ik} e^{j(\theta_i - \theta_k - \alpha_{ik})} \quad (3.24)$$

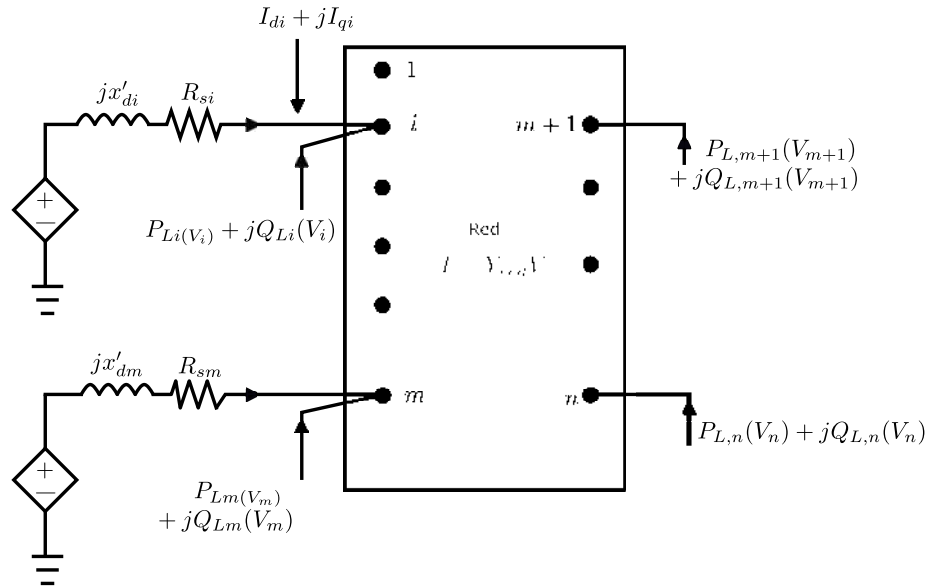


Figura 3.1: Interconexión entre el generador síncrono y el resto de la red [1].

para  $i = 1, \dots, m$ , donde  $m$  es el número total de generadores en el sistema.

### Nodos de carga

$$P_{Li}(V_i) + jQ_{Li}(V_i) = \sum_{i=1}^n V_i V_k Y_{ik} e^{j(\theta_i - \theta_k - \alpha_{ik})} \quad (3.25)$$

para  $i = m + 1, \dots, n$ , donde  $n$  es el número de nodos de carga en el sistema.

Una vez que ya se tienen los dos modelos con los que se va a trabajar (clásico y transitorio), el siguiente paso es transformarlos con el uso de las reglas de la TD que se presentaron en el Capítulo 2.



### 3.3. Transformación diferencial del generador síncrono, modelo transitorio

Aplicando las reglas de la transformación diferencial mostradas en la Sección 2.3.5 al modelo transitorio, se tiene el siguiente sistema de ecuaciones

$$E'_{di}(k+1) = \frac{1}{(k+1)T'_{qOi}} (-E'_{di}(k) + (x_{qi} - x'_{di})I_{qi}(k)) \quad (3.26)$$

$$E'_{qi}(k+1) = \frac{1}{(k+1)T'_{dOi}} (E_{fdi}(k) - E'_{qi}(k) - (x_{di} - x'_{di})I_{di}(k)) \quad (3.27)$$

$$\delta_i(k+1) = \frac{\omega_s}{k+1} (\omega_i(k) - \sigma_i(k)) \quad (3.28)$$

$$\omega_i(k+1) = \frac{1}{(k+1)2H_i} (\sigma_i(k)P_{mi} - P_{ei}(k) - D_i[\omega_i(k) - \sigma_i(k)]) \quad (3.29)$$

$$E_{fdi}(k+1) = \frac{1}{(k+1)T_{Ai}} (-E_{fdi}(k) + K_{Ai}[V_{refi}\sigma(k) - |V_{ti}|(k)]) \quad (3.30)$$

NOTA: Se debe tener especial cuidado al momento de aplicar esta transformación diferencial cuando se tienen constantes, por ejemplo, en el ángulo  $\delta_i$  para (3.8), en la cual antes de transformar aparece un 1 (constante), en este caso, al realizar la TD a (3.8) se tiene  $\sigma_i(k)$  en (3.28), la cual tiene el valor de 1 solamente cuando  $k$  sea igual a cero y el valor de cero para cualquier otra  $k$ , ver regla 6 de la proposición 1, Sección 2.3.5. Esto mismo sucede para la potencia mecánica  $P_{mi}$  que se va a considerar constante, y para cualquier otra variable constante que aparezca en las ecuaciones.

Por otra parte, las ecuaciones algebraicas transformadas quedan de la siguiente

manera:

$$P_{ei}(k) = \sum_{p=0}^k V_{di}(p)I_{di}(k-p) + V_{qi}(p)I_{qi}(k-p) \quad (3.31)$$

$$V_{di}(k) = E'_{di}(k) + x'_{di}I_{qi}(k) \quad (3.32)$$

$$V_{qi}(k) = E'_{qi}(k) - x'_{di}I_{qi}(k) \quad (3.33)$$

$$|V_{ti}|(k) = \frac{1}{2|V_{ti}|(0)}X_i(k) - \frac{1}{2|V_{ti}|(0)}\sum_{p=1}^{k-1}|V_{ti}|(p)|V_{ti}|(k-p) \quad (3.34)$$

$$X_i(k) = \sum_{p=0}^k V_{di}(p)V_{di}(k-p) + V_{qi}(p)V_{qi}(k-p) \quad (3.35)$$

$$(3.36)$$

donde  $X_i(k)$  representa la operación dentro del radical de (3.11), es decir  $\sqrt{V_{di}^2 + V_{qi}^2}$ .

### 3.4. Transformación diferencial del generador síncrono, modelo clásico

Para el caso del modelo clásico se tienen solo dos ecuaciones diferenciales cuya transformación diferencial se presentó en la sección anterior y que se reescribe nuevamente a continuación.

$$\delta_i(k+1) = \frac{\omega_s}{k+1}(\omega_i(k) - \sigma_i(k)) \quad (3.37)$$

$$\omega_i(k+1) = \frac{1}{2H_i(k+1)}(\sigma_i(k)P_{mi} - P_{ei}(k) - D_i[\omega_i(k) - \sigma_i(k)]) \quad (3.38)$$

y las ecuaciones algebraicas transformadas quedan de la siguiente manera

$$P_{ei}(k) = \sum_{p=0}^k V_{di}(p)I_{di}(k-p) + V_{qi}(p)I_{qi}(k-p) \quad (3.39)$$

$$V_{di}(k) = E'_{di}\sigma_i(k) + x'_{di}I_{qi}(k) \quad (3.40)$$

$$V_{qi}(k) = E'_{qi}\sigma_i(k) - x'_{di}I_{qi}(k) \quad (3.41)$$

donde se debe tener especial cuidado al transformar (3.40) y (3.41), ya que  $E'_d$  y  $E'_q$  para el modelo transitorio son estados, mientras que para el modelo clásico son constantes y su valor depende de las condiciones iniciales, por lo que  $\sigma(k)$  tendrá este valor inicial solo cuando  $k$  sea igual a cero, y un valor de cero para cualquier otra  $k$ .

Una vez que se tienen todas las ecuaciones del generador transformadas, se procede con la transformación de las ecuaciones de la red, dichas ecuaciones quedan de la manera siguiente:

$$\mathbf{I}(k) = \mathbf{Y}_r \mathbf{V}(k) \quad (3.42)$$

$$\begin{bmatrix} V_{xi}(k) \\ V_{yi}(k) \end{bmatrix} = \sum_{p=0}^k \begin{bmatrix} \Phi_i(p) & \Psi_i(p) \\ -\Psi_i(p) & \Phi_i(p) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E'_{di}(k-p) \\ E'_{qi}(k-p) \end{bmatrix} \quad (3.43)$$

$$\begin{bmatrix} I_{xi}(k) \\ I_{yi}(k) \end{bmatrix} = \sum_{p=0}^k \begin{bmatrix} \Phi_i(p) & \Psi_i(p) \\ -\Psi_i(p) & \Phi_i(p) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{di}(k-p) \\ I_{qi}(k-p) \end{bmatrix} \quad (3.44)$$

donde los términos  $\Phi_i(p)$  y  $\Psi_i(p)$  se calculan con las fórmulas que aparecen en la proposición 2, Sección 2.3.5.

### 3.5. Cálculo de las condiciones iniciales

Es necesario calcular las condiciones iniciales de todas las variables dinámicas del sistema de potencia para poder arrancar con la solución [1]. Estas condiciones iniciales se obtienen de la solución de flujos de potencia, donde se determina la potencia activa y reactiva que está aportando cada generador cuando están trabajando en estado estable. Los valores de las variables se calculan de manera un poco diferente dependiendo del modelo a utilizar, en este caso, para el modelo transitorio y el modelo clásico.

#### 3.5.1. Cálculo de las condiciones iniciales para el modelo transitorio

Este apartado muestra como calcular las condiciones iniciales requeridas para el modelo transitorio. Para esto se sigue una serie de pasos establecidos que se muestran a

continuación [1].

Paso 1: Se calcula la corriente  $I_{Gi} = I_{Gi}e^{j\gamma_i}$  como

$$I_{Gi}e^{j\gamma_i} = \frac{P_{Gi} - jQ_{Gi}}{V_i^*} \quad i = 1, \dots, m \quad (3.45)$$

Donde el subíndice  $G$  indica las corrientes de generador

Paso 2: Cálculo del ángulo  $\delta_i$

$$\delta_i = \text{ángulo de } (V_i e^{j\theta_i} + (R_{si} + jx_{qi})I_{Gi}e^{j\gamma_i}) \quad i = 1, \dots, m \quad (3.46)$$

Paso 3: Cálculo de  $I_{di}$ ,  $I_{qi}$ ,  $V_{di}$  y  $V_{qi}$

$$I_{di} + jI_{qi} = I_{Gi}e^{j(\gamma_i - \delta_i + \pi/2)} \quad i = 1, \dots, m \quad (3.47)$$

$$V_{di} + jV_{qi} = V_i e^{j(\theta_i - \delta_i + \pi/2)} \quad i = 1, \dots, m \quad (3.48)$$

Paso 4: Cálculo de  $E'_{di}$

$$E'_{di} = (x_{qi} - x'_{qi})I_{qi} \quad i = 1, \dots, m \quad (3.49)$$

Paso 5: Cálculo de  $E'_{qi}$

$$E'_{qi} = V_{qi} + R_{si}I_{qi} + x'_{di}I_{di} \quad i = 1, \dots, m \quad (3.50)$$

Paso 6: Cálculo de  $E_{fdi}$  y  $V_{refi}$

$$E'_{fdi} = E'_{qi} + (x_{di} - x'_{di})I_{di} \quad i = 1, \dots, m \quad (3.51)$$

$$V_{refi} = |V_{ti}| + \frac{E_{fdi}}{K_{Ai}} \quad (3.52)$$

Paso 7: Cálculo de la potencia mecánica

$$P_{mi} = V_{di}I_{di} + V_{qi}I_{qi} \quad (3.53)$$

### 3.5.2. Cálculo de las condiciones iniciales para el modelo clásico

Las condiciones iniciales para el modelo clásico son similares al modelo transitorio de cuarto orden. Una de las diferencias está en que no se necesita calcular  $E_{fdi}$ , ya que no aparece en ninguna ecuación, además, algunas de las variables que se calculan se dejan constantes para el resto de la simulación, como lo es  $E'_{di}$  y  $E'_{qi}$ . Por lo tanto, las ecuaciones necesarias para la inicialización del modelo clásico son:

Paso 1: Se calcula la corriente  $I_{Gi} = I_{Gi}e^{j\gamma_i}$  como

$$I_{Gi}e^{j\gamma_i} = \frac{P_{Gi} - jQ_{Gi}}{V_i^*} \quad i = 1, \dots, m \quad (3.54)$$

Paso 2: Cálculo del ángulo  $\delta_i$

$$\delta_i = \text{ángulo de } (V_i e^{j\theta_i} + (R_{si} + jx_{qi})I_{Gi}e^{j\gamma_i}) \quad i = 1, \dots, m \quad (3.55)$$

Paso 3: Cálculo de  $I_{di}$ ,  $I_{qi}$ ,  $V_{di}$  y  $V_{qi}$

$$I_{di} + jI_{qi} = I_{Gi}e^{j(\gamma_i - \delta_i + \pi/2)} \quad i = 1, \dots, m \quad (3.56)$$

$$V_{di} + jV_{qi} = V_i e^{j(\theta_i - \delta_i + \pi/2)} \quad i = 1, \dots, m \quad (3.57)$$

Paso 4: Cálculo de  $E'_{di}$

$$E'_{di} = (x_{qi} - x'_{qi})I_{qi} \quad i = 1, \dots, m \quad (3.58)$$

Paso 5: Cálculo de  $E'_{qi}$

$$E'_{qi} = V_{qi} + R_{si}I_{qi} + x'_{di}I_{di} \quad i = 1, \dots, m \quad (3.59)$$

Paso 6: Cálculo de la potencia mecánica

$$P_{mi} = V_{di}I_{di} + V_{qi}I_{qi} \quad (3.60)$$

### 3.6. Ejemplo del cálculo de las condiciones iniciales

El objetivo del siguiente ejemplo es calcular las condiciones iniciales del generador cuando se está alimentando a una carga a través de una línea de transmisión y está operando en estado estable. La Figura 3.2 muestra el sistema del ejemplo.

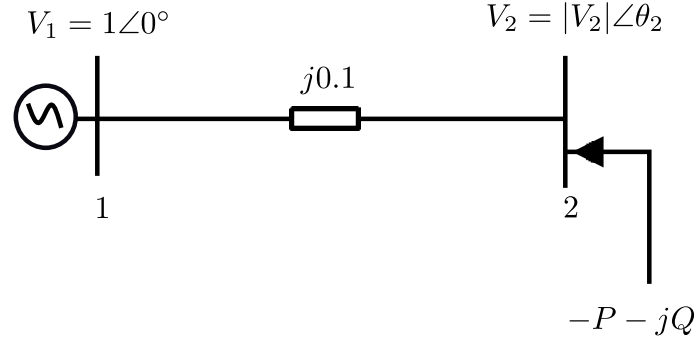


Figura 3.2: Generador síncrono alimentando a una carga a través de una línea de transmisión.

Los datos del generador en *pu* son [30]:  $x_d = 1.67$ ,  $x_q = 1$ ,  $x'_d = 0.232$ ,  $x'_q = 0.466$ ,  $R_s = 0$ ,  $T'_{dO} = 5.4$ ,  $T'_{qO} = 0.88$ ,  $M = 52$ ,  $D = 5$  y  $K_A = 30$ . La carga que se está alimentando es  $P_L = 1.4 pu$  y  $Q_L = 0.2 pu$ . Después de realizar la solución de flujos de potencia, se encuentra el voltaje  $V_2 \angle \theta_2 = 0.9689 \angle -0.1450$ . Con este voltaje se calcula la corriente como:

$$I_{12}^* = \frac{P_L + jQ_L}{V_2 \angle \theta_2} = \frac{1.2 + j0.2}{0.9689 \angle -0.1450} = 1.4596 \angle 0.2869$$

Por lo tanto, la corriente es

$$I_{12} = 1.4596 \angle -0.2869$$

con este valor de corriente se calcula la potencia que consume la línea como

$$Q_{linea} = I_{12}^2(j0.1) = 1.4596^2(j0.1) = j0.2130$$

Por lo que el generador está aportando una potencia total de

$$S_g = P_g + jQ_g = (P_L + jQ_L) + jQ_{linea} = (1.4 + j0.2) + j0.2130 = 1.4 + j0.4130$$

Con este valor de potencia se inicia el cálculo de las condiciones iniciales.

Paso 1: Se tiene que la corriente en el generador es:

$$I_G e^{j\gamma} = \frac{P_G - jQ_G}{V_1^*} = \frac{1.4 - j0.4130}{1} = 1.4596 \angle -0.2869 \quad (3.61)$$

Paso 2: Cálculo del ángulo  $\delta$

$$\delta = \text{ángulo de } (V_1 e^{j\theta_1} + (R_s + jx_q) I_G e^{j\gamma}) = \angle(1 + 1(1.4596 \angle -0.2869)) = -0.1704 \quad (3.62)$$

Paso 3: Cálculo de  $I_d$ ,  $I_q$ ,  $V_d$  y  $V_q$

$$I_d + jI_q = I_G e^{j(\gamma - \delta + \pi/2)} = 1.4596 e^{j(-0.2869 + 0.1704 + \pi/2)} = 0.1697 + j1.4497 \quad (3.63)$$

$$V_d + jV_q = V_1 e^{j(\theta_1 - \delta + \pi/2)} = e^{j(0 + 0.1704 + \pi/2)} = -0.1735 + j0.9848 \quad (3.64)$$

Paso 4: Cálculo de  $E'_d$

$$E'_d = (x_q - x'_q) I_q = (1 - 0.466) 1.4497 = 0.7741 \quad (3.65)$$

Paso 5: Cálculo de  $E'_q$

$$E'_q = V_q + R_s I_q + x'_d I_d = 0.9848 + 0(1.4497) + 0.232(0.1697) = 1.0242 \quad (3.66)$$

Paso 6: Cálculo de  $E'_{fd}$  y  $V_{ref}$

$$E'_{fd} = E'_q + (x_d - x'_d) I_d = 1.0242 + (1.67 - 0.232) 0.1697 = 1.2682 \quad (3.67)$$

$$V_{ref} = V_t + \frac{E'_{fd}}{K_A} = \sqrt{(-0.1735)^2 + (0.9848)^2} + 1.2682/30 = 1.0422 \quad (3.68)$$

Paso 7: Cálculo de la potencia mecánica

$$P_m = V_d I_d + V_q I_q = 0.1697(-0.1735) + 1.4497(0.9848) = 1.3965 \approx 1.4 \quad (3.69)$$

### 3.7. Resumen

En este Capítulo se presenta el modelado del generador síncrono. Los modelos son: el modelo clásico (de segundo orden) y el modelo transitorio (de cuarto orden con excitador simple). Se presentan las ecuaciones de red, las cuales permiten las conexiones entre los generadores y la red, ya que es en la red donde se aplica la falla, esto es porque la red puede cambiar rápidamente su condición de operación y los generadores no, de ahí que es importante analizar su estabilidad transitoria, para verificar el comportamiento de las máquinas.

Una vez que se tiene el conjunto completo de EDAs tanto para el modelo transitorio como para el modelo clásico, se presenta como se aplican las reglas de la transformación diferencial a este conjunto de EDAs de tal forma que queden de una manera adecuada para su programación y así poder adaptarlas al PST para realizar las simulaciones multimáquina.

También se describen las ecuaciones para el cálculo de las condiciones iniciales, ya que en este tipo de problemas se necesitan, pues la curva solución se obtiene mediante métodos numéricos que requieren un valor inicial para comenzar el proceso de integración. Posteriormente, se realiza un análisis del funcionamiento de estas ecuaciones mediante un ejemplo en el cual se calculan las condiciones iniciales tanto para el modelo clásico como para el modelo transitorio.



## Capítulo 4

# Simulación dinámica de grandes sistemas multimáquina

### 4.1. Introducción

Este Capítulo presenta los casos de estudio para la simulación dinámica de sistemas multimáquina aplicando el método de la TD. Para esto, se cuenta con tres sistemas de potencia: (i) el sistema NETS/NYPS (modelo clásico y transitorio), (ii) el sistema NPCC (modelo clásico) y finalmente, (iii) el sistema mexicano reducido que consta de 46 máquinas y 190 nodos (modelo transitorio).

El objetivo de estas simulaciones, es verificar que el método de Taylor a través de la TD puede obtener muy buenos resultados, tan buenos como los otros métodos presentados en el Capítulo 2. Además de que, el tiempo de simulación es inferior para un mismo paso de integración  $h$  comparado con los métodos de RK4, EM y la RT, todos implementados en Matlab y tomando como referencia la herramienta de simulación Power System Toolbox (PST) [1, 2].

El PST es un software escrito en Matlab, es libre por lo que el usuario tiene acceso al código fuente, se puede descargar de [32] que es el sitio de uno de los autores,

además, allí también se encuentra un manual completo, o se puede usar una descripción breve presentada en [1], donde se especifica el formato de los datos de entrada, la formulación y solución de flujos de potencia, inicialización y especificaciones de las fallas. En [1] se discuten 3 aspectos principalmente, que son:

1. Solución de flujos de potencia, requerido para las condiciones iniciales de la simulación dinámica de los generadores.
2. Simulación dinámica para análisis de estabilidad transitoria, que es la parte importante de esta tesis, ya que el método utilizado en este software es el método de Euler Modificado.
3. Análisis lineal, que es útil para la estabilidad de pequeña señal y diseño de controladores.

En los 3 casos se pueden hacer modificaciones para tener resultados que el usuario requiera, como son tabla de datos o gráficas, e inclusive agregar modelos más completos o que aun no se han implementado en el PST. En este trabajo, se hace la adaptación para incluir los métodos de la Transformación Diferencial, Regla Trapezoidal y Runge-Kutta de cuarto orden tomando como referencia el Euler Modificado, que de acuerdo a [1] es el que usa el PST. Los resultados obtenidos se muestran en las siguientes secciones.

## **4.2. Sistema NETS/NYPS de 16 generadores-68 nodos**

El primer caso de estudio que se presenta, es el sistema de 16 máquinas y 68 nodos, cuyo diagrama unifilar se muestra en la Figura 4.1. Este sistema interconectado representa el modelo reducido del sistema de Nueva Inglaterra (Área 1), la red eléctrica de Nueva York (Área 2) y la interconexión con Ontario Hydro, MISO y PJM power networks que están representados por el Área 3 al Área 5, respectivamente.

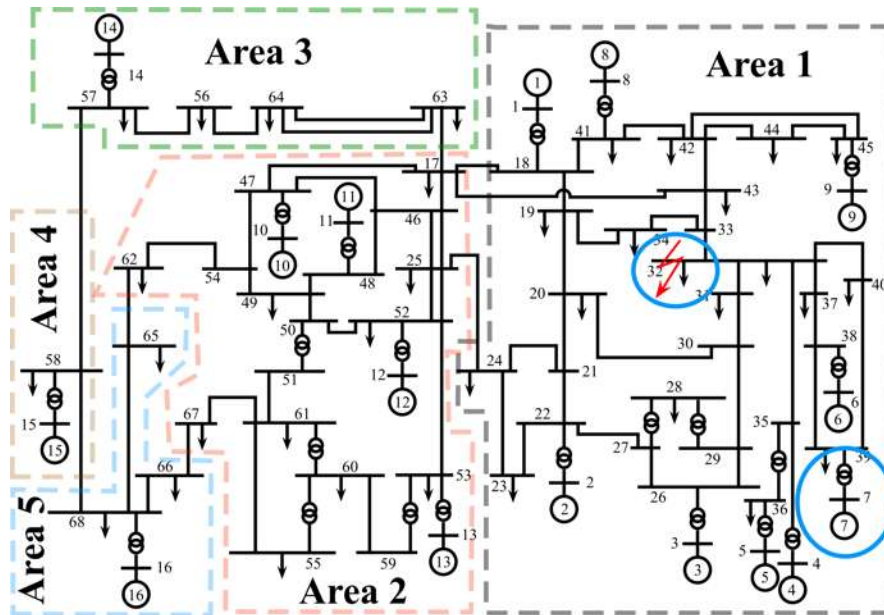


Figura 4.1: Diagrama unifilar del sistema equivalente NETS/NYPS de 16 máquinas y 68 nodos.

El objetivo principal es ver la respuesta del sistema ante una falla, así como el desempeño de los métodos numéricos propuestos ante la simulación dinámica del sistema de potencia, es decir, su precisión, estabilidad y eficiencia numérica.

Para esto, la falla corresponde a una trifásica que se aplica en el nodo 32, el cual está en el Área 1 del sistema de potencia mostrado en la Figura 4.1. La falla se aplica en 1 segundo y se libera tres ciclos después ( $3/60$ ). El paso de integración para la simulación del sistema se establece como  $h = 1/60$  s para todos los métodos. La simulación tiene una duración de 20 s, tiempo suficiente para ver como el sistema tiende al estado estable nuevamente.

Además, como se mencionó anteriormente, en las figuras 4.2 y 4.5 se presentan únicamente los resultados obtenidos con el método de la TD, esto para las 16 máquinas del sistema NETS/NYPS. Por otra parte, con motivos de comparación y así comprobar la confiabilidad de la TD, se realizan también las simulaciones con los métodos de integración

numérica RK4, EM y RT.

#### 4.2.1. Simulación dinámica del sistema NETS/NYPS mediante su modelo clásico

El primer modelo a simular de este sistema, es el modelo clásico, donde las máquinas síncronas se modelan mediante dos ecuaciones diferenciales, las cuales corresponden a la velocidad y el ángulo del rotor de cada máquina, es decir, (3.15) y (3.16). En total, se resuelven 32 ecuaciones diferenciales y 48 ecuaciones algebraicas. La velocidad de la máquina  $\omega$  y el ángulo del rotor  $\delta$ , se muestran en las gráficas de las Figuras 4.2(a) y 4.2(b), respectivamente para la solución numérica mediante TD.

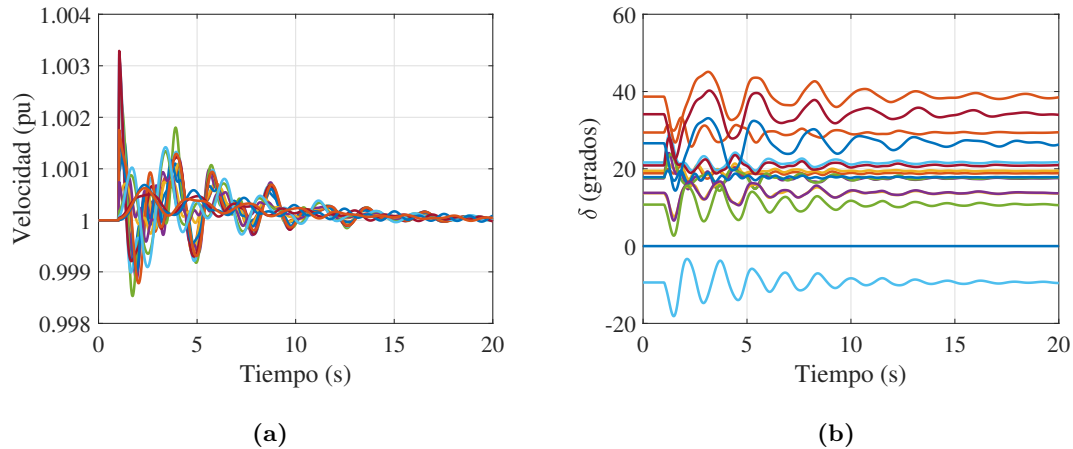


Figura 4.2: Velocidad  $\omega$  y ángulo  $\delta$  de las 16 máquinas para el modelo clásico del sistema NETS/NYPS usando TD.

En las gráficas de la Figura 4.2 se puede observar el estado estable hasta el momento en que se aplica la falla en 1 s. Para el caso de las velocidades, se puede ver que está en la velocidad síncrona, es decir, en 1 p.u.; mientras que los ángulos, también se encuentran en un estado estable. El valor de los ángulos que se muestran en la gráfica de la Figura 4.2(b), es porque se toma como referencia a la máquina 1 del sistema, por lo que aparece en el eje horizontal en un valor de cero para todo la simulación en el tiempo. El

número de coeficientes que se utiliza para la reproducción de estas gráficas por medio del método de la TD es de  $k = 2$ .

Con motivos de comparación y así poder ver con más detalle el comportamiento de los métodos propuestos, la Figura 4.3 presenta las gráficas de velocidad y ángulo de la máquina que tiene la mayor magnitud de oscilación en la velocidad debido a la falla trifásica, que para este caso corresponde a la máquina 7, aunque le siguen de cerca las máquinas 4, 5 y 6, esto debido a que se encuentran muy cerca de la falla. También, se hace un aumento en cierto instante de la señal para poder hacer la comparación con los otros métodos. Se puede observar, que el método de RK4 no converge a la solución para este paso de integración y que la TD tiene muy buen comportamiento ante EM y RT.

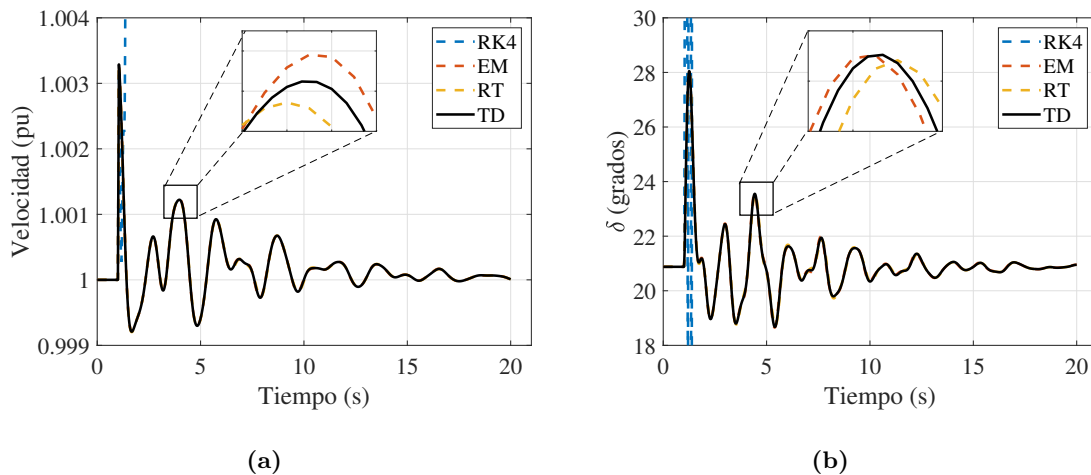


Figura 4.3: Comparación entre RK4, EM, RT y TD para la máquina 7 del sistema NETS/NYPS con modelo clásico.

La Tabla 4.1 muestra los tiempos de simulación que le toma a cada método de integración en obtener la simulación dinámica multimáquina. La primer columna presenta cada método utilizado, mientras que en la segunda columna se indica el tiempo que le toma a cada método realizar la simulación cuando se utiliza el modelo clásico en las máquinas. Para el caso del método RK4, no se coloca el tiempo debido a que el método no converge (nc) para el paso de integración establecido, teniendo en cuenta que el sistema analizado es

estable. Aquí, los tiempos se ven muy similares, ya que se trata de un sistema relativamente pequeño. Además, debido a que se utiliza el modelo clásico, sólo se están resolviendo dos ecuaciones diferenciales por cada máquina. Aún así, se puede ver una pequeña diferencia en la rapidez de la TD.

Tabla 4.1: Comparación de los tiempos de simulación entre RK4, EM, RT y TD para el sistema de 16 máquinas y 68 nodos, modelo clásico.

	Clásico
	Tiempo (s)
TD	0.1094
EM	0.1206
RT	0.2007
RK4	nc

Otro análisis interesante que se hace para este caso en especial es el RMSE y el error en el tiempo tomando como referencia el EM del PST y usando la respuesta de la máquina 7. Para esto, se muestra la Figura 4.4 donde se puede apreciar que el error máximo es menor a  $5 \times 10^{-7}$  y que a medida que la simulación avanza en el tiempo el error se hace cada vez más pequeño, siendo menor a  $1 \times 10^{-7}$  cuando la simulación termina en 20 segundos. Además se tiene un RMSE de  $1.5342 \times 10^{-5}$  por lo que se puede concluir que las respuestas son correctas.

#### 4.2.2. Simulación dinámica del sistema NETS/NYPS mediante su modelo transitorio

El objetivo aquí, es verificar como se incrementa el tiempo de simulación en los diferentes métodos de integración, esto cuando se utiliza el modelo transitorio en las máquinas del sistema, es decir, ahora se modelan los generadores síncronos por medio de cinco ecuaciones diferenciales por cada máquina, ecuaciones (3.6-3.9) y (3.10), y se comprueba que el método de la TD sigue teniendo tiempos de simulación menores que EM y RT.

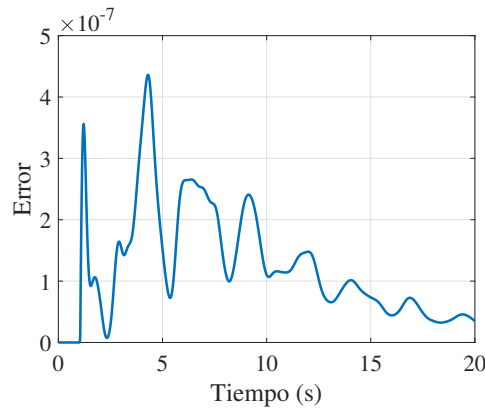


Figura 4.4: Error en el tiempo entre EM y TD.

En la Figura 4.5 se muestra la respuesta transitoria de todas las variables de estado ante una falla trifásica en el nodo 32 y usando TD.

Las variables de estado para el modelo transitorio son: la velocidad  $\omega$ , el ángulo del rotor  $\delta$ , los voltajes transitorios  $E_d'$  y  $E_q'$  y el voltaje del excitador  $E_{fd}$ . Esto corresponde a cinco ecuaciones diferenciales por cada una de las 16 máquinas del sistema NETS/NYPS, dando un total de 80 ecuaciones diferenciales y 64 ecuaciones algebraicas. La falla se aplica en el nodo 32 e igual que en el caso anterior, es aplicada en un segundo y liberada tres ciclos después. También, se utiliza el mismo paso de integración que el caso anterior, es decir,  $h = 1/60$  s para todos los métodos. Por otro lado, para la TD se asigna un valor de  $k = 2$ , con lo cual se tiene el método de Taylor de segundo orden para la simulación del sistema.

Nuevamente, la máquina 7 es la que tiene la oscilación de mayor magnitud (seguida de las máquinas 4, 5 y 6). De esta manera, la respuesta transitoria de la velocidad y el ángulo del rotor de esta máquina se comparan con los métodos de integración tradicionales, cuyas respuestas se ilustran en la Figura 4.6. Adicionalmente, se hace un aumento para ver a detalle el comportamiento de los métodos propuestos, donde se observa que para este caso, los métodos TD y EM tienen un comportamiento muy similar. Por otro lado,

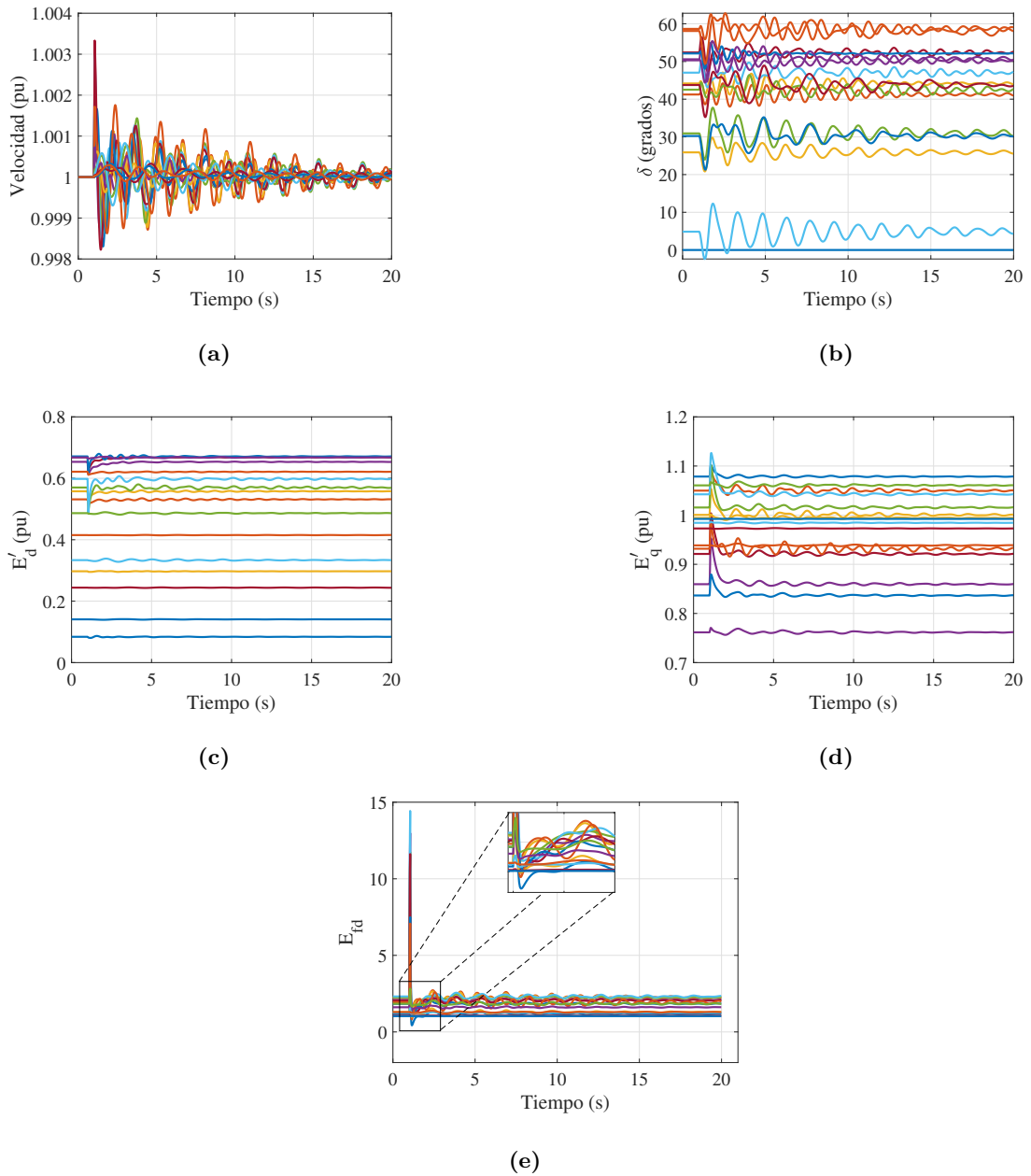


Figura 4.5: Variables de estado de las 16 máquinas para el modelo transitorio del sistema NETS/NYPS por medio de la TD.



el método RK4 diverge de la solución unos ciclos después de la falla, igual que en el caso anterior del modelo clásico.

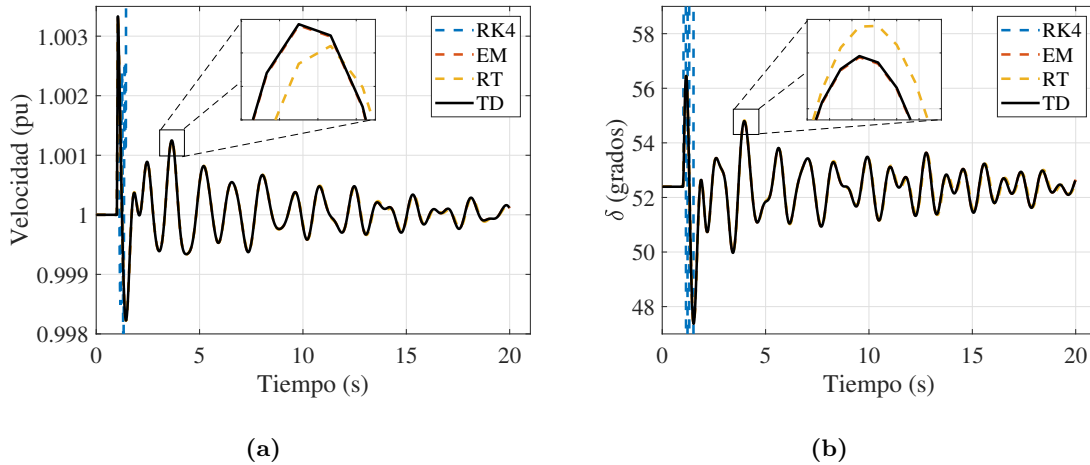


Figura 4.6: Comparación entre RK4, EM, RT y TD para la máquina 7 del sistema NETS/NYPS con modelo transitorio.

Una vez demostrado que el sistema de 16 máquinas ante una falla trifásica con duración de tres ciclos es estable, ahora se procede a realizar las comparaciones con respecto al tiempo de simulación que le toma a cada método llegar a esta respuesta transitoria durante los 20 s de simulación. Para esto, la Tabla 4.2 presenta en la columna número 1 cada uno de los métodos utilizados. Por otro lado, la columna número dos indica el tiempo de ejecución que le toma a cada método para realizar la simulación de los 20 s. Esto, para cuando se utiliza el modelo transitorio. Además, se observa que los tiempos de la simulación cuando se utiliza el modelo clásico con respecto a la simulación con el modelo transitorio son muy similares para el método de Taylor basado en las reglas de TD. En general, de los resultados de la Tabla 4.1 y 4.2 se puede concluir lo siguiente:

- Todos los métodos de integración aquí presentados son más rápidos para el caso del modelo clásico, ya que se tienen menos ecuaciones diferenciales por resolver.
- Para ambos modelos, clásico y transitorio, la TD tiene un tiempo de simulación menor

Tabla 4.2: Comparación de los tiempos de simulación entre RK4, EM, RT y TD para el sistema de 16 máquinas y 68 nodos, modelo transitorio.

	Tiempo (s)
TD	0.1059
EM	3.7486
RT	3.3123
RK4	nc

con respecto a los otros métodos de integración.

- El método de RK4 diverge de la solución estable tanto para el modelo clásico como el modelo transitorio cuando el paso de integración es  $h = 1/60$  s.

### 4.3. Sistema NPCC de 48 máquinas y 140 nodos

En este caso de estudio se presenta el sistema NPCC que consta de 48 máquinas y 140 nodos. El diagrama unifilar correspondiente a este sistema se muestra en la Figura 4.7.

Este sistema de potencia es catalogado como un sistema grande, el cual es una expansión del sistema de 16 máquinas y 68 nodos donde se cuenta con más máquinas modeladas en Nueva York y sus áreas vecinas [33]. Para este caso, la simulación se realiza únicamente para el modelo clásico (ya que no se cuenta con los parámetros necesarios para un modelo de orden mayor, resolviéndose 96 ecuaciones diferenciales y 144 ecuaciones algebraicas). Se establece un paso de integración de  $h = 1/60$  s para todos los métodos de integración y un tiempo de simulación de 20 s. Adicionalmente, para la TD se establece una  $k = 2$ . Una vez iniciada la simulación multimáquina con el método de Taylor basado en la TD, se procede a aplicar una falla trifásica en el nodo 5, ésta se aplica 1 segundo después de que inicia la simulación dinámica, la cual, posteriormente se libera 3 ciclos después.

Las respuestas transitorias de las velocidades y los ángulos del rotor de las 48

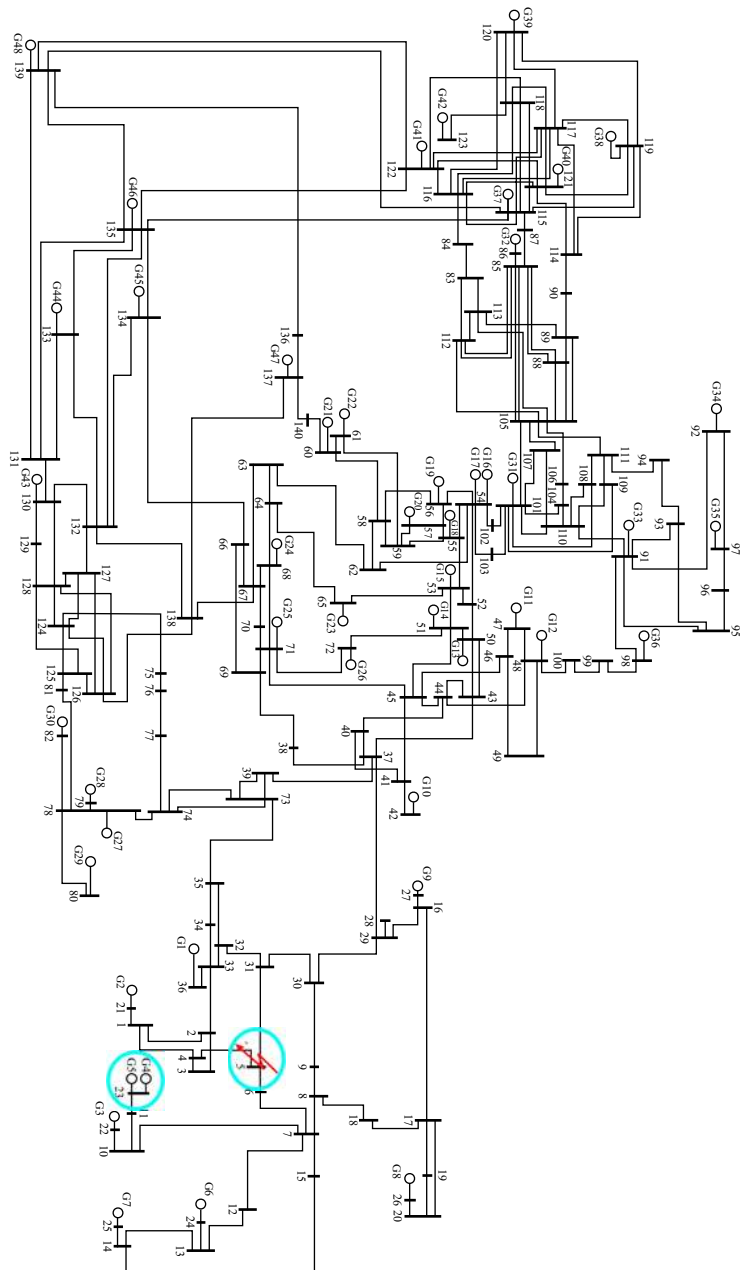


Figura 4.7: Sistema NPCC de 48 máquinas y 140 nodos.

máquinas para el sistema NPCC se muestran en las Figuras 4.8(a) y 4.8(b), respectivamente, esto debido a que únicamente se cuenta con el modelo clásico en los generadores. Se puede observar en la Figura 4.8 que el sistema es estable, donde para el primer segundo (antes de aplicarse la falla), el sistema se arranca en estado estable.

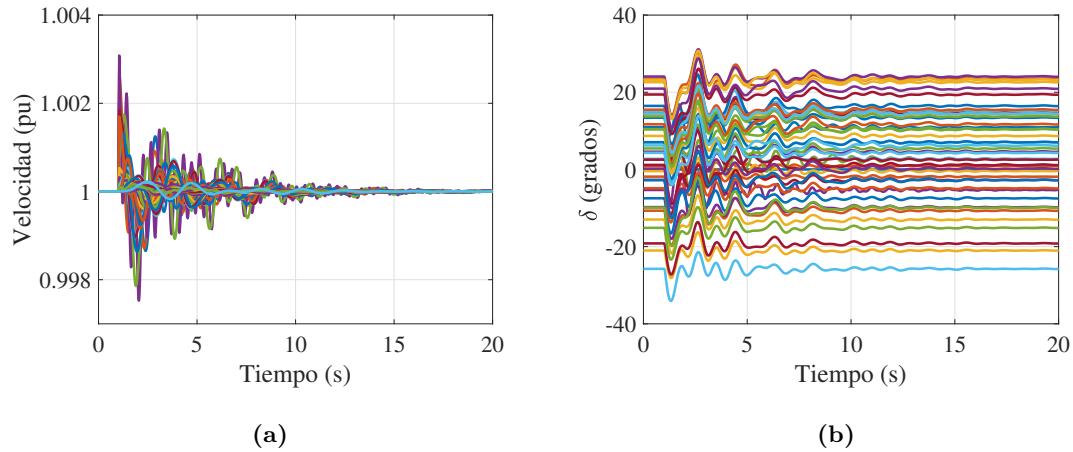


Figura 4.8: Velocidades  $\omega$  y ángulos del rotor  $\delta$  de las 48 máquinas para el modelo clásico del sistema NPCC por medio de la TD.

De manera similar a los casos anteriores, y así poder realizar la comparación entre el método de Taylor usando TD y los métodos de integración tradicionales aquí presentados, se elige la máquina cuyo comportamiento contenga la mayor magnitud de oscilación en su respuesta transitoria de velocidad. Por lo que, en la Figura 4.9 se muestra el comportamiento transitorio de la velocidad y ángulo del rotor de la máquina 4, la cual es la que mayor magnitud de oscilación de velocidad tiene (seguida de las máquinas 1 y 2). Así, la Figura 4.9 ilustra la comparación entre el método de Taylor y los otros métodos de integración RK4, EM y RT. También, se realiza un aumento en las respuestas para apreciar de una mejor manera el desempeño de los métodos propuestos. Para este caso, se observa que los métodos TD y EM tienen una separación muy pequeña que apenas se puede percibir, es decir, tienen un comportamiento muy similar. Por otro lado, el método de RT presenta lo que parece un desfase con los dos métodos mencionados anteriormente,

aunque no se puede decir cuál de los dos métodos es más preciso. En general, los métodos de RT, EM y TD presentan un buen desempeño para el paso de integración establecido, mientras que, el método de RK4 nuevamente no converge a la solución estable del sistema, como se puede apreciar por medio de la línea punteada de color azul en el instante en que se aplica la falla.

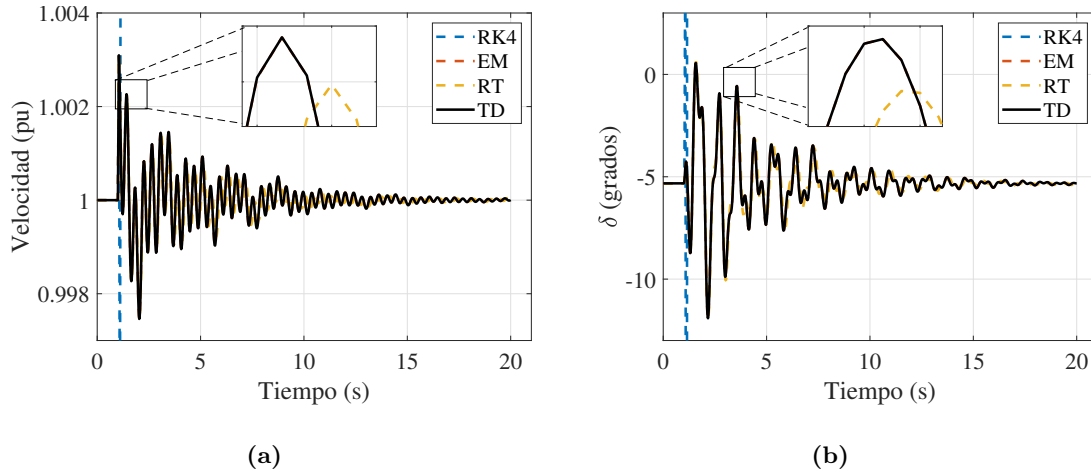


Figura 4.9: Comparación entre RK4, EM, RT y TD para la máquina 4 del sistema NPCC modelo clásico.

Finalmente, la comparación de los tiempos de simulación entre los métodos de integración RK4, EM, RT y TD se presentan en la Tabla 4.3. Nuevamente, se comprueba que el método de Taylor para un  $k = 2$  y usando la TD es más rápida que la RT y EM. Sin embargo, para el método de RK4 no se coloca el tiempo debido a su divergencia para el paso de integración utilizado.

#### 4.4. Sistema mexicano reducido de 46 máquinas y 190 nodos

El sistema mexicano reducido se ilustra en la Figura 4.10. Es un sistema interconectado que se extiende desde la frontera sur de México con Centro América hasta la frontera norte con Estados Unidos. Se divide en 7 regiones que son: Noroeste, Norte,

Tabla 4.3: Comparación de los tiempos de simulación entre RK4, EM, RT y TD para el sistema NPCC de 48 máquinas y 140 nodos

	Tiempo (s)
TD	0.1586
EM	0.4944
RT	0.2218
RK4	nc

Noreste, Sur, Central, Sureste y Peninsular [34]. Los mayores centros de demanda están concentrados en las grandes metrópolis, principalmente en la Ciudad de México en la región central, Guadalajara en la región Oeste y Monterrey en la región Noreste [35]. Además, este sistema consta de 46 máquinas y 190 nodos, por lo cual, también se puede considerar como un sistema de potencia grande. En este caso, se modela el sistema con su modelo transitorio con excitación simple en sus generadores, es decir, se tienen cinco ecuaciones diferenciales por cada máquina.

El estudio que se realiza es parecido a los casos anteriores, es decir, se aplica una falla trifásica un segundo después de que inicia la simulación multimáquina en el nodo 5, la cual es liberada 3 ciclos después. El paso de integración que se utiliza sigue siendo de  $h = 1/60$  s para todos los métodos de integración aquí presentados. Para el método propuesto basado en el método de Taylor y utilizando las reglas de la TD, se utiliza un valor de  $k = 2$ . Así, las respuestas transitorias que se obtienen de la simulación dinámica por medio del método de Taylor de segundo orden para las velocidades  $\omega$ , ángulos del rotor  $\delta$ , voltajes transitorios  $E'_d$  y  $E'_q$ , respectivamente, y voltajes de excitación  $E_{fd}$  para todas las máquinas, se muestran en la Figura 4.11. En total, se están resolviendo 230 ecuaciones diferenciales y 184 ecuaciones algebraicas. Se puede observar en dichas gráficas de la Figura 4.11, que el sistema es estable y por ende, después de que se libera la falla, este tiende a regresar al mismo estado estable del que arrancó.

Nuevamente, para presentar la comparación entre el método de Taylor propuesto

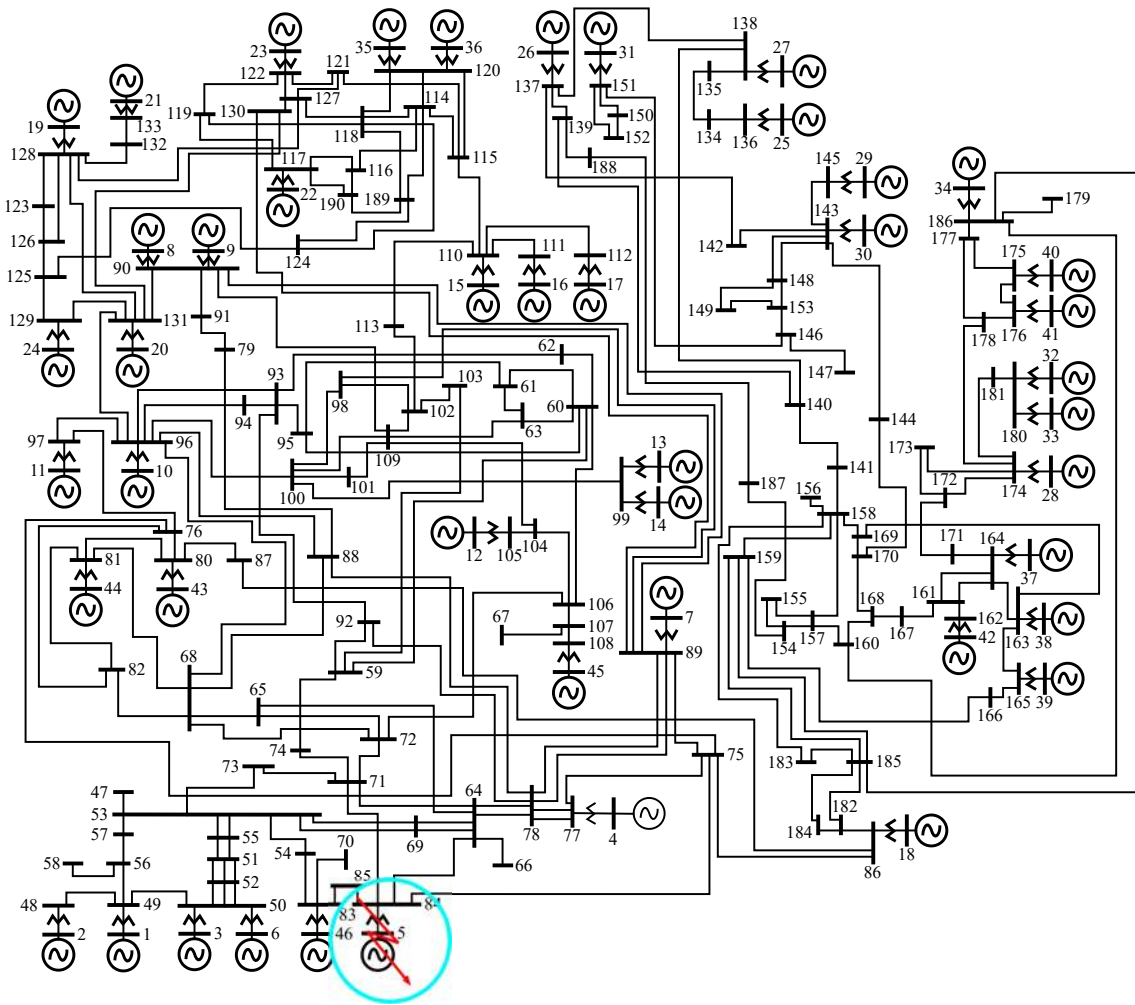


Figura 4.10: Sistema mexicano reducido de 46 máquinas y 190 nodos.

usando las reglas de la TD contra los métodos de integración tradicionales aquí presentados, se elige la máquina cuyo comportamiento contiene la mayor magnitud de oscilación en su respuesta transitoria de velocidad, esto debido a que tiene el comportamiento transitorio más fuerte debido a la falla aplicada. Por lo tanto, para este caso en particular, la máquina que tiene la mayor oscilación de velocidad corresponde a la máquina conectada al nodo 5 de la Figura 4.10. Así, la Figura 4.12 muestra el comportamiento transitorio de la velocidad

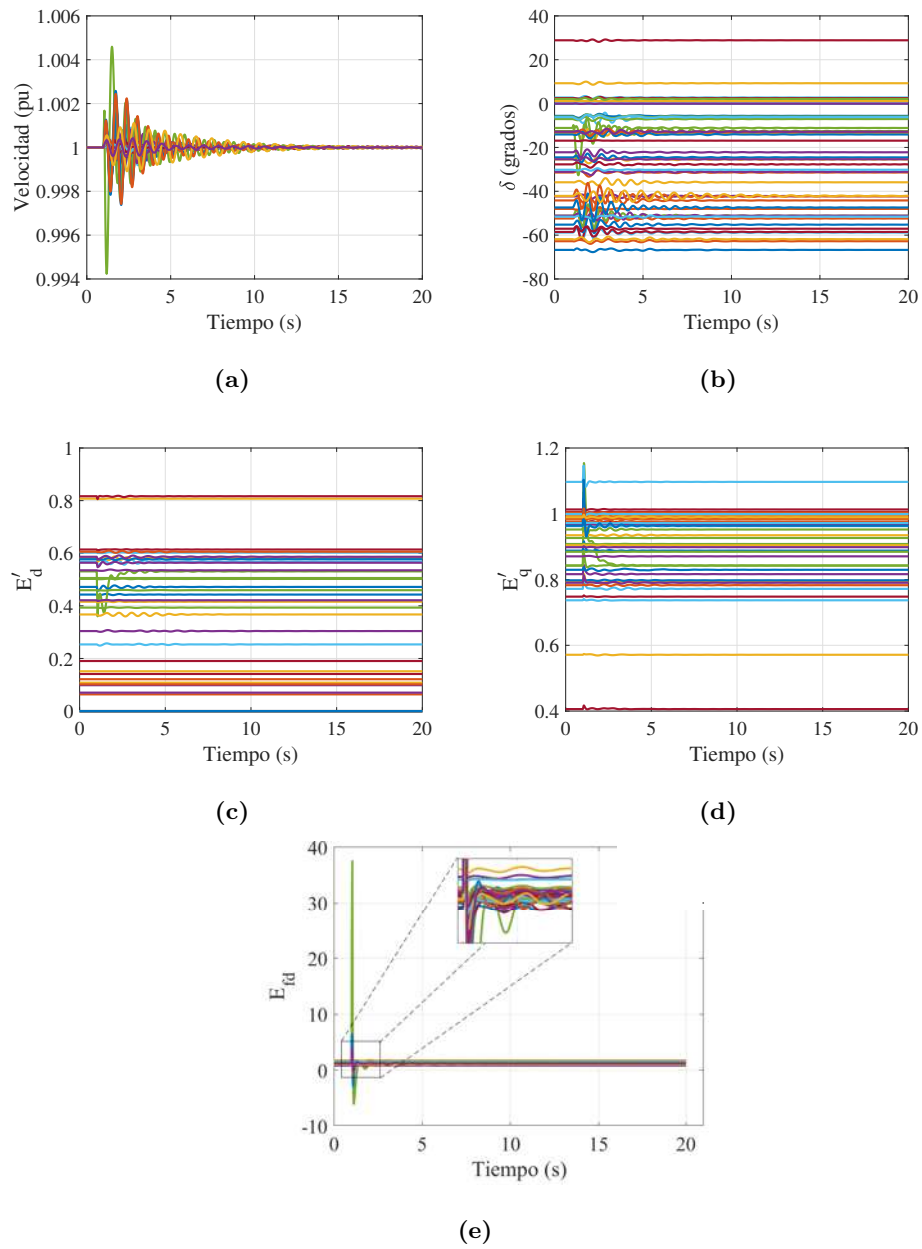


Figura 4.11: Velocidades  $\omega$ , ángulos del rotor  $\delta$ ,  $E'_d$ ,  $E'_q$  y  $E_{fd}$  de las 46 máquinas del sistema mexicano reducido para el modelo transitorio utilizando el método de la TD.



y ángulo del rotor para esta máquina, así como la comparación entre el método de Taylor usando TD contra los métodos de integración de RK4, EM y RT implícita, respectivamente. También, se realiza un aumento en las respuestas para apreciar de una mejor manera, el desempeño del método propuesto.

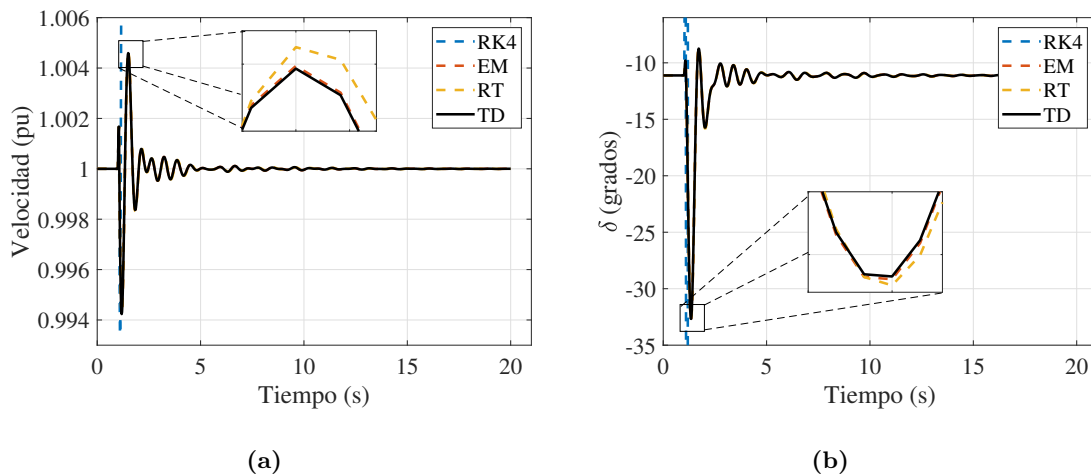


Figura 4.12: Comparación entre RK4, EM, RT y TD para la máquina 5 del sistema mexicano reducido y modelo transitorio.

De esta manera, se observa que los métodos de TD y EM nuevamente tienen un comportamiento muy similar. Por otro lado, el método de RT otra vez presenta una ligera separación con los dos métodos mencionados anteriormente, aunque no se puede decir cuál de los dos métodos es más preciso. En general, los métodos de RT, EM y TD presentan un buen desempeño para el paso de integración establecido, mientras que, el método de RK4 nuevamente no converge a la solución estable del sistema, como se puede apreciar por medio de la línea punteada de color azul en el instante en que se aplica la falla.

Finalmente, los tiempos de simulación obtenidos por cada método de integración se presentan en la Tabla 4.4. Se puede observar que los tiempos de simulación de la TD son inferiores en este caso y en todos los casos presentados anteriormente.

Se puede concluir que el método Taylor basado en las reglas de la TD es muy eficiente en cuanto a costo computacional (eficiencia numérica), además, se puede aumentar

Tabla 4.4: Tiempos de simulación de los métodos TD, EM, RT y RK4 para el sistema mexicano reducido de 46 máquinas y 190 nodos

	Tiempo (s)
TD	0.3038
EM	3.6641
RT	3.2625
RK4	nc

la precisión incrementando  $k$  (precisión numérica), es decir, incrementando el número de derivadas para la solución por el método de Taylor y manteniendo el paso de integración  $h$  fijo. Además, otra ventaja de aumentar  $k$ , es de que también se puede incrementar la estabilidad numérica, es decir, que si se tiene un paso de integración relativamente grande, por ejemplo, un valor de  $h$  en el cual los métodos de EM y RT no son numéricamente estables (no convergen a la solución del sistema), la TD puede llegar a converger y seguir siendo numéricamente estable simplemente incrementando los coeficientes  $k$  de Taylor, esto se demuestra más adelante mediante un caso de estudio en particular. Antes de esto, también es importante analizar el desempeño de los métodos de integración propuestos cuando el sistema de potencia es inestable, el cual se presenta a continuación.

## 4.5. Sistema NETS/NYPS, caso inestable

En esta Sección, se realiza el análisis para un caso inestable del sistema NETS/NYPS mediante su modelo transitorio. Para esto, se aplica una falla trifásica en el nodo 32 con un tiempo de duración de 0.85 s, de tal forma que el sistema se hace inestable. La falla se aplica 1 segundo después de iniciar la simulación transitoria. Además, se utiliza un paso de integración  $h = 1/60$  s para todos los métodos de integración, donde la simulación multimáquina tiene una duración total de 20 segundos. Por otro lado, para el método de Taylor se utilizan las reglas de TD y un valor de  $k = 2$ .

---

En la Figura 4.13 se muestran las 5 gráficas de las variables de estado correspondientes al sistema NETS/NYPS, las cuales son: velocidad  $\omega$ , ángulo del rotor  $\delta$ ,  $E'_d$ ,  $E'_q$ , respectivamente y  $E_{fd}$ . Se puede observar que antes de que se aplica la falla el sistema arranca en condiciones iniciales estables. Posteriormente, una vez que se libera la falla en el sistema, el sistema se hace inestable debido a la falla y tiempo de duración de la misma, donde las velocidades de las máquinas 14, 15 y 16 salen de sincronismo. Además, se observa como los ángulos de los rotores de las máquinas 14, 15 y 16 crecen exponencialmente, indicando que el sistema se hace inestable.

En el caso estable de este sistema (ver Sección 4.2), la Figura 4.6 muestra la velocidad y ángulo del rotor de la máquina 7, porque fue la que más oscilaba. Para este caso, las máquinas que se hacen inestables son las máquinas 14, 15 y 16, que corresponden a las Áreas 3, 4 y 5, respectivamente, como se ilustra en la Figura 4.1. De aquí, en la Figura 4.14 se presenta la velocidad y ángulo del rotor de la máquina 7. Aunque esta máquina no es inestable, sirve para hacer la comparación con el caso estable de la Figura 4.6. Por lo que, se observa que para el caso inestable, aparecen oscilaciones más prolongadas y de mayor magnitud que en el caso estable. Por otra parte, la Figura 4.14 también muestra la comparación entre el método de Taylor usando TD contra los métodos de integración tradicionales de RK4, EM y RT. Se observa en el aumento de las Figuras 4.14(a) y 4.14(b) que para los métodos de TD, EM y RT tienen un comportamiento muy similar, mientras que para el método de RK4, nuevamente diverge de la solución del sistema, es decir, es numéricamente inestable.

## 4.6. Prueba de estabilidad numérica de la transformación diferencial

Una de las ventajas que tiene el método de Taylor mediante las reglas de transformación, es que se pueden manipular dos parámetros para tener mejor estabilidad del

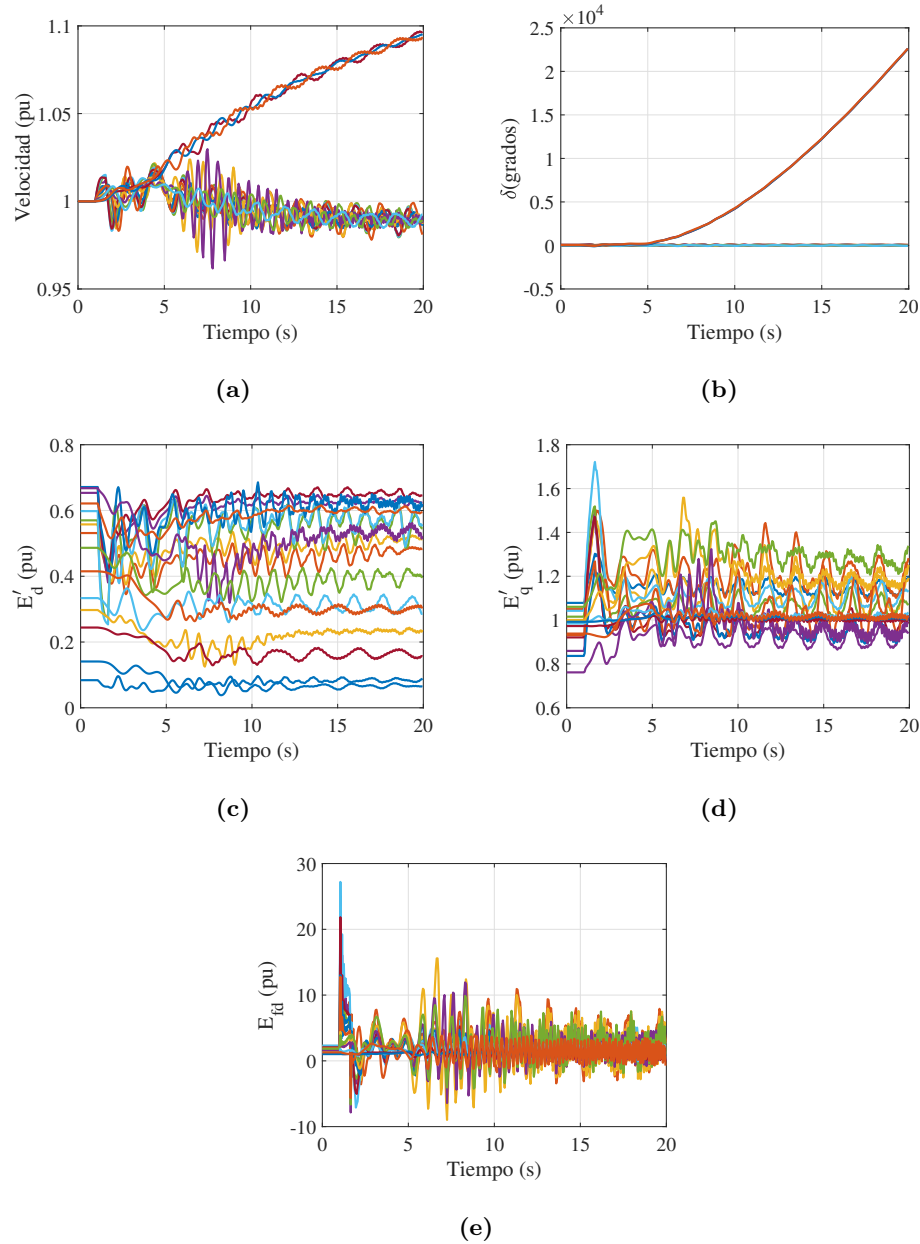


Figura 4.13: Velocidades  $\omega$ , ángulos del rotor  $\delta$ ,  $E'_d$ ,  $E'_q$  y  $E'_{fd}$  de las 16 máquinas del sistema NETS/NYPS para el modelo transitorio utilizando el método de la TD, caso inestable.

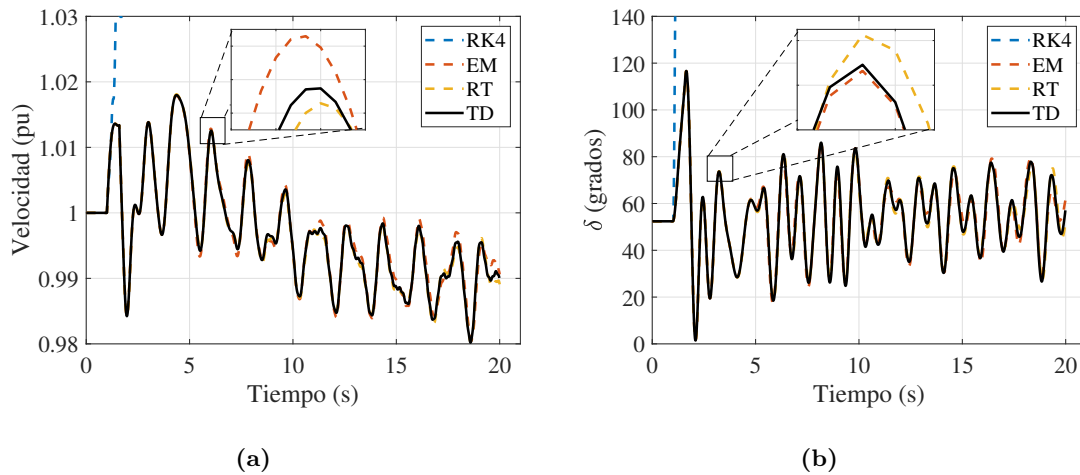


Figura 4.14: Comparación entre RK4, EM, RT y TD para la máquina 7 del sistema NETS/NYPS y modelo transitorio, caso inestable.

método, dichos parámetros son el paso de integración  $h$  y el número de coeficientes  $k$ , donde  $k$  está relacionado con el orden de las derivadas del polinomio de Taylor. Por lo tanto, al tener un mayor número de derivadas se tiene una mayor precisión, e incluso se puede obtener una estabilidad numérica para pasos de integración mayores que los métodos numéricos EM y RT.

De esta manera, para el siguiente caso de estudio se considera la misma falla trifásica aplicada en el nodo 32 y con una duración de 3 ciclos del sistema NETS/NYPS presentado en la Sección 4.2 para el modelo transitorio, la cual se aplica 1 segundo después de iniciar la simulación. La diferencia ahora es que, se utiliza un paso de integración  $h$  tres veces mayor que en los casos anteriores, es decir, se considera un tamaño de paso  $h = 3/60$  s. Para este paso de integración, los métodos de RK4, EM y RT no convergen a la solución presentada en la Figura 4.5. En cambio, la TD si logra converger a la solución de manera eficiente cuando se incrementa el número de coeficientes de  $k = 2$  a  $k = 3$ . Esto se puede apreciar en la Figura 4.15, donde solamente el método de la TD converge a la solución estable del sistema, que es la misma a la presentada en la Sección 4.2, ver Figura 4.5(a).

Además, es importante mencionar que, el tiempo que le toma a la TD en obtener

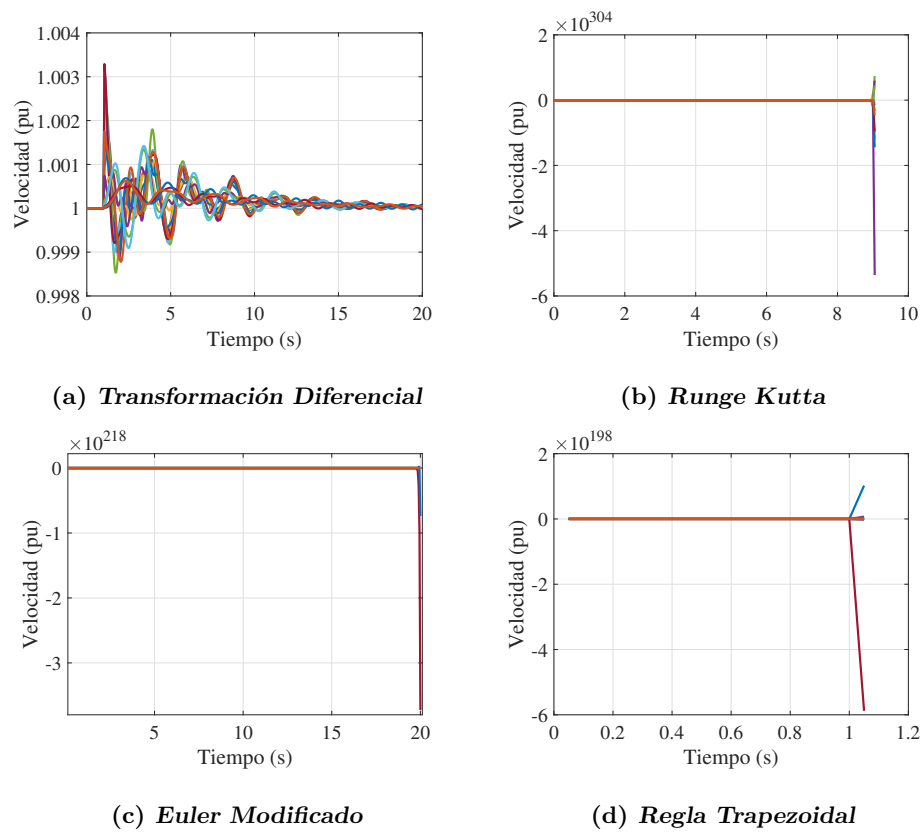


Figura 4.15: Demostración de la eficiencia y estabilidad numérica del método de la TD mediante un aumento en  $k$ .

la solución presentada en la Figura 4.15 es de 0.1118 segundos, mientras que, para el caso presentado en la Sección 4.2, fue de 0.1059 segundos, como se muestra en la Tabla 4.1, lo cual refleja una diferencia muy pequeña entre los tiempos de simulación. Esto se debe, a que el incremento de los coeficientes  $k$  se ve compensado al incrementar  $h$ , es decir, se tienen menos pasos de integración durante el periodo de simulación de 20 segundos. Así mismo, en la Figura 4.16 se muestran las curvas de la velocidad en la máquina 7 con 3 pasos de integración diferentes ( $h = 1/60$ ,  $h = 2/60$  y  $h = 3/60$  s). El objetivo es ver como se va perdiendo la precisión y posteriormente la estabilidad del método, y de como se pueden recuperar estas características al incrementar  $k$ . En la Figura 4.16(a) se muestran

las curvas de los 3 pasos de integración para  $k = 2$ , se puede observar que cuando se tiene el incremento de  $h = 1/60$  a  $h = 2/60$  se pierde precisión, pero cuando se hace un segundo incremento de  $h = 2/60$  a  $h = 3/60$  se pierde la estabilidad del método, dicha estabilidad se puede recuperar al incrementar el número de coeficientes de Taylor de  $k = 2$  a  $k = 3$  como se puede observar en la Figura 4.16(b), donde además de recuperar la estabilidad también recupera precisión ya que la curva para  $h = 1/60$  y  $k = 2$  es muy parecida a la curva con  $h = 3/60$  y  $k = 3$  por lo que se puede concluir que el incremento de paso se puede compensar con el incremento de los coeficientes de Taylor para seguir obteniendo resultados aceptables.

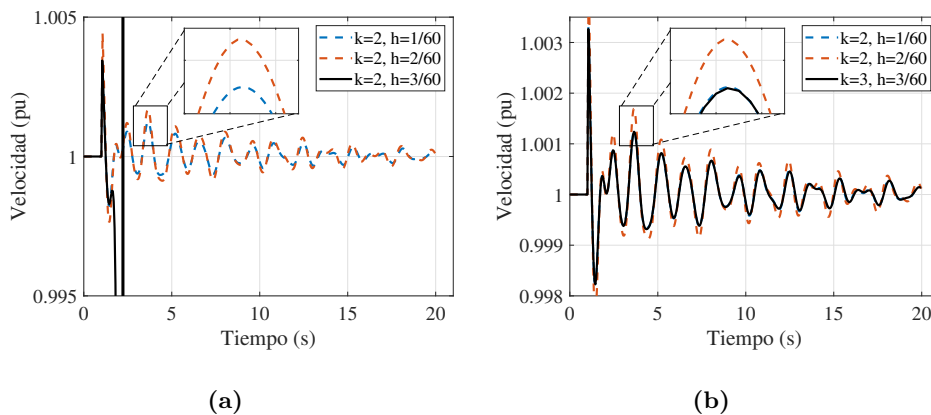


Figura 4.16: Demostración de la estabilidad de la TD conforme se incrementa  $k$  para un paso de integración  $h = 3/60$

## 4.7. Incremento de la precisión de la TD

En el Capítulo 2 se menciona que a medida que se incrementan los coeficientes de Taylor también lo hace la precisión, es decir, que el error que se obtiene es cada vez menor al compararlo con la solución exacta. El experimento que se propone ahora, es ver la tendencia que tiene el método de la TD al incrementar los coeficientes de Taylor y su comparación con los métodos de EM y RT. Para esto, se muestran las gráficas de la

Figura 4.17. Estas gráficas se obtienen al simular el sistema NETS/NYPS en su modelo transitorio. La Figura 4.17(a) es la misma que se muestra en la Sección 4.2 para la máquina 7, ver Figura 4.6(a), la cual se toma como referencia para ver el comportamiento de la TD conforme  $k$  se incrementa,  $k = 2, 3, 4$  y  $5$ , con  $h = 1/60$  s.

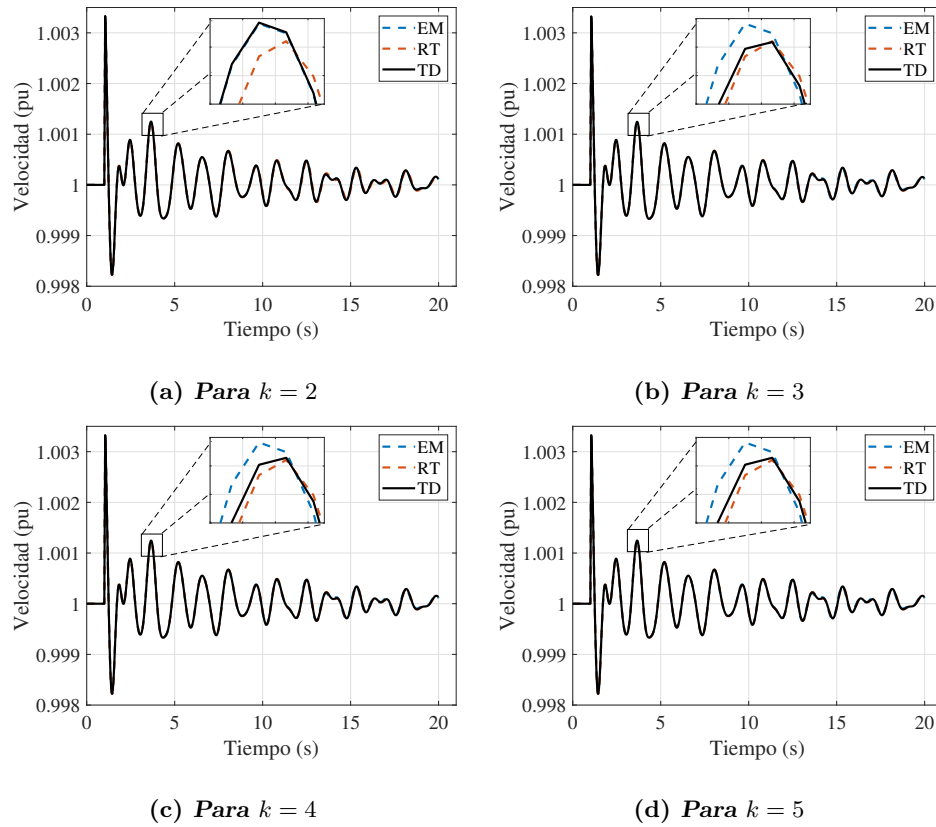


Figura 4.17: Comparación de los métodos de EM y RT contra TD a medida que se incrementan los coeficientes de Taylor para  $k = 2, 3, 4$  y  $5$ .

En la Figura 4.17(b) se puede observar el cambio que se tiene en el método de la TD al aumentar a  $k = 3$ , que es lo que se esperaba de acuerdo al ejemplo del circuito RC presentado en el Capítulo 2, donde, para el mismo paso de integración, la RT tiene una mayor precisión que EM. Así, se observa como la TD ahora tiene un comportamiento más similar a la RT, pero el tiempo de simulación sigue siendo inferior tomándole 0.3282



s cuando se usa  $k = 3$ , este tiempo se muestra en la Tabla 4.5, en la cual también se muestra los tiempos para cada una de las  $k$  propuestas. De dicha tabla se puede rescatar que incluso para una  $k = 5$  el tiempo es mucho menor que la RT, pero de acuerdo al circuito RC presentado en el Capítulo 2, la TD es más precisa en este caso. En las Figuras subsecuentes (Figuras 4.17(c) y 4.17(d)), también ocurren cambios, pero estos son más pequeños que en el primer caso donde ahora se observa como la TD queda ligeramente a la izquierda de la solución con RT, quedando entre las soluciones de EM y RT.

Así, se puede concluir entonces que la TD tiene un buen desempeño en cuanto a la precisión numérica, eficiencia numérica y estabilidad numérica. Ya que no se tiene que sacrificar el costo computacional para obtener una estabilidad del método, además de que dicha estabilidad se puede mejorar al manipular tanto  $h$  como  $k$  y que los tiempos de simulación estarán dentro de límites aceptables cuando se trata de la simulación multimáquina de grandes sistemas de potencia.

	EM	RT	k = 2	k = 3	k = 4	k = 5
Tiempo (s)	3.7486	3.3133	0.1059	0.3228	0.5324	0.6535

Tabla 4.5: Tiempos de simulación de EM, RT y la TD para cuando  $k = 2, 3, 4$  y  $5$

## 4.8. Resumen

En este Capítulo se analiza la estabilidad transitoria de grandes sistemas de potencia multimáquina utilizando el método de la transformación diferencial, donde además se realizaron comparaciones con algunos de los métodos de integración numérica tradicionales como lo son el RK4, EM y RT. El objetivo es resaltar las ventajas que tiene la TD en cuanto a la precisión numérica, eficiencia numérica y estabilidad numérica.

Para esto, se utilizan los sistemas NETS/NYPS de 16 generadores-68 nodos en su modelo clásico y transitorio, el sistema NPCC de 48 máquinas y 140 nodos en su modelo

clásico y el sistema mexicano reducido de 46 máquinas y 190 nodos en su modelo transitorio. En primer lugar, se analizan todos los sistemas para el caso estable, posteriormente se analiza un caso inestable para el sistema NETS/NYPS. También, se realiza una prueba de estabilidad del método propuesto al incrementar el tamaño de paso  $h = 1/60$  s a  $h = 3/60$  s, es decir, se incrementa 3 veces el tamaño de paso. Con esto, se demuestra que los otros métodos presentados no son numéricamente estables para  $h = 3/60$  s. Por el contrario, el método de Taylor usando la TD, se observa que al incrementar el número de coeficientes de Taylor de  $k = 2$  a  $k = 3$ , se obtiene una buena respuesta, es decir, el método sigue siendo numéricamente estable.

Finalmente, se realiza una prueba en la precisión numérica, donde se deja el paso de integración inicial ( $h = 1/60$  s) y se incrementa el número de coeficientes de Taylor  $k = 2, 3, 4$  y  $5$  para ver la tendencia de la TD comparado con los métodos de EM y RT. Se observa que la TD tiende a pegarse más a la RT. El inconveniente que tiene la RT es que es más lenta que los demás métodos, pero en general brinda buenos resultados. Aun con esto, la TD tiene mayor precisión conforme se incrementa  $k$  donde el costo computacional no se ve tan afectado.

## Capítulo 5

# Conclusiones generales y trabajos futuros

### 5.1. Conclusiones Generales

En este proyecto de tesis se realiza el análisis dinámico de sistemas de potencia multimáquina utilizando la transformación diferencial para el cálculo de los coeficientes del método de Taylor. En general, el método de Taylor es muy preciso, sin embargo, una de sus principales desventajas es que requiere del cálculo de derivadas de orden superior, lo que puede resultar costoso desde el punto de vista computacional a medida que el número de términos crece, ya que éste es de manera exponencial. De acuerdo a [8], el método de integración por Taylor requiere de las derivadas de orden superior, por lo que estas derivadas se pueden obtener de manera muy eficiente y rápida utilizando las reglas de la TD, haciendo al método de Taylor competitivo con el resto de los algoritmos de integración numérica, tales como los presentados aquí, es decir, el RK4, EM y RT. Por ejemplo, una de las ventajas de estas derivadas es que no son aproximadas como en el caso de RK4, sino que son exactas, atribuyéndose a esto su buen desempeño.

El objetivo de este trabajo es utilizar el método de Taylor y comprobar que se

cumplen con las tres características principales de un método de integración: (i) precisión numérica, (ii) estabilidad numérica y (iii) eficiencia numérica.

La primera característica es la precisión numérica, la cual se demuestra en la Sección 2.5 al comparar la solución exacta del circuito RC en serie con la TD y comprobar que a medida que se incrementa el número de coeficientes  $k$ , es decir, se calculan más derivadas, el error entre la solución exacta y la aproximada por el método de Taylor usando TD se hace cada vez más pequeño, hecho que queda plasmado en la Tabla 2.2, lo anterior manteniendo fijo el tamaño de paso  $h$ .

La segunda característica es la estabilidad numérica, esta se demuestra en el Capítulo 4 en todos los casos de estudio, ya que al comparar con los métodos tradicionales de EM y RT, se obtiene un buen desempeño, incluso para casos donde el sistema de potencia es inestable, ver Sección 4.5. Además, en la Sección 4.6 se demuestra que si se incrementa lo suficiente el tamaño de paso en donde se llega a situaciones en que los métodos de EM y RT no convergen, la TD conserva la estabilidad numérica del método al incrementar el número de coeficientes de Taylor, este experimento se realiza al incrementar el tamaño de paso de  $h = 1/60$  s con  $k = 2$  a  $h = 3/60$  s con  $k = 3$ , obteniéndose un buen resultado como se ilustra en la Figura 4.16.

Por último, la tercera característica corresponde a la eficiencia numérica, la cual también queda demostrada por medio de las simulaciones del Capítulo 4, donde los tiempos de simulación para todos los sistemas siempre son menores comparados con los otros métodos. Además, en la Sección 4.6 se establece que un incremento de los coeficientes no afecta severamente el tiempo de simulación cuando se busca estabilizar el método para tamaños de paso  $h$  donde EM y RT ya no son numéricamente estables.

Para poder demostrar todo lo anterior, se utiliza el software libre PST, el cual se adapta para que los métodos de integración EM, RK4, RT y TD funcionen de manera correcta. Además, para la aplicación de la TD se hacen las transformaciones de todas las ecuaciones involucradas en los SEPs, que son las EDAs de los generadores y las algebraicas

que interconectan todos los generadores con la red usando las reglas de la TD, las cuales se adaptan al software PST para su simulación.

Un aspecto a resaltar, es que el método de RK4 no tuvo buen desempeño durante las simulaciones de los sistemas de potencia, esto debido a que, aunque se están calculando cuatro derivadas, dichas derivadas son numéricas y no son exactas como en el caso de TD, esta aproximación es debida a que cada una de las derivadas depende del paso de integración  $h$ , por lo que al tener una  $h$  relativamente grande, como la usada en este proyecto de  $h = 1/60$  s, ocasiona grandes errores en la solución, y como consecuencia, el método diverge en todos los casos de estudio. La solución para este problema sería disminuir el paso de integración y obtener una respuesta aceptable, el inconveniente al hacer esto es que los tiempos de simulación se disparan, cosa que lo hace computacionalmente ineficiente, por lo tanto, el método de RK4 no es una buena opción para la simulación de grandes sistemas de potencia.

## 5.2. Trabajos Futuros

Como posibles trabajos futuros se tienen los siguientes:

1. Probar la TD en sistemas para simulación en tiempo real, esto debido a su rapidez y precisión numérica.
2. Realizar estudios en el área de transitorios electromagnéticos donde los tiempos de muestreo son mucho menores que en el caso de los transitorios electromecánicos.
3. Aplicación a grandes sistemas de potencia utilizando modelos más completos para tener una mayor precisión, y así tener un mejor análisis.
4. Agregar más elementos a los generadores como los controles y estabilizadores, y agregar elementos al sistema, como los motores de inducción o aerogeneradores para ver la respuesta.

5. Utilizar como una alternativa para el cálculo de las derivadas en el método de Taylor, como la diferenciación automática, con la cual se tendría la ventaja de obtener las derivadas exactas directamente sin la necesidad de realizar a mano la transformación, haciendo más factible y fácil de usar el método de integración.

# Referencias

- [1] J. H. Chow, P. W. Sauer, and M.A.Pai, *Power System Dynamics and Stability*. Hoboken, NJ, USA : Wiley, 2017.
- [2] J. H. Chow and K. W. Cheung, “A toolbox for power system dynamics and control engineering education and research,” *IEEE Trans. Power Syst.*, vol. 7, pp. 1559–1564, Nov 1992.
- [3] J. Zhou, *Differential Transformation and Its Applications for Electrical Circuits*. PhD thesis, Huazhong University Press, Wuhan, 1986.
- [4] G. G. Ev Pukhov, “Differential transforms and circuit theory,” *International Journal of Circuit Theory and Applications*, vol. 10, no. 3, pp. 265–276, 1982.
- [5] P. C. Krause, O. Wasynczuk, and S. D. Sudhoff, *Analysis of Electric Machinery and Drive Systems*. 2002.
- [6] C. Ong, *Dynamic Simulation of Electric Machinery: Using MATLAB/SIMULINK*. 1998.
- [7] J. W. . Sons and Ltd, *Analysis of Electric Machinery and Drive Systems*. 2013.
- [8] R. L. Burden, D. J. Faires, and A. M. Burden, *Análisis numérico*. Distrito Federal : CENGAGE Learning, 2017.
- [9] S. C. Chapra and R. P. Canale, *Métodos Numéricos para Ingenieros*. 2013.

- 
- [10] M. L. Crow, *Computational Methods for Electric Power Systems*. CRC Press Taylor Francis Group: Boca Raton London New York, 2010.
- [11] Y. Liu, K. Sun, R. Yao, and B. Wang, “Power system time domain simulation using a differential transformation method,” *IEEE Transactions on Power Systems*, vol. 34, no. 5, pp. 3739–3748, 2019.
- [12] Y. Liu and K. Sun, “Solving power system differential algebraic equations using differential transformation,” *IEEE Transactions on Power Systems*, vol. 35, no. 3, pp. 2289–2299, 2020.
- [13] S. Xu and C. Liu, “Fast power system dynamic simulations based on differential transform method,” in *2020 IEEE 4th Conference on Energy Internet and Energy System Integration (EI2)*, pp. 120–125, 2020.
- [14] I. Abdel-Halim Hassan, “Application to differential transformation method for solving systems of differential equations,” *Applied Mathematical Modelling*, vol. 32, no. 12, pp. 2552–2559, 2008.
- [15] I. Hassan and V. S. Ertürk, “Applying differential transformation method to the one-dimensional planar bratu problem,” *Int. J. Contemp. Math. Sciences*, vol. 2, no. 30, pp. 1493–1504, 2007.
- [16] M.-J. Jang, C.-L. Chen, and Y.-C. Liy, “On solving the initial-value problems using the differential transformation method,” *Applied Mathematics and Computation*, vol. 115, no. 2, pp. 145–160, 2000.
- [17] J. R. Zuluaga-Duque, *Computo Paralelo de Transitorios Electromagnéticos para la Simulación de Redes Eléctricas en Tiempo Acelerado*. PhD thesis, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional Unidad Guadalajara, 2019.



- 
- [18] N. Hatziaargyriou, J. Milanovic, C. Rahmann, V. Ajjarapu, C. Canizares, I. Erlich, D. Hill, I. Hiskens, I. Kamwa, B. Pal, P. Pourbeik, J. Sanchez-Gasca, A. Stankovic, T. Van Cutsem, V. Vittal, and C. Vournas, "Definition and classification of power system stability – revisited extended," *IEEE Transactions on Power Systems*, vol. 36, no. 4, pp. 3271–3281, 2021.
- [19] H. Haes Alhelou, M. E. Hamedani-Golshan, T. C. Njenda, and P. Siano, "A survey on power system blackout and cascading events: Research motivations and challenges," *Energies*, vol. 12, no. 4, 2019.
- [20] Y. Dong, J. Guo, S. Miao, J. Hou, J. Han, S. Ma, and T. Wang, "A novel electromagnetic transient simulation method of large-scale ac power system with high penetrations of dfig-based wind farms," *IEEE Access*, vol. 10, pp. 53188–53199, 2022.
- [21] Y. Liu, X. Zhang, R. Dai, and G. Liu, "Using terminal circuit for power system electromagnetic transient simulation," in *2022 IEEE Power Energy Society Innovative Smart Grid Technologies Conference (ISGT)*, pp. 1–5, 2022.
- [22] W. Du, F. K. Tuffner, K. P. Schneider, R. H. Lasseter, J. Xie, Z. Chen, and B. Bhattarai, "Modeling of grid-forming and grid-following inverters for dynamic simulation of large-scale distribution systems," *IEEE Transactions on Power Delivery*, vol. 36, no. 4, pp. 2035–2045, 2021.
- [23] P. Kundur, *Power system stability and control*. McGraw-hill, Inc., New York, 1994.
- [24] E. R. El-Zahar, "Approximate analytical solutions for singularly perturbed boundary value problems by multi-step differential transform method," *J. Appl. Sci*, vol. 12, no. 19, pp. 2026–2034, 2012.
- [25] G. Sobamowo, S. Ojolo, and C. Osheku, "Analysis of pyrolysis kinetics of biomass particle under isothermal and non-isothermal heating conditions using differential transformation method," 12 2017.

- 
- [26] S. Ghasemi, M. Hatami, and D. domiri ganji, “Thermal analysis of convective fin with temperature-dependent thermal conductivity and heat generation,” *Case Studies in Thermal Engineering*, vol. 4, 11 2014.
- [27] B. Benhammouda, H. Vázquez-Leal, and A. Sarmiento-Reyes, “Modified reduced differential transform method for partial differential-algebraic equations,” *J. Appl. Math.*, vol. 2014, pp. 279481:1–279481:9, 2014.
- [28] S. Sepasgozar, M. Faraji, and P. Valipour, “Application of differential transformation method (dtm) for heat and mass transfer in a porous channel,” *Propulsion and Power Research*, vol. 6, no. 1, pp. 41–48, 2017.
- [29] R. Ángel Cádernas Javier, *Control de Oscilaciones Inter-área en Sistemas de Potencia de gran escala mediante mediciones de área amplia*. PhD thesis, Universidad Nacional Autónoma de México, 2020.
- [30] V. Ajarapu, *Computational Techniques for Voltage Stability Assessment and Control*. 2007.
- [31] B. V. H. Juan M. Ramirez and R. E. Correa, “Dynamic equivalence by an optimal strategy,” *ELSEVIER Electric Power Systems Research*, vol. 84, no. 3, pp. 58–64, 2012.
- [32] J. H. Chow, “Power system toolbox software,” <https://sites.ecse.rpi.edu/~chowj/>.
- [33] J. H. Chow, *Power System Coherency and Model Reduction*. USA: Springer New York, 2013.
- [34] J. R. A. Román Messina and J. C. C., “An investigation on the use of power system stabilizers for damping inter-area oscillations in longitudinal power systems,” *IEEE Transactions on Power Systems*, vol. 13, no. 2, 1998.

- 
- [35] M. R. A. Paternina, J. M. Ramirez-Arredondo, J. D. Lara-Jiménez, and A. Zamora-Mendez, “Dynamic equivalents by modal decomposition of tie-line active power flows,” *IEEE Transactions on Power Systems*, vol. 32, no. 2, pp. 1304–1314, 2017.