



UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN NICOLÁS DE HIDALGO

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO-MATEMÁTICAS
"MAT. LUIS MANUEL RIVERA GUTIÉRREZ"

SISTEMAS DINÁMICOS EN LA TEORÍA DE FINSLER

T E S I S

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
Maestro en Ciencias en Ingeniería Física

PRESENTA:

Rogelio Cuevas Torres

ASESOR:

Doctor en Ciencias (Matemáticas)

Francisco Javier Domínguez Mota

Co-ASESOR:

Doctor en Ciencias (Física)

Joaquín Estevez Delgado

Morelia, Michoacán, Diciembre 2022



*A mi familia.
Y un saludo especial para Juan.*

Agradecimientos

Mi agradecimiento para los doctores Francisco Javier Domínguez Mota y Joaquin Estevez Delgado, por todo su apoyo brindado para llevar a cabo este trabajo. Gracias por su tiempo, esfuerzo y dedicación así como su infinita paciencia, preocupación y amabilidad. Muchas gracias.

Agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por el apoyo económico brindado para la realización de mis estudios de maestría y la culminación de éste trabajo.

También agradezco a quienes forman parte de mi comité tutorial: la Dra. Tatjana Vukasinac, el Dr. Hector Igor Perez Aguilar, el Dr. Jose Gerardo Tinoco Ruiz y el Dr. José Antonio González Cervera por sus valiosas observaciones, aportaciones, consejos y sugerencias tanto durante el proceso como en la revisión del trabajo.

Muchas gracias a mi familia por su apoyo durante este proceso, especialmente a mi esposa Verónica Viridiana, ya que sin su amor me habría sido imposible culminar este trabajo; muchas gracias por ser valiente y paciente, gracias por crecer juntos, te amo. Finalmente muchas gracias a Leonardo por traer aún mayor felicidad a nuestras vidas.

Resumen

Se investigan las dinámicas presentes en el sistema de ecuaciones diferenciales autónomo, que surge de las ecuaciones de estructura para el interior de una estrella, esféricamente simétrica y con fluido perfecto en teoría de Finsler.

Mediante la implementación de homologías la ecuación de estado lineal surge como resultado natural. Se grafican en el espacio fase, usando herramientas de sistemas dinámicos, las trayectorias de las soluciones. Se muestra una comparación entre el sistema autónomo y un análisis previo para el caso relativista con el caso en teoría de Finsler. Son encontradas diferencias geométricas entre el caso para el modelo estelar en relatividad general y en teoría de Finsler, ya que en el caso de relatividad general de Einstein, la representación métrica estaría asociada a un defecto topológico conocido como monopolo.

Palabras Clave: Cuasi-homología, monopolo, Frobenius, Estrellas, Gravitación.

Abstract

The dynamics present in the autonomous system of equations that represent the structure equations for the interior of a spherically symmetric star with perfect fluid are investigated in Finsler's theory.

By implementing homologies the linear state equation arises as a natural result. The solution trajectories are graphed in phase space using dynamic systems tools. A comparison between the autonomous system and a previous analysis for the relativistic case with the case in Finsler's theory is shown. Geometric differences are found between the case for the stellar model in general relativity and in Finsler's theory, attributed to a topological defect known as a monopole.

Keywords: Quasihomologous, monopole, Frobenius, Stars, Gravitation.

Índice general

Índice de figuras	ix
1. Introducción	1
1.0.1. Estructura de la tesis	4
2. Sistemas en la teoría de Finsler	5
2.1. De la geometría de Finsler	5
2.2. Homologías	9
2.3. Caso Relativista	10
2.4. Determinación de Homologías en el sistema de Finsler	13
3. Análisis del sistema	16
3.1. El sistema dinámico de Einstein	16
3.1.1. La solución de Misner y Zampolky	18
3.2. Nuestro sistema dinámico de la Teoría de Finsler	20
3.3. El método de Frobenius	22
3.4. La geometría de los puntos fijos. Teoría Finsler	25
4. Conclusiones	28
A. Apéndice	29
A.1. Ecuaciones diferenciales	29
A.1.1. Sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden	31
A.2. Dinámicas	32
A.2.1. Clasificación de los sistemas dinámicos	34
A.2.2. Linealización a través de los puntos fijos	40

ÍNDICE GENERAL

Bibliografía

43

Índice de figuras

3.1. Campo vectorial del sistema dinámico de Einstein para $\nu = 1.5$	17
3.2. Campo vectorial del sistema dinámico de Einstein para $\nu = 1.25$ en el que se aprecia un punto fijo estable de espiral atractor cercano al origen.	18
3.3. Campo vectorial del sistema dinámico de Einstein para $\nu = 1.75$. Para este caso de ν también se observa el punto fijo de espiral atractor. . . .	19
3.4. Superposición de tres soluciones numéricas.	22
3.5. Dinámica del punto fijo no trivial para parámetros distintos (λ, ν)	23
A.1. Trayectorias en el espacio fase para un punto silla	36
A.2. Tipos de trayectorias en el espacio fase.	37
A.3. Tipos de nodos estables.	38
A.4. Trayectorias en el espacio fase para dinámicas centro.	39
A.5. Clasificación de las dinámicas.	42

Introducción

La comunidad científica en constante búsqueda del conocimiento ha hecho y continúa haciendo esfuerzos para describir la estructura interior de los objetos estelares, particularmente aquellos que son *compactos*. Esto se ha estado haciendo de distintas maneras, algunas de ellas involucran el uso de la teoría de la relatividad general de Einstein o de modificaciones de la misma; además de la modificación de la función que describe distribución de la masa al interior del objeto estelar. Otras por su parte van más allá, explorando nuevas posibilidades de modelación a través de teorías alternativas a la relatividad general clásica.

En este último caso es donde se encuentra la Teoría de Finsler, propuesta en 1918 [1], misma que surge como una alternativa de la teoría de la relatividad general. La teoría Finsler está basada en un elemento de línea $ds = f(\mathbf{x}, d\mathbf{x})$ donde f es una función homogénea de primer orden con relación a los diferenciales $d\mathbf{x}$, así que la métrica es representada por:

$$g_{ij} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f^2}{\partial(dx^i)\partial(dx^j)}$$

y que se ha empleado como una alternativa de la teoría de la relatividad general de Einstein. Entre los puntos a favor está su relación con características no locales en la teoría, consistente con lo esperado de que la implementación de los efectos de la gravedad cuántica conduce a una teoría no local [2].

Cabe mencionar algunas contribuciones que dentro la teoría de Finsler se han realizado en [3]. Se presentó un modelo para agujeros de gusano bajo la estructura de Finsler del espacio tiempo, obteniendo una variedad de soluciones, entre las cuales exploró la geometría al considerar diferentes funciones de forma y distintas funciones de densidad-

1. INTRODUCCIÓN

energía. Por su parte en [4] se estudió la geometría y fundamentos físicos de la teoría de gravedad de Finsler, considerando algunas generalizaciones de la gravedad de Einstein, que incluyen algunas modificaciones de invariantes de Lorentz además de proponer una alternativa en teoría cosmológica y discutiendo un criterio para la evolución de la expansión acelerada del Universo en términos de la teoría de Finsler, extendiendo los principios de relatividad general en métrica de Finsler.

Posteriormente Stavrinou y Vacaru [5] presentaron modelos de aceleración del universo para universos cíclicos, tomando una aproximación similar a la teoría $f(R)$, donde mostraron cómo los modelos en teorías de gravedad Einstein-Finsler pueden ser extendidos alrededor de la teoría general de relatividad. Dentro de la teoría de relatividad general, para los agujeros negros se ha demostrado que un agujero negro asintóticamente plano y estacionario en un espacio de cuatro dimensiones Einstein-Maxwell, queda descrito precisamente por los parámetros que corresponden: la masa, el momento angular y las cargas. Es entonces que la única solución posible para el espacio de cuatro dimensiones de Einstein Maxwell es el agujero negro de tipo Kerr-Newman. Por su parte, un agujero negro teórico de cinco dimensiones (anillo negro) mostrará propiedades nuevas respecto a uno de cuatro dimensiones [6]. Rajpoot y Vacaru [7] presentaron un trabajo sobre la existencia de un anillo negro en la teoría de Finsler. Este tipo de resultados es de utilidad debido a que los anillos negros no existen de forma natural en la teoría general de relatividad.

Aunado a este tipo de descripciones de objetos que no aparecen de manera natural en la Relatividad, existen una serie de discrepancias entre las observaciones que muestran que las curvas de velocidad de rotación de todas las galaxias espirales tienden a valores constantes, incluyendo además nuestro propio disco galáctico, en la Vía Láctea. También algunas otras discrepancias entre las galaxias esferoidales enanas y las curvas de rotación planas de galaxias espirales [8].

Naturalmente, para explicar estas diferencias entre lo observado y lo predicho por la teoría, han surgido distintas alternativas. La principal de ellas para este tipo de casos, la introducción de un elemento nuevo, un tipo especial de materia conocida como materia oscura. De esta manera se asume que lo que percibimos como las estrellas, planetas, polvo, entre otras cosas es materia ordinaria o materia luminosa, mientras que, al mis-

mo tiempo, esta materia ordinaria o luminosa se encuentra rodeada por la materia no luminosa. Sin embargo el problema de incluir este salvoconducto de materia oscura para solventar las deficiencias de la teoría newtoniana es que ninguna teoría predice su existencia. No obstante, existen algunos posibles candidatos para ser ésta llamada materia oscura, es el caso de los neutrinos o los axiones. Aún y considerando lo anterior, presentan inconvenientes debido que no se han detectado en las observaciones. Por esta razón es por la que se han realizado modelos que buscan introducir alternativas a la hipótesis de la materia oscura.

Un par de ideas que han sido introducidas con el propósito de encontrar alternativas a la gravedad newtoniana son la teoría de orden superior gravitacional y la Dinámica Modificada de Newton (MOND por sus siglas en inglés). Ambas poseen fortalezas y debilidades. La teoría MOND explica de manera aceptable las curvas planas de rotación añadiendo un nuevo parámetro, siendo un modelo que encaja bien con los datos obtenidos. No obstante, estos modelos que además se ha mostrado que cumplen con los cuatro criterios de la teoría general de la relatividad de Einstein, son difíciles de desarrollar para resolver el problema de la materia oscura [9]-[11].

El modelo MOND presenta su propio defecto, ya que reproducir fenómenos en él conduce a formulaciones con inestabilidades débiles. En [12] se propone una posible alternativa para la hipótesis de la materia oscura, considerando que la propiedad principal de las curvas de velocidad planas, en las cuales se toma en consideración una partícula en una órbita circular alrededor de una galaxia espiral se vuelve independiente del radio. Para un radio que tiende a ser muy grande, hace que se considere la teoría de Finsler debido a que en su geometría, la curvatura no es sólo función de la posición sino también de la velocidad y, dentro de la misma teoría, el vector de quadri-velocidad es tratado de manera independiente como variable. Finalmente muestra que la predicción de su gravedad modificada de Newton concuerda con las curvas de rotación de las galaxias espirales, todo ello sin involucrar el recurso de la materia oscura.

En un trabajo posterior Chang [13] propone también una modificación del modelo de Friedmann en el espacio Randers-Finsler de una aproximación tipo Berwald para concebir una posible alternativa a la hipótesis de la energía oscura. Además pese a que la hipótesis de la energía oscura como ente causante de la expansión del universo ha domi-

nado por bastantes años. Chang muestra que la aceleración de expansión del universo está garantizada por una estructura de Randers-Finsler que no considera la energía oscura como parte de sí, donde el término adicional en la ecuación geodésica actúa como una fuerza de repulsión en contra de la gravedad, propiciando la expansión acelerada. Como se ha mencionado, la Teoría de Finsler brinda otra perspectiva de estudio para fenómenos del cosmos. Para este trabajo haremos un análisis para la dinámica asociada a un objeto estelar desde la Teoría de Finsler.

1.0.1. Estructura de la tesis

Tras la anterior introducción, en la segunda sección se muestran las ecuaciones de la teoría de Finsler que serán aplicadas a modelos estelares. Aún cuando en esta sección no se muestra la deducción de dicha geometría, si se describen las diferencias para con la geometría de Riemann en relatividad general. En esta misma sección de manera posterior se revisa el concepto de las homologías, como una herramienta que será utilizada para obtener la ecuación de estado siendo una consecuencia matemática. Se estudia el caso previamente revisado por Collins [14] para relatividad general y una vez hecho esto, se determinan para el caso de la geometría de Finsler encontrando la ecuación de estado. En la tercera sección, usando las herramientas previamente mencionadas en el Apéndice 1, se analiza el sistema autónomo de ecuaciones diferenciales tanto para la revisión del caso relativista como para nuestro caso en geometría de Finsler, son encontrados los puntos fijos del sistema y se analiza su estabilidad. En el intermedio de esta sección se utiliza el método de Frobenius para determinar la solución exacta en series de nuestro sistema. Además, se analiza la geometría de los puntos fijos encontrados en nuestro sistema. La última sección es dedicada a las conclusiones de este trabajo que hacen mención de un comparativo con la teoría de la relatividad general de Einstein. La descripción de un sistema dinámico y sus características están en el apéndice 1.

Sistemas en la teoría de Finsler

En esta sección daremos las ecuaciones de Finsler asociadas a modelos estelares, teniendo en cuenta que el espacio-tiempo de Finsler no es simplemente una generalización de la geometría Riemanniana; ya que en esta teoría Finsler se considera la proyección sobre el haz tangente de una variedad M . Los detalles de la deducción de las ecuaciones no serán considerados en esta tesis, su deducción y sentido geométrico puede ser consultado en algunos trabajos más especializados [3, 15, 16].

2.1. De la geometría de Finsler

La geometría de Finsler se basa en la llamada estructura Finsler F caracterizada por $F(x, \lambda \dot{x}) = \lambda F(x, \dot{x}) \forall \lambda > 0$, donde $x \in M$ representa las coordenadas y $\dot{x} \equiv \frac{dx}{d\tau}$ representa la derivada de una curva parametrizada por τ .

En la geometría de Finsler el tensor métrico está dado por [17, 18]:

$$g_{\mu\nu} = \frac{\partial}{\partial \dot{x}^\mu} \frac{\partial}{\partial \dot{x}^\nu} \frac{1}{2} F^2, \quad (2.1)$$

y a través de las ecuaciones de Euler Lagrange se llega a la ecuación geodésica expresada mediante:

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + 2G^\mu = 0, \quad (2.2)$$

donde el coeficiente geodésico G^μ se obtiene de la estructura de Finsler por medio de

$$G^\mu = \frac{1}{4} g^{\mu\nu} \left[\frac{\partial^2 F^2}{\partial x^\alpha \partial \dot{x}^\nu} \dot{x}^\alpha - \frac{\partial F^2}{\partial x^\nu} \right], \quad (2.3)$$

2. SISTEMAS EN LA TEORÍA DE FINSLER

que es de relevancia para la determinación de la componentes del tensor de Einstein modificado en el marco de la geometría de Finsler definido como:

$$G_{\mu\nu} \equiv Ric_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}S, \quad (2.4)$$

donde [19]

$$Ric_{\mu\nu} = \frac{\partial}{\partial \dot{x}^\mu} \frac{\partial}{\partial \dot{x}^\nu} \left[\frac{1}{2}F^2 Ric \right] \quad \text{y} \quad S = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}, \quad (2.5)$$

representan el escalar de Ricci y el escalar de curvatura en el espacio de Finsler respectivamente. Y el escalar Ric es dado por

$$Ric = \frac{2}{F^2} \left[\frac{\partial G^\mu}{\partial x^\mu} - \frac{\dot{x}^\alpha}{2} \frac{\partial^2 G^\mu}{\partial x^\alpha \partial \dot{x}^\mu} + G^\alpha \frac{\partial^2 G^\mu}{\partial \dot{x}^\alpha \partial \dot{x}^\mu} - \frac{1}{2} \frac{\partial G^\mu}{\partial \dot{x}^\alpha} \frac{\partial G^\alpha}{\partial \dot{x}^\mu} \right]. \quad (2.6)$$

Dado nuestro interés, de una geometría con simetría estática y esféricamente simétrica, proponemos la estructura de Finsler como:

$$F^2 = -y(r)^2 \dot{t}^2 + \frac{1}{B(r)} \dot{r}^2 + r^2 \bar{F}^2(\theta, \phi, \dot{\theta}, \dot{\phi}), \quad (2.7)$$

con θ y ϕ las coordenadas angulares. De la ecuación (2.1) las funciones métricas quedan dadas por $g_{tt} = -y^2(r)$, $g_{rr} = \frac{1}{B(r)}$ y \bar{F}^2 representa el elemento de línea de la 2-esfera. Reemplazando F dado por (2.7) en la ecuación (2.3) obtenemos

$$G^t = \frac{1}{y} \frac{dy}{dr} \dot{t}^2, \quad G^\theta = \frac{1}{r} \dot{\theta} \dot{r} + \bar{G}^\theta, \quad G^\phi = \frac{1}{r} \dot{\phi} \dot{r} + \bar{G}^\phi, \quad (2.8)$$

$$G^r = \frac{1}{2B} \left[\frac{1}{2} \frac{dB}{dr} \dot{r}^2 + y \frac{dy}{dr} \dot{t}^2 - r \bar{F}^2 \right], \quad (2.9)$$

de estos componentes geodésicas en la geometría de Finsler y de F obtenemos S :

$$S = -\frac{2B}{y} \frac{d^2 y}{dr^2} - \left[\frac{dB}{dr} + \frac{4B}{r} \right] \frac{1}{y} \frac{dy}{dr} + \frac{2}{r} (\lambda - B). \quad (2.10)$$

Donde λ es el escalar de Ricci asociado a la estructura de Finsler \bar{F}^2 .

S difiere del escalar de Ricci en el formalismo de la geometría Riemanniana por la presencia de λ . Los escalares de Ricci en geometría de Riemman y Finsler coinciden cuando $\lambda = 1$. Un punto relevante es que la regularidad en el formalismo de Finsler

ahora está asociada con el escalar S .

Por otro lado, para analizar la dinámica interior en la región $r \leq R$, supondremos que la materia contenida es descrita por un fluido perfecto; es decir un fluido tal que no tiene viscosidad y no conduce el calor en el MCRF (momentarily comoving reference frame), siendo una generalización del concepto de *gas ideal* de la termodinámica ordinaria [20]; para el cual $G_{\mu\nu} = k[(c^2\rho + P)u_\mu u_\nu + Pg_{\mu\nu}]$. De 2.4 y 2.5 resulta el conjunto de ecuaciones que describen el comportamiento interno de un modelo estelar en el marco de Finsler:

$$kc^2\rho(r) = -\frac{1}{r}\frac{dB}{dr} + \frac{\lambda - B}{r^2}, \quad (2.11)$$

$$kP(r) = \frac{2B}{ry}\frac{dy}{dr} - \frac{\lambda - B}{r^2}, \quad (2.12)$$

$$kP(r) = \frac{B}{y}\frac{d^2y}{dr^2} + \frac{1}{2y}\left(\frac{dB}{dr} + \frac{2B}{r}\right)\frac{dy}{dr} + \frac{1}{2r}\frac{dB}{dr}, \quad (2.13)$$

donde $k = \frac{8\pi_F G}{c^2}$ con G siendo la constante de gravitación universal, c la velocidad de la luz en el vacío y $4\pi_F$ esta relacionada con el volumen de la esfera en la geometría de Finsler; (y, B) funciones de r ; $P(r)$ y $\rho(r)$ denotan la presión y la densidad respectivamente. En el caso particular $\lambda = 1$, estas ecuaciones coinciden con las que se obtienen para modelos estelares en el marco de la teoría de la relatividad general de Einstein, sin embargo su contexto es diferente. Las ecuaciones (2.12) y (2.13) representan las presiones radial y tangencial, que en el caso de un fluido perfecto, donde existe isotropía éstas coinciden. En el marco de la teoría de Finsler también se satisface una ecuación de conservación, aunque ésta no es una relación adicional, y se puede obtener de estas tres ecuaciones.

Derivando la ecuación (2.12) y reemplazando la segunda derivada de la función y dada por la ecuación (2.13) y la derivada de B dada por la ecuación (2.11), resultando:

$$\frac{dP}{dr} = -(c^2\rho + P)\frac{dy}{dr}. \quad (2.14)$$

Es de resaltar que en esta ecuación no aparece el parámetro λ , por lo que esta ecuación coincide con el caso de la teoría de Einstein. Por lo tanto, del sistema de ecuaciones (2.11)-(2.14) sólo se tienen tres ecuaciones efectivas para las cuatro funciones (y, B, ρ, P) . Lo que implica que se requiere de una ecuación de estado o la asignación

2. SISTEMAS EN LA TEORÍA DE FINSLER

de una de las funciones.

Para nuestro análisis reescribiremos las ecuaciones en términos de la función de masa $M(r)$ definida en la geometría de Finsler, expresando

$$B(r) = \lambda - \frac{2M(r)}{r} = 1 - \frac{2m(r)}{r}, \quad (2.15)$$

a partir de la cual se desprende la relación:

$$M(r) = m - \frac{r(1 - \lambda)}{2}, \quad (2.16)$$

lo que permite reescribir el sistema (2.11)-(2.14) como:

$$kc^2\rho = \frac{2}{r^2} \frac{dM}{dr}, \quad (2.17)$$

$$kP = \frac{2}{ry} \left(\lambda - \frac{2M}{r} \right) \frac{dy}{dr} - \frac{2M}{r^2}, \quad (2.18)$$

$$kP = \frac{1}{y} \left(\lambda - \frac{2M}{r} \right) \frac{d^2y}{dr^2} + \frac{1}{ry} \left(\lambda - \frac{dM}{dr} - \frac{M}{r} \right) \frac{dy}{dr} - \frac{1}{r^2} \left(\frac{dM}{dr} - \frac{M}{r} \right), \quad (2.19)$$

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{(c^2\rho + P)(kr^3P + 2M)}{2r(\lambda r - 2M)}. \quad (2.20)$$

Nuestro trabajo se centra en las implicaciones que se obtienen sobre el tipo de ecuación de estado que admite el sistema al imponer la existencia de homologías. Posteriormente, mediante la herramienta de sistemas dinámicos, se realiza un análisis del comportamiento de las soluciones para la ecuación de estado consistente con las homologías.

El conjunto de ecuaciones que se tiene en el caso de un espacio tiempo estático y esféricamente simétrico para la teoría de Finsler es:

$$kc^2\rho(r) = \frac{2}{r^2} \frac{dm}{dr} + \frac{\lambda - 1}{r^2}, \quad (2.21)$$

$$kP(r) = \frac{2}{ry(r)} \left(1 - \frac{2m(r)}{r} \right) \frac{dy}{dr} - \frac{\lambda}{r^2} + \frac{1}{r^2} \left(1 - \frac{2m(r)}{r} \right), \quad (2.22)$$

$$kP(r) = \frac{1}{y(r)} \left(1 - \frac{2m(r)}{r} \right) \frac{d^2y}{dr^2} + \frac{1}{ry(r)} \left(1 - \frac{m(r)}{r} - \frac{dm}{dr} \right) \frac{dy}{dr} - \frac{1}{r^3} \left(r \frac{dm}{dr} - m(r) \right), \quad (2.23)$$

donde $y(r)$ es la función asociada al potencial gravitación, $m(r)$ representa la función de masa. Se realizará una comparación entre el sistema estelar en geometría de Finsler y el sistema estelar en relatividad de Einstein, así como el impacto que genera el parámetro de Finsler sobre la estructura del espacio fase.

En la siguiente sección revisaremos el concepto de las homologías para utilizarlas a continuación dentro del análisis para la obtención de la ecuación de estado en teoría de relatividad general y en el marco de la teoría de Finsler.

2.2. Homologías

En las ecuaciones diferenciales, la teoría de grupos de Lie se emplea generalmente para investigar sistemas de ecuaciones diferenciales parciales, en lugar de ordinarias. Esto ocurre porque un sistema de ecuaciones diferenciales parciales siempre admite un grupo no trivial, mientras que en las ecuaciones diferenciales ordinarias esto no siempre ocurre. El problema del descubrimiento del grupo no trivial, es equivalente al problema de integrar el sistema original [14]. En esta sección se utilizarán las propiedades de las homologías, para encontrar la ecuación de estado como un resultado matemático.

Se puede demostrar (44) que el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$\frac{du^k}{dx} = f^k(x, \mathbf{u}) \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (2.24)$$

$$\mathbf{u} = (u^1, u^2, \dots, u^n)$$

es invariante bajo la acción del operador infinitesimal

$$X = \xi(x, \mathbf{u}) \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) + \eta^k(x, \mathbf{u}) \left(\frac{\partial}{\partial u^k} \right), \quad (2.25)$$

si y sólo si se satisfacen las ecuaciones:

$$\frac{\partial \eta^k}{\partial x} + f^j \frac{\partial \eta^k}{\partial u^j} - f^k \frac{\partial \xi}{\partial x} - f^k f^j \frac{\partial \xi}{\partial u^j} = \xi \frac{\partial f^k}{\partial x} + \eta^j \frac{\partial f^k}{\partial u^j}. \quad (2.26)$$

En el caso particular donde X genera transformaciones de la forma:

$$x \rightarrow \bar{x}(x), \quad u^j \rightarrow \bar{u}^j(u^k), \quad (2.27)$$

se conocen como transformaciones cuasi-homólogas y se requiere que

$$\xi = \xi(x), \quad \eta^j = \eta^j(u^k). \quad (2.28)$$

En las transformaciones anteriores no se suma sobre j . En consecuencia, la ecuación anterior se expresa como [14]:

$$\frac{d}{du^k} \eta^k(u^k) - \frac{d}{dx} \xi(x) = X(\ln f^k). \quad (2.29)$$

Donde el operador X está dado por la forma (2.25). La forma del lado izquierdo de la ecuación anterior tiene ciertas restricciones en el conjunto de posibles transformaciones cuasi-homológicas.

2.3. Caso Relativista

En esta sección presentaremos el caso analizado por Collins [14] para el sistema estelar de Einstein. Como mencionamos anteriormente, el modelo de Finsler coincide con el relativista para $\lambda = 1$ y es dado por:

$$kc^2 \rho(r) = \frac{2}{r^2} \frac{dm}{dr}, \quad (2.30)$$

$$kP(r) = \frac{2}{ry(r)} \left(1 - \frac{2m(r)}{r}\right) \frac{dy}{dr} - \frac{2m(r)}{r^3}, \quad (2.31)$$

$$kP(r) = \frac{1}{y(r)} \left(1 - \frac{2m(r)}{r}\right) \frac{d^2 y}{dr^2} + \frac{1}{ry(r)} \left(1 - \frac{m(r)}{r} - \frac{dm}{dr}\right) \frac{dy}{dr} - \frac{1}{r^3} \left(r \frac{dm}{dr} - m(r)\right), \quad (2.32)$$

Derivando la ecuación (2.31) y reemplazando la primera derivada de la función de masa dada por la ecuación (2.30), la segunda derivada de la función $y(r)$ dada por (2.32), y la primera derivada de la función $y(r)$ dada por (2.31). Luego de realizar el álgebra

llegamos a la ecuación:

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{(c^2\rho + P)(kr^3P + 2m)}{2r^2\left(1 - \frac{2m}{r}\right)} \quad (2.33)$$

y reescribimos la ecuación (2.30) como:

$$\frac{dm}{dr} = \frac{k}{2}c^2r^2\rho. \quad (2.34)$$

Éstas dos ecuaciones son el punto de partida para obtener las homologías [14]. Antes de iniciar el análisis notemos que si P fuera constante, de (2.33) tendríamos que $2m + kr^3P = 0$ o $P = -c^2\rho$. Considerando el primero de los casos, la ecuación (2.34) implica $P = -\frac{c^2}{3}\rho$, así que en cualquiera de los dos casos, la ecuación de estado no corresponde a un caso de materia ordinaria. Por otro lado si $m = 0$ entonces $\rho = 0$ y $P = 0$. Esto último corresponde a la solución trivial donde no hay estrella. De este análisis tenemos que debemos suponer $\rho\rho' \neq 0$. Lo que nos permite reescribir la ecuación (2.33) en la forma

$$\frac{d\rho}{dr} = -\frac{(c^2\rho + P)(kr^3P + 2m)}{2r^2P'(\rho)\left(1 - \frac{2m}{r}\right)} \quad (2.35)$$

donde $P'(\rho) = \frac{dP}{d\rho}$.

Ahora consideramos que

$$f^1(r, \rho, m) = \frac{d\rho}{dr}, \quad f^2(r, \rho) = \frac{dm}{dr}, \quad (2.36)$$

con $n = 2$, $u^1 = \rho$ y $u^2 = m$. Para obtener las transformaciones que preservan la forma de las ecuaciones, suponemos un vector X dado por

$$X = \xi(r)\frac{\partial}{\partial r} + \eta^1(\rho)\frac{\partial}{\partial \rho} + \eta^2(m)\frac{\partial}{\partial m},$$

donde $\xi(r)$, $\eta^1(\rho)$ y $\eta^2(m)$ son funciones a determinar. Aplicando la condición de existencia de transformaciones homólogas (2.29) al sistema (2.34)-(2.35) se obtienen las ecuaciones:

$$\begin{aligned} \frac{d\eta^1(\rho)}{d\rho} - \frac{d\xi(r)}{dr} = \xi(r) \frac{\partial}{\partial r} \left[\ln \frac{1}{r^2} \frac{2(2m + kr^3P)}{(1 - \frac{2m}{r})} \right] \\ + \eta^1(\rho) \frac{\partial}{\partial \rho} \left[\ln \frac{(c^2\rho + P)(2m + kr^3p)}{p'(\rho)} \right] + \eta^2(m) \frac{\partial}{\partial m} \left[\ln \frac{(2m + kr^3p)}{2(1 - \frac{2m}{r})} \right] \end{aligned} \quad (2.37)$$

y

$$\frac{d\eta^2(m)}{dm} - \frac{d\xi(r)}{dr} = \frac{2\xi(r)}{r} + \frac{\eta^1(\rho)}{\rho}. \quad (2.38)$$

Es necesario obtener las formas explícitas de las funciones η^1 , η^2 y ξ . La dependencia de m en (2.38), igualando término a término de ambos lados de la ecuación e integrando esa parte llegamos a la forma $\eta^2(m) = am + \alpha$, donde a y α son constantes. Resolviendo para el caso de ξ , se obtiene $\xi(r) = br + c/r^2$, donde b y c son constantes.

Hasta este punto aún queda pendiente la forma de η^1 , es necesario sustituir en la ecuación (2.37), tomando en cuenta los terminos correspondientes a cada lado de la ecuación se encuentra la relación para $\eta^1(\rho) = (a - 3b)\rho$. Los resultados anteriores nos llevan a los siguientes casos en los valores de las constantes de integración:

- i) $a = b = c = \alpha = 0$, este nos genera la transformación identidad ($X = 0$).
- ii) $a = b \neq 3b$, $c = \alpha = 0$, nos conduce a la transformación generada por

$$X = r \frac{\partial}{\partial r} - 2\rho \frac{\partial}{\partial \rho} + m \frac{\partial}{\partial m}.$$

Así que las expresiones m/r y ρr^2 son las invariantes (o alguna otra combinación lineal de P), es decir que son las transformaciones que dejan invariantes las ecuaciones (2.34) y (2.35). Con estos coeficientes, para obtener la ecuación de estado, es necesario resolver la ecuación diferencial (2.37) encontrando la forma funcional de la presión en función de la densidad. Tras realizar la integración, se obtiene una forma lineal $P = C\rho$, a partir de la cual en concordancia con la literatura, se expresa como $P = (\gamma - 1)c^2\rho$, donde γ es una constante.

Al respecto, Collins [14] enuncia el siguiente teorema:

Teorema Homológico. Para un gas isotérmico en equilibrio en relatividad general, si $\rho(r)$ es una solución, entonces también lo sería $C^2\rho(Cr)$, donde C es una constante arbitraria.

Esta equivalencia aparece de nuevo, observamos que ρr^2 es invariante, donde las ecuaciones quedan invariantes bajo una transformación del tipo $r \rightarrow Ar, \rho \rightarrow A^{-2}\rho, y M \rightarrow AM$.

2.4. Determinación de Homologías en el sistema de Finsler

Similarmente al caso relativista, partimos de dos ecuaciones de estructura y la condición $\rho\rho' \neq 0$:

$$\frac{d}{dr}\rho(r) = -\frac{(c^2\rho + P(\rho))(kP(\rho)r^3 + 2m + (\lambda - 1)r)}{2r(r - 2m)\frac{d}{d\rho}P(\rho)}, \quad (2.39)$$

$$\frac{d}{dr}m(r) = \frac{1}{2}(c^2r^2\rho + 1 - \lambda). \quad (2.40)$$

Redefiniendo $m(r)$ en la forma

$$m(r) = \lambda M(r) - \frac{(\lambda - 1)}{2}r, \quad (2.41)$$

las ecuaciones (2.39) y (2.40) quedan expresadas como:

$$\frac{d}{dr}\rho(r) = F_1(r, \rho, M), \quad (2.42)$$

$$\frac{d}{dr}M(r) = F_2(r, \rho, M), \quad (2.43)$$

donde las funciones $F_1(r, \rho, M)$ y $F_2(r, \rho, M)$ son dadas por

$$F_1(r, \rho, M) = -\frac{(c^2\rho + P(\rho))(kr^3P(\rho) + 2\lambda M)}{2\lambda r(r - 2M)\frac{d}{d\rho}P(\rho)}, \quad (2.44)$$

$$F_2(r, \rho, M) = \frac{1}{2\lambda}c^2r^2\rho. \quad (2.45)$$

2. SISTEMAS EN LA TEORÍA DE FINSLER

En ambas funciones se encuentra presente el parámetro de Finsler λ y parte de nuestro objetivo es determinar como la presencia de este parámetro modifica las funciones mediante homologías, así que, considerando el campo vectorial X :

$$X = \xi(r) \frac{\partial}{\partial r} + \eta_1(\rho) \frac{\partial}{\partial \rho} + \eta_2(M) \frac{\partial}{\partial M} \quad (2.46)$$

donde ξ , η_1 y η_2 son las funciones a determinar. Aplicamos la condición de existencia de homologías (2.29) a las funciones F_1 y F_2 obtenemos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\rho} \eta_1(\rho) - \frac{d}{dr} \xi(r) &= \xi(r) \frac{\partial}{\partial r} \ln F_1(r, \rho, M) + \eta_1(\rho) \frac{\partial}{\partial \rho} \ln F_1(r, \rho, M) \\ &\quad + \eta_2(M) \frac{\partial}{\partial M} \ln F_1(r, \rho, M) \end{aligned} \quad (2.47)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dM} \eta_2(M) - \frac{d}{dr} \xi(r) &= \xi(r) \frac{\partial}{\partial r} \ln F_2(r, \rho, M) + \eta_1(\rho) \frac{\partial}{\partial \rho} \ln F_2(r, \rho, M) \\ &\quad + \eta_2(M) \frac{\partial}{\partial M} \ln F_2(r, \rho, M). \end{aligned} \quad (2.48)$$

Luego de resolver el sistema, comparando término a término, podemos llegar al conjunto de ecuaciones diferenciales:

$$\frac{d}{dM} \eta_2(M) - \frac{d}{dr} \xi(r) = 2 \frac{\xi(r)}{r} + \frac{\eta_1(\rho)}{\rho}, \quad (2.49)$$

$$\frac{d}{dM} \eta_2(M) = a, \quad (2.50)$$

$$a - \frac{d}{dr} \xi(r) = 2 \frac{\xi(r)}{r} + \frac{\eta_1(\rho)}{\rho}, \quad (2.51)$$

$$-\frac{d}{dr} \xi(r) + 3b = 2 \frac{\xi(r)}{r}. \quad (2.52)$$

En este conjunto de ecuaciones, a partir de (2.50) vemos que de la derivada de η^2 se obtiene

$$\eta^2(M) = aM + \alpha, \quad (2.53)$$

con α como constante de integración. De (2.52) integrando la ecuación nos permite determinar la función

$$\xi(r) = \frac{br^3 + \sigma}{r^2}, \quad (2.54)$$

con la constante de integración σ . Finalmente estos resultados nos permiten encontrar η^1 como:

$$\eta^1(\rho) = \rho(a - 3b). \quad (2.55)$$

Estas tres formas funcionales son exactamente iguales a las obtenidas en el caso relativista lo cual nos indica que la ecuación de estado compatible con las homologías, tras realizar la sustitución y la integración correspondiente será también la ecuación de estado lineal:

$$P = (\nu - 1)c^2\rho. \quad (2.56)$$

Donde ν es un parámetro asociado a la ecuación de estado que regularmente se expresa de esta manera. Hemos mostrado que aunque los sistemas corresponden a teorías diferentes, la relativista y la de Finsler, la ecuación de estado que es compatible con la existencia de homologías es la lineal. Una situación similar ocurre con la teoría de Rastall [21].

Capítulo 3

Análisis del sistema

En este capítulo realizamos el análisis de la dinámica del espacio fase del sistema (2.39) - (2.40). Con el objetivo de poder realizar un comparativo de este sistema con el sistema relativista. En la siguiente sección reproducimos el análisis del sistema Finsler.

3.1. El sistema dinámico de Einstein

De acuerdo al análisis presentado por Collins [14], el sistema autónomo asociado a las ecuaciones (2.33) y (2.34), luego de las transformaciones siguientes:

$$M_r = \frac{m(r)}{r}, \quad \mu = \frac{k}{2} \rho r^2, \quad t = \ln r, \quad (3.1)$$

se obtienen:

$$\frac{d}{dt} \mu(t) = \frac{\mu(t)}{1 - 2M_r(t)} \left(-\frac{(5\nu - 4)M_r(t)}{\nu - 1} - \nu \mu(t) + 2 \right) \quad (3.2)$$

y

$$\frac{d}{dt} M_r(t) = \mu(t) - M_r(t). \quad (3.3)$$

Este sistema admite dos puntos fijos:

$$M_r = 0, \quad \mu = 0, \\ M_r = \frac{2(\nu - 1)}{\nu^2 + 4\nu - 4}, \quad \mu = \frac{2(\nu - 1)}{\nu^2 + 4\nu - 4}.$$

- a) Los eigenvalores de la matriz de linealización para el primero de los puntos fijos son $(-1, 2)$, por lo que el origen representa un punto silla.
 b) Mientras que el segundo punto fijo tiene eigenvalores

$$\left(-\frac{\sqrt{\nu^2 - 44\nu + 36} + 3\nu - 2}{2\nu}, \frac{\sqrt{\nu^2 - 44\nu + 36} - 3\nu + 2}{2\nu} \right). \quad (3.4)$$

Tomando en cuenta que por condiciones físicas, la no violación de la causalidad (eso significa que la rapidez del sonido al interior del fluido perfecto debe ser menor que la rapidez de la luz en el vacío) $\nu \in (1, 2]$ resulta que las raíces en la ecuación anterior son complejas y el término fuera de la raíz es negativo, así que la dinámica es tipo nodo (o espiral) estable (atractiva). Un diagrama del espacio vectorial alrededor del punto fijo, muestra gráficamente la dinámica del sistema para diferentes valores del parámetro ν como en las figuras 3.1, 3.2 y 3.3:

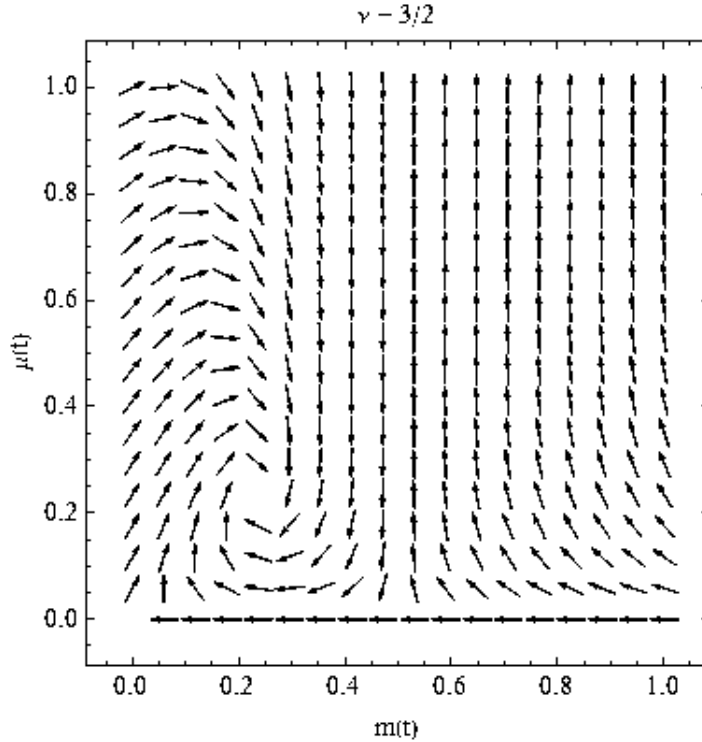


Figura 3.1: Campo vectorial del sistema dinámico de Einstein para $\nu = 1.5$.

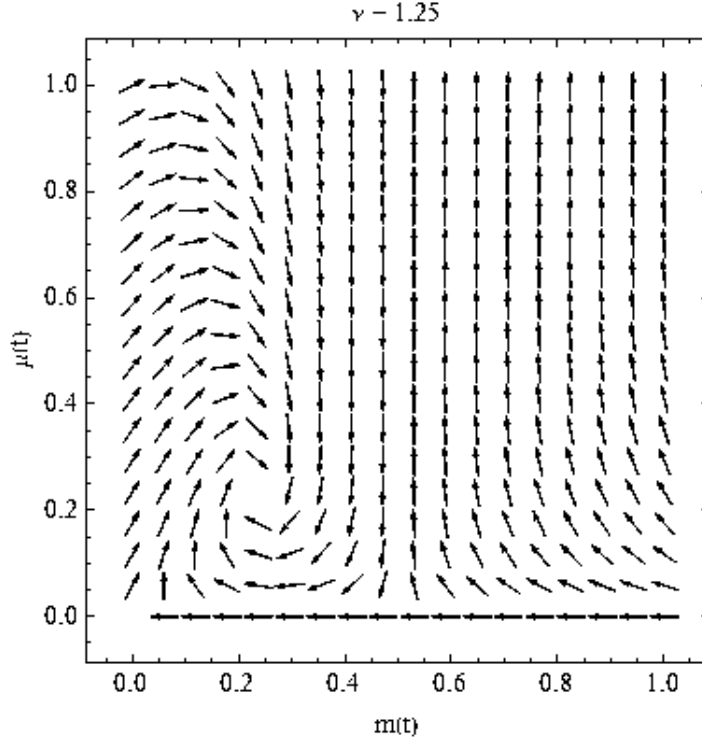


Figura 3.2: Campo vectorial del sistema dinámico de Einstein para $\nu = 1.25$ en el que se aprecia un punto fijo estable de espiral atractor cercano al origen.

3.1.1. La solución de Misner y Zapolsky

En el apartado anterior obtuvimos dos puntos fijos, el primero de ellos es la solución trivial, implica que la masa de la estrella es cero, por lo que de la ecuación (2.30) tenemos que la densidad es cero. De la ecuación de estado resulta que la presión $P(r) = 0$ y de la ecuación (2.31) obtenemos que $y(r) = A$, donde A es una constante. Esta solución corresponde a un espacio tiempo plano.

El otro punto fijo implica una función de densidad y masa dadas por:

$$\rho(r) = \frac{4(\nu - 1)}{kc^2 [(\nu + 2)^2 - 8] r^2}, \quad (3.5)$$

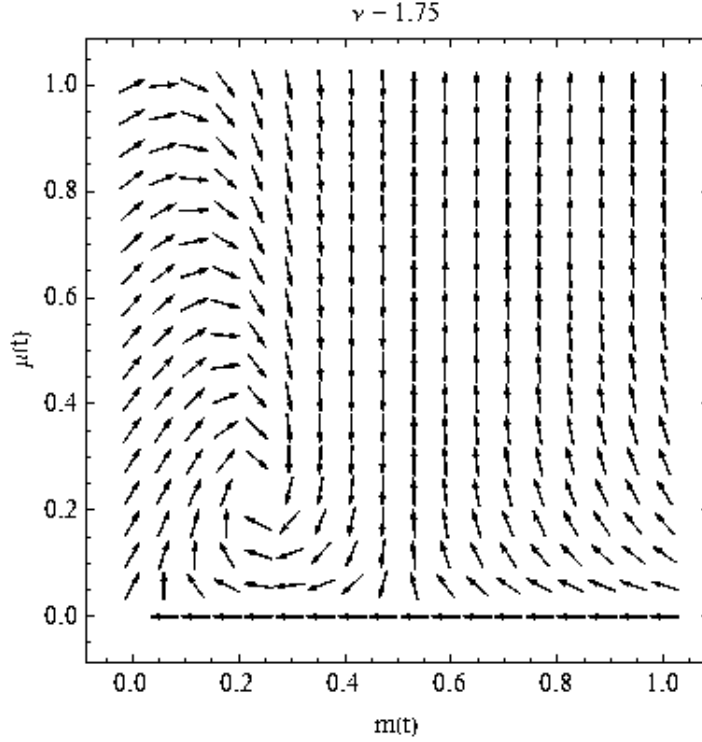


Figura 3.3: Campo vectorial del sistema dinámico de Einstein para $\nu = 1.75$. Para este caso de ν también se observa el punto fijo de espiral atractivo.

$$m(r) = \frac{2(\nu - 1)r}{(\nu + 2)^2 - 8}, \quad (3.6)$$

de la igualdad de las ecuaciones (2.31) y (2.32) resulta la ecuación

$$\frac{d^2y}{dr^2}(r) - \frac{1}{r} \frac{dy}{dr} + \frac{4(\nu - 1)y(r)}{\nu^2 r^2} = 0. \quad (3.7)$$

Que integrando obtenemos:

$$y(r) = C_1 r^{2\frac{\nu-1}{\nu}} + C_2 r^{2\nu-1}. \quad (3.8)$$

Considerando la ecuación de estado $P = (\nu - 1)c^2 \rho$ obtenemos que $C_1 = 0$. Esta solución es conocida como la solución de Misner y Zapsky [22] la cual representa el centro de la espiral.

3.2. Nuestro sistema dinámico de la Teoría de Finsler

Con el objetivo de tener un sistema autónomo y facilitar el análisis, introducimos la definición de las funciones M y ρ , así como el cambio de variable mediante:

$$M_f = \frac{M(r)}{r}, \quad \mu = \frac{k}{2} \rho r^2, \quad t = \ln r. \quad (3.9)$$

Una vez realizados los cambios de variable, se obtiene el sistema autónomo conformado por las ecuaciones:

$$\frac{d}{dt} \mu(t) = \frac{\mu(t)}{1 - 2M_f(t)} \left(-\frac{(5\nu - 4)M_f(t)}{\nu - 1} - \frac{\nu \mu(t)}{\lambda} + 2 \right). \quad (3.10)$$

$$\frac{d}{dt} M_f(t) = \frac{\mu(t)}{\lambda} - M_f(t). \quad (3.11)$$

Los puntos fijos del sistema anterior se obtienen de resolver el sistema de ecuaciones formado por:

$$0 = \frac{\mu(t)}{1 - 2M_f(t)} \left(-\frac{(5\nu - 4)M_f(t)}{\nu - 1} - \frac{\nu \mu(t)}{\lambda} + 2 \right), \quad (3.12)$$

$$0 = \frac{\mu(t)}{\lambda} - M_f(t). \quad (3.13)$$

De donde se obtienen dos pares de puntos fijos, siendo ellos los que a continuación se muestran:

$$\begin{aligned} Pm_{f1} &= 0, & P\mu_{f1} &= 0, \\ Pm_{f2} &= \frac{2(\nu - 1)}{\nu^2 + 4\nu - 4}, & P\mu_{f2} &= \frac{2(\nu - 1)\lambda}{\nu^2 + 4\nu - 4}. \end{aligned}$$

Para conocer de manera cualitativa la estabilidad del sistema en los puntos fijos encontrados, se realiza, conforme al análisis de estabilidad lineal la jacobiana del sistema, la

cual al aplicarla a nuestro sistema da como resultado:

$$\begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{\lambda} \\ -\frac{\nu\mu(2(\nu-1)\mu+\lambda)}{(\nu-1)\lambda(1-2m)^2} & \frac{-\frac{2\nu\mu}{\lambda} + \frac{(4-5\nu)m}{\nu-1} + 2}{1-2m} \end{pmatrix} \quad (3.14)$$

Esta matriz será evaluada en cada uno de los puntos fijos, tras ellos, los eigenvalores obtenidos para cada uno de los puntos fijos nos indicarán la dinámica alrededor de cada uno de los puntos fijos.

Para el primer punto fijo encontramos:

$$\begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{\lambda} \\ -\frac{\nu\mu(2(\nu-1)\mu+\lambda)}{(\nu-1)\lambda(1-2m)^2} & \frac{-\frac{2\nu\mu}{\lambda} + \frac{(4-5\nu)m}{\nu-1} + 2}{1-2m} \end{pmatrix}_{(0,0)} = \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{\lambda} \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad (3.15)$$

de donde obtenemos que los eigenvalores son $= (-1, 2)$. Al ser estos valores reales con signo distinto, este resultado nos indica la presencia de un comportamiento de punto silla en el punto fijo del origen. Por su parte, al evaluar en el segundo punto fijo, se encuentra:

$$\begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{\lambda} \\ -\frac{\nu\mu(2(\nu-1)\mu+\lambda)}{(\nu-1)\lambda(1-2m)^2} & \frac{-\frac{2\nu\mu}{\lambda} + \frac{(4-5\nu)m}{\nu-1} + 2}{1-2m} \end{pmatrix}_{\left(\frac{2(\nu-1)}{\nu^2+4\nu-4}, \frac{2(\nu-1)\lambda}{\nu^2+4\nu-4}\right)} = \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{\lambda} \\ -\frac{2(5\nu-4)\lambda}{\nu^2} & \frac{2}{\nu} - 2 \end{pmatrix} \quad (3.16)$$

de donde los eigenvalores obtenidos son:

$$\left(-\frac{\sqrt{\nu^2 - 44\nu + 36} + 3\nu - 2}{2\nu}, \frac{\sqrt{\nu^2 - 44\nu + 36} - 3\nu + 2}{2\nu} \right). \quad (3.17)$$

Aquí podemos notar que los eigenvalores para el segundo punto fijo, no dependen del parámetro λ proveniente de la teoría de Finsler. Un análisis más detallado de cómo varía el comportamiento del punto fijo respecto al parámetro ν se realiza en los eigenvalores obtenidos. En el discriminante de los eigenvalores, se encuentra que la región $22 - 8\sqrt{7} < \nu < 22 + 8\sqrt{7}$ ($\approx 0.83... < \nu < 43.16...$) produce eigenvalores complejos.

El intervalo obtenido contiene a la cota esperada para ν ($1 \leq \nu \leq 2$), para ser físicamente aceptable ($\nu = 1$ corresponde a una ecuación que describe polvo). Dentro de esta

3. ANÁLISIS DEL SISTEMA

región para el parámetro ν , se encuentran autovalores complejos cuya parte real es negativa, lo que indica una dinámica de tipo nodo (espiral) estable (atractiva). Dinámica que coincide con el comportamiento mostrado por la teoría de la relatividad de Einstein.

En la figura 3.4 se muestra una superposición entre tres soluciones numéricas con condiciones iniciales distintas y el campo vectorial para $(\lambda, \nu) = (1.1, 1.3)$ cercano al punto fijo. Por su parte, en la figura 3.5 se muestran las dinámicas obtenidas para el punto fijo no trivial, al variar los parámetros λ, ν .

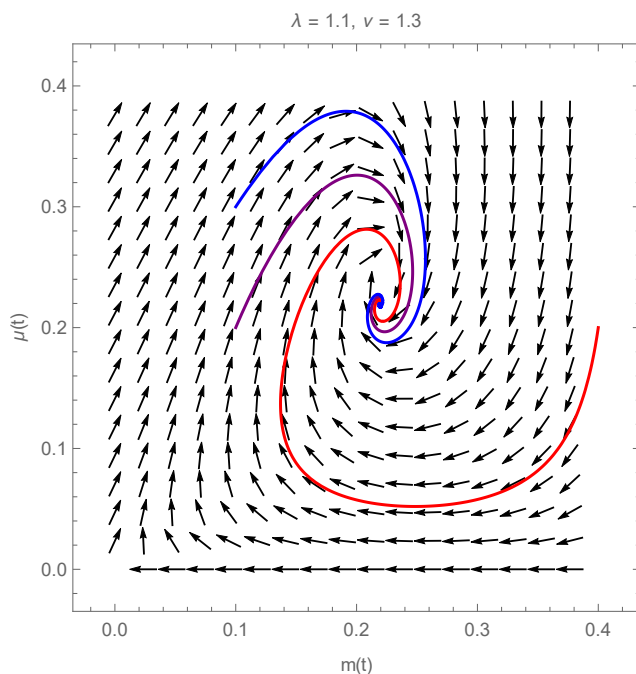


Figura 3.4: Superposición de tres soluciones numéricas y el campo vectorial con $(\lambda, \nu) = (1.1, 1.3)$. Notamos que aún cuando las condiciones de los parámetros son distintas, cada una de ellas converge a la solución de Mizner-Zapolsky.

3.3. El método de Frobenius

Es interesante determinar el comportamiento de las soluciones alrededor de los puntos fijos para sistemas autónomos. Un formalismo presentado por Visser y Yunes [23] a

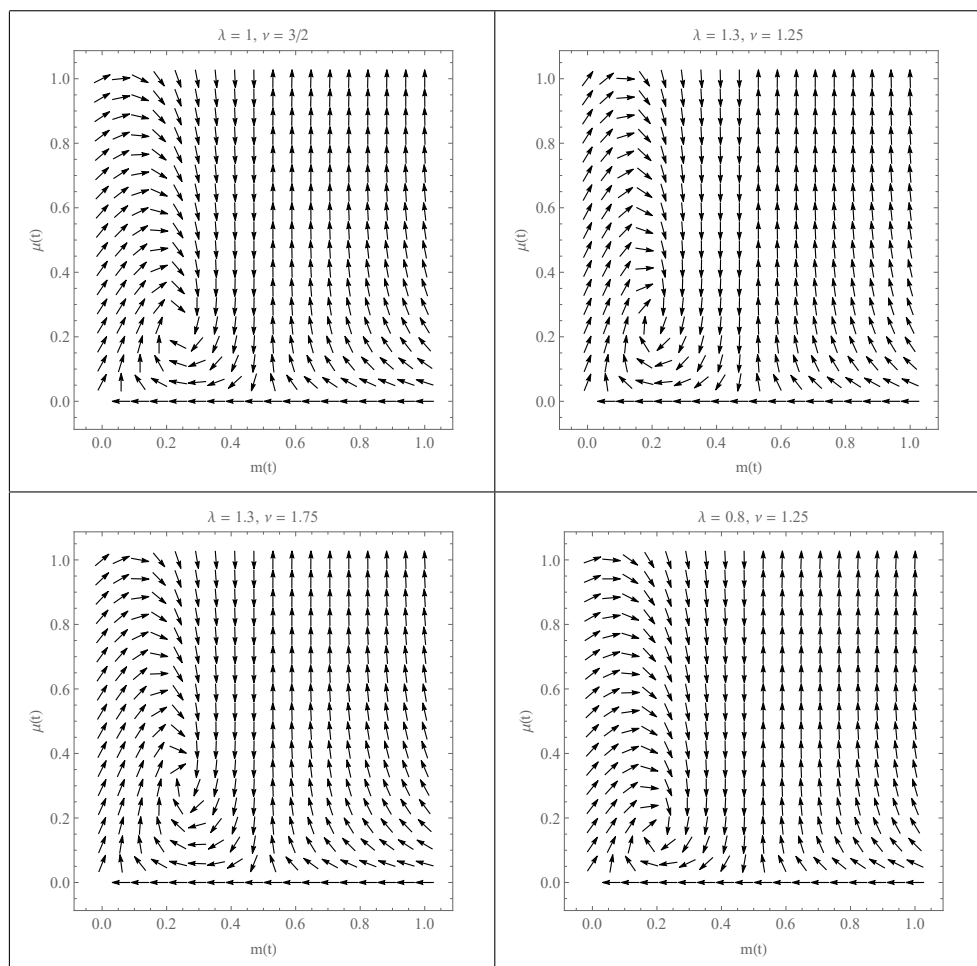


Figura 3.5: Dinámica del punto fijo no trivial para parámetros distintos (λ, ν) .

3. ANÁLISIS DEL SISTEMA

través de la generalización del método de Frobenius permite la construcción de soluciones en series para un sistema de ecuaciones diferenciales que admiten homologías. Ellos aplican su formalismo a varios sistemas entre los que figuran el caso relativista. En esta sección, mediante un mapeo de su solución, obtenemos la solución generada para el sistema de Finsler a través del método de Frobenius. Definiendo:

$$m(r) = \lambda m_0(r) - \frac{1}{2}(\lambda - 1)r, \quad (3.18)$$

$$\rho(r) = \lambda \rho_0(r), \quad (3.19)$$

$$P(r) = \lambda P_0(r). \quad (3.20)$$

Consideramos las ecuaciones (2.21)-(2.22) obtenemos el sistema

$$kc^2 \rho_0(r) = \frac{2}{r^2} \frac{dm_0}{dr}, \quad (3.21)$$

$$kP_0(r) = \frac{2}{ry(r)} \left(1 - \frac{2m_0(r)}{r}\right) \frac{dy}{dr} - \frac{2m_0(r)}{r^3}, \quad (3.22)$$

$$kP_0(r) = \frac{1}{y(r)} \left(1 - \frac{2m_0(r)}{r}\right) \frac{d^2y}{dr^2} + \frac{1}{ry(r)} \left(1 - \frac{m_0(r)}{r} - \frac{dm_0}{dr}\right) \frac{dy}{dr} - \frac{1}{r^3} \left(r \frac{dm_0}{dr} - m_0(r)\right). \quad (3.23)$$

Comparando con el caso relativista, ecuaciones (2.30)-(2.32), observamos que estos son idénticos. Así que en nuestro caso por aplicación directa del trabajo realizado por Visser y Yunes [23] tenemos que la solución, en series, alrededor del puntos fijo (0,0) es:

$$m(r) = \frac{1}{2}(1 - \lambda)r + 2\lambda c_s^2 r \sum_{n=1}^{\infty} b_n \left(\frac{kp_c r^2}{2c_s^4}\right)^n, \quad (3.24)$$

$$P(r) = \frac{\lambda c_s^4}{2\pi r^2} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(\frac{kp_0 r^2}{2c_s^4}\right)^n. \quad (3.25)$$

donde los coeficiente b_n y a_n están relacionados por

$$a_n = (2n + 1) b_n. \quad (3.26)$$

Los b_n satisfacen la relación de recurrencia:

$$b_n = -\frac{(n+1)}{(n-1)(2n+1)} \sum_{i=1}^{n-1} b_i b_{n-i}. \quad (3.27)$$

mediante el análisis en series es posible conocer el comportamiento de la solución en una vecindad del punto fijo.

3.4. La geometría de los puntos fijos. Teoría Finsler

En las secciones anteriores hemos mostrado que la ecuación de estado que es permisible a las homologías en el caso de la teoría de relatividad general de Einstein y la teoría de Finsler es la lineal y además que ambos sistemas admiten dos puntos fijos con la misma dinámica, a saber un punto silla en el origen y un nodo estable fuera del origen. Una pregunta que se puede formular dadas estas similitudes mencionadas, es si las geometrías que expresa cada modelo son equivalentes. En la gravedad de Einstein el punto fijo $(0,0)$ implica $y(r) = y_0$ y $B(r) = 1$, con y_0 constante, lo que corresponde al espacio plano. Mientras que en el marco de la teoría de Finsler para este punto fijo se tiene $y(r) = y_0$ y $B(r) = \lambda$. Si estas funciones fuesen consideradas en el marco de la teoría de gravedad de Einstein el espacio tiempo correspondería a la descripción de lo que en gravitación se conoce como un espacio tiempo asintóticamente plano con un déficit de ángulo [24], relacionado con un defecto topológico llamado monopolo [25], que a su vez tiene que ver con la existencia de una singularidad cónica [24, 25, 26], su escalar de curvatura es $R = (1 - \lambda)/r^2$, lo que implica la singularidad en $r = 0$. Sin embargo, en el marco de la teoría de Finsler, que es donde fueron obtenidas, las funciones $y(r) = y_0$ y $B(r) = \lambda$ corresponde al caso plano. Por lo tanto, la geometría del punto fijo $(0,0)$ en ambos casos son equivalentes y corresponden a la geometría plana en el marco de cada teoría.

Para el otro punto fijo $(\bar{M}_f, \bar{\mu})$, de las definiciones M_f y μ dadas por (3.9) resulta que

$$M(r) = \frac{2(\nu-1)\lambda r}{\nu^2 + 4\nu - 4} \quad \text{y} \quad \rho(r) = \frac{4(\nu-1)\lambda}{kc^2(\nu^2 + 4\nu - 4)r^2}. \quad (3.28)$$

Esta solución sería la equivalente a la de Misner y Zapolsky pero en la teoría de Finsler [27]. Reemplazando la función de masa en (2.21) y (2.22), al considerar la ecuación de

3. ANÁLISIS DEL SISTEMA

estado $P = (\nu - 1)c^2\rho$ obtenemos la ecuación diferencial para $y(r)$:

$$\nu r \frac{dy}{dr} - 2(\nu - 1)y = 0, \quad (3.29)$$

cuya solución es $y(r) = W r^{2-\frac{2}{\nu}}$. A partir de (M, y) resulta que en la teoría de Finsler el escalar de curvaturas dado por la ecuación (2.10) es:

$$S = \frac{4(\nu - 1)(4 - 3\nu)\lambda}{(\nu^2 + 4\nu - 4)r^2}. \quad (3.30)$$

Para un comparativo de las soluciones, escribimos las funciones de masa M_E y y_E que corresponden al punto fijo en la teoría de Einstein [14].

$$M_E(r) = \frac{2(\nu - 1)r}{\nu^2 + 4\nu - 4} \quad y \quad y_E(r) = W r^{2-\frac{2}{\nu}}. \quad (3.31)$$

Calculando su escalar de Ricci en el marco de la teoría de relatividad general de Einstein tenemos:

$$R = \frac{4(\nu - 1)(4 - 3\nu)}{(\nu^2 + 4\nu - 4)r^2}. \quad (3.32)$$

Como puede observarse la función de masa $M(r)$ para la teoría de Finsler y la función de masa M_E para la teoría de Einstein, solo difieren por el factor multiplicativo λ ; mientras que las funciones $y(r)$ son idénticas. Además los respectivos invariantes, el escalar de curvatura S y el escalar de Ricci R difieren únicamente por un factor multiplicativo. Esto muestra la similitud de ambas teorías no exclusivamente en la forma funcional de (M, y) sino también de la geometría a través de los escalares de curvatura respectivos. En las secciones anteriores hemos mostrado que la ecuación de estado asociada a las homologías en el caso de la teoría de relatividad general de Einstein y la teoría de Finsler que es compatible con la existencia de homologías es la lineal y además que ambos sistemas admiten dos puntos fijos con la misma dinámica. Sin embargo, como argumentaremos a continuación, las implicaciones geométricas para el sistema de Finsler no son las mismas. En el caso relativista el punto fijo (0,0) corresponde a la geometría plana, mientras que el caso de la teoría de Finsler no es así. De la transformación (2.41) y (3.9) el punto fijo (0,0) tiene como solución a la densidad y presión cero, con función de masa (en Finsler):

$$m(r) = \frac{1}{2}(1 - \lambda)r \quad (3.33)$$

y función $y(r) = C_1$, donde C_1 es una constante. Que comparado con el caso relativista ($\lambda = 1$, $m(r) = 0$), la geometría de ambos es diferente.

Para el otro punto fijo, luego de aplicar las respectivas transformaciones y expresar la densidad y función de masa en términos de la coordenada radial, resulta:

$$\rho(r) = \frac{4\lambda(\nu - 1)}{\left[(\nu + 2)^2 - 8\right]kc^2r^2}, \quad (3.34)$$

$$m(r) = \frac{\left[\nu^2(1 - \lambda) + 4(1 - \nu)\right]r}{2(\nu + 2)^2 - 8}. \quad (3.35)$$

Reemplazando en las ecuaciones (2.39) - (2.32) y teniendo en cuenta la ecuación de estado, obtenemos que la función

$$y(r) = C_1r^{2-\frac{2}{\nu}}. \quad (3.36)$$

Esta solución sería la equivalente a la de Misner y Zapolsky pero en la teoría de Finsler [27].

Capítulo 4

Conclusiones

Se realizó el análisis de estabilidad lineal para entender la dinámica del sistema con el propósito de entender la dinámica alrededor de los puntos de equilibrio asociados a las ecuaciones diferenciales para un modelo estelar en el marco de la teoría de Finsler.

Se efectuó un análisis al modelo de Einstein para compararse con el de Finsler así como en términos del desarrollo de Frobenius. Se llevó a cabo un comparativo sobre la viabilidad de la teoría de Finsler para describir modelos estelares vs la teoría de la relatividad general de Einstein.

Encontramos que la dinámica asociada a los puntos fijos tanto en la teoría de Einstein como en Finsler, son las mismas. Además de que la ecuación de estado compatible mediante homologías es también la ecuación de estado lineal, al igual que en el caso relativista. Se revisó la equivalencia y congruencia entre las ecuaciones de estado obtenidas mediante las propiedades matemáticas de nuestro problema y aquello que es considerado realista físicamente. Fue encontrada la ecuación de estado compatible mediante homologías con la obtenida a partir de la teoría de la Relatividad de Einstein.

Apéndice A

Apéndice

En esta sección se revisan los conceptos sobre ecuaciones diferenciales que son de utilidad para el tratamiento de los sistemas dinámicos. Mismos que también serán tratados en este apéndice, definiéndolos y clasificándolos acorde a su comportamiento cualitativo. Finalmente se revisa el procedimiento de linealización de un sistema dinámico.

A.1. Ecuaciones diferenciales

Cuando se quiere resolver un problema de naturaleza física, lo principal es formular el problema de forma matemática, ser capaces de expresar lo que ocurre en términos de variables, funciones y ecuaciones.

A la expresión o expresiones matemáticas que reproducen total o parcialmente el comportamiento de los datos observados en un determinado fenómeno se le conoce como modelo matemático del problema. Al proceso de dar un modelo, resolverlo matemáticamente para posteriormente brindar una interpretación física de los resultados, se le llama modelación [1]. Para la modelación, además suele ser necesario también el uso de herramientas computacionales.

Las ecuaciones diferenciales aparecen en gran variedad de problemas naturales de manera espontánea, a partir de modelar fenómenos relacionados con razones de cambio, convirtiendo a las ecuaciones diferenciales en parte fundamental de la mayoría de los modelos matemáticos.

Si suponemos que f es una función definida para todo valor real x en un intervalo I , para cierto real y en S . El valor de f en (x, y) se denota por $f(x, y)$. Un importante problema asociado con f es el de encontrar una función ϕ en I , la cual es diferenciable allí, de tal forma que para todo x en I ,

$$\phi(x) \quad \text{está en } S, \tag{A.1}$$

$$\phi'(x) = f(x, \phi(x)). \tag{A.2}$$

a este problema es al que se le llama ecuación diferencial ordinaria de primer orden, denotada por

$$y' = f(x, y), \tag{A.3}$$

donde el adjetivo *ordinario* hace referencia a que no se ven involucradas derivadas parciales, sino solamente derivadas ordinarias. Si existe la función ϕ en I tal que se satisfagan A.1 y A.2, entonces ϕ es llamada *solución* de A.3 en I .

Una forma más general en la que existe una ecuación diferencial es el caso en el que la derivada y' existe de forma no lineal. Es necesario considerar el caso de la forma

$$F(x, y, y') = 0, \tag{A.4}$$

aquí F es alguna función de sus variables entre ellas la derivada de y , definida para un intervalo I . Entonces el problema es el de encontrar una función ϕ en I , la cual es diferenciable allí, de tal forma que para todo x en I ,

$$\phi(x) \quad \text{está en } S_1, \phi'(x) \text{ en } S_2, \tag{A.5}$$

$$F(x, \phi(x), \phi'(x)) = 0. \tag{A.6}$$

A este problema se le llama ecuación diferencial ordinaria de primer orden, mientras que ϕ es la *solución* de la ecuación diferencial [28].

A.1.1. Sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden

Un sistema de ecuaciones diferenciales no es más que un conjunto de ecuaciones diferenciales las cuales están relacionadas entre sí, el cual tiene la forma:

$$\begin{aligned}y_1' &= f_1(x, y_1, \dots, y_n), \\y_2' &= f_2(x, y_1, \dots, y_n), \\&\vdots \\y_n' &= f_n(x, y_1, \dots, y_n).\end{aligned}\tag{A.7}$$

Por su parte, una ecuación diferencial de n -ésimo orden

$$y^{(n)} = F(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})\tag{A.8}$$

puede ser transformada en un sistema de n ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden al hacer

$$y_1 = y, y_2 = y', y_3 = y'', \dots, y_n = y^{n-1}.\tag{A.9}$$

Así el sistema se vuelve de la forma

$$\begin{aligned}y_1' &= y_2 \\y_2' &= y_3 \\&\vdots \\y_{n-1}' &= y_n \\y_n' &= F(x, y_1, y_2, \dots, y_n).\end{aligned}\tag{A.10}$$

Ésta conversión es de gran utilidad para el tratamiento de modelos matemáticos debido a que es posible usar las herramientas de solución de ecuaciones diferenciales de primer orden, de manera sencilla, debido a que el problema de encontrar la solución para una ecuación de n -ésimo orden se reduce a encontrar n funciones $(\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n)$ las cuales son la solución del sistema. Ésta solución es entonces un conjunto de n funciones.

A.2. Dinámicas

Los sistemas dinámicos son una herramienta que puede ser aplicada en distintas disciplinas, tiende a verse involucrada ciencias diversas como la biología, economía, física, química, climatología entre otras. El origen de su estudio se remonta hasta Newton, quien resolvió a través de las ecuaciones diferenciales (que el mismo inventó) el problema de los dos cuerpos, para calcular el movimiento de la Tierra alrededor del Sol, encontrando la relación del inverso del cuadrado en el radio, para la fuerza de atracción entre estos cuerpos. No obstante, las generaciones enfrentaron la realidad de que, a partir del problema de tres cuerpos, las cosas no son tan sencillas. Siendo que es imposible obtener una solución analítica como la que encontró Newton para el caso de dos cuerpos, tal que describa el movimiento de cada uno de los tres.

Fue Poincaré quien desarrolló una perspectiva cualitativa en lugar de cuantitativa para el entendimiento de los sistemas dinámicos, también fue el primero en hablar de la posibilidad del caos como un sistema que exhibe un comportamiento aperiódico y que es sumamente sensible a las condiciones iniciales.

Vamos a encontrar dos tipos distintos de sistemas dinámicos: aquellos que son generados por ecuaciones diferenciales y los mapas iterativos. Una ecuación diferencial o un sistema de ecuaciones diferenciales nos describe la evolución de un sistema en un tiempo continuo mientras que el tipo de mapa iterativo describe procesos discretizados. En este trabajo nos centraremos en el primer tipo de sistemas dinámicos, del cual existen dos clasificaciones particulares: un sistema es **lineal** si las variables x_i que aparecen explícitamente, lo hacen en su primera potencia y **no lineal** si ocurre cualquier otro caso.

Recordando que un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden es una colección de n ecuaciones diferenciales relacionadas en la forma

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= f_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= f_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n)\end{aligned}\tag{A.11}$$

Aquí las funciones f_j son de valores reales de $n + 1$ variables las cuales son x_1, x_2, \dots, x_n y t . Donde el punto significa derivada respecto al tiempo t . También asumiremos que la función $f_j \in C^\infty$. Lo cual significa que las derivadas parciales de todos los órdenes de f_j existen y son continuas. Utilizando la notación matricial, esto nos queda en la forma:

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\tag{A.12}$$

Es decir, nuestro sistema se puede escribir precisamente como

$$\dot{\mathbf{X}} = F(t, \mathbf{X}),\tag{A.13}$$

donde

$$F(t, x) = \begin{pmatrix} f_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \end{pmatrix}\tag{A.14}$$

Las soluciones a este sistema pueden ser visualizadas como trayectorias que fluyen en un espacio de n con coordenadas (x_1, \dots, x_n) . El sistema de ecuaciones en su forma autónoma, donde no aparece una dependencia explícita del parámetro t es: $\dot{\mathbf{X}} = F(\mathbf{X})$.

El caso más sencillo de sistemas dinámicos con una dinámica no unidimensional es el caso del sistema lineal en dos dimensiones, el cual tiene la forma:

$$\dot{x} = ax + by, \quad \dot{y} = cx + dy,\tag{A.15}$$

donde a, b, c, d son parámetros. Aprovechando la notación vectorial para sistemas de ecuaciones expuesta en las secciones anteriores, podemos expresar el sistema en forma

de matrices como:

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}, \quad (\text{A.16})$$

donde

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad (\text{A.17})$$

éste sistema se dice lineal debido a que x e y aparecen de forma lineal y en este caso \mathbf{x}_1 y \mathbf{x}_2 son soluciones. Entonces también lo es cualquier combinación lineal de ambas $c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_1$.

Como $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$ para $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ entonces $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$ es siempre un *punto fijo* para cualquier A .

Las soluciones de $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$ pueden ser vistas como trayectorias que se mueven en el plano (x, y) , llamado *espacio fase*.

A.2.1. Clasificación de los sistemas dinámicos

Hablando de la *estabilidad* de un sistema, tema de especial interés para el estudio de *puntos fijos* en *sistemas no lineales*, diremos que $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$ es un punto fijo atractivo o **atractor** si todas las trayectorias que empiezan cerca de \mathbf{x}^* se acercan al mismo conforme $t \rightarrow \infty$. Esto es $\mathbf{x}(t) \rightarrow \mathbf{x}^*$ conforme $t \rightarrow \infty$. Si \mathbf{x}^* atrae todas las trayectorias en el espacio fase, entonces se denomina *globalmente atractiva*.

Para el caso general de trayectorias, buscamos aquellas de la forma

$$\mathbf{x}(t) = e^{\lambda t}\mathbf{v}, \quad (\text{A.18})$$

Para la cual es necesario que $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, es un vector que será determinado y que tendrá que ver con las trayectorias principales de atracción o repulsión. λ por su parte es el parámetro de crecimiento, que también será determinado. Si este tipo de soluciones ocurren entonces corresponderán con un movimiento exponencial que se describirá a lo largo de la línea descrita por el vector \mathbf{v} .

Será necesario sustituir la propuesta de solución $\mathbf{x}(t) = e^{\lambda t}\mathbf{v}$ en el sistema de ecuaciones

$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$ para obtener $\lambda e^{\lambda t} \mathbf{v}(t) = e^{\lambda t} A\mathbf{v}$, de donde se obtendrá:

$$A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}. \quad (\text{A.19})$$

El cual es un problema de eigenvalores, siendo \mathbf{v} el eigenvector de A que corresponde al eigenvalor λ .

Para obtener la solución al problema de eigenvalores, hay que tomar en cuenta la *ecuación característica*, $\det(A - \lambda I) = 0$, donde I es la matriz identidad. Para una matriz de 2×2

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad (\text{A.20})$$

Aplicando el determinante para la ecuación característica

$$\det \begin{pmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{pmatrix} = 0, \quad (\text{A.21})$$

que se expande como

$$\lambda^2 - \tau\lambda + \Delta = 0, \quad (\text{A.22})$$

de donde encontramos

$$\tau = \text{traza}(A) = a + d \quad (\text{A.23})$$

y

$$\Delta = \det(A) = ad - bc. \quad (\text{A.24})$$

Entonces

$$\lambda_1 = \frac{\tau + \sqrt{\tau^2 - 4\Delta}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{\tau - \sqrt{\tau^2 - 4\Delta}}{2} \quad (\text{A.25})$$

Así se ve que los eigenvalores dependerán solamente de la traza y el determinante de la matriz A .

A partir de las soluciones del problema de eigenvalores para el sistema de ecuaciones diferenciales en dos dimensiones, se puede realizar una clasificación de los diferentes tipos de comportamiento que se obtienen en el espacio fase para distintas soluciones de

la ecuación característica.

El primer caso, es el caso $\lambda_1 \neq \lambda_2$ y $\lambda_1 \leq 0 \leq \lambda_2$ con $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ donde encontramos una dinámica en la cual en una línea descrita por un vector propio observamos un comportamiento atractivo, en la otra veremos un comportamiento repulsivo. Este tipo de dinámica se conoce como de *punto silla*, un ejemplo de este tipo de trayectorias se puede apreciar en la figura A.1.

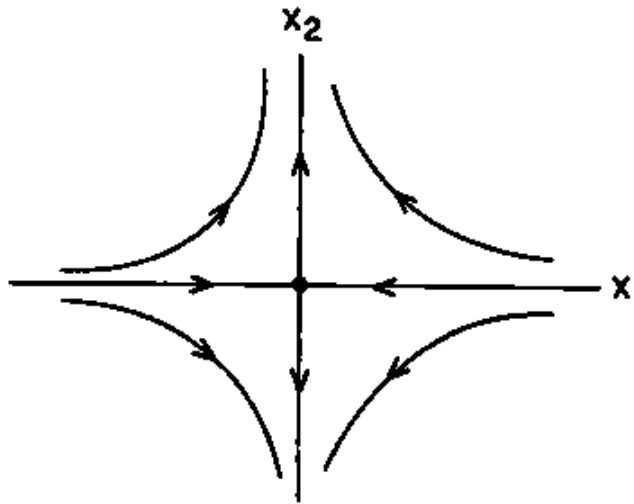


Figura A.1: Trayectorias en el espacio fase para un punto silla

Para el caso dos, $\lambda \leq \mu < 0$, el origen es un nodo estable en cualquiera de los casos. Es un nodo propio si $\lambda = \mu$ y uno impropio en cualquiera de los otros dos casos. Si $\lambda \geq \mu > 0$ o si $\lambda > 0$ las flechas del campo vectorial saldrían del nodo convirtiéndose en un nodo inestable. De esta forma la estabilidad del nodo dependerá de los valores propios: siendo estable para $\lambda \leq \mu < 0$ e inestable para $\lambda \geq \mu > 0$, en la figura A.2 se aprecian este tipo de dinámicas.

El tercer caso ocurre cuando para la matriz A se obtienen complejos conjugados con parte real distinta de cero $a \pm ib$. Con $a < 0$ se tienen nodos espirales que son estables (se acercan al nodo) mientras que con $a > 0$ se convierten en nodos espirales inestables (se alejan del nodo), este tipo de dinámicas se pueden apreciar en la figura A.3.

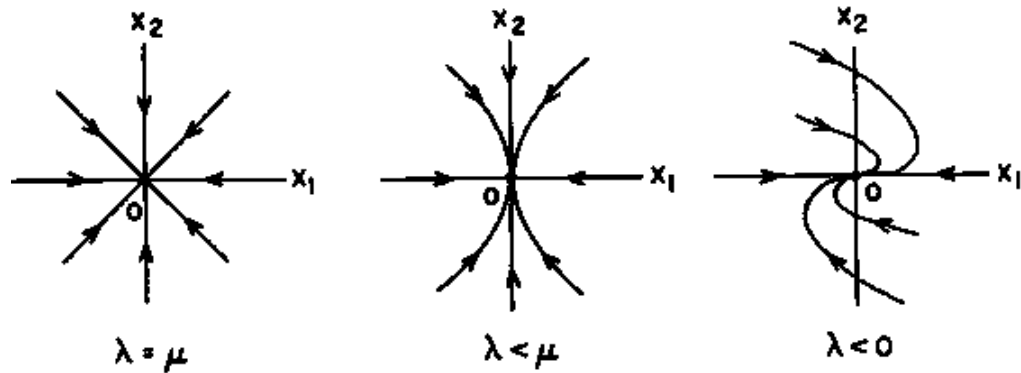


Figura A.2: Trayectorias en el espacio fase para un nodo estable en el origen. Los tres casos representan un nodo estable. En la tercera figura de izquierda a derecha, se considera el caso cuando solamente existe un eigenvalor (λ), formándose un nodo degenerado.

El último caso corresponde a aquel en el cual se encuentra un par de valores propios conjugados complejos, con parte real nula, en la forma $\pm ib$. Gráficamente en el espacio fase, esto se traduce en la presencia de elipses que siguen trayectorias cerradas a derechas o a izquierdas dependiendo del signo del valor propio. Este caso se conoce como dinámica *centro*, mostradas en la figura [A.4](#).

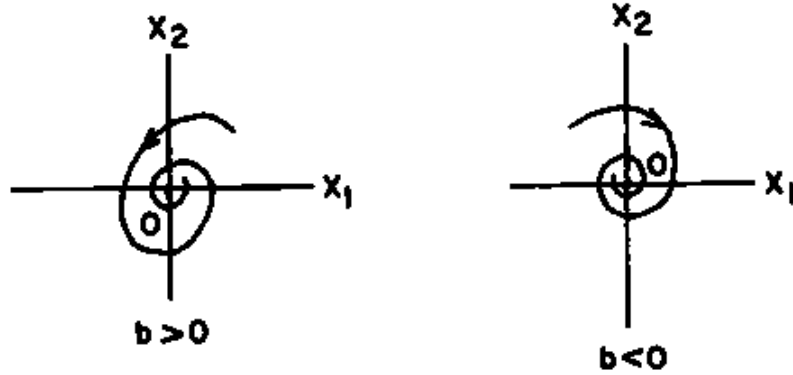


Figura A.3: Trayectorias en el espacio fase para un nodo espiral estable, correspondientes a la parte real positiva y negativa, de izquierda a derecha respectivamente.

Cuando el determinante de la matriz A es distinto de cero, $\det A \neq 0$ existe un método sencillo para determinar si el sistema lineal tiene un punto silla, nodo, foco o centro como dinámica. Este método se describe a través de un teorema. Si tenemos en cuenta que $A \neq 0$ entonces $A\mathbf{x} = \mathbf{0} \iff \mathbf{x} = \mathbf{0}$, lo que implica que el único punto de equilibrio es el origen. Si el origen en este caso es un centro o un foco, entonces el signo de la traza determinará la dirección del movimiento en el espacio fase, si $\tau > 0$ será en dirección contrareloj mientras que será en dirección horaria si ocurre $\tau < 0$.

Sea $\Delta = \det A$ y τ la traza de A , considerando el sistema lineal

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} \tag{A.26}$$

- i) Si $\Delta < 0$ entonces A.26 tiene un punto silla en el origen.
- ii) Si $\Delta > 0$ y $\tau^2 - 4\Delta \geq 0$ entonces A.26 tiene un nodo en el origen, el cual es estable si $\tau < 0$ e inestable si $\tau > 0$.
- iii) Si $\Delta > 0$, $\tau^2 - 4\Delta < 0$ y $\tau \neq 0$ entonces A.26 tiene una dinámica tipo foco en el origen, que es estable para $\tau < 0$ e inestable para $\tau > 0$.
- iv) Si $\Delta > 0$ y $\tau = 0$ entonces A.26 existe un centro en el origen.

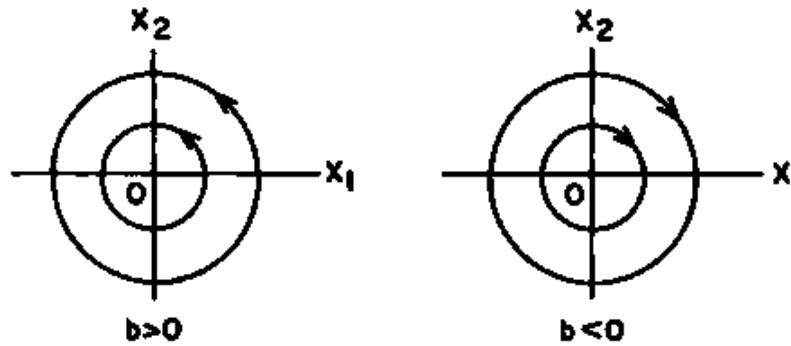


Figura A.4: Trayectorias en el espacio fase para dinámicas centro.

Los enunciados anteriores de la ecuación A.26, pueden resumirse en una representación gráfica, en la cual tomamos en cuenta la fórmula

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left(\tau \pm \sqrt{\tau^2 - 4\Delta} \right),$$

con los ejes formados por la traza τ y el determinante Δ , se traza la gráfica (figura A.5) de la ecuación $\tau^2 - 4\Delta = 0$. Dado que estamos analizando en la vecindad de los puntos críticos solamente nos hemos centrados en la parte lineal, misma que se analizará con un poco más de detalle en la siguiente sección.

A.2.2. Linealización a través de los puntos fijos

Para el caso de sistemas no lineales, si se quiere realizar un análisis de estabilidad lineal como el mostrado anteriormente para sistemas lineales, entonces es necesario realizar un proceso de *linealización*.

Considerando el sistema en la forma

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, y) \\ \dot{y} &= g(x, y)\end{aligned}\tag{A.27}$$

siendo el punto fijo (x^*, y^*) entonces:

$$f(x^*, y^*) = 0, \quad g(x^*, y^*) = 0,\tag{A.28}$$

haciendo

$$u = x - x^*, v = y - y^*.\tag{A.29}$$

Las componentes de una perturbación pequeña de un punto fijo. Con el objetivo de ver si la perturbación crece o decae, es necesario derivar las ecuaciones diferenciales para u y v . para la ecuación de u :

$$\begin{aligned}\dot{u} &= \dot{x} \quad (\text{porque } x^* \text{ es constante}) \\ &= f(x^* + u, y^* + v) \quad (\text{por sustitución}) \\ &= f(x^*, y^*) + u \frac{\partial f}{\partial x} + v \frac{\partial f}{\partial y} + O(u^2, v^2, uv) \quad (\text{serie de Taylor}) \\ &= u \frac{\partial f}{\partial x} + v \frac{\partial f}{\partial y} + O(u^2, v^2, uv) \quad (\text{ya que } f(x^*, y^*) = 0).\end{aligned}\tag{A.30}$$

recordando que las derivadas deben ser evaluadas en los puntos fijos como:

$$\frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{(x^*, y^*)} \quad \mathbf{y} \quad \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{(x^*, y^*)}\tag{A.31}$$

por lo que estaríamos hablando de números, no funciones. Por su parte, el los términos de orden cuadrático para u y v son $O(u^2, v^2, uv)$. Y como u, v son supuestos pequeños, entonces los términos de O^2 son extremadamente pequeños. De manera similar se puede

encontrar para v como:

$$\dot{v} = u \frac{\partial g}{\partial x} + v \frac{\partial g}{\partial y} + O(u^2, v^2, uv). \quad (\text{A.32})$$

Esto nos lleva al sistema de la forma:

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix} \Big|_{(x^*, y^*)} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + O^2(u, v) \quad (\text{A.33})$$

de la cual la matriz

$$\mathbf{J}_A = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix} \Big|_{(x^*, y^*)} \quad (\text{A.34})$$

se conoce como **matriz Jacobiana** en el punto fijo (x^*, y^*) . Y como los términos $O^2(u, v)$ son pequeños, pueden ser ignorados. Haciendo lo anterior, obtenemos finalmente lo que se llama **sistema linealizado**:

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix} \Big|_{(x^*, y^*)} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \quad (\text{A.35})$$

Esta es la matriz que nos permitirá realizar el análisis lineal del sistema.

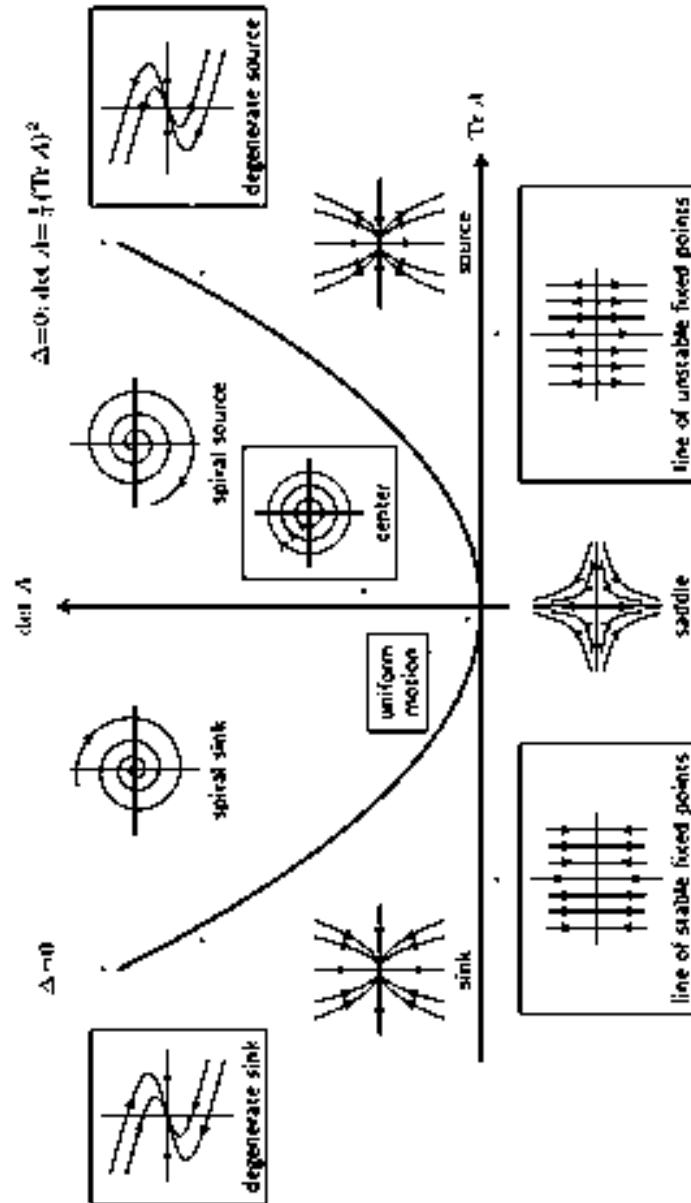


Figura A.5: Clasificación de las dinámicas posibles variando los valores de Δ y τ . Recuperado de [wiki/Archivo:Stability_Diagram.png](https://wiki.archivo.org/File:Stability_Diagram.png)

Bibliografía

- [1] G.S. Asanov. *Finsler Geometry, Relativity and Gauge Theories*. Fundamental Theories of Physics. Springer Netherlands, 1985. [1](#)
- [2] C. Lämmerzahl y V. Perlick. Finsler geometry as a model for relativistic gravity. *Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys.*, 15(1850166), 2018. [1](#)
- [3] S. Roy et.al. Anisotropic strange star inspired by Finsler geometry. *International Journal of Modern Physics D*, 29(01):2050001, jun 2020. [1](#), [5](#)
- [4] S. I. Vacaru. Principles of Einstein–Finsler Gravity and perspectives in modern cosmology. *International Journal of Modern Physics D*, 21(09):1250072, sep 2012. [2](#)
- [5] P. Stavrinou y S. I. Vacaru. Cyclic and ekpyrotic universes in modified finsler osculating gravity on tangent lorentz bundles. *Classical and Quantum Gravity*, 30(5):055012, mar 2013. [2](#)
- [6] R. Emparan y H. S. Reall. Black rings. *Classical and Quantum Gravity*, 23(20):169–197, 2006. [2](#)
- [7] S. Rajpoot y S. I. Vacaru. Black ring and kerr ellipsoid — solitonic configurations in modified finsler gravity. *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics*, 12(10):1550102, 2015. [2](#)
- [8] V. C Rubin. et. al. Rotational properties of 21 SC galaxies with a large range of luminosities and radii, from NGC 4605 (R=4kpc) to UGC 2885 (R=122kpc). *The Astrophysical Journal*, 238:471–487, 1980. [2](#)

BIBLIOGRAFÍA

- [9] J. N. Flynn et. al. Local dark matter from a carefully selected sample. *Astrophysical Journal*, 389(4):234, 1992. [3](#)
- [10] E. W. Olszewski et. al. Nine seasons of velocity measurements in the draco and ursa minor dwarf spheroidal galaxies with the mmt echelle. *Astrophysical Journal*, 110(11):2120, 1995.
- [11] V. Trimble. Existence and nature of dark matter in the universe. *Annual review of astronomy and astrophysics*, 25(1):425–472, 1987. [3](#)
- [12] Z. Chang y X. Li. Modified newton’s gravity in finsler space as a possible alternative to dark matter hypothesis. *Physics Letters B*, 668(5):453–456, 2008. [3](#)
- [13] Z. Chang y X. Li. Modified friedmann model in randers–finsler space of approximate berwald type as a possible alternative to dark energy hypothesis. *Physics Letters B*, 676:173–176, 2009. [3](#)
- [14] C. B. Collins. Static stars: Some mathematical curiosities. *Journal of Mathematical Physics*, 18(7):1374, 1977. [4](#), [9](#), [10](#), [11](#), [12](#), [16](#), [26](#)
- [15] S. S. Chern. Finsler geometry is just riemannian geometry without the quadratic restriction. *Not. Amer. Math Soc.*, 43(9), 1996. [5](#)
- [16] D. Bao y S. S. Shern. An introduction to riemann-finsler geometry. *Graduate Texts in Mathematics Springer*, 2000. [5](#)
- [17] X. Li y Z. Chang. Exact solution of vacuum field equation in finsler spacetime. *Physical Review D*, 90(064049), 2014. [5](#)
- [18] F. Rahaman y N. Paul. The finslerian compact star model. *Eur. Phys. J. C*, 75:564, 2015. [5](#)
- [19] H. Akbar-Zadeh. Sur les espaces de finsler à courbures sectionnelles constantes. *Acad. R. Belg. Bull. Cl. Sci.*, 74:281, 1988. [6](#)
- [20] B. Shutz. *A First Course in General Relativity*. Cambridge University Press, The Edinburgh Building, Cambridge CB2 8RU, UK, 2009. [7](#)
- [21] J.J. Rivas. Análisis de la dinámica estelar en el marco de la teoría de rastall. *FCFM*, 2020. [15](#)

- [22] C. W. Misner y H. S. Zepolsky. High-density behavior and dynamical stability of neutron star models. *Physical Review Letters*, 12:635, 1964. [19](#)
- [23] N. Yunes y M. Visser. Power laws, scale invariance, and generalized frobenius series: Applications to newtonian and tov stars near criticality. *General Relativity and Quantum Cosmology*, 2002. [22](#), [24](#)
- [24] U. Nucamendi y D. Sudarsky. Quasi-asimptotically flat spacetimes and their adm mass. *Classical and Quantum Gravity*, 14(5):1309, 1999. [25](#)
- [25] A. Vilenkin y M. Barriola. Gravitational field of a global monopole. *Physical Review Letters*, 63:341, 1989. [25](#)
- [26] U. Nucamendi et. al. Nonminimal global monopoles and bound orbits. *Physical Review Letters*, 84:3037–40, 2000. [25](#)
- [27] C. W. Misner. On massive neutron cores. *Physical Review Letters*, 12:635, 1964. [25](#), [27](#)
- [28] E. A. Coddington. *Introduccion a las ecuaciones diferenciales ordinarias*. CECSA, 1971. [30](#)