

Gravedad tetradimensional localizada en
membranas anchas sin simetría Z_2

Nandini Barbosa Cendejas

diciembre de 2005

Agradecimientos

Deseo agradecer a mi hijo Keshava, a mis padres Víctor y Yolanda, y a mis hermanos Abdiel y Krisna por su apoyo, sus consejos y comprensión, pero sobre todo por su amor incondicional.

También debo dar un agradecimiento especial a esas personas que están siempre que las necesito, me refiero a Silvia, Roberto, Karen, Cirina y Chito.

Agradezco a mi Abuelita Delia, que con el ejemplo me ha mostrado que se puede lograr todo lo que uno se propone.

Contar con buenos amigos es algo de lo que siempre estaré agradecida. Elisa, Cuco, Marce, Julio, Argelia, Arturo y Omar: gracias por apoyarme todo este tiempo y por darme siempre esa palmadita necesaria para seguir adelante.

Quiero agradecer a mi asesor, el Dr. Alfredo Herrera Aguilar, del Instituto de Física y Matemáticas de la Universidad Michoacana, por el apoyo brindado, por sus consejos, y por su paciencia durante todo el tiempo que duró la elaboración de este trabajo.

También agradezco a los profesores sinodales por su colaboración, y al CONACYT por el apoyo brindado a través de una beca de tesista.

Agradezco a todo el personal docente y administrativo del Instituto de Física y Matemáticas que tomó parte en mi formación educativa.

Agradezco al Dr. Ricardo Becerril, por su amistad, sus invaluable consejos y por la confianza depositada en mí. También quiero agradecer al Dr. Ulises Nucamendi, por las útiles discusiones para la elaboración de este trabajo y por tener siempre el tiempo para hacerlo; al Dr. Francisco S. Guzmán por disponer de su tiempo para ayudarme a terminar este trabajo con las condiciones óptimas.

Índice general

| | |
|--|-----------|
| 1. Introducción | 1 |
| 2. El modelo en el marco de Weyl | 11 |
| 2.1. La acción | 13 |
| 3. El modelo en el marco de Riemann | 17 |
| 3.1. Las soluciones | 20 |
| 3.1.1. Solución fijando el parámetro ξ | 21 |
| 3.1.2. Solución fijando el parámetro k | 24 |
| 4. Localización de la gravedad tetradimensional en membranas anchas | 27 |
| 4.1. Física en el marco de Weyl | 29 |
| 4.2. Física en el marco de Riemann | 44 |
| 5. Conclusiones | 49 |

Capítulo 1

Introducción

El trabajo que se presenta en esta tesis es un análisis comparativo de la localización de la gravedad tetradimensional en una membrana ancha que carece de la simetría de reflexión ($y \longleftrightarrow -y$), mejor conocida como simetría Z_2 , en dos marcos diferentes: un espacio tiempo pentadimensional riemanniano y una variedad integrable de Weyl puramente geométrica.

La posibilidad de que el espacio tiempo en que vivimos tenga más de tres dimensiones espaciales ha sido motivo de controversias, discusiones, investigaciones y también de resultados interesantes que pueden dar respuesta a algunos problemas relevantes de la física de altas energías tales como el de la constante cosmológica, la materia oscura, el problema de la jerarquía de masas, entre otros.

Una de las principales motivaciones para considerar un espacio con dimensiones extra consiste en que la mayoría de las teorías que incluyen de manera

consistente la gravedad tetradimensional (mejor conocidas como teorías de unificación), están formuladas de manera natural (o consistente) en espacios tiempo con más de cuatro dimensiones. Sin embargo, paralelamente a estas formulaciones teóricas, las líneas de investigación fenomenológicas nos llevan a tener una mejor comprensión de cómo se pueden manifestar estas dimensiones y si pueden o no manifestarse, del mismo modo que nos muestran si son o no de ayuda para dar una explicación a los problemas que presenta la física moderna.

Un punto importante en estas teorías multidimensionales es el mecanismo mediante el cual las dimensiones extra se esconden (ya sean compactas o extendidas), de tal manera que nuestro espacio tiempo sea efectivamente tetradimensional. Hasta hace unos años se estudiaron de manera amplia las teorías de Kaluza-Klein donde las dimensiones extra son compactas y esencialmente no dependen de las coordenadas extra. Sin embargo, el hecho de suponer que las dimensiones extra tienen una naturaleza compacta implica la existencia de dimensiones extra de orden microscópico, que deberían ser del orden de la escala de Planck. Por lo tanto, tratar de probar la existencia de las dimensiones extra en este marco resulta un intento sin mucha esperanza.

No obstante, recientemente se formuló un mecanismo alternativo en el que se recupera de manera consistente el espacio tiempo tetradimensional a partir de una variedad pentadimensional. Dicho esquema es conocido como el “mundo membrana”(del inglés “brane world”), y en él las dimensiones extra pueden ser extendidas (no compactas) e incluso infinitas. Este hecho

nos muestra un nuevo escenario en el que podríamos tener evidencia experimental de la existencia de dichas dimensiones. En particular, últimamente ha crecido el interés en el estudio de espacios tiempo con dimensiones extra no compactas debido a que en estos modelos la gravedad se propaga en todas las direcciones, mientras la materia está confinada a una subvariedad tetradiimensional o tribrana¹ de manera consistente con los experimentos gravitatorios realizados hasta el momento [1]–[9]. En otras palabras, la gravedad tetradimensional se puede recuperar de manera consistente en el marco de los escenarios formulados en membranas multidimensionales y podemos vivir en un espacio de $4 + n$ dimensiones extendidas en perfecta compatibilidad con la gravedad experimental.

Tal es el caso del escenario multidimensional más simple, que es un espacio de $4 + 1$ dimensiones (pentadimensional), mejor conocido como modelo de Randall-Sundrum. En este escenario se propone una métrica pentadimensional no factorizable, cuya parte tetradimensional esta multiplicada por un factor que cambia rápidamente (una función exponencial) y que, además, depende de la dimensión extra; asimismo se introducen también dos tribranas, una de las cuales contiene los campos del Modelo Standard. Este escenario tiene consecuencias impactantes ya que en él se muestra un mecanismo para la solución del problema de la jerarquía de masas.

Continuando en esta dirección, también se ha probado que en escenarios

¹A lo largo de este trabajo definiremos las membranas multidimensionales como membranas, tribranas, tetrabranas, etc. mismas que corresponden a la terminología en inglés "n-brane", donde $n \geq 2$ es un número entero positivo.

con una quinta dimensión infinita, en los cuales se tiene la presencia de dos tribranas, se puede postular una teoría pentadimensional de la gravedad en la que se recupere la gravedad tetradimensional que observamos. La razón por la que se puede hacer dicha aseveración es que la métrica de fondo contiene un estado acotado del gravitón pentadimensional (que está localizado en la dimensión extra). De esta manera, aunque el espacio tiempo tiene una dimensión extra infinita, el gravitón está confinado a una región finita de dicho espacio tiempo. La existencia de este gravitón la podemos entender a partir del estudio de pequeñas fluctuaciones de la métrica de fondo. Resulta que la dinámica de dichas fluctuaciones está determinada por una ecuación de onda que se puede escribir en la forma de la ecuación de Schrödinger con un potencial no trivial determinado por la curvatura de la métrica del espacio tiempo pentadimensional. Dicha ecuación de Schrödinger se puede resolver para el caso no masivo, obteniendo de esta manera una función de onda acotada y estable (sin modos taquiónicos) que corresponde al gravitón tetradimensional.

En este contexto se han construido varias generalizaciones de dichos escenarios con la ayuda de membranas anchas [10]–[23]; una de estas generalizaciones es precisamente nuestro escenario. En él se presenta un análisis de cómo se localiza la gravedad tetradimensional en una solución particular de tipo membrana ancha sin simetría Z_2 en un espacio tiempo pentadimensional de Weyl, es decir, en una variedad que constituye una generalización no riemanniana de la teoría de Kaluza-Klein.

Nuestra configuración de membranas anchas está construida a partir del campo escalar involucrado en la definición de la variedad de Weyl, evitando de esta manera introducirlas artificialmente en la acción de la teoría como en el modelo de Randall–Sundrum. Sin embargo, la obtención de dichas configuraciones de membranas se realiza en el marco de Riemann por medio de la técnica conforme. De este modo, el esquema de localización de la gravedad tetradimensional se presentará en dos variedades diferentes: un espacio tiempo riemanniano y otro puramente geométrico con una estructura de Weyl, en el que se permite la variación de la longitud de los vectores durante su transporte paralelo.

Esta variación es consecuencia de que la estructura de las variedades de Weyl esta determinada por un tensor métrico g_{MN} y un vector de norma ω_M , que tiene un papel importante en las conexiones afines de la variedad, permitiendo la variación de la longitud de los vectores durante su transporte paralelo. Nosotros nos enfocaremos en un tipo particular de geometrías de Weyl en el que el vector de norma ω_M es el gradiente de una función escalar $\omega_M = \omega_{,M}$. Estas variedades son conformemente riemannianas, pues una transformación conforme las relaciona con una variedad de Riemann, que también se denominan espacios tiempo integrables de Weyl (una geometría de Weyl en la que las posibles variaciones de la longitud de los vectores son integrables a lo largo de trayectorias cerradas). En otras palabras, se puede fijar el escalar ω de nuestro vector de norma $\omega_{,M}$ de tal forma que una transformación conforme relacione nuestra geometría integrable de Weyl con un espacio tiempo riemanniano.

Si las leyes de la física fueran invariantes bajo transformaciones conformes, nuestra función escalar ω no sería visible en ninguna de nuestras variedades (riemanniana o weylana). Este hecho nos llevaría a tener dos estructuras espaciotemporales que serían indistinguibles para cualquier evento físico que pudiera ocurrir en ellas. Afortunadamente, las leyes de la física no son invariantes bajo transformaciones conformes y, por lo tanto, no podemos deshacernos del campo escalar ω con una elección adecuada de la norma. Así, es suficiente romper de manera dinámica la invariancia conforme de la geometría integrable de Weyl para transformar el escalar ω de Weyl² en un campo escalar observable y de esta manera distinguir entre dos variedades de Weyl diferentes, en particular, entre un espacio tiempo riemanniano y una geometría integrable de Weyl.

Ahora, retomando nuestro escenario de membranas, es importante señalar que el papel que juega el campo escalar de Weyl en la formación de las membranas es fundamental. Este campo escalar es precisamente el que genera la configuración de las membranas anchas en nuestro esquema o, de manera dicho de otra manera, el “material” del que están hechas dichas membranas.

Por otro lado, existe una razón importante que motiva el estudio de nuestro escenario de membranas anchas en geometrías integrables de Weyl: la estrecha relación que existe entre el comportamiento cuántico y la estructura de Weyl [24]–[29]. Dentro del contexto cosmológico [24], el hecho de trabajar en el marco de geometrías de Weyl abre un nuevo panorama en que se tiene

²En el desarrollo de este trabajo nos referiremos a ω como el campo escalar de Weyl.

una primera aproximación a una descripción cuántica de un proceso gravitatorio; también se ha probado que la ecuación no relativista de Schrödinger se puede obtener a partir de una formulación estocástica en la que los efectos cuánticos involucran el vector de norma que define la geometría de Weyl y, por lo tanto, se podría hablar de un comportamiento mecánico cuántico que surge de la relación entre la estructura geométrica de la variedad de Weyl y la dinámica [31], que son ejemplos de algunas de las investigaciones en las que se utilizan las geometrías de Weyl para obtener algún tipo de comportamiento cuántico clásicamente.

De este modo, en el contexto de los “mundos membrana”, una motivación importante para trabajar en variedades integrables de Weyl es que para ciertos modelos podríamos obtener un comportamiento cuántico de nuestro sistema a nivel clásico.

Desde un punto de vista más técnico, tenemos la generación de soluciones tipo membrana en la variedad integrable de Weyl. Una de las características que tornan interesante esta investigación es que en los modelos de membranas basados en gravedad acoplada a escalares, estas subvariedades del espacio tiempo (membranas anchas geométricas) surgen de manera completamente natural.

En otros modelos de membranas tetradimensionales enbebidas en espacios pentadimensionales es necesario introducir estas estructuras a mano en la definición de la acción de la teoría (véanse, por ejemplo, los trabajos [8]-[9]).

Para obtener soluciones que describan este tipo de configuraciones y que,

además, respeten la invariancia tetradimensional de Poincaré, utilizaremos la técnica conforme.

Esta técnica consiste en implementar una transformación conforme a la métrica de Weyl de tal manera que realicemos una aplicación de la variedad integrable de Weyl correspondiente a un espacio tiempo riemanniano, donde las conexiones afines de Weyl se transforman en los símbolos de Christoffel o conexiones de Levi-Civita. Una vez que estamos en la variedad riemanniana, obtener una solución para el modelo resulta más sencillo, ya que las ecuaciones de campo que se tienen que resolver, tanto para el campo gravitatorio, como para el campo escalar, se simplifican enormemente. De este modo, una vez que la solución para el modelo se obtiene, regresamos a la variedad weylana para interpretarla y hacer un análisis de la física que se observa en este marco. Posteriormente comparamos estos resultados con los que se obtienen en la variedad riemanniana.

Una vez mencionado el preámbulo general, haremos una breve descripción de la estructura que presenta este trabajo.

En el Capítulo 2, daremos una breve introducción de los espacios de Weyl para contar con la herramienta necesaria para definir de manera precisa nuestro modelo en una variedad de este tipo. Asimismo, expresaremos las fórmulas de algunos invariantes y variables dinámicas del sistema en este marco.

En el Capítulo 3 aplicaremos la técnica conforme para pasar al marco de Riemann y obtener una solución a nuestro sistema. En este marco también

calcularemos las fórmulas generales de las variables dinámicas deducidas en el marco de Weyl, para poder comparar posteriormente la física en ambos marcos. Debemos notar que como resultado de la aplicación de dicha técnica a nuestro modelo, se obtienen dos familias de soluciones distintas que dependen de la manera en la que se fijan los parámetros libres en las ecuaciones de campo; ambas soluciones son complementarias.

En el Capítulo 4 obtendremos las expresiones explícitas de la densidad de energía escalar y del escalar de curvatura en ambos marcos. Asimismo presentaremos un bosquejo del comportamiento de la función que describe la densidad de energía escalar (es donde nuestras membranas anchas finalmente hacen su aparición en el escenario) para ciertos valores de los parámetros de la solución.

Una vez que tengamos esta descripción del modelo, procederemos a hacer un análisis de las fluctuaciones lineales de la métrica de fondo. Estas fluctuaciones nos darán información sobre la posibilidad de recuperar consistentemente la gravedad tetradimensional a partir de las variedades pentadimensionales. Hacer el análisis de las fluctuaciones en el caso general (fluctuaciones acopladas de la métrica de fondo con el campo escalar) resulta muy complicado, sin embargo, existe un método desarrollado por de Wolfe et al. [10] en el que se consideran únicamente los modos transversos de traza nula que se desacoplan del campo escalar.

De este modo, obtendremos la ecuación de onda de los modos transversos de traza nula y la expresaremos como una ecuación de Schrödinger con

un potencial tipo “volcán” de fondo finito. Al resolver esta ecuación para el modo no masivo $m^2 = 0$, obtendremos un estado acotado estable (sin modos taquiónicos con $m^2 < 0$) que representa en ambos marcos un gravitón tetradimensional.

Finalmente, en el Capítulo 5 expondremos nuestras conclusiones y mencionaremos algunas direcciones en las cuales se puede desarrollar la presente investigación.

Capítulo 2

El modelo en el marco de Weyl

Una geometría ¹ de Weyl es una variedad cuya estructura está definida por un tensor métrico g_{MN} y un vector de norma ω_M que entra en la definición de las conexiones afines Γ_{MN}^P . Las geometrías de Weyl admiten transformaciones de norma internas que están estrechamente relacionadas con variaciones de la escala de medida que dependen de un punto en la variedad. En las geometrías de Weyl, la regla que obedecen los vectores durante su transporte paralelo requiere que se viole la denominada condición de metricidad, en otras palabras, que la derivada covariante del tensor métrico g_{MN} sea diferente de cero, dando lugar a la siguiente condición

$$g_{MN;L} = g_{MN}\omega_L, \tag{2.1}$$

¹A lo largo de esta tesis utilizaremos de manera indistinta los términos geometría, variedad y espacio tiempo

donde ω_L es el vector de norma y aquí “;” denota la derivada covariante en un sentido general. Este hecho implica que la longitud de los vectores puede variar durante su transporte paralelo o, de manera equivalente, que las unidades de medida pueden cambiar localmente. La variación de la longitud de los vectores es un resultado que en el caso de las geometrías de Weyl depende del modelo que se plantea (lagrangianos distintos nos llevan a variaciones de la longitud diferentes).

Como ya se mencionó anteriormente, en la presente tesis trataremos un tipo especial de geometrías de Weyl que se obtiene al trabajar en una teoría que describe gravedad acoplada a un campo escalar. Esta teoría esta dada por un lagrangiano de la siguiente forma

$$L = \sqrt{-g}f(\omega)R + \mathcal{L}(\omega), \quad (2.2)$$

donde $f(\omega)$ es una función del campo escalar ω y $\mathcal{L}(\omega)$ es un lagrangiano que involucra solamente a ω^2 . La variación de este lagrangiano considerando como variables independientes el campo escalar ω , la métrica g_{MN} y las conexiones afines Γ_{MN}^P nos lleva a la condición (2.1) con el vector de norma definido como

$$\omega_L = -[\ln f(\omega)]_{,L} \quad (2.3)$$

en lugar de la usual condición de metricidad presente en las variedades riemannianas.

²Finalmente veremos que este campo escalar lo podemos identificar con ω del modelo en que estamos trabajando

Estas variedades se denominan geometrías integrables de Weyl o Riemannianas conformes y son aquellas en las que el vector de norma se define como el gradiente de una función escalar.

Una vez que contamos con la herramienta necesaria para trabajar en espacios tiempo integrables de Weyl, en el Capítulo siguiente postularemos la teoría con la cual trabajaremos.

2.1. La acción

Consideremos una generalización no riemanniana de la teoría de Kaluza-Klein definida por la siguiente acción pentadimensional puramente geométrica

$$S_5^W = \int_{M_5^W} \frac{d^5x \sqrt{|g|}}{16\pi G_5} e^{\frac{3}{2}\omega} \left[{}^5R + 3\tilde{\xi} (\nabla\omega)^2 + 6U(\omega) \right], \quad (2.4)$$

donde M_5^W representa una variedad pentadimensional integrable de Weyl determinada por (g_{MN}, ω) , es decir, por el tensor métrico g_{MN} , donde $M, N = 0, 1, 2, 3, 5$; y una función escalar ω . Es fácil ver que en esta acción tenemos gravedad acoplada directamente al campo escalar, pues el escalar de curvatura está multiplicado por la función exponencial $e^{\frac{3}{2}\omega}$. Además, también tenemos un término cinético para el campo escalar multiplicado por el parámetro $\tilde{\xi}$, que corresponde a una constante de acoplamiento arbitraria, así como un término que contiene el potencial de autointeracción $U(\omega)$ del mismo campo escalar.

En este tipo de variedades, el tensor de Ricci se expresa como de costumbre

$$R_{MN} = \Gamma_{MN,P}^P - \Gamma_{AM,N}^A + \Gamma_{MN}^P \Gamma_{PQ}^Q - \Gamma_{MQ}^P \Gamma_{NP}^Q,$$

sin embargo, las conexiones afines están definidas por la siguiente relación

$$\Gamma_{MN}^P = \{_{MN}^P\} - \frac{1}{2} (\omega_{,M} \delta_N^P + \omega_{,N} \delta_M^P - g_{MN} \omega^{,P}),$$

donde

$$\{_{MN}^C\} = \frac{1}{2} g^{CD} (g_{DM,N} + g_{DN,M} - g_{MN,D})$$

son los símbolos de Christoffel y el segundo sumando está determinado completamente por la función escalar ω .

Esta acción tiene una naturaleza puramente geométrica ya que el campo escalar acoplado a la gravedad es precisamente la función escalar ω que entra en la definición de las conexiones afines de la variedad de Weyl y, de este modo, no puede ser eliminada en principio de la formulación de nuestro problema.

Las variedades integrables de Weyl son invariantes bajo cierto tipo de transformaciones conformes denominadas reescalamientos de Weyl

$$\begin{aligned} g_{MN} &\longrightarrow \Omega^{-2} g_{MN}, \\ \omega &\longrightarrow \omega + \ln \Omega^2, \\ \tilde{\xi} &\longrightarrow \frac{\tilde{\xi}}{(1 + \partial_\omega \ln \Omega^2)^2}, \end{aligned} \tag{2.5}$$

donde Ω^2 es una función suave definida sobre la variedad weylana M_5^W . En general, el potencial de autointeracción $U(\omega)$ rompe esta invariancia. Sin embargo, a partir de las relaciones (2.5) se puede deducir que la transformación

$U \rightarrow \Omega^2 U$ también preserva dicha invariancia. De este modo, el único potencial que preserva la invariancia conforme de la acción de Weyl (2.4) adopta la forma

$$U(w) = \lambda e^\omega,$$

donde λ es una constante de acoplamiento arbitraria. Como ya se mencionó con anterioridad, precisamente cuando se viola la invariancia bajo los reescalamientos de Weyl, el campo escalar se transforma en un grado de libertad observable de la teoría, mismo que modela o genera las configuraciones de membranas anchas.

Puesto que estamos interesados en hallar soluciones de nuestra teoría que preserven la invariancia tetradimensional de Poincaré, consideraremos el siguiente elemento de línea en el que la métrica tetradimensional es conformemente plana

$$ds_5^2 = e^{2A(y)} \eta_{mn} dx^m dx^n + dy^2, \quad (2.6)$$

donde $e^{2A(y)}$ es el llamado factor de deformación que multiplica a la métrica de Minkowski, los índices tetradimensionales son $m, n = 0, 1, 2, 3$ y la coordenada que corresponde a la dimensión extra es denotada por y .

A partir de la métrica (2.6) podemos calcular las expresiones de los símbolos de Christoffel y de las componentes del tensor de Ricci en el marco de Weyl. Los únicos símbolos de Christoffel distintos de cero son

$$\begin{aligned} \Gamma_{ab}^5 &= -e^{2A} A' \eta_{ab}, \\ \Gamma_{a5}^a &= A', \end{aligned} \quad (2.7)$$

donde las funciones primas, A' por ejemplo, representan las derivadas de A con respecto a la quinta coordenada y .

Asimismo, las componentes del tensor de Ricci se descomponen en una parte tetradimensional dada por la fórmula

$$R_{mn} = -e^{2A} [A'' + 4(A')^2] \eta_{mn}, \quad (2.8)$$

y una parte puramente pentadimensional determinada por la relación siguiente

$$R_{55} = -4 [A'' + (A')^2]. \quad (2.9)$$

Una vez conocidas estas magnitudes, podemos calcular la expresión del escalar de curvatura en el marco de Weyl

$${}^5R = -4 [2A'' + 5(A')^2]. \quad (2.10)$$

Del mismo modo, el tensor de energía-impulso pentadimensional se define como

$$T_{MN} = \frac{1}{8\pi G_5} \left(R_{MN} - \frac{1}{2} g_{MN} R \right), \quad (2.11)$$

donde G_5 es una constante gravitatoria pentadimensional. Éste también posee una parte tetradimensional dada por

$$T_{mn} = \frac{3}{8\pi G_5} e^{2A} [A'' + 2(A')^2] \eta_{mn}, \quad (2.12)$$

así como una componente puramente pentadimensional determinada por la siguiente expresión

$$T_{55} = \frac{6(A')^2}{8\pi G_5}. \quad (2.13)$$

Capítulo 3

El modelo en el marco de Riemann

En este Capítulo haremos uso de las ventajas que ofrece la técnica conforme para obtener soluciones exactas a las ecuaciones de campo de nuestro sistema.

De este modo, con ayuda de la transformación conforme

$$\widehat{g}_{MN} = e^{\omega} g_{MN} \quad (3.1)$$

pasamos del marco de Weyl al marco de Riemann, donde, como ya dijimos antes, las conexiones afines se convierten en los símbolos de Christoffel y las ecuaciones de campo a resolver se simplifican bastante. A partir de este momento todas las magnitudes y operadores con gorro van a estar definidas en la variedad con estructura riemanniana para diferenciarlas de las magnitudes correspondientes definidas en la variedad de Weyl.

Así, al aplicar la transformación conforme (3.1), la acción de Weyl (2.4) se transforma en la siguiente acción riemanniana

$$S_5^R = \int_{M_5^R} \frac{d^5x \sqrt{|\widehat{g}|}}{16\pi G_5} \left[{}^5\widehat{R} + 3\xi \left(\widehat{\nabla}\omega \right)^2 + 6\widehat{U}(\omega) \right], \quad (3.2)$$

donde ξ es una constante de acoplamiento relacionada con su contraparte weyliana a través de la siguiente igualdad $\xi = \tilde{\xi} - 1$. En este marco tenemos una teoría que describe gravedad pentadimensional acoplada mínimamente al campo escalar ω . Este último cuenta con un término cinético estándar y un potencial de autointeracción conforme a su homólogo weyliano y determinado por la fórmula

$$\widehat{U}(\omega) = e^{-\omega} U(\omega).$$

De la misma manera, bajo la transformación conforme (3.1), la métrica weyliana del espacio tiempo (2.6) se transforma en el siguiente elemento de línea

$$\widehat{ds}_5^2 = e^{2\sigma(y)} \eta_{nm} dx^n dx^m + e^{\omega(y)} dy^2, \quad (3.3)$$

donde $2\sigma = 2A + \omega$.

Una vez conocido este intervalo, podemos calcular los nueve símbolos de Christoffel diferentes de cero:

$$\begin{aligned} \widehat{\Gamma}_{ab}^5 &= -e^{2A} \sigma' \eta_{ab}, \\ \widehat{\Gamma}_{a5}^a &= \sigma', \\ \widehat{\Gamma}_{55}^5 &= \frac{1}{2} \omega'. \end{aligned} \quad (3.4)$$

En base a estas magnitudes podemos calcular las componentes no nulas

del tensor de Ricci

$$\begin{aligned}\widehat{R}_{mn} &= -e^{2A} \left[\sigma'' + 4(\sigma')^2 - \frac{1}{2}\omega'\sigma' \right] \eta_{mn}, \\ \widehat{R}_{55} &= -4 \left[\sigma'' + (\sigma')^2 - \frac{1}{2}\omega'\sigma' \right].\end{aligned}$$

Después de contraer este tensor obtenemos el escalar de curvatura pentadi-
mensional

$${}^5\widehat{R} = -4e^{-\omega} \left[2\sigma'' + 3(\sigma')^2 + 2\sigma'A' \right]. \quad (3.5)$$

Por otro lado, las componentes distintas de cero del tensor de energía-
impulso son las siguientes

$$\begin{aligned}\widehat{T}_{mn} &= \frac{3}{8\pi G_5} e^{2A} \left(\sigma'' + 2(\sigma')^2 - \frac{1}{2}\omega'\sigma' \right) \eta_{mn}, \\ \widehat{T}_{55} &= \frac{6(\sigma')^2}{8\pi G_5}.\end{aligned} \quad (3.6)$$

Es importante señalar que tanto las componentes del vector de Ricci,
como el escalar de curvatura en ambos marcos están relacionados por medio
de las siguientes relaciones [30]

$$R_{PQ} = \widehat{R}_{PQ} + \frac{3}{4} (\omega_{,P}\omega_{,Q} - \widehat{g}_{PQ}\widehat{g}^{NM}\omega_{,N}\omega_{,M}) + \frac{3}{2}\omega_{;PQ} + \frac{1}{2}\widehat{g}_{PQ}\widehat{\square}\omega, \quad (3.7)$$

y

$${}^5R = e^\omega \left({}^5\widehat{R} + 4\widehat{\square}\omega - 3\widehat{g}^{NM}\omega_{,N}\omega_{,M} \right), \quad (3.8)$$

donde hemos denotado la derivada covariante y el D'Alambertiano pentadi-
mensional del campo escalar de la siguiente forma $\omega_{;PQ} = \omega_{,PQ} - \widehat{\Gamma}_{PQ}^N\omega_{,N}$ y
 $\widehat{\square}\omega = \widehat{g}^{NM}\omega_{;NM}$, respectivamente.

3.1. Las soluciones

Para obtener la solución del modelo planteado anteriormente, es conveniente introducir el nuevo par de variables $Y \equiv 2A'$ y $X \equiv \omega'$. Dichas variables nos permiten escribir las ecuaciones de campo correspondientes a la acción (3.2) y al elemento de línea (3.3) de la siguiente manera

$$\begin{aligned} X' + 2YX - \frac{3}{2}X^2 &= \frac{1}{\xi} \frac{d\widehat{U}}{d\omega} e^{-\omega}, \\ Y' + 2Y^2 - \frac{3}{2}XY &= \left(\frac{1}{\xi} \frac{d\widehat{U}}{d\omega} + 4\widehat{U} \right) e^{-\omega}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Este sistema de ecuaciones acoplado para X e Y no es fácil de resolver. Sin embargo, si comparamos los primeros miembros de ambas ecuaciones, vemos que existe cierta simetría lineal entre las variables X e Y [12]. Ahora, si imponemos la condición $X = kY$, donde k es una constante arbitraria, resulta que el sistema se simplifica bastante. El hecho de que las variables X e Y satisfagan esta condición corresponde a imponer una restricción en el potencial de autointeracción \widehat{U} de la acción, es decir, que nuestro modelo va a estar restringido a potenciales del tipo

$$\widehat{U} = \lambda e^{\frac{4k\xi}{1-k}\omega}. \quad (3.10)$$

Tomando en cuenta las condiciones mencionadas anteriormente, el sistema de ecuaciones diferenciales (3.9) se reduce a una sola ecuación diferencial

$$Y' + \frac{4-3k}{2}Y^2 = \frac{4\lambda}{1-k} e^{(\frac{4k\xi}{1-k}-1)\omega}, \quad (3.11)$$

misma de depende de dos constantes arbitrarias: k y ξ .

Resolver de manera general esta ecuación no es trivial, pero bajo ciertas condiciones es posible obtener varias soluciones particulares. Sin embargo, para muchas de estas soluciones, las expresiones son muy complicadas ya que no todas se pueden escribir de manera explícita en términos de funciones elementales y es difícil hacer un análisis físico de las mismas de manera completa.

A continuación presentaremos dos familias de soluciones particulares complementarias. Éstas se obtienen al fijar una de las constantes (ya sea la k o la ξ) involucradas en la ecuación (3.11), dejando el otro parámetro completamente arbitrario.

3.1.1. Solución fijando el parámetro ξ

Como se mencionó en la sección anterior, al imponer ciertas condiciones, es posible obtener soluciones particulares para la ecuación (3.11). Estas condiciones se imponen sobre los parámetros constantes involucrados en la ecuación diferencial. En el trabajo de Arias et al [12] se observó que es posible fijar el parámetro ξ de tal manera que la función exponencial que aparece en el segundo miembro de la ecuación (3.11) desaparezca y la ecuación diferencial resultante se resuelva fácilmente.

Ahora, siguiendo este razonamiento fijemos el parámetro ξ del modo siguiente

$$\xi = \frac{1 - k}{4k}, \quad (3.12)$$

dejando que la constante k adopte valores arbitrarios.

Como resultado, la ecuación (3.11) se convierte en una ecuación diferencial más sencilla

$$Y' + \frac{4-3k}{2}Y^2 = \frac{4\lambda}{1-k}. \quad (3.13)$$

Es importante señalar la implicación física que tiene el hecho de fijar el parámetro ξ de esta manera. Al imponer la condición (3.12), automáticamente restringimos el potencial de autointeracción a que adopte la siguiente forma

$$U = \lambda e^{2\omega} \quad (3.14)$$

en el marco de Weyl; como podemos notar, éste tipo de potenciales no preserva la invariancia de la acción (2.4) bajo reescalamientos de Weyl.

Este hecho es fundamental ya que el mecanismo por medio del cual nuestro campo escalar geométrico ω se convierte en un campo escalar observable, es precisamente el rompimiento de la invariancia de la acción (2.4) bajo reescalamientos de Weyl.

Al sustituir la variable $Y \equiv 2A'$ en la ecuación (3.13) obtenemos la siguiente ecuación diferencial para la función A

$$A'' + (4-3k)(A')^2 - \frac{2\lambda}{1-k} = 0, \quad (3.15)$$

De este modo, obtenemos la siguiente solución

$$\begin{aligned} e^{2A(y)} &= k_3 (e^{ay} + k_1 e^{-ay})^b, \\ \omega &= \ln \left[k_2 (e^{ay} + k_1 e^{-ay})^{kb} \right], \end{aligned} \quad (3.16)$$

donde las constantes a y b adoptan la siguiente forma

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{2\lambda \frac{4-3k}{1-k}}, \\ b &= \frac{2}{4-3k}, \end{aligned} \tag{3.17}$$

y k_1 , k_2 y k_3 son constantes de integración arbitrarias.

Esta solución carece de la simetría de reflexión ($y \longleftrightarrow -y$), o simetría Z_2 , debido a la presencia del parámetro constante k_1 .

Si consideramos el caso particular en el que $k_1 = 1$, $k_2 = 2^{-kb}$ y $k_3 = 2^b$, se recupera la solución con simetría Z_2 obtenida independientemente por de Wolfe et al. [10] y Gremm [11] en el marco de Riemann, y por Arias et al. en el marco de Weyl [12]:

$$\begin{aligned} e^{2A(y)} &= [\cosh(ay)]^b, \\ \omega &= bk \ln [\cosh(ay)]. \end{aligned} \tag{3.18}$$

Es interesante señalar que la solución (3.16) no permite que la constante k adopte los valores $k = 4/3$ y $k = 1$ debido a la singularidad que surge en la definición del parámetro b .

De ahora en adelante fijaremos las constantes $k_2 = k_3 = 1$ ya que éstas no tienen un significado físico relevante y pueden ser absorbidas en una redefinición de las coordenadas de la métrica (3.3).

Las fórmulas en (3.16) en realidad representan toda una familia de soluciones en dependencia de los valores que adopten las constantes k_1 , a y b (o k_1 , k y λ debido a las definiciones (3.17) de a y b). También es importante señalar

que para ciertos valores de estas constantes, las soluciones (3.16) constituyen funciones suaves localizadas caracterizadas por una anchura $\Delta \sim 1/a$ determinada en última instancia por la constante de acoplamiento λ del potencial de autointeracción del campo escalar.

3.1.2. Solución fijando el parámetro k

En el párrafo anterior se fijó la constante ξ de la ecuación diferencial (3.11), dejando que el parámetro k fuese una constante arbitraria, para obtener una familia de soluciones particulares del sistema. Es evidente que en dicha ecuación también podemos fijar el parámetro k y dejar la constante ξ como arbitraria. De este modo podemos obtener una nueva familia de soluciones de nuestro modelo.

Notemos que al fijar

$$k = 4/3 \tag{3.19}$$

el segundo término del primer miembro de la ecuación diferencial (3.11) es igual a cero; al resolver dicha ecuación obtendremos una solución particular que contiene el parámetro libre ξ . El hecho de tener una constante ξ arbitraria equivale físicamente a permitir diferentes potenciales de autointeracción en el marco de Weyl, ya que en este caso, éstos están dados por la fórmula siguiente

$$U = \lambda e^{(1-16\xi)\omega}, \tag{3.20}$$

a diferencia del potencial de autointeracción fijo (3.14) correspondiente a la

condición (3.12).

En este sentido, la familia de soluciones que se obtiene bajo la restricción (3.19) complementa la solución obtenida en el párrafo previo.

Los potenciales de autointeracción a los cuales estamos restringidos (3.20) rompen la invariancia de la acción (2.4) bajo reescalamientos de Weyl para cualquier $\xi \neq 0$; de esta manera aseguramos el mecanismo por medio del cual nuestro campo escalar geométrico ω se convierte en una magnitud física observable.

Siguiendo este razonamiento, al imponer la condición (3.19) obtenemos la siguiente ecuación diferencial

$$Y' + 12\lambda e^{-p\omega} = 0, \quad (3.21)$$

donde $p = 1 + 16\xi$. En términos de la variable ω , esta ecuación está dada por la expresión siguiente

$$\omega'' + 16\lambda e^{-p\omega} = 0. \quad (3.22)$$

Al resolver esta ecuación con respecto a ω e integrando la relación $2A' = 3\omega'/4$ que se obtiene a partir de la condición $X = 4Y/3$, se obtiene la siguiente solución del sistema

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{2}{p} \ln \left[\frac{\sqrt{-8\lambda p}}{c_1} \cosh(c_1(y - c_2)) \right], \\ e^{2A} &= \left[\frac{\sqrt{-8\lambda p}}{c_1} \cosh(c_1(y - c_2)) \right]^{\frac{3}{2p}}, \end{aligned} \quad (3.23)$$

donde c_1 y c_2 son constantes de integración arbitrarias.

Estas relaciones también constituyen toda una familia de soluciones en dependencia de los valores de los parámetros $p(\xi)$, λ , c_1 y c_2 .

Como en el párrafo anterior, para ciertos valores de estos parámetros constantes, las relaciones (3.23) representan configuraciones suaves y localizadas caracterizadas por una anchura $\Delta \sim 1/c_1$.

Además, estas soluciones también rompen la simetría de reflexión Z_2 por medio de la constante c_2 , ya que se encuentran desplazadas del origen precisamente en esa magnitud.

A diferencia de la familia de soluciones del párrafo anterior, en las soluciones suaves y localizadas contenidas en (3.23), tanto la anchura Δ como la constante c_2 que rompe la simetría Z_2 , constituyen constantes de integración de la ecuación (3.22).

Capítulo 4

Localización de la gravedad tetradimensional en membranas anchas

Para poder hacer un estudio de la localización de la gravedad tetradimensional en membranas anchas en ambos marcos, comenzaremos por realizar un análisis del comportamiento del factor de deformación, la densidad de energía del campo escalar ω y del escalar de curvatura de las variedades pentadimensionales.

El análisis lo realizaremos en base al espacio de los parámetros libres que aparecen en la solución, ya que depende de ellos obtener un factor de deformación que sea una función localizada y tenga un comportamiento suave. Este factor de deformación es de hecho el que modela la quinta dimensión.

Una vez que encontramos los intervalos del espacio de parámetros en los cuales tenemos este comportamiento del factor de deformación, procederemos a analizar la densidad de energía escalar que éste determina, ya que es precisamente la estructura de esta magnitud la que es interpretada como nuestras membranas anchas.

La configuración de estas membranas se modela con ayuda de gráficas que muestran el bosquejo del comportamiento de la densidad de energía escalar para diferentes casos particulares de nuestras soluciones.

Posteriormente haremos un estudio de las fluctuaciones en la métrica de fondo para ver si la gravedad tetradimensional se puede localizar en las membranas anchas obtenidas, tanto en el marco de Weyl como en el marco de Riemann.

El análisis de las fluctuaciones lineales de la métrica de fondo para una teoría que describe gravedad acoplada a un campo escalar se basa en los resultados obtenidos por de Wolfe et al. en el artículo de investigación [10]. El método que se utiliza en ese trabajo consiste en imponer una norma axial a las fluctuaciones gravitatorias y considerar solamente los modos transversos de traza nula que se desacoplan de las fluctuaciones del campo escalar.

Resulta que estos modos transversos obedecen una ecuación de onda que puede ser expresada como una ecuación de Schrödinger con un potencial determinado por la curvatura del espacio tiempo pentadimensional en ambos marcos.

El gravitón tetradimensional (en realidad, el modo cero de esta ecuación)

corresponde a la función propia de energía mínima o estado base. Debido a que esta función propia no tiene ceros, no existen modos con menor energía ni tenemos la presencia de modos taquiónicos. Por lo tanto, podemos asegurar que el estado no masivo que corresponde al gravitón tetradimensional es estable completamente.

4.1. Física en el marco de Weyl

Como mencionamos anteriormente, una vez obtenida la solución en el marco de Riemann con ayuda de la técnica conforme, regresamos al marco de Weyl para analizar su física. De este modo, en esta sección se plantea la física de las soluciones obtenidas en la variedad integrable de Weyl. Primero consideraremos la solución que se obtiene al fijar el parámetro ξ y analizaremos la física que ésta describe. Posteriormente consideraremos la solución obtenida al fijar la constante k y estudiaremos las configuraciones de campo que surgen en este caso.

Física en el marco de Weyl con el parámetro ξ fijo

El factor de deformación y el campo escalar están dados por la ecuación (3.16) y su comportamiento depende de los valores de las constantes k_1 , λ y k . Debemos encontrar los dominios de estos parámetros para los que nuestro factor de deformación sea una función localizada, suave y bien comportada. El hecho de buscar un factor de deformación que cumpla con estas propiedades

es importante para realizar la transformación conforme de un marco a otro, y fundamental para garantizar la formación de las membranas anchas.

Tomando en cuenta estas condiciones, podemos estudiar los casos en los que la solución adopta este comportamiento:

Caso (A) $k_1 > 0$, $\lambda > 0$ y $k > \frac{4}{3}$. En este caso tenemos que $a \in \mathfrak{R}$, $b < 0$ y el rango para nuestra quinta coordenada es $-\infty < y < \infty$, es decir, tenemos una variedad pentadimensional con una dimensión extra extendida.

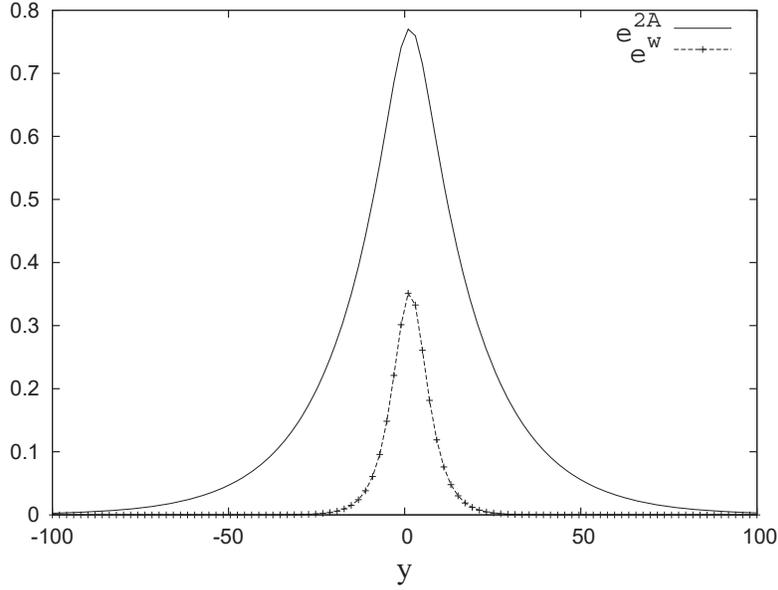


Figura 4.1: La forma del factor de deformación e^{2A} y de e^{ω} para $k > 4/3$, $\lambda > 0$ y $k_1 > 0$: representan funciones suaves y localizadas que rompen la simetría Z_2 .

En este caso las funciones que constituyen la solución e^{2A} y e^{ω} presentan un comportamiento simétrico con respecto al punto $y_0 = \ln k_1/(2a)$ y son

funciones suaves y localizadas, pero que carecen de la simetría Z_2 (véase Figura 4.1). No es complicado ver que el parámetro de anchura de estas funciones está caracterizado por $\Delta \sim 1/a$, mientras que el parámetro k_1 rompe la simetría Z_2 de la solución con un desplazamiento a lo largo del semieje positivo de nuestra dimensión extra (este desplazamiento está dado por el valor y_0).

Debido a que esta constante aparece multiplicando a una función exponencial que depende de y , su efecto es muy pequeño, y la solución presenta sólo una ligera desviación con respecto a la simetría Z_2 . Sin embargo, las implicaciones físicas a las que nos lleva son muy importantes: el espacio tiempo pentadimensional no se restringe más a una geometría tipo orbifold (del inglés “orbifold”), permitiéndonos de esta manera, elegir entre una gama más amplia de variedades pentadimensionales cuando se hace la reducción dimensional a cuatro dimensiones.

Las componentes tetradimensionales del tensor de energía-impulso de nuestro sistema están dadas por

$$T_{mn} = \frac{6a^2bk_1}{8\pi G_5}(e^{ay} + k_1e^{-ay})^{b-2} \left[1 + \frac{b}{4k_1}(e^{ay} - k_1e^{-ay})^2 \right] \eta_{mn}, \quad (4.1)$$

mientras su componente pentadimensional pura es

$$T_{55} = \frac{3a^2b^2}{16\pi G_5} \left(\frac{e^{ay} - k_1e^{-ay}}{e^{ay} + k_1e^{-ay}} \right)^2.$$

La densidad de energía del campo escalar de materia está dada por la componente T_{00} del tensor de energía-impulso:

$$\mu(y) = \frac{-6a^2bk_1}{8\pi G_5}(e^{ay} + k_1e^{-ay})^{b-2} \left[1 + \frac{b}{4k_1}(e^{ay} - k_1e^{-ay})^2 \right]. \quad (4.2)$$

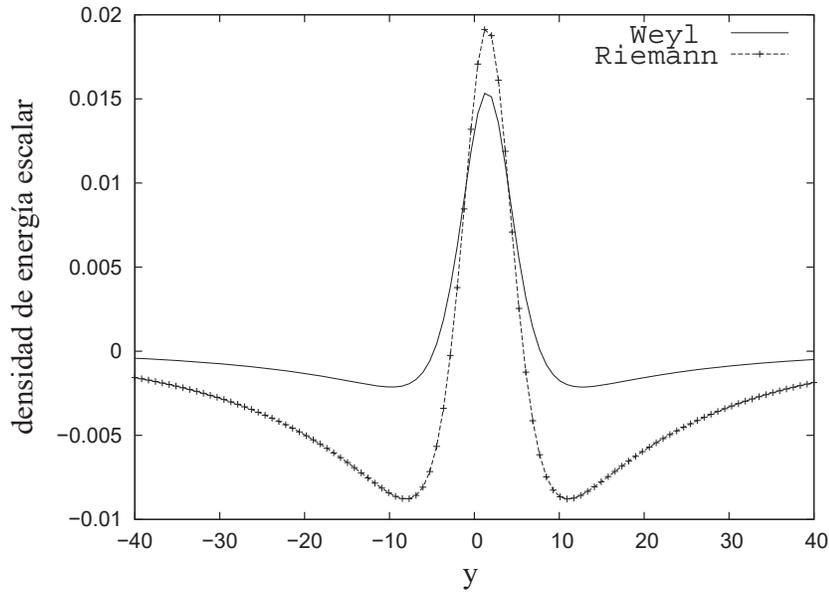


Figura 4.2: La estructura de la densidad de energía escalar en ambos marcos: dos membranas anchas con densidad de energía negativa localizadas a los lados de una membrana ancha con densidad de energía positiva con centro en el punto $y_0 = \ln k_1/(2a)$.

Un bosquejo del comportamiento de la densidad de energía μ y $\hat{\mu}$ se puede observar en la Figura 4.2. Esta magnitud muestra un máximo positivo localizado en y_0 que se encuentra entre dos mínimos negativos que tienden a cero asintóticamente. Esta configuración podemos interpretarla como una membrana ancha con densidad de energía positiva, donde está confinada la materia escalar, que se localiza entre dos membranas anchas con densidad de energía negativa. Esta configuración de campo recupera la simetría Z_2 al fijar el parámetro $k_1 = 1$, obteniendo con esto un caso similar a la configuración

de Randall-Sundrum de membranas delgadas.

El escalar de curvatura pentadimensional se calcula a partir de la fórmula (2.10) y adopta la forma siguiente

$${}^5R = \frac{-16a^2bk_1}{(e^{ay} + k_1e^{-ay})^2} \left[1 + \frac{5b}{16k_1}(e^{ay} - k_1e^{-ay})^2 \right]. \quad (4.3)$$

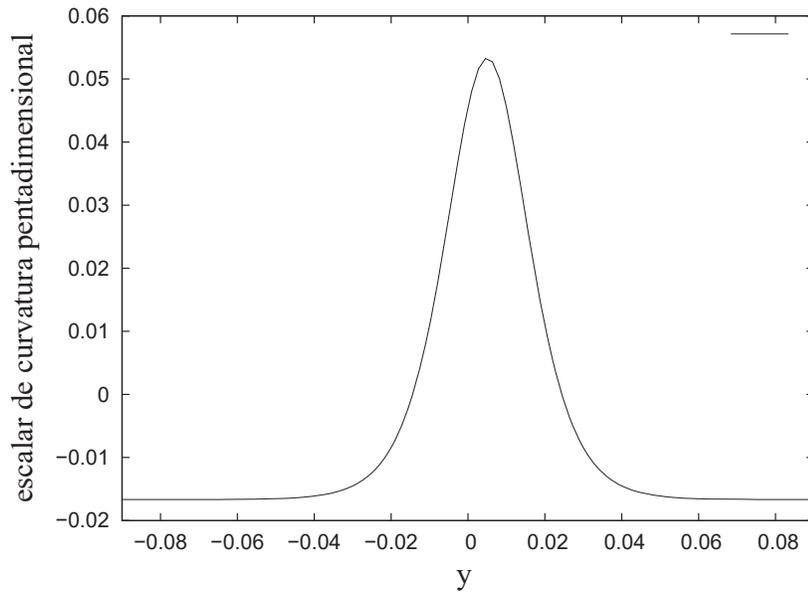


Figura 4.3: El escalar de curvatura R_5 para $k > 4/3$ en el marco de Weyl presenta un carácter regular.

A partir de la Figura 4.3 podemos ver que este escalar representa una función suave y acotada a lo largo de toda la quinta dimensión. De este modo, hemos obtenido una variedad pentadimensional regular en el marco de Weyl, a diferencia del escalar de curvatura singular del modelo Randall–Sundrum de membranas delgadas.

Caso(B) $k_1 > 0$, $\lambda > 0$ y $1 < k < 4/3$. En este caso tenemos que $a \in \mathfrak{S}$, $b > 0$ y para tener un factor de deformación que sea real debemos cambiar en la solución $a \rightarrow i\alpha$, además, la única elección posible para el parámetro k_1 es fijarlo en $k_1 = 1$ (cualquier otra elección nos lleva a una solución compleja); al tomar en cuenta estas condiciones obtenemos una función con simetría Z_2

$$e^{2A} = \cos^b(\alpha y). \quad (4.4)$$

Por lo tanto, podemos concluir que tenemos una variedad periódica a lo largo de la dimensión extra de manera que $-\pi \leq \alpha y \leq \pi$. Esta solución compacta fue encontrada previamente por O. Arias et al. en [12].

Existen más casos físicamente relevantes determinados por otras combinaciones de los valores de los parámetros constantes, sin embargo, éstos se reducen finalmente a los casos (A) y (B). El resto de los casos posibles es físicamente irrelevante porque el comportamiento del factor de deformación es singular, hecho que implica que no se formen las configuraciones de membranas anchas.

Fluctuaciones de la métrica.

Ahora estudiaremos las fluctuaciones lineales h_{mn} de la métrica de fondo (2.6) en el marco de Weyl. Como ya se mencionó con anterioridad, al tratar las fluctuaciones de una métrica de fondo de manera general, es imposible evitar la consideración de las fluctuaciones del campo escalar, sin embargo, existe un sector de dichas fluctuaciones (los modos transversos de traza nula h_{mn}^T) que se desacopla de las fluctuaciones del campo escalar [10] y nos permite

hacer un estudio analítico de las mismas.

Para empezar consideremos el elemento de línea perturbado

$$ds_5^2 = e^{2A(y)}[\eta_{mn} + h_{mn}(x, y)]dx^m dx^n + dy^2 \quad (4.5)$$

y apliquemos la transformación de coordenadas $dw = e^{-A}dy$ para llevarlo a una métrica plana conforme

$$ds^2 = e^{2A(y)} \{[\eta_{mn} + h_{mn}(x, y)]dx^m dx^n + dw^2\}. \quad (4.6)$$

Bajo estas condiciones los modos transversos de traza nula obedecen la siguiente ecuación de onda [10]

$$(\partial_w^2 + 3A'\partial_w + \square)h_{mn}^T = 0, \quad (4.7)$$

donde \square es el operador de onda en el espacio tiempo de Minkowski.

Es fácil ver que esta ecuación sustenta de manera natural un estado no masivo estable que corresponde al gravitón tetradimensional en este marco. Como es no masivo debe cumplir con la siguiente condición $\square h_{mn}^T = 0$. Dicho estado está dado por la solución $h_{mn}^T = K_{mn}e^{imx}$, donde K_{mn} son constantes y $m^2 = 0$.

La ecuación (4.7) se puede llevar a la forma de la ecuación de Schrödinger si proponemos el siguiente *ansatz*

$$h_{mn}^T = e^{imx} e^{-3A/2} \psi_{mn}(w).$$

De este modo obtenemos

$$[\partial_w^2 - V(w) + m^2]\psi = 0, \quad (4.8)$$

donde se han omitido los subíndices de la función ψ , m es la masa de los modos excitados de Kaluza–Klein y el potencial está dado por la siguiente expresión

$$V(w) = \frac{3}{2}\partial_w^2 A + \frac{9}{4}(\partial_w A)^2. \quad (4.9)$$

La forma del potencial $V(w)$ para el caso no compacto (A) está determinada por la función siguiente

$$V(w(y)) = 3a^2bk_1(e^{ay} + k_1e^{-ay})^{b-2} \left[1 + \frac{5b}{16k_1}(e^{ay} - k_1e^{-ay})^2 \right]. \quad (4.10)$$

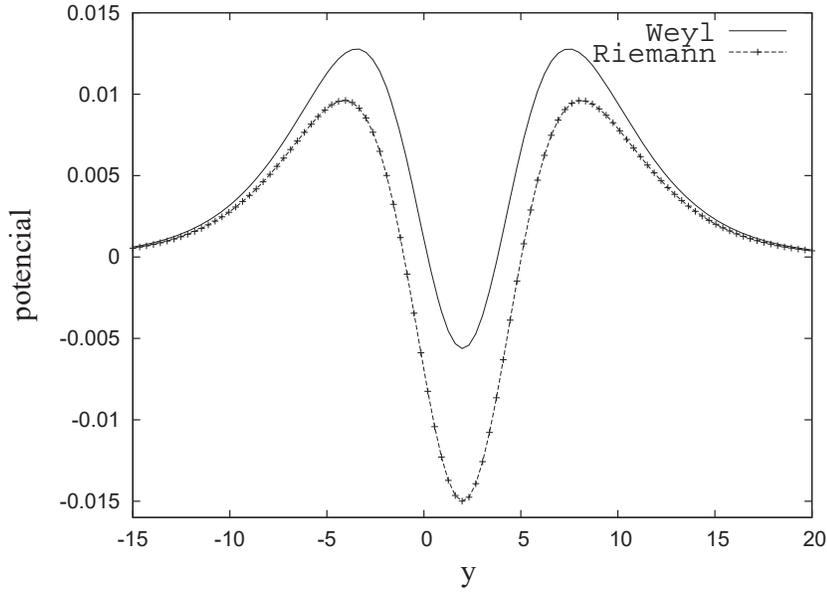


Figura 4.4: El potencial $V(y)$ tiene forma de volcán de fondo finito en ambos marcos.

En la Figura 4.4 se muestra una gráfica con el bosquejo de un pozo de potencial con un mínimo finito negativo localizado en cierto valor y_0 de la

quinta dimensión, flanqueado por dos máximos positivos que constituyen las barreras del potencial que tienden a cero cuando $y = \pm\infty$ (un potencial tipo volcán de fondo finito). Este comportamiento se grafica en la Figura 4.4 junto con el del potencial en el marco de Riemann para poder compararlos.

Ahora consideremos el caso particular $k = 5/3$ ($b = -2$). En este caso, la transformación de coordenadas $dw = e^{-A}dy$ se puede invertir (podemos hacer la inversión en términos de funciones elementales) y obtenemos la siguiente expresión para la función A :

$$A(w) = -\ln(a^2w^2 + 4k_1) / 2$$

y un potencial de la forma

$$V(r) = \frac{3a^2(5a^2w^2 - 8k_1)}{4(a^2w^2 + 4k_1)^2}. \quad (4.11)$$

El espectro de valores propios m^2 parametriza el espectro de masas del gravitón que ve un observador tetradimensional localizado en el punto y_0 .

Un resultado interesante consiste en que la ecuación de Schrödinger se puede resolver para el modo no masivo $m^2 = 0$ cuya solución es la función propia normalizable

$$\psi_0 = q(a^2w^2 + 4k_1)^{3/4}, \quad (4.12)$$

donde q es una constante de normalización. Esta función de onda no tiene ceros y, por lo tanto, representa la función propia de energía mínima de la ecuación de Schrödinger, permitiendo la existencia de un gravitón tetradimensional libre de inestabilidades provenientes de modos transversos de traza

mula con $m^2 < 0$. Puesto que todos los valores $m^2 > 0$ son permitidos, el espectro de masas es completamente continuo.

De esta manera, la teoría efectiva tetradimensional posee un espectro de energías similar al que se obtiene en el modelo Randall–Sundrum de membranas delgadas.

Física en el marco de Weyl con el parámetro k fijo

Siguiendo la misma línea de análisis que se llevó con la solución anterior. Estudiaremos los casos en los cuales los parámetros de la solución (3.23) adopten valores que definan el factor de deformación y el campo escalar como funciones suaves y localizadas.

De este modo, se debe imponer la condición $p < 0$, ya que de otra manera sería imposible obtener una configuración de membranas anchas. Esta solución también rompe la simetría Z_2 a lo largo de la quinta dimensión ($y \rightarrow -y$) por medio del parámetro de desplazamientos c_2 . Si este parámetro desaparece, la solución recupera la simetría de reflexión y la coordenada extra puede ser compacta o extendida, dependiendo de los valores de las constantes λ , p y c_1 . Consideremos únicamente los casos físicamente relevantes:

Caso (C) $\lambda > 0$, $p < 0$, $c_1 > 0$. En este caso el dominio de la quinta coordenada es $-\infty < y < \infty$ y tenemos una dimensión extra no compacta. En este caso, el factor de deformación está concentrado en la vecindad del punto $y = c_2$ y representa una función localizada de anchura $\Delta \sim 1/c_1$.

La densidad de energía de la materia escalar está dada por la expresión

$$\mu(y) = \frac{-9c_1^2}{32p\pi G_5} \left[\frac{\sqrt{-8\lambda p}}{c_1} \cosh(c_1(y - c_2)) \right]^{\frac{3}{2p}} \left[1 + \frac{3 - 2p}{2p} \tanh^2(c_1(y - c_2)) \right]. \quad (4.13)$$

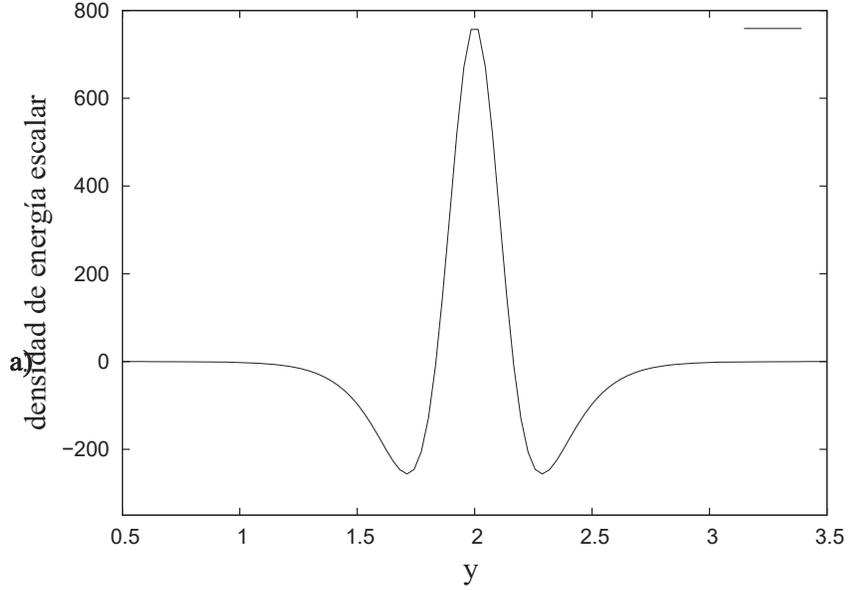


Figura 4.5: El comportamiento de la densidad de energía μ para el caso (C): una configuración de membranas anchas concentradas en torno al punto $y = c_2$.

En la Figura 4.5 se representa la función μ . Ésta muestra un máximo positivo localizado en $y = c_2$ flanqueado por un mínimo a cada lado que desaparece a medida que y se aproxima al infinito.

El hecho de tener densidades de energía escalar positivas y negativas nos permite comparar una vez más nuestras membranas anchas con el modelo

Randall–Sundrum de membranas delgadas.

El escalar de curvatura pentadimensional adopta la siguiente forma

$$R_5 = \frac{-6c_1^2}{p} \left[1 + \frac{15 - 8p}{8p} \tanh^2(c_1(y - c_2)) \right], \quad (4.14)$$

que tiene valores finitos, por lo tanto, una vez más obtenemos una variedad pentadimensional regular.

Caso (D) $\lambda > 0$, $p > 0$, $c_1 = ik_1$. En este caso también obtenemos una dimensión extra compacta acotada por $-\pi \leq c_1(y - c_2) \leq \pi$. Las expresiones del factor de deformación y del campo escalar son las siguientes

$$\begin{aligned} e^{2A(y)} &= \left[\frac{\sqrt{8\lambda p}}{k_1} \cos(k_1(y - c_2)) \right]^{\frac{3}{2p}}, \\ \omega &= \frac{2}{p} \ln \left[\frac{\sqrt{8\lambda p}}{k_1} \cos(k_1(y - c_2)) \right]. \end{aligned} \quad (4.15)$$

La densidad de energía de la materia escalar está dada por la expresión

$$\mu(y) = \frac{9k_1^2}{32p\pi G_5} \left[\frac{\sqrt{8\lambda p}}{k_1} \cos(k_1(y - c_2)) \right]^{\frac{3}{2p}} \left[1 + \frac{2p - 3}{2p} \tan^2(k_1(y - c_2)) \right] \quad (4.16)$$

y su comportamiento es ilustrado en la Figura 4.6 para los valores $p = 1/2$ y $p = 3/8$. Ésta representa varias configuraciones alternadas de membranas anchas con densidades de energía positiva y negativa distribuidas a lo largo de la quinta dimensión compacta.

Es interesante señalar que el número de membranas con densidades de energía positiva y negativa depende de los valores que adopte el parámetro $p(\xi)$.

De este modo, por ejemplo, para $p = 3/2$ tenemos un par de membranas anchas: una con densidad de energía positiva y otra con densidad de energía negativa.

Cuando $p = 3/4$ obtenemos una configuración que consiste de dos membranas anchas con densidad de energía positiva intercaladas entre dos membranas anchas con densidad de energía negativa.

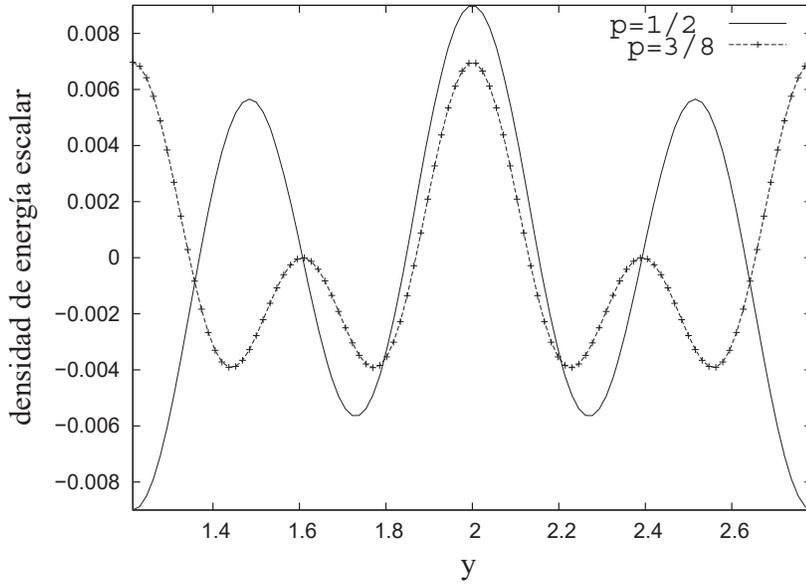


Figura 4.6: La estructura de la densidad de energía μ para el caso compacto (D). Cuando $p = 1/2$ y $p = 3/8$ surge una serie de membranas anchas con densidades de energía positivas y negativas como resultado del carácter compacto de la dimensión extra.

Para $p = 1/2$ obtenemos una configuración de campo consistente de tres membranas con densidad de energía positiva alternadas con tres membranas

con densidad de energía negativa.

Finalmente, cuando $p = 3/8$ obtenemos dos membranas con densidad de energía positiva, cada una de las cuales es seguida por dos membranas con densidad de energía negativa.

Podemos observar que hay deformaciones de estos cuatro tipos de configuraciones de membranas anchas para diferentes valores del parámetro p .

En este caso compacto, el escalar de curvatura adopta la forma

$${}^5R = \frac{6k_1^2}{p} \left[1 + \frac{8p-15}{8p} \tan^2(k_1(y-c_2)) \right]; \quad (4.17)$$

resulta que esta magnitud es singular en el punto $y = \frac{\pi}{2k_1} + c_2$.

Algunos casos que corresponden a diferentes combinaciones de los parámetros de la solución presentan interés físico, sin embargo, éstos están contenidos en los casos (C) y (D). También existen varias combinaciones que llevan a situaciones de poco interés desde el punto de vista físico, pues no corresponden a configuraciones de membranas anchas.

Fluctuaciones de la métrica

Para el caso (C) $\lambda > 0, p < 0$ and $c_1 > 0$, el potencial en términos de la coordenada y está dado por la siguiente relación

$$V(w(y)) = \frac{9c_1}{8p} \left[\frac{\sqrt{-8\lambda p}}{c_1} \cosh(c_1(y-c_2)) \right]^{\frac{3}{2p}} \left[1 + \frac{(15-8p)}{8p} \tanh^2(c_1(y-c_2)) \right]. \quad (4.18)$$

En la Figura 4.7 se grafica la forma del potencial. Como podemos ver, éste también corresponde a un volcán con fondo finito como en los casos

anteriores. Por lo tanto, nuevamente vamos a tener un solo estado gravitatorio acotado (sin masa) y todo un espectro continuo de excitaciones masivas de Kaluza–Klein con $m^2 > 0$.

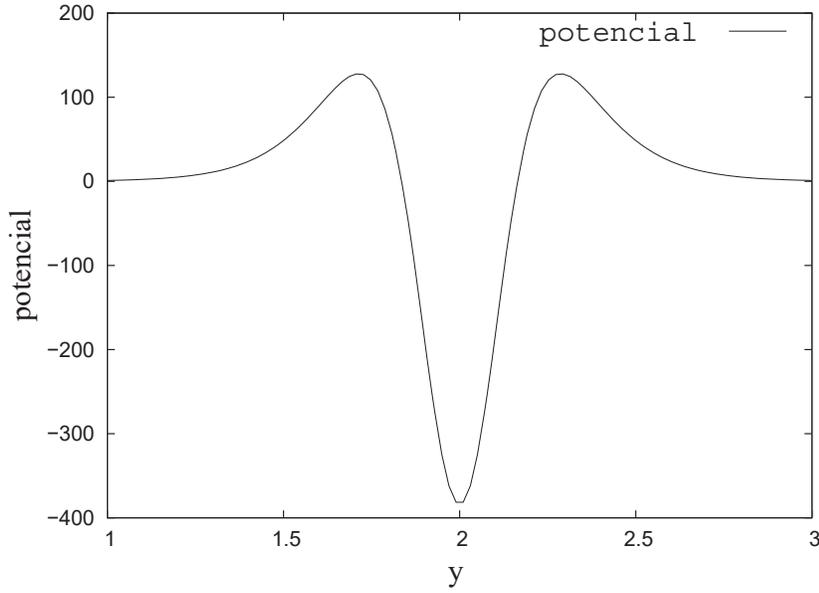


Figura 4.7: El comportamiento del potencial $V(y)$ para la solución con $k = 4/3$.

En el caso particular en que $p = -3/4$, la transformación de coordenadas realizada con anterioridad se puede invertir para expresar explícitamente y en términos de w y obtener la siguiente expresión para la función A

$$A(w) = \ln \left(c_1 / \sqrt{c_1^4 w^2 + 6\lambda} \right), \quad (4.19)$$

misma que define el potencial

$$V(w) = \frac{3c_1^4 (5c_1^4 w^2 - 12\lambda)}{4 (c_1^4 w^2 + 6\lambda)^2}. \quad (4.20)$$

Al resolver la ecuación de Schrödinger para el modo cero $m^2 = 0$ con este potencial obtenemos la función propia normalizable $\psi_0 = q (c_1^4 w^2 + 6\lambda)^{-3/4}$, donde q es una constante de normalización. Una vez más, esta función representa la función propia de la ecuación de Schrödinger con energía mínima puesto que tampoco tiene ceros. Por lo tanto, nuevamente tenemos permitida la existencia de un gravitón tetradimensional estable acompañado de todo un espectro continuo de modos masivos de Kaluza–Klein con $m^2 > 0$.

De este modo hemos obtenido una nueva configuración de membranas anchas sin simetría de reflexión que generalizan el modelo Randall–Sundrum. En estas configuraciones, la teoría efectiva tetradimensional posee un espectro de energías muy similar al espectro de las membranas delgadas, en particular, la gravedad tetradimensional resulta estar localizada en cierta región alrededor de un punto de la quinta dimensión.

4.2. Física en el marco de Riemann

En esta sección estudiaremos la física de las soluciones obtenidas en el marco de Riemann; empezaremos por considerar la solución que se obtiene al fijar la constante ξ , sin embargo, debido a la similitud del comportamiento que muestran las soluciones que se obtienen al fijar el parámetro k con las configuraciones previamente analizadas, sólo daremos una breve descripción de sus propiedades físicas.

El tensor de energía–impulso para el caso (A) está dado de manera ex-

plícita por una componente tetradimensional

$$\widehat{T}_{mn} = \frac{6a^2b(1+k)k_1}{8\pi G_5} (e^{ay} + k_1 e^{-ay})^{b-2} \left[1 + \frac{b(k+2)}{8k_1} (e^{ay} - k_1 e^{-ay})^2 \right] \eta_{mn} \quad (4.21)$$

y una parte puramente pentadimensional

$$\widehat{T}_{55} = \frac{3a^2b^2(1+k)^2}{16\pi G_5} \left(\frac{e^{ay} - k_1 e^{-ay}}{e^{ay} + k_1 e^{-ay}} \right)^2. \quad (4.22)$$

La densidad de energía del campo escalar de materia está dada por la siguiente expresión

$$\widehat{\mu}(y) = \frac{-6a^2b(1+k)k_1}{8\pi G_5} (e^{ay} + k_1 e^{-ay})^{b-2} \left[1 + \frac{b(k+2)}{8k_1} (e^{ay} - k_1 e^{-ay})^2 \right]. \quad (4.23)$$

El bosquejo del comportamiento de la densidad de energía $\widehat{\mu}(y)$ se puede observar en la Figura 4.2. Esta magnitud también muestra un máximo positivo en y_0 en medio de dos mínimos negativos que desaparecen asintóticamente como en el marco de Weyl.

De este modo, las propiedades de esta configuración de membranas anchas son similares a la obtenidas con anterioridad en el espacio tiempo integrable de Weyl.

El escalar de curvatura pentadimensional

$$\widehat{R}_5 = -16a^2b(k+1)k_1 (e^{ay} + k_1 e^{-ay})^{-(kb+2)} \left[1 + \frac{b(5+3k)}{16k_1} (e^{ay} - k_1 e^{-ay})^2 \right] \quad (4.24)$$

no está acotado y como consecuencia tenemos una variedad pentadimensional que es singular en el marco de Riemann.

Fluctuaciones de la métrica

Ahora analizaremos la posibilidad de recuperar la gravedad tetradimensional estudiando las fluctuaciones de la métrica de fondo en el marco de Riemann. Al hacer la perturbación de la métrica (3.3) obtenemos

$$\widehat{ds}^2 = e^{2\sigma(y)}[\eta_{mn} + \widehat{h}_{mn}(x, y)]dx^m dx^n + e^{\omega(y)}dy^2. \quad (4.25)$$

Siguiendo el método desarrollado por de Wolfe et al. [10], primero introduciremos una nueva coordenada r , definida por $dr = e^{-A}dy$, para obtener una métrica plana conforme

$$\widehat{ds}^2 = e^{2\sigma(y)} \left\{ [\eta_{mn} + \widehat{h}_{mn}(x, y)]dx^m dx^n + dr^2 \right\}. \quad (4.26)$$

Una vez que escribimos la métrica de esta manera podemos obtener la ecuación de onda correspondiente para los modos transversos de traza nula \widehat{h}_{mn}^T que se desacoplan de las fluctuaciones del campo escalar

$$(\partial_r^2 + 3\sigma' \partial_r + \square^\eta) \widehat{h}_{mn}^T = 0. \quad (4.27)$$

De la misma manera que en el marco de Weyl, esta ecuación sustenta la existencia de un gravitón tetradimensional no masivo ($m^2 = 0$).

Para escribir la ecuación (4.27) como una ecuación de Schrödinger proponemos el *ansatz* siguiente

$$\widehat{h}_{mn}^T = e^{imx} e^{-3\sigma/2} \Psi_{mn}(r) \quad (4.28)$$

y obtenemos

$$[\partial_r^2 - \widehat{V}(r) + m^2] \Psi = 0, \quad (4.29)$$

donde, por simplicidad, los subíndices de la función Ψ ya no han sido escritos, m parametriza nuevamente la masa de los modos de Kaluza–Klein y ahora el potencial $\widehat{V}(r)$ está dado por

$$\widehat{V}(r) = \frac{3}{2}\partial_r^2\sigma + \frac{9}{4}(\partial_r\sigma)^2. \quad (4.30)$$

La forma de este potencial para el caso (A) de la solución (3.16) se determina por la siguiente expresión

$$\widehat{V}(r(y)) = 3a^2b(k+1)k_1(e^{ay} + k_1e^{-ay})^{b-2} \left[1 + \frac{(3k+5)b}{16k_1}(e^{ay} - k_1e^{-ay})^2 \right]. \quad (4.31)$$

En la Figura 4.4 se muestra su comportamiento: nuevamente obtenemos un potencial tipo volcán con fondo finito, como en el marco de Weyl.

Ahora, si tomamos el caso particular $k = 5/3$ (ó $b = -2$), el cambio de coordenadas puede ser invertido con éxito y nuestra función σ se puede escribir como

$$\sigma(r) = -4 \ln [(a^2r^2 + 4k_1)] / 3, \quad (4.32)$$

hecho que nos lleva al potencial correspondiente

$$\widehat{V}(r) = \frac{4a^2(5a^2r^2 - 4k_1)}{(a^2r^2 + 4k_1)^2}. \quad (4.33)$$

Como dijimos anteriormente, el espectro de valores propios m^2 parametriza el espectro de masas del gravitón que mide un observador tetradimensional parado en y_0 . De la misma manera que en el marco de Weyl, la ecuación de Schrödinger (4.29) se puede resolver analíticamente para el modo cero $m^2 = 0$, obteniendo como solución la función de onda

$$\Psi_0 = c (a^2r^2 + 4k_1)^{-2}, \quad (4.34)$$

donde c es una constante de normalización. Esta solución también es la única función propia normalizable y como carece de ceros, representa la función propia de la ecuación de Schrödinger (4.29) con menor energía, hecho que permite la existencia de un gravitón tetradimensional estable.

Como el potencial tiende asintóticamente a cero, este es el único estado gravitatorio confinado y, además, también tenemos un espectro continuo de modos de Kaluza–Klein con $m^2 > 0$ como en la variedad de Weyl.

Las propiedades físicas correspondientes al caso (C) de la solución que se obtiene al fijar el parámetro k son cualitativamente muy similares a las descritas para esta solución y, por lo tanto, no los presentaremos de manera explícita. Cabe señalar que la similitud de estas soluciones no es un hecho trivial, pues las ecuaciones de campo de las cuales provienen son diferentes.

Capítulo 5

Conclusiones

En este trabajo se ha considerado la localización de la gravedad tetradimensional en dos tipos de variedades distintas: en un espacio tiempo riemanniano y en una geometría integrable de Weyl, que constituye una generalización de la teoría de Kaluza–Klein en la que la estructura riemanniana de la variedad pentadimensional es sustituida por una weyliana en la cual se permiten variaciones de la longitud de los vectores durante su transporte paralelo e involucra un campo escalar geométrico en su formulación.

El estudio de este fenómeno en un espacio tiempo integrable de Weyl está motivado por la hipótesis de que para ciertos modelos, en las geometrías de Weyl se pueden obtener efectos cuánticos a nivel clásico.

Como resultado de la presente investigación, se ha demostrado que este no es una propiedad genérica de dichas variedades.

Por medio de la denominada técnica conforme se ha obtenido una fa-

milia de soluciones clásicas que preservan la invariancia tetradimensional de Poincaré y representan funciones suaves y localizadas que violan la simetría de reflexión Z_2 , a diferencia de los resultados previos.

Al fijar algunas de las constantes que parametrizan las configuraciones de campo obtenidas, se reproducen soluciones halladas con anterioridad por otros autores.

Estas soluciones tienen configuraciones de densidad de energía escalar localizadas que son interpretadas como membranas anchas, ya que generalizan las membranas delgadas del célebre modelo Randall–Sundrum.

Un nuevo resultado consiste en que al romper la simetría Z_2 , nuestras configuraciones de campo no restringen la geometría del espacio tiempo a que ésta sea de tipo orbifold, permitiendo que ésta pertenezca a una clase más general de variedades topológicas donde la quinta dimensión puede adoptar valores infinitos tanto positivos como negativos en ambos marcos.

La única diferencia encontrada al analizar las propiedades de las magnitudes físicas de nuestras configuraciones de membranas anchas consiste en que el escalar de curvatura tiene un comportamiento completamente regular en el marco de Weyl y singular en el de Riemann.

Al analizar el comportamiento de los modos transversos de traza nula de las fluctuaciones lineales de la métrica de fondo (que se desacoplan de las fluctuaciones del campo escalar), se obtiene que éstos obedecen una ecuación tipo Schrödinger con un potencial determinado por la curvatura del espacio tiempo pentadimensional que tiene la forma de un volcán con fondo finito en

ambos marcos.

Asimismo, se ha resuelto la ecuación de Schrödinger de estas fluctuaciones para el caso no masivo ($m^2 = 0$) en los dos marcos. Como resultado se ha obtenido un solo estado acotado que representa el gravitón tetradimensional libre de inestabilidades taquiónicas con $m^2 < 0$. También se obtuvo todo un espectro continuo de estados de Kaluza–Klein masivos que se convierten asintóticamente en ondas planas.

De esta manera se localiza la gravedad tetradimensional en las membranas anchas pentadimensionales tanto en la geometría de Weyl como en el espacio tiempo Riemanniano.

Existen varias direcciones en las cuales se puede desarrollar la presente línea de investigación. A saber, se puede tratar de obtener membranas anchas completamente asimétricas que localicen la gravedad tetradimensional y generalicen las configuraciones obtenidas en este trabajo; también se puede considerar un número mayor de dimensiones extra, obtener el modelo de Randall–Sundrum como límite de membranas anchas, derivar el presente modelo en el marco de alguna de las teorías de supercuerdas, intentar resolver el problema de la jerarquía de masas en estos escenarios, predecir nuevos efectos gravitatorios, etc.

Bibliografía

- [1] V.A. Rubakov and M.E. Shaposhnikov, Phys. Lett. **B125**, 139 (1983).
- [2] M. Visser, Phys. Lett. **B159**, 22 (1985).
- [3] E.J. Squires, Phys. Lett. **B167**, 286 (1986).
- [4] A. Barnaveli and O. Kancheli, Sov. J. Nucl. Phys. **51**, 901 (1990); Sov. J. Nucl. Phys. **52**, 920 (1990).
- [5] N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos and G. Dvali, Phys. Lett. **B429**, 263 (1998).
- [6] I. Antoniadis, N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos and G. Dvali, Phys. Lett. **B436**, 257 (1998).
- [7] M. Gogberashvili, Mod. Phys. Lett. **A14**, 2025 (1999); Int. J. Mod. Phys. **D11**, 1635 (2002); Europhys. Lett. **49**, 396 (2000).
- [8] L. Randall and R. Sundrum, Phys. Rev. Lett. **83**, 4690 (1999); Phys. Rev Lett. **83**, 3370 (1999).

- [9] J. Lykken and L. Randall, JHEP **0006**, 014 (2000).
- [10] O. De Wolfe, D. Z. Freedman, S. S. Gubser and A. Karch, Phys. Rev. **D62**, 046008 (2000).
- [11] M. Gremm, Phys. Lett. **B478**, 434 (2000); Phys. Rev. **D62** 044017 (2000).
- [12] O. Arias, R. Cardenas and Israel Quiros, Nucl. Phys. **B643**, 187 (2002).
- [13] C. Csaki, J. Erlich, T. Hollowood and Y. Shirman, Nucl. Phys. **B581**, 309 (2000).
- [14] R. Emparan, R. Gregory and C. Santos, Phys. Rev. **D63** 104022 (2001).
- [15] S. Kobayashi, K. Koyama and J. Soda, Phys. Rev. **D65** 064014 (2002).
- [16] A. Campos, Phys. Rev. Lett. **88** 141602 (2002).
- [17] A. Wang, Phys. Rev. **D66** 024024 (2002).
- [18] R. Guerrero, A. Melfo and N. Pantoja, Phys. Rev. **D65** 125010 (2002).
- [19] A. Melfo, N. Pantoja and A. Skirzewski, Phys. Rev. **D67** 105003 (2003).
- [20] K.A. Bronnikov and B.E. Meierovich, Grav. Cosmol. **9** 313 (2003).
- [21] O. Castillo–Felisola, A. Melfo, N. Pantoja and A. Ramirez, Phys. Rev. **D70** 104029 (2004).
- [22] M. Minamitsuji, W. Naylor and M. Sasaki, “Quantum fluctuations on a thick de Sitter brane”, hep-th/0508093.

- [23] N. Barbosa–Cendejas and A. Herrera–Aguilar, JHEP **0510**, 101 (2005).
- [24] F. London, Z. Physik **42** 375 (1927).
- [25] J. Godfrey, Phys. Rev. **52**, 1365 (1984).
- [26] M. Novello, L. A. R. Oliveira and J. M. Salim, Int. J. Mod. Phys. D, **1** 641 (1993).
- [27] W. Drechsler and H. Tann, Found. Phys. **29**, 1023 (1999).
- [28] W. Drechsler, Found. Phys. **29**, 1327 (1999).
- [29] V. Dzhunushaliev and H.-J. Schmidt, Phys. Lett. A**267**, 1(2000).
- [30] J.E. Lidsey, D. Wands and E.J. Copeland, Phys. Rept. D**337** 343 (2000).
- [31] E. Santamato, Phys. Rev. D**216** 29 (2000).