

UNIVERSIDAD MICHOACANA DE
SAN NICOLÁS DE HIDALGO

INSTITUTO DE FÍSICA Y MATEMÁTICAS

TEORÍA DEL DINAMO
Y
MAGNETISMO CÓSMICO

PRESENTA:

NADIEZHDA MONTELONGO GARCÍA

ASESOR:

DR. THOMAS ZANNIAS

DICIEMBRE 2005

Índice general

1. Introducción a magnetohidrodinámica.	6
1.1. Introducción breve a magnetohidrodinámica.	6
1.2. Funciones stream y sus propiedades.	17
2. Ecuación de inducción.	20
2.1. Ecuación de inducción para campos translacionalmente invariantes.	22
2.2. Ecuación de inducción para campos axial simétricos.	26
2.3. Ecuación de inducción para campos no axial simétricos.	31
3. Campos magnéticos generados por fluidos conductores.	36
3.1. Efectos de una rotación diferencial sobre una distribución inicial \mathbf{B}_0	36
3.1.1. Efecto de advección para un campo magnético poloidal.	39
3.1.2. Expulsión de \mathbf{B}^P por el flujo de un fluido conductor.	42
3.2. Naturaleza del fenómeno de expulsión de \mathbf{B}^P por el flujo de un fluido conductor.	47
3.3. Generación de campos toroidales por campos poloidales.	52
3.4. Régimen estático asociado al campo toroidal magnético.	54
4. Teoría del dinamo.	60
4.1. Homopolar dinamo.	63
4.2. Teorema de Cowling y otros teoremas antidinamo.	66
4.3. Implicaciones del teorema de Cowling sobre magnetismo cósmico.	76

Introducción

En esta tesis analizamos algunos aspectos de la teoría del dinamo no relativista. En breve la teoría del dinamo es una rama de la magnetohidrodinámica, la cual tiene como finalidad el estudio de las propiedades del campo magnético generado por el flujo de un fluido conductor. Pero antes de comenzar con aspectos de esta teoría, expresamos el porque de nuestra motivación para indagar en esta teoría. Para ello comenzamos por un listado cronológico de observaciones realizadas en el último siglo que establecan la existencia de campos magnéticos desde escalas planetarias hasta escalas superclúster.

A inicios del siglo XX el único campo magnético a gran escala conocido por la humanidad fue el campo de la Tierra el cual es del orden de aproximadamente 1G. En 1908, Hale usando técnicas de espectroscopia fue capaz de medir el campo magnético de las manchas solares, el cual se encuentra en un rango de (1-4)KG, este fue el primer campo extraterrestre detectado. En 1947 Babcock anuncia que la estrella 78-Virginis, estrella del tipo A_p ¹, posee un campo magnético B del orden de los (1-34)KG. Poco después, Hiltner y Hall en 1949 reportaron la detección de una pequeña graduación de la polarización lineal de la luz emitida por un grupo de estrellas. Davis y Greenstein en 1951 atribuyeron la polarización observada a un campo galáctico B y ellos hicieron la primera sugerencia empírica que evidenciaba que nuestra galaxia podía poseer un campo magnético. Fermi independientemente postula en 1949 la existencia de B galáctico, pero por otras razones. Motivado por el descubrimiento de los rayos cósmicos e investigaciones teóricas hechas por Alfvén, Fermi establece que si en nuestra galaxia consideráramos un campo B de unos pocos μG y además coherente en una escala de Kpc entonces tal campo atraparía rayos cósmicos dentro de un brazo espiral de nuestra galaxia. Para responder a la pregunta de que si nuestra galaxia poseía un campo magnético se tomo más de un cuarto de siglo en esfuerzos observacionales intensos para establecer su existencia. Los esfuerzos de la comunidad científica después de 1950, fueron enfocados en entender el origen y propiedades del campo magnético del sol. Inherente a esto se desarrollo la magnetografía por Babcock en 1953. Mediante el monitoreo del campo solar se estableció que este posee una estructura dinámica. Se observó que las manchas solares aparecen y desaparecen de la superficie solar con una periodicidad aproximadamente de 11 años, así como que la

¹Las estrellas del tipo A, que poseen una composición química peculiar, se les denota con el símbolo A_p .

polaridad de las manchas solares se revirtía. Un acontecimiento crucial para el desarrollo del entendimiento de magnetismo cósmico tuvo lugar con el descubrimiento de pulsares en 1968. Con ello se estableció la existencia de campos magnéticos del orden de 10^{12} G. Posteriormente Lyne y Smith, analizaron los tiempos de llegada de pulsos de radio en un método independiente para la determinación de densidades de electrones a lo largo de las líneas vistas y por tanto un método para la estimación de la medición de dispersión. Como una consecuencia rotación Faraday se convirtió en una herramienta potente de detección y estudio de campos magnéticos a gran escala coherentes sobre la galaxia. Actualmente magnetismo cósmico es detectado y estudiado mediante un número de técnicas complementarias. Medidas del desdoblamiento Zeeman del espectro son empleadas para el estudio del campo magnético solar y los campos magnéticos de estrellas cercanas. Observaciones de la Vía Láctea y sus cercanías muestran polarización de radio y emisión ciclotrónica, tales observaciones son obtenidas a través de rotación de Faraday. También se han detectado campos magnéticos intensos, como lo son los asociados a pulsares, esto mediante el estudio de las frecuencias de giro. Todas estas observaciones llevaron a la conclusión que magnetismo es una propiedad común del universo observable, en el sentido que cada objeto cósmico que a sido puesto bajo observación presenta actividad magnética. Las estructuras cósmicas planetarias, las estrellas, las galaxias, clúster y superclúster todos estas estructuras presentan alguna actividad magnética.

El campo magnético de la Tierra se modela aproximadamente $\mathbf{B}_T = \mathbf{B}_{\text{dipolar}} + \mathbf{B}_{\text{no-dipolar}}$, donde se tiene $|\mathbf{B}_{\text{dipolar}}| \gg |\mathbf{B}_{\text{no-dipolar}}|$, con $B_T = 3.11 \times 10^{-3}$ G. Observaciones de \mathbf{B}_T indican que presenta variaciones en el tiempo en su intensidad $|\mathbf{B}_T|$, así como también el cambio de polaridad y la dependencia temporal del ángulo que forma \mathbf{B}_T con el eje de rotación de la Tierra. Con el desarrollo de la tecnología espacial y vía observaciones de sitio, sabemos que planetas también poseen campos magnéticos: Por ejemplo el campo magnético superficial de Mercurio es $|\mathbf{B}| = 3.3 \times 10^{-3}$ G, Venus con $|\mathbf{B}| = 1.8 \times 10^{-4}$ G, Marte con $|\mathbf{B}| = 6.36 \times 10^{-4}$ G y Júpiter con $|\mathbf{B}| = 3.61$ G².

Para las estrellas calientes que se encuentran en la secuencia principal presentan campos de $(10^2 - 10^3)$ G mientras que las enanas blancas presentan campos de 10^8 G. Los campos gigantes de pulsares se encuentran en un rango de $(10^8 - 10^{12})$ G mientras que descubrimientos más recientes nos dicen que los magnetars y los anomalos rayos-X de pulsares, poseen un campo \mathbf{B} en su superficie del orden de $(10^{14} - 10^{15})$ G. Estructuras galácticas poseen campos magnéticos que presentan diferentes propiedades que los campos observados en estrellas y en el sistema planetario. La Vía Láctea posee un campo magnético de μ G coherente en una escala de longitud de Kpc. Este valor corresponde a la componente regular del campo magnético, mientras que la segunda componente $\delta\mathbf{B}$ constituye las fluctuaciones sobre la escala de longitud $l \approx 100$ pc, esta escala de longitud característica al medio interestelar turbulento. En adición al campo magnético de la Vía Láctea, los campos de varias galaxias espirales fueron estimados con alta resolución. Sus

²Los hechos observacionales expuestos aquí los hemos tomado de las referencias [3]-[8].

campos regulares se encuentran en un rango de μG , y presentan propiedades semejantes a las de la Vía Láctea. Las galaxias elípticas e irregulares también presentan actividad magnética, pero sus campos son más difíciles de detectar. Por tanto tenemos que la actividad magnética es una propiedad común en las estructuras galácticas. La siguiente escala en donde fue detectada actividad magnética involucra la escala de cluster de galaxias. El cluster de galaxias es un gran sistema no lineal en el universo. Las observaciones de rayos-X de los observatorios Einstein, ROSAT, Chandra y XMM-Newton muestran que en el medio inter-cluster está lleno con plasma caliente que emite rayos-X con energías de (1-10)KeV. Los campos magnéticos en cluster de galaxias fueron detectados por medio de rotot Faraday, con lo cual pudo ser estimada la componente regular del campo \mathbf{B} , esta se encuentra en un rango de $(0.2 - 3\mu)\text{G}$. Finalmente mencionaremos la detección de actividad magnética en la escala de super cluster. La detección de campos magnéticos en tal escala es muy difícil. Sin embargo fue detectada una emisión de radio en la región que se encuentra entre la Coma cluster y Abell cluster 1367. Estos dos clusters están separados por 40Mpc y definen el plano de la Coma supercluster. Estas observaciones fueron interpretadas como debidas a la presencia de un campo magnético en el supercluster Coma-Abell 1367, el cual se encuentra en un rango de $(0.2-0.6)\mu\text{G}$.

Este breve sondeo concierne a la situación actual del magnetismo cósmico, nos lleva a la conclusión de que el magnetismo es una actividad normal del universo observable. Pero aún tenemos muchas preguntas que resolver como:

¿Qué es el origen de estos campos magnéticos?, ¿Existe un principio de unificación que entiende su existencia?, ¿Por qué están tales campos ahí?, ¿Tales campos nos dicen algo sobre la estructura a gran escala del universo?

Aunque hemos mencionado hechos observacionales sobre campos magnéticos cósmicos, pasaremos en seguida a propuestas teóricas para explicar tales campos. La primera idea fue propuesta por Larmor en 1919 [10]. Motivado por el descubrimiento realizado por Hale en 1908, Larmor sugirió que el campo solar es debido a la rotación del sol en combinación con la propiedad que el material del sol es un fluido conductor. Concretamente propuso que el movimiento del fluido conductor genera y mantiene corrientes eléctricas, las cuales son responsables del campo magnético solar. Con la teoría de Maxwell bien fundada hubo una gran actividad científica para establecer detalladamente la propuesta de Larmor. Pero en 1934, Cowling presenta evidencias teóricas que muestran a la propuesta de Larmor como no viable. Cowling argumenta que la disipación ohmica combinada con la naturaleza axial simétrica del campo \mathbf{B} y la velocidad \mathbf{u} del fluido conductor, tiene como consecuencia que el campo solar debería ser eliminado.

Después que Cowling anuncia sus resultados, hubo un esfuerzo intenso de la comunidad científica para entender el campo magnético solar. Además el descubrimiento de campos magnéticos para objetos cósmicos significó un reto para los teóricos, ya que esto implica

explicar fenómenos de campos magnéticos cósmicos muchos más intensos. Fue en esta época en donde se desarrolló la teoría del dinamo laminar o turbulento.

El objetivo de esta tesis es discutir algunos aspectos teóricos concernientes a la teoría que describe el mecanismo por el cual un fluido conductor puede mantener un campo magnético y teoría del dinamo.

Es de mi interés tratar de entender mejor la naturaleza de los campos magnéticos cósmicos. Como veremos más adelante tal entendimiento será contrastante con lo que sucede en electrodinámica clásica, en donde las densidades de carga y corriente ($\rho(t, \mathbf{x})$, $\mathbf{J}(t, \mathbf{x})$) están especificadas. A continuación notaremos que el gran problema es definir concretamente el origen y estructura de $\rho(t, \mathbf{x})$ y $\mathbf{J}(t, \mathbf{x})$ que están generadas por fluidos conductores.

Para tal entendimiento tendremos que estudiar aspectos de magnetohidrodinámica no relativística, así que esta tesis comenzará con una breve introducción a tal teoría en el capítulo 1. En tal régimen y combinado con los principios de electrodinámica clásica derivaremos la *ecuación de inducción* la cual como veremos en el desarrollo de la tesis es de gran relevancia. Tal ecuación describe el acoplamiento del campo magnético \mathbf{B} generado por el campo de velocidad \mathbf{u} del fluido conductor. En el capítulo 2 nos daremos a la tarea de escribir la ecuación de inducción para campos (\mathbf{B}, \mathbf{u}) invariantes traslacionales, axial simétricos y el caso en el cual \mathbf{B} arbitrario, es decir, sin ninguna simetría. Esto con la finalidad de estudiar la estructura y propiedades de campos magnéticos generados por campos de velocidad particulares. En el capítulo 3 discutiremos el acoplamiento entre las componentes toroidal y poloidal, también estudiaremos el fenómeno de expulsión del campo magnético poloidal por el flujo de un fluido conductor. También discutiremos las similitudes de tal fenómeno con el observado en conductores sólidos conocido como el efecto skin. En el capítulo 4 daremos una breve introducción a la teoría del dinamo, empezando con el modelo del homopolar dinamo que involucra conductores sólidos. Tal modelo es el prototipo para un mecanismo dinamo. Posteriormente exponemos dos teoremas importantes dentro de la teoría del dinamo, uno de ellos es el teorema de Cowling. En el contexto de estos dos teoremas antidinamo, discutiremos detalladamente su impacto sobre el fenómeno de magnetismo cósmico. Discutiremos también brevemente la necesidad de incorporar efectos de flujos turbulentos de fluidos conductores, con la finalidad de explicar el fenómeno de magnetismo cósmico. Concluiremos este trabajo indicando la extensión de la teoría dinamo a un nivel relativístico.

Capítulo 1

Introducción a magnetohidrodinámica.

1.1. Introducción breve a magnetohidrodinámica.

Como hemos mencionado en la introducción la *teoría del dinamo*, es una parte del campo de *magnetohidrodinámica*, por lo cual es lógico que primeramente comencemos con una introducción breve a esta teoría. Magnetohidrodinámica es una rama de la mecánica continua que tiene como objetivo el estudio de la interacción de un fluido conductor con un campo electromagnético. Debido al movimiento del fluido conductor en presencia de un campo electromagnético tenemos la creación de una densidad de corriente eléctrica y carga eléctrica, las cuales a través de las ecuaciones de Maxwell genera y modifica el estado del campo electromagnético que fue responsable de las mismas. Por su parte el campo electromagnético generado ejerce la fuerza de Lorentz sobre elementos del fluido, modificando el flujo del fluido conductor. Entonces en general el flujo del fluido conductor en presencia de un campo electromagnético se modifica, mientras que el fluido conductor por su parte también modifica el campo electromagnético. Magnetohidrodinámica describe precisamente tal interacción [1].

Aquí en la Tierra el hombre procesa en laboratorios abundantes fluidos conductores pero también se encuentran en ambientes astrofísicos y cosmológicos. Un ejemplo de un fluido conductor es el mercurio. Tal medio a temperatura $T \sim 20^\circ\text{C}$ y presión $P \approx 1 \text{ atm}$, posee una conductividad eléctrica $\sigma \approx 10^{16} \text{ seg}^{-1}$. También el sodio líquido es un fluido conductor. En condiciones de alta temperatura y presión los metales que se encuentran en estado líquido posean propiedades de conducción. Estudios sismológicos [2] sugieren que el interior de la Tierra consiste de un núcleo sólido de radio $R_{N-S} \approx 0.2 R_T$ ¹, el cual está constituido de una aleación de hierro y níquel; así como también un núcleo exterior líquido, de radio entre $0.2 R_T \leq R_{N-L} \leq 0.6 R_T$, constituido de hierro y algunos ele-

¹Donde el radio de la tierra es $R_T = 6.3 \times 10^3 \text{ Km}$.

mantos ligeros; y finalmente un manto sólido, que se encuentra en un radio $r > 0.6 R_T$, constituido de hierro-magnesio. El núcleo líquido colocado en $0.2 R_T \leq R_{T-1} \leq 0.6 R_T$ desempeña un papel importante en la explicación del campo magnético de la Tierra. En cuanto al sol, la zona convectiva y por extensión estrellas que se encuentran en la secuencia principal están modeladas como un fluido conductor. También perturbaciones cosmológicas están modeladas como fluidos conductores. Los fluidos conductores desempeñan un papel importante en los últimos modelos teóricos que se tienen como finalidad explicar campos magnéticos galácticos.

Por otro lado frecuentemente en astrofísica y cosmología los fluidos conductores se encuentran a temperaturas altas y en estados parcialmente o totalmente ionizados. Para tales sistemas debemos decidir el modo de descripción, es decir, si magnetohidrodinámica y física de plasmas es aplicable. En seguida daremos la oportunidad de aclarar tal división. En general cuando un medio conductor se encuentra en presencia de un campo electromagnético variable en el tiempo los electrones de conducción e iones están sujetos a la fuerza de Lorentz y como consecuencia el sistema conductor-campo electromagnético define al menos dos escalas temporales. La primera es el tiempo promedio de colisiones entre los electrones de conducción denotado por τ_c y la segunda es el tiempo t_{EJ} que representa el tiempo característico donde el campo electromagnético varía considerablemente. La comparación entre τ_c y t_{EJ} juega un papel importante para especificar el modo para la descripción del fluido. Cuando $t_{EJ} \gg \tau_c$ efectos inerciales sobre los electrones de conducción son despreciables y como consecuencia la conductividad del fluido σ será real y constante. En esta situación los electrones e iones a través de colisiones poseen un movimiento coherente, por lo que es razonable introducir solo uno campo vectorial de velocidad u que describa el movimiento de ambos componentes. Entonces el fluido posee solo un campo de velocidad y para tal sistemas magnetohidrodinámica es aplicable. En tal descripción no tomaremos en cuenta separación de cargas, por lo cual despreciamos la oscilación de plasmas. También en muchas ocasiones en astrofísica, física de planetas y cosmología, las velocidades involucradas son no relativísticas, situación que nos permite despreciar la corriente de desplazamiento de la ley de Ampere [3].

Esta tesis estudia solo fluidos conductores modelados a través de magnetohidrodinámica, por lo que es natural empezar con una breve introducción a las ecuaciones de esta teoría.

Antes que comencemos a discutir las ecuaciones de magnetohidrodinámica aclaramos que la notación y convenciones que vamos a utilizar. A lo largo de esta tesis trabajaremos exclusivamente en la variedad euclidiana (\mathbb{R}^3, g) , en donde g es la métrica euclidiana plana. Consideraremos también un conjunto $V \subset \mathbb{R}^3$ abierto y denotaremos su frontera como ∂V y su cerradura como $\bar{V} \equiv V \cup \partial V$. A lo largo de esta tesis V representará la región en donde el fluido toma lugar, y para aplicaciones astrofísicas representa por ejemplo el interior de una estrella o un planeta. Sin pérdida de generalidad asumimos adicionalmente que V es simple conexo. En el desarrollo de este trabajo (\mathbb{R}^3, g) será equipado con co-

ordenadas ortogonales (x^1, x^2, x^3) , como las coordenadas cartesianas, esféricas polares y cilíndricas. Los campos vectoriales estarán representados en la forma:

$$\mathbf{A}(x^1, x^2, x^3) = A^1(x^1, x^2, x^3)\mathbf{e}_1 + A^2(x^1, x^2, x^3)\mathbf{e}_2 + A^3(x^1, x^2, x^3)\mathbf{e}_3$$

en donde \mathbf{e}_i con $i=1,2,3$, es una base ortonormal, la cual satisface $g(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = \delta_{ij}$. Los operadores gradiente ∇ , rotacional $\nabla \times$ y divergencia $\nabla \cdot$ están tomados siempre al respecto de la base ortonormal. La diferenciación de un campo vectorial \mathbf{A} al respecto de otro campo vectorial \mathbf{X} es denotada por [4]:

$$\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{A} \equiv (\mathbf{X} \cdot \nabla)\mathbf{A} = \left(X^\mu \frac{\partial A^j}{\partial x^\mu} + X^\mu A^k \Gamma_{\mu k}^j \right) \frac{\partial}{\partial x^j} \quad (1.1)$$

donde $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^j} \right\}$ con $i=1,2,3$ es la base coordenada y $\Gamma_{\mu k}^j$ son los símbolos de Christoffel, los cuales están definidos a través de [4]:

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} = \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^k}$$

En términos de las componentes coordenadas de \mathbf{g} , tienen la forma[4]:

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{kl} \left(\frac{\partial}{\partial x^j} g_{li} + \frac{\partial}{\partial x^i} g_{lj} - \frac{\partial}{\partial x^l} g_{ij} \right)$$

Con esto concluimos lo concerniente a la notación y convenciones que se utilizaban en este trabajo.

Recordemos que en el sistema de unidades gaussiano las ecuaciones de Maxwell en presencia de un medio y al respecto de un sistema de referencia inercial global son:

$$\nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{x}, t) = 4\pi\rho(\mathbf{x}, t) \quad (1.2)$$

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) \quad (1.3)$$

$$\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{x}, t) = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}(\mathbf{x}, t) + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D}(\mathbf{x}, t) \quad (1.4)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = 0 \quad (1.5)$$

en donde \mathbf{D} , \mathbf{E} , \mathbf{B} y \mathbf{H} son campos vectoriales que tienen la interpretación bien conocida de la electrodinámica clásica. La naturaleza atómica de la materia implica que la polarización \mathbf{P} y magnetización \mathbf{M} inducida por \mathbf{E} y \mathbf{B} satisfagan relaciones constituyentes apropiadas. En el régimen lineal tales relaciones tienen la forma:

$$\mathbf{P} = \chi_e \mathbf{E} \quad (1.6)$$

$$\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{B} \quad (1.7)$$

donde χ_e y χ_m son la susceptibilidad eléctrica y magnética respectivamente, son propiedades moleculares del medio, las cuales deben examinarse cuidadosamente. Para los problemas que abordamos en esta tesis y motivados por consideraciones astrofísicas la polarización inducida es cero o despreciable. También por lo general estados ferromagnéticos no se encuentran en astrofísica. Entonces de las relaciones constituyentes y las ecuaciones de Maxwell tenemos $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$ y $\mu \mathbf{H} = \mathbf{B}$, de lo expuesto anteriormente consideramos en adelante la constante dieléctrica $\epsilon = 1$ y la constante de permeabilidad magnética $\mu = 1$. Por tales hechos las ecuaciones (1.2)-(1.5) toman la forma:

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = 4\pi \rho(\mathbf{x}, t) \quad (1.8)$$

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) \quad (1.9)$$

$$\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}(\mathbf{x}, t) + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) \quad (1.10)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = 0 \quad (1.11)$$

En el régimen de magnetohidrodinámica despreciamos la corriente de desplazamiento en la ley de Ampere [3]-[1], entonces (\mathbf{E}, \mathbf{B}) satisfacen:

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = 4\pi \rho(\mathbf{x}, t) \quad (1.12)$$

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) \quad (1.13)$$

$$\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}(\mathbf{x}, t) \quad (1.14)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = 0 \quad (1.15)$$

Como hemos mencionado en la introducción, Larmor propuso que el origen de campos magnéticos cósmicos era debido al movimiento asociado con el fluido conductor. Tal movimiento en presencia de un campo electromagnético inicial, induce una densidad de corriente eléctrica $\mathbf{J}(t, \mathbf{x})$ y una densidad del carga $\rho(t, \mathbf{x})$ las cuales generan a su vez un nuevo campo electromagnético. Es nuestra tarea en este punto determinar $(\rho(t, \mathbf{x}), \mathbf{J}(t, \mathbf{x}))$ bajo la suposición que magnetohidrodinámica es válida. Para llegar a tal $(\rho(t, \mathbf{x}), \mathbf{J}(t, \mathbf{x}))$ apelamos al siguiente argumento.

Primero vemos al sistema fluido-campo electromagnético en una descripción 4-dimensional y denotamos por (R^4, η) el espacio-tiempo de Minkowski². Consideramos un evento A e introducimos el *marco en reposo*, es decir, un sistema de referencia inercial al respecto de cual el elemento de fluido satisface $u(\mathbf{x}, t)|_A = 0$. Para un fluido eléctricamente neutro la densidad de carga eléctrica al respecto de tal sistema satisface:

$$\rho' = 0$$

²Donde η es la métrica plana y lorentziana.

Denotamos $(\mathbf{E}', \mathbf{B}')$ como los campos eléctrico y magnético correspondientes. Entonces a través del modelo de Drude³ la ley de Ohm toma la forma [3]:

$$\mathbf{J}' = \sigma \mathbf{E}'$$

Nos interesa escribir tal ley al respecto del marco de laboratorio y por eso debemos transformar $\rho', \mathbf{J}', \mathbf{E}'$ y \mathbf{B}' al marco de laboratorio. Tal transformación pudiera ser trivial si $(\mathbf{E}', \mathbf{B}')$ satisficieran (1.8)-(1.11), pero como hemos visto $(\mathbf{E}', \mathbf{B}')$ satisficieran la forma pre-relativística de las ecuaciones de Maxwell, es decir, (1.12)-(1.15). Para inducir la ley de transformación de $(\mathbf{E}', \mathbf{B}', \rho', \mathbf{J}')$ tal que deje (1.12)-(1.15) en forma invariante, consideremos la matriz que relaciona a dos bases ortonormales del espacio tangente $T_A(\mathcal{M})$ en A . Sea que $\{\mathbf{e}'_0, \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\}$ y $\{\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ son las correspondientes bases de $T_A(\mathcal{M})$, para dos observadores en reposo al respecto del marco de reposo y el marco de laboratorio respectivamente. Obviamente tal transformación esta dada por una matriz de Lorentz generada por $\gamma = \sqrt{1 - \beta^2}$, donde $\beta = \frac{|\mathbf{u}|}{c}$.

Sin pérdida de generalidad podemos asumir que $\{\mathbf{e}'_0, \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\}$ y $\{\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ estan relacionadas por un boost en la dirección $(\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1)$. Apelando a la invariancia de Poincaré de (1.8)-(1.11) se sigue que las correspondientes (ρ, \mathbf{J}) estan relacionadas con (ρ', \mathbf{J}') a través de:

$$\begin{aligned} \rho c &= \frac{\rho' c + \beta J'^1}{\sqrt{1 - \beta^2}}, & J^1 &= \frac{J'^1 + \beta \rho' c}{\sqrt{1 - \beta^2}} \\ J^2 &= J'^2, & J^3 &= J'^3 \end{aligned} \quad (1.16)$$

Por otro lado el tensor de Maxwell \mathbf{F} puede representarse:

$$\mathbf{F} = F'^{\alpha\beta} \mathbf{e}'_\alpha \otimes \mathbf{e}'_\beta = F^{\alpha\beta} \mathbf{e}_\alpha \otimes \mathbf{e}_\beta$$

de la ecuación anterior y apelando a $F'^{\alpha\beta} = -F'^{\beta\alpha}$ se siguen facilmente las reglas de transformación entre las componentes de \mathbf{F} al respecto de los dos marcos ortonormales:

$$F^{01} = F'^{02}, \quad F^{23} = -F'^{23}, \quad F^{02} = \frac{F'^{0,2} + \beta F'^{12}}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (1.17)$$

$$F'^{03} = \frac{F^{0,3} - \beta F^{13}}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad F^{12} = \frac{F'^{1,2} - \beta F'^{02}}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad F'^{13} = \frac{F^{1,3} - \beta F^{03}}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (1.18)$$

las cuales implican ⁴

$$\begin{aligned} E_x &= E'_x, & E'_y &= \frac{E_y + \beta B_z}{\sqrt{1 - \beta^2}}, & E'_z &= \frac{E_z + \beta B_y}{\sqrt{1 - \beta^2}} \\ B_x &= B'_x, & B'_y &= \frac{B_y - \beta E_z}{\sqrt{1 - \beta^2}}, & B'_z &= \frac{B_z + \beta E_y}{\sqrt{1 - \beta^2}} \end{aligned} \quad (1.19)$$

³Drude en 1900 propuso un modelo para la conductividad eléctrica σ . En ausencia de campos magnéticos fuertes tenemos $\sigma = \frac{e^2 n_e}{m_e} \tau_c$, en donde n_e es la densidad de electrones.

⁴La transformación inversa se recupera cambiando β por $-\beta$ y las cantidades primadas por las no primadas.

En el límite no relativista despreciamos términos del orden $\mathcal{O}\left(\frac{u}{c}\right)^2$, consideramos tal límite para las ecuaciones (1.16, 1.19). Tomando en cuenta además $\rho' = 0$ tenemos:

$$\rho = 0, \quad \mathbf{J} = \mathbf{J}' \quad (1.20)$$

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}' - \frac{\mathbf{u} \times \mathbf{B}'}{c}, \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}' + \frac{\mathbf{u} \times \mathbf{E}'}{c} \quad (1.21)$$

Notamos sin embargo que para las situaciones en donde \mathbf{E}' y \mathbf{B}' están relacionados a través de la ley de Faraday la última ecuación es

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}' + \mathcal{O}\left(\frac{|\mathbf{u}|}{c}\right)^2$$

Por lo tanto concluimos que bajo la transformación galileana, es decir,

$$x' \rightarrow x = x' + |\mathbf{u}|t$$

$(\mathbf{J}', \mathbf{E}', \mathbf{B}')$ se transforma según:

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}', \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}', \quad \mathbf{E} = \mathbf{E}' + \frac{\mathbf{u} \times \mathbf{B}}{c} \quad (1.22)$$

De tal transformación tenemos la implicación que la ley de Ohm al respecto del marco de laboratorio toma la forma:

$$\mathbf{J} = \sigma\left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{u}}{c} \times \mathbf{B}\right) \quad (1.23)$$

esta es una relación importante a la que apelaremos en esta tesis. Recordando que el enfoque principal de este trabajo es el estudio del campo electromagnético generado por \mathbf{J} dada por (1.23), lo cual implica que las ecuaciones de Maxwell en el interior del fluido conductor toman la forma ⁶:

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = 4\pi\rho(\mathbf{x}, t) \quad (1.24)$$

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) \quad (1.25)$$

$$\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = \frac{4\pi}{c} \sigma \left[\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) + \frac{\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)}{c} \times \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) \right] \quad (1.26)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = 0 \quad (1.27)$$

Tomando la divergencia de (1.26) llegamos a:

$$\nabla \cdot \left[\sigma \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{u} \times \mathbf{B}}{c} \right) \right] = 0 \quad (1.28)$$

⁶Como hemos visto en (1.20) para un fluido eléctricamente neutro $\rho(\mathbf{x}, t) = 0$, pero es importante resaltar que en (1.24), $\rho(\mathbf{x}, t)$ representa la densidad de carga efectiva inducida, la cual definiremos más adelante.

tal ecuación acoplada con (1.24) implica que en general el interior del fluido es inducida una densidad de carga eléctrica $\rho(t, \mathbf{x})$ dada por:

$$4\pi\rho(t, \mathbf{x}) = \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{B}(t, \mathbf{x}) \times \mathbf{u}(t, \mathbf{x})}{c} \right) \quad (1.29)$$

la cual no es necesariamente cero. Por otro lado la densidad de fuerza de Lorentz actuando sobre un elemento del fluido, esta dada por:

$$\mathbf{F} = \rho\mathbf{E} + \frac{\mathbf{J} \times \mathbf{B}}{c} \quad (1.30)$$

Tomando en cuenta que estamos en el régimen de magnetohidrodinámica y que \mathbf{E} y \mathbf{B} estan relacionados mediante la ley de Faraday, hagamos la siguiente estimación de ordenes de magnitud:

$$\frac{c|\rho\mathbf{E}|}{|\mathbf{J} \times \mathbf{B}|} \approx \frac{c|\nabla \cdot \mathbf{E}||\mathbf{E}|}{c|\nabla \times \mathbf{B}||\mathbf{B}|} \approx \frac{|\mathbf{E}|^2}{|\mathbf{B}|^2} \approx \left| \frac{|\mathbf{u}|}{c} \right|^2 \ll 1 \quad (1.31)$$

tal estimación implica que la densidad de fuerza de Lorentz esta dominada por el termino:

$$\mathbf{F} \simeq \frac{\mathbf{J} \times \mathbf{B}}{c} \quad (1.32)$$

y más adelante discutiremos consecuencias de esta densidad de fuerza.

Multipliquemos la ley de Ampere (1.26) con $\frac{c}{4\pi}$, subsecuentemente tomando el operador rotacional y combinamos con la ley de Faraday (1.25) llegamos a la conclusión que \mathbf{B} al interior del fluido conductor satisface:

$$\frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \times \mathbf{B}(\mathbf{x}, t)) - \nabla \times (\eta \nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{x}, t)) \quad (1.33)$$

donde de aquí en adelante introducimos η como la resistividad magnética y la definimos por $\eta \equiv \frac{c^2}{4\pi\sigma}$. La ecuación anterior la referimos como la ecuación de inducción y enfocaremos gran parte de nuestra atención para entender sus soluciones y propiedades correspondientes. Por supuesto la ecuación (1.33) esta acompañada también por la ecuación:

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = 0 \quad (1.34)$$

Entonces el campo \mathbf{B} en el interior del fluido obedece (1.33) y (1.34). Para la región $R^3 - \bar{V}$ y en ausencia de densidad de corriente $\mathbf{J}(\mathbf{x}, t)$ y de densidad de carga $\rho(\mathbf{x}, t)$, el campo \mathbf{B} satisface:

$$\nabla \times \mathbf{B}(t, \mathbf{x}) = 0 \quad (1.35)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(t, \mathbf{x}) = 0 \quad (1.36)$$

Por otro lado imponemos también condiciones sobre el comportamiento de \mathbf{B} en el infinito y condiciones sobre la frontera ∂V las cuales tienen la forma:

$$\lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} \mathbf{B} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{|\mathbf{x}|^3}\right) \quad (1.37)$$

$$\mathbf{n} \cdot [\mathbf{B}_{\text{int}} - \mathbf{B}_{\text{ext}}]|_{\mathbf{x} \in \partial V} = 0 \quad (1.38)$$

$$\mathbf{n} \times [\mathbf{B}_{\text{int}} - \mathbf{B}_{\text{ext}}]|_{\mathbf{x} \in \partial V} = 0 \quad (1.39)$$

donde \mathbf{n} es el vector normal a la ∂V . La condición (1.37) expresa el comportamiento de \mathbf{B} en el infinito, la cual es una condición que naturalmente es impuesta mientras que las condiciones de frontera son consecuencia de las ecuaciones de Maxwell acopladas con la ausencia de densidades de corrientes superficiales.

El sistema de ecuaciones (1.33-1.36) acopladas con las condiciones (1.37, 1.38, 1.39) y la condición inicial $\mathbf{B}(t_0, \mathbf{x}) = \mathbf{B}_0(\mathbf{x})$ son suficientes para determinar el campo $\mathbf{B}(t, \mathbf{x})$ para $t > t_0$. Una vez que \mathbf{B} fue especificado, el campo \mathbf{E} al interior del fluido está también especificado por medio de la ley de Ampere. Posteriormente con la ayuda de la ley de Coulomb se determina $\rho(t, \mathbf{x})$ en el fluido y con las condiciones de frontera determinamos la densidad de carga en ∂V (si existe). El campo eléctrico en el exterior satisface:

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(t, \mathbf{x}) = 0, \quad \nabla \times \mathbf{E}(t, \mathbf{x}) = 0$$

sujeito a la condición

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \mathbf{E} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^3}\right)$$

Ahora nos concentramos en las ecuaciones dinámicas que describen el fluido conductor. Recordemos de la *teoría hidrodinámica euleriana* que el estado del fluido está descrito por las variables $(\rho(\mathbf{x}, t), \mathbf{u}(\mathbf{x}, t), P(\mathbf{x}, t))$, en donde $\rho(t, \mathbf{x})$ es la densidad de masa y $P(t, \mathbf{x})$ la presión. Tales variables satisfacen al respecto de un sistema de referencia global inercial las ecuaciones de la hidrodinámica de Euler [5]:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(t, \mathbf{x}) + \nabla \cdot (\rho(t, \mathbf{x}) \mathbf{u}(t, \mathbf{x})) = 0 \quad (1.40)$$

$$\rho(t, \mathbf{x}) \frac{D}{dt} \mathbf{u}(t, \mathbf{x}) = -\nabla P(t, \mathbf{x}) + \rho(t, \mathbf{x}) \mathbf{g} + \mathbf{F}_{\text{ext}} \quad (1.41)$$

donde

$$\frac{D}{dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)$$

es llamada derivada convectiva. La primera es la ecuación de continuidad que expresa conservación de la masa; mientras (1.41) es la ecuación de Euler que expresa la conexión entre la aceleración de un elemento del fluido y la fuerza debida a un campo gravitacional

newtoniano denotado por \mathbf{g} , así como con otras fuerzas externas las cuales representamos por \mathbf{F}_{ext} . Para situaciones astrofísicas varias veces el fluido es auto gravitacional, entonces \mathbf{g} es acoplada a $\rho(t, \mathbf{x})$ a través:

$$\mathbf{g} = -\nabla \Phi_G \quad (1.42)$$

$$\nabla^2 \Phi_G = -4\pi G \rho \quad (1.43)$$

en donde Φ_G es el potencial gravitacional newtoniano. Para estas situaciones las ecuaciones (1.40, 1.41) deben ser estudiadas simultáneamente en combinación con (1.42, 1.43).

En un fluido ideal por definición no hay disipación de energía entre los elementos de fluido, así como tampoco intercambio de calor, consecuentemente cualquier flujo del fluido ideal es necesariamente adiabático, implicando que la entropía $S(t, \mathbf{x})$ satisfaga [5]:

$$\frac{DS(t, \mathbf{x})}{dt} = \frac{\partial S(t, \mathbf{x})}{\partial t} + u^i \frac{\partial S(t, \mathbf{x})}{\partial x^i} = 0$$

La entropía por unidad de masa $S(t, \mathbf{x})$ combinada con la ecuación de continuidad (1.40) implicará:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho(t, \mathbf{x}) S(t, \mathbf{x})) + \nabla \cdot (\rho(t, \mathbf{x}) S(t, \mathbf{x}) \mathbf{u}) = 0$$

Como se sabe cuando hay disipación las ecuaciones (1.40, 1.41), están remplazadas por:

$$\frac{\partial \rho(t, \mathbf{x})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho(t, \mathbf{x}) \mathbf{u}(t, \mathbf{x})) = 0 \quad (1.44)$$

$$\begin{aligned} \rho(t, \mathbf{x}) \frac{D\mathbf{u}(t, \mathbf{x})}{dt} &= -\nabla P(t, \mathbf{x}) + \eta \nabla^2 \mathbf{u}(t, \mathbf{x}) \\ &+ \left(j + \frac{1}{3}\eta\right) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}(t, \mathbf{x})) + \rho(t, \mathbf{x}) \mathbf{g} + \mathbf{F}_{ext} \end{aligned} \quad (1.45)$$

en donde:

$$\eta \nabla^2 \mathbf{u}, \quad \left(j + \frac{1}{3}\eta\right) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u})$$

expresan los efectos de disipación sobre el flujo. Los coeficientes de transporte (η, j) son denominados coeficiente de viscosidad y bulk viscosidad respectivamente. La ecuación (1.45) es llamada ecuación de Navier-Stokes, y el sistema (1.45, 1.44) describen la llamada *hidrodinámica viscosa* [5].

Con la ayuda de la ecuación de Euler o la ecuación de Navier Stokes el pasaje hacia el régimen de magnetohidrodinámica es relativamente lejano. Como hemos dicho anteriormente un fluido conductor en presencia de (\mathbf{E}, \mathbf{B}) está sujeto a la fuerza de Lorentz. Por otro lado hay conservación de masa, entonces para un fluido conductor en presencia de (\mathbf{E}, \mathbf{B}) la ecuación de continuidad (1.40) será retomada de la misma manera. Modificamos la ecuación de Euler adicionando la fuerza de Lorentz que está actuando sobre un

elemento de fluido. Como hemos indicado la fuerza de Lorentz en el régimen de magnetohidrodinámica está descrita por (1.32), entonces para un fluido conductor (1.40, 1.41) toman la forma [1]-[3]:

$$\rho(t, \mathbf{x}) \frac{D}{dt} \mathbf{u}(t, \mathbf{x}) = -\nabla P(t, \mathbf{x}) + \frac{1}{c} (\mathbf{J}(t, \mathbf{x}) \times \mathbf{B}(t, \mathbf{x})) + \rho(t, \mathbf{x}) \mathbf{g} + \mathbf{F}_{ext} \quad (1.46)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(t, \mathbf{x}) + \nabla \cdot (\rho(t, \mathbf{x}) \mathbf{u}) = 0 \quad (1.47)$$

y estas ecuaciones acopladas con (1.33)-(1.34) determinan el régimen de magnetohidrodinámica asociado a un fluido ideal. En el caso de un fluido no ideal tenemos en lugar de (1.46) la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned} \rho(t, \mathbf{x}) \frac{D}{dt} \mathbf{u}(t, \mathbf{x}) = & -\nabla P(t, \mathbf{x}) + \eta \nabla^2 \mathbf{u}(t, \mathbf{x}) + \left(j + \frac{1}{3} \eta \right) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}(t, \mathbf{x})) \\ & + \frac{1}{c} (\mathbf{J}(t, \mathbf{x}) \times \mathbf{B}(t, \mathbf{x})) + \rho(t, \mathbf{x}) \mathbf{g} + \mathbf{F}_{ext} \end{aligned} \quad (1.48)$$

Entonces el sistema de ecuaciones que describe la interacción de un fluido conductor con un campo electromagnético será dado por (1.33, 1.34, 1.40) combinadas con (1.48). Aunque deseable un estudio de este sistema de ecuaciones, este se encuentra fuera del alcance de este trabajo. Tal sistema es complicado matemáticamente y su análisis no es la prioridad de esta tesis. Cabe mencionar que soluciones exactas de este sistema expresadas en términos de funciones elementales son muy raras y son altamente simétricas como lo es la famosa solución del flujo Hartman [1]. Sin embargo nuestro interés es estudiar solo una parte de este sistema. Como hemos mencionado las variables que describen el estado de un fluido son (ρ, P, \mathbf{u}) , de ellas al menos en el régimen de magnetohidrodinámico solo \mathbf{u} y la conductividad eléctrica σ afectan al campo \mathbf{B} . Entonces los campos electromagnéticos generados por un fluido conductor satisfacen las ecuaciones (1.33, 1.34) las cuales constituyen solo una parte del sistema completo de ecuaciones de magnetohidrodinámica. Suponiéndose adicionalmente que el estado del fluido conductor (ρ, P, \mathbf{u}) es a priori especificado llegaremos a una herramienta que nos permita estudiar los campos electromagnéticos generados por campos \mathbf{u} . En tal teoría la parte hidrodinámica es desacoplada de las ecuaciones electromagnéticas. Tal desacoplamiento nos lleva a la teoría del dinamo, la cual desarrollamos en el capítulo 4. Cabe mencionar que para tal teoría es conveniente definir el siguiente espacio:

$$\chi(\bar{V}) \equiv \{ \mathbf{u} | \mathbf{u} \text{ campo vectorial de clase } C^k \text{ con } k \geq 1, \text{ definido en } \bar{V} \}$$

donde los elementos de $\chi(\bar{V})$ satisfacen las condiciones:

$$a) 0 < \int_{\partial V} \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \, d^3V < \infty, \quad b) \mathbf{n} \cdot \mathbf{u}|_{\partial V} = 0 \text{ o } \mathbf{u}|_{\partial V} = 0$$

en donde \mathbf{n} es el vector normal a ∂V . La condición a) está motivada por consideraciones físicas, y garantiza que la energía cinética del fluido sea acotada. La condición b) implica

que el fluido está confinado en la región V . A veces en los capítulos próximos apelamos a la condición $u \cdot n|_{\partial V} = 0$ o la condición más fuerte $u|_{\partial V} = 0$. Otra restricción que usualmente imponemos al campo u es que satisfaga $\nabla \cdot u = 0$, con la cual expresamos la propiedad que el fluido sea incompresible. Finalmente mencionamos que los elementos de $\chi(\bar{V})$ satisfacen $|u| \ll c$, una condición que está de acuerdo con el régimen de magnetohidrodinámica.

En la teoría del dínamo la ecuación de inducción:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) - \nabla \times [\eta \nabla \times \mathbf{B}] \quad (1.49)$$

desempeña un papel muy importante y es de nuestro interés examinar en detalle su estructura. Primariamente notemos que el gradiente en el tiempo de \mathbf{B} está afectado por dos términos, en donde el primer término $\nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B})$ es llamado término de *advección laminar*. Tal término tiene como consecuencia simplificar o mantener al campo magnético inicial dentro del fluido conductor, en el capítulo 3 estudiaremos detalladamente su impacto sobre una distribución inicial $\mathbf{B}_0(\mathbf{x})$. Por otro lado (1.49) contiene el término $-\nabla \times (\eta \nabla \times \mathbf{B})$ al cual llamamos término de *difusión*. Este término hace todo lo contrario del término de advección. Su impacto se pone en manifiesto si imaginamos que una distribución inicial $\mathbf{B}_0(\mathbf{x})$ se encuentra al interior de un fluido conductor con $u = 0$, y $\sigma \neq 0$. Tal distribución evoluciona en el tiempo según:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \eta \nabla^2 \mathbf{B}$$

la cual es la ecuación de difusión. El comportamiento de las soluciones de tal ecuación es bien conocido y se tiene que el campo \mathbf{B} decae en un tiempo característico llamado tiempo ohmico definido por [1]-[3]:

$$\tau_{ohm} = \frac{4\pi\sigma L^2}{c^2} = \frac{L^2}{\eta}$$

en donde L es la escala de longitud característica en la cual está definida la distribución inicial $\mathbf{B}_0(\mathbf{x})$.

Podemos ver de esto que la ecuación de inducción entonces describe la competencia entre el procesos de advección y difusión. Tal competencia es medida a través del *número magnético de Reynolds* denotado como R_m , el cual es definido mediante ordenes de magnitud de la siguiente manera:

$$R_m \equiv \frac{|\nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B})|}{|-\nabla \times [\eta \nabla \times \mathbf{B}]|} = \frac{|\nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B})|}{\eta |\nabla^2 \mathbf{B}|} \simeq \frac{uL^{-1}}{\eta L^{-2}} \simeq \frac{uL}{\eta} \quad (1.50)$$

donde u es la magnitud de u y L es una escala de longitud asociada a las dimensiones del fluido conductor⁶. Para una configuración que tiene $R_m \gg 1$ el proceso de advección

⁶Es importante mencionar que en la definición (1.50), suponemos que (u, B) varían en la misma escala de longitud L .

domina al de difusión, mientras que si $R_m \ll 1$ tenemos la conclusión inversa.

Es interesante mencionar en este punto que el número magnético de Reynolds R_m desempeña un papel análogo al ordinario número de Reynolds R_η para hidrodinámica viscosa. Considerando la ecuación de Navier-Stokes (1.45), para un flujo incompresible, el número de Reynolds es representado como el cociente del término de advección $\rho(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}$ entre el término de viscosidad $\eta \nabla^2 \mathbf{u}$, es decir [5],

$$R_\eta = \frac{u L}{\lambda}$$

donde u es la magnitud de \mathbf{u} , L es la escala de longitud en la cual está definido el fluido viscoso y $\lambda \equiv \frac{\eta}{\rho}$ viscosidad cinética laminar. Para flujos con $R_\eta \gg 1$, tenemos que el proceso de advección es dominante, mientras que para flujos con $R \ll 1$ tenemos que el término de viscosidad es el dominante.

1.2. Funciones stream y sus propiedades.

En varias ocasiones en los próximos capítulos, emplearemos flujos \mathbf{u} de 2-dimensional o también llamados flujos planos. En esta sección nos tomamos la oportunidad de introducir los conceptos de función stream y streamline, para tales flujos. Para tal flujo, \mathbf{u} en coordenadas cartesianas tiene la forma:

$$\mathbf{u}(x, y) = u^x(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + u^y(x, y) \frac{\partial}{\partial y} \quad (1.51)$$

Sea que adicionalmente el flujo es incompresible, es decir, $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$. Para tal caso es conveniente introducir la función stream $\mathcal{W}(x, y)$ a través de:

$$\mathbf{u}(x, y) = u^x(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + u^y(x, y) \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial \mathcal{W}(x, y)}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial \mathcal{W}(x, y)}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y}$$

lo cual implica que

$$\nabla \cdot \mathbf{u}(x, y) = \frac{\partial^2 \mathcal{W}(x, y)}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \mathcal{W}(x, y)}{\partial y \partial x} = 0$$

Cabe mencionar que la ecuación dinámica a la que se sujeta $\mathcal{W}(x, y)$, dependerá de la naturaleza de las ecuaciones dinámicas que satisfaga el fluido, pero por el momento no la estudiamos. Sin embargo si $\mathcal{W}(x, y)$ es conocido y el flujo es estático, entonces $\mathcal{W}(x, y)$ define una familia de curvas llamadas *streamlines*. Para introducir este concepto consideramos el conjunto:

$$\mathcal{W}^{-1}[c] = \{(x, y) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2, \text{ tal que } \mathcal{W}(x, y) = c \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2 \quad (1.52)$$

Tal conjunto bajo la condición $\nabla \mathcal{W}(x, y) \neq 0$ define una familia de curvas regulares en \mathbb{R}^2 , llamadas streamlines. Por otro lado cada streamline está en correspondencia con las

las curvas integrales de $u \neq 0$, lo cual veremos a continuación.

Sea l es un parametro a lo largo de las las curvas integrales $(x(l), y(l))$ de u , entonces tenemos

$$\frac{dx(l)}{dl} = u^x(x(l), y(l)) \quad (1.53)$$

$$\frac{dy(l)}{dl} = u^y(x(l), y(l)) \quad (1.54)$$

esto implica:

$$\frac{dx(l)}{u^x(x(l), y(l))} = \frac{dy(l)}{u^y(x(l), y(l))}$$

de esta ecuación obtenamos:

$$\begin{aligned} 0 = u^x dx(l) - u^y dy(l) &= -\frac{\partial \mathcal{V}(x(l), y(l))}{\partial x} dx(l) - \frac{\partial \mathcal{V}(x(l), y(l))}{\partial y} dy(l) \\ &= d\mathcal{V}(x(l), y(l)) \end{aligned} \quad (1.55)$$

de lo que podemos concluir las curvas integrales de u estan escritas por $\mathcal{V}(x, y) = \text{cte}$. Notamos también que $\mathcal{V}(x, y)$ satisface la siguiente propiedad:

$$\nabla \mathcal{V}(x, y) \cdot u(x, y) = 0$$

lo cual podemos ver facilmente de:

$$\begin{aligned} u(x, y) \cdot \nabla \mathcal{V}(x, y) &= u^x \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x} + u^y \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial y} \\ &= \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial y} \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x} - \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x} \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial y} = 0 \end{aligned} \quad (1.56)$$

Propiedades de funciones stream serán empleadas en el capítulo 3. Terminamos este capítulo mencionando las ecuaciones de hidrodinámica a través de tensores cartesianos. Sea que $u = u^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ representa el campo del velocidad de un fluido, con (x^1, x^2, x^3) coordenadas cartesianas. Introducimos el objeto:

$$\Pi = \Pi^i{}^k \frac{\partial}{\partial x^i} \otimes \frac{\partial}{\partial x^k} = \left(P(t, \mathbf{x}) \delta^{ik} - \rho(t, \mathbf{x}) u^i(t, \mathbf{x}) u^k(t, \mathbf{x}) \right) \frac{\partial}{\partial x^i} \otimes \frac{\partial}{\partial x^k}$$

el cual es un tensor simétrico de segundo orden, contravariante bajo el cambio de un sistema cartesiano a otro. En terminos de la componentes u^i y $\Pi^i{}^k$ se sigue que (1.40, 1.41) toma la forma

$$\frac{\partial \rho(t, \mathbf{x})}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\rho(t, \mathbf{x}) u^i(t, \mathbf{x}) \right) = 0 \quad (1.57)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\rho(t, \mathbf{x}) u^i(t, \mathbf{x}) \right) = -\frac{\partial \Pi^i{}^k}{\partial x^k} \quad (1.58)$$

mientras la ecuación de Navier-Stokes toma la forma

$$\rho(t, \mathbf{x}) \left[\frac{\partial}{\partial t} u^i(t, \mathbf{x}) + u^k(t, \mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial x^k} u^i(t, \mathbf{x}) \right] = - \frac{\partial}{\partial x^i} P(t, \mathbf{x}) + \frac{\partial \sigma^{ik}}{\partial x^k} \quad (1.59)$$

donde

$$\sigma^{ik} = \eta \left(\frac{\partial u^i}{\partial x^k} + \frac{\partial u^k}{\partial x^i} - \frac{2}{3} \delta^{ik} \frac{\partial u^\mu}{\partial x^\mu} \right) + \delta^{ij} \left(J \frac{\partial u^\mu}{\partial x^\mu} \right) \quad (1.60)$$

representa el tensor de shear del campo u . Las ecuaciones (1.57, 1.59) son equivalentes a (1.40, 1.41) y describen la dinámica asociada a un fluido viscoso, es decir, un fluido no ideal. Para el caso en el cual u es incompresible σ^{ik} tiene la forma:

$$\sigma^{ik} = \eta \left(\frac{\partial u^i}{\partial x^k} + \frac{\partial u^k}{\partial x^i} \right)$$

un término que encontramos en el capítulo 4.

Capítulo 2

Ecuación de inducción.

En el capítulo anterior hemos enfatizado el porque es relevante la ecuación de inducción para esta tesis. Entonces es importante examinar que posibilidades hay de escribir un sistema equivalente a (1.33, 1.34) tal que este sea más fácil de trabajar matemáticamente. Tal indagación no podemos hacerla arbitrariamente, la pauta no la marcan las condiciones físicas presentes. En general no es eficiente tratar la ecuación de inducción por medio de las componentes coordenadas del campo \mathbf{B} . Aunque a priori \mathbf{B} parece tener tres grados de libertad, el hecho de estar restringido por $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$, implica que en realidad solo posee dos y en seguida discutimos la manera que los aislamos. Para una gran parte de este trabajo, consideraremos que el fluido conductor esta restringido a moverse en una región V que será una esfera o un cilindro de extensión infinita.

Supongamos primero que V es una esfera. Por el hecho que trabajamos en (R^3, g) cada campo vectorial suave con dominio en V define unicamente su parte toroidal y parte poloidal. Para una introducción y propiedades basicas de campos poloidales y toroidales ver [6]. En esta sección aplicaremos el tratamiento explicado en [6] para los campos u y \mathbf{B} . Las partes toroidal y poloidal respectivas estan definidas a través de:

$$u = u^T + u^P \equiv (-r \times \nabla S) + (rT + \nabla W) \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \mathbf{B}^T + \mathbf{B}^P = \nabla \times A^P + \nabla \times A^T \\ &\equiv \nabla \times [rT' + \nabla W'] + \nabla \times [-r \times \nabla S'] \\ &= \nabla \times (rT') + \nabla \times [-r \times \nabla S'] \end{aligned} \quad (2.2)$$

donde r es campo vectorial de posición, al cual tomamos respecto de un sistema de coordenadas con origen en el centro de V y $S, T, W, S', T',$ y W' son funciones suaves. Los dos grados de libertad de \mathbf{B} son naturalmente representados en (2.2) por medio de las funciones T' y S' . La eliminación de la función W' de la expresión (2.2) viene como consecuencia de que \mathbf{B} satisface $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$. Por otro lado el campo de velocidad u posee tres grados de libertad expresados mediante las funciones S, T y W . En los capítulos proximos varias veces suponemos que u es incompresible, es decir, $\nabla \cdot u = 0$. Para tales u eliminaremos la función W de la ecuación (2.2). Entonces para un flujo incompresible,

u se expresa:

$$u = \nabla \times (r T) + \nabla \times (-r \times \nabla S)$$

Como veremos a pesar de haber introducido las funciones S , T , S' y T' , estas no implicaban que la ecuación de inducción se vuelva más fácil de tratar matemáticamente. Por ejemplo haciendo uso de (2.1, 2.2) el término de advección toma la forma:

$$\nabla \times (u \times B) = \nabla \times [u^T \times B^T + u^T \times B^P + u^P \times B^T + u^P \times B^P] \quad (2.3)$$

de los cuatro términos solo $u^T \times B^T$ es poloidal y el resto de los términos de (2.3) son arbitrarios. Pero la situación se vuelve más manejable cuando u y B posean simetrías. Los mismos comentarios se aplican al caso donde V representa un cilindro de extensión infinita, aunque cabe mencionar que para tal región los conceptos de campos toroidal y poloidal no están bien definidos, pero si consideramos la presencia de simetrías para (u, B) , la situación se vuelve más manejable. Simetrías que consideramos en este trabajo será simetría que expresa invariancia traslacional a lo largo de una dirección y simetría axial.

Cabe mencionar que los campos axialmente simétricos son comunes en objetos astrofísicos y aunque mientras los sistemas que poseen invariancia traslacional no son comunes, sin embargo simplifican enormemente el tratamiento matemático de las ecuaciones dinámicas. A continuación damos las definiciones asociadas a campos axial simétricos e invariantes traslacionalmente.

Definición 1 Decimos que $\xi = \xi^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha}$ es un *campo rotacional* de (R^3, g) , si la colección $p \in (R^3, g)$, que satisfacen $g(\xi, \xi)|_p = 0$, definen una curva suave referida como el eje y además sus curvas integrales son curvas cerradas, compactas y perpendiculares respecto del eje generado.

Un campo vectorial $A = A^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ es *axialmente simétrico* al respecto del campo rotacional $\xi = \xi^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha}$, si satisface:¹ $\mathcal{L}_\xi A = [\xi, A] = 0$.

En (R^3, g) un campo rotacional es por ejemplo $\xi = \frac{\partial}{\partial \varphi}$ en donde (r, θ, φ) son coordenadas esféricas. Para tales coordenadas g toma la forma:

$$g = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2$$

y $g(\xi, \xi)|_{\theta=0, \pi} = r^2 \sin^2 \theta|_{\theta=0, \pi} = 0$ genera el eje- z y obviamente $\xi = \frac{\partial}{\partial \varphi}$ posee curvas integrales circulares, concéntricas y perpendiculares respecto al eje- z . En coordenadas cilíndricas g , toma la forma:

$$g = d\rho^2 + dz^2 + \rho^2 d\varphi^2$$

¹Donde $[\xi, A] = \left(\xi^i \frac{\partial A^j}{\partial x^i} - A^j \frac{\partial \xi^i}{\partial x^j} \right) \frac{\partial}{\partial x^j}$, para el significado de este objeto ver [4].

en este caso el eje es definido por $g(\xi, \xi)|_{\rho=0} = \rho^2|_{\rho=0} = 0$, generando el eje- z .

Entonces si el campo vectorial $\mathbf{A} = A^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ es axialmente simétrico al respecto $\xi = \frac{\partial}{\partial \varphi}$ se satisface: $\frac{\partial A^i}{\partial \varphi} = 0$, $i = 1, 2, 3$, lo cual implica que sus componentes coordenadas A^i al respecto de coordenadas esféricas o cilíndricas satisfagan $A^i = A^i(r, \theta)$ o $A^i = A^i(\rho, z)$ $i = 1, 2, 3$.

Aunque un campo vectorial rotacional define naturalmente un eje a través de sus ejes, en contraste campos que son translacionalmente invariantes no admiten ejes. Tales campos los definiremos a continuación.

Definición 2 Decimos que $\xi = \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ es un campo translacional, si $g(\xi, \xi) \neq 0 \ \forall p \in (R^3, g)$ y además sus curvas integrales son líneas rectas.

Un campo vectorial $\mathbf{A} = A^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, es invariante *translacional*, al respecto del campo translacional $\xi = \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, si satisface: $L_\xi \mathbf{A} = [\xi, \mathbf{A}] = 0$.

En (R^3, g) equipada con coordenadas cartesianas (x, y, z) , el campo $\xi = \frac{\partial}{\partial z}$ es un campo translacional, ya que tenemos que $g(\xi, \xi) \neq 0$ y también sus curvas integrales son líneas rectas.

Decimos que el campo vectorial \mathbf{A} , es invariante bajo translaciones al respecto $\xi = \frac{\partial}{\partial z}$, si sus componentes cartesianas satisfacen $\frac{\partial A^i}{\partial z} = 0$ implicando que $A^i = A^i(x, y)$ con $i = 1, 2, 3$.

2.1. Ecuación de inducción para campos translacionalmente invariantes.

Después haber introducido las definiciones de campo axial simétrico y campo invariante translacionalmente, comenzaremos el análisis de (1.33)-(1.34) primero bajo la suposición que (u, \mathbf{B}) son invariantes translacionalmente. Asumimos entonces que u es definido en $V \subset R^3$ que representa un cilindro de extensión infinita. Introducimos coordenadas cartesianas (x, y, z) con el eje- z a lo largo del eje del cilindro e identificamos $\xi = \frac{\partial}{\partial z}$ como el campo translacional. De la definición 2 y la suposición que (u, \mathbf{B}) son invariantes translacionalmente al respecto de $\xi = \frac{\partial}{\partial z}$, tenemos la siguiente representación:

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= B^x(t, x, y) \mathbf{e}_x + B^y(t, x, y) \mathbf{e}_y + B^z(t, x, y) \mathbf{e}_z \\ u &= u^x(t, x, y) \mathbf{e}_x + u^y(t, x, y) \mathbf{e}_y + u^z(t, x, y) \mathbf{e}_z \end{aligned}$$

y para tal simetría es conveniente representar \mathbf{B} de la siguiente manera²:

$$\begin{aligned}\mathbf{B}(t, x, y) &= \mathbf{B}^I(t, x, y) + \mathbf{B}^P(t, x, y) \\ &= B(t, x, y) \mathbf{e}_z + \nabla \times \mathbf{A}^I(t, x, y) \\ &= B(t, x, y) \mathbf{e}_z + \nabla \times (A(t, x, y) \mathbf{e}_z)\end{aligned}\quad (2.4)$$

Con tal representación satisfacemos inmediatamente $\nabla \cdot \mathbf{B}^I = 0$ y $\nabla \cdot \mathbf{B}^P = 0$, implicando que (2.4) satisfaga $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$. Bajo la suposición que u es incompresible y en combinación con la propiedad $\nabla \cdot \mathbf{u}^I = 0$, tenemos la implicación $\nabla \cdot \mathbf{u}^P = 0$. De este último hecho tenemos:

$$\mathbf{u}^P \equiv \nabla \times \mathbf{w}^I$$

entonces

$$\begin{aligned}u &= u^P + u^I \\ &= \nabla \times (\mathbf{w}^I) + u(t, x, y) \mathbf{e}_z \\ &= \nabla \times (w(t, x, y) \mathbf{e}_z) + u(t, x, y) \mathbf{e}_z\end{aligned}\quad (2.5)$$

Mencionamos aquí que los campos $\mathbf{A}^I = A(t, x, y)\mathbf{e}_z$ y $\mathbf{w}^I = w(t, x, y)\mathbf{e}_z$ no son únicamente definidos. Por ejemplo \mathbf{A}^I y $\mathbf{A}^I + \nabla f$ generan el mismo \mathbf{B}^P , discutiremos más sobre tal libertad más adelante. De las relaciones (2.4, 2.5) tenemos la implicación $\mathbf{u}^I \times \mathbf{B}^I = 0$ porque ambos campos vectoriales son paralelos, mientras

$$a) \quad \mathbf{u}^P \times \mathbf{B}^P = \left[\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial A}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial A}{\partial x} \right] \mathbf{e}_z$$

$$b) \quad \mathbf{u}^P \times \mathbf{B}^I = -B \left[\frac{\partial u}{\partial x} \mathbf{e}_x + \frac{\partial u}{\partial y} \mathbf{e}_y \right]$$

$$c) \quad \mathbf{u}^I \times \mathbf{B}^P = u \left[\frac{\partial B}{\partial x} \mathbf{e}_x + \frac{\partial B}{\partial y} \mathbf{e}_y \right]$$

Tenemos entonces que $\mathbf{u}^P \times \mathbf{B}^P$ define un campo toroidal, mientras que $\mathbf{u}^P \times \mathbf{B}^I$ y $\mathbf{u}^I \times \mathbf{B}^P$ definen campos poloidales.

Escribiendo $\mathbf{B} = \mathbf{B}^I + \mathbf{B}^P$ la ecuación de inducción toma la forma:

$$\frac{\partial \mathbf{B}^P}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{u}^P \times \mathbf{B}^P) - \nabla \times [\eta \nabla \times \mathbf{B}^P] \quad (2.6)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}^I}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{u}^P \times \mathbf{B}^I + \mathbf{u}^I \times \mathbf{B}^P) - \nabla \times [\eta \nabla \times \mathbf{B}^I] \quad (2.7)$$

²Para sistemas con invariancia traslacional la componente toroidal es paralela $\xi = \frac{\partial}{\partial z} = \mathbf{e}_z$.

Haciendo uso de la representación $\mathbf{B}^P = \nabla \times (A(t, x, y) \mathbf{e}_z)$ en (2.6) implica

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times (A(t, x, y) \mathbf{e}_z) &= \nabla \times [\mathbf{u}^P \times \nabla \times (A(t, x, y) \mathbf{e}_z)] \\ &\quad - \nabla \times \eta \nabla \times [\nabla \times (A(t, x, y) \mathbf{e}_z)] \end{aligned}$$

Commutando el operador $\frac{\partial}{\partial t}$ con $\nabla \times$ llegamos:

$$\nabla \times \left\{ \frac{\partial}{\partial t} (A(t, x, y) \mathbf{e}_z) - \mathbf{u}^P \times [\nabla \times (A(t, x, y) \mathbf{e}_z)] + \eta \nabla \times \nabla \times (A(t, x, y) \mathbf{e}_z) \right\} = 0$$

implicando:

$$\frac{\partial}{\partial t} (A(t, x, y) \mathbf{e}_z) - \mathbf{u}^P(t, x, y) \times [\nabla \times (A(t, x, y) \mathbf{e}_z)] + \eta \nabla \times \nabla \times (A(t, x, y) \mathbf{e}_z) = \nabla h$$

en donde h es una función arbitraria. Por otro lado tenemos la libertad de $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A} + \nabla g$, entonces la ecuación anterior bajo tal transformación nos lleva a:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (A(t, x, y) \mathbf{e}_z) - \mathbf{u}^P(t, x, y) \times [\nabla \times (A(t, x, y) \mathbf{e}_z)] + \eta \nabla \times \nabla \times (A(t, x, y) \mathbf{e}_z) \\ = \nabla h - \nabla \frac{\partial g}{\partial t} = \nabla F(t, x, y, z) \end{aligned} \quad (2.8)$$

donde $F(t, x, y, z)$ es una función suave arbitraria, más adelante discutiremos respecto de la libertad que esta función implica. Podemos expresar la ecuación anterior como:

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A}^T(t, x, y) = \mathbf{u}^P(t, x, y) \times (\nabla \times \mathbf{A}^T(t, x, y)) + \eta \nabla^2 \mathbf{A}^T + \nabla F(t, x, y, z) \quad (2.9)$$

Notamos de (2.8) que el segundo término de lado izquierdo se simplifica como:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^P \times (\nabla \times \mathbf{A}^T) &= (u^x \mathbf{e}_x + u^y \mathbf{e}_y) \times \left(\frac{\partial A}{\partial y} \mathbf{e}_x - \frac{\partial A}{\partial x} \mathbf{e}_y \right) \\ &= - \left(u^x \frac{\partial A}{\partial x} + u^y \frac{\partial A}{\partial y} \right) \mathbf{e}_z = - \left[(\mathbf{u}^P \cdot \nabla) A \right] \mathbf{e}_z \end{aligned}$$

en cuanto al tercer término del lado izquierdo de (2.8), utilizando $\nabla \cdot \mathbf{A}^T = 0$, tenemos:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \mathbf{A}^T &= -\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}^T) + \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}^T) = -\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) \\ &= -\nabla \times \left[\frac{\partial A}{\partial y} \mathbf{e}_x - \frac{\partial A}{\partial x} \mathbf{e}_y \right] = (\nabla^2 A) \mathbf{e}_z \end{aligned}$$

entonces la ecuación (2.8), se reescribe de la forma:

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} A(t, x, y) + (\mathbf{u}^P(t, x, y) \cdot \nabla) A(t, x, y) - \eta \nabla^2 A(t, x, y) \right] \mathbf{e}_z = \nabla F(t, x, y, z) \quad (2.10)$$

de la que se sigue:

$$\frac{\partial}{\partial t} A(t, x, y) + (u^P(t, x, y) \cdot \nabla) A(t, x, y) + -\eta \nabla^2 A(t, x, y) = \frac{\partial F(t, x, y, z)}{\partial z} \quad (2.11)$$

Diferenciamos la ecuación anterior en la dirección $\frac{\partial}{\partial z}$ y obtenamos:

$$\frac{\partial^2 F(t, x, y, z)}{\partial z^2} = 0$$

La solución de esta ecuación es de la forma $F(t, x, y, z) = k(t, x, y) z + c(t, x, y)$ con $k(t, x, y)$, $c(t, x, y)$ funciones arbitrarias. De lo que implica:

$$\frac{\partial F}{\partial z} = k(t, x, y)$$

Para entender el significado físico del término $k(t, x, y)$, derivamos la ecuación (2.11) de manera distinta. Empezamos de la ley de Ampere :

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \sigma \left[\mathbf{E} + \frac{\mathbf{u} \times \mathbf{B}}{c} \right]$$

y escribimos:

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}^P = \nabla \times \mathbf{A}^T, \quad \mathbf{E} = \mathbf{E}^T = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}^T}{\partial t} - \nabla \phi, \quad \mathbf{u} = \mathbf{u}^P$$

de estas dos últimas ecuaciones tenemos:

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}^T) = \frac{4\pi}{c} \sigma \left[-\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}^T}{\partial t} - \nabla \phi + \frac{\mathbf{u}^P + \nabla \times \mathbf{A}^T}{c} \right]$$

de la que se sigue:

$$\frac{\partial \mathbf{A}^T}{\partial t} = \mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{A}^T) + \eta \nabla^2 \mathbf{A}^T - c \nabla \phi \quad (2.12)$$

Comparando (2.9) y (2.12) vemos que ∇F representa un campo eléctrico que satisface $\nabla \times \mathbf{E} = 0$, es decir, $\mathbf{E} = \nabla \phi$. De esta manera interpretamos $\frac{\partial F}{\partial z} = k(t, x, y)$ es un campo eléctrico uniforme en la dirección \mathbf{e}_z . Tal campo por la simetría translacional se encuentra presente también en el infinito. Para los problemas que queremos tratar asumimos la ausencia de tales campos y de aquí en adelante tomamos: $k(t, x, y) = 0$. Entonces para nuestro estudio consideraremos:

$$\frac{\partial}{\partial t} A(t, x, y) + (u^P(t, x, y) \cdot \nabla) A(t, x, y) - \eta \nabla^2 A(t, x, y) = 0 \quad (2.13)$$

la cual es una de las ecuaciones centrales de esta sección. Una vez que hemos especificado u^P , tal ecuación acoplada con condiciones a la frontera y una condición inicial determinada $A=A(t, x, y)$ y subsiguientemente al campo \mathbf{B}^P en la región V .

Consideremos ahora la ecuación (2.7) y tomemos en cuenta la representación $\mathbf{B}^I = B(t, x, y) \mathbf{e}_z$. Primariamente apalemos a la siguiente identidad:

$$\nabla \times [\mathbf{u}^P \times \mathbf{B}^I] = \mathbf{u}^P (\nabla \cdot \mathbf{B}^I) - \mathbf{B}^I (\nabla \cdot \mathbf{u}^P) + (\mathbf{B}^I \cdot \nabla) \mathbf{u}^P - (\mathbf{u}^P \cdot \nabla) \mathbf{B}^I$$

y recordamos que: $\nabla \cdot \mathbf{B}^I = \nabla \cdot \mathbf{u}^P = 0$, implique que la identidad anterior toma la forma:

$$\begin{aligned} \nabla \times [\mathbf{u}^P \times \mathbf{B}^I] &= (\mathbf{B}^I \cdot \nabla) \mathbf{u}^P - (\mathbf{u}^P \cdot \nabla) \mathbf{B}^I \\ &= (B(t, x, y) \mathbf{e}_z \cdot \nabla) \mathbf{u}^P - (\mathbf{u}^P \cdot \nabla) (B(t, x, y) \mathbf{e}_z) \\ &= -[(\mathbf{u}^P \cdot \nabla) B(t, x, y)] \mathbf{e}_z \end{aligned} \quad (2.14)$$

en donde el termino $(B(t, x, y) \mathbf{e}_z \cdot \nabla) \mathbf{u}^P(t, x, y) = B(t, x, y) \nabla_{\mathbf{e}_z} \mathbf{u}^P = 0$ debido a la simetría traslacional. Similarmente para el otro termino de (2.7) tenemos:

$$\begin{aligned} \nabla \times [\mathbf{u}^I \times \mathbf{B}^P] &= (\mathbf{B}^P \cdot \nabla) \mathbf{u}^I - (\mathbf{u}^I \cdot \nabla) \mathbf{B}^P \\ &= (\mathbf{B}^P \cdot \nabla) (u(t, x, y) \mathbf{e}_z) - (u(t, x, y) \mathbf{e}_z \cdot \nabla) \mathbf{B}^P \\ &= [(\mathbf{B}^P(t, x, y) \cdot \nabla) u(t, x, y)] \mathbf{e}_z \end{aligned}$$

en donde tenemos también: $u(\mathbf{e}_z \cdot \nabla) \mathbf{B}^P = u \nabla_{\mathbf{e}_z} \mathbf{B}^P = 0$. Finalmente el termino de difusión en (2.7) toma la forma:

$$\begin{aligned} \nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}^I) &= \nabla (\nabla \cdot \mathbf{B}^I) - \nabla^2 \mathbf{B}^I \\ &= -\nabla^2 \mathbf{B}^I = -\nabla^2 (B(t, x, y) \mathbf{e}_z) = -(\nabla^2 B(t, x, y)) \mathbf{e}_z \end{aligned}$$

con ∇^2 el operador laplaciano que actúa sobre escalares. Tomando en cuenta tales relaciones (2.7) implica que la función $B = B(t, x, y)$ satisface:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} B(t, x, y) &= -(\mathbf{u}^P(t, x, y) \cdot \nabla) B(t, x, y) + (\mathbf{B}^P(t, x, y) \cdot \nabla) u(t, x, y) \\ &\quad + \eta \nabla^2 B(t, x, y) \end{aligned} \quad (2.15)$$

Esta es otra de las ecuaciones importantes, que describe el comportamiento del campo \mathbf{B}^I . En resumen la ecuación de inducción y $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ para (\mathbf{u}, \mathbf{B}) invariantes traslacionalmente son equivalente a el sistema de las ecuaciones (2.13, 2.15). Analicemos tal sistema en el próximo capítulo.

2.2. Ecuación de inducción para campos axial simétricos.

Realicémos en seguida un análisis del sistema (1.33, 1.34) bajo la suposición que (\mathbf{u}, \mathbf{B}) son axial simétricos al respecto del mismo eje y adicionalmente \mathbf{u} es incompresible.

Assumimos que V representa una región esférica, por lo cual es conveniente emplear un sistema de coordenadas esféricas (r, θ, φ) con origen en el centro de V , e identificamos el campo rotacional como $\xi = \frac{\partial}{\partial \varphi}$. Por tanto de la definición 1 tenemos la siguiente representación:

$$\mathbf{B}(t, r, \theta) = B^r(t, r, \theta)\mathbf{a}_r + B^\theta(t, r, \theta)\mathbf{a}_\theta + B^\varphi(t, r, \theta)\mathbf{a}_\varphi \quad (2.16)$$

$$\mathbf{u}(t, r, \theta) = u^r(t, r, \theta)\mathbf{a}_r + u^\theta(t, r, \theta)\mathbf{a}_\theta + u^\varphi(t, r, \theta)\mathbf{a}_\varphi \quad (2.17)$$

Introducimos las partes toroidales y poloidales de los campos (\mathbf{u}, \mathbf{B}) a través de:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(t, r, \theta) &= \mathbf{B}^T(t, r, \theta) + \mathbf{B}^P(t, r, \theta) = B(t, r, \theta)\mathbf{a}_\varphi + \nabla \times \mathbf{A}^T(t, r, \theta) \\ &= B(t, r, \theta)\mathbf{a}_\varphi + \nabla \times [A(t, r, \theta)\mathbf{a}_\varphi] \end{aligned} \quad (2.18)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(t, r, \theta) &= \mathbf{u}^T(t, r, \theta) + \mathbf{u}^P(t, r, \theta) = u(t, r, \theta)\mathbf{a}_\varphi + \nabla \times \mathbf{w}^T(t, r, \theta) \\ &= u(t, r, \theta)\mathbf{a}_\varphi + \nabla \times [w(t, r, \theta)\mathbf{a}_\varphi] \end{aligned} \quad (2.19)$$

como consecuencia de la representación (2.18), la ecuación $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ es satisfecha. También tenemos $\mathbf{u}^T \times \mathbf{B}^T = 0$ porque ambos campos vectoriales son paralelos a \mathbf{a}_φ , mientras de (2.19)- (2.18) se sigue que a través del álgebra:

$$(d) \quad \mathbf{u}^P \times \mathbf{B}^P = \left\{ \frac{\partial}{\partial r}(r w) \frac{\partial}{\partial \theta}(A \operatorname{sen} \theta) - \frac{\partial}{\partial \theta}(w \operatorname{sen} \theta) \frac{\partial}{\partial r}(r A) \right\} \frac{1}{r^2 \operatorname{sen} \theta} \mathbf{a}_\varphi$$

$$(e) \quad \mathbf{u}^T \times \mathbf{B}^P = u \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(A r) \mathbf{a}_r + \frac{u}{r \operatorname{sen} \theta} \frac{\partial}{\partial \theta}(A \operatorname{sen} \theta) \mathbf{a}_\theta$$

$$(f) \quad \mathbf{u}^P \times \mathbf{B}^T = -\frac{B}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r u) \mathbf{a}_r - \frac{B}{r \operatorname{sen} \theta} \frac{\partial}{\partial \theta}(u \operatorname{sen} \theta) \mathbf{a}_\theta$$

entonces $\mathbf{u}^P \times \mathbf{B}^P$ es un campo toroidal, mientras que $\mathbf{u}^T \times \mathbf{B}^P$ y $\mathbf{u}^P \times \mathbf{B}^T$ son campos poloidales. Utilizando la descomposición (2.18) y (2.19) en la ecuación de inducción y tomando en cuenta la definición 1 obtenamos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}^T(t, r, \theta) &= \nabla \times [\mathbf{u}^T(t, r, \theta) \times \mathbf{B}^P(t, r, \theta) + \mathbf{u}^P(t, r, \theta) \times \mathbf{B}^T(t, r, \theta)] \\ &\quad - \nabla \times (\eta \nabla \times \mathbf{B}^T(t, r, \theta)) \end{aligned} \quad (2.20)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}^P(t, r, \theta) = \nabla \times [\mathbf{u}^P(t, r, \theta) \times \mathbf{B}^P(t, r, \theta)] - \nabla \times (\eta \nabla \times \mathbf{B}^P(t, r, \theta)) \quad (2.21)$$

Tales ecuaciones puedan ser más simplificadas haciendo uso de (2.18).

Comenzamos con la ecuación (2.21) la cual es equivalente a:

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbf{A}^T(t, r, \theta) = \nabla \times [\mathbf{u}^P(t, r, \theta) \times (\nabla \times \mathbf{A}^T(t, r, \theta))] - \nabla \times [\eta \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}^T(t, r, \theta))]$$

Combinando $\frac{\partial}{\partial t}$ y $\nabla \times$, obtenamos:

$$\nabla \times \left[\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A}^T - \mathbf{u}^P \times (\nabla \times \mathbf{A}^T) + \eta \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}^T) \right] = 0$$

esta ecuación tiene la forma $\nabla \times f = 0$ lo cual implica que $f \equiv \nabla g$. Sin pérdida de generalidad supongamos³ $g = 0$, de lo cual llegamos:

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A}^T - \mathbf{u}^P \times (\nabla \times \mathbf{A}^T) + \eta \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}^T) = 0 \quad (2.22)$$

Usamos después esta ecuación expresada en coordenadas cilíndricas (ρ, φ, z) . Escribimos $\mathbf{A}^T = A(t, \rho, z) \mathbf{a}_\varphi$, entonces (2.22) implica

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (A(t, \rho, z) \mathbf{a}_\varphi) &= \left[\mathbf{u}^P(t, \rho, z) \times \nabla \times (A(t, \rho, z) \mathbf{a}_\varphi) \right] \\ &\quad - \eta \nabla \times [\nabla \times (A(t, \rho, z) \mathbf{a}_\varphi)] \end{aligned} \quad (2.23)$$

Para el último término de esta ecuación apelamos a la siguiente identidad:

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) + \nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}) \quad (2.24)$$

y la aplicamos para $\mathbf{A} = A(t, \rho, z) \mathbf{a}_\varphi$, entonces:

$$\begin{aligned} \nabla^2 [A(t, \rho, z) \mathbf{a}_\varphi] &\equiv -\nabla \times \nabla [A(t, \rho, z) \mathbf{a}_\varphi] + \nabla \{ \nabla \cdot [A(t, \rho, z) \mathbf{a}_\varphi] \} \\ &= -\nabla \times \left[-\frac{\partial A}{\partial z} \mathbf{a}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A) \mathbf{a}_z \right] + \nabla \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} A \right) \end{aligned}$$

Pero el último término debido a la simetría axial es cero, entonces:

$$\begin{aligned} \nabla^2 [A(t, \rho, z) \mathbf{a}_\varphi] &= - \left[-\frac{\partial^2}{\partial z^2} A + \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A) \right) \right] \mathbf{a}_\varphi - \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial^2}{\partial \varphi \partial z} A \right) \mathbf{a}_z \\ &\quad - \left(\frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \rho \partial \rho} (\rho A) \right) \mathbf{a}_\rho \end{aligned} \quad (2.25)$$

nuevamente debido a la simetría axial los dos últimos términos son nulos. Por lo cual tenemos la siguiente identidad:

$$\nabla^2 [A(t, \rho, z) \mathbf{a}_\varphi] = - \left[-\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A) \right) \right] \mathbf{a}_\varphi = \left[\left(\nabla^2 - \frac{1}{\rho^2} \right) A(t, \rho, z) \right] \mathbf{a}_\varphi \quad (2.26)$$

³Tal condición viene por el hecho que la contribución de ∇g a \mathbf{A}^T , para sistemas axial simétricos es cero.

Ahora consideremos el primer término de la ecuación (2.23):

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^P \times (\nabla \times (A(t, \rho, z) \mathbf{e}_\rho)) &= (u^P \mathbf{e}_\rho + u^z \mathbf{e}_z) \times \left[\left(-\frac{\partial A}{\partial z} \right) \mathbf{e}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A) \mathbf{e}_z \right] \\ &= - \left[u^P \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A) + u^z \frac{\partial}{\partial z} (\rho A) \right] \frac{\mathbf{e}_\varphi}{\rho} \\ &= - \left[(\mathbf{u}^P \cdot \nabla) (\rho A) \right] \frac{\mathbf{e}_\varphi}{\rho} \end{aligned}$$

Entonces podemos reescribirla la ecuación (2.23) de la siguiente forma:

$$\frac{\partial}{\partial t} A(t, \rho, z) + \frac{1}{\rho} [\mathbf{u}^P(t, \rho, z) \cdot \nabla] (A(t, \rho, z) \rho) = \eta \left(\nabla^2 - \frac{1}{\rho^2} \right) A(t, \rho, z) \quad (2.27)$$

Tal ecuación⁴ se simplifica si introducimos una nueva función $X = X(t, \rho, z)$ a través de

$$X(t, \rho, z) \equiv \rho A(t, \rho, z)$$

se sigue entonces que (2.27) toma la forma:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{X}{\rho} \right) + \frac{1}{\rho} (\mathbf{u}^P \cdot \nabla) X = \eta \left(\nabla^2 \left(\frac{X}{\rho} \right) - \frac{1}{\rho^2} \frac{X}{\rho} \right)$$

Desarrollando el término de la parte derecha tenemos:

$$\nabla^2 \left(\frac{X}{\rho} \right) - \frac{1}{\rho^2} \frac{X}{\rho} = \frac{1}{\rho} \left[\left(\nabla^2 X - \frac{2}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} X + \frac{X}{\rho^2} \right) - \frac{X}{\rho^2} \right] = \frac{1}{\rho} \left(\nabla^2 X - \frac{2}{\rho} \frac{\partial X}{\partial \rho} \right)$$

por tanto llegamos a que la función X satisface:

$$\frac{\partial X}{\partial t} + (\mathbf{u}^P \cdot \nabla) X = \eta \left(\nabla^2 - \frac{2}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \right) X \quad (2.28)$$

La ecuación (2.27) que es equivalente a (2.28) será utilizada más adelante.

Consideremos ahora (2.20), tal ecuación posee términos de la forma $\nabla \times (\mathbf{u}^I \times \mathbf{B}^P)$, $\nabla \times (\mathbf{u}^P \times \mathbf{B}^I)$ y $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}^I)$, tomando en cuenta la siguiente representación calculamos tales términos:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}^I &= B(t, \rho, z) \mathbf{e}_\varphi \\ \mathbf{u} &= \mathbf{u}^P + \mathbf{u}^I = u^P + u(t, \rho, z) \mathbf{e}_\varphi \end{aligned}$$

Comencemos con el término:

$$\nabla \times (\mathbf{u}^I \times \mathbf{B}^P) = (\mathbf{B}^P \cdot \nabla) \mathbf{u}^I - (\mathbf{u}^I \cdot \nabla) \mathbf{B}^P \quad (2.29)$$

⁴Aunque aquí discutimos la forma particular de la ecuación (2.23) en coordenadas cilíndricas, igualmente podemos utilizar las coordenadas esféricas (r, θ, φ) , respecto a estas tenemos $A^I = A(r, \varphi, \theta) \mathbf{e}_\varphi$.

para el primer término tenemos:

$$\begin{aligned} (\mathbf{B}^P \cdot \nabla) u^I &= \left(B^P \frac{\partial}{\partial \rho} + B^z \frac{\partial}{\partial z} \right) \left(\frac{u}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \\ &= B^P \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{u}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) + B^z \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{u}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \end{aligned}$$

tal expresión involucra diferenciación del campo $\frac{\partial}{\partial \varphi}$ en la dirección de $\frac{\partial}{\partial \rho}$ y $\frac{\partial}{\partial z}$, para hacer tal cálculo recordamos la definición (1.1) que se dio en el capítulo 1:

$$\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{u}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) = \left(\frac{u}{\rho} \right) \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial \rho}} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{u}{\rho} \right) \frac{\partial}{\partial \varphi}$$

obviamente tenemos:

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial \rho}} \frac{\partial}{\partial \varphi} = \Gamma_{\varphi \rho}^k \frac{\partial}{\partial x^k} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi}$$

con lo cual obtenemos:

$$\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{u}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) = \left(\frac{u}{\rho} \right) \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{u}{\rho} \right) \frac{\partial}{\partial \varphi}$$

Similatamente para el otro término:

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{u}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) = \left(\frac{u}{\rho} \right) \nabla_{\frac{\partial}{\partial z}} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{u}{\rho} \right) \frac{\partial}{\partial \varphi}$$

notando que $\nabla_{\frac{\partial}{\partial z}} \frac{\partial}{\partial \varphi} = 0$, así que obtenemos:

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{u}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{u}{\rho} \right) \frac{\partial}{\partial \varphi}$$

entonces finalmente llegamos a:

$$(\mathbf{B}^P \cdot \nabla) u^I = B^P \left(\frac{u}{\rho} \right) \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} + B^P \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{u}{\rho} \right) \frac{\partial}{\partial \varphi} + B^z \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{u}{\rho} \right) \frac{\partial}{\partial \varphi} \quad (2.30)$$

Cabe mencionar que la triada ortonormal al respecto de la carta (ρ, φ, z) es definida por

$$\left\{ \mathbf{e}_\rho = \frac{\partial}{\partial \rho}, \mathbf{e}_\varphi = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi}, \mathbf{e}_z = \frac{\partial}{\partial z} \right\}$$

así que (2.30) al respecto de la base ortonormal es expresada:

$$\begin{aligned} (\mathbf{B}^P \cdot \nabla) u^I &= B^P \left(\frac{u}{\rho} \right) \mathbf{e}_\varphi + B^P \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{u}{\rho} \right) \mathbf{e}_\varphi + B^z \rho \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{u}{\rho} \right) \mathbf{e}_\varphi \\ &= \rho \left[(\mathbf{B}^P \cdot \nabla) \left(\frac{u}{\rho} \right) + B^P \left(\frac{u}{\rho^2} \right) \right] \mathbf{e}_\varphi \end{aligned} \quad (2.31)$$

De una manera semejante para el segundo término de la ecuación (2.29) obtenamos:

$$(\mathbf{u}^T \cdot \nabla) \mathbf{B}^P = \frac{u}{\rho} B^P \mathbf{e}_\varphi \quad (2.32)$$

Por lo tanto encontramos que:

$$\nabla \times [\mathbf{u}^T \times \mathbf{B}^P] = \left[\rho (\mathbf{B}^P \cdot \nabla) \left(\frac{u}{\rho} \right) \right] \mathbf{e}_\varphi \quad (2.33)$$

Ahora consideremos el otro término que contribuye al proceso de advección:

$$\nabla \times (\mathbf{u}^P \times \mathbf{B}^T) = (\mathbf{B}^T \cdot \nabla) \mathbf{u}^P - (\mathbf{u}^P \cdot \nabla) \mathbf{B}^T \quad (2.34)$$

Procedamos análogamente al análisis hecho para obtener el término anterior, llegando así a:

$$\nabla \times (\mathbf{u}^P \times \mathbf{B}^T) = \rho (\mathbf{u}^P \cdot \nabla) \left(\frac{B}{\rho} \right) \quad (2.35)$$

Finalmente para el último término de la ecuación (2.20), usando la identidad (2.26), obtenamos:

$$-\nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}^T) = \left(\nabla^2 B - \frac{B}{r^2} \right) \mathbf{e}_\varphi \quad (2.36)$$

Utilizando (2.33, 2.35, 2.36) podemos describir la ecuación (2.20) en la forma:

$$\frac{\partial B}{\partial t} = \rho (\mathbf{B}^P \cdot \nabla) \left(\frac{u}{\rho} \right) - \rho (\mathbf{u}^P \cdot \nabla) \left(\frac{B}{\rho} \right) + \eta \left(\nabla^2 - \frac{1}{r^2} \right) B \quad (2.37)$$

Entonces (2.27) y (2.37) definen otro sistema de ecuaciones equivalente al sistema de la ecuación de inducción para (\mathbf{u}, \mathbf{B}) campos axial simétricos definidos en V y $\nabla \cdot \mathbf{B}$, con u incompresible.

2.3. Ecuación de inducción para campos no axial simétricos.

Hemos visto en las dos últimas secciones que la ecuación de inducción se simplifica considerablemente para campos (\mathbf{B}, \mathbf{u}) que exhiben invariancia traslacional y simetría axial. Por otro lado hay otras situaciones astrofísicas en donde tales simetrías no están presentes. Entonces enfrentamos el reto de estudiar la ecuación de inducción para (\mathbf{B}, \mathbf{u}) arbitrarios, es decir, campos que no poseen ninguna simetría. En esta sección estudiaremos tal situación. Primeramente comencemos asumiendo que u es definido en una región esférica V , entonces las componentes poloidal y toroidal de los campos (\mathbf{B}, \mathbf{u}) están bien

definidas. Motivados por un comentario en [12], expresamos (\mathbf{B}, \mathbf{u}) en sus partes axial simétricas y partes no axial simétricas, a partir de la siguiente descomposición:

$$\mathbf{B}(t, \mathbf{x}) = \mathbf{B}'(t, \mathbf{x}) + \bar{\mathbf{B}}(t, \mathbf{x}) \quad (2.38)$$

$$\mathbf{u}(t, \mathbf{x}) = \mathbf{u}'(t, \mathbf{x}) + \bar{\mathbf{u}}(t, \mathbf{x}) \quad (2.39)$$

en donde $(\mathbf{B}', \mathbf{u}')$ y $(\bar{\mathbf{B}}, \bar{\mathbf{u}})$ denotan la parte axial simétrica⁵ y no axial simétrica de (\mathbf{B}, \mathbf{u}) respectivamente. Ante tal descomposición tenemos que la ecuación de inducción implica:

$$\frac{\partial \mathbf{B}'}{\partial t} - \nabla \times (\mathbf{u}' \times \mathbf{B}') - \eta \nabla^2 \mathbf{B}' = \nabla \times (\bar{\mathbf{u}} \times \bar{\mathbf{B}})' \quad (2.40)$$

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{B}}}{\partial t} - \nabla \times [\mathbf{u}' \times \bar{\mathbf{B}} + (\bar{\mathbf{u}} \times \bar{\mathbf{B}})] - \eta \nabla^2 \bar{\mathbf{B}} = \nabla \times (\bar{\mathbf{u}} \times \mathbf{B}') \quad (2.41)$$

Este es un sistema de ecuaciones acoplado, donde vemos que $\nabla \times (\bar{\mathbf{u}} \times \bar{\mathbf{B}})'$ actúa como fuente para \mathbf{B}' , así como también $\nabla \times (\bar{\mathbf{u}} \times \mathbf{B}')$ actúa como una fuente para $\bar{\mathbf{B}}$. Notamos que la ecuación (2.40) en el caso particular en el cual $\mathbf{u} = \mathbf{u}'$, es decir, cuando el campo de velocidad es axial simétrico, fue tratada en la sección anterior. Nuestro interés en esta sección está enfocado en tratar la ecuación (2.41) asociada a $\bar{\mathbf{B}}$ no axial simétrico.

Sea que expresamos $\bar{\mathbf{B}}$ y \mathbf{u}' en sus componentes toroidal y poloidal, es decir,

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{B}} &= \bar{\mathbf{B}}^P(t, r, \theta, \varphi) + \bar{\mathbf{B}}^T(t, r, \theta, \varphi) \\ \mathbf{u}' &= \mathbf{u}^{P'}(t, r, \theta) + \mathbf{u}^{T'}(t, r, \theta) = \nabla \times (w(t, r, \theta) \mathbf{a}_\varphi) + (u(t, r, \theta) \mathbf{a}_\varphi) \end{aligned}$$

donde (r, θ, φ) son coordenadas esféricas con origen en el centro de V . Restringimos nuestro análisis solo para el caso en el que \mathbf{u} es toroidal y axial simétrico, es decir, $\mathbf{u} = \mathbf{u}' = u(t, r, \theta) \mathbf{a}_\varphi$. Para tal \mathbf{u} la ecuación (2.41) implica que $\bar{\mathbf{B}}$ satisface:

$$\frac{\partial}{\partial t} \bar{\mathbf{B}}(t, r, \theta, \varphi) - \nabla \times (\mathbf{u}'(t, r, \theta) \times \bar{\mathbf{B}}(t, r, \theta, \varphi)) + \eta \nabla \times (\nabla \times \bar{\mathbf{B}}(t, r, \theta, \varphi)) = 0 \quad (2.42)$$

Representamos $\bar{\mathbf{B}}$ en términos de sus partes toroidal y poloidal a través de:

$$\bar{\mathbf{B}} = \bar{\mathbf{B}}^T + \bar{\mathbf{B}}^P \equiv \nabla \times (r T) + \nabla \times (r P)$$

⁵ Cuando el campo $\mathbf{B} = \mathbf{B}^P + \mathbf{B}^T = \nabla \times [\nabla \times (r P)] + \nabla \times (r T)$ es arbitrario, es decir, sin simetrías, escribimos su parte axial simétrica \mathbf{B}' de la siguiente manera:

$$\mathbf{B}' = \mathbf{B}'^P + \mathbf{B}'^T = -\nabla \times [r \times \nabla G_P] + \nabla \times (r G_T)$$

tal que G_T y G_P son:

$$G_P(r, \theta) \equiv \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(r, \theta, \varphi) d\varphi, \quad G_T(r, \theta) \equiv \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} T(r, \theta, \varphi) d\varphi$$

donde $T = T(t, r, \theta, \varphi)$, $P = P(t, r, \theta, \varphi)$ son funciones suaves definidas en V . Entonces de (2.42) tenemos:

$$\begin{aligned} \nabla \times \left\{ r \frac{\partial T}{\partial t} + \nabla \times \left(r \frac{\partial P}{\partial t} \right) - u \times [\nabla \times (r P)] - u \times [\nabla \times (\nabla \times (r T))] \right. \\ \left. + \eta \nabla \times [\nabla \times (r T)] + \eta \nabla \times [\nabla \times (\nabla \times (r P))] \right\} = 0 \end{aligned} \quad (2.43)$$

de donde concluimos:

$$\begin{aligned} r \frac{\partial T}{\partial t} + \nabla \times \left(r \frac{\partial P}{\partial t} \right) - u \times [\nabla \times (r P)] - u \times [\nabla \times (\nabla \times (r T))] \\ + \eta \nabla \times [\nabla \times (r T)] + \eta \nabla \times [\nabla \times (\nabla \times (r P))] = \nabla \phi \end{aligned} \quad (2.44)$$

donde ϕ es una función arbitraria. El contenido de (2.44) es más claro si hacemos uso de las siguientes identidades [6]:

$$\nabla \times (r T) = -r \times \nabla T \quad (2.45)$$

$$\nabla \times [\nabla \times (r P)] = -(\nabla^2 P) r + \nabla \left(\frac{\partial}{\partial r} (r P) \right) \quad (2.46)$$

$$\nabla \times [\nabla \times (\nabla \times (\nabla \times (r P)))] = r \times \nabla (\nabla^2 P) \quad (2.47)$$

en donde ∇^2 es el operador laplaciano actuando sobre escalares. Con la ayuda de tales identidades la ecuación (2.44) se modifica de la siguiente forma

$$\begin{aligned} r \frac{\partial T}{\partial t} - r \times \nabla \left(\frac{\partial P}{\partial t} \right) + u \times (r \times \nabla T) \\ + \nabla^2 P (u \times r) - u \times \nabla \left(\frac{\partial(r P)}{\partial r} \right) - \eta \nabla^2 T r \\ \eta \nabla \left(\frac{\partial(r T)}{\partial r} \right) + \eta r \times \nabla (\nabla^2 P) - \nabla \phi = 0 \end{aligned} \quad (2.48)$$

Tal ecuación todavía mezcla los dos grados de libertad, así que necesitamos separarlos. La estructura de (2.48) sugiere considerar el producto interno con r . Tomando en cuenta que para u toroidal, $u \cdot r = 0$, obtenamos:

$$\begin{aligned} r \cdot r \frac{\partial T}{\partial t} + (r \cdot r)(u \cdot \nabla T) - u \cdot \left[\nabla \left(\frac{\partial(r P)}{\partial r} \right) \times r \right] \\ - \eta (r \cdot r) \nabla^2 T + \eta r \cdot \nabla \left(\frac{\partial(r T)}{\partial r} \right) - r \cdot \nabla \phi = 0 \end{aligned} \quad (2.49)$$

Por otro lado tomando el producto vectorial de r con la ecuación (2.48) llegamos a:

$$\begin{aligned} -r \times \left(r \times \frac{\partial \nabla P}{\partial t} \right) + u (r \cdot r) \nabla^2 P - \left(r \cdot \nabla \frac{\partial(r P)}{\partial r} \right) u \\ + \eta r \times \nabla \left(\frac{\partial(r T)}{\partial r} \right) + \eta (r \cdot \nabla (\nabla^2 P)) r - \eta (r \cdot r) \nabla (\nabla^2 P) - r \times \nabla \phi = 0 \end{aligned} \quad (2.50)$$

Por el hecho que \mathbf{B}^T es expresado a través de $\mathbf{B}^T = \nabla \times (rT) = -r \times \nabla T$ el gradiente de T en la dirección \mathbf{e}_r es irrelevante. Usamos tal propiedad y simplificamos (2.49, 2.50) tomando:

$$\nabla \phi = \eta \nabla \frac{\partial(rT)}{\partial \tau}$$

Por tal elección (2.49, 2.50) se reducen a:

$$\begin{aligned} r \cdot r \frac{\partial T}{\partial t} + (r \cdot r)(u \cdot \nabla T) - u \cdot \left[\nabla \left(\frac{\partial(rP)}{\partial \tau} \right) \times r \right] \\ - \eta (r \cdot r) \nabla^2 T = 0 \end{aligned} \quad (2.51)$$

$$\begin{aligned} -r \times \left(r \times \frac{\partial \nabla P}{\partial t} \right) + u(r \cdot r) \nabla^2 P - \left(r \cdot \nabla \frac{\partial(rP)}{\partial \tau} \right) u \\ + \eta \left(r \cdot \nabla (\nabla^2 P) \right) r - \eta (r \cdot r) \nabla (\nabla^2 P) = 0 \end{aligned} \quad (2.52)$$

Usamos tales ecuaciones en el capítulo 4, pero por el momento notamos que la ecuación (2.51) se simplifica haciendo uso que en coordenadas esféricas $r \cdot r = r^2$ y $u = u(t, r, \theta) \mathbf{e}_\varphi$:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + r \frac{u}{\sin \theta} \frac{\partial T}{\partial \varphi} + u \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial(rP)}{\partial \tau} \right) - \eta \nabla^2 T = 0$$

El contenido de (2.52) es más claro si tomamos el producto interno de esta ecuación con $u \equiv u(t, r, \theta) \mathbf{e}_\varphi$ llegando a:

$$\begin{aligned} u \cdot \left(-r \times \left(r \times \frac{\partial \nabla P}{\partial t} \right) \right) + (\nabla^2 P) r^2 u^2 - r u^2 \frac{\partial^2(rP)}{\partial \tau^2} \\ - \eta r \frac{u}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} (\nabla^2 P) = 0 \end{aligned} \quad (2.53)$$

Haciendo uso de la identidad:

$$\nabla^2 P = \frac{LP}{r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 rP}{\partial \tau^2}$$

en donde L es el operador laplaciano de la 2-esfera unitaria, entonces la ecuación (2.53) se modifica de la siguiente forma:

$$r^2 u \cdot \left(-r \times \left(r \times \frac{\partial \nabla P}{\partial t} \right) \right) + u^2 LP - \eta \frac{ru}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} (\nabla^2 P) = 0 \quad (2.54)$$

Por otro lado consideramos un vector perpendicular a u , el cual denotamos como

$$u^\perp \equiv u^r \mathbf{e}_r + u^\theta \mathbf{e}_\theta$$

y tomando el producto interno de u^\perp con la ecuación (2.50) llegamos así a:

$$\begin{aligned} -u^\perp \cdot \left[r \times \left(r \times \frac{\partial \nabla P}{\partial t} \right) \right] + \eta (r \cdot \nabla (\nabla^2 P)) (r \cdot u^\perp) \\ - \eta (r \cdot r) (\nabla (\nabla^2 P) \cdot u^\perp) = 0 \end{aligned}$$

la cual en coordenadas esféricas toma la forma:

$$-u^\perp \cdot \left[r \times \left(r \times \frac{\partial \nabla P}{\partial t} \right) \right] - \eta u^\theta r \frac{\partial}{\partial \theta} (\nabla^2 P) = 0 \quad (2.55)$$

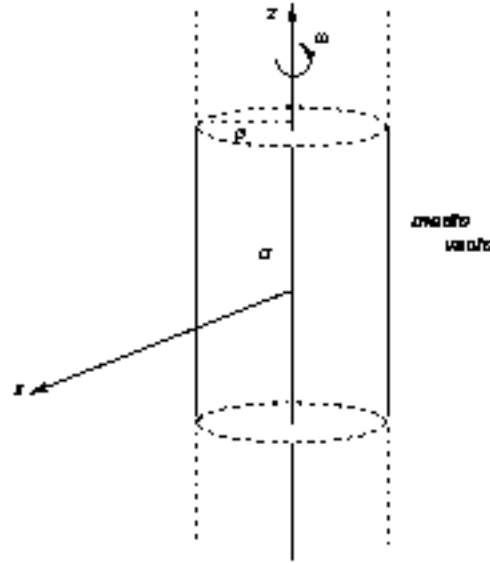
Las expresiones (2.53, 2.54, 2.55) han sido utilizadas en [7]. En resumen en este capítulo hemos reescrito (1.33, 1.34) a sistemas equivalentes, los cuales nos permitan entender el comportamiento de sus soluciones. En el capítulo próximo hacemos uso extensivo de tales sistemas.

Capítulo 3

Campos magneticos generados por fluidos conductores.

3.1. Efectos de una rotación diferencial sobre una distribución inicial B_0 .

En esta y proximas secciones de este capítulo, aplicaremos la herramienta que hemos desarrollado en el capítulo anterior para estudiar propiedades de campos magnéticos \mathbf{B} generados por especificos campos u. Como primera aplicación consideramos V como un cilindro de extensión infinita, el cual contiene un fluido conductor en su interior y al exterior un medio vacío. El fluido se encuentra rotando respecto del eje del cilindro con una velocidad angular dada. Las proximas secciones tendran como objetivo entender el impacto que tiene la rotación del fluido sobre el campo $\mathbf{B}(t, \mathbf{x})$ generado por tal sistema. Por el hecho que este sistema posee invariancia translacional apelaremos al contenido de la sección (2.2) y adaptaremos un sistema cartesiano como lo muestra la figura.



Suponemos que en un momento exponemos a tal cilindro a un campo magnético $\mathbf{B}(t_0, \mathbf{x}) = \mathbf{B}_0(\mathbf{x})$ que será mantenido por un agente externo mediante un mecanismo que no es de nuestro interés estudiar por ahora. Por simplicidad tomamos la distribución inicial $\mathbf{B}_0(\mathbf{x})$ en la forma $\mathbf{B}^P(0, \mathbf{x}) = B_0 \mathbf{e}_z$ en donde $B_0 = \text{cte} \neq 0$. El campo de velocidad \mathbf{u} es por suposición poloidal y tiene la forma:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^P \equiv \omega(x, y) \mathbf{e}_z \times \mathbf{x} \quad (3.1)$$

donde la velocidad angular $\omega(x, y)$ por el momento es arbitraria. Como hemos visto de la ecuación (2.13) el escalar A definido por $\mathbf{B}^P = \nabla \times (A(t, x, y) \mathbf{e}_z)$, satisface en V :

$$\frac{\partial}{\partial t} A(t, x, y) + (\mathbf{u}^P(t, x, y) \cdot \nabla) A(t, x, y) = \eta \nabla^2 A(t, x, y) \quad (3.2)$$

en nuestro caso particular, esta ecuación implica:

$$\frac{\partial}{\partial t} A(t, x, y) + [\omega(x, y) (\mathbf{e}_z \times \mathbf{x}) \cdot \nabla] A(t, x, y) = \eta \nabla^2 A(t, x, y)$$

o lo que es equivalente:

$$\frac{\partial}{\partial t} A(t, x, y) + \omega(x, y) \left(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right) A(t, x, y) = \eta \nabla^2 A(t, x, y) \quad (3.3)$$

Expresabamos esta ecuación en coordenadas polares (ρ, φ) en el plano x - y . Entonces (3.3) toma la forma:

$$\frac{\partial}{\partial t} A(t, \rho, \varphi) + \omega(\rho, \varphi) \frac{\partial}{\partial \varphi} A(t, \rho, \varphi) = \eta \nabla^2 A(t, \rho, \varphi) \quad (3.4)$$

Para la distribución inicial $\mathbf{B}_0(\mathbf{x}) = B_0 \mathbf{a}_z$ el escalar $A(0, x, y)$ debe satisfacer:

$$\begin{aligned}\mathbf{B}^P(t=0, x, y) &\equiv \nabla \times (A(0, x, y) \mathbf{a}_z) = \nabla A(0, x, y) \times \mathbf{a}_z \\ &= \nabla A(0, \rho, \varphi) \times \mathbf{a}_z = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} A(0, \rho, \varphi) \mathbf{a}_\rho - \frac{\partial}{\partial \rho} A(0, \rho, \varphi) \mathbf{a}_\varphi \\ \mathbf{B}^P(t=0, x, y) &= B_0 \mathbf{a}_z = B_0 \frac{\partial}{\partial x} = B_0 \left[\frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right] \\ &= B_0 [\cos \varphi \mathbf{a}_\rho - \sin \varphi \mathbf{a}_\varphi]\end{aligned}$$

lo cual implica el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} A(0, \rho, \varphi) = B_0 \cos \varphi \quad (3.5)$$

$$\frac{\partial}{\partial \rho} A(0, \rho, \varphi) = B_0 \sin \varphi \quad (3.6)$$

Las condiciones de integrabilidad para la existencia de tal $A(0, \rho, \varphi)$ son satisfechas, entonces de (3.5, 3.6) inferimos:

$$A(0, \rho, \varphi) = B_0 \rho \sin \varphi$$

Restringimos nuestra atención para el caso donde $\omega = \omega(\rho)$ con $0 \leq \rho < \rho_0$, es una función suave. Entonces el escalar A satisface en V :

$$\frac{\partial}{\partial t} A(t, \rho, \varphi) + \omega(\rho) \frac{\partial}{\partial \varphi} A(t, \rho, \varphi) = \eta \nabla^2 A(t, \rho, \varphi) \quad (3.7)$$

$$A(0, \rho, \varphi) = B_0 \rho \sin \varphi \quad (3.8)$$

La forma de este sistema sugiere que se proponga como solución:

$$A(t, \rho, \varphi) \equiv \text{Im} \left\{ B_0 f(t, \rho) e^{i\varphi} \right\} \quad (3.9)$$

en donde $f(t, \rho)$ es una función por determinar. Debido a tal propuesta las ecuaciones (3.7, 3.8) toman la forma:

$$\frac{\partial}{\partial t} f(t, \rho) + i\omega(\rho) f(t, \rho) = \eta \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} f(t, \rho) \right) - \frac{1}{\rho^2} f(t, \rho) \right] \quad (3.10)$$

$$f(0, \rho) = \rho, \quad \rho \in [0, \rho_0] \quad (3.11)$$

Al exterior del cilindro $\mathbf{B}^P(t, x, y)$ satisfaca:

$$\nabla \times \mathbf{B}^P(t, x, y) = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{B}^P(t, x, y) = 0$$

Introduciendo un nuevo escalar $A'(t, x, y)$ tal que:

$$\mathbf{B}^P = \nabla \times [A'(t, x, y) \mathbf{a}_z]$$

se sigue que $A'(t, x, y)$ satisface:

$$\nabla^2 A'(t, x, y) = 0, \quad A'(0, \rho, \varphi) = B_0 \rho \operatorname{sen} \varphi$$

Proponemos de igual manera que para el interior

$$A'(t, \rho, \varphi) = \operatorname{Im} [f(t, \rho) e^{i\varphi}], \quad \rho > \rho_0$$

de donde viene:

$$\begin{aligned} \nabla^2 A'(t, \rho, \varphi) &= \nabla^2 A'(t, \rho, \varphi) = \nabla^2 [\operatorname{Im}(f(t, \rho) e^{i\varphi})] \\ &= \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial f(t, \rho)}{\partial \rho} \right) - \frac{f(t, \rho)}{\rho^2} \right] \operatorname{sen} \varphi = 0 \end{aligned}$$

entonces $f(t, \rho)$ satisface:

$$\left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial f(t, \rho)}{\partial \rho} \right) - \frac{f(t, \rho)}{\rho^2} \right] = 0, \quad f(0, \rho) = \rho, \quad \rho > \rho_0 \quad (3.12)$$

Las soluciones de (3.10) y (3.12) deben ser tales que el campo \mathbf{B}^P satisfaga las condiciones de frontera:

$$(\mathbf{B}_{\text{ext}}^P - \mathbf{B}_{\text{int}}^P) \cdot \mathbf{e}_\rho|_{\rho=\rho_0} = 0$$

$$(\mathbf{B}_{\text{ext}}^P - \mathbf{B}_{\text{int}}^P) \times \mathbf{e}_\rho|_{\rho=\rho_0} = 0$$

discutiremos la forma específica de estas condiciones más adelante.

3.1.1. Efecto de advección para un campo magnético poloidal.

Como hemos mencionado en el capítulo 1, una distribución inicial $\mathbf{B}_0(\mathbf{x})$ que se encuentra en un conductor sólido de conductividad eléctrica finita, está sujeto al decaimiento ohmico en una escala temporal característica $\tau_{\text{ohm}} = \frac{4\pi\sigma L^2}{c^2} = \frac{L^2}{\eta}$ en donde L es la escala de longitud en la cual está definida la distribución inicial. Tal conclusión también es válido para un fluido conductor que está en reposo como hemos visto al final del capítulo 1. Por otro lado para tiempos que satisfagan $t \ll \tau_{\text{ohm}}$ la disipación Ohmica no tiene un impacto significativo sobre la evolución de \mathbf{B} , para tales tiempos la situación es manejada por el término de advección. En la configuración descrita en la sección anterior esperamos que después de introducir $\mathbf{B}_0(\mathbf{x})$ exista una fase en donde difusión no tiene un impacto significativo y en tal fase $f(t, \rho)$ deberá satisfacer:

$$\frac{\partial}{\partial t} f(t, \rho) + i\omega(\rho) f(t, \rho) = 0, \quad \rho < \rho_0 \quad (3.13)$$

$$f(0, \rho) = \rho \quad (3.14)$$

Proponemos

$$f(t, \rho) = R(\rho)I(t)$$

donde $R(\rho) \neq 0$ y $T(t) \neq 0$, entonces obtenemos de (3.13) lo siguiente:

$$\frac{1}{T(t)} \frac{d}{dt} T(t) + i\omega(\rho) = 0$$

lo cual implica

$$T(t) = A \exp[-i\omega(\rho)t]$$

donde A es una constante a determinar. De la condición inicial (3.14), tenemos $R(\rho) = \rho$ y $A = 1$, lo cual implica:

$$f(t, \rho) = \rho \exp[-i\omega(\rho)t], \quad \rho < \rho_0$$

para tal f el escalar $A(t, \rho, \varphi)$ está dado por:

$$\begin{aligned} A(t, \rho, \varphi) &\equiv \text{Im} [B_0 f(t, \rho) \exp[i\varphi]] = \text{Im} [B_0 \rho \exp(-i\omega(\rho)t + i\varphi)] \\ &= B_0 \rho \sin(\varphi - \omega(\rho)t) \end{aligned} \quad (3.15)$$

y el campo $\mathbf{B}^P(t, \rho, \varphi)$ es:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}^P(t, \rho, \varphi) &= \nabla \times (A(t, \rho, \varphi) \mathbf{e}_z) \\ &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} (B_0 \rho \sin(\varphi - \omega(\rho)t)) \mathbf{e}_\rho - \frac{\partial}{\partial \rho} (B_0 \rho \sin(\varphi - \omega(\rho)t)) \mathbf{e}_\varphi \\ &= B_0 \left\{ \cos(\varphi - \omega(\rho)t) \mathbf{e}_\rho - \left[\sin(\varphi - \omega(\rho)t) + t\rho \cos(\varphi - \omega(\rho)t) \frac{d}{d\rho} \omega(\rho) \right] \mathbf{e}_\varphi \right\} \end{aligned} \quad (3.16)$$

Veamos de esta forma el impacto que tiene la rotación diferencial $\frac{d\omega(\rho)}{d\rho}$ sobre la distribución inicial: \mathbf{B}_0 se amplifica linealmente en el tiempo mientras que para el caso en donde $\omega(\rho) = \text{cte}$ tenemos:

$$\mathbf{B}^P(t, \rho, \varphi) = B_0 [\cos(\varphi - \omega(\rho)t) \mathbf{e}_\rho - \sin(\varphi - \omega(\rho)t) \mathbf{e}_\varphi] \quad (3.17)$$

lo cual expresa que el campo poloidal magnético está rotado con el fluido.

Aunque la solución (3.15) es exacta y la hemos interpretado como la amplificación de la distribución inicial, es importante considerar el impacto de la difusión. El campo $\mathbf{B}_0(\mathbf{x})$ no puede crecer por siempre. La resistividad eléctrica $\eta = \frac{c^2}{4\pi\sigma} \neq 0$ implica que después de un tiempo la disipación ohmica se vuelve importante. Para ver en qué tiempo la difusión comienza a operar consideramos la ecuación:

$$\frac{\partial}{\partial t} A(t, \rho, \varphi) + \omega(\rho) \frac{\partial}{\partial \varphi} A(t, \rho, \varphi) = \eta \nabla^2 A(t, \rho, \varphi)$$

comparamos el término de advección con el de difusión sobre la solución:

$$A(t, \rho, \varphi) = \rho \sin(\varphi - \omega(\rho)t), \quad \rho < \rho_0$$

Para ello hagamos una estimación de ordenes de magnitud. Sea que ω_0 es el máximo valor que toma $\omega = \omega(\rho)$ con $0 \leq \rho \leq \rho_0$. La comparación del término de advección con el de difusión nos lleva

$$\frac{|\omega(\rho) \frac{\partial}{\partial \varphi} A|}{|\eta \nabla^2 A|} = \frac{B_0 \omega_0 \rho_0}{\eta B_0 \rho_0^{-1} \omega_0 t + \eta B_0 \rho_0^{-1} \omega_0^2 t^2} \quad (3.18)$$

De esta expresión se sigue que advección es dominante ante difusión sujeto a que:

$$B_0 \omega_0 \rho_0 \gg \eta \rho_0^{-1} B_0 \omega_0 t + \eta B_0 \rho_0^{-1} \omega_0^2 t^2$$

Debido a que el lado derecho involucra el tiempo t , tal relación no es válida por siempre. En terminos del número de Reynolds¹ R_m tal desigualdad toma la forma:

$$R_m \equiv \frac{\omega_0 \rho_0^2}{\eta} \gg \omega_0 t + \omega_0^2 t^2 \quad (3.19)$$

por el hecho que ambos terminos de lado derecho son positivos advección domina difusión sujeto a que t debe cumplir:

$$R_m \gg \omega_0 t \quad (3.20)$$

$$\sqrt{R_m} \gg \omega_0 t \quad (3.21)$$

Sea que $R_m \gg 1$, se sigue de estas desigualdades que el tiempo t satisfaca:

$$t \ll \frac{\sqrt{R_m}}{\omega_0} \quad (3.22)$$

implicando que advección es dominante. El crecimiento del campo inicial B_0 bajo la acción del término de advección que esta operando para $t \simeq \frac{\sqrt{R_m}}{\omega_0}$ esta dado por

$$B_\varphi = -B_0 \rho \left(\frac{d}{d\rho} \omega(\rho) \right) \cos(\varphi - \omega(\rho)t) + B_0 \sin(\varphi - \omega(\rho)t) \quad (3.23)$$

y su amplificación en ordenes de magnitud esta dada por:

$$B \simeq B_0 \omega_0 t \simeq B_0 \sqrt{R_m} \quad (3.24)$$

Vemos de esta estimación que por el hecho que $\sqrt{R_m} \gg 1$, hay una amplificación substancial de la distribución inicial B_0 . Por otro lado para sistemas con $R_m \ll 1$, el tiempo t hasta el cual la advección domina satisface:

$$\omega_0 t \ll R_m \quad (3.25)$$

$$\omega_0 t \ll \sqrt{R_m} \quad (3.26)$$

¹El número de Reynolds R_m para nuestro sistema es obtenido identificando $L \approx \rho_0$ y $u = \omega_0 \rho_0$ entonces $R_m = \frac{uL}{\eta} = \frac{\omega_0 \rho_0^2}{\eta}$.

esto implica $t\omega_0 \ll R_m \ll 1$. Entonces para tales sistemas difusión empieza a operar tempranamente. La condición $t\omega_0 \ll 1$ indica que disipación empieza antes que el sistema complete una revolución. Las conclusiones que hemos hecho en esta sección están por supuesto de acuerdo con la interpretación física de R_m que hemos discutido en el capítulo 1.

3.1.2. Expulsión de B^P por el flujo de un fluido conductor.

Del análisis realizado en la sección anterior llegamos a la conclusión que el crecimiento de B^P no puede seguir por un tiempo infinito. Existe un tiempo en el cual la advección es comparable con difusión. En esta fase el crecimiento del campo B^P debido a la advección es balanceado por la disipación ohmica, por lo cual es natural esperar que en tal régimen B^P se vuelva estático. A priori no podemos excluir la posibilidad en la cual el proceso de disipación ohmica es dominante ante el proceso de advección. Sin embargo deseamos ver si existe la posibilidad de encontrar B^P estático tal que en infinito es distinto de cero. Si tal estado existe la función f que satisfaga (3.10) para el interior del cilindro y (3.12) para el exterior del cilindro, no dependerá del tiempo:

$$\frac{\partial f(t, \rho)}{\partial t} = 0$$

entonces $f \equiv f_1(\rho)$ satisface la siguiente ecuación:

$$\frac{i\omega(\rho)}{\eta} f_1(\rho) = \left[\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{df_1(\rho)}{d\rho} \right) - \frac{f_1(\rho)}{\rho^2} \right], \quad \rho < \rho_0 \quad (3.27)$$

Un análisis de las soluciones de esta ecuación necesita que especifiquemos la velocidad angular $\omega = \omega(\rho)$. Sin embargo para entender la estructura de estas soluciones consideramos la situación en donde la velocidad angular $\omega(\rho)$ es constante denotada por ω_0 . Entonces la ecuación (3.27) se modifica como

$$i\omega_0^2 f_1(\rho) = \left[\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{df_1(\rho)}{d\rho} \right) - \frac{f_1(\rho)}{\rho^2} \right], \quad \omega_0^2 = \frac{\omega}{\eta} \quad (3.28)$$

Definiendo $i\omega_0^2 \rho^2 \equiv -z^2$ y eligiendo la rama principal para la función logaritmo tenemos

$$\begin{aligned} z &= (-i)^{\frac{1}{2}} \omega_0 \rho = \omega_0 \rho \exp \left(\frac{1}{2} \log(-i) \right) = \omega_0 \rho \exp \left(\frac{1}{2} [\log|-i| + i \arg(-i)] \right) \\ &= \omega_0 \rho \exp \left(-\frac{\pi}{4} \right) = \omega_0 \rho \frac{(1-i)}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

En terminos de z la ecuación (3.28) toma la forma:

$$\left[z \frac{d}{dz} \left(z \frac{d}{dz} \right) + (z^2 - 1) \right] f_1(z) = 0 \quad (3.29)$$

y la solución a esta ecuación que es regular en $\rho = 0$ es la función de Bessel de primera clase o especie de orden uno [9]:

$$f_1(z) = A J_1(z) = A J_1 \left[\omega_0 \rho \frac{1-i}{\sqrt{2}} \right] = A J_1(\alpha \rho) \quad (3.30)$$

en donde A es una constante, mientras $\alpha = \frac{\omega_0(1-i)}{\sqrt{2}}$. También podemos reescribir α en terminos del número de Reynolds R_m :

$$\alpha \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} (1-i) \frac{R_m}{\rho_0^2} = \frac{R_m}{\rho_0^2} \exp(-i \frac{\pi}{4})$$

Por otro lado para $\rho > \rho_0$ tenemos $\omega_o = 0$, entonces la ecuación (3.28) nos lleva:

$$\rho \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{d}{d\rho} - 1 \right) f(\rho) = 0 \quad (3.31)$$

la cual admite la solución:

$$f(\rho) = \rho + \frac{b_1}{\rho}, \quad \rho > \rho_0$$

en donde b_1 es una constante de integración. Es importante indicar que la solución exterior ha sido especificada bajo la suposición que el campo \mathbf{B} en el infinito satisface:

$$\lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} \mathbf{B}^P = B_0 \mathbf{a}_z$$

. Resumiendo $f(\rho)$ satisface:

$$f(\rho) = \begin{cases} A J_1(\alpha \rho) & \rho < \rho_0 \\ \rho + b_1 \rho^{-1} & \rho > \rho_0 \end{cases} \quad (3.32)$$

Aún nos falta conectar la solución interior con la solución exterior, lo cual haremos demandando:

$$(\mathbf{B}_{\text{ext}}^P - \mathbf{B}_{\text{int}}^P) \cdot \mathbf{a}_\rho|_{\rho=\rho_0} = 0 \quad (3.33)$$

$$(\mathbf{B}_{\text{ext}}^P - \mathbf{B}_{\text{int}}^P) \times \mathbf{a}_\rho|_{\rho=\rho_0} = 0 \quad (3.34)$$

las cuales estan expresadas en termino de A_{int} y A_{ext} de la siguiente manera

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} A_{\text{int}}(\rho, \varphi)|_{\rho=\rho_0} = \frac{\partial}{\partial \varphi} A_{\text{ext}}(\rho, \varphi)|_{\rho=\rho_0} \quad (3.35)$$

$$\frac{\partial}{\partial \rho} A_{\text{int}}(\rho, \varphi)|_{\rho=\rho_0} = \frac{\partial}{\partial \rho} A_{\text{ext}}(\rho, \varphi)|_{\rho=\rho_0} \quad (3.36)$$

Utilizando que $A(\rho, \varphi) \equiv f m (B_0 f(\rho) \exp(i\varphi))$, entonces de (3.35) y (3.36) tenemos

$$\rho_0 + b_1 \rho_0^{-1} = A J_1(\alpha \rho_0) \quad (3.37)$$

$$1 - b_1 \rho_0^2 = \frac{A \alpha}{2} [J_0(\alpha \rho_0) - J_2(\alpha \rho_0)] \quad (3.38)$$

Fijamos las constantes A y b_1 apelando a las siguientes identidades [9]:

$$\frac{d}{dz} J_n(z) = \frac{1}{2} [J_{n-1}(z) - J_{n+1}(z)] \quad (3.39)$$

$$J_{n+1}(z) = \frac{2n}{z} J_n(z) - J_{n-1}(z) \quad (3.40)$$

Entonces de (3.37,3.38) y las identidades (3.39,3.40) encontramos:

$$A = \frac{2}{\alpha J_0(\alpha \rho_0)} \quad (3.41)$$

$$b_1 = \frac{\rho_0 [2J_1(\alpha \rho_0) - \rho_0 \alpha J_0(\alpha \rho_0)]}{\alpha J_0(\alpha \rho_0)} \quad (3.42)$$

implicando que $f(\rho)$ este escrita por

$$f(\rho) = \begin{cases} \frac{2 J_1(\alpha \rho)}{\alpha J_0(\alpha \rho_0)} & \rho \leq \rho_0 \\ \rho + \frac{\rho_0 [2J_1(\alpha \rho_0) - \rho_0 \alpha J_0(\alpha \rho_0)]}{\alpha J_0(\alpha \rho_0)} & \rho \geq \rho_0 \end{cases}$$

El campo $\mathbf{B}^P(\rho, \varphi)$ al interior del cilindro tiene la forma

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{int}^P(\rho, \varphi) &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} A(\rho, \varphi) \mathbf{e}_\rho - \frac{\partial}{\partial \rho} A(\rho, \varphi) \mathbf{e}_\varphi \\ &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} (\text{Im}\{f(\rho) \exp(i\varphi)\}) \mathbf{e}_\rho - \frac{\partial}{\partial \rho} (\text{Im}\{f(\rho) \exp(i\varphi)\}) \mathbf{e}_\varphi \\ &= \text{Im} \left\{ \frac{1}{\rho} (f(\rho) i \exp(i\varphi)) \mathbf{e}_\rho - \exp(i\varphi) \frac{d}{d\rho} f(\rho) \mathbf{e}_\varphi \right\} \\ &= \text{Im} \left\{ \frac{\exp(i\varphi)}{\rho} \left[\frac{2i J_1(\alpha \rho)}{\alpha J_0(\alpha \rho_0)} \mathbf{e}_\rho - \frac{2}{J_0(\alpha \rho_0)} \frac{d}{d\rho} J_1(\alpha \rho) \mathbf{e}_\varphi \right] \right\} \quad (3.43) \end{aligned}$$

Por su parte el campo exterior $\mathbf{B}^P(\rho, \varphi)$ con $\rho > \rho_0$ esta dado por:

$$\mathbf{B}_{ext}^P(\rho, \varphi) = \text{Im} \left\{ \frac{1}{\rho} i f(\rho) e^{i\varphi} \mathbf{e}_\rho - e^{i\varphi} \frac{d}{d\rho} f(\rho) \mathbf{e}_\varphi \right\} \quad (3.44)$$

La solución descrita por (3.43,3.44) representa un estado, en donde advección esta balanceado con difusión. La importancia de esta solución viene de su comportamiento en el límite en donde $R_m \gg 1$. Para ver las implicaciones de esta solución, recordamos el fenómeno del efecto skin de electrodinámica clásica. Para un conductor sólido en presencia de un campo electromagnético externo variando en tiempo con frecuencia ω , se tiene que el conductor sólido permite a campos y corrientes inducidas que penetren a su interior en una longitud característica δ , la cual es dada por [3]-[1]:

$$\delta = \frac{c}{\sqrt{4\pi\sigma\omega}}$$

y en el límite en donde $\sigma\omega \rightarrow \infty$, campos y corrientes están difundidos solo sobre la superficie del conductor, mientras su interior es libre de campos y corrientes inducidos. Es interesante hacer notar que tal comportamiento también es exhibido por la solución (3.43,3.44). Para ver esto consideramos la situación en la que $R_m \gg 1$, lo cual implica:

$$|\alpha\rho_0| = \frac{R_m}{\rho_0} \gg 1$$

Recordando que la representación asintótica de las funciones de Bessel de primera clase de orden cero y uno están descritas por [9]:

$$J_0(z) \sim \left[\frac{2}{\pi z} \right]^{1/2} \sin \left(z + \frac{\pi}{4} \right), \quad |z| \gg 1 \quad (3.45)$$

$$J_1(z) \sim - \left[\frac{2}{\pi z} \right]^{1/2} \cos \left(z + \frac{\pi}{4} \right), \quad |z| \gg 1 \quad (3.46)$$

y también que:

$$\mathbf{B}^P(\rho, \varphi) \equiv \nabla \times (A(\rho, \varphi) \mathbf{e}_\varphi)$$

donde $A \equiv \text{Im} \{ B_0 f(\rho) \exp(i\varphi) \}$, estudiamos la forma del escalar A en el límite $|\alpha\rho_0| = \frac{R_m}{\rho_0} \gg 1$. Comenzamos para $\rho \geq \rho_0$:

$$\begin{aligned} A_{\text{ext}}(\rho, \varphi) &= \text{Im} \left\{ B_0 \exp(i\varphi) \left[\rho + \frac{\rho_0}{\rho} \left(\frac{2 J_1(\alpha\rho_0)}{\alpha J_0(\alpha\rho_0)} - \rho_0 \right) \right] \right\} \\ &\approx \text{Im} \left\{ B_0 \exp(i\varphi) \left[\rho + \frac{\rho_0}{\rho} \left(-\frac{\rho_0^2}{R_m} \exp(i\frac{\pi}{4}) \frac{\cos(\alpha\rho_0 + \pi/4)}{\sin(\alpha\rho_0 + \pi/4)} - \rho_0 \right) \right] \right\} \end{aligned}$$

Apelando a identidades que involucran $\cos z$ y $\sin z$ esta ecuación anterior toma la forma:

$$\begin{aligned} A_{\text{ext}}(\rho, \varphi) &= \text{Im} \left\{ B_0 e^{i\varphi} \left[\frac{\rho_0}{\rho} \left(-i \frac{\rho_0^2}{R_m} e^{i\pi/4} \frac{Y + Y^{-1}}{Y - Y^{-1}} - \rho_0 \right) \right] \right\} \\ &\quad + \text{Im} \{ B_0 e^{i\varphi} \rho_0 \} \end{aligned}$$

donde hemos definido

$$Y \equiv e^{i(\alpha\rho_0 + \pi/4)}$$

Posteriormente reescribimos esta relación en la forma equivalente:

$$\begin{aligned} A_{\text{ext}}(\rho, \varphi) &= \text{Im} \left\{ B_0 e^{i\varphi} \left[\frac{\rho_0}{\rho} \left(-i \frac{\rho_0^2}{R_m} e^{i\pi/4} \frac{1 - X^{-1} e^{-\sqrt{2} \frac{R_m}{\rho_0}}}{1 + X e^{\sqrt{2} \frac{R_m}{\rho_0}}} - \rho_0 \right) \right] \right\} \\ &\quad + \text{Im} \{ B_0 e^{i\varphi} \rho_0 \} \end{aligned}$$

donde

$$X \equiv i e^{i\sqrt{2} R_m / \rho_0^2}$$

Se sigue de la última relación que cuando $R_m \gg 1$ tenemos

$$\begin{aligned}
A_{ext}(\rho, \varphi) &= \text{Im} \left\{ B_0 \exp(i\varphi) \left[\rho + \frac{\rho_0}{\rho} \left(-i \frac{\rho_0^2}{R_m} \exp(i\pi/4) - \rho_0 \right) \right] \right\} \\
&= \text{Im} \left\{ B_0 \rho e^{i\varphi} - i \frac{B_0 \rho_0^3}{R_m \rho} e^{i(\pi/4+\varphi)} - \frac{B_0 \rho_0^2}{\rho} e^{i\varphi} \right\} \\
&= B_0 \rho \sin \varphi - \frac{B_0 \rho_0^3}{R_m \rho} \cos(\pi/4 + \varphi) - \frac{B_0 \rho_0^2}{\rho} \sin \varphi
\end{aligned} \tag{3.47}$$

en el límite $R_m \rightarrow \infty$ toma la siguiente forma:

$$A_{ext}(\rho, \varphi) \sim B_0 \left(\rho - \frac{\rho_0^2}{\rho} \right) \sin \varphi, \quad \rho > \rho_0 \tag{3.48}$$

por lo tanto en el límite $R_m \rightarrow \infty$ al exterior del fluido conductor existe un campo distinto de cero \mathbf{B}^P .

Consideramos en seguida que sucede con el campo magnético en el interior del fluido en el régimen $R_m \gg 1$. Comencemos con:

$$\begin{aligned}
A_{int}(\rho, \varphi) &= \text{Im} \left\{ B_0 e^{i\varphi} \frac{2J_1(\alpha\rho)}{\alpha J_0(\alpha\rho_0)} \right\} \\
&= \text{Im} \left\{ 2B_0 e^{i\varphi} \frac{\rho_0^2}{R_m} e^{i\pi/4} \frac{J_1\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(1-i)\frac{R_m\rho}{\rho_0}\right)}{J_0\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(1-i)\frac{R_m\rho_0}{\rho_0}\right)} \right\}
\end{aligned}$$

Usando la representación (3.45, 3.46) se sigue que:

$$A_{int} \approx \text{Im} \left\{ -2B_0 e^{i\varphi} \frac{\rho_0^2}{R_m} e^{i\pi/4} \left(\frac{\rho_0}{\rho} \right)^{1/2} \frac{\cos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(1-i)\frac{R_m\rho}{\rho_0} + \pi/4\right)}{\sin\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(1-i)\frac{R_m\rho_0}{\rho_0} + \pi/4\right)} \right\}$$

y aplicando a identidades trigonométricas obtenamos:

$$A_{int}(\rho, \varphi) = \text{Im} \left\{ 2B_0 e^{i\varphi} \frac{\rho_0^2}{R_m} e^{i\pi/4} \left(\frac{\rho_0}{\rho} \right)^{1/2} i \frac{\mathcal{L} + \mathcal{L}^{-1}}{\mathcal{L} - \mathcal{L}^{-1}} \right\}$$

donde hemos definido:

$$\mathcal{L} \equiv e^{i\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(1-i)\frac{R_m\rho}{\rho_0} + \pi/4\right)}$$

A través del álgebra y simplificaciones obtenamos:

$$A_{int}(\rho, \varphi) = \text{Im} \left\{ \frac{2iB_0}{R_m} \left(\frac{\rho_0^2}{\rho} \right)^{1/2} e^{i(\pi/4+\varphi)} e^{-i\left(\frac{R_m}{\sqrt{2}\rho_0}(\rho_0-\rho)\right)} e^{\frac{-R_m}{\sqrt{2}\rho_0}(\rho_0-\rho)} W \right\}$$

con

$$W \equiv \left[\frac{1 + e^{-i\left(\sqrt{2}\frac{B_m \rho}{\rho_0^2} + \pi/2\right)} e^{-\sqrt{2}\frac{B_m \rho}{\rho_0^2}}}{1 - e^{-i\left(\sqrt{2}\frac{B_m \rho_0}{\rho_0^2} + \pi/2\right)} e^{-\sqrt{2}\frac{B_m \rho_0}{\rho_0^2}}} \right]$$

En el límite $R_m \gg 1$ se sigue que $W \approx 1$, y entonces :

$$\begin{aligned} A_{int}(\rho, \varphi) &\approx \text{Im} \left\{ \frac{2iB_0}{R_m} \left(\frac{\rho_0}{\rho} \right)^{1/2} e^{-i\left(\frac{B_m}{\sqrt{2}\rho_0^2}(\rho_0 - \rho) + \pi/4 + \varphi\right)} e^{\frac{-B_m}{\sqrt{2}\rho_0^2}(\rho_0 - \rho)} \right\} \\ &= \frac{2B_0}{R_m} \left(\frac{\rho_0}{\rho} \right)^{1/2} \cos \left(\frac{R_m}{\sqrt{2}\rho_0^2}(\rho_0 - \rho) + \pi/4 + \varphi \right) e^{\frac{-B_m}{\sqrt{2}\rho_0^2}(\rho_0 - \rho)} \end{aligned} \quad (3.49)$$

Pero la estructura de esta relación es muy sugestiva. El término exponencial implica que la amplitud de $A_{int}(\rho, \varphi)$ decae cuando R_m crece, es decir, cuando $R_m \rightarrow \infty$:

$$A_{int}(\rho, \varphi) \rightarrow 0 \quad (3.50)$$

por lo cual podemos concluir que el campo magnético es expulsado por el flujo del fluido conductor rotando con una velocidad angular ω_0 , en el límite $R_m \rightarrow \infty$, aún cuando tratemos de mantener el campo inicial de manera externa. Este fenómeno de expulsión del campo \mathbf{B}^P del interior del fluido conductor es como hemos mencionado es análogo al efecto skin que se presenta en conductores sólidos. Tal analogía la vamos de la siguiente manera. Introduzcamos un sistema de referencias que está corrotando con el fluido conductor. Al respecto de tal sistema el campo externo \mathbf{B}^P poseerá una dependencia temporal. Así que los campos y corrientes inducidos serán restringidos a una longitud característica δ . Notamos que incrementando la velocidad angular ω_0 efectivamente también incrementa R_m , implicando que $\delta \rightarrow 0$.

3.2. Naturaleza del fenómeno de expulsión de \mathbf{B}^P por el flujo de un fluido conductor.

La configuración estudiada en la sección anterior, nos lleva a preguntarnos si el fenómeno de expulsión de \mathbf{B}^P por un flujo de un fluido conductor es genérico o solo es consecuencia del sistema particular que hemos estudiado. La respuesta a tal pregunta es difícil responder definitivamente. Sin embargo en seguida presentamos algunas evidencias que indican que tal fenómeno pudiese ser genérico. Tales evidencias vienen estudiando campos de velocidad u especiales. Concretamente restringimos nuestro estudio a flujos de 2-dimensionales estáticos e incompresibles, derivables de una función stream Ψ con streamlines cerradas. Aunque por supuesto tales flujos no son los más generales sin embargo ofrecen pistas importantes sobre el fenómeno de expulsión. Empezamos primariamente con campos u que son invariantes translacionalmente a lo largo del eje-z. Para tales campos tenemos:

$$\mathbf{u}^P(x, y) = u^x(x, y) \mathbf{e}_x + u^y(x, y) \mathbf{e}_y \equiv \frac{\partial \Psi(x, y)}{\partial y} \mathbf{e}_x - \frac{\partial \Psi(x, y)}{\partial x} \mathbf{e}_y \quad (3.51)$$

En esta sección estudiamos soluciones particulares de la ecuación (3.2). Más precisamente consideramos soluciones de (3.2) tales que $A(x, y) = A[\Psi(x, y)]$, es decir, soluciones en donde A es constante sobre las streamlines de u^P . Al respecto de tales soluciones tenemos el siguiente lema.

Lema 3.1 Sea $A = A(t, x, y)$ una función suave que satisface:

$$\frac{\partial}{\partial t} A + (u^P \cdot \nabla) A = \eta \nabla^2 A$$

con u^P incompresible e invariante translacionalmente y derivable de una función stream $\Psi = \Psi(x, y)$ que posee streamlines cerradas. Además suponemos que $u^P \cdot n|_{\partial V} = 0$. Entonces soluciones no singulares de la forma $A(x, y) = A[\Psi(x, y)]$ son las constantes.

Demostración: Para la demostración de este Lema retomamos algunos conceptos que fueron expuestos en la sección (1.2) del capítulo 1. Primero para ver el significado de soluciones $A(x, y) = A[\Psi(x, y)]$ consideramos la situación estática en ausencia de difusión, es decir, $\eta \equiv 0$. Para tal caso $A = A(x, y)$ satisface:

$$(u^P(x, y) \cdot \nabla) A(x, y) = 0 \quad (3.52)$$

Por el hecho que u es derivable de una función stream $\Psi(x, y)$, tenemos (ver sección (1.2)).

$$u^P(x, y) \equiv \frac{\partial \Psi(x, y)}{\partial y} e_x - \frac{\partial \Psi(x, y)}{\partial x} e_y \quad (3.53)$$

La ecuación (3.52), geométricamente nos dice que la función $A = A(x, y)$ es constante a lo largo de las curvas integrales del campo u^P , es decir, cada $A(x, y) = A[\Psi(x, y)]$ suficientemente diferenciable son soluciones de (3.52), lo cual podemos verificar a través de:

$$\begin{aligned} (u^P \cdot \nabla) A &= u^x \frac{\partial A[\Psi]}{\partial x} + u^y \frac{\partial A[\Psi]}{\partial y} \\ &= \frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{\partial A[\Psi]}{\partial x} - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial A[\Psi]}{\partial y} \\ &= \frac{\partial A}{\partial \Psi} \left[\frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{\partial \Psi}{\partial x} - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right] = 0 \end{aligned}$$

En seguida nos preguntamos si tal propiedad se mantiene cuando $\eta \neq 0$. Es decir queremos ver si existen $A = A[\Psi(x, y)]$ tales que satisfagan:

$$(u^P(x, y) \cdot \nabla) A(x, y) = \eta \nabla^2 A(x, y) \quad (3.54)$$

Tomemos en cuenta:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (u^P(x, y) A(x, y)) &= u^P(x, y) \cdot \nabla A(x, y) + A(x, y) \nabla \cdot u^P(x, y) \\ &= u^P(x, y) \cdot \nabla A(x, y) \end{aligned} \quad (3.55)$$

entonces (3.54) toma la forma:

$$\nabla \cdot [u^P(x, y) A(x, y)] = \eta \nabla^2 A(x, y) \quad (3.56)$$

De la sección (1.2), sabemos que la ecuación $\Psi(x, y) = cte$ define una curva integral \mathcal{C} de u^P la cual es una curva cerrada denotada por \mathcal{C} . Denotamos su interior por S y como su frontera $\partial S = \mathcal{C}$. Ahora integramos (3.56) sobre S :

$$\int_S \nabla \cdot (u^P A) dS = \eta \int_S \nabla \cdot (\nabla A) dS$$

aplicando el teorema de la divergencia obtenemos:

$$\oint_{\mathcal{C}} A u^P \cdot n dl = \eta \oint_{\mathcal{C}} \nabla A \cdot n dl \quad (3.57)$$

donde n es vector normal a ∂S . Por hipótesis del Lemma tenemos que $u^P \cdot n|_{\partial S} = 0$, por lo que el término del lado izquierdo de la ecuación anterior es cero, por lo cual obtenemos:

$$\eta \oint_{\mathcal{C}} \nabla A \cdot n dl = 0 \quad (3.58)$$

Recordemos que nos interesan soluciones $A(x, y)$ tales que $A = A(\Psi(x, y))$. Para una de estas soluciones (3.58) implica:

$$\eta \oint_{\mathcal{C}} \frac{\partial A}{\partial \Psi} \nabla \Psi \cdot n dl = 0$$

y por el hecho que integramos sobre \mathcal{C} con $\Psi(x, y) = cte$ tenemos:

$$\eta \frac{\partial A}{\partial \Psi} \oint_{\mathcal{C}} \nabla \Psi \cdot n dl = 0$$

Tomando en cuenta que $\nabla \Psi \neq 0$, así como

$$\nabla \Psi = \pm n < \nabla \Psi | \nabla \Psi >^{1/2} \neq 0$$

llegamos a:

$$\pm \eta \frac{\partial A}{\partial \Psi} \oint_{\mathcal{C}} < \nabla \Psi | \nabla \Psi >^{1/2} dl = 0 \quad (3.59)$$

por tanto podemos concluir

$$\frac{\partial A[\Psi]}{\partial \Psi} = 0 \quad (3.60)$$

Para tal $A = A[\Psi(x, y)]$ tenemos:

$$\mathbf{B}^P = \nabla \times [A = A[\Psi(x, y)] \mathbf{e}_z] = \frac{\partial A}{\partial \Psi} \nabla \Psi \times \mathbf{e}_z = 0$$

entonces $\mathbf{B}^P = 0$ al interior de una streamline cerrada.

Hemos llegado a la conclusión que cada solución no singular de (3.54), de la forma $A = A[\Psi]$ es necesariamente constante lo cual es contrastante con las soluciones de la ecuación (3.52). Este resultado sugiere que si consideramos una secuencia de sistemas sujetos a las restricciones de este lema, tal que a lo largo de tal secuencia, $\eta \rightarrow 0$, entonces la conclusión será que soluciones de la forma $A = A[\Psi]$ son solo las constantes. Por otro lado el sistema con $\eta \equiv 0$, es decir, (3.52), posean soluciones de la forma $A = A[\Psi(x, y)]$, las cuales son soluciones no triviales. La ausencia de soluciones no triviales de (3.54) de la forma $A = A[\Psi]$ la interpretamos como una indicación que en el límite $\eta \rightarrow 0$ tenemos \mathbf{B}^P expulsado del interior de las curvas integrales cerradas de u . Es importante enfatizar que hemos probado lo siguiente: Soluciones no singulares de la ecuación (3.52) de la forma $A = A[\Psi(x, y)]$ son necesariamente constantes. Para establecer definitivamente si el fenómeno de expulsión toma lugar debemos estudiar las soluciones de (3.54) en el límite cuando η tiende a cero. No hemos probado que en el límite $\eta \rightarrow 0$, soluciones de (3.54) se reducen a la forma $A = A[\Psi]$, pero si asumimos tal propiedad \mathbf{B}^P esta expulsado. Una análisis sobre las soluciones de (3.54) en el límite $\eta \rightarrow 0$ se encuentra fuera del alcance de este trabajo.

Es interesante mencionar que la conclusión del lema anterior es válida también para sistemas axial simétricos y esto lo veremos a continuación.

Lema 3.2 Sea que el escalar $A = A(t, \rho, z)$ definido en una región esférica V obedezca:

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \rho^{-1} (\mathbf{u}^P \cdot \nabla) \rho A = \eta \left(\nabla^2 - \frac{1}{\rho^2} \right) A \quad (3.61)$$

con \mathbf{u}^P incompresible y derivable de una función stream $\Psi(x, y)$ que posea streamlines cerradas. Entonces soluciones no singulares de la forma $A(x, y) = A[\Psi(x, y)]$ son necesariamente las constantes.

Demostración: Para mostrar este Lema, introducimos coordenadas cilíndricas (ρ, φ, z) , y consideramos la función $\chi(t, \rho, z) \equiv \rho A(t, \rho, z)$. Como hemos visto en la sección (2.2) tal función χ satisface en V :

$$\frac{\partial \chi}{\partial t} + (\mathbf{u}^P \cdot \nabla) \chi = \eta \left(\nabla^2 - \frac{2}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \right) \chi \quad (3.62)$$

donde podemos escribir el lado derecho de esta ecuación como:

$$\left(\nabla^2 - \frac{2}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \right) \chi = \nabla \cdot \left[\nabla \chi - \frac{2}{\rho} \chi \mathbf{e}_\rho \right] \equiv \nabla \cdot \mathbf{f}$$

con

$$\mathbf{f} = \nabla \chi - \frac{2}{\rho} \chi \mathbf{e}_\rho$$

así que la ecuación (3.62) toma la forma:

$$\frac{\partial \chi}{\partial t} + (\mathbf{u}^P \cdot \nabla) \chi = \eta \nabla \cdot \mathbf{f} \quad (3.63)$$

Para soluciones estáticas χ satisface:

$$(\mathbf{u}^P \cdot \nabla) \chi = \eta \nabla \cdot \mathbf{f} \quad (3.64)$$

Tratamos tal ecuación aplicando la misma idea que en el Lemma anterior. Primeramente tomamos en cuenta la siguiente identidad:

$$\mathbf{u}^P \cdot \nabla \chi = \nabla \cdot (\chi \mathbf{u}^P) - \chi (\nabla \cdot \mathbf{u}^P) = \nabla \cdot (\chi \mathbf{u}^P)$$

la cual implica que (3.64) toma la forma:

$$\nabla \cdot (\chi \mathbf{u}^P) = \eta \nabla \cdot \mathbf{f} \quad (3.65)$$

En este lema al igual que en el anterior asumimos que \mathbf{u} es derivable de una función stream $\Psi(x, y)$, donde las streamlines asociadas son cerradas. A través de los mismos argumentos, tendremos funciones $\chi = \chi[\Psi]$ como soluciones de $(\mathbf{u}^P \cdot \nabla) \chi = 0$. En contraste con el lema anterior, tenemos que el operador D a través de \mathbf{f} contiene el término $\frac{\partial \chi}{\partial \rho} \mathbf{e}_\rho$ y por eso necesitamos un tratamiento distinto. Primero consideramos una streamline cerrada C en el plano (ρ, z) y hagamos una rotación de 2π a través del eje z . Sea que V es el volumen generado por tal proceso y $\partial V = S$ su área. Integrando (3.65) sobre V y apelando al teorema de la divergencia tenemos:

$$\int_V \nabla \cdot (\chi \mathbf{u}^P) dV = \int_V \eta \nabla \cdot \mathbf{f} dV$$

La integral del lado izquierdo nos da:

$$\int_V \nabla \cdot (\chi \mathbf{u}^P) dV = \oint_S (\chi \mathbf{u}^P) \cdot d\mathbf{S} = 0$$

debido a que $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}|_{\partial V} = 0$ en donde $d\mathbf{S} = \mathbf{n} dS$ con \mathbf{n} el vector normal a $\partial V = S$. Por tanto tenemos:

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{f} dV = \oint_S \left(\nabla \chi - \frac{2}{\rho} \chi \mathbf{e}_\rho \right) \cdot d\mathbf{S} = 0$$

de lo cual se sigue:

$$\oint_S \nabla \chi \cdot \mathbf{n} dS = \oint_S \frac{2}{\rho} \chi \mathbf{e}_\rho \cdot \mathbf{n} dS \quad (3.66)$$

Por construcción el elemento del área tiene la forma: $dS = \rho d\varphi dl$, en donde l es un parámetro de longitud que cambia a través de la streamline C que hemos rotado. Por lo cual tenemos:

$$\oint_S \frac{2}{\rho} \chi \mathbf{e}_\rho \cdot \mathbf{n} dS = 2\pi \oint_S \chi \mathbf{e}_\rho \cdot \mathbf{n} dl$$

También consideremos el hecho que $\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_\rho = \mathbf{t} \cdot \mathbf{e}_z$, donde \mathbf{t} es el vector tangente a C . Por lo cual obtenemos:

$$\oint_S \frac{2}{\rho} \chi \mathbf{e}_\rho \cdot \mathbf{n} dS = 4\pi \oint_S \chi \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{t} dl$$

Recordemos que nos interesan soluciones de la forma $\chi = \chi(\Psi(x, y))$, de lo que se tiene:

$$\oint_S \frac{2}{\rho} \chi \mathbf{e}_\rho \cdot \mathbf{n} dS = 4\pi \oint_S \chi(\Psi) \frac{dz(i)}{dl} dl = 4\pi \chi(\Psi) \oint_S dz(i) \quad (3.67)$$

tenemos que la curva C es cerrada por tanto la integral anterior es cero. Entonces de la ecuación (3.66) y la conclusión anterior tenemos:

$$\oint_S \nabla \chi \cdot \mathbf{n} dS = 0 \quad (3.68)$$

Pero $\chi = \chi(\Psi)$, así que de la ecuación anterior se sigue:

$$\frac{\partial \chi(\Psi)}{\partial \Psi} \oint_S \nabla \Psi \cdot \mathbf{n} dS = 0 \quad (3.69)$$

Sea que $\nabla \Psi = \mathbf{n} < \nabla \Psi | \nabla \Psi >^{1/2}$, entonces:

$$\frac{\partial \chi(\Psi)}{\partial \Psi} \oint_S < \nabla \Psi | \nabla \Psi >^{1/2} dS = 0 \quad (3.70)$$

por tanto podemos concluir:

$$\frac{\partial \chi(\Psi)}{\partial \Psi} = 0$$

por lo cual llegamos a la misma conclusión como en el Lemma anterior. La interpretación de este resultado es idéntico de la cual hemos dado para el Lemma anterior y no la discutiremos nuevamente.

3.3. Generación de campos toroidales por campos poloidales.

Hasta el momento hemos estudiado propiedades del campo poloidal \mathbf{B}^P generado por el campo de velocidad \mathbf{u}^P y hemos hecho nuestros análisis exclusivamente a sistemas que posean invariancia translacional. En esta sección nos concentraremos en sistemas que posean simetría axial. Como hemos discutido en la introducción, el sol posee un campo toroidal \mathbf{B}^T del orden de $|\mathbf{B}^T| \approx (1-4)\text{KG}$ (asociado a las manchas solares), el cual es mucho más intenso comparado con la componente poloidal la cual es del orden de $|\mathbf{B}^P| \approx (1-2)\text{G}$. De una buena aproximación el sol ocupa una región esférica V y es un sistema axial simétrico al respecto de su eje de rotación. Motivados por la discrepancia que hay entre las intensidades de las componentes \mathbf{B}^T y \mathbf{B}^P del campo magnético solar, en esta sección

estudiaremos el comportamiento de la componente toroidal de \mathbf{B} generada por un campo de velocidad axial simétrico. Nuestro análisis como veremos da argumentos del porque de la discrepancia entre las intensidades de \mathbf{B}^T y \mathbf{B}^P del sol.

Recordemos que \mathbf{B}^T satisface en V :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}^T(\mathbf{x}, t) = & \nabla \times [\mathbf{u}^T(\mathbf{x}, t) \times \mathbf{B}^P(\mathbf{x}, t) + \mathbf{u}^P(\mathbf{x}, t) \times \mathbf{B}^T(\mathbf{x}, t)] \\ & + \eta \nabla^2 \mathbf{B}^T(\mathbf{x}, t) \end{aligned} \quad (3.71)$$

De esta ecuación vemos que \mathbf{B}^P funge como fuente para generar al campo \mathbf{B}^T . El enfoque central de esta sección será entender el impacto que tiene esta fuente sobre \mathbf{B}^T . Del análisis realizado en las últimas secciones de capítulo anterior, hemos visto que $\mathbf{B}^T = B(t, \rho, \varphi) \mathbf{a}_\varphi$, en donde el escalar $B(t, \rho, \varphi)$ satisface en V :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} B(t, \rho, \varphi) + \rho(\mathbf{u}^P(t, \rho, \varphi) \cdot \nabla)(\rho^{-1} B(t, \rho, \varphi)) = \\ = \rho(\mathbf{B}^P(t, \rho, \varphi) \cdot \nabla)(\rho^{-1} u^\varphi(t, \rho, \varphi)) + \eta(\nabla^2 - \frac{1}{\rho^2})B(t, \rho, \varphi) \end{aligned}$$

Consideramos que $\mathbf{u} = \mathbf{u}^T$, en donde \mathbf{u}^T representa una rotación diferencial, es decir, $\mathbf{u}^T = u^\varphi(\rho, \varphi) \mathbf{a}_\varphi = \rho \omega(\rho, \varphi) \mathbf{a}_\varphi$. Para tal \mathbf{u}^T la ecuación anterior se reduce a:

$$\frac{\partial}{\partial t} B(t, \rho, \varphi) = [\rho(\mathbf{B}^P(t, \rho, \varphi) \cdot \nabla)(\omega(\rho, \varphi))] + \eta(\nabla^2 - \frac{1}{\rho^2})B(t, \rho, \varphi) \quad (3.72)$$

Nuestro objetivo por ahora será estudiar tal ecuación. Siguiendo el mismo tratamiento que hicimos para el problema del cilindro, consideramos primero la situación en donde $\eta \equiv \frac{c^2}{4\pi\sigma} = 0$ en V . Esto implica que B satisface:

$$\frac{\partial}{\partial t} B(t, \rho, \varphi) = \rho(\mathbf{B}^P(t, \rho, \varphi) \cdot \nabla)(\omega(\rho, \varphi)) \quad (3.73)$$

Tenemos que la solución de esta ecuación esta dada por:

$$B(t, \rho, \varphi) = f(\mathbf{x}) + [\rho(\mathbf{B}^P(t, \rho, \varphi) \cdot \nabla)(\omega(\rho, \varphi))]t \quad (3.74)$$

y si elegimos $f(\mathbf{x}) = 0$, entonces

$$B(t, \rho, \varphi) = [\rho(\mathbf{B}^P(t, \rho, \varphi) \cdot \nabla)(\omega(\rho, \varphi))]t \quad (3.75)$$

Pero la estructura de esta solución es completamente distinta de la solución (3.16). Mientras que (3.16) exhibe una dependencia lineal del campo inicial \mathbf{B}_0^P , en contraste (3.75) no posee tal dependencia. Esto implica que \mathbf{B}^T pueda ser generado aún sin la presencia de un campo \mathbf{B}_0^T inicial. Según de (3.75) un campo poloidal \mathbf{B}^P acoplado con la componente \mathbf{u}^T genera un campo \mathbf{B}^T . Por otro lado como hemos argumentado para el caso del

cilindro el crecimiento de \mathbf{B}^T no puede continuar indefinidamente porque la difusión juega un papel importante. Para especificar el tiempo en el cual difusión se vuelve importante comparemos los términos:

$$\rho(\mathbf{B}^P(t, \rho, z) \cdot \nabla) \omega(\rho, z)$$

y

$$\eta(\nabla^2 - \frac{1}{\rho^2})[\rho(\mathbf{B}^P(t, \rho, z) \cdot \nabla) \omega(\rho, z)]t$$

Sea que L es la escala de longitud en la cual esta definida la distribución \mathbf{B}_0^P y sea B_0 su valor máximo, entonces:

$$\frac{|\rho \mathbf{B}^P \cdot \nabla \omega|}{|\eta(\nabla^2 - \frac{1}{\rho^2})[\rho(\mathbf{B}^P \cdot \nabla) \omega]|t} \simeq \frac{L B_0 \omega_0 L^{-1}}{\eta L^{-2} L B_0 \omega_0 L^{-1} t} \simeq \frac{L^2}{\eta t} = \frac{\tau_\eta}{t} \quad (3.76)$$

donde τ_η es el tiempo *ohmico*. Entonces para tiempos que satisfagan $t \ll \frac{\tau_\eta}{\gamma} \equiv \tau_\eta$ tenemos valida la solución (3.75). Por otro lado el crecimiento del campo \mathbf{B}^T , en ordenes de magnitud es:

$$|\mathbf{B}^T(t, \rho, z)| = [\rho(\mathbf{B}^P \cdot \nabla) \omega(\rho, z)]t \simeq L B_0 \frac{\omega_0}{L} t \simeq L B_0 \frac{\omega_0 L^2}{L \eta} = B_0 \frac{\omega_0 L^2}{\eta} \simeq B_0 R_m \quad (3.77)$$

Es interesante comparar tal estimación con el correspondiente crecimiento de un campo poloidal inicial B_0^P que se encuentra en un fluido conductor cuando $R_m \gg 1$. Según de la ecuación (3.24) tenemos $|\mathbf{B}^P| \approx B_0 \sqrt{R_m}$, mientras (3.77) nos dice $|\mathbf{B}^T| \approx B_0 R_m$.

Aplicamos esta última estimación para el caso del sol. La velocidad de las fluctuaciones² en el sol es $|u| \approx 1 \text{ km/seg}$ sobre una escala de longitud de $L \approx 10^3 \text{ km}$ y tomamos la resistividad como $\eta \approx 10^{-1} \text{ km}^2/\text{seg}^{-1}$, implicando $R_m \approx \frac{uL}{\eta} \approx 10^4$. Por otro lado se tiene que el valor típico de \mathbf{B}^P es del orden de $|\mathbf{B}^P| \approx (1-2) \text{ G}$, implicando que $|\mathbf{B}^T| \approx 10^4 \text{ G}$, tal resultado corresponde al valor medido para B^T del sol. De tal análisis podemos ver que el campo \mathbf{B}^T puede ser generado debido a la rotación del sistema acoplada con \mathbf{B}^P .

3.4. Régimen estático asociadas al campo toroidal magnético.

En el problema del cilindro una vez que introducimos una distribución inicial $\mathbf{B}_0^P(\mathbf{x})$, encontramos un estado en donde la generación de \mathbf{B}^P fue balanceada entre advección y el decaimiento ohmico. Como se discutió este estado fue debido a la condición que impusimos sobre \mathbf{B}^P al infinito. Al respecto de los sistemas con simetría axial y en particular la

²Es necesario mencionar que tales fluctuaciones representan la parte turbulenta del campo promedio de velocidad en la zona convectiva. Solamente queremos en esta parte dar una estimación del campo toroidal generado.

estimación de \mathbf{B}^T para el sol, será relevante una examinación de la siguiente situación. ¿Si mantenamos $\mathbf{B}^P \neq 0$, existen entonces soluciones estaticas de la ecuación (3.72)?, ¿Si existen que propiedades tienen? Esta session tiene como finalidad a resolver tales preguntas.

Si tales soluciones existen, entonces el escalar $B(t, \rho, z)$ satisface en V :

$$\rho(\mathbf{B}^P \cdot \nabla)w(\rho, z) + \eta(\nabla^2 - \frac{1}{\rho^2})B(t, \rho, z) = \frac{\partial}{\partial t}B(t, \rho, z) \quad (3.78)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}B(t, \rho, z) = 0 \quad (3.79)$$

la cual implica

$$\rho(\mathbf{B}^P \cdot \nabla)w(\rho, z) + \eta(\nabla^2 - \frac{1}{\rho^2})B(\rho, z) = 0 \quad (3.80)$$

Para estudiar el comportamiento de las soluciones de esta ecuación es conveniente emplear coordenadas esfericas (r, θ, φ) centradas en V . Tenamos por un lado:

$$\mathbf{B}^T = B(\rho, z)\mathbf{a}_\varphi = B(r, \theta)\mathbf{a}_\varphi$$

así que

$$\begin{aligned} \mathbf{B}^T &\equiv \nabla \times \mathbf{A}^P(r, \theta) = \nabla \times [rT(r, \theta) + \nabla S(r, \theta)] \\ &= \nabla \times (rT(r, \theta)) = \nabla \times [rT(r, \theta)\mathbf{a}_r] \\ &= -\frac{\partial}{\partial \theta}T(r, \theta)\mathbf{a}_\varphi \end{aligned}$$

De la comparación de estas dos ultimas expresiones, obtenamos:

$$B(r, \theta) = -\frac{\partial}{\partial \theta}T(r, \theta)$$

Así como también podemos demostrar la siguiente identidad:

$$(\nabla_{\rho, z, \varphi}^2 - \frac{1}{\rho^2})(-\frac{\partial}{\partial \theta}T(r, \theta)) = -\frac{\partial}{\partial \theta}(\nabla_{r, \theta, \varphi}^2 T(r, \theta)) \quad (3.81)$$

en donde $\nabla_{\rho, z, \varphi}^2$ y $\nabla_{r, \theta, \varphi}^2$ denotan al operador laplaciano en coordenadas cilindricas y esfericas respectivamente. Basicamente esta identidad se obtiene de la siguiente manera: Recordemos primero que:

$$\nabla_{r, \theta, \varphi}^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$$

y utilizando

$$\frac{1}{\rho^2} = \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta}$$

se sigue:

$$(\nabla_{r,\theta}^2 - \frac{1}{\rho^2})(-\frac{\partial}{\partial \theta} T(r, \theta)) = [\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{\partial}{\partial r}) + \frac{1}{r^2 \sinh \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sinh \theta \frac{\partial}{\partial \theta}) + \frac{1}{r^2 \sinh^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} - \frac{1}{r^2 \sinh^2 \theta}] (-\frac{\partial}{\partial \theta} T(r, \theta))$$

Partiendo de esta expresión, y conmutando al operador $-\frac{\partial}{\partial \theta}$ con ∇^2 podemos llegar fácilmente a la identidad (3.81). Con tal identidad, entonces la ecuación (3.80) toma la forma:

$$\eta \frac{\partial}{\partial \theta} (\nabla_{r,\theta}^2 T(r, \theta)) = \rho (\mathbf{B}^P \cdot \nabla) \omega(\rho, z) \quad (3.82)$$

Por el hecho que estamos trabajando con campos axial simétricos proponemos:

$$T(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(r) P_n(\cos \theta) \quad (3.83)$$

donde $f_n(r)$ son funciones por determinar, mientras $P_n(\cos \theta)$ son los polinomios de Legendre los cuales satisfacen:

$$\frac{1}{\sinh \theta} \frac{d}{d\theta} (\sinh \theta \frac{d}{d\theta} P(\cos \theta)) + (n+1)n P_n(\cos \theta) = 0, \quad \theta \in [0, \pi], \quad n = 0, 1, \dots \quad (3.84)$$

Substituyendo (3.83) en (3.82) y después de un cálculo extenso esto implica:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \theta} [\nabla^2 T(r, \theta)] &= \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{\partial}{\partial r} T(r, \theta)) + \frac{1}{r^2} \sinh \theta \frac{\partial}{\partial \theta} T(r, \theta) \right] \\ &= \frac{\partial}{\partial \theta} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^2} \left[\frac{d}{dr} (r^2 \frac{d}{dr} f_n(r)) - f_n(r)(n+1)n \right] P_n(\cos \theta) \right\} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^2} \left[\frac{d}{dr} (r^2 \frac{d}{dr} f_n(r)) - f_n(r)(n+1)n \right] \frac{d}{d\theta} P_n(\cos \theta) \end{aligned}$$

Examinemos en seguida la estructura de la parte derecha de la ecuación (3.82). Para ello supongamos que \mathbf{B}^P obedece en V :

$$\nabla \times \mathbf{B}^P = 0 \quad (3.85)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}^P = 0 \quad (3.86)$$

Debido a que V es de extensión finita, no hay ambigüedad alguna al trabajar en términos de un potencial escalar magnético definido por $\mathbf{B}^P \equiv -\nabla \Phi$. La ecuación (3.86) implica que Φ satisface:

$$\nabla^2 \Phi(r, \theta) = 0 \quad (3.87)$$

Representamos soluciones de esta ecuación en la forma:

$$\Phi(r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n r^n P_n(\cos \theta) \quad (3.88)$$

la cual como podemos ver es regular en el origen. Entonces obtenemos que $\mathbf{B}^P(r, \theta)$:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}^P(r, \theta) &= -\nabla \Phi(r, \theta) = -\left[\frac{\partial}{\partial r} \Phi(r, \theta) \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \Phi(r, \theta) \mathbf{e}_\theta \right] \\ &= -\sum_{n=1}^{\infty} \left[c_n n r^{n-1} P_n(\cos \theta) \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} c_n r^n \frac{d}{d\theta} P_n(\cos \theta) \mathbf{e}_\theta \right] \end{aligned} \quad (3.89)$$

La especificación del lado derecho de (3.82) también requiere la especificación de la velocidad angular $\omega = \omega(\rho, z) = \omega(r, \theta)$. Aunque podemos suponer también que $\omega = \omega(r, \theta)$ y expandirla en términos de polinomios de Legendre, desafortunadamente la estructura del lado derecho de (3.82) se volvería más complicada. Para hacer más sencillo nuestro análisis nosotros supondremos que $\omega = \omega(\rho)$. Bajo tal suposición la ecuación (3.82) implica:

$$\begin{aligned} &\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{r^2} \left[\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d}{dr} f_n(r) \right) - f_n(r) (n+1)n \right] \frac{d}{d\theta} P_n(\cos \theta) \\ &= -\sin \theta \sum_{n=1}^{\infty} c_n n r^n \frac{d}{dr} \omega(r) P_n(\cos \theta) \end{aligned} \quad (3.90)$$

Tomando en cuenta la identidad:

$$-\frac{1}{\sin \theta} \left[\frac{d}{d\theta} P_{n+1}(\cos \theta) - \frac{d}{d\theta} P_{n-1}(\cos \theta) \right] = (2n+1) P_n(\cos \theta)$$

podemos expresar (3.90) de la siguiente manera

$$\begin{aligned} &\sum_{n=2}^{\infty} \left\{ \frac{\eta}{r^2} \left[\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d}{dr} f_n(r) \right) - n(n+1) f_n(r) \right] - \left[\frac{c_{n-1}}{2n-1} (n-1) r^{n-1} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{c_{n+1}}{2n+3} (n+1) r^{n+1} \right] \frac{d}{dr} \omega(r) \right\} \frac{d}{d\theta} P_n(\cos \theta) \\ &+ \frac{\eta}{r^2} \left[\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d}{dr} f_1(r) \right) - 2 f_1 \right] \frac{d}{d\theta} P_1(\cos \theta) + \frac{2}{5} c_2 r^2 \frac{d}{dr} \omega(r) = 0 \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned} &\frac{1}{r^2} \left[\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d}{dr} f_n(r) \right) - n(n+1) f_n(r) \right] = \frac{1}{\eta} \left[\frac{c_{n-1}}{2n-1} (n-1) r^{n-1} \right. \\ &\quad \left. - \frac{c_{n+1}}{2n+3} (n+1) r^{n+1} \right] \frac{d}{dr} \omega(r) \equiv g_n(r), \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (3.91)$$

A través de esta ecuación podemos ver que los coeficientes c_{n-1} y c_{n+1} con $n = 1, 2, \dots$, del campo $\mathbf{B}^P = -\nabla \Phi$ generan las correspondientes componentes de \mathbf{B}^T , a través de un

acoplamiento con la rotación diferencial.

El sistema de ecuaciones (3.91) es válido al interior de la región esférica V y para entender la estructura de \mathbf{B}^P debemos resolverlo. Para evitar complicaciones matemáticas resolveremos tal sistema suponiendo que V es de extensión infinita, asumiendo también que $\omega(r)$ decae rápidamente en el infinito. Para tal caso consideramos $r \in [0, \infty)$ y las soluciones para este sistema de ecuaciones se proponen de la siguiente manera:

$$f_m(r) = \int_0^\infty G_m(r, r') g_m(r') dr' \quad (3.92)$$

donde $G_m(r, r')$ es la función de Green en $(0, \infty)$ la cual satisface para $m = 1, 2, \dots$:

$$\frac{1}{r^2} \left[\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d}{dr} G_m(r, r') \right) - m(m+1) G_m(r, r') \right] = \delta(r - r') \quad (3.93)$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} G_m(r, r') = 0, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} G_m(r, r') = 0 \quad (3.94)$$

Tal $G_m(r, r')$ está dada por

$$G_m(r, r') = -\frac{1}{2m+1} \begin{cases} \frac{r'^m}{r^{m-1}} & r < r' \\ \frac{r'^{m+2}}{r^{m+1}} & r > r' \end{cases}$$

Para ver la estructura de las soluciones de (3.91), consideramos la situación en donde \mathbf{B}^P está expresado por:

$$\mathbf{B}^P = -c_1 (P_1(\cos \theta) \mathbf{a}_r + \frac{d}{d\theta} P_1(\cos \theta) \mathbf{a}_\theta) \quad (3.95)$$

Para tal \mathbf{B}^P , de (3.91) tenemos:

$$\frac{1}{r^2} \left\{ \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d}{dr} f_2(r) \right) - 6 f_2(r) \right\} = r B_0 \frac{d}{dr} \omega(r) \quad (3.96)$$

Entonces la solución está dada como una convolución de la función de Green $G_2(r, r')$, la cual está sujeta a las condiciones ya expuestas, en este caso toma la siguiente forma:

$$G_2(r, r') = -\frac{1}{5} \begin{cases} \frac{r'^2}{r} & r < r' \\ \frac{r'^4}{r^3} & r > r' \end{cases}$$

entonces

$$\begin{aligned} f_2(r) &= \int_0^r G(r, r') \left(r' B_0 \frac{d\omega(r')}{dr'} \right) dr' + \int_r^\infty G(r, r') \left(r' B_0 \frac{d\omega(r')}{dr'} \right) dr' \\ &= \int_0^r \frac{r'^4}{5r^3} \left(r' B_0 \frac{d\omega(r')}{dr'} \right) dr' + \int_r^\infty \frac{r^2}{5r'} \left(r' B_0 \frac{d\omega(r')}{dr'} \right) dr' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{B_0}{5r^3} \int_0^r r'^6 \frac{d\omega(r')}{dr'} dr' + \frac{r^2 B_0}{5} \int_r^\infty \frac{d\omega(r')}{dr'} dr' \\
&= \frac{B_0}{5r^3} (r'^6 \omega(r')) \Big|_0^r - \frac{B_0}{r^3} \int_0^r r'^4 \omega(r') dr' - \frac{B_0}{5} r^2 \omega(r) + \frac{B_0}{5} r^2 \omega(\infty) \\
&= -\frac{B_0}{r^3} \int_0^r r'^4 \omega(r') dr' + \frac{B_0}{5} r^2 \omega(\infty)
\end{aligned}$$

en donde hemos asumido que $\omega(r)$ es diferenciable en $[0, \infty)$ y satisface:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \omega(r) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^3}\right) \quad (3.97)$$

llegando a la conclusión:

$$f_2(r) = -\frac{B_0}{r^3} \int_0^r r'^4 \omega(r') dr' \quad (3.98)$$

Entonces obtenemos que el campo magnético toroidal está dado por

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}^T(r, \theta) &= \frac{1}{\eta} \left(-\sum_1^\infty f_n \frac{d}{d\theta} P_n(\cos \theta) \right) \mathbf{a}_\varphi \\
&= \frac{1}{\eta} \left(-f_2(r) \frac{d}{d\theta} P_2(\cos \theta) \right) \mathbf{a}_\varphi \\
&= \frac{3\sigma}{4\pi c^2} \left(\frac{B_0}{r^3} \int_0^r r'^4 \omega(r') dr' \right) \sin \theta \cos \theta \mathbf{a}_\varphi \quad (3.99)
\end{aligned}$$

Es importante notar el contraste que existe entre el comportamiento de tal $\mathbf{B}^T(r, \theta)$ y el comportamiento de \mathbf{B}^P en sistemas translacionalmente invariantes. Tal contraste radica en que en la situación presente no se vio el fenómeno de expulsión para \mathbf{B}^T por el flujo del fluido conductor cuando $R_m \rightarrow \infty$. También es importante observar el papel que juega \mathbf{B}^P para la generación de \mathbf{B}^T . Una vez que exista un mecanismo para mantener el campo \mathbf{B}^P , la generación de \mathbf{B}^T viene como consecuencia natural. Entonces un entendimiento de campos magnéticos cósmicos necesita un mecanismo para generar y mantener \mathbf{B}^P . Retornaremos la existencia de tales mecanismos en el próximo capítulo.

Capítulo 4

Teoría del dinamo.

En el capítulo anterior hemos estudiado varias propiedades de campos magnéticos generados por diferentes tipos de campos de velocidad. Los resultados obtenidos son contrastantes. Por un lado hemos visto que el fluido conductor puede amplificar un campo inicial, pero por otro lado la disipación Ohmica tiene un impacto significativo sobre el campo \mathbf{B} generado. Así como también vimos que el flujo del fluido conductor expulsa a el campo poloidal de su interior, mientras que no encontramos situaciones en donde el campo toroidal es expulsado del interior del fluido conductor. Analizamos soluciones estaticas que se encontraron bajo condiciones muy particulares. En el análisis de tales soluciones nos dimos cuenta que tanto en el campo \mathbf{B}^P del cilindro como \mathbf{B}^P para la esfera estos estuvieron mantenidos con condiciones artificiales, es decir, las hemos impuesto a mano, con la finalidad de entender las propiedades de los campos generados. En este capítulo estudiaremos la influencia del fluido conductor sobre una distribución inicial del campo \mathbf{B} , pero bajo condiciones que se acotarán más a situaciones físicas. Nos interesa investigar cual será el impacto de u sobre una distribución inicial $\mathbf{B}_0(\mathbf{x})$ y si hay la posibilidad de que el campo u pueda mantenerla o amplificarla. La diferencia crucial entre este capítulo y el anterior como veremos serán las condiciones impuestas a \mathbf{B} en el infinito. En este capítulo asumiremos que \mathbf{B} en el infinito se comporta como almenos un campo magnético dipolar.

Denotamos nuevamente von V la región en donde existe un fluido conductor, la cual tomaremos como esférica. Para este capítulo será necesario emplear el espacio $\chi(\bar{V})$, el cual hemos definido en el capítulo 1. Entonces tomaremos $u \in \chi(\bar{V})$, incompresible y que esta sujeto a $u|_{\partial V} = 0$.

Como hemos visto para tal u el campo $\mathbf{B}(t, \mathbf{x})$ satisface en V :

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}(t, \mathbf{x}) = \nabla \times (u(t, \mathbf{x}) \times \mathbf{B}(t, \mathbf{x})) + \eta \nabla^2 \mathbf{B}(t, \mathbf{x}) \quad (\pm.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(t, \mathbf{x}) = 0 \quad (\pm.2)$$

mientras en la ausencia de $\rho(t, \mathbf{x})$ y $\mathbf{J}(t, \mathbf{x})$ en $R^3 - \bar{V}$, el campo \mathbf{B} satisface:

$$\nabla \times \mathbf{B}(t, \mathbf{x}) = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{B}(t, \mathbf{x}) = 0 \quad (4.4)$$

y adicionalmente satisface:

$$[\mathbf{B}]|_{\mathbf{x} \in \partial V} = 0 \quad (4.4)$$

$$\lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} \mathbf{B} = O \frac{1}{|\mathbf{x}|^3} \quad (4.5)$$

Suponemos que en $t = t_0$ esta definida una distribución no singular $\mathbf{B}(t_0, \mathbf{x}) \equiv \mathbf{B}_0(\mathbf{x})$ compatible con (4.4) y (4.5). Sea que $\mathbf{B}(t, \mathbf{x})$ representa la solución del sistema (4.1)-(4.5) y adicionalmente $\mathbf{B}(t, \mathbf{x})|_{t_0} = \mathbf{B}_0$. Nos interesa entender primero la naturaleza de $\mathbf{B}(t, \mathbf{x})$ para $t > t_0$, y precisamente $t \gg t_{\text{ohm}}$. Pero tal situación nos lleva a involucrarnos en un problema matemáticamente complicado, ya que necesitamos entender el comportamiento de las soluciones del problema de valor inicial con condiciones a la frontera descrito por (4.1)-(4.5). No obstante de estas dificultades, motivados por consideraciones físicas se requiere no solo el comportamiento de $\mathbf{B}(t, \mathbf{x})$ en una vecindad abierta de t_0 , sino también el comportamiento de $\mathbf{B}(t, \mathbf{x})$ cuando $t \rightarrow \infty$, es decir, $t \gg \tau_{\text{ohm}}$.

Para tener un entendimiento del problema que hemos planteado consideramos como punto de partida el comportamiento de la energía magnética total:

$$W(t) = \frac{1}{8\pi} \int_{R^3} \mathbf{B}(t, \mathbf{x}) \cdot \mathbf{B}(t, \mathbf{x}) d^3\mathbf{x} \quad (4.6)$$

evaluada en una solución $\mathbf{B}(t, \mathbf{x})$ de (4.1)-(4.5). Por simplicidad estudiamos $W(t)$ para el caso en donde u esta sujeta a $\nabla \cdot u(t, \mathbf{x}) = 0$ y $u|_{\partial V} = 0$. Consideramos el cambio de $W(t)$ respecto del tiempo

$$\frac{dW(t)}{dt} = \frac{1}{8\pi} \frac{d}{dt} \int_{R^3} \mathbf{B}(t, \mathbf{x}) \cdot \mathbf{B}(t, \mathbf{x}) d^3\mathbf{x}$$

donde (t, \mathbf{x}) son las coordenadas eulerianas. Se sigue entonces que:

$$\begin{aligned} \frac{dW(t)}{dt} &= \frac{2}{8\pi} \int_{R^3} \mathbf{B}(t, \mathbf{x}) \cdot \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}(t, \mathbf{x}) d^3\mathbf{x} = -\frac{c}{4\pi} \int_{R^3} \mathbf{B}(t, \mathbf{x}) \cdot [\nabla \times \mathbf{E}(t, \mathbf{x})] d^3\mathbf{x} \\ &= -\frac{c}{4\pi} \int_{R^3} \nabla \cdot [\mathbf{E}(t, \mathbf{x}) \times \mathbf{B}(t, \mathbf{x})] d^3\mathbf{x} - \frac{c}{4\pi} \int_{R^3} [\mathbf{E}(t, \mathbf{x}) \cdot (\nabla \times \mathbf{B}(t, \mathbf{x}))] d^3\mathbf{x} \end{aligned}$$

Dividiendo la integral de volumen sobre V y $R^3 - V$, tomando en cuenta que $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ en $R^3 - V$ llegamos a

$$\begin{aligned} \frac{dW(t)}{dt} &= -\frac{c}{4\pi} \left[\int_V \mathbf{E}(t, \mathbf{x}) \cdot [\nabla \times \mathbf{B}(t, \mathbf{x})] d^3\mathbf{x} + \int_{R^3 - V} \mathbf{E}(t, \mathbf{x}) \cdot [\nabla \times \mathbf{B}(t, \mathbf{x})] d^3\mathbf{x} \right] \\ &= -\frac{c}{4\pi} \int_V \mathbf{E}(t, \mathbf{x}) \cdot \nabla \times \mathbf{B}(t, \mathbf{x}) d^3\mathbf{x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{c}{4\pi} \int_V \left[\frac{\mathbf{J}(t, \mathbf{x})}{\sigma} - \frac{\mathbf{u}(t, \mathbf{x}) \times \mathbf{B}(t, \mathbf{x})}{c} \right] \cdot \nabla \times \mathbf{B}(t, \mathbf{x}) d^3\mathbf{x} \\
&= -\frac{c}{4\pi} \int_V \left[\frac{\mathbf{J}(t, \mathbf{x})}{\sigma} \cdot \nabla \times \mathbf{B}(t, \mathbf{x}) - \left(\frac{\mathbf{u}(t, \mathbf{x})}{c} \times \mathbf{B}(t, \mathbf{x}) \right) \cdot \nabla \times \mathbf{B}(t, \mathbf{x}) \right] d^3\mathbf{x} \\
&= -\int_V \frac{\mathbf{J}(t, \mathbf{x}) \cdot \mathbf{J}(t, \mathbf{x})}{\sigma} d^3\mathbf{x} + \frac{1}{4\pi} \int_V [(\mathbf{u}(t, \mathbf{x}) \times \mathbf{B}(t, \mathbf{x})) \cdot (\nabla \times \mathbf{B}(t, \mathbf{x}))] d^3\mathbf{x}
\end{aligned}$$

la cual escribimos en la forma

$$\frac{dW(t)}{dt} = -\int_V \frac{\mathbf{J}(t, \mathbf{x}) \cdot \mathbf{J}(t, \mathbf{x})}{\sigma} - \int_V \mathbf{u} \cdot (\mathbf{J} \times \mathbf{B}) d^3\mathbf{x} \quad (4.7)$$

Tal relación sugiere que si $\mathbf{u} = 0$ en V con $\sigma \neq 0$, entonces

$$\lim_{t \rightarrow \infty} W(t) = 0 \quad (4.8)$$

tal comportamiento de $W(t)$ es natural ya que es debido al decaimiento de la corriente a través de la resistividad finita del medio. Pero por otro lado si $\mathbf{u} \neq 0$ en V , el comportamiento de $W(t)$ se vuelve más complejo. Apalando a la identidad:

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{B}) \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) = -\nabla \cdot [(\mathbf{u} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}] + \mathbf{B} \cdot [\nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B})]$$

e integrandola sobre V llegamos:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{4\pi} \int_V [(\mathbf{u}(t, \mathbf{x}) \times \mathbf{B}(t, \mathbf{x})) \cdot (\nabla \times \mathbf{B}(t, \mathbf{x}))] d^3\mathbf{x} = -\frac{1}{4\pi} \oint_{S(V)} [(\mathbf{u} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}] \cdot d\mathbf{S} \\
&+ \frac{1}{4\pi} \int_V \mathbf{B} \cdot [\nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B})] d^3\mathbf{x} = \frac{1}{4\pi} \int_V \mathbf{B} \cdot [\nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B})] d^3\mathbf{x} \\
&= \frac{1}{4\pi} \int_V \mathbf{B} \cdot [(\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{B}] d^3\mathbf{x} = \frac{1}{8\pi} \int_V B^i B^j \left(\frac{\partial u^i}{\partial x^j} + \frac{\partial u^j}{\partial x^i} \right) d^3\mathbf{x}
\end{aligned}$$

En donde la integral sobre $S(V)$ se anula por el hecho que $\mathbf{u}|_{\partial V} = 0$. Entonces finalmente llegamos a:

$$\frac{dW(t)}{dt} = -\int_V \frac{\mathbf{J}(t, \mathbf{x}) \cdot \mathbf{J}(t, \mathbf{x})}{\sigma} d^3\mathbf{x} + \frac{1}{8\pi} \int_V B^i(t, \mathbf{x}) B^j(t, \mathbf{x}) \left(\frac{\partial}{\partial x^j} u^i(t, \mathbf{x}) + \frac{\partial}{\partial x^i} u^j(t, \mathbf{x}) \right) d^3\mathbf{x}$$

Esta relación sugiere que hay la posibilidad en donde la advección domina sobre la difusión, es decir, puedan existir campos $\mathbf{u} \in \chi(\bar{V})$ tales que $W(t)$ no decae a cero. Al respecto de los campos $\mathbf{u} \in \chi(\bar{V})$ que satisfacen la propiedad ya mencionada daremos la siguiente definición.

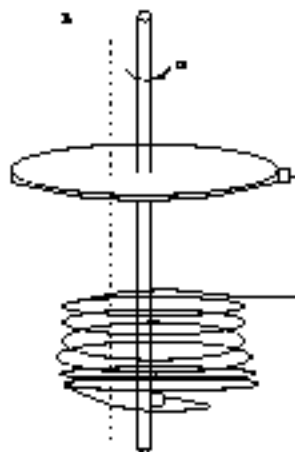
Decimos que para una $(V, \eta, \mathbf{B}_0(\mathbf{x}))$ especificada, el campo $\mathbf{u} \in \chi(\bar{V})$ esta actuando como un dinamo si la solución $\mathbf{B}(t, \mathbf{x})$ de (4.1)-(4.5), sujeta $\mathbf{B}(t, \mathbf{x})|_{t_0} = \mathbf{B}_0(\mathbf{x})$ satisface:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} W(t) = \frac{1}{8\pi} \int_{R^3} \mathbf{B}(t, \mathbf{x}) \cdot \mathbf{B}(t, \mathbf{x}) d^3\mathbf{x} \neq 0 \quad (4.9)$$

Obviamente tal definición no implica que exista $u \in \chi(\bar{V})$ que actúe como dinamo. Precisamente la teoría del dinamo tiene como finalidad el desarrollo de criterios para establecer si $u \in \chi(\bar{V})$ está actuando como dinamo para una $(V, \eta, \mathbf{B}_0(\mathbf{x}))$ dada. Siguiendo la evolución histórica discutiremos una situación física en donde acción dinamo exista. Tal situación física es conocida como el homopolar dinamo o también como el disco de Faraday.

4.1. Homopolar dinamo.

El homopolar dinamo consiste de un disco conductor sólido de radio R que respecto de un sistema de referencia inercial está girando con una velocidad angular ω . También un alambre conductor sólido con resistencia R está en reposo respecto al mismo sistema de referencia y se encuentra sujeto al disco conductor como lo muestra la siguiente figura:



Consideremos primero el caso en donde el alambre no está presente y solo tenemos el disco girando a través del eje. Cuando el disco se encuentra rotando los electrones de conducción se mueven bajo la fuerza centrífuga y como consecuencia el eje del disco es cargado positivamente y el borde negativamente. Tal movimiento de la carga implica el desarrollo de una diferencia de potencial entre el borde del disco y el eje, el estado de equilibrio llega cuando la fuerza del campo eléctrico se iguala a la fuerza centrífuga, es decir,

$$|E| = \frac{m r \omega^2}{e}$$

Bajo tales condiciones la diferencia de potencial entre el eje y el borde tiene el valor

$$V = \int_0^R \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \frac{m R^2 \omega^2}{2e}$$

Si conectamos el borde del disco con el eje a través de un alambre en principio hay una corriente en este circuito. Pero tal diferencia de potencial es muy pequeña, sea que consideremos $R = 10\text{cm}$ y $\omega = 100\text{seg}^{-1}$, entonces se sigue $V \approx 10^{-8}\text{statv}$. A pesar de ser tan

pequeña la corriente generada, en el pasado fueron capaces de medirla.

El homopolar dinamo tiene otro principio, el cual explicamos ahora. Sea que primero a través de un switch el circuito que muestra la figura es abierto en un tiempo t_0 e introducimos un campo \mathbf{B}_0 perpendicular al plano del disco. Como consecuencia de tal \mathbf{B}_0 los electrones de conducción son afectados por la fuerza de Lorentz resultando una separación de las cargas. Es también generado un campo eléctrico \mathbf{E} , el cual cancela la fuerza $\mathbf{F} = \frac{\mathbf{u} \times \mathbf{B}}{c}$, llevando así a un estado de equilibrio. La fuerza electromotriz resultante está descrita por:

$$f.e.m = \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \oint_C \frac{\mathbf{F}}{e} \cdot d\mathbf{l} = \int_0^R (\mathbf{u} \times \mathbf{B}_0) \cdot d\mathbf{l} \quad (4.10)$$

Sea ahora que cerramos el circuito. Como consecuencia hay una corriente $I(t)$ a través del alambre la cual satisface:

$$L \frac{1}{c^2} \frac{dI(t)}{dt} + RI(t) \equiv f.e.m = \int_0^R (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} \quad (4.11)$$

donde L es el coeficiente de auto-inductancia del alambre conductor y R es la resistencia asociada al alambre. Es importante notar que la parte derecha de (4.11) está evaluada en el campo magnético \mathbf{B} generado por tal $I(t)$. Notemos que el campo inicial \mathbf{B}_0 fue usado solo para iniciar el proceso inductivo.

La f.e.m debida a \mathbf{B} generado por $I(t)$ es:

$$f.e.m = \frac{1}{c} \int_0^R [(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \times \mathbf{B}] \cdot d\mathbf{l}$$

la cual tiene la forma :

$$\begin{aligned} f.e.m &= \frac{1}{c} \int_0^R [(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \times \mathbf{B}] \cdot d\mathbf{l} \\ &= \frac{1}{c} \int_0^R (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \cdot (\mathbf{B} \times d\mathbf{l}) = \frac{1}{c} \int_0^R [(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{B})(\mathbf{r} \cdot d\mathbf{l}) - (\boldsymbol{\omega} \cdot d\mathbf{l})(\mathbf{r} \cdot \mathbf{B})] \\ &= \frac{1}{c} \int_0^R (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{B})(\mathbf{r} \cdot d\mathbf{l}) = \frac{1}{c} \int_0^R \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{B} \, r \, dr = \frac{1}{c} \boldsymbol{\omega} \cdot \int_0^R \mathbf{B} \, r \, dr \end{aligned} \quad (4.12)$$

Por otro lado el campo \mathbf{B} en el régimen cuasi-estático está descrito por la ley de Biot y Savart:

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{c} \int_V \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}', t) \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} d^3\mathbf{x}' \quad (4.13)$$

Entonces

$$\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{B} = \frac{1}{c} \boldsymbol{\omega} \cdot \int_V \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}', t) \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} d^3\mathbf{x}'$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{c} \int_V \omega \cdot \left[\mathbf{J}(\mathbf{x}, t) \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}') \right] \frac{d^3 \mathbf{x}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} \\
&= \frac{I(t)}{c} \oint_C \omega \cdot \left[d\mathbf{l} \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}') \right] \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} \\
&= \frac{I(t)}{c} \oint_C d\mathbf{l} \cdot \left[\omega \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}') \right] \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} \\
&= \frac{I(t)}{c} \oint_C \frac{d\mathbf{l} \cdot \mathbf{u}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} \tag{4.14}
\end{aligned}$$

y por tanto tenemos

$$f.e.m = \frac{1}{c} \int_0^R \left(\frac{I(t)}{c} \oint_C \frac{\mathbf{u} \cdot d\mathbf{l}}{r^3} \right) dr \tag{4.15}$$

$$= \frac{I(t)}{c^2} \int_0^R \left(\oint_C \frac{(\omega \mathbf{e}_z \times \mathbf{r}) \cdot d\mathbf{l}}{r^3} \right) dr = \pm M \frac{I(t) \omega}{c^2} \tag{4.16}$$

donde M el coeficiente de mutua-inductancia entre los dos conductores, el disco sólido y el alambre. El signo de la f.e.m es determinado por la proyección de la dirección de la torcadura en el alambre sobre la velocidad de rotación. Entonces la corriente $I(t)$ del sistema disco-alambre conductor satisface

$$\frac{L}{c^2} \frac{dI(t)}{dt} + RI(t) = \pm M \frac{I(t) \omega}{c^2} \tag{4.17}$$

Bajo la condición inicial $I(t = t_0) = I_0$, la solución $I(t)$ con $t \geq t_0$ es:

$$I(t) = I_0 \exp \left[\frac{M \omega}{L} \left(\frac{c^2 R}{M \omega} \pm 1 \right) t \right] \tag{4.18}$$

Entonces el comportamiento de $I(t)$ posee una dependancia fuerte del signo de f.e.m. Cuando $\left(-\frac{c^2 R}{M \omega} + 1 \right) > 0$ tenemos presente el mecanismo de auto-inductancia dinamo. En el caso $\left(-\frac{c^2 R}{M \omega} - 1 \right) > 0$ estamos en el régimen antidinamo.

El ejemplo del homopolar dinamo, muestra que por lo menos para el caso de conductores sólidos es posible la acción dinamo. Ahora una pregunta natural es si la acción dinamo es posible para un fluido conductor. Es importante señalar aquí una diferencia profunda entre el homopolar dinamo y acción dinamo para un fluido conductor. Para homopolar dinamo la dirección de la corriente $I(t)$ es fijada por el alambre conductor, pero para el fluido conductor como un objeto astrofísico no existen tal analogía. La corriente esta determinada por la fuerza electromotriz, la cual a su vez esta determinada por el movimiento del flujo conductor y condiciones de la frontera.

4.2. Teorema de Cowling y otros teoremas antidinamo.

Es de nuestro interés investigar si la acción dinamo para fluidos conductores exista. En particular estudiaremos primero el sistema con \mathbf{B} axial simétrico, generado por \mathbf{u} axial simétrico y en segundo lugar el sistema en el cual \mathbf{B} es no axial simétrico, generado por \mathbf{u}^T axial simétrico. Históricamente después del descubrimiento del campo solar, hecho por Hale en 1908, Larmor propuso que la corriente eléctrica generada por la rotación de la materia estelar era responsable de generar el campo solar \mathbf{B} . La sugestión de Larmor apareció como una idea natural, capaz de explicar en principio el primer campo magnético cósmico (fuera del campo de la tierra). Pocos años después Cowling, precisamente en 1934, presentó evidencia teórica que establecía que un campo \mathbf{B} axial simétrico no podía ser mantenido por el campo \mathbf{u} axial simétrico. Los argumentos de Cowling con esfuerzos de otros científicos dieron lugar a un teorema estándar de la teoría dinamo referido como teorema de Cowling. A continuación exponemos una versión simplificada de tal teorema.

Teorema 3.1 Sean (\mathbf{u}, \mathbf{B}) axialmente simétricos, donde \mathbf{u} es incompresible definido en V una región esférica y $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}|_{\partial V} = 0$. Entonces la única solución estática no singular del problema de valor inicial con condiciones a la frontera descrito por (4.1)-(4.5), nos da como conclusión $\mathbf{B} = 0$.

Demostración:

Sea \mathbf{B} una solución de (4.1)-(4.5), que cumple las condiciones del teorema. En V introducimos las componentes \mathbf{B}^T y \mathbf{B}^P de el campo magnético \mathbf{B} . Tomamos como hipótesis la simetría axial entonces:

$$\mathbf{B}^T = B(t, \rho, z) \mathbf{a}_\varphi, \quad \mathbf{B}^P = \nabla \times (A(t, \rho, z) \mathbf{a}_\varphi) \quad (4.19)$$

en donde $B = B(t, \rho, z)$ y $A = A(t, \rho, z)$ satisfacen en V :

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{1}{\rho} (\mathbf{u}^P \cdot \nabla) \rho A = \eta \left(\nabla^2 - \frac{1}{\rho^2} \right) A \quad (4.20)$$

$$\frac{\partial B}{\partial t} + \rho (\mathbf{u}^P \cdot \nabla) \frac{B}{\rho} = \eta \left(\nabla^2 - \frac{1}{\rho^2} \right) B + \rho \mathbf{B}^P \cdot \nabla (\rho^{-1} \mathbf{u}^P) \quad (4.21)$$

Para la región $R^3 - V$ tenemos:

$$\nabla \times \mathbf{B}^P(t, \rho, z) = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{B}^P(t, \rho, z) = 0 \quad (4.22)$$

$$\nabla \times \mathbf{B}^T(t, \rho, z) = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{B}^T(t, \rho, z) = 0 \quad (4.23)$$

Además de las condiciones:

$$[\mathbf{B}^T]|_{\partial V} = 0, \quad [\mathbf{B}^P]|_{\partial V} = 0 \quad (4.24)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \mathbf{B} = O\left(\frac{1}{r^3}\right) \quad (4.25)$$

Las ecuaciones (4.20) y (4.21) forman un sistema acoplado. Comenzamos primero con la ecuación (4.20) e introducimos la función $\chi(t, \rho, z) = \rho A(t, \rho, z)$, con lo cual obtenemos:

$$\frac{\partial \chi}{\partial t} + (\mathbf{u}^P \cdot \nabla) \chi = \eta D^2 \chi \quad (4.26)$$

donde

$$D^2 \chi = \nabla \cdot \left(\nabla \chi - \frac{2\chi}{\rho} \mathbf{e}_\rho \right) = \nabla \cdot \mathbf{f}$$

con

$$\mathbf{f} = \nabla \chi - \frac{2}{\rho} \chi \mathbf{e}_\rho$$

Para $R^3 - V$, representamos $\mathbf{B}^P = \nabla \times [A(t, \rho, z) \mathbf{e}_\varphi]$, de la primera ecuación de (4.22) tenemos:

$$\nabla \times [\nabla \times (A(t, \rho, z) \mathbf{e}_\varphi)] = 0$$

la cual como hemos visto nos lleva a:

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{\rho^2} \right) A(t, \rho, z) = 0$$

Como antes introducimos la función $\chi(t, \rho, z) = \rho A(t, \rho, z)$, entonces en $R^3 - V$ la función χ satisface:

$$D^2 \chi = 0 \quad (4.27)$$

Por otro lado tenemos las condiciones de frontera que debe satisfacer \mathbf{B}^P , es decir, $[\mathbf{B}^P]|_{\partial V} = 0$, las cuales implican:

$$[\nabla \chi]|_{\partial V} = 0 \quad (4.28)$$

Establecido esto ahora multipliquemos (4.26) por χ e integrando sobre V llegamos:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_V \chi^2 d^3 \mathbf{x} + \frac{1}{2} \int_V (\mathbf{u}^P \cdot \nabla) \chi^2 d^3 \mathbf{x} = \eta \int_V \chi \nabla \cdot \mathbf{f} d^3 \mathbf{x} \quad (4.29)$$

Por el hecho que $\nabla \cdot \mathbf{u}^P = 0$ tenemos:

$$\chi (\mathbf{u}^P \cdot \nabla \chi) = \frac{1}{2} \nabla \cdot (\mathbf{u}^P \chi^2)$$

de esta identidad la ecuación (4.29) toma la forma:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_V \chi^2 d^3 \mathbf{x} + \frac{1}{2} \int_V \nabla \cdot (\mathbf{u}^P \chi^2) d^3 \mathbf{x} = \eta \int_V \chi \nabla \cdot \mathbf{f} d^3 \mathbf{x} \quad (4.30)$$

La integral:

$$\int_V \nabla \cdot (\mathbf{u}^P \chi^2) d^3 \mathbf{x} = \oint_{\partial V} \chi^2 \mathbf{u}^P \cdot d\mathbf{s} = 0 \quad (4.31)$$

debido a que $u^P \cdot n|_{\partial V} = 0$. Por otro lado la integral de parte derecha de (4.29) se transforma:

$$\begin{aligned} \int_V \chi \nabla \cdot f \, d^3x &= \int_V \nabla \cdot (f \chi) \, d^3x - \int_V f \cdot \nabla \chi \, d^3x \\ &= \oint_{\partial V} \chi f \cdot ds - \int_V f \cdot \nabla \chi \, d^3x \end{aligned}$$

entonces (4.29) toma la forma

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_V \chi^2 d^3x = \eta \oint_{\partial V} \chi f \cdot ds - \eta \int_V f \cdot \nabla \chi \, d^3x \quad (4.32)$$

Regresamos ahora a la ecuación (4.28) que satisface B^P para $R^3 - V$. Multipliquemos (4.27) por χ e integremos sobre $R^3 - V$:

$$\int_{R^3 - V} \chi \nabla \cdot f \, d^3x = 0$$

de la cual se sigue:

$$\int_{R^3 - V} \nabla \cdot (\chi f) \, d^3x - \int_{R^3 - V} f \cdot \nabla \chi \, d^3x = 0 \quad (4.33)$$

Para la primera integral a través del teorema de la divergencia obtenamos:

$$\int_{R^3 - V} \nabla \cdot (\chi f) \, d^3x = - \oint_{\partial V} \chi f \cdot ds + \oint_{\partial(R^3)} \chi f \cdot ds$$

así que (4.33) toma la forma:

$$\oint_{\partial V} \chi f \cdot ds = \oint_{\partial(R^3)} \chi f \cdot ds - \int_{R^3 - V} f \cdot \nabla \chi \, d^3x \quad (4.34)$$

substituyendo esta relación en (4.32) llegamos a:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_V \chi^2 d^3x &= \eta \oint_{\partial(R^3)} \chi f \cdot ds - \eta \int_{R^3 - V} f \cdot \nabla \chi \, d^3x - \eta \int_V f \cdot \nabla \chi \, d^3x \\ &= \eta \oint_{\partial(R^3)} \chi f \cdot ds - \eta \int_{R^3} f \cdot \nabla \chi \, d^3x \end{aligned} \quad (4.35)$$

Como una de las hipótesis tenemos $\lim_{r \rightarrow \infty} B = O\left(\frac{1}{r^3}\right)$ la cual implica:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \chi = O\left(\frac{1}{r}\right)$$

entonces para la integral:

$$\begin{aligned} \eta \oint_{\partial(R^3)} \chi f \cdot ds &= \oint_{\partial(R^3)} \chi \nabla \chi \cdot a_r \, ds - 2 \oint_{\partial(R^3)} \frac{\chi^2}{\rho} a_\rho \cdot a_r \, ds \\ &= \frac{1}{2} \oint_{\partial(R^3)} \frac{\partial \chi^2}{\partial r} \, ds - 2 \oint_{\partial(R^3)} \frac{\chi^2}{r} \, ds \end{aligned} \quad (4.36)$$

estas integrales cuando $r \rightarrow \infty$ son nula cada una. Para la segunda integral de la ecuación (4.35), primero consideramos las siguientes identidades:

$$f \cdot \nabla \chi = \left[\nabla \chi - \frac{2}{\rho} \chi \mathbf{e}_\rho \right] \cdot \nabla \chi = \nabla \chi \cdot \nabla \chi - \frac{2}{\rho} \chi \mathbf{e}_\rho \cdot \nabla \chi$$

y

$$\frac{\chi}{\rho} \mathbf{e}_\rho \cdot \nabla \chi = \frac{1}{2} \nabla \cdot \left(\frac{\chi^2 \mathbf{e}_\rho}{\rho} \right) - \frac{\chi^2}{2} \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{e}_\rho}{\rho} \right) = \frac{1}{2} \nabla \cdot \left(\frac{\chi^2 \mathbf{e}_\rho}{\rho} \right)$$

las cuales implican:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} f \cdot \nabla \chi d^3 \mathbf{x} &= \int_{\mathbb{R}^3} \nabla \chi \cdot \nabla \chi d^3 \mathbf{x} - 2 \int_{\mathbb{R}^3} \nabla \cdot \left(\frac{\chi^2 \mathbf{e}_\rho}{\rho} \right) d^3 \mathbf{x} \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} \nabla \chi \cdot \nabla \chi d^3 \mathbf{x} - 2 \oint_{\partial(\mathbb{R}^3)} \frac{\chi^2}{\rho} \mathbf{e}_\rho \cdot \mathbf{e}_r ds \end{aligned}$$

para la última integral de esta ecuación tenemos que cuando $r \rightarrow \infty$ esta es nula. Por tanto (4.35) se modifica de la siguiente manera:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^3} \chi^2 d^3 \mathbf{x} + \eta \int_{\mathbb{R}^3} \nabla \chi \cdot \nabla \chi d^3 \mathbf{x} = 0 \quad (4.37)$$

pero recordamos que nos interesan soluciones estáticas, por lo cual:

$$\int_{\mathbb{R}^3} \nabla \chi \cdot \nabla \chi d^3 \mathbf{x} = 0 \quad (4.38)$$

de lo que podemos concluir

$$\nabla \chi = 0$$

y entonces $\chi = \text{cte}$. Para tal χ tenemos:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}^P &= \nabla \times (A(\rho, z) \mathbf{e}_\varphi) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho A)}{\partial \rho} \mathbf{e}_z - \frac{\partial A}{\partial z} \mathbf{e}_\rho \\ &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho A)}{\partial \rho} \mathbf{e}_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho A)}{\partial z} \mathbf{e}_\rho \\ &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial \chi}{\partial \rho} \mathbf{e}_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \chi}{\partial z} \mathbf{e}_\rho = 0 \end{aligned} \quad (4.39)$$

Esta conclusión implica que para estados estáticos que satisfagan (4.1, 4.5) y las hipótesis del teorema tenemos necesariamente $\mathbf{B}^P \equiv 0$ en \mathbb{R}^3 . Pero como consecuencia de esta conclusión la ecuación (4.21) implica que el campo toroidal \mathbf{B}^T no tendrá una fuente que lo mantenga y entonces quedará a merced de la difusión ohmica. Por lo cual esperamos que también \mathbf{B}^T sea idénticamente cero, tal afirmación la veremos en seguida.

Empezamos con la ecuación (4.21) a la que esta sujeto el campo \mathbf{B}^T en V y al hecho que $\mathbf{B}^T = 0$, tenemos:

$$\frac{\partial B}{\partial t} + \rho(\mathbf{u}^T \cdot \nabla)\left(\frac{B}{\rho}\right) = \eta \left(\nabla^2 - \frac{1}{\rho^2} \right) B \quad (4.40)$$

Para el exterior de V como hemos mencionado \mathbf{B}^T satisface (4.23), de lo cual obtenemos:

$$\mathbf{B}^T(\rho, z) = \nabla \phi(\rho, z) = \frac{\partial}{\partial \rho} \phi(\rho, z) \mathbf{e}_\rho = 0 \quad (4.41)$$

es decir, el campo toroidal es necesariamente cero en v . Recordemos también que $[\mathbf{B}^T]|_{\partial V} = 0$, entonces

$$\mathbf{B}_{int}^T|_{\partial V} = 0 \quad (4.42)$$

Regresemos a la ecuación (4.40) y multipliquemosla por el factor $\frac{B}{\rho^2}$, llegando así a:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{B}{\rho} \right)^2 + \frac{B}{\rho} (\mathbf{u}^T \cdot \nabla) \frac{B}{\rho} = \eta \frac{B}{\rho^2} \left(\nabla^2 - \frac{1}{\rho^2} \right) B \quad (4.43)$$

Tomando en cuenta las siguientes identidades:

$$\begin{aligned} \frac{B}{\rho} (\mathbf{u}^T \cdot \nabla) \frac{B}{\rho} &= \frac{1}{2} (\mathbf{u}^T \cdot \nabla) \left(\frac{B}{\rho} \right)^2 = \frac{1}{2} \left\{ \nabla \cdot \left[\mathbf{u}^T \left(\frac{B}{\rho} \right)^2 \right] - \left(\frac{B}{\rho} \right)^2 \nabla \cdot \mathbf{u}^T \right\} \\ &= \frac{1}{2} \nabla \cdot \left[\mathbf{u}^T \left(\frac{B}{\rho} \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (4.44)$$

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{\rho^2} \right) B = \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \left[\rho^2 \nabla \left(\frac{B}{\rho} \right) \right] \quad (4.45)$$

Utilizando estas identidades reescribimos la ecuación (4.43) de la forma:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{B}{\rho} \right)^2 + \frac{1}{2} \nabla \cdot \left[\mathbf{u}^T \left(\frac{B}{\rho} \right)^2 \right] = \eta \frac{B}{\rho^2} \nabla \cdot \left(\rho^2 \nabla \left(\frac{B}{\rho} \right) \right) \quad (4.46)$$

e integramos tal ecuación en V :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_V \left(\frac{B}{\rho} \right)^2 d^3\mathbf{x} + \frac{1}{2} \int_V \nabla \cdot \left(\mathbf{u}^T \left(\frac{B}{\rho} \right)^2 \right) d^3\mathbf{x} = \eta \int_V \frac{B}{\rho^2} \nabla \cdot \left(\rho^2 \nabla \left(\frac{B}{\rho} \right) \right) d^3\mathbf{x} \quad (4.47)$$

para la segunda integral de lado izquierdo tenemos:

$$\int_V \nabla \cdot \left(\mathbf{u}^T \left(\frac{B}{\rho} \right)^2 \right) d^3\mathbf{x} = \oint_{\partial V} \left(\frac{B}{\rho} \right)^2 \mathbf{u}^T \cdot \mathbf{e}_r ds \equiv I_4$$

bajo la hipótesis que $u^P \cdot n|_{\partial V} = 0$, implica $f_4 = 0$. Para estimar la integral de lado derecho de la ecuación (4.47), procedamos de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} & \int_V \frac{B}{\rho^3} \nabla \cdot \left(\rho^2 \nabla \left(\frac{B}{\rho} \right) \right) d^3x \\ &= \int_V \nabla \cdot \left[\frac{B}{\rho^3} \rho^2 \nabla \left(\frac{B}{\rho} \right) \right] d^3x - \int_V \rho^2 \nabla \left(\frac{B}{\rho^3} \right) \cdot \nabla \left(\frac{B}{\rho} \right) d^3x \end{aligned} \quad (4.48)$$

Consideramos de esta ecuación la primera integral de lado derecho:

$$\int_V \nabla \cdot \left[\frac{B}{\rho} \nabla \left(\frac{B}{\rho} \right) \right] d^3x = \oint_{\partial V} \frac{B}{\rho^2} \nabla \left(\frac{B}{\rho} \right) \cdot \mathbf{a}_\rho d\mathbf{s} = \oint_{\partial V} \left[\frac{B^2}{\rho^2} \nabla \left(\frac{1}{\rho} \right) + \frac{B \nabla B}{\rho^3} \right] \cdot \mathbf{a}_\rho d\mathbf{s}$$

Partiendo de la condición (4.42) tenemos la implicación:

$$B(\rho, z)|_{\partial V} = 0$$

por tanto la integral anterior es nula. Ahora consideramos la segunda integral de (4.48) y apelamos a las siguientes identidades:

$$\nabla \left(\frac{B}{\rho^3} \right) = \nabla \left(\frac{B}{\rho} \frac{1}{\rho^2} \right) = \frac{1}{\rho^2} \nabla \left(\frac{B}{\rho} \right) + \frac{B}{\rho} \nabla \left(\frac{1}{\rho^2} \right) = \frac{1}{\rho^2} \nabla \left(\frac{B}{\rho} \right) - \frac{2B}{\rho^3} \mathbf{a}_\rho \quad (4.49)$$

$$\begin{aligned} \rho^2 \nabla \left(\frac{B}{\rho^3} \right) \cdot \nabla \left(\frac{B}{\rho} \right) &= \nabla \left(\frac{B}{\rho} \right) \cdot \nabla \left(\frac{B}{\rho} \right) - \frac{2B}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{B}{\rho} \right) \\ &= \nabla \left(\frac{B}{\rho} \right) \cdot \nabla \left(\frac{B}{\rho} \right) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{B}{\rho} \right)^2 \end{aligned} \quad (4.50)$$

entonces

$$\int_V \rho^2 \nabla \left(\frac{B}{\rho^3} \right) \cdot \nabla \left(\frac{B}{\rho} \right) d^3x = \int_V \nabla \left(\frac{B}{\rho} \right) \cdot \nabla \left(\frac{B}{\rho} \right) d^3x - \int_V \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{B}{\rho} \right)^2 d^3x \quad (4.51)$$

El último término es ceto, lo cual podemos ver a través de:

$$\begin{aligned} \int_V \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{B}{\rho} \right)^2 \rho d\rho dz d\varphi &= \int_V \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{B}{\rho} \right)^2 d\rho dz d\varphi \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} \left(\frac{B}{\rho} \right)^2 \Big|_0^{\infty} dz d\varphi \end{aligned}$$

Entonces (4.47) es expresada:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_V \left(\frac{B}{\rho} \right)^2 d^3x = -\eta \int_V \nabla \left(\frac{B}{\rho} \right) \cdot \nabla \left(\frac{B}{\rho} \right) d^3x \quad (4.52)$$

pero recordamos que nos interesan soluciones estáticas, lo que implica:

$$\eta \int_V \nabla \left(\frac{B}{\rho} \right) \cdot \nabla \left(\frac{B}{\rho} \right) d^3x = 0 \quad (4.53)$$

entonces podemos concluir

$$\nabla \left(\frac{B}{\rho} \right) = 0$$

de lo cual se sigue $\frac{B}{\rho} = \text{cte}$, por el hecho que debemos satisfacer $B|_{\partial V} = 0$ entonces la constante debe ser cero, por tanto $B = B(\rho, z) = 0$ en V . Por tanto $\mathbf{B}^T = 0$ en R^3 .

El teorema de Cowling es importante en la teoría del dinamo ya que este posee implicaciones fuertes sobre los posibles mecanismos que son responsables para el magnetismo cósmico. La afirmación que prueba este teorema es que un campo de velocidad \mathbf{u} axial simétrico no puede actuar como dinamo para \mathbf{B} axial simétrico. En seguida discutiremos otro teorema antidinamo, el cual también elimina un gran número de campos de velocidad que no actúan como dinamo. El contraste que posee el nuevo teorema respecto al teorema de Cowling, es el hecho que no imponemos simetría axial sobre el campo \mathbf{B} , pero imponemos restricciones fuertes sobre el campo de velocidad \mathbf{u} .

Teorema 3.2 Sea \mathbf{u} un campo incompresible axial simétrico y toroidal definido en una región esférica V , tal que $\mathbf{u}|_{\partial V} = 0$. Entonces la única solución estática del problema de valor inicial con condiciones a la frontera al que se encuentra sujeto \mathbf{B} , dará como conclusión $\mathbf{B} = 0$.

Demostración:

Para la demostración de este teorema comenzamos con las ecuaciones básicas definidas en V :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) + \eta \nabla^2 \mathbf{B} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \end{aligned}$$

Consideremos la siguiente identidad acoplada con $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$:

$$\nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) = \mathbf{u}(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{u}) + (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{B} = (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{B}$$

la cual implica que la ecuación de inducción toma la siguiente forma:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{B} = (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{u} + \eta \nabla^2 \mathbf{B}$$

la que es equivalente a

$$\frac{D\mathbf{B}}{dt} = (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{u} + \eta \nabla^2 \mathbf{B} \quad (4.54)$$

en donde

$$\frac{D\mathbf{B}}{dt} = \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{B} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{B}$$

Al respecto de un sistema de referencia cuyo origen es el centrado en V , considerando el vector de posición \mathbf{r} y estudiamos el escalar $\mathbf{r} \cdot \mathbf{B}$.

$$\begin{aligned} \frac{D}{dt}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{B}) &= \left(\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{B}) + u^i \frac{\partial}{\partial x^i}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{B}) \right) \\ &= \mathbf{r} \cdot \frac{D\mathbf{B}}{dt} + \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} + u^i \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^i} \right) \cdot \mathbf{B} \\ &= \mathbf{r} \cdot \frac{D\mathbf{B}}{dt} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{B} \end{aligned}$$

y utilizando (4.54) obtenamos:

$$\frac{D}{dt}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{r} \cdot [(\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{u} + \eta \nabla^2 \mathbf{B}] + \mathbf{u} \cdot \mathbf{B}$$

Tomando en cuenta la identidad:

$$\mathbf{r} \cdot [(\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{u}] = (\mathbf{B} \cdot \nabla)(\mathbf{u} \cdot \mathbf{r}) - \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}$$

entonces obtenamos

$$\frac{D}{dt}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{B}) = (\mathbf{B} \cdot \nabla)(\mathbf{u} \cdot \mathbf{r}) + \eta \mathbf{r} \cdot (\nabla^2 \mathbf{B}) \quad (4.55)$$

consideremos también

$$\begin{aligned} \mathbf{r} \cdot (\nabla^2 \mathbf{B}) &= -\mathbf{r} \cdot [\nabla \times (\nabla \times \mathbf{B})] = -\nabla \cdot [(\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{r}] + (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot (\nabla \times \mathbf{r}) \\ &= -\nabla \cdot [(\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{r}] = \nabla \cdot [\mathbf{r} \times (\nabla \times \mathbf{B})] \end{aligned}$$

con la cual obtenamos

$$\frac{D}{dt}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{B}) = (\mathbf{B} \cdot \nabla)(\mathbf{u} \cdot \mathbf{r}) + \eta \nabla \cdot [\mathbf{r} \times (\nabla \times \mathbf{B})]$$

tomando en cuenta otra identidad

$$\nabla(\mathbf{r} \cdot \mathbf{B}) = (\mathbf{r} \cdot \nabla)\mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{r} + \mathbf{r} \times (\nabla \times \mathbf{B})$$

y tomando la $\nabla \cdot$ de la identidad anterior obtenamos

$$\nabla \cdot [\nabla(\mathbf{r} \cdot \mathbf{B})] = \nabla \cdot [\mathbf{r} \times (\nabla \times \mathbf{B})]$$

y finalmente llegamos a

$$\frac{D}{dt}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{B}) = (\mathbf{B} \cdot \nabla)(\mathbf{u} \cdot \mathbf{r}) + \eta \nabla \cdot [\nabla(\mathbf{r} \cdot \mathbf{B})] \quad (4.56)$$

En nuestro caso u es toroidal, lo cual implica $u \cdot r = 0$, entonces la ecuación anterior se modifica:

$$\frac{D}{dt}(r \cdot \mathbf{B}) = \eta \nabla \cdot [\nabla(r \cdot \mathbf{B})] = \eta \nabla^2(r \cdot \mathbf{B}) \quad (4.57)$$

Por otro lado en $R^3 - V$ el campo \mathbf{B} satisface:

$$\nabla \times \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

de lo cual podemos obtener:

$$\nabla^2(r \cdot \mathbf{B}) = \nabla^2 X = 0 \quad (4.58)$$

Tenemos que $X \equiv r \cdot \mathbf{B}$ es suave a través de la superficie de la esfera, es decir, $[r \cdot \mathbf{B}]|_{\partial V} = 0$. Multipliquemos la ecuación (4.57) por X , entonces:

$$X \frac{DX}{dt} = \eta X \nabla^2 X, \quad \mathbf{x} \in V \quad (4.59)$$

e integrando sobre V :

$$\int_V X \frac{DX}{dt} d^3\mathbf{x} = \eta \int_V X \nabla^2 X d^3\mathbf{x} \quad (4.60)$$

Comencemos con la integral de lado izquierdo, y recordamos que por hipótesis $u = u^T$ y satisface $\nabla \cdot u = 0$:

$$\begin{aligned} \int_V X \frac{DX}{dt} d^3\mathbf{x} &= \int_V \left[X \frac{\partial X}{\partial t} + X(u \cdot \nabla)X \right] d^3\mathbf{x} \\ &= \int_V \left[\frac{1}{2} \frac{\partial X^2}{\partial t} + \frac{1}{2} (\nabla \cdot (X^2 u) - X^2 \nabla \cdot u) \right] d^3\mathbf{x} \\ &= \int_V \frac{1}{2} \frac{\partial X^2}{\partial t} d^3\mathbf{x} + \int_V \frac{1}{2} \nabla \cdot (X^2 u) d^3\mathbf{x} = I_0 + I_0 \end{aligned} \quad (4.61)$$

tratemos la integral I_0 :

$$\int_V \frac{1}{2} \nabla \cdot (X^2 u) d^3\mathbf{x} = \oint_{\partial V} X^2 u \cdot \mathbf{n} d\mathbf{s} = 0$$

por hipótesis tenemos $u \cdot \mathbf{n}|_{\partial V} = 0$, por lo cual $I_0 = 0$. Entonces tenemos

$$\int_V X \frac{DX}{dt} d^3\mathbf{x} = \frac{1}{2} \int_V \frac{\partial X^2}{\partial t} d^3\mathbf{x} \quad (4.62)$$

Ahora consideremos la integral de lado derecho de (4.60):

$$\begin{aligned} \eta \int_V X \nabla^2 X d^3\mathbf{x} &= \eta \int_V [\nabla \cdot (X \nabla X) - \nabla X \cdot \nabla X] d^3\mathbf{x} \\ &= \eta \oint_{\partial V} X \nabla X \cdot \mathbf{n} d\mathbf{s} - \eta \int_V \nabla X \cdot \nabla X d^3\mathbf{x} \end{aligned} \quad (4.63)$$

Retornamos la ecuación (4.58). Multipliquemos esta ecuación por la función X e integremosla sobre $R^3 - V$, entonces:

$$\int_{R^3 - V} X \nabla^2 X d^3x = \int_{R^3 - V} \nabla \cdot (X \nabla X) d^3x - \int_{R^3 - V} \nabla X \cdot \nabla X d^3x = 0 \quad (4.64)$$

aplicando el teorema de la divergencia para el primer término, tenemos:

$$\int_{R^3 - V} \nabla \cdot (X \nabla X) d^3x = \oint_{\partial V} X(\nabla X) \cdot ds + \oint_{\partial(R^3)} X(\nabla X) \cdot ds$$

de lo que se sigue que la ecuación (4.64) toma la forma:

$$\oint_{\partial V} X(\nabla X) \cdot ds + \oint_{\partial(R^3)} X(\nabla X) \cdot ds - \int_{R^3 - V} \nabla X \cdot \nabla X d^3x = 0$$

entonces tenemos que (4.63) toma la forma:

$$\int_V \eta X \nabla^2 X d^3x = \eta \int_{R^3} \nabla X \cdot \nabla X d^3x - \eta \oint_{\partial(R^3)} X(\nabla X) \cdot ds$$

la última integral es nula cuando $r \rightarrow \infty$. Entonces la integral de lado derecho de (4.60) es:

$$\int_V \eta X \nabla^2 X d^3x = \eta \int_{R^3} \nabla X \cdot \nabla X d^3x \quad (4.65)$$

con lo cual finalmente llegamos a que (4.60) se reescribe como:

$$\frac{1}{2} \int_V \frac{\partial X^2}{\partial t} d^3x - \eta \int_{R^3} \nabla X \cdot \nabla X d^3x = 0 \quad (4.66)$$

recordamos que nos interesan soluciones estáticas, entonces:

$$\eta \int_{R^3} \nabla X \cdot \nabla X d^3x = 0 \quad (4.67)$$

de lo cual podemos concluir $\nabla X = 0$, que implica $X = \text{cte}$. Evaluando $X = r \cdot \mathbf{B}$ en $r \rightarrow \infty$ se sigue que $X = 0$ en R^3 . Recordamos ahora la representación estándar:

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}^P + \mathbf{B}^T = \nabla \times \mathbf{A}^T + \nabla \times \mathbf{A}^P \quad (4.68)$$

$$= -\nabla \times [r \times \nabla P] + \nabla \times [r T] \quad (4.69)$$

donde P y T son funciones suaves. Por otro lado tenemos que las funciones P y T satisfacen:

$$LP = -r \cdot \mathbf{B}, \quad LT = -r \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) \quad (4.70)$$

donde L es el operador laplaciano en una esfera unitaria. Entonces haciendo uso de estas propiedades y tomando en cuenta que hemos obtenido $X \equiv r \cdot \mathbf{B} = 0$ en R^3 , llegamos a la implicación que el escalar P satisface:

$$LP = \frac{1}{\sinh \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sinh \theta \frac{\partial P}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sinh^2 \theta} \frac{\partial P}{\partial \varphi^2} = 0$$

Esta ecuación implica $P=0$ en R^3 , por tanto $\mathbf{B}^T = 0$ en R^3 .

Por otro parte $\mathbf{B}^T = \nabla \times (rT)$ es también cero en R^3 . Para ver esto retomamos las ecuaciones (2.51,2.52) obtenidas en la sección (2.3) y para demostración que sigue solo necesitamos la ecuación:

$$r \cdot r \frac{\partial T}{\partial t} + r \cdot r (u \cdot \nabla T) - u \cdot \left[\nabla \left(\frac{\partial(rP)}{\partial r} \right) \times r \right] - \eta(r \cdot r) \nabla^2 T = 0 \quad (4.71)$$

Recordando que hemos obtenido $P=0$ en R^3 , entonces la ecuación anterior se reduce a:

$$\eta \nabla^2 T - \nabla T \cdot u = 0 \quad (4.72)$$

y por otro lado T en $R^3 - V$ satisface:

$$LT = -r \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) = 0 \quad (4.73)$$

como consecuencia de $\nabla \times \mathbf{B} = 0$ en $R^3 - V$. Entonces la función T satisface $LT = 0$ en $R^3 - V$. Pero la única solución regular de esta ecuación tiene $T = cte$ en $R^3 - V$ y imponiendo $\lim_{r \rightarrow \infty} \mathbf{B}^T = 0$, entonces necesariamente $T=0$ en $R^3 - V$. De las condiciones de frontera a las que esta sujeto \mathbf{B}^T , tenemos entonces:

$$T_{,nd}|_{\partial V} = 0$$

Multiplicando (4.72) con T e integrando en V , se sigue que $T=0$ en V , por tanto $\mathbf{B}^T = 0$ en V , por tanto $\mathbf{B}^T = 0$ en R^3 .

4.3. Implicaciones del teorema de Cowling sobre magnetismo cósmico.

Los teoremas antidinamos expuestos nos llevan a descartar un número de campos $u \in \chi(\bar{V})$ las cuales para una (V, B_0, η) especificada no actúan como dinamo. Tal conclusión tiene consecuencias sobre los posibles mecanismos que son responsables del mantenimiento de los campos cósmicos. Pero antes de discutir las implicaciones de estos teoremas antidinamo, una pregunta natural es si existen $u \in \chi(\bar{V})$ que actúan como dinamo. La respuesta a esta pregunta es que sí. Históricamente poco años después de la publicación de Cowling, Hartenber [7] propuso un modelo teórico del dinamo. Su modelo consistía en n -esferas S_α , centradas en $x_\alpha, \alpha = 1, \dots, n$, tal que cada una de ellas posea en su interior un fluido conductor con un campo de velocidad $u_\alpha \equiv \omega_\alpha \times (x - x_\alpha)$ con ω_α constante. Afuera de cada esfera había un fluido conductor que posea $u = 0$, con la misma conductividad eléctrica σ que en su interior. Del estudio de este modelo se tuvieron como conclusiones que tal u era capaz de mantener un campo magnético \mathbf{B} estático no singular, tal que en el límite $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{B} = O\left(\frac{1}{t}\right)$. Tal campo es mantenido a través de la inducción

magnética debida al movimiento del fluido conductor que se encuentra en el interior de cada esfera. Otros modelos de dinamo son discutido en la referencia [8]. Aunque el modelo del Hartenbar y los modelos discutidos en [8] prueban que la acción dinamo es posible, en realidad no son adecuados para resolver la pregunta asociada al mantenimiento de los campos magnéticos cósmicos, debido a las estructuras especiales de los campos u .

Como ya hemos mencionado la simetría axial es una simetría común en objetos cósmicos. Por ejemplo la Tierra en una buena aproximación la podemos representarla como una región esférica V , que se encuentra rotando a través de un eje. También el Sol y la mayoría de las estrellas, excepto objetos compactos pueden modelarse de la misma manera. Históricamente el primer intento para explicar magnetismo cósmico fue el análisis de campos B axial simétricos generados por un fluido conductor axial simétrico. Pero como hemos visto tales modelos como consecuencia del teorema de Cowling, no son viables. Tales configuraciones no podrían mantener un campo B para $t \gg \tau_{\text{ohm}}$. Por otro lado observaciones de campos cósmicos sugieren que acción dinamo es indispensable. Consideremos por ejemplo el caso de la Tierra. Como hemos mencionado en la introducción estudios sismológicos sugieren que la Tierra sea modelada como un cascarón esférico, cuyo grosor es del orden de $0.2 < R < 0.6 R_T$, el cual contiene un fluido conductor. Tomando la conducción de tal fluido con el valor: $\sigma = (10^{-25} - 10^{-26}) \text{seg}^{-1}$, se sigue que $\tau_{\text{ohm}} \approx 10^4 \text{años}$. Entonces en el caso particular de la Tierra se tiene una estimación de $\tau_{\text{ohm}} \approx 10^4 \text{años}$ que es mucho menor que el tiempo que tiene el campo magnético de la Tierra, el cual es $T \approx 10^9 \text{años}$. Estas estimaciones sugieren que B^T debe ser mantenido por algún mecanismo. La misma conclusión es también válida para el sol. Como hemos visto en la sección introductoria el campo solar exhibe una estructura compleja y una variabilidad en el tiempo. Tal propiedad no es compatible con la hipótesis fósil. Según tal hipótesis el campo solar es debido a la compresión del campo magnético galáctico $B_G \approx 10^{-5} - 10^{-6} G$, durante la contracción gravitacional de la nube interestelar. Bajo la suposición que durante la contracción B es congelado tenemos en fluido conductor obtenemos:

$$B_* = B_G \left(\frac{\rho_*}{\rho_G} \right)^{2/3} \approx (10^4 - 10^5) G$$

en donde tomamos la densidad promedio del sol $\rho_* \approx 1 \text{ gr/cm}^3$ y la densidad galáctica $\rho_G \approx 10^{-24} \text{ gr/cm}^3$. Aunque $|B_*|$ final es mucho más grande que el valor observado $|B^T|$, sin embargo es el mismo orden de magnitud para la mayoría de las estrellas A_F y otras estrellas en la secuencia principal. El problema con la hipótesis fósil es que no es compatible con la variabilidad en el tiempo que a sido observada en el sol y estrellas A_F [8]. Como en el caso de la Tierra, la actitud de la comunidad científica es que el campo solar es manteniendo a través acción dinamo.

Después de las evidencias teóricas presentadas por Cowling, los esfuerzos de la comunidad científica se enfocaron en el estudio de modelos dinamo sin simetría axial para explicar los campos solar y terrestre. Pero como hemos visto en la sección (3.1) la ecuación de

inducción se vuelve complicada y tales intentos no llegaron a una resolución satisfactoria sobre el campo solar ni de la Tierra. Sin embargo gradualmente se han realizado que pequeñas fluctuaciones alrededor del un estado axial simétrico puedan superar al teorema de Cowling. Recordemos que en la sección (2.3), hemos visto la derivación de las ecuaciones que satisfacen el parte axial simétrico (u', B') y no axial simétrico (\bar{u}, \bar{B}) de una campo arbitrario (u, B). Como hemos notado brevemente la componente \bar{u} estaba acoplada con B' , actuando como una fuente para \bar{B} . Por otro lado \bar{B} estaba acoplado con \bar{u} , y tal combinación estaba actuando como fuente para B' . Tal acoplamiento es la base de la teoría moderna del dinamo. El origen de la componente \bar{u} está asociado con el estado turbulento de fluido conductor. Entre los años de 1965 y 1970 fue propuesta y desarrollada una teoría referida como *Mean Field Electrodynamics* [11] la cual toma en cuenta el estado turbulento del fluido conductor y el impacto que tiene este sobre el campo magnético generado. Brevemente tenemos que \bar{u} genera una fuerza electromotriz adicional, la cual tiene como impacto modificar la forma de la ecuación de inducción. Tal modificación tiene como consecuencia que estados axial simétricos puedan mantenerse contra la disipación Ohmica en conclusión que supera al teorema de Cowling. La teoría del dinamo turbulento ofrece la herramienta para explicar el fenómeno de campos magnéticos cósmicos. Desafortunadamente en esta tesis no entramos a la descripción de tal teoría.

Finalmente queremos concluir esta sección haciendo un comentario al respecto de la teoría del dinamo (laminar o turbulento). Como hemos mencionado en las secciones anteriores, el mecanismo del dinamo, primeramente necesita la especificación de un campo magnético inicial, el cual puede ser amplificado o mantenido en el tiempo. En el capítulo 3, también hemos asumido un campo magnético inicial como dado, pero no dimos interpretación alguna de su origen. Actualmente se tiene que el origen de tal campo inicial es un problema abierto. Según de las observaciones, la Vía Láctea posee un campo magnético, y la teoría que explica el mantenimiento de tal campo es la teoría del dinamo. Pero como hemos enfatizado la teoría del dinamo necesita un campo inicial, B_0 el cual hasta ahora lo hemos asumido como dado. Pero en fin un entendimiento del fenómeno del magnetismo cósmico debería también explicar el origen de tal B_0 . Al respecto de su origen actualmente hay dos puntos de vista:

1) El campo B_0 tiene su origen en procesos dentro de la misma galaxia.

2) El campo B_0 es primordial, es decir, es debido al proceso que toma lugar en el universo temprano.

Pero aún no se ha dicho la última palabra al respecto.

Conclusiones:

En esta tesis hemos comenzado con una exposición de hechos observacionales que exhiben que el universo presenta una gran actividad magnética. En el desarrollo de esta tesis hemos estudiado aspectos de campos magnéticos generados por fluidos conductores con la finalidad de entender el fenómeno del mantenimiento de campos cósmicos. Hemos discutido la teoría dinamo y establecido la prueba de dos teoremas antidinamo. Aunque tales teoremas son ya conocidos, sin embargo la derivación presentada es nuestra. Adicionalmente para nuestra sorpresa hemos llegado a un problema interesante en la teoría del dinamo clásica. Como hemos mencionado en las secciones (3.2) el fenómeno de expulsión del campo poloidal por el flujo del fluido conductor, tiene lugar en el límite $R_m \rightarrow \infty$, y tal fenómeno debe ser analizado con más detalle. Las preguntas concernientes a tal fenómeno las tenemos bajo investigación y esperamos obtener respuestas en el futuro. En conclusión a lo largo de este trabajo hemos visto que aunque actualmente se cuenta con un marco teórico para entender magnetismo cósmico, a través del dinamo turbulento, todavía hay aspectos en el fenómeno del magnetismo cósmico que no están resueltos. Como hemos indicado al comienzo de esta tesis el tratamiento que se ha hecho fue no relativístico. Una pregunta relevante es el impacto de la curvatura del espacio-tiempo sobre el fenómeno del magnetismo cósmico. Así que como una continuación de este trabajo sería averiguar ¿Cómo formulamos la teoría del dinamo en un espacio-tiempo curvado? ¿Cómo se modifican los teoremas antidinamo en este caso?.

Bibliografía

- [1] L. D. Landau y E. M. Lifshitz, *Electrodynamics of Continuous Media*, Volumen 8, Curso de Física Teórica, Pergamon Press, Oxford, 1984.
- [2] H. K. Moffatt, *Magnetic Fields Generation in Electrically Conducting Fluids*, Cambridge University Press, England, 1978.
- [3] J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics* Wiley, New York, 1975.
- [4] R. M. Wald, *General Relativity*, The University of Chicago Press, 1984.
- [5] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Fluid Mechanics*, Butterworth Heinemann, Volumen 6, Curso de Física Teórica, 2003.
- [6] K. H. Rödler, H. Fuchs, U. Geppert, M. Rheinhardt y T. Zannias *General relativistic free decay of magnetic field in a spherically symmetric body*, Phys. Rev, Volumen 64, 2001.
- [7] N. Montalongo y T. Zannias, *Dinamo de Herzenber*, Reporte-2005 (No publicado).
- [8] Ya. B. Zeldovich, A. A. Rumiznikin y D. D. Sokoloff, *Magnetic Fields in Astrophysics*, Volumen 3, Gordon and Breach Science Publisher, New York, 19.
- [9] N. N. Lebedev, *Special Functions and their applications*, Dover Publications, New York.
- [10] J. Latmor, *Rep. Brit. Assoc. Adv. Sc.*, 159-160, 1919.
- [11] F. Krauss y K.-H. Rödler, *Mean-Field Magnetohydrodynamics and Dynamo Theory*, Pergamon Press, Oxford, 1980.
- [12] P. H. Roberts y A. M. Soward, *Ann. Rev. Fluid Mech.*, 24, 459-512, 1992.